

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 00002-3048

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

ԽՐԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Վիսավոր խմբագիր Ի. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Դ. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Վ. ԶԱՍԿԱՎԱՅԻ
Ա. Ա. ԽԱՆՈՒՄՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԴԵԼՅԱՆ
Ա. Ռ. ՆԵՐՍԷՍՅԱՆ
Ի. Լ. ՇԱՀՈՒԼՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու ֆաբրիկար Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անհանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրատարակել, Հայաստանի Գիտությունների լեզգային և կազմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա»-ն ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված (չ)՝ իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված (չ)՝

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման ռազմարկի դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հասուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն զրամեքենագրված, երկու օրինակով, մեկն անհատական (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն տարբերակներին, պետք է ընդգծվեն ու մատուցվեն երկու գծերով ներքևում, իսկ տարբերակները՝ երկու գծերով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոնեզեր շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին չերթի լրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց Համար և տեղը տեքստում չերթի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղափոխվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, զրբերի համար նշվում է՝ հնչյունակը, զրբի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և չերթը։

Սգտագրված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Որբագրությունն ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թիվ զգալի տարբերություններով (տրիգիտայի նշանում) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերագրանքներով դեպքում, որպես հոդվածի սուտքման լամկան, համարվում է վերջնական տեքստի սուտքման օրը։

8. Հոդվածի մերժումն զնայում հեղինակին վերադարձվում է մեծագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չգրադիվ մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 ք. Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ В КЛАССАХ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА

А. А. Андриян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 29, № 5, 1994

Исследуется дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^n a_j \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^{n-j} u(x, t)}{\partial t^{n-j}} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, 0 < t < 1,$$

где $a_j(\xi)$ — полиномы от $\xi \in \mathbb{R}^1$ с постоянными коэффициентами. Ищем решения $u(x, t)$, имеющие, вместе со своими производными, полиномиальный рост по $x \in \mathbb{R}^1$. При условии, что корни $\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_n(\xi)$ (часть из которых может совпадать) соответствующего характеристического полинома $\lambda^n + a_1(\xi)\lambda^{n-1} + \dots + a_n(\xi)$ таковы, что : а) $\operatorname{Re} \lambda_j(\xi) \leq \alpha, j = 1, \dots, m < n$, б) $\operatorname{Re} \lambda_j(\xi) \rightarrow_{|\xi| \rightarrow +\infty} +\infty, j = m+1, \dots, n$, в) $\{\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_m(\xi)\} \cap \{\lambda_{m+1}(\xi), \dots, \lambda_n(\xi)\} = \emptyset$, показано, что граничная задача

$$\frac{\partial^j u(x, 0)}{\partial t^j} = f_j(x), j = 0, \dots, m-1, \quad \frac{\partial^j u(x, 1)}{\partial t^j} = f_{j+m}(x), j = 0, \dots, n-m-1$$

разрешима по ядру конечной размерности. При тех же условиях изучена общая граничная задача.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Обозначим через $\bar{D}$ полосу $D = \{(x, t) | x \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\}$, а через $M_\gamma(D)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ — класс функций $u(x, t) \in C^\infty(D)$, снабженных последовательностью конечных полунорм

$$\|u\|_{s, \gamma} = \sup_D (1 + |x|)^{-\gamma} \sum_{j+k \leq s} \left| \frac{\partial^{j+k} u(x, t)}{\partial x^j \partial t^k} \right| < \infty, \quad s = 0, 1, \dots \quad (1)$$

Далее, пусть $M(D) = \cup_{\gamma \in \mathbb{R}} M_\gamma(D)$. Оператор $K : M(D) \rightarrow M(D)$ называется ограниченным, если для любого γ существует γ' такое, что $K : M_\gamma(D) \rightarrow M_{\gamma'}(D)$ является ограниченным оператором, т. е. для любого s существует s' такое, что

$$\|Ku\|_{s, \gamma'} \leq c \|u\|_{s', \gamma}. \quad (2)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u(x, t) = \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^n a_j\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^{n-j} u(x, t)}{\partial t^{n-j}} = 0, \quad (3)$$

где $a_j(\xi)$ – многочлены от $\xi \in \mathbb{R}$ с постоянными коэффициентами и $u \in M(D)$.

С оператором $P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ естественно связан характеристический многочлен

$$P_n(\xi, \lambda) = \lambda^n + a_1(\xi)\lambda^{n-1} + \dots + a_n(\xi). \quad (4)$$

Будем рассматривать следующую граничную задачу Коши для уравнения (3) :

$$\frac{\partial^j u(x, 0)}{\partial t^j} = g_j(x), \quad j = 0, \dots, n-1, \quad (5)$$

где $g_j(x)$ лежат в подмножестве $M(R)$ функций из $M(D)$, не зависящих от $t \in [0, 1]$.

Задача (3), (5) корректна [1], т. е. ее решение существует для всех правых частей, единственно и непрерывно зависит (см. (2)) от начальных данных тогда и только тогда, когда существует $\alpha \in \mathbb{R}$, для которого

$$P_n(\xi, \lambda) \neq 0 \quad \text{на} \quad \{\operatorname{Re} \lambda > \alpha\} \times \mathbb{R}. \quad (6)$$

Будем полагать, что $\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_n(\xi)$ – корни многочлена $P_n(\xi, \lambda)$, пронумерованные с учетом кратностей.

В данной статье оператор (3) рассмотрен при предположениях, что :

а) существует $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что $\operatorname{Re} \lambda_j(\xi) \leq \alpha$, $j = 1, \dots, m < n$ при любом

$$\xi \in \mathbb{R},$$

б) $\operatorname{Re} \lambda_j(\xi) \rightarrow_{|\xi| \rightarrow +\infty} +\infty$, $j = m+1, \dots, n$,

в) множества $\{\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_m(\xi)\}$, $\{\lambda_{m+1}(\xi), \dots, \lambda_n(\xi)\}$ не пересекаются ни при каком $\xi \in \mathbb{R}$.

Заметим, что ввиду условия б) и разложения Пуассона

$$\lambda_j(\xi) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{jk}(\xi^{\frac{1}{r_j}})^k \quad \text{при} \quad |\xi| \gg 1, \quad (7)$$

имеющего место в окрестности любой точки $\xi_0 \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Re} \lambda_j(\xi) \geq c_j(1 + |\xi|)^{\alpha_j}, \quad c_j > 0, \alpha_j > 0, \quad j = m+1, \dots, n. \quad (8)$$

Тем самым, условие (6) не выполнено, и задача Коши (5) становится некорректной. Цель данной работы – указать граничные задачи, которые всегда разрешимы при ядре конечной размерности. В конце работы приведены примеры.

§1. МОДЕЛЬНАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА

Задача А. Найти решение $u \in M(D)$ уравнения (3), удовлетворяющее граничным условиям

$$\frac{\partial^j u(x, 0)}{\partial x^j} = f_j(x), \quad j = 0, \dots, m-1, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^j u(x, 1)}{\partial x^j} = f_{j+m}(x), \quad j = 0, \dots, n-m-1, \quad (1.2)$$

где $f_0(x), \dots, f_{n-1}(x) \in M(\mathbb{R})$ – заданные функции.

Символами S и S' обычно обозначают хорошо известные классы Шварца [2].

Через S'_t обозначим класс функций $u(x, t) \in S'$, гладко зависящих от параметра $t \in [0, 1]$ и удовлетворяющих неравенству

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \langle u(x, t), \varphi(x) \rangle \right| \leq c_k \|\varphi\|_p \quad \text{при любом } \varphi \in S, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $\|\varphi\|_p$ – p -ая полунорма в S :

$$\|\varphi\|_p = \sup_x (1 + x^2)^{p/2} \sum_{j \leq p} \left| \frac{\partial^j \varphi(x)}{\partial x^j} \right|.$$

При этом ясно, что если $u(x, t) \in M(D)$, то $u(x, t) \in S'_t$, т. е. $M(D) \subset S'_t$. Наконец, через $\hat{u}(\xi, t)$ или $F_x[u(x, t)](\xi)$ будем обозначать обобщенное преобразование Фурье функционала $u(x, t) \in S'_t$ по x . При переходе к преобразованиям Фурье, уравнение (3) и граничное условие (1.1), (1.2) приобретает вид

$$P_n(\xi, \frac{\partial}{\partial t}) \hat{u}(\xi, t) = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial^j \hat{u}(\xi, 0)}{\partial t^j} = \hat{f}_j(\xi), j = 0, \dots, m-1; \quad \frac{\partial^j \hat{u}(\xi, 1)}{\partial t^j} = \hat{f}_{j+m}(\xi), j = 0, \dots, n-m-1. \quad (1.4)$$

Введем в рассмотрение следующие многочлены от λ :

$$\begin{aligned} P_m(\xi, \lambda) &= \prod_{j=1}^m (\lambda - \lambda_j(\xi)) = \lambda^m + \sum_{j=1}^m p_j(\xi) \lambda^{m-j}; \quad Q_{n-m}(\xi, \lambda) = \\ &= \prod_{j=m+1}^n (\lambda - \lambda_j(\xi)) = \lambda^{n-m} + \sum_{j=1}^{n-m} q_j(\xi) \lambda^{n-m-j}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Имеет место представление

$$\lambda_1^j(\xi) + \dots + \lambda_m^j(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^j \frac{\frac{\partial}{\partial \lambda} P_n(\xi, \lambda)}{P_n(\xi, \lambda)} d\lambda,$$

где внутри замкнутого контура γ заключены только корни $\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_m(\xi)$. Тем самым, ввиду условия в), для функций $p_j(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R})$ имеют место оценки

$$|p_j^{(k)}(\xi)| \leq c_k (1 + |\xi|)^{\alpha_k}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.6)$$

Те же оценки верны и для функций $q_j(\xi)$.

Пусть $v_j(\xi, t)$, $w_k(\xi, t)$ – решения следующих задач Коши в классе обычных функций :

$$P_m(\xi, \frac{\partial}{\partial t}) v_j(\xi, t) = 0, \quad \frac{\partial^l v_j(\xi, 0)}{\partial t^l} = \delta_j^l, \quad l = 0, \dots, m-1; j = 0, \dots, m-1, \quad (1.7)$$

$$Q_{n-m}(\xi, \frac{\partial}{\partial t}) w_k(\xi, t) = 0, \quad \frac{\partial^l w_k(\xi, 1)}{\partial t^l} = \delta_k^l, \quad l = 0, \dots, n-m-1; k = 0, \dots, n-m-1, \quad (1.8)$$

где δ_{ij}^s – символ Кронекера. Справедлива следующая

Лемма 1.1. Функции $v_j(\xi, t)$, $w_k(\xi, t)$ принадлежат $C^\infty(D)$ и удовлетворяют оценкам

$$\left| \frac{\partial^{l+s} v_j(\xi, t)}{\partial \xi^l \partial t^s} \right| + \left| \frac{\partial^{l+s} w_k(\xi, t)}{\partial \xi^l \partial t^s} \right| \leq c_{ls} (1 + |\xi|)^{\alpha_{ls}}, \quad l, s = 0, 1, \dots \quad (1.9)$$

Более того, при любых $0 \leq t < 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} (1 + |\xi|)^\alpha w_k(\xi, t) = 0. \quad (1.10)$$

Доказательство проведем только для $w_k(\xi, t)$, поскольку для $v_j(\xi, t)$ оно вполне аналогично. Перепишем (1.8) в матричной форме

$$\frac{\partial w(\xi, t)}{\partial t} = A(\xi)w(\xi, t), \quad w(\xi, 1) = e_k = (0, \dots, \frac{1}{k}, \dots, 0),$$

где $w = (w_k, \dots, \frac{\partial^{n-m-1} w_k}{\partial t^{n-m-1}})$, а $A(\xi)$ — квадратная матрица порядка $n-m$, имеющая вместе со своими производными полиномиальный рост с собственными значениями $\lambda_{m+1}(\xi), \dots, \lambda_n(\xi)$. Имеем $w(\xi, t) = \exp(A(\xi)(t-1))e_k$. Воспользовавшись хорошо известной оценкой [3]

$$\|\exp(A(\xi))\| \leq c \cdot \sum_{j=1}^{n-m} \exp(\lambda_{m+j}(\xi))(1 + \|A(\xi)\|)^{n-m-1}$$

получаем

$$|w(\xi, t)| \leq c \cdot \sum_{j=1}^{n-m} \exp(\lambda_{m+j}(\xi)(t-1))(1 + |\xi|)^{s_0}.$$

Отсюда следует неравенство (1.9) при $l = s = 0$. Производные оцениваются аналогично. Из (8) непосредственно следует (1.10), и лемма доказана.

Для дальнейшего изложения важна также следующая

Лемма 1.2. Пусть $\hat{u}(\xi, t) \in S'_t$ — произвольное решение уравнения (1.3). Тогда имеет место представление

$$\hat{u}(\xi, t) = \sum_{j=0}^{m-1} v_j(\xi, t)\alpha_j(\xi) + \sum_{k=0}^{n-m-1} w_k(\xi, t)\beta_k(\xi), \quad (1.11)$$

где $\alpha_j(\xi), \beta_k(\xi) \in S'$ однозначно определенные функционалы.

Доказательство. Сначала докажем единственность представления (1.11).

Пусть

$$\sum_{j=0}^{m-1} v_j(\xi, t)\alpha_j(\xi) + \sum_{k=0}^{n-m-1} w_k(\xi, t)\beta_k(\xi) \equiv 0. \quad (1.12)$$

Придифференцируем (1.12) по t последовательно $m-1$ раз в точке $t=0$. Затем $n-m-1$ раз, в точке $t=1$. В результате получим систему

$$M(\xi)\gamma(\xi) = 0, \quad (1.13)$$

где

$$M(\xi) = \left\| \begin{array}{cccc} & & & w_o(\xi, 0) \quad \dots \quad w_{n-m-1}(\xi, 0) \\ & E_m & & \\ v_o(\xi, 1) & \dots & v_{m-1}(\xi, 1) & w_o^{(m-1)}(\xi, 0) \quad \dots \quad w_{n-m-1}^{(m-1)}(\xi, 0) \\ & \ddots & & \\ v_o^{(n-m-1)}(\xi, 1) & \dots & v_{m-1}^{(n-m-1)}(\xi, 1) & E_{n-m} \end{array} \right\|,$$

$$\gamma(\xi) = (\alpha_o(\xi), \dots, \alpha_{m-1}(\xi), \beta_o(\xi), \dots, \beta_{n-m-1}(\xi)),$$

а E_k — единичная матрица порядка k . Из леммы 1.1 и теоремы Лапласа об определителях следует, что

$$\det M(\xi) = 1 + o(1), \quad |\xi| \rightarrow +\infty. \quad (1.14)$$

Поскольку $M(\xi)$ аналитична по ξ , отсюда следует, что функция $\det M(\xi)$ имеет не более чем конечное число нулей. Пусть для определенности пусть $\xi = 0$ — единственный нуль этой функции, порядка $k_o \geq 0$. Тогда из (1.13) следует, что функционал $\gamma(\xi)$ сосредоточен в точке $\xi = 0$. Следовательно, функционал

$$\omega(\xi, t) = \sum_{j=0}^{m-1} v_j(\xi, t) \alpha_j(\xi) = - \sum_{k=0}^{n-m-1} w_k(\xi, t) \beta_k(\xi) \quad (1.15)$$

сосредоточен в той же точке $\xi = 0$ и удовлетворяет уравнениям

$$P_m(\xi, \frac{\partial}{\partial t}) \omega(\xi, t) = 0, \quad Q_{n-m}(\xi, \frac{\partial}{\partial t}) \omega(\xi, t) = 0. \quad (1.16)$$

Подставив представление

$$\omega(\xi, t) = \sum_{j \leq n_o} c_j(t) \delta^{(j)}(\xi), \quad c_j(t) \in C^\infty[0, 1],$$

где $\delta(\xi)$ — дельта-функция Дирака, в (1.16), в силу линейной независимости функционалов $\delta(\xi), \dots, \delta^{(n_o)}(\xi)$ получим

$$P_m(0, \frac{\partial}{\partial t}) c_{n_o}(t) = 0, \quad Q_{n-m}(0, \frac{\partial}{\partial t}) c_{n_o}(t) = 0. \quad (1.17)$$

Ввиду того, что множества $\{\lambda_1(0), \dots, \lambda_m(0)\}$, $\{\lambda_{m+1}(0), \dots, \lambda_n(0)\}$ не пересекаются (см. условие в)), отсюда следует, что $c_{n_s}(t) \equiv 0$. Аналогично находим, что $c_0(t) = \dots = c_{n_s-1}(t) \equiv 0$, т. е. $\omega(\xi, t) \equiv 0$. Таким образом

$$\sum_{j=0}^{m-1} u_j(\xi, t) \alpha_j(\xi) \equiv 0, \quad \sum_{k=0}^{n-m-1} w_k(\xi, t) \beta_k(\xi) \equiv 0 \quad (1.18)$$

откуда легко вывести, что $\alpha_j(\xi) \equiv \beta_k(\xi) \equiv 0$. Единственность представления (1.11) доказана, теперь докажем ее существование. Пусть $u_j(\xi, t)$ — решение следующей задачи Коши (см. (1.7), (1.8)):

$$P_n(\xi, \frac{\partial}{\partial t}) u_j(\xi, t) = 0, \quad \frac{\partial^l u_j(\xi, 0)}{\partial t^l} = \delta_j^l, \quad l = 0, \dots, n-1; j = 0, \dots, n-1. \quad (1.19)$$

Тогда легко проверить, что

$$u_j(\xi, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\xi)} \frac{\lambda^{n-j-1} + a_1(\xi)\lambda^{n-j-2} + \dots + a_{n-j-1}(\xi)}{P_n(\xi, \lambda)} e^{\lambda t} d\lambda, \quad (1.20)$$

где в $\gamma(\xi)$ — замкнутый контур, содержащий внутри себя все корни $P_n(\xi, \lambda)$.

Общее решение уравнения (1.3) записывается в виде

$$\hat{u}(\xi, t) = \sum_{j=0}^{n-1} u_j(\xi, t) Q_j(\xi), \quad Q_j(\xi) = \frac{\partial^j \hat{u}(\xi, 0)}{\partial t^j} \in S'. \quad (1.21)$$

Так как многочлены $P_m(\xi, \lambda)$ и $Q_{n-m}(\xi, \lambda)$ взаимно просты, то существуют многочлены $r_1(\xi, \lambda)$, $r_2(\xi, \lambda)$, с коэффициентами, удовлетворяющими (1.6), такие, что

$$\frac{\lambda^{n-j-1} + a_1(\xi)\lambda^{n-j-2} + \dots + a_{n-j-1}(\xi)}{P_n(\xi, \lambda)} = \frac{r_1(\xi, \lambda)}{P_m(\xi, \lambda)} + \frac{r_2(\xi, \lambda)}{Q_{n-m}(\xi, \lambda)}. \quad (1.22)$$

Используя (1.22) представим функцию $u_j(\xi, t)$ в виде

$$u_j(\xi, t) = u_{j1}(\xi, t) + u_{j2}(\xi, t), \quad (1.23)$$

где

$$u_{j1}(\xi, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\xi)} \frac{r_1(\xi, \lambda)}{P_m(\xi, \lambda)} e^{\lambda t} d\lambda, \quad u_{j2}(\xi, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\xi)} \frac{r_2(\xi, \lambda)}{Q_{n-m}(\xi, \lambda)} e^{\lambda t} d\lambda.$$

Очевидно $P_m(\xi, \frac{\partial}{\partial t}) u_{j1}(\xi, t) = 0$, $Q_{n-m}(\xi, \frac{\partial}{\partial t}) u_{j2}(\xi, t) = 0$, поэтому

$$u_{j1}(\xi, t) = \sum_{k=0}^{m-1} v_k(\xi, t) \frac{\partial^k u_{j1}(\xi, 0)}{\partial t^k}; \quad u_{j2}(\xi, t) = \sum_{k=0}^{n-m-1} w_k(\xi, t) \frac{\partial^k u_{j2}(\xi, 0)}{\partial t^k}. \quad (1.24)$$

Заметим, что $\frac{\partial^k u_{j,2}(\xi, 0)}{\partial t^k}$ является мультиимпликатором в S' (в отличие от $\frac{\partial^k u_{j,2}(\xi, 0)}{\partial t^k}$). Подставляя представления (1.23) для $u_j(\xi, t)$ в (1.21) и учитывая (1.24) получим

$$\hat{u}(\xi, t) = \sum_{k=0}^{m-1} v_k(\xi, t) \alpha_k(\xi) + \sum_{k=0}^{n-m-1} w_k(\xi, t) \beta_k(\xi), \quad (1.25)$$

где $\alpha_k(\xi) \in S'$. В силу оценок (1.9) первое слагаемое в (1.25) принадлежит классу S'_1 , и так как $\hat{u}(\xi, t) \in S'_1$, заключаем что S'_1 принадлежит также второе слагаемое. Отсюда легко вывести, что $\beta_k(\xi) \in S'$. Тем самым, лемма 1.2 доказана.

Задача А. Подставив выражение (1.11) $\hat{u}(\xi, t)$ в (1.4), получим систему

$$M(\xi) \gamma(\xi) = \hat{f}(\xi), \quad (1.26)$$

где $M(\xi)$ и $\gamma(\xi)$ те же, что в (1.13), а $\hat{f}(\xi) = (\hat{f}_0(\xi), \dots, \hat{f}_{n-1}(\xi))$. Для простоты предположим, что $\xi = 0$ — единственный нуль функции $\Delta(\xi) = \det M(\xi)$ (см. (1.14)). Далее, пусть $\Delta(\xi) = \xi^{k_0} \Delta_0(\xi)$, где $k_0 \geq 0$ целое число и $\Delta_0(\xi) \neq 0$ при любом $\xi \in \mathbb{R}$. Представим матрицу $M(\xi)$ в виде [4]

$$M(\xi) = N_1(\xi) D(\xi) N_2(\xi), \quad (1.27)$$

где $\det N_j(\xi) \neq 0$ в $\mathbb{R}$, $N_j(\xi)$ и ее производные полиномиального роста, $D(\xi) = \{\xi^{k_j} \delta_j^i\}$ — диагональная матрица, и $k_1 + \dots + k_n = k_0$, где $k_j \geq 0$ — целые числа. В силу (1.27) однородная ($\hat{f}(\xi) \equiv 0$) система (1.26) имеет k_0 линейно независимых решений. Тем самым, также однородная задача А имеет k_0 линейно независимых решений.

Докажем теперь разрешимость неоднородной системы (1.26) для любой функции $f(x) \in M(\mathbb{R})$. Для этого сначала выберем $F_j(x) \in M(\mathbb{R})$ такое, что $F_j^{(k_0)}(x) = f_j(x)$. Ясно, что в качестве частного решения (1.26) можно взять функционал $\gamma(\xi) = (-i\xi)^{(k_0)} M^{-1}(\xi) \hat{F}(\xi)$, $\hat{F}(\xi) = (\hat{F}_0(\xi), \dots, \hat{F}_{n-1}(\xi))$. Подставив $\gamma(\xi)$ в (1.11), получим

$$\hat{u}(\xi, t) = \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j(\xi, t) \hat{F}_j(\xi), \quad (1.28)$$

где $\omega_j(\xi, t)$ – вполне определенные функции, удовлетворяющие неравенству (1.9).

Перепишем (1.28) в виде

$$\hat{u}(\xi, t) = \sum_{j=0}^{n-1} (1 + \xi^2)^{-s} \omega_j(\xi, t) \cdot (1 + \xi^2)^s \hat{F}_j(\xi),$$

где s – целое число. Пусть $F_j \in M_\gamma(\mathbb{R})$. Выберем s так, чтобы для обратного преобразования Фурье $w_j(x, t) = F_\xi^{-1}[(1 + \xi^2)^{-s} \omega_j(\xi, t)](x, t)$ имели

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} w_j(x, t) \right| \leq c_k (1 + |x|)^{-|\gamma|-2}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Тогда при $\gamma \geq 0$ будем иметь $(1 + |x - \tau|)^\gamma \leq (1 + |x|)^\gamma (1 + |\tau|)^\gamma$, и, следовательно

$$\begin{aligned} |F_\xi^{-1}[(1 + \xi^2)^{-s} \omega_j(\xi, t) \cdot (1 + \xi^2)^s \hat{F}_j(\xi)]| &\leq \int |w_j(\tau, t)| \left| (1 - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2})^s F_j(x - \tau) \right| d\tau \leq \\ &\leq c_0 \int (1 + |\tau|)^{-\gamma-2} \cdot (1 + |x|)^\gamma \cdot (1 + |\tau|)^\gamma d\tau \leq c_1 (1 + |x|)^\gamma. \end{aligned}$$

При $\gamma < 0$ воспользуемся неравенством Питри $(1 + |x - \tau|)^{-|\gamma|} \leq (1 + |x|)^\gamma (1 + |\tau|)^{-\gamma}$

и получим аналогичную оценку: $F_\xi^{-1}[\omega_j(\xi, t) \cdot \hat{F}_j(\xi)](x, t) \in M(D)$. Таким образом, нами доказана

Теорема 1.1. Однородная граничная задача A может иметь лишь конечное число линейно независимых решений, а неоднородная – разрешима при любых $f_j \in M(R)$.

§2. ОБЩАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА

В граничной задаче A заменим условия (1.1), (1.2) следующими :

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{jk}(i \frac{\partial}{\partial x}) \frac{\partial^j u(x, 0)}{\partial t^j} = f_k(x), \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (2.1)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_{jk}(i \frac{\partial}{\partial x}) \frac{\partial^j u(x, 1)}{\partial t^j} = f_{k+m}(x), \quad k = 0, \dots, n-m-1, \quad (2.2)$$

где $b_{jk}(\xi)$, $c_{jk}(\xi)$ – многочлены от ξ с постоянными коэффициентами. Далее, введем в рассмотрение многочлены

$$\sum_{j=0}^{m-1} b_{jk}^1(\xi) \lambda^j = \sum_{j=0}^{n-1} b_{jk}(\xi) \lambda^j \pmod{P_m(\xi, \lambda)}, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (2.3)$$

$$\sum_{j=0}^{n-m-1} c_{jk}^1(\xi) \lambda^j = \sum_{j=0}^{n-1} c_{jk}(\xi) \lambda^j \pmod{Q_{n-m}(\xi, \lambda)}, \quad k = 0, \dots, n-m-1, \quad (2.4)$$

и квадратные матрицы $B_1(\xi) = (b_{jk}^1(\xi))_{j,k=0}^{m-1}$, $C_1(\xi) = (c_{jk}^1(\xi))_{j,k=0}^{n-m-1}$.

Теорема 2.1. Условие

$$\det B_1(\xi) \cdot \det C_1(\xi) \neq 0. \quad (2.5)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы однородная задача (3), (2.1), (2.2) имела конечное число линейно независимых решений, а соответствующая неоднородная задача имела решение при любых $f_0, \dots, f_{n-1} \in M(\mathbb{R})$.

Доказательство. Достаточность. Пусть (2.5) выполнено. Поскольку функции $\det B_1(\xi)$, $\det B_2(\xi)$ аналитичны, то они либо имеют конечное число нулей, либо же тождественно равны нулю. В (2.1), (2.2) перейдем к образам Фурье. Затем, воспользовавшись представлением (1.11) получим

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{m-1} b_{jk}(\xi) \frac{\partial^j v_l(\xi, 0)}{\partial \xi^j} \cdot \alpha_l(\xi) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-m-1} b_{jk}(\xi) \frac{\partial^j w_l(\xi, 0)}{\partial \xi^j} \cdot \beta_l(\xi) = \hat{f}_k(\xi), \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (2.6)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{m-1} c_{jk}(\xi) \frac{\partial^j v_l(\xi, 1)}{\partial \xi^j} \cdot \alpha_l(\xi) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-m-1} c_{jk}(\xi) \frac{\partial^j w_l(\xi, 1)}{\partial \xi^j} \cdot \beta_l(\xi) = \hat{f}_{k+m}(\xi), \quad k = 0, \dots, n-m-1. \quad (2.7)$$

Применяя обозначения (2.3), (2.4), условия (2.6), (2.7) можно записать в виде

$$\sum_{j,l=0}^{m-1} b_{jk}^1(\xi) \frac{\partial^j v_l(\xi, 0)}{\partial \xi^j} \cdot \alpha_l(\xi) + \sum_{j,l=0}^{n-m-1} b_{jk}^2(\xi) \frac{\partial^j w_l(\xi, 0)}{\partial \xi^j} \cdot \beta_l(\xi) = \hat{f}_k(\xi), \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (2.8)$$

$$\sum_{j,l=0}^{m-1} c_{jk}^1(\xi) \frac{\partial^j v_l(\xi, 1)}{\partial \xi^j} \cdot \alpha_l(\xi) + \sum_{j,l=0}^{n-m-1} c_{jk}^2(\xi) \frac{\partial^j w_l(\xi, 1)}{\partial \xi^j} \cdot \beta_l(\xi) = \hat{f}_{k+m}(\xi), \quad k = 0, \dots, n-m-1. \quad (2.9)$$

Матрица системы (2.8), (2.9) имеет вид

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} B_1(\xi) & B_2(\xi) \\ C_2(\xi) & C_1(\xi) \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

где $B_1(\xi)$, $C_1(\xi)$ введены выше, а $B_2(\xi) = (b_{jk}^2(\xi) \frac{\partial^j w_l(\xi, 0)}{\partial \xi^j})_{j,l=0}^{n-m-1}$, $C_2(\xi) = (c_{jk}^2(\xi) \frac{\partial^j w_l(\xi, 1)}{\partial \xi^j})_{j,l=0}^{n-m-1}$. Разлагая определитель $\det A(\xi)$ по теореме Лапласа, получим

$$\Delta(\xi) = c \cdot \xi^\alpha (1 + o(1)), \quad c \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}, |\xi| \rightarrow +\infty. \quad (2.11)$$

Отсюда следует, что функция $\Delta(\xi)$ может иметь лишь конечное число нулей.

Отсюда, как и при исследовании задачи А, следует достаточность условия (2.5).

Необходимость. Пусть условие (2.5) не выполнено. Тогда по крайней мере один из множителей в (2.5) – тождественный ноль. Для определенности пусть $\det B_1(\xi) \equiv 0$. Нам достаточно показать, что при выполнении такого тождества неоднородная задача (3), (2.1), (2.2) разрешима не для всех $f_0, \dots, f_{n-1} \in M(\mathbb{R})$. Согласно (2.3), условия (2.1) равносильны следующим условиям :

$$\sum_{j=0}^{m-1} b_{jk}^1(\xi) \frac{\partial^j u(\xi, 0)}{\partial v^j} = \hat{f}_k(\xi), \quad k = 0, \dots, m-1. \quad (2.12)$$

Так как элементы $b_{jk}^1(\xi)$ матрицы $B_1(\xi)$ – аналитические функции, то существует интервал (a_0, b_0) такой, что либо $b_{jk}^1(\xi) \neq 0$ в (a_0, b_0) , либо же $b_{jk}^1(\xi) \equiv 0$. Ясно, что существует интервал $(a_1, b_1) \subset (a_0, b_0)$, на котором матрица $B_1(\xi)$ представима в виде

$$B_1(\xi) = N_1(\xi) D(\xi) N_2, \quad (2.13)$$

где $\det N_1(\xi) \cdot \det N_2 \neq 0$, N_2 – постоянная матрица, элементы $N_1(\xi)$ и $D(\xi)$ аналитичны по $\xi \in (a_1, b_1)$, и матрица $D(\xi)$ имеет трапециoidalный вид. Так как $\det D(\xi) \equiv 0$, то по крайней мере один из диагональных элементов $D(\xi)$ – тождественный ноль. Отсюда следует, что тождественным нулем является некоторая нетривиальная линейная комбинация $\hat{f}_k(\xi)$. Теорема доказана.

Следствие 2.1. Рассмотрим следующую задачу для уравнения (3) :

$$\frac{\partial^j u(x, 0)}{\partial v^j} = f_j(x), \quad j = 0, \dots, m-1, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial^j u(x, 1)}{\partial v^j} = f_j(x), \quad j = 0, \dots, n-1, \quad (2.15)$$

где (2.15) есть часть условий задачи Коши при $t = 1$. Проверим выполнение условия (2.5). Ясно, что $B_1(\xi)$ – единичная матрица порядка m . Пусть

$$\lambda^s = r_s(\xi, \lambda) Q_{n-m}(\xi, \lambda) + q_s(\xi, \lambda), \quad s = m, \dots, n-1. \quad (2.16)$$

Пусть при больших $|\xi|$ существует набор функций $c_m(\xi), \dots, c_{n-1}(\xi)$ такой, что

$$\lambda^m (c_m(\xi) + c_{m+1}(\xi) \lambda + \dots + c_{n-1}(\xi) \lambda^{n-m-1}) \equiv Q_{n-m}(\xi, \lambda) \sum_{s=m}^{n-1} r_s(\xi, \lambda) c_s(\xi). \quad (2.17)$$

Из условия б) следует, что многочлены $Q_{n-m}(\xi, \lambda)$ и λ^m взаимно просты. Поэтому из (2.17) находим $\deg(\sum_{s=m}^{n-1} r_s(\xi, \lambda) c_s(\xi)) \geq m$, и тождество (2.17) может иметь место лишь при $c_m(\xi) = \dots = c_{n-1}(\xi) \equiv 0$. Таким образом, многочлены $q_m(\xi, \lambda)$, ..., $q_{n-1}(\xi, \lambda)$ линейно независимы при $|\xi| \gg 1$, и поэтому $\det C_1(\xi) \neq 0$.

§3. ПРИМЕРЫ

1. Простейшим уравнением вида (3), удовлетворяющим условиям а), б), в) является уравнение составного типа

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 \right) u(x, t) = 0, u \in M(D), \quad (3.1)$$

для которого $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\sqrt{1+\xi^2}$, $\lambda_3 = \sqrt{1+\xi^2} \rightarrow_{\xi \rightarrow \infty} +\infty$.

Задача А имеет вид

$$u(x, 0) = f_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = f_1(x), \quad u(x, 1) = f_2(x), f_j \in M(\mathbb{R}). \quad (3.2)$$

Образ Фурье $\hat{u}(\xi, t)$ решения $u(x, t)$ уравнения (3.1) имеет вид

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{c}_0(\xi) + \hat{c}_1(\xi) e^{-\sqrt{1+\xi^2}t} + \hat{c}_2(\xi) e^{\sqrt{1+\xi^2}(t-1)},$$

и, в силу (3.2) приходим к системе

$$M(\xi) \hat{c}(\xi) = \hat{f}(\xi), \quad (3.3)$$

$\hat{c}(\xi) = (\hat{c}_0(\xi), \hat{c}_1(\xi), \hat{c}_2(\xi))$, $\hat{f}(\xi) = (\hat{f}_0(\xi), \hat{f}_1(\xi), \hat{f}_2(\xi))$, $\det M(\xi) = -\sqrt{1+\xi^2}(1 - e^{-\sqrt{1+\xi^2}})^2 \neq 0$ при любых $\xi \in \mathbb{R}$. Однородная система (3.3), и вместе с ней однородная задача (3.1), (3.2), очевидно имеют только тривиальное решение. Из (3.3) следует, что

$$\hat{c}_j(\xi) = \sum_{k=0}^2 p_{jk}(\xi) \hat{f}_k(\xi), \quad j = 0, 1, 2,$$

где $p_{jk}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Эта функция, а также ее производные, имеют степенной рост. Поэтому $c_j(x) = F_\xi^{-1}(\hat{c}_j(\xi)) \in M(\mathbb{R})$. Ясно, что $u(x, t) = F_\xi^{-1}[\hat{u}(\xi, t)] \in M(D)$, тем самым задача (3), (3.1), (3.2) корректна.

2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\pi i \right) u(x, t) = 0, u \in M(D). \quad (3.4)$$

Имеем $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \xi^2 + 2\pi i$. Граничная задача А имеет вид

$$u(x, 0) = f_0(x), \quad u(x, 1) = f_1(x). \quad (3.5)$$

Рассуждая как выше, получим $\hat{u}(\xi, t) = \hat{c}_0(\xi) + \hat{c}_1(\xi)e^{(\xi^2 + 2\pi i)(t-1)}$. В силу (3.5)

$$\hat{c}_0(\xi) + \hat{c}_1(\xi)e^{-\xi^2} = \hat{f}_0(\xi), \quad \hat{c}_0(\xi) + \hat{c}_1(\xi) = \hat{f}_1(\xi). \quad (3.6)$$

Сначала рассмотрим однородную систему (3.6). Ясно, что $\hat{c}_1(\xi) = -\hat{c}_0(\xi)$, $\hat{c}_0(\xi)(1 - e^{-\xi^2}) = 0$ в S' . Поскольку $\varphi(\xi) = \xi^{-2}(1 - e^{-\xi^2}) \in C^\infty$ и $\varphi(0) \neq 0$, то имеем $\hat{c}_0(\xi) = (\alpha_1 \delta(\xi) + \alpha_2 \delta'(\xi))\varphi^{-1}(\xi)$. Тем самым, однородная система (3.6), а также однородная задача (3.4), (3.5), имеют два линейно независимых решения.

В качестве частного решения (3.6) можно брать

$$\hat{c}_0(\xi) = \frac{\hat{F}_0(\xi) - e^{-\xi^2} \hat{F}_1(\xi)}{\varphi(\xi)}, \quad \hat{c}_1(\xi) = \hat{f}_1(\xi) - \frac{\hat{F}_0(\xi) - e^{-\xi^2} \hat{F}_1(\xi)}{\varphi(\xi)},$$

где $F_j''(x) = f_j(x)$, $j = 0, 1$. Очевидно $F^{-1}(\hat{c}_j(\xi)) \in M(\mathbb{R})$. Таким образом, однородная задача (3.4), (3.5) имеет два линейно независимых решения, а неоднородная — разрешима при любых $f_0(x), f_1(x) \in M(R)$ (см. теорему 1.1).

3. Нижеследующий пример показывает, что условия а), б), в), накладываемые на оператор $P_n(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t})$, являются достаточными, но не необходимы для того, чтобы задача А удовлетворяла теореме 1.1.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \text{для которого} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad (3.7)$$

с граничными условиями

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, 1) = g(x), \quad f, g \in M(\mathbb{R}). \quad (3.8)$$

Ясно, что единственное решение задачи (3.7), (3.8) задается формулой

$$M(D) \ni u(x, t) = f(x) + t(g(x) - f(x)).$$

Однако, условие б) не выполнено, так как на $u(x, t)$ необходимо наложить только условия Коши в точке $t = 0$, т. е. $u(x, 0) = f(x)$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x)$.

ABSTRACT. Consider the differential equation

$$\frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^n a_j(i \frac{\partial}{\partial x}) \frac{\partial^{n-j} u(x, t)}{\partial t^{n-j}} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, 0 < t < 1,$$

where $a_j(\xi)$ are polynomials in $\xi \in \mathbb{R}^1$ with constant coefficients. We are looking for solutions $u(x, t)$ which together with their derivatives polynomial growth in $x \in \mathbb{R}^1$. Assume that the roots $\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_n(\xi)$ (some of them can coincide) of the corresponding characteristic polynomial $\lambda^n + a_1(\xi)\lambda^{n-1} + \dots + a_n(\xi)$ satisfy the conditions: а) $\operatorname{Re} \lambda_j(\xi) \leq \alpha$, $j = 1, \dots, m < n$, б) $\operatorname{Re} \lambda_j(\xi) \rightarrow |\xi| \rightarrow +\infty + \infty$, $j = m+1, \dots, n$, в) $\{\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_m(\xi)\} \cap \{\lambda_{m+1}(\xi), \dots, \lambda_n(\xi)\} = \emptyset$.

The boundary value problem

$$\frac{\partial^j u(x, 0)}{\partial t^j} = f_j(x), \quad j = 0, \dots, m-1, \quad \frac{\partial^j u(x, 1)}{\partial t^j} = f_{j+m}(x), \quad j = 0, \dots, n-m-1$$

is shown to be always solvable by a kernel of finite dimension. The general boundary value problem is discussed from this point of view as well.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, "Задача Коши", Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, т. 32, Москва, 1988.
2. В. С. Владимиров, Обобщенные функции в математической физике, Москва, "Наука", 1976.
3. Г. Е. Шилов, Математический анализ. Второй спецкурс, Москва, "Наука", 1965.
4. З. Прёсдорф, Некоторые классы сингулярных уравнений, Москва, "Мир", 1974.

5 апреля 1994

Государственный инженерный
университет Армении

РАВНОМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ ОПЕРАТОРНЫХ ПОЛЕЙ С AF -СЛОЕМ

С. А. Григорян, М. И. Заславская

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 29, № 5, 1994

В статье исследуются некоторые свойства равномерных алгебр непрерывных функций, заданных на компакте, со значениями в аппроксимативно-конечномерной алгебре (AF -алгебре). Доказывается, что если AF -алгебра A проста, то для любой равномерной алгебры M указанного вида существует равномерная алгебра U комплекснозначных функций, заданных на том же компакте, такая, что заданная алгебра M порождается алгебрами A и U .

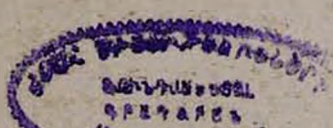
§1. ВВЕДЕНИЕ

Равномерные алгебры непрерывных функций со значениями в некотором семействе C^* -алгебр впервые были рассмотрены Дж. Феллом [1] и затем исследованы Д. Тейлором [2], [3] и другими. Такие алгебры получили название равномерных алгебр операторных полей (или некоммутативных равномерных алгебр). В работах [4] – [8] В. А. Арзуманяна, С. А. Григоряна и М. А. Акопяна были исследованы алгебры операторных полей с постоянным слоем. В частности, ими были использованы некоторые обобщения известных определений классической теории равномерных алгебр.

В этой статье исследованы равномерные алгебры операторных полей с постоянным аппроксимативно-конечномерным слоем и показана зависимость свойств равномерной алгебры от свойств ее слоя.

§2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА AF -АЛГЕБР

Для удобства напомним некоторые известные определения.



Определение 2.1. C^* -алгебра A называется аппроксимативно-конечномерной алгеброй, или AF -алгеброй, если она представима в виде индуктивного предела семейства вложенных, конечномерных подалгебр с общей единицей, т. е. $A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$, где A_n – конечномерны и $A_n \subseteq A_{n+1}$ (см. [9], стр. 196).

Отметим, что по теореме Веддербарна каждая алгебра A_n изоморфна прямой сумме полных матричных алгебр: $A_n \cong \bigoplus_{i=1}^{k_n} M_i(r_i)$, где r_i – размерность матриц из алгебры $M_i(r_i)$, а $r_n = \sum_{i=1}^{k_n} r_i$ – размерность матриц из алгебры A_n (см. [10], стр. 7). В дальнейшем мы будем подразумевать, что зафиксировано какое-либо соответствие между элементами алгебр A_n и числовыми матрицами, и будем отождествлять элементы A_n с изображающими их числовыми матрицами.

Определение 2.2. Пусть $B \subseteq A$ – две C^* -алгебры, имеющие общую единицу. B -билинейное, сохраняющее единицу положительное отображение P из A в B называется условным ожиданием из A в B (см. [4], стр. 68). При этом, как обычно, оператор $P : A \rightarrow B$ называется положительным, если $P(a) \geq 0$ для любого $a \geq 0$, $a \in A$.

В дальнейшем нам понадобятся устанавливаемые ниже свойства.

Лемма 2.1. Пусть $A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ есть AF -алгебра и пусть $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ – семейство условных ожиданий из A в $P_n(A)$, удовлетворяющих условию $P_{n+k}(a) = P_n(a)$, $k \geq 0$, для всякого $a \in A_n$. Тогда для любого $a \in A$ последовательность $P_n(a)$ сходится по норме, и существует условное ожидание P из A в $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(A_n)}$ такое, что $P(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(a)$ при любом $a \in A$.

Доказательство. По определению A , при любых $\varepsilon > 0$ и $a \in A$ найдется такое натуральное число n и такой элемент $a_n \in A_n$, что $\|a - a_n\| \leq \varepsilon/2$. Поскольку $\|P_n\| = 1$ (см. [4], предложение 2.2), то $\|P_n(a) - P_n(a_n)\| = \|P_n(a - a_n)\| \leq \varepsilon/2$. Тем самым, при любых натуральных $r, s > n$ имеем $\|P_r(a) - P_s(a)\| \leq \|P_r(a - a_n)\| + \|P_s(a - a_n)\| < \varepsilon$. Отсюда следует, что $P_n(a)$ сходится при любом $a \in A$.

Пусть $P(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(a)$. Легко видеть, что P является условным ожиданием из A в $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(A_n)}$, и доказательство завершено.

Пусть $e_{ii}^{(n)}$ – диагональные единицы матричной алгебры A_n . Положим $B_n = \oplus_{i=1}^{d_n} e_{ii}^{(n)} A e_{ii}^{(n)}$, $a \in A$, где d_n – размерность матриц из A_n . Определим условное ожидание P_n из A в B_n , полагая $P_n(a) = \sum_{i=1}^{d_n} e_{ii}^{(n)} a e_{ii}^{(n)}$, $a \in A$. Очевидно, что $P_n(A_n) = B_n$ является коммутативной подалгеброй A_n , состоящей из диагональных элементов алгебры A_n . Нетрудно проверить, что семейство условных ожиданий $\{P_n\}$ удовлетворяет условиям леммы 2.1. Следовательно, существует условное ожидание $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ из A в $B = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n}$.

Определим еще одно семейство условных ожиданий из A в некоторые подалгебры A . Зафиксируем пару натуральных чисел n и N , где $n > N$, и для каждого $a \in A$ определим проектор $P_{ij}^{(n)}(a) = e_{ii}^{(n)} a e_{jj}^{(n)}$, где $e_{ii}^{(n)}$ – матричные единицы алгебры A_n . Определим функцию

$$[\delta_n^N]_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } P_{ij}^{(n)}(a) = 0 \text{ для всех } a \in A_n; \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть для всех $a \in A$

$$[Q_n^N]_{ij}(a) = [\delta_n^N]_{ij} P_{ij}(a), \quad Q_n^N(a) = \sum_{i,j=1}^{r_n} [Q_n^N]_{ij}(a), \quad (1)$$

где r_n – размерность матриц из A_n .

Лемма 2.2. Пусть $n > N$ – любые натуральные числа. Тогда отображение Q_n^N является условным ожиданием из A в $Q_n^N(A)$.

Доказательство. Очевидно, что $(Q_n^N)^2 = Q_n^N$ и $Q_n^N(e) = e$. Поэтому достаточно доказать (см. [4], стр. 69), что Q_n^N положительно. Действительно, так как $[\delta_n^N]_{ij} = [\delta_n^N]_{ji}$, то для всех $a \in A$ имеем

$$\begin{aligned} ([Q_n^N]_{ij} + [Q_n^N]_{ji})(a) &= [\delta_n^N]_{ij}(e_{ii}^{(n)} a e_{jj}^{(n)} + e_{jj}^{(n)} a e_{ii}^{(n)}) = \\ &= \frac{1}{2} [\delta_n^N]_{ij} \left((e_{ii}^{(n)} + e_{jj}^{(n)}) a (e_{ii}^{(n)} + e_{jj}^{(n)}) - (e_{ii}^{(n)} - e_{jj}^{(n)}) a (e_{ii}^{(n)} - e_{jj}^{(n)}) \right) \end{aligned}$$

Но поскольку $e_{ii}^{(n)} + e_{jj}^{(n)} > e_{ii}^{(n)} - e_{jj}^{(n)}$, то для $a > 0$ имеем $[Q_n^N]_{ij}(a) + [Q_n^N]_{ji}(a) \geq 0$. Так как сумма положительных операторов положительна, то $Q_n^N(a) = \sum_{i,j=1}^{r_n} [Q_n^N]_{ij}(a)$ является положительным оператором. Лемма доказана.

Нетрудно показать, что семейство $\{Q_n^N\}$ при фиксированных N и $n > N$ удовлетворяет условиям леммы 2.1. Обозначим $Q^N = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n^N$.

Лемма 2.3. Пусть $M_N = Q^N(A)$. Тогда $M_N = \oplus_{i,j=1}^r B e_{ij}^{(N)}$, где $e_{ij}^{(N)}$ – матричные единицы алгебры A_N , а B – диагональная подалгебра алгебры A .

Доказательство. Не теряя общности, можно предполагать, что A_N является полной алгеброй матриц размерности r (для общего случая доказательство аналогично). Имеем (см. [9], предложение 1.7)

$$e_{ij}^{(N)} = \sum_{q=1}^{d_n} \sum_{m=1}^{d_q} e_{i+(m-1)r, j+(m-1)r}^{(nq)},$$

где d_n – количество факторов в алгебре A_n , d_q – количество образов A_N при вложении в фактор M_q алгебры A_n , $e_{ij}^{(nq)}$ – матричные элементы в факторе M_q алгебры A_n . Из построения Q_n^N и свойства (iii) (см. [9], стр. 201) следует, что для любого $a \in A_n$

$$Q_n^N(a) = \sum_{i,j=1}^{r_n} [Q_n^N]_{ij}(a) = \sum_{i,j=1}^r \sum_{q=1}^{d_n} \sum_{m=1}^{d_q} [Q_n^N]_{i+(m-1)r, j+(m-1)r}(a).$$

Отсюда, используя соотношение (1), нетрудно убедиться в том, что элемент

$$f_{ij} = e_{ji}^{(N)} \sum_{q=1}^{d_n} \sum_{m=1}^{d_q} [Q_n^N]_{i+(m-1)r, j+(m-1)r}(a)$$

принадлежит B_n . Имеем

$$e_{ij}^{(N)} f_{ij} = \sum_{q=1}^{d_n} \sum_{m=1}^{d_q} [Q_n^N]_{i+(m-1)r, j+(m-1)r}(a).$$

Отсюда следует, что $M_{Nn} = Q_n^N(A_n)$ представима в виде $\oplus_{i,j=1}^r B_n e_{ij}^{(N)}$. Теперь доказательство леммы легко завершить с помощью соотношения $M_N = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} M_{Nn}}$.

Введем в рассмотрение группу U_n унитарных, вещественных матриц из A_n , с неотрицательными элементами. Очевидно, что все элементы таких матриц суть 0 или 1, причем на каждой строке и каждом столбце лишь один элемент равен единице, а все остальные равны нулю. Также ясно, что для любых $b \in B_n$ и $u \in U_n$ имеет место включение $u^* b u \in B$. Обозначим $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ через U .

Лемма 2.4.

- (1) $U_n \subseteq U_{n+1}$;
- (2) алгебра A_n порождается группой U_n и алгеброй B_n ;
- (3) алгебра A порождается группой U и алгеброй B .

Доказательство. Свойство (1) очевидно. Свойство (2) следует из того, что всякая матричная единица является произведением элементов из U_n и B_n . Свойство (3) непосредственно следует из свойства (2).

Для каждого $u \in U$ определим внутренний автоморфизм T_u на A следующим образом: $T_u(a) = u^* a u$. Из вышеизложенного следует, что T_u также является автоморфизмом на B . Обозначим через G группу всех T_u при $u \in U$. Так как B – коммутативная C^* -алгебра, то по теореме Гельфанда–Наймарка (см. [11], гл. 1, теорему 7.1) алгебра B изоморфна алгебре $C(Y)$ всех непрерывных, комплекснозначных функций на пространстве характеров Y алгебры B . Каждый автоморфизм T_u на B порождает гомеоморфизм $\tilde{T}_u$ на Y . Обозначим через $\tilde{G}$ группу всех $\tilde{T}_u$ при $u \in U$ и заметим, что $\{B, U, G\}$ есть C^* -динамическая система ([12], §2.7.1). Пусть $\tilde{G}(y)$ – орбита элемента $y \in Y$ относительно группы $\tilde{G}$. В силу леммы 2.4, следствия из теоремы 2.1.11 (А) и предложения 2.4.22 (см. [12], стр. 150) имеет место

Лемма 2.5. Алгебра A проста тогда и только тогда, когда орбита $\tilde{G}(y)$ плотна в Y для всякого $y \in Y$.

§3. РАВНОМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ С AF -СЛОЕМ

Пусть T – компакт, а A является C^* -алгеброй с единицей. Обозначим через $C(T, A)$ алгебру всех непрерывных функций $x(t)$, заданных на компакте T , со значениями в алгебре A и нормой $\|x\| = \sup_{t \in T} \|x(t)\|_A$. Ясно, что $C(T, A)$ является C^* -алгеброй.

Определение 3.1. Равномерной алгеброй M с A -слоем (или равномерной A -алгеброй) будем называть любую замкнутую подалгебру $C(T, A)$, содержащую все функции-константы из A и удовлетворяющую условию: для любых $t_1, t_2 \in T$ и любых $a_1, a_2 \in A$ существует функция $x \in M$ такая, что $x(t_1) = a_1$ и $x(t_2) = a_2$.

Простейшие равномерные алгебры можно получить следующим образом. Пусть U – равномерная алгебра непрерывных комплекснозначных функций на компакте T . Обозначим через $[U, A]$ замкнутую подалгебру алгебры $C(T, A)$, порожденную суммами вида $\sum_{k=1}^n x_k(t) a_k$, где $x_k(t) \in U$, $a_k \in A$. Нетрудно проверить, что $[U, A]$ является равномерной A -алгеброй в смысле определения 3.1.

Определение 3.2. Равномерная A -алгебра M называется *рассекаемой* ([6], стр. 101), если она представима в виде $[U, A]$ для некоторой равномерной комплекснозначной алгебры U на компакте T .

Рассекаемой A -алгеброй является, например, алгебра $C(T, A) = [C(T), A]$ (см. [4], предложение 1.4).

Основной целью дальнейшего изложения является доказательство следующей теоремы.

Теорема 3.1. Пусть M – равномерная A -алгебра на компакте T . Если A является простой AF -алгеброй, то M – *рассекаемая*.

Доказательству предположим несколько определений и вспомогательных утверждений. Рассмотрим условное ожидание $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$, определенное в

§2. Всякое $P_n : A \rightarrow B_n$ естественным образом порождает условное ожидание Π_n из $C(T, A)$ в $C(T, B_n)$. Нетрудно показать, что при любой фиксированной $f \in C(T, A)$ последовательность $\Pi_n(f)$ равномерно по t сходится при $n \rightarrow \infty$, а поэтому можно рассматривать условное ожидание $\Pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n$ из $C(T, A)$ в $C(T, B)$. Аналогично можно рассмотреть условное ожидание $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_n^N = \mathcal{H}^N : C(T, A) \rightarrow C(T, M_N)$. Ясно, что $\Pi_n(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ и $\mathcal{H}_n^N(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$. Поэтому, в силу равномерной сходимости Π_n и $\mathcal{H}_n^N$, имеем $\Pi(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ и $\mathcal{H}^N(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$. Очевидно $\Pi(\mathcal{M})$ является коммутативной подалгеброй $\mathcal{M}$ и $\Pi(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \cap C(T, B)$. Обозначим $\Pi(\mathcal{M})$ через $\mathcal{M}_\Pi$. Ясно, что $\mathcal{H}^N(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \cap C(T, M_N)$. Наконец, обозначим $\mathcal{H}^N(\mathcal{M})$ через $\mathcal{M}_N$.

Следующая теорема позволяет свести изучение некоммутативных равномерных алгебр с AF -слоем к изучению коммутативных.

Теорема 3.2. Если A является AF -алгеброй, то $\mathcal{M} = [\mathcal{M}_\Pi, A]$.

Доказательство. Ввиду леммы 2.3 $M_N = \oplus_{i,j=1}^{r_N} B e_{ij}^{(N)}$. Следовательно, $C(T, M_N) = \oplus_{i,j=1}^{r_N} C(T, B) e_{ij}^{(N)}$. Так как функции-константы $e_{ij}^{(N)}$ принадлежат $\mathcal{M}$, то

$$\mathcal{M}_N = \oplus_{i,j=1}^{r_N} (\mathcal{M} \cap C(T, B)) e_{ij}^{(N)} = \oplus_{i,j=1}^{r_N} \mathcal{M}_\Pi e_{ij}^{(N)} \subseteq [\mathcal{M}_\Pi, A] \subseteq \mathcal{M}.$$

Далее, $I = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{H}^N$ – тождественный оператор на $\mathcal{M}$. Действительно, пользуясь соотношением $C(T, A) = [C(T), A]$, аппроксимируя $x(t)$ конечными суммами вида $\sum x_k(t) a_k$, где $x_k(t) \in C(T)$ и $a_k \in A$ и аппроксимируя a_k элементами алгебр A_m при достаточно больших m нетрудно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N , что если $n > N$, то

$$\|\mathcal{H}_{n+r}^n(x(t)) - x(t)\| < \varepsilon$$

для любого натурального числа r . Отсюда следует, что $\mathcal{M} = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_N} \subseteq [\mathcal{M}_\Pi, A] \subseteq \mathcal{M}$, и теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.1. В силу теоремы 3.2 достаточно показать, что $M_\Pi = [U, B]$ для некоторой равномерной алгебры U комплекснозначных функций на T . Так как $B \cong C(Y)$ и $B \subseteq M_\Pi$, то $M_\Pi \subseteq C(T \times Y)$ и $C(Y) \subseteq M_\Pi$. Поэтому при любом $y \in Y$ множества $\{y\} \times T = T_y$ являются обобщенными множествами пика для M (см. [11], гл. 2, §12). Отсюда следует, что алгебра функций, индуцированных функциями из M_Π на множестве T_y , $U_y = M_\Pi|_{T_y}$, при любом фиксированном $y \in Y$ изоморфна некоторой равномерной подалгебре алгебры $C(T)$ (см. [11], гл. 2, лемму 12.3 и теорему 12.7).

Группа G внутренних автоморфизмов алгебры A , рассмотренная в §2, естественным образом порождает группу автоморфизмов τ_u алгебры M : $(\tau_u x)(t) = u^* x(t) u$, $x(t) \in M$, $u \in U$. Ясно, что $\tau_u M_\Pi = M_\Pi$. Далее, группа G естественным образом порождает группу Γ гомоморфизмов на множестве $Y \times T$: каждый такой гомоморфизм естественным образом преобразует компоненту y пары (y, t) , а компоненту t оставляет неизменной. При этом, орбитой точки $(y, t) \in Y \times T$ относительно группы Γ является множество $\tilde{G}(y) \times \{t\}$.

Пусть $y_1, y_2 \in \tilde{G}(y)$. Тогда из приведенных выше соотношений следует, что

$$U_{y_1} = M_\Pi|_{T_{y_1}} = M_\Pi|_{T_y} = U_y = M_\Pi|_{T_{y_2}} = U_{y_2}.$$

Покажем, что для всякого $y_0 \in \overline{\tilde{G}(y)}$ имеем $M_\Pi|_{T_{y_0}} \subseteq U_y$. Для этого предположим, что $f \in M_\Pi|_{T_{y_0}}$. Тогда существует $F(y, t) \in M_\Pi$ такое, что $F(y_0, t) = f(t)$. Из равномерной непрерывности F следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $y_1 \in \tilde{G}(y)$ такое, что $|F(y_0, t) - F(y_1, t)| < \varepsilon$ при всех $t \in T$, и $F(y_1, t) \in U_y$. Тем самым $F(y_0, t) \in U_y$. Но по условию алгебра A проста, поэтому, по лемме 2.5, $Y = \overline{\tilde{G}(y)}$ для любого $y \in Y$. Таким образом, $y_1 \in \overline{\tilde{G}(y_0)}$. Следовательно, для всякого $y \in Y$ справедливо соотношение

$$M_\Pi|_{T_{y_0}} = M_\Pi|_{T_y} = U_y,$$

и, тем самым, алгебра U_y одна и та же для всех $y \in Y$. Обозначим эту алгебру

через $\mathcal{U}$. Нетрудно проверить, что максимальные множества антисимметрии (см. [11], гл. 2, §13) алгебр $\mathcal{M}_\Pi$ и $[\mathcal{U}, B]$ расположены на множествах T_y , а поэтому из теоремы Бишоп–Шилова (см. [11], гл. 2, теорему 13.1) следует, что $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}_\Pi$. Тем самым, $\mathcal{M}_\Pi = [\mathcal{U}, B]$, и теорема доказана.

§4. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Определение 4.1. Пусть $\mathcal{M}$ – равномерная A -алгебра, и $x(t) \in \mathcal{M}$. Положим $\operatorname{Re} x(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x^*(t))$, и через $\operatorname{Re} \mathcal{M}$ обозначим множество $\{\operatorname{Re} x(t) | x(t) \in \mathcal{M}\}$.

Следствие 4.1. Пусть A есть AF -алгебра, и $\operatorname{Re} \mathcal{M}$ замкнуто в $C(T, A)$. Тогда $\mathcal{M} = C(T, A)$.

Доказательство. Алгебра $\mathcal{M}_\Pi$ изоморфна некоторой подалгебре $C(Y \times T)$, и $\operatorname{Re} \mathcal{M}_\Pi = \operatorname{Re} \mathcal{M} \cap C(T, B)$. Поэтому $\operatorname{Re} \mathcal{M}_\Pi$ замкнуто, и по теореме Гофмана–Вермера ([11], стр. 63) $\mathcal{M}_\Pi$ изоморфно $C(Y \times T)$, т. е. $\mathcal{M}_\Pi = C(T, B)$. Тем самым, по теореме 3.2, $\mathcal{M} = C(T, A)$.

Заметим, что в случае $A = C$ доказанное выше утверждение совпадает с теоремой Гофмана–Вермера. Для равномерных алгебр операторных полей с произвольным слоем, но при некоторых дополнительных условиях, это утверждение было доказано Д. Тейлором [3]. Для равномерных A -алгебр с простым слоем аналогичный результат был доказан М. Акопян [8].

Следствие 4.2. Пусть $\mathcal{M}$ есть равномерная A -алгебра с простым AF -слоем. Тогда $\operatorname{Sp} \mathcal{M}$ изоморфен $\operatorname{Sp} A$.

Это утверждение непосредственно следует из теоремы 3.7 работы [4].

ABSTRACT. The paper investigates some properties of uniform algebras of continuous functions defined on a compact with values in an approximately finite-dimensional algebra (AF -algebra). It is proved that if an AF -algebra A is simple then for any uniform algebra $\mathcal{M}$ as above there exists a uniform algebra $\mathcal{U}$ of complex-valued functions defined on the same compact such that $\mathcal{M}$ is generated by algebras A and $\mathcal{U}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. J. Fell, "The structure of algebras of operator fields", *Acta Math.*, vol. 106, no. 3 – 4, pp. 233 – 280, 1961.
2. D. C. Taylor, "Interpolation in algebras of operator fields", *J. of Funct. Anal.*, vol. 10, no. 2, pp. 159 – 190, 1972.
3. D. C. Taylor, "A general Hoffman-Wermer theorem for algebras of operator fields", *Proc. of A.M.S.*, vol. 52, pp. 213 – 216, 1972.
4. В. А. Арзуманян, С. А. Григорян, "Спектр равномерных алгебр операторных полей", *Известия АН Арм. ССР, Математика*, т. 21, № 1, стр. 63 – 79, 1986.
5. В. А. Арзуманян, С. А. Григорян, "Границы равномерных алгебр операторных полей", *Известия АН Арм. ССР, Математика*, т. 23, № 5, стр. 422 – 438, 1988.
6. V. A. Arzumanyan, S. A. Grigorian, "Noncommutative uniform algebras", *J. Operator Theory*, vol. 43, pp. 101 – 109, 1990.
7. М. А. Акопян, "О равномерных $B(H)$ -алгебрах", *Известия НАН Армении, Математика*, т. 24, № 2, стр. 176 – 180, 1991.
8. М. А. Акопян, "Об одном обобщении теоремы Гофмана-Вермера для алгебр операторных полей", *Известия НАН Армении, Математика*, т. 29, № 6, стр. 78 – 83, 1993.
9. O. Brattelli, "Inductive limits of finite dimensional C^* -algebras", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 171, pp. 195 – 234, 1972.
10. А. М. Вершик, С. В. Керов, "Локальные полупростые алгебры. Комбинаторная теория и K_0 -функтор", *Итоги науки и техники, Совр. пробл. мат.*, т. 26, стр. 3 – 56, 1985.
11. Т. Гамелин, *Равномерные алгебры*, Москва, Мир, 1973.
12. У. Брателли, Д. Робинсон, *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика*, Москва, Мир, 1982.

16 сентября 1994

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении

АТТРАКТОРЫ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ ТИПА СОБОЛЕВА

Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 29, № 5, 1994

В статье доказываются существование аттракторов полугрупп, порождаемых начально-краевыми задачами для некоторого класса вырождающихся квазилинейных систем типа Соболева. Для этих систем строится функция Ляпунова и с ее помощью описываются аттракторы полугрупп, порожденных рассматриваемыми операторами.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема поведения при $t \rightarrow \infty$ траекторий эволюционных систем, для которых корректно поставлена задача Коши, тесно связана с существованием многообразий, называемых аттракторами (см. работы [1], [2] и приведенную в них библиографию). Эти многообразия обладают двумя замечательными свойствами:

- i) притяжения траекторий;
- ii) инвариантности относительно полугруппы $\{S_t\}$, порожденной этой задачей.

Здесь мы рассматриваем проблему описания структуры аттракторов. Как известно, их структура явно описывается при условии существования глобальной функции Ляпунова, т. е. такого функционала Φ , значения которого убывают вдоль траекторий уравнения, за исключением лишь стационарных траекторий, на которых Φ – постоянная. В этом случае аттракторы полугрупп явно описываются с помощью неустойчивых инвариантных многообразий, проходящих через неподвижные точки полугруппы $\{S_t\}$.

В настоящей статье рассмотрен класс вырождающихся нелинейных систем типа Соболева. Доказано существование аттракторов полугрупп, порождаемых смешанными задачами, построена функция Ляпунова и с ее помощью описаны эти аттракторы.

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. КЛАССЫ СИМВОЛОВ

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial t} Lu + Mu = 0 \quad (1)$$

в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$, где Ω — ограниченная область полупространства $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}$, имеющего достаточно гладкую границу $\Gamma = \partial\Omega$. Будем предполагать, что $\Gamma_0 = \Gamma \cap \{x_n = 0\} \neq \emptyset$.

Операторы L и M зададим следующими выражениями:

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(B_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_n} \left(B_{nn}(x) \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) + C(x)u,$$

$$Mu = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{1j}(x, \nabla u_1), a_{2j}(x, \nabla u_2), \dots, a_{Nj}(x, \nabla u_N))^{tr},$$

где $u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_N(t, x))$ и $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$. Опишем классы рассматриваемых операторов. Пусть выполнены следующие условия:

(а) Матрицы B_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n-1$) и B_{nn} (обе порядка $N \times N$) симметричны, их элементы непрерывны в Ω и $B_{ij} = B_{ji}$ для любых $i, j = 1, 2, \dots, n-1$.

Матрица $C(x)$ предполагается неотрицательно определенной при любом $x \in \Omega$.

(б) Для любых вещественных векторов $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ ($\xi^k = (\xi_1^k, \dots, \xi_N^k)$, $k = 1, 2, \dots, n$) таких, что $\sum_{i=1}^n |\xi^i|^2 \neq 0$, и любого $x \in \Omega$ справедливо неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x) \xi^i, \xi^j) + (B_{nn}(x) \xi^n, \xi^n) \geq \sum_{i=1}^n (\alpha^i(x) \xi^i, \xi^i). \quad (2)$$

Здесь $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, а $\alpha^i(x)$ — матрица вида

$$\alpha^i(x) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^i(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22}^i(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \alpha_{NN}^i(x) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

при этом, ее элементы $\alpha_{kk}^i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, N$) – непрерывные в Ω функции, и существует постоянная $c_0 > 0$ такая, что $\alpha_{kk}^i \geq c_0 > 0$ при $i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, N$.

Далее, предполагается существование показателей $m_r \geq 0$ ($r = 1, 2, \dots, N$) таких, что справедлива двусторонняя оценка

$$\gamma_1 \leq x_n^{-m_r} \alpha_{rr}^n(x) \leq \gamma_2, \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

с некоторыми положительными постоянными $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$.

(в) Функции $\alpha_{kj}(x, \bar{\xi}), k = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, n$, определяющие оператор M , предполагаются вещественными и принадлежащими пространству $C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n)$.

Введем обозначения

$$A_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{2j}(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \alpha_{Nj}(x) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$J(x; \bar{\xi}^1, \dots, \bar{\xi}^n) \equiv \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x) \bar{\xi}^i, \bar{\xi}^j) + (B_{nn}(x) \bar{\xi}^n, \bar{\xi}^n)$$

и предположим, что для любых векторов $\bar{\xi}^1, \dots, \bar{\xi}^n; \bar{\eta}^1, \dots, \bar{\eta}^n \in \mathbb{R}^n$ и любого $x \in \bar{\Omega}$ справедливы следующие неравенства:

$$\sum_{j=1}^n (A_j(x; \bar{\xi}^1, \dots, \bar{\xi}^n) \bar{\xi}^j, I) \geq c_1 J(x; \bar{\xi}^1, \dots, \bar{\xi}^n),$$

$$\sum_{j=1}^n (A_j(x; \bar{\xi}^1, \dots, \bar{\xi}^n) \bar{\eta}^j, I) \leq c_2 J^{1/2}(x; \bar{\xi}^1, \dots, \bar{\xi}^n) J^{1/2}(x; \bar{\eta}^1, \dots, \bar{\eta}^n), \quad (5)$$

$$\sum_{i,j=1}^n (A_j^i(x; \bar{\tau}^1, \dots, \bar{\tau}^n) \bar{\xi}^i, \bar{\xi}^j) \geq c'_1 J(x; \bar{\xi}^1, \dots, \bar{\xi}^n),$$

$$\sum_{i,j=1}^n (A_j^i(x; \bar{\tau}^1, \dots, \bar{\tau}^n) \bar{\xi}^i, \bar{\eta}^j) \leq c'_2 J^{1/2}(x; \bar{\xi}^1, \dots, \bar{\xi}^n) J^{1/2}(x; \bar{\eta}^1, \dots, \bar{\eta}^n), \quad (6)$$

где c_1, c_2, c'_1, c'_2 – положительные постоянные, а A_j^i – матрицы

$$A_j^i = \begin{pmatrix} \alpha_{1j}^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{2j}^i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \alpha_{Nj}^i \end{pmatrix}$$

с элементами

$$\alpha_{kj}^i(x, \tau^k) = \frac{\partial \alpha_{kj}(x, \tau^k)}{\partial \tau_i^k}, \quad \tau^k = (\tau_1^k, \dots, \tau_n^k).$$

Условие (б) указывает на возможность вырождения символа оператора L , а оценка (4) уточняет его характер. Условие (в) есть условие типа Леви, естественно возникающее в задачах с вырождением.

Для дальнейшего изложения удобно представить границу $\Gamma = \partial\Omega$ в виде $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma'$, $\Gamma \subset \mathbb{R}_+^n$ и обозначить

$$\Gamma_l \equiv \begin{cases} \Gamma', & \text{при } 1 \leq m_l < 2 \\ \Gamma, & \text{при } 0 \leq m_l < 1 \end{cases}, \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

Для системы дифференциальных уравнений (1) поставим следующую смешанную задачу :

$$u|_{t=0} = u^0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (8)$$

$$u_l|_{\Gamma_l} = 0, \quad t \geq 0, \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

§2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Введем следующие обозначения :

$L_2(\Omega)$ – гильбертово пространство N -мерных вещественнозначных вектор-функций, заданных на Ω , с компонентами из $L_2(\Omega)$.

$C_0(\Omega)$ – множество бесконечно дифференцируемых, финитных вектор-функций, определенных на Ω .

Через $(\cdot, \cdot)$ и $\|\cdot\|_0$ обозначим, соответственно, скалярное произведение и норму в $L_2(\Omega)$. Согласно лемме 1 из [3], оператор L , определенный на всюду плотном в $L_2(\Omega)$ множестве $C_0^\infty(\Omega)$, симметричен и положительно определен. Это обстоятельство позволяет ввести на линейном многообразии $C_0^\infty(\Omega)$ новое скалярное произведение :

$$[u, v] = (Lu, v)_0 = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n \left(B_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) + \left(B_{nn}(x) \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial v}{\partial x_n} \right) + (C(x)u, v) \right]. \quad (10)$$

Обозначим через H_L гильбертово пространство, являющееся замыканием линейного многообразия $C_0^\infty(\Omega)$ в метрике, порождаемой скалярным произведением (10). Из легко проверяемой оценки

$$(Lu, u)_0 \geq c \|u\|_0^2$$

с некоторой постоянной $c > 0$ непосредственно следует вложение $H_L \subset L_2(\Omega)$.

Для нормы в H_L введем обозначение $\|\cdot\|_{H_L}$.

Замечание. Неравенство (2) интерпретирует сильную эллиптичность L в подобластях $\Omega_\delta = \Omega \cap \{x_n > \delta\}$ ($\delta > 0$ — любое). Отсюда следует, что норма $\|\cdot\|_{H_L}$ эквивалентна интегралу Дирихле, и, в соответствии с теоремой вложения Соболева, вектор-функции пространства H_L исчезают на $\Gamma_\delta = \Gamma' \cap \{x_n > \delta\} \subset \partial\Omega_\delta$. Вместе с тем, как доказано в лемме 2 из [1], при $0 \leq m_r < 1$ r -ая компонента u_r вектора $u \in H_L$ обращается в нуль на всей границе Γ .

Наконец, обозначим через $L_2(0, T; H_L)$ гильбертово пространство вектор-функций $u(t) : [0, T] \rightarrow H_L$, с нормой

$$\|u\| = \left(\int_0^T \|u(t)\|_{H_L}^2 dt \right)^{1/2}$$

§3. ПОСТРОЕНИЕ АТТРАКТОРОВ

В работе [3] показано, что исследование начально-краевой задачи (1), (8), (9) сводится к эквивалентной задаче Коши для эволюционного операторного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0, \quad (11)$$

$$u|_{t=0} = u^0, \quad (12)$$

где $A = L^{-1}M$. При этом, область определения замыкания оператора A совпадает с пространством H_L .

В этом параграфе доказано существование аттракторов полугрупп, порожденных задачами (11), (12), или эквивалентной задачей (1), (8), (9). Это доказательство существенно опирается на приводимые ниже результаты, полученные

в [1], [3]. Приведем формулировки используемых в дальнейшем результатов.

Теорема А. ([3], теоремы 2, 3) Для любого $u^0 \in H_L$ задача (11), (12) однозначно разрешима в пространстве $L_2(0, T; H_L)$.

Для приводимой ниже общей теоремы из [2] о существовании аттракторов необходимо

Определение 1. Пусть $\{S_t, t \geq 0\}$ – полугруппа операторов S_t , действующих в банаховом пространстве X . Ограниченное, замкнутое в X множество $M \subset X$ называется максимальным аттрактором полугруппы $\{S_t\}$, если

1) для любого ограниченного множества $B \subset X$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(S_t B, M) = 0,$$

где $\text{dist}(F, G) = \sup_{f \in F} \inf_{g \in G} \|f - g\|$ (условие притяжения);

2) $S_t M = M$ при любом $t \geq 0$ (условие инвариантности).

Теорема Б. ([1], теорема 1.1) Пусть полугруппа $\{S_t\}$, $S_t : X \rightarrow X$ удовлетворяет следующим условиям :

а) полугруппа S_t равномерно ограничена, т. е. для любого $R > 0$ существует постоянная $C(R) > 0$ такая, что

$$\|S_t u\| \leq C(R), \quad \text{при } \|u\| \leq R, \quad t > 0;$$

б) существует компактное в X поглощающее множество B_0 , т. е. для любого ограниченного множества $B \subset X$ существует число $T > 0$ такое, что $S_t B \subset B_0$ при $t \geq T$;

в) операторы $S_t : X \rightarrow X$ непрерывны при $t \geq 0$.

Тогда полугруппа $\{S_t\}$ обладает компактным максимальным аттрактором.

Теорема В. ([3], теорема 1) Оператор A , действующий в пространстве H_L , является монотонным, ограниченным и полунепрерывным, и справедлива оценка

$$[Au, u] \geq c \|u\|_{H_L}^2, \quad (13)$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная.

Из теоремы А следует, что задача (11), (12) порождает семейство операторов $\{S_t, t \geq 0\}$, заданных на множестве начальных данных $u^0 \in H_L$ и определяемых следующим образом :

$$S_t u^0 = u(t, x),$$

где $u(t, x)$ – решение задачи. Легко проверить, что семейство $\{S_t\}$ – полугруппа.

Теорема 1. Пусть операторы L и M удовлетворяют условиям а) - в) теоремы Б. Тогда полугруппа $\{S_t\}$, порожденная задачей (1), (8), (9) обладает аттрактором, компактным в пространстве H_L .

Доказательство. Пусть $T > 0$ фиксировано и

$$U_0 = \{u^0 \in H_L, \|u^0\|_{H_L} \leq K < +\infty\}$$

– произвольное ограниченное множество в H_L . Подставляя решение $u(t, x)$ задачи (1), (8), (9) в уравнение (11) и умножая (скалярно в H_L) обе части последнего тождества на $u(t, x)$, получим

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}, u \right] + [Au, u] = 0,$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u\|_{H_L}^2 + [Au, u] = 0. \quad (14)$$

Далее, подставляя оценку (13) в тождество (14), будем иметь

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u\|_{H_L}^2 + c \|u\|_{H_L}^2 \leq 0.$$

Применяя неравенство Гронуолла, отсюда получим необходимую оценку :

$$\|S_t u^0\|_{H_L}^2 = \|u(t, x)\|_{H_L}^2 \leq \|u(0)\|_{H_L}^2 e^{-2ct} = \|u^0\|_{H_L}^2 e^{-2ct}. \quad (15)$$

Из (15) непосредственно следует равномерная ограниченность семейства операторов $\{S_t\}$ при $t \geq 0$.

Из той же оценки очевидным образом вытекает существование в пространстве H_L компактного поглощающего множества.

Таким образом, условия а) и б) теоремы Б выполнены, и для завершения доказательства остается проверить справедливость условия в). Пусть u^{10} и u^{20} — произвольные элементы пространства H_L , а $u^1(t, x)$, $u^2(t, x) \in L_2(0, T; H_L)$ — соответствующие им решения задачи (11), (12). Тогда имеет место тождество

$$\frac{\partial}{\partial t}(u^1 - u^2) + Au^1 - Au^2 = 0.$$

Умножив (скалярно в H_L) обе части этого тождества на $u^1 - u^2$ и интегрируя по t в промежутке $t \in [0, T]$, получим

$$\frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \|u^1 - u^2\|_{H_L}^2 dt + \int_0^T [Au^1 - Au^2, u^1 - u^2] dt = 0.$$

Отсюда легко следует, что

$$\|u^1(T, x) - u^2(T, x)\|_{H_L}^2 = \|u^1(0, x) - u^2(0, x)\|_{H_L}^2 - 2 \int_0^T [Au^1 - Au^2, u^1 - u^2] dt. \quad (16)$$

В силу теоремы В, оператор A , действующий в H_L , монотонен. Следовательно, из (16) приходим к оценке $\|u^1(T, x) - u^2(T, x)\|_{H_L} \leq \|u^1(0, x) - u^2(0, x)\|_{H_L}$, или $\|S_T u^{10} - S_T u^{20}\|_{H_L} \leq \|u^{10} - u^{20}\|_{H_L}$, и, стало быть, операторы S_t непрерывны при $t \geq 0$. Утверждение теоремы 1 теперь непосредственно следует из теоремы Б.

§4. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

В этом параграфе доказано существование функции Ляпунова для систем типа Соболева (1) и описаны аттракторы полугрупп, порожденных этим классом операторов. Предварительно приведем некоторые определения (см. [1], [2]).

Определение 2. Пусть $\{S_t\}$ — полугруппа операторов, действующих в банаховом пространстве X . Точка $z \in X$ называется неподвижной точкой полугруппы $\{S_t, t \geq 0\}$, если $S_t z = z$ для любого $t \geq 0$.

Определение 3. Пусть $Y \subset X$ — слабо инвариантное множество полугруппы $\{S_t\}$, т. е. $S_t Y \subset Y$ при любом $t \geq 0$. Непрерывный на Y функционал Φ :

$Y \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется функцией Ляпунова полугруппы $\{S_t\}$ на множестве Y , если выполнены следующие условия :

- 1) для любого $u \in Y$ функция $\Phi(S_t u)$ переменной t убывает при $t \geq 0$;
- 2) если $\Phi(S_t u) = \Phi(S_0 u)$ при некотором $t > 0$, то $S_0 u$ является неподвижной точкой полугруппы $\{S_t\}$.

Теорема Г. ([1], теоремы 10.1, 10.2) Пусть полугруппа $\{S_t\}$ обладает компактным аттрактором M и функцией Ляпунова Φ на множестве M . Далее, пусть множество N неподвижных точек $\{S_t\}$ конечно и при любом $u \in M$ функция $\Phi(S_t u)$ непрерывна по t в X . Тогда

$$M = \bigcup_{z \in N} P(z),$$

где $P(z)$ — неустойчивое, инвариантное многообразие, выходящее из точки z .

Относительно понятия неустойчивого, инвариантного многообразия см. [1], определение 10.2.

Предположим, что коэффициенты a_{kj} , задающие оператор M , имеют вид

$$a_{kj}(x, \bar{\tau}^k) = \frac{\partial a_k(x, \bar{\tau}^k)}{\partial \tau_j^k}, \quad \bar{\tau}^k = (\tau_1^k, \dots, \tau_n^k), \quad j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, N, \quad (17)$$

где функции $a_k \in C^3(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n)$. В пространстве H_L рассмотрим функционал

$$\Phi(u) = \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} a_k(x, \nabla u_k) dx, \quad (18)$$

который, как будет показано ниже, является функцией Ляпунова системы (1).

Теорема 2. Пусть выполнены предположения теоремы 1, а также условие (17). Тогда функционал Φ , задаваемый выражением (18), является функцией Ляпунова полугруппы $\{S_t\}$, порожденной задачей (1), (8), (9).

Доказательство. Обозначим через M аттрактор полугруппы $\{S_t\}$, порожденной задачей (1), (8), (9). В силу теоремы 1, множество M компактно в пространстве H_L . В соответствии с определением 3 и теоремой Г, проверим вначале непрерывность функционала Φ на множестве M . С этой целью, для произвольных

$u, v \in \mathcal{M}$ рассмотрим разность

$$\begin{aligned}\Phi(u) - \Phi(v) &= \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} [a_k(x, \nabla u_k) - a_k(x, \nabla v_k)] dx = \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau_j^k} a_k(x, \nabla w_k) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_k - v_k) dt dx = \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \int_0^1 a_{kj}(x, \nabla w_k) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_k - v_k) dt dx = \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \int_0^1 \left[A_j \left(x; \frac{\partial w}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_n} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (u - v), I \right] dx,\end{aligned}$$

где $w_k = v_k + t(u_k - v_k)$, $k = 1, \dots, N$. В силу условия (5), с некоторой постоянной

$c_2 > 0$

$$\begin{aligned}|\Phi(u) - \Phi(v)| &\leq \\ &\leq c_2 \int_{\Omega} J^{1/2} \left(x; \frac{\partial w}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_n} \right) J^{1/2} \left(x; \frac{\partial(u-v)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(u-v)}{\partial x_n} \right) dx \leq \\ &\leq c_2 \left[\int_{\Omega} J \left(x; \frac{\partial w}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_n} \right) dx \right]^{1/2} \left[\int_{\Omega} J \left(x; \frac{\partial(u-v)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(u-v)}{\partial x_n} \right) dx \right]^{1/2} \quad (19)\end{aligned}$$

Далее, заметим, что из определения нормы в пространстве H_L легко следует, что

с некоторой постоянной $c > 0$

$$\left[\int_{\Omega} J \left(x; \frac{\partial w}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_n} \right) dx \right]^{1/2} \leq c \|u\|_{H_L}, \text{ при любом } u \in H_L. \quad (20)$$

Из (19) и (20) следует, что

$$|\Phi(u) - \Phi(v)| \leq c_3 \|w\|_{H_L} \|u - v\|_{H_L} \leq c_4 (\|u\|_{H_L} + \|v\|_{H_L}) \|u - v\|_{H_L}. \quad (21)$$

Поскольку $\mathcal{M}$ ограничено, из (21) вытекает, что $|\Phi(u) - \Phi(v)| \leq c_5 \|u - v\|_{H_L}$

с некоторой постоянной $c_5 > 0$. Тем самым, непрерывность функционала Φ

доказана. Легко видеть, что функционал Φ дифференцируем в смысле Фреше.

Производная $\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}$ действует на элемент $v^k = (0, \dots, 0, v^k, 0, \dots, 0)$ по формуле

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}, v^k \right\rangle = [A u, v^k]. \quad (22)$$

В самом деле

$$\begin{aligned}\Phi(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k + v_k, u_{k+1}, \dots, u_N) - \Phi(u_1, u_2, \dots, u_N) &= \\ &= \int_{\Omega} [a_k(x, \nabla u_k + \nabla v_k) - a_k(x, \nabla u_k)] dx.\end{aligned}$$

Выделяя линейную часть, находим

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}, v^k \right\rangle &= \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} a_{kj}(x, \nabla u_k) \frac{\partial v^k}{\partial x_j} dx = \\ &= - \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{kj}(x, \nabla u_k) v^k dx = \int_{\Omega} (Mu, v^k) dx = [Au, v^k]. \end{aligned}$$

Пусть $u \in M$ и $u^k \equiv (0, \dots, 0, u_k, 0, \dots, 0)$. В силу (22) и тождества (11)

$$\partial_t \Phi(u(t, x)) = \sum_{k=1}^N \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}, \frac{\partial u^k}{\partial t} \right\rangle = \sum_{k=1}^N \left[\mathcal{A}, \frac{\partial u^k}{\partial t} \right] = \left[\mathcal{A}, \frac{\partial u}{\partial t} \right] = -\|Au\|_{H_L}^2 \leq 0.$$

Таким образом, доказано, что для любого $u \in M$ функция $\Phi(S_t u^0)$ убывает по t при $t \geq 0$. Для завершения доказательства теоремы остается показать, что множество решений системы $Au = 0$ совпадает с множеством неподвижных точек полугруппы $\{S_t\}$. С этой целью предположим, что при некотором $t = t_0 > 0$

$$\Phi(u(t_0, x)) = \Phi(u(0, x)) = \Phi(u^0).$$

Имеем

$$0 = \Phi(u(t_0, x)) - \Phi(u^0) = \int_0^{t_0} \partial_t \Phi(u(t, x)) dt = - \int_0^{t_0} \|Au\|_{H_L}^2 dt,$$

откуда следует, что $Au = 0$ при $t \in [0, t_0]$. Обозначим $z = u^0(x)$. Поскольку $Au^0 = Au(0, x)$ и $\frac{\partial u^0}{\partial t} = 0$, $z(x)$ является решением задачи (11), (12), стало быть $S_t z = z$, и доказательство завершено.

ABSTRACT. The paper proves the existence of attractors of semigroups generated by initial-boundary problems for a class of Sobolev type degenerate quasilinear systems. A Lyapunov function for this systems is constructed and the structure of attractors of semigroups generated by these operators is described.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Бабин, М. И. Вишик, "Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности", УМН, т. 38, № 4 (232), стр. 133 – 187, 1983.
2. А. В. Бабин, М. И. Вишик, Аттракторы эволюционных уравнений, Москва, Наука, 1989.
3. Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян, "Начально-краевая задача для вырождающихся нелинейных систем типа Соболева", Известия НАН Армении, Математика, т. 28, № 3, стр. 18 – 30, 1993.

ФОРМУЛЫ ТИПА ГОХБЕРГА-ЛЕРЕРА-РОДМАНА ДЛЯ ЧАСТНЫХ ИНДЕКСОВ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ

А. Г. Камалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 29, № 5, 1994

В статье рассмотрена правая обобщенная факторизация Винера-Хопфа ограниченной, измеримой матрицы-функции $W = \Lambda V$, где $\Lambda = \text{diag}\{l^{X_1}, \dots, l^{X_n}\}$ с $\chi_1, \dots, \chi_n \in \mathbb{Z}$, а V допускает каноническую факторизацию $V = V_- V_+$. Найдены явные формулы для частных индексов и множителей факторизации W . Эти формулы выражают частные индексы в терминах первых коэффициентов $\nu = \max_{1 \leq i < j \leq n} |\chi_i - \chi_j|$ ряда Тейлора $V_-(z)$ в точке $z = \infty$. Описана зависимость частных индексов от матрицы-функции V .

В частности, полученные формулы могут быть применены в важном с точки зрения приложений случае треугольных матриц-функций с факторизуемыми диагональными элементами.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть γ – положительно ориентированный, замкнутый, спрямляемый контур в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограничивающий область D_+ ($0 \in D_+$). Через D_- будем обозначать дополнение к $D_+ \cup \gamma$ в расширенной плоскости $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Пусть I – единичный оператор, а S – оператор сингулярного интегрирования вдоль γ , действующие в пространстве $L_p = L_p(\gamma)$:

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \int_{\gamma} \frac{1}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau, \quad \varphi \in L_p, \quad 1 < p < \infty.$$

Далее, дополнительно будем предполагать, что контур γ таков, что оператор S ограничен в L_p . Известно, что это верно, в частности, для гладких, слабо липшицевых контуров. Здесь и всюду ниже для любого семейства L через $L^n (L^{n \times n})$ будем обозначать множество всех n -мерных векторов (матриц порядка

Данное исследование частично финансировано грантом № RY5000 Международного научного фонда

$n \times n$) с элементами из L . Рассмотрим проекторы $P_{\pm} = 1/2(I \pm S)$ и классы функций $L_p^+ = P_+ L_p$, $L_p^- = P_- L_p + \text{const.}$ Будем полагать, что операторы $P_{\pm}$ действуют в пространстве L_p^n покомпонентно. Оператор умножения на матрицу-функцию A будем обозначать той же буквой A .

Напомним, что под правой факторизацией Винера-Хопфа (WH-факторизацией) матрицы-функции $W \in L_{\infty}^{n \times n}$ относительно контура γ в пространстве L_p понимается представление

$$W(t) = W_-(t) \Lambda_{\bar{\kappa}}(t) W_+(t), \quad t \in \gamma, \quad (1)$$

где

$W_+ \in [L_q^+]^{n \times n}$, $W_+^{-1} \in [L_p^+]^{n \times n}$, $W_- \in [L_p^-]^{n \times n}$, $W_-^{-1} \in [L_q^-]^{n \times n}$, $q = \frac{p}{p-1}$, $\Lambda_{\bar{\kappa}}(t) = \text{diag}[t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}]$, а $\kappa_1 \leq \dots \leq \kappa_n$ — целые числа, называемые *правыми частными индексами* W . Если оператор $W_- P_+ W_-^{-1}$ ограничен в L_p^n , то (1) называется *обобщенной правой факторизацией* (GWH-факторизацией) матрицы-функции W . Факторизация называется *канонической*, если все частные индексы равны нулю (см. [1], [2]). Ниже рассмотрены только правые обобщенные факторизации, поэтому термин "правая" будем опускать.

Явные GWH-факторизации имеют важные применения в теориях сингулярных интегральных уравнений, уравнений Винера-Хопфа и при интегрировании нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи (см., напр., [1 — 5]). Особый интерес представляет вычисление частных индексов. В общем случае явных GWH-факторизаций в настоящее время неизвестно. Поэтому представляет интерес нахождение классов матриц-функций с явной GWH-факторизацией. Существенное продвижение в этом направлении было осуществлено И. Гохбергом, Л. Лерером и Л. Родманом. Им в частности удалось получить [6, 7] явные формулы для частных индексов матричного полинома в терминах рангов конечного числа блочно-ганкелевых (теплицевых) ма-

триц, коэффициенты которых выписываются с помощью конечного числа степенных моментов некоторой известной матрицы-функции. Формулы типа Гохберга-Лерера-Родмана (GLR) для гильдеровских треугольных матриц-функций второго порядка, а также непрерывных, обратимых матриц-функций, допускающих мероморфное продолжение в D_+ , получены В. М. Адуковым [8, 9]. Отметим, что во всех указанных работах рассматривалась классическая задача WH -факторизации, т. е. факторы и их обратные предполагались непрерывными матрицами-функциями.

В данной работе рассматривается класс матриц-функций W , представимых в виде

$$W(t) = \Lambda_{\bar{x}}(t)V(t), \quad t \in \gamma, \quad (2)$$

где предполагается, что $\Lambda_{\bar{x}}(t) = \text{diag}[t^{x_1}, \dots, t^{x_n}]$, $\bar{x} = \text{col}[x_i]_{i=1}^n \in \mathbb{Z}^n$, и что матрицы-функции V допускают канонические GWH -факторизации: $V = V_- V_+$. Решена задача GWH -факторизации W в терминах матрицы-функции V , что эквивалентно WH -факторизации матрицы-функции $\Lambda_{\bar{x}}V_-$, допускающей мероморфное продолжение на D_- , которое, вообще говоря, не ограничено на γ . Специфика последней матрицы-функции (точные значения нулей и полюсов) позволяет выявить для частных индексов W экономные формулы типа GLR и в терминах нулевых пространств соответствующих матриц-функций построить точные формулы для факторов $W_{\pm}$.

Важным примером матриц-функций, допускающих представление (2), являются треугольные матрицы-функции с факторизуемыми диагональными элементами. Для них числа $x_1, \dots, x_n$ совпадают с индексами диагональных элементов, а каноническая GWH -факторизация матрицы-функции V , в силу известных результатов И. Гохберга и М. Г. Крейна [3], сводится к решению конечного числа скалярных задач Римана (более подробно см. [1], гл. 4 и [2], гл. 4).

Автор выражает благодарность А. Б. Нерсисяну за полезные советы и

поддержку при выполнении работы.

§1 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1°. Пусть матрица-функция $W \in L_{\infty}^{n \times n}$ определена равенством (2). Обозначим

$$\chi_0 = \chi_1 + \dots + \chi_n, \quad \Delta = \{1, 2, \dots, n\}, \quad \nu_- = \min_{i \in \Delta} \chi_i, \quad \nu_+ = \max_{i \in \Delta} \chi_i, \quad \nu = \nu_+ - \nu_-,$$

$$\Delta_m^1 = \{i \in \Delta; \chi_i < m\}, \quad \Delta_m^2 = \Delta \setminus \Delta_m^1, \quad m \in \mathbb{Z},$$

и рассмотрим следующие матрицы :

$$v_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} t^{-m-1} V_-(t) dt, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad u_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} t^{-m-1} V_-^{-1}(t) dt, \quad m \in \mathbb{Z},$$

$$w_{m,s}^{(j)} = \sum_{i=0}^{\nu_+ - j - m} v_{-i} u_{-(\nu_+ + s - m - j - i)},$$

$$j = \nu_- + 1, \dots, \nu_+ - 1, \quad m = 1, \dots, \nu_+ - j, \quad s = 1, \dots, j - \nu_-.$$

Если Δ_1 и Δ_2 - некоторые подмножества Δ и $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, то через $[A]_{\Delta_1 \times \Delta_2}$ обозначим матрицу, полученную из матрицы A вычеркиванием всех строк с номерами из $\Delta \setminus \Delta_1$ и всех столбцов с номерами из $\Delta \setminus \Delta_2$. Обозначим через $\text{card } B$ число элементов множества B .

Теорема 1. Матрица-функция W , определенная равенством (2), допускает GWH-факторизацию и ее частные индексы κ_i ($i \in \Delta$) можно вычислить по одной из следующих формул :

$$\kappa_i = \nu_- + \text{card} \{j : \alpha_{s,j+1} - \alpha_{s,j} < i; j = \nu_-, \dots, \nu_+ - 1\}, \quad s = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где $\alpha_{s,\nu_-} = 0$, $\alpha_{s,\nu_+} = n\nu_+ - \chi_0$, $\alpha_{s,j} = \dim \text{Ker } K_{s,j}$, $j = \nu_- + 1, \dots, \nu_+ - 1$, $s = 1, 2, 3$, а матрицы $K_{s,j}$ определены формулами

$$K_{1,j} = \left\| [w_{m,s}^{(j)}]_{\Delta_{\nu_-+1-m}^2 \times \Delta_{j+1-s}^1} \right\|_{s=1, \dots, j-\nu_-}^{m=1, \dots, \nu_+-j} \quad (4)$$

$$K_{2,j} = \left\| [u_{m-s}]_{\Delta \times \Delta_{\nu_+ + 1 - s}^1} \right\|_{s=1, \dots, \nu_-}^{m=1, \dots, \nu_+ - j} \quad (5)$$

$$K_{3,j} = \left\| [v_{m-s-\nu_++j}] \Delta_{\nu_++1-m}^2 \times \Delta \right\|_{s=1, \dots, j-\nu_-}^{m=1, \dots, \nu} \quad (6)$$

Следствие. Формулы (3) могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} \kappa_i &= \nu_- + \text{card}\{j : r_{1,j} - r_{1,j+1} + \xi_{i+1} < i; j = \nu_-, \dots, \nu_+ - 1\} = \\ &= \nu_- + \text{card}\{j : r_{2,j} - r_{2,j+1} < i; j = \nu_-, \dots, \nu_+ - 1\} = \\ &= \nu_- + \text{card}\{j : r_{3,j} - r_{3,j+1} + n < i; j = \nu_-, \dots, \nu_+ - 1\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\xi_j = \text{card } \Delta_{1,j}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$r_{1,\nu_-} = r_{3,\nu_-} = r_{1,\nu_+} = r_{2,\nu_+} = 0, \quad r_{2,\nu_-} = n\nu_+ - \chi_0, \quad r_{3,\nu_+} = \chi_0 - n\nu_-,$$

$$r_{s,j} = \text{rank } K_{s,j}, \quad s = 1, 2, 3, \quad j = \nu_- + 1, \dots, \nu_+ - 1.$$

Замечание 1. В случае $\nu = 0$ вторые слагаемые в (3) и (7) равны нулю.

Замечание 2. Фактор V_- можно подобрать таким образом, чтобы $V_-(\infty) = E$ (т. е. $v_0 = u_0 = E$, где E — единичная матрица порядка $n \times n$). Тогда в формулах (3) будут участвовать $\nu - 1$ степенных моментов и столько же матриц $K_{s,j}$.

Если для матрицы-функции применимы как формулы (3), так и результаты работы [9], то в формулах типа GLR, полученных в [9], требуется знание $2(|\chi_1| + \dots + |\chi_n|) + 1$ моментов и используются столько же матриц существенно больших размерностей.

2°. Для каждого $\bar{\kappa} = \text{col}[\kappa_i]_{i=1}^n \in \mathbb{Z}^n$ введем функцию “распределения”

$$\mu_{\bar{\kappa}} : \mathbb{Z} \mapsto N \cup \{0\} : \mu_{\bar{\kappa}}(j) = \text{card} \{i \in \Delta : \kappa_i = j\}.$$

Определим отображение $\varphi_j : \mathbb{C}^{n(j-\nu_-)} \mapsto L_p^n$ ($j > \nu_-$) по формуле

$$\varphi_j y = \sum_{m=0}^{j-\nu_- - 1} y_m t^m,$$

где $y = \text{col}[y_m]_{m=0}^{j-\nu_- - 1} \in \mathbb{C}^{n(j-\nu_-)}$, $y_m \in \mathbb{C}^n$, $m = 0, \dots, j - \nu_- - 1$. Для матриц

$K_{3,j}$ ($j > \nu_-$), определенных равенством (6), рассмотрим семейства множеств

$N_j = \{\varphi_j y : y \in \text{Ker } K_{3,j}\}$ ($j > \nu_-$). При $j \leq \nu_-$ будем считать, что $N_j = \{0\}$.

Теорема 2. Пусть частные индексы $\kappa_1 \leq \dots \leq \kappa_n$ матрицы-функции W , определенной равенством (2), принимают значения $\eta_1 < \dots < \eta_s$ и $\mu_{\bar{\kappa}}(\eta_k) = \zeta_k$ ($k = 1, \dots, s$). Тогда множества N_j ($j \in \mathbb{Z}$) обладают следующими свойствами:

$$A. \quad N_{j+1} = N_j + tN_j, \quad j \in \mathbb{Z} \setminus \{\eta_1, \dots, \eta_s\};$$

$$B. \quad N_{\eta_m+1} = (N_{\eta_m} + tN_{\eta_m}) \oplus M_m, \quad \dim M_m = \zeta_m, \quad m = 1, \dots, s.$$

Если $h_{m,1}, \dots, h_{m,\zeta_m}$ — произвольный базис пространства M_m ($m = 1, \dots, s$), $U = [h_{1,1}, \dots, h_{1,\zeta_1}, h_{2,1}, \dots, h_{s,\zeta_s}]$, $W_+ = U^{-1}V_+$ и $\Lambda_{\bar{\kappa}}(t) = \text{diag}[t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}]$, то представление $W = W_- \Lambda_{\bar{\kappa}} W_+$ является GWH-факторизацией матрицы-функции W .

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

1°. Пусть $\mathcal{E}_{i,m} = [E]_{\Delta \times \Delta_m} \cdot [E]_{\Delta_m \times \Delta}$ ($i = 1, 2; m \in \mathbb{Z}$). Рассмотрим семейство конечных проекторов:

$$\begin{aligned} \pi_j y &= \sum_{s=j-\nu_+}^{-1} y_s t^s, \quad j < \nu_+, \\ \pi_{ij} y &= \sum_{s=j-\nu_+}^{-1} \mathcal{E}_{i,j-s} y_s t^s, \quad i = 1, 2, \quad j < \nu_+, \\ \sigma_j y &= \sum_{s=0}^{j-\nu_- - 1} y_s t^s, \quad j > \nu_-, \\ \sigma_{0j} y &= \sum_{s=0}^{\nu_+ - j - 1} \mathcal{E}_{2,j+s+1} y_s t^s, \quad j < \nu_+, \\ \sigma_{ij} y &= \sum_{s=0}^{j-\nu_- - 1} \mathcal{E}_{i,j-s} y_s t^s, \quad i = 1, 2, \quad j > \nu_-, \end{aligned}$$

где

$$y_s = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} t^{-s-1} y(t) dt, \quad u \quad y \in L_p^u, \quad s \in \mathbb{Z}.$$

Будем считать, что операторы $\sigma_{0j}, \pi_j, \pi_{ij}$ ($i = 1, 2; j \geq \nu_+$) и σ_j, σ_{ij} ($i = 1, 2; j \leq \nu_-$) тождественно равны нулю. Введем в рассмотрение пространства

$$X_j = \text{Im } \pi_j, \quad X_{ij} = \text{Im } \pi_{ij}, \quad Y_j = \text{Im } \sigma_j, \quad Y_{0j} = \text{Im } \sigma_{0j}, \quad Y_{ij} = \text{Im } \sigma_{ij},$$

$$i = 1, 2; \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Для $U \in L_{\infty}^{n \times n}$ через $T_1(U)$ и $T_2(U)$, соответственно, обозначим сингулярные операторы $T_1(U) = P_+ U + P_-$ и $T_2(U) = U P_+ + P_-$. Далее, положим $\Lambda_j = t^{-j} \Lambda_{\bar{x}}$ ($j \in \mathbb{Z}$). Легко видеть, что $T_1(\Lambda_j^{-1})$ является обобщенно-обратным к $T_1(\Lambda_j)$, т. е.

$$T_1(\Lambda_j)T_1(\Lambda_j^{-1})T_1(\Lambda_j) = T_1(\Lambda_j), \quad T_1(\Lambda_j^{-1})T_1(\Lambda_j)T_1(\Lambda_j^{-1}) = T_1(\Lambda_j^{-1}).$$

Приведем некоторые элементарные свойства операторов $T_1(\Lambda_j^{\pm 1})$ и ганкелева оператора $H_j = P_+ \Lambda_j P_-$ ($j \in \mathbb{Z}$):

$$\sigma_{0j}T(\Lambda_j) = T(\Lambda_j)\sigma_{1j} = \sigma_{1j}T(\Lambda_j^{-1}) = T_1(\Lambda_j^{-1})\sigma_{0j} = 0, \quad (8)$$

$$H_j \Lambda_j^{-1} P_- = P_+ \Lambda_j^{-1} H_j = 0, \quad (9)$$

$$H_j = H_j \Lambda_j^{-1} H_j = \sigma_{0j} H_j = H_j \pi_{2j} = \Lambda_j \pi_{2j}, \quad (10)$$

$$\sigma_{0j} = H_j \Lambda_j^{-1} - H_j = H_j \Lambda_j^{-1} \sigma_{0j}. \quad (11)$$

Пусть $W \in L_{\infty}^{n \times n}$ определена равенством (2) и $W_j = t^{-j} W$ ($j \in \mathbb{Z}$). Рассмотрим семейство операторов

$$\Psi_j = I - P_+ W_j - P_- V P_+, \quad \Phi_j = T_2^{-1}(V) \sigma_{1j} T_2(V), \quad R_j = T_1(\Lambda_j) T_2(V), \quad j \in \mathbb{Z},$$

отметив, что для обобщенно-обратных операторов последнего семейства имеем $R_j^{(-1)} = T_2^{-1}(V) T_1(\Lambda_j^{-1})$. Справедливость следующих тождеств проверяется непосредственно:

$$T_1(W_j) P_+ + H_j = P_+ R_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (12)$$

$$\Psi_j P_+ = I + H_j - R_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (13)$$

$$R_j \Psi_j - H_j \Psi_j = \Psi_j T_1(W_j), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (14)$$

$$R_j R_j^{(-1)} = I - \sigma_{0j}, \quad R_j^{(-1)} R_j = I - \Phi_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (15)$$

Приведем теперь некоторые элементарные свойства оператора умножения на аналитическую в D_- матрицу-функцию.

Предложение 1. Пусть $U^{\pm 1} \in [L_p^-]^{n \times n}$. Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} \pi_j U P_- &= \pi_j U \pi_j, & P_+ U \sigma_j &= \sigma_j U \sigma_j, & \pi_j U \pi_j U^{-1} \pi_j &= \pi_j, \\ \sigma_j U \sigma_j U^{-1} \sigma_j &= \sigma_j, & \pi_j U \pi_j U^{-1} \sigma_j &= -\pi_j U \sigma_j U^{-1} \sigma_j, & j \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2°. Рассмотрим следующее семейство операторов

$$A_{1,2}(1, j) = H_j : X_{2,j} \mapsto L_p^n, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$A_{2,1}(1, j) = \sigma_{1,j} T_2(V) \Psi_j : L_p^n \mapsto Y_{1,j}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$A_{2,2}(1, j) = -\sigma_{1,j} T_2(V) H_j : X_{2,j} \mapsto Y_{1,j}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$A_{1,2}(2, j) = -H_j V_- : X_j \mapsto L_p^n, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$A_{2,1}(2, j) = \begin{bmatrix} \pi_j T_2^{-1}(V) A_{21}(1, j) \\ -A_{21}(1, j) \end{bmatrix} : L_p^n \mapsto \begin{matrix} X_{1,j} \\ \oplus \\ Y_{1,j} \end{matrix}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$A_{2,2}(2, j) = \begin{bmatrix} \pi_j (I - T_2^{-1}(V) A_{22}(1, j)) V_- \\ A_{22}(1, j) \pi_{2,j} V_- \end{bmatrix} : X_j \mapsto \begin{matrix} X_{1,j} \\ \oplus \\ Y_{1,j} \end{matrix}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$A_{1,2}(3, j) = [-H_j; H_j V_- \sigma_j V_-^{-1}] : \begin{matrix} X_{2,j} \\ \oplus \\ Y_{2,j} \end{matrix} \mapsto L_p^n, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$A_{2,1}(3, j) = \sigma_j V_-^{-1} \sigma_{1,j} A_{2,1}(1, j) : L_p^n \mapsto Y_j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$A_{2,2}(3, j) = [-\sigma_j V_-^{-1} A_{22}(1, j); \sigma_j V_-^{-1} \sigma_{2,j} - \sigma_j V_-^{-1} A_{22}(1, j) V_- \pi_j V_-^{-1} \sigma_{2,j}] : \begin{matrix} X_{2,j} \\ \oplus \\ Y_{2,j} \end{matrix} \mapsto Y_j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$B_{11}(i, j) = (I + P_+ R_j^{(-1)} \Psi_j) : L_p^n \mapsto L_p^n, \quad i = 1, 2, 3, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$B_{12}(1, j) = P_+ T_2^{-1}(V) : Y_{1,j} \mapsto L_p^n, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$B_{21}(1, j) = \pi_{2,j} (R_j^{(-1)} + \Lambda_j^{-1} \sigma_{0,j}) \Psi_j : L_p^n \mapsto X_{2,j}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$B_{1,2}(2, j) = [0; -B_{12}(1, j)] : \begin{matrix} X_{1,j} \\ \oplus \\ Y_{1,j} \end{matrix} \mapsto L_p^n, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$B_{21}(2, j) = -\pi_j V_-^{-1} B_{21}(1, j) : L_p^n \mapsto X_j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$B_{12}(3, j) = B_{12}(1, j) \sigma_{1,j} V_- \sigma_j : Y_j \mapsto L_p^n, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$B_{2,1}(3, j) = \begin{bmatrix} -B_{21}(1, j) \\ 0 \end{bmatrix} : \begin{matrix} X_{2,j} \\ \oplus \\ Y_{2,j} \end{matrix} \mapsto L_p^n, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$\mathcal{K}_{1,j} = \pi_{2,j} V_- \pi_j V_-^{-1} : Y_{1,j} \mapsto X_{2,j}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$\mathcal{K}_{2,j} = [\pi_j V_-^{-1}; \pi_j V_-^{-1}] : \begin{matrix} X_{1,j} \\ \oplus \\ Y_{1,j} \end{matrix} \mapsto X_j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$\mathcal{K}_{3,j} = \begin{bmatrix} \pi_{2,j} V_- \\ \sigma_{2,j} V_- \end{bmatrix} : Y_j \mapsto \begin{matrix} X_{2,j} \\ \oplus \\ Y_{2,j} \end{matrix}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Предложение 2. Для любого $j \in \mathbb{Z}$ справедливы следующие тождества :

$$\begin{bmatrix} T_1(W_j) & A_{12}(i, j) \\ A_{21}(i, j) & A_{22}(i, j) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11}(i, j) & B_{12}(i, j) \\ B_{21}(i, j) & K_{ij} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (16)$$

Проверка этих тождеств основана на равенствах (8) – (15) и предложении

1. Заметим, что равенства (16) означают, что для всех $j \in \mathbb{Z}$ оператор $T_1(W_j)$ матрично сцеплен с операторами K_{ij} , $i = 1, 2, 3$ (см. [10]).

Доказательство теоремы 1. Из известной теоремы Симоненко о связи оператора $T_1(W_j)$ с GWH-факторизацией W_j (см. [11], либо [1, 2]) следует, что

$$\mu_{\bar{\kappa}}(j) = \dim \operatorname{Ker} T_1(W_{j+1}) - 2 \dim \operatorname{Ker} T_1(W_j) + \dim \operatorname{Ker} T_1(W_{j-1})$$

(более подробно см. [12]). С другой стороны, из (16) следует, что

$\dim \operatorname{Ker} T_1(W_j) = \dim \operatorname{Ker} K_{sj}$ (см. [10]) для $j \in \mathbb{Z}$, $s = 1, 2, 3$. Отсюда имеем

$$\mu_{\bar{\kappa}}(j) = \alpha_{s,j+1} - 2\alpha_{s,j} + \alpha_{s,j-1}. \quad (17)$$

Нетрудно убедиться, что формулы (17) эквивалентны формулам (3), тем самым, теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. В силу свойств матричного сцепления (см. [10]) из предположений 1 и 2 следует, что

$$\operatorname{Ker} T_1(W_j) = B_{12}(3, j)(\operatorname{Ker} K_{3j}) = V_+ \sigma_j V_-^{-1} \sigma_{1j} V_- (\operatorname{Ker} K_{3j}).$$

Однако, для $x \in \operatorname{Ker} K_{3j}$ имеем $\sigma_{2j} V_- \sigma_j x = 0$. Отсюда, пользуясь предложением 1, получаем, что $\operatorname{Ker} T_1(W_j) = V_+^{-1}(\operatorname{Ker} K_{3j})$. Доказательство теоремы следует теперь из надлежащих свойств множеств $\operatorname{Ker} T_1(W_j)$ (более подробно см. [12], §4).

Замечание 3. Множества N_j ($j = \nu_- + 1, \dots, \nu_+ - 1$) можно описать с помощью ядер матриц K_{1j} и K_{2j} . Действительно, из равенств

$$\operatorname{Ker} T_1(W_j) = B_{12}(1, j)(\operatorname{Ker} K_{1j}) = V_+ \sigma_j V_-^{-1}(\operatorname{Ker} K_{3j}), \quad j = \nu_- + 1, \dots, \nu_+ - 1$$

следует, что $N_j = \{\varphi_j F_j y : y \in \operatorname{Ker} K_{1j}\}$, где

$$F_j = \left\| [u_{m-s}]_{\Delta \times \Delta_{j+1-s}^1} \right\|_{m,s=1,\dots,j-\nu_-}$$

Далее, заменяя каждый вектор $y = \text{col } [y_m]_{m=0}^{\nu-1}$, $y_m \in \mathbb{C}^{\nu_+ - m}$ вектором

$\tilde{y} = \text{col } [y_m]_{m=\nu_+ - j}^{\nu-1}$, аналогичным образом легко доказать, что $N_j = \{\varphi_j F_j \tilde{y} : y \in \text{Ker } K_{2j}\}$.

§3. ЗАВИСИМОСТЬ ЧАСТНЫХ ИНДЕКСОВ ОТ $V(t)$

В этом параграфе дано описание множества возможных частных индексов матрицы-функции W , определенной равенством (2), в случае, когда $\Lambda_{\mathcal{X}}$ фиксировано, а $V \in L_{\infty}^{n \times n}$ допускает каноническую GWH-факторизацию. Для каждого $\bar{\kappa} \in \mathbb{Z}^n$ определим функции $\alpha_{\bar{\kappa}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ и $\beta_{\bar{\kappa}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ следующим образом :

$$\begin{aligned} \alpha_{\bar{\kappa}}(j) &= \sum_{\kappa_i < j} (j - \kappa_i) = \sum_{m < j} (j - m) \mu_{\bar{\kappa}}(m), \\ \beta_{\bar{\kappa}}(j) &= \sum_{\kappa_i > j} (\kappa_i - j) = \sum_{m > j} (m - j) \mu_{\bar{\kappa}}(m). \end{aligned}$$

Через $\Omega_{\bar{\kappa}} \in \mathbb{Z}^n$ обозначим множество всех $\bar{\kappa}' \in \mathbb{Z}^n$ таких, что для любого $j \in \mathbb{Z}$ $\alpha_{\bar{\kappa}'}(j) \leq \alpha_{\bar{\kappa}}(j)$ и $\beta_{\bar{\kappa}'}(j) \leq \beta_{\bar{\kappa}}(j)$ (свойства этого множества см. в [2], лемму 4.1).

Через $\Omega_{\bar{\kappa}}^o \subset \Omega_{\bar{\kappa}}$ обозначим множество всех $\bar{\kappa}' \in \mathbb{Z}^n$, для которых существуют $p, q \in \mathbb{Z}$ такие, что $\mu_{\bar{\kappa}'}(p) > 0$, $\mu_{\bar{\kappa}'}(q) > 0$, $q - p > 1$ и

$$\mu_{\bar{\kappa}'}(j) > 0 = \begin{cases} \mu_{\bar{\kappa}}(j) & \text{при } j \in \mathbb{Z} \setminus \{p, p+1, q-1, q\}, \\ \mu_{\bar{\kappa}}(j) - 1 & \text{при } j \in \{p, q\}, \\ \mu_{\bar{\kappa}}(j) + 1 & \text{при } j \in \{p+1, q-1\}. \end{cases}$$

Здесь полагаем $l = 1$, если $p+1 < q-1$, и $l = 2$, если $p+1 = q-1$.

Предложение 3. Пусть $\bar{\kappa} = \text{col } [\kappa_i]_{i=1}^n \in \Omega_{\mathcal{X}}^o$ и $\kappa_1 \leq \dots \leq \kappa_n$. Тогда существует матрица-функция V , допускающая каноническую GWH-факторизацию и такая, что множество частных индексов матрицы-функции $W = \Lambda_{\mathcal{X}} \cdot V$ совпадает с множеством $\kappa_1, \dots, \kappa_n$.

Доказательство. Пусть p и q ($q - p > 1$) выбраны надлежащим образом.

Существуют $l, m \in \Delta$ такие, что $\chi_l = q$, $\chi_m = p$. Пусть $V(t) = E + v_{-1}t^{-1}$, где все элементы матрицы $v_{-1} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ равны нулю, за исключением $(v_{-1})_{l,m} = 1$.

Ясно, что $V(t) = V_-(t)$, $V^{-1}(t) = E - v_{-1}t^{-1}$ и $w_{m,s}^{(j)} = u_{m+j-\nu_+-s}$. Тем

самым, $w_{\nu_+-j,1}^{(j)} = u_{-1} = -v_{-1}$ и $w_{m,s}^{(j)} = 0$, если $m \neq \nu_+ - j$, либо $s \neq 1$. Поэтому все блоки матрицы K_{1j} ($\nu_- + 1 < j < \nu_+ - 1$) равны нулю, кроме, быть может, расположенного в левом нижнем углу, который равен матрице $[u_{-1}]_{\Delta_{j+1}^2 \times \Delta_j^2}$. Следовательно, матрицы K_{1j} отличны от тождественного нуля лишь при $j \in (p; q)$, и для этих значений j имеем $\text{rank } K_{1j} = 1$.

Пусть $\kappa'_1 \leq \dots \leq \kappa'_n$ ($\kappa' = \text{col } [\kappa'_i]_{i=1}^n$) — частные индексы матрицы-функции $W = \Lambda_{\bar{X}} V$. Из теоремы Симоненко и предложения 2 следует, что $\alpha_{\kappa'}(j) = \dim \text{Ker } T_1(W_j) = \dim Y_{1j} = \alpha_{\bar{X}}(j)$, при $j \in \mathbb{Z} \setminus (p; q)$, а также $\alpha_{\kappa'}(j) = \dim \text{Ker } T_1(W_j) = \dim K_{1j} = \dim Y_{1j} - 1 = \alpha_{\bar{X}}(j) - 1$, при $j \in (p; q)$. Отсюда непосредственным подсчетом легко убедиться в том, что $\mu_{\kappa'} = \mu_{\bar{X}}$. Предложение доказано.

Теорема 3. Пусть $\Lambda_{\bar{X}} = \text{diag } [t^{x_1}, \dots, t^{x_n}]$ и $\bar{X} = \text{col } [\chi_i]_{i=1}^n \in \mathbb{Z}^n$. Для того, чтобы числа $\kappa_1 \leq \dots \leq \kappa_n$ ($\kappa = \text{col } [\kappa_i]_{i=1}^n \in \mathbb{Z}^n$) представляли из себя частные индексы матрицы-функции $W = \Lambda_{\bar{X}} V$ при некотором V , допускающем каноническую GWH-факторизацию, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{\kappa} \in \Omega_{\bar{X}}$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы Симоненко и предложения 2. Для доказательства достаточности предположим, что $\bar{\kappa} \in \Omega_{\bar{X}}$. Тогда существует последовательность чисел $\bar{\kappa}^{(1)}, \dots, \bar{\kappa}^{(m)} \in \mathbb{Z}^n$ таких, что $\bar{\kappa}^{(1)} = \bar{X}$, $\bar{\kappa}^{(m)} = \bar{\kappa}$ и $\bar{\kappa}^{(i+1)} \in \Omega_{\bar{\kappa}^{(i)}}$, $i = 1, \dots, m-1$ (см. [2], лемму 6.1). В силу предложения 3 существует матрица-функция V_i ($i = 1, \dots, m-1$), допускающая каноническую GWH-факторизацию и такая, что частные индексы матрицы-функции $\Lambda_{\bar{\kappa}^{(i)}} V_i$ совпадают с $\bar{\kappa}^{(i+1)}$. Пусть представление

$$\Lambda_{\bar{\kappa}^{(i)}} V_i = \bar{W}_-^{(i)} \Lambda_{\bar{\kappa}^{(i+1)}} \bar{W}_+^{(i)}$$

является GWH-факторизацией $\Lambda_{\bar{\kappa}^{(i)}} V_i$. Составим матрицу-функцию

$$V = V_1 [\bar{W}_+^{(1)}]^{-1} V_2 [\bar{W}_+^{(2)}]^{-1} \dots [\bar{W}_+^{(m-2)}]^{-1} V_{m-1}.$$

Легко видеть, что представление

$$\Lambda_{\bar{X}} V = \bar{W}_-^{(1)} \bar{W}_-^{(2)} \dots \bar{W}_-^{(m-1)} \Lambda_{\bar{\kappa}} \bar{W}_+^{(m-1)}$$

является GWH-факторизацией матрицы-функции $\Lambda_X V$. Теорема доказана.

ABSTRACT. Generalised right Wiener-Hopf factorization of bounded measurable matrix-function $W = \Lambda V$ is considered, where $\Lambda = \text{diag}[t^{x_1}, \dots, t^{x_n}]$ with $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ and V admits canonical factorizations $V = V_- V_+$. Explicit formulae for partial indices and factorization factors of W are obtained. The formulae are given in terms of the first $\nu = \max_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|$ coefficients of the power series of $V_-(z)$ at $z = \infty$. The dependence of matrix-function V on partial indices is described.

The class of triangular matrix-functions with factorizable diagonal elements is an important example where these formulae can be applied.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Clancey, I. Gohberg, "Factorization of matrix functions and singular integral operators", Operator Theory : Advances and Appl., vol. 3, Birkhäuser, Basel, 1981.
2. G. S. Litvinchuk, I. M. Spitkovski, Factorization of Matrix-Functions, Akademie-Verlag, Berlin, 1987.
3. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, "Системы интегральных уравнений на луче с ядрами, зависящими от разности аргументов", Успехи матем. наук, т. 13, № 2, стр. 3 – 72, 1958
4. А. Б. Шабат, "Обратная задача рассеяния", Диф. уравнения, т. 15, № 10, стр. 1824 – 1834, 1979.
5. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, "Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния II", Функц. анализ и его приложения, т. 13, № 3, стр. 13 – 22, 1979.
6. I. Gohberg, L. Lerer, L. Rodman, "Factorization indices for matrix polynomials", Bull. AMS, vol. 84, pp. 275 – 277, 1978.
7. I. Gohberg, L. Lerer, L. Rodman, "On factorization indices and completely decomposable matrix polynomials", Tel-Aviv Univ. Technical Report, vol. 80-47, pp. 1 – 72, 1980.
8. В. М. Адуков, "Факторизация треугольных матриц-функций второго порядка", Деп. в ВИНТИ 01.12.82, № 5930 – 82, стр. 1 – 14, 1982.
9. В. М. Адуков, "Факторизация Винера-Хопфа мероморфных матриц-функций", Алгебра и анализ, т. 4, № 1, стр. 54 – 74, 1992.
10. H. Bart, I. Gohberg, M. A. Kaashoek, "The coupling method for solving integral equations", Operator Theory : Advances and Appl., vol. 12, pp. 39 – 73, Birkhäuser, Basel, 1984.
11. И. Б. Симоненко "Некоторые общие вопросы теории краевой задачи Римана", Изв. АН СССР, сер. матем., т. 32, № 5, стр. 567 – 587, 1968.
12. А. Г. Камалиян, В. А. Оганян, "Конструктивный метод факторизации для одного класса матриц-функций", Известия НАН Армении, Математика, т. 28, № 3, стр. 1 – 15, 1993.

14 апреля 1994

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С СУММИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, I

А. Р. Казарян, И. Г. Хачатрян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 29, № 5, 1994

В статье рассмотрен действующий в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ дифференциальный оператор L произвольного порядка $m \geq 3$ с суммируемыми коэффициентами. Исследована структура матрицы рассеяния L и в частности доказано, что в случае самосопряженного оператора, как и в общем случае, в обратной задаче рассеяния имеет место согласованность между числами задаваемых и определяемых функций.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $m \geq 3$ – натуральное число, m_0 и m_1 , соответственно – целые части чисел $m/2$ и $(m-1)/2$, а $p_k(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, $k = 0, 1, \dots, m-2$ – комплекснозначные функции, суммируемые на всей вещественной оси. Определим квазипроизводные $y^{[\nu]}(x)$, $\nu = 0, 1, \dots, m$ функции $y(x)$, соответствующие коэффициентам $p_k(x)$ по формулам

$$y^{[0]} = y^{(0)} = y,$$

$$y^{[\nu]} = \frac{1}{i^\nu} y^{(\nu)} = \frac{1}{i^\nu} \frac{d^\nu y}{dx^\nu}, \quad \nu = 1, \dots, m_0,$$

$$y^{[m_0+1]} = p_{2m_0-1} y^{[m_0-1]} + p_{2m_0} y^{[m_0]} + \frac{1}{i} \frac{d}{dx} y^{[m_0]},$$

$$y^{[m-\nu]} = p_{2\nu-1} y^{[\nu-1]} + p_{2\nu} y^{[\nu]} + p_{2\nu+1} y^{[\nu+1]} + \frac{1}{i} \frac{d}{dx} y^{[m-\nu-1]}, \quad \nu = 1, \dots, m_1-1,$$

$$y^{[m]} = p_0 y^{[0]} + p_1 y^{[1]} + \frac{1}{i} \frac{d}{dx} y^{[m-1]},$$

где i – мнимая единица и $p_{m-1}(x) \equiv 0$. Будем считать, что квазипроизводная $y^{[m]}(x)$ функции $y(x)$ существует, если существуют и абсолютно непрерывны все квазипроизводные $y^{[\nu]}(x)$, $\nu = 0, 1, \dots, m-1$. Отметим, что если каждый

коэффициент $p_k(x)$, $1 \leq k \leq m-2$, имеет абсолютно непрерывные производные до порядка $[(k-1)/2]$ включительно, то квазипроизводная $y^{[m]}(x)$ допускает запись

$$y^{[m]} = \frac{1}{i^m} y^{(m)} + \sum_{k=0}^{m_1-1} \frac{1}{i^{2k+1}} \{ [p_{2k+1} y^{(k)}]^{(k+1)} + [p_{2k+1} y^{(k+1)}]^{(k)} \} + \\ + \sum_{k=0}^{m_2-1} \frac{1}{i^{2k}} [p_{2k+1} y^{(k)}]^{(k)} = \frac{1}{i^m} y^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{i^k} q_k y^{(k)},$$

где каждая функция $q_k(x)$, $0 \leq k \leq m-2$, является линейной комбинацией функций $p_s^{(s-k)}(x)$, $k \leq s \leq \min\{2k+1, m-2\}$. В дальнейшем гладкость коэффициентов $p_k(x)$ не предполагается.

Действующий в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ линейный дифференциальный оператор L порядка m с коэффициентами $p_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, m-2$, определим следующим образом. Обозначим через D множество всех тех функций $y \in L^2(-\infty, \infty)$, для каждой из которых квазипроизводная $y^{[m]}$, соответствующая коэффициентам $p_k(x)$, существует и $y^{[m]} \in L(-\infty, \infty)$. Ясно, что D является линейным многообразием в $L^2(-\infty, \infty)$. Для функций $y \in D$ положим $Ly = y^{[m]}$.

Квазипроизводные функции $z(x)$, соответствующие комплексносопряженным коэффициентам $\overline{p_k(x)}$, $k = 0, 1, \dots, m-2$, обозначим через $z^{[\nu]}(x)$. Вместе с оператором L рассмотрим действующий в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ линейный дифференциальный оператор L^* порядка m с коэффициентами $\overline{p_k(x)}$. Область определения этого оператора обозначим через $D^\#$.

Обратная задача рассеяния для оператора L в различных постановках рассматривалась в работах [1] – [5], где было введено в рассмотрение понятие *данных рассеяния оператора L* и исследована задача восстановления коэффициентов $p_k(x)$; $k = 0, 1, \dots, m-2$, по известным данным рассеяния. П. Дейфт, К. Томей и Е. Трубовиц [2] некоторым образом ввели данные рассеяния оператора L порядка $m = 3$ и, при определенных ограничениях на эти данные, доказали единственность решения обратной задачи рассеяния, а при более жестких ограничениях

указали некоторый способ восстановления коэффициентов оператора L по данным рассеяния. Кроме того, полученные результаты они применили для интегрирования нелинейного уравнения Буссинеска. П. Кодри [3] для оператора L порядка $m = 3$ ввел те же данные рассеяния, но при этом исходил из несколько иных соображений, позволивших Р. Билсу [4] аналогичным образом ввести данные рассеяния для оператора L произвольного порядка $m \geq 3$ и, при некоторых ограничениях на них, доказать единственность решения обратной задачи рассеяния. Впрочем, совпадение введенных в [2] и [3] данных рассеяния следует из результатов настоящей статьи. В работе [5] для самосопряженного оператора L произвольного порядка $m \geq 3$ при некотором дополнительном условии указана другая постановка обратной задачи рассеяния. В отличие от рассмотренных в [1'–4], данные рассеяния в [5] являются спектральными характеристиками оператора L . Данные рассеяния оператора L , рассмотренные в работах [4] и [5], в некотором смысле соответствуют хорошо известным (см. [6], [7]) данным рассеяния оператора Штурма–Лиувилля. Таким образом, для оператора L порядка $m \geq 3$ возможны две различные постановки обратной задачи рассеяния. Метод, использованный в [5], был применен в работах [8], [9] в обратной задаче рассеяния для самосопряженных операторов, действующих в $L^2(0, \infty)$. Поставленные в [5], [8], [9] обратные задачи решаются сведением вопроса к решению линейных интегральных уравнений относительно ядра оператора преобразования, являющихся аналогом хорошо известных линейных интегральных уравнений, указанных Гельфандом, Левитаном и Марченко в случае операторов Штурма–Лиувилля.

В связи с поставленной в [4] обратной задачей возникает ряд вопросов. Первый из них – вопрос корректности постановки задачи в смысле согласуемости чисел, задаваемых и определяемых функцией (на первый взгляд задача кажется переопределенной). В [4] матрица рассеяния вводится при помощи определенных решений дифференциального уравнения

$$y^{[m]} = \lambda^m y, \quad (1)$$

где λ – комплексный параметр. Второй вопрос заключается в выяснении отношения этих решений к оператору L . Указанная матрица-функция определена на множестве, которое не пересекается со спектром оператора L в случае нечетного порядка m , а в случае четного m лишь частично содержится в нем. Тем самым, возникает третий вопрос – можно ли эту матрицу в каком-то смысле рассматривать как спектральную характеристику оператора L ?

В настоящей статье исследуется структура введенной в [4] матрицы рассеяния оператора L . В частности, доказывается, что операторы, сопряженные к L и $L^\#$ существуют, причем $L^* = L^\#, (L^\#)^* = L^{**} = L$ (следовательно, операторы L и $L^\#$ замкнуты и, в случае вещественных коэффициентов $p_k(x)$, оператор L является самосопряженным). Исследуется спектр оператора L (вообще говоря, несамопряженного) и для резольвенты выводится интегральное представление с ядром, выраженным через решения уравнения (1) и аналогичные решения сопряженного уравнения

$$z^{[m]*} = \bar{\lambda}^m z, \quad (2)$$

которые использованы в [4] при введении матрицы рассеяния оператора L (тем самым, проясняется указанный выше второй вопрос). Пояснена взаимосвязь между данными рассеяния, рассмотренными в [4] и [5], показывающая, в частности, что третий вопрос в некоторых случаях имеет положительный ответ.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $y(x)$ и $z(x)$ – функции, для которых существуют квазипроизводные $y^{[m]}$ и $z^{[m]*}$. Обозначим

$$[y(x), z(x)] = \sum_{k=0}^{m-1} y^{[m-k-1]} \overline{z^{[k]*}(x)}. \quad (3)$$

Нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$y^{[m]}(x) \overline{z(x)} - y(x) \overline{z^{[m]*}(x)} = \frac{1}{i} \frac{d}{dx} [y(x), z(x)],$$

$$\int_a^b y^{[m]}(x) \overline{z(x)} dx - \int_a^b y(x) \overline{z^{[m]*}(x)} dx = i[y(a), z(a)] - i[y(b), z(b)],$$

где $a < b$ — произвольные числа. Из последнего равенства следует, что для функций $y \in D$ и $z \in D^\#$ существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [y(x), z(x)], \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [y(x), z(x)]$$

(в действительности равные нулю). Из того же равенства следует, что, если $y(x, \lambda)$ и $z(x, \bar{\lambda})$ — решения уравнений (1) и (2), соответственно, то выражение $[y(x, \lambda), z(x, \bar{\lambda})]$ постоянно относительно x .

Общее решение $\xi(x, \lambda)$ неоднородного уравнения

$$\xi^{[m]} - \lambda^m \xi = f, \quad (4)$$

где $f(x)$ — локально суммируемая функция, выражается через произвольную фундаментальную систему решений $y_k(x, \lambda)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, однородного уравнения (1):

$$\xi(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} y_k(x, \lambda) \left\{ c_k + \int_0^x \overline{z_k(t, \bar{\lambda})} f(t) dt \right\}, \quad (5)$$

где c_k — произвольные постоянные, а функции $z_k(x, \bar{\lambda})$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, образуют фундаментальную систему решений сопряженного однородного уравнения (2) и однозначно определяются из соотношений

$$\sum_{k=0}^{m-1} y_k^{[\nu]}(x, \lambda) \overline{z_k(x, \bar{\lambda})} = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu = 0, 1, \dots, m-2, \\ i & \text{при } \nu = m-1. \end{cases} \quad (6)$$

При этом, имеют место равенства

$$\xi^{[\nu]}(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} y_k^{[\nu]}(x, \lambda) \left\{ c_k + \int_0^x \overline{z_k(t, \bar{\lambda})} f(t) dt \right\}, \quad \nu = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} y_k^{[\nu]}(x, \lambda) \overline{z_k^{[s]*}(x, \bar{\lambda})} = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu + s \neq m-1, \\ i & \text{при } \nu + s = m-1, \end{cases} \quad \nu, s = 0, 1, \dots, m-1.$$

В дальнейшем нам понадобятся фундаментальные системы решений уравнений (1) и (2), имеющие определенное асимптотическое поведение как при $x \rightarrow \infty$

или $x \rightarrow -\infty$, так и при $|\lambda| \rightarrow \infty$ и обладающие некоторыми аналитическими свойствами по параметру λ .

Для произвольного $\varepsilon \geq 0$ на комплексной λ -плоскости рассмотрим следующие лучи и области:

$$l_j(\varepsilon) = \left\{ \lambda : |\lambda| > \varepsilon, \arg(i\lambda) = \frac{j\pi}{m} \right\}, \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm(m-1), m,$$

$$\Omega_0(\varepsilon) = \left\{ \lambda : |\lambda| > \varepsilon, |\arg(i\lambda)| < \frac{\pi}{m} \right\},$$

$$\Omega_{m-1}(\varepsilon) = \left\{ \lambda : |\lambda| > \varepsilon, |\arg(i\lambda)| > \pi - \frac{\pi}{m} \right\},$$

$$\Omega_k(\varepsilon) = \left\{ \lambda : |\lambda| > \varepsilon, \frac{\pi k}{m} < \arg(i\lambda) < \frac{\pi(k+1)}{m} \right\}, \quad k = 1, \dots, m-2,$$

$$\Omega_{-k}(\varepsilon) = \left\{ \lambda : |\lambda| > \varepsilon, -\frac{\pi(k+1)}{m} < \arg(i\lambda) < -\frac{\pi k}{m} \right\}, \quad k = 1, \dots, m-2.$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что значения $\arg$ лежат в отрезке $(-\pi, \pi]$.

Для краткости обозначим

$$l_j = l_j(0), \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm(m-1), m, \quad \Omega_k = \Omega_k(0), \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm(m-2), m-1, \quad (7)$$

$$l(\varepsilon) = \bigcup_{|j|=1}^{m-1} l_j(\varepsilon), \quad \tilde{l}(\varepsilon) = l(\varepsilon) \cup l_0(\varepsilon) \cup l_m(\varepsilon), \quad l = l(0), \quad \tilde{l} = \tilde{l}(0), \quad (8)$$

$$\Omega(\varepsilon) = \bigcup_{k=2-m}^{m-1} \Omega_k(\varepsilon), \quad \tilde{\Omega}(\varepsilon) = \Omega(\varepsilon) \setminus (l_0(\varepsilon) \cup l_m(\varepsilon)), \quad \Omega = \Omega(0), \quad \tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}(0). \quad (9)$$

Лемма 1. Для каждого $\lambda \neq 0$ уравнение (1) имеет решения $y^+(x, \lambda)$ и $y^-(x, \lambda)$ такие, что для квазипроизводных $y^{+[\nu]}(x, \lambda)$ и $y^{-[\nu]}(x, \lambda)$ выполняются асимптотические равенства

$$y^{+[\nu]}(x, \lambda) = \lambda^\nu e^{i\lambda x} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty, \quad \nu = 0, 1, \dots, m-1, \quad (10)$$

$$y^{-[\nu]}(x, \lambda) = \lambda^\nu e^{i\lambda x} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow -\infty, \quad \nu = 0, 1, \dots, m-1.$$

Решения $y^+(x, \lambda)$, $y^-(x, \lambda)$ единственны для значений $\lambda \in \Omega_{m-1} \cup l_{m-1} \cup l_{1-m}$ и $\lambda \in \Omega_0 \cup l_1 \cup l_{-1}$ соответственно.

Таким образом, для каждого $\lambda \neq 0$ функции $y_k^+(x, \lambda)$ и $y_k^-(x, \lambda)$, определенные формулами

$$y_k^\pm(x, \lambda) = y^\pm(x, \lambda \omega_k), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (11)$$

где

$$\omega_k = \exp\left(\frac{2\pi k i}{m}\right), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (12)$$

являются решениями уравнения (1) и обладают асимптотикой

$$y_k^{\pm[\nu]}(x, \lambda) = (\lambda \omega_k)^\nu e^{i\omega_k \lambda x} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad k, \nu = 0, 1, \dots, m-1. \quad (13)$$

При этом, каждая из систем решений $y_k^+(x, \lambda)$, $y_k^-(x, \lambda)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, фундаментальна. Для любых чисел $\varepsilon > 0$, α^+ и $\alpha^- \in (-\infty, \infty)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\sum_{k=0}^{m-2} \frac{2}{\varepsilon^{m-k-1}} \int_{\alpha^+}^{\infty} |p_k(t)| dt < 1, \quad \sum_{k=0}^{m-2} \frac{2}{\varepsilon^{m-k-1}} \int_{-\infty}^{\alpha^-} |p_k(t)| dt < 1, \quad (14)$$

решения $y^+(x, \lambda)$ и $y^-(x, \lambda)$ уравнения (1), с асимптотикой (10), можно выбрать таким образом, чтобы как функции от λ они имели следующие свойства:

1) Квазипроизводные $y^{\pm[\nu]}(x, \lambda)$, $\nu = 0, 1, \dots, m-1$ голоморфны по λ на открытом множестве $\Omega(\varepsilon)$.

2) Для любого $x \in [\alpha^+, \infty)$ асимптотически

$$y^{[\nu]}(x, \lambda) = \lambda^\nu e^{i\lambda x} (1 + O(\lambda^{-1})), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \nu = 0, 1, \dots, m-1, \quad (15)$$

и для любого $x \in (-\infty, \alpha^-]$ -

$$y^{-[\nu]}(x, \lambda) = \lambda^\nu e^{i\lambda x} (1 + O(\lambda^{-1})), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \nu = 0, 1, \dots, m-1. \quad (15')$$

3) Для каждого $\lambda \in l(\varepsilon)$, при любом $\nu = 0, 1, \dots, m-1$ существуют пределы

$$\lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} y^{+[\nu]}(x, \lambda') = y^{+[\nu]}(x, \lambda), \quad \text{при } |\arg(i\lambda')| \geq |\arg(i\lambda)|, \quad (16)$$

$$\lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} y^{-[\nu]}(x, \lambda') = y^{-[\nu]}(x, \lambda), \quad \text{при } |\arg(i\lambda')| \leq |\arg(i\lambda)|, \quad (17)$$

$$\lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} y^{+[\nu]}(x, \lambda') = \tilde{y}^{+[\nu]}(x, \lambda), \quad \text{при } |\arg(i\lambda')| < |\arg(i\lambda)|, \quad (18)$$

$$\lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} y^{-[\nu]}(x, \lambda') = \tilde{y}^{-[\nu]}(x, \lambda), \quad \text{при } |\arg(i\lambda')| > |\arg(i\lambda)|. \quad (19)$$

Здесь $\tilde{y}^+(x, \lambda)$ и $\tilde{y}^-(x, \lambda)$ - решения уравнения (1), причем квазипроизводные $\tilde{y}^{\pm[\nu]}(x, \lambda)$ как функции от $\lambda \in l(\varepsilon)$ непрерывны. Для каждого $\lambda \in l(\varepsilon)$, при $x \rightarrow \pm\infty$, $\nu = 0, 1, \dots, m-1$ имеют место асимптотические равенства

$$\tilde{y}^{\pm[\nu]}(x, \lambda) = \lambda^\nu e^{i\lambda x} \left\{ 1 + g^\pm(\lambda) \left(-\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \right)^\nu e^{-ix(\lambda + \bar{\lambda})} + o(1) \right\}, \quad (20)$$

где $g^+(\lambda)$ и $g^-(\lambda)$ - некоторые непрерывные функции на множестве $l(\varepsilon)$, причем $g^\pm(\lambda) = O(\lambda^{-1})$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Для $\tilde{y}^+(x, \lambda)$, при $x \in [\alpha^+, \infty)$, и для $\tilde{y}^-(x, \lambda)$, при $x \in (-\infty, \alpha^-]$, справедливы асимптотические соотношения

$$\tilde{y}^{[\nu]}(x, \lambda) = \lambda^\nu e^{i\lambda x} (1 + O(\lambda^{-1})), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \nu = 0, 1, \dots, m-1. \quad (21)$$

Доказательство леммы 1. Полагая $\lambda \neq 0$, для $k = 0, 1, \dots, m-1$ введем в рассмотрение следующие множества целых чисел:

$$K_r = \left\{ s : \left[\frac{1-r}{2} \right] \leq s \leq \left[\frac{m-r}{2} \right] - 1 \right\}, \quad r = -1, 0, 1,$$

$$M_k^0(\lambda) = \{s : 0 \leq s \leq m-1, \operatorname{Im}(\lambda\omega_s - \lambda\omega_k) = 0\},$$

$$M_k^+(\lambda) = \{s : 0 \leq s \leq m-1, \operatorname{Im}(\lambda\omega_s - \lambda\omega_k) > 0\}, \quad (22)$$

$$M_k^-(\lambda) = \{s : 0 \leq s \leq m-1, \operatorname{Im}(\lambda\omega_s - \lambda\omega_k) < 0\}, \quad (23)$$

$$\widetilde{M}_k^+(\lambda) = M_k^+(\lambda) \cup M_k^0(\lambda), \quad \widetilde{M}_k^-(\lambda) = M_k^-(\lambda) \cup M_k^0(\lambda);$$

где числа ω_s определяются по формуле (12). Заметим, что

$$K_{-1} \cup K_0 \cup K_1 = \{0, 1, \dots, m_1\}, \quad m_1 = \left[\frac{m-1}{2} \right],$$

$$M_k^-(\lambda) \cup M_k^+(\lambda) \cup M_k^0(\lambda) = \{0, 1, \dots, m-1\}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Легко убедиться, что множества $M_0^+(\lambda)$ и $\widetilde{M}_0^-(\lambda)$ постоянны в каждом из секторов $\Omega_0, \Omega_{m-1} \cup l_{m-1} \cup l_{1-m}, \Omega_k \cup l_k, k = \pm 1, \dots, \pm(m-2)$, причем $\widetilde{M}_0^-(\lambda) = \emptyset$ для $\lambda \in \Omega_0$ и $M_0^+(\lambda) = \emptyset$ для $\lambda \in \Omega_{m-1} \cup l_{m-1} \cup l_{1-m}$. Одновременно, множества $\widetilde{M}_0^+(\lambda)$ и $M_0^-(\lambda)$ постоянны в каждом из секторов $\Omega_0, \Omega_0 \cup l_1 \cup l_{-1}, \Omega_k \cup l_{k+1}, \Omega_{-k} \cup l_{-k-1}, k = 1, \dots, m-2$, причем $M_0^-(\lambda) = \emptyset$ для $\lambda \in \Omega_0 \cup l_1 \cup l_{-1}$ и $\widetilde{M}_0^+(\lambda) = \emptyset$ для $\lambda \in \Omega_{m-1}$.

Пусть числа $\varepsilon > 0$ и $\alpha^+ \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяют первому из неравенств (14). Для каждого λ , $|\lambda| > \varepsilon$, рассмотрим следующую систему линейных интегральных уравнений относительно функций $\xi_\nu(x, \lambda)$, $x \in (-\infty, \infty)$, $\nu = 0, 1, \dots, m_1$:

$$\begin{aligned} \xi_\nu(x, \lambda) = & \lambda^\nu e^{i\lambda x} + \frac{i}{m} \sum_{r=-1}^1 \sum_{k \in K_r} \sum_{s \in \widetilde{M}_0^-(\lambda)} (\lambda\omega_s)^{\nu+k+r-m+1} \int_x^\infty e^{i\omega_s \lambda(x-t)} p_{2k+r}(t) \xi_k(t, \lambda) dt - \\ & - \frac{i}{m} \sum_{r=-1}^1 \sum_{k \in K_r} \sum_{s \in M_0^+(\lambda)} (\lambda\omega_s)^{\nu+k+r-m+1} \int_{\alpha^+}^x e^{i\omega_s \lambda(x-t)} p_{2k+r}(t) \xi_k(t, \lambda) dt. \end{aligned} \quad (24)$$

Чтобы доказать разрешимость этой системы, обозначим $\eta_\nu(x, \lambda) = \lambda^{-\nu} e^{-i\lambda x} \times \xi_\nu(x, \lambda)$, $\nu = 0, 1, \dots, m_1$, и запишем систему (24) в виде

$$\eta_\nu(x, \lambda) =$$

$$= 1 + \frac{i}{m} \sum_{r=-1}^1 \sum_{k \in K_r} \sum_{s \in \widetilde{M}_0^-(\lambda)} \frac{\omega_s^{\nu+k+r-m+1}}{\lambda^{m-1-2k-r}} \int_x^\infty e^{i\lambda(1-\omega_s)(t-x)} p_{2k+r}(t) \eta_k(t, \lambda) dt - \\ - \frac{i}{m} \sum_{r=-1}^1 \sum_{k \in K_r} \sum_{s \in M_0^+(\lambda)} \frac{\omega_s^{\nu+k+r-m+1}}{\lambda^{m-1-2k-r}} \int_{\alpha^+}^x e^{i\lambda(\omega_s-1)(x-t)} p_{2k+r}(t) \eta_k(t, \lambda) dt. \quad (25)$$

В силу первого из неравенств (14) система уравнений (25) на интервале $[\alpha^+, \infty)$ разрешима методом последовательных приближений, причем последовательные приближения как последовательности функций двух аргументов сходятся к пределам $\eta_\nu(x, \lambda)$ равномерно на множестве $x \in [\alpha^+, \infty)$, $|\lambda| > \varepsilon$. Поскольку множества $M_0^+(\lambda)$ и $\widetilde{M}_0^-(\lambda)$ постоянны относительно λ , лежащего в любой связной части открытого множества $\Omega(\varepsilon)$, то последовательные приближения, а следовательно и сами функции $\eta_\nu(x, \lambda)$, голоморфны по λ на $\Omega(\varepsilon)$. Кроме того, если λ' достаточно близко к $\lambda \in l(\varepsilon)$ и таково, что $|\arg(i\lambda')| \geq |\arg(i\lambda)|$, то имеют место равенства $\widetilde{M}_0^-(\lambda') = \widetilde{M}_0^-(\lambda)$, $M_0^+(\lambda') = M_0^+(\lambda)$. Поэтому для $\lambda \in l(\varepsilon)$ из равномерной сходимости последовательных приближений следует, что

$$\lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} \eta_\nu(x, \lambda') = \eta_\nu(x, \lambda), \quad |\arg(i\lambda')| \geq |\arg(i\lambda)|, \quad \nu = 0, 1, \dots, m_1. \quad (26)$$

Для $\lambda \in l(\varepsilon)$ существует целое число s_0 ($0 \leq s_0 \leq m-1$), зависящее лишь от $\arg \lambda$, такое, что $\bar{\lambda} = -\lambda \omega_{s_0}$. Обозначим

$$N_0^+(\lambda) = M_0^+(\lambda) \cup \{s_0\}, \quad N_0^-(\lambda) = \widetilde{M}_0^-(\lambda) \setminus \{s_0\}.$$

Для $\lambda \in l(\varepsilon)$ рассмотрим следующую систему интегральных уравнений относительно функций $\tilde{\eta}_\nu(x, \lambda)$, $\nu = 0, 1, \dots, m_1$:

$$\tilde{\eta}_\nu(x, \lambda) =$$

$$= 1 + \frac{i}{m} \sum_{r=-1}^1 \sum_{k \in K_r} \sum_{s \in N_0^-(\lambda)} \frac{\omega_s^{\nu+k+r-m+1}}{\lambda^{m-1-2k-r}} \int_x^\infty e^{i\lambda(1-\omega_s)(t-x)} p_{2k+r}(t) \tilde{\eta}_k(t, \lambda) dt - \\ - \frac{i}{m} \sum_{r=-1}^1 \sum_{k \in K_r} \sum_{s \in N_0^+(\lambda)} \frac{\omega_s^{\nu+k+r-m+1}}{\lambda^{m-1-2k-r}} \int_{\alpha^+}^x e^{i\lambda(\omega_s-1)(x-t)} p_{2k+r}(t) \tilde{\eta}_k(t, \lambda) dt. \quad (27)$$

В силу первого из неравенств (14), система уравнений (27) тоже может быть решена на отрезке $[\alpha^+, \infty)$ методом последовательных приближений, причем полученные функции $\tilde{\eta}_\nu(x, \lambda)$ непрерывны по λ на множестве $l(\varepsilon)$. Однако, для

значений λ' , достаточно близких к λ и удовлетворяющих неравенству $|\arg(i\lambda')| < |\arg(i\lambda)|$, имеют место равенства $\widetilde{M}_0^-(\lambda') = N_0^-(\lambda)$ и $M_0^+(\lambda') = N_0^+(\lambda)$.

Поэтому для $\lambda \in l(\varepsilon)$ справедливы соотношения

$$\lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} \eta_\nu(x, \lambda') = \tilde{\eta}_\nu(x, \lambda), \quad |\arg(i\lambda')| < |\arg(i\lambda)|, \quad \nu = 0, 1, \dots, m_1. \quad (28)$$

Для функций $\eta_\nu(x, \lambda)$ и $\tilde{\eta}_\nu(x, \lambda)$ выполняются неравенства

$$|\eta_\nu(x, \lambda)| \leq (1 - h(\varepsilon))^{-1}, \quad x \in [\alpha^+, \infty), \quad |\lambda| > \varepsilon, \quad (29)$$

$$|\tilde{\eta}_\nu(x, \lambda)| \leq (1 - h(\varepsilon))^{-1}, \quad x \in [\alpha^+, \infty), \quad \lambda \in l(\varepsilon), \quad \nu = 0, 1, \dots, m_1, \quad (30)$$

где число $h(\varepsilon)$ равно левой части первого из неравенств (14). В силу неравенств (29) и (30), из (25) и (27) для $\nu = 0, 1, \dots, m_1$ следуют асимптотические соотношения

$$\eta_\nu(x, \lambda) = 1 + o(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad |\lambda| > 0,$$

$$\tilde{\eta}_\nu(x, \lambda) = 1 + g^+(\lambda) \left(-\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\right)^\nu e^{-ix(\lambda + \bar{\lambda})} + o(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad \lambda \in l(\varepsilon),$$

$$\eta_\nu(x, \lambda) = 1 + O(\lambda^{-1}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad x \in [\alpha^+, \infty),$$

$$\tilde{\eta}_\nu(x, \lambda) = 1 + O(\lambda^{-1}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad x \in [\alpha^+, \infty), \quad \lambda \in l(\varepsilon),$$

где функция $g^+(\lambda)$, $\lambda \in l(\varepsilon)$, с учетом равенства $\bar{\lambda} = -\lambda\omega_s$, определяется формулой

$$g^+(\lambda) = -\frac{i}{m} \sum_{r=-1}^1 \sum_{k \in K_r} \frac{\lambda^k}{(-\bar{\lambda})^{m-1-k-r}} \int_{\alpha^+}^{\infty} e^{i(\lambda + \bar{\lambda})t} p_{2k+r}(t) \tilde{\eta}_k(t, \lambda) dt.$$

Отсюда следует, что $g^+(\lambda) = O(\lambda^{-1})$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\lambda \in l(\varepsilon)$. Теперь докажем разрешимость системы уравнений (25) на отрезке $(-\infty, \alpha^+]$, считая известным ее решение на $[\alpha^+, \infty)$. С этой целью обозначим

$$\zeta_s(\lambda) = \frac{i}{m} \sum_{r=-1}^1 \sum_{k \in K_r} \frac{\omega_s^{k+r-m+1}}{\lambda^{m-1-2k-r}} \int_{\alpha^+}^{\infty} e^{i(1-\omega_s)\lambda t} p_{2k+r}(t) \eta_k(t, \lambda) dt, \quad s \in \widetilde{M}_0^-(\lambda)$$

и запишем систему (25) в виде

$$\begin{aligned} \eta_\nu(x, \lambda) = 1 + \sum_{s \in \widetilde{M}_0^-(\lambda)} \omega_s^\nu \zeta_s(\lambda) e^{i(\omega_s - 1)\lambda x} + \\ + \frac{i}{m} \sum_{r=-1}^1 \sum_{k \in K_r} \sum_{s=0}^{m-1} \frac{\omega_s^{\nu+k+r-m+1}}{\lambda^{m-1-2k-r}} \int_x^{\alpha^+} e^{i\lambda(\omega_s - 1)(x-t)} p_{2k+r}(t) \eta_k(t, \lambda) dt, \end{aligned}$$

где $\nu = 0, 1, \dots, m_1$. Эта система интегральных уравнений Вольтерра может быть решена на отрезке $(-\infty, \alpha^+]$ методом последовательных приближений.

Аналогично доказывается разрешимость системы уравнений (27) на отрезке $(-\infty, \alpha^+]$. Ясно, что полученные функции $\eta_\nu(x, \lambda)$ для каждого $x \in (-\infty, \infty)$ голоморфны по λ на открытом множестве $\Omega(\varepsilon)$ и удовлетворяют соотношениям (26). Для каждого $x \in (-\infty, \infty)$ функции $\tilde{\eta}_\nu(x, \lambda)$ непрерывны по λ на множестве $I(\varepsilon)$ и удовлетворяют соотношениям (28). Из (27) следует, что для каждого $\lambda \in I(\varepsilon)$ функции

$$\tilde{\xi}_\nu(x, \lambda) = \lambda^\nu e^{i\lambda x} \tilde{\eta}_\nu(x, \lambda), \quad \nu = 0, 1, \dots, m_1$$

удовлетворяют системе интегральных уравнений, получающейся из (24) заменой $\tilde{M}_0^-(\lambda)$ и $M_0^+(\lambda)$ соответственно на $N_0^-(\lambda)$ и $N_0^+(\lambda)$. Из (24) и аналогичных интегральных уравнений для $\tilde{\xi}_\nu(x, \lambda)$ следует, что

$$\xi_\nu(x, \lambda) = \xi_0^{[\nu]}(x, \lambda), \quad \tilde{\xi}_\nu(x, \lambda) = \tilde{\xi}_0^{[\nu]}(x, \lambda), \quad \nu = 0, 1, \dots, m_1. \quad (31)$$

Положим $y^+(x, \lambda) = \xi_0(x, \lambda)$ и $\tilde{y}^+(x, \lambda) = \tilde{\xi}_0(x, \lambda)$. Тогда, в силу (31) и (24), для квазипроизводных $y^{+[\nu]}(x, \lambda)$, $\nu = 0, 1, \dots, m-1$, получим следующие равенства (сначала для $\nu \leq m_1$, а затем для остальных значений ν , включая $\nu = m-1$):

$$\begin{aligned} y^{+[\nu]}(x, \lambda) = & \lambda^\nu e^{i\lambda x} + \\ & + \frac{i}{m} \sum_{r=-1}^1 \sum_{k \in K_r} \sum_{s \in \tilde{M}_0^-(\lambda)} (\lambda \omega_s)^{\nu+k+r-m+1} \int_x^\infty e^{i\omega_s \lambda(x-t)} p_{2k+r}(t) y^{+[k]}(t, \lambda) dt - \\ & - \frac{i}{m} \sum_{r=-1}^1 \sum_{k \in K_r} \sum_{s \in M_0^+(\lambda)} (\lambda \omega_s)^{\nu+k+r-m+1} \int_{\alpha^+}^x e^{i\omega_s \lambda(x-t)} p_{2k+r}(t) y^{+[k]}(t, \lambda) dt. \end{aligned} \quad (32)$$

Из равенств (32), соответствующих $\nu = 0$ и $\nu = m$, следует, что функция $y^+(x, \lambda)$ является решением дифференциального уравнения (1). Для квазипроизводных $\tilde{y}^{+[\nu]}(x, \lambda)$ имеют место равенства, получающиеся из (32) заменой $\tilde{M}_0^-(\lambda)$ и $M_0^+(\lambda)$ соответственно на $N_0^-(\lambda)$ и $N_0^+(\lambda)$. Поэтому функция $\tilde{y}^+(x, \lambda)$ тоже является решением дифференциального уравнения (1). В силу отмеченных свойств функций $\eta_\nu(x, \lambda)$, квазипроизводные $y^{+[\nu]}(x, \lambda)$ удовлетворяют всем требованиям леммы (сначала для $\nu \leq m_1$, а затем, в силу (32), для остальных значений $\nu \leq m-1$).

Для каждого λ , $|\lambda| > \varepsilon$, решение $y^-(x, \lambda)$ дифференциального уравнения (1),

удовлетворяющее требованиям леммы, можно получить из следующей системы интегральных уравнений относительно квазипроизводных $y^{[\nu]}(x, \lambda)$, $\nu = 0, 1, \dots, m-1$:

$$y^{[\nu]}(x, \lambda) = \lambda^\nu e^{i\lambda x} + \frac{i}{m} \sum_{r=-1}^1 \sum_{k \in K_r} \sum_{s \in M_0^-(\lambda)} (\lambda \omega_s)^{\nu+k+r-m+1} \int_x^{\alpha^-} e^{i\omega_s \lambda(x-t)} p_{2k+r}(t) y^{[k]}(t, \lambda) dt - \frac{i}{m} \sum_{r=-1}^1 \sum_{k \in K_r} \sum_{s \in M_0^+(\lambda)} (\lambda \omega_s)^{\nu+k+r-m+1} \int_{-\infty}^x e^{i\omega_s \lambda(x-t)} p_{2k+r}(t) y^{[k]}(t, \lambda) dt, \quad (33)$$

где число α^- удовлетворяет второму из неравенств (14). В силу произвольности $\epsilon > 0$, для любого $\lambda \neq 0$ дифференциальное уравнение (1) обладает решениями $y^\pm(x, \lambda)$, удовлетворяющими асимптотическим равенствам (10). Лемма 1 доказана.

§2. ИССЛЕДОВАНИЕ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

Лемма 2. Для каждого $\lambda \in \Omega \setminus G$, где $G \subset \Omega \setminus \Omega_{m-1}$ — некоторое конечное или счетное ограниченное множество, не имеющее предельных точек в Ω , дифференциальное уравнение (1) обладает единственным решением $u(x, \lambda)$ таким, что функция $e^{-i\lambda x} u(x, \lambda)$ ограничена на всей оси $(-\infty, \infty)$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-i\lambda x} u(x, \lambda) = 1$. Для $u(x, \lambda)$ имеют место асимптотические равенства

$$u^{[\nu]}(x, \lambda) = \lambda^\nu e^{i\lambda x} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty, \quad (34)$$

$$u^{[\nu]}(x, \lambda) = \lambda^\nu e^{i\lambda x} (a_0(\lambda) + o(1)), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (35)$$

$$u^{[\nu]}(x, \lambda) = \lambda^\nu e^{i\lambda x} (1 + O(\lambda^{-1})), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \nu = 0, 1, \dots, m-1, \quad (36)$$

где $a_0(\lambda)$ — некоторая функция, голоморфная на открытом множестве $\Omega \setminus G$, такая, что $a_0(\lambda) = 1 + O(\lambda^{-1})$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$. При этом, квазипроизводные $u^{[\nu]}(x, \lambda)$, $\nu = 0, 1, \dots, m-1$, голоморфны по λ на множестве $\Omega \setminus G$, а G является множеством полюсов функции $u(x, \lambda)$.

Для каждого $\lambda \in l \setminus G'$, где $G' \subset l$ — некоторое ограниченное множество нулевой лебеговой линейной меры, такое, что $G' \cap \{0\}$ замкнуто и содержит все

предельные точки множества G при λ' стремящемся к λ , существуют пределы :

$$\lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} u^{[\nu]}(x, \lambda') = u^{+[\nu]}(x, \lambda), \text{ при } \arg(i\lambda') > \arg(i\lambda), \nu = 0, 1, \dots, m-1, \quad (37)$$

$$\lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} u^{[\nu]}(x, \lambda') = u^{-[\nu]}(x, \lambda), \text{ при } \arg(i\lambda') < \arg(i\lambda), \nu = 0, 1, \dots, m-1, \quad (38)$$

$$\lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} a_0(\lambda') = a_0^+(\lambda), \text{ при } \arg(i\lambda') > \arg(i\lambda), \quad (39)$$

$$\lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} a_0(\lambda') = a_0^-(\lambda), \text{ при } \arg(i\lambda') < \arg(i\lambda), \quad (40)$$

где $u^+(x, \lambda)$ и $u^-(x, \lambda)$ – решения (1). Квазипроизводные $u^{\pm[\nu]}(x, \lambda)$ и функции $a_0^{\pm}(\lambda)$ непрерывны по λ на множестве $I \setminus G'$, причем множество нулей функции $a_0^{\pm}(\lambda)$ ограничено и имеет нулевую линейную меру Лебега. Для каждого $\lambda \in I \setminus G'$ и $\nu = 0, 1, \dots, m-1$, при $x \rightarrow -\infty$ имеют место асимптотические равенства

$$u^{\pm[\nu]}(x, \lambda) = \lambda^{\nu} e^{i\lambda x} \left\{ 1 + \varphi^{\pm}(\lambda) \left(-\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \right)^{\nu} e^{-ix(\lambda + \bar{\lambda})} + o(1) \right\}, \quad (41)$$

$$u^{\pm[\nu]}(x, \lambda) = \lambda^{\nu} e^{i\lambda x} \left\{ a_0^{\pm}(\lambda) + \psi^{\pm}(\lambda) \left(-\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \right)^{\nu} e^{-ix(\lambda + \bar{\lambda})} + o(1) \right\}, \quad (42)$$

где $\varphi^{\pm}(\lambda)$, $\psi^{\pm}(\lambda)$ – некоторые функции, непрерывные на множестве $I \setminus G'$, причем $\varphi^+(\lambda) = \psi^-(\lambda) = 0$ при $\operatorname{Re} \lambda > 0$ и $\varphi^-(\lambda) = \psi^+(\lambda) = 0$ при $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Кроме того, справедливы асимптотические равенства

$$a_0^{\pm}(\lambda) = 1 + O(\lambda^{-1}), \quad \varphi^{\pm}(\lambda) = O(\lambda^{-1}), \quad \psi^{\pm}(\lambda) = O(\lambda^{-1}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

$$u^{\pm[\nu]}(x, \lambda) = \lambda^{\nu} e^{i\lambda x} (1 + O(\lambda^{-1})), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad \nu = 0, 1, \dots, m-1. \quad (43)$$

Доказательство леммы 2. Пусть $y_k^+(x, \lambda)$ и $y_k^-(x, \lambda)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ – некоторые решения уравнения (1), обладающие асимптотикой (13). Если для $\lambda \in \Omega$ существует решение $u(x, \lambda)$ уравнения (1), удовлетворяющее требованиям леммы, то оно представимо в виде следующих линейных комбинаций решений $y_k^+(x, \lambda)$ и $y_k^-(x, \lambda)$:

$$u(x, \lambda) = y_0^+(x, \lambda) + \sum_{s \in M_0^+(\lambda)} a_s(\lambda) y_s^+(x, \lambda), \quad (44)$$

$$u(x, \lambda) = a_0(\lambda) y_0^-(x, \lambda) + \sum_{s \in M_0^-(\lambda)} a_s(\lambda) y_s^-(x, \lambda), \quad (45)$$

где множества $M_0^+(\lambda)$ и $M_0^-(\lambda)$ определяются по формулам (22) и (23), причем $M_0^+(\lambda) \cap M_0^-(\lambda) = \emptyset$ и $M_0^+(\lambda) \cup M_0^-(\lambda) = \{1, \dots, m-1\}$. Поэтому $u(x, \lambda)$ существует лишь тогда, когда существуют коэффициенты $a_s(\lambda)$, $s = 0, 1, \dots, m-1$, для

которых выполняется равенство

$$y_0^+(x, \lambda) + \sum_{s \in M_0^+(\lambda)} a_s(\lambda) y_s^+(x, \lambda) = a_0(\lambda) y_0^-(x, \lambda) + \sum_{s \in M_0^-(\lambda)} a_s(\lambda) y_s^-(x, \lambda).$$

Отсюда приходим к системе уравнений относительно $a_s(\lambda)$:

$$a_0(\lambda) y_0^{-[\nu]}(x, \lambda) + \sum_{s \in M_0^-(\lambda)} a_s(\lambda) y_s^{-[\nu]}(x, \lambda) - \sum_{s \in M_0^+(\lambda)} a_s(\lambda) y_s^{+[\nu]}(x, \lambda) = y_0^{+[\nu]}(x, \lambda),$$

$$\nu = 0, 1, \dots, m-1. \quad (46)$$

Определитель этой системы, с точностью до знака, совпадает с вронскианом системы решений $y_0^-(x, \lambda)$ и $y_s^\pm(x, \lambda)$, $s \in M_0^\pm(\lambda)$, дифференциального уравнения (1) и поэтому не зависит от x . Нетрудно убедиться, что для каждого $\lambda \in \Omega$ значение $W(\lambda)$ указанного вронскиана, а также значение $W_0(\lambda)$ вронскиана системы решений $y_0^+(x, \lambda)$ и $y_s^\pm(x, \lambda)$, $s \in M_0^\pm(\lambda)$, не зависят от выбора решений уравнения (1), обладающих той же асимптотикой (13). Пусть числа $\epsilon > 0$, α^+ и α^- удовлетворяют неравенствам (14), а решения уравнения (1), обладающие асимптотикой (10), выбраны так, что выполняются свойства 1) – 3) леммы 1. Решения $y_k^\pm(x, \lambda)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, определим по формулам (11). Тогда для каждого k решения $y_k^\pm(x, \lambda)$ и их квазипроизводные голоморфны по λ на открытом множестве $\bar{\omega}_k \Omega(\epsilon) = \{\lambda \bar{\omega}_k : \lambda \in \Omega(\epsilon)\}$. Поэтому функции $W(\lambda)$ и $W_0(\lambda)$ голоморфны на открытом множестве $\bar{\Omega}(\epsilon)$ (см. (9)). Пусть $\tilde{y}^\pm(x, \lambda)$, $\lambda \in I(\epsilon)$ – решения уравнения (1), определенные из соотношений (18) и (19). Для $\lambda \in I_0(\epsilon) \cup I_m(\epsilon)$ положим $\tilde{y}^\pm(x, \lambda) = y^\pm(x, \lambda)$, и для $\lambda \in \tilde{I}(\epsilon)$ (см. (8)) решения $\tilde{y}_k^\pm(x, \lambda)$ уравнения (1) определим по формулам

$$\tilde{y}_k^\pm(x, \lambda) = \tilde{y}^\pm(x, \lambda \omega_k), \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (47)$$

Из асимптотических равенств (20) следует, что

$$\tilde{y}_k^\pm(x, \lambda) = \sum_{j \in \tilde{M}_k^\pm(\lambda)} h_{kj}^\pm(\lambda) y_k^\pm(x, \lambda), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (48)$$

где $h_{kj}^\pm(\lambda)$ – некоторые непрерывные на множестве $\tilde{I}(\epsilon)$ функции, причем $h_{kk}^\pm(\lambda) = 1$. В силу (16) – (19), при любом $\lambda \in I(\epsilon)$ существуют пределы

$$\lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} y_k^+(x, \lambda') = \xi_k^+(x, \lambda) = \begin{cases} y_k^+(x, \lambda), & \operatorname{Re}(\lambda \omega_k) \geq 0, \\ \tilde{y}_k^+(x, \lambda), & \operatorname{Re}(\lambda \omega_k) < 0, \end{cases} \quad \arg(i\lambda') > \arg(i\lambda), \quad (49)$$

$$\lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} y_k^+(x, \lambda') = \eta_k^+(x, \lambda) = \begin{cases} \bar{y}_k^+(x, \lambda), & \operatorname{Re}(\lambda \omega_k) > 0, \\ y_k^+(x, \lambda), & \operatorname{Re}(\lambda \omega_k) \leq 0, \end{cases} \quad \arg(i\lambda') < \arg(i\lambda), \quad (50)$$

$$\lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} y_k^-(x, \lambda') = \eta_k^-(x, \lambda) = \begin{cases} \bar{y}_k^-(x, \lambda), & \operatorname{Re}(\lambda \omega_k) > 0, \\ y_k^-(x, \lambda), & \operatorname{Re}(\lambda \omega_k) \leq 0, \end{cases} \quad \arg(i\lambda') > \arg(i\lambda), \quad (51)$$

$$\lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} y_k^-(x, \lambda') = \xi_k^-(x, \lambda) = \begin{cases} y_k^-(x, \lambda), & \operatorname{Re}(\lambda \omega_k) \geq 0, \\ \bar{y}_k^-(x, \lambda), & \operatorname{Re}(\lambda \omega_k) < 0, \end{cases} \quad \arg(i\lambda') < \arg(i\lambda). \quad (52)$$

Аналогичные соотношения верны для квазипроизводных $y_k^{\pm[\nu]}(x, \lambda)$. В силу равенств (48) – (52), определители $W(\lambda)$ и $W_0(\lambda)$ непрерывны в каждой точке $\lambda \in I_0(\varepsilon) \cup I_m(\varepsilon)$ и, следовательно, голоморфны на открытом множестве $\Omega(\varepsilon)$. Кроме того, для каждого $\lambda \in I(\varepsilon)$ существуют конечные пределы

$$\lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} W(\lambda') = W^+(\lambda), \quad \lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} W_0(\lambda') = W_0^+(\lambda), \quad \arg(i\lambda') > \arg(i\lambda), \quad (53)$$

$$\lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} W(\lambda') = W^-(\lambda), \quad \lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} W_0(\lambda') = W_0^-(\lambda), \quad \arg(i\lambda') < \arg(i\lambda), \quad (54)$$

причем, функции $W^{\pm}(\lambda)$ и $W_0^{\pm}(\lambda)$ непрерывны на множестве $I(\varepsilon)$. Ввиду произвольности ε функции $W(\lambda)$ и $W_0(\lambda)$ голоморфны на открытом множестве Ω , и пределы (53), (54) существуют для каждого $\lambda \in I(\varepsilon)$ и непрерывны на I . Если $\lambda \in \Omega_{m-1}$, то $W(\lambda)$ является вронскианом линейно независимой системы решений $y_s^-(x, \lambda)$, $s = 0, 1, \dots, m-1$, уравнения (1), следовательно $W(\lambda) \neq 0$. В силу равенств (48) – (52) пределы $W^+(\lambda)$, $\lambda \in I_{m-1}$, и $W^-(\lambda)$, $\lambda \in I_{1-m}$, тоже равны вронскиану отмеченной системы решений $y_s^-(x, \lambda)$. Поэтому они отличны от нуля. Если же $\lambda \in \Omega_0$, то $W_0(\lambda) \neq 0$ есть вронскиан линейно независимой системы решений $y_s^+(x, \lambda)$, $s = 0, 1, \dots, m-1$, уравнения (1), следовательно $W_0(\lambda) \neq 0$. Кроме того, пределы $W_0^+(\lambda)$, $\lambda \in I_{-1}$, и $W_0^-(\lambda)$, $\lambda \in I_1$, равны вронскиану системы решений $y_s^+(x, \lambda)$ и отличны от нуля. Теперь выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы при $\alpha^+ = \alpha^- = 0$ выполнялись неравенства (14). Тогда, с учетом обозначений (11) и (47), из неравенств (15) и (21) получим, что при $x \geq 0$ решения $y_k^+(x, \lambda)$ и $\bar{y}_k^+(x, \lambda)$, и при $x \leq 0$ решения $y_k^-(x, \lambda)$ и $\bar{y}_k^-(x, \lambda)$ для $k, \nu = 0, 1, \dots, m-1$ удовлетворяют асимптотическим равенствам

$$y_k^{\pm[\nu]}(x, \lambda) = (\lambda \omega_k)^\nu e^{i\omega_k \lambda x} (1 + O(\lambda^{-1})), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad (55)$$

$$\bar{y}_k^{\pm[\nu]}(x, \lambda) = (\lambda \omega_k)^\nu e^{i\omega_k \lambda x} (1 + O(\lambda^{-1})), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \tilde{I}(\varepsilon). \quad (56)$$

Из формул (55) и (56), соответствующих значению $x = 0$, следует, что для достаточно больших по модулю значений λ имеем $W(\lambda) \neq 0$, $W_0(\lambda) \neq 0$, $W^\pm(\lambda) \neq 0$ и $W_0^\pm(\lambda) \neq 0$. Поскольку $W(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \in \Omega_{m-1}$ и $W(\lambda)$ голоморфна на открытом множестве Ω , равенство $W(\lambda) = 0$ может выполняться лишь на некотором конечном либо счетном и ограниченном множестве G значений $\lambda \in \Omega$. При этом, множество $G \subset \Omega \setminus \Omega_{m-1}$ и не имеет предельных точек в Ω . Множество нулей функции $W^+(\lambda)W^-(\lambda)$ ($\lambda \in I$) обозначим через G' . Ввиду непрерывности функций $W^+(\lambda)$ и $W^-(\lambda)$, множество $G' \cup \{0\}$ замкнуто. Кроме того, множество $G' \cup \{0\}$ содержит все предельные точки G и, в силу граничных свойств аналитических функций, имеет нулевую линейную меру Лебега. Ясно, что аналогичные утверждения справедливы также для функций $W_0(\lambda)$, $\lambda \in \Omega$ и $W_0^\pm(\lambda)$, $\lambda \in I$. Таким образом, независимо от выбора решений $y_k^\pm(x, \lambda)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, уравнения (1), обладающих асимптотикой (13), определитель системы (46) при $\lambda \in \Omega \setminus G$ отличен от нуля. Поэтому для каждого $\lambda \in \Omega \setminus G$ система уравнений (46) имеет единственное решение $a_s(\lambda)$, $s = 0, 1, \dots, m-1$, причем

$$a_0(\lambda) = \frac{W_0(\lambda)}{W(\lambda)}. \quad (57)$$

Отсюда следует, что для каждого $\lambda \in \Omega \setminus G$ дифференциальное уравнение (1) имеет решение $u(x, \lambda)$, допускающее представления (44) и (45). Заметим, что среди функций $a_s(\lambda)$, $s = 0, 1, \dots, m-1$, определенных системой уравнений (46), лишь функция $a_0(\lambda)$ не зависит от выбора решений $y_k^\pm(x, \lambda)$. Несмотря на это, решение $u(x, \lambda)$, удовлетворяющее требованию леммы, единственно, т. е. правые части представлений (44) и (45) не зависят от выбора $y_k^\pm(x, \lambda)$. Очевидно, что $u(x, \lambda)$ удовлетворяет равенствам (34) и (35). Из (57) следует, что функция $a_0(\lambda)$ голоморфна на открытом множестве $\Omega \setminus G$. Кроме того, для каждого $\lambda \in I \setminus G$ существуют конечные пределы

$$\lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} a_0(\lambda') = a_0^+(\lambda) = \frac{W_0^+(\lambda)}{W^+(\lambda)}, \quad \text{при } \arg(i\lambda') > \arg(i\lambda), \quad (58)$$

$$\lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} a_0(\lambda') = a_0^-(\lambda) = \frac{W_0^-(\lambda)}{W^-(\lambda)}, \quad \text{при } \arg(i\lambda') < \arg(i\lambda), \quad (59)$$

причем функции $a_0^\pm(\lambda)$ непрерывны на множестве $l \setminus G'$, а множество нулей функции $a_0^+(\lambda)a_0^-(\lambda)$ имеет нулевую линейную меру Лебега. Очевидно, что

$$u(x, \lambda) = y_0^+(x, \lambda), \quad \lambda \in \Omega_{m-1}, \quad (60)$$

$$u(x, \lambda) = a_0(\lambda)y_0^-(x, \lambda), \quad \lambda \in \Omega_0 \setminus G. \quad (61)$$

Однако, для $\lambda \in \Omega_{m-1} \cup l_{m-1} \cup l_{1-m}$ решение $y_0^+(x, \lambda)$, обладающее асимптотикой (13), единственно, непрерывно по λ на отмеченном множестве и голоморфно в секторе Ω_{m-1} . Для $\lambda \in \Omega_0 \cup l_{-1} \cup l_1$ свойства решения $y_0^-(x, \lambda)$ аналогичны, поэтому из равенств (60) и (61) следует, что решение $u(x, \lambda)$ голоморфно по λ на каждом из открытых множеств Ω_{m-1} и $\Omega_0 \setminus G$, причем для него существуют граничные функции $u^+(x, \lambda)$, $\lambda \in l_{m-1} \cup (l_{-1} \setminus G'_1)$, и $u^-(x, \lambda)$, $\lambda \in l_{1-m} \cup (l_1 \setminus G'_1)$, где $G'_1 \subset l_1 \cup l_{-1}$ — множество нулей вронскиана $W(\lambda)$ системы решений $y_0^-(x, \lambda)$ и $y_s^+(x, \lambda)$, $s = 1, \dots, m-1$.

Для доказательства остальных утверждений леммы возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и решения $y_k^\pm(x, \lambda)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, выберем указанным выше способом. Тогда из формул Крамера для решения $a_s(\lambda)$, $s = 0, 1, \dots, m-1$, системы уравнений (46) следует, что функции $a_s(\lambda)$ голоморфны на открытом множестве $\tilde{\Omega}(\varepsilon) \setminus G$. Кроме того, для каждого $\lambda \in \tilde{l}(\varepsilon) \setminus G'$ существуют конечные пределы

$$\lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} a_s(\lambda') = a_s^+(\lambda), \quad \arg(i\lambda') > \arg(i\lambda), \quad (62)$$

$$\lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} a_s(\lambda') = a_s^-(\lambda), \quad \arg(i\lambda') < \arg(i\lambda), \quad (63)$$

причем, функции $a_s^\pm(\lambda)$ непрерывны на множестве $\tilde{l}(\varepsilon) \setminus G'$. Поэтому из представлений (44) и (45), с учетом (60) и (61), следует, что решение $u(x, \lambda)$ голоморфно по λ на открытом множестве $\Omega(\varepsilon) \setminus G$, причем для каждого $\lambda \in l(\varepsilon) \setminus G'$ существуют пределы (37) и (38). Ввиду произвольности ε функция $u(x, \lambda)$ голоморфна по λ на открытом множестве $\Omega \setminus G$, а пределы (37), (38) существуют для каждого

$\lambda \in I \setminus G'$. При любом $\lambda \in I(\varepsilon) \setminus G'$ из (44) и (45), для решений $u^\pm(x, \lambda)$ уравнения (1), определенных по (37) и (38), получим равенства

$$u^+(x, \lambda) = \xi_0^+(x, \lambda) + \sum_{s \in M_0^+(\lambda\omega)} a_s^+(\lambda) \xi_s^+(x, \lambda), \quad (64)$$

$$u^+(x, \lambda) = a_0^+(\lambda) \eta_0^-(x, \lambda) + \sum_{s \in M_0^-(\lambda\omega)} a_s^+(\lambda) \eta_s^-(x, \lambda), \quad (65)$$

$$u^-(x, \lambda) = \eta_0^+(x, \lambda) + \sum_{s \in M_0^+(\lambda\bar{\omega})} a_s^-(\lambda) \eta_s^+(x, \lambda), \quad (66)$$

$$u^-(x, \lambda) = a_0^-(\lambda) \xi_0^-(x, \lambda) + \sum_{s \in M_0^-(\lambda\bar{\omega})} a_s^-(\lambda) \xi_s^-(x, \lambda). \quad (67)$$

Здесь использованы равенство $\omega = \exp\left(\frac{\pi i}{4m}\right)$ и обозначения (49) – (52), (62) и (63). Воспользовавшись (48) – (52), приходим к представлениям

$$u^+(x, \lambda) = y_0^+(x, \lambda) + \sum_{s \in M_0^+(\lambda\omega)} b_s(\lambda) y_s^+(x, \lambda), \quad (68)$$

$$u^+(x, \lambda) = b_0(\lambda) y_0^-(x, \lambda) + \sum_{s \in M_0^-(\lambda\omega)} b_s(\lambda) y_s^-(x, \lambda), \quad (69)$$

$$u^-(x, \lambda) = y_0^+(x, \lambda) + \sum_{s \in M_0^+(\lambda\bar{\omega})} c_s(\lambda) y_s^+(x, \lambda), \quad (70)$$

$$u^-(x, \lambda) = c_0(\lambda) y_0^-(x, \lambda) + \sum_{s \in M_0^-(\lambda\bar{\omega})} c_s(\lambda) y_s^-(x, \lambda), \quad (71)$$

где $b_0(\lambda) = a_0^+(\lambda)$, $c_0(\lambda) = a_0^-(\lambda)$, а коэффициенты $b_s(\lambda)$ и $c_s(\lambda)$, $1 \leq s \leq m-1$, вообще говоря, отличаются от $a_s^+(\lambda)$ и $a_s^-(\lambda)$. Из (68) и (70) следует, что при $\lambda \in I(\varepsilon) \setminus G'$ для $u^\pm(x, \lambda)$ выполняются асимптотические равенства (41), а из (69) и (71) следуют выполнение асимптотических равенств (42). В силу произвольности ε , асимптотические равенства (41) и (42) выполняются при любом $\lambda \in I \setminus G'$. Таким образом, представления (68) – (71) справедливы для каждого $\lambda \in I \setminus G'$ и при любом выборе решений $y_k^\pm(x, \lambda)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, уравнения (1), обладающих асимптотикой (13). Заметим, что если $\lambda \in I \setminus G'$, то для некоторого натурального числа j ($1 \leq j \leq m-1$) имеет место равенство $\omega_j = -\bar{\lambda}/\lambda$, а в асимптотических формулах (41) и (42) $\varphi^+(\lambda) = b_j(\lambda)$ и $\psi^-(\lambda) = c_j(\lambda)$ при $\operatorname{Re} \lambda < 0$, а также $\varphi^-(\lambda) = c_j(\lambda)$ и $\psi^+(\lambda) = b_j(\lambda)$ при $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Ясно, что в представлениях (68) – (71) лишь коэффициенты $b_0(\lambda)$, $c_0(\lambda)$, $b_j(\lambda)$ и $c_j(\lambda)$ не зависят от выбора решений $y_k^\pm(x, \lambda)$.

Пусть решения $y_k^\pm(x, \lambda)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, уравнения (1) выбраны так, что для $x \geq 0$ решения $y_k^+(x, \lambda)$ и $\bar{y}_k^+(x, \lambda)$, а для $x \leq 0$ — решения $y_k^-(x, \lambda)$ и $\bar{y}_k^-(x, \lambda)$, удовлетворяют асимптотическим равенствам (55) и (56). Из этих равенств, соответствующих значению $x = 0$ и из формулы Крамера для решения $a_s(\lambda)$, $s = 0, 1, \dots, m-1$, системы (46) следует, что при $|\lambda| \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические равенства

$$\begin{aligned} a_0(\lambda) &= 1 + O(\lambda^{-1}), \quad a_0^\pm(\lambda) = 1 + O(\lambda^{-1}), \\ a_s(\lambda) &= O(\lambda^{-1}), \quad a_s^\pm(\lambda) = O(\lambda^{-1}), \quad s = 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Но тогда, в силу равенств (49) – (52), (55) и (56), из представлений (44), (45) и (64) – (67) получим асимптотические равенства (36) и (43). Отметим, что справедливость асимптотических равенств (43) можно доказать также на основе представлений (68) и (71). Действительно, из (68) – (71) следует, что

$$\begin{aligned} b_0(\lambda)y_0^{-[\nu]}(x, \lambda) + \sum_{s \in M_0^-(\lambda\omega)} b_s(\lambda)y_s^{-[\nu]}(x, \lambda) - \sum_{s \in M_0^+(\lambda\omega)} b_s(\lambda)y_s^{+[\nu]}(x, \lambda) &= y_0^{+[\nu]}(x, \lambda), \\ c_0(\lambda)y_0^{-[\nu]}(x, \lambda) + \sum_{s \in M_0^-(\lambda\bar{\omega})} c_s(\lambda)y_s^{-[\nu]}(x, \lambda) - \sum_{s \in M_0^+(\lambda\bar{\omega})} c_s(\lambda)y_s^{+[\nu]}(x, \lambda) &= y_0^{+[\nu]}(x, \lambda), \end{aligned}$$

$$\nu = 0, 1, \dots, m-1.$$

Полученные равенства будем рассматривать как системы уравнений относительно $b_s(\lambda)$ и $c_s(\lambda)$, $s = 0, 1, \dots, m-1$. Решая эти системы с помощью формул Крамера и учитывая равенства (55) для $x = 0$ получим, что при $|\lambda| \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} b_0(\lambda) &= 1 + O(\lambda^{-1}), \quad c_0(\lambda) = 1 + O(\lambda^{-1}), \\ b_s(\lambda) &= O(\lambda^{-1}), \quad c_s(\lambda) = O(\lambda^{-1}), \quad s = 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Поэтому, в силу (55), из представлений (68) – (71) вытекает справедливость асимптотических равенств (43) и асимптотических равенств леммы для функций $\varphi^\pm(\lambda)$ и $\psi^\pm(\lambda)$. Лемма доказана.

Введем следующие множества комплексных чисел:

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= \{\lambda\omega_k : \lambda \in G, k = 0, 1, \dots, m-1\}, \\ \tilde{G}' &= \{\lambda\omega_k : \lambda \in G' \cup (l_0 \cap G), k = 0, 1, \dots, m-1\}, \end{aligned}$$

где G и G' – указанные в лемме 2 множества. Далее, рассмотрим следующие решения уравнения (1):

$$u_k(x, \lambda) = u(x, \lambda \omega_k), \quad \lambda \in \tilde{\Omega} \setminus \tilde{G}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (72)$$

$$u_k^\pm(x, \lambda) = u^\pm(x, \lambda \omega_k), \quad \lambda \in \tilde{I} \setminus \tilde{G}', \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (73)$$

где $u(x, \lambda)$ и $u^\pm(x, \lambda)$ – указанные в лемме 2 решения уравнения (1), а $\tilde{\Omega}, \tilde{I}$ – множества, определенные по формулам (8) и (9), причем, для $\lambda \in l_m \cup (l_0 \setminus G)$ полагаем, что $u^+(x, \lambda) = u^-(x, \lambda) = u(x, \lambda)$. Из (34) и (41) следует, что каждая из систем решений $u_k^+(x, \lambda)$, $u_k^-(x, \lambda)$ и $u_k(x, \lambda)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, фундаментальна. Тем самым, для каждого $\lambda \in \tilde{I} \setminus \tilde{G}'$ получим две фундаментальные системы решений уравнения (1): $u_k^+(x, \lambda)$ и $u_k^-(x, \lambda)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Поэтому существует невырожденная матрица

$$S(\lambda) = \left(S_{kj}(\lambda) \right)_{k,j=0}^{m-1}, \quad \lambda \in \tilde{I} \setminus \tilde{G}', \quad (74)$$

преобразующая систему решений $u_k^+(x, \lambda)$ в систему решений $u_k^-(x, \lambda)$:

$$u_k^-(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} S_{kj}(\lambda) u_j^+(x, \lambda), \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (75)$$

Матричная функция $S(\lambda)$, которая, очевидно, непрерывна в своей области определения, была введена в работе [4] и называется *матрицей рассеяния дифференциального оператора L* . В связи с этим отметим, что приведенное выше доказательство существования решения $u(x, \lambda)$ уравнения (1), обладающего асимптотикой (34), (35), значительно проще доказательства аналогичного утверждения в [4]. Кроме того, полученные представления (68) – (71) решений $u^\pm(x, \lambda)$ уравнения (1) позволяют выяснить структуру матрицы $S(\lambda)$.

Теорема 1. Для матрицы рассеяния $S(\lambda)$ дифференциального оператора L порядка $m \geq 3$ справедливы следующие утверждения:

1) Для любого $\lambda \in \tilde{I} \setminus \tilde{G}'$ и любого целого числа n ($0 \leq n \leq m-1$)

$$S_{kj}(\lambda \omega_n) = S_{k'j'}(\lambda), \quad k, j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (76)$$

где k' и j' определяются из равенств $\omega_{k'} = \omega_k \omega_n$ и $\omega_{j'} = \omega_j \omega_n$. Следовательно, матричная функция $S(\lambda)$ вполне определяется своими значениями лишь на двух произвольных лучах (7) с номерами разной четности (в частности, на двух соседних лучах или, в случае нечетного m , на двух лучах, симметричных относительно вещественной оси).

2) Для каждого $\lambda \in \tilde{I} \setminus \tilde{G}'$ имеют место неравенства

$$S_{kj}(\lambda) = 0, \quad k \neq j, \quad \lambda \omega_k + \overline{\lambda \omega_j} \neq 0, \quad (77)$$

$$S_{kk}(\lambda) = 1, \quad \operatorname{Re}(\lambda \omega_k) \leq 0, \quad (78)$$

$$S_{kk}(\lambda) = 1 + S_{kj}(\lambda) S_{jk}(\lambda), \quad \operatorname{Re}(\lambda \omega_k) > 0, \quad \lambda \omega_k + \overline{\lambda \omega_j} = 0. \quad (79)$$

Следовательно, для каждого $\lambda \in \tilde{I} \setminus \tilde{G}'$ матрица $S(\lambda)$ вполне определяется лишь теми своими элементами $S_{kj}(\lambda)$, для которых $k \neq j$ и $\lambda \omega_k + \overline{\lambda \omega_j} = 0$. Число этих элементов при нечетном m равно $m - 1$, а при четном m на одном из любых двух соседних лучей (7) равно $m - 2$, на другом равно m .

Доказательство. Равенство (76) вытекает из (73) и (75). Из равенств (68) – (71), учитывая (11) и (73), получаем

$$u_k^+(x, \lambda) = y_k^+(x, \lambda) + \sum_{n \in M_k^+(\lambda \omega)} b_{kn}(\lambda) y_n^+(x, \lambda), \quad (80)$$

$$u_k^+(x, \lambda) = b_{kk}(\lambda) y_k^-(x, \lambda) + \sum_{n \in M_k^-(\lambda \omega)} b_{kn}(\lambda) y_n^-(x, \lambda), \quad (81)$$

$$u_k^-(x, \lambda) = y_k^+(x, \lambda) + \sum_{n \in M_k^+(\lambda \bar{\omega})} c_{kn}(\lambda) y_n^+(x, \lambda), \quad (82)$$

$$u_k^-(x, \lambda) = c_{kk}(\lambda) y_k^-(x, \lambda) + \sum_{n \in M_k^-(\lambda \bar{\omega})} c_{kn}(\lambda) y_n^-(x, \lambda), \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (83)$$

Здесь множества $M_k^\pm(\lambda)$ определяются по формулам (22) и (23), $b_{kn}(\lambda) = b_s(\lambda \omega_k)$ и $c_{kn}(\lambda) = c_s(\lambda \omega_k)$, причем число n определяется из равенства $\omega_n = \omega_k \omega_s$. Пользуясь представлениями (80) – (83), для каждого k ($0 \leq k \leq m-1$) из равенств (75) получаем

$$y_k^+(x, \lambda) + \sum_{n \in M_k^+(\lambda \bar{\omega})} c_{kn}(\lambda) y_n^+(x, \lambda) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} S_{kj}(\lambda) \left\{ y_j^+(x, \lambda) + \sum_{n \in M_j^+(\lambda\omega)} b_{jn}(\lambda) y_n^+(x, \lambda) \right\}, \quad (84)$$

$$\begin{aligned} c_{kk}(\lambda) y_k^-(x, \lambda) + \sum_{n \in M_k^-(\lambda\bar{\omega})} c_{kn}(\lambda) y_n^-(x, \lambda) = \\ = \sum_{j=0}^{m-1} S_{kj}(\lambda) \left\{ b_{jj}(\lambda) y_j^-(x, \lambda) + \sum_{n \in M_j^-(\lambda\omega)} b_{jn}(\lambda) y_n^-(x, \lambda) \right\}. \end{aligned} \quad (85)$$

После перестановки порядка суммирования (84) – (85) принимают вид

$$\begin{aligned} y_k^+(x, \lambda) + \sum_{n \in M_k^+(\lambda\bar{\omega})} c_{kn}(\lambda) y_n^+(x, \lambda) = \\ = \sum_{n=0}^{m-1} y_n^+(x, \lambda) \left\{ S_{kn}(\lambda) + \sum_{j \in M_n^-(\lambda\omega)} b_{jn}(\lambda) S_{kj}(\lambda) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{kk}(\lambda) y_k^-(x, \lambda) + \sum_{n \in M_k^-(\lambda\bar{\omega})} c_{kn}(\lambda) y_n^-(x, \lambda) = \\ = \sum_{n=0}^{m-1} y_n^-(x, \lambda) \left\{ b_{nn}(\lambda) S_{kn}(\lambda) + \sum_{j \in M_n^+(\lambda\omega)} b_{jn}(\lambda) S_{kj}(\lambda) \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$S_{kk}(\lambda) + \sum_{j \in M_k^-(\lambda\omega)} b_{jk}(\lambda) S_{kj}(\lambda) = 1, \quad (86)$$

$$S_{kn}(\lambda) + \sum_{j \in M_n^-(\lambda\omega)} b_{jn}(\lambda) S_{kj}(\lambda) = c_{kn}(\lambda), \quad n \in M_k^+(\lambda\bar{\omega}), \quad (87)$$

$$S_{kn}(\lambda) + \sum_{j \in M_n^-(\lambda\omega)} b_{jn}(\lambda) S_{kj}(\lambda) = 0, \quad n \in M_k^-(\lambda\bar{\omega}), \quad (88)$$

$$b_{nn}(\lambda) S_{kn}(\lambda) + \sum_{j \in M_n^+(\lambda\omega)} b_{jn}(\lambda) S_{kj}(\lambda) = 0, \quad n \in M_k^+(\lambda\bar{\omega}), \quad (89)$$

$$b_{nn}(\lambda) S_{kn}(\lambda) + \sum_{j \in M_n^+(\lambda\omega)} b_{jn}(\lambda) S_{kj}(\lambda) = c_{kn}(\lambda), \quad n \in M_k^-(\lambda\bar{\omega}), \quad (90)$$

$$b_{kk}(\lambda) S_{kk}(\lambda) + \sum_{j \in M_k^+(\lambda\omega)} b_{jk}(\lambda) S_{kj}(\lambda) = c_{kk}(\lambda). \quad (91)$$

Для данного k ($0 \leq k \leq m-1$) равенства (86) – (89) будем рассматривать в качестве системы уравнений относительно функций $S_{kn}(\lambda)$, $n = 0, 1, \dots, m-1$.

Заметим, что если $n \in M_k^-(\lambda\bar{\omega})$, то $k \in M_n^-(\lambda\omega)$ только в случае, когда

$\operatorname{Re}(\lambda\omega_k) < 0$ и $\lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_n} = 0$. Если же $n \in M_k^+(\lambda\overline{\omega})$, то $k \in M_0^+(\lambda\omega)$ может быть верно лишь в случае, когда $\operatorname{Re}(\lambda\omega_k) > 0$ и $\lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_n} = 0$. Кроме того, поскольку $b_{nn}(\lambda) = b_0(\lambda\omega_n) = a_0^+(\lambda\omega_n)$, где $a_0^+(\lambda)$ — указанная в лемме 2 функция, то множество $G'' \subset \tilde{I} \setminus \tilde{G}'$ нулей функций $b_{nn}(\lambda)$ ограничено и имеет нулевую линейную меру Лебега. При j таком, что $j \neq k$ и $\lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_j} \neq 0$, из системы (88) — (89) приходим к равенству $S_{kj}(\lambda) = 0$, сначала для $\lambda \in \tilde{I} \setminus (\tilde{G} \cup G'')$, а затем, в силу непрерывности функций $S_{kj}(\lambda)$, для всех $\lambda \in \tilde{I} \setminus \tilde{G}'$. Учитывая это равенство, из (86) получаем $S_{kk}(\lambda) = 1$ при $\operatorname{Re}(\lambda\omega_k) \leq 0$. Если же $\operatorname{Re}(\lambda\omega_k) < 0$, а число n таково, что $\lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_n} = 0$, то из (88) получаем

$$S_{kn}(\lambda) + b_{kn}(\lambda)S_{kk}(\lambda) = 0,$$

и, следовательно

$$S_{kn}(\lambda) = -b_{kn}(\lambda), \quad \operatorname{Re}(\lambda\omega_k) < 0, \quad \lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_n} = 0. \quad (92)$$

В случае, когда $\operatorname{Re}(\lambda\omega_k) > 0$, из (87), для значения n такого, что $\lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_n} = 0$, получаем

$$S_{kn}(\lambda) = c_{kn}(\lambda), \quad \operatorname{Re}(\lambda\omega_k) > 0, \quad \lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_n} = 0, \quad (93)$$

а из (86) получаем равенство $S_{kk}(\lambda) + b_{nk}(\lambda)S_{kn}(\lambda) = 1$, которое, в силу (92) и (93), можно записать в виде

$$S_{kk}(\lambda) = 1 - b_{nk}(\lambda)c_{kn}(\lambda), \quad \operatorname{Re}(\lambda\omega_k) > 0, \quad \lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_n} = 0, \quad (94)$$

или в виде $S_{kk}(\lambda) = 1 + S_{nk}(\lambda)S_{kn}(\lambda)$. Теорема доказана.

С учетом (77) и (78) из соотношений (86) — (91) нетрудно вывести равенства

$$c_{kj}(\lambda) = b_{kj}(\lambda), \quad \operatorname{Re}(\lambda\omega_k) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$c_{jj}(\lambda) = b_{jj}(\lambda)S_{jj}(\lambda), \quad \operatorname{Re}(\lambda\omega_k) < 0, \quad \lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_j} = 0,$$

$$c_{kk}(\lambda) = b_{kk}(\lambda) + b_{jk}(\lambda)S_{kj}(\lambda), \quad \operatorname{Re}(\lambda\omega_k) < 0, \quad \lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_j} = 0,$$

$$b_{kj}(\lambda)S_{kk}(\lambda) + b_{jj}(\lambda)S_{kj}(\lambda) = 0, \quad \operatorname{Re}(\lambda\omega_k) > 0, \quad \lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_j} = 0,$$

$$c_{kk}(\lambda) = b_{kk}(\lambda)S_{kk}(\lambda), \quad \operatorname{Re}(\lambda\omega_k) > 0, \quad \lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_j} = 0 \quad (95)$$

$$c_{kv}(\lambda) = b_{kv}(\lambda)S_{kk}(\lambda) + b_{jv}(\lambda)S_{kj}(\lambda), \quad \operatorname{Re}(\lambda\omega_k) \neq 0,$$

$$\operatorname{Im}(\lambda\omega_v - \lambda\omega_k) \neq 0, \quad \lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_j} = 0. \quad (96)$$

Из теоремы 1 следует, что задание матричной функции рассеяния $S(\lambda)$ равносильно заданию $2m - 2$ комплексных функций на полупрямой, или $m - 1$ комплексных функций на прямой. Значит, в обратной задаче рассеяния имеет место согласование между числом задаваемых и числом определяемых функций. Ниже доказана теорема, из которой следует, что указанное согласование сохраняется в случае вещественных коэффициентов $p_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, m - 2$.

Теорема 2. В случае вещественных коэффициентов $p_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, m - 2$, для любого $\lambda \in \tilde{I} \setminus \tilde{G}'$ элементы матричной функции рассеяния (74) удовлетворяют соотношениям

$$S_{m-j, m-k}(\bar{\lambda}) = \omega_j \bar{\omega}_k \overline{S_{kj}(\lambda)}, \quad j \neq k, \quad \lambda \omega_k + \bar{\lambda} \omega_j = 0, \quad (97)$$

где считается, что $S_{mn}(\bar{\lambda}) = S_{0n}(\bar{\lambda})$ и $S_{nm}(\bar{\lambda}) = S_{n0}(\bar{\lambda})$, $n = 1, \dots, m - 1$. При этом, если m четно, то системы соотношений (97), соответствующие случаям $\operatorname{Re}(\lambda \omega_k) > 0$ и $\operatorname{Re}(\lambda \omega_k) < 0$, совпадают и, в силу (76), могут быть записаны в виде

$$S_{k'j'}(\lambda) = \omega_j \bar{\omega}_k \overline{S_{kj}(\lambda)}, \quad \operatorname{Re}(\lambda \omega_k) > 0, \quad \lambda \omega_k + \bar{\lambda} \omega_j = 0, \quad (98)$$

где k' и j' определяются из равенств $\omega_{k'} = -\omega_k$ и $\omega_{j'} = -\omega_j$. В случае нечетного m , для каждого $\lambda \in \tilde{I} \setminus \tilde{G}'$ число соотношений (97) равняется $m - 1$. В случае же четного $m = 2m_0$ число соотношений (98) равняется $m_0 - 1$ на одном из соседних лучей (7), а на другом оно равняется m_0 .

Доказательство. Пусть $y_k^\pm(x, \lambda)$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$ — некоторые решения уравнения (1), обладающие асимптотикой (13). Если коэффициенты $p_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, m - 2$, вещественны, то определенные по формуле (3) выражения $[y_s^\pm(x, \lambda), y_j^\pm(x, \bar{\lambda})]$ постоянны относительно x . Докажем равенства для $s = 0, 1, \dots, m - 1$:

$$[y_s^+(x, \lambda), y_j^+(x, \bar{\lambda})] = \begin{cases} m \bar{\omega}_s \lambda^{m-1} & \text{при } \bar{\omega}_j = \omega_s, \\ 0 & \text{при } \bar{\omega}_j \neq \omega_s, \quad \operatorname{Im}(\lambda \bar{\omega}_j - \lambda \omega_s) \leq 0, \end{cases} \quad (99)$$

$$[y_s^-(x, \lambda), y_j^-(x, \bar{\lambda})] = \begin{cases} m \bar{\omega}_s \lambda^{m-1} & \text{при } \bar{\omega}_j = \omega_s, \\ 0 & \text{при } \bar{\omega}_j \neq \omega_s, \quad \operatorname{Im}(\lambda \bar{\omega}_j - \lambda \omega_s) \geq 0. \end{cases} \quad (100)$$

В силу (13) имеем

$$\begin{aligned} [y_s^+(x, \lambda), y_j^+(x, \bar{\lambda})] &= \sum_{\nu=0}^{m-1} y_s^{+[m-1-\nu]}(x, \lambda) \overline{y_j^{+[\nu]}(x, \bar{\lambda})} = \\ &= \bar{\omega}_s \lambda^{m-1} e^{i(\omega_s - \bar{\omega}_j)\lambda x} \sum_{\nu=0}^{m-1} [(\bar{\omega}_s \bar{\omega}_j)^\nu + o(1)], \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (101)$$

Однако

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} (\bar{\omega}_s \bar{\omega}_j)^\nu = \begin{cases} m & \text{при } \bar{\omega}_j = \omega_s, \\ 0 & \text{при } \bar{\omega}_j \neq \omega_s, \end{cases} \quad s, j = 0, 1, \dots, m-1. \quad (102)$$

С учетом (102) и (101) получаем, что предел $\lim_{x \rightarrow \infty} [y_s^+(x, \lambda), y_j^+(x, \bar{\lambda})]$ равен правой части равенства (99), а это, в силу независимости выражения $[y_s^+(x, \lambda), y_j^+(x, \bar{\lambda})]$ от x , эквивалентно (99). Равенство (100) доказывается аналогично.

Для каждого $\lambda \in \tilde{I} \setminus \tilde{G}'$ вычислим значение выражения $[u_k^+(x, \lambda), u_n^-(x, \bar{\lambda})]$, полагая числа k и n ($0 \leq k, n \leq m-1$) такими, что $\operatorname{Re}(\lambda \omega_k) < 0$ и $\lambda \omega_k + \bar{\lambda} \omega_n = 0$. Из представлений (81) и (83), в силу (100), получим равенство $[u_k^+(x, \lambda), u_n^-(x, \bar{\lambda})] = 0$. Из (80), (82) и (99) имеем

$$[u_k^+(x, \lambda), u_n^-(x, \bar{\lambda})] = m \lambda^{m-1} \left\{ \overline{\omega_k c_{n, m-k}(\bar{\lambda})} + \omega_n b_{k, m-n}(\lambda) \right\},$$

где считается, что $b_{jm}(\lambda) = b_{j0}(\lambda)$ и $c_{jm}(\bar{\lambda}) = c_{j0}(\bar{\lambda})$, $j = 0, 1, \dots, m-1$. Поэтому

$$\overline{\omega_k c_{n, m-k}(\bar{\lambda})} + \omega_n b_{k, m-n}(\lambda) = 0, \quad \operatorname{Re}(\lambda \omega_k) < 0, \quad \lambda \omega_k + \bar{\lambda} \omega_n = 0. \quad (103)$$

В силу (92) и (93) равенство (103) может быть записано в виде (97). Тем самым, равенство (97) доказано в случае $\operatorname{Re}(\lambda \omega_k) < 0$. Заменяя в (97) λ , k и j на $\bar{\lambda}$, $m-j$ и $m-k$ соответственно, легко получаем равенство (97) при $\operatorname{Re}(\lambda \omega_k) > 0$. При четном m из условия $\lambda \omega_k + \bar{\lambda} \omega_j = 0$ следует, что $\bar{\lambda} = \lambda \omega_n$, где $\omega_n = -\omega_k \omega_j$. Поэтому, в силу (76) $S_{m-j, m-k}(\bar{\lambda}) = S_{m-j, m-k}(\lambda \omega_n) = S_{k'j'}(\lambda)$, где $\omega_{k'} = \omega_{m-j} \omega_n = -\bar{\omega}_j \omega_k \omega_j = -\omega_k$ и $\omega_{j'} = \omega_{m-k} \omega_n = -\bar{\omega}_k \omega_k \omega_j = -\omega_j$. Отсюда и из (97) приходим к равенству (98). Теорема доказана.

ABSTRACT. Differential operator L of arbitrary order $m \geq 3$ acting in $L^2(-\infty, \infty)$ with summable coefficients is considered. The structure of the

scattering matrix of L is investigated and in particular it is proved that in the case of self-adjoint operator as well as in general case in the inverse scattering problem there is an agreement between the numbers of given and definable functions.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. D. J. Kaup, "On the inverse scattering problem for cubic eigenvalue problems of the class $\phi_{xxx} + 6Q\phi_x + 6R\phi = \lambda\phi$ ", Stud. Appl. Math., vol. 62, no. 3, pp. 189 – 216, 1980.
2. P. Deift, C. Tomei, E. Trubowitz, "Inverse scattering and the Boussinesq equation", Comm. Pure Appl. Math., vol. 35, no. 5, pp. 567 – 623, 1982.
3. P. J. Caudrey, "The inverse problem for a general $N \times N$ spectral equation", Physica, 6D, no. 1, pp. 51 – 66, 1982.
4. R. Beals, "The inverse problem for ordinary differential operators on the line", Amer. J. Math., vol. 107, no. 2, pp. 281 – 366, 1985.
5. И. Г. Хачатрян, "Об обратной задаче на всей оси для дифференциальных операторов произвольного порядка", Изв. АН Армении, Математика, т. 18, № 5, стр. 395 – 402, 1983.
6. В. А. Марченко, Операторы Штурма–Лиувилля и их применения, Наукова думка, Киев, 1977.
7. Б. М. Левитан, Обратные задачи Штурма–Лиувилля, Наука, Москва, 1984.
8. И. Г. Хачатрян, "О некоторых обратных задачах на полупрямой для дифференциальных операторов произвольного порядка", Функц. анализ и его прилож., т. 17, № 1, стр. 40 – 52, 1983.
9. И. Г. Хачатрян, "Об одной формуле для следов", Изв. АН Армении, Математика, т. 20, № 1, стр. 41 – 52, 1985.

10 августа 1994

Ереванский государственный университет

ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА И НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Г. Г. Казарян, А. О. Оганесян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 29, №5, 1994

В статье исследовано стационарное уравнение Шредингера с потенциалом $q(x)$. Рассматриваемый класс функций $q(x)$ определяется условием, что волновые уравнения с потенциалом $q(x)$ удовлетворяют принципу Гюйгенса в пространствах достаточно большой размерности. Основным результатом является новое нелинейное уравнение, которому удовлетворяют такие функции $q(x)$. Изучены свойства этого уравнения.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Решение стационарного уравнения Шредингера

$$Ly = y'' + q(x)y = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1 \quad (1)$$

можно построить в виде

$$y = |x - x_0| \sum_{\nu=0}^{\infty} U_{\nu}(x, x_0)(x - x_0)^{2\nu}, \quad (2)$$

где $x_0 \in \mathbb{R}^1$ — некоторая фиксированная точка, U_{ν} — гладкие функции и $U_0 \equiv 1$.

Даже если этот ряд расходится, что может иметь место при некоторых $q(x)$, (2)

может быть рассмотрено как асимптотическое решение уравнения (1). Решение

вида (2) является аналогом элементарного решения, использованного Адамаром

[1] при построении решения задачи Коши для гиперболических дифференциаль-

ных уравнений второго порядка. Известно [1], [2], что вопрос гюйгеновости урав-

нения

$$u_{tt} - u_{xx} - \sum_{i=1}^{n-2} u_{x_i x_i} + q(x)u = 0 \quad (n \geq 4 \text{ четное}) \quad (3)$$

тесно связан с решением (2) уравнения (1) при той же функции $q(x)$. Уравнение (3) удовлетворяет принципу Гюйгенса тогда и только тогда, когда ряд (2) обрывается, т. е. конечен и имеет вид

$$y = |x - x_0| \sum_{\nu=0}^k U_{\nu}(x, x_0)(x - x_0)^{2\nu}, \quad (k = \frac{n-4}{2}). \quad (4)$$

С другой стороны, функции $q(x)$, для которых уравнение (3) удовлетворяет принципу Гюйгенса, являются рациональными решениями ассоциированных уравнений в иерархиях уравнений Кортевега-де Фриза (KdV) [3], [4].

В настоящей статье предлагается новый, простой метод построения иерархии KdV уравнений, легко обобщающийся на многомерный случай. Доказывается, что для гюйгенсовых уравнений функции $q(x)$ удовлетворяют новым нелинейным уравнениям, обладающих рядом интересных свойств.

§1. ПОСТРОЕНИЕ ИЕРАРХИИ УРАВНЕНИЙ KdV

Подставив функцию (2) в уравнение (1) и полагая, что $x \geq x_0$, получим рекуррентные соотношения для коэффициентов $U_{\nu}(x, x_0)$:

$$(x - x_0)U'_{\nu} + \nu U_{\nu} = \frac{1}{2(2\nu + 1)} L[U_{\nu-1}], \quad \nu = 1, 2, \dots, U_0 \equiv 1.$$

Для функций T_{ν} , получающихся от функций U_{ν} нормированием

$$U_{\nu} \equiv \alpha_{\nu} T_{\nu}, \quad \alpha_0 = 1, \quad \frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_{\nu}} = -2(2\nu + 1), \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

имеем

$$(x - x_0)T'_{\nu} + \nu T_{\nu} = L[T_{\nu-1}], \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Пусть

$$T_{\nu}(x, x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{\nu n}(x_0)(x - x_0)^n. \quad (6)$$

Следуя идеям работы [6], где в связи с проблемой Адамара рассмотрен случай $\nu = 3$, исследуем свойства коэффициентов $P_{\nu n}(x_0)$.

Самосопряженность оператора L влечет симметрию функций T_ν , откуда следует, что

$$T_\nu(x, x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{\nu n}(x)(x - x_0)^n (-1)^n. \quad (7)$$

Рассмотрим ряды Тейлора функций $P_{\nu n}(x)$:

$$P_{\nu n}(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{P_{\nu n}^{(\mu)}(x_0)}{\mu!} (x - x_0)^\mu, \quad P_{\nu n}^{(\mu)}(x_0) = \frac{d^\mu}{dx^\mu} P_{\nu n}(x) |_{x=x_0}.$$

Подставляя эти ряды в (7) и сравнивая результат с (6), получим

$$P_{\nu(2n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{2n+1-\mu}}{\mu!} P_{\nu(2n+1-\mu)}. \quad (8)$$

Из уравнения (5) находим

$$(n + \nu)P_{\nu n} = (n + 1)(n + 2)P_{(\nu-1)(n+2)} + \sum_{\mu=0}^n \frac{q^{(\mu)}}{\mu!} P_{(\nu-1)(n-\mu)}. \quad (9)$$

С другой стороны, в силу симметрии функций $T_\nu(x, x_0)$

$$-(x - x_0)\dot{T}_\nu + \nu T_\nu = \ddot{T}_{(\nu-1)} + q(x_0)T_{\nu-1}, \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

где через $\dot{T}$ и $\ddot{T}$ обозначены первая и вторая производные по x_0 . Отсюда следует, что

$$(n + \nu)P_{\nu n} - \dot{P}_{\nu(n-1)} = \ddot{P}_{(\nu-1)n} - 2(n + 1)\dot{P}_{(\nu-1)(n+1)} + \\ + (n + 1)(n + 2)P_{(\nu-1)(n+2)} + q(x_0)P_{(\nu-1)n}.$$

Подставляя сюда значения $P_{\nu n}$ и $P_{\nu(n-1)}$ из (9), приходим к равенству

$$\frac{(n-1)(n+2\nu-2)}{n+\nu-1} \dot{P}_{(\nu-1)(n+1)} = \ddot{P}_{(\nu-1)n} + \\ + \frac{1}{n+\nu-1} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{q^{(\mu)}}{\mu!} P_{(\nu-1)(n-\mu-1)} \right) - \sum_{\mu=1}^n \frac{q^{(\mu)}}{\mu!} P_{(\nu-1)(n-\mu)}. \quad (10)$$

Найдем связь между функциями $P_{\nu o}$ и $P_{(\nu-1)o}$. Для этого сначала заметим, что из формулы (8) следует соотношение

$$P_{\nu 1} = \frac{1}{2} \dot{P}_{\nu o}. \quad (11)$$

Поэтому из (9) при $n = 1$ следует, что

$$\frac{1}{2}(\nu + 1)\dot{P}_{\nu o} = 6P_{(\nu-1)3} + \frac{1}{2}q\dot{P}_{(\nu-1)o} + qP_{(\nu-1)o}. \quad (12)$$

Подставляя $P_{(\nu-1)3}$ из формулы (8), получим

$$\frac{1}{2}(\nu+1)\dot{P}_{\nu o} = 3\dot{P}_{(\nu-1)2} - \frac{1}{4}\ddot{P}_{(\nu-1)o} + \frac{1}{2}q\dot{P}_{(\nu-1)o} + \dot{q}P_{(\nu-1)o}.$$

Наконец, выразив $\dot{P}_{(\nu-1)2}$ из (10), получим

$$\dot{P}_{\nu o} = \frac{1}{2(2\nu-1)} \left(\frac{d^3}{dx_o^3} + 4q \frac{d}{dx_o} + 2\dot{q} \right) P_{(\nu-1)o} \equiv \beta_\nu \tilde{L} P_{(\nu-1)o}, \quad \nu = 2, \dots \quad (13)$$

Отметим, что $P_{10} = q$ и $\tilde{L}$ совпадает с известным оператором рекурсии для иерархии уравнений KdV. Тем самым, эта иерархия запишется в терминах функций $P_{\nu o}$, в виде

$$q_{t_\nu} = P_{\nu o x}, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

или, с учетом (9), в виде

$$q_{t_\nu} = P_{\nu 1}, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Пусть функция $q(x)$ такая, что ряд (2) обрывается и имеет вид (4). Тогда

$$T_j = 0, \quad j = k+1, \dots.$$

Из (5') и гладкости функций T_ν следует, что для этого достаточно потребовать, чтобы

$$T_{k+1} = 0.$$

С учетом (6) это условие можно записать в виде

$$P_{(k+1)n}(x_o) = 0, \quad n, k = 0, 1, \dots \quad (16)$$

Таким образом, нами доказана

Лемма. Если уравнение (1) имеет решение вида (4) (т. е. уравнение (3) удовлетворяет принципу Гюйгенса), то $q(x)$ является стационарным решением уравнений (14) для $\nu \geq k$.

Итак, задача описания функций $q(x)$, для которых уравнение (1) имеет решение вида (2) с конечным числом слагаемых, сводится к решению бесконечной системы уравнений (16) относительно q .

Первые два столбца матрицы $P = \|P_{(k+1)n}\|_{k,n=0}^\infty$ связаны с иерархией уравнений KdV и хорошо изучены. Естественно возникает вопрос об исследовании

других столбцов или строк матрицы P . Первая строка этой матрицы тривиальна и обращается в нуль тогда и только тогда, когда $P_{10} = 0$ (это соответствует тому, что гюгенсовость уравнения (3) при $n = 4$ эквивалентна условию $q = 0$). Третья строка была изучена в связи с проблемой Адамара [6]. Во втором параграфе статьи рассматривается вторая строка, т. е. в (4) полагаем $k = 1$.

§2. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ (16) ПРИ $k = 1$

Обозначив $V_1 = (x - x_0)T_1$, вычислим LT_1 . Поскольку

$$V_{1x} = ((x - x_0)T_1)_x = LT_0 = q(x),$$

то имеем

$$(x - x_0)^3 LT_1 = (x - x_0)^2 q_x - 2(x - x_0)q + (q(x - x_0)^2 + 2) V_1.$$

Следовательно

$$\frac{(x - x_0)^3}{2 + q(x - x_0)^2} LT_1 = \frac{1}{2 + q(x - x_0)^2} ((x - x_0)^2 q_x - 2(x - x_0)q) + V_1.$$

Дифференцируя обе части этого равенства, после несложных преобразований получим

$$[2 + q(x - x_0)^2]^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(x - x_0)^3}{2 + q(x - x_0)^2} \right) LT_1 = (x - x_0)^2 [2P_0^* + P_2^*(x - x_0)^2],$$

где

$$P_0^* = q_{xx} + 3q^2 = 6P_{20},$$

$$P_2^* = qq_{xx} + q^3 - q_x^2 = qP_0^* - [2q^3 + q_x^2].$$

Лемма 2. Для выполнения условия $LT_1 = 0$ необходимо и достаточно, чтобы функция q удовлетворяла уравнениям

$$P_0^* = 0, \quad P_2^* = 0. \quad (17)$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Предположим, что условия (17) выполнены. Тогда

$$LT_1 = \frac{C[2 + q(x - x_0)^2]}{(x - x_0)^3}, \quad C = \text{const.}$$

В силу гладкости функции T_1 (а следовательно и LT_1) имеем $C = 0$. Лемма доказана.

Из леммы 2 и уравнений (5) следует, что условие $T_2 = 0$ эквивалентно уравнениям (17).

Подстановка рядов (6) в уравнения (5) позволяет вычислить коэффициенты P_{ij} . В частности, получаем

$$P_{20} = \frac{1}{6}(q_{xx} + 3q^2), \quad (18)$$

$$P_{22} = \frac{1}{120}(3q_{xxxx} + 20qq_{xx} + 15q_x^2). \quad (19)$$

С другой стороны, функцию P_{22} можно выразить через P_0^* и P_2^* :

$$P_{22} = \frac{1}{120}(3(P_0^*)_{xx} - qP_0^* + 3P_2^*).$$

Отсюда и из формул (18), (19) непосредственно приходим к следующему результату.

Теорема. *Нижеприводимые утверждения а), б), в) эквивалентны: а) при $k = 1$ уравнение (1) имеет решение вида (4), б) уравнение (3) удовлетворяет принципу Гюйгенса при $n = 6$, в) функция q удовлетворяет уравнениям*

$$6P_{20} \equiv q_{xx} + 3q^2 = 0,$$

$$120P_{22} \equiv 3q_{xxxx} + 20qq_{xx} + 15q_x^2 = 0.$$

Функция P_{20} порождает уравнение Кортевега-де Фриза

$$q_t = (q_{xx} + 3q^2)_x.$$

Естественно исследование следующего нелинейного уравнения, связанного с P_{22} :

$$q_t = (3q_{xxxx} + 20qq_{xx} + 15q_x^2)_x. \quad (20)$$

§3. СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ

И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЭКЛУНДА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ (20)

Заметим, что уравнение (20) имеет стационарное решение

$$q = -\frac{2}{(x - x_0)^2},$$

где x_0 — произвольное число. На важность изучения нелинейных уравнений, имеющих рациональные решения, было указано в [7].

Определение 1 [8]. Говорят, что уравнение с частными производными (P.D.E.) обладает свойством Пенлеве, если его решения являются *однозначными* функциями в окрестности подвижного характеристического многообразия.

Для уточнения этого определения предположим, что характеристическое многообразие определяется равенством

$$\Phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (21)$$

Свойство Пенлеве имеет место, если P.D.E. имеет решение вида

$$V = \Phi^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} V_j \Phi^j, \quad (22)$$

где $\Phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $V_j = V_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $V_0 \neq 0$ – аналитические по (t, x) функции в окрестности многообразия (21), а α – отрицательное целое число.

Рассмотрим теперь уравнение (20). Анализ Пенлеве заключается в поиске общего решения уравнения (20) в форме (22). Подстановка (22) в (20) приводит к представлению (20) в виде

$$E = \sum_{j=0}^{\infty} E_j(V_0, \dots, V_j, \Phi) \Phi^{j+\beta} = 0, \quad (23)$$

где β – некоторая постоянная, играющая для (20) ту же роль, что α для (22).

Для определения главного значения α в разложении (22) необходимо выбрать доминирующие члены P.D.E. и приравнять их степени. Для уравнения (20) все члены правой части – доминирующие, и приравниванием их степеней получаем $\alpha = -2$. Очевидно, что соответствующее значение β в разложении (23) равняется -7 ($\beta = \alpha - 5 = 2\alpha - 3 = -7$).

При главном значении $\alpha = -2$ уравнение $E_0 = 0$ определяет V_0 , в то время, как для $j > 0$ уравнение $E_j = 0$ представляет собой рекуррентное соотношение

$$E_j \equiv (j+1)A(j) + F(V_{j-1}, \dots, V_0, \Phi_t, \Phi_{tx}, \Phi_x, \dots) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (24)$$

где $A(j) \equiv (j-6)(3j^3 - 45j^2 + 218j - 360)\Phi_x^5 V_j$.

Значения j , для которых V_j не могут быть определены из уравнения $E_j = 0$, называются *резонансными* для соотношения (24). Для резонансных значений j , после подстановки в (24) уже найденных V_l , $l \leq j-1$, функция F либо обращается в ноль, либо нет. В первом случае V_j может быть выбрано произвольным образом, а резонансное значение называется *совместимым*. Во втором случае уравнение (20) не имеет решения вида (22) при любой функции Φ . Для уравнения (20) из (24) находим только одно резонансное значение $j = 6$. Чтобы проверить условие совместимости при $j = 6$, необходимо вычислить коэффициенты V_j вплоть до $j = 6$:

$$\begin{aligned} E_0 &\equiv V_0 + 2\Phi_x^2 = 0, \quad E_1 \equiv V_1 - 2\Phi_{xx} = 0, \quad E_2 \equiv 6V_2\Phi_x^2 - 3\Phi_{xx}^2 + 4\Phi_x\Phi_{xxx} = 0, \\ E_3 &\equiv 6V_3\Phi_x^4 + 4\Phi_x\Phi_{xx}\Phi_{xxx} - \Phi_{xx}^2\Phi_{xxxx} - 3\Phi_{xx}^3 = 0, \\ E_4 &\equiv 120V_4\Phi_x^6 - 3\Phi_{xx}\Phi_x^3 + 4\Phi_{xx}^3\Phi_{xxxxx} - 30\Phi_{xx}^2\Phi_{xxx}\Phi_{xxxx} + \\ &\quad + 120\Phi_{xx}\Phi_{xx}^2\Phi_{xxx} - 20\Phi_{xx}^2\Phi_{xxx}^2 - 75\Phi_{xx}^4, \\ E_5 &\equiv 120V_5\Phi_x^4 - \frac{2}{3}\Phi_{xxxxxx} + \frac{40}{3}\frac{\Phi_{xxx}\Phi_{xxxxx}}{\Phi_x} + 8\frac{\Phi_{xx}\Phi_{xxxxx}}{\Phi_x} - \\ &\quad - 50\frac{\Phi_{xx}^2\Phi_{xxxx}}{\Phi_x^2} - \frac{200}{3}\frac{\Phi_{xx}\Phi_{xxx}^2}{\Phi_x^2} - 105\frac{\Phi_{xx}^5}{\Phi_x^4} + 200\frac{\Phi_{xx}^3\Phi_{xxx}}{\Phi_x^3} + 3\Phi_{xx} - 6\frac{\Phi_{xx}\Phi_{xxx}}{\Phi_x} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

При $j = 6$ можно показать, что условие совместимости удовлетворено тождественно и имеет следующий вид:

$$E_6 \equiv \frac{\partial}{\partial x} E_5 \equiv 0. \quad (26)$$

В рассматриваемом случае число резонансных значений меньше числа корней уравнения $A(j) = 0$ (см. (24)). Тем самым, невозможно найти общее решение уравнения (20) в форме (22). Однако, можно найти решение, зависящее от двух произвольных функций Φ и V_6 . При этом говорят, что уравнение обладает *слабым свойством Пенлеве*, т. е. все резонансные значения соотношения (24) совместимы. Напомним, говорится, что уравнение обладает свойством Пенлеве в *сильном смысле*, если число резонансных значений рекуррентного соотношения

(24) равняется числу корней уравнения $\Lambda(j) = 0$, т. е. на единицу меньше порядка уравнения (20) и все резонансные значения совместимы.

Так как $\alpha = -2$ — отрицательное целое число, то разложение Пенлеве (22), представляющее решение уравнения (20), может быть усечено [9] от $j = 2$:

$$V = -2 \frac{\Phi_x^2}{\Phi^2} + 2 \frac{\Phi_{xx}}{\Phi} + V_2, \quad (27)$$

при условии, что V_2 и Φ удовлетворяют следующей системе из шести уравнений :

$$E_j(\Phi, V_2) = 0, \quad j = 2, 3, 4, 5, 6, 7 (-\alpha, \dots, -\beta). \quad (28)$$

Из уравнения $E_2 = 0$ находим представление V_2 в терминах производных Φ . Представление E_6 функционально зависит от E_5 вследствие условия совместности при $j = 6$ (см. (26)), а уравнение $E_7 = 0$ просто является уравнением (20), записанным для V_2 . Итак, из (28) получаем

при $j = 2$:

$$V_2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi_{xx}^2}{\Phi^2} - \frac{2}{3} \frac{\Phi_{xxx}}{\Phi_x},$$

при $j = 3$:

$$21\Phi_{xx}^3 - 23\Phi_x^2\Phi_{xxxx} - 18\Phi_x\Phi_{xx}\Phi_{xxx} - 120\Phi_x^2\Phi_{xx}V_2 - 30\Phi_x^3V_{2x} = 0,$$

при $j = 4$:

$$\begin{aligned} & -\Phi_x\Phi_x^2 + 43\Phi_x^2\Phi_{xxxx} + 65\Phi_x\Phi_{xx}\Phi_{xxx} - 35\Phi_{xx}^2\Phi_{xxx} + 10\Phi_x\Phi_{xxx}^2 + \\ & + (300\Phi_x\Phi_{xx}^2 + 200\Phi_x^2\Phi_{xxx})V_2 + 300\Phi_x^2\Phi_{xx}V_{2x} + 50\Phi_x^3V_{2xx} = 0 \end{aligned}$$

при $j = 5$:

$$\begin{aligned} & 2\Phi_{x1}\Phi_x + \Phi_{xx}\Phi_1 - 5\Phi_{xxx}\Phi_{xxxx} - 23\Phi_{xx}\Phi_{xxxxx} - 21\Phi_x\Phi_{xxxxxx} - (200\Phi_{xx}\Phi_{xxx} + \\ & + 100\Phi_x\Phi_{xxxx})V_2 - (150\Phi_{xx}^2 + 200\Phi_x\Phi_{xxx})V_{2x} - 150\Phi_x\Phi_{xx}V_{2xx} - 20\Phi_{xx}^2V_{2xxx} = 0, \end{aligned}$$

при $j = 7$:

$$-V_{21} + 3V_{2xxxx} + 50V_{2x}V_{2xx} + 20V_2V_{2xxx} = 0.$$

Подставляя представление V_2 в остальные уравнения, приходим к четырем уравнениям, названным уравнениями Пенлеве–Бэклунда, зависящим только от

производных функции Φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \{\Phi, x\} &= 0, \\ 3 \frac{\Phi_t}{\Phi_x} - 29 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{\Phi, x\} + 4 \{\Phi, x\}^2 - 90 \frac{\Phi_{xx}}{\Phi_x} \frac{\partial}{\partial x} \{\Phi, x\} &= 0, \\ -6 \frac{\Phi_{tx}}{\Phi_x} - 3 \frac{\Phi_t \Phi_{xx}}{\Phi_x^2} + 43 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \{\Phi, x\} + 34 \{\Phi, x\} \frac{\partial}{\partial x} \{\Phi, x\} + \\ + 37 \frac{\Phi_{xx}}{\Phi_x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{\Phi, x\} + 145 \frac{\Phi_{xx}^2}{\Phi_x^2} \frac{\partial}{\partial x} \{\Phi, x\} - 12 \frac{\Phi_{xx}}{\Phi_x} \{\Phi, x\}^2 &= 0, \\ -\frac{\Phi_t}{\Phi_x} \frac{\Phi_{xx}}{\Phi_x} \{\Phi, x\} - \frac{1}{2} \frac{\Phi_t}{\Phi_x} \frac{\Phi_{xx}^2}{\Phi_x^2} - \left[\frac{4}{3} \{\Phi, x\}^3 + \frac{2}{3} \frac{\Phi_{xx}^2}{\Phi_x^2} \{\Phi, x\}^2 \right]_x + \\ + G_1 \left\{ \left(\frac{\Phi_t}{\Phi_x} \right)_x \left(\frac{\Phi_t}{\Phi_x} \right)_{xx}, \dots \right\} + G_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \{\Phi, x\}, \frac{\partial}{\partial x} \{\Phi, x\}^2, \dots \right\} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь $\{\Phi, x\} = \frac{\Phi_{xxx}}{\Phi_x} - \frac{3}{2} \frac{\Phi_{xx}^2}{\Phi_x^2}$ есть производная Инварца, а G_1, G_2 — гладкие функции такие, что $G_1(0, 0, \dots, 0) = G_2(0, 0, \dots, 0) = 0$.

Заметим, что последние два уравнения являются простыми следствиями первых двух, т. е. система уравнений Пенлеве–Бэклунда состоит только из следующих двух уравнений :

$$\frac{\partial}{\partial x} \{\Phi, x\} = 0, \quad (29)$$

$$3 \frac{\Phi_t}{\Phi_x} + 4 \{\Phi, x\}^2 = 0. \quad (30)$$

Итак, если Φ удовлетворяет системе уравнений Пенлеве–Бэклунда, то равенством (27) определяется преобразование Бэклунда, т. е. преобразование между двумя решениями V_2 и V одного и того же уравнения. Например, функции вида

$$\Phi = \frac{c_1 e^{\sqrt{a}(x - \frac{1}{3}a^2 t)} + c_2 e^{-\sqrt{a}(x - \frac{1}{3}a^2 t)}}{c_3 e^{\sqrt{a}(x - \frac{1}{3}a^2 t)} + c_4 e^{-\sqrt{a}(x - \frac{1}{3}a^2 t)}},$$

где a, c_1, c_2, c_3, c_4 — произвольные постоянные, удовлетворяют уравнениям (28), (29).

ABSTRACT. Stationary Schrödinger equation with potential $q(x)$ is considered. The condition that for wave equations with the same function $q(x)$ the Huygens' principle is valid in the spaces of sufficiently high dimensions determines a class of function $q(x)$ which is studied. The main result is a

new nonlinear equation which these functions $q(z)$ satisfy. A study of its properties follows.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Hadamard, Lectures on Cauchy's Problem, New Haven, Yale Univ. Press, 1923.
2. P. Günther, Huygens' Principle and Hiperbolic Equations, New York, acad. Press, 1988.
3. M. Adler, J. Moser, "On a class of polynomials connected with KdV equations", Comm. Math. Phys., vol. 61, pp. 1 – 30, 1978.
4. А. О. Оганесян, "Принцип Гюйгенса, свойство Пенлеве и нелинейные дифференциальные уравнения", ДНАН Армении, т. 94, №5, стр. 270 – 273, 1993.
5. R. Schimming, "An Explicit Expression for the Kortevag-de Vries Hierarchy", Zeitschrift für analysis und ihre anwendungen, Bd. 7(3), pp. 203 – 214, 1988.
6. J. E. Lagnese, "A new differential operator of the pure wave type" J. Diff. Eq., vol. 1, pp. 171 – 187, 1965.
7. F. Calogero, A. Degasperis, "Spectral transform and solitons", North-Holland Publ. Comp., 1982.
8. J. Weiss, "The Painlevé property for partial differential equations. Bäcklund transformation, Lax pairs and the Schwarzian derivative", J. Math. Phys. 24(6), June, pp. 1405 – 1413, 1983.
9. J. Weiss, M. Tabor and G. Carnevale, "The Painlevé property for partial differential equations", J. Math. Phys. 24(3), March, pp. 522 – 526, 1983.

15 июня 1994

Ереванский государственный университет

О ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА
СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Р. Ш. Саакян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 29, № 5, 1994

ВВЕДЕНИЕ

Пусть B — область в $\bar{C}$, а функция u субгармонична в B . Полагая, что

$$u(\xi) = \overline{\lim}_{z \rightarrow \xi} u(z) \quad \text{для } \xi \in \partial B,$$

зададимся вопросом : для каких подмножеств $E \subset \partial B$ из оценки

$$\sup_{\xi \in \partial B \setminus E} u(\xi) \leq M < +\infty \quad (1)$$

следует, что

$$u(z) \leq M, \quad z \in B. \quad (2)$$

Отметим, что классический принцип максимума соответствует случаю $E = \emptyset$. Из одного замечания Н. У. Аракеяна [1] следует, что принцип максимума сохраняет силу при $u = |f|$, где f — целая функция, если множество $E = \{\infty\}$ недостижимо из $B = C$ (определение дано ниже). В предположении, что u — непрерывная функция, автором [2] показано, что принцип максимума справедлив для компактных множеств $E \subset \partial B$, недостижимых из B . В [3] получены результаты для областей $B \subset \mathbb{R}^n$.

В настоящей заметке предлагается следующий, более общий вариант принципа максимума.

Теорема. Пусть u – произвольная функция, субгармоническая в области $B \subset \bar{C}$. Условие (1) влечет (2) тогда и только тогда, когда $E \subset \partial B$ не содержит достижимых из B компактных подмножеств.

Напомним, что множество $F \subset \bar{C} \setminus \Omega$ называется *достижимым* из открытого множества $\Omega \subset \bar{C}$, если существует непрерывная кривая $\Gamma \subset \Omega$, соединяющая некоторую точку $z_0 \in \Omega$ с множеством F : Последнее означает, что $\Gamma = \gamma([0, 1))$, где γ – непрерывное (в сферической метрике ρ) отображение отрезка $[0, 1)$ в Ω такое, что $\gamma(0) = z_0$ и $\rho(\gamma(t), F) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 1$. В противном случае множество F называется *недостижимым* из Ω .

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 1. Пусть Ω – область в $\bar{C}$, а γ – непрерывное отображение отрезка $[0, 1)$ в Ω , соединяющее точку $z_0 \in \Omega$ с $\partial\Omega$. Тогда множество $E = \overline{\gamma([0, 1))} \setminus \gamma([0, 1))$ связано.

Доказательство. Полагая $E_n = \overline{\gamma([1 - \frac{1}{n}, 1))}$, будем иметь что E_n связано и что $E = \bigcap_1^\infty E_n$.

Лемма 2. Пусть e – компакт, состоящий из недостижимых граничных точек B . Тогда гармоническая мера $\omega(z, e, B)$ множества e относительно B равна нулю.

Доказательство. Пусть функция $z = z(\omega)$ конформно и однозначно отображает единичный круг на поверхность наложения B^∞ области B . Если $e \neq \emptyset$, то можно доказать, что $z(\omega)$ – функция ограниченного вида. По теореме Р. Неванлинны (см. [4], стр. 214) для этого достаточно показать, что ∂B содержит невырожденный континуум. В самом деле, полагая $\xi_0 \in e$, $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \subset B$ и $\xi_n \rightarrow \xi_0$, можно построить непрерывную кривую $\Gamma \subset B$ такую, что $\xi_n \in \Gamma$ ($n \geq 1$), и соединяющую ξ_1 с ∂B . Поскольку точка ξ_0 недостижима из B , то $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma$ не сводится к точке, и $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma$ – континуум в силу леммы 1. Далее, по теореме Фату (см. [4], стр. 210) на подмножестве F_ω единичной окружности, с мерой 2π , функция $z(\omega)$ имеет

конечные угловые, а следовательно и радиальные граничные значения. Продолжим функцию $z = z(\omega)$ на F_ω , полагая ее равной своим радиальным пределам, и обозначим множество этих значений через F_z . Ясно, что точки множества F_z достижимы из B . Заметим также, что F_z , являясь множеством типа $F_{\delta\sigma}$ (см. [5], стр. 320), измеримо по Борелю. Следовательно F_z — гармонически измеримо.

Гармоническая мера $\omega(z, \partial B \setminus F_z, B)$ обращается в нуль “почти всюду” на граничном множестве F_z (см. [5], стр. 111). Точнее, существуют множества F'_z и F''_z такие, что $F_z = F'_z \cup F''_z$, емкость F''_z равна нулю и $\omega(z, \partial B \setminus F_z, B) = 0$ при $z \in F'_z$. Обозначим, соответственно, через F'_ω и F''_ω прообразы множеств F'_z и F''_z . Тогда $F_\omega = F'_\omega \cup F''_\omega$. Из одной теоремы Р. Неванлинны (см. [4], стр. 211) следует, что линейная мера F''_ω равна нулю. Тем самым, линейная мера F'_ω равна 2π . Из сказанного следует, что ограниченная, гармоническая в единичном круге функция

$$u(w) = \omega(z(w), \partial B \setminus F_z, B)$$

имеет нулевые граничные значения на множестве F'_ω меры 2π . По обобщенному принципу максимума отсюда следует, что $u \equiv 0$ в единичном круге, так что

$$\omega(z, \partial B \setminus F_z, B) = 0 \quad \text{при } z \in B.$$

Наконец, так как $e \subset \partial B \setminus F_z$, то $\omega(z, e, B) = 0$ при $z \in B$, и лемма доказана.

Следствие. Пусть e — компактное подмножество ∂B , недостижимое из области $B \subset \bar{C}$. Тогда $\omega(z, e, B) = 0$.

Лемма 3. Пусть функция u субгармонична в ограниченной области $B \subset C$.

Существует функция v , непрерывная и субгармоническая в B и такая, что

$$u(z) \leq v(z), \quad z \in B, \tag{3}$$

$$u(\xi) = v(\xi), \quad \xi \in \partial B. \tag{4}$$

Доказательство. Для произвольных натурального n и комплексного α рассмотрим систему прямых $x = \operatorname{Re} \alpha + p 2^{-n}$ и $y = \operatorname{Im} \alpha + q 2^{-n}$ ($p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), разбивающих плоскость на равные замкнутые квадраты, со сторонами длины 2^{-n} . Назовем их квадратами ранга n .

Пусть $\{K_{1,j}^\alpha\}_{j=1}^{m_1}$ ($m_1 < \infty$) – все квадраты первого ранга, лежащие в области B . Полагая квадраты ранга l $\{K_{l,j}^\alpha\}_{j=1}^{m_l}$ ($l < n-1$, $m_l < \infty$) выбранными, обозначим через $\{K_{n,j}^\alpha\}_{j=1}^{m_n}$ ($m_n < \infty$) все квадраты ранга n , лежащие в области $B \setminus \bigcup_{l=1}^{n-1} \bigcup_{j=1}^{m_l} K_{l,j}^\alpha$. Продолжая процесс построения, получим $B = \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{m_l} K_{l,j}^\alpha$. Всю систему квадратов $K_{n,j}^\alpha$, лежащих в B , обозначим через $K[\alpha]$.

Выберем теперь комплексные числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ так, чтобы числа $\operatorname{Re}(\alpha_j - \alpha_i)$ и $\operatorname{Im}(\alpha_j - \alpha_i)$ были иррациональными для $1 \leq i < j \leq 3$. Полагая $u_0 = u$, последовательно определим субгармонические в B функции u_1, u_2, u_3 : при любом $m \leq l$ будем полагать, что в каждом квадрате $K \in K[\alpha_m]$, u_m – решение задачи Дирихле с граничными значениями u_{m-1} на ∂K . Очевидно $u_m \geq u_{m-1}$ в B и

$$u_m(z) \leq \max_{w \in K} u_{m-1}(w) \quad \text{при } z \in K. \quad (5)$$

Пусть теперь $\xi \in \partial B$ и $z_n \in B$, $z_n \rightarrow \xi$. Существуют последовательность квадратов $\{K_n\}_1^\infty \subset K[\alpha_m]$ таких, что $z_n \in K_n$, и последовательность $\{w_n\}_1^\infty$ точек $w_n \in K_m$ такая, что

$$u_{m-1}(w_n) = \max_{w \in K_n} u_{m-1}(w), \quad n = 1, 2, \dots$$

Так как диаметры квадратов K_n убывают к нулю, когда K_n стремится к ∂B , то $w_n \rightarrow \xi$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому, в силу (5)

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_m(z_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_{m-1}(w_n) \leq u_{m-1}(\xi).$$

Отсюда следует, что $u_m(\xi) \leq u_{m-1}(\xi)$, $\xi \in \partial B$. Поскольку $u_m(z) \geq u_{m-1}(z)$ для $z \in B$, получаем, что $u_m(\xi) = u_{m-1}(\xi)$ для $\xi \in \partial B$.

Заметим, что функция u_1 непрерывна в B вне границ квадратов системы $K[\alpha_1]$. Следовательно, функция u_2 непрерывна всюду вне точек пересечения границ квадратов из $K[\alpha_1]$ и $K[\alpha_2]$. Это множество точек не пересекается с границами квадратов из $K[\alpha_3]$. Таким образом, функция u_3 непрерывна в B , и полагая $v = u_3$, получаем, что $v(\xi) = u_2(\xi) = u_1(\xi) = u(\xi)$ при $\xi \in \partial B$. Лемма доказана.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Достаточность. Из условий теоремы следует, что граница области B содержит континуум. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда B — ограниченная область. Сначала проведем доказательство, полагая функцию u непрерывной в B . При этом, будем пользоваться некоторой модификацией рассуждений доказательства теоремы Иенсена (см. [6], стр. 205).

Рассмотрим открытое множество

$$B_\alpha = u^{-1}[(\alpha, +\infty)], \quad \alpha \geq M.$$

Если утверждение теоремы не верно, то $B_M \neq \emptyset$. Докажем, что если $B_{\alpha'} \neq \emptyset$ при $\alpha' \geq M$ и $\Omega_{\alpha'}$ — связная компонента множества $B_{\alpha'}$, то $E_{\alpha'} = \partial\Omega_{\alpha'} \cap E \neq \emptyset$, и функция u не ограничена сверху в $\Omega_{\alpha'}$. Отсюда будет следовать, что для любого $\alpha > \alpha'$ множество Ω_α содержит некоторую связную компоненту B_α (например, Ω_α) такую, что $E_\alpha = \partial\Omega_\alpha \cap E \neq \emptyset$. В самом деле, если $E_{\alpha'} = \emptyset$, то $\partial\Omega_{\alpha'} \subset (\partial B \setminus E) \cup B$, и применяя к $\Omega_{\alpha'}$ (с учетом (1)) классический принцип максимума, получили бы, что $u(z) \leq \alpha'$ при $z \in \Omega_{\alpha'}$. Последнее противоречит определению $\Omega_{\alpha'}$. Тем самым, $E_{\alpha'} \neq \emptyset$. Поскольку множество $E_{\alpha'}$ компактно и недостижимо из $\Omega_{\alpha'}$, то в силу следствия из леммы 2 заключаем, что $\omega(z, E_{\alpha'}, \Omega_{\alpha'}) = 0$. Если бы функция u была ограничена сверху в $\Omega_{\alpha'}$, то по обобщенному принципу максимума (см. [7], стр. 70) получили бы, что $u(z) \leq \alpha'$ в $\Omega_{\alpha'}$. Это тоже противоречит определению $\Omega_{\alpha'}$.

Из непрерывности u следует, что $u(\xi) = \alpha$ для $\xi \in \partial\Omega_\alpha \setminus E$. Тем самым, $\partial\Omega_\alpha \cap (\partial B \setminus E) = \emptyset$ для $\alpha > M$.

Таким образом, полагая $B_M \neq \emptyset$, можем фиксировать некоторую последовательность $\{\Omega_n\}_{n=m}^\infty$ ($m \geq M$, $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$) компонент множеств B_n , а также последовательность $\{z_n\}_{n=m}^\infty$, $z_n \in \Omega_n$.

Пусть V – произвольная окрестность множества E'_α . Ясно, что существует такой номер N , что для всех $n > N$ имеем $\Omega_n \subset V' = V \cap \Omega_N$. Пусть γ_n – жорданова дуга, соединяющая z_n с z_{n+1} в Ω_n . Полагая $\Gamma = \bigcup_{n=N+1}^\infty \gamma_n$, имеем $\Gamma \subset V'$. Далее, Γ соединяет z_0 с компактным множеством $e'_\alpha \subset e_0$, а это противоречит условиям теоремы. Таким образом, для непрерывных субгармонических функций достаточность нами доказана.

Пусть теперь u – произвольная субгармоническая в B функция. По лемме 3 можно построить непрерывную субгармоническую функцию v , для которой в силу (4) выполнено условие (1). Тем самым, ввиду доказанного выше, $v(z) \leq M$ при $z \in B$. С учетом (3) достаточность теперь полностью доказана.

Необходимость. Пусть e' – компактное подмножество e , достижимое из B , а Γ – непрерывная кривая, соединяющая некоторую точку области B с множеством e' . Обозначим через $\{K_\xi\}$, $\xi \in \Gamma$, систему кругов с центрами в точках $\xi \in \Gamma$ и радиусами R_ξ такими, что $R_\xi \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow e$ и $\Gamma \subset \bigcup K_\xi \subset B$. Обозначим через D связную компоненту открытого множества $\bar{C} \setminus e'$, содержащую B , и положим $F = \Gamma \cup (D \setminus \bigcup K_\xi)$. Легко видеть, что множество F удовлетворяет условиям теоремы Аракеяна (см. [8], теорему 1).

Предположим, что g – непрерывная функция на F , обращающаяся в ноль на $D \setminus \bigcup K_\xi$, и такая, что $g(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow e$. В силу теоремы Аракеяна существует функция $f \in H(D)$ такая, что

$$|f(z) - g(z)| < 1 \quad \text{при } z \in E.$$

Взяв $u = |f|$ заключаем, что для любая точка из $\partial B \setminus \epsilon$ обладает окрестностью, где $u(z) < 1$. Одновременно, эта функция не ограничена сверху на Γ . Этим доказательство теоремы завершено.

В заключение выражаю благодарность профессору Н. У. Аракеляну за постановку задачи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. U. Arakelian, "Approximation complexe et proprietes des fonctions analytiques", Actes Congres Intern. Math., t. 2, pp. 595 – 600, 1970.
2. Р. III. Саакян, "Об одном обобщении принципа максимума", Известия АН Арм. ССР, Математика, т. 22, № 1, стр. 94 – 102, 1987.
3. Chen Huaihui, P. M. Gauthier, "A maximum principle for subharmonic and plurisubharmonic functions", Canad. Math. Bull., vol. 35(1), pp. 34 – 39, 1992.
4. Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, М – Л, ГИТТЛ, 1941.
5. M. Tsuji, Potential Theory in Modern Function Theory, Maruzen Co., Tokio, 1959.
6. В. Хейман, П. Кеннеди, Субгармонические функции, Москва, Мир, 1980.
7. W. J. Fuchs, Topics in the Theory of Functions of One Complex Variable, F. Van Nostrand Company INC, Princeton N.J., t. 2.
8. Н. У. Аракелян, "Равномерные и касательные приближения аналитическими функциями", Известия АН Арм. ССР, Математика, т. 3, № 4 – 5, стр. 273 – 285, 1968.

26 января 1994

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы

Граничные задачи в полосе в классах полиномиального роста А. А. Андриян	3
Равномерные алгебры операторных полей с AF -слоем С. А. Григорян, М. И. Заславская	17
Аттракторы эволюционных систем типа Соболева Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбабян	27
Формулы типа Гохберга-Лерера-Родмана для частных индексов матрицы-функции А. Г. Камалян	38
Об обратной задаче рассеяния для дифференциальных операторов произвольного порядка с суммируемыми коэффициентами, I А. Р. Казарян, И. Г. Хачатрян	50
Принцип Гюйгенса и нелинейные дифференциальные уравнения Г. Г. Казарян, А. О. Оганесян	76
Краткие сообщения	
О принципе максимума субгармонических функций Р. Ш. Саакян	87

CONTENTS

VOLUME 29

NUMBER 5

1994

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS (NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)

PAGES

Boundary value problems in the strip in the classes of polynomial growth A. A. Andrian.....	1
Uniform algebras of operator fields with AF -fibres S. A. Grigorian, M. I. Zaslavskaja	13
Attractors of Sobolev type evolutionary systems G. S. Hakobian, R. L. Shakhbagian.....	21
Gohberg-Lerer-Rodman type formulae for partial indices of matrix-function A. G. Kamalian	31
The inverse scattering problem for high order operators with summable coefficients, I A. R. Kazarian, I. G. Khachatrian.....	42
Huygens principle and nonlinear differential equations G. G. Kazarian, A. O. Oganesian.....	64
Brief Communications	
On a maximum principle for subharmonic functions R. Sh. Sahakian	74

©1995 by Allerton Press Inc. Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by Allerton Press, Inc. for library and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transaction Reporting Service, providing that the base fee of \$50.00 per copy is paid directly to CCC, 222 Rosewood Drive, Danvers, MA 01923. An annual license may be obtained only directly from Allerton Press, Inc., 150 5th Avenue, New York, NY 10011.