ISSN 0002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր **Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ**

Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ
Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱՂՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու քարտուղար Մ. Ա. Հովհաննիսյան

«Մաթեմատիկա»

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ։ Գիտությունների Ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ КОМБИНАТОРНОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

сборник статей

под редакцией Р. В. Амбарцумяна

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Для достижения высших стандартов и улучшения качества содержания журнала Известия Национальной Академии Наук Армении, Математика, представляется необходимым проведение новой политики, нацеленной на выдвижение тематических номеров, т. е. сборников трудов, посвященных отдельным областям математических исследований. В случае, когда такие работы выполнены под руководством признанного авторитета, последний естественно становится редактором сборника.

Настоящий номер является первым в предполагаемом ряде тематических номеров. Он содержит результаты исследований, проведенных при поддержке гранта Международного научного фонда, именованного "Аналитические результаты комбинаторной интегральной геометрии", основной исследователь – Р. В. Амбарцумян. Другой публикацией, отражающей эти исследования, является [1].

Основы этого направления были положены рядом геометрических результатов, полученных при решении задач порождения мер в классических пространствах интегральной геометрии. Первым отметим результат Погорелова – Александера – Амбарцумяна ([2] — [4]), утверждающий, что линейно-аддитивные, непрерывные псевдометрики на плоскости порождаются мерами, заданными в пространстве прямых на плоскости. Затем отметим результат Р. В. Амбарцумяна [5], относящийся к взаимнооднозначному соответствию между метриками Минковского в $\mathbb{R}^3$ и трансляционно-инвариантными мерами в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$. В [5] этот результат был распространен в одном направлении на общие линейно-аддитивные, гладкие метрики.

В некоторых случаях более естественно сначала рассмотреть вопрос о порождении знакопеременных мер, чем неотрицательных. Это вытекает из хорошо известного результата о том, что гладкие метрики Минковского в $\mathbb{R}^3$ порождаются как решения "зоноидного уравнения" знакопеременными мерами, задан-

ными в пространстве направлений в $\mathbb{R}^3$. Сняв ограничение Минковского (т. е. трансляционную инвариантность), Погорелов в [1] показал, что любая гладкая, линейно-аддитивная метрика в $\mathbb{R}^3$ порождается знакопеременной мерой в пространстве плоскостей.

Результаты комбинаторной интегральной геометрии предоставляют возможность систематического подхода к таким задачам, осуществляемого с помощью конечно-аддитивных, комбинаторных функционалов.

В [1] введено понятие эйлерового функционала, определенного в пространстве прямых на плоскости. В [1], в терминах "треугольного эксцесса" бесконечно малых треугольников сформулировано необходимое и достаточное условие для порождения знакопеременной меры эйлеровым функционалом. В двух статьях настоящего сборника рассмотрена аналогичная задача порождения знакопеременных мер в пространстве плоскостей в $\mathbb{R}^3$. Из полученных результатов отметим следующую теорему.

Теорема. *Любая гладкая, линейно-аддитивная метрика в* $\mathbb{R}^3$, *асимптотически изотропная в любой точке, необходимо трансляционно-инвариантна и, следовательно, евклидова.*

Формулировку и доказательство этого утверждения можно найти в Дополнении к статье Р. Арамяна, опубликованной в данном номере. Третья статья сборника – статья Г. Сукиасяна, посвящена функционалам типа Эйлера в $\mathbb{R}^2$. Г. Сукиасян доказывает, в частности, что условие порождения знакопеременной меры может быть получено с помощью классической формулы Грина. Последняя является красивой и полезной иллюстрацией всей теории.

Читатель убедится в том, что это направление находится в фазе развития и обещает много новых, интересных результатов в будущем.

Ереван, декабрь 1994 Р. В. Амбарцумян

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, "Planar measure generation by Euler functionals." Submitted to Journal of Applied Probability, Stochastic Geometry Section.
2. A. V. Pogorelov, Hilbert's Fourth Problem, Winston & Sons, 1979.
3. R. Alexander, "Planes for which the lines are the shortest paths between points," Illinois J. Math., vol. 22, pp. 177 – 190, 1978.
4. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry, John Wiley and Sons, 1982.
5. Р. В. Амбарцумян, "Замечания о порождении мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^{3}$", Изв. АН Армении, Математика, т. 27, № 5, стр. 1– 21, 1992.

КОНЕЧНО–АДДИТИВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ПЛОСКОСТЕЙ, I

Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, №4, 1994

Используя одно из разложений комбинаторной интегральной геометрии, в статье определен класс конечно-аддитивных функционалов на множествах из так называемого бюффонового кольца в пространстве плоскостей в $\mathbb{R}^3$. При некоторых предположениях о гладкости, сформулированных в терминах скорости убывания так называемых пирамидальных эксцессов, найдены необходимые и достаточные условия, при которых этими функционалами определяется знакопеременная мера в пространстве плоскостей. Найдены также необходимые условия в терминах "флаговых плотностей", от которых зависят функционалы.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Идея конечно-аддитивного функционала (всюду ниже Ψ), зависящего от функции F, определенной в пространстве клиньев, естественным образом возникает из результатов комбинаторной интегральной геометрии, относящихся к мерам в пространстве $\mathbb{E}$ плоскостей в $\mathbb{R}^3$ (см. [1], [2]). Функции клиньев, рассмотренные в [1], [2], зависели от мер m, заданных в пространстве $\mathbb{E}$. Соответствующий функционал Ψ используется для комбинаторного вычисления значений m на подмножествах $\mathbb{E}$ из так называемого класса Бюффона.

Данная статья посвящена исследованию следующей задачи : порождает ли соответствующий комбинаторный функционал Ψ знакопеременную меру в пространстве $\mathbb{E}$ по заданной функции клина F ? Примеры "обращения" "прямых"

Данное исследование частично финансировано грантом № RYB000 Международного научного фонда.

результатов комбинаторной интегральной геометрии можно найти в [1] (имеется ввиду теорема о порождении мер в пространстве прямых на плоскости, посредством линейно-аддитивных, непрерывных псевдометрик). Последние результаты для плоскости содержатся в [3], [4] и [5]. Некоторый прогресс в задаче порождения знакопеременной меры посредством Ψ стал возможен после введения в работе [2] понятий флага и флаговой плотности. В этой области можно также отметить результаты работы [6]. Значительные аналитические преимущества возникают после переноса задачи из пространства $\mathbb{E}$ в пространство $\mathbb{R}^3$ с применением стереографического отображения. Эта идея была основной в работе [3], где такое отображение успешно было применено для размерности два. В более ранней заметке [7] были приведены некоторые предварительные результаты применения стереографии к задаче порождения мер посредством Ψ. Эту статью мы начинаем с основных результатов из комбинаторной интегральной геометрии и метода стереографической проекции. Основным результатом является теорема 3, устанавливающая некоторые необходимые и достаточные условия, при которых функционал Ψ порождает локально-конечную, знакопеременную меру в пространстве плоскостей $\mathbb{E}$. Эти условия сформулированы в терминах определенной комбинации значений F, зависящих от пирамиды, которую мы называем *пирамидальным эксцессом*. Если пирамидальный эксцесс всегда неотрицателен (что возможно при определенным образом выбранных F), то Ψ является неотрицательной мерой в $\mathbb{E}$. В общем случае, данное нами условие порождения знакопеременных мер ставит ограничение на скорость убывания пирамидального эксцесса для последовательностей *асимптотически плоских* пирамид : его порядок не должен быть меньше, чем h^2, где h - высота пирамиды.

Следующее за теоремой 3 изложение посвящено аналитическим следствиям условий этой теоремы. Рассмотрены функции клина F, порожденные так называемыми *флаговыми плотностями*. Нами поставлена задача нахождения

локального описания класса флаговых плотностей, порождающих функции клина, удовлетворяющие условиям теоремы 3. Эта задача естественным образом разделяется на две части, названные нами *анализами первого и второго порядков*. Ввиду ограниченности времени и места, в данной статье мы рассматриваем только анализ первого порядка. Нами доказано, что флаговая плотность необходимо имеет форму синусоиды и найдено дифференциальное уравнение для его функциональных параметров, то есть анализ первого порядка доведен до завершения. Однако, полное решение поставленных задач предполагает также анализ второго порядка, который мы опубликуем позже, в части II. Приведенные ниже заголовки параграфов прояснят конструкцию статьи : §2. Кольца в пространстве плоскостей, §3. Комбинаторный алгоритм, §4. Конечно-аддитивный функционал Ψ, §5. Флаговые плотности, §6. Стереография, §7. Блоки и их фрагменты, §8. Подход, основанный на интеграле Римана, §9. Возврат к функционалу Ψ, §10. Анализ первого порядка, §11. Зависимость ρ от направления плоскости, §12. Дифференциальное уравнение для функционалов A, B, C, §13. Достаточность дифференциального уравнения, §14. Заключительные замечания. Параграфы 2, 3 содержат необходимую основу из комбинаторной интегральной геометрии, §§7, 8 посвящены порождению меры в дуальном пространстве, §§9,10 содержат интерпретации в $\mathbb{E}$ результатов, полученных с применением стереографии, в §11 выводится синусоидальный вид для ρ, в §12 показана достаточность в предельном смысле анализа первого порядка. Заглавия остальных параграфов достаточно говорят об их содержании.

§2. КОЛЬЦА В ПРОСТРАНСТВЕ ПЛОСКОСТЕЙ

Пространство $\mathbb{E}$ плоскостей в $\mathbb{R}^3$, топологически эквивалентно трехмерному эллиптическому пространству с выброшенной точкой (см. [2], стр. 30). В этом параграфе приведены необходимые построения в $\mathbb{E}$, лежащие в основе дальней-

шего изложения.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задано конечное множество точек $\{P_i\}$, содержащее не менее двух точек. Две плоскости, не содержащие точек P_i будем называть *эквивалентными*, если они индуцируют одно и то же разбиение множества $\{P_i\}$. Множество эквивалентных плоскостей, обладающее компактным замыканием, будем называть *атомом*. Существует только одно разбиение, которое не соответствует какому-либо атому, а именно, когда подмножества равны $\emptyset$ и самому $\{P_i\}$. Нижеприведенные кольца, определенные посредством $\{P_i\}$, впервые были рассмотрены в [1].

Определение 1. Обозначим через $r\{P_i\}$ минимальное кольцо подмножеств $\mathbb{E}$, содержащее все атомы (в этом случае последние являются обычными атомами кольца $r\{P_i\}$).

Ясно, что любое $A \in r\{P_i\}$ может быть представлено в виде объединения атомов $\alpha_j \in r\{P_i\}$:

$$A = \bigcup_{j \in J} \alpha_j. \tag{2.1}$$

Множество плоскостей, содержащих точку $Q \in \mathbb{R}^3$, будем обозначать через $[Q]$ и будем называть *пучком* плоскостей, проходящих через Q.

Определение 2. Два множества – $A_1, A_2 \subset \mathbb{E}$ будем называть эквивалентными, если их симметрическая разность $A_1 \Delta A_2$ принадлежит объединению конечного числа пучков $[Q_i]$, т. е. если

$$A_1 \Delta A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \subset \bigcup_{i=1}^{k} [Q_i], \quad k < \infty.$$

Класс множеств, эквивалентных множеству $A \subset \mathbb{E}$, обозначим через A^*.

Лемма 1. *Пусть $\{P_i\}$ и $\{Q_i\}$ – два конечных множества из $\mathbb{R}^3$. Тогда для каждого $A \in r\{P_i\}$ существует эквивалентное множество $A' \in r(\{P_i\} \cup \{Q_i\})$.*

Доказательство достаточно провести в случае, когда $(\{P_i\}\cup\{Q_i\})\setminus\{P_i\}$ состоит из единственной точки, скажем Q_1 (далее доказательство может быть завершено индукцией). Ввиду (2.1), необходимое утверждение достаточно доказать в случае, когда A – атом. Возможны два случая : 1) $A\cap[Q_1]=\emptyset$, или 2) $A\cap[Q_1]\neq\emptyset$. В случае 1) имеем $A'=A$. В случае же 2) A эквивалентно объединению двух атомов A_1, A_2 из $r(\{P_i\}\cup\{Q_1\})$: A_1, A_2 – две компоненты, на которые атом A расщепляется пучком $[Q_1]$.

Определим класс подмножеств $\mathbb{E}$: $U=\cup\, r\{P_i\}$, где объединение взято по всем конечным подмножествам $\{P_i\}\subset\mathbb{R}^3$, содержащим более одной точки. По лемме 1, U вместе с каждым $A\in U$ содержит класс множеств, эквивалентных A. Тем самым, естественно рассматривать множества классов эквивалентности $U^*=\{A^*:\ A\in U\}$.

Лемма 2. *U^* – кольцо относительно операций объединения и вычитания множеств* $A^*\cup B^*=(A\cup B)^*,\quad A^*\setminus B^*=(A\setminus B)^*$.

Доказательство. Если $A^*, B^*\in U^*$, то существуют конечные множества $\{P_i\}$ и $\{Q_i\}\subset\mathbb{R}^3$ такие, что $A\in r\{P_i\}$ и $B\in r\{Q_i\}$. По лемме 1, существуют $A', B'\in r(\{P_i\}\cup\{Q_i\})$, $A'\in A^*$ и $B'\in B^*$. В силу свойства кольца

$$A'\cup B', A'\setminus B'\in r(\{P_i\}\cup\{Q_i\}),$$

и утверждение следует ввиду того, что $(A'\cup B')^*=(A\cup B)^*$ и $(A'\setminus B')^*=(A\setminus B)^*$.

Через ν будем обозначать иглы в $\mathbb{R}^3$, т. е. отрезки прямой $\nu=P_1,P_2$ с концами P_1, P_2, а через $[\nu]$ – множество

$$[\nu]=\{e\in\mathbb{E}:\quad e \text{ разделяет концы } \nu\}.$$

Определение 3. Обозначим через $\mathcal{B}$ минимальное кольцо подмножеств $\mathbb{E}$, содержащее все множества $[\nu]$, а через $\mathcal{B}$ – бюффоново кольцо на $\mathbb{E}$.

Рассмотрим множество $\mathcal{B}^*=\{B^*:\ B\in\mathcal{B}\}$.

Лемма 3. $U^* = B^*$.

Доказательство. Ввиду минимальности B достаточно показать, что $U^* \subset B^*$. Ясно, что при $A \in U$ существует $\{P_i\}$ такое, что $A \in r\{P_i\}$. Предположим сначала, что A – атом $r\{P_i\}$. Пусть $\{P'_k\}$ и $\{P''_j\}$ представляют разложение $\{P_i\}$, индуцированное некоторой плоскостью $e \in A$ и $\{P'_k\} \cup \{P''_j\} = \{P_i\}$. Тогда

$$A = \bigcap_{k,j} [P'_k, P''_j] \in B.$$

Для общего $A \in r\{P_i\}$ утверждение $A \in B$ следует из (2.1). Таким образом, из $A \in B$ вытекает $A^* \in B^*$, и доказательство завершено.

Пусть C – декартова координатная система O, x, y, z в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим пучки параллельных прямых

$$[x] = \{\text{плоскости, параллельные оси } x\}, \quad [y] = \{\text{плоскости, параллельные оси } y\},$$

$$[z] = \{\text{плоскости параллельные оси } z\},$$

а также пучок $[O]$ плоскостей, проходящих через O. Обозначим через $\mathbb{E}_C$ пространство

$$\mathbb{E}_C = \mathbb{E} \setminus ([x] \cup [y] \cup [z] \cup [O]). \tag{2.2}$$

Пусть C_i – четырехмерная декартова координатная система O_i, x_i, y_i, z_i, $i = 1, \ldots, 4$. Пересечение объединений

$$\bigcap (\mathbb{E}_{C_i} \cup [x_i] \cup [y_i] \cup [z_i] \cup [O_i]) = \bigcap \mathbb{E} = \mathbb{E} \tag{2.3}$$

представимо в виде объединения пересечений.

Будем говорить, что четыре координатные системы C_1, C_2, C_3 и C_4 находятся в общем положении, если в этом объединении пусты все компоненты пересечения, не содержащие фактор-множества $\mathbb{E}_{C_i}$.

Лемма 4. *Если координатные системы C_i, $i = 1, \ldots, 4$ в общем положении, то*

$$\mathbb{E} = \bigcup \mathbb{E}_{C_i}.$$

Доказательство следует из (2.3).

Обозначим через $\mathbf{B}$ минимальное σ-кольцо, содержащее кольцо B бюффоновых множеств.

Лемма 5. *Класс* $\mathbf{B}$ *совпадает с* σ*-кольцом ограниченных борелевых множеств из* $\mathbb{E}$.

Доказательство. Пусть C – декартова координатная система O, x, y, z в $\mathbb{R}^3$. Соответствующее пространство $\mathbb{E}_C$ топологически эквивалентно пространству произведений $(\mathbb{R} \setminus O)^3 = (x\text{-ось} \setminus O) \times (y\text{-ось} \setminus O) \times (z\text{-ось} \setminus O)$. Естественным гомеоморфизмом между этими двумя пространствами является $(x, y, z) \longleftrightarrow c$, где x, y, z – точки пересечения $c \in \mathbb{E}_C$ с соответствующими осями. При таком отображении пересечения интервалов, лежащих на осях x, y и z, соответствуют подмножествам Бюффона $\mathbb{E}_C$. Приходим к следующим заключениям :

1) класс $\mathbf{B}_C$ образов (при одном и том же отображении) борелевых множеств в $(\mathbb{R}\setminus O)^3$ совпадает с минимальным σ-кольцом, содержащим образы пересечений интервалов. Тем самым

$$\mathbf{B}_C \subset \mathbf{B}; \tag{2.4}$$

2) $\mathbf{B}_C$ совпадает с классом Бореля в пространстве $\mathbb{E}_C$.

Пусть $B \subset \mathbb{E}$ – любое борелево множество. Выберем четырехкратные декартовы системы $C_i, i = 1, ..., 4$ в общем положении и положим

$$B_i = B \cap \mathbb{E}_{C_i}.$$

По лемме 4, $B = \cup B_i$. Из 2), $B_i \in \mathbf{B}_{C_i}$, а по (2.4) $B \in \mathbf{B}$.

Мы доказали, что все борелевы множества из $\mathbb{E}$ принадлежат $\mathbf{B}$. Однако, $\mathbf{B}$ было порождено множествами $[\nu]$, которые по определению открыты. Поэтому справедливо также обратное утверждение.

§3. КОМБИНАТОРНЫЙ АЛГОРИТМ

Для описания клина как множества флагов из $\mathbb{R}^3$, начнем с определения флага. Флаг f в $\mathbb{R}^3$ является фигурой состоящей из точки $P \in \mathbb{R}^3$, прямой γ,

проходящей через P и имеющей пространственное направление Ω и плоскости, проходящей через γ и повернутой на угол ϕ. В дальнейшем будем писать

$$f = (P, \Omega, \phi), \quad P \in \mathbb{R}^3, \quad \Omega \in \mathcal{E}_2, \quad \phi \in \mathcal{E}_1(\gamma),$$

где $\mathcal{E}_2$ – проективная (или эллиптическая) плоскость, $\mathcal{E}_1(\gamma)$ – окружность длины π, представляющая пространство плоских направлений, ортогональных γ. Пространство флагов в $\mathbb{R}^3$ обозначим через $\mathcal{F}$.

Рассмотрим семейства флагов, зависящих от прямой $\gamma \subset \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{F}_\gamma = \{f: \quad P \in \gamma, \ \Omega \text{ совпадает с направлением } \gamma, \ \phi \in \mathcal{E}_1(\gamma)\}. \quad (3.1)$$

Любое семейство $\mathcal{F}_\gamma$ гомеоморфно пространству

$$\mathcal{F}_\gamma = \gamma \times \mathcal{E}_1(\gamma).$$

Наипростейшие множества из $\mathcal{F}_\gamma$ имеют вид произведения :

$$w = \nu \times \lambda, \quad (3.2)$$

где $\nu \subset \gamma$ – интервал, а $\lambda \subset \mathcal{E}_1(\gamma)$ – открытая луга (длины, не превосходящей π).

Пространства произведений (3.2) будем называть клиньями. Пусть $e(\gamma, \phi)$ – плоскость, проходящая через прямую $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ и повернутая на угол $\phi \in \mathcal{E}_1(\gamma)$.

При заданной прямой $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ и открытой дуге $\lambda \subset \mathcal{E}_1(\gamma)$ положим

$$V = \bigcup_{\phi \in \lambda} e(\gamma, \phi) \subset \mathbb{R}^3. \quad (3.3)$$

Получаем следующее эквивалентное определение клина : *клин есть пара* $w = (\nu, V)$, *где* $\nu \subset \gamma$ *угла, а* V *соответствует некоторому* $\lambda \subset \mathcal{E}_1(\gamma)$.

Любой клин геометрически может быть представлен с помощью фигуры в $\mathbb{R}^3$ (также называемой клином), см. рис. 1.

Пусть имеется конечное множество точек $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^3$.

Выберем пару точек P_i, P_j из $\{P_i\}$ и положим $e_{ij}(\phi) = e(\gamma_{ij}, \phi)$, где γ_{ij} – прямая, проходящая через P_i, P_j и $\phi \in \mathcal{E}_1(\gamma_{ij})$.

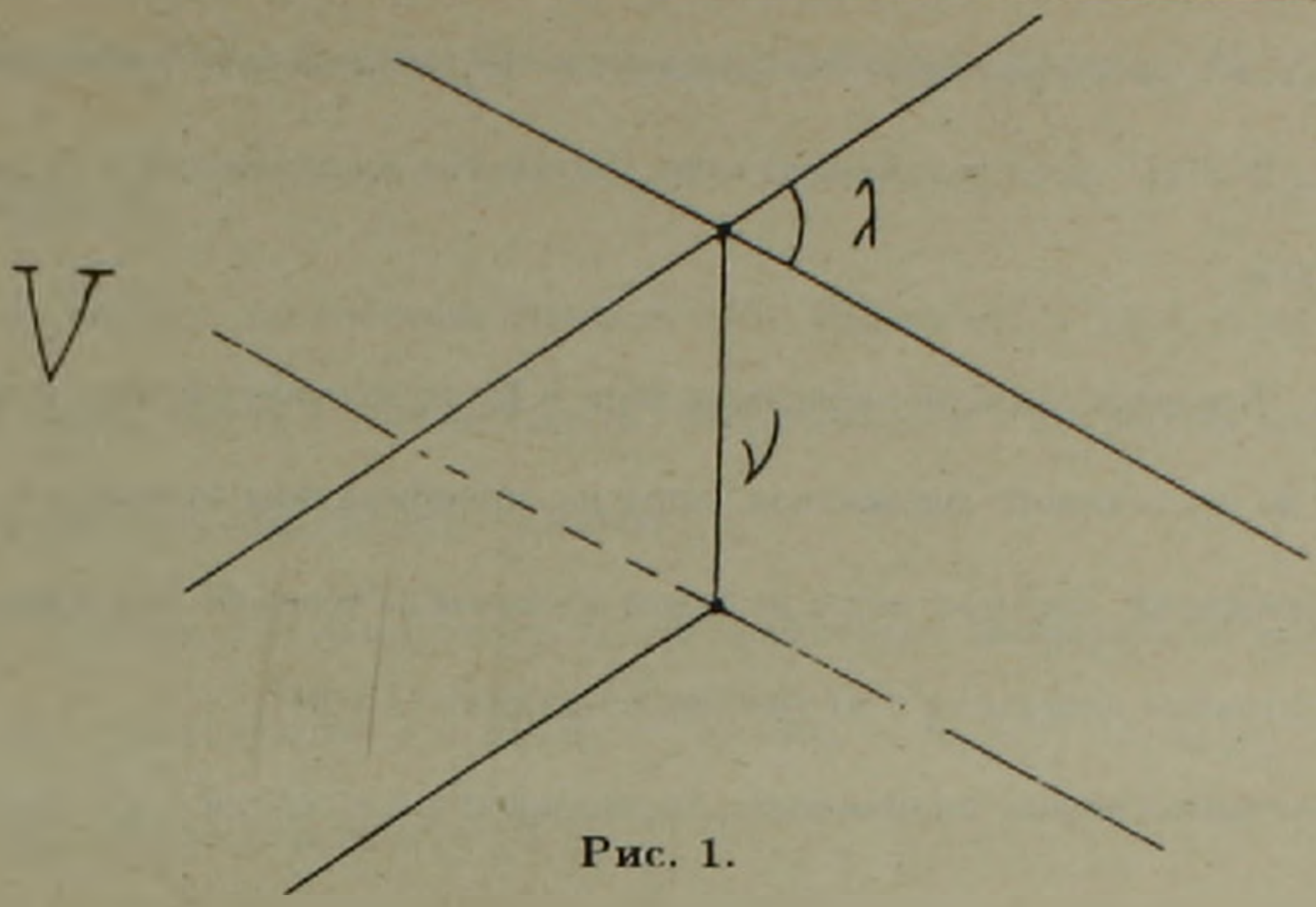


Рис. 1.

Рассмотрим те значения ϕ, при которых плоскость $e_{ij}(\phi)$ содержит точки из $\{P_i\}$, лежащие вне прямой γ_{ij}. Эти значения разделяют $\mathcal{E}_1(\gamma_{ij})$ на попарно-непересекающиеся, открытые дуги

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_l \subset \mathcal{E}_1(\gamma_{ij}). \tag{3.4}$$

Будем говорить, что эти дуги принадлежат паре P_i, P_j.

Любая пара P_i, P_j, вместе с одной из принадлежащих ей дуг λ_r, определяет клин w_s (где s заменяет тройной индекс i, j, r) : как показано на рис. 1, игла, принадлежащая w_s есть $\nu = P_iP_j$, а область V соответствует некоторому λ_r, принадлежащему P_i, P_j.

Две точки P_i и P_j будем называть *соседями*, если внутренность прямолинейного сегмента P_i, P_j не содержит точек из $\{P_i\}$. Клинья w_s, соответствующие соседним точкам P_i, P_j и дугам, определенным в (3.4), будем называть *ассоциированными* с конечным множеством $\{P_i\}$. Множество клиньев, ассоциированных с $\{P_i\}$, будем обозначать через $W\{P_i\}$.

Пусть m – знакопеременная мера в пространстве $\mathbb{E}$. Введем в рассмотрение функцию клина

$$F(w) = \int_{[\nu]} |V \cap e|\, m(de), \tag{3.5}$$

где $w = (\nu, V)$, интеграл взят по множеству $[\nu]$ плоскостей, пересекающих отрезок ν, а $|V \cap e|$ – угол (радианная мера множества направлений в e) плоской области $V \cap e$.

Пример 1. В классе локально-конечных мер, в $\mathbb{E}$, существует единственная, с точностью до постоянного множителя, мера μ_0, инвариантная относительно евклидовых движений. Элемент меры μ_0 будем обозначать через de. В координатах

p – расстояние плоскости e от начала координат O в $\mathbb{R}^3$,

ω – пространственное направление, нормальное к плоскости e, de имеет вид

$$de = dp\, d\omega, \tag{3.6}$$

где dp – элемент длины на R', а $d\omega$ – телесный угол.

Для соответствующей функции F имеет место равенство

$$F(w) = |\nu| \cdot |\lambda|, \tag{3.7}$$

где $|\nu|$ – длина иглы, а $|\lambda|$ – радианная мера дуги λ.

Нижеследующая теорема была сформулирована в [2], стр. 112 и в [8] для случая неотрицательных мер в $\mathbb{E}$. Нетрудно убедиться, что эта теорема верна и в случае знакопеременных мер.

Знакопеременная мера m в $\mathbb{E}$ называется *беспучковой*, если значение m равняется нулю на любом пучке $[P]$, т. е. $m([P]) = 0$ при любом $P \in \mathbb{R}^3$.

Теорема 1. *Пусть m – беспучковая, знакопеременная мера в $\mathbb{E}$, а $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^3$ – произвольное конечное множество точек. Тогда при любом $A \in r\{P_i\}$ значение $m(A)$ может быть представлено в виде*

$$m(A) = \sum c_s(A)\, F(w_s), \tag{3.8}$$

где сумма распространяется на множество $W\{P_i\}$ клиньев, ассоциированных с $\{P_i\}$, F – функция клина (3.5), а коэффициенты $c_s(A)$ – целые числа, независимые от выбора m.

Ниже приведен алгоритм для вычисления коэффициентов $c_s(A)$.

АЛГОРИТМ

Пусть P_i, P_j – две соседние точки из $\{P_i\}$. Выберем $\phi \in \operatorname{int}\lambda_r$, где λ_r – дуга из (3.4). Далее, пусть $\mathcal{E}$ – окрестность (топологически – открытый шар) $e_{ij}(\phi)$, удовлетворяющая следующему условию :

$e \in \mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда существует непрерывная кривая $e(t)$, $t \in (0,1)$, соединяющая e с $e_{ij}(\phi)$, т. е. $e(0) = e$, $e(1) = e_{ij}(\phi)$, так, что $e(t) \cap_e \{P_i\} = \emptyset$ для каждого $t \in (0,1)$.

Условимся считать *положительным* одно из двух открытых полупространств, порожденных $e_{ij}(\phi)$. *По непрерывности* это приводит к определению положительных, открытых полупространств e^+ для всех плоскостей $e \in \mathcal{E}$. Пусть e^- – открытое полупространство, ограниченное $e \in \mathcal{E}$ и дополнительное к e^+. Пучки $[P_k]$ делят $\mathcal{E}$ на открытые части. Нас интересуют четыре из них, которые мы обозначим через $\mathcal{E}(i^+, j^-)$, $\mathcal{E}(i^-, j^+)$, $\mathcal{E}(i^+, j^+)$ и $\mathcal{E}(i^-, j^-)$. Они определены условиями

1) при любом $e \in \mathcal{E}(i^+, j^-)$ имеем $P_i \in e^+$, $P_j \in e^-$;

2) при любом $e \in \mathcal{E}(i^-, j^+)$ имеем $P_i \in e^-$, $P_j \in e^+$;

3) при любом $e \in \mathcal{E}(i^+, j^+)$ имеем $P_r \in e^+$, $P_s \in e^+$;

4) при любом $e \in \mathcal{E}(i^-, j^-)$ имеем $P_r \in e^-$, $P_s \in e^-$.

Выше через P_r, P_s мы обозначили экстремальные точки из $\{P_i\}$, лежащие на прямой γ_{ij}.

Выберем четыре плоскости : $\overset{++}{e_{ij}}(\phi) \in \mathcal{E}(i^+, j^+)$, $\overset{--}{e_{ij}}(\phi) \in \mathcal{E}(i^-, j^-)$, $\overset{+-}{e_{ij}}(\phi) \in \mathcal{E}(i^+, j^-)$ и $\overset{-+}{e_{ij}}(\phi) \in \mathcal{E}(i^-, j^+)$. Эти плоскости будем считать полученными из $e_{ij}(\phi)$ посредством четырех типов "малых перемещений". Значение $c_s(A)$ задано формулой четырех индикаторов (см. [2], стр. 113) :

$$c_s(A) = I_A(\overset{+-}{e_{ij}}(\phi)) + I_A(\overset{-+}{e_{ij}}(\phi)) - I_A(\overset{++}{e_{ij}}(\phi)) - I_A(\overset{--}{e_{ij}}(\phi)), \quad (3.9)$$

$$\text{где } I_A(e) = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad e \in A \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

То, что правая сторона не зависит от от выбора положительного полупространства для $e_{ij}(\phi)$, может быть проверено непосредственно.

Рассмотрим пример, которым в дальнейшем будем пользоваться.

Пример 2. Пусть τ – ограниченный, выпуклый многоугольник с вершинами $v_1, ..., v_n$, лежащий в плоскости $e \subset \mathbb{R}^3$. Пусть Q – точка, лежащая вне e. Пару (Q, τ) будем называть *пирамидой* с *вершиной* Q и *основанием* τ. Через K часто будем обозначать выпуклую оболочку τ и Q. Запишем формулу (3.8) для пирамидального множества

$$A = Q|v_1, ..., v_n = Q|\tau = \{e \in \mathbb{E}: \ e \text{ отделяет } Q \text{ от } \tau\}.$$

Рассмотрим клинья w_s, ассоциированные с $\{Q, v_1, ..., v_n\}$. Ребро пирамиды K назовем *боковым*, если оно типа Qv_i, и *базовым*, если оно типа v_iv_j. Клин $w_s = (\text{ребро}, V)$ называется *опорным*, если $V \cap \operatorname{int} K = \emptyset$, и *покрывающим*, если $\operatorname{int} K \subset V$. Будем писать $w_s \in \mathrm{sl}$, если w_s является клином на боковом ребре, и $w_s \in \mathrm{cb}$, если w_s – покрывающий клин на базовом ребре. Непосредственным применением (3.9) получаем, что

$$m(Q|v_1, ..., v_n) = \sum_{\mathrm{sl}} F(w_s) - \sum_{\mathrm{cb}} F(w_s). \tag{3.10}$$

Разность в правой части (3.10) будем называть *пирамидальным эксцессом*.

§4. КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ Ψ

Функции, заданные на подмножествах $\mathbb{E}$ будем называть *функционалами*.

Пусть F – функция, заданная в пространстве клиньев. Для заданного множества $\{P_i\}$ и любого $A \in r\{P_i\}$ положим

$$\Psi(A; \{P_i\}) = \sum_{w_s \in W\{P_i\}} c_s(A) F(w_s), \tag{4.1}$$

где $c_s(A)$ вычислены по (3.9). То же множество A может принадлежать $r\{P_i'\}$ для другого множества точек $\{P_i'\}$, и априори, значение $\Psi(A; \{P_i'\})$ может быть

другое. Из теоремы 1 следует, что последнее не верно, так как $F(w)$ порождено беспучковой, знакопеременной мерой m в $\mathbb{E}$ по (3.5). Более того, для этого класса функций F имеем $\Psi(A) = \Psi(A')$, для всех эквивалентных множеств из U.

Отметим, что $F(w)$, заданная по (3.5), удовлетворяет следующим условиям :

F1. *$F(w)$ непрерывна в естественной топологии пространства клиньев.* "Естественная" топология в пространстве клиньев определена следующим правилом сходимости. Пусть $w = (\nu, V)$ - клин, и $w_n = (\nu_n, V_n)$ - последовательность клиньев. По определению $\lim w_n = w$ тогда и только тогда, когда $\lim \nu_n = \nu$ (в смысле сходимости концов игл) и $\lim V_n = V$ (в смысле сходимости замкнутых множеств).

F2. *$F(w)$ аддитивна.* Определение аддитивности F задается естественно при использовании интерпретации (3.2) клиньев как множеств флагов : F аддитивна тогда и только тогда, когда $w_1 \cup w_2 = w$, $w_1 \cap w_2 = \emptyset$ влекут $F(w_1) + F(w_2) = F(w)$.

Лемма 6. *Пусть $A \in r\{P_i\}$ и $B \in r\{P'_i\}$ - два эквивалентных множества из U. Если функция клина $F(w)$ непрерывна и аддитивна*, то

$$\Psi(A; \{P_i\}) = \Psi(B; \{P'_i\}).$$

Доказательство. Положим $\{Q_i\} = \{P_i\} \cup \{P'_i\}$. В $r\{Q_i\}$ существуют множества A' и B', эквивалентные, соответственно, A и B. Ясно, что A' и B' эквивалентны. С другой стороны, A' и B' являются объединениями атомов $\alpha_k \in r\{Q_i\}$:

$$A' = \bigcup_{k \in K_1} \alpha_k, \qquad B' = \bigcup_{k \in K_2} \alpha_k.$$

Так как $A' \Delta B' = \bigcup_{k \in K_2 \Delta K_2} \alpha_k$, то A' и B' эквивалентны в том и только том случае, когда $K_1 \Delta K_2 = \emptyset$, т. е. когда $K_1 = K_2$. Отсюда следует, что $A' = B'$.

Покажем, что

$$\Psi(A; \{P_i\}) = \Psi(A'; \{Q_i\}). \tag{4.2}$$

Для этого множество $W\{Q_i\}$ разобьем на два подмножества - W_1 и W_2 :

$w \in W_1$, если w покрыто клином $w' \in W\{P_i\}$; $w \in W_2$ – в противном случае.

Пусть $w = (\nu, V)$, $\gamma =$ прямая, содержащая ν и r_1, r_2 – замкнутые лучи с конечными точками, совпадающими с концами ν, $r_1 \cup r_2 = \gamma \setminus \nu$. Из $w \in W_2$ следует, что

$$r_1 \cap \{P_i\} = \emptyset \quad \text{или (и)} \quad r_2 \cap \{P_i\} = \emptyset.$$

Предположим, что $r_1 \cap \{P_i\} = \emptyset$ и конец отрезка $Q_i \notin \{P_i\}$. Тогда (по эквивалентности) можно подставить $I_{A'} = I_A$ в формулу (3.9), записанную для A' в терминах $W\{Q_i\}$. Так как $A \in r\{P_i\}$, то при соответствующем выборе Q_i имеем

$$I_A(\overset{+-}{e_{ij}}(\phi)) = I_A(\overset{--}{e_{ij}}(\phi)) \quad \text{и} \quad I_A(\overset{++}{e_{ij}}(\phi)) = I_A(\overset{-+}{e_{ij}}(\phi)),$$

откуда следует, что соответствующее $c_s(A') = 0$, т. е. что

$$\Psi(A'; \{Q_i\}) = \sum_{W_1} c_s(A') F(w_s).$$

Каждое $w_l \in W_1$ принадлежит в точности одному клину $w_s \in W\{P_i\}$. Тем самым

$$\Psi(A'; \{Q_i\}) = \sum_{w_s \in W\{P_i\}} \sum_{w_l \subset w_s} c_l(A') F(w_l).$$

Теперь для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\sum_{w_l \subset w_s} c_l(A') F(w_l) = c_s(A) F(w_s).$$

Последнее следует из того факта, что

$$w_l \subset w_s \quad \text{влечет} \quad c_l(A') = c_s(A) \tag{4.3}$$

и из аддитивности F. Доказательство (4.3) вытекает из следующих замечаний:

1) в вычислении $c_l(A)$ и $c_s(A')$ по (3.9) могут быть использованы те же плоскости $\overset{+-}{e_{ij}}$, $\overset{-+}{e_{ij}}$, $\overset{++}{e_{ij}}$, $\overset{--}{e_{ij}}$

2) так как A и A' эквивалентны, эти плоскости могут быть выбраны из пересечения $A \cap A'$.

Равенство (4.2) нами уже доказано. По симметрии также имеем

$$\Psi(B; \{P_i'\}) = \Psi(B'; \{Q_i\}),$$

что завершает доказательство, поскольку $A' = B'$.

Замечание. Утверждение леммы 6 означает, что при условиях F1, F2 функционал (4.1) определен на классе U и *согласован* на U в том смысле, что *эквивалентность любых двух* $A, A' \in U$ *влечет* равенство $\Psi(A) = \Psi(A')$. Поскольку функционал Ψ согласован на U, мы можем рассматривать Ψ как определенный на кольце U^*, или, что эквивалентно, на бюффоновом кольце $\mathcal{B}$ (см. лемму 3). Мы будем пользоваться обозначением

$$\Psi(A) = \Psi(A; \{P_i\}) \quad \text{при} \quad A \in U^*, A \in U \quad \text{или} \quad A \in \mathcal{B}.$$

Лемма 7. *Функционал Ψ конечно-аддитивен на кольце U^*.*

Доказательство. Пусть $A^*, B^* \in U^*$ имеют пустое пересечение в смысле кольцевых операций в U^*. Взяв $A \in A^*$ и $B \in B^*$, находим конечные множества $\{P_i\}, \{P'_i\} \subset \mathbb{R}^3$ такие, что $A \in r\{P_i\}$ и $B \in r\{P'_i\}$. Предположим, что $A', B' \in \in r(\{P_i\} \cup \{P'_i\}) = r\{Q_i\}$ – множества, эквивалентные A и B. Имеем $A' \cap B' = \emptyset$. Из аддитивности индикаторной функции I_A из (3.7) следует, что $\Psi(A'; \{Q_i\}) + + \Psi(B'; \{Q_i\}) = \Psi(A' \cup B'; \{Q_i\})$. Применив лемму 6, получим $\Psi(A) + \Psi(B) = = \Psi(A \cup B)$. Тем самым $\Psi(A^*) + \Psi(B^*) = \Psi(A^* \cup B^*)$. Доказательство завершено.

Оставшаяся часть статьи посвящена основному вопросу, вытекающему из леммы 5. *Пусть выполнены условия $C1$ и $C2$. При каких дополнительных условиях на функцию клина $F(w)$ возможно продолжение Ψ до знакопеременной меры на* B *?*

Нами получен ответ на этот вопрос при предположении, что $F(w)$ порождена так называемой флаговой плотностью, что выясняется в следующем параграфе, после изучения образа функционала Ψ при классическом стереографическом отображении.

§5. ФЛАГОВЫЕ ПЛОТНОСТИ

Любая непрерывная функция $\rho(f)$, заданная на пространстве $\mathcal{F}$ флагов

порождает функцию клина $F(w)$ по формуле

$$F(w) = \int_w \rho(f)\, df. \tag{5.1}$$

Выше df – единственная (с точностью до постоянного множителя) мера на $\mathcal{F}_\gamma$, инвариантная относительно евклидовых сдвигов :

$$df = dl\, d\phi,$$

где dl – элемент длины на γ, а $d\phi$ – элемент равномерной угловой меры.

Функцию, заданную на $\mathcal{F}$ (флаговую функцию) будем называть *флаговой плотностью*, если ею, по формулам (4.1), (5.1), порождается знакопеременная мера в пространстве $\mathbb{E}$.

Рассмотрим версию основной задачи, сформулированной в конце §4.

Задача. *Описать класс флаговых плотностей, т. е. флаговых функций, которые по формулам (5.1) и (4.1) порождают знакопеременные меры в пространстве плоскостей* $\mathbb{E}$.

Замечание. *Любая функция клина, соответствующая по (3.5) знакопеременной мере* m, *порождает по формуле (4.1) знакопеременную меру в пространстве* $\mathbb{E}$, *совпадающую с самой мерой* m (это следует из теоремы 1).

Следующий важный класс флаговых плотностей впервые был рассмотрен для трансляционно-инвариантного случая в [2].

Предположим, что m имеет гладкую плотность $u(e)$ относительно стандартной, инвариантной меры de на $\mathbb{E}$, т. е. $m(de) = u(e)\, de$. Из (5.1) и (3.5) следует, что при заданном $f = (Q, \Omega, \phi)$ значение соответствующей флаговой плотности $\rho(f)$ есть предел

$$\rho(f) = \lim (\Delta\phi \Delta l)^{-1} \int_{[\nu]} |V \cap e|\, u(e)\, de, \tag{5.2}$$

где ν – игла с концом в Q, с направлением Ω и длиной Δl, область V ограничена двумя плоскостями, проходящими через ν и повернутыми вокруг ν на углы ϕ и $\phi + \Delta\phi$. Будем полагать, что в (5.2) $\Delta\phi$ и Δl стремятся к нулю.

Для вычисления предела (5.2) представим плоскости из множества $[\nu]$ посредством l, ω – координат, где l – одномерная координата точки $e \cap \nu$ на ν, а ω – нормальное к e направление. Имеем (см. [2]) $de = \cos(\Omega, \omega)\, dl\, d\omega$, где $(\Omega, \omega) \leq \frac{\pi}{2}$ – угол между направлениями Ω и ω. Представим e в координатах (p, ω) (см. (3.6)), где p – расстояние от точки Q и запишем $u(e) = u_Q(p, \omega)$. На множестве $[\nu]$ справедливо равенство

$$u(e) = u_Q(\omega) + o(\Delta l), \tag{5.3}$$

где $u_Q(\omega)$ – сужение $u(e)$ на пучок $[Q]$ плоскостей, проходящих через Q, т. е. $u_Q(\omega) = u_Q(0, \omega)$. Угол $|V \cap e|$ не зависит от l, и из стандартной формулы сферической тригонометрии непосредственно следует его асимптотическое представление при $\Delta\phi \to 0$:

$$|V \cap e| = \frac{\sin^2 c}{\cos(\Omega, \omega)}\, d\phi + o(d\phi),$$

где $c = c(f, \omega)$ – угол между Ω и прямой, полученной пересечением нормальной к ω плоскости с плоскостью флага f. Из этих замечаний следует представление предела (5.2) в виде интеграла :

$$\rho(f) = \int \sin^2 c\; u_Q(\omega)\, d\omega. \tag{5.4}$$

Функцию $u(e)$, заданную на пространстве плоскостей будем называть гладкой, если для каждого Q производная $\dfrac{\partial u_Q(p, \omega)}{\partial p}$ непрерывна в некоторой окрестности точки $p = 0$. Применением стандартных методов анализа, из вышеприведенного замечания и представления $o(\Delta l)$ в (5.3) в форме Лагранжа легко получим следующий результат : *если $u(e)$ – гладкая функция, то $\rho(f)$, заданная по (5.4), является флаговой плотностью знакопеременной меры $u(e)\, de$.*

§6. СТЕРЕОГРАФИЯ.

Применением стереографической проекции ниже получены необходимые и достаточные условия, из которых следует решение задачи, сформулированной

в §5. Пусть имеется система координат O, x, y, z в $\mathbb{R}^3$. Стереографическая проекция S переводит плоскость, заданную уравнением

$$ax + by + cz = 1, \tag{6.1}$$

в точку в $\mathbb{R}^3$, с координатами (a, b, c). Проекция S является гомеоморфизмом между пространствами $\mathbb{E} \setminus [O]$ и $\mathbb{R}^3 \setminus O$. Определим образ множества A плоскостей следующим образом :

$$S(A) = \{Se: \quad e \in A, \ e \text{ не содержит } O\}.$$

Опишем вкратце стереографические проекции объектов, определенных в предыдущих параграфах, а также образ функционала Ψ.

1. Образ $S([P])$ пучка $[P]$ плоскостей, проходящих через $P = (a, b, c) \neq O$, является плоскостью в $\mathbb{R}^3$, с уравнением вида (6.1). При любом $P \neq O$ плоскость $S([P])$ не содержит O.

2. При заданном конечном множестве $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^3$, $O \notin \{P_i\}$, плоскости $S([P_i])$ разбивают $\mathbb{R}^3$ на открытые, выпуклые, многогранные компоненты, некоторые из которых неограничены. Выбросим компоненту, содержащую O. Те из оставшихся компонент, которые ограничены, являются образами атомов $r\{P_i\}$, не содержащих плоскостей из $[O]$. Конечные объединения таких ограниченных, выпуклых компонент являются образами множеств из $r\{P_i\}$ не содержащих плоскостей из $[O]$.

3. Пусть $S(U) = \{S(A): \quad A \in U\}$. Ограниченный многогранник B принадлежит $S(U)$, если его замыкание не содержит O. Отношение эквивалентности в U индуцирует отношение эквивалентности в $S(U)$. Множества $A, B \in S(U)$ будут эквивалентны тогда и только тогда, когда симметрическая разность $A \Delta B$ может быть покрыта конечным числом плоскостей, не содержащих O.

4. Пусть $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ – прямая, не содержащая O. Образ *связки* $[\gamma]$ плоскостей, содержащих $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ – прямая из $\mathbb{R}^3$, не содержащая O. Флаг $f = (P, \Omega, \phi) \in \mathcal{F}_\gamma$

эквивалентно задается тройкой $f = (P, \gamma, e(\gamma, \phi))$, где γ – прямая, проходящая через P в направлении Ω, $e(\gamma, \phi)$ – плоскость, проходящая через γ, повернутая на угол ϕ. Предположим, что $O \notin e(\gamma, \phi)$, и пусть плоскость e_1 является образом P, прямая γ_1 – образом связки $[\gamma]$, а точка P_1 – образом $e(\gamma, \phi)$. *Поскольку отношение инцидентности сохраняется при стереографии*, имеем $P_1 \in \gamma_1 \subset e_1$. Следовательно, $(P_1, \gamma_1, e_1) = S(f)$ тоже флаг. $S(f)$ будем называть *образом* f. Отображением S задается гомеоморфизм $\mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{F}: \ O \notin e(\gamma, \phi)\}$ на себя.

5. Определим образ клина $w \in \mathcal{F}_0$ как $S(w) = \{S(f): \quad f \subset w\}$. Ясно, что $S(w) \subset \mathcal{F}_0$. Тем не менее, $S(w)$ может не быть клином, $S(w)$ является клином, если плоскости, ограничивающие w, не содержат O, т. е. замыкание w принадлежит $\mathcal{F}_0$. Обратно, клин w является образом некоторого клина w_1, т. е. $w = S(w_1)$, тогда и только тогда, когда замыкание w принадлежит $\mathcal{F}_0$. Мы будем пользоваться обозначением

$$\mathbf{W}_0 = \{w: \quad \text{замыкание } w \text{ принадлежит } \mathcal{F}_0\}.$$

6. Пусть дана функция клина $F(w)$, удовлетворяющая условиям F1, F2 из §4. Определим на $S(U)$ конечно-аддитивный функционал

$$\Theta(A) = \Psi(S^{-1}(A)), \quad A \in U,$$

где Ψ – функционал, заданный на U формулой (4.1), S^{-1} – обращение S. Функционал Θ будем называть образом Ψ.

Пусть $\mathbf{C}_0$ – класс ограниченных, выпуклых многогранников, удовлетворяющих условиям :

а) если $C \in \mathbf{C}_0$, то точка O лежит вне замыкания A ;

б) плоскости, являющиеся продолжениями граней C, не содержат O.

Согласно 2., $\mathbf{C}_0 \subset S(U)$.

Пусть $C \subset \mathbf{C}_0$. Множество граней C обозначим через $\{a_i\}$. С каждым a_i будем ассоциировать два клина, ограниченные плоскостями двух граней C, пересекающихся в a_i. Согласно (3.3), пусть

(a_i, V_i) и (a_i, V_i^c), V^c дополнение V.

Через w_i будем обозначать тот из этих двух клиньев, который принадлежит $\mathbf{W}_0$. Клин w_i либо содержит C (в этом случае w_i называется *покрывающим*), либо же нет (тогда w_i называется *внешним*). Через $W(a_i)$ будем обозначать свободный клин, соответствующий w_i.

Пусть $F(w)$ – функция клина, удовлетворяющая условиям F1 и F2. Через F_S будем обозначать функцию клина, определенную на $\mathbf{W}_0$ по формуле

$$F_S(w) = F(S^{-1}(w)).$$

Утверждение 1. *При любых* F *и* $C \in \mathbf{C}_0$

$$\Theta(C) = \sum_{\substack{\text{покрывающие}\\ \text{клинья}}} F_S(w_i) - \sum_{\substack{\text{внешние}\\ \text{клинья}}} F_S(w_i). \tag{6.2}$$

Функционал Θ конечно-аддитивен на $\mathbf{C}_0$, что следует либо непосредственно из (6.2), либо же из аддитивности Ψ. Конечно-аддитивные функционалы на $\mathbf{C}_0$ были рассмотрены в [7] независимо от стереографии.

7. Индуцированные флаговые плотности. Пусть функция F порождена флаговой плотностью $\rho(f)$ по формуле (5.1). Тогда F_S тоже порождено некоторой флаговой плотностью $\theta(f)$, которую будем называть индуцированной, т. е.

$$F_S(w) = \int_w \theta(f)\, df. \tag{6.3}$$

Ясно, что

$$\theta(f) = \rho(S^{-1} f) \cdot J(f), \tag{6.4}$$

где J – соответствующий якобиан. Явного представления J мы не приведем, однако отметим сингулярность J на множестве $\{f = (e, \varphi, P)\colon O \in e\}$. Этим обусловлено нижеприводимое определение. Будем говорить, что флаговая функция θ принадлежит классу $SC^{(m)}$, если θ можно представить как в (6.4), причем $\rho \in C^{(m)}$, где $C^{(m)}$ обозначает класс флаговых функций, непрерывно дифференцируемых m раз.

§7. БЛОКИ И ИХ ФРАГМЕНТЫ

Геометрические построения этого параграфа впервые были описаны в работе [7]. Как и в §6 здесь мы будем предполагать, что в $\mathbb{R}^3$ фиксирована декартова система координат. Для удобства плоскость x, y будем называть *горизонтальной*, а направление z – *вертикальным*.

Блоки.

Блок – прямоугольный параллелипипед с гранями, параллельными осям x, y и z. Через B будем обозначать блок в $\mathbb{R}^3$, а через $2h_x, 2h_y, 2h_z$ – длины сторон B, параллельных, соответственно, осям x, y и z. В качестве размерного параметра блока B выберем значение $v = 8h_xh_yh_z$, а его *форма* s определяется дробями $\frac{h_y}{h_x}$, $\frac{h_z}{h_x}$, расположение же B однозначно определяется его центром $P \in \mathbb{R}^3$.

B^* фрагменты. Этот термин будем применять при рассмотрении выпуклых многогранников $B^* \subset \mathbb{R}^3$, представимых в виде пересечения

$$B^* = B \cap H,$$

где B – блок, а H – полупространство с граничной плоскостью ∂H, содержащей внутреннюю к B диагональ d.

Грань r многогранника B^*, лежащая в ∂H и содержащая d, является *ромбоидом*. Расположение B^* определяется центром P блока B. Выберем в качестве размерного параметра площадь a грани r. Форма s_1 фрагмента B^* определяется формой соответствующего B и углом поворота ∂H вокруг d. Существует также дискретный параметр, определяющий *тип* B^*. Этот параметр имеет восемь значений, соответствующих четырем возможным выборам диагонали d блока B и двум возможным выборам полупространства H (при заданном ∂H).

Если H – любое полупространство, а $r \subset \partial H$ – *специальный* ромбоид (т. е. ромбоид, чья проекция на горизонтальной плоскости является прямоугольником, со сторонами, параллельными осям x и y), то существует единственный

многогранник $B^* = H \cap B$, обладающий свойствами :

1) r является гранью B^*,

2) горизонтальная грань B^* является также гранью блока B.

Многоугольник B^* строится следующим образом. Пусть P_1 и P_2 соответственно – вершины r, имеющие максимальную и минимальную координату z. Тогда $B^* = B \cap H$, где B – блок, ограниченный плоскостями, параллельными координатным плоскостям, проходящим через P_1 и P_2.

В следующем §8 мы будем пользоваться как B^*-фрагментами, полученными вышеприведенным построением, так и B^*-фрагментами, являющимися прямыми пирамидами с горизонтальными основаниями (случай, когда ∂H вертикально).

B^{**} фрагменты. Этим понятием мы будем оперировать при рассмотрении выпуклых многогранников, представимых в виде

$$B^{**} = B \cap H \cap H_1,$$

где B – блок, а H и H_1 – полупространства, ограниченные плоскостями, содержащими диагональ d блока B.

В качестве размерного параметра для B^{**} выберем длину l диагонали $d = P_1P_2$; форма B^{**} – та же, что и для B^*, плюс угол, на который повернуто ∂H_1 вокруг d. Число значений параметра типа удвоено. Расположение B^{**} определяется центром P блока B.

Пусть даны два полупространства H и H_1 в общем положении, а также сегмент d на прямой $\partial H \cap \partial H_1$. Тогда существует единственное $B^{**} \subset H \cap H_1$, для которого d – ребро B^{**}. Это B^{**} можно построить в виде $B \cap H \cap H_1$, где B – блок, ограниченный плоскостями, проходящими через концы d, и параллельными координатным плоскостям.

В следующем §8 мы будем рассматривать B^{**}-фрагменты, для которых плоскость ∂H_1 вертикальна.

Пусть Θ – функционал, заданный на $\mathbf{C}_0$, порожденный некоторой флаговой

плотностью θ по формулам (6.3), (6.2). Нас интересует асимптотическое поведение значений Θ на множествах B, B^* и $B^{**} \in \mathbf{C}_0$, при предположении, что значения размерных параметров v, a и l стремятся к нулю при *фиксированных положениях, формах и типах*. Мы будем предполагать, что положение P таково, что нет пересечений с соответствующими *критическими плоскостями*. По определению, критические плоскости многогранника $C \subset \mathbf{C}_0$ – суть плоскости, проходящие через O и параллельные граням C. Для блока B критическими плоскостями являются координатные плоскости $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$. Для B^* эта тройка дополняется плоскостью, проходящей через O и параллельной ∂H. Для B^{**} к этим плоскостям необходимо добавить плоскость, проходящую через O и параллельную ∂H_1. Поскольку P выбрано вне соответствующих критических плоскостей, то для любых достаточно малых значений размерного параметра имеем B, B^*, $B^{**} \subset \mathbf{C}_0$.

Из (6.3) следует, что $\lim \Theta(B) = \lim \Theta(B^*) = \lim \Theta(B^{**}) = 0$.

Разложение типа Тейлора по размерным параметрам становится возможным после предположения, что наше Θ порождено флаговой функцией θ, принадлежащей некоторому классу гладкости. В частности, при предположении, что $\theta \in SC^{(2)}$ (см. §6, 7), будем иметь

$$\Theta(B) = v \cdot D(P) + o(v), \qquad D(P) = \frac{\partial \Theta(B)}{\partial v} \quad \text{при } v = 0,$$

$$\Theta(B^*) = a \cdot D^*(P) + o(a), \qquad D^*(P) = \frac{\partial \Theta(B^*)}{\partial a} \quad \text{при } a = 0, \qquad (7.1)$$

$$\Theta(B^{**}) = l \cdot D^{**}(P) + o(l), \qquad D^{**}(P) = \frac{\partial \Theta(B^{**})}{\partial l} \quad \text{при } l = 0.$$

Эти обозначения явно не указывают зависимость D, D^* и D^{**} от параметров формы и типа. Функции D, D^* и D^{**} определены вне соответствующих критических плоскостей.

Нам понадобятся конкретные представления для D^* и D^{**}, которые различны на различных компонентах своих областей определения. Что касается функции D, то (см. [7])

$$D(P) = -\operatorname{sign}(xy)\,\frac{\partial^2 I_1(P)}{\partial x \partial y} - \operatorname{sign}(yz)\,\frac{\partial^2 I_2(P)}{\partial y \partial z} - \operatorname{sign}(xz)\,\frac{\partial^2 I_3(P)}{\partial x \partial z}. \qquad (7.2)$$

В этом выражении

$$I_i(P) = I_i(x, y, z) = \int_{\lambda_i} \theta(P, \Omega_i, \phi)\, d\phi,$$

где Ω_i, при $i = 1$, является направлением оси z, при $i = 2$ – направлением оси x, а при $i = 3$ – направлением оси y; λ_i – дуга направлений в плоскости, ортогональной к Ω_i, концы λ_i соответствуют двум координатным плоскостям, проходящим через Ω_i. Мы также требуем, чтобы $O \notin V_i$, $i = 1, 2, 3$, где V_i задано по (3.3) с $\gamma =$ прямой, проходящей через P в направлении Ω_i. Как обычно, $\operatorname{sign} x = 1$, при $x > 0$, и $\operatorname{sign} x = -1$, при $x < 0$.

Если особо не оговорено, D^* и D^{**} могут принимать ненулевые значения. В последнем случае отношения $\Theta(B^*)(\text{значение } B^*)^{-1}$ и $\Theta(B^{**})(\text{значение } B^{**})^{-1}$ стремятся к бесконечности, несмотря на то, что $\Theta(B)(\text{значение } B)^{-1}$ существует. Как показано в [7], эти различия в асимптотическом поведении обусловлены эффектами, порожденными делением в (6.2) величин, соответствующих параллельным клиньям (клинья w_1 и w_2 называются параллельными, если w_1 может быть получено из w_2 параллельным переносом). В (6.2), записанном для B^{**}, нет параллельных клиньев. С использованием аддитивности, (6.2) можно переписать для B^* так, чтобы клинья были сгруппированы в параллельные пары. В (6.2), записанном для B, клинья сгруппированы в параллельные четверки. Из сказанного приходим к следующему заключению.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3 \setminus O$ *существует знакопеременная мера* m, *обладающая плотностью, со значениями, совпадающими с* Θ *на* $\mathbf{C}_0$. *Если* Θ *поро-*

ждено флаговой плотностью $\theta \in SC^{(2)}$, то

$$D^{\bullet} \equiv 0, \qquad D^{\bullet\bullet} \equiv 0. \tag{7.3}$$

В следующем параграфе мы покажем, что условия (7.3) также достаточны, т. е. при некоторых предположениях о гладкости из этих условий следует, что Θ порождено знакопеременной мерой m, заданной в пространстве $\mathbb{R}^3 \setminus O$.

§8. ПОДХОД, СВЯЗАННЫЙ С ИНТЕГРАЛОМ РИМАНА

Поставив надлежащее условие на поведение флаговой плотности θ и применив некоторые стандартные методы анализа (представление остаточных членов формулы Тейлора в форме Лагранжа) получаем следующий аналог формулы (7.1), которым ниже будем пользоваться.

Предположим, что флаговая функция $\theta(f) \in SC^{(3)}$, и что параметры формы и типа для B, $B^{\bullet}$ и $B^{\bullet\bullet}$ фиксированы. Тогда

$$\Theta(B) = v \cdot D(P) + v^2 \cdot \mathcal{L}(v, P), \tag{8.1}$$

$$\Theta(B^{\bullet}) = a \cdot D^{\bullet}(P) + a^2 \cdot \mathcal{L}^{\bullet}(a, P), \tag{8.2}$$

$$\Theta(B^{\bullet\bullet}) = l \cdot D^{\bullet\bullet}(P) + l^2 \cdot \mathcal{L}^{\bullet\bullet}(l, P). \tag{8.3}$$

В этих уравнениях $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^{\bullet}$ и $\mathcal{L}^{\bullet\bullet}$, как функции от P, заданы в тех же областях D, $D^{\bullet}$ и $D^{\bullet\bullet}$ и равномерно ограничены на компактных множествах, лежащих в этих областях (т. е. на компактных множествах, не имеющих общих точек с соответствующими критическими плоскостями.

Пусть Π_1 – прямая призма, горизонтальное основание которой лежит в плоскости $z = 0$ и является прямоугольным треугольником с катетами, параллельными осям x и y. Предположим, что $\operatorname{int} \Pi_1$ принадлежит полупространству $z > 0$. Через Π обозначим выпуклое тело, которое может быть получено из Π_1 пересечением с наклонной плоскостью, не пересекающейся с горизонтальными основаниями Π_1. Предположим, что горизонтальная грань Π лежит в плоскости $z = 0$.

Через σ обозначим наклонную грань П, через λ – сторону σ, чья проекция на горизонтальное основание не параллельно осям x или y, а через ν – вертикальную грань П, содержащую λ.

Пусть имеем $\Pi \subset \mathbf{C}_0$, такое, что замыкание П не пересекается с координатными плоскостями. Заполним его блоками и B^* и B^{**}-фрагментами следующим образом. Сначала мы разделим λ на n равных интервала d_i. Через каждую точку деления, также как через нижний конец λ проведем три плоскости, параллельные координатным плоскостям (см. рис. 2). Далее, пересечем часть П, лежащую ниже горизонтальной плоскости $z = z_0$, проходящей через нижний конец λ, n горизонтальными, равноудаленными плоскостями.

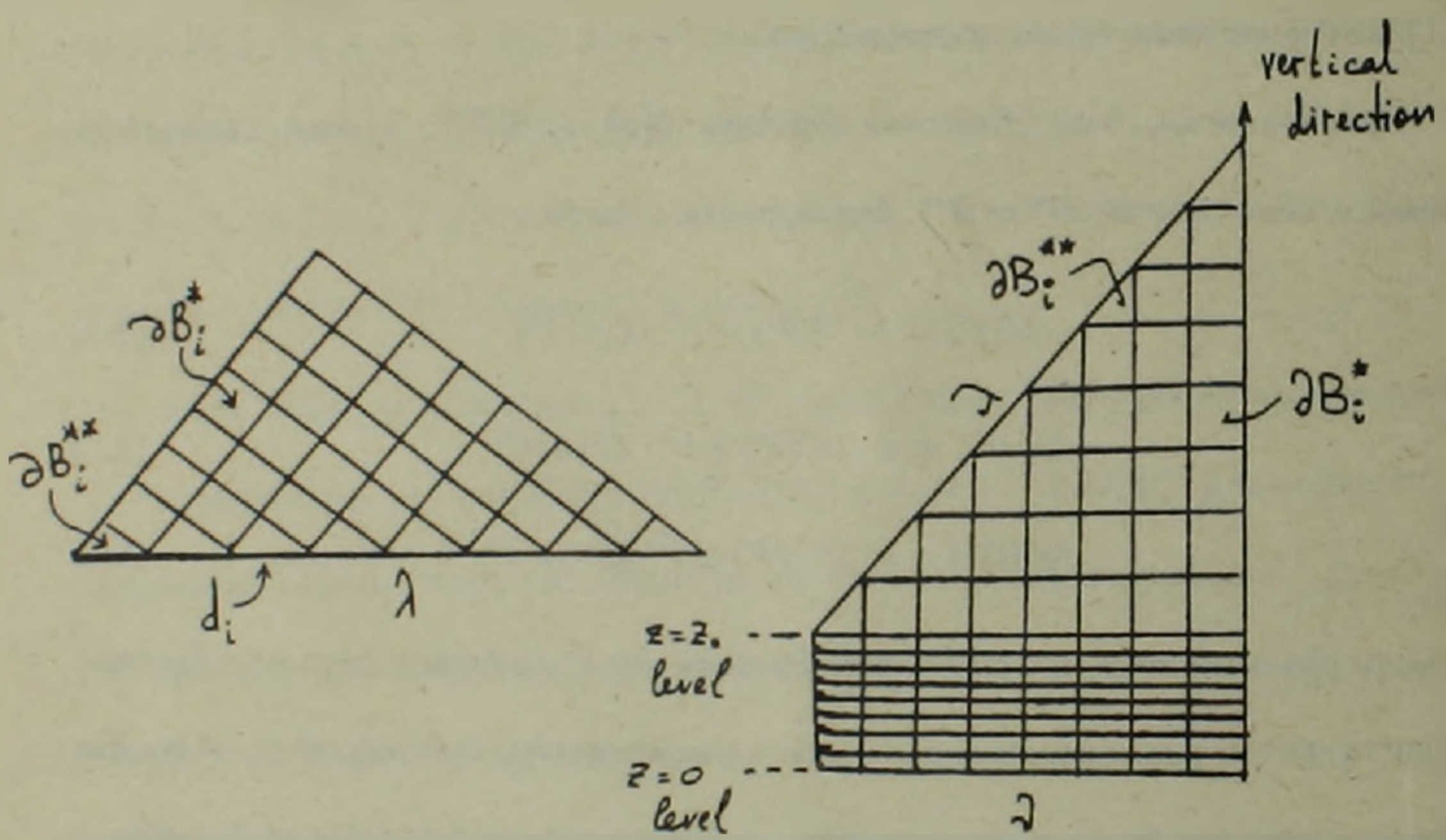


Рис. 2. Разбиение граней λ и ν призмы П.

Эти плоскости дробят П на непересекающиеся ячейки, которые можно сгруппировать следующим образом : 1) фрагменты B_i^{**}, для которых $\partial H = \sigma$, $\partial H_1 = \nu$; 2) фрагменты B_i^{*}, для которых $\partial H = \sigma$; 3) фрагменты B_i^{*}, для которых $\partial H = \lambda$; 4) блоки B_i. Размеры и типы тел из групп 1), 2) – постоянны. В группе 3) – тела двух разных форм, зависящих от расположения выше, или ниже z_0.

В группе 4) – та же ситуация. Ввиду аддитивности Θ

$$\Theta(\Pi) = \sum_{4)} \Theta(B_i) + \sum_{2)\cup 3)} \Theta(B_i^*) + \sum_{1)} \Theta(B_i^{**}). \tag{8.4}$$

Заменив каждое слагаемое его выражением (8.1), (8.2), или (8.3), получим Римановы суммы интегралов $\int_\Pi D\,dv$, $\int_{\sigma\cup\nu} D^*\,da$ и $\int_\lambda D^{**}\,dl$, где dv – элемент объема, а da – элемент площади, плюс суммы членов, пропорциональных $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^*$ и $\mathcal{L}^{**}$. Последние суммы имеют порядок $1/n$. Это следует из наших предположений относительно Π, гарантирующих, что B_i, B_i^* и B_i^{**} не приближаются к критическим плоскостям. Тем самым, предельной (при $n \to \infty$) формой (8.4) является

$$\Theta(\Pi) = \int_\Pi D\,dv + \int_{\sigma\cup\nu} D^*\,da + \int_\lambda D^{**}\,dl. \tag{8.5}$$

Это интегральное представление позволяет найти достаточные условия порождения знакопеременной меры с помощью Θ.

Обозначим через $\mathbf{C}_1$ подкласс $\mathbf{C}_0$, определенный дополнительным условием, что замыкание $C \in \mathbf{C}_1$ не пересекается координатными плоскостями. При любом $C \in \mathbf{C}_1$ из условия (7.3) следует, что

$$\Theta(C) = \int_C D\,dv, \quad \text{при } C \in \mathbf{C}_1. \tag{8.6}$$

Действительно, при условии (7.3) и при $C = \Pi$ уравнение (8.5) приводимо к виду (8.6). Для любого $C \in \mathbf{C}_1$ значение $\Theta(C)$ может быть представлено в виде линейной комбинации значений Θ на конечном числе тел типа Π. Тем самым, (8.6) следует из аддитивности Θ.

Ясно, что (8.6) эквивалентно утверждению, что Θ *локально-конечная, знакопеременная мера, заданная в пространстве* $\mathbb{R}^3 \setminus \{$*координатные плоскости*$\}$. *Эта мера имеет плотность* D, *заданную формулой (7.2).*

Можно доказать также нижеприводимую лемму, из которой следует, что Θ *локально-конечная, знакопеременная мера в* $\mathbb{R}^3 \setminus O$.

Лемма 8. *При любом* $\theta \in SC^{(3)}$ *заданная посредством (7.2) плотность* D *локально-суммируема в* $\mathbb{R}^3 \setminus O$.

Подчеркнем, что наша задача заключается не в разрывности коэффициентов $c_i(P)$ в (7.2), а в поведении индивидуальных функций $I_i(P)$ при P, стремящейся к координатной плоскости. В общем случае $I_i(P)$ разрывно на координатных плоскостях, ввиду того, что интеграл, определяющий эту функцию, может расходиться. Так или иначе, для комбинации (7.2) O – единственная точка разрыва. Проверку этих фактов непосредственно для случая $\theta = J$ (т. е. когда в (6.3) имеем $\rho \equiv 1$) оставляем читателю.

Доказательство леммы 8. Пусть x', y', z' – декартова система координат в $\mathbb{R}^3$, полученная из системы x, y, z поворотом вокруг точки O. Обозначения, использованные для системы x, y, z, мы переносим в систему x', y', z', добавляя штрихи. Любое множество $C \in \mathbf{C}_0 \setminus \mathbf{C}_1$ может быть представлено как конечное объединение непересекающихся множеств $C = C_1 \bigcup C_2$, где C_1 – конечное объединение множеств из $\mathbf{C}_1$, а C_2 – такое же объединение множеств из $[\mathbf{C}_0 \setminus \mathbf{C}_1] \cap (\mathbf{C}_1)'$. Следовательно, нам достаточно показать, что $\int_{C_0} D\,dv$ существует для

$$C_0 \in [\mathbf{C}_0 \setminus \mathbf{C}_1] \cap (\mathbf{C}_1)'. \tag{8.7}$$

Пусть множество $B' \in \mathbf{C}_1$, является блоком в системе x', y', z'. Согласно (8.6)

$$\Theta(B') = \int_{B'} D\,dv.$$

Правой частью формулы (7.2), записанной для системы x', y', z', определяется некоторая плотность D'. При $B' \subset (\mathbf{C}_1)'$ имеем $\Theta(B') = \int_{B'} D'\,dv$. Тем самым, вне плоскостей $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ и $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

$$D \equiv D'. \tag{8.8}$$

Из (8.7) следует существование интеграла $\int_{C_0} D'\,dv$. Согласно (8.8), последний интеграл совпадает с $\int_{C_0} D\,dv$ при $D \not\equiv D'$ (хотя D не определено по (7.2))

на подмножестве C_0 нулевой меры. Окончательно, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть Θ – конечно-аддитивный функционал на $\mathbf{C}_0$, порожденный флаговой плотностью $0 \in SC^{(3)}$ (по формулам (6.3), (6.2)). Одновременное выполнение тождеств $D^* \equiv 0$ и $D^{**} \equiv 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы Θ было локально-конечной знакопеременной мерой в $\mathbb{R}^3 \setminus O$, обладающей плотностью всюду в $\mathbb{R}^3 \setminus O$. Эта плотность вне плоскостей $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ определяется формулой (7.2).*

§9. ВОЗВРАТ К ФУНКЦИОНАЛУ Ψ

Пусть $A_1, ..., A_n$ – монотонно убывающая последовательность бюффоновых множеств в $\mathbb{E}$, сжимающихся к точке $e \in \mathbb{E}$ (представляющей собой плоскость в $\mathbb{R}^3$). Далее, пусть m – знакопеременная мера в пространстве $\mathbb{E}$, с непрерывной плотностью $u(e)$. Величина $u(e)$ может быть получена как предел :

$$u(e) = \lim \frac{m(A_n)}{m_0(A)}, \tag{9.1}$$

где m_0 обозначает "инвариантную меру" с элементом $dc = dp\,d\omega$ (см. (3.6)).

Если функционал Ψ, рассмотренный в §4, совпадает с m на U, то из (9.1) вытекает существование предела

$$\lim \Psi(A_n) \cdot (m_0(A_n))^{-1}. \tag{9.2}$$

Отсюда следует, что *существование предела (9.2) является необходимым условием* в классе мер, обладающих плотностью вида (9.1).

В этом параграфе будет показано, что существование предела (9.2) для некоторых последовательностей *множеств вершин* (см. пример 2 из §3) достаточно для существования локально-конечной знакопеременной меры m в $\mathbb{E}$, для которой $m = \Psi$ в классе U.

Определение 4. Последовательность пирамид (см. пример 2 в конце §3) называется *типом 1*, если

1) все пирамиды имеют общее основание τ, т. е. $\tau_n \equiv \tau$;

2) все вершины Q_n лежат на прямой, проходящей через некоторую точку $Q_0 \in \mathrm{int}\tau$, лежащую в том же полупространстве, ограниченном плоскостью, содержащей τ;

3) расстояния $h_n = |Q_n Q_0|$ монотонно стремятся к нулю.

$\{(Q_n, \tau_n)\}$ называется *типом 2*, если

1′) все пирамиды имеют общую вершину Q, и все τ_n имеют общую сторону;

2′) основания τ_n стремятся к предельному положению τ, содержащему Q; все τ_n лежат в одном и том же полупространстве, ограниченном плоскостью, содержащей τ;

3′) плоские углы ε_n между плоскостями τ_n и τ монотонно стремятся к нулю.

В зависимости от типа $\{(Q_n, \tau_n)\}$, будем говорить о последовательностях множеств вершин $\{Q_n|\tau_n\}$ типа 1, или типа 2.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ дана декартова система координат O, x, y, z, определяющая стереографию S (см. §6).

Лемма 9. *Пусть $\{(B^*)_n\}$ — последовательность фрагментов из $\mathbf{C}_0$, обладающих общим положением P, а также общими параметрами формы и типа, и пусть их размеры $a_n \downarrow 0$. Для каждого n имеем представление конечной суммой*

$$\Psi(S^{-1} B_n^*) = \sum c_i \Psi((Y_i)_n),$$

где c_i равняются 1 или -1, а Y_i — множества вершин в $\mathbb{E}$; для каждого i множество $\{(Y_i)_n\}$ — либо первого, либо второго типа. То же утверждение справедливо для фрагментов $B^{**} \in \mathbf{C}_0$.

Доказательство. Грани $(B^*)_n$ — либо треугольники Δ_i, либо четырехугольники. Четырехугольники разбиваем на треугольники, используя обе диагонали.

Получаем новые треугольники Δ_i'. Каждый треугольник Δ_i или Δ_i', вместе с P, определяющей положение $(B^*)_n$, определяет тетраэдр в $\mathbb{R}^3$, который обозначим через $\mathbf{T}_n$. Множества $S^{-1}\mathbf{T}_n$ попарно не пересекаются, а $S^{-1}\mathbf{T}_n$ является тетраэдром с вершинами v_1, v_2, v_3 и Q_n, где Q_n соответствует по S^{-1} только одной грани $\mathbf{T}_n$, зависящей от n (не пересекается с P). При нумерации вершин v_1, v_2, v_3 возможны три случая :

1) $S^{-1}\mathbf{T}_n = Q_n|v_1, v_2, v_3$, 2) $S^{-1}\mathbf{T}_n = v_1|Q_n, v_2, v_3$, 3) $S^{-1}\mathbf{T}_n = v_1, v_2|Q_n, v_3$.

Поэтому множество $S^{-1}\mathbf{T}_n$ стягивается к плоскости, содержащей v_1, v_2, v_3, а точка Q_0, определенная как предельное (при $a_n \downarrow 0$) положение Q_n на v_1, v_2, v_3-плоскости в случаях 1), 2), 3) находится в области из нижеприведенного рис. 3, имеющей соответствующий номер. В случаях 1) и 2) дальнейшие преобразования не нужны, поскольку $\{Q_n|v_1, v_2, v_3\}$ – последовательность типа 1, $\{v_1|Q_n, v_2, v_3\}$ – последовательность типа 2. В случае 3) $S^{-1}\mathbf{T}_n$ является комбинацией двух множеств вершин. Для доказательства последнего факта выделим две вспомогательные точки P', P'' на плоскости, содержащей v_1, v_2, v_3 таким, чтобы $Q_0 \in \mathrm{int}(P', P'', v_1, v_2)$ (см. рис. 3). Ясно, что

$$v_1, v_2|Q_n, v_3 = (Q_n|P', P'', v_1, v_2) \setminus (Q_n|P', P'', v_3).$$

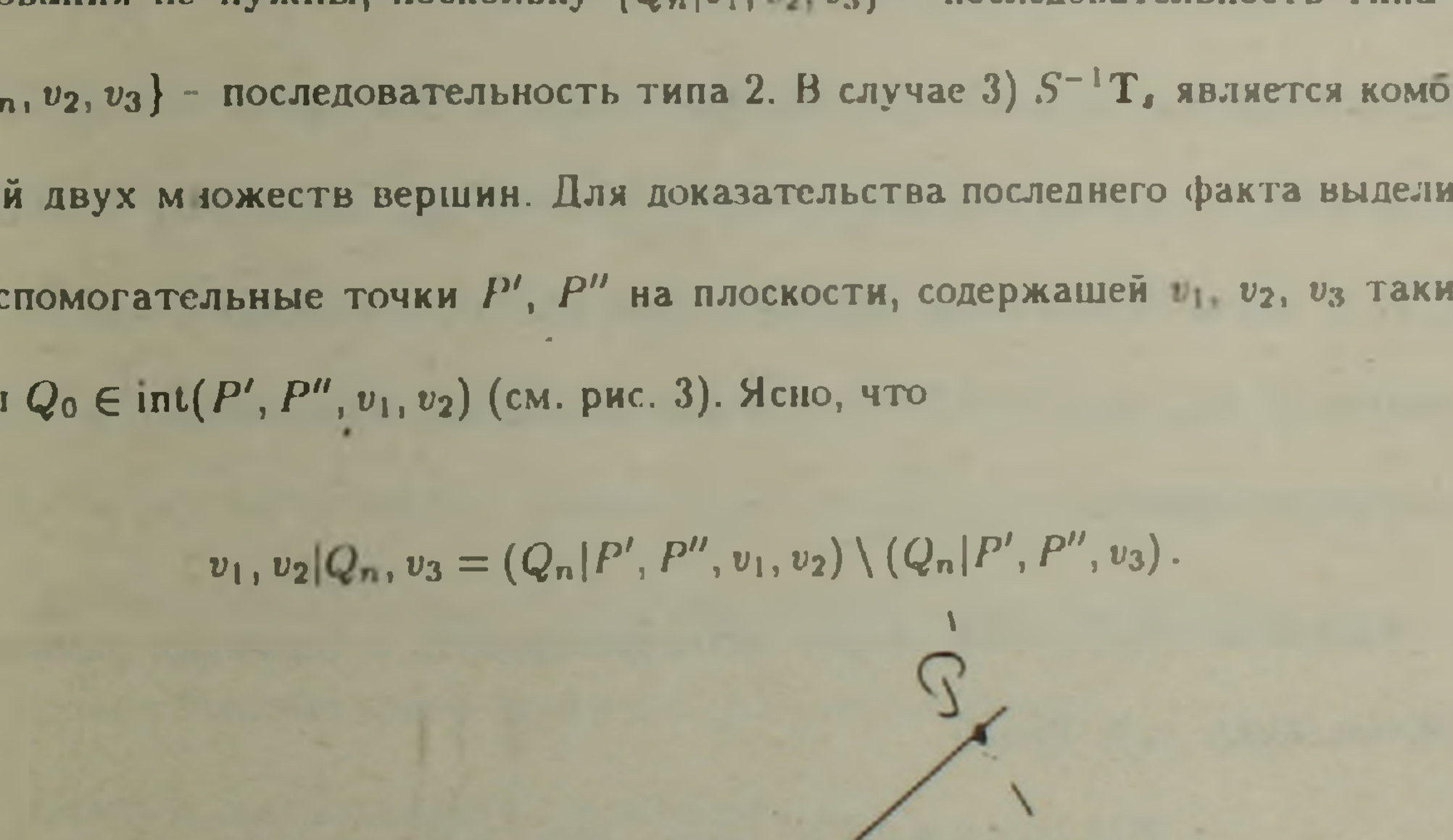


Рис. 3.

Тем самым, получаем последовательности первого типа. Отсюда приходим к нужному утверждению, относящемуся к B^*. Доказательство утверждения для B^{**} аналогично. Таким образом, лемма 9 доказана.

Теорема 3. *Пусть Ψ – конечно-аддитивный функционал на U, порожденный флаговой плотностью $\rho \in C^{(3)}$, по формулам (4.1), (5.1). Если для каждой последовательности пирамид $\{(Q_n, \tau_n)\}$ типа 1 или 2 пирамидальные эксцессы (см. (3.10)) удовлетворяют условиям*

$$\lim h_n^{-2}\Psi(Q_n|\tau_n) = 0, \quad \textit{если} \quad \{(Q_n, \tau_n)\} \quad \textit{типа 1} \quad \textit{или} \tag{9.3}$$

$$\lim \varepsilon_n^{-2}\Psi(Q_n|\tau_n) = 0, \quad \textit{если} \quad \{(Q_n, \tau_n)\} \quad \textit{типа 2}, \tag{9.4}$$

то Ψ является локально-конечной знакопеременной мерой в $\mathbb{E}$.

Доказательство. Как в доказательстве леммы 9, для любой последовательности $(B^*)_n$ имеем $a_n^{-1}\Theta((B^*)_n) = a_n^{-1}\sum c_i\Psi((B^*)_n)$. Поскольку отношения h_n^2/a_n и ε_n^2/a_n ограничены, из (9.3) и (9.4) ввиду (7.1) следует, что $D^* = 0$. Аналогично получаем, что $D^{**} = 0$, и для завершения доказательства остается применить теорему 2.

Уравнения (9.3) и (9.4) можно интерпретировать в терминах разложений Тейлора $\Psi((Q_n, \tau_n))$. Имеем

$$\Psi(Q_n|\tau_n) = \Psi_1(h_n), \quad \text{если} \quad \{(Q_n, \tau_n)\} \quad \text{типа 1},$$

$$\Psi(Q_n|\tau_n) = \Psi_2(\varepsilon_n), \quad \text{если} \quad \{(Q_n, \tau_n)\} \quad \text{типа 2}.$$

Очевидно, что

$$\Psi_1(0) = \Psi_2(0) = 0. \tag{9.5}$$

Поэтому уравнения (9.3), (9.4) эквивалентны одновременному выполнению *условий первого порядка*

$$\frac{d\Psi_1(0)}{dh} = 0, \qquad \frac{d\Psi_2(0)}{d\varepsilon} = 0 \tag{9.6}$$

и второго порядка

$$\frac{d^2\Psi_1(0)}{dh^2} = 0, \qquad \frac{d^2\Psi_2(0)}{d\varepsilon^2} = 0. \tag{9.7}$$

В оставшейся части статьи мы будем изучать только аналитические следствия уравнений (9.6) (т. е. производим только анализ первого порядка). Изучение же уравнений (9.7) (анализ второго порядка) будет проведено в продолжении статьи, которое надеемся опубликовать позже.

§10. АНАЛИЗ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Начнем с вычисления производных Ψ_1 в (9.6) (случай пирамидальной последовательности типа 1). Ясно, что $\dfrac{d\Psi_1(0)}{dh}$ есть *значение производной* $\Psi(Q|\tau)$ *в* Q_0, *взятое в направлении прямой, содержащей вершины* $\{Q_n\}$. Поскольку (9.5) удовлетворено во всех точках $Q_0 \in \tau$, то эта производная пропорциональна производной в направлении, нормальном к основанию τ. Поэтому, не теряя общности, можно считать, что *прямая, содержащая* $\{Q_n\}$ – *перпендикуляр к* τ *в точке* Q_0. Мы будем пользоваться следующими обозначениями (см. рис. 4) :

Q – переменная точка на перпендикуляре к τ в точке Q_0 ;

$b_1, ..., b_n$ – стороны многоугольника τ (основания пирамиды), или их длины ;

β_i – плоские углы между τ и плоскостью, проходящей через b_i и Q ;

$L_1, ..., L_n$ – боковые грани пирамиды Q, τ (или их длины) ;

r_i – сегмент, соединяющий Q_0 с вершиной v_i ;

ξ_i – направление (в плоскости τ) опорной прямой через вершину v_i многоугольника τ (измеряемое от r_i) ;

Φ_i – область изменения ξ_i, т. е. внешний угол τ при v_i ;

p_i – перпендикулярное расстояние от Q_0 к прямой, содержащей b_i ;

σ_{i1}, σ_{i2} – части внутреннего угла τ при v_i, разделенные r_i.

Пусть w_i – $\mathbf{sl}$ клин (см. (3.10)), и пусть (l, ϕ) – координаты флага из w_i, использованного в (5.1). Заменим переменную интегрирования $\phi \to \xi_i$. По

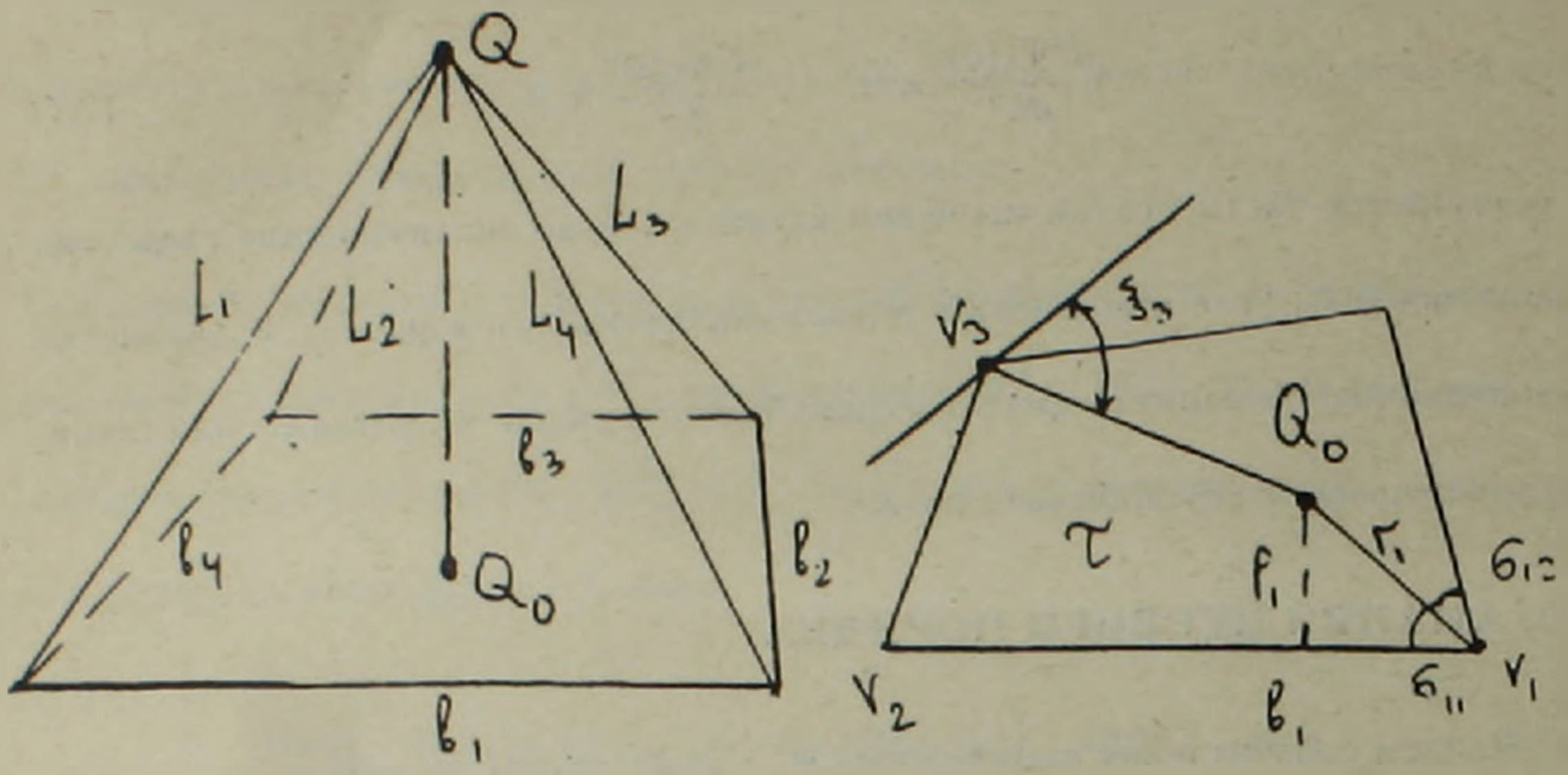


Рис. 4.

известной формуле сферической тригонометрии

$$\operatorname{tg}\xi_i = \sin\alpha_i \operatorname{tg}\phi, \quad \operatorname{tg}\alpha_i = h/r_i.$$

Следовательно

$$\frac{d\phi}{d\xi_i} = \frac{\cos^2\phi}{\cos^2\xi_i \sin\alpha_i} = \frac{h}{r_i \sin^2\xi_i} + o(h^2). \tag{10.1}$$

Тем самым, уравнение (3.10) переходит в

$$\Psi_1(h) = h\sum_i \int_{\Phi_i} \frac{d\xi_i}{r_i \sin^2\xi_i} \int_{L_i} \rho\, dl - \sum_i \int_{b_i} dl \int_0^{\beta_i} \rho\, d\phi + o(h^2). \tag{10.2}$$

Отметим, что $\operatorname{tg}\beta_i = h/p_i$, и что предельными положениями L_i являются сегменты r_i. Далее, $\int_{L_i} \rho\, dl$ не зависит от ξ_i. Ввиду того, что

$$\int_{\Phi_i} \frac{d\xi_i}{\sin^2\xi_i} = \operatorname{ctg}\sigma_{i1} + \operatorname{ctg}\sigma_{i2}, \tag{10.3}$$

получаем

$$\left.\frac{d\Psi_1(h)}{dh}\right|_{h=o} = \sum_i \frac{1}{r_i}(\operatorname{ctg}\sigma_{i1} + \operatorname{ctg}\sigma_{i2}) \int_{r_i} \rho\, dl - \sum_i \frac{1}{p_i} \int_{b_i} \rho\, dl. \tag{10.4}$$

Подчеркнем зависимость ρ от флагов f :

интеграл по r_i, $f = (l \in r_i$, направление r_i, плоскость $\tau)$,

интеграл по b_i, $f = (l \in b_i$, направление b_i, плоскость $\tau)$.

Аналогичным, несложным вычислением получим, что $\left.\frac{\Psi_2(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ пропорционально тому же выражению (10.4). Тем самым, анализ первого рода состоит в исследовании следствий тождества

$$\sum_{v_i} \frac{1}{r_i} (\mathrm{ctg}\sigma_{i1} + \mathrm{ctg}\sigma_{i2}) \int_{r_i} \rho\, dl - \sum_{b_i} \frac{1}{p_i} \int_{b_i} \rho\, dl = 0, \qquad (10.5)$$

имеющего место для каждого ограниченного, выпуклого τ и при любом выборе $Q_0 \in \tau$.

Ниже мы выведем три уравнения для флаговой функции ρ, вытекающие из (10.5). Затем покажем, что из этих уравнений следует (10.5). Для этого нам понадобится следующие предварительные рассуждения.

Рассмотрим в отдельности два выражения в левой части (10.5) :

$$E_1(Q_0, \tau) = \sum_{v_i} \frac{1}{r_i} (\mathrm{ctg}\sigma_{i1} + \mathrm{ctg}\sigma_{i2}) \int_{r_i} \rho\, dl = \sum_{v_i} \frac{1}{r_i} \int_{\Phi_i} \frac{d\xi_i}{\sin^2 \xi_i} \int_{r_i} \rho\, dl.$$

$$E_2(Q_0, \tau) = \sum_{b_i} \frac{1}{p_i} \int_{b_i} \rho\, dl.$$

В целях удобства, плоскость, содержащую τ, будем обозначать через $\mathbb{R}^2$. На $\mathbb{R}^2$ выберем "правую" координатную систему x, y с центром $O = Q_0$. Тем самым, применяемые ниже обозначения неявно показывают зависимость E_1 и E_2 от Q_0.

Через τ_3 обозначаем треугольники, а через τ_4 – четырехугольники в $\mathbb{R}^3$.

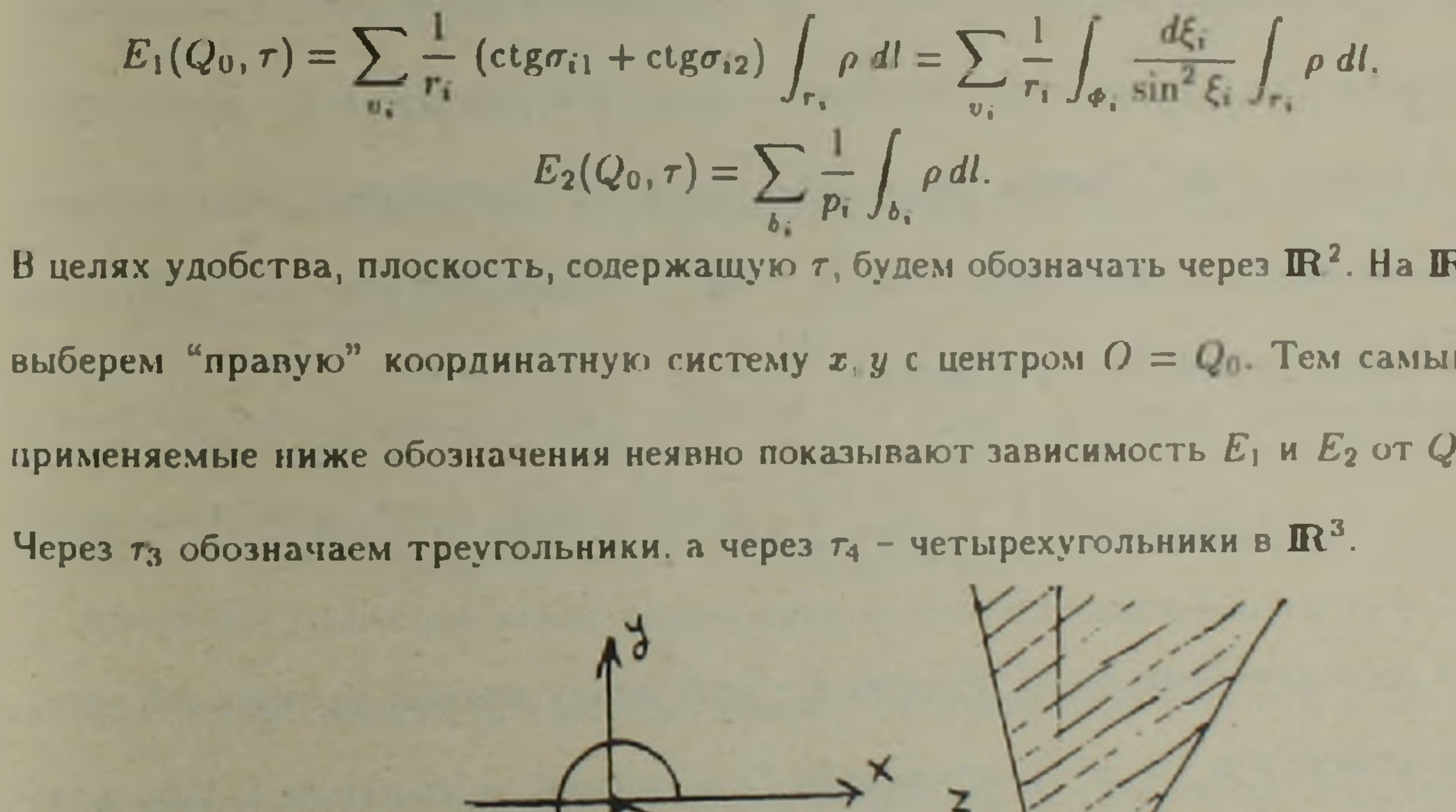


Рис. 5. Заштрихованная область на б) соответствует двуугольнику с вершиной v.

Пусть τ_3 – больший треугольник в рис. 5, а). τ_3' – треугольная часть τ_3, не содержащая O, $\tau_4 = \tau_3 \setminus \tau_3'$. Ясно, что

$$E_1(\tau_3') = E_1(\tau_3) - E_1(\tau_4) = \frac{1}{\tau_3}\int_{\Phi_3}\frac{d\xi_3}{\sin^2\xi_3}\int_{r_3}\rho\,dl - \sum_{\substack{v_i\\ i=1,2}}\frac{1}{r_i}\int_{\Phi_i^c}\frac{d\xi_i}{\sin^2\xi_i}\int_{r_i}\rho\,dl.$$

Выше Φ_1, Φ_2, Φ_3 обозначают *внешние* углы треугольника τ_3', и соответственно, Φ_i^c – *внутренние* углы τ_3'. Аналогичным способом находим, что

$$E_2(\tau_3') = \sum_{\substack{b_i\\ i=1,2}}\frac{1}{p_i}\int_{b_i}\rho\,dl - \frac{1}{p_3}\int_{b_3}\rho\,dl.$$

Два последних уравнения позволяют согласованно распространить E_1 и E_2 до конечно-аддитивных функционалов, определенных на классе $\mathbf{C}_2$ выпуклых многоугольников $\tau \subset \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{C}_2 = \{\tau: \quad O \notin \operatorname{int}\tau, \quad \text{линейные продолжения сторон } \tau \text{ не содержат } O\}.$$

Эти функционалы выражены посредством функций $G_1(v,\Phi)$ и $G_2(b)$, заданных, соответственно, на пространстве *двууголь*ников v,Φ (см. рис. 5, б)) и сегментах b, лежащих в $\mathbb{R}^2$. Любой двуугольник является подпространством прямых, проходящих через некоторую точку $v \in \mathbb{R}^2$, с направлениями, заполняющими некоторый угол Φ. По определению

$$G_1(v,\Phi) = \frac{1}{r}\int_{\Phi}\frac{d\xi}{\sin^2\xi}\int_r \rho\,dl, \qquad G_2(b) = \frac{1}{p}\int_b \rho\,dl. \tag{10.6}$$

Как было условлено выше, функция ξ – угол между прямой, проходящей через v и сегмент $r = Ov$, p – расстояние от O до прямой, содержащей b. Результат распространения имеет вид

$$E_1(\tau) = \sum_1 G_1(v_i,\Phi_i) - \sum_2 G_1(v_i,\Phi_i^c). \tag{10.7}$$

Здесь Φ_i – внешние углы τ, Φ_i^c – их дополнения (внутренние углы τ), сумма $\sum_1$ взята по вершинам τ, для которых *внутренний двууголь*ник содержит O, $\sum_2$ – взято по дополнительному множеству вершин. Внутренний двууголь*ник* τ ограничен продолжениями сторон, прилегающими к вершине v_i, содержащей

$\operatorname{int}\tau$. Далее

$$E_2(\tau) = \sum_3 G_2(b_i) - \sum_4 G_2(b_i), \tag{10.8}$$

где $\sum_3$ взята по сторонам b_i τ, чьи продолжения не разделяют O от внешности τ, а $\sum_4$ взята по дополнению этого множества.

Представляют интерес значения E_1 и E_2 на треугольниках и четырехугольниках из классов

$\Delta = \{$прямые треугольники из $\mathbf{C}_2$ с катетами, параллельными осям x и $y\}$,

$\Xi = \{$прямоугольники из $\mathbf{C}_2$ со сторонами, параллельными осям x и $y\}$.

Для треугольника $\tau_3 \in \Delta$ примем следующие обозначения :

$P = (x, y)$ – вершина прямого угла ;

$\alpha \in (0, \pi)$ – направление гипотенузы ;

$\gamma \in (0, 2\pi)$ – направление перпендикуляра, опущенного из P на гипотенузу ;

l – длина гипотенузы.

Во всех случаях $\gamma = \alpha + (-1)^k \frac{\pi}{2}$, $k = 0, 1$, и вместо γ будем пользоваться *независимым* двузначным параметром k.

Определим *положительные направления* на катетах треугольников $\tau_3 \in \Delta$ так, чтобы они совпадали, соответственно, с направлениями осей x и y. При данном *катете* $\tau_3 \in \Delta$, через H и T будем обозначать соответственно *головной* и *хвостовой* концы. Верхние индексы 1, 2 к H или T будут относится катетам, параллельным, соответственно, осям x и y. Для треугольника $\tau_3 \in \Delta$ уравнение (10.7) может быть записано в виде

$$E_1(\tau_3) = z_1 [G_1(H_1, Z_1) - G_1(T_1, Z_1)] + z_2 [G_1(H_2, Z_2) - G_1(T_2, Z_2)]. \tag{10.9}$$

Здесь каждое множество $Z_i \subset (0, \pi)$ является интервалом, либо же объединением двух интервалов.

В нижеприведенной таблице I показана зависимость Z_1, Z_2; z_1 и z_2 от

параметров P, α и k треугольника $\tau_3 \in \Delta$.

Таблица 1 $(k = 0)$

$P \in$ int	$\alpha \in$	Z_1	Z_2	z_1	z_2
I	$(0, \frac{\pi}{2})$	(α, π)	$(\alpha, \frac{\pi}{2})$	-1	-1
II	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(0, \alpha)$	$(\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (0, \alpha)$	$+1$	$+1$
III	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(0, \alpha)$	$(\alpha, \frac{\pi}{2})$	$+1$	-1
IV	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(0, \alpha)$	$(\frac{\pi}{2}, \alpha)$	-1	$+1$
V	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	(α, π)	$(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\alpha, \pi)$	$+1$	-1
VI	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	(α, π)	$(\frac{\pi}{2}, \alpha)$	$+1$	$+1$

Ситуация, показанная в таблице, имеет место для малых l, а точнее, для значений l, при которых замыкание τ_3 не пересекается с координатными осями или прямой, проходящей через O по направлению α. Римские цифры первого столбца соответствуют двуугольным областям, показанным на рис. 6.

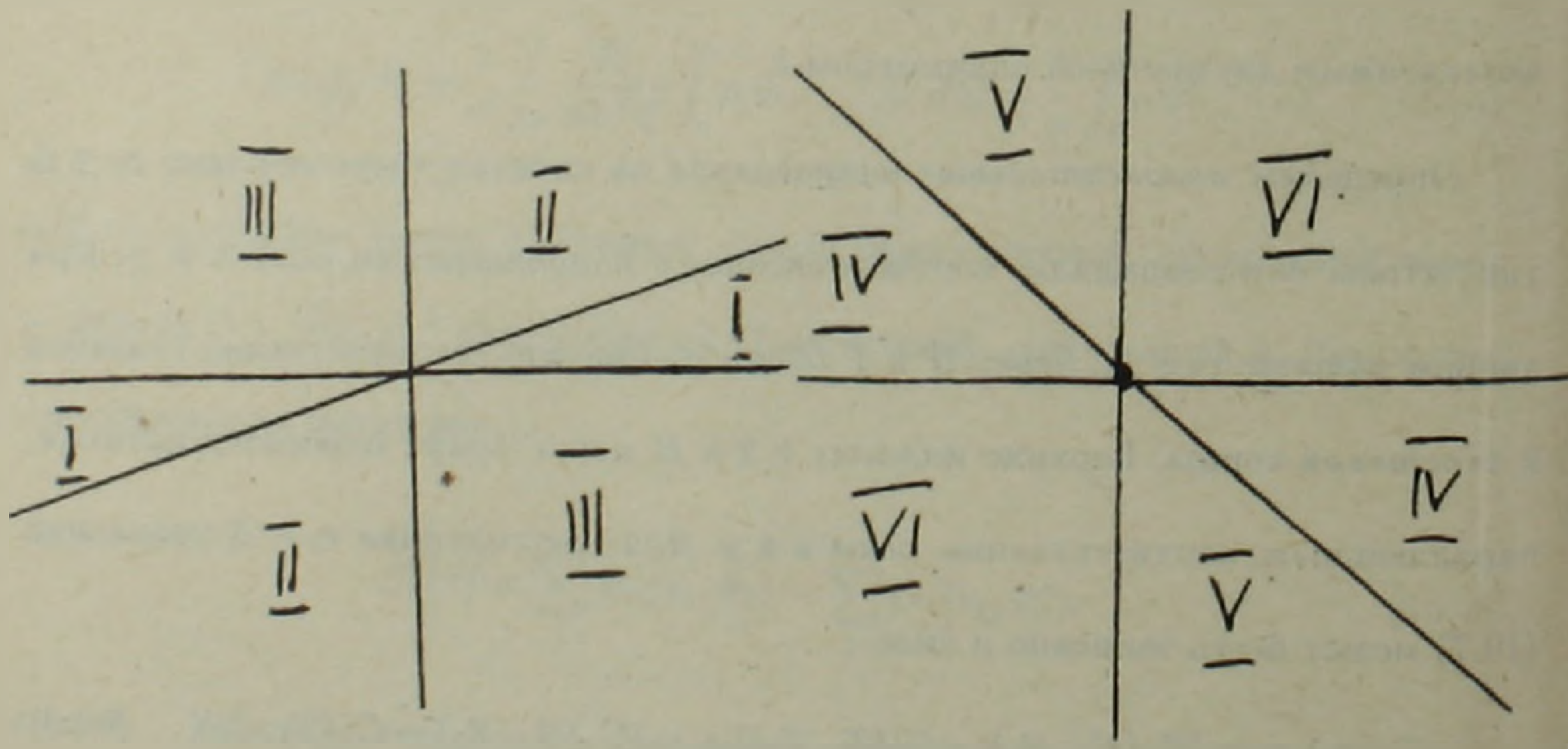


Рис. 6.

Мы использовали значения Z_i, z_i при $k = 0$; при $k = 1$ множества Z_i остаются неизменными, а значения z_i меняют знаки.

Аналогичное (10.9) представление может быть записано для $E_2(\tau_3)$, $\tau_3 \in \Delta$. Обозначим через b_1, b_2 катеты τ_3, параллельные, соответственно, осям x и y, а через b_3 – гипотенузу. Тогда

$$E_2(\tau_3) = t_1 G_2(b_1) + t_2 G_2(b_2) + t_3 G_2(b_3), \tag{10.10}$$

где $k = 0$ $t_1 = \operatorname{sign}(-y\cos\alpha)$, $t_2 = \operatorname{sign} x$, $t_3 = \operatorname{sign}(y\cos\alpha - x\sin\alpha)$, а значения при $k = 1$ могут быть найдены переменой знака.

Для прямоугольника $\tau_4 \in \Xi$ условимся, что :

(x, y) – центр τ_4 ;

$2\varepsilon_1$, $2\varepsilon_2$ – катеты горизонтальной и вертикальной сторон ρ ;

Для прямоугольника $\tau_4 \in \Xi$ уравнение (10.7) принимает вид

$$E_1(\tau_4) = z\,[G_1(x+\varepsilon_1, y+\varepsilon_2, Z) + G_1(x-\varepsilon_1, y-\varepsilon_2, Z) - G_1(x+\varepsilon_1, y-\varepsilon_2, Z) - G_1(x-\varepsilon_1, y+\varepsilon_2, Z)]. \tag{10.11}$$

В случае, когда τ_4 не пересекается с координатными плоскостями, для z и Z имеем следующую таблицу.

Таблица 2

$$z = -1, \quad Z = (0, \frac{\pi}{2}), \quad \text{если} \quad x \cdot y < 0$$

$$z = 1, \quad Z = (\frac{\pi}{2}, \pi), \quad \text{если} \quad x \cdot y > 0.$$

Если $\tau_4 \in \Xi$ не пересекается с координатными осями, то (10.8) принимает вид

$$E_2(\tau_4) = \operatorname{sign} y\,[G_2(b_1) - G_2(b_2)] + \operatorname{sign} x\,[G_2(b_3) - G_2(b_4)], \tag{10.12}$$

где b_1 – сторона $y = c_1$, b_2 – сторона $y = c_2$, b_3 – сторона $x = c_3$, а b_4 – сторона $x = c_4$. Предположим, что $c_1 > c_2$ и $c_4 < c_3$. Как обычно, $\operatorname{sign} y = 1$, если $y > 0$ и -1, если $y < 0$.

Асимптотической формой (10.9) ($l \to 0$) при фиксированном α является

$$E_1(\tau_3) = z_1 \frac{\partial G_1(P, Z_1)}{\partial x}\varepsilon_1 + z_2 \frac{\partial G_1(P, Z_2)}{\partial y}\varepsilon_2 + O(l^2), \tag{10.13}$$

где $\varepsilon_1 = l|\cos\alpha|$ и $\varepsilon_2 = l|\sin\alpha|$ соответственно – длины сегментов (катетов) T_1H_1 и T_2H_2. Имеет место также аналогичная асимптотическая форма (10.10) :

$$E_2(\tau_3) = t_1\frac{1}{|y|}\rho(P,0)\,\varepsilon_1 + t_2\frac{1}{|x|}\rho(P,\frac{\pi}{2})\,\varepsilon_2 + t_3\frac{1}{|x\sin\alpha - y\cos\alpha|}\rho(P,\alpha)\,l + o(l^2). \tag{10.14}$$

Из уравнений (10.13), (10.14) и тождества $E_1(\tau_3) - E_2(\tau_3) = 0$ следует дифференциальное уравнение

$$z_1\frac{\partial G_1((x,y),Z_1)}{\partial x}|\cos\alpha| + z_2\frac{\partial G_1((x,y),Z_2)}{\partial y}|\sin\alpha| - t_1\frac{1}{|y|}\rho((x,y),0)|\cos\alpha| -$$
$$-t_2\frac{1}{|x|}\rho((x,y),\frac{\pi}{2})|\sin\alpha| - t_3\frac{1}{|x\sin\alpha - y\cos\alpha|}\rho((x,y),\alpha) = 0. \tag{10.15'}$$

Здесь и ниже принятые нами обозначения не учитывают зависимости ρ от плоскости. Далее, ввиду того что

$$G_1((x,y),Z_1) = z_1\,\mathrm{sign}\,(\cos\alpha)\frac{\sin\alpha}{y}\frac{x^2+y^2}{y\cos\alpha - x\sin\alpha}\bar{\rho}(r),$$
$$G_1((x,y),Z_2) = z_2\frac{\cos\alpha}{x}\frac{x^2+y^2}{y\cos\alpha - x\sin\alpha}\bar{\rho}(r),$$

мы приходим к следующей форме (10.15') :

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{y}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x^2+y^2}{y\cos\alpha - x\sin\alpha}\bar{\rho}(r)\right] + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{x}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x^2+y^2}{y\cos\alpha - x\sin\alpha}\bar{\rho}(r)\right] +$$
$$+\frac{1}{y}\cos\alpha\rho((x,y),0) - \frac{1}{x}\sin\alpha\rho((x,y),\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{x\sin\alpha - y\cos\alpha}\rho((x,y),\alpha) = 0. \tag{10.15}$$

Отметим исчезновение разрывных коэффициентов z_i и t_i. Уравнение (10.15) остается справедливым для обоих значений $k = 0, 1$.

Рассмотрим функции G_1 в правой стороне (10.11). Предположим, что отношение $\nu^2 = \frac{\varepsilon_2}{4\varepsilon_1}$ остается фиксированным. Тогда эти функции зависимы только от площади $q = 4\varepsilon_2\varepsilon_1 \quad \tau_4$, и

$$G_1(x \pm \varepsilon_1, y \pm \varepsilon_2, Z) = G_1(x \pm (4\nu)^{-1}\sqrt{q}, y \pm \nu\sqrt{q}, Z).$$

Применяя к обеим функциям формулу Тейлора, получаем

$$E_1(\tau_4) = z\frac{\partial^2 G_1(P,Z)}{\partial x\,\partial y}q + O\left(q^{3/2}\right). \tag{10.16}$$

При условиях, приведших к (10.16), уравнение (10.12) может быть заменено своей

асимптотической формой. Применив разложение Тейлора, находим

$$G_2(b_1) - G_2(b_2) = \frac{4\varepsilon_1\varepsilon_2}{|y|}\left(\frac{\partial\rho((x,y),0)}{\partial y} - \frac{1}{y}\,\rho((x,y),0)\right) + o(q),$$

$$G_2(b_3) - G_2(b_4) = \frac{4\varepsilon_1\varepsilon_2}{|x|}\left(\frac{\partial\rho((x,y),\frac{\pi}{2})}{\partial x} - \frac{1}{x}\,\rho((x,y),\frac{\pi}{2})\right) + o(q).$$

Тем самым, из равенства $E_1(\tau_4) - E_2(\tau_4) = 0$ следует, что

$$z\frac{\partial^2 G_1((x,y),Z)}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{y}\left(\frac{\partial\rho((x,y),0)}{\partial y} - \frac{\rho((x,y),0)}{y}\right) - \\ - \frac{1}{x}\left(\frac{\partial\rho((x,y),\frac{\pi}{2})}{\partial x} - \frac{\rho((x,y),\frac{\pi}{2})}{x}\right) = 0. \qquad (10.17')$$

Поскольку по (10.3)

$$\int_Z \frac{d\xi}{\sin^2\xi} = z\cdot\frac{x^2+y^2}{xy}, \quad \text{то} \quad G_1((x,y),Z) = z\frac{x^2+y^2}{xy}\cdot\frac{1}{|r|}\int_r \rho\,dl.$$

Пользуясь обозначением $\overline{\rho}(r) = \frac{1}{|r|}\int_r \rho\,dl$, можно переписать (10.17') в двух эквивалентных формах :

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[\frac{\overline{\rho}(r)(x^2+y^2)}{xy}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\rho((x,y),0)}{y}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\rho((x,y),\frac{\pi}{2})}{x}\right] = 0, \qquad (10.17)$$

$$\frac{\partial\overline{\rho}(r)}{\partial x}\cdot\frac{y^2-x^2}{xy^2} + \frac{\partial\overline{\rho}(r)}{\partial y}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2y} + \overline{\rho}(r)\left(-\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\partial^2\overline{\rho}(r)}{\partial x\partial y}\cdot\frac{x^2+y^2}{xy} =$$

$$= -\frac{1}{y}\frac{\partial\rho((x,y),0)}{\partial y} - \frac{\rho((x,y),0)}{y^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial\rho((x,y),\frac{\pi}{2})}{\partial x} - \frac{\rho((x,y),\frac{\pi}{2})}{x^2} \qquad (10.18)$$

Отметим исчезновение разрывных функций z, u_1 и u_2.

Сжимая τ в (10.5) до точки Q_0 и используя гомотетии с центрами в Q_0, т. е. способом, сохраняющем форму на рис. 4, приходим еще к одному уравнению –

$$\sum_{v_i}\left[(\operatorname{ctg}\sigma_{i1} + \operatorname{ctg}\sigma_{i2})\,\rho(Q_0,r_i) - (\operatorname{ctg}\sigma_{i2} + \operatorname{ctg}\sigma_{i+1,1})\,\rho(Q_0,b_i)\right] = 0, \qquad (10.19)$$

имеющему место при любой форме фигуры, показанной на рис. 4.

Переменные r_i, b_i в аргументах ρ показывают соответствующие направления в плоскости многоугольника τ, зависимость ρ от этой плоскости не показана в явном виде. Уравнения (10.15), (10.17) и (10.19) были получены из (10.5) как необходимые условия. Тем не менее, справедливо следующее обратное утверждение.

Предложение 2. *Если флаговая функция $\rho \in C^{(3)}$ на некоторой плоскости удовлетворяет уравнениям (10.15), (10.17) и (10.19), то на той же плоскости ρ удовлетворяет тождеству (10.5).*

Доказательство. Пусть τ_3 — треугольник класса $\Delta \cap \mathbf{C}_2$, с замыканием, не пересекающимся с координатными осями $x = 0$ и $y = 0$. Разделим τ_3 на n треугольника $\tau_3^{(i)}$ и $\frac{1}{2}n(n-1)$ прямоугольника $\tau_4^{(i)}$, как это сделано на рис. 2.

Ввиду конечной аддитивности функционала $E = E_1 - E_2$ имеем

$$E(\tau_3) = \sum_i E(\tau_3^{(i)}) + \sum_i E(\tau_4^{(i)}). \tag{10.20}$$

Так как поведение E равномерно "достаточно хорошее" на подмножествах разбиения τ_3, то, с применением рассуждения с римановыми суммами из доказательства теоремы 2, приходим к предельной (при $N \to \infty$) форме (10.20) :

$$E(\tau_3) = \int_H A\,dl + \int_{\tau_3} B\,dx\,dy,$$

где A и B соответственно — левые части (10.15) и (10.17). Тем самым, при наших предположениях $E(\tau_3) = 0$. По триангуляции

$$E(\tau) = 0 \tag{10.21}$$

для любого ограниченного, выпуклого многоугольника $\tau \in \mathbf{C}_2$, не пересекающегося с координатными осями.

Левая сторона (10.5) может быть рассмотрена как конечно-аддитивное расширение функционала E на многоугольники τ, содержащие O.

$$E(\tau) = \sum_{i=1}^{4} E(\tau_i) + \sum E(\tau_i') + E(\tau_4^{(0)}).$$

Ввиду (10.21) и (10.17), достаточно показать, что

$$\lim \sum_{i=1}^{4} E(\tau_i) = 0 \tag{10.22}$$

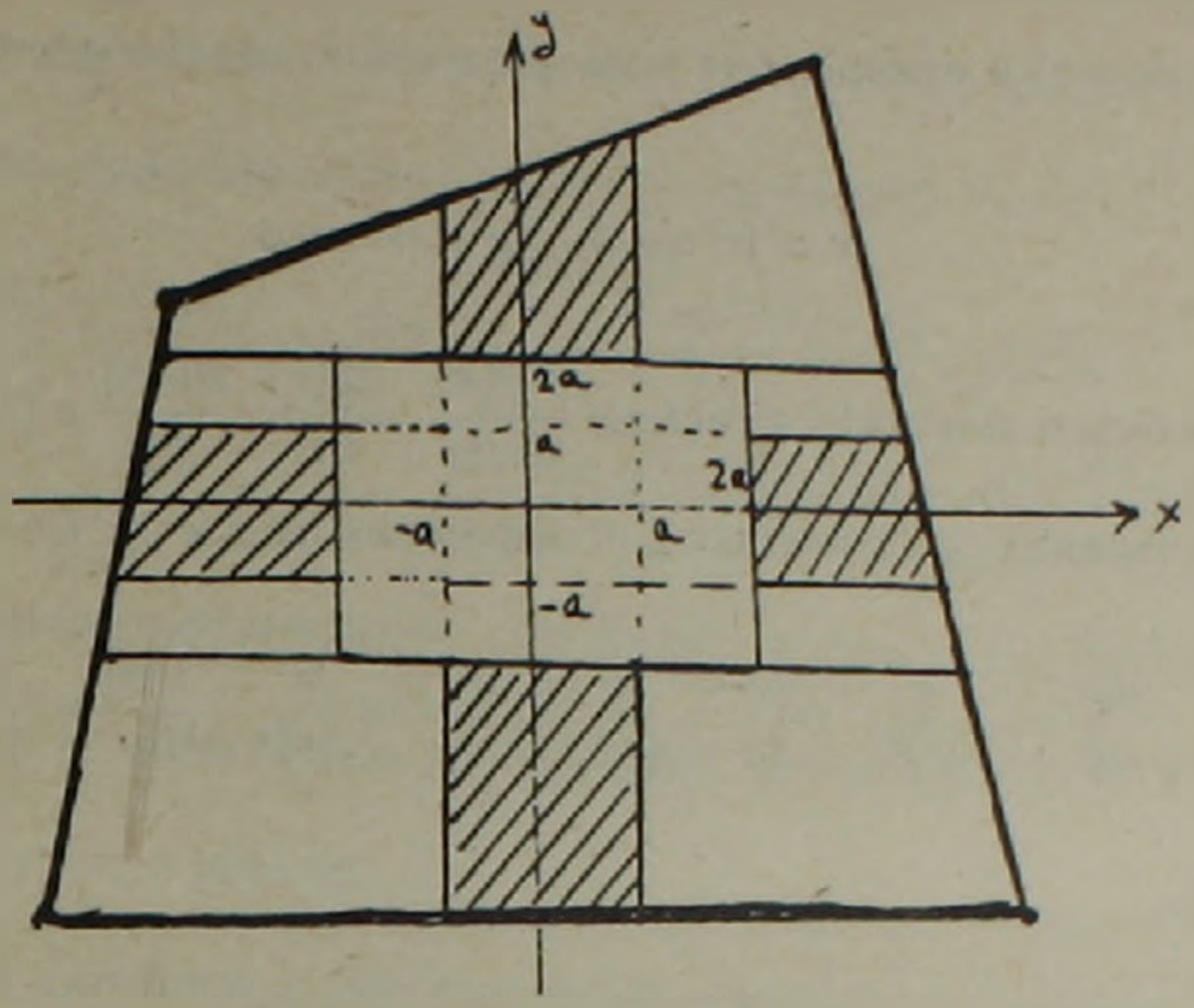


Рис. 7. τ ограничена жирной прямой, $\tau_4^{(0)} = (-2a, 2a) \times (-2a, 2a)$, τ_i – заштрихованные компоненты, полученные пересечением $\tau \setminus \tau_4^{(0)}$ с полосами $-a < x < a$, $-a < y < a$, а τ_i' – другие выпуклые компоненты.

при стремлении к нулю параметра a, определенного на рис. 7.

Легко видеть, что функционал E, как правая сторона (10.5), не зависит от поворота координатных осей вокруг O. Если повернуть координатные оси на угол $\frac{\pi}{4}$, то множества τ_i', в своей новой позиции, не будут пересекаться с координатными осями, и (10.22) превратится в следствие (10.21). Предложение доказано.

§11. ЗАВИСИМОСТЬ ρ ОТ НАПРАВЛЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Уравнение (10.19) является локальным условием, так как оно записано для значений $\rho(Q, \Omega, \phi)$, при фиксированной точке Q. По своей природе оно также плоскостное, поскольку значения ρ взяты для одной и той же плоскости, содержащей форму на рис. 7. Цель данного параграфа – нахождение аналогичных локально-плоскостных аналогов уравнений (10.17) и (10.15), для которых предложение 2 оставалось бы в силе. Найденные здесь уравнения содержат значения некоторых производных в точке Q.

Начнем с уравнения (10.17). Будем пользоваться полярными координатами

$|r|, \varphi$ с началом в O и измерением угла φ от оси x против часовой стрелки :

$$x = |r|\cos\varphi, \quad y = |r|\sin\varphi.$$

Временно мы будем заменять функции $\frac{\partial^2\bar{\rho}(r)}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial\bar{\rho}(r)}{\partial x}$, $\frac{\partial\bar{\rho}(r)}{\partial y}$ в (10.18) их представлениями в терминах производных $\bar{\rho}$ по переменным φ и $|r|$. Пользуясь формулой

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{y}{|r|^2}, \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{x}{|r|^2}, \quad \frac{\partial|r|}{\partial x} = \frac{x}{|r|}, \quad \frac{\partial|r|}{\partial y} = \frac{y}{|r|}, \tag{11.1}$$

легко находим

$$\frac{\partial\bar{\rho}(r)}{\partial x} = \frac{\partial\bar{\rho}(r)}{\partial|r|}\frac{x}{|r|} - \frac{\partial\bar{\rho}(r)}{\partial\varphi}\frac{y}{|r|^2}, \quad \frac{\partial\bar{\rho}(r)}{\partial y} = \frac{\partial\bar{\rho}(r)}{\partial|r|}\frac{y}{|r|} + \frac{\partial\bar{\rho}(r)}{\partial\varphi}\frac{x}{|r|^2}, \tag{11.2}$$

$$\frac{\partial^2\bar{\rho}(r)}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial^2\bar{\rho}(r)}{\partial\varphi^2}\frac{xy}{|r|^4} + \frac{\partial\bar{\rho}(r)}{\partial\varphi}\frac{y^2-x^2}{|r|^4} + \frac{\partial^2\bar{\rho}}{\partial|r|^2}\frac{xy}{|r|^2} + \frac{\partial^2\bar{\rho}}{\partial|r|\partial\varphi}\frac{x^2-y^2}{|r|^3} - \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial|r|}\frac{yx}{|r|^3}. \tag{11.3}$$

Исследуем поведение этих функций при малых значениях $|r|$ и при фиксированном отношении $k = y/x = \operatorname{tg}\varphi$. Так как сегмент r сжимается до O, то $\lim\bar{\rho}(r) = \rho(O,\varphi)$, и имеют место аналогичные предельные соотношения для производных :

$$\lim\frac{\partial\bar{\rho}(r)}{\partial\varphi} = \frac{\partial\rho(O,\varphi)}{\partial\varphi}, \quad \lim\frac{\partial^2\bar{\rho}(r)}{\partial\varphi^2} = \frac{\partial^2\rho(O,\varphi)}{\partial\varphi^2}, \quad \lim\frac{\partial\bar{\rho}(r)}{\partial|r|} = \frac{1}{2}\frac{\partial\rho(O,\varphi)}{\partial_\varphi O},$$

$$\lim\frac{\partial^2\bar{\rho}(r)}{\partial|r|^2} = \frac{1}{3}\frac{\partial^2\rho(O,\varphi)}{(\partial_\varphi O)^2}, \quad \lim\frac{\partial\bar{\rho}(r)}{\partial|r|\,\partial\varphi} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho(O,\varphi)}{\partial_\varphi O\,\partial\varphi},$$

где $\frac{\partial}{\partial_\varphi O}$ – дифференцирование в направлении φ (ср. с формулой (12.2) следующего параграфа). Нетрудно получить, что

$$\frac{\partial\bar{\rho}(r)}{\partial x} = -\frac{\partial\rho(O,\varphi)}{\partial\varphi}\frac{y}{|r|^2} + O(1), \quad \frac{\partial\bar{\rho}(r)}{\partial y} = \frac{\partial\rho(O,\varphi)}{\partial\varphi}\frac{x}{|r|^2} + O(1), \tag{11.4}$$

$$\frac{\partial^2\bar{\rho}(r)}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial^2\rho(O,\varphi)}{\partial\varphi^2}\frac{k}{x^2(1+k^2))^2} + \frac{\partial\rho(O,\varphi)}{\partial\varphi}\frac{k^2-1}{x^2(1+k^2)^2} + O(1/|r|). \tag{11.5}$$

Отсюда видно, что подстановкой (11.4) и (11.5) в (10.18) и приравниванием основных слагаемых левой и правой сторон при $x \to 0$ (эти слагаемые порядка

$1/x^2$) *получим дифференциальное уравнение для функции* $\rho(O, \varphi)$ *от переменной* φ. Следовательно, приходим к следующему результату :

$$\frac{\partial \rho(O,\varphi)}{\partial \varphi}\frac{\sin 2\varphi \cos 2\varphi}{2} - \rho(O,\varphi) - - \frac{\partial^2 \rho(O,\varphi)}{\partial \varphi^2}\cos^2\varphi \sin^2\varphi +$$

$$+ \rho(O,0)\cos^2\varphi + \rho(O,\frac{\pi}{2})\sin^2\varphi = 0. \quad (11.6)$$

Полученное уравнение справедливо для любой плоскости e и любой точки $O \in e$, зависимость ρ от e в явном виде не показана. Однако, из (11.6) можно вынести важную информацию о $\rho(O, \varphi)$.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение, зависящее от постоянных a и b :

$$\sin^2\varphi \cos^2\varphi \frac{d^2\rho(\varphi)}{d\varphi^2} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi \cos 2\varphi \frac{d\rho(\varphi)}{d\varphi} + \rho(\varphi) - a\sin^2\varphi - b\cos^2\varphi = 0. \quad (11.7)$$

Легко проверить, что функция $a\sin^2\varphi + b\cos^2\varphi$ является решением этого уравнения, а функция $\sin 2\varphi$ – решением соответствующего однородного уравнения (в котором $a = b = 0$). Следовательно, общее решение (11.7) имеет вид

$$\rho(\varphi) = c\sin 2\varphi + c_1 u(\varphi) + a\sin^2\varphi + b\cos^2\varphi, \quad (11.8)$$

где $u(\varphi)$ – решение однородного уравнения, линейно независимое от решения $\sin 2\varphi$. Применением обычного метода вариации c_1 находим

$$u(\varphi) = \sin 2\varphi \cdot \ln|\operatorname{tg}\varphi|.$$

Отметим, что $u(\varphi)$ не дифференцируемо в точке $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Представляют интерес те функции из четырехпараметрического семейства (11.7), которые достаточно гладки и удовлетворяют условиям

$$\rho(0) = b, \qquad \rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = a. \quad (11.9)$$

Для преодоления неудобств, связанных с разрывностью $\frac{d\rho}{d\varphi}$, возникающей из-за разрывности $\frac{du}{d\varphi}$, необходимо подставить $c_1 = 0$. Ясно, что функции семейства

$$\rho(\varphi) = c\sin 2\varphi + a\sin^2\varphi + b\cos^2\varphi \quad (11.10)$$

удовлетворяют (11.9). Тем самым, любое гладкое решение (11.6) имеет вид (11.10), и необходимо рассматривать постоянные c, a, b как функции точки O : $c = c(O)$, $a = a(O)$, $b = b(O)$. Таким образом, мы пришли к следующему результату.

Предложение 3. *Пусть $\rho \in C^{(3)}$ – флаговая плотность некоторой локально-конечной знакопеременной меры, заданной в пространстве* $\mathbb{E}$. *Тогда на любой плоскости e*

$$\rho(O, \varphi, e) = A(O, e)\sin 2\varphi + B(O, e)\cos 2\varphi + C(O, e), \qquad (11.11)$$

где $O \in e$ – произвольная точка, φ – направление на e, а функции A, B, C не зависят от φ. Эквивалентным образом $\rho(O, \varphi, e) = A'\sin 2(\varphi - \alpha) + C$, где $A' = \sqrt{A^2(O, e) + B^2(O, e)}$, $\cos 2\alpha = A/A'$, $\sin 2\alpha = B/A'$.

Замечание. В §5 был найден класс флаговых плотностей $\rho(f)$, соответствующих знакопеременным мерам $u(e)\,de$. Проверим то, что в любой плоскости представление (5.4) приводится к виду (11.11). Пусть $\varepsilon = \varphi - \alpha$, $d\omega = \sin\beta\, d\beta\, d\alpha$, где α, β – обыкновенные координаты на сфере с полярным направлением, нормальным к плоскости f, а α – проекция ω на экваториальную плоскость. Тогда (5.4) принимает вид

$$\rho(f) = \int \sin^2(\varphi - \alpha)\, d\alpha \int u_Q(\alpha, \beta)\sin\beta\, d\beta,$$

и (11.11) следует по стандартной формуле, вместе с

$$A(Q, e) = \frac{1}{2}\int \sin 2\alpha\, d\alpha \int u_Q(\alpha, \beta)\sin\beta\, d\beta$$

и аналогичными представлениями для B и C.

§12. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ A, B, C

Пользуясь предложением 3 можно приступить к более глубокому асимптотическому анализу левой стороны (10.17), учитывающему слагаемые порядка $|r|^{-1}$

или $|r|^0$. В результате будет найдено дифференциальное уравнение для функций A, B, C, выполнение которого является необходимым условием для (10.17). В следующем параграфе будет показано, что выполнение этого уравнения также достаточно для (10.17). В этом же параграфе мы будем предполагать существование "абсолютной" декартовой системы координат на плоскости e. Через X, Y будем обозначать координаты точки $O : O = (X, Y)$. Далее, будем полагать, что изначальная координатная система x, y с началом в O, которую мы пока еще применяем, может быть получена из абсолютной системы параллельным переносом Далее, как и раньше, будем предполагать, что y/x остается фиксированным, а $|r| = \sqrt{x^2 + y^2}$ стремится к 0. Начнем с формулы Тейлора

$$\rho((x, y), \alpha) = \rho((|r|, \varphi), \alpha) = \rho(O, \alpha) + |r|\frac{\partial\rho(O, \alpha)}{\partial_\varphi O} + \frac{|r|^2}{2}\frac{\partial^2\rho(O, \alpha)}{(\partial_\varphi O)^2} + O(|r|^3). \quad (12.1)$$

Подставляя здесь $\alpha = \varphi$, интегрируя от 0 до $|r|$ и деля на $|r|$ находим

$$\overline{\rho}(r) = \rho(O, \varphi) + \frac{|r|}{2}\frac{\partial\rho(O, \varphi)}{\partial_\varphi O} + \frac{|r|^2}{6}\frac{\partial^2\rho(O, \varphi)}{(\partial_\varphi O)^2} + O(|r|^3). \quad (12.2)$$

Воспользовавшись

$$\frac{\partial\rho(O, \varphi)}{\partial_\varphi O} = \frac{\partial\rho(O, \varphi)}{\partial X}\cos\varphi + \frac{\partial\rho(O, \varphi)}{\partial Y}\sin\varphi, \quad (12.3)$$

$$\frac{\partial^2\rho(O, \varphi)}{(\partial_\varphi O)^2} = \frac{\partial^2\rho(O, \varphi)}{\partial X^2}\cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2\rho(O, \varphi)}{\partial X\,\partial Y}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial^2\rho(O, \varphi)}{\partial Y^2}\sin^2\varphi, \quad (12.4)$$

перепишем (12.2) в виде

$$\overline{\rho}(r) = \rho(O, \varphi) + \frac{x}{2}\frac{\partial\rho(O, \varphi)}{\partial X} + \frac{y}{2}\frac{\partial\rho(O, \varphi)}{\partial Y} + \\ + \frac{x^2}{6}\frac{\partial^2\rho(O, \varphi)}{\partial X^2} + \frac{xy}{3}\frac{\partial^2\rho(O, \varphi)}{\partial X\,\partial Y} + \frac{y^2}{6}\frac{\partial^2\rho(O, \varphi)}{\partial Y^2} + O(|r|^3). \quad (12.5)$$

Нужное асимптотическое разложение будет получено после подстановки (11.11) в (12.5) и подстановки полученного результата в (10.17). Ввиду линейности эту процедуру можно применять к каждому слагаемому в (11.11), а затем

просуммировать полученные выражения. Начнем со слагаемого $A\sin 2\varphi$, т. е. подставим в (12.5)

$$\rho(O,\varphi) = A(O,e)\sin 2\varphi. \tag{12.6}$$

Получим

$$\overline{\rho}(r) = \sin 2\varphi\, \mathcal{L}(A) + O(|r|^3), \tag{12.7}$$

где

$$\mathcal{L}(A) = A + \frac{x}{2}\frac{\partial A}{\partial X} + \frac{y}{2}\frac{\partial A}{\partial Y} + \frac{x^2}{6}\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \frac{xy}{3}\frac{\partial^2 A}{\partial X \partial Y} + \frac{y^2}{6}\frac{\partial^2 A}{\partial Y^2}.$$

Так как в (10.17)

$$\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{2}{\sin 2\varphi}, \qquad \rho((x,y),0) = \rho((x,y),\frac{\pi}{2}) = 0,$$

то подстановка (12.7) в (10.17) даст

$$2\frac{\partial^2}{\partial X \partial Y}\mathcal{L}(A) = \frac{2}{3}\frac{\partial^2 A(O,e)}{\partial X \partial Y} + O(|r|). \tag{12.8}$$

Иными словами, *как в (12.6), для ρ левая сторона (10.17) имеет асимптотическое разложение*

$$\frac{2}{3}\frac{\partial^2 A(O,e)}{\partial X \partial Y} + O(|r|).$$

Перейдем к случаю

$$\rho(O,\varphi) = C(O,e). \tag{12.9}$$

Применением формулы

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}[f(x,y)g(x,y)] = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot g + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} + f\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \tag{12.10}$$

к функциям $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x\,y}$, $g(x,y) = \mathcal{L}(C)$, получим

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial C}{\partial X} + \frac{x}{3}\frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + \frac{y}{3}\frac{\partial^2 C}{\partial X \partial Y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial C}{\partial Y} + \frac{x}{3}\frac{\partial^2 C}{\partial X \partial Y} + \frac{y}{3}\frac{\partial^2 C}{\partial Y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{1}{3}\frac{\partial^2 C}{\partial X \partial Y}.$$

После умножения (согласно (12.10)) и суммированием слагаемых приходим к следующему выражению для (12.10), в котором слагаемые в квадратных скобках имеют порядок $|r|^{-2}$, $|r|^{-1}$ и $|r|^0$:

$$\left[-\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}\right]C-\left[\frac{x}{y^2}\frac{\partial C}{\partial X}+\frac{y}{x^2}\frac{\partial C}{\partial Y}\right]+$$
$$+\left[\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{y^2}+\frac{1}{6}\right)\frac{\partial^2 C}{\partial X^2}+\left(-\frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2}+\frac{1}{6}\right)\frac{\partial^2 C}{\partial Y^2}\right]+O(|r|). \qquad (12.11)$$

Теперь, для завершения асимптотического анализа (10.17), необходимо разложить слагаемые

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\rho((x,y),0)}{y}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\rho((x,y),\frac{\pi}{2})}{x}\right]=$$
$$=\frac{1}{y}\frac{\partial\rho((x,y),0)}{\partial y}-\frac{\rho((x,y),0)}{y^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial\rho((x,y),\frac{\pi}{2})}{\partial x}-\frac{\rho((x,y),\frac{\pi}{2})}{x^2}. \qquad (12.12)$$

С этой целью запишем формулу Тейлора с $\varphi=0$ или $\pi/2$:

$$\rho((x,y),\varphi)=\rho(O,\varphi)+x\frac{\partial\rho(O,\varphi)}{\partial X}+$$
$$+y\frac{\partial\rho(O,\varphi)}{\partial Y}+\frac{x^2}{2}\frac{\partial^2\rho(O,\varphi)}{\partial X^2}+xy\frac{\partial^2\rho(O,\varphi)}{\partial X\,\partial Y}+\frac{y^2}{2}\frac{\partial^2\rho(O,\varphi)}{\partial Y^2}+O(|r|^3). \qquad (12.13)$$

Подставляя это представление в (12.12) с $\rho=C$ получаем :

$$\left[-\frac{C}{y^2}-\frac{C}{x^2}\right]-\left[\frac{y}{x^2}\frac{\partial C}{\partial Y}+\frac{x}{y^2}\frac{\partial C}{\partial X}\right]+\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2y^2}\right)\frac{\partial^2 C}{\partial X^2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{y^2}{2x^2}\right)\frac{\partial^2 C}{\partial Y^2}\right]+O(|r|).$$
(12.14)

Ясно, что слагаемые в квадратных скобках порядка $|r|^{-2}$, $|r|^{-1}$ и $|r|^0$. Таким образом, приходим к заключению, что *если ρ таково, как в (12.9), то для всякой части (10.17) имеет место асимптотическое разложение*

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial Y^2}\right)+O(|r|).$$

Наконец, рассмотрим случай

$$\rho(O,\varphi)=B(O,e)\cos 2\varphi. \qquad (12.15)$$

В (12.10) подставим

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x\,y}\cdot\cos 2\varphi=\frac{x^2-y^2}{x\,y},\qquad g(x,y)=\mathcal{L}(B).$$

Действуя так, как в случае с (12.9), приходим к следующему выражению для (12.10), содержащему новые функции f и g :

$$\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right]B+\left[-\frac{x}{y^2}\frac{\partial B}{\partial X}+\frac{y}{x^2}\frac{\partial B}{\partial Y}\right]+$$
$$+\left[\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{y^2}-\frac{1}{6}\right)\frac{\partial^2 B}{\partial X^2}+\left(\frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2}+\frac{1}{6}\right)\frac{\partial^2 B}{\partial Y^2}\right]+O(|r|). \qquad (12.16)$$

Анализ слагаемых в (12.12) по существу аналогичен случаю с (12.9) и приводит к дополнительным слагаемым

$$\left(\frac{B}{x^2}-\frac{B}{y^2}\right)+\left(-\frac{x}{y^2}\frac{\partial B}{\partial X}+\frac{y}{x^2}\frac{\partial B}{\partial Y}\right)+$$
$$+\left(\left[-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2y^2}\right]\frac{\partial^2 B}{\partial X^2}+\left[\frac{1}{2}+\frac{y^2}{2x^2}\right]\frac{\partial^2 B}{\partial Y^2}\right)+O(|r|). \quad (12.17)$$

Таким образом, заключаем, что *если ρ таково, как в (12.16), то для левой стороны (10.17) имеет место асимптотическое разложение*

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 B}{\partial X^2}-\frac{\partial^2 B}{\partial Y^2}\right)+O(|r|).$$

Резюмируя полученные для случаев (12.6), (12.9), (12.15) результаты, находим, что для левой стороны (10.17) имеет место асимптотическое разложение

$$2\frac{\partial^2 A}{\partial X\partial Y}-\left(\frac{\partial^2 C}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial Y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 B}{\partial X^2}-\frac{\partial^2 B}{\partial Y^2}\right)+O(|r|).$$

Это, вместе с необходимыми равенствами (10.17) и (10.17′), приводит к следующему утверждению.

Предложение 4. *Пусть $\rho\in C^{(3)}$ – флаговая плотность некоторой локально-конечной, знакопеременной меры, заданной в пространстве* $\mathbb{E}$. *Тогда функции $A(O,e)$, $B(O,e)$ и $C(O,e)$ из представления (11.11) предложения 3 удовлетворяют дифференциальному уравнению*

$$2\frac{\partial^2 A}{\partial X\partial Y}-\left(\frac{\partial^2 C}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial Y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 B}{\partial X^2}-\frac{\partial^2 B}{\partial Y^2}\right)=0. \quad (12.18)$$

§13. ДОСТАТОЧНОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Утверждение, следующее из предложений 3,4, обратимо.

Предложение 5. *Пусть заданные на плоскости функции $A(x,y)$, $B(x,y)$ и $C(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируемы. Если эти функции удовлетворяют уравнению (12.18), то флаговая функция*

$$\rho(x,y,\varphi)=A(x,y)\sin 2\varphi+B(x,y)\cos 2\varphi+C(x,y)$$

удовлетворяет уравнению (10.17).

Доказательство. Покажем сначала, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\frac{1}{|r|}\int_r A(u,v)\,dl\right] = \frac{1}{|r|^3}\int_r \frac{\partial^2 A(u,v)}{\partial u \partial v}\,l^2\,dl. \tag{13.1}$$

Напомним, что интегрирование произведено по прямолинейному сегменту r, соединяющему O с точкой (x,y), $|r| = \sqrt{x^2+y^2}$, dl – элемент длины на r и φ – угол между осью x и r, измеренный против часовой стрелки. Согласно аналогу (12.10)

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\frac{1}{|r|}\int_r A(u,v)\,dl\right] = \frac{3xy}{|r|^5}\int_r A(u,v)\,dl - \frac{x}{|r|^3}\frac{\partial}{\partial y}\int_r A(u,v)\,dl - \\ - \frac{y}{|r|^3}\frac{\partial}{\partial x}\int_r A(u,v)\,dl + \frac{1}{|r|}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\int_r A(u,v)\,dl. \tag{13.2}$$

Для вычисления производной $\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_r A(u,v)\,dl$ заменим переменную интегрирования l на $v = l\sin\varphi$, $u = v\operatorname{ctg}\varphi$. Получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_r A(u,v)\,dl = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^y A(v\operatorname{ctg}\varphi, v)\,\frac{dv}{\sin\varphi},$$

где подынтегральное выражение зависит от x, поскольку от x зависит параметр φ. Дифференцированием под знаком интеграла находим, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_r A(u,v)\,dl = \frac{y}{|r|^2}\int_0^y \left[\frac{\partial A}{\partial u}\frac{v}{\sin^3\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}A\right]dv = \\ = \frac{y}{|r|^2}\int_r \left[\frac{\partial A}{\partial u}\frac{v}{\sin^2\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}A\right]dl. \tag{13.3}$$

где $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = -\dfrac{y}{|r|^2}$. Основываясь на формуле

$$u = l\cos\varphi, \qquad v = u\operatorname{tg}\varphi, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{x}{|r|^2}, \tag{13.4}$$

аналогичным образом получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_r A(u,v)\,dl = \frac{\partial}{\partial y}\int_0^x A(u, u\operatorname{tg}\varphi)\,\frac{du}{\cos\varphi} = \frac{x}{|r|^2}\int_r \left[\frac{\partial A}{\partial v}\frac{u}{\cos^2\varphi} + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}A\right]dl. \tag{13.5}$$

Дифференцируя (13.2), находим смешанную производную из (13.1):

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\int_r A(u,v)\,dl = \frac{x^2-y^2}{|r|^4}\int_r \left[\frac{\partial A}{\partial u}\frac{v}{\sin^2\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}A\right]dl + \\ + \frac{y}{|r|^2}\frac{\partial}{\partial y}\int_r \left[\frac{\partial A}{\partial u}\frac{v}{\sin^2\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}A\right]dl.$$

Для нахождения производной интеграла, применим замену переменной (13.4), продифференцируем под знаком интеграла и возвратимся к интегрированию по dl. В результате получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\int_r A(u,v)\,dl = \frac{x^2-y^2}{|r|^4}\int_r\left[\frac{\partial A}{\partial u}\frac{v}{\sin^2\varphi}+\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}A\right]dl+$$
$$+\frac{xy}{|r|^4}\int_r\left[\frac{\partial A}{\partial u\partial v}\frac{uv}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}+\frac{\partial A}{\partial u}u\frac{2\sin^2\varphi-\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}-\right.$$
$$\left.-\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}A+\frac{\partial A}{\partial v}\frac{u}{\sin\varphi\cos\varphi}\right]dl. \qquad (13.6)$$

Теперь сумму в правой части (13.2) можно записать в виде интеграла, взятого по r:

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\frac{1}{|r|}\int_r A(u,v)\,dl\right]=\int_r\left(c_1A+c_2\frac{\partial A}{\partial u}+c_3\frac{\partial A}{\partial v}+c_4\frac{\partial A}{\partial u\partial v}\right)dl. \qquad (13.7)$$

Из (13.2), (13.3), (13.5) и (13.6) следует, что

$$c_1=\frac{x^2-y^2}{|r|^5}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}-\frac{xy}{|r|^5}\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}-\frac{y^2}{|r|^5}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}-\frac{x^2}{|r|^5}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}+\frac{3xy}{|r|^5}=$$
$$=|r|^{-3}\left[(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}-\right.$$
$$\left.-\cos\varphi\sin\varphi\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}-\sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi\cos\varphi+3\sin\varphi\cos\varphi\right]=0.$$
$$c_2=-\frac{y^2}{|r|^5}\frac{v}{\sin^2\varphi}+\frac{x^2-y^2}{|r|^5}u\frac{2\sin^2\varphi-\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}=$$
$$=\frac{v}{|r|^5\sin^2\varphi}\left[x^2-2y^2+\frac{xy(2\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)}{\sin\varphi\cos\varphi}\right]=0.$$
$$c_3=-\frac{x^2}{|r|^5}\frac{u}{\cos^2\varphi}+\frac{xy}{|r|^5}\frac{u}{\sin\varphi\cos\varphi}=0.$$
$$c_4=\frac{uv}{|r|^3\sin\varphi\cos\varphi}=\frac{l^2}{|r|^3}.$$

Ясно, что этим вычислением (13.7) приводится к виду (13.1).

Перейдем к случаю, когда $\rho(x,y,\varphi)=B(x,y)\cos 2\varphi$. Покажем, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\frac{x^2+y^2}{xy}\cos 2\varphi\,\frac{1}{|r|}\int_r B(u,v)\,dl\right]-$$
$$-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{y}B(x,y)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{x}B(x,y)\right]=\frac{1}{|r|^3}\int_r\left[\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\right]l^2\,dl. \qquad (13.8)$$

Пользуясь равенством $\cos 2\varphi = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ и формулой (12.10), получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\frac{x^2-y^2}{xy\,|r|}\int_r B(u,v)\,dl\right] =$$

$$= \frac{3(x^2-y^2)}{|r|^5}\int_r B(u,v)\,dl + \frac{(3x^2+y^2)\,y}{x^2\,|r|^3}\,\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_r B(u,v)\,dl\right] -$$

$$- \frac{(3y^2+x^2)\,x}{y^2\,|r|^3}\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_r B(u,v)\,dl\right] + \frac{(x^2-y^2)}{xy\,|r|}\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\int_r B(u,v)\,dl\right]. \qquad (13.9)$$

Для производных от $\int_r B(u,v)\,dl$ можем использовать готовые выражения (13.3), (13.5) и (13.6), где A заменено на B. Тогда прибавлением слагаемых (аналогично (13.7)) (13.9) приводится к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\frac{x^2-y^2}{xy\,|r|}\int_r B(u,v)\,dl\right] =$$

$$= \frac{\sin^2\varphi-\cos^2\varphi}{|r|^3\sin^2\varphi\,\cos^2\varphi}\int_r B(u,v)\,dl + \frac{1}{|r|^3\sin\varphi\,\cos^3\varphi}\int_r \frac{\partial B(u,v)}{\partial v}\,u\,dl -$$

$$- \frac{1}{|r|^3\sin^3\varphi\,\cos\varphi}\int_r \frac{\partial B(u,v)}{\partial u}\,v\,dl + \frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{|r|^3\sin^2\varphi\,\cos^2\varphi}\int_r \frac{\partial^2 B(u,v)}{\partial u\,\partial v}\,uv\,dl. \qquad (13.10)$$

Необходимо преобразовать некоторые из полученных интегралов. Воспользовавшись (13.4), интегрированием по частям получаем

$$\int_r B(u,v)\,dl = \frac{1}{\cos\varphi}\int_0^x B(u,u\operatorname{tg}\varphi)\,du = \frac{B(u,v)\cdot x}{\cos\varphi} - \frac{1}{\cos\varphi}\int_0^x u\,dB =$$

$$= B(x,y)\cdot|r| - \operatorname{ctg}\varphi\int_r \frac{\partial B(u,v)}{\partial u}\,v\,dl - \operatorname{tg}\varphi\int_r \frac{\partial B(u,v)}{\partial v}\,u\,dl. \qquad (13.11)$$

Аналогично

$$\int_r \frac{\partial B(u,v)}{\partial v}\,u\,dl = \frac{1}{\cos\varphi}\int_0^x \frac{\partial B(u,u\operatorname{tg}\varphi)}{\partial v}\,d\left(\frac{u^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{|r|^2\cos\varphi}{2}\,\frac{\partial B(x,y)}{\partial y} - \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{2}\int_r \frac{\partial^2 B(u,v)}{\partial u\,\partial v}\,uv\,dl - \frac{1}{2}\int_r \frac{\partial^2 B(u,v)}{\partial v^2}\,uv\,dl, \qquad (13.12)$$

$$\int_r \frac{\partial B(u,v)}{\partial u}\,v\,dl = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\cos\varphi}\int_0^x \frac{\partial B(u,u\operatorname{tg}\varphi)}{\partial u}\,du^2 =$$

$$= \frac{|r|^2\sin\varphi}{2}\,\frac{\partial B(x,y)}{\partial x} - \frac{\sin\varphi}{2\cos\varphi}\int_r \frac{\partial^2 B(u,v)}{\partial u\,\partial v}\,uv\,dl - \frac{1}{2}\int_r \frac{\partial^2 B(u,v)}{\partial u^2}\,uv\,dl. \qquad (13.13)$$

Подстановкой в (13.10) и прибавлением слагаемых приходим к следующему тождеству для первого слагаемого левой части (13.8):

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\frac{x^2-y^2}{xy\,|r|}\int_r B(u,v)\,dl\right] =$$

$$= \frac{B(x,y)}{|r|^2}\,\frac{\sin^2\varphi-\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi\,\cos^2\varphi} + \frac{1}{|r|\sin\varphi}\,\frac{\partial B(x,y)}{\partial y} - \frac{1}{|r|\cos\varphi}\,\frac{\partial B(x,y)}{\partial x} -$$

$$- \frac{1}{|r|^3\sin\varphi\cos\varphi}\int_r \frac{\partial^2 B(u,v)}{\partial u^2}\,uv\,dl + \frac{1}{|r|^3\sin\varphi\cos\varphi}\int_r \frac{\partial^2 B(u,v)}{\partial u^2}\,uv\,dl. \qquad (13.14)$$

Как для двух остаточных слагаемых в (13.8), имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{x}B(x,y)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{y}B(x,y)\right]=$$

$$=-\frac{B(x,y)}{|r|^2}\,\frac{\sin^2\varphi-\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}-\frac{1}{|r|\sin\varphi}\,\frac{\partial B(x,y)}{\partial y}+\frac{1}{|r|\cos\varphi}\,\frac{\partial B(x,y)}{\partial x}. \qquad (13.15)$$

Из (13.14) и (13.15) очевидно следует (13.8).

Перейдем теперь к случаю $\rho(x,y,\varphi)=C(x,y)$. Необходимо доказать, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\frac{x^2+y^2}{xy}\,\frac{1}{|r|}\int_r C(u,v)\,dl\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{y}C(x,y)\right]-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{x}C(x,y)\right]=-\frac{1}{|r|^3}\int_r\left[\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right]l^2\,dl. \qquad (13.16)$$

В силу (12.10)

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{xy}\int_r C(u,v)\,dl\right]=-\frac{1}{|r|^3}\int_r C(u,v)\,dl-$$

$$-\frac{y}{x^2|r|}\,\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_r C(u,v)\,dl\right]-\frac{x}{y^2|r|}\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_r C(u,v)\,dl\right]+\frac{|r|}{xy}\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\int_r C(u,v)\,dl\right]. \qquad (13.17)$$

Подстановкой (13.3), (13.5) и (13.6) и суммированием слагаемых (13.17) приводится к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\frac{|r|}{xy}\int_r C(u,v)\,dl\right]=$$

$$=\frac{1}{|r|^3\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\int_r C(u,v)\,dl+\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{|r|^3\sin\varphi\cos^3\varphi}\int_r\frac{\partial C(u,v)}{\partial v}\,u\,dl+$$

$$+\frac{\sin^2\varphi-\cos^2\varphi}{|r|^3\sin^3\varphi\cos\varphi}\int_r\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}\,v\,dl+\frac{1}{|r|^3\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\int_r\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u\,\partial v}\,uv\,dl. \qquad (13.18)$$

Подстановкой (13.11), (13.12) и (13.13) (записанных для $C(x,y)$) в (13.18) и суммированием слагаемых находим

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\frac{|r|}{xy}\int_r C(u,v)\,dl\right]=$$

$$=-\frac{C(x,y)}{|r|^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}+\frac{1}{|r|\sin\varphi}\,\frac{\partial C(x,y)}{\partial y}+\frac{1}{|r|\cos\varphi}\,\frac{\partial C(x,y)}{\partial x}- \qquad (13.19)$$

$$-\frac{1}{|r|^3\sin\varphi\cos\varphi}\int_r\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial v^2}\,uv\,dl-\frac{1}{|r|^3\sin\varphi\cos\varphi}\int_r\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u^2}\,uv\,dl.$$

Для оставшихся двух слагаемых левой части (13.16) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{x}C(x,y)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{y}C(x,y)\right]=$$

$$=-\frac{C(x,y)}{|r|^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}+\frac{1}{|r|\sin\varphi}\frac{\partial C(x,y)}{\partial y}+\frac{1}{|r|\cos\varphi}\frac{\partial C(x,y)}{\partial x}. \qquad (13.20)$$

Из (13.19) и (13.20) очевидным образом следует (13.16).

Из уравнений (13.1), (13.8) и (13.16) заключаем, что подстановка (11.11) в (10.17) приводит к интегралу

$$\frac{1}{|r|^3}\int_r\left[2\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y}-\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\right)\right]l^2\,dl.$$

Тем самым, из условия (12.18) следует уравнение (10.17), чем завершается доказательство.

§14. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Предложениями 3 – 5 анализ первого порядка не завершается, поскольку предложение 2 содержит условия (10.15), (10.19), оставшиеся вне нашего поля зрения.

Ниже мы покажем, что *комбинации (11.11) удовлетворяют (10.15) без дополнительных условий, а также, что из (12.18) следуют (10.19).*

Проверка (10.15). Дифференцированием, из (10.15) получаем

$$\frac{\cos\alpha}{y}\left[-1+\frac{y^2}{(y\cos\alpha-x\sin\alpha)^2}\right]\overline{\rho}(r)+\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{y}\,\frac{x^2+y^2}{y\cos\alpha-x\sin\alpha}\,\frac{\partial\overline{\rho}(r)}{\partial x}+$$

$$+\frac{\sin\alpha}{x}\left[1-\frac{x^2}{(y\cos\alpha-x\sin\alpha)^2}\right]\overline{\rho}(r)+\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{x}\,\frac{x^2+y^2}{y\cos\alpha-x\sin\alpha}\,\frac{\partial\overline{\rho}(r)}{\partial y}+$$

$$+\frac{1}{y}\cos\alpha\,\rho((x,y),0)-\frac{1}{x}\sin\alpha\,\rho((x,y),\frac{\pi}{2})+\frac{1}{x\sin\alpha-y\cos\alpha}\rho((x,y),\alpha)=0. \qquad (14.1)$$

Возьмем $\rho((x,y),\varphi)=\sin 2\varphi\,A(x,y)$. Из формул (13.3) и (13.5) следует, что

$$\frac{\partial\overline{\rho}(r)}{\partial x}=\frac{2\cos\varphi}{|r|^2}\int_r\frac{\partial A}{\partial u}\,v\,dl,\qquad \frac{\partial\overline{\rho}(r)}{\partial y}=\frac{2\sin\varphi}{|r|^2}\int_r\frac{\partial A}{\partial v}\,u\,dl.$$

Подстановкой этих выражений в (14.1), суммированием членов и сокращением множителя $\sin 2\alpha/(y\cos\alpha-x\sin\alpha)$ (14.1) приводится к виду

$$\frac{1}{|r|}\int_r A(u,v)\,dl-A+\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{|r|}\int_r\frac{\partial A}{\partial u}\,v\,dl+\frac{\operatorname{tg}\varphi}{|r|}\int_r\frac{\partial A}{\partial v}\,u\,dl=0.$$

Применив равенства $v = l\sin\varphi$, $u = l\cos\varphi$, будем иметь

$$\frac{1}{|r|}\int_r A(u,v)\,dl - A + \frac{1}{|r|}\int_r \frac{\partial A}{\partial l}\,l\,dl = 0.$$

Интегрированием по частям получаем $\int_r \frac{\partial A}{\partial l}\,l\,dl = |r|A - \int_r A\,dl$. Тем самым, $\sin 2\varphi A$ удовлетворяет условию (10.15). Проверка для $\rho = \cos 2\varphi B(x,y)$ и $C(x,y)$ аналогична.

Проверка (10.19). Поскольку из (12.18) следует, что функционал E_1 – тождественный ноль, то достаточно проверить (10.19) для *равностороннего треугольника* и Q_0, совпадающим с центром тяжести. В этом случае $\sigma_{i1} = \sigma_{i2} = \pi/6$ при $i = 1,2,3$. Следовательно, (10.19) приводится к виду

$$\sum_{v_i} [\rho(Q_0, r_i) - \rho(Q_0, b_i)] = 0.$$

Пусть α_i – угол между r_i и осью x. Так как $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{2\pi}{3}$ и $\alpha_3 = \alpha_1 + \frac{4\pi}{3}$, то для $\rho = A(Q_0)\sin 2\varphi$ имеем $\sin 2\alpha_1 - \sin 2(\alpha_1 + \pi/6) - \sin 2(\alpha_1 - \pi/6) = 0$. Проверка для $\rho = B\cos 2\varphi$ и C аналогична.

Из этих двух проверок следует основной результат анализа, представленного в предыдущих §§10 – 13.

Теорема 4. *Флаговая функция $\rho \in C^{(3)}$ удовлетворяет условию первого порядка (9.6) в том и только том случае, если любая плотность ρ имеет вид (11.11) и коэффициенты A, B, C удовлетворяют дифференциальному уравнению (12.18).*

Подчеркнем, что с точки зрения основной задачи порождения локально-конечной, знакопеременной меры посредством ρ, уравнения (11.11) и (12.18) имеют статус необходимых условий. Исследование вопроса – *когда они одновременно достаточны?* требует исследования условия (9.7) второго порядка. Мы надеемся произвести такое исследование в другой статье.

ABSTRACT. Guided by a decomposition in Combinatorial Integral Geometry, we define a class of finitely additive functionals on the sets from the so–called Buffon ring in the space of planes in $\mathbb{R}^3$. Under certain smoothness assumptions, we find necessary and sufficient conditions when

these functionals define a signed measure in that space. They are formulated in terms of the rate of decrease of the so–called pyramidal excess. Some necessary conditions are found in terms of certain "flag densities" on which the functionals depend.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
2. Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штойян, Введение в стохастическую геометрию, Москва, Наука, 1989.
3. R. V. Ambartzumian, "Measure Generation by Euler functionals." Submitted to Journal of Applied Probability, Stochastic Geometry Section.
4. Р. В. Амбарцумян, "Замечания о порождении мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$", Известия НАН Армении, Математика, т. 27, №. 5, стр. 1 – 21, 1992.
5. В. К. Оганян, А. Абдаллах, "О порождении мер в пространстве прямых финслеровыми метриками", Известия НАН Армении. Математика, т. 27, №. 5, стр. 69 – 80, 1992.
6. Г. С. Сукиасян, "О порождении мер пространственными флаговыми функциями", Известия НАН Армении, Математика, т. 28, №. 2, стр. 61 – 70, 1993.
7. Р. В. Амбарцумян, "Об одном конечно-аддитивном функционале в $\mathbb{R}^{3}$", Известия НАН Армении, Математика, т. 28, №. 2, стр. 51 – 60, 1992.
8. R. V. Ambartzumian, "The solution to the Buffon—Sylvester problem in $\mathbb{R}^3$," Z. Wahrscheinlichkeitstheory, verw. Geb., vol. 27, pp. 53 — 74, 1973.

29 ноября 1994

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении,
Ереванский государственный университет

ПОРОЖДЕНИЕ МЕР В ПРОСТРАНСТВЕ ПЛОСКОСТЕЙ И СФЕРИЧЕСКИЕ ЭЙЛЕРОВЫ ФУНКЦИОНАЛЫ

Р. Г. Арамян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, №4, 1994

В статье рассмотрена задача порождения мер в пространстве $\mathbb{E}$ плоскостей в $\mathbb{R}^3$, посредством конечно-аддитивных функционалов, заданных на множествах, которые в обычных сферических координатах в $\mathbb{E}$ имеют форму произведений. Найдено условие, в терминах так называемых флаговых плотностей, необходимое и достаточное для порождения меры. Решение задачи приводит к порождению меры на сфере, посредством некоторого функционала типа Эйлера, записанного в явном виде.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Эйлеровы функционалы впервые были рассмотрены Р. В. Амбарцумяном в [6] в связи с задачей порождения знакопеременной меры в евклидовой плоскости. Одним из стимулов их дальнейшего исследования является тот факт, что они естественным образом возникают в задачах порождения мер в многомерных пространствах. Пример этого можно найти в статье [4] Р. В. Амбарцумяна и В. К. Оганяна, относящейся к порождению мер в пространстве $\mathbb{E}$ плоскостей в $\mathbb{R}^3$, опубликованной в этом номере (функционал E_2). Другой тип эйлеровых функционалов появляется в той же задаче порождения мер в $\mathbb{E}$, если эту задачу поставить для функционалов, зависящих от множеств произведений в координатном пространстве (p,ω), описывающем $\mathbb{E}$ (что в некотором смысле предпочтительнее бюффоновых множеств, рассмотренных в [4]). Как обычно, p – расстояние

Данное исследование частично финансировано грантом no. RYB000 Международного Научного Фонда.

плоскости $e \in \mathbb{E}$ от начала координат O, а ω – пространственное направление, ортогональное e. В этом случае эйлеровы функционалы заданы на сферах. Вывод явного выражения для этих функционалов (которые ниже будем обозначать через E), а также рассмотрение задачи порождения через E знакопеременной меры на сфере – необходимые этапы, предшествующие проведенному нами исследованию по порождению мер в $\mathbb{E}$. Отметим, что в случае инвариантности относительно параллельных переносов соответствующие функционалы были найдены в [8].

Ввиду иного подхода, в данной работе бюффоновы множества и их комбинаторика, имевшие первостепенное значение в [4], не имеют существенных применений. Фактически их применение ограничено доказательством нижеприводимой теоремы 1, устанавливающей представление для мер множеств

$$[B] = \{e \in \mathbb{E}\colon e \quad \text{пересекается с гладким, выпуклым телом} \quad B\}$$

в терминах так называемой (пространственной) *флаговой плотности* ρ. Отметим, что в случае инвариантности относительно параллельных переносов, разные доказательства результата теоремы 1 были приведены в работах [1] – [3] в контексте теории выпуклых множеств, а в общем случае она была анонсирована в [9]. Ниже представление теоремы 1 использовано для нахождения значений "условных" мер множеств типа

$$\{e \in \mathbb{E}\colon \omega \in A, \quad p = R, \quad R \text{ является постоянной}\},$$

где A из кольца сферических областей, содержащего геодезически выпуклые многоугольники. Соответствующим явным представлением определяется семейство сферических эйлеровых функционалов E, зависящих от флаговой плотности ρ.

Далее следует параграф, в котором устанавливаются результаты, относящиеся к общим сферическим эйлеровым функционалам, в том числе к необходимому условию порождения меры. В §6 на множествах произведений в координатных моделях (p, ω) множества $\mathbb{E}$ определен функционал $\mathbb{F}$. Получено необходимое и достаточное условие для порождения меры в пространстве $\mathbb{E}$, при определенном,

дополнительном условии об инвариантности $\mathbb{F}$. В заключение (в дополнении Р. В. Амбарцумяна), с использованием последнего условия вместе с условием необходимости из [4], получено следующее следствие. Пусть существенно гладкой флаговой функцией ρ порождается локально-конечная знакопеременная мера в $\mathbb{E}$ с помощью функционала Ψ, рассмотренного в [4]. Если ρ не зависит от угловых переменных, то ρ является постоянной (т. е. ρ не зависит от параметра местоположения). Из тех же рассуждений следует доказательство для теоремы, сформулированной в Предисловии редактора, предваряющей данный номер журнала.

§1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Ниже будет иметь особое значение понятие флага в $\mathbb{R}^3$, естественным образом возникшее в комбинаторной интегральной геометрии [1]. Детальный обзор, относящийся к этому понятию, содержится в §3 статьи Р. В. Амбарцумяна и В. К. Оганяна, приведенной в этом номере. Повторим определение флага.

Флагом является тройка $f = (P, g, e)$, где P – точка в $\mathbb{R}^3$, называемая *вершиной* f, g – прямая, содержащая точку P, а e – плоскость, содержащая g. Имеют место два эквивалентных представления флага :

$$f = f(P, \Omega, \Phi), \quad \text{или} \quad f = f(P, \omega, \varphi),$$

где Ω – пространственное направление g в $\mathbb{R}^3$, Φ – поворот e вокруг g, ω – нормаль к e, а φ – направление g на плоскости e. Моделью Ω и ω является стандартное эллиптическое 2–пространство $\mathcal{E}_2$, которое может быть получено из единичной сферы идентификацией точек – антиподов (см. [5]), а ϕ и φ принадлежат $(0, \pi)$.

Пусть $\mathbb{E}$ – пространство плоскостей в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим локально-конечные, знакопеременные меры μ в пространстве $\mathbb{E}$, обладающие плотностями относительно стандартной меры, инвариантной при евклидовых движениях, т. е.

$$\mu(de) = h(e)de. \tag{1.1}$$

Напомним, что элемент de стандартной меры может быть записан в виде

$$de = dp\, d\xi,$$

где (p, ξ) – обычная параметризация плоскости e : p – расстояние e от начала координат O ; $\xi \in \mathcal{E}_2$ – направление, нормальное к e, $d\xi$ – элемент телесного угла. Условимся писать $h(e) = h(p, \xi)$. Используя меру μ, определим в пространстве флагов следующую (флаговую) функцию

$$\rho(f) = \rho(P, \omega, \varphi) = \int_{[P]} \sin^2 \alpha(\xi, \omega, \varphi)\, h(\xi)\, d\xi. \tag{1.2}$$

Здесь $[P]$ – пучок плоскостей, содержащих точку $P \in \mathbb{R}^3$, $h(\xi)$ – сужение h на $[P]$. Обозначение $h(\xi)$ корректно, поскольку ξ однозначно определяет плоскость из $[P]$. Аналогичным кратким обозначением мы будем пользоваться также в других случаях. Для объяснения угла $\alpha(\xi, \omega, \varphi)$, запишем $f = (P, g, e)$. Тогда $\alpha(\xi, \omega, \varphi)$ – угол между g и следом $e_\xi \cap e$, где e_ξ – плоскость, нормальная к ξ.

Пусть K – выпуклое тело с границей ∂K, обладающей непрерывной кривизной (в этом случае K будем называть *гладким*). Через k_1, k_2 обозначим главные нормальные кривизны ∂K в точке $s \in \partial K$, а через f_1, f_2 – *основные флаги* $f_i = (s, g_i, t)$, где t – плоскость, касательная в точке s, прямые g_i имеют направления главных кривизн.

Теорема 1. *Пусть μ – знакопеременная мера в $\mathbb{E}$, обладающая плотностью $h(e)$. Для любого гладкого, выпуклого тела K справедливо следующее представление :*

$$\mu([K]) = (2\pi)^{-1} \int_{\partial K} [k_1 \rho(f_2) + k_2 \rho(f_1)]\, ds, \tag{1.3}$$

где флаговая функция ρ задана по (1.2).

Доказательство получается применением теоремы 1 из [4] с функцией клина $F(w)$, приведенной в (5.1), [4], к мере множества $[K']$, где K' – многогранник в $\mathbb{R}^3$ и аппроксимацией K многогранниками. Реализации этой процедуры, в

случае инвариантности относительно сдвигов, можно найти в работах [1] – [3]. Нам понадобятся также нижеприводимые обозначения.

Через $\mathbf{S}(Q, R)$ обозначим сферу с центром в точке Q и радиусом R, через $\mathbf{S}$ обозначим $\mathbf{S}(O, 1)$ т. е. пространство направлений в $\mathbb{R}^3$. Предположим, что $h(e)$ – плотность, заданная формулой (1.1). На $\mathbf{S}(Q, R)$ определим функцию

$$h^*(s) = h(t(s)),$$

где $t(s)$ – плоскость, касательная к $\mathbf{S}(Q, R)$ в некоторой точке $s \in \mathbf{S}(Q, R)$. Меру $R^{-2} h^*(s)\, ds$, где ds – элемент площади на $\mathbf{S}(Q, R)$, назовем *условной* мерой на $\mathbf{S}(Q, R)$, порожденной μ (или h).

Пусть $\mathbf{A}$ – геодезически выпуклая область на $\mathbf{S}(Q, R)$, содержащаяся в некоторой полусфере. Далее, пусть $B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^3, \varepsilon > 0$ – выпуклое тело, ограниченное $\mathbf{S}(Q, R+\varepsilon)$, плоскостями, касательными к сфере $\mathbf{S}(Q, R)$ в точках $\partial\mathbf{A}$ и конической поверхностью с вершиной Q (см. рис. 1).

Теорема 2. *Пусть μ – мера на $\mathbb{E}$ с непрерывной плотностью $h(e)$, $\mathbf{A} \subset \mathbf{S}(Q, R)$ – открытое, выпуклое множество, содержащееся в некоторой полусфере. Тогда*

$$\frac{1}{R^2} \int_{\mathbf{A}} h^*(s)\, ds = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu([B_\varepsilon]) - \mu([B_0])}{\varepsilon}. \tag{1.4}$$

Доказательство. Пусть Q совпадает с началом координат. На множестве B_ε имеем $h(p, \xi) = h(R, \xi) + O(p - R)$. Тем самым

$$\mu([B_\varepsilon]) = \mu([B_0]) + \mu([B_\varepsilon] \setminus [B_0]) = \mu([B_0]) + \int_{[B_\varepsilon]\setminus[B_0]} h(e)\, dp\, d\xi =$$
$$= \mu([B_0]) + \varepsilon \int_{A^\varepsilon} h(R, \xi)\, d\xi + \int_{A \setminus A^\varepsilon} b(\xi)\, h(R, \xi) d\xi + o(\varepsilon),$$

где A и A^ε – телесные углы, соответствующие $\mathbf{A}$ и $\partial B_\varepsilon \cap \mathbf{S}(Q, R+\varepsilon)$ (см. рис. 1), а $b(\xi)$ получено интегрированием по dp, $0 \le b(\xi) \le \varepsilon$. Ясно, что A^ε стремится к A при $\varepsilon \to 0$ (монотонная сходимость). Отсюда следует, что

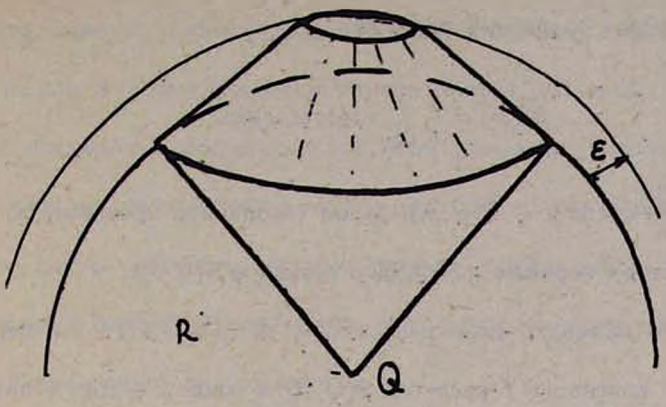


Рис. 1

$$\left|\frac{\mu([B_\varepsilon])-\mu([B_0])}{\varepsilon}-\int_{\Lambda}h(R,\xi)d\xi\right|\le\left|\int_{A^*}h(e)de-\int_{\Lambda}h(e)d\xi\right|+$$
$$+\left|\varepsilon^{-1}\int_{A\setminus A^*}b(\xi)\,h(R,\xi)\,d\xi\right|\to 0$$

при $\varepsilon\to 0$. Теорема доказана.

Замечание. Может показаться естественной замена B_ε в (1.4) более простым телом, например, $B_\varepsilon=\mathrm{conv}\{(1+\varepsilon)\mathbf{A}\cup\{O\}\}$, где $(1+\varepsilon)\mathbf{A}$ – центральная проекция геодезически выпуклого $\mathbf{A}\subset S(O,1)$ на $\mathbf{S}(O,1+\varepsilon)$, conv означает минимальную выпуклую оболочку. Однако, можно проверить, что при такой замене отношение $\varepsilon^{-1}[\mu([\mathrm{conv}\{(1+\varepsilon)\mathbf{A}\cup\{O\}\}])-\mu([\mathrm{conv}\{\mathbf{A}\cup\{O\}\}])]$ не сходится к $\int_{\mathbf{A}}h^*(s)\,ds$.

В следующих §§2 – 4 мы вычислим значения "условной меры" различных областей $\mathbf{A}\subset\mathbf{S}(Q,R)$. При этом будет использовано тождество (1.4), где вместо $\mu([B_\varepsilon])$ и $\mu([B_0])$ будут подставлены их выражения (1.3). Полученные результаты будут содержать нижеприводимые обозначения. Рассмотрим функцию от так называемой массы пучка в P :

$$M(P)=\int_{[P]}h(\xi)\,d\xi.$$

Из (1.2) следует, что

$$\rho(P,\omega,\varphi)+\rho(P,\omega,\varphi+\pi/2)=\int_{[P]}(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\,h(\xi)\,d\xi=M(P).$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$M(P) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \rho(P,\omega,\varphi)d\varphi. \tag{1.5}$$

Ниже через $\dfrac{\partial M(s)}{\partial n}$, где $s \in \mathbf{S}(Q,R)$, будем обозначать производную $M(P)$ в направлении внешней нормали к $\mathbf{S}(Q,R)$ в точке $s \in \mathbf{S}(Q,R)$.

Флаг f будем называть флагом–носителем $\mathbf{A} \subset \mathbf{S}(Q,R)$ в $l \in \partial\mathbf{A}$, если f расположено в l, плоскость f касается $\mathbf{S}(Q,R)$ в точке $l \in \partial\mathbf{A}$, а прямая f – "носитель" $\partial\mathbf{A}$ в l. Через $< \partial\mathbf{A} >$ будем обозначать множество флагов–носителей $\mathbf{A}$. В рассматриваемом случае каждая точка $l \in \partial\mathbf{A}$ – точка гладкости, и флаг – носитель в l единственный. Тем самым $\rho(l)$ является корректным обозначением для сужения флаговой функции $\rho(f)$ на $< \partial\mathbf{A} >$. В случае, когда $\mathbf{A}$ является сферическим многоугольником с вершинами $\{V_i\}$ и геодезическими сторонами $\{a_i\}$, имеем

$$< \partial\mathbf{A} >= \left(\cup < V_i >\right) \cup \left(\cup < a_i >\right),$$

где через $< V_i >$ обозначено множество флагов–носителей, расположенных в V_i, а через $< a_i >$ – множество флагов–носителей, расположенных на a_i. Сужения $\rho(f)$ на $< a_i >$ или $< V_i >$ будем обозначать через $\rho(l)$, $l \in a_i$ и, соответственно, $\rho(V_i,\varphi)$. Отметим, что углом φ определяется флаг из $< V_i >$.

Для определения частных производных функции $\rho(f)$ необходимо рассмотреть так называемые *направленные* флаги $\overline{f} = (P,\overline{g},\overline{e})$. Здесь $\overline{e}$ – ориентированная плоскость, т. е. плоскость с определенным направлением положительной нормали, $\overline{g}$ – направленная прямая в $\overline{e}$, т. е. прямая, на которой одно из двух возможных направлений определено как *положительное*. Для направленных флагов пространство параметров (Ω,ϕ) и (ω,φ) есть $\mathbf{S} \times [0,2\pi)$, и снова $P \in \overline{g} \subset \overline{e}$. Значения ρ распространяются на пространство направленных флагов по правилу

$$\rho(P,\overline{g},\overline{e}) = \rho(P,g,e).$$

С каждым направленным флагом $f = (P,\overline{g},\overline{e})$ связаны три ортогональные оси,

проходящие через P : по определению, ось 1 совпадает с $\overline{g}$; ось 2 лежит в e, ортогональна к $\overline{g}$ и направлена внутрь правой половины e, ограниченной $\overline{g}$; ось 3 совпадает с положительной нормалью к e. Потребуем, чтобы оси 1,2,3 составляли левую тройку. Через $\rho_i'(f)$ обозначим производную ρ в f, соответствующую положительным поворотам f вокруг оси i. По определению, положительный поворот пространства вокруг оси i – по часовой стрелке, при взгляде в направлении оси i. Ясно, что

$$\rho_1'(P,\Omega,\phi)=\frac{\partial\rho(P,\Omega,\phi)}{\partial\phi},\qquad \rho_3'(P,\omega,\varphi)=\frac{\partial\rho(P,\omega,\varphi)}{\partial\varphi}.$$

Поэтому, ниже вместо $\rho_1'(f)$ будем использовать обозначение $\rho_\phi'(f)$. При этом, $\rho_2'(f)$ нуждается в аналогичной интерпретации, поскольку поворот вокруг оси 2 меняет $\overline{g}$ и e одновременно.

Далее, через $\dfrac{\partial\rho}{\partial_\xi P}$ обозначим частную производную по аргументу P, взятую в направлении $\xi\in\mathbf{S}$. В специальных случаях, когда ξ совпадает с направлениями осей 1, 2, 3, значения $\dfrac{\partial\rho}{\partial_\xi P}$ обозначим, соответственно, через ρ_x', ρ_y', ρ_z'.

§2. ИНТЕГРАЛЫ ОТ $h(e)$ ПО СФЕРИЧЕСКИМ ДИСКАМ

В этом параграфе мы вычислим условную меру сферического диска $\mathbf{A}\subset\subset\mathbf{S}(Q,R)$ с угловым радиусом $\alpha<\pi/2$. Такой результат в случае инвариантности относительно сдвигов был получен в [8].

Точки окружности $\partial\mathbf{A}$ мы параметризуем по *угловому* параметру λ. Через $d\lambda$ будем обозначать меру на $\partial\mathbf{A}$ или $<\partial\mathbf{A}>$, инвариантную относительно вращений и подчиненную условию $\int_{\partial\mathbf{A}}d\lambda=2\pi$. В приводимом ниже уравнении (2.1) множество *направленных* флагов-носителей заменено областью интегрирования $<\partial\mathbf{A}>^+$. Согласно определению, для направленного флага $f=(P,\overline{g},\overline{e})\in<\partial\mathbf{A}>^+$ будем всегда предполагать, что положительная нормаль к $\overline{e}$ совпадает с внешней нормалью к $\mathbf{S}(Q,R)$ в точке касания, положительное направление на $\overline{g}$ соответствует сдвигу вдоль $\partial\mathbf{A}$, при котором $\partial\mathbf{A}$ (локально)

остается слева.

Теорема 2.1. *Пусть μ – мера на $\mathbb{E}$, имеющая непрерывную плотность $h(e)$, а $\rho(f)$ – флаговая плотность (1.2). Тогда для любого сферического диска $\mathbf{A} \subset \subset \mathbf{S}(Q, R)$ имеет место*

$$\frac{2\pi}{R^2}\int_{\mathbf{A}} h^*(s)\,ds = \frac{1}{R^2}\int_{\mathbf{A}} M(s)\,ds + \frac{1}{R}\int_{\mathbf{A}} \frac{\partial M(s)}{\partial n}\,ds + \cos\alpha \int_{\partial\mathbf{A}} M(\lambda)\,d\lambda -$$

$$-\sin\alpha \int_{<\partial\mathbf{A}>^+} \rho'_\phi(\lambda)\,d\lambda - 2\cos\alpha \int_{<\partial\mathbf{A}>^+} \rho(\lambda)\,d\lambda - R\sin\alpha \int_{<\partial\mathbf{A}>^+} \rho'_\psi(\lambda)\,d\lambda. \quad (2.1)$$

Доказательство. Не теряя общности можем предположить, что $\mathbf{S}(Q, R) = \mathbf{S}(O, 1)$. В обычных сферических координатах с центром диска $\mathbf{A}$ в качестве полюса имеем $s = (\lambda, \nu)$, $ds = d\xi = \sin\nu\,d\nu\,d\lambda$, и уравнением $\partial\mathbf{A}$ является $\nu = \alpha$. Нам необходимо вычислить $\mu([B_\varepsilon])$ и $\mu([B_0])$. С целью применения (1.3), вместо B_ε и B_0 рассмотрим их гладкие аналоги $B_\varepsilon + \mathbf{S}(O, \delta)$ и $B_0 + \mathbf{S}(O, \delta)$ при некотором $\delta > 0$ (сложение в смысле Минковского). Тогда будем иметь

$$\mu([B_\varepsilon]) = \lim_{\delta\to 0} \mu([B_\varepsilon + \mathbf{S}(O, \delta)]), \quad \mu([B_0]) = \lim_{\delta\to 0} \mu([B_0 + \mathbf{S}(O, \delta)]). \quad (2.2)$$

Для получения $\mu([B_\varepsilon + \mathbf{S}(O, \delta)])$, разобьем поверхность $B_\varepsilon + \mathbf{S}(O, \delta)$ на области I – VI, как это показано на рис. 2, далее, запишем интеграл в (1.3) как сумму интегралов по этим областям и рассмотрим полученные слагаемые.

а) В любой точке s из I имеем $k_1 = k_2 = (1 + \delta + \varepsilon)^{-1}$. Из (1.2) следует, что

$$\rho(f_1) + \rho(f_2) = M(s). \quad (2.3)$$

Тем самым

$$\lim_{\delta\to 0} \int_I [k_1\rho(f_2) + k_2\rho(f_1)]ds = \frac{1}{1+\varepsilon}\int_I M(s)\,ds. \quad (2.4)$$

б) Область II – часть тора с радиусом осевой окружности $r(\varepsilon) = (1+\varepsilon)\sin\alpha_1$ и с радиусом меридиана δ (см. рис. 2). Согласно стандартному представлению элемента площади на торе

$$ds = \delta(r(\varepsilon) + \delta\sin\phi)\,d\phi\,d\lambda, \quad (2.5)$$

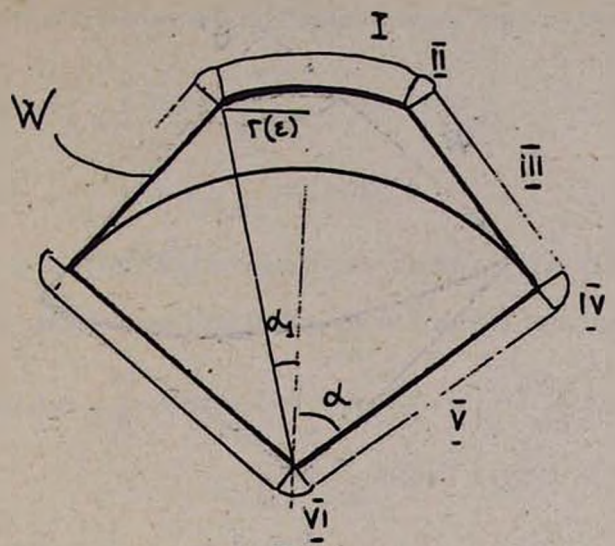


Рис. 2

где λ – угловая координата на осевой окружности, а ϕ – угловая координата на меридиане. В любой точке s, лежащей на торе, одно из главных направлений совпадает с направлением меридиана с $k_1 = \delta^{-1}$, другое главное направление перпендикулярно, и соответствующая кривизна k_2 ограничена снизу. Следовательно

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{II}[k_1\rho(f_2)) + k_2\rho(f_1))]\,ds = \lim_{\delta\to 0}\int_{II} r(\varepsilon)\rho(f_2)d\phi\,d\lambda = r(\varepsilon)\int_{<C_\varepsilon>}\rho(\lambda,\phi),\,d\phi d\lambda. \tag{2.6}$$

Отметим, что при этом $f = (P, g, e) \in < C_\varepsilon >$ в том и только том случае, когда $P \in C_\varepsilon$, g – прямая, касательная к C_ε, а e является плоскостью-носителем B_ε в P, где C_ε – граница $\mathbf{S}(O, 1+\varepsilon) \cap B_\varepsilon$. Флаг $f \in < C_\varepsilon >$ однозначно определяется угловой координатой λ в $P \in C_\varepsilon$ и углом ϕ поворота вокруг g. В последнем интеграле $\rho(\lambda, \phi)\,de$ обозначает сужение ρ на $< C_\varepsilon >$. На рис. 2 показано, что область изменения ϕ есть $[\alpha_1, \alpha]$.

в) Область III является частью конической поверхности, сходящейся (при $\delta \to 0$) к конической поверхности W. Точки s конической поверхности будем находить по параметрам $s = (\lambda, h)$, где угол λ определяет образующую, а h –

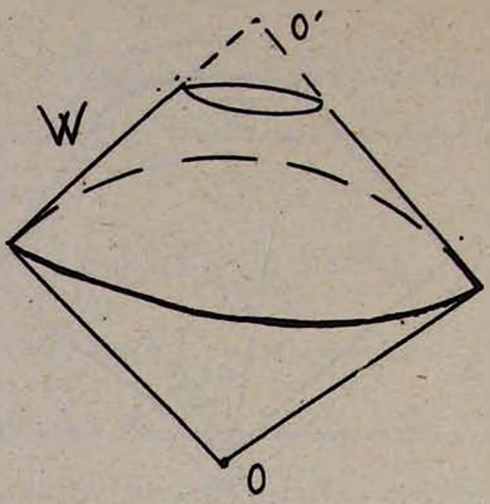


Рис. 3

расстояние от точки s до вершины O' конуса (см рис. 2). Элементом площади на конической поверхности является

$$ds = h\cos\alpha d\lambda\, dh. \tag{2.7}$$

В точках $s \in$III и $s \in W$ одно из главных направлений совпадает с направлением образующей, где $k_1 = 0$. Для другого главного направления $k_2 = \operatorname{tg}\alpha\, h^{-1}$. Ясно, что

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{III}[k_1\rho(f_2) + k_2\rho(f_1)]ds = \sin\alpha\int_{<W>}\rho(\lambda,h)d\lambda\, dh = \\ = \sin\alpha\int_o^{2\pi}\int_{h_1}^{h_2}\rho(\lambda,h)\,d\lambda\, dh. \tag{2.8}$$

Отметим, что $f = (P,g,e) \in < W >$, где $P \in W$, g – образующая, а e – носитель конической поверхности W в (λ,h). Через $\rho(\lambda,h)$ обозначаем сужение ρ на множество $< W >$ (см. рис. 3).

Вычисление интегралов по областям IV, V, VI можно пропустить, поскольку те же интегралы появлялись при вычислении $\mu([B_o])$, а в (1.3) этих интегралов нет. С $\mu([B_o + \mathbf{S}(0,\delta)])$ будем действовать аналогичным образом. Однако, ввиду отмеченного сокращения слагаемых, достаточно заметить, что

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{J_\Gamma}[k_1\rho(f_2) + k_2\rho(f_1)]ds = \int_{J_A} M(s)\,ds, \tag{2.9}$$

где $I' \subset B_o + S(O,\delta)$ показано на рис. 2. Таким образом, мы получили

$$\mu([B_\varepsilon]) - \mu([B_o]) = \frac{1}{1+\varepsilon}\int_I M(s)\,ds - \int_{\mathbf{A}} M(s)ds + r(\varepsilon)\int_{<C_o>} \rho(\lambda,\phi),\, d\phi d\lambda + \\ + \sin\alpha \int_{<W>} \rho(\lambda,h)\,dhd\lambda. \tag{2.10}$$

Вычислим теперь предел (1.4). Для этого сначала отметим, что из представления $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\varepsilon \cup (\mathbf{A} \setminus \mathbf{A}^\varepsilon)$, где $\mathbf{A}^\varepsilon$ – центральная проекция I на $\mathbf{S}(0,1)$, следует

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\int_I M(s)\,ds - \int_{\mathbf{A}} M(s)ds = \varepsilon\int_{A^\varepsilon} M(\xi)d\xi + \varepsilon\int_{A^\varepsilon}\frac{\partial M(\xi)}{\partial n}d\xi - \\ - \int_{A\setminus A^\varepsilon} M(\xi)d\xi + o(\varepsilon), \tag{2.11}$$

Из рис. 2 ясно, что

$$|h_1,h_2| = \sqrt{2\varepsilon+\varepsilon^2}, \quad \cos\alpha_1 = \cos(\alpha-(\alpha-\alpha_1)) = \cos\alpha\frac{1}{1+\varepsilon} + \sin\alpha\frac{\sqrt{2\varepsilon+\varepsilon^2}}{1+\varepsilon},$$

$$r(\varepsilon) = (1+\varepsilon)\sin\alpha_1 = \sin\alpha - \cos\alpha\sqrt{2\varepsilon+\varepsilon^2} = \sin\alpha - \sqrt{2\varepsilon}\cos\alpha + o(\varepsilon),$$

$$(\alpha-\alpha_1) \sim \sin(\alpha-\alpha_1) = \frac{\sqrt{2\varepsilon+\varepsilon^2}}{1+\varepsilon} = \sqrt{2\varepsilon} + o(\varepsilon). \tag{2.12}$$

Записав $M(\xi) = M(\lambda,\nu)$ для $\xi = (\lambda,\nu)$ и пользуясь разложением Тейлора для M, находим

$$-\int_{A\setminus A^\varepsilon} M(\xi)d\xi = -\int_0^{2\pi}\int_{\alpha_1}^{\alpha} M(\lambda,\nu)\sin\nu\,d\nu d\lambda =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_{\alpha_1}^{\alpha}[M(\lambda,\alpha) + \frac{\partial M(\lambda,\alpha)}{\partial\nu}(\nu-\alpha) + o(\nu-\alpha)] \times [\sin\alpha + (\nu-\alpha)\cos\alpha]d\nu\,d\lambda =$$

$$= -(\alpha-\alpha_1)\sin\alpha\int_0^{2\pi} M(\lambda,\alpha)d\lambda + \frac{(\alpha-\alpha_1)^2}{2}\int_0^{2\pi}[\frac{\partial M(\lambda,\alpha)}{\partial\nu}\sin\alpha + M(\lambda,\alpha)\cos\alpha]d\lambda +$$

$$+ o(\varepsilon) = -\sqrt{2\varepsilon}\sin\alpha\int_0^{2\pi} M(\lambda,\alpha)d\lambda + \varepsilon\int_0^{2\pi}[\frac{\partial M(\lambda,\alpha)}{\partial\nu}\sin\alpha + M(\lambda,\alpha)\cos\alpha]d\lambda + o(\varepsilon). \tag{2.13}$$

Слагаемые, компенсирующие первый член последнего выражения, появятся при анализе остальных слагаемых (1.10).

Нам необходимо рассмотреть множества направленных флагов $< C_\varepsilon >^+$ и $< W >^+$. По определению, положительное направление флага $f \in < C_\varepsilon >^+$ на

$\vec{g}$ соответствует сдвигу вдоль C_ε, при котором внутренность $B_\varepsilon \cap \mathrm{S}(1+\varepsilon, O)$ (локально) остается слева. Положительное направление флага $f \in < W >^+$ на $\vec{g}$ соответствует сдвигу от вершины к $\partial \mathbf{A} \cap g$. На $< C_\varepsilon >^+$ имеет место разложение Тейлора

$$\rho(\lambda, \phi) = \rho(\lambda, \alpha) + \rho'_\phi(\lambda, \alpha)(\phi - \alpha) + o(\phi - \alpha). \tag{2.14}$$

Аналогично, на $< W >^+$

$$\rho(\lambda, h) = \rho(\lambda, h_2) + \rho'_x(\lambda, h_2)(h - h_2) + o(h - h_2). \tag{2.15}$$

Для соответствующих слагаемых в (2.10) имеем (см. рис. 2)

$$r(\varepsilon) \int_{<C_\varepsilon>} \rho(\lambda, \phi), d\phi d\lambda + \sin\alpha \int_{<W>^+} \rho(\lambda, h)\, dh d\lambda =$$

$$+ r(\varepsilon) \int_0^{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \rho_\varepsilon(\lambda, \phi) d\phi d\lambda + \sin\alpha \int_0^{2\pi} \int_{h_1}^{h_2} \rho(\lambda, h)\, dh d\lambda =$$

$$= r(\varepsilon)(\alpha - \alpha_1) \int_0^{2\pi} \rho_\varepsilon(\lambda, \alpha) d\lambda - r(\varepsilon) \frac{(\alpha - \alpha_1)^2}{2} \int_0^{2\pi} [\rho_\varepsilon(\lambda, \alpha)]'_\phi d\lambda +$$

$$+ \sin\alpha \sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2} \int_0^{2\pi} \rho(\lambda, h_2) d\lambda - \sin\alpha \frac{(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} \int_0^{2\pi} \rho'_x(\lambda, h_2) d\lambda + o(\varepsilon). \tag{2.16}$$

Во второй строке через ρ_ε обозначены значения ρ на множестве $< C_\varepsilon >$, а через $\rho(\lambda, \alpha)$ – на $< C_o >$. Из разложения Тейлора следует, что

$$\rho_\varepsilon(\lambda, \alpha) = \rho(\lambda, \alpha) - \rho'_y(\lambda, \alpha)(h_2 - h_1) + o(\varepsilon), \tag{2.17}$$

где $h_2 - h_1 = \sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2}$. Подставим (2.17) в (2.16) и, с учетом (2.12), получим

$$r(\varepsilon) \int_{<C_\varepsilon>} \rho(\lambda, \phi), d\phi d\lambda + \sin\alpha \int_{<W>^+} \rho(\lambda, h)\, dh d\lambda = \sqrt{2\varepsilon}[\sin\alpha \int_0^{2\pi} \rho(\lambda, \alpha) d\lambda +$$

$$+ \sin\alpha \int_0^{2\pi} \rho(\lambda, h_2) d\lambda] - -\varepsilon[2\cos\alpha \int_0^{2\pi} \rho(\lambda, \alpha) d\lambda + 2\sin\alpha \int_0^{2\pi} \rho'_y(\lambda, \alpha) d\lambda +$$

$$+ \sin\alpha \int_0^{2\pi} \rho'_\phi(\lambda, \alpha) d\lambda + \sin\alpha \int_0^{2\pi} \rho'_x(\lambda, h_2) d\lambda] + o(\varepsilon). \tag{2.18}$$

Из (2.3) находим

$$\rho(\lambda, h_2) + \rho(\lambda, \alpha) = M(\lambda, \alpha). \tag{2.19}$$

Отсюда следует сокращение слагаемых, имеющих порядок $\sqrt{\varepsilon}$. После дифференцирования (2.19) запишется в виде равенства

$$\rho'_x(\lambda, h_2) + \rho'_y(\lambda, \alpha) = \frac{\partial M(\lambda, \alpha)}{\partial \nu}. \tag{2.20}$$

Воспользовавшись (2.20) преобразуем слагаемые в (2.18), имеющие порядок ε, к виду

$$-\varepsilon[2\cos\alpha \int_0^{2\pi} \rho(\lambda, \alpha)d\lambda + \sin\alpha \int_0^{2\pi} \rho'_y(\lambda, \alpha)d\lambda + \\ + \sin\alpha \int_0^{2\pi} \rho'_\phi(\lambda, \alpha)d\lambda + \sin\alpha \int_0^{2\pi} \frac{\partial M(\lambda, \alpha)}{\partial \nu} d\lambda].$$

Наконец, учитывая (2.13), приходим к (2.1) для $R = 1$, и теорема 3 доказана.

§3. ИНТЕГРАЛЫ ПО СФЕРИЧЕСКИМ МНОГОУГОЛЬНИКАМ

Выпуклый, сферический многоугольник $\mathbf{A} \subset \mathbf{S}(Q, R)$ является пересечением конечного числа полусфер. Через $\{V_i\}$ обозначим вершины, а через $\{a_i\}$ – геодезические стороны $\mathbf{A}$. В приводимом ниже уравнении (3.1) (в случае инвариантности относительно сдвигов см. [8]), области интегрирования $< a_i >^+$ и $< V_i >^+$ являются множествами с *направленными* флагами-носителями. Параметризуем точки из $\partial\mathbf{A} = \cup_i a_i$ параметром длины l, и через dl обозначим соответствующую меру на $\partial\mathbf{A}$ или $\cup_i < a_i >^+$. Множество $< V_i >^+$ параметризуем *угловым параметром* φ, и через $d\varphi$ обозначим меру на $< V_i >$, инвариантную относительно поворота.

Теорема 3.1. *Пусть μ – мера на $\mathbf{E}$, обладающая плотностью $h(e)$, а $\rho(f)$ – флаговая плотность (1.2). Тогда для любого сферического многоугольника $\mathbf{A} \subset \mathbf{S}(Q, R)$ имеет место формула*

$$\frac{2\pi}{R^2}\int_{\mathbf{A}} h^*(s)\,ds = \frac{1}{R^2}\int_{\mathbf{A}} M(s)\,ds + \frac{1}{R}\int_{\mathbf{A}} \frac{\partial M(s)}{\partial n}\,ds + \sum_{i=1}^{n} M(V_i)\alpha_i^e - \\ -R^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_{<a_i>^+} \rho'_\phi(l)dl - \sum_{i=1}^{n}\int_{<a_i>^+} \rho'_y(l)dl - 2\sum_{i=1}^{n}\int_{<V_i>^+} \rho(V_i, \varphi)d\varphi, \tag{3.1}$$

где α_i^e – внешний угол при вершине V_i.

Доказательство. Для простоты предположим, что $A \subset S(O,1)$ – лунка, ограниченная двумя большими полуокружностями с вершинами V_1 и V_2. В случае произвольного многоугольника A доказательство аналогично. Пусть $A(r)$ – сглаживание A, построенное при помощи двух окружностей малого радиуса r (см. рис. 4). Рассмотрим выпуклые тела B_ε и B_o, соответствующие $A(r)$ (определение см. в §1). С целью применения (1.3), вместо B_ε и B_o рассмотрим их гладкие аналоги $B_\varepsilon + S(O,\delta)$ и $B_o + S(O,\delta)$ при некотором $\delta > 0$ (сумма в смысле Минковского). Тогда мы снова имеем уравнение (2.2). Для получения $\mu([B_\varepsilon + S(O,\delta)])$ разделим поверхность $B_\varepsilon + S(O,\delta)$ на области I – VI, как это показано на рис. 4. Далее запишем интеграл в (1.3) в виде суммы интегралов по этим областям.

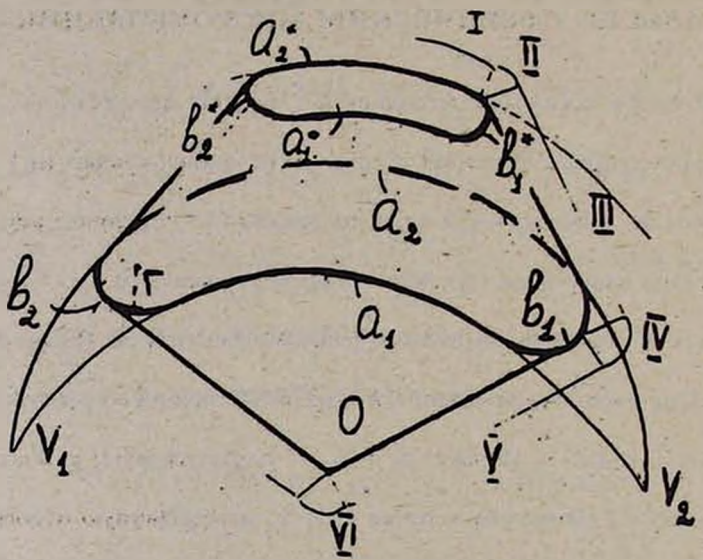


Рис. 4

а) Интеграл по I. Этот случай аналогичен случаю а) из предыдущего параграфа. Вновь имеет место уравнение (2.4).

б) Область II является объединением двух тороидальных поверхностей – II_1 и II_2. Осевая окружность для II_1, соответствующая a_1^* и a_2^* имеет радиус 1. Осевая окружность для II_2, соответствующая b_1^* и b_2^* (см. рис. 4) имеет радиус $r(\varepsilon)$. На II_2 ситуация аналогична б) из предыдущего параграфа, и аналогом (2.6)

является соотношение

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{II_2}[k_1\rho(f_2)+k_2\rho(f_1)]\,ds=\lim_{\delta\to 0}\int_{II_2}r(\varepsilon)\rho(f_2)d\phi\,d\varphi\doteq r(\varepsilon)\int_{<C_{\varepsilon,2}>}\rho(\varphi,\phi),d\phi d\varphi. \tag{3.2}$$

Отметим, что $f=(P,g,e)\in<C_{\varepsilon,2}>$ тогда и только тогда, когда $P\in C_{\varepsilon,2}=$ $=b_1^*\cup b_2^*$ (см. рис. 4), g – прямая, касательная к $C_{\varepsilon,2}$, а плоскость e – носитель B_ε в P. Флаг $f\in<C_{\varepsilon,2}>$ однозначно определяется угловой координатой φ, вершиной $P\in C_{\varepsilon,2}$ и углом ϕ поворота вокруг g. В последнем интеграле через $\rho(\varphi,\phi)$ обозначено сужение ρ на $<C_{\varepsilon,2}>$. Для II_1 радиус осевой окружности равняется 1, а предел, соответствующий (3.2) равняется

$$\int_{<C_{\varepsilon,1}>}\rho(l,\phi),d\phi dl. \tag{3.3}$$

Отметим, что $f=(P,g,e)\in<C_{\varepsilon,1}>$ тогда и только тогда, когда $P\in C_{\varepsilon,1}=$ $=a_1^*\cup a_2^*$ (см. рис. 4), g – прямая, касательная к $C_{\varepsilon,1}$, а плоскость e – носитель для B_ε в P. Флаг $f\in<C_{\varepsilon,1}>$ однозначно определяется координатой длины l, вершиной $P\in C_{\varepsilon,1}$ и углом ϕ поворота вокруг g. В последнем интеграле через $\rho(l,\phi)$ обозначено сужение ρ на $<C_{\varepsilon,1}>$.

в) Область III является объединением двух частей – конической части III_2, соответствующей $b_1\cup b_2$, сходящейся (при $\delta\to 0$) к конической поверхности W_2, и цилиндрической части III_1, соответствующей $a_1\cup a_2$, сходящейся (при $\delta\to 0$) к цилиндрической поверхности W_1. Оба эти случая аналогичны случаю в) из предыдущего параграфа. Имеет место аналог (2.8) :

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{III_2}[k_1\rho(f_2)+k_2\rho(f_1)]ds=r\int_{<W_2>}\rho(\varphi,h)d\varphi\,dh. \tag{3.4}$$

Отметим, что $f=(P,g,e)\in<W_2>$, если $P\in W_2$ ($s=(\varphi,h)$, где углом φ определяется образующая, а h – расстояние до s от вершины конуса), g – образующая, а e – носитель конической поверхности W в (φ,h). Через $\rho(\varphi,h)$ обозначаем сужение ρ на множество $<W_2>$ (см. рис. 4). Для III_1 имеем

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{III_1}[k_1\rho(f_2)+k_2\rho(f_1)]ds=\int_{<W_1>}\rho(l,h)dl\,dh. \tag{3.5}$$

Отметим, что $f = (P, g, e) \in < W_1 >$, если $P \in W_1$ (точки на W_1 представляем в виде (l, h), где через l определяется образующая, h – координата длины на образующей g), а e – носитель поверхности W_1 в (l, h). Через $\rho(l, h)$ обозначаем сужение ρ на множество $< W_1 >$ (см. рис. 4).

Вычисление интегралов по областям IV - VI можно пропустить, поскольку те же интегралы появлялись при вычислении $\mu([B_o])$ и в (1.3) они отсутствуют. С $\mu([B_o + \mathbf{S}(0, \delta)])$ будем действовать аналогично. При этом, ввиду отмеченного сокращения слагаемых достаточно заметить, что

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{I'} [k_1 \rho(f_2) + k_2 \rho(f_1)] ds = \int_{\mathbf{A}} M(s)\, ds, \tag{3.6}$$

где $I' \subset B_o + \mathbf{S}(O, \delta)$ показано на рис. 4. Итак, мы нашли

$$\mu([B_\varepsilon]) - \mu([B_o]) = \frac{1}{1+\varepsilon} \int_I M(s)\, ds - \int_{\mathbf{A}} M(s) ds + r(\varepsilon) \int_{<C_{\varepsilon,2}>} \rho(\varphi, \phi), d\phi d\varphi +$$
$$+ \int_{<C_{\varepsilon,1}>} \rho(l, \phi) dl\, d\phi + \int_{<W_1>} \rho(l, h)\, dh dl + r \int_{<W_2>} \rho(\varphi, h) d\varphi\, dh. \tag{3.7}$$

Методами анализа, подобными примененным в предыдущем параграфе, находим

$$2\pi \int_{\mathbf{A}(r)} h^*(s) ds = \int_{\mathbf{A}(r)} M(s) ds + \int_{\mathbf{A}(r)} \frac{\partial M(s)}{\partial n} ds + \sqrt{1 - r^2} \sum_{i=1}^{2} \int_{\{b_i\}} M(\varphi, \alpha) d\varphi -$$
$$- r \sum_{i=1}^{2} \int_{<b_i>^+} \rho'_\phi(\varphi, \alpha) d\varphi - \sum_{i=1}^{2} \int_{<a_i>^+} \rho'_\phi(l) dl - 2\sqrt{1 - r^2} \sum_{i=1}^{2} \int_{<b_i>^+} \rho(\varphi, \alpha) d\varphi -$$
$$- r \sum_{i=1}^{2} \int_{<b_i>^+} \rho'_y(\varphi, \alpha) d\varphi - \sum_{i=1}^{2} \int_{<a_i>^+} \rho'_y(l) dl. \tag{3.8}$$

В этих формулах (φ, α) – обычные сферические координаты с началом в центре малой окружности радиуса r, $\{b_i\} = \{\varphi : (\varphi, \alpha) \in b_i\}$, а α – угловой радиус малой окружности (см. рис. 4). Наконец, устремляя в (3.8) r к нулю, получаем (3.1) для лунки, и теорема доказана.

§4. ПЛОТНОСТЬ $h(e)$ В ТЕРМИНАХ $\rho(f)$

В этом параграфе мы выразим $h(e)$ на *пучках* направленных флагов в терминах значений ρ и некоторых производных ρ. При заданных плоскости e_0 и точке $P_0 \in e_0$ соответствующий пучок обозначим через

$$< e_0, P_0 > = \{f = (P, \overline{g}, \overline{e}) : \quad P = P_0, \ e = e_0\}.$$

В этом параграфе через $\rho(\varphi)$ будем обозначать значения ρ на пучке $< e, P >$, имея ввиду, что направлением $\varphi \in (0, 2\pi)$ однозначно определяется флаг из $< e, P >$. Иными словами, мы идентифицируем $< e, P >$ с $(0, 2\pi]$. Рассмотрим выражение

$$H(e,P) = \frac{1}{\pi}\int_{<e,P>} \rho(\varphi)d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{<e,P>} (\rho''_{xx}(\varphi) + \rho''_{yy}(\varphi))\,d\varphi - \\ -\frac{2}{\pi}\int_{<e,P>} (\rho''_{\phi\phi}(\varphi) + 2\rho''_{\phi y}(\varphi) + \rho''_{yy}(\varphi))d\varphi. \qquad (4.1)$$

Отметим, что $H(e,P)$ не зависит от выбора координат на e.

Теорема 4.1. *Пусть ρ соответствует некоторой непрерывной плотности $h(e)$ согласно (1.2). Тогда для любой плоскости e значение $H(e,P)$ не зависит от $P \in e$ и равно $h(e)$.*

Доказательство. Рассмотрим сферу $\mathbf{S}_1$ с единичным радиусом, касающуюся плоскости e в $P \in e$ и предположим, что $\mathbf{A}_n \subset \mathbf{S}_1$ – сферический диск с центром в P и угловым радиусом α_n. Далее, предположим, что $\alpha_n \downarrow 0$. По теореме о среднем значении $h(e)$ может быть получено из соотношения

$$h(e) = \lim_{\alpha_n \to 0} \frac{1}{|A_n|}\int_{A_n} h^*(\xi)\,d\xi, \qquad (4.2)$$

где $|A|$ – площадь A. Рассмотрим на $\mathbf{S}_1$ обычные сферические координаты (φ, ν) с полюсом в P, и пусть $M(\varphi,\nu)$ – сужение функции $M(P)$ на $\mathbf{S}_1$. Через $\rho(\varphi,\alpha)$ обозначим сужение флаговой функции ρ на множество $< \mathbf{A} >^+$, где $\mathbf{A} \subset \mathbf{S}_1$ – диск $\nu = \alpha$. Представим интеграл в (4.2) согласно (2.1) и найдем предел после разложения полученных членов по степеням α_n. Тогда будем иметь

$$M(\varphi,\alpha_n) = M(\varphi,0) + M'_\nu(\varphi,0)\alpha_n + M''_{\nu\nu}(\varphi,0)\frac{\alpha_n^2}{2} + o(\alpha_n^2). \qquad (4.3)$$

Для разложения других членов необходима

Лемма 4.1. *Для любой дифференцируемой флаговой функции ρ*

$$\left.\frac{\partial\rho(\varphi,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = \rho'_\phi(\varphi) + \rho'_y(\varphi). \qquad (4.4)$$

Производная ρ'_y определена при предположении, что положительная нормаль к e параллельна внешней нормали к S_1 в точке P. Имеем

$$\rho(\varphi,\alpha_n)=\rho(\varphi)+(\rho'_\phi(\varphi)+\rho'_y(\varphi))\alpha_n+(\rho''_{\phi\phi}(\varphi)+2\rho''_{\phi y}(\varphi)+\rho''_{yy}(\varphi))\frac{\alpha_n^2}{2}+o(\alpha_n^2), \quad (4.5)$$

$$\rho'_\phi(\varphi,\alpha_n)=\rho'_\phi(\varphi)+(\rho''_{\phi\phi}(\varphi)+\rho''_{\phi y}(\varphi))\alpha_n+o(\alpha_n), \quad (4.6)$$

$$\rho'_y(\varphi,\alpha_n)=\rho'_y(\varphi)+(\rho''_{\phi y}(\varphi)+\rho''_{yy}(\varphi))\alpha_n+o(\alpha_n). \quad (4.7)$$

Надлежащей подстановкой, учитывая, что $|A_n|=2\pi(1-\cos\alpha_n)\sim\pi\alpha_n^2$, находим

$$h(e)=M(P)+\frac{\partial M(P)}{\partial n}+ \\ +\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}M''_{\nu\nu}(\varphi,0)d\varphi-\frac{2}{\pi}\int_{<e,P>}(\rho''_{\phi\phi}(\varphi)+2\rho''_{\phi y}(\varphi)+\rho''_{yy}(\varphi))d\varphi. \quad (4.8)$$

Здесь $\frac{\partial M(P)}{\partial n}$ – производная в точке $P\in e$, в направлении нормали к e, внешней к S_1. Нетрудно показать, что

$$M''_{\nu\nu}(\varphi,0)=\frac{\partial^2 M(P)}{(\partial_\varphi P)^2}-\frac{\partial M(P)}{\partial n}, \quad (4.9)$$

где $\frac{\partial^2 M(P)}{(\partial_\varphi P)^2}$ – вторая производная в пространственном направлении, соответствующем направлению φ на e (здесь предпочтительно пользоваться этим обозначением вместо $M''_{\varphi\varphi}$, поскольку последнее соответствовало бы повторному дифференцированию на сферической поверхности).

Рассмотрим теперь сферу S_2 с единичным радиусом, касающуюся плоскости e в той же точке $P\in e$ и отличную от S_1 (S_1 и S_2 разделены по e и являются естественными отражениями друг друга по отношению к e). Аналогичными операциями можно найти симметричное выражение для $h(e)$. Суммированием обоих представлений получаем

$$h(e)=M(P)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 M(P)}{(\partial_\varphi P)^2}d\varphi-\frac{2}{\pi}\int_{<e,P>}(\rho''_{\phi\phi}(\varphi)+2\rho''_{\phi y}(\varphi)+\rho''_{yy}(\varphi))d\varphi. \quad (4.10)$$

После подстановки (1.5) в (4.10) и некоторых преобразований приходим к (4.1). Теорема доказана.

§5. СФЕРИЧЕСКИЕ ЭЙЛЕРОВЫ ФУНКЦИОНАЛЫ

Пусть $\mathbf{S}$ – единичная сфера в $\mathbb{R}^3$. Сферическим флагом называется пара $\sigma = (s, \varphi)$, где $\varphi \in (0, 2\pi)$ – направление на плоскости, касательной к $\mathbf{S}$ в точке $s \in \mathbf{S}$. Пусть имеем две функции флагов $f_1(\sigma)$ и $f_2(\sigma)$, удовлетворяющие условиям :

1) $f_1(\sigma, \varphi) = f_1(\sigma, \varphi + \pi)$, 2) $f_2(\sigma, \varphi + \pi) = -f_2(\sigma, \varphi)$.

Пусть $D \subset \mathbf{S}$ – геодезически выпуклый многоугольник, содержащийся внутри полусферы. Через V_i обозначим вершины D, через α_i – внешний угол D при V_i, а через b_i – стороны D. Будем говорить, что движемся вдоль ∂D в положительном направлении, если внутренность D остается слева. Так определяется положительное направление на каждом b_i. Рассмотрим множества сферических флагов

$$[b_i] = \{\sigma = (s, \varphi)\colon\ s \in b_i,\ \varphi \text{ является положительным направлением } b_i\},$$

$$[V_i] = \{\sigma = (s, \varphi)\colon\ s = V_i,\ \varphi \in \alpha_i\}.$$

Выражение

$$E(D) = \sum_i \int_{[v_i]} f_1(\sigma)\, d\varphi + \sum_i \int_{[b_i]} f_2(\sigma)\, dl - \sum_i M(v_i) \cdot \alpha_i, \tag{5.1}$$

где $\pi^{-1} \int f_1(s, \varphi)\, d\varphi = M(s)$, называется эйлеровым функционалом, если функции f_1 и f_2 удовлетворяют условиям 1) – 2). Ясно, что эйлеров функционал конечно-аддитивен. Имеет место основополагающий вопрос : *каковы дополнительные условия на функционалы f_1, f_2, при которых $E(D)$ порождает конечную, знакопеременную меру на $\mathbf{S}$?* Ограничимся классом знакопеременных мер с непрерывной плотностью $u(s)$, т. е.

$$E(D) = \int_D u(s)\, ds.$$

Предположим, что последовательность многоугольников $D_n \subset \mathbf{S}$ сжимается до точки $s_0 \in \mathbf{S}$. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \frac{E(D_n)}{||D_n||} = u(s_0), \tag{5.2}$$

где $||D||$ – площадь D. В общем случае отношение $\dfrac{E(D_n)}{||D_n||}$, где вместо $E(D_n)$ подставляем (5.1), не имеет предела. Для доказательства этого нам понадобится следующее определение.

Пусть $t(s)$ – плоскость, касательная к $\mathbf{S}$ в точке $s \in \mathbf{S}$. Выпуклым многоугольником $T \subset t(s)$, содержащим точку s внутри себя, определяется *форма*, если диаметр T равняется единице.

Предположим, что $D_n \in \mathbf{S}$ – последовательность геодезически выпуклых многоугольников, сжимающаяся до точки s. Через D_n^* будем обозначать многоугольник на $t(s)$, полученный проектированием D_n на $t(s)$ с последующей гомотетией проекции внутри $t(s)$, с центром в s, определенной условием, что диаметр $D_i^* = 1$. Будем говорить, что многоугольники D_n имеют *асимптотическую форму*, если D_n^* сходятся к T (в смысле множеств в $t(s)$). Теперь для последовательности многоугольников D_n, асимптотически (при $n \to \infty$) обладающей многоугольной формой T можем предусмотреть априорно только существование предела отношения $\dfrac{E(D_n)}{d_n}$, где d_n – диаметр D_n. Это вытекает из следующих рассуждений. Во-первых

$$\int_{[b_i]} f_2(\sigma)\, dl = f(\sigma_i)\,|b_i| + o(|b_i|),$$

где σ_i – флаг (s_0, φ_i), φ_i соответствует направлению стороны b_i, а $|b_i|$ – длина b_i. Ясно, что $|b_i| = O(d_i)$. Также ясно, что

$$\sum_i \int_{[v_i]} f_1(\sigma)\, d\varphi - \sum_i M(V_i) \cdot \alpha_i = O(d_n).$$

Фактически $\lim\limits_{n\to\infty} E(D_n)(d_n)^{-1}$ существует, если только функции f_1 и f_2 непрерывно дифференцируемы. Поэтому из (5.2) следует, что условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(D_n)}{d_n} = 0 \qquad (5.3)$$

необходимо для того, чтобы E порождало знакопеременную меру.

Условие (5.3) также достаточно в классе функционалов E, порожденных, по

(5.1), достаточно гладкими функциями f_1 и f_2. Это следует из того, что при достаточно сильных предположениях о гладкости, из (5.3) следует существование предела (5.2). Более того, сходимость в (5.2) в определенном смысле равномерна, что доказывает необходимость утверждения. При этом, условие (5.3) остается достаточным, если $\{D_n\}$ ограничить последовательностями треугольников, или даже последовательностями, асимптотически являющимися правильными треугольниками. Возможно также применение некоторых ограничений на ориентацию треугольников. В первом приближении эйлеровы функционалы на $\mathbf{S}$ и $\mathbb{R}^2$ ведут себя одинаково. В [6], где впервые были рассмотрены эйлеровы функционалы на плоскости, условие, соответствующее (5.3), было заменено элегантным дифференциальным уравнением. Все эти вопросы достойны изучения в общей концепции эйлеровых функционалов на многообразиях. В настоящее время окончательные ответы требуют надлежащей проработки даже в случае с $\mathbf{S}$. Поэтому, пока основным условием порождения по E знакопеременной меры мы будем считать (5.3).

Перейдем к следствиям результатов предыдущих параграфов.

Замечание. *Уравнение (3.1) содержит эйлеров функционал E, определенный для $D \subset \mathbf{S}(Q, R)$:*

$$E(D) = \sum_{i=1}^{n} M(V_i)\alpha_i^c - R^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_{<a_i>^+}\rho'_\phi(l)dl - \\ + \sum_{i=1}^{n}\int_{<a_i>^+}\rho'_y(l)dl - 2\sum_{i=1}^{n}\int_{<V_i>^+}\rho(V_i,\varphi)d\varphi. \qquad (5.4)$$

Доказательство. $E(D)$ в (5.4) имеет структуру (5.1) с

$$f_1 = 2\rho(V_i,\varphi), \qquad f_2 = R^{-1}\rho'_\phi(l) + \rho'_y(l), \qquad (5.5)$$

причем функции (5.5) очевидно удовлетворяют условиям 1) и 2).

Следствие 1. Если пространственная флаговая плотность $\rho(f)$ порождена $h(e)$ по (1.2), то соответствующий эйлеров функционал (5.4) является локально-конечной знакопеременной мерой на любом $\mathbf{S}(Q,R)$.

Доказательство следует из (3.1), поскольку

$$E(D)=\frac{2\pi}{R^2}\int_{\mathbf{A}}h^*(s)\,ds-\frac{1}{R^2}\int_{\mathbf{A}}M(s)\,ds-\frac{1}{R}\int_{\mathbf{A}}\frac{\partial M(s)}{\partial n}\,ds.$$

Следствие 2. Пусть $\rho(f)$ – трижды непрерывно дифференцируемая флаговая функция. Для каждого $\mathbf{S}(Q,R)$ по (5.5) построим эйлеров функционал E. Необходимым и достаточным условием, при котором посредством E определяется локально-конечная знакопеременная мера на любом $\mathbf{S}(Q,R)$, является соотношение (5.3), которое должно выполняться в каждой точке $s_0\in\mathbf{S}(Q,R)$. Эта мера в точке $P\in\mathbf{S}(O,R)$ обладает плотностью $H_{O,R}(P)=H(e,P)$ (см. (4.1)), где e – плоскость, пересекающаяся с $\mathbf{S}(O,R)$ в P.

§6. ФУНКЦИОНАЛ $\mathbb{F}$

Ниже плоскости $e\in\mathbb{E}$ будем описывать посредством обычной параметризации $e=(p,\xi)$ по отношению к O. Точнее, будем рассматривать отображение

$$(p,\xi)\longmapsto\text{плоскость, касательная к сфере }\ \mathbf{S}(O,p)\ \text{ в }\ P. \tag{6.1}$$

Далее, будем предполагать, что P видно из O под направлением ξ. Пусть $\mathcal{B}_O$ – полукольцо подмножеств $\mathbb{E}$, соответствующее при этом отображении произведениям $I\times A$, где I – интервал из $[0,\infty)$, а $A\subset\mathbf{S}(O,1)$ – сферический многоугольник. Минимальное σ-кольцо, содержащее все $\mathcal{B}_o$ (этот класс зависит от выбора O) совпадает с борелевыми множествами из $\mathbb{E}$. Положим

$$\mathcal{B}=\bigcup_{O\in\mathbb{R}^3}\mathcal{B}_O.$$

Пусть $\rho(f)$ – функция, заданная на пространстве флагов. Посредством ρ определяем функционал на $\mathcal{B}$:

$$\mathbb{F}(I\times A)=\int_I E_1(\mathbf{A}_p)\,dp, \tag{6.2}$$

где $\mathbf{A}_p$ – сферический многоугольник на $\mathbf{S}(O,p)$, соответствующий телесному углу Λ, а $E_1(\mathbf{A}_p)$ задано как правая часть (3.1), записанная для $\mathbf{A}_p$. Через $\mathbb{F}_0$ обозначим сужение $\mathbb{F}$ на $\mathcal{B}_0$. Отметим, что $\mathbb{F}_0$ конечно-аддитивно на каждом $\mathcal{B}_0$ (это следует из конечной аддитивности E_1). При каких условиях на флаговую функцию $\rho(f)$ функционалы $\mathbb{F}_0$ или $\mathbb{F}$ допускают расширение до знакопеременной меры на $\mathbb{E}$?

Теорема 6.3. *Пусть флаговая функция ρ трижды непрерывно дифференцируема. При заданном $O \in \mathbb{R}^3$ соответствующим функционалом $\mathbb{F}_0$ порождается мера на $\mathbb{E}$ в том и только том случае, когда соотношение (5.3) справедливо для любой точки $s \in \mathbf{S}(O,R)$, на любом $\mathbf{S}(O,R)$, $R>0$.*

Доказательство. Необходимость очевидна из результатов §3 и §5. Для доказательства достаточности заметим, что при выполнении (5.3) $E_1(\mathbf{A}_p)$ становится мерой на любом $\mathbf{S}(O,R)$ с плотностью $H_{O,R}(P)$ (см. следствие 3). Рассмотрим меру в $\mathbb{R}^3$, имеющую представление $H_{O,R}(P)\,dR\,d\Omega$ в полярных координатах (R,Ω) с центром в O. $\mathbb{F}_0$ совпадает с образом последней меры при отображении (6.1). Теорема доказана.

Мера μ_0 теоремы 6.3, заданная на $\mathbb{E}$, может зависеть от выбора начала координат O. Для избежания этого нам понадобится некоторое условие устойчивости. Достаточно полагать, что при любой плоскости e функция $H(e,P)$ не зависит от $P \in e$, т. е. имеет место

Теорема 6.4. *Пусть ρ – гладкая флаговая функция. Тогда условия*

а) (5.3) имеет место для любой сферы $\mathbf{S}(Q,R)$ и любой точки $s \in \mathbf{S}(Q,R)$,

б) для любой плоскости e функция (4.1), не зависит от $P \in e$

в совокупности необходимы и достаточны для существования локально-конечной знакопеременной меры μ в пространстве плоскостей, значения которой на классе $\mathcal{B}$ совпадают со значениями $\mathbb{E}$.

Доказательство. В силу а) меры $H_{O,R}(P)\,dR\,d\Omega$ на $\mathbb{R}^3$ определены для всех $Q \in \mathbb{R}^3$. Достаточно показать, что меры, являющиеся их образами на $\mathbb{E}$, т. е. меры $\mathbb{F}_Q$ (см. теорему 6.3), совпадают при любых Q. А это в точности то, что обеспечивается условием б).

§7. ДОПОЛНЕНИЕ Р. В. АМБАРЦУМЯНА

Данное дополнение содержит два "синтетических" следствия, основанные на результатах предыдущих параграфов и одного из результатов статьи [4] этого номера. Пусть $\rho \in C^{(3)}$ – флаговая плотность (1.2) локально-конечной, знакопеременной меры, заданной в пространстве $\mathbb{E}$. Тогда непосредственным вычислением и в соответствии с общей теоремой из [4], в любой плоскости e

$$\rho(O,\varphi,e) = A(O,e)\sin 2\varphi + B(O,e)\cos 2\varphi + C(O,e), \tag{7.1}$$

где $O \in e$ – произвольная точка, φ – направление плоскости e, а функции A, B и C не зависят от φ.

Теорема (Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян). *Функции $A(O,e)$, $B(O,e)$ и $C(O,e)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению*

$$2\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y} - \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\right) = 0, \tag{7.2}$$

где x, y – декартовы координаты в e.

Следствие 3. *При выполнении условий вышеприведенной теоремы, если ρ зависит только от расположения переменной P и не зависит от угловых переменных, т. е. если*

$$\rho(f) = \rho(P), \tag{7.3}$$

то ρ – постоянная.

Доказательство. При выполнении (7.3) уравнение (7.2) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0. \tag{7.4}$$

С другой стороны, можно вычислить плотность $h(e)$ рассматриваемой меры, применяя формулу (4.10), которая в данном случае принимает вид

$$h(e) = M(P) - \frac{2}{\pi}\int_{<e,P>} \rho''_{\phi\phi}(\varphi)\,d\varphi. \tag{7.5}$$

Поскольку интеграл пропорционален двумерному лапласиану в плоскости e, из (7.5) следует, что $h(e) = M(P)$. При выполнении (7.3) уравнение (1.5) приводится к виду $M(P) = \rho(P)2$. Отсюда и из (7.5) следует, что ρ постоянна в каждой плоскости e, и, тем самым, тождественно постоянна в $\mathbb{R}^3$. Теорема доказана.

Приведем теперь точную формулировку и доказательство теоремы из Предисловия редактора настоящего сборника. Функцию $\theta(P_1, P_2)$, P_1, $P_2 \in \mathbb{R}^3$, будем называть линейно-аддитивный, если

$$\theta(P_1, P_3) = \theta(P_1, P_2) + \theta(P_2, P_3)$$

при P_1, P_2, P_3, лежащих на одной прямой, причем P_2 расположена между P_1 и P_3. Будем говорить, что θ локально-изотропна в каждой точке $P \in \mathbb{R}^3$, если производная $\Theta(P_1, \Omega) = \left.\dfrac{\partial\theta(P_1, P_2)}{\partial_\Omega P_2}\right|_{P_2=P_1}$ (дифференцирование по P_2 в пространственном направлении Ω) не зависит от Ω, т. е. $\Theta(P, \Omega) = \Theta(P)$.

Теорема. *Пусть $\theta(P_1, P_2)$, $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$ – трижды непрерывно дифференцируемая, линейно-аддитивная метрика. Если метрика θ – локально-изотропна в каждом $P \in \mathbb{R}^3$, то она – евклидова.*

Доказательство. Единственным решением зоноидального уравнения $\Theta(P) = \int |\cos(\Omega, \xi)| h_P(\xi) d\xi$, где $P \in \mathbb{R}^3$ – фиксированный параметр, является $h_P(\xi) = u(P)$, т. е. функция, не зависящая от пространственного направления. Подстановкой $u(P)$ в (1.2) вместо $h(\xi)$ получаем $\rho(f) = \rho(P)$. Воспользуемся теперь результатом Погорелова [7] о том, что любая гладкая, линейно-аддитивная метрика в $\mathbb{R}^3$ порождается знакопеременной плотностью $h(e)$ в пространстве плоскостей $\mathbb{E}$. Тогда находим, что наше $h_P(\xi)$ совпадает с сужением некоторой $h(e)$

на пучки $[P]$ (ср. с (1.2)). Здесь применимо следствие 3, по которому ρ – постоянная. Ввиду общей формулы $\Theta(P,\Omega) = \int \rho(P,\Omega,\Phi)\,d\Phi$ (см. [5]) заключаем, что θ не зависит от P.

ABSTRACT. The paper considers the problem of measure generation in the space $\mathbb{E}$ of planes in $\mathbb{R}^3$ by means of finitely additive functionals defined on sets which have product form in the usual spherical coordinates in $\mathbb{E}$. A necessary and sufficient condition of measure generation is found in terms of so–called flag densities. The solution reduces the problem to the problem of measure generation on the sphere by an Euler–type functional written down in an explicit form.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, "Combinatorial integral geometry, metric and zonoids", Acta Appl. Math., vol.9, pp. 3 – 27, 1987.
2. Г. Ю. Панина, "Выпуклые тела и меры, инвариантные относительно сдвигов", Записки научн. сем. ЛОМИ, т. 157, 1986.
3. Р. Г. Арамян, "О стохастической аппроксимации выпуклых тел", Известия АН Армении, Математика, т. 22, № 5, стр. 427 – 438, 1986.
4. Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, "Конечно–аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, I", Известия НАН Армении, Математика, т. 29, № 4, стр. 7 – 63, 1994.
5. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, 1990.
6. R. V. Ambartzumian, "Planar measure generation by Euler functionals", Submitted to Journal of Applied Probability, Stochastic Geometry Section.
7. А. В. Погорелов, Четвертая проблема Гильберта, Москва, Наука, 1974.
8. Р. Г. Арамян, "Восстановление розы направлений посредством флаговых плотностей в $\mathbb{R}^3$", Известия НАН Армении, Математика, т. 27, № 5, стр. 22 – 35, 1992.
9. Р. Г. Арамян, "О стохастической аппроксимации выпуклых тел", Тезисы докладов Пятой Вильнюсской межд. конф. по теории вероятностей и матем. статистике, т. 3, стр. 24, 1989.

15 декабря 1994

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении

КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ НА ПЛОСКОСТИ

Г. С. Сукиасян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 29, №4, 1994

В статье рассмотрены конечно-аддитивные функционалы, определенные на выпуклых, ограниченных многоугольниках на плоскости. Найдены условия, при которых эти функционалы определяют знакопеременные меры на евклидовой плоскости. В одном из рассматриваемых случаев для этого оказывается необходимым и достаточным выполнение тригонометрического условия на "флаговую плотность", связанного с классической формулой Грина.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья из ряда работ, начатых Р. В. Амбарцумяном [1] и продолженных в [2 – 4], относящихся к конечно-аддитивным (эйлеровым) функционалам в интегрально-геометрических пространствах прямых в $\mathbb{R}^2$ и плоскостей в $\mathbb{R}^3$. Здесь рассмотрены аналогичные конечно-аддитивные функционалы в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Сначала выводятся некоторые комбинаторные представления, позволяющие представить значения меры многоугольников с помощью "примарных" функций, зависящих от "игл" или от "углов" (определения этих геометрических элементов даны в §1 и §3). Мы рассматриваем локально-конечные, знакопеременные меры на плоскости, абсолютно непрерывные по отношению к лебеговой мере.

Полученные представления лежат в основе определения исследуемых функционалов на ограниченных, выпуклых многогранниках. Основным вопросом

Данное исследование частично финансировано грантом no. RYB000 Международного Научного Фонда.

является : *при каких условиях этими функционалами определяется мера на* $\mathbb{R}^2$ *?*

В специальном случае, когда примарная функция зависит от игл (§§1,2), показано, что для продолжения меры необходимо и достаточно выполнение тригонометрического условия на "флаговую плотность", известного из классической формулы Грина. В случае, когда примарная функция зависит от углов, удалось свести задачу к случаю иглы (§3). При этом, решение получено с применением критерия Грина (§4). Наконец, в следствии 6.3 рассмотрен смешанный случай. Это мотивировано тем, что подобные смешанные функционалы естественно возникают в контексте общей задачи построения меры в пространстве плоскостей в $\mathbb{R}^3$ (см. статью Р. Арамяна [4] в этом номере). В [4] смешанные функционалы определены на поверхности сферы, а здесь – на плоскости. При этом, некоторые из приведенных ниже подходов по-видимому применимы также на сфере.

§1. ПРИМАРНЫЕ ФУНКЦИИ НА ИГЛАХ

В этом параграфе мы представим значения мер на многоугольниках посредством некоторых функций, определенных на *иглах*. Игла ν является направленным отрезком прямой, т. е. ν есть упорядоченная пара $\nu = (P_1, P_2)$ точек $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$. Для любой иглы ν естественным образом определяются ее *правая и левая полуплоскости* (ограниченные прямой, содержащей ν). Полагая, что начало координат O фиксировано, определим функцию на иглах

$$b_\nu = \begin{cases} +1, & \text{если } O \text{ лежит в правой полуплоскости } \nu, \\ -1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Через $\mathcal{M}$ обозначим класс локально-конечных, знакопеременных мер на $\mathbb{R}^2$, абсолютно непрерывных по отношению к лебеговой мере. Рассмотрим меру $m \in \mathcal{M}$. Обозначая через ΔOP_1P_2 треугольник с вершинами $O, P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$, определим следующую функцию на иглах :

$$H(\nu) = b_\nu m(\Delta OP_1P_2), \tag{1.1}$$

где ν – игла с началом в P_1 и с концом в P_2. Очевидно, что H удовлетворяет

следующим условиям :

(а) H непрерывна в топологии $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $H(P,P) = 0$ при любом $P \in \mathbb{R}^2$;

(б) если точки O, P_1 и P_2 лежат на одной прямой, то $H(P_1, P_2) = 0$;

(в) H антисимметрична, т. е. $H(P_1, P_2) = -H(P_2, P_1)$;

(г) H *линейно-аддитивна*, т. е. для каждой тройки точек P_1, P_2, P_3, лежащих на прямой, причем P_2 лежит между P_1 и P_3, имеем

$$H(P_1, P_2) + H(P_2, P_3) = H(P_1, P_3).$$

Любой ограниченный, выпуклый, плоский многоугольник D обладает набором игл $S(D)$. По определению, *любая игла* $\nu \in S$ *является стороной* D, *и* ν *направлено по часовой стрелке вдоль границы* ∂D, т. е. внутренность D принадлежит правой полуплоскости стороны ν. Легко проверить, что

Для значения меры m *на ограниченном, выпуклом многоугольнике* D *справедливо представление*

$$m(D) = \sum_{\nu \in S(D)} H(\nu). \tag{1.2}$$

Представление (1.2) является основой для следующего определения. Пусть $F_1(\nu) = F_1(P_1, P_2)$ – непрерывная функция, определенная на пространстве игл. Построим функционал Φ_1, определенный на ограниченных, выпуклых многоугольниках :

$$\Phi_1(D) = \sum_{\nu \in S(D)} F_1(\nu). \tag{1.3}$$

Функцию F_1 назовем *примарной* для Φ_1.

Замечание. Значение $\Phi_1(D)$ не зависит от предположений типа "D замкнуто", или "D открыто". Фактически D будет обозначать класс *эквивалентных множеств*. Два множества $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2$ по определению эквивалентны, если они совпадают с точностью до множества, допускающего покрытие конечным набором прямых. Точнее, множество $D \subset \mathbb{R}^2$ называем многоугольником, если оно эквивалентно множеству, являющемуся обычным открытым многоугольником.

Если конечное объединение $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ непересекающихся, выпуклых многоугольников D_i само является выпуклым многоугольником, то будем писать $D = D_1 \uplus \cdots \uplus D_n$. Функционал $\Phi(D)$, определенный на многоугольниках называется *конечно-аддитивным*, если из равенства $D = D_1 \uplus \cdots \uplus D_n$ следует, что $\Phi(D) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(D_i)$. Имеет место следующая простая

Лемма 1.1. *Пусть $F_1(\nu)$ – непрерывная функция, определенная на пространстве игл. Функционал (1.3) аддитивен тогда и только тогда, когда примарная функция F_1 антисимметрична и линейно-аддитивна.*

Примеры

1) Если $F_1(\nu) = H(\nu)$, т. е. примарная функция F_1 определяется мерой m по формуле (1.1), то F_1 по (1.3) определяет аддитивный функционал, значение которого равно $m(D)$ на любом многоугольнике D. В частности, мере Лебега μ на плоскости, с нормирующим условием $\mu([0,1] \times [0,1]) = 1$, соответствует примарная функция

$$F_1(P_1, P_2) = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} p(\nu)|\nu|, \qquad (1.4)$$

где (r_i, φ_i) – полярные координаты точки P_i, $i = 1, 2$, угол φ_i измерен против часовой стрелки, $|\nu|$ – длина иглы $\nu = (P_1, P_2)$, а $p(\nu)$ – знакопеременное расстояние между началом координат O и прямой, содержащей ν. Если O лежит в правой полуплоскости ν, то полагаем, что $p > 0$.

2) Пусть $f(p)$ – непрерывная, нечетная функция на $\mathbb{R}$. Тогда примарная функция $F_1(\nu) = f(p(\nu))|\nu|$ удовлетворяет условиям (а) – (г) и порождает конечно-аддитивный функционал $\Phi_1(D)$ по формуле (1.3). Ниже будет доказано, что Φ_1 порождает меру $m \in \mathcal{M}$ только в том случае, когда $f(p)$ – линейная функция.

Последний пример показывает, что условия (а) – (г) не гарантируют того, чтобы Φ_1 было мерой в $\mathbb{R}^2$. На вопрос *каковы дополнительные условия на*

примарную функцию F_1, *обеспечивающие порождение меры*, будет дан ответ в следующем параграфе в терминах "флаговых плотностей".

§2. ФЛАГОВЫЕ ПЛОТНОСТИ И ФОРМУЛА ГРИНА

Флагом называется пара $f = (P, h)$, где P – точка в $\mathbb{R}^2$, а h – полуплоскость с границей ∂h, содержащей P. Ниже мы будем пользоваться обозначением $f = (x, y, \alpha)$, где (x, y) – декартовы координаты точки P, а $\alpha \in [0, 2\pi)$ – направление внешней нормали к ∂h. Любой непрерывной функцией $\rho(f)$, заданной на пространстве флагов, определяется функция F_1 на пространстве игл :

$$F_1(P_1, P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \rho(l, h)\, dl, \tag{2.1}$$

где h – правая полуплоскость к игле (P_1, P_2), направленной из P_1 к P_2 (ρ называется *флаговой плотностью*). Функция F_1, заданная формулой (2.1), линейно-аддитивна. Если ρ удовлетворяет условию

$$\rho(x, y, \alpha) = -\rho(x, y, \alpha + \pi), \quad \text{т. е.} \quad \rho(l, h) = -\rho(l, \overline{h}), \quad l \in \partial h, \tag{2.2}$$

где $\overline{h}$ – дополнительная к h полуплоскость, то функция F_1 антисимметрична. Всюду ниже мы будем рассматривать только примарные функции F_1, представимые в виде (2.1) с плотностью ρ, удовлетворяющей условию (2.2) и дважды непрерывно дифференцируемой. В последнем случае будем говорить, что F_1 обладает *гладкой* флаговой плотностью ρ.

Пример. Функция $\rho(l, h) = 1/2p(h)$ является флаговой плотностью функции (1.4). Здесь $p(h)$ – *знакопеременное расстояние* между O и ∂h. При $O \in h$ будем считать, что $p > 0$. Прямая ∂h определяется равенством $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, где α – направление внешней к h нормали. Тем самым, флаговая плотность

$$\rho_o(x, y, \alpha) = \tfrac{1}{2}(x \cos\alpha + y \sin\alpha) \tag{2.3}$$

порождает по формулам (2.1) и (1.3) плоскую меру Лебега.

Рассмотрим гладкую флаговую функцию $\rho(f)$, удовлетворяющую (2.2). Пользуясь (2.1) и (1.3) построим соответствующую функцию Φ_1. По лемме 1.1, Φ_1 – аддитивна.

Лемма 2.1. *Пусть D – произвольный ограниченный, выпуклый многоугольник. Тогда справедливо представление*

$$\Phi_1(D) = \iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\rho(x,y,0) + \frac{\partial}{\partial y}\rho(x,y,\pi/2)\right] dx\,dy +$$

$$+ \int_{\partial D} [\rho(l_1,l_2,\alpha) - \cos\alpha\,\rho(l_1,l_2,0) - \sin\alpha\,\rho(l_1,l_2,\pi/2)]\,dl, \qquad (2.4)$$

где ∂D – граница D, а α – направление внешней нормали в точке $l \in \partial D$, $l = (l_1, l_2)$.

Доказательство. Поскольку $\Phi_1(D) = \int_{\partial D} \rho(l_1,l_2,\alpha)\,dl$, то (2.4) эквивалентно классической формуле Грина :

$$\iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\rho(x,y,0) + \frac{\partial}{\partial y}\rho(x,y,\pi/2)\right] dx\,dy =$$

$$= \int_{\partial D} [\cos\alpha\,\rho(l_1,l_2,0) + \sin\alpha\,\rho(l_1,l_2,\pi/2)]\,dl.$$

Замечание. Другое доказательство леммы 2.1 основано на использовании асимптотических разложений

$$\Phi_1(\sqcup) = \delta_x\delta_y\left[\frac{\partial}{\partial x}\rho(x_0,y_0,0) + \frac{\partial}{\partial y}\rho(x_0,y_0,\pi/2)\right] + o(\delta_x\delta_y), \qquad (2.5)$$

$$\Phi_1(\triangle) = [-\cos\alpha\rho(x,y,0) - \sin\alpha\rho(x,y,\pi/2) + \rho(x,y,\alpha)]\delta + o(\delta). \qquad (2.6)$$

В (2.5) $\sqcup$ – прямоугольник со сторонами длины δ_x и δ_y, параллельными координатным осям, (x_0, y_0) – координаты нижних левых вершин, а длины δ_x, δ_y стремятся к нулю. В (2.6) $\triangle$ – прямоугольный треугольник с катетами, параллельными координатным осям, (x, y) – вершина прямого угла $\triangle$, δ – длина гипотенузы, α – направление внешней нормали к гипотенузе, и δ стремится к нулю.

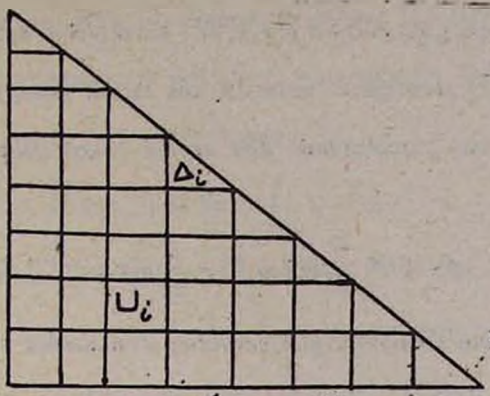


Рис. 1.

Предположим сначала, что D – прямоугольный треугольник с катетами, параллельными координатным осям, и гипотенузой ν. Разобьем ν на n равных отрезков и через их концы проведем вертикальные и горизонтальные прямые, разбивающие на части D (см. рис. 1). Обозначим через $\{\cup_i\}$ квадратные, а через $\{\Delta_i\}$ – треугольные компоненты разбиения D. В силу конечной аддитивности

$$\Phi_1(D) = \sum_{\cup_i} \Phi_1(\cup_i) + \sum_{\Delta_i} \Phi_1(\Delta_i). \tag{2.7}$$

Подстановкой (2.5) и (2.6) суммы в (2.7) приводятся к интегральным суммам для интегралов из (2.4) и дополнительному слагаемому. Поскольку ρ предполагалось гладким, то дополнительное слагаемое стремится к нулю при $n \to \infty$, и (2.7) переходит в (2.4). В случае произвольного D искомое утверждение следует из конечной аддитивности Φ_1, поскольку любой ограниченный, выпуклый многоугольник может быть представлен в виде конечного объединения непересекающихся прямоугольных треугольников с катетами, параллельными координатным осям.

Это "длинное" доказательство леммы 2.1 было приведено ввиду того, что оно схоже с некоторыми доказательствами, данными (в других ситуациях) в других статьях этого номера, а также в работах [1], [2].

Теорема 2.1. *Пусть $\Phi_1(D)$ – функционал, порожденный по (1.3) и (2.1) гладкой флаговой плотностью $\rho(f)$. Функционалом Φ_1 порождается мера $m \in \mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда $\rho(f)$ удовлетворяет условию*

$$\rho(x,y,\alpha)=\cos\alpha\,\rho(x,y,0)+\sin\alpha\,\rho(x,y,\pi/2). \tag{2.8}$$

Если равенство (2.8) выполнено хотя бы для одной декартовой координатной системы (x,y), то оно справедливо для любой такой координатной системы. Функция

$$q(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\rho(x,y,0)+\frac{\partial}{\partial y}\rho(x,y,\pi/2) \tag{2.9}$$

не зависит от выбора координатной системы и является плотностью меры m относительно меры Лебега.

Доказательство. Достаточность условия (2.8) следует непосредственно из (2.4). Предположим, что $\Phi_1(D)=m(D)$ для некоторой меры $m\in\mathcal{M}$ и покажем, что в этом случае имеет место (2.8). Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник D с катетами, параллельными координатным осям и гипотенузой ν. Как и в доказательстве леммы 2.1, произведем разбиение D (см. рис. 1). Из (2.4) следует, что

$$\Phi_1(\sqcup_i)=\iint\limits_{\sqcup_i}\left[\frac{\partial}{\partial x}\rho(x,y,0)+\frac{\partial}{\partial y}\rho(x,y,\pi/2)\right]dx\,dy. \tag{2.10}$$

Пусть $D_n=\bigcup_i\sqcup_i$. Согласно (2.10)

$$m(D_n)=\iint\limits_{D_n}\left[\frac{\partial}{\partial x}\rho(x,y,0)+\frac{\partial}{\partial y}\rho(x,y,\pi/2)\right]dx\,dy.$$

Поскольку D можно предполагать открытой областью, то $m(D)=\lim\limits_{n\to\infty}m(D_n)$. Отсюда следует, что

$$\int_\nu[\rho(l_x,l_y,\alpha)-\cos\alpha\rho(l_x,l_y,0)-\sin\alpha\rho(l_x,l_y,\pi/2)]\,dl=0. \tag{2.11}$$

Так как (2.11) верно для любой иглы ν, то подынтегральная функция тождественно равна нулю. Теорема 2.1 доказана.

Замечание. Второй пример в §1, показывает, что только независимости (2.9) от выбора координатной системы не достаточно для порождения меры.

Следствие 2.1. Пусть $\rho(f)$ – гладкая функция, заданная на пространстве флагов, а $q(x,y)$ – непрерывная функция, заданная на $\mathbb{R}^2$. Если для любых выпуклых многоугольников D тождественно

$$\iint\limits_D q(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial D} \rho(x,y,\alpha)\,dl, \tag{2.12}$$

то существуют функции P и Q, определенные на $\mathbb{R}^2$ и такие, что $q = \dfrac{\partial Q}{\partial x} + \dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\rho = P\sin\alpha + Q\cos\alpha$, т. е. (2.12) есть формула Грина.

§3. ПРИМАРНЫЕ ФУНКЦИИ НА УГЛАХ

В §4 будет рассмотрена задача порождения меры посредством функционалов, зависящих от примарных функций, заданных не на иглах, а на углах. Сделанная в этом параграфе подготовительная работа дает возможность применять в §4 результаты §2.

Часть плоскости, ограниченная двумя лучами, исходящими из одной точки, называется *углом*. Выделим первую и вторую стороны R_1 и R_2 угла c, полагая, что угол отмеренный против часовой стрелки от R_1 к R_2 должен быть меньше π. Будем писать $c = (P, \alpha, \beta)$, где $P = R_1 \cap R_2$ – вершина c, $\alpha \in [0, 2\pi)$ – направление R_1, а $\beta \in [0, \pi)$ – раствор угла между R_1 и R_2. Пусть D – плоский, ограниченный, выпуклый многоугольник. Будем говорить, что *угол c принадлежит D*, если вершина угла c является вершиной для D, и каждая сторона c содержит сторону D. Множество углов, принадлежащих D, обозначим через $C(D)$.

Пусть $F_2(c)$ – непрерывная функция, заданная на пространстве углов. Будем говорить, что F_2 *ангулярно-аддитивна*, если при любых $P \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, $\beta_1, \beta_2 \in [0, \pi)$ и $\beta_1 + \beta_2 \le \pi$ имеет место равенство

$$F_2(P, \alpha, \beta_1) + F_2(P, \alpha + \beta_1, \beta_2) = F_2(P, \alpha, \beta_1 + \beta_2).$$

Если раствор β угла c равен π, то c будем называть *развернутым* углом. Рассмотрим функционал

$$\Phi_2(D) = \sum_{c \in C(D)} F_2(c), \tag{3.1}$$

заданный на классе ограниченных, выпуклых многоугольников. Функцию F_2 будем называть примарной для Φ_2.

Лемма 3.1. *Если примарная функция $F_2(c)$ ангулярно-аддитивна и равняется нулю на развернутых углах, то функционал (3.1) аддитивен.*

Доказательство просто, его мы оставляем читателю.

Пример. Заданная на углах функция

$$F_2(P,\alpha,\beta)=\frac{1}{4}r^2[\sin 2(\alpha+\beta-\varphi)-\sin 2(\alpha-\varphi)], \tag{3.2}$$

где (r,φ) – полярные координаты вершины P угла, ангулярно-аддитивна и равняется нулю на развернутых углах. Эта примарная функция с помощью (3.1) порождает лебегову меру.

Основным результатом данного параграфа является следующая

Лемма 3.2. *Пусть $F_2(c)$ – непрерывная функция, заданная на пространстве углов, а Φ_2 – соответствующий функционал (3.1). Если примарная функция $F_2(c)$ ангулярно-аддитивна и равняется нулю на развернутых углах, то существует непрерывная, линейно-аддитивная, антисимметричная примарная функция $F_1(\nu)$, заданная на иглах, для которой соответствующий функционал Φ_1, определенный по (1.3), совпадает с Φ_2, т. е. для любого выпуклого, ограниченного многоугольника D имеем $\Phi_1(D)=\Phi_2(D)$.*

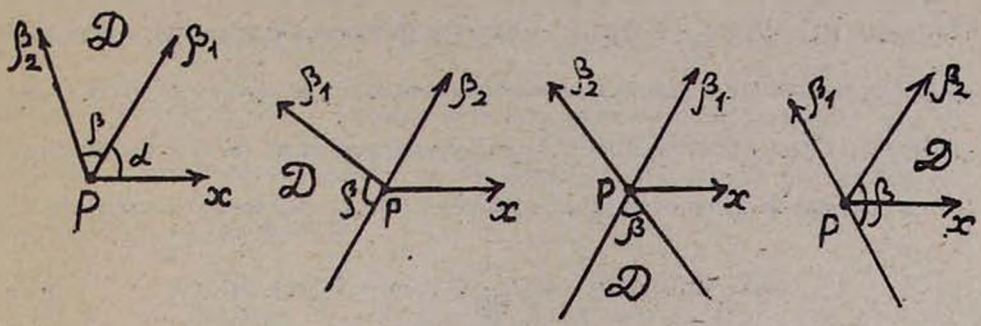
Доказательство. Пусть (P_1,P_2) – игла, для которого направление β от P_1 к P_2 принадлежит $[0,\pi)$. Полагая, что на плоскости фиксировано нулевое направление, положим

$$F_1(P_1,P_2)=F_2(P_1,0,\beta)-F_2(P_2,0,\beta), \tag{3.3}$$

$$F_1(P_1,P_2)=-F_1(P_2,P_1). \tag{3.4}$$

Тогда $F_1(\nu)$ определено на $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$. Подставим (3.3) и (3.4) в (1.3). Возникающая при этом сумма будет содержать два знакопеременных слагаемых $F_2(P,0,\beta_2)-$

$-F_2(P,0,\beta_1)$, соответствующих одной и той же вершине P многоугольника D. Возможны четыре случая, показанные на рис. 2.



$\alpha = \beta_1$, $\beta = \beta_2 - \beta_1$ | $\alpha = \beta_1$, $\beta = \pi + \beta_2 - \beta_1$ | $\alpha = \pi + \beta_1$, $\beta = \beta_2 - \beta_1$ | $\alpha = \pi + \beta_1$, $\beta = \pi + \beta_2 - \beta_1$

Рис. 2.

Ввиду ангулярной аддитивности, в любом случае

$$F_2(P,0,\beta_2) - F_2(P,0,\beta_1) = F_2(c), \quad c = (P,\alpha,\beta) \in C(D). \tag{3.5}$$

К примеру, если $\alpha = \pi + \beta_1$ и $\beta = \pi + \beta_2 - \beta_1$, то $F_2(P,0,\beta_1) = -F_2(P,\alpha,\pi-\beta_1)$, и, воспользовавшись ангулярной аддитивностью, получим (3.5). Согласно (3.3), для любой тройки точек P_1, P_2, P_3, лежащей на прямой, имеем $F_1(P_1,P_2)+$ $+F_1(P_2,P_3) = F_2(P_1,0,\beta) - F_2(P_2,0,\beta) + F_2(P_2,0,\beta) - F_2(P_3,0,\beta) = F_1(P_1,P_3)$. Отсюда следует, что $F_1(\nu)$ линейно-аддитивна, и лемма доказана, поскольку (3.4) является условием антисимметричности.

Естественным образом возникает задача, аналогичная решенной в §2 : для каких примарных функций $F_2(c)$ соответствующим функционалом Φ_2 порождается мера в $\mathbb{R}^2$? Ответ на этот вопрос дан в следующем параграфе.

§4. СВЕДЕНИЕ К ФУНКЦИОНАЛУ Φ_1

В этом параграфе мы выводим условие на угловую функцию $F_2(c)$, при котором функционал (3.1) является мерой из $\mathcal{M}$. Положим

$$W(x,y,\beta) = F_2(P,0,\beta), \quad V(x,y) = W(x,y,\pi/2), \quad \beta \in [0,\pi], \tag{4.1}$$

где (x, y) – декартовы координаты вершины P. Функцию $F_2(c)$ будем называть *гладкой*, если функция W дважды непрерывно дифференцируема.

Теорема 4.1. *Пусть $F_2(P, \alpha, \beta)$ – гладкая функция, заданная на множестве углов, ангулярно-аддитивная и равняющаяся нулю на развернутых углах. Функционал $\Phi_2(D)$, определенный по (3.1), является мерой из $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда примарная функция $F_2(c)$ при любом $\beta \in [0, \pi]$ удовлетворяет условию*

$$\cos\beta \frac{\partial}{\partial x} W(x, y, \beta) - \sin\beta \frac{\partial}{\partial y}[V(x, y) - W(x, y, \beta)] = 0. \tag{4.2}$$

Если (4.2) удовлетворено хотя бы в одной декартовой системе координат (x, y), то оно имеет место в любой такой системе координат. Смешанная производная $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} V(x, y)$ не зависит от выбора координатной системы и является плотностью меры Φ_2.

Доказательство. Пусть $F_1(\nu)$ – функция на иглах, соответствующая $F_2(c)$ согласно лемме 3.2. Так как $W(x, y, \beta)$ – гладкая функция, то $F_1(\nu)$ обладает гладкой флаговой плотностью $\rho(f)$. Имеем

$$F_1(P_1, P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \rho(l_1, l_2, \beta + \pi/2)\, dl = W(x_1, y_1, \beta) - W(x_2, y_2, \beta),$$

где β – направление от $P_1 = (x_1, y_1)$ к $P_2 = (x_2, y_2)$. Поэтому флаговая плотность $\rho(f)$ равняется частной производной W, взятой по направлению β :

$$\rho(x, y, \beta + \pi/2) = -\cos\beta \frac{\partial}{\partial x} W(x, y, \beta) - \sin\beta \frac{\partial}{\partial y} W(x, y, \beta). \tag{4.3}$$

Согласно теореме 2.1, функционал Φ_1 является мерой из $\mathcal{M}$ только тогда, когда для $\alpha = \beta + \pi/2$ выполнено условие (2.8) (α – направление внешней нормали флага). Из равенства (4.3) следует, что

$$\rho(x, y, 0) = \frac{\partial}{\partial y} V(x, y), \quad \rho(x, y, \pi/2) = \frac{\partial}{\partial x} W(x, y, 0) = 0. \tag{4.4}$$

Далее, из (2.8), (4.3) и соотношения $\alpha = \beta + \pi/2$ следует (4.2), и для завершения доказательства остается применить (2.9) и (4.4).

§5. ДРУГОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Для проверки результатов предыдущего параграфа здесь мы дадим другое доказательство теоремы 4.1, не основанное на теореме 2.1 и лемме 3.2.

Лемма 5.1. *Пусть $F_2(c)$ – гладкая функция, заданная на пространстве углов, ангулярно-аддитивная и равная нулю на развернутых углах. Тогда для любого выпуклого многоугольника D*

$$\Phi_2(D) = \sum_{c \in C(D)} F_2(c) = \iint\limits_D \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} V(x,y)\,dx\,dy -$$

$$- \int_{\partial D} \left[\sin\alpha \frac{\partial}{\partial x} W(l_1, l_2, \beta) + \cos\alpha \frac{\partial}{\partial y} [V(l_1, l_2) - W(l_1, l_2, \beta)] \right] dl, \qquad (5.1)$$

где α – направление внешней нормали в точке $l = (l_1, l_2) \in \partial D$, а β – направление касательной к границе ∂D в точке l.

Доказательство. Как и в §2, сначала мы вычислим значение $\Phi_2(\sqcup)$ на прямоугольнике $\sqcup = \sqcup(x_0, y_0, \delta_x, \delta_y)$. В силу ангулярной аддитивности F_2

$$\Phi_2(\sqcup) = V(x_0, y_0) - V(x_0, y_0 + \delta_y) + V(x_0 + \delta_x, y_0 + \delta_y) - V(x_0 + \delta_x, y_0) =$$

$$= \delta_x \delta_y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} V(x_0; y_0) + o(\delta_x \delta_y). \qquad (5.2)$$

Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник $\Delta = \Delta(x, y, \delta, \beta)$, где (x, y) – вершина прямого угла, катеты параллельны координатным осям, а длина и направление гипотенузы равны, соответственно, δ и β. Если $\beta \in [0, \pi/2]$, то

$$\Phi_2(\Delta) = -V(x, y) + W(x - h\cos\beta, y, \beta) + F_2(x, y + h\sin\beta, \pi + \beta, 3\pi/2).$$

Из установленных выше свойств $F_2(c)$ вытекает, что $F_2(x, y, \pi + \beta, \frac{3}{2}\pi) =$ $= F_2(x, y, \beta, \frac{1}{2}\pi) = V(x, y) - W(x, y, \beta)$. Отсюда следует, что $\Phi_2(\Delta) = -V(x, y) +$ $+W(x - h\cos\beta, y, \beta) + V(x, y + h\sin\beta) - W(x, y + h\sin\beta, \beta)$. Разлагая в ряд Тейлора по δ, получаем, что при любом $\beta \in [0, \pi/2]$

$$\Phi_2(\Delta) = -\delta\cos\beta \frac{\partial}{\partial x} W(x, y, \beta) + \delta\sin\beta \frac{\partial}{\partial y} [V(x, y) - W(x, y, \beta)] + o(\delta). \qquad (5.3)$$

При $\beta \in [\pi/2, \pi]$ аналогичным образом получаем

$$\Phi_2(\Delta) = \delta \cos\beta \frac{\partial}{\partial x} W(x, y, \beta) - \delta \sin\beta \frac{\partial}{\partial y}[V(x, y) - W(x, y, \beta)] + o(\delta). \qquad (5.4)$$

Если заменить β на направление α внешней нормали к гипотенузе, то как (5.3), так и (5.4) приводятся к виду

$$\Phi_2(\Delta) = -\delta \sin\alpha \frac{\partial}{\partial x} W(x, y, \beta) - \delta \cos\alpha \frac{\partial}{\partial y}[V(x, y) - W(x, y, \beta)] + o(\delta). \qquad (5.5)$$

Последняя формула имеет место для всех $\beta \in [0, \pi)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ таких, что $\cos(\alpha - \beta) = 0$. Теперь для завершения доказательства остается рассмотреть, как в доказательстве леммы 2.1, интегральные суммы и воспользоваться (5.2) и (5.5). Лемма 5.1 доказана.

Пользуясь леммой 5.1 так, как леммой 2.1 при доказательстве теоремы 2.1, мы приходим к новому доказательству теоремы 4.1.

§6. СЛЕДСТВИЯ

Рассмотрим примарные функции $F_2(c)$, допускающие представления посредством флаговых плотностей. В этом параграфе *флагом* будем называть пару (точка, направление) : $f = (x, y, \gamma)$, где (x, y) – декартовы координаты вершины P флага, а $\gamma \in [0, \pi)$ – направление. Любая функция $u(f)$, заданная на множестве флагов, определяет "угловую функцию" $F_2(c)$:

$$F_2(x, y, \alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\alpha+\beta} u(x, y, \gamma)\, d\gamma \qquad (6.1)$$

(функция u называется *флаговой плотностью* для F_2). Будем полагать, что $u(x, y, \gamma + \pi) \equiv u(x, y, \gamma)$. Если флаговая плотность обладает свойством

$$\int_0^{\pi} u(x, y, \gamma) = 0, \qquad (6.2)$$

то, по лемме 3.1, соответствующий функционал Φ_2 аддитивен.

Пример. Флаговая плотность

$$u(x, y, \gamma) = \frac{1}{2} r^2 \cos 2(\gamma - \varphi) \tag{6.3}$$

по (6.1) порождает примарную функцию (3.2).

Флаговую функцию $u(x, y, \gamma)$ будем называть *гладкой*, если u дважды непрерывно дифференцируема. Из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 6.1. Пусть $u(x, y, \gamma)$ – гладкая флаговая функция, удовлетворяющая (6.2). Функционал Φ_2, порожденный по формулам (6.1),(3.1) флаговой плотностью u, является мерой из $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда $u(f)$ удовлетворяет при любом $\beta \in [0, \pi)$ условию

$$\cos\beta \int_0^{\beta} \frac{\partial}{\partial x} u(x, y, \gamma)\, d\gamma - \sin\beta \int_{\beta}^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial y} u(x, y, \gamma)\, d\gamma = 0. \tag{6.4}$$

Воспользовавшись (6.1), леммой 5.1 и аппроксимируя плоскую область D многоугольниками, приходим к такому следствию.

Следствие 6.2. Для любой выпуклой, ограниченной области D с границей, обладающей непрерывной кривизной κ, и для любой гладкой флаговой плотности $u(f)$, удовлетворяющей условию (6.2), имеем

$$\int_{\partial D} u(l_1, l_2, \gamma)\kappa(l)\, dl = \iint_D \left[\int_0^{\pi/2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x, y, \gamma)\, d\gamma \right] dx\, dy -$$

$$- \int_{\partial D} \left[dx \int_0^{\beta} \frac{\partial}{\partial x} u(x, y, \gamma)\, d\gamma + dy \int_{\beta}^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial y} u(x, y, \gamma)\, d\gamma \right],$$

где β – направление, касательное к ∂D.

Пусть $F_1(\nu)$ – функция, заданная на пространстве игл, и пусть $F_2(c)$ – функция, заданная на пространстве углов. Построим *смешанный* функционал Φ_3 на классе ограниченных, выпуклых многоугольников :

$$\Phi_3(D) = \sum_{\nu \in S(D)} F_1(\nu) + \sum_{c \in C(D)} F_2(c). \tag{6.5}$$

В силу линейного характера условий (2.8) и (4.2) имеет место

Следствие 6.3. Пусть примарные функции F_1 и F_2 удовлетворяют, соответственно, условиям теорем 2.1 и 4.1. Тогда смешанный функционал Φ_3 является мерой из $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда для любого $\beta \in [0, \pi)$ удовлетворено следующее условие :

$$\rho(l_1, l_2, \alpha) - \cos\alpha\, \rho(l_1, l_2, 0) - \sin\alpha\, \rho(l_1, l_2, \pi/2) =$$

$$= \sin\alpha \frac{\partial}{\partial x} W(l_1, l_2, \beta) + \cos\alpha \frac{\partial}{\partial y} [V(l_1, l_2) - W(l_1, l_2, \beta)], \qquad (6.6)$$

где ρ, W, V определены в (2.1) и (4.1), α – направление внешней нормали в точке $l = (l_1, l_2) \in \partial D$, β – направление касательной к границе ∂D в точке l.

ABSTRACT. In the paper we consider finitely additive functionals defined on planar bounded convex polygons and find some conditions, when these functionals actually determine signed measures in the Euclidian plane. In one of the cases we recover as a necessary and sufficient condition the trigonometric form of the "flag density" which is related with the classical Green formula.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Амбарцумян, "О конечно-аддитивных функционалах в $\mathbb{R}^3$", Известия НАН Армении, Математика, т. 28, № 2, стр. 51 – 59, 1993.
2. R. V. Ambartzumian, "Planar measure generation by Euler functionals", Submitted to Journal of Applied Probability, Stochastic Geometry Section.
3. Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей", Известия НАН Армении, Математика, т. 29, № 4, стр. 7 – 63, 1994.
4. Р. Г. Арамян, "Порождение мер в пространстве плоскостей и сферические эйлеровы функционалы", Известия НАН Армении, Математика, т. 29, № 4, стр. 64 – 90, 1994.

2 декабря 1994

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 29 НОМЕР 4 1994

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ КОМБИНАТОРНОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Сборник статей

Страницы

Предисловие редактора 4

Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей. I
Р. В. Амбарцумян В. К. Оганян 7

Порождение мер в пространстве плоскостей
и сферические функционалы Эйлера
Р. Г. Арамян 64

Конечно-аддитивные функционалы на плоскости
Г. С. Сукиасян 91

CONTENTS

VOLUME 29 NUMBER 4 1994

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)

ANALYTICAL IMPLICATIONS OF COMBINATORIAL INTEGRAL GEOMETRY

Collection of Papers

PAGES

Editor's Preface 1

Finitely additive functionals in the space of planes, I
R. V. Ambartzumian and V. K. Oganian 3

Measure generation in the space of planes and spherical Euler functionals
R. Aramian 52

Finitely additive functionals on the plane
H. S. Sukiasian 75

©1994 by Allerton Press Inc. Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by Allerton Press, Inc. for library and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transaction Reporting Service, providing that the base fee of $20.00 per copy is paid directly to CCC, 222 Rosewood Drive, Danvers, MA 01923. An annual license may be obtained only directly from Allerton Press, Inc., 150 5th Avenue, New York, NY 10011.