ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1996 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրատարակել Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝ 1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ:

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածները ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով:

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրատարակվել համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում:

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով:

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում՝ էջի ձախ մասում: 5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը:

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում: 7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը:

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր: Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ. Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»:

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНЫХ ОЦЕНОК СТАЦИОНАРНЫХ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

М. С. Гиновян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 30, № 1, 1995

Пусть $X(u)$, $u \in U$ – вещественнозначный стационарный гауссовский центрированный процесс, обладающий спектральной плотностью $f(\lambda)$. Рассматривается общая проблема непараметрического статистического оценивания спектральных средних $L(f) = \int \varphi(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda$ на основе выборки $\{X(u),\ 0 \le u \le T\}$. В качестве оценки $L(f)$ рассматривается статистика $L_T = \int \varphi(\lambda) I_T(\lambda)\, d\lambda$, где $I_T(\lambda)$ – периодограмма процесса $X(u)$. Для спектральных плотностей из различных функциональных классов нами доказано, что оценка L_T является асимптотически несмещенной, среднеквадратически состоятельной, асимптотически нормальной и асимптотически эффективной оценкой для $L(f)$. Рассматриваются случаи дискретного и непрерывного параметров.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $X(u)$, $u \in U$ – стационарный гауссовский центрированный процесс, обладающий спектральной плотностью (с. п.) $f(\lambda)$ с $f(-\lambda) = f(\lambda)$, т. е.

$$\mathbf{E}X(u) = 0,$$

$$\mathbf{E}X(u)X(v) = r(u-v) = \int e^{i\lambda(u-v)} f(\lambda)\, d\lambda, \quad u, v \in U, \tag{1}$$

где $r(u)$ – ковариационная функция процесса $X(u)$.

Рассматривается одновременно два случая : случай непрерывного параметра (н.п.) и случай дискретного параметра (д.п.). В случае н.п. областью изменения U переменной u является вещественная ось $U = (-\infty, \infty)$, а в случае д.п. – множество целых чисел $U = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. В случае н.п. областью изменения Q переменной λ является $Q = (-\infty, \infty)$, а в случае д.п. – $Q = [-\pi . \pi]$. Все интегралы с опущенными пределами берутся по Q, т. е. по $(-\infty, \infty)$ в случае н.п., и по $[-\pi, \pi]$

– в случае д.п.. В непрерывном случае процесс $X(u)$ предполагается измеримым и среднеквадратично непрерывным.

Рассмотрим так называемое *спектральное среднее* процесса $X(u)$, т. е. линейный функционал $L(f)$ (см. [3], [7], [11], [15], [16] [20]) :

$$L(f) = \int \varphi(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda, \tag{2}$$

где $\varphi(\lambda)$ – надлежащим образом выбранная суммируемая функция, называемая *спектрально-усредняющей* (с.у.) функцией. В дальнейшем будем предполагать, что с.у. функция $\varphi(\lambda)$ – вещественная и четная.

Заметим, что если $\varphi(\lambda)$ – индикатор интервала $[-\infty, \mu]$, (или $[-\pi, \mu]$ в случае д.п.), то $L(f) = F(\mu)$, где $F(\mu)$ – спектральная функция процесса $X(u)$, а если $\varphi(\lambda) = e^{iu\lambda}$, то $L(f) = r(u)$.

Мы будем рассматривать общую проблему непараметрического статистического оценивания $L(f)$ на основе выборки $\{X(u),\ 0 \le u \le T$ (или $u = \overline{1,T}$ в случае д. п.). В качестве оценки $L(f)$ рассмотрим статистику L_T (см. [7], [8], [11], [15], [17], [20]) :

$$L_T = \int \varphi(\lambda) I_T(\lambda)\, d\lambda, \tag{3}$$

где $I_T(\lambda)$ – так называемая *периодограмма* процесса $X(u)$:

$$I_T(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi T}\left|\sum_{u=1}^{T} X(u) e^{-iu\lambda}\right|^2, & \text{в } \textit{случае д.п.} \\ \frac{1}{2\pi T}\left|\int_0^T X(u) e^{-iu\lambda}\, du\right|^2, & \text{в } \textit{случае н.п..} \end{cases} \tag{4}$$

В настоящей статье исследуются асимптотические (при $T \to \infty$) свойства L_T. Для спектральных плотностей из различных функциональных классов последовательно доказывается, что статистика L_T является асимптотически несмещенной, среднеквадратически состоятельной, асимптотически нормальной и асимптотически эффективной оценкой для $L(f)$.

Исследование асимптотического поведения оценки L_T основано на следующем известном представлении кумулянта $\chi_s(L_T)$ порядка s случайной величины L_T (см. [14], [16]) :

$$\chi_s(L_T) = T^{-s}2^{s-1}(s-1)!\,\mathrm{tr}[B_T(f)B_T(\varphi)]^s, \tag{5}$$

где $B_T(f)$ и $B_T(\varphi)$ – усеченные теплицевы операторы (или матрицы в случае д. п.), порожденные функциями $f(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ соответственно.

§1. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НЕСМЕЩЕННОСТЬ

1.1. Напомним, что оценка L_T функционала $L(f)$ называется *асимптотически несмещенной*, если

$$\lim_{T\to\infty}[\mathrm{E}(L_T) - L(f)] = 0. \tag{6}$$

Пусть

$$\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p(Q) = \{f;\quad ||f||_p = \left(\int_Q |f(\lambda)|^p\,d\lambda\right)^{1/p} < \infty\},\qquad 1 \le p < \infty$$

и

$$\mathbf{L}_\infty = \mathbf{L}_\infty(Q) = \{f; ||f||_\infty = \mathrm{esssup}_{\lambda\in Q}|f(\lambda)| < \infty\}.$$

Теорема 1. *Пусть функция*

$$h(t) = \int f(\lambda)\varphi(\lambda+t)\,d\lambda \tag{7}$$

принадлежит $\mathbf{L}_1(Q)$ и непрерывна в точке $t = 0$. Тогда статистика L_T является асимптотически несмещенной оценкой для $L(f)$, т. е. имеет место соотношение (6).

Как следствие этой теоремы, приходим к результату (впервые установленному в [4]), дающему конструктивные достаточные условия для асимптотической несмещенности оценки L_T.

Теорема 2. *Пусть $f(\lambda) \in \mathbf{L}_{p_1}, \varphi(\lambda) \in \mathbf{L}_{p_2}, 1 \le p_1, p_2 \le \infty, 1/p_1 + 1/p_2 \le 1$. Тогда L_T является асимптотически несмещенной оценкой для $L(f)$, т. е. имеет место соотношение (6).*

Обобщением теоремы 1 является

Теорема 3. *Пусть $h(t) \in \mathbf{L}_1(Q)$ и $t = 0$ – точка Лебега функции $h(t)$, т. е.*

$$\int_0^t |h(u) - h(0)|\,du = o(t) \qquad \textit{при} \qquad t \to 0. \tag{8}$$

Тогда L_T является асимптотически несмещенной оценкой для $L(f)$, т. е. имеет место соотношение (6).

При дополнительных условиях гладкости на $f(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ мы можем оценить скорость сходимости в (6) и доказать некоторые свойства асимптотической несмещенности оценки L_T.

Следуя Е. Парзену (см. [18]), назовем оценку L_T для $L(f)$ *асимптотически несмещенной порядка* T^β, $\beta > 0$, если

$$\lim_{T\to\infty} T^\beta[\mathbf{E}(L_T) - L(f)] = 0. \tag{9}$$

Пусть $\mathbf{C} = \mathbf{C}(Q)$ – пространство всех непрерывных на Q функций с нормой $||\psi|| = ||\psi||_\infty = \sup_{t\in Q}|\psi(t)|$. Для функции $\psi \in \mathbf{C}(Q)$ определим ее $\mathbf{C}$-модуль непрерывности как

$$\omega(\psi;\delta) = \sup_{|t|<\delta} ||\psi(\cdot+t) - \psi(\cdot)||, \qquad \delta > 0.$$

Для заданного $0 < \alpha < 1$, введем $\mathbf{C}$-липшицевы классы (см. [5]) :

$$\mathbf{Lip}(\alpha) = \{\psi(\lambda) \in \mathbf{C};\quad \omega(\psi;\delta) = O(\delta^\alpha),\quad \delta \to 0\},$$

$$\mathbf{lip}(\alpha) = \{\psi(\lambda) \in \mathbf{C};\quad \omega(\psi;\delta) = o(\delta^\alpha),\quad \delta \to 0\}.$$

Теорема 4. *При $h(t) \in \mathbf{Lip}(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, статистика L_T является асимптотически несмещенной оценкой порядка T^β для $L(f)$ с $\beta < \alpha$.*

Теорема 5. *При $h(t) \in \mathbf{lip}(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, статистика L_T является асимптотически несмещенной оценкой порядка T^α для $L(f)$.*

Для функции $\psi(\lambda) \in \mathbf{L}_p$ определим $\mathbf{L}_p$-модуль непрерывности как

$$\omega_p(\psi;\delta) = \sup_{|t|<\delta} ||\psi(\cdot+t) - \psi(\cdot)||_p, \qquad \delta > 0.$$

Для заданных чисел $0 < \alpha < 1$, $r \in \mathbf{N}$, $\gamma = r + \alpha$ и $p > 1$, обозначим через $\mathbf{lip}(\alpha;p)$, $\mathbf{B}_p(\gamma)$ и $\mathbf{H}_p(\gamma)$, соответственно, $\mathbf{L}_p$-липшицевы классы, и классы Бесова и Никольского. Эти функциональные классы определяются следующим образом (см. [5], [19]) :

$$\mathbf{lip}(\alpha;p) = \{\psi(\lambda) \in \mathbf{L}_p;\quad \omega_p(\psi;\delta) = o(\delta^\alpha),\quad \delta \to 0\},$$

$$\mathbf{B}_p(\gamma) = \left\{\psi(\lambda) \in \mathbf{L}_p;\ \psi^{(r)}(\lambda) \in L_p,\ \int_0^1 t^{-t\alpha-1}\omega_p^p(\psi^{(r)}, t)\, dt < \infty\right\},$$
$$\mathbf{H}_p(\gamma) = \{\psi(\lambda) \in \mathbf{L}_p, \quad ||\psi^{(r)}(\cdot + h) - \psi^{(r)}(\cdot)||_p \le C|h|^\alpha\}.$$

Здесь и всюду ниже черсз C будем обозначать различные положительные постоянные.

Замечание 1. Известно (см. [19]), что $\mathbf{H}_p(\gamma)$ и $\mathbf{B}_p(\gamma)$ являются нормированными пространствами. Пространство $\mathbf{B}_p(\gamma)$ непрерывно вложено в пространство $\mathbf{H}_p(\gamma)$, т. е. $\mathbf{B}_p(\gamma) \subset \mathbf{H}_p(\gamma)$ как множества, и норма $\mathbf{H}_p(\gamma)$ доминирует над нормой $\mathbf{B}_p(\gamma)$.

Теорема 6. *Пусть выполнено одно из следующих условий :*

c1) *с.п.* $f(\lambda) \in \mathbf{H}_p(\gamma_1)$, $\gamma_1 > 0$, $p \ge 1$, *и с.у.* $\varphi(\lambda) \in \mathbf{H}_q(\gamma_2)$, $\gamma_2 > 0$, $q \ge 1$ *при* $1/p + 1/q = 1$ *;*

c2) *с.п.* $f(\lambda) \in \mathbf{B}_p(\gamma_1)$, $\gamma_1 > 0$, $p \ge 1$, *и с.у.* $\varphi(\lambda) \in \mathbf{B}_q(\gamma_2)$, $\gamma_2 > 0$, $q \ge 1$ *при* $1/p + 1/q = 1$.

Тогда

$$|K_T| \le \begin{cases} CT^{-(\gamma_1+\gamma_2)}, & \text{при } \gamma_1 + \gamma_2 < 1 \\ CT^{-1}\ln T, & \text{при } \gamma_1 + \gamma_2 = 1 \\ CT^{-1}, & \text{при } \gamma_1 + \gamma_2 > 1, \end{cases}$$

где $K_T = \mathbf{E}(L_T) - L(f)$.

Отсюда непосредственно вытекает

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 6 статистика L_T является асимптотически несмещенной оценкой порядка T^α для $L(f)$ с $\alpha < \gamma_1 + \gamma_2$.

Теорема 7. *Если* $f(\lambda) \in \mathrm{lip}(\alpha_1; p)$, $0 < \alpha_1 < 1$, $p \ge 1$, *и* $\varphi(\lambda) \in \mathrm{lip}(\alpha_2; p)$, $0 < \alpha_2 < 1$, $q \ge 1$ *с* $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ *и* $1/p + 1/q = 1$, *то статистика* L_T *является асимптотически несмещенной оценкой порядка* $T^{(\alpha_1+\alpha_2)}$ *для* $L(f)$, *т. е.*

$$K_T = o\left(T^{-(\alpha_1+\alpha_2)}\right), \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

1.2. Предварительные сведения. Для доказательства приведенных выше теорем нам понадобятся некоторые предварительные результаты для сингулярных интегралов Фейера. При $\psi(u) \in L_1(Q)$ *сингулярный интеграл Фейера*, порожденный функцией ψ, определяется формулой

$$\sigma_T(t) = \sigma_T(\psi; t) = \int F_T(t-u)\psi(u)du, \tag{10}$$

где

$$F_T(t) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi T}\left(\dfrac{\sin Tt/2}{t/2}\right)^2, & t \in (-\infty, \infty), \\ \dfrac{1}{2\pi T}\left(\dfrac{\sin Tt/2}{\sin t/2}\right)^2, & t \in [-\pi, \pi] \end{cases} \tag{11}$$

– *ядро Фейера.* Некоторые свойства ядра $F_T(u)$ приводятся в следующей лемме (см., напр., [5], [19]).

Лемма 1. *Определенное по (11) ядро $F_T(u)$ является четным, неотрицательным и обладает следующими свойствами :*

$$а) \quad \int F_T(u)\,du = 1, \tag{12}$$

$$б) \quad \int_{t \geq 1} F_T(t)dt \leq CT^{-1}, \tag{13}$$

$$в) \quad \int_0^1 F_T(t)t^{\alpha}dt \leq \begin{cases} CT^{-\alpha}, & \text{при } \alpha < 1, \\ CT^{-1}\ln T, & \text{при } \alpha = 1, \\ CT^{-1}, & \text{при } \alpha > 1. \end{cases} \tag{14}$$

Лемма 2. *Пусть функция $\psi(u) \in L_1(Q)$ и удовлетворяет одному из следующих условий :*

а) $\psi(u)$ – непрерывна в точке $u = x$;

б) $u = x$ – лебегова точка функции $\psi(u)$.

Тогда

$$\lim_{T\to\infty} \sigma_T(\psi; x) = \psi(x).$$

Доказательство дано, например, в [18].

Лемма 3. *Имеют место следующие утверждения :*

а) если $\psi(u) \in \mathrm{Lip}(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, то

$$\sigma_T(\psi; u) - \psi(u) = O(T^{-\alpha}) \qquad при \qquad T \to \infty;$$

б) если $\psi(u) \in \mathrm{lip}(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, то

$$\sigma_T(\psi; u) - \psi(u) = o(T^{-\alpha}) \qquad при \qquad T \to \infty.$$

Доказательство дано, например, в [5].

1.3. Доказательства. Во-первых, покажем, что

$$\mathrm{E}(L_T) = \int\int F_T(s-t)f(s)\varphi(t)\,dt\,ds. \tag{15}$$

В силу (1) и (5) имеем

$$\mathrm{E}(L_T) = \frac{1}{2\pi T}\int\int |G_T(s-t)|^2 f(s)\varphi(t)\,ds\,dt,$$

где

$$G(s-t) = \begin{cases} \sum_{u=1}^{T} e^{(s-t)u} \\ \int_0^T e^{(s-t)u}\,du. \end{cases}$$

Теперь, принимая во внимание равенство

$$\frac{1}{2\pi T}|G_T(s-t)|^2 = F_T(s-t),$$

придем к (15).

Доказательство теоремы 1. В силу формул (2), (7), (10) и (15)

$$\mathrm{E}(L_T) - L(f) = \int F_T(u)h(u)\,du - h(0) = \sigma_T(h;0) - h(0). \tag{16}$$

По предположению, функция $h(u)$ непрерывна в точке $u = 0$. Тем самым, нужное утверждение следует из леммы 2 а).

Доказательство теоремы 2. В силу неравенства Гельдера, для функции $h(u)$, определенной (7), имеем

$$|h(u+t) - h(t)| \leq ||f(u+t+\cdot) - f(t+\cdot)||_p\,||\varphi(\cdot)||_q.$$

Поэтому $h(u)$ непрерывна и утверждение следует из теоремы 1.

Доказательство теоремы 3. Утверждение теоремы следует из (16) и леммы 2 б).

Доказательство теоремы 4. В силу леммы 3 а) и (16) имеем

$$T^\beta[\mathrm{E}(L_T) - L(f)] = T^\beta[\sigma_T(h;0) - h(0)] = O(T^{(\beta-\alpha)}).$$

Так как $\beta < \alpha$, то последний член стремится к нулю при $T \to \infty$.

Доказательство теоремы 5. Утверждение теоремы следует из (16) и леммы 3 б), поскольку в рассматриваемом случае

$$\mathbf{E}(L_T) - L(f) = \sigma_T(h;0) - h(0) = o(T^{-\alpha}).$$

Доказательство теоремы 6. Учитывая замечание 1, достаточно доказать теорему лишь для пространств $\mathbf{H}_p(\gamma)$. Для определенности рассмотрим случай н.п. (в случае д.п. доказательство аналогично). Поскольку функция $F_T(t)$ четная, то в силу (15) имеем

$$E(L_T) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F_T(t) f(u+t)\varphi(t)du dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F_T(t) f(u) g(u+t) du dt. \tag{17}$$

Следовательно, учитывая (12) и равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\varphi(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u+t)\varphi(u+t)du,$$

с помощью (3) и (17) получим

$$K_T = \mathbf{E}(L_T) - \varphi(f) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} F_T(t)\int_{-\infty}^{+\infty} (f(u)-f(u+t))(\varphi(u+t)-\varphi(u))du dt. \tag{18}$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера, из (18) находим

$$|K_T| \le \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} F_T(t)||f(t+\cdot) - f(\cdot)||_p||\varphi(t+\cdot) - \varphi(\cdot)||_q dt. \tag{19}$$

Сначала рассмотрим случай, когда $\gamma_k < 1$, $k = 1, 2$. В силу (19)

$$|K_T| \le \int_0^1 F_T(t)|t|^{\gamma_1+\gamma_2} dt + 4||f||_p||g||_q \int_{t>1} F_T(t)dt. \tag{20}$$

Поэтому в этом случае утверждение леммы вытекает из (13), (14) и (20).

Перейдем к рассмотрению случая $\gamma_1 = r_1 + \alpha_1 \ge 1$ и $\gamma_1 = r_2 + \alpha_2 \ge 1$. Для этого нам понадобятся следующие известные результаты (см. [5], [19]) :

Лемма 4. *Пусть $\psi(t) \in \mathbf{H}_p(\gamma)$ с $\gamma = r + \alpha$, $r \in N$, $0 < \alpha < 1$. Тогда справедливы следующие утверждения :*

а) $||\psi^{(j)}||_p < C < \infty \qquad j = \overline{1, r}$;

б) функция $\psi(t)$ разлагается в ряд Тейлора

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{r} \frac{\psi^{(k)}(t)}{k!}(t-u)^k + R_1(t,u) \tag{21}$$

с остаточным членом

$$R(t,u) = \frac{1}{(r-1)!}\int_u^t [\psi^{(r)}(t) - \psi^{(r)}(u)](t-u)^{r-1}\,du, \tag{22}$$

удовлетворяющим неравенству

$$||R(\cdot,u)||_p \le C\frac{|u|^{r+\alpha}}{r!}. \tag{23}$$

В силу (13) и (19)

$$|K_T| \le \int_0^1 F_T(t)||f(t+\cdot) - f(\cdot)||_p||\varphi(t+\cdot) - \varphi(\cdot)||_q dt + C\cdot T^{-1}.$$

Поскольку $f(t) \in \mathbf{H}_p(\gamma_1)$ и $\varphi(t) \in \mathbf{H}_q(\gamma_2)$, применяя лемму 4, неравенство Гельдера-Минковского и (14), получим

$$|K_T| \le C\sum_{k=1}^{r_1}\sum_{j=1}^{r_2}\int_0^1 t^{k+j}F_T(t)\,dt + +C\sum_{k=1}^{r_1}\int_0^1 t^{k+r_2+\alpha_2}F_T(t)\,dt$$

$$+C\sum_{j=1}^{r_2}\int_0^1 t^{j+r_1+\alpha_1}F_T(t)\,dt + C\int_0^1 t^{r_1+r_2+\alpha_1+\alpha_2}F_T(t)\,dt + C\cdot T^{-1} = O(T^{-1}).$$

В случаях $\gamma_1 \ge 1, \gamma_2 < 1$ и $\gamma_1 < 1, \gamma_2 \ge 1$ доказательство аналогично. Тем самым, теорема 6 доказана.

Доказательство теоремы 7. При предположениях теоремы $||f(t+\cdot) - f(\cdot)||_p = = |t|^{\alpha_1}\omega_1(t)$ и $||\varphi(t+\cdot) - \varphi(\cdot)||_q = |t|^{\alpha_2}\omega_2(t)$, где

$$\omega_1(t)\downarrow 0 \quad \text{и} \quad \omega_2(t)\downarrow 0 \quad \textit{при} \quad t\to 0. \tag{24}$$

Отсюда, в силу (13) и (19)

$$|K_T| \le \int_0^1 F_T(t)t^{\alpha_1+\alpha_2}\omega_1(t)\omega_2(t)\,dt + C\cdot T^{-1}. \tag{25}$$

Полагая $Tt = x$, из (11) и (25) получим

$$|K_T| \le T^{-(\alpha_1+\alpha_2)}\int_0^T \left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2 x^{\alpha_1+\alpha_2}\omega_1(\frac{x}{T})\omega_2(\frac{x}{T})\,dx + O(T^{-1}). \tag{26}$$

Остается показать, что

$$M_T = \int_0^T \left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2 x^{\alpha_1+\alpha_2}\omega_1(\frac{x}{T})\omega_2(\frac{x}{T})\,dx = o(1) \qquad \textit{при} \qquad T\to\infty. \tag{27}$$

Пусть T_0 такое, что $0 < T_0 < T$ и $T_0/T \to 0$. Тогда

$$M_T = \int_0^{T_0} \left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2 x^{\alpha_1+\alpha_2}\omega_1(\frac{x}{T})\omega_2(\frac{x}{T})\,dx+$$
$$+\int_{T_0}^{T} \left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2 x^{\alpha_1+\alpha_2}\omega_1(\frac{x}{T})\omega_2(\frac{x}{T})\,dx \le$$
$$\le \omega_1(\frac{T_0}{T})\omega_2(\frac{T_0}{T}) \int_0^{T_0} \left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2 x^{\alpha_1+\alpha_2}\,dx + \int_{T_0}^{\infty} \left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2 x^{\alpha_1+\alpha_2}\,dx.$$

Пусть теперь T и T_0 стремятся к ∞. Учитывая (24) и то, что при $0 < \alpha_1+\alpha_2 < 1$ интеграл $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2 x^{\alpha_1+\alpha_2}dx$ сходится, приходим к (27), чем и завершим доказательство теоремы 7.

§2. СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ

2.1. Напомним, что оценка L_T для $L(f)$ называется *среднеквадратически состоятельной*, если

$$\mathbf{E}(L_T - L(f))^2 \to 0, \qquad \text{\textit{при}} \qquad T\to\infty. \tag{28}$$

Пусть $0 < \alpha < 1$ – заданное число, оценку L_T для $L(f)$ назовем *T^α-состоятельной*, если

$$T^\alpha(L_T - L(f)) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{по вероятности.}$$

Сначала исследуем асимптотическое поведение дисперсии $\mathbf{D}(L_T) = \mathbf{E}(L_T - \mathbf{E}(L_T))^2$.

Определение 1. Будем говорить, что пара (f,φ) функций $f(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ удовлетворяет

условию $(\mathcal{L})$, если $f(\lambda) \in L_{p_1}$ и $\varphi(\lambda) \in L_{p_2}$ для некоторых p_1, p_2 таких, что $1 \le p_1, p_2 \le \infty$ и $1/p_1 + 1/p_2 \le 1/2$;

условию $(\mathcal{H})$, если $f(\lambda) \in \mathbf{H}_p(\gamma_1)$ и $\varphi(\lambda) \in \mathbf{H}_q(\gamma_2)$ для некоторых γ_1, $\gamma_2 > 0$ и $p, q \ge 1$ $(1/p + 1/q = 1)$, удовлетворяющих одному из следующих условий а) – г) :

а) $\gamma_1 > 1/p$, $\gamma_2 > 1/q$,

б) $\gamma_1 \le 1/p$, $\gamma_2 \le 1/q$ и $\gamma_1 + \gamma_2 > 1/2$, в) $\gamma_1 > 1/p$, $\quad 1/q - 1/2 < \gamma_2 \le 1/q$,

г) $\gamma_2 > 1/q$, $1/p - 1/2 < \gamma_1 \le 1/p$;

условию $(\mathcal{B})$, если пара (f, φ) удовлетворяет предыдущему условию $(\mathcal{H})$, где вместо $\mathbf{H}$ взято пространство $\mathbf{B}$;

условию (ℓ), если $f(\lambda) \in \mathrm{lip}(\alpha_1; p)$ и $\varphi(\lambda) \in \mathrm{lip}(\alpha; q)$ при некоторых $0 <$ $< a_1$, $\alpha_2 < 1$ и $p, q \ge 1$ $(1/p + 1/q = 1)$, удовлетворяющих одному из следующих условий а') — г') :

а') $\alpha_1 > 1/p$, $\alpha_2 > 1/q$,

б') $\alpha_1 \le 1/p$, $\alpha_2 \le 1/q$ и $\alpha_1 + \alpha_2 \ge 1/2$,

в') $\alpha_1 > 1/p$, $1/q - 1/2 \le \alpha_2 \le 1/q$,

г') $\alpha_2 > 1/q$, $1/p - 1/2 \le \alpha_1 \le 1/p$;

Теорема 8. *Пусть выполнено одно из условий* $(\mathcal{L})$, $(\mathcal{H})$, $(\mathcal{B})$ *или* (ℓ). *Тогда*

$$\lim_{T\to\infty} T\,\mathbf{E}(L_T - \mathbf{E}(L_T))^2 = \int f^2(\lambda) g^2(\lambda)\, d\lambda. \tag{29}$$

Теорема 9. *Справедливы следующие утверждения :*

а) при выполнении любого из условий $(\mathcal{L})$, $(\mathcal{H})$, $(\mathcal{B})$ *или* (ℓ) *статистика* L_T *является среднеквадратически состоятельной оценкой для* $L(f)$, *т. е. имеет место соотношение (28).*

б) при выполнении любого из условий $(\mathcal{H})$, $(\mathcal{B})$ *или* (ℓ) *статистика* L_T *является* T^α*-состоятельной оценкой для* $L(f)$ *с* $\alpha < 1/2$.

2.2. Предварительные сведения. Доказательства теорем 8 и 9, а также исследование асимптотической нормальности и эффективности оценки L_T требует некоторых вспомогательных результатов, относящихся к асимптотическому поведению равномерных норм и следам произведений усеченных теплицевых матриц и операторов. Будет использована также теорема вложения типа Харди–Литтлвуда для классов $\mathbf{H}_p(\gamma)$. В этом пункте приводятся соответствующие результаты.

Для функции $\psi(\lambda) \in L_1(-\pi,\pi)$ введем в рассмотрение усеченную $T \times T$ теплицеву матрицу

$$B_T(\psi) = ||\hat{\psi}_{k-j}||_{k,j=\overline{1,T}}, \tag{30}$$

где $\{\hat{\psi}_k\}$ – последовательность коэффициентов Фурье функции $\psi(\lambda)$.

Будем также пользоваться обозначением $B_T(\psi)$ для усеченного теплицева оператора, порожденного функцией $\psi(\lambda) \in L_1(-\infty,\infty)$ и действующего на функциях $u(\lambda) \in L_2[0,T]$:

$$B_T(\psi)u(\lambda) = \int_0^T \hat{\psi}(\lambda-\mu)u(\mu)d\mu, \tag{31}$$

где $\hat{\psi}(\cdot)$ – преобразование Фурье функции $\psi(\cdot)$.

Лемма 5. *Пусть $\psi(\lambda) \in L_1 \cap L_p$, причем $1 \le p \le \infty$. Тогда при $T \to \infty$*

$$s(T) = ||B_T(\psi)|| = o(T^{1/p}), \tag{32}$$

где $||B_T(\psi)|| = \sup_{||u||_2=1} |(B_T u, u)|$ – равномерная норма оператора $B_T(\psi)$.

Доказательство см. в [7], [8].

Лемма 6. *Пусть $\psi_k(\lambda) \in L_1 \cap L_{p_k}$, где $1 \le p_k \le \infty$ при $k = \overline{1,n}$. Тогда при $\nu = \sum_{k=1}^n (p_k)^{-1} \le 1$ имеет место соотношение*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\, tr \left[\prod_{k=1}^n B_T(\psi_k)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{k=1}^n \psi_k(\lambda)d\lambda. \tag{33}$$

Доказательство см. в [1], [11].

Лемма 7. *Пусть $\psi(\lambda) \in \mathrm{H}_p(\gamma)$, где $\gamma > 0$ и $p \ge 1$. Тогда справедливы следующие утверждения :*

а) если $\gamma \le 1/p$ и $p < p_1 < p/(1-\gamma p)$, то

$$\psi(\lambda) \in \mathrm{H}_{p_1}(\gamma - \frac{1}{p} + \frac{1}{p_1});$$

б) если $\gamma > 1/p$, то функция $\psi(\lambda)$ непрерывна и $||\psi||_\infty < \infty$.

Доказательство см., напр., в [19].

2.3. Доказательства. Доказательство теоремы 8 проведем в несколько этапов.

Этап I. Условие ($\mathcal{L}$) влечет (29). Доказательство следует из (5) и леммы 6. Действительно

$$
\begin{aligned}
T\mathbf{E}(L_T - \mathbf{E}(f))^2 =& \chi_2(\sqrt{T}(L_T - \mathbf{E}(L_T))) = \\
&= \frac{2}{T}\mathrm{tr}[B_T(f)B_T(g)]^2 \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \int f^2(\lambda)g^2(\lambda)\,d\lambda,
\end{aligned}
$$

Этап II. Условие ($\mathcal{H}$) влечет (29). Покажем, что (29) вытекает из леммы 6. Для этого достаточно показать, что при выполнении ($\mathcal{H}$) существуют числа p_1 ($p_1 > p$) и q_1 ($q_1 > q$) такие, что $\mathbf{H}_p(\gamma_1) \subset L_{p_1}$, $\mathbf{H}_q(\gamma_2) \subset L_{q_1}$ и $1/p_1 + 1/q_1 \le 1/2$.

Случай $\gamma_1 > 1/p$, $\gamma_2 > 1/q$ очевиден, поскольку в силу леммы 7 б) имеем $\mathbf{H}_p(\beta_1) \subset L_\infty$ и $\mathbf{H}_q(\gamma_2) \subset L_\infty$.

Пусть $\gamma_1 \le 1/p$, $\gamma_2 \le 1/q$ и $\gamma_1 + \gamma_2 > 1/2$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ такого, что $\gamma_1 > \varepsilon$ и $\gamma_2 > \varepsilon$, положим

$$
\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} - \gamma_1 + \varepsilon,
$$

$$
\frac{1}{q_1} = \frac{1}{q} - \gamma_2 + \varepsilon. \tag{34}
$$

Легко видеть, что $p < p_1 < p/(1-\gamma_1 p)$ и $q < q_1 < q/(1-\gamma_2 q)$. Отсюда в силу леммы 7 а) получим $\mathbf{H}_p(\gamma_1) \subset L_{p_1}$ и $\mathbf{H}_q(\beta_2) \subset L_{q_1}$. С другой стороны, в силу (34)

$$
\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - (\gamma_1 + \gamma_2) + 2\varepsilon = 1 - (\gamma_1 + \gamma_2) + 2\varepsilon.
$$

Поскольку ε произвольно и $\gamma_1 + \gamma_2 > 1/2$, то получим, что $1/p_1 + 1/q_1 \le 1/2$.

Пусть теперь $\gamma_1 > 1/p$ и $1/q - 1/2 < \gamma_2 \le 1/q$. По лемме 7 б) $\mathbf{H}_p(\gamma_1) \subset L_\infty$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ такого, что $\gamma_2 > \varepsilon$, положим

$$
\frac{1}{q_1} = \frac{1}{q} - \gamma_2 + \varepsilon.
$$

Очевидно $q < q_1 < q/(1-\gamma_2 q)$, тем самым, по лемме 7 а) $\mathbf{H}_q(\gamma_2) \subset L_{q_1}$. Далее, имеем

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{q} - \gamma_2 + \varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно и $1/q - \gamma_2 < 1/2$, то $1/p_1 + 1/q_1 \le 1/2$.

В случае, когда $\gamma_2 > 1/q$ и $1/p - 1/2 < \gamma_1 \le 1/p$, доказательство аналогично. Теперь, применяя лемму 6, получаем требуемое утверждение.

Этап III. Условие $(\mathcal{B})$ влечет (29). Доказательство этого утверждения следует из доказательства этапа II и замечания 1.

Этап IV. Условие (ℓ) влечет (29). Доказательство аналогично доказательству этапа II.

Этим доказательство теоремы 8 завершено.

Доказательство теоремы 9. Имеем

$$\mathbf{E}(L_T - L(f))^2 = \mathbf{E}(L_T - \mathbf{E}(L_T))^2 + K_T^2, \tag{35}$$

где, как и прежде, $K_T = L(f) - \mathbf{E}(L_T)$. Заметим, что среднеквадратическая состоятельность L_T при выполнении условия $(\mathcal{L})$ является непосредственным следствием (35) и теорем 2 и 8. Далее, по теореме 8, при выполнении любого из условий $(\mathcal{H})$, $(\mathcal{B})$, или (ℓ)) имеем

$$\mathbf{E}(L_T - \mathbf{E}(L_T))^2 = O(T^{-1}) \qquad \text{при} \qquad T \to \infty. \tag{36}$$

Покажем, что при выполнении любого из условий $(\mathcal{H})$, $(\mathcal{B})$ или (ℓ)

$$|K_T| = o(T^{-1/2}) \qquad \text{при} \qquad T \to \infty. \tag{37}$$

Пусть выполнено $(\mathcal{H})$, (или $(\mathcal{B})$). Тогда легко видеть, что в случаях а) – г) (см. определение 1) имеем $\gamma_1 + \gamma_2 > 1/2$. Тем самым, при выполнении $(\mathcal{H})$ (или $(\mathcal{B})$) соотношение (37) вытекает из следствия 1. В случае выполнения условия

(ℓ) соотношение (37) следует из теоремы 7, поскольку в случаях а'), – г') (см. определение 1) имеем $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 1/2$. Из (35) – (37) получаем

$$T^{2\alpha}\mathrm{E}(L_T - L(f))^2 = O(T^{(2\alpha-1)}) \quad \textit{при} \quad T \to \infty. \tag{38}$$

Теперь среднеквадратическая состоятельность следует из (38), а T^α-состоятельность с $\alpha < 1/2$ – из (38) и неравенства Чебышева.

§3. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ

3.1. Асимптотическая нормальность. Напомним, что оценка L_T для $L(f)$ называется *асимптотически нормальной* с коэффициентом $\sigma^2 \geq 0$, если

$$T^{1/2}(L_T - L(f)) \Longrightarrow N(0, \sigma^2), \qquad \textit{при} \qquad T \to \infty, \tag{37}$$

т. е. распределение нормированной случайной величины $\xi_T = T^{1/2}(L_T - L(f))$ слабо сходится (при $T \to \infty$) к нормальному распределению $N(0, \sigma^2)$ со средним 0 и дисперсией σ^2.

Начнем с центральных предельных теорем (ЦПТ) для L_T. Отметим, что статистику L_T можно рассматривать как квадратичный функционал теплицева типа (квадратичную форму в случае д. п.) от процесса $X(t)$ (см. [11]) :

$$L_T = \begin{cases} \frac{1}{T}\sum_{t,s=0}^{T} \hat{\varphi}(t-s)X(t)X(s), & \text{в случае д. п.,} \\ \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T \hat{\varphi}(t-s)X(t)X(s)\,dt\,ds, & \text{в случае н. п.,} \end{cases}$$

где $\hat{\varphi}(t)$ – преобразование Фурье (в случае д. п. – коэффициенты Фурье) функции $\varphi(\lambda)$.

Теорема 10. *Пусть выполнено какое-либо из условий ($\mathcal{L}$), ($\mathcal{H}$), ($\mathcal{B}$) или (l). Тогда распределение нормированной случайной величины $\xi_T = T^{1/2}(L_T - \mathrm{E}(L_T))$ слабо сходится (при $T \to \infty$) к нормальному распределению $N(0, \sigma^2)$ с*

$$\sigma^2 = \int f^2(\lambda)\varphi^2(\lambda)d\lambda. \tag{38}$$

Доказательство. В силу (5) имеем

$$\chi_s(\bar{L}_T) = \begin{cases} 0, & \text{при } s=1, \\ T^{-s/2}2^{s-1}(s-1)!\,\mathrm{tr}[B_T(f)B_T(\varphi)]^s, & \text{при } s\geq 2. \end{cases} \tag{39}$$

где $\chi_s(\bar{L}_T) = \chi_s(\sqrt{T}(L_T - \mathbf{E}(L_T)))$. По теореме 8

$$\chi_2(\bar{L}_T) = \frac{2}{T}\mathrm{tr}[B_T(f)B_T(\varphi)]^2 \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \int f^2(\lambda)g^2(\lambda)\,d\lambda \ \leq \infty.$$

Тем самым, в силу теоремы И. А. Ибрагимова (см. [8], Дополнение) остается показать, что при выполнении любого из условий $(\mathcal{L})$, $(\mathcal{H})$, $(\mathcal{B})$, или (l)

$$T^{-1/2}\,||B_T(f)\,B_T(\varphi)|| = o(1) \qquad \text{при} \qquad T\to\infty. \tag{40}$$

Покажем это сначала для $(\mathcal{L})$. Пользуясь леммой 5 получим

$$T^{-1/2}||B_T(f)\,B_T(\varphi)|| \leq T^{-1/2}||B_T(f)||\,||B_T(\varphi)|| =$$
$$= T^{-1/2}\,o(T^{1/p_1})\,o(T^{1/p_2}) = o(T^{1/p_1+1/p_2-1/2})$$

Последняя величина при $T\to\infty$ является $o(1)$, поскольку при выполнении $(\mathcal{L})$ имеем $1/p_1 + 1/p_2 \leq 1/2$.

При выполнении условий $(\mathcal{H})$, $(\mathcal{B})$ или (l) доказательство (40) проводится повторением этапов II–IV доказательства теоремы 8. Теорема доказана.

Теорема 11. *При выполнении любого из условий $(\mathcal{H})$, $(\mathcal{B})$ или (ℓ) статистика L_T является асимптотически нормальной оценкой для $L(f)$, где σ^2 определяется (38).*

Доказательство. Имеем

$$T^{1/2}(L_T - L(f)) = T^{1/2}(L_T - \mathbf{E}(L_T)) + T^{1/2}K_T, \tag{41}$$

где как и прежде $K_T = L(f) - \mathbf{E}(L_T)$. По теореме 10, при выполнении любого из условий $(\mathcal{H})$, $(\mathcal{B})$ или (ℓ) при $T\to\infty$ первое слагаемое правой части (41) слабо сходится к $N(0,\sigma^2)$, где σ^2 такое, как в (38), второе же слагаемое стремится к нулю в силу (37).

3.2. Асимптотическая эффективность. Обозначим через $\mathbf{W}$ множество всех симметрических, неубывающих на положительной полуоси функций потерь w : $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ таких, что $w(0)=0$ и $w(x)\leq C_1\exp\{C_2|x|\}$ при некоторых постоянных

$C_1 > 0$, $C_2 > 0$.

Следуя И. А. Ибрагимову и Р. З. Хасьминскому (см. [15]), оценку L_T функционала $L(f)$ назовем $(\mathbf{W}, \sigma^2)$ – *асимптотически эффективной*, если для любой функции потерь $w \in \mathbf{W}$ справедливо соотношение

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{E}\, w(\sqrt{T}(L_T - \varphi(f))) = \mathbf{E}\, w(\xi), \tag{43}$$

где ξ является $N(0, \sigma^2)$ нормальной случайной величиной.

Теорема 12. *При выполнении любого из условий $(\mathcal{H})$, (B) или (ℓ) статистика L_T является $(\mathbf{W}, \sigma^2)$-асимптотически эффективной оценкой для $L(f)$, где σ^2 определяется (38).*

Доказательство.: В силу теорем 6, 7, 8 и 11 достаточно показать (см. [7], [15]), что при всех $T > T(a)$

$$\mathbf{E}(\exp\{\pm a\bar{L}_T\}) < \infty, \tag{44}$$

где, как и прежде, $\bar{L}_T = \sqrt{T}(L_T - \mathbf{E}(L_T))$. Пользуясь леммой 5 легко проверить, что при любых достаточно больших T

$$\mathbf{E}(\exp\{\pm a\bar{L}_T\}) \le \exp\{\frac{a^2}{T} tr(B_T(f)\, B_T(\varphi))^2\}. \tag{45}$$

По теореме 8 величина $\frac{1}{T} tr(B_T(f)\, B_T(\varphi))^2 = \frac{1}{2}\mathbf{E}(\bar{L}_T)^2$ ограничена. Поэтому (44) следует из (45).

ABSTRACT. Let $X(u)$, $u \in U$ be a zero mean real–valued stationary Gaussian process possessing a spectral density $f(\lambda)$. We consider the general problem of nonparametric statistical estimation of spectral averages $L(f) = \int \varphi(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda$, on the basis of a sample $\{X(u),\ 0 \le u \le T\}$. As an estimator of $L(f)$ we take the statistics $L_T = \int \varphi(\lambda) I_T(\lambda)\, d\lambda$, where $I_T(\lambda)$ is the periodogram of the process $X(u)$. For spectral densities from different functional classes we prove in succession that the estimator L_T is asymptotically unbiased, mean square consistent, asymptotically normal and asymptotically efficient estimator for $L(f)$. Both continuous and discrete parameter cases are treated.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Avram, "On bilinear forms in Gaussian random variables and Toeplitz matrices", Probab. Theor. Rel. Fields, vol. 79, pp. 37 – 45, 1988.
2. Р. Бенткус, В. Руткаускас, "Об асимптотическом поведении первого и второго

моментов спектральных оценок второго порядка", Литовский Матем. сб., т. 13, стр. 29 – 45, 1973.
3. Р. Бенткус, Р. Рудзкис, В. Статулевичус, "Экспоненциальные неравенства для оценок спектра стационарной гауссовской последовательности", Литовский Матем. сб., т. 15, стр. 25 – 39, 1975.
4. Р. Бенткус, Р. Рудзкис, Ю. Сушинскас, "О среднем оценок спектра однородного поля", Литовский Матем. сб., т. 14, стр. 67 – 74, 1974.
5. P. L. Butzer, R. J. Nessel, Fourier Analysis and Approximation I, Birkhäuser, Basel, Stuttgard, 1971.
6. R. Fox, M. S. Taqqu, "Central limit theorem for quadratic forms in random variables having long-range dependence", Probab. Th. Rel. Fields, vol. 74, pp. 213 – 240, 1987.
7. М. С. Гиновян, "Асимптотически эффективное непараметрическое оценивание функционалов от спектральной плотности имеющей нули", Теория вероятностей и применения, т. 33, стр. 315 – 322, 1988.
8. М. С. Гиновян, "Об оценке значения линейного функционала от спектральной плотности стационарного гауссовского процесса", Теория вероятностей и применения, т. 33, стр. 777 – 781, 1988.
9. М. С. Гиновян, "Асимптотические свойства оценки спектра однородного гауссовского поля", Доклады НАН Армении, т. 94, стр. 264 – 269, 1993.
10. М. С. Гиновян, "Замечание о центральной предельной теореме для квадратичных форм теплицева типа от стационарных гауссовских величин", Известия НАН Армении, Математика, т. 28, № 2, стр. 78 – 81, 1993.
11. M. S. Ginovian, "On Toeplitz type quadratic functionals of stationary Gaussian process", Prob. Theor. Rel. Fields, vol. 100, pp. 395 – 406, 1994.
12. L. Giraitis, D. Surgailis, "A central limit theorem for quadratic forms in strongly dependent linear variables and its application to asymptotical normality of Whittle's estimate", Probab. Th. Rel. Fields vol. 86, pp. 87 – 104, 1990.
13. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, Наука, Москва, 1965.
14. U. Grenander, G. Szegö, Toeplitz Forms and Their Applications, Univ. of California Press, 1958.
15. R. Z. Has'minskii, I. A. Ibragimov, "Asymptotically efficient nonparametric estimation of functionals of spectral density function", Probab. Th. Rel. Fields, vol. 73, pp. 447 – 461, 1986.
16. И. А. Ибрагимов, "Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса", Теория вероятностей и применения, т. 8, стр. 391 – 430, 1963.
17. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, "Об оценке значения линейного функционала от плотности распределения", Записки научн. сем. ЛОМИ, т. 153, стр. 45 – 53, 1986.
18. T. Kawata, Fourier Analysis in Probability Theory, Academic Press, N. Y. 1972.
19. С. М. Никольский, Аппроксимация функций многих переменных и теоремы вложения, Наука, Москва, 1969.
20. E. Parzen, "On consistent estimates of the spectrum of a stationary time series", Ann. of Math. Statis., vol. 28, pp. 329 – 348, 1957.

10 августа 1994

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении

СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СОБОЛЕВА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 30, № 1, 1995

В статье исследуется начально-краевая задача для вырождающихся нелинейных уравнений типа Соболева высокого порядка. При некоторых ограничениях на главные символы операторов и младшие члены доказывается существование и единственность решения смешанной краевой задачи в весовых функциональных пространствах. Доказывается существование аттракторов полугрупп, порожденных исследуемым классом операторов. При дополнительных ограничениях на младшие члены строится глобальная функция Ляпунова и с ее помощью описываются аттракторы полугрупп, порожденных этим классом операторов.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область евклидова пространства с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение порядка $2m+1$ $(m \geq 1)$ в частных производных вида

$$\frac{\partial}{\partial t} Lu + Mu = 0 \tag{0.1}$$

в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$, где L и M – следующие операторы :

$$Lu = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (b_{\alpha\beta}(x) D^\beta u), \tag{0.2}$$

$$Mu = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x, ..., D^\beta u, ...), \quad |\beta| \leq m. \tag{0.3}$$

Здесь суммирование производится по мультииндексам $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, а

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

В настоящей статье исследуется разрешимость и асимптотическое поведение решений смешанных краевых задач для вырождающихся на границе эволюционных уравнений высокого порядка вида (0.1). Статья является обобщением для уравнений высокого порядка результатов, полученных в работах авторов [1], [2], в которых вырождение носило частный характер. В настоящей работе (по сравнению с [1], [2]) обобщен также случай $m = 1$ (уравнение третьего порядка), а именно, младшие коэффициенты a_α уравнения (0.1) здесь удовлетворяют более общим условиям. Как известно (см. например, библиографии к [3] – [7]), проблема разрешимости краевых задач для вырождающихся уравнений тесно связана с теорией весовых функциональных пространств. По определению, функция, заданная на Ω, называется *весовой функцией*, если она положительна, непрерывна и, при приближении к границе Ω, бесконечно возрастает или стремится к нулю. *Весовое функциональное пространство* – это нормированное пространство измеримых функций, некоторая степень которых суммируема с наперед заданным весом на Ω, таких, что их производные обладают тем же свойством суммируемости. В этой статье роль весовых функций играют степени расстояния $\rho(x) = dist(x, \partial\Omega)$ от точки $x \in \Omega$ до $\partial\Omega$.

§1. КЛАСС ОПЕРАТОРОВ

Всюду ниже будем предполагать, что коэффициенты, определяющие операторы L и M, удовлетворяют следующим условиям :

I) Функции $b_{\alpha\beta}(x)$ являются вещественнозначными и непрерывными в Ω ; для любых α, β имеем $b_{\alpha\beta}(x) = b_{\beta\alpha}(x)$.

II) Эллиптичность. Существует положительное число κ_0 такое, что

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} b_{\beta\alpha}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \ge \kappa_0\rho(x)^{2\sigma}\left(\sum_{|\alpha|=m}|\xi_\alpha|^2+1\right) \tag{1.1}$$

для любого $x \in \Omega$ и любого набора чисел $\{\xi_\alpha\}_{|\alpha|\le m}$, где весовой показатель σ находится в следующих пределах :

$$-\frac{1}{2} < \sigma < m - \frac{1}{2}. \tag{1.2}$$

III) Ограниченность. Существует число $C > 0$ такое, что

$$|b_{\alpha\beta}(x)| \le C\rho(x)^{2\sigma} \tag{1.3}$$

для любого $x \in \Omega$ и любых мультииндексов α, β ($|\alpha|, |\beta| \le m$).

IV) Коэффициенты $a_\alpha(x, ..., \xi_\beta, ...)$ оператора M вещественнозначны и принадлежат пространству C^1 по переменным $x \in \overline{\Omega}$ и ξ_β ; при любых $x \in \overline{\Omega}$, ξ_α, η_α, τ_β справедливы неравенства

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x, ..., \xi_\beta, ...)\xi_\alpha \ge \gamma_1 \rho(x)^{2\sigma} \left(\sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^2 + 1 \right), \tag{1.4}$$

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x, ..., \tau_\beta, ...)\xi_\alpha \le \gamma_1' \rho(x)^{2\sigma} \left(\sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{|\beta|=m} |\tau_\beta|^2 \right)^{1/2}, \tag{1.5}$$

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} \frac{\partial a_\alpha(x, ..., \tau_\beta, ...)}{\partial \tau_\beta} \xi_\alpha \xi_\beta \ge \gamma_2 \rho(x)^{2\sigma} \left(\sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^2 + 1 \right), \tag{1.6}$$

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} \left| \frac{\partial a_\alpha(x, ..., \tau_\beta, ...)}{\partial \tau_\beta} \eta_\alpha \xi_\beta \right| \le \gamma_2' \rho(x)^{2\sigma} \left(\sum_{|\alpha|=m} |\eta_\alpha|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{|\beta|=m} |\xi_\beta|^2 \right)^{1/2}, \tag{1.7}$$

где $\gamma_1, \gamma_1', \gamma_2, \gamma_2'$ – положительные постоянные.

Отметим, что условия (1.4) – (1.7), наложенные на младшие члены уравнения (0.1), называют условиями типа Леви.

§2. ВЕСОВЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Вначале приведем необходимые обозначения (введенные в [3]) и опишем некоторые функциональные пространства. Символом $H^m_\sigma(\Omega)$ обозначим весовой класс функций $u(x)$, заданных на Ω, для которых конечна величина

$$\|u\|_{H^m_\sigma} = \left[\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \rho(x)^{2\sigma} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right]^{1/2}. \tag{2.1}$$

Классы $H_\sigma^m(\Omega)$ являются гильбертовыми пространствами с нормой (2.1).

В дальнейшем нам понадобятся иные нормировки этих весовых пространств.

Положим

$$\|u\|_1 = \left[\sum_{|\alpha|\le m} \|\rho(x)^\sigma D^\alpha u\|^2_{L_2(\Omega)}\right]^{1/2}, \tag{2.2}$$

$$\|u\|_2 = \left[\|\rho(x)^\sigma u\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \|\rho(x)^\sigma D^\alpha u\|^2_{L_2(\Omega)}\right]^{1/2}. \tag{2.3}$$

Нормами (2.2) и (2.3) порождаются гильбертовы пространства, которые будем обозначать, соответственно, через ${}_1H_\sigma^m(\Omega)$ и ${}_2H_\sigma^m(\Omega)$. Соотношения между введенными пространствами при различных весовых показателях σ были исследованы С. М. Никольским [6] – [8]. Ниже будем опираться на следующую теорему из [3].

Теорема А. *([3], Теорема 1.1.4) Положим*

$$-\frac{1}{2} < \sigma \le m, \tag{2.4}$$

тогда

$${}_1H_\sigma^m(\Omega) = {}_2H_\sigma^m(\Omega) = H_\sigma^m(\Omega), \tag{2.5}$$

где равенства понимаются, как обычно, с точностью до эквивалентности норм.

Пусть $\overset{\circ}{H}{}_\sigma^m(\Omega)$ является замыканием в норме пространства $H_\sigma^m(\Omega)$ линейного многообразия $C_0^\infty(\Omega)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. Справедлива следующая

Теорема Б. *([3], Теорема 1.2.1)*

1) Если $\sigma < -1/2$ или $\sigma > m - 1/2$, то $\overset{\circ}{H}{}_\sigma^m(\Omega) = H_\sigma^m(\Omega)$.

2) Если σ удовлетворяет условию (1.2), то пространства $\overset{\circ}{H}{}_\sigma^m(\Omega)$ обладают следующей структурой :

$$\overset{\circ}{H}{}_\sigma^m(\Omega) = \left\{u \in H_\sigma^m(\Omega) : \left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_\Gamma = 0, \quad s = 0, 1, ..., s_0 - 1\right\}, \tag{2.6}$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная в направлении внутренней нормали к границе, а s_0 – целое число, удовлетворяющее неравенствам

$$m-\sigma-\frac{1}{2}\leq s_0<m-\sigma+\frac{1}{2}. \tag{2.7}$$

2.2. Введем, наконец, функциональное пространство, в котором действует оператор редуцированной задачи.

Лемма 2.1. *Оператор L, определенный на всюду плотном в $L_2(\Omega)$ множестве $C_0^\infty(\Omega)$, является симметрическим и положительно определенным.*

Доказательство. Симметричность оператора L следует из формулы интегрирования по частям. Покажем, что L – положительно определенный оператор. Для этого рассмотрим скалярное произведение (Lu,u), где $u\in C_0^\infty(\Omega)$, а $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. В силу теоремы А и формул (1.1), (1.2)

$$\begin{aligned}(Lu,u)&=\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m}\int_\Omega b_{\alpha\beta}(x)D^\beta uD^\alpha u\,dx\geq\\&\geq\kappa_0\int_\Omega\rho(x)^{2\sigma}\left[|u(x)|^2+\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^2\right]dx=\\&=\kappa_0\|u\|_2^2\geq c\|u\|^2_{H^m_\sigma}\geq c\|u\|^2_{L_2(\Omega)},\end{aligned} \tag{2.8}$$

где $c>0$ – постоянная (всюду ниже через c будем обозначать различные постоянные). Лемма 2.1 доказана.

На линейном многообразии $C_0^\infty(\Omega)$ введем скалярное произведение

$$[u,v]=(Lu,v)=\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m}\int_\Omega b_{\alpha\beta}(x)D^\beta uD^\alpha v\,dx. \tag{2.9}$$

Далее, через H_L обозначим гильбертово пространство с нормой

$$\|u\|_{H_L}=\sqrt{[u,u]},$$

порожденной скалярным произведением (2.9), являющееся замыканием линейного многообразия $C_0^\infty(\Omega)$ в этой норме.

Лемма 2.2. *Пусть σ удовлетворяет неравенству (1.2). Тогда пространства H_L и $\dot{H}_\sigma^m$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть $u \in C_0^\infty(\Omega)$. В силу оценки (2.8) имеем

$$\|u\|_{H_L} \geq c\,\|u\|_{H_\sigma^m},$$

где $c > 0$ – постоянная. Теперь докажем обратное неравенство. Действительно, из теоремы А и (1.3) следует, что

$$\|u\|^2_{H_L} \leq c \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} \int_\Omega \rho(x)^{2\sigma} |D^\alpha u| \cdot |D^\beta u|\, dx \leq$$
$$\leq c_1 \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |\rho(x)^\sigma D^\alpha u|^2 dx \leq c_1 \|u\|_1^2 \leq c_2 \|u\|^2_{H_\sigma^m}.$$

Таким образом, установлена эквивалентность норм на множестве, всюду плотном в $L_2(\Omega)$. Далее, стандартный процесс замыкания приводит к эквивалентности норм $\|u\|_{H_L}$ и $\|u\|_{H_\sigma^m}$. Лемма доказана.

2.3. Для уравнения (0.1) рассмотрим следующую краевую задачу :

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{2.10}$$

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_\Gamma = 0, \quad s = 0, 1, ..., s_0 - 1, \quad t > 0, \tag{2.11}$$

где s_0 удовлетворяет условию (2.7), а u_0 – произвольный элемент пространства H_L.

2.4. Приведем полученный в [3] результат об однозначной разрешимости обобщенной задачи Дирихле для оператора L, на который будем опираться ниже. Рассмотрим уравнение

$$Lu = f \tag{2.12}$$

с краевыми условиями (2.11). Для формулировки теоремы нам понадобится следующее

Определение 2.1. Функция $u \in \overset{\circ}{H}{}^m_\sigma(\Omega)$ называется *обобщенным решением* задачи (2.11), (2.12), если для любого $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место тождество

$$[u, \varphi] = (f, \varphi). \tag{2.13}$$

Теорема B. *([3], Теорема 2.1.1) Пусть оператор L удовлетворяет условиям I), II) и (1.2), а f – произвольный элемент пространства $(\overset{\circ}{H}{}^m_\sigma(\Omega))'$, сопряженного к пространству $\overset{\circ}{H}{}^m_\sigma(\Omega)$. Тогда задача (2.11), (2.12) имеет единственное обобщенное решение $u \in \overset{\circ}{H}{}^m_\sigma(\Omega)$ (или, что то же самое, $u \in H_L$), удовлетворяющее оценке*

$$\|u\|_{H^m_\sigma} \le c\|f\|_{(\overset{\circ}{H}{}^m_\sigma(\Omega))'}, \tag{2.14}$$

где c – положительная постоянная.

В силу теоремы B, оператор L осуществляет гомеоморфизм пространств H_L и $(\overset{\circ}{H}{}^m_\sigma(\Omega))'$. Поэтому существует ограниченный обратный оператор L^{-1}, отображающий $(\overset{\circ}{H}{}^m_\sigma(\Omega))'$ на $\overset{\circ}{H}{}^m_\sigma(\Omega)$ (и, стало быть, на H_L). Применяя к обеим частям уравнения (0.1) оператор L^{-1}, мы придем к эквивалентному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}u = 0,$$

где оператор $\mathcal{A} = L^{-1}M$ определен на линейном многообразии $C_0^\infty(\Omega)$. Таким образом, задача (0.1), (2.10), (2.11) сведена к эквивалентной задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}u = 0, \tag{2.15}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{2.16}$$

Лемма 2.3. *Область определения замыкания оператора $\mathcal{A}$ совпадает с пространством H_L.*

Доказательство. Пусть $u \in H_L$, и пусть последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, $u_k \in$ $\in C_0^\infty(\Omega)$ такова, что

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{H_L} = 0. \tag{2.17}$$

Для любого $v \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$[Au_k, v] = \int_\Omega LL^{-1}Mu_k \cdot v(x)\,dx =$$
$$= \int_\Omega \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_\alpha(x, ..., D^\beta u_k, ...) v\,dx = \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega a_\alpha(x, ..., D^\beta u_k, ...) D^\alpha v\,dx.$$

Оценим выражение

$$[Au_k, v] - \int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} a_{\alpha\beta}(x, ..., D^\beta u_k, ...) D^\alpha v\,dx =$$
$$= \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega [a_\alpha(x, ..., D^\beta u_k, ...) - a_\alpha(x, ..., D^\beta u, ...)] D^\alpha v\,dx =$$
$$= \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} \int_\Omega \int_0^1 \frac{\partial a_\alpha(x, ..., D^\beta u + t(D^\beta u_k - D^\beta u), ...)}{\partial \tau_\beta} (D^\beta u_k - D^\beta u) D^\alpha v\,dt\,dx.$$

В силу условия (1.7)

$$\left| [Au_k, v] - \int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} a_{\alpha\beta}(x, ..., D^\beta u_k, ...) D^\alpha v\,dx \right| \le$$
$$\le \gamma_2' \left(\sum_{|\beta|=m} \left\| \rho(x)^\sigma D^\beta (u_k - u) \right\|^2_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2} \left(\sum_{|\alpha|=m} \left\| \rho(x)^\sigma D^\alpha v \right\|^2_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2} \le$$
$$\le \gamma_2' \left\| u_k - u \right\|_2 \left\| v \right\|_2 \le c \left\| u - u_k \right\|_{H_L} \left\| v \right\|_{H_L}. \tag{2.18}$$

Из (2.17) следует, что правая часть последнего неравенства при $k \to \infty$ стремится к нулю. Поэтому последовательность $\{Au_k\}$ слабо сходится в пространстве H_L. В силу единственности слабого предела можно расширить оператор A с $C_0^\infty(\Omega)$ на H_L, для любых $u, v \in H_L$, полагая

$$[Au, v] = \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega a_\alpha(x, ..., D^\beta u, ...) D^\alpha v\,dx. \tag{2.19}$$

Лемма доказана.

§3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

Здесь будет доказан основной результат статьи, а именно, однозначная разрешимость задачи (2.15), (2.16), к которой сведена задача (0.1), (2.10), (2.11). Доказательство основано на так называемом "методе монотонности" (см. [9], [10]). Мы будем пользоваться обозначениями и определениями, введенными в этих работах, а также в статье авторов [2].

Теорема 3.1. *Пусть операторы L и M удовлетворяют условиям I) – IV). Тогда оператор $\mathcal{A}$, действующий в пространстве H_L, является монотонным, ограниченным и полунепрерывным. При этом, имеет место оценка*

$$[\mathcal{A}u, u] \geq c\,\|u\|^2_{H_L}$$

с некоторой постоянной $c > 0$.

Доказательство. Пусть $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Из (1.6) следует, что

$$[\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v] = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega [a_\alpha(x, ..., D^\beta u, ...) - a_\alpha(x, ..., D^\beta v, ...)] D^\alpha(u - v)\, dx =$$

$$= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_\Omega \int_0^1 \frac{\partial a_\alpha(x, ..., D^\beta v + t(D^\beta u - D^\beta v), ...)}{\partial \tau_\beta} D^\beta(u - v) D^\alpha(u - v)\, dt\, dx =$$

$$= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_\Omega \frac{\partial a_\alpha(x, ..., D^\beta v + t^*(D^\beta u - D^\beta v), ...)}{\partial \tau_\beta} D^\beta(u - v) D^\alpha(u - v)\, dx \geq$$

$$\geq \gamma_2\,\|u - v\|_2^2 \geq c\,\|u - v\|^2_{H_L}. \qquad (3.1)$$

Пусть теперь $u, v \in H_L$, а последовательности $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, $\{v_k\}_{k=1}^\infty$, где $u_k, v_k \in$ $\in C_0^\infty(\Omega)$ таковы, что

$$\|u_k - u\|_{H_L} \to 0, \quad \|v_k - v\|_{H_L} \to 0, \quad \text{при } k \to \infty. \qquad (3.2)$$

Тогда из оценки (3.1) получаем

$$[\mathcal{A}u_k - \mathcal{A}v_k, u - v] = [\mathcal{A}u_k - \mathcal{A}v_k, u - u_k] + [\mathcal{A}u_k - \mathcal{A}v_k, u_k - v_k] + [\mathcal{A}u_k - \mathcal{A}v_k, v_k - v] \geq$$

$$\geq [\mathcal{A}u_k - \mathcal{A}v_k, u - u_k] + [\mathcal{A}u_k - \mathcal{A}v_k, v_k - v] + c\,\|u_k - v_k\|^2_{H_L}. \qquad (3.3)$$

Из леммы 2.3 следует, что последовательности $\{\mathcal{A}u_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{\mathcal{A}v_k\}_{k=1}^\infty$ слабо сходятся в H_L и, стало быть, ограничены. Учитывая (3.2), получаем

$$\big|[\mathcal{A}u_k - \mathcal{A}v_k, u - u_k]\big| \leq c\,\|u_k - u\|_{H_L} \longrightarrow 0, \quad \text{при } k \to \infty.$$

Аналогично, второе слагаемое правой части неравенства (3.3) тоже стремится к нулю при $k \to \infty$. Используя (3.3), заключаем, что при достаточно больших k справедливо неравенство

$$[\mathcal{A}u_k - \mathcal{A}v_k, u - v] \geq 0.$$

Отсюда предельным переходом получаем

$$[\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v] \geq 0. \qquad (3.4)$$

Таким образом, оператор $\mathcal{A}$ является монотонным.

Докажем ограниченность оператора $\mathcal{A}$. Пусть B – произвольное ограниченное множество в H_L :

$$B = \{u \in H_L : \ \|u\|_{H_L} \leq R < \infty\}. \tag{3.5}$$

При любых $u \in B$ и $v \in C_0^\infty(\Omega)$ рассмотрим билинейную форму (2.19). В силу (1.5)

$$|[\mathcal{A}u, v]| \leq \gamma_1' \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |\rho(x)^\sigma D^\alpha v|^2 dx \right)^{1/2} \left(\sum_{|\beta|=m} \int_\Omega |\rho(x)^\sigma D^\beta u|^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \gamma_1' \|u\|_2 \|v\|_2 \leq c \|u\|_{H_L} \|v\|_{H_L} \leq cR \|v\|_{H_L}. \tag{3.6}$$

Отсюда следует, что для любых $u \in B$

$$\|\mathcal{A}u\|_{H_L} \leq cR, \tag{3.7}$$

следовательно, оператор $\mathcal{A}$ ограничен.

Докажем, наконец, полунепрерывность оператора $\mathcal{A}$. В самом деле, пусть $u \in H_L$ и $v \in C_0^\infty(\Omega)$, а последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, $u_k \in H_L$, такова, что $\|u_k - u\|_{H_L} \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда из леммы 2.3 следует

$$[\mathcal{A}u_k, v] \longrightarrow [\mathcal{A}u, v], \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

что и означает требуемую полунепрерывность.

Для завершения доказательства теоремы 3.1, установим оценку снизу для $[\mathcal{A}u, u]$. Из теоремы А, леммы 2.2 и формулы (1.4) следует, что

$$[\mathcal{A}u, u] \geq \gamma_1 \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |\rho(x)^\sigma D^\alpha u|^2 dx + \int_\Omega |\rho(x)^\sigma u(x)|^2 dx \right) = \gamma_1 \|u\|_2^2 \geq$$

$$\geq c \|u\|_{H_L}^2, \tag{3.8}$$

где $c > 0$ – постоянная. Теорема 3.1 доказана.

Прежде чем сформулировать основной результат этого параграфа обозначим через $L_2(0, T; H_L)$ гильбертово пространство определенных в цилиндре Q_T

функций $u(t,x)$, со скалярным произведением

$$\{u,v\} = \int_0^T [u,v]\,dt. \tag{3.9}$$

Норму, порожденную этим скалярным произведением обозначим символом $\mathrm{I}\cdot\mathrm{I}$.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия I) – IV). Тогда для любых начальных данных $u_0 \in H_L$ задача (2.15), (2.16) имеет единственное решение в пространстве $L_2(0,T;H_L)$.*

Доказательство. Из неравенства (3.4) легко следует, что для любых $u, v \in$ $\in L_2(0,T;H_L)$

$$\{\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v\} \geq 0. \tag{3.10}$$

Поэтому оператор $\mathcal{A}$ монотонный. Далее, пусть B – ограниченное множество в $L_2(0,T;H_L)$:

$$B = \{u \in L_2(0,T;H_L) : \mathrm{I}u\mathrm{I} \leq R\}.$$

Тогда, в силу (3.6), для любых $u \in B$ и $t \in [0,T]$ имеем

$$\|\mathcal{A}u\|_{H_L} \leq c\|u\|_{H_L},$$

где $c > 0$ – постоянная. Интегрируя обе части по $t \in [0,T]$, получим

$$\mathrm{I}\mathcal{A}u\mathrm{I} \leq c\,\mathrm{I}u\mathrm{I} \leq cR,$$

то есть оператор $\mathcal{A}$ ограничен в $L_2(0,T;H_L)$.

Теперь докажем полунепрерывность оператора $\mathcal{A}$ в $L_2(0,T;H_L)$. Пусть u – произвольный элемент пространства $L_2(0,T;H_L)$, а последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, $u_k \in L_2(0,T;H_L)$, такова, что

$$\mathrm{I}u_k - u\mathrm{I} \longrightarrow 0, \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3.11}$$

В силу (2.18) и (2.19) для любого $v \in C_0^\infty([0,T]\times\Omega)$ и любого $t \in [0,T]$ имеем

$$\big|[\mathcal{A}u_k - \mathcal{A}u, v]\big| \leq c\|u_k - u\|_{H_L}\|v\|_{H_L}.$$

Интегрируя обе части этого неравенства по $t \in [0,T]$ и учитывая (3.11) получим, что

$$\left|\{Au_k - Au, v\}\right| \le \int_0^T \left|[Au_k - Au, v]\right| dt \le c \int_0^T \|u_k - u\|_{H_L} \|v\|_{H_L} dt \le$$
$$\le c\, \mathrm{I}u_k - u\mathrm{I} \cdot \mathrm{I}v\mathrm{I} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

то есть последовательность $\{Au_k\}_{k=1}^{\infty}$ слабо сходится в $L_2(0,T;H_L)$. Итак, оператор A полунепрерывен в $L_2(0,T;H_L)$ и удовлетворяет условиям теоремы 13 работы [9] (см. также [2]). Отсюда следует существование решения $u(t,x) \in \in L_2(0,T;H_L)$ задачи (2.15), (2.16) при любых начальных данных $u_0 \in H_L$.

Единственность решения доказывается стандартной процедурой. Пусть $u_1, u_2 \in L_2(0,T;H_L)$ – два решения задачи (2.15), (2.16). Тогда разность $u_1 - u_2$ удовлетворяет тождеству

$$\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial t} + Au_1 - Au_2 = 0.$$

Умножая обе части последнего тождества на $u_1 - u_2$ и интегрируя по $[0,\tau]$, $0 \le \tau \le T$, получаем

$$\int_0^{\tau} \left[\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial t}, u_1 - u_2\right] dt + \int_0^{\tau} [Au_1 - Au_2, u_1 - u_2]\, dt = 0.$$

В силу монотонности оператора A

$$\int_0^{\tau} \left[\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial t}, u_1 - u_2\right] dt = \frac{1}{2}\int_0^{\tau} \frac{\partial}{\partial t}\|u_1 - u_2\|_{H_L}^2\, dt \le 0.$$

Учитывая начальное условие $(u_1 - u_2)\big|_{t=0} = 0$, получаем

$$\|u_1(\tau,x) - u_2(\tau,x)\|_{H_L} = 0.$$

Так как τ произвольно, то отсюда следует, что $u_1 = u_2$ в цилиндре Q_T, что завершает доказательство теоремы 3.2.

§4. ПОСТРОЕНИЕ АТТРАКТОРОВ

В этом параграфе будет доказано существование аттракторов полугрупп, порожденных задачей (2.15), (2.16). Доказательство этого аналогично доказательству теоремы 1 из работы [2], в связи с чем мы опускаем некоторые подробности. Определение аттракторов и некоторые общие теоремы об их существовании и структуре можно найти в [11], [12].

Из теоремы 3.2 следует, что задача (2.15), (2.16), и, стало быть, задача (0.1), (2.10), (2.11) порождает семейство операторов $\{S_t, t \geq 0\}$, заданных на множестве начальных данных $u_0 \in H_L$ и определяемых следующим образом :

$$S_t u_0 = u(t, x), \tag{4.1}$$

где $u(t, x)$ – решение задачи. Это семейство является полугруппой.

Теорема 4.1. *Пусть операторы L и M удовлетворяют условиям I) – IV) и (1.2). Тогда полугруппа S_t, порожденная задачей (0.1), (2.10), (2.11) обладает аттрактором, компактным в пространстве H_L.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1.1 из [11], сначала покажем равномерную ограниченность семейства $\{S_t\}$. Пусть

$$U_0 = \{u_0 \in H_L : \ \|u_0\|_{H_L} \leq K < \infty\}$$

– произвольное ограниченное множество в H_L, и $t > 0$ – фиксированное число. Подставляя решение $u(t, x)$ задачи (0.1), (2.10), (2.11) в уравнение (2.15) и скалярно умножая обе его части на u, получим

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}, u\right] + [\mathcal{A}u, u] = 0, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|^2_{H_L} + [\mathcal{A}u, u] = 0. \tag{4.2}$$

Тем самым, в силу (3.8) и неравенства Гронуолла, приходим к оценке

$$\|S_t u_0\|^2_{H_L} \leq \|u_0\|^2_{H_L}\, e^{-2ct}. \tag{4.3}$$

Отсюда следует, что семейство $\{S_t\}$ равномерно ограничено.

Для завершения доказательства покажем, что оператор $S_t : H_L \longmapsto H_L$ непрерывен при любых $t \geq 0$. В самом деле, при любых начальных данных $u_0^1(x), u_0^2(x) \in H_L$ соответствующие им решения $u_1(t, x), u_2(t, x) \in L_2(0, T; H_L)$ задачи (2.15), (2.16) при любом $t \in [0, T]$ удовлетворяют тождеству

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau}\|u_1 - u_2\|^2_{H_L}\, d\tau + \int_0^t [\mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2, u_1 - u_2]\, d\tau = 0. \tag{4.4}$$

Теперь, учитывая монотонность оператора $\mathcal{A}$, получаем

$$\|u_1(t, x) - u_2(t, x)\|_{H_L} \leq \|u_1(0, x) - u_2(0, x)\|_{H_L}$$

или

$$\left\|S_t u_0^1 - S_t u_0^2\right\|_{H_L} \le \left\|u_0^1 - u_0^2\right\|_{H_L}.$$

Воспользовавшись произвольностью $t \ge 0$, убеждаемся в непрерывности семейства $\{S_t\}$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 1.1 из [11], что влечет утверждение теоремы 4.1.

§5. СУЩЕСТВОВАНИЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

В этом параграфе построена функция Ляпунова уравнения (0.1) и с ее помощью описаны аттракторы полугрупп, порожденных рассматриваемым классом операторов. Будем предполагать, что оператор M следующего частного вида :

$$Mu = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x, D^\alpha u). \tag{5.1}$$

Введем обозначения

$$h_\alpha(x, w) = \int_0^w a_\alpha(x,\xi)\, d\xi, \tag{5.2}$$

$$a(x,\tau) = \sum_{|\alpha|\le m} h_\alpha(x, \tau_\alpha). \tag{5.3}$$

На пространстве H_L рассмотрим функционал

$$\Phi(u) = \int_\Omega a(x, u, ..., D^\alpha u, ...)\, dx, \tag{5.4}$$

где $|\alpha| \le m$.

Теорема 5.1. *Пусть оператор M имеет вид (5.1) и выполнены условия теоремы 4.1. Тогда функционал Φ, задаваемый выражением (5.4), является функцией Ляпунова полугруппы S_t, порожденной задачей (0.1), (2.10), (2.11).*

Доказательство. В силу теоремы 4.1 полугруппа $\{S_t,\ t \ge 0\}$, порожденная задачей (0.1), (2.10), (2.11), обладает аттрактором $\mathcal{M}$, компактным в H_L. Сначала докажем, что функционал (5.4) непрерывен на множестве $\mathcal{M}$ (см. [11], определение 10.3 функции Ляпунова). Для этого рассмотрим выражение

$$\Phi(u)-\Phi(v)=\int_\Omega[a(x,u+v,...,D^\alpha(u+v),...)-a(x,u,...,D^\alpha u,...)]\,dx=$$
$$=\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega\int_0^1\frac{\partial a(x,...,D^\alpha v+t(D^\alpha u-D^\alpha v),...)}{\partial\tau_\alpha}(D^\alpha u-D^\alpha v)\,dt\,dx=$$
$$=\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega\int_0^1 a_\alpha(x,D^\alpha v+t(D^\alpha u-D^\alpha v))D^\alpha(u-v)\,dt\,dx=$$
$$=\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega a_\alpha(x,D^\alpha w^*)(D^\alpha u-D^\alpha v)\,dx, \tag{5.5}$$

где $w^*=v+t^*(u-v)$ и $0<t^*<1$. Воспользовавшись неравенством (1.5) и определением нормы $\|\cdot\|_2$, отсюда получим

$$|\Phi(u)-\Phi(v)|\le\gamma_1'\,\|w^*\|_2\,\|u-v\|_2\le c\,\|w^*\|_{H_L}\,\|u-v\|_{H_L}\le$$
$$\le c_1\left(\|u\|_{H_L}+\|v\|_{H_L}\right)\|u-v\|_{H_L}.$$

В силу ограниченности множества $\mathcal{M}$ в H_L имеет место неравенство

$$|\Phi(u)-\Phi(v)|\le c_2\,\|u-v\|_{H_L}$$

с некоторой постоянной $c_2>0$. Поэтому функционал Φ непрерывен на $\mathcal{M}$. Докажем, что этот функционал дифференцируем в смысле Фреше и его производная $\Phi'(u)$ действует на элементы $v\in\mathcal{M}$ следующим образом :

$$\langle\frac{\partial\Phi}{\partial u},v\rangle=[\mathcal{A}u,v]. \tag{5.6}$$

Для доказательства (5.6) выделим линейную часть в выражении (5.5). В силу (3.5), (5.2) и (5.3)

$$\langle\frac{\partial\Phi}{\partial u},v\rangle=\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega\frac{\partial a(x,...,D^\alpha u,...)}{\partial\tau_\alpha}D^\alpha v\,dx=$$
$$=\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega a_\alpha(x,D^\alpha u)D^\alpha v\,dx=[\mathcal{A}u,v].$$

В соответствии с определением функции Ляпунова покажем, что функция $\Phi(S_t u)$ убывает по t при $t\ge0$ и что множество решений уравнения $\mathcal{A}u=0$ совпадает с множеством неподвижных точек полугруппы S_t. Действительно, для любого $u_0 \in \mathcal{M}$, в силу (5.6) и (2.15), имеем

$$\partial_t \Phi(S_t u_0) = \partial_t \Phi(u(t,x)) = \langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial u}{\partial t} \rangle = \left[\mathcal{A} u, \frac{\partial u}{\partial t} \right] = -\|\mathcal{A} u\|^2_{H_L} \leq 0. \quad (5.7)$$

Таким образом, функция $\Phi(S_t u)$ убывает при $t \geq 0$. Наконец, пусть при некотором $t = \tau > 0$ $\Phi(u(\tau, x)) = \Phi(u(0,x)) = \Phi(u_0)$. Тогда, интегрируя (5.7) по $[0, \tau]$ получим

$$0 = \Phi(u(\tau, x)) - \Phi(u_0) = \int_0^\tau \partial_t \Phi(u(t,x))\, dt = -\int_0^\tau \|\mathcal{A} u\|^2_{H_L}\, dt,$$

откуда следует, что $\mathcal{A} u = 0$ при $t \in [0, \tau]$. Покажем, что $z = u_0(x)$ является неподвижной точкой полугруппы S_t. Действительно, поскольку $\mathcal{A} u_0 = \mathcal{A} u(0,x) = 0$, а $\frac{\partial u_0}{\partial t} = 0$, то функция $z(x)$ является решением задачи (2.15), (2.16) и, стало быть, $S_t z = z$ для любого $t \geq 0$. Это завершает доказательство теоремы.

Согласно теореме 10.2 [11], как следствие из теоремы 5.1, справедлива следующая

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия теорем 4.1 и 5.1, а множество $\mathcal{N} = \{z_1(x), ..., z_s(x)\}$ решений уравнения*

$$\mathcal{A} u = 0$$

конечно. Тогда аттрактор $\mathcal{M}$ является объединением неустойчивых инвариантных многообразий $N(z_i)$, $i = 1, ..., s$, выходящих из точки z_i, т. е.

$$\mathcal{M} = \bigcup_{z_i \in \mathcal{N}} N(z_i).$$

§6. ПРИМЕР МОДЕЛЬНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ

Пусть основанием цилиндра Q_T служит единичный шар $K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ с границей $S = \partial K$. Для уравнения третьего порядка

$$\frac{\partial}{\partial t} Lu + Mu = 0, \quad (6.1)$$

где

$$Lu = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(1-|x|^2)^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right] + b(x)u, \tag{6.2}$$

$$Mu = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(1-|x|^2)^{\sigma} a_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right] + a(x)u, \tag{6.3}$$

$$a_i(\xi_i) = \frac{1+p_i\xi_i^{2k}}{1+q_i\xi_i^{2k}}\xi_i, \quad p_i > q_i > 0,$$

k – натуральное число и $i = 1, \ldots, n$, рассмотрим следующую начально–краевую задачу :

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \overline{K}, \tag{6.4}$$

$$u\Big|_S = 0, \quad t \geq 0. \tag{6.5}$$

Уравнение (6.1) является простейшим частным случаем общего уравнения (0.1). В соответствии с условием (2.7) предположим, что

$$-\tfrac{1}{2} < \sigma < \tfrac{1}{2}.$$

Функции $a(x)$ и $b(x)$ непрерывны на $\overline{K}$ и удовлетворяют условиям

$$c_1(1-|x|^2)^{\sigma} \leq \begin{matrix} a(x) \\ b(x) \end{matrix} \leq c_2(1-|x|^2)^{\sigma}, \tag{6.6}$$

при некоторых положительных постоянных c_1 и c_2. Нетрудно проверить, что операторы L и M удовлетворяют условиям I) – III) из §1. Проверим, например, справедливость неравенства (1.6). В силу (6.6), для любых $\xi, \tau \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$(1-|x|^2)^{\sigma}\sum_{i=1}^{n} a_i'(\tau_i)\xi_i^2 + a(x) \geq (1-|x|^2)^{\sigma}\left(c_1 + \sum_{i=1}^{n} a_i'(\tau_i)\xi_i^2\right) = (1-|x|^2)^{\sigma}\Bigg\{c_1 +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left[(1+p_i\tau_i^{2k})(1+q_i\tau_i^{2k})^{-1} + 2k(p_i-q_i)\tau_i^{2k}(1+q_i\tau_i^{2k})^{-2}\right]\xi_i^2\Bigg\} \geq$$
$$\geq \gamma(1-|x|^2)^{\sigma}\left(1+\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right),$$

где $\gamma = \min(1; c_1)$, и неравенство (1.6) доказано. Поскольку оператор M имеет вид (5.1), то заключаем, что для задачи (6.1), (6.4), (6.5) справедливы все утверждения статьи.

ABSTRACT. In the paper initial boundary value problem for high order Sobolev type nonlinear degenerate equations is investigated. Under certain conditions concerning the principal symbols of the operators and the lower terms the existence and uniqueness of solutions of mixed problems in the weight functional spaces is proved. The existence of attractors of semigroups generated by this class of operators is established. Under additional restrictions on the lower terms, global Lyapunov function is constructed and the structure of attractors of the corresponding semigroups is described.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян, "Смешанная краевая задача для нелинейных систем типа Соболева", Изв. АН Армении, Математика, том 28, № 3, стр. 18 – 30, 1993.
2. Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян, "Аттракторы эволюционных систем типа Соболева", Изв. АН Армении, Математика, том 29, № 5, стр. 18 – 30, 1994.
3. С. М. Никольский, П. И. Лизоркин, Н. В. Мирошин, "Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений", Изв. Вузов, сер. матем., том 8(315), стр. 4 – 30, 1988.
4. П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, "Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением (случай обобщенных решений)", Труды МИАН СССР, том 157, стр. 90 – 118, 1981.
5. П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, "Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением и обобщенной правой частью," Труды МИАН СССР, том 163, стр. 157 - 183, 1983.
6. С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, Наука, Москва, 1977.
7. Х. Трибель, Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы, Мир, Москва, 1980.
8. С. М. Никольский, "Об одной теореме вложения для функций из весовых классов", Пробл. мат. физ. и вычисл. мат., Наука, Москва, стр. 254 – 264, 1977.
9. Ю. А. Дубинский, "Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка," УМН. том 23, № 1(123), стр. 45 – 90, 1968.
10. Ж.– Л. Лионс, Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, Мир, Москва, 1972.
11. А. В. Бабин, М. И. Вишик, "Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности, УМН, том. 38, № 4 (232), стр. 133 – 187, 1983.
12. А. В. Бабин, М. И. Вишик, Аттракторы эволюционных уравнений, Наука, Москва, 1989.

17 января 1995 Ереванский государственный университет

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА С СУММИРУЕМЫМИ НА ВСЕЙ ОСИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, II

А. Р. Казарян, И. Г. Хачатрян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 30, № 1, 1995

Рассматривается действующий в пространстве $L^2(-\infty,\infty)$ дифференциальный оператор L порядка $m \geq 3$ с суммируемыми на всей оси комплексными коэффициентами. Исследуются спектр и резольвента а также связь между двумя различными постановками обратных задач рассеяния для оператора L.

§3. СПЕКТР И РЕЗОЛЬВЕНТА

Настоящая статья является продолжением работы [14]. Нумерация параграфов, утверждений, формул и литературы продолжает нумерацию [14].

Методом, использованным в монографии [10], можно доказать, что области определения D и $D^{\#}$ операторов L и $L^{\#}$ соответственно всюду плотны в пространстве $L^2(-\infty,\infty)$. Поэтому существуют сопряженные операторы L^* и $(L^{\#})^*$. Ниже будет доказано, что для некоторого невещественного числа μ существуют определенные на всем пространстве $L^2(-\infty,\infty)$ ограниченные операторы $(L-\mu I)^{-1}$ и $(L^{\#}-\overline{\mu}I)^{-1}$, причем $\left((L-\mu I)^{-1}\right)^* = (L^{\#}-\overline{\mu}I)^{-1}$, где I – единичный оператор. Поэтому операторы L и $L^{\#}$ замкнуты, $L^* = L^{\#}$ и $(L^{\#})^* = L$.

Теорема 3. *Пусть σ – спектр дифференциального оператора L порядка m, а $\sigma_1 = \sigma\setminus\sigma_0$, где $\sigma_0 = [0,\infty)$ при четном m, и $\sigma_0 = (-\infty,\infty)$ при m нечетном. Тогда $\sigma_0 \subseteq \sigma$. При этом, множество σ_1 конечно, либо счетно и ограничено, состоит из собственных значений оператора L и его предельные точки принадлежат σ_0,* *причем для* $\mu \in \sigma_1$ *число* $\overline{\mu}$ *является собственным значением оператора* $L^{\#}$. *Для любого числа* λ *такого, что* $\lambda^m \notin \sigma$, *резольвента* $R_\lambda = (L - \lambda^m I)^{-1}$ *оператора* L *задается формулой*

$$(R_\lambda f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x,t;\lambda) f(t)\, dt, \quad -\infty < x < \infty,$$

в которой $f \in L^2(-\infty,\infty)$ – *произвольная функция, а ядро* $R(x,t;\lambda)$ *определяется равенством*

$$R(x,t;\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n(\lambda)-1} y_k(x,\lambda)\overline{z_k(t,\overline{\lambda})}, & t \le x, \\ -\sum\limits_{k=n(\lambda)}^{m-1} y_k(x,\lambda)\overline{z_k(t,\overline{\lambda})}, & t \ge x, \end{cases} \tag{104}$$

где $n(\lambda)$ – *максимальное число линейно независимых решений уравнения (1), суммируемых с квадратом на интервале* $(0,\infty)$, $y_k(x,\lambda)$, $k = 0,1,\dots,m-1$ – *произвольная фундаментальная система решений уравнения (1) такая, что* $y_k(x,\lambda)$ *при* $0 \le k \le n(\lambda)-1$ *суммируемы с квадратом по* x *на интервале* $(0,\infty)$, *а при* $n(\lambda) \le k \le m-1$ – *на интервале* $(-\infty,0)$. *При этом, функции* $z_k(x,\overline{\lambda})$, $k = 0,1,\dots,m-1$, *однозначно определяются из соотношений (6) и образуют фундаментальную систему решений уравнения (2) такую, что* $z_k(x,\overline{\lambda})$ *при* $0 \le k \le n(\lambda)-1$ *суммируемы с квадратом по* x *на интервале* $(-\infty,0)$, *а при* $n(\lambda) \le k \le m-1$ – *на интервале* $(0,\infty)$. *Кроме того,* $\overline{\lambda}^m$ *является регулярной точкой оператора* $L^{\#}$, *а для ядра* $R^{\#}(x,t;\overline{\lambda})$ *резольвенты* $R^{\#}_{\overline{\lambda}} = \left(L^{\#} - \overline{\lambda}^m I\right)^{-1}$ *оператора* $L^{\#}$ *справедливо равенство* $R^{\#}(x,t;\overline{\lambda}) = \overline{R(t,x;\lambda)}$.

Доказательство. Приведем доказательство при четном m (при нечетном m доказательство аналогично). Пусть $m = 2m_0$, а $y_k^{\pm}(x,\lambda)$, $k = 0,1,\dots,m-1$ – указанные в лемме 1 решения уравнения (1), где число $\lambda \ne 0$ такое, что $0 < arg\,\lambda < \frac{2\pi}{m}$. Положим

$$y_k(x,\lambda) = \begin{cases} y_k^{+}(x,\lambda) & \text{при } 0 \le k \le m_0 - 1, \\ y_k^{-}(x,\lambda) & \text{при } m_0 \le k \le m-1, \end{cases} \quad k = 0,1,\dots,m-1. \tag{105}$$

Из асимптотических равенств (13) следует, что функции $y_k(x,\lambda)$ при $0 \le k \le$ $\le m_0 - 1$ суммируемы с квадратом по x на интервале $(0,\infty)$, а при $m_0 \le k \le$

$\le m-1$ – на интервале $(-\infty, 0)$. В рассматриваемом случае $n(\lambda) = m_0$. Число λ^m является собственным значением оператора L тогда и только тогда, когда определитель Вронского $W(\lambda)$ системы решений $y_k(x,\lambda)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, равен нулю. Легко убедиться в том, что $W(\lambda)$ не зависит от выбора в (105) решений $y_k^{\pm}(x,\lambda)$, обладающих асимптотикой (13). Поэтому $W(\lambda)$ является голоморфной функцией от λ в каждом из секторов $0 < arg\,\lambda < \frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{m} < arg\,\lambda < \frac{2\pi}{m}$. По лемме 1, функция $W(\lambda)$ непрерывна в секторе $0 < arg\,\lambda < \frac{2\pi}{m}$ и, следовательно, голоморфна в этом секторе. Из асимптотических равенств (15) вытекает, что $W(\lambda) \ne 0$ для достаточно больших по модулю значений λ. Поэтому $W(\lambda)$ может обращаться в нуль лишь на некотором конечном или счетном и ограниченном множестве, не имеющем предельных точек в открытом секторе $0 < arg\,\lambda < \frac{2\pi}{m}$. Пусть λ – точка этого сектора, для которой система решений (105) уравнения (1) линейно независима. Поскольку λ^m не является собственным значением оператора L, существует обратный оператор $R_\lambda = (L - \lambda^m I)^{-1}$. Покажем, что оператор R_λ определен на всем пространстве $L^2(-\infty,\infty)$, ограничен и является интегральным оператором с ядром, определяемым формулой (104). Для этого рассмотрим неоднородное уравнение (4), где f – произвольная финитная функция из $L^2(-\infty,\infty)$. В формуле (5) общего решения $\xi(x,\lambda)$ уравнения (4) возьмем (105) в качестве решений $y_k(x,\lambda)$ однородного уравнения (1), а постоянные c_k определим так, чтобы функция $\xi(x,\lambda)$ была суммируема с квадратом по x на оси $(-\infty,\infty)$. При таком требовании числа c_k определяются однозначно следующим образом :

$$c_k = \int_{-\infty}^{0} \overline{z_k(t,\overline{\lambda})} f(t)\,dt, \quad 0 \le k \le m_0 - 1, \tag{106}$$

$$c_k = -\int_{0}^{\infty} \overline{z_k(t,\overline{\lambda})} f(t)\,dt, \quad m_0 \le k \le m - 1. \tag{107}$$

Подставив эти представления в (5), получим

$$\xi(x,\lambda) = (R_\lambda f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x,t;\lambda) f(t)\,dt, \tag{108}$$

где ядро $K(x,y;\lambda)$ определяется по формуле (104). Докажем, что в формуле (104) функции $z_k(x,\overline{\lambda})$, определенные из системы уравнений (6), при $0 \le k \le m_0-1$ суммируемы с квадратом по x на интервале $(-\infty,0)$, а при $m_0 \le k \le m-1$ – на интервале $(0,\infty)$. Для этого выразим решения $y_k(x,\lambda)$, $k=0,1,\dots,m_0-1$, через фундаментальную систему решений $y_k^-(x,\lambda)$, $k=0,1,\dots,m-1$:

$$y_k(x,\lambda)=\sum_{j=0}^{m-1}\alpha_{kj}(\lambda)y_j^-(x,\lambda),\quad k=0,1,\dots,m_0-1. \tag{109}$$

Из (105) и линейной независимости системы $y_k(x,\lambda)$, $k=0,1,\dots,m_0-1$, следует, что

$$det\left(\alpha_{kj}(\lambda)\right)_{k,j=0}^{m_0-1}\neq 0. \tag{110}$$

Подставим выражение (109) для функций $y_k(x,\lambda)$ в левую часть соотношения (6) :

$$\sum_{k=0}^{m-1}y_k^{[\nu]}(x,\lambda)\overline{z_k(x,\overline{\lambda})}=\sum_{k=0}^{m_0-1}\sum_{j=0}^{m-1}\alpha_{kj}(\lambda)y_j^{-[\nu]}(x,\lambda)\overline{z_k(x,\overline{\lambda})}+$$
$$+\sum_{k=m_0}^{m-1}y_k^{-[\nu]}(x,\lambda)\overline{z_k(x,\overline{\lambda})}=\sum_{k=0}^{m_0-1}y_k^{-[\nu]}(x,\lambda)\left(\sum_{j=0}^{m_0-1}\alpha_{jk}(\lambda)\overline{z_j(x,\overline{\lambda})}\right)+$$
$$+\sum_{k=m_0}^{m-1}y_k^{-[\nu]}(x,\lambda)\left(\overline{z_k(x,\overline{\lambda})}+\sum_{j=0}^{m_0-1}\alpha_{jk}(\lambda)\overline{z_j(x,\overline{\lambda})}\right).$$

Обозначив

$$w_k^-(x,\overline{\lambda})=\sum_{j=0}^{m_0-1}\overline{\alpha_{jk}(\lambda)}z_j(x,\overline{\lambda}),\quad k=0,1,\dots,m_0-1, \tag{111}$$

$$w_k^-(x,\overline{\lambda})=z_k(x,\overline{\lambda})+\sum_{j=0}^{m_0-1}\overline{\alpha_{jk}(\lambda)}z_j(x,\overline{\lambda}),\quad k=m_0,m_0+1,\dots,m-1, \tag{112}$$

получим, что

$$\sum_{k=0}^{m-1}y_k^{[\nu]}(x,\lambda)\overline{z_k(x,\overline{\lambda})}=\sum_{k=0}^{m-1}y_k^{-[\nu]}(x,\lambda)\overline{w_k^-(x,\overline{\lambda})}.$$

Тем самым, соотношения (6) принимают вид

$$\sum_{k=0}^{m-1}y_k^{-[\nu]}(x,\lambda)\overline{w_k^-(x,\overline{\lambda})}=\begin{cases}0 & \text{при } \nu=0,1,\dots,m-2,\\ i & \text{при } \nu=m-1.\end{cases}$$

Решая эту систему уравнений относительно $\overline{w_k^-(x,\overline{\lambda})}$ с помощью формул Крамера, с учетом асимптотических равенств (13), получим

$$\overline{w_k^-(x,\overline{\lambda})} = e^{-i\omega_k\lambda x}\left(\frac{i\omega_k}{m\lambda^{m-1}} + o(1)\right), \quad x \to -\infty, \quad k = 0,1,\dots,m-1. \tag{113}$$

Из (111), (113) и (110) следует, что

$$\overline{z_k(x,\overline{\lambda})} = O\left(e^{\gamma(\lambda)x}\right), \quad x \to -\infty, \quad k = 0,1,\dots,m_0-1, \tag{114}$$

$$\gamma(\lambda) = \min_{0\le s\le m-1} |Re\,(i\lambda\omega_s)| > 0. \tag{115}$$

Отсюда заключаем, что функции $z_k(x,\overline{\lambda})$, $k = 0,1,\dots,m_0-1$, суммируемы с квадратом по x на интервале $(-\infty,0)$. Из формул (112) – (114) вытекает, что

$$\overline{z_k(x,\overline{\lambda})} = O\left(e^{-i\omega_k\lambda x}\right), \quad x \to -\infty, \quad k = m_0, m_0+1,\dots,m-1.$$

Теперь при $k = m_0, m_0+1,\dots,m-1$ выразим решения $y_k(x,\lambda)$ через фундаментальную систему решений $y_k^+(x,\lambda)$, $k = 0,1,\dots,m-1$:

$$y_k(x,\lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} \beta_{kj}(\lambda) y_j^+(x,\lambda), \quad k = m_0, m_0+1,\dots,m-1. \tag{116}$$

С учетом (105) из линейной независимости системы $y_k(x,\lambda)$, $k = 0,1,\dots,m-1$, следует, что

$$det\left(\beta_{kj}(\lambda)\right)_{k,j=m_0}^{m-1} \neq 0. \tag{117}$$

Подставим выражение (116) в левые части соотношений (6) и введем обозначения

$$w_k^+(x,\overline{\lambda}) = z_k(x,\overline{\lambda}) + \sum_{j=m_0}^{m-1} \overline{\beta_{jk}(\lambda)} z_j(x,\overline{\lambda}), \quad k = 0,1,\dots,m_0-1, \tag{118}$$

$$w_k^+(x,\overline{\lambda}) = \sum_{j=m_0}^{m-1} \overline{\beta_{jk}(\lambda)} z_j(x,\overline{\lambda}), \quad k = m_0, m_0+1,\dots,m-1. \tag{119}$$

Тогда соотношения (6) примут вид :

$$\sum_{k=0}^{m-1} y_k^{+[\nu]}(x,\lambda)\overline{w_k^+(x,\overline{\lambda})} = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu = 0,1,\dots,m-2, \\ i & \text{при } \nu = m-1. \end{cases}$$

В силу асимптотических равенств (13)

$$\overline{w_k^+(x,\overline{\lambda})} = e^{-i\omega_k\lambda x}\left(\frac{i\omega_k}{m\lambda^{m-1}} + o(1)\right), \quad x\to\infty, \quad k=0,1,\ldots,m-1. \qquad (120)$$

Из (119), (120) и (117) получаем

$$\overline{z_k(x,\overline{\lambda})} = O\left(e^{-\gamma(\lambda)x}\right), \quad x\to\infty, \quad k=m_0,m_0+1,\ldots,m-1, \qquad (121)$$

где число $\gamma(\lambda)$ определено формулой (115). Поэтому функции $z_k(x,\overline{\lambda})$, $k=$ $=m_0,m_0+1,\ldots,m-1$, суммируемы с квадратом по x на интервале $(0,\infty)$. Из (118), (120) и (121) следует, что

$$\overline{z_k(x,\overline{\lambda})} = O\left(e^{-i\omega_k\lambda x}\right), \quad x\to\infty, \quad k=0,1,\ldots,m_0-1.$$

Теперь получим оценку для ядра $R(x,t;\lambda)$. Для этого введем обозначения

$$A_k(x,\lambda) = \begin{cases} e^{-i\omega_k\lambda x} y_k^-(x,\lambda), & -\infty < x \le 0, \\ e^{-i\omega_k\lambda x} y_k^+(x,\lambda), & 0 < x < \infty, \end{cases} \qquad k=0,1,\ldots,m-1,$$

$$B_k(x,\lambda) = \begin{cases} e^{i\omega_k\lambda x}\overline{w_k^-(x,\overline{\lambda})}, & -\infty < x \le 0, \\ e^{i\omega_k\lambda x}\overline{w_k^+(x,\overline{\lambda})}, & 0 < x < \infty, \end{cases} \qquad k=0,1,\ldots,m-1,$$

$$C_k(x,\lambda) = \begin{cases} e^{-\gamma(\lambda)x}\overline{z_k(x,\overline{\lambda})}, & -\infty < x \le 0, \\ e^{i\omega_k\lambda x}\overline{z_k(x,\overline{\lambda})}, & 0 < x < \infty, \end{cases} \qquad k=0,1,\ldots,m_0-1,$$

$$C_k(x,\lambda) = \begin{cases} e^{i\omega_k\lambda x}\overline{z_k(x,\overline{\lambda})}, & -\infty < x \le 0, \\ e^{\gamma(\lambda)x}\overline{z_k(x,\overline{\lambda})}, & 0 < x < \infty, \end{cases} \qquad k=m_0,m_0+1,\ldots,m-1.$$

В силу полученных асимптотических равенств, функции $A_k(x,\lambda)$, $B_k(x,\lambda)$ и $C_k(x,\lambda)$, $k=0,1,\ldots.m-1$, ограничены по x на оси $(-\infty,\infty)$. При $t\le x\le 0$, в силу (109) и (111) имеем

$$\left|\sum_{k=0}^{m_0-1} y_k(x,\lambda)\overline{z_k(t,\overline{\lambda})}\right| \le \left|\sum_{k=0}^{m_0-1} y_k^-(x,\lambda)\overline{w_k^-(t,\overline{\lambda})}\right| +$$
$$+\left|\sum_{k=m_0}^{m-1} y_k^-(x,\lambda)\left(\sum_{j=0}^{m_0-1}\alpha_{jk}(\lambda)\overline{z_j(t,\overline{\lambda})}\right)\right| = \left|\sum_{k=0}^{m_0-1} e^{i\omega_k\lambda(x-t)}A_k(x,\lambda)B_k(t,\lambda)\right| +$$
$$+\left|\sum_{k=m_0}^{m-1} e^{i\omega_k\lambda x}e^{\gamma(\lambda)t}A_k(x,\lambda)\left(\sum_{j=0}^{m_0-1}\alpha_{jk}(\lambda)C_j(t,\lambda)\right)\right| \le Q_1(\lambda)e^{\gamma(\lambda)(t-x)},$$

где $Q_1(\lambda)>0$ – некоторое число. При $t\le 0<x$ имеем

$$\left|\sum_{k=0}^{m_0-1} y_k(x,\lambda)\overline{z_k(t,\overline{\lambda})}\right| = \left|\sum_{k=0}^{m_0-1} e^{i\omega_k\lambda x}e^{\gamma(\lambda)t}A_k(x,\lambda)C_k(t,\lambda)\right| \le Q_2(\lambda)e^{\gamma(\lambda)(t-x)}.$$

Если же $0 < t \le x$, то очевидно

$$\left|\sum_{k=0}^{m_0-1} y_k(x,\lambda)\overline{z_k(t,\overline{\lambda})}\right| = \left|\sum_{k=0}^{m_0-1} e^{i\omega_k\lambda(x-t)}A_k(x,\lambda)C_k(t,\lambda)\right| \le Q_3(\lambda)e^{\gamma(\lambda)(t-x)}.$$

Итак, справедлива оценка

$$\left|\sum_{k=0}^{m_0-1} y_k(x,\lambda)\overline{z_k(t,\overline{\lambda})}\right| \le Q_4(\lambda)e^{\gamma(\lambda)(t-x)}, \quad t \le x, \tag{122}$$

где $Q_4(\lambda) > 0$ – некоторое число. Аналогично, используя равенства (116) и (119), получим оценку

$$\left|\sum_{k=m_0}^{m-1} y_k(x,\lambda)\overline{z_k(t,\overline{\lambda})}\right| \le Q_5(\lambda)e^{\gamma(\lambda)(x-t)}, \quad x \le t. \tag{123}$$

Из (122) и (123) следует, что для ядра $R(x,t;\lambda)$ справедлива оценка

$$|R(x,t;\lambda)| \le Q(\lambda)e^{-\gamma(\lambda)|t-x|}, \quad -\infty < x,t < \infty, \tag{124}$$

где $Q(\lambda) > 0$ – некоторое число. Используя оценку (124), докажем, что интегральный оператор R_λ с ядром $R(x,t;\lambda)$ фактически действует на всем пространстве $L^2(-\infty,\infty)$ и ограничен. Действительно, для произвольной функции $f \in L^2(-\infty,\infty)$ имеем

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} R(x,t;\lambda)f(t)\,dt\right| \le Q(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma(\lambda)|t-x|}|f(t)|\,dt.$$

Обозначим

$$g(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|e^{-i\zeta t}\,dt, \quad -\infty < \zeta < \infty.$$

Тогда

$$|f(t)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta)e^{i\zeta t}\,d\zeta.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma(\lambda)|x-t|}|f(t)|dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma(\lambda)|x-t|}\int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta)e^{i\zeta t}d\zeta\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma(\lambda)|x-t|}e^{i\zeta t}\,dtd\zeta = \frac{2\gamma(\lambda)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\zeta)e^{i\zeta x}}{(\gamma(\lambda))^2+\zeta^2}\,d\zeta.$$

Используя равенство Парсеваля, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma(\lambda)|x-t|}|f(t)|\,dt\right|^2 dx =$$
$$= \frac{2(\gamma(\lambda))^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\zeta)e^{i\zeta x}}{(\gamma(\lambda))^2+\zeta^2}\,d\zeta\right|^2 dx = 4(\gamma(\lambda))^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|g(\zeta)|^2}{[(\gamma(\lambda))^2+\zeta^2]^2}\,d\zeta \le$$
$$\le \frac{4}{(\gamma(\lambda))^2}\int_{-\infty}^{\infty}|g(\zeta)|^2 d\zeta = \frac{4}{(\gamma(\lambda))^2}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt.$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} R(x,t;\lambda)f(t)\,dt\right|^2 dx \le \left(\frac{2Q(\lambda)}{\gamma(\lambda)}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt. \tag{125}$$

Тем самым, ядром $R(x,t;\lambda)$ порождается ограниченный оператор R_λ, определенный на всем пространстве $L^2(-\infty,\infty)$, причем $||R_\lambda|| \le 2Q(\lambda)(\gamma(\lambda))^{-1}$. Проверим равенство

$$(L-\lambda^m I)R_\lambda f = f, \quad f\in L^2(-\infty,\infty). \tag{126}$$

Для этого рассмотрим неоднородное уравнение (4), где f – произвольная функция из $L^2(-\infty,\infty)$. Учитывая равенства (114) и (121), в формуле (5) общего решения $\xi(x,\lambda)$ уравнения (4) возьмем в качестве постоянных c_k числа (106) и (107). Тогда формула (5) примет вид (108). В силу (125) полученное решение $\xi(x,\lambda)$ суммируемо с квадратом по x на оси $(-\infty,\infty)$. Это означает, что $\xi\in D$, т. е. имеет место равенство (126). Поскольку оператор $L-\lambda^m I$ взаимнооднозначен, в силу (126), для любой функции $\xi\in D$ имеет место равенство $R_\lambda(L-\lambda^m I)\xi=\xi$. Следовательно, $R_\lambda=(L-\lambda^m I)^{-1}$. Заметим также, что правая часть формулы (104) для ядра $R(x,t;\lambda)$ не зависит от выбора решений $y_k(x,\lambda)$ уравнения (1), обладающих требуемыми свойствами.

Повторяя рассуждения, сделанные при выводе равенства (108), можно доказать, что при $\lambda^m>0$ оператор $L-\lambda^m I$ либо не обратим, либо же его обратный оператор не определен на всем пространстве $L^2(-\infty,\infty)$. Поэтому полуось $[0,\infty)$ принадлежит спектру оператора L. Доказательство остальных утверждений теоремы не представляет труда. Теорема 3 доказана.

Теперь выразим ядро $R(x,t;\lambda)$ через определенные по формуле (72) решения $u_k(x,\lambda), \lambda \in \bar{\Omega} \setminus \bar{G}, k = 0,1,\dots,m-1$, уравнения (1). В силу (34), (35) и (72) имеем

$$u_k^{[\nu]}(x,\lambda) = (\lambda\omega_k)^\nu e^{i\omega_k\lambda x}(1+o(1)), \quad x \to \infty, \quad k,\nu = 0,1,\dots,m-1, \tag{127}$$

$$u_k^{[\nu]}(x,\lambda) = O\left(e^{i\omega_k\lambda x}\right), \quad x \to -\infty, \quad k,\nu = 0,1,\dots,m-1. \tag{128}$$

Пусть $v(x,\lambda)$ – решение дифференциального уравнения $z^{[m]*} = \lambda^m z$, обладающее всеми свойствами, требуемыми в лемме 2 к решению $u(x,\lambda)$ уравнения (1). Обозначим

$$v_k(x,\lambda) = v(x,\lambda\omega_k), \quad k = 0,1,\dots,m-1.$$

Тогда решения $v_k(x,\overline{\lambda})$ уравнения (2) будут удовлетворять асимптотическим равенствам

$$\overline{v_k(x,\overline{\lambda})} = e^{-i\overline{\omega_k}\lambda x}(1+o(1)), \quad x \to \infty, \quad k = 0,1,\dots,m-1, \tag{129}$$

$$\overline{v_k(x,\overline{\lambda})} = O\left(e^{-i\overline{\omega_k}\lambda x}\right), \quad x \to -\infty, \quad k = 0,1,\dots,m-1. \tag{130}$$

Решения $w_k(x,\overline{\lambda})$, $k = 0,1,\dots,m-1$, уравнения (2) определим из системы уравнений

$$\sum_{k=0}^{m-1} u_k^{[\nu]}(x,\lambda)\overline{w_k(x,\overline{\lambda})} = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu = 0,1,\dots,m-2, \\ i & \text{при } \nu = m-1. \end{cases} \tag{131}$$

Решая эту систему с помощью формул Крамера, с учетом (127) и (128), получим

$$\overline{w_k(x,\overline{\lambda})} = e^{-i\omega_k\lambda x}\left(\frac{i\omega_k}{m\lambda^{m-1}} + o(1)\right), \quad x \to \infty, \quad k = 0,1,\dots,m-1, \tag{132}$$

$$\overline{w_k(x,\overline{\lambda})} = O\left(e^{-i\omega_k\lambda x}\right), \quad x \to -\infty, \quad k = 0,1,\dots,m-1. \tag{133}$$

Из равенств (129), (130), (132) и (133) следует, что

$$\overline{w_k(x,\overline{\lambda})} = \frac{i\omega_k}{m\lambda^{m-1}}\overline{v_{m-k}(x,\overline{\lambda})}, \quad k = 0,1,\dots,m-1, \tag{134}$$

где $v_m(x,\overline{\lambda}) = v_0(x,\overline{\lambda})$. Отсюда в частности вытекает, что, если для данного λ существуют решения $u_k(x,\lambda)$ уравнения (1), удовлетворяющие асимптотическим равенствам (127) и (128), то также существуют решения $v_k(x,\overline{\lambda})$ уравнения (2), обладающие асимптотикой (129) и (130). В силу асимптотических равенств (127), (128) и соотношений (131), (134), для значений λ, удовлетворяющих условиям $0 < |arg\,\lambda| < \frac{\pi}{m}$ и $\lambda \in \tilde{\Omega}\setminus\tilde{G}$, ядро $R(x,t;\lambda)$ резольвенты оператора L выражается через функции $u_k(x,\lambda)$ и $v_k(x,\overline{\lambda})$ следующим образом : в случае $0 < arg\,\lambda < \frac{\pi}{m}$

$$im\,\lambda^{m-1}R(x,t;\lambda) = \begin{cases} -\sum\limits_{k=0}^{m_1}\omega_k u_k(x,\lambda)\overline{v_{m-k}(t,\overline{\lambda})}, & t \le x, \\ \sum\limits_{k=m_1+1}^{m-1}\omega_k u_k(x,\lambda)\overline{v_{m-k}(t,\overline{\lambda})}, & t \ge x, \end{cases}$$

где $m_1 = \left[\frac{m-1}{2}\right]$, а в случае $-\frac{\pi}{m} < arg\,\lambda < 0$

$$im\,\lambda^{m-1}R(x,t;\lambda) = \begin{cases} -\sum\limits_{k=1}^{m_0}\omega_k u_k(x,\lambda)\overline{v_{m-k}(t,\overline{\lambda})}, & t \le x, \\ \sum\limits_{k=m_0+1}^{m}\omega_k u_k(x,\lambda)\overline{v_{m-k}(t,\overline{\lambda})}, & t \ge x, \end{cases}$$

где $m_0 = \left[\frac{m}{2}\right]$ и $\omega_m = \omega_0$, $u_m(x,\lambda) = u_0(x,\lambda)$.

§4. ДВЕ РАЗЛИЧНЫЕ ПОСТАНОВКИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ РАССЕЯНИЯ

Предположим, что для каждого $\lambda \ne 0$ ($Im\,\lambda \ge 0$) решение $y^+(x,\lambda)$ уравнения (1), обладающее асимптотикой

$$y^+(x,\lambda) = e^{i\lambda x}(1+o(\lambda)), \quad x \to \infty, \tag{135}$$

может быть выбрано так, чтобы функция $y^+(x,\lambda)$ при каждом x была голоморфна по λ в открытой верхней полуплоскости и непрерывна в замкнутой верхней полуплоскости без нуля. Если удовлетворяющая указанным требованиям функция $y^+(x,\lambda)$ существует, то она единственна. Действительно, согласно лемме 1, для каждого $\lambda \ne 0$ из сектора $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m} \le arg\,\lambda \le \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{m}$ уравнение (1) имеет лишь одно решение $y^+(x,\lambda)$, обладающее асимптотикой (135). Для каждого x это решение голоморфно по λ в открытом секторе $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m} < arg\,\lambda < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{m}$ и непрерывно на его замыкании без нуля. Если требуемая функция существует, то она для каждого x является аналитическим продолжением по λ решения $y^+(x,\lambda)$ из указанного сектора в верхнюю полуплоскость. Поэтому при существовании она определяется однозначно. Эффективные достаточные условия, налагаемые на коэффициенты $p_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, m-2$, уравнения (1), при выполнении которых требуемая функция $y^+(x,\lambda)$ существует, можно найти в [11] (см. также [12]). А именно, если на некотором полубесконечном подинтервале (α, ∞) вещественной оси каждый из коэффициентов $p_k(x)$, $0 \le k \le m-2$, является сужением голоморфной в секторе $|arg\,(\zeta - \alpha)| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}$ комплексной ζ-плоскости функции $p_k(\zeta)$, удовлетворяющей оценке

$$\int_0^\infty (1 + t^{m-2-k})\,|p_k(t+\zeta)|\,dt \le h_k(Re\,\zeta),$$

где $h_k(x)$ – функция, невозрастающая и суммируемая на интервале (α,∞), то (см. [11]) при каждом λ $(Im\,\lambda \ge 0)$ дифференциальное уравнение (1) имеет решение

$$y^+(x,\lambda) = e^{i\lambda x}\left\{1 + \int_0^\infty e^{i\lambda t} K(x,t)\,dt\right\}, \quad x \ge \alpha. \tag{136}$$

При любом $t \ge 0$ функция $K(\zeta, t)$, голоморфная по ζ в рассматриваемом секторе, такова, что

$$|K(\zeta,t)| \le h\left(Re\,\zeta + \frac{t}{2}\right),$$

где $h(x)$ – невозрастающая суммируемая на интервале (α,∞) функция, строящаяся с помощью функций $h_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, m-2$. Представление (136) использовано в работах [5] – [7], [13] для решения обратных задач рассеяния. Введенная в работе [5] матрица рассеяния отличается от матрицы рассеяния (74). Целью настоящего параграфа является выяснение связи между этими матрицами.

Предположим, что существует решение $y^+(x,\lambda)$ $(Im\,\lambda \ge 0,\ \lambda \ne 0)$ уравнения (1), указанное в начале этого параграфа (условия его существования в дальнейшем изложении не будут существенны). Рассмотрим введенные в §2 решения $u_k(x,\lambda)$, $\lambda \in \bar{\Omega} \setminus \bar{G}$ и $u_k^\pm(x,\lambda)$, $\lambda \in \bar{l} \setminus \bar{G}'$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, уравнения (1) (см.

формулы (72), (73)). При $Im(\lambda\omega_k) \geq 0$ имеют место представления

$$u_k(x,\lambda) = y^+(x,\lambda\omega_k) + \sum_{s\in M_k^+(\lambda)} a_{ks}(\lambda) y^+(x,\lambda\omega_s), \quad \lambda \in \tilde{\Omega}\setminus\tilde{G}, \tag{137}$$

$$u_k^+(x,\lambda) = y^+(x,\lambda\omega_k) + \sum_{s\in M_k^+(\lambda\omega)} b_{ks}(\lambda) y^+(x,\lambda\omega_s), \quad \lambda \in \tilde{\ell}\setminus\tilde{G}', \tag{138}$$

$$u_k^-(x,\lambda) = y^+(x,\lambda\omega_k) + \sum_{s\in M_k^+(\lambda\overline{\omega})} c_{ks}(\lambda) y^+(x,\lambda\omega_s), \quad \lambda \in \tilde{\ell}\setminus\tilde{G}'. \tag{139}$$

Пусть открытый сектор Ω', имеющий вершину в нуле и ограниченный лучами ℓ^+ и ℓ^-, является одной из связных компонент открытого множества $\tilde{\Omega}$. Для определенности предположим, что сектор Ω' расположен в правой полуплоскости, а $arg\,\lambda_1 < arg\,\lambda_2$ для любых $\lambda_1 \in \ell^+$ и $\lambda_2 \in \ell^-$. Тогда, если целое число k $(0 \leq k \leq m-1)$ таково, что сектор $\omega_k\Omega' = \{\omega_k\lambda : \lambda \in \Omega'\}$ расположен в верхней полуплоскости, то в представлении (137) все функции $a_{ks}(\lambda)$ голоморфны на открытом множестве $\Omega'\setminus\tilde{G}$ и, когда $\lambda' \in \Omega'\setminus\tilde{G}$ стремится к $\lambda \in (\ell^+\cup\ell^-)\setminus\tilde{G}'$, существуют пределы

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} u(x,\lambda') = u^+(x,\lambda), \quad \lim_{\lambda'\to\lambda} a_{ks}(\lambda') = a_{ks}^+(\lambda), \quad \lambda \in \ell^+\setminus\tilde{G}', \tag{140}$$

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} u(x,\lambda') = u^-(x,\lambda), \quad \lim_{\lambda'\to\lambda} a_{ks}(\lambda') = a_{ks}^-(\lambda), \quad \lambda \in \ell^-\setminus\tilde{G}'. \tag{141}$$

При этом, имеют место равенства

$$a_{ks}^+(\lambda) = b_{ks}(\lambda), \quad \lambda \in \ell^+\setminus\tilde{G}', \tag{142}$$

$$a_{ks}^-(\lambda) = c_{ks}(\lambda), \quad \lambda \in \ell^-\setminus\tilde{G}', \tag{143}$$

где $b_{ks}(\lambda)$ и $c_{ks}(\lambda)$ – коэффициенты из представлений (138) и (139). Таким образом, функции $b_{ks}(\lambda)$, $\lambda \in \ell^+\setminus\tilde{G}'$, и $c_{ks}(\lambda)$, $\lambda \in \ell^-\setminus\tilde{G}'$, являются граничными значениями голоморфной функции $a_{ks}(\lambda)$, $\lambda \in \Omega'\setminus\tilde{G}$. Поэтому функции $b_{ks}(\lambda)$ и $c_{ks}(\lambda)$ однозначно определяют друг друга.

Если в секторе $\omega_k\Omega'$ содержится точка из верхней полуплоскости, то, в случае, когда порядок m дифференциального уравнения (1) четный, и этот сектор целиком лежит в верхней полуплоскости. В случае нечетного m либо сектор $\omega_k\Omega'$ целиком содержится в верхней полуплоскости, либо же его биссектриса лежит на вещественной оси. В последнем случае сектор Ω' разбивается своей биссектрисой ℓ' на два открытых сектора Ω^+ и Ω^-, ограниченных лучами ℓ^+, ℓ' и ℓ^-, ℓ' соответственно. Один из секторов $\omega_k\Omega^+$ и $\omega_k\Omega^-$ содержится в верхней полуплоскости. Если это $\omega_k\Omega^+$, то в представлении (137) коэффициенты $a_{ks}(\lambda)$ голоморфны на открытом множестве $\Omega^+\backslash\bar{G}$, непрерывны на множестве $(\Omega^+\cup\ell')\backslash \bar{G}$, существуют пределы (140) и имеет место равенство (142). Следовательно, каждая из функций $a_{ks}(\lambda)$, $\lambda\in\ell'\backslash\bar{G}$, и $b_{ks}(\lambda)$, $\lambda\in\ell^+\backslash\bar{G}'$, однозначно определяется другой. Если же сектор $\omega_k\Omega^-$ содержится в верхней полуплоскости, то функции $a_{ks}(\lambda)$ голоморфны на открытом множестве $\Omega^-\setminus\bar{G}$ и непрерывны на множестве $(\Omega^-\cup\ell')\setminus\bar{G}$. При этом, существуют пределы (141) и имеет место равенство (143). В этом случае каждая из функций $a_{ks},(\lambda)$, $\lambda\in\ell'\setminus\bar{G}$, и $c_{ks}(\lambda)$, $\lambda\in\ell^-\setminus\bar{G}'$, однозначно определяется другой.

В дальнейшем матричную функцию рассеяния (74) будем рассматривать лишь на лучах ℓ_{m_0} и ℓ_{m_0+1}, где $m_0=\left[\frac{m}{2}\right]$, т. е. в случае четного m – на лучах $arg\,\lambda=0$ и $arg\,\lambda=\frac{\pi}{m}$, а в случае нечетного m – на лучах $arg\,\lambda=-\frac{\pi}{2m}$ и $arg\,\lambda=\frac{\pi}{2m}$.

Рассмотрим следующие элементы матричной функции рассеяния (74) :

$$S_{k,m_1+1-k}(\lambda),\quad \lambda\in\ell_{m_0}\setminus\bar{G}',\quad k=1,\dots,m_1,\quad Re(\lambda\omega_k)\neq 0, \tag{144}$$

$$S_{k,m_1-k}(\lambda),\quad \lambda\in\ell_{m_0+1}\setminus\bar{G}',\quad k=0,\dots,m_1,\quad Re(\lambda\omega_k)\neq 0, \tag{145}$$

где $m_1=\left[\frac{m-1}{2}\right]$. В случае нечетного m рассмотрим также коэффициенты

$$b_{m_0,s-1}(\lambda),\quad c_{0s}(\lambda),\quad \lambda\in\ell_{m_0+1}\setminus\bar{G}',\quad s=1,\dots,m_1 \tag{146}$$

из представлений (138), (139) решений $u^+_{m_0}(x,\lambda)$ и $u^-_0(x,\lambda)$, $\lambda\in\ell_{m_0+1}\setminus\bar{G}'$, а в случае четного m – коэффициенты

$$b_{0,s}(\lambda),\quad c_{m_0s}(\lambda),\quad \lambda\in\ell_{m_0}\setminus\bar{G}',\quad s=1,\dots,m_1, \tag{147}$$

из представлений (138), (139) решений $u_0^+(x,\lambda)$ и $u_{m_0}^-(x,\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}'$.

Лемма 3. *Пусть для каждого $\lambda \neq 0$, $Im\,\lambda \geq 0$, существует решение $y^+(x,\lambda)$ дифференциального уравнения (1) с асимптотикой (135), которое для каждого x голоморфно по λ в открытой верхней полуплоскости и непрерывно в замкнутой верхней полуплоскости без нуля. Тогда коэффициенты (146) и (147) однозначно определяются элементами (144) и (145) матричной функции рассеяния. Обратно, функции (144) и (145) однозначно определяются коэффициентами (146) или (147). Используя равенства (78), (79), (92), (93), (96) и аналитическое продолжение функций, эти коэффициенты (или элементы матричной функции рассеяния) могут быть найдены с помощью последовательного определения коэффициентов $b_{ks}(\lambda)$ и $c_{ks}(\lambda)$ представлений (138) и (139) всех решений $u_k^\pm(x,\lambda)$, $\lambda \in (\ell_{m_0} \cup \ell_{m_0+1}) \setminus \bar{G}'$, $Im\,(\lambda\omega_k) > 0$.*

Доказательство. Пусть $m = 4n-1$ или $m = 4n$, где $n \geq 1$. Тогда $m_1 = 2n-1$, и, в силу (92), (93), имеют место равенства :

$$b_{n+\nu,n-\nu}(\lambda) = -S_{n+\nu,n-\nu}(\lambda), \quad c_{n-\nu,n+\nu}(\lambda) = S_{n-\nu,n+\nu}(\lambda),$$
$$\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}', \quad \nu = 1,\ldots,n-1, \tag{148}$$
$$b_{n+\nu,n-1-\nu}(\lambda) = -S_{n+\nu,n-1-\nu}(\lambda), \quad c_{n-1-\nu,n+\nu}(\lambda) = S_{n-1-\nu,n+\nu}(\lambda),$$
$$\lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}', \quad \nu = 0,\ldots,n-1. \tag{149}$$

Функции $b_{n,n-1}(\lambda)$ и $c_{n-1,n}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}'$, в случае $m = 3$ совпадают с (146), и из равенств (149) получаем, что для $\nu = 0$ эти функции определяются однозначно. В случае $m \geq 4$ функции $b_{n-1,n}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}'$, $c_{n-1,n}(\lambda)$, $\lambda \in$ $\in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}'$, являются граничными значениями голоморфной функции $a_{n-1,n}(\lambda)$, $\lambda \in \Omega_{m_0} \setminus \bar{G}$, т. е. коэффициента разложения (137) решения $u_{n-1}(x,\lambda)$, $\lambda \in \Omega_{m_0} \setminus \bar{G}$. Имеет место равенство $b_{n+1,n}(\lambda) = b_{n,n-1}(\lambda\omega_1)$, $\lambda \in \ell_{m_0-1} \setminus \bar{G}'$. Функции $b_{n+1,n}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0-1} \setminus \bar{G}'$ и, $c_{n+1,n}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}'$, являются граничными значениями голоморфной функции $a_{n+1,n}(\lambda)$, $\lambda \in \Omega_{m_0-1} \setminus \bar{G}$, т. е. коэффициента разложения

(137) решения $u_{n+1}(x,\lambda)$, $\lambda \in \Omega_{m_0-1} \setminus \bar{G}$. В случае $m = 4$ функции $b_{n-1,n}(\lambda)$ и $c_{n+1,n}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}'$, совпадают с (147). Вследствие этого они определяются однозначно. В случае $m > 4$, т. е. $n \geq 2$, предположим, что для некоторого ν $(0 \leq \nu \leq n-2)$ функции

$$b_{n+\nu,s-1}(\lambda),\ \ c_{n-1-\nu,s}(\lambda),\quad \lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}',\quad n-\nu \leq s \leq n+\nu, \tag{150}$$

определяются однозначно по элементам (144) и (145) матричной функции рассеяния (в силу (149) при $\nu = 0$ это предположение выполняется). Докажем, что тогда однозначно определяются также функции

$$b_{n-1-\nu,s}(\lambda),\quad c_{n+1+\nu,s}(\lambda),\quad \lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}',\quad n-\nu \leq s \leq n+\nu, \tag{151}$$

$$b_{n+1+\nu,s-1}(\lambda),\quad c_{n-1-\nu,s}(\lambda),\quad \lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}',\quad n-\nu \leq s \leq n+1+\nu, \tag{152}$$

$$b_{n-2-\nu,s}(\lambda),\quad c_{n+1+\nu,s}(\lambda),\quad \lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}',\quad n-1-\nu \leq s \leq n+\nu, \tag{153}$$

$$b_{n+1+\nu,s-1}(\lambda),\quad c_{n-2-\nu,s}(\lambda),\quad \lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}',\quad n-1-\nu \leq s \leq n+1+\nu. \tag{154}$$

Действительно, для каждого s $(n-\nu \leq s \leq n+\nu)$ функции $b_{n-1-\nu,s}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}'$, и $c_{n-1-\nu,s}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}'$, являются граничными значениями голоморфной функции $a_{n-1-\nu,s}(\lambda)$, $\lambda \in \Omega_{m_0} \setminus \bar{G}$, т. е. одного из коэффициентов представления (137) решения $u_{n-1-\nu}(x,\lambda)$, $\lambda \in \Omega_{m_0} \setminus \bar{G}$. Поэтому

$$b_{n+1+\nu,s}(\lambda) = b_{n+\nu,s-1}(\lambda\omega_1),\quad \lambda \in \ell_{m_0-1} \setminus \bar{G}',$$

и функции $b_{n+1+\nu,s}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0-1} \setminus \bar{G}'$, и $c_{n+1+\nu,s}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}'$, являются граничными значениями голоморфной функции $a_{n+1+\nu,s}(\lambda)$, $\lambda \in \Omega_{m_0-1} \setminus \bar{G}$. Таким образом, функции (151) однозначно определены. В силу (78) и (96), при $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}'$ и $n-\nu \leq s \leq n+\nu$ имеем

$$c_{n+1+\nu,s}(\lambda) = b_{n+1+\nu,s}(\lambda) + b_{n-1-\nu,s}(\lambda) S_{n+1+\nu,n-1-\nu}(\lambda),$$

$$c_{n-1-\nu,s}(\lambda) = b_{n-1-\nu,s}(\lambda) S_{n-1-\nu,n-1-\nu}(\lambda) + b_{n+1+\nu,s}(\lambda) S_{n-1-\nu,n+1+\nu}(\lambda).$$

Отсюда и из (79) получим

$$b_{n+1+\nu,s}(\lambda) = c_{n+1+\nu,s}(\lambda) - b_{n-1-\nu,s}(\lambda) S_{n+1+\nu,n-1-\nu}(\lambda), \tag{155}$$

$$c_{n-1-\nu,s}(\lambda) = b_{n-1-\nu,s}(\lambda) + c_{n+1+\nu,s}(\lambda) S_{n-1-\nu,n+1+\nu}(\lambda), \quad n-\nu \le s \le n+\nu. \tag{156}$$

Из равенств (148), (155) и (156) следует, что функции (152) однозначно определены. Для каждого s $(n-1-\nu \le s \le n+\nu)$ функции $b_{n+1+\nu,s}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \tilde{G}'$, и $c_{n+1+\nu,s}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \tilde{G}'$, являются граничными значениями голоморфной функции $a_{n+1+\nu,s}(\lambda)$, $\lambda \in \Omega_{m_0} \setminus \bar{G}$, а функции $b_{n-1-\nu,s+1}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0-1} \setminus \tilde{G}'$, и $c_{n-1-\nu,s+1}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \tilde{G}'$, – граничными значениями голоморфной функции $a_{n-1-\nu,s+1}(\lambda)$, $\lambda \in \Omega_{m_0-1} \setminus \bar{G}$. Отсюда и из равенства

$$b_{n-2-\nu,s}(\lambda) = b_{n-1-\nu,s+1}(\lambda\overline{\omega_1}), \quad \lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \tilde{G}'$$

следует, что однозначно определены также функции (153). По аналогии с выводом (155) и (156), в силу (78), (79) и (96) для $\lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \tilde{G}'$ имеем

$$b_{n+1+\nu,s}(\lambda) = c_{n+1+\nu,s}(\lambda) - b_{n-2-\nu,s}(\lambda) S_{n+1+\nu,n-2-\nu}(\lambda),$$

$$c_{n-2-\nu,s}(\lambda) = b_{n-2-\nu,s}(\lambda) + c_{n+1+\nu,s}(\lambda) S_{n-2-\nu,n+1+\nu}(\lambda), \quad n-1-\nu \le s \le n+\nu.$$

Отсюда и из (149) следует, что функции (154) определены однозначно. Из доказанного утверждения по индукции получаем, что функции (150) определены однозначно для всех ν $(0 \le \nu \le n-1)$. Однако, при $\nu = n-1$ (150) является набором функций

$$b_{2n-1,s-1}(\lambda), \quad c_{0s}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \tilde{G}', \quad s = 1, \ldots, 2n-1,$$

совпадающим с (146) в случае $m = 4n-1$. В случае $m = 4n$, при $1 \le s \le 2n-1$, функции $b_{0s}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \tilde{G}'$, и $c_{0s}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \tilde{G}'$, являются граничными значениями голоморфной функции $a_{0s}(\lambda)$, $\lambda \in \Omega_{m_0} \setminus \bar{G}$. Одновременно, имеет место равенство

$$b_{2n,s}(\lambda) = b_{2n-1,s-1}(\lambda\omega_1), \quad \lambda \in \ell_{m_0-1} \setminus \tilde{G}',$$

причем функции $b_{2n,s}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0-1} \setminus \tilde{G}'$, и $c_{2n,s}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \tilde{G}'$, – граничные значения голоморфной функции $a_{2n,s}(\lambda)$, $\lambda \in \Omega_{m_0-1} \setminus \bar{G}$. Таким образом, множество функций

$$b_{0s}(\lambda), \quad c_{2n,s}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0} \setminus \tilde{G}', \quad s = 1, \ldots, 2n-1,$$

совпадающее с (147), определено однозначно. В силу равенств (78), (95) и леммы

2 в равенстве (96) функция $S_{kk}(\lambda)$, $\lambda \in \bar{\ell} \setminus \tilde{G}'$ может обращаться в нуль лишь на множестве нулевой линейной меры Лебега. Тем самым, вышеприведенные рассуждения обратимы. В результате получаем, что в случаях $m = 4n - 1$ и $m = 4n$ элементы (144) и (145) матричной функции рассеяния однозначно определены набором функций (146) и (147).

Пусть $m = 4n + 1$ или $m = 4n + 2$, где $n \geq 1$. Тогда $m_1 = 2n$ и, в силу (72), (73), справедливы равенства

$$b_{n+1+\nu,n-\nu}(\lambda) = -S_{n+1+\nu,n-\nu}(\lambda), \quad c_{n-\nu,n+1+\nu}(\lambda) = S_{n-\nu,n+1+\nu}(\lambda),$$
$$\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \tilde{G}', \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{157}$$

$$b_{n+\nu,n-\nu}(\lambda) = -S_{n+\nu,n-\nu}(\lambda), \quad c_{n-\nu,n+\nu}(\lambda) = S_{n-\nu,n+\nu}(\lambda),$$
$$\lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \tilde{G}', \quad \nu = 1, \ldots, n. \tag{158}$$

При $\nu = 0$ из равенства (157) следует, что функции $b_{n+1,n}(\lambda)$ и $c_{n,n+1}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \tilde{G}'$ определены однозначно. С помощью аналитического продолжения последних однозначно определяются функции $c_{n+1,n}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \tilde{G}'$ и $b_{n,n+1}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0-1} \setminus \tilde{G}'$. Учитывая равенство $b_{n-1,n}(\lambda) = b_{n,n+1}(\lambda\overline{\omega_1})$, $\lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \tilde{G}'$, получаем функции $b_{n-1,n}(\lambda)$ и $c_{n+1,n}(\lambda)$ на луче ℓ_{m_0+1}. Воспользовавшись равенствами (78), (79) и (96) на луче ℓ_{m_0+1} определяем также функции $b_{n+1,n}(\lambda)$ и $c_{n-1,n}(\lambda)$. Таким образом, с учетом (158) однозначно определяется набор функций

$$b_{n+1,n-1}(\lambda), \quad b_{n+1,n}(\lambda), \quad c_{n-1,n}(\lambda), \quad c_{n-1,n+1}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \tilde{G}', \tag{159}$$

совпадающий с (146) при $m = 5$. Если $m \geq 6$, то аналитическим продолжением функций (159) однозначно определяется набор функций

$$b_{n-1,n}(\lambda), \quad b_{n-1,n+1}(\lambda), \quad c_{n+2,n}(\lambda), \quad c_{n+2,n+1}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0} \setminus \tilde{G}',$$

совпадающий с (147) при $m = 6$. В случае $m > 6$, т. е. $n \geq 2$, предположим, что для некоторого ν $(0 \leq \nu \leq n-2)$ функции

$$b_{n+1+\nu,s}(\lambda), \quad c_{n-\nu,s+1}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0} \setminus \tilde{G}', \quad n-\nu \leq s \leq n+\nu, \tag{160}$$

однозначно определяются элементами (144) и (145) матричной функции рассеяния (ввиду (157) при $\nu = 0$ это предположение выполняется). Повторяя вышеприведенные рассуждения, легко видеть, что функции

$$b_{n-1-\nu,s}(\lambda), \quad c_{n+1+\nu,s}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}', \quad n-\nu \leq s \leq n+\nu,$$

$$b_{n+1+\nu,s-1}(\lambda), \quad c_{n-1-\nu,s}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}', \quad n-\nu \leq s \leq n+1+\nu,$$

$$b_{n-1-\nu,s}(\lambda), \quad c_{n+2+\nu,s}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}', \quad n-\nu \leq s \leq n+1+\nu,$$

$$b_{n+2+\nu,s}(\lambda), \quad c_{n-1-\nu,s+1}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}', \quad n-1-\nu \leq s \leq n+1+\nu$$

тоже определены однозначно. Из этого утверждения по индукции следует, что функции (160) однозначно определены для всех ν $(0 \leq \nu \leq n-1)$. При $\nu = n-1$ (160) есть к набор функций

$$b_{2n,s}(\lambda), \quad c_{1,s+1}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}', \quad s = 1, \ldots, 2n-1.$$

Аналитическим продолжением этих функций однозначно определяются функции

$$b_{0s}(\lambda), \quad c_{2n,s}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}', \quad s = 1, \ldots, 2n-1.$$

В силу (78), (79), (96) и (157) этими функциями однозначно определяется набор функций

$$b_{2n,s-1}(\lambda), \quad c_{0s}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}', \quad s = 1, \ldots, 2n, \tag{161}$$

совпадающий с (146) при $m = 4n+1$. Аналитическим продолжением функций (161) однозначно определяется набор функций

$$b_{0s}(\lambda), \quad c_{2n+1,s}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}', \quad s = 1, \ldots, 2n,$$

который совпадает с (147) при $m = 4n+2$. Если приведенные рассуждения провести в обратном порядке, то получим, что при $m = 4n+1$ и при $m = 4n+2$ элементы (144) и (145) матричной функции рассеяния определяются однозначно по наборам функций (146) или (147). Лемма доказана.

В предположении, что выполнены условия леммы 3, в случае нечетного m для каждого вещественного λ $(\lambda \notin G \cup \{0\})$ решение $u(x, \lambda)$ уравнения (1), указанное в лемме 2, представимо в виде

$$u(x,\lambda) = y^+(x,\lambda) + \sum_{s \in M_0^+(\lambda)} a_s(\lambda) y^+(x, \lambda\omega_s), \quad Im\,\lambda = 0, \quad \lambda \notin G \cup \{0\}, \tag{162}$$

где $y^+(x,\lambda)$ – решение уравнения (1), обладающее асимптотикой (135), голоморфное по λ в открытой верхней полуплоскости и непрерывное в замкнутой верхней полуплоскости без нуля.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда в представлении (162) коэффициенты*

$$a_s(\lambda)\ (\lambda > 0,\ \lambda \notin G), \quad a_{m-s}(\lambda)\ (\lambda < 0,\ \lambda \notin G), \quad s = 1, \ldots, m_0, \tag{163}$$

однозначно определяются элементами (144) и (145) матричной функции рассеяния (74). Обратно, функции (144) и (145) однозначно определяются коэффициентами (163).

В случае четного m коэффициенты

$$b_{m_0,s-1}(\lambda), \quad c_{0s}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}', \quad s = 1, \ldots, m_0, \tag{164}$$

разложений (138) и (139) решений $u^+_{m_0}(x,\lambda)$ и $u^-_0(x,\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}'$, уравнения (1) однозначно определяются элементами (144), (145) и $S_{m_0 0}(\lambda)$, $S_{0 m_0}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}'$, матричной функции рассеяния (74). Обратно, указанные элементы матричной функции рассеяния однозначно определяются коэффициентами (164).

Доказательство. Пусть m нечетное. Рассмотрим представление (137) решений $u_0(x,\lambda)$, $0 \le arg\,\lambda \le \frac{\pi}{2m}$, $\lambda \notin \bar{G} \cup \{0\}$, и $u_{m_0}(x,\lambda)$, $\frac{\pi}{2m} < arg\,\lambda \le \frac{\pi}{m}$, $\lambda \notin \bar{G} \cup \{0\}$ уравнения(1). В (137) коэффициенты $a_{0s}(\lambda)$ и $a_{m_0,s-1}(\lambda)$, $s = 1, 2, \ldots, m_0$, голоморфны, соответственно, на открытых множествах $0 < arg\,\lambda < \frac{\pi}{2m}$, $\lambda \notin \bar{G} \cup \{0\}$, и $\frac{\pi}{2m} < arg\,\lambda < \frac{\pi}{m}$, $\lambda \notin \bar{G} \cup \{0\}$, и непрерывны, соответственно, на множествах $0 \le arg\,\lambda < \frac{\pi}{2m}$, $\lambda \notin \bar{G} \cup \{0\}$, и $\frac{\pi}{2m} < arg\,\lambda \le \frac{\pi}{m}$, $\lambda \notin \bar{G} \cup \{0\}$. В представлениях (138) и (139) решений $u^+_{m_0}(x,\lambda)$ и $u^-_0(x,\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}'$, коэффициенты

$b_{m_0,s-1}(\lambda)$ и $c_{0s}(\lambda)$, $1 \le s \le m_0$, являются, соответственно, граничными значениями голоморфных функций $a_{m_0,s-1}(\lambda)$ и $a_{0,s}(\lambda)$. Таким образом, набор функций (146) и набор функций

$$a_{m_0 s}(\lambda), \quad arg\,\lambda = \frac{\pi}{m}, \quad \lambda \notin \tilde{G} \cup \{0\}, \quad s = 0, 1, \dots, m_0 - 1,$$
$$a_{0s}(\lambda), \quad arg\,\lambda = 0, \quad \lambda \notin \tilde{G} \cup \{0\}, \quad s = 1, \dots, m_0$$

однозначно определяют друг друга. Однако, $u(x, \lambda) = u_0(x, \lambda)$ и $u(x, \lambda) = = u_{m_0}(x, \lambda\overline{\omega_{m_0}})$. Тем самым, приходим к заключению, что в представлении (162) $a_s(\lambda) = a_{0s}(\lambda)$, $\lambda > 0$, и $a_{m-s}(\lambda) = a_{m_0,m_0-s}(\lambda\overline{\omega_{m_0}})$, $\lambda < 0$, $s = 1, \dots, m_0$. В силу леммы 3, набор элементов (144) и (145) матричной функции рассеяния и набор функций (163) однозначно определяют друг друга.

В случае четного m функции (164) представимы функциями (147) и элементами $S_{m_0 0}(\lambda)$, $S_{0 m_0}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \tilde{G}'$, матричной функции рассеяния посредством равенств (78), (79), (92), (93) и (96). Отсюда и из леммы 3 следует, что набор функций (164) и набор элементов (144), (145), $S_{m_0 0}(\lambda)$, $S_{0 m_0}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \tilde{G}'$, матричной функции рассеяния однозначно определяют друг друга. Лемма доказана.

Предположим теперь, что оператор L самосопряженный, т. е. что его коэффициенты $p_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, m - 2$, вещественны. Рассмотрим введенную в работе [5] матрицу рассеяния оператора L, отметив, что введена она посредством нормированной обобщенной собственной функции оператора L, соответствующей непрерывному спектру.

В случае нечетного m, что для каждого вещественного значения $\lambda \neq 0$ такого, что число λ^m не является собственным значением L, дифференциальное уравнение (1) имеет единственное, с точностью до постоянного множителя, ограниченное на всей оси решение $w(x, \lambda) \not\equiv 0$. Это решение обладает асимптотикой

$$w(x, \lambda) = A_0^{\pm}(\lambda) e^{i\lambda x} + o(1), \quad x \to \pm\infty, \tag{165}$$

причем $|A_0^+(\lambda)| = |A_0^-(\lambda)| \neq 0$. Действительно, если для вещественного числа $\lambda \neq 0$ уравнение (1) имеет решение $w(x, \lambda)$, ограниченное на всей оси, то оно допускает представления

$$w(x,\lambda) = A_0^+(\lambda) y_0^+(x,\lambda) + \sum_{s \in M_0^+(\lambda)} A_s^+(\lambda) y_s^+(x,\lambda), \tag{166}$$

$$w(x,\lambda) = A_0^-(\lambda) y_0^-(x,\lambda) + \sum_{s \in M_0^-(\lambda)} A_s^-(\lambda) y_s^-(x,\lambda), \tag{167}$$

где $y_k^{\pm}(x, \lambda)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$ – некоторые решения уравнения (1), обладающие асимптотикой (13). Следовательно, $w(x, \lambda)$ удовлетворяет асимптотическим соотношениям (165). Из равенств (99), (100), (166) и (167) получим, что

$$[w(x,\lambda), w(x,\lambda)] = m\lambda^{m-1} \left|A_0^+(\lambda)\right|^2, \quad [w(x,\lambda), w(x,\lambda)] = m\lambda^{m-1} \left|A_0^-(\lambda)\right|^2.$$

Тем самым $|A_0^+(\lambda)| = |A_0^-(\lambda)|$. Отсюда следует, что каждая из систем решений $y_0^+(x, \lambda)$, $y_s^{\pm}(x, \lambda)$, $s \in M_0^{\pm}(\lambda)$ и $y_0^-(x, \lambda)$, $y_s^{\pm}(x, \lambda)$, $s \in M_0^{\pm}(\lambda)$, линейно зависима тогда и только тогда, когда линейно зависима система решений $y_s^{\pm}(x, \lambda)$, $s \in M_0^{\pm}(\lambda)$, т. е. когда число λ^m – собственное значение оператора L. Если λ^m не является собственным значением L, то уравнение (1) имеет решение $w(x, \lambda)$, допускающее представления (166) и (167), где $|A_0^{\pm}(\lambda)| \neq 0$. Если это решение нормировать одним из условий $A_0^+(\lambda) = 1$ или $A_0^-(\lambda) = 1$,то оно будет непрерывным по λ и, как указано в работе [5], непрерывным продолжением определяется для всех вещественных $\lambda \neq 0$.

В случае четного m для каждого $\lambda > 0$ такого, что λ^m не является собственным значением оператора L, уравнение (1) имеет два линейно независимых решения, ограниченных на всей оси, причем любые три таких решения уже линейно зависимы. Если $w_1(x, \lambda)$ и $w_2(x, \lambda)$ – ограниченные на всей оси линейно независимые решения, то имеют место асимптотические равенства

$$w_\nu(x,\lambda) = B_{\nu 0}^{\pm}(\lambda) e^{i\lambda x} + B_{\nu m_0}^{\pm}(\lambda) e^{-i\lambda x} + o(1), \quad x \to \pm\infty, \quad \nu = 1, 2, \tag{168}$$

где числа $B_{\nu 0}^{\pm}(\lambda)$ и $B_{\nu m_0}^{\pm}(\lambda)$ связаны соотношениями

$$\left|B_{\nu 0}^+(\lambda)\right|^2 + \left|B_{\nu m_0}^-(\lambda)\right|^2 = \left|B_{\nu 0}^-(\lambda)\right|^2 + \left|B_{\nu m_0}^+(\lambda)\right|^2, \quad \nu = 1, 2, \tag{169}$$

$$B_{10}^{+}(\lambda)\overline{B_{20}^{+}(\lambda)}+B_{1m_0}^{-}(\lambda)\overline{B_{2m_0}^{-}(\lambda)}=B_{10}^{-}(\lambda)\overline{B_{20}^{-}(\lambda)}+B_{1m_0}^{+}(\lambda)\overline{B_{2m_0}^{+}(\lambda)}, \tag{170}$$

причем определители матриц

$$\begin{pmatrix} B_{10}^{+}(\lambda) & B_{1m_0}^{-}(\lambda) \\ B_{20}^{+}(\lambda) & B_{2m_0}^{-}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B_{1m_0}^{+}(\lambda) & B_{10}^{-}(\lambda) \\ B_{2m_0}^{+}(\lambda) & B_{20}^{-}(\lambda) \end{pmatrix} \tag{171}$$

отличны от нуля и равны по модулю. Действительно, если для $\lambda > 0$ уравнение (1) имеет решения $w_1(x,\lambda)$ и $w_2(x,\lambda)$, ограниченные на всей оси, то эти решения допускают при $\nu = 1,2$ следующие представления :

$$w_\nu(x,\lambda)=B_{\nu 0}^{+}(\lambda)y_0^{+}(x,\lambda)+B_{\nu m_0}^{+}(\lambda)y_{m_0}^{+}(x,\lambda)+\sum_{s=1}^{m_0-1}B_{\nu s}^{+}(\lambda)y_s^{+}(x,\lambda), \tag{172}$$

$$w_\nu(x,\lambda)=B_{\nu 0}^{-}(\lambda)y_0^{-}(x,\lambda)+B_{\nu m_0}^{-}(\lambda)y_{m_0}^{-}(x,\lambda)+\sum_{s=m_0+1}^{m-1}B_{\nu s}^{-}(\lambda)y_s^{-}(x,\lambda). \tag{173}$$

Следовательно, $w_1(x,\lambda)$ и $w_2(x,\lambda)$ обладают асимптотикой (168). Из равенств (99), (100), (172) и (173) получаем

$$[w_\nu(x,\lambda),w_\nu(x,\lambda)]=m\lambda^{m-1}\left|B_{\nu 0}^{+}(\lambda)\right|^2-m\lambda^{m-1}\left|B_{\nu m_0}^{+}(\lambda)\right|^2, \quad \nu=1,2,$$

$$[w_\nu(x,\lambda),w_\nu(x,\lambda)]=m\lambda^{m-1}\left|B_{\nu 0}^{-}(\lambda)\right|^2-m\lambda^{m-1}\left|B_{\nu m_0}^{-}(\lambda)\right|^2, \quad \nu=1,2,$$

$$[w_1(x,\lambda),w_2(x,\lambda)]=m\lambda^{m-1}B_{10}^{+}(\lambda)\overline{B_{20}^{+}(\lambda)}-m\lambda^{m-1}B_{1m_0}^{+}(\lambda)\overline{B_{2m_0}^{+}(\lambda)},$$

$$[w_1(x,\lambda),w_2(x,\lambda)]=m\lambda^{m-1}B_{10}^{-}(\lambda)\overline{B_{20}^{-}(\lambda)}-m\lambda^{m-1}B_{1m_0}^{-}(\lambda)\overline{B_{2m_0}^{-}(\lambda)}.$$

Поэтому имеют место равенства (169) и (170), в силу которых опрелелители матриц (171) равны по модулю. Из (169) и (170) следует, что каждая из систем решений $y_0^{+}(x,\lambda)$, $y_{m_0}^{-}(x,\lambda)$, $y_s^{\pm}(x,\lambda)$, $s\in M_0^{\pm}(\lambda)$, и $y_0^{-}(x,\lambda)$, $y_{m_0}^{+}(x,\lambda)$, $y_s^{\pm}(x,\lambda)$, $s\in M_0^{\pm}(\lambda)$, линейно зависима тогда и только тогда, когда линейно зависима система решений $y_s^{\pm}(x,\lambda)$, $s\in M_0^{\pm}(\lambda)$, т. е. когда число λ^m является собственным значением оператора L. Если же λ^m не является собственным значением L, то уравнение (1) имеет ограниченные на всей оси решения $w_1(x,\lambda)$ и $w_2(x,\lambda)$, для которых определители матриц (171) отличны от нуля. Таким образом, эти решения линейно независимы. При этом, одну из невырожденных матриц (171) можно задать произвольно, и ею однозначно определяеть вторую матрицу и решения $w_\nu(x,\lambda)$. Заметим, что если одна из матриц (171) унитарна, то, в силу равенств (169) и (170), унитарна также другая. Далее, если одна из матриц (171) тождественно равна единичной, то отмеченные решения непрерывны по λ, и, как указано в [5], допускают непрерывное продолжение, определяющее их для всех $\lambda > 0$.

В случае нечетного m для каждого вещественно $\lambda \neq 0$ выберем решение $w(x,\lambda)$ уравнения (1) с асимптотикой (165) так, чтобы $|A_0^\pm(\lambda)| = 1$, а в случае четного m для каждого $\lambda > 0$ выберем решения $w_1(x,\lambda)$ и $w_2(x,\lambda)$ уравнения (1), обладающие асимптотикой (168) так, чтобы матрицы (171) были унитарными. При этом будем считать, что $A_0^\pm(\lambda)$ и элементы матриц (171) – измеримые функции. Кроме того, в случае четного m для вещественных $\lambda \neq 0$ решение $w(x,\lambda)$ уравнения (1) определим по формуле

$$w(x,\lambda) = \begin{cases} w_1(x,\lambda), & \lambda > 0, \\ w_2(x,-\lambda), & \lambda < 0. \end{cases}$$

При отмеченном выборе имеет место следующее разложение по собственным функциям оператора L : для любой функции $f \in L^2(-\infty,\infty)$ интеграл

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{w(x,\lambda)}\,dx, \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

сходится в норме пространства $L^2(-\infty,\infty)$ и справедливо равенство

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)w(x,\lambda)\,d\lambda + \sum_k w_k(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{w_k(t)}\,dt,$$

где первый интеграл сходится в $L^2(-\infty,\infty)$ норме, а $\{w_k(x)\}$ – ортонормированная система всех собственных функций оператора L. При этом имеет место равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda + \sum_k \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{w_k(t)}\,dt \right|^2.$$

Теперь, вместе с требованием о вещественности коэффициентов $p_k(x)$, $k = 0,1,\ldots,m-2$, предположим, что уравнение (1) имеет решение $y^+(x,\lambda)$ ($Im\,\lambda \geq 0$, $\lambda \neq 0$), указанное в начале этого параграфа. Тогда при нечетном m

выбранное решение $w(x,\lambda)$ допускает представление

$$w(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{m_0} A_k^+(\lambda)y^+(x,\lambda\omega_k), \quad \lambda>0, \tag{174}$$

$$w(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{m_0} A_k^+(\lambda)y^+(x,\lambda\overline{\omega_k}), \quad \lambda<0. \tag{175}$$

Обозначим

$$H_{kj}(\lambda)=A_k^+(\lambda)\overline{A_j^+(\lambda)}, \quad -\infty<\lambda<\infty, \quad \lambda\neq 0, \quad k,j=0,1,\ldots,m_0. \tag{176}$$

Так как $|A_0^\pm(\lambda)|=1$, то

$$H_{00}(\lambda)=1, \quad H_{kj}(\lambda)=H_{k0}(\lambda)\overline{H_{j0}(\lambda)}, \quad k,j=0,1,\ldots,m_0. \tag{177}$$

Кроме того, функции $H_{kj}(\lambda)$ не зависят от выбора решения $w(x,\lambda)$, для которого $|A_0^\pm(\lambda)|=1$, и тем самым непрерывны.

В случае четного m выбранные решения $w_1(x,\lambda)$ и $w_2(x,\lambda)$ представимы в виде

$$w_\nu(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{m_0} B_{\nu k}^+(\lambda)y^+(x,\lambda\omega_k), \quad \lambda>0, \quad \nu=1,2. \tag{178}$$

В этом случае функции $H_{kj}(\lambda)$ определим по формуле

$$H_{kj}(\lambda)=B_{1k}^+(\lambda)\overline{B_{1j}^+(\lambda)}+B_{2k}^+(\lambda)\overline{B_{2j}^+(\lambda)}, \quad \lambda>0, \quad k,j=0,1,\ldots,m_0. \tag{179}$$

В силу унитарности матриц (171) справедливы равенства

$$H_{00}(\lambda)=H_{m_0m_0}(\lambda)=1, \tag{180}$$

$$H_{kj}(\lambda)=H_{km_0}(\lambda)\overline{H_{jm_0}(\lambda)}+\left[H_{k0}(\lambda)-H_{km_0}(\lambda)\overline{H_{0m_0}(\lambda)}\right]\times$$
$$\times\left[\overline{H_{j0}(\lambda)}-H_{0m_0}(\lambda)\overline{H_{jm_0}(\lambda)}\right]\left[1-|H_{0m_0}(\lambda)|^2\right]^{-1}, \; k,j=0,1,\ldots,m_0, \tag{181}$$

причем, равенство $|H_{0m_0}(\lambda)|=1$ может выполняться лишь на некотором, конечном или счетном и ограниченном множестве с единственной возможной предельной точкой в начале координат. В рассматриваемом случае функции $H_{kj}(\lambda)$ также не зависят от выбора решений $w_1(x,\lambda)$ и $w_2(x,\lambda)$, для которых матрицы (171) унитарны, и следовательно, эти функции непрерывны.

Рассмотрим введенную в [5] эрмитову неотрицательную матрицу

$$H(\lambda) = \Big(H_{kj}(\lambda)\Big)_{k,j=0}^{m_0}, \quad \lambda \in \sigma_0 \setminus \{0\},$$

где σ_0 – непрерывный спектр оператора L, т.е. $\sigma_0 = (-\infty, \infty)$ при нечетном m и $\sigma_0 = [0, \infty)$ при четном m. Матрицу $H(\lambda)$ тоже будем называть *матрицей рассеяния* оператора L. В случае нечетного m из равенств (177) следует, что матрица $H(\lambda)$ вполне определяется заданием ее элементов $H_{k0}(\lambda)$, $k = 1, \dots, m_0$. При четном m, в силу равенств (180) и (181), матрица $H(\lambda)$ вполне определяется своими элементами $H_{0m_0}(\lambda)$, $H_{km_0}(\lambda)$, $H_{k0}(\lambda)$, $k = 1, \dots, m_0 - 1$.

Теорема 4. *Пусть коэффициенты $p_k(x)$, $k = 1, \dots, m-2$, уравнения (1) вещественны, а для каждого λ ($\lambda \neq 0$, $Im\,\lambda \geq 0$) решение $y^+(x, \lambda)$ уравнения (1), обладающее асимптотикой (135) может быть выбрано так, чтобы оно было голоморфно по λ в открытой верхней полуплоскости и непрерывно в ее замыкании без нуля. Тогда матрицы рассеяния $S(\lambda)$ и $H(\lambda)$ самосопряженного оператора L однозначно определяют друг друга. При этом, в случае нечетного m справедливы равенства*

$$H_{k0}(\lambda) = a_k(\lambda), \quad \lambda > 0, \quad H_{k0}(\lambda) = a_{m-k}(\lambda), \quad \lambda < 0, \quad k = 1, \dots, m_0, \tag{182}$$

где $a_k(\lambda)$ – коэффициенты (163) из представления (162) решения $u(x, \lambda)$ уравнения (1). В случае же четного m и $\lambda > 0$ справедливы равенства

$$H_{0m_0}(\lambda) = b_{m_00}(\lambda) = \overline{c_{0m_0}(\lambda)} = -S_{m_00}(\lambda) = \overline{S_{0m_0}(\lambda)}, \tag{183}$$

$$H_{km_0}(\lambda) = b_{m_0k}(\lambda), \quad H_{k0}(\lambda) = c_{0k}(\lambda), \quad k = 1, \dots, m_0 - 1, \tag{184}$$

где $b_{m_0k}(\lambda)$ и $c_{0k}(\lambda)$ – коэффициенты (164) из представлений (138) и (139) решений $u^+_{m_0}(x, \lambda)$ и $u^-_0(x, \lambda)$ уравнения (1).

Доказательство. В случае нечетного m решение $w(x, \lambda)$ ($Im\,\lambda = 0, \lambda \neq 0$) уравнения (1), обладающее асимптотикой (165), пронормируем условием $A_0^+(\lambda) = 1$. Тогда $w(x, \lambda) = u(x, \lambda)$, где $u(x, \lambda)$ – решение уравнения (1), указанное в лемме 2. Из (176) получим, что $H_{k0}(\lambda) = A_k^+(\lambda)$, $k = 1, \dots, m_0$, а из представлений (162), (174) и (175) – что $A_k^+(\lambda) = a_k(\lambda)$ ($\lambda > 0$) и $A_k^+(\lambda) = a_{m-k}(\lambda)$ ($\lambda < 0$),

$k = 1, \ldots, m_0$. Тем самым, верны равенства (182). В силу равенств (183) и леммы 4, набор элементов (144) и (145) матрицы $S(\lambda)$ и набор элементов $H_{k0}(\lambda)$, $k = 1, \ldots, m_0$, матрицы $H(\lambda)$ однозначно определяют друг друга. Однако, согласно теоремам 1 и 2, матрица $S(\lambda)$ вполне определяется набором своих элементов (144) и (145). В силу (177), $H(\lambda)$ вполне определяется набором своих элементов $H_{k0}(\lambda)$, $k = 1, \ldots, m_0$. Следовательно, матрицы рассеяния $S(\lambda)$ и $H(\lambda)$ однозначно определяют друг друга.

В случае четного m при $\lambda > 0$ рассмотрим решения $u_{m_0}^+(x,\lambda)$ и $u_0^-(x,\lambda)$ уравнения (1), полученные по формуле (73) из указанных в лемме 2 решений $u^\pm(x,\lambda)$ того же уравнения. Для этих решений имеют место представления (81), (83), (138) и (139), т. е. при $\lambda > 0$

$$u_{m_0}^+(x,\lambda) = b_{m_0 0}(\lambda) y^+(x,\lambda) + y^+(x,-\lambda) + \sum_{k=1}^{m_0-1} b_{m_0 k}(\lambda) y^+(x,\lambda\omega_k), \tag{185}$$

$$u_{m_0}^+(x,\lambda) = b_{m_0 m_0}(\lambda) y_{m_0}^-(x,\lambda) + \sum_{k=m_0+1}^{m-1} b_{m_0 k}(\lambda) y_k^-(x,\lambda), \tag{186}$$

$$u_0^-(x,\lambda) = y^+(x,\lambda) + c_{0m_0}(\lambda) y^+(x,-\lambda) + \sum_{k=1}^{m_0-1} c_{0k}(\lambda) y^+(x,\lambda\omega_k), \tag{187}$$

$$u_0^-(x,\lambda) = c_{00}(\lambda) y_0^-(x,\lambda) + \sum_{k=m_0+1}^{m-1} c_{0k}(\lambda) y_k^-(x,\lambda). \tag{188}$$

Тем самым, в силу равенств (99) и (100),

$$|b_{m_0 0}(\lambda)|^2 + |b_{m_0 m_0}(\lambda)|^2 = 1, \ |c_{00}(\lambda)|^2 + |c_{0m_0}(\lambda)|^2 = 1, \ b_{m_0 0}(\lambda) = \overline{c_{0m_0}(\lambda)}. \tag{189}$$

Обозначим

$$w_1(x,\lambda) = u_{m_0}^+(x,\lambda), \quad w_2(x,\lambda) = \frac{1}{c_{00}(\lambda)} u_0^-(x,\lambda) - \frac{c_{0m_0}(\lambda)}{c_{00}(\lambda)} u_{m_0}^+(x,\lambda).$$

В силу представлений (185) – (188) выбранные решения $w_1(x,\lambda)$ и $w_2(x,\lambda)$ уравнения (1) обладают асимптотикой (168), где функции $B_{\nu 0}^\pm(\lambda)$ и $B_{\nu m_0}^\pm(\lambda)$ таковы, что вторая из матриц (171) – единичная. В силу (92), (93) и (189) для коэффициентов $B_{\nu k}^+(\lambda)$ представления (178) имеем

$$B_{10}^+(\lambda) = b_{m_0 0}(\lambda) = \overline{c_{0m_0}(\lambda)} = -S_{m_0 0}(\lambda) = \overline{S_{0m_0}(\lambda)}, \tag{190}$$

$$B_{20}^+(\lambda) = \overline{c_{00}(\lambda)}, \quad B_{1m_0}^+(\lambda) = 1, \quad B_{2m_0}^+(\lambda) = 0, \tag{191}$$

$$B^+_{1k}(\lambda) = b_{m_0k}(\lambda), \quad B^+_{2k}(\lambda) = \frac{c_{0k}(\lambda)}{c_{00}(\lambda)} - \frac{c_{0m_0}(\lambda)}{c_{00}(\lambda)} b_{m_0k}(\lambda), \quad k = 1, \ldots, m_0 - 1. \quad (192)$$

Равенства (183) и (184) легко следуют из (179) и (190) – (192). Из (183) и (184), в силу леммы 4, вытекает, что набор элементов (144), (145) и $S_{m_00}(\lambda)$, $\lambda > 0$, матрицы $S(\lambda)$ и набор элементов $H_{0m_0}(\lambda)$, $H_{km_0}(\lambda)$, $H_{k0}(\lambda)$, $k = 1, \ldots, m_0 - 1$, матрицы $H(\lambda)$ однозначно определяют друг друга. Однако, согласно теоремам 1 и 2, матрица $S(\lambda)$ вполне определяется указанным набором своих элементов, а в силу равенств (180) и (181) матрица $H(\lambda)$ тоже вполне определяется указанным набором своих элементов. Следовательно, в случае четного m матрицы $S(\lambda)$ и $H(\lambda)$ однозначно определяют друг друга. Теорема доказана.

ABSTRACT. A differential operator L of arbitrary order $m \geq 3$ acting in the space $L^2(-\infty, \infty)$ with summable on the line coefficients is considered. The spectrum and resolvent of operator L are investigated. The connection between two different statements of the inverse scattering problem is found out.

ЛИТЕРАТУРА

10. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Москва, Наука, 1969.
11. И. Г. Хачатрян, "О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, сохраняющего асимптотику решений", Известия Акад. Наук Армении, Математика, т. 14, № 6, стр. 424 – 445, 1979.
12. С. В. Бабасян, И. Г. Хачатрян, "Об операторе преобразования для интегро–дифференциальных операторов высших порядков", Известия Акад. Наук Армении, Математика, т. 24, № 6, стр. 557 – 569, 1989.
13. И. Г. Хачатрян, "Об операторах рассеяния для пары дифференциальных операторов высших порядков", Известия Акад. Наук Армении, Математика, т. 21, № 1, стр. 3 – 17, 1986.
14. А. Р. Казарян, И. Г. Хачатрян, "Об обратной задаче рассеяния для дифференциального оператора произвольного порядка с суммируемыми на всей оси коэффициентами, I", Известия Акад. Наук Армении, Математика, т. 29, № 5, стр. 50 – 75, 1994.

10 августа 1994

Ереванский государственный университет

РЯДЫ ПОЛИА И ПРЕДСТАВИМОСТЬ ФУНКЦИЙ В КОНЕЧНЫХ МОДЕЛЕЯХ НЕКОТОРЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ

А. С. Машурян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 30, № 1, 1995

В статье рассматриваются некоторые формальные теории первого порядка (M-арифметики), имеющие конечные модели и исследуется вопрос о представимости арифметических функций в этих моделях. Вводится понятие ряда Полиа и доказывается, что любая целозначная функция единственным образом разлагается в такой ряд. На языке рядов Полиа характеризуется класс функций, представимых во всех конечных моделях M-арифметик. Рассматривается задача относительно иерархии Гжегорчика в классе примитивно рекурсивных функций.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В основе классической теории рекурсии лежит концепция актуально бесконечного натурального ряда и адекватный этой концепции формализм – арифметика Пеано. Понятие рекурсивной функции является (если принять тезис Черча) точным эквивалентом понятия эффективно вычислимой функции. Однако, развитие представлений о конструктивности вычислений, связанное с реальными вычислениями и вычислителями (ЭВМ), требует разработки понятий о вычислимости в "реальное время". В частности, ведутся исследования, имеющие целью нахождение соответствующего подкласса рекурсивных функций. Для сужения класса рекурсивных функций требуется построение формализмов, которые имеют конечные модели и допускают реальные вычисления. Этому требованию удовлетворяют введенные в [12] так называемые M-арифметики и их конечные модели – унары.

В данной статье рассматриваются некоторые формальные теории первого порядка (M-арифметики), имеющие конечные модели и исследуется вопрос о представимости арифметических функций в этих моделях. Вводится понятие ряда Полиа и доказывается, что любая целозначная функция единственным образом разлагается в ряд Полиа. На языке рядов Полиа характеризуется класс функций, представимых во всех конечных моделях M-арифметик. Рассматривается задача о иерархии Гжегорчика в классе примитивно–рекурсивных функций. Доказывается, что классы Гжегорчика не могут быть порождены лишь посредством явных преобразований и суперпозиций абсолютно унарных функций.

§2. M-АРИФМЕТИКИ И ИХ КОНЕЧНЫЕ МОДЕЛИ

Этот и следующий параграфы являются обзором некоторых понятий и результатов из работ [2] и [10] – [12], необходимых для изложения статьи.

Сигнатуру $\langle c; f^1, f_1^2, f_2^2; =\rangle$, состоящую из предметной константы c, символа f^1 одноместной функции, двух символов f_1^2, f_2^2 двуместных функций и символа предиката равенства, называемых арифметической сигнатурой или языком. Всюду в дальнейшем будем использовать символы 0 вместо c, $'$ вместо f^1, $+$ вместо f_1^2 и $\bullet$ вместо f_2^2. Таким образом, в привычных обозначениях арифметический язык задается сигнатурой $\sum = \langle 0, ', +, \bullet, = \rangle$.

В [12] построены несколько теорий первого порядка в языке $\sum$, так называемые M-арифметики. Наименьшей из них является абсолютная арифметика – теория AS. Собственными аксиомами абсолютной арифметики AS являются :

1° $x_1 = x_2 \to (x_1 = x_3 \to x_2 = x_3)$,

2° $x_1 = x_2 \to x_1' = x_2'$,

3° $x_1 + 0 = x_1$,

4° $x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'$,

5° $x_1 \cdot 0 = 0$,

$6^\circ \quad x_1 \cdot x_2' = x_1 \cdot x_2 + x_1,$

$7^\circ \quad \Phi(0) \to (\forall x_1(\Phi(x_1) \to \Phi(x_1')) \to \Phi(x_1)),$

где $\Phi(x_1)$ – формула языка $\sum$ со свободной переменной x_1. Поэтому теория AS отличается от классической арифметики Пеано (системы S, [1], гл. 3) отсутствием следующих аксиом :

(P1) $0 \neq x_1'$,

(P2) $x_1' = x_2' \to x_1 = x_2$,

которые мы называем, соответственно, первой и второй аксиомами Пеано. Остальные M-арифметики получаются из AS добавлением одной или двух аксиом Пеано или их отрицаний. Тем самым, одной из M-арифметик является сама система S. Опишем еще так называемые альтернативные M-арифметики $AM1$ и $AM2$:

$$AM1 = AS + (P1) + \rceil(P2), \qquad AM2 = AS + (P2) + \rceil(P1).$$

Ясно, что каждая из альтернативных арифметик не совместима с арифметикой Пеано. С другой стороны, в [12] доказано, притом финитными методами, что $AM1$ и $AM2$ не противоречивы (непротиворечивость арифметики Пеано, как известно, финитными методами недоказуема).

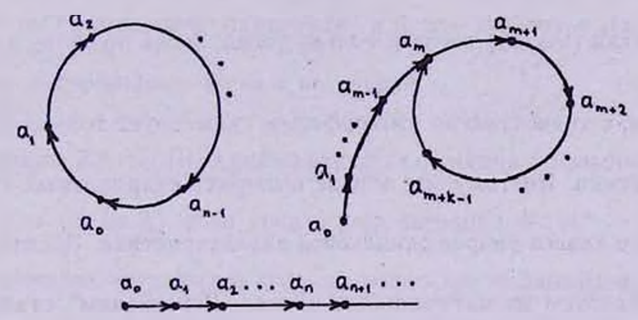
Перейдем к рассмотрению моделей M-арифметик. Рассмотрим часть $\sum_0 = \langle 0;' \rangle$ языка $\sum$. Любую модель языка $\sum_0$ будем называть ***индукционной моделью***. Таким образом, индукционная модель – это алгебраическая система вида (A, a_0, φ), где A – непустое множество (носитель системы), $a_0 \in A$ (начало системы), φ – одноместная операция, отображающая A в A (операция следования системы). Индукционная модель – наиболее общая математическая структура, в которой возможно рассмотрение свойства индукции.

Определение 2.1. Аксиомой индукции для индукционной модели (A, a_0, φ) называется следующее требование : если 1) $X \subset A$, 2) $a_0 \in X$, 3) из $t \in X$ следует $\varphi(t) \in X$, то $X = A$. Индукционная модель, удовлетворяющая своей аксиоме индукции, называется *унаром.*

В [10] доказана классификационная теорема, позволяющая естественным образом классифицировать унары, а также ввести понятие характеристики унара – носителя его основных свойств.

Условимся унары графически интерпретировать следующим образом : элементы носителя изображаем точками плоскости, из точки M_x, изображающей элемент x, в точку $M_{\varphi(x)}$, изображающую элемент $\varphi(x)$, проводим стрелку. В результате получим некоторый орграф, который назовем орграфом данного унара.

Теперь классификационная теорема формулируется следующим образом : *орграф любого унара является орграфом одного из следующих трех видов :*



а) орграф без хвоста, с кольцом длины n

б) орграф с хвостом длины m и с кольцом длины k

в) орграф без кольца, с бесконечным хвостом

Соответствующие унары будем называть аналогично – типов а), б) и в). Унару типа а) приписываем характеристику $(0, n)$, унару типа б) – характеристику (m, k), а унару типа в) – характеристику $(\infty, 0)$. Итак, характеристика унара – упорядоченная пара, первый элемент которой указывает на длину хвоста, а второй – на длину кольца унара.

Как это принято, будем считать что : ∞ больше любого натурального числа, $\infty = \infty$ и что 0 делится на любое натуральное число, в том числе на 0.

Унар типа в) назовем унаром Пеано.

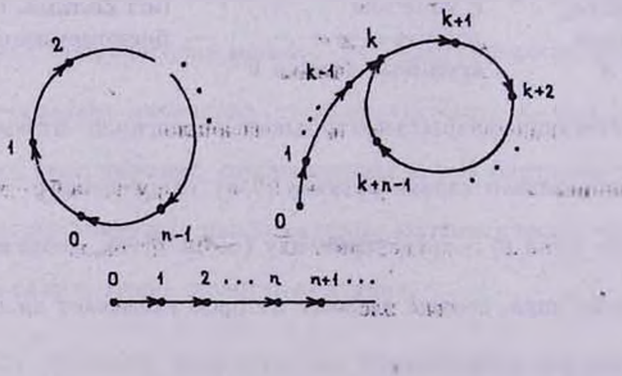
Определение 2.2 [2]. Унар (A, a_0, φ) называется гомоморфным унару (B, b_0, ψ), если существует отображение (гомоморфизм) $h\colon A \to B$, удовлетворяющее тождествам

$$h(a_0) = b_0, \quad h(\varphi(x)) = \psi(h(x)), \quad (x \in A).$$

Теорема о гомоморфизме. *([10]). Унар характеристики (m_1, n_1) гомоморфен унару характеристики (m_2, n_2) тогда и только тогда, когда $m_1 \geq m_2$ и n_1 кратно n_2. В частности, при $m_1 = \infty$, $n_1 = 0$ получим, что унары Пеано (и только они) гомоморфны любому другому унару.*

Следствие. (Теорема об изоморфизме) Унар характеристики (m_1, n_1) изоморфен унару характеристики (m_2, n_2) тогда и только тогда, когда $m_1 = m_2$ и $n_1 = n_2$.

Таким образом, с точностью до изоморфизма, существует только один унар данной характеристики. Поэтому мы вправе выбирать стандартных "представителей" из каждого класса унаров одинаковой характеристики. Носители стандартных унаров образуем из натуральных чисел. "Перечислим" стандартные унары на языке их геометрических интерпретаций с помощью орграфов :



а) унар ω_n^0 характеристики $(0, n)$

б) унар ω_{k+n}^k характеристики (k, n)

в) унар ω характеристики $(\infty, 0)$ *(унар Пеано)*

Замечание. Классификационная теорема унаров была доказана в работе автора [10], ее можно найти также и в [4]. Частный случай теоремы о гомоморфизме ($m_1 = \infty$, $n_1 = 0$) рассматривался Гильбертом (см. добавления [3]) и, согласно замечанию Генкина в [2], доказан еще Кальмаром.

§3. ПРЕДСТАВИМОСТЬ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В УНАРЕ

Функцию $f(x_1, ..., x_n)$ назовем арифметической, если при натуральных значениях аргументов она принимает натуральные значения.

Пусть ω – стандартный унар Пеано, а $\mathcal{A}$ – произвольный унар. Обозначим через $\pi_{\mathcal{A}}$ гомоморфизм унара ω на унар $\mathcal{A}$ (существующий по теореме о гомоморфизме из предыдущего параграфа) и будем элемент $\pi_{\mathcal{A}}(x)$, $x \in \omega$, называть проекцией натурального числа x на унар $\mathcal{A}$.

Определение 3.1. ([11]). Арифметическая функция f называется представимой в унаре $\mathcal{A} = (A, a_0, \varphi)$, если существует операция $F\colon A^n \to A$ такая, что при любых значениях аргументов $x_1, ..., x_n$ имеет место равенство

$$\pi_{\mathcal{A}}(f(x_1, ..., x_n)) = F(\pi_{\mathcal{A}}(x_1), ..., \pi_{\mathcal{A}}(x_n)).$$

Рассмотрим следующие два вопроса :

I. В каких унарах представима данная конкретная функция?

II. Какие функции представимы во всех унарах?

Ниже мы установим два критерия, лежащие в основе исследования этих вопросов. Для их формулировки понадобятся следующие понятия.

Определение 3.2. Арифметическая функция $f(x)$ называется :

1) k-надаргументной, если при $x \geq k$ имеет место неравенство $f(x) \geq x$;

2) надаргументной, если при любом $x \in \omega$ имеет место неравенство $f(x) \geq x$;

3) (i, m, n)-периодической, если при любом $k \in \omega$ имеет место сравнимость

$$f(m + i + kn) - f(m + i) \equiv 0 \pmod{n};$$

4) (m,n)-периодической, если при любом $i \in \omega$ функция $f(x)$ является (i,m,n)-периодической ;

5) абсолютно периодической, если при любых $m,n \in \omega$ функция $f(x)$ является (m,n)-периодической.

Критерий локальной представимости. Для того, чтобы k-надаргументная функция $f(x)$ была представима в унаре $\mathcal{A}$ характеристики (k,n), необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была (k,n)-периодической.

Критерий абсолютной представимости. Для того, чтобы функция $f(x)$ была представима в любом унаре, необходимо и достаточно, чтобы она была надаргументной и абсолютно периодической.

Определение 3.3. Для функций многих переменных будем применять следующий принцип. Пусть C – некоторое свойство арифметической функции. Будем говорить, что функция $f(x_1,...,x_n)$ обладает свойством C тогда и только тогда, когда f, как функция одной переменной x_k $(1 \le k \le n)$ (при фиксированных значениях остальных переменных), обладает свойством C.

Например, критерий абсолютной представимости в многомерном случае выглядит так : *для того, чтобы функция $f(x_1,...,x_n)$ была представима в любом унаре, необходимо и достаточно, чтобы она при любом k $(1 \le k \le \le n)$ была, как функция одного аргумента x_k, надаргументной и абсолютно периодической.*

Определение 3.4. Функция, представимая во всех унарах, называется абсолютно-унарно-представимой, или короче, AU-функцией. Класс всех AU-функций обозначается через AU.

Примеры.

Ясно, что функции $x+y$ (сложение) и $x \cdot y$ (умножение) надаргументны по обоим аргументам. Далее, при любых $i, m, n, k \in \omega$ имеем :

$$[(i+m+kn)+y]-[(i+m)+y]=kn\equiv 0(\operatorname{mod} n),$$

$$[(i+m+kn)\cdot y]-[(i+m)\cdot y]=kny\equiv 0(\operatorname{mod} n),$$

т. е. эти функции периодические по первым аргументам. Легко видеть, что подобным образом эти функции абсолютно периодические и по вторым аргументам. Следовательно, сложение и умножение являются AU-функциями.

Рассмотрим еще показательно– степенную функцию, заданную следующей рекурсивной схемой :

$$\begin{cases} x^{a_0}=\varphi(a_0) \\ x^{\varphi(y)}=x^y\cdot x. \end{cases} \tag{1}$$

Допустим, что характеристика (m,n) унара (A, a_0, φ) удовлетворяет условию : *существует* $k\in\omega$ *такое, что* $n=2^k$, $k\leq m$. Критерий локальной представимости позволяет легко проверить, что при этом условии функция x^y является (m,n)-представимой.

Таким образом, существует бесконечное множество унаров конечной характеристики, в которых рекурсивная схема (1) реализуема. Этим опровергается утверждение Л. Генкина (см.[2]) о том, что показательно-степенная функция определима только в унаре Пеано.

Определение 3.5. Будем говорить, что функция g получена из функции f *явным преобразованием*, если $g(y_1,...,y_k)=f(x_1,...,x_n)$, где каждое x_j $(1\leq j\leq n)$ или константа, или же совпадает с каким-нибудь из аргументов y_t $(1\leq t\leq k)$.

Определение 3.6. Будем говорить, что функция h получена из функций g и f применением оператора суперпозиции, если при некотором $1\leq i\leq n$

$$h(x_1,...,x_{i-1},y_1,...,y_k,x_{i+1},...,x_n)=f(x_1,...,x_{i-1},g(y_1,...,y_k),x_{i+1},...,x_n).$$

Теорема 3.1. *Функциональный класс AU замкнут относительно явного преобразования и оператора суперпозиции.*

Доказательство этой теоремы получается прямым применением критерия абсолютной представимости.

§4. О ПРОБЛЕМЕ ГЖЕГОРЧИКА

Свойство абсолютной унарной представимости может быть положено в основу методов решения проблем определенного типа. В качестве иллюстрации этого рассмотрим некоторую проблему, относящуюся к известной иерархии Гжегорчика примитивно-рекурсивных функций. Рассмотрим следующую последовательность функций :

$$f_0(x,y) = y+1, \quad f_1(x,y) = x+y, \quad f_2(x,y) = (x+1)\cdot(y+1),$$

$$f_{n+1}(0,y) = f_n(y+1,y+1), \quad f_{n+1}(x+1,y) = f_{n+1}(x, f_{n+1}(x,y)) \quad \text{для} n \geq 2.$$

k-ым классом Гжегорчика назовем наименьший класс функций Γ_k, $k = 0,1,...$, который содержит функции $s(x) = x+1$, $u_2^1(x,y) = x$, $u_2^2(x,y) = y$, $f_k(x,y)$ и замкнут относительно явных преобразований оператора суперпозиции и оператора ограниченной рекурсии. При этом, класс функций Φ называется замкнутым относительно оператора ограниченной рекурсии, если при $\varphi, g, h \in \Phi$ выполнение условий

а) $f(x_1,...,x_n,0) = g(x_1,...,x_n)$,

б) $f(x_1,...,x_n,y_{n+1}) = h(x_1,...,x_n,y,f(x_1,...,x_n,y))$,

в) $f(x_1,...,x_n,y) \leq \varphi(x_1,...,x_n,y)$,

влечет принадлежность f классу Φ.

В [6] Гжегорчиком поставлена следующая проблема : *являются ли явные преобразования и суперпозиции достаточными для получения класса* Γ_n ($n = 0,1,2,...$) *?*

В [9] эта проблема трактуется как вопрос о существовании какого-либо конечного базиса (возможно, отличного от данного Гжегорчиком) для этих функциональных классов. В такой трактовке эта проблема решена в положительном смысле Редингом [7], для $n \geq 3$, и Марченковым [8], для $n = 2$. Однако, эту проблему можно рассматривать и с другой точки зрения. Можно требовать либо сохранения базиса, данного Гжегорчиком, либо, чтобы функции, входящие в новый базис были "проще" функций, входящих в исходный базис. При таком понимании проблемы приобретает важное значение следующая

Теорема 4.1. *Ни один класс Гжегорчика невозможно породить только явными преобразованиями и суперпозициями, исходя из (конечного или бесконечного) множества базисных функций, принадлежащих классу AU.*

Доказательство. По теореме 3.1 класс AU инвариантен по отношению к явным преобразованиям и суперпозициям. С другой стороны, как известно (см. [6]) функция $x \dot{-} y$ (усеченная разность) принадлежит всем классам Γ_n.

§5. РАЗЛОЖЕНИЕ ЦЕЛОЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ В РЯД ПОЙА

В этом параграфе введен новый способ аналитического представления целозначных функций – понятие ряда Полиа, и на "языке" этого ряда охарактеризован класс AU абсолютно-унарно-представимых функций. Сначала рассмотрим одномерный случай.

Определение 5.1. Пусть C – класс функций. Функция f называется ***локально C-функцией***, если для любого натурального числа n найдется такая функция $\varphi_n \in C$, что при $0 \leq x \leq n$ выполняется равенство $f(x) = \varphi_n(x)$. Класс C называется ***локально-замкнутым***, если он содержит все локально – C-функции.

Теорема 5.1. *Класс AU локально замкнут.*

Доказательство. Пусть f – локально – AU-функция, $n \in \omega$, $\varphi_{n+1} \in AU$ и $f(x) = \varphi_{n+1}(x)$ при $0 \leq x \leq n$. Так как $\varphi_{n+1}(n) \geq n$, то функция f надаргументна и периодическая. В силу критерия абсолютной представимости заключаем, что $f \in AU$.

Следуя [5], функцию f назовем целозначной, если числа

$$f(0), f(1), ..., f(n), ...$$

являются целыми. Полином с целыми коэффициентами назовем целочисленным. Биноминальные коэффициенты, т. е. функции $\varphi_k(t) = \binom{t}{k} = \frac{t(t-1)...(t-k+1)}{k!}$ $(k \in \omega)$ являются примерами целозначных, но не целочисленных полиномов. В ряде задач из [5] (раздел 3, гл. 2) установлены следующие свойства полиномов :

1) каждый полином $P(x)$ степени m можно представить в виде

$$P(x) = b_0\binom{x}{m} + b_1\binom{x}{m-1} + ... + b_{m-1}\binom{x}{1} + b_m;$$

2) Полином $P(x)$ является целозначным тогда и только тогда, когда коэффициенты b_0, b_1, ..., b_m – целые числа.

Обобщением этого результата является

Теорема 5.2. *Каждую целозначную функцию $f(x)$ можно единственным образом представить в виде бесконечного ряда*

$$f(x) = b_0 + b_1\binom{x}{1} + b_2\binom{x}{2} + ... + b_n\binom{x}{n} + ..., \tag{2}$$

где коэффициенты – целые числа. И наоборот : функция f, представимая в в виде (2) с целыми коэффициентами, целозначна.

Доказательство начнем с достаточности. Пусть $x_0 \in \omega$. Тогда, по предположению

$$f(x_0) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i\binom{x}{i},$$

где b_i $(i = 0, 1, ...)$ – целые числа. Но при $n > x_0$ имеем $\binom{x_0}{n} = 0$, следовательно $f(x_0) = \sum_{i=0}^{x_0} b_i\binom{x}{i}$. Далее, принимая во внимание то, что биномиальные коэффициенты – целые числа, заключаем, что $f(x_0)$, как конечная сумма целых чисел, является целым числом. Доказательством необходимости и единственности разложения в ряд (2) являются нижеприводимые леммы.

Обозначим через T множество всех целозначных функций, представимых в виде (2) с целыми коэффициентами. Для $t \in \omega$ положим $\omega_{t+1} = \{0, 1, ..., t\}$.

Лемма 5.1. *Пусть $t_1, t_2 \in \omega$, и пусть g_1 и g_2 – две функции из T с такими разложениями в ряды Полиа, что*

$$g_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \binom{x}{i}, \qquad g_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \binom{x}{i}.$$

Далее, пусть функция f такова, что

$$f = g_1 \quad \text{на} \quad \omega_{t_1+1} \qquad \text{и} \qquad f = g_2 \quad \text{на} \quad \omega_{t_2+2}.$$

Тогда при всех $0 \leq i \leq \min(t_1, t_2)$ имеют место равенства $b_i = c_i$.

Доказательство. По условию имеют место следующие две системы равенств :

$$\begin{cases} f(0) = g_1(0) = b_0 \\ f(1) = g_1(1) = b_0 + b_1 \\ f(2) = g_1(2) = b_0 + \binom{2}{1} b_1 + b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(t_1) = g_1(t_1) = b_0 + b_1 \binom{t_1}{1} + b_2 \binom{t_1}{2} + \dots + b_{t_1} \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} f(0) = g_2(0) = c_0 \\ f(1) = g_2(1) = c_0 + c_1 \\ f(2) = g_2(2) = c_0 + \binom{2}{1} c_1 + c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(t_1) = g_2(t_1) = c_0 + c_1 \binom{t_1}{1} + c_2 \binom{t_1}{2} + \dots + c_{t_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(t_2) = g_2(t_2) = c_0 + c_1 \binom{t_2}{1} + c_2 \binom{t_2}{2} + \dots + c_{t_2} \end{cases} \tag{4}$$

Рассматривая (3) и (4) как системы линейных уравнений относительно неизвестных b_0, $b_1, ..., b_{t_1}$ и c_0, $c_1, ..., c_{t_2}$, соответственно, заметим, что

1) коэффициенты обеих систем – целые числа ;

2) матрицы обеих систем – диагональные, диагонали состоят из единиц ;

3) детерминанты обеих систем равны 1 (по (2)) ;

4) (3) является подсистемой системы (4).

Далее, в силу свойства 3), обе системы определены и их решения, полученные по правилу Крамера, состоят из целых чисел. Теперь утверждение леммы 5.1 вытекает из свойства 4).

Из леммы 5.1 непосредственно следует

Лемма 5.2. *Если функция представима в виде (2), то это представление единственно.*

Лемма 5.3. *Каждая целозначная функция является локально – T-функцией.*

Доказательство. Действительно, определяя из системы (3) коэффициенты b_0, b_1, ..., b_{t_1} и приравнивая нулю остальные коэффициенты, найдем конечноразложимую T-функцию, которая совпадает с заданной функцией на отрезке ω_{t_1+1} натурального ряда.

Лемма 5.4. *Класс T локально замкнут.*

Доказательство. Пусть f – произвольная локально T-функция, совпадающая на отрезке ω_n с функцией $g_n \in T$. Определяя при каждом n коэффициенты b_0,b_1, ... ,b_{n-1} из (3), получим целые коэффициенты b_i, $i = 0, 1, ...$. Тогда функция $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i \binom{x}{i}$ принадлежит классу T. Ясно, что $f = g$, и лемма доказана.

Ясно, что ввиду лемм 5.1 — 5.4 теорема 5.2 полностью доказана.

Замечание. Правая часть представления (2) называется рядом Полиа, само представление (2) – разложением f в ряд Полиа, а коэффициенты b_i ($i \in \omega$) – коэффициентами Полиа функции $f(x)$.

§6. ОПИСАНИЕ КЛАССА AU

В этом параграфе мы дадим описание AU-функций в терминах их коэффициентов Полиа. Для этого воспользуемся критерием абсолютной представимости.

Для произвольного натурального числа $k \geq 2$ обозначим через $M_k =$ $=$ LCM$\{2, 3, ..., k\}$ наименьшее общее кратное совокупности чисел $\{2, 3, ..., k\}$, и пусть $M_0 = M_1 = 1$.

Теорема 6.1. *Надаргументная функция $f(x)$ является абсолютно – унарно-представимой тогда и только тогда, когда k-ый коэффициент ее разложения в* *ряд Полиа кратен числу* M_k, *т. е.* $a_k \equiv 0\ (mod M_k)$, *где* $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \binom{x}{i}$.

Используя определение 3.3, получим критерий абсолютной унарной представимости функции нескольких аргументов.

Теорема 6.2. *Функция* $f(x_1, ..., x_n)$ *принадлежит классу* AU *тогда и только тогда, когда коэффициент* $a_{i_1 i_2 ... i_n}$ *ее разложения в ряд Полиа*

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=0}^{\infty} a_{i_1 i_2 ... i_n} \binom{x_1}{i_1} \binom{x_2}{i_2} \cdots \binom{x_n}{i_n}$$

кратен числу $M_{i_1 i_2 ... i_n} = LCM\{1, 2, ..., \max\{i_1, ..., i_n\}\}$.

Доказательства этих двух теорем основаны на следующих трех леммах.

Лемма 6.1. (**Основная лемма**) *Функции вида* $M_k\binom{x}{k}$ с $M_0 = M_1 = 1$, $M_k = LCM\{2, ..., k\}$ *являются* AU*-функциями.*

Доказательство. Так как $M_0\binom{x}{0} = 1$, $M_1\binom{x}{1} = x$, то утверждение достаточно доказать для $k \geq 2$. При этом, принимая во внимание, что $M_k\binom{x}{k}$ – надаргументны, достаточно доказать абсолютную периодичность. Для любых $m, n \in \omega$ установим сравнимость

$$M_k \left[\binom{m+n}{k} - \binom{m}{k} \right] \equiv 0 \pmod{n}. \tag{5}$$

Рассмотрим два случая.

Случай I. <u>M_k кратно n</u>. В этом случае $M_k\binom{x}{k}$ кратно n при любом $x \in \omega$, так как биномиальные коэффициенты – целые числа. В частности, имеем

$$M_k \binom{m+n}{k} \equiv M_k \binom{m}{k} \equiv 0 \qquad (\text{mod}\ n),$$

и, следовательно сравнимость (5) имеет место.

Случай II. <u>M_k не делится на n</u>. В этом случае среди делителей числа n найдется простое число p такое, что кратность p в разложении n на простые множители больше его кратности в разложении M_k. Пусть t и r – эти кратности для n и M_k соответственно. Тогда $t > r$, $t \geq 1$ и

$$M_k \left[\binom{m+n}{k} - \binom{m}{k} \right] = M_k \{(m+n)[(m-1)+n][(m-2)+n]...[(m-k+1)+n]-$$

$$-m(m-1),,,(m-k+1)\}(k!)^{-1} = M_k \frac{\alpha_1 n + \alpha_2 n^2 + ... + \alpha_i n^i + ... + \alpha_k n^k}{k!},$$

где α_i, $i = \overline{1, k-1}$ – сумма всевозможных произведений $(k-i)$ сомножителей, взятых из совокупности чисел $\{m, m-1, ..., m-k-1\}$, а $\alpha_k = 1$. Индукцией по i докажем, что если p делит $k!$ и β – какое-либо слагаемое суммы α_i, то число $\frac{M_k \beta}{k!} n^i$ кратно p^t, где t – предполагаемая кратность p в разложении n. Итак, пусть $\beta = l_1 \cdot l_2 ... l_{k-1}$, где среди сомножителей отсутствует ровно одно из чисел $\{m, m-1, ..., m-k+1\}$. Имеем

$$\frac{M_k \beta}{k!} n = M_k \frac{\beta \cdot (m-j)}{k!(m-j)} n,$$

где $m - j$ – отсутствующий сомножитель. Так как числитель есть произведение k последовательных чисел, то он кратен $k!$. Поэтому степень p сокращается. Предположим теперь, что утверждение имеет место для α_i и докажем его для α_{i+1}. Итак, пусть β' – какое-либо слагаемое из α_i и $\frac{M_k \beta'}{k!} n^i$ кратно p^t. Докажем, что число $\frac{M_k \beta}{k!} n^{i+1}$ всегда кратно p^t, где β – произвольное слагаемое из α_{i+1}. Пусть в разложении β отсутствует число $\tau \in \{m, m-1, ..., m-k+1\}$. Поскольку $\beta\tau$ – слагаемое из α_i, то из индуктивного предположения следует, что число $\frac{M_k \beta \tau}{k!} n^i$ кратно p^t. При этом, если τ сокращает некоторую степень p^s, то обязательно $s \leq r \leq t$. Поэтому эту степень p^s можно сократить за счет выделенного n. Таким образом, число $\frac{M_k \beta}{k!} n^{i+1}$, а вместе с ним и число α_{i+1}, кратны p^t.

Установим сравнимость

$$M_k \binom{m+n}{k} - M_k \binom{m}{k} \equiv 0 \pmod{p^s}.$$

Разность в левой части этого выражения кратна любой компоненте n, а следовательно, кратна и самому n. Лемма 6.1 доказана.

Пусть T – множество надаргументных функций $f(x)$, коэффициенты a_k $(k = 0, 1, ...)$ которых при разложении в ряд Полиа $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i \binom{x}{i}$ удовлетворяют условию

$$a_k \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod} \quad M_k = \mathrm{LCM}\{2, 3, ..., k\}).$$

Лемма 6.2. *Класс T локально замкнут.*

Доказательство. Пусть функция $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i \binom{x}{i}$ T – локальна и на отрезке $[0, t]$, $t \in \omega$

$$f(x) = g(x) \qquad \text{для некоторой} \quad g \in T.$$

Достаточно доказать, что $f \in T$. Пусть

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \binom{x}{i}, \qquad b_i \equiv 0 \pmod{M_i}.$$

Поскольку функция $g(x)$ – надаргументна и $f(x) = g(x)$ при $0 \leq x \leq t$, то $f(x)$ тоже надаргументна на $[0, t]$. В силу произвольности t, функция f – надаргументна всюду. Далее, из равенств $f(t) = g(t)$, $f(t) = a_t$, $g(t) = b_t$ и единственности разложения в ряд Полиа заключаем, что $a_t = b_t \equiv 0 \pmod{M_t}$. Так как t произвольно, то лемма 6.2 доказана.

Лемма 6.3. *Любая AU-функция T-локальна.*

Доказательство. Пусть $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i \binom{x}{i}$ – какая-либо AU-функция, $t \in \omega$. Индукцией по t докажем, что существует такая функция $g_t \in T$, что $f(x) = g_t(x)$ на отрезке $[0, t]$. Случаи $t = 0, 1$ тривиальны, поэтому проверим утверждение при $t = 2$. Пусть

$$h(x) = a_0 + a_1 \binom{x}{1} + \sum_{i=2}^{\infty} M_i \binom{x}{i}, \qquad \varphi_2 = f - h.$$

Так как $f \in AU$, то функция f – абсолютно периодическая. Функция h тоже абсолютно периодическая (по лемме 6.1). Поэтому абсолютно периодическая также разность $\varphi_2 = f - h$, откуда следует, что $\varphi_2(2) - -\varphi_2(0) \equiv 0 \pmod 2$. Так как $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_2(2) = a_2 - M_2$, то получаем, что $a_2 - M_2 \equiv 0 \pmod 2$. Поскольку $M_2 = 2$, то $a_2 \equiv 0 \pmod 2$.

Пусть $a_2 = 2c_2 = c_2M_2$ и $g_2(x) = a_0 + a_1\binom{x}{1} + c_2M_2\binom{x}{2} + \sum\limits_{i=3}^{\infty} M_i\binom{x}{i}$. Ясно, что $f(x) = g_2(x)$, при $0 \leq x \leq 2$. Предположим, что требуемое утверждепие верно при $t = k$. Докажем, что оно верно и при $t = k+1$. По предположению имеем T-функцию $g_k(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i\binom{x}{i} + \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} b_i\binom{x}{i}$ такую, что $f(x) = g_k(x)$ при $0 \leq x \leq k$. Требуется найти такую T-функцию $g_{k+1}(x)$, чтобы $f(x) = g_{k+1}(x)$ при $0 \leq x \leq k+1$. Для этого рассмотрим разность $\varphi_{k+1}(x) = f(x) - g_k(x) = = \sum\limits_{i=0}^{\infty}(a_i - b_i)\binom{x}{i}$. Имеем $\varphi_{k+1}(0) = \varphi_{k+1}(1) = \ldots = \varphi_{k+1}(k) = 0$. Так как по лемме 6.1 функции f и g_k абсолютно периодические, приходим к заключению, что абсолютно периодична также функция φ_{k+1}. Поскольку $\varphi_{k+1}(k+1) = = \varphi_{k+1}[(k+1-i)+i]$ и $\varphi_{k+1}(k+1-i) = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k+1$, то для всех $i = 1, 2, \ldots, k+1$

$$\varphi_{k+1}(k+1) - \varphi_{k+1}(k+1-i) \equiv 0, \qquad (\mathrm{mod}\, i).$$

Поэтому число $\varphi_{k+1}(k+1)$ кратно числам $1, 2, \ldots, k+1$, а, следовательно, и их наименьшему общему кратному M_{k+1}. С другой стороны, $\varphi_{k+1}(k+1) = = a_{k+1} - b_{k+1}$, $b_{k+1} \equiv 0 \pmod{M_{k+1}}$, а отсюда следует, что a_{k+1} тоже кратно M_{k+1}. Пусть $a_{k+1} = c_{k+1}M_{k+1}$. Положим

$$g_{k+1}(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i\binom{x}{i} + c_{k+1}M_{k+1}\binom{x}{k+1} + \sum_{i=k+2}^{\infty} M_i\binom{x}{i}.$$

Ясно, что $g_{k+1}(x)$ и есть требуемая функция, и лемма 6.3 доказана.

Доказательство теоремы 6.1. Необходимость следует из утверждения леммы 6.3. Докажем достаточность. Пусть $g \in T$, т. е. g – надаргументная функция, разложимая в ряд Полиа вида

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_kM_k\binom{x}{k},$$

где c_k $(k = 0, 1, ..)$ – целые числа. Требуется доказать, что g .– абсолютно периодическая функция. Пусть m и n – произвольные натуральные числа. Так как

$$g(m+n) - g(m) = \sum_{k=0}^{\infty} c_kM_k\binom{m+n}{k} - \sum_{k=0}^{\infty} c_kM_k\binom{m}{k}$$

и $\binom{m+n}{k} = 0$ при $k > m+n$, то достаточно доказать сравнимость

$$\sum_{k=0}^{m+n} c_k M_k \binom{m+n}{k} - \sum_{k=0}^{m+n} c_k M_k \binom{m}{k} \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} n). \tag{6}$$

По лемме 6.1 функции $g_k(x) = M_k \binom{x}{k}$, $(k = 0, 1, ..., m+n)$ абсолютно периодические. Поэтому функция

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k g_k(x),$$

как конечная линейная комбинация абсолютно периодических функций (с целыми коэффициентами), тоже абсолютно периодическая. Это доказывает (6), и теорема 6.1 доказана.

Как непосредственное следствие из теоремы 6.1 получается результат, который в [14] был установлен другим методом.

Следствие 6.1. Класс AU содержит континуум функций.

Доказательство. Обозначим через AU^+ класс всех функций $f(x)$, коэффициенты которых разложения в ряд Полиа натуральны :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k M_k \binom{x}{k}, \qquad a_k \in \omega \quad (k = 0, 1, ...). \tag{7}$$

Так как коэффициенты a_k – натуральные числа, то $f(x)$ – надаргументная функция. Следовательно, по теореме 6.1 $f(x) \in AU$, т. е. $AU^+ \subseteq AU$. В силу (7) мощность класса AU^+ равна мощности всех последовательностей, составленных из натуральных чисел, т. е. континууму.

§7. ФОРМАЛЬНАЯ ВЫРАЗИМОСТЬ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе мы займемся изучением наименьшей из M-арифметик с точки зрения возможности представления в ней арифметических функций. Напомним, что M-арифметикой называется теория первого порядка, язык которой содержит сигнатуру $\langle 0, ', +, \bullet, = \rangle$ и среди моделей которой имеется по крайней мере один унар. Унары, при этом, будем называть ***стандартными моделями***, а остальные модели – нестандартными моделями соответствующей M-арифметики. Существование нестандартных моделей следует из теоремы компактности Мальцева.

Для любого натурального числа n обозначим через $\overline{n}$ терм $0^{\prime\cdots\prime}$ (n times).

Определение 7.1. Пусть T – некоторая M-арифметика, а f – арифметическая функция k переменных. Функцию f будем называть ***выразимой*** в T (T-выразимой), если в языке T существует формула Φ от $n+1$ свободных переменных такая, что если $f(n_1, ..., n_k) = n$, то

1) в T доказуема формула $\Phi(\overline{n}_1, ..., \overline{n}_k, \overline{n})$;

2) в T доказуема формула $\exists_1 x \Phi(\overline{n}_1, \overline{n}_2, ..., \overline{n}_k, x)$, где $\exists_1$ – квантор "существует, причем единственный".

Будем говорить, что теория T ***меньше*** теории T' и писать $T < T'$, если языки T и T' совпадают и собственные аксиомы T являются теоремами для T'.

Следующее утверждение очевидно.

Теорема 7.1. *Если $T < T'$, то любая T-выразимая функция T'-выразима.*

Следствие 7.1. Любая AS-выразимая функция является рекурсивной.

Доказательство. Так как AS меньше арифметики Пеано (т. е. формальной системы S в терминах [1]), то по теореме 7.1 любая AS-выразимая функция также S-выразима. Но S-выразимые функции рекурсивны (см. [1]). Поэтому и AS-выразимые функции будут рекурсивными.

Рассмотрим теперь вопрос : ***при каких дополнительных свойствах арифметических функций обеспечивается их AS-выразимость ?*** Ясно, что для этого рекурсивность – необходимое свойство. Наконец, вместо арифметической функций $f(x_1, ..., x_k)$ рассмотрим ее график, т. е. $(k+1)$-местное отношение $y = f(x_1, ..., x_k)$.

Ниже будем рассматривать только n-местные отношения R, определенные в множестве натуральных чисел (n-местные арифметические отношения).

Определение 7.2. n-местное арифметическое отношенис R называется *выразимым* в арифметике T, если существует формула $\Phi(x_1, ..., x_n)$ языка T такая, что для любых натуральных чисел $k_1, ..., k_n$

1) если отношение R истинно, то в T доказуема формула $\Phi(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n)$, (т. е. $\Phi(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n)$ – теорема);

2) если отношение R ложно, то в T доказуема формула $\neg\Phi(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n)$.

Пусть $R(x_1, ..., x_n)$ – арифметическое отношение, выразимое в абсолютной арифметике формулой $\Phi(x_1, ..., x_n)$, $\mathcal{A}$ – произвольный унар, а $k_1, ..., k_n$ – натуральные числа. Предположим, что $R(k_1, ..., k_n)$ истинно, тогда $\Phi(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n)$ доказуема в AS. Но $\mathcal{A}$ – модель для AS, следовательно, интерпретация формулы Φ в унаре $\mathcal{A}$ должна быть истинной на $(a_1, a_2, ..., a_n)$, где $a_i = \pi_{\mathcal{A}}(n_i)$, и $\pi_{\mathcal{A}}$ – гомоморфизм стандартного унара Пеано ω на унар $\mathcal{A}$. Ниже мы установим достаточное условие, при котором $\mathcal{A}$-интерпретация формулы Φ индуцирует некоторое n-местнос отношение в $\mathcal{A}$.

Определение 7.3. Пусть $\mathcal{A}$ – унар. n-местное арифметическое отношение R называется *функционально выразимым* в $\mathcal{A}$, если в $\mathcal{A}$ существует такое n-местное отношенис R^*, что :

1) если для некоторых элементов $a_1, ..., a_n$ унара $\mathcal{A}$ отношение R^* ложно, то для любых $\pi_{\mathcal{A}}$-прообразов этих элементов ложно также отношение R;

2) если $R^*(a_1, a_2, ..., a_n)$ истинно, то для любых $\pi_{\mathcal{A}}$-прообразов $b_1, b_2, ..., b_{n-1}$ элементов $a_1, ..., a_{n-1}$ существует такой прообраз b_n элемента a_n, что $R(b_1, ..., b_n)$ истинно.

Отношение R^* называется $\mathcal{A}$-выражением отношения R.

Лемма 7.1. *Если арифметическое отношенис R функционально выражается в* *унаре $\mathcal{A}$ отношением R^*, а арифметическая функция f представима в $\mathcal{A}$ операцией f^*, то при любом i, $1 \le i \le n$, отношение вида $R(x_1, ..., x_{i-1}, f(y_1, ..., y_m), x_{i+1}, ..., x_n)$ может быть функционально выражено отношением*

$$R^*(x_1, ..., x_{i-1}, f^*(y_1, ..., y_m), x_{i+1}, ..., x_n).$$

Доказательство. Пусть $a_1,...,a_{i-1}$, $b_1,...,b_m$ и $a_{i+1},...,a_n$ такие элементы $\mathcal{A}$, что $R^*(a_1, ..., a_{i-1}, f^*(b_1, ..., b_m), a_{i+1}, ..., a_n)$ ложно, и пусть $c_1,...,c_{i-1}$, $d_1,...,d_m$, $c_{i+1},...,c_n$ – произвольные $\pi_{\mathcal{A}}$-прообразы этих элементов, $f^*(b_1, ..., b_m) = b$, $f(d_1, ..., d_m) = d$. Так как f^* является $\mathcal{A}$-представителем f и $\pi_{\mathcal{A}} d_j = b_j$ ($j = 1, ..., m$), то $\pi_{\mathcal{A}} d = b$. Принимая во внимание, что R^* является $\mathcal{A}$-выражением R, заключаем, что значение $R(c_1, ..., c_{i-1}, d, c_{i+1}, ..., c_n) = R(c_1, ..., c_{i-1}, f(d_1, ..., d_m), c_{i+1}, ..., c_n)$ ложно. Случай, когда $R^*(a_1, ..., a_{i-1}, f^*(b_1, ..., b_m), a_{i+1}, ..., a_n)$ истинно, доказывается аналогично.

Лемма 7.2. *Арифметическое отношение равенства в любом унаре функционально выражается отношением равенства этого унара.*

Утверждение леммы 7.2 следует из определения функциональной выразимости. Как непосредственное следствие из лемм 7.1 и 7.2 получается

Лемма 7.3. *Если арифметическая функция $f(x_1, ..., x_n)$ представима в унаре $\mathcal{A}$ операцией f^*, то отношение $y = f(x_1, ..., x_n)$ функционально выражается в $\mathcal{A}$ отношением $y = f^*(x_1, ..., x_n)$ этого унара. Обратно, если арифметическое отношение $y = f(x_1, ..., x_n)$ функционально выражается в унаре $\mathcal{A}$ отношением вида $y = f^*(x_1, ..., x_n)$, то операция f^* является $\mathcal{A}$-представителем функции f.*

Лемма 7.4. *Пусть арифметическая функция $f(x_1, ..., x_n)$ выражается в абсолютной арифметике формулой $\Phi(x_1, ..., x_n, y)$ и $\mathcal{A}$ – любой унар. Тогда, интерпретация формулы Φ в $\mathcal{A}$ является $(n+1)$-местным отношением в $\mathcal{A}$ вида $y = f^*(x_1, ..., x_n)$, где f^* – n-местная операция в $\mathcal{A}$.*

Доказательство. В $\mathcal{A}$ определим $(n+1)$-местное отношение $\Phi^*(x_1, ..., x_n, y)$

следующим образом. Предположим, что характеристика унара $\mathcal{A}$ равна (l, m), а $\overline{\omega}$ – стандартный унар характеристики (l, m). Пусть a_1, ...,a_n – произвольные элементы унара $\mathcal{A}$, а натуральные числа k_1,...,k_n – изоморфные образы этих элементов в $\overline{\omega}$. Далее, пусть $f(k_1, ..., k_n) = k$ и $\pi_{\mathcal{A}}(k) = a$. Тогда $\Phi^*(a_1, ..., a_n, a)$ считаем истинным, а для любого элемента b унара $\mathcal{A}$, отличного от a, полагаем, что $\Phi^*(a_1, ..., a_n, b)$ ложно. Ясно, что определенное таким образом отношение Φ^* является функциональным выражением в $\mathcal{A}$ арифметического отношения $y = f(x_1, ..., x_n)$. Проверим, что Φ^* совпадает с интерпретацией формулы Φ в $\mathcal{A}$. Предположим, что для некоторых натуральных чисел k_1, ... ,k_n, k в абсолютной арифметике доказуема формула $\Phi(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k})$, и пусть $\pi_{\mathcal{A}}$-образами этих чисел в унаре $\mathcal{A}$ являются a_1, ...,a_n, b. Тогда $f(k_1, ..., k_n) = k$ и, по определению отношения Φ^*, $\Phi^*(a_1, ..., a_n, b)$ истинно. Теперь отношением Φ^* определяется n-местная операция f^* унара $\mathcal{A}$ такая, что $\Phi^*(x_1, ..., x_n, y)$ совпадает с графиком $y = f^*(x_1, ..., x_n)$ операции f^*. Поэтому, по лемме 7.3 функция f представима в $\mathcal{A}$ операцией f^*, и лемма 7.4 доказана.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 7.2. *Любая арифметическая функция, выразимая в абсолютной арифметике, является AU-функцией.*

Из этой теоремы и следствия 7.1 вытекает следующая

Теорема 7.3. *Любая арифметическая функция, выразимая в абсолютной арифметике, является RAU-функцией (рекурсивной AU-функцией).*

ABSTRACT. In this paper we consider some formal first–order theories (M-arithmetics) which have finite models and investigate a question of representability of number–theoretic functions in these models. We introduce a notion of the so–called Polya series and prove that every integer–valued function admits unique Polya–series expansion. In terms of Polya series we characterize the class of functions which are representable in all the finite models of M-arithmetics. We also study a problem concerning to the Gregorchik hierarchy in the class of primitive recursive functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Мендельсон, Введение в математическую логику, Наука, Москва, 1971.
2. Л. Генкин, О математической индукции, Москва, 1962.
3. Д. Гильберт, П. Бернайс, Основания математики : теория доказательств, т. 2, Наука, Москва, 1982.
4. Г. Биркгоф, Т. Барти, Современная прикладная алгебра, Мир, Москва, 1976.
5. Г. Полиа, Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, т. 1, Наука, Москва, 1978.
6. А. Гжегорчик, Некоторые классы рекурсивных функций (в сб. "Проблемы математической логики : сложность алгоритмов и классы вычислимых функций"), Мир, Москва, 1970.
7. D. Rödding, Über die Eliminierbarkeit von Definitionschemata in der Theorie der rekursiven Funktionen, "Z. Math. Logic und Grudlagen der Math.", vol. 10, № 4, pp. 315 – 330, 1964.
8. С. С. Марченков, "Устранение схем рекурсий в классе $\mathcal{E}^2$ Гжегорчика", Мат. заметки, т.5, № 5, стр. 561 – 568, 1969.
9. А. А. Мучник, О двух подходах к классификации рекурсивных функций (в сб. "Проблемы математической логики : сложность алгоритмов и классы вычислимых функций"), Мир, Москва, 1970.
10. А. С. Машурян, "О рекурсивных определениях на индукционных моделях", ДАН Арм. ССР, т. 9, № 4, 1974.
11. А. С. Машурян, " Об одном классе примитивно–рекурсивных функций", ДАН Арм. ССР, т. 19, № 4, 1979.
12. А. С. Машурян, "Непротиворечивость некоторых теорий первого порядка", Межвуз. сб. Математика, № 3, Ереван, 1985.
13. А. С. Машурян, "Унары и функции, представимые в унарах", 4А261 деп. Арм. НИИНТИ, 12.11.91, № 41 – Ар91, 1991.
14. А. С. Машурян, "О классе абсолютно–унарно–представимых функций", Ученые записки ЕГУ, № 1, 1994.

11 октября 1994

Ереванский государственный университет

О СОПРЯЖЕННОМ ОПЕРАТОРЕ В МНОГОМЕРНЫХ ГЕЛЬДЕРОВЫХ КЛАССАХ НА ТОРЕ

Ф. А. Шамоян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 30, № 1, 1995

Пусть $U^n = \{z = (z_1, ..., z_n) : |z_j| < 1, 1 \le j \le n\}$ – единичный открытый полидиск в n-мерном комплексном пространстве $\mathbf{C}^n$, и пусть $T^n = \{\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) : |\xi_j| < 1, \quad 1 \le j \le n\}$ – его остов. Для любой функции $f \in \mathbf{C}(T^n)$ и любого $h_j \in \mathbb{R}$, $1 \le j \le n\}$ положим

$$\Delta_{h_j}(f)(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}) \stackrel{def}{=} f(e^{i\theta_1}, ..., e^{i(\theta_j+h_j)}, e^{i\theta_{j+1}}, ..., e^{i\theta_n}) - f(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}),$$

и для $(i_1, ..., i_k) \in \mathbb{Z}_+^k$, $1 \le k \le n$ положим

$$\Delta_{h_{i_k},...,h_{i_1}}(f)(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}) \stackrel{def}{=} \Delta_{h_{i_k}}\left(\cdots\left(\Delta_{h_{i_1}}(f)\right)\cdots\right)(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}).$$

Для произвольного мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $0 < \alpha_j \le 1$, $1 \le j \le n$ определим $\Lambda(\alpha)$ как класс тех функций $f \in \mathbf{C}(T^n)$, для которых существует положительная постоянная $C_f > 0$ такая, что

$$\left|\Delta_{h_{i_k},...,h_{i_1}}(f)(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n})\right| \le C_f |h_{i_1}|^{\alpha_{i_1}} \cdots |h_{i_k}|^{\alpha_{i_k}},$$

$$\forall (i_1, ..., i_k) \in \mathbb{Z}_+^k, \quad (h_{i_1}, ..., h_{i_k}) \in \mathbb{R}^k, \quad (\theta_1, ..., \theta_k) \in \mathbb{R}^n, \quad 1 \le k \le n.$$

Очевидно, что при $n = 1$ и $\alpha = \alpha_1$, $0 < \alpha_1 \le 1$, класс $\Lambda(\alpha_1)$ совпадает с гельдеровым классом $Lip(\alpha, T)$, $T = T^1$.

Определим сопряженный оператор на классах $\Lambda(\alpha)$ следующим образом : для $f \in \Lambda(\alpha)$, $(i_1, ..., i_k) \in \mathbb{Z}_k^+$, $k \le n$ положим

$$S_{i_1,...,i_k}(f)(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}) \stackrel{def}{=} \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^k \int_{Q^k} f\left(e^{i\theta_1+i\widetilde{t_1}}, ..., e^{i\theta_n+i\widetilde{t_n}}\right) \times$$
$$\times \prod_{m=1}^{k} \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}t_{i_m}\right) dt_{i_1} \cdots dt_{i_k}, \tag{1}$$

где

$$Q^k = [-\pi, \pi]^k, \quad (\theta_1, ..., \theta_k) \in \mathbb{R}^n, \quad \widetilde{t_m} = \begin{cases} 0, & \text{при } m \ne i_m, \\ t_m, & \text{при } m = i_m, \end{cases} \quad 1 \le m \le k.$$

Заметим, что если $n = k = 1$, то

$$S_1(f)(e^{i\theta}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta+it}) \operatorname{ctg}(t/2)\, dt,$$

то есть функция $S_1(f)$ совпадает с обычной сопряженной функцией $\widetilde{f}$ (см. [1]).

По теореме Привалова, если $f \in Lip(\alpha, T)$, то $S_1(f) \in Lip(\alpha, T)$. В 1938 году Чезари [2] установил, что при $n > 1$ это утверждение неверно : для произвольного $0 < \alpha \le 1$ существует функция $f \in Lip(\alpha, T)$ такая, что $S_{i_1,...,i_k}(f)(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}) \notin$ $\notin Lip(\alpha, T)$ при некотором выборе индексов $(i_1, .., i_k)$, $1 \le k \le n$ (см. [3] – [5]).

Отсюда возникает естественный вопрос о многомерных обобщениях одномерных гельдеровых классов, в которых теорема Привалова верна.Иными словами, возникает вопрос : существуют ли многомерные обобщения одномерных гельдеровых классов, инвариантные относительно операторов $S_{i_1,...,i_k}(f)$ для произвольных $(i_1, .., i_k) \in \mathbb{Z}_+^k$, $1 \le k \le n$.Ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме.

Теорема. *Пусть* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha_j < 1$, $1 \le j \le n$. *Если* $f \in \Lambda(\alpha)$, *то для произвольных* $(i_1, .., i_k) \in \mathbb{Z}_+^k$, $1 \le k \le n$ *соответствующие функции* $S_{i_1,..,i_k}(f)$ *принадлежат* $\Lambda(\alpha)$.

Замечание 1. Отметим, что классы $\Lambda(\alpha)$ остаются инвариантными по отношению к многомерным интегральным операторам типа Коши. В [6] в терминах этих классов было дано описание сопряженных пространств $H^p(\alpha)^*$, для любого $-1 < \alpha_j < \infty$, $1 \leq j \leq n$.

Для простоты, доказательство нашей теоремы проведем для $n = 2$, для прочих n доказательство вполне аналогично. Начнем с одного вспомогательного результата, отметив, что этот результат в n-мерном случае был установлен в [7], [8] иным методом.

Лемма 1. *Пусть $f \in \Lambda(\alpha_1, \alpha_2)$, $0 < \alpha_j < 1$, $j = 1, 2$ и*

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{T^2} \frac{f(\xi_1, \xi_2)}{(\xi_1 - z_1)(\xi_2 - z_2)}\, d\xi_1 d\xi_2. \tag{2}$$

Тогда граничные значения функции F на торе T^2 тоже принадлежат классам $\Lambda(\alpha_1, \alpha_2)$.

Замечание 2. Утверждение Леммы 1 нарушается для гельдеровых классов на торе T^2 (см. [4]).

Доказательство леммы 1. Достаточно установить следующие оценки :

$$\left|\frac{\partial F}{\partial z_1}\right| \leq \frac{\text{const}}{(1 - |z_1|)^{1-\alpha_1}}, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial z_2}\right| \leq \frac{\text{const}}{(1 - |z_2|)^{1-\alpha_2}},$$

$$\left|\frac{\partial^2 F(z_1, z_2)}{\partial z_2 \partial z_2}\right| \leq \frac{\text{const}}{(1 - |z_1|)^{1-\alpha_1}(1 - |z_2|)^{1-\alpha_2}}.$$

Используя теорему Харди-Литтлвуда для одномерного случая,мы установим первое и последнее ограничения. Легко видеть, что

$$\frac{\partial F}{\partial z_1}(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{Q^2} \frac{f(e^{i\theta_1 + t_1}, e^{i\theta_2 + t_2}) e^{-i\theta_1 - it_1} dt_1 dt_2}{(1 - r_1 e^{-it_1})^2 (1 - r_2 e^{-it_2})}, \quad z_j = r_j e^{i\theta_j}, \quad j = 1, 2.$$

Мы имеем

$$\frac{\partial F}{\partial z_1}(z_1, z_2) = \frac{e^{-i\theta_1}}{(2\pi)^2} \iint\limits_{Q^2} \frac{\left[f(e^{i\theta_1 + it_1}, e^{i\theta_2}) - f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2 + it_2})\right] e^{-it_1}}{(1 - r_1 e^{-it_1})^2 (1 - r_2 e^{-it_2})} dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{e^{-i\theta_1}}{(2\pi)^2} \iint\limits_{Q^2} \frac{\Delta_{t_1}\left(f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2 + it_2})\right) e^{-it_1}}{(1 - r_1 e^{-it_1})^2 (1 - r_2 e^{-it_2})} dt_1 dt_2.$$

Поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial z_1}(z_1,z_2)=\frac{e^{-i\theta_1}}{(2\pi)^2}\iint\limits_{Q^2}\frac{\Delta_{t_2t_1}\left(f(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})\right)e^{-it_1}}{(1-r_1e^{-it_1})^2(1-r_2e^{-it_2})}dt_1dt_2+$$
$$+\frac{e^{-i\theta_1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\Delta_{t_1}(f)(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})e^{-it_1}}{(1-r_1e^{-it_1})^2}dt_1.$$

Поскольку $f\in\Lambda(\alpha_1,\alpha_2)$, мы можем написать

$$\left|\frac{\partial F}{\partial z_1}(z_1,z_2)\right|\leq\frac{C_f}{(2\pi)^2}\iint\limits_{Q^2}\frac{|t_1|^{\alpha_1}|t_2|^{\alpha_2}\,dt_1dt_2}{|1-r_1e^{-it_1}|^2|1-r_2e^{-it_2}|}+\frac{C_f}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|t_1|^{\alpha_1}\,dt_1}{|1-r_1e^{-it_1}|^2}\leq$$
$$\leq\frac{\widetilde{C}_f}{(1-|z_1|)^{1-\alpha_1}}. \tag{3}$$

Оценим функцию

$$\frac{\partial^2F(z_1,z_2)}{\partial z_1\partial z_2}=\frac{e^{-i(\theta_1+\theta_2)}}{(2\pi)^2}\iint\limits_{Q^2}\frac{f(e^{i\theta_1+it_1},e^{i\theta_2+it_2})e^{-it_1-it_2}}{(1-r_1e^{-it_1})^2(1-r_2e^{-it_2})^2}dt_1dt_2.$$

Повторяя вышеприведенные рассуждения, получаем

$$\frac{\partial^2F(z_1,z_2)}{\partial z_1\partial z_2}=\frac{e^{-i(\theta_1+\theta_2)}}{(2\pi)^2}\iint\limits_{Q^2}\frac{\Delta_{t_2t_1}(f)(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})e^{-it_1-it_2}}{(1-r_1e^{-it_1})^2(1-r_2e^{-it_2})^2}dt_1dt_2.$$

Поэтому

$$\left|\frac{\partial^2F(z_1,z_2)}{\partial z_1\partial z_2}\right|\leq\frac{C_f}{(2\pi)^2}\iint\limits_{Q^2}\frac{|t_1|^{\alpha_1}|t_2|^{\alpha_2}\,dt_1dt_2}{|1-r_1e^{-it_1}|^2|1-r_2e^{-it_2}|^2}\leq$$
$$\leq\frac{\widetilde{C}_f}{(1-|z_1|)^{1-\alpha_1}(1-|z_2|)^{1-\alpha_2}}. \tag{4}$$

Этим завершается доказательство леммы 1.

Аналогичным образом мы можем доказать следующий результат.

Лемма 2. *Пусть* $f\in\Lambda(\alpha_1,\alpha_2)$, $0<\alpha_j<1$, $j=1,2$. *Тогда функция*

$$\Phi(z_1,e^{i\varphi_2})=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{f(\xi_1,e^{i\varphi_2})}{\xi_1-z_1}d\xi_1 \tag{5}$$

принадлежит классу $\Lambda(\alpha_1,\alpha_2)$.

Доказательство теоремы. Не теряя общности, можно предположить, что функция f вещественнозначна. Покажем сначала, что функция

$$\Psi(e^{i\varphi_1},e^{i\varphi_2})=S_1(f)(e^{i\varphi_1},e^{i\varphi_2})=\lim_{\delta\to0}\frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\delta}\frac{f(e^{it+i\varphi_1},e^{i\varphi_2})}{\operatorname{tg}(t/2)}dt$$

принадлежит классу $\Lambda(\alpha_1,\alpha_2)$. Для этого заметим, что

$$\Phi(z_1,e^{i\varphi_2}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(e^{i\theta_1},e^{i\varphi_2})e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_1}-r_1e^{i\varphi_1}}d\theta_1 =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S(e^{i\theta_1},z_1)f(e^{i\theta_1},e^{i\varphi_2})\,d\theta_1 - \frac{z_1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(e^{i\theta_1},e^{i\varphi_2})}{e^{i\theta_1}-r_1e^{i\varphi_1}}d\theta_1, \quad (6)$$

где $S(e^{i\theta_1},z_1)$ – ядро Шварца, а $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$. По лемме 2, $\Phi(e^{i\varphi_1},e^{i\varphi_2}) \in \Lambda(\alpha_1,\alpha_2)$. Отсюда следует, что первый интеграл в (6) обладает тем же свойством. Учитывая равенство

$$S(z,e^{i\theta}) = P_r(\theta-\varphi) + iQ_r(\theta-\varphi)$$

заключаем, что функция

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Q_{r_1}(\theta_1-\varphi_1)f(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})\,d\theta_1$$

на границе круга принадлежит классу $\Lambda(\alpha_1,\alpha_2)$. Отсюда следует, что $S_1(f) \in \in \Lambda(\alpha_1,\alpha_2)$. Остается доказать, что $S_{1,2}(f) \in \Lambda(\alpha_1,\alpha_2)$. Имеем

$$S_{1,2}(f)(e^{i\varphi_1},e^{i\varphi_2}) =$$
$$= \lim_{r_1\to 1-0}\lim_{r_2\to 1-0}\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{Q^2}Q_{r_1}(\theta_1-\varphi_1)Q_{r_2}(\theta_2-\varphi_2)f(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})\,d\theta_1d\theta_2.$$

С другой стороны, по лемме 1, $F(e^{i\varphi_1},e^{i\varphi_2}) \in \Lambda(\alpha_1,\alpha_2)$ (где F то же, что в (2)). Поэтому граничные значения

$$F_1(z_1,z_2) \overset{def}{=} \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{Q^2}\frac{(e^{i\theta_1}+z_1)(e^{i\theta_2}+z_2)}{(e^{i\theta_1}-z_1)(e^{i\theta_2}-z_2)}f(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})\,d\theta_1d\theta_2$$

принадлежат $\Lambda(\alpha_1,\alpha_2)$. Далее, имеем

$$F_1(z_1,z_2) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{Q^2}P_{r_1}(\theta_1-\varphi_1)P_{r_2}(\theta_2-\varphi_2)f(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})\,d\theta_1d\theta_2 -$$
$$- \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{Q^2}Q_{r_1}(\theta_1-\varphi_1)Q_{r_2}(\theta_2-\varphi_2)f(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})\,d\theta_1d\theta_2 +$$
$$+ \frac{i}{(2\pi)^2}\iint_{Q^2}[P_{r_1}(\theta_1-\varphi_1)Q_{r_2}(\theta_2-\varphi_2) +$$
$$+ P_{r_2}(\theta_2-\varphi_2)Q_{r_1}(\theta_1-\varphi_1)]\,f(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})\,d\theta_1d\theta_2.$$

Тем самым

$$f(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}) - S_{1,2}(f)(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}) \in \Lambda(\alpha_1, \alpha_2).$$

Так как по предположению $f \in \Lambda(\alpha_1, \alpha_2)$, получаем $S_{1,2}(f) \in \Lambda(\alpha_1, \alpha_2)$, что завершает доказательство.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. B. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, N.Y., 1981.
2. L. Cesari, "Sulle cerildi Fourier della funczioni Lipshitzianc di piu variable", Ann. Scuola Nopm. sup. Piza, vol. 7, pp. 279 – 295, 1938.
3. M. Жук, "Об одной теореме Чезари", ДАН СССР, т. 87, № 6, 1952.
4. B. Yorikke, "A multidimensioпal analogy of Privalov's theorem", Math. Nachrichten, vol. 107, pp. 221 – 233, 1982.
5. М. М. Лекилашвили, "О сопряженных функциях многих переменных в классе *Lip* α", Матем. заметки, т. 23, № 3, 1978.
6. Ф. А. Шамоян, "Диагональные отображения и вопросы представлений в анизотропных пространствах голоморфных функций", Сиб. матем. ж.,т. 31, № 2, стр. 197 – 216, 1990.
7. Ф. А. Шамоян, А. В. Арутюнян, "Об анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций, гладких вплоть до границы", Изв. АН Армении, Математика, т. 28, № 6, стр. 50 – 62, 1993.
8. Ф. А. Шамоян, А. В. Арутюнян, "О некоторых анизотропных пространствах функций, голоморфных в полидиске", ДАН Армении, т. 91, № 4, стр. 147 – 151, 1991.

14 ноября 1994

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении,

Брянский государственный
педагогический институт (Россия)

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 30 НОМЕР 1 1995

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

CONTENTS

VOLUME 30 NUMBER 1 1995

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)