

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3748

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈՒՆԳՐԱԿ

Գլխավոր խմբագիր Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Ռ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ԾԱՀԱՐԱՂՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու քարտուղար Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն աճանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրատարակել Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկայիք սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝ 1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ Քամատոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ:

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրատարակման քաջաոփի դեպքերում խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին աճհրածնշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, աճգլերեն և ռուսերեն լեզուներով:

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրատարակվել համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում:

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով. ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կորսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով:

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, Աջելով նրանց համարը և տեղը տեքստում՝ էջի ձախ մասում: 5. Գրականությունը տեղափոխվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար Աջվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար Աջվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը:

Օգտագործված գրականությունը Աջվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի հավապատասխան տեղում:

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե՛ շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի Ակատմամբ) չեն թույլատրվում: 7. Հոդվածը վերամշակման Ակատմակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չգրադվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում աճհրածնշտ է Աջել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, Աջի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը:

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր: Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ. Գիտությունների Ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»:

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Интегральные операторы с разностными (в том числе и матричными) ядрами обычно называются операторами типа свертки. Классическая теория таких операторов существенным образом опирается на применение преобразования Фурье. Примером являются хорошо известные операторы Винера–Хопфа, соответствующие случаю полубесконечного интервала интегрирования и естественным образом связанные с задачей сопряжения для аналитических функций и с теорией сингулярных интегральных уравнений. Уравнения типа свертки часто появляются в приложениях и для них развито множество быстрых методов приближенного решения.

Задача смотрится в совершенно новой перспективе, когда ядра операторов удовлетворяют уравнениям с частными производными. Последние естественным образом определяют некоторые обыкновенные дифференциальные операторы \mathcal{L} , играющие ключевую роль. Существует гипотеза о том, что условия разрешимости интегрального уравнения в основном зависят от спектральных характеристик операторов \mathcal{L} . В настоящем сборнике статей эта гипотеза подтверждена в ряде случаев.

В первой статье исследуются операторы, которые мы называем "операторами циркулянтного типа", ассоциированными с оператором \mathcal{L} Штурма–Лиувилля на оси, с неограниченным потенциалом и точечным спектром. В этом случае алгоритм решения основан на разложении по собственным функциям оператора \mathcal{L} . Теоретические результаты применены в новых адаптивных алгоритмах для приближенного вычисления преобразований Ганкеля или Фурье. Последние запи-

саны в явном виде произведения полиномиальной и экспоненциальной функций. Приведены вычисления, подтверждающие практическое значение примененного метода.

Вторая статья – чисто теоретическая. В ней рассмотрен случай, когда оператор \mathcal{L} имеет суммируемые коэффициенты. При этом его спектр может обладать как непрерывным, так и точечным компонентами. В этой, более общей ситуации останутся верны многие положения теории операторов полной свертки, или операторов Винера–Хопфа. В случае оператора Штурма–Лиувилля с неотражающимся потенциалом результаты имеют исчерпывающий характер. Описана фредгольмовость интегрального оператора на полуоси (случай, обобщающий уравнение Винера–Хопфа) в терминах некоторой матрицы–функции, определенной на спектре \mathcal{L} , и матрицы рассеяния \mathcal{L} .

Третья статья содержит алгоритм решения интегральных уравнений с разностными ядрами. Довольно высокая точность достигается применением неравномерной сетки. Представлены также численные результаты.

Выражаю мою признательность Международному научному фонду, обеспечившему в 1994 году финансовую поддержку нашей группе по исследованию интегральных уравнений. Часть полученных в результате этой поддержки статей опубликована вне этого сборника (в частности, в №5, 1994 настоящего журнала).

25 декабря 1994

А. Б. Пересляк

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧЕЙ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ТОЧЕЧНЫМ СПЕКТРОМ

А. Б. Нерсисян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 29, № 6, 1994

В статье исследованы интегральные операторы с ядрами, удовлетворяющими некоторым дифференциальным уравнениям второго порядка в частных производных. Целью исследования является нахождение условий, при которых они являются операторами "циркулянтного типа". Рассматриваемое дифференциальное уравнение в частных производных тесно связано с самосопряженной сингулярной задачей Штурма-Лиувилля с точечным спектром. Развита схема вычисления для таких операторов и их резольвент. Детально исследованы случаи, связанные с ортогональными многочленами Лаггера и Эрмита. В частности, предложены методы адаптивного вычисления для преобразований Ганкеля и Фурье. Статья содержит численные результаты.

Ключевые слова : *интегральные операторы, задача Штурма-Лиувилля, многочлены Лаггера, многочлены Эрмита, преобразование Ганкеля, преобразование Фурье*

ВВЕДЕНИЕ

В статьях автора [1, 2], на основе соотношений для резольвентных ядер, были рассмотрены интегральные операторы с ядрами, удовлетворяющими некоторым дифференциальным уравнениям, что привело к развитию некоторых "быстрых" методов решения интегральных уравнений. В частности, для интегрального уравнения второго рода на конечном интервале с ядром, удовлетворяющим уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) K(x, t) = (p(x) - p(t))K(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (0.1)$$

Данное исследование частично финансировано грантом № RYS000 Международного научного фонда.

соответствующий алгоритм по дискретизации на N точках имеет сложность $O(N^2)$ с использованием памяти порядка $O(N)$ ($N \rightarrow \infty$) (см. [2—4]). Ранее этот результат был известен лишь для случая $p(x) \equiv 0$ (т. е. для ядер вида $K(x, t) = K_1(x - t) + K_2(x + t)$). Свойства операторов с ядром K , удовлетворяющих уравнению (0.1) на бесконечном интервале, тесно связаны со спектральной теорией дифференциального оператора Штурма–Лиувилля \mathcal{L} , порожденного оператором $l = d^2/dx^2 - p(x)$. Для самосопряженных на $(-\infty, \infty)$ операторов \mathcal{L} с конечным дискретным спектром и непрерывным спектром, покрывающим положительную полуось теория разрешимости (а также ее версии для операторов высоких порядков) развиты в [5].

Ниже мы рассматриваем операторы \mathcal{L} , действующие в $L_2(0, +\infty)$ или в $L_2(-\infty, \infty)$, полагая, что спектр конечен и не имеет точек сгущения, кроме, быть может, бесконечности. Реализована предложенная в [2] схема “интегральных операторов циркулянтного типа”. Детально рассмотрен случай, соответствующий многочленам Лаггера (и, в частности, многочленам Эрмита).

Описаны связи с адаптивным приближенным вычислением преобразований Ганкеля и Фурье. Для широкого класса функций эффективность рекомендаций подтверждена численным экспериментом.

§1. ОПЕРАТОРЫ ОБЩЕГО ТИПА

1.1. Рассмотрим интегральных оператор

$$Ky = \int_a^\infty K(x, t)y(t) dt, \quad x \in (a, \infty), a \geq -\infty \quad (1)$$

с ядром $K \in C^2[(a, \infty) \times (a, \infty)]$, удовлетворяющим уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) K(x, t) = (p(x) - p(t)) K(x, t), \quad a < x, t < \infty, \quad \text{Im } p(x) = 0, \quad (2)$$

где $p(x)$ — непрерывная функция.

С ядром K ассоциируем самосопряженную задачу Штурма-Лиувилля с потенциалом $p(x)$:

$$ly = \frac{d^2}{dx^2} y(x, \lambda) - p(x) y(x, \lambda) = \lambda y(x, \lambda), \quad y(x, \lambda) \in L_2(a, \infty), \quad \lambda = \text{const}, \quad (3)$$

где в случае $a > -\infty$ в точке $x = a$ поставлено соответствующее граничное условие (см., напр., [6]).

Нас интересует случай, когда спектр оператора l , соответствующего задаче (3), чисто дискретен и имеют место теоремы о разложении оператора в L_2 по собственным функциям. Для этого достаточно (см. ([6], [7]) любое из нижеприведенных условий :

Условие А. $\lim p(x) = +\infty \quad (x \rightarrow \infty)$.

Условие Б. $p(x) \geq c > 0, c = \text{const}, \int_x^{x+\omega} p(x) dx \rightarrow \infty$ (при любых $\omega > 0$ и $x \rightarrow \infty$).

Обозначим через $\{y_k(x)\}$ ортонормальную систему собственных функций задачи (3), соответствующую собственным значениям $\{\lambda_k\}, k = 0, 1, 2, \dots$, с учетом их кратностей. Каждая из этих функций имеет не более чем конечное число нулей (см. [6]). Тем самым, для достаточно больших x ($|x| \geq A_k$, при некотором A_k) второе линейно независимое решение $z_k(x)$ уравнения (3) при $\lambda = \lambda_k$ допускает запись в виде

$$z_k(x) = y_k(x) \int_{A_k}^x \frac{dt}{(y_k(t))^2}, \quad x > A_k, \quad (4)$$

где для простоты предполагаем $x > 0$.

1.2. Пусть теперь ядро K удовлетворяет условиям

$$\left| \int_a^\infty \frac{\partial^i K(x, t)}{\partial x^i} y_k(t) dt \right| < +\infty, \quad (5)$$

$$\left| \int_a^\infty \frac{\partial^i K(x, t)}{\partial t^i} y_k(t) dt \right| < +\infty, \quad x \in (a, +\infty), \quad i = 1, 2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Дополнительно предположим, что при $x > A_k$ (или $x < -A_k$)

$$\left| \int_a^\infty K(x, t) y_k(t) dt \right| \leq \varepsilon(x) y_k(x) \int_{A_k}^x \frac{dt}{(y_k(t))^2}, \quad (6)$$

при некоторой функции $\varepsilon(x)$, для которой $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = 0$ ($|x| \rightarrow \infty$). Для случая $a > -\infty$ дополнительно поставим граничное условие

$$\lim (K(x, t) y'(t) - K_t(x, t) y(t)) = 0, \quad t \rightarrow 0, \quad (6')$$

где $y(x)$ удовлетворяет первоначальным условиям задачи (3).

Теорема 1. Если ядро K удовлетворяет условиям (2), (5), (6) (а при $a > -\infty$ также условию (6')), то

$$\mathcal{K} y_k = c_k y_k(x), \quad c_k = \text{const}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Доказательство. Из первого условия (5) следует, что функция

$$S_k(x) = \mathcal{K} y_k = \int_a^{\infty} K(x, t) y_k(t) dt, \quad x \in (a, \infty)$$

дважды дифференцируема. Из (2), второго условия (5) и условия (6') заключаем, что при $a > -\infty$ функция $S_k(x)$ удовлетворяет уравнению (3), если $\lambda = \lambda_k$.

Отсюда следует (см. п. 1.1), что

$$S_k(x) = c_k y_k'(x) + d_k z_k(x) = y_k(x) \left[c_k + d_k \int_{A_k}^x \frac{dt}{(y_k(t))^2} \right], \quad x > A_k, \quad c_k, d_k = \text{const}.$$

Поэтому при $d_k \neq 0$ нарушилось бы условие (6). Теорема доказана.

Замечание 1. Утверждение теоремы 1 остается справедливым и при некоторых, более слабых предположениях. В частности, не обязательно условие гладкости функции $K(x, t)$ на диагонали $x = t$. Можно предположить, например, что условие (2) выполнено при $x \neq t$ и существуют пределы $K(x, x \pm 0)$. (см. п. 2.3). Тогда достаточно потребовать непрерывность функции $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) K(x, t)$, а также выполнение условий (5) и (6) (а также (6'), если $a > -\infty$).

1.3. При дополнительных ограничениях на $p(x)$ могут быть найдены более удобные условия на ядро K , обеспечивающие справедливость формулы (7).

Обозначим

$$q(x) = p(x)^{-1/4} \frac{d^2}{dx^2} (p(x)^{-1/4}), \quad z_{\pm}(x, \lambda) = p(x)^{-1/4} \exp \left(\pm \int (p(x) - \lambda)^{1/2} dx \right). \quad (8)$$

Теорема 2. Пусть $p(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow \infty$), $p(x) \in C_{loc}^2$, и функция $q(x)$ ограничена для $x > A$ при некотором A . Если для некоторого $\lambda = \text{const} > 0$ выполнены условия

$$\int_a^\infty \frac{\partial^i K(x, t)}{\partial x^i} z_-(t, \lambda) dt < \infty, \quad \int_a^\infty \frac{\partial^i K(x, t)}{\partial t^i} z_-(x, \lambda) dt < \infty, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

$$\left| \int_a^\infty K(x, t) z_-(t, \lambda) dt \right| \leq \varepsilon(x) z_+(x, \lambda), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = 0, \quad (10)$$

(если $a > -\infty$, то также граничное условие (6')), то формула (7) справедлива.

Доказательство. Пусть $y(x, \lambda)$ - решение уравнения $ly = \lambda y$, $\lambda = \text{const}$ (см. (3)). Обозначим

$$r(x) = (p(x) - \lambda)^{-1/4} \frac{d^2}{dx^2} (p(x) - \lambda)^{-1/4}.$$

Если функция $r(x)$ ограничена при достаточно больших $|x|$ (т. е. в бесконечности), то верна асимптотическая формула (см., напр., [8])

$$y(x, \lambda) = (c_1 + z_+(x, \lambda) + c_2 z_-(x, \lambda))(1 + o(1)); \quad c_1, c_2 = \text{const}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Легко видеть, что при $p(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow \infty$) функции $r(x)$ и $q(x)$ в бесконечности либо ограничены, либо неограничены одновременно. Таким образом, остается лишь применить схему доказательства теоремы 1.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что если

$$\int_a^\infty p(x)^{-3/2} dx < +\infty, \quad (11)$$

то, при условии (10), функции $z_\pm(x, \lambda)$ могут быть заменены более простыми выражениями вида

$$\tilde{z}_\pm(x, \lambda) = p(x)^{-1/4} \exp\left(\pm \int p(x)^{1/2} dx \mp \frac{\lambda}{2} \int p(x)^{1/2} dx\right). \quad (12)$$

1.4. Ввиду ортогональности системы $\{y_k(x)\}$, из теоремы 1 следует, что ядро K , удовлетворяющее условиям (2), (5), (6) (при $a > -\infty$ а также условию (6')), формально представимо в виде

$$K(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n y_n(x) y_n(t), \quad k_n = \text{const}, \quad x, t \in (a, \infty). \quad (13)$$

Поведение ряда (13) зависит от дополнительных условий на ядро K .

Дальнейшие построения будут основаны на следующей формальной схеме вычисления значений некоторого оператора \mathcal{K} , действующего на функциях $f(x)$, $x \in (a, \infty)$:

$$\mathcal{K} f = \int_a^\infty K(x, t) f(t) dt = \sum_{n=0}^\infty k_n y_n(x) \int_a^\infty f(t) y_n(t) dt. \quad (13')$$

По терминологии [2], \mathcal{K} является оператором "циркулянтного типа"

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{K}) f = \lambda f(x) - \int_a^\infty K(x, t) f(t) dt = \sum_{n=0}^\infty (\lambda - k_n) f_n y_n(x), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (14)$$

где \mathcal{I} - тождественный оператор, а $f_n = (f, y_n) = \int_a^\infty f(t) y_n(t) dt$. Мы будем использовать это обозначение для скалярного произведения, хотя в общем случае $f \notin L_2$.

В частности, разрешимость интегрального уравнения

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{K}) f = g(x), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad x \in (a, \infty) \quad (15)$$

зависит от соотношений

$$(\lambda - k_n) f_n = g_n, \quad f_n = (f, y_n), \quad g_n = (g, y_n). \quad (15')$$

Если $\lambda \neq k_n$ при каком-либо n , то решение формально имеет вид $\sum f_n y_n$. Очевидно, что разрешимость уравнения (9) тесно связана с поведением коэффициентов k_n при $n \rightarrow \infty$. В частности, уравнение первого рода ($\lambda = 0$) формально устойчиво разрешимо, если $|k_n| \geq c > 0$ при каком-либо n ($c = \text{const}$). В противном случае можно предложить хорошо известную регуляризационную схему (см. [14]), сводящуюся к приближенному решению уравнения

$$\varepsilon f_1(x) + \int_a^\infty K_1(x, t) f_1(t) dt = \int_a^\infty \overline{K(t, x)} g(t) dt. \quad (16)$$

Здесь $\varepsilon > 0$, а K_1 - неотрицательно определенное ядро

$$K_1(x, t) = \int_a^\infty \overline{K(s, x)} K(s, t) ds. \quad (16')$$

В этом случае приближенное решение $f_1 = \sum f_{1n} y_n$ определяется из равенств

$$(\varepsilon + |k_n|^2) f_{1n} = \bar{k}_n g_n, \quad f_n = (g, y_n), \quad f_{1n} = (f_1, y_n).$$

Оптимальный выбор параметра ε зависит от требуемой точности и может быть произведен по стандартной схеме (см. [14]).

§2. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЛАГГЕРА

2.1. Ортогональная на $(0, \infty)$ система Лаггера имеет вид

$$\exp(-x/2)x^{\alpha/2} L_n^\alpha(x), \quad \alpha > -1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (17)$$

где L_n^α - многочлены Лаггера

$$L_n^\alpha(x) = (n!)^{-1} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}). \quad (17')$$

Мы будем пользоваться несколько видоизмененной системой

$$\varphi_n(x) = c_n \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) x^{\alpha+1/2} L_n^\alpha(x^2), \quad c_n = \left(\frac{2n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{1/2}, \quad (18)$$

которая ортогональна на $(0, +\infty)$ и порождена (см. [9]) уравнением

$$\varphi_n'' + \left(4n + 2\alpha + 2 - x^2 + \frac{1/4 - \alpha^2}{x^2}\right) \varphi_n = 0, \quad (18')$$

т. е. здесь $p(x) = x^2 - \frac{1/4 - \alpha^2}{x^2}$. Условие (6) в этом случае приобретает вид

$$\left| \int_0^\infty K(x, t) \varphi_n(t) dt \right| \leq \varepsilon(x) x^{-2n-\alpha-\frac{1}{2}} \exp(-x^2/2),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

В частности, достаточно потребовать выполнения неравенства

$$\int_0^\infty |K(x, t)| t^{2n+\alpha+1/2} \exp(-t^2/2) dt \leq \varepsilon(x) x^{-2n-\alpha-1/2} \exp(x^2/2),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad (19')$$

Легко видеть, что последние условия довольно слабые.

Отметим, что если $\alpha = \pm 1/2$, то потенциал $p(x)$ не содержит сингулярностей, а $\{\varphi_n\}$ - соответствующая система Эрмита, ортогональная на $(-\infty, +\infty)$.

2.2. Для дальнейшего изложения важен нижеприведенный пример ядра, удовлетворяющего условиям теоремы 1 при $p(x) = x^2 - (0.25 - \alpha^2)/x^2$ (см. [9]):

$$\begin{aligned} K_1(x, t) &= (1 - z^2)^{-1} \exp\left(\frac{-x^2(x^2 + t^2)}{1 - z^2}\right) z^{-\alpha/2} \sqrt{xt} I_\alpha\left(2\frac{z}{1 - z^2} xt\right) = \\ &= \exp(-(x^2 + t^2)/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! z^{2n} (xt)^{\alpha+1/2}}{\Gamma(n + \alpha + 1)} L_n^\alpha(x^2) L_n^\alpha(t^2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \varphi_n(x) \varphi_n(t), \quad |z| < 1, \end{aligned} \quad (20)$$

где $I_\alpha(\cdot)$ - модифицированная функция Бесселя.

В случае многочленов Эрмита ($\alpha = \pm \frac{1}{2}$) формула (20) переходит в хорошо известную формулу Мелера

$$K_2(x, t) = (1 - z^2)^{-1/2} \exp\left(\frac{2xtz}{1 - z^2} + \frac{z^2 + 1}{2(z^2 - 1)}(x^2 + t^2)\right) = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \varphi_n(x) \varphi_n(t), \quad (21)$$

справедливую для любого комплексного $z \neq 1$ (см. [9]). Здесь $\{\varphi_n\}$ - система Эрмита, ортогональная на $(-\infty, +\infty)$:

$$\varphi_n(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}} H_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (21')$$

где $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$ - многочлены Эрмита.

Отметим, что если $z \neq \pm 1$, $|z| \geq 1$, то коэффициенты разложения (15) не стремятся к нулю. Следовательно (см. п. 1.4), в случае интегрального уравнения первого рода, в которое (15) переходит при $\lambda = 0$ и $K = K_1$ (или $= K_2$), оно устойчиво разрешимо без регуляризации.

2.3. В качестве другого примера рассмотрим ядро, не гладкое при $x = t$:

$$K_3(x, t) = \exp\left(-\frac{x^2 + t^2}{2}\right) \operatorname{Erfi}(\min(x, t)); \quad x, t \in \mathbb{R}^1, \quad (22)$$

где $\operatorname{Erfi}(x) = \int_0^x e^{s^2} ds$. Имеем (см. [9])

$$K_3(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2n+1}(x) \varphi_{2n+1}(t)}{2n+1}$$

где $\{\varphi_n\}$ – система Эрмита (21'). Нетрудно видеть, что при $p(x) = x^2$ это ядро удовлетворяет условиям замечания 1 к теореме 1.

Схема, данная в п. 1.4 позволяет решать уравнение второго рода с ядром λK_3 , где $\lambda = \text{const}$ (см. п. 4.1). Для численного решения уравнения первого рода необходима регуляризация (см. п. 1.4)

Отметим, что граничная задача ($y \in L_2(-\infty, \infty)$) для неоднородного уравнения Эрмита

$$y''(x) + (\lambda + 1 - x^2)y(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^1 \quad (22')$$

переходит в интегральное уравнение вида $(I - \lambda K)y = f$ с ядром $K = \lambda K_3$ ($\lambda \in \mathbb{C}$). Это уравнение разрешимо при $\lambda \neq 2n + 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

§3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГАНКЕЛЯ И ФУРЬЕ

3.1. Из (20) следует, что при $z = ir$ и $\text{Im}(r) = 0$ имеем

$$J_s \left(\frac{2r}{1+r^2} xt \right) = (1+r^2) \exp \left(\frac{is\pi}{2} \right) (xtr)^s \exp \left(-\frac{r^2(x^2+t^2)}{1+r^2} \right) \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(-r^2)^n}{\Gamma(n+k+1)} L_n^s(x^2) L_n^s(t^2), \quad (23)$$

где $J_s(\cdot)$ – бесселевы функции первого рода, а $r \in (0, 1)$. Пусть теперь $x = a\xi$ и $t = \frac{(1+r^2)\eta}{2ra}$ ($a > 0$). Тогда

$$J_s(\xi\eta) = \frac{(1+r^2)^{s+3/2}}{2^{s+1/2}} \xi^s \eta^s \exp \left(-\frac{r^2 a^2 \xi^2}{1+r^2} \right) \exp \left(-\frac{(1+r^2)\eta^2}{4a^2} \right) \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(-r^2)^n}{\Gamma(n+s+1)} L_n^s(a^2 \eta^2) L_n^s \left(\frac{(1+r^2)^2 \eta^2}{4r^2 a^2} \right). \quad (23')$$

Выражение (23') содержит два параметра (r и a). Применим это выражение для вычисления преобразования Ганкеля

$$h(f) = \int_0^{\infty} f(t) (tx)^{1/2} J_s(tx) dt, \quad x \geq 0. \quad (24)$$

Обычный подход к вычислению интегралов, зависящих от параметра, состоит из следующих этапов :

- а) выбор сеток $\{t_k\}$ и $\{x_p\}$ ($t_k, x_p \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$, $n, p = 1, 2, \dots, m$);
- б) вычисление $h(f)(x_p)$ для $p = 1, 2, \dots, m$ на сетке $\{t_k\}$ посредством квадратурных формул;
- в) при необходимости, применение интерполяционных формул для $h(f)$ при $x \in \mathbb{R}^1$.

При больших требованиях на точность этап б) может быть реализован без предварительного выбора сетки $\{t_k\}$, посредством автоматического оптимального выбора точек дискретизации (см., напр., [10]).

В силу (23') имеет место разложение $h(f) = \sum h_n \psi_n$ по системе

$$\psi_n(x) = x^{s+1/2} \exp\left(-\frac{r^2 a^2}{1+r^2} x^2\right) L_n^s(a^2 x^2), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (25)$$

$$h_n = \frac{n!(-r^2)^n}{\Gamma(n+s+1)} \int_0^\infty t^{s+1/2} \exp\left(-\frac{(1+r^2)t^2}{4a^2}\right) L_n^s\left(\frac{(1+r^2)^2}{4r^2 a^2} t^2\right) f(t) dt. \quad (25')$$

Нижеприводимые рассуждения показывают преимущества этого подхода :

1) Частичная сумма $\sum h_n \psi_n$ ($0 \leq n \leq N$) представляет приближенное значение $h(f)$ в явном виде :

$$h(f) \approx x^{s+1/2} \exp\left(-\frac{r^2 a^2}{1+r^2} x^2\right) P_N(x),$$

где P_N — многочлен порядка N , зависящий от $(N+1)$ коэффициентов.

2) Квадратурные формулы удобны для вычисления h_n по формуле (25'), ввиду наличия под интегралом быстро убывающего экспоненциального члена.

3) По той же причине $\{h_n\}$ могут быть вычислены для некоторых функций $f(x)$, не суммируемых в бесконечности, в то время, как $h(f)(x_p)$ вычислено для узкого класса функций, например, для $L_1(\mathbb{R}^1)$ или $L_2(\mathbb{R}^1)$. Это позволяет (см. ниже, §4) представить приближенно распределения $h(f)$, являющиеся производными локально интегрируемых (но, возможно, не гладких) функций.

4) Выбор параметров r и a позволяет применить адаптивный подход, т. е. учитывать дополнительную *априорную* информацию о свойствах $h(f)$ (см. п. 3.2 и §4).

Замечание 3. Ограничение $|r| < 1$ обеспечивает сходимость ряда в формуле (23). Тем не менее, для вычисления $h(f)$ это ограничение может быть снято, если ряд $\sum h_n \psi_n$ сходится. Формула (25') обеспечивает эту возможность как минимум для гладких функций $f \in L_2(\mathbb{R}^1)$, таких что

$$|f(x)| \leq \text{const} \exp\left(\frac{(1+r^2)x^2}{4a^2} - \varepsilon x\right), \quad \text{при любом } \varepsilon > 0.$$

3.2. Рассмотрим более детально случай эрмитовых многочленов. Из формулы (21), записанной для $z = ir$ ($\text{Im}(r) = 0$) получаем ($a > 0$)

$$e^{ixt} = (1+r^2)^{1/2} \exp\left(-\frac{a^2 r^2 x^2}{1+r^2}\right) \exp\left(-\frac{1+r^2}{4a^2} t^2\right) \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ir/2)^n}{n!} H_n(ax) H_n\left(\frac{1+r^2}{2ar} t\right), \quad x, t \in \mathbb{R}^1; \quad a, r > 0. \quad (26)$$

Рассмотрим частные случаи. При $r = 1$ имеем

$$e^{ixt} = \sqrt{2} \exp\left(-\frac{a^2 x^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i/2)^n}{n!} H_n(ax) H_n(t). \quad (27)$$

При $a = \left(\frac{1+r^2}{2r}\right)^{1/2}$ получаем выражение, симметричное по x и t :

$$e^{ixt} = \sqrt{1+r^2} \exp\left(-\frac{rx^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{rt^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ir/2)^n}{n!} H_n(ax) H_n(at). \quad (28)$$

Как следует из представления порождающей функции для эрмитовых многочленов, имеем (см. [9])

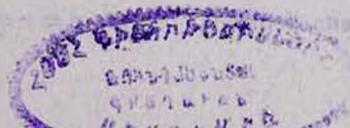
$$e^{ixt} = \exp(-t^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} H_n(x) t^n. \quad (29)$$

Существенно, что (29) – предельный случай формулы (26) (при $r \rightarrow 0$).

Далее, приведем краткий анализ разложения (26) посредством преобразования Фурье по многочленам Эрмита. Формально имеем

$$\hat{f} = \sum_{n=0}^{\infty} (ir)^n f_n H_n(ax) \exp\left(-\frac{a^2 r^2 x^2}{1+r^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (30)$$

где



$$f_n = \frac{\sqrt{1+r^2}}{2^n n!} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) H_n(s) \left[f\left(\frac{2ar}{1+r^2}s\right) \exp\left(\frac{(1-r^2)s^2}{2(1+r^2)}\right) \right] ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (30')$$

Таким образом, коэффициенты f_n представлены посредством коэффициентов Эрмита функции

$$F(x) = \exp\left(\frac{1-r^2}{2(1+r^2)}x^2\right) f\left(\frac{2ar}{1+r^2}x\right).$$

Воспользовавшись следующей неулучшаемой глобальной оценкой для многочленов Эрмита (см. [9])

$$\begin{aligned} |H_{2n}(y)| &\leq \exp\left(\frac{y^2}{2}\right) 2^{2n} n! \left(2 - \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2)n!}\right), \\ |H_{2n+1}(y)| &\leq |y| \exp\left(\frac{y^2}{2}\right) 2^{2n+2} \frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(3/2)}, \quad y \in \mathbb{R}^1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (31)$$

получим

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{a^2 r^2}{1+r^2}x^2\right) |H_{2n}(ax)| &< 2^{2n+1} n! \exp\left(\frac{(1-r^2)a^2 x^2}{2(1+r^2)}\right), \\ \exp\left(-\frac{a^2 r^2}{1+r^2}x^2\right) |H_{2n+1}(ax)| &\leq 2^{2n+2} a \frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(3/2)} |x| \exp\left(\frac{(1-r^2)a^2 x^2}{2(1+r^2)}\right). \end{aligned} \quad (31')$$

Отсюда следует, что предположение $r \geq 1$ может быть удобно (особенно для негладких f), поскольку тогда рассматриваемый класс функций расширяется. При $r > 1$ слагаемые ряда (30) равномерно ограничены в \mathbb{R}^1 . При $r = 1$ (см. первое неравенство (31')) также равномерно ограничены слагаемые ряда преобразования Фурье. Случай, $r < 1$ предпочтительнее при убывающем f (см. рис. 3), когда требуется большая точность на ограниченном сегменте (см. §4).

Замечание 4. Функция $H_n(x)$ осциллирует только на интервале $|x| < \sqrt{2n}$ (см. [9]). Для урезанного ряда (30) интервал высокой относительной точности убывает при возрастании a . Тем самым, имеет смысл перейти к пределу в разложениях по первым p функциям системы Эрмита $\{\varphi_n(x)\}$ ($n \leq p$), например на сегменте $(0, \sqrt{2p}/a)$ (см. также нижеследующие п. п. 4.1 и 4.3).

Использование разложений по многочленам Лаггера или Эрмита для вычисления преобразований Фурье имеет предысторию. В. Ф. Эберлейном [12] была использована формула (28) при $a = r = 1$ в случае $xf(x) \in L_2(\mathbb{R}^1)$, $f'(x) \in L_2(\mathbb{R}^1)$. X.

Вебер [13] применил разложение преобразования Фурье по многочленам Лаггера и Эрмита по другой схеме, допускающей быстрое преобразование Фурье (FFT). Формула (29) была применена для вычисления преобразования Фурье посредством интегрирования только по первому переменному x (для подробностей см. [10], §3.94).

3.3. Сделаем некоторые замечания относительно вычисления коэффициентов $\{h_n\}$ в (25'). Как правило, при $n \gg 1$ интегрируемая функция быстро осциллирует, как в (24). Тем самым, стандартные пакеты программ для численного интегрирования могут привести к большим ошибкам или даже полностью отказать.

В случае гладкого $f(x)$ обычно эффективны следующие подходы :

- 1) применение квадратурных формул Гаусса - Лаггера - Эрмита (см. [10]);
- 2) развитие весовых формул для вычисления неосциллирующих интегралов

$$S_k = \int_0^\infty t^{s+1/2} \exp\left(-\frac{(1+r^2)t^2}{4a^2}\right) t^k f(t) dt, \quad (32)$$

при неосциллирующем f , и использование h_n как в (25') с (см. [9])

$$L_n^s(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+s}{n-m} \frac{x^m}{m!}; \quad (32')$$

- 3) вычисление $\{S_k\}$ и $\{h_n\}$ по (32), (25') с использованием стандартных пакетов программ;
- 4) применение асимптотики многочленов Лаггера и Эрмита на бесконечности ([9]) для особых, весовых квадратурных формул.

В нижеследующем §4 в случае многочленов Эрмита мы применим подход 2).

§4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Таблица и рисунки этого параграфа были выполнены с применением программного пакета MATHEMATICA [11].

4.1. Если K удовлетворяет условиям теоремы 1, то, согласно п. 1.4, в первую очередь необходимо вычислить коэффициенты k_n . С этой целью для каждого n выберем x_n так, чтобы $y(x_n) \neq 0$. Тогда (см. (13))

$$k_n = (y_n(x_n))^{-1} \int_a^\infty K(x_n, t) y_n(t) dt. \quad (33)$$

Рассмотрим, для конкретности, систему Эрмита $\{\varphi_n\}$ ($a = -\infty, p(x) = x^2$).

При $|x| \geq \sqrt{2n}$ функция $\varphi_n(x)$ не имеет нулей (см. замечание 4). Можно взять $x_n = \sqrt{2n}$. Более целесообразно использовать следующие формулы (см. [9]):

$$k_{2p} = (-1)^p \frac{p!}{(2p)!} \int_{-\infty}^\infty K(0, t) \varphi_{2p}(t) dt, \quad (33')$$

$$k_{2p+1} = \frac{(-1)^p p!}{2(2p+1)(2p)!} \int_{-\infty}^\infty K'_x(0, t) \varphi_{2p+1}(t) dt, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Решение y уравнения

$$y(x) = \lambda \int_{-\infty}^\infty K(x, t) y(t) dt + f(x), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \lambda \neq k_n^{-1} \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (34)$$

может быть аппроксимировано (см. (15), (15')) посредством суммы

$$y_p(x) = \sum_{n=0}^p \frac{f_n}{1 - \lambda k_n} \varphi_n(x). \quad (35)$$

Вычислим среднюю квадратичную ошибку на интервале $(0, l)$, ($l > 0$)

$$\varepsilon(l)^2 = \frac{1}{l} \int_0^l (y_p(x) - y(x))^2 dx. \quad (36)$$

Для проверки ядро $K = K_3(x, t)$ было выбрано (см. (22), (22')) имеющим разрывные производные на прямой $x = t$. Функция f правой части и точное решение y были выбраны следующим образом:

$$f(x) = \left[\frac{2x(2+x^2)}{(1+x^2)^2} - \arctan x - \frac{\pi}{2} \right] \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad y(x) = \frac{2x(2+x^2)}{(1+x^2)^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \quad (37)$$

Решение $y(x)$ является нечетной функцией. Средняя квадратичная ошибка $\varepsilon_p(l)$ на $(0, l)$ была вычислена по формуле (36).

Результаты численного эксперимента содержатся в таблице 1. Выбор $l = 4$ в первом столбце приводит к тому, что при $x > 4$ функция $y(x)$ практически равняется нулю.

Во втором столбце величина l связана с максимальным интервалом, где $\varphi(x)$ осциллирует (см. замечание 4). В третьем столбце имеется ввиду та же связь, но только для $p = 64$. В нашей задаче сходимость ряда (35) довольно медленная.

Таблица 1.

Средняя квадратичная ошибка $\epsilon_p(l)$, вычисленная по формуле (36) для решения уравнения (34) с данными (37).

p	$l = 4$	$l = 2^{\frac{p+2}{2}}$	$l = 2^{\frac{p}{2}}$
4	$1.6E-1$	$1.8E-1$	$9.2E-2$
8	$6.4E-2$	$6.3E-2$	$3.8E-2$
16	$1.6E-2$	$1.4E-2$	$9.8E-3$
32	$2.0E-3$	$1.5E-3$	$1.3E-3$
64	$1.0E-4$	$6.4E-5$	$6.4E-5$

4.2. Преобразование Ганкеля (24) вычислено на основе формулы (23'), урезанной по n :

$$\begin{aligned}
 h(f) &= \int_0^\infty \sqrt{xt} J_s(xt) f(t) dt \approx h_p(f) = \\
 &= (1+r^2)^{s+1/2} 2^{-s-1/2} x^{s+1/2} \exp\left(-\frac{r^2 a^2 x^2}{1+r^2}\right) \sum_{n=0}^p \frac{n!(-r^2)^n}{\Gamma(in+s+1)} L_n^s(a^2 x^2) \times \\
 &\times \int_0^\infty t^{s+1/2} \exp\left(-\frac{(1+r^2)t^2}{4a^2}\right) L_n^s\left(\frac{1+r^2}{4r^2 a^2} t^2\right) f(t) dt, \quad x \geq 0, p \geq 1. \quad (38)
 \end{aligned}$$

Выбрана следующая функция :

$$f_1(x) = J_{s-1}(x) x^{-1/2}, \quad x > 0. \quad (39)$$

Имеем (см. [9])

$$h(f_1)(x) = x^{1/2} \int_0^\infty J_{s-1}(t) J_s(xt) dt = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \\ x^{1/2-s}, & x > 1. \end{cases} \quad (39')$$

Если $x \rightarrow 0$ (см. [9]) то $J_s(x) \approx 2^{-s} (\Gamma(s+1))^{-1} x^s$ и, тем самым, интеграл в (39') сходится для $s > 0$. Рассмотрены три случая : $s = 1.7$ ($h(f_1) \downarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$),

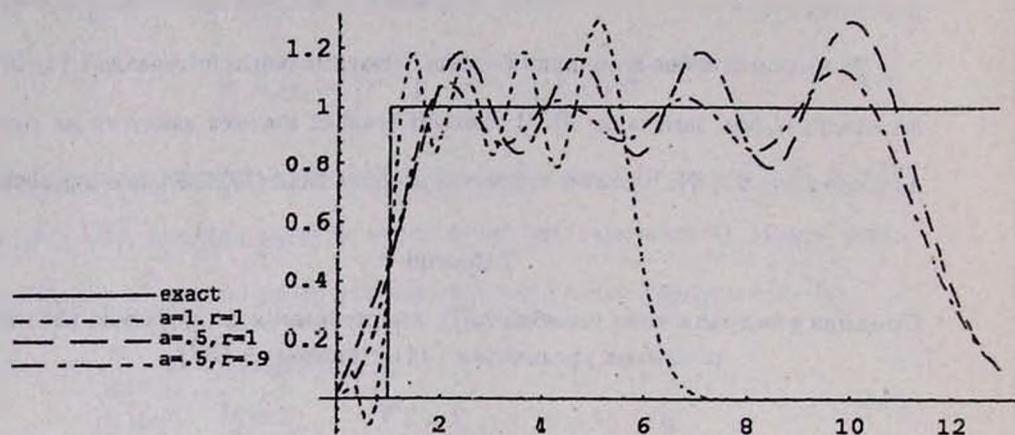


Рис. 1. Графики приближенного вычисления $h(f_1)$ (с разрывом в $x = 1$) по формуле (38) для $s = 0.5$ и $p = 8$.

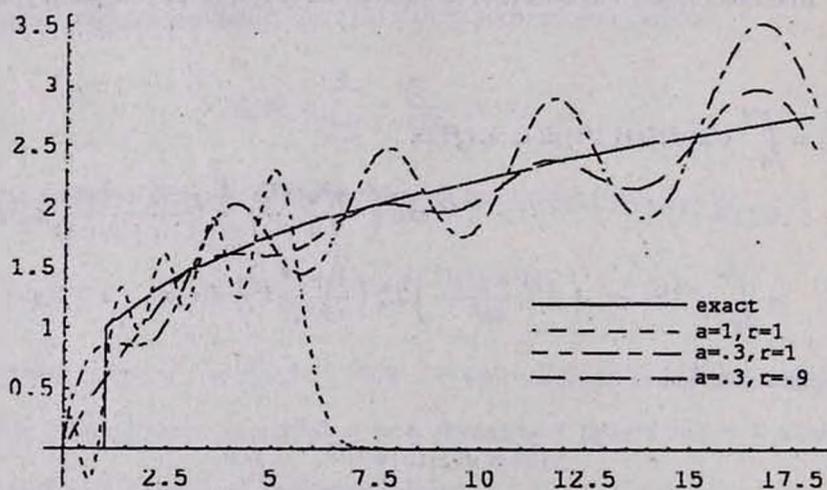


Рис. 2. Графики приближенных вычислений $h(f_1)$ (с разрывом в $x = 1$) по формуле (38) для $s = 0.15$ и $p = 8$.

$s = 0.5$ ($h(f_1) = 1$ при $x > 1$) и $s = 0.15$ ($h(f_1) \uparrow \infty$ если $x \rightarrow \infty$). Ниже даны результаты для последних двух случаев.

В рис. 1 и 2 иллюстрирован характер аппроксимации при $s = 0.5$ и $s = 0.15$. Отметим возможность адаптивного (посредством выбора a и γ) подхода, содержащего априорную информацию (например, основанную на физических соображениях) о поведении $h(f)$ при $x \rightarrow \infty$.

В рассматриваемом случае асимптотическое поведение $f_1(x)$ позволяет предсказать характер гладкости $h(f_1)$, а из поведения $f_1(x)$ при $x \rightarrow 0$ следует, что $h(f_1)$ не может убывать слишком быстро (см. также нижеследующее замечание 5). Как видно из рис. 1 и 2, если мы интересуемся относительно малой окрестностью точки $x = 0$, то лучше брать $a > 1$. Если необходимо аппроксимировать функцию на возможно большем интервале, то лучше брать $a < 1$. Если $s = 0.15$, а $h(f_1)(x)$ стремится к бесконечности при $x \rightarrow \infty$, то особенно эффективны меньшие значения a (см. нижеследующее замечание 5). Оба приведенных графика ясно демонстрируют, что уменьшение параметра γ приводит к более гладкой аппроксимации. Далее (этого на рис. 1, 2 не показано), при $x > 20$ вариация аппроксимируемой функции резко возрастает в согласии с оценками (31'). В случае $s = 1.7$ ситуация аналогична, однако, ввиду убывания $h(f_1)$ при $\gamma \geq 1$, аппроксимации имеют глобальный характер.

4.3. Анализ вычислений преобразования Фурье по схеме пункта 3.2 был произведен более подробно. В классической теории обычно оперируют изоморфизмом $L_2(\mathbb{R}^1) \longleftrightarrow L_2(\mathbb{R}^1)$ задаваемом преобразованием Фурье

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(t) dt. \quad (41)$$

Во многих задачах применяется также алгебра Винера, состоящая из непрерывных функций \hat{f} , соответствующих $f \in L_1(\mathbb{R}^1)$. Численные задачи в основном рассматриваются в этих случаях.

Теория распределений ([13]) позволяет использовать преобразования Фурье \hat{f} функций $f \in L_{loc}$ полиномиального роста в бесконечности. Однако, их численные

аспекты, насколько нам известно, ранее не были рассмотрены.

Ниже дано приближенное вычисление преобразований Фурье \hat{f} посредством урезанной формулы (26) ($p \geq 0$).

$$\hat{f} \approx \sqrt{\frac{1+r^2}{2\pi}} \exp\left(-\frac{a^2 r^2 x^2}{1+r^2}\right) \sum_{n=0}^p \frac{\left(\frac{ix}{2}\right)^n}{n!} H_n(ax) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{1+r^2}{4a^2} t^2\right) H_n\left(\frac{1+r^2}{2ar} t\right) f(t) dt, \quad p \geq 0. \quad (42)$$

Для избежания вычислений с комплексными числами и для графического изображения решения был произведен численный эксперимент для сов-преобразования

$$Cs(f)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(xt) f(t) dt, \quad x \geq 0 \quad (43)$$

на основе следующей формулы, являющейся следствием (42) ($\text{Im}(f) = 0$):

$$Cs(f) \approx \sqrt{\frac{2(1+r^2)}{\pi}} \exp\left(-\frac{a^2 r^2 x^2}{1+r^2}\right) \sum_{n=0}^p \frac{\left(-\frac{r^2}{4}\right)^n}{(2n)!} H_{2n}(ax) \times \\ \times \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{1+r^2}{4a^2} t^2\right) H_{2n}\left(\frac{1+r^2}{2ar} t\right) f(t) dt. \quad (43')$$

Отметим, что в 4.1. фактически вычислено преобразование Фурье функции $x^{-1} \cos x$ при $s = 1/2$, а эта функция не суммируема в окрестности нуля.

Замечание 5. Будем говорить, что функция $f(x)$ гладкая, если четное разложение f на $(-\infty, \infty)$ принадлежит классу $C^k(-\infty, \infty)$, $k \gg 1$. Выбор параметров r и a произведен на основе следующих простых соображений: для более гладких f скорость убывания \hat{f} в бесконечности больше. Тем самым, предпочтительно увеличить параметр $a^2 r^2 / (1+r^2)$ в формуле (43'). Наоборот, если f обладает сингулярностями, то лучше брать этот параметр меньшим. Убывание r^{2n} приводит к более гладкому изменению графика (роль первых гармоник возрастает).

Преобразование $Cs(f)$ было приближенно вычислено по формуле (43') для

следующих функций и их точных cos-преобразований :

$$\begin{aligned}
 f_2(x) &= \frac{\sin 0.25x}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(1.5(x-8))}{x-8} + \frac{\sin(1.5(x+8))}{x+8} \right), \\
 f_3(x) &= a(x) - b(x), \\
 a(x) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & x \leq 0.25, \\ 0, & x > 0.25, \end{cases} \\
 b(x) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos 8x, & x \leq 1.5, \\ 0, & x \geq 1.5, \end{cases} \\
 f_3(x) &= Cs(f_2(x)), \quad Cs(f_3)(x) = f_2(x), \quad f_4(x) = 1.
 \end{aligned} \tag{44}$$

Функции f_2 и f_3 являются cos-преобразованиями Фурье друг друга. При медленном росте f_2 функция $Cs(f_2) = f_3$ не может быть очень гладкой. С другой стороны, функция f_2 целая, тем самым, $Cs(f_2) = f_3$ быстро убывает. Функция f_2 - экспоненциального типа 1.5 и поэтому $f_3(x) \equiv 0$ при $x > 1.5$. С другой стороны, функция f_3 разрывна. Поэтому ясно, что $Cs(f_3) = f_2$ будет медленно убывающей.

Можно *априори* прийти к заключению, что для приближенного вычисления $Cs(f_2)$ лучше брать $a > 1$, и $a < 1$ для $Cs(f_3)$. Что касается выбора $r < 1$, см. замечание 6. Рис. 3 и 4 подтверждают эффективность такого подхода.

На рис. 5 показано приближенное представление δ -функции при $a > 1$ и $r = 1$. Отметим, что из классической формулы

$$Cs(f_4)(x) = \lim_{A \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^A \cos(xt) dt \tag{45}$$

следует, что

$$Cs(f_4)(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^A \cos(xt) dt = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin Ax}{x}. \tag{45'}$$

График правой стороны (45') интенсивно осциллирует при $A \gg 1$ и, тем самым, приближенное вычисление, основанное на $\frac{\sin Ax_k}{x_k}$ ($0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n$) может привести к большой ошибке.

На рис. 6 представлены результаты такого подхода. Значения функции (45') на сетке $\{\frac{4k}{n}\}$ точны. Значение $A = 11.3$ выбрано так, чтобы (45') при $x = 0$

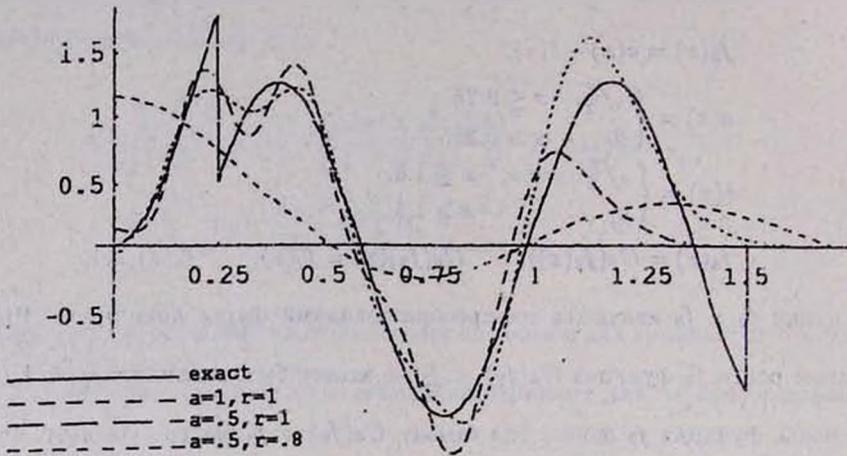


Рис. 3. График приближенного вычисления преобразования $Cs(f_2) = f_3$ при $p = 6$. Функция f_3 разрывна (см. (43')) в точках $x = 0.25$ и $x = 1.5$.

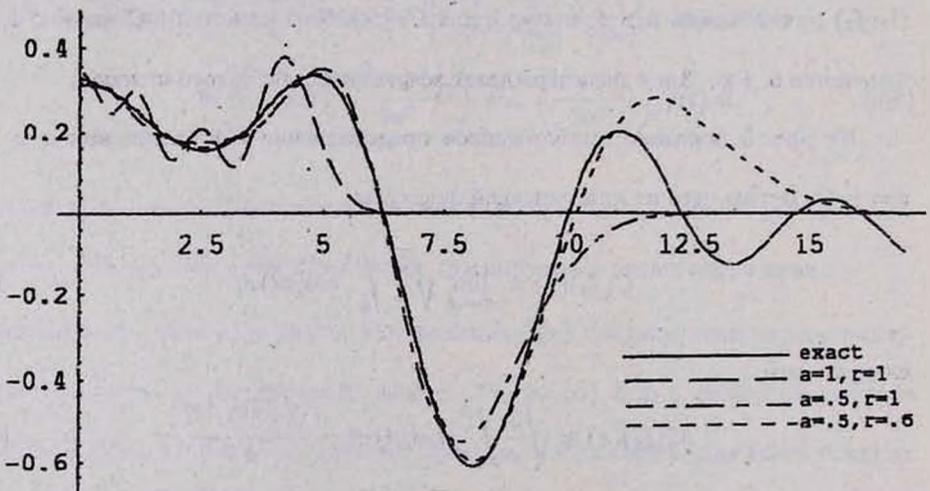


Рис. 4. График приближенного вычисления преобразования $Cs(f_3) = f_2$ при $p = 6$ (см. (43')).

имело приблизительно то же значение, что имеет функция "получше" на рис. 5, определенная вычислением семи интегралов.

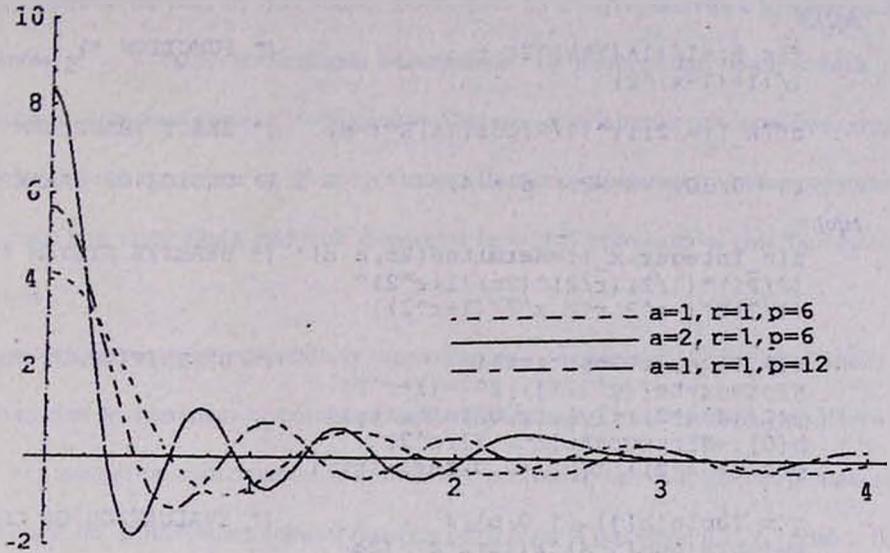


Рис. 5. График приближенного вычисления дельта-распределения $\frac{1}{2}\delta(x) = Cs(f_1(x))$ при $p = 6$ и $p = 12$.

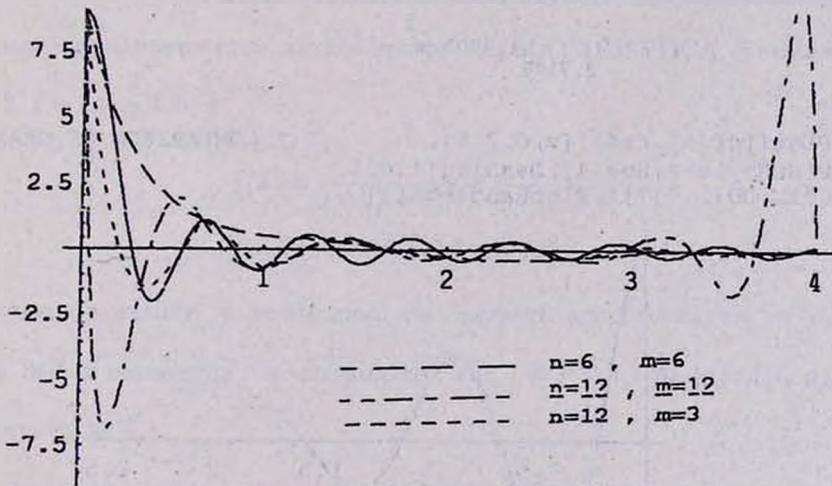


Рис. 6. Приближенное вычисление распределения $Cs(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\delta(x)$ по (45') при $A = 11.3$ на равномерной сетке $\{\frac{4k}{n}\}$ ($k = 0, 1, \dots, n$), с последующей интерполяцией многочленом порядка m .

Кривая менее сходная с δ -функцией, чем представленная на рис. 5, была

■ FOURIER COSINE TRANSFORM

In[1]:=

```
f[x_]:=1/(1+(7+x)^2) + (* FUNCTION *)
1/(1+(7-x)^2)

cf[x_]:= (2Pi)^(1/2) Cos[7x] E^(-x) (* EXACT TRANSFORM *)

r = 9/10; a = 2; p = 4; (* CHOICE OF PARAMETERS *)
```

Out[5]:=

```
b[n_Integer, x_]:= HermiteH[2n, a x] * (* HERMITE SYSTEM *)
(2/Pi)^(1/2) (r/2)^(2n) (1+r^2)^(1/2)
E^(-a^2 r^2 x^2/(1+r^2))

b[j_Integer?Positive]:= (* DEFINITION OF COEFFICIENTS *)
NIntegrate[{y^(2*j)} E^(-(1+r^2)
y^2/(4 a^2)) f[y], {y, 0, Infinity}]
b[0]:= NIntegrate[E^(-(1+r^2)
y^2/(4 a^2)) f[y], {y, 0, Infinity}]

v = Table[b[j], {j, 0, p}]; (* EVALUATION OF COEFFICIENTS *)
w = Table[Sum[(-4)^k ((1+r^2)/(2a
r))^(2k) v[[k+1]] / ((n-k)!(2k)!),
{k, 0, n}], {n, 0, p}];

csf = N[Together[Sum[h[n, x] (* APPROXIMATE TRANSFORM *)
w[[n+1]], {n, 0, p}]], 5]
```

Out[14]=

$$\frac{2.0309 - 40.791 x^2 + 114.9 x^4 - 90.73 x^6 + 19.937 x^8}{2.7183 + 1.7901 x^2}$$

In[15]:=

```
Plot[{cf[x], csf}, {x, 0, 2.5}, (* COMPARISON OF GRAPHICS *)
PlotStyle->{Hue[1], Dashing[ {.015,
.01, .007, .01}]}, PlotRange->All]
```

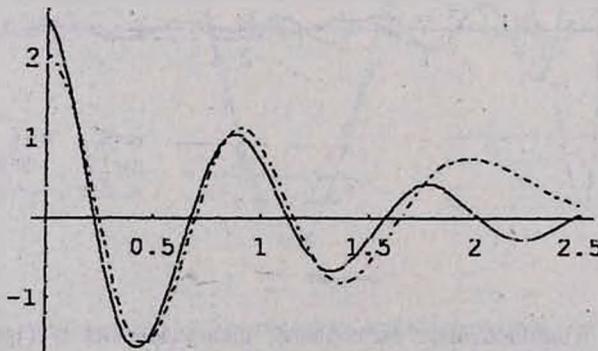


Рис. 7. Приближенное сов-преобразование Фурье, задаваемое формулой (43'), методом 2), п. 3.3 при $a = 2$, $r = 0.9$, $p = 4$.

получена вычислением семи интегралов ($n = 6, p = 6$) и полиномиальной

интерполяцией на рис. 6. Для числа точек $p = 12$ и интерполяции кубическим сплайном $p = 3$ было необходимо вычисление 13 интегралов. Полученная в результате кривая ближе к δ -функции. Однако, эта кривая не записывается одной формулой и зависит от 48 постоянных. Попытка применить интерполяцию Лагранжа для получения простой формулы ($p = 12$) приводит к еще большим ошибкам.

При возрастании A вычисления, основанные на формуле (45) должны производиться для интенсивно осциллирующего интеграла. Одного этого уже достаточно для значительных ошибок. В нашем случае (см. пункт 3.3) это затруднение было обойдено. При традиционном подходе (45), если A большое и $x \geq \text{const} > 0$, то можно получить любую функцию с графиком в зоне $|y| < \sqrt{\frac{2}{\pi}} 1/x$. В то же время применение (44') приводит к согласованным результатам (см. рис. 5).

4.4. На вышеприведенном рис. 7 показан результат приближенного вычисления сов-преобразования и графического сравнения с точным преобразованием, полученным применением стандартной программы MATHEMATICA. В этом примере $a = 2$, $\tau = 0.9$, $p = 5$, и

$$f(x) = \frac{1}{1 + (7 + x)^2} + \frac{1}{1 + (7 - x)^2}, \quad (46)$$

$$Cs(f)(x) = \sqrt{2\pi} e^{-x} \cos(7x).$$

Согласно замечанию 4, необходимо рассмотреть аппроксимацию на сегменте $[0, 2]$. Выбор параметра τ не оптимален: для $1 \leq \tau \leq 1.1$ результаты лучше, см. замечание 5.

Отметим, что на компьютере IBM DX/33 MHz/ 8 MB/ это вычисление приближенного сов-преобразования заняло примерно 14 секунд. Построение графиков требует примерно 3.5 секунд.

ABSTRACT. Integral operators with kernels satisfying certain second order partial differential equation are studied. The purpose is to find conditions when these operators are of "circulant type". The partial differential

equation is closely connected with self-adjoint singular Sturm - Liouville problem with point spectrum. A calculation scheme for such operators and their resolvents is developed. The cases associated with orthogonal Laguerre and Hermite polynomials are studied in some detail. In particular, adaptive calculation methods for Hankel and Fourier transforms are suggested. The paper contains numerical results.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Б. Персесян, "О структуре резольвент некоторых интегральных операторов с ядрами, определяемыми дифференциальными уравнениями", ДАН СССР, т. 30, № 3, стр. 727 — 732, 1984.
2. А. Б. Персесян, "Об эффективном численном решении интегральных уравнений", Изв. АН Армении, Математика, т. 27, № 2, стр. 3 — 63, 1992.
3. А. Б. Персесян, М. Абду, Ш. А. Багдасарян, "Новое быстро решаемое интегральное уравнение" ДАН Армении, т. 92, № 4, стр. 168 — 174, 1991.
4. А. Г. Камалян, А. Б. Персесян, "Об обращении интегральных операторов с почти разностно-суммарным ядром", Изв. АН Армении, Математика, т. 19, № 3, стр. 181 — 218, 1984.
5. А. Г. Камалян, И. Г. Хачатрян, А. Б. Персесян, "Разрешимость интегральных уравнений с операторами типа \mathcal{L} -свертки", Изв. АН Армении, Математика, т. 29, № 6, стр. 31 — 81, 1994.
6. E. C. Titchmarsh, *Eigenfunctions Expanses Associated with Second Order Differential Equations*, vol. 1, 2, Oxford, Clarendon Press, 1946.
7. А. К. Молчанов, "Об условии дискретизации спектров самосопряженных дифференциальных уравнений второго рода", Труды Моск. матем. общества, 1, стр. 169 — 199, 1953.
8. F. W. J. Olver, *Asymptotics and Special Functions*, N. Y., L., Academic Press, 1974.
9. H. Bateman, A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions*, vol. 2, McGraw-Hill book Company, 1953.
10. P. J. Davis, P. Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, 1984.
11. S. Wolfram, *Mathematica : A System for Doing Mathematics by Computer*, 2nd ed., Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1991.
12. W. F. Eberlein, "A New Method for Numerical Evaluation of the Fourier Transform", *Journal of Math. Analysis and Appl.*, vol. 65, pp. 80 — 84, 1978.
13. H. Weber, "Numerical Computation of the Fourier Transform Using Laguerre Functions and Fast Fourier Transform", *Numer. Math.* vol. 36, pp. 197 — 209, 1981.
14. А. Тихонов, К. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Москва, Наука, 1979.

15 декабря 1995

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении

РАЗРЕШИМОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРАМИ ТИПА \mathcal{L} -СВЕРТКИ

А. Г. Камалян, И. Г. Хачатрян, А. Б. Нерсисян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 29, № 6, 1994

В статье исследованы одномерные интегральные операторы типа \mathcal{L} -свертки с ядрами, удовлетворяющими некоторым дифференциальным уравнениям в частных производных. Результаты статьи являются обобщением классической теории для операторов свертки на прямой и полупрямой. Результаты получены на основе спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов и теории сингулярных интегральных операторов.

Ключевые слова. *интегральные операторы, операторы Винера-Хопфа, спектральная теория дифференциальных операторов, разрешимость*

Содержание

Введение	32
§1. Необходимые сведения из спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов	35
§2. Интегральный оператор полной \mathcal{L} -свертки	42
§3. Интегральные операторы \mathcal{L} -свертки на полуоси	56
§4. Фредгольмовость $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$ в случае, когда \mathcal{L} - оператор Штурма-Лиувилля	66
§5. Полная разрешимость уравнения $(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+)y = f$ в случае, когда \mathcal{L} - оператор Штурма-Лиувилля с безотражательным потенциалом	72

ВВЕДЕНИЕ

Пусть l – следующая дифференциальная операция порядка $m \geq 2$:

$$l = \frac{1}{i^m} \frac{d^m}{dx^m} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{i^{2k}} \frac{d^k}{dx^k} p_{2k}(x) \frac{d^k}{dx^k} + \\ + \sum_{k=0}^{n'-1} \frac{1}{2i^{2k+1}} \left\{ \frac{d^k}{dx^k} p_{2k+1}(x) \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} + \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} p_{2k+1}(x) \frac{d^k}{dx^k} \right\}, \quad (0.1)$$

где $n = [\frac{m}{2}]$, $n' = [\frac{m-1}{2}]$ и каждый коэффициент $p_k(x)$, $0 \leq k \leq m-2$ – вещественная функция на \mathbb{R} , обладающая непрерывными производными до порядка $[\frac{k+1}{2}]$ включительно и удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p_k(x)| dx < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, m-2. \quad (0.2)$$

Обозначим через $l^\#$ операцию дифференцирования, полученную из (0.1) подстановкой $-i$ вместо i . Пусть \mathcal{L} и $\mathcal{L}^\#$ – максимальные дифференциальные операторы в $L^2(\mathbb{R})$, порожденные l и $l^\#$ соответственно. Операторы \mathcal{L} и $\mathcal{L}^\#$ самосопряженные.

Рассмотрим интегральные операторы \mathcal{K} и \mathcal{K}^+ , действующие, соответственно, в пространствах $L^2(\mathbb{R})$ и $L^2(\mathbb{R}_+)$ ($\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$) :

$$\mathcal{K}y = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) y(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in L^2(\mathbb{R}), \quad (0.3)$$

$$\mathcal{K}^+y = \int_0^{\infty} K(x, t) y(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad y \in L^2(\mathbb{R}_+), \quad (0.4)$$

где полагаем, что ядро $K(x, t)$ удовлетворяет уравнению в частных производных

$$l_x(K(x, t)) = l_t^\#(K(x, t)), \quad x, t \in \mathbb{R}. \quad (0.5)$$

Нижний индекс при l и $l^\#$ указывает переменную, по которой действует соответствующая операция. В простейшем случае, когда $l = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$, функция $K(x, t)$ является разностным ядром : $K(x, t) = h(x-t)$. Если $h \in L^1(\mathbb{R})$, то интегральное уравнение

$$(\mathcal{I} + \mathcal{K})y = f \quad (0.6)$$

посредством преобразования Фурье \mathcal{F} сводится к линейному алгебраическому уравнению с коэффициентом $c(\lambda) = 1 + (\mathcal{F}h)(\lambda)$. В этом случае условия разрешимости уравнения (0.6) вполне описываются свойствами символа $c(\lambda)$. Условия разрешимости интегрального уравнения Винера-Хопфа

$$(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+)y = f \quad (0.7)$$

описываются посредством факторизации символа $c(\lambda)$. Метод факторизации приводит к необходимым и достаточным условиям фредгольмовости оператора $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$, а также к формуле для его индекса. Этот метод также позволяет описать ядро (нулевое подпространство), ко-ядро, и построить обобщенное обратное оператора $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$, (см. [1], а также [2], где рассмотрен случай разрывного символа).

В работах [3, 4] были исследованы интегральные операторы с матричными ядрами, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям типа (0.5). Там же исследована структура резольвентного оператора $(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{K})^{-1}$ и дана схема быстрого численного решения для соответствующих интегральных уравнений на конечном сегменте. Как было отмечено в этих работах, разрешимость уравнений, ядра которых удовлетворяют дифференциальным уравнениям типа (0.5), зависит от результатов спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов. В этом случае роль преобразования Фурье играют спектральные преобразования, связанные с операторами, порожденными дифференциальной операцией l . Ниже эта программа реализуется для интегральных уравнений (0.6) и (0.7) с указанным оператором \mathcal{L} . С этой целью вводится понятие ядра \mathcal{L} -свертки, т. е. функции $K \in C^m(\mathbb{R}^2)$, являющейся решением уравнения (0.5), принадлежащим области определения $\mathcal{L}^\#$ по отношению ко второму аргументу и удовлетворяющим некоторым условиям суммируемости. Посредством ядер \mathcal{L} -свертки и формул (0.3) и (0.4) вводятся интегральные операторы \mathcal{K} и \mathcal{K}^+ . Они, соответственно, называются оператором полной \mathcal{L} -свертки и интегральным опе-

ратором \mathcal{L} -свертки на полупрямой. В этой работе исследуются интегральные уравнения (0.6) и (0.7), обобщающие, соответственно, интегральное уравнение полной свертки и интегральное уравнение Випера-Хопфа.

В §1 даны некоторые, необходимые для дальнейшего изложения, результаты относительно спектров самосопряженных дифференциальных операторов \mathcal{L} , разложении по собственным функциям и существовании оператора преобразования для \mathcal{L} .

В §2 рассмотрен интегральный оператор \mathcal{K} полной \mathcal{L} -свертки. Специальным образом вводится матрица-функция $A(\lambda)$, определенная на непрерывном спектре \mathcal{L} , и семейство матриц Φ_μ с μ , принадлежащим точечному спектру \mathcal{L} . Набор $\{A(\lambda), \Phi_\mu\}$ играет роль символа оператора $\mathcal{I} + \mathcal{K}$. В терминах этого набора сформулированы необходимые и достаточные условия ограниченности и фредгольмовости $\mathcal{I} + \mathcal{K}$. В случае ограниченного $\mathcal{I} + \mathcal{K}$ построен обобщенный обратный оператор. Напомним, что оператор $A: X \rightarrow Y$, где X и Y - банаховы пространства, называется фредгольмовым, если его образ $\text{Im} A$ замкнут, а пространства $\dim \ker A$ и $\dim \text{Coker} A$ конечномерны. Если существует оператор $A^{(-1)}: Y \rightarrow X$, удовлетворяющий условиям $AA^{(-1)}A = A$, $A^{(-1)}AA^{(-1)} = A^{(-1)}$, то его мы будем называть *обобщенным обратным* оператора A .

В §3 исследован интегральный оператор \mathcal{K}^+ \mathcal{L} -свертки на полупрямой, в случае, когда \mathcal{L} обладает оператором преобразования (см. [5]). Здесь приходится рассматривать также матрицу рассеяния (см. [6]) и спектральное преобразование оператора \mathcal{L} . Когда точечный спектр оператора \mathcal{L} конечен, задача фредгольмовости для $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$ сведена к аналогичной задаче для операторов типа свертки и сингулярных интегральных операторов со сдвигом.

В §4 рассмотрен случай, когда \mathcal{L} - оператор Штурма-Лиувилля, т. е. $l = -\frac{d^2}{dx^2} + p_0(x)$. В этом случае для $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$, в терминах матриц рассеяния и $A(\lambda)$, установлен критерий фредгольмовости.

В §5 рассмотрен случай, когда \mathcal{L} – оператор Штурма–Лиувилля с безотражательным потенциалом p_0 (см., напр., [7]). Для оператора $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$, при дополнительном условии, что $K(x, x-t) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, построена полная теория разрешимости.

§1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1.1. Сформулируем некоторые необходимые результаты, относящиеся к описанию спектра оператора \mathcal{L} и разложениям по его собственным функциям.

Лемма 1.1. (см. [10]) Для любого комплексного $\lambda \neq 0$ дифференциальное уравнение

$$l(y) = \lambda^m y \quad (1.1)$$

имеет две фундаментальные системы решений: $y_k^+(x, \lambda)$ и $y_k^-(x, \lambda)$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$), обладающие асимптотикой

$$y_k^\pm(x, \lambda) = e^{i\omega_k \lambda x} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1.2)$$

где

$$\omega_k = \exp\left(\frac{2\pi k}{m}\right). \quad (1.3)$$

Следствие 1.1. Если $\lambda \neq 0$, то решение $z(x, \lambda)$ дифференциального уравнения (1.1) принадлежит $L^2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} z(x, \lambda) = 0.$$

Если число $\lambda^m \neq 0$ вещественно и решение $z(x, \lambda)$ уравнения (1.1) принадлежит $L^2(\mathbb{R})$, то

$$z(x, \lambda) = O\left(\exp(-|x\lambda| \sin \frac{\pi}{m})\right), \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Теорема 1.1. (см. [6]). 1) При выполнении условий (0.2) непрерывный спектр оператора \mathcal{L} в случае нечетного m совпадает с осью \mathbb{R} , а в случае четного m – с

полупрямой \mathbb{R}_+ . Точечный спектр ограничен и в качестве точки сгущения может иметь лишь $\lambda = 0$. Если $m = 2n + 1$, то кратность любого собственного значения $\lambda \neq 0$ не превосходит n . Если же $m = 2n$, то кратность отрицательных (или положительных) собственных значений не превосходит n (или $n - 1$). В случае, когда $m = 2$, оператор \mathcal{L} не имеет положительных собственных значений.

2) Если выполнено одно из нижеследующих условий

$$\int_{-\infty}^0 |p_k(x)| dx + \int_0^{\infty} (1+x)^{m-1-k} |p_k(x)| dx < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, m-2, \quad (1.4)$$

$$\int_{-\infty}^0 (1-x)^{m-1-k} |p_k(x)| dx + \int_0^{\infty} |p_k(x)| dx < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, m-2, \quad (1.5)$$

то ноль не является собственным значением оператора \mathcal{L} .

3) При выполнении условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)^{m-1-k} |p_k(x)| dx < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, m-2, \quad (1.6)$$

в случае четного m число отрицательных собственных значений оператора \mathcal{L} конечно. В случаях $m = 3$ и $m = 4$ суммарное число собственных значений конечно.

Приведем формулу разложения по собственным функциям оператора \mathcal{L} . Обозначим $T = \{\lambda: \lambda^m \text{ является собственным значением } \mathcal{L}, \operatorname{Im} \lambda = 0, \text{ если } m \text{ нечетно; } \lambda \geq 0 \text{ или } \operatorname{arg} \lambda = \frac{\pi}{m}, \text{ если } m \text{ четно}\}$. Пусть r_λ , $(\lambda \in T)$ – кратность собственного значения λ^m , а $v_s(x, \lambda)$, $s = 1, 2, \dots, r_\lambda$ – ортонормальная система собственных функций оператора \mathcal{L} , соответствующая собственному значению λ^m .

Лемма 1.2. (см. [6], [9]). При $m = 2n + 1$ из условий (0.2) следует, что для каждого $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (T \cup \{0\})$ дифференциальное уравнение (1.6) имеет единственное,

с точностью до постоянного множителя, нетривиальное решение $u(x, \lambda)$, ограниченное на \mathbb{R} . При соответствующей нормировке это решение обладает асимптотикой

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A_0^\pm(\lambda) e^{i\lambda x} + o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (1.7)$$

где $A_0^+(\lambda) = |A_0^-(\lambda)| = 1$. Функция $u(x, \lambda)$ непрерывна по обоим переменным в точке $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (T \cup \{0\})$ и допускает непрерывное продолжение на значения $\lambda \in T \setminus \{0\}$. Для каждого $\lambda \in T \setminus \{0\}$ функция $u(x, \lambda)$ является решением уравнения (1.1), удовлетворяющего условию (1.7). На каждом конечном сегменте равномерно по x выполняется соотношение

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\lambda x} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow \pm\infty, \quad (1.8)$$

где $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ ограничено на $\{(x, \lambda): x \in \mathbb{R}, \lambda \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty)\}$ при любом $\varepsilon > 0$.

Указанное решение $u(x, \lambda)$ уравнения (1.1) является нормированной обобщенной собственной функцией оператора \mathcal{L} , соответствующей непрерывному спектру.

Теорема 1.2. (см. [6]). Пусть $m = 2n + 1$ и выполнены условия (0.2). Тогда для каждой функции $g \in L^2(\mathbb{R})$ интеграл

$$(\mathcal{U}_0 g)(\lambda) = \tilde{g}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(x, \lambda)} g(x) dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1.9)$$

сходится по норме пространства $L^2(\mathbb{R})$ и определяет частично изометрический оператор \mathcal{U}_0 . Оператор \mathcal{U}_0 отображает $L^2(\mathbb{R})$ на себя, его нулевое подпространство \mathcal{H}_0 совпадает с замыканием линейной оболочки всех собственных функций оператора \mathcal{L} , а $\mathcal{U}_0 \mathcal{L} \mathcal{U}_0^*$ является оператором умножения на функцию λ^m .

Из этой теоремы вытекает равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}(\lambda)|^2 d\lambda + \sum_{\lambda \in T} \sum_{s=1}^{r_\lambda} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{v_s(t, \lambda)} g(t) dt \right|^2, \quad (1.10)$$

а также следующее разложение по собственным функциям оператора \mathcal{L} :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, \lambda) \bar{g}(\lambda) d\lambda + \sum_{\lambda \in T} \sum_{s=1}^{r_\lambda} v_s(x, \lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{v_s(t, \lambda)} g(t) dt, \quad (1.11)$$

где первый интеграл и ряд сходятся по норме пространства $L^2(\mathbb{R})$.

Лемма 1.3. (см. [6], [9]). Если $m = 2n$ и выполнены условия (0.2), то для каждого $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus T$ дифференциальное уравнение (1.1) обладает двумя линейно независимыми, ограниченными на \mathbb{R} решениями : $u_1(x, \lambda)$ и $u_2(x, \lambda)$ такими, что любое другое ограниченное на \mathbb{R} решение линейно зависимо от них. Эти два решения единственным образом определяются асимптотическими равенствами

$$u_j(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \{ B_{j0}^\pm(\lambda) e^{i\lambda x} + B_{jn}^\pm(\lambda) e^{-i\lambda x} \} + o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad j = 1, 2, \quad (1.12)$$

где $B_{10}^-(\lambda) = B_{2n}^+(\lambda) = 1$, $B_{20}^-(\lambda) = B_{1n}^+(\lambda) = 0$. При этом матрица

$$\begin{pmatrix} B_{10}^+(\lambda) & B_{1n}^-(\lambda) \\ B_{20}^+(\lambda) & B_{2n}^-(\lambda) \end{pmatrix}$$

унитарна. Функции $u_j(x, \lambda)$, $j = 1, 2$ непрерывны на множестве $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus T$ по обоим переменным и допускают непрерывное продолжение на положительные $\lambda \in T$. Для каждого положительного $\lambda \in T$ функции $u_j(x, \lambda)$, $j = 1, 2$ удовлетворяют уравнению (1.1) и обладают асимптотикой (1.12). На любом конечном сегменте равномерно по x выполнены соотношения

$$u_1(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\lambda x} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (1.13)$$

$$u_2(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda x} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (1.14)$$

где выражения $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ ограничены на множестве $\{(x, \lambda) : x \in \mathbb{R}, \lambda > \varepsilon\}$ при любом фиксированном $\varepsilon > 0$.

Решения $u_1(x, \lambda)$, $u_2(x, \lambda)$ являются нормированными обобщенными собственными функциями оператора \mathcal{L} , соответствующими непрерывному спектру.

Теорема 1.3. (см. [6]). Если $m = 2n$ и выполнены условия (0.2), то для любой функции $g \in L^2(\mathbb{R})$ интегралы

$$(U_j g)(\lambda) = \tilde{g}_j(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u_j(x, \lambda)} g(x) dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad j = 1, 2 \quad (1.15)$$

сходятся по норме пространства $L^2(\mathbb{R}_+)$ и определяют частично изометрические операторы U_1 и U_2 , отображающие $L^2(\mathbb{R})$ на $L^2(\mathbb{R}_+)$. Пространство $L^2(\mathbb{R})$ представляется в виде ортогональной суммы $L^2(\mathbb{R}) = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2$, где H_0 — замыкание линейной оболочки всех собственных функций оператора \mathcal{L} , а $H_0 \oplus H_1$ и $H_0 \oplus H_2$ — нулевые подпространства операторов U_1 и U_2 , соответственно, и, в частности, $U_1 U_2^* = U_2^* U_1 = 0$. Кроме того, $U_1 \mathcal{L} U_1^*$ и $U_2 \mathcal{L} U_2^*$ являются операторами умножения на λ^m в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$, и в частности $U_1 \mathcal{L} U_1^* = U_2 \mathcal{L} U_2^*$.

Из этой теоремы вытекает равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx = \int_0^{\infty} |\tilde{g}_1(\lambda)|^2 d\lambda + \int_0^{\infty} |\tilde{g}_2(\lambda)|^2 d\lambda + \sum_{\lambda \in T} \sum_{s=1}^{r_\lambda} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{v_s(t, \lambda)} g(t) dt \right|^2, \quad (1.16)$$

а также формула разложения по собственным функциям оператора \mathcal{L} :

$$g(x) = \int_0^{\infty} u_1(x, \lambda) \tilde{g}_1(\lambda) d\lambda + \int_0^{\infty} u_2(x, \lambda) \tilde{g}_2(\lambda) d\lambda + \sum_{\lambda \in T} \sum_{s=1}^{r_\lambda} v_s(x, \lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{v_s(t, \lambda)} g(t) dt, \quad (1.17)$$

где интеграл и ряд сходятся по норме пространства $L^2(\mathbb{R})$.

1.2. Следующий результат относится к спектральной теории операторов Штурма-Лиувилля.

Теорема 1.4. (см. [11], [12]). Пусть в уравнении

$$-z'' + p_0(x)z = \lambda^2 z, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.18)$$

$p_0(x)$ — комплекснозначная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |p_0(x)| dx < \infty. \quad (1.19)$$

Тогда для всех λ из левой полуплоскости $\text{Im}\lambda \geq 0$ (или $\text{Im}\lambda \leq 0$) это уравнение обладает решением $z^+(x, \lambda)$ (или $z^-(x, \lambda)$), представимое для всех $x \in \mathbb{R}$ в виде

$$z^+(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} G^+(x, t) e^{i\lambda t} dt, \quad \text{Im}\lambda \geq 0, \quad (1.20)$$

$$z^-(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_{-\infty}^x G^-(x, t) e^{i\lambda t} dt, \quad \text{Im}\lambda \leq 0, x \in \mathbb{R}.$$

Функции $G^+(x, t)$ ($-\infty < x \leq t < \infty$) и $G^-(x, t)$ ($-\infty < t \leq x < \infty$) удовлетворяют неравенствам

$$|G^{\pm}(x, t)| \leq \frac{1}{2} \sigma^{\pm} \left(\frac{x+t}{2} \right) \exp \left\{ \sigma_1^{\pm}(x) - \sigma_1^{\pm} \left(\frac{x+t}{2} \right) \right\}, \quad (1.21)$$

где

$$\sigma^+(x) = \int_x^{\infty} |p_0(t)| dt, \quad \sigma_1^+(x) = \int_x^{\infty} \sigma^+(t) dt, \quad (1.22)$$

$$\sigma^-(x) = \int_{-\infty}^x |p_0(t)| dt, \quad \sigma_1^-(x) = \int_{-\infty}^x \sigma^-(t) dt.$$

Отметим, что если $p_0(x)$ – вещественная функция, то функции $G^{\pm}(x, t)$ тоже вещественны. Из неравенств (1.21), (1.22) следует, что при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ и $1 \leq p \leq \infty$ ядро $G^+(x, t)$ порождает ограниченный интегральный оператор \mathcal{G}^+ в пространстве $L^p(\alpha, \infty)$, а ядро $G^-(x, t)$ – такой же оператор \mathcal{G}^- в пространстве $L^p(-\infty, \alpha)$. Операторы $I + \mathcal{G}^+$ и $I + \mathcal{G}^-$ называются операторами преобразования.

1.3. Сформулируем аналогичный результат для дифференциального уравнения порядка выше двух.

Пусть l – дифференциальная операция (0.1) порядка $m \geq 3$. На комплексной ζ -плоскости рассмотрим открытые секторы

$$\Omega^+ = \left\{ \zeta; \left| \arg \zeta \right| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m} \right\}, \quad \Omega^- = \left\{ \zeta; \left| \arg \zeta \right| > \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{m} \right\}$$

и предположим, что каждый коэффициент $p_k(x)$ дифференциальной операции l является сужением на вещественную ось голоморфной в секторах Ω^+ и Ω^- функции $p_k(\zeta)$, удовлетворяющей неравенствам

$$\int_0^{\infty} (1+t)^{m-2-k} |p_k(\zeta+t)| dt < h^+(\operatorname{Re}\zeta), \quad \zeta \in \Omega^+,$$

$$\int_{-\infty}^0 (1-t)^{m-2-k} |p_k(\zeta+t)| dt < h^-(\operatorname{Re}\zeta), \quad \zeta \in \Omega^-.$$

Здесь $h_0^+(x)$ – невозрастающая, суммируемая на \mathbb{R}_+ функция, а $h_0^-(x)$ – невозрастающая, суммируемая функция на $R_- = (-\infty, 0)$. Заметим, что из этих неравенств вытекает (1.6).

Теорема 1.5. (см. [5], [9]). Пусть коэффициенты $p_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, m-2$, дифференциальной операции l порядка $m \geq 3$ удовлетворяют вышеприведенным условиям. Тогда дифференциальное уравнение (1.1) при любых λ из замкнутой верхней (или нижней) полуплоскости имеет решение $z^+(x, \lambda)$ (или $z^-(x, \lambda)$), представляемое в виде

$$z^+(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} G^+(x, t) e^{i\lambda t} dt, \quad x \geq 0, \operatorname{Im}\lambda \geq 0,$$
(1.23)

$$z^-(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_{-\infty}^x G^-(x, t) e^{i\lambda t} dt, \quad x \leq 0, \operatorname{Im}\lambda \leq 0.$$

Функции $G^+(x, t)$ и $G^-(x, t)$ определены на $(0 \leq x \leq t < \infty, x+t \neq 0)$ и $(-\infty < t \leq x \leq 0, x+t \neq 0)$, функция же $G_0^+(\zeta, \xi) = G^+(\zeta, \zeta+\xi)$ ($\zeta \geq 0, \xi \geq 0, \zeta+\xi \neq 0$) при любом $\xi \geq 0$ голоморфна по ζ в секторе Ω^+ и имеет конечный предел при ζ стремящемся к граничной точке параллельно вещественной оси. Аналогичное утверждение верно для функции $G_0^-(\zeta, \xi) = G^-(\zeta, \zeta+\xi)$ ($\zeta \leq 0, \xi \leq 0, \zeta+\xi \neq 0$), $\xi \leq 0$ и Ω^- . Функции $G_0^+(\zeta, \xi)$ и $G_0^-(\zeta, \xi)$ бесконечно дифференцируемы на множествах $\zeta \in \Omega^+, \xi \geq 0$ и $\zeta \in \Omega^-, \xi \leq 0$ соответственно и удовлетворяют неравенствам

$$|G_0^+(\zeta, \xi)| \leq h^+\left(\operatorname{Re}\zeta + \frac{\xi}{2}\right), \quad \zeta \in \Omega^+, \quad \xi \geq 0, \quad (1.24)$$

$$|G_0^-(\zeta, \xi)| \leq h^-\left(\operatorname{Re}\zeta + \frac{\xi}{2}\right), \quad \zeta \in \Omega^-, \quad \xi \leq 0, \quad (1.25)$$

где $h^+(x)$ – невозрастающая, суммируемая функция на \mathbb{R}_+ , а $h^-(x)$ – не убывающая, суммируемая функция на R_- .

Замечание 1.1. (см. [6]). При выполнении условий теорем 1.4 и 1.5, в случае $m = 2n + 1$ обобщенная собственная функция $u(x, \lambda)$ оператора \mathcal{L} , определенная в лемме 1.2, представляется посредством $z^+(x, \lambda)$ и $z^-(x, \lambda)$ в виде

$$\begin{aligned} u(x, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^n A_k^+(\lambda) z^+(x, \lambda \omega_k), \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0, \\ u(x, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^n A_k^+(\lambda) z^+(x, \lambda \bar{\omega}_k), \quad x \geq 0, \quad \lambda < 0, \\ u(x, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^n A_k^-(\lambda) z^-(x, \lambda \bar{\omega}_k), \quad x \leq 0, \quad \lambda > 0, \\ u(x, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^n A_k^-(\lambda) z^-(x, \lambda \omega_k), \quad x \leq 0, \quad \lambda < 0. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Здесь числа ω_k определяются из формулы (1.3), а функции $A_k^\pm(\lambda)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) непрерывны на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. В случае, когда $m = 2n$, обобщенные собственные функции $u_j(x, \lambda)$ ($j = 1, 2$) оператора \mathcal{L} , определенные в лемме 1.3, представимы в виде

$$\begin{aligned} u_j(x, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^n B_{jk}^+(\lambda) z^+(x, \lambda \omega_k), \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0, \quad j = 1, 2, \\ u_j(x, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^n B_{jk}^-(\lambda) z^-(x, \lambda \bar{\omega}_k), \quad x \leq 0, \quad \lambda > 0, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \tag{1.27}$$

где функции $B_{jk}^\pm(\lambda)$ ($j = 1, 2, k = 0, 1, \dots, n$) непрерывны на \mathbb{R}_+ .

Многие из вышеприведенных формул справедливы при предположении, что $p_k(x)$ вещественные, суммируемые на \mathbb{R} функции. При отсутствии гладкости $l(y)$ определяется с использованием квазипроизводных $y(x)$ (см. [8], [9]).

§2. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ПОЛНОЙ \mathcal{L} -СВЕРТКИ

2.1. Всюду в этом параграфе будем предполагать, что оператор \mathcal{L} удовлетворяет условию

А) нуль не является собственным значением \mathcal{L} , т. е. $0 \notin T$.

Из теоремы 1.1 следует, что условие А) выполнено, если верно (1.4) или (1.5).

Пусть $l_i^\#$ – операция дифференцирования, полученная из (0.1) подстановкой $-i$ вместо i . Функцию $K(x, t) \in C^m(\mathbb{R}^2)$ будем называть *ядром \mathcal{L} -свертки*, если оно удовлетворяет следующим условиям :

а) $K(x, t)$ является решением дифференциального уравнения

$$l_x(K(x, t)) = l_i^\#(K(x, t)), \quad x, t \in \mathbb{R}; \quad (2.1)$$

б) $K(x, t)$ и $l_i^\#(K(x, t))$, как функции от t , при любом x принадлежат пространству $L^2(\mathbb{R})$;

в) существует число $M > 0$ такое, что при любых $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(x, t)| dt \leq M, \quad (2.2)$$

и при любых α и β ($-\infty < \alpha < \beta < \infty$)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_{\alpha}^{\beta} |K(x, t)| dt = 0; \quad (2.3)$$

г) на каждом конечном интервале интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} K(x, t) \right| dt, \quad \nu = 0, 1, \dots, m$$

сходятся равномерно по x .

Через D_K обозначим множество таких функций $y \in L^2(\mathbb{R})$, для которых интеграл

$$(Ky)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) y(t) dt \quad (2.4)$$

принадлежит $L^2(\mathbb{R})$.

Оператор K , действующий в $L^2(\mathbb{R})$ по формуле (2.4), с областью определения D_K , назовем *оператором полной \mathcal{L} -свертки*.

Из условия (2.2) следует, что формулой (2.4) определяется ограниченный оператор, действующий в $L^\infty(\mathbb{R})$ и с нормой $\|\cdot\|_\infty \leq M$. Удобно обозначать этот оператор снова через K .

Ниже через $H_{0\lambda} \subset L^2(\mathbb{R})$ ($\lambda \in T$) будем обозначать собственное подпространство оператора \mathcal{L} , соответствующее собственному значению λ^m . Следующее утверждение показывает, что $H_{0\lambda}$ содержится в D_K и является инвариантным подпространством оператора \mathcal{K} .

Лемма 2.1. Пусть r_λ ($\lambda \in T$) – кратность собственного значения λ^m оператора \mathcal{L} , $v_j(x, \lambda)$ ($j = 1, 2, \dots, r_\lambda$) – ортонормальный базис в $H_{0\lambda}$ и

$$w_k(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) v_k(t, \lambda) dt, \quad \lambda \in T; \quad k = 1, 2, \dots, r_\lambda. \quad (2.5)$$

Тогда

$$w_k(x, \lambda) = \sum_{j=1}^{r_\lambda} c_{jk}(\lambda) v_j(x, \lambda), \quad \lambda \in T; \quad k = 1, 2, \dots, r_\lambda, \quad (2.6)$$

где

$$c_{jk}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} w_k(x, \lambda) \overline{v_j(x, \lambda)} dx, \quad \lambda \in T; \quad j, k = 1, 2, \dots, r_\lambda. \quad (2.7)$$

Доказательство. Собственная функция $v_k(x, \lambda)$ оператора \mathcal{L} имеет асимптотику, описанную в следствии 1.1. Ядро $K(x, t)$ удовлетворяет условиям в) и г). Из равенства (2.5) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} w_k(x, \lambda_0) = 0, \quad (2.8)$$

$$l_x(w_k(x, \lambda)) = \int_{-\infty}^{\infty} v_k(t, \lambda) l_x(K(x, t)) dt,$$

и, в силу условия а)

$$l_x(w_k(x, \lambda)) = \int_{-\infty}^{\infty} v_k(t, \lambda) l_x^\#(K(x, t)) dt. \quad (2.9)$$

Далее, из равенства

$$\overline{l_x^\#(K(x, t))} = l_x(\overline{K(x, t)}), \quad (2.10)$$

и условия б) следует, что функция $\overline{K(x, t)}$ принадлежит области определения \mathcal{L} по переменной x . Таким образом

$$l_x(\overline{K(x, t)}) = \mathcal{L}_t(\overline{K(x, t)}). \quad (2.11)$$

Поэтому правая сторона (2.9) является скалярным произведением $v_k(t, \lambda)$ и $\mathcal{L}_t(\overline{K(x, t)})$. Ввиду того, что \mathcal{L} – самосопряженный оператор, из (2.9) получим

$$\begin{aligned} l_x(w_k(x, \lambda)) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) \mathcal{L}_t(v_k(t, \lambda)) dt = \\ &= \lambda^m \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) v_k(t, \lambda) dt = \lambda^m w_k(x, \lambda). \end{aligned}$$

Итак, функция $w_k(x, \lambda)$ является решением уравнения (1.1) и удовлетворяет условию (2.8). В силу следствия 1.1, $w_k \in L^2(\mathbb{R})$ и $w_k(x, \lambda)$ – собственная функция \mathcal{L} , т. е. $w_k \in \mathbf{H}_{0\lambda}$. Справедливость равенств (2.6) и (2.7) очевидна. Лемма доказана.

Следствие 2.1. Если собственное значение λ^m ($\lambda \in T$) простое ($r_\lambda = 1$), то в (2.6) имеем $|c_{11}(\lambda)| \leq M$ (см. (2.2)).

Фактически, в этом случае $c_{11}(\lambda)$ является собственным значением ограниченного оператора \mathcal{K} , действующего в $L^\infty(\mathbb{R})$, откуда и следует, что $|c_{11}(\lambda)| \leq \|K\|_\infty \leq M$.

При $y \in L^2(\mathbb{R})$ обозначим

$$\tilde{y}_k(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{v_k(t, \lambda)} y(t) dt, \quad \lambda \in T; \quad k = 1, 2, \dots, r_\lambda.$$

Для каждого $x \in \mathcal{R}$ значение $(\mathcal{K}y)(x)$ есть скалярное произведение $y(t)$ и $\overline{K(x, t)}$ в $L^2(\mathbb{R})$. Из обобщенного равенства Парсеваля (вытекающего из (1.10) или (1.16)) и леммы 2.1 заключаем, что при $y \in \mathbf{H}_0$

$$(\mathcal{K}y)(x) = \sum_{\lambda \in T} \sum_{k=1}^{r_\lambda} \tilde{y}_k(\lambda) w_k(x, \lambda) = \sum_{\lambda \in T} \sum_{j=1}^{r_\lambda} v_j(x, \lambda) \sum_{k=1}^{r_\lambda} c_{jk}(\lambda) \tilde{y}_k(\lambda). \quad (2.12)$$

При этом

$$\|\mathcal{K}v_k\|^2 = \|w_k\|^2 = \sum_{j=1}^{r_\lambda} |c_{jk}(\lambda)|^2, \quad \lambda \in T; \quad k = 1, 2, \dots, r_\lambda. \quad (2.13)$$

Из (2.12) следует, что все функции $y \in \mathbf{H}_0$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{\lambda \in T} \sum_{j=1}^{r_\lambda} \left| \sum_{k=1}^{r_\lambda} c_{jk}(\lambda) \tilde{y}_k(\lambda) \right|^2 < \infty,$$

принадлежат множеству $\mathbf{D}_{\mathcal{K}}$. Из (2.12) и (2.13) приходим к следующей лемме.

Лемма 2.2. Сужение интегрального оператора K полной \mathcal{L} -свертки на подпространство H_0 является ограниченным оператором в том и только том случае, когда ограничено множество $\Delta = \{|c_{jk}(\lambda)|; \lambda \in T, j, k = 1, 2, \dots, r_\lambda\}$.

2.2. Случай $m = 2n + 1$. Предположим, что $u(x, \lambda)$ – нормированная обобщенная собственная функция оператора \mathcal{L} (см. лемму 1.2), а U_0 – оператор, определенный равенством (1.9) и $\bar{y} = U_0 y$ ($y \in L^2(\mathbb{R})$).

Лемма 2.3. Функция

$$w(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t, \lambda) K(x, t) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (2.14)$$

удовлетворяет равенству

$$w(x, \lambda) = c(\lambda)u(x, \lambda), \quad (2.15)$$

где $c(\lambda)$ – функция, ограниченная и непрерывная на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $|c(\lambda)| \leq M$, где M – указанное в условии (2.2) число, и

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \lambda^m c(\lambda) = 0. \quad (2.16)$$

Как функции от λ , $w(x, \lambda)$ и $\lambda^m w(x, \lambda)$ принадлежат $L^2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Функция $u(x, \lambda)$ ограничена по x . Повторяя рассуждения доказательства леммы 2.1 находим, что из (2.14) и условий в), г) и а) следует равенство

$$l_x(w(x, \lambda)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t, \lambda) l_t^\#(K(x, t)) dt.$$

Из (2.10) получаем

$$\overline{l_x(w(x, \lambda))} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(t, \lambda)} l_t(\overline{K(x, t)}) dt. \quad (2.17)$$

Ввиду (2.11), при любом $x \in \mathbb{R}$ формулы (2.14) и (2.17) могут быть записаны в виде

$$\bar{w} = U_0(\bar{K}), \quad \overline{l(w)} = U_0 \mathcal{L}(\bar{K}). \quad (2.18)$$

Далее, в силу теоремы 1.2, $\mathcal{U}_0\mathcal{L} = \Lambda\mathcal{U}_0$, где Λ – оператор умножения на λ^m в $L^2(\mathbb{R})$. Поэтому второе равенство в (2.18) переходит в $\overline{l_x(w)} = \Lambda\mathcal{U}_0(\overline{K})$. Пользуясь первым равенством из (2.18) последнее можно переписать как

$$l_x(w(x, \lambda)) = \lambda^m w(x, \lambda). \quad (2.19)$$

Нами доказано, что функция $w(x, \lambda)$ является решением уравнения (1.1). Из (2.14), неравенства (2.2) и ограниченности $u(t, \lambda)$ по переменной t следует, что эта функция ограничена по переменной x . Далее, в силу леммы 1.2, для каждого $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (T \cup \{0\})$ любые два ограниченных решения дифференциального уравнения (1.1) нечетного порядка линейно зависимы. Поэтому справедливо (2.15) ($u(x, \lambda) \neq 0$). Из (2.14) и леммы 1.2 следует, что функция $w(x, \lambda)$ непрерывна по переменной λ на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Из (2.18) и (2.19) вытекает, что $w(x, \lambda)$ и $\lambda^m w(x, \lambda)$ принадлежат $L^2(\mathbb{R})$. В силу (1.7), для каждого $\lambda_0 \neq 0$ существует x_0 такое, что $u(x_0, \lambda) \neq 0$ для всех λ из некоторой окрестности λ_0 . Тем самым, из равенства (2.15) следует, что функция $c(\lambda)$ непрерывна на $\mathbb{R} \setminus (T \cup \{0\})$ и допускает непрерывное продолжение на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Доказательство ограниченности аналогично доказательству следствия 2.1. Для доказательства (2.16) воспользуемся равенством

$$\lambda^m c(\lambda) u(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t, \lambda) l_x(K(x, t)) dt, \quad (2.20)$$

полученным из (2.14) при помощи (2.15) и (2.19), а также условий в) и г), наложенных на $K(x, t)$. Поскольку $l_x(K(x, t))$, как функция от t , принадлежит $L^1(\mathbb{R})$, из (2.20) и (1.8) получаем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \lambda^m c(\lambda) u(x, \lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} l_x(K(x, t)) dt = 0.$$

Снова воспользовавшись (1.8) приходим к формуле (2.16). Лемма доказана.

Приведем теперь несколько следствий.

Следствие 2.2. При $m = 2n + 1$ ядро $K(x, t)$ оператора \mathcal{L} -свертки допускает

представление

$$K(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, \lambda) \overline{u(t, \lambda)} c(\lambda) d\lambda + \sum_{\lambda \in T} \sum_{j, k=1}^{r_\lambda} c_{jk}(\lambda) v_j(x, \lambda) \overline{v_k(t, \lambda)}. \quad (2.21)$$

Доказательство следует из (2.6), (2.15) и формулы разложения (1.11), примененной к $\overline{K(x, t)}$ при фиксированном x .

Следствие 2.3. Для Ky , определенной равенством (2.4), $m = 2n + 1$ и $y \in L^2(\mathbb{R})$ имеем

$$(Ky)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, \lambda) c(\lambda) \overline{y(\lambda)} d\lambda + \sum_{\lambda \in T} \sum_{j=1}^{r_\lambda} v_j(x, \lambda) \sum_{k=1}^{r_\lambda} c_{jk}(\lambda) \overline{y_k(\lambda)}. \quad (2.22)$$

Доказательство следует из (2.6) и (2.15), после применения обобщенного равенства Парсеваля (см. (1.10)) к скалярному произведению $y(t)$ и $\overline{K(x, t)}$.

Из леммы 2.3 следует, что \mathbf{H}_0^\perp является инвариантным подпространством оператора K . Точнее, справедливо следующее утверждение.

Следствие 2.4. При любом $y \in \mathbf{H}_0^\perp$ имеет место равенство

$$Ky = \mathcal{U}_0^* \Lambda_c \mathcal{U}_0 y, \quad (2.23)$$

где Λ_c — оператор умножения на функцию $c(\lambda)$ в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, т. е. $(\Lambda_c \phi)(\lambda) = c(\lambda) \phi(\lambda)$ при $\phi \in L^2(\mathbb{R})$. Тем самым, \mathbf{H}_0^\perp содержится в D_K и является инвариантным подпространством оператора K . Сужение оператора K на \mathbf{H}_0^\perp является ограниченным оператором, и множество D_K плотно в $L^2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Равенство (2.23) вытекает из (2.22), поскольку $c(\lambda)$ ограничено и $\overline{y_k(\lambda)} = 0$ ($\lambda \in T$; $k = 1, 2, \dots, r_\lambda$) при $y \in \mathbf{H}_0^\perp$. Последнее утверждение следует из вложений $\mathbf{H}_0^\perp \subset D_K$ и $\mathbf{H}_{0\lambda} \subset D_K$, справедливых при любых $\lambda \in T$.

В силу леммы 2.2 имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.4. При $m = 2n + 1$ интегральный оператор K полной L -свертки ограничен тогда и только тогда, когда ограничено множество Δ .

Следствие 2.5. Если имеет место одно из следующих двух условий

- 1) множество всех собственных значений оператора \mathcal{L} конечно,
- 2) все собственные значения оператора \mathcal{L} простые,

то оператор \mathcal{K} ограничен.

Теорема 2.1. Пусть $m = 2n + 1$, \mathcal{K} — интегральный оператор полной \mathcal{L} -свертки, $f \in L^2(\mathbb{R})$, функция $c(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) и числа $c_{jk}(\lambda)$ ($\lambda \in T$; $j, k = 1, \dots, r_\lambda$) определены равенствами (2.5), (2.7), (2.14) и (2.15). Пусть выполняются также следующие два условия :

- 1) функция $\tilde{f}(\lambda)/(1 + c(\lambda))$ принадлежит $L^2(\mathbb{R})$;
- 2) при любом $\lambda \in T$ система алгебраических уравнений

$$z_j(\lambda) + \sum_{k=1}^{r_\lambda} c_{jk}(\lambda) z_k(\lambda) = \tilde{f}_j(\lambda), \quad j = 1, 2, \dots, r_\lambda \quad (2.24)$$

имеет решение $\{z_j\}$ и

$$\sum_{\lambda \in T} \sum_{j=1}^{r_\lambda} |z_j(\lambda)|^2 < \infty. \quad (2.25)$$

Тогда функция

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, \lambda) \frac{\tilde{f}(\lambda)}{1 + c(\lambda)} d\lambda + \sum_{\lambda \in T} \sum_{j=1}^{r_\lambda} v_j(x, \lambda) z_j(\lambda) \quad (2.26)$$

принадлежит $L^2(\mathbb{R})$ и является решением интегрального уравнения

$$(I + \mathcal{K})y = f. \quad (2.27)$$

В случае, когда \mathcal{K} ограничено, условия 1) и 2) необходимы для разрешимости уравнения (2.23) в $L^2(\mathbb{R})$.

Доказательство. В силу (2.25) ряд, стоящий в правой стороне (2.26), определяет функцию из H_0 , и по условию 1) интеграл является функцией из H_0^+ . Поэтому $y \in L^2(\mathbb{R})$. Из формулы разложения (1.11) следует, что $\tilde{y}(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)/(1 + c(\lambda))$ и $\tilde{y}_k(\lambda) = z_k(\lambda)$ ($\lambda \in T$, $k = 1, \dots, r_\lambda$). Подставив эти выражения в (2.22) и сложив полученное с (2.26), получим

$$y(x) + (\mathcal{K}y)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, \lambda) \tilde{f}(\lambda) d\lambda + \sum_{\lambda \in T} \sum_{j=1}^{r_\lambda} v_j(x, \lambda) \left(z_j(\lambda) + \sum_{k=1}^{r_\lambda} c_{jk}(\lambda) z_k(\lambda) \right).$$

Ввиду (2.24), правая сторона этой формулы является разложением $f(x)$ по собственным функциям оператора \mathcal{L} . Тем самым, верно (2.27).

Пусть теперь \mathcal{K} – ограниченный оператор. По лемме 2.4 множество Δ ограничено, и для $y \in L^2(\mathbb{R})$ представление (2.22) является разложением функции $\mathcal{K}y$ по собственным функциям оператора \mathcal{L} . Пусть $y \in L^2(\mathbb{R})$ – решение уравнения (2.27). Разлагая правую и левую части по собственным функциям оператора \mathcal{L} , получим $(1 + c(\lambda))\tilde{y}(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)$ и

$$\tilde{y}_j(\lambda) + \sum_{k=1}^{r_\lambda} c_{jk}(\lambda) \tilde{y}_k(\lambda) = \tilde{f}_j(\lambda), \quad \lambda \in T; \quad j = 1, 2, \dots, r_\lambda.$$

Из этих равенств следует необходимость условий 1), 2). Теорема доказана.

Из формулы (2.23) вытекает матричное тождество

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I}|_{n_0} & 0 \\ 0 & \mathcal{U}_0|_{n_0^*} \end{pmatrix} (\mathcal{I} + \mathcal{K}) \begin{pmatrix} \mathcal{I}|_{n_0} & 0 \\ 0 & \mathcal{U}_0^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathcal{I} + \mathcal{K}_0)|_{n_0} & 0 \\ 0 & \Lambda_{1+c} \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Обозначим через Φ_λ ($\lambda \in T$) матрицу $(c_{jk})_{j,k=1}^{r_\lambda}$, а через $\|\Phi_\lambda\|$ – ее норму, индуцированную евклидовой нормой конечномерного пространства. Отметим, что ограниченность множества Δ эквивалентна ограниченности множества $\{\|\Phi_\lambda\|; \lambda \in T\}$, и для фредгольмовости оператора $\Lambda_{(1+c)}$ необходимо, чтобы $\inf_{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} |1 + c(\lambda)| > 0$ (см. [13]). Обозначим через E_k единичную матрицу порядка $(k \times k)$. Теперь из (2.28) и теоремы 2.1 получим следующие утверждения.

Теорема 2.2. Пусть $m = 2n + 1$, и пусть \mathcal{K} – ограниченный интегральный оператор полной \mathcal{L} -свертки. Для фредгольмовости $\mathcal{I} + \mathcal{K}$ в $L^2(\mathbb{R})$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий :

$$1) \quad \inf_{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} |1 + c(\lambda)| > 0;$$

$$2) \quad \text{для всех } \lambda \in T \setminus T', \text{ где } T' \text{ – конечное множество, матрица } E_{r_\lambda} + \Phi_\lambda$$

$$\text{обладает обратной и } \sup_{\lambda \in T} \|(E_{r_\lambda} + \Phi_\lambda)^{(-1)}\| < \infty.$$

При выполнении условий 1) – 2)

$$\text{Ind}(\mathcal{I} + \mathcal{K}) = 0, \quad \dim \ker(\mathcal{I} + \mathcal{K}) = \sum_{\lambda \in T} \dim \ker(E_{r_\lambda} + \Phi_\lambda),$$

и

$$(\mathcal{I} + \mathcal{K})^{(-1)} y = y(x) - \int_{-\infty}^{\infty} R(x, t) y(t) dt,$$

где

$$R(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, \lambda) \overline{u(t, \lambda)} \frac{c(\lambda)}{1 + c(\lambda)} d\lambda + \sum_{\lambda \in T} \sum_{j, k=1}^{r_\lambda} d_{jk}(\lambda) v_j(x, \lambda) \overline{v_k(t, \lambda)},$$

а $d_{jk}(\lambda)$ ($\lambda \in T; j, k = 1, \dots, r_\lambda$) - элементы матрицы $E_{r_\lambda} - (E_{r_\lambda} + \Phi_\lambda)^{(-1)}$.

Следствие 2.6. Пусть $m = 2n + 1$. Тогда обратимость матриц $E_{r_\lambda} + \Phi_\lambda$ при всех $\lambda \in T$ вместе с условиями 1), 2) теоремы 2.2 необходимы и достаточны для обратимости оператора $\mathcal{I} + \mathcal{K}$.

2.3. Случай $m = 2n$. Пусть $u_j(x, \lambda)$ ($j = 1, 2$) - нормированные обобщенные собственные функции оператора \mathcal{L} (см. лемму 1.3) и \mathcal{U}_j ($j = 1, 2$) - операторы, определенные равенствами (1.15). Для $y \in L^2(\mathbb{R})$ положим $\tilde{y}^{(j)} = \mathcal{U}_j y$, $j = 1, 2$.

Лемма 2.5. Имеют место равенства

$$w^{(k)}(x, \lambda) = a_{1k}(\lambda) u_1(x, \lambda) + a_{2k}(\lambda) u_2(x, \lambda), \quad k = 1, 2, \quad (2.29)$$

где

$$w^{(k)}(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u_k(t, \lambda) K(x, t) dt, \quad k = 1, 2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad (2.30)$$

а $a_{sk}(\lambda)$ ($s, k = 1, 2$) - функции, непрерывные на \mathbb{R}_+ , для которых

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^m a_{sk}(\lambda) = 0, \quad s, k = 1, 2. \quad (2.31)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(\xi, \eta, \lambda) = \det \begin{pmatrix} u_1(\xi, \lambda) & u_1(\eta, \lambda) \\ u_2(\xi, \lambda) & u_2(\eta, \lambda) \end{pmatrix}, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Из леммы 1.3 следует, что $\varphi(\xi, \eta, \lambda)$ представима в виде суммы

$$\varphi(\xi, \eta, \lambda) = \frac{i}{\pi} \sin(\xi - \eta)\lambda + \psi(\xi, \eta, \lambda), \quad (2.32)$$

где при $\lambda \rightarrow \infty$ функция $\psi(\xi, \eta, \lambda)$ стремится к нулю равномерно относительно ξ и η , принадлежащих произвольному конечному сегменту $[\alpha, \beta]$.

Выберем α, β и ν таким образом, чтобы $\beta - \alpha \geq \pi/2, \nu > 1$ и $|\psi(\xi, \eta, \lambda)| < 1/2\pi$ для всех $\xi, \eta \in [\alpha, \beta]$ и $\lambda \in (\nu, \infty)$. Тогда для каждого $\lambda \in (\nu, \infty)$, выбрав $\xi, \eta \in [\alpha, \beta]$ так, чтобы $\xi - \eta = \frac{\pi}{2\lambda}$, получим

$$|\varphi(\xi, \eta, \lambda)| \geq \frac{1}{2\pi}. \quad (2.33)$$

Пользуясь теоремой 1.3 можно доказать, что при любом $\lambda \in \mathbb{R}_+$ функции $w^{(k)}(x, \lambda)$ ($k = 1, 2$) являются ограниченными решениями уравнения (1.1), непрерывными по $\lambda \in \mathbb{R}_+$. В силу леммы 1.3, при любом $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus T$ функции $w^{(k)}(x, \lambda)$ линейно зависимы от $u_1(x, \lambda)$ и $u_2(x, \lambda)$, т. е. при $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus T$ имеют место равенства (2.29).

Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus T$. Из равенства (2.32) и свойств ψ следует, что существуют числа ξ и η такие, что $\varphi(\xi, \eta, \lambda) \neq 0$ для всех λ из некоторой окрестности $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ точки λ_0 , не содержащей точек из T .

Подставляя значения $x = \xi$ и $x = \eta$ в (2.29) и разрешив полученную систему относительно $a_{k\varepsilon}(\lambda)$, получим

$$\begin{cases} a_{1k}(\lambda) = [u_2(\eta, \lambda)w^{(k)}(\xi, \lambda) - u_2(\xi, \lambda)w^{(k)}(\eta, \lambda)] / \varphi(\xi, \eta, \lambda), \\ a_{2k}(\lambda) = [-u_1(\eta, \lambda)w^{(k)}(\xi, \lambda) + u_1(\xi, \lambda)w^{(k)}(\eta, \lambda)] / \varphi(\xi, \eta, \lambda), \end{cases} \quad (2.34)$$

$$k = 1, 2; \quad \lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon) \setminus T.$$

Функции $u_k(x, \lambda)$, $w^{(k)}(x, \lambda)$ ($k = 1, 2$) и $\varphi(\xi, \eta, \lambda)$ непрерывны по λ . Из (2.34) следует, что функции $a_{k\varepsilon}(\lambda)$ непрерывны на $\mathbb{R}_+ \setminus T$ и по непрерывности определяются для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Равенства (2.29) и (2.34) имеют место также для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Имеем (ср. с леммой 2.3)

$$\lambda^m w^{(k)}(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u_k(t, \lambda) l_x(K(x, t)) dt \quad (k = 1, 2).$$

Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |l_x(K(x, t))| dt$$

сходится равномерно по x на каждом конечном сегменте. Пользуясь асимптотическими формулами (1.13) и (1.14) нетрудно доказать, что функции $\lambda^m w^{(k)}(x, \lambda)$ стремятся к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$, равномерно по x на каждом конечном сегменте $[\alpha, \beta]$. При достаточно большом λ выберем ξ и η так, чтобы выполнялось равенство (2.33). Далее, подставим значения λ, ξ и η в (2.34) и умножим обе его части на λ^m . Устремляя λ к бесконечности приходим к (2.31). Доказательство завершено.

Замечание 2.1. Функция $w^{(k)}(x, \lambda)$ и $\lambda^m w^{(k)}(x, \lambda)$ ($k = 1, 2$), как функция от λ , принадлежат $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Доказательство аналогично нечетному случаю.

Следствие 2.7. В случае $m = 2n$ ядро $K(x, t)$ \mathcal{L} -свертки представимо в виде

$$\begin{aligned} K(x, t) = & \int_0^\infty [a_{11}(\lambda)u_1(x, \lambda) + a_{21}(\lambda)u_2(x, \lambda)] \overline{u_1(t, \lambda)} d\lambda + \\ & + \int_0^\infty [a_{12}(\lambda)u_1(x, \lambda) + a_{22}(\lambda)u_2(x, \lambda)] \overline{u_2(t, \lambda)} d\lambda + \\ & + \sum_{\lambda \in T} \sum_{j,k=1}^{r_\lambda} c_{jk}(\lambda) v_j(x, \lambda) \overline{v_k(t, \lambda)}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Доказательство следует из формулы разложения (1.17), примененной к $\overline{K(x, t)}$ при фиксированном x и формул (2.6), (2.29).

Следствие 2.8. Пусть $m = 2n$ и $y \in L^2(\mathbb{R})$. Тогда для Ky , определенной равенством (2.4), имеет место представление

$$\begin{aligned} (Ky)(x) = & \int_0^\infty u_1(x, \lambda) \left(a_{11}(\lambda) \tilde{y}^{(1)}(\lambda) + a_{12}(\lambda) \tilde{y}^{(2)}(\lambda) \right) d\lambda + \\ & + \int_0^\infty u_2(x, \lambda) \left(a_{21}(\lambda) \tilde{y}^{(1)}(\lambda) + a_{22}(\lambda) \tilde{y}^{(2)}(\lambda) \right) d\lambda + \\ & + \sum_{\lambda \in T} \sum_{j=1}^{r_\lambda} v_j(x, \lambda) \sum_{k=1}^{r_\lambda} c_{jk}(\lambda) \tilde{y}_k(\lambda) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Доказательство следует из (2.6), (2.30) и обобщенного равенства Парсеваля, вытекающего из формулы (1.16).

В обозначениях теоремы 1.3 имеем $\mathbf{H}_0^\perp = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2$. Из (2.36) следует, что для каждого $k = 1, 2$ функции $y \in \mathbf{H}_k$, удовлетворяющие условиям

$$a_{s,k}(\lambda)\tilde{y}^{(k)}(\lambda) \in L^2(\mathbb{R}_+), \quad s = 1, 2, \quad (2.37)$$

принадлежат \mathbf{D}_K . В частности, при любом $k = 1, 2$ все функции $y \in \mathbf{H}_k$, для которых $\tilde{y}^{(k)}(\lambda) = 0$ в окрестности нуля, принадлежат линейалу \mathbf{D}_K . Тем самым, и в случае $m = 2n$ линейал \mathbf{D}_K плотен в $L^2(\mathbb{R})$.

Определим оператор $\mathcal{W}: \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2 \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+) \oplus L^2(\mathbb{R}_+)$:

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1|_{\mathbf{H}_1} & 0 \\ 0 & \mathcal{U}_2|_{\mathbf{H}_2} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathcal{W}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1^* & 0 \\ 0 & \mathcal{U}_2^* \end{pmatrix}.$$

Из представления (2.36) вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.9. Для любой функции $y \in \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2$, удовлетворяющей условиям (2.37), справедливо равенство

$$\mathcal{K}y = \mathcal{W}^{-1}\Lambda_A\mathcal{W}y, \quad (2.38)$$

где $\Lambda_A: L_2^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L_2^2(\mathbb{R}_+)$ – оператор умножения на матрицу–функцию

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Из (2.38) следует, что сужение \mathcal{K} на $\mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2$ ограничено тогда и только тогда, когда ограничен оператор Λ_A . В силу леммы 2.3 приходим к следующему утверждению.

Лемма 2.6. При $m = 2n$ интегральный оператор \mathcal{K} полной \mathcal{L} -свертки ограничен тогда и только тогда, когда ограничено множество Δ и

$$\sup_{\lambda \in (0, \infty)} |a_{s,k}(\lambda)| < \infty \quad (s, k = 1, 2). \quad (2.40)$$

Воспользовавшись формулами (1.17), (2.36) и леммой 2.6 можно доказать следующее утверждение (ср. с теоремой 2.1).

Теорема 2.3. Пусть $m = 2n$, \mathcal{K} – интегральный оператор полной \mathcal{L} -свертки и $f \in L^2(\mathbb{R})$. Далее, пусть функции $a_{s,k}(\lambda)$ ($s, k = 1, 2$; $\lambda \in \mathbb{R}_+$) и числа $c_{jk}(\lambda)$

($\lambda \in T$; $j, k = 1, \dots, r_\lambda$) определены равенствами (2.29), (2.30), (2.14), (2.15), и пусть выполнены также следующие два условия :

1) система алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (1 + a_{11}(\lambda))\tilde{z}^{(1)}(\lambda) + a_{12}(\lambda)\tilde{z}^{(2)}(\lambda) = \tilde{f}^{(1)}(\lambda), \\ a_{21}(\lambda)\tilde{z}^{(1)}(\lambda) + (1 + a_{22}(\lambda))\tilde{z}^{(2)}(\lambda) = \tilde{f}^{(2)}(\lambda) \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+,$$

имеет решение ($\tilde{z}^{(1)}(\lambda), \tilde{z}^{(2)}(\lambda)$) с компонентами из $L^2(\mathbb{R}_+)$;

2) системы алгебраических уравнений (2.24) имеют решения, удовлетворяющие условию (2.25).

Тогда функция

$$y(x) = \int_0^\infty u_1(x, \lambda)\tilde{z}^{(1)}(\lambda)d\lambda + \int_0^\infty u_2(x, \lambda)\tilde{z}^{(2)}(\lambda)d\lambda + \sum_{\lambda \in T} \sum_{j=1}^{r_\lambda} u_j(x, \lambda)z_j(\lambda)$$

принадлежит $L^2(\mathbb{R})$ и является решением интегрального уравнения (2.27).

Если оператор K ограничен, то условия 1) и 2) также необходимы для того, чтобы уравнение (2.27) имело решение в $L^2(\mathbb{R})$.

Теорема 2.4. Пусть $m = 2n$ и K — ограниченный интегральный оператор полной \mathcal{L} -свертки. Оператор $I+K$ фредгольмовый в $L^2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда

$$1) \quad \inf_{\lambda > 0} |\det(E_2 + A(\lambda))| > 0,$$

2) для всех $\lambda \in T$, за исключением конечного множества $T' \subset T$, матрица

$$E_{r_\lambda} + \Phi_\lambda \text{ обратима и } \sup_{\lambda \in T \setminus T'} \|(E_{r_\lambda} + \Phi_\lambda)^{-1}\| < \infty.$$

При выполнении этих условий

$$\text{Ind}(I + K) = 0, \quad \dim \ker(I + K) = \sum_{\lambda \in T} \dim \ker(E_{r_\lambda} + \Phi_\lambda)$$

и обобщенный обратный оператор $(I + K)^{(-1)}$ определяется формулами

$$\left((I + K)^{(-1)} y \right) (x) = y(x) - \int_{-\infty}^{\infty} R(x, t) y(t) dt,$$

$$\begin{aligned} R(x, t) = & \int_0^\infty [b_{11}(\lambda)u_1(x, \lambda) + b_{21}(\lambda)u_2(x, \lambda)] \overline{u_1(t, \lambda)} d\lambda + \\ & + \int_0^\infty [b_{12}(\lambda)u_1(x, \lambda) + b_{22}(\lambda)u_2(x, \lambda)] \overline{u_2(t, \lambda)} d\lambda + \\ & + \sum_{\lambda \in T} \sum_{j, k=1}^{r_\lambda} d_{jk}(\lambda) u_j(x, \lambda) \overline{u_k(t, \lambda)}, \end{aligned}$$

где функции $b_{jk}(\lambda)$ ($j, k = 1, 2$) – элементы матрицы-функции $E_2 - (E_2 + A(\lambda))^{-1}$, а $d_{jk}(\lambda)$ ($\lambda \in T$; $j, k = 1, \dots, r_\lambda$) – элементы матрицы $E_{r_\lambda} - (E_{r_\lambda} + \Phi_\lambda)^{(-1)}$.

Доказательство аналогично случаю с четным m .

Следствие 2.10. Пусть $m = 2n$. Оператор $\mathcal{I} + \mathcal{K}$ обратим тогда и только тогда, когда для всех $\lambda \in T$ обратима матрица $E_{r_\lambda} + \Phi_\lambda$ и выполнены условия 1), 2) теоремы 2.4.

§3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ \mathcal{L} -СВЕРТКИ

НА ПОЛУОСИ

3.1. Пусть $K(x, t)$ – ядро \mathcal{L} -свертки. Всюду в этом параграфе будем предполагать выполненными следующие условия :

В) в случае $m = 2$ справедливо (1.19), а в случае $m \geq 3$ выполнены условия пункта 1.3;

В) оператор \mathcal{K} полной \mathcal{L} -свертки, порожденный ядром $K(x, t)$, ограничен.

Отметим, что из условия В) следуют неравенства (1.6). Следовательно, по теореме 1.1 имеет место условие А), и поэтому остаются в силе все результаты §2. В зависимости от четности m , условие В) эквивалентно выполнению утверждений леммы 2.4 ($m = 2n + 1$), либо леммы 2.6 ($m = 2n$).

В этом параграфе мы будем рассматривать операторы $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+ : L^2(\mathbb{R}_+) \mapsto \mapsto L^2(\mathbb{R}_+)$, определенные равенством

$$(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+)y = y(x) + \int_0^\infty K(x, t)y(t)dt \quad (3.1)$$

и называемые интегральными операторами \mathcal{L} -свертки на полупрямой.

Определим операторы $\theta_+ : L^2(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R}_+)$, $\theta_- : L^2(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R}_-)$, $\theta_+^0 : L^2(\mathbb{R}_+) \mapsto L^2(\mathbb{R})$, $\theta_-^0 : L^2(\mathbb{R}_-) \mapsto L^2(\mathbb{R})$ следующим образом :

$(\theta_+ y)(x) = y(x)$, ($x \in \mathbb{R}_+$), $(\theta_- y)(x) = y(x)$, ($x \in \mathbb{R}_-$),

$$(\theta_+ y)(x) = \begin{cases} y(x), & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (\theta_- y)(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ y(x), & x < 0. \end{cases}$$

Оператор $I + \mathcal{K}^+$ ограничен, поскольку $I + \mathcal{K}^+ = I + \theta_+ \mathcal{K} \theta_+^0$. Наряду с $I + \mathcal{K}^+$ рассмотрим также оператор $I + \mathcal{K}_1^+ : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, определенный равенством $I + \mathcal{K}_1^+ = I + \mathcal{K} \Lambda_{\chi_+}$ (здесь и далее χ_+ (χ_-) – характеристическая функция полупрямой \mathbb{R}_+ (\mathbb{R}_-)). Операторы $I + \mathcal{K}^+$ и $I + \mathcal{K}_1^+$ взаимосвязаны:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I + \mathcal{K}_1^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -\theta_+ \\ \mathcal{K} \theta_+^0 & -(I + \mathcal{K}_1^+) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I + \mathcal{K}^+ & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\theta_+ \\ \mathcal{K} \theta_+^0 & -(I + \mathcal{K}_1^+) \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где

$$\begin{pmatrix} I & -\theta_+ \\ \mathcal{K} \theta_+^0 & -(I + \mathcal{K}_1^+) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I + \mathcal{K}^+ & -\theta_+ \\ \mathcal{K} \theta_+^0 & -I \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

3.2. Лемма 3.1. Пусть $h(x) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ – убывающая, неотрицательная функция, $q(x, t)$ ($0 < t \leq x < \infty$) – функция, удовлетворяющая неравенству

$$|q(x, t)| \leq h(x+t) \quad (0 < t \leq x < \infty), \quad (3.4)$$

и пусть $\mathcal{Q} : L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$ – интегральный оператор

$$(\mathcal{Q}y)(x) = \int_0^x q(x, t)y(t) dt.$$

Тогда оператор $I - \mathcal{Q}$ обратим и $(I - \mathcal{Q})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}^n$.

Доказательство. Сначала докажем оценку

$$|(\mathcal{Q}^k y)(x)| \leq \|y\|_+ \left[\frac{h(x)}{(k-1)! 2^{k-1}} \left(\int_0^x h(\tau) d\tau \right)^{2k-1} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.5)$$

где $\|y\|_+$ – норма функции $y \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Если $k = 1$, то (3.5) получается из (3.4) применением неравенства Гельдера, ввиду монотонности $h(x)$. Пусть $j \geq 1$ – некоторое натуральное число. Предположим, что (3.5) верно для $k = j$. Тогда

$$\begin{aligned} |(\mathcal{Q}^{j+1} y)(x)| &\leq \|y\|_+ \int_0^x h(x+t) \left[\frac{h(t)}{(j-1)! 2^{j-1}} \left(\int_0^t h(\tau) d\tau \right)^{2j-1} \right]^{\frac{1}{2}} dt \leq \\ &\leq \|y\|_+ \left[\int_0^x h(x+t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^x \frac{h(x+t)h(t)}{(j-1)! 2^{j-1}} \left(\int_0^t h(\tau) d\tau \right)^{2j-1} dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \|y\|_+ \left[\int_x^{2x} h(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{h(x)}{(j-1)! 2^{j-1}} \int_0^x h(t) \left(\int_0^t h(\tau) d\tau \right)^{2j-1} dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \|y\|_+ \left[\frac{h(x)}{j! 2^j} \left(\int_0^x h(\tau) d\tau \right)^{2j+1} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, оценка (3.5) справедлива также при $k = j + 1$, и поэтому она справедлива для всех $k \geq 1$. Из (3.5) для нормы $\|Q^k\|_+$ оператора Q^k получаем

$$\|Q^k\|_+ \leq \frac{1}{\sqrt{k!2^k}} \left(\int_0^\infty h(x) dx \right)^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Лемма доказана.

Можно доказать, что оператор Q компактен. Однако, нам этот факт не понадобится, и его доказательство мы пропускаем.

Рассмотрим операторы $\Gamma_+ : L^2(\mathbb{R}_+) \mapsto L^2(\mathbb{R}_+)$, $\Gamma_- : L^2(\mathbb{R}_-) \mapsto L^2(\mathbb{R}_-)$, $\Gamma : L^2(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R})$, определенные равенствами

$$(\Gamma_+ y)(x) = y(x) + \int_0^x G^+(t, x) y(t) dt, \quad (\Gamma_- y)(x) = y(x) + \int_x^0 G^-(t, x) y(t) dt,$$

$$\Gamma = \theta_+^0 \Gamma_+ \theta_+ + \theta_-^0 \Gamma_- \theta_-.$$

Из теоремы 1.4 (случай $m = 2$), теоремы 1.5 (случай $m \geq 3$) и леммы 3.1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.1. Операторы Γ_\pm, Γ обратимы и

$$\Gamma_\pm^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1 - \Gamma_\pm)^n, \quad \Gamma^{-1} = \theta_+^0 \Gamma_+^{-1} \theta_+ + \theta_-^0 \Gamma_-^{-1} \theta_-.$$

Пусть \mathcal{F} (от \mathcal{F}^{-1}) – прямое (обратное) преобразование Фурье

$$(\mathcal{F}^\pm y)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm izt} y(t) dt, \quad y \in L^2(\mathbb{R}),$$

и пусть $S : L^2(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R})$ ($S_0 : L^2(\mathbb{R}_+) \mapsto L^2(\mathbb{R}_+)$) – оператор сингулярного интегрирования вдоль прямой (полупрямой):

$$(Sy)(x) = \frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)}{t-x} dt, \quad (S_0 y)(x) = \frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{y(t)}{t-x} dt.$$

Наконец, пусть $\mathcal{P}_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm S)$ – проекторы, соответствующие разложению $L^2(\mathbb{R}) = \mathbf{H}_2^+ \oplus \mathbf{H}_2^-$ где \mathbf{H}_2^+ и \mathbf{H}_2^- , соответственно – классы Харди в верхней и нижней полуплоскостях.

Решения $z^\pm(x, \lambda)$ уравнения (1.1) в случае $m = 2$ определим по формуле (1.20), а в случае $m \geq 3$ – по формуле (1.23).

Лемма 3.2. Для произвольной функции $y \in L^2(\mathbb{R})$ справедливы следующие равенства:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \overline{z^+(x, \mu)y(x)} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t + \mu} (\mathcal{F}\Gamma y)(t) dt, \quad \text{Im } \mu > 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \overline{z^+(x, \pm\lambda)y(x)} dx = (\mathcal{P}_{\mp} \mathcal{F}^{\mp 1} \Gamma y)(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \overline{z^-(x, \mu)y(x)} dx = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t + \mu} (\mathcal{F}\Gamma y)(t) dt, \quad \text{Im } \mu < 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \overline{z^-(x, \pm\lambda)y(x)} dx = (\mathcal{P}_{\pm} \mathcal{F}^{\mp 1} \Gamma y)(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

Доказательство. Из (1.20), (1.23) и теоремы Пэли-Винера (см., напр., [14])

следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \overline{z^+(x, \mu)y(x)} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-i\mu x} (\theta_+^0 \Gamma_+ \theta_+ y)(x) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t + \mu} (\mathcal{F}\theta_+^0 \Gamma_+ \theta_+ y)(x) dx. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathcal{F}\theta_-^0 \Gamma_- \theta_- y \in \mathbf{H}_2^-$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t + \mu} (\mathcal{F}\theta_-^0 \Gamma_- \theta_- y)(t) dt = 0,$$

и, тем самым, верно равенство (3.6). Равенство (3.8) доказывается аналогично.

Пользуясь тем, что $\mathcal{F}\Lambda_{x_+} = \mathcal{P}_+ \mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1}\Lambda_{x_+} = \mathcal{P}_- \mathcal{F}^{-1}$ (см., напр., [2]), из (1.21) и

(1.23) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \overline{z^+(x, \pm\lambda)y(x)} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{\mp i\lambda x} (\Gamma_+ \theta_+ y)(x) dx = \\ &= (\mathcal{P}_{\pm} \mathcal{F}^{\mp 1} \theta_+^0 \Gamma_+ \theta_+ y)(\lambda). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая что $\mathcal{F}^{-1}\theta_-^0 \Gamma_- \theta_- \in \mathbf{H}_2^+$, $\mathcal{F}\theta_-^0 \Gamma_- \theta_- y \in \mathbf{H}_2^-$, получим (3.7).

Формула (3.9) доказывается аналогично. Лемма доказана.

Рассмотрим операторы $\tilde{\mathcal{N}}_{\omega} : L^2(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R})$ и $\mathcal{N}_{\omega} : L^2(\mathbb{R}_+) \mapsto L^2(\mathbb{R}_+)$

($|\omega| = 1$), определенные формулами

$$(\tilde{\mathcal{N}}_{\omega} y)(\lambda) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)}{t - \omega\lambda} dt, \quad \mathcal{N}_{\omega} = \theta_+ \tilde{\mathcal{N}}_{\omega} \theta_+^0.$$

Заметим, что $\tilde{\mathcal{N}}_1$ и \mathcal{N}_1 совпадают с сингулярными интегральными операторами

S и S_0 соответственно.

Пусть $\mathcal{M} : L^2(\mathbb{R}_+) \mapsto L^2(\mathbb{R})$ и $\mathcal{M}^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R}_+)$ соответственно

— прямое и обратное преобразования Меллина :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{M}y)(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-i\lambda} y(t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\
 (\mathcal{M}^{-1}y)(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{i\lambda-\frac{1}{2}} y(\lambda) d\lambda, \quad t \in \mathbb{R}_+.
 \end{aligned}$$

Доказательство нижеприведенного утверждения можно найти в [15] или [16].

Лемма 3.3. Если $\omega = e^{i\beta}$ ($0 \leq \beta < 2\pi$), то справедливы равенства

$$\mathcal{M}\mathcal{N}_\omega\mathcal{M}^{-1} = \Lambda_{n_\beta}, \quad (3.10)$$

где

$$n_\beta(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} h\pi x, & \beta = 0, \\ \frac{e^{-i\frac{\beta}{2}} e^{(\pi-\beta)x}}{\cosh \pi x}, & \beta \in (0, 2\pi). \end{cases} \quad (3.11)$$

В зависимости от четности m рассмотрим два различных случая.

3.3. Случай $m = 2n + 1$. Пусть $u(x, \lambda)$ – обобщенная собственная функция оператора \mathcal{L} , определенная в лемме 1.2, а $A_j^\pm(\lambda)$ определены равенствами (1.26).

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned}
 \alpha_{-1}^o(\lambda) &= \frac{1}{2} [A_0^+(\lambda) + \overline{A_0^-(\lambda)}], & \alpha_0^o(\lambda) &= \frac{1}{2} [\overline{A_0^-(\lambda)} - A_0^+(\lambda)], & \lambda &\in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\
 \alpha_i^o(\lambda) &= \frac{1}{2} \begin{cases} \overline{A_i^-(\lambda)}, & \lambda > 0, \\ -A_i^+(\lambda), & \lambda < 0, \end{cases} & \alpha_j^o(\lambda) &= \frac{1}{2} \begin{cases} -\overline{A_{m-j}^+(\lambda)}, & \lambda > 0, \\ A_{m-j}^-(\lambda), & \lambda < 0, \end{cases} \\
 & & i &= 1, \dots, n, \quad j = n+1, \dots, m-1. & & (3.12)
 \end{aligned}$$

Лемма 3.4. Оператор \mathcal{U}_o , определенный по формуле (1.9), допускает представление

$$\mathcal{U}_o = \mathcal{V}_o \mathcal{F} \Gamma, \quad (3.13)$$

где

$$\mathcal{V}_o = \left(\Lambda_{\alpha_{-1}^o} + \sum_{j=0}^{m-1} \Lambda_{\alpha_j^o} \tilde{\mathcal{N}}_{\omega_j} \right) \tau, \quad (3.14)$$

а $\tau : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ – оператор отражения : $(\tau y)(x) = y(-x)$.

Доказательство. Из (1.26) следует, что если $y \in L^2(\mathbb{R})$ и $\lambda \in \mathbb{R}_+$, то

$$(\mathcal{U}_o y)(\lambda) = \overline{A_0^+(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \overline{z^+(x, \lambda)} y(x) dz +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=1}^n \overline{A_j^+(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \overline{z^+(x, \omega_j \lambda)} y(x) dx + \overline{A_0^-(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \overline{z^-(x, \lambda)} y(x) dx + \\
 & + \sum_{j=1}^n \overline{A_j^-(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \overline{z^-(x, \bar{\omega}_j \lambda)} y(x) dx.
 \end{aligned}$$

При $\lambda \in \mathbb{R}_-$

$$\begin{aligned}
 (U_0 y)(\lambda) & = \overline{A_0^+(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \overline{z^+(z, \lambda)} y(x) dx + \\
 & + \sum_{j=1}^n \overline{A_j^+(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \overline{z^+(x, \bar{\omega}_j \lambda)} y(x) dx + \overline{A_0^-(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \overline{z^-(x, \lambda)} y(x) dx + \\
 & + \sum_{j=1}^n \overline{A_j^-(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \overline{z^-(x, \omega_j \lambda)} y(x) dx.
 \end{aligned}$$

Воспользовавшись леммой 3.2 и формулами (3.12) получим (3.13) и (3.14). Лемма доказана.

Теорема 3.1. Если $m = 2n + 1$, а $c(\lambda)$ определено по формулам (2.14) и (2.15), то справедливо представление

$$U_0(I + K_1^+) = (V_0 + \Lambda_c V_0 P_+) F \Gamma. \quad (3.15)$$

Доказательство. Применяя равенства $\Gamma \Lambda_{x_+} = \Lambda_{x_+} \Gamma$ и $F \Lambda_{x_+} = P_+ F$, получим

$$U_0 \Lambda_{x_+} = V_0 P_+ F^{-1} \Gamma. \quad (3.16)$$

Из (2.22) следует, что $U_0 K = \Lambda_c U_0$. Поэтому $U_0(I + K_1^+) = U_0 + U_0 K \Lambda_{x_+}$. Подставив (3.13) и (3.16) в правую сторону последнего равенства, получим (3.15). Теорема доказана.

3.4. Случай $m = 2n$. Пусть операторы U_j ($j = 1, 2$) определены равенством (1.15). Определим ограниченный оператор $U_c : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ равенством $U_c = \theta_+^0 U_1 + \tau \theta_+^0 U_2$. Пусть $\psi = (\theta_+^0, \tau \theta_+^0) : L_2^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$. Тогда

$$\psi^{-1} = \begin{pmatrix} \theta_+ \\ \theta_+ \tau \end{pmatrix}, \quad U_c = \psi \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись теоремой 1.3, получим $\ker U_c = \mathbb{H}_0$, причем U_c имеет правую обратную $(U_c)^{(-1)}$, которая определена равенством $(U_c)^{(-1)} = U_1^* \theta_+ + U_2^* \theta_+ \tau$.

Рассмотрим теперь функции :

$$\begin{aligned}
 \alpha_{-1}^{\pm}(\lambda) &= \frac{1}{2} \begin{cases} \overline{B_{1n}^+(\lambda) + B_{1n}^-(\lambda)}, & \lambda > 0, \\ \overline{B_{20}^+(-\lambda) + B_{20}^-(-\lambda)}, & \lambda < 0, \end{cases} \\
 \alpha_{-\tau}^{\pm}(\lambda) &= \frac{1}{2} \begin{cases} \overline{B_{10}^+(\lambda) + B_{10}^-(\lambda)}, & \lambda > 0, \\ \overline{B_{2n}^+(-\lambda) + B_{2n}^-(-\lambda)}, & \lambda < 0, \end{cases} \\
 \alpha_0^{\pm}(\lambda) &= \frac{1}{2} \begin{cases} \overline{B_{1n}^+(\lambda) - B_{1n}^-(\lambda)}, & \lambda > 0, \\ \overline{B_{20}^+(-\lambda) - B_{20}^-(-\lambda)}, & \lambda < 0, \end{cases} \\
 \alpha_n^{\pm}(\lambda) &= \frac{1}{2} \begin{cases} \overline{B_{10}^+(\lambda) - B_{10}^-(\lambda)}, & \lambda > 0, \\ \overline{B_{2n}^+(-\lambda) - B_{2n}^-(-\lambda)}, & \lambda < 0, \end{cases} \\
 \alpha_k^{\pm}(\lambda) &= \frac{1}{2} \begin{cases} \overline{B_{1,n-k}^+(\lambda)}, & \lambda > 0, \\ \overline{-B_{2k}^-(-\lambda)}, & \lambda < 0, \end{cases} \quad \alpha_j^{\pm}(\lambda) = \frac{1}{2} \begin{cases} \overline{-B_{1,j-n}^-(\lambda)}, & \lambda > 0, \\ \overline{B_{2,m-j}^+(-\lambda)}, & \lambda < 0, \end{cases} \\
 & \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = n+1, n+2, \dots, m-1,
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

где $B_{jk}^{\pm}(\lambda)$ ($j = 1, 2$; $k = 0, 1, \dots, n$) определяются из (1.27).

Лемма 3.5.

$$U_{\varepsilon} = \mathcal{V}_{\varepsilon} \mathcal{F} \Gamma, \tag{3.18}$$

где оператор $\mathcal{V}_{\varepsilon} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ определяется формулой

$$\mathcal{V}_{\varepsilon} = \Lambda_{\alpha_{-1}^{\pm}} + \Lambda_{\alpha_{-\tau}^{\pm}} + \sum_{k=0}^{m-1} \Lambda_{\alpha_k^{\pm}} \tilde{N}_{\omega_k}. \tag{3.19}$$

Доказательство. Из представлений (1.27) следует, что при $y \in L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
 (U_j y)(\lambda) &= \overline{B_{j0}^+(\lambda)} \int_0^{\infty} \overline{z^+(x, \lambda)} y(x) dx + \overline{B_{jn}^+(\lambda)} \int_0^{\infty} \overline{z^+(x, \omega_n \lambda)} y(x) dx + \\
 &+ \sum_{k=1}^{n-1} \overline{B_{jk}^+(\lambda)} \int_0^{\infty} \overline{z^+(x, \omega_k \lambda)} y(x) dx + \overline{B_{j0}^-(\lambda)} \int_{-\infty}^0 \overline{z^-(x, \omega_k \lambda)} y(x) dx + \\
 &+ \overline{B_{jn}^-(\lambda)} \int_{-\infty}^0 \overline{z^-(x, \omega_n \lambda)} y(x) dx + \sum_{k=1}^{n-1} \overline{B_{jk}^-(\lambda)} \int_{-\infty}^0 \overline{z^-(x, \omega_k \lambda)} y(x) dx, \quad j = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Опираясь на (3.6) – (3.9) и определение U_{ε} , из (3.17), (3.19) получим (3.18). Лемма доказана.

Теорема 3.2. Пусть $m = 2n$, и пусть матрица-функция $A(\lambda)$ определена равенством (2.39). Тогда

$$U_{\varepsilon}(\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+) = (\mathcal{V}_{\varepsilon} + \psi \Lambda_A \psi^{-1} \mathcal{V}_{\varepsilon} \mathcal{P}_+) \mathcal{F} \Gamma. \tag{3.20}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1.

3.5. Рассмотрим оператор $\mathcal{V} : L^2(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{V} = (\mathcal{V}_o + \Lambda_c \mathcal{V}_o \mathcal{P}_+) \tau, \quad \text{если } m = 2n + 1, \quad (3.21)$$

$$\mathcal{V} = (\mathcal{V}_e + \psi \Lambda_A \psi^{-1} \mathcal{V}_o \mathcal{P}_+), \quad \text{если } m = 2n, \quad (3.22)$$

а также оператор $\mathcal{U} : L^2(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R})$, совпадающий с \mathcal{U}_o в случае $m = 2n + 1$ и с \mathcal{U}_e в случае $m = 2n$. Формулы (3.15) и (3.20) могут быть записаны в единой форме

$$\dot{\mathcal{U}}(\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+) = \mathcal{V} \mathcal{F} \Gamma. \quad (3.23)$$

Определим оператор $\bar{\mathcal{V}} : L_2^2(\mathbb{R}) \mapsto L_2^2(\mathbb{R})$, положив

$$\bar{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} \mathcal{M} & 0 \\ 0 & \mathcal{M} \end{pmatrix} \psi^{-1} \mathcal{V} \psi \begin{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{M}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Для произвольной матрицы-функции $a(x)$ второго порядка с элементами из $L^\infty(\mathbb{R})$ через $\mathcal{T}(a) : L_2^2(\mathbb{R}) \mapsto L_2^2(\mathbb{R})$ обозначим оператор свертки Фурье с $a(x)$:

$$\mathcal{T}(a) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{F}^{-1} \end{pmatrix} \Lambda_a \begin{pmatrix} \mathcal{F} & 0 \\ 0 & \mathcal{F} \end{pmatrix}.$$

Пусть X – множество бесконечно-дифференцируемых на R функций, имеющих конечные пределы в $\pm\infty$, и пусть Y – множество функций, ограниченных на всей оси и непрерывных на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Обозначим через $B(X, Y)$ множество операторов вида

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{T}(\gamma_i) \Lambda_{\beta_i}, \quad (3.25)$$

где элементы матриц-функций β_i и γ_i второго порядка принадлежат X и Y соответственно.

Ниже в этом пункте будем полагать, что удовлетворено следующее условие :

Г) число собственных значений оператора \mathcal{L} конечно и, с учетом кратностей, равно $\nu = \dim H_0$.

Теорема 3.3. Оператор $\bar{\mathcal{V}}$ принадлежит $B(X, Y)$. Если выполнено условие Г), то операторы $\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+$, $\bar{\mathcal{V}}$ и \mathcal{V} фредгольмовы лишь одновременно и имеет место

равенство

$$\text{Ind}(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+) = \text{Ind} \bar{\mathcal{V}} - \nu = \text{Ind} \mathcal{V} - \nu. \quad (3.26)$$

Доказательство. Пусть $a(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ и $d(a) = \text{diag}[a(x), a(-x)]$ ($x \in \mathbb{R}_+$).

Нетрудно видеть, что

$$\psi^{-1} \Lambda_a \psi = \Lambda_{d(a)}, \quad \psi^{-1} \mathcal{P}_\pm \psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I \pm \mathcal{N}_1 & \mp \mathcal{N}_{-1} \\ \pm \mathcal{N}_{-1} & I \mp \mathcal{N}_1 \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

$$\psi^{-1} \mathcal{T} \psi = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^{-1} \tilde{\mathcal{N}}_\omega \psi = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_\omega & -\mathcal{N}_{-\omega} \\ \mathcal{N}_{-\omega} & -\mathcal{N}_\omega \end{pmatrix}, \quad (|\omega| = 1).$$

С другой стороны, для любой матрицы-функции $a(x)$ ($x \in \mathbb{R}_+$) второго порядка с элементами из $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M} & 0 \\ 0 & \mathcal{M} \end{pmatrix} \Lambda_a \begin{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{M}^{-1} \end{pmatrix} = \mathcal{T}(\bar{a}), \quad (3.28)$$

где $\bar{a}(x) = a(e^x)$.

Из равенств (3.24), (3.27) и леммы 3.3 следует, что $\bar{\mathcal{V}}$ может быть представлено в виде (3.25). Свойства функций $A_j^\pm(\lambda)$, $B_{k_j}^\pm(\lambda)$ и равенства (3.12), (3.17), (3.27), (3.28) обеспечивают принадлежность коэффициентов соответствующим классам X , Y . Первое утверждение теоремы доказано.

Так как $\dim H_0 < \infty$, то оператор U фредгольмов и оператор $\mathcal{I} - U^{(-1)}U$ конечномерен. Из равенства $\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+ = U^{(-1)}U(\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+) + (\mathcal{I} - U^{(-1)}U)(\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+)$ следует, что оба оператора $\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+$ и $U(\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+)$ фредгольмовы одновременно и

$$\text{Ind}(\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+) = \text{Ind}(U(\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+)) - \nu. \quad (3.29)$$

Из тождеств (3.2), (3.3) следует, что операторы $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$ и $\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+$ фредгольмовы одновременно и $\text{Ind}(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+) = \text{Ind}(\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+)$. Ввиду обратимости Γ (см. следствие 3.1) из теорем 3.1 и 3.2 получим, что операторы $U(\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+)$ и \mathcal{V} фредгольмовы одновременно и $\text{Ind} U(\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+) = \text{Ind} \mathcal{V}$. Таким образом, в силу (3.29) и (3.24), получим второе утверждение теоремы и, в частности, равенство (3.26).

Теорема доказана.

Замечание 3.1. В скалярном случае операторы вида (3.25) при различных предположениях относительно коэффициентов γ_i, β_i были изучены в [2], [15] - [19]. Большинство этих результатов распространяемо на случай матричных коэффициентов (в связи с этим см. §7 работы [2]) и может быть использовано при исследовании оператора $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$. Например, при дополнительном предположении о существовании конечных пределов

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm 0} A_j^\pm(\lambda), \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} B_{kj}^\pm(\lambda), \quad (3.30)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm 0} c(\lambda), \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda), \quad (3.31)$$

на основе теоремы 3.3, методами работ [2], [15], [19] можно получить эффективные критерии фредгольмовости и найти индекс оператора $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$. В следующем параграфе найдены условия фредгольмовости оператора $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$ при $m = 2$ (см. ниже, замечания 4.1, 4.2).

3.6. Пусть π_0 - оператор, проектирующий $L^2(\mathbb{R})$ на подпространство H_0 .

Полагая, что существует обобщенный обратный оператор $\mathcal{V}^{(-1)}$, рассмотрим операторы

$$\mathcal{R}_1 = \Gamma^{-1} \mathcal{F}^{-1} \mathcal{V}^{(-1)} \mathcal{U} \mathcal{K} \theta_+^0 : L^2(\mathbb{R}_+) \mapsto L^2(\mathbb{R}),$$

$$\mathcal{R}_{11} = \mathcal{I} + \theta_+ \mathcal{R}_1 : L^2(\mathbb{R}_+) \mapsto L^2(\mathbb{R}_+), \quad (3.32)$$

$$\mathcal{R}_{21} = \left(\begin{array}{c} \pi_0 \mathcal{K}_1^+ \mathcal{R}_1 \\ [\mathcal{I} - \mathcal{U}^{(-1)} \mathcal{V} \mathcal{V}^{(-1)} \mathcal{U}] \mathcal{K} \theta_+^0 \end{array} \right) : L^2(\mathbb{R}_+) \mapsto H_0 \oplus Y_1,$$

где $Y_1 = \ker \mathcal{V}^{(-1)} \mathcal{U}$, а также

$$\mathcal{R}_{12} = (0; \theta_+ |_{Y_2}) : H_0 \oplus Y_2 \mapsto L^2(\mathbb{R}_+), \quad \mathcal{R}_2 = \pi_0 \mathcal{K}_1^+ |_{Y_2} : Y_2 \mapsto H_0, \quad (3.33)$$

$$\mathcal{R}_0 = \left(\begin{array}{cc} \mathcal{I} & \mathcal{R}_1 \\ \mathcal{I}_{Y_1} |_{H_0} & 0 \end{array} \right) : H_0 \oplus Y_2 \mapsto H_0 \oplus Y_1,$$

где $Y_2 = \Gamma^{-1} \mathcal{F}^{-1}(\ker \mathcal{V})$. Из (3.23) следует, что

$$\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+ = \mathcal{U}^{(-1)} \mathcal{V} \mathcal{F} \Gamma + (\mathcal{I} - \mathcal{U}^{(-1)} \mathcal{U})(\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+).$$

Отсюда, из тождеств (3.2), (3.3) и результатов §1, [20] вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.4. Пусть выполнено условие Г). Если оператор $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$ фредгольмов, то обобщенный обратный оператор оператора $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$ задается формулой

$$(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+)^{(-1)} = \mathcal{R}_{11} - \mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_0^{(-1)}\mathcal{R}_{21}. \quad (3.34)$$

При этом

$$\ker(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+) = \theta_+(\ker \mathcal{R}_2),$$

$$\text{Im}(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+) = \mathcal{R}_{21}^{-1}(\text{Im} \mathcal{R}_0), \quad \text{Ind}(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+) = \text{Ind} \mathcal{R}_0, \quad (3.35)$$

$$\dim \ker(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+) = \dim \ker \mathcal{R}_0, \quad \dim \text{Coker}(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+) = \dim \text{Coker} \mathcal{R}_0.$$

Замечание 3.2. Таким образом, в случае фредгольмовости оператора $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$ теоремы 3.3 и 3.4 позволяют свести задачу о разрешимости уравнения $(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+)y = f$, $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ к построению обобщенных обратных \mathcal{V} и конечной матрицы, соответствующей \mathcal{R}_0 .

В связи с проблемой построения оператора $\mathcal{V}^{(-1)}$ теорема 3.4 в общем случае носит несколько формальный характер. Однако, она играет важную роль в частной ситуации, рассмотренной в §5.

§4. ФРЕДГОЛЬМОВОСТЬ ОПЕРАТОРА $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$ В СЛУЧАЕ КОГДА \mathcal{L} – ОПЕРАТОР ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

4.1. Пусть $m = 2$ и $K(x, t)$ – ядро \mathcal{L} -свертки. В этом параграфе всюду будем предполагать, что верно следующее утверждение.

Д) Имеет место неравенство (1.19). Функции a_{sk} ($s, k = 1, 2$), определенные формулами (2.29), (2.30), удовлетворяют условиям (2.40).

В силу теоремы 1.1 и леммы 2.6 выполнение Д) влечет выполнение условий А) – Г). Поэтому все утверждения, доказанные в §§2, 3, остаются справедливыми.

Пусть решения $z^\pm(x, \lambda)$ уравнения (1.6) определены по (1.20). Полагая $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, обозначим

$$a(\lambda) = \frac{z^+(0, \lambda)'z^-(0, -\lambda) - z^+(0, \lambda)z^-(0, -\lambda)'}{2i\lambda},$$

$$b(\lambda) = \frac{z^-(0, \lambda)'z^+(0, \lambda) - z^-(0, \lambda)z^+(0, \lambda)'}{2i\lambda},$$

где дифференцирование производится по первой переменной. Функции

$$r^-(\lambda) = \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}, \quad r^+(\lambda) = -\frac{b(-\lambda)}{a(\lambda)}, \quad \text{и} \quad t(\lambda) = \frac{1}{a(\lambda)}, \quad (4.1)$$

называются (см. [11]), соответственно, левым и правым коэффициентами отражения и коэффициентом прохождения. Выбрав функции $B_{ji}^\pm(\lambda)$ как в лемме 1.3, будем иметь ([11]):

$$B_{10}^- = B_{21}^+ = 1, \quad B_{20}^- = B_{11}^+ = 0, \quad (4.2)$$

$$B_{20}^+(\lambda) = r^+(\lambda), \quad B_{11}^-(\lambda) = r^-(\lambda), \quad B_{10}^+(\lambda) = B_{21}^-(\lambda) = t(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+,$$

При $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ введем

$$a^{(1)}(\lambda) = \begin{cases} a_{11}(\lambda), & \lambda > 0, \\ a_{22}(-\lambda), & \lambda < 0, \end{cases} \quad a^{(2)}(\lambda) = \begin{cases} a_{12}(\lambda), & \lambda > 0, \\ a_{21}(-\lambda), & \lambda < 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\gamma_1(\lambda) = \beta_{11}(\lambda) + a^{(1)}(\lambda)\beta_{11}(\lambda) + a^{(2)}(\lambda)\beta_{12}(-\lambda), \quad (4.4)$$

$$\gamma_2(\lambda) = \beta_{12}(\lambda) + a^{(1)}(\lambda)\beta_{12}(\lambda) + a^{(2)}(\lambda)\beta_{11}(-\lambda),$$

где $\beta_{11} = \alpha_{-1}^e + \alpha_0^e$, $\beta_{12} = \alpha_{-\tau}^e + \alpha_1^e$, $\beta_{21} = \alpha_{-1}^e - \alpha_0^e$, $\beta_{22} = \alpha_{-\tau}^e - \alpha_1^e$.

Нетрудно видеть, то

$$\psi \Lambda_A \psi^{(-1)} = \Lambda_{a^{(1)}} + \Lambda_{a^{(2)}} \tau. \quad (4.5)$$

Из (4.2), (3.17) и равенств $r^\pm(-\lambda) = \overline{r^\pm(\lambda)}$, $t(-\lambda) = \overline{t(\lambda)}$ (см. [11]) находим

$$\begin{aligned} \beta_{11}(\lambda) &= \begin{cases} 0, & \lambda > 0, \\ r^+(\lambda), & \lambda < 0, \end{cases} & \beta_{12}(\lambda) &= \begin{cases} \overline{t(\lambda)}, & \lambda > 0, \\ 1, & \lambda < 0, \end{cases} \\ \beta_{21}(\lambda) &= \begin{cases} \overline{r^-(\lambda)}, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0, \end{cases} & \beta_{22}(\lambda) &= \begin{cases} 1, & \lambda > 0, \\ t(\lambda), & \lambda < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Теорема 4.1. *Имеют место равенства*

$$U = \{(\Lambda_{\beta_{11}} \mathcal{P}_+ + \Lambda_{\beta_{21}} \mathcal{P}_-) + (\Lambda_{\beta_{22}} \mathcal{P}_+ + \Lambda_{\beta_{12}} \mathcal{P}_-) \tau\} \mathcal{F}\Gamma, \quad (4.7)$$

$$U(I + \mathcal{K}_1^+) = \mathcal{V}\mathcal{F}\Gamma, \quad (4.8)$$

где

$$\mathcal{V} = (\Lambda_{\gamma_1} \mathcal{P}_+ + \Lambda_{\beta_{21}} \mathcal{P}_-) + (\Lambda_{\beta_{22}} \mathcal{P}_+ + \Lambda_{\gamma_2} \mathcal{P}_-) \tau. \quad (4.9)$$

Функции $\gamma_j(\lambda)$, $\beta_{ij}(\lambda)$ ($i, j = 1, 2$) ограничены на всей оси и непрерывны на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Существуют пределы

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \beta_{11}(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \gamma_1(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \beta_{12}(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \gamma_2(\lambda) = 1,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \beta_{21}(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \beta_{22}(\lambda) = 1.$$

Доказательство. Первое утверждение непосредственно следует из результатов п. 3.4, ввиду (4.3)–(4.5) и того, что $\tau \mathcal{P}_{\pm} = \mathcal{P}_{\mp} \tau$. Второе утверждение следует из формул (2.31), (4.3), (4.5) и равенств $\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} r^{\pm}(\lambda) = 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} t(\lambda) = 1$ (см. [11]).

Теорема доказана.

Ниже мы дополнительно будем предполагать существование пределов

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} a_{ij}(\lambda) = a_{ij}(0), \quad (4.10)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow -0} r^{\pm}(\lambda) = r_0^{\pm}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow -0} t(\lambda) = t_0. \quad (4.11)$$

Замечание 4.1. При выполнении любого из условий

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda a(\lambda) \neq 0, \quad (4.12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2) |p_0(x)| dx < \infty, \quad (4.13)$$

выполнено (4.11). В обоих случаях функции $r^{\pm}(\lambda)$, $t(\lambda)$ непрерывны. Если выполнено условие (4.12), то $r_0^{\pm} = -1$ и $t_0 = 0$. Если $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda a(\lambda) = 0$ и верно (4.13), то

$$r_0^+ = -r_0^- = \frac{c^+ - c^-}{c^+ + c^-}, \quad t_0 = \frac{2}{c^+ + c^-},$$

где числа c^{\pm} определены равенствами

$$z^+(x, 0) = c^+ z^-(x, 0), \quad z^-(x, 0) = c^- z^+(x, 0), \quad c^+ c^- = 1.$$

Доказательства этих утверждений можно найти в работе [11]. В [11] также высказано предположение о том, что функции $r^{\pm}(\lambda)$, $t(\lambda)$ непрерывны, если только выполнены условия (1.19).

Замечание 4.2. Из теоремы 4.1 следует, что в случае $m = 2$ оператор \mathcal{V} – сингулярный оператор с отражением, т. е. сингулярный интегральный оператор с карлемановским обратным сдвигом. Существующая теория Фредгольма для таких операторов предполагает свойства коэффициентов, как непрерывность, кусочная непрерывность, квазинепрерывность или кусочная квазинепрерывность. Подробно эта теория представлена в [21] – [26]. При предположениях (4.10), (4.11) имеет место кусочная непрерывность коэффициентов оператора \mathcal{V} , позволяющая применить к $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$ хорошо известную теорию Гохберга–Крупника (см. [22], [23], [27]).

4.2. При $j = 1, 2, 3$ и $\lambda \in \mathbb{R}_+$ положим

$$\Xi_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \gamma_1(\lambda) & \beta_{22}(\lambda) \\ \gamma_2(-\lambda) & \beta_{21}(-\lambda) \end{pmatrix}, \quad \Xi_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \beta_{21}(\lambda) & \gamma_2(\lambda) \\ \beta_{22}(-\lambda) & \gamma_1(-\lambda) \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

$$\Xi_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \gamma_2(\lambda) - \beta_{22}(\lambda) & \beta_{21}(\lambda) - \gamma_1(\lambda) \\ \gamma_1(-\lambda) - \beta_{21}(-\lambda) & \beta_{22}(-\lambda) - \gamma_2(-\lambda) \end{pmatrix}.$$

При выполнении условий (4.10) и (4.11) существуют пределы

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Xi_j(\lambda) = \Xi_j^0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Введя в рассмотрение матрицу-функцию

$$\Psi(x) = \frac{1}{2} \left\{ (1 + \operatorname{tg} h2\pi x) \Xi_1^0 + (1 - \operatorname{tg} h2\pi x) \Xi_2^0 - \frac{i}{\cosh 2\pi x} \Xi_3^0 \right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

перейдем к основному результату этого параграфа.

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия (4.10) и (4.11). Тогда оператор $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$ фредгольмов в том и только том случае, когда

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \det |\Xi_j(\lambda)| > 0, \quad j = 1, 2, \quad \inf_{x \in \mathbb{R}} \det |\Psi(x)| > 0. \quad (4.15)$$

При выполнении этих условий индекс оператора $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{Ind}(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{var} \arg \det (\Xi_1^{-1}(\lambda) \Xi_2(\lambda)) \Big|_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{var} \arg \det \Psi(x) \Big|_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} - \nu. \quad (4.16)$$

Доказательство. Пусть $\mathbb{T}_+ = \{\zeta; |\zeta| = 1, \operatorname{Im} \zeta \geq 0\}$, и пусть $\varrho(\zeta) = |\zeta - 1|^{-\frac{1}{2}} |\zeta + 1|^{\frac{1}{2}}$ - весовая функция на \mathbb{T}_+ . Направление на \mathbb{T}_+ выберем от $\zeta = 1$ к $\zeta = -1$ и определим оператор σ , переводящий элементы $L_2^2(\mathbb{R}_+)$ в элементы весового пространства $L_2^2(\mathbb{T}_+, \varrho)$, по формуле

$$(\sigma y)(\zeta) = \frac{1}{1+\zeta} y \left(\sqrt{i \frac{1-\zeta}{1+\zeta}} \right), \quad \zeta \in \mathbb{T}_+, \quad y \in L_2^2(\mathbb{R}_+).$$

Из результатов работы [24] следует, что σ является ограниченным и обратимым оператором, а оператор $\sigma \psi^{-1} \mathcal{V} \psi \sigma^{-1} : L_2^2(\mathbb{T}_+, \varrho) \rightarrow L_2^2(\mathbb{T}_+, \varrho)$ определяется равенством :

$$\sigma \psi^{-1} \mathcal{V} \psi \sigma^{-1} = \Lambda_{\mathcal{D}_0} \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} + \Lambda_{\mathcal{D}_1} \begin{pmatrix} S_+ & 0 \\ 0 & S_+ \end{pmatrix} + \Lambda_{\mathcal{D}_2} \begin{pmatrix} S_+^{-1} & 0 \\ 0 & S_+^{-1} \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{D}_0(\zeta) = \frac{1}{2} (\Xi_1(\lambda) + \Xi_2(\lambda)), \quad \mathcal{D}_j(\zeta) = \frac{1}{4} (\Xi_1(\lambda) - \Xi_2(\lambda) + (-1)^j \Xi_3(\lambda)), \quad j = 1, 2, \quad (4.17)$$

$$\zeta \in \mathbb{T}_+, \quad \lambda = \sqrt{i(1-\zeta)/(1+\zeta)} \quad \text{и} \quad (S_+ y)(\xi) = \frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \int_{\mathbb{T}_+} \frac{y(\zeta)}{\zeta - \xi} d\zeta.$$

Из теоремы 4.1 и формул (2.31), (4.14), (4.17) следует, что

$$\mathcal{D}_0(-1) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (\Xi_1(\lambda) + \Xi_2(\lambda)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

$$\mathcal{D}_j(-1) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{4} (\Xi_1(\lambda) - \Xi_2(\lambda) - (-1)^j \Xi_3(\lambda)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2.$$

Аналогичным образом, из (4.10) и (4.11) следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0(1) &= \frac{1}{2} (\Xi_1^0 + \Xi_2^0), \\ \mathcal{D}_j(1) &= \frac{1}{4} (\Xi_1^0 - \Xi_2^0 - (-1)^j \Xi_3^0), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Воспользовавшись (4.18), (4.19), теоремой 4.1 и результатами работы [27], получим, что оператор $\sigma \psi^{-1} \mathcal{V} \psi \sigma^{-1}$ (а, следовательно, и оператор \mathcal{V}) фредгольмов тогда и только тогда, когда выполнены условия (4.15), причем

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind} (\sigma \psi^{-1} \mathcal{V} \psi \sigma^{-1}) &= \operatorname{Ind} \mathcal{V} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{var} \arg \det (\Xi_1^{-1}(\lambda) \Xi_2(\lambda)) \Big|_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{var} \arg \det \Psi(x) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Теперь остается применить теорему 3.3. Теорема доказана.

4.3. Рассмотрим формулу (4.16) в случае, когда $K(x, t) \equiv 0$. Пусть $S(\lambda)$ — матрица рассеяния (см. [7]) :

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} t(\lambda) & r^-(\lambda) \\ r^+(\lambda) & t(\lambda) \end{pmatrix},$$

и $s_0 = \lim_{\lambda \rightarrow -0} \det S(\lambda)$. Нетрудно видеть, что в этом случае

$$\det \Sigma_1(\lambda) = -1, \quad \det \Sigma_2(\lambda) = -\det S(-\lambda) = -\frac{t(-\lambda)}{t(\lambda)}, \quad (4.21)$$

$$\det \Psi(x) = -\frac{(1 - \operatorname{tg} h2\pi x)s_0}{2} - \frac{(1 + \operatorname{tg} h2\pi x)}{2} + \frac{i(\tau_0^+ + \tau_0^-)}{2 \cosh 2\pi x}.$$

Условия (4.15) выполнены ввиду фредгольмовости оператора \mathcal{U} . Формула (4.16) связывает число ν собственных значений оператора \mathcal{L} с коэффициентами $t(\lambda)$, $r^\pm(\lambda)$.

Следствие 4.1. При выполнении условий (4.11) число ν собственных значений оператора \mathcal{L} равно

$$\nu = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{var} \arg \det S(\lambda) \Big|_{\lambda=+0}^{\lambda=\infty} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{var} \arg \left\{ -\frac{(1 - \operatorname{tg} h2\pi x)s_0}{2} - \frac{(1 + \operatorname{tg} h2\pi x)}{2} + \frac{i(\tau_0^+ + \tau_0^-)}{2 \cosh 2\pi x} \right\} \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty}. \quad (4.22)$$

Если функции $t(\lambda)$, $r^\pm(\lambda)$ непрерывны в нуле, то

$$\nu = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{var} \arg \det S(\lambda) \Big|_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} - \frac{r_0^-(1 - s_0)}{4}. \quad (4.23)$$

В частности, если выполнено условие (4.13), то

$$\nu = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{var} \arg \det S(\lambda) \Big|_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} + \frac{1 - s_0}{4}. \quad (4.24)$$

Доказательство. Формула (4.22) непосредственно следует из (4.16) и (4.21).

Далее, если коэффициенты $t(\lambda)$, r^\pm непрерывны в нуле, то s_0, t_0, r_0^\pm вещественны.

Так как $S(\lambda)$ унитарно (см. [7] или [11]), то $s_0 = 1$ или $s_0 = -1$. Если $s_0 = 1$, то из равенства $r^-(\lambda) = -r^+(-\lambda) \det S(\lambda)$ следует, что $r_0^- + r_0^+ = 0$ и $\det \Psi(x) \equiv -1$. Тем самым, из (4.22) получаем (4.23).

В случае, когда $s_0 = -1$, из равенства $r_0^- = -r_0^+ s_0$ следует, что $r_0^- = r_0^+$. Очевидно также, что $t_0 = 0$. Тем самым, $r_0^- = r_0^+ = -1$, либо $r_0^- = r_0^+ = 1$. Рассматривая эти два случая, приходим к равенству

$$\frac{1}{2\pi} \arg \det \Psi(x) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} = \frac{r_0^-}{2} = \frac{r_0^-(1-s_0)}{4}.$$

Подставив последнее в (4.22), приходим к (4.23).

Если выполнено условие (4.13), то, ввиду замечания 4.1, при $s_0 = -1$ имеем $r_0^\pm = -1$.

§5. ПОЛНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЯ $(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+)y = f$

В СЛУЧАЕ, КОГДА \mathcal{L} – ОПЕРАТОР ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

5.1. В этом параграфе проводится более детальное исследование оператора $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$ в одном специальном случае, при $m = 2$.

Пусть числа $-\lambda_s^2$ ($\lambda_s > 0$; $s = 1, 2, \dots, \nu$) – собственные значения оператора \mathcal{L} . Тогда (см. [11]) функции

$$v_s(x) = v_1(x, i\lambda_s) = d_s^+ z^+(x, i\lambda_s) = d_s^- z^-(x, -i\lambda_s), \quad s = 1, 2, \dots, \nu \quad (5.1)$$

являются ортонормированной системой собственных функций \mathcal{L} . Правые и левые нормировочные коэффициенты определяются равенствами

$$(d_s^\pm)^{-2} = \int_{-\infty}^{\infty} |z^\pm(x, \pm i\lambda_s)|^2 dx, \quad s = 1, 2, \dots, \nu.$$

Рассмотрим функции $J_{ks}(\lambda)$ ($k, s = 1, 2; \lambda \in \mathbb{R}_+$):

$$\begin{aligned}
 J_{11}(\lambda) &= a_{11}(\lambda)B_{10}^+(\lambda)\overline{B_{10}^-(\lambda)} + a_{12}(\lambda)B_{10}^+(\lambda)\overline{B_{20}^-(\lambda)} + \\
 &\quad + a_{21}(\lambda)B_{20}^+(\lambda)\overline{B_{10}^-(\lambda)} + a_{22}(\lambda)B_{20}^+(\lambda)\overline{B_{20}^-(\lambda)}, \\
 J_{12}(\lambda) &= a_{11}(\lambda)B_{10}^+(\lambda)\overline{B_{11}^-(\lambda)} + a_{12}(\lambda)B_{10}^+(\lambda)\overline{B_{21}^-(\lambda)} + \\
 &\quad + a_{21}(\lambda)B_{20}^+(\lambda)\overline{B_{11}^-(\lambda)} + a_{22}(\lambda)B_{20}^+(\lambda)\overline{B_{21}^-(\lambda)}, \\
 J_{21}(\lambda) &= a_{11}(\lambda)B_{11}^+(\lambda)\overline{B_{10}^-(\lambda)} + a_{12}(\lambda)B_{11}^+(\lambda)\overline{B_{20}^-(\lambda)} + \\
 &\quad + a_{21}(\lambda)B_{21}^+(\lambda)\overline{B_{10}^-(\lambda)} + a_{22}(\lambda)B_{21}^+(\lambda)\overline{B_{20}^-(\lambda)}, \\
 J_{22}(\lambda) &= a_{11}(\lambda)B_{11}^+(\lambda)\overline{B_{11}^-(\lambda)} + a_{12}(\lambda)B_{11}^+(\lambda)\overline{B_{21}^-(\lambda)} + \\
 &\quad + a_{21}(\lambda)B_{21}^+(\lambda)\overline{B_{11}^-(\lambda)} + a_{22}(\lambda)B_{21}^+(\lambda)\overline{B_{21}^-(\lambda)}.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Ядро $K(x, t)$ \mathcal{L} -свертки обладает следующим свойством.

Лемма 5.1. Если выполнено условие D), то ядро $K(x, t)$ \mathcal{L} -свертки удовлетворяет соотношению

$$\lim_{x \rightarrow \infty} K(x, t - x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (J_{12}(\lambda)e^{i\lambda t} + J_{21}(\lambda)e^{-i\lambda t}) d\lambda. \tag{5.3}$$

Доказательство. Коэффициенты $p_0(x)$ вещественны, тем самым $\overline{z^\pm(x, \lambda)} = z^\pm(x, -\lambda)$. Из (1.27), (5.1) следует, что

$$\begin{aligned}
 [a_{1k}(\lambda)u_1(x, \lambda) + a_{2k}(\lambda)u_2(x, \lambda)] \overline{u_k(t - x, \lambda)} = \\
 = \{[a_{1k}(\lambda)B_{10}^+(\lambda) + a_{2k}(\lambda)B_{20}^+(\lambda)]z^+(x, \lambda) + [a_{1k}(\lambda)B_{11}^+(\lambda) + a_{2k}(\lambda)B_{21}^+(\lambda)] \times \\
 \times z^+(x, -\lambda)\} \left[\overline{B_{k0}^-(\lambda)}z^-(t - x, -\lambda) + \overline{B_{k1}^-(\lambda)}z^-(t - x, \lambda) \right], \quad k = 1, 2, \tag{5.4}
 \end{aligned}$$

$$v_s(x)\overline{v_s(t - x)} = d_s^+ d_s^- z^+(x, i\lambda_s) z^-(t - x, -i\lambda_s), \quad s = 1, 2, \dots, \nu. \tag{5.5}$$

Подставив (5.4), (5.5) в (2.35), получим

$$\begin{aligned}
 K(x, t - x) &= \sum_{s=1}^\nu c_{11}(i\lambda_s) d_s^+ d_s^- z^+(x, i\lambda_s) z^-(t - x, -i\lambda_s) + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [J_{11}(\lambda)z^+(x, \lambda)z^-(t - x, -\lambda) + J_{12}(\lambda)z^+(x, \lambda)z^-(t - x, \lambda) + \\
 &\quad + J_{21}(\lambda)z^+(x, -\lambda)z^-(t - x, -\lambda) + J_{22}(\lambda)z^+(x, -\lambda)z^-(t - x, \lambda)] d\lambda.
 \end{aligned}$$

В силу (1.20)

$$\begin{aligned}
 K(x, t-x) = & \sum_{s=1}^{\nu} c_{11}(i\lambda_s) d_s^+ d_s^- \left[e^{-\lambda_s x} + \int_x^{\infty} e^{-\lambda_s \xi} G^+(x, \xi) d\xi \right] \times \\
 & \times \left[e^{\lambda_s(t-x)} + \int_{-\infty}^{t-x} e^{\lambda_s \xi} G^-(t-x, \xi) d\xi \right] + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ J_{11}(\lambda) \left[e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} e^{i\lambda \xi} G^+(x, \xi) d\xi \right] \times \right. \\
 & \times \left[e^{-i\lambda(t-x)} + \int_{-\infty}^{t-x} e^{-i\lambda \xi} G^-(t-x, \xi) d\xi \right] + \\
 & + J_{12}(\lambda) \left[e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} e^{i\lambda \xi} G^+(x, \xi) d\xi \right] \left[e^{i\lambda(t-x)} + \int_{-\infty}^{t-x} e^{i\lambda \xi} G^-(t-x, \xi) d\xi \right] + \\
 & + J_{21}(\lambda) \left[e^{-i\lambda x} + \int_x^{\infty} e^{-i\lambda \xi} G^+(x, \xi) d\xi \right] \left[e^{-i\lambda(t-x)} + \int_{-\infty}^{t-x} e^{-i\lambda \xi} G^-(t-x, \xi) d\xi \right] + \\
 & \left. + J_{22}(\lambda) \left[e^{-i\lambda x} + \int_x^{\infty} e^{-i\lambda \xi} G^+(x, \xi) d\xi \right] \times \right. \\
 & \left. \times \left[e^{i\lambda(t-x)} + \int_{-\infty}^{t-x} e^{i\lambda \xi} G^-(t-x, \xi) d\xi \right] \right\} d\lambda. \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

Функции $a_{ks}(\lambda)$ ($k, s = 1, 2$) ограничены и, ввиду (2.31), суммируемы на \mathbb{R}_+ .

Поэтому суммируемы также функции $J_{ks}(\lambda)$ ($k, s = 1, 2$). Переходя к пределу в (5.6), приходим к (5.3), и лемма доказана.

5.2. Потенциал $p_0(x)$ может быть единственным образом восстановлен (см. [11]) посредством данных рассеяния $r^+(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), λ_k , d_k^+ ($k = 1, 2, \dots, \nu$). В этом параграфе будем полагать, что $p_0(x)$ является безотражательным потенциалом, т. е. $r^{\pm}(\lambda) \equiv 0$. Безотражательные потенциалы характеризуются множеством из 2ν положительных чисел λ_k , d_k^+ ($k = 1, 2, \dots, \nu$). Имеют место формулы восстановления (см. [7])

$$p_0(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det \Theta(x), \quad (5.7)$$

где

$$\Theta(x) = E_{\nu} + \left(\frac{(d_k^+)^2}{\lambda_m + \lambda_k} e^{-(\lambda_m + \lambda_k)x} \right)_{m,k=1}^{\nu}$$

Отметим также, что $p_0(x)$ удовлетворяет условию (4.13).

Лемма 5.2. Если $p_0(x)$ - безотражательный потенциал, то условие

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} K(x, t-x) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.8)$$

эквивалентно равенствам $a_{12}(\lambda) = 0, a_{21}(\lambda) = 0$.

Доказательство. В силу (5.3) условие (5.8) эквивалентно равенствам

$$J_{12}(\lambda) = 0, \quad J_{21}(\lambda) = 0. \quad (5.9)$$

В случае безотражательного потенциала из (4.2) следует, что

$$B_{20}^{\pm}(\lambda) = B_{11}^{\pm}(\lambda) = 0, \quad B_{10}^{-}(\lambda) = B_{21}^{+}(\lambda) = 1, \quad B_{10}^{+}(\lambda) = B_{21}^{-}(\lambda) = \iota(\lambda). \quad (5.10)$$

Учитывая это, из (5.2) получаем, что второе равенство (5.9) эквивалентно равенству $a_{21}(\lambda) = 0$. Так как в этом случае (см. [11])

$$\iota(\lambda) = \prod_{k=1}^{\nu} \frac{\lambda + i\lambda_k}{\lambda - i\lambda_k}, \quad (5.11)$$

то из (5.10) и (5.2) следует, что первое равенство (5.9) эквивалентно равенству $a_{12}(\lambda) = 0$. Лемма доказана.

В случае безотражательного потенциала условие (5.8) дает возможность избежать сдвига в формуле (4.8).

Теорема 5.1. Пусть $p_0(x)$ - безотражательный потенциал, и пусть ядро \mathcal{L} -свертки удовлетворяет условию (5.8). Тогда

$$\mathcal{U}(\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+) = \mathcal{V}^0 \mathcal{F}^{-1} \Gamma, \quad (5.12)$$

где

$$\mathcal{V}^0 = \Lambda_{\beta_{22}} \mathcal{P}_+ + \Lambda_{\gamma_2} \mathcal{P}_-, \quad (5.13)$$

а коэффициенты β_{22}, γ_2 определяются по формулам

$$\beta_{22}(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda > 0, \\ \prod_{k=1}^{\nu} \frac{\lambda + i\lambda_k}{\lambda - i\lambda_k}, & \lambda < 0, \end{cases} \quad (5.14)$$

$$\gamma_2(\lambda) = \begin{cases} (1 + a_{11}(\lambda)) \prod_{k=1}^{\nu} \frac{\lambda - i\lambda_k}{\lambda + i\lambda_k}, & \lambda > 0, \\ (1 + a_{22}(-\lambda)), & \lambda < 0. \end{cases} \quad (5.15)$$

Доказательство. Из (4.3) и леммы 5.2 имеем $a^{(2)}(\lambda) = 0$. Следовательно, учитывая (5.10), из (5.11) получим (5.14), (5.15), а также равенство $\beta_{21} = \gamma_2 = 0$. Равенства (5.12) и (5.13) следуют теперь из теоремы 4.1. Теорема доказана.

Лемма 5.3. При выполнении условий теоремы 5.1 функции $a_{11}(\lambda)$ и $a_{22}(\lambda)$ имеют конечные пределы

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} a_{11}(\lambda) = a_{11}(0), \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} a_{22}(\lambda) = a_{22}(0),$$

причем $a_{11}(0) = a_{22}(0)$.

Доказательство. Воспользовавшись (1.27) и (5.10) находим

$$\begin{aligned} u_1(x, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t(\lambda) z^+(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^-(x, \lambda), \\ u_2(x, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^+(x, -\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t(\lambda) z^-(x, -\lambda). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Следовательно, функции $u_j(x, \lambda)$ ($j = 1, 2$) непрерывны в точке $\lambda = 0$. Воспользовавшись этим, аналогично доказательству леммы 2.5 легко показать, что функции $w^{(k)}(x, \lambda)$, определенные равенствами (2.29), имеют предельные значения

$$w^{(k)}(x, 0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} w^{(k)}(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u_k(t, 0) K(x, t) dt \quad k = 1, 2.$$

Отсюда и из (5.16), (5.11) следует, что

$$w^{(1)}(x, 0) = (-1)^\nu w^{(2)}(x, 0). \quad (5.17)$$

Ввиду (5.16) и леммы 5.2, равенства (2.30) принимают вид

$$w^{(1)}(x, \lambda) = a_{11}(\lambda) t(\lambda) z^+(x, \lambda), \quad w^{(2)}(x, \lambda) = a_{22}(\lambda) z^+(x, -\lambda). \quad (5.18)$$

Из теоремы 1.4 следует, что $z^+(x, 0) \neq 0$. Устремляя λ в (5.18) к нулю и пользуясь (5.17) получим все утверждения леммы. Лемма доказана.

Из леммы 5.3, равенства $\mathcal{V} = \mathcal{V}^0 \tau$ и известных результатов теории сингулярных интегральных операторов (см. [13]) вытекает следующая

Лемма 5.4. Если выполнены условия теоремы 5.1, то оператор \mathcal{V} фредгольмов в том и только том случае, когда

$$\inf_{\lambda > 0} |1 + a_{11}(\lambda)| > 0, \quad \inf_{\lambda > 0} |1 + a_{22}(\lambda)| > 0. \quad (5.19)$$

При выполнении этих условий справедливы равенства

$$\begin{aligned} \text{Ind } \mathcal{V} &= \kappa_0 + \nu, \quad \dim \ker \mathcal{V} = \max\{\kappa_0 + \nu; 0\}, \\ \dim \text{Coker } \mathcal{V} &= \max\{-(\kappa_0 + \nu); 0\}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

где

$$\kappa_0 = \frac{1}{2\pi} \text{var} \arg \frac{1 + a_{11}(\lambda)}{1 + a_{22}(\lambda)} \Big|_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}.$$

Обобщенный обратный $\mathcal{V}^{(-1)}$ вычисляется по формуле

$$\mathcal{V}^{(-1)} = \tau \left(\Lambda_{\gamma_+} \mathcal{P}_+ + \Lambda_{\gamma_-} \mathcal{P}_- \right) \left(\mathcal{P}_+ + \Lambda_{d^{-1}} \mathcal{P}_- \right) \Lambda_{\gamma_+^{-1} \beta_{22}^{-1}},$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{\pm}(\lambda) &= \frac{1}{2} \left\{ \ln \left[\bar{a}(\lambda) \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i} \right)^{-\kappa_0} \right] \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[\bar{a}(\mu) \left(\frac{\mu - i}{\mu + i} \right)^{-\kappa_0} \right] \frac{1}{\mu - \lambda} d\mu \right\} \prod_{k=1}^{\nu} \frac{\lambda \pm i}{\lambda \pm i \lambda_k}, \\ d(\lambda) &= \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i} \right)^{\kappa_0 + \nu}, \quad \bar{a}(\lambda) = 1 + a^{(1)}(\lambda), \end{aligned}$$

а коэффициенты $a^{(1)}(\lambda)$ и $\beta_{22}(\lambda)$ определены, соответственно, формулами (4.3) и (5.14).

При $\kappa_0 + \nu > 0$ функции

$$g_s(\lambda) = \lambda^{s-1} \left[\frac{\gamma_+(-\lambda)}{(\lambda - i)^{\kappa_0 + \nu}} - \frac{\gamma_-(-\lambda)}{(\lambda + i)^{\kappa_0 + \nu}} \right], \quad s = 1, 2, \dots, \kappa_0 + \nu, \quad \lambda \in R, \quad (5.21)$$

образуют базис пространства $\ker \mathcal{V}$.

5.3. Перейдем теперь к исследованию оператора $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$. Из теоремы 3.3 и леммы

5.4 выводится следующая

Теорема 5.2. Пусть $p_0(x)$ – безотражательное, а ядро $K(x, t)$ \mathcal{L} -свертки удовлетворяет условию (5.8). Тогда оператор $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$ фредгольмов в том и только том случае, если выполнены условия (5.19). При выполнении этих условий имеет место равенство

$$\text{Ind}(\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+) = \kappa_0.$$

Дефектные числа $\dim \ker(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+)$, $\dim \text{Coker}(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+)$ и построение обобщенного обратного $(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+)^{(-1)}$ существенно зависят от знака величины $\kappa_0 + \nu$.

Поэтому целесообразно рассмотреть два случая.

Теорема 5.3. Пусть выполнены условия теоремы 5.2, пусть $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$ — фредгольмов оператор и $\kappa_0 + \nu \leq 0$. Тогда оператор $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$ обратим слева. В частности

$$\dim \ker(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+) = 0, \quad \dim \operatorname{Coker}(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+) = -\kappa_0.$$

Левый обратный $(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+)^{(-1)}$ может быть построен по формуле

$$(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+)^{(-1)} = \mathcal{I} + \Gamma_+ \theta_+ \mathcal{F}^{-1} \mathcal{V}^{(-1)} \mathcal{U} \mathcal{K} \theta_+^0. \quad (5.22)$$

Доказательство. По лемме 5.4, оператор \mathcal{V} обратим слева. Следовательно, $\mathcal{Y}_2 = \Gamma^{-1} \mathcal{F}^{-1}(\ker \mathcal{V}) = \{0\}$. Поэтому оператор \mathcal{R}_0 , определенный по формуле (3.33), имеет вид

$$\mathcal{R}_0 = \begin{pmatrix} \mathcal{I} \\ \mathcal{I}_{\mathcal{Y}_1 | \mathcal{H}_0} \end{pmatrix} : \mathcal{H}_0 \mapsto \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{Y}_1,$$

где $\mathcal{Y}_1 = \ker \mathcal{V}^{(-1)} \mathcal{U}$. Отсюда, в силу теоремы 3.4 (см. формулу (3.35)) имеем $\ker(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+) = \{0\}$. Поскольку в случае $\mathcal{Y}_2 = \{0\}$ оператор \mathcal{R}_{12} , определенный по формуле (3.33) нулевой, то из (3.34) получим (5.22). Теорема доказана.

В случае $\kappa_0 + \nu > 0$ ситуация более сложна. В частности, теряется свойство односторонней обратимости. Пусть

$$w_k(x) = w_1(x, i\lambda_k) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) v_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots, \nu, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.23)$$

Из леммы 2.1 следует существование чисел c_k ($k = 1, 2, \dots, \nu$) таких, что

$$w_k(x) = c_k v_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, \nu. \quad (5.24)$$

Рассмотрим также числа f_{ks} , \bar{f}_{ks} ($k = 1, 2, \dots, \nu$; $s = 1, 2, \dots, \kappa_0 + \nu$) и матрицу F порядка $\nu \times (\kappa_0 + \nu)$:

$$f_{ks} = \int_0^{\infty} \overline{v_k(t)} (\Gamma^{-1} \mathcal{F}^{-1} g_s)(t) dt, \quad \bar{f}_{ks} = \int_{-\infty}^{\infty} v_k(t) (\Gamma^{-1} \mathcal{F}^{-1} g_s)(t) dt, \quad (5.25)$$

$$F = \left(\bar{f}_{ks} + f_{ks} c_k \right), \quad k = 1, 2, \dots, \nu, \quad s = 1, 2, \dots, \kappa_0 + \nu,$$

где функции $g_s(\lambda)$ определены по формуле (5.21).

Теорема 5.4. Пусть выполнены условия теоремы 5.2, оператор $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$ – фредгольмов и $\kappa_0 + \nu > 0$. Тогда

$$\dim \ker(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+) = \kappa_0 + \nu - \operatorname{rank} F, \quad \dim \operatorname{Coker}(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+) = \nu - \operatorname{rank} F. \quad (5.26)$$

Обобщенный обратный $(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+)^{(-1)}$ может быть построен по формуле

$$\begin{aligned} (\mathcal{I} + \mathcal{K}^+)^{(-1)} = & \mathcal{I} + \Gamma_+ \theta_+ \mathcal{F}^{-1} \mathcal{V}^{(-1)} \mathcal{U} \mathcal{K} \theta_+^0 - \\ & - \theta_+ |_{Y_2} \mathcal{R}_2^{(-1)} \pi_0 (\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+) \mathcal{R}_1 + \theta_+ |_{Y_2} \mathcal{R}_2^{(-1)} \pi_0 \mathcal{K} \theta_+^0, \end{aligned} \quad (5.27)$$

где $Y_2 = \Gamma^{-1} \mathcal{F}^{-1}(\ker \mathcal{V})$, а операторы $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ определены по формулам (3.32), (3.33).

Подпространства $\ker(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+)$ и $\operatorname{Im}(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+)$ описываются по формулам в (3.35).

Доказательство. В силу леммы 5.4 оператор \mathcal{V} обратим справа. Поэтому $Y_1 = H_0$, и оператор \mathcal{R}_0 имеет следующее матричное представление :

$$\mathcal{R}_0 = \begin{pmatrix} \mathcal{I} & \mathcal{R}_2 \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix} : H_0 \oplus Y_2 \mapsto H_0 \oplus H_0.$$

Легко видеть, что обобщенный обратный оператора \mathcal{R}_0 имеет вид

$$\mathcal{R}_0^{(-1)} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}^{(-1)} & \mathcal{I} \\ \mathcal{R}_2^{(-1)} & -\mathcal{R}_2^{(-1)} \end{pmatrix} : H_0 \oplus H_0 \mapsto H_0 \oplus Y_2.$$

Поскольку оператор \mathcal{V} обратим справа, то

$$\mathcal{R}_{21} = \begin{pmatrix} \pi_0 (\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+) \mathcal{R}_1 \\ \pi_0 \mathcal{K} \theta_+^0 \end{pmatrix} : L^2(\mathbb{R}_+) \mapsto H_0 \oplus H_0.$$

Теперь пользуясь (3.31) и (3.33), получим (5.27).

Выберем ортонормированную систему собственных функций v_s ($s = 1, \dots, \nu$) и систему функций $\Gamma^{-1} \mathcal{F}^{-1} g_s$ ($s = 1, \dots, \kappa_0 + \nu$) для базисов в H_0 и Y_2 соответственно. Так как в силу (2.36) и (5.23) – (5.25)

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_2 \Gamma^{-1} \mathcal{F}^{-1} g_s)(x) &= (\pi_0 \Gamma^{-1} \mathcal{F}^{-1} g_s)(x) + (\pi_0 \mathcal{K} \Lambda_{x+} \Gamma^{-1} \mathcal{F}^{-1} g_s)(x) = \\ &= \sum_{k=1}^{\nu} (\bar{f}_{k_s} + f_{k_s} c_k) v_k(x), \end{aligned}$$

то матрица F является матрицей оператора \mathcal{R}_2 . Формулы (5.26) вытекают из (3.35) и очевидного равенства $\dim \ker \mathcal{R}_0 = \dim \ker \mathcal{R}_2$. Теорема доказана.

Из теорем 5.3 и 5.4 следует критерий обратимости оператора $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$.

Теорема 5.5. Пусть выполнены условия теоремы 5.2. Тогда оператор $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$ обратим в том и только том случае, когда

- 1) выполнены условия (5.19);
- 2) $\nu > 0$, $\kappa_0 = 0$ и $\det F \neq 0$, либо $\nu = \kappa_0 = 0$.

ABSTRACT. The paper investigates one-dimensional integral operators of \mathcal{L} -convolution type with kernels satisfying certain partial differential equations. The operators \mathcal{L} in the heading correspond to these equations. The results of the paper generalize the classical theory for convolution operators on the line and half-line. The spectral theory for ordinary differential operators and the theory of singular integral operators are the main tools.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, "Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов", УМН 19, 5(83), стр. 3 — 120, 1958.
2. Р. В. Дудучава, "Интегральные уравнения типа свертки с разрывными пред-символами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики", Труды Тбил. Мат. инст. АН Груз. ССР, т. 60, стр. 2 — 136, 1979.
3. А. Б. Нерсисян, "Структура резольвент некоторых интегральных операторов", Известия АН Армении, Математика, т. 17, № 6, стр. 442 — 463, 1982.
4. А. Б. Нерсисян, "Об эффективном численном решении интегральных уравнений", Известия НАН Армении, Математика, т. 27, № 2, стр. 1 — 49, 1992.
5. И. Г. Хачатрян, "О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высоких порядков, сохраняющего асимптотику решений", Известия АН Армении, Математика, т. 14, № 6, стр. 424 — 445, 1979.
6. И. Г. Хачатрян, "Об обратной задаче рассеяния для дифференциальных операторов высших порядков на всей оси", Известия АН Армении, Математика, т. 18, № 5, стр. 394 — 402, 1983.
7. R.K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, H. C. Morris. Solitons and nonlinear wave equations, Academic Press, Ina. 1982.
8. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Москва, Наука, 1969.
9. И. Г. Хачатрян, "Обратная задача рассеяния для дифференциальных операторов высших порядков на всей оси", Докторская диссертация, Тбилиси, 1986.
10. А. Р. Казарян, И. Г. Хачатрян, "Об обратной задаче рассеяния для дифференциального оператора произвольного порядка с суммируемыми коэффициентами Γ ", Известия НАН Армении, Математика, т. 29, № 5, стр. 50 — 75, 1994.
11. В. А. Марченко, Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, Киев, "Наукова думка", 1977.
12. Б. Я. Левин, "Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка", ДАН СССР, т. 106, № 2, стр. 187 — 190, 1956.
13. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Введение в теорию одномерных сингулярных

интегральных операторов, Кишинев, Штиинца, 1973.

14. K. Hoffman "Banach spaces of analytic functions", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
15. S. Roch, B. Silbermann "Algebras of convolution operators and their image in the Calkin algebra. Report R-Math-05/90, Akad. Wiss. DDR, Berlin, 1990.
16. А. Г. Камалян, А. Б. Нерсисян, "Интегральные операторы плавного перехода", Функциональный анализ и его приложения, т. 23, № 2, стр. 32 — 39, 1989.
17. Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко, "Об индексе некоторых классов интегральных операторов", Известия АН Армении, Математика, т. 8, № 1, стр. 26 — 40, 1973.
18. А. Б. Антонсянц, "Об операторах типа свертки с осциллирующими коэффициентами", Известия АН Белоруссии, Серия физ.-мат. наук, № 2, стр. 42 — 46, 1976.
19. A. Böttcher, I.M. Spitkovsky "Pseudodifferential operators with heavy spectrum", Integral Equations and Operator Theory, vol. 19, no. 3, pp. 251 — 269, 1994.
20. А. Г. Камалян, В. А. Оганян, "Конструктивный метод факторизации для некоторых классов матриц-функций", т. 28, № 3, стр. 1 — 17, 1993.
21. Г. С. Литвинчук, "Краевые задачи и сингулярные уравнения со сдвигом", Наука, Москва, 1977.
22. V. G. Kravchenko, G. S. Litvinchuk "Introduction to the theory of singular integral operators with shift", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1994.
23. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, "Об одномерных сингулярных интегральных операторах со сдвигом", Известия АН Армении, Математика, т. 8, № 1, стр. 3 — 12, 1973.
24. И. Ц. Гохберг; Н. Я. Крупник, "Об алгебрах сингулярных операторов со сдвигом", Матем. исслед., т. 8, № 2, стр. 170 — 175, 1973.
25. Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко, "Об алгебрах, порожденных сингулярными интегральными операторами с кусочно-непрерывными коэффициентами и карлемановским сдвигом", Издательство Ростовского гос. ун-та, Ростов-на-Дону, 1989.
26. A. Böttcher, S. Roch, B. Silbermann, I.M. Spitkovskii, "A Gohberg-Krupnik-Sarason symbol calculus for algebras of Toeplitz, Hankel, Cauchy and Carleman operators" O.T. : Advances and Applications, vol.48, Birkhäuser Verlag Basel, pp. 189 — 234, 1990.
27. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, "Сингулярные интегральные операторы с кусочно-непрерывными коэффициентами и их символы", Известия АН СССР, Математика, т. 35(4), стр. 940 — 964, 1971.

20 декабря 1994

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении

АЛГОРИТМЫ ВЫСОКОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗНОСТНЫМИ ЯДРАМИ

А. Б. Нерсисян, Н. В. Оганесян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 29, № 6, 1994

В статье к уравнениям Фредгольма второго рода с гладкими разностными ядрами применено некоторое усовершенствование стандартного метода типа ИМТ-квадратуры. Показано, что при этом сложность и характеристика памяти улучшаются. Для решения возмущенной линейной алгебраической системы Тейлора использована схема Шермана-Моррисона. Приведены численные результаты.

Ключевые слова. формула Эйлера-Маклорена, численные квадратуры, интегральные уравнения, теплицева матрица, быстрые алгоритмы

ВВЕДЕНИЕ

Метод квадратур (метод Нистрёма, см. [1]) является, по существу, одним из наиболее эффективных алгоритмов численного решения одномерных интегральных уравнений. В случае линейного уравнения

$$y(x) = \int_{-1}^1 K(x, t)y(t) dt + f(x), \quad x \in [-1, 1] \quad (1)$$

приближенное решение $y_N \approx y$ находится из интерполяционной формулы

$$y_N(x) = \sum_{j=-N}^N \alpha_j K(x, t_j) y_N(t_j) + f(x), \quad (1')$$

где $\{t_j\}$ и $\{\alpha_j\}$ – узлы и весовые функции соответствующей квадратурной формулы, значения $y_N(t_j)$ ($j = 0, \pm 1, \dots, \pm N$) определяются из (1') при $x = t_j$

Данное исследование частично финансировано грантом № RYS000 Международного научного фонда.

($i = 0, \pm 1, \dots, \pm N$) посредством решения алгебраической системы. При переходе от (1) к (1') уровень ошибки зависит как от квадратурной формулы, так и от гладкости ядра K .¹

Для получения высокой точности, вообще говоря, необходимо решать системы очень высокого порядка. Это приводит к жестким ограничениям на скорость и память вычислительных систем. Именно, сложность прямых алгоритмов решения алгебраических систем с $N \times N$ -матрицей ($N \rightarrow \infty$) имеет порядок $O(N^3)$. Требуемая же компьютерная память имеет порядок $O(N^2)$. В случае разностного ядра $K = K(x - t)$ эти параметры можно значительно улучшить. Так, в [2, 3] применен метод "непрерывного вложения", обеспечивающий разрешимость всех урезанных уравнений, полученных из [1] заменой отрезка интегрирования $[-1, 1]$ на $[-1, \tau]$, $-1 < \tau \leq 1$. При этом, однопаговый алгоритм на равномерной сетке $\{t_j\}$ имеет сложность $O(N^2)$, однако, для гладкого ядра его точность имеет лишь порядок $O(N^{-2})$.

В работе [4] разработан метод "дискретного вложения", требующий разрешимости всех урезанных уравнений лишь на выбранной сети $\{\tau_j\}$. Соответствующие алгоритмы могут быть любого степенного порядка точности при сложности $O(N^2)$. Например, если $K(x) \in C^6[-1, 1]$ и порядок точности равен $O(N^{-6})$, то сложность алгоритма равна $O(N^2)$ при используемой памяти порядка $O(N)$, $N \rightarrow \infty$. В этом случае основой дискретизации является квадратурная формула Гаусса шестого порядка точности и соответствующая сетка состоит из равномерно распределенных трехточечных панелей.

Отметим, что на основе формул Гаусса для уравнения (1) могут быть построены алгоритмы точности $O(N^{2p})$ с любым p ($N \rightarrow \infty$, $K = K(x - t) \in C^{2p}$). Но в этом случае матрица соответствующей алгебраической системы

¹Гладкость f в правой части (1) не играет решающей роли, поскольку можно ввести новую неизвестную функцию $z = y - f$.

имеет $(p \times p)$ -блочную теплицевую структуру, и сложность алгоритма имеет порядок $C(p)N^2 + O(N)$ (см. [5]), где $C(p) = O(p)$ ($p \rightarrow \infty$). Быстрое преобразование Фурье (FFT), в принципе, позволяет довести сложность этих алгоритмов до порядка $O(N \ln^2 N)$, $N \rightarrow \infty$, однако для больших значений p их практическая эффективность резко падает.

В данной статье разработаны алгоритмы любой степенной точности с улучшенными характеристиками. Примененный здесь метод аналогичен подходу, развитому в 1972 М. Ири, С. Моригути и И. Такасава [6]. В нашем случае метод основан на выборе сетки t_j , равномерной почти на всем отрезке $[-1, 1]$, кроме окрестностей крайних точек $x = \pm 1$, где сеть сгущается.

§ 1. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА-МАКЛОРЕНА И КВАДРАТУРЫ НА ПОЧТИ РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

1.1. Пусть T_N - формула трапеций

$$T_N(f) = \frac{h}{2}(f(-1) + f(1)) + h \sum_{k=-N+1}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}\right), \quad h = 1/N, \quad N \geq 1. \quad (2)$$

Формула Эйлера-Маклорена. (см. [7], § 2). При любом $f(x) \in C^{2p+1}[-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = T_N(f) - \sum_{k=1}^p \frac{B_{2k}}{(2k)!} h^{2k} (f^{2k-1}(1) - f^{2k-1}(-1)) - (2h)^{2p+1} \int_{-1}^1 P_{2p+1}\left(\frac{N(x-1)}{2}\right) f^{2p+1}(x) dx, \quad (3)$$

где $P_k(x)$ - полиномы Бернулли, представимые в виде

$$P_{2k}(x) = (-1)^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos 2\pi n x}{(2\pi n)^{2m}}, \quad P_{2k+1}(x) = (-1)^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin 2\pi n x}{(2\pi n)^{2m+1}}, \quad (3')$$

а $B_{2n} = (2n)! P_{2n}(0)$ - числа Бернулли.

В основе вывода дальнейших квадратурных формул лежит тождество (3). Нам понадобится следующий аналог этого тождества для "формулы средней точки":

$$M_N(f) = h \sum_{j=-N+1}^N f\left(\frac{2j-1}{2N}\right). \quad (4)$$

Из очевидного соотношения $T_{2N}(f) = \frac{1}{2}(T_N(f) + M_N(f))$ вытекает

Вторая формула Эйлера–Маклорена Для любой функции $f \in C^{2p+1}[0, 1]$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = M_N(f) + \sum_{k=1}^p \frac{B_{2k}(1-2^{1-2k})}{(2k)!} h^{2k} \left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(-1) \right) + (2h)^{2p+1} \int_{-1}^1 \left[P_{2p+1}(N(x-1)) - 2^{-2p} P_{2p+1} \left(\frac{N(x-1)}{2} \right) \right] f^{(2p+1)}(x) dx. \quad (5)$$

Замечание 1. Преимуществом формулы (5) являются не только ее большая точность, но и то, что в ней не использованы значения $f(x)$ в крайних точках $x = \pm 1$. Это практически позволяет применить (4) к функции $f(x)$, обладающей особенностями в точках $x = \pm 1$ (см. ниже, п. 3.2, а также [2], § 2.10.6).

1.2. Формулы (3) и (5), вообще говоря, имеют точность порядка $O(N^{-2})$, $N \rightarrow \infty$. Однако их точность резко возрастает, если $f^{(2s-1)}(1) - f^{(2s-1)}(-1) = 0$, $s = 1, \dots, p$; $p \geq 2$. Для периодических гладких функций (см. [2], § 2.9) эта точность выше любой степенной, т. е. имеет “бесконечный порядок”.

Метод ИМТ основан на формуле замены переменной (см. [6], или [7], § 2.9.2)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(g(x))g'(x) dx. \quad (6)$$

Если функция $g(x) \in C^\infty$ выбрана так, чтобы $g(\pm 1) = \pm 1$ и $g^{(k)}(\pm 1) = 0$ ($k = 0, 1, \dots$), то, применив (3) и (4) к функции $F(x) = f(g(x))g'(x)$, приходим к квадратурной формуле бесконечного порядка точности. В [2], § 2.9.2 для этого была предложена функция $g(x) = 2\varphi(\frac{x+1}{2})/\varphi(1) - 1$, где

$$\varphi(x) = \int_{-1}^x \exp\{-a(1+t)^{-\alpha} - b(1-t)^{-\beta}\} dt, \quad \alpha, \beta, a, b > 0. \quad (7)$$

С практической точки зрения достаточно потребовать, чтобы при $p \gg 2$ и $g \in C^{2p}$ выполнялись условия

$$g(\pm 1) = \pm 1, \quad g^{(k)}(\pm 1) = 0, \quad k = 1, \dots, 2p-1. \quad (8)$$

Обозначив $F(x) = f(x)g'(x)$ ($f \in C^{2p}$), получаем

$$\begin{aligned} F^{(k)}(\pm 1) &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, 2p-1, \\ F^{(2p)}(\pm 1) &= f(\pm 1)g^{(2p)}(\pm 1). \end{aligned} \quad (8')$$

Из (3) и (5) следует, что

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = T_N^*(f) + O(h^{2p+1}) = M_N^*(f) + O(h^{2p+1}), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} T_N^*(F) &= T_N(F) - \frac{B_{2p}}{(2p)!} h^{2p} \left\{ f(1)g^{(2p)}(1) - f(-1)g^{(2p)}(-1) \right\}, \\ M_N^*(f) &= M_N(F) + \frac{B_{2p}(1-2^{1-2p})}{(2p)!} h^{2p} \left\{ f(1)g^{(2p)}(1) - f(-1)g^{(2p)}(-1) \right\}. \end{aligned} \quad (9')$$

1.3. Квадратурные формулы (9) удобны для решения уравнения (1) с гладким ядром общего типа. Однако, в случае разностного ядра $K = K(x-t)$, применение этих формул нарушает теплицеву структуру матрицы линейной системы, соответствующей (2). Наложим на функцию $g(x)$, определенную из (8), дополнительное ограничение

$$g'(x) = \text{const} > 0, \quad |x| \leq \theta, \quad 0 < \theta < 1. \quad (10)$$

Тогда в (9') значения $f(x)$ используются при $|x| \leq \theta$ на равномерной сети, а при $\theta < |x| \leq 1$ — на сети, сгущающейся в крайних точках $x = \pm 1$.

Для построения такой функции сначала рассмотрим случай $p = \infty$, когда $g \in C^\infty$, $g(\pm 1) = \pm 1$, $g^{(k)}(\pm 1) = 0$, $k = 1, 2, \dots$ и выполнено условие (10). Пусть $g_0(x)$ — функция, удовлетворяющая всем условиям, за исключением (10) (например, функция (7)). Пусть

$$\rho(x) = \int_\theta^x \left[g_0 \left(\frac{2(t-\theta)}{1-\theta} - 1 \right) + 1 \right] dt. \quad (11)$$

Далее, пусть $\rho(1) \neq 0$ и $k > 1$. Непосредственная проверка показывает, что функция

$$g_1(x) = \begin{cases} kx, & \text{при } |x| \leq \theta, \\ kx - (\alpha x + \beta)\rho(x), & \text{при } \theta < |x| < 1, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$\alpha = \frac{2(1-k)}{\rho(1)^2}, \quad \beta = \frac{(\rho(1)+2)(k-1)}{\rho(1)^2},$$

удовлетворяет требуемым условиям. Дадим конкретные примеры функций, удовлетворяющих условиям (8) и (10) :

$$g_2(x) = \begin{cases} kx, & \text{при } |x| \leq \theta; \\ kx - (ax^3 + cx + d)(x - \theta)^m, & \text{при } \theta < |x| \leq 1. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь $m \geq 2$ - целое число и

$$\begin{aligned} a &= -\frac{m(m^2 - 1)}{6(1 - \theta)^{m+1}(2 - m - m^2 - 6\theta - 2m\theta + 2\theta^2)}, \\ c &= -\frac{(1 - m)(6 + 5m + m^2 - 8\theta - 4m\theta + 2\theta^2)}{2(1 - \theta)^{m+1}(2 - m - m^2 - 6\theta - 2m\theta + 2\theta^2)}, \\ d &= \frac{(-6 - 11m - 6m^2 - m^3 + 24\theta + 24m\theta + 6m^2\theta - 24\theta^2 - 12m\theta^2 + 6\theta^3)}{3(1 - \theta)^{m+1}(2 - m - m^2 - 6\theta - 2m\theta + 2\theta^2)}, \\ k &= \frac{(1 + m)(\theta - m - 3)}{(2 - m - m^2 - 6\theta - 2m\theta + 2\theta^2)}, \end{aligned} \quad (13')$$

$$g_3(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1 + \theta}, & \text{при } |x| \leq \theta, \\ \frac{2x}{1 + \theta} - \frac{1 - \theta}{1 + \theta} \exp \frac{2(x - 1)}{x - \theta}, & \text{при } \theta < |x| \leq 1. \end{cases} \quad (14)$$

Функция g_2 удовлетворяет условиям (8), (10) при $p = 2$, но g_3 удовлетворяет тем же условиям при $p = 1$ и $g_3''(\pm 1) = 0$. При $m \geq 5$ также имеем (см. ниже, (23))

$$g_2^{(4)}(1) = \frac{m(-2 - m + 2m^2 + m^3)(-3 - m + 2\theta)}{(-1 + \theta)^3(2 - m - m^2 - 6\theta - 2m\theta + 2\theta^2)}. \quad (15)$$

Отметим, что $g_1, g_2 \in C^{m-1}$, а $g_3 \in C^\infty$. Для построения аналогичных примеров для больших значений p полезна следующая

Лемма 1. Пусть функции $r_i(x) \in C^m$, $r_i([-1, 1]) = [-1, 1]$, удовлетворяют условиям (8) при $p = p_i \geq 1$ ($i = 1, 2$). Тогда функция $R(x) = r_2(r_1(x))$ при $m \geq 2p_1 + 2p_2(2p_2 - 1)$ удовлетворяет тем же условиям с $p = 4p_1p_2 - 1$.

Доказательство. Очевидно $R(\pm 1) = \pm 1$. Из соотношения $R'(x) = r_2'(r_1(x))r_1'(x)$, например при $x \rightarrow 1$, заключаем, что

$$R'(x) \sim r_2'(1 - O((1 - x)^{2p_1}(1 - x)^{2p_2-1})) \sim O((1 - x)^{2p_1(2p_2-1)+2p_1-1}).$$

1.4. Рассмотрим формулу (9') в случае, когда $\theta = \theta(N) \rightarrow 1$ ($N \rightarrow \infty$). Это позволит строить экономичные алгоритмы.

Теорема. Пусть $g(x)$ — одна из функций g_i ($i = 2, 3$) и $f \in C^{2p+1}$. Тогда при $\epsilon(N) = 1 - \theta(N) \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = T_N^*(f) + O([N\epsilon(N)]^{-2p-1}) = M_N^*(f) + O([N\epsilon(N)]^{-2p-1}), \quad (16)$$

где $p = 1$ при $g(x) = g_2$ и $p = 2$ при $g(x) = g_3$.

Доказательство. Докажем сначала оценку

$$|g_3^{(k)}(x)| \leq d_k(1 - \theta)^{-2k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2p, \quad d_k = \text{const}. \quad (16')$$

Для этого введем в рассмотрение функцию

$$h(x) = \exp \frac{2(x-1)}{x-\theta}, \quad 0 < \theta \leq 1. \quad (17)$$

Ее производные имеют вид

$$h^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{(x-\theta)^{2k}} h(x), \quad (17')$$

где $P_k(x)$ — многочлены, удовлетворяющие рекуррентной формуле

$$P_{k+1}(x) = P_k'(x)(x-\theta)^2 + 2P_k(x)[kx - k\theta + (1-\theta)]. \quad (18)$$

Имеем

$$\max_{\theta \leq x \leq 1} \left(\frac{h(x)}{(x-\theta)^{2k}} \right) = \frac{k^k e^{2-k}}{2^k (1-\theta)^{2k}}. \quad (19)$$

Из оценки

$$|P_k(x)| \leq A_k \sum x^k, \quad \theta \leq x \leq 1$$

и (18) следует, что

$$|P_k(x)| \leq A_k \sum_{m=1}^k m + k \text{ const}. \quad (20)$$

Тем самым, достаточно брать

$$A_k = \text{const} (k!)^2. \quad (21)$$

В случае, когда $g = g_3$ в (16) можно брать

$$d_k = (\text{const})^k (k!)^3. \quad (21')$$

Отсюда и из (9), (3) и (5) следуют оценки (16). В случае полиномиальной функции $g = g_2$ в правой части (16') надо брать степень k вместо $2k$.

Замечание 2. Для функции $g = g_1(x)$ в (16) число p может быть любым. Однако, применение функций вида (11) не удобно, поскольку их вычисление связано с квадратурами.

Замечание 3. При $\varepsilon(N) = 1 - \theta(N) \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ точность квадратур T_N^* и M_N^* , вообще говоря, уменьшается. Однако оценки (16') достаточно грубы. В частности, они не учитывают того, что $g^{(k)}(x) \equiv 0 (k \geq 2)$ при $|x| \leq \theta(N)$.

Для дальнейшего изложения нам понадобится следующий очевидный результат.

Лемма 2. Пусть $\phi_i(x) = k_i x$, $|x| \leq \theta_i < 1$ и $k_i = \text{const} \geq 1$ ($i = 1, 2$). Тогда $\phi_2(\phi_1(x)) = k_1 k_2 x$ при $|x| < \theta_2/k_1$.

§ 2. АЛГОРИТМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ

С РАЗНОСТНЫМИ ЯДРАМИ

2.1. Рассмотрим уравнение

$$(I - K)y \stackrel{\text{def}}{=} y(x) - \int_{-1}^1 K(x-t)y(t) dt = f(x), \quad |x| \leq 1, \quad (22)$$

где $K(x) \in C^{2p}[-2, 2]$, $f(x) \in C^{2p}[-1, 1]$ и $p \geq 1$. Метод решения основан на применении квадратуры $M_N^*(F)$ (см. (9') при $\theta = \theta(N)$).

Из вышеприведенного следует, что для приближенного решения $y_N = y$ интерполяционная формула (1') принимает вид

$$y_N(x) = f(x) + \sum_{j=1-N}^{N-1} K\left(x - g\left(\frac{2j+1}{N} - 1\right)\right) g'\left(\frac{2j+1}{N} - 1\right) + \frac{B_{2p}(1 - 2^{1-2p})}{(2p)!} \times \\ \times N^{-2p} \left\{ K(x-1)g^{(2p)}(1) - K(x+1)g^{(2p)}(-1) \right\}, \quad (\theta = \theta(N)). \quad (23)$$

Обозначим

$$t_s(\theta) = \begin{cases} \left(\frac{2s+1}{N} - 1\right) k, & |s| \leq \theta(N)N; \\ g\left(\frac{2s+1}{N} - 1\right), & \theta N < |s| \leq N. \end{cases} \quad (23')$$

Для определения $y = \{y_N(t_s)\}$ ($s = 0, \pm 1, \dots, \pm N$) получим алгебраическую систему с матрицей

$$A = T + B, \quad (24)$$

где T - теплицева матрица размерности $(2N \times 2N)$:

$$T = \left\| \left\| K \left(\frac{2k(i-j)}{N} \right) \right\| \right\|_{i,j=-N}^N, \quad (24')$$

а B имеет вид

$$B = B_1 D_1 + B_2 D_2,$$

где B_1 и B_2 - матрицы размерности $(2N \times 2m(\theta)N)$, D_1, D_2 - размерности $(2m(N) \times 2N)$. Здесь $m(\theta) = [N - \theta(N)]$. При $m(\theta) = o(N)$ ($N \rightarrow \infty$) B является матрицей малого ранга. Таким образом, матрица A является возмущением теплицевой матрицы.

Для решения уравнения $Ay = f$ применим схему Шермана-Моррисона (см., напр., [8]). Обозначив $z_1 = D_1 y$ и $z_2 = D_2 y$ (z_1 и z_2 - векторы размерности $2m(N)N$), перепишем эту систему в виде

$$\begin{aligned} z_1 - D_1 T^{-1} B_1 z_1 + D_1 T^{-1} B_2 z_2 &= D_1 T^{-1} f, \\ z_2 - D_2 T^{-1} B_1 z_1 + D_2 T^{-1} B_2 z_2 &= D_2 T^{-1} f. \end{aligned} \quad (25)$$

Легко видеть, что (25) - система с матрицей размерности $(4m(N)N \times 4m(N)N)$. Ясно, что матрицы A и T невырождены, если оператор $\mathcal{I} - \mathcal{K}$ обратим и число N достаточно большое. Алгоритмы решения систем с теплицевой матрицей размерности $N \times N$ имеют сложность порядка $O(N^2)$ ($N \rightarrow \infty$) (см. [5]). Для решения систем с матрицами размерности $p \times p$ общего типа существуют устойчивые алгоритмы сложности $O(p^3)$ ($p \rightarrow \infty$). Оценка матриц $T^{-1} B_i$ ($i = 1, 2$) при $Nm(N) \rightarrow \infty$ ($N \rightarrow \infty$) требует (см. [5]) $O(m(N)N^3)$ операций. Остальные операции имеют меньший порядок $O(N^2 + m(N)^3 N^3)$, и, например, при $m(N) = O(N^{-1/3})$ общая сложность равна $O(N^{8/3})$. Однако, общая сложность

в некоторых случаях может быть существенно уменьшена. Именно, если иметь в виду то, что значение $\bar{h}_i = t_{i+1}(\theta) - t_i(\theta)$ при $|i| = N-1, N-2, \dots, \theta(N)N$ очень мало по сравнению с $h_i = \frac{2}{N}$ при $|i| = 0, 1, \dots, \theta(N)N$, то становится ясно, что нет необходимости в вычислении столбцов матрицы $T^{-1}B_i$ ($i = 1, 2$). Для сохранения требуемой точности достаточно вычислить лишь столбцы при больших $|i|$, остальные найти методом интерполяции, используя лишь $O(N)$ операций на каждый столбец. Другой способ нахождения этих столбцов состоит в использовании формулы для резольвентного ядра уравнения (22) (см. [4]). Отметим также, что предложенные алгоритмы удобны для реализации на параллельных компьютерных системах. Реализация этих подходов лежит за пределами исследуемых в данной статье вопросов. Ниже на некоторых примерах мы покажем, что при вычислении по предложенному методу, по сравнению с методом, основанным на правиле средней точки, в принципе, возможно увеличение точности.

§3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Эффективность квадратурного метода была проверена для уравнения

$$f(x) = \frac{x}{(0.03 + (x - 0.8)^2)} + (0.04 + (x + 0.5)^2) \quad (26)$$

при

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = 21.99141165\dots \quad (26')$$

Функция $f(x)$ имеет резко выраженные пики в точках $x = 0.8$ и $x = -0.5$. Такие функции поддаются квадратурам с трудом, и поэтому удобны для тестирования (см., напр., [7]). Результаты некоторых численных экспериментов можно найти в таблицах 1 - 5. Результат применения правила средней точки для оценки интеграла (26') дан во втором столбце таблицы 3 (при $\theta = 1$).

Ниже через n обозначено общее число точек сетки, а через n' - число точек неравномерной сети.

Таблица 1.

Ошибка δ_n для интеграла (26') с $g = g_2(x)$ при $\theta(n) = 1 - 2n^{-1/3}$.

n	$m = 4$	5	6	8	10
8	$2.0e + 0$	$1.7e + 0$	$0.7e - 1$	$1.0e + 0$	$1.6e + 0$
16	$2.8e - 2$	$2.7e - 2$	$1.7e - 2$	$3.3e - 2$	$1.3e - 2$
32	$1.9e - 4$	$2.0e - 5$	$1.9e - 6$	$6.2e - 5$	$1.4e - 4$
64	$1.9e - 5$	$2.0e - 7$	$3.0e - 7$	$2.0e - 6$	$7.0e - 6$
128	$2.3e - 6$	$6.5e - 8$	$2.1e - 8$	$9.6e - 8$	$3.3e - 7$
256	$1.3e - 7$	$7.7e - 9$	$9.1e - 10$	$4.6e - 9$	$1.6e - 8$
512	$3.8e - 8$	$2.7e - 11$	$2.9e - 11$	$2.2e - 10$	$7.8e - 10$
1024	$3.7e - 9$	$2.5e - 11$	$2.2e - 12$	$1.0e - 11$	$3.8e - 11$

В таблицах 1 - 5 ошибка равна $\delta_n = |I - I_n|$, где I_n - приближенное значение интеграла (26'). Результаты приводят к заключению о том, что применение полиномиальных функций $g_2(x)$ предпочтительно ввиду слабого роста их производных (см. оценку (16)). Кроме того, вычисление суперпозиций таких функций проще и точнее. Таблицы ясно показывают, что большая скорость уменьшения $g(x)$ в $x = \pm 1$ требует большей гладкости в $(-1, 1)$.

В таблицах 2, 4, 5 для определения числа точек неравномерной сети мы должны применить лемму 2.

Таблица 2.

Ошибка δ_n для интеграла (26') при $g = g_2(g_2(x))$, с $\theta(n) = 1 - 2n^{-1/3}$.

n	$m = 6$	$m = 8$	$m = 12$	$m = 16$	$m = 24$
8	$1.3e - 1$	$7.0e - 1$	$1.6e + 0$	$9.5e - 1$	$1.1e + 0$
16	$2.5e - 1$	$4.4e - 2$	$6.1e - 2$	$5.8e - 1$	$9.0e - 2$
32	$9.0e - 4$	$3.2e - 4$	$1.4e - 6$	$4.4e - 4$	$4.8e - 3$
64	$3.6e - 7$	$5.7e - 10$	$9.3e - 9$	$3.5e - 7$	$5.3e - 5$
128	$4.3e - 9$	$1.5e - 11$	$3.6e - 12$	$2.5e - 10$	$3.8e - 8$
256	$4.9e - 10$	$6.3e - 13$	$4.2e - 14$	$1.4e - 13$	$4.2e - 11$
512	$2.2e - 11$	$1.8e - 14$	$3.2e - 14$	$1.1e - 14$	$8.5e - 14$
1024	$4.0e - 13$	$5.3e - 14$	$3.9e - 14$	$1.7e - 14$	$2.5e - 13$

Таблица 3.

Ошибка δ_n для интеграла (26') при $g = g_3(x)$

n	$\theta = 1$	$\theta = 1 - 2 \cdot n^{-1/3}$		$\theta = 1 - n^{-1/3}$	
	$\delta_n(0)$	$\delta_n(1)$	$\delta_n(2)$	$\delta_n(1)$	$\delta_n(2)$
8	$5.0e-2$	$1.7e+0$	$8.4e+0$	$2.2e+0$	$2.9e+0$
16	$5.4e-2$	$4.0e-2$	$1.0e+0$	$4.5e-2$	$1.4e-1$
32	$1.3e-2$	$2.0e-4$	$9.4e-3$	$3.8e-3$	$7.1e-4$
64	$3.2e-3$	$6.3e-7$	$1.5e-6$	$1.1e-4$	$6.3e-4$
128	$8.1e-4$	$2.2e-7$	$1.5e-7$	$2.9e-6$	$6.8e-6$
256	$2.0e-4$	$2.5e-8$	$1.5e-10$	$2.0e-7$	$2.1e-8$
512	$5.1e-5$	$3.0e-9$	$1.8e-14$	$2.2e-8$	$8.9e-11$
1024	$1.3e-5$	$3.6e-10$	$3.6e-15$	$2.7e-9$	$5.7e-14$

Таблица 4.

Ошибка δ_n для интеграла (26') с $g = g_2(g_3(x))$ при $\theta(n) = 1 - n^{-1/3}$.

n	θ_n	$m = 6$	$m = 8$	$m = 12$	$m = 16$	$m = 24$
8	0.5	$1.9e+0$	$1.4e+0$	$4.2e-1$	$1.4e+0$	$1.9e+0$
16	0.6	$8.3e-2$	$1.2e-1$	$1.2e-1$	$5.6e-2$	$0.8e-2$
32	0.68	$3.5e-3$	$5.0e-3$	$3.8e-3$	$2.9e-3$	$3.5e-3$
64	0.75	$1.2e-4$	$1.4e-4$	$1.1e-4$	$1.0e-4$	$1.2e-4$
128	0.8	$4.1e-6$	$3.6e-6$	$4.0e-6$	$4.0e-6$	$4.1e-6$
256	0.84	$2.1e-8$	$1.3e-8$	$1.9e-8$	$2.0e-8$	$2.1e-8$
512	0.88	$7.9e-11$	$6.2e-11$	$7.5e-11$	$7.7e-11$	$7.8e-11$
1024	0.9	$1.2e-13$	$3.9e-14$	$1.0e-13$	$1.1e-13$	$1.2e-13$

Таблица 5.

Ошибка δ_n для интеграла (26') при $g = g_3(g_2(x))$, с $\theta(n) = 1 - n^{-1/3}$.

n	θ_n	$m = 6$	$m = 8$	$m = 12$	$m = 16$	$m = 24$
8	0.50	$2.8e+0$	$1.9e+0$	$0.6e-1$	$2.3e-1$	$1.1e+0$
16	0.60	$5.3e-2$	$5.0e-2$	$7.9e-2$	$5.3e-2$	$1.2e-2$
32	0.69	$8.6e-4$	$9.4e-3$	$4.1e-3$	$7.5e-3$	$2.6e-3$
64	0.75	$2.0e-4$	$1.0e-4$	$1.6e-4$	$2.2e-4$	$2.7e-4$
128	0.80	$4.7e-6$	$7.4e-6$	$3.4e-6$	$6.3e-6$	$3.2e-6$
256	0.84	$5.8e-8$	$2.3e-8$	$2.8e-8$	$4.9e-8$	$2.6e-8$
512	0.88	$4.2e-11$	$1.5e-10$	$1.0e-10$	$6.9e-12$	$6.3e-11$
1024	0.90	$3.1e-12$	$9.6e-14$	$5.7e-14$	$3.6e-14$	$6.0e-14$

3.2. Точность предложенного метода решения интегральных уравнений проверена на следующих двух примерах.

Задача 1.

$$K_1(x-t) = \frac{1}{1/9 + (x-t)^2}, \quad y_1(x) \equiv 1, \quad (26)$$

$$f_1(x) = 1 - 3 \operatorname{arctg}[3(1+x)] - 3 \operatorname{arctg}[3(1-x)].$$

Задача 2.

$$K_2(x-t) = \frac{1}{(4 - (x-t)^2)^{3/2}}, \quad y_2(x) \equiv 1, \quad (27)$$

$$f_2(x) = 1 - \arcsin \left[\frac{11+x}{2} \right] - \arcsin \left(\frac{1-x}{2} \right).$$

Ядра типа $K_1(x-t)$, имеющие резкие пики в точке $x=0$, часто применяются в качестве тестовых (см., напр., [1]). Функция $K_2(x)$ имеет особенность в точке $x = \pm 2$.

В таблицах 6 и 7 среднеквадратическая ошибка d_n и абсолютная ошибка γ_n вычислены по формулам

$$d_n(i) = \left(\sum_k (y(x_k) - \tilde{y}(x_k)) \right)^2, \quad (28)$$

$$\gamma_n(i) = \max_k |y(x_k) - \tilde{y}(x_k)|, \quad (i = 0, 1, 2),$$

где $\{x_n\}$ — соответствующая n -сеть, $y(x)$ — точное решение, а $\tilde{y}(x_n)$ — приближенное решение. В (29) при $i = 0, 1, 2$ имеем $g = x$ (формула средней точки) и, соответственно, $g = g_3(x)$ и $g = g_2(g_3(x))$.

Таблица 6.

Среднеквадратичная и абсолютная ошибки для задачи 1.

n	$\theta = 1$	$\theta = 1 - 2^{-\frac{1}{3}}$		$\theta = 1 - 2 \cdot 2^{-\frac{1}{3}}$	
	$d_n(0)$	$d_n(1)$	$d_n(2)$	$d_n(1)$	$d_n(2)$
	$\gamma_n(0)$	$\gamma_n(1)$	$\gamma_n(2)$	$\gamma_n(1)$	$\gamma_n(2)$
8	$1.3e-1$	$1.7e-1$	$6.4e-1$	$3.6e-2$	$4.3e+0$
	$1.7e-1$	$2.4e-1$	$9.0e-1$	$6.6e-2$	$5.0e+0$
16	$4.5e-2$	$5.3e-2$	$3.3e-1$	$3.4e-2$	$1.1e-1$
	$6.9e-2$	$7.6e-2$	$4.1e-1$	$4.2e-2$	$1.4e-1$
32	$1.0e-2$	$3.5e-3$	$2.2e-2$	$2.0e-3$	$8.1e-3$
	$1.7e-2$	$5.0e-3$	$2.7e-2$	$2.7e-3$	$9.4e-3$
64	$2.5e-3$	$1.2e-4$	$2.2e-3$	$1.2e-5$	$5.0e-5$
	$4.3e-3$	$1.7e-4$	$2.9e-3$	$1.5e-5$	$5.9e-5$

Таблица 7.

Среднеквадратичная и абсолютная ошибки для задачи 2.

n	$\theta = 1$	$\theta = 1 - 2 \cdot 2^{-\frac{n}{3}}$		$\theta = 1 - 2^{-\frac{n}{3}}$	
	$d_n(0)$	$d_n(1)$	$d_n(2)$	$d_n(1)$	$d_n(2)$
	$\gamma_n(0)$	$\gamma_n(1)$	$\gamma_n(2)$	$\gamma_n(1)$	$\gamma_n(2)$
8	$3.2e-2$	$2.7e-2$	$3.4e-1$	$.2e-1$	$6.1e-1$
	$3.4e-2$	$3.8e-2$	$3.8e-1$	$1.4e-1$	$7.7e-1$
16	$1.2e-2$	$1.9e-3$	$2.6e-2$	$5.3e-3$	$4.7e-2$
	$1.3e-2$	$4.7e-3$	$3.0e-2$	$7.3e-3$	$5.8e-2$
32	$4.8e-3$	$3.6e-4$	$5.2e-4$	$9.3e-4$	$1.3e-3$
	$5.2e-3$	$1.4e-3$	$6.3e-4$	$3.2e-3$	$1.7e-3$
64	$1.9e-3$	$1.0e-4$	$1.6e-6$	$1.8e-4$	$2.1e-4$
	$2.0e-3$	$5.8e-4$	$2.1e-6$	$1.0e-3$	$2.8e-4$

Предложенный подход эффективен, в частности, если ядро $K(x)$ имеет особенности в точках $x = \pm 2$.

Таблица 8.

Среднеквадратическая и абсолютная ошибки для задачи 1 с $g = g_2(g_2(x))$ при $\theta = 1 - 2 \cdot 2^{-n/3}$.

	$m = 10$	$m = 12$	$m = 14$	$m = 16$
d_8	$6.5e-1$	$2.0e-1$	$9.1e-2$	$1.2e-1$
γ_8	$9.1e-1$	$3.1e-1$	$1.5e-1$	$1.7e-1$
d_{16}	$1.6e-2$	$1.7e-2$	$7.9e-2$	$9.0e-2$
γ_{16}	$1.9e-2$	$2.1e-2$	$1.0e-1$	$1.2e-1$
d_{32}	$4.6e-6$	$1.6e-4$	$2.3e-4$	$2.3e-3$
γ_{32}	$5.8e-6$	$2.1e-4$	$3.0e-4$	$3.1e-3$
d_{64}	$4.7e-9$	$5.1e-8$	$1.1e-7$	$2.4e-6$
γ_{64}	$6.0e-9$	$6.7e-8$	$1.5e-7$	$3.2e-6$

Таблица 8 подтверждает предпочтительность применения полиномиальных функций g .

ABSTRACT. A development of a standard IMT-type quadrature method is applied to the second kind Fredholm equations with smooth displacement kernels. Rather good complexity and memory characteristics are demonstrated. Sherman-Morrison scheme for the solution of the perturbed linear algebraic Toeplitz system is used. Numerical examples are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. M. Delves, J. L. Mohamed, "Computational methods for integral equations," Cambridge Univ. Press, 1985
2. T. Kailath, L. Ljung, M. Morf, "Generalized Krein-Levinson equations for efficient

- calculation of Fredholm resolvents of nondisplacement kernels", *Topics in Funct. Anal. Advances in Math. Suppl. Studies*, 3, pp. 169 - 183, 1978
3. I. Gobberg, I. Koltracht, P. Lancaster, "Second order parallel algorithms for Fredholm integral equations with displacement kernels, integral equations and operator theory", vol. 10, pp. 577 - 594, 1987.
 4. А. Б. Нерсисян, "Об эффективном численном решении интегральных уравнений", *Известия Акад. Наук Армении, Математика*, т. 27, № 2, стр. 1 - 40, 1992.
 5. В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников, *Вычисления с блочными матрицами* (под редакцией Г. И. Марчука), стр. 124 - 266, вып. 1, Москва, "Наука", 1987.
 6. M. Iri, S. Moriguti, Y. Takasawa, "On a certain quadrature formula", [in Japanese], *Kokyuroku of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto Univ.*, no. 91, pp. 82 - 118, 1970
 7. P. J. Davis, P. Rabinowitz, "Methods of numerical integration", 2nd ed., Academic Press, London, 1984.
 8. Y. Wallach, "Alternating sequential / parallel processing. Springer-Verlag, 1982.

20 декабря 1994

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 29

НОМЕРА 1 — 6

1994

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

НОМЕР

К. Л. Лветисян	
Представления некоторых классов функций субгармонических в единичном круге и в полуплоскости	1
Г. М. Айрапетян	
Задача Гильберта в смысле L^p -сходимости	3
Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян	
Аттракторы эволюционных систем типа Соболева	5
Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян	
Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, I	4
А. А. Андриян	
Граничные задачи в полосе в классах полиномиального роста	5
Р. Г. Арамян	
Порождение мер в пространстве плоскостей и сферические функционалы Эйлера	4
Т. Н. Арутюнян	
Изоспектральные операторы Дирака	2
А. О. Бабаян	
Об одной граничной задаче для неправильно эллиптических уравнений в многосвязной области	2
А. Г. Багдасарян	
Теоремы вложения для некоторых обобщенных функциональных пространств	3

Д. Т. Багдасарян		
	О росте функций $\pi_\alpha(z, a_n)$ М. М. Джрбашяна	1
Ч. Бенсуда		
	Касательная аппроксимация на замкнутых множествах гармонического пространства Брело	1
Ч. Бенсуда, П. М. Готье		
	Супергармоническая аппроксимация на замкнутом множестве	3
Г. В. Вирабян		
	О задаче Бицадзе–Самарского для гиперболических уравнений	3
К. В. Гаспарян		
	Законы повторного логарифма для опциональных мартингалов	3
И. З. Геворкян		
	Об одной теореме Крейна–Лакса	3
С. А. Григорян, М. И. Заславская		
	Равномерные алгебры операторных полей с AF -слоем	5
В. Л. Даллакян		
	Обобщение теоремы Дарлингтона для вещественных позитивных J -симметрических матриц-функций	2
Э. А. Давиелян, Г. В. Микаелян		
	О двух классах предельных распределений теории очередей	2
А. М. Джрбашян		
	О некоторых классах субгармонических функций	1
А. Р. Казарян, И. Г. Хачатрян		
	Об обратной задаче рассеяния для дифференциальных операторов произвольного порядка с суммируемыми коэффициентами, I	5
Г. Г. Казарян		
	О локализации на бесконечности дифференциальных многочленов с постоянными коэффициентами	3
Г. Г. Казарян, А. О. Оганесян		
	Принцип Гюйгенса и нелинейные дифференциальные уравнения	5
А. Г. Камалян		
	Формулы типа Гохберга–Лерера–Родмана для частных индексов матрицы-функции	5

А. Г. Камалян, И. Г. Хачатрян, А. Б. Нерсесян	
Разрешимость интегральных уравнений с операторами типа \mathcal{L} -свертки	6
Г. А. Карагулян	
О сходимости в L^p ортогональных рядов на множествах почти полной меры	2
М. И. Карахавян	
Асимптотические свойства коммутаторов	1
Л. Г. Мартиросян	
Фазовые переходы для мартингал-разностных гиббсовых решетчатых моделей	3
К. А. Навасардян	
О нуль-рядах в двойной системе Уолша	1
А. Б. Нерсесян	
Интегральные уравнения, ассоциированные с сингулярной задачей Штурма-Лиувилля с точечным спектром	6
А. Б. Нерсесян, Н. В. Оганесян	
Алгоритмы высокой точности для интегральных уравнений с разностными ядрами	6
Г. Ю. Панина	
Замечание о вежевых плотностях в \mathbb{R}^3	1
Р. Ш. Саакян	
О принципе максимума субгармонических функций	5
Г. А. Сукиасян	
О распределении длин прообразов концентрических окружностей при мероморфных отображениях	2
Г. С. Сукиасян	
Конечно-аддитивные функционалы на плоскости	4
Р. Л. Шахбабян, М. ель-Саиди	
Задача управления для эволюционных уравнений высокого порядка	2

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
СО СТРУКТУРИРОВАННЫМИ ЯДРАМИ

Сборник работ

	Страницы
Предисловие редактора.....	5
Интегральные уравнения, ассоциированные с сингулярной задачей Штурма-Лиувилля с точечным спектром А. Б. Нерсесян.....	7
Разрешимость интегральных уравнений с операторами типа \mathcal{L} -свертки А. Г. Камалаян, И. Г. Хачатрян, А. Б. Нерсесян.....	31
Алгоритмы высокой точности для интегральных уравнений с разностными ядрами А. Б. Нерсесян, Н. В. Оганесян.....	82
Содержание тома 29.....	97

CONTENTS

VOLUME 29

NUMBER 6

1994

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS (NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)

INTEGRAL EQUATIONS WITH STRUCTURED KERNELS

Collection of Papers

	PAGES
Editor's Preface	1
Integral operators associated with singular Sturm–Liouville problem in case of point spectrum A. B. Nersessian	2
Solvability of integral equations with \mathcal{L} –convolution type operators A. G. Kamalian, I. G. Khachatryan, A. B. Nersessian	22
High precision algorithms for integral equations with displacement kernels A. B. Nersessian, N.V. Hovhannesian	67
Contents of Volume 29	80

©1995 by Allerton Press Inc. Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by Allerton Press, Inc. for library and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transaction Reporting Service, providing that the base fee of \$50.00 per copy is paid directly to CCC, 222 Rosewood Drive, Danvers, MA 01923. An annual license may be obtained only directly from Allerton Press, Inc., 150 5th Avenue, New York, NY 10011.