ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

«Մաթեմատիկա» ամ-

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ НЕКОММУТАТИВНЫХ АНАЛОГОВ РЕШЕТЧАТЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

В. А. Арзуманян, Б. С. Нахапетян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №6, 1993

В работе рассмотрены некоторые вопросы, связанные с асимптотической нормальностью некоммутативных аналогов однородных случайных полей со слабо зависимыми компонентами. Центральная предельная теорема формулируется при некотором условии асимптотической абелевости и условия перемешивания. Метод доказательств существенно более прост, чем обычно используемый.

§0. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время заметно возрос интерес к результатам теории операторных алгебр, формулируемых в вероятностных терминах (предельные теоремы, условия перемешивания, эргодические свойства и т.д.) и которые принято интерпретировать как результаты так называемой некоммутативной теории вероятностей. Применение вероятностных методов в операторных алгебрах обусловлено известным сходством основных конструкций, а классическая теория вероятностей рассматривается при этом как коммутативный случай. Одним из важных стимулов к развитию некоммутативной теории вероятностей служат модели квантовой статистической механики, описываемые в рамках алгебраической аксиоматики.

Как и в классической теории вероятностей, асимптотические результаты и, в частности, предельные теоремы, представляют собой важный раздел исследований. Такие теоремы обычно доказываются в классе динамических систем, удовлетворяющих различным условиям перемешивания. Подобными свойствами обладают равновесные состояния квантовой статистической механики, такие как термодинамические пределы гиббсовских состояний, КМШ состояния (см.

[1], [2], [3]). Одним из первых результатов на эту тему был анонсирован В. В. Анщелевичем в работе [4], где была приведена центральная предельная теорема в формулировке Я. Г. Синая для некоммутативного аналога стационарного случайного процесса. В дальнейшем Б. Гольдштейн, оставаясь в рамках одномерного случая, усилил эти результаты ([5], [6]), получив аналоги теорем Ибрагимова ([7]) для слабо зависимых стационарных случайных процессов.

В настоящей работе рассмотрены вопросы, связанные с асимптотической нормальностью для некоммутативных аналогов однородных случайных полей со слабо зависимыми компонентами. Центральная предельная теорема доказывается при условии перемешивания, обобщающего известные критерии [8], [9], [10]), выполняющиеся для гиббсовских случайных полей. В применении к одномерному случаю оно выделяет формально более широкий класс случайных процессов.

Метод доказательства, использованный в настоящей работе существенно более прост и обозрим по сравнению с обычно используемым и восходит к работе одного из авторов [11]. Этот метод вполне эффективен и при рассмотрении случайных полей с неограниченными компонентами.

§1. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ И ПОСТРОЕНИЯ

Пусть $\mathbb{Z}^\nu$ – целочисленная решетка размерности ν, $\nu \geq 1$, т. е. пространство векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$, где $x_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, с нормой $\|x\| = \max\{|x_i| : i = 1, 2, \ldots, \nu\}$.

Обозначим через $\mathcal{W}$ множество конечных подмножеств $\mathbb{Z}^\nu$, и пусть $|I|$ – число элементов множества $I \in \mathcal{W}$. Через V_n обозначим ν-мерный куб с длиной стороны, равной $2n+1$, т. е. $V_n = [-n, n]^\nu$, где $[-n, n] = \{t \in \mathbb{Z} : -n < t < n\}$. При необходимости решетка $\mathbb{Z}^\nu$ будет рассматриваться как аддитивная абелева группа.

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра фон Неймана в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{A} \subset B(\mathcal{H})$, а φ – нормальное состояние на $\mathcal{A}$. Для представления τ группы $\mathbb{Z}^\nu$ в группу $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ *-автоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$ введем понятие траектории $T_u(I)$ элемента $u \in \mathcal{A}$ во множестве $I \subset \mathbb{Z}^\nu$:

$$T_u(I) = \{\tau(x)\, u : x \subset I\}.$$

Полная траектория (т. е. при $I = \mathbb{Z}^\nu$) u обозначается через T_u, а минимальная алгебра Неймана, порожденная подмножеством $A \subset \mathcal{A}$ будет обозначаться через $\mathcal{A}(A)$.

Определение 1. Состояние ω на $\mathcal{A}$ называется τ- *инвариантным*, если

$$\omega(\tau(x)u) = \omega(u)$$

для всех $u \in \mathcal{A}$, $x \in \mathbb{Z}^\nu$, т. е. если $\omega(T_u) = \text{const}$.

Легко проверить, что если ω является τ-инвариантным состоянием, то оно также τ-коинвариантно, т.е. для всех $u, v \in \mathcal{A}$ и всех $x, y, z \in \mathbb{Z}^\nu$

$$\operatorname{cov}(\tau(x+z)\,u, \tau(y+z)\,v) = \operatorname{cov}(\tau(x)\,u, \tau(y)\,v)\,,$$

где $\operatorname{cov}(u, v) = \omega(u, v) - \omega(u)\omega(v)$, $u, v \in \mathcal{A}$.

τ-инвариантное состояние ω на $\mathcal{A}$ называется центрированным по отношению к системе $(\mathcal{A}, \tau, u)$, если $\omega(T(u)) = \omega(u) = 0$. Для центрированного состояния ω, очевидно, что $\operatorname{cov}(u.\,v) = \omega(u, v)$, $u, v \in T_a$.

Напомним лемму [5], которая будет часто использоваться в работе.

Лемма 1. *Для любых эрмитовых* $u, v \in \mathcal{A}$

(i) $|\omega(e^{i(u+v)}) - \omega(e^{iu})| \le \|v\|$;

(ii) $\|e^{i(u+v)} - e^{iu}e^{iv}\| \le \dfrac{1}{2}\|[u, v]\|$,

где $[u, v]$ *коммутатор пары* $u, v \in \mathcal{A}$, $[u, v] = uv - vu$.

Обозначим через L_o класс последовательностей неотрицательных монотонно убывающих к нулю чисел, и пусть $L \subset L_o$ – множество всех последовательностей c из L_o, для которых выполняется следующее условие :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\nu-1}c(n) < \infty.$$

Очевидно, что это условие эквивалентно следующему :

$$\|c\| = \sum_{x \in \mathbb{Z}^\nu} c(\|x\|) < \infty.$$

Определение 2. Будем говорить, что эрмитов элемент $a \in \mathcal{A}$ удовлетворяет условию *сильного τ-перемешивания* с коэффициентом $\alpha \in L_0$ если для всех $I, V \in W$, $u \in \mathcal{A}(T_a(I))$, $v \in \mathcal{A}(T_a(V))$

$$|\operatorname{cov}(u, v)| \leq f(|I|)\,\|u\|\,\|v\|\,\alpha(\rho(I, V)),$$

где f – произвольная функция на $\mathbb{N}$, $\rho(I, V) = \min\{\|x - y\|,\ x \in I, y \in V\}$.

Определение 3. Будем говорить, что эрмитов элемент $a \in \mathcal{A}$ удовлетворяет условию *τ-асимптотической абелевости* с коэффициентом $\beta \in L_0$, если для всех $x, y \in \mathbb{Z}^\nu$

$$\|[\tau(x)a, \tau(y)a]\| \leq \beta(\|x - y\|).$$

Пусть a – фиксированный элемент $\mathcal{A}$, и пусть ω – τ-инвариантное центрированное по отношению к системе $(\mathcal{A}, \tau, a)$ состояние. Мы будем использовать следующие обозначения:

$$S(V) = \sum_{x \in V} \tau(x)a = \sum_{u \in T_a(V)} u, \quad V \in W;$$

$$Z(V) = \sigma_V^{-1}\, S(V), \text{ где } \sigma_V = \sqrt{\omega(S(V)^2)};$$

$$Z(n) = Z(V_n) = \sigma_n^{-1}\, S(V_n), \text{ где } \sigma_n = \sigma_{V_n}.$$

Функция распределения F_u для эрмитова элемента $u \in \mathcal{A}$ определяется следующим образом:

$$F_u(\lambda) = \omega(E_\lambda(u)),$$

где E_λ – спектральный проектор u, отвечающий интервалу $(-\infty, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда характеристическая функция $\varphi_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dF_u(\lambda)$, удовлетворяет соотношению

$$\varphi_u(t) = \omega(e^{itu}), \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Определение 4. Пусть ω – τ-инвариантное центрированное по отношению к системе $(\mathcal{A}, \tau, a)$ состояние. Будем говорить, что для эрмитова элемента a выполнена *центральная предельная теорема*, если последовательность функций распределения для операторов $Z(n)$, $n \in \mathbb{N}$, *асимптотически нормальна*, т.е.

$$\lim_{n \to \infty} F_{Z(n)}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-t^2/2}\, dt$$

для всех $\lambda \in \mathbb{R}^1$.

Теорема. *Пусть* ω – τ*-инвариантное центрированное по отношению к системе* $(\mathcal{A}, \tau, u)$ *состояние, и пусть эрмитов элемент* a *удовлетворяет условиям сильного* τ*-перемешивания и* τ*-асимптотической абелевости с коэффициентами* α *и* β *соответственно (с* $\alpha, \beta \in L$*). Тогда ряд*

$$\sigma_0^2 = \sum_{u \in T_a} cov(a, u)$$

сходится . Если $\sigma_0 \neq 0$*, то для* a *выполнена центральная предельная теорема.*

Доказательство этой теоремы приведено в §3.

§2. ДВЕ ЛЕММЫ

Пусть $p = p(n)$, $q = q(n)$, $n \in \mathbb{N}$ – некоторые функции со значениями в $\mathbb{N}$. Пара таких функций будет называться *стандартной*, если $p(n), q(n) \to \infty$, $p(n) = o(n)$, $q = o(p)$ при $n \to \infty$. Введем обозначения :

$$I_n(j) = [-n + jp(n) + jq(n), -n + (j+1)p(n) + jq(n)] \subset \mathbb{Z}, \ j = 0, 1, \ldots, m-1,$$

$$m = m(n) = \left[\frac{2n+1}{p(n) + q(n)} \right].$$

Очевидно, что I_n – декартово произведение ν копий множеств $\bigcup_{j=0}^{m-1} I_n(j)$ является объединением ν-мерных кубов с ребрами длины p.

Перенумеруем эти кубы в некотором порядке (общее их число равно $k = (m-1)^\nu$) и обозначим j-тый куб в этой нумерации через $\Delta_{n,j}$. Тогда

$$I_n = \bigcup_{j=1}^{k} \Delta_{n,j}.$$

Лемма 2. *Пусть* ω – τ*-инвариантное центрированное по отношению к системе* $(\mathcal{A}, \tau, a)$ *состояние, и пусть эрмитов элемент* $a \in \mathcal{A}$ *удовлетворяет условию* τ*-асимптотической абелевости с коэффициентом* $\beta \in L$.

0. Пусть для некоторого положительного $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$\sigma_n^2 \sim \gamma^2 |V_n|, \ при \quad n \to \infty.$$

Предположим, что для стандартной пары функций p, q *таких, что* $p(n) = o(n^{\frac{1}{2}})$ *при* $n \to \infty$*, выполнены следующие условия* :

1. Для любого $t \in \mathbb{R}$

$$T_0^{(k)} = \left| \omega\left(\prod_{j=1}^{k} e^{itZ(n,j)} \right) - \prod_{j=1}^{k} \omega\left(e^{itZ(n,j)} \right) \right| \to 0, \quad \textit{при} \quad n \to \infty,$$

где $Z(n,j) = \sigma_n^{-1}\, S(\Delta_{n,j})$;

2. Для любого положительного $\varepsilon \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{p(n)^{\nu}} \int\limits_{|\lambda| \geq \varepsilon\sigma_n} \lambda^2\, dF_n(\lambda) = 0,$$

где $F_n = F_{S(\Delta_{n,1})}$.

Тогда для ω *выполнена центральная предельная теорема.*

Доказательство. Достаточно убедиться в сходимости соответствующих характеристических функций для любого фиксированного $t \in \mathbb{R}$, т.е.

$$|\omega(e^{itZ(n)}) - e^{-t^2/2}| \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Обозначим

$$T_1^{(k)} = \left| \omega\left(e^{itZ(n)} \right) - \omega\left(e^{it\sum_{j=1}^{k} Z(n,j)} \right) \right|;$$

$$T_2^{(k)} = \| \, e^{it\sum_{j=1}^{k} Z(n,j)} - \prod_{j=1}^{k} e^{itZ(n,j)} \, \|;$$

$$T_3^{(k)} = \left| \prod_{j=1}^{k} \omega\left(e^{itZ(n,j)} \right) - e^{-t^2/2} \right|.$$

Очевидно

$$\left| \omega\left(e^{itZ(n)} \right) - e^{-t^2/2} \right| \leq T_1^{(k)} + T_2^{(k)} + T_0^{(k)} + T_3^{(k)}.$$

Каждое слагаемое $T_i^{(k)}$, $i = 1,\, 2,\, 3$ будем оценивать отдельно.

Из первого условия Леммы 2 получаем

$$T_1^{(k)} = \left| \omega\left(e^{it(\sum_{j=1}^{k} Z(n,j) + Z(n) - \sum_{j=1}^{k} Z(n,j))} \right) - \omega\left(e^{it\sum_{j=1}^{k} Z(n,j)} \right) \right| \leq$$

$$\leq |t| \; \| \, Z(n) - \sum_{j=1}^{k} Z(n,j) \, \| \; \leq |t| \sigma_n^{-1} \sum_{u \in T_a(V_n - I_n)} \| u \| \leq$$

$$\leq |t| \sigma_n^{-1} \, \| a \| \, |V_n - I_n| \sim C_1 |t| (\gamma n^{\nu/2})^{-1} \, \| a \| \, p(n)^{\nu-1} q(n) \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Выделяя шаг за шагом слагаемые из $Z(n,k)$ и используя вторую оценку в Лемме 1, получим

$$\begin{aligned} T_2^{(k)} &\leq \| e^{it\sum_{j=1}^{k-1} Z(n,j)+itZ(n,k)} - e^{it\sum_{j=1}^{k-1} Z(n,j)} e^{itZ(n,k)} \| + \\ &+ \| e^{it\sum_{j=1}^{k-1} Z(n,j)} e^{itZ(n,k)} - \left(\prod_{j=1}^{k-1} e^{itZ(n,j)}\right) e^{itZ(n,k)} \| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} t^2 \| [\sum_{j=1}^{k-1} Z(n,j),\, Z(n,k)] \| + T_2^{(k-1)} \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, получим

$$\begin{aligned} T_2^{(k)} &\leq \frac{1}{2} t^2 \sum_{m=1}^{k-1} \| [\sum_{j=1}^{m} Z(n,j),\, Z(n,m+1)] \| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} t^2 \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{m} \| [Z(n,j),\, Z(n,m+1)] \| \leq \\ &\leq \frac{t^2}{2\sigma_n^2} \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{m} \sum_{u\in T_a(\Delta_{n,j})} \sum_{v\in T_a(\Delta_{n,m+1})} \| [u,v] \| = \\ &= \frac{t^2}{2\sigma_n^2} \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{y\in\Delta_{n,m+1}} \sum_{j=1}^{m} \sum_{x\in\Delta_{n,j}} \beta(\|x-y\|) \leq \\ &\leq \frac{t^2}{2\sigma_n^2} \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{y\in\Delta_{n,m+1}} \sum_{x\in\mathbb{Z}^\nu,\, \|x\|\geq q(n)} \beta(\|x\|) \leq \\ &\leq \frac{t^2 k\, p(n)^\nu}{2\sigma_n^2} \sum_{x\in\mathbb{Z}^\nu,\, \|x\|\geq q(n)} \beta(\|x\|) \sim \\ &\sim C_2 \frac{t^2 p(n)^\nu}{\gamma^2 n^\nu} \left(\frac{n}{p(n)}\right)^\nu \sum_{x\in\mathbb{Z}^\nu,\, \|x\|\geq q(n)} \beta(\|x\|) \\ &= C_2 \frac{t^2}{\gamma} \sum_{x\in\mathbb{Z}^\nu,\, \|x\|\geq q(n)} \beta(\|x\|) \to 0, \text{ при } n\to\infty. \end{aligned}$$

Осталось доказать, что $T_3^{(k)} \to 0$, где $n\to\infty$.

Рассмотрим схему серий независимых одинаково распределенных случайных величин с функциями распределения $F_{n,j} = F_{Z(n,j)}$, где $j = 1, \dots, k = k(n)$, $n = 1, 2 \dots$

Для нашей цели достаточно проверить *условие Линдеберга* :

$$\text{для всех } \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \int_{|\lambda|\geq\varepsilon} \lambda^2\, dF_{n,j}(\lambda) = 0.$$

Так как ω предполагается τ-инвариантным, функции распределения $F_{n,j}$ не зависят от j и следовательно, условие Линдеберга эквивалентно условию 2 леммы.

Лемма 3. *Пусть выполнены предположения Теоремы. Тогда справедливо следующее соотношение :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n^2}{|V_n|} = \sigma_0^2.$$

Доказательство. Имеем

$$\sigma_n^2 = \omega\left(\left(\sum_{u\in T_a(V_n)} u\right)^2\right) = |V_n|\omega(a^2) + \sum_{x\in V_n}\sum_{v\in T_a(V_n-\{x\})} \operatorname{cov}(\tau(x)a,\, v) =$$
$$= |V_n|\omega(a^2) + \sum_{x\in V_n}\sum_{v\in T_a(\mathbb{Z}^\nu-\{x\})} \operatorname{cov}(\tau(x)a,\, v) -$$
$$- \sum_{u\in T_a(V_n)}\sum_{v\in T_a(\mathbb{Z}^\nu-V_n)} \operatorname{cov}(u,\, v) = |V_n|\omega(a^2) + |V_n| \sum_{u\in T_a(\mathbb{Z}^\nu-\{0\})} \operatorname{cov}(a,\, u) -$$
$$- \sum_{u\in T_a(V_n)}\sum_{v\in T_a(\mathbb{Z}^\nu-V_n)} \operatorname{cov}(u,\, v).$$

Следовательно

$$\frac{1}{|V_n|}\sigma_n^2 = \sigma_0^2 - \frac{1}{|V_n|}\sum_{u\in T_a(V_n)}\sum_{v\in T_a(\mathbb{Z}^\nu-V_n)} \operatorname{cov}(u,\, v).$$

Обозначая $V_n^d = \{\, x\in V_n : \rho(\, x,\, \mathbb{Z}^\nu - V_n\,) \le d\}$ для любого $d>0$, получаем

$$\frac{1}{|V_n|}\sum_{u\in T_a(V_n)}\sum_{v\in T_a(\mathbb{Z}^\nu-V_n)} |\operatorname{cov}(u,\, v)| \le \frac{f(1)\,\|a\|^2}{|V_n|}\sum_{x\in V_n}\sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu-V_n} \alpha(\,\|x-y\|) \le$$
$$\le \frac{f(1)\,\|a\|^2}{|V_n|}\left(\sum_{x\in V_n^d}\sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu-V_n}\alpha(\,\|x-y\|) + \sum_{x\in V_n-V_n^d}\sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu-V_n}\alpha(\,\|x-y\|)\right) \le$$
$$\le \frac{f(1)\,\|a\|^2}{|V_n|}\left(|V_n^d|\sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu}\alpha(\|y\|) + |V_n|\sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu,\,|y|\ge d}\alpha(\|y\|)\right) =$$
$$= f(1)\,\|\alpha\|\,\|a\|^2\frac{|V_n^d|}{|V_n|} + f(1)\,\|a\|^2\sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu,\,|y|\ge d}\alpha(\|y\|) \le$$
$$\le f(1)\,\|\alpha\|\,\|a\|^2\frac{(2n+1)^{\nu-1}d}{(2n+1)^\nu} + f(1)\,\|a\|^2\sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu,\,|y|\ge d}\alpha(\|y\|) \sim$$
$$\sim C_1\left(\frac{d}{n} + \sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu,\,|y|\ge d}\alpha(\|y\|)\right).$$

Положив $d=\ln n$ мы завершим доказательство леммы.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Здесь мы приводим доказательство теоремы, которое сводится к проверке условий Леммы 2. Утверждение относительно поведения корреляций является следствием Леммы 3 (с $\gamma = \sigma_0$). Легко выбрать функцию $p(n) = o(n^{\frac{1}{2}})$, при $n \to \infty$ так, чтобы выполнялось условие 2 Леммы 2. Мы завершим доказательство Теоремы, показав, что для некоторой стандартной пары функций q и $p = o(n^{\frac{1}{2}})$, $n \to \infty$ условие 1 Леммы 2 выполнено.

Пусть условия Теоремы выполнены. Имеем

$$T_0^{(k)} < \left| \operatorname{cov} \left(\prod_{j=1}^{k-1} e^{itZ(n,j)}, e^{itZ(n,k)} \right) \right| + T_0^{(k-1)}.$$

Используя это рекуррентное соотношение, можно получить

$$T_0^{(k)} \leq \sum_{l=3}^{k} \left| \operatorname{cov} \left(\prod_{j=1}^{l-1} e^{itZ(n,j)}, e^{itZ(n,l)} \right) \right|.$$

Если I — тождественный оператор в $\mathcal{H}$, то положим

$$M_1 = \sum_{l=3}^{k} \left| \operatorname{cov} \left(\prod_{j=1}^{l-1} e^{itZ(n,j)}, e^{itZ(n,l)} - I - itZ(n,l) + \frac{t^2}{2} Z(n,l)^2 \right) \right|;$$

$$M_2 = |t| \sum_{l=3}^{k} \left| \omega \left(\prod_{j=1}^{l-1} e^{itZ(n,j)} Z(n,l) \right) \right|;$$

$$M_3 = \frac{1}{2} t^2 \sum_{l=3}^{k} \left| \operatorname{cov} \left(\prod_{j=1}^{l-1} e^{itZ(n,j)}, Z(n,l)^2 \right) \right|$$

Поскольку ω центрировано, очевидно

$$T_0^{(k)} \leq \sum_{l=3}^{k} \left| \operatorname{cov} \left(\prod_{j=1}^{l-1} e^{itZ(n,j)}, e^{itZ(n,l)} - I \right) \right| \leq M_1 + M_2 + M_3.$$

Каждое из слагаемых M_i, $i = 1, 2, 3$ оценим по отдельности.

Обозначая $|h| = (h^* h)^{\frac{1}{2}}$ для любого оператора $h \in B(\mathcal{H})$ и, используя Лемму 1 (принимая во внимание неравенство $|e^{it} - 1 - it - \frac{1}{2}(it)^2| \leq \frac{1}{6}|t|^3$), получаем для $n \to \infty$:

$$M_1 \leq C_1 t^3 k \omega(|Z(n,0)|^3) \leq \frac{C_1 t^3 n^{\nu}}{n^{3\nu/2} p(n)^{\nu}} \omega(|S_{\Delta_{n,1}}|^2) \leq \frac{C_1 t^3 p(n)^{\nu}}{n^{\nu/2}} \to 0,$$

в силу того, что для $l = 3, 4 \dots k$ и $x \in \Delta_{n,l}$

$$\left|\operatorname{cov}\left(\prod_{j=1}^{l-1} e^{itZ(n,j)}, \tau(x)a\right)\right| \le \sum_{r=2}^{l-1}\left|\operatorname{cov}\left(\prod_{j=1}^{r-1} e^{itZ(n,j)}.(e^{itZ(n,r)} - I), \tau(x)a\right)\right|$$

Далее, не теряя общности, мы предполагаем, что на каждом шагу выбираемый номер r таков, что соответствующее множество $\Delta_{n,r}$ является ближайшим к $\Delta_{n,l}$. Применяя условие перемешивания, получаем

$$M_2 \le \frac{|t|}{\sigma_n}\sum_{l=3}^{k}\sum_{x\in\Delta_{n,l}}\left|\operatorname{cov}\left(\prod_{j=1}^{l-1} e^{itZ(n,j)}, \tau(x)a\right)\right| \le$$

$$\le \frac{|t|}{\sigma_n}\sum_{l=3}^{k}\sum_{u\in T_a(\Delta_{n,l})}\sum_{r=2}^{l-1}\left|\operatorname{cov}\left(\prod_{j=1}^{r-1} e^{itZ(n,j)}(e^{itZ(n,r)} - I), u\right)\right| \le$$

$$\le f(1)\frac{|t|}{\sigma_n}\sum_{l=3}^{k}\sum_{u\in T_a(\Delta_{n,l})}\sum_{r=2}^{l-1}\alpha\left(\rho(\Delta_{n,l}, \bigcup_{j=1}^{r}\Delta_{n,j})\right)\|e^{itZ(n,r)} - I\|\,\|u\| \le$$

$$\le f(1)\frac{t^2 p(n)^\nu}{\sigma_n}\sum_{l=3}^{k}\sum_{r=2}^{l-1}\alpha\left(\rho\left(\Delta_{n,l}, \Delta_{n,r}\right)\right)\|Z(n,r)\| \le$$

$$\le f(1)\frac{t^2 p(n)^{2\nu} k(n)}{\sigma_n^2}\sum_{l=3}^{k}\alpha\left(\rho\left(\Delta_{n,l}, \Delta_{n,2}\right)\right) \le$$

$$\le C_2 t^2 p(n)^\nu \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{l:(s-1)q(n)<\rho(\Delta_{n,l},\Delta_{n,1})\le sq(n)}\alpha\left(\rho\left(\Delta_{n,l}, \Delta_{n,1}\right)\right) \le$$

$$\le C_3 t^2 p(n)^\nu \sum_{s=1}^{\infty}\alpha\left(sq(n)\right)s^{\nu-1} \le$$

$$\le C_3 t^2\frac{p(n)^\nu}{q(n)^\nu}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\gamma(sq)}{s} \to 0, \text{ при } n \to \infty,$$

где функция q выбрана подходящим образом.

Таким же путем оценим M_3 :

$$M_3 \le \frac{t^2}{2\sigma_n^2}\sum_{l=3}^{k}\sum_{u,v\in T_a(\Delta_{n,l})}\left|\operatorname{cov}\left(\prod_{j=1}^{l-1} e^{itZ(n,j)}, u\,v\right)\right| \le$$

$$\le \frac{t^2}{2\sigma_n^2}\sum_{l=3}^{k}\sum_{u,v\in T_a(\Delta_{n,l})}\sum_{r=2}^{l-1}\left|\operatorname{cov}\left(\prod_{j=1}^{r-1} e^{itZ(n,j)}(e^{itZ(n,r)} - I), u\,v\right)\right| \le$$

$$\le f(2)\frac{t^2}{2\,\sigma_n^2}\sum_{l=3}^{k}\sum_{u,v\in T_a(\Delta_{n,l})}\sum_{r=2}^{l-1}\alpha\left(\rho\left(\Delta_{n,l}, \bigcup_{j=1}\Delta_{n,j}\right)\right)\|e^{itZ(n,r)} - I\|\,\|u\|\,\|v\| \le$$

$$\le \frac{C_4 t^3 p(n)^{3\nu}}{n^\nu n^{\nu/2}}\sum_{l=3}^{k}\sum_{r=2}^{l-1}\alpha(\rho(\Delta_{n,l}, \Delta_{n,2})) \le \frac{C_4 t^3 p(n)^{3\nu} k(n)}{n^\nu n^{\nu/2}}\sum_{l=3}^{k}\alpha(\rho(\Delta_{n,l}, \Delta_{n,2})) \le$$

$$\le \frac{C_1 t^3 p(n)^{2\nu}}{n^{\nu/2} q(n)^{\nu}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha(sq(n))}{s} = C_1 t^3 \left(\frac{p(n)}{n^{1/2}}\right)^{\nu} \left(\frac{p(n)}{q(n)}\right)^{\nu} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha(sq(n))}{s} \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

ABSTRACT. The paper formulates some results on asymptotic normality in many dimensional case for noncommutative analogues of homogeneous random fields with weakly dependent components. A central limit theorem is obtained under a mixing condition and a condition of asymptotic abelianness. The method of proofs is essentially simplier than the standard one.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Araki, "Gibbs states of a one-dimensional quantum lattice", Comm. Math. Phys., vol. 14, pp. 120 – 157, 1969.
2. O. Bratteli, D. W. Robinson, Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics, vol. II, Springer, New-York – Heidelberg – Berlin, 1981.
3. Д. Рюэль, Статистическая Механика, М., Мир, 1971.
4. В. В. Анишкевич, "Центральная предельная теорема в "некоммутативной" теории вероятностей", ДАН СССР, т. 208, стр. 1265 – 1267, 1973.
5. Б. Г. Гольдштейн, "Центральная предельная теорема "некоммутативной" теории вероятностей, Теория вероятн. и прим., т. 27, стр. 657 – 666, 1982.
6. Т. А. Сарымсаков, Введение в Квантовую Теорию Вероятностей, ФАН, Ташкент, 1985.
7. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и Стационарно Связанные Величины, М., Наука, 1971.
8. Р. Л. Добрушин, "Описание случайных полей условными вероятностями и условиями их регулярности", Теория вероятн. и прим., т. 13, стр. 197 – 224, 1968.
9. Р. Л. Добрушин, "Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с парным взаимодействием", Функц. анал. и прил., т. 2, стр. 292 – 301, 1968.
10. B. S. Nahapetian, Limit Theorems and Some Applications in Statistical Physics, Teubner-texte zur Math., band 123, 1991.
11. Б. С. Нахапетян, "Об одном подходе к доказательству предельных теорем для зависимых случайных величин", Теория вероятн. и прим., т. 32, стр. 589 – 595, 1987.

12 Ноября 1993

Институт математики
НАН Армении

НЕРАВЕНСТВА ТИПА БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И ПРИБЛИЖЕНИЕ МЕРОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Р. А. Аветисян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №6, 1993

В работе получены некоторые оценки для мероморфных функций, не имеющих полюсов на вещественной оси. Описаны классы функций, определенных на вещественной оси, которые обобщают классы Бесова.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Изучение наилучших приближений мероморфными функциями началось два десятилетия тому назад. Равномерное приближение мероморфными функциями, голоморфными в угловых областях и эволюция их веса, были исследованы в [1] [2]. Проблема относится как к теории приближений, так и и теории распределений значений обобщенных функций. Первые результаты, связанные с наилучшими равномерными приближениями на $\mathbb{R}$, получены в работе [3]. В работе [3] рассмотрены мероморфные функции, не имеющие полюсов в некоторой угловой области, содержащей вещественную ось.

В настоящей работе рассмотрены задачи наилучшего приближения мероморфными функциями с дополнительными ограничениями на расположение их полюсов.

Наша основная цель - получить неравенства типа Бернштейна для мероморфных функций, не имеющих полюсов на вещественной оси. Мы также дадим описания новых классов функций, определенных на вещественной оси, обобщающих классы Бесова B_p^α. Эти результаты являются мероморфными аналогами наилучших приближений рациональными и целыми функциями [4 18].

Наши результаты основаны на теории рациональных приближений и и в этом отношении похожи на работу [19]. В доказательствах применяются методы и идеи, развитые в работах [16 – 18]. Мы также используем эквивалентность различных определений пространств Бесова, полученную в работах [20], [21].

Работа состоит из двух параграфов. В первом параграфе формулируются основные результаты. Во втором – приводятся их доказательства и вспомогательные предложения.

§1. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Для формулировки основных результатов нам необходимы следующие обозначения и определения.

Пусть γ – локально спрямляемая кривая в комплексной плоскости. Обозначим через $L_p(\gamma)$, $p \in (0, \infty]$ множество функций, измеримых на γ, для которых $||f||_{p,\gamma} < +\infty$. Полагаем, что

$$||f||_{p,\gamma} = \left(\int_\gamma |f(z)|^p \; |dz| \right)^{1/p}, \quad p \neq \infty,$$

$$||f||_{\infty,\gamma} = \operatorname*{ess\,sup}_{z \in \gamma} |f(z)|, \quad p = \infty.$$

Если $\gamma = (-\infty, \infty)$, то положим $||f||_{p,\gamma} = ||f||_p$, а если $\gamma = (-R, R)$, $0 < R < +\infty$, то $||f||_{p,\gamma} = ||f||_{p,R}$.

Мы используем обычное обозначение теории Неванлинны [22]. В частности, через $T(r, f)$ обозначаем характеристику Неванлинны для функции f – мероморфной в $\mathbf{C}$, $n(r, f) = n(r, \infty, f)$ – число ее полюсов в диске $|z| \leq r$ с учетом кратностей, и

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| f(re^{i\varphi}) \right| d\varphi.$$

Для открытого множества $\Omega \subset \mathbf{C}$ функции, голоморфные (мероморфные) в $\overline{\Omega}$, обозначим через $A(\Omega)(M(\overline{\Omega}))$.

Через D_R, Π_+, Π_- обозначим, соответственно, диск $|z| < R$, полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ и полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$.

Теперь мы можем сформулировать Теорему 1 о мероморфных аналогах хорошо известного неравенства Бернштейна для производных целых функций экспоненциального типа [4 – 6]. Доказательство этой теоремы основано на идеях работ

[10], [18].

Теорема 1. *Пусть* $f \in M\left(\overline{D}_{\theta R}\right)$, $\theta > 1$, $0 < R < \infty$, $||f||_{\infty,\theta R} < +\infty$ *и* $z_1, z_2, ..., z_n$ – *полюсы функции* f *в* $\overline{D}_{\theta R}$. *Если* $\theta_0 > 0$, $a > 0$, *такие, что* $1 < \theta_0 < \theta$, $a \leq R\sqrt{\theta_0^2 - 1}$, *то*

$$|f'(x)| \leq C_1 ||f||_{\infty,\theta R}\left[\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{n} \frac{|Imz_k|}{|z_k - x|^2}\right] \exp\left[c_2 \frac{a}{R}\left(m(\theta R, f) + \ln^+ ||f||^{-1}_{\infty,\theta R}\right)\right],$$
$$x \in (-R, R), \tag{1}$$

где $C_i = C_i(\theta, \theta_0)$, $i = 1, 2$.

Теорема 2. *Пусть* $f \in M\left(\overline{D}_{\theta R}\right)$, $\theta > 1$, $0 < R < \infty$, $p \in (1, \infty]$, $m \in N$, $f \in L_{p,\theta R}$, $s = (m + p^{-1})^{-1}$. *Если* $1 < \theta_0 < \theta$, $0 < a \leq R\sqrt{\theta_0^2 - 1}$, *то*

$$||f^{(m)}||_{s,R} \leq C_3\left(1 + \frac{a}{R^{1-1/p}}\right)\left(n^m(\theta R, f) + \left(\frac{R}{a}\right)^m\right) \times$$
$$\times ||f||_{p,\theta R} \exp\left[c_4 \frac{a}{R}\left(m(\theta R, f) + \ln^+ ||f||^{-1}_{p,\theta R}\right)\right], \tag{2}$$

где $C_i = C_i(\theta, \theta_0, m, p)$, $i = 3, 4$.

Через $C_1(\alpha, \beta...)$, $C_2(\theta, \theta_0...)$ обозначим положительные числа без повторений, зависящие только от $\alpha, \beta, \theta, \theta_0, ...$

Теперь перейдем к оценкам производных мероморфных функций из классов Бесова B_p^α. При этом важно, что мы можем определять эти классы с помощью приближенного модуля гладкости Брудного [23]. Хорошо известно, [23], [21], что в случае окружности или интервала это определение эквивалентно стандартному. Для формулировки этих результатов нам понадобятся нижеследующие определения.

Пусть γ – простая спрямляемая липшицева кривая в комплексной плоскости (замкнутая или открытая).

Для функции $f \in L_p(\gamma)$ и арки $I \subset \gamma$ обозначим через $E_m(f, I)$ наилучшее приближение функции f на множестве I посредством аналитических полиномов степени m, $m = 0, 1, ...$

Пусть $\delta > 0$, $\gamma = \cup I_k$, где I_k – неперекрывающиеся арки и $\delta/2 \leq |I_k| \leq \delta$. Для $f \in L_p(\gamma)$, $p \in (0, \infty]$ положим

$$\omega_m(f, \delta)_p = \sup\left\{\sum_k E_m(f, I_k)_p^p\right\}^{1/p}, \quad p \neq \infty,$$

$$\omega_m(f,\delta)_\infty = \sup \sum_k E_m(f, I_k)_\infty, \quad p = \infty,$$

где sup берется по всем представлениям кривой γ, как и выше. Если $f \in L_1(\gamma)$, то положим [21]

$$\Omega_m(f,\delta)_p = \sup \left\{ \sum_k E_m(f, I_k)_1^p \, \delta^{1-p} \right\}^{1/p},$$

где sup берется по всем представлениям кривой γ.

Пусть $0 < p \leq \infty$, $\alpha > \frac{1}{p} - 1$, $m = [\alpha] + 1$. Обозначим через B_p^α множество функций $f \in L_p(\gamma)$ с конечной квазинормой

$$\|f\|_{B_p^\alpha(\gamma)} = \|f\|_{L_p(\gamma)} + \left(\int_0^\infty \left(\frac{\omega_m(f,\delta)_p}{\delta^\alpha} \right)^p \frac{d\delta}{\delta} \right)^{1/p}, \quad p \neq \infty,$$

$$\|f\|_{B_\infty^\alpha(\gamma)} = \|f\|_{L_\infty(\gamma)} + \frac{\sup_{\delta > 0} \omega_m(f,\delta)_\infty}{\delta^\alpha}, \quad p = \infty.$$

Если $\gamma = [-R, R]$, то положим $\|f\|_{B_p^\alpha(\gamma)} = \|f\|_{B_p^\alpha(R)}$.

Теорема 3. *Пусть* $f \in M\left(\overline{D}_{\theta R}\right)$, $\theta > 1$, $0 < R < \infty$, $p \in (1,\infty]$, $\alpha > 0$, $s = (\alpha + p^{-1})^{-1}$. *Если* $f \in L_{p,\theta R}$, $1 < \theta_0 < \theta$, $0 < a \leq R\sqrt{\theta_0^2 - 1}$, *то*

$$\|f\|_{B_s^\alpha(R)} \leq C_5 \left(1 + \frac{a}{R^{1-1/p}}\right) \left(n(\theta R, f) + \frac{R}{a}\right)^\alpha \times$$
$$\times \|f\|_{p,\theta R} \exp\left[c_6 \frac{a}{R} \left(m(\theta R, f) + \ln^+ \|f\|_{p,\theta R}^{-1}\right)\right], \tag{3}$$

где $C_i = C_i(\alpha, p, \theta, \theta_0)$, $i = 5, 6$.

Теорема 3 подсказывает, как, используя мероморфные приближения, можно определить и описать некоторые классы функций, определенных на $\mathbb{R}$, которые обобщают пространства Бесова B_p^α.

Положим $f \in A_\sigma^\varepsilon$, $\varepsilon \geq 0$, $\sigma > 0$, если f мероморфная функция в комплексной плоскости и

$$T(r,f) \leq \sigma(r+1)^{1+\varepsilon}, \quad r \geq 0.$$

Если $\varepsilon = 0$, то полагаем $A_\sigma^0 = A_\sigma$.

Пусть $f \in L_p$, $p \in (0,\infty]$, $\varepsilon \geq 0$, $\sigma > 0$. Наилучшее приближение к f в L_p функциями $f \in A_\sigma^\varepsilon$ обозначим через $a_\sigma^\varepsilon(f)$. Затем [24] введем аппроксимативное пространство $M^{\alpha}_{p,q}(\varepsilon)$ $(\alpha > 0,\ p, q \in (0, \infty])$ функций $f \in L_p$ с конечной квазинормой

$$\|f\|_{M^{\alpha}_{p,q}(\varepsilon)} = \|f\|_{L_p} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{k\alpha}\, a^{\varepsilon}_{2^k}(f)_p\right)^q\right)^{1/q}, \quad q \neq \infty,$$

$$\|f\|_{M^{\alpha}_{p,q}(\varepsilon)} = \|f\|_{L_p} + \sup_k 2^{k\alpha}\, a^{\varepsilon}_{2^k}(f)_p, \quad q = \infty.$$

Если $\varepsilon = 0$, то полагаем $M^{\alpha}_{p,q}(0) = M^{\alpha}_{p,q}$.

Положим $f \in K^{\alpha}_p$, $\alpha > 0$, $p > 0$, если $f \in B^{\alpha}_p(R)$ для всех R, $0 < R < \infty$ и

$$\|f\|_{K^{\alpha}_p} = \sup_{R>0} \frac{\|f\|_{B^{\alpha}_p(R)}}{(R+1)^{\alpha}} < \infty.$$

Теперь мы можем сформулировать обратную и прямую теоремы о мероморфном приближении классов K^{α}_s.

Теорема 4. *Пусть* $\alpha > 0$, $p \in (1, \infty)$, $s = (\alpha + p^{-1})^{-1}$, $\varepsilon > 0$. *Тогда*

$$M^{\alpha}_{p,s} \subset K^{\alpha}_s \cap L_p, \tag{4}$$

$$M^{\alpha}_{p,s}(\varepsilon) \supset K^{\alpha}_s \cap L_p. \tag{5}$$

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 – 4

Доказательства Теорем 1 – 4 основано на нескольких леммах. Для их доказательства нам необходимы некоторые обозначения :

$D^+_R = D_R \cap \Pi^+$, $D^-_R = D_R \cap \Pi^-$; если $f \in M(\overline{D^+_R})$, положим

$$m^+(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi, \quad r \leq R.$$

Лемма 1. *Пусть* $f \in A(\overline{D}^+_{\theta R})$, $\theta > 1$, $R > 0$. *Тогда*

$$|f(z)| \leq C_1(\theta) \left[\int_{-\theta R}^{\theta R} |f(t)|\, \frac{Im\, z}{|z-t|^2}\, dt + \frac{Im\, z}{R}\right] \times$$
$$\times \cdot \exp\left[C_2(\theta)\, \frac{Im\, z}{R}\, m^+(\theta R, f)\right], \ z \in D^+_R. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $z = re^{i\varphi} \in D^+_{\theta R}$. Положим

$$\mu_1(z,t) = \frac{r\sin\varphi}{|z-t|^2} - \frac{(\theta R)^2 \sin\varphi}{|(\theta R)^2 - zt|^2}, \quad t \in (-\theta R, \theta R),$$

$$\mu_2(z,\varphi) = \frac{(\theta R)^2 - r^2}{|\theta Re^{i\psi} - z|^2} - \frac{(\theta R)^2 - r^2}{|\theta Re^{-i\psi} - z|^2}, \psi \in [0,\pi].$$

Из формулы Неванлинны [22] получаем, что при $z \in D^+_{\theta R}$

$$\ln|f(z)| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\theta R}^{\theta R} \ln|f(t)|\,\mu_1(z,t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \ln|f(\theta Re^{i\psi})|\,\mu_2(z,\psi)\,d\psi. \qquad (7)$$

Имеют место неравенства

$$\mu_1(z,t) \le \frac{r\sin\varphi}{|z-t|^2}, \quad z \in D^+_{\theta R},$$

$$\mu_2(z,\psi) \le C_3(\theta)\,\frac{\operatorname{Im} z}{R}, \quad z \in D^+_R.$$

Следовательно, из (7) имеем

$$\ln|f(z)| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\theta R}^{\theta R} \ln|f(t)|\,\mu_1(z,t)\,dt + C_3(\theta)\,\frac{\operatorname{Im} z}{R}\,m^+(\theta R, f), \quad z \in D^+_R. \qquad (8)$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\theta R}^{\theta R} \mu_1(z,t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \mu_2(z,\psi)\,d\psi = 1,$$

из (8) и неравенства Йенсена получаем неравенство (6) Леммы 1.

Лемма 2. *Пусть* $f \in A(\overline{D}^+_{\theta R})$, $\theta > 1$, $\gamma = [z_1, z_2] \subset D^+_R$. *Если* $\operatorname{Re} z \ne const$ *при* $z \in \gamma$, $p \in (1,\infty]$, *то*

$$\|f\|_p(\gamma) \le C_4(\theta,\beta)\left(1 + \frac{\operatorname{Im}(z_1+z_2)}{R^{1-1/p}}\right)\|f\|_{p,\theta R}\times$$
$$\times \exp\left[C_5(\theta,\beta)\cdot\frac{\operatorname{Im}(z_1+z_2)}{R}\left(m^+(\theta R, f) + \ln^+\|f\|^{-1}_{p,\theta R}\right)\right], \qquad (9)$$

где β — *угол между* $[z_1, z_2]$ *и вещественной осью.*

Доказательство. Если $p = \infty$, то Лемма 2 следует из Леммы 1. Пусть $p \in (1,\infty)$ и $\|f\|_{p,\theta R} = 1$. Положим

$$u(z) = \int_{-\theta R}^{\theta R} |f(t)|\,\frac{\operatorname{Im} z}{|z-t|^2}\,dt, \quad z \in \Pi^+,$$

$$u^*(x) = \sup\left\{u(s):\quad \zeta = \xi + i\eta \in \Pi^+, |\xi - x| \le \eta\right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Так как $p \in (1, \infty)$, то имеем [25]

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u^*(x))^p \, dx \le C(p) \int_{-\theta R}^{\theta R} |f(t)|^p \, dt.$$

Так как, то при $z = x + iy \in [z_1, z_2]$

$$u(z) \le u^*(x), \quad |dz| \le \sqrt{2} |\tan \beta| \, dx$$

получаем

$$\|u\|_p(\gamma) \le C_1(\beta) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (u^*(x))^p \, dx \right)^{1/p} \le C(p, \beta) \, \|f\|_{p, \theta R}.$$

Из (6) следует утверждение (9) Леммы 2.

Доказательство Теоремы 1. Пусть θ_1 удовлетворяет неравенствам $\theta_0 < \theta_1 < < \theta$. Обозначим через γ_a^+ трапецию с вершинами $\zeta_1 = \theta_1 R$, $\zeta_2 = R\sqrt{\theta_1^2 - 1} + ia$, $\zeta_3 = -R\sqrt{\theta_1^2 - 1} + ia$, $\zeta_4 = -\theta_1 R$, и пусть $\gamma_a^- = \{z \in \mathbf{C} : \bar{z} \in \gamma_a^+\}$, $\gamma_a = \gamma_a^+ \cup \gamma_a^-$. Обозначим G_a область, ограниченная кривой γ_a, $G_a^+ = G_a \cap \Pi^+$, $G_a^- = G_a \cap \Pi^-$. Сначала рассмотрим случай, когда $f(z)$ не имеет полюсов в верхней полуплоскости. Если $z_1, z_2, \dots, z_n$ являются полюсами функции $f(z)$, то положим

$$\Pi(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - \bar{z}_k}{z - z_k}. \tag{10}$$

Так как $f \in A(\overline{D_{\theta R}^+})$, , f/Π, $f/\Pi^2 \in \mathring{A}(\overline{D_{\theta R}^-})$ для любой ориентации кривых γ_a^+, γ_a^-, то по формуле Коши при $x \in (-R, R)$ получаем

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\theta R}^{\theta R} \frac{f(t)}{(t-x)^2} \left(1 - \frac{\Pi(x)}{\Pi(t)}\right)^2 dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_a^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x)^2} \, d\zeta +$$
$$+ \frac{\Pi(x)}{\pi i} \int_{\gamma_a^-} \frac{f(\zeta)}{\Pi(\zeta)} \frac{d\zeta}{(\zeta - x)^2} + \frac{\Pi^2(x)}{2\pi i} \int_{\gamma_a^-} \frac{f(\zeta)}{\Pi^2(\zeta)} \frac{d\zeta}{(\zeta - x)^2} = \sum_{j=1}^{4} g_j(x).$$

Так как $f \in A(\overline{D_{\theta R}^+})$, , f/Π, $f/\Pi^2 \in A(\overline{D_{\theta R}^-})$, то из (9) для $x \in (-R, R)$ получаем

$$|g_j(x)| \le C_4 \frac{\|f\|_{\infty, \theta R}}{a} \exp\left[C_5 \left(m^+(\theta R, f) + \ln^+ \|f\|_{\infty, \theta R}^{-1}\right)\right], \quad j = 2, 3, 4.$$

Теперь оценим g_1. По формуле Коши при $z \in G_a^+$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\theta R}^{\theta R} \frac{(\Pi(t) - \Pi(z))^2}{\Pi(t)\,(t-z)^2} \, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_a^+} \frac{\Pi(t)}{(t-z)^2} \, dt + \frac{\Pi(z)}{\pi i} \int_{\gamma_a^-} \frac{dt}{(t-z)^2} +$$
$$+ \frac{\Pi^2(z)}{2\pi i} \int_{\gamma_a^-} \frac{dt}{\Pi(t)\,(t-z)^2} + \frac{\Pi'(z)}{\Pi(z)}.$$

Следовательно

$$|g_1(x)| \le \frac{\|f\|_{\infty,\theta R}}{2\pi}\int_{-\theta R}^{\theta R}\frac{|\Pi(t)-\Pi(x)|^2}{|t-x|^2}\,dt =$$

$$= \|f\|_{\infty,\theta R}\left|-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\theta R}^{\theta R}\frac{(\Pi(t)-\Pi(x))^2}{\Pi(t)(t-x)^2}\,dt\right| \le$$

$$\le \|f\|_{\infty,\theta R}\left[|\Pi'(x)| + \frac{1}{\pi}\int_{\gamma_*}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-x|^2}\right] \le$$

$$\le C_6\|f\|_{\infty,\theta R}\left[\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{Im} z_k}{|z_k-x|^2}\right], \quad x \in (-R, R).$$

Теорема 1 доказана в случае, когда $f(z)$ не имеет полюсов в верхней полуплоскости. В общем случае, если $z_1, z_2, \ldots, z_k$ являются полюсами $f(z)$ в верхней полуплоскости, рассмотрим функцию

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{\Psi_R(z)},$$

где

$$\Psi_R(z) = \prod_{j=1}^{k}\frac{(\theta R)^2 - \bar{z}_j z}{\theta R(z_j - z)}\cdot\frac{\theta R(\bar{z}_j - z)}{(\theta R)^2 - z_j z}. \qquad (11)$$

Имеем

$$|f'(x)| \le |f_1'(x)| + \|f\|_{\infty,\theta R}\,|\Psi_R'(x)|, \quad x \in (-\theta R, \theta R).$$

Так как для функций f_1 и Ψ_R Теорема 1 уже была доказана, мы получаем утверждение (1) Теоремы 1.

Для доказательства Теоремы 2 нам понадобятся некоторые определения и Лемма 3 из [18].

Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ принадлежат D_1, то положим

$$B_n(z) = \prod_{k=1}^{n}\frac{z-a_k}{1-\bar{a}_k z}.$$

Пусть G — дополнение интервала $[-R, R]$, $\varphi_R(\zeta)$ — функция, которая является конформным отображением G на $\mathbf{C}/\overline{D}_1$. Если $z_1, z_2, \ldots, z_n$ принадлежат G, то положим

$$a_k = \frac{1}{\overline{\varphi}_R(z_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$Q_\alpha(\eta, x) = |B_n(\varphi_R(\eta)) - B_n(\varphi_R(x))|^{1+\alpha}\times$$

$$\times|B_n(\varphi_R(\eta)) - B_n(\overline{\varphi}_R(x))|^{1+\alpha}\times|\eta - x|^{-(1+\alpha)},$$

где $\alpha > 0$, $\eta, x \in [-R, R]$.

Лемма 3. *([18]). Пусть* $\alpha > 0$, $p \in (1, \infty]$, $s = (\alpha + p^{-1})^{-1}$, $f \in L_{p,R}$. *Если*

$$g(x) = \int_{-R}^{R} f(\eta)\, Q_\alpha(\eta, x)\, d\eta,$$

то

$$||g||_{s,R} \le C(\alpha, p)\, n^\alpha\, ||f||_{p,R}.$$

Лемма 4. *Пусть* $\gamma = [z_1, z_2] \subset \Pi^+$, $\Delta \subset \mathbb{R}$, $\overline{\gamma} \cap \overline{\Delta} = \emptyset$, $f \in L_p(\gamma)$, $\alpha > 0$, $p \in (1, \infty]$, $s = (\alpha + p^{-1})^{-1}$. *Если*

$$g(x) = \int_\gamma \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - x|^{1+\alpha}}\, |d\zeta|, \quad x \in \Delta,$$

то

$$||g||_s(\Delta) \le C(\alpha, p) \left(\frac{|\Delta|}{\rho(\Delta, \gamma)} \right)^\alpha ||f||_p(\gamma),$$

где $\rho(\Delta, \gamma)$ *расстояние между* Δ *i* γ.

Доказательство Теоремы 2. Мы можем выбрать контур $\Delta_\rho = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\varphi_R(\zeta)| = rho > 1\}$ так, чтобы полюсы $z_1, z_2, ..., z_n$ функции f не лежали внутри Δ_ρ. Пусть γ_a – контур, построенный в Теореме 1 и $\Gamma_\rho = \Delta_\rho \cup \gamma_a$. При любой ориентации контура Γ_ρ, по формуле Коши для $x \in [-R, R]$ имеем

$$\frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x)^{m+1}} \left[1 - \left(1 - \frac{B_n(\varphi_R(x))}{B_n(\varphi_R(\zeta))} \right)^{m+1} \times \left(1 - \frac{B_n(\overline{\varphi}_R(x))}{B_n(\varphi_R(\zeta))} \right)^{m+1} \right] d\zeta = 0.$$

Следовательно, если $\rho \to 1 + 0$, то

$$|f^{(m)}(x)| \le C(m) \left[\int_{-R}^{R} |f(\eta)|\, Q_\alpha(\eta, x)\, d\eta + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{m+1} \int_{\gamma_a} \frac{|f(\zeta)|}{|B_n^k(\varphi_R(\zeta))|} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - x|^{m+1}} \right] = g_1(x) + g_2(x).$$

Заметим, что $f(\zeta) / B_n^k(\varphi_R(\zeta)) \in A\left(\overline{D_{\theta R} / \Gamma}\right)$. Следовательно, применяя Лемму 3 к g_1 и Леммы 2,4 к g_2, получаем утверждение (2) Теоремы 2.

Доказательство Теоремы 3. Сначала предположим, что f не имеет полюсов в верхней полуплоскости. Пусть γ_a^+, γ_a^- и G_a^+ – контур и область, построенные в Теореме 1. По формуле Коши при $z \in G_a^+$ имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\theta_1 R}^{\theta_1 R} \frac{f(\zeta)}{\Pi(\zeta)} \frac{\Pi(\zeta) - \Pi(z)}{(\zeta - z)}\, d\zeta -$$
$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_a^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{\Pi(z)}{2\pi i} \int_{\gamma_a^-} \frac{f(\zeta)}{\Pi(\zeta)} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)} = R_n(z) + f_1(z) + f_2(z),$$

где $\Pi(z)$ есть произведение (10) для полюсов функции f в $\overline{D}_{\theta R}$.

Так как $p \in (1, \infty)$, то из теоремы Рисса [25] получаем

$$||R_n||_{p,\theta R} \leq C(p)\left(||f||_{p,\theta R} + ||g_1||_p + ||g_2||_p\right).$$

Отсюда [16]

$$||R_n||_{B^\alpha_\tau(\theta R)} \leq C(\alpha, p)\, n^\alpha \left(||f||_{p,\theta R} + ||g_1||_p + ||g_2||_p\right).$$

Из Леммы 2 следует, что $R_n(z)$ удовлетворяет неравенству (3) Теоремы 3. Для функции $f_1(z)$ имеем

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{3} \Pi(z) \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \frac{f(\zeta)}{\Pi(\zeta)} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)} = \sum_{k=1}^{3} g_k(z),$$

а этого достаточно для оценивания квазинорм функции g_2, так как квазинормы g_1, g_3 можно оценить тем же способом. Из [20], [21] получаем

$$\int_0^\infty \left(\frac{\omega_m(g_2, \delta)}{\delta^\alpha}\right)^s \frac{d\delta}{\delta} \leq C(\alpha, s) \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |g_2^{(m)}(z)|^s\, y^{(m-s)\alpha - 1}\, dx\, dy, \quad m = [\alpha] + 1.$$

Для g_2 имеем

$$g_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{m} \binom{k}{m} \Pi^{(m-k)}(z) \int_{\zeta_2}^{\zeta_3} \frac{f(\zeta)}{\Pi(\zeta)} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}, \quad z \in \Pi^+.$$

Согласно Лемме 2.5 из [16] существуют функции $h_k(x)$, $k = 0, 1, ..., m-1$ такие, что

$$||h_k||_1 \leq n, \quad h_k(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\left|\Pi^{(m-k)}(z)\right| \leq C_1(k, p) \min\left(y^{-1}, h_k(x)\right)^{m-k}, \quad z = x + iy \in \Pi^+. \tag{12}$$

Следовательно, из Леммы 4 получаем, что существуют функции φ, h такие, что

$$\left|g_2^{(m)}(x)\right| \leq C_2(\alpha, p)\, \varphi(x) \min\left(y^{-1}, h(x)\right)^m \tag{13}$$

$$||\varphi||_p \leq C_3(\alpha, p)\, ||f||_p([\zeta_2, \zeta_3]),$$

$$||h||_1 \leq C_4(\alpha, p)\left(n + \frac{R}{a}\right)$$

Теперь, применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}|g_2^{(m)}(z)|^s\,y^{(m-\alpha)s-1}\,dx\,dy\le$$
$$\le C_2(\alpha,p)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^s(x)\left(\int_0^{h^{-1}(x)}h^{sm}(x)\cdot y^{(m-\alpha)s-1}\,dy+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_{h^{-1}(x)}^{\infty}y^{-\alpha s-1}\,dy\right)dx\right)\le C_2(\alpha,p)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^s(x)\,h^{\alpha s}(x)\,dx\le$$
$$\le C_2(\alpha,p)\left(n+\frac{R}{a}\right)^{\alpha s}\cdot||f||_p^s([\zeta_2,\zeta_3]).$$

Принимая во внимание Лемму 2, получаем утверждение (3) Теоремы 3 в специальном классе, где f не имеет полюсов в Π^+.

В общем случае, если $z_1, z_2, \dots, z_k$ являются полюсами функции f в Π^+, положим $f_1(z)=\Psi_R(z)$, где $\Psi_R(z)$ определяются формулой (11). Легко видеть, что доказательство Теоремы 3 будет завершено, если получить (3) для функции

$$F(x)=g_2(x)\Psi_R(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Из результатов [20], [21] получаем (3) для F, если распространить F на всю плоскость $\mathbb{C}$

$$\iint_{\mathbb{C}}[\varphi^*(z)]^s\;|y|^{-s(\alpha-1)-1}\,dx\,dy<+\infty,$$

где

$$\varphi^*(z)=\sup_{|\zeta-z|<\frac{1}{2}\rho(z,\mathbb{R})}\left|\bar\partial F(\zeta)\right|$$

Мы можем представить функцию F в виде $F(x)=\Pi(x)\times g(x)$, где $g(x)=$ $=\dfrac{g_2(x)\Psi_R(x)}{\Pi(x)}$.

Расширим F на всю плоскость, используя формулу

$$F(z)=\begin{cases} g(z)\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\Pi^{(k)}(z)\,\frac{(z-\bar z)^k}{k!}, & \text{если}\quad z\in\Pi^+\\ \Pi(z)\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}g^{(k)}(z)\,\frac{(z-\bar z)^k}{k!}, & \text{если}\quad z\in\Pi^-.\end{cases}$$

Следовательно

$$(m-1)!\,\left|\bar\partial F(z)\right|\le\begin{cases}|g(z)|\,\Pi^{(m)}(\bar z)|\,y^{m-1} & \text{если}\quad z\in\Pi^+\\ |g^{(m)}(z)||y|^{m-1} & \text{если}\quad z\in\Pi^-\end{cases}$$

Из последних неравенств и (11), (12) получаем (3). Теорема 3 доказана.

Для доказательства Леммы 4 нам необходимы некоторые определения из [20]. Пусть

$$I(\zeta) = \{t \in \mathbb{R}: \quad |\xi - t| \le \frac{|\eta|}{2}, \zeta = \xi + i\eta\}.$$

Если $f \in L_1$, то положим $E_m(f, \zeta) = E_m(f, I(\zeta))_1$.

Следующая лемма является модификацией Теоремы 3 из [21].

Лемма 5. *Пусть $f \in K_p^\alpha$, $p > 0$, $\alpha > \dfrac{1}{p-1}$, $l \in N$. Тогда существует функция F, определенная в комплексной плоскости такая, что для любого $R > 0$*

$$f(x) = \frac{l!}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_R}\frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{l+1}}\,d\zeta - \frac{l!}{\pi}\iint_{\Delta_R}\frac{\partial F}{\partial\bar\zeta}\frac{d\xi\,d\eta}{(\zeta - z)^{l+1}}, \quad x \in (-R, R), \tag{14}$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial\bar\zeta}\right| \le C_1 |Im\zeta|^{l-2}\cdot E_m(f,\zeta); \tag{15}$$

где Δ_R – квадрат со стороной $2R$ и с центром в O.

Доказательство. Если $f \in K_p^\alpha$, $\alpha > \dfrac{1}{p} - 1$, то из результатов работы [21] получаем, что $f \in L_{1,R}$ для всех $R > 0$. Следовательно, можем определить функцию

$$F(x) = \int_0^x\int_0^{x_1}\dots\int_0^{x_{l-1}} f(x_{l-1})\,dx_{l-1}\dots dx.$$

Из [20] получаем, что F можно распространить на $\mathbf{C}$ по формуле

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_R}\frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{\Delta_R}\frac{\partial F}{\partial\bar\zeta}\frac{d\xi\,d\eta}{\zeta - z}, \quad z \in \Delta_R,$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial\bar\zeta}\right| \le C_2\frac{E_{m+l}(F,\zeta)}{|\mathrm{Im}\zeta|^2} \le C_2|\mathrm{Im}\zeta|^{l-2}\cdot E_m(f,\zeta), \quad \zeta \in \mathbf{C}. \tag{16}$$

Пусть

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\iint_{\Delta_R}\left|\frac{\partial F}{\partial\bar\zeta}\right|\frac{d\xi\,d\eta}{|\zeta - x|^{l+1}}. \tag{17}$$

Мы докажем, что $g \in L_{s,R}$, где $s = (\alpha + p^{-1})^{-1}$. Пусть

$$\Omega_{k,n} = \left\{\zeta = \xi + i\eta \in \Delta_R: \quad \frac{nR}{2^k} \le \xi \le \frac{(n+1)R}{2^k}, \ \frac{R}{2^{k+1}} \le |\eta| \le \frac{R}{2^{k-1}}\right\}$$

где $k = 0, 1, \dots$, $n = -2^k, \dots, 2^k - 1$. Мы можем выбрать $\zeta_{k,n} \in \Omega_{k,n}$ так, что $|\mathrm{Im}\zeta_{k,n}| = \dfrac{R}{2^{k+1}}$. Предположим также, что $s \le 1$, так как случай $s > 1$ можно доказать тем же способом, используя неравенство Гельдера. Из Теоремы 1 из [21] имеем

$$\int_{-R}^{R} |g(x)|^s\,dx \le C_3 \int_{-R}^{R} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-2^k}^{2^k-1} \frac{|\mathrm{Im}\zeta_{k,n}|^{l-2} \cdot E_m(f, 4I(\zeta_{k,n}))_1}{|\zeta_{k,n} - x|^{l+1}} \right) dx <$$

$$\le C_4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R}{2^k} \sum_{n=-2^k}^{2^k-1} E_m(f, 4I(\zeta_{k,n}))_1^s I^{1-s}(\zeta_{k,n}) \le$$

$$\le C_5 \int_0^{2R} \frac{\Omega_m^s(f,\delta)}{\delta}\,d\delta \le C_6 \int_0^{2R} \frac{\Omega_m^s(f,\delta)}{\delta^{\alpha s+1}}\,d\delta < +\infty.$$

В частности, получаем, что интеграл (17) сходится почти всюду на $\mathbb{R}$. Пусть $\Delta_R^1 = \Delta_R \cap \Pi^+$, $\Delta_R^2 = \Delta_R \cap \Pi^-$. Положим

$$f_j(z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Delta_R^j} \frac{\partial F}{\partial \overline{\zeta}} \frac{d\xi\,d\eta}{(\zeta - z)^{l+1}}, \quad j = 1, 2$$

и рассмотрим эти функции в Π^- и Π^+, соответственно. Используя неравенство (16), мы можем показать, что $f_j \in B_s^\alpha(\partial\Delta_R^j)$. Из [21] заключаем, что $f_j \in E_1(\Delta_R^j)$, где $E_1(G)$ – пространство Смирнова в G. Следовательно, имеем $f_1 \in H_1(\Pi^-)$, $f_2 \in H_1(\Pi^+)$. Положим

$$F_j(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta_R^j} \frac{\partial F}{\partial \overline{\zeta}} \frac{d\xi\,d\eta}{(\zeta - z)^{l}}, \quad j = 1, 2.$$

Очевидно, что $F_j(z)$, $j = 1, 2$ непрерывные функции в Π^- и Π^+, соответственно. Далее, так как $F_1'(z) = f_1(z)$, $z \in \Pi^-$, $F_2'(z) = f_2(z)$, $z \in \Pi^+$, то по теореме братьев Рисс [25], F_j абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$ и $F_j'(x) = f_j^*(x)$, $x \in \mathbb{R}$ почти всюду на $\mathbb{R}$ ($f_j^*(x)$, $j = 1, 2$ – некасательные пределы $f_j(z)$ при $z \to x$). В точках сходимости интеграла (17) имеем

$$f_j^*(x) = \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta_R^j} \frac{\partial F}{\partial \overline{\zeta}} \frac{d\xi\,d\eta}{(\zeta - x)^{l+1}}, \quad j = 1, 2.$$

Следовательно, при $x \in (-R, R)$

$$f(x) = F^{(l)}(x) = \frac{l!}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_R} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - x)^{l+1}} d\zeta + F_1'(x) + F_2'(x) =$$

$$= \frac{l!}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_R} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - x)^{l+1}} d\zeta - \frac{l!}{\pi} \iint_{\Delta_R} \frac{\partial F}{\partial \overline{\zeta}} \frac{d\xi\,d\eta}{(\zeta - z)^{l+1}}, \quad x \in (-R, R).$$

Лемма 5 доказана.

Доказательство Теоремы 4. Согласно интерполяционным теоремам [26], [17], вложение (5) будет доказано, если покажем, что

$$K_s^\alpha \cap L_p \subset M_{p,\infty}^\alpha(\varepsilon).$$

Пусть f представляется в виде (14). Пусть Δ_{2^n} квадраты со сторонами 2^{n+1} и центром в O. Положим

$$f_n(x) = \frac{l!}{\pi} \iint_{\Delta_{2^{n+1}}/\Delta_{2^n}} \frac{\partial F}{\partial \bar\zeta} \frac{d\xi\, d\eta}{(\zeta - x)^{l+1}}.$$

Выберем l так, чтобы $s(l+1) > 1$, и применим Лемму 2.5 из [17] к функциям f_n. Из [17] заключаем, что существуют рациональные функции $R_{k_n}(z)$, $k_n \le \sigma n^{2/\alpha} 2^n$, полюсы которых принадлежат $\Delta_{2^{n+1}}/\Delta_{2^n}$, такие, что

$$||f_n - R_{k_n}||_p \le C_1 \frac{||f_n||_{B_\tau^\alpha}}{\sigma^\alpha n^2 2^{\alpha n}} \le \frac{C_2}{\sigma^\alpha n^2}.$$

Докажем, что функции

$$g_n(z) = \frac{l!}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_{2^{n+1}}} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{l+1}}\, d\zeta + \sum_{i=1}^{n} R_{k_i}(z)$$

сходятся к некоторой функции $g_\sigma \in A_{q\sigma}^\varepsilon$, $q > 0$.

Для любой $z \in \mathbf{C}$ мы можем выбрать $N > L$ так, чтобы $z \in \Delta_{2^L}$. Следовательно

$$|g_N(z) - g_L(z)| \le \sum_{i=L}^{N} |f_i(z) - R_{k_i}(z)| \le C_3 \sum_{i=L}^{N} \frac{1}{\sigma^\alpha i^2}.$$

Очевидно, что

$$N(r, g_\sigma) \le C_4 \sigma (r+1)^{1+\varepsilon}, \quad r \ge 0.$$

Следуя [2], находим

$$m(r, g_\sigma) \le C_5 \sigma (r+1)^{1+\varepsilon}, \quad r \ge 0.$$

Так как $p \in (1, \infty)$, то

$$||f - g_\sigma||_p \le \sum_{n=0}^{\infty} ||f_n - R_{k_n}||_p \le \frac{C_6}{\sigma^\alpha}.$$

Вложение (5) доказано. Вложение (4) можно доказать так же, как в Теореме 3.1 из [16], воспользовавшись оценками (12), (13).

Теорема 4 доказана.

Автор выражает благодарность профессору Н. У. Аракеляну за полезные консультации.

ABSTRACT. Some estimates for meromorphic functions which have no poles on the real axis are obtained. Certain classes of functions defined on the real axis which generalize the Besov classes are described.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Тер-Исраелян, " Равномерные и касательные приближения мероморфными функциями в угле и эволюция их роста ," Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 6, №1, стр. 67 – 80, 1971.
2. Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян, " Наилучшие приближения мероморфными функциями в угловой области," Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 23, №6, стр. 547 – 556, 1988.
3. Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян, " Наилучшие приближения мероморфными функциями на вещественной оси," Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 25, №6, стр. 534 – 548, 1990.
4. С. Н. Бернштейн, " Об одном свойстве целых функций," Сборник трудов, т. 1, Изв. АН СССР, стр. 261 – 270, 1952.
5. Н. У. Аракелян, " " Равномерные и касательные приближения на вещественной оси целыми функциями с эволюцией их роста ," Мат. Сб., т. 133 (155), №1, стр. 3 – 40, 1980.
6. С. М. Никольский, Приближения Функций Многих Переменных и Теоремы Вложения, Наука, М., 1959.
7. И. П. Иродова, " Свойства шкалы пространств $B_p^{\lambda\theta}$ при $0 < p < 1$", ДАН СССР, т. 21 (198), №1, стр. 53 – 55, 1980.
8. А. А. Гончар, " Порядок приближения рациональными функциями," Докл. межд. конгр. матем. (Москва), Мир, М., стр. 329 – 356, 1968.
9. Е. П. Долженко, "Оценки производных рациональных функций," Изв. АН СССР, Математика, т. 27, стр. 9 – 28, 1963.
10. В. Н. Русак, Рациональные Функции как Аппарат Приближения, Изд. Белорус. гос. унив., Минск, 1979.
11. Ю. А. Брудный, "Рациональные Приближения и Теоремы Вложения," ДАН СССР, т.247, стр. 269 – 272, 1979.
12. В. В. Пеллер, "Операторы Ганкеля классов σ_p и их приложения (рациональные приближения, гауссовские процессы, проблема мажорирования операторов)," Мат. сб., т. 113 (155), стр. 538 – 581, 1980.
13. В. В. Пеллер, "Описание операторов Ганкеля в классе σ_p при $p > 1$, исследование значений рациональных приближений и другие приложения", Мат. сб., т. 122 (164), стр. 401 – 510, 1983.
14. S. Semmes, " Trace ideal criteria for Hankel operators and applications to Besov spaces," Integral Equat. and Oper. Theory, vol. 7, no. 2, pp. 241 – 281, 1984.
15. R. A. De Vore, "Maximal functions and their application to rational approximation," CMS Conf. Proc., vol. 3, pp. 143 – 155, 1983.
16. А. А. Пекарский, "Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональных приближений", Мат. сб., т. 124 (166), стр. 557 – 574, 1984.

17. А. А. Пекарский, " Классы аналитических функций, определяемых наилучшими рациональными приближениям в H_p," Мат. сб., т. 127 (169), стр. 3 - 20, 1985.
18. А. А. Пекарский, " Оценки производных рациональных функций в $L_p[-1, 1]$," Мат. заметки, т. 39, №3 – 4, стр. 212 – 216, 1986.
19. Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян, А. А. Гончар, " Асимптотические свойства мероморфных функций", Изв. АН Арм. ССР, т. 24, №3, стр. 207 – 225, 1987.
20. Е. М. Дынкин, "Конструктивная характеристика классов С. Л. Соболева и О. В. Бесова", Труды мат. инст. Стеклова, т. 155, стр. 46 – 76, 1981.
21. Е. М. Дынкин, "О классах B_p^s при $0 < p < 1$," ДАН СССР, т. 275, №5, стр. 9 – 12, 1984.
22. A. A. Goldberg and I. V. Ostrovskii, Distribution of Values of Meromorphic Functions, Nauka, Moscow, 1970.
23. Ю. А. Брудный, "Пространства, определяемые посредством локальных приближений", Труды моск. мат. общ., т. 24, стр. 69 – 132, 1971.
24. J. Peetre and G. Sparr, "Interpolation of normed Abelian groups," Ann. Math. Pure Appl., vol. (4) 92, pp. 217 - 262, 1972.
25. J. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, 1981.
26. J. Peetre, New Thoughts on Besov Spaces, Duke Univ. Math., ser. I, Durham, 1976.

29 Сентября 1993

Институт математики
НАН Армении

ОБ ОГРАНИЧЕННОЙ РАСХОДИМОСТИ ПО ПЕРЕСТАВЛЕННЫМ ОРТОНОРМИРОВАННЫМ СИСТЕМАМ

С. Ш. Галстян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №6, 1993

В работе доказывается, что для любой тригонометрической системы (или любого базиса в пространстве непрерывных функций) существует перестановка натурального ряда такая, что ряд расходится почти всюду и его частичные суммы равномерно ограничены. Показывается также, что для любой полной ортонормированной системы существует перестановка такая, что ряд расходится почти всюду и максимальная функция частичных сумм интегрируема с квадратом.

§1. ВВЕДЕНИЕ

А. Н. Колмогоров в [1] сформулировал теорему о том, что существует почти всюду расходящийся переставленный тригонометрический ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} \cos(\sigma(n)x + \varphi_{\sigma(n)}),$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty,$$

т. е. существует функция из класса $L^2[-\pi, \pi]$, ряд Фурье которой после некоторой перестановки расходится почти всюду.

Лишь в 1960 году З. Загорский [2] дал краткую схему доказательства этой теоремы. Следуя конструкции З. Загорского, П. Л. Ульянов доказал, что аналогичные теоремы имеют место для системы Уолша и, что особенно важно, для системы Хаара. Исходя из последнего результата, П. Л. Ульянов и А. М. Олевский показали, что для любой полной ортонормированной системы (ПОНС) функций существует интегрируемая с квадратом функция, ряд Фурье которой по этой системе после некоторой перестановки расходится почти всюду. Затем, А. М. Олевский доказал, что функцию можно взять непрерывной. Исторические справки об этих результатах можно найти в работах [3 – 5].

П. Л. Ульянов доказал, что для системы Хаара существует интегрируемая с квадратом функция на [0,1], ряд Фурье–Хаара которой после некоторой перестановки ограниченно расходится почти всюду (см. [3]). В связи с последним результатом в работе [3] П. Л. Ульянов отмечает, что этот пример является первым примером такого рода, и ему не известны подобные примеры для других классических систем функций и, тем более, для достаточно произвольных ПОНС.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – *тригонометрическая система или базис в пространстве* $C[0,1]$. *Тогда существует непрерывная функция* f *и перестановка* τ *натурального ряда такие, что ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}(f)\varphi_{\tau(n)}(t)$$

расходится почти всюду, а

$$\sup_N \left\| \sum_{n=1}^{N} a_{\tau(n)}(f)\varphi_{\tau(n)}(t) \right\|_{\infty} < \infty,$$

где $a_n(f)$ *определяются формулой*

$$a_n(f) = (f, \varphi_n^*) = \int_0^1 f(t)\varphi_n^*(t)\, dt.$$

Здесь φ_n^* – *система, биортогональная* φ_n, *т. е.*

$$(\varphi_n, \varphi_m^*) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n \neq m. \end{cases}$$

Этот результат был доложен на Всесоюзный школе по теории функций и приближений в 1987 в Амберде (см. [6]).

Теорема 1 дает отрицательный ответ на задачу Р. И. Овсепяна (устное сообщение) : обязан ли почти всюду сходиться ортогональный ряд, частичные суммы которого равномерно ограничены

Теорема 2. *Пусть $\{\varphi_n\}$ - ПОНС функций на [0,1]. Тогда существует непрерывная функция f на [0,1] и перестановка τ натурального ряда такие, что ряд Фурье этой функции по системе $\{\varphi_n\}$ после перестановки τ расходится почти всюду и*

$$S_\tau^*(f) = \sup_N \left| \sum_{n=1}^N a_{\tau(n)} \varphi_{\tau(n)}(t) \right|$$

принадлежит классу $L^2[0,1]$.

Теоремы 1 и 2 дают ответ на вышеупомянутую задачу П. Л. Ульянова.

Теорема. *Гарсиа [(см. [5], стр. 65 - 75)] Пусть $\{\varphi_n\}$ - ОН система функций на [0,1]. Тогда для любой последовательности $\{a_n\} \in l^2$ существует перестановка τ натурального ряда такая, что*

$$\int_0^1 \sup_N \left| \sum_{n=1}^N a_{\tau(n)} \varphi_{\tau(n)}(t) \right|^2 dt \le C \sum_{n=1}^\infty a_n^2,$$

где C абсолютная постоянная.

§3. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определим систему типа Хаара (см. [5], стр. 119). Пусть задано семейство измеримых множеств

$$\mathcal{E} = \left\{ \{E_k^{(i)}\}_{i=1}^{2^k} \right\}_{k=0}^\infty ,$$

$$E_0^{(1)} = [0,1], \qquad E_k^{(i)} \subset [0,1] \quad \text{при } k > 0,$$

удовлетворяющих условиям

I. $\quad \operatorname{mes} E_k^{(i)} = 2^{-k}$,

II. $\quad E_k^{(i)} = E_{k+1}^{(2i-1)} \cup E_{k+1}^{(2i)}$,

III. $\quad E_k^{(i)} \cap E_k^{(j)} = \emptyset, \quad$ при $i \ne j$,

где mes E - мера Лебега на [0,1].

Для семейства $\mathcal{E}$ определим $\tilde{\chi}_1(t) \equiv 1$,

$$\tilde{\chi}_n(t) = \begin{cases} \sqrt{2^k}, & \text{при } t \in E_{k+1}^{(2i-1)}, \\ -\sqrt{2^k}, & \text{при } t \in E_{k+1}^{(2i)}, \\ 0, & \text{при } t \in [0,1] \setminus E_k^{(i)}, \end{cases}$$

где $n = 2^k + i$, $1 \le i \le 2^k$, $k = 0, 1, \dots$.

Известно (см. [5], стр. 119), что для любой системы типа Хаара существует сохраняющее меру отображение $\omega(t)$ отрезка $[0,1]$ на себя такое, что $\tilde{\chi}_n(t) = \chi_n(\omega(t))$, где χ_n - система Хаара. Отрезки вида $\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]$ называются ***двоичными отрезками***.

Сформулируем лемму, которая, фактически, уже представлена в работе [4], но отдельно не сформулирована (см. также [5], стр. 115).

Лемма 1. *(А. М. Олевский) Существует подпоследовательность $\{N_m\}_{m=1}^{\infty}$ натуральных чисел, множество $E_m \subset [0,1]$, $\operatorname{mes} E_m \ge 1 - 1/m^2$, перестановка σ натуральных чисел и полиномы $Q_m(t)$ по системе Хаара*

$$Q_m(t) = \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} a_n \chi_n(t)$$

со свойствами

$$1) \qquad \|Q_m\|_\infty \le \frac{1}{m^2}, \qquad \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} |a_n \chi_n(t)| \le 1, \quad t \in [0,1],$$

$$2) \qquad \{\sigma(N_{m-1}+1), \sigma(N_{m-1}+2), \dots, \sigma(N_m)\} = \{N_{m-1}+1, N_{m-1}+2, \dots, N_m\}$$

$$\max_{N_{m-1} < N \le N_m} \left| \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} a_{\sigma(n)} \chi_{\sigma(n)}(t) \right| \ge \frac{1}{4}, \qquad \textit{при } t \in E_m.$$

Из этой леммы непосредственно получаем следующее

Следствие 1. Пусть $\{\tilde{\chi}_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ - система типа Хаара. Тогда существует подпоследовательность $\{a_n\} \in l^2$ и перестановка σ натуральных чисел такие, что $\|a_n \tilde{\chi}_n\|_\infty \to 0$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \tilde{\chi}_{\sigma(n)}(t)$ расходится почти всюду и

$$\sup_N \left\| \sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)} \tilde{\chi}_{\sigma(n)} \right\|_\infty < \infty.$$

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{M}$ — подмножество отрезка $[0,1]$, состоящее из конечного числа двоичных отрезков. Тогда для любого натурального числа M и положительных чисел $\varepsilon, \delta < 1/2$ существует разбиение множества $\mathcal{M}$ на два подмножества $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ одинаковой меры, состоящих из двоичных отрезков, натуральное число M', тригонометрический полином*

$$P(t) = \sum_{j=M+1}^{M'} c_j \cos(2\pi j t + \alpha_j)$$

и перестановка λ *натуральных чисел* $\{M+1, M+2, ..., M'\}$, *для которых*

$$\text{a)}\qquad |P(t)| < \varepsilon \quad \text{при } t \in [0,1]\setminus\mathcal{M}, \quad ||P||_\infty \le 2;$$

$$\text{b)}\qquad mes\,\{t : |P(t) - \chi_{\mathcal{M}_1}(t) + \chi_{\mathcal{M}_2}(t)| \ge \varepsilon\} < \delta;$$

$$\text{c)}\qquad \max_N \left|\sum_{j=M+1}^{N} c_{\lambda(j)}\cos(2\pi\lambda(j)t + \alpha_{\lambda(j)})\right| \le 64.$$

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon,\ \delta < 1/2$, $\Delta = (a,b) \subset [0,1]$. Положим

$$V_\Delta^{(\delta)}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0,a] \cup [b,1]; \\ 1, & \text{если } t \in [a+\delta(b-a), b-\delta(b-a)];. \\ \text{линейна на отрезках} & [a, a+\delta(b-a)] \text{ и } [b-\delta(b-a), b]. \end{cases} \tag{1}$$

Обозначим

$$v^{(\delta)}(t) = V_{(0,1/2)}^{(\delta)}(t) - V_{(1/2,1)}^{(\delta)}(t). \tag{2}$$

Ясно, что

$$\int_0^1 v^{(\delta)}(t)\,dt = 0. \tag{3}$$

Пусть $\mathcal{M}$ состоит из непересекающихся двоичных отрезков $\{\Delta_1, ..., \Delta_k\}$ и Δ - один из этих отрезков. Из (1) и (2) следует, что $V_\Delta^{(\delta/8)}(t)$ и $v^{(\delta/8)}(t)$ - абсолютно непрерывные функции. Поэтому

$$S_n(t, V_\Delta^{(\delta/8)}) \rightrightarrows V_\Delta^{(\delta/8)}(t), \quad S_n(t, v^{(\delta/8)}) \rightrightarrows v^{(\delta/8)}, \quad \text{прич } n \to \infty, \tag{4}$$

$$||S_n(t, V_\Delta^{(\delta/8)})||_\infty \le 2\mathbf{Var}(V_\Delta^{(\delta/8)} \le 4, \tag{5}$$

$$||S_n(t, v^{(\delta/8)})||_\infty \le 2\mathbf{Var}(v^{(\delta/8)} \le 8. \tag{6}$$

Из (4) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и натурального k существует натуральное число n_0 такое, что

$$||S_{n_0}(t, v^{(\delta/8)}) - v^{(\delta/8)}(t)||_\infty \le \frac{\varepsilon}{k}, \tag{7}$$

$$||S_{n_0}(t, V_\Delta^{(\delta/8)}) - V_\Delta^{(\delta/8)}(t)||_\infty \le \frac{\varepsilon}{k}. \tag{8}$$

Для натурального M_Δ возьмем m так, чтобы

$$2^m - 2n_0 > M_\Delta, \tag{9}$$

и определим $M'_\Delta = 2^m n_0 + n_0$. Пусть

$$S_{n_0}(t, V_\Delta^{(\delta/8)}) = \sum_{j=0}^{n_0} c'_j \cos(2\pi jt + \alpha'_j),$$

$$S_{n_0}(t, v^{(\delta/8)}) = \sum_{j=1}^{n_0} c''_j \cos(2\pi jt + \alpha''_j).$$

Рассмотрим полином

$$P_\Delta(t) = S_{n_0}(t, V_\Delta^{(\delta/8)}) \cdot S_{n_0}(2^m t, v^{(\delta/8)}) = \sum_{j=M_\Delta+1}^{M'_\Delta} c_j \cos(2\pi jt + \alpha_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n_0} \sum_{p=0}^{n_0} c''_j \cos(2^{m+1} j\pi t + \alpha''_j) c'_p \cos(2\pi pt + \alpha'_p) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n_0} \sum_{p=0}^{n_0} \frac{c''_j c'_p}{2} [\cos(2\pi(2^m j - p)t + \alpha''_j - \alpha'_p) - \cos(2\pi(2^m j + p)t + \alpha''_j + \alpha'_p)]. \quad (10)$$

Из (9) следует, что последнее равенство представляет перестановку ряда Фурье полинома $P_\Delta(t)$ и эта перестановка действует из $(M_\Delta, M'_\Delta]$ в $(M_\Delta, M'_\Delta]$. Учитывая (5), (6) и (10), получаем

$$\max_{N \le M'_\Delta} \left\| \sum_{j=M_\Delta+1}^{N} c_{\lambda(j)} \cos(2\pi\lambda(j)t + \alpha_{\lambda(j)}) \right\|_\infty \le 64. \quad (11)$$

Обозначим

$$\mathcal{M}_\Delta^+ = \{t \in \Delta : v^{(\delta/8)}(2^m t) \ge 0\}, \quad \mathcal{M}_\Delta^- = \{t \in \Delta : v^{(\delta/8)}(2^m t) < 0\}. \quad (12)$$

Ясно, что $\mathcal{M}_\Delta^+$ и $\mathcal{M}_\Delta^-$ состоят из двоичных отрезков и

$$\operatorname{mes} \mathcal{M}_\Delta^+ = \operatorname{mes} \mathcal{M}_\Delta^-, \quad \mathcal{M}_\Delta^+ \cup \mathcal{M}_\Delta^- = \Delta. \quad (13)$$

Определим $\{M_{\Delta_i}, M'_{\Delta_i}\}_{i=1}^k$ так, чтобы $M_{\Delta_i} > M$ и $(M_{\Delta_i}, M'_{\Delta_i}] \cap (M_{\Delta_j}, M'_{\Delta_j}] = \emptyset$ при $i \ne j$. Обозначим через $P(t)$ тригонометрический полином

$$P(t) = \sum_{i=1}^{k} P_{\Delta_i}(t).$$

Из (7) и (8) следует, что

$$|P(t)| \le \frac{\varepsilon^2}{k^2} \cdot k \le \varepsilon, \quad t \in [0,1] \setminus \mathcal{M}. \quad (14)$$

Из (1), (2), (7), (8) и (12) имеем

$$\operatorname{mes}\{t: \quad |P(t)-\chi_{\mathcal{M}_1}(t)+\chi_{\mathcal{M}_2}(t)|\le\varepsilon\}<\delta, \tag{15}$$

где

$$\mathcal{M}_1=\bigcup_{i=1}^{k}\mathcal{M}^{+}_{\Delta_i}, \quad \mathcal{M}_2=\bigcup_{i=1}^{k}\mathcal{M}^{-}_{\Delta_i}. \tag{16}$$

Из (13) следует, что $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ состоят из двоичных отрезков и

$$\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2=\emptyset, \quad \mathcal{M}=\mathcal{M}_1\cup\mathcal{M}_2, \quad \operatorname{mes}\mathcal{M}_1=\operatorname{mes}\mathcal{M}_2. \tag{17}$$

Для любого отрезка $(M_{\Delta_i}, M'_{\Delta_i}]$ определим перестановку λ так, чтобы (11) имело бы место для $\Delta=\Delta_i$. Получаем

$$\max_N\left\|\sum_{j=M+1}^{N}c_{\lambda(j)}\cos(2\pi\lambda(j)t+\alpha_{\lambda(j)})\right\|_\infty\le 64. \tag{18}$$

Из (15) – (18) следует доказательство Леммы 2.

Обозначим через X либо $C[0,1]$, либбо $L^p(0,1)$, $1\le p<\infty$. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ - базис в пространстве X и $\{d\mu_n\}_{n=1}^\infty$ – ее сопряженная система.

Лемма 3. *Пусть $\varepsilon_n\downarrow 0$ – последовательность положительных чисел, тогда существуют последовательности натуральных чисел $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ и $\{R_n\}_{n=0}^\infty$, система типа Хаара $\{\tilde\chi_n\}_{n=1}^\infty$, тригонометрические полиномы $P_n(t)$ и перестановка λ натуральных чисел со свойствами :*

1) $$P_n(t)=\sum_{j=M_{n-1}+1}^{M_n}c_j\cos(2\pi jt+\alpha_j),$$

$$\max_{M_{n-1}<M\le M_n}\left\|\sum_{j=M_{n-1}+1}^{M}c_{\lambda(j)}\cos(2\pi\lambda(j)t+\alpha_{\lambda(j)})\right\|_\infty\le 64\|P\|_\infty,$$

$$\{\lambda(M_{n-1}+1),\lambda(M_{n-1}+2),\dots,\lambda(M_n)\}=\{M_{n-1}+1,M_{n-1}+2,\dots,M_n\};$$

2) $$\|P_n\|_\infty\le 2\|\tilde\chi_n\|_\infty, \qquad |P_n(t)|\le\varepsilon_n \quad \text{при } t\in\bigcup_{j=1}^{n-1}U_j,$$

где $$U_j=\{t: |P_j(t)-\tilde\chi_j(t)|\ge\varepsilon_j\}, \qquad \operatorname{mes}\left(\bigcup_{j=1}^{n}U_j\right)\le\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j;$$

3) $$\left\|\delta_{n,j}P_n-\sum_{i=R_{j-1}+1}^{R_j}\varphi_i(P_n,d\mu_i)\right\|_X\le\varepsilon_n\varepsilon_j$$

для любых натуральных чисел n и j.

Доказательство. В случае $X = L^p$ $(1 \le p < \infty)$ доказательство простое. Поэтому мы докажем лемму, когда $X = C[0,1]$. Построим последовательности $\{M_n\}$, $\{R_n\}$, $\{P_n(t)\}$ и $\{\widetilde{\chi}_n(t)\}$ по индукции. Возьмем

$$M_0 = -1, \quad M_1 = 1, \quad P(t) \equiv 1, \quad \widetilde{\chi}_1(t) \equiv 1, \quad R_0 = 0.$$

Выберем R_1 так, чтобы

$$\left\| P_1 - \sum_{i=1}^{R_1} \varphi_i(P_1, d\mu_i) \right\|_\infty \le \varepsilon_1,$$

$$\left\| \sum_{i=l}^{\infty} \varphi_i(P_1, d\mu_i) \right\|_\infty \le \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4}, \quad \text{для любых } l > R_1.$$

Предположим, что мы уже построили перестановку λ, $\{M_k\}_{k=1}^{n-1}$, $\{R_k\}_{k=1}^{n-1}$, $\{P_k(t)\}_{k=1}^{n-1}$ и $\{\widetilde{\chi}_k(t)\}_{k=1}^{n-1}$ со свойствами 1 и 2 Леммы 3. Потребуем также, чтобы

$$\left\| \sum_{i=l}^{\infty} \varphi_i(P_1, d\mu_i) \right\|_\infty \le \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4}, \quad \text{для любых } l > R_{n-1}, \quad 1 \le k < n.$$

Мы можем предположить, что интервалы постоянства функций $\{\widetilde{\chi}_k(t)\}_{k=1}^{n-1}$ являются объединением конечного числа двоичных отрезков. Меры μ_i представляются следующим образом : $d\mu_i(t) = q_i(t) + d\widetilde{\mu}_i(t)$, где $q_i \in L^1(0,1)$ и $\widetilde{\mu}_i$ – сингулярные меры. Существует множество $\Omega \subset [0,1]$, $\text{mes}\Omega = 0$ такое, что

$$|\mu_i|([0,1] \setminus \Omega) = 0 \quad \text{для любых } i \in N, \tag{19}$$

где мера $|\mu_i|$ вариация меры μ_i.

Пусть $n = 2^p + s$, $1 \le s \le 2^p$. Возьмем множество $E_p^{(s)}$. Оно состоит из конечного числа двоичных отрезков. Из (19) следует, что существует множество $\mathcal{M}$, состоящее из конечного числа двоичных отрезков, для которого имеем

$$\mathcal{M} \subset E_p^{(s)} \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i, \qquad |\mu_i|(\mathcal{M}) < \delta, \tag{20}$$

$$\text{mes} \left(E_p^{(s)} \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i \right) < \text{mes}\, \mathcal{M} + \frac{\varepsilon_n}{2}, \quad i = 1, \dots, n-1, \tag{21}$$

где

$$\delta = \frac{\varepsilon_n^2}{4 \sum_{i=1}^{R_{n-1}} \|\varphi_i\|_\infty \|P_n\|_\infty}. \tag{22}$$

Выберем полиномы $\{\widetilde{q}_i\}_{i=1}^{R_{n-1}}$ так, чтобы

$$||\widetilde{q}_i - q_i||_1 \leq \varepsilon, \quad \text{где} \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_n^2}{4\sum\limits_{i=1}^{R_{n-1}} ||\varphi_i||_\infty(||P_n||_\infty + ||\widetilde{\mu}_i||)}, \quad i = 1, 2, ... R_{n-1}. \tag{23}$$

Возьмем

$$M > \max\{M_{n-1}, \deg \widetilde{q}_i, \quad i = 1, 2, ..., R_{n-1}\}. \tag{24}$$

Используя Лемму 2 получаем, что существуют множества $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$, состоящие из двоичных интервалов, полином

$$P_n(t) = \sum_{j=M+1}^{M'} c_j \cos(2\pi jt + \alpha_j),$$

и перестановка λ натуральных чисел $\{M+1, M+2, ..., M'\}$ со свойствами

a) $|P_n(t)| \leq \varepsilon$, для любых $t \in [0,1] \setminus \mathcal{M}$,

b) $\text{mes}\,\{t : |P_n(t) - \sqrt{2^p}(\chi_{\mathcal{M}_1}(t) - \chi_{\mathcal{M}_2}(t))| \geq \varepsilon\} < \delta$,

c) $\max\limits_{M<N\leq M'} \left|\sum\limits_{j=M+1}^{N} c_{\lambda(j)} \cos(2\pi\lambda(j)t + \alpha_{\lambda(j)})\right| \leq 64\sqrt{2^p}$.

Оценим

$$\begin{aligned}A(t) = \sum_{i=1}^{R_{n-1}} |\varphi_i(t)\langle P_n, d\mu_i\rangle| = \\ = \sum_{i=1}^{R_{n-1}} |\varphi_i(t)\langle P_n, \widetilde{q}_i\rangle + \varphi_i(t)\langle P_n, q_i - \widetilde{q}_i\rangle + \varphi_i(t)\langle P_n, d\widetilde{\mu}_i\rangle| \leq \\ \leq A_1(t) + A_2(t) + A_3(t),\end{aligned}$$

где

$$A_1(t) = \sum_{i=1}^{R_{n-1}} |\varphi_i(t)\langle P_n, \widetilde{q}_i\rangle|, \qquad A_2(t) = \sum_{i=1}^{R_{n-1}} |\varphi_i(t)\langle P_n, q_i - \widetilde{q}_i\rangle|,$$

$$A_3(t) = \sum_{i=1}^{R_{n-1}} |\varphi_i(t)\langle P_n, d\widetilde{\mu}_i\rangle|.$$

Согласно (24), $A_1(t) \equiv 0$. Из (23) имеем

$$A_2(t) \leq \sum_{i=1}^{R_{n-1}} ||\varphi_i||_\infty ||P_n||_\infty ||q_i \widetilde{q}_i||_1 \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{R_{n-1}} ||\varphi_i||_\infty ||P_n||_\infty \leq \frac{\varepsilon_n^2}{2}.$$

Согласно (22), a) и b)

$$\begin{aligned}|A_3(t)| \leq \sum_{i=1}^{R_{n-1}} ||\varphi_i||_\infty \left|\int_{\mathcal{M}} P_n\, d\widetilde{\mu}_i\right| + \sum_{i=1}^{R_{n-1}} ||\varphi_i||_\infty \left|\int_{[0,1]\setminus\mathcal{M}} P_n\, d\widetilde{\mu}_i\right| \leq \\ \leq \delta \sum_{i=1}^{R_{n-1}} ||\varphi_i||_\infty + \sum_{i=1}^{R_{n-1}} ||\varphi_i||_\infty \varepsilon ||\widetilde{\mu}_i||.\end{aligned}$$

Имеем

$$\left\| \delta_{n,j} P_n - \sum_{i=R_{j-1}+1}^{R_j} \varphi_i(P_n, d\mu_i) \right\|_\infty \le \varepsilon_n \varepsilon_j, \quad 1 \le j \le n-1.$$

Так как $\{\varphi_n\}$ - базис, получаем, что существует R_n такое, что

$$\left\| P_k - \sum_{i=R_{j-1}+1}^{R_j} \varphi_i(P_k, d\mu_i) \right\|_\infty \le \varepsilon_n \varepsilon_k, \quad 1 \le k \le n,$$

$$\left\| \sum_{i=l+1}^{\infty} \varphi_i(P_k, d\mu_i) \right\|_\infty \le \frac{\varepsilon_{n+1}\varepsilon_k}{2}, \quad 1 \le k \le n, \quad \text{для любых } l > R_j.$$

Пусть $M_n = M'$, а перестановка λ представляет $(M_{n-1}, M_n]$ таким образом, чтобы имело место b) . Определим $\tilde{\chi}_n(t)$, Разобьем множество $E_p^{(s)} \setminus \mathcal{M}$ на два подмножества $\mathcal{M}_3, \mathcal{M}_4$ одинаковой меры, состоящие из двоичных отрезков. Определим

$$E_{p+1}^{(2s-1)} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_3, \quad E_{p+1}^{(2s)} = \mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_4.$$

Этот шаг индукции доказывает Лемму 3.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1, 2

Доказательство Теоремы 1. Для последовательности $\varepsilon_n = 4^{-n}$ построим полиномы $P_n(t)$ как в Лемме 3 и рассмотрим функцию

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(t),$$

где $\{a_n\}$ - та же последовательность, что и в Следствии 1. Докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{N} a_n P_n(t)$ равномерно сходится к $f(t)$. Оценим

$$\left\| \sum_{n=N'+1}^{N''} a_n P_n \right\|_\infty$$

Обозначим

$$\tilde{U}_j = U_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} U_i, \quad \tilde{U}_\infty = [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i.$$

Если $t \in \tilde{U}_j$, то

$$\left| \sum_{n=N'+1}^{N''} a_n P_n(t) \right| \le \left| \sum_{n=N'+1}^{j-1} [a_n P_n(t) - a_n \tilde{\chi}_n(t) + a_n \tilde{\chi}_n(t)] \right| +$$

$$+|a_j P_j(t)| + \left|\sum_{n=j+1}^{N''} a_n P_n(t)\right| \le \sum_{n=N'+1}^{j-1} \varepsilon_n +$$

$$+\left|\sum_{n=N'+1}^{j-1} a_n \widetilde{\chi}_n(t)\right| + \sum_{n=j+1}^{N''} \varepsilon_n \le \max_{N>N'} \left\|\sum_{n=N'+1}^{N} a_n \widetilde{\chi}_n(t)\right\|_\infty + \sum_{n=N'+1}^{\infty} \frac{1}{4^n}.$$

При $t \in \widetilde{U}_\infty$, имеем

$$\left|\sum_{N'}^{N''} a_n P_n(t)\right| \le \left|\sum_{n=N'+1}^{N''} a_n \widetilde{\chi}_n(t)\right| + \sum_{n=N'+1}^{\infty} \frac{1}{4^n}.$$

Так как $\sum a_n \widetilde{\chi}_n(t)$ сходится равномерно, то ряд $\sum a_n P_n$ также сходится равномерно к $f(x)$.

Докажем, что на множестве $\widetilde{U}_\infty$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} P_{\sigma(n)}(t)$ расходится почти всюду. В самом деле, при $t \in \widetilde{U}_\infty$ получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}(\widetilde{\chi}_{\sigma(n)}(t) - P_{\sigma(n)}(t))| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}.$$

Так как $\sum a_{\sigma(n)} \widetilde{\chi}_{\sigma(n)}$ расходится почти всюду, то расходится почти всюду и ряд $\sum a_{\sigma(n)} P_{\sigma(n)}(t)$. Докажем, что

$$\sup_N \left\|\sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)} P_{\sigma(n)}(t)\right\|_\infty < \infty. \tag{25}$$

Так как

$$\sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} |a_n P_n(t)| \le \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} |a_n \widetilde{\chi}_n(t)| + \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} \varepsilon_n \le 2,$$

то получаем (25). Переставляя полиномы P_n по перестановке λ, получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \sum_{j=N_{\sigma(n)-1}+1}^{N_{\sigma(n)}} c_{\lambda(j)} \cos(2\pi\lambda(j)t + \alpha_{\lambda(j)}) \tag{26}$$

расходится на множестве $\widetilde{U}_\infty$ почти всюду и

$$\sup_N \left\|\sum_{n=1}^{N} c_{\sigma(n)} \cos[2\pi\sigma(n)t + \alpha_{\sigma(n)}]\right\|_\infty < \infty.$$

Теорема 1 для тригонометрической системы доказана.

Для базисов $C[0,1]$ ряд $\sum a_n P_n(t)$ заменим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \widetilde{P}_n, \qquad \text{где} \qquad \widetilde{P}_n = \sum_{i=R_{n-1}+1}^{R_n} \varphi_i(P_n, d\mu_i). \tag{27}$$

Из пункта 3) Леммы 3 следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||a_n P_n - a_n \widetilde{P}_n||_\infty < \infty,$$

поэтому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \widetilde{P}_{\sigma(n)}$ расходится почти всюду и

$$\sup_N \left\| \sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)} \widetilde{P}_{\sigma(n)} \right\|_\infty < \infty.$$

Так как φ_n - базис пространства $C[0,1]$, то существует $B > 0$ такое, что

$$\sup_{N \le R_n} \left\| \sum_{i=R_{n-1}+1}^{N} \varphi_i \langle \widetilde{P}_n, \varphi_i \rangle \right\|_\infty \le B ||\widetilde{P}_n||_\infty.$$

Поэтому ряд (27) удовлетворяет условию Теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2. Для ПОНС $\{\varphi_n\}$, применяя Лемму 3, получим многочлены P_n. Так же как при доказательстве Теоремы 1 составим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n, \tag{28}$$

где $\{a_n\}$ – та же самая последовательность, что и в Следствии 1. Поступая так же как при доказательстве Теоремы 1, мы можем доказать, что ряд (28) равномерно сходится к некоторой функции $f(t)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} P_{\sigma(n)}(t) \tag{29}$$

расходится почти всюду и его частичные суммы равномерно ограничены. Наша цель показать, что ряд Фурье функции $f(t)$ искомый, т.е. существует перестановка τ натурального ряда такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}(f) \varphi_{\tau(n)} \tag{30}$$

расходится почти всюду и для его мажоранты имеем

$$||S_\tau^*(f, \{\varphi_n\})||_2 < \infty.$$

Переставим ряд Фурье функции $f(t)$ следующим образом :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=R_{\sigma(n)-1}+1}^{R_{\sigma(n)}} \varphi_{\tau(i)} \langle f, \varphi_{\tau(i)} \rangle, \tag{31}$$

где $\tau([R_{\sigma(n)-1}+1, R_{\sigma(n)}]) = [R_{\sigma(n)-1}+1, R_{\sigma(n)}]$, получаем

$$||S^*_\tau(\widetilde{P}_{\sigma(n)})||_2 = \left\| \max_{N \le R_{\sigma(n)}} \left| \sum_{i=R_{\sigma(n)-1}}^{N} \varphi_{\tau(i)}(t)\langle f, \varphi_{\tau(i)}\rangle \right| \right\|_2 \le$$

$$\le C \left(\sum_{i=R_{\sigma(n)-1}+1}^{R_{\sigma(n)}} |\langle f, \varphi_i\rangle|^2 \right)^{1/2} \tag{32}$$

(следует из теоремы Гарсиа). Здесь

$$\widetilde{P}_n = \sum_{i=R_{n-1}+1}^{R_n} \varphi_i\langle f, \varphi_i\rangle.$$

Докажем, что перестановка τ искомая. Оценим

$$||\widetilde{P}_n - a_n P_n||_2 = \left\| \sum_{i=R_{n-1}+1}^{R_n} \varphi_i\langle \sum_{j=1}^{\infty} a_j P_j, \varphi_i\rangle - a_n P_n \right\|_2 =$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sum_{i=R_{n-1}+1}^{R_n} \varphi_i\langle P_j, \varphi_i\rangle - a_n P_n \right\|_2 \le$$

$$\le \sum_{j=1, j\neq n}^{\infty} |a_j| \left\| \sum_{i=R_{n-1}+1}^{R_n} \varphi_i\langle P_j, \varphi_i\rangle \right\|_2 + \left\| a_n \sum_{i=R_{n-1}+1}^{R_n} \varphi_i\langle P_n, \varphi_i\rangle - a_n P_n \right\|_2$$

Используя пункт 3) Леммы 3 получаем

$$||\widetilde{P}_n - a_n P_n||_2 \le \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_n \varepsilon_j \le \varepsilon_n.$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||\widetilde{P}_n - a_n P_n||_2 < 1. \tag{33}$$

Следовательно, $\sum(\widetilde{P}_n - a_n P_n)$ сходится безусловно почти всюду. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{P}_{\sigma(n)}$ расходится почти всюду, так как расходится почти всюду ряд (29).

Оценим мажоранту частичных сумм ряда (31) :

$$S^*_\tau(f) = \sup_N \left| \sum_{n=1}^{N} \widetilde{P}_{\sigma(n)} \right| + \sup_n S^*_\tau(P_{\sigma(n)}) \le$$

$$\le \sup_N \left| \sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)} P_{\sigma(n)} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} |\widetilde{P}_{\sigma(n)} - a_{\sigma(n)} P_{\sigma(n)}| + \left[\sum_{n=1}^{\infty} (S^*_\tau(P_{\sigma(n)}))^2 \right]^{1/2}$$

Используя (29), (33) и (32), получаем

$$||S_\tau^*(f)||_2 \le D+1+\left[\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} S_\tau^*(P_{\sigma(n)}(t))^2\,dt\right]^{1/2} \le$$

$$\le D+1+\left(\sum_{n=1}^{\infty} C \sum_{i=R_{\sigma(n)-1}+1}^{R_{\sigma(n)}} |(f,\varphi_i)|^2\right)^{1/2},$$

а последние разложение, согласно равенству Парсеваля равно $D+1+C||f||_2$.

Заключаем, что $||S_\tau^*(f)||_2$ конечна. Теорема 2 доказана.

ABSTRACT. The paper proves, that the trigonometric system (or any basis of continuous functions space) has a rearrangement by which almost everywhere divergent series exists with uniformly bounded sequence of partial sums. It is shown also, that for every complete orthonormal system a rearrangement exists, by which an almost everywhere divergent series with square integrable maximal function of partial sums can be written.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров, Избранные Труды, М., Наука, 1985.
2. Z. Zahorski, "Une serie de Fourier permutee d'une function de classe L^2 divergente presque partout," C.r. Acad. sci. Paris, vol. 251, pp. 501 – 503, 1960.
3. П. Л. Ульянов, "А. Н. Колмогоров и расходящиеся ряды Фурье", Успехи мат. наук, т. 38, №4(232), стр. 51 – 90, 1983.
4. A. M. Olevski, Fourier Series with Respect to General Orthogonal System, Springer- Verlag, B, H, NY, 1975.
5. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, М., Наука, 1984.
6. С. Ш. Галстян, "О перестановках рядов Фурье", Всесоюзная школа по теории функций, Тезисы докладов, Ереван, 1987.

9 Ноября 1993

Ереванский государственный университет

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛАХ, СУММИРУЕМЫХ МЕТОДОМ РИМАНА

Г. Г. Геворкян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №6, 1993

В работе рассматриваются тригонометрические интегралы, суммируемые методом Римана, где $\chi(t)$ имеет ограниченную вариацию на каждом конечном интервале и в каждой точке $\chi(t) = \frac{1}{2}[\chi(t+0) + \chi(t-0)]$, удовлетворяющей условию $\lim \sup\limits_{0<h<1} |\chi(t+h) - \chi(t)| = 0$. В частности, если почти всюду $\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t) = f(x)$ для некоторой интегрируемой на каждом конечном интервале функции $f(x)$, и на каждом конечном интервале $[a,b]$,

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot \mu\left\{x \in [a,b] \colon \sup_{h>0}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t)\right| > \lambda\right\} = 0,$$

то для каждого t и τ, $\chi(t+\tau) - \chi(t) = (C,1)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-itx) \times \frac{\exp(-it\tau)-1}{-ix}\,dx$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются тригонометрические интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\, d\chi(t), \tag{1}$$

суммируемые методом Римана. Предполагается, что функция $\chi(t)$ имеет ограниченную вариацию на каждом конечном интервале, в любой точке $\chi(t) = \frac{1}{2}[\chi(t+0) + \chi(t-0)]$ и удовлетворяет условию

$$\lim \sup_{0<h<1} |\chi(t+h) - \chi(t)| = 0. \tag{2}$$

Заметим, что условие (2) в теории тригонометрических интегралов заменяет условие сходимости коэффициентов к нулю в теории тригонометрических рядов.

Заметим также, что всякий тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, можно рассматривать как интеграл (1) с $\chi(t)$, удовлетворяющей условию (2).

Функцию

$$F(x) = \int_{\{|t|\le 1\}} \frac{\exp(itx) - 1 - itx}{t^2}\, d\chi(t) - \int_{\{|t|\ge 1\}} \frac{\exp(itx)}{t^2}\, d\chi(t) \qquad (3)$$

называют функцией Римана интеграла (1). Известно, что (см. [1]) из условия (2) следует существование второго интеграла в (3) (как несобственного интеграла Римана–Стильтьеса), непрерывность функции $F(x)$ и ее гладкость, т.е.

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h} = 0.$$

Обозначим

$$S(x,h) = \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2}.$$

Если существует предел $S(x,h)$ при $h \to 0$ и он равен S, то говорят, что интеграл (1) в точке x суммируется методом Римана к значению S. Известно, что если для некоторого x существует

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} \exp(itx)\, d\chi(t) = S,$$

то интеграл (1) суммируется методом Римана к значению S в точке x (см. [1], стр. 421).

Положим

$$S^*(x) = \sup_{h\ne 0} |S(x,h)|.$$

Справедлива формула

$$S(x,2h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t)$$

(см. [1], стр. 422). Ниже мы докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть интеграл (1) суммируется почти всюду методом Римана к функции $f(x)$, интегрируемой на каждом конечном интервале и на каждом $[a,b]$ выполняется условие*

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot \mu\{x \in [a,b] \colon S^*(x) > \lambda\} = 0. \qquad (4)$$

Тогда для всех t и τ имеет место

$$\chi(t+\tau)-\chi(t)=(C,1)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-itx)\,\frac{\exp(-ix\tau)-1}{-ix}\,dx=$$
$$=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2\pi A}\int_0^A d\sigma\int_{-\sigma}^{\sigma} f(x)\exp(-itx)\frac{\exp(-ix\tau)-1}{-ix}\,dx. \tag{5}$$

В частности, если $f(x)=0$ почти всюду, то $\chi(t)$ - постоянная .

В случае, когда $\chi(t)$ – абсолютно непрерывная на каждом интервале и $\chi'(t)=$ $=\varphi(t)$ почти всюду, т.е. $\varphi(t)$ – локально интегрируемая функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{0<h<1}\left|\int_t^{t+h}\varphi(z)\,dz\right|=0 \tag{6}$$

и

$$S(x,2h)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2\varphi(t)\,dt, \tag{7}$$

справедлива

Теорема 2. *Пусть $\lim\limits_{h\to0}S(x,h)=f(x)$ почти всюду на $(-\infty,+\infty)$, где $S(x,h)$ определяется формулой (7), и $f(x)$ интегрируема на каждом конечном интервале. Если выполнено условие (4), то для почти всех t*

$$\varphi(t)=(C,1)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\exp(-itx)\,dx=$$
$$=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2\pi A}\int_0^A dy\int_{-y}^{y}f(x)\exp(-itx)\,dx.$$

В частности, если $f(x)=0$ почти всюду, то $\varphi(t)=0$ почти всюду.

Доказательства этих теорем существенно опираются на одну теорему о суммирующихся почти всюду методом Римана тригонометрических рядах [2].

Теорема 3. *(см. [2], Теорема 9.) Пусть коэффициенты ряда $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}a_n\exp(inx)$ стремятся к нулю и ряд на некотором интервале I длины меньше чем 2π, суммируется почти всюду методом Римана к интегрируемой на I функции $f(x)$. Если*

$$\liminf_{\lambda\to\infty}\lambda\cdot\mu\left\{x\in I:\ \sup_{h\neq0}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n\exp(inx)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\right|>\lambda\right\}=0,$$

то

$$F(x)=\int_{x_0}^{x}\left\{\int_{x_0}^{y}f(t)\,dt\right\}dy+Ax+B\quad\text{на } I,$$

где x_0 *- некоторая точка в* I, A *и* B *- постоянные, зависящие от* $f(x)$ *и* x_0.

Вопросы единственности тригонометрических рядов, суммируемых почти всюду методом Римана, исследованы в работах [2 - 5].

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 1. *Если* $\chi(t)$ *удовлетворяет условию (2), то*

$$\lim_{a\to+\infty}\int_a^{a+\lambda}\exp(itx)\,d\chi(t)=0 \quad \text{для всех } x \text{ и } \lambda.$$

Если x *и* λ *принадлежат ограниченным множествам, то сходимость равномерная.*

Доказательство. Очевидно, что

$$\int_a^{a+\lambda}\exp(itx)\,d\chi(t)=\int_a^{a+\lambda}\cos xt\,d\chi(t)+i\int_a^{a+\lambda}\sin xt\,d\chi(t).$$

Пусть $a=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_k=a+\lambda$ выбрана так, что $\cos xt$ монотонна на $[\lambda_{i-1},\lambda_i]$, $i=1,2,\ldots,k$. Очевидно, что если x и λ ограничены, то k также будет ограниченным. Тогда

$$\int_a^{a+\lambda}\cos xt\,d\chi(t)=\sum_{i=1}^{k}\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i}\cos xt\,d\chi(t)=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\left(\chi(\lambda_i)\cos x\lambda_i-\chi(\lambda_{i-1})\cos x\lambda_{i-1}\right)-\sum_{i=1}^{k}\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i}\chi(t)\,d\cos xt. \tag{8}$$

Учитывая, что $d\cos xt$ - знакопостоянная мера на $[\lambda_{i-1},\lambda_i]$, получим

$$\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i}\chi(t)\,d\cos xt=\xi_i\left(\cos\lambda_i x-\cos\lambda_{i-1}x\right), \tag{9}$$

где

$$\xi_i\in\left[\inf_{t\in[\lambda_{i-1},\lambda_i]}\chi(t),\ \sup_{t\in[\lambda_{i-1},\lambda_i]}\chi(t)\right]. \tag{10}$$

Из (8) (10) следует, что

$$\int_a^{a+\lambda}\cos xt\,d\chi(t)=\sum_{i=1}^{k}\left(\cos\lambda_i x(\chi(\lambda_i)-\xi_i)+\cos\lambda_{i-1}x(\chi(\lambda_{i-1})-\xi_i)\right). \tag{11}$$

Из (11), (10) и (2) получаем

$$\lim_{a\to+\infty}\int_a^{a+\lambda}\cos xt\,d\chi(t)=0.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\lim_{a\to+\infty}\int_a^{a+\lambda}\sin xt\,d\chi(t)=0.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если на некотором* $[a,b]$

$$\lim_{h\to 0} S(x,2h) = \lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t) = f(x)$$

почти всюду и

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k\cdot\mu\{x\in[a,b]:\quad S^*(x) > \lambda_k\} = 0$$

при некотором λ_k, *стремящемся к* $+\infty$, *то*

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t+\tau) = \exp(-ix\tau)f(x)$$

почти всюду и

$$\lim_{k\to\infty}\lambda_k\cdot\mu\left\{x\in[a,b]:\quad \sup_{h\neq 0}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t+\tau)\right| > \lambda_k\right\} = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t+\tau) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ix(t-\tau))\left(\frac{\sin h(t-\tau)}{h(t-\tau)}\right)^2 d\chi(t) = \\
&= \exp(-ix\tau)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t) + \\
&+ \exp(-ix\tau)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(itx)\left[\left(\frac{\sin h(t-\tau)}{h(t-\tau)}\right)^2 - \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2\right] d\chi(t).
\end{aligned} \tag{12}$$

Пусть

$$\Phi_x(t) = \int_0^t \exp(ix\theta)\,d\chi(\theta).$$

Известно, что равномерно для $x\in[a,b]$, $\Phi_x(t) = o(|t|)$, при $t\to\infty$.

Из (12) следует, что для доказательства леммы достаточно доказать, что

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\sin h(t-\tau)}{h(t-\tau)}\right)^2 - \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2\right] d\Phi_x(t) = 0 \tag{13}$$

равномерно для $x\in[a,b]$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\sin h(t-\tau)}{h(t-\tau)}\right)^2 - \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2\right] d\Phi_x(t) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\left[\Phi_x(t+\tau) - \Phi_x(t)\right] = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\Phi_x(t+\tau) - \Phi_x(t)\right] d\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\Phi_x(\frac{t}{h}+\tau) - \Phi_x(\frac{t}{h})\right] d\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2
\end{aligned} \tag{14}$$

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin ht}{ht} \right)^2 \right| dt < +\infty,$$

и для $t \neq 0$ (см. Лемму 1)

$$\lim_{h \to 0} \left[\Phi_x\left(\frac{t}{h} + \tau\right) - \Phi_x\left(\frac{t}{h}\right) \right] = 0 \quad \text{равномерно для } x \in [a, b],$$

из (14) получаем (13). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть интеграл (1) почти всюду на $[a, b]$ суммируется методом Римана к интегрируемой на $[a, b]$ функции $f(x)$ и*

$$\liminf_{\lambda \to \infty} \lambda \cdot \mu \{x \in [a, b] : S^*(x) > \lambda\} = 0.$$

Тогда для любой точки $x_0 \in [a, b]$

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} dy \int_{x_0}^{y} f(t)\, dt + Ax + B, \tag{15}$$

где A и B постоянные.

Доказательство. Пусть $J \subset [a, b]$ – произвольный отрезок длины меньше 2π. Выберем интервал J' длины 2π, содержащий J. Пусть $L(x)$ бесконечно дифференцируемая функция, равная 1 на J и нулю вне J'. Тогда (см. [1])

$$\int_{J'} F(x) L(x) \exp(-inx)\, dx = o(n^{-2}).$$

Пусть ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{16}$$

является дважды формально продифференцированным рядом Фурье 2π периодической функции, совпадающей с $F(x)L(x)$ на J'. Ясно, что коэффициенты ряда (16) стремятся к нулю.

Пусть J'' – произвольный отрезок, лежащий в J. Тогда для малых h суммами Римана ряда (16) на J'' будут

$$S_1(x, h) = \frac{F(x + h)L(x + h) + F(x - h)L(x - h) - 2F(x)L(x)}{h^2} =$$
$$= \frac{F(x + h) + F(x - h) - 2F(x)}{h^2} = S(x, h).$$

Следовательно, ряд (16) почти всюду на J'' суммируется методом Римана к $f(x)$ и

$$\liminf_{\lambda\to+\infty} \lambda \cdot \mu\left\{x \in J'' : \sup_{h>0} |S(x,h)| > \lambda\right\} = 0.$$

В силу Теоремы 3 имеем

$$F(x) = F(x)L(x) = \int_{x'}^{x} dy \int_{x'}^{y} f(t)\,dt + A'x + B', \quad \text{при} \quad x \in J'', \qquad (17)$$

где $x' \in J''$ и постоянные A' и B' зависят только от x'.

Поскольку J'' — произвольный отрезок, лежащий в J, J — произвольный интервал, лежащий в $[a, b]$, а функция $F(x)$ гладкая, то из (17) следует (15). Лемма доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 2,1

Доказательство Теоремы 2. Из Леммы 3 следует, что

$$F(x) = \int_0^x dy \int_0^y f(t)\,dt + Ax + B.$$

Теорема очевидна, если $\varphi(x)$ равна нулю вне конечного интервала. Поэтому, не ограничивая общности, можем предположить, что $\varphi(x) = 0$ на $(-1, 1)$. Тогда (см. (3))

$$F(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} \exp(itx)\,dt. \qquad (18)$$

Убедимся, что если $x \neq 0$ и x — точка Лебега функции $\frac{\varphi(t)}{t^2}$ или регулярная точка, т.е. $\frac{\varphi(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}[\varphi(x+0) + \varphi(x-0)]$, то

$$-\frac{\varphi(x)}{x^2} = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2\pi A} \int_0^A dy \int_{-y}^{y} F(t) \exp(-itx)\,dt. \qquad (19)$$

Напомним, что сходимость интегралов (18) равномерна на каждом конечном интервале

$$\frac{1}{2\pi A} \int_0^A dy \int_{-y}^{y} F(t) \exp(-itx)\,dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{\varphi(\theta)}{\theta^2}\right) \frac{2\sin^2 \frac{A(x-\theta)}{2}}{A(x-\theta)^2}\,d\theta.$$

Хорошо известно, что если x — точка Лебега функции $\frac{\varphi(\theta)}{\theta^2}$ или регулярная точка и $\varphi(\theta)$ равна нулю вне некоторого интервала (см. [6]), то

$$\frac{\varphi(x)}{x^2} = \frac{2}{\pi} \lim_{A\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{\varphi(\theta)}{\theta^2}\right) \frac{\sin^2 \frac{A(x-\theta)}{2}}{A(x-\theta)^2}\,d\theta$$

Поэтому, для доказательства (19) достаточно установить, что для фиксированного x

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{|\theta|>2|x|}\frac{\varphi(\theta)}{\theta^2}\,\frac{\sin^2\frac{A(x-\theta)}{2}}{A(x-\theta)^2}\,d\theta=\lim_{A\to+\infty}I_x(A)=0. \tag{20}$$

Очевидно

$$|I_x(A)|\le\left|\int_{|\theta|>|x|}\frac{\varphi(x+\theta)}{(x+\theta)^2}\,\frac{\sin^2 A\frac{\theta}{2}}{A\theta^2}\,d\theta\right|$$

Обозначим $\varphi_*(t)=\dfrac{\varphi(t)}{t^2}$ и оценим

$$\int_{|x|}^{+\infty}\varphi_*(x+\theta)\,\frac{\sin^2 A\frac{\theta}{2}}{A\theta^2}\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{A|x|}{2}}\varphi_*\left(x+\frac{2t}{A}\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2dt.$$

Пусть

$$\Phi(t)=\int_0^t\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Тогда (см. (6))

$$\begin{aligned}
&\lim_{a\to\infty}\sup_{0<h<1}\left|\int_a^{a+h}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\right|=\\
&=\lim_{a\to\infty}\sup_{0<h<1}\left|\frac{\Phi(a+h)}{(a+h)^2}-\frac{\Phi(a)}{a^2}--\Phi(\xi)\left(\frac{1}{(a+h)^2}-\frac{1}{a^2}\right)\right|= \qquad (21)\\
&=\lim_{a\to\infty}\sup_{0<h<1}\left|\frac{1}{(a+h)^2}\int_\xi^{a+h}\varphi(\tau)\,d\tau+\frac{1}{a^2}\int_a^\xi\varphi(\tau)\,d\tau\right|=0.
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\Phi_*(t)=\int_0^t\frac{\varphi(\tau)}{\tau^2}\,d\tau,$$

и пусть $t_1<t_2<\ldots<t_k<\ldots$ точки экстремума функции $\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2$ на $\left[\dfrac{A|x|}{2},+\infty\right)$. Функция $\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2$ монотонна на $[t_k,t_{k+1}]$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{A|x|}{2}}^\infty\varphi_*\left(x+\frac{2t}{A}\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2dt=\frac{A}{2}\sum_{i=1}^\infty\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2d\Phi_*\left(x+\frac{2t}{A}\right)=\\
&=\frac{A}{2}\sum_{i=1}^\infty\Bigg[\Phi_*\Big(x+\frac{2t_{i+1}}{A}\Big)\left(\frac{\sin t_{i+1}}{t_{i+1}}\right)^2-\Phi_*\Big(x+\frac{2t_i}{A}\Big)\left(\frac{\sin t_i}{t_i}\right)^2-\\
&-\Phi_*\Big(x+\frac{2\xi_i}{A}\Big)\left(\left(\frac{\sin t_{i+1}}{t_{i+1}}\right)^2-\left(\frac{\sin t_i}{t_i}\right)^2\right)\Bigg],
\end{aligned}$$

где ξ_i точка из интервала $[t_i,t_{i+1}]$. Очевидно, что

$$\sup_A\frac{A}{2}\sum_{i=1}^\infty\left|\left(\frac{\sin t_{i+1}}{t_{i+1}}\right)^2-\left(\frac{\sin t_i}{t_i}\right)^2\right|<+\infty.$$

Следовательно, для любого σ имеем

$$\left|\int_{\frac{A|x|}{2}}^{\infty} \varphi_* \left(x+\frac{2t}{A}\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt\right| \le \max_{\frac{t_i}{A}\le\sigma}\ \sup_{t_i\le\xi_i\le t_{i+1}} \left|\Phi_*(x+\frac{2t_i}{A})-\Phi_*(x+\frac{2\xi_i}{A})\right|+$$
$$+\sup_{\frac{t_i}{A}\ge\sigma}\ \sup_{t_i\le\xi_i\le t_{i+1}}\left|\Phi_*(x+\frac{2t_i}{A})-\Phi_*(x+\frac{2\xi_i}{A})\right|. \tag{22}$$

Для произвольного $\varepsilon>0$ сначала можно выбрать σ такое, что второе слагаемое в (22) было меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ (см. (21)). А затем, учитывая непрерывность функции $\Phi_*(t)$, можно выбрать A настолько большим, чтобы первое слагаемое в (22) тоже было меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, мы доказали, что

$$\lim_{A\to\infty}\int_{|x|}^{\infty}\frac{\varphi(x+\theta)}{(x+\theta)^2}\,\frac{\sin^2 A\frac{\theta}{2}}{A\theta^2}\,d\theta=0.$$

Аналогичное соотношение имеет место, когда интеграл берется на $(-\infty,-|x|)$. Тем самым установлено (20), а следовательно и (19).

Учитывая (15) и дважды интегрируя по частям внутренний интеграл в (19) для $x\ne 0$, получаем

$$\int_{-y}^{y} F(t)\exp(-itx)\,dt=\left[iF(t)\frac{\exp(-itx)}{x}+F'(t)\frac{\exp(-itx)}{x^2}\right]_{t=-y}^{y}-$$
$$-\frac{1}{x^2}\int_{-y}^{y} f(t)\exp(-itx)\,dt. \tag{23}$$

Из (19), (23) видим, что для завершения доказательства Теоремы 2 нужно доказать следующие соотношения :

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{A}\int_0^A \gamma(y)\exp(-ixy)\,dy=0, \tag{24}$$

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{A}\int_0^A \gamma(-y)\exp(ixy)\,dy=0, \tag{25}$$

где $\gamma(y)$ может быть $F(y)$ или $F'(y)$.

Все эти соотношения устанавливаются аналогично. Например, для установления (24) при $\gamma=F$, подставляя значение $F(x)$ из (18), получаем

$$\lim_{A\to\infty}\frac{-1}{A}\int_0^A \exp(-ixy)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\exp(ity)\,dt\,dy=$$
$$=\lim_{A\to\infty}\frac{i}{A(A-x)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\left(\exp(iA(t-x))-1\right)dt=$$
$$=\lim_{A\to\infty}\frac{-1}{A(A-x)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\sin A(t-x)\,dt-$$
$$-i\lim_{A\to\infty}\frac{1}{A(A-x)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\sin^2\frac{A(t-x)}{2}\,dt.$$

Тогда поступаем так же, как при оценивании (21) и (11). Теорема доказана.

Отметим, что при доказательстве Теоремы 2 мы воспользовались только представлением (15) и свойством (6). Таким образом, из представления (15) и свойства (6) следует, что почти всюду на $\mathbb{R}$

$$\varphi(t) = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2\pi A} \int_0^A dy \int_{-y}^{y} f(x) \exp(-itx)\, dx. \tag{26}$$

Напомним, что это соотношение справедливо для регулярных точек $t \neq 0$ функции $\varphi(x)$.

Поскольку мы считаем, что $\varphi(t) = 0$ на $(-1, 1)$, то для установления (26) при $t = 0$ необходимо доказать

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A} \int_0^A dy \int_{-y}^{y} f(x)\, dx. \tag{27}$$

Но в силу (15)

$$\frac{1}{A} \int_0^A dy \int_{-y}^{y} f(x)\, dx = \frac{1}{A} \int_0^A \left[F'(y) - F'(-y)\right] \, dy$$

откуда, учитывая (24) и (25) при $\gamma = F'$, получаем (27).

Доказательство Теоремы 1. Предположим, что $\chi(t)$ удовлетворяет условиям Теоремы 1, т.е.

$$\lim_{h\to0} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t) = f(x) \qquad \text{почти всюду,}$$

и на каждом отрезке $[a, b]$ для некоторой последовательности $\lambda_k \to +\infty$ (вообще говоря, зависящей от $[a, b]$), выполняется

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k \mu\{x \in [a, b] : \quad S^*(x) > \lambda_k\} = 0.$$

Тогда в силу Леммы 2 для любого $\tau \in \mathbb{R}$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to0} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\left[\chi(t+\tau) - \chi(t)\right] = \\ &= f(x)\, \left[\exp(-ix\tau) - 1\right] \quad \text{почти всюду} \end{aligned} \tag{28}$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k\, \mu \left\{ x \in [a, b] : \sup_{h\neq0} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\left[\chi(t+\tau) - \chi(t)\right] \right| > \lambda_k \right\} = 0. \tag{29}$$

где ..., что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d[\chi(t+\tau) - \chi(t)] +$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 [\chi(t+\tau) - \chi(t)]\, dt$$

стремится к нулю равномерно по x.

Интегрируя по частям и учитывая очевидное соотношение $\chi(t) = o(t)$, при $t \to \pm\infty$ (см. (2)), получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d[\chi(t+\tau) - \chi(t)] =$$

$$= -ix\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 [\chi(t+\tau) - \chi(t)]\, dt \tag{30}$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\, [\chi(t+\tau) - \chi(t)]\, d\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 = I_1 + I_2.$$

Так как $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right| dt < \infty$ и [illegible] $[\chi(\frac{t}{h} + \tau) - \chi(\frac{t}{h})] = 0$, то $I_2 \to 0$.

Следовательно (см. (28) – (30))

$$\lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 [\chi(t+\tau) - \chi(t)]\, dt =$$

$$= \frac{\exp(-ix\tau) - 1}{ix} f(x) \quad \text{почти всюду} \tag{31}$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k \mu\left\{x \in [a,b] : \sup_{h \neq 0}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 \times\right.\right. \tag{32}$$

$$\left.\left. \times [\chi(t+\tau) - \chi(t)]\, dt\right| > \lambda_k\right\} = 0$$

для любого $[a,b]$, не содержащего точку 0.

В силу Леммы 3 из (31), (32) и из непрерывности и [illegible] $F(x)$ следует, что

$$F(x) = \int_0^x \int_0^y f(t)\, \frac{\exp(-it\tau) - 1}{-it}\, dt + Ax + B \quad \text{для всех } x. \tag{33}$$

Из Теоремы 2 и (31), (33) следует (5) (для $\chi(t)$ все точки являются регулярными). Теорема доказана.

Пусть $f(x) \in L_p(-\infty, +\infty)$, $1 < p < 2$ и $\hat{f}(t)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$ и $\varphi_h(x) = \max\left\{\frac{1}{h} - \frac{|x|}{h^2}, 0\right\}$. Тогда

$$\rho_h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_h(x) \exp(-itx)\, dx = \frac{2\sin^2 \frac{th}{2}}{\pi t^2 h^2}$$

Следовательно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi_h(x-h)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\hat{f}(t)\left(\frac{\sin\frac{th}{2}}{\frac{th}{2}}\right)^2 dt = S(x,h), \tag{34}$$

где $S(x,h)$ - суммы Римана функции $\hat{f}(x)$.

В этом случае (см. [2], Теорема 5)

$$\lim_{h\to 0} S(x,h) = f(x) \quad \text{почти всюду на } \mathbb{R} \tag{35}$$

и на каждом $[a,b]$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\cdot\mu\left\{x\in[a,b]:\ \sup_{h\neq 0}|S(x,h)| > \lambda\right\} = 0. \tag{36}$$

Теоремы 4 и 5 следуют из (35), (36) и Теорем 1,2.

Теорема 4. *Для того, чтобы $\chi(t)$ было неопределенным интегралом от преобразования Фурье функции $f(x)\in L_p(-\infty,+\infty)$, $1\le p\le 2$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t) = f(x) \quad \textit{почти всюду на } \mathbb{R}$$

и

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\,\mu\left\{x\in[a,b]:\ \sup_{h\neq 0}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t)\right| > \lambda\right\} = 0.$$

на каждом $[a,b]$

Теорема 5. *Для того, чтобы функция $\varphi(t)$ была преобразованием Фурье функции $f(x)\in L_p(-\infty,+\infty)$, $1\le p\le 2$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 \varphi(t)\,dt = f(x) \quad \textit{почти всюду на } \mathbb{R}$$

и на каждом $[a,b]$ выполнялось равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\,\mu\left\{x\in[a,b]:\quad \sup_{h\neq 0}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 \varphi(t)\,dt\right| > \lambda\right\} = 0.$$

Известно, что если $f(x)\in L_p(-\infty,+\infty)$, при $1\le p\le 2$, то $\hat{f}(t)\in$

$\in L_q(-\infty,+\infty)$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. В случае $1<p<2$ верно равенство (см. [7], стр. 147)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}(t)\right|^{\gamma}|t|^{\frac{\gamma}{q}-1}\,dt<+\infty,\quad \text{при любом}\quad p\le\gamma\le q. \tag{37}$$

Известно также, что не всякая функция, удовлетворяющая условию (37), $q>2$, является преобразованием Фурье некоторой функции из $L_p(-\infty,+\infty)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (см. [7]). Теорема 5 описывает функции из $L_q(-\infty,+\infty)$, которые являются преобразованиями Фурье.

Результаты этой статьи частично анонсированы в [8].

ASTRACT. In the paper the trigonometric integrals $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(itx)\,d\chi(t)$ which are Riemann summable are considered, where $\chi(t)$ has bounded variation on each finite interval, at each point $\chi(t)=\frac{1}{2}\left[\chi(t+0)+\chi(t-0)\right]$ and satisfies the condition $\lim\sup\limits_{0<h<1}|\chi(t+h)-\chi(t)|=0$. In particular, if for an integrable on each finite interval function $f(x)$ $\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(itx)\times\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t)=f(x)$ and for every $[a,b]$,

$$\liminf_{\lambda\to\infty}\lambda\cdot\mu\left\{x\in[a,b]:\ \sup_{h>0}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(itx)\times\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t)\right|>\lambda\right\}=0,$$

then for every t and τ, $\chi(t+\tau)-\chi(t)=(C,1)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\exp(-itx)\times\frac{\exp(-it\tau)-1}{-ix}\,dx$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, т. 2, М., Мир, 1965.
2. Г. Г. Геворкян, "О единственности тригонометрических рядов", Мат. сборник, т. 180, №11, стр. 1462 – 1474, 1989
3. Г. Г. Геворкян, "О единственности тригонометрических рядов, суммируемых методом Римана", ДАН СССР, т. 313, №6, стр. 1302 – 1305, 1990.
4. Г. Г. Геворкян, "О тригонометрических рядах, суммируемых методом Римана", Мат. заметки, т. 52, №3, стр. 17 – 34, 1992.
5. Г. Г. Геворкян, "О единственности кратных тригонометрических рядов", Мат. сборник, т. 184, №11, стр. 93 – 130, 1993.
6. Е. Титчмарш, Введение в Теорию Интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948.
7. E. G. Titchmarsh, "A contribution to the theory of Fourier transforms," Proc. London Math. Soc. (2), vol. 23, pp. 279 – 289, 1923.
8. Г. Г. Геворкян, "О тригонометрических интегралах, суммируемых методом Римана", Мат. заметки, т. 45, №5, стр. 114 – 117, 1989.

5 Ноября 1993

Ереванский государственный университет

ОБ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В ПОЛИДИСКЕ, ГЛАДКИХ ВПЛОТЬ ДО ЕГО ГРАНИЦЫ

Ф. А. Шамоян, А. В. Арутюнян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №6, 1993

В работе построены классы $\widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$ и $\widetilde{\Lambda}^a_*(\alpha)$ голоморфных в полидиске U^n функций, которые являются многомерными аналогами одномерных классов Липшица. Исследованы мультипликативные свойства этих классов и получено полное описание линейных непрерывных функционалов, определенных в соответствующих пространствах $H^p(\alpha)$ при $0 < p < 1$. Доказано хорошо известное обобщение теоремы Привалова : классы $\widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$ и $\widetilde{\Lambda}^a_*(\alpha)$ инвариантны относительно операторов Коши-Римана.

Пусть U^n – единичный полидиск n-мерного комплексного пространства C^n, а $H(U^n)$ – множество всех голоморфных в U^n функций. Для $f \in H(U^n)$, $f(z_1, \dots, z_n) = \sum a_{k_1 \dots k_n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$ определим интегро-дифференциальный оператор D^α

$$D^\alpha f(z) = \sum \frac{\Gamma(\alpha_1 + k_1 + 1) \cdots \Gamma(\alpha_n + k_n + 1) a_{k_1 \dots k_n}}{\Gamma(\alpha_1 + 1) \cdots \Gamma(\alpha_n + 1) \Gamma(k_1 + 1) \cdots \Gamma(k_n + 1)} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $-1 < \alpha_j < +\infty$, $1 \le j \le n$ мультииндекс, $z = (z_1, \dots, z_n)$, $\Gamma(\cdot)$ функция Эйлера.

Скажем, что функция $f \in H(U^n)$ принадлежит классу $\Lambda^p_\alpha = \Lambda^p_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $-1 < \alpha_j < +\infty$, $1 \le j \le n$, $0 < p \le 1$, если

$$\|f\|_{\Lambda^p_\alpha} = \sup_{z \in U^n} \left\{ |D^{1+\beta} f(z)| \cdot \prod_{j=1}^n (1 - |z_j|)^{\beta_j + 2 - \frac{\alpha_j + 2}{p}} \right\} < +\infty$$

ограничена при $\beta_j > \frac{\alpha_j + 2}{p}$, $1 \le j \le n$.

Классы Λ^p_α возникают при представлении линейных непрерывных функционалов в пространствах голоморфных функций с L^p метрикой (см. [1]-[3]), в теории теплицевых операторов (см. [4],[5]) и т.д. Настоящая работа посвящена более подробному исследованию этих классов.

Из теоремы Харди–Литтлвуда следует, что при $n = 1$ классы Λ^p_α совпадают с классами функций $f \in H(U^n)$, удовлетворяющих $f^{(k)} \in \mathrm{Lip}\,(\beta, \overline{U}\}$ с $k = [\frac{\alpha+2}{\beta} - 1]$, $\beta = \{\frac{\alpha+2}{\beta} - 1\}$, при нецелом $\frac{\alpha+2}{\beta}$ и $f^{(k)} \in \mathrm{Lip}\,(1, \overline{U}\}$ в противном случае, где $\mathrm{Lip}\,(1, \overline{U}\}$ - класс Зигмунда (см. [6]) (здесь и ниже $[a]$ и $\{a\}$ обозначают целую и дробную части числа a, соответственно). При $n > 1$ это утверждение неверно, т. е. из оценок смешанных производных не следует гладкость функций в $\overline{U}^n$

Цель настоящей работы – построить новые классы $\widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$ и $\widetilde{\Lambda}^a_*(\alpha)$, голоморфных в U^n функций, которые в определенном смысле более близки к одномерным липшицевым классам, чем многомерные липшицевы классы. При этом в терминах этих классов можно получить новую характеристику класса Λ^p_α. Мы исследуем мультипликативные свойства классов $\widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$ и $\widetilde{\Lambda}^a_*(\alpha)$. Получаем полное описание линейных непрерывных функционалов на многомерных пространствах $H^p(\alpha)$ при $0 < p < 1$. Заметим, что при $n = 1$ классы $H^p(\alpha)$ были введены М. М. Джрбашяном. (см. [7],[8]).

Хорошо известно, что по теореме П. И. Привалова (см. [6]) интеграл типа Коши по окружности от липшицевой функции является липшицевой функцией в $\overline{U}$. В случае тора аналог этого результата не имеет места. Отсюда возникает вопрос : как можно обобщить одномерные липшицевы классы на многомерные, чтобы полученные классы остались инвариантными относительно оператора типа Коши. Введенные на торе классы в известном смысле отвечают на указанный вопрос.

§1. КЛАССЫ $\Lambda^a(\alpha)$ И $\widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$ ПРИ ДРОБНЫХ МУЛЬТИИНДЕКСАХ

Пусть $U^n = \{ z = (z_1, \ldots, z_n);\ |z_j| < 1,\ j = \overline{1,n}\}$ единичный полидск в C^n, $T^n = \{ z;\ |z_j| = 1,\ j = \overline{1,n}\}$ и $Q^n = [-\pi, \pi]^n$. Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $z = (z_1, \ldots, z_n) \in C^n$ положим $m_j = [\alpha_j]$, $\beta_j = \{\alpha_j\}$, $0 < \beta_j < 1$, $j = \overline{1,n}$, $dz = dz_1 \cdots dz_n$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$, $\xi_j = \exp\{i\theta_j\}$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in T^n$.

Пусть $f(\xi)$, $\xi \in T^n$ – измеримая ограниченная функция такая, что производные $\frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n} f(\xi)}{\partial\theta_1^{j_1}\cdots\partial\theta_n^{j_n}}$ существуют и непрерывны при всех $0 \le j_k \le m_k$, а при $j_i = m_i$, $i = \overline{1,n}$ принадлежат классу $L^\infty(T^n)$.

Для функции f из класса $H^\infty(U^n)$, голоморфных ограниченных функций, положим

$$F(z) = \frac{\partial^{m_1+\dots+m_n} f(z)}{\partial z_1^{m_1}\dots\partial z_n^{m_n}}, \quad z \in U^n \tag{1.1}$$

Определение 1.1 Скажем, что функция $f(z)$ принадлежит классу $\Lambda(\alpha)$, если $f \in L^\infty(T^n)$ и при $h = (h_1,\dots,h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$|\Delta_h F(\xi)| < C_f|h|^\beta,$$

где

$$\Delta_h = \Delta_{h_n,\dots,h_1} = \Delta_{h_n}(\Delta_{h_{n-1}}\cdots(\Delta_{h_1})),$$

$$\Delta_{h_j} F(\xi) = F(e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_{j-1}},e^{i\theta_j+ih_j},e^{i\theta_{j+1}},\dots,e^{i\theta_n}) - -F(e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_n})$$

Легко видеть, что наименьшая постоянная C_f, удовлетворяющее последнему неравенству определяется следующим образом :

$$C_f = \sup_{\theta\in Q^n,\, h\in\mathbb{R}^n}\frac{|\Delta_h F(\xi)|}{|h|^\beta}.$$

Положим $\Lambda^a(\alpha) = \Lambda(\alpha)\cap H^\infty(U^n)$ и определим норму $||f||_\alpha = ||f||_{\Lambda^a(\alpha)}$ по формуле :

$$||f||_\alpha = \max C_f + ||f||_\infty.$$

Заметим, что классы $\Lambda^a(\alpha)$ были впервые введены С. М. Никольским (см. [10])

Теорема 1.1. *Если $F \in H^\infty(U^n)$, то $f \in \Lambda^a(\alpha)$ тогда и только тогда, когда*

$$\left|\frac{\partial^n F(z)}{\partial z_1\cdots\partial z_n}\right| \le C\cdot C_f\prod_{k=1}^n(1-|z_k|)^{\beta_k-1}. \tag{1.2}$$

Для доказательства теоремы нам необходима лемма, которая непосредственно следует из теоремы Харди–Литтлвуда (см. [6]).

Лемма 1.1. *Пусть $|F'(z)| \le A/(1-|z|)^{1-\beta}$, $z \in U$, $0 < \beta < 1$, тогда $|F(z+h) - F(z)| \le 3A|h|^\beta$, $z, z+h \in \overline{U}$. Обратно : если $F \in H^1(U)$ и $|F(e^{i(t+\theta)}) - F(e^{i\theta})| \le A|t|^\beta$, то $|F'(z)| < A/(1-|z|)^{1-\beta}$*

Доказательство Теоремы 1.1. Пусть выполнено (1.2). Обозначим через $\Phi(z_1) = \frac{\partial^{n-1}F(z)}{\partial z_2 \cdots \partial z_n}$. Тогда очевидно, что

$$\Phi'(z_1) \leq \frac{C(z_2,\ldots,z_n)}{(1-|z_1|)^{1-\beta_1}}.$$

В силу Леммы 1.1, имеем $\Phi \in \mathrm{Lip}(\alpha_1)$, т.е. $|\Delta_{h_1}\Phi(\rho\xi_1)| \leq 3C(z_2,\ldots,z_n)|h_1|^{\beta_1}$.

Повторяя эти рассуждения, получаем

$$\Delta_h F(\rho\xi) \leq C\cdot C_f|h|^{\beta}.$$

Пусть $\rho \to 1$, тогда

$$\Delta_h F(\xi) \leq C\cdot C_f|h|^{\beta}. \tag{1.3}$$

Обратно : Из $F \in H^\infty(U^n)$ имеем

$$F(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T^n}\frac{F(\xi)d\xi}{\xi - z},$$

где $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$, $\xi_j = e^{i\theta_j}$, $j = \overline{1,n}$.

Дифференцируя последнее равенство и учитывая, что $\frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{d\xi}{(\xi-z)^2} = 0$, получаем

$$\frac{\partial^n F(z)}{\partial z_1\cdots\partial z_n} - \frac{e^{-i(\varphi_1+\cdots+\varphi_n)}}{(2\pi)^n}\int_{Q^n}\Delta_h F(\eta)e^{i(t_1+\cdots+t_n)}\prod_{k=1}^n(e^{it_k}-r_k)^{-2}dt,$$

где $\eta_j = e^{i\varphi_j}$ и $t_j = \theta_j - \varphi_j$, $j = \overline{1,n}$.

Следовательно

$$\left|\frac{\partial^n F(z)}{\partial z_1\cdots\partial z_n}\right| \leq (2\pi)^{-n}C_f\int_{Q^n}|t|^{-\beta}\prod_{k=1}^n|e^{it_k}-r_k|^{-2}dt.$$

Легко видеть, что при $\lambda - \beta > 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|t|^{\beta}|e^{it}-r|^{-\lambda}dt \leq C(\beta)(1-r)^{\beta-\lambda+1} \tag{1.4}$$

$$\left|\frac{\partial^n F(z)}{\partial z_1\cdots\partial z_n}\right| \leq CC_f\prod_{k=1}^n(1-r_k)^{\beta_k-1} \tag{1.5}$$

Теорема 1.1 доказана.

Из (1.3) и (1.5) вытекает

Следствие 1.1. Существуют положительные постоянные A_1 и A_2, зависящие только от α такие, что

$$A_1 \sup_{z\in U^n} \{|G(z)| + ||f||_\infty\} \le ||f||_\alpha \le A_2 \sup_{z\in U^n} \{|G(z)| + ||f||_\infty\},$$

где $G(z) = \prod_{j=1}^n (1-|z_j|)^{1-\beta_j} \frac{\partial^n F(z)}{\partial z_1 \cdots \partial z_n}$.

Классы $\Lambda^a(\alpha)$ не инвариантны относительно умножения на мономы $z_1, \dots, z_n$. В этом можно убедиться, полагая $f(z) = \varphi(z_1) + \psi(z_2)$, где φ и ψ принадлежат $H^\infty(U^n)$. Очевидно, что для произвольных функций φ и ψ из $H^\infty(U^n)$ и для $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ имеем $f(z) \in \Lambda^a(\alpha)$. В то же время нетрудно подобрать φ и ψ таким образом, чтобы функция $z_1 \cdot z_n f(z)$ не принадлежала бы $\Lambda^a(\alpha)$. Тем не менее справедлива следующая

Теорема 1.2. *Пусть $f \in H^\infty(U^n)$, $0 < \alpha_j < 1$, $j = \overline{1,n}$. Если $z_j f \in \Lambda^a(\alpha)$ для некоторого $1 \le j \le n$, то $f \in \Lambda^a(\alpha)$.*

Доказательство. Пусть $j = 1$. Имеем

$$\frac{\partial^n (f(z)z_1)}{\partial z_1 \cdots \partial z_n} = \frac{\partial^n f(z)}{\partial z_1 \cdots \partial z_n} \cdot z_1 + \frac{\partial^{n-1} f(z)}{\partial z_1 \cdots \partial z_n}. \tag{1.6}$$

Так как $z_1 f \in \Lambda^a(\alpha)$, то

$$\left|\frac{\partial^n (f(z)z_1)}{\partial z_1 \cdots \partial z_n}\right| \le C(n,f) \prod_{k=1}^n (1-|z_k|)^{\alpha_k - 1}.$$

Интегрируя относительно z_1 по радиусу, получаем

$$\left|\frac{\partial^{n-1} f(z)}{\partial z_1 \cdots \partial z_n}\right| \le C_1 C(n,f) |z_1|^{-1} \prod_{k=2}^n (1-|z_k|)^{\alpha_k - 1}$$

При $|z_1| \ge 1/2$, имеем

$$\left|\frac{\partial^{n-1} f(z)}{\partial z_1 \cdots \partial z_n}\right| \le C_2 C(n,f) \prod_{k=2}^n (1-|z_k|)^{\alpha_k - 1}$$

а при $|z_1| \le 1/2$ это неравенство следует из принципа максимума модуля.

Учитывая (1.6), получаем:

$$\left|\frac{\partial^n f(z)}{\partial z_1 \cdots \partial z_n}\right| \le C_3 C(n,f) |z_1|^{-1} \prod_{k=2}^n (1-|z_k|)^{\alpha_k - 1}$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Утверждение Теоремы 1.2 справедливо также при $\alpha_j \geq 1$. Это следует из нашей Теоремы 1.4.

Пусть для мультииндекса $i = (i_1, \ldots, i_k)$, $1 \leq k \leq n$, $h(i) = (h_{i_1}, \ldots, h_{i_k})$, $\beta(i) = (\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_k})$ и $|h(i)|^{\beta(i)} = |h_{i_1}|^{\beta_{i_1}} \cdots |h_{i_k}|^{\beta_{i_k}}$.

Определение 1.2. Скажем, что функция $f(z)$ принадлежит классу $\widetilde{\Lambda}(\alpha)$, если $F \in C(T^n)$ и при всех $i = (i_1, \ldots, i_k)$, $1 \leq k \leq n$

$$|\Delta_{h(i)}F(\xi)| \leq C(i, f)|h(i)|^{\beta(i)}.$$

Наименьшей постоянной $C(i, f) = C(i_1, \ldots, i_k, f)$, удовлетворяющей последнему неравенству, является

$$C(i, f) = \sup_{\theta \in Q^n,\, h(i) \in \mathbb{R}^k} \frac{\Delta_{h(i)}F(\xi)}{|h(i)|^{\beta(i)}}.$$

Положим $\widetilde{\Lambda}^a(\alpha) = \widetilde{\Lambda}(\alpha) \cap H^\infty(U^n)$ и определим норму $\widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$ следующим образом:

$$||f||_{\tilde{\alpha}} = ||f||_{\widetilde{\Lambda}^a(\alpha)} = \max_{1 \leq k \leq n} \max_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} C(i, f) + ||f||_\infty.$$

При $\widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$ справедлив следующий аналог Теоремы 1.1.

Теорема 1.1*. *Если $f \in H^\infty(U^n)$, то $f \in \widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$ тогда и только тогда, когда*

$$\left|\frac{\partial^k F(z)}{\partial z_{i_1} \cdots \partial z_{i_k}}\right| \leq C \cdot C(i, f) \prod_{j=1}^{k} (1 - |z_{i_j}|)^{\beta_{i_j} - 1} \quad 1 \leq i_k \leq n, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству Теоремы 1.1 . Остается доказать непрерывность F. Поскольку $f \in H^\infty(U^n)$, достаточно доказать непрерывность F лишь на торе T^n.

Пусть

$$\left|\frac{\partial F(z)}{\partial z_j}\right| \leq C(f)(1 - |z_j|)^{\beta_j - 1}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Имеем

$$|F(z_1, \ldots, z_{j-1}, e^{i\theta_j}, z_{j+1}, \ldots, z_n) - F(z_1, \ldots, z_{j-1}, e^{it_j}, z_{j+1}, \ldots, z_n)| \leq C|\theta_j - t_j|^{\beta_j}.$$

Полагая $(z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n) = (e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_{j-1}}, e^{i\theta_{j+1}}, \ldots, e^{i\theta_n})$, получаем

$$|F(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) - F(e^{it_1}, \ldots, e^{it_n})| = |F(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) - F(e^{it_1}, e^{i\theta_2}, \ldots, e^{i\theta_n}) +$$

$$+F(e^{it_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_n}) + \dots + F(e^{it_1}, \dots, e^{it_{n-1}}, e^{i\theta_n}) - F(e^{it_1}, \dots, e^{it_n})| \le$$
$$\le C_1 \sum_{j=1}^{n} |\theta_j - t_j|^{\alpha_j},$$

где $F \in C(T^n)$.

Следствие 1.1*. Существуют положительные постоянные C_1 и C_2, зависящие лишь от α такие, что

$$C_1 \max_{1 \le k \le n} \{ \max_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \sup_{z \in U^n} \{|G_1(z)| + \|f\|_\infty\}\} \le \|f\|_\alpha \le$$
$$\le C_2 \max_{1 \le k \le n} \{ \max_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \sup_{z \in U^n} \{|G(z)| + \|f\|_\infty\}\},$$

где $G_1(z) = \prod_{j=1}^k (1 - |z_{i_j}|)^{1-\beta_{i_j}} \frac{\partial^k F(z)}{\partial z_{i_1} \cdots \partial z_{i_k}}$.

Теорема 1.3. *Пусть* $0 < \alpha_j < 1$, $j = \overline{1, n}$. *Тогда* $f \in \widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$ *тогда и только тогда, когда* $z_j f \in \widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$ *для некоторого* $1 \le j \le n$.

Доказательство. Предположим, что $j = 1$ и $z_1 f \in \widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$. Требуется установить следующую оценку :

$$\left|\frac{\partial^k f(z)}{\partial z_{i_1} \cdots \partial z_{i_k}}\right| \le C(i, f) \prod_{j=1}^{k} (1 - |z_{i_j}|)^{\alpha_{i_j} - 1}$$

При $i_1 = 1$ оценка очевидна. В противном случае имеем

$$\frac{\partial^k f(z)}{\partial z_{i_1} \cdots \partial z_{i_k}} = \frac{1}{z_1} \frac{\partial^k (f(z) z_1)}{\partial z_{i_1} \cdots \partial z_{i_k}} - \frac{1}{z_1^2} \frac{\partial^{k-1} (f(z) z_1)}{\partial z_{i_2} \cdots \partial z_{i_k}}$$

Так как $z_1 f \in \widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$, то

$$\left|\frac{\partial^k (f(z) z_1)}{\partial z_{i_1} \cdots \partial z_{i_k}}\right| \le C(i, f) \prod_{j=1}^{k} (1 - |z_{i_j}|)^{\alpha_{i_j} - 1}$$

Интегрируя по z_1, по радиусу и повторяя рассуждения Теоремы 1.2, получим требуемую оценку.

Обратно. Пусть $f \in \widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$. Докажем, что $z_1 f \in \widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$. При $i_j \ne 1$, $j = \overline{1, k}$, имеем

$$\left|\frac{\partial^k (f(z) z_1)}{\partial z_{i_1} \cdots \partial z_{i_k}}\right| = \left|z_1 \frac{\partial^k f(z)}{\partial z_{i_1} \cdots \partial z_{i_k}}\right| \le C(i, f) \prod_{j=1}^{k} (1 - |z_{i_j}|)^{\alpha_{i_j} - 1}$$

Пусть теперь $i_1 = 1$, тогда

$$\frac{\partial^k (f(z) z_1)}{\partial z_{i_1} \cdots \partial z_{i_k}} = z_1 \frac{\partial^k f(z)}{\partial z_{i_1} \cdots \partial z_{i_k}} + \frac{\partial^{k-1} f(z)}{\partial z_{i_2} \cdots \partial z_{i_k}}$$

Отсюда

$$\left|\frac{\partial^k (f(z) z_1)}{\partial z_{i_1} \cdots \partial z_{i_k}}\right| \le \widetilde{C}(i, f) \prod_{j=1}^{k} (1 - |z_{i_j}|)^{\alpha_{i_j} - 1}$$

Теорема 1.3 доказана.

Теорема 1.4. *Функция f принадлежит $\widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$ тогда и только тогда, если $z_j^{m_j+1} f \in \widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$, для некоторого $1 \le j \le n$, где $m_j = [\alpha_j]$.*

Доказательство. Пусть $j = 1$ и $z_1^{m_1+1} f \in \widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$. Покажем, что если $z_1^{m_1+1} f \in \Lambda^a(\alpha)$, то $f \in \widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$. Имеем

$$\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n} f(z)}{\partial z_1^{m_1}\cdots\partial z_n^{m_n}} = \sum_{l_1=0}^{m_1} \tilde{C}_{l_1}^{m_1} \Phi_{l_1}(z) \frac{1}{z_1^{2m_1+1-l_1}}, \tag{1.7}$$

где $\tilde{C}_{l_1}^{m_1} = (-1)^{m_1-l_1} C_{l_1}^{m_1}(m_1+1)\cdots(m_1+m_1-l_1)$, и

$$\Phi_{l_1}(z) = \frac{\partial^{l_1+m_2+\cdots+m_n}(f(z)z_1^{m_1+1})}{\partial z_1^{l_1}\partial z_2^{m_2}\cdots\partial z_n^{m_n}}.$$

Отсюда

$$z_1^{2m_1+1}\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n} f(z)}{\partial z_1^{m_1}\cdots\partial z_n^{m_n}} = \sum_{l_1=0}^{m_1} \tilde{C}_{l_1}^{m_1}\Phi_{l_1}(z) z_1^{l_1}$$

Наша цель оценить $\frac{\partial^k(\Phi_{l_1}(z)z_1^{l_1})}{\partial z_{i_1}\cdots\partial z_{i_k}}$. По условию имеем

$$\left|\frac{\partial^{m_1+1+\cdots+m_n+1}(f(z)z_1^{m_1+1})}{\partial z_1^{m_1+1}\cdots\partial z_n^{m_n+1}}\right| \le C_f \prod_{k=1}^{n}(1-|z_k|)^{\beta_k-1} \tag{1.8}$$

Если $i_j \ne 1$, $j = \overline{1,n}$, то

$$\frac{\partial^k(\Phi_{l_1}(z)z_1^{l_1})}{\partial z_{i_1}\cdots\partial z_{i_k}} = z_1^{l_1}\frac{\partial^k\Phi(z)}{\partial z_{i_1}\cdots\partial z_{i_k}}.$$

В этом случае искомая оценка получается интегрированием неравенства (1.8). В противном случае ($i_j = 1$) имеем

$$\frac{\partial^k(\Phi_{l_1}(z)z_1^{l_1})}{\partial z_{i_1}\cdots\partial z_{i_k}} = z_1^{l_1}\frac{\partial^k\Phi_{l_1}(z)}{\partial z_{i_1}\cdots\partial z_{i_k}} + l_1 z_1^{l_1-1}\frac{\partial^{k-1}\Phi(z)}{\partial z_{i_2}\cdots\partial z_{i_k}}.$$

Интегрируя (1.8), получим

$$\left|\frac{\partial^k\Phi_{l_1}(z)}{\partial z_{i_1}\cdots\partial z_{i_k}}\right| \le C\,C(i,f)(1-|z_1|)^{-\gamma_1}\prod_{j=2}^{k}(1-|z_{i_j}|)^{\beta_{i_j}-1}$$

где $\gamma_1 = 1-\beta_1$, если $l_1 = m_1$ и $\gamma_1 = 0$ – в противном случае. Мы имеем также

$$\left|\frac{\partial^{k-1}\Phi(z)}{\partial z_{i_2}\cdots\partial z_{i_k}}\right| \le C_1\,C(i,f)\prod_{j=2}^{k}(1-|z_{i_j}|)^{\beta_{i_j}-1}$$

Отсюда

$$\left|\frac{\partial^k(\Phi_{l_1}(z)z_1^{l_1})}{\partial z_{i_1}\cdots\partial z_{i_k}}\right| \le C_2\,C(i,f)\prod_{j=1}^{k}(1-|z_{i_j}|)^{\beta_{i_j}-1}.$$

Принимая во внимание (1.7) и Теорему 1.2 заключаем, что $f \in \widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$.

Докажем обратное утверждение.

Предположим, что $f \in \widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$.

$$\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}(f(z)z_1)}{\partial z_1^{m_1}\cdots\partial z_n^{m_n}} = z_1\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}f(z)}{\partial z_1^{m_1}\cdots\partial z_n^{m_n}} + \frac{\partial^{m_1-1+m_2+\cdots+m_n}f(z)}{\partial z_1^{m_1-1}\partial z_2^{m_2}\cdots\partial z_n^{m_n}}. \tag{1.9}$$

В силу Теоремы 1.3

$$z_1\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}f(z)}{\partial z_1^{m_1}\cdots\partial z_n^{m_n}} \in \widetilde{\Lambda}^a(\beta).$$

Следовательно

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z_{i_1}\cdots\partial z_{i_k}}\left(\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}f(z)}{\partial z_1^{m_1}\cdots\partial z_n^{m_n}}\cdot z_1\right)\right| \le C(i,f)\prod_{j=1}^{k}(1-|z_{i_j}|)^{\beta_{i_j}-1}$$

Если $i_1 = 1$, то интегрируя последнее неравенство по z_1 по радиусу, получаем

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z_{i_1}\cdots\partial z_{i_k}}\left(\frac{\partial^{m_1-1+m_2+\cdots+m_n}f(z)}{\partial z_1^{m_1-1}\cdots\partial z_n^{m_n}}\right)\right| \le C\,C(i,f)\prod_{j=2}^{k}(1-|z_{i_j}|)^{\beta_{i_j}-1}.$$

Из (1.9) имеем

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z_{i_1}\cdots\partial z_{i_k}}\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}(f(z)z_1)}{\partial z_1^{m_1}\cdots\partial z_n^{m_n}}\right| \le C_1\,C(i,f)\prod_{j=1}^{k}(1-|z_{i_j}|)^{\beta_{i_j}-1}$$

Повторяя эти рассуждения, заключаем, что $z_1^{m_1+1}f \in \widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$.

При $i_j \ne 1$, $1 \le j \le k$, легко проверить, что

$$\left|\frac{\partial^{k+1}\Phi_{m_1}(z)}{\partial z_1\partial z_{i_1}\cdots\partial z_{i_k}}\right| \le C\,C(i,f)\prod_{j=0}^{k}(1-|z_{i_j}|)^{\beta_{i_j}-1}$$

где $i_0 = 1$. Интегрируя это неравенство относительно z_1, получим утверждение теоремы.

§2. КЛАССЫ $\Lambda^a_{\bullet}(\alpha)$ И $\widetilde{\Lambda}^a_{\bullet}(\alpha)$ ПРИ ЦЕЛЫХ МУЛЬТИИНДЕКСАХ

В этом параграфе рассмотрим функцию

$$F(z) = \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}f(z)}{\partial z_1^{k_1}\cdots\partial z_n^{k_n}}, \tag{2.1}$$

где $f \in H^\infty(U^n)$, $k = (k_1,\ldots,k_n)$ - целые положительные числа.

Определение 2.1. Скажем, что функция $f(z)$ принадлежит классу $\Lambda_*(k)$, если $f \in L^\infty(T^n)$ и при $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$|\Delta_h^* F(\xi)| \leq C_f |h|, \tag{2.2}$$

где

$$\Delta_h^* = \Delta_{h_n,\ldots,h_1}^* = \Delta_{h_n}^*(\Delta_{h_{n-1}}^* \cdots (\Delta_{h_1})),$$

$$\Delta_{h_j}^* F(\xi) = F(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_{j-1}}, e^{i\theta_j + ih_j}, e^{i\theta_{j+1}}, \ldots, e^{i\theta_n}) - -2F(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) +$$

$$+F(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_{j-1}}, e^{i\theta_j - ih_j}, e^{i\theta_{j+1}}, \ldots, e^{i\theta_n}).$$

Положим $\Lambda_*^a(k) = \Lambda_*(k) \cap H^\infty(U^n)$ и определим норму $||f||_* = ||f||_{\Lambda_*^a}$ следующим образом :

$$||f||_* = \inf\{C_f\} + ||f||_\infty,$$

где C_f – постоянная из (2.2).

Следующая лемма вытекает из теоремы Зигмунда (см. [6]).

Лемма 1.1. *Если* $|F''(z)| \leq C(1-|z|)^{-1}$, $z \in U$, *то* $|F(z+h) - 2F(z) + F(z-h)| \leq \leq 3C|h|$, z, $z \pm h \in \overline{U}$. *Обратно : если* $|F(e^{i\theta+it}) - 2F(e^{i\theta}) + F(e^{i\theta-it})| \leq C|t|$, *то* $|F''(z)| \leq 2C(1-|z|)^{-1}$

Теорема 2.1. *Если* $F \in H^\infty(U^n)$, *то* $f \in \Lambda_*^a(k)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\left|\frac{\partial^{2n} F(z)}{\partial z_1^2 \cdots \partial z_n^2}\right| \leq C_f \prod_{j=1}^n (1-|z_j|)^{-1} \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть выполняется (2.3). Тогда, обозначая $\Phi(z_1) = \frac{\partial^{2n-2} F(z)}{\partial z_2^2 \cdots \partial z_n^2}$ и применяя Лемму 2.1, получаем $|\Delta_{h_1}^* \Phi(\rho\xi_1)| \leq 3C(z_2, \ldots, z_n)|h_1|$. Далее, повторяя эти рассуждения $n-1$ раз, заключаем, что

$$\Delta_h^* F(\rho\xi) \leq 2^n C_f |h|.$$

Полагая $\rho \to 1$, получаем

$$\Delta_h^* F(\xi) \leq 2^n C_f |h|.$$

Докажем обратное утверждение, т.е., что из $f \in \Lambda^a_*(k)$ следует (2.3). Так как $F \in H^\infty(U^n)$, то

$$F(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T^n}\frac{F(\xi)d\xi}{\xi - z}.$$

Используя равенства

$$\int_T \frac{d\xi}{(\xi - z)^3} = 0, \quad \int_{T^n}\frac{F(\xi_1,\ldots,\bar{\xi}_j,\xi_{j+1},\ldots,\xi_n)d\xi_1\cdots d\xi_n}{(\xi_1 - z_1)^3\cdots(\xi_n - z_n)^3} = 0$$

и дифференцируя по каждой переменной дважды, получаем

$$\frac{\partial^{2n}F(z)}{\partial z_1^2\cdots\partial z_n^2} = \frac{e^{-2i(\varphi_1+\cdots+\varphi_n)}}{\pi^n}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\Delta_t^* F(\eta)e^{i(t_1+\cdots+t_n)}\prod_{k=1}^{n}(e^{it_k} - r_k)^{-3}dt,$$

где $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$, $\eta_j = e^{i\varphi_j}$ и $t_j = \theta_j - \varphi_j$, $j = \overline{1,n}$. Учитывая оценку (1.4), получаем

$$\left|\frac{\partial^{2n}F(z)}{\partial z_1^2\cdots\partial z_n^2}\right| \le \tilde{C}_f\prod_{k=1}^{n}(1 - |z_k|)^{-1}.$$

Теорема доказана.

Следствие 2.1. Существуют положительные постоянные A_1 и A_2 такие, что

$$A_1\sup_{z\in U^n}\left\{\prod_{j=1}^{n}(1 - |z_j|)\left|\frac{\partial^{2n}F(z)}{\partial z_1^2\cdots\partial z_n^2}\right| + ||f||_\infty\right\} \le$$

$$\le ||f||_* \le A_2\sup_{z\in U^n}\left\{\prod_{j=1}^{n}(1 - |z_j|)\left|\frac{\partial^{2n}F(z)}{\partial z_1^2\cdots\partial z_n^2}\right| + ||f||_\infty\right\}.$$

Теперь докажем аналог Теоремы 1.2 для классов Λ^a_*.

Теорема 2.2. *Если $f \in H^\infty(U^n)$ и $z_j^2 f \in \Lambda^a_*$ для некоторого $1 \le j \le n$, то $f \in \Lambda^a_*$.*

Доказательство. Пусть $j = 1$ и $z_1^2 f \in \Lambda^a_*$. Имеем

$$\left|\frac{\partial^{2n}(f(z)z_1^2)}{\partial z_1^2\cdots\partial z_n^2}\right| \le C_f\prod_{k=1}^{n}(1 - |z_k|)^{-1}. \tag{2.4}$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial^{2n}(f(z)z_1^2)}{\partial z_1^2\cdots\partial z_n^2} = \frac{\partial^{2n}f(z)}{\partial z_1^2\cdots\partial z_n^2}\cdot z_1^2 +$$

$$+4\frac{\partial^{2n-1}f(z)}{\partial z_1\partial z_2^2\cdots\partial z_n^2}\cdot z_1 + 2\frac{\partial^{2n-2}f(z)}{\partial z_2^2\cdots\partial z_n^2} \tag{2.5}$$

и

$$\frac{(1 - |z_1|)\log(1 - |z_1|)^{-1} - |z_1|}{|z_1|^2} \le C. \tag{2.6}$$

Интегрируя (2.4) по радиусу (относительно z_1) и воспользовавшись оценкой (2.6), получим

$$\left|\frac{\partial^{2n-2}(f(z))}{\partial z_2^2\cdots\partial z_n^2}\right| \le C\cdot C_f\prod_{k=2}^{n}(1-|z_k|)^{-1}$$

Имеем

$$\frac{\partial^{2n-1}(f(z)z_1^2)}{\partial z_1\partial z_2^2\cdots\partial z_n^2} = \frac{\partial^{2n-1}f(z)}{\partial z_1\partial z_2^2\cdots\partial z_n^2}\cdot z_1^2 + 2z_1\frac{\partial^{2n-2}f(z)}{\partial z_2^2\cdots\partial z_n^2}$$

Отсюда

$$\left|\frac{\partial^{2n-1}(f(z))}{\partial z_1\partial z_2^2\cdots\partial z_n^2}\right| \le C\cdot C_f\prod_{k=2}^{n}(1-|z_k|)^{-1}+$$

$$+C_f\cdot C\log(1-|z_1|)^{-1}\prod_{k=2}^{n}(1-|z_k|)^{-1}\le \tilde{C}\cdot C_f\prod_{k=1}^{n}(1-|z_k|)^{-1}.$$

Из (2.5) получаем

$$\left|z_1^2\frac{\partial^{2n}(f(z))}{\partial z_1^2\cdots\partial z_n^2}\right| \le C\cdot C_f\prod_{k=1}^{n}(1-|z_k|)^{-1}.$$

При $|z_1|\ge 1/2$ требуемая оценка очевидна. При $|z_1|<1/2$ оценка следует из принципа максимума модуля.

Замечание. Обратное утверждение к Теореме 2.2 не справедливо. Например, $f(z_1,z_2)=(\varphi(z_1)+\psi(z_2))z_1z_2$, где φ и ψ - произвольные функции из $H^\infty(U)$. Очевидно, $\frac{\partial^4 f(z_1,z_2)}{\partial z_1^2\partial z_2^2}=0$, однако z_1z_2f не всегда принадлежит Λ_*^a.

Однако в некоторых подклассах Λ_*^a справедливо обратное утверждение Теоремы 2.2.

Определение 2.2. Скажем, что функция $f(z)$ принадлежит $\widetilde{\Lambda}_*(k)$, если $F\in$ $\in C(T^n)$ и

$$|\Delta^*_{h(i)}F(\xi)|\le C(i,f)|h(i)|,$$

где $i=(i_1,\ldots,i_l)$, $h(i)=(h_{i_1},\ldots,h_{i_l})$, $i,l=\overline{1,n}$.

Наименьшей постоянной $C(i,f)=C(i_1,\ldots i_l,f)$ является

$$C(i,f)=\sup_{\theta\in Q^n,\,h(i)\in\mathbb{R}^l}\frac{|\Delta^*_{h(i)}F(\xi)|}{|h(i)|}<+\infty.$$

Положим $\widetilde{\Lambda}_*^a(k)=\widetilde{\Lambda}_*(k)\cap H^\infty(U^n)$ и определим норму $\widetilde{\Lambda}_*^a(k)$ следующим образом:

$$||f||_* = ||f||_{\widetilde{\Lambda}_*} = \max_{1\le i\le n}\max_{1\le i_1<\cdots<i_l\le n}\{C(i,f)\}+||f||_\infty.$$

Теорема 2.1*. *Функция f принадлежит $\widetilde{\Lambda}^a_*(k)$ тогда и только тогда, когда*

$$\left|\frac{\partial^{2l}F(z)}{\partial z_{i_1}^2\cdots\partial z_{i_l}^2}\right| \le C(i,f)\prod^{l}(1-|z_{i_k}|)^{-1}.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству Теоремы 2.1. Остается только доказать, что функция $F(z)$ непрерывна, что по существу следует из Теоремы 1.1* из того факта, что $\widetilde{\Lambda}^a_* \subset \widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$ для любых $0<\alpha_j<1$, $j=\overline{1,n}$.

Следствие 2.1*. Существуют положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что

$$C_1\max_{1\le l\le n}\{\max_{1\le i_1<\cdots<i_l\le n}\sup_{z\in U^n}\{|G(z)|\}+\|f\|_\infty\}\le\|f\|_{\widetilde{\Lambda}^a_*(k)}\le$$

$$\le C_2\max_{1\le l\le n}\{\max_{1\le i_1<\cdots<i_l\le n}\sup_{z\in U^n}\{|G(z)|\}+\|f\|_\infty\},$$

где $G(z)=\prod_{j=1}^{l}(1-|z_{i_j}|)\frac{\partial^{2l}F(z)}{\partial z_{i_1}^2\cdots\partial z_{i_l}^2}$.

Теорема 2.3. *Функция f принадлежит $\widetilde{\Lambda}^a_*$ тогда и только тогда, когда $z_j^2 f\in\widetilde{\Lambda}^a_*$ для некоторого $1\le j\le n$.*

Доказательство. Пусть $j=1$ и $z_1^2 f\in\widetilde{\Lambda}^a_*$, a $i=(i_1, ldots, i_l)$ произвольный вектор. Если $i_j\ne 1$, $j=\overline{1,n}$, то доказательство очевидно. Рассмотрим случай, когда $i_1=1$. Имеем

$$\frac{\partial^{2l}(f(z)z_1^2)}{\partial z_{i_1}^2\cdots\partial z_{i_l}^2}=z_1^2\frac{\partial^{2l}f(z)}{\partial z_{i_1}^2\cdots\partial z_{i_l}^2}+4z_1\frac{\partial^{2l-1}f(z)}{\partial z_{i_1}\partial z_{i_2}^2\cdots\partial z_{i_l}^2}+2\frac{\partial^{2l-2}f(z)}{\partial z_{i_2}^2\cdots\partial z_{i_l}^2}. \tag{2.7}$$

Так как $z_1^2 f\in\widetilde{\Lambda}^a_*$, то согласно (2.6) получаем

$$\left|\frac{\partial^{2l-2}f(z)}{\partial z_{i_2}^2\cdots\partial z_{i_l}^2}\right|\le C\cdot C(i,f)\prod_{k=2}^{l}(1-|z_{i_k}|)^{-1}$$

Легко видеть, что если

$$\left|\frac{\partial h(z)}{\partial z_1}\right|\le C(z_2,\ldots,z_n)(1-|z_1|)^{-1},$$

то $|h(z)|\le C(z_2,\ldots,z_n)$. Следовательно

$$\left|\frac{\partial^{2l-1}f(z)}{\partial z_{i_1}\partial z_{i_2}^2\cdots\partial z_{i_l}^2}\right|\le C\cdot C(i,f)\prod_{k=1}(1-|z_{i_k}|)^{-1}.$$

Поэтому из (2.7) следует, что $f\in\widetilde{\Lambda}^a_*$.

Обратно. Пусть $f \in \widetilde{\Lambda}^a_*$ и $i_1 = 1$. Имеем

$$\left|z_1^2 \frac{\partial^{2l} f(z)}{\partial z_{i_1}^2 \cdots \partial z_{i_l}^2}\right| \le C \cdot C(i,f) \prod_{k=1}^{l} (1-|z_{i_k}|)^{-1},$$

и

$$\left|\frac{\partial^{2l-2} f(z)}{\partial z_{i_2}^2 \cdots \partial z_{i_l}^2}\right| \le C_1 \cdot C(i_2,\ldots,i_l,f) \prod_{k=2}^{l} (1-|z_{i_k}|)^{-1}.$$

Отсюда

$$\left|\frac{\partial^{2l-1} f(z)}{\partial z_{i_1} \partial z_{i_2}^2 \cdots \partial z_{i_l}^2}\right| \le C_2 \cdot C(i_2,\ldots,i_l,f) \prod_{k=1}^{l} (1-|z_{i_k}|)^{-1}.$$

Принимая во внимание (2.7), заключаем, что $z_1^2 f \in \widetilde{\Lambda}^a_*$. Теорема доказана.

Теорема 2.4. *Функция f принадлежит $\widetilde{\Lambda}^a_*(k)$ тогда и только тогда, когда $z_j^{k_j+2} f \in \widetilde{\Lambda}^a_*$ для некоторого $1 \le j \le n$.*

Доказательство. Предположим, что $j = 1$. Сначала докажем, что из $z_1^{k_1+2} f \in \widetilde{\Lambda}^a_*(k)$ следует, что $f \in \widetilde{\Lambda}^a_*(k)$. Имеем

$$z_1^{2k_1+2} \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} f(z)}{\partial z_1^{k_1} \cdots \partial z_n^{k_n}} = \sum_{l_1=0}^{k_1} \tilde{C}_{l_1}^{k_1} \Phi_{l_1}(z) z_1^{l_1}, \tag{2.8}$$

где $\tilde{C}_{l_1}^{k_1} = (-1)^{k_1-l_1} C_{l_1}^{k_1} (k_1+2)\cdots(k_1+1+k_1-l_1)$, и

$$\Phi_{l_1}(z) = \frac{\partial^{l_1+\cdots+k_n}(f(z) z_1^{k_1+2})}{\partial z_1^{l_1} \cdots \partial z_n^{k_n}}.$$

Пусть $i_1 = 1$, тогда

$$\frac{\partial^{2s}(\Phi(z) z_1^{l_1})}{\partial z_{i_1}^2 \cdots \partial z_{i_s}^2} = z_1^{l_1} \frac{\partial^{2s}\Phi(z)}{\partial z_{i_2}^2 \cdots \partial z_{i_s}^2} +$$

$$+2l_1 z_1^{l_1-1} \frac{\partial^{2s-1}\Phi(z)}{\partial z_{i_1} \partial z_{i_2}^2 \cdots \partial z_{i_s}^2} + l_1(l_1-1) z_1^{l_1-2} \frac{\partial^{2s-2}\Phi(z)}{\partial z_{i_2}^2 \cdots \partial z_{i_s}^2}. \tag{2.9}$$

По условию имеем

$$\left|\frac{\partial^{k_1+2+\cdots+k_n+2}(f(z) z_1^{k_1+2})}{\partial z_1^{k_1+2} \cdots \partial z_n^{k_n+2}}\right| \le C(f) \prod_{k=1}^{n} (1-|z_k|)^{-1}.$$

Интегрируя это неравенство, принимая во внимание (2.6) и учитывая, что $l_1 \le k_1$, получаем

$$\left|\frac{\partial^{2s-\nu}\Phi(z)}{\partial z_{i_1}^{\nu} \partial z_{i_2}^2 \cdots \partial z_{i_s}^2}\right| \le C\,C(f)(1-|z_{i_1}|)^{-\gamma_1} \prod_{k=2}^{s} (1-|z_{i_k}|)^{-1},$$

где $\gamma_1 = 1$, если $\nu = 2$ и $\gamma_1 = 0$, если $\nu = 0$

$$\left|\frac{\partial^{2s-1}\Phi(z)}{\partial z_{i_1}\partial z_{i_2}^2\cdots\partial z_{i_s}^2}\right| \le C(f)\log(1-|z_{i_1}|)^{-1}\prod_{k=2}^{s}(1-|z_{i_k}|)^{-1}.$$

Поэтому в силу (2.8) и (2.9), получаем

$$z_1^{2k_1+2}\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}f(z)}{\partial z_1^{k_1}\cdots\partial z_n^{k_n}} \in \widetilde{\Lambda}_*^a.$$

Применяя Теорему 2.2, получаем $f \in \widetilde{\Lambda}_*^a(k)$.

Теперь докажем обратное утверждение.

Пусть $j = 1$ и $f \in \widetilde{\Lambda}_*^a(k)$. Сначала докажем, что $z_1 f \in \widetilde{\Lambda}_*^a(k)$. Имеем

$$\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}(f(z)z_1)}{\partial z_1^{k_1}\cdots\partial z_n^{k_n}} = z_1F(z) + \frac{\partial^{k_1-1+\cdots+k_n}f(z)}{\partial z_1^{k_1-1}\cdots\partial z_n^{k_n}}, \tag{2.10}$$

где

$$F(z) = \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}f(z)}{\partial z_1^{k_1}\cdots\partial z_n^{k_n}}$$

Так как $F \in \widetilde{\Lambda}_*^a$, то по Теореме 2.3

$$\left|\frac{\partial^{2l}(F(z)z_1^2)}{\partial z_{i_1}^2\cdots\partial z_{i_l}^2}\right| \le C(i,f)\prod_{k=1}^{l}(1-|z_{i_k}|)^{-1}.$$

Рассмотрим случай $i_1 = 1$. Интегрируя последнее неравенство относительно z_1 и принимая во внимание (2.6), получаем

$$\left|\frac{\partial^{2l-2}F(z)}{\partial z_{i_2}^2\cdots\partial z_{i_l}^2}\right| \le C\cdot C(i,f)\prod_{k=2}^{l}(1-|z_{i_k}|)^{-1} \tag{2.11}$$

Воспользовавшись (2.10), легко убедиться, что

$$\frac{\partial^{2l}(F(z)z_1)}{\partial z_{i_1}^2\cdots\partial z_{i_l}^2} = z_1\frac{\partial^{2l}F(z)}{\partial z_{i_2}^2\cdots\partial z_{i_l}^2} + 3\frac{\partial^{2l-1}F(z)}{\partial z_{i_1}\partial z_{i_2}^2\cdots\partial z_{i_l}^2}.$$

Отсюда из (2.9) следует, что $z_1 f \in \widetilde{\Lambda}_*^a(k)$. Продолжая умножение, в итоге получим, что $z_1^{k_1+2}f \in \widetilde{\Lambda}_*^a(k)$.

В случае $i_j \ne 1$, $1 \le j \le n$ поступаем аналогично. Вначале докажем неравенство

$$\left|\frac{\partial^{2l+2}G(z)}{\partial z_1^2\partial z_{i_1}^2\cdots\partial z_{i_l}^2}\right| \le C(i,f)\prod_{k=0}^{l}(1-|z_{i_k}|)^{-1},$$

где $i_0 = 1$, и

$$G(z) = \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}(f(z)z_1^{k_1+2})}{\partial z_1^{k_1}\cdots\partial z_n^{k_n}}$$

Тогда, проинтегрировав, получим, что $z_1^{k_1+2}f \in \widetilde{\Lambda}_*^a(k)$. Теорема доказана.

§3. ОПЕРАТОРЫ ТИПА КОШИ В ПРОСТРАНСТВАХ $\Lambda(\alpha)$ И $\widetilde{\Lambda}(\alpha)$

В этом параграфе мы докажем, что операторы типа Коши

$$Kf(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T^n} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

не действуют в пространствах $\Lambda(\alpha)$, но действуют в пространствах $\widetilde{\Lambda}(\alpha)$.

Теорема 3.1. *Существует функция $f \in \Lambda(\alpha)$ такая, что $Kf \notin \Lambda^a(\alpha)$, $0 < \alpha_j < 1$, $j = \overline{1, n}$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(\xi_1, \xi_2) = \varphi(\xi_1) + \psi(\xi_2)$, где $\varphi \in C(-\pi, \pi)$, $\psi \in \mathrm{Lip}\,(\alpha_2, T^1)$ и $Kf \in H^\infty(U^n)$ (см. [11]). Легко видеть, что

$$Kf(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{T^2} \frac{f(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2}{(\xi_1 - z_1)(\xi_2 - z_2)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{T^1} \frac{\varphi(\xi_1)d\xi_1}{(\xi_1 - z_1)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{T^1} \frac{\psi(\xi_2)d\xi_2}{(\xi_2 - z_2)}.$$

Поскольку вторая функция принадлежит $H^\infty(U^n)$, а первая не принадлежит $H^\infty(U^n)$, то отсюда получаем, что хотя $f \in \Lambda(\alpha_1, \alpha_2)$, но $Kf \neq \Lambda^a(\alpha_1, \alpha_2)$.

Теорема 3.2. *Операторы типа Коши действуют в пространствах $\widetilde{\Lambda}(\alpha)$, $0 < \alpha_j < 1$, $j = \overline{1, n}$.*

Доказательство теоремы основано на следующей лемме.

Лемма. *Имеет место следующее неравенство :*

$$\left| \int_{Q^n} \Delta_t f(e^{i\theta'_k}, e^{i\theta'_{k+1} + it'_{k+1}}) e^{i(t_1 + \cdots + t_n)} \prod_{j=1}^{k} (e^{it_j} - r_j)^{-2} \prod_{j=k+1}^{n} (e^{it_j} - r_j)^{-1} dt \right| \leq$$

$$\leq C \prod_{j=1}^{n} (1 - r_j)^{\alpha_j - 1}, \tag{3.1}$$

где $t = (t_1, \ldots, t_k)$, $e^{i\theta'_k} = (e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_k})$ *и* $e^{i\theta'_{k+1} + it'_{k+1}} = (e^{i\theta_{k+1} + it_{k+1}}, \ldots, e^{i\theta_n + it_n})$.

Доказательство проводится индукцией по n. Пусть $n = 2$ $(k = 1)$

$$\int_{Q^2} \Delta_{t_1} f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2 + it_2}) e^{i(t_1 + t_2)} (e^{it_1} - r_1)^{-2} (e^{it_2} - r_2)^{-1} dt_1 dt_2 =$$

$$= \int_{Q^2} \Delta_{t_1} f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2 + it_2}) e^{i(t_1 + t_2)} (e^{it_1} - r_1)^{-2} (e^{it_2} - r_2)^{-1} dt_1 dt_2 -$$

$$-\int_{Q^2}\Delta_{t_1}f(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})e^{i(t_1+t_2)}(e^{it_1}-r_1)^{-2}(e^{it_2}-r_2)^{-1}dt_1dt_2+$$

$$+\int_{Q^2}\Delta_{t_1}f(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})e^{i(t_1+t_2)}(e^{it_1}-r_1)^{-2}(e^{it_2}-r_2)^{-1}dt_1dt_2=I.$$

Легко видеть, что

$$\Delta_t f(e^{i\theta'_s},e^{i\theta'_{s+1}+it'_{s+1}})-\Delta_t f(e^{i\theta'_{s+1}},e^{i\theta'_{s+2}+it'_{s+2}})=\Delta_{t'}f(e^{i\theta'_{s+1}},e^{i\theta'_{s+2}+it'_{s+2}}),$$

где $t'=(t_1,\ldots,t_l,t_{s+1})$, $s\geq l+1$.

Воспользовавшись тем, что $\int_T\frac{d\xi}{\xi-z}=2\pi i$, получаем

$$I=\int_{Q^2}\Delta_{t_2t_1}f(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})e^{i(t_1+t_2)}(e^{it_1}-r_1)^{-2}(e^{it_2}-r_2)^{-1}dt_1dt_2+$$

$$+\int_{Q^2}\Delta_{t_1}f(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})e^{i(t_1+t_2)}(e^{it_1}-r_1)^{-2}(e^{it_2}-r_2)^{-1}dt_1dt_2=$$

$$=\int_{Q^2}\Delta_{t_2t_1}f(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})e^{i(t_1+t_2)}(e^{it_1}-r_1)^{-2}(e^{it_2}-r_2)^{-1}dt_1dt_2+$$

$$+\int_{Q^1}\Delta_{t_1}f(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})e^{it_1}(e^{it_1}-r_1)^{-2}dt_1.$$

Учитывая оценку (1.4), получаем

$$|I|\leq\int_{Q^2}|t_2|^{\alpha_2}|t_1|^{\alpha_1}|e^{it_1}-r_1|^{-2}|e^{it_2}-r_2|^{-1}|dt_1||dt_2|+$$

$$+\int_{Q^1}|t_1|^{\alpha_1}|e^{it_1}-r_1|^{-2}|dt_1|\leq C(1-r_1)^{\alpha_1-1}.$$

Предположим теперь, что лемма верна для $(n-1)$-переменных. Докажем ее для n-переменных. Обозначим через J_k^k интеграл в (3.1) и положим

$$P(t,k,n)=e^{i(t_1+\cdots+t_n)}\prod_{j=1}^{k}(e^{it_j}-r_j)^{-2}\prod_{j=k+1}^{n}(e^{it_j}-r_j)^{-1}.$$

Легко проверить, что $J_k^k=J_{k+1}^{k+1}+J_k^{k+1}$ и

$$J_k^k=\int_{Q^n}\Delta_t f(e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n})P(t,k,n)dt+\int_{Q^n}[\Delta_{t_k\cdots t_1}f(e^{i\theta'_{k+1}},e^{i\theta'_{k+2}+it'_{k+2}})+$$

$$+\Delta_{t_{k+1}\cdots t_1}f(e^{i\theta'_{k+2}},e^{i\theta'_{k+3}+it'_{k+3}})+\cdots+\Delta_{t_{n-2}\cdots t_1}f(e^{i\theta'_{n-1}},e^{i\theta'_n+it'_n})]P(t,k,n)dt.$$

Очевидно, что второй интеграл зависит от $(n-1)$-переменных. Следовательно, по предположению индукцию можем утверждать, что

$$|J_k^k|\leq\int_{Q^n}|t|^{\alpha}\prod_{j=1}^{k}|e^{it_j}-r_j|^{-2}\prod_{j=k+1}^{n}|e^{it_j}-r_j|^{-1}|dt|+$$

$$+C_1\prod_{j=1}^{k}(1-r_j)^{\alpha_j-1}\leq C\prod_{j=1}^{n}(1-r_j)^{\alpha_j-1}.$$

Лемма доказана.

Доказательство Теоремы 3.2. В силу Теоремы 1.1* достаточно убедиться, что

$$\left|\frac{\partial^k F(z)}{\partial z_1\cdots\partial z_k}\right| \le C\prod_{j=1}^{k}(1-|z_j|)^{\alpha_j-1}, \quad 1\le k\le n,$$

где $F(z) = Kf(z)$.

Применяя обозначения, введенные в Лемме 1, получаем

$$\frac{\partial^k F(z)}{\partial z_1\cdots\partial z_k} = \frac{e^{-i(\theta_1+\cdots+\theta_k)}}{(2\pi)^n}\int_{T^n} f(e^{i\theta_1+it_1},\ldots,e^{i\theta_n+it_n})P(t,k,n)dt.$$

Следовательно, из $\int_T d\xi(\xi-z)^2 = 0$ имеем

$$\frac{\partial^{l} F(z)}{\partial z_1\cdots\partial z_k} = \frac{e^{-i(\theta_1+\cdots+\theta_k)}}{(2\pi)^n}\int_{Q^n} \Delta_{t_1} f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta'_2+it'_2})P(t,k,n)dt.$$

Продолжая таким образом, получаем

$$\frac{\partial^k F(z)}{\partial z_1\cdots\partial z_k} = \frac{e^{-i(\theta_1+\cdots+\theta_k)}}{(2\pi)^n}\int_{Q^n} \Delta_{t_k\cdots t_1} f(e^{i\theta'_k}, e^{i\theta'_{k+1}+it'_{k+1}})P(t,k,n)dt.$$

Наконец, применяя лемму, получаем требуемую оценку. Теорема доказана.

§4. ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ НА $H^p(\alpha)$, $0<p\le 1$

Пусть задан мультииндекс $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, будем предполагать, что для некоторого s, при $1\le s\le n$, α_j, $j=\overline{1,s}$ – целые, а при α_j, $j=\overline{s+1,n}$ нецелые. Напомним (см. [3]), что $f\in H^p(\alpha)$, $\alpha_j>-1$, $j=\overline{1,n}$, если $f\in H(U^n)$ и

$$\|f\|_{H^p(\alpha)} = \left(\int_{U^n}|f(\xi)|^p\prod_{j=1}^{n}(1-|\xi_j|)^{\alpha_j}dm_{2n}(\xi)\right)^{1/p} < +\infty.$$

Для описания сопряженного пространства $H^{*p}(\alpha)$ в терминах $\widetilde{\Lambda}^a(\gamma)$ сначала найдем связь между пространствами $\Lambda^p(\alpha)$ и $\Lambda^a_p(\gamma)$ (мультииндекс $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ будет определен позже).

Пусть $f\in\Lambda^p(\alpha)$ и $\beta_j > \frac{\alpha_j+2}{p}$, тогда

$$|D^{\beta+1}f(z)| \le C\prod_{j=1}^{n}(1-|z_j|)^{\frac{\alpha_j+2}{p}-\beta_j-2}. \tag{4.1}$$

Заметим, что без ограничения общности, можно считать, что

$$\beta_j = \begin{cases} \frac{\alpha_j+2}{p}-1, & \text{если } 1\le j\le s\\ \left[\frac{\alpha_j+2}{p}-1\right], & \text{если } s<j\le n.\end{cases} \tag{4.2}$$

Полагая $\nu_j = \frac{\alpha_j+2}{p} - 1 - \beta_j$, $s < j \le n$, из (4.1) получаем

$$|D^{\beta+1} f(z)| \le C \prod_{j=1}^{s} (1-|z_j|)^{-1} \prod_{j=s+1}^{n} (1-|z_j|)^{\nu_j - 1}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^{\beta_1-1+\cdots+\beta_s-1+\beta_{s+1}+\cdots+\beta_n}(f(z)z^{\beta+1})}{\partial z_1^{\beta_1-1}\cdots\partial z_s^{\beta_s-1}\partial z_{s+1}^{\beta_{s+1}}\cdots\partial z_n^{\beta_n}} \in \Lambda^a(\nu'),$$

где $\nu' = (\nu_{s+1}, \ldots, \nu_n)$. (Напомним, что $\Lambda^a_*(k) = \Lambda^a_*$ для $k = 0$).

Поэтому

$$f(z)z^{\beta+1} \in \Lambda^a(\beta_1 - 1, \ldots, \beta_s - 1, \beta_{s+1} + \nu_{s+1}, \ldots, \beta_n + \nu_n).$$

Из Теорем 1.4 и 2.5 имеем

$$f \in \widetilde{\Lambda}^a(\beta_1 - 1, \ldots, \beta_s - 1, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_n).$$

Следовательно, $f \in \widetilde{\Lambda}^a(\gamma)$,

$$\gamma_j = \begin{cases} \frac{\alpha_j+2}{p} - 2, & \text{если } 1 \le j \le s \\ \frac{\alpha_j+2}{p} - 1, & \text{если } s < j \le n. \end{cases} \tag{4.3}$$

Из Теорем 1.4 и 2.5 следует, что

$$\left|\frac{\partial^{\beta_{i_1}+1+\cdots+\beta_{i_k}+1} f(z)}{\partial z_{i_1}^{\beta_{i_1}+1}\cdots\partial z_{i_k}^{\beta_{i_k}+1}}\right| \le C\|f\|_{\Lambda^a_*} \prod_{j=1}^{k}(1-|z_{i_j}|)^{\nu_{i_j}-1},$$

где $\nu_{i_j} = 0$ при $1 \le i_j \le s$. Следовательно

$$\prod_{j=1}^{k}(1-|z_{i_j}|)^{1-\nu_{i_j}}\left|\frac{\partial^{\beta_{i_1}+1+\cdots+\beta_{i_k}+1} f(z)}{\partial z_{i_1}^{\beta_{i_1}+1}\cdots\partial z_{i_k}^{\beta_{i_k}+1}}\right| \le C(\beta)\|f\|_{\Lambda^p(\alpha)}.$$

Поэтому

$$C_1\|f\|_{\Lambda^p(\alpha)} \ge \|f\|_{\widetilde{\Lambda}^a(\gamma)}.$$

Теперь установим обратную оценку. Пусть $f \in \widetilde{\Lambda}^a(\gamma)$. Тогда $z^{\beta+1}f(z) \in \widetilde{\Lambda}^a(\gamma)$.

Взяв β_j из (4.2), получим

$$\left|\frac{\partial^{\beta+1}(f(z)z^{\beta+1})}{\partial z_1^{\beta_1+1}\cdots\partial z_n^{\beta_n+1}}\right| = |D^{\beta+1} f(z)| \le C_2(\beta)\|f\|_{\widetilde{\Lambda}^a(\gamma)} \prod_{j=1}^{n}(1-|z_j|)^{\frac{\alpha_j+2}{p}-\beta_j-2}. \tag{4.4}$$

Следовательно

$$|D^{\beta+1} f(z)| \prod_{j=1}^{n}(1-|z_j|)^{\beta_j+2-\frac{\alpha_j+2}{p}} \le C_2(\beta)\|f\|_{\widetilde{\Lambda}^a(\gamma)}.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 4.1. *Функция $f \in H(U^n)$ принадлежит $\Lambda^p(\alpha)$ тогда и только тогда, когда $f \in \widetilde{\Lambda}^a(\gamma)$ с γ (4.3).*

Теперь, используя Теорему 6 из [3] мы можем описать сопряженное пространство $H^{*p}(\alpha)$ в терминах $\widetilde{\Lambda}^a(\gamma)$.

Теорема 4.2. *Пусть Φ – линейный непрерывный функционал на $H^p(\alpha)$, $\alpha_j > -1$, $j = \overline{1,n}$, $0 < p \leq 1$, а $g(z) = \Phi(e_z)$, где $e_z = (1 - wz)^{-1}$, $w, z \in U^n$. Тогда справедливы следующие утверждения :*

1. a) $g \in \widetilde{\Lambda}^a(\gamma)$, где γ определяется по (4.3);

b) функционал $\Phi(\cdot)$ представляется в виде

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \to 1-0} \int_{T^n} f(\rho\xi) g(\rho\xi) dm_n(\xi) \tag{4.5}$$

и существуют постоянные $C_1(p)$ и $C_2(p)$ такие, что

$$C_1(p)||\Phi|| \leq ||g||_{\widetilde{\Lambda}^a(\gamma)} \leq C_2(p)||\Phi||. \tag{4.6}$$

2. Каждая функция $g \in \widetilde{\Lambda}^a(\gamma)$ по формуле (4.5) порождает линейный непрерывный функционал на $H^p(\alpha)$, который удовлетворяет (4.6).

Замечание. Аналог Теоремы 4.2 для n-гармонических в полуплоскости функций был установлен в [12].

ABSTRACT. The classes $\widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$ and $\widetilde{\Lambda}^a_*(\alpha)$ of holomorphic in U^n functions are constructed which are multi-dimensional analogs of the one-dimensional Lipschitz classes. We investigate the multiplicative properties of these classes and obtain a complete description of linear continuous functionals defined on the corresponding spaces $H^p(\alpha)$ for $0 < p < 1$. A generalization of the well-known theorem of Privalov is proved : the classes $\widetilde{\Lambda}^a(\alpha)$ and $\widetilde{\Lambda}^a_*(\alpha)$ are invariant with respect to Cauchy-type operators.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. L. Duren, B. W. Romberg, A. L. Shields, "Linear functionals of H^p spaces with $0 < p < 1$" , J. Reine Angew. Math., vol. 238, pp. 32 – 60, 1969.
2. A. P. Frazer, "The dual space of H^p of the polydisk for $0 < p < 1$", Duke Math. J., vol. 39, no. 2, pp. 369 – 379, 1972.
3. Ф. А. Шамоян, "Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных функций", Сиб. мат. журнал, т. 31, №2, стр. 197 – 216, 1990.
4. Ф. А. Шамоян, "Теплицевы операторы и деление на внутреннюю функцию в

некоторых пространствах аналитических функций", ДАН Арм. ССР, т. 76, №3, стр. 109 – 113, 1983.

5. Ф. А. Шамоян, А. В. Арутюнян, "Теплицевы операторы в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций", ДАН Армении, т. 91, №4, стр. 147 – 151, 1991.

6. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, т. I, М., Мир, 1965.

7. М. М. Джрбашян, " О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций", ДАН Арм. ССР, т. 3, №1, стр. 3 – 9, 1945.

8. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Института математики и механики АН Арм. ССР, т. 2, стр. 3 – 30, 1948.

9. B. Yorikke, "A multidimensional analogy of Privalov's theorem", Math. Naichrichten, vol. 107, pp. 221 – 233, 1982.

10. С. М. Никольский, Приближение Функций Многих Переменных и Теоремы Вложений, М., Наука, 1969.

11. J. B. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, N.Y., 1981.

12. G. Merryfield, "On the area integral, Carleson measures and H^p in the polydisk", Indiana Univer. Math. J., vol. 34, no. 3, pp. 663 – 685, 1985.

11 Августа 1993

Институт математики
НАН Армении

Ереванский государственный
университет

ДУАЛЬНЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ФОРМУЛЫ АМБАРЦУМЯНА

Г. Ю. Панина

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №6, 1993

В своих предыдущих работах автор вывела обобщения комбинаторной формулы Амбарцумяна. В настоящей работе приведены их дуальные версии. Эти формулы вычисляют меры многогранных множеств в $\mathbb{R}^n$ с помощью комбинаторных коэффициентов и мер некоторых специальных многогранных множеств.

ВВЕДЕНИЕ

Формулы Амбарцумяна представляют меры множеств Бьюффона гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$ посредством определенных комбинаторных коэффициентов и значений мер некоторых простых подмножеств гиперплоскостей. Впервые эти формулы были получены Р. В. Амбарцумяном для пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^4$ (см. [1]) и изучены для общих $\mathbb{R}^{2k}$ в [2].

А. Бадли описал в общих чертах метод получения этих формул для общего $\mathbb{R}^n$ посредством классических формул для многогранников (см. [3]). Другие комбинаторные формулы приводятся автором в работах [4] и [5]. Они касаются мер множеств гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$ и множеств алгебраических поверхностей в $\mathbb{R}^n$

Цель настоящей работы – получение дуальных формул, позволяющих получать меры многогранных множеств в $\mathbb{R}^n$ в терминах комбинаторных коэффициентов и значений мер некоторых специальных многогранных множеств.

§1. НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Мы используем следующие обозначения :

E_k – множество всех k-мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$;

E_k^0 - множество k-мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$, содержащих начало координат O;

Ω^{n-1} – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ с центром в O;

для $e, e_1, e_2 \in E_{n-1} \setminus E_{n-1}^0$ положим :

$\mathbb{R}^+(e)$ - полусфера, ограниченная e, которая не содержит O.

$EX(e_1, e_2) = \mathbb{R}^+(e_1) \cap \mathbb{R}^+(e_2)$;

для $K \subset \mathbb{R}^n$ положим

$c(K)$ выпуклая оболочка K;

$[K] = \{e \in E_{n-1} : e$ пересекает $c(K)\}$;

$(K) = \{e \in E_{n-1} : e$ содержит $K\}$;

$\mathrm{aff}(K)$ - минимальное аффинное преобразование, содержащее K;

$\mathrm{Int}(K)$ - внутренность K в $\mathrm{aff}(K)$.

Меры. Мера μ, определенная на E_{n-1} называется *беспучковой*, если $\mu(\{e : P \in e\}) = 0$ для любой точки P; μ называется *беспучковой относительно множества* $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$, если $\mu(\{e : P \in e\}) = 0$ для любой точки $P \in \mathcal{P}$. Все меры на $\mathbb{R}^n$ предполагаются конечными. Мера μ на $\mathbb{R}^n$ называется *бесплоскостной (б. п.- мера)* на множестве гиперплоскостей $\mathcal{E}$, если для любого $e \in \mathcal{E}$, имеем $\mu(e) = 0$.

Симплексы. Пусть $\mathcal{P}$ - конечное множество точек в $\mathbb{R}^n$. Подмножество $\theta \subset \mathcal{P}$, состоящее из не более чем $(n+1)$ точек, называется *симплексом* (вершины, пустое множество не является симплексом). Множество всех симплексов обозначим через $T(\mathcal{P})$. Множество всех симплексов, состоящих из $k+1$, точек обозначим через $(k) \subset T(\mathcal{P})$. Симплекс Δ содержит симплекс θ, если множество вершин Δ содержит множество вершин θ.

Кольца. Для $A, B \subset \mathcal{P}$ определим

$$\langle A|B\rangle = \{e \in E_{n-1} : \quad e \text{ отделяет } A \text{ от } B\}.$$

Кольцо Бьюффона $B(\mathcal{P})$ - кольцо всех подмножеств E_{n-1}, порождаемое всеми множествами типа $\langle A|B\rangle$, с непустыми $A, B \subset \mathcal{P}$, посредством операций объединения, пересечения и разности между множествами. Кольцо $K(\mathcal{P})$ - кольцо всех множеств E_{n-1}, порождаемых множествами из $B(\mathcal{P})$, $\{(\theta)\}_{\theta\in T(\mathcal{P})}$ и E_{n-1}. Элементы $B(\mathcal{P})$ называются *множествами Бьюффона.*

Пусть $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i=1}^m$ множество гиперплоскостей из $E_{n-1} \setminus E^0_{n-1}$ в общем положении. Определим кольцо

$$B^*(\mathcal{E}) = \{ \text{ многогранник } A \subset \mathbb{R}^n: \quad O \notin A, \text{ грани } A$$

$$\text{лежат на одной гиперплоскости } e_i \}.$$

Для конечного множества точек $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ в общем положении и гиперплоскости e будем говорить, что гиперплоскость e' *лежит близко к* e, если e может быть непрерывно преобразована в e', не задевая точек из $\mathcal{P}$ кроме тех, что лежат в e. Для конечного общего множества гиперплоскостей $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^{n-1}$ в общем положении и точки e будем говорить, что точка e' *лежит близко к* e, если существует путь, соединяющий e и e', внутренность которого не пересекает ни одну из гиперплоскостей из $\mathcal{E}$.

Атомы. Пусть A, B – непустые подмножества $\mathcal{P}$, $A \cup B = \mathcal{P}$, $A \cap B = \emptyset$. Множество $\langle A|B\rangle$ гиперплоскостей называется *атомом. Множество Бьюффона* можно эквивалентно определить как множество, представимое в виде объединения непересекающихся атомов. Множество гиперплоскостей, представляемых как $[K]$ для некоторого $K \subset \mathbb{R}^n$, называется *суператомом.*

§2. ОБОБЩЕННЫЕ ФОРМУЛЫ АМБАРЦУМЯНА

Теорема 2.1 (см. [1], [5]) *Пусть n – четное, а μ локально конечная беспучковая мера на E_{n-1}. Для любого конечного множества точек $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ в общем положении и любого множества Бьюффона $A \in B(\mathcal{P})$*

$$\mu(A) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\sum_{(k)} c_A(\theta)\mu([\theta]),$$

где коэффициенты $c_A(\theta)$ вычисляются с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм 2.1. Коэффициенты $c_A(\theta)$ вычисляются шаг за шагом, начиная с членов высокой размерности, при предположении, что $\mathcal{P} \cup \{0\}$ также является множеством в общем положении.

Шаг 1. Пусть $\theta \in (n-1)$, а точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$ суть вершины θ и e гиперплоскость, содержащая θ. Пусть $\left(e, \underbrace{\pm, \ldots, \pm}_{n \text{ раз}}\right)$ – гиперплоскость, которая лежит близко к e и позиция которой относительно $P_1, \ldots, P_n$ определяется следующим правилом выбора знака : для любого j, имеем $P_j \in \mathbb{R}^+(e, \pm, \ldots, \pm)$ тогда и только тогда, когда в скобках на j - том месте стоит знак $+$. Положим теперь

$$c_A(\theta) = \sum_{(\pm, \ldots, \pm)} I_A(e, \pm, \ldots, \pm)(-1)^{\Phi(\pm, \ldots, \pm)},$$

где сумма берется по всем наборам, содержащим n плюсов и минусов; I_A – индикаторная функция множества A, $\Phi(\pm, \ldots, \pm)$ – число минусов в наборе.

Шаг 2. Пусть $\theta \in (k)$ с четным k. Тогда положим

$$c_A(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{m=k+1}^{n-1} (-1)^m \sum_{\substack{\Delta \in (m), \\ \Delta \text{ содержит } \theta}} c_A(\Delta).$$

Шаг 3. Пусть $\theta \in (k)$ с нечетным k, а $P_1, \ldots, P_{k+1}$ вершины θ. Выберем гиперплоскость e, содержащую θ и не содержащую другие точки $\mathcal{P}$. Пусть $\left(e, \underbrace{\pm, \ldots, \pm}_{k+1 \text{ раз}}\right)$ – гиперплоскость, лежащая близко к e, положение которой относительно $P_1, \ldots, P_{k+1}$ определяется следующим образом. Для каждого j, $P_j \in \mathbb{R}^+(e, \pm, \ldots, \pm)$ тогда и только тогда, если в скобках на j-том месте стоит знак $+$. Тогда

$$c_A(\theta) = \sum_{(\pm, \ldots, \pm)} I_A(e, \pm, \ldots, \pm)(-1)^{\Phi(\pm, \ldots, \pm)+1} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{m=k+1}^{n-1} (-1)^m \sum_{\substack{\Delta \in (m), \ \Delta \text{ содержит } \theta, \\ \text{Int } (\Delta) \cap e \neq \emptyset}} c_A(\Delta).$$

Теорема 2.2. (см. [1]) *Пусть n нечетно, $\mathcal{P}$ конечное множество точек, μ - беспучковая мера относительно $\mathcal{P} \cup \{O\}$, $A \in B(\mathcal{P})$. Если $\mathcal{P} \cup \{O\}$ является множеством в общем положении, то*

$$\mu(A) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\Delta \in (m)} \left[d_A^1(\Delta)\mu([\Delta]) + d_A^2(\Delta)\mu([\overline{\Delta}])\right],$$

где $\overline{\Delta} = \Delta \cup \{O\}$, $d_A^{1,2}$ – коэффициенты, вычисляемые согласно следующим алгоритмам.

Алгоритм 2.2. Начнем с члена высокой размерности.

Шаг 1. Пусть $\Delta \in (n-1)$, точки $P_1, \ldots, P_n$ – вершины Δ, а e – гиперплоскость, содержащая Δ. Пусть $(e, \pm, \ldots, \pm)$ – гиперплоскость, лежащая близко к e, положение которой относительно $P_1, \ldots, P_n$ определяется следующим правилом знака : для любого j, имеем $P_j \in \mathbb{R}^+(e, \pm, \ldots, \pm)$ тогда и только тогда, когда в скобках на j-том месте стоит знак $+$. Теперь положим

$$c_A^1(\Delta) = 0, \qquad c_A^2(\Delta) = -\sum_{(\pm,\ldots,\pm)} I_A(e, \pm, \ldots, \pm)(-1)^{\Phi(\pm,\ldots,\pm)},$$

$$c_A^3(\Delta) = \sum_{(\pm,\ldots,\pm)} I_A(e, \pm, \ldots, \pm)(-1)^{\Phi(\pm,\ldots,\pm)}, \qquad c_A^4(\Delta) = 0,$$

где сумма берется по всем наборам, состоящих из n плюсов и минусов.

Шаг 2. Пусть $\Delta \in (n-2)$, точки $P_1, \ldots, P_{n-1}$ – вершины Δ, а g – гиперплоскость, содержащая Δ и O. Пусть $(g, \pm, \ldots, \pm)$ – гиперплоскость, лежащая близко к g, положение которой определяется как и в предыдущем шаге. Теперь положим

$$c_A^1(\Delta) = 0, \qquad c_A^4(\Delta) = -2\sum_{(\pm,\ldots,\pm)} I_A(g, \pm, \ldots, \pm)(-1)^{\Phi(\pm,\ldots,\pm)},$$

$$c_A^2(\Delta) = \frac{1}{2}\sum_m (-1)^{m+1} \sum_{\theta \in (m),\ \theta \text{ содержит } \Delta} c_A^2(\theta) - \frac{1}{2}c_A^4(\Delta),$$

$$c_A^3(\Delta) = \frac{1}{2}\sum_m (-1)^{m+1} \sum_{\theta \in (m),\ \theta \text{ содержит } \Delta} c_A^3(\theta) - \frac{1}{2}c_A^4(\Delta).$$

Шаг 3. Пусть $\Delta \in (k)$ с четным k, точки $P_1, \ldots, P_{k+1}$ – вершины Δ. Выберем гиперплоскость e, содержащую Δ и не содержащую остальные точки $\mathcal{P} \cup \{O\}$. Определим гиперплоскости $(e, \pm, \ldots, \pm)$ как в шаге 1. Выберем точку $O'(e)$ такую, что сегмент $[O'(e), O]$ пересекает e. Теперь положим

$$c_A^1(\Delta) = \frac{1}{2}\sum_m (-1)^m \sum_{\theta \in (m),\ \theta \text{ содержит } \Delta} [c_A^1(\theta) - c_A^2(\theta) - c_A^3(\theta) +$$

$$+ c_A^4(\theta)] + \frac{1}{2}[c_A^4(\Delta) - c_A^2(\Delta) - c_A^3(\Delta)],$$

$$c_A^2(\Delta) = \sum_{(\pm,\ldots,\pm)} I_A(e, \pm, \ldots, \pm)(-1)^{\Phi(\pm,\ldots,\pm)} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_m (-1)^m \sum_{\substack{\theta \in (m),\ \theta \text{ содержит } \Delta \\ \mathrm{Int}\,(\theta) \cap e \neq \emptyset}} c_A^2(\theta) + \frac{1}{2}\sum_m (-1)^m \sum_{\substack{\theta \in (m),\ \theta \text{ содержит } \Delta \\ \mathrm{Int}\,(c(\theta \cup \{O\})) \cap e \neq \emptyset}} c_A^4(\theta),$$

$$c_A^3(\Delta) = - \sum_{(\pm,\dots,\pm)} I_A(e,\pm,\dots,\pm)(-1)^{\Phi(\pm,\dots,\pm)} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_m (-1)^m \sum_{\substack{\theta\in(m),\ \theta \text{ содержит } \Delta \\ \operatorname{Int}(\theta)\cap e\neq\emptyset}} c_A^3(\theta) + \frac{1}{2}\sum_m (-1)^m \sum_{\substack{\theta\in(m),\ \theta \text{ содержит } \Delta \\ \operatorname{Int}(c(\theta\cup\{O'(e)\}))\cap e\neq\emptyset}} c_A^4(\theta),$$

$$c_A^4(\Delta) = \frac{1}{2}\sum_m (-1)^m \sum_{\theta\in(m),\ \theta \text{ содержит } \Delta} c_A^4(\theta).$$

(Если $k=0$, то $c_A^1(\Delta)=0$).

Шаг 4. Пусть $\Delta\in(k)$ с нечетным k. Выберем гиперплоскость e, содержащую Δ и не содержащую остальные точки $\mathcal{P}\cup\{O\}$. Выберем гиперплоскость g, содержащую Δ и O, но не содержащую остальные точки $\mathcal{P}$. Определим гиперплоскости $(e,\pm,\dots,\pm)$ и $(g,\pm,\dots,\pm)$ как в шагах 1 и 2. Выберем точку $O'(e)$ такую, что сегмент $[O'(e),O]$ пересекает e. Положим

$$c_A^1(\Delta) = - \sum_{(\pm,\dots,\pm)} I_A(e,\pm,\dots,\pm)(-1)^{\Phi(\pm,\dots,\pm)} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_m (-1)^m \Bigg[\sum_{\substack{\theta\in(m),\ \theta \text{ содержит } \Delta \\ \operatorname{Int}(\theta)\cap e\neq\emptyset}} c_A^1(\theta) - \sum_{\substack{\theta\in(m),\ \theta \text{ содержит } \Delta \\ \operatorname{Int}(c(\theta\cup O'))\cap e\neq\emptyset}} c_A^2(\theta) -$$

$$\sum_{\substack{\theta\in(m),\ \theta \text{ содержит } \Delta \\ \operatorname{Int}(c(\theta\cup O))\cap e\neq\emptyset}} c_A^3(\theta) + \sum_{\substack{\theta\in(m) \\ \theta \text{ содержит } \Delta}} c_A^4(\theta) \Bigg] + \frac{1}{2}c_A^4(\Delta),$$

$$c_A^2(\Delta) = \frac{1}{2}\sum_m (-1)^m \sum_{\theta\in(m),\ \theta \text{ содержит } \Delta} [c_A^2(\theta) - c_A^4(\theta)] + \frac{1}{2}c_A^4(\Delta),$$

$$c_A^3(\Delta) = \frac{1}{2}\sum_m (-1)^m \sum_{\theta\in(m),\ \theta \text{ содержит } \Delta} [c_A^3(\theta) - c_A^4(\theta)] + \frac{1}{2}c_A^4(\Delta),$$

$$c_A^4(\Delta) = \sum_{(\pm,\dots,\pm)} I_A(g,\pm,\dots,\pm)(-1)^{\Phi(\pm,\dots,\pm)} + \frac{1}{2}\sum_m (-1)^m \sum_{\substack{\theta\in(m),\ \theta \text{ содержит } \Delta \\ \operatorname{Int}(\theta)\cap g\neq\emptyset}} c_A^4(\theta).$$

Шаг 5. Для всех Δ положим

$$d_A^1(\Delta) = \frac{1}{2}\left[c_A^1(\Delta) + c_A^3(\Delta)\right], \quad d_A^2(\Delta) = \frac{1}{2}\left[c_A^2(\Delta) - c_A^3(\Delta)\right].$$

§3. ДУАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Зафиксируем в $\mathbb{R}^n$ декартову систему координат $O; x_1, ..., x_n$ и воспользуемся *стереографической проекцией*

$$\phi: \quad \mathbb{R}^n \setminus \{O\} \longmapsto E_{n-1} \setminus E^0_{n-1},$$

определяемой обычным образом : $\phi((a_1, ..., a_n))$ гиперплоскость, задаваемая уравнением :

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + 1 = 0.$$

Лемма 3.1.

1. $\phi \cdot \phi =$ - тождественное преобразование на $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$.

2. ϕ взаимно-однозначное соответствие.

3. Для любого $P \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ и $e \in E_{n-1} \setminus E^0_{n-1}$,

$$P \in e \Longleftrightarrow \phi^{-1}(e) \in \phi(P).$$

4. Для любого $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ и $e \in E_{n-1} \setminus E^0_{n-1}$,

$$e \in \langle P_1 | P_2 \rangle \Longleftrightarrow \phi^{-1}(e) \in EX(\phi(P_1), \phi(P_2)).$$

Лемма 3.2. *Пусть $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i=1}^m$ множество гиперплоскостей из $E_{n-1} \setminus E^0_{n-1}$ в общем положении. Пусть $A \in B^*(\mathcal{E})$. Тогда A можно получить из множеств типа $EX(e_i, e_j)$ посредством операций $\cup$ и $\cap$. Следовательно*

$$\phi(A) \in B\left(\{\phi^{-1}(e_i)\}_{e_i \in \mathcal{E}}\right).$$

Пусть μ конечная б.п.-мера относительно $\mathcal{E}$ на $\mathbb{R}^n$. Отображение ϕ индуцирует беспучковую относительно $\{\phi^{-1}(e_i)\}_{e_i \in \mathcal{E}}$ меру μ^* на $E_{n-1} \setminus E^0_{n-1}$. Так как $\mu(A) = \mu^*(\phi(A))$, то можем вычислить $\mu(A)$, применяя Теоремы 2.1 и 2.2 к $\phi(A)$.

Теорема 3.1. (Дуальная комбинаторная формула). *Пусть $\mathcal{E} \subset E_{n-1} \setminus E^0_{n-1}$ конечное множество гиперплоскостей в общем положении, μ конечная б.п.-мера на $\mathcal{E}$ мера и $A \in B^*(\mathcal{E})$.*

1. Если n четно, то

$$\mu(A) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\sum_{[k]} c_A(\theta)\mu([\theta]),$$

2. Если n нечетно, то выберем гиперплоскость e_0 из $E_{n-1} \setminus E^0_{n-1}$ такую, что $\mathcal{E} \cup \{e_0\}$ остается в общем положении. Тогда

$$\mu(A) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{\Delta\in[m]}\left[d^1_A(\Delta)\mu([\Delta]) + d^2_A(\Delta)\mu([\overline{\Delta}])\right],$$

где $[k]$ – множество всех $(k+1)$-элементных подмножеств $\mathcal{E}$, $\overline{\Delta} = \Delta \cup \{e_0\}$,

$$[\theta] = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad \exists e_1, e_2 \in \theta \quad \text{такие, что} \quad x \in EX(e_1, e_2), \quad x \notin e_1,\ x \notin e_2\},$$

$c_A(\theta)$ и $d^{1,2}_A(\theta)$ – комбинаторные коэффициенты, вычисляемые с помощью Алгоритмов 3.1 и 3.2, соответственно.

Алгоритм 3.1. Коэффициенты вычисляются шаг за шагом, начиная с членов высокой размерности.

Шаг 1. Пусть $\theta \in [n-1]$, и пусть $P_1, P_2, ..., P_n$ – гиперплоскости θ, а e пересечение всех P_i. Пусть $\Big(e, \underbrace{\pm, ..., \pm}_{n \text{ раз}}\Big)$ – точка, лежащая близко к e, позиция которой относительно $P_1, ..., P_n$ определяется следующим правилом знака : для любого j, имеем $(e, \pm, ..., \pm) \in \mathbb{R}^+(P_j)$ тогда и только тогда, когда в скобах на j-том месте стоит знак $+$. Теперь положим

$$c_A(\theta) = \sum_{(\pm,...,\pm)} I_A(e, \pm, ..., \pm)(-1)^{\Phi(\pm,...,\pm)},$$

где сумма берется по всем наборам, состоящих из n плюсов и минусов ; I_A – индикаторная функция множества A, $\Phi(\pm, ..., \pm)$ – число минусов в наборе.

Шаг 2. Пусть $\theta \in [k]$ с четным k. Тогда

$$c_A(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{m=k+1}^{n-1}(-1)^m \sum_{\substack{\Delta\in[m],\\ \Delta \text{ содержит } \theta}} c_A(\Delta).$$

Шаг 3. Пусть $\theta \in [k]$ с четным k, и пусть $P_1, ..., P_{k+1}$ – гиперплоскости θ. Выберем точку e, лежащую на пересечении всех P_i и не лежащую на любой другой гиперплоскости $\mathcal{E}$. Пусть $\Big(e, \underbrace{\pm, ..., \pm}_{k+1 \text{ раз}}\Big)$ точка, лежащая близко к e

положение которой относительно $P_1, \dots, P_{k+1}$ определяется следующим образом. Для каждого j, $(e, \pm, \dots, \pm) \in \mathbb{R}^+(P_j)$ тогда и только тогда, когда в скобках на j - том месте стоит знак $+$. Тогда

$$c_A(\theta) = \sum_{(\pm,\dots,\pm)} I_A(e, \pm, \dots, \pm)(-1)^{\Phi(\pm,\dots,\pm)+1} +$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{m=k+1}^{n-1} (-1)^m \sum_{\substack{\Delta \in [m],\ \Delta \text{ содержит } \theta,\\ \mathrm{Int}\,(\Delta) \cap e \neq \emptyset}} c_A(\Delta).$$

Алгоритм 3.2. Коэффициенты вычисляются шаг за шагом, начиная с членов высокой размерности.

Шаг 1. Пусть $\Delta \in [n-1]$, а $P_1, \dots, P_n$ - гиперплоскости Δ, e - пересечение всех P_i. Пусть $(e, \pm, \dots, \pm)$ - точка, лежащая близко к e, положение которой относительно $P_1, \dots, P_n$ определяется следующим образом. Для каждого j $(e, \pm, \dots, \pm) \in \mathbb{R}^+(P_j)$ тогда и только тогда, когда в скобках на j-том месте стоит знак $+$. Теперь положим

$$c^1_A(\Delta) = 0, \qquad c^2_A(\Delta) = -\sum_{(\pm,\dots,\pm)} I_A(e, \pm, \dots, \pm)(-1)^{\Phi(\pm,\dots,\pm)},$$

$$c^3_A(\Delta) = \sum_{(\pm,\dots,\pm)} I_A(e, \pm, \dots, \pm)(-1)^{\Phi(\pm,\dots,\pm)}, \qquad c^4_A(\Delta) = 0,$$

где сумма берется по всем наборам, состоящих из n плюсов и минусов.

Шаг 2. Пусть $\Delta \in [n-2]$, $P_1, \dots, P_{n-1}$ гиперплоскости Δ, а g - пересечение всех P_i и e_0. Пусть $(g, \pm, \dots, \pm)$ - точка , лежащая близко к g, позиция которой определяется как в предыдушем шаге. Положим

$$c^1_A(\Delta) = 0, \qquad c^4_A(\Delta) = -2\sum_{(\pm,\dots,\pm)} I_A(g, \pm, \dots, \pm)(-1)^{\Phi(\pm,\dots,\pm)},$$

$$c^2_A(\Delta) = \frac{1}{2}\sum_m (-1)^{m+1} \sum_{\theta \in [m],\ \theta \text{ содержит } \Delta} c^2_A(\theta) - \frac{1}{2} c^4_A(\Delta),$$

$$c^3_A(\Delta) = \frac{1}{2}\sum_m (-1)^{m+1} \sum_{\theta \in [m],\ \theta \text{ содержит } \Delta} c^3_A(\theta) - \frac{1}{2} c^4_A(\Delta).$$

Шаг 3. Пусть $\Delta \in [k]$ с четным k, $P_1, \dots, P_{k+1}$ - гиперплоскости Δ. Выберем точку e, лежащую в пересечении всех P_i и не лежащую в любой другой гиперплоскости из $\mathcal{P} \cup \{e_0\}$. Определим $(e, \pm, \dots, \pm)$ как в шаге 1. Выберем гиперплоскость

$O'(e)$ так, чтобы $e \in EX(e_0, O'(e))$. Положим

$$c_A^1(\Delta) = \frac{1}{2}\sum_m (-1)^m \sum_{\theta \in [m],\ \theta \text{ содержит } \Delta} [c_A^1(\theta) - c_A^2(\theta) - c_A^3(\theta) +$$

$$+ c_A^4(\theta)] + \frac{1}{2}[c_A^4(\Delta) - c_A^2(\Delta) - c_A^3(\Delta)],$$

$$c_A^2(\Delta) = \sum_{(\pm,\dots,\pm)} I_A(e, \pm, \dots, \pm)(-1)^{\Phi(\pm,\dots,\pm)} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_m (-1)^m \sum_{\substack{\theta \in [m],\ \theta \text{ содержит } \Delta \\ \operatorname{Int}(\theta) \cap e \neq \emptyset}} c_A^2(\theta) + \frac{1}{2}\sum_m (-1)^m \sum_{\substack{\theta \in [m],\ \theta \text{ содержит } \Delta \\ \operatorname{Int}(c(\theta \cup \{O'\})) \cap e \neq \emptyset}} c_A^4(\theta),$$

$$c_A^3(\Delta) = -\sum_{(\pm,\dots,\pm)} I_A(e, \pm, \dots, \pm)(-1)^{\Phi(\pm,\dots,\pm)} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_m (-1)^m \sum_{\substack{\theta \in [m],\ \theta \text{ содержит } \Delta \\ \operatorname{Int}(\theta) \cap e \neq \emptyset}} c_A^3(\theta) + \frac{1}{2}\sum_m (-1)^m \sum_{\substack{\theta \in [m],\ \theta \text{ содержит } \Delta \\ \operatorname{Int}(c(\theta \cup \{O'(e)\})) \cap e \neq \emptyset}} c_A^4(\theta),$$

$$c_A^4(\Delta) = \frac{1}{2}\sum_m (-1)^m \sum_{\theta \in [m],\ \theta \text{ содержит } \Delta} c_A^4(\theta).$$

(Если $k = 0$, то $c_A^1(\Delta) = 0$).

Шаг 4. Пусть $\Delta \in [k]$ с нечетным k. Выберем точку e, лежащую в любой гиперплоскости Δ и не лежащую в любой другой гиперплоскости $\mathcal{E} \cup \{e_0\}$. Выберем точку g, содержащуюся в каждой гиперплоскости Δ и в e_0, но не лежащую в любой другой гиперплоскости $\mathcal{E}$. Определим точки $(e, \pm, \dots, \pm)$ и $(g, \pm, \dots, \pm)$ как в шагах 1 и 2. Выберем гиперплоскость $O'(e)$ так, чтобы $e \in$ $\in EX(e_0, O'(e))$. Положим

$$c_A^1(\Delta) = -\sum_{(\pm,\dots,\pm)} I_A(e, \pm, \dots, \pm)(-1)^{\Phi(\pm,\dots,\pm)} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_m (-1)^m \left[\sum_{\substack{\theta \in [m],\ \theta \text{ содержит } \Delta \\ \operatorname{Int}(\theta) \cap e \neq \emptyset}} c_A^1(\theta) - \sum_{\substack{\theta \in [m],\ \theta \text{ содержит } \Delta \\ \operatorname{Int}(c(\theta \cup O')) \cap e \neq \emptyset}} c_A^2(\theta) - \right.$$

$$\left. \sum_{\substack{\theta \in [m],\ \theta \text{ содержит } \Delta \\ \operatorname{Int}(c(\theta \cup O')) \cap e \neq \emptyset}} c_A^3(\theta) + \sum_{\substack{\theta \in [m] \\ \theta \text{ содержит } \Delta}} c_A^4(\theta) \right] + \frac{1}{2} c_A^4(\Delta),$$

$$c_A^2(\Delta) = \frac{1}{2}\sum_m (-1)^m \sum_{\theta \in [m],\ \theta \text{ содержит } \Delta} [c_A^2(\theta) - c_A^4(\theta)] + \frac{1}{2} c_A^4(\Delta),$$

$$c_A^3(\Delta) = \frac{1}{2}\sum_m (-1)^m \sum_{\theta\in[m],\ \theta \text{ содержит } \Delta} [c_A^3(\theta) - c_A^4(\theta)] + \frac{1}{2}c_A^4(\Delta),$$

$$c_A^4(\Delta) = \sum_{(\pm,\dots,\pm)} l_A(g,\pm,\dots,\pm)(-1)^{\Phi(\pm,\dots,\pm)} + \frac{1}{2}\sum_m (-1)^m \sum_{\substack{\theta\in[m],\ \theta \text{ содержит } \Delta \\ \operatorname{Int}(\theta)\cap g\neq\emptyset}} c_A^4(\theta).$$

Шаг 5. Для всех Δ положим

$$d_A^1(\Delta) = \frac{1}{2}\left[c_A^1(\Delta) + c_A^3(\Delta)\right], \quad d_A^2(\Delta) = \frac{1}{2}\left[c_A^2(\Delta) - c_A^3(\Delta)\right].$$

ABSTRACT. In previous papers the author derived generalizations of Ambartzumian's combinatorial formulae. Now she obtaines their dual versions. These dual formulae calculate measures of polyhedral sets in $\mathbb{R}^n$ by means of certain combinatorial coefficients and measures of some special polyhedral sets.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry, Wiley, New York, 1982.
2. Р. В. Амбарцумян, " О комбинаторных основаниях интегральной геометрии", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 16, №4, стр. 285 – 292, 1981.
3. A. Baddeley, "Combinatorial foundations of stochastic geometry", Proc. of London Math. Soc, vol. 42, part 1, pp. 151 – 177, 1981.
4. G. Yu. Panina, "Many-dimensional combinatorial Ambartzumian's formulae", Math. Nachr., vol. 159, pp. 271 – 277, 1992.
5. G. Yu. Panina, "Generalized Ambartzumian's formulae", Math. Nachr., (в печати).

22 Июня 1993

Институт информации
и автоматизации
Санкт-Петербург

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ГОФМАНА-ВЕРМЕРА ДЛЯ АЛГЕБР ОПЕРАТОРНЫХ ПОЛЕЙ

М. А. Акопян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №6, 1993

Пусть T – метризуемый компакт, A – C^*-алгебра с единицей и $C(T,A)$ – C^*-алгебра всех непрерывных отображений из T в A, наделенная естественными операциями и нормой. *Равномерной* алгеброй T называется (см. [1]) замкнутая подалгебра $\mathcal{M}$ алгебры $C(T,A)$, содержащая константы и разделяющая точки T (для любых $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$ и $a_1, a_2 \in A$ существует $x \in \mathcal{M}$ такое, что $x(t_1) = a_1$, $x(t_2) = a_2$). Алгебра A (слой) естественно вкладывается в $C(T,A)$, для $a \in A$ полагая $a(t) \equiv a$, $t \in T$. Равномерная алгебра $\mathcal{M}$ называется *A-алгеброй*, если $A \subset \mathcal{M}$ (см. [1]).

Пусть $\mathrm{Re}\, x = \frac{x+x^*}{2}$ и $\mathrm{Re}\, \mathcal{M} = \{\mathrm{Re}\, x;\ x \in \mathcal{M}\}$ при каждом $x \in \mathcal{M}$. Теорема Гофмана–Вермера (см. [2]) утверждает, что при $A = C$ (поле комплексных чисел) для равномерной алгебры $\mathcal{M} \subset C(T)$ из условия замкнутости $\mathrm{Re}\, \mathcal{M}$ в $C(T)$ следует, что $\mathcal{M} = C(T)$. Эта теорема была распространена Тейлором (см. [1]) на равномерные алгебры операторных полей с переменным слоем, но при дополнительном предположении на алгебру $\mathcal{M}$, которое даже для простейших алгебр может не выполняться. В настоящей работе доказываются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{M}$ – равномерная A-алгебра с простым слоем $\mathcal{M} \in C(T,A)$. Если $\mathrm{Re}\, \mathcal{M}$ замкнуто в $C(T,A)$, то $\mathcal{M} = C(T,A)$.*

Следующее утверждение показывает, что простота алгебры A не является необходимым условием.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M}$ – равномерная $B(H)$-алгебра, где $B(H)$ – алгебра всех ограниченных операторов на некотором сепарабельном гильбертовом пространстве H. Тогда, если $\operatorname{Re}\mathcal{M}$ замкнуто в $C(T, B(H))$, то $\mathcal{M} = C(T, B(H))$.*

Сначала докажем две леммы.

Алгебра $C(T)$ всех непрерывных функций на метризуемом компакте T естественным образом вкладывается в алгебру $C(T, A)$ ($C(T) = C(T, C1)$, где 1 – единица A). Скажем, что x является вещественным сечением, если x – вещественная из $C(T)$; x – эрмитов элемент $C(T, A)$. Множество $F \subset T$ называется множеством антисимметрии (относительно равномерной алгебры $\mathcal{M}$), если каждое вещественное сечение из $\mathcal{M}$ является константой на F (см. [3]). Множество $E \subset T$ назовем множеством слабой антисимметрии, если каждое эрмитовое сечение x из $\mathcal{M}$ является A – постоянным сечением на E, т.е. существует эрмитовый элемент $a \in A$ такой, что $x|_E = a$.

Пусть $\mathcal{M}_H$ – множество всех эрмитовых элементов из $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_R$ – множество всех вещественных элементов из $\mathcal{M}$. Очевидно, что $\mathcal{M}_R \subset \mathcal{M}_H$. Зафиксируем $t_0 \in T$ и рассмотрим два множества : $E_{t_0} = \{\, t \in T;\ x(t) = x(t_0),\ x \in \mathcal{M}_H \}$, являющееся максимальным множеством антисимметрии и $F_{t_0} = \{\, t \in T;\ x(t) = x(t_0),\ x \in \mathcal{M}_R \}$, являющееся максимальным множеством антисимметрии, содержащим t_0. Имеем $E_{t_0} \subset F_{t_0}$. Обратно, каждое множество (слабой) антисимметрии имеет указанный вид. Очевидно, компакт T разбивается на семейство $\{F_t\}$, попарно непересекающихся максимальных множеств антисимметрии и каждое F_t, в свою очередь, разбивается на $\{E_t\}$ – семейство также попарно непересекающихся максимальных множеств слабой антисимметрии. Вообще говоря эти разбиения могут не совпадать, но в случае, когда A проста, справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{M}$ – равномерная A-алгебра с простым слоем, $\mathcal{M} \subset C(T, A)$. Тогда каждое максимальное множество антисимметрии является также максимальным множеством слабой топологии.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $t_0 \in T$, $F_{t_0} \subset E_{t_0}$. Пусть $\mathcal{M}_0$ – подалгебра $\mathcal{M}$, порожденная $\mathcal{M}_H$. Тогда $\mathcal{M}_0$ - C^*-алгебра, не разделяющая точки E_{t_0}.

Пусть $\{E_t\}$ – разбиение T на максимальные множества слабой антисимметрии и $\tilde{T}$ – компакт, полученный из T с помощью отождествления каждого E_t с точкой. Тогда алгебре $\mathcal{M}_0$ соответствует замкнутая инволютивная подалгебра $\mathcal{M}_1$ в $C(\tilde{T}, A)$, содержащая A. Покажем, что $\mathcal{M}_1$ – равномерная алгебра. Для этого достаточно доказать, что для любых E_{t_1} и E_{t_2} найдется $x \in \mathcal{M}_1$ такой, что $x\,|_{E_{t_1}} = 1$, $x\,|_{E_{t_2}} = 0$. Действительно, пусть $y\,|_{E_{t_1}} = a$, $y\,|_{E_{t_2}} = 0$ (существование такого y следует из максимальности E_{t_1} и E_{t_2}, $E_{t_1} \cap E_{t_2} \neq 0$). Ввиду простоты A найдутся b_i и $c_i \in A$, $i = 1, \ldots, n$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i a c_i = 1$. Поэтому $x = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i y c_i$ удовлетворяет требуемому условию и принадлежит $\mathcal{M}_1$. Таким образом, $\mathcal{M}_1$ – равномерная инволютивная подалгебра $C(\tilde{T}, A)$. Следовательно, по одному из вариантов теоремы Стоуна–Вейерштрасса для алгебр операторных полей, $\mathcal{M}_1 = C(\tilde{T}, A)$ (см. [4], Теорема 11.3.1). В частности, $\mathcal{M}_1 \supset C(\tilde{T})$ и все вещественные функции, постоянные на E_t принадлежат $\mathcal{M}_1$. Следовательно, каждая вещественная функция из $C(T)$, постоянная на каждом максимальном множестве слабой антисимметрии относительно алгебры $\mathcal{M}$, принадлежит $\mathcal{M}$. Поскольку E_{t_0} – максимальное множество слабой антисимметрии, содержащее t_0, то получим $F_{t_0} \subset E_{t_0}$. Таким образом, $F_{t_0} = E_{t_0}$. Отсюда, ввиду произвольности t_0, имеем $\{F_t\} = \{E_t\}$.

Следствие. Пусть $\mathcal{M}$ – равномерная A-алгебра на T с простым слоем на T. Если каждая точка $t \in T$ является максимальным множеством слабой антисимметрии, то $\mathcal{M} = C(T, A)$.

Доказательство. По Лемме 1, максимальные множества слабой антисимметрии и максимальные множества антисимметрии относительно алгебры $\mathcal{M}$ совпадают. Поэтому, $C(T) \subset \mathcal{M}$ и, следовательно, по теореме Стоуна–Вейерштрасса имеем $\mathcal{M} = C(T, A)$.

Пусть $\mathcal{M}$ – равномерная A-алгебра, $\mathcal{M} \subset C(T, A)$. Напомним (см. [5]), что точка $t_0 \in T$ называется 1) точкой слабого пика для $\mathcal{M}$ ($t_0 \in \Pi_w(\mathcal{M})$), если для любых $d > 1$ и окрестности U точки t_0 существует $x \in \mathcal{M}$ такое, что $||x|| < d$, $x(t_0) \geq 0$, $||x(t_0)|| = 1$ и $||x(t)|| < \frac{1}{2d}$ при $t \notin U$; 2) точкой норм пика для $\mathcal{M}$

($t_0 \in \Pi_n(\mathcal{M})$), если существует $x \in \mathcal{M}$ такое, что $x(t_0) > 0$, $||x(t_0)|| = 1$ и $||x(t)|| < 1$ для $t \neq t_0$, 3) точкой пика для $\mathcal{M}$ ($t_0 \in \Pi(\mathcal{M})$), если существует $x \in \mathcal{M}$ такое, что $x(t_0) = 1$, $||x(t)|| < 1$ при $t \neq t_0$. Очевидно, что $\Pi_w \supseteq \Pi_n \supseteq \Pi$.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{M}$ – равномерная A-алгебра с простым слоем, $\mathcal{M} \subset C(T, A)$. Тогда* $\Pi_n(\mathcal{M}) = \Pi_w(\mathcal{M})$.

Доказательство. Пусть $t_0 \in \Pi_w(\mathcal{M})$. Покажем, что $t_0 \in \Pi_n(\mathcal{M})$. Пусть $f \in C_R(T) \subset C(T, A)$ и $f(t_0) = 1$, $f(t) < 1$ для $t \neq t_0$, а φ – чистое состояние на алгебре A. Положим

$$\mathcal{M}_f = \{\, u \in \operatorname{Re} \mathcal{M};\ u \leq f1 \,\}.$$

Тогда, по Лемме 6.2.1 в [5], имеем

$$\sup_{u \in \mathcal{M}_f} \varphi(u(t_0)) = 1.$$

Поэтому для любого фиксированного положительного числа $\delta < 1/2$ найдется $u \in \mathcal{M}_f$ такое, что $\varphi(e^{u(t_0)}) > e^{1-\delta}$. Пусть функция $\psi \in \mathcal{M}$ такая, что $\operatorname{Re} \psi = u$. Положим $g = \psi - ia$, где $a \in A$ и $a = \operatorname{Im} \psi(t_0)$. Очевидно, $g \in \mathcal{M}$, $\operatorname{Re} g = u$ и $g(t_0) = u(t_0)$. Рассмотрим функцию $h = \exp g \in \mathcal{M}$. Учитывая, что $u \leq f1$, в силу Леммы 6.1.1. из [5], имеем $||h(t)|| \leq \exp f(t)$ для всех $t \in T$, откуда $||h(t_0)|| < e$. Имея в виду, что $h(t_0) = \exp u(t_0)$ и $\varphi(e^{u(t_0)}) > e^{1-\delta}$, получим $e > ||h(t_0)|| \geq e^{1-\delta}$. Пусть $\widetilde{h} = \frac{h}{\varphi(h(t_0))}$. Очевидно, что функция $\widetilde{h}$ удовлетворяет следующим условиям :

a) $||\widetilde{h}|| < \frac{e}{e^{1-\delta}} = e^{\delta}$,

b) $||\widetilde{h}(t)|| < \exp(f(t) - 1 + \delta)$ для всех $t \in T$,

c) $\varphi(\widetilde{h}(t_0)) = 1$.

Таким образом, изменяя $f(t) \in C(T)$ имеем, что для всякой окрестности U точки t_0 существует $x \in \mathcal{M}$ такое, что

a) $||x|| \leq e^{\delta}$,

b) $||x(t)|| < \delta$ для всех $t \in T \setminus U$,

c) $x(t_0) > 0$,

d) $\varphi(x(t_0)) = 1$.

Из Предложения 5.2 (ii) в [5] следует, что t_0 – точка норм пика.

Доказательство Теоремы 1. В силу Следствия из Леммы 1, достаточно доказать, что максимальные множества антисимметрии алгебры $\mathcal{M}$ одноточечны. Допустим противное. Не теряя общности, предположим, что весь компакт T является максимальным множеством антисимметрии относительно алгебры $\mathcal{M}$. Зафиксируем $t_0 \in T$ и положим $\mathcal{M}_{t_0} = \{x \in \mathcal{M};\ x(t_0) = 0\}$. Очевидно, $\mathcal{M}_{t_0}$ - идеал в $\mathcal{M}$. Определим непрерывное отображение $\Phi : \mathcal{M}_{t_0} \longrightarrow \mathrm{Re}\,\mathcal{M}_{t_0}$, $\Phi(x) = \mathrm{Re}\,x$ для всех $x \in \mathcal{M}_{t_0}$. Поскольку $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{t_0} + A$, то $\mathrm{Re}\,\mathcal{M}_{t_0}$ - замкнутое подпространство пространства $\mathrm{Re}\,\mathcal{M}$. Пространство $H = \mathrm{Ker}\,\Phi + i\mathrm{Ker}\,\Phi$ является самосопряженным подпространством в $\mathcal{M}$, поэтому алгебра $\mathcal{M}_0$, порожденная всеми эрмитовыми элементами из $\mathcal{M}$, является замкнутой инволютивной подалгеброй в $\mathcal{M}$. Так как T максимальное множество слабой антисимметрии, то $\mathcal{M}_0 = 0$. Следовательно, Φ взаимно-однозначное отображение. Следовательно, по теореме об обратном отображении, существует непрерывное отображение Φ^{-1} из $\mathrm{Re}\,\mathcal{M}_{t_0}$ на $\mathcal{M}_{t_0}$. Таким образом, существуют такие постоянные $c_1, c_2 > 0$, что для любого $x \in \mathcal{M}_{t_0}$ имеет место

$$||\Phi(x)|| < c_1||x||, \quad ||\Phi^{-1}(\mathrm{Re}\,x)|| < c_2||\mathrm{Re}\,x||. \tag{1.1}$$

Пусть $t_1 \in \Pi_n(\mathcal{M})$, $t_1 \neq t_0$ (существование t_1 следует из Леммы 2). Поэтому найдется $x \in \mathcal{M}_{t_0}$ такое, что (см. доказательство Леммы 2)

$$\begin{aligned} &a)\quad x(t_1) \text{ эрмитов, } ||x(t_1)|| = 1 \quad (\text{ можно считать, что } x(t_1) > 0),\\ &b)\quad ||x(t_1)|| < 1, \text{ если } t \neq t_1. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть U_1 – такая окрестность t_1, что для любого $t \in U_1$, $||\mathrm{Im}\,x(t)|| < \varepsilon/2$. Поскольку $T \setminus U_1$ – компакт, то найдется такое δ, $0 < \delta < 1$, что $\sup_{t\in T\setminus U_1} ||x(t)|| < \delta$. Пусть n_1 такое целое число, что $||x^{n_1}(t)|| < \varepsilon/2$, если $t \in T \setminus U_1$. Положим $x_1 = x^{n_1}$. Очевидно x_1 удовлетворяет условиям (1.2). Пусть теперь U_2 ($\overline{U}_2 \subset U_1$) – такая окрестность точки t_1, что $||\mathrm{Im}\,x_1(t)|| < \frac{\varepsilon}{2^2}$ для всех $t \in U_2$. Выберем n_2 так, чтобы $||x_1^{n_2}(t)|| < \frac{\varepsilon}{2^2}$ при $t \in T \setminus U_2$. Положим $x_2 = x_1^{n_2}$. Прололжая этот процесс, имеем последовательность окрестностей $U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_n \supset \ldots$ и последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \in \mathcal{M}_{t_0}$ таких, что все x_i удовлетворяют условиям (1.2) и

$$||x_i(t)|| < \frac{\varepsilon}{2^i}, \quad \text{если} \quad t \in T \setminus U_i$$
$$||\mathrm{Im}\, x_i(t)|| < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, \quad \text{если} \quad t \in U_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots.$$

Положим $y_k = \frac{1}{k}(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$. Очевидно y_k удовлетворяет условиям (1.2). Теперь оценим $\mathrm{Im}\, y_k$. Пусть $t \in U_i$, но $t \notin U_{i+1}$, тогда $t \in U_j$ для $1 \le j \le i$ (из построения U_i). Следовательно

$$||\mathrm{Im}\, x_j(t)|| < \frac{\varepsilon}{2^j} \quad \text{если} \quad 1 \le j \le i-1,$$
$$||x_j(t)|| < \frac{\varepsilon}{2^j} \quad \text{если} \quad j \ge i+1.$$

Таким образом

$$||\mathrm{Im}\, y_k(t)|| \le \frac{1}{k}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^{i-1}} + 1 + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) < \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{k},$$

т.е. $||\mathrm{Im}\, y_k|| < \frac{1+\varepsilon}{k}$.

Имея в виду $||\Phi^{-1}(\mathrm{Re}\, iy_k)|| = 1$, применяя (1.1) и замечая, что $\mathrm{Re}\, iy_k = \mathrm{Im}\, y_k$, получим $||\Phi^{-1}(\mathrm{Re}\, iy_k)|| < c_k \frac{1+\varepsilon}{k}$. Если $k \to \infty$, то $c_k \to \infty$. т.е. Φ^{-1} неограничено, что привело к противоречию. Теорема доказана.

Доказательство Теоремы 2. Пусть $K(H)$ алгебра всех компактных операторов на некотором гильбертовом пространстве H. Покажем, что идеал $I = C(T, K(H))$ принадлежит алгебре $\mathcal{M}$. Пусть $e_1, e_2, \ldots$ ортонормированный базис в H и P_n проектор на конечномерное подпространство H_n, порожденный первыми n элементами базиса. Рассмотрим алгебру $\mathcal{M}_n = P_n \mathcal{M} P_n$, $\mathcal{M}_n \subset C(T, B_n)$, где $B_n = P_n B(H) P_n$ и $C(T, B_n) = P_n C(T, B(H)) P_n$. Легко проверить, что $\mathcal{M}_n$ равномерная алгебра с единицей P_n и $\mathrm{Re}\, \mathcal{M}_n = P_n \mathrm{Re}\, \mathcal{M} P_n$. Так как $\mathcal{M}_n$ – алгебра с матричным слоем, то $\mathcal{M}_n$ расщепима, т.е. $\mathcal{M}_n$ порождается алгеброй B_n и некоторой коммутативной равномерной алгеброй D (см. [6], Предложение 1.8), которая не зависит от выбора n (см. [7]). В силу замкнутости $\mathrm{Re}\, \mathcal{M}$ подпространство $\mathrm{Re}\, \mathcal{M}_n$ также замкнуто, откуда следует замкнутость $\mathrm{Re}\, D$. В самом деле, пусть $n = 1$, т.е. рассмотрим подалгебру $\mathcal{M}_1 = D P_1$. Тогда $\mathrm{Re}\, \mathcal{M}_1$ замкнуто и, вследствие изометричности D и $D P_1$, вытекает замкнутость $\mathrm{Re}\, D$. По теореме Гофмана-Вермера (см. [2]), $D = C(T)$ и $\mathrm{Re}\, D = C_R(T)$.

Пусть $x \in I = C(T, K(H))$. Тогда ввиду того, что конечномерные операторы плотны в $K(H)$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется целое число $n > 0$ такое, что $||P_n x P_n - x|| < \epsilon$, т.е. $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n$ плотно в I. Следовательно, $I \in \mathcal{M}$. Поскольку I является идеалом в $C(T, B(H))$, то фактор-алгебра $C(T, B(H))/I$ в точности совпадает с $C(T, A)$, A – алгебра Калкина. Поэтому алгебра $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}/I$ является замкнутой подалгеброй $C(T, A)$, разделяющей точки T, т.е. $\mathcal{M}_1$ – равномерная A-подалгебра алгебры $C(T, A)$. Из замкнутости $\mathrm{Re}\, \mathcal{M}$ следует замкнутость $\mathrm{Re}\, I \subset \subset \mathcal{M}$ (I – C^*-подалгебра в $\mathcal{M}$). Откуда имеем, что $\mathrm{Re}\, \mathcal{M}_1$ также замкнуто. Так как алгебра A проста, то из Теоремы 1 следует, что $\mathcal{M}_1 = C(T, A)$. Следовательно, $\mathcal{M} = C(T, B(H))$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. C. Taylor, "Interpolation in algebras of operator fields", J. of Funct. anal., vol. 10, no. 2, pp. 159 – 190, 1972.
2. K. Hoffman, J. Wermer, "A characterisation of $C(X)$", Pacific J. Math., vol. 12, pp. 941 – 944, 1962.
3. В. А. Арзуманян, С. А. Григорян, " Равномерные алгебры операторных полей", Зап. научн. сем. ЛОМИ, т. 123, стр. 185 – 189, 1983.
4. J. Diximer, Les C^*-Algebras et Leurs representations, Gautier-Villar, Paris, 1969.
5. В. А. Арзуманян, С. А. Григорян, " Границы равномерных алгебр операторных полей", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 23, №5, стр. 422 – 438, 1988.
6. В. А. Арзуманян, С. А. Григорян, " Спектр равномерных алгебр операторных полей", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 21, №1, стр. 63 – 79, 1986.
7. М. А. Акопян, "О равномерных $B(H)$-алгебрах", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 24, №2, стр. 176 - 180, 1991.

27 Августа 1993

Вычислительный центр
Министерства экономики Армении

CONTENTS

VOLUME 28 NUMBERS 1 — 6 1993

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 28 №№ 1 – 6 1993

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 28 НОМЕР 6 1993

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

CONTENTS

VOLUME 28 NUMBER 6 1993

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS (NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)