ISSN 0002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Գ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ
Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԿԵԼՅԱՆ
Ա. Ռ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու քարտուղար Մ. Ա. Հովհաննիսյան

«Մաթեմատիկա ամ-

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Հուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակիչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (սրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերադարձնելու նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ. Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ, СУБГАРМОНИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ И В ПОЛУПЛОСКОСТИ

К. Л. Аветисян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, №1, 1994

В статье установлены параметрические представления классов $Sb_\alpha(\mathbb{D})$ $(0 < \alpha < \infty)$ субгармонических в единичном круге $\mathbb{D}$ функций $u(z)$, удовлетворяющих условию $\iint_{\mathbb{D}} (1-|z|)^{\alpha-1} u^+(z)\, dm_2(z) < \infty$, а также для классов $Sb_\alpha(G^+)$ $(0 < \alpha < \infty)$ функций $u(z)$, субгармонических в верхней полуплоскости G^+ и удовлетворяющих условиям

$$\iint_{G^+} (\operatorname{Im} z)^{\alpha-1} |u(z)|\, dm_2(z) < \infty, \qquad \iint_{G^+} (\operatorname{Im} z)^{\alpha+1}\, d\mu(z) < \infty,$$

где $u^+ = \max\{u, 0\}$, $m_2(z)$ – мера Лебега на плоскости, μ – мера Рисса, ассоциированная с $u(z)$. Гармонические члены полученных представлений записаны с применением мер О. В. Бесова на единичной окружности и на вещественной оси.

В статье установлены представления типа Рисса для некоторых классов субгармонических в единичном круге и верхней полуплоскости функций. Указанные классы субгармонических в круге функций являются обобщениями классов мероморфных функций N_α^* М. М. Джрбашяна [1, 2], а доказанная теорема – распространением на субгармонические функции одного результата Ф. А. Шамояна [3], где найденные им ранее [4, 5] параметрические представления классов N_α^* существенно модифицированы с применением мер О. В. Бесова на единичной окружности. Теорема, установленная в полуплоскости, является распространением на субгармонические функции одного частного случая факторизационного результата А. М. Джрбашяна [6]. При этом, здесь осуществлена аналогичная модификация с применением мер О. В. Бесова на бесконечном отрезке.

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определение 1. Класс $Sb_\alpha(\mathbb{D})$ $(0 < \alpha < \infty)$ – множество субгармонических в единичном круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функций $u(z)$, удовлетворяющих условию

$$\iint_{\mathbb{D}} (1 - |z|)^{\alpha-1} u^+(z)\, dm_2(z) < \infty, \tag{1.1}$$

где $u^+ = \max\{u, 0\}$, $m_2(z)$ – мера Лебега на $\mathbb{D}$.

Замечание. Классы $Sb_\alpha(\mathbb{D})$ $(0 < \alpha < \infty)$ являются обобщениями классов N_α^* М. М. Джрбашяна [1, 2], ибо после замены α на $\alpha + 1$ и подстановки $u(z) = \log|f(z)|$, где $f(z)$ – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, класс $Sb_\alpha(\mathbb{D})$ совпадает с голоморфным подклассом N_α^*.

Теорема 1. *а) Класс $Sb_\alpha(\mathbb{D})$ $(0 < \alpha < \infty)$ совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$u(z) = \iint_{\mathbb{D}} \log|A_\beta(z, \zeta)|\, d\mu(\zeta) + \\ + \frac{1}{2\pi}\Gamma(1 + \alpha) \int_{-\pi}^{\pi} Re\left[\frac{2}{(1 - e^{-i\theta}z)^{\alpha+1}} - 1\right] d\psi(\theta), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{1.2}$$

где $\beta > \alpha$ произвольное число и

$$A_\beta(z, \zeta) = \exp\left[-\int_{|\zeta|^2}^{1} \frac{(1 - \tau)^\beta}{(1 - z\zeta^{-1}\tau)^{\beta+1}} \frac{d\tau}{\tau}\right] \quad (\zeta \neq 0), \qquad A_\beta(z, 0) = z, \tag{1.3}$$

есть элементарный фактор типа Бляшке М. М. Джрбашяна [1, 2], $\mu(\zeta)$ – неотрицательная борелевская мера в $\mathbb{D}$ такая, что

$$\iint_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|)^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta) < \infty, \tag{1.4}$$

если $u(z) \not\equiv -\infty$, а $\psi(\theta)$ – вещественная функция ограниченной вариации на $[-\pi, \pi]$, удовлетворяющая условию Бесова

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \int_{-\pi}^{\pi} |\psi(\theta + t) + \psi(\theta - t) - 2\psi(\theta)| \frac{dt}{t^2} < \infty. \tag{1.5}$$

b) Если $u(z)$ представима в виде (1.2) – (1.5), то риссовская ассоциированная мера $u(z)$ совпадает с μ.

Замечание. Формула (1.2) во многом аналогична представлению типа Рисса, установленному М. М. Джрбашяном [7]. Однако в (1.2) применены иные потенциалы типа Грина, а также существенно сужен класс мер $\psi(\theta)$.

Определение 2. Класс $Sb_\alpha(G^+)$ $(0 < \alpha < \infty)$ – множество субгармонических в верхней полуплоскости $G^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ функций $u(z)$, удовлетворяющих условиям

$$\iint\limits_{G^+} (\operatorname{Im} z)^{\alpha-1}|u(z)|\, dm_2(z) < \infty, \tag{1.6}$$

$$\iint\limits_{G^+} (\operatorname{Im} z)^{\alpha+1}\, d\mu(z) < \infty, \tag{1.7}$$

где μ – риссовская ассоциированная мера $u(z)$.

Замечание. Классы $Sb_\alpha(G^+)$ $(0 < \alpha < \infty)$ являются обобщениями классов $N^m_{\alpha,\beta}$ А. М. Джрбашяна [6] с $\beta = 0$, ибо после преобразования $w = -z$ и подстановки $u(w) = \log|f(w)|$, где $f(w)$ – голоморфная в нижней полуплоскости функция, класс $Sb_\alpha(G^+)$ совпадает с голоморфным подклассом $N^m_{\alpha,0}$.

Теорема 2. *а) Класс $Sb_\alpha(G^+)$ $(0 < \alpha < \infty)$ совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$u(z) = \iint\limits_{G^+} \log|a_\beta(z,\zeta)|\, d\mu(\zeta) + \frac{1}{\pi}\Gamma(1+\alpha)\int_{-\infty}^{\infty} Re\left[\frac{1}{(it - iz)^{\alpha+1}}\right] d\psi(t), \tag{1.8}$$

где $z \in G^+$, $\beta > \alpha$ – произвольное число, а

$$a_\beta(z,\zeta) = \exp\left[-\int_0^{2\operatorname{Im}\zeta} \frac{\tau^\beta\, d\tau}{(\tau + i(\zeta - z))^{\beta+1}}\right] \tag{1.9}$$

есть элементарный фактор типа Бляшке, введенный А. М. Джрбашяном и Г. В. Микаеляном [8], $\mu(\zeta)$ – неотрицательная борелевская мера в G^+, подчиненная условию (1.7), а $\psi(t)$ – вещественная функция ограниченной вариации на $[-\infty, +\infty]$, удовлетворяющая условию Бесова

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x+t) + \psi(x-t) - 2\psi(x)|\, \frac{dt}{t^2} < \infty. \tag{1.10}$$

b) Если $u(z)$ представимо в виде (1.8) – (1.10), то риссовская ассоциированная мера $u(z)$ совпадает с μ.

Замечание. Формула (1.8) во многом аналогична одному представлению, установленному А. М. Джрбашяном [9]. Однако в (1.8) применены иные потенциалы типа Грина, а также существенно сужен класс мер $\psi(t)$.

§2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В КРУГЕ

Начнем с установления ряда лемм, относящихся к структуре классов $Sb_\alpha(\mathbb{D})$.

Лемма 2.1. *Пусть $u(z) \in Sb_\alpha(\mathbb{D})$ $(0 < \alpha < \infty)$, и пусть $u(z) \not\equiv -\infty$. Тогда*

$$\iint_{\mathbb{D}} (1-|z|)^{\alpha-1}|u(z)|\,dm_2(z) < \infty, \tag{2.1}$$

а риссовская ассоциированная мера μ функции $u(z)$ удовлетворяет условию (1.4). Если к тому же, $u(0) > -\infty$, то справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi}\alpha(\alpha+1)\iint_{\mathbb{D}} (1-|z|)^{\alpha-1}u(z)\,dm_2(z) =$$
$$= u(0) + \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1}\,dn(t) + \int_0^1 \left[\int_t^1 (1-\tau)^{\alpha+1}\,\frac{d\tau}{\tau}\right] dn(t), \tag{2.2}$$

где $n(t)$ – риссовская масса функции $u(z)$ в круге $|z| \le t$, т.е. $n(t) = \iint\limits_{\overline{\mathbb{D}}_t} d\mu(\zeta)$.

Доказательство. Предположим, что $u(0) > -\infty$. Тогда, проинтегрировав неравенство между $u(0)$ и средним значением $u(z)$ по окружности $|z| = r$ по мере $(1-r)^{\alpha-1}r\,dr$, получим

$$-\infty < \frac{2\pi}{\alpha(\alpha+1)}u(0) \le \iint_{\mathbb{D}} (1-|z|)^{\alpha-1}u(z)\,dm_2(z),$$

откуда, ввиду (1.1), следует, что

$$\iint_{\mathbb{D}} (1-|z|)^{\alpha-1}u^-(z)\,dm_2(z) < \infty,$$

где $u^- = u^+ - u$. Тем самым, имеет место (2.1). Если же $u(0) = -\infty$, то составим субгармоническую в $\mathbb{D}$ функцию

$$v(z) = u(z) - \int\limits_{|\zeta|<1/2}\int \log\left|\frac{\zeta - z}{1-z\bar{\zeta}}\right| d\mu(\zeta) \equiv u(z) - I(z).$$

Очевидно, что $v(0) > -\infty$. С другой стороны, $v(z) \in Sb_\alpha(\mathbb{D})$, так как $v^+(z) \le$

$\le u^+(z) + |I(z)|$, и функция $I(z)$ удовлетворяет условию (2.1). Действительно

$$\iint_{\mathbb{D}} (1-|z|)^{\alpha-1}|I(z)|\,dm_2(z) =$$

$$= \int\int_{|\zeta|<1/2} d\mu(\zeta) \int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} r\,dr \int_{-\pi}^{\pi} \log\left|\frac{1-\bar{\zeta}re^{i\varphi}}{\zeta - re^{i\varphi}}\right| d\varphi =$$

$$= 2\pi \int\int_{|\zeta|<1/2} d\mu(\zeta) \int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} r \log(\max\{|\zeta|, r\})^{-1}\,dr \le$$

$$\le \frac{2\pi}{\alpha(\alpha+1)} \int\int_{|\zeta|<1/2} \log\frac{1}{|\zeta|}\,d\mu(\zeta) < \infty.$$

Поэтому $v(z)$ удовлетворяет (2.1), и, поскольку $|u(z)| \le |v(z)| + |I(z)|$, то (2.1) имеет место в любом случае. Чтобы доказать (1.4) и (2.2), снова предположим, что $u(0) > -\infty$. Тогда интегрированием по частям формулы Йенсена

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\varphi})\,d\varphi = u(0) + \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt, \qquad 0 \le r < 1,$$

$$n(0) = \mu(0) = 0, \qquad \lim_{t\to+0} n(t)\log 1/t = 0$$

для субгармонических функций (см., например, [10], п. 3.9) получим (2.2). Отсюда, очевидно, что

$$\iint_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|)^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1}\,dn(t) \le$$

$$\le |u(0)| + \frac{1}{2\pi}\alpha(\alpha+1)\iint_{\mathbb{D}} (1-|z|)^{\alpha-1}u^+(z)\,dm_2(z),$$

и, тем самым, имеет место (1.4). Если же $u(0) = -\infty$, то заметим, что условие (1.4) справедливо по меньшей мере для ассоциированной меры $v(z)$ ($v(0) > -\infty$). Эта мера, очевидно, является сужением меры μ на кольцо $1/2 \le |\zeta| < 1$. Поскольку μ конечно на любом компакте из $\mathbb{D}$, то отсюда следует, что (1.4) имеет место в любом случае.

Лемма 2.2. *Пусть $\mu(\zeta)$ неотрицательная борелевская мера в $\mathbb{D}$, подчиненная условию (1.4) при заданном $\alpha \in (-1, \infty)$. Тогда потенциал типа Грина*

$$V_\alpha(z) = \iint_{\mathbb{D}} \log|A_\alpha(z,\zeta)|\,d\mu(\zeta)$$

есть субгармоническая в $\mathbb{D}$ *функция, риссовская ассоциированная мера которой совпадает с* μ.

Доказательство. Пусть $|z| \le r_0 < \rho < 1$, где r_0 и ρ – любые числа. Представим $V_\alpha(z) = V_\alpha^{(1)}(z) + V_\alpha^{(2)}(z)$, где

$$V_\alpha^{(1)}(z) = \iint\limits_{|\zeta|<\rho} \log|A_\alpha(z,\zeta)|\, d\mu(\zeta), \quad V_\alpha^{(2)}(z) = \int\limits_{\rho\le|\zeta|<1}\int \log|A_\alpha(z,\zeta)|\, d\mu(\zeta).$$

Используя представление (1.3), легко проверить, что при $\rho \le |\zeta| < 1$ имеем

$$|\log|A_\alpha(z,\zeta)|| \le c(\alpha,\rho,r_0)(1-|\zeta|)^{\alpha+1},$$

где $c(\alpha,\rho,r_0) > 0$ – постоянная, зависящая только от α, ρ и r_0. Ввиду (1.4) отсюда следует, что $V_\alpha^{(2)}(z)$ гармоническая в $|z| \le r_0$ функция. Для исследования $V_\alpha^{(1)}(z)$ воспользуемся представлением (см. [2])

$$A_\alpha(z,\zeta) = (1-\frac{z}{\zeta})\exp[-U_\alpha(z,\zeta)],$$

$$U_\alpha(z,\zeta) = \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^\alpha}{t}\, dt - \sum_{k=1}^\infty \frac{\Gamma(k+1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(k+1)}(z/\zeta)^k \int_0^{|\zeta|^2}(1-t)^\alpha t^{k-1}\, dt.$$

Мы имеем (см. [11], доказательство Теоремы 9.2.2)

$$U_\alpha(z,\zeta) = k_\alpha + \log\frac{1}{|\zeta|^2} + o(1), \quad \text{при } \zeta \to 0,$$

где k_α – постоянная, зависящая лишь от α. Поэтому

$$V_\alpha^{(1)}(z) = \iint\limits_{|\zeta|<\rho} \log|z-\zeta|\, d\mu(\zeta) + \int\limits_{0<|\zeta|<\rho}\int \log\frac{1}{|\zeta|}\, d\mu(\zeta) - \int\limits_{0<|\zeta|<\rho}\int \operatorname{Re} U_\alpha(z,\zeta)\, d\mu(\zeta),$$

где второй интеграл справа есть постоянная, а последний интеграл абсолютно и равномерно сходится в $|z| \le r_0$ и представляет там гармоническую функцию. Следовательно, $V_\alpha^{(1)}(z)$, а значит, и $V_\alpha(z)$ – субгармонические в $|z| \le r_0$ функции при любом $r_0 < 1$, обладающие риссовской мерой μ.

Лемма 2.3. *а) Пусть* $\mu(\zeta)$ *– неотрицательная борелевская мера в* $\mathbb{D}$, *удовлетворяющая условию (1.4) при заданном* $\alpha \in (0,\infty)$. *Тогда* $V_\beta(z) \in Sb_\alpha(\mathbb{D})$ *при любом* $\beta > \alpha$.

b) При любом $\alpha > 0$ существует неотрицательная борелевская мера в $\mathbb{D}$, удовлетворяющая условию (1.4), такая, что $V_\alpha(z) \notin Sb_\alpha(\mathbb{D})$.

c) Пусть $\mu(\zeta)$ — неотрицательная борелевская мера в $\mathbb{D}$ и α $(0 < \alpha < \infty)$ – любое число. Тогда, для того чтобы $V_\alpha(z) \in Sb_\alpha(\mathbb{D})$, достаточно выполнения условия

$$\iint_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|)^{\alpha+1} \log \frac{1}{1-|\zeta|}\, d\mu(\zeta) < \infty.$$

Доказательство этой леммы вполне аналогично доказательству такого же результата Ф. А. Шамояна [4, 5], установленного для произведений типа Бляшке М. М. Джрбашяна (т. е. для случая дискретной меры), и поэтому мы его не приводим.

Доказательство Теоремы 1. а) Пусть $u(z) \in Sb_\alpha(\mathbb{D})$ $(0 < \alpha < \infty)$, $u(z) \not\equiv -\infty$. Тогда, в силу Леммы 2.1, ассоциированная с $u(z)$ мера μ удовлетворяет условию (1.4). Следовательно, в силу Лемм 2.2 и 2.3 при любом фиксированном $\beta > \alpha$ потенциал $V_\beta(z)$ — субгармоническая в $\mathbb{D}$ функция с ассоциированной мерой μ, и $V_\beta(z) \in Sb_\alpha(\mathbb{D})$. Тем самым, в силу Леммы 2.1, $h(z) = u(z) - V_\beta(z)$ — гармоническая в $\mathbb{D}$ функция, удовлетворяющая условию

$$\iint_{\mathbb{D}} (1-|z|)^{\alpha-1} |h(z)|\, dm_2(z) < \infty. \tag{2.3}$$

Как легко следует из Теоремы 9.10 [11] и Теоремы 3 [3], класс таких функций совпадает с множеством функций, представимых в виде последнего интеграла формулы (1.2). В силу того же, если $u(z)$ представима в виде (1.2) – (1.5), то $h(z)$ удовлетворяет условию (2.3). Отсюда и из Леммы 2.3 следует, что $u(z) \in Sb_\alpha(\mathbb{D})$. Второе утверждение теоремы непосредственно следует из Леммы 2.2.

§3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Основной целью данного пункта является доказательство Теоремы 2, которому мы предпошлем три леммы, относящиеся к структуре классов $Sb_\alpha(G^+)$. Для установления аналога формулы Йенсена в полуплоскости введем функцию распределения

$$n(t) = \iint_{G_t^+} d\mu(z), \quad G_t^+ = \{z : \operatorname{Im} z > t\}, \quad 0 < t < \infty,$$

для неотрицательной борелевской меры μ в G^+.

Лемма 3.1. *Пусть $u(z)$ – субгармоническая в G^+ функция такая, что при любом $\rho > 0$*

$$\sup_{y>\rho} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x+iy)|\, dx < \infty.$$

Тогда при любом $\rho > 0$ имеет место формула

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x+i\rho)\, dx = -2 \int_{\rho}^{\infty} (t-\rho)\, dn(t) + \lim_{R\to+\infty} Ru(iR), \qquad (3.1)$$

где $n(t)$ – функция распределения, определенная посредством ассоциированной с $u(z)$ меры μ, а последний предел конечен.

Доказательство. Как следует из результатов работ [12] и [13], при любом $\rho > 0$

$$u(z+i\rho) = \iint_{G^+} \log\left|\frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}}\right| d\mu(\zeta+i\rho) + \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t+i\rho)}{(x-t)^2+y^2}\, dt, \quad z = x+iy \in G^+,$$

где

$$\iint_{G^+} (\operatorname{Im}\zeta)\, d\mu(\zeta+i\rho) < \infty.$$

Как нетрудно убедиться, подставив здесь $z = iR$, умножив все члены на R и устремив $R \to +\infty$, приходим к формуле

$$\lim_{R\to+\infty} Ru(iR) = -2\iint_{G_\rho^+} (\operatorname{Im}\zeta - \rho)\, d\mu(\zeta) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(t+i\rho)\, dt,$$

где предел слева конечен. Заметим, что последнюю формулу можно переписать в виде (3.1), поскольку в обобщенном смысле $dn(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} d\mu(x+it)$.

Лемма 3.2. *Пусть $\mu(\zeta)$ – неотрицательная борелевская мера в G^+, подчиненная условию (1.7) при заданном $\alpha \in [0,\infty)$. Тогда при любом $\beta \geq \alpha$ потенциал типа Грина*

$$W_\beta(z) = \iint_{G^+} \log|a_\beta(z,\zeta)|\, d\mu(\zeta) \qquad (3.2)$$

есть субгармоническая в G^+ функция, риссовская ассоциированная мера которой совпадает с μ.

Доказательство. Пусть $\beta > 0$ и $z \in \overline{G_\rho^+}$, где $\rho > 0$. Представим

$$W_\beta(z) = \int\limits_{0<\operatorname{Im}\zeta\leq\rho/2}\ \int\limits \log|a_\beta(z,\zeta)|\, d\mu(\zeta) + \iint_{G_{\rho/2}^+} \log|a_\beta(z,\zeta)|\, d\mu(\zeta). \qquad (3.3)$$

Используя представление (1.9), имеем

$$|\log|a_\beta(z,\zeta)|| \le c(\beta,\rho)(\operatorname{Im}\zeta)^{\beta+1}, \quad 0 < \operatorname{Im}\zeta \le \rho/2,$$

где $c(\beta,\rho) > 0$ – постоянная, зависящая лишь от β и ρ. Ввиду условия (1.7) отсюда следует, что первый интеграл в правой части (3.3) абсолютно и равномерно сходится в $\overline{G^+_\rho}$, представляет там гармоническую функцию. Рассмотрим последний интеграл в (3.3). Очевидно, $\log|a_\beta(z,\zeta)| = \log|a_0(z,\zeta)| + \operatorname{Re} F_\beta(z,\zeta)$, где

$$F_\beta(z,\zeta) = \int_0^{2\operatorname{Im}\zeta}\left[\frac{1}{\tau+i\zeta-iz} - \frac{\tau^\beta}{(\tau+i\zeta-iz)^{\beta+1}}\right]d\tau.$$

Функция

$$\iint\limits_{G^+_{\rho/2}} \log|a_0(z,\zeta)|\,d\mu(\zeta) = \iint\limits_{G^+_{\rho/2}} \log\left|\frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}}\right|\,d\mu(\zeta)$$

субгармонична в $\overline{G^+_{\rho/2}}$ как обычный потенциал Грина, поскольку

$$\iint\limits_{G^+_{\rho/2}} (\operatorname{Im}\zeta)\,d\mu(\zeta) \le (2/\rho)^\alpha \iint\limits_{G^+_{\rho/2}} (\operatorname{Im}\zeta)^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta) < \infty.$$

Далее, представляя $F_\beta(z,\zeta) = \Phi_\beta(z,\zeta) + \Psi_\beta(z,\zeta)$, где

$$\Phi_\beta(z,\zeta) = \int_0^\infty\left[1-\left(\frac{\tau}{\tau+i\zeta-iz}\right)^\beta\right]\frac{d\tau}{\tau+i\zeta-iz},$$

$$\Psi_\beta(z,\zeta) = -\int_{2\operatorname{Im}\zeta}^\infty\left[1-\left(\frac{\tau}{\tau+i\zeta-iz}\right)^\beta\right]\frac{d\tau}{\tau+i\zeta-iz},$$

рассмотрим функцию $\Phi_\beta(z,\zeta)$ на луче $z = \zeta + ih$, $0 < h < \infty$. Поскольку

$$\Phi_\beta(\zeta+ih,\zeta) = \int_0^\infty\left[1-\left(\frac{\tau}{\tau+h}\right)^\beta\right]\frac{d\tau}{\tau+h} = \int_0^\infty\left[1-\left(\frac{\sigma}{\sigma+1}\right)^\beta\right]\frac{d\sigma}{1+\sigma} = c_\beta,$$

где постоянная $c_\beta > 0$ зависит лишь от β, то, в силу единственности голоморфной функции, при любом фиксированном $\zeta \in G^+_{\rho/2}$, $\Phi_\beta(z,\zeta) = c_\beta$ $(z \in G^+)$. С другой стороны, при любом фиксированном $\zeta \in G^+_{\rho/2}$ функция $\Psi_\beta(z,\zeta)$ голоморфна и ограничена в $\overline{G^+_\rho}$. Действительно, после замены переменной $\tau = y\sigma + 2\eta$ $(z = x+iy,\ \zeta = \xi+i\eta)$ получаем оценку

$$|\Psi_\beta(z,\zeta)| \le \int_0^\infty\left|1-\left(\frac{\sigma+2\eta/y}{1+\sigma+\eta/y+i(\xi-x)/y}\right)^\beta\right|\frac{d\sigma}{|1+\sigma+\eta/y+i(\xi-x)/y|}.$$

Далее, обозначив

$$w = 1 - \frac{\sigma + 2\eta/y}{1 + \sigma + \eta/y + i(\xi - x)/y},$$

нетрудно проверить, что $|w| < 1$, и, следовательно

$$\left| \frac{1 - (1-w)^\beta}{w} \right| \le M_\beta,$$

где $M_\beta > 0$ — постоянная, зависящая лишь от β. Поэтому

$$|\Psi_\beta(z,\zeta)| \le \int_0^\infty \frac{|1-(1-w)^\beta|}{|w|} \frac{|w|}{|1+\sigma+\eta/y+i(\xi-x)/y|}\, d\sigma \le$$

$$\le M_\beta \left(\left|1 - \frac{\eta}{y}\right| + \left|\frac{\xi - x}{y}\right| \right) \int_0^\infty \frac{d\sigma}{(1+\sigma+\eta/y)^2 + \left(\frac{\xi-x}{y}\right)^2} \le 2M_\beta.$$

Таким образом, при любом $\zeta \in G^+_{\rho/2}$, $F_\beta(z,\zeta)$ – ограниченная голоморфная функция в $\overline{G^+_\rho}$, удовлетворяющая неравенству

$$|\operatorname{Re} F_\beta(z,\zeta)| \le c(\alpha,\beta,\rho)(\operatorname{Im}\zeta)^{\alpha+1},$$

где постоянная $c(\alpha,\beta,\rho) > 0$ зависит от α, β и ρ. Тем самым, функция

$$W^*_\beta(z) = \iint\limits_{G^+_{\rho/2}} \operatorname{Re} F_\beta(z,\zeta)\, d\mu(\zeta)$$

гармонична в $\overline{G^+_\rho}$. Отсюда следует, что $W_\beta(z)$ – субгармоническая в $\overline{G^+_\rho}$ функция при любом $\rho \in (0,\infty)$, обладающая риссовской ассоциированной мерой μ, и лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть $\mu(\zeta)$ – неотрицательная борелевская мера в G^+, удовлетворяющая условию (1.7) при некотором $0 < \alpha < \infty$. Тогда $W_\beta(z) \in Sb_\alpha(G^+)$ при любом $\beta > \alpha$.*

Доказательство этой леммы вполне аналогично доказательству такого же результата А. М. Джрбашяна [6], установленного для произведений типа Бляшке из [8] (т.е. для случая дискретной меры), и поэтому мы его не приводим.

Доказательство Теоремы 2. а) Пусть $u(z) \in Sb_\alpha(G^+)$ $(0 < \alpha < \infty)$, $u(z) \not\equiv -\infty$. Ассоциированная с $u(z)$ мера μ удовлетворяет условию (1.7). Поэтому, в силу Лемм 3.2 и 3.3, потенциал $W_\beta(z)$ – субгармоническая в G^+ функция с

ассоциированной мерой μ. Отсюда следует также, что $W_\beta(z) \in Sb_\alpha(G^+)$ при любом $\beta > \alpha$. Следовательно, гармоническая функция $h(z) = u(z) - W_\beta(z)$ принадлежит классу $Sb_\alpha(G^+)$. С другой стороны, в силу Теоремы 4.2 [14] и результатов работы [15], подкласс гармонических функций из $Sb_\alpha(G^+)$ совпадает с множеством функций, представимых в виде последнего интеграла формулы (1.8). Тем самым, такое же представление имеет место для $h(z)$. Обратно, если $u(z)$ представима в виде (1.8) – (1.10), то гармоническая функция $h(z)$ принадлежит классу $Sb_\alpha(G^+)$. В силу Леммы 3.3, $u(z) \in Sb_\alpha(G^+)$. Второе утверждение теоремы непосредственно следует из Леммы 3.2.

В заключение, докажем формулу, аналогичную формуле типа Левица из [6] для функций класса $Sb_\alpha(G^+)$ $(0 < \alpha < \infty)$. Полагая, что $u(z) \in Sb_\alpha(G^+)$ для заданного $\alpha \in (0, \infty)$, вначале покажем, что для любого $y_0 > 0$ выполнено условие

$$\sup_{y>y_0} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x+iy)|\,dx < \infty. \tag{3.4}$$

Действительно, по Теореме 2 $u(z)$ представима в виде (1.8) – (1.10). Используя рассуждения доказательства Леммы 3.2 из [6], можно показать, что потенциал $W_\beta(z)$ удовлетворяет условию (3.4) для любого $y_0 > 0$. Кроме того, гармоническая функция

$$h(z) = \frac{1}{\pi}\Gamma(1+\alpha)\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}\frac{1}{[i(t-z)]^{\alpha+1}}\,d\psi(t), \quad z \in G^+$$

также удовлетворяет условию (3.4), так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x+iy)|\,dx \le \frac{1}{\pi}\Gamma(1+\alpha)\int_{-\infty}^{\infty} |d\psi(t)| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|t-x-iy|^{\alpha+1}} \le \frac{c_\alpha}{y^\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} |d\psi(t)|,$$

где $c_\alpha > 0$ – постоянная, зависящая только от α. Следовательно, функция $u(z)$ удовлетворяет условиям Леммы 3.1 и

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x+iy)\,dx = -\int_y^{\infty} (t-y)\,dn(t) + K, \quad 0 < y < \infty, \tag{3.5}$$

где $n(t) = \iint\limits_{G_t^+} d\mu(\zeta)$ – функция распределения, определенная посредством меры μ, ассоциированной с $u(z)$, а K – постоянная, не зависящая от y. Теперь умножим

все члены формулы (3.5) на $y^{\alpha-1}$ и проинтегрируем вдоль $(0,+\infty)$. Тогда получим, что $K=0$, так как очевидно

$$\int_0^\infty y^{\alpha-1}\left[-\int_y^\infty (t-y)\,dn(t)\right]dy = -\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\int_0^\infty t^{\alpha+1}\,dn(t) =$$
$$= \frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\iint\limits_{G^+} t^{\alpha+1}\,d\mu(x+it) < \infty.$$

Таким образом, имеет место следующая формула типа Левина :

$$\frac{1}{2\pi}\alpha(\alpha+1)\iint\limits_{G^+}(\operatorname{Im} z)^{\alpha-1}u(\dot{z})\,dm_2(z) = -\int_0^\infty t^{\alpha+1}\,dn(t). \qquad (3.6)$$

Классам $Sb_\alpha(G^+)$ $(0<\alpha<\infty)$ можно дать эквивалентные определения. А именно, используя формулы (3.1) и (3.6), легко проверить, что субгармоническая в G^+ функция $u(z)$ принадлежит классу $Sb_\alpha(G^+)$ $(0<\alpha<\infty)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям :

1) $\iint\limits_{G^+}(\operatorname{Im} z)^{\alpha-1}u^+(z)\,dm_2(z)<\infty$,

2) $\sup\limits_{y>y_0}\int_{-\infty}^{\infty}|u(x+iy)|\,dx<\infty$ для любого $y_0>0$,

3) $\lim\limits_{R\to+\infty} Ru(iR)=0$

или

1′) $\iint\limits_{G^+}(\operatorname{Im} z)^{\alpha-1}|u(z)|\,dm_2(z)<\infty$,

2′) $\sup\limits_{y>y_0}\int_{-\infty}^{\infty}|u(x+iy)|\,dx<\infty$ для любого $y_0>0$.

ABSTRACT. The paper establishes parametric representations for classes $Sb_\alpha(\mathbb{D})$ $(0<\alpha<\infty)$ of functions $u(z)$ subharmonic in the unit disk $\mathbb{D}$, satisfying the condition $\iint\limits_{\mathbb{D}}(1-|z|)^{\alpha-1}u^+(z)\,dm_2(z)<\infty$, as well as for classes $Sb_\alpha(G^+)$ $(0<\alpha<\infty)$ of functions $u(z)$ subharmonic in the upper half-plane G^+, satisfying the conditions

$$\iint\limits_{G^+}(\operatorname{Im} z)^{\alpha-1}|u(z)|\,dm_2(z)<\infty, \qquad \iint\limits_{G^+}(\operatorname{Im} z)^{\alpha+1}\,d\mu(z)<\infty,$$

where $u^+=\max\{u,0\}$, $m_2(z)$ is the Lebesgue measure on the plane, μ is the Riesz measure associated with $u(z)$. The harmonic terms of the

representations are written by means of Besov's measures on the unit circle and on the real axis.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, "О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций", ДАН Арм.ССР, т. 3, №1, стр. 3 – 9, 1945.
2. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН Арм.ССР, вып. 2, стр. 3 – 40, 1948.
3. Ф. А. Шамоян, "О параметрическом представлении классов Неванлинны - Джрбашяна", ДАН Арм.ССР, т. 90, №3, стр. 99 – 103, 1990.
4. Ф. А. Шамоян, "Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 13, №5 – 6, стр. 405 – 422, 1978.
5. A. E. Djrbashian, F. A. Shamoyan, Topics in the Theory of A^p_α Spaces, Teubner - Texte zur Math., b. 105, Leipzig, 1988.
6. А. М. Джрбашян, "Параметрические представления классов мероморфных функций с неограниченной характеристикой Цудзи", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 22, №5, стр. 451 – 477, 1987.
7. М. М. Джрбашян, "Классы функций и их параметрическое представление. Современные проблемы теории аналитических функций", Международная конференция по теории аналитических функций. Ереван, 1965, М., Наука, стр. 118 – 137, 1966.
8. А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян, "Построение и основные свойства одного семейства функций типа Бляшке для полуплоскости", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 15, №6, стр. 461 – 474, 1980.
9. А. М. Джрбашян, "О некоторых классах субгармонических функций", Изв. НАН Армении, т. 29, №1, стр. 34 – 49, 1994.
10. W. K. Hayman, P. B. Kennedy, Subharmonic Functions, Academic Press, London, 1976.
11. М. М. Джрбашян, Интегральные Преобразования и Представления Функций в Комплексной Области, М., Наука, 1966.
12. В. И. Крылов, "О функциях, регулярных в полуплоскости", Мат. сб., т. 6(48), №1, стр. 95 – 138, 1939.
13. Е. Д. Соломенцев, "О классах функций, субгармонических в полупространстве", Вестник Московского Университета, серия матем., мех., астрон., физ., хим., №5, стр. 73 – 91, 1959.
14. А. М. Джрбашян, "Соотношения равновесия и факторизационные теоремы для мероморфных в полуплоскости функций", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 21, №3, стр. 213 – 279, 1986.
15. К. Л. Аветисян, "О параметрическом представлении некоторых классов голоморфных в полуплоскости функций", Деп. в Арм.НИИНТИ, №3, 14.10.1992, стр. 2.

12 Декабря 1993

Ереванский государственный университет

КАСАТЕЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НА ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВАХ ГАРМОНИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА БРЕЛО

Ч. Бенсуда

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, Том 29, №1, 1994

Введенная в $\mathbb{R}^m$ Келдышем и Дени характеризация компактных множеств, допускающих равномерную гармоническую аппроксимацию, была получена в аксиоматической постановке Дж. Блидтнером и В. Хансеном как для непрерывных супергармонических, так и для гармонических функций. Локальный характер такого описания позволяет нам распространить его на такие замкнутые множества, на которых равномерная гармоническая аппроксимация *локально* возможна. Мы также исследуем касательную аппроксимацию с произвольным непрерывным весом. Получена эквивалентность возможностей локальной равномерной и касательной аппроксимаций для некоторых замкнутых подмножеств, названных "шапле". Дана также топологическая характеризация шапле.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть Ω – отделимое, локально компактное, некомпактное, связное, локально связное пространство со счетным базисом из открытых множеств. Пусть $\mathcal{H}$ – подпучок пучка $\mathcal{C}$ ростков действительных непрерывных функций, определенных на Ω и таких, что пара $(\Omega, \mathcal{H})$ есть гармоническое пространство Брело (удовлетворяющее аксиомам 1, 2 и 3 Брело, см. [7] и [21]). Отметим, что даже, если не существует положительного потенциала на Ω, каждое относительно компактное открытое множество из Ω для гармонической индуцированной структуры является пространством Брело с положительным потенциалом [9].

Для любого подмножества $A \subset \Omega$ замыкание, внутреннюю часть и границу A обозначим, соответственно, через $\overline{A}$, A^o и ∂A. Обозначим через $\mathcal{C}(A)$ (соотв. $\mathcal{H}(A)$) пространство непрерывных на A функций (соотв. сужений на A функций, гармонических в окрестности A) и через $\mathcal{S}(A)$ (соотв. $\mathcal{S}_c(A)$) выпуклый конус сужений

на A функций, супергармонических (соотв. супергармонических и непрерывных) в окрестности A. Далее положим

$$\mathcal{S}_0(A) := \{u \in C(A) : u_{|A^\circ} \in \mathcal{S}(A^\circ)\},$$

$$\mathcal{H}_0(A) := \{h \in C(A) : h_{|A^\circ} \in \mathcal{H}(A^\circ)\}.$$

Для любого семейства $\mathcal{F}(A)$ функций, определенных на A, через $\overline{\mathcal{F}}(E)$ обозначим замыкание $\mathcal{F}(A) \cap C(A)$ в $C(A)$ в топологии равномерной сходимости. Если f – функция, определенная на A, положим

$$\|f\|_A := \sup_A |f|.$$

Напомним, что для любого множества $A \subset \Omega$, база A, обозначаемая $b(A)$, есть множество точек Ω, в которых A не разрежено. Функция b, определенная на подмножествах Ω, является возрастающей и аддитивной [10]. Отметим, что для каждого подмножества $A \subset \Omega$, база $b(A)$ является замкнутым тонким множеством из Ω [8, Следствие 1.2]. Отсюда следует, что $b(b(A)) \subset b(A)$ (см. также [13]).

Подмножество A из Ω будет называться *келдышевским*, если $\Omega \setminus A$ и $\Omega \setminus A^\circ$ имеют одну и ту же базу. Отметим, что локально конечное объединение попарно пересекающихся замкнутых келдышевских множеств есть замкнутое келдышевское множество. Замкнутое множество F из Ω будем называть *допускающим супергармоническую (соотв. гармоническую) аппроксимацию*, если $\mathcal{S}_0(F) = \overline{\mathcal{S}_c}(F)$ (соотв. $\mathcal{H}_0(F) = \overline{\mathcal{H}}(F)$). Отметим, что согласно [4, Лемма 1], любое замкнутое множество, допускающее равномерную супергармоническую аппроксимацию, обязательно допускает равномерную гармоническую аппроксимацию. Кроме того, заметим, что если $u \in \overline{\mathcal{S}}(K)$, где K – компакт из Ω, а (u_n) есть последовательность функций из $\mathcal{S}(K) \cap C(K)$, которая равномерно сходится к u на K, то можно предположить, что

$$\|u - u_n\|_K \leq 1/2^{n+1} \quad (\forall n \geq 1).$$

Для фиксированного $n \geq 1$ существует открытая окрестность U_n для K такая, что $u_n \in \mathcal{S}(U_n)$. Пусть V_n есть относительно компактная окрестность K такая,

что

$$K \subset V_n \subset \overline{V}_n \subset U_n.$$

Тогда существует возрастающая последовательность $(u_{n_k})_k$ функций из $\mathcal{S}(V_n) \cap$ $\cap \mathcal{C}(V_n)$, которая сходится поточечно к u_n на V_n. Поскольку $u_n \in \mathcal{C}(K)$, то по Теореме Дини сходимость равномерна на K. Следовательно, для всех $n \geq 1$ существует $k_n \geq 1$ такое, что

$$\|u_n - u_{n_{k_n}}\|_K \leq 1/2^{n+1}.$$

Пусть

$$v_n = u_{n_{k_n}} \quad (\forall n \geq 1).$$

Последовательность $(v_n)_n$ принадлежит $\mathcal{S}_c(K)$, и мы имеем

$$\|u - v_n\|_K \leq 1/2^n \quad (\forall n \geq 1).$$

Таким образом, последовательность $(v_n)_n$ сходится равномерно на K к u, и, следовательно, $u \in \overline{\mathcal{S}}_c(K)$. Поскольку u произвольно в $\overline{\mathcal{S}}(K)$, то мы имеем $\overline{\mathcal{S}}(K) \subset \overline{\mathcal{S}}_c(K)$. Так как обратное включение тривиально, то

$$\overline{\mathcal{S}}_c(K) = \overline{\mathcal{S}}(K).$$

Следующая теорема получена Дж. Блидтнером [5] и В. Хансеном [20].

Теорема 1 (Блидтнер и Хансен). *Пусть K есть компакт из Ω. Следующие утверждения эквивалентны :*

(a) K допускает равномерную супергармоническую аппроксимацию ;

(b) K допускает равномерную гармоническую аппроксимацию ;

(c) K есть келдышевское множество.

В классической теории потенциала, ассоциированной с лапласианом Δ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$, эквивалентность $b \Leftrightarrow c$ была получена в 1941 М. В. Келдышем [24] и в 1949 – Дж. Дени [12]. А. А. Гончар в 1964-65 получил другой вариант этой эквивалентности в терминах емкости (см. [18] и [19]). Это было обобщено в 1982 М. Лебреше [25] для замкнутых множеств из $\mathbb{R}^m$, и

совсем недавно эта эквивалентность была получена Т. Багби и П. Бланше для замкнутых множеств на римановом многообразии [1].

Теорема 2 (Определение). *Мы скажем, что замкнутое множество F из Ω допускает локальную супергармоническую (соотв. гармоническую) аппроксимацию, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий :*

(a) Любая точка $x \in \Omega$ обладает фундаментальной системой окрестностей $\mathcal{U}_x$ таких, что $V \in \mathcal{U}_x$, $F \cap V$ есть компактное множество, допускающее равномерную супергармоническую (соотв. гармоническую) аппроксимацию.

(b) Любая точка $x \in \Omega$ обладает окрестностью V такой, что $F \cap V$ есть компактное множество, допускающее равномерную супергармоническую (соотв. гармоническую) аппроксимацию.

(c) Любой компакт K из Ω обладает окрестностью V такой, что $F \cap V$ является компактом, допускающим равномерную супергармоническую (соотв. гармоническую) аппроксимацию.

(d) Для любого компакта K, допускающего равномерную супергармоническую (соотв. гармоническую) аппроксимацию, $F \cap K$ допускает равномерную супергармоническую (соотв. гармоническую) аппроксимацию.

Теорема 3. *Пусть F - замкнутое множество из Ω. Следующие утверждения эквивалентны :*

(a) F допускает локальную равномерную супергармоническую аппроксимацию ;

(b) F допускает локальную равномерную гармоническую аппроксимацию ;

(c) F - колдышевское.

Таким образом, как в $\mathbb{R}^m$, так и на римановом многообразии следующие утверждения эквивалентны (см. [4]) :

(1) F допускает локальную равномерную супергармоническую аппроксимацию ;

(2) F допускает равномерную супергармоническую аппроксимацию ;

(3) F допускает локальную равномерную гармоническую аппроксимацию ;

(4) F допускает равномерную гармоническую аппроксимацию.

Поскольку примененная техника часто использует специфические особенности дифференциального оператора Δ, то аксиоматическая постановка, по-видимому, невозможна. Тем не менее, эти эквивалентности имеют место для некоторых замкнутых множеств, называемых *шапле*.

Интересно рассмотреть замкнутые множества, которые допускают аппроксимацию с произвольным непрерывным весом (см. [2]). Мы скажем, что замкнутое множество F из Ω *допускает касательную супергармоническую (соотв. гармоническую) аппроксимацию*, если для любой непрерывной функции ε на F со значениями в $(0, 1]$ и любой функции $u \in \mathcal{S}_0(F)$ (соотв. $u \in \mathcal{H}_0(F)$) существует функция $v \in \mathcal{S}_c(F)$ (соотв. $v \in \mathcal{H}(F)$) такая, что $|u - v| \leq \varepsilon$ на F.

Определение 1. *Замкнутое множество называют шапле, если его внутренняя часть есть объединение открытых множеств (не обязательно связных), замыкания которых образуют локально конечное семейство непересекающихся компактов.*

Отметим, что согласно этому определению любое замкнутое множество с относительно компактной внутренней частью является шапле. В частности, компакт или собственно замкнутое множество с пустой внутренней частью.

Характеризация шапле из Ω была нам предложена П. М. Готье в терминах условия, которое мы обозначим через $\overline{C}$. Оно было навеяно условием C, называемым также условием длинных островов и введенным в 1969 [15] (см. [2]). Мы скажем, что замкнутое множество F из Ω удовлетворяет условию $\overline{C}$, если для любого компакта K из Ω существует компакт Q из Ω такой, что любая связная компонента $\overline{F^o}$, пересекающая K, содержится в Q.

Теорема 4. *Замкнутое множество F из Ω является шапле тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию $\overline{C}$.*

Теорема 5. *Пусть F есть шапле из Ω. Следующие утверждения эквивалентны:*

(a) F допускает локальную равномерную супергармоническую аппроксимацию;

(b) F допускает равномерную супергармоническую аппроксимацию;

(c) F допускает локальную равномерную гармоническую аппроксимацию;

(d) F допускает равномерную гармоническую аппроксимацию;

(e) F допускает касательную супергармоническую аппроксимацию;

(f) F допускает касательную гармоническую аппроксимацию;

(g) F келдышевское.

Следствие 1. Пусть F есть объединение локально конечной последовательности попарно непересекающихся компактных множеств $(K_n)_{n\geq 1}$. Следующие утверждения эквивалентны :

(a) F допускает касательную супергармоническую аппроксимацию;

(b) F допускает касательную гармоническую аппроксимацию;

(c) для всех $n \geq 1$ K_n - келдышевское.

Эквивалентности $a \Leftrightarrow c \Leftrightarrow g$ содержатся в Теореме 3. Импликация $b \Rightarrow d$ может быть получена непосредственно использованием [4, Лемма 1]. Мы приведем конструктивное доказательство импликации b (соотв. d) $\Rightarrow$ a (соотв. c) $\Rightarrow$ e (соотв. f).

Если мы предположим, что пространство $(\Omega, \mathcal{H})$ допускает положительный потенциал и удовлетворяет аксиоме доминации D, то из [14] мы получим касательную супергармоническую (соотв. гармоническую) верхнюю аппроксимацию, а именно : для любой функции $u \in \mathcal{S}_0(F)$ (соотв. $u \in \mathcal{H}_0(F)$) и любой непрерывной на F функции ε со значениями в $(0, 1]$ существует функция $v \in \mathcal{S}_c(F)$ (соотв. $v \in \mathcal{H}(F)$) такая, что $u < v < u + \varepsilon$ на F. Если ограничиться замкнутыми множествами, удовлетворяющими условию C, в частности, шапле, то утверждения Теоремы 5 эквивалентны следующим :

(e') F допускает касательную супергармоническую верхнюю аппроксимацию;

(f') F допускает касательную гармоническую верхнюю аппроксимацию.

Согласно [14, п. 3.4], каждое замкнутое множество, допускающее равномерную гармоническую аппроксимацию, является келдышевским, следовательно, допускающим локальную равномерную гармоническую аппроксимацию. Верно ли обратное? Отметим, что это имеет место в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ или на римановом

многообразии (см. [4]).

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1. *Пусть F есть замкнутое множество, удовлетворяющее в Ω условию $\overline{C}$. Тогда для любого компакта L из Ω объединение связных компонент $\overline{F^o}$, пересекающих L, есть компакт.*

Напомним следующий топологический результат о верхнем и нижнем пределах. Для любой последовательности $(A_n)_{n\geq 1}$ подмножеств топологического пространства X нижний топологический предел $\liminf_n A_n$ есть множество тех точек $x \in X$, любая окрестность которых перссекается с членами последовательности $(A_n)_{n\geq 1}$, начиная с некоторого места. Аналогично, верхний топологический предел $\limsup_n A_n$ есть множество точек $x \in X$, любая окрестность которых пересекается с бесконечно большим числом членов последовательности $(A_n)_{n\geq 1}$. Ясно, что $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$.

Теорема 6 [22, Теорема 2.101, стр. 101]. *Пусть X есть топологическое компактное хаусдорфово пространство, и $(W_n)_{n\geq 1}$ есть последовательность связных непустых подмножеств X. Тогда, если нижний предел последовательности $(W_n)_{n\geq 1}$ непуст, то ее верхний предел необходимо будет (связным, компактным) континуумом.*

Доказательство Леммы 1. Обозначим через Γ класс связных компонент $\overline{F^o}$. Пусть L есть компакт из Ω, и пусть

$$E = \bigcup \{C \in \Gamma : C \cap L \neq \emptyset\}.$$

Согласно условию $\overline{C}$ существует компакт Q из Ω, содержащий E. Пусть $x \in \overline{E}$. Имеем $x \in \overline{F^o}$. Пусть $C_x \in \Gamma$ является связной компонентой, содержащей x. Рассмотрим последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$ в E, сходящуюся к x, и пусть $(C_n)_{n\geq 1}$ есть последовательность в Γ такая, что $x_n \in C_n$ для любого $n \geq 1$. Имеем $L \cap C_n \neq \emptyset$. Пусть $(y_n)_{n\geq 1}$ есть последовательность такая, что $y_n \in L \cap C_n$ $(\forall n \geq 1)$. Существует подпоследовательность $(y_{n_j})_{j\geq 1}$, которая сходится к $y \in L$. Рассмотрим последовательность компонент $(C_{n_j})_{j\geq 1}$. Имеем $y \in \liminf_j C_{n_j}$. Согласно Теореме 6, $C = \limsup_j C_{n_j}$ есть континуум. Поскольку $x = \lim_j x_{n_j}$,

то имеем $x \in C$, а также $C \subset C_x$. Таким образом, $C_x \cap L \neq \emptyset$. Значит, $x \in E$. Отсюда следует, что E замкнуто, и, следовательно, E – компакт.

Лемма 2. *Пусть F замкнутое множество, удовлетворяющее в Ω условию $\overline{C}$. Пусть L_j – компакт, и E_j есть объединение связных компонент $\overline{F^o}$, которые пересекаются с L_j $(j = 1, 2)$. Предположим, что E_1 есть собственное подмножество E_2. Тогда существует компакт H такой, что*

(a) $E_1 \subset H \cap \overline{F^o} \subset E_2$;

(b) каждая связная компонента $\overline{F^o}$, пересекающая H, содержится в H^o.

Доказательство. Обозначим через Γ класс связных компонент $\overline{F^o}$, а через Γ_j – подкласс компонент, пересекающихся с L_j. По Лемме 1, E_j есть компакт. Рассмотрим фактор пространство E_2/Γ_1, полученное отождествлением точек каждой компоненты $C \in \Gamma_1$. Поскольку φ есть каноническая сюръекция E_2 на E_2/Γ_1, то насыщение $\varphi^{-1}\varphi(A)$ замкнутого множества A из E_2 есть

$$\varphi^{-1}\varphi(A) = A \cup (\bigcup \{C \in \Gamma_1 : C \cap A \neq \emptyset\}).$$

Оно является замкнутым, поскольку A – компакт (рассуждения те же, что и в Лемме 1). Отсюда следует, что E_2/Γ_1 – хаусдорфов компакт [6, стр. 43]. Так как $E_2 \setminus E_1 \neq \emptyset$, то существует $C_0 \in \Gamma_2 \setminus \Gamma_1$. С другой стороны, C_0 – компакт, и, значит, $\varphi(C_0)$ компакт, откуда следует, что $G = (E_2/\Gamma_1) \setminus \varphi(C_0)$ - окрестность $\varphi(E_1)$. Кроме того, для любой компоненты $C \in \Gamma_1$ – $\varphi(C)$ есть компонента E_2/Γ_1 и согласно Теореме 2.15 [22, стр. 47] существует подмножество V_c, одновременно открытое и замкнутое в E_2/Γ_1, такое, что $\varphi(C) \subset V_c \subset G$. Поскольку $\varphi(E_1)$ – компакт, существуют $C_1, ..., C_k$ в Γ_1 такие, что $\varphi(E_1) \subset \cup_{j=1}^{k} V_{c_j}$. Множество

$$W = \varphi^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{k} V_{c_j}\right)$$

является одновременно открытым и замкнутым в E_2. Можно найти компакт H и не пересекающееся с ним открытое множество U так, что $W \subset H^o$ и $F \setminus W \subset U$. Пусть $C \in \Gamma$. Если $C \setminus W \neq \emptyset$, то $C \subset F \setminus W$. Значит, $C \subset U$ и $C \cap H = \emptyset$. Отсюда следует, что, если $C \cap H \neq \emptyset$, то обязательно $C \subset W$ и, следовательно, $C \subset H^o$. Следующая лемма является непосредственным следствием результата Г. Мокободского и Л. Сибони (см. [11], стр. 392, сноска, или [3], или [14], Лемма 1).

Лемма 3. *Каждый компакт из Ω обладает фундаментальной системой окрестностей, составленной из келдышевских компактов.*

Лемма 4. *Пусть F – замкнутое множество из Ω. Следующие утверждения эквивалентны :*

(a) F – келдышевское ;

(b) для любой $x \in \Omega$ в Ω существует система Коши $\mathcal{U}_x$ окрестностей x таких, что $F \cap V$ келдышевское для любой $V \in \mathcal{U}_x$;

(c) для любой $x \in \Omega$ существует в Ω ее окрестность V такая, что $F \cap V$ келдышевское.

Доказательство. Импликация $a \Rightarrow b$ является следствием Леммы 3 и того, что конечное пересечение келдышевских множеств – келдышевское множество. Импликация $b \Rightarrow c$ очевидна.

$c \Rightarrow a$: Пусть $y \in b(\Omega \setminus F^o)$, и пусть V есть окрестность y такая, что $F \cap V$ келдышевское множество. Имеем

$$y \in b(\Omega \setminus (F \cap V)^o) = b(\Omega \setminus F \cap V).$$

Таким образом, $y \in b(\Omega \setminus F)$. Поскольку y произвольно в $b(\Omega \setminus F^o)$, то F – келдышевское.

Лемма 5. *Пусть $(X_n)_{n\geq 1}$ локально конечная последовательность попарно непересекающихся в Ω компактов. Тогда существуют две последовательности келдышевских компактов $(K_n)_{n\geq 1}$ и $(H_n)_{n\geq 1}$ такие, что : для всех $n \geq 1$*

$$K_n \subset H_n^o \subset H_n \subset K_{n+1}^o; \tag{i}$$

$$\bigcup_{j=1}^{n} X_j \subset K_n^o; \tag{ii}$$

$$\bigcup_{j>n} X_j \subset \Omega \setminus H_n. \tag{iii}$$

Доказательство. Для всех $n \geq 0$ положим $F_n = \bigcup_{j>n} X_j$. Тогда F_n не пересекается с X_n. Кроме того, $(F_n)_{n\geq 0}$ есть убывающая последовательность замкнутых множеств из Ω. Рассмотрим исчерпание $(V_n)_{n\geq 1}$ компактов из $\Omega \setminus F^o$.

1-ый этап : Положим $L_1 = X_1 \cup V_1$. Ясно, что L_1 – компакт из Ω, не пересекающийся с F_1. Согласно Лемме 3 существуют попарно непересекающиеся компактные келдышевские множества K_1 и H_1 такие, что $L_1 \subset K_1^o \subset K_1 \subset H_1^o$ и $H_1 \cap F_1 = \emptyset$.

$(n+1)$-ый этап : Предположим, что K_j и H_j построены для $(1 \leq j \leq n)$. Положим $L_{n+1} = X_{n+1} \cup V_{n+1} \cup H_n$. L_{n+1} – компакт, не пересекающийся с F_{n+1}. Тогда существуют два келдышевских компакта K_{n+1} и H_{n+1} таких, что

$$L_{n+1} \subset K_{n+1}^o \subset K_{n+1} \subset H_{n+1}^o, \quad H_{n+1} \cap F_{n+1} = \emptyset.$$

Полученные таким образом две последовательности келдышевских компактов $(K_n)_{n\geq 1}$ и $(H_n)_{n\geq 1}$ удовлетворяют Лемме 5.

Лемма 6. *Пусть K и H два компакта из Ω таких, что $\Omega \setminus K$ содержится в $b(\Omega \setminus H)$. Тогда как K, так и $K \cup H$ являются келдышевскими.*

Доказательство. Действительно, для этого достаточно заметить, что для всех открытых множеств ω и всех подмножеств A имеем следующие эквивалентности (см. [3]) :

(1) $\omega \subset b(A)$;

(2) $\omega \subset b(A \cap \omega)$;

(3) $b(\omega) = b(A \cap \omega)$ and $b(\overline{\omega}) = b(\overline{A \cap \omega})$.

Импликация $2 \Rightarrow 3$ следует из

$$b(\omega) \subset b(b(A \cap \omega)) \subset b(A \cap \omega) \subset b(\omega).$$

Далее, заметим, что

$$\omega \subset b(A \cap \omega) \subset \overline{A \cap \omega} \subset \overline{\omega}.$$

Откуда $\overline{A \cap \omega} = \overline{\omega}$, и, значит, они имеют одну и ту же базу. Поскольку $\Omega \setminus K \subset$ $\subset b(\Omega \setminus H)$, то имеем

$$b(\Omega \setminus K) = b(\Omega \setminus (K \cup H)), \quad b(\Omega \setminus K^o) = b(\Omega \setminus (K \cup H)^o).$$

Следовательно, компакты K и $K \cup H$ являются одновременно келдышевскими.

Лемма 7. *Пусть K – компакт из Ω с внутренней частью K°. Предположим, что K° есть объединение двух открытых множеств ω_1 и ω_2 таких, что $\overline{\omega_2}$ и компактная окрестность $\overline{\omega_1} - V$ не пересекаются. Если K и V келдышевские множества, то таково же и $K \cup V$.*

Доказательство. Предположим, что K и V келдышевские. Согласно Лемме 3 существует келдышевский компакт W, являющийся окрестностью $\overline{\omega_2}$ и не пересекающийся с V. Положим $L = K^\circ \setminus (V \cup W)^\circ$. Тогда L – компакт, не пересекающийся с $\overline{\omega_1} \cup \overline{\omega_2}$. Аналогично, существует келдышевский компакт H, являющийся окрестностью L и не пересекающийся с $\overline{\omega_1} \cup \overline{\omega_2}$. Имеем

$$K \cup V = V \cup (W \cap K) \cup (H \cap K).$$

Теперь V и $W \cap K$ есть два непересекающихся келдышевских компакта. Поэтому $V \cup (W \cap K)$ – келдышевское множество. Причем, $H \cap K$ есть келдышевский компакт с пустой внутренней частью. Имеем

$$b(\Omega \setminus (H \cap K)) = \Omega \supseteq \Omega \setminus (V \cup (W \cap K)).$$

Согласно Лемме 6, $K \cup V$ – келдышевское множество.

Мы завершим эту предварительную часть следующей элементарной топологической леммой.

Лемма 8. *Пусть E и F – два замкнутых множества в Ω.*

(a) Если E и F не пересекаются, то $(E \cup F)^\circ = E^\circ \cup F^\circ$;

(b) Если F имеет пустую внутреннюю часть, то $(E \cup F)^\circ = E^\circ$.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательство Теоремы 2. Импликация $a \Rightarrow b$ очевидна. Импликации $b \Rightarrow c \Rightarrow d \Rightarrow a$ следуют из Лемм 3 и 4 и Теоремы 1 Блидтнера и Хансена, из Теоремы 2 и из того, что конечное пересечение келдышевских множеств есть келдышевское множество.

Доказательство Теоремы 3. Эквивалентность $a \Leftrightarrow b$ есть следствие Теоремы 1 Блидтнера и Хансена и Теоремы 2. Эквивалентность $c \Leftrightarrow a$ получается из Леммы 4 и Теорем 1 и 2.

Доказательство Теоремы 4. Ясно, что каждое шапле удовлетворяет условию $\overline{C}$. Наоборот, пусть F - замкнутое множество, удовлетворяющее условию $\overline{C}$. Если его внутренняя часть F^o относительно компактна, то семейство, состоящее из единственного открытого множества F^o, удовлетворяет определению 1. Отсюда, F есть шапле. В противном случае, обозначим через Γ класс связных компонент $\overline{F^o}$. Существует исчерпание $(L_n)_{n\geq 1}$ компактов из Ω такое, что

(1) $L_n \subset L_{n+1}^o$ $(\forall n \geq 1)$;

(2) $\Omega = \cup_n L_n$;

(3) любая компонента $W \in \Gamma$, пересекающая L_n, содержится в L_{n+1}^o ;

(4) для любого $n \geq 1$ существует $W \in \Gamma$, пересекающее L_{n+1}, но не L_n.

Обозначим через E_n объединение компонент $W \in \Gamma$, пересекающих L_n. Имеем $\overline{F^o} = \cup_n E_n$. Согласно Лемме 2, для всех $n \geq 1$ существует компакт H_n такой, что

(a) $E_n \subset H_n \cap \overline{F^o} \subset E_{n+1}$;

(b) каждая компонента $W \in \Gamma$, пересекающая H_n, содержится в H_n^o.

Согласно (b) имеем $E_n \subset H_n^o$. Положим $H_0 = \emptyset$ и рассмотрим семейство открытых множеств $(U_n)_{n\geq 1}$, где U_n – объединение компонент V для F^o, которые содержатся в $H_{n+1} \setminus H_n$. Это семейство удовлетворяет определению 1, следовательно, F есть шапле.

Доказательство Теоремы 5. Эквивалентность $a \Leftrightarrow c \Leftrightarrow g$ следует из Теоремы 3. Импликации $c \Rightarrow b$ и $f \Rightarrow d$ очевидны. Для того, чтобы доказать импликации

$$b \text{ (соотв. } d) \Rightarrow a \text{ (соотв. } c) \Rightarrow e \text{ (соотв. } f),$$

рассмотрим следующий формализм : "Пара $(\mathcal{F}_0; \mathcal{F})$ обозначает или $(\mathcal{S}_0; \mathcal{S}_c)$, или $(\mathcal{H}_0; \mathcal{H})$".

Пусть F – шапле в Ω, и пусть $(\omega_n)_n$ есть последовательность открытых множеств, замыкание которых образуют локально компактную последовательность непересекающихся компактов, причем $F^o = \cup_n \omega_n$. По Лемме 5 существуют две последовательности келдышевских компактов $(K_n)_{n\geq 1}$ и $(H_n)_{n\geq 1}$ таких, что для

всех $n \geq 1$ имеем

$$K_n \subset H_n^o \subset H_n \subset K_{n+1}^o, \quad \bigcup_{j=1}^{n} \omega_j \subset K_n^o, \quad \bigcup_{j>n} \omega_j \subset \Omega \setminus H_n.$$

Доказательство b (соотв. d) $\Rightarrow$ a (соотв. c). Предположим, что F допускает равномерную аппроксимацию, и пусть $x \in F$.

Случай I : $x \in F \setminus \cup_n \omega_n$. Поскольку $\cup_n \bar{\omega}_n$ замкнуто, то существует компактная окрестность V для x, не пересекающаяся с $\cup_n \omega_n$. Имеем $(V \cap F)^o = \emptyset$. Пусть $f \in \mathcal{F}_0(V \cap F)$. Рассмотрим функцию

$$\psi = \begin{cases} f & \text{на } V \cap F, \\ 0 & \text{на } \bigcup_n \bar{\omega}_n. \end{cases}$$

По Лемме Титце ψ непрерывно продолжается в $\tilde{\psi}$ на F. Далее, $\tilde{\psi}$ есть нуль на F^o, значит, $\tilde{\psi} \in \mathcal{F}_0(F)$. Поскольку F допускает равномерную аппроксимацию, то существует $g \in \mathcal{F}(F)$, равномерно аппроксимирующее $\tilde{\psi}$ на F. В частности, $g_{|(V \cap F)} \in \mathcal{F}(V \cap F)$ и приближает f равномерно на $V \cap F$.

Случай II : $x \in \cup_n \omega_n$. Существует $m \geq 1$ такое, что $x \in K_m^o$. Пусть $f \in \mathcal{F}_0(F \cap K_m)$. Рассмотрим функцию

$$\psi = \begin{cases} f & \text{на } F \cap K_m, \\ 0 & \text{на } F \setminus H_m^o. \end{cases}$$

По лемме Титце, ψ непрерывно продолжается в ψ на F. На F^o имеем

$$\tilde{\psi} = \begin{cases} f & \text{на } \bigcup_{i=1}^{m} \omega_i, \\ 0 & \text{на } \bigcup_{i>m} \omega_i. \end{cases}$$

Значит, $\tilde{\psi} \in \mathcal{F}_0(F)$. Так как F допускает равномерную аппроксимацию, то существует $g \in \mathcal{F}(F)$, аппроксимирующее $\tilde{\psi}$ равномерно на F. В частности, $g_{|F \cap K_m} \in \mathcal{F}(F \cap K_m)$ приближает f равномерно на $F \cap K_m$. Отсюда следует, что F допускает локальную равномерную аппроксимацию.

Доказательство a (соотв. c) $\Rightarrow$ e (соотв. f). Предположим, что F допускает локальную равномерную аппроксимацию. Пусть $f \in \mathcal{F}_0(F)$, и пусть ε - непрерывна на F со значениями в $(0, 1]$. Рассмотрим для каждого $n \geq 1$ келдышевские компакты $E_n = F \cap K_n$ и $E_n = F \cap H_n$. Пусть $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ убывающая последовательность действительных положительных чисел таких, что для всех $n \geq 1$ имеет место $\varepsilon_n \leq \varepsilon$ на E_n.

1-ый этап : $f_{|K_1} \in \mathcal{F}_0(E_1)$. По Теореме 1 существуют открытая окрестность W_1 для E_1 и $g_1 \in \mathcal{F}(W_1)$ такие, что

$$\|f - g_1\|_{E_1} \le \frac{\varepsilon_2}{2^4}. \tag{1}$$

Имеем $F_1 \subset W_1 \cap H_1^\circ$. Согласно Лемме 3, существует келдышевский компакт $V_1 \subset$

$W_1 \cap H_1^\circ$, являющийся окрестностью F_1. Рассмотрим функцию

$$\psi_1 = \begin{cases} g_1 - f & \text{на } V_1 \cap F, \\ 0 & \text{на } F \setminus H_1^\circ. \end{cases}$$

Поскольку $V_1 \subset H_1^\circ$, то согласно (1) и лемме Титце ψ_1 непрерывно продолжается в $\tilde{\psi}_1$ на E_2, причем

$$\|\tilde{\psi}_1\|_F \le \frac{\varepsilon_2}{2^4}. \tag{2}$$

Пусть

$$\varphi_1 = \begin{cases} g_1 & \text{на } V_1, \\ \tilde{\psi}_1 + f & \text{на } E_2. \end{cases}$$

В силу Леммы 8 имеем $(E_2 \cup V_1)^\circ = V_1^\circ \cup \omega_2$, и, кроме того

$$\varphi_1 = \begin{cases} g_1 & \text{на } V_1^\circ, \\ f & \text{на } \omega_2. \end{cases}$$

Значит $\varphi_1 \in \mathcal{F}_0(E_2 \cup V_1)$. По Лемме 7, $E_2 \cup V_1$ – келдышевское множество. Следовательно, существуют открытая окрестность W_2 для $E_2 \cup V_1$ и $g_2 \in \mathcal{F}(W_2)$ такие, что

$$\|\varphi_1 - g_2\|_{E_2 \cup V_1} \le \frac{\varepsilon_3}{2^5}.$$

Имеем

$$\|f - g_2\|_{E_2 \setminus H_1^\circ} \le \varepsilon_3/2^5,$$

$$\|g_1 - g_2\|_{V_1} \le \varepsilon_3/2^5.$$

Поскольку

$$|g_2 - g_1| \le |g_2 - \varphi_1| + |\varphi_1 - f| + |f - g_1|,$$

то из (1) и (2) имеем

$$\|g_2 - g_1\|_{K_1} \le 5\varepsilon_2/2^5. \tag{3}$$

Получаем $F_2 \cup V_1 \subset W_2 \cap H_2^o$. Аналогично, существует келдышевский компакт $V_2 \subset W_2 \cap H_2^o$, являющийся окрестностью $F_2 \cup V_1$.

2-ой этап. По индукции : пусть $n \geq 2$ и предположим, что уже построены функции $g_1, ..., g_n$, келдышевские компакты $V_1, ..., V_n$ и открытые множества $W_1, ..., W_n$ такие, что, если положить $H_0 = \emptyset$, для $j = 2, ..., n$, будем иметь

(i) $g_j \in \mathcal{F}(W_j)$;

(ii) $E_j \cup V_{j-1} \subset W_j$;

(iii) $F_j \cup V_{j-1} \subset V_j^o \subset V_j \subset W_j \cap H_j^o$;

(iv) $\|g_{j-1} - g_j\|_{V_{j-1}} \leq \varepsilon_{j+1}/2^{j+3}$;

(v) $\|g_{j-1} - g_j\|_{E_{j-1} \setminus H_{j-2}^o} \leq 5\varepsilon_j/2^{j+3}$;

(vi) $\|g_j - f\|_{E_j \setminus H_{j-1}^o} \leq \varepsilon_{j+1}/2^{j+3}$.

Рассмотрим функцию

$$\psi_n = \begin{cases} g_n - f & \text{на } V_n \cap F, \\ 0 & \text{на } F \setminus H_n^o. \end{cases}$$

Поскольку $V_n \subset H_n^o$, то из (vi) и леммы Титце, ψ_n непрерывно продолжается в $\tilde{\psi}_n$ на F, причем

$$\|\tilde{\psi}_n\|_{F \setminus H_{n-1}^o} \leq \varepsilon_{n+1}/2^{n+3}. \tag{4}$$

Пусть

$$\varphi_n = \begin{cases} g_n & \text{на } V_n, \\ \tilde{\psi}_n + f & \text{на } E_{n+1}. \end{cases}$$

В силу Леммы 8 имеем $(E_{n+1} \cup V_n)^o = \omega_{n+1} \cup V_n^o$ и

$$\varphi_n = \begin{cases} g_n & \text{на } V_n^o, \\ f & \text{на } \omega_{n+1}. \end{cases}$$

Поэтому, $\varphi_n \in \mathcal{F}_0(E_{n+1} \cup V_n)$. Аналогично, существуют открытая окрестность W_{n+1} для $E_{n+1} \cup V_n$ и $g_{n+1} \in \mathcal{F}(W_{n+1})$ такие, что

$$\|\varphi_n - g_{n+1}\|_{E_{n+1} \cup V_n} \leq \varepsilon_{n+2}/2^{n+4}.$$

Имеем

$$\|g_{n+1} - f\|_{E_{n+1} \setminus H_n^o} \leq \varepsilon_{n+2}/2^{n+4},$$

$$\|g_{n+1} - g_n\|_{V_n} \leq \varepsilon_{n+2}/2^{n+4}.$$

Поскольку

$$|g_{n+1} - g_n| \le |g_{n+1} - \varphi_n| + |\varphi_n - f| + |f - g_n|,$$

то из (vi) и (10) получаем

$$\|g_{n+1} - g_n\|_{F_n \setminus H^o_{n-1}} \le 5\varepsilon_{n+1}/2^{n+4}.$$

Имеем, $F_{n+1} \cup V_n \subset W_{n+1} \cap H^o_{n+1}$. Существует келдышевский компакт $V_{n+1} \subset$ $\subset W_{n+1} \cap H^o_{n+1}$, являющийся окрестностью $F_{n+1} \cup V_n$.

Пусть $m \ge 1$, $x \in V_m$ и $p \ge q > m$. Согласно (iv) имеем

$$|g_p - g_q| \le \sum_{j=q}^{p-1} |g_{j+1} - g_j| \le \sum_{j=q}^{p-1} \varepsilon_{j+2}/2^{j+4} \le \varepsilon_{m+2}/2^{m+4}.$$

Отсюда следует, что последовательность $(g_n)_{n\ge 1}$ на V_m фундаментальна. Положим $U = \cup_j V_j^o$. Отсюда U является открытой окрестностью F и $(g_n)_n$ сходится к предельной функции $g \in \mathcal{F}(U)$. Пусть $x \in F$.

Случай *I* : Предположим, что $x \in E_1$. Пусть $m \ge 1$ такое, что для $n \ge m$

$$|g_n(x) - g(x)| \le \varepsilon_2/2^4. \tag{5}$$

Имеем

$$|f(x)-g(x)| \le |f(x)-g_1(x)|+|g_1(x)-g_2(x)|+\sum_{j=2}^{m}|g_j(x)-g_{j+1}(x)|+|g_{m+1}(x)-g(x)|.$$

Из (iv), (1), (3) и (5) получаем

$$|f(x) - g(x)| \le \varepsilon_2/2^4 + 5\varepsilon_2/2^5 + \sum_{j=2}^{m} \varepsilon_{j+2}/2^{j+4} + \varepsilon_2/2^4 \le$$

$$\le 10\varepsilon_2/2^5 \le \varepsilon_1 \le \varepsilon(x).$$

Случай *II* : Предположим, что $x \notin E_1$. Пусть $p \ge 1$ такое, что $x \in E_{p+1} \setminus E_p$. Существует $m \ge p+1$ такое, что для всех $n \ge m$

$$|g_n(x) - g(x)| \le \varepsilon_{p+2}/2^{p+4}. \tag{6}$$

Имеем

$$|f(x) - g(x)| \le |f(x) - g_{p+1}(x)| + |g_{p+2}(x) - g_{p+1}(x)| +$$
$$+ \sum_{j=p+2}^{m} |g_{j+1}(x) - g_j(x)| + |g_{m+1}(x) - g(x)|.$$

Согласно (iv), (v), (vi) и (6) имеем

$$|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon_{p+2}/2^{p+4} + 5\varepsilon_{p+2}/2^{p+5} + \sum_{j=p+2}^{m} \varepsilon_{j+2}/2^{j+4} + \varepsilon_{p+2}/2^{p+4} \leq$$

$$\leq 10\varepsilon_{p+2}/2^{p+5} \leq \varepsilon_{p+1} \leq \varepsilon(x).$$

Отсюда следует, что $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon(x)$ для всех $x \in F$. Соответственно, F допускает касательную аппроксимацию.

Следуя предыдущему формализму, имеем

Случай *I* : если пара $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F})$ идентифицируется с $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_c)$, получаем

$$b \Rightarrow a \Rightarrow e.$$

Случай *II* : если пара $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F})$ идентифицируется с $(\mathcal{H}_0, \mathcal{H})$, то $d \Rightarrow c \Rightarrow f$.

ABSTRACT. The characterization due to Keldysh and Deny in $\mathbb{R}^m$ of compact sets allowing uniform harmonic approximation was obtained in an axiomatic setting by J. Bliedtner and W. Hansen both for continuous superharmonic functions and for harmonic functions. The local nature of this description allows extention to closed sets where uniform harmonic approximation is *locally* possible. We also investigate tangential approximation using arbitrary continuous weight. The equivalence of the possibilities of local uniform approximation and of tangential approximation is obtained for certain closed subsets called "chapelets". A topological characterization of the chapelets is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Bagby and P. Blanchet, "Uniform harmonic approximation on Riemannian manifolds", J. d'Analyse Math. (to appear).
2. T. Bagby and P. M. Gauthier, "Approximation by harmonic functions on closed subsets of Riemann surfaces", J. d'Analyse Math. vol. 51, pp. 259 – 284, 1988.
3. Ch. Bensouda, "Approximation harmonique sur the fermés en théorie axiomatique de Brelot", Thèse, Université Mohamed *V*, faculté des sciences de Rabat, Maroc, 1988.
4. Ch. Bensouda and P. M. Gauthier, "Approximation Surharmonique sur les Fermés" (preprint).
5. J. Bliedtner and W. Hansen, " Simplicial cones in potential theory", I : Inventiones Math. vol. 29, pp. 83 – 110, 1975 ; II : vol. 46, 255 275, 1978.
6. N. Bourbaki, Topologie Générale (facicule de résultats) XVI Première partie, Les structures fondamentales de l'analyse, Livre 3, Hermann and Cie, Editeurs, 1953.
7. M. Brelot, Lectures on Potential Theory, Tata Institute, Bombay, 1960.
8. C. Constantinescu, "Some properties of the balayage of measures on a harmonic spaces", Ann. Inst. Fourier (Grenoble), vol 17, no. 1, pp. 273 – 293, 1967.
9. C. Constantinescu and A. Cornea, "On the axiomatic of harmonic functions", Ann.

Inst. Fourier (Grenoble), vol. 13, no. 2, pp. 373 – 388, 1963.
10. C. Constantinescu and A. Cornea, Potential Theory on Harmonic Spaces, Springer-Verlag, 1972.
11. A. De La Pradelle, "Approximation and caractère de quasi-analyticité dans la théoric axiomatique des fonctions harmoniques", Ann. Inst. Fourier (Grenoble), vol 17, no. 1, pp. 383 – 399, 1967.
12. J. Deny, "Systèmes totaux de fonctions harmoniques", Ann. Inst. Fourier (Grenoble), vol 103, no. 1, pp. 103 – 113, 1949.
13. B. Fuglede, "Finely Harmonic Functions", Lecture Notes in Mathematics, no. 289, Springer-Verlag, 1972.
14. S. J. Gardiner, M. Goldstein and K. N. Gowrisankaran, "Tangential approximation in harmonic spaces", Illinois Journal of Mathematics (to appear).
15. P. M. Gauthier, "Tangential approximation by entire functions and functions holomorphic in a disc", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 4, стр. 319 – 326, 1969.
16. P. M. Gauthier, "Carleman approximation on unbounded sets by harmonic functions with Newtonian singularities", Lecture Notes in Mathematics, no. 1039, pp. 177 – 181, Springer-Verlag, 1983.
17. P. M. Gauthier, W. Hangartner and M. Labrèche, "Approximation harmonique, approximation holomorphe and topologie", Canad. J. Math., vol. 34, pp. 216 – 219, 1982.
18. А. А. Гончар, "О приближении непрерывных функций гармоническими", ДАН СССР, т. 154, стр. 503 – 506, 1964
19. А. А. Гончар, "О свойстве "неустойчивости" гармонической емкости", ДАН СССР, т. 165, стр. 479 – 481, 1965
20. W. Hansen, " Harmonic and superharmonic functions on compact sets", Illinois Journal of Mathematics, vol. 29, pp. 103 – 107, 1985.
21. R. M. Hervé, "Recherche axiomatique sur la théorie des fonctions harmoniques et du potentiel", Ann. Inst. Fourier (Grenoble), vol. 12, pp. 415 – 571, 1962.
22. J. C. Hocking and G. S. Young, "Topology", Addison-Wesley, Reading, 1961.
23. M. V. Keldysh and M. A. Lavrent'ev, "Sur un problem of M. Carleman", C.R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS, vol. 23, pp. 746 – 748, 1939.
24. М. В. Келдыш, "О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле", УМН, т. 8, стр. 171 – 231, 1940.
25. M. Labrèche, "De l'approximation harmonique", Thèse, Université de Montréal, Canada, 1982.
26. А. А. Нерсесян, "О множествах Карлемана", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 6, №6, стр. 465 – 471, 1971.
27. A. G. Vitushkin, "Necessary and sufficient conditions on a set in order that any continuous function analytic at the interior points of the set may admit uniform approximation by rational functions", Soviet Math. Dokl. vol. 7, pp. 1622 – 1625, 1966.

25 Сентября 1993

Монреальский университет,
Монреаль, Квебек, Канада

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. М. Джрбашян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, №1, 1994

В статье рассмотрены некоторые классы субгармонических функций, обладающих неотрицательными гармоническими мажорантами в полуплоскости после применения оператора дробного интегрирования Вейля. Найдены представления типа Рисса и полное описание роста этих функций, которые, по существу, описывают все субгармонические функции, чьи вейлевские первообразные имеют неотрицательные гармонические мажоранты в полуплоскости.

§0. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье методы [1] использованы для нахождения полного описания роста, а также представлений некоторых классов субгармонических функций, имеющих неотрицательные гармонические мажоранты в нижней полуплоскости $C^{(-)} = \{z\colon \operatorname{Im} z < 0\}$ после применения оператора дробного интегрирования Вейля

$$W^{-\alpha} u(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{y} (y-t)^{\alpha-1} u(x+it)\, dt, \quad z = x+iy, \quad \alpha > 0.$$

Выбор рассмотренных классов субгармонических функций обусловлен удобством применения этого оператора и его обращения. Необходимо наложить ограничение на поведение $|u(z)|$ на бесконечности, чтобы обеспечить субгармоничность $W^{-\alpha} u(z)$ в $C^{(-)}$, если субгармонична в $C^{(-)}$ функция $u(z)$. В этом смысле описание роста и представления типа Рисса, данные в этой статье, по существу полностью описывают все субгармонические функции, чьи вейлевские первообразные имеют неотрицательные гармонические мажоранты в полуплоскости. С другой стороны, в статье содержатся усиления и распространения результатов [2 – 4] на субгармонические функции, а также указан путь, по которому все утверждения теории факторизации и граничных свойств классов голоморфных функций

обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости, построенной в [2 – 12], могут быть распространены на субгармонические функции.

§1. ПОТЕНЦИАЛЫ ТИПА ГРИНА ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

В представлениях типа Рисса для субгармонических функций, установленных в дальнейшем, использованы потенциалы типа Грина для полуплоскости, сходящиеся для широких классов борелевских мер, ассоциированных с субгармоническими функциями. Ниже мы вводим эти потенциалы и исследуем некоторые их свойства.

1.1 Предварительно приведем некоторые определения и утверждения.

Определение. Пусть $u(z)$ – функция, измеримая на любом луче $\{z = x - i\sigma:\ -\infty < x < +\infty, 0 < \sigma < +\infty\}$. Тогда $u(z) \in M_\beta$ $(0 < \beta < +\infty)$, если существует угловая область $\Lambda(\delta_0, R_0) = \{z:\ |\arg z + \frac{\pi}{2}| < \delta_0,\ |z| < R_0\}$ $(0 < \delta_0 < \frac{\pi}{2},\ R_0 > 0)$ такая, что

$$\sup_{z \in K} \int_1^{+\infty} \sigma^{\beta-1} |u(z - i\sigma)|\, d\sigma < +\infty \tag{1.1}$$

для любого компакта $K \subset \Lambda(\delta_0, R_0)$.

Ограничение $u(z) \in M_\beta$, по существу, представляет из себя условие убывания $|u(z)|$ на бесконечности, удобное для применения оператора Вейля (см. также [7, 13]. В частности, вводя в рассмотрение обратный оператор

$$W^\alpha u(z) \equiv \frac{\partial^p}{\partial y^p} W^{-(p-\alpha)} u(z), \quad z = x + iy, \quad 0 \le p - 1 < \alpha \le p,$$

можно доказать следующую лемму.

Лемма 1.1. *Пусть $u(z)$ субгармонична в $G^{(-)}$, и пусть $u(z) \in M_p$ для какого-либо натурального p. Тогда для любого $\alpha \in (0, p]$:*

1°. *$W^{-\alpha} u(z)$ непрерывна и субгармонична в $G^{(-)}$,*

2°. $W^\alpha W^{-\alpha} u(z) = u(z),\ z \in G^{(-)}.$ *(1.2)*

Доказательство. 1°. Поскольку $u(z) \in M_p$, то интеграл $W^{-\alpha} u(z)$ абсолютно сходится при любом $z \in G^{(-)}$. По той же причине, для фиксированной точки $z_0 = x_0 + iy_0 \in G^{(-)}$ интеграл

$$\int_M^{+\infty} \sigma^{\alpha-1} |u(z - i\sigma)|\, d\sigma, \quad |z - z_0| < \frac{|y_0|}{2},$$

сколь угодно мал, если $M > 0$ достаточно велико. С другой стороны, можно убедиться в том, что для любого конечного $M > 0$ интеграл

$$\int_0^M \sigma^{\alpha-1} |u(z - i\sigma)|\, d\sigma$$

является непрерывной функцией в точке $z = z_0$. С этой целью можно использовать, например, риссовское представление $u(z)$ в произвольном круге, содержащемся в $G^{(-)}$ и содержащем прямоугольник $\{z - i\sigma:\ |z - z_0| < |y_0|/2\}$, $0 < \sigma < M$. Отсюда следует, что $W^{-\alpha} u(z)$ непрерывна в $G^{(-)}$. Неравенство между $W^{-\alpha} u(z)$ и его средним значением легко получается изменением порядка интегрирования. 2° следует из результатов работы [7] (см. Замечание после Леммы 1.2).

1.2. Рассмотренные ниже потенциалы типа Грина построены с применением произведений типа Бляшке для $G^{(-)}$, введенных и исследованных в [2,4]. Элементарные факторы такого произведения были определены по формуле

$$b_\alpha(z, \zeta) = \exp\left\{ - \int_{-|\eta|}^{|\eta|} \frac{(|\eta| - |t|)^\alpha\, dt}{[i(z - \xi) - t]^{1+\alpha}} \right\}, \quad \alpha > -1. \tag{1.3}$$

При этом оказывается, что $b_\alpha \left(b_0(z, \zeta) = \dfrac{(z - \zeta)}{(z - \bar{\zeta})} \right)$ голоморфна в $G^{(-)}$ и обращается в нуль только в точке $\zeta = \xi + i\eta \in G^{(-)}$, где имеет нуль первого порядка. Кроме того, при любых $z, \zeta \in G^{(-)}$

$$-W^{-\alpha} \log |b_\alpha(z, \zeta)| = \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \operatorname{Re} \int_{-|\eta|}^{|\eta|} \frac{(|\eta| - |t|)^\alpha}{i(z - \xi) - t}\, dt, \quad \alpha > -1, \tag{1.4}$$

и этот интеграл неотрицателен при $\alpha \geq 0$.

Лемма 1.2. *Пусть $\nu(\zeta)$ – неотрицательная борелевская мера в $G^{(-)}$, удовлетворяющая при некотором $\alpha > 0$ условию*

$$\iint_{G^{(-)}} |\eta|^{1+\alpha}\, d\nu(\zeta) < +\infty \quad (\zeta = \xi + i\eta). \tag{1.5}$$

Тогда потенциал типа Грина

$$I_\alpha(z) = - \iint_{G^{(-)}} \log |b_\alpha(z, \zeta)|\, d\nu(\zeta) \tag{1.6}$$

является функцией, супергармонической в $G^{(-)}$.

Доказательство. Пусть $\rho_0 < 0$ любое число, и пусть $z \in G^{(-)}_{\rho_0} = \{z:\ \operatorname{Im} z <$

$< \rho_0\}$. Тогда, применяя (1.4), легко можно проверить, что для любого $\zeta \in G^{(-)} \setminus G^{(-)}_{\rho_0/2}$ имеем $|\log|b_\alpha(z,\zeta)|| \le C_{\alpha,\rho_0}|\eta|^{1+\alpha}$, где $C_{\alpha,\rho_0} > 0$– константа, зависящая только от α и ρ_0. Отсюда следует, что

$$l_{\alpha,\rho_0}(z) = -\iint_{G^{(-)}\setminus G^{(-)}_{\rho_0/2}} \log|b_\alpha(z,\zeta)|\,d\nu(\zeta)$$

является гармонической в $G^{(-)}_{\rho_0}$ функцией. Для рассмотрения оставшейся части $l_\alpha(z)$, напомним (см. [1]), что функция

$$U_\alpha(z,\zeta) = \log|b_\alpha(z,\zeta)| - \log|b_0(z,\zeta)| \tag{1.7}$$

гармонична в $G^{(-)}$ и представима в виде

$$U_\alpha(z,\zeta) = C_\alpha + \operatorname{Re}\int_{|\eta|}^{+\infty}\left[\frac{\tau^\alpha}{(iz-i\zeta+\tau)^{1+\alpha}} - \frac{1}{iz-i\zeta+\tau}\right]d\tau -$$
$$-\operatorname{Re}\int_0^{|\eta|}\frac{\tau^\alpha\,d\tau}{(iz-i\bar\zeta-\tau)^{1+\alpha}} + \operatorname{Re}\int_0^{|\eta|}\frac{d\tau}{iz-i\bar\zeta-\tau}, \quad z,\zeta\in G^{(-)}, \tag{1.8}$$

где

$$C_\alpha = \int_0^{+\infty}\left[1-\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}\right)^\alpha\right]\frac{d\sigma}{1+\sigma} > 0$$

есть постоянная, а другие слагаемые - суть гармонические в $G^{(-)}$ функции. Легко проверить, что при любых $z \in \overline{G^{(-)}_{\rho_0}}$ и $\zeta \in G^{(-)}_{\rho_0/2}$

$$\left|C_\alpha - \int_0^{|\eta|}\frac{\tau^\alpha\,d\tau}{(iz-i\bar\zeta-\tau)^{1+\alpha}} + \int_0^{|\eta|}\frac{d\tau}{iz-i\bar\zeta-\tau}\right| \le C'_{\alpha,\rho_0}|\eta|^{1+\alpha}, \tag{1.9}$$

где $C'_{\alpha,\rho_0} > 0$ – постоянная, зависящая только от α и ρ_0. Для оценки оставшегося слагаемого из (1.8) обозначим

$$J = \int_{|\eta|}^{+\infty}\left|\frac{\tau^\alpha}{(iz-i\zeta+\tau)^{1+\alpha}} - \frac{1}{iz-i\zeta+\tau}\right|d\tau =$$
$$= \int_0^{+\infty}\left|1-\left(\frac{\sigma+\left|\frac{\eta}{y}\right|}{i\frac{x-\xi}{|y|}+1+\sigma}\right)^\alpha\right|\frac{d\sigma}{\left|i\frac{x-\xi}{|y|}+1+\sigma\right|}, \quad z=x+iy, \tag{1.10}$$

и рассмотрим в отдельности случаи $|\eta| > 2|y|$ и $|\eta| \le 2|y|$ ($\zeta = \xi+i\eta \in G^{(-)}_{\rho_0/2}$, $z = x+iy \in \overline{G^{(-)}_{\rho_0}}$). Если $|\eta| > 2|y|$, то

$$J = \left(\int_0^{|\frac{\eta}{y}|-2} + \int_{|\frac{\eta}{y}|-2}^{+\infty}\right)\left|1-\left(\frac{\sigma+\left|\frac{\eta}{y}\right|}{i\frac{x-\xi}{|y|}+1+\sigma}\right)^\alpha\right|\frac{d\sigma}{\left|i\frac{x-\xi}{|y|}+1+\sigma\right|} \equiv J_1+J_2, \tag{1.11}$$

где, очевидно

$$J_1 < 2^\alpha \left|\frac{\eta}{y}\right|^\alpha \int_0^{+\infty} \frac{d\sigma}{(1+\sigma)^{1+\alpha}} + \log\left|\frac{\eta}{y}\right| < C''_{\alpha,\rho_0} |\eta|^{1+\alpha}. \tag{1.12}$$

С другой стороны, обозначая

$$\frac{\sigma + \left|\frac{\eta}{y}\right|}{i\frac{x-\xi}{|y|} + 1 + \sigma} = 1 - \omega, \quad \omega = \frac{i\frac{x-\xi}{|y|} + 1 - \left|\frac{\eta}{y}\right|}{i\frac{x-\xi}{|y|} + 1 + \sigma};$$

имеем $|\omega| < 1$ тогда и только тогда, когда $\sigma > \left|\frac{\eta}{y}\right| - 2$. К тому же, если $|\omega| < 1$, то $|(1-\omega)^\alpha - 1|/|\omega| \le M_\alpha < +\infty$. Поэтому

$$J_2 \le 2M_\alpha \left(\left|\frac{x-\xi}{y}\right| + \left|\frac{\eta}{y}\right| - 1\right) \int_{\left|\frac{\eta}{y}\right|-2}^{+\infty} \left(\left|\frac{x-\xi}{y}\right| + 1 + \sigma\right)^{-2} d\sigma <$$

$$< 2M_\alpha \le C'''_{\alpha,\rho_0} |\eta|^{1+\alpha}. \tag{1.13}$$

Если $|\rho_0|/2 < |\eta| \le 2|y|$, то $|\omega| < 1$ при любом $\sigma > 0$. Тем самым

$$J \le 2M_\alpha \left(\left|\frac{x-\xi}{y}\right| + \left|1 - \left|\frac{\eta}{y}\right|\right|\right) \int_0^{+\infty} \left(\left|\frac{x-\xi}{y}\right| + 1 + \sigma\right)^{-2} d\sigma \le$$

$$\le 2M_\alpha \le C'''_{\alpha,\rho_0} |\eta|^{1+\alpha}.$$

Используя (1.8) - (1.13) и последнюю оценку, получаем

$$|U_\alpha(z\zeta)| \le C^*_{\alpha,\rho_0} |\eta|^{1+\alpha}, \quad z \in \overline{G^{(-)}_{\rho_0}}, \zeta \in G^{(-)}_{\rho_0/2},$$

где $C^*_{\alpha,\rho_0} > 0$ - постоянная, зависящая только от α и ρ_0. Следовательно, из (1.7) и (1.5) имеем

$$I^*_{\alpha,\rho_0} = -\iint_{G^{(-)}_{\rho_0/2}} \log|b_\alpha(z,\zeta)|\, d\nu(\zeta) =$$

$$= -\iint_{G^{(-)}_{\rho_0/2}} \log|b_0(z,\zeta)|\, d\nu(\zeta) - \iint_{G^{(-)}_{\rho_0/2}} U_\alpha(z,\zeta)\, d\nu(\zeta),$$

где последний интеграл абсолютно и равномерно сходится в $G^{(-)}_{\rho_0}$, а $I^*_{\alpha,\rho_0}(z)$ супергармонична в $G^{(-)}_{\rho_0}$, поскольку является суммой обычного потенциала Грина и функции, гармонической в $G^{(-)}_{\rho_0}$. Отсюда следует нужное утверждение, так как $I_\alpha(z) = I_{\alpha,\rho_0}(z) + I^*_{\alpha,\rho_0}(z)$ при любом $\rho_0 < 0$.

Лемма 1.3. *Пусть $\nu(\zeta)$ – неотрицательная борелевская мера в $G^{(-)}$, удовлетворяющая условию (1.5) при некотором $\alpha > 0$. Тогда потенциал типа Грина (1.6) имеет следующие свойства :*

1°. $I_\alpha(z) \in M_\beta$ *при любом* $\beta \in (0, 1+\alpha)$.

2°. $W^{-\alpha} I_\alpha(z)$ *непрерывная супергармоническая функция в* $G^{(-)}$

$$W^{-\alpha} I_\alpha(z) = -\iint_{G^{(-)}} W^{-\alpha} \log|b_\alpha(z,\zeta)|\, d\nu(\zeta) \geq 0, \quad z \in G^{(-)}, \tag{1.14}$$

где интеграл равномерно сходится в любой полуплоскости $G_\rho^{(-)}$ $(\rho < 0)$ *и*

$$\int_1^{+\infty} W^{-\alpha} I_\alpha(-it)\, \frac{dt}{t} < +\infty. \tag{1.15}$$

3°. $W^{-\alpha} I_\alpha(z)$ *представима в виде обычного потенциала Грина :*

$$W^{-\alpha} I_\alpha(z) = -\iint_{G^{(-)}} \log|b_0(z,\zeta)|\, d\nu_\alpha(\zeta), \quad z \in G^{(-)}, \tag{1.16}$$

где $\nu_\alpha(\zeta)$ *– неотрицательная борелевская мера, удовлетворяющая (1.5) при* $\alpha = 0$.

Доказательство. 1°. Пусть $\rho_0 < 0$ и $z = x + iy \in \overline{G_{\rho_0}^{(-)}}$. Полагая, что $\alpha \leq \beta < 1 + \alpha$, обозначим

$$I = \int_0^{+\infty} \sigma^{\beta-1}\, d\sigma \iint_{G^{(-)}} |\log|b_\alpha(z - i\sigma, \zeta)||\, d\nu(\zeta) = \left(\iint_{G^{(-)} \setminus G_y^{(-)}} + \iint_{G_y^{(-)}} \right) \times$$

$$\times \left(\int_0^{+\infty} \sigma^{\beta-1} |\log|b_\alpha(z - i\sigma, \zeta)||\, d\sigma \right) d\nu(\zeta) \equiv I_1 + I_2 \tag{1.17}$$

и оценим I_1 и I_2 по отдельности. Применяя (1.3), получим

$$I_1 \leq \iint_{G^{(-)} \setminus G_y^{(-)}} d\nu(\zeta) \int_{-|\eta|}^{|\eta|} (|\eta| - |t|)^\alpha\, dt \int_0^{+\infty} \frac{\sigma^{\beta-1}\, d\sigma}{(|y| - t + \sigma)^{1+\alpha}} =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sigma^{\beta-1}\, d\sigma}{(1+\sigma)^{1+\alpha}} \iint_{G^{(-)} \setminus G_y^{(-)}} |\eta|^\beta\, d\nu(\zeta) \int_{-1}^{1} \frac{(1 - |t|)^\alpha\, dt}{\left(\left| \frac{y}{\eta} \right| - t \right)^{1+\alpha-\beta}} \leq$$

$$\leq C(\alpha, \beta, \rho_0) \iint_{G^{(-)} \setminus G_y^{(-)}} |\eta|^{1+\alpha}\, d\nu(\zeta), \tag{1.18}$$

где $C(\alpha, \beta, \rho_0) > 0$ – постоянная, зависящая только от α, β и ρ_0.

Далее, положив

$$I_2 = \iint_{G_y^{(-)}} d\nu(\zeta) \int_{|\eta|}^{+\infty} \sigma^{\beta-1} |\log|b_\alpha(z - i\sigma, \zeta)||\, d\sigma +$$

$$+ \iint_{G_y^{(-)}} d\nu(\zeta) \int_0^{|\eta|} \sigma^{\beta-1} |\log|b_\alpha(z - i\sigma, \zeta)||\, d\sigma \equiv J_1 + J_2 \tag{1.19}$$

и снова применив (1.3), получим

$$J_1 \le \iint_{G_y^{(-)}} d\nu(\zeta) \int_{-|\eta|}^{|\eta|} (|\eta| - |t|)^\alpha \, dt \int_{|\eta|}^{+\infty} \frac{\sigma^{\beta-1}\, d\sigma}{(|y| - t + \sigma)^{1+\alpha}} \le$$
$$\le C'(\alpha, \beta, \rho_0) \iint_{G_y^{(-)}} |\eta|^{1+\alpha} \, d\nu(\zeta). \tag{1.20}$$

Для оценки J_2 воспользуемся представлением

$$\log |b_\alpha(z,\zeta)| = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{\alpha - k} \left(\frac{|\eta|}{i(z-\xi)} \right)^{\alpha-k} - \operatorname{Re} \int_0^{|\eta|} \frac{\tau^{\alpha-p}\, d\tau}{(iz - i\zeta + \tau)^{1+\alpha-p}} -$$
$$- \operatorname{Re} \int_0^{|\eta|} \frac{\tau^\alpha \, d\tau}{(iz - i\bar{\zeta} - \tau)^{1+\alpha}} \, (\alpha \le p < 1 + \alpha),$$

полученным из (1.3) интегрированием по частям. Имеем

$$J_2 \le \iint_{G_y^{(-)}} d\nu(\zeta) \int_0^{|\eta|} \left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{\alpha - k} \left(\frac{|\eta|}{|y| + \sigma} \right)^{\alpha-k} + \int_0^{|\eta|} \frac{\tau^{\alpha-p}\, d\tau}{\big||y| - |\eta| + \sigma + \tau\big|^{1+\alpha-p}} + \right.$$
$$\left. + \int_0^{|\eta|} \frac{\tau^\alpha \, d\tau}{(|y| + |\eta| - \tau + \sigma)^{1+\alpha}} \right) \sigma^{\beta-1} \, d\sigma \equiv K_1 + K_2 + K_3. \tag{1.21}$$

При любом $\gamma \in (0, \alpha]$

$$|\eta|^\gamma \int_0^{|\eta|} \frac{\sigma^{\beta-1}\, d\sigma}{(|y| + \sigma)^\gamma} \le C''(\gamma, \beta, \rho_0) \, |\eta|^{1+\alpha}$$

Отсюда заключаем, что

$$K_1 \le \sum_{k=0}^{p-1} \frac{C''(\alpha - k, \beta, \rho_0)}{\alpha - k} \iint_{G_y^{(-)}} |\eta|^{1+\alpha} \, d\nu(\zeta). \tag{1.22}$$

С другой стороны

$$K_3 \le C'''(\alpha, \beta, \rho_0) \iint_{G_y^{(-)}} |\eta|^{1+\alpha} \, d\nu(\zeta). \tag{1.23}$$

Теперь заметим, что $K_2 = \iint_{G_y^{(-)}} |\eta|^\beta \, L(\eta)\, d\nu(\zeta)$, где

$$L(\eta) = \int_0^1 \sigma^{\beta-1} \, d\sigma \int_0^1 \frac{\tau^{\alpha-p}\, d\tau}{\left(\left| \frac{y}{\eta} \right| - 1 + \sigma + \tau \right|^{1+\alpha-p}}$$

и $||y/\eta| - 1 + \sigma| < 1$. Нетрудно видеть, что $L(\eta) \le C^{\mathrm{IV}}(\alpha, \beta) < +\infty$, и для K_2 имеет место оценка типа (1.22) – (1.23). Следовательно, по (1.21), $J_2 \le$

$\le C^{\vee}(\alpha,\beta,\rho_0)\iint_{G_y^{(-)}}|\eta|^{1+\alpha}\,d\nu(\zeta)$. В силу (1.5) и (1.17) (1.20), мы имеем

$$I \le C^{*}(\alpha,\beta,\rho_0)\iint_{G^{(-)}}|\eta|^{1+\alpha}\,d\nu(\zeta) < +\infty,$$

где $C^{*}(\alpha,\beta,\rho_0) > 0$ постоянная, зависящая только от α, β и ρ_0. Это очевидным образом доказывает включение $I_\alpha(z) \in M_\beta$ $(\alpha \le \beta < 1+\alpha)$ и равенство в (1.14), где интеграл абсолютно и равномерно сходится в $G_\rho^{(-)}$. Далее, доказанное включение верно также для любых $\beta \in (0, 1+\alpha)$, поскольку, очевидно, что $M_{\beta_1} \subset M_{\beta_2}$ для любых $\beta_1 > \beta_2$. Неравенство в (1.14) справедливо, так как интеграл в (1.4) неотрицателен. Согласно Лемме 1.1 $W^{-\alpha}I_\alpha(z)$ непрерывна и супергармонична в $G^{(-)}$, поскольку $I_\alpha(z) \in M_p$ $(\alpha \le p < 1+\alpha)$. Для доказательства представления (1.16) заметим, что в силу (1.14)

$$\begin{aligned}
\varphi(y) &= \Gamma(1+\alpha)\int_{-\infty}^{+\infty}\left|W^{-\alpha}I_\alpha(x+iy)\right|dx = \\
&= \pi\iint_{G^{(-)}}d\nu(\zeta)\int_{-|\eta|}^{|\eta|}(|\eta|-|t|)^{\alpha}\,dt\,\frac{|y|-t}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x-\xi)^2+(|y|-t)^2} = \\
&= \pi\iint_{G^{(-)}}d\nu(\zeta)\int_{-|\eta|}^{|\eta|}(|\eta|-|t|)^{\alpha}\operatorname{sign}(|y|-t)\,dt < \\
&< \frac{2\pi}{1+\alpha}\iint_{G^{(-)}}|\eta|^{1+\alpha}\,d\nu(\zeta) < +\infty
\end{aligned}$$

при любом $y < 0$. С другой стороны, $\varphi(y) \to 0$ при $y \to -0$. Поэтому, используя результаты [1, 14], приходим к представлению (1.16), а последнее влечет (1.15).

Замечание 1. Соотношение

$$W^{-\alpha}\log|b_\alpha(z,\zeta)| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{|\eta|}\tau^{\alpha-1}\log|b_0(z,\zeta+i\tau)|\,d\tau, \quad z,\zeta \in G^{(-)}, \quad \alpha > 0,$$

является простым следствием (1.4). Используя его, в некоторых специальных случаях можно найти явные представления для меры $\nu_\alpha(\zeta)$ из (1.16). Можно доказать также аналогичную теорему для факторов типа Бляшке М. М. Джрбашяна [15, гл. IX]. Применяя формулы (3.4), (3.9), (3.10) и (3.28), приходим к равенству

$$|z|^{-\alpha}D^{-\alpha}\log|A_\alpha(z,\zeta)| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{|\eta|}^{1}(1-x)^{\alpha-1}\log\left|A_\alpha\left(z,\frac{\zeta}{x}\right)\right|dx,$$

которое справедливо для всех $\alpha > 0$ и $\zeta, z \in \mathbf{D} = \{z:\ |z| < 1\}$.

§2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С НЕПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ВЕЙЛЕВСКИМИ ПЕРВООБРАЗНЫМИ

Рассмотренные ниже классы субгармонических функций являются обобщениями исследованных в [3] классов голоморфных функций обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости.

Определение. Обозначим через s_α $(0 \le \alpha < +\infty)$ класс субгармонических в $G^{(-)}$ функций $u(z)$, удовлетворяющих условиям

(I) $u(z) \in M_p$ для целого $p \in [\alpha, 1+\alpha)$,

(II) $W^{-\alpha} u(z) \le 0$, $z \in G^{(-)}$,

(III) ассоциированная мера $u(z)$ обращается в нуль в окрестности бесконечности,

(IV) если $\alpha = p \ge 0$ – целое число, то

$$\int_1^{+\infty} W^{-\alpha} u(-it) \frac{dt}{t} > -\infty.$$

2.1. Нашей целью является нахождение представлений типа Рисса для функций этих классов.

Лемма 2.1. *Если $u(z) \in s_\alpha$ $(0 \le \alpha < +\infty)$, то ассоциированная мера $\nu(\zeta)$ этой функции удовлетворяет условию (1.5) и*

$$u(z) = \iint_{G^{(-)}} \log|b_\alpha(z,\zeta)|\, d\nu(\zeta) + u_*(z), \quad z \in G^{(-)}, \tag{2.1}$$

где $u_*(z)$ – гармоническая функция из s_α.

Доказательство. Пусть $\alpha > 0$, и пусть D ограниченная область такая, что $\overline{D} \subset G^{(-)}$. Тогда функция

$$u_D(z) = u(z) - \iint_D \log|b_\alpha(z,\zeta)|\, d\nu(\zeta)$$

является субгармонической в $G^{(-)}$ и гармонической в D, и по Лемме 1.3 $u_D(z) \in M_p$. Отсюда и из Леммы 1.2 имеем

$$W^{-\alpha} u_D(z) = W^{-\alpha} u(z) - \iint_D W^{-\alpha} \log|b_\alpha(z,\zeta)|\, d\nu(\zeta), \quad z \in G^{(-)}, \tag{2.2}$$

и, следовательно

$$W^{-\alpha}u_D(z) \le -\iint_D W^{-\alpha}\log|b_\alpha(z,\zeta)|\,d\nu(\zeta) = V_D(z),$$

где, в силу Леммы 1.3, $V_D(z)$ — неотрицательная супергармоническая функция. Используя представление (1.16), получаем

$$\sup_{y<0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[W^{-\alpha}u_D(x+iy)\right]^+ dx \le 2\pi\iint_{G^{(-)}}|\eta|\,d\nu_\alpha(\zeta) < +\infty.$$

Тем же путем легко показать, что

$$\lim_{y\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[W^{-\alpha}u_D(x+iy)\right]^+ dx = 0.$$

Следовательно, по Теореме 1 из [1] $W^{-\alpha}u_D(z) \le 0$ в $G^{(-)}$ (см. также замечание к этой теореме). Применяя (2.2), получаем $V_D(z) \le -W^{-\alpha}u(z)$, $z \in G^{(-)}$. Однако, мера $\nu(\zeta)$ исчезает при достаточно больших $|\zeta|$, т.е. при $|\zeta| > R_*$. Поэтому, используя (1.4), получаем

$$+\infty > -W^{-\alpha}u(-2iR_*) \ge \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\iint_D d\nu(\zeta)\int_{-|\eta|}^{|\eta|}\frac{(|\eta|-|t|)^\alpha(2R_*-t)}{(2R_*-t)^2+\xi^2}\,dt \ge$$
$$\ge \frac{1}{5R_*\Gamma(2+\alpha)}\iint_D |\eta|^{1+\alpha}\,d\nu(\zeta).$$

Исчерпывая $G^{(-)}$ конечными областями D, приходим к (1.5). Далее, определяя $u_*(z)$ по формуле (2.1) и используя Лемму 1.3, получаем, что $u_*(z) \in s_\alpha$. Для завершения доказательства остается заметить, что наши утверждения очевидны при $\alpha = 0$.

2.2. Перейдем теперь к доказательству основной теоремы о параметрических представлениях классов s_α.

Теорема 2.1. *Класс s_α $(0 \le \alpha < +\infty)$ совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$u(z) = \iint_{G^{(-)}}\log|b_\alpha(z,\zeta)|\,d\nu(\zeta) -$$
$$- Re\,\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi}\exp\left(-i\frac{\pi}{2}(1+\alpha)\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{(z-t)^{1+\alpha}}, \qquad (2.3)$$

где $z \in G^{(-)}$, $\nu(\zeta)$ – *неотрицательная борелевская мера в* $G^{(-)}$, *обращающаяся в нуль в окрестности* ∞ *и такая, что*

$$\iint_{G^{(-)}} |Im\,\zeta|^{1+\alpha}\, d\nu(\zeta) < +\infty, \tag{2.4}$$

а $\mu(t)$ – *неубывающая функция такая, что*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{1+|t|^{1+\alpha-p}} < +\infty. \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть $u(z) \in s_\alpha$ $(0 \le \alpha < +\infty)$. По Лемме 2.1 ассоциированная мера $u(z)$ удовлетворяет условию (2.4) и $u(z)$ представима в виде (2.1), где $u_*(z) \in s_\alpha$ – гармоническая функция. По Теореме 4 из [13], $u_*(z)$ может быть записана в виде последнего интеграла (2.3), где $\mu(t)$ удовлетворяет необходимым условиям. Обратно, пусть $u(z)$ представима в виде (2.3) – (2.5). Тогда по Теореме 4 из [13] последний интеграл в (2.3) – гармоническая функция класса s_α. В то же время, по Лемме 1.3 первое слагаемое правой части (2.3) является также функцией из s_α. Отсюда, $u(z) \in s_\alpha$.

Замечание 2. Воспользовавшись Леммой 1.3 и формулой (11) из [13], заключаем, что, если $u(z) \in s_\alpha$ $(0 \le \alpha < +\infty)$, $z = x + iy \in G^{(-)}$, то

$$W^{-\alpha} u(z) = \iint_{G^{(-)}} W^{-\alpha} \log|b_\alpha(z,\zeta)|\, d\nu(\zeta) + \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{(x-t)^2+y^2}, \tag{2.6}$$

где $\nu(\zeta)$ и $\mu(t)$ – меры из представлений (2.3) – (2.5). В силу (1.16)

$$W^{-\alpha} u(z) = \iint_{G^{(-)}} \log|b_0(z,\zeta)|\, d\nu_\alpha(\zeta) + \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{(x-t)^2+y^2}, \tag{2.7}$$

где $z = x + iy \in G^{(-)}$, $\nu_\alpha(\zeta)$ – некоторая неотрицательная борелевская мера в $G^{(-)}$, удовлетворяющая (2.4) при $\alpha = 0$.

Замечание 3. Введем класс S_α $(0 \le \alpha < +\infty)$ как множество тех функций, субгармонических в $G^{(-)}$, которые представимы в виде разности двух функций из s_α. Очевидно, S_α совпадает с множеством тех функций $u(z)$, субгармонических в $G^{(-)}$, чьи вейлевские α-первообразные представимы в виде (2.7), с мерами $\nu_\alpha(\zeta)$ из определенных классов, а $\mu(t)$ – суть разность любых двух неубывающих функций, удовлетворяющих (2.5). Это представление, очевидно, описывает подкласс функций, субгармонических и имеющих неотрицательные гармонические мажоранты в $G^{(-)}$.

§3. РОСТ ФУНКЦИЙ КЛАССА S_α

3.1. В этом пункте нашей целью является доказательство следующей теоремы.

Теорема 3.1. 1°. *Класс S_α $(0 \le \alpha < +\infty)$ совпадает с множеством тех функций $u(z) \in M_p$ $(\alpha \le p < 1+\alpha)$, субгармонических в $G^{(-)}$, которые удовлетворяют условиям*

$$\liminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi \left|W^{-\alpha} u(Re^{-i\theta})\right| \sin\theta \, d\theta = 0, \tag{3.1}$$

$$\liminf_{R\to+\infty} \liminf_{y\to-0} \int_{-R}^{R} \left|W^{-\alpha} u(x+iy)\right| \frac{dx}{1+|x|^{1+\alpha-p}} < +\infty \tag{3.2}$$

и ассоциированные меры которых обращаются в нуль в окрестности ∞.

2°. *Если $u(z) \in S_\alpha$ $(0 \le \alpha < +\infty)$, то существует*

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi \left|W^{-\alpha} u(Re^{-i\theta})\right| \sin\theta \, d\theta = 0. \tag{3.3}$$

Функция $\mu(t)$ в представлениях (2.3) (2.4) и (2.6) - (2.7) может быть найдена из соотношений

$$\mu_\pm(t) = \lim_{y\to-0} \int_0^t \left[W^{-\alpha} u(x+iy)\right]^\pm dx, \quad -\mu(t) = \mu_+(t) - \mu_-(t), \tag{3.4}$$

где $\mu_\pm(t)$ - неубывающие функции, удовлетворяющие условию (2.5). Если $\mu_\pm(t)$ найдены из (3.4), то для любого сегмента $[a,b] \subset (-\infty,+\infty)$ и для любой функции $g(x)$, непрерывной в $[a,b]$

$$\lim_{y\to-0} \int_a^b \left[W^{-\alpha} u(x+iy)\right]^\pm g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,d\mu_\pm(x). \tag{3.5}$$

Кроме того

$$\lim_{y\to-0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[W^{-\alpha} u(x+iy)\right]^\pm \frac{dx}{1+|x|^{1+\alpha-p}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu_\pm(x)}{1+|x|^{1+\alpha-p}}. \tag{3.6}$$

Замечание 4. Очевидно, что, если $u(z) \in S_\alpha$ $(0 \le \alpha < +\infty)$, то $u(z) \in s_\alpha$ тогда и только тогда, когда по какому - либо из соотношений (3.4) - (3.6) $\mu_-(t) \equiv 0$ $(-\infty < t < +\infty)$. Если $\mu_\pm(t) \equiv 0$, то $u(z)$ является потенциалом типа Грина.

3.2. Для доказательства Теоремы 3.1 мы используем следующую лемму.

Лемма 3.1. *Пусть $\alpha \geq 0$ – любое число и $u(z) \in M_p$ $(\alpha \leq p < 1+\alpha)$ – функция, субгармоническая в $G^{(-)}$ и удовлетворяющая условиям (3.1), (3.2). Если ассоциированная мера $\nu(\zeta)$ функции $u(z)$ обращается в нуль при $|\zeta| > R_*$, то $\nu(\zeta)$ подчинена условию (2.4).*

Доказательство. Пусть $\rho < 0$ – любое число. Тогда функция

$$U_\rho(z) = u(z) - \iint_{G^{(-)}} \log|b_\alpha(z,s)|\, d\nu(s)$$

гармонична в $G_\rho^{(-)}$, $U_\rho(z) \in M_\rho$ и

$$W^{-\alpha}U_\rho(z) = W^{-\alpha}u(z) - \iint_{G_\rho^{(-)}} W^{-\alpha}\log|b_\alpha(z,s)|\, d\nu(s)$$

также гармонична в $G_\rho^{(-)}$ (по Лемме 1.3). Составив разность двух пуассоновских представлений $W^{-\alpha}U_\rho(z)$ для $G_\rho^{(-)}(R_0) = \{z \in G_\rho^{(-)}\colon |z| < R_0\}$ и $G_\rho^{(-)}(R)$ $(R > R_0 > R_*)$, приходим к равенству

$$\iint_{G_\rho^{(-)}} [I_{\rho,R}(z,s) - I_{\rho,R_0}(z,s)]\, d\nu(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial G_\rho^{(-)}(R)} W^{-\alpha}u(\zeta)\,\frac{\partial g_{\rho,R}(\zeta,z)}{\partial n}\,|d\zeta| -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial G_\rho^{(-)}(R_0)} W^{-\alpha}u(\zeta)\,\frac{\partial g_{\rho,R_0}(\zeta,z)}{\partial n}\,|d\zeta|, \quad z \in G_\rho^{(-)}(R_0), \tag{3.7}$$

где

$$I_{\rho,R}(z,s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial G_\rho^{(-)}(R)} W^{-\alpha}\log|b_\alpha(\zeta,s)|\,\frac{\partial g_{\rho,R}(\zeta,z)}{\partial n}\,|d\zeta| \quad (R = R_0, R)$$

и g_{ρ,R_0}, $g_{\rho,R}$ – функции Грина $G_\rho^{(-)}(R_0)$ и $G_\rho^{(-)}(R)$. Отсюда заключаем, что $I_{\rho,R}(z,s) - I_{\rho,R_0}(z,s) \geq 0$ при $z \in G_\rho^{(-)}(R_0)$ и $s \in G_\rho^{(-)}$, поскольку $W^{-\alpha}\log|b_\alpha(\zeta,s)|$ субгармонична в $G^{(-)}$ при любом фиксированном $s \in G^{(-)}$. Предположим теперь, что R и R_0 $(R > R_0 > R_*)$ таковы, что

$$\int_0^\pi \left|W^{-\alpha}u(Re^{-i\theta})\right| \sin\theta\, d\theta < +\infty \quad (R = R_0, R).$$

В силу Лемм 2.1 и 2.2 из [1], правая часть (3.7) ограничена на некоторой последовательности $\rho = \rho_n \uparrow 0$. Следовательно, по Лемме Фату

$$\iint_{G_{\rho_n}^{(-)}} \liminf_{\rho\to-0}[I_{\rho,R}(z,s) - I_{\rho,R_0}(z,s)]\, d\nu(s) \leq M(z) < +\infty,$$

где $M(z) > 0$ – постоянная, зависящая только от z, R_0 и R, а $\rho_0 < 0$ имеет достаточно малый модуль. Устремляя $\rho_0 \to -0$, получим

$$\iint_{G^{(-)}} \liminf_{\rho \to -0} [I_{\rho,R}(z,s) - I_{\rho,R_0}(z,s)]\, d\nu(s) \le M(z) < +\infty. \tag{3.8}$$

Однако, при любом $R > 0$ существует

$$\lim_{\rho \to -0} I_{\rho,R}(z,s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G^{(-)}(R)} W^{-\alpha} \log|b_\alpha(\zeta,s)| \left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - \overline{z}} - \right.$$

$$\left. - \frac{z}{R^2 - \zeta z} + \frac{\overline{z}}{R^2 - \zeta\overline{z}}\right] d\zeta = -\operatorname{Im} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-|\operatorname{Im} s|}^{|\operatorname{Im} s|} (|\operatorname{Im} s| - |t|)^\alpha\, J_R(t,z)\, dt,$$

где (см. (1.4))

$$J_R(t,z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G^{(-)}(R)} \frac{1}{\zeta - (\operatorname{Re} s + it)} \left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - \overline{z}} - \frac{z}{R^2 - \zeta z} + \frac{\overline{z}}{R^2 - \zeta\overline{z}}\right] d\zeta.$$

Вычислив этот интеграл и возвратившись к (3.8), приходим к оценке

$$\frac{2}{\Gamma(1+\alpha)} \iint_{\overline{G^{(-)}(R_*)}} \left\{ \int_0^{|\operatorname{Im} s|} (|\operatorname{Im} s| - t)^\alpha \left[\frac{\frac{R_0^2}{|y_0|} + t}{\left(\frac{R_0^2}{|y_0|} + t\right)^2 + (\operatorname{Re} s)^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\frac{R^2}{|y_0|} + t}{\left(\frac{R^2}{|y_0|} + t\right)^2 + (\operatorname{Re} s)^2} \right] dt \right\} d\nu(s) \le M(-iy_0) < +\infty,$$

где $M(-iy_0) > 0$ зависит только от y_0 $(-R_* < y_0 < 0)$ и R, R_0. Взяв R достаточно большим, получаем, что $\nu(\zeta)$ удовлетворяет условию (2.4).

3.3. Доказательство Теоремы 3.1. Пусть $u(z) \in M_\rho$ – субгармоническая функция в $G^{(-)}$, удовлетворяющая условиям (3.1), (3.2) при некотором $\alpha \in (p-1, p]$, и пусть ассоциированная мера $\nu(\zeta)$ обращается в нуль в окрестности бесконечности. Тогда $\nu(\zeta)$ удовлетворяет условию (2.4) согласно Лемме 3.1. Поэтому функция

$$u_*(z) = u(z) - \iint_{G^{(-)}} \log|b_\alpha(z,\zeta)|\, d\nu(\zeta) \tag{3.9}$$

гармонична в $G^{(-)}$. В силу Леммы 1.3, $u_*(z) \in M_\rho$ и

$$W^{-\alpha} u_*(z) = W^{-\alpha} u(z) - \iint_{G^{(-)}} W^{-\alpha} \log|b_\alpha(z,\zeta)|\, d\nu(\zeta)$$

является гармонической функцией в $G^{(-)}$. Эта функция удовлетворяет условиям (3.1) и (3.2), поскольку легко проверить, что

$$W^{-\alpha}I_\alpha(z) = -\iint_{G^{(-)}} W^{-\alpha}\log|b_\alpha(z,\zeta)|\,d\nu(\zeta)$$

удовлетворяет этим условиям. Более того, пользуясь представлением (1.16), можно показать, что

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^\pi W^{-\alpha}I_\alpha(Re^{-i\theta})\sin\theta\,d\theta = 0 \tag{3.10}$$

и

$$\lim_{y\to-0}\int_{-\infty}^{+\infty} W^{-\alpha}I_\alpha(x+iy)\,dx = 0. \tag{3.11}$$

Тем самым, по Теореме 1 из [1]·

$$W^{-\alpha}u_*(z) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{(x-t)^2+y^2}, \quad z = x+iy\in G^{(-)}, \tag{3.12}$$

где $\mu(t)$ мера, определенная из соотношений (3.4) и удовлетворяющая условиям (3.5), (3.6). Вдобавок, очевидно, что справедливо (3.3). Применяя к (3.12) оператор W^α и используя результаты из [13], получаем представление вида (2.3). Из Теоремы 1.1 заключаем, что $u(z)\in S_\alpha$. По Замечанию 2, $W^{-\alpha}u(z)$ для любого $u(z)\in S_\alpha$ представимо в виде (2.6). Отсюда следуют соотношения (3.3) и (3.6), если использовать (3.10), (3.11) и Теорему 1 из [1].

ABSTRACT. The paper considers some classes of subharmonic functions possessing nonnegative harmonic majorants in a half–plane after the application of Weyl's fractional integration operator. Representations and complete characterization of the growth are found. In some natural sense, the growth characterization and the Riesz type representations which are found, completely describe all subharmonic functions Weyl primitives of which have nonnegative harmonic majorants in a half plane.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Джрбашян, "О некоторых классах субгармонических функций, имеющих неотрицательные гармонические мажоранты в полуплоскости", Изв. НАН Армении, Математика, т. 28, №4, стр. 42 - 61, 35 - 51, 1993.
2. А. М. Джрбашян, "Функции типа Бляшке для полуплоскости", ДАН СССР, т. 246, №6, стр. 1295 1298, 1979.
3. А. М. Джрбашян, "Факторизация некоторых общих классов функций, мероморфных в полуплоскости", ДАН СССР, т. 257, №1, стр. 21 ° 25, 1981.

4. А. М. Джрбашян, "Функции типа Бляшке для полуплоскости", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 18, №6, стр. 409 – 440, 1983.
5. А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян, "Построение и основные свойства одного семейства функций типа Бляшке для полуплоскости", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 15, №6, стр. 461 – 474, 1980.
6. А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян, "Асимптотическое поведение функций типа Бляшке для полуплоскости", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 21, №2, стр. 142 – 146, 1986.
7. А. М. Джрбашян, "Соотношения равновесия и факторизационные теоремы для функций, мероморфных в полуплоскости", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 21, №3, стр. 213 – 279, 1986.
8. А. М. Джрбашян, "Параметрические представления классов мероморфных функций с неограниченными характеристиками Цулзи", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 22, №5, стр. 451 – 477, 1987.
9. А. М. Джрбашян, "О равномерной аппроксимации функций обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости и аналоге теоремы Акутовича", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 25, №3, стр. 293 – 302, 1990.
10. А. М. Джрбашян, "Об одном представлении произведений типа Бляшке для полуплоскости", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 24, №5, стр. 466 – 479, 1989.
11. А. М. Джрбашян, "О граничных свойствах функций обобщенно-ограниченного вида, Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 26, №3, стр. 187 – 209, 1991.
12. А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян, "О граничных свойствах произведений типа Бляшке", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 26, №5, стр. 435 – 442, 1991.
13. А. М. Джрбашян, "Теоремы типа Герглотца Рисса", Мат. заметки, т. 45, №4, стр. 19 – 26, 1989.
14. Е. Д. Соломенцев, "О классах функций, субгармонических в полупространстве", Вестник МГУ, серия матем., т. 5, стр. 73 – 91, 1959.
15. М. М. Джрбашян, Интегральные Преобразования и Представления Функций в Комплексной Области", Москва, Наука, 1966.

1 Октября 1993

Институт математики
НАН Армении

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОММУТАТОРОВ

М. И. Караханян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, Том 29, №1, 1994

В статье получены асимптотический вариант теоремы о коммутаторах для широкого класса топологий и некоторые обобщения Теоремы И. Капланского для C^*–алгебр.

1. Пусть $BL(\mathbb{H})$ – банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих на комплексном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Классическая Теорема Фугледа устанавливает, что если оператор $x \in BL(\mathbb{H})$ коммутирует с нормальным оператором $a \in BL(\mathbb{H})$, то он коммутирует и с сопряженным a^* (см., например, [1], стр. 337). Путнаму принадлежит следующее усиление : если a_1 и a_2 нормальны и $a_1 x = x a_2$, то $a_1^* x = x a_2^*$. Как отмечает П. Халмош (см. [2], стр. 294), Теорема Путнама сводится к Теореме Фугледа при помощи "трюка Берберяна" - рассмотрения операторных матриц $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Подобный прием позволяет заменить нормальность a_1 , a_2 субнормальностью a_1 , a_2^* (см. [3]). Имея в виду эти приемы, мы в дальнейшем не будем останавливаться на обобщениях такого типа.

Теорема Фугледа сохраняется в асимптотическом варианте : если рассматривать операторы x, для которых $\|x\| \leq 1$, то из малости коммутатора $[a, x] = ax - xa$ при нормальности a вытекает малость $[a^*, x]$ (см. [4], [5]). Перечисленные результаты используют унитарную структуру пространств, где действуют операторы, иначе говоря, тот факт, что эти операторы содержатся в C^*-алгебре.

В ином ключе Теорема Фугледа обобщалась в работе Е. А. Горина и М. И. Караханяна [6]. Основной результат этой работы можно сформулировать так.

Пусть a, b, x элементы банаховой алгебры A с единицей. Предположим, что

$[a,b]=0$ и $\|\exp(ita)\| = o(|t|^{1/2})$, $\|\exp(itb)\| = o(|t|^{1/2})$ при $|t| \to \infty$, $t \in \mathbb{R}$. Если при этом $[a+ib,x]=0$, то $[a,x]=[b,x]=0$. Ясно, что Теорема Фугледа вытекает отсюда, так как в этом случае $\|\exp(ita)\| = \|\exp(itb)\| = 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$. В работе [6] дан и асимптотический вариант в этом контексте. Дальнейшие обобщения приведены в работах автора [7], [8]. Наконец, в работе [9] Е. А. Горин привел пример алгебры A и такой пары элементов $a, b \in A$, что $\|\exp(ita)\| = \|\exp(itb)\| = O(|t|^{1/2})$, элемент $a+ib \in Z(A)$ (центр алгебры A), однако, $a-ib \notin Z(A)$, тем самым, показав точность показателя $1/2$. Эта работа и явилась толчком для написания настоящей статьи. Вместе с тем, Е. А. Гориным было отмечено (см. [6]), что сохраняя условия $[a,b]=0$ и $\|\exp(ita)\| = o(|t|^{1/2})$, достаточно предположить, что $\mathrm{Sp}\,(b) \subset \mathbb{R}$ (спектр элемента b в A). Простейший вариант приводимой в [9] теоремы состоит в следующем. Пусть S — семейство элементов банаховой алгебры A и $b \in A$. Предположим, что $[a,b]=0$ для всех $a \in S$ и, что, кроме констант, нет целых функций $f(\lambda)$, для которых $|f(\lambda)| \le C_{f,a}\|\exp \lambda a\|^2$. Если $[a-b,x]=0$ для всех $a \in S$, то $[b,x]=0$. Более полно, в этой теореме вместо $\exp \lambda$ используются другие целые функции; условие $[a,b]=0$ снимается (за счет естественных дополнительных предположений), и пространство функций $f(\lambda)$ может быть нетривиальным. Доказательства в [9] основаны на классических алгебраических тождествах. При этом конкретные результаты, подобно вышеназванным теоремам, получаются со ссылкой на Теорему Фрагмена-Линделефа или родственные факты.

В настоящей работе, применяя упрощенный вариант рассуждений из [7], [8], получен асимптотический вариант теоремы о коммутаторах для широкого класса топологий, а также получено некоторое обобщение Теоремы И. Капланского ([10], [11]). Некоторые подобные результаты содержатся в [9].

2. Некоторые алгебраические и аналитические тождества. Значительная часть приводимых ниже обозначений и фактов касается ряда Кемпбелла-Хаусдорфа и взята из [9] (см. также [12],[13]). Рассмотрим комплексную банахову алгебру A с единицей. Норма A удовлетворяет условию $\|x \cdot y\| \le \|x\| \cdot \|y\|$ для всех $x, y \in A$ и $\|\mathbb{1}\| = 1$.

Обозначим через $\mathrm{Der}\,(A)$ множество (непрерывных) дифференцирований алгебры A, т.е. линейные (непрерывные) отображения $D : A \to A$, для которых $D(x,y) = (Dx)y + x(Dy)$. Тогда $\mathrm{Der}\,(A)$ - Ли-алгебра относительно скобки $[D_1, D_2]$. При $a \in A$ положим $\mathrm{ad}\,(a)x = [a,x]$. При этом очевидно, что $\mathrm{ad}\,(a) \in \in \mathrm{Der}\,(A)$. Если наделить A структурой алгебры Ли по скобке $[x,y]$, то из тождества Якоби получается, что $a \mapsto \mathrm{ad}\,(a)$ есть лиев гомоморфизм в $\mathrm{Der}\,(A)$. Следовательно, $\mathrm{ad}\,(p(x_1,\ldots,x_n)) = p(\mathrm{ad}\,(x_1),\ldots,\mathrm{ad}\,(x_n))$ для каждого полинома Ли p. Кстати, нетрудно видеть, что $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{ad}\,(a)) \subset \mathrm{Sp}\,(a) - \mathrm{Sp}\,(a)$ (более подробно см. [12], [13]).

При фиксированных $x, y \in A$ и $\lambda \in C$ рассмотрим векторнозначную целую функцию $\lambda \mapsto (\exp \lambda x)(\exp \lambda y)$. Если, например, $\|x\|, \|y\| < \frac{1}{2}\log 2$ и $|\lambda| < 1$, то $(\exp \lambda x)(\exp \lambda y) \in \exp(A)$ (см. [12], стр. 193). Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало (это существенно), то $(\exp \lambda x)(\exp \lambda y) \in \exp(A)$, и существует такая голоморфная функция $h(\lambda)$ со значением в A, что $h(0) = 0$ и $(\exp \lambda x)(\exp \lambda y) = \exp h(\lambda)$. Эта функция этими условиями однозначно определяется. Представляя $h(\lambda)$ рядом Тейлора в окрестности нуля, имеем

$$(\exp \lambda x)(\exp \lambda y) = \exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k z_k(x,y)\Big). \tag{1}$$

Ряд справа в (1) есть так называемый ряд Кемпбелла-Хаусдорфа в форме Дынкина (см., например, [12], стр. 181 или [13]). Его коэффициенты $z_k(x,y)$ - однородные лиевские полиномы степени k. В частности, $z_1(x,y) = x+y$, $z_2(x,y) = \frac{1}{2}[x,y]$, $z_3(x,y) = \frac{1}{12}\{[x,[x,y]] + [y,[y,x]]\}$, $z_4(x,y) = -\frac{1}{24}[x,[y,[x,y]]]$ и т.д. Легко видеть, что $z_k(y,x) = (-1)^{k-1} z_k(x,y)$.

Согласно Теореме 2.5 из [9], при каждом $n \geq 1$ существуют такие однозначно определенные симметричные полиномы $w_{n,k} = w_{n,k}(x,y)$, $1 \leq k \leq n$ такие, что $w_{n,k} \in A^{n-k}$ и

$$x^n - y^n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k w_{n,k}(x,y) z_k(x,-y), \tag{2}$$

где $\frac{w_{n+k,k}}{(n+k)!} = \frac{w_{n+1,1}}{(n+1)!}$.

Напомним одно определение, касающееся степенных рядов (см. [9]), которое нам понадобится ниже.

Сверткой Шура степенных рядов $\varphi(\lambda) = \sum_0^\infty \alpha_n \lambda^n$ и $\psi(\lambda) = \sum_0^\infty \beta_n \lambda^n$ называется степенной ряд $(\varphi * \psi)(\lambda) = \sum_0^\infty \gamma_n \lambda^n$, где $\gamma_n = n!\alpha_n\beta_n$, а α_n, β_n – комплексные коэффициенты. Относительно свертки Шура степенные ряды образуют ассоциативную коммутативную алгебру над полем C с единицей $e(\lambda) = \exp \lambda$. Имеют место следующие формальные соотношения :

$$(\varphi * \psi)(\lambda) = \varphi(\lambda \frac{d}{d\xi})\psi(\xi)\,|_{\xi=0} = \varphi(\frac{d}{d\xi})\psi(\xi\lambda)\,|_{\xi=0}\,.$$

Если степенной ряд φ представляет целую функцию экспоненциального типа $\leq \sigma$, и ψ - аналитическая при $|\lambda| < \rho$, то $\varphi * \psi$ будет представлять функцию, аналитическую при $|\lambda| < \frac{\rho}{\sigma}$.

Ниже мы считаем фиксированной банахову алгебру A и непустое подмножество $S \subset A$. Кроме того, считаем, что хотя бы одна из двух целых функций $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ является функцией нормального или минимального экспоненциального типа. При $a \in A$ обозначим через $E_\varphi(a)$ совокупность всех целых функций $f(\lambda)$, для каждой из которых $|f(\lambda)| \leq C_f||\varphi(\lambda \mathrm{ad}\,(a)||$ при всех $\lambda \in C$. Такие функции образуют линейное пространство относительно поточечных операций и

$$\inf\{C_f : \text{ для которых } |f(\lambda)| \leq C_f||\varphi(\lambda \mathrm{ad}\,(a)||\}$$

задает банахову норму на $E_\varphi(a)$. Пусть $E_\varphi(S) = \cap\{E_\varphi(a) : a \in S\}$. Если $\varphi(\lambda) = \exp \lambda$, то вместо $E_\varphi(S)$ мы будем писать $E(S)$, что инвариантно относительно сдвигов.

3. Сохраняя введенные выше обозначения, отметим на A локально выпуклую топологию τ со следующими свойствами : отображение $(A, ||\cdot||) \to (A, \tau)$ непрерывно; умножение раздельно τ - непрерывно. В частности, этими свойствами обладают стандартные топологии в алгебрах операторов. В Теореме 1 будем предполагать, что множество S конечно, и ψ – такая функция нормального экспоненциального типа, что $\psi(\frac{d}{d\lambda})f(\lambda)\,|_{\lambda=0} = 0$ для всех $f \in E_\varphi(S)$.

Теорема 1. *Для каждой окрестности нуля U в топологии τ существует такая окрестность нуля V в той же топологии и такое n, что если $||x|| \leq 1$ и $[z_k(a, -b), x] \in V$ при всех $k \leq n$ и $a \in S$, то $(\varphi * \psi)(\mathrm{ad}\,(b)) \in U$.*

Для доказательства Теоремы 1 нам понадобится следующая очевидная

Лемма. *Пусть Δ – полное метрическое пространство с метрикой d; $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ – компакты в Δ и $h : \Delta \to \mathbb{R}_+$ – такая непрерывная функция, что $h|_{\cap_{i=1}^m \Delta_i} = 0$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если $d(\xi, \Delta_i) < \delta$, $1 \le i \le m$, то $h(\xi) < \varepsilon$.*

Доказательство Теоремы 1. Пусть q – непрерывная полунорма на (A, τ) и $\varepsilon > 0$. Мы должны указать такие V и n, что $q[(\varphi * \psi)(\mathrm{ad}\ (b))x] < \varepsilon$, если $\|x\| \le 1$ и $[z_k(a; -b), x] \in V$ при $k \le n$, $a \in S$. Не ограничивая общности, можно считать, что $q(x) \le \|x\|$ для всех $x \in A$. Далее, требуемое неравенство будет иметь место, если установить, что $|\theta((\varphi * \psi)(\mathrm{ad}\ (b))x)| < \varepsilon$ для каждого линейного функционала θ на A, подчиненного условию $|\theta(x)| \le q(x)$ для всех $x \in A$. Именно это мы и будем доказывать.

Пусть $F_i = E_\varphi(a_i)$, где $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Пусть Δ_i – замкнутый единичный шар пространства F_i. Зафиксируем конечное $\rho > \sigma$, где σ – функция типа ψ, и обозначим через F банахово пространство функций, аналитических при $|\lambda| < \rho$, непрерывных в замыкании этого диска, снабженное равномерной нормой. Заранее можно считать, что $\Delta_i \subseteq \Delta$, $1 \le i \le m$, где Δ – единичный шар пространства F. Далее ясно, что Δ_i – компакты в Δ. Поскольку $\rho > \sigma$, то $h(f) = (\psi * f)(1)$ – непрерывный линейный функционал на F. Кроме того, из условия $f \in \cap_{i=1}^m \Delta_i$ следует, что $h(f) = 0$. Согласно лемме, отсюда вытекает, что $|(\psi * f)(1)| < \varepsilon$, если найдутся $f_i \in \Delta_i$, для которых $|f(\lambda) - f_i(\lambda)| < \delta$ при $|\lambda| \le r$ и $1 \le i \le m$. Если положить $f(\lambda) = \theta(\varphi(\lambda \mathrm{ad}\ (b))x)$, то неравенство $|(\psi * f)(1)| < \varepsilon$ будет означать, что теорема доказана. Но так как включение $f \in \Delta$ также можно заранее считать выполненным, то остается только указать такие $f_i \in \Delta_i$, что $|f(\lambda) - f_i(\lambda)| < \delta$ при $|\lambda| \le \rho$ и $1 \le i \le m$.

Положим $f_i(\lambda) = \theta(\varphi(\lambda \mathrm{ad}\ (a_i))x)$, тогда $f_i \in \Delta_i$. Пусть $\varphi(\lambda) = \sum_0^\infty \alpha_n \lambda^n$. Так как φ – целая функция, то $|\alpha_n|^{1/n} \to 0$. Поэтому найдется такое n, что при всех i

$$\sum_{p>n} 2^p \rho^p (\|a_i\|^p + \|b\|^p)|\alpha_p| < \frac{\delta}{2}. \tag{3}$$

Начальный отрезок ряда $f(\lambda) - f_i(\lambda)$ можно оценить при помощи (2). Имеем

$$(\mathrm{ad}\ (a_i))^p x - (\mathrm{ad}\ (b))^p x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} w_{p,k}(\mathrm{ad}\ (a_i), \mathrm{ad}\ (b))[z_k(a_i; -b), x]. \tag{4}$$

Можно считать, что $[z_k(a_i;-b),x]$ принадлежит окрестности нуля V, $1 \le i \le m$, $k \le n$. Так как умножение в A непрерывно в топологии τ, то правая часть в (4) принадлежит окрестности V. Последнюю же надо выбрать так, чтобы при $|\lambda| \le \rho$:

$$q\left[\sum_{p\le n}\alpha_p\lambda^p((\mathrm{ad}\ (a_i))^p-(\mathrm{ad}\ (b))^p)x\right]<\frac{\delta}{2}. \qquad (5)$$

Из (3) и (5) вытекает, что $|f(\lambda)-f_i(\lambda)|<\delta$, что и доказывает Теорему 1.

Замечание. В Теореме 1 S и b фиксированы, а x *меняется* с сохранением условия $||x|| \le 1$ (или $||x|| \le R < \infty$) и $[z_k(a_i;-b),x] \in V$. Однако возможен и такой вариант Теоремы 1, в котором переменными будут также S и b. Вариация множества S усложняет формулировку, так как в терминах S осуществляется связь между φ и ψ. Сделать переменным b проще, накладывая дополнительные ограничения на топологию τ.

Если топология τ задается нормой, относительно которой умножение в A совместно непрерывно, то можно считать b подобно x меняющимся в пределах фиксированного шара $||b|| \le R < \infty$.

4. Перейдем теперь непосредственно к некоторым обобщениям Теоремы И. Капланского. Пусть $D(A,\mathrm{II})$ обозначает множество всех $\theta \in A^*$, для которых $||\theta|| = 1 = \theta(\mathrm{II})$. Это множество называется множеством нормализованных состояний на алгебре A. Множество $V(a) = \{\theta(a) : \theta \in D(A;\mathrm{II})\}$ называется числовым образом элемента $a \in A$. Напомним, что элемент $a \in A$ называется эрмитовым, если $V(a) \subset \mathbb{R}$, т.е. $||\exp ita|| = 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Хорошо известно (см. [14]), что для каждого эрмитова элемента $a \in A$ имеет место равенство $\rho(a) = v(a) = ||a||$, где $\rho(a)$ – спектральный радиус, а $v(a)$ – числовой радиус элемента a. Элемент $c \in A$ называется эрмитов разложимым, если $c = a + ib$, где a, b – эрмитовы элементы алгебры A.

Теорема 2. *Пусть A – комплексная полная топологическая алгебра, где локально выпуклая топология τ на A порождена системой алгебраических полунорм $Q = \{q\}$, I – замкнутый двусторонний идеал в A, и для a, $b \in A$ имеем $q[\exp(ita)] = o(|t|^{1/2})$, $q[\exp(itb)] = o(|t|^{1/2})$, при $|t| \to \infty$ и всех $q \in Q$. Если*

$c = a + ib \in I$, *то* $c^* = a - ib \in I$.

Доказательство. Рассмотрим канонический гомоморфизм $\pi_I : A \to A/I$, порожденный двусторонним идеалом I. Тогда A/I - полная топологическая алгебра относительно фактора топологии τ_I, порожденной семейством полунорм $Q_I = \{q_I : q \in Q\}$, где $q_I(\pi_I(x)) = \inf\{q(y) : y \in \pi_I(x)\}$. Так как $q_I(\pi_I(x)) \leq q(x)$, то π_I непрерывен. Возьмем произвольный линейный функционал θ на алгебре A/I, удовлетворяющий условию $\theta(\pi_I(x)) \leq q_I(\pi_I(x))$, и рассмотрим функцию $f_\theta(\lambda) = \theta[\exp(is\pi_I(b))\exp(-it\pi_I(a))]$, где $\lambda = s + it \in C$. Так как $c \in I$, то функция $f_\theta(\lambda)$ целая. Ввиду того, что $q[\exp(ita)] = o(|t|^{1/2})$, $q[\exp(itb)] = o(|t|^{1/2})$, имеем $|f_\theta(\lambda)| \leq q_I[\exp(is\pi_I(b))\exp(-it\pi_I(a))] = o(|\lambda|)$, и в силу Теоремы Лиувилля $f_\theta(\lambda) = \text{const}$. Значит, $\frac{\partial f_\theta(\lambda)}{\partial \lambda} = 0$, и $\pi_I(c^*) = 0$, т.е. $c^* \in I$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть I - замкнутый двусторонний идеал в комплексной банаховой алгебре A, и $a, b \in A$ - такие элементы, что $\|\exp(ita)\| = o(|t|^{1/2})$, $\|\exp(itb)\| = o(|t|^{1/2})$, при $|t| \to \infty$. Если $c = a + ib \in I$, то $c^* = a - ib \in I$.*

Доказательство Теоремы 3 проводится так же, как в Теореме 2, только в этом случае семейство полунорм вырождается в норму.

Следствие 1. *Пусть I - замкнутый двусторонний идеал в комплексной банаховой алгебре A, и $a, b \in A$ есть эрмитовы элементы. Если $c = a + ib \in I$, то $c^* = a - ib \in I$.*

Обозначим через $H(A)$ множество всех эрмитовых элементов алгебры A. Будем говорить, что комплексная банахова алгебра A эрмитов разложима, если $A = H(A) \oplus iH(A)$, т.е. каждый элемент $c \in A$ имеет однозначное разложение $c = a + ib$, где $a, b \in H(A)$.

По Теореме Видав-Пальмера [15], если банахова алгебра A эрмитов разложима, то она является B^*-алгеброй относительно инволюции $c = a + ib \to c^* = a - ib$.

Следствие 2. *Пусть A эрмитов разложимая банахова алгебра и I - замкнутый двусторонний идеал в A. Тогда $I = I^*$ (идеал симметричен), и A/I есть B^*-алгебра.*

Доказательство. Так как каждый элемент $c \in A$ эрмитов разложим, то по Следствию 1 идеал I симметричен.

Пусть $\theta \in D(\pi_I(\mathfrak{U}))$ и $\theta_I(c) = \theta(\pi_I(c))$. Тогда $\theta_I \in D(\mathfrak{U})$ и ясно, что $V(\pi_I(a)) \subset \subset \mathbb{R}$, если $V(a) \subset \mathbb{R}$, т.е. $\pi_I(a) \in H(A/I)$. Так как $\pi_I(c) = \pi_I(a) + i\pi_I(b)$, то банахова алгебра A/I является эрмтитов разложимой относительно инволюции $\pi_I(c) = \pi_I(a) + i\pi_I(b) \to \pi_I(c)^* = \pi_I(a) - i\pi_I(b)$, и, следовательно, является B^*-алгеброй. Следствие 2 доказано.

Следствие 3 (И. Капланский). *Пусть A есть B^*-алгебра и I - замкнутый двусторонний идеал в A. Тогда идеал I симметричен и A/I есть B^*-алгебра.*

Было бы интересно получить топологический вариант Теоремы И. Капланского.

ABSTRACT. In this article, an asymptotic version for properties of commutators is proved for wide topology classes. As well as some generalizations of Irving Kaplansky's theorem are proved for C^*-algebras.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Рудин, Функциональный Анализ, М., Мир, 1975.
2. П. Халмош, Гильбертово Пространство в Задачах, М., Мир, 1970.
3. R. Moore, "An asymptotic Fuglede theorem", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 50, pp. 138 142, 1975.
4. D. D. Rogers, "On Fuglede theorem and operator topologies", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 75, pp. 32 - 36, 1979.
5. T. Furuta, "Normality can be relaxed in the asymptotic Fuglede-Putnam theorem", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 79, pp. 593 - 596, 1980.
6. Е. А. Горин, М. И. Караханян, "Асимптотический вариант теоремы Фугледа-Путнама о коммутаторах для элементов банаховых алгебр", Мат. заметки, т. 22, №2, стр. 179 - 188, 1977.
7. М. И. Караханян, "Асимптотический вариант теоремы Фугледа-Путнама о коммутаторах линейных ограниченных операторов в сильной и слабой операторных топологиях", ДАН Арм.ССР, т. 78, №5, стр. 265 - 268, 1981.
8. М. И. Караханян, "Асимптотические свойства коммутаторов элементов банаховых алгебр", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 19, №5 - 6, стр. 405 - 421, 1978.
9. Е. А. Горин, "Обобщение одной теоремы Фугледа. Алгебра и анализ", №5, 1993.
10. I. Kaplansky, "Normed algebra", Duke Math. J., vol. 16, pp. 399 - 418, 1949.
11. У. Браттели, Д. Робинсон, Операторные Алгебры и Квантовая Статическая Механика, М., Мир, 1982.

12. Н. Бурбаки, Группы и Алгебры Ли, М., Мир, 1976.
13. Ж - П. Серр, Алгебры Ли и Группы Ли, М., Мир, 1969.
14. В. Е. Кацнельсон, "У консервативного оператора норма равна спектральному радиусу", Матем. исследования, Кишинев, т. 5, №3, стр. 186 - 189, 1970.
15. F. F. Bonsall, J. Duncan, Complete Normed Algebras, Springer, 1973.

15 Марта 1994

Ереванский государственный университет

О НУЛЬ-РЯДАХ ПО ДВОЙНОЙ СИСТЕМЕ УОЛША

К. А. Навасардян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, Том 29, №1, 1994

В работе доказано, что для положительных чисел ε_{mn}, удовлетворяющих условиям $\varepsilon_{m+1,n} \le \varepsilon_{mn} \le \varepsilon_{m,n-1}$, $\sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_{mn}^2 = +\infty$, существует нуль-ряд по системе Уолша $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} W_m(x) W_n(y)$, с коэффициентами $|a_{mn}| \le \varepsilon_{mn}$. Если $\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{m0}^2 < +\infty$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{0n}^2 < +\infty$, то существует множество $E \subset [0,1]^2$ меры нуль, удовлетворяющее условиям :

1. Существует ряд $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} W_m(x) W_n(y)$, сходящийся к нулю вне E, с коэффициентами $|a_{mn}| \le \varepsilon_{mn}$ и $a_{00} \ne 0$;

2. Если ряд $\sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn} W_m(x) W_n(y)$ сходится к нулю вне E и $b_{mn} = o(\varepsilon_{mn})$, то $b_{mn} = 0$ для всех m и n.

Пусть $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ - произвольная ортонормированная система. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ называется нуль-рядом по этой системе, если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t) = 0$ почти всюду и $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| > 0$.

Первый пример тригонометрического нуль-ряда был построен Д. Е. Меньшовым в 1916 (см. [1]). В работах разных авторов (см. [2] – [9]) была исследована скорость стремления к нулю коэффициентов тригонометрических нуль-рядов. Наиболее сильным результатом является следующая (см. [2], [3], [7])

Теорема А. *Пусть* $c_n \downarrow 0$ *и* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = +\infty$. *Тогда существует ряд* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{int}$, *сходящийся к нулю почти всюду так, что* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n| > 0$ *и* $|a_n| \le c_{|n|}$.

Эта теорема дает положительный ответ на соответствующую проблему, поставленную П. Л. Ульяновым (см. [10]). Подобные вопросы для систем Хаара и Уолша были рассмотрены в работах [11] – [13]. В [3] Ф. Г. Арутюняном отмечено, что результат, аналогичный Теореме А, можно получить для системы

Уолша. В связи с вышесказанным Г. Г. Геворкян рассмотрел следующую задачу (см. [14]) : Для заданной последовательности $\varepsilon_n \downarrow 0$, удовлетворяющей условию $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2 = +\infty$, построить множество $E \subset [0, 2\pi]$, $\mu E = 0$ (μ – лебегова мера) со следующими свойствами :

1. Существует ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{int}$, который сходится к нулю всюду вне E, а его коэффициенты удовлетворяют условиям $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n| > 0$ и $|a_n| \leq \varepsilon_{|n|}$;

2. Если $b_n = o(\varepsilon_{|n|})$ и $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{int} = 0$ всюду вне E, то $b_{mn} = 0$ для всех n.

В том случае, когда последовательность $\{\varepsilon_n\}$ удовлетворяет условию $\limsup_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{2n}} < \sqrt{2}$, решение этой задачи получено в [14]. Для системы Уолша $\{W_n(t)\}$ доказан следующий результат (см. [14]).

Теорема B. *Пусть* $\varepsilon_n \downarrow 0$ *и* $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2 = +\infty$. *Тогда существует множество* $E \subset [0, 1]$, $\mu E = 0$, *такое, что :*

1. Существует ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(t)$ *с коэффициентами* $|a_n| \leq \varepsilon_{|n|}$, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| > 0$, *сходящийся к нулю всюду вне* E ;

2. Если $b_n = o(\varepsilon_n)$ *и ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(t)$ *сходится к нулю всюду вне* E, *за исключением некоторого счетного множества, то* $b_n = 0$ *для всех* n.

В настоящей работе рассматривается тот же вопрос для двойных рядов Уолша и доказан полный аналог Теоремы A :

Теорема 1. *Пусть* $\{\varepsilon_{mn}\}$ – *двойная последовательность, удовлетворяющая следующим условиям :* $0 \leq \varepsilon_{m+1,n} \leq \varepsilon_{mn} \leq \varepsilon_{m,n-1}$ *и* $\sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_{mn}^2 = +\infty$. *Тогда существует двойной ряд по системе Уолша с коэффициентами* $|a_{mn}| \leq \varepsilon_{mn}$, $\sum_{m,n=0}^{\infty} |a_n| > 0$, *который сходится к нулю почти всюду.*

Здесь и ниже под сходимостью двойных рядов мы понимаем сходимость прямоугольных частичных сумм : скажем, что двойной ряд $\sum_{m,n=0}^{\infty} \alpha_{mn}$ сходится к числу A, если для любого положительного $\varepsilon > 0$ существует натуральное M такое, что из $\min\{p, q\} > M$ следует, что $|\sum_{m=0}^{p} \sum_{n=0}^{q} \alpha_{mn} - A| < \varepsilon$. Обозначение $b_{mn} = o(\varepsilon_{mn})$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное M такое, что из $\min\{p, q\} > M$ следует $|b_{mn}| \leq \varepsilon \cdot \varepsilon_{mn}$.

При некоторых дополнительных условиях на последовательность $\{\varepsilon_{mn}\}$ можно доказать аналог Теоремы B.

Теорема 2. *Пусть* $\{\varepsilon_{mn}\}$ *- двойная последовательность, удовлетворяющая условиям* $0 < \varepsilon_{m+1,n} \le \varepsilon_{mn} \le \varepsilon_{m,n-1}$, $\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{m0}^2 < +\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{0n}^2 < +\infty$, $\sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_{mn}^2 = +\infty$ *и* $2^{m+n}\varepsilon_{2^m 2^n}^2 \to 0$. *Тогда существует множество* $E \subset [0,1]^2$, $\mu E = 0$, *такое, что :*

1. Существует двойной ряд по системе Уолша с коэффициентами $|a_{mn}| \le \le \varepsilon_{mn}$, $\sum_{m,n=0}^{\infty} |a_{mn}| > 0$, *который сходится к нулю всюду вне* E.

2. Если $b_{mn} = o(\varepsilon_{mn})$, *и существуют последовательности натуральных чисел* $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ *и* $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$, *стремящиеся к бесконечности, такие, что суммы*

$$\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} b_{mn} W_m(x) W_n(y), \quad M = 2^{g_k} - 1, \quad N = 2^{h_k} - 1$$

сходятся к нулю вне E, *за исключением некоторого счетного множества отрезков, параллельных координатным осям. Тогда* $b_{nm} = 0$ *для всех* m *и* n.

При доказательстве этих теорем мы пользуемся также системой Хаара. Напомним, что функции Хаара определяются следующим образом : $\chi_0^{(0)}(t) \equiv 1$, а для $n = 0, 1, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, 2^n$

$$\chi_n^{(k)}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & \text{если } t \in \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) \\ -2^{\frac{n}{2}}, & \text{если } t \in \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{k}{2^n}\right) \\ 0, & \text{если } t \notin \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]. \end{cases}$$

В остальных точках функции Хаара определяются как полусумма левосторонних и правосторонних пределов.

Функции системы Уолша выражаются функциями системы Хаара следующим образом (см. [15]) : $W_0^{(0)}(t) = \chi_0^{(0)}(t)$, и для $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $1 \le m \le 2^n$

$$W_n^{(m)}(t) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{k=1}^{2^n} \varepsilon_{k,m}^{(n)} \cdot \chi_n^{(k)}(t),$$

где $\varepsilon_{k,m}^{(n)} = \pm 1$. Числа $\varepsilon_{k,m}^{(n)}$ можно опрелелить по индукции. Положим $\varepsilon_{1,1}^{(0)} = 1$ и допустим, что числа $\{\varepsilon_{k,m}^{(n)}\}_{k,m=1}^{2^n}$ уже определены. Положим

$$\varepsilon_{2k-1,m}^{(n+1)} = \varepsilon_{k,m}^{(n)}, \quad \varepsilon_{2k-1,2^n+m}^{(n+1)} = \varepsilon_{k,m}^{(n)}, \quad k, m = 1, 2, \ldots, 2^n, \tag{1}$$

$$\varepsilon_{2k,m}^{(n+1)} = \varepsilon_{k,m}^{(n)}, \quad \varepsilon_{2k,2^n+m}^{(n+1)} = -\varepsilon_{k,m}^{(n)}, \quad k, m = 1, 2, \ldots, 2^n. \tag{2}$$

Матрица $K_n = \|\varepsilon_{k,m}^{(n)}\|_{k,m=1}^{2^n}$ называется матрицей Качмажа. Известно, что матрица K_n симметрична и ортогональна и

$$\chi_n^{(k)}(t) = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{m=1}^{2^n} \varepsilon_{k,m}^{(n)} W_n^{(m)}(t). \tag{3}$$

Систему Уолша принято нумеровать одним индексом. Если $n = 2^k + m - 1$, $k = 0, 1, \ldots$, $1 \le m \le 2^k$, то $W_n(t) = W_k^{(m)}(t)$. В этих обозначениях $W_{n \dotplus m}(t) = W_n(t) \cdot W_m(t)$, за исключением некоторого конечного числа точек (определение операции $\dotplus$ можно найти, например, в [16]). Отметим некоторые свойства матрицы Качмажа, которыми мы будем пользоваться.

Свойство 1. Для фиксированного j, $1 \le j \le 2^n$, обозначим через $\varepsilon_j^{(n)}$ j-ую строку матрицы K_n. Записав строку $\varepsilon_{k,m}^{(\nu)} \cdot \varepsilon_j^{(n)}$ вместо элемента $\varepsilon_{k,m}^{(\nu)}$ матрицы K_ν, получим $2^\nu \times 2^{n+\nu}$ -мерную матрицу $K_{n,\nu}^{(j)}$. Запишем матрицы $K_{n,\nu}^{(j)}$ одну под другой ($K_{n,\nu}^{(j+1)}$ под $K_{n,\nu}^{(j)}$). В итоге получится матрица $K_{n+\nu}$. Иначе говоря

$$\varepsilon_{k,m}^{(\nu)} \cdot \varepsilon_{p,q}^{(n)} = \varepsilon_{(p-1)2^\nu + k, (m-1)2^n + q}^{(n+\nu)}. \tag{4}$$

Свойство 2. Пусть $x \in (\frac{j-1}{2^{n+1}}, \frac{j}{2^{n+1}})$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{n+1}$. Тогда

$$W_k^{(m)}(x) = W_{2^k+m-1}(x) = \varepsilon_{2^k+m,j}^{(n+1)}, \quad 0 \le k \le n, \quad 1 \le m \le 2^k. \tag{5}$$

Верна следующая (см. [14], Лемма 1 или [17], Лемма 1).

Лемма 1. *Пусть $\{\varepsilon_{k,m}^{(2n)}\}$ - элементы матрицы Качмажа. Тогда существуют числа $\varepsilon_k = \pm 1$ такие, что*

$$\sum_{k=1}^{2^{2n}} \varepsilon_k \varepsilon_{k,m}^{(2n)} = \pm 2^n, \quad m = 1, 2, \ldots, 2^{2n}.$$

В [14] и [17] последовательность $\{\varepsilon_k\}$ была построена следующим образом :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = 1, \quad \varepsilon_{4k-j} = \varepsilon_k \varepsilon_{4-j}, \quad j = 0, 1, 2, 3. \tag{6}$$

Нетрудно убедиться, что, если $m = \theta_p 4^p + \theta_{p+1} 4^{p+1} + \cdots + \theta_q 4^q$, где $\theta_p \ne 0$, $\theta_i = 0, 1, 2, 3$ при $p \le i \le q$, $1 \le m \le 2^{2n}$, то

$$\varepsilon_{j 2^{2n}+m} = (-1)^p \varepsilon_{\theta_p} \varepsilon_{\theta_{p+1}+1} \cdots \varepsilon_{\theta_q+1} \varepsilon_{j+1}, \quad j = 0, 1, 2, 3. \tag{7}$$

Применяя несколько раз (6), получаем

$$\varepsilon_{j2^{2n}+m} = \varepsilon_{j4^n+\theta_p4^p+\cdots+\theta_q4^q} = \varepsilon_{4^p(j4^{n-p}+\theta_q4^{q-p}+\cdots+\theta_p)} =$$

$$= (-1)^p\varepsilon_{j4^{n-p}+\theta_q4^{q-p}+\cdots+\theta_p} = (-1)^p\varepsilon_{4(j4^{n-p-1}+\theta_q4^{q-p-1}+\cdots+\theta_{p+1}+1)-(4-\theta_p)} =$$

$$= (-1)^p\varepsilon_{\theta_p}\varepsilon_{4(j4^{n-p-2}+\theta_q4^{q-p-2}+\cdots+\theta_{p+2}+1)-(4-\theta_{p+1}-1)} = \cdots$$

$$\cdots = (-1)^p\varepsilon_{\theta_p}\varepsilon_{\theta_{p+1}+1}\cdots\varepsilon_{\theta_q+1}\varepsilon_{j4^{n-q-1}+1} = (-1)^p\varepsilon_{\theta_p}\varepsilon_{\theta_{p+1}+1}\cdots\varepsilon_{\theta_q+1}\varepsilon_{j+1}.$$

Из (6) и (7) следует, что

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{2^{2n}+m} = \varepsilon_{2\,2^{2n}+m} = -\varepsilon_{3\,2^{2n}+m}, \quad 1 \le m \le 2^{2n}. \tag{8}$$

Учитывая (8) и используя те же рассуждения, что и в доказательстве Леммы 1, можно получить следующее утверждение.

Лемма 1′. *Пусть $\{\varepsilon_{k,m}^{(2n)}\}$ - элементы матрицы Качмажа. Тогда для последовательности $\{\varepsilon_k\}$, определенной по (6), имеем*

$$\sum_{k=1}^{2^{2n}} \varepsilon_k\varepsilon_{k,m}^{(2n)} = \varepsilon_m 2^n, \quad 1 \le m \le 2^{2n}.$$

В [17] была доказана следующая (см. [17], Лемма 1)

Лемма 2. *Для любых n и p выполняется неравенство*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k W_k(t)\right| \le M\sqrt{p},$$

где M константа, а $\{\varepsilon_k\}$ определяются по (6).

Учитывая свойство 2 матриц Качмажа, Лемму 2 можно переформулировать следующим образом.

Лемма 2′. *Для любой матрицы Качмажа K_ν и для любых n и p выполняется неравенство*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k\varepsilon_{k,m}^{(\nu)}\right| \le M\sqrt{p}, \quad 1 \le m \le 2^\nu,$$

где M - константа, а $\{\varepsilon_k\}$ определяются по (6).

Лемма 3. *Для любого интервала $I = [\frac{i}{2^\sigma}, \frac{i+1}{2^\sigma}]$, $\sigma \in N$, $0 \le i \le 2^\sigma - 1$ и для любого натурального $n > \sigma + 1$ существует полином $\sum_{k=1}^{2^n} a_n^{(k)}W_n^{(k)}(x)$ такой,* что

1. $|a_n^{(k)}| \le 2\cdot 2^{-\frac{n+\sigma}{2}}, \quad 1 \le k \le 2^n,$
2. $|\sum_{k=1}^{N} a_n^{(k)} W_n^{(k)}(x)| \le 2\cdot 2^{-\frac{n-\sigma-1}{2}}$, *если* $x \notin I$, $1 \le N \le 2^n$,
3. $|\sum_{k=1}^{N} a_n^{(k)} W_n^{(k)}(x)| \le M + 2\cdot 2^{-\frac{n-\sigma-1}{2}}$, *если* $x \in I$, $1 \le N \le 2^n$,
4. $\sum_{k=1}^{2^n} a_n^{(k)} W_n^{(k)}(x) = 1$, *если* $x \in E_1 \subset I$, $\mu E_1 = \frac{1}{2}\mu I = 2^{-\sigma-1}$,
5. $\sum_{k=1}^{2^n} a_n^{(k)} W_n^{(k)}(x) = -1$, *если* $x \in E_2 \subset I$, $\mu E_2 = \frac{1}{2}\mu I = 2^{-\sigma-1}$,
6. $\sum_{k=1}^{2^n} a_n^{(k)} W_n^{(k)}(x) = 0$, *если* $x \notin I$,

причем множества E_1 *и* E_2 *являются конечными объединениями интервалов типа Хаара, а* M *– постоянная.*

Доказательство. Пусть $n-\sigma$ четное число. Полином $\sum_{k=1}^{2^n} a_n^{(k)} W_n^{(k)}(x)$ будем искать среди функций вида

$$\frac{1}{2^{n/2}} \sum_{k=i2^{n-\sigma}+1}^{(i+1)2^{n-\sigma}} \delta_k \chi_n^{(k)}(x), \quad \text{где} \quad \delta_k = \pm 1. \tag{9}$$

Ясно, что при любом выборе чисел δ_k функции вида (9) удовлетворяют условиям 4. – 6.

Из (3) имеем (отметим, что числа δ_k не фиксированы)

$$\frac{1}{2^{n/2}} \sum_{k=i2^{n-\sigma}+1}^{(i+1)2^{n-\sigma}} \delta_k \chi_n^{(k)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=i2^{n-\sigma}+1}^{(i+1)2^{n-\sigma}} \delta_k \sum_{m=1}^{2^n} \varepsilon_{k,m}^{(n)} W_n^{(m)}(x) =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{m=1}^{2^n} \left(\sum_{k=i2^{n-\sigma}+1}^{(i+1)2^{n-\sigma}} \delta_k \varepsilon_{k,m}^{(n)} \right) W_n^{(m)}(x).$$

Напомним (см. (4)), что для фиксированного j, $1 \le j \le 2^\sigma$ матрицы

$$\left(\varepsilon_{k,m}^{(n)}\right)_{k=i2^{n-\sigma}+1,\ldots,(i+1)2^{n-\sigma}}^{m=q2^\sigma+j,\ q=0,1,\ldots,2^{n-\sigma}-1}$$

являются матрицами Качмажа порядка $2^{n-\sigma}$, умноженными на $\varepsilon_{i+1,j}^{(\sigma)}$. Взяв $\delta_k = \varepsilon_{k-i2^{n-\sigma}}$ (где $\{\varepsilon_k\}$ определяются по (6)) и применив Лемму 1′ для $m = q2^\sigma + j$, $q = 0, 1, \ldots, 2^{n-\sigma} - 1$, $j = 1, 2, \ldots, 2^\sigma$, получим

$$\sum_{k=i2^{n-\sigma}+1}^{(i+1)2^{n-\sigma}} \delta_k \varepsilon_{k,m}^{(n)} = \sum_{k=1}^{2^{n-\sigma}} \varepsilon_k \varepsilon_{k,q+1}^{(n-\sigma)} \varepsilon_{i+1,j}^{(\sigma)} = \varepsilon_{q+1} \varepsilon_{i+1,j}^{(\sigma)} 2^{\frac{n-\sigma}{2}}. \tag{10}$$

Обозначим

$$a_n^{(m)} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=i2^{n-\sigma}+1}^{(i+1)2^{n-\sigma}} \delta_k \varepsilon_{k,m}^{(n)}, \quad m = 1, 2, \ldots, 2^n. \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует, что

$$a_n^{(q2^\sigma+j)} = 2^{-\frac{n+\sigma}{2}} \varepsilon_{q+1} \varepsilon_{i+1,j}^{(\sigma)}, \quad q = 0, 1, \ldots, 2^{n-\sigma}-1, \quad j = 1, 2, \ldots, 2^\sigma, \tag{12}$$

и

$$|a_n^{(m)}| = 2^{-\frac{n+\sigma}{2}}, \quad m = 1, 2, \ldots, 2^n. \tag{13}$$

Пусть $x \in (\frac{\alpha 2^{n-\sigma+1}+\beta-1}{2^{n+1}}, \frac{\alpha 2^{n-\sigma+1}+\beta}{2^{n+1}})$, $\alpha = 0, 1, \ldots, 2^\sigma - 1$, $1 \le \beta \le 2^{n-\sigma+1}$ и $m = q2^\sigma + j$, $q = 0, 1, \ldots, 2^{n-\sigma}-1$, $j = 1, 2, \ldots, 2^\sigma$. Из (4) и (5) получим

$$W_n^{(m)}(x) = \varepsilon_{2^n+q2^\sigma+j,\alpha 2^{n-\sigma+1}+\beta}^{(n+1)} = \varepsilon_{j,\alpha+1}^{(\sigma)} \varepsilon_{2^{n-\sigma}+q+1,\beta}^{(n-\sigma+1)} =$$
$$= \varepsilon_{\alpha+1,j}^{(\sigma)} \varepsilon_{q+1,[\frac{\beta+1}{2}]}^{(n-\sigma)} (-1)^{\beta+1}. \tag{14}$$

Следовательно, учитывая (12) и (14), имеем

$$\sum_{m=1}^{N} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x) = \sum_{m=1}^{2^\sigma[\frac{N}{2^\sigma}]} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x) + \sum_{m=2^\sigma[\frac{N}{2^\sigma}]+1}^{N} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x) =$$

$$= (-1)^{\beta+1} 2^{-\frac{n+\sigma}{2}} \sum_{q=0}^{[\frac{N}{2^\sigma}]-1} \sum_{j=1}^{2^\sigma} \varepsilon_{q+1} \varepsilon_{i+1,j}^{(\sigma)} \varepsilon_{\alpha+1,j}^{(\sigma)} \varepsilon_{q+1,[\frac{\beta+1}{2}]}^{(n-\sigma)} +$$

$$+ \sum_{m=2^\sigma[\frac{N}{2^\sigma}]+1}^{N} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x). \tag{15}$$

Если $x \notin I$ (т.е. $\alpha \ne i$), то из ортогональности матриц Качмажа имеем $\sum_{j=1}^{2^\sigma} \varepsilon_{i+1,j}^{(\sigma)} \varepsilon_{\alpha+1,j}^{(\sigma)} = 0$. Поэтому из (13) и (15) следует

$$\left| \sum_{m=1}^{N} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x) \right| = \left| \sum_{m=2^\sigma[\frac{N}{2^\sigma}]+1}^{N} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x) \right| \le 2^\sigma 2^{-\frac{n+\sigma}{2}} = 2^{-\frac{n-\sigma}{2}}.$$

Если $x \in I$ (i.e. $\alpha = i$), то

$$\sum_{j=1}^{2^\sigma} \varepsilon_{i+1,j}^{(\sigma)} \varepsilon_{\alpha+1,j}^{(\sigma)} = 2^\sigma.$$

В силу Леммы 2′ и с учетом (13) и (15) получим

$$\left| \sum_{m=1}^{N} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x) \right| \le 2^{-\frac{n+\sigma}{2}} 2^\sigma \left| \sum_{q=0}^{[\frac{N}{2^\sigma}]-1} \varepsilon_{q+1} \varepsilon_{q+1,[\frac{\beta+1}{2}]}^{(n-\sigma)} \right| +$$

$$+2^{-\frac{n-\sigma}{2}} \le 2^{-\frac{n-\sigma}{2}} M\sqrt{\left[\frac{N}{2^\sigma}\right]} + 2^{-\frac{n-\sigma}{2}} \le M + 2^{-\frac{n-\sigma}{2}}.$$

Таким образом, в случае четного $n-\sigma$ лемма доказана.

Пусть теперь $n-\sigma$ нечетное. Разделим интервал I на две части : I_1 и I_2, причем $\mu I_1 = \mu I_2 = \frac{1}{2}\mu I = 2^{-(\sigma+1)}$. Ясно, что $n-(\sigma+1)$ – четное и $n > \sigma+1$. Как мы уже доказали, в таком случае существуют полиномы $\sum_{m=1}^{2^n} b_n^{(m)} W_n^{(m)}(x)$ и $\sum_{m=1}^{2^n} c_n^{(m)} W_n^{(m)}(x)$ (соответствующие интервалам I_1 и I_2), которые удовлетворяют требованиям леммы, где вместо σ взято $\sigma+1$, а вместо I рассмотрены I_1 и I_2 соответственно.

Обозначим

$$\sum_{m=1}^{2^n} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x) = \sum_{m=1}^{2^n} (b_n^{(m)} + c_n^{(m)}) W_n^{(m)}(x).$$

Тогда, очевидно, будем иметь

1. $|a_n^{(m)}| \le |b_n^{(m)}| + |c_n^{(m)}| \le 2\cdot 2^{-\frac{n+\sigma}{2}}$, если $1 \le m \le 2^n$,
2. $|\sum_{m=1}^{N} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x)| \le 2\cdot 2^{-\frac{n-\sigma-1}{2}}$, если $x \notin I$, $1 \le N \le 2^n$,
3. $|\sum_{m=1}^{N} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x)| \le M + 2\cdot 2^{-\frac{n-\sigma-1}{2}}$, если $x \in I$, $1 \le N \le 2^n$,
4. $\sum_{m=1}^{2^n} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x) = 1$, если $x \in E_1 \subset I$, $\mu E_1 = \frac{1}{2}\mu I = 2^{-\sigma-1}$,
5. $\sum_{m=1}^{2^n} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x) = -1$, если $x \in E_2 \subset I$, $\mu E_2 = \frac{1}{2}\mu I = 2^{-\sigma-1}$,
6. $\sum_{m=1}^{2^n} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x) = 0$, если $x \notin I$,

причем множества E_1 и E_2 являются конечными объединениями интервалов типа Хаара, а M – постоянная. Этим завершается доказательство Леммы 3.

Доказательство Теоремы 1. Пусть $\sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_{mn}^2 = +\infty$. В том случае, когда один из рядов $\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{m0}^2$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{0n}^2$ расходится, то Теорема 1 является одномерным аналогом Теоремы А для системы Уолша. Пусть

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{m0}^2 < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{0n}^2 < +\infty. \tag{16}$$

Очевидно, что ряд $\sum_{m,n=0}^{\infty} 2^m 2^n \varepsilon_{2^m 2^n}^2$ расходится. Поэтому по крайней мере один из рядов

$$\sum_{m,n=0,\ m\ge n}^{\infty} 2^m 2^n \varepsilon_{2^m 2^n}^2 \quad \text{и} \quad \sum_{m,n=0,\ m\le n}^{\infty} 2^m 2^n \varepsilon_{2^m 2^n}^2$$

расходится. Для определенности предположим, что

$$\sum_{m,n=0,\ m\le n}^{\infty} 2^m 2^n \varepsilon_{2^m 2^n}^2 = +\infty. \tag{17}$$

Обозначим

$$G = \{(m,n):\ m \le n,\ \varepsilon_{2^m 2^n} < 4\varepsilon_{2^{m+1}2^{n+1}}\}$$

и покажем, что

$$\sum_{(m,n)\in G} 2^m 2^n \varepsilon_{2^m 2^n}^2 = +\infty. \tag{18}$$

Для фиксированного n пусть h есть наименьшее число, удовлетворяющее условию $(h, n+h) \in G$ (если нет такого числа, то положим $h = +\infty$). Имеем

$$\sum_{p=0}^{h-1} 2^p 2^{n+p} \varepsilon_{2^p 2^{n+p}}^2 \le \sum_{p=0}^{h-1} 2^p 2^{n+p} \left(\frac{\varepsilon_{1,2^n}}{4^p}\right)^2 \le 2\cdot 2^n \varepsilon_{1,2^n}^2. \tag{19}$$

Пусть $(m, n+m) \in G$, и пусть l есть наименьшее число, удовлетворяющее условиям $(l, n+l) \in G$ и $l > m$ (если нет такого числа, положим $l = +\infty$). Тогда

$$\sum_{p=m}^{l-1} 2^p 2^{n+p} \varepsilon_{2^p 2^{n+p}}^2 \le \sum_{p=m}^{l-1} 2^p 2^{n+p} \left(\frac{\varepsilon_{2^m 2^{n+m}}}{4^{p-m}}\right)^2 \le 2\cdot 2^m 2^{n+m} \varepsilon_{2^m 2^{n+m}}^2. \tag{20}$$

Из (19), (20) и условия $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \varepsilon_{1,2^n}^2 = A < +\infty$ получаем

$$\sum_{m,n=0,\ m\le n}^{\infty} 2^m 2^n \varepsilon_{2^m 2^n}^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} 2^m 2^{n+m} \varepsilon_{2^m 2^{n+m}}^2 \le \sum_{n=0}^{\infty} 2\, 2^n \varepsilon_{1,2^n}^2 +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(m,m+n)\in G} 2\, 2^m 2^{m+n} \varepsilon_{2^m 2^{m+n}}^2 = 2A + 2 \sum_{(m,n)\in G} 2^m 2^n \varepsilon_{2^m 2^n}^2. \tag{21}$$

Из (17) и (21) следует (18).

Существуют натуральные числа p_{mn} такие, что $\frac{1}{2}\varepsilon_{2^m 2^n} < 2^{2-p_{mn}} \le \varepsilon_{2^m 2^n}$, причем $p_{mn} \to +\infty$. Без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon_{00} = 1$, $\varepsilon_{2^m 2^n} = 4\cdot 2^{-p_{mn}}$, $m \ge 0$, $n \ge 0$. Также можно считать, что

$$\varepsilon_{pq} = \varepsilon_{2^m 2^n} = 4\cdot 2^{-p_{mn}} \tag{22}$$

для $(m,n) \in G$, $2^m \le p < 2^{m+1}$, $2^n \le q < 2^{n+1}$. Итак, имеем

$$\sum_{(m,n)\in G} 2^m 2^n (2^{-p_{mn}})^2 = +\infty. \tag{23}$$

Обозначим через B подмножество тех элементов из G, для которых $m+n > \frac{3}{2}p_{mn}$. Легко видеть, что

$$\sum_{(m,n)\in G\setminus B} 2^m 2^n (2^{-p_{mn}})^2 \le \sum_{(m,n)\in G\setminus B} 2^m 2^n 2^{-\frac{3}{4}(m+n)} \le$$

$$\le \sum_{m,n=0}^{\infty} 2^{-\frac{1}{4}(m+n)} < +\infty. \qquad (24)$$

Из (16), (23) и (24) следует, что для любого M

$$\sum_{(m,n)\in B,\ m\ge M} 2^m 2^n (2^{-p_{mn}})^2 = +\infty. \qquad (25)$$

Можно выбрать натуральные числа γ_{mn}, удовлетворяющими условиям

$$\sum_{(m,n)\in B,\ m\ge M} 2^m 2^n 2^{-\gamma_{mn}} (2^{-p_{mn}})^2 = +\infty \quad \text{для любого } M, \qquad (26)$$

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty,\\ (m,n)\in B}} (m+n-\gamma_{mn}-2p_{mn}) = -\infty, \qquad (27)$$

$$m+n-\gamma_{mn}-2p_{mn} > -\frac{1}{2}p_{mn} \quad \text{при } (m,n)\in B. \qquad (28)$$

Из (28) и определения множества B следует, что

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty,\\ (m,n)\in H}} (m+2n-\gamma_{mn}-2p_{mn}) = +\infty. \qquad (29)$$

Согласно (26) и (27) для любых k и l существует конечное подмножество D множества B такое, что

$$\sum_{(m,n)\in D} 2^m 2^n 2^{-\gamma_{mn}} (2^{-p_{mn}})^2 = 2^{-l}$$

и $\min\{m:\ (m,n)\in D\} \ge k$.

Для $\{p_{mn}\}$, $\{\gamma_{mn}\}$ и B, определенных выше, справедлива

Лемма 4. *Для любых неотрицательных целых чисел i, M, для любого $\delta > 0$ и для любого квадрата типа Хаара Δ, $\mu\Delta = 2^{-2\gamma}$, существуют конечное подмножество $D \subset B$ и полином*

$$\sum_{m,n=M}^{N} c_{mn} W_m(x) W_n(y) = \sum_{(m,n)\in D} \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{l=1}^{2^n} a_{mn}^{(k)} b_{mn}^{(l)} W_m^{(k)}(x) W_n^{(l)}(y)$$

такие, что

1. $|c_{mn}| \le 2^{-i}\varepsilon_{mn}, \quad M \le m,n \le N,$
2. $\sum\limits_{m,n=M}^{N} c_{mn}W_m(x)W_n(y) = 1, \quad$ *если* $\quad (x,y) \in E_1 \subset \Delta, \ \mu E_1 = \frac{1}{2}\mu\Delta,$
3. $\sum\limits_{m,n=M}^{N} c_{mn}W_m(x)W_n(y) = -1, \quad$ *если* $\quad (x,y) \in E_2 \subset \Delta, \ \mu E_2 = \frac{1}{2}\mu\Delta,$
4. $\sum\limits_{m,n=M}^{N} c_{mn}W_m(x)W_n(y) = 0, \quad$ *если* $\quad (x,y) \notin \Delta,$
5. $\Big|\sum\limits_{m=M}^{P}\sum\limits_{n=M}^{Q} c_{mn}W_m(x)W_n(y)\Big| \le C, \quad$ *если* $\quad (x,y) \in \Delta, \ P,Q \ge M,$
6. $\Big|\sum\limits_{m=M}^{P}\sum\limits_{n=M}^{Q} c_{mn}W_m(x)W_n(y)\Big| \le \delta, \quad$ *если* $\quad (x,y) \notin \Delta, \ P,Q \ge M,$
7. $\sum\limits_{(m,n)\in D} 2^m 2^n 2^{-\gamma_{mn}}(2^{-p_{mn}-i})^2 = \mu\Delta = 2^{-2\gamma},$

причем множества E_1 и E_2 являются конечными объединениями квадратов типа Хаара, а C – абсолютная постоянная.

Доказательство. Из (29) следует, что существует M_o такое, что

$$m + 2n - \gamma_{mn} - 2(p_{mn} + i) - 1 > 0, \quad \text{при } (m,n) \in B, \ m > M_o. \tag{30}$$

Выберем M_o таким, чтобы выполнялись следующие условия

$$n2^{-\frac{n}{6}}2^{\frac{2i-\gamma+1}{2}} < \frac{\delta}{8C}, \quad \text{при } (m,n) \in B, \ m > M_o \tag{31}$$

$$2^{-\frac{m-\gamma-1}{2}} < \frac{\delta}{8C}, \quad \text{при } (m,n) \in B, \ m > M_o, \tag{32}$$

где C – постоянная из Леммы 3.

Выберем такое конечное подмножество $D \subset B$, что

$$\sum_{(m,n)\in D} 2^m 2^n 2^{-\gamma_{mn}}(2^{-p_{mn}-i})^2 = \mu\Delta = 2^{-2\gamma} \tag{33}$$

и

$$\min\{m : \ (m,n) \in D\} > \max\{\gamma + 1, \log_2 M, \ M_o\}. \tag{34}$$

Из (33) следует, что квадрат Δ можно представить в виде объединения прямоугольников типа Хаара, т.е.

$$\Delta = \cup_{(m,n)\in D} I_{mn} = \cup_{(m,n)\in D}(I_{mn}^{(1)} \times I_{mn}^{(2)}),$$

где $\mu I_{mn}^{(1)} = 2^{-\gamma}$ и $\mu I_{mn}^{(2)} = 2^m 2^n 2^{-\gamma_{mn}} (2^{-p_{mn}-i}) 2^{\gamma}$ ($I_{mn}^{(1)}$ и $I_{mn}^{(2)}$ – интервалы типа Хаара).

Пусть $(m,n) \in D$ фиксировано. В силу Леммы 3 для интервала $I_{mn}^{(1)}$ и числа m, а также для интервала $I_{mn}^{(2)}$ и числа n, существуют полиномы $\sum_{k=1}^{2^m} a_{mn}^{(k)} W_m^{(k)}(x)$ и $\sum_{l=1}^{2^n} a_{mn}^{(l)} W_n^{(l)}(y)$, соответственно, удовлетворяющие условиям

a) $|a_{mn}^{(k)}| \le 2 \cdot 2^{-\frac{m+\gamma}{2}}, \quad (m,n) \in D, \quad k = 1,2,\dots,2^m,$

b) $|\sum_{k=1}^{P} a_{mn}^{(k)} W_m^{(k)}(x)| \le 2 \cdot 2^{-\frac{m-\gamma-1}{2}}, \quad$ для $\quad x \notin I_{mn}^{(1)}, \quad 1 \le P \le 2^m,$

c) $|\sum_{k=1}^{P} a_{mn}^{(k)} W_m^{(k)}(x)| \le C, \quad$ для $\quad x \in I_{mn}^{(1)}, \quad 1 \le P \le 2^m,$

d) $\sum_{k=1}^{2^m} a_{mn}^{(k)} W_m^{(k)}(x) = 1, \quad$ для $\quad x \in E'_{mn} \subset I_{mn}^{(1)}, \quad \mu E'_{mn} = \frac{1}{2} \mu I_{mn}^{(1)},$

e) $\sum_{k=1}^{2^m} a_{mn}^{(k)} W_m^{(k)}(x) = -1, \quad$ для $\quad x \in E''_{mn} \subset I_{mn}^{(1)}, \quad \mu E''_{mn} = \frac{1}{2} \mu I_{mn}^{(1)},$

f) $\sum_{k=1}^{2^m} a_{mn}^{(k)} W_m^{(k)}(x) = 0, \quad$ для $\quad x \notin I_{mn}^{(1)},$

a') $|b_{mn}^{(l)}| \le 2 \cdot 2^{-\frac{-m+\gamma_{mn}+2(p_{mn}+i)-\gamma}{2}}, \quad (m,n) \in D, \quad l = 1,2,\dots,2^n,$

b') $|\sum_{l=1}^{Q} b_{mn}^{(l)} W_n^{(l)}(y)| \le 2 \cdot 2^{-\frac{m+2n-\gamma_{mn}-2(p_{mn}+i)+\gamma-1}{2}}, \quad$ для $\quad y \notin I_{mn}^{(2)},$

c') $|\sum_{l=1}^{Q} b_{mn}^{(l)} W_n^{(l)}(y)| \le C, \quad$ для $\quad y \in I_{mn}^{(2)}, \quad 1 \le Q \le 2^n,$

d') $\sum_{l=1}^{2^n} b_{mn}^{(l)} W_n^{(l)}(y) = 1, \quad$ для $\quad y \in F'_{mn} \subset I_{mn}^{(2)}, \quad \mu F'_{mn} = \frac{1}{2} \mu I_{mn}^{(2)},$

e') $\sum_{l=1}^{2^n} b_{mn}^{(l)} W_n^{(l)}(y) = -1, \quad$ для $\quad y \in F''_{mn} \subset I_{mn}^{(2)}, \quad \mu F''_{mn} = \frac{1}{2} \mu I_{mn}^{(2)},$

f') $\sum_{l=1}^{2^n} b_{mn}^{(l)} W_n^{(l)}(y) = 0, \quad$ для $\quad y \notin I_{mn}^{(2)},$

где E'_{mn}, E''_{mn}, F'_{mn}, F''_{mn} являются объединениями интервалов типа Хаара, а $C > 2$ константа.

Имеем

$$\sum_{m,n=M}^{N} c_{mn} W_m(x) W_n(y) = \sum_{(m,n) \in D} \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{l=1}^{2^n} a_{mn}^{(k)} b_{mn}^{(l)} W_m^{(k)}(x) W_n^{(l)}(y). \qquad (35)$$

Из (22), (35), a) и a') следует, что $|c_{mn}| \le 2^{-i} \varepsilon_{mn}$. Из d) - f), d') - f') и (35)

получим

$$\sum_{m,n=M}^{N} c_{mn} W_m(x) W_n(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x,y) \in E_1 \subset \Delta \\ -1, & \text{если } (x,y) \in E_2 \subset \Delta \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin \Delta, \end{cases}$$

где $\mu E_1 = \mu E_2 = \frac{1}{2}\mu\Delta$.

Для $P, Q \geq M$ имеем

$$S_{PQ}(x,y) =$$

$$= \sum_{m=M}^{P} \sum_{n=M}^{Q} c_{mn} W_m(x) W_n(y) = \sum_{\substack{(m,n)\in D, \\ 2^{m+1}\leq P,\, 2^{n+1}\leq Q}} \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{l=1}^{2^n} a_{mn}^{(k)} b_{mn}^{(l)} W_m^{(k)}(x) W_n^{(l)}(y) +$$

$$+ \sum_{\substack{(m,n)\in D, \\ 2^m\leq P<2^{m+1},\, 2^{n+1}\leq Q}} \sum_{k=1}^{P-2^m+1} \sum_{l=1}^{2^n} + \sum_{\substack{(m,n)\in D, \\ 2^{m+1}\leq P,\, 2^n\leq Q<2^{n+1}}} \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{l=1}^{Q-2^n+1} +$$

$$+ \sum_{\substack{(m,n)\in D, \\ 2^m\leq P<2^{m+1},\, 2^n\leq Q<2^{n+1}}} \sum_{k=1}^{P-2^m+1} \sum_{l=1}^{Q-2^n+1} = \sum_{k=1}^{4} J_k(x,y).$$

Если $(x,y) \in \Delta$, то из d) - f) и d′) - f′) следует, что

$$|J_1(x,y)| = 1 \quad \text{или} \quad J_1(x,y) = 0. \tag{36}$$

Поскольку y может принадлежать только одному интервалу $I_{mn}^{(2)}$, то из c) и d′) - f′) получаем

$$|J_2(x,y)| \leq C. \tag{37}$$

Из d), c), b′) и c′) следует, что

$$|J_3(x,y)| \leq C + \sum_{\substack{(m,n)\in D, \\ 2^{m+1}\leq P,\, 2^n\leq Q<2^{n+1}}} 2 \cdot 2^{-\frac{m+2n-\gamma m a-2(p m a+i)+\gamma-1}{2}} \tag{38}$$

Так как $m \leq n$, то количество слагаемых в (38) не превосходит n. Учитывая, что $p_{mn} < \frac{2}{3}(m+n) \leq \frac{4}{3}n$, для $(m,n) \in D$ из (28), (31), (34) и (38) получаем

$$|J_3(x,y)| \leq C + n\,2 \cdot 2^{-\frac{n-\gamma m a+\gamma-2i-1}{2}} \leq C + 2n\,2^{-\frac{\gamma}{2}}\,2^{\frac{2i-\gamma+1}{2}} \leq C_1. \tag{39}$$

Нетрудно заметить, что для любых P и Q в $J_4(x,y)$ входит либо одна двойная сумма, либо вообще нет слагаемых. Поэтому, ввиду b′), c′), b) и c), имеем

$$|J_4(x,y)| \leq C^2. \tag{40}$$

Следовательно (см. (36), (37), (39) и (40)), $|S_{PQ}(x,y)| \le C_2$, где C_2 – постоянная. Пусть $(x,y) \notin \Delta$. Тогда из d) - f) и d') - f') следует

$$J_1(x,y) = 0. \tag{41}$$

Поскольку y может принадлежать I^2_{mn} по крайней мере для одной пары $(m,n) \in D$, то из b), d') - f'), (32) и (34) получаем

$$|J_2(x,y)| \le 2 \cdot 2^{-\frac{m-\gamma-1}{2}} \le \frac{\delta}{4C}. \tag{42}$$

Точно так же, как это было сделано в случае $(x,y) \in D$, получаем

$$|J_3(x,y)| \le 2n\, 2^{-\frac{n}{2}}\, 2^{\frac{2i-\gamma+1}{2}} \le \frac{\delta}{4C}. \tag{43}$$

Из b), c), b'), c'), (31), (32) и (34) следует, что

$$|J_4(x,y)| \le C\, 2 \cdot 2^{-\frac{m-\gamma-1}{2}} + C\, 2 \cdot 2^{-\frac{m+2n-\gamma m n-2(\gamma m n+i)+\gamma-1}{2}} \le$$

$$\le 2C(2^{-\frac{m-\gamma-1}{2}} + 2^{-\frac{n}{2}} 2^{\frac{2i-\gamma+1}{2}}) \le 2C(\frac{\delta}{8C} + \frac{\delta}{8C}) = \frac{\delta}{2}. \tag{44}$$

Учитывая (41) - (44), имеем

$$|S_{PQ}(x,y)| \le \frac{\delta}{4C} + \frac{\delta}{4C} + \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Лемма 4 доказана.

Продолжим **доказательство Теоремы 1.** Положим $f_0(x,y) = a_{00} = 1$. Взяв $i = 0$, $M = M_1 = 1$, $\delta = 1$, $\Delta = E_0 = [0,1]^2$ и, применив Лемму 4, получим полином

$$f_1(x,y) = \sum_{m,n=M_1}^{N_1} c_{mn} W_m(x) W_n(y) = \sum_{(m,n)\in D_1} \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{l=1}^{2^n} a^{(k)}_{mn} b^{(l)}_{mn} W^{(k)}_m(x) W^{(l)}_n(y),$$

обладающий следующими свойствами :

1. $|c_{mn}| \le \varepsilon_{mn}$, $M_1 \le m,n \le N_1$,
2. $f_1(x,y) = 1$, если $(x,y) \in E_1 \subset E_0$, $\mu E_1 = \frac{1}{2}\mu E_0 = 2^{-1}$,
3. $f_1(x,y) = -1$, если $(x,y) \in E'_1 \subset E_0$, $\mu E'_1 = \frac{1}{2}\mu E_0 = 2^{-1}$,
4. Прямоугольные частичные суммы ряда Фурье функции $f_1(x,y)$ меньше, чем C,

5. $\sum_{(m,n)\in D_1} 2^m 2^n 2^{-\gamma_{mn}} (2^{-p_{mn}})^2 = \mu E_o = 1,$

причем множества E_1 и E_1' являются объединениями квадратов типа Хаара.

Пусть $E_1 = \cup_{q=1}^{\alpha_1} \Delta_1^{(q)}$, где $\Delta_1^{(q)}$ квадрат типа Хаара. Для каждого q, $q = 1, 2, \ldots, \alpha_1$, для $\Delta = \Delta_1^{(q)}$, $i = 1$, $\delta = \frac{1}{\alpha_1} 2^{-2i}$ и $M = M_2^{(q)}$, где $M_2^{(q)} > N_2^{(q-1)}$, $N_2^{(0)} = N_1$, применив Лемму 4, получаем конечные подмножества $D_2^{(q)}$, $q = 1, 2, \ldots, \alpha_1$ множества B и полиномы

$$f_2^{(q)}(x,y) = \sum_{m,n=M_2^{(q)}}^{N_2^{(q)}} c_{mn} W_m(x) W_n(y) = \sum_{(m,n)\in D_2^{(q)}} \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{l=1}^{2^n} a_{mn}^{(k)} b_{mn}^{(l)} W_m^{(k)}(x) W_n^{(l)}(y),$$

$$q = 1, 2, \ldots, \alpha_1,$$

удовлетворяющие условиям

1'. $|c_{mn}| \le 2^{-1}\varepsilon_{mn}$, $M_2^{(q)} \le m, n \le N_2^{(q)}$,

2'. $f_2^{(q)}(x,y) = 1$, если $(x,y) \in E_2^{(q)} \subset \Delta_1^{(q)}$, $\mu E_2^{(q)} = \frac{1}{2}\mu\Delta_1^{(q)}$,

3'. $f_2^{(q)}(x,y) = -1$, если $(x,y) \in F_2^{(q)} \subset \Delta_1^{(q)}$, $\mu F_2^{(q)} = \frac{1}{2}\mu\Delta_1^{(q)}$,

4'. $f_2^{(q)}(x,y) = 0$, если $(x,y) \notin \Delta_1^{(q)}$,

5'. Частичные суммы ряда Фурье функции $f_2^{(q)}(x,y)$ вне $\Delta_1^{(q)}$ по модулю меньше, чем $\frac{1}{\alpha_1} 2^{-2i}$, а на $\Delta_1^{(q)}$ - меньше, чем C.

6'. $\sum_{(m,n)\in D_2^{(q)}} 2^m 2^n 2^{-\gamma_{mn}} (2^{-p_{mn}-1})^2 = \mu\Delta_1^{(q)}$,

причем множества $E_2^{(q)}$ и $F_2^{(q)}$ являются конечными объединениями квадратов типа Хаара.

Положим $M_2 = M_2^{(1)}$, $N_2 = N_2^{(\alpha_1)}$, $D_2 = \cup_{q=1}^{\alpha_1} D_2^{(q)}$, $E_2 = \cup_{q=1}^{\alpha_1} E_2^{(q)}$, $E_2' = \cup_{q=1}^{\alpha_1} F_2^{(q)}$,

$$f_2(x,y) = \sum_{q=1}^{\alpha_1} f_2^{(q)}(x,y) = \sum_{m,n=M_2}^{N_2} c_{mn} W_m(x) W_n(y).$$

Из условий 1' - 6' и в силу выбора чисел $M_2^{(q)}$ и $N_2^{(q)}$ получим

1''. $|c_{mn}| \le 2^{-1}\varepsilon_{mn}$, $M_2 \le m, n \le N_2$,

2''. $f_2(x,y) = 1$, если $(x,y) \in E_2 \subset E_1$, $\mu E_2 = \frac{1}{2}\mu E_1 = 2^{-2}$,

3''. $f_2(x,y) = -1$, если $(x,y) \in E_2' \subset E_1$, $\mu E_2' = \frac{1}{2}\mu E_1 = 2^{-2}$,

4''. $f_2(x,y) = 0$, если $(x,y) \notin E_1$,

5''. Частичные суммы ряда Фурье функции $f_2(x,y)$ вне E_1 меньше, чем 2^{-2} и меньше, чем $C + 2^{-2}$ на E_1,

$6''.$ $\sum\limits_{(m,n)\in D_2} 2^m 2^n 2^{-\gamma_{mn}} (2^{-p_{mn}})^2 = 2^2 \mu E_1,$

$7''.$ $\max\{n:\ (m,n)\in D_1\} < \min\{m:\ (m,n)\in D_2\},$

причем множества E_2 и E_2' являются конечными объединениями квадратов типа Хаара.

Продолжая этот процесс, на j-ом шаге получим множества $D_j \subset B$, $E_j \subset E_{j-1}$ и полином

$$f_j(x,y) = \sum_{m,n=M_j}^{N_j} c_{mn} W_m(x) W_n(y) =$$

$$= \sum_{(m,n)\in D_j} \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{l=1}^{2^n} a_{mn}^{(k)} b_{mn}^{(l)} W_m^{(k)}(x) W_n^{(l)}(y), \qquad (45)$$

удовлетворяющие следующим условиям :

A) $|c_{mn}| \le 2^{-(j-1)}\varepsilon_{mn}$, $M_j \le m,n \le N_j$,

B) $f_j(x,y) = 1$, если $(x,y)\in E_j \subset E_{j-1}$, $\mu E_j = \frac{1}{2}\mu E_{j-1} = 2^{-j}$,

C) $f_j(x,y) = -1$, если $(x,y)\in E_j' \subset E_{j-1}$, $\mu E_j' = \frac{1}{2}\mu E_{j-1} = 2^{-j}$,

D) $f_j(x,y) = 0$, если $(x,y)\notin E_{j-1}$,

E) Частичные суммы ряда Фурье функции $f_j(x,y)$ вне E_{j-1} по модулю меньше $2^{-2(j-1)}$, а на E_{j-1} – меньше, чем $C + 2^{-2(j-1)}$.

F) $\sum\limits_{(m,n)\in D_j} 2^m 2^n 2^{-\gamma_{mn}} (2^{-p_{mn}})^2 = 2^{2(j-1)} \mu E_{j-1} = 2^{j-1}$,

G) $\max\{n:\ (m,n)\in D_{j-1}\} < \min\{m:\ (m,n)\in D_j\}$,

причем E_j и E_j' являются конечными объединениями квадратов типа Хаара.

Обозначим $E = \cap_{j=0}^{\infty} E_j$ и докажем, что E удовлетворяет требованиям Теоремы 1. Очевидно, что $\mu E = 0$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} W_m(x) W_n(y) = f_0(x,y) + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j-1} f_j(x,y). \qquad (46)$$

Из (45), (46) и A) следует, что $|a_{mn}| \le \varepsilon_{mn}$. Пусть $(x,y)\notin E$. Тогда, начиная с некоторого j_0, имеем $(x,y)\notin E_j$ при $j > j_0$. Если $N_j < \min\{P,Q\} \le N_{j+1}$ при $j > j_0$, то из (46) и B) - E) получим

$$\left| \sum_{m=0}^{P} \sum_{n=0}^{Q} a_{mn} W_m(x) W_n(y) \right| = \left| \sum_{m=M_{j+1}}^{P} \sum_{n=M_{j+1}}^{Q} 2^j c_{mn} W_m(x) W_n(y) \right| \le 2^j 2^{-2j} = 2^{-j},$$

Отсюда следует, что ряд (46) сходится к нулю вне E. Теорема 1 доказана.

Прежде чем перейти к доказательству Теоремы 2, докажем следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть* $\varphi(x,y) = \sum_{p,q=0}^{2^\alpha-1} a_{pq} W_p(x) W_q(y)$ *- произвольный полином, и пусть* $\sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn} W_m(x) W_n(y)$ *- двойной ряд по системе Уолша. Для двоично иррациональных чисел* x *и* y *и для любых натуральных чисел* k *и* l *имеет место*

$$\varphi(x,y) \sum_{m=0}^{k2^\alpha-1} \sum_{n=0}^{l2^\alpha-1} b_{mn} W_m(x) W_n(y) = \sum_{m=0}^{k2^\alpha-1} \sum_{n=0}^{l2^\alpha-1} c_{mn} W_m(x) W_n(y),$$

где

$$c_{mn} = \sum_{p,q=0}^{2^\alpha-1} a_{pq} b_{m+p,n+q}, \quad m,n \geq 0.$$

Доказательство. Для любых натуральных чисел i и j имеем

$$\varphi(x,y) \sum_{m=(i-1)2^\alpha}^{i2^\alpha-1} \sum_{n=(j-1)2^\alpha}^{j2^\alpha-1} b_{mn} W_m(x) W_n(y) =$$

$$= \sum_{p,q=0}^{2^\alpha-1} a_{pq} \sum_{m=(i-1)2^\alpha}^{i2^\alpha-1} \sum_{n=(j-1)2^\alpha}^{j2^\alpha-1} b_{mn} W_{m+p}(x) W_{n+q}(y) =$$

$$= \sum_{m=(i-1)2^\alpha}^{i2^\alpha-1} \sum_{n=(j-1)2^\alpha}^{j2^\alpha-1} \left(\sum_{p,q=0}^{2^\alpha-1} a_{pq} b_{m+p,n+q} \right) W_m(x) W_n(y) =$$

$$= \sum_{m=(i-1)2^\alpha}^{i2^\alpha-1} \sum_{n=(j-1)2^\alpha}^{j2^\alpha-1} c_{mn} W_m(x) W_n(y).$$

Отсюда следуст, что

$$\varphi(x,y) \sum_{m=0}^{k2^\alpha-1} \sum_{n=0}^{l2^\alpha-1} b_{mn} W_m(x) W_n(y) = \sum_{m=0}^{k2^\alpha-1} \sum_{n=0}^{l2^\alpha-1} c_{mn} W_m(x) W_n(y).$$

Лемма 5 доказана.

Следующий результат получен в доказательствах Теорем 1 и 2 работы [18].

Теорема С. *Пусть* $\sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} W_m(x) W_n(y)$ *двойной ряд по системе Уолша, и пусть* c_{mn} *стремится к нулю и существуют подпоследовательности натуральных чисел* $\{g_k\}$ *и* $\{h_k\}$, *стремящиеся к бесконечности, такие, что частичные суммы*

$$\sum_{m=0}^{2^{g_k}-1} \sum_{n=0}^{2^{h_k}-1} c_{mn} W_m(x) W_n(y)$$

стремятся к нулю всюду, за исключением, быть может, некоторого счетного множества отрезков, параллельных координатным осям. Тогда $c_{mn} = 0$ *для всех* m *и* n.

Доказательство Теоремы 2. Заметим, что при условии $2^{m+n}\varepsilon^2_{2^m 2^n} \to 0$, в доказательстве Теоремы 1 числа γ_{mn} можно взять равными нулю. Пусть множества E_j и функции $f_j(x,y)$ те же, что и в доказательстве Теоремы 1, при условии $\gamma_{mn} = 0$. Нам остается доказать, что множество $E = \cap_{j=0}^{\infty} E_j$ удовлетворяет второму пункту Теоремы 2.

Пусть

$$b_{mn} = o(\varepsilon_{mn}), \tag{47}$$

и пусть существуют подпоследовательности натуральных чисел $\{g_k\}$ и $\{h_k\}$, стремящиеся к бесконечности, такие, что суммы

$$\sum_{m=0}^{2^{g_k}-1} \sum_{n=0}^{2^{h_k}-1} b_{mn} W_m(x) W_n(y)$$

сходятся к нулю всюду вне E, за исключением, быть может, некоторого счетного множества отрезков, параллельных координатным осям. Положим

$$\delta_{mn} = \sup_{\substack{2^m \le p < 2^{m+1} \\ 2^n \le q < 2^{n+1}}} |b_{p,q}|. \tag{48}$$

Из (22), (47) и (48) получим

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty \\ (m,n)\in\sigma}} \frac{\delta_{mn}}{\varepsilon_{2^m 2^n}} = 0. \tag{49}$$

Обозначим

$$\varphi_j(x,y) = 1 - f_j(x,y). \tag{50}$$

Из (50) и B) следует, что

$$\varphi_j(x,y) = 0, \quad \text{если} \quad (x,y) \in E_j. \tag{51}$$

Пусть $c_{mn} = \sum_{p,q=0}^{\infty} \widehat{\varphi_j}(p,q) b_{m+p,n+q}$, где

$$\varphi_j(p,q) = \int_0^1 \int_0^1 \varphi_j(x,y) W_m(x) W_n(y) dx\, dy.$$

Из (51) и Леммы 5 следует, что частичные суммы

$$\sum_{m=0}^{2^{p_k}-1}\sum_{n=0}^{2^{h_k}-1} c_{mn}W_m(x)W_n(y)$$

сходятся к нулю всюду, за исключением, быть может, некоторого счетного множества отрезков, параллельных координатным осям.

Поскольку $\varphi_j(m,n) \neq 0$ лишь для конечного числа пар (m,n), а $b_{mn} \to 0$ при $\min\{m,n\} \to \infty$, то $c_{mn} \to 0$. В силу Теоремы C, $c_{mn} = 0$ для всех m и n, т.е.

$$\sum_{p,q=0}^{\infty} \varphi_j(p,q)b_{p\dot{+}m,q\dot{+}n} = 0 \quad \text{для всех} \quad m,n \in \mathbf{N}. \tag{52}$$

Из (50) и (52) получаем

$$b_{mn} - \sum_{p,q=0}^{\infty} f_j(p,q)b_{p\dot{+}m,q\dot{+}n} = 0, \quad m,n \in \mathbf{N} \tag{53}$$

Для достаточно больших p и q имеем $[\log_2 p] = [\log_2(p\dot{+}m_o)]$ и $[\log_2 q] = [\log_2(q\dot{+}n_o)]$. Поэтому, для достаточно больших j из (22), (45), (48), (53), A) и F) следует, что

$$|b_{m_on_o}| =$$

$$= |\sum_{p,q=0}^{\infty} f_j(p,q)b_{p\dot{+}m_o,q\dot{+}n_o}| \le \sum_{(m,n)\in D_j}\sum_{k=1}^{2^m}\sum_{l=1}^{2^n}|a_{mn}^{(k)}b_{mn}^{(l)}b_{(2^m+k-1)\dot{+}m_o,(2^n+l-1)\dot{+}n_o}| \le$$

$$\le 4\sum_{(m,n)\in D_j}\delta_{mn}2^m2^n2^{-(p_m+j-1)} \le$$

$$\le 16\max_{(m,n)\in D_j}\frac{\delta_{mn}}{\varepsilon_{2^m2^n}}\sum_{(m,n)\in D_j}2^m2^n2^{-2p_m}2^{-(j-1)} = 16\max_{(m,n)\in D_j}\frac{\delta_{mn}}{\varepsilon_{2^m2^n}}.$$

Отсюда и из (49) вытекает, что $b_{m_on_o} = 0$ для всех m_o и n_o. Теорема 2 доказана.

В заключение, выражаю благодарность Г. Г. Геворкяну за ценные советы и постоянное внимание к настоящей работе.

ABSTRACT. We prove that for positive numbers ε_{mn} satisfying the conditions $\varepsilon_{m+1,n} \le \varepsilon_{mn} \le \varepsilon_{m,n-1}$, $\sum_{m,n=0}^{\infty}\varepsilon_{mn}^2 = +\infty$, there exists a null-series by Walsh system $\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{mn}W_m(x)W_n(y)$, with coefficients $|a_{mn}| \le \varepsilon_{mn}$. For $\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_{mo}^2 < +\infty$ and $\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_{on}^2 < +\infty$ there exists a set $E \subset [0,1]^2$ of measure zero satisfying the conditions

1. There exists a series $\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{mn}W_m(x)W_n(y)$ converging to zero outside E with $|a_{mn}| \le \varepsilon_{mn}$ and $a_{oo} \neq 0$;

2. If a series $\sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn} W_m(x) W_n(y)$ converges to zero outside E and $b_{mn} = o(\varepsilon_{mn})$, then $b_{mn} = 0$ for all m and n.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. E. Menchoff, "Sur l'unicite du developpement trigonometrique", C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 163, pp. 433 – 436, 1916.
2. Ф. Г. Арутюнян, "Представление функций из L^p, $0 \le p < 1$, тригонометрическими рядами с быстро убывающими коэффициентами", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 19, №5, стр. 448 – 466, 1984.
3. Ф. Г. Арутюнян, "Представление измеримых функций почти всюду сходящимися рядами", Докт. дисс., Тбилиси, 1986.
4. О. С. Ивашев-Мусатов, "О коэффициентах Фурье-Стильтьеса сингулярных функций", Изв. АН СССР, Математика, т. 20, стр. 179 – 196, 1956.
5. О. С. Ивашев-Мусатов, "О коэффициентах тригонометрических нуль-рядов", Изв. АН СССР, Математика, т. 21, стр. 559 – 578, 1957.
6. J. E. Littlewood, "On the Fourier coefficients of functions of bounded variation", Qaart. J. Math., Oxford Ser. vol. 7, pp. 219 – 226, 1936.
7. Н. Б. Погосян, "О коэффициентах тригонометрических нуль-рядов", Anal. Math., vol. 11, pp. 139 – 177, 1985.
8. R. Salem, "On singular monotonic functions of Cantor type", J. Math. - Phis., vol. 21, pp. 69 – 82, 1942.
9. A. C. Schaeffer, "The Fourier- Stieltjes coefficients of a functions of bounded variation", Amer. J. Math., vol. 61, pp. 934 – 940, 1939.
10. П. Л. Ульянов, "Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов", Успехи мат. наук, т. 19, pp. 3 – 69, 1964.
11. В. А. Скворцов, "Об одном примере нуль-ряда по системе Уолша", Матем. заметки, т. 19, стр. 179 – 186, 1976.
12. В. А. Скворцов, "О h-мере M-множеств для системы Уолша", Матем. заметки, т. 21, стр. 335 – 340, 1977.
13. В. А. Скворцов, "О скорости стремления к нулю коэффициентов нуль-рядов по системам Хаара и Уолша", Изв. АН СССР, Математика, т. 41, стр. 703 – 716, 1977.
14. G. G. Gevorkian, "On coefficients of null-series and on sets of uniqueness of trigonometric and Walsh systems", Anal. Math., vol. 14, pp. 219 – 251, 1988.
15. S. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория Ортогональных Рядов, Физматгиз, 1958.
16. А. А. Шнейдер, "О единственности разложений по системе функций Уолша", Мат. сб., т. 24, стр. 279 – 300, 1949.
17. А. М. Олевский, "О продолжении последовательности функций до полной ортонормированной системы", Матем. заметки,, т. 6, №6, стр. 737 - 747, 1969.
18. Х. О. Мовсисян, "О единственности двойных рядов по системам Хаара и Уолша", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 9, №1, стр. 40 – 61, 1974.

11 Декабря 1993

Ереванский государственный университет

О РОСТЕ ФУНКЦИИ $\pi_\alpha(z, a_n)$ М. М. ДЖРБАШЯНА

Д. Т. Багдасарян

Известия Национальной Академии наук Армении. Математика, Том 29, №1, 1994

Произведения

$$\pi_\alpha(z, a_n) = \prod_{n=1}^{\infty} A_\alpha(z, a_n), \quad -1 < \alpha < +\infty, \tag{1}$$

где

$$A_\alpha(z, \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) e^{-U_\alpha(z,\zeta)},$$

$$U_\alpha(z, \zeta) = \int_{|\zeta|^2}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x}\, dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+2+k)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(k+1)} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \int_0^{|\zeta|^2} (1-x)^{\alpha+1} x^{k-1}\, dx, \tag{2}$$

были использованы М. М. Джрбашяном [1,2] с целью факторизации функций, голоморфных в круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, когда плотность нулей $\{a_n\}_1^\infty \subset \mathbb{D}$ этих функций уловлетворяла условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|)^{\alpha+2} < +\infty, \tag{3}$$

менее ограничительному, чем условие Бляшке. Для $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$ эти произведения были рассмотрены также М. Цудзи [3], и рост их был исследован Л. Р. Сонсом [4, 5]. Настоящая статья посвящена дальнейшему углублению результатов Л. Р. Сонса и, в частности, их распространению на любые $\alpha > 0$.

1. Основные результаты. Дадим сначала определение показателя сходимости μ последовательности $\{|a_n|\}_1^\infty$ ($a_n \in \mathbb{D}$, $n \geq 1$).

Если $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |a_n|) < +\infty$, то положим $\mu = 0$.

Если $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)=+\infty$, и существует число $\mu>0$ такое, что $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)^{\mu+1-\varepsilon}=+\infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)^{\mu+1-\varepsilon}<+\infty$ при любом $\varepsilon>0$, то показатель сходимости $\{|a_n|\}_1^{\infty}$ положим равным μ.

Наряду с характеристическими функциями Неванлинны часто рассматриваются величины

$$m_2(r,f)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\ln|f(re^{i\theta})|\right)^2 d\theta\right\}^{1/2}; \tag{4}$$

$$m_2^+(r,f)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\ln^+|f(re^{i\theta})|\right)^2 d\theta\right\}^{1/2}, \tag{5}$$

которые также характеризуют рост функций f, мероморфных в $\mathbb{D}$. Однако они могут быть неограниченными тогда, когда ограничена характеристическая функция Неванлинны $T(r,f)$ (см. [5]). При этом

$$[m_2(r,f)]^2=[m_2^+(r,f)]^2+[m_2^+(r,1/f)]^2. \tag{6}$$

Основными результатами статьи являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Если последовательность $\{|a_n|\}_1^{\infty}$ ($a_n\in\mathbb{D}$, $n\geq 1$) имеет конечный показатель сходимости μ, то*

1) при любом $\alpha>\mu-1$ характеристические функции Неванлинны π_α удовлетворяют соотношениям

$$\limsup_{r\to 1-0}\frac{\ln T(r,\pi_\alpha)}{-\ln(1-r)}=\limsup_{r\to 1-0}\frac{\ln N(r,1/\pi_\alpha)}{-\ln(1-r)}=\mu; \tag{7}$$

2) существует постоянная $C>0$, зависящая только от $\pi_\alpha(z,a_n)$ такая, что

$$\limsup_{r\to 1-0}\frac{N(r,1/\pi_\alpha)}{T(r,\pi_\alpha)}\geq C. \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть $0<\mu<+\infty$ – показатель сходимости последовательности $\{|a_n|\}_1^{\infty}$ ($a_n\in\mathbb{D}$, $n\geq 1$), и пусть $\alpha>\mu-1$ – любое число.*

1) Если одно из неравенств

$$m_2^+(r,\pi_\alpha)\geq(1-r)^{-\beta}, \tag{9}$$

$$m_2^+(r,1/\pi_\alpha)\geq(1-r)^{-\beta} \tag{10}$$

выполняется для r, достаточно близких к 1, то $\beta \le \mu + 1/2$.

2) Существуют постоянные $C_{1,2} > 0$ такие, что

$$\limsup_{r\to 1-0} \frac{N(r, 1/\pi_\alpha)}{(1-r)^{1/2} m_2^+(r, \pi_\alpha)} \ge C_1, \quad \limsup_{r\to 1-0} \frac{N(r, 1/\pi_\alpha)}{(1-r)^{1/2} m_2^+(r, 1/\pi_\alpha)} \ge C_2. \tag{11}$$

Замечание. Аналогичная теорема с неравенством (9) и первым из соотношений (11) была доказана в [5] при $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$.

2. Доказательства Теорем 1 и 2. В [6] доказано, что

$$\ln |\pi_\alpha(z, a_n)| \le \text{Const} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1 - |a_n|}{1 - \bar{a}_n z} \right|^{\alpha+2}, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{12}$$

Поскольку

$$\left| \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \bar{a}_n z} \right| \le 2, \tag{13}$$

то мы имеем

$$\ln |\pi_\alpha(z, a_n)| \le \text{Const} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \bar{a}_n z} \right|^{\mu+1+\varepsilon}$$

при любых $\alpha > \mu + 1$ и $\varepsilon > 0$, причем $\mu + 1 + \varepsilon < \alpha + 2$. Для завершения доказательства Теоремы 1 остается повторить рассуждения из работы [4].

Для доказательства Теоремы 2 необходимы следующие две леммы.

Лемма 1. *Пусть $z \in \mathbb{D}$*

$$S_1 = \{\zeta : |z| \le |\zeta|\}, \quad S_2 = \{\zeta : |z| > |\zeta|\},$$
$$S_3 = \left\{\zeta : \left| \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta} z} \right| \le \frac{1}{2}\right\}, \quad S_4 = \left\{\zeta : \left| \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta} z} \right| > \frac{1}{2}\right\}, \tag{14}$$

и пусть $\alpha > 0$ любое число.

1) Если $\zeta \in S_1 \cup S_3$, то

$$\ln \frac{1}{|A_\alpha(z, \zeta)|} \le \text{Const} \left| \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta} z} \right|. \tag{15}$$

2) Если $\zeta \in S_2 \cap S_4$, то

$$\ln \frac{1}{|A_\alpha(z, \zeta)|} \le \text{Const} \left\{ \ln \left| \frac{1 - \bar{\zeta} z}{\zeta(\zeta - z)} \right| + \left| \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta} z} \right|^{\alpha+2} \right\}. \tag{16}$$

Доказательство. Неравенство (15) доказано в [6]. Для доказательства (16) применим рекуррентную формулу из [2] :

$$U_{\alpha-1}(z, \zeta) - U_\alpha(z, \zeta) = \frac{1}{\alpha + 1} \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta} z} \right)^{\alpha+1}, \quad \alpha > 0, \ z, \zeta \in \mathbb{D}.$$

Отсюда легко получим

$$\ln\frac{1}{|A_\alpha(z,\zeta)|} = \operatorname{Re}\left\{-\ln\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)+U_\alpha(z,\zeta)\right\} = \ln\left|\frac{1-\zeta z}{\zeta(\zeta-z)}\right| -$$
$$- \operatorname{Re}\left\{\ln\frac{1-\zeta z}{|\zeta|^2}-U_\alpha(z,\zeta)\right\} = \ln\left|\frac{1-\bar\zeta z}{\zeta(\zeta-z)}\right| -$$
$$- \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\zeta z}\right)^{\alpha+1}+\cdots+\frac{1}{\beta+2}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\zeta z}\right)^{\beta+2}-\ln\frac{1-\bar\zeta z}{|\zeta|^2}+U_\beta(z,\zeta)\right\},$$

где $\alpha=[\alpha]+\beta$. В [7] доказано, что $\operatorname{Re}\{\ln[(1-\bar\zeta z)/|\zeta|^2]-U_\beta(z,\zeta)\}\geq 0$. Очевидное неравенство

$$\left|\frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\zeta z}\right)^{\alpha+1}+\cdots+\frac{1}{\beta+2}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\zeta z}\right)^{\beta+2}\right| \leq \text{Const}\cdot\left|\frac{1-|\zeta|^2}{1-\zeta z}\right|^{\alpha+2}$$

завершает доказательство.

Лемма 2. *Пусть* $0\leq\mu<+\infty$ *– показатель сходимости* $\{|a_n|\}_1^\infty$ $(a_n\neq 0,\ a_n\in\mathbb{D},\ n\geq 1)$, *и пусть* $G_n=\{z:|z-a_n|\leq(1-|a_n|^2)^{\mu+4}\}$. *Если* $z\notin\cup_{n=1}^\infty G_n$ *и* $1/2\leq|z|<1$, *то при любом* $\alpha>\mu-1$ *и* $\varepsilon>0$

$$\ln^+\frac{1}{|\pi_\alpha(z,a_n)|}\leq \mathit{Const}\ \ln\frac{1}{1-|z|}\sum_{n=1}^\infty\left|\frac{1-|a_n|^2}{1-a_n z}\right|^{\mu+1+\varepsilon}.$$

Доказательство. Согласно Лемме 1 и (13) имеем

$$\ln\frac{1}{|\pi_\alpha(z,a_n)|}\leq \text{Const}\sum_{S_1\cup(S_2\cap S_3)}\left|\frac{1-|a_n|^2}{1-\bar a_n z}\right|^{\alpha+2}+$$
$$+\ \text{Const}\sum_{S_2\cap S_4}\left\{\ln\left|\frac{1-\bar a_n z}{\bar a_n(a_n-z)}\right|+\left|\frac{1-|a_n|^2}{1-a_n z}\right|^{\alpha+2}\right\}.$$

Поскольку $1/2\leq|z|<1$, мы имеем $-\ln(1-|z|)\geq\ln 2$ и, следовательно, при $a_n\in S_2\cap S_4$

$$\ln\left|\frac{1-\bar a_n z}{\bar a_n(a_n-z)}\right|\leq\ln\frac{|1-a_n z|}{|a_n|(1-|a_n|^2)^{\mu+4}}\leq \text{Const}\ -(\mu+3)\ln(1-|z|).$$

Отсюда и из (13) следует требуемая оценка.

Замечание. В частном случае, когда α– целое число и $\mu-1<\alpha<\mu$, утверждение Леммы 2 доказано в работе [3].

Доказательство Теоремы 2. Из оценок (12) и (13) следует, что

$$[m_2^+(r,\pi_\alpha)]^2 \le \text{Const} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{S_1} \left| \frac{1-|a_n|^2}{1-\bar{a}_n r e^{i\theta}} \right|^{\mu+1+\varepsilon} \right\}^2 d\theta +$$

$$+ \text{Const} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{S_2} \left| \frac{1-|a_n|^2}{1-\bar{a}_n r e^{i\theta}} \right|^{\mu+1+\varepsilon} \right\}^2 d\theta \equiv J_1 + J_2,$$

причем, очевидно, что

$$J_2 \le \frac{\text{Const}}{(1-r)^{1+2(\mu-\varepsilon)}} \left\{ \sum_{|a_n|\le r} (1-|a_n|)^{\mu+1-\varepsilon} \right\}^2$$

для любого $\varepsilon < \mu$. Легко проверить, что

$$\sum_{|a_n|\le r} (1-|a_n|)^{\mu+1-\varepsilon} = \int_0^r (1-t)^{\mu+1-\varepsilon} dn(t) = (1-r)^{\mu+1-\varepsilon} n(r) +$$

$$+ (\mu+1-\varepsilon)(1-r)^{\mu-\varepsilon} r N(r) + (\mu+1-\varepsilon)^2 \int_0^r (1-t)^{\mu-1-\varepsilon} N(t) \left[t - \frac{1}{\mu+1-\varepsilon} \right] dt.$$

Так как

$$n(r)\frac{1-r}{2} < \int_r^{(1+r)/2} \frac{n(t)}{t} dt \le N\left(\frac{1+r}{2}\right),$$

то имеем $n(r)(1-r) < 2N((1+r)/2)$, и, тем самым

$$J_2 \le \frac{\text{Const}}{(1-r)^{1+2(\mu-\varepsilon)}} \left\{ (1-r)^{\mu-\varepsilon} 2N\left(\frac{1+r}{2}\right) + (\mu+1-\varepsilon)(1-r)^{\mu-\varepsilon} r N(r) + \right.$$

$$\left. + (\mu+1-\varepsilon)^2 \int_0^r (1-t)^{\mu-1-\varepsilon} N(t) \left[t - \frac{1}{\mu+1-\varepsilon} \right] dt \right\}^2 \qquad (17)$$

Далее, положив $\Phi(t) = (1-t)^{\mu-\varepsilon'} N(t)$, $\Psi(t) = (1-t)^{-2\varepsilon'}$ $(0 < \varepsilon' < \varepsilon)$ в Лемме 2 работы [5], получим

$$N(t)(1-t)^{\mu-\varepsilon'} \le N(r)(1-r)^{\mu-\varepsilon'}, \quad r_0 \le t < r,$$

$$N(t)(1-t)^{\mu+\varepsilon'} \le N(r)(1-r)^{\mu+\varepsilon'}, \quad r < t < 1.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$N\left(r + \frac{1+r}{2}\right) < 2^{\mu+\varepsilon'} N(r).$$

Отсюда

$$\int_0^r (1-t)^{\mu+1-\varepsilon} N(t) \left[t - \frac{1}{\mu+1-\varepsilon} \right] dt \le N(r)(1-r)^{\mu-\varepsilon'} \int_0^r (1-t)^{-1-\varepsilon+\varepsilon'} dt \le$$

$$\leq \text{Const } N(r)(1-r)^{\mu-\varepsilon}$$

и

$$J_2 \leq \frac{\text{Const}}{(1-r)^{1+2(\mu-\varepsilon)}}(1-r)^{2(\mu-\varepsilon)}\{N(r)\}^2 = \text{Const } \frac{\{N(r)\}^2}{1-r}. \tag{18}$$

Имеем

$$J_1 \leq \frac{\text{Const}}{(1-r)^{1+2(\mu+\varepsilon)}} \left\{ \sum_{|a_n|>r} (1-|a_n|)^{\mu+1+\varepsilon} \right\}^2$$

и

$$\sum_{|a_n|>r} (1-|a_n|)^{\mu+1+\varepsilon} = \int_r^1 (1-t)^{\mu+1+\varepsilon}\, dn(t) =$$

$$= \text{Const} \int_r^1 (1-t)^{\mu-1+\varepsilon} N(t) \left[t - \frac{1}{\mu-1+\varepsilon} \right] dt,$$

поскольку $n(t)(1-t)^{\mu+1+\varepsilon} \to 0$ и $N(t)(1-t)^{\mu+\varepsilon} \to 0$ при $t \to 1$. Вновь применяя Лемму 2 из [5], получим

$$\int_r^1 (1-t)^{\mu-1+\varepsilon} N(t) \left[t - \frac{1}{\mu-1+\varepsilon} \right] dt \leq$$

$$\leq N(r)(1-r)^{\mu+\varepsilon'} \int_r^1 (1-t)^{\varepsilon-\varepsilon'-1} dt \leq \frac{1}{\varepsilon-\varepsilon'} N(r)(1-r)^{\mu+\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что $J_1 \leq \text{Const } \{N(r)\}^2/(1-r)$, и ввиду (18)

$$m_2^+(r, \pi_\alpha)(1-r)^{1/2} \leq \text{Const } N(r). \tag{19}$$

Теперь покажем, что аналогичная оценка верна также для функции $1/\pi_\alpha(z, a_n)$. Применяя неравенства (15), (16), получим

$$\left[m_2^+(r, 1/\pi_\alpha)\right]^2 \leq \text{Const} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{S_1 \cup (S_2 \cap S_3)} \left| \frac{1-|a_n|^2}{1-\bar{a}_n r e^{i\theta}} \right|^{\mu+1+\varepsilon} \right\}^2 d\theta +$$

$$+ \text{Const} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{S_2 \cap S_4} \ln \frac{1}{|a_n|} \left| \frac{1-\bar{a}_n r e^{i\theta}}{a_n - r e^{i\theta}} \right| \right\}^2 d\theta +$$

$$+ \text{Const} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{S_2 \cap S_4} \left| \frac{1-|a_n|^2}{1-\bar{a}_n r e^{i\theta}} \right|^{\mu+1+\varepsilon} \right\}^2 d\theta.$$

Далее, повторяя рассуждения, приведшие к оценке (19), получим

$$\left[m_2^+(r, 1/\pi_\alpha)\right]^2 \leq C \left\{ \frac{\{N(r)\}^2}{1-r} + \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{S_2 \cap S_4} \ln \frac{1}{|a_n|} \left| \frac{1-a_n r e^{i\theta}}{a_n - r e^{i\theta}} \right| \right\}^2 d\theta \right\}, \tag{20}$$

где $C = \mathrm{Const}$ и

$$J_3 \equiv \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{S_2 \cap S_4} \ln \frac{1}{|a_n|} \left| \frac{1 - \bar{a_n} r e^{i\theta}}{a_n - r e^{i\theta}} \right| \right\}^2 d\theta \le$$

$$\le 4\pi \{N(r)\}^2 + 2n(r) \int_0^{2\pi} \sum_{|a_n|<r} \ln^2 \left| \frac{1 - \bar{a_n} r e^{i\theta}}{a_n - r e^{i\theta}} \right| d\theta \le$$

$$\le 4\pi \{N(r)\}^2 + \frac{n(r)}{2} \sum_{|a_n|<r} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^2 \left(1 + \frac{(1 - |a_n|^2)^2}{4r|a_n|\pi^{-1}\theta^2} \right) d\theta.$$

Применяя очевидную оценку

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{\theta^2} \right) d\theta \le \mathrm{Const}\ \beta, \quad \beta > 0,$$

получим

$$J_3 \le \mathrm{Const} \left\{ \{N(r)\}^2 + n(r) \sum_{|a_n|<r} (1 - |a_n|^2) \right\} =$$

$$= \mathrm{Const} \left\{ \{N(r)\}^2 + (1 - r)(n(r))^2 + n(r) \int_0^r n(t)dt \right\}.$$

Таким образом, $J_3 \le \mathrm{Const}\{N(r)\}^2(1 - r)^{-1}$, поскольку $(1 - r)n(r) < 2N((1 + r)/2) < \mathrm{Const}\ N(r)$ and $\int_0^r n(t)dt < N(r)$, и ввиду (20)

$$\left[m_2^+(r, 1/\pi_\alpha) \right]^2 (1 - r) \le \mathrm{Const}\ \{N(r)\}^2. \tag{21}$$

Второе утверждение теоремы следует из (19) и (21). Теперь заметим, что соотношение (8) справедливо для $\pi_\alpha(z, a_n)$ с любым $\alpha > \mu - 1$. Отсюда, неравенство $N(r) \equiv N(r, 1/\pi_\alpha) < (1 - r)^{-(\mu+\varepsilon)}$ верно для любого $0 < \varepsilon < 1$ и при r, достаточно близких к 1. Следовательно

$$m_2^+(r, \pi_\alpha)(1 - r)^{1/2} \le (1 - r)^{-(\mu+\varepsilon)},$$

$$m_2^+(r, 1/\pi_\alpha)(1 - r)^{1/2} \le (1 - r)^{-(\mu+\varepsilon)},$$

так что при выполнении одного из условий (9),(10) имеем $\beta \le \mu + \frac{1}{2} + \varepsilon$. Устремляя здесь $\varepsilon \to 0$, приходим к утверждению первой части теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, "О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций", ДАН Арм.ССР, т. 3, №1, стр. 3 - 9, 1945.
2. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. ин-та математики и механики АН Арм.ССР, вып. 2, стр. 3 - 55, 1948.
3. M. Tsuji. Potential Theory in Modern Function Theory, Maruzen Co. Ltd, Tokyo, 1959.
4. L. R. Sons. "Value distribution of canonical products in the unit disk", Mathematica Japonica, vol. 22, no. 1, 1977.
5. L. R. Sons. "Zeros of functions with slow growth in the unit disk, Mathematica Japonica, vol. 24, no. 3, pp. 271 - 282, 1979.
6. Ф. А. Шамоян, "Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 13, №5 - 6, стр. 405 - 421, 1978.
7. Д. Т. Багдасарян, А. Г. Унанян, "Оценка снизу модуля произведения М. М. Джрбашяна", ДАН Арм.ССР, т. 88, №3, стр. 99 - 107, 1989.

29 Апреля 1992

Государственный инженерный
университет Армении

ЗАМЕЧАНИЕ О ВЕДЖЕВЫХ ПЛОТНОСТЯХ В $\mathbb{R}^3$

Г. Ю. Панина

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, Том 29, №1, 1994

§0. ВВЕДЕНИЕ

Веджевые плотности трансляционно-инвариантных мер в $\mathbb{R}^n$ используются в различных проблемах комбинаторной интегральной геометрии и теории выпуклых тел (см. [1], глава 5, где они впервые были рассмотрены). В настоящей статье получено необходимое и достаточное условие для гладкости функции, определенной в пространстве флагов в $\mathbb{R}^3$, которые могут быть представлены как веджевая плотность определенной трансляционно-инвариантной знакопеременной меры в пространстве плоскостей в $\mathbb{R}^3$.

§1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Введем ряд определений :

$\mathbb{R}^3$ – 3–мерное евклидово пространство с декартовой системой координат (x, y, z, O);

Ω^2 – единичная сфера в $\mathbb{R}^3$ с центром в O;

$\mathbb{E}$ пространство всех плоскостей в $\mathbb{R}^3$;

$\mathbb{E}_0$ – пучок плоскостей, содержащих O;

L пространство прямых в $\mathbb{R}^3$;

L_0 пучок прямых, проходящих через точку O.

Пространство флагов **$\mathcal{F}$ определяется как пространство пар $(l, \omega) = f$, где $l \in \mathrm{L}_0$, $\omega \in \mathbb{E}_0$, $l \subset \omega$. Мы будем использовать дуальные образы плоскостей из $\mathbb{E}_0$, прямых из L_0 и флагов $\mathcal{F}$ на единичной сфере. Плоскости из $\mathbb{E}_0$ представляются парами d противоположных точек на**

Ω^2, прямые представляются большими окружностями $c \in \Omega^2$, а флаги – парами (d, c), удовлетворяющими условию $d \subset c$.

Для многообразия K, $C(K)$ есть множество всех действительных непрерывных функций, определенных на K, а $C^{(k)}(K)$ – множество всех действительных, k раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на K.

Пусть μ – знакопеременная мера на $\mathbb{E}$, инвариантная относительно группы всех параллельных переносов $\mathbb{R}^3$. Такие меры называются *трансляционно-инвариантными*. Мера μ порождает симметричную меру μ^* на Ω^2 (см. [1]).

В пространстве $\mathbb{E}$ имеется единственная (с точностью до постоянного множителя) мера μ_{inv}, инвариантная относительно всех евклидовых движений $\mathbb{R}^3$. Ясно, что $d(\mu^*_{\text{inv}}) = du$, где du – элемент лебеговой меры на Ω^2.

Веджевая плотность трансляционно-инвариантной меры μ есть функция, определенная на $\mathcal{F}$ по следующей формуле :

$$\rho(l, c) = T_\mu(l, c) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^2} \sin^2 \alpha((l, c), \omega)\, d\mu^*(\omega), \tag{1.1}$$

где $\alpha((l, c), \omega) = (l^\wedge, c \cap \omega)$ – угол между l и $c \cap \omega$.

В [1] доказана следующая

Теорема 1.1. *Если трансляционно-инвариантная мера μ на $\mathbb{E}$ имеет веджевую плотность $\rho \in C^{(2)}(\mathcal{F})$, и μ имеет плотность λ относительно μ_{inv}, то для всех $c \in \mathbb{E}_0$*

$$\lambda(c) = M\rho(c) = \frac{\mu^*(\Omega^2)}{4\pi} - \frac{2}{\pi} \int\limits_{\substack{l \in L_0 \\ l \subset c}} \rho''((l, g))\, dl(g), \tag{1.2}$$

где

$$\rho''((l, g)) = \frac{d^2}{d\beta^2} \rho((l(\beta), g(\beta)) \Big|_{\beta=0};$$

$g(\beta)$ *плоскость, содержащая* L^+ *и такая, что* $\beta = (g, \widehat{\gamma}(\beta))$; $l^\perp$ *прямая, ортогональная* l *и содержащаяся в* g; $l(\beta)$ – *ортогональная проекция* l *на* $g(\beta)$; $dl(g)$ – *лебегова мера на множестве прямых из* L_0, *лежащих в* g.

§2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Имеем два оператора :

$$T\colon\ C^2(\Omega^2) \longrightarrow C(\mathcal{F}) \quad \text{(см. (1.1))}$$

$$M\colon\ C^2(\mathcal{F}) \longrightarrow C(\Omega^2) \quad \text{(см. (1.2))}.$$

Далим характеризацию множества $T(C^2(\Omega^2))$ в $C^2(\mathcal{F})$.

Теорема 2.1. *Во введенных выше обозначениях имеем*

$$T(C^2(\Omega^2)) \cap C^2(\mathcal{F}) = \left\{\rho \in C^2(\mathcal{F})\colon\ TM\rho = \rho\right\}.$$

Доказательство. Пусть $\rho \in T(C^2(\Omega^2))$. Тогда $\rho = T\lambda$ для $\lambda \in C^2(\Omega^2)$. Согласно Теореме 1.2, $\lambda = M\rho$, а значит, $\rho = TM\rho$. Пусть теперь $TM\rho = \rho$. Тогда $\rho = T\lambda$ для $\lambda = M\rho$. Доказательство завершено.

С точки зрения последней теоремы возникает необходимость вычисления TM. Сначала рассмотрим вспомогательную конструкцию. Будем считать, что функция $\rho \in C^2(\mathcal{F})$ фиксирована. Ниже мы определим две функции R_1 и R_2, зависящие от флага $f' = (l', \omega')$ как от параметра. Эти функции определены на $\mathcal{F}$.

1. Положим

$$R_1(f; f') = R_1((l,\omega)) = \rho((Pr_{\omega'} l, \omega')), \tag{2.1}$$

где $Pr_{\omega'} l$ ортогональная проекция прямой l на плоскость ω'.

Следующие свойства R_1 очевидны:

a) $R_1 \in C^2(\mathcal{F})$;

b) $R_1''(f) \equiv 0$, если производная R_1'' вычисляется как $\rho''(f)$ в (1.3);

c) $R_1(f') = \rho(f')$.

2. Пусть для флага $f = (l, \omega)$, $f(r) = (l(r), \omega(r))$ есть флаг, определяемый следующим условием :

$$(\omega(r)^\wedge, \omega') = r; \quad \omega \cap \omega' \subset \omega(r); \quad (l(r)^\wedge, \omega(r) \cap \omega') = (l^\wedge, \omega \cap \omega').$$

(Сферические образы этих плоскостей и прямых показаны на Рис. 1.)

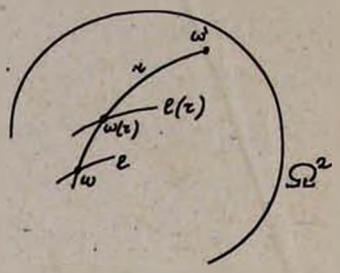

Рис. 1

Пусть $r_0 = (\omega^\wedge, \omega')$. Положим

$$R_2(f, f') = R_2(f) = \sin r_0 \left.\frac{d\rho(f(r))}{dr}\right|_{r=0}$$

Поскольку $[\rho(l,\omega) - R_1(f) - R_2(f)] = o(r)$ при $r \to 0$, то функция

$$[\rho(f) - R_1(f) - R_2(f)] \frac{\cos 2\alpha(f, f') \sin^2 \phi(f, f')}{\sin^2 r(f, f')} \tag{2.2}$$

суммируема относительно df (т.е. меры на $\mathcal{F}$, инвариантной относительно группы вращений). Мы будем использовать обозначение

$$\alpha = (l'^\wedge, \omega \cap \omega'), \quad r = (\omega^\wedge, \omega'), \quad \phi(l^\wedge, \omega \cap \omega') \quad (\text{см. Рис. 2}).$$

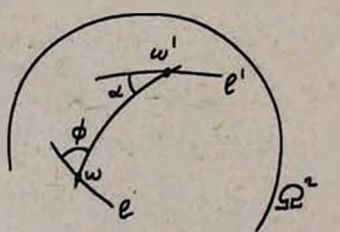

Рис. 2

Вычислим теперь TM. При $f' = (l', \omega')$

$$TM\rho((l',\omega')) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^2} \sin^2\alpha(f',\omega)\left[\frac{\mu^*(\Omega^2)}{4\pi} - \frac{2}{\pi}\int_{0<l<\omega}\rho''((l,\omega))\,dl(\omega)\right]d\omega =$$

$$= \frac{\mu^*(\Omega^2)}{2\pi} - \frac{1}{\pi^2}\int_{\Omega^2}\int_{0<l<\omega}\sin^2\alpha(f',\omega)\,\rho''((l,\omega))\,dl(\omega)\,d\omega =$$

$$= \frac{\mu^*(\Omega^2)}{2\pi} - \frac{2}{\pi^2}\int_{\mathcal{F}}\sin^2\alpha(f',\omega)\,[\rho(f) - R_1(f) - R_2(f)]''\,df -$$

$$- \frac{2}{\pi^2}\int_{\mathcal{F}}\sin^2(f,f')\,R_1''(f)\,df - \frac{2}{\pi^2}\int_{\mathcal{F}}\sin^2\alpha(f,f')\,R_2''(f)\,df = (*).$$

Второй интеграл равен 0, потому что $R_1'' = 0$. Третий интеграл также равен 0, потому что функция $\sin^2\alpha(f,f')\,R_2''(f)$ является нечетной относительно точки ω. Поэтому

$$(*) = \frac{\mu^*(\Omega^2)}{2\pi} - \frac{2}{\pi^2}\int_{\mathcal{F}}\left[\sin^2\alpha(f',\omega)\right]''\,[\rho(f) - R_1(f) - R_2(f)]\,df =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_{\mathcal{F}}\rho(f)\,df - \frac{2}{\pi^2}\int_{\mathcal{F}}\frac{\cos 2\alpha(f,f')\,\sin^2\phi(f,f')}{\sin^2 r(f,f')}\,[\rho(f) - R_1(f) - R_2(f)]\,df.$$

Теорема 2.2. *Функция $\rho \in C^2(\mathcal{F})$ есть веджевая плотность трансляционно-инвариантной меры тогда и только тогда, когда*

$$\rho(f') \equiv \frac{4}{\pi}\int_{\mathcal{F}}\rho(f)\,df -$$

$$- \frac{2}{\pi^2}\int_{\mathcal{F}}\frac{\cos 2\alpha(f,f')\,\sin^2\phi(f,f')}{\sin^2 r(f,f')}\,[\rho(f) - R_1(f) - R_2(f)]\,df. \qquad (2.3)$$

Следующее условие является необходимым и достаточным

$$\rho(f') \equiv \frac{4}{\pi}\int_{\mathcal{F}}\rho(f)\,df - \frac{2}{\pi^2}\int_{\mathcal{F}}\frac{\cos 2\alpha(f,f')\,\sin^2\phi(f,f')}{\sin^2 r(f,f')}\,\overline{\rho}(f)\,df, \qquad (2.4)$$

где при $f' = (l', \omega')$ и $f = (l, \omega)$, α, ϕ, r, R_1 и R_2 определены выше;

$$\overline{\rho}(f,f') = \frac{1}{2}\left[\rho(f) + \rho(\overline{f}_{f'}) - 2\rho(Pr_{\omega'}f)\right];$$

$\overline{f}_{f'}$ есть флаг, который центрально-симметричен (на Ω^2) к f относительно точки ω'; $Pr_{\omega'}f$ есть флаг с плоскостью ω' и с прямой, являющейся ортогональной проекцией l на ω' (см. Рис. 3)

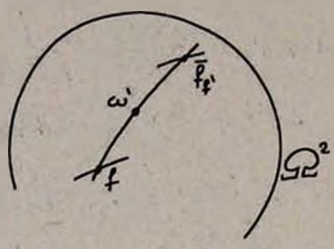

Рис. 3

Доказательство. Первое утверждение (касающееся (2.3)) доказано выше. Второе утверждение может быть доказано аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology. John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
2. Г. Ю. Панина, "Трансляционно-инвариантные меры и выпуклые тела в $\mathbb{R}^3$", Записки науч. семин. ЛОМИ, т. 153, 1987.
3. G. Yu. Panina, "Many-dimensional combinatorial Ambartzumian's formulae", Math. Nachr., vol. 159, pp. 271 – 277, 1992.

15 Июля 1992

Санкт Петербург,
Институт информации и автоматизации

CONTENTS

VOLUME 29 NUMBER 1 1994

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS
(NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)

PAGES

Representations of some classes of functions subharmonic in the unit disk and in the half-plane
K. L. Avetisian 1

Tangential approximation on the closed sets of Brelot harmonic space
Ch. Bensouda 13

On some general classes of subharmonic functions
A. M. Jerbashian 29

Asymptotic properties of commutators
M. I. Karahanian 43

On null-series by double Walsh system
K. A. Navasardian 50

Brief Communications

On the growth of functions $\pi_\alpha(z, a_n)$ of M. M. Djrbashian
D. T. Bagdasarian 69

A remark on wedge densities in R^3
G. Yu. Panina 76

©1994 by Allerton Press Inc. Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by Allerton Press, Inc. for library and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transaction Reporting Service, providing that the base fee of $20.00 per copy is paid directly to CCC, 222 Rosewood Drive, Danvers, MA 01923. An annual license may be obtained only directly from Allerton Press, Inc., 150 5th Avenue, New York, NY 10011.

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 29 НОМЕР 1 1994

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы

О представлениях некоторых классов функций, субгармонических в единичном круге и в полуплоскости
К. Л. Аветисян 3

Касательная аппроксимация на замкнутых множествах гармонического пространства Брело
Ч. Бенсуда 16

О некоторых классах субгармонических функций
А. М. Джрбашян 34

Асимптотические свойства коммутаторов
М. И. Караханян 50

О нуль рядах по двойной системе Уолша
К. А. Навасардян 59

Краткие сообщения

О росте функции $\pi_\alpha(z, a_n)$ М. М. Джрбашяна
Д. Т. Багдасарян 79

О веджевых плотностях в R^3
Г. Ю. Панина 87

Сдано в набор 15.06.96г. Подписано к печати 25.06.96г. Офсетная печат
Учет изд. 6,7. Тираж 250. Заказ 97. Формат 70 x 1081/16. Бумага офсетно
печати, печ. л. 8,06.