

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 00002-3048

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

ԽՄԹԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈՒՆԳՐԱ

Չլիսավոր խմբագիր **Մ. Մ. ԶԻՐԱՇՅԱՆ**

Յ. Շ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Կ. ԶԱՍԼԱՎՈՐԻ
Ա. Ա. ԽԱՆԱՅԱՆ
Ռ. Վ. ԶԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐՄԵԼՅԱՆ
Ա. Ռ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱՂՅԱՆ
Չլիսավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու բարձրագույն Մ. Ա. Զովաբենիսյան

«Մաթեմատիկա»

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել, Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր տերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման ռաջատիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլիերեն և ռուսերեն շեղունքով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու զմեռով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու զմեռով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոնեզեր չորանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծադրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց Համար և տեղը տեքստում էլի ձախ մասում։

5. Դրականությունը տեղափոխվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի, անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է թառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թվով փոփոխությունները (սրիգիներ և կատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մեծմասն դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի ֆեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չգրադիվ մեծմասն պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղդասյանի պող., 24 ք. Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, տերիա Մաթեմատիկա։

МХИТАР М. ДЖРБАШЯН

НЕКРОЛОГ

Математика Армении понесла тяжелую утрату. 6 мая 1994 года ушел из жизни выдающийся ученый, один из основателей армянской математической школы, член Национальной Академии Наук Армении, профессор Ереванского государственного университета Мхитар Мкртичевич Джрбашян. Его родители, спасаясь от геноцида 1915 года, переселились из Вана (в настоящее время в Турции) в Ереван, где 11 сентября 1918 года родился будущий математик. В 1936 году Мхитар Джрбашян поступил на физико-математический факультет Ереванского государственного университета, где его учителями были В. Торгомян и А. Шагинян. Будучи студентом, Мхитар проявил незаурядные математические способности и сделал первые шаги в области самостоятельного научного исследования. Решающую роль в формировании исследовательских интересов молодого математика сыграл блестящий курс лекций, прочитанный М. В. Келдышем во время его пребывания в Ереване в 1940 году. Окончив с отличием университет в 1942 году, М. М. Джрбашян поступил в аспирантуру и в 1945 году защитил кандидатскую диссертацию "Некоторые вопросы представимости аналитических функций". При этом основой диссертации было исследование, начатое им еще в студенческие годы. Это была первая кандидатская диссертация в области математики, защищенная в Армении. Четыре года спустя М. М. Джрбашян защитил в Московском государственном университете свою докторскую диссертацию — "Метрические теоремы полноты и представления аналитических функций", которая была высоко оценена его официальными оппонентами — М. В. Келдышем, А. О. Гельфондом, А. И. Маркушевичем, а также другими ведущими советскими математиками. В 1953 году он был избран членом-корреспондентом, а в 1956 году — действительным членом Академии Наук Армении.

Наряду с лекциями, которые М. М. Джрбашян читал в Ереванском государственном университете, он возглавлял исследовательскую группу в Математическом секторе (1945 – 1955), а затем в Институте математики и механики (1955 – 1971) Академии Наук Армении. За эти годы, благодаря интенсивной исследовательской работе М. М. Джрбашяна и его учеников, в Армении была создана школа комплексного анализа, ставшая широко признанной, и когда в 1971 был организован Институт математики Академии Наук Армении, М. М. Джрбашян был назначен его директором. Трудно переоценить его вклад в становлении и определении направленности научной деятельности Института. В 1966 г. М. М. Джрбашян основал настоящий журнал, главным редактором которого оставался вплоть до своей кончины.

М. М. Джрбашян внес существенный вклад в такие области классического анализа, как теория аппроксимации, интегральные преобразования, теория факторизации и граничных свойств мероморфных функций, интегральные представления аналитических и целых функций, квазианалитические классы бесконечно дифференцируемых функций, теория интерполяции, гармонический анализ и граничные задачи в комплексной области. Он является автором более чем 200 публикаций в различных журналах и четырех монографий — "Преобразования Фурье" (Митк, Ереван, 1964), "Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области" (Москва, Наука, 1966), "Harmonic Analysis and Boundary Value Problems in the Complex Domain" (Basel, Birkhäuser, 1993) и "Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге" (в соавторстве с В. С. Захаряном, Москва, Наука, 1993). Сегодня во многих странах специалисты используют его идеи, теоремы, представления и т. д.. Жизнь М. М. Джрбашяна является примером беззаветной преданности науке. Трудно представить, что более нет среди нас Мхитара Мкртичевича, нашего коллеги, учителя, обаятельной личности. Его память вечна в наших сердцах.

Редакционная коллегия

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

А. Г. Багдасарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 29, №3, 1994

В статье доказаны теоремы вложения для пространств типа B и F Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля. Найдены необходимые и достаточные условия для таких вложений, а также вложений рассмотренных пространств типа B и F в пространство C непрерывных функций. Доказана теорема о следах функций пространства типа B , а также пространства H типа Соболева–Лиувилля, порожденных некоторым, вполне правильным многогранником, удовлетворяющим единственно условию, что n -ые координаты вершин вне $\mathbb{R}_{n-1}$ должны быть больше, чем $1/p$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена установлению теорем вложения разных метрик и разных измерений для обобщенных пространств $H_p^s(\mu; \mathbb{R}_n)$ типа Соболева–Лиувилля, $B_{p,q}^s(\mu; \mathbb{R}_n)$ типа Никольского–Бесова и $F_{p,q}^s(\mu; \mathbb{R}_n)$ типа Лизоркина–Трибеля, порожденных некоторыми весовыми функциями $\mu(\xi)$. В дальнейшем, для краткости, эти пространства будем называть пространствами типов H , B и F , соответственно. Отметим, что при $\mu(\xi) = |\xi|$ эти пространства совпадают с соответствующими классическими пространствами.

Для пространств Соболева W_p^s первые результаты о вложениях были получены С. Л. Соболевым [1]. Для пространств Никольского–Бесова $B_{p,q}^s$ теоремы вложения были доказаны С. М. Никольским [2,3] (при $q = \infty$) и О. В. Бесовым [4,5] (при $1 \leq q < \infty$). Эти результаты были применены в теории краевых задач для эллиптических дифференциальных операторов. Тем не менее, исследование

краевых задач для общих регулярных операторов требует рассмотрения пространств типа Соболева–Лиунилля и Никольского–Бесова, порожденных вполне правильными многогранниками, зависящими от начального оператора (см. [6]). Пространства типа H ранее были исследованы в [7], пространства типа B — в [8, 9].

В данной статье доказаны некоторые теоремы вложения разных метрик для пространств типов H и B , а также теорема о вложении пространств типа H и B в пространство C непрерывных функций. Доказана независимость нулевых классов от порождающих функций.

В §3 доказана теорема о следах для функций пространств $H_p^1(\mu; \mathbb{R}_n)$ и $B_{p,q}^1(\mu; \mathbb{R}_n)$, порожденных вполне правильным многогранником, удовлетворяющим условию о том, что n -ые координаты вершин вне R_{n-1} больше $1/p$. Это условие в некотором смысле является также необходимым. Оказывается, что пространство следов зависит только от проекции порождающего многогранника на $\mathbb{R}_{n-1}$ и от его вершин, ближайших к $\mathbb{R}_{n-1}$.

§1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Будем пользоваться следующими обозначениями: $\mathbb{R}_n$ — n -мерное евклидово пространство, $\mathbb{Z}_n^+$ — множество мультииндексов, т. е. векторов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с целыми, неотрицательными компонентами. При $\xi \in \mathbb{R}_n$, $\alpha \in \mathbb{Z}_n^+$, положим

$$\xi^\alpha = \prod_{i=1}^n \xi_i^{\alpha_i}, \quad |\xi| = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right)^{1/2}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}.$$

$$\mathbb{R}_n^+ = \{x; x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n; x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Определение 1. G_0^+ — множество положительных функций $\mu(\xi)$, бесконечно дифференцируемых вне пачала координат, таких, что $\lim_{|\xi| \rightarrow 0} \mu(\xi) = 0$ и

$$|\xi^\alpha D^\alpha \mu(\xi)| \leq c\mu(\xi), \quad 1 + \mu(\xi) \geq c'(1 + |\xi|^r), \quad (1)$$

где c , c' и r — положительные постоянные.

Нетрудно убедиться, что для функций из G_0^+ наряду с (1) выполнены соотношения $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \mu(\xi) = \infty$, $\mu(\xi) \leq c''(1 + |\xi|)^{r'}$, $c'', r' > 0$.

Всюду ниже через c будем обозначать различные постоянные.

Определение 2. Пусть $1 < p, q < \infty$, F – оператор преобразования Фурье и S – класс Шварца. Обозначим через $\Phi_{p,q}(\mu; \mathbb{R}_n)$ множество систем функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$, обладающих следующими свойствами:

- а) $\varphi_k \in S(\mathbb{R}_n)$, $(F\varphi_k)(\xi) \geq 0$, $k = 0, 1, \dots$;
- б) $\text{supp } F\varphi_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}_n; 2^{k-1} \leq \mu(\xi) \leq 2^{k+1}\}$, $k = 1, 2, \dots$,
 $\text{supp } F\varphi_0 \subset \{\xi \in \mathbb{R}_n; \mu(\xi) \leq 2\}$;
- в) $\sum_{k=0}^\infty (F\varphi_k)(\xi) = 1$, $\xi \in \mathbb{R}_n$;
- г) $\{F\varphi_k\}_{k=0}^\infty \in M_{p,q}$. (2)

(Отметим, что условие г) означает, что оператор $T: Tf = F^{-1}\{F\varphi_k Ff\}$ ($f = \{f_k\}_{k=0}^\infty \in L_p(l_q)$, $f_k \in S$, $k = 0, 1, \dots$) допускает расширение до непрерывного оператора из $L_p(l_q)$ на $L_p(l_q)$. Определения пространств $L_p(l_q)$ и $l_q(L_p)$ можно найти, напр., в [11]. Пример системы из $\Phi_{p,q}(\mu; \mathbb{R}_n)$ приведен в [12]. Для этого примера выполнено неравенство

$$\|F\varphi_k\|_{M_p^p} = \sup_{\|f\|_{L_p}=1} \|\varphi_k * f\|_{L_p} \leq c, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

(см. [13]), где M_p^p – множество мультипликаторов Фурье типа (p, p) .

Определим теперь основные функциональные пространства статьи, являющиеся обобщениями пространств Соболева–Лиувилля ($H_p^s(\mu; \mathbb{R}_n)$), Никольского–Бессова ($B_{p,q}^s(\mu; \mathbb{R}_n)$) и Лизоркина–Трибеля ($F_{p,q}^s(\mu; \mathbb{R}_n)$).

Определение 3. Пусть $1 < p, q < \infty$, $-\infty < s < \infty$ и $\mu \in G_0^+$. Далее, пусть S' – сопряженное пространство класса S Шварца и $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty \in \Phi_{p,q}(\mu; \mathbb{R}_n)$. Положим

- а) $H_p^s(\mu; \mathbb{R}_n) = \{f \in S': \|f\|_{H_p^s} = \|F^{-1}[(1 + \mu^2)^{s/2} Ff]\|_{L_p(\mathbb{R}_n)} < \infty\}$,
- б) $B_{p,q}^s(\mu; \mathbb{R}_n) = \{f \in S': \|f\|_{B_{p,q}^s} = \|f * \varphi_k\|_{l_q(L_p)} < \infty\}$,
- в) $F_{p,q}^s(\mu; \mathbb{R}_n) = \{f \in S': \|f\|_{F_{p,q}^s} = \|f * \varphi_k\|_{L_p(l_q)} < \infty\}$.

Замечание 1. 1. В определении пространств $B_{p,q}^s(\mu; \mathbb{R}_n)$ можно ограничиться системами $\{\varphi_k\}$ со свойствами а) — в) и оценкой (3) вместо свойства (2); 2. Пространства а), б), в) — банаховы и не зависят от выбора системы $\{\varphi_k\}$. 3. Класс Шварца плотен в этих пространствах.

§2. ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ РАЗНЫХ МЕТРИК

Лемма. Пусть $1 < p, q < \infty$, $-\infty < s < \infty$ и $\mu \in G_0^+$. Тогда

$$B_{p,\min(p,q)}^s(\mu) \subset F_{pq}^s(\mu) \subset B_{p,\max(p,q)}^s(\mu). \quad (4)$$

Доказательство аналогично случаю изотропных пространств.

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$, μ_0 и $\mu_1 \in G_0^+$. Тогда

$$а) \quad B_{p,q}^0(\mu_0) = B_{p,q}^0(\mu_1), \quad 1 \leq q \leq \infty,$$

$$б) \quad F_{p,q}^0(\mu_0) = F_{p,q}^0(\mu_1), \quad 1 < q < \infty,$$

Доказательство. Утверждение а) доказано в [14]. Утверждение б) докажем от противного. Пусть существует последовательность функций $\{f_k\}_{k=0}^\infty \in F_{p,q}^0(\mu_1)$ и число $k_0 > 0$ такое, что при любом $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $\|f_k\|_{F_{p,q}^0(\mu_1)} \leq \varepsilon \|f_k\|_{F_{p,q}^0(\mu_0)}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $p \leq q$. По доказанной лемме при $\tau > 0$ имеем $\|f_k\|_{B_{p,q}^{-\tau}(\mu_1)} \leq \varepsilon \|f_k\|_{F_{p,q}^0(\mu_0)} \leq \varepsilon \|f_k\|_{B_{p,q}^{-\tau}(\mu_0)}$. Интерполяцией (см. [14], теорему 3) получаем $\|f_k\|_{B_{p,q}^{-\tau}(\mu_1)} \leq \varepsilon \|f_k\|_{B_{p,q}^{-\tau}(\mu_0)}$, $\tau > 0$. Устремляя τ к нулю, приходим к неравенству, противоречащему утверждению б). Тем самым, теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $1 < p, q < \infty$, $-\infty < s_0, s_1 < \infty$ и $\mu_0, \mu_1 \in G_0^+$. Для того, чтобы имело место вложение

$$F_{p,q}^{s_0}(\mu_0) \subset F_{p,q}^{s_1}(\mu_1) \quad (5)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$(1 + \mu_1^2)^{s_1/2} (1 + \mu_0^2)^{-s_0/2} \in L_\infty. \quad (6)$$

То же утверждение справедливо и для B -пространств, причем допустимы предельные значения $q = 1, \infty$.

Доказательство. Случай $s_0 = s_1 = 0$ рассмотрен в теореме 1, поэтому можно считать, что $s_0^2 + s_1^2 \neq 0$. Пусть имеет место соотношение (6). В силу теоремы 5 из [10], а также (6) и (2)

$$\left\{ (1 + \mu_1^2)^{s_1/2} (1 + \mu_0^2)^{-s_0/2} F\varphi_k \right\}_{k=0}^{\infty} \in M_{(p,q)} \quad \{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi_{p,q}(\mu_1).$$

Ввиду теоремы 1 и изоморфизма оператора типа лиувилевского дифференцирования, при $f \in F_{p,q}^{s_0}(\mu_0)$ имеем

$$\|f\|_{F_{p,q}^{s_1}(\mu_1)} \sim \|F^{-1} (1 + \mu_1^2)^{s_1/2} f\|_{F_{p,q}^0(\mu_0)} \leq c \|f\|_{F_{p,q}^{s_0}(\mu_0)},$$

где, как и всюду ниже, знак $\sim$ обозначает двустороннюю оценку.

Пусть теперь имеет место вложение (5) и $f \in S(\mathbb{R}_n)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \|F^{-1} (1 + \mu_1^2)^{s_1/2} (1 + \mu_0^2)^{-s_0/2} Ff\|_{F_{p,q}^0(\mu_1)} \leq \\ & \leq c \|F^{-1} (1 + \mu_0^2)^{-s_0/2} Ff\|_{F_{p,q}^{s_0}(\mu_0)} \sim \|f\|_{F_{p,q}^0(\mu_1)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Обозначим через $M_{(p,q)}$ множество мультипликаторов Фурье для классических пространств Лизоркина-Трибеля (в наших обозначениях это пространства $F_{p,q}^s = F_{p,q}^s(|\xi|)$), т. е. $M_{(p,q)}$ есть множество распределений $T \in S'$ таких, что для всех $f \in S$ имеет место неравенство

$$\|F^{-1} T F f\|_{F_{p,q}^s} \leq c \|f\|_{F_{p,q}^s}.$$

Известно (см. [15]), что $M_{(p,q)}$ не зависит от s . Так как по теореме 1 $F_{p,q}^0 = F_{p,q}^0(|\xi|) = F_{p,q}^0(\mu_1)$, то из (7) следует, что

$$(1 + \mu_1^2)^{s_1/2} (1 + \mu_0^2)^{-s_0/2} \in M_{(p,q)}.$$

Тем самым, соотношение (6) следует из включений (см. [15], пункт 2.6.6)

$$M_{(p,q)} \subset M_p \subset M_2^2 = L_{\infty},$$

где M_p – множество мультипликаторов Фурье для классических пространств Никольского–Бесова.

Аналогично доказывается утверждение теоремы для B -пространств, притом с обычными видоизменениями при $q = \infty$. Теорема 2 доказана.

Пусть C – пространство непрерывных функций с равномерной нормой. Имеем место

Теорема 3. Пусть $1 < p, q < \infty$, $-\infty < s < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, $1/q + 1/q' = 1$ и $\mu \in G_0^+$. Для того, чтобы имело место вложение

$$F_{p,q}^s(\mu) \subset C \quad (8)$$

необходимо и достаточно условие

$$F^{-1}(1 + \mu^2)^{-s/2} \in F_{p',q'}^0(\mu). \quad (9)$$

Это утверждение остается в силе при замене класса F на класс B . В этом случае q может равняться 1.

Доказательство начнем со случая B -пространств. Пусть $B_{p,q}^s(\mu) \subset C$. Тогда имеет место оценка

$$|f(0)| \leq c \|f\|_{B_{p,q}^s(\mu)}, \quad f \in S(\mathbb{R}_n).$$

Ясно, что δ -функция Дирака принадлежит сопряженному пространству

$$(B_{p,q}^s(\mu))' = B_{p',q'}^{-s}(\mu). \text{ Тем самым}$$

$$\|\delta\|_{B_{p',q'}^{-s}} \sim \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|F^{-1}(1 + \mu^2)^{-s/2} F\varphi_k\|_{L_{p'}}^{q'} \right)^{1/q'} \sim \|F^{-1}(1 + \mu^2)^{-s/2}\|_{F_{p',q'}^0}.$$

Необходимость условия (9) (с B вместо F) доказана. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi_{p,q}(\mu)$.

Положив $\psi_k = \sum_{j=-2}^2 \varphi_{k+j}$, $\psi_k \equiv 0$, $k < 0$, ввиду условий б) и в) определения 2 будем иметь

$$\psi_k * \varphi_k = \varphi_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (10)$$

Следовательно, воспользовавшись неравенством Гёльдера получаем

$$|f| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} F^{-1}(1 + \mu^2)^{-s/2} F\varphi_k * F^{-1}(1 + \mu^2)^{s/2} F\psi_k Ff \right| \leq \\ \leq c \|F^{-1}(1 + \mu^2)^{-s/2}\|_{B_{p',q}^u(\mu)} \cdot \|f\|_{B_{p,q}^s(\mu)}.$$

Отсюда следует вложение (8) для B -пространств.

Для F -пространств необходимость условия (9) доказывается аналогично.

Для доказательства достаточности (9) заметим, что в силу (10) и неравенства Гёльдера

$$|f| \leq \|F^{-1}(1 + \mu^2)^{-s/2} F\varphi_k\|_{l_q} * \|F^{-1}(1 + \mu^2)^{s/2} F\psi_k Ff\|_{l_q} \leq \\ \leq c \|F^{-1}(1 + \mu^2)^{-s/2}\|_{F_{p',q}^u(\mu)} \cdot \|f\|_{F_{p,q}^s(\mu)}. \quad (11)$$

Замечание 1. Использованное при доказательстве теоремы 3 равенство

$(B_{p,q}^s(\mu))' = B_{p',q}^{-s}(\mu)$ непосредственно следует из теоремы 1 [14] и теоремы 3.7.1 [11]. Доказательство такого же равенства для F -пространств аналогично доказательству соответствующего утверждения для классов Лизоркина-Трибеля (см. [15], пункт 2.11.2).

§3. ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ РАЗНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Определение 4 (см. [6]). Непустой многогранник N с вершинами из $\mathbb{R}_n$ назовем полным, если начало координат является вершиной N , и, кроме того, N имеет вершины на каждой оси координат. Полный многогранник N назовем вполне правильным, если положительны все координаты внешних нормалей его $(n-1)$ -мерных граней.

Определение 5. Полный многогранник назовем призмобразным, если он является частью вполне правильного многогранника, образованной его срезом гиперплоскостью, параллельной $\mathbb{R}_{n-1}$, и его вершины расположены только на $\mathbb{R}_{n-1}$

и на этой гиперплоскости. Волне правильный многогранник назовем пирамидообразным, если ее единственная вершина вне $\mathbb{R}_{n-1}$ находится на n -той оси координат.

Пусть N – вполне правильный многогранник с вершинами $\alpha^j \in \mathbb{R}_n^+$, $j = 1, \dots, N$; $\alpha^0 = (0, \dots, 0)$. С N ассоциируем функцию

$$\mu(\xi) = \left(\sum_{j=1}^N \xi^{2\alpha^j} \right)^{1/2}. \quad (12)$$

Если N – призмобразный многогранник с основаниями $N_0 \subset \mathbb{R}_{n-1}$ и $N_1 \subset \{x \in \mathbb{R}_n^+; x_n = m\}$, то соответствующая функция $\mu(\xi)$ примет вид

$$\mu(\xi) = [\mu_0^2(\xi') + \xi_n^{2m}(1 + \mu_1^2(\xi'))]^{1/2}, \quad \xi = (\xi', \xi_n), \quad (13)$$

где $\mu_0(\xi')$ и $\mu_1(\xi')$ – функции, отвечающие многогранникам N_0 и N_1 (см. (12)).

Отметим, что пирамидообразный многогранник можно рассматривать как призмобразный, с вершиной $(0, \dots, 0, m)$ вместо основания N_1 . Соответствующая функция имеет вид

$$\mu(\xi) = (\mu_0^2(\xi') + \xi_n^{2m})^{1/2}. \quad (14)$$

Функции вида (13) и (14) тоже будем называть, соответственно, призмобразными и пирамидообразными.

Для пирамидообразных функций теоремы вложения (для разных метрик и размерностей) доказаны в [8, 9].

Нашей целью является доказательство теорем вложения разных измерений (теорем о следах) для пространств типа H и B , порожденных некоторым вполне правильным многогранником. В изотропном случае, когда все вершины многогранника лежат на координатных осях и находятся на одинаковом расстоянии от начала координат, принятое нами условие $m_1 > 1/p$ (см. теорему 5) совпадает с известным необходимым условием положительности верхнего индекса (см., напр., [16]).

Определение 6 (см. [11]). Пусть A_0 и A_1 – банаховы пространства. Оператор $R \in L(A_0, A_1)$ называется ретракцией, если существует оператор $S \in L(A_1, A_0)$ такой, что $RS = E$, где E – тождественный оператор из $L(A_1, A_0)$. Оператор следа определяем соотношением

$$(Tr f)(x') = f(x', 0), \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}), \quad f \in S(\mathbb{R}_n).$$

Следы остальных функций определяются с помощью предельного перехода.

Рассмотрим сначала случай призмобразных многогранников, т. е. пространства $H_p^1(\mu)$ и $B_{p,q}^1(\mu)$ с $\mu(\xi)$ вида (13). Отметим, что если в определениях пространств H и B вместо $(1 + \mu^2)^{1/2}$ брать функцию

$$\left[\sum_{\alpha} \prod_{i=1}^n (1 + \xi_i^2)^{\alpha_i} \right]^{1/2},$$

где сумма взята по всем вершинам многогранника, отличным от начала координат, то вопрос о бесконечной дифференцируемости можно обойти. В силу теоремы 2 при $\mu \in G_0^+$ пространства, порожденные такими функциями, совпадают.

Теорема 4. Пусть функция $\mu(\xi)$ порождена призмобразным многогранником, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и $m > 1/p$. Тогда оператор следа есть ретракция

$$\begin{aligned} \text{a) } H_p^1(\mu; \mathbb{R}_n) & \text{ на } B_{p,p}^1 \left(\mu_0^{1-(pm)^{-1}} \cdot \mu_1^{1/(pm)}; \mathbb{R}_{n-1} \right), \\ \text{b) } B_{p,q}^1(\mu; \mathbb{R}_n) & \text{ на } B_{p,q}^1 \left(\mu_0^{1-(pm)^{-1}} \cdot \mu_1^{1/(pm)}; \mathbb{R}_{n-1} \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Представим функцию $(1 + \mu^2)^{1/2}$ в эквивалентной форме

$$(1 + \mu^2(\xi))^{1/2} \sim (1 + \mu_1^2(\xi'))^{1/2} \left[\frac{1 + \mu_0^2(\xi')}{1 + \mu_1^2(\xi')} + \xi_n^{2m} \right]^m.$$

Обозначим

$$1 + \rho_0^2(\xi') = \frac{1 + \mu_0^2(\xi')}{1 + \mu_1^2(\xi')}, \quad \rho(\xi) = (\rho_0^2(\xi') + \xi_n^{2m})^{1/2}.$$

Тогда $(1 + \mu^2(\xi))^{1/2} \sim (1 + \mu_1^2(\xi'))^{1/2} \cdot (1 + \rho^2(\xi))^{1/2}$. Функция $\rho(\xi)$ пирамидообразна. Ввиду результатов [8,9] заключаем, что оператор следа есть ретракция из $H_p^1(\rho, \mathbb{R}_n)$ на $B_{p,p}^{1-(pm)^{-1}}(\rho_0; \mathbb{R}_{n-1})$ и из $B_{p,q}^1(\rho; \mathbb{R}_n)$ на $B_{p,q}^{1-(pm)^{-1}}(\rho_0; \mathbb{R}_{n-1})$.

Докажем прямое вложение для случая а). Пусть $f \in S(\mathbb{R}_n)$ и $g(x') = f(x', 0)$.

В силу теоремы о следах для призмобразных функций и теоремы 6 из [14]

$$\|g\|_{B_{p,p}^1(\mu_0^{1-(pm)^{-1}}, \mu_1^{1/(pm)}; \mathbb{R}_{n-1})} \sim \|F_{n-1}^{-1}(1 + \mu_1^2)^{1/2} F_{n-1} g\|_{B_{p,p}^{1-(pm)^{-1}}(\rho_0; \mathbb{R}_{n-1})} \leq \\ \leq c \|f\|_{H_p^1(\mu; \mathbb{R}_n)},$$

где F_{n-1} есть $(n-1)$ -мерное преобразование Фурье.

Для доказательства обратного вложения воспользуемся оператором продолжения из теоремы 3 [8]. Пусть R — такой оператор, действующий непрерывно из $B_{p,p}^{1-(pm)^{-1}}(\rho_0; \mathbb{R}_{n-1})$ в $H_p^1(\rho; \mathbb{R}_n)$ (см. [8]), тогда, в силу свойства изоморфизма оператора типа Лиувиллсского дифференцирования (см. [14], теорему 6), имеем

$$\|f\|_{H_p^1(\mu; \mathbb{R}_n)} \sim \|R F_{n-1}^{-1}(1 + \mu_1^2)^{1/2} F_{n-1} g\|_{H_p^1(\rho; \mathbb{R}_n)} \leq c \|g\|_{B_{p,p}^1(\mu_0^{1-(pm)^{-1}}, \mu_1^{1/(pm)}; \mathbb{R}_{n-1})}.$$

Утверждение б) доказывается аналогично. Теорема доказана.

Рассмотрим произвольный вполне правильный многогранник N . Пусть его вершины имеют n -ые координаты

$$0, m_1, m_2, \dots, m_N \quad \text{с} \quad 0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_N, \quad m_N > 0.$$

С многогранником N ассоциируем функцию

$$\nu(\xi) = \left[\mu_0^2(\xi') + \sum_{j=1}^N \xi_n^{2m_j} (1 + \mu_j^2(\xi')) \right]^{1/2}, \quad (15)$$

где функция $\mu_j(\xi')$, $j = 1, \dots, N$ отвечает проекции N на гиперплоскость $\{x \in \mathbb{R}_n^+; x_n = m\}$, а $\mu_0(\xi')$ отвечает проекции N на $\mathbb{R}_{n-1}$. Наряду с $\nu(\xi)$ рассмотрим призмобразную функцию

$$\mu(\xi) = [\mu_0^2(\xi') + \xi_n^{2m_1} (1 + \mu_1^2(\xi'))]^{1/2}, \quad (16)$$

отвечающую части многогранника N , лежащей между $\mathbb{R}_{n-1}$ и $\{x \in \mathbb{R}_n^+; x_n = m\}$. Имеет место

Теорема 5. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и $m_1 > 1/p$. Тогда пространство следов $H_p^1(\nu; \mathbb{R}_n)$ совпадает с пространством следов $H_p^1(\mu; \mathbb{R}_n)$, а пространство следов $B_{p,q}^1(\nu; \mathbb{R}_n)$ совпадает с пространством следов $B_{p,q}^1(\mu; \mathbb{R}_n)$.

Доказательство. Так как $1 + \mu^2(\xi) \leq c(1 + \nu^2(\xi))$, то имеем (см. [7]) $H_p^1(\nu; \mathbb{R}_n) \subset H_p^1(\mu; \mathbb{R}_n)$. С другой стороны, нетрудно убедиться в том, что

$$1 + \nu^2(\xi) \leq c' \left[1 + \mu_0^2(\xi') + \xi_n^{2m_N} (1 + \mu_1^2(\xi'))^{m_N/m_1} (1 + \mu_0^2(\xi'))^{1-m_N/m_1} \right]. \quad (17)$$

Обозначим правую часть (17) через $1 + \lambda^2(\xi)$ и заметим, что ввиду (17) $H_1^1(\lambda; \mathbb{R}_n) \subset H_p^1(\lambda; \mathbb{R}_n)$. Тем самым

$$H_p^1(\lambda; \mathbb{R}_n) \subset H_p^1(\nu; \mathbb{R}_n) \subset H_p^1(\mu; \mathbb{R}_n), \quad (18)$$

и в силу теоремы 4

$$T_r H_p^1(\mu; \mathbb{R}_n) = B_{p,p}^1 \left(\mu_0^{1-(pm_1)^{-1}} \cdot \mu_1^{1/(pm_1)}; \mathbb{R}_{n-1} \right). \quad (19)$$

Если обозначить $(1 + \mu_1^2(\xi'))^{m_N/m_1} (1 + \mu_0^2(\xi'))^{1-m_N/m_1} = 1 + \lambda_1^2(\xi')$, то получаем

$$T_r H_p^1(\mu; \mathbb{R}_n) = B_{p,p}^1 \left(\mu_0^{1-(pm_N)^{-1}} \cdot \lambda_1^{1/(pm_N)}; \mathbb{R}_{n-1} \right). \quad (20)$$

Далее, в силу теоремы 2

$$B_{p,p}^1 \left(\mu_0^{1-1/(pm_1)} \cdot \mu_1^{1/(pm_1)}; \mathbb{R}_{n-1} \right) = B_{p,p}^1 \left(\mu_0^{1-(pm_N)^{-1}} \cdot \lambda_1^{1/(pm_N)}; \mathbb{R}_{n-1} \right).$$

Из (18) — (20) следует необходимое утверждение для пространств H . Доказательство утверждения для пространств B аналогично.

Замечание 3. Прямые вложения теорем 4 и 5 можно доказать также с помощью “метода следов” всестепенной интерполяции (см. [11], теорему 3.12.2). Необходимые при этом интерполяционные теоремы для пространств H и B доказаны в [14]. Теорема о следах для пространств F , порожденных призмобразными функциями, установлена в [12].

ABSTRACT. In the paper we prove some embedding theorems for several Nikolskii-Besov and Lizorkin-Triebel type spaces B and F . We find necessary and sufficient conditions ensuring these inclusions and also the inclusion of the considered B and F type spaces in the space C of continuous functions. Also we prove trace theorems for a B type space and a Sobolev-Liouville type space H , both generated by a completely regular polyhedron satisfying the only condition that n -th coordinates of its vertices out of $\mathbb{R}_{n-1}$ are greater than $1/p$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Л. Соболев, "Об одной теореме функционального анализа", Мат. сб., т. 4 (46), стр. 471 — 497, 1938.
2. С. М. Никольский, "Неравенства для целой функции конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных", Труды МИАН СССР, т. 38, стр. 244 — 278, 1951.
3. С. М. Никольский, "Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях", Мат. сб. т. 33, №2, стр. 261 — 326, 1953.
4. О. В. Бесов, "Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения", Труды МИАН СССР, т. 60, стр. 42 — 81, 1961.
5. О. В. Бесов, "О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения", ДАН СССР, т. 126, №6, стр. 1163 — 1165, 1959.
6. В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, т. 91, стр. 59 — 81, 1967.
7. Л. Р. Волевич, Б. П. Пансях, "Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения", УМН, т. 20, №1, стр. 3 — 74, 1965.
8. А. Г. Багдасарян, "Об интерполяции и о следах функций из некоторых анизотропных функциональных пространств", Известия АН Армении, Математика, т. 23, №4, стр. 353 — 365, 1988.
9. А. Г. Багдасарян, "Интерполяция и следы функций из некоторых функциональных пространств", ДАН Армении, т. 87, №5, стр. 207 — 211, 1988.
10. П. И. Лизоркин, "О мультипликаторах интегралов Фурье в пространствах $L_{p,\theta}$ ", Труды МИАН СССР, т. 81, стр. 231 — 248, 1967.
11. Й. Берг, Й. Лёфстрём, Интерполяционные пространства. Введение, Мир, Москва, 1980.
12. А. Г. Багдасарян, "Теоремы вложения и интерполяции для некоторых пространств типа Лизоркина-Трибеля", ДАН Армении, т. 91, №3, стр. 105 — 108, 1990.
13. П. И. Лизоркин, " (L_p, L_q) мультипликаторы интегралов Фурье", ДАН СССР, т. 152, №4, стр. 808 — 811, 1963.
14. А. Г. Багдасарян, "Интерполяция некоторых функциональных пространств разной анизотропии", Известия НАН Армении, Математика, т. 27, №4, стр. 38 — 46, 1992.
15. Х. Трибел, Теория функциональных пространств, Мир, Москва, 1983.
16. С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, Наука, Москва, 1977.

СУПЕРГАРМОНИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НА ЗАМКНУТОМ МНОЖЕСТВЕ

Ч. Бенсуда, П. М. Готье

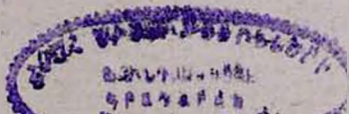
Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 29, №3, 1994

Согласно принципу локализации, при локальной аппроксимации имеет место глобальная аппроксимация. В статье установлена такая теорема и рассмотрены некоторые ее следствия.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Равномерные и касательные аппроксимации на неограниченных множествах изначально исследовались в основном при аппроксимации аналитическими функциями Н. У. Аракеляном, А. А. Персесяном и другими (см., напр., Гаер [13]). Аналогичные задачи гармонической аппроксимации были рассмотрены А. А. Шагиняном и А. А. Персесяном. Результаты данной работы относятся как к гармонической, так и к субгармонической аппроксимациям.

Пусть Ω - направленная, связная, некомпактная риманова поверхность в C^∞ . Пучок ростков непрерывных функций $\mathcal{H}$ и решений лапласиана индуцирует на Ω гармоническую структуру Брело (см. [3], пункт 8). Для любого подмножества $A \subset \Omega$ предположим, что $\bar{A}$, A^0 , ∂A и A' , соответственно, замыкание, внутренность, граница или тонкая внутренность A . Пусть $C(A)$ и $\mathcal{H}(A)$, соответственно, пространства непрерывных функций на A и сужений на A функций, гармонических в окрестности A . Обозначим через $S(A)$ (соответственно, через $S_c(A)$) выпуклый конус сужений на A функций, которые в некоторой окрестности A



супергармоничны (соотв. супергармоничны и непрерывны). Далее, положим

$$S_0(A) := \{u \in C(A) : u|_{A^0} \in S(A^0)\}$$

и

$$\mathcal{H}_0(A) := \{h \in C(A) : h|_{A^0} \in \mathcal{H}(A^0)\}.$$

Для любого семейства $\mathcal{F}(A)$ функций, определенных на A , обозначим через $\mathcal{F}^+(A)$ подсемейство (строго) положительных функций и через $\overline{\mathcal{F}}(A)$ — замыкание $\mathcal{F}(A) \cap C(A)$ в $C(A)$ в топологии равномерной сходимости. Будем говорить, что функция σ из C^2 является (строго) супергармонической, если ее лапласиан (строго) отрицателен.

Для любой области Ω комплексной плоскости А. А. Нерсесяном [31] были исследованы функции, непрерывные на множестве E , гармонические внутри и ограниченные на границе. С помощью гармонической меры он получил условие интегрируемости, при выполнении которого такие функции являются пределами функций, гармонических на всем Ω . Следующая теорема является теоремой типа локализации.

Теорема 1 (о локализации [19]). Пусть E — замкнутое множество из Ω и u — функция, определенная на E . Если каждая точка $x \in E$ обладает окрестностью $V_x \subset \Omega$ такой, что $u|_{E \cap V_x} \in \overline{S}_\varepsilon(E \cap V_x)$, то для любой строго супергармонической функции $\sigma \in S^+(E)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $v \in S_\varepsilon(E)$ такое, что $|u - v| \leq \varepsilon \sigma$ на E .

В силу принципа максимума (доказанная ниже теорема 5), утверждение теоремы 1 о локализации остается справедливым даже если σ попросту супергармоническая функция, а не строго супергармоническая функция. С другой стороны, тонкая теория потенциала дает иную характеристику функций, допускающих приближение. Тем самым, следующая теорема обладает двумя версиями — супергармонической и гармонической.

Теорема 2. Пусть E — замкнутое множество из Ω и u — функция, определенная на E . Тогда следующие утверждения равносильны :

(а) любая точка $x \in E$ обладает лежащей в Ω окрестностью V_x такой, что

$$u|_{E \cap V_x} \in \overline{\mathcal{S}_c}(E \cap V_x) \text{ (соответственно, } u|_{E \cap V_x} \in \overline{\mathcal{H}}(E \cap V_x));$$

(б) для любых $s \in \mathcal{S}^+(E)$ и $\varepsilon > 0$ существует $v \in \mathcal{S}_c(E)$ (соответственно,

$$v \in \mathcal{H}(E)), \text{ для которого } |u - v| \leq \varepsilon s \text{ на } E;$$

(в) $u \in \overline{\mathcal{S}_c}(E)$ (соответственно, $u \in \overline{\mathcal{H}}(E)$);

(г) $u \in \mathcal{C}(E)$ и $u|_{E'}$ супергармоническая (соотв. гармоническая) функция на внутренности E' в тонкой топологии.

Отметим, что в гармонической версии теоремы 2 эквивалентность $a \Leftrightarrow b$ позволяет распространить на замкнутые подмножества римановой поверхности результат, ранее установленный П. М. Готье, В. Хенгартнером и М. Лабёчем [21] для открытых множеств из $\mathbb{R}^m$ и для римановой поверхности. Эквивалентность $a \Leftrightarrow z$ установлена А. Лебайардом и Б. Гаве [11], для компактных множеств из $\mathbb{R}^m$. Они были позже установлены П. М. Готье и С. Ладусе [23] для замкнутых множеств из $\mathbb{R}^m$, а затем Т. Багби и П. Бланше [3] — для некоторой римановой поверхности. Эквивалентность $a \Leftrightarrow z$ как в супергармонической, так и в гармонической версиях была установлена для компактных множеств в аксиоматической теории Блайтнером и Хансеном [8].

Из содержащейся в теореме 2 характеристики функций, допускающих приближение, вытекают некоторые следствия, унифицирующие последние результаты многих авторов. Будем говорить, что открытое множество U гриново, если оно обладает функцией Грина G_U . Отметим, что любое замкнутое множество, лежащее в Ω , имеет базис, состоящий из окрестностей Грина. Из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. Условия теоремы 2 эквивалентны условию

(д) для любой окрестности Грина U из E , любого $\varepsilon > 0$, и для любого $p \in U \setminus E$ существует $v \in S_\varepsilon(E)$ (соотв., $v \in \mathcal{H}(E)$), такое, что на E

$$|u - v| \leq \varepsilon \inf\{G_U(\cdot, p), 1\}.$$

В случае, когда Ω — область в комплексной плоскости, Н. У. Аракелян [1, 2] была дана характеристика замкнутых множеств E , на которых любая непрерывная функция, голоморфная внутри, является равномерным пределом функций, голоморфных на всем Ω . В гармоническом случае А. А. Шагиняном [32] была дана характеристика пар (Ω, E) , где Ω — область из $\mathbb{R}^m$, а E — замкнутое множество из Ω , для которого любая функция из $\mathcal{C}(E)$ есть равномерный или весовой предел функций из $\mathcal{H}(\Omega)$. Недавно С. Дж. Гарлинсом [14] были исследованы супергармонический и гармонический случаи в $\mathbb{R}^m$. Будем говорить, что замкнутое множество $E \subset \Omega$ допускает равномерную супергармоническую (или гармоническую) аппроксимацию, если $S_0(E) = \overline{S_\varepsilon(E)}$ (или $\mathcal{H}_0(E) = \overline{\mathcal{H}(E)}$). Такое множество допускает локально-равномерную супергармоническую (или гармоническую) аппроксимацию, если любая точка $x \in E$ обладает лежащей в Ω окрестностью V_x такой, что

$$S_0(E \cap V_x) = \overline{S_\varepsilon(E \cap V_x)} \quad (\text{или} \quad \mathcal{H}_0(E \cap V_x) = \overline{\mathcal{H}(E \cap V_x)}).$$

В компактном случае замыкания ограниченных областей из $\mathbb{R}^m$, допускающие равномерную аппроксимацию, были описаны М. В. Келдышем [28] в 1941 году. В 1949 году Дж. Дени [10] получил ту же характеристику для любого компактного множества $K \subset \mathbb{R}^m$, а именно: $\mathbb{R}^m \setminus K$ и $\mathbb{R}^m \setminus K^0$ должны быть разреженными в тех же точках. Будем говорить, что замкнутое множество $E \subset \Omega$ келдышево, если $\Omega \setminus E$ и $\Omega \setminus E^0$ являются разреженными в одних и тех же точках. В качестве второго следствия к теореме [2] мы характеризуем замкнутые множества, допускающие равномерную супергармоническую и гармоническую аппроксимации.

Теорема 3. Пусть E – замкнутое множество из Ω . Тогда следующие утверждения равносильны :

- (а) E допускает локально-равномерную супергармоническую аппроксимацию ;
- (б) E допускает равномерную супергармоническую аппроксимацию ;
- (в) E допускает локально-равномерную гармоническую аппроксимацию ;
- (г) E допускает равномерную гармоническую аппроксимацию ;
- (д) E келдышево.

Отметим, что эквивалентность $g \Leftrightarrow d$ является обобщением результата Келдыша и Дени для случая замкнутых множеств. Эта эквивалентность была установлена для замкнутых множеств из $\mathbb{R}^m$ М. Лабрёчем [29] в 1982 году. Им также была дана другая версия этой характеристики в терминах емкости, обобщающая результат А. А. Гончара [24, 25]. Для компактных множеств из $\mathbb{R}^m$, допускающих равномерную гармоническую аппроксимацию, ими был получен результат, аналогичный теореме Витушкина [35] для компактных множеств из комплексной плоскости, допускающих голоморфную аппроксимацию. Связь между этими двумя результатами остается неясной [22]. Недавно эквивалентность $g \Leftrightarrow d$ была установлена Т. Багби и П. Бланше [3] для римановых поверхностей. Эквивалентности $b \Leftrightarrow g \Leftrightarrow d$ были установлены для компактных множеств в аксиоматической теории Дж. Блайдтнером и В. Хансеном [8, 26]. Эквивалентности $a \Leftrightarrow v \Leftrightarrow d$ были доказаны Ч. Бенсудой [6] для замкнутых множеств в аксиоматической теории Брело.

Представляет интерес рассмотрение замкнутых множеств, допускающих как равномерную аппроксимацию, так и аппроксимацию с произвольным непрерывным весом. Т. Карлеманом [9] в 1927 было показано, что любая непрерывная на вещественной оси функция допускает равномерное приближение целыми функциями с любым непрерывным весом. В этом смысле $\mathbb{R}$ – множество Карлемана

на комплексной плоскости. В случае, когда Ω есть область на плоскости, Н. У. Аракеяном [1, 2] дана характеристика замкнутых областей Карлемана с пустой внутренностью. Позже А. А. Нерсисян [30] характеризовал замкнутые множества Карлемана. При этом, он использовал условие C , введенное в 1969 (после Карлемана) П. М. Готье [18], называемое также *условием длинных островов* (см. [4]). Замкнутое множество $E \subset \Omega$ удовлетворяет условию C , если для любого компактного множества $K \subset \Omega$ существует компактное множество $Q \subset \Omega$ такое, что каждая связная компонента внутренности E° , имеющая непустое пересечение с K , содержится в Q . Ниже мы будем говорить, что замкнутое множество $E \subset \Omega$ допускает касательную супергармоническую (или гармоническую) аппроксимацию, если для любой непрерывной в E функции ϵ со значениями в $(0, 1]$ и любой функции $u \in S_0(E)$ (или $u \in \mathcal{H}_0(E)$) существует функция $v \in S_\epsilon(E)$ (или $v \in \mathcal{H}(E)$) такая, что $|u - v| \leq \epsilon$ на E .

Третьим следствием теоремы 2 является характеристика множеств, допускающих касательную гармоническую аппроксимацию.

Теорема 4. Пусть E – замкнутое множество из Ω . Тогда следующие утверждения равносильны :

- (α) E допускает касательную гармоническую аппроксимацию ;
- (β) E допускает касательную гармоническую аппроксимацию и удовлетворяет условию C ;
- (γ) E – келдышево замкнутое множество, удовлетворяющее условию C .

В теореме 3 содержится эквивалентность $\beta \Leftrightarrow \gamma$. Недавно эквивалентность $\alpha \Leftrightarrow \gamma$ была доказана С. Дж. Гардинером [15] для замкнутых множеств из $\mathbb{R}^n$. Импликация $\gamma \Rightarrow \alpha$ показана в [17]. В силу леммы 2 и рассуждения о единственности (см. [17, 18]), импликация $\gamma \Rightarrow \alpha$ представляет собой следствие теорем 2 и 3. Ниже мы докажем $\alpha \Rightarrow \gamma$.

В [17] нами найдена также касательная супергармоническая (или гармоническая) сильная аппроксимация : для любой функции $u \in S_0(E)$ (или $u \in \mathcal{H}_0(E)$) и любой непрерывной функции ε со значениями в $(0, 1]$ существует функция $v \in S_\varepsilon(E)$ (или $v \in \mathcal{H}(E)$) такая, что $u < v < u + \varepsilon$ на E . Показано также, что условие γ эквивалентно двум следующим :

- (а) E допускает касательную супергармоническую сильную аппроксимацию ;
- (б) E допускает касательную гармоническую сильную аппроксимацию.

Таким образом, остается открытым вопрос – вытекает ли из возможности касательной супергармонической аппроксимации условие C о длинных островах ?

Для δ -супергармонических функций (разности двух супергармонических) рассуждение о единственности не верно. Поэтому, если ограничиваться замкнутыми множествами, удовлетворяющими условию C , то во всех допустимых случаях эквивалентны следующие утверждения :

- (1) E допускает равномерную аппроксимацию ;
- (2) E допускает касательную аппроксимацию ;
- (3) E допускает касательную сильную аппроксимацию.

Это утверждение уже было доказано для некоторых замкнутых множеств, названных "chapelets" [7].

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Регулярная область R , лежащая в Ω , обладает функцией Грина G_R . Следуя Г. Багби и П. Бланише [3], обозначим

$$G_\Omega = \lim_{R \rightarrow \Omega} G_R,$$

где R меняется в классе регулярных областей из Ω . Если функция G_Ω тождественно не равна нулю

рять, что открытое множество U обладает функцией Грина, если любая компонента W области U обладает функцией Грина G_W . Тогда будем считать, что $G_U(p, q) = G_W(p, q)$, если p и q принадлежат одной и той же компоненте W , в противном случае положим $G_U(p, q) = 0$. Если R — регулярная область из Ω , то для любого положительного $\varphi \in C_0^\infty(R)$ функция

$$P_R^\varphi(x) := \int G_R(x, y) \varphi(y) \, d\nu(y) \quad (\forall x \in R),$$

где ν — емкостная мера на Ω [3], принадлежит C^∞ на R и ее лапласиан равен $-\varphi$ (см. [3, теорема 4.8]). Таким образом, P_R^φ супергармонична на R и гармонична вне носителя φ . P_R^φ называется *потенциалом Грина* φ на R . Отметим, что P_R^φ сходится к 0 на ∂R . Чтобы убедиться в этом, предположим, что V — компактная окрестность $\text{supp}(\varphi)$ и $y_0 \in V$. Рассмотрим класс $\{G_R(x, \cdot) : x \in R \setminus V\}$ функций, гармонических на V . В силу неравенства Гариака, существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$G_R(x, y) \leq c G_R(x, y_0) \quad (\forall y \in \text{supp}(\varphi) \text{ и } \forall x \in R \setminus V).$$

Пусть Ω обладает функцией Грина G_Ω , и пусть величина $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ положительна. Рассмотрим исчерпывание $(R_j)_j$ области Ω регулярными областями. $\varphi \in C_0^\infty(R_j)$ для достаточно больших j . По теореме о монотонной сходимости, последовательность $(P_{R_j}^\varphi)_j$ сходится к пределу P_Ω^φ , названному потенциалом Грина φ на Ω . Отметим, что такие потенциалы на Ω обладают такими же свойствами, что и потенциалы регулярных областей. Далее напомним, что наибольшая гармоническая миноранта потенциала Грина — тождественный нуль.

Теорема 5 (Принцип максимума). Если Ω обладает функцией Грина, то для любой положительной функции $\varphi \in C_0(\Omega)$ и любой функции $s \in S^+(\Omega)$

$$P_\Omega^\varphi \leq s \text{ на } \text{supp}(\varphi) \Rightarrow P_\Omega^\varphi \leq s \text{ всюду на } \Omega.$$

Доказательство. Пусть $K = \text{supp}(\varphi)$, $x \in \Omega \setminus K$, и пусть регулярная область R представляет из себя окрестность $K \cup \{x\}$. Так как $P_R^\varphi \leq P_\Omega^\varphi$, то $P_R^\varphi \leq s$ на K . Ясно, что функция $s - P_R^\varphi$ супергармонична на $R \setminus K$ и положительна на $\partial(R \setminus K)$. По принципу минимума, эта функция положительна всюду на $R \setminus K$. В частности

$$P_R^\varphi(x) \leq s(x) \quad \text{при } x \in R \setminus K. \quad (1)$$

Переходя к пределу (R сужается до Ω), получаем, что неравенство (1) справедливо на Ω вместо R .

Замечание 2. Если Ω обладает функцией Грина, то при любом $s \in S^+(\Omega)$ существует потенциал σ из C^∞ , строго супергармоничный на Ω и такой, что $\sigma \leq s$ всюду на Ω .

Доказательство. Пусть $s \in S^+(\Omega)$. Рассмотрим разложение единицы $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ на Ω . При любом $n \geq 1$ существует положительная постоянная α_n такая, что

$$\alpha_n P_\Omega^{\varphi_n} \leq \inf(1, s)/2^n \quad \text{на } \text{supp}(\varphi_n).$$

По принципу максимума (теорема 5), (2) справедливо на всем Ω . Рассмотрим потенциал

$$\sigma := \sum_{n \geq 1} \alpha_n P_\Omega^{\varphi_n}.$$

Беря достаточно малое α_n , можем посчитать, на любом листе производную почленно. Тем самым, лапласиан потенциала σ удовлетворяет условию

$$-\Delta \sigma = \sum_{n \geq 1} \alpha_n \varphi_n. \quad (3)$$

Так как $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ — разложение единицы из класса C^∞ , правая сторона (3) есть локально-конечная сумма функций из C^∞ . Следовательно, функция σ принадлежит C^∞ , строго супергармонична, и s преобладает над ней на Ω .

Доказательство следующей леммы основано на технике, использованной С. Дж. Гардинером [14].

Лемма 1. Пусть E — замкнутое множество, лежащее в Ω , $s \in S^+(E)$, и f — вещественнозначная на E функция. Тогда следующие утверждения равносильны :

(а) при любом $\varepsilon > 0$ существуют $v_+, v_- \in S(E)$ такие, что

$$\begin{cases} f - \varepsilon s < v_+ < f + \varepsilon s & \text{на } E \\ -f - \varepsilon s < v_- < -f + \varepsilon s & \text{на } E; \end{cases}$$

(б) при любом $\varepsilon > 0$ существует $h \in \mathcal{H}(E)$ такое, что

$$f - \varepsilon s < h < f + \varepsilon s \quad \text{на } E.$$

Доказательство. Пусть выполнено (а). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют $v_+, v_- \in S(E)$ такие, что

$$\begin{cases} f - \frac{\varepsilon}{4} s < v_+ < f + \frac{\varepsilon}{4} s & \text{на } E \\ -f - \frac{\varepsilon}{4} s < v_- < -f + \frac{\varepsilon}{4} s & \text{на } E. \end{cases}$$

В частности

$$0 < v_+ + v_- + \frac{\varepsilon}{2} s \quad \text{на } E. \quad (4)$$

Так как $v_+ + v_- + \frac{\varepsilon}{2} s$ есть непрерывная снизу функция на E , то существует окрестность W множества E , на которой справедливо (4). Тем самым, функция $-(v_- + \frac{\varepsilon}{4}s)$ субгармонична и миноризирует функцию $v_+ + \frac{\varepsilon}{4}s$, супергармоническую на W . Далее, существует $h \in \mathcal{H}(W)$ такое, что

$$-(v_- + \frac{\varepsilon}{4}s) \leq h \leq v_+ + \frac{\varepsilon}{4}s \quad \text{на } W.$$

При $x \in E$ имеем

$$h(x) - f(x) = (h(x) - v_+(x)) + (v_+(x) - f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} s(x) < \varepsilon s(x),$$

$$h(x) - f(x) = (h(x) + v_-(x)) - (v_-(x) + f(x)) \geq -\frac{\varepsilon}{2} s(x) > -\varepsilon s(x).$$

Следовательно, $h \in \mathcal{H}(E)$ и $f - \varepsilon s < h < f + \varepsilon s$ на E . Обратное утверждение следует непосредственно, если подставить $v_+ = h$ и $v_- = -h$.

В завершение этого параграфа приведем еще два результата. Нижеследующая лемма 2, устанавливающая в некотором смысле единственность (см. [18]), была доказана в $\mathbb{R}^m$ С. Дж. Гардинером [15]. Тем же способом ее утверждение может быть доказано для римановых поверхностей. В более общей формулировке нами она доказана в [17].

Лемма 2. Пусть E – замкнутое множество, лежащее в Ω . Если для любой функции ϵ , непрерывной в E и со значениями в $(0, 1]$, существует $s \in S^+(E)$ такое, что $0 < s \leq \epsilon$ на E , то E удовлетворяет условию C .

Второй результат – нижеприведенная теорема, доказанная Дж. Блайдтнером и В. Хансеном [8] в общей формулировке (см. [12]).

Теорема 6. Пусть E – компактное множество, лежащее в Ω , и пусть u – функция, определенная на E . Тогда следующие утверждения равносильны :

(а) $u \in \overline{S}_c(E)$ (соотв., $u \in \overline{H}(E)$).

(б) $u \in C(E)$ и $u|_{E'}$ супергармонично (соотв., гармонично) на внутренности

E' в тонкой топологии.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательство супергармонического случая теоремы 2.

$a \Rightarrow b$ является прямым следствием теоремы 1 локализации и замечания 2, так как любое правильное, замкнутое множество, лежащее в Ω , имеет окрестность U , обладающую функцией Грина.

$b \Rightarrow a$ легко следует, если в качестве весовой функции s взять постоянную (например, $s = 1$).

$a \Rightarrow c$ тривиально.

$a \Rightarrow g$. Если справедливо утверждение (а), то ясно, что $u \in C(E)$. Пусть $x \in E'$. Тогда существует компактная окрестность W_x точки x такая, что $u|_{\partial W_x} \in$

$\in \overline{S}_c(E \cap W_x)$. Поскольку $E \cap W_x$ – компакт, то по теореме 6 функция $u|_{(E \cap W_x)'}$ супергармонична на $(E \cap W_x)'$ в тонкой топологии. Тем самым, u супергармонична в тонкой окрестности x . Так как x – произвольная точка из E' , отсюда следует утверждение (г).

$g \Rightarrow a$. Пусть справедливо утверждение (г), пусть $x \in E$ и V_x – компактная окрестность x . Тогда $E \cap V_x$ – компакт, и функция $u|_{(E \cap V_x)'}$ супергармонична на $(E \cap V_x)'$ в тонкой топологии. По теореме 6, $u|_{E \cap V_x} \in \overline{S}_c(E \cap V_x)$, и утверждение (а) справедливо ввиду того, что x – произвольная точка из E .

Доказательство гармонического случая теоремы 2. Импликации $b \Rightarrow a \Rightarrow a$ тривиальны, а эквивалентность $a \Leftrightarrow g$ та же, что в супергармоническом случае.

$a \Rightarrow b$. Пусть справедливо утверждение (а). Тогда для любой точки $x \in E$ существует окрестность V_x такая, что $\pm u|_{(E \cap V_x)} \in \overline{S}_c(E \cap V_x)$. Предположим, что $s \in S^+(E)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда из супергармонического случая (б) следует, что существует $v_+, v_- \in S_c(E)$ такое, что

$$\begin{cases} u - \varepsilon \inf(s, 1) < v_+ < u + \varepsilon \inf(s, 1) & \text{на } E, \\ -u - \varepsilon \inf(s, 1) < v_- < -u + \varepsilon \inf(s, 1) & \text{на } E. \end{cases}$$

В силу леммы 1 существует $h \in \mathcal{H}(E)$ такое, что $u - \varepsilon \inf(s, 1) < h < u + \varepsilon \inf(s, 1)$ на E . Следовательно, $|u - h| \leq \varepsilon$ на E . Гармонический случай утверждения (б) доказан.

Доказательство теоремы 3. Отметим, что эквивалентности $a \Leftrightarrow a \Leftrightarrow g \Leftrightarrow d$ установлены в [3] и [5].

$d \Rightarrow b$. Пусть верно (д). Если $u \in S_0(E)$, то $u \in C(E)$ и, в силу теоремы 2, достаточно показать, что $u|_E$ супергармонична на E' в тонкой топологии. Для этого предположим, что $x \in E'$. Тогда E – окрестность x и $\Omega \setminus E$ разрежена в x . По (д) то же самое верно для $\Omega \setminus E^0$. Следовательно, $E^0 \setminus \{x\}$ – тонкая проколотая окрестность x . Так как функция u непрерывна, то она локально ограничена. Далее, поскольку изолированная точка $\{x\}$ – полярное множество в Ω , то по теореме

об устранимой особенности супергармонических функций u обладает супергармоническим продолжением в x . Так как функция u определена и непрерывна в x , то она является продолжением самой себя. Поэтому u супергармонична в x . Далее, так как x произвольно в E' , то $u|_{E'}$ — супергармонична на E' . Из теоремы 2 следует, что $u \in \overline{S}_c(E)$. Утверждение (б) справедливо, поскольку u произвольно в $S_0(E)$.

$b \Rightarrow a$. Пусть верно (б). Предположим, что $\varepsilon > 0$ и $f \in \mathcal{H}_0(E)$. Так как $\pm f \in \overline{S}_c(E)$, то существуют $v_+, v_- \in S_c(E)$ такие, что

$$\begin{cases} f - \varepsilon < v_+ < f + \varepsilon & \text{на } E, \\ -f - \varepsilon < v_- < -f + \varepsilon & \text{на } E. \end{cases}$$

В силу леммы 1 существует $h \in \mathcal{H}(E)$, для которого

$$f - \varepsilon < h < u + \varepsilon \quad \text{на } E.$$

Следовательно, $|f - h| \leq \varepsilon$ на E . Отсюда заключаем, что $f \in \overline{\mathcal{H}}(E)$. Поскольку f произвольно в $\mathcal{H}_0(E)$, утверждение (г) доказано.

Доказательство теоремы 4.

$\gamma \Leftrightarrow \beta \Rightarrow \alpha$ в силу теорем 2, 3 и леммы 2.

$\alpha \Rightarrow \gamma$. Любое замкнутое множество, допускающее касательную гармоническую аппроксимацию, necessarily допускает равномерную гармоническую аппроксимацию и, по теореме 3, оно келдышнее. Тем самым, остается доказать необходимость условия C . Будем исходить из обратного. Предположим, что E — правильное, замкнутое множество, лежащее в Ω , но не удовлетворяющее условию C .

Этап 1 : существуют компактное множество L , исчерпание компактных множеств $(K_n)_{n \geq 1}$ и последовательность связных компонент $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$ из E^0 такие, что

$$2) K_n \subset K_{n+1}^0 \quad (\forall n \geq 1),$$

$$3) \Omega = \bigcup_{n \geq 1} K_n,$$

$$4) L \cap \Gamma_n \neq \emptyset \quad \text{и} \quad \Gamma_n \setminus K_n \neq \emptyset \quad (\forall n \geq 1).$$

Таким образом, если игнорировать некоторую подпоследовательность, то существуют последовательность $(x_n)_{n \geq 1}$ из $E \cap L$, сходящаяся к x_0 , и последовательность $(V_n)_{n \geq 1}$ открытых множеств таких, что $x_n \in L \cap \Gamma_n$ и $V_n \subset \Gamma_n \setminus K_n$ при любом $n \geq 1$. Пусть $h \in \mathcal{H}(E)$. Тогда существует шар B , т. е. параметрическая окрестность x_0 , такой, что $h \in \mathcal{H}(B)$. Следуя Т. Багби и П. М. Готье [5], заключаем, что для любого $n \geq 1$ существует $\delta_n > 0$ такое, что

$$\sup_{V_n} |h| < \delta_n \Rightarrow |D^\alpha h(x_n)| < 1/n \quad (\forall |\alpha| \leq n).$$

Следовательно, $D^\alpha h(x_0) = 0$ для любого мультииндекса α . Отсюда вытекает, что h - тождественный ноль на B . Что касается последовательности $(\delta_n)_{n \geq 1}$ на E , существует непрерывная функция ε со значениями в $(0, 1]$ такая, что $\varepsilon < \delta_n$ на V_n ($\forall n \geq 1$).

Этап 2. Пусть Ω_0 - окрестность E , обладающая функцией Грина G_0 . Рассмотрим последовательность $(a_n)_{n \geq 1}$ из $\Omega_0 \setminus E$ такую, что любая точка из ∂E - предельная точка последовательности $(a_n)_{n \geq 1}$. Существует последовательность $(\beta_n)_{n \geq 1}$ такая, что ряд $\sum_{n \geq 1} \beta_n G_0(x, a_n)$ равномерно сходится на любом компактном множестве, лежащем в E . Тогда этот ряд задает функцию $f \in \mathcal{H}_0(E)$ и не допускает гармонического продолжения в окрестность любой точки из ∂E . Поскольку E допускает касательную гармоническую аппроксимацию, то существует $h_1 \in \mathcal{H}(E)$ такое, что $|f - h_1| < \varepsilon/2$ на E . Так как $h_1 \neq f$ на $B \cap E$, то существует $y \in B \cap E$ такое, что $f(y) \neq h_1(y)$. Аналогично, существует $h_2 \in \mathcal{H}(E)$ такое, что

$$|f - h_2| < \frac{1}{2} \{ \inf(\varepsilon, |f(y) - h_1(y)|) \} \quad \text{на } E.$$

Следовательно, $|h_1 - h_2| < \varepsilon$ на E , т. е. $h_1 = h_2$ на B . Поэтому $|f(y) - h_1(y)| <$

$< |f(y) - h_1(y)|$, и получаем противоречие. Таким образом, условие C необходимо удовлетворено.

ABSTRACT. According to the localization principle, local approximation implies global approximation. We state a theorem in this direction as well as several corollaries.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. У. Аракелян, "Равномерная аппроксимация целыми функциями на замкнутых множествах", Изв. Акад. Наук СССР, сер. матем. т. 28, стр. 1187 - 1206, 1964.
2. Н. У. Аракелян, "Равномерная и касательная аппроксимация аналитическими функциями", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 3, №5, стр. 273 - 286, 1968.
3. T. Bagby, P. Blanchet, "Uniform harmonic approximation on Riemannian manifolds", J. d'Analyse Math., (to appear).
4. T. Bagby, P. M. Gauthier, "Approximation by harmonic functions on closed subsets of Riemann surfaces", J. d'Analyse Math., vol. 51, pp. 259 - 284, 1988.
5. T. Bagby, P. M. Gauthier, "Tangential harmonic approximation on Riemannian manifolds : Necessary conditions", (preprint).
6. Ch. Bensouda, "Approximation harmonique sur les fermés en théorie axiomatique de BreLOT", Thèse, Université Mohamed V, faculté des sciences de Rabat, Maroc, 1988.
7. Ch. Bensouda, "Approximation tangentielle sur les fermés d'un espace harmonique de BreLOT", Izv. AN Armenii, Matematika, [Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)], vol. 29, no. 1, pp. 13 - 28, 1994].
8. J. Bliedtner, W. Hancu, "Simplicial cones in potential theory", I, Inventiones Math., vol. 29, pp. 83 - 110, 1975; II, vol. 46, pp. 255 - 275, 1978.
9. T. Carleman, "Sur un théorème de Weierstrass", Ark. Mat. Astronom. Fys. vol. 20, pp. 1 - 5, 1927.
10. J. Deny, "Systèmes totaux de fonctions harmoniques", Ann. Inst. Fourier (Grenoble), vol. 103, no. 1, pp. 103 - 113, 1949.
11. A. Debiard, B. Gaveau, "Potentiel fin and algèbres de fonctions analytiques", I, J. Functional Anal., vol. 16, pp. 289 - 304, 1974; II, vol. 17, pp. 296 - 310, 1974.
12. B. Fuglede, "Fine potential theory", Lecture Notes in Math., no. 1344, Proceeding, Prague, pp. 81 - 97, Springer, Berlin, 1988.
13. A. Gaier, Lectures on Complex Approximation, Birkhauser, 1987.
14. S. J. Gardiner, "Superharmonic extension and harmonic approximation", (preprint).
15. S. J. Gardiner, "Tangential harmonic approximation on relatively closed sets", (preprint).
16. S. J. Gardiner, "Harmonic Approximation", (preprint).
17. S. J. Gardiner, M. Goldstein, K. N. Gowrisankaran, "Tangential approximation in harmonic spaces", Illinois Journal of Mathematics, (to appear).
18. P. M. Gauthier, "Tangential approximation by entire functions and functions holomorphic in a disc", Izv. AN Arm.SSR, Matematika, vol. 4, pp. 319 - 326, 1969.
19. P. M. Gauthier, "Approximation by (pluri) subharmonic functions : fusion and localization", Canad. J. Math., vol. 44, pp. 941 - 950, 1992.
20. P. M. Gauthier, "Uniform approximation : holomorphic; harmonic, subharmonic",

- Proc. Nankai Institute, International Press (to appear).
21. P. M. Gauthier, W. Hengartner, "Approximation uniforme qualitative sur des ensembles non bornés", Presses Univ. Montréal, 1982.
 22. P. M. Gauthier, W. Hengartner, M. Labrèche, "Approximation harmonique, approximation holomorphe et topologie", Canad. J. Math., vol. 34, pp. 216 – 219, 1982.
 23. P. M. Gauthier, S. Ladouceur, "Uniform approximation and fine potential theory", J. Approx. Theory, vol. 2, pp. 138 – 140, 1993.
 24. А. А. Гончар, "Аппроксимация непрерывных функций гармоническими функциями", ДАН СССР, т. 154, стр. 503 – 506, 1964.
 25. А. А. Гончар, "Свойство "нестабильности" гармонической меры", ДАН СССР, т. 165, стр. 479 – 481, 1965.
 26. W. Hansen, "Harmonic and superharmonic functions on compact sets", Illinois Journal of Mathematics, vol. 29, pp. 103 – 107, 1985.
 27. М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев, "Sur une problemie de M. Carleman", Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 23, pp. 746 – 748, 1939.
 28. М. В. Келдыш, "О разрешимости и стабильности задачи Дирихле", УМН, т. 8, стр. 171 – 231, 1941.
 29. M. Labrèche, "De l'approximation harmonique", Thèse, Université de Montréal, Canada, 1982.
 30. А. А. Нерсисян, "О множествах Карлемана", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 6, № 6, стр. 465 – 471, 1971.
 31. А. А. Нерсисян, "Аппроксимация гармоническими функциями на замкнутых подмножествах плоских областей", Изв. АН Армении, Математика, т. 25, № 4, стр. 274 – 283, 1990.
 32. А. А. Шагинян, "О равномерной и касательной гармонической аппроксимации непрерывных функций на произвольных множествах", Матем. заметки, т. 2, стр. 131 – 142, 1971.
 33. А. Г. Витушкин, "Необходимые и достаточные условия на множество, при которых любая непрерывная функция, аналитическая во внутренних точках множества может допускать равномерную аппроксимацию рациональными функциями", ДАН СССР, т. 7, стр. 1622 – 1625, 1966.

25 сентября 1993

Монреальский университет,
Монреаль, Квебек, Канада

ЗАКОНЫ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ ОПЦИОНАЛЬНЫХ МАРТИНГАЛОВ

К. В. Гаспарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 29, № 3, 1994

В статье дана характеристика множества сходимости для опциональных локальных мартингалов в (строго) предсказуемых терминах, что является распространением на опциональный случай результатов, полученных ранее Ю. М. Кабановым, Р. Ш. Липпером и А. Н. Ширяевым в [8] для $\text{c\grave{a}dl\grave{a}g}$ мартингалов. Получены законы повторного логарифма для локальных и локально квадратично-интегрируемых опциональных мартингалов. Доказательства проведены по известной схеме Д. Лепингля [9], с использованием вспомогательных экспоненциальных супермартингалов и соответствующей модификации леммы Бореля-Кантелли.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья продолжает начатое в работах [1, 2] исследование асимптотических свойств так называемых опциональных мартингалов. Исследуются в основном множества сходимости и законы повторного логарифма. При этом, не предполагаются выполненными "обычные" условия о непрерывности справа и P -полноте фильтрации $F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ стохастического базиса $(\Omega, \mathcal{F}, P = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$. Предполагается, что траектории опциональных мартингалов при любом $t > 0$ имеют оба односторонних предела (см. [3]) (процессы из пространства $\text{l\grave{a}g} \text{l\grave{a}d}$), в отличие от рассматриваемых обычно $\text{c\grave{a}dl\grave{a}g}$ -мартингалов, траектории которых при любом $t > 0$ непрерывны справа и имеют пределы слева. Отметим, что основы теории опциональных мартингалов были заложены Л. И. Гальчуком в работах [4 - 7].

Статья состоит из трех параграфов, из которых §1 содержит необходимые

обозначения и общие понятия. Второй параграф содержит характеристику множеств сходимости для опциональных и локально квадратично-интегрируемых, опциональных мартингалов. Условия сходимости даны в терминах строгой предсказуемости, посредством компенсатора некоторого вспомогательного, возрастающего процесса D_t (см. (1.4)) для опциональных, локальных мартингалов (теорема 2.1), или посредством квадратичной характеристики для опциональных, локально квадратично-интегрируемых мартингалов (теорема 2.2). Эти результаты являются распространениями на опциональный случай результатов, полученных ранее Ю. М. Кабаковым, Р. III. Липцером и А. И. Ширяевым [8] для càdlàg мартингалов. Третий параграф основан на результатах §2. Здесь доказаны законы повторного логарифма для опциональных мартингалов (теоремы 3.1 и 3.2), при условии интегрируемости скачков. Рассмотрены вспомогательные экспоненциальные супермартингалы (леммы 3.2 и 3.3) и использована модификация леммы Бореля-Каптелли, доказанная в [2] (лемма 3.4). В §3 результаты II. Липингеля (см. [9]), установленные для càdlàg -мартингалов, распространяются на случай опциональных мартингалов.

§1. НЕОБХОДИМЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Всюду ниже через $(\Omega, \mathcal{F}, F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ будем обозначать стохастический базис, где $\mathcal{F}$ есть P -полная σ -алгебра, $F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ — произвольный неубывающий поток σ -подалгебр $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $t \geq s \geq 0$), а P — вероятностная мера. Примем следующие обозначения :

$$F_+ = (\mathcal{F}_{t+})_{t \geq 0}, \text{ где } \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s;$$

$\mathcal{P}$ и $O(O_+)$ — σ -алгебры предсказуемых, $O(O_+)$ опциональных множеств, порожденные, соответственно, F -согласованными càdlàd процессами (с непрерывными слева траекториями, имеющими пределы справа) и $F(F_+)$ -согласованными càdlàg процессами. Те же обозначения будут использованы для соответствующих множеств измеримых процессов;

$\mathcal{P}_s$ – множество строго предсказуемых процессов ($X = (X_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{P}_s$, если $X \in \mathcal{P}$ и существует процесс $X_+ = (X_{t+})_{t \geq 0} \in \mathcal{O}$, где $X_{t+} = \lim_{s \downarrow t} X_s$);

T, T_p и T_+ – множества F -моментов остановки (м. о.), F -предсказуемых м. о. и F_+ – м. о. соответственно;

V^+ и A_{loc}^+ – соответственно, множества соответственно возрастающих и локально интегрируемых, возрастающих процессов ($A \in A_{loc}^+$, если $A \in V^+$, F -согласовано и существует последовательность $(R_n)_{n \geq 1} \subset T_+$, $R_n \uparrow \infty$ п. н. (почти наперняка), и $E A_{R_n+} < \infty$ для любого $n \geq 1$);

V и A_{loc} соответственно – множества соответственно всех процессов ограниченной и локально-интегрируемой вариации ($A \in A_{loc}$, если A F -согласовано и существует последовательность $(R_n)_{n \geq 1} \subset T_+$, $R_n \uparrow \infty$ п. н., и при любом $n \geq 1$ имеем $E \text{Var}_{[0, R_n]} A < \infty$, где $[0, R_n] = \{(\omega, t) : 0 \leq t \leq R_n(\omega)\}$ – стохастический интервал, $\text{Var}_{[0, R_n]} A$ – вариация процесса A на интервале $[0, R_n]$);

$M(M^2)$ – множества всех опциональных (опциональных, квадратично-интегрируемых) мартингалов ($M \in M(M^2)$, если $M \in \mathcal{O}$ и существует $\mathcal{F}_\infty$ -измеримая с. в. (случайная величина) $\widetilde{M}$ с $E|\widetilde{M}| < \infty$ ($E|\widetilde{M}|^2 < \infty$) такая, что $E[\widetilde{M} | \mathcal{F}_T] = M_T$ п. н. на множестве $(T < \infty)$, при любом $T \in T$);

$M_{loc}(M_{loc}^2)$ – множества всех локальных (локально, квадратично-интегрируемых) опциональных мартингалов ($M \in M_{loc}(M_{loc}^2)$, если $M \in \mathcal{O}$ и существует последовательность $(R_n, M^n)_{n \geq 1}$, где $R_n \in \mathcal{F}_+$, $M^n \in M(M^2)$ такая, что $R_n \uparrow \infty$ п. н., $M = M^n$ на интервале $[0, R_n]$ и $E|M_{R_n+}| < \infty$ ($E|M_{R_n+}|^2 < \infty$) при любом $n \geq 1$);

Процесс $X = (X_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{O}$ называется опциональным супермартингалом, если : а) $E|X_T| I_{T < \infty} < \infty$ для любого $T \in T$, где $I_{T < \infty}$ – индикатор множества $(T < \infty)$; б) $E[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s$ п. н. для всех $s \leq t$; в) существует с. в. $\tilde{X}$ с $E|\tilde{X}| < \infty$ такая, что п. н. $E[\tilde{X} | \mathcal{F}_T] \leq X_T$ на любом множестве $(T < \infty)$, $T \in T$.

Замечание 1. Введенный выше класс опциональных мартингалов (супермартингалов) достаточно широк. Если $X = (X_t)_{t \geq 0}$ — некоторый мартингал (супермартингал) в обычном смысле и существует с. в. $\tilde{X}$, с $E|\tilde{X}| < \infty$ такая, что $E[\tilde{X}|\mathcal{F}_t] = X_t (\leq X_t)$ п. н. для всех $t \geq 0$, то существует опциональный мартингал (супермартингал) X' , являющийся модификацией процесса X [4, 10].

Замечание 2. Известно (см. [3]), что любой опциональный процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ является опционально сепарабельным, то есть существует последовательность $(S_n)_{n \geq 1} \subset T$ (множество опциональной сепарабельности), всюду плотная на $\mathbb{R}_+$ и такая, что график процесса $X = (X_t)_{t \geq 0}$ содержится в замыкании графика последовательности $(X_{S_n})_{n \geq 1}$. Кроме того, при некоторой непрерывной замене времени $(T_t)_{t \geq 0}$ опционально-сепарабельный процесс $(X_t)_{t \geq 0}$ становится сепарабельным в обычном смысле (см. [3]). Таким образом, траектории опциональных, локальных мартингалов и супермартингалов для всех $t \geq 0$ имеют п. н. пределы слева $X_{t-}(\omega) = \lim_{s \uparrow t} X_s(\omega)$ и справа $X_{t+}(\omega) = \lim_{s \downarrow t} X_s(\omega)$ (см. [13]).

Для процесса $X = (X_t)_{t \geq 0}$ условимся обозначать через $(X \rightarrow)$ множество тех $\omega \in \Omega$, для которых существует конечное финальное значение $X_\infty(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} X_t(\omega) < \infty$. Для множеств $A, B \in \mathcal{F}$ запись $A = B$ п. н., или $A \subset B$ п. н., будет означать, соответственно, $P(A \Delta B) = 0$, или $P(A \cap (\Omega \setminus B)) = 0$, где Δ — знак симметрической разности множеств. Пусть $M = (M_t)_{t \geq 0} \in M_{loc}$. Тогда имеет место единственное (с точностью до неотличимости) разложение (см. [5])

$$M = M^c + M^d, \quad (1.1)$$

где $M^c = M^c + M^d \in M_{loc}$, $M^c \in M_{loc}$ и $M^d(M^g) \in M_{loc}$, соответственно, непрерывная и “чисто разрывная” càdlàg (càglàd) составляющие для мартингала M (процессы M^d и M^g ортогональны любому непрерывному процессу $Y \in M_{loc}$, т. е. $M^d Y \in M_{loc}$, $M^g Y \in M_{loc}$). Далее, определим следующие процессы:

$$[M, M]_t = \langle M^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} (\Delta M_s)^2 + \sum_{s \leq t} (\Delta^+ M_s)^2, \quad (1.2)$$

$$B_t = \sum_{s \leq t} (1 + |\Delta M_s|)^{-1} (\Delta M_s)^2 + \sum_{s < t} (1 + |\Delta^+ M_s|)^{-1} (\Delta^+ M_s)^2, \quad (1.3)$$

$$D_t = \langle M^c \rangle_t + B_t, \quad (1.4)$$

где $\Delta M_s = M_s - M_{s-}$, $\Delta^+ M_s = M_{s+} - M_s$, а $\langle M^c \rangle \in A_{loc}^+$ — квадратическая характеристика для $M^c \in M_{loc}$, $((M^c)^2 - \langle M^c \rangle \in M_{loc})$. Ряды в (1.2) и (1.3) сходятся п. н., и $[M, M] \in V^+$, $B \in A_{loc}^+$ (см. [5], [8]).

§2. МНОЖЕСТВА СХОДИМОСТИ ДЛЯ ОПЦИОНАЛЬНЫХ МАРТИНГАЛОВ

Основными результатами этого параграфа являются нижеприведенные две теоремы, анонсированные ранее в [1].

Теорема 2.1. а) Если $M \in M_{loc}$, то $(\tilde{D}_\infty < \infty) \subseteq (M \rightarrow)$ п. н..

б) Если $M \in M_{loc}$ и для всех $T \in T$ и $U \in T_+$ имеем $E|\Delta M_T|I(T < \infty) < \infty$ и $E|\Delta^+ M_U|I(U < \infty) < \infty$, то $(\tilde{D}_\infty < \infty) = ([M, M]_\infty < \infty) = (M \rightarrow)$ п. н., где $\tilde{D} \in \mathcal{P}_s \cap A_{loc}^+$ — компенсатор процесса $D \in A_{loc}^+$ ($D - \tilde{D} \in M_{loc}$).

Теорема 2.2. а) Если $M \in M_{loc}^2$, то $(\langle M \rangle_\infty < \infty) \subseteq (M \rightarrow)$ п. н..

б) Если $M \in M_{loc}^2$ и для всех $T \in T$ и $U \in T_+$ имеем $E|\Delta M_T|^2 I(T < \infty) < \infty$ и $E|\Delta^+ M_U|^2 I(U < \infty) < \infty$, то $(\langle M \rangle_\infty < \infty) = ([M, M]_\infty < \infty) = (M \rightarrow)$ п. н., где $\langle M \rangle \in \mathcal{P}_s \cap A_{loc}$ — квадратическая характеристика мартингала M (см. [5]).

Для доказательства этих теорем нам понадобится следующая

Лемма 2.1. а) Если $A \in A_{loc}^+$, то $(\tilde{A}_\infty < \infty) \subseteq (A_\infty < \infty)$ п. н..

б) Если $A \in A_{loc}^+$ и для всех $T \in T$ и $U \in T_+$ имеем $E\Delta A_T I_{T < \infty} < \infty$ и $E\Delta^+ A_U I_{U < \infty} < \infty$, то $(\tilde{A}_\infty < \infty) = (A_\infty < \infty)$ п. н.

Доказательство. а) Процесс $A \in A_{loc}^+$ можно записать в виде

$$A = A^r + A^g,$$

где $A^r = A^c + \sum_{s \leq \cdot} \Delta A_s \in A_{loc}^+$, $A^g = \sum_{s < \cdot} \Delta^+ A_s \in A_{loc}^+$, а $A^c \in A_{loc}^+$ — непрерывный процесс (ряды п. н. абсолютно сходятся).

Рассмотрим процессы

$$A'_t = \int_{[0,t]} I(\Delta \tilde{A}_s > 1) dA_s^r + \int_{[0,t]} I(\Delta^+ \tilde{A}_s > 1) dA_{s+}^g \in A_{loc}^+, \quad (2.1)$$

$$A''_t = \int_{[0,t]} I(\Delta \tilde{A}_s \leq 1) dA_s^r + \int_{[0,t]} I(\Delta^+ \tilde{A}_s \leq 1) dA_{s+}^g \in A_{loc}^+, \quad (2.2)$$

(интегралы в (2.1) и (2.2) понимаются в смысле Лебега-Стилтьеса). В силу теоремы 1.6.3 из [11] и теоремы 1.10 из [7], из (2.1) и (2.2) следует, что

$$\tilde{A}'_t = \int_{[0,t]} I(\Delta \tilde{A}_s > 1) d\tilde{A}_s^r + \int_{[0,t]} I(\Delta^+ \tilde{A}_s > 1) d\tilde{A}_{s+}^g \in \mathcal{P}_s \cap A_{loc}^+, \quad (2.3)$$

$$\tilde{A}''_t = \int_{[0,t]} I(\Delta \tilde{A}_s \leq 1) d\tilde{A}_s^r + \int_{[0,t]} I(\Delta^+ \tilde{A}_s \leq 1) d\tilde{A}_{s+}^g \in \mathcal{P}_s \cap A_{loc}^+. \quad (2.4)$$

Далее, из (2.3) и (2.4) получаем, что п. н.

$$\begin{aligned} (\tilde{A}'_\infty < \infty) &\subseteq \left(\sum_{s>0} I(\Delta \tilde{A}_s > 1) + \sum_{s \geq 0} I(\Delta^+ \tilde{A}_s > 1) < \infty \right) \subseteq \\ &\subseteq \left(\sum_{s>0} I(\Delta \tilde{A}_s > 1) \Delta A_s + \sum_{s \geq 0} I(\Delta^+ \tilde{A}_s > 1) \Delta^+ A_s < \infty \right) = (A'_\infty < \infty). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Определим для некоторого $a > 0$ моменты остановки

$$T_a^1 = \inf \left(t \geq 0 : (\tilde{A}''_t)^r > a \right) \in \mathcal{T}_p, \quad T_a^2 = \inf \left(t \geq 0 : (\tilde{A}''_t)^g > a \right) \in \mathcal{T}. \quad (2.6)$$

В силу свойств компенсаторов возрастающих процессов $(A_t'')^r$ и $(A_t'')^g$ (см. [5], теоремы 2.2 и 2.3) и ввиду определений (2.6)

$$E(A'')_{T_a^1}^r = E(\tilde{A}'')_{T_a^1}^r \leq a + 1, \quad E(A'')_{T_a^2}^g = E(\tilde{A}'')_{T_a^2}^g \leq a.$$

Отсюда следует, что $P(((A'')_\infty^r = \infty) \cap (T_a^1 = \infty)) = 0$ и $P(((A'')_\infty^g = \infty) \cap (T_a^2 = \infty)) = 0$, т.е.

$$((\tilde{A}'')_\infty^r < \infty) = \cup_{a>0} (T_a^1 = \infty) \subseteq ((A'')_\infty^r < \infty) \quad \text{п. н.}, \quad (2.7)$$

$$((\tilde{A}'')_\infty^g < \infty) = \cup_{a>0} (T_a^2 = \infty) \subseteq ((A'')_\infty^g < \infty) \quad \text{п. н.} \quad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) вытекает, что п. н.

$$(\widetilde{A}_{\infty}'' < \infty) = ((\widetilde{A}_{\infty}'')^r < \infty) \cap ((\widetilde{A}_{\infty}'')^g < \infty) \subseteq ((A_{\infty}'')^r < \infty) \cap ((A_{\infty}'')^g < \infty) = (A_{\infty}'' < \infty). \quad (2.9)$$

Наконец, из (2.5), (2.9) и равенств

$$(\widetilde{A}_{\infty} < \infty) = (\widetilde{A}_{\infty}' < \infty) \cap (\widetilde{A}_{\infty}'' < \infty) \quad \text{и} \quad (A_{\infty} < \infty) = (A_{\infty}' < \infty) \cap (A_{\infty}'' < \infty)$$

приходим к утверждению а). 6) Определим для $a > 0$ моменты остановки $S_a^1 = \inf(t \geq 0: A_t^r > a) \in T$, $S_a^2 = \inf(t \geq 0: A_{t+}^g > a) \in T_+$. Из определения компенсатора следует

$$E\widetilde{A}_{S_1^1}^r = EA_{S_1^1}^r \leq a + E\Delta A_{S_1^1} I(S_a^1 < \infty) < \infty, \quad (2.10)$$

$$E\widetilde{A}_{S_2^2+}^g = EA_{S_2^2+}^g \leq a + E\Delta^+ A_{S_2^2} I(S_a^2 < \infty) < \infty. \quad (2.11)$$

Из (2.10) и (2.11) следует, что $P((\widetilde{A}_{\infty}^r = \infty) \cap (S_a^1 = \infty)) = 0$ и $P((\widetilde{A}_{\infty}^g = \infty) \cap (S_a^2 = \infty)) = 0$, т. е.

$$(A_{\infty}^r < \infty) = \bigcup_{a>0} (S_a^1 = \infty) \subseteq (\widetilde{A}_{\infty}^r < \infty) \quad \text{п. н.}, \quad (2.12)$$

$$(A_{\infty}^g < \infty) = \bigcup_{a>0} (S_a^2 = \infty) \subseteq (\widetilde{A}_{\infty}^g < \infty) \quad \text{п. н.} \quad (2.13)$$

Наконец, из (2.12) и (2.13) следует, что п. н.

$$(A_{\infty} < \infty) = (A_{\infty}^r < \infty) \cap (A_{\infty}^g < \infty) \subseteq (\widetilde{A}_{\infty}^r < \infty) \cap (\widetilde{A}_{\infty}^g < \infty) = (\widetilde{A}_{\infty} < \infty),$$

что вместе с доказанным утверждением а) приводит к утверждению б).

Доказательство теоремы 2.1. Для процесса $M \in M_{\text{loc}}$ будем рассматривать разложение $M = M' + M''$, где

$$M'_t = \int_{[0,t]} I(\Delta \widetilde{B}_s^r > 1) dM_s^r + \int_{[0,t]} I(\Delta^+ \widetilde{B}_s^g > 1) dM_{s+}^g \in M_{\text{loc}}, \quad (2.14)$$

$$M''_t = \int_{[0,t]} I(\Delta \widetilde{B}_s^r \leq 1) dM_s^r + \int_{[0,t]} I(\Delta^+ \widetilde{B}_s^g \leq 1) dM_{s+}^g \in M_{\text{loc}}, \quad (2.15)$$

$M = M^r + M^g$ (см. (1.1)), $B = B^r + B^g$ (см. (1.3)), $B^r = \sum_{s \leq \cdot} (1 + |\Delta M_s|)^{-1} (\Delta M_s)^2$ и $B^g = \sum_{s \leq \cdot} (1 + |\Delta^+ M_s|)^{-1} (\Delta^+ M_s)^2$ (относительно определения интегралов в (2.14) и (2.15) см., напр., [5] и [11]). Процесс B' , соответствующий процессу $M' \in M_{loc}$ (см. (1.3)), определяется следующим образом:

$$B'_t = \int_{[0,t]} I(\Delta \widetilde{B}_s^r > 1) d\widetilde{B}_s^r + \int_{[0,t]} I(\Delta^+ \widetilde{B}_s^g > 1) d\widetilde{B}_{s+}^g \in A_{loc}^+. \quad (2.16)$$

Тем самым, компенсатор процесса B' имеет вид (см. [15] и [7])

$$\widetilde{B}'_t = \int_{[0,t]} I(\Delta \widetilde{B}_s^r > 1) d\widetilde{B}_s^r + \int_{[0,t]} I(\Delta^+ \widetilde{B}_s^g > 1) d\widetilde{B}_{s+}^g. \quad (2.17)$$

Из (2.17) и (2.14) приходим к следующим вложениям — п. п.

$$(\widetilde{D}_\infty < \infty) \subseteq (\widetilde{B}'_\infty < \infty) \subseteq \left(\sum_{s > 0} \left[I(\Delta \widetilde{B}_s^r > 1) + I(\Delta^+ \widetilde{B}_s^g > 1) \right] < \infty \right) \subseteq (M' \rightarrow). \quad (2.18)$$

С другой стороны, процесс B'' , соответствующий процессу $M'' \in M_{loc}$, представим в виде

$$B''_t = \int_{[0,t]} I(\Delta \widetilde{B}_s^r \leq 1) d\widetilde{B}_s^r + \int_{[0,t]} I(\Delta^+ \widetilde{B}_s^g \leq 1) d\widetilde{B}_{s+}^g \quad (2.19)$$

(см. (1.3)). Откуда для компенсатора $\widetilde{B}''$ получим (см. [11] и [7])

$$\widetilde{B}''_t = \int_{[0,t]} I(\Delta \widetilde{B}_s^r \leq 1) d\widetilde{B}_s^r + \int_{[0,t]} I(\Delta^+ \widetilde{B}_s^g \leq 1) d\widetilde{B}_{s+}^g. \quad (2.20)$$

Для процесса

$$\widetilde{D}'' = \langle M^c \rangle + \widetilde{B}'', \quad (2.21)$$

согласно (2.20) имеем

$$\Delta \widetilde{D}'' \leq 1. \quad (2.22)$$

Полагая $T_a^1 = \inf \left(t > 0 : (\widetilde{D}'')_t^r > a \right) \in T_p$, $T_a^2 = \inf \left(t > 0 : (\widetilde{B}'')_t^g > a \right) \in T$ и $T_a = T_a^1 \wedge T_a^2 \in T$ для $a > 0$ и имея ввиду (2.22), получим

$$E(D'')_{T_a^1}^r = E(\widetilde{D}'')_{T_a^1}^r \leq a + 1, \quad (2.23)$$

$$E(B''^g)_{T_2^*} = E(\widetilde{B''})_{T_2^*}^g \leq a. \quad (2.24)$$

Из (2.21) легко следует, что

$$E < M^c >_{T_1^*}^{1/2} \leq \left(E(\widetilde{D''})_{T_1^*}^r \right)^{1/2}. \quad (2.25)$$

Воспользовавшись теперь известным неравенством (см. [11], лемму 2.2.1)

$$\left(\sum_{s \leq l} X_s^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{4} + 2 \sum_{s \leq l} X_s^2 (1 + |X_s|)^{-1},$$

имеющим место для любого процесса $X \in O$ такого, что множество $\{l: X_l \neq 0\}$ не более чем счетное, получим

$$\begin{aligned} E[(M'')^r, (M'')^g]_{T_1^*}^{1/2} &\leq E < M^c >_{T_1^*}^{1/2} + E \left(\sum_{s \leq T_1^*} I(\Delta \widetilde{B}_s^r \leq 1) (\Delta M_s)^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(E(\widetilde{D''})_{T_1^*}^r \right)^{1/2} + \frac{1}{4} + 2E \left(\widetilde{D''} \right)_{T_1^*}^r, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$E[(M'')^g, (M'')^g]_{T_2^*}^{1/2} \leq E \left(\sum_{s \leq T_2^*} I(\Delta^+ \widetilde{B}_s^g \leq 1) (\Delta^+ M_s)^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{4} + 2E \left(\widetilde{B''} \right)_{T_2^*}^g. \quad (2.27)$$

Далее, пользуясь неравенствами Дэвиса и Кунита-Ватанабе (см. [12] и [5]) для опциональных мартингалов, а также неравенствами (2.23), (2.24), (2.26) и (2.27), получим

$$E \sup_{t \leq T_a} |M_t''| \leq C \left(E[(M'')^r, (M'')^r]_{T_a^*}^{1/2} + E[(M'')^g, (M'')^g]_{T_a^*}^{1/2} \right) < \infty, \quad (2.28)$$

где $C = 51\sqrt{2} + 8$. Из (2.28) следует, что процесс $(M'')^{T_a}$, остановленный в момент T_a , является равномерно интегрируемым мартингалом, т. е. $P((M'')^{T_a} \rightarrow) = 1$ (см. [13], теорему 6.1.6). Тем самым, $P(M'' \nrightarrow, T_a = \infty) = 0$, т. е. $P(M'' \nrightarrow, \bigcup_{a \in N} (T_a = \infty)) = 0$. Отсюда следует, что

$$(\widetilde{D''}_\infty < \infty) = \bigcup_{a \in N} (T_a = \infty) \subseteq (M'' \rightarrow) \quad \text{п. н.} \quad (2.29)$$

Наконец, ввиду (2.18) и (2.29) $(\widetilde{D}_\infty < \infty) = (\widetilde{B''}_\infty < \infty) \cap (\widetilde{D''}_\infty < \infty) \subseteq$

$\subseteq (M' \rightarrow) \cap (M'' \rightarrow) = (M \rightarrow)$ п. н., что доказывает утверждение а).

б) Положим $S_a = \inf\{t \geq 0: |M_{t+}| \geq a\} \in T_+$, где $a > 0$. Тогда

$$E \sup_{t \leq S_a} |M_{t+}| \leq a + E |\Delta^+ M_{S_a}| I(S_a < \infty) < \infty, \quad (2.30)$$

и, согласно неравенству Дэвиса для мартингала $M_+ \in M_{loc}(F_+)$

$$E [M, M]_{S_a+}^{1/2} < \infty. \quad (2.31)$$

Далее, из (2.31), (1.2) и (1.3) следует, что

$$\begin{aligned} (M \rightarrow) &\subseteq (\sup_t |M_t| < \infty) = (\sup_t |M_{t+}| < \infty) = \bigcup_{a>0} (S_a = \infty) \subseteq ([M, M]_{\infty}^{1/2} < \infty) = \\ &= ([M, M]_{\infty} < \infty) \subseteq (D_{\infty} < \infty) \quad \text{п. н.} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Однако, так как $\Delta D \leq |\Delta M|$ и $\Delta^+ D \leq |\Delta^+ M|$ (см. (1.3)), то в силу леммы 2.1

$$(D_{\infty} < \infty) = (\bar{D}_{\infty} < \infty) \quad \text{п. н.} \quad (2.33)$$

Наконец, ввиду (2.32), (2.33) и уже доказанного утверждения а), $(M \rightarrow) \subseteq ([M, M]_{\infty} < \infty) \subseteq (\bar{D}_{\infty} < \infty) \subseteq (M \rightarrow)$ п. н., откуда следует утверждение б).

Доказательство теоремы 2.2 аналогично доказательству соответствующего результата работы [8].

§3. ЗАКОНЫ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА

Как известно (см. [9]), для $\text{c\grave{a}dl\grave{a}g}$ мартингалов имеет место закон повторного логарифма. Основными результатами этого параграфа являются распространения закона повторного логарифма на случай опциональных мартингалов, содержащиеся в двух нижеследующих теоремах.

Теорема 3.1. Пусть $M \in M_{loc}^2$ и $E \sup_t |\Delta M_t| < \infty$, $E \sup_t |\Delta^+ M_t| < \infty$. Тогда на множестве $(\langle M \rangle_{\infty} = \infty)$ $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (2 \langle M \rangle_t \log \log \langle M \rangle_t)^{-1/2} M_t \leq 1$ п. н.

Теорема 3.2. Пусть $M \in M_{loc}$ и $E \sup_t |\Delta M_t| < \infty$, $E \sup_t |\Delta^+ M_t| < \infty$. Тогда на множестве $([M, M]_{\infty} = \infty)$ $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (2[M, M]_t \log \log [M, M]_t)^{-1/2} M_t \leq 1$ п. н.

Предположим, что $M \in M_{loc}$, и что $\mu^1(\mu^2) - O(O_+)$ -измеримая, случайная мера, порожденная скачками ΔM ($\Delta^+ M$) мартингала M с $\mathcal{P}(O)$ -измеримым компенсатором $\nu^1(\nu^2)$ (см. [7]). Далее, определим процесс

$$\alpha(M)_t = \exp \left\{ M_t - 1/2 \langle M^c \rangle_t - \sum_{i=1}^2 (e^u - 1 - u) * \nu_t^i \right\}, \quad (3.1)$$

где

$$(e^u - 1 - u) * \nu_t^1 = \iint_{[0,t] \times E} (e^u - 1 - u) \nu^1(ds, du) \in A_{loc}^+, \quad E = \mathbb{R}^1 \setminus \{0\},$$

$$(e^u - 1 - u) * \nu_t^2 = \iint_{[0,t] \times E} (e^u - 1 - u) \nu^2(ds, du) \in A_{loc}^+.$$

Для доказательства теорем 3.1 и 3.2 нам понадобятся следующие леммы (ср. [9]).

Лемма 3.1. *Всякий неотрицательный процесс $M \in M_{loc}$ является опциональным супермартингалом.*

Лемма 3.2. *Для любого $M \in M_{loc}$ процесс $\alpha(M)$ является опциональным супермартингалом.*

Лемма 3.3. *Пусть $M \in M_{loc}$ так, что $\Delta M \leq c$, $\Delta^+ M \leq c$ ($c > 0$). Тогда процесс $\gamma(M)_t = \exp(\lambda M_t - \varphi_c(\lambda) \langle M \rangle_t)$ является опциональным супермартингалом, где $\varphi_c(\lambda) = c^{-2}(e^{\lambda c} - 1 - \lambda c)$, $\lambda > 0$.*

Имеет место также следующий вариант леммы Бореля-Кантелли (доказательство см. в [2]).

Лемма 3.4. *Пусть для процесса $A = A^r + A^g \in A_{loc}^+$ выполнены следующие условия: а) $\tilde{A}_\infty^r = \infty$, $\tilde{A}_\infty^g = \infty$ п. н.; б) $E \sup_t \Delta A_t < \infty$, $E \sup_t \Delta^+ A_t < \infty$. Тогда $\tilde{A}_t^{-1} A_t \rightarrow 1$ п. н. при $t \rightarrow \infty$.*

Доказательство леммы 3.1. Пусть $M \in M_{loc}$, $M \geq 0$. Тогда существуют $M^n \in M$, $M^n \geq 0$, и $R_n \in T_+$, $R_n \uparrow \infty$ п. н. такие, что при любом $n \geq 1$ на

стохастическом интервале $[0, R_n]$ справедливо равенство $M = M^n$. Далее, для любых $t \geq s$ и $A \in \mathcal{F}_s$ имеем

$$\begin{aligned} EM_t I(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} EM_t I(A) I(t \leq R_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} EM_t^n I(A) I(t \leq R_n) \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} EM_t^n I(A) I(s \leq R_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} EM_s^n I(A) I(s \leq R_n) = EM_s I(A). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что процесс $M = (M_t)_{t \geq 0}$ — неотрицательный супермартингал в обычном смысле, и, согласно теореме 6.2.6 из [13], существует $M_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} M_t$ п. н., $EM_\infty < \infty$ и $E[M_\infty | \mathcal{F}_t] \leq M_t$ п. н., то есть $E[M_\infty | \mathcal{F}_T] \leq M_T$ п. н. на множестве $(T < \infty)$ для любого $T \leq T$ (см. [13], теорему 6.2.13). Тем самым, M является опциональным супермартингалом.

Доказательство леммы 3.2. Определим следующие процессы :

$$\beta(M)_t = \exp(M_t - 1/2 \langle M^c \rangle_t), \quad H_t = \exp(M_t), \quad L_t = \exp(-1/2 \langle M^c \rangle_t).$$

По формуле замены переменных Ито (см. [5])

$$\begin{aligned} H_t &= 1 + \int_{[0,t]} H_{s-} dM_s^r + 1/2 \int_{[0,t]} H_{s-} d \langle M^c \rangle_s + \int_{[0,t]} H_s dM_{s+}^g + \\ &+ \iint_{[0,t] \times E} H_{s-} (e^u - 1 - u) \mu^1(ds, du) + \iint_{[0,t] \times E} H_s (e^u - 1 - u) \mu^2(ds, du), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$L_t = 1 - 1/2 \int_{[0,t]} L_s d \langle M^c \rangle_s \quad (3.4)$$

(относительно определений интегралов правой части (3.3) см. [7]). Далее, интегрируя по частям получим

$$\begin{aligned} \beta(M)_t = H_t L_t &= 1 + \int_{[0,t]} H_{s-} dL_s^r + \int_{[0,t]} H_s dL_{s+}^g + \int_{[0,t]} L_{s-} dH_s^r + \\ &+ \int_{[0,t]} L_s dH_{s+}^g + [H, L]_t. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из (3.4) заключаем, что $L^g = 0$, $L_- = L$ и $[H, L] = 0$, а из (3.3) следует, что

$$\begin{aligned} H_t^r &= 1 + \int_{[0,t]} H_{s-} dM_s^r + 1/2 \int_{[0,t]} H_{s-} d \langle M^c \rangle_s + \\ &+ \iint_{[0,t] \times E} H_{s-} (e^u - 1 - u) \mu^1(ds, du), \\ H_t^g &= \int_{[0,t]} H_s dM_{s+}^g + \iint_{[0,t] \times E} H_s (e^u - 1 - u) \mu^2(ds, du). \end{aligned}$$

Таким образом, (3.5) приводится к виду

$$\beta(M)_t = 1 - \frac{1}{2} \int_{[0,t]} \beta(M)_{s-} d < M^c >_s + \int_{[0,t]} \beta(M)_{s-} d(M_s^r + 1/2 < M^c >_s + A_s^r) + \int_{[0,t]} \beta(M)_s d(M_{s+}^g + A_{s+}^g), \quad (3.6)$$

где $A^r = (e^u - 1 - u) * \mu^1$ а $A^g = (e^u - 1 - u) * \mu^2$. После очевидных преобразований из (3.6) получим

$$\beta(M)_t = 1 + \int_{[0,t]} \beta(M)_{s-} d(M_s^r + A_s^r) + \int_{[0,t]} \beta(M)_s d(M_{s+}^g + A_{s+}^g),$$

откуда вытекает, что

$$\beta(M) = \varepsilon(M + A), \quad (3.7)$$

где $\varepsilon(\cdot)$ — экспонента Дoleans (см. [7]), а $A = A^r + A^g$. Учитывая, что $\widetilde{A}^r = (e^u - 1 - u) * \nu^1$, $\widetilde{A}^g = (e^u - 1 - u) * \nu^2$ (см. [7], леммы 3.1 и 3.3) и имея в виду (3.7), запишем процесс $\alpha(M)$ из (3.1) в виде

$$\alpha(M) = \varepsilon(N + \widetilde{A}) \exp(-\widetilde{A}), \quad (3.8)$$

где $N = M + (A - \widetilde{A}) \in M_{loc}$, $\widetilde{A} = \widetilde{A}^r + \widetilde{A}^g \in \mathcal{P}_+ \cap A_{loc}^+$. Но так как $\Delta \widetilde{A} > 0$ и $\Delta^+ \widetilde{A} > 0$ ($\Delta A = \exp(\Delta M) - 1 - \Delta M > 0$, $\Delta^+ A = \exp(\Delta^+ M) - 1 - \Delta^+ M > 0$), то, согласно [14] (теорема 1), $\varepsilon(N + \widetilde{A}) = \varepsilon(\widetilde{N}) \varepsilon(\widetilde{A})$, где $\widetilde{N}_t = \int_{[0,t]} (1 + \Delta \widetilde{A}_s)^{-1} dN_s^r + \int_{[0,t]} (1 + \Delta^+ \widetilde{A}_s)^{-1} dN_{s+}^g$, $N = N^r + N^g$. Следовательно, (3.8) запишется в виде

$$\alpha(M) = \varepsilon(\widetilde{N}) \prod_{s \leq \cdot} (1 + \Delta \widetilde{A}_s) \exp(-\Delta \widetilde{A}_s) \prod_{s < \cdot} (1 + \Delta^+ \widetilde{A}_s) \exp(-\Delta^+ \widetilde{A}_s). \quad (3.9)$$

Поскольку бесконечные произведения правой части этой формулы не превосходят единицы и $\varepsilon(\widetilde{N})$ — опциональный супермартингал (лемма 3.1), то из (3.9) следует, что для любого $T \in \mathcal{T}$

$$E\alpha(M)_T \leq E\varepsilon(\widetilde{N})_T \leq 1. \quad (3.10)$$

Из (3.10) следует, что $\alpha(M)$ является супермартингалом в обычном смысле, и так как $\alpha(M) \in O$, то он к тому же сепарабелен (см. замечание 2). Поэтому

существует $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(M)_t = \alpha_\infty$ п. н., где $E\alpha_\infty < \infty$ и $E[\alpha_\infty | \mathcal{F}_t] \leq \alpha(M)_t$ (см. [13], теорему 6.2.6). Отсюда следует, что $E[\alpha_\infty | \mathcal{F}_T] \leq \alpha(M)_T$ для любого $T \in \mathcal{T}$ (см. [13], теорему 6.2.13), т. е. $\alpha(M)$ — опциональный супермартингал.

Доказательство леммы 3.3. Напомним (см. [7]), что в разложении (1.1)

$$M_t^d = \iint_{[0,t] \times E} u(\mu^1 - \nu^1)(ds, du), \quad M_t^g = \iint_{[0,t] \times E} u(\mu^2 - \nu^2)(ds, du),$$

$$\langle M^d \rangle = u^2 \times \nu^1, \quad \langle M^g \rangle = u^2 \times \nu^2 \quad (\text{см. [11], задачу 3.5.2})$$

имеем

$$\langle M \rangle = \langle M^c \rangle + \sum_{i=1}^2 u^2 * \nu^i. \quad (3.11)$$

Используя (3.11) и элементарные неравенства $\varphi_c(\lambda) \geq \frac{\lambda^2}{2}$ и $\exp(\lambda u) - 1 - \lambda u \leq \varphi_c(\lambda)u^2$ для всех $u \leq c$, получим, что

$$\begin{aligned} \gamma(M)_t &\leq \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} \langle M^c \rangle_t - \varphi_c(\lambda) \sum_{i=1}^2 u^2 * \nu_t^i\right) \leq \\ &\leq \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} \langle M^c \rangle_t - \sum_{i=1}^2 (\exp(\lambda u) - 1 - \lambda u) * \nu_t^i\right) = \alpha(\lambda M)_t. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Утверждение леммы следует теперь из того, что в (3.12) процесс $\alpha(\lambda M)$ является опциональным супермартингалом (см. лемму 3.2).

Доказательство теоремы 3.1. а) Предположим сначала, что $\Delta M \leq c$, $\Delta^+ M \leq c$ ($c > 0$) и воспользуемся известным неравенством $P(\sup_t X_t > c) \leq c^{-1} X_0$ ($c > 0$) (см. [6]) для неотрицательного опционального супермартингала $X = (X_t)_{t \geq 0}$. Положив здесь $X = \gamma(M)$ (лемма 3.3) и $c = \exp(\lambda a)$ ($\lambda > 0$, $a > 0$), получим

$$P\left(\sup_t (\lambda M_t - \varphi_c(\lambda) \langle M \rangle_t) > \lambda a\right) \leq \exp(-\lambda a). \quad (3.13)$$

Следуя [9], обозначим

$$a_k = \frac{(1 + \delta)(2\theta^k \log \log \theta^k)^{1/2}}{2}, \quad \lambda_k = \theta^{-k}(2\theta^k \log \log \theta^k)^{1/2}, \quad (3.14)$$

где $\theta > 1$, $\delta > 0$ и $k \geq 1$ таковы, что $\theta^k \geq e$. Далее, положим $T_k = \inf\{t \geq 0:$

$\langle M \rangle_t \geq \theta^k\} \in T$, $k \geq 1$. Тогда на стохастическом интервале $]T_k, T_{k+1}[$

$$\begin{aligned} a_k + \lambda_k^{-1} \varphi_c(\lambda_k) < M \rangle_t &\leq a_k + \lambda_k^{-1} \varphi_c(\lambda_k) \theta^{k+1} \leq \\ &\leq \left(\frac{1+\delta}{2} + \theta \lambda_k^{-2} \varphi_c(\lambda_k)\right) (2 \langle M \rangle_t \log \log \langle M \rangle_t)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Воспользовавшись теперь супермаргингальным неравенством (3.13) с $\lambda = \lambda_k$ и $a = a_k$, получим

$$P\left(\sup_t (M_t - \lambda_k^{-1} \varphi_c(\lambda_k) < M \rangle_t) > a_k\right) \leq (k \log \theta)^{-1-\delta}. \quad (3.16)$$

Из (3.15) и (3.16), ввиду классической леммы Бореля-Кантелли следует, что на множестве $\langle M \rangle_\infty = \infty$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (2 \langle M \rangle_t \log \log \langle M \rangle_t)^{-1/2} M_t \leq \frac{1+\delta+\theta}{2} \text{ п. п.}, \quad (3.17)$$

так как $\lim_{k \rightarrow \infty} ((1+\delta)/2 + \theta \lambda_k^{-2} \varphi_c(\lambda_k)) = (1+\delta+\theta)/2$. Устремляя в (3.17) $\theta \downarrow 1$ и $\delta \downarrow 0$, приходим к нужному утверждению.

б) Предположим теперь, что $E \sup_t |\Delta M_t| < \infty$, $E \sup_t |\Delta^+ M_t| < \infty$, введем обозначения (см. [12])

$$\begin{aligned} S_t &= \sup_{0 \leq s \leq t} |\Delta M_s|, & R_t &= \sup_{0 \leq s \leq t} |\Delta^+ M_s|, \\ V_t &= \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta M_s I(|\Delta M_s| > 2S_{s-}), & W_t &= \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta^+ M_s I(|\Delta^+ M_s| > 2R_s). \end{aligned}$$

Если s таково, что $|\Delta M_s| > 2S_{s-}$, то, как легко видеть

$$2S_{s-} + \Delta V_s \leq 2|\Delta M_s| \leq 2S_s, \quad (3.18)$$

т. е. $\Delta V_s = \Delta M_s \leq 2\Delta S_s$. Аналогично, при $|\Delta^+ M_s| > 2R_s$ имеем

$$2R_s + \Delta^+ W_s \leq 2|\Delta^+ M_s| \leq 2R_{s+}, \quad (3.19)$$

т. е. $\Delta^+ W_s = \Delta^+ M_s \leq 2\Delta^+ R_s$. Из неравенств (3.18) и (3.19) заключаем, что

$$\text{Var}_{[0, \infty]} V \leq 2S_\infty, \quad \text{Var}_{[0, \infty]} W \leq 2R_\infty, \quad (3.20)$$

т. е. $V, W \in A$. Представим процессы V и W в виде $V = V^1 - V^2$, $W = W^1 - W^2$, где для $i = 1, 2$ $V^i, W^i \in A^+$, причем V^i — càdlàg процессы, а W^i — càglàd процессы. Полагая, что $\tilde{V}^i$ и $\tilde{W}^i$ — компенсаторы процессов V^i и $W^i \in A^+$ (см. [7]), обозначим $\tilde{V} = \tilde{V}^1 - \tilde{V}^2$ и $\tilde{W} = \tilde{W}^1 - \tilde{W}^2$. Процесс $M \in M_{loc}^2$ можно представить в виде

$$M = m^1 + m^2 + m, \quad (3.21)$$

где $m^1 = V - \tilde{V} \in M_{loc}^2$, $m^2 = W - \tilde{W} \in M_{loc}^2$ и $m = M - m^1 - m^2 \in M_{loc}^2$, так что (см. [12], лемму 4)

$$|\Delta m| \leq 4S_-, \quad |\Delta^+ m| \leq 4R. \quad (3.22)$$

Кроме того (см. [12], лемму 5), имеют место неравенства

$$E[m^1, m^1]_\infty^{1/2} \leq \sum_{n < s < \infty} |\Delta m_s^1| \leq E(\text{Var}_{[0, \infty]} V + \text{Var}_{[0, \infty]} \tilde{V}) \leq 4ES_\infty, \quad (3.23)$$

$$E[m^2, m^2]_\infty^{1/2} \leq \sum_{n < s < \infty} |\Delta^+ m_s^2| \leq E(\text{Var}_{[0, \infty]} W + \text{Var}_{[0, \infty]} \tilde{W}) \leq 4ER_\infty. \quad (3.24)$$

Из этих неравенств следует, что

$$[m^1, m^1]_\infty < \infty, \quad [m^2, m^2]_\infty < \infty \quad \text{п. н.}, \quad (3.25)$$

$$E|\Delta m^1| < \infty, \quad E|\Delta^+ m^2| < \infty. \quad (3.26)$$

Применяя теперь теорему 2.1, из (3.25) и (3.26) получим, что процессы m^1 и m^2 имеют п. н. конечные финальные значения

$$m_\infty^1 < \infty, \quad m_\infty^2 < \infty. \quad (3.27)$$

С другой стороны

$$m^1 m^r - \langle m^1, m^r \rangle \in M_{loc}, \quad (3.28)$$

$$m^2 m^s - \langle m^2, m^s \rangle \in M_{loc}, \quad (3.29)$$

где $m^r = M^r - m^1$, $m^g = M^g - m^2$, $\langle m^1, m^r \rangle \in \mathcal{P} \cap A_{loc}$ и $\langle m^2, m^g \rangle \in \mathcal{P}_* \cap A_{loc}$ (см. [5]). Напомним теперь (см. [11] и [7]), что для любого процесса $N \in M_{loc}$, для всех $S \in \mathcal{T}_p$ на множестве $(S < \infty)$

$$^p(\Delta N)_S = E[\Delta N_S | \mathcal{F}_{S-}] = 0. \quad (3.30)$$

Аналогично, для всех $T \in \mathcal{T}$ на множестве $(T < \infty)$

$$^o(\Delta^+ N)_T = E[\Delta^+ N_T | \mathcal{F}_T] = 0, \quad (3.31)$$

где $^p(\Delta N)$ и $^o(\Delta^+ N)$ соответственно – предсказуемая и опциональная проекции процессов ΔN и $\Delta^+ N$. Пользуясь (3.28), (3.30) и (3.18), получим, что

$$\begin{aligned} \Delta \langle m^1, m^r \rangle_S &= E[\Delta m_S^1 \Delta m_S^r | \mathcal{F}_{S-}] = \\ &= E[(\Delta V_S - E[\Delta V_S | \mathcal{F}_{S-}]) (\Delta M_S - \Delta V_S + E[\Delta V_S | \mathcal{F}_{S-}]) | \mathcal{F}_{S-}] = \\ &= E[(\Delta M_S - \Delta V_S) \Delta V_S | \mathcal{F}_{S-}] + (E[\Delta V_S | \mathcal{F}_{S-}])^2 = (E[\Delta V_S | \mathcal{F}_{S-}])^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

для всех $S \in \mathcal{T}_p$ на множестве $(S < \infty)$. Аналогично, из (3.29), (3.31) и (3.19) заключаем, что

$$\begin{aligned} \Delta^+ \langle m^2, m^g \rangle_T &= E[\Delta^+ m_T^2 \Delta^+ m_T^g | \mathcal{F}_T] = \\ &= E[(\Delta^+ W_T - E[\Delta^+ W_T | \mathcal{F}_T]) (\Delta^+ M_T - \Delta^+ W_T + E[\Delta^+ W_T | \mathcal{F}_T]) | \mathcal{F}_T] = \\ &= E[(\Delta^+ M_T - \Delta^+ W_T) \Delta^+ W_T | \mathcal{F}_T] + (E[\Delta^+ W_T | \mathcal{F}_T])^2 = \\ &= (E[\Delta^+ W_T | \mathcal{F}_T])^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

для всех $T \in \mathcal{T}$ на множестве $(T < \infty)$. Из (3.32) и (3.33) следуют включения $\langle m^1, m^r \rangle, \langle m^2, m^g \rangle \in V^+$ а по (3.21)

$$\langle M \rangle \geq \langle m \rangle. \quad (3.34)$$

Полагая $T_n = \inf\{t > 0: S_{t-} \geq n \text{ или } R_t \geq n\} \in \mathcal{T}_+$, $n \geq 1$ и пользуясь для мартингала m утверждением теоремы, доказанным в случае а) ($\Delta M \leq c$,

$\Delta^+ M \leq \epsilon$, $\epsilon > 0$), ввиду (3.22) получим

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (2 \langle m \rangle_t \log \log \langle m \rangle_t)^{-1/2} m_t \leq 1 \quad \text{п. н.}$$

на множестве $(\langle m \rangle_\infty = \infty) \cap (T_n = \infty)$.

(3.35)

Далее, так как $\Omega = \cup_n (T_n = \infty)$, то, ввиду (3.21), (3.27), (3.34), (3.35), на множестве $(\langle m \rangle_\infty = \infty)$ имеем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (2 \langle M \rangle_t \log \log \langle M \rangle_t)^{-1/2} M_t &\leq \\ &\leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left[(2 \langle m \rangle_t \log \log \langle m \rangle_t)^{-1/2} m_t + \right. \\ &\quad \left. + (2 \langle M \rangle_t \log \log \langle M \rangle_t)^{-1/2} (m_t^1 + m_t^2) \right] \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (2 \langle m \rangle_t \log \log \langle m \rangle_t)^{-1/2} m_t \leq 1. \end{aligned}$$
(3.36)

С другой стороны, на множестве $(\langle m \rangle_\infty < \infty) \cap (\langle M \rangle_\infty = \infty)$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (2 \langle M \rangle_t \log \log \langle M \rangle_t)^{-1/2} M_t = 0 \quad \text{п. н.}, \quad (3.37)$$

поскольку, согласно теореме 2.2, $(\langle m \rangle_\infty < \infty) \subseteq (m \rightarrow) \quad \text{п. н.}$. Теперь утверждение теоремы непосредственно следует из (3.36) и (3.37).

Доказательство теоремы 3.2. а) Сначала предположим, что $|\Delta M| \leq C$, $|\Delta^+ M| \leq C$ ($C > 0$). Тогда, применяя лемму 3.4 с $A = [M, M]$ получим, что на множестве $([M, M]_\infty = \infty) = (\langle M \rangle_\infty = \infty)$

$$[M, M]_t \langle M \rangle_t^{-1} \rightarrow 1 \quad \text{п. н. при } t \rightarrow \infty. \quad (3.38)$$

В силу теоремы 3.1 и (3.38), на множестве $([M, M]_\infty = \infty) = (\langle M \rangle_\infty = \infty)$

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (2[M, M]_t \log \log [M, M]_t)^{-1/2} M_t &= \\ &= \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left[(2 \langle M \rangle_t \log \log \langle M \rangle_t)^{-1/2} M_t \right] (2 \langle M \rangle_t \log \log \langle M \rangle_t)^{1/2} \times \\ &\times (2[M, M]_t \log \log [M, M]_t)^{-1/2} \leq 1 \quad \text{п. н.} \end{aligned}$$

б) Пусть теперь $E \sup_t |\Delta M_t| < \infty$ и $E \sup_t |\Delta^+ M_t| < \infty$. Тогда процесс $M \in M_{loc}$ допускает представление (3.21), где $m^1, m^2, m \in M_{loc}$ (см. [12]). Поэтому, заметив что

$$[m, m]_t = \langle M^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} (\Delta m_s)^2 + \sum_{s \leq t} (\Delta^+ m_s)^2,$$

$$(\Delta m_s)^2 \leq 2((\Delta M_s)^2 + (\Delta m_s^1)^2), \quad (\Delta^+ m_s)^2 \leq 2((\Delta^+ M_s)^2 + (\Delta^+ m_s^2)^2),$$

получим

$$[m, m]_\infty^{1/2} \leq \sqrt{2} \left([M, M]_\infty^{1/2} + [m^1, m^1]_\infty^{1/2} + [m^2, m^2]_\infty^{1/2} \right). \quad (3.39)$$

С другой стороны, из (3.21) следует, что

$$[M, M]_\infty^{1/2} \leq [m, m]_\infty^{1/2} + [m^1, m^1]_\infty^{1/2} + [m^2, m^2]_\infty^{1/2}. \quad (3.40)$$

Тем самым, из (3.25), (3.39) и (3.40) получим, что $([m, m]_\infty = \infty) = ([M, M]_\infty = \infty)$ п. н.. Положим $T_n = \inf\{t > 0: 4S_{t-} \geq n, \text{ или } 4R_t \geq n\} \in T_+, n \geq 1$ и отметим, что ввиду представления (3.21)

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (2[M, M]_t \log \log [M, M]_t)^{-1/2} M_t = \\ & = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left[(2[M, M]_t \log \log [M, M]_t)^{-1/2} m_t^1 + m_t^2 + (2[m, m]_t \log \log [m, m]_t)^{-1/2} \times \right. \\ & \quad \left. \times m_t (2[m, m]_t \log \log [m, m]_t)^{1/2} (2[M, M]_t \log \log [M, M]_t)^{-1/2} \right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Далее, рассмотрим равенство (3.41) на множестве $([M, M]_\infty = \infty) \cap (T_n = \infty)$. В силу (3.27) первое слагаемое правой части (3.41) равняется нулю. С другой стороны, ясно, что

$$\begin{aligned} [M, M]^{-1}[m, m] &= [M, M]^{-1}[M - m^1 - m^2, M - m^1 - m^2] = \\ &= [M, M]^{-1} \left(\langle M^c \rangle + \sum_{s \leq \cdot} \Delta(M_s - m_s^1)^2 + \sum_{s \leq \cdot} \Delta^+(M_s - m_s^2)^2 \right) = \\ &= [M, M]^{-1} ([M, M] + [m^1, m^1] + [m^2, m^2] - 2([M, m^1] + [M, m^2])). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Однако, в силу неравенства Кунита-Ватанабе (см. [5], теорему 6.2)

$$[M, M]^{-1} ([M, m^1] + [M, m^2]) \leq [M, M]^{-1/2} ([m^1, m^1]^{1/2} + [m^2, m^2]^{1/2}). \quad (3.43)$$

Тем самым, воспользовавшись (3.25) и (3.43), из (3.42) заключаем, что на множестве $([M, M]_\infty = \infty)$

$$[M, M]_t^{-1} [m, m]_t \rightarrow 1 \text{ п. н. при } t \rightarrow \infty. \quad (3.44)$$

Кроме того, на множестве $([M, M]_\infty = \infty) \cap (T_n = \infty)$ имеем $|\Delta m| \leq n$, $|\Delta^+ m| \leq n$. Поэтому, имея в виду (3.44) и пользуясь утверждением теоремы, доказанным в случае а) ($|\Delta M| \leq C$, $|\Delta^+ M| \leq C, C > 0$) для мартингала m , получаем, что второе слагаемое правой части (3.41) не превосходит единицы. Для завершения доказательства теоремы 3.2 остается заметить, что $\Omega = \cup_n (T_n = \infty)$.

ABSTRACT. The paper presents a characterization of the set of convergence for optional local martingales in (strong) predictable terms, extending to the optional case the facts received by Yu. M. Kabanov, R. S. Liptser and A. N. Shiryaev in [8] for càdlàg martingales. The iterated logarithm laws for local and locally square-integrable optional martingales are obtained. The proofs follow the well-known scheme of D. Lepingle [9] using auxiliary exponential supermartingales and a modification of Borel-Cantelli lemma.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. В. Гаспарян, "On a strong law of large numbers for optional martingales", 5-th International Vilnius Conference on Probab. Theory and Mathem. Statist., Abstracts of Communic., Vilnius, no. 1, pp. 167 — 168, 1989.
2. К. В. Гаспарян, "Об асимптотическом поведении опциональных мартингалов", ДАН Армении, т. 93, № 5, стр. 212 — 219, 1992.
3. C. Dellacherie, "Deux remarques sur la separabilite optionnelle", Lecture Notes in Mathem., Seminaire de Probab., XI, 581, pp. 47 — 49, 1977.
4. Л. И. Гальчук, "О существовании опциональных модификаций для мартингалов", Теория вероятн. и ее примен., т. 22, № 3, стр. 620 — 622, 1977.
5. Л. И. Гальчук, "Опциональные мартингалы", Матем. сб., т. 112 (154), № 4 (8), стр. 483 — 521, 1980.
6. Л. И. Гальчук, "Разложение опциональных супермартингалов", Матем. сб., т. 115 (167), № 2 (6), стр. 163 — 178, 1981.
7. Л. И. Гальчук, "Стохастические интегралы по опциональным мартингалам и случайные меры", Теория вероятн. и ее примен., т. 29, № 1, стр. 93 — 107, 1984.

8. Ю. М. Кабанов, Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, "Абсолютная непрерывность и сингулярность локально абсолютно непрерывных вероятностных распределений (часть I)", Матем. сб., т. 107 (149), № 3 (11), стр. 364 — 415, 1978.
9. D. Leping, "Sur le comportement asymptotique des martingales locales," Lecture Notes in Mathem., Seminaire de Probab. XII, 649, pp. 148 — 161, 1978.
10. C. Dellacherie, "Sur la regularisation des surmartingales," Lecture Notes in Mathem., Seminaire de Probab., XI, 581, pp. 362 — 364, 1977.
11. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, Теория мартингалов, Москва, Наука, 1986.
12. Л. И. Гальчук, "О неравенствах Ленгляра и Буркхольдера-Дэвиса-Ганди для опциональных мартингалов, Статистика и управ. случ. процессами", Сб. статей, Москва, Наука, стр. 24 — 28, 1989.
13. П. А. Майер, Вероятность и потенциалы, Москва, Мир 1973.
14. К. В. Гаспарян, "О мультипликативном разложении экспоненциальных семимартингалов", ДАН Армении, т. 86, № 2, стр. 67 — 70, 1988.

15 марта 1994

Ереванский государственный университет

О ЗАДАЧЕ ГИЛЬБЕРТА В СМЫСЛЕ L^p -СХОДИМОСТИ

Г. М. Айрапетян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 29, №3, 1994

В статье исследована задача типа Гильберта для аналитических функций в случае, когда граничные значения принадлежат классу L^p и граничное условие понимается в смысле L^p -сходимости. Получено необходимое и достаточное условие для нормальной разрешимости и нётеровости рассмотренной задачи.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $D^+ = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг в комплексной плоскости, $D^- = \{z : |z| > 1\}$, а $T = \{z : |z| = 1\}$ – единичная окружность. Обозначим через $A(T)$ класс аналитических в $D^+ \cup D^-$ функций, имеющих конечный порядок в бесконечности, а через $A_0(T)$ – подмножество функций из $A(T)$, обращающихся в нуль в бесконечности.

Рассмотрим задачу Гильберта в следующей постановке : найти функцию $\Phi(z) \in A(t)$, удовлетворяющую условию

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)\|_p = 0, \quad p \geq 1, \quad (1)$$

где $f(t) \in L^p(T)$, $\Phi^\pm$ – сужения функции $\Phi(z)$ в $D^\pm$ соответственно, а $a(t)$ – функция, кусочно-непрерывная в смысле Гёльдера на T .

В точках разрыва $t_1, t_2, \dots, t_n$ функции $a(t)$ положим

$$\alpha_k + i\beta_k = \frac{1}{2\pi i} [\ln a(t_k - 0) - \ln a(t_k + 0)],$$

где $\ln a(t)$ – любая фиксированная ветвь логарифма, непрерывно меняющаяся на каждой дуге $t_k t_{k+1}$ окружности T (при этом, полагаем, что $t_{n+1} = t_1$). Далее,

через $T(p)$ обозначим множество $T(p) = \{t_k : (1 - \{\alpha_k\})^p = 1\}$, где $\{\alpha\}$ – дробная часть α .

Будем говорить, что задача (1) нормально разрешима, если для любой функции $f(t) \in L^p(T)$ она разрешима в $A(T)$. Задачу (1) будем называть нётеровой, если соответствующая однородная задача ($f(t) \equiv 0$) имеет конечное число линейно-независимых решений в $A_0(T)$, а для разрешимости в $A_0(T)$ неоднородной задачи необходимо и достаточно выполнение конечного числа условий ортогональности $l_k(f) = 0$, $k = 1, \dots, N$, где $l_k(\cdot)$ – линейно-независимые функционалы в $L^p(T)$.

В работе [1] было доказано, что при $p = 1$ задача (1) нормально разрешима и нётеорова при любой кусочно-непрерывной в смысле Гёльдера функции $a(t)$. В настоящей работе установлено, что при $p > 1$ нётеровость и нормальная разрешимость задачи (1) зависят от свойств функции $a(t)$. А именно, доказано, что для нётеровости и нормальной разрешимости задачи (1) необходимо и достаточно выполнение условия

$$T(p) = \emptyset. \quad (2)$$

Основные результаты данной работы анонсированы в [2].

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Ниже нам понадобятся следующие вспомогательные результаты.

Лемма 1. Пусть $t_0 \in T$. Тогда существует функция $f(t) \in L^p(T)$ такая, что

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left| \int_T \frac{(\tau - t_0)^{1/p}}{\tau - rt_0} f(\tau) d\tau \right| = \infty. \quad (3)$$

Доказательство. Обозначим через B следующий линейный оператор :

$$(Bf)(r) = \int_T \frac{(\tau - t_0)^{1/p}}{\tau - rt_0} f(\tau) d\tau, \quad 0 \leq r < 1, \quad f(t) \in L^p(T).$$

Если для любой функции $f(t) \in L^p(T)$ соотношение (3) не выполнено, то по теореме о замкнутом графике B — ограниченный оператор из $L^p(T)$ в $L^\infty([0, 1])$.

Тем самым, существует число $C > 0$ такое, что

$$\left| \int_T \frac{(\tau - t_0)^{1/p}}{\tau - rt_0} f(\tau) d\tau \right| < C$$

при любом $0 \leq r < 1$ и $\|f\|_p \leq 1$. Из этого неравенства следует, что

$$\left\| \frac{(\tau - t_0)^{1/p}}{\tau - rt_0} \right\|_q = \sup_{\|f\|_p \leq 1} \left| \int_T \frac{(\tau - t_0)^{1/p}}{\tau - rt_0} f(\tau) d\tau \right| < C$$

при любом r , $0 \leq r < 1$. Отсюда приходим к противоречию, поскольку

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \frac{(\tau - t_0)^{1/p}}{\tau - rt_0} \right\|_q = \infty.$$

Лемма 2. Пусть $t_0 \in T$, $f(t) \in L^p(T)$, и

$$(A_r f)(t) = \frac{1}{(\tau_0 - rt)^\alpha} \int_T f(\tau) (\tau_0 - \tau)^\alpha P_r(t, \tau) d\tau, \quad 0 < \alpha < 1,$$

где $P_r(t, \tau) = (1 - r^2)|\tau - rt|^{-2}$. Тогда существует не зависящая от r постоянная C такая, что

$$\|A_r f\|_p \leq C \|f\|_p.$$

Доказательство. Пусть $p = 1$. Воспользовавшись неравенством $||\tau_0 - \tau|^\alpha - |\tau - rt|^\alpha| < \text{const } |\tau - rt|^\alpha$, получим

$$(A_r f)(t) \leq \frac{1}{|\tau_0 - rt|^\alpha} \int_T |f(\tau)| \frac{1 - r^2}{|\tau - rt|^{2-\alpha}} |d\tau| + \int_T |f(\tau)| P_r(t, \tau) |d\tau|.$$

Так как

$$\frac{1 - r^2}{|\tau_0 - rt|^\alpha |\tau - rt|^{2-\alpha}} \leq \frac{1 - r^2}{|\tau_0 - rt|^2} + \frac{1 - r^2}{|\tau - rt|^2}$$

и

$$\frac{1}{2\pi} \int_T \frac{1 - r^2}{|\tau - rt|^2} |dt| = 1,$$

получаем $\|A_r f\|_1 \leq \|f\|_1$. Аналогичным рассуждением получаем, что $\|A_r f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, $f \in L^\infty(T)$. Таким образом, утверждение леммы доказано в случаях $p = 1$ и $p = \infty$. Применением интерполяционной теоремы Рисса-Торина завершаем доказательство.

Лемма 3. Пусть $t_0 \in T$. Тогда существует функция $f(t) \in L^p(T)$ такая, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{\Delta(t_0, \varepsilon, r)} \left| \frac{1}{|t - t_0|^{1/p}} \int_T \frac{(\tau - t_0)^{1/p}}{\tau - r t} f(\tau) d\tau \right|^p |dt| = \infty,$$

где $\Delta(t_0, \varepsilon, r) = \{t : t \in T, |t - t_0| \leq \varepsilon(1 - r)\}$.

Доказательство. В силу леммы 1 существует функция $f(t) \in L^p(T)$ такая, что для некоторой последовательности $\{r_k\}$, $r_k \rightarrow 1 - 0$

$$\lim_{r_k \rightarrow 1-0} \left| \int_T \frac{(\tau - t_0)^{1/p}}{\tau - r_k t_0} f(\tau) d\tau \right| = \infty. \quad (4)$$

Положим $U(\varepsilon) = \{z : |z - t_0| < \varepsilon(1 - |z|)\}$. Тогда, если $r_k t \in U(\varepsilon)$, $t \in T$, то $|t - t_0| \leq 2|r_k t - t_0|$, и поэтому

$$\left| \frac{1}{\tau - r_k t_0} - \frac{1}{\tau - r_k t} \right| < C P_{r_k}(t_0, \tau),$$

где C — постоянная, не зависящая от r , а $P_{r_k}(t_0, \tau) = (1 - |r_k|^2)|\tau - r_k t_0|^{-2}$ — ядро Пуассона. Применяя эту оценку для $r_k t \in U(\varepsilon)$, $t \in T$, получим

$$\begin{aligned} \left| \int_T \frac{(\tau - t_0)^{1/p}}{\tau - r_k t_0} f(\tau) d\tau - \int_T \frac{(\tau - t_0)^{1/p}}{\tau - r_k t} f(\tau) d\tau \right| &\leq \\ &\leq \text{const} \left| \int_T (\tau - t_0)^{1/p} f(\tau) P_{r_k}(t_0, \tau) |d\tau| \right|. \end{aligned}$$

Теперь оценим последнее выражение с помощью максимальной функции Харди-Литтлвуда (см. [3])

$$M(f; t) = \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |f(\tau)| |d\tau|,$$

где максимум взят по всем интервалам $I \in T$ с центром в точке t . Имеем

$$\left| \int_T (\tau - t_0)^{1/p} f(\tau) P_{r_k}(t_0, \tau) |d\tau| \right| < \text{const} M((\tau - t_0)^{1/p} f(\tau); t_0).$$

Легко проверить, что $M((\tau - t_0)^{1/p} f(\tau); t_0) < \infty$. Следовательно, при $r_k t \in U(\varepsilon)$

$$\left| \int_T \frac{(\tau - t_0)^{1/p}}{\tau - r_k t_0} f(\tau) d\tau - \int_T \frac{(\tau - t_0)^{1/p}}{\tau - r_k t} f(\tau) d\tau \right| < C, \quad (5)$$

где C — постоянная, не зависящая от k . Далее

$$\begin{aligned} \int_{\Delta(t_0, \epsilon, r)} \left| \frac{1}{|r t - t_0|^{1/p}} \int_T \frac{(\tau - t_0)^{1/p}}{\tau - r_k t} f(\tau) d\tau \right|^p |dt| = \\ = \int_{\Delta(t_0, \epsilon, r)} \frac{1}{|r t - t_0|} \left| \int_T \frac{(\tau - t_0)^{1/p}}{\tau - r_k t_0} f(\tau) d\tau - \right. \\ \left. - \int_T \left[\frac{(\tau - t_0)^{1/p}}{\tau - r_k t_0} - \frac{(\tau - t_0)^{1/p}}{\tau - r_k t} \right] f(\tau) d\tau \right|^p |dt|. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку

$$\int_{\Delta(t_0, \epsilon, r)} \frac{dt}{|r t - t_0|} > c_1 > 0,$$

где c_1 — постоянная, зависящая лишь от ϵ , то в силу (5) будем иметь

$$\int_{\Delta(t_0, \epsilon, r)} \frac{1}{|r_k t - t_0|} \left| \int_T \left[\frac{(\tau - t_0)^{1/p}}{\tau - r_k t_0} - \frac{(\tau - t_0)^{1/p}}{\tau - r_k t} \right] f(\tau) d\tau \right|^p |dt| < \text{const.}$$

Учитывая теперь (4) и переходя в (6) к пределу $r_k \rightarrow 1 - 0$, завершаем доказательство.

§3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Положим

$$S(z) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\ln a(t)}{t - z} dt \right], \quad z \in D^+ \cup D^-,$$

$$S_p(z) = S(z) \prod_{k=1}^n (z - t_k)^{\lambda_k}, \quad z \in D^+ \cup D^-,$$

где целые числа λ_k определены следующим образом: $-1 < \lambda_k + \alpha_k \leq 0$, если $(1 - \{\alpha_k\})p \leq 1$ и $0 < \lambda_k + \alpha_k < 1$, если $(1 - \{\alpha_k\})p > 1$.

Теорема 1. Пусть $p > 1$ — произвольное число. Для того, чтобы задача (1) была нормально разрешима необходимо и достаточно выполнение условия (2).

Доказательство. Если функция $\Phi(z) \in A(T)$ удовлетворяет условию (1), то она представима в виде (см. [4])

$$\Phi(z) = \frac{S_p(z)}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)}{S_p^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + S_p(z) P(z), \quad z \in D^+ \cup D^-, \quad (7)$$

где $P(z)$ — некоторый полином, $S_p^+(z)$ — сужение функции $S_p(z)$ на D^+ , а $S_p^-(z)$ — ее граничные значения на T . Если $T(p) = \emptyset$, то при любом $f(t) \in L^p(T)$ функция $\Phi(z)$, определенная формулой (7), удовлетворяет условию (1). Тем самым, при $T(p) = \emptyset$ задача (1) нормальна разрешима.

Для завершения доказательства остается показать, что если $T(p) \neq \emptyset$, то задача (1) не является нормально разрешимой. С этой целью предположим, что $t_{k_0} \in T(p)$ — некоторая точка и заметим, что в силу леммы 3 функцию $f_0(t) \in L^p(T)$ можно выбрать так, чтобы имело место соотношение

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{\Delta(t_{k_0}, \varepsilon, r)} \left| \frac{1}{|rt - t_{k_0}|^{1/p}} \int_T \frac{(\tau - t_0)^{1/p}}{\tau - rt} f_0(\tau) d\tau \right|^p |dt| = \infty, \quad \varepsilon > 0. \quad (8)$$

Предположим задача (1) имеет решение в $A(T)$. Тогда, в силу (7) это решение представимо в виде

$$\Phi_0(z) = \frac{S_p(z)}{2\pi i} \int_T \frac{f_0(\tau)}{S_p^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + S_p(z)P(z).$$

Далее, имеем $\Phi_0^+(rt) - a(t)\Phi_0^-(r^{-1}t) = J_1(r, t) + J_2(r, t)$, где

$$J_1(r, t) = \frac{S_p^+(rt) - a(t)S_p^-(r^{-1}t)}{2\pi i} \int_T \frac{f_0(\tau)}{S_p^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - r^{-1}t},$$

$$J_2(r, t) = \frac{S_p^+(rt)}{2\pi i} \int_T P_r(t, \tau) \frac{f_0(\tau)}{S_p^+(\tau)} d\tau,$$

а $S_p^-(z)$ — сужение функции $S_p(z)$ на D^- . Выберем числа δ_0, c_0 таким образом, чтобы из включений $t_{k_n} \in T(p)$ и $t \in \Delta(t_{k_0}, \delta_0, r)$ следовала оценка (см. [4]) $|S_p^+(rt) - a(t)S_p^-(r^{-1}t)| > c_0|S_p^+(rt)|$, $t \neq t_{k_0}$. Так как $S_p^+(rt) \approx |t_{k_0} - rt|^{-1/p}$ в достаточно малой окрестности точки t_{k_0} , то

$$\int_T |J_1(r, t)|^p |dt| \geq \int_{\Delta(t_{k_0}, \varepsilon, r)} \left| \frac{1}{|rt - t_{k_0}|^{1/p}} \int_T \frac{(\tau - t_{k_0})^{1/p}}{\tau - rt} f_0(\tau) d\tau \right|^p |dt|,$$

и, в силу (8), будем иметь $\lim_{r \rightarrow 1-0} \|J_1(r, t)\|^p = \infty$. Учитывая, что согласно лемме 2, $\|J_2(r, t)\|_p \leq \text{const } \|f\|_p$, завершаем доказательство теоремы.

Замечание. Если функция $f(t)$ принадлежит классу Гёльдера, то задача (1) разрешима в классе $A(T)$.

Доказательство. В (7) полином $P(z)$ можно выбрать так, чтобы

$$P(t_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)}{S_p^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t_k}, \quad t_k \in T(p).$$

Тогда для некоторого $p' > p$ будем иметь $\|\Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-(r^{-1}t)\|_{p'} < \text{const}$.

Учитывая равенство $\lim_{r \rightarrow 1-0} [\Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-(r^{-1}t)] = f(t)$, получим

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)\|_p = 0$$

Теорема 2. Условие (2) необходимо и достаточно для нётеровости задачи (1).

Доказательство. Пусть $T(p) = \emptyset$. Тогда общее решение задачи (1) представимо в виде (7), где $P(z)$ — произвольный полином. Отсюда следует нётеровость задачи (1).

Рассмотрим теперь случай $T(p) \neq \emptyset$. Предположим, что задача (1) нётерова.

В силу теоремы Рисса

$$l_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_T \overline{\varphi_k(t)} f(t) dt = 0, \quad k = 1, \dots, N,$$

где $\varphi_k(t)$, $k = 1, \dots, N$ — линейно-независимые функции из $L^q(T)$, $q = p(p-1)^{-1}$.

Применяя теорему Хана-Банаха заключаем, что существуют функции $f_k(t) \in L^p(T)$, $k = 1, \dots, N$ такие, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_T \overline{\varphi_j(t)} f_k(t) dt = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Пусть $M_k = \sup |l_k(f)|$, $\|f\|_p = 1$, $M = \sup M_k$, $k = 1, \dots, N$. Выберем функции $\tilde{f}_k(t)$ класса Гёльдера так, чтобы имели место неравенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_T |f_k(t) - \tilde{f}_k(t)|^p |dt| < \frac{\varepsilon}{M}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Тогда с применением функционалов l_k получаем, что

$$\begin{aligned} |l_k(\tilde{f}_k)| &> |l_k(f_k)| - |l_k(\tilde{f}_k - f_k)| > 1 - \varepsilon, \\ |l_k(\tilde{f}_j)| &< |l_k(\tilde{f}_j - f_j)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Пусть теперь $f_0(t) \in L^p(T)$ - функция, для которой, согласно теореме 1, задача (1) не имеет решения в $A(T)$. Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то комплексные числа A_k , $k = 1, \dots, N$ можно выбрать так, чтобы были справедливы равенства

$$\sum_{j=1}^N A_k l_k(\tilde{f}_j) = l_k(f_0), \quad k = 1, \dots, N.$$

Положим

$$\tilde{f}_0(t) = f_0(t) - \sum_{k=1}^N A_k \tilde{f}_k(t).$$

Тогда $l_k(\tilde{f}_0) = 0$, $k = 1, \dots, N$. Поэтому для функции $\tilde{f}_0(t)$ задача (1) разрешима в классе $A_0(T)$. Так как, в силу замечания к теореме 1, задача (1) разрешима в $A(T)$ для функции

$$f(t) = \sum_{k=1}^N A_k \tilde{f}_k(t),$$

то она разрешима в $A(T)$ и для функции $f_0(t)$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ABSTRACT. The paper investigates a version of Hilbert problem in a class of analytic functions. The continuity on the boundary is in the sense of L^p -convergence. A necessary and sufficient condition for normal solvability and Noetherness of this problem is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Айрапетян, "Разрывная задача Римана-Привалова со смещением в классе L^1 ", Изв. АН Армении, Математика, т. 25, №1, стр. 3 - 20, 1990.
2. Г. М. Айрапетян, "О задаче Гильберта в смысле L^p ($p > 1$)-сходимости", ДАН РАН, т. 328, №5, стр. 421 - 423, 1993.
3. И. Стейн, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, Мир, Москва, 1993.
4. Г. М. Айрапетян, "Об одной задаче сопряжения со сдвигом в классах L^p ", Изв. АН Армении. Математика, т. 25, №4, стр. 394 - 400, 1990.

О ЛОКАЛИЗАЦИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Г. Г. Казарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 29, №3, 1994

В статье исследованы локализации негипоэллиптических операторов, а именно, поведение отношения $P(\xi + \eta)/\tilde{P}(\eta)$ при $|\eta| \rightarrow \infty$, где $P(\xi)$ – символ линейного дифференциального оператора $P(D)$, а $\tilde{P}(\xi)$ – его функция Хёрмандера. Для определенного класса операторов найден наибольший порядок локализаций и описано множество локализаций.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно (см., напр., [1], глава 10); что многие свойства фундаментального решения линейного дифференциального оператора $P(D)$, такие как расположение волнового фронта и сингулярного носителя и др., зависят от поведения функции Хёрмандера $\tilde{P}(\xi)$, отвечающей оператору $P(D)$, а точнее, от поведения отношения $P(\xi + \eta)/\tilde{P}(\eta)$ при $|\eta| \rightarrow \infty$. Легко показать, что для гипоэллиптических операторов этот предел является многочленом нулевой степени, в отличие от негипоэллиптических операторов, для которых он может быть многочленом положительной степени. Такие многочлены называются локализациями оператора $P(D)$ (или многочлена $P(\xi)$) в бесконечности. В связи с этим естественно возникают задачи :

- 1) определения наибольшего порядка предельных многочленов (локализаций) для данного класса дифференциальных операторов,
- 2) описания множества локализаций для индивидуального оператора из данного класса.

Настоящая статья посвящена этим и другим смежным вопросам, представляющим, на наш взгляд, самостоятельный интерес также вне теории общих дифференциальных уравнений.

Перейдем к точной постановке задачи. Для этого приведем сначала ряд необходимых обозначений и определений.

Через $\mathbb{R}^n$ обозначим n -мерное вещественное евклидово пространство, через N_0^n — множество n -мерных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с целыми, неотрицательными компонентами. Для $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in N_0^n$ положим

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Функция

$$\tilde{P}(\xi) = \left[\sum_{\alpha \in N_0^n} |D^\alpha P(\xi)|^2 \right]^{1/2}$$

называется функцией Хёрмандера оператора $P(D) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \cdot D^{\alpha}$ (многочлен $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \cdot \xi^{\alpha}$), где сумма берется по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha; \alpha \in N_0^n, \gamma_{\alpha} \neq 0\}$.

Определение 0.1 (см. [1], определение 10.2.6). Многочлен $Q(\xi) \neq \text{const}$ называется локализацией на бесконечности оператора $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$), если существует последовательность $\{\xi^s\}$, $\xi^s \in \mathbb{R}^n$, $|\xi^s| \rightarrow \infty$, такая, что для произвольной точки $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{P(\xi + \xi^s)}{\tilde{P}(\xi^s)} = Q(\xi).$$

Множество локализаций многочлена P будем обозначать через $L(P)$. Если $\theta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то множество таких предельных многочленов $\xi^s/|\xi^s| \rightarrow \theta/|\theta|^{-1}$ будем обозначать через $L_{\theta}(P)$.

В данной статье определяется наибольший порядок локализаций для определенного класса дифференциальных многочленов.

§1 посвящен обобщенно-однородным, а §2 – однородным гиперболическим многочленам. В §3 исследуется влияние носителя гипозэллиптичности на степень локализаций. В §4 изучены локализации общих многочленов.

§1. ЛОКАЛИЗАЦИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ОБОБЩЕННО-ОДНОРОДНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Определение 1.1. Многочлен $R(\xi) = R(\xi_1, \dots, \xi_n)$ называется обобщенно-однородным (λ -однородным) λ -порядка $d > 0$, если для всех $t > 0$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$R(t^\lambda \cdot \xi) \equiv R(t^{\lambda_1} \cdot \xi_1, \dots, t^{\lambda_n} \cdot \xi_n) = t^d \cdot R(\xi).$$

Очевидно, что любой λ -однородный многочлен R λ -порядка d может быть представлен в виде

$$R(\xi) = \sum_{(\lambda, \alpha)=d} r_\alpha \cdot \xi^\alpha, \quad (\lambda, \alpha) = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n.$$

С другой стороны, если $P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \cdot \xi^\alpha$ – произвольный многочлен и $\lambda \in \mathbb{R}^n$ – произвольный вектор, то $P(\xi)$ представим в виде суммы λ -однородных многочленов

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^M P_j(\xi) = \sum_{j=0}^M \sum_{(\lambda, \alpha)=d_j} \gamma_\alpha \cdot \xi^\alpha,$$

где $d_0 > d_1 > \dots > d_M \geq 0$. Число $d_0 = d_0(P) = d_0(P, \lambda)$ будем называть λ -порядком многочлена P и будем писать $\deg_\lambda P = d_0$. Ясно, что если P есть λ -однородный многочлен λ -порядка d_0 , то $P(\xi) \equiv P_0(\xi)$, $P_j(\xi) \equiv 0$ ($j = 1, \dots, M$).

Если $\lambda \in \mathbb{R}^n$ – вектор с положительными компонентами, то через $|\xi|_\lambda$ будем обозначать λ -норму вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$, определенную формулой

$$|\xi|_\lambda = \left[\sum_{j=1}^n |\xi_j|^{2\lambda_j} \right]^{1/2}.$$

Определение 1.2. Пусть $\eta \in \mathbb{R}^n$, $|\eta| = 1$. Будем говорить, что многочлен $Q(\xi) \neq \text{const}$ принадлежит множеству $L_\eta^\lambda(R)$, если существует последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что при $s \rightarrow \infty$, $|\xi^s|_\lambda \rightarrow \infty$, $\xi^s / |\xi^s|_\lambda^{1/\lambda} \rightarrow \eta$ имеем

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{R(\xi + \xi^s)}{\tilde{R}(\xi^s)} = Q(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

В этом параграфе мы опишем множество $L_\eta^\lambda(R)$ для λ -однородного многочлена R и для фиксированной точки $\eta \in \mathbb{R}^n$. При $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$, как следствие полученного результата, найдем описание локализаций на бесконечности для однородного многочлена R , т. е. описание множеств $L_\eta(R)$ и $L(R)$.

Определение 1.3 (см. [2]). Многогранником Ньютона (или характеристическим многогранником) набора мультииндексов $\mathcal{G} = \{\alpha^1, \dots, \alpha^N\}$ называется наименьший выпуклый многогранник $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathcal{G})$, содержащий все точки $\mathcal{G}$.

Пусть $P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \cdot \xi^\alpha$ — многочлен с постоянными коэффициентами и $(P) = \{\alpha; \alpha \in N_\circ^n, \gamma_\alpha \neq 0\}$, тогда многогранник Ньютона набора $(P) \cup \{0\}$ называется характеристическим многогранником (х.м.) (или многогранником Ньютона) многочлена P .

Определение 1.4 (см. [2],[3]). Многогранник $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ с вершинами из $N_\circ^n$ называется *полным*, если начало координат является вершиной $\mathcal{N}$, и $\mathcal{N}$ имеет отличные от нее вершины на всех осях координат. $(n-1)$ -мерная грань полного многогранника $\mathcal{N}$ называется *главной*, если она не содержится в какой-либо координатной гиперплоскости. Точка $\alpha \in \mathcal{N}$ называется *главной*, если она принадлежит хотя бы одной замкнутой $(n-1)$ -мерной главной грани $\mathcal{N}$. Полный многогранник называется *правильным* (вполне правильным), если неотрицательны (положительны) все компоненты единичной внешней нормали к любой $(n-1)$ -мерной главной грани.

Пусть $\mathcal{N}_i^k$ ($i = 1, \dots, M_k'$, $k = 0, \dots, n-1$) — k -мерные грани $\mathcal{N}$. Грань $\mathcal{N}_i^k$ размерности $k \leq n-1$ многогранника $\mathcal{N}$ называется *главной*, если все ее точки главные, или, что то же самое, если $\mathcal{N}_i^k$ подгрань некоторой $(n-1)$ -мерной главной грани $\mathcal{N}$. Правильные и вполне правильные грани определяются аналогично.

Многочлен

$$P^{i,k}(\xi) = \sum_{\alpha \in N_i^k} \gamma_\alpha \cdot \xi^\alpha$$

называется *подмногочленом* $P(\xi)$, отвечающем грани N_i^k многогранника $\mathcal{N} = \mathcal{N}(P)$. Положим $\mathbb{R}^n = \{\xi; \xi \in \mathbb{R}^n, \xi_1 \cdots \xi_n \neq 0\}$.

Определение 1.5 (см. [2]). Грань N_i^k полного х.м. $\mathcal{N}$ называется *регулярной*, если $P^{i,k}(\xi) \neq 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$. Многочлен $P(\xi)$ называется *регулярным*, если регулярны все главные грани его х.м. $\mathcal{N}(P)$.

В [4] было доказано, что если λ -однородный многочлен $R(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$, то $R(\xi)$ регулярен. Для регулярных многочленов поставленные вопросы решаются просто: регулярный многочлен с вполне правильным х.м. $\mathcal{N}$ является гипозэллиптическим (см., напр., [5]). Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать лишь λ -однородные многочлены $R(\xi)$, удовлетворяющие условию $\Sigma(R) = \{\eta; |\eta| = 1, R(\eta) = 0\} \neq \emptyset$.

Пусть R является λ -однородным многочленом и $\eta \in \Sigma(R) \neq \emptyset$. Обозначим

$$\mathcal{G}(\eta) = \mathcal{G}(\eta, R) = \{\nu; \nu \in N_o^n, D^\nu R(\eta) \neq 0\}$$

и положим

$$\Delta(\eta) = \Delta(\eta, R) = \min_{\nu \in \mathcal{G}(\eta)} (\lambda, \nu). \quad (1.1)$$

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 1.1. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, $R(\xi)$ является λ -однородным многочленом λ -порядка d_o , $\eta \in \mathbb{R}^n$, $|\eta| = 1$, число $\Delta(\eta) = \Delta(\eta, R)$ определено формулой (1.1) и $Q \in L_\eta^\lambda(R)$. Тогда $\deg_\lambda Q \leq \Delta(\eta)$.

Доказательство. Пусть $Q \in L_\eta^\lambda(R)$. По формуле Тейлора, при любом $s = 1, 2, \dots$

$$R(\xi + \xi^s) = \sum_{\alpha \geq 0} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha R(\xi^s). \quad (1.2)$$

Поскольку многочлены $D^\alpha R$ λ -однородны и λ -порядка $d - (\lambda, \alpha)$, то при любом $s = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} R(\xi + \xi^s) = & \sum_{(\lambda, \alpha) < \Delta(\eta)} |\xi^s|_\lambda^{d - (\lambda, \alpha)} \cdot \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} \cdot D^\alpha R(\eta^s) + |\xi^s|_\lambda^{d - \Delta(\eta)} \sum_{(\lambda, \alpha) = \Delta(\eta)} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} \cdot D^\alpha R(\eta^s) + \\ & + \sum_{(\lambda, \alpha) > \Delta(\eta)} |\xi^s|_\lambda^{d - (\lambda, \alpha)} \cdot \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} \cdot D^\alpha R(\eta^s). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Аналогично, для многочлена $\tilde{R}^2(\xi)$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{R}^2(\xi^s) = & \sum_{(\lambda, \alpha) < \Delta(\eta)} |\xi^s|_\lambda^{2[d - (\lambda, \alpha)]} \cdot |D^\alpha R(\eta^s)|^2 + |\xi^s|_\lambda^{2[d - \Delta(\eta)]} \sum_{(\lambda, \alpha) = \Delta(\eta)} |D^\alpha R(\eta^s)|^2 + \\ & + \sum_{(\lambda, \alpha) > \Delta(\eta)} |\xi^s|_\lambda^{2[d - (\lambda, \alpha)]} \cdot |D^\alpha R(\eta^s)|^2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Так как $|\eta^s|_\lambda = 1$ при всех $s = 1, 2, \dots$, то существует постоянная $C > 0$ такая, что при любом $\alpha \in N_0^n$, $\alpha \geq 0$

$$|D^\alpha \cdot R(\eta^s)| \leq C, \quad s = 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

Тем самым, для любой точки $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\sum_{(\lambda, \alpha) > \Delta(\eta)} |\xi^s|_\lambda^{2[d - (\lambda, \alpha)]} \cdot |D^\alpha R(\eta^s)|^2}{|\xi^s|_\lambda^{2[d - \Delta(\eta)]}} \rightarrow 0 \quad (1.6)$$

при $s \rightarrow \infty$, и при $s \rightarrow \infty$ также

$$\frac{\sum_{(\lambda, \alpha) > \Delta(\eta)} |\xi^s|_\lambda^{d - (\lambda, \alpha)} \cdot \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} \cdot D^\alpha R(\eta^s)}{|\xi^s|_\lambda^{d - \Delta(\eta)}} \rightarrow 0. \quad (1.7)$$

С другой стороны, при вычислении предела $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{R(\xi + \xi^s)}{R(\xi^s)}$ функцию $\tilde{R}(\xi)$ можно заменить функцией $\sum_\alpha |D^\alpha R(\xi)|$. Поэтому из представлений (1.3), (1.4) и соотношений (1.6), (1.7) получим

$$\begin{aligned} \frac{R(\xi + \xi^s)}{\tilde{R}(\xi^s)} = & \\ = & \frac{\sum_{(\lambda, \alpha) < \Delta(\eta)} |\xi^s|_\lambda^{\Delta(\eta) - (\lambda, \alpha)} \cdot \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} \cdot D^\alpha R(\eta^s) + \sum_{(\lambda, \alpha) = \Delta(\eta)} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} \cdot D^\alpha R(\eta^s) + o(1)}{A_s + \sum_{(\lambda, \alpha) = \Delta(\eta)} |D^\alpha R(\eta^s)| + o(1)}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$A_s = \sum_{(\lambda, \alpha) < \Delta(\eta)} |\xi^s|_{\lambda}^{\Delta(\eta) - (\lambda, \alpha)} \cdot |D^{\alpha} R(\eta^s)|. \quad (1.9)$$

Так как $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{R(\xi + \xi^s)}{R(\xi^s)}$ существует для каждой точки $\xi \in \mathbb{R}^n$, то за счет выбора подпоследовательности возможны следующие два случая :

а) существует число $C > 0$ такое, что $A_s \leq C$ при всех $s = 1, 2, \dots$,

б) $A_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$.

В случае а) без потери общности можем предположить, что $A_s \rightarrow A$. Тогда, ввиду того, что $Q \in L_{\eta}^{\lambda}(R)$, $A \geq 0$ и $\sum_{(\lambda, \alpha) = \Delta(\eta)} |D^{\alpha} R(\eta)| > 0$, для произвольной точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ получаем

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{R(\xi + \xi^s)}{\tilde{R}(\xi^s)} = \frac{\sum_{(\lambda, \alpha) = \Delta(\eta)} \frac{\xi^{\alpha}}{\alpha!} \cdot D^{\alpha} R(\eta)}{A + \sum_{(\lambda, \alpha) = \Delta(\eta)} |D^{\alpha} R(\eta)|} + q(\xi) \equiv Q(\xi), \quad (1.10)$$

где

$$q(\xi) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\sum_{(\lambda, \alpha) = \Delta(\eta)} |\xi^s|_{\lambda}^{\Delta(\eta) - (\lambda, \alpha)} \frac{\xi^{\alpha}}{\alpha!} \cdot D^{\alpha} R(\eta^s)}{A_s + \sum_{(\lambda, \alpha) = \Delta(\eta)} |D^{\alpha} R(\eta^s)|}, \quad \deg_{\lambda} q \leq \Delta(\eta), \quad (1.11)$$

т. е. $\deg_{\lambda} Q \leq \Delta(\eta)$.

Рассмотрим случай б). Так как предел $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{R(\xi + \xi^s)}{R(\xi^s)}$ существует, то рассуждая как в случае а) получим

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{R(\xi + \xi^s)}{\tilde{R}(\xi^s)} = q(\xi) \quad (\equiv Q(\xi)),$$

и $\deg_{\lambda} Q < \Delta(\eta)$. Теорема 1.1 доказана.

Приведем два следствия, первое из которых показывает, что в неравенстве $\deg_{\lambda} Q \leq \Delta(\eta)$ равенство всегда достигается.

Следствие 1.1. Если многочлен $R(\xi)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1 и

$$Q(\xi) = \frac{1}{\sigma} \sum_{(\lambda, \alpha) = \Delta(\eta)} \frac{\Delta^{\alpha} R(\eta)}{\alpha!} \xi^{\alpha},$$

$$\sigma = \sigma(\eta, R, \lambda) = \left[\sum_{(\lambda, \alpha) = \Delta(\eta)} |\Delta^{\alpha} R(\eta)|^2 \right]^{1/2}, \quad (1.12)$$

то $Q \in L_\eta(R)$.

Доказательство получается повторением рассуждений доказательства теоремы 1.1, если заменить последовательность $\{\xi^s\}$ на последовательность $\xi^s = s^\lambda \eta = (s^{\lambda_1} \eta_1, \dots, s^{\lambda_n} \eta_n)$, $s = 1, 2, \dots$, и заметить, что в этом случае $A_s = 0$ ($s = 1, 2, \dots$), $q(\xi) \equiv 0$ (см. (1.11)).

Замечание 1.2. Пусть $R(\xi)$ — однородный многочлен и $\eta \in \mathbb{R}^n$, $|\eta| = 1$. Тогда множество $L_\eta(R)$ локализаций R состоит из многочленов вида

$$Q(\xi) = \frac{\theta}{\sigma} \sum_{|\alpha|=\Delta(\eta)} \frac{\Delta^\alpha R(\eta)}{\alpha!} \xi^\alpha + q(\xi),$$

где $\theta = 1$, либо $\theta = 0$, $\deg q < \Delta(\eta)$, а число σ определено формулой (1.12) при $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$.

§2. ОДНОРОДНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

В этом параграфе мы изучим локализации двумерных, однородных, гиперболических в смысле Л. Гординга многочленов с характеристиками постоянной кратности.

Пусть $R(\xi) = R(\xi_1, \xi_2)$ — однородный многочлен порядка $d > 0$, гиперболический по Л. Гордингу (см. [6], или [1], определение 12.3.3). По теореме 12.4.3 работы [1], любой однородный, гиперболический многочлен имеет лишь вещественные корни и, следовательно, представим в виде

$$R(\xi) = \prod_{j=1}^M (\xi_1 - \tau_j \xi_2)^{l_j}, \quad l_1 + \dots + l_M = d, \quad (2.1)$$

где τ_j — вещественные числа, $\tau_i \neq \tau_j$ при $i \neq j$ ($i, j = 1, \dots, M$).

Теорема 2.1. Пусть R — многочлен, представимый в виде (2.1) и $\theta^k \in \mathbb{R}^2$, $|\theta^k| = 1$, $\theta_1^k - \tau_k \theta_2^k = 0$ ($k = 1, \dots, M$). Тогда, если

$$Q_k(\xi) = \sum_{|\alpha|=l_k} q_\alpha^k \cdot \xi^\alpha, \quad (2.2)$$

где

$$q_{\alpha}^k = \frac{D^{\alpha} R(\theta^k)}{\alpha! \sqrt{\sum_{|\alpha|=l_k} |D^{\alpha} R(\theta^k)|^2}}, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (2.3)$$

то $Q_k \in L(R)$ ($k = 1, \dots, M$).

Доказательство. Пусть $\xi^{s,k} = s \cdot \theta^k$ ($k = 1, \dots, M$; $s = 1, 2, \dots$). Тогда при $s \rightarrow \infty$ имеем $|\xi^{s,k}| = s \rightarrow \infty$, и по формуле Тейлора

$$\begin{aligned} R(\xi + \xi^{s,k}) &= \sum_{\alpha} \frac{\xi^{\alpha}}{\alpha!} D^{\alpha} R(\xi^{s,k}) = \sum_{\alpha} \frac{\xi^{\alpha}}{\alpha!} s^{d-|\alpha|} \cdot D^{\alpha} R(\theta^k) = \\ &= s^{d-l_k} \sum_{|\alpha|=l_k} \frac{\xi^{\alpha}}{\alpha!} \cdot D^{\alpha} R(\theta^k) + \sum_{|\alpha|>l_k} \frac{\xi^{\alpha}}{\alpha!} s^{d-|\alpha|} \cdot D^{\alpha} R(\theta^k). \end{aligned} \quad (2.4)$$

При доказательстве последнего соотношения мы использовали то, что $D^{\alpha} R(\theta^k) = 0$ при $|\alpha| < l_k$, $k = 1, \dots, M$. Аналогично, для многочлена $\tilde{R}^2(\xi)$ имеем

$$\tilde{R}^2(\xi^{s,k}) = s^{2(d-l_k)} \sum_{|\alpha|=l_k} |D^{\alpha} R(\theta^k)|^2 + \sum_{|\alpha|>l_k} s^{2(d-|\alpha|)} \cdot |D^{\alpha} R(\theta^k)|^2. \quad (2.5)$$

Так как $D^{\alpha} R(\theta^k) \neq 0$ при $|\alpha| = l_k$ и при $s \rightarrow \infty$

$$\frac{\sum_{|\alpha|>l_k} s^{2(d-|\alpha|)} \cdot |D^{\alpha} R(\theta^k)|^2}{s^{2(d-l_k)}} \rightarrow 0,$$

то из соотношений (2.4), (2.5) следует, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{R(\xi + \xi^{s,k})}{\tilde{R}(\xi^{s,k})} = Q_k(\xi), \quad k = 1, \dots, M,$$

чем завершается доказательство теоремы 2.1.

Следующий простой пример показывает, что локализации однородных многочленов вообще говоря не являются однородными многочленами, они содержат ненулевые младшие члены.

Пример. Пусть $n = 2$ и d – натуральное число. Очевидно, что $R(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^d$ есть гиперболический многочлен относительно любого вектора $N \in \mathbb{R}^2$, $N_1 \neq N_2$, для которого $M = 1$, $\tau = 1$, $\theta = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ и $\Delta(\theta, R) = d$. Для любого $s = 1, 2, \dots$ положим $\xi^s = (\xi_1^s, \xi_2^s) = (s + a, s + b)$, где a, b ($a \neq b$) – вещественные

числа. Заметим, что функции $R(\xi + \xi^s)$, $\bar{R}^2(\xi^s)$ не зависят от s и, поскольку $a \neq b$, то $R(\xi + \xi^s) = [(\xi_1 - \xi_2) + (a - b)]^d$, $\bar{R}(\xi^s) \neq 0$. Тем самым, предельный многочлен

$$Q(\xi) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{R(\xi + \xi^s)}{\bar{R}(\xi^s)}$$

содержит младшие члены порядка m при любом $0 \leq m \leq l$.

Остается заметить, что для этого многочлена существует локализация Q с максимальным порядком $\deg Q = d$. При этом, если брать $a = b$, то получим локализацию $Q(\xi) = \frac{R(\xi)}{d - d!}$.

§3. НОСИТЕЛЬ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ И ПОРЯДОК ЛОКАЛИЗАЦИЙ

В этом параграфе мы покажем, что, грубо говоря, чем шире носитель гипозеллиптичности данного дифференциального оператора, тем уже его множество локализаций. Следуя терминологии работы [7], приведем необходимые определения и обозначения. Пусть, как и выше, N^n — множество n -мерных мультииндексов. Для произвольного (в том числе и пустого) множества $e \subset \{1, \dots, n\}$ положим $N^n_{0,e} = \{\alpha; \alpha \in N^n, \alpha_j = 0, j \in e\}$.

Определение 3.1 (см. [7]). Носителем гипозеллиптичности $H = H(P)$ линейного, дифференциального оператора $P(D)$ с постоянными коэффициентами называется наибольшее из подмножеств $e \subset \{1, \dots, n\}$, удовлетворяющих условию

$$\frac{|D^\nu P(\xi)|}{|P(\xi)|} \rightarrow 0, \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty$$

для любых мультииндексов $0 \neq \nu \in N^n_{0,e}$.

Число $h = h(P)$ элементов множества H называется числом гипозеллиптичности оператора $P(D)$. При этом, если $H = \emptyset$, то полагаем $h(P) = 0$.

Из определения носителя гипозеллиптичности следует, что для гипозеллиптических операторов $H(P) = \{1, \dots, n\}$ ($h(P) = n$), в отличие от гиперболических в смысле Л. Гординга операторов, для которых $H(P) = \emptyset$ ($h(P) = 0$) (см. [8],

теорему 2.1). Таким образом, в смысле носителя гипоеллиптичности, гиперболические по Л. Гордингу (и, тем самым, также по И. Г. Петровскому) операторы с постоянными коэффициентами и гипоеллиiptические операторы занимают крайние позиции.

Следующий результат обобщает теорему 1.1 и уточняет максимальный порядок локализационного многочлена по отдельным переменным.

Теорема 3.1. Пусть многочлен R и точка $\eta \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяют условиям теоремы 1.1, $Q \in L_\eta(R)$, $Q(\xi) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \xi^{\alpha}$ и $(Q) = \{\alpha; \alpha \in N_{\eta}^n, q_{\alpha} \neq 0\}$. Далее, пусть $H = H(R)$ – носитель гипоеллиптичности многочлена R . Тогда $q_{\alpha} = 0$ при $\alpha \in (Q) \cap N_{\eta, H}^n$, или, что то же самое, $Q(\theta \cdot \xi) \equiv \text{const}$, где $\theta_j = 1$, при $j \in H$ и $\theta_j = 0$, при $j \in H$.

Следствие 3.1. Пусть

$$\deg_j Q = \max_{\alpha \in (Q)} \alpha_j.$$

Предположим для простоты, что однородный многочлен R и многочлен Q удовлетворяют условиям теоремы 3.1. Тогда $\deg_j Q \leq \Delta(\eta) - 1$ для всех $j \in H(R)$.

Доказательство теоремы 3.1. В дальнейшем будем считать, что

$$\tilde{R}(\xi) = \sum_{\alpha} |D^{\alpha} R(\xi)|. \quad (3.1)$$

Пусть $\frac{R(\xi + \xi^*)}{R(\xi^*)} \rightarrow Q(\xi)$ при $\xi^* \rightarrow \infty$. Пользуясь соотношением (3.1) функции $R(\xi + \eta)$ и $\tilde{R}(\eta)$ можно представить в виде

$$R(\xi + \xi^*) = \sum_{\alpha \in N_{\eta, H}^n} \frac{\xi^{\alpha}}{\alpha!} D^{\alpha} R(\xi^*) + \sum_{\alpha \notin N_{\eta, H}^n} \frac{\xi^{\alpha}}{\alpha!} D^{\alpha} R(\xi^*), \quad (3.2)$$

$$\tilde{R}(\xi^*) = \sum_{\alpha \in N_{\eta, H}^n} |D^{\alpha} R(\xi^*)| + \sum_{\alpha \notin N_{\eta, H}^n} |D^{\alpha} R(\xi^*)|. \quad (3.3)$$

По определению множества $H(R)$, для любой точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ при $\lambda \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{\sum_{\alpha \in N_{\eta, H}^n} \frac{\xi^{\alpha}}{\alpha!} D^{\alpha} R(\xi^*)}{\tilde{R}(\xi^*)} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \frac{\sum_{\alpha \notin N_{\eta, H}^n} |D^{\alpha} R(\xi^*)|}{\tilde{R}(\xi^*)} \rightarrow 0,$$

что вместе с представлениями (3.2), (3.3) доказывает теорему.

Доказательство замечания 3.1 следует из теорем 1.1 и 3.1.

§4. ЛОКАЛИЗАЦИИ ОБЩИХ МНОГОЧЛЕНОВ

В этом параграфе изучены локализации в бесконечности общих многочленов с постоянными коэффициентами.

Введем сначала ряд обозначений. Полагая, что $\alpha \in N^n$, обозначим $V\alpha = \{\beta; \beta \in N^n, 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i, i = 1, \dots, n\}$. Для набора мультииндексов $\mathcal{G} = \{\alpha^1, \dots, \alpha^N\}$ положим $V\mathcal{G} = \bigcup_{j=1}^N V\alpha^j$, а через $\tilde{N}(\mathcal{G}) = N(V\mathcal{G})$ обозначим многогранник Ньютона набора $V\mathcal{G}$.

Очевидно, что : а) $N(\mathcal{G}) \subset \tilde{N}(\mathcal{G})$; б) если N — правильный многогранник, то $\tilde{N} = N$; в) вполне правильные грани многогранников N и $\tilde{N}$ совпадают.

Для выпуклого многогранника N через N' обозначим многогранник Ньютона, натянутый на вполне правильные точки многогранника N . В [3] доказано, что $\tilde{N}' \equiv \tilde{N}$.

Пусть теперь $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ — многочлен с постоянными коэффициентами, отвечающий линейному дифференциальному оператору $P(D) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} D^{\alpha}$, где сумма берется по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha; \alpha \in N^n, \gamma_{\alpha} \neq 0\}$.

Положим

$$\mathcal{G} = \bigcup_{\nu \geq 0} (D^{\nu} P), \quad \tilde{N} = \tilde{N}(P) = \tilde{N}(\mathcal{G}), \quad (4.1)$$

$$D^{\nu} P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha}^{\nu} \xi^{\alpha}, \quad (D^{\nu} P) = \{\alpha; \alpha \in N^n, \gamma_{\alpha}^{\nu} \neq 0\}. \quad (4.2)$$

Пусть $\tilde{N}_i^j$ — j -мерные правильные грани $\tilde{N}(P)$ и Λ_i^j — множество единичных внешних относительно $\tilde{N}$ нормалей ($\tilde{N}$ -нормалей) граней $\tilde{N}_i^j$ ($i = 0, 1, \dots, M_j, j = 0, 1, \dots, n-1$). Положим

$$\Lambda = \Lambda(P) = \bigcup_{j=0}^{n-1} \bigcup_{i=1}^{M_j} \Lambda_i^j.$$

Пусть $\mu \in \Lambda$, тогда $\mu \in \Lambda_i^j$ для некоторой (очевидно единственной) пары (i, j) , $1 \leq i \leq M_j, 0 \leq j \leq n-1$. Ясно, что существуют числа

$$d_0(\mu) > d_1(\mu) > \dots > d_M(\mu) \geq 0, \quad M = M(\mu)$$

такие, что многочлен $P(\xi)$ представим в виде суммы μ -однородных многочленов:

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^M P_j(\xi) = \sum_{j=0}^M \sum_{(\mu, \alpha)=d_j} \gamma_\alpha \xi^\alpha. \quad (4.3)$$

Для μ -однородного многочлена $P_o(\xi)$ и точки $\eta \in \mathbb{R}^n$, $|\eta|_\mu = 1$, число $\Delta_o = \Delta_o(\eta, P_o, \mu)$ определим как в §1:

$$\mathcal{G}(\eta) = \mathcal{G}(\eta, P_o) = \{\nu; \nu \in N_o^n, D^\nu P_o(\eta) \neq 0\},$$

$$\Delta_o = \Delta_o(\eta, P_o, \mu) = \min_{\nu \in \mathcal{G}(\eta)} (\mu, \nu).$$

(Основным результатом параграфа является

Теорема 4.1. Пусть $P(\xi)$ — многочлен n переменных с постоянными коэффициентами, $\eta \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \Lambda(P)$, $|\eta|_\mu = 1$ и $Q \in L_\eta^\mu(P)$. Тогда $\deg_\mu Q \leq \Delta_o(\mu, \eta)$.

Замечание 4.1. Пусть $Q \in L_\eta(P)$, т. е. Q — локализация на бесконечности многочлена P в точке $\eta \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\deg Q \leq \Delta_o$, где число Δ_o соответствует единичному вектору $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ с $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = n^{-1/2}$.

Доказательство теоремы 4.1. Пусть $\mu \in \Lambda(P)$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, $|\eta|_\mu = 1$, $\xi^s \rightarrow \infty$, $\eta^s = \frac{\xi^s}{|\xi^s|_\mu^{1/\mu}} \rightarrow \eta$ при $s \rightarrow \infty$, и при любом $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{P(\xi + \xi^s)}{\tilde{P}(\xi^s)} = Q(\xi). \quad (4.4)$$

Рассмотрим в отдельности поведение функций $\tilde{P}(\xi^s)$ и $P(\xi + \xi^s)$ при $s \rightarrow \infty$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$. Из (4.3) следует, что

$$\begin{aligned} P(\xi + \xi^s) &= \sum_{j=0}^M \sum_{(\mu, \alpha) < \Delta_o} |\xi^s|_\mu^{d_j - (\mu, \alpha)} \cdot \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} \cdot D^\alpha P_j(\eta^s) + \\ &+ \sum_{j=0}^M |\xi^s|_\mu^{d_j - \Delta_o} \sum_{(\mu, \alpha) = \Delta_o} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} \cdot D^\alpha P_j(\eta^s) + \\ &+ \sum_{j=0}^M \sum_{(\mu, \alpha) > \Delta_o} |\xi^s|_\mu^{d_j - (\mu, \alpha)} \cdot \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} \cdot D^\alpha P_j(\eta^s). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Аналогично, для функции $\tilde{P}$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\xi^s) = & \sum_{\alpha} \left| \sum_{j=0}^M D^{\alpha} P_j(\xi^s) \right| = \sum_{(\mu, \alpha) < \Delta_0} \left| \sum_{j=0}^M |\xi^s|_{\mu}^{d_j - (\mu, \alpha)} \cdot D^{\alpha} P_j(\eta^s) \right| + \\ & + \sum_{(\mu, \alpha) = \Delta_0} \left| \sum_{j=0}^M |\xi^s|_{\mu}^{d_j - \Delta_0} D^{\alpha} P_j(\eta^s) \right| + \sum_{(\mu, \alpha) > \Delta_0} \left| \sum_{j=0}^M |\xi^s|_{\mu}^{d_j - (\mu, \alpha)} \cdot D^{\alpha} P_j(\eta^s) \right|. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Теперь в отдельности рассмотрим поведение слагаемых в (4.5) и (4.6) при $s \rightarrow \infty$.

$$A_1^s \equiv \frac{\sum_{(\mu, \alpha) < \Delta_0} \left| \sum_{j=0}^M D^{\alpha} P_j(\xi^s) \right|}{|\xi^s|_{\mu}^{d_0 - \Delta_0}} = \sum_{(\mu, \alpha) < \Delta_0} \left| \sum_{j=0}^M |\xi^s|_{\mu}^{(d_j - d_0) + (\Delta_0 - (\mu, \alpha))} D^{\alpha} P_j(\eta^s) \right|, \quad (4.7)$$

$$A_2^s \equiv \frac{\sum_{(\mu, \alpha) = \Delta_0} \left| \sum_{j=0}^M D^{\alpha} P_j(\xi^s) \right|}{|\xi^s|_{\mu}^{d_0 - \Delta_0}} = \sum_{(\mu, \alpha) = \Delta_0} \left| \sum_{j=0}^M |\xi^s|_{\mu}^{d_j - d_0} D^{\alpha} P_j(\eta^s) \right|, \quad (4.8)$$

$$A_3^s \equiv \frac{\sum_{(\mu, \alpha) > \Delta_0} \left| \sum_{j=0}^M D^{\alpha} P_j(\xi^s) \right|}{|\xi^s|_{\mu}^{d_0 - \Delta_0}} = \sum_{(\mu, \alpha) > \Delta_0} \left| \sum_{j=0}^M |\xi^s|_{\mu}^{(d_j - d_0) - [(\mu, \alpha) - \Delta_0]} D^{\alpha} P_j(\eta^s) \right|. \quad (4.9)$$

Очевидно, что при $s \rightarrow \infty$

$$A_3^s \rightarrow 0. \quad (4.10)$$

Так как $D^{\alpha} P_0(\eta) \neq 0$ для некоторого $\alpha \in N_0^n$, $(\mu, \alpha) = \Delta_0$ и $d_j < d_0$ при всех $j = 1, \dots, M$, то

$$A_2^s \rightarrow A_2 > 0. \quad (4.11)$$

Возможны следующие два случая :

а) существует число $\varepsilon \geq 0$ такое, что $A_1^s \leq \varepsilon$ ($s = 1, 2, \dots$);

б) $A_1^s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$.

В случае а) из последовательности $\{A_1^s\}$ выберем сходящуюся подпоследовательность (которую снова обозначим через $\{A_1^s\}$) такую, что $A_1^s \rightarrow A_1$. Тогда из (4.6) - (4.11) следует, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\tilde{P}(\xi^s)}{|\xi^s|_{\mu}^{d_0 - \Delta_0}} = A_1 + A_2 = A > 0. \quad (4.12)$$

Аналогично, для функции $P(\xi + \xi^s)$ и произвольной точки $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} B_1^s(\xi) &\equiv \frac{\sum_{j=0}^M \sum_{(\mu, \alpha) < \Delta_o} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha P_j(\xi^s)}{|\xi^s|_\mu^{d_o - \Delta_o}} = \\ &= \sum_{j=0}^M \sum_{(\mu, \alpha) < \Delta_o} |\xi^s|_\mu^{(d_j - d_o) + (\Delta_o - (\mu, \alpha))} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha P_j(\xi^s), \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} B_2^s(\xi) \equiv \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^M \sum_{(\mu, \alpha) = \Delta_o} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha P_j(\xi^s)}{|\xi^s|_\mu^{d_o - \Delta_o}} = \sum_{(\mu, \alpha) = \Delta_o} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha P_o(\eta), \quad (4.14)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} B_3^s(\xi) \equiv \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^M \sum_{(\mu, \alpha) > \Delta_o} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha P_j(\xi^s)}{|\xi^s|_\mu^{d_o - \Delta_o}} = 0. \quad (4.15)$$

Из соотношений (4.12) – (4.15) следует, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{B_2^s(\xi) + B_3^s(\xi)}{\tilde{P}(\xi^s) |\xi^s|^{d_o - \Delta_o}} = \frac{1}{A} \sum_{(\mu, \alpha) = \Delta_o} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha P_o(\eta). \quad (4.16)$$

Поскольку по условию теоремы при $s \rightarrow \infty$ существует предел $\frac{P(\xi + \xi^s)}{P(\xi^s)}$, то существует также

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{B_1^s(\xi)}{\tilde{P}(\xi^s) |\xi^s|_\mu^{d_o - \Delta_o}} = q(\xi),$$

причем, очевидно, $\deg_\mu q < \Delta_o$. Сопоставляя последнее с (4.16), получим

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{P(\xi + \xi^s)}{\tilde{P}(\xi^s)} = q(\xi) + \frac{1}{A} \sum_{(\mu, \alpha) = \Delta_o} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha P_o(\eta) \equiv Q(\xi)$$

и $\deg_\mu Q \leq \Delta_o(\eta)$.

Перейдя к рассмотрению случая б), заметим, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{B_2^s(\xi) + B_3^s(\xi)}{A_1^s} = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{A_2^s + A_3^s}{A_1^s} = 0$$

и существует

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{A_1^s(\xi)}{A_1^s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{P(\xi + \xi^s)}{\tilde{P}(\xi^s)} = q(\xi) \equiv Q(\xi),$$

причем, очевидно, $\deg_\mu Q < \Delta_o$. Теорема 4.1 доказана.

ABSTRACT. The paper studies the localizations of nonhypoelliptic operators, mainly the behavior of the ratio $P(\xi + \eta)/\tilde{P}(\eta)$ as $|\eta| \rightarrow \infty$, where

$P(\xi)$ is the symbol of linear differential operator $P(D)$, $\tilde{P}(\xi)$ is the corresponding Hörmander function. For a class of operators we determine the localization degree as well as the set of localizations.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Хёрмандер, Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными; Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, т. 2, Москва, Мир, 1986.
2. В. П. Михайлов, "О поведении в бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, т. 91, стр. 59 – 81, 1967.
3. Г. Г. Казарян, "О сравнении дифференциальных операторов и дифференциальных операторов постоянной силы", Труды МИАН СССР, т. 131, стр. 94 – 118, 1974.
4. Г. Г. Казарян, "О нулях многочленов многих переменных", Диф. уравнения, т. 10, №4, стр. 712 – 720, 1974.
5. Г. Г. Казарян, "Оценки дифференциальных операторов и гипозэллиптические операторы", Труды МИАН СССР, т. 140, стр. 130 – 161, 1976.
6. L. Gårding, "Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients", Acta Math., vol. 85, no. 1 – 2, pp. 1 – 62, 1951.
7. Г. Г. Казарян, "Об одной числовой характеристике линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами", ДАН СССР, т. 285, №5, стр. 1068 – 1072, 1985.
8. Г. Г. Казарян, В. Н. Маркарян, "Носитель гипозэллиптичности линейных дифференциальных операторов", Известия АН Армянской ССР, Математика, т. 21, №5, стр. 453 – 470, 1986.

2 февраля 1994

Ереванский государственный университет

О ЗАДАЧЕ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Г. В. Вирабян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 29, №3, 1994

Статья посвящена задаче Бицадзе-Самарского для уравнения колебания струны и эквивалентных гиперболических систем в случае, когда рассматриваемая область – круг или прямоугольник. Установлены теоремы о разрешимости и единственности решения в классе обобщенных функций.

ВВЕДЕНИЕ

В работе А. В. Бицадзе и А. А. Самарского [1], относящейся к равномерным эллиптическим уравнениям, была предложена новая постановка краевой задачи. Предполагается, что неизвестная функция u удовлетворяет обычному условию Дирихле лишь на части границы, а на оставшейся части границы и на дуге, лежащей внутри области, u удовлетворяет некоторому соотношению. Для уравнения Лапласа была указана методика установления корректности такой постановки задачи. Различные варианты эллиптических задач с краевыми условиями типа Бицадзе-Самарского рассматривались в работах [4 – 7]. Важность развития общей теории этих задач отмечена в [3, 8, 9].

В настоящей статье исследована краевая задача Бицадзе-Самарского для гиперболических уравнений второго порядка. Рассмотрены две постановки этой задачи – для уравнения колебания струны и для системы дифференциальных уравнений, эквивалентной уравнению струны, когда рассматриваемая область есть круг или прямоугольник.

§1. СЛУЧАЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Пусть область $\bar{\Omega}$ – квадрат $\{-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$. Краевую задачу

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

$$a_1(x)u_1 + b_1(x)u_2|_{y=-1} = f_1(x),$$

$$a_2(x)u_1 + b_2(x)u_2|_{y=1} = f_2(x),$$

$$a_3(y)u_1 + b_3(y)u_2|_{x=-1} = f_3(y),$$

$$a_4(y)u_1 + b_4(y)u_2|_{x=1} = a_1(y)u_1 + b_4(y)u_2|_{x=r} = f_4(y),$$

где $0 \leq r \leq 1$, а a_i, b_i, f_i ($i = 1, \dots, 4$) – непрерывные функции на интервале $[-1, 1]$,

будем называть задачей Бицадзе-Самарского для системы дифференциальных уравнений, эквивалентной уравнению колебания струны. Ниже мы будем искать решение краевой задачи (1), (2) в классе непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций.

При $r = 1$ задача (1), (2) была впервые рассмотрена С. Л. Соболевым [2], см. также [10, 11], а для $r = 0$ – см. в [12]. В данной статье эта задача изучается для произвольных $r \in [0, 1]$. Случаи рационального и иррационального r рассмотрены отдельно.

1. Пусть r – рациональное число: $r = \frac{m}{n} \in [0, 1]$ (полагаем, что дробь m/n несократима). Границу $\partial\Omega$ квадрата $\bar{\Omega}$, начиная с нижнего левого угла O_1 , разделим на равные интервалы $I_k = \left(\frac{k-1}{n} < s < \frac{k}{n}\right)$, $k = 1, 2, \dots, 8n$, длины $\frac{1}{n}$. Здесь s – дуга $\partial\Omega$, отсчитываемая от вершины O_1 в направлении, обратном часовой стрелке (см. рис. 1). В этих интервалах отметим точки с координатами

$$M_{2k} \left(\frac{2k}{n} - \frac{\xi}{n} \right) \in I_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots, 4n, \\ M_{2k+1} \left(\frac{2k}{n} + \frac{\xi}{n} \right) \in I_{2k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, 4n-1. \quad (3)$$

Эти точки представляют собой узлы упругих отражений от $\partial\Omega$ светового луча, исходящего из точки $M_1(\xi/n) \in I_1$ по одному из характеристических направлений ($x \pm y = \text{const}$) системы (1). Пусть $M \in \partial\Omega$ – произвольная точка. Обозначим через

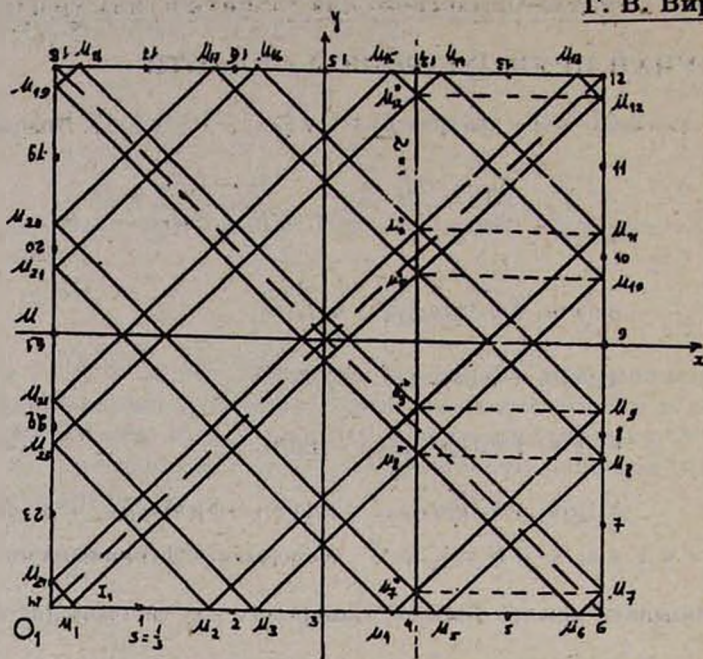


Рис. 1

$S^\pm(M)$ точки пересечения $\partial\Omega$ с соответствующим семейством характеристик $x \pm y = \text{const}$ системы (1). Далее, обозначим через M^* проекцию точки $M \in [M_{2n}, M_{4n}]$ на линию $x = r$, параллельную оси x . Легко установить следующие соотношения для автоморфизмов $S^\pm$ границы $\partial\Omega$ в себя.

Лемма 1. Автоморфизмы $S^\pm$ обладают следующими свойствами:

$$S^-(M_k) = M_{4n-k+1}, \quad S^+(M_k) = M_{8n-k+1}, \quad k = 2n+1, \dots, 4n.$$

$$S^-(M_k) = M_{12n-k+1}, \quad S^+(M_k) = M_{8n-k+1}, \quad k = 6n+1, \dots, 8n.$$

$$S^-(M_k^*) = M_{3n+m-k+1}, \quad k = 2n+1, \dots, 3n+m.$$

$$S^-(M_k^*) = M_{n-m+k}, \quad k = 3n+m+1, \dots, 4n.$$

$$S^+(M_k^*) = M_{m-n+k}, \quad k = 2n+1, \dots, 3n-m.$$

$$S^+(M_k^*) = M_{9n-m+1}, \quad k = 3n-m+1, \dots, 4n.$$

Общее решение системы (1) можно написать в виде

$$\begin{aligned} u_1(P) &= \varphi_1(P) + \varphi_2(P), \\ u_2(P) &= \varphi_1(P) - \varphi_2(P), \end{aligned} \quad (4)$$

где $P \in \bar{\Omega}$, а функции $\varphi_1(P)$ и $\varphi_2(P)$ постоянны на характеристиках $x + y = \text{const}$

и $x - y = \text{const}$ соответственно :

$$\varphi_1(S^+ P) = \varphi_1(P), \quad \varphi_2(S^- P) = \varphi_2(P). \quad (5)$$

Здесь $S^\pm P$ — точки, где характеристики, проходящие через точку $P \in \bar{\Omega}$, пересекают границу $\partial\Omega$.

В рассматриваемом случае задача Бицадзе–Самарского состоит в определении искомых $\varphi_1(P)$ и $\varphi_2(P)$ из класса $C(\bar{\Omega})$ непрерывных в $\bar{\Omega}$ функций. Таким образом, ставится задача отыскания обобщенного решения краевой задачи (1), (2).

Определение. Обобщенным решением краевой задачи (1), (2) Бицадзе–Самарского называем пару функций u_1, u_2 , удовлетворяющих почти всюду в $\Omega = \bar{\Omega} \setminus \partial\Omega$ системе (1) дифференциальных уравнений, а также граничным условиям (2).

Подставляя общее решение (4) системы (1) в граничное условие (2) в точках M_k ($k = 1, \dots, 8n$), получаем систему из $8n$ уравнений :

$$\begin{aligned} [a_1(M_k) + b_1(M_k)]\varphi_1(M_k) + [a_1(M_k) - b_1(M_k)]\varphi_2(M_k) &= f_1(M_k), \quad k = 1, \dots, 2n, \\ [a_2(M_k) + b_2(M_k)]\varphi_1(M_k) + [a_2(M_k) - b_2(M_k)]\varphi_2(M_k) &= f_2(M_k), \quad k = 4n + 1, \dots, 6n, \\ [a_3(M_k) + b_3(M_k)]\varphi_1(M_k) + [a_3(M_k) - b_3(M_k)]\varphi_2(M_k) &= f_3(M_k), \quad k = 6n + 1, \dots, 8n, \\ [a_4(M_k) + b_4(M_k)]\varphi_1(M_k) + [a_4(M_k) - b_4(M_k)]\varphi_2(M_k) &= \\ = [a_4(M_k) + b_4(M_k)]\varphi_1(M_k^*) + [a_4(M_k) - b_4(M_k)]\varphi_2(M_k^*), \quad k = 2n + 1, \dots, 4n. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку функции φ_1 и φ_2 инвариантны относительно автоморфизмов S^+ и S^- соответственно, то, согласно лемме 1

$$\varphi_2(M_k) = \varphi_2(M_{4n-k+1}), \quad k = 1, \dots, 2n, \quad (7)$$

$$\varphi_2(M_k) = \varphi_2(M_{12n-k+1}), \quad k = 4n + 1, \dots, 6n, \quad (8)$$

$$\varphi_1(M_k) = \varphi_1(M_{8n-k}), \quad k = 1, \dots, 2n, \quad (9)$$

$$\varphi_1(M_k) = \varphi_1(M_{4n-k}), \quad k = 4n+1, \dots, 6n. \quad (10)$$

Полагая $0 \leq \xi \leq 1$, введем обозначения

$$\lambda_k \left(\frac{\xi}{n} \right) = \varphi_1(M_k), \quad k = 1, \dots, 2n, \quad (11)$$

$$\lambda_{2n+k} \left(\frac{\xi}{n} \right) = \varphi_1(M_{4n+k}), \quad k = 1, \dots, 2n, \quad (12)$$

$$\lambda_{4n+k} \left(\frac{\xi}{n} \right) = \varphi_2(M_k), \quad k = 1, \dots, 2n, \quad (13)$$

$$\lambda_{6n+k} \left(\frac{\xi}{n} \right) = \varphi_2(M_{4n+k}), \quad k = 1, \dots, 2n. \quad (14)$$

Заметим, что нахождение искомым функций φ_1 и φ_2 в промежутке $[-2, 2]$, т. е. решение задачи Бицадзе-Самарского, эквивалентно нахождению новых неизвестных функций $\lambda_j \left(\frac{\xi}{n} \right)$, $j = 1, \dots, 8n$, $\xi \in [0, 1]$. Воспользовавшись соотношениями (7) – (10) и леммой 1, систему (6) можно переписать в виде алгебраической системы из $8n$ уравнений относительно $8n$ неизвестных функций λ_j :

$$\begin{aligned} [a_1(M_k) + b_1(M_k)]\lambda_k \left(\frac{\xi}{n} \right) + [a_1(M_k) - b_1(M_k)]\lambda_{4n+k} \left(\frac{\xi}{n} \right) &= f_1(M_k), \quad k = 1, \dots, 2n, \\ [a_2(M_k) + b_2(M_k)]\lambda_{k-2n} \left(\frac{\xi}{n} \right) + [a_2(M_k) - b_2(M_k)]\lambda_{2n+k} \left(\frac{\xi}{n} \right) &= f_2(M_k), \\ &k = 4n+1, \dots, 6n, \\ [a_3(M_k) + b_3(M_k)]\lambda_{4n-k+1} \left(\frac{\xi}{n} \right) + [a_3(M_k) - b_3(M_k)]\lambda_{14n-k+1} \left(\frac{\xi}{n} \right) &= f_3(M_k), \\ &k = 6n+1, \dots, 8n, \\ [a_4(M_k) + b_4(M_k)]\lambda_{6n-k+1} \left(\frac{\xi}{n} \right) + [a_4(M_k) - b_4(M_k)]\lambda_{8n-k+1} \left(\frac{\xi}{n} \right) &= \\ &= [a_4(M_k) + b_4(M_k)]\lambda_{m-n+k} \left(\frac{\xi}{n} \right) + [a_4(M_k) - b_4(M_k)]\lambda_{7n+m-k+1} \left(\frac{\xi}{n} \right), \\ &k = 2n+1, \dots, 3n-m, \quad (15) \\ [a_4(M_k) + b_4(M_k)]\lambda_{8n-k+1} \left(\frac{\xi}{n} \right) + [a_4(M_k) - b_4(M_k)]\lambda_{8n-k+1} \left(\frac{\xi}{n} \right) &= \\ &= [a_4(M_k) + b_4(M_k)]\lambda_{7n-m-k+1} \left(\frac{\xi}{n} \right) + [a_4(M_k) - b_4(M_k)]\lambda_{7n+m-k+1} \left(\frac{\xi}{n} \right), \\ &k = 3n-m+1, \dots, 3n+m, \\ [a_4(M_k) + b_4(M_k)]\lambda_{6n-k+1} \left(\frac{\xi}{n} \right) + [a_4(M_k) - b_4(M_k)]\lambda_{8n-k+1} \left(\frac{\xi}{n} \right) &= \\ &= [a_4(M_k) + b_4(M_k)]\lambda_{14n-m-k+1} \left(\frac{\xi}{n} \right) + [a_4(M_k) - b_4(M_k)]\lambda_{3n-m+k} \left(\frac{\xi}{n} \right), \\ &k = 3n+m+1, \dots, 4n. \end{aligned}$$

Обозначим через $\Delta(\xi)$ определитель этой системы. В случае задачи Дирихле $\Delta(\xi)$ совпадает с определителем из [10], в случае же, когда $r = 0$, явный вид $\Delta(\xi)$ дан в работе [12].

Теорема 1. Если определитель $\Delta(\xi)$ системы (15) отличен от нуля для всех $\xi \in [0, 1]$, то краевая задача Бицадзе–Самарского имеет единственное обобщенное решение в классе непрерывных функций.

2. Предположим теперь, что $r \in [0, 1]$ – иррациональное число. Пусть $\bar{\Omega}$ – единичный квадрат с центром в начале координат. Представим $\bar{\Omega}$ в виде суммы двух прямоугольников :

$$\bar{\Omega} = \Omega_r^{(1)} \cup \Omega_r^{(2)}, \quad (16)$$

где

$$\Omega_r^{(1)} = \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq r \\ -1 \leq y \leq 1 \end{array} \right., \quad \Omega_r^{(2)} = \left\{ \begin{array}{l} r \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{array} \right. . \quad (17)$$

Введем также обозначения

$$\gamma_1 = \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq r \\ y = -1 \end{array} \right., \quad \gamma_2 = \left\{ \begin{array}{l} x = r \\ -1 \leq y \leq 1 \end{array} \right., \\ \gamma_3 = \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq r \\ y = 1 \end{array} \right., \quad \gamma_4 = \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{array} \right., \quad (18)$$

$$\sigma_1 = \left\{ \begin{array}{l} r \leq x \leq 1 \\ y = -1 \end{array} \right., \quad \sigma_2 = \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{array} \right., \\ \sigma_3 = \left\{ \begin{array}{l} r \leq x \leq 1 \\ y = 1 \end{array} \right., \quad \sigma_4 = \left\{ \begin{array}{l} x = r \\ -1 \leq y \leq 1 \end{array} \right., \quad (19)$$

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \\ y = -1 \end{array} \right., \quad \Gamma_2 = \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{array} \right., \\ \Gamma_3 = \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \\ y = 1 \end{array} \right., \quad \Gamma_4 = \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{array} \right. \quad (20)$$

Полные границы этих областей будут

$$\partial\Omega_r^{(1)} = \bigcup_{i=1}^4 \gamma_i, \quad \partial\Omega_r^{(2)} = \bigcup_{i=1}^4 \sigma_i, \quad \partial\Omega = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i. \quad (21)$$

Лемма 2. Для произвольной точки $M \in \partial\Omega$, не являющейся вершиной угла, и для произвольного решения u_1, u_2 системы (2) справедливо тождество

$$u_j(M) + u_j(S^+ S^- M) = u_j(S^- M) + u_j(S^+ M), \quad j = 1, 2. \quad (22)$$

Доказательство. Из общего решения (7) имеем

$$\begin{aligned} u_{1,2}(M) &= \varphi_1(M) \pm \varphi_2(M), \\ u_{1,2}(S^+ S^- M) &= \varphi_1(S^+ S^- M) \pm \varphi_2(S^+ S^- M), \\ u_{1,2}(S^- M) &= \varphi_1(S^- M) \pm \varphi_2(S^- M), \\ u_{1,2}(S^+ M) &= \varphi_1(S^+ M) \pm \varphi_2(S^+ M). \end{aligned} \quad (23)$$

Сложив эти равенства и учитывая инвариантность функций $\varphi_{1,2}$ относительно автоморфизмов $S^\pm$, приходим к тождеству (22). Лемма доказана.

Крайнюю задачу (1), (2) при $f_i \equiv 0$, $i = 1, 2, 3$ будем называть *однородной задачей* Бицадзе-Самарского. Предположим, что выполнено условие

$$a_i^2 - b_i^2 \neq 0 \quad \text{на } \Gamma_i \text{ при } i = 1, 2, 3, 4.$$

Теорема 2. Пусть τ — иррациональное число, $0 \leq \tau < 1$ и $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ — решение однородной краевой задачи Бицадзе-Самарского. Если $u_2(x, y)$ обращается в ноль на одной из сторон Γ_i квадрата $\bar{\Omega}$, то функции u_1 и u_2 тождественно равны нулю в $\bar{\Omega}$.

Доказательство. Пусть для определенности $u_2|_{\Gamma_2} = 0$. Тогда из граничных условий (2) следует, что

$$u_{1,2} \Big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} = 0. \quad (24)$$

Применяя лемму 2, получим

$$u_{1,2} \Big|_{\Gamma_2 = \sigma_4} = 0. \quad (25)$$

Таким образом, решение u_1, u_2 однородной задачи Бицадзе-Самарского одновременно является решением однородной задачи Дирихле для прямоугольников $\Omega_r^{(1)}$

и $\Omega_r^{(2)}$ с иррациональными отношениями длин сторон $\rho_1 = \frac{1+r}{2}$ и $\rho_2 = \frac{1-r}{2}$. Поэтому, согласно [11], $u_1(x, y) \equiv 0$, $u_2(x, y) \equiv 0$ в $\Omega_r^{(1)}$ и $\Omega_r^{(2)}$, а следовательно и в $\bar{\Omega}$. Теорема доказана.

Переходя к вопросу о существовании решения неоднородной задачи Бицадзе–Самарского, предположим, что иррациональные числа $\rho_1 = \frac{1+r}{2}$ и $\rho_2 = \frac{1-r}{2}$ удовлетворяют соотношениям

$$\left| \rho_i - \frac{m}{n} \right| > \frac{A}{n^{K+1}}, \quad i = 1, 2, \quad (26)$$

где A и K – фиксированные положительные постоянные, а m и n – любые целые числа.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (26) и $u_2|_{\Gamma_1} = g$. Далее, пусть $a_i, b_i \in C^{2K+5}(\Gamma_i)$, $i = 1, \dots, 4$ и $f_i \in C^{K+1}(\Gamma_i)$, $i = 1, 2, 3$, причем эти функции и их производные вплоть до порядка $2K+6$ непрерывны в вершинах прямоугольников $\Omega_r^{(1)}$ и $\Omega_r^{(2)}$. Тогда неоднородная задача Бицадзе–Самарского имеет дважды непрерывно-дифференцируемое решение.

Доказательство. Из леммы 2 и условий (2) следует, что

$$a_1(x)u_1 + b_1(x)u_2|_{\Gamma_2} = a_1(x)u_1 + b_1(x)u_2|_{\Gamma_4} = f_4(x), \quad (27)$$

где $f_4 \in C^{K+4}$ однозначно определяется через заданные граничные функции f_i , $i = 1, 2, 3$. Таким образом, искомое решение неоднородной задачи Бицадзе–Самарского одновременно является решением неоднородной задачи Дирихле для системы (1) в случае прямоугольников $\Omega_r^{(1)}$ и $\Omega_r^{(2)}$ соответственно. Тем самым, существование дважды непрерывно-дифференцируемого решения задачи Бицадзе–Самарского следует из теоремы 3 работы [11].

§2. СЛУЧАЙ КРУГА

В этом параграфе рассматривается задача Бицадзе-Самарского для уравнения струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad (28)$$

в случае, когда область Ω — единичный круг с центром в начале координат. Обобщенная задача Бицадзе-Самарского заключается в отыскании непрерывной в замкнутом круге $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ функции $u(x, y)$ вида

$$u(x, y) = F(x) + G(y), \quad (29)$$

удовлетворяющей граничному условию

$$u \Big|_{\partial\Omega} = u \Big|_{\partial\Omega_\epsilon}, \quad (30)$$

где $\partial\Omega_\epsilon$ — граница концентрического круга Ω_ϵ радиуса ϵ , $0 \leq \epsilon \leq 1$. Решения задачи (28), (30) будем называть *обобщенными решениями* задачи Бицадзе-Самарского. Очевидно, что эта задача имеет бесконечное множество решений, ибо в это множество в частности входят произвольные постоянные.

Подставив граничное условие (30) в (29), получаем

$$F(x) + G(\pm\sqrt{1-x^2}) = F(\epsilon x) + G(\pm\sqrt{\epsilon^2 - \epsilon^2 x^2}), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (31)$$

откуда с применением (31) находим

$$\begin{aligned} F(x) &= F(\epsilon x) + G(\epsilon\sqrt{1-x^2}) - G(\sqrt{1-x^2}), \\ F(\epsilon x) &= F(\epsilon^2 x) + G(\epsilon\sqrt{1-\epsilon^2 x^2}) - G(\sqrt{1-\epsilon^2 x^2}), \\ &\dots\dots\dots \\ F(\epsilon^n x) &= F(\epsilon^{n+1} x) + G(\epsilon\sqrt{1-\epsilon^{2n} x^2}) - G(\sqrt{1-\epsilon^{2n} x^2}). \end{aligned} \quad (32)$$

Просуммировав эти равенства, получим

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^n \left[G(\epsilon\sqrt{1-\epsilon^{2k} x^2}) - G(\sqrt{1-\epsilon^{2k} x^2}) \right]. \quad (33)$$

Перейдя в (33) к пределу при $n \rightarrow \infty$, полагая, что правая часть (31) равномерно сходится в $[-1, 1]$ и учитывая непрерывность функции $F(x)$, приходим к равенству

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \left[G(\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^{2k} x^2}) - G(\sqrt{1 - \varepsilon^{2k} x^2}) \right]. \quad (34)$$

Таким образом, существование решения задачи Бицадзе-Самарского зависит от равномерной сходимости ряда (34). Нижеследующая теорема показывает, что ряд (34) равномерно сходится в $[-1, 1]$ для некоторого класса полиномов.

Теорема 4. Красная задача Бицадзе-Самарского (28), (30) имеет бесконечное множество полиномиальных решений.

Доказательство. Пусть $G(t)$ — произвольный полином вида

$$G(t) = \sum_{\nu=0}^N b_{\nu} t^{2\nu} \quad (35)$$

такой, что

$$\sum_{\nu=0}^N b_{\nu} (\varepsilon^{2\nu} - 1) = 0. \quad (36)$$

Тогда формула (31) принимает вид

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{\nu=0}^N b_{\nu} (\varepsilon^2 - \varepsilon^{2k+2} x^2)^{\nu} - \sum_{\nu=0}^N b_{\nu} (1 - \varepsilon^{2k} x^2)^{\nu} \right] = \\ &= F(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^N (-1)^{\nu} b_{\nu} \left[\sum_{i=0}^{\nu} (-1)^{\nu-i} C_{\nu}^i \varepsilon^{2i} \varepsilon^{(2k+2)(\nu-i)} x^{2\nu-2i} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^{\nu-i} C_{\nu}^i \varepsilon^{2k(\nu-i)} x^{2\nu-2i} \right] = \\ &= F(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^N b_{\nu} (\varepsilon^{2\nu} - 1) \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i C_{\nu}^i \varepsilon^{2ki} x^{2i} = \\ &= F(0) + \sum_{\nu=0}^N \sum_{i=0}^{\nu} b_{\nu} (\varepsilon^{2\nu} - 1) (-1)^i C_{\nu}^i x^{2i} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2ki} = \\ &= F(0) + \sum_{\nu=0}^N \sum_{i=1}^{\nu} \frac{b_{\nu} (\varepsilon^{2\nu} - 1) (-1)^i C_{\nu}^i x^{2i}}{1 - \varepsilon^{2i}}. \end{aligned}$$

Тем самым, функции

$$u(x, y) = F(0) + \sum_{\nu=0}^N b_{\nu} y^{\nu} + \sum_{\nu=0}^N \sum_{i=1}^{\nu} (-1)^i C_{\nu}^i b_{\nu} \frac{(\varepsilon^{2\nu} - 1)x^{2i}}{1 - \varepsilon^{2i}}$$

являются полиномиальными решениями задачи Бицадзе-Самарского для уравнения струны в случае круга.

ABSTRACT. The paper is devoted to Bitsadze-Samarsky problem for the string oscillation equation and for equivalent hyperbolic systems in the circle or in the square. The solvability and uniqueness theorems are stated in a class of generalized solutions.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Бицадзе, А. А. Самарский, "О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач", ДАН СССР, т. 185, №4, 1969.
2. С. Л. Соболев, "Пример корректной краевой задачи для уравнения колебания струны с данными на всей границе", ДАН СССР, т. 109, №4, 1956.
3. R. A. Alexandrian, Ju. M. Berezanski, G. S. Il'in, A. G. Kostjuchenko, "Some questions in spectral theory for partial differential equations", Amer. Math. Soc. Transl.(2), vol. 105, 1976.
4. Д. Г. Гордзениани, Семинар ИПМ ТГУ, Тбилиси, т. 2, стр. 39 - 41, 1970.
5. Л. И. Камынин, "Единственность краевых задач для дегенерирующего эллиптического уравнения второго порядка", Дифференциальные уравн., т. 14, №1, стр. 39 - 49, 1978.
6. А. Л. Скубачевский, "Пелокальные эллиптические задачи с параметром", Мат. сб., т. 121, №2, стр. 201 - 210, 1983.
7. Я. А. Ройтберг, З. Л. Шифтель, "Пелокальные задачи для эллиптических уравнений и систем", Сиб. мат. журнал, т. 13, №1, стр. 165 - 181, 1972.
8. А. В. Бицадзе, Некоторые классы дифференциальных уравнений в частных производных, Наука, Москва, 1981.
9. А. А. Самарский, "О некоторых задачах теории дифференциальных уравнений", Диф. уравнения, т. 16, №11, стр. 1925 - 1935, 1980.
10. Н. Н. Вахания, "О краевой задаче для гиперболической системы, эквивалентной уравнению струны", ДАН СССР, т. 116, №6, стр. 906 - 909, 1957.
11. Н. Н. Вахания, "О задаче Дирихле для уравнения струны", Сообщ. АН Груз. ССР, т. 21, №2, стр. 131 - 136, 1958.
12. Г. В. Вирабян, "О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений", Научно-метод. конференция, Ереван, 1990.
13. G. H. Hardy, E. M. Wright, An Introduction to the Theory Numbers, Oxford, 1954.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ КРЕЙНА-ЛАКСА

Л. З. Геворкян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 29, №3, 1994

М. Г. Крейн в [1] и П. Лакс в [2] доказали следующее

Предложение.. Пусть банахово пространство X непрерывно и плотно вложено в гильбертово пространство H , и пусть A — ограниченный оператор, действующий в X и эрмитовый относительно H , т. е. $(Ax, y) = (x, Ay)$, $x, y \in X$. Тогда A допускает продолжение до ограниченного на H оператора A , причем $\|A\| \leq \|A\|$.

Нетрудно заметить, что из последнего соотношения вытекает более точное неравенство. Действительно, спектральный радиус $r(A)$ оператора A совпадает с нижней гранью эквивалентных норм $\|A\|$ (в [3], задача 122, следствие 4, это утверждение доказано для гильбертовых пространств, но после очевидных изменений это доказательство проходит и для банаховых пространств). Тем самым, $\|A\| \leq r(A)$. Так как A — самосопряженный оператор, то $\|A\| = r(A)$. Поэтому

$$\|A\| = r(A) \leq r(A) \leq \|A\|. \quad (1)$$

В [2] П. Лакс доказал также включение спектров $\text{Sp} A \subset \text{Sp} \tilde{A}$.

Ниже мы распространим цепочку (1) и утверждение о включении спектров на более широкий класс операторов. С этой целью введем следующее

Определение. Оператор A , действующий в банаховом пространстве X (с областью определения $D(A)$) называется паранормальным [4], если для любого $x \in D(A^2)$ имеет место неравенство Ландау-Колмогорова

$$\|Ax\|^2 \leq \|A^2x\| \cdot \|x\|.$$

Теорема. Пусть банахово пространство X , $|\cdot|$ непрерывно и плотно вложено в банахово пространство Y , $\|\cdot\|$ и пусть A - ограниченный оператор, действующий в X и паранормальный в Y . Тогда A допускает продолжение до ограниченного оператора в Y оператора A , причем имеет место (1). Если оператор $A - \lambda I$ паранормален для любого $\lambda \notin \text{Sp} A$, $|\lambda| \leq r(A)$, то $\text{Sp} A \subset \text{Sp} A$.

Доказательство. Пусть x - произвольный элемент из X . Введем обозначение $S_n = \|A^n x\|$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$

$$S_n^2 = \|A^n x\|^2 = \|A \cdot A^{n-1} x\|^2 \leq \|A^{n+1} x\| \cdot \|A^{n-1} x\| = S_{n+1} \cdot S_{n-1}.$$

По индукции нетрудно показать, что для любых n и k , $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, имеют место неравенства

$$a) S_1^m \leq S_0^{m-1} \cdot S_m, \quad б) S_n^2 \leq S_{n-k} \cdot S_{n+k}.$$

Из а) следует, что

$$\begin{aligned} \|Ax\| &\leq \|A^n x\|^{1/n} \cdot \|x\|^{1-1/n} \leq c^{1/n} |A^n x|^{1/n} \cdot \|x\|^{1-1/n} \leq \\ &\leq c^{1/n} |A^n|^{1/n} \cdot |x|^{1/n} \cdot \|x\|^{1-1/n} \end{aligned}$$

Предельным переходом отсюда получаем

$$\|Ax\| \leq r(A) \cdot \|x\|.$$

Так как последнее неравенство выполнено на всюду плотном многообразии X , то $\|A\| \leq r(A)$.

Воспользовавшись ограниченностью A , неравенство а) можно продолжить следующим образом :

$$\|Ax\| \leq \|A^n x\|^{1/n} \cdot \|x\|^{1-1/n} \leq \|A^n\|^{1/n} \cdot \|x\|,$$

или $\|A\| \leq r(A)$, что доказывает первое утверждение теоремы.

Для доказательства второго утверждения заметим, что из паранормальности A следует паранормальность A^{-1} (при существовании последнего). Действительно

$$\|A^{-1} x\|^2 = \|A \cdot A^{-2} x\|^2 \leq \|x\| \cdot \|A^{-2} x\|.$$

Таким образом, оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ при $\lambda \notin \text{Sp}A$, $|\lambda| \leq r(A)$ паранормален в Y и ограничен в X . Воспользовавшись доказанным утверждением теоремы убеждаемся, что $(A - \lambda I)^{-1}$ ограничен также в Y . Так как точки λ , $|\lambda| > r(A)$, заведомо не принадлежат $\text{Sp}A$, то $\text{Sp}A \subset \text{Sp}A$, и теорема доказана.

Покажем теперь, что класс паранормальных операторов существенно шире класса самосопряженных операторов, даже в случае гильбертова пространства. С этой целью напомним, что ограниченный оператор называется гипонормальным, если

$$\|A^*x\| \leq \|Ax\|.$$

Нетрудно заметить, что гипонормальный оператор паранормален. Действительно

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) \leq \|A^*Ax\| \cdot \|x\| \leq \|A^2x\| \cdot \|x\|.$$

Условие гипонормальности может быть представлено в виде $A^*A - AA^* \geq 0$, откуда следует, что $(A - \lambda I)^*(A - \lambda I) - (A - \lambda I)(A - \lambda I)^* = A^*A - AA^* \geq 0$, т. е. оператор $A - \lambda I$ гипонормален при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ и, тем самым, паранормален.

Из б) следует, что любая степень $p \in \mathbb{N}$ паранормального оператора паранормальна. Действительно

$$\|A^p x\|^2 = S_p^2 \leq S_{2p} \cdot S_0 = \|A^{2p}x\| \cdot \|x\|.$$

Поскольку существуют гипонормальные операторы, квадраты которых не гипонормальны ([3], задача 164), то класс паранормальных операторов шире класса гипонормальных операторов.

Приведем пример, показывающий существенность условия паранормальности для ограниченности продолжения A .

Пример 1. Пусть $X = W_2^1(0, 1) \oplus W_2^1(0, 1)$, $Y = L^2(0, 1) \oplus W_2^1(0, 1)$ и A — оператор в X , определенный формулой

$$A \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что A — изометрия и что $A^2 = I$. Поэтому A паранормален в Y в том и только том случае, когда норма A в Y ограничена единицей, что очевидно не выполнено.

Пример 2. Пусть X – пространство Харди $H^2(D)$ аналитических в единичном круге D функций с суммируемыми в квадрате коэффициентами ряда Маклорена и пусть A – оператор умножения на независимую переменную в $H^2(D)$. Далее, пусть $A^2(D_\epsilon)$ – пространство Бергмана аналитических в круге D_ϵ радиуса ϵ ($0 < \epsilon \leq 1$) функций, суммируемых там в квадрате по плоской мере Лебега. Нетрудно заметить, что $H^2(D)$ плотно и непрерывно вложено в $A^2(D_\epsilon)$, и что $\text{Sp} A = D$, $r(A) = \|A\| = 1$, $\text{Sp} A = D_\epsilon$, $r(A) = \|A\| = \epsilon$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, Сборник трудов Инст. матем. АН УССР, т. 10, стр. 83 – 106, 1948.
2. P. D. Lax, "Symmetrizable linear transformations", – Comm. : Pure & Appl. Math., vol. 7, no. 4, pp. 633 – 647, 1954.
3. P. A. Halmos, A Hilbert Space Problem Book, D Van Nostrand Co, 1967.
4. N. Chourasia, P. B. Ramanujan, "Paranormal operators on Banach spaces", Bull. Austr. Math. Soc., vol. 21, no. 2, pp. 161 – 168, 1980.

3 ноября 1993

Государственный инженерный
университет Армении

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ ДЛЯ МАРТИНГАЛ-РАЗНОСТНЫХ ГИББСОВСКИХ РЕШЕТЧАТЫХ МОДЕЛЕЙ

Д. Г. Мартиросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
 Том 29, №3, 1994

Важность изучения мартингал-разностных гиббсовских случайных полей $\{\xi_l, l \in \mathbb{Z}^\nu\}$, которые определяются условием

$$E(\xi_l | \xi_s, s \neq l) = 0, \quad (1)$$

обусловлена тем, что для эргодических полей этого класса, для значений ξ_l , $l \in \mathbb{Z}^\nu$ имеет место центральная предельная теорема (см. [1]). В другой работе Б. С. Нахапетяна и А. Н. Петросяна [2] введены в рассмотрение классы моделей, удовлетворяющих (1). Естественен вопрос: есть ли фазовые переходы в таких системах? В настоящей заметке мы строим простые примеры решетчатых моделей статистической физики, удовлетворяющих условию (1), и в которых происходит фазовый переход. Эти модели являются, по существу, несложной модификацией модели классического изинговского ферромагнетика. Из вышесказанного следует, что центральная предельная теорема имеет место для любого гиббсовского состояния, являющегося крайней точкой совокупности гиббсовских состояний (эргодические состояния).

Пусть $\mathbb{Z}^\nu$ – ν -мерная целочисленная решетка, $\nu \geq 2$. Расстояние между точками решетки $x, y \in \mathbb{Z}^\nu$, $x = (x_1, \dots, x_\nu)$, $y = (y_1, \dots, y_\nu)$ будем полагать равным

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\nu} |x_j - y_j|.$$

Через $\langle x, y \rangle$ будем обозначать пару точек $x, y \in \mathbb{Z}^{\nu}$ такую, что $d(x, y) = 1$. Для $V \subset \mathbb{Z}^{\nu}$ через V^c будем обозначать дополнение V в $\mathbb{Z}^{\nu}$. Для $V \subset \mathbb{Z}^{\nu}$, $|V| < \infty$, положим

$$\partial V = \{x \in V^c : \text{существует } y \in V \text{ такое, что } d(x, y) = 1\}.$$

Пусть Q — конечное множество (спин). Для $V \subset \mathbb{Z}^{\nu}$ отображение $\varphi(V) : V \rightarrow Q$ будем называть *конфигурацией* на V . Множество всех конфигураций на V обозначим через $\mathcal{M}(V)$. Наконец, будем предполагать, что $\mathcal{M}(V)$ снабжено обычной σ -алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами.

Перейдем к описанию моделей.

1. Пусть $Q = \{-q, -1 + 1, \dots, 0, 1, \dots, q\}$, q — натуральное число, $\varphi(x) \in Q$, $\varphi(y) \in Q$. Потенциал взаимодействия ближайших соседей $U(\varphi(x), \varphi(y))$, $d(x, y) = 1$ определяется следующим образом :

$$U(\varphi(x), \varphi(y)) = \begin{cases} -1, & \text{если } \varphi(x) = \varphi(y) = 0, d(x, y) = 1; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Одночастичный потенциал $\mu(\varphi(x))$ определяется следующим образом :

$$\mu(\varphi(x)) = \begin{cases} \mu, & \text{если } \varphi(x) = 0; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

2. Пусть $Q = \{-A, A, -B, B\}$, где $A, B > 0$, $A \neq B$. Положим

$$U(\varphi(x), \varphi(y)) = U(|\varphi(x)|, |\varphi(y)|) = \begin{cases} -1, & \text{если } |\varphi(x)| = |\varphi(y)|; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В дальнейшем мы рассматриваем, не оговаривая этого особо, только первую из введенных моделей.

Пусть $V \subset \mathbb{Z}^{\nu}$, $|V| < \infty$, и пусть $\varphi(\mathbb{Z}^{\nu})$ — конфигурация на $\mathbb{Z}^{\nu}$, ограничения которой на множествах V и V^c обозначим через $\varphi(V)$ и $\varphi(V^c)$ соответственно. Относительный потенциал $H_0(\varphi(V)|\varphi(V^c))$ определяется как обычно (см. [3]) :

$$H_0(\varphi(V)|\varphi(V^c)) = \sum_{\langle x, y \rangle \cap V \neq \emptyset} U(\varphi(x), \varphi(y)) + \sum_{x \in V} \mu(\varphi(x)). \quad (2)$$

Пусть $V \subset \mathbb{Z}^{\nu}$, $|V| < \infty$, и пусть $\psi(V^c)$ — конфигурация на V^c . Распределение Гиббса на $\mathcal{M}(V)$ с граничными условиями $\psi(V^c)$ задается формулой

$$I_V(\varphi(V)|\psi(V^c)) = \frac{\exp[-\beta H_0(\varphi(V)|\psi(V^c))]}{\Xi(\beta, \psi(V^c))}. \quad (3)$$

Здесь $\beta > 0$ — обратная температура, а Ξ — нормирующий множитель. Обозначим через h внешнее поле $h = \beta\nu$.

Пусть $V \subset \mathbb{Z}^\nu$, $|V| < \infty$, и пусть конфигурации $\psi^{(1)}(V^c)$ и $\psi^{(2)}(V^c)$ таковы, что

$$\psi^{(1)}(V^c) = \{\psi(V^c) : \psi(x) = 0 \text{ для всех } x \in V^c\}, \quad (4)$$

$$\psi^{(2)}(V^c) = \{\psi(V^c) : \psi(x) \neq 0 \text{ для всех } x \in V^c\}. \quad (5)$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением распределений Гиббса в объеме V с граничными условиями $\psi^{(1)}(V^c)$ или $\psi^{(2)}(V^c)$. Эти распределения вероятностей будут обозначаться через $P_V^{(1)}(\cdot)$ и $P_V^{(2)}(\cdot)$ соответственно. Легко видеть, что распределения Гиббса (3) на $\mathcal{M}(V)$ при различных граничных условиях $\psi_1^{(2)}(V^c)$ и $\psi_2^{(2)}(V^c)$ вида (5) совпадают. Если при $V \rightarrow \infty$ распределения вероятностей $P_V^{(1)}(\cdot)$ и $P_V^{(2)}(\cdot)$ слабо сходятся на $\mathcal{M}(\mathbb{Z}^\nu)$, то предельные распределения вероятностей будем обозначать через $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ соответственно. Заметим, что если $l \in V$, то для распределения вероятностей P_V вида (3) условие (1) очевидно выполнено.

Теорема. Найдется $q_0 > 0$ такое, что если $q > q_0$ и $\beta\nu - h = \ln(2q)$, то $P^{(1)} \neq P^{(2)}$.

Доказательство. Покажем, что распределения вероятностей (3) для рассматриваемой модели сводятся к распределению вероятностей модели классического изинговского ферромагнетика.

Граница и контуры конфигурации по аналогии с моделью классического изинговского ферромагнетика определяются как объединение $(\nu - 1)$ -мерных граней, разделяющих пары точек $\langle x, y \rangle$ таких, что либо $\varphi(x) = 0, \varphi(y) \neq 0$, либо $\varphi(x) \neq 0, \varphi(y) = 0$. Пусть $x \in \mathbb{Z}^\nu$, и пусть $\varphi(\mathbb{Z}^\nu)$ — конфигурация. Положим

$$\alpha(x, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi(x) \neq 0; \\ \#\{y : d(x, y) = 1, \varphi(y) \neq 0\}, & \text{если } \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

$$\gamma(x, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi(x) \neq 0; \\ \#\{y : d(x, y) = 1, \varphi(y) \neq 0\}, & \text{если } \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

Пусть теперь $V \subset \mathbb{Z}^\nu$, $|V| < \infty$, и пусть $\varphi(V)$ – конфигурация на V . Рассмотрим гамильтониан

$$H_1(\varphi(V)|\psi^{(j)}(V^c)) = -\frac{1}{2} \sum_{x \in V \cup \partial V} \alpha(x, \varphi(\mathbb{Z}^\nu)) + \sum_{x \in V} \mu(\varphi(x)), \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

где конфигурация $\varphi(\mathbb{Z}^\nu)$ такова, что ее ограничения на V и V^c совпадают с конфигурациями $\varphi(V)$ и $\psi^{(j)}(V^c)$ соответственно. Нетрудно проверить, что в случае граничных условий $\psi^{(2)}(V^c)$

$$H_1(\varphi(V)|\psi^{(2)}(V^c)) = H_0(\varphi(V)|\psi^{(2)}(V^c)). \quad (7)$$

В случае же граничных условий $\psi^{(1)}(V^c)$

$$\begin{aligned} H_1(\varphi(V)|\psi^{(1)}(V^c)) &= H_0(\varphi(V)|\psi^{(1)}(V^c)) + \frac{1}{2} \sum_{(x,y): x \in \partial V, y \notin V \cup \partial V} 1 + \\ &+ \sum_{(x,y): x \in \partial V, y \in \partial V} 1 = H_0(\varphi(V)|\psi^{(1)}(V^c)) + f(V^c). \end{aligned} \quad (8)$$

Величина $f(V^c)$ не зависит от $\varphi(V)$. Поэтому распределения Гиббса, отвечающие гамильтонианам H_0 , H_1 , совпадают, т. е. имеет место равенство

$$P_V^{(j)}(\varphi(V)) = \frac{\exp \left[\frac{\beta}{2} \sum_{x \in V \cup \partial V} \alpha(x, \varphi) - \beta \sum_{x \in V} \mu(\varphi(x)) \right]}{\Xi(V, \beta, \psi^{(j)}(V^c))}. \quad (9)$$

Для $V \subset \mathbb{Z}^\nu$, $|V| < \infty$ и конфигурации φ , через $O(\varphi)$ обозначим множество всех точек $x \in V \cup \partial V$, удовлетворяющих условию $\varphi(x) = 0$. (Заметим, что $\partial V \subset O(\varphi)$ для граничных условий $\psi^{(1)}(V^c)$, и $\partial V \cap O(\varphi) = \emptyset$ для граничных условий $\psi^{(2)}(V^c)$). Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{x \in V \cup \partial V} \alpha(x, \varphi) &= \frac{1}{2} \sum_{x \in O(\varphi)} \alpha(x, \varphi) = \frac{1}{2} \sum_{x \in O(\varphi)} (2\nu - \gamma(x, \varphi)) = \\ &= \nu |O(\varphi)| - \frac{1}{2} \sum_{x \in O(\varphi)} \gamma(x, \varphi). \end{aligned} \quad (10)$$

Множество $O^{(j)}(\varphi)$ однозначно определяется заданием набора контуров $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$ и граничных условий $\psi^{(j)}(V^c)$, $j = 1, 2$. Пользуясь этим, обозначим $O^{(j)}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n) = O^{(j)}(\varphi)$, где $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ – совокупность всех контуров конфигурации φ . Далее, обозначим через

$$\mathcal{A}^{(j)}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n) = \{ \varphi(V) : \{ \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \} \text{ – множество всех контуров конфигурации } \varphi \}.$$

Положим

$$\Xi(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n | V, \psi^{(j)}(V^c)) = \sum_{\varphi(V) \in \mathcal{A}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)} \exp \left[\frac{\beta}{2} \sum_{x \in I' \cup \partial V} \alpha(x, \varphi) - \beta \sum_{x \in V} \mu(\varphi(x)) \right]. \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует, что

$$\begin{aligned} \Xi(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n | V, \psi^{(j)}(V^c)) &= \\ &= \sum_{\varphi(V) \in \mathcal{A}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)} \exp \left[(\beta\nu - \beta\mu) |O(\varphi)| - \frac{\beta}{2} \sum_{x \in O(\varphi)} \gamma(x, \varphi) \right] = \\ &= \exp \left[(\beta\nu - h) |O^{(j)}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)| - \frac{\beta}{2} \sum_{x \in O^{(j)}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)} \gamma(x, \varphi) \right] \sum_{\varphi(V') \in \mathcal{A}^{(j)}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)} 1 = \\ &= \exp \left[(\beta\nu - h) |O^{(j)}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)| - \frac{\beta}{2} \sum_{x \in O^{(j)}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)} \gamma(x, \varphi) \right] (2q)^{|V \setminus O^{(j)}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)|}. \end{aligned}$$

Рассмотрим числа

$$A_j(V) = \exp[(\beta\nu - h) |O^{(j)}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)|] (2q)^{|V \setminus O^{(j)}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)|}, \quad j = 1, 2.$$

При $\beta\nu - h = \ln(2q)$ имеем $A_1(V) = \exp[(\beta\nu - h) |V \cup \partial V|]$ и $A_2(V) = \exp[(\beta\nu - h) |V|]$, т. е. эти числа не зависят от конфигурации φ (соответственно, от набора контуров $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$). Далее

$$\sum_{x \in O^{(j)}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)} \gamma(x, \varphi), \quad j = 1, 2$$

равно числу граней, разделяющих точки в парах $\langle x, y \rangle$ с $\varphi(x) = 0$, $\varphi(y) \neq 0$.

Значит

$$\sum_{x \in O^{(j)}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)} \gamma(x, \varphi) = \sum_{s=1}^n |\Gamma_s|, \quad (12)$$

$$\Xi(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n | V, \beta, \psi^{(j)}(V^c)) = A_j(V) \exp \left[-\frac{\beta}{2} \sum_{s=1}^n |\Gamma_s| \right] \quad (13)$$

Следовательно, вероятность события $\mathcal{A}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ равна

$$q_V^{(j)}(\mathcal{A}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)) = \frac{\exp \left[-\frac{\beta}{2} \sum_{s=1}^n |\Gamma_s| \right]}{\Xi(V, \beta, \psi^{(j)}(V^c))}, \quad (14)$$

где нормирующий множитель удовлетворяет следующему уравнению :

$$\Xi(V, \beta, \psi^{(j)}(V^c)) = \sum_{\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}} \exp \left[-\frac{\beta}{2} \sum_{s=1}^n |\Gamma_s| \right]. \quad (15)$$

Суммирование в (15) производится по всевозможным наборам контуров $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$, внутренности которых содержатся в V .

Из формулы (14) следует утверждение теоремы, и, следовательно, наличие фазового перехода при достаточно большом β ($\beta > \beta_0$). Равенство $h = \beta\nu - \ln(2q)$ устанавливается обычным способом (см. [3]).

В заключение я благодарю Международный Научный Фонд и Российскую Академию наук за финансовую поддержку. Я благодарю также Б. С. Нахпетяна за плодотворные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. S. Nahapetian, A. N. Petrosian, "Limit theorems for multidimensional martingale-differences and applications to the Gibbs random fields", (в печати).
2. B. S. Nahapetian, A. N. Petrosian, "Martingale-difference Gibbs random fields and central limit theorem", *Annales Acad. Scientiarum Fennic., Ser. A. I. Math.*, vol. 17, pp. 105 - 110, 1992.
3. Я. Г. Синай, Теория фазовых переходов, М., Наука, 1980.

15 Ноября 1993

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 29

НОМЕР 3

1994

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы

Теоремы вложения для некоторых обобщенных функциональных пространств А. Г. Багдасарян	5
Супергармоническая аппроксимация на замкнутом множестве Ч. Бенсуда, П. М. Готье	17
Законы повторного логарифма для опциональных мартингалов К. В. Гаспарян	33
Задача Гильберта в смысле L^p -сходимости Г. М. Айрапетян	54
О локализации на бесконечности дифференциальных многочленов с постоянными коэффициентами Г. Г. Казарян	62
О задаче Бицадзе-Самарского для гиперболических уравнений Г. В. Вирабян	78
Краткие сообщения	
Об одной теореме Крейна-Лакса Л. З. Геворкян	89
Фазовые переходы для мартингал-разностных гиббсовых решетчатых моделей Л. Г. Мартиросян	93

CONTENTS

VOLUME 29

NUMBER 3

1994

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS (NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)

PAGES

Embedding theorems for some generalized functional spaces A. G. Bagdasarian	1
Superharmonic approximation on the closed set Ch. Bensouda, P. M. Gauthier	11
The iterated logarithm laws for optional martingales K. V. Gasparian	23
Hilbert problem from the L^p -convergence viewpoint H. M. Hairapetian	42
On localizations at infinity of differential polynomials with constant coefficients H. G. Kazarian	50
On Bitsadze-Samarsky problem for hyperbolic equations G. V. Virabian	63
Brief Communications	
On a Krein-Lax theorem L. Z. Gevorkyan	72
Phase transitions for martingale-difference Gibbs lattice models D. G. Martirosian	76

©1994 by Allerton Press Inc. Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by Allerton Press, Inc. for library and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transaction Reporting Service, providing that the base fee of \$20.00 per copy is paid directly to CCC, 222 Rosewood Drive, Danvers, MA 01923. An annual license may be obtained only directly from Allerton Press, Inc., 150 5th Avenue, New York, NY 10011.