ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

«Մաթեմատիկա» ամ-

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները՝ շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДИРАКА

Т. Н. Арутюнян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, №2, 1994

В статье дано описание регулярных операторов Дирака с потенциалами из определенного класса, имеющих один и тот же спектр.

§1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $p(x)$ и $q(x)$ - действительнозначные, суммируемые на $[0,\pi]$ функции, т. е. $p,q \in L^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$. Рассмотрим регулярную краевую задачу для канонической ([1] - [3]) системы Дирака

$$\mathcal{L}y \equiv \left\{B\frac{d}{dx} + \Omega(x)\right\} y = \lambda y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbf{C}, \tag{1.1}$$

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \tag{1.2}$$

$$y_1(\pi) = 0, \tag{1.3}$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$. Для краткости эту задачу будем обозначать (Ω,α). Пользуясь методами [2], [3] нетрудно доказать, что при $p,q \in L^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$ задача (Ω,α) имеет чисто дискретный спектр, состоящий из простых, действительных собственных значений $\lambda_n = \lambda_n(\Omega,\alpha)$, $n \in \mathbb{Z}$, образующих последовательность, неограниченную как сверху, так и снизу. Примем нумерацию $\lambda_k < \lambda_{k+1}, k \in \mathbb{Z}$, $\lambda_k > 0$ при $k > 0$ и $\lambda_k < 0$ при $k < 0$, а через λ_0 обозначим ближайшее к нулю собственное значение (с. з.). Если имеются два наиболее близких к нулю с. з., то через λ_0 будем обозначать то, которое отрицательно. При этой нумерации нетрудно доказать, что асимптотика с. з. имеет вид

$$\lambda_n(\Omega,\alpha) = n - \frac{\alpha}{\pi} + o(1) \quad \text{при} \quad n \to \pm\infty. \tag{1.4}$$

Обозначим через $W^2_{k,\mathbb{R}}[0,\pi]$ $(k=0,1,\dots)$ множество вещественнозначных функций, определенных на $[0,\pi]$, имеющих абсолютно непрерывные производные вплоть до порядка $k-1$ и производную порядка k, интегрируемую с квадратом на $[0,\pi]$. В частности, $W^2_{0,\mathbb{R}}[0,\pi]=L^2_{\mathbb{R}}[0,\pi]$. В дальнейшем, для краткости, под $\Omega\in A$ будем понимать $p,q\in A$. Если $\Omega\in W^2_{k,\mathbb{R}}[0,\pi]$, то асимптотику (1.4) можно уточнить (см. [4], [11]) :

$$\lambda_n(\Omega,\alpha)=n-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha_1}{n}+\frac{\alpha_2}{n^2}+\dots+\frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{\alpha_{k,n}}{n^k}, \tag{1.5}$$

где $\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1}$ - постоянные, и $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha^2_{k,n}<\infty$. В частности, при $k=0$ имеем $\lambda_n(\Omega,\alpha)=n-\dfrac{\alpha}{\pi}+\alpha_{0,n}$. Через $\varphi(x,\lambda,\alpha)$ обозначим решение задачи Коши

$$\mathcal{L}y=\lambda y,\quad y(0)=\begin{pmatrix}\sin\alpha\\-\cos\alpha\end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

а через $a_n=a_n(\Omega,\alpha)$ - квадраты L^2-норм собственных функций $\varphi_n(x,\Omega)=$ $=\varphi(x,\lambda_n(\Omega,\alpha),\alpha)$:

$$a_n=\|\varphi_n\|^2=\int_0^\pi|\varphi(x,\lambda_n(\Omega,\alpha),\alpha)|^2\,dx.$$

Числа a_n называются нормировочными постоянными.

Теорема. *(Теорема единственности). Отображение*

$$(\Omega,\alpha)\in L^2_{\mathbb{R}}[0,\pi]\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\longmapsto\{\lambda_n(\Omega,\alpha),\,a_n(\Omega,\alpha);\,n\in\mathbb{Z}\}$$

взаимно однозначно.

Эту теорему естественно называть теоремой Марченко, так как ее доказательство можно провести аналогично доказательству подобного утверждения в случае задачи Штурма-Лиувилля [5]. Таким образом, задача (Ω,α) однозначно определяется заданием всех с. з. и нормировочных постоянных, а только спектр, вообще говоря, не определяет задачу однозначно.

Лемма 1. *Пусть $\Omega, \widetilde{\Omega} \in L^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$ и $\lambda_n(\Omega,\alpha) = \lambda_n(\widetilde{\Omega},\widetilde{\alpha})$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, т. е. задачи (Ω,α) и $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\alpha})$ изоспектральны. Тогда $\widetilde{\alpha} = \alpha$.*

Доказательство легко следует из асимптотики (1.4) :

$$\frac{\alpha}{\pi} = \lim_{n\to\infty} (n - \lambda_n(\Omega,\alpha)) = \lim_{n\to\infty} \left(n - \lambda_n(\widetilde{\Omega},\widetilde{\alpha})\right) = \frac{\widetilde{\alpha}}{\pi}.$$

Таким образом, вместо "изоспектральные задачи (Ω,α) и $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\alpha})$" мы будем говорить об "изоспектральных потенциалах" Ω и $\widetilde{\Omega}$ (и опускать в дальнейшем аргумент α, от которого зависят λ_n и a_n). Зафиксируем $\Omega \in W^2_{k,\mathbb{R}}[0,\pi]$ и рассмотрим множество

$$M^2_k(\Omega) = \left\{\widetilde{\Omega} \in W^2_{k,\mathbb{R}}[0,\pi]: \quad \lambda_n(\widetilde{\Omega}) = \lambda_n(\Omega),\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

всех канонических потенциалов $\widetilde{\Omega} = \begin{pmatrix} \widetilde{p} & \widetilde{q} \\ \widetilde{q} & -\widetilde{p} \end{pmatrix}$, имеющих одинаковый спектр с Ω. Наша цель – дать по возможности явное описание множеств $M^2_k(\Omega)$. Отметим, что задача описания изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля решена в работах [6 – 8]. Основными результатами настоящей статьи являются приводимые ниже теоремы 1, 2 и 3.

Из теоремы единственности легко вытекает

Следствие 1. *Отображение*

$$\widetilde{\Omega} \in M^2_k(\Omega) \longmapsto \left\{a_n(\widetilde{\Omega});\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

взаимно однозначно.

Как известно (см. [4]), если $\Omega \in W^2_{k,\mathbb{R}}[0,\pi]$, то нормировочные постоянные имеют асимптотику

$$a_n(\Omega) = \pi + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \ldots + \frac{c_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c_{k,n}}{n^k}, \tag{1.7}$$

где $c_1, \ldots, c_{k-1}$ – постоянные, и $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c^2_{k,n} < \infty$. Поскольку $\widetilde{\Omega} \in M^2_k(\Omega)$, то аналогичную асимптотику имеют и $a_n(\widetilde{\Omega})$. Так как $a_n(\Omega)$ и $a_n(\widetilde{\Omega})$ – положительные числа, то существуют действительные числа t_n, такие что $\dfrac{a_n(\Omega)}{a_n(\tilde\Omega)} = e^{t_n}$. Отсюда и из (1.7) следует, что

$$e^{t_n} = 1 + \frac{d_1}{n} + \frac{d_2}{n^2} + \ldots + \frac{d_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{d_{k,n}}{n^k}, \quad \text{где} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_{k,n}^2 < \infty. \tag{1.8}$$

Через P_k обозначим множество всех последовательностей $\{t_n;\, n \in \mathbb{Z}\}$, $t_n \in \mathbb{R}$, имеющих асимптотику (1.8). Поскольку $a_n(\Omega)$ фиксированы, из следствия 1 и равенства $a_n(\tilde\Omega) = a_n(\Omega)\, e^{-t_n}$ получим

Следствие 2. *Отображение*

$$\tilde\Omega \in M_k^2(\Omega) \longmapsto \{t_n;\, n \in \mathbb{Z}\} \in P_k \tag{1.9}$$

взаимно однозначно.

Сначала мы дадим описание семейства изоспектральных потенциалов $\Omega(x,t)$, $t \in \mathbb{R}$, у которых лишь одна нормировочная постоянная $a_m(\Omega(\cdot,t))$ отличается от $a_m(\Omega)$ (а именно, $a_m(\Omega(\cdot,t)) = a_m(\Omega)\, e^{-t_n}$), а остальные совпадают, т. е. $a_n(\Omega(\cdot,t)) = a_n(\Omega)$ при $n \neq m$.

Введем некоторые обозначения. Через

$$h_n(x,\Omega) = \frac{\varphi_n(x,\Omega)}{\sqrt{a_n(\Omega)}} = \begin{pmatrix} h_{n,1} \\ h_{n,2} \end{pmatrix}$$

обозначим нормированные собственные функции, т. е. $||h_n(x,\Omega)|| = 1$. Положим также $l(\Omega) = \{l_n(\Omega) :\ n \in \mathbb{Z}\}$, где

$$l_n(\Omega) = \ln \frac{|h_n(\pi,\Omega)|}{|h_n(0,\Omega)|} = \ln|\varphi_{n,2}(\pi,\Omega)|, \tag{1.10}$$

и

$$\theta_n(x,t,\Omega) = 1 + (e^t - 1)\int_0^x |h_n(s,\Omega)|^2\, ds. \tag{1.11}$$

Заметим, (см. лемму 2 в §3), что при $\Omega \in W^2_{k,\mathbb{R}}[0,\pi]$ имеем $l(\Omega) \in P_k$. Норму $|A|$ квадратной матрицы $(a_{i,j})$ определяем как $|A| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)}$, где $\lambda_{\max}(A^*A)$ – наибольшее собственное значение положительной матрицы A^*A, а A^* сопряженная к A матрица [9]. В силу самосопряженности дифференциального выражения $\mathcal{L}$, компоненты $h_{n,1}$ и $h_{n,2}$ решений можно выбирать действительными.

Теорема 1 *Пусть $t \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и*

$$\Omega(x,t) = \Omega(x) + \frac{e^t - 1}{\theta_m(x,t,\Omega)} \left\{ B h_m(x,\Omega)\, h_m^*(x,\Omega) - h_m(x,\Omega)\, h_m^*(x,\Omega) B \right\}. \quad (1.12)$$

Тогда :

1) $\lambda_n(\Omega(\cdot,t)) = \lambda_n(\Omega)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, $a_n(\Omega(\cdot,t)) = a_n(\Omega)$ для любого $n \in \mathbb{Z} \setminus \{m\}$, и $a_m(\Omega(\cdot,t)) = a_m(\Omega) \cdot e^{-t}$. Кроме того, нормированные собственные функции задачи $(\Omega(\cdot,t),\alpha)$ определяются по формулам :

$$h_n(x,\Omega(\cdot,t)) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{t}{2}}}{\theta_m(x,t,\Omega)} h_m(x,\Omega), & \text{при } n = m \\ h_n(x,\Omega) - \dfrac{(e^t - 1)\int_0^x h_m^*(s,\Omega) h_n(s,\Omega)\, ds}{\theta_m(x,t,\Omega)} h_m(x,\Omega), & \text{при } n \neq m; \end{cases} \quad (1.13)$$

2)

$$l_n(\Omega(\cdot,t)) = \begin{cases} l_n(\Omega) - t, & \text{если } n = m \\ l_n(\Omega), & \text{если } n \neq m; \end{cases} \quad (1.14)$$

3)

$$\int_0^\pi |\Omega(x,t) - \Omega(x)|\, dx = |t|. \quad (1.15)$$

Теорема 1 показывает, что возможно изменить ровно одну нормировочную постоянную (или ровно один элемент последовательности $l(\Omega)$), не изменяя остальных. Последовательно меняя все нормировочные постоянные $a_n(\Omega)$ на $a_n(\Omega)e^{-t_n}$, мы можем получить любой изоспектральный потенциал, соответствующий последовательности $\{t_n;\ n \in \mathbb{Z}\} \in P_k$.

Из теоремы единственности следует, что неважно в какой последовательности меняем нормировочные постоянные. Поэтому условимся их менять в удобной последовательности. Мы будем пользоваться следующими обозначениями :

$$T_{-1} = \{0\},$$

$$T_0 = (\ldots,0,\ldots,0,t_0,0,\ldots,0,\ldots),$$

$$T_1 = (\ldots,0,\ldots,0,0,t_0,t_1,0,\ldots,0,\ldots),$$

$$T_2 = (\ldots,0,\ldots,0,t_{-1},t_0,t_1,0,\ldots,0,\ldots),$$

....

$$T_{2n-1} = (\ldots,0,0,t_{-n+1},\ldots,t_{-1},t_0,t_1,\ldots,t_{n-1},t_n,0,\ldots),$$

$$T_{2n} = (\ldots,0,t_{-n},t_{-n+1},\ldots,t_{-1},t_0,t_1,\ldots,t_{n-1},t_n,0,\ldots),$$

....

Положим $\Omega(x,T_{-1}) \equiv \Omega(x)$ и

$$\Omega(x,T_m) = \Omega(x,T_{m-1}) + \Delta\Omega(x,T_m), \quad m = 0,1,\ldots, \tag{1.16}$$

где

$$\Delta\Omega(x,T_m) = \frac{e^{t_{\tilde m}} - 1}{\theta_m(x,t_{\tilde m},\Omega(\cdot,T_{m-1}))}\left[Bh_{\tilde m}(x,\Omega(\cdot,T_{m-1}))\cdot h^*_{\tilde m}(\cdot) - h_{\tilde m}(\cdot)h^*_{\tilde m}(\cdot)B\right]. \tag{1.17}$$

В (1.17) аргументы у всех $h_{\tilde m}$ и $h^*_{\tilde m}$ такие же, как у первого из них, причем $\tilde m = \dfrac{m+1}{2}$ при нечетном m, и $\tilde m = -\dfrac{m}{2}$ при четном m.

Теорема 2. *Пусть $T = \{t_n;\ n \in \mathbb{Z}\} \in P_k$ и $\Omega \in W^2_{k,\mathbb{R}}[0,\pi]$. Тогда*

1)
$$\Omega(x,T) \equiv \Omega(x) + \sum_{m=0}^{\infty} \Delta\Omega(x,T_m) \in M^2_k(\Omega) \tag{1.18}$$

и

$$l(\Omega(\cdot,T)) = l(\Omega) - T. \tag{1.19}$$

2) Отображение (1.18) $T \longmapsto \Omega(\cdot,T)$ взаимно однозначно, причем, если $\tilde\Omega \in M^2_k(\Omega)$, то

$$\tilde\Omega = \Omega(\cdot,l(\Omega) - l(\tilde\Omega)), \tag{1.20}$$

т. е. отображение $M_k^2(\Omega) \ni \tilde{\Omega} \longmapsto l(\Omega) - l(\tilde{\Omega}) \in P_k$ есть обратное к отображению (1.18).

Теорема 2 дает описание всех изоспектральных потенциалов в терминах нормированных собственных функций h_n потенциала Ω и последовательностей $T \in P_k$. Из теоремы 2 можно заключить, что в треореме единственности Марченко можно заменить $a_n(\Omega)$ на $l_n(\Omega)$. Тем самым, имеет место следуюпцая теорема единственности.

Теорема 3. *Отображение $\Omega \in L^2_{\mathbb{R}}[0,\pi] \longmapsto \{\lambda_n(\Omega), l_n(\Omega);\, n \in \mathbb{Z}\}$ взаимно однозначно.*

Доказательство. Пусть $\lambda_n(\Omega_1) = \lambda_n(\Omega_2)$ и $l_n(\Omega_1) = l_n(\Omega_2)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Отсюда следует, что $\Omega_2 \in M_0^2(\Omega_1)$. Обозначим $e^{t_n} = \dfrac{a_n(\Omega_1)}{a_n(\Omega_2)}$. Согласно (1.19) $l(\Omega_2) = l(\Omega_1) - T$ и, следовательно, $T = \{0\}$, т. е. $t_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $a_n(\Omega_1) = a_n(\Omega_2)$, и по теореме Марченко $\Omega_1(x) = \Omega_2(x)$ почти всюду.

Замечание. В гильбертовом пространстве $L^2(0,\pi;\mathbf{C}^2)$ двукомпонентных комплекснозначных вектор-функций $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ с $||y||^2 = \int_0^\pi \left(|y_1(x)|^2 + |y_2(x)|^2\right) dx = \int_0^\pi |y(x)|^2\, dx < \infty$ рассмотрим самосопряженный оператор $L(\Omega,\alpha)$, заданный дифференциальным выражением $\mathcal{L} = B\dfrac{d}{dx} + \Omega(x)$ в области

$$D_L = \left\{ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} : \quad y_k \in AC[0,\pi],\ (\mathcal{L}y)_k \in L^2[0,\pi],\ k = 1,2; \right.$$
$$\left. y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0, \quad y_1(\pi) = 0 \right\},$$

где $AC[0,\pi]$ – множество абсолютно непрерывных функций на $[0,\pi]$. Так как собственные значения, нормировочные постоянные и другие спектральные данные оператора $L(\Omega,\alpha)$ и задачи (1.1) - (1.3) совпадают, все результаты настоящей статьи могут быть переформулированы в терминах оператора $L(\Omega,\alpha)$.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Во-первых, докажем равенство (1.15). Вычислив из (1.12) элементы матрицы $\Omega(x,t)-\Omega(x)=\begin{pmatrix}\Delta p & \Delta q\\ \Delta q & -\Delta p\end{pmatrix}$, получаем :

$$\Delta p=\frac{e^t-1}{\theta_m(x,t,\Omega)}\cdot 2h_{m1}(x)\,h_{m2}(x) \quad \text{и} \quad \Delta q=\frac{e^t-1}{\theta_m(x,t,\Omega)}\cdot\left(h_{m2}^2(x)-h_{m1}^2(x)\right).$$

Отсюда следует, что

$$|\Omega(x,t)-\Omega(x)|=\sqrt{\Delta p^2+\Delta q^2}=\frac{|e^t-1|}{\theta_m(x,t,\Omega)}|h_m(x)|^2=(\operatorname{sign}t)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\ln\theta_m(x,t,\Omega).$$

Тем самым

$$\int_0^\pi|\Omega(x,t)-\Omega(x)|\,dx=(\operatorname{sign}t)\,(\ln\theta_m(\pi,t,\Omega)-\ln\theta_m(0,t,\Omega))=(\operatorname{sign}t)\cdot t=|t|.$$

Докажем теперь, что для любых $t\in\mathbb{R}$ и $n\in\mathbb{Z}$ имеют место тождества (здесь для краткости обозначаем $h_n(x,\Omega(\cdot,t))=h_n(x,t)$) :

$$\tilde{\mathcal{L}}h_n(x,t)\equiv\lambda_n(\Omega)\,h_n(x,t), \tag{2.1}$$

$$h_{n1}(0,t)\cos\alpha+h_{n2}(0,t)\sin\alpha\equiv0, \quad h_{n1}(\pi,t)\equiv0, \tag{2.2}$$

где $\tilde{\mathcal{L}}=B\dfrac{d}{dx}+\Omega(x,t)$. Отсюда в частности будет следовать, что все $\lambda_n(\Omega)$, $n\in\mathbb{Z}$ являются также собственными значениями задачи $(\Omega(\cdot,t),\alpha)$. Так как из (1.15) следует, что $\Omega(\cdot,t)\in L^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$, то у задачи $(\Omega(\cdot,t),\alpha)$ не может быть иных собственных значений, ибо, в противном случае, была бы нарушена асимптотика (1.4). Таким образом, будет доказано, что $\Omega(\cdot,t)$ и Ω изоспектральны при любом $t\in\mathbb{R}$. Сначала докажем (2.1) при $n=m$ (для краткости $\theta_m(x,t,\Omega)=\theta$, $h_n(x,\Omega)=h_n(x)=h_n$) :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}h_m(x,t)&=\left\{B\frac{d}{dx}+\Omega(x)+\frac{e^t-1}{\theta}\left(Bh_m\cdot h_m^*-h_m\cdot h_m^*B\right)\right\}\cdot\frac{e^{\frac{t}{2}}}{\theta}h_m=\\&=\frac{e^{\frac{t}{2}}}{\theta}\left[Bh_m'+\Omega(x)h_m\right]+\\&+\frac{e^{\frac{t}{2}}}{\theta}\left[-\frac{\theta'}{\theta}Bh_m+\frac{(e^t-1)|h_m|^2}{\theta}Bh_m-\frac{(e^t-1)}{\theta}h_m\cdot h_m^*Bh_m\right].\end{aligned}$$

Из определения (1.11) следует, что $\theta' = (e^t - 1)|h_m(x)|^2$. Очевидно также, что $h_m^* B h_m = 0$. Учитывая эти равенства и то, что $Bh_m' + \Omega(x)h_m = \lambda_m(\Omega)h_m$, получаем тождество (2.1) при $n = m$. Пусть теперь $n \neq m$. Тогда

$$\tilde{\mathcal{L}}h_n(x,t) = Bh_n' + \Omega(x)h_n - \frac{(e^t-1)}{\theta}\Big\{(h_m^* h_n)\cdot Bh_m -$$

$$- Bh_m(h_m^*\cdot h_m) + h_m h_m^* B h_n + \int_0^x h_m^*\cdot h_n\,ds(Bh_m' + \Omega(x)h_m)\Big\} =$$

$$= \lambda_n(\Omega)h_n - \frac{(e^t-1)}{\theta}\left\{h_m^* B h_n + \lambda_m\int_0^x h_m^* h_n\,ds\right\}h_m.$$

Чтобы отсюда получить тождество (2.1), достаточно показать, что

$$h_m^* B h_n + \lambda_m \int_0^x h_m^*(s)h_n(s)\,ds = \lambda_n \int_0^x h_m^*(s)h_n(s)\,ds. \tag{2.3}$$

Для этого запишем

$$Bh_n'(s) + \Omega(s)h_n(s) = \lambda_n h_n(s), \tag{2.4}$$

$$(Bh_m'(s))^* + (\Omega(s)h_m(s))^* = \lambda_m h_m^*(s). \tag{2.5}$$

Умножим (2.4) слева на $h_m^*(s)$, а (2.5) – справа на $h_n(s)$ и вычтем из первого равенства второе. Учитывая, что $h_m^*\Omega h_n = (\Omega h_m)^*\cdot h_n$, получаем

$$h_m^*(s)Bh_n'(s) - (Bh_m'(s))^*\cdot h_n(s) = (\lambda_n - \lambda_m)\,h_m^*(s)h_n(s).$$

Проинтегрировав это тождество от 0 до x, получим (2.3). То, что $h_n(x,\Omega(\cdot,t))$ удовлетворяет краевым условиям (2.2), следует из (1.13). Остается проверить нормированность собственных функций (1.13). Пусть $n = m$, тогда

$$\int_0^\pi |h_m(x,\Omega(\cdot,t))|^2\,dx = e^t\int_0^\pi \frac{|h_m(x)|^2}{\left(1+(e^t-1)\int_0^x |h_m(s)|^2\,ds\right)^2}\,dx = -\frac{e^t}{e^t-1}\times$$

$$\times\int_0^\pi\left(\frac{d}{dx}\theta^{-1}\right)dx = -\frac{e^t}{e^t-1}\left(\frac{1}{\theta(\pi,t)} - \frac{1}{\theta(0,t)}\right) = -\frac{e^t}{e^t-1}\left(\frac{1}{e^t} - 1\right) = 1.$$

Пусть теперь $n \neq m$. Обозначив $H_{mn}(x) = \int_0^x h_m^*(s)h_n(s)\,ds$ и заметив, что $H_{mn}'(x) = h_m^*(x)h_n(x)$, получим :

$$|h_n(x,\Omega(\cdot,t))|^2 = h_n^*(x,\Omega(\cdot,t))\cdot h_n(x,\Omega(\cdot,t)) = |h_n(x)|^2 - \frac{2(e^t-1)}{\theta}H_{mn}\cdot h_m^*\cdot h_n$$

$$+\frac{(e^t-1)^2}{\theta^2}H_{mn}^2\cdot|h_m|^2 = |h_n(x)|^2 - (e^t-1)\left(\frac{H_{mn}^2}{\theta}\right)'.$$

Так как $H_{mn}(\pi) = H_{mn}(0) = 0$, то

$$\int_0^\pi |h_n(x, \Omega(\cdot, t))|^2\, dx = \int_0^\pi |h_n(x)|^2\, dx - (e^t - 1)\left(\frac{H^2_{mn}(\pi)}{\theta(\pi, t)} - \frac{H^2_{mn}(0)}{\theta(0, t)}\right) = 1.$$

Для доказательства (1.14) заметим, что, как следует из (1.13), при $n \neq m$ имеем $h_n(\pi, \Omega(\cdot, t)) = h_n(\pi, \Omega)$ и $h_n(0, \Omega(\cdot, t)) = h_n(0, \Omega)$. Отсюда вытекает, что $l_n(\Omega(\cdot, t)) = l_n(\Omega)$, а при $n = m$ $h_m(\pi, \Omega(\cdot, t)) = e^{-\frac{t}{2}} h_m(\pi, \Omega)$ и $h_m(0, \Omega(\cdot, t)) = e^{\frac{t}{2}} h_m(0, \Omega)$. Таким образом, получаем

$$l_m(\Omega(\cdot, t)) = \ln\left(e^{-t}\frac{|h_m(\pi, \Omega)|}{|h_m(0, \Omega)|}\right) = l_m(\Omega) - t.$$

Теорема 1 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

1) Пусть в теореме 1 $t = t_0$. Тогда, исходя из начального потенциала $\Omega(x) = \Omega(x, T_{-1})$, по формуле (1.12) получим изоспектральный потенциал $\Omega(x, T_0)$. Исходя из $\Omega(x, T_0)$, совершенно аналогично, по формуле (1.16) получим потенциал $\Omega(x, T_1)$, у которого две нормировочные постоянные, а именно $a_0(\Omega(T_1)) = a_0(\Omega(T_0)) = a_0(\Omega)e^{-t_0}$ и $a_1(\Omega(T_1)) = a_1(\Omega(T_0))e^{-t_1} = a_1(\Omega)e^{-t_1}$ отличаются от нормировочных постоянных Ω. По индукции, исходя из потенциала $\Omega(T_{m-1})$, по формулам (1.16) и (1.17) получим изоспектральный потенциал $\Omega(T_m)$, у которого уже $m+1$ нормировочных постоянных отличаются от нормировочных постоянных Ω. Продолжая этот процесс до бесконечности ($T_m \to T$ при $m \to \infty$), мы придем к потенциалу $\Omega(x, T)$ (см. (1.18)), имеющему спектральные данные $\{\lambda_n(\Omega);\ a_n(\Omega(T)) = a_n(\Omega)e^{-t_n};\ n \in \mathbb{Z}\}$. Чтобы доказать, что $\Omega(\cdot, T) \in M^2_k(\Omega)$, остается показать, что $\Omega(\cdot, T) \in W^2_{k,\mathbb{R}}[0, \pi]$. Для этого, во-первых заметим, что из $\Omega \in W^2_{k,\mathbb{R}}[0, \pi]$ следует, что $a_n(\Omega)$ имеют асимптотику (1.7), а так как $T \in P_k$, то $a_n(\Omega(T)) = a_n(\Omega)e^{-t_n}$ имеют ту же асимптотику. Во-вторых, воспользуемся следующим результатом М. Г. Гасымова и Т. Т. Джабиева.

Теорема. *([4]). Для того, чтобы последовательности* $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ *и* $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ *были, соответственно, собственными значениями и нормировочными постоянными краевой задачи вида (1.1) – (1.3) с потенциалом* Ω *вида* $\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, *где* $p, q \in W^2_{k,\mathbb{R}}[0,\pi]$, *необходимо и достаточно чтобы выполнялись асимптотические формулы (1.5) и (1.7) соответственно,* $\lambda_n \neq \lambda_m$ *при* $n \neq m$, *все* $a_n > 0$, *и чтобы все производные порядка* k *элементов матрицы-функции*

$$F(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{a_n} \varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0^*(t,\lambda_n) - \frac{1}{\pi}\varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0^*(t,\lambda_n^0) \right\},$$

где $\varphi_0(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda x + \alpha) \\ -\cos(\lambda x + \alpha) \end{pmatrix}$, $\lambda_n^0 = n - \dfrac{\alpha}{\pi}$, *принадлежали* $L^2_{\mathbb{R}}([0,\pi] \times [0,\pi])$.

Так как справедливы асимтотические формулы (1.5) и (1.7), то из этой теоремы следует, что $\Omega(\cdot, T) \in W^2_{k,\mathbb{R}}[0,\pi]$ (утверждение о $F(x,t)$ проверяется так же как в [4]). Равенство $l(\Omega(\cdot,T)) = l(\Omega) - T$ доказывается по индукции, путем повторения рассуждений, приведенных при доказательстве (1.14) в теореме 1. Таким образом, первое утверждение теоремы 2 доказано.

Как известно (см. [1], [3], [10], [11]), существует оператор преобразования $I + \mathbf{K}$, представляющий решение $\varphi(x,\lambda,\alpha)$ задачи Коши (1.6) в виде

$$\varphi(x,\lambda,\alpha) = \varphi_0(x,\lambda,\alpha) + \int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda,\alpha)\,dt,$$

через $\varphi_0(x,\lambda,\alpha) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda x + \alpha) \\ -\cos(\lambda x + \alpha) \end{pmatrix}$ и матрицу $K(x,t)$. При этом, если $\Omega \in$ $\in L^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$, то $K(x,\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}}(0,x)$, а если $\Omega \in W^2_{k,\mathbb{R}}[0,\pi]$, то $K(x,\cdot) \in W^2_{k,\mathbb{R}}(0,x)$ для любого $0 < x \leq \pi$.

Лемма 2. *Если* $\Omega \in W^2_{k,\mathbb{R}}[0,\pi]$, *то* $\{l_n(\Omega)\} \in P_k$.

Доказательство следует из представления

$$\varphi_2(\pi,\lambda_n,\alpha) = -\cos(\lambda_n\pi + \alpha) +$$
$$+ \int_0^\pi [K_{21}(\pi,t)\sin(\lambda_n t + \alpha) - K_{22}(\pi,t)\cos(\lambda_n t + \alpha)]\,dt,$$

если использовать асимптотику собственных значений (1.5) и проинтегрировать последний интеграл k раз по частям.

Докажем 2). Согласно следствию 2, каждому $\tilde{\Omega} \in M_k^2(\Omega)$ соответствует некоторая последовательность $\tilde{T} \in P_k$ такая что $a_n(\tilde{\Omega}) = a_n(\Omega)e^{-\tilde{t}_n}$. Построим по этой $\tilde{T}$, по формуле (1.18), потенциал $\Omega(\cdot, \tilde{T})$. Согласно (1.19), по лемме 2, $l(\Omega(\cdot, \tilde{T})) = l(\Omega) - \tilde{T} \in P_k$. Очевидно также, что $a_n(\Omega(\cdot, \tilde{T})) = a_n(\Omega)e^{-\tilde{t}_n} = a_n(\tilde{\Omega})$. Отсюда, по теореме единственности, $\tilde{\Omega}(x) = \Omega(x, \tilde{T})$ почти всюду. Следовательно, $l(\tilde{\Omega}) = l(\Omega(\cdot, \tilde{T})) = l(\Omega) - \tilde{T}$, и $\tilde{T} = l(\Omega) - l(\tilde{\Omega})$. Теорема 2 доказана.

ABSTRACT. The paper gives a description of all regular selfadjoint Dirac operators, which have the same spectrum.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Гасымов, Б. М. Левитан, "Обратная задача для системы Дирака", ДАН СССР, т. 167, №5, стр. 967 – 970, 1966.
2. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, Введение в спектральную теорию, М. Наука, 1970.
3. В. А. Марченко, Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, Киев, Наукова Думка, 1977.
4. М. Г. Гасымов, Т. Т. Джабиев, "Определение системы дифференциальных уравнений Дирака по двум спектрам", Труды летней школы по спектральной теории операторов и теории представления групп, Баку, Элм, стр. 46 – 71, 1975.
5. В. А. Марченко, "Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка", Труды ММО, т. 1, 1951.
6. E. L. Isaacson, E. Trubowitz, "The inverse Sturm–Liouville Problem, I," Communications on Pure and Applied Math., vol. 36, no. 6, pp. 767 – 784, 1983.
7. E. L. Isaacson, H. P. McKean, E. Trubowitz, "The inverse Sturm–Liouville Problem, II," Communications on Pure and Applied Math., vol. 37, no. 1, pp. 1 12, 1984.
8. B. E. Dahlberg, E. Trubowitz, "The inverse Sturm–Liouville Problem, III," Communications on Pure and Applied Math., vol. 37, no. 2, pp. 255 – 268, 1984.
9. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, М., Наука, 1967.
10. Т. В. Мисюра, "Характеристика спектров периодической и антипериодичской краевых задач, порождаемых операцией Дирака", I, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Вып. 30, Харьков, стр. 90 - 101, 1978.
11. Т. В. Мисюра, "Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака", II, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Вып. 31, Харьков, стр. 102 109, 1979.

1 Марта 1994

Ереванский государственный университет

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

А. О. Бабаян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, №2, 1994

В статье рассмотрена граничная задача типа Дирихле для эллиптического уравнения

$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial\bar{z}^m\partial z^n}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial\bar{z}}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial u}{\partial z}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

в многосвязной области. Задача приводится к задаче Дирихле для n-гармонического уравнения. Доказана теорема существования.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D есть $(p+1)$-связная, ограниченная область комплексной плоскости $\mathbf{C}$, обладающая достаточно гладкой границей Г. Не умаляя общности, будем предполагать, что $0\in D$. Исследуем однородное эллиптическое уравнение

$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial\bar{z}^m\partial z^n}=0,\quad (x,y)\in D,\tag{1}$$

где $z=x+iy$, $\quad\bar{z}=x-iy$

$$\frac{\partial u}{\partial\bar{z}}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial u}{\partial z}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

m,n – целые, неотрицательные числа, такие что $m\geq n$ (при $m<n$ получаем уравнение (1) относительно $\bar{u}$). Это уравнение неправильно эллиптическое (определение см в [1]), следовательно, для него классические граничные задачи (Дирихле, Неймана, Пуанкаре) не являются ни фредгольмовыми, ни нетеровыми (см. [2]).

В настоящей статье рассмотрены следующие граничные условия :

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial N^k}\right|_\Gamma = f_k(x,y), \quad (x,y)\in\Gamma, \quad k=0,1,...,n-1, \tag{2}$$

$$\operatorname{Re}\left.\frac{\partial^k u}{\partial N^k}\right|_\Gamma = f_k(x,y), \quad (x,y)\in\Gamma, \quad k=n,...,m-1. \tag{3}$$

Здесь N – внешняя нормаль к границе Γ в точке $(x,y)\in\Gamma$, $f_0,...,f_{n-1}$ – комплекснозначные, а $f_n,...,f_{m-1}$ – вещественнозначные, достаточно гладкие функции на Γ. При $n=0$ условия (2) отсутствуют.

Мы ищем регулярное решение задачи (1) – (3), то есть функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области D и граничным условиям (2), (3) на Γ в классическом смысле. Определенная таким образом граничная задача для односвязных областей была исследована в [3]. Если в (2), (3) $f_k\equiv 0$, $k=$ $=0,...,m-1$, то задача (1) – (3) называется *однородной*. Основным результатом статьи является следующая

Теорема. *Однородная задача (1) – (3) имеет $(m-n)^2$ линейно независимых над полем действительных чисел решений, а для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно выполнение $(m-n)^2p$ условий.*

§2. ДВА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЯ

Использование нижеследующих двух лемм существенно для доказательства теоремы.

Лемма 1. *Общее решение уравнения (1) представимо в виде*

$$u=\sum_{k=0}^{m-1}\bar z^k\varphi_k(z)+\sum_{j=0}^{n-1}z^j\overline{\psi_j(z)}+\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{p}c_{rqs}\bar z^r z^q\log|z-z_s|, \tag{4}$$

где φ_k,ψ_j произвольные аналитические в D функции, z_s – фиксированная точка из s-ой ограниченной компоненты дополнения D, а постоянные c_{rqs} однозначно определены по функции u.

Доказательство. Представим уравнение (1) в виде

$$\Delta^n\left(\frac{\partial^{m-n}u}{\partial\bar z^{m-n}}\right)=0, \tag{5}$$

где $\Delta = 4\partial^2/\partial\bar{z}\partial z$ – оператор Лапласа. В [4] доказано, что общее решение n-гармонического уравнения допускает представление

$$w = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z) + \sum_{j=0}^{n-1} z^j \overline{\psi_j(z)} + \sum_{q,r=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{p} c_{rqs} \bar{z}^r z^q \log|z - z_s|, \tag{6}$$

где φ_k, ψ_j – аналитические в D функции, z_s – фиксированная точка s-ой ограниченной компоненты дополнения D, а c_{rqs} – постоянные, однозначно определяемые по функции w. Следовательно, по (5)

$$\frac{\partial^{m-n} u}{\partial \bar{z}^{m-n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z) + \sum_{j=0}^{n-1} z^j \overline{\psi_j(z)} + \sum_{q,r=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{p} a_{rqs} \bar{z}^r z^q \log|z - z_s|. \tag{7}$$

Соединим теперь компоненты границы Γ гладкими дугами l_k, $k = 1, ..., p$ ($l_k \subset D$ и $l_k \cap l_j = \emptyset$ при $k \neq j$), так, чтобы $D \setminus (l_1 \cup \cdots \cup l_p)$ превратилось в односвязную область. Тогда в $D \setminus (l_1 \cup \cdots \cup l_p)$ можно выделить непрерывную ветвь $\log(z - z_s)$. Следовательно, (7) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^{m-n} u}{\partial \bar{z}^{m-n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z) + \sum_{j=0}^{n-1} z^j \overline{\psi_j(z)} + \sum_{q,r=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{p} a_{rqs} \bar{z}^r z^q [\log(z - z_s) + \log(\bar{z} - \bar{z}_s)],$$
$$(x, y) \in D \setminus (l_1 \cup \cdots \cup l_p).$$

Проинтегрировав обе части этого равенства по $\bar{z}$ в $D \setminus (l_1 \cup \cdots \cup l_p)$, получим

$$\frac{\partial^{m-n-1} u}{\partial \bar{z}^{m-n-1}} = \sum_{k=1}^{n} \bar{z}^k \phi_k(z) + \phi_0(z) + \sum_{j=0}^{n-1} z^j \overline{\Psi_j(z)} + \sum_{s=1}^{p} \sum_{j=0}^{n-1} c_{js} z^j \log(\bar{z} - \bar{z}_s) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{n-1} z^j \omega_j(z) + \sum_{q,r=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{p} b_{rqs} \bar{z}^{r+1} z^q [\log(z - z_s) + \log(\bar{z} - \bar{z}_s)], \tag{8}$$

где $\phi_k(z), \Psi_j(z), \omega_j(z)$ аналитические в $D \setminus (l_1 \cup \cdots \cup l_p)$ функции, а c_{js}, b_{rqs} – постоянные. Учитывая, что левая часть (8) есть непрерывная в D функция, а $\phi_k(z), \Psi_j(z)$ допускают аналитическое продолжение в D, заключаем, что

$$\sum_{j=0}^{n-1} z^j \omega_j(z) \equiv \sum_{s=1}^{p} \sum_{j=0}^{n-1} c_{js} z^j \log(z - z_s) + \rho(z),$$

где $\rho(z)$ допускает аналитическое продолжение в D. Суммируя изложенное, приходим к представлению

$$\frac{\partial^{m-n-1} u}{\partial \bar{z}^{m-n-1}} = \sum_{k=0}^{n} \bar{z}^k \varphi_k(z) + \sum_{j=0}^{n-1} z^j \overline{\psi_j(z)} + \sum_{s=1}^{p} \sum_{q=0}^{n} \sum_{r=0}^{n-1} c_{rqs} \bar{z}^q z^r \log|z - z_s|.$$

Продолжая этот процесс, аналогично получим представление (4). Теперь покажем, что постоянные c_{qrs} определяются однозначно. Для этого отметим, что в представлении (4) мы можем предполагать

$$\varphi_k(0)=\varphi_k'(0)=\cdots=\varphi_k^{(n-1)}(0)=0,\quad k=0,1,...,m-1 \tag{9}$$

(при необходимости изменяем ψ_j во втором слагаемом в (4)). Далее

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n u}{\partial z^n}&=\sum_{k=0}^{m-1}\bar z^k\varphi_k^{(n)}(z)+\sum_{s=1}^{p}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(n-1)!c_{r,n-1,s}}{z-z_s}\bar z^r=\\&=\sum_{k=0}^{m-1}\bar z^k\left[\varphi_k^{(n)}(z)+\sum_{s=1}^{p}\frac{(n-1)!c_{k,n-1,s}}{z-z_s}\right],\end{aligned} \tag{10}$$

откуда

$$\frac{\partial^{m+n-1}u}{\partial\bar z^{m-1}\partial z^n}=(m-1)!\left[\varphi_{m-1}^{(n)}(z)+\sum_{s=1}^{p}\frac{(n-1)!\,c_{m-1,n-1,s}}{z-z_s}\right]. \tag{11}$$

Следовательно

$$c_{m-1,n-1,s}=\frac{1}{(m-1)!\,(n-1)!\,2\pi i}\int_{\gamma_s}\frac{\partial^{m+n-1}u}{\partial\bar z^{m-1}\partial z^n}\,dz,\quad s=1,...,p,$$

где γ_s – простая замкнутая кривая такая, что $\gamma_s\subset D$ и $\operatorname{int}\gamma_s\cap D^c$ совпадает с s-ой ограниченной компонентой дополнения D. Из (11) находим $\varphi_{m-1}^{(n)}$ и, после интегрирования, учитывая (9) однозначно определяем $\varphi_{m-1}(z)$. Теперь $\varphi_{m-2}(z)$ и постоянные $c_{m-2,n-1,s}$ могут быть найдены из соотношения

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m-2}}{\partial\bar z^{m-2}}&\left[\frac{\partial^n u}{\partial z^n}-\bar z^{m-1}\left(\varphi_{m-1}^{(n)}(z)+\sum_{s=1}^{p}\frac{(n-1)!\,c_{m-1,n-1,s}}{z-z_s}\right)\right]=\\&=(m-2)!\left[\varphi_{m-2}^{(n)}(z)+\sum_{s=1}^{p}\frac{(n-1)!\,c_{m-2,n-1,s}}{z-z_s}\right].\end{aligned}$$

В общем случае функция φ_{m-r} и постоянные $c_{m-r,n-1,s}$ могут быть найдены из соотношения

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m-r}}{\partial\bar z^{m-r}}&\left[\frac{\partial^n u}{\partial z^n}-\sum_{k=m-r+1}^{m-1}\bar z^k\left(\varphi_k^{(n)}(z)+(n-1)!\sum_{s=1}^{p}\frac{c_{k,n-1,s}}{z-z_s}\right)\right]=\\&=(m-r)!\left[\varphi_{m-r}^{(n)}(z)+(n-1)!\sum_{s=1}^{p}\frac{c_{m-r,n-1,s}}{z-z_s}\right],\end{aligned}$$

если $\varphi_j(z)$ и $c_{j,n-1,s}$ уже определены $(j = m-r+1, ..., m-1)$. Итак, $\varphi_j(z)$ и $c_{j,n-1,s}$ при $j = 0, 1, ..., m-1$ однозначно определяются по функции u. Тем самым, из (4) следует, что

$$v = \sum_{j=0}^{n-1} z^j \overline{\psi_j(z)} + \sum_{r=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-2}\sum_{s=1}^{p} c_{rqs}\bar{z}^r z^q \log|z - z_s|, \tag{12}$$

где v уже определенная функция –

$$v = u - \sum_{j=0}^{m-1} \bar{z}^j \varphi_j(z) - \sum_{r=0}^{m-1}\sum_{s=1}^{p} c_{r,n-1,s}\bar{z}^r z^{n-1} \log|z - z_s|.$$

Дифференцируя формулу (12) по $\bar{z}$ приходим к равенству

$$\frac{\partial^m v}{\partial \bar{z}^m} = \sum_{j=0}^{n-1} z^j \overline{\psi_j^{(m)}(z)} + (m-1)! \sum_{q=0}^{n-2}\sum_{s=1}^{p} \frac{c_{m-1,q,s} z^q}{\bar{z} - \bar{z}_s}, \tag{13}$$

пользуясь которым находим $\overline{\psi_{n-1}^{(m)}(z)}$:

$$\frac{\partial^{n+m-1} v}{\partial \bar{z}^m \partial z^{n-1}} = (n-1)! \overline{\psi_{n-1}^{(m)}(z)}. \tag{14}$$

Записав (13) в виде

$$\frac{\partial^m v}{\partial \bar{z}^m} - z^{n-1}\overline{\psi_{n-1}^{(m)}(z)} = \sum_{q=0}^{n-2} z^q \left[\overline{\psi_q^{(m)}(z)} + (m-1)! \sum_{s=1}^{p} \frac{c_{m-1,q,s}}{\bar{z} - \bar{z}_s}\right],$$

получаем равенство, аналогичное (10), из которого последовательно находим функции $\psi_q^{(m)}(z)$ и постоянные $c_{m-1,q,s}$ $(q = 0, 1, ..., n-2)$. Затем, как и ранее, перенесем уже определенные функции в левую часть (12) и получим

$$v_1 = \sum_{j=0}^{n-1} z^j \overline{\psi_j(z)} + \sum_{r=0}^{m-2}\sum_{q=0}^{n-2}\sum_{s=1}^{p} c_{rqs}\bar{z}^r z^q \log|z - z_s|, \tag{15}$$

где

$$v_1 = v - \sum_{q=0}^{n-2}\sum_{s=1}^{p} c_{m-1,q,s}\bar{z}^{m-1} z^q \log|z - z_s|.$$

Дифференцируя (15) по $\bar{z}$ приходим к равенству, аналогичному (13) :

$$\frac{\partial^{m-1} v_1}{\partial \bar{z}^{m-1}} = \sum_{q=0}^{n-1} z^q \overline{\psi_q^{(m-1)}(z)} + (m-2)! \sum_{q=0}^{n-2}\sum_{s=1}^{p} \frac{c_{m-2,q,s} z^q}{\bar{z} - \bar{z}_s}.$$

Отсюда аналогично определяются постоянные $c_{m-2,q,s}$ и функции $\psi_q^{(m-1)}(z)$. Продолжение аналогичных рассуждений приводит к определению всех постоянных c_{rqs}. Лемма 1 доказана.

Замечание. Если на функции φ_k из (4) наложить условия (9), то функции φ_k и ψ_j из (4) тоже окажутся однозначно определенными по функции u. Для случая односвязной области D представление (4) было получено в [1].

Лемма 2. *Пусть функция u допускает представление (4) в D и*

$$Re\, u(x,y) \equiv 0, \qquad (x,y) \in D.$$

Тогда справедливо соотношение

$$u = \sum_{j,k=n}^{m-1} G_{jk}\chi_{jk} + iv(x,y), \tag{16}$$

где G_{jk} – произвольные вещественные постоянные, $v(x,y)$ произвольное вещественное решение n-гармонического уравнения

$$\Delta^n v = 0, \qquad (x,y) \in D, \tag{17}$$

а χ_{jk} – линейно независимые, чисто мнимые функции, введенные в [3] :

$$\chi_{jk} = \begin{cases} i(\overline{z}^j z^k + z^j \overline{z}^k), & j \leq k; \\ \overline{z}^j z^k - z^j \overline{z}^k, & j > k. \end{cases} \tag{18}$$

Доказательство. Полагая, что для функций φ_k выполнены условия (9), представим (4) в виде

$$u = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{z}^k \varphi_k(z) + \overline{\sum_{k=0}^{n-1} \overline{z}^k \psi_k(z)} + \sum_{k=n}^{m-1} z^m \overline{z}^k \gamma_k(z) + \sum_{j,k=n}^{m-1} b_{jk} z^j \overline{z}^k +$$

$$+ \sum_{q,r=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{p} c_{rqs} \overline{z}^r z^q \log|z - z_s| + \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{r=n}^{m-1} \sum_{s=1}^{p} c_{rqs} \overline{z}^r z^q \log|z - z_s|. \tag{19}$$

Здесь

$$\varphi_k(z) = \sum_{j=n}^{m-1} b_{kj} z^j + z^m \gamma_k(z), \qquad k = n, \ldots, m-1,$$

где $\gamma_k(z)$ – аналитические в D функции. Тогда

$$\overline{u} = \overline{\sum_{k=0}^{n-1} \overline{z}^k \varphi_k(z)} + \sum_{k=0}^{n-1} \overline{z}^k \psi_k(z) + \sum_{k=n}^{m-1} z^k \overline{z}^m \overline{\gamma_k(z)} + \sum_{j,k=n}^{m-1} \overline{b}_{kj} z^j \overline{z}^k +$$

$$+\sum_{q,r=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{p}\overline{c}_{qrs}\overline{z}^r z^q \log|z-z_s| + \sum_{q=0}^{n-1}\sum_{r=n}^{m-1}\sum_{s=1}^{p}\overline{c}_{rqs}\overline{z}^q z^r \log|z-z_s|,$$

и, следовательно

$$\mathrm{Re}\, u = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{n-1}\overline{z}^k[\varphi_k(z)+\psi_k(z)] + \frac{1}{2}\sum_{j,k=n}^{m-1}(b_{jk}+\overline{b}_{kj})z^j\overline{z}^k +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{q,r=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{p}(c_{rqs}+\overline{c}_{qrs})\overline{z}^r z^q\log|z-z_s| + \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{m-1}z^k\overline{z}^m\overline{\gamma_k(z)} + \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{m-1}z^m\overline{z}^k\gamma_k(z) + \tag{20}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{n-1}\sum_{r=n}^{m-1}\sum_{s=1}^{p}c_{rqs}\overline{z}^r z^q\log|z-z_s| + \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{n-1}\sum_{r=n}^{m-1}\sum_{s=1}^{p}\overline{c}_{rqs}\overline{z}^q z^r\log|z-z_s|.$$

Из этого равенства, учитывая линейную независимость функций $\overline{z}^k z^j$ и $\overline{z}^r z^q \log|z-z_s|$ и то, что левая сторона (20) тождественно равняется нулю при $(x,y)\in D$, получим

$$\varphi_k(z)+\psi_k(z)\equiv 0, \quad k=0,1,\dots,n-1, \quad z\in D; \tag{21}$$

$$b_{jk} = -\overline{b}_{kj}, \quad j,k=n,\dots,m-1; \tag{22}$$

$$c_{rqs} = -\overline{c}_{qrs}, \quad r,q=0,1,\dots,n-1, \quad s=1,\dots,p; \tag{23}$$

$$\gamma_k(z)\equiv 0, \quad k=n,\dots,m-1, \quad z\in D; \tag{24}$$

$$c_{rqs}=0, \quad r=n,\dots,m-1, \quad q=0,1,\dots,n-1, \quad s=1,\dots,p. \tag{25}$$

Подставив эти соотношения в (19), получим

$$u=\sum_{k=0}^{n-1}\overline{z}^k\varphi_k(z) - \overline{\sum_{k=0}^{n-1}\overline{z}^k\varphi_k(z)} + \sum_{j,k=n}^{m-1}b_{jk}z^j\overline{z}^k + \sum_{q,r=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{p}c_{rqs}\overline{z}^r z^q\log|z-z_s|,$$

где b_{jk} и c_{rqs} удовлетворяют, соответственно, (22) и (23). Окончательно, вводя функции χ_{jk} и обозначая

$$\Phi_k(z) = -\frac{1}{2}i\varphi_k(z), \quad k=0,1,\dots,n-1,$$

$$d_{rqs} = -ic_{rqs}, \quad r,q=0,1,\dots,n-1, \quad s=1,\dots,p,$$

приходим к соотношению

$$u=\sum_{j,k=n}^{m-1} G_{jk}\chi_{jk}+i\left[\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\bar{z}^k\Phi_k(z)\right)+\sum_{q,r=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{p} d_{rqs}\bar{z}^r z^q\log|z-z_s|\right],$$

и для окончания доказательства остается заметить, что формула

$$v(x,y)=\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\bar{z}^k\Phi_k(z)\right)+\sum_{q,r=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{p} d_{rqs}\bar{z}^r z^q\log|z-z_s|$$

определяет произвольное действительное решение уравнения (17) (см. [4]).

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

1. Найдем условие разрешимости неоднородной задачи (1) (3). Для этого рассмотрим вспомогательную граничную задачу : найти регулярное в D решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$\operatorname{Re}\left.\frac{\partial^k u}{\partial N^k}\right|_\Gamma=g_k(x,y),\quad (x,y)\in\Gamma,\quad k=0,1,...,m-1,\tag{26}$$

где

$$g_k(x,y)=\begin{cases}\operatorname{Re} f_k(x,y), & k=0,1,...,n-1\\ f_k(x,y), & k=n,...,m-1,\end{cases}\tag{27}$$

а N, f_k те же, что в условиях (2), (3). Легко видеть, что если функция u является решением (1), то $\bar{u}$ - решение уравнения

$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial z^m\partial\bar{z}^n}=0.$$

Следовательно, функция $w=\operatorname{Re} u$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta^m w=0.\tag{28}$$

Итак, если u является решением задачи (1) - (3), то решением задачи (1), (26) является также u. Поэтому функция $w=\operatorname{Re} u$, являющаяся решением (28), удовлетворяет граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^k w}{\partial N^k}\right|_\Gamma=g_k(x,y),\quad (x,y)\in\Gamma,\quad k=0,1,...,m-1.\tag{29}$$

Как было показано в монографии [4], задача (28), (29) однозначно разрешима, и ее решение имеет вид

$$w = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{m-1} \bar{z}^k \beta_k(z)\right) + \sum_{q,r=0}^{m-1} \sum_{s=1}^{p} A_{rqs} \bar{z}^r z^q \log|z - z_s|, \tag{30}$$

где $\beta_k(z)$ - аналитические в D функции, а $A_{rqs} = \overline{A}_{qrs}$ - однозначно определяемые постоянные. С другой стороны, $w = \operatorname{Re} u$, где u есть решение (1) и, следовательно, w представимо в виде (4). Таким образом, в (30) выполнены условия

$$A_{rqs} = 0, \quad r, q = n, \dots, m-1, \quad r \geq q, \quad s = 1, \dots, p. \tag{31}$$

Ограничения на g_k, вытекающие из этих условий (постоянные A_{rqs} однозначно определяются по w, а w однозначно определяется по g_k), являются независимыми. Действительно, если

$$g_k = 2 \operatorname{Re} \left.\frac{\partial^k(\bar{z}^r z^q \log|z - z_s|)}{\partial N^k}\right|_\Gamma, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

то единственным решением задачи (28), (29) является функция

$$w_{rqs} = (\bar{z}^r z^q + z^r \bar{z}^q) \log|z - z_s|,$$

для которой

$$A_{rqs} = 1, \quad A_{ljk} = 0, \quad (l-r)^2 + (j-q)^2 + (k-s)^2 \neq 0, \quad l \geq j.$$

Итак, $p(m-n)^2$ условий (31) необходимы для разрешимости задачи (1) - (3).

Пусть теперь условия (31) выполнены для функции w, являющейся решением задачи (28), (29) и представимой в виде (30). Введем вспомогательную функцию

$$u_1 = \sum_{k=0}^{m-1} \bar{z}^k \beta_k(z) + \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{p} A_{rqs} \bar{z}^r z^q \log|z - z_s|, \tag{32}$$

для которой $\operatorname{Re} u_1 = w$. Очевидно, что (32) является частным случаем представления (4). Тем самым, функция u_1 - решение уравнения (1), и поскольку

$\operatorname{Re} u_1 = w$, то оно удовлетворяет граничным условиям (26). Далее, обозначим через v_1 единственное решение (17), удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^k v_1}{\partial N^k}\right|_\Gamma = \operatorname{Im} f_k - \operatorname{Im}\left.\frac{\partial^k u_1}{\partial N^k}\right|_\Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1. \tag{33}$$

Тогда функция $u = u_1 + iv_1$ является уже решением задачи (1) - (3). Действительно, эта функция удовлетворяет уравнению (1), и при $k = n, ..., m-1$

$$\operatorname{Re}\left.\frac{\partial^k u}{\partial N^k}\right|_\Gamma = \operatorname{Re}\left.\frac{\partial^k (u_1 + iv_1)}{\partial N^k}\right|_\Gamma = \operatorname{Re}\left.\frac{\partial^k u_1}{\partial N^k}\right|_\Gamma = f_k,$$

так как v_1 вещественнозначна, а для u_1 выполнено (26). Пусть теперь $k = 0, 1, ..., n-1$. Тогда

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial N^k}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial^k u_1}{\partial N^k}\right|_\Gamma + i\left.\frac{\partial^k v_1}{\partial N^k}\right|_\Gamma = \operatorname{Re} f_k + i \operatorname{Im}\left.\frac{\partial^k u_1}{\partial N^k}\right|_\Gamma + i\left(\operatorname{Im} f_k - \operatorname{Im}\left.\frac{\partial^k u_1}{\partial N^k}\right|_\Gamma\right) =$$

$$= \operatorname{Re} f_k + i \operatorname{Im} f_k = f_k,$$

т. е. функция u удовлетворяет также условиям (3). Таким образом, условия (31) также необходимы для разрешимости задачи (1) - (3).

2. Перейдем к изучению однородной задачи (1) - (3). Поскольку в этом случае функции f_k тождественно равны нулю при $k = 0, 1, ..., m-1$, функции $g_k(x, y)$ из (26) тоже равняются нулю всюду на Г. Рассуждая аналогично случаю неоднородной задачи, заключаем, что если функция u является решением однородной задачи (1) - (3), то $w = \operatorname{Re} u$ - решение однородной задачи (28), (29) с $g_k(x, y) \equiv 0$, $k = 0, 1, ..., m-1$. Так как задача (28), (29) имеет единственное (нулевое в рассматриваемом случае) решение, то $\operatorname{Re} u \equiv 0$ в D. Согласно лемме 2 u, как решение (1), допускает представление (4). Итак, для любого решения однородной задачи (1) - (3) справедливо соотношение (16). Далее, обозначим через v_{kr} решение уравнения (17), удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^j v_{kr}}{\partial N^j}\right|_\Gamma = i\left.\frac{\partial^j \chi_{kr}}{\partial N^j}\right|_\Gamma, \quad j = 0, 1, ..., n-1, \quad k, r = n, ..., m-1, \tag{34}$$

где χ_{kr} функции, определенные в (18). Тогда функции

$$u_{kr} = \chi_{kr} + iv_{kr}, \quad k, r = n, ..., m-1 \tag{35}$$

являются решениями однородной задачи (1) - (3). Действительно, u_{kr} удовлетворяет уравнению (1) и граничному условию (3) (т. к. u_{kr} чисто мнимая функция). Из (33) следует, что при $j = 0, 1, ..., n-1$ имеем

$$\left.\frac{\partial^j u_{kr}}{\partial N^j}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial^j \chi_{kr}}{\partial N^j}\right|_\Gamma + i\left.\frac{\partial^j v_{kr}}{\partial N^j}\right|_\Gamma = 0,$$

т. е. однородное условие (2) также выполнено. Ввиду линейной независимости χ_{kr}, функции u_{kr} тоже линейно независимы.

Для завершения доказательства остается проверить, что любое решение однородной задачи (1) - (3) является линейной комбинацией функций u_{kr} с действительными коэффициентами. Пусть u - какое-либо решение этой задачи. Как было показано выше, u допускает представление (16). Подставляя это представление в граничные условия (2), получаем

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial N^k}\right|_\Gamma = \frac{\partial^k}{\partial N^k}\left.\left(\sum_{j=n}^{m-1}\sum_{r=n}^{m-1} G_{jr}\chi_{jr} + iv\right)\right|_\Gamma =$$

$$= \sum_{j=n}^{m-1}\sum_{r=n}^{m-1} G_{jr}\left.\frac{\partial^k \chi_{jr}}{\partial N^k}\right|_\Gamma + i\left.\frac{\partial^k v}{\partial N^k}\right|_\Gamma = 0, \qquad k = 0, 1, ..., n-1.$$

И ввиду (34)

$$-i\sum_{j=n}^{m-1}\sum_{r=n}^{m-1} G_{jr}\left.\frac{\partial^k v_{jr}}{\partial N^k}\right|_\Gamma + i\left.\frac{\partial^k v}{\partial N^k}\right|_\Gamma = 0, \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Окончательно получаем

$$\frac{\partial^k}{\partial N^k}\left.\left(v - \sum_{j,r=n}^{m-1} G_{jr}v_{jr}\right)\right|_\Gamma = 0, \quad k = 0, 1, ..., n-1. \tag{36}$$

Функции v и v_{kr} удовлетворяют уравнению (17). Воспользовавшись снова единственностью решения задачи Дирихле для n-гармонического уравнения, из (36) находим

$$v \equiv \sum_{j=n}^{m-1}\sum_{r=n}^{m-1} G_{jr}v_{jr}. \tag{37}$$

Подставляя (37) в (16) и учитывая (35), получим

$$u=\sum_{j=n}^{m-1}\sum_{r=n}^{m-1}G_{jr}\chi_{jr}+i\sum_{j=n}^{m-1}\sum_{r=n}^{m-1}G_{jr}v_{jr}=\sum_{j=n}^{m-1}\sum_{r=n}^{m-1}G_{jr}(\chi_{jr}+iv_{jr})=\sum_{j=n}^{m-1}\sum_{r=n}^{m-1}G_{jr}u_{jr},$$

что завершает доказательство теоремы.

ABSTRACT. The paper considers a Dirichlet type boundary value problem for elliptic equation

$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial\bar{z}^m\partial z^n}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial\bar{z}}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial u}{\partial z}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

in a multiply connected domain. The problem is reduced to a Dirichlet problem for n-harmonic equation. An existence theorem is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Е. Товмасян, "Общая граничная задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами", Диф. уравнения, т. 2, №. 1/2, 1966.
2. А. В. Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М. Наука, 1966.
3. Н. Е. Товмасян, "Задача типа Дирихле для одного класса неправильно эллиптических уравнений высшего порядка", Известия АН Армении, Математика, т. 27, №. 1, стр. 75 – 85, 1992.
4. И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, М. Гостехиздат, 1948.

8 марта 1994

Государственный инженерный университет Армении

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ДАРЛИНГТОНА ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОЗИТИВНЫХ J-СИММЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

В. Л. Даллакян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, №2, 1994

В статье рассмотрены вещественные рациональные позитивные J-симметрические матриц-функции порядка n. Доказано, что любая такая функция $h(\lambda)$ представима в виде дробно-линейного преобразования $h(\lambda) = [a_{11}(\lambda)R + a_{12}(\lambda)] \cdot [a_{21}(\lambda)R + a_{22}(\lambda)]^{-1}$, где R постоянная (диагональная) матрица, а матрица коэффициентов $A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))$ рациональна, Э-несжимаема в правой полуплоскости, Э-унитарна на мнимой оси, вещественна и симплектична.

ВВЕДЕНИЕ

Теорема С. Дарлингтона [1] о дробно-линейном представлении рациональных вещественных позитивных функций $z(\lambda)$ нашла множество приложений в аналитической теории цепей. В случае, когда $z(\lambda)$ – рациональная вещественная позитивная матрица-функция порядка n, ее дробно-линейное представление было получено Е. Я. Меламуд [2]. В работе [2] получено также дробно-линейное представление для случая, когда $z(\lambda)$ является, кроме того, симметрической. Реализация по Дарлингтону мероморфных позитивных матриц-функций рассмотрена в работах Д. З. Арова (см., напр., [3]).

В настоящей работе получено дробно-линейное представление для рациональных позитивных вещественных J-симметрических матриц-функций порядка n, где

$$J = \begin{pmatrix} I_{n_\alpha} & 0 \\ 0 & -I_{n_\beta} \end{pmatrix}, \quad n = n_\alpha + n_\beta,$$

а I_m единичная матрица порядка m.

§1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Квадратнаую нулевую матрицу порядка n обозначим через O_n. Квадратную блочную диагональную матрицу с блоками $D_1, D_2, \dots, D_k$, лежащими на главной диагонали и с нулевыми элементами вне этих блоков, обозначим через $\{D_1, \dots, D_k\}$. Мы будем рассматривать *вещественные J-внутренние* матрицы-функции $A(\lambda)$ [3].

Как известно [2], рациональная вещественная позитивная матрица-функция $h(\lambda)$ представима в виде суммы

$$h(\lambda) = h_0(\lambda) + h_1(\lambda), \tag{1}$$

где $h_0(\lambda)$ – вещественная позитивная матрица-функция, удовлетворяющая условию $h_0(\lambda) + h_0^*(\lambda) = 0$ при $\operatorname{Re} \lambda = 0$ (*реактансная* матрица-функция), а $h_1(\lambda)$ – рациональная вещественная позитивная матрица-функция с полюсами, лежащими на мнимой оси. Обозначим

$$\Im = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Имеет место

Теорема 1 [2]. *Произвольная рациональная позитивная вещественная матрица-функция $z(\lambda)$ порядка n представима в виде дробно-линейного преобразования*

$$z(\lambda) = [a(\lambda)R + b(\lambda)] \cdot [c(\lambda)R + d(\lambda)]^{-1},$$

где $R = \{I_m, O_{n-m}\}$, $m = \operatorname{rank}\,[z(\lambda) + z'(-\lambda)]$, а матрица-функция $A(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix}$ порядка $2n$ рациональна и является вещественной $\Im$-внутренней.

§2. ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТИПА ДАРЛИНГТОНА ДЛЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОЗИТИВНЫХ МАРТИЦ-ФУНКЦИЙ

Рассмотрим рациональную вещественную позитивную матрицу-функцию $h(\lambda)$ порядка $n = n_\alpha + n_\beta$

$$h(\lambda) = \begin{pmatrix} h_{11}(\lambda) & h_{12}(\lambda) \\ h_{21}(\lambda) & h_{22}(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $h_{11}(\lambda)$ - матрица-функция порядка n_α. Пусть

$$m = \text{rank}\,[h(\lambda) + h'(-\lambda)], \quad m_\alpha = \text{rank}\,[h_{11}(\lambda) + h'_{11}(-\lambda)],$$

$$m'_\alpha = n_\alpha - m_\alpha, \quad m_\beta = m - m_\alpha, \quad m'_\beta = n_\beta - m_\beta.$$

Заметим, что $m'_\beta \geq 0$. Это обусловлено тем, что позитивность матрицы (3) влечет эрмитово-неотрицательность ($\overline{\tau} = \tau > 0$) матрицы

$$H(i\tau) = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11}(i\tau) + h'_{11}(-i\tau) & h_{12}(i\tau) + h'_{21}(-i\tau) \\ h_{21}(i\tau) + h'_{12}(-i\tau) & h_{22}(i\tau) + h'_{22}(-i\tau) \end{pmatrix}.$$

Согласно лемме В. П. Потапова [5] о неотрицательных эрмитовых матрицах, уравнение $AX = B$ имеет хотя бы одно решение, т. е. столбцы матрицы B являются линейными комбинациями столбцов матрицы A. Но тогда rank $[A\ B] =$ =rank A. Следовательно, $H(i\tau)$ имеет кроме m_α еще m_β линейно независимых строк, которые естественно, расположены в блоке $[B^*\ C]$, имеющем n_β строк. Это означает, что $m'_\beta \geq 0$.

Введем следующие обозначения :

$$j = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}, \quad P^\alpha = \begin{pmatrix} I_{n_\alpha} & 0 \\ 0 & O_{n_\beta} \end{pmatrix}, \quad P^\beta = \begin{pmatrix} O_{n_\alpha} & 0 \\ 0 & I_{n_\beta} \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Im_1 = \begin{pmatrix} P^\alpha & P^\beta \\ P^\beta & P^\alpha \end{pmatrix}, \quad \Im_2 = \begin{pmatrix} I_{m_\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_\beta} & 0 \\ 0 & I_{m'_\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m'_\beta} \end{pmatrix}, \quad \Im_4 = \begin{pmatrix} \Im_2 & 0 \\ 0 & \Im_2 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. *Произвольная рациональная вещественная позитивная матрица-функция $h(\lambda)$ (3) порядка $n = n_\alpha + n_\beta$ представима в виде дробно-линейного преобразования*

$$h(\lambda) = [a(\lambda)R + b(\lambda)] \cdot [c(\lambda)R + d(\lambda)]^{-1} \tag{4}$$

над постоянной матрицей $R = \{I_{m_\alpha}, O_{m'_\alpha}, I_{m_\beta}, O_{m'_\beta}\}$ *с вещественной* $\Im$*-внутренней матрицей коэффициентов порядка* $2n$

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Доказательство. Наряду с $h(\lambda)$, вещественна и позитивна также матрица $h_2(\lambda) = \Im_2 h(\lambda) \Im_2^*$. Согласно теореме 1, матрица $h_2(\lambda)$ представима в виде дробно-линейного преобразования

$$h_2(\lambda) = [a_2(\lambda)R_2 + b_2(\lambda)] \cdot [c_2(\lambda)R_2 + d_2(\lambda)]^{-1},$$

где $R_2 = \{I_m, O_{n-m}\}$, а матрица-функция

$$A_2(\lambda) = \begin{pmatrix} a_2(\lambda) & b_2(\lambda) \\ c_2(\lambda) & d_2(\lambda) \end{pmatrix}$$

порядка $2n$ вещественна и $\Im$-внутренняя. Следовательно, матрица-функция $h(\lambda)$ представима в виде (4) с $R = \Im_2^* R_2 \Im_2$, и матрица коэффициентов равна $A(\lambda) = \Im_4^* A_2(\lambda) \Im_4$. Так же мы получаем, что $\Im_4^* \Im \Im_4 = \Im$, и, тем самым, $A(\lambda)$ является $\Im$-внутренней. Теорема 2 доказана.

Обратимся теперь к конкрстному построению матрицы $A(\lambda)$ для матрицы-функции (3). Рассмотрим матрицу-функцию

$$f(\lambda) = \frac{h(\lambda) + h'(-\lambda)}{2}$$

с рангом, равным m. Предположим $m = 0$. Тогда $h(\lambda)$ – реактансная, вещественная, позитивная матрица. Полагая, что $R = O$, будем иметь

$$h(\lambda) = [I \cdot R + h(\lambda)] \cdot [O \cdot R + I]^{-1}.$$

Матрица коэффициентов этого дробно-линейного преобразования :

$$\begin{pmatrix} I & h(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Поскольку $J_2 = \Im_1 j \Im \Im_1$, имеем

$$A'(\lambda)J_2A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & h'(\lambda)J - Jh(\lambda) \end{pmatrix}.$$

В этом случае $h(\lambda)$ является J-симметрической ($h'(\lambda) = Jh(\lambda)J$), а матрица $A(\lambda)$ удовлетворяет условию симплектичности

$$A'(\lambda)J_2A(\lambda) \equiv J_2. \tag{6}$$

Предположим теперь, что $0 < m \leq n$. Тогда для матрицы-функции $h(\lambda)$ справедливо разложение (1), которое можно представить в виде дробно-линейного преобразования

$$h(\lambda) = [I \cdot h_1(\lambda) + h_0(\lambda)] \cdot [O \cdot h_1(\lambda) + I]^{-1}. \tag{7}$$

Так как $h_0(\lambda)$ -- рациональная, вещественная, позитивная, реактансная матрица-функция, матрица коэффициентов

$$A_0(\lambda) = \begin{pmatrix} I & h_0(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

дробно-линейного преобразования (7) вещественна, $\Im$-внутренняя и удовлетворяет условию (6).

По теореме 2, $h_1(\lambda)$ может быть записано в виде дробно-линейного преобразования

$$h_1(\lambda) = [a_1(\lambda)R + b_1(\lambda)] \cdot [c_1(\lambda)R + d_1(\lambda)]^{-1} \tag{8}$$

с вещественной $\Im$-внутренней матрицей коэффициентов

$$A_1(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1(\lambda) & b_1(\lambda) \\ c_1(\lambda) & d_1(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Покажем теперь, что если матрица-функция $h(\lambda)$ является J-симметрической, то $A_1(\lambda)$ удовлетворяет условию (6). Дробно-линейное преобразование матрицы-функции $h(\lambda)$ является суперпозицией преобразований (7) и (8), т. е. матрица коэффициентов этого дробно-линейного преобразования есть $A(\lambda) =$

$= A_0(\lambda)A_1(\lambda)$. Отсюда следует, что, если матрицы $A_0(\lambda)$ и $A_1(\lambda)$ вещественные, $\Im$-внутренние и удовлетворяют условию симплектичности (6), то те же свойства имеет и матрица $A(\lambda)$. Поскольку $h_0(\lambda) + h_0^*(\lambda) = 0$ при $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, то используя вещественность $h_0(\lambda)$ получаем, что $h_0(i\tau) + h_0'(-i\tau) \equiv 0$. Ввиду аналитичности справедливо тождество

$$h_0(\lambda) + h_0'(-\lambda) \equiv 0,$$

и, тем самым

$$f(\lambda) = \frac{h_1(\lambda) + h_1'(-\lambda)}{2}.$$

Из вещественности $h_1(\lambda)$ следует, что

$$f(i\tau) = \frac{h_1(i\tau) + h_1^*(i\tau)}{2}.$$

Таким образом, $f(i\tau)$ – рациональная по отношению $i\tau$, неотрицательная матрица-функция порядка $n = n_\alpha + n_\beta$, ее ранг равен $m = m_\alpha + m_\beta$, и $f(i\tau) = f(-i\tau)$. Матрица-функция $f(\lambda)$ обладает минором $M_m(\lambda)$ порядка m, тождественно не равным нулю. Не теряя общности можно предположить, что m_α строк и столбцов $M_m(\lambda)$ расположены в левом верхнем углу и что следующие m_β строк и столбцов расположены, начиная с $(n_\alpha + 1)$-го. В качестве рациональных вещественных решений полной размерности соответственно левой и правой факторизационных задач для $f(i\tau)$ (см. [4]) возьмем матрицы-функции

$$X(\lambda) = \left\{ x_{kj}(\lambda) \right\}_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}} \quad \text{и} \quad Y(\lambda) = \left\{ y_{kj}(\lambda) \right\}_{k=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}}.$$

Представим их в блочной форме

$$X(\lambda) = \left\{ X_{kj}(\lambda) \right\}_{k=\overline{1,4}}^{j=1,2} \quad \text{и} \quad Y(\lambda) = \left\{ Y_{kj}(\lambda) \right\}_{k=1,2}^{j=\overline{1,4}},$$

где $X_{11}(\lambda)$ и $Y_{11}(\lambda)$ (или $X_{32}(\lambda)$ и $Y_{23}(\lambda)$) – квадратные матрицы порядка m_α (или m_β).

Перейдем теперь от матрицы $h_1(\lambda)$ к матрице-функции $h_2(\lambda) = \Im_2 h_1(\lambda)\Im_2^*$. Соответственно, мы переходим от $f(\lambda)$ к $f_2(\lambda) = \Im_2 f(\lambda)\Im_2^*$ и от $A_1(\lambda)$ к $A_2(\lambda) = \Im_4 A_1(\lambda)\Im_4^*$. Тогда матрица

$$f_2(i\tau) = \frac{h_2(i\tau) + h_2^*(i\tau)}{2},$$

и ее главный минор, расположенный в верхнем левом углу имеет порядок m и не равняется тождественно нулю. В качестве рациональных вещественных решений полного ранга левой и правой факторизационных задач для $f_2(i\lambda)$ возьмем соответственно

$$X_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{X}_{11}(\lambda) \\ \widetilde{X}_{21}(\lambda) \end{pmatrix} = \Im_2 X(\lambda), \quad Y_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{Y}_{11}(\lambda) & \widetilde{Y}_{12}(\lambda) \end{pmatrix} = Y(\lambda)\Im_2^*,$$

где $\widetilde{X}_{11}(\lambda)$ и $\widetilde{Y}_{11}(\lambda)$ - квадратные матрицы порядка m, которые не имеют особенностей за исключением, быть может, конечного числа точек. На решение $X(\lambda)$ левой факторизационной задачи для $f(\lambda)$ мы налагаем условие

$$\widetilde{X}_{11}(-\lambda) \text{ голоморфно в полуплоскости } \operatorname{Re}\lambda > 0, \tag{9}$$

которое в любом случае может быть удовлетворено (см. [2]).

Рассмотрим следующие матрицы-функции порядка n :

$$q_{X_2}(\lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{X}_{11}(\lambda) & 0 \\ \widetilde{X}_{21}(\lambda) & I \end{pmatrix}^{-1}, \tag{10}$$

$$p_{X_2}(\lambda) = q_{X_2}(\lambda)h_2(\lambda), \tag{11}$$

$$q_{Y_2}(\lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{Y}_{11}(\lambda) & \widetilde{Y}_{12}(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1}, \tag{12}$$

$$p_{Y_2}(\lambda) = h_2(\lambda)q_{Y_2}(\lambda). \tag{13}$$

Согласно теореме 1, вещественная позитивная матрица-функция $h_2(\lambda)$ допускает дробно-линейное представление

$$h_2(\lambda) = [a_2(\lambda)R_2 + b_2(\lambda)] \cdot [c_2(\lambda)R_2 + d_2(\lambda)]^{-1},$$

где (см. [2])

$$a_2(\lambda)=\frac{p_{Y_2}(\lambda)+p'_{X_2}(-\lambda)}{2}+I-R_2,\qquad R_2=\{I_m,\ O_{n-m}\},$$

$$b_2(\lambda)=\frac{p_{Y_2}(\lambda)-p'_{X_2}(-\lambda)}{2},\ c_2(\lambda)=\frac{q_{Y_2}(\lambda)-q'_{X_2}(-\lambda)}{2},\ d_2(\lambda)=\frac{q_{Y_2}(\lambda)+q'_{X_2}(-\lambda)}{2}.$$

Из свойства J-симметричности матрицы-функции $h(\lambda)$ (следовательно и $h_1(\lambda)$) вытекает, что матрица-функция $h_2(\lambda)$ обладает свойством $\Im_3$-симметричности с $\Im_3=\Im_2 J\Im_2^*$:

$$h_2'(\lambda)=\Im_3 h_2(\lambda)\Im_3.$$

Отсюда следует, что

$$f_2'(i\tau)=\left(\frac{h_2(i\tau)+h_2'(-i\tau)}{2}\right)'=\Im_3 f_2(i\tau)\Im_3,$$

и в качестве правого решения факторизационной задачи для $f_2(i\tau)$ можно взять

$$Y_2(\lambda)=\left\{I_{m_\alpha},\ -I_{m_\beta}\right\}X_2'(\lambda)\Im_3.$$

При таком выборе $Y_2(\lambda)$ имеет место соотношение

$$q_{Y_2}(\lambda)=\Im_3 q'_{X_2}(\lambda)\Im_3,\quad p_{Y_2}(\lambda)=\Im_3 p'_{X_2}(\lambda)\Im_3,$$

откуда следует, что

$$A_2(-\lambda)=\{\Im_3,\ -\Im_3\}A_2(\lambda)\{\Im_3,-\Im_3\}.$$

Для матрицы-функции $A_1(\lambda)=\Im_4^* A_2(\lambda)\Im_4$ получаем

$$A_1(-\lambda)=\{\Im_2^*,\ \Im_2^*\}\{\Im_3,\ -\Im_3\}A_2(\lambda)\{\Im_3,\ -\Im_3\}\{\Im_2,\ \Im_2\},$$

или, учитывая, что $\Im_2^*\Im_3\Im_2=J$

$$A_1(-\lambda)=\begin{pmatrix}J&0\\0&-J\end{pmatrix}A_1(\lambda)\begin{pmatrix}J&0\\0&-J\end{pmatrix}=\Im J_2A_1(\lambda)J_2\Im. \tag{14}$$

Так как $A_1(\lambda)$ вещественна и $\Im$-унитарна, по аналитичности получаем

$$A_1'(-\lambda)\ \Im\ A_1(\lambda) = \Im.$$

Следовательно, согласно (14)

$$\Im J_2 A_1'(\lambda)\ J_2 \Im\ \Im\ A_1(\lambda) = \Im$$

или

$$A_1'(\lambda)\ J_2\ A_1(\lambda) = J_2,$$

т. е. соотношение (6) выполнено и для матрицы-функции $A_1(\lambda)$. Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Произвольная рациональная вещественная позитивная J-симметрическая матрица-функция*

$$h(\lambda) = \begin{pmatrix} h_{11}(\lambda) & h_{12}(\lambda) \\ -h_{12}'(\lambda) & h_{22}(\lambda) \end{pmatrix}$$

порядка $n = n_\alpha + n_\beta$ с матрицей $h_{11}(\lambda)$ размерности n_α представима в виде дробно-линейного преобразования

$$h(\lambda) = [a(\lambda)R + b(\lambda)] \cdot [c(\lambda)R + d(\lambda)]^{-1} \tag{15}$$

над постоянной матрицей $R = \{I_{m_\alpha}, O_{n_\alpha - m_\alpha}, I_{m_\beta}, O_{n_\beta - m_\beta}\}$, где

$$m = \operatorname{rank}\,[h(\lambda) + h'(-\lambda)], \quad m_\alpha = \operatorname{rank}\,[h_{11}(\lambda) + h_{11}'(-\lambda)], \quad m_\beta = m - m_\alpha,$$

а матрица коэффициентов $A(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix}$ порядка $2n$ является вещественной, $\Im$-внутренней и, кроме того, удовлетворяет условию симплектичности (6).

§3. РЕАЛИЗАЦИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОЗИТИВНЫХ J-СИММЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

В аналитической теории электрических цепей произвольная рациональная позитивная вещественная функция реализуется согласно теореме Дарлингтона

[1] как полное сопротивление двухполюсника, представляющего собой четырехполюсник без потерь, нагруженный со стороны выходных зажимов на одно активное сопротивление (резистор). Аналогичная реализация осуществима для позитивных вещественных симметрических матриц-функций. Такими матрицами-функциями как известно, являются как матрица полных сопротивлений (импедансов), так и матрица полных проводимостей (адмитансов) многополюсника. Естественным обобщением этих матриц является гибридная матрица $2n$-полюсника. Гибридная матрица $h(\lambda)$ обладает свойствами вещественности, позитивности и J-симметричности (см. [6]), причем числа n_α и n_β определяются характером пар зажимов $2n$-полюсника (внешних дуг линейной структуры).

Перейдем к вопросу реализации вещественных позитивных J-симметрических матриц-функций. Рассмотрим $4n$-полюсник $\mathcal{P}_W$ $(n = n_\alpha + n_\beta)$, нагруженный $2n$-полюсником $\mathcal{P}_H$, обладающим внешним гибридным оператором (гибридной матрицей) H. Допустим, что число входных α- (β-) дуг $4n$-полюсника $\mathcal{P}_W$ равно числу его входных α- (β-) дуг. В предположении существования для $4n$-полюсника $\mathcal{P}_W$ проходной передающей матрицы

$$W = \left\{ w_{kj} \right\}_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}} = \left\{ W_{kj} \right\}_{k=\overline{1,4}}^{j=\overline{1,4}},$$

имеет место матричное уравнение (см. [6, 7])

$$\begin{pmatrix} U_1^\alpha \\ U_1^\beta \\ I_1^\alpha \\ I_1^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} & W_{14} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} & W_{24} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} & W_{34} \\ W_{41} & W_{42} & W_{43} & W_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2^\alpha \\ U_2^\beta \\ I_2^\alpha \\ I_2^\beta \end{pmatrix}$$

Отсюда находим, что

$$\psi_1 = a\psi_2 + b\varphi_2, \qquad \varphi_1 = c\psi_2 + d\varphi_2,$$

где

$$a = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{14} \\ W_{41} & W_{44} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} W_{13} & W_{12} \\ W_{43} & W_{42} \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} W_{31} & W_{34} \\ W_{21} & W_{24} \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} W_{33} & W_{32} \\ W_{23} & W_{22} \end{pmatrix},$$

$$\varphi_k = (I_k^\alpha\ j\ U_k^\beta)', \quad \psi_k = (U_k^\alpha\ j\ I_k^\beta)', \quad k = 1,2.$$

Так как $\psi_2 = H\varphi_2$ [6], получаем,. что

$$\psi_1 = [aH + b] \cdot [cH + d]^{-1}\varphi_1. \tag{16}$$

Теперь легко заметить, что проходная W-матрица $4n$-полюсника $\mathcal{P}_W$ совпадает с матрицей

$$W = \Im_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Im_1.$$

Однако, соотношение (16) задает дробно-линейное преобразование для гибридной матрицы $h(\lambda)$ всего $2n$-полюсника :

$$h(\lambda) = [aH + b] \cdot [cH + d]^{-1} \tag{17}$$

над гибридной матрицей H $2n$-полюсника $\mathcal{P}_H$. Из свойств матрицы коэффициентов $A(\lambda)$ дробно-линейного преобразования (17) следует, что матрица-функция

$$w(\lambda) = \Im_1\ A(\lambda)\ \Im_1$$

удовлетворяет соотношениям

1) $w^*(\lambda)\ \Im\ w(\lambda) - \Im \geq 0, \quad \mathrm{Re}\ \lambda > 0,$

2) $w^*(\lambda)\ \Im\ w(\lambda) - \Im = 0, \quad \mathrm{Re}\ \lambda = 0,$

3) $\overline{w(\lambda)} = w(\overline{\lambda}),$

4) $w'(\lambda)\ j\ \Im\ w(\lambda) \equiv j\ \Im.$

Иными словами, $w(\lambda)$ является реактансной проходной матрицей. Такие матрицы-функции $2n$-го порядка известны в теории цепей как проходные (передаточные) матрицы-функции $4n$-полюсника (см., например, [5, 7, 8, 9]). В [5] было показано, что любая рациональная реактансная матрица-функция $w(\lambda)$ порядка $2n$ является A-матрицей некоторого линейного пассивного $4n$-полюсника без потерь.

Таким образом, дробно-линейное преобразование (15) задает способ реализации вещественных позитивных J-симметрических матриц-функций порядка n посредством построения $4n$-полюсника $\mathcal{P}_W$ с проходной матрицей $w(\lambda)$, загруженной со стороны выхода $2n$-полюсником $\mathcal{P}_H$ с гибридной матрицей H. Иначе говоря утверждение теоремы 3 означает, что произвольная рациональная вещественная позитивная J-симметрическая матрица-функция $h(\lambda)$ порядка $n = n_\alpha + n_\beta$ есть гибридная матрица $2n$-полюсника, представляющего собой $4n$-полюсник без потерь, n пар выходных зажимов которого замкнуты на активные сопротивления, некоторые из которых могут оказаться нулевыми.

ABSTRACT. The paper considers rational real positive J-symmetric matrix-functions of order n. We prove that any function $h(\lambda)$ of this class can be presented by means of linear-fractional transformation $h(\lambda) = [a_{11}(\lambda)R + a_{12}(\lambda)] \cdot [a_{21}(\lambda)R + a_{22}(\lambda)]^{-1}$, where R is a constant (diagonal) matrix, and the matrix $A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))$ of coefficients is rational, $\mathfrak{I}$-noncontracting in the right half-plane, $\mathfrak{I}$-unitary on the imaginary axes, real and symplectic.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Darlington, "Synthesis of reactance 4-poles", J. Math. and Phys., vol. 18, pp. 257 - 353, 1939.
2. Е. Я. Меламуд, "Об одном обобщении теоремы Дарлингтона", Известия АН Армении, Математика, т. 7, №. 3, стр. 183 - 195, 1972.
3. Д. З. Аров, "Реализация канонической системы с диссипативным граничным условием на одном конце сегмента по коэффициенту динамической податливости", Сиб. мат. журнал, т. 16, №. 3, стр. 440 - 463, 1975.
4. Ю. Л. Розанов, Стационарные случайные процессы, Физматгиз, Москва, 1963.
5. А. В. Ефимов, В. П. Потапов, "J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей", УМН, т. 28, №. 1, стр. 63 - 130, 1973.
6. В. Л. Даллакян, "Внешний гибридный оператор линейной структуры на графе", Труды ВЦ АН Арм. ССР и ЕГУ, т. 14, стр. 87 - 101, 1985.
7. Н. И. Хигрий, "О коэффициенте прохождения передающей линейной структуры", Теория функций, функ. анализ и их прилож., Харьков, т. 23, стр. 131 - 141, 1975.
8. А. Г. Руткас, "Свойства функции рассеяния и прохождения волн в структурах с заданной геометрией", ДАН СССР, т. 230, №. 1, стр. 38 - 40, 1976.
9. Т. А. Товмасян, "Об элементарных и примарных множителях J-несжимающих вещественных матриц-функций", Уч. зап. ЕГУ, №. 1, стр. 11 - 25, 1971.

4 июня 1993

Институт информатики и проблем автоматизации Национальной Академии Наук Армении

О ДВУХ КЛАССАХ ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ТЕОРИИ ОЧЕРЕДЕЙ

Э. А. Даниелян, Г. В. Микаелян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, №2, 1994

В статье рассмотрены двупараметрические семейства предельных распределений, возникающих в моделях очередей типов $M|G|1|\infty$ и $GI|M|1|\infty$ при условии единичной загрузки, заданных посредством своих преобразований Лапласа-Стильтьеса. Исследованы аналитические свойства этих семейств — интегральные представления по устойчивым законам, интегральные представления с ядрами типа Миттаг-Леффлера и представления рядами. Вычислены моменты распределений.

§1. ВВЕДЕНИЕ

1°. Пусть $\{G_\alpha:\ 1<\alpha\le 2\}$ и $\{R_\alpha:\ 1<\alpha\le 2\}$ – два семейства бесконечно дифференцируемых функций распределений (ФР) неотрицательных случайных величин (СВ) X_α и Y_α с преобразованиями Лапласа-Стильтьеса (ПЛС)

$$g_\alpha(s)=\int_0^\infty e^{-sx}d\,G_\alpha(x)=e^{s^\alpha}\left\{1-\frac{s}{\Gamma(1/\alpha)}\int_0^1 e^{-s^\alpha x}x^{(1/\alpha)-1}dx\right\}, \qquad (1.1)$$

$$r_\alpha(s)=\int_0^\infty e^{-sx}d\,R_\alpha(x)=s^\alpha\int_0^\infty e^{-s^\alpha x}\{1-(1+x)^{-1/\alpha}\}\,dx \qquad (1.2)$$

соответственно, где $s\ge 0$ и $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера (см. [1]). В частности

$$G_2(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{x/\sqrt{2}}e^{-u^2/2}du=2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-1$$

при любом $x\ge 0$, где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-u^2/2}du$ и $R_2(x)=1-e^{-x^2/4}$ - ФР Релея.

Функции G_α и R_α возникают в различных моделях типов $M|G|1|\infty$ и $GI|M|1|\infty$ во множестве задач (см., напр., [1] - [6]), как предельные распределения виртуального времени ожидания при единичной загрузке. Например, рассмотрим модель $M|G|1|\infty$ с параметром $a>0$ поступления времен обслуживаний

ФР $B(x)$ в предположении, что :

(А) загрузка модели равна $\rho = a\beta_1 = 1$, где β_1 – среднее время обслуживания;

(Б) при $s \downarrow 0$, $\beta(s) = \int_0^\infty e^{-sx} d\,B(x) = 1 - s\beta_1 + (cs)^\alpha (1 + o(1))$, где $1 < \alpha \leq 2$, а c - положительная постоянная.

Предположим, что с времени $t = 0$ система начинает обслуживание вызовов и нет очереди. Обозначим через π первый после $t = 0$ случайный момент времени, когда система становится незанятой, т. е. π есть период занятости, инициированный одним вызовом. Обозначим через w_n, $n \geq 1$ время ожидания n-го вызова при обслуживании в порядке поступления, через p – случайное число обслуживаний за π вызовов. При выполнении (А) и (Б) существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{w_n}{c \cdot n^{1/\alpha}} < x\right) = G_\alpha(x) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{w_n}{c \cdot n^{1/\gamma}} < x \,/\, p \geq n\right) = R_\alpha(x),$$

при этом, соотношения равномерны по x (см. [7]). Здесь P - вероятность, $\mathrm{P}(A\,/\,B)$ - условная вероятность события A при условии осуществления события B.

В специальном случае, когда времена между соседними поступлениями вызовов и обслуживания имеют конечные первые два момента, существование первого предела для модели $GI|GI|1|\infty$ впервые было доказано Ердешем и Кацом [8], а затем, иным методом, Прабху [9]. Существование этого предела влечет к отмеченному выше предельному ФР $2\Phi(x) - 1$. Существование в специальном случае $\alpha = 2$ второго предела для модели $M|G|1|\infty$, для виртуального времени ожидания, было доказано Киприяновым [10]. Оно влечет к предельному ФР $R_2(x)$. Для других моделей второй предел с $\alpha = 2$ был исследован, например, в [11] - [12].

2^o. Пусть X_n^+, $n \geq 1$ - время обслуживания n-го вызова, X_n^- интервал времени между n-ым и $(n+1)$-ым вызовами, и пусть $X = X_n^+ - X_n^-$.

Если F есть ФР X, то

$$\varphi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} d\,F(x) = \frac{a\,\beta(s)}{a-s}, \quad 0 \le s < a.$$

При выполнении условий (А) и (Б) будем иметь : $\mathrm{M}\,X_1 = 0$ и $\varphi(s) = 1+(cs)^\alpha(1+$ $+o(1))$, где М - математическое ожидание. Как показано в [13] (стр. 668)

$$x^\alpha(1-F(x)) \to \frac{c^\alpha}{\alpha}, \quad x^\alpha F(-x) \to 0, \quad x \to \infty. \tag{1.3}$$

Нам также понадобятся определенные ниже ФР для F_α.

Пусть $\{X_n\}_{n\ge1}$ - некоторая последовательность независимых, одинаково распределенных (НОР) СВ с ФР F, обладающим свойством (1.3), где $0 < \alpha < 2$ и $\mathrm{M}\,X_1 = 0$ при $1 < \alpha < 2$. Тогда, за исключением значения $\alpha = 1$, ФР СВ

$$\frac{S_n}{c\cdot n^{1/\alpha}}, \quad n \to \infty, \tag{1.4}$$

где $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ сходится к F_α (см. [14], стр. 185 - 193). Семейство $\{F_\alpha : 0 < \alpha \le 2,\ \alpha \ne 1\}$ обладает ПЛС

$$\varphi_\alpha(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} d\,F_\alpha(x) = \exp\{-\mathrm{sign}(1-\alpha)\cdot s^\alpha\}, \quad s \ge 0$$

и принадлежит классу устойчивых законов [15]. ФР F_α есть стандартный устойчивый закон с показателем α.

Функции G_α и R_α являются предельными законами в схемах суммирования для НОР СВ $\{X_n\}_{n\ge1}$ с $X_n = X_n^+ - X_n^-$. Действительно, из основного уравнения теории очередей $w_{n+1} = \max\{0, w_n + X_n\}$ следует, что :

(А) СВ w_{n+1} и $\max_{0\le k\le n} S_k$ одинаково распределены ;

(Б) $w_{n+1} = S_n$ на множестве $\{p \ge n\} = \{\inf(k : S_k \le 0) > n\}$.

Следовательно, G_α, $1 < \alpha \le 2$ является предельным законом для

$$\frac{\max_{0\le k\le n} S_k}{c\cdot n^{1/\alpha}}, \quad n \to \infty,$$

а R_α, при $\{\inf(k : S_k \leq 0) > n\}$ - предельный закон для условных сумм (1.4).

3°. Целью настоящей статьи является исследование аналитических свойств функций G_α и R_α.

В §2 найдены интегральные представления функций G_α и R_α посредством стандартных устойчивых законов – интегральные представления с ядрами (функциями) типа Миттаг-Леффлера (см. [16], гл. 3)

$$E_\rho(z,\mu) = \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + \frac{k}{\rho})}, \quad \rho > 0, \tag{1.5}$$

а также представления посредством рядов. В §3 проведено вычисление моментов G_α и R_α. В §4 даны представления этих моментов, где используются моменты функции Куммера

$$K(a,b,z) = 1 + \frac{a}{b}z + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \cdot \frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)} \cdot \frac{z^3}{3!} + \cdots \tag{1.6}$$

и функции типа Миттаг-Леффлера. В §5 исследуются аналитические продолжения рядов, представляющих F_α и G_α. Последний §6 содержит некоторые замечания. В частности, там получены моменты функций $E_{1/\alpha}(-x,\alpha)$ и $E_{1/\alpha}(-x,1)$, $x > 0$, $1 < \alpha < 2$.

§2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

1°. Связи семейств $\{G_\alpha\}$ и $\{R_\alpha\}$ со спецфункциями упрощают доказательства многих их свойств и интересны сами по себе. Связь R_α с $F_{\alpha/2}$ основана (см. [6]) на представлении

$$r_\alpha(s) = \frac{1}{\Gamma(1/\alpha)} \int_0^\infty \frac{x^{1/\alpha} \cdot e^{-x}}{x + s^\alpha} dx, \quad s \geq 0, \quad 1 < \alpha \leq 2, \tag{2.1}$$

которое мы уточняем. Именно, при $\alpha \neq 2$

$$R_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty n_{1+(2/\alpha)}(t) \cdot F_{\alpha/2}(x \cdot t^{-2/\alpha}) dt, \tag{2.2}$$

где

$$n_\beta(t) = \frac{2}{\Gamma(\frac{\beta+1}{2})} \int_0^\infty x^\beta \cdot e^{-x^2} \cos tx \, dx, \quad t > 0, \quad \mathrm{Re}\beta > -1. \tag{2.3}$$

Аналог для G_α получаем с помощью представления [18] :

$$g_\alpha(s) = \frac{s}{\pi} \sin \frac{\pi}{\alpha} \int_0^\infty \frac{x^{-1/\alpha} \cdot e^{-x}}{x + s^\alpha} dx, \quad s \geq 0, \quad 1 < \alpha < 2. \tag{2.4}$$

Интегралы (2.3) и

$$m_\beta(t) = \frac{2}{\Gamma(\frac{\beta+1}{2})} \int_0^\infty x^{\beta-1} \cdot e^{-x^2} \sin tx \, dx, \quad t > 0, \quad \mathrm{Re}\beta > -1 \tag{2.5}$$

сводятся к функции Куммера (см. [17], стр. 451)

$$m_\beta(t) = t \cdot K\left(\frac{\beta+1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{t^2}{4}\right), \quad n_\beta(t) = K\left(\frac{\beta+1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{t^2}{4}\right). \tag{2.6}$$

ФР $F_{\alpha/2}$ абсолютно непрерывна (более того, она бесконечно дифференцируема [15]). Ее плотность в дальнейшем будем обозначать через $f_{\alpha/2}$.

Теорема 1. *Для всех* α, $1 < \alpha < 2$ *и* $x \geq 0$ *имеет место равенство*

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(1/\alpha)} \int_0^\infty t^{-2/\alpha} f_{\alpha/2}(x \cdot t^{-2/\alpha}) m_{1-(2/\alpha)}(t) \, dt. \tag{2.7}$$

Теорема 2. *Для всех* α, $1 < \alpha \leq 2$ *и* $x \geq 0$ *имеют место равенства*

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{\alpha} \int_0^\infty e^{-tx^{-\alpha}} \cdot t^{-1/\alpha} \cdot E_{1/\alpha}(-t, \alpha) \, dt, \tag{2.8}$$

$$R_\alpha(x) = 1 - \frac{1}{x \cdot \Gamma(1/\alpha)} \int_0^\infty e^{-tx^{-\alpha}} \cdot t^{(1/\alpha)-1} \cdot E_{1/\alpha}(-t, 1) \, dt. \tag{2.9}$$

2°. Доказательство теоремы 1. Замена переменной $x = y^2$ в интеграле

$$I(\beta) = \int_0^\infty \frac{x^\beta \cdot e^{-x}}{x + s^2} dx, \quad s > 0$$

дает

$$\begin{aligned} I(\beta) &= i \int_0^\infty y^{2\beta} \cdot e^{-y^2} \left(\frac{1}{s+iy} - \frac{1}{s-iy}\right) dy = \\ &= i \int_0^\infty y^{2\beta} \cdot e^{-y^2} \int_0^\infty \left(e^{-(s+iy)x} - e^{-(s-iy)x}\right) dx \, dy = \\ &= 2 \int_0^\infty dy \int_0^\infty y^{2\beta} \cdot e^{-y^2 - sx} \sin xy \, dx, \ i = \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

В силу сходимости интеграла при $\beta > -1$ и (2.3) получаем

$$\frac{1}{\Gamma(1+\beta)} I(\beta) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot m_{1+2\beta}(t)dt.$$

Пусть α, $0 < \alpha < 2$, любое число. Рассмотрим процесс $\{\xi(t) : t \geq 0\}$ с независимыми приращениями и с ПЛС $\mathrm{M}e^{-s\xi(t)} = \exp(-ts^{\alpha/2})$, $s \geq 0$, $t \geq 0$. Ясно, что $\mathrm{P}(\xi(t) < x) = \mathrm{P}(\xi(1) \cdot t^{2/\alpha} < x) = F_{\alpha/2}(x \cdot t^{-2/\alpha})$ при любых $x \geq 0$ и $t > 0$. Тем самым

$$\frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \int_0^\infty \frac{x^\beta \cdot e^{-x}}{x+s^\alpha} dx = \int_0^\infty e^{-s^{\alpha/2}t} \cdot m_{1+2\beta}(t)dt =$$
$$= \int_0^\infty m_{1+2\beta}(t)dt \int_0^\infty e^{-sx} d_x \mathrm{P}(\xi(t) < x) =$$
$$= \int_0^\infty e^{-sx} d_x \left(\int_0^\infty F_{\alpha/2}(x \cdot t^{-2/\alpha}) m_{1+2\beta}(t)dt \right).$$

В силу (2.4), (2.1) и тождеств

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad z \cdot \Gamma(z) = \Gamma(z+1) \tag{2.10}$$

приходим к (2.7) и (2.2), беря соответственно $\beta = -1/\alpha$ и $\beta = 1/\alpha$.

3°. В [18] доказаны разложения

$$g_\alpha(s) = e^{s^\alpha} - \sum_{k \geq 0} \frac{s^{k\alpha+1}}{\Gamma(k+1+(1/\alpha))}, \quad s > 0, \tag{2.11}$$

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{\alpha} \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(k-(1/\alpha))}{\Gamma(k\alpha)} x^{k\alpha-1}, \quad x \geq 0. \tag{2.12}$$

Оказывается, что (2.11) непосредственно следует из

$$g_\alpha(s) = e^{s^\alpha} - \frac{1}{\Gamma(1/\alpha)} \sum_{k \geq 0} \frac{s^{k\alpha+1}}{k!} \int_0^1 x^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot (1-x)^k dx.$$

(ср. с более длинным доказательством в [18]). Аналоги (2.11) и (2.12) для $r_\alpha(s)$ и $R_\alpha(x)$ находим с помощью интегрального представления

$$r_\alpha(s) = 1 - se^{s^\alpha} \left(\Gamma(1-\frac{1}{\alpha}) - s^{\alpha-1} \int_0^1 e^{-s^\alpha x} x^{-1/\alpha} dx \right), \quad s \geq 0, \tag{2.13}$$

которое следует из (1.2). Виду (2.13)

$$r_\alpha(s) = 1 - \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(se^{s^\alpha} + \sum_{k\geq 1} \frac{s^{k\alpha}}{\Gamma(k+1-(1/\alpha))}\right), \quad s \geq 0. \tag{2.14}$$

Для доказательства того, что при любых α, $1 < \alpha \leq 2$, и $x \geq 0$

$$R_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(1/\alpha)} \sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(k+(1/\alpha))}{\Gamma(k\alpha+1)} x^{k\alpha}, \tag{2.15}$$

подставим $y = s^\alpha(1+x)$ в (1.2). Тогда для $r_\alpha(s)$ получим

$$s^{-1}\{r_\alpha(s) - 1\} = -\int_{s^\alpha}^{\infty} e^{-x} \cdot x^{-1/\alpha} dx.$$

Дифференцирование последнего равенства по s законно, поскольку для $\hat{r}_\alpha(s) = s^{-1} r_\alpha(s)$ имеем

$$\frac{d}{ds}\{s^{1-\alpha} \cdot \hat{r}_\alpha(s)\} - (\alpha + (1-\alpha)s^{-\alpha})\hat{r}_\alpha(s) = -s^{-1-\alpha}. \tag{2.16}$$

Этому уравнению соответствует уравнение Вольтерра

$$\Gamma(\alpha+1) \cdot R_\alpha(x) + \int_0^x \frac{(\alpha-1)u}{(x-u)^{2-\alpha}} R_\alpha(u) du = \frac{x^\alpha}{\alpha}. \tag{2.17}$$

Доказательство существования и единственности решения стандартно (см. [18]). Для решения (2.17) используем следующие рассуждения. Полагаем, что $\hat{r}_\alpha(s) = \sum_{k\geq 1} a_k \cdot s^{-k\alpha+\alpha-1}$, где $a_1, a_2, \ldots$ – постоянные. Подстановка в (2.16) приводит к рекуррентным формулам $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{\alpha}$, ... $a_{k+1} = \{1-k-(1/\alpha)\}a_k$, $k \geq 2$, откуда следует, что $a_n = (-1)^n \frac{\Gamma(n-1+(1/\alpha))}{\Gamma(1/\alpha)}$, $n \geq 1$. Следовательно, $\hat{r}_\alpha(s)$ соответствует расходящийся ряд

$$\frac{1}{\Gamma(1/\alpha)} \sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1} \cdot \Gamma\left(k + \frac{1}{\alpha}\right) s^{-k\alpha-1}. \tag{2.18}$$

Формальным почленным обращением (2.18) переходит в ряд правой части (2.15), который при $\alpha > 1$ сходится для всех $x \geq 0$. Как легко проверить, сумма этого ряда удовлетворяет (2.16), тем самым, (2.15) доказано.

4°. Доказательство теоремы 2. Интегральная форма $\Gamma(k-(1/\alpha))$ преобразует (2.12) к виду

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}\int_0^\infty t^{-1-(1/\alpha)}e^{-t}\left\{\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{(t\cdot x^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha)}\right\}dt.$$

Поскольку

$$t\,x^\alpha\cdot E_{1/\alpha}(-t\,x^\alpha,\alpha) = \sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{(t\cdot x^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha)},$$

получаем

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}x^{\alpha-1}\int_0^\infty t^{-1/\alpha}e^{-t}\cdot E_{1/\alpha}(-t\,x^\alpha,\alpha)dt.$$

Замена переменной $t\,x^\alpha = y$ сводит это равенство к (2.8), и из (2.15) получаем

$$\{1-R_\alpha(x)\}\cdot\Gamma(1/\alpha) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}\int_0^\infty t^{k-1+(1/\alpha)}e^{-t}dt =$$

$$= \int_0^\infty t^{(1/\alpha)-1}e^{-t}\left\{\sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{(t\cdot x^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha+1)}\right\}dt = \int_0^\infty t^{(1/\alpha)-1}e^{-t}\cdot E_{1/\alpha}(-t\,x^\alpha,1)dt.$$

§3. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ

1°. ФР F_α, $0<\alpha<1$, стандартной устойчивой СВ S_α с показателем α сосредоточена на $[0,+\infty)$ и (см. [13], стр. 504 – 505)

$$x^\alpha\{1-F_\alpha(x)\}\to\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)},\quad x\to\infty\quad\text{и}\quad e^{x^\alpha}\cdot F_\alpha(x)\to 0,\quad x\to 0.$$

Поэтому для степенного момента $\varphi(\alpha,\varepsilon)$ порядка ε от F_α имеем

$$\varphi(\alpha,\varepsilon)\begin{cases}<\infty, & \text{при } -\infty<\varepsilon<\alpha\\ =\infty, & \text{при } \varepsilon\geq\alpha,\end{cases}\tag{3.1}$$

а функция $\varphi(\alpha,z) = \mathrm{M}\,S_\alpha^z$ комплексного переменного z аналитична в полуплоскости $-\infty<\mathrm{Re}\,z<\alpha$.

Задача 1. *При каких вещественных* ε

$$g(\alpha,\varepsilon) = \int_0^\infty x^\varepsilon dG_\alpha(x) < +\infty\quad\text{и}\quad r(\alpha,\varepsilon) = \int_0^\infty x^\varepsilon dR_\alpha(x) < +\infty\quad ?$$

2°. *Ответ для* G_α : функция $g(\alpha, z) = \mathbf{M}X_\alpha^z$ комплексного переменного z аналитична в области $1 - \alpha < \mathrm{Re}\, z < \alpha$ и

$$g(\alpha, \varepsilon) \begin{cases} < \infty, & \text{при } 1 - \alpha < \varepsilon < \alpha \\ = \infty, & \text{при } |\varepsilon - \frac{1}{2}| \geq \alpha - \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Ответ следует из формул

$$x^\alpha\{1 - G_\alpha(x)\} \to \frac{\alpha - 1}{\Gamma(2 - \alpha)}, \quad x \to \infty, \tag{3.3}$$

$$x^{1-\alpha} \cdot G_\alpha(x) \to \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(1/\alpha)}, \quad x \to 0. \tag{3.4}$$

Формулу (3.3) получаем как следствие асимптотической формулы

$$G_\alpha(x) \approx 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sin(k\alpha\pi) \cdot \Gamma(k\alpha) x^{-k\alpha} + \frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 1} \frac{\sin(k\alpha\pi)\Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1 + (1/\alpha))} x^{-k\alpha - 1}$$

при $x \to \infty$ (см. [18]), преобразуя первый член с помощью (2.10). Согласно (2.4) и (2.10)

$$\lim_{s \to \infty} s^{\alpha - 1} g_\alpha(s) = \frac{1}{\pi} \sin\frac{\pi}{\alpha} \lim_{s \to \infty} \int_0^\infty \frac{x^{-1/\alpha} \cdot e^{-x}}{(x/s)^\alpha + 1} dx = \frac{1}{\Gamma(1/\alpha)}.$$

Воспользовавшись теоремами 2 и 3, §5, гл. 8, [13], приходим к (3.4).

Решение для R_α : функция $r(\alpha, z) = \mathbf{M}Y_\alpha^z$ комплексного переменного z аналитична в области $-\alpha < \mathrm{Re}\, z < \alpha$ и

$$r(\alpha, \varepsilon) \begin{cases} < \infty, & \text{при } -\alpha < \varepsilon < \alpha \\ = \infty, & \text{при } |\varepsilon| \geq \alpha. \end{cases} \tag{3.5}$$

Ответ следует из формул

$$x^\alpha\{1 - R_\alpha(x)\} \to \frac{\alpha}{\Gamma(2 - \alpha)}, \quad x \to \infty, \tag{3.6}$$

$$x^{-\alpha} \cdot R_\alpha(x) \to \frac{1}{\alpha \cdot \Gamma(1 + \alpha)}, \quad x \to 0. \tag{3.7}$$

Формулу (3.6) получаем как следствие асимптотической формулы

$$R_\alpha(x) \approx 1 + \frac{1}{\pi}\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \sum_{k \geq 1} \sin(k\alpha\pi) \cdot \Gamma(k\alpha + 1) x^{-k\alpha - 1} + $$
$$+ \frac{1}{\pi}\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \sum_{k \geq 1} \frac{\sin(k\alpha\pi)\Gamma(k\alpha)}{\Gamma(k + 1 + (1/\alpha))} x^{-k\alpha}, \quad x \to \infty. \tag{3.8}$$

Докажем (3.8). Поскольку при любых $x \geq 0$, $s \geq 0$ и $n \geq 1$

$$\frac{1}{x+s^{\alpha}} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{k-1}s^{-k\alpha} + \frac{1}{x+s^{\alpha}}(-1)^{n}x^{n}s^{-n\alpha},$$

то из (2.1) следует, что

$$r_{\alpha}(s) = \frac{1}{\Gamma(1/\alpha)}\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\Gamma\left(k+\frac{1}{\alpha}\right)s^{-k\alpha-1}, \quad s\to\infty.$$

Обозначим через $r_{\alpha}^{(m)}(s)$ m-ую производное $r_{\alpha}(s)$. При $\mathrm{Im}s \to \infty$ в полосе $0 \leq \leq \mathrm{Re}s \leq a$, $a > 0$ равномерно выполнено соотношение $r_{\alpha}^{(m)}(s) = O(s^{-\alpha-m-1})$. Теперь, повторяя рассуждения Л. Берга [18] легко прийти к необходимому утверждению. Согласно (2.1), $s^{\alpha}\cdot r_{\alpha}(s) \to \alpha^{-1}$ при $s\to\infty$. Поэтому из теорем 2 и 3 из §5, гл. 8, [13] следует (3.7).

3°. Функция $\Gamma(1-(z/\alpha))/\Gamma(1-z)$, $0<\alpha<2$, аналитична в полуплоскости $-\infty < \mathrm{Re}z < \alpha$ и, по теореме 2.6.3 из [15], она совпадает с $\varphi(\alpha,z)$ в полосе $-1 < \mathrm{Re}z < \alpha$. Тем самым, по теореме единственности

$$\varphi(\alpha,z) = \frac{\Gamma(1-(z/\alpha))}{\Gamma(1-z)}, \quad 0<\alpha<2, \quad -\infty < \mathrm{Re}z < \alpha. \tag{3.9}$$

Отметим, что $\varphi(\alpha,1) = 1$.

Задача 2. *Вычислить $g(\alpha,\varepsilon)$ при $1-\alpha<\varepsilon<\alpha$ и $r(\alpha,\varepsilon)$ при $-\alpha<\varepsilon<\alpha$, где* $1<\alpha<2$.

В нижеприведенных примерах раздельно рассмотрены случаи $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 1$.

Пример 1. G_{α} и R_{α} являются ФР, тем самым, $g(\alpha,0) = r(\alpha,0) = 1$. Для проверки этого факта подставим в (2.4)

$$\Delta \equiv \int_0^{\infty}\frac{y^{\beta}dy}{y+1} = \begin{cases} -\frac{\pi}{\sin\pi\beta}, & \text{при } -1<\beta<0 \\ \infty, & \text{при } |\beta+\frac{1}{2}|\geq\frac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.10}$$

Тогда получим

$$g_{\alpha}(s) = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}\lim_{s\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{y^{-1/\alpha}}{y+1}e^{-s^{\alpha}y}dy, \quad g_{\alpha}(0) = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}\Delta_{-1/\alpha} = 1. \tag{3.11}$$

Интегрированием по частям в (1.2) получаем

$$r_\alpha(s) = \int_0^\infty e^{-s^\alpha x} d_x\{1 - (1+x)^{-1/\alpha}\}. \tag{3.12}$$

Пример 2.

$$g(\alpha, 1) = \frac{1}{\Gamma(1 + (1/\alpha))}, \quad r(\alpha, 1) = \Gamma(1 - (1/\alpha)). \tag{3.13}$$

Из формулы (1.1) следует, что

$$g(\alpha, 1) = -g'_\alpha(0) = \lim_{s \to 0} \frac{1 - g_\alpha(s)}{s} =$$
$$= \lim_{s \to 0} \left\{ s^{-1}(1 - \exp s^\alpha) + \frac{1}{\Gamma(1/\alpha)} \int_0^1 e^{-s^\alpha (1-x)} x^{(1/\alpha)-1} dx \right\} = \frac{1}{\Gamma(1 + (1/\alpha))}.$$

Второе равенство следует из (2.13).

4°. *Решение для* G_α содержится в следующей теореме.

Теорема 3. *Если* $1 < \alpha < 2$ *и* $1 - \alpha < Re z < \alpha$, то

$$g(\alpha, z) = \frac{(1 - z)\sin(\pi/\alpha)}{\sin \frac{(1-z)\pi}{\alpha}} \cdot \frac{\Gamma(1 - (z/\alpha))}{\Gamma(2 - z)}.$$

Доказательство. Пусть $\{\xi(t) : t \geq 0\}$ – процесс с независимыми приращениями и ПЛС

$$\mathrm{M} e^{-s\xi(t)} = \exp(-t s^{1/\alpha}), \quad s \geq 0, \quad t \geq 0. \tag{3.14}$$

Тогда пары $\xi(1)$, $S_{1/\alpha}$ и $\xi(t)$, $\xi(1) \cdot t^\alpha$ одинаково распределены. Согласно (3.14)

$$\mathrm{M} e^{-s\xi(X_\alpha)} = \int_0^\infty e^{-s^{1/\alpha} t} d\mathrm{P}(X_\alpha < t) = g_\alpha(s^{1/\alpha}), \quad s \geq 0. \tag{3.15}$$

Из (3.11), воспользовавшись (3.10), находим

$$\mathrm{P}\,[\xi(X_\alpha) < x] = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{\alpha} \int_0^\infty \frac{y^{-1/\alpha}}{y+1} dy, \quad x > 0,$$

$$\mathrm{M}\,[\xi(X_\alpha)]^{\varepsilon/\alpha} = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{\alpha} \Delta_{(\varepsilon-1)/\alpha} = \frac{\sin(\pi/\alpha)}{\sin \frac{(1-\varepsilon)\pi}{\alpha}}, \quad 1 - \alpha < \varepsilon < 1. \tag{3.16}$$

По формуле условного математического ожидания

$$\mathrm{M}\,[\xi(X_\alpha)]^{\varepsilon/\alpha} = \varphi\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{\varepsilon}{\alpha}\right) \cdot g(\alpha, \varepsilon), \quad 1 - \alpha < \varepsilon < 1.$$

При $1-\alpha<\varepsilon<1$ с помощью (3.9) и (3.16) вычисляем $g(\alpha,\varepsilon)$. Функция в правой части равенства теоремы 3 аналитична в полосе $1-\alpha<\mathrm{Re}z<\alpha$ и совпадает с аналитической в той же полосе функцией $g(\alpha,z)$ при действительных ε, $1-\alpha<\varepsilon<1$. Тем самым, ввиду теоремы единственности аналитических функций, теорема 3 доказана.

Ответ для R_α содержится в следующей теореме.

Теорема 4. *Если* $1<\alpha<2$ *и* $-\alpha<Rez<\alpha$, *то*

$$r(\alpha,z)=\frac{\pi z}{\sin(\pi z/\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(1+\frac{1-z}{\alpha})}{\Gamma(1/\alpha)\Gamma(2-z)}.$$

Доказательство. Как и в (3.15), имеем

$$\mathrm{M}e^{-s\xi(Y_\alpha)}=r_\alpha(s^{1/\alpha}),\quad s\geq 0.$$

В силу (3.12)

$$\mathrm{P}\left[\xi(Y_\alpha)<x\right]=1-(1+x)^{-1/\alpha},\quad x\geq 0,\quad \mathrm{M}\left[\xi(Y_\alpha)\right]^{\varepsilon/\alpha}=\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty\frac{x^{\varepsilon/\alpha}dx}{(x+1)^{(1/\alpha)+1}}.$$

Заменой переменной $1+x=y^{-1}$ интеграл сводится к бета-функции, тем самым

$$\mathrm{M}\left[\xi(Y_\alpha)\right]^{\varepsilon/\alpha}=\frac{\Gamma(\frac{1-\varepsilon}{\alpha})\Gamma(1+\frac{\varepsilon}{\alpha})}{\Gamma(1/\alpha)},\quad -\alpha<\varepsilon<1. \tag{3.17}$$

При этом, если $-\alpha<\varepsilon<1$, то как и выше

$$\mathrm{M}\left[\xi(Y_\alpha)\right]^{\varepsilon/\alpha}=\varphi\left(\frac{1}{\alpha},\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\cdot r(\alpha,\varepsilon).$$

Подставив сюда (3.9) и (3.17), после преобразований с помощью (2.10) получаем

$$r(\alpha,\varepsilon)=\frac{\pi\varepsilon}{\sin(\pi\varepsilon/\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(1+\frac{1-\varepsilon}{\alpha})}{\Gamma(1/\alpha)\Gamma(2-\varepsilon)},\quad -\alpha<\varepsilon<1.$$

Функция в правой части этого равенства при $\varepsilon=z$ аналитична в полосе $-\alpha<\mathrm{Re}z<1$ и совпадает с аналитической там же функцией $r(\alpha,z)$.

§4. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МОМЕНТОВ

1°. Теоремы 3 и 4 связывают моменты G_α, R_α и F_α, $1 < \alpha < 2$. Действительно, по (3.9) имеем :

(А) при $1 < \alpha < 2$

$$g(\alpha, z) = \frac{\sin(\pi/\alpha)}{\sin\frac{(1-z)\pi}{\alpha}} \cdot \varphi(\alpha, z), \quad 1 - \alpha < \mathrm{Re}z < \alpha;$$

(Б) при $1 < \alpha < 2$

$$r(\alpha, z) = \frac{\Gamma(\frac{1-z}{\alpha})\Gamma(1+\frac{z}{\alpha})}{\Gamma(1/\alpha)} \cdot \varphi(\alpha, z), \quad -\alpha < \mathrm{Re}z < \alpha.$$

Ввиду теорем 1 и 2 должны иметь место соотношения, связывающие моменты R_α и G_α с моментами функций Куммера и функций типа Миттаг-Леффлера. А именно, справедлива

Теорема 5. *При* $1 < \alpha < 2$

$$(A) \qquad g(\alpha, z) = -\frac{z}{\Gamma(1/\alpha)}\varphi\left(\frac{\alpha}{2}, z-1\right)\int_0^\infty t^{(2z-2)/\alpha} m_{1-(2/\alpha)}(t)\,dt, \quad 1-\alpha < Rez < \alpha$$

$$(Б) \qquad r(\alpha, z) = \frac{1}{\alpha}\varphi\left(\frac{\alpha}{2}, z\right)\int_0^\infty t^{2z/\alpha} m_{1+(2/\alpha)}(t)\,dt, \quad -\alpha/2 < Rez < \alpha/2.$$

Из (3.9) и (2.10) следует, что :

(А) в полосе $1 - \alpha < \mathrm{Re}z < 0$

$$g(\alpha, z) = \frac{z(z-1)}{\Gamma(1+(1/\alpha))}\frac{\Gamma(2\frac{z-1}{\alpha})}{\Gamma(2-z)}\int_0^\infty t^{(2z-2)/\alpha} m_{1-(2/\alpha)}(t)\,dt; \tag{4.1}$$

(Б) в полосе $-\alpha/2 < \mathrm{Re}z < \alpha/2$

$$r(\alpha, z) = \frac{\Gamma(1-(2z/\alpha))}{\alpha\cdot\Gamma(1-z)}\int_0^\infty t^{2z/\alpha} m_{1+(2/\alpha)}(t)\,dt.$$

Теорема 6. *При* $1 < \alpha < 2$

$$(A) \qquad g(\alpha, z) = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}\Gamma\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)\int_0^\infty x^{(z-1)/\alpha}\cdot E_{1/\alpha}(-x, \alpha)dx, \quad 0 < Rez < \alpha;$$

$$(Б) \qquad r(\alpha, z) = \frac{z\Gamma(\frac{1-z}{\alpha})}{\Gamma(1+(1/\alpha))}\int_0^\infty x^{(z/\alpha)-1}\cdot E_{1/\alpha}(-x, 1)dx, \quad 0 < Rez < \alpha,$$

за исключением точки $z = 1$. При $z = 1$ имеем

$$r(\alpha, 1) = -\frac{1}{\Gamma(1/\alpha)} \int_0^\infty x^{(1/\alpha)-1} \ln x \cdot E_{1/\alpha}(-x, 1)dx.$$

Отметим, что из (3.13) и (3.10) вытекает формула

$$\int_0^\infty x^{(1/\alpha)-1} \ln x \cdot E_{1/\alpha}(-x, 1)dx = -\frac{\pi}{\sin(\pi/\alpha)}.$$

Доказательство теоремы 5. Из (2.6) и (1.6) следует асимптотическая формула $m_\beta(t) \sim t, \quad t \to 0$, а после подстановки в (2.5) $xt = y$ получаем $m_\beta(t) \sim$ $\sim t^{-\beta} e_\beta, \quad t \to \infty$, где

$$e_\beta = \frac{2}{\Gamma(\frac{\beta+1}{2})} \int_0^\infty \frac{\sin x\, dx}{x^{1-\beta}} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{1-\beta}} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{\beta+1}{2})\Gamma(\frac{2}{1-\beta})}, \quad -1 < \beta < 0.$$

Из асимптотических формул для $m_\beta(t)$ заключаем, что интеграл $\int_0^\infty t^{\delta-1} m_\beta(t)dt$ сходится при $-1 < \delta < \beta$. Исходя из вышеизложенного, из (3.1) заключаем, что интеграл

$$\frac{1}{\Gamma(1/\alpha)} \int_0^\infty t^{-2/\alpha} \cdot c_\varepsilon(t) m_{1-(2/\alpha)}(t)\, dt, \tag{4.2}$$

где

$$c_\varepsilon(t) = \int_0^\infty x^\varepsilon \frac{d}{dx} f_{\alpha/2}(x \cdot t^{-2/\alpha})dx = -\varepsilon \cdot t^{2\varepsilon/\alpha} \cdot \varphi\left(\frac{\alpha}{2}, \varepsilon - 1\right),$$

сходится при $1 - \alpha < \varepsilon < 0$. Умножив обе части (2.7) на x^ε и проинтегрировав от 0 до $+\infty$, получаем

$$g(\alpha, \varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(1/\alpha)} \int_0^\infty x^\varepsilon dx \int_0^\infty t^{-2/\alpha} \frac{d}{dx} f_{\alpha/2}(x \cdot t^{-2/\alpha}) m_{1-(2/\alpha)}(t)\, dt.$$

При $1 - \alpha < \varepsilon < 0$ изменение порядка интегрирования в последнем интеграле законно, так как полученный после этого интеграл (4.2) сходится. Утверждение (A) доказано при $1 - \alpha < \varepsilon < 0$. Функции

$$\frac{-z}{\Gamma(1/\alpha)}, \quad \varphi\left(\frac{\alpha}{2}, z - 1\right), \quad \int_0^\infty t^{(2z-2)/\alpha} m_{1-(2/\alpha)}(t)\, dt$$

аналитичны в полосе $1-\alpha < \mathrm{Re}\, z < 0$ и их произведение совпадает при вещественных ε, $1-\alpha<\varepsilon<0$, с аналитической в той же полосе функцией $g(\alpha, z)$. В силу единственности аналитической функции приходим к утверждению (А).

Имеют место формулы

$$n_\beta(t) \sim 1, \quad t \to 0, \quad \text{и} \quad n_\beta(t) \sim \frac{2}{\Gamma(\frac{\beta+1}{2})} t^{-\beta-1} \cdot e_\beta \int_0^\infty x^\beta \cos x\, dx, \quad t \to \infty.$$

Тем самым, интеграл $\int_0^\infty t^\delta n_\beta(t) dt$ сходится при $-1<\delta<\beta$.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty t^{-2/\alpha} \cdot s_\varepsilon(t) n_{1+(2/\alpha)} dt, \tag{4.3}$$

где

$$s_\varepsilon(t) = \int_0^\infty x^\varepsilon f_{\alpha/2}(x \cdot t^{-2/\alpha}) dx = t^{(2\varepsilon+2)/\alpha} \cdot \varphi\left(\frac{\alpha}{2}, \varepsilon\right).$$

Ввиду вышеизложенного, из (3.1) приходим к заключению, что интеграл (4.3) сходится при $-\alpha/2 < \varepsilon < \alpha/2$. Умножив обе части (2.2) на x^ε и проинтегрировав от 0 до $+\infty$, получаем

$$r(\alpha, \varepsilon) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty x^\varepsilon dx \int_0^\infty t^{-2/\alpha} f_{\alpha/2}(x \cdot t^{-2/\alpha}) n_{1+(2/\alpha)}(t)\, dt.$$

Изменение порядка интегрирования в последнем интеграле при $-\alpha/2 < \varepsilon < \alpha/2$ законно. Тем самым, мы приходим к утверждению (Б) для $-\alpha/2 < \varepsilon < \alpha/2$.

Функции

$$\frac{1}{\alpha}\varphi\left(\frac{\alpha}{2}, z\right), \quad \int_0^\infty t^{2z/\alpha} n_{1+(2/\alpha)}(t)\, dt$$

аналитичны в полосе $-\alpha/2 < \mathrm{Re}\, z < \alpha/2$ и их произведение при вещественных ε, $-\alpha/2<\varepsilon<\alpha/2$, совпадает с функцией $r(\alpha, z)$, аналитической там же.

3°. Доказательство теоремы 6. Поскольку

$$1 - G_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}\int_0^\infty \left(1 - e^{-y/x^\alpha}\right) \cdot y^{-1/\alpha} E_{1/\alpha}(-y, \alpha) dy,$$

то

$$g(\alpha,\varepsilon) = \varepsilon\int_0^\infty x^{\varepsilon-1}(1-G_\alpha(x))dx =$$
$$= \frac{\varepsilon}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}\int_0^\infty y^{-1/\alpha}E_{1/\alpha}(-y,\alpha)dy\int_0^\infty x^{\varepsilon-1}\left(1-e^{-y/x^\alpha}\right)dx.$$

Внутренний интеграл равен $\alpha^{-1}\cdot y^{\varepsilon/\alpha}\Gamma(-\varepsilon/\alpha)$ (см. [17], стр. 347). В силу единственности аналитической функции приходим к утверждению (А) для $0<\varepsilon<\alpha$.

Если $0<\varepsilon<1$, то

$$r(\alpha,\varepsilon) = \varepsilon\int_0^\infty x^{\varepsilon-1}(1-R_\alpha(x))dx =$$
$$= \frac{\varepsilon}{\Gamma(1/\alpha)}\int_0^\infty y^{(1/\alpha)-1}E_{1/\alpha}(-y,1)dy\int_0^\infty x^{\varepsilon-2}\cdot e^{-y/x^\alpha}dx.$$

Заменой переменной $u=y/x^\alpha$ во внутреннем интеграле приходим к утверждению (Б) для $0<\varepsilon<1$.

Пусть $1<\varepsilon<\alpha$. Запишем равенство утверждения (Б) в виде

$$(1-z)r(\alpha,z) = \frac{z}{\Gamma(1/\alpha)}\Gamma(1+\frac{1-z}{\alpha})\int_0^\infty x^{(z/\alpha)-1}E_{1/\alpha}(-x,1)dx. \tag{4.4}$$

В силу результатов [16] (§3, гл. 3), $\lim_{x\to\infty} x\cdot E_{1/\alpha}(-x,1) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$. Отсюда следует, что интеграл

$$\int_0^\infty x^{(z/\alpha)-1}E_{1/\alpha}(-x,1)dx$$

абсолютно и равномерно сходится внутри полосы $0<\mathrm{Re}z<\alpha$. Так как при любом $x>0$ функция $x^{\frac{z}{\alpha}-1}E_{1/\alpha}(-x,1)$ – целая, то функция

$$\int_0^\infty x^{(z/\alpha)-1}E_{1/\alpha}(-x,1)dx$$

аналитична в полосе $0<\mathrm{Re}z<\alpha$. В той же области аналитичны и функции $r(\alpha,z)$ и $\Gamma(1+\frac{1-z}{\alpha})$. Следовательно, (4.4) справедливо при $0<\mathrm{Re}z<\alpha$, и утверждение (Б) доказано для $1<\varepsilon<\alpha$. Ввиду (4.5) интеграл

$$\int_0^\infty x^{(\varepsilon/\alpha)-1}\ln x\cdot E_{1/\alpha}(-x,1)dx$$

равномерно сходится при $\varepsilon \in (0, \alpha)$. Согласно (4.4) имеем

$$r(\alpha, 1) \cdot \Gamma(1/\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 1} \frac{1}{1-\varepsilon} \int_0^\infty x^{(\varepsilon/\alpha)-1} \cdot E_{1/\alpha}(-x, 1)dx =$$

$$= -\int_0^\infty x^{(1/\alpha)-1} \ln x \cdot E_{1/\alpha}(-x, 1)dx.$$

§5. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Замена x^α на $z \in C$ в формулах (2.12) и (2.15) приводит к целым функциям

$$z^{1/\alpha} G_\alpha(z^{1/\alpha}) = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{\alpha} z \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{\Gamma(k+1-(1/\alpha))}{\Gamma(k\alpha + \alpha)} z^k,$$

$$R_\alpha(z^{1/\alpha}) = \frac{1}{\Gamma(1/\alpha)} \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(k+(1/\alpha))}{\Gamma(k\alpha+1)} z^k$$

(в силу формулы Стирлинга $\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} \cdot x^{x-(1/2)} \cdot e^{-x}$, $x \to \infty$, радиус сходимости рядов бесконечен). Для заданной целой функции $\sum_{k \geq 0} c_k \cdot z^k$, $z \in C$ будем рассматривать ее *порядок* ρ и *тип* σ (см., напр., [19], гл. 7) :

$$\rho = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k \cdot \log k}{\log |c_k|^{-1}}, \quad \sigma = e^{-\rho} \overline{\lim_{k \to \infty}} k \cdot |c_k|^{\rho/k}. \tag{5.1}$$

Теорема 7. *Целые функции* $z^{1/\alpha} G_\alpha(z^{1/\alpha})$ *и* $R_\alpha(z^{1/\alpha})$ *имеют порядок* $\rho = 1/(\alpha - 1)$ *и тип* $\sigma = (\alpha - 1) \cdot \alpha^{\alpha/(1-\alpha)}$.

Доказательство. Пусть ρ и σ – порядок и тип функции $z^{1/\alpha} G(z^{1/\alpha})$. По формуле Стирлинга, при $k \to \infty$

$$\log \frac{\Gamma(k\alpha + \alpha)}{\Gamma(k+1-(1/\alpha))} \sim \left(\alpha k + \alpha - \frac{1}{2}\right) \log \alpha + \left(\alpha k + \alpha - \frac{1}{2}\right) \log(k+1) -$$
$$- k\alpha + k + 1 - 2\alpha - \left(k - \alpha + \frac{1}{2}\right) \log(k + 1 - \alpha).$$

Тем самым, учитывая (5.1), приходим к утверждению теоремы для $z^{1/\alpha} G_\alpha(z^{1/\alpha})$. Доказательство для $R_\alpha(z^{1/\alpha})$ вполне аналогично.

§6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1°. Применение формулы

$$\int_0^\infty t^{s-1} K(a, b, -t)dt = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)}{\Gamma(b-s)}, \tag{6.1}$$

справедливой для всех $\mathrm{Re}\,a > \mathrm{Re}\,s > 0$ и $b \neq 0, -1, -2, \ldots$ (см. [17], стр. 715), позволяет дать другое доказательство теоремам 3 и 4. Покажем это для теоремы 3. Из (6.1), заменой переменной $t = x^2/4$, и из (2.6) для $1 - \alpha < \varepsilon < 0$, учитывая равенство $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ выводим

$$\int_0^\infty t^{(2\varepsilon-2)/\alpha} m_{1-(2/\alpha)}(t)\,dt = \int_0^\infty t^{\frac{2\varepsilon-2}{\alpha}+1} \cdot K\left(1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{3}{2}, -\frac{t^2}{4}\right) dt =$$

$$= 2^{\frac{2\varepsilon-2}{\alpha}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(-\frac{\varepsilon}{\alpha})\Gamma(1 + \frac{\varepsilon-1}{\alpha})}{\Gamma(1 - \frac{1}{\alpha})\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon-1}{\alpha})}. \tag{6.2}$$

Ввиду теоремы 5, (6.2) и (3.9)

$$g(\alpha, \varepsilon) = 2^{\frac{2\varepsilon-2}{\alpha}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(1 - \frac{2\varepsilon-2}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon-1}{\alpha})} \cdot \frac{1}{\Gamma(1/\alpha)\Gamma(1 - \frac{1}{\alpha})} \cdot \frac{-\varepsilon\Gamma(-\frac{\varepsilon}{\alpha})\Gamma(1 + \frac{\varepsilon-1}{\alpha})}{\Gamma(2 - \varepsilon)}.$$

В силу формулы Лагранжа

$$\Gamma\left(1 + \frac{\varepsilon - 1}{\alpha}\right) = 2^{\frac{2\varepsilon-2}{\alpha}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(1 - \frac{2\varepsilon-2}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon-1}{\alpha})},$$

а по второй формуле (2.10)

$$-\varepsilon\Gamma\left(-\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\Gamma\left(1 + \frac{\varepsilon - 1}{\alpha}\right) = (\varepsilon - 1) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\varepsilon - 1}{\alpha}\right).$$

Следовательно, при $1 - \alpha < \varepsilon < 0$

$$g(\alpha, \varepsilon) = \frac{\Gamma(1 - \frac{\varepsilon-1}{\alpha})\Gamma(\frac{\varepsilon-1}{\alpha})}{\Gamma(1/\alpha)\Gamma(1 - \frac{1}{\alpha})} \cdot \frac{(\varepsilon - 1)\Gamma(1 - \frac{\varepsilon}{\alpha})}{\Gamma(2 - \varepsilon)},$$

и обращаясь к первой формуле (2.10) завершаем доказательство теоремы 3.

2°. Сравнение теорем 3 и 6 позволяет заключить, что *функция комплексной переменной* z

$$e_{1/\alpha}(\alpha, z) = \int_0^\infty x^z \cdot E_{1/\alpha}(-x, \alpha)\,dx$$

аналитична в полуплоскости $-1 < \mathrm{Re}\,z < 1$ *и*

$$e_{1/\alpha}(\alpha, z) = \frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha z)} \frac{\pi z}{\sin \pi z}, \quad 1 < \alpha < 2. \tag{6.3}$$

К этому заключению приходим, приравнивая выражения для $g(\alpha, 1+\alpha z)$ из теорем 3 и 6. При $1 < \alpha < 2$ имеют место асимптотические формулы

$$x^2 \cdot E_{1/\alpha}(-x,\alpha) \to \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad x \to +\infty, \quad \text{и} \quad E_{1/\alpha}(-x,\alpha) \to \frac{1}{\Gamma(\alpha)}, \quad x \to 0$$

(см. [16], гл. 3, §2 и (1.5)). Тем самым, интеграл $e_{1/\alpha}(\alpha,\delta)$ абсолютно сходится при $-1 < \delta < 1$. Следовательно, $e_{1/\alpha}(\alpha, z)$ функция, аналитическая в полосе $-1 < \mathrm{Re} z < 1$. Функция

$$\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha z)} \frac{\pi z}{\sin \pi z}$$

тоже аналитична в полосе $-1 < \mathrm{Re} z < 1$ и совпадает с $e_{1/\alpha}(\alpha, z)$ в $-1/\alpha < \mathrm{Re} z <$ $< 1 - (1/\alpha)$. Ввиду единственности аналитической функции, формула (6.3) доказана. Аналогично, приравнивая выражения для $r(\alpha, \alpha z + \alpha)$ из теорем 4 и 6, приходим к заключению, что *функция комплексного переменного z*

$$e_{1/\alpha}(1,z) = \int_0^\infty x^z \cdot E_{1/\alpha}(-x,1)\, dx$$

аналитична в полосе $-1 < \mathrm{Re} z < 1$ и

$$e_{1/\alpha}(1,z) = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha(1+z))} \frac{\pi(z+1)}{\sin \pi(z+1)}, \quad 1 < \alpha < 2. \tag{6.4}$$

Действительно, (6.4) имеет место при $-1 < \mathrm{Re} z < 0$, $z \neq (1/\alpha) - 1$. Из асимптотических формул

$$x \cdot E_{1/\alpha}(-x,1) \to \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad x \to +\infty, \quad \text{и} \quad E_{1/\alpha}(-x,1) \to 1, \quad x \to 0$$

(см. [16], гл. 3, §2 и (1.5)) следует, что интеграл $e_{1/\alpha}(1,\delta)$ абсолютно сходится при $-1 < \delta < 0$. Тем самым, $e_{1/\alpha}(1, z)$ – функция, аналитическая в полосе $-1 < \mathrm{Re} z < 0$. Там же аналитична функция

$$\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha(1+z))} \frac{\pi(z+1)}{\sin \pi(z+1)},$$

совпадающая с $e_{1/\alpha}(1,z)$ при $-1 < \mathrm{Re} z < 0$, $z \neq (1/\alpha) - 1$. Формула (6.4) доказана.

ABSTRACT. We consider two one-parametric families of limit distributions arising in Queueing Models of $M|G|1|\infty$ and $GI|M|1|\infty$ types under unit traffic intensity condition and given by their Laplace-Stieltjes Transform. We investigate the analytical properties of the families : their integral representations by stable laws, integral representations with kernels of Mittag-Leffler type and series representations. Also the moments of the distributions are evaluated.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. A. Danielian, F. Liese, "$M|G|1|\infty$ – queueing model with unit traffic-intensity in continous time", Rostock Math. Kolloq., vol. 32, pp. 67 - 86, 1987.
2. Э. А. Даниелян, "Предельная теорема для времени ожидания в модели $M|G|1|\infty$ при единичной загрузке", Уч. зап. ЕГУ, т. 2(165), стр. 9 – 16, 1987.
3. Э. А. Даниелян, "Предельные теоремы для времени ожидания в приоритетных системах с одним обслуживающим прибором", ДАН Арм. ССР, т. 21, №. 3, стр. 129 - 135, 1980.
4. А. В. Печинкин, Г. М. Арипов, "Предельное распределение времени ожидания в системе $GI|M|1$", Известия АН Узбекской ССР, №. 1, стр. 27 - 32, 1975.
5. А. В. Печинкин, Г. М. Арипов, "О квазистационарных распределениях для систем с очередью", Труды III Всесоюзн. школы по теории масс. обслуживания, т. 2, стр. 140 – 149, 1976.
6. Э. А. Даниелян, Г. А. Попов, "Об одной предельной теореме для приоритетных систем при единичной загрузке", ДАН Арм. ССР, т. 70, №. 1, стр. 11 – 15, 1980.
7. Т. З. Хачикян, "Новые предельные теоремы в модели $M|G|1|\infty$", Кандидатская диссертация, ЕГУ, 1992.
8. P. Erdos, M. Kac, "On certain limit theorems of the theory of probability", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 52, pp. 292 - 302, 1946.
9. N. U. Prabhu, Stochastic Storage Processes, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
10. E. K. Kyprianou, "On the quasi-stationary distributions of the virtual waiting time in queues with Poisson arrivals", J. Appl. Prob., no. 8, pp. 494 – 507, 1971.
11. E. K. Kyprianou, "On the quasi-stationary distributions of the $GI|M|1$", J. Appl. Prob., no. 1, pp. 117 – 128, 1972.
12. E. A. Danielian, "Asymptotical investigation of the virtual waiting time for priority queues in a busy store", Current Topics in Cybernetics and Systems, Springer-Verlag, Berlin, pp. 80 – 81, 1978.
13. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, Наука, Москва, 1984.
14. А. А. Боровков, Теория вероятностей, Наука, Москва, 1976.
15. В. М. Золотарев, Одномерные устойчивые распределения, Наука, Москва, 1983.
16. М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, Москва, 1966.
17. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, Интегралы и ряды, Наука, Москва, 1986.
18. L. Berg, "On Danielian's class of distribution functions" Rostock Math. Kolloq., vol. 37, pp. 67 - 86, 1987.
19. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, Наука, Москва, 1968.

26 января 1994 Ереванский государственный университет

О СХОДИМОСТИ В L^p ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ НА МНОЖЕСТВАХ ПОЧТИ ПОЛНОЙ МЕРЫ

Г. А. Карагулян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, №2, 1994

В статье рассмотрены общие ортогональные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$, с $0 < \sum a_n^2 < \infty$, где $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормальная система на $(0,1)$. В предположении, что $S_n(x)$ – частичные суммы ряда и $S_n \overset{L_2}{\Longrightarrow} f(x)$, доказано, что при любых $0<\varepsilon<1$ и $0<\alpha<2/3$ существует множество $E_\varepsilon \subset (0,1)$ с мерой, превосходящей $1-\varepsilon$, такое, что

1) $\int_{E_\varepsilon} \exp|C_\varepsilon S_n(x)|^\alpha\, dx \le 2, \quad n=1,2,\ldots$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty} ||S_n(x)-f(x)||_{L^p(E_\varepsilon)} = 0.$

В статье рассмотрены ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x), \quad \text{с} \quad 0<\sum a_n^2<\infty, \tag{1}$$

где $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – некоторая ортонормированная на $(0,1)$ система. Обозначим частичные суммы ряда (1) через

$$S_N(x)=\sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_n(x), \quad N=1,2,\ldots. \tag{2}$$

Как хорошо известно, Меньшовым [1] и Радемахером [2] установлено неравенство (см. также [3], стр. 252)

$$\int_0^1 \left[\sup_{1\le N<\infty} \frac{|S_N(x)|}{\log N}\right]^2 dx \le C\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

Известно также, что при $1 \leq p \leq 2$ ряд (1) сходится в $L^p(0,1)$, однако, вообще говоря, сходимости в $L^p(0,1)$, $p > 2$, нет. Тем не менее, как показано ниже, для любого ряда (1) существует множество $E \subset (0,1)$, с мерой близкой единице, на котором сходимость в $L^p(E)$, $p > 2$, имеет место.

Теорема 1. *Для любого ортогонального ряда (1) и любых чисел* $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \sigma < \frac{2}{3}$, *существует множество* $E_{\varepsilon,\sigma} \subset (0,1)$, $|E_{\varepsilon,\sigma}| > 1 - \varepsilon$ *такое, что*

$$\sup_{1 \leq N < \infty} \int_{E_{\varepsilon,\sigma}} \exp\left[C_{\varepsilon,\sigma}\left(\frac{|S_N(x)|}{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2}}\right)^{2/3-\sigma}\right] dx \leq 2, \tag{3}$$

где $C_{\varepsilon,\sigma}$ *– положительная постоянная, зависящая от* ε *и* σ.

Теорема 2. *Для любого ортогонального ряда (1) и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует множество* $E_\varepsilon \subset (0,1)$ *с* $|E_\varepsilon| > 1 - \varepsilon$, *на котором ряд (1) сходится в* $L^p(E_\varepsilon)$ *при любом* $p > 2$.

Для любой последовательности $a \in l^2$ обозначим через $(a)_n$ ее координаты. Имеем

$$||a||_{l^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(a)_n^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Ниже мы будем пользоваться следующим простым, но весьма полезным утверждением, являющимся модификацией одной леммы Эрдёша (см. [3], стр. 323).

Лемма 1. *Пусть задана последовательность* $a \in l^2$. *Найдутся число* l, $1 \leq l < \infty$, *и векторы* a', $a'' \in l^2$ *вида*

$$\begin{aligned} a' &= ((a)_1, (a)_2, \ldots, (a)_{l-1}, (a')_l, 0, \ldots), \\ a'' &= (0, 0, \ldots, 0, (a'')_l, (a)_{l+1}, (a)_{l+2}, \ldots) \end{aligned} \tag{4}$$

такие, что

1) $a' + a'' = a$;

2) $||a'||_{l^2}^2 \leq \frac{1}{2}||a||_{l^2}^2, \quad ||a''||_{l^2}^2 \leq \frac{1}{2}||a||_{l^2}^2$;

3) $|(a')_l| \le |(a)_l|, \quad |(a'')_l| \le |(a)_l|$.

Доказательство. В качестве l возьмем число, для которого

$$\sum_{n=1}^{l-1}(a)_n^2 \le \frac{1}{2}\|a\|_{l^2}^2 \le \sum_{n=1}^{l}(a)_n^2.$$

При этом, полагаем, что $\sum\limits_{n=1}^{0} = 0$. Положив

$$(a')_l = \frac{\frac{1}{2}\|a\|_{l^2}^2 - \sum\limits_{n=1}^{l-1}(a)_n^2}{(a)_l}, \quad (a'')_l = (a)_l - (a')_l,$$

определяем векторы (4), для которых, как легко проверить, условия 1) – 3) выполнены. Лемма доказана.

Пусть $f(x)$ – измеримая на $(0,1)$ функция. Обозначим через $f^*(x)$ монотонно убывающую на $(0,1)$ функцию, равноизмеримую с $f(x)$, т. е. такую, что

$$|\{f(x) > \lambda\}| = |\{f^*(x) > \lambda\}|$$

для любого числа $-\infty < \lambda < +\infty$.

Лемма 2. *Для любой совокупности измеримых функций* $\{f_n(x)\}_{n=1}^N$, $x \in (0,1)$, *справедливо неравенство*

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} f_n(x)\right\|_{L^p(0,1)} \le \left\|\sum_{n=1}^{N} f_n^*(x)\right\|_{L^p(0,1)}, \quad p \ge 1. \tag{5}$$

Доказательство. Очевидно можно предполагать, что каждая $f_n(x)$ – ступенчатая функция, постоянная на отрезках $\left[\frac{k-1}{M}, \frac{k}{M}\right)$. Рассмотрим функции

$$g_n^{\sigma_n}(x) = a_{\sigma_n(k)}^{(n)} \quad \text{при} \quad x \in \left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right),$$

где σ_n – некоторая перестановка натуральных чисел $\{1, 2, ..., N\}$. Воспользуемся тем, что выражение $x^p + y^p$ $(p \ge 1)$ при условии $x + y = \text{const}$ возрастает при возрастании $|x-y|$ (это легко проверить дифференцированием). Тогда нетрудно видеть, что выражение

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left|\sum_{n=1}^{N} a^{(n)}_{\sigma_n(k)}\right|^p$$

принимает свое наибольшее значение при $a^{(n)}_{\sigma_n(1)} \geq a^{(n)}_{\sigma_n(2)} \geq \ldots \geq a^{(n)}_{\sigma_n(N)}$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть $f(x)$ – измеримая функция, определенная на множестве $E \subset \subset (0,1)$, такая, что*

$$\|f(x)\|_{L^p(E)} \leq C \cdot p^\alpha \quad (\alpha > 0, C > 0 - - \textit{постоянные}) \tag{6}$$

при любом $p \geq 1$. Тогда имеет место неравенство

$$\int_E \exp\left[C_1 |f(x)|^{1/\alpha}\right] dx \leq 2,$$

где C_1 – положительная постоянная, зависящая только от C и α.

Доказательство. Воспользовавшись разложением экспоненциальной функции, учитывая (6) и неравенство

$$\int_E |f(x)|^r\,dx \leq \|f\|^r_{L^1(E)} \leq C^r, \quad \text{при} \quad 0 < r < 1 \ (E \subset (0,1)),$$

получаем

$$\int_E \exp\left(C_1 |f(x)|^{1/\alpha}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_1^n}{n!}\int_E |f(x)|^{n/\alpha}\,dx \leq \sum_{n=0}^{[\alpha]} \frac{C_1^n \cdot C^{n/\alpha}}{n!} +$$
$$+ \sum_{n=[\alpha]+1}^{\infty} \frac{C_1^n}{n!} C^{n/\alpha}\left(\frac{n}{\alpha}\right)^n.$$

Очевидно, последняя сумма не превосходит 2 при достаточно малом $C_1 > 0$, зависящем только от C и α. Лемма доказана.

Лемма 4. *Для любых чисел $0 < \varepsilon < 1$, $\delta > 0$ и любого ортогонального ряда вида (1) существуют множество $E_{\varepsilon,\delta} \subset (0,1)$ с $|E_{\varepsilon,\delta}| > 1 - \varepsilon$ и число $A_{\varepsilon,\delta} > 0$ такие, что*

$$\|S_N(x)\|_{L^p(E_{\varepsilon,\delta})} \leq A_{\varepsilon,\delta}\, p^{\frac{1}{2}+\delta}\, \|a\|_{l^2}, \quad N = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

при любом положительном $p \geq 1$.

Доказательство. Очевидно можно предполагать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a)_n^2 = 1.$$

Разложим последовательность a, следуя конструкции Ердёша (см. [4], стр. 705) :

$$a = \sum_{k=1}^{2^n} a_k^{(n)}, \quad n = 1, 2, ...,$$

где $a_0^{(0)} = a$, а векторы $a_k^{(n)}$ построены последовательно. Если вектор $a_k^{(n-1)}$ уже построен, то, пользуясь леммой 1, представляем его в виде $a_k^{(n-1)} = a_{2k}^{(n)} + a_{2k+1}^{(n)}$. Легко усмотреть, что определенные таким образом векторы имеют вид

$$a_k^{(n)} = (0, ..., 0, a'_{l_k^{(n)}}, (a)_{l_k^{(n)}+1}, ..., (a)_{l_{k+1}^{(n)}-1}, a''_{l_{k+1}^{(n)}}, 0, ...)),$$

где $1 = l_0^{(n)} \leq l_1^{(n)} \leq ... \leq l_{2^n-1}^{(n)} < \infty$. При этом

$$\left\|a_k^{(n)}\right\|_{l^2}^2 \leq 2^{-n}, \quad k = 1, 2, ..., 2^n, \quad n = 1, 2, ..., \tag{8}$$

$$\left|\left(a_k^{(n)}\right)_i\right| \leq |(a)_i|, \quad i = 1, 2, ... \tag{9}$$

Легко убедиться, что для последовательности $a(N) = ((a)_1, (a)_2, ..., (a)_N, 0, ...)$ имеет место разложение

$$a(N) = \sum_{k=1}^{n_0} \varepsilon_k a_{m(k,N)}^{(k)} + b, \quad 1 \leq m(k, N) \leq 2^k, \tag{10}$$

где

$$b(0, ..., 0, (b)_l, (b)_{l+1}, 0, ...),$$

$$|(b)_l| \leq |(a)_l|, \quad |(b)_{l+1}| \leq |(a)_{l+1}|, \tag{11}$$

а ε_k равно 0 или 1. Определив

$$p_k^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_k^{(n)}\right)_i \varphi_i(x), \quad k = 1, 2, ..., 2^n, \quad n = 1, 2, ...,$$

$$h(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (b)_i\ \varphi_i(x),$$

из (8) - (10) получаем

$$\left\|p^{(n)}\right\|^2_{L^2(0,1)} \le \frac{1}{2^n}, \quad k = 1, 2, ..., 2^n, \quad n = 1, 2, ... \tag{12}$$

и

$$S_N(x) = \sum_{k=1}^{n_0} \varepsilon_k\, p^{(k)}_{m(k,M)}(x) + h(x), \tag{13}$$

где

$$h(x) = (b)_l\ \varphi_l(x) + (b)_{l+1}\ \varphi_{l+1}(x). \tag{14}$$

Из (12) следует, что

$$\left|\left\{\left|p_k^{(n)}(x)\right| > \lambda\right\}\right| \le \frac{1}{2^n\,\lambda^2}.$$

Тем самым, можно определить положительную функцию $\tilde{p}_k^{(n)}(x)$, такую, что

$$\left|p_k^{(n)}(x)\right| \le \tilde{p}_k^{(n)}(x), \quad x \in (0,1), \tag{15}$$

$$\left|\left\{\tilde{p}_k^{(n)}(x) > \lambda\right\}\right| = \frac{1}{2^n\,\lambda^2}, \quad \lambda > 0. \tag{16}$$

Обозначим

$$E_k^{(n)} = \left\{\tilde{p}_k^{(n)}(x) > An^{\delta+1/2}\right\}, \quad H_k = \left\{|\varphi_k(x)| > \frac{A}{|a_k|}\right\},$$

где число $A > 0$ будет определено позже. Из неравенства Чебышева и (16) следует, что

$$\left|E_k^{(n)}\right| = \frac{1}{A^2 \cdot 2^n \cdot n^{1+2\delta}}, \quad |H_k| \le \frac{a_k^2}{A^2}.$$

Отсюда, определив

$$F = \left(\cup_{n=1}^{\infty} \cup_{k=1}^{2^n} E_k^{(n)}\right) \cup \left(\cup_{k=1}^{\infty} H_k\right),$$

получаем, что при достаточно большом $A > 0$, зависящем только от δ и ε

$$|F| \le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{A^2 k^{1+2\delta}} + \frac{a_k^2}{A^2}\right) < \varepsilon.$$

Следовательно, для множества $E_{\epsilon,\delta} = (0,1) \setminus F$ будем иметь $|E_{\epsilon,\delta}| > 1 - \epsilon$ и

$$\widetilde{p}_k^{(n)}(x) \leq A \cdot n^{\delta+1/2} \quad \text{при} \quad x \in E_{\epsilon,\delta}, \tag{17}$$

$$|a_k|\,|\varphi_k(x)| \leq A \quad \text{при} \quad x \in E_{\epsilon,\delta}. \tag{18}$$

Из формул (13), (11), (14), (15), (18) и (5) следует, что

$$\begin{aligned} ||S_N(x)||_{L^p(E_{\epsilon,\delta})} &\leq \left\| \sum_{k=1}^{n_0} \widetilde{p}_{m(k,N)}^{(k)}(x) \right\|_{L^p(E_{\epsilon,\delta})} + 2A \leq \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^{n_0} \left(\widetilde{p}_{m(k,N)}^{(k)}(x) \times \chi_{E_{\epsilon,\delta}}(x) \right)^* \right\|_{L^p(E_{\epsilon,\delta})} + 2A. \end{aligned} \tag{19}$$

С другой стороны, из (16) и (17) вытекает, что

$$\left[\widetilde{p}_k^{(n)}(x) \chi_{E_{\epsilon,\delta}}(x) \right]^* \leq \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{x + x_n}}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^n,$$

где $x_n = \left(A^2 \cdot 2^n \cdot n^{1+2\delta}\right)^{-1}$. Следовательно, из (19) находим

$$\begin{aligned} ||S_N||_{L^p(E_{\epsilon,\delta})} &\leq \left(\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{x + x_n}} \right)^p dx \right)^{1/p} + 2A \leq \\ &\leq \left(\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{[\log \frac{1}{x}]} \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{x_n}} \right)^p dx \right)^{1/p} + \\ &+ \left(\int_0^1 \left(\sum_{n=[\log \frac{1}{x}]+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{x_n}} \right)^p dx \right)^{1/p} + 2A \leq \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{[\log \frac{1}{x}]} n^{\delta+1/2} \right\|_{L^p(0,1)} + 2A + 1 \leq C \left\| \left(\log \frac{1}{x} \right)^{\delta+3/2} \right\|_{L^p(0,1)} + 2A + 1. \end{aligned} \tag{20}$$

Как легко проверить интегрированием по частям

$$\int_0^1 \left(\log \frac{1}{x} \right)^r dx \leq C \cdot p^r,$$

где $C > 0$ – постоянная. А отсюда и из (20) вытекает, что

$$||S_N||_{L^p(E_{\epsilon,\delta})} \leq A_{\epsilon,\delta} \cdot p^{\delta+3/2}, \quad p \geq 1,$$

и (7) следует в силу предположения $||a||_{l^2} = 1$. Лемма доказана.

Доказательства теорем. Неравенство (3) непосредственно следует из лемм 3 и 4. Воспользуемся леммой 4 с $\delta = \dfrac{9\sigma}{2(2-3\sigma)}$ (тогда $\dfrac{2}{3} - \sigma = \dfrac{1}{3/2+\sigma}$). Пусть $f(x) = \dfrac{S_N(x)}{A_{\epsilon,\delta}\|a\|_{l^2}}$. Тогда из (7) следует, что $\|f\|_{L^p(E_{\epsilon,\delta})} \le p^{3/2+\delta}$, и остается использовать лемму 3 с $C_{\epsilon,\delta} = (A_{\epsilon,\delta})^{-(2/3-\sigma)}$. Для доказательства теоремы 2 используем неравенство Гёльдера и лемму 4 ($p > 2$, $N > M$). Тогда

$$\|S_N - S_M\|^p_{L^p(E_{\epsilon,\delta})} \le$$

$$\le \left(\int_{E_{\epsilon,\delta}} |S_N(x) - S_M(x)|^{2(p-1)}\, dx\right)^{1/2} \times \left(\int_0^1 |S_N(x) - S_M(x)|^2\, dx\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{n=M+1}^{N} a_n^2\right)^{1/2} \cdot \|S_N - S_M\|^{p-1}_{L^{2(p-1)}(E_{\epsilon,\delta})} \le$$

$$\le \left(\sum_{n=M+1}^{N} a_n^2\right)^{1/2} \cdot A_{\epsilon,\delta}\,(2(p-1))^{(\delta+3/2)(p-1)}.$$

Так как $\lim\limits_{N,M\to\infty} \left(\sum_{n=M+1}^{N} a_n^2\right) = 0$, имеем

$$\lim_{N,M\to\infty} \|S_N - S_M\|_{L^p(E_{\epsilon,\delta})} = 0.$$

Теоремы доказаны.

ABSTRACT. The article considers general orthogonal series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$, with $0 < \sum a_n^2 < \infty$, where $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ is an orthonormal system on $(0,1)$. Let $S_n(x)$ be the partial sums of the series and $S_n \overset{L_2}{\Longrightarrow} f(x)$. We prove that for any $0 < \varepsilon < 1$ and $0 < \alpha < 2/3$ there exists a set $E_\epsilon \subset (0,1)$, with measure exceeding $1-\varepsilon$, such that

1) $\displaystyle\int_{E_\epsilon} \exp|C_\epsilon S_n(x)|^\alpha\, dx \le 2$, $\quad n = 1, 2, \ldots$ $\qquad$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n(x) - f(x)\|_{L^p(E_\epsilon)} = 0.$

ЛИТЕРАТУРА

1. D. E. Menshov, "Sur bes series de function orthogonales I," Fund. Math., vol. 4, pp. 82 – 105, 1923.
2. H. Rademacher, "Einige Sätze über Reihen von algemeinen Orthogonalfunktionen," Math. Annalen, vol. 87, pp. 111 – 138, 1922.
3. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные ряды, Наука, Москва, 1984.
4. Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, Физматгиз, Москва, 1961.

11 марта 1994

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Р. Л. Шахбагян, М. эль-Саиди

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, №2, 1994

В статье исследована проблема управления системами, описываемыми эволюционными уравнениями в частных производных высокого порядка. Доказано существование точного управления смешанной задачей (при этом, управление может быть задано как на всей границе, так и на ее части) для некоторого класса эволюционных операторов высокого порядка в соответствующих функциональных пространствах.

ВВЕДЕНИЕ

Фундаментальные результаты в задачах оптимального управления, полученные в пятидесятые годы Л. С. Понтрягиным, В. М. Тихомировым, М. Р. Хестенсом, А. Д. Иоффе, изложенные в монографиях [1] – [3], привели к бурному развитию в этой области. В [1] исследованы задачи управления, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. Однако, в многочисленных приложениях, в силу сложности управляемых систем, возникают математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных. Примеры таких задач содержатся в [4],[5].

Это направление, начатое в семидесятые годы Д. Расселом [6],[7] и Ж.- Л. Лионсом [8], получило дальнейшее продолжение и развитие в исследованиях Ж.- Л. Лионса [9],[10], а также в работах других авторов (см. [11] – [13]).

В [10] исследована задача управления, порожденная смешанной задачей для уравнения

$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$

При этом, управление задано как на всей боковой границе цилиндра, так и на ее части (последний случай весьма важен с точки зрения приложений). Доказано существование точного управления при достаточно больших значениях временной переменной.

В настоящей статье, на основе изложенного в [10] метода, получившего название Hilbert Uniqueness Method (HUM), применена идея рассмотрения сопряженной задачи. В настоящее время достаточно полно исследованы задачи управления, описываемые эволюционными уравнениями в частных производных второго порядка. Значительно менее изучены системы, описываемые уравнениями высокого порядка, чему и посвящена эта статья.

В §1 дается постановка задачи. В §2 излагается метод HUM. В §3 описывается класс рассматриваемых операторов и вводятся функциональные пространства, в которых они действуют. В §4 доказан основной результат работы – существование точного управления смешанной задачей для класса операторов, введенных в §3.

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Обозначим через $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $0 < T < \infty$, открытый цилиндр, лежащий в прямом произведении $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+ = \{t \mid t \in \mathbb{R}^1, t > 0\}$.

В цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим эволюционное уравнение вида

$$u'' + \Delta^{2m} u + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha(x) D^\alpha u) = 0, \quad m \geq 1, \tag{1.1}$$

где $u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, Δ есть n – мерный оператор Лапласа, а

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k.$$

Далее, обозначим

$$L u = \sum_{|\alpha|\le 2m-1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha(x) D^\alpha u), \tag{1.2}$$

$$L_1 u = \Delta^{2m} u + L u. \tag{1.3}$$

Для формулировки задачи введем обозначения. Пусть $x^o = (x_1^o, \ldots, x_n^o)$ – произвольная заданная точка из $\mathbb{R}^n$. Для любого $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ положим

$$m(x) = x - x_o = (x_1 - x_1^o, \ldots, x_n - x_n^o), \quad m_k(x) = x_k - x_k^o. \tag{1.4}$$

Далее, через $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ обозначим единичную внешнюю нормаль к поверхности Γ, $\nu_k = \cos(\nu, x_k)$. Разделим поверхность Γ на две части, положив

$$\Gamma(x^o) = \{x \mid \ x \in \Gamma, \ \sum_{k=1}^n m_k \nu_k \ge 0\} \tag{1.5}$$

и $\Gamma_*(x^o) = \Gamma \setminus \Gamma(x^o)$. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу :

$$u'' + L_1 u = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1.6}$$

$$u(0) = u^o, \quad u'(0) = u^1, \quad \text{на} \quad \Omega, \tag{1.7}$$

где $u(0) = u(x,0)$, $u'(0) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}$. Пусть Σ – боковая поверхность цилиндра $Q_T: \ \Sigma = \Gamma \times (0,T)$. На Σ зададим краевые условия

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}\right|_\Sigma = 0, \quad k = 0, \ldots, 2m-2, \tag{1.8}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^{m-1} u\right|_\Sigma = \begin{cases} v, & \text{на } \Gamma(x^o) \times (0,T) \\ 0, & \text{на } \Gamma_*(x^o) \times (0,T), \end{cases} \tag{1.9}$$

где функция v – управление.

Определение 1.1 (см. [10]). Управление $v(x,t)$, определенное на $\Gamma(x^o)\times$ $\times(0,T)$, называется *точным*, если для любых начальных данных $u^o(x)$ и $u^1(x)$ ($x \in \Omega$) существует T, $0 < T < \infty$, такое, что решение $u(v) = u(x,t;v)$ задачи (1.6) – (1.9) обращается в нуль вместе со своей производной по t при $t = T$, т. е.

$$u(x,T;v) = u'(x,T;v) = 0. \tag{1.10}$$

Таким образом, проблема заключается в нахождении точного управления смешанной задачей (1.6) - (1.9) в соответствующих функциональных пространствах.

§2. HUM. ОПЕРАТОР Λ

2.1. Для решения поставленной в §1 задачи точного управления мы применим метод HUM. В основе этого метода лежит идея одновременного рассмотрения двух задач – основной и, в определенном смысле, двойственной к ней. Итак, рассмотрим следующие две начально-краевые задачи :

Пусть функция $w(x,t)$ – решение задачи

$$w'' + L_1 w = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{2.1}$$

$$w(0) = w^0, \quad w'(0) = w^1, \quad x \in \Omega, \tag{2.2}$$

$$\left.\frac{\partial^k w}{\partial \nu^k}\right|_\Sigma = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, 2m-1 \tag{2.3}$$

и пусть функция $z(x,t)$ – решение задачи

$$z'' + L_1 z = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{2.4}$$

$$\left.\frac{\partial^k z}{\partial \nu^k}\right|_\Sigma = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, 2m-2, \tag{2.5}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial \nu}\Delta^{m-1} z\right|_\Sigma = \begin{cases} \Delta^m w, & \text{на } \Gamma(x^0) \times (0,T) \\ 0, & \text{на } \Gamma_*(x^0) \times (0,T), \end{cases} \tag{2.6}$$

$$z(T) = z'(T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{2.7}$$

Мы исходим из того, что задачи (2.1) – (2.3) и (2.4) – (2.7) имеют единственное обобщенное решение в соответствующих пространствах Соболева (см. [14]).

2.2. Ниже мы будем существенно опираться на следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть функции $w(x,t)$ и $z(x,t)$ – решения задач (2.1) – (2.3) и (2.4) – (2.7) соответственно. Тогда справедливо соотношение*

$$\int_\Omega (z'(0)w^0 - z(0)w^1)dx = \int_{\Gamma(x^0)\times(0,T)} |\Delta^m w|^2 d\Gamma\, dt. \tag{2.8}$$

Доказательство. Умножим тождество (2.1) на $z(x,t)$, а тождество (2.4) – на $w(x,t)$, составим симметрическую разность и проинтегрируем ее по цилиндру

Q_T. Тогда получим

$$\iint_{Q_T}(zw''-wz'')dx\,dt+\iint_{Q_T}(z\Delta^{2m}w-w\Delta^{2m}z)dx\,dt=\iint_{Q_T}(wLz-zLw)dx\,dt. \tag{2.9}$$

Преобразуем в отдельности обе части последнего соотношения. Применяя формулу интегрирования по частям, с учетом начальных условий (2.2) и (2.7), получим

$$\iint_{Q_T}(zw''-wz'')dx\,dt=\int_\Omega(zw'\Big|_0^T-\int_0^T z'w'\,dt-$$

$$-wz'|_0^T+\int_0^T w'z'\,dt)dx=\int_\Omega(z'(0)w^\circ-z(0)w^1)dx. \tag{2.10}$$

Преобразуем теперь интеграл

$$I_1=\iint_{Q_T}(z\Delta^{2m}w-w\Delta^{2m}z)dx\,dt. \tag{2.11}$$

Применяя многократно формулу Гаусса-Остроградского и учитывая условия (2.5), получим

$$\iint_{Q_T}z\Delta^{2m}w\,dx\,dt=\iint_{Q_T}\Delta^m z\Delta^m w\,dx\,dt-\int_\Sigma\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta^{m-1}z\Delta^m w\,d\Sigma. \tag{2.12}$$

Аналогично, воспользовавшись условиями (2.3), получим

$$\iint_{Q_T}w\Delta^{2m}z\,dx\,dt=\iint_{Q_T}\Delta^m w\Delta^m z\,dx\,dt. \tag{2.13}$$

Подставив (2.12) и (2.13) в (2.11) и учитывая условия (2.6), будем иметь

$$I_1=-\int_{\Gamma(x^\circ)\times(0,T)}|\Delta^m w|^2 d\Gamma\,dt. \tag{2.14}$$

Правая часть тождества (2.9) преобразуется аналогично. В силу (2.3) и (2.5)

$$\iint_{Q_T}(wLz-zLw)dx\,dt=\sum_{|\alpha|\le 2m-1}\iint(a_\alpha(x)D^\alpha wD^\alpha z-a_\alpha(x)D^\alpha zD^\alpha w)dx\,dt=0. \tag{2.15}$$

Подставляя, наконец, преобразованные интегралы (2.10), (2.14) и (2.15) в тождество (2.9), приходим к соотношению (2.8). Лемма доказана.

2.3. Введем в рассмотрение оператор Λ, ставящий в соответствие каждой паре начальных данных $\{w^o, w^1\}$ задачи (2.1) - (2.3) пару $\{z'(0), -z(0)\}$:

$$\Lambda\{w^o, w^1\} = \{z'(0), -z(0)\}. \tag{2.16}$$

Как доказано ниже (и в этом заключается основная проблема), оператор Λ обратим в надлежащим образом построенных функциональных пространствах, естественно связанных с двумя рассматриваемыми смешанными задачами. После этого существование решения основной задачи (1.6) - (1.10) доказывается тривиально. В самом деле, полагаем в (2.16) $\Lambda\{w^o, w^1\} = \{u^1, -u^o\}$. Тогда, ввиду обратимости Λ, по заданной паре начальных данных $\{u^o, u^1\}$ определяется единственная пара $\{w^o, w^1\}$. По этим значениям определяется единственное решение $w(x,t)$ задачи (2.1) - (2.3), после чего, беря в условии (1.9)

$$v|_{\Gamma(x^o)\times(0,T)} = \Delta^m w, \tag{2.17}$$

легко убедиться, что, в силу (2.17), (2.4) - (2.7), решением исходной задачи (1.6) - (1.10) является функция

$$u(x,t;v) = z(x,t). \tag{2.18}$$

2.4. Обозначим через $\vec{L_2}(\Omega)$ гильбертово пространство вектор-функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$, определенных на Ω, и таких, что $u_i \in L_2(\Omega)$, $i = 1,2$ (т. е. $\vec{L_2}(\Omega) = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$), наделенное скалярным произведением

$$< u, v >= \int_\Omega (u_1 v_1 + u_2 v_2) dx. \tag{2.19}$$

В силу (2.16) и (2.19) имеем

$$< \Lambda\{w^o, w^1\}, \{w^o, w^1\} >= \int_\Omega (z'(0) w^o - z(0) w^1) dx. \tag{2.20}$$

Из леммы 2.1 следует, что

$$< \Lambda\{w^o, w^1\}, \{w^o, w^1\} >= \int_{\Gamma(x^o)\times(0,T)} |\Delta^m w|^2 d\Gamma\, dt. \tag{2.21}$$

Таким образом, для доказательства обратимости оператора Λ достаточно показать, что интеграл

$$\left(\int_{\Gamma(x^*)\times(0,T)} |\Delta^m w|^2 d\Gamma\, dt\right)^{1/2} \qquad (2.22)$$

определяет норму на множестве начальных данных задачи (2.1) - (2.3). Ниже мы докажем, что при достаточно больших $T > 0$ интегралом (2.22) задается норма на множестве $\{w^\circ, w^1\}$ в надлежащим образом построенных функциональных пространствах.

§3. КЛАСС ОПЕРАТОРОВ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

3.1. Нижеследующими условиями а), б), в) описывается класс рассматриваемых операторов.

а) Коэффициенты $a_\alpha(x)$ оператора L принадлежат пространству $C^{2m}(\bar{\Omega})$.

Следующее условие связано с неотрицательностью энергии системы. Для формулировки этого условия произведем некоторые построения.

Предположив, что $w(x,t)$ – решение задачи (2.1) – (2.3), умножим тождество (2.1) на $w' = \frac{\partial w}{\partial t}$ и, проинтегрировав по цилиндру Q_T, получим

$$0 = \iint_{Q_T} w'(w'' + L_1 w)dx\,dt = \iint_{Q_T} w''w'\,dx\,dt + \\ + \iint_{Q_T} w'\Delta^{2m} w\,dx\,dt + \iint_{Q_T} w' Lw\,dx\,dt. \qquad (3.1)$$

Очевидно

$$\iint_{Q_T} w'w''\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int_\Omega |w'|^2 dx\Big|_0^T. \qquad (3.2)$$

Далее, в силу начальных условий (2.2)

$$\iint_{Q_T} w'\Delta^{2m} w\,dx\,dt = \iint_{Q_T} \Delta^m w' \cdot \Delta^m w\,dx\,dt = \\ = \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\Delta^m w)^2 dt\right\} dx = \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta^m w|^2 dx\Big|_0^T. \qquad (3.3)$$

Наконец, преобразовав последний интеграл правой части (3.1), получим

$$\iint_{Q_T} w' Lw\,dx\,dt = \sum_{|\alpha|\le 2m-1} \iint_{Q_T} D^\alpha w' \cdot a_\alpha D^\alpha w\,dx\,dt =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|\le 2m-1} \int_\Omega \left\{ \int_0^T a_\alpha(x) \frac{\partial}{\partial t}(D^\alpha w)^2 dt \right\} dx =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|\le 2m-1} \int_\Omega a_\alpha(x) |D^\alpha w|^2 dx \Bigg|_0^T . \qquad (3.4)$$

Подставляя полученные выражения (3.2) – (3.4) в (3.1), приходим к тождеству

$$\frac{1}{2} \int_\Omega \left[|w'|^2 + |\Delta^m w|^2 + \sum_{|\alpha|\le 2m-1} a_\alpha(x) |D^\alpha w|^2 \right] dx \Big|_0^T = 0. \qquad (3.5)$$

Интеграл энергии обозначим через

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left[|w'|^2 + |\Delta^m w|^2 + \sum_{|\alpha|\le 2m-1} a_\alpha(x) |D^\alpha w|^2 \right] dx. \qquad (3.6)$$

Из (3.5) следует, что $E(t) = \mathrm{const}$ при $t \in [0, T]$. Выражение (3.6) для энергии диктует ограничения на "младшие" члены оператора L_1, а именно,

b) для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \Omega$ имеет место неравенство

$$\sum_{|\alpha|\le 2m-1} a_\alpha(x) \xi^{2\alpha} \ge 0, \quad (\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}); \qquad (3.7)$$

c) для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \Omega$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{|\alpha|\le 2m-1} m_k(x) \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_k} \xi^{2\alpha} \le 0. \qquad (3.8)$$

3.2 Введем функциональные пространства, в которых мы будем исследовать поставленную в §1 задачу управления.

Обозначим через $H^s(\Omega)$ ($s \in \mathbb{Z}_+$) пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_s = \left[\sum_{|\alpha|\le s} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx \right]^{1/2}. \qquad (3.9)$$

По определению, $\dot{H}^s(\Omega)$ подпространство гильбертова пространства $H^s(\Omega)$, являющееся замыканием в норме (3.9) финитных, бесконечно дифференцируемых в Ω функций.

Отметим, что на границе $\Gamma = \partial\Omega$ функции пространства $\overset{\circ}{H}{}^{s}(\Omega)$, вместе со своими производными порядка $s-1$ включительно, стремятся в среднем к нулю.

В пространстве $\overset{\circ}{H}{}^{s}(\Omega)$ зададим норму, эквивалентную (3.9) :

$$'||u||_s = \left[\sum_{|\alpha|=s} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx\right]^{1/2}. \tag{3.10}$$

Наконец, в прямом произведении гильбертовых пространств

$$F = \overset{\circ}{H}{}^{2m}(\Omega) \times L_2(\Omega) \tag{3.11}$$

будем рассматривать норму

$$||\{u,v\}||_F = \left('||u||^2_{2m} + ||v||^2_o\right)^{1/2}, \tag{3.12}$$

где $||\cdot||_o$ – норма пространства $L_2(\Omega)$.

§4. РАЗРЕШИМОСТЬ ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

4.1 В этом параграфе доказан основной результат статьи. А именно, устанавливается существование точного управления рассматриваемой смешанной задачей. Доказательство основано на следующих двух теоремах.

Теорема 4.1. *Пусть $w(x,t)$ – решение задачи (2.1) – (2.3), отвечающее начальным данным $\{w^o, w^1\}$, принадлежащим пространству F. При выполнении условий а), б) существует постоянная $c > 0$, не зависящая от T такая, что*

$$\int_\Sigma |\Delta^m w|^2 d\Sigma \leq c(1+T)||\{w^o, w^1\}||^2_F. \tag{4.1}$$

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия а) – в). Тогда существуют постоянные $c > 0$ и $T > 0$ такие, что для решения $w(x,t)$ задачи (2.1) – (2.3) справедлива оценка*

$$\int_{\Gamma(x^o)\times(0,T)} |\Delta^m w|^2 d\Gamma dt \geq c(T - T_o)||\{w^o, w^1\}||^2_F. \tag{4.2}$$

Доказательство теоремы 4.1. Введем в рассмотрение функции $h_k(x) \in$

$\in C^{2m}(\overline{\Omega})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющие условиям

$$h_k(x)|_\Gamma = \nu_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Умножив тождество (2.1) на $h_k \frac{\partial w}{\partial x_k}$, суммируя по $k = 1, 2, \ldots, n$ и интегрируя по цилиндру Q_T, получаем

$$\sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} w'' h_k(x) \frac{\partial w}{\partial x_k}\, dx\, dt + \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \Delta^{2m} w \cdot h_k(x) \frac{\partial w}{\partial x_k}\, dx\, dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} Lw \cdot h_k(x) \frac{\partial w}{\partial x_k}\, dx\, dt = 0. \tag{4.4}$$

Произведенные опеарции неоднократно применялись различными авторами в подобных ситуациях (см., напр., [15],[16]). Преобразуем вначале

$$I_1 = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} w'' h_k(x) \frac{\partial w}{\partial x_k}\, dx\, dt. \tag{4.5}$$

Интегрируя по частям по переменной t, после несложных преобразований получим

$$I_1 = \sum_{k=1}^n \int_\Omega w' h_k \frac{\partial w}{\partial x_k}\, dx \Bigg|_0^T - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} h_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}(w'^2)\, dx\, dt. \tag{4.6}$$

Учитывая, что $w'|_\Sigma = 0$, будем иметь

$$\sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} h_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}(w'^2)\, dx\, dt = -\sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} w'^2 \frac{\partial h_k}{\partial x_k}\, dx\, dt. \tag{4.7}$$

Обозначим

$$X = \sum_{k=1}^n \int_\Omega w' h_k(x) \frac{\partial w}{\partial x_k}\, dx \Bigg|_0^T \tag{4.8}$$

и подставим (4.7), (4.8) в (4.6). Тогда получим

$$I_1 = X + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} w'^2 \frac{\partial h_k}{\partial x_k}\, dx\, dt. \tag{4.9}$$

Рассмотрим теперь

$$I_2 = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \Delta^{2m} w \cdot h_k(x) \frac{\partial w}{\partial x_k}\, dx\, dt. \tag{4.10}$$

Принимая во внимание условия (2.3) и (4.3), нетрудно убедиться, что

$$
I_2 = \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} \Delta^m \left(h_k \frac{\partial w}{\partial x_k}\right) \cdot \Delta^m w \, dx\, dt -
$$
$$
- \sum_{k,j=1}^{n} \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{\Delta^{m-1} \left(h_k \frac{\partial w}{\partial x_k}\right)\right\} \cdot \Delta^m w \cdot \nu_j \, d\Sigma.
$$

Так как $w|_\Sigma = 0$, то

$$
\frac{\partial w}{\partial x_j} = \nu_j \frac{\partial w}{\partial \nu}. \tag{4.10'}
$$

А поскольку

$$
\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_{k=1}^{n} \nu_k \frac{\partial}{\partial x_k},
$$

то I_2 можем переписать в виде

$$
I_2 = \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} \Delta^m \left(h_k \frac{\partial w}{\partial x_k}\right) \cdot \Delta^m w \, dx\, dt - \int_\Sigma |\Delta^m w|^2 \, d\Sigma. \tag{4.11}
$$

Рассмотрим теперь

$$
I_3 = \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} \Delta^m \left(h_k \frac{\partial w}{\partial x_k}\right) \cdot \Delta^m w \, dx\, dt = \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} h_k(x) \Delta^m \left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right) \cdot \Delta^m w \, dx\, dt +
$$
$$
+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=2m \\ \alpha \neq 0}} a_{\alpha\beta} \iint_{Q_T} D^\alpha h_k(x) D^\beta \left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right) \cdot \Delta^m w \, dx\, dt = I_3' + I_3''. \tag{4.12}
$$

Имеем

$$
I_3' = \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} h_k(x) \Delta^m \left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right) \cdot \Delta^m w \, dx\, dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} h_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} (\Delta^m w)^2 \, dx\, dt =
$$
$$
= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} |\Delta^m w|^2 \, dx\, dt + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \int_\Sigma h_k(x) |\Delta^m w|^2 \nu_k \, d\Sigma.
$$

Учитывая (4.3), получим

$$
I_3' = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} |\Delta^m w|^2 \, dx\, dt + \frac{1}{2} \int_\Sigma |\Delta^m w|^2 \, d\Sigma. \tag{4.13}
$$

Подставив (4.12) и (4.13) в (4.11), будем иметь

$$
I_2 = I_3'' - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} |\Delta^m w|^2 \, dx\, dt - \frac{1}{2} \int_\Sigma |\Delta^m w|^2 \, d\Sigma. \tag{4.14}
$$

Последнее слагаемое соотношения (4.4) преобразуем следующим образом :

$$I_4=\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T}h_k(x)\frac{\partial w}{\partial x_k}\cdot Lw\,dx\,dt=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{|\alpha|\le 2m-1}\iint_{Q_T}D^{\alpha}\left(h_k\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)\cdot a_{\alpha}(x)D^{\alpha}w\,dx\,dt=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{|\alpha|\le 2m-1}\iint_{Q_T}h_k(x)D^{\alpha}\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)\cdot a_{\alpha}(x)D^{\alpha}w\,dx\,dt+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|\le 2m-1\\ \alpha\neq 0}}A_{\alpha\beta}\iint_{Q_T}D^{\alpha}h_kD^{\beta}\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)\cdot a_{\alpha}(x)D^{\alpha}w\,dx\,dt=I_4'+I_4''.\quad(4.15)$$

Подставляя полученные для I_1-I_4 выражения в (4.4), перепишем эту формулу в виде

$$X+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T}w'^2\frac{\partial h_k}{\partial x_k}dx\,dt-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T}\frac{\partial h_k}{\partial x_k}|\Delta^m w|^2\,dx\,dt-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\Sigma}|\Delta^m w|^2\,d\Sigma+I_3''+I_4'+I_4''=0.\quad(4.16)$$

Для доказательства неравенства (4.1) оценим по отдельности слагаемые соотношения (4.16). В силу того, что $h_k\in C^{2m}(\overline{\Omega})$, имеем

$$|I_3''|=\Big|\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=2m\\ \alpha\neq 0}}a_{\alpha\beta}\iint_{Q_T}D^{\alpha}h_kD^{\beta}\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)\cdot\Delta^m w\,dx\,dt\Big|\le$$
$$\le c_1\sum_{k=1}^{n}\sum_{|\beta|\le 2m-1}\iint_{Q_T}\left|D^{\beta}\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)\right|\cdot|\Delta^m w|dx\,dt=$$
$$=c_1\sum_{|\beta|\le 2m}\iint_{Q_T}|D^{\beta}w|\cdot|\Delta^m w|dx\,dt\le$$
$$\le c_2\iint_{Q_T}\left[\sum_{|\beta|\le 2m}|D^{\beta}w|^2+|\Delta^m w|^2\right]dx\,dt\quad(4.17)$$

(здесь и далее через c_i, $i=1,2,\ldots$ обозначаем различные постоянные). Используя, далее, легко проверяемую оценку

$$'\|w\|^2_{2m}\le c_4\iint_{Q_T}|\Delta^m w|^2dx\,dt,\quad(4.18)$$

из (4.17) и (3.6) получаем

$$|I_3''|\le c_5\iint_{Q_T}|\Delta^m w|^2dx\,dt\le c_6\int_0^T E(t)dt=c_6T\,E(0).\quad(4.19)$$

Как нетрудно заметить

$$E(t) \le c_7 \left(\|w'\|_o^2 + {}'\|w\|_{2m}^2\right) \tag{4.20}$$

Используя последнюю оценку, из (4.19) находим

$$|I_3''| \le c_8 T \left(\|w^1\|_o^2 + {}'\|w^o\|_{2m}^2\right) = c_8 T \|\{w^o, w^1\}\|_F^2. \tag{4.21}$$

Далее

$$|I_4'| = |\sum_{k=1}^{n} \sum_{|\alpha| \le 2m-1} \iint_{Q_T} h_k(x) D^\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right) \cdot a_\alpha(x) D^\alpha w \, dx\, dt| \le$$

$$\le c_9 \left(\iint_{Q_T} \sum_{|\alpha| \le 2m} |D^\alpha w|^2 dx\, dt + \sum_{|\alpha| \le 2m-1} \iint_{Q_T} |D^\alpha w|^2 dx\, dt \right) \le$$

$$\le c_{10} \iint_{Q_T} |\Delta^m w|^2 dx\, dt \le$$

$$\le c_{11} \int_0^T E(t) dt = c_{11} T\, E(0) \le c_{12} T \|\{w^o, w^1\}\|_F^2. \tag{4.22}$$

I_4'' оценивается аналогично :

$$|I_4''| = |\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta| \le 2m-1 \\ \alpha \ne 0}} A_{\alpha\beta} \iint_{Q_T} D^\alpha h_k D^\beta \left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right) \cdot a_\alpha(x) D^\alpha w \, dx\, dt| \le$$

$$\le c_{13} T \|\{w^o, w^1\}\|_F^2. \tag{4.23}$$

Имеем

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} w'^2 \frac{\partial h_k}{\partial x_k} dx\, dt \right| \le c_{14} T \|\{w^o, w^1\}\|_F^2, \tag{4.24}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} \Delta^m w \, dx\, dt \right| \le c_{15} T \|\{w^o, w^1\}\|_F^2. \tag{4.25}$$

Остается оценить интеграл X. Легко усмотреть, что

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega w' h_k(x) \frac{\partial w}{\partial x_k} dx \right| \le c_{16} \|\{w^o, w^1\}\|_F^2,$$

откуда вытекаст неравенство

$$|X| \le 2 c_{16} \|\{w^o, w^1\}\|_F^2. \tag{4.26}$$

Из (4.16) следует, что

$$\int_\Sigma |\Delta^m w|^2 d\Sigma \le 2\left(|X| + |I_3''| + |I_4'| + |I_4''|\right) +$$

$$+ \left|\sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} w'^2 \frac{\partial h_k}{\partial x_k} dx\, dt\right| + \left|\sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} |\Delta^m w|^2\, dx\, dt\right|.$$

Подставляя, наконец, (4.17), (4.19), (4.21) - (4.26) в последнее неравенство, приходим к окончательной оценке

$$\int_\Sigma |\Delta^m w|^2 d\Sigma \le c_{17}(1+T)\|\{w^0, w^1\}\|_F^2.$$

Доказательство теоремы 4.2. Пусть $w(x,t)$ - решение задачи (2.1) - (2.3). Умножим тождество (2.1) на $m_k \frac{\partial w}{\partial x_k}$, просуммируем по $k = 1, 2, \ldots, n$ и проинтегрируем по области Q_T. В результате получим

$$0 = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x) \frac{\partial w}{\partial x_k} \cdot w''\, dx\, dt + \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x) \frac{\partial w}{\partial x_k} \cdot \Delta^m w\, dx\, dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x) \frac{\partial w}{\partial x_k} \cdot Lw\, dx\, dt = J_1 + J_2 + J_3. \tag{4.27}$$

Преобразуем слагаемые последнего соотношения.

$$J_1 = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x) \frac{\partial w}{\partial x_k} \cdot w''\, dx\, dt = -\sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x) w' \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x_k}\, dx\, dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \int_\Omega m_k(x) w' \frac{\partial w}{\partial x_k}\, dx \Big|_0^T = \widetilde{X} - \frac{1}{2} \iint_{Q_T} \sum_{k=1}^n m_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} (w')^2\, dx\, dt, \tag{4.28}$$

где

$$\widetilde{X} = \sum_{k=1}^n \int_\Omega m_k(x) w' \frac{\partial w}{\partial x_k}\, dx \Big|_0^T. \tag{4.29}$$

Принимая во внимание, что $w'|_\Sigma = 0$ и $\frac{\partial m_k}{\partial x_k} \equiv 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, из (2.28) получаем

$$J_1 = \widetilde{X} + \frac{n}{2} \iint_{Q_T} w'^2\, dx\, dt. \tag{4.30}$$

Далее

$$J_2 = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x) \frac{\partial w}{\partial x_k} \cdot \Delta^{2m} w\, dx\, dt = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \Delta^m\left(m_k(x) \frac{\partial w}{\partial x_k}\right) \cdot \Delta^m w\, dx\, dt -$$

$$-\sum_{k,j=1}^{n}\int_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\Delta^{m-1}(m_k\frac{\partial w}{\partial x_k})\right\}\Delta^m w\,\nu_j\,d\Sigma = J_2' - J_2''. \tag{4.31}$$

Заметив, что $\frac{\partial m_k}{\partial x_j} = \delta_{jk}$, где δ_{jk} – символ Кронеккера, получим

$$J_2' = \sum_{k,j=1}^{n}\iint_{Q_T}\Delta^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(m_k(x)\frac{\partial w}{\partial x_k})\right)\cdot\Delta^m w\,dx\,dt =$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T}m_k(x)\Delta^m\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)\cdot\Delta^m w\,dx\,dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T}\Delta^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)\cdot\Delta^m w\,dx\,dt = \widetilde{J_2'} + \iint_{Q_T}|\Delta^m w|^2 dx\,dt. \tag{4.32}$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\widetilde{J_2'} = -\frac{n}{2}\iint_{Q_T}|\Delta^m w|^2 dx\,dt + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{\Sigma}m_k(x)|\Delta^m w|^2\nu_k\,d\Sigma.$$

Подставив последнее выражение для $\widetilde{J_2'}$ в (4.32), получим

$$J_2' = (1-\frac{n}{2})\iint_{Q_T}|\Delta^m w|^2 dx\,dt + \frac{1}{2}\int_{\Sigma}(\sum_{k=1}^{n}m_k\nu_k)|\Delta^m w|^2\,d\Sigma. \tag{4.33}$$

Преобразуем теперь J_2'' :

$$J_2'' = \sum_{k,j=1}^{n}\int_{\Sigma}m_k(x)\Delta^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)\cdot\Delta^m w\cdot\nu_j\,d\Sigma +$$

$$+\sum_{k,j=1}^{n}\int_{\Sigma}\Delta^{m-1}\left(\frac{\partial m_k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial w}{\partial x_k}\cdot\Delta^m w\cdot\nu_j\,d\Sigma = \overline{J_2''} + \widetilde{J_2''}. \tag{4.34}$$

В силу (4.10′)

$$\overline{J_2''} = \sum_{k,j=1}^{n}\int_{\Sigma}m_k(x)\nu_k\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Delta^{m-1}w\cdot\Delta^m w\,d\Sigma = \int_{\Sigma}(\sum_{k=1}^{n}m_k\nu_k)\cdot|\Delta^m w|^2\,d\Sigma. \tag{4.35}$$

С учетом условий (2.3) получаем

$$\widetilde{J_2''} = \sum_{k,j=1}^{n}\int_{\Sigma}\Delta^{m-1}\left(\frac{\partial m_k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial w}{\partial x_k}\cdot\Delta^m w\cdot\nu_j\,d\Sigma = \sum_{k=1}^{n}\int_{\Sigma}\Delta^{m-1}\frac{\partial w}{\partial x_k}\cdot\Delta^m w\cdot\nu_j\,d\Sigma = 0, \tag{4.36}$$

и, подставив (4.35) и (4.36) в (4.34), имеем

$$J_2'' = \int_{\Sigma}(\sum_{k=1}^{n}m_k\nu_k)\cdot|\Delta^m w|^2\,d\Sigma. \tag{4.37}$$

Возвращаясь к соотношению (4.31), заметим, что в силу (4.33) и (4.37)

$$J_2 = (1 - \frac{n}{2}) \iint_{Q_T} |\Delta^m w|^2 dx\, dt - \frac{1}{2} \int_\Sigma (\sum_{k=1}^n m_k \nu_k) |\Delta^m w|^2\, d\Sigma. \tag{4.38}$$

Воспользовавшись (4.34) и (4.38), перепишем (4.27) в виде

$$\tilde{X} + \frac{n}{2} \iint_{Q_T} |w'|^2 dx\, dt + (1 - \frac{n}{2}) \iint_{Q_T} |\Delta^m w|^2 dx\, dt -$$

$$-\frac{1}{2} \int_\Sigma (\sum_{k=1}^n m_k \nu_k) |\Delta^m w|^2\, d\Sigma + J_3 = 0. \tag{4.39}$$

Преобразуем, наконец, J_3 :

$$J_3 = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x) \frac{\partial w}{\partial x_k} \cdot Lw\, dx\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{|\alpha| \le 2m-1} \iint_{Q_T} D^\alpha \left(m_k(x) \frac{\partial w}{\partial x_k} \right) \cdot a_\alpha(x) D^\alpha w\, dx\, dt =$$

$$= \sum_{|\alpha| \le 2m-1} \iint_{Q_T} a_\alpha(x) |D^\alpha w|^2\, dx\, dt + J_3', \tag{4.40}$$

где

$$J_3' = \sum_{k=1}^n \sum_{|\alpha| \le 2m-1} \iint_{Q_T} m_k(x) D^\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_k} \right) \cdot a_\alpha(x) D^\alpha w\, dx\, dt. \tag{4.41}$$

Далее, имеем

$$J_3' = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{|\alpha| \le 2m-1} \iint_{Q_T} m_k(x) a_\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x_k} (D^\alpha w)^2\, dx\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{|\alpha| \le 2m-1} \iint_{Q_T} \left[a_\alpha(x) \frac{\partial m_k}{\partial x_k} + m_k \frac{\partial a_\alpha(x)}{\partial x_k} \right] |D^\alpha w|^2\, dx\, dt =$$

$$= -\frac{n}{2} \sum_{|\alpha| \le 2m-1} \iint_{Q_T} a_\alpha(x) |D^\alpha w|^2\, dx\, dt -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{|\alpha| \le 2m-1} \iint_{Q_T} m_k(x) \frac{\partial a_\alpha(x)}{\partial x_k} |D^\alpha w|^2\, dx\, dt. \tag{4.42}$$

Подставляя (4.42) в (4.40), получаем

$$J_3 = (1 - \frac{n}{2}) \sum_{|\alpha| \le 2m-1} \iint_{Q_T} a_\alpha(x) |D^\alpha w|^2\, dx\, dt -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{|\alpha| \le 2m-1} \iint_{Q_T} m_k(x) \frac{\partial a_\alpha(x)}{\partial x_k} |D^\alpha w|^2\, dx\, dt. \tag{4.43}$$

Возвращаясь к соотношению (4.39), с учетом (4.43) находим

$$\widetilde{X}+\frac{n}{2}\iint_{Q_T}|w'|^2dx\,dt+\left(1-\frac{n}{2}\right)\iint_{Q_T}|\Delta^m w|^2dx\,dt-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\Sigma}\left(\sum_{k=1}^{n}m_k\nu_k\right)|\Delta^m w|^2\,d\Sigma+\left(1-\frac{n}{2}\right)\sum_{|\alpha|\le 2m-1}\iint_{Q_T}a_\alpha(x)|D^\alpha w|^2\,dx\,dt-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{|\alpha|\le 2m-1}\iint_{Q_T}m_k(x)\frac{\partial a_\alpha(x)}{\partial x_k}|D^\alpha w|^2\,dx\,dt=0. \tag{4.44}$$

Перепишем тождество (4.44) в виде

$$\widetilde{X}+\frac{n-1}{2}Y-\frac{1}{2}\int_{\Sigma}\left(\sum_{k=1}^{n}m_k\nu_k\right)|\Delta^m w|^2\,d\Sigma+\frac{1}{2}\iint_{Q_T}\Bigg[|w'|^2+|\Delta^m w|^2+$$
$$+\sum_{|\alpha|\le 2m-1}a_\alpha(x)|D^\alpha w|^2-\sum_{k=1}^{n}\sum_{|\alpha|\le 2m-1}m_k\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_k}|D^\alpha w|^2\Bigg]\,dx\,dt=0, \tag{4.45}$$

где

$$Y=\iint_{Q_T}\Bigg[|w'|^2-|\Delta^m w|^2-\sum_{|\alpha|\le 2m-1}a_\alpha(x)|D^\alpha w|^2\Bigg]\,dx\,dt. \tag{4.46}$$

Докажем, что

$$Y=\int_\Omega w\cdot w'\,dx\Big|_0^T. \tag{4.47}$$

Умножив тождество (2.1) на $w(x,t)$ и интегрируя по цилиндру Q_T, получим

$$\iint_{Q_T}(w''+\Delta^{2m}w+Lw)w\,dx\,dt=0, \tag{4.48}$$

и, после несложных преобразований имеем

$$0=\int_\Omega w\cdot w'\,dx\Big|_0^T-\iint_{Q_T}|w'|^2dx\,dt+\iint_{Q_T}|\Delta^m w|^2dx\,dt+$$
$$+\sum_{|\alpha|\le 2m-1}\iint_{Q_T}a_\alpha(x)|D^\alpha w|^2dx\,dt=\int_\Omega w\cdot w'\,dx\Big|_0^T-Y,$$

что равносильно (4.47).

Перейдем к доказательству оценки (4.2). С этой целью рассмотрим вначале последнее слагаемое левой части равенства (4.45). В силу условия в) теоремы

$$\frac{1}{2}\iint_{Q_T}\Bigg[|w'|^2+|\Delta^m w|^2+\sum_{|\alpha|\le 2m-1}a_\alpha(x)|D^\alpha w|^2-$$
$$-\sum_{k=1}^{n}\sum_{|\alpha|\le 2m-1}m_k\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_k}|D^\alpha w|^2\Bigg]\,dx\,dt\ge$$
$$\ge\int_0^T E(t)dt=T\,E(0)\ge c_1T\|\{w^0,w^1\}\|_F^2. \tag{4.49}$$

Здесь мы воспользовались очевидной оценкой

$$E(t) \geq c_1(' \|w\|_{2m}^2 + \|w'\|_0^2), \quad t \in [0,T]. \tag{4.50}$$

Подставляя (4.49) в (4.45) и разлагая интеграл по поверхности Σ в сумму двух интегралов по $\Gamma(x^o) \times (0,T)$ и $\Gamma_*(x^o) \times (0,T)$, приходим к оценке

$$c_1 T \|\{w^o, w^1\}\|_F^2 - \frac{1}{2}\int_{\Gamma(x^o)\times(0,T)} (\sum_{k=1}^n m_k \nu_k)|\Delta^m w|^2 \, d\Gamma \, dt \leq -\widetilde{X} - \frac{n-1}{2} Y. \tag{4.51}$$

При выводе этой оценки мы воспользовались тем, что

$$\int_{\Gamma_*(x^o)\times(0,T)} (\sum_{k=1}^n m_k \nu_k)|\Delta^m w|^2 \, d\Gamma \, dt \leq 0.$$

Интегралы $\widetilde{X}$ и Y оцениваются точно так же, как X при доказательстве теоремы 4.1. Стало быть, имеем

$$|\widetilde{X}| \leq c_2 \|\{w^o, w^1\}\|_F^2, \tag{4.52}$$

$$|Y| \leq c_3 \|\{w^o, w^1\}\|_F^2. \tag{4.53}$$

Обозначив

$$R(x^o) = \sup_{x \in \Gamma} \sum_{k=1}^n m_k(x)\nu_k > 0,$$

из (4.51) – (4.53) получим

$$T\|\{w^o, w^1\}\|_F^2 \leq \frac{R(x^o)}{2c_1} \int_{\Gamma(x^o)\times(0,T)} |\Delta^m w|^2 \, d\Gamma \, dt + \frac{1}{c_1}\left(c_2 + \frac{n-1}{2}c_3\right) \|\{w^o, w^1\}\|_F^2.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{\Gamma(x^o)\times(0,T)} |\Delta^m w|^2 \, d\Gamma \, dt \geq \frac{2c_1}{R(x^o)}\left[T - \frac{1}{c_1}\left(c_2 + \frac{n-1}{2}c_3\right)\right] \|\{w^o, w^1\}\|_F^2.$$

Обозначив $T_o = \frac{1}{c_1}\left(c_2 + \frac{n-1}{2}c_3\right)$ и $c = \frac{2c_1}{R(x^o)}$, приходим к окончательной оценке :

$$\int_{\Gamma(x^o)\times(0,T)} |\Delta^m w|^2 \, d\Gamma \, dt \geq c(T - T_o)\|\{w^o, w^1\}\|_F^2.$$

Как следствия из теорем 4.1 и 4.2 получаем следующие результаты.

Теорема 4.3. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям а) – в). Тогда при достаточно больших T интеграл*

$$\left(\int_{\Gamma(x^\circ)\times(0,T)} |\Delta^m w|^2 \, d\Gamma \, dt\right)^{1/2} \tag{4.54}$$

определяет норму на множестве начальных данных $\{w^\circ, w^1\}$ задачи (2.1) – (2.3), эквивалентную норме пространства Соболева на прямом произведении $F = \overset{\circ}{H}{}^{2m}(\Omega) \times L_2(\Omega)$.

Доказательство. Из неравенства (4.1) следует существование интеграла (4.54). Если интеграл (4.54) равняется нулю, то, в силу (4.2), $w^\circ = 0$, $w^1 = 0$ при $T > T_o$. Поскольку задача (2.1) – (2.3) имеет единственное обобщенное решение, отсюда следует, что $w = 0$ внутри Q_T. Тем самым, теорема доказана.

Теорема 4.4. *При достаточно больших $T > 0$ оператор Λ, определяемый формулой (2.16), осуществляет изоморфизм между пространствами F и F', где $F' = H^{-2m}(\Omega) \times L_2(\Omega)$, а $H^{-2m}(\Omega)$ – сопряженное к $\overset{\circ}{H}{}^{2m}(\Omega)$ пространство.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из теоремы 4.3, поскольку в силу (2.20) и (2.21)

$$\begin{aligned} < \Lambda\{w^\circ, w^1\}, \{w^\circ, w^1\} >= \int_{\Gamma(x^\circ)\times(0,T)} |\Delta^m w|^2 \, d\Gamma \, dt = \\ = \int_\Omega (z'(0)w^\circ - z(0)w^1)dx. \end{aligned}$$

Ввиду обратимости оператора Λ при достаточно больших T, для любой пары $\{z'(0), -z(0)\}$, где $z'(0) \in H^{-2m}(\Omega)$, $z(0) \in L_2(\Omega)$, найдется единственная пара $\{w^\circ, w^1\}$: $w^\circ \in \overset{\circ}{H}{}^{2m}(\Omega), w^1 \in L_2(\Omega)$, такая, что $\Lambda\{w^\circ, w^1\} = \{z'(0), -z(0)\}$. Тем самым, оператор Λ есть изоморфизм из F в F', и теорема доказана.

Приведем теперь основной результат работы.

Теорема 4.5. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям а) – в), и $T > 0$ достаточно велико. Тогда при любых начальных данных $\{u^\circ, u^1\} \in F$ существует* *точное управление* $v \in L_2(\Gamma(x^\circ) \times (0,T))$, *приводящее систему (1.6) – (1.9) с начальными условиями* u°, u^1 *в состояние покоя за время* T.

Доказательство. Пусть $\{w^\circ, w^1\} \in F$. Как известно [14], эти начальные данные определяют единственное обобщенное решение $w(x,t)$ задачи (2.1) – (2.3). Согласно теореме 4.1, $\Delta^m w|_\Sigma$ существует и принадлежит пространству $L_2(\Sigma)$. Подставляя это значение $\Delta^m w$ в условие (2.6) и решая задачу (2.4) – (2.7), находим функцию $z(x,t)$. Повторяя рассуждения §2, легко убедиться в том, что $u = z(x,t)$ есть решение задачи точного управления системой (1.6) – (1.9).

4.2. О единственности управления. Заметим, что при заданном $T > T_0$ существует бесконечное множество управлений v, приводящих систему (1.6) – (1.9) в состояние покоя. В самом деле, для каждого $\hat{T}$, $0 < \hat{T} < T$, в силу теоремы 4.5, существует управление $\hat{v}$ такое, что для решения $\hat{u}(t,x,\hat{v})$ задачи (1.6) – (1.9) в цилиндре $Q_{\hat{T}}$ имеем $\hat{u}(\hat{T},x,\hat{v}) = \hat{u}'(\hat{T},x,\hat{v}) = 0$. Полагая

$$v = \begin{cases} \hat{v}, & \text{при } 0 < t \le \hat{T} \\ 0, & \text{при } \hat{T} < t < T, \end{cases} \tag{4.55}$$

получаем, что управление v приводит систему (1.6) – (1.9) в состояние покоя за время $\hat{T} \le T$. Как и в случае волнового уравнения (см. [17], а также [10], замечание 1.6), можно показать, что оптимальное управление $v_o \in L_2(\Gamma(x^\circ) \times (0,T))$, связанное условием (2.17) есть единственное управление, сообщающее минимум функционалу

$$\Phi(v_o) = \inf_v \int_{\Gamma(x^\circ)\times(0,T)} v^2 \, d\Gamma \, dt,$$

где inf берется по всевозможным управлениям вида (4.55), приводящим систему (1.6) – (1.9) в состояние покоя за время T. Доказательство этого факта может быть получено рассуждениями, аналогичными примененным в [17], с естественными видоизменениями.

ABSTRACT. The paper investigates control problems for systems described by high-order evolutionary partial differential equations. The existence of exact control for mixed problems (where control can be applied

on the boundary or on part of the boundary) for a class of high-order evolutionary operators n suitable functional spaces is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961, Наука, Москва, 1969.
2. M. R. Hestens, Calculus of Variations and Optimal Control Theory, W., 1966.
3. А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, "Расширения вариационных задач", Труды МФО, т. 18, стр. 187 - 246, 1968.
4. А. Г. Бутковский, Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, Наука, Москва, 1965.
5. P. K. Wang, "Control of distributed parameter systems", in transactions, Advances in Control Systems. Theory and applications, ed. C.T.Loondes, vol. 1, Acad. Press, New York, London, pp. 75 - 172, 1984.
6. D. L. Russel, "Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations", Recem progress and open questions, SIAM Rev., vol. 20, pp. 639 - 739, 1978.
7. D. L. Russel, "A unified boundary controllability theory", Stud. Appl. Math., vol. 52, pp. 189 - 211, 1973.
8. Ж.-Л. Лионс, Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных, Мир, Москва, 1972.
9. J.-L. Lions, "Optimization pour certains classes dedustions devolution non lineare", Ann Mat. pure ed Appl., vol. 72, pp. 275 - 294, 1966.
10. J.-L. Lions, "Exact controlability, stabilization and perturbations for distributed systems", SIAM Review, vol. 30, no. 1, pp. 3 - 68, 1988.
11. W. Littman and L. Markus, "Exact boundary controllability of a hybrid system of elasticity", Rept., pp. 86 - 147, Univ. of Minnesota, Minneapolis, MN, 1987.
12. G. S. Nurre, R. S. Pyan, H. N. Scofield and J. L. Sims, "Dynamics and control of large space structures", J. Guidance Control Dynamics, vol. 7, pp. 514 - 526, 1984.
13. J. Lagnese, "Decay of solutions of wave equations in a bounded region with boundary dissipation", J. Dif. Eq., vol. 50, pp. 163 - 182, 1983.
14. J.-L. Lions and E. Magenes, Problémes aux Limites Nonhomogènes et Ápplications, vol. 1 and vol. 2, Dunod, Paris, 1968.
15. L. F. Ho, "Observabilitè frontière de ľequation des ondes", C. R. Acad. Sei. Paris Sér. 1 Math, vol. 302, pp. 443 - 446, 1986.
16. Ж.-Л. Лионс, Управление сингулярными распределенными системами, Наука, Москва, 1987.
17. J.-L. Lions, "Controlabilitè exacte, stabilization perturbations des systèmes distribuès", vol. 1, Masson, Paris, 1988.

26 января 1994

Ереванский государственный университет,
Институт математики
Национальной Академии Наук Армении

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДЛИН ПРООБРАЗОВ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ ОКРУЖНОСТЕЙ ПРИ МЕРОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Г. А. Сукиасян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, №2, 1994

В 1930 году Л. Альфорсом [1] был доказан следующий принцип длины и площади : для любой регулярной в области D функции $w(z)$ имеет место неравенство

$$\int_0^\infty \frac{L^2(D,\Gamma(R))}{Rp(R)}\,dR \le 2\pi S(D). \tag{1}$$

Здесь $L(D,\Gamma(R))$ - суммарная длина тех кривых в области D, на которых $|w(z)| = R$, где $\Gamma(R)$ - окружность $\{w\colon |w| = R\}$, $p(R) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} n(D, Re^{i\theta})\,d\theta$, $n(D, Re^{i\theta})$ число корней уравнения $w(z) = Re^{i\theta}$ в D, с учетом кратностей, а $S(D)$ - площадь D.

Неравенство (1) имеет многочисленные применения в теории p-листных в среднем по окружности (по площади) функций (см. У. Хейман [3]), а также в теории конформных и квазиконформных отображений (см. Лелон-Ферран [4] и Г. Д. Суворов [5]).

Теорема А. *(Г. А. Барсегян [6]). Пусть $w(z)$ - мероморфная в области D функция и пусть $\psi(R)$ непрерывная, положительная функция на $[0,+\infty)$. Тогда при любом комплексном числе a*

$$\int_0^\infty \frac{L(D,\Gamma(R,a))}{\psi(R)}\,dR \le 2\iint\limits_D \frac{|w'(z)|}{\psi(|w(z)-a|)}\,d\sigma, \tag{2}$$

где $\Gamma(R,a)$ - окружность $\{w\colon |w-a| = R\}$ а $d\sigma$ - элемент площади.

Как выяснилось впоследствии, метод доказательства этой теоремы приводит к тождеству

$$\int_0^\infty \frac{L(D,\Gamma(R,a))}{\psi(R)}\,dR = \iint\limits_D \frac{|w'(z)|}{\psi(|w(z)-a|)}\,d\sigma. \qquad (2^*)$$

При $a = 0$ и $\psi(R) = Rp(R)\,L^{-1}(D,\Gamma(R))$ из тождества (2^*) и неравенства Гёльдера следует неравенство (1). Тем самым, (2^*) может быть рассмотрено как модификация принципа длины и площади. Вместе с тем, тождество (2^*) является основой для установления разнообразных геометрических результатов, полученных с применением различных ψ (см. [6]).

Например, при $\psi(R) \equiv 1$, $\psi(R) = 1 + R^2$, или $\psi(R) = R$, используя неравенство Гёллера получим

$$\int_0^\infty L(D,\Gamma(R,a))\,dR = \iint\limits_D |w'(z)|\,d\sigma \le \sqrt{S(D)}\cdot\sqrt{S(w(D))}, \qquad (3)$$

$$\int_0^\infty \frac{L(D,\Gamma(R,a))}{1+R^2}\,dR = \iint\limits_D \frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}\,d\sigma \le \sqrt{S(D)}\cdot\sqrt{A(w(D))}, \qquad (4)$$

$$\int_0^\infty \frac{L(D,\Gamma(R,a))}{R}\,dR = \iint\limits_D \left|\frac{w'(z)}{w(z)-a}\right|\,d\sigma, \qquad (5)$$

где $S(w(D))$ – площадь w-образа D с учетом кратности покрытия, $A(w(D))$ – сферическая площадь w-образа D с учетом кратности покрытия. Отметим, что при $D = D(r) = \{z\colon |z| < r\}$ имеем $A(w(D)) = \pi A(r)$, где $A(r)$ – характеристика Л. Альфорса[1].

Пусть $D_a = \{z \in D\colon |w(z) - a| < 1\}$. Тогда

$$L(D_a,\Gamma(R,a)) = \begin{cases} L(D,\Gamma(R,a)), & \text{при} \quad 0 < R < 1 \\ 0, & \text{при} \quad 1 \le R. \end{cases}$$

Тем самым, из (5) следует, что

$$L^*(D,a) := \int_0^1 \frac{L(D,\Gamma(R,a))}{R}\,dR = \iint_{D_a} \left|\frac{w'(z)}{w(z)-a}\right|\,d\sigma. \qquad (6)$$

Пользуясь тождеством (6), мы установим нижеследующую теорему, содержащую некий аналог второй основной теоремы Р. Неванлинны для величин $L^*(r,a)$.

[1] В дальнейшем, если $D = D(r)$, то вместо D будем писать r

Теорема. *Пусть $w(z)$ – мероморфная в $\mathbb{C}$ функция конечного нижнего порядка λ, $a_\nu \in \mathbb{C}$, $\nu = 1, 2, \ldots, q$ – конечный набор попарно различных комплексных чисел. Тогда существует неограниченная последовательность значений r, при которых*

$$\sum_{\nu=1}^{q} L^*(r, a_\nu) \leq K(\lambda + 1) r T(r), \tag{7}$$

где $K < \infty$ – абсолютная постоянная, а $T(r) = T(r, w)$ – характеристика Неванлинны функции $w(z)$.

Следствие. Существует не более чем счетное множество значений a, для которых

$$L^*(a) := \liminf_{r\to\infty} \frac{L^*(r, a)}{rT(r)} > 0$$

и

$$\sum_{(a)} L^*(a) \leq K(\lambda + 1). \tag{8}$$

Взяв $D_a(r) = \{z\colon |z| < r, |w(z) - a| < 1\}$, получаем

$$\int_0^1 L(r, \Gamma(R, a))\, dR = \iint_{D_a(r)} |w'(z)|\, d\sigma \leq \iint_{D_a(r)} \left|\frac{w'(z)}{w(z) - a}\right| d\sigma.$$

Соотношение (8), подобно соотношению дефектов Неванлинны [2] показывает, что средние длин $L(r, \Gamma(R, a))$ $(0 < R < 1)$ прообразов $w^{-1}(\Gamma(R, a))$ малы для всех $a \in \mathbb{C}$, за исключением не более чем счетного множества значений.

Лемма 1. *([7]). Пусть $w(z)$ мероморфная в $\mathbb{C}$ функция и пусть $a_\nu \in \mathbb{C}$, $\nu = 1, \ldots, q$ – попарно различные комплексные числа. Тогда при любых $0 < r_1 < r_2$ справедливо неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^{q} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\Delta(t, a_\nu)} \left|\frac{w'(te^{i\varphi})}{w(te^{i\varphi}) - a_\nu}\right| t\, d\varphi\, dt \leq$$
$$\leq 2\frac{r_2}{r_1} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \left|\frac{w''(te^{i\varphi})}{w'(te^{i\varphi})}\right| t\, d\varphi\, dt + h_0 \frac{r_2}{r_1} \int_{r_1}^{r_2} L(t)\, dt, \tag{9}$$

где $\Delta(t, a) = \{z\colon |z| = t, |w(z) - a| < 1\}$; $h_0 = h(a_1, \ldots, a_q) = \mathrm{const} < \infty$; $L(t) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{|w'(te^{i\varphi})|}{1 + |w(te^{i\varphi})|^2}\, t\, d\varphi$ · сферическая длина образа окружности $|z| = t$ при отображении $w(z)$.

Так как $(0, r] = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left[\frac{r}{2^{n+1}}; \frac{r}{2^n}\right]$, из (9) получим

$$\sum_{\nu=1}^{q} \int_0^r \int_{\Delta(t,a_\nu)} \left| \frac{w'(te^{i\varphi})}{w(te^{i\varphi}) - a_\nu} \right| t\, d\varphi\, dt =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{q} \int_{r/2^{n+1}}^{r/2^n} \int_{\Delta(t,a_\nu)} \left| \frac{w'(te^{i\varphi})}{w(te^{i\varphi}) - a_\nu} \right| t\, d\varphi\, dt \le$$
$$\le \sum_{n=0}^{\infty} \left(4 \int_{r/2^{n+1}}^{r/2^n} \int_0^{2\pi} \left| \frac{w''(te^{i\varphi})}{w'(te^{i\varphi})} \right| t\, d\varphi\, dt + 2h_0 \int_{r/2^{n+1}}^{r/2^n} L(t)\, dt \right) =$$
$$= 4 \int_0^r \int_0^{2\pi} \left| \frac{w''(te^{i\varphi})}{w'(te^{i\varphi})} \right| t\, d\varphi\, dt + 2\, h_0 \int_0^r L(t)\, dt. \tag{10}$$

При фиксированном $c > 1$, по неравенству Гёльдера

$$\int_0^r L(t)\, dt = \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{|w'(te^{i\varphi})|}{1 + |w(te^{i\varphi})|^2} t\, d\varphi\, dt \le \pi r \sqrt{A(r)} \le$$
$$\le \frac{\pi}{\sqrt{\ln c}} r \sqrt{T_0(cr, w)} \le \frac{\pi}{\sqrt{\ln c}} r \sqrt{T(cr, w) + \frac{1}{2} \ln 2}, \tag{11}$$

где $T_0(r) = \int_0^r \frac{A(t)}{t}\, dt$.

Лемма 2. *([7]). Пусть $w(z) \not\equiv const$ – мероморфная в $\mathbf{C}$ функция, и $c > 1$ – фиксированное число. Тогда для каждого $r > r_0$ выполняется неравенство*

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} \left| \frac{w''(te^{i\varphi})}{w'(te^{i\varphi})} \right| t\, d\varphi\, dt \le \frac{K}{\ln c} r\, T(cr, w) \tag{12}$$

где K – абсолютная постоянная.

В силу формул (10) – (12)

$$\sum_{\nu=1}^{q} L^*(r, a_\nu) = \sum_{\nu=1}^{q} \int_0^r \int_{\Delta(t,a_\nu)} \left| \frac{w'(te^{i\varphi})}{w(te^{i\varphi}) - a_\nu} \right| t\, d\varphi\, dt \le$$
$$\le \frac{K}{\ln c} r\, T(cr, w) + \frac{K}{\sqrt{\ln c}} h_0\, r \sqrt{T(cr, w)}, \qquad r > r_1. \tag{13}$$

Лемма 3. *([8]) Если мероморфная в $\mathbf{C}$ функция $w(z)$ имеет конечный нижний порядок λ, то для любого $c > 1$ существует последовательность $r_n = r_n(c) \to \infty$, $n \to \infty$, на которой*

$$T(cr_n, w) \le c^{\lambda+1} T(r_n, w). \tag{14}$$

Согласно (13) и (14), при $r_n \ge r_2 = r_2(h_0)$ имеет место неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{q} L^*(r_n, a_\nu) \le K c^{\lambda+1} r_n T(r_n, w) \left(\frac{1}{\ln c} + \frac{1}{\sqrt{\ln c}} \right).$$

Положив $c = 1 + \dfrac{1}{\lambda + 1}$, приходим к утверждению теоремы.

Разделяя обе стороны (7) на $r_n T(r_n)$ и переходя к нижнему пределу при $n \to \infty$, получим

$$\sum_{\nu=1}^{q} L^*(a_\nu) \leq K(\lambda + 1). \tag{15}$$

Остается показать, что множество $\{a: L^*(a) > 0\}$ – не более чем счетное. Для это заметим, что правая сторона (15) не зависит от q, поэтому количество тех значений a, для которых $L^*(a) > \frac{1}{N}$, меньше чем $NK(\lambda + 1)$. Следовательно, множество $\{a \in \mathbf{C}: L^*(a) > 0\}$ может быть представлено как объединение счетного числа конечных множеств. Тем самым, само это множество не более чем счетное.

В заключение приношу благодарность Г. А. Барсегяну за ценные обсуждения результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Ahlfors, "Untersuchungen zur Theorie konformen Abbildung und der ganzen Funktionen," Acta Soc. Sci. Fenn, series A, vol. 1, no. 9, 1930.
2. Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, Москва, Гостехиздат, 1941.
3. У. Хейман, Многолистные функции, Москва, Иностр. лит., 1960.
4. J. Lelong-Ferrand, Représentation Conforme et Transformations à intègrate de Dirichlet Bornèe, Paris, 1955.
5. Г. Д. Суворов, Обобщенный принцип длины и площади в теории отображений, Киев, Наукова думка, 1985.
6. Г. А. Барсегян, "О геометрии мероморфных функций", Мат. сборник, т. 114 (156), №. 2, стр. 179 – 226, 1981.
7. Г. А. Барсегян, "Исключительные значения, ассоциированные с логарифмическими производными мероморфных функций", Известия АН Арм. ССР, Математика, т. 16, №. 5, стр. 408 – 423, 1981.
8. В. П. Петренко, Рост мероморфных функций, Харьков, Вища школа, 1978.

15 марта 1994

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 29 НОМЕР 2 1994

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы

CONTENTS

VOLUME 29 NUMBER 2 1994

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS
(NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)