ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

# ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

# ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

# ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

# МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.



«Մաթեմատիկա» ամ-

## Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա»։

# ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО $t$

**А. А. Андрян**

**Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №5, 1993**

**Пусть $\Pi_\alpha = \{t| \ 0 < \arg t < \alpha < \pi\}$ – угол в комплексной плоскости , а $A(\xi)$, $B(\xi)$ – полиномы от $\xi \in \mathbb{R}^n$ порядка $m$. В работе рассматривается следующая система :**

$$A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = B\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t), \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \times \Pi_\alpha, \tag{*}$$

**$u(x,t)$ предполагается бесконечно дифференцируемой по $x \in \mathbb{R}^n$, аналитичной по $t \in \Pi_\alpha$ и имеет полиномиальный рост по $(x,t)$. Пусть $\rho(\xi)$ обозначает число корней $P(\xi,\lambda) = \det(\lambda A(\xi) - B(\xi)) \not\equiv 0$, принадлежащих области $\Pi^*_\alpha = \{\lambda| \ \frac{\pi}{2} \le \arg\lambda \le \frac{3}{2}\pi - \alpha\}$. Предполагается, что либо a) $\det A(\xi)$ имеет конечное число нулей, либо b) $\det A(\xi) \equiv 0$ и порядок $P(\xi,\lambda)$ не зависит от $\xi$. В обоих случаях предполагается, что $\rho(\xi) = \text{const} = r$ за исключением, быть может, конечного числа точек. Рассматривается граничная задача**

$$C\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,0) = f(x), \tag{**}$$

**где $\xi \in \mathbb{R}^n$, $C(\xi)$ – матрица размерности $r \times m$. В зависимости от предположений b) или a) даны некоторые условия на $A(\xi)$, $B(\xi)$ и $C(\xi)$, при которых задача (*), (**) либо разрешима для любых $f(x)$, либо для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнение конечного числа условий ортогональности на $f(x)$. Рассмотрена также однородная задача ($f \equiv 0$).**

## §0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Pi_\alpha = \{t| \ 0 < \arg t < \alpha < \pi\}$ – угол в комплексной плоскости $\Pi$, а $A(\xi)$, $B(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ – полиномиальные матрицы порядка $m$ с постоянными коэффициентами. В двугранной области $\mathbb{R}^n \times \Pi_\alpha$ рассматривается система вида

$$A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = B\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \Pi_\alpha, \tag{1}$$

где $u = (u_1, \dots, u_m) \in M$ – искомая вектор-функция из класса $M$. Этот класс состоит из функций $u(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \overline{\Pi}_\alpha)$, аналитических по $t \in \Pi_\alpha$, удовлетворяющих оценкам

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial t^j}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^k u(x,t)\right| \le c_k(1+|x|)^\gamma(1+|t|)^\beta, \quad j=0,1; \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \overline{\Pi}_\alpha, \quad (2)$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$ – мультииндекс, $\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^k = i^{|k|}\frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $\frac{\partial}{\partial t}$, $\gamma$, $\beta \in R$ зависят от $u$. Система (1) была исследована в [1] в предположении, что $\det A(\xi) \neq 0$ для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$. В настоящей работе предполагается, что либо $\det A(\xi)$ имеет конечное число нулей, либо $\det A(\xi) \equiv 0$, но в обоих случаях для любого фиксированного $\xi \in \mathbb{R}^n$ характеристический многочлен

$$P(\xi,\lambda) = \det(\lambda A(\xi) - B(\xi)) = a_o(\xi)\lambda^m + \dots + a_m(\xi) \not\equiv 0, \quad (3)$$

что эквивалентно следующему :

$$\sum_{j=0}^{m} |a_j(\xi)| \neq 0 \quad \text{для любых} \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (4)$$

Пусть $\rho(\xi)$ обозначает число корней $P(\xi,\lambda)$, принадлежащих области $\Pi_\alpha^* = \{\lambda | \frac{\pi}{2} \le \arg\lambda \le \frac{3}{2}\pi - \alpha\}$.

Исследование граничных задач для системы (1) проводится в каждом из следующих качественно различных предположений :

a) $\det A(\xi)$ имеет конечное число нулей, а $\rho(\xi) = \text{const} = r$, за исключением конечного числа точек ;

b) $\det A(\xi) \equiv 0$, порядок $s$ полинома (3) на зависит от $\xi$, функция $\rho(\xi) = \text{const} = r$, за исключением конечного числа точек.

**Задача А.** Найти решени $u \in M$ системы (1), удовлетворяющее граничному условию

$$C\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,0) = f(x), \quad (5)$$

где $C(\xi)$ – полиномиальная матрица размерности $r \times m$ с постоянными коэффициентами, а $f(x) \in M$ – заданная вектор-функция.

В работе указываются условия типа Лопатинского, при выполнении которых Задача $A$ имеет решение для любой $f \in M$ в случае b). В случае a) для разрешимости Задачи А необходимо и достаточно выполнение конечного числа условий ортогональности на $f(x)$. Исследуется и однородная ($f \equiv 0$) Задача $A$. Задача (1), (5) в случае b) с $\rho(\xi) \equiv \mathrm{const}$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и с $\Pi_\alpha = R^+ = \{t \mid t > 0\}$ была изучена в [4].

## §1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} - \lambda u(t) = f(t), \quad t \in \Pi_\alpha, \tag{1.1}$$

где $u \in M$ - искомая, а $f \in M$ - заданная функции, $\lambda$ - комплексное число. Следующая лемма была доказана в [1].

**Лемма 1.1.** *Уравнение (1.1) имеет решение для любых $f(t)$. Если $\lambda \in \Pi_\alpha^*$, то однородное уравнение имеет одно линейно независимое решение, если же $\lambda \in C\Pi_\alpha^* = \Pi \setminus \Pi_\alpha^*$, то однородное уравнение не имеет нетривиальных решений.*

Рассмотрим теперь систему вида

$$A\frac{\partial u(t)}{\partial t} = B\,u(t) + f(t), \quad t \in \Pi_\alpha, \tag{1.2}$$

где $A$, $B$ - постоянные квадратные матрицы порядка $m$, а $f \in M$ - заданная $m$-мерные вектор-функции. Предполагаем также, что (см. (3))

$$P(\lambda) = \det(\lambda A - B) \not\equiv 0. \tag{1.3}$$

Полиномиальную матрицу $\lambda A - B$ представим в виде (см. [2])

$$\lambda A - B = M(\lambda)D(\lambda)N(\lambda), \tag{1.4}$$

где $M(\lambda)$, $D(\lambda)$, $N(\lambda)$ - полиномиальные матрицы с $\det M(\lambda) = \det N(\lambda) = 1$ и $D(\lambda) = \mathrm{diag}(d_1(\lambda), .., d_m(\lambda))$ - диагональная матрица с элементами $d_j(\lambda)$ на диагонали. Очевидно, что $\det(\lambda A - B) = \prod_{j=1}^m d_j(\lambda)$ и система (1.2) эквивалентна следующей, расщепленной

$$d_j(\frac{\partial}{\partial t})w_j(t) = g_j(t), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1.5}$$

где $(w_1, \ldots, w_m) = w = N(\frac{\partial}{\partial t})u$, $(g_1, \ldots, g_m) = M^{-1}(\frac{\partial}{\partial t})f$.

Пусть $r$ – число корней характеристического уравнения

$$\det(\lambda A - B) = 0, \tag{1.6}$$

принадлежащих области $\Pi_\alpha^*$. Используя (1.5) и Лемму 1.1, легко устанавливается следующая

**Лемма 1.2.** *Система (1.2) имеет решение $u \in M$ для $\forall f \in M$, а однородная система имеет ровно $r$ линейно независимых решений принадлежащих $M$.*

Рассмотрим задачу Коши

$$A \frac{\partial u(t)}{\partial t} = B\, u(t), \quad t \in \Pi_\alpha, \tag{1.7}$$

$$u(0) = a, \tag{1.8}$$

где $u \in M$, а $a = (a_1, \ldots, a_m)$ – постоянный вектор.

Обозначим через $U(p)$ образ Лапласа $u(t) \in M$ при $t \in R^+$. Пусть $t \in R^+$, а $a = 0$ в (1.7), (1.8). Применяя преобразование Лапласа к (1.7), получим $(p\,A - B)U(p) = 0$. Из условия (1.3) и аналитичности $u(t)$ в $\Pi_\alpha$ непосредственно получается следующая

**Лемма 1.3.** *Решение задачи Коши (1.7), (1.8), если существует, то единственно.*

Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ корни полинома (1.3), а через $r_1, \ldots, r_p$ – их кратности.

**Лемма 1.4.** *Для того, чтобы решение $u(t)$ системы (1.7) имело вид*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{p} q_k(t) e^{\lambda_k t}, \quad t \in \Pi_\alpha, \tag{1.9}$$

*где $q_k(t)$ – $m$-мерные вектор-функции с полиномиальными элементами, необходимо и достаточно, чтобы начальное значение $u(0)$ удовлетворяло условию*

$$\left( E_m - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda A - B)^{-1} A\, d\lambda \right) u(0) = 0, \tag{1.10}$$

*где $E_m$ – единичная матрица порядка $m$, $\gamma$ – замкнутый контур, охватывающий только корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.*

**Доказательство.** 1. *Необходимость*. При $t \in R^+$ образ Лапласа (1.9) имеет вид

$$U(p) = \sum_{j=1}^{\rho} \sum_{s=1}^{r_j} \frac{c_{js}}{(p-\lambda_j)^s}, \quad \text{Re} p > 0, \tag{1.11}$$

где $c_{js}$ – вполне определенные постоянные. Учитывая (1.11) и лемму Жордана, прообраз Лапласа $U(p)$ представим следующим образом :

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} e^{pt} U(p)\, dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{pt} U(p)\, dp, \quad \varepsilon > 0, \quad t \in R^+. \tag{1.12}$$

С другой стороны, так как $u(t)$ – решение системы (1.7), то $U(p) = (pA - B)^{-1} A u(0)$. Следовательно

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda A - B)^{-1} A e^{\lambda t}\, d\lambda\, u(0), \quad t \in R^+. \tag{1.13}$$

Так как обе части в (1.13) аналитичны по $t \in \Pi_\alpha$, то можно заменить $R^+$ на $\Pi_\alpha$. Полагая $t = 0$ в (1.13), мы немедленно получим (1.9).

2. *Достаточность*. Рассмотрим вектор-функцию

$$v(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda A - B)^{-1} A e^{\lambda t}\, d\lambda\, u(0) \tag{1.14}$$

с $\gamma$, определенной в (1.10). Очевидно, что $v(t)$ удовлетворяет системе (1.7) и согласно (1.10) $v(0) = u(0)$, поэтому в силу Леммы 1.3 $v(t) \equiv u(t)$. Лемма доказана.

**Следствие 1.1.** Задача Коши (1.7), (1.8) разрешима ($u(t) \in M$) тогда и только тогда, когда

$$(E_m - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} (\lambda A - B)^{-1} A\, d\lambda) a = 0, \tag{1.15}$$

где замкнутый контур $\gamma^-$ содержит те и только те корни многочлена $P(\lambda)$, которые принадлежат области $\Pi_\alpha^*$.

**Доказательство.** Предположим, что (1.15) справедливо. Тогда согласно Лемме 1.4, соответствующее решение $u(t)$ задачи (1.7), (1.8) имеет вид (1.9), т.е. $u(t) \in M$. Наоборот, пусть теперь $u(t) \in M$ – решение задачи (1.7), (1.8). Поступая как в Лемме 1.4, представим $u(t)$ в виде

$$u(t) = u^+(t) + u^-(t), \quad u^\pm(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^\pm} (\lambda A - B)^{-1} A e^{\lambda t}\, d\lambda\, u(0),$$

где $\gamma^-$ определено посредством (1.15), а $\gamma^+$ – замкнутый контур, охватывающий только те корни полинома $P(\lambda)$ $(\lambda_{s_1}, \ldots, \lambda_{s_p})$, принадлежащие $C\Pi^*_\alpha$. Поскольку $u^-(t) \in M$, то $u^+(t) = u(t) - u^-(t)$ также принадлежит $M$. Заметим теперь, что каждая компонента $u^+(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_{s_1}) \cdots (\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_{s_p}) w(t) = 0, \quad \lambda_{s_j} \in C\Pi^*_\alpha,$$

следовательно, согласно Лемме 1.3, $u^+(t) \equiv 0$. Таким образом, из $u(t) = u^-(t)$ следует, что $u(0) = u^-(0)$, т. е. (1.15) выполнено. Следствие 1.1 доказано.

Рассмотрим теперь матрицы

$$P^- = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} (\lambda A - B)^{-1} A \, d\lambda, \quad P^+ = E_m - P^-. \tag{1.16}$$

**Лемма 1.5.** *Справедливы формулы*

$$rank \; P^- = r, \quad rank \; P^+ = m - r, \tag{1.17}$$

*где $r$ – число корней многочлена $P(\lambda)$, принадлежащих $\Pi^*_\alpha$.*

**Доказательство.** Вначале напомним, что число линейно независимых решений системы (1.7), принадлежащих классу $M$, равно $r$ (см. Лемму 1.2). Обозначим через $u^{(1)}(t), \ldots, u^{(r)}(t)$ соответствующие решения. Имеем

$$u^{(j)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} (\lambda A - B)^{-1} A e^{\lambda t} \, d\lambda \; u^{(j)}(0). \tag{1.18}$$

Согласно Лемме 1.3 векторы $u^{(1)}(0), \ldots, u^{(r)}(0)$ линейно независимы. Подставляя $t = 0$ в (1.18) , получим

$$P^+ u^{(j)}(0) = 0, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{1.19}$$

Отсюда имеем rank $P^+ \leq m - r$. С другой стороны, если rank $P^+ = q$, то система (1.15) имеет $m - q$ линейно независимых решений, которые по формуле (1.13), с $\gamma^-$ вместо $\gamma$, определят $m - q$ линейно независимых решений системы (1.7), принадлежащих классу $M$. Поэтому $m - q \leq r$, т.е. rank $P^+ \geq m - r$. Таким образом, вторая формула в (1.17) доказана. Далее, поскольку rank $\binom{P^+}{P^-}$ = rank $\binom{E_m}{P^-} = m$, то rank $P^- \geq r$. Заметим также, что если rank $P^- = \rho_o$, то существуют линейно независимые векторы $a_1, \dots, a_{\rho_o}$ такие, что $P^- a_1, \dots, P^- a_{\rho_o}$ также линейно независимы. Вектор-функция

$$v_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} (\lambda A - B)^{-1} A e^{\lambda t} \, d\lambda \, a_j, \quad j = 1, \dots, \rho_o,$$

в силу Леммы 1.3 линейно независима. Очевидно, что $v_j(t) \in M$ и поэтому $\rho_o \leq r$, т. е. rank $P^- = r$. Лемма 1.5 доказана.

**Замечание 1.1.** Пусть $C$ – прямоугольная матрица размерности $r \times m$ такая, что

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} P^+ \\ C \end{pmatrix} = m. \tag{1.20}$$

Для системы (1.7) рассмотрим граничную задачу

$$Cu(0) = a. \tag{1.21}$$

Ясно, что условие (1.20) является необходимым и достаточным для существования решения (1.7), (1.21). Если же условие (1.20) нарушено, то конечное число условий вида $(a, b^{(j)}) = 0$, $j = 1, \dots, p$, где $b^{(j)}$ – вполне определенный постоянный вектор, гарантируют разрешимость задачи. (1.7), (1.21). Пусть теперь $C$ имеет размерность $r_0 \times m$ $(r_0 < r)$ и

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} P^+ \\ C \end{pmatrix} = m - r + r_0.$$

В этом случае задача (1.7), (1.21) имеет решение для любых $a$, а однородная задача имеет конечное число линейно независимых решений.

## §2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ А, СЛУЧАЙ а)

Предположим, что а) выполнено, и пусть $a_0(\xi) = \det A(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$, $a_0(0) = 0$, $\rho(\xi) = r$ для любых $\xi \neq 0$. В этом параграфе мы исключаем наличие других, отличных от $\xi = 0$, точек, в которых $\rho(\xi) \neq r$, так как эта ситуация будет разобрана в §3.

В произвольной точке $\xi \neq 0$ перенумеруем характеристические корни так, чтобы $\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_r(\xi) \in \Pi^*_\alpha$ и $\lambda_{r+1}(\xi), \dots, \lambda_m(\xi) \in C\Pi^*_\alpha$. Используя Следствие А 2.6, из теоремы Зайденберга–Тарского [3] легко установить оценки (см. также [1])

$$|\lambda_j(\xi)| \leq c_j |\xi|^{m_j} (1 + |\xi|)^{n_j}, \quad m_j \leq 0, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{dist}(\lambda_j(\xi), \Gamma_o) \geq c_j|\xi|^{p_j}(1+|\xi|)^{q_j}, \quad p_j \leq 0, \quad j = r+1, \ldots, m, \tag{2.2}$$

где $\Gamma_o$ – граница угла $\Pi^*_\alpha$.

Введем полиномы по $\lambda$ :

$$\begin{aligned} Q(\xi,\lambda) &= \prod_{j=1}^{r}(\lambda - \lambda_j(\xi)) = \lambda^r + \sum_{j=1}^{r} q_j(\xi)\lambda^{r-j}, \\ R(\xi,\lambda) &= \prod_{j=r+1}^{m}(\lambda - \lambda_j(\xi)) = \lambda^{m-r} + \sum_{j=1}^{m-r} r_j(\xi)\lambda^{m-r-j}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Из представления

$$\lambda_1^j(\xi) + \cdots + \lambda_r^j(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-(\xi)} \lambda^j \frac{\frac{\partial P(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}}{P(\xi,\lambda)}\,d\lambda, \quad \xi \neq 0, \tag{2.4}$$

где замкнутый контур $\gamma^-(\xi)$ содержит только корни $\lambda_1(\xi), \ldots, \lambda_r(\xi)$, и того факта, что множества $\{\lambda_1(\xi), \ldots, \lambda_r(\xi)\}$, $\{\lambda_{r+1}(\xi), \ldots, \lambda_m(\xi)\}$ не пересекаются ни при каком $\xi \neq 0$ , заключаем, что $q_j(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{O\})$. Аналогично $r_j(\xi) \in$ $\in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{O\})$.

Используя теорему о вычетах и неравенство (2.2), из (2.4) получим

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial\xi^k} q_j(\xi)\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial\xi^k} r_j(\xi)\right| \leq c_k|\xi|^{r_k}(1+|\xi|)^{s_k}, \quad r_k \leq 0. \tag{2.5}$$

**Лемма 2.1.** *Пусть $v(\xi,t)$ аналитична по $t \in \Pi_\alpha$ и является решением дифференциального уравнения*

$$\frac{\partial^r v(\xi,t)}{\partial t^r} + \sum_{j=1}^{r} q_j(\xi)\frac{\partial^{r-j} v(\xi,t)}{\partial t^{r-j}} = 0, \quad t \in \Pi_\alpha, \quad \xi \neq 0. \tag{2.6}$$

*Если при $t = 0$ имеет место оценка*

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial t^j}\frac{\partial^k v(\xi,0)}{\partial\xi^k}\right| \leq c_{jk}(1+|\xi|)^{\alpha_{jk}}|\xi|^{\beta_{jk}}, \tag{2.7}$$

*то*

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial t^j}\frac{\partial^k v(\xi,t)}{\partial\xi^k}\right| \leq c'_{jk}|\xi|^{\gamma_{jk}}(1+|\xi|)^{\delta_{jk}}(1+|t|)^{q_{jk}}. \tag{2.8}$$

**Доказательство.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t} - \lambda(\xi)u(\xi,t) = f(\xi,t), \quad t \in \Pi_\alpha, \tag{2.9}$$

где $\lambda(\xi) \in \Pi_\alpha^*$ удовлетворяет (2.1), $u(\xi, 0)$ - (2.7) а $f(\xi, t)$ - (2.8) $|k| = 0$ и любых $j$. Функции $u(\xi, t)$, $f(\xi, t)$ предполагаются аналитическими по $t \in \Pi_\alpha$. Единственное решение уравнения (2.9) имеет вид

$$u(\xi, t) = u(\xi, 0)e^{\lambda(\xi)t} + \int_0^t e^{\lambda(\xi)(t-\tau)} f(\xi, \tau)\, d\tau, \quad t \in \Pi_\alpha, \tag{2.10}$$

где интегрирование берется по отрезку $[0, t]$.

Легко видеть, что $u(\xi, t)$ из (2.10) удовлетворяет (2.8) при $|k| = 0$ и любом $j$. Представляя оператор в (2.6) как произведение операторов первого порядка, легко доказать (2.8) и для $v(\xi, t)$ при $|k| = 0$ и любом $j$. Продифференцируем (2.6), например, по $\xi_1$. Получим

$$\frac{\partial^r}{\partial t^r}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi_1}\right) + \sum_{j=1}^{r} q_j(\xi) \frac{\partial^{r-j}}{\partial t^{r-j}}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi_1}\right) = f_1(\xi, t), \tag{2.11}$$

где $f_1(\xi, t)$ удовлетворяет (2.8) при $|k| = 0$ и любом $j$. Аналогично предыдущему, докажем оценку (2.8) для $|k| = 1$ и любом $j$. Продолжая таким образом, получим Лемму 2.1.

Пусть $S(\mathbb{R}^n)$ и $S'(\mathbb{R}^n)$ , соответственно, - пространства основных и обобщенных функций Шварца. Включение $M \subset S'(\mathbb{R}^n)$ очевидно для любых $t \in \overline{\Pi_\alpha}$. Теперь рассмотрим $u \in M$ как элемент из $S'$ и перейдем к преобразованию Фурье в системе (1). Получим

$$A(\xi)\frac{\partial \hat{u}(\xi, t)}{\partial t} = B(\xi)\hat{u}(\xi, t), \quad t \in \Pi_\alpha, \tag{2.12}$$

где $\hat{u}(\xi, t) = F_x[u(x, t)](\xi)$ - образ Фурье $u(x, t) \in S'(\mathbb{R}^n)$. В силу (2), $\hat{u}(\xi, t) \in$ $\in F_x[M]$ удовлетворяет оценке

$$| < \hat{u}(\xi, t), \varphi(\xi) > | \leq c||\varphi||_{p(\gamma)}(1 + |t|)^\beta \qquad \text{для любых} \quad \varphi \in S, \tag{2.13}$$

где $|| \cdot ||_{p(\gamma)}$ - $p$-ая полунорма $S$.

Рассмотрим матрицы-функции (см. (1.16))

$$P^-(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-(\xi)} (\lambda A(\xi) - B(\xi))^{-1} A(\xi)\, d\lambda, \quad P^+(\xi) = E_m - P^-(\xi), \quad \xi \neq 0, \tag{2.14}$$

где замкнутый контур $\gamma^-(\xi)$ содержит только корни $\lambda_1(\xi),...,\lambda_r(\xi) \in \Pi_\alpha^*$.

Для полинома $Q(\xi,\lambda)$ из (2.3) имеем

$$Q(\xi,\lambda_j(\xi)) = Q(\xi,\lambda) + Q_j(\xi,\lambda)(\lambda-\lambda_j(\xi)), \quad j = r+1,...,m. \tag{2.15}$$

Используя (2.15), нетрудно преобразовать $P^-(\xi)$ к виду :

$$P^-(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-(\xi)} \frac{(\lambda A(\xi)-B(\xi))^{-1}A(\xi)P(\xi,\lambda)}{a_0(\xi)Q(\xi,\lambda)(\lambda-\lambda_{r+1}(\xi))\cdots(\lambda-\lambda_m(\xi))}d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-(\xi)} \frac{(\lambda A(\xi)-B(\xi))^{-1}A(\xi)P(\xi,\lambda)(Q(\xi,\lambda)+Q_1(\xi,\lambda)(\lambda-\lambda_1(\xi)))}{a_0(\xi)Q(\xi,\lambda)(\lambda-\lambda_{r+1}(\xi))\cdots(\lambda-\lambda_m(\xi))Q(\xi,\lambda_1(\xi))}d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i Q(\xi,\lambda_1(\xi))}\cdot\int_{\gamma^-(\xi)} \frac{(\lambda A(\xi)-B(\xi))^{-1}A(\xi)P(\xi,\lambda)Q_1(\xi,\lambda)}{a_0(\xi)Q(\xi,\lambda)(\lambda-\lambda_{r+2}(\xi))\cdots(\lambda-\lambda_m(\xi))}d\lambda = ... =$$

$$= \frac{1}{2\pi i\omega(\xi)}\int_{\gamma^-(\xi)} \frac{a(\xi,\lambda)}{a_0(\xi)Q(\xi,\lambda)}d\lambda, \tag{2.16}$$

где $a(\xi,\lambda)$ - матрица, с коэффициентами, удовлетворяющими неравенству (2.1) и

$$\omega(\xi) = \prod_{j=r+1}^{m} Q(\xi,\lambda_j(\xi)).\,. \tag{2.17}$$

Вычисляя (2.16) по теореме о вычетах в точке $\lambda=\infty$ и используя оценки (2.2), получаем $|P^-(\xi)| \le c_0|\xi|^{m_o}(1+|\xi|)^{n_o}$.

Аналогичные оценки можно установить для производных $P^-(\xi)$, дифференцируя вновь (2.14) по $\xi$ и продолжая так же как в случае $P^-(\xi)$. Получим следующую лемму.

**Лемма 2.2.** Элементы $p^-_{ij}(\xi)$ матрицы $P^-(\xi)$ удовлетворяют оценкам

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}p^-_{ij}(\xi)\right| \le c_k(1+|\xi|)^{n_k}|\xi|^{m_k}, \quad m_k \le 0. \tag{2.18}$$

Рассмотрим матрицу-функцию

$$V^-(\xi,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-(\xi)}(\lambda A(\xi)-B(\xi))^{-1}A(\xi)e^{\lambda t}\,d\lambda, \quad \xi\neq 0, \quad t\in\Pi_\alpha. \tag{2.19}$$

Очевидно, что любой элемент матрицы $V^-(\xi,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.6). Так как элементы $V^-(\xi,0)=P^-(\xi)$ удовлетворяют неравенствам (2.7) (это следует из Леммы 2.2), то на основании Леммы 2.1 получаем

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial t^j}\frac{\partial^k V^-(\xi,t)}{\partial\xi^k}\right| \le c_{jk}|\xi|^{m_{jk}}(1+|\xi|)^{n_{jk}}(1+|t|)^{p_{jk}} \tag{2.20}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\hat{u}(\xi, 0) = q(\xi) \tag{2.21}$$

для системы (2.12). Здесь $q(\xi) \in S'(\mathbb{R}^n \setminus \{O\})$ и мы ищем $\hat{u}(\xi, t) \in S'(\mathbb{R}^n \setminus \{O\})$, удовлетворяющую оценке (2.13) для любого $\varphi \in S$ с $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Справедлива следующая

Лемма 2.3. *Для разрешимости задачи Коши (2.12), (2.21) необходимо и достаточно, чтобы вектор-функционал $q(\xi)$ удовлетворял условию*

$$P^+(\xi)q(\xi) = 0, \quad \xi \neq 0. \tag{2.22}$$

*Любое решение системы (2.12) задается формулой*

$$\hat{u}(\xi, t) = V^-(\xi, t)\hat{u}(\xi, 0), \tag{2.23}$$

*где $V^-(\xi, t)$ – матрица из (2.19).*

**Доказательство.** 1.*Необходимость.* Равенство (2.22) носит локальный характер. Будем считать, что $\xi \in V_\delta(\xi_o)$ – замкнутая $\delta$-окрестность некоторого $\xi_o \neq 0$. Обозначим через $\hat{U}(\xi, p)$ образ Лапласа $\hat{u}(\xi, t)$ при $t \in R^+$. Если в (2.12) перейти к образам Лапласа ($t \in R^+$) и принять во внимание (2.21), то получим

$$(p\,A(\xi) - B(\xi))\hat{U}(\xi, p) = A(\xi)q(\xi), \quad \operatorname{Re} p > 0. \tag{2.24}$$

Так как $a_o(\xi) \neq 0$ и $|\lambda_j(\xi)| \leq \mathrm{const}$, то для элементов $l_{ij}(\xi, p)$ матрицы $(pA(\xi)-$ $-B(\xi))^{-1}$ имеют место оценки

$$|l_{ij}(\xi, p)| \leq c \cdot |p|^{-1}, \quad |p| \gg 1, \tag{2.25}$$

где $\lambda_j(\xi)$ – корень $\det(pA(\xi) - B(\xi)) = a_o(\xi)p^m + \dots + a_m(\xi)$. Применяя формулу обратного преобразования Лапласа, получаем

$$\hat{u}(\xi, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} e^{pt}\hat{U}(\xi, p)\,dp \quad \text{для любых} \quad \varepsilon > 0, \quad t \in R^+. \tag{2.26}$$

Пусть $\varepsilon_o > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\operatorname{Re} \lambda_j(\xi) \leq \frac{\varepsilon_o}{2}, \ j = 1, \dots, r + k; \quad \operatorname{Re} \lambda_j(\xi) \geq \varepsilon_o, \ j = r + k + 1, \dots, m, \quad \xi \in V_\delta(\xi_o). \tag{2.27}$$

Выбирая в (2.26) $\varepsilon_o/2 < \varepsilon < \varepsilon_o$, принимая во внимание (2.24), (2.25) и на основании интегральной теоремы Коши получим

$$\hat{u}(\xi,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-(\xi)} (\lambda A(\xi) - B(\xi))^{-1} A(\xi)e^{\lambda t}\, d\lambda \cdot q(\xi), \quad \xi \in V_\delta(\xi_o), \quad t \in R^+, \tag{2.28}$$

где замкнутый контур $\Gamma^-(\xi)$ содержит только корни $\lambda_1(\xi),\ldots, \lambda_{k+r}(\xi)$. Заметим также, что множества $\{\lambda_1(\xi), \ldots, \lambda_r(\xi)\}$, $\{\lambda_{r+1}(\xi), \ldots, \lambda_{r+k}(\xi)\}$ отделены друг от друга для всех $\xi \in V_\delta(\xi_o)$ и представим (2.28) в виде

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}_1(\xi,t) + \hat{u}_2(\xi,t), \tag{2.29}$$

где

$$\hat{u}_j(\xi,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j^-(\xi)} (\lambda A(\xi) - B(\xi))^{-1} A(\xi)e^{\lambda t}\, d\lambda \cdot q(\xi). \tag{2.30}$$

Здесь замкнутый контур $\gamma_1^-(\xi)$ содержит только корни $\lambda_1(\xi),\ldots,\lambda_r(\xi) \in \Pi_\alpha^*$, а $\gamma_2^-(\xi)$ – $\lambda_{r+1}(\xi),\ldots, \lambda_{r+k}(\xi) \in C\Pi_\alpha^*$. Очевидно, что $\hat{u}_1(\xi,t) = V^-(\xi,t)q(\xi)$ и следовательно, аналитически продолжается в область $\Pi_\alpha$ и в силу (2.20) имеет там степенной рост. Поэтому $\hat{u}_2(\xi,t)$ также должна иметь степенной рост. Представляя $\hat{u}_2(\xi,t)$ в виде $\hat{u}_2(\xi,t) = V_2(\xi,t)q(\xi)$, заметим, что элементы матрицы $V_2(\xi,t)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_{r+1}(\xi))\cdots(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_{r+k}(\xi))v(\xi,t) = 0 \tag{2.31}$$

или в матричной форме

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A_0(\xi)w, \tag{2.32}$$

где $w = (v(\xi,t), \ldots, \frac{\partial^{k-1}v(\xi,t)}{\partial t^{k-1}})$, а $A_0(\xi)$ – вполне определенная матрица, элементы которой принадлежат $C^\infty(V_\delta(\xi_o))$, в силу того, что корни $\lambda_{r+1}(\xi),\ldots, \lambda_{r+k}(\xi)$ отделены от остальных. В работе [1] доказано, что аналитическое в $\Pi_\alpha$ решение (2.32), имеющее степенной рост, равно тождественно нулю. Таким образом, $\hat{u}_2(\xi,t) \equiv 0$ и формула (2.23) доказана. Полагая в (2.23) $t = 0$, получим (2.22).

2.*Достаточность.* Пусть $P^+(\xi)q(\xi) = 0$, то есть $q(\xi) = P^-(\xi)q(\xi) = V^-(\xi,0)q(\xi)$. Ясно, что вектор-функционал $V^-(\xi,t)q(\xi)$ – решение задачи Коши (2.12), (2.21). Лемма 2.3 доказана.

Рассмотрим систему

$$A(0)\frac{\partial v(t)}{\partial t} = B(0)v(t), \quad t \in \Pi_\alpha. \tag{2.33}$$

Пусть $\mu_1, \dots, \mu_{r_1}$ - корни соответствующего ей характеристического уравнения такие, что $\mu_1, \dots, \mu_{k_1} \in \Pi^*_\alpha$ и $\mu_{k_1+1}, \dots, \mu_{r_1} \in C\Pi^*_\alpha$.

Рассмотрим матрицы

$$P_0^- = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-}(\lambda A(0) - B(0))^{-1}A(0)\,d\lambda, \quad P_0^+ = E_m - P_0^-, \tag{2.34}$$

где замкнутый контур $\gamma^-$ охватывает только корни $\mu_1, \dots, \mu_{k_1}$.

Мы накладываем следующие условия :

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} P^+(\xi) \\ C(\xi) \end{pmatrix} = m \quad \text{для любых} \quad \xi \neq 0, \tag{2.35}$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} P_0^+ \\ C(0) \end{pmatrix} = m - k_1 + r. \tag{2.36}$$

Рассмотрим алгебраическую систему

$$P^+(\xi)v_j(\xi) = 0, \quad C(\xi)v_j(\xi) = e_j, \quad e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad \xi \neq 0. \tag{2.37}$$

Следующая лемма доказана в [1].

**Лемма 2.4.** *Система (2.37) имеет единственное решение $v_j(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{O\})$, удовлетворяющее оценке*

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial \xi^k}v_j(\xi)\right| \leq c_k(1 + |\xi|)^{n_k}|\xi|^{m_k}, \quad m_k \leq 0. \tag{2.38}$$

**Построение решения неоднородной Задачи $A$.**

В граничном условии (5) вместо $f(x)$ возьмем вектор-функцию $\Delta_x^\nu f(x)$, где $\nu \geq 0$ - целое, а $\Delta_x$ - лапласиан относительно переменных $x_1, \dots, x_n$. Образ Фурье Задачи $A$ можно представить в виде

$$u(\xi, t) = \sum_{j=1}^{r} V^-(\xi, t)v_j(\xi)|\xi|^{2\nu}\hat{f}_j(\xi) = \sum_{j=1}^{r}\frac{V^-(\xi, t)|\xi|^{2\nu}}{(1 + |\xi|^2)^{k_0}}(1 + |\xi|^2)^{k_0}\hat{f}_j(\xi), \quad \xi \neq 0. \tag{2.39}$$

Выбирая $k_0$ и $\nu$ легко убедиться [1], что прообраз Фурье $u(\xi, t)$ вектор-функционала $u(\xi, t)$ есть решение Задачи $A$ с взятой правой частью. Процедурой, описанной, например, в [1], разрешимость Задачи $A$ сведется к разрешимости следующей задачи :

$$A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial t} = B(i\frac{\partial}{\partial x})w + \sum_{|j|\le 2\nu-1} a_j(t)x^j, \quad t\in\Pi_\alpha, \tag{2.40}$$

$$C\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)w(x,0) = \sum_{|j|\le 2\nu-1} b_j x^j, \tag{2.41}$$

где $a_j(t)\in M$, $b_j\in R^r$ – вполне определенные величины.

Решение задачи (2.40), (2.41) будем искать в виде

$$w(x,t) = \sum_{|j|\le 2\nu-1} c_j(t)x^j \tag{2.42}$$

с неизвестными $c_j(t)\in M$.

Подставляя $w(x,t)$ из (2.42) в (2.40), (2.41), для определения $c_j(t)$ $|j| = 2\nu-1$ получим следующую задачу :

$$A(0)\frac{\partial c_j(t)}{\partial t} = B(0)c_j(t) + a_j(t), \quad |j| = 2\nu-1, \quad t\in\Pi_\alpha, \tag{2.43}$$

$$C(0)c_j(0) = b_j, \quad |j| = 2\nu-1. \tag{2.44}$$

Ее разрешимость обеспечивается условием (2.36). Остальные $c_j(t)$, $|j| < 2\nu-$ $-1$, находятся аналогично. Таким образом, неоднородная Задача $A$ разрешима. Что касается однородной Задачи $A$, то из (2.35) вытекает, что ее решение представляется в виде

$$u(x,t) = \sum_{|j|\le\nu_0} c_j(t)x^j \tag{2.45}$$

с неизвестными $c_j(t)\in M$.

Поступая так же как и выше, мы придем к задаче (2.43), (2.44) с $a_j(t) = b_j = 0$. Очевидно, что $u(x,t)\equiv 0$ при $k_1 = r$ (при $k_1$ см. (2.33)) и однородная Задача $A$ имеет по крайней мере одно нетривиальное решение с $c_j(t)\not\equiv 0$, $|j| = \nu_0$, при $k_1 > r$ и ввиду произвольности $\nu_0$ в (2.45) однородная Задача $A$ имеет бесконечно много линейно независимых решений. Итак, доказана следующая

**Теорема 2.1.** *Пусть выполнены условия (2.35), (2.36). Тогда*

*а) Задача $A$ имеет единственное решение для любого $f$ при $k_1 = r$,* *b) неоднородная Задача A имеет решение для любых $f$,*

*c) однородная Задача A имеет бесконечно много линейно независимых решений при $k_1 > r$.*

Нижеследующие примеры показывают важность условия (2.36). В §3 это условие мы опустим, при этом разрешимость неоднородной задачи сохранится.

1. Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \Pi_\alpha, 0 < \alpha < \pi/2. \tag{2.46}$$

Имеем, $\det(\lambda A(\xi) - B(\xi)) = \lambda(\lambda\xi^2 + 1)$. Так как $\lambda_1 = 0 \in \Pi^*_\alpha$, $\lambda_2 = -\frac{1}{\xi^2} \in \Pi^*_\alpha$ для $\xi \neq 0$, то для системы (2.46) рассматриваем задачу

$$C\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,0) = f(x), \tag{2.47}$$

где $C(\xi)$ – квадратная матрица порядка $r = 2$ с $\det C(\xi) \neq 0$ для $\xi \neq 0$. Пусть $C\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = E_2$ – единичная матрица. Очевидно, что $P^-(\xi) = E_2$ при $\xi \neq 0$ и $P^+(\xi) = E_2 - P^-(\xi) = 0$ при $\xi \neq 0$, т. е. условие (2.35) выполнено. Проверим условие (2.36). Имеем, $\det(\lambda A(0) - B(0)) = \lambda = 0 \in \Pi^*_\alpha$, то есть корень $k_1 = 1$ и условие (2.36) не может иметь места, так как $m - k_1 + r = 3 > 2$. Покажем, что задача (2.46), (2.47) не всегда разрешима. Пусть $f = (0,1)$, а $u(x,t)$ – соответствующее решение. Из условия (2.35) следует, что $\hat{u}(\xi,t) = 0$ для $\xi \neq 0$, следовательно

$$u(x,t) = \sum_{|j| \leq N_0} c_j(t) x^j. \tag{2.48}$$

Подставляя $u(x,t)$ из (2.48) в (2.46), (2.47), получим задачу Коши для $c_{N_0}(t)$ с $N_0 \geq 1$ :

$$A(0)\frac{\partial c_{N_0}(t)}{\partial t} = B(0)c_{N_0}(t), \quad c_{N_0}(0) = 0.$$

Отсюда следует, что $c_{N_0}(t) = 0$. Таким образом, $u(x,t) = c_0(t)$ и получаем задачу

$$A(0)\frac{\partial c_0(t)}{\partial t} = B(0)c_0(t), \quad c_0(0) = e_2, \quad e_2 = (0,1).$$

Так как $P^+ = E_2 - P_0^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то условие $P_0^+ e_2 = 0$ (см. условие разрешимости (1.15)) не выполнено.

2. Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} u, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \Pi_\alpha, 0 < \alpha < \pi, \tag{2.49}$$

для которой $\det(\lambda A(\xi) - B(\xi)) = \lambda(-\lambda\xi^2 + 1)$ и, следовательно, $\lambda_1 = 0 \in \Pi^*_\alpha$ и $\lambda_2 = \frac{1}{\xi^2} \in C\Pi^*_\alpha$ для $\xi \neq 0$. Граничное условие на $u$ возьмем в виде

$$a_1\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u_1(x,0) = f(x), \tag{2.50}$$

где $a_1(\xi)$ – полиномы по $\xi$ с постоянными коэффициентами, $a_1(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$. Матрицы $P^+(\xi)$ и $P^+_0$ имеют вид

$$P^+(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & \xi^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^+_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Условие (2.35) , очевидно, имеет место. Далее, если $a_1(0) \neq 0$, то условие (2.36) также выполнено. Пусть теперь $a_1(0) = 0$, тогда условие (2.36) хотя и нарушено, но задача (2.49), (2.50) разрешима для любых $f(x)$. Для этого достаточно представить $a_1\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ в виде $a_1\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k_o} a_o\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$, где $a_o(\xi) \neq 0$ для всех $\xi$ и вместо (2.50) рассмотреть задачу $a_o\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u_1(x,0) = F(x)$ с $\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k_o} F(x) = f(x)$, для которой условия (2.35), (2.36) выполнены.

## §3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ А, СЛУЧАЙ b)

Случай b) мы разобьем на два существенно отличающихся случая :

1b) функция $\rho(\xi) = \text{const} = r$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и 2b) функция $\rho(\xi) = \text{const} = r$ для всех $\xi \neq 0$ и $\rho(0) > r$. Отметим, что полученные выше оценки и естественно соответствуюшие леммы, на которые мы будем ссылаться в этом параграфе, имеют приведенный вид и для случая 2b). А для случая 1b) в них следует исключить множитель $|\xi|^{m_k}$. Единственное, что требует обоснования – формула (2.28) при доказательстве Леммы 2.3, так как при $\det A(\xi) \equiv 0$ оценка (2.25) перестает быть верной и принимает вид

$$|l_{ij}(\xi,p)| \leq c|p|^{m-r_o-1}, \quad |p| \gg 1,\ r_o \geq 1,\ \xi \in V_\delta(\xi_o). \tag{3.1}$$

Ряд Лорана матрицы $(pA(\xi) - B(\xi))^{-1}$ в окрестности точки $p = \infty$ имеет вид

$$(pA(\xi) - B(\xi))^{-1} = \beta(p,\xi) + \sum_{j \leq m-r_o-1} \beta_j(\xi) p^j, \tag{3.2}$$

где

$$\beta(p,\xi) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|+=R}(\lambda A(\xi) - B(\xi))^{-1}\frac{d\lambda}{\lambda - p},$$

$$\beta_j(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|+=R}(\lambda A(\xi) - B(\xi))^{-1}\lambda^{-j-1}d\lambda, \quad j = 0,\ldots,m - r_o - 1, \quad R \gg 1.$$

Так как $\hat{U}(\xi,p)$ - образ Лапласа, то $\lim_{\mathrm{Re}\, p\to+\infty}\hat{U}(\xi,p) = 0$. Но в силу (2.24) и (3.2) это возможно тогда и только тогда, когда

$$\beta_j(\xi)A(\xi)q(\xi) = 0, \quad j = 0,\ldots,m - r_o - 1.$$

Таким образом

$$\hat{U}(\xi,p) = (pA(\xi) - B(\xi))^{-1}A(\xi)q(\xi) = \beta(p,\xi)A(\xi)q(\xi),$$

где элементы матрицы $\beta(p,\xi)$ удовлетворяют оценке (2.25) и, тем самым, формула (2.28) обоснована. Пусть имеет место случай 1b) и условие (2.35) выполняется для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тогда в оценке (2.38) множитель $|\xi|^{m_k}$ отсутствует и очевидна

**Теорема 3.1.** *В случае 1b), если условие (2.35) выполнено для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, то однородная Задача $A^*$ имеет только нулевое решение, а неоднородная Задача $A$ разрешима для всех $f$.*

Если же имеет место случай 1b, но условие (2.35) нарушено только в точке $\xi = 0$, то решение неоднородной Задачи $A$ как и в §2 сводим к задаче (2.40), (2.41). Частное решение системы (2.40) легко построить, если искать его в виде

$$u_o(x,t) = \sum_{|j|\le\nu_o} c_j(t)x^j$$

и для определения $c_j(t)$ воспользоваться условием (3) и Леммой 1.2. Поэтому в (2.40) правую часть берем равной нулю. Заметим также, что в этом параграфе условие (2.36) опущено. Но мы покажем ниже, что Задача $B$, которая подобна задаче (2.40), (2.41) слабо разрешима. Рассмотрим следующую задачу.

**Задача B.** Пусть имеет место случай 1b) и выполнено условие

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} P^+(\xi) \\ C(\xi) \end{pmatrix} = m \quad \text{при} \quad \xi \neq 0. \tag{3.3}$$

В классе $w \in M$ найти решение системы

$$A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial t} = B\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)w, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \Pi_\alpha, \tag{3.4}$$

удовлетворяющее условию

$$C\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)w(x,0) = p(x), \tag{3.5}$$

где $p(x)$ – заданный вектор-многочлен от $x \in \mathbb{R}^n$.

*Решение Задачи В.* В образах Фурье задача (3.4), (3.5) имеет вид

$$A(\xi)\frac{\partial \hat{w}(\xi,t)}{\partial t} = B(\xi)\hat{w}(\xi,t), \tag{3.6}$$

$$C(\xi)\hat{w}(\xi,0) = \hat{p}(\xi), \tag{3.7}$$

где $\hat{w}(\xi,t) \in S'$ удовлетворяет оценке (2.13), а $\hat{p}(\xi) \in S'$ сосредоточен в точке $\xi = 0$. Заменим $\hat{p}(\xi)$ в (3.7) вектор-функционалом $q(\xi) = (q_1(\xi), \dots, q_r(\xi)) \in S'$. В соответствии с (2.39) рассмотрим функционал

$$\hat{w}_1(\xi,t) = \sum_{j=1}^{r} V^-(\xi,t)v_j(\xi)q_j(\xi), \tag{3.8}$$

который регуляризуем по формуле :

$$< \hat{w}_1(\xi,t), \varphi(\xi) >= \sum_{j=1}^{r} < q_j(\xi), V^-(\xi,t)v_j(\xi)\psi(\xi) >, \tag{3.9}$$

где

$$\psi(\xi) = \varphi(\xi) - \alpha(\xi)\sum_{|j|\le\nu_o}\frac{\xi^j}{j!}\frac{\partial^j\varphi(0)}{\partial\xi^j},$$
$$\nu_o \gg 1,\ \alpha(\xi) \in C_0^\infty(|\xi| < \varepsilon),\ \alpha(\xi) \equiv 1 \text{ при } |\xi| < \varepsilon/2.$$

Напомним, что $v_j(\xi)$ в (3.8) удовлетворяет (2.38) в силу (3.3). Так как функционалы $q_j(\xi)$ имеют конечный порядок сингулярности, то для некоторого $\nu_o$ функционал $\hat{w}_1(\xi,t)$, определенный по формуле (3.9), принадлежит $S'$ и удовлетворяет неравенству (2.13). Очевидно, что $\hat{w}_1(\xi,t)$ - решение задачи (3.6), (3.7) для любых $\varphi \in S$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$, поэтому имеем

$$A(\xi)\frac{\partial \hat{w}_1(\xi,t)}{\partial t} = B(\xi)\hat{w}_1(\xi,t) + \sum_{|j|\le N_o} a_j(t)\delta^{(j)}(\xi), \tag{3.10}$$

$$C(\xi)\hat{w}_1(\xi,0) = q(\xi) + \sum_{|j|\le N_o} b_j \delta^{(j)}(\xi), \tag{3.11}$$

где $\delta(\xi)$ – функция Дирака, а $a_j(t) \in M$, $b_j \in R^r$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} a_j(t) &= \frac{(-1)^{|j|}}{j!}\left(A(\xi)\frac{\partial \hat{w}_1(\xi,t)}{\partial t} - B(\xi)\hat{w}_1(\xi,t), \xi^j\right), \\ b_j &= \frac{(-1)^{|j|}}{j!}\left(C(\xi)\hat{w}_1(\xi,0) - q(\xi), \xi^j\right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Таким образом, решение задачи (3.6), (3.7) можно представить в виде

$$\hat{w}(\xi,t) = \hat{w}_1(\xi,t) + \sum_{|j|\le N_o} c_j(t)\delta^{(j)}(\xi), \tag{3.13}$$

где $c_j(t) \in M$ произвольны.

Подставляя $\hat{w}(\xi,t)$ из (3.13) в (3.6), (3.7), для определения вектор-функций $c_j(t)$ получим задачу (ср. с задачей (1.7), (1.21))

$$A_1 \frac{\partial c(t)}{\partial t} = B_1 c(t) + a(t), \quad C_1 c(0) = b, \tag{3.14}$$

где $A_1$, $B_1$ – постоянные квадратные матрицы такие, что $\det(\lambda A_1 - B_1) \not\equiv 0$ ; $C_1$ – постоянная прямоугольная матрица ; $a(t)$, $b$ вполне определены, $c(t)$ – неизвестная вектор-функция, компоненты которой состоят из всех компонент векторов $c_j(t)$. Построив частное решение неоднородной системы (3.14) (это возможно, так как $\det(\lambda A_1 - B_1) \not\equiv 0$) мы можем считать $a(t) \equiv 0$. Согласно Замечанию 1.1 конечное число условий

$$(b, d^{(j)}) = 0, \quad j = 1, \ldots, k_o, \tag{3.15}$$

необходимы и достаточны для разрешимости задачи (3.14), где $d^{(j)}$ – постоянные векторы. В силу (3.9), (3.12) условия (3.15) примут вид

$$\sum_{j=1}^{r} < q_j(\xi), \omega_{lj}(\xi) >= 0, \quad l = 1, \ldots, k_o, \tag{3.16}$$

где $\omega_{lj}(\xi)$ – вполне определенные функции, на которых функционал $q_j(\xi)$ определен.

Покажем, что в действительности $\omega_{lj}(\xi) \equiv 0$. Для этого предположим, что $q(\xi) = (0, \ldots, 0, \varphi(\xi), 0 \ldots, 0)$, где $\varphi \in S$ и supp $\varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Очевидно, что для такого $q(\xi)$ Задача $B$ разрешима и поэтому условия (3.16) выполнены и имеют вид

$$\int \varphi(\xi)\omega_{l s}(\xi)d\xi = 0.$$

В силу произвольности $\varphi(\xi)$ получаем $\omega_{l_0}(\xi) \equiv 0$. Таким образом, условия (3.16) всегда выполнены и поэтому задача (3.14) и Задача $B$ разрешимы. Что касается однородной Задачи $A$ ($f \equiv 0$), то из условия (3.3) следует, что образ Фурье $u^o(\xi, t)$ ее решения $u^o(x, t)$ равен нулю при $\xi \neq 0$. Поэтому $u^o(x, t)$ имеет вид

$$u^o(x, t) = \sum_{|j| \leq N_0} c_j(t) x^j . \tag{3.17}$$

Подставляя $u^o(x, t)$ из (3.17) в (1), (5) и используя неравенство

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} P^+(0) \\ C(0) \end{pmatrix} < m$$

для случая 1b) получим (см. Лемму 1.8 в [1]) следующую теорему.

**Теорема 3.2.** *Пусть выполнено условие (3.3). Тогда неоднородная Задача $A$ имеет решение для всех $f$. При $n = 1$ однородная Задача $A$ имеет конечное число линейно независимых решений, если же $n \geq 2$, то – бесконечное число линейно независимых решений.*

Не вдаваясь в подробности, отметим что случай 2b) исследуется тем же методом, что 1b) при условии (3.3). Сформулируем соответствующий результат.

**Теорема 3.3.** *В случае 2b) неоднородная Задача $A$ имеет решение для любых $f$, а однородная задача имеет бесконечно много линейно независимых решений для любых $n$.*

В заключение рассмотрим следующий пример.

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -u_1 - \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad 0 = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - u_2, \quad (x, t) \in R \times \Pi_\alpha, \ 0 < \alpha < \pi/2.$$

Матрицы $A(\xi)$ и $B(\xi)$ имеют вид

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(\xi) = \begin{pmatrix} -1 & i\xi \\ -i\xi & -(1+\xi^2) \end{pmatrix}.$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$\det(\lambda A(\xi) - B(\xi)) = \lambda(1 + \xi^2) + 1 = 0$$

имеет единственный корень $\lambda = -(1 + \xi^2)^{-1} \in \Pi^*_\alpha$. Согласно вышеизложенной теории ставится граничная задача

$$a_1 u_1(x, 0) + a_2 u_2(x, 0) = f(x), \quad a_1, a_2 \in R, \ f \in M.$$

Имеем

$$P^{+}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{i\xi}{1+\xi^2} & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть $a_1 \neq 0$, тогда

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \frac{i\xi}{1+\xi^2} & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{для всех} \quad \xi \in R$$

и условие (2.35) выполняется для всех $\xi \in R$. Поэтому рассмотренная задача имеет единственное решение для всех $f \in M$. Если же $a_1 = 0$ и $a_2 = 1$, то

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \frac{i\xi}{1+\xi^2} & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{для} \quad \xi \neq 0$$

с порядком вырождения в точке $\xi = 0$, равным 1. Поэтому однородная задача имеет одно линейно независимое решение. Действительно, решением системы

$$\frac{i\xi}{1+\xi^2}\tilde{u}_1(\xi,0) + \tilde{u}_2(\xi,0) = 0, \quad \tilde{u}_2(\xi,0) = 0$$

является единственный вектор-функционал $(\delta(\xi),0)$ с функцией Дирака $\delta(\xi)$. Что касается неоднородной задачи, то в качестве частного решения системы $v(\xi) = (-\frac{1}{i\xi} + i\xi, 1)$

$$\frac{i\xi}{1+\xi^2}v_1(\xi) + v_2(\xi) = 0, \quad v_2(\xi) = 1,$$

возьмем $v(\xi) = (-\frac{1}{i\xi} + i\xi, 1)$. И, если вместо $f(x)$ в граничном условии взять $f'(x)$, то прообраз Фурье $u_o(x,t)$ функционала

$$V^{-}(\xi,t)(1+\xi^2)^{-k_o}v(\xi)(-i\xi)(1+\xi^2)^{k_o}\hat{f}(\xi), \quad k_o \gg 1$$

принадлежит $M$ и является решением этой задачи. Здесь $V^{-}(\xi,t)$ – матрица, определенная условием (2.19). Пусть $v_o \in M$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial v_o}{\partial x} = u_o$. Подставляя $u_o$ в систему и граничное условие, получим

$$A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_o}{\partial x}\right) = B\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial v_o}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}v_{02}(x,0) = f'(x), \; v_o = (v_{01}, v_{02})$$

или, интегрируя

$$A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial v_o}{\partial t} = B\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)v_o + a(t), \quad v_{02}(x,0) = f(x) + b,$$

$a(t)$ и $b$ вполне определены. Остается решить задачу

$$A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial t}=B\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)w,\quad w_2(x,0)=b_o.$$

Если $w(x,t)$ искать в виде $w(x,t)=c_0(t)+c_1(t)$, то легко построить решение этой задачи

$$w_1(x,t)=b_oxe^{-t},\quad w_2(x,t)=b_oe^{-t}$$

**ABSTRACT**. Let $\Pi_\alpha=\{t|\ 0<\arg t<\alpha<\pi\}$ be an angle in the complex plane and let $A(\xi)$, $B(\xi)$ be polynomials in $\xi\in\mathbb{R}^n$ of order $m$. We consider the following system

$$A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=B\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t),\quad \text{in}\quad \mathbb{R}^n\times\Pi_\alpha, \tag{*}$$

where $u(x,t)$ is assumed to be infinitely differentiable in $x\in\mathbb{R}^n$, analytic in $t\in\Pi_\alpha$ and having polynomial growth in $(x,t)$. Let $\rho(\xi)$ denote the number of roots of characteristic polynomial $P(\xi,\lambda)=\det(\lambda A(\xi)-B(\xi))\not\equiv 0$ which belongs to $\Pi_\alpha^*=\{\lambda|\ \frac{\pi}{2}\leq\arg\lambda\leq\frac{3}{2}\pi-\alpha\}$. We assume that either a) $\det A(\xi)$ vanishes in a finite number of points or b) $\det A(\xi)\equiv 0$ and the order of $P(\xi,\lambda)$ in $\lambda$ does not depend on $\xi$. In both cases we assume that $\rho(\xi)=$ const $=r$ with possible exception of a finite number of points. Consider the boundary value problem

$$C\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,0)=f(x) \tag{**}$$

with polynomial in $\xi\in\mathbb{R}^n$ matrix $C(\xi)$ of dimension $r\times m$. Depending on hypothesis b) or a) we give some conditions on $A(\xi)$, $B(\xi)$ and $C(\xi)$ under which the problem (*), (**) either becomes solvable for any $f(x)$ or for its solvability a finite number of conditions of orthogonality on $f(x)$ is necessary and sufficient. The homogeneous problem ($f\equiv 0$) is treated as well.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андрян, "Общая граничная задача в двугранной области для систем уравнений в частных производных", Изв. АН Армении, Математика, т. 28, №2, стр. 3–22, 1993.
2. Ф. Р. Гантмахер, Теория Матриц, М., Наука, 1988.
3. Л. Херемандер, Анализ Линейных Дифференциальных Операторов с Частными Производными, т. 2, М., Мир, 1986.
4. N. E. Tovmasian, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, World Scientific Publishing, Singapore, 1993.

8 Декабря 1992

Армянский государственный инженерный университет

# АСИМПТОТИКИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ГАУССОВСКИХ ПОЛЕЙ : ПРИМЕНЕНИЯ

В. Р. Фаталов

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №5, 1993

**Работа посвящена применениям результатов работы [1] с целью получения асимптотик : а) предельных распределений статистик Колмогорова–Смирнова ; б) распределений максимумов винеровских полей ; в) распределения максимума $l_k^p$–нормы векторного гауссовского случайного процесса**

## §1. АСИМПТОТИКИ ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СТАТИСТИК КОЛМОГОРОВА–СМИРНОВА ДЛЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ

В статистической практике критерий Колмогорова–Смирнова является одним из самых распространенных критериев для проверки (простой) гипотезы о принадлежности наблюдаемых данных распределению с конкретной функцией распределения (ф. р.) $F(x)$. Распределения статистик Колмогорова и Смирнова можно найти у этих авторов в 1933 [2] и в 1939 [3]. Однако довольно часто приходится сталкиваться с гипотезой о том, что выборка извлечена из распределения определенного типа, так что ее ф. р. $F(x,\theta)$ оказывается заданной с точностью до некоторого параметра $\theta$. В этом случае предельные распределения статистик Колмогорова–Смирнова уже зависят от ф. р. $F$ и до сих пор не найдены. Ниже мы укажем точные асимптотики этих предельных распределений.

Рассмотрим теперь задачу проверки сложной гипотезы

$$H_0: \quad G \in \mathcal{F} = \{F(x,\theta),\ \theta = (\theta_1, ..., \theta_q) \in \Theta \subset \mathbb{R}^q,\ x \in \mathbb{R}^1\},$$

где $G(x)$ – неизвестная непрерывная функция распределения, $\mathcal{F}$ – семейство функций распределения $F(x, \theta)$, зависящих от параметра $\Theta = (\theta_1, ..., \theta_q)$. Предположим также, что класс распределений $\mathcal{F}$ удовлетворяет условиям регулярности по $\theta$ (см. [4], гл. 33), а $f(x, \theta) = \dfrac{\partial}{\partial x} F(x, \theta)$ – плотность распределения. Предположим, что объем $N$ выбран из ф. р. $F(x, \theta_0)$. Тогда оценка максимального правдоподобия $\theta^*$ параметра $\theta_0$ является асимптотически нормальной и эффективной. Обозначим через $F_N(x)$ эмпирическую функцию распределения, и пусть $F^0(x) = F(x, \theta_0)$. Хорошо известно (см. [5]), что в параметрической ситуации эмпирический процесс $\zeta_N(x) = \sqrt{N}(F_N(x) - F(x, \theta^*))$, при справедливости гипотезы $H_0$ после замены $t = F^0(x)$ слабо сходится (при $N \to \infty$) в метрике $D[0, 1]$ к гауссовскому процессу $w(t)$ со средним нуль и ковариационной функцией

$$\mathbf{E}w(t)w(s) = \min(t, s) - ts - \left[\frac{\partial}{\partial \theta_i} F(x, \theta^0)\right]^T \Bigg|_{x = F^{-1}(t, \theta^0)} \times$$

$$\times J^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial \theta_j} F(y, \theta^0)\right] \Bigg|_{y = F^{-1}(s, \theta^0)} \tag{1.1}$$

где $\left[\dfrac{\partial}{\partial \theta_i} F(x, \theta^0)\right]$, $i = 1, ..., q$ – $q$-мерный вектор-столбец,

$$J = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln f(x, \theta^0) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln f(x, \theta^0)\, dF^0(x)\right]_{i,j=\overline{1,q}}$$

– информационная матрица Фишера размера $q \times q$, $J^{-1}$ – обратная матрица к $J$, а $F^{-1}(t, \theta^0) = \inf\{x :\ F^0(x) = t\}$.

Применение статистик Колмогорова-Смирнова

$$D_N = \sup\{|\zeta_N(x)|,\ x \in \mathbb{R}^1\}, \quad D_N^+ = \sup\{\zeta_N(x),\ x \in \mathbb{R}^1\}$$

для проверки гипотезы $H_0$ предполагает знание предельных (при $N \to \infty$) распределений вероятностей $\mathbf{P}(D_N > u)$, $\mathbf{P}(D_N^+ > u)$. В наших условиях эти предельные распределения существуют, но до сих пор неизвестны. Процесс $w(t)$, $t \in [0, 1]$ входит в класс полей, изученных в работе [1] и следовательно справедлива следующая

**Теорема 1.1.** *Пусть дисперсия $\sigma^2(t)$ предельного гауссовского процесса $w(t)$ достигает своего максимума $\sigma^2$ на $[0,1]$ в конечном числе внутренних точек $b_1, ..., b_l$, причем в окрестностях каждой из них существуют производные $\dfrac{d^{2p_k-1}}{dt^{2p_k-1}} \sigma^2(t)$, $k = 1, ..., l$ такие, что $\dfrac{d^i}{dt^i} \sigma^2(b_k) = 0$, $i = 1, ..., 2p_k - 1$, а*

$\frac{d^{2p_k}}{dt^{2p_k}}\sigma^2(b_k) < 0$. *Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(D_N > u) = \mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]} |w(t)| > u\right\} = 2\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]} w(t) > u\right\}(1+o(1)) =$$

$$= \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right] \frac{u\sqrt{2}}{\sigma^2\sqrt{\pi\sigma}} \sum_{k=1}^{l} \left(\frac{u^2}{\sigma^3}\right)^{-1/(2p_k)} \left[\frac{d^{2p_k}}{dt^{2p_k}}\sigma^2(b_k)\right]^{-1/2} \times$$

$$\times((2p_k-1)!)^{1/2} p_k^{-1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2p_k}\right)(1+o(1)), \quad u\to\infty,$$

*где величины $\sigma, l, p_k, b_k$ зависят от $\theta_0$, а $\Gamma(\cdot)$ - гамма-функция.*

Заметим, что для масштабно-сдвиговых и некоторых других семейств зависимость от $\theta_0$ исчезает. Ниже приводятся соответствующие примеры.

**Доказательство** основано на использовании Теоремы 1.2(i) из [1] с $p = n = 1$. Согласно формуле Тейлора в окрестностях каждой точки $b_k$ имеем разложения

$$\sigma_t = \sigma + \frac{(t-b_k)^{2p_k}}{2(2p_k)!\sigma} \frac{d^{2p_k}}{dt^{2p_k}}\sigma^2(b_k)(1+o(1)), \quad t\to b_k, \quad k = 1,\dots,l.$$

Обозначив $R(t,s) = \mathbf{E}w(t)w(s)$, при $t, s \to b_k$ по формуле Лагранжа получаем

$$R^2(t,s) - \sigma^2(t)\sigma^2(s) = -\sigma^2|t-s| + o(|t-s|).$$

Следовательно, для корреляционной функции $r(t,s)$ процесса $w(t)$ выполнено

$$r(t,s) = 1 - (2\sigma^2)^{-1}|t-s| + o(|t-s|), \quad t, s \to b_k.$$

Выполнение условия (III) Теоремы 1.2 из [1] легко проверяется :

$$\mathbf{E}(w(t) - w(s))^2 \le |t-s|, \qquad t, s \in [0,1].$$

Таким образом, вычисляя необходимые константы и применяя Замечание 1.1 и Следствие 2.1 из [1] получаем утверждение теоремы.

Перейдем к рассмотрению примеров.

**Пример 1.1.** *Проверка гипотезы о нормальности одномерной выборки.* Пусть

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2}\exp[-x^2/2], \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$$

– плотность и функция распределения стандартного нормального закона. Относительно неизвестной функции распределения $F(x)$ проверяется одна из трех гипотез :

a) $H_1$ : $F(x) \in \mathcal{F}_1 = \left\{\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),\ a \in \mathbb{R}^1,\ \sigma \in (0,\infty)\right\}$, оба параметра - среднее $a$ и среднеквадратичное уклонение $\sigma$ неизвестны ;

b) $H_2$ : $F(x) \in \mathcal{F}_2 = \left\{\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right),\ \sigma \in (0,\infty)\right\}$, дисперсия $\sigma^2$ неизвестна ;

c) $H_3$ : $F(x) \in \mathcal{F}_3 = \left\{\Phi(x-a),\ a \in \mathbb{R}^1\right\}$, среднее $a$ неизвестно.

Пусть оценками $a$ и $\sigma^2$ выбраны, соответственно, выборочные среднее и дисперсия. Пусть $w_i(t)$, $t \in [0,1]$, $i = 1,2,3$ – предельные гауссовские процессы, возникающие при проверке гипотез $H_i$. Соответствующие ковариационные функции определяются по формуле (1.1) и равны :

a) $\mathbf{E}w_1(t)w_1(s) = \min(t,s) - ts - \varphi(\Phi^{-1}(t))\varphi(\Phi^{-1}(s))(1 + \Phi^{-1}(t)\Phi^{-1}(s)/2)$,

b) $\mathbf{E}w_2(t)w_2(s) = \min(t,s) - ts - \Phi^{-1}(t)\Phi^{-1}(s)\varphi(\Phi^{-1}(t))\varphi(\Phi^{-1}(s))/2$,

c) $\mathbf{E}w_3(t)w_3(s) = \min(t,s) - ts - \varphi(\Phi^{-1}(t))\varphi(\Phi^{-1}(s))$. Тогда верны следующие соотношения при $u \to \infty$ :

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]} w_1(t) > u\right\} = \exp\left[-\frac{2\pi}{\pi-2}u^2\right]\left(-\frac{2\pi}{\pi-2}\right)^{1/2}(1+o(1)), \tag{1.2}$$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]} w_2(t) > u\right\} = \exp[-2u^2]\frac{\sqrt{6}}{3}(1+o(1)), \tag{1.3}$$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]} w_3(t) > u\right\} = \exp\left[-\frac{2\pi}{\pi-2}u^2\right]\frac{\sqrt{u}}{\pi-2}\Gamma(1/4)\left(\frac{3}{2}\pi\right)^{1/4}(1+o(1)).$$

Отметим, что здесь дисперсии $\sigma_i^2(t)$, $i = 1,2,3$ во всех трех случаях достигают единственного максимума на [0,1] в точке $t = 1/2$. В случаях a) и b) вторые производные дисперсий, равные

$$\frac{d^2}{dt^2}\sigma_1^2(t) = -((\Phi^{-1}(t))^2 - 1)^2, \quad \frac{d^2}{dt^2}\sigma_2^2(t) = ((\Phi^{-1}(t))^2 - 1)(3 - (\Phi^{-1}(t))^2)$$

строго отрицательны в точке $t = 1/2$, в то время, как в случае c) дисперсия $\sigma_3^2(t)$ имеет вторую производную $-2(\Phi^{-1}(t))^2$, которая обращается в нуль в точке максимума $t = 1/2$. Подсчет высших производных дает :

$$\frac{d^3}{dt^3}\sigma_3^2(1/2) = 0, \qquad \frac{d^4}{dt^4}\sigma_3^2(1/2) = -8\pi.$$

Теперь остается сосчитать необходимые константы и воспользоваться Теоремой 1.1.

Асимптотики в случаях a) и b) впервые были получены Ю. Тюриным в работах [6, 7]. Результат случая c) впервые опубликован в [8].

**Пример 1.2.** *Проверка экспоненциальности и принадлежности закону Релея.* Пусть проверяется одна из двух гипотез

$$H_4: \qquad F(x) \in \left\{1 - \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \quad \theta > 0\right\}$$

и

$$\widetilde{H}_4: \qquad F(x) \in \left\{1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta^2}\right), \quad \theta \neq 0\right\}.$$

В обоих случаях предельный гауссовский процесс $w_4(t)$ будет иметь среднее нуль и ковариационную функцию (см. [11], [12]) :

$$\mathbf{E}w_4(t)w_4(s) = \min(t, s) - ts - (1-t)(1-s)\ln(1-t)\ln(1-s).$$

Дисперсия $\sigma_4^2(t)$ процесса $w_4(t)$ достигает своего максимума $\sigma_4^2$ на $[0,1]$ в точке $t_0 \approx 0.3397$, являющейся корнем уравнения

$$\frac{d}{dt}\sigma_4^2(t) \equiv 1 - 2t + 2(1-t)\ln(1-t)(1+\ln(1-t)) = 0.$$

В силу Теоремы 1.1 имеет место следующее асимптотическое разложение :

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]} w_4(t) > u\right\} = a_4 \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma_4^2}\right](1 + o(1)), \quad u \to \infty, \tag{1.4}$$

где

$$\frac{1}{2\sigma_4^2} \approx 3.351, \qquad a_4 = (\sqrt{2}\sigma_4)^{-1}\left[-\frac{d^2}{dt^2}\sigma_4^2(t_0)\right]^{-1/2} \approx 1.344.$$

Этот результат был впервые получен в [7], см. также [13].

**Пример 1.3.** *Проверка на принадлежность закону Коши.* Проверяется гипотеза

$$H_5: \qquad F(x) \in \left\{\frac{1}{\pi}\arctan(x-\theta) + \frac{1}{2}, \quad |\theta| < \infty\right\}$$

о том, что выборка извлечена из распределения Коши с неизвестным параметром сдвига $\theta$. Ковариационная функция предельного гауссовского процесса $w_5(t)$ имеет вид (см. [12])

$$\mathbf{E}w_5(t)w_5(s) = \min(t,s) - ts - 2\pi^{-2}\sin^2(\pi t)\sin^2(\pi s).$$

Дисперсия $\sigma_5^2(t)$ процесса $w_5(t)$ достигает своего максимума на $[0,1]$ в двух симметричных (относительно 1/2) точках $t_1 \approx 0.2280$, $t_2 \approx 0.7720$, которые являются корнями уравнения

$$\frac{d}{dt}\sigma_5^2(t) \equiv 1 - 2t - 4\pi^{-1}\sin(2\pi t)\sin^2(\pi t) = 0.$$

Заметим, что третий корень $t_3 = 1/2$ этого уравнения есть точка минимума дисперсии. Применение Теоремы 1.1 дает нам такую асимптотику

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]} w_5(t) > u\right\} = a_5 \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma_5^2}\right](1+o(1)), \quad a_5 \approx 1.503, \quad \frac{1}{2\sigma_5^2} \approx 3.614.$$

**Пример 1.4.** *Проверка на принадлежность гамма-распределению.*

Проверяется гипотеза $H_6: F(x) \in \{L_m(x/\theta),\ \theta > 0\}$

$$L_m(x) = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^x t^{m-1}e^{-t}\,dt \equiv 1 - e^{-x}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{x^i}{i!}, \quad x > 0.$$

Предположим, что $m \geq 2$. Ковариационная функция предельного гауссовского процесса равна (см. [12])

$$\mathbf{E}w_6(t)w_6(s) = \min(t,s) - ts - m^{-1}l_m(L_m^{-1}(t))l_m(L_m^{-1}(s)),$$

где

$$l_m(x) = \frac{\partial}{\partial t}L_m(x) = \frac{x^{m-1}e^{-x}}{(m-1)!}.$$

Имеют место соотношения

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]} w_6(t) > u\right\} = a_6 \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma_6^2}\right](1+o(1)), \quad u \to \infty,$$

где $\sigma_6^2 = \mathbf{Var}w_6(t_0)$, а $t_0 = t_0(m)$ - единственный корень на (0.1) уравнения

а) при $m = 2$, $-1 + e^{-x}(1+3x)|_{x=L_2^{-1}(t)} = 0$, $t_0 \approx 0.5673$, $a_6 \approx 1.118$, $\frac{1}{2\sigma_6^2} \approx 2.436$;

b) при $m = 3$, $\quad -1+2e^{-x}(1+\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}x^2)|_{x=L_3^{-1}(t)} = 0$, $\quad t_0 \approx 0.5222$, $a_6 \approx 1.076$, $\frac{1}{2\sigma_6^2} \approx 2.172$ ;

c) при $m = 4$, $\quad -1 + 2e^{-x}(1 + x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{24}x^3)|_{x=L_4^{-1}(t)} = 0$, $\quad t_0 \approx 0.5101$, $a_6 \approx 1.046$, $\frac{1}{2\sigma_6^2} \approx 2.091$ ;

d) при $m = 5$, $\quad -1+2e^{-x}(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{15}x^3+\frac{1}{20}x^4)|_{x=L_5^{-1}(t)} = 0$, $\quad t_0 \approx 0.5055$, $a_6 \approx 1.031$, $\frac{1}{2\sigma_6^2} \approx 2.057$.

Аналогичные расчеты могут быть проведены и для $m > 5$.

Приведем вид оценок максимального правдоподобия для параметров в Примерах 1.2 - 1.4 (см. [12]) :

Пример 1.2 : $\quad \theta = (N-1)^{-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{(1)}), \quad x_{(1)} = \min_{1 \le i \le N} x_i$ ;

Пример 1.3 : $\quad \theta$ – корень уравнения

$$\theta = \left( \sum_{i=1}^{N} [1 + (x_i - \theta)^2]^{-1} \right)^{-1} \sum_{i=1}^{N} x_i [1 + (x_i - \theta)^2]^{-1};$$

Пример 1.4 : $\quad \theta = (mN)^{-1} \sum_{i=1}^{N} x_i$.

**Пример 1.5.** *Проверка на принадлежность закону Вейбулла–Гнеденко ( а также двойному экспоненциальному распределению).*

Проверяется гипотеза

$$H_7: \qquad F(x) \in \{1 - \exp(-(x/v)^k), \quad x \ge 0, \quad v > 0, \quad k > 0\}$$

о принадлежности выборки распределению Вейбулла–Гнеденко с двумя неизвестными параметрами $v$ (параметр масштаба) и $k$ (параметр формы). Довольно громоздкие вычисления по формуле (1.1) дают следующий вид ковариационной функции предельного гауссовского процесса $w_7(t)$ :

$$\mathbf{E} w_7(t) w_7(s) = \min(t,s) - ts - 6\pi^{-2}(1-t)(1-s)\ln(1-t)\ln(1-s) \times$$
$$\times \left[ (1-C)^2 + \pi^2/6 + (C-1)\ln\ln\frac{1}{1-t} + (C-1)\ln\ln\frac{1}{1-s}\ln\ln\frac{1}{1-t}\ln\ln\frac{1}{1-s} \right],$$

где $C \approx 0.577216$ - постоянная Эйлера. Теорема 1.1 дает следующую асимптотику :

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{[0,1]} w_7(t) > u \right\} = a_7 \exp\left[ -\frac{u^2}{2\sigma_7^2} \right] (1 + o(1)), \quad u \to \infty, \tag{1.5}$$

где $t_0 \approx 0.5516$ – единственная точка достижения максимума дисперсией $\sigma_7^2(t) = \mathbf{Var} w_7(t)$, которая является единственным на $[0,1]$ корнем уравнения

$$\frac{d}{dt}\sigma_7^2(t) \equiv 12\pi^{-2}\Big[1 - C - C^2 - \frac{\pi^2}{3} + \ln(1-t)(3C - 3C^2 - \frac{\pi^2}{2}) -$$

$$-\ln^2(1-t)((1-C)^2 + \frac{\pi^2}{6}) - 2C\ln\ln\frac{1}{1-t} + (3-6C)\ln(1-t)\ln\ln\frac{1}{1-t} +$$

$$+2(1-C)\ln^2(1-t)\ln\ln\frac{1}{1-t} - \left(\ln\ln\frac{1}{1-t}\right)^2(\ln^2(1-t) + 3\ln(1-t) + 1)\Big] = 0.$$

Соответствующие константы имеют вид $a_7 \approx 2.296$, $\frac{1}{2\sigma_7^2} \approx 5.852$. Разложение (1.5) уточняет Теорему 1 из [14].

Несложно применить Теорему 1.1 и для проверки гипотезы о принадлежности выборки распределению Вейбулла-Гнеденко с двумя неизвестными параметрами формы $k$ при известном параметре масштаба $v$. Случай, когда неизвестен только один параметр $v$ легко сводится к экспоненциальному (см. [14]). Напомним (см. [14]), что $\xi$ - случайная величина, имеющая распределение Вейбулла-Гнеденко, преобразованием $\ln\xi$ превращается в случайную величину, имеющую двойное экспоненциальное распределение с ф. р. $1 - \exp[-\exp((x-a)/\theta)]$, где параметры $a$ и $\theta$ очевидным образом связаны с $k$ и $v$. Статистики Колмогорова-Смирнова при указанном переходе от $\xi$ к $\ln\xi$ не меняются. В [14] имеются таблицы для сравнения асимптотических результатов со значениями, полученными методом Монте-Карло в [15].

**Проверка гипотезы о нормальности многомерной выборки.**

Пусть проверяется гипотеза

$H_0$ : о принадлежности выборки $x_1, ..., x_N$ $n$-мерному невырожденному нормальному распределению с ф. р. $F(x, a, \Sigma)$. Математическое ожидание $a$ и ковариационная матрица $\Sigma$ предполагаются неизвестными. Обозначим через $a^*$ и $\Sigma^*$ оценку максимального правдоподобия параметров $a$ и $\Sigma$, соответственно, и пусть $F_N(y)$ обозначает эмпирическую ф. р., которая построена по преобразованной выборке $y_i = C(x_i - a^*)$, $i = 1, ..., N$, где невырожденная матрица $C$ такова, что $C\Sigma^* C^T = I$, $I$ - единичная матрица. Известно (см. [17], [18]), что эмпирическое случайное поле $\zeta_N(y) = \sqrt{N}(F_N(y) - F(y, 0, I))$ после замены $t_i = \Phi(y^i)$,

$i = 1, \dots, n$, $y = (y^1, \dots, y^n)$) при гипотезе $H_0$ слабо сходится в метрике $D[0,1]^n$ (при $N \to \infty$) к гауссовскому случайному полю $W(t)$ со средним нуль и ковариационной функцией

$$\begin{aligned}\mathbf{E}W(t)W(s) = &\prod_{i=1}^{n} \min(t_i, s_i) - \prod_{i=1}^{n} t_i s_i - \\ &- \sum_{i=1}^{n} \varphi(\Phi^{-1}(t_i))\varphi(\Phi^{-1}(s_i)) \left[1 + \frac{1}{2}\Phi^{-1}(t_i)\Phi^{-1}(s_i) \prod_{k=1, k\neq i}^{n} t_k s_k\right] - \\ &- \sum_{i,j=1, i<j}^{n} \varphi(\Phi^{-1}(t_i))\varphi(\Phi^{-1}(s_i))\varphi(\Phi^{-1}(t_j))\varphi(\Phi^{-1}(s_j)) \prod_{k\neq j, k\neq i} t_k s_k,\end{aligned}$$

где $\Phi$ и $\varphi$ те же, что и в Примере 1.1, а $t = (t_1, \dots, t_n)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$.

Рассмотрим статистику Колмогорова–Смирнова $K_N = \sup\{|\zeta_N(y)| : y \in \mathbb{R}^n\}$.

**Теорема 1.2.** *Пусть дисперсия $\sigma^2(t)$ предельного гауссовского поля $W(t)$ достигает своего максимума $\sigma^2$ в конечном числе точек $b_1, \dots, b_l$, которые являются внутренними точками из $[0,1]^n$, причем матрицы $\Lambda_k = (\lambda_{ij}^k)_{i,j=\overline{1,n}}$, $\lambda_{ij}^k = -\dfrac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j}\sigma^2(b_k)$, $k = 1, \dots, l$ невырожденны. Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(K_N > u) = \mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^n} |W(t)| > u\right\} = 2\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^n} W(t) > u\right\}(1 + o(1)) =$$

$$= \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right] u^{n-1}\sqrt{2}\sigma^{1-2n}\pi^{(n-1)/2} \sum_{k=1}^{l}\prod_{i=1}^{n} (b_{ki})^{n-1} |\det \Lambda_k|^{-1/2}(1 + o(1)),$$
$$u \to \infty,$$

*где $b_k = (b_{k1}, \dots, b_{kn})$.*

**Следствие 1.1.** При $n = 2$ дисперсия $\sigma^2(t)$ поля $W(t)$, $t = (t_1, t_2)$ достигает своего максимума на $[0,1]^2$ в двух (симметричных относительно диагонали $t_1 = t_2$) точках $t_0 = (0.579; 0.800)$ и $\bar{t}_0 = (0.800; 0.579)$. Имеет место следующее асимптотическое соотношение :

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^2} |W(t)| > u\right\} = 309.4 \exp[-4.939u^2]u(1 + o(1)), \quad u \to \infty.$$

Доказательство Следствия 1.1 можно найти в [19].

**Доказательство Теоремы 1.2.** Мы используем Теорему 1.2 (iii) и Замечание 1.1 из [1]. По формуле Тейлора в точке $b_k$, $k = 1, \ldots, l$ имеем

$$\sigma(t) = \sigma - (4\sigma)^{-1}(t - b_k)\Lambda_k(t - b_k)^T + o(|t - b_k|^2), \quad t \to b_k. \tag{1.6}$$

В силу Замечания 1.1 из [1] для достаточно малых взаимно непересекающихся окрестностей $V_k$ точек $b_k$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^n} W(t) > u\right\} = \sum_{k=1}^{l} \mathbf{P}\left\{\sup_{V_k} W(t) > u\right\}(1 + o(1)), \quad u \to \infty. \tag{1.7}$$

Для невырожденной симметрической матрицы $\Lambda_k$ найдется такая невырожденная матрица $B_k$, что $B_k \Lambda_k B_k^T = I$. Рассмотрим гауссовское поле $W_k(t) \equiv W(B_k t)$, определенное на компактном множестве $B_k^{-1}(V_k) = \{B_k^{-1}x : x \in V_k\}$. Дисперсия $\sigma_k^2(t) \equiv \sigma^2(B_k t)$ of $W_k(t)$ достигает своего максимума $\sigma^2$ на $B_k^{-1}(V_k)$ в единственной точке $c_k = B_k^{-1} b_k$. В окрестности этой точки в силу (1.6) имеем

$$\sigma_k(t) = \sigma - |A(t - c_k)|_{\mathbf{2}}(1 + o(1)), \quad t \to c_k, \tag{1.8}$$

где $A = \operatorname{diag}((2\sqrt{\sigma})^{-1}, \ldots, (2\sqrt{\sigma})^{-1})$ - диагональная матрица, а $\mathbf{2} = (2, \ldots, 2) \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, здесь $f_1 = \cdots = f_n = 1$ и $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 2$ (см. Теорему 1.2 из [1]). Обозначив $R(t, s) = \mathbf{E}W(t)W(s)$, $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$, получим

$$R^2(t, s) - \sigma^2(t)\sigma^2(s) = -\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} |t_i - s_i| \prod_{j=1, j\neq i}^{n} b_{kj} + o(|t - s|_{\mathbf{1}}), \quad t, s \to b_k.$$

Следовательно для корреляционной функции $r_k(t, s)$ поля $W_k(t)$, $t \in B_k^{-1}(V_k)$ справедливо разложение при $t, s \to c_k$

$$r_k(t, s) = 1 - |D_k B_k(t - s)|_{\mathbf{1}} + o(|t - s|_{\mathbf{1}}), \tag{1.9}$$

где матрица $D_k$ также диагональна :

$$D_k = \operatorname{diag}\left((2\sigma^2)^{-1} \prod_{j=1, j\neq 1}^{n} b_{kj}, \ldots, (2\sigma^2)^{-1} \prod_{j=1, j\neq n}^{n} b_{kj}\right)$$

Отсюда видно, что $e_1 = \cdots = e_n = 1$ и $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$ (см. Теорему 1.2 из [1]). Несложно убедиться также, что для некоторых $C > 0$ и $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\mathbf{E}(W_k(t) - W_k(s))^2 \le C|t - s|_{\mathbf{1}}, \quad t, s \in B_k^{-1}(V_k), \quad |t - s| < \varepsilon,$$

т. е. выполнено условие (III) Теоремы 1.2 из [1]. Теперь остается использовать Теорему 1.2 и Следствие 2.1 из [1], равенство (1.7) для получения доказательства утверждения Теоремы 1.2, так как

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{V_k} W(t) > u\right\} = \mathbf{P}\left\{\sup_{B_k^{-1}(V_k)} W_k(t) > u\right\} \quad \text{и} \quad |\det B_k| = |\det \Lambda_k|^{-1/2}.$$

## §2. ПРОВЕРКА НЕЗАВИСИМОСТИ

Нам понадобится следующий вариант Теоремы 1.1 из [1]. Пусть гауссовское сепарабельное случайное поле $X(t)$ определено компактом $T \subset \mathbb{R}^n$ с непрерывными траекториями, удовлетворяюшими условиям (I) - (IV) из [1] и следующим условиям :

($\tilde{\text{I}}$) Дисперсия $\sigma^2(t)$ поля $X(t)$ непрерывна на $T$ и имеет место соотношение

$$\sigma(t) = \sigma - |G(t)|^\beta + o(|G(t)|^\beta), \qquad G(t) \to 0,$$

где $\beta > 0$, $T_0 = \{t \in T : \ G(t) = 0\}$.

($\tilde{\text{II}}$) Функция $G(t)$ удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции : $G(t)$ непрерывна на множестве

$$T_o^\varepsilon = \left\{t \in T : \quad \inf_{s \in T_0} |t - s| \le \varepsilon\right\}, \qquad \varepsilon > 0,$$

и имеет место представление $T_o^\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{M} T_i$ такое, что производная $\dfrac{\partial G(t)}{\partial t_i}$ существует и непрерывна при $t \in T_i$, $i = 1, ..., M$, а при $t \in T_0 \cap T_i$, $\dfrac{\partial G(t)}{\partial t_i} \neq 0$.

($\widetilde{\text{III}}$) Выполнено включение $T_0 \subset \overline{U} \subset T$ для некоторого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ (здесь $\overline{U}$ - замыкание множества $U$).

Из условий ($\tilde{\text{I}}$) - ($\widetilde{\text{III}}$) следует, что $m_{n-1}(T_0) > 0$ и $m_n(T_0) = 0$, где $m_n$ $n$-мерная мера Лебега.

**Теорема 2.1.** *Пусть гауссовское сепарабельное поле, определенное компактным множеством $T \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяет условиям ($\tilde{\text{I}}$) - ($\widetilde{\text{III}}$) и (I) - (IV) из [1]. Тогда, если $\beta > \max\limits_{1 \le i \le k} \alpha_i$, то для любой функции $\delta(u)$ такой, что при $u \to \infty$*

$$\delta(u) \downarrow 0, \quad u\delta^\beta(u) \to 0, \quad u^2(\ln u)^{-1}\delta^\beta(u) \to \infty, \tag{2.1}$$

*верно соотношение*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\} = \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right]\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{-1}\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{2e_i/\alpha_i}(2\pi)^{-1/2}H_\alpha\times$$

$$\times\int_{T_\delta}\exp\left[-\frac{u^2}{\sigma^3}|G(t)|^\beta\right]|\det D(t,t)|\,dt(1+o(1)),\quad u\to\infty,$$

*где* $T_\delta = \{t\in T:\ |G(t)|\le\delta(u)\}$, *а постоянная* $H_\alpha$ *определена в [1].*

**Доказательство** Теоремы 2.1 можно вывести из доказательства Теоремы 1.1 в [1].

Обратимся теперь к статистическим задачам. Пусть $X_1, X_2, ..., X_N$, $X_i = (X_{i1}, ..., X_{in})$, $i = 1, ..., N$ - выборка $n$-мерной случайной величины $X$ с непрерывной функцией распределения $F(x)$, $x = (x_1, ..., x_n)$. Проверяется гипотеза о независимости координат вектора $X$, т. е. гипотеза

$$H_0:\qquad F(x) = \prod_{i=1}^{n} F^i(x_i),$$

где $F^i$ - непрерывные одномерные ф. р. . Проверка гипотезы о независимости рассматривалась, например, в работах [11], [20]. Обозначим через $F_N(x)$ и $F_N^i(x_i)$ $n$-мерную и одномерные маргинальные эмпирические функции распределения, построенные по выборке. Хорошо известно (см. [20]), что случайное поле

$$\xi_N(x) = \sqrt{N}\left|F_N(x) - \prod_{i=1}^{n} F_N^i(x_i)\right|$$

после замены $t_i = F^i(x_i)$, $i = 1, ..., n$ слабо сходится (при $N\to\infty$) в метрике $D[0,1]$ к гауссовскому полю $W_0(t)$ со средним нуль и ковариационной функцией

$$\mathbf{E}W_0(t)W_0(s) = \prod_{i=1}^{n}\min(t_i, s_i) - \sum_{i=1}^{n}\min(t_i, s_i)\prod_{j\ne i} t_j s_j + (n-1)\prod_{i=1}^{n} t_i s_i. \qquad (2.2)$$

(Здесь $t = (t_1, ..., t_n)$, $s = (s_1, ..., s_n)$).

Удобная для проверки гипотезы $H_0$ статистика Колмогорова–Смирнова $D_N = \sup\{|\xi_N(x)|:\ x\in\mathbb{R}^n\}$ имеет, таким образом, предельное распределение (при $N\to\infty$), совпадающее с распределением $\sup\{|W_0(t)|:\ t\in[0,1]^n\}$.

**Теорема 2.2.** *Дисперсия $\sigma_0^2(t)$ гауссовского поля $W_0(t)$ достигает своего максимума $\sigma^2$ на $[0,1]^n$ в точках $b^1,...,b^l$, $b^k=(b_k,...,b_k)\in\mathbb{R}^n$, $k=1,...,l\le n$, где $b_k\in(0,1)$ – действительные корни уравнения*

$$(2n-2)y^n-(2n-1)y^{n-1}+1=0.$$

*При $u\to\infty$ имеет место соотношение*

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{P}(D_N>u)=\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^n}|W_0(t)|>u\right\}=2\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^n}W_0(t)>u\right\}(1+o(1))=$$

$$=\exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right]u^{n-1}\sqrt{2}\sigma^{1-2n}\pi^{(n-1)/2}\sum_{k=1}^{l}b_k^{n(n-1)}(1-b_k^{n-1})^n|\det\Lambda_k|^{-1/2}(1+o(1)),\tag{2.3}$$

*где $\Lambda_k=(\lambda_{ij}^k)_{i,j=\overline{1,n}}$, $\lambda_{ij}^k=-\dfrac{\partial^2}{\partial t_i\partial t_j}\sigma_0^2(b_k)$, $k=1,...,l$ – невырожденные матрицы.*

**Следствие 2.1.** а) При $n=2$ дисперсия $\sigma_0^2(t)$ поля $W_0(t)$ имеет одну точку максимума $(1/2,1/2)$ и справедливо асимптотическое соотношение

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^2}|W_0(t)|>u\right\}=8\sqrt{2\pi}u\exp[-8u^2](1+o(1)),\quad u\to\infty.$$

b) При $n=3$ дисперсия $\sigma_0^2(t)$ имеет на $[0,1]^3$ одну точку максимума $b^1=$ $=(b_1,b_1,b_1)$, $b_1\approx0.6404$ и справедливо асимптотическое соотношение

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^3}|W_0(t)|>u\right\}=183.9u^2\exp[-6.455u^2](1+o(1)),\quad u\to\infty.$$

**Доказательство Теоремы 2.2** можно получить, применяя Теорему 1.2 (iii) из [1] с $p=n$. Мы выпишем необходимые разложения. Критические точки $t=(t_1,...,t_n)$ функции $\sigma_0^2(t)$, $t\in[0,1]^n$ удовлетворяют системе уравнений $\{\dfrac{\partial}{\partial t_i}\sigma_0^2(t)=0,\ i=1,...,n\}$. Решение этой системы – множество точек

$$Q=\{t\in[0,1]^n:\quad t_1=\cdots=t_n=y,\quad(2n-2)y^n-(2n-1)y^{n-1}+1=0\}.$$

Пусть $b^1=(b_1,...,b_1)\in Q$ – точка максимума функции $\sigma_0^2(t)$. Применяя формулу Тейлора, получим

$$\sigma_0(t)=\sigma-(4\sigma)^{-1}(t-b^1)\Lambda_1(t-b^1)^T+o(|t-b^1|^2),\quad t\to b^1.$$

Используя формулу (2.2) несложно показать, что для корреляционной функции $r_0(t,s)$ поля $W_0(t)$ имеет место разложение

$$r_0(t,s) = 1 - \frac{1}{2}\sigma^{-2}(b_1)^{n-1}(1-(b_1)^{n-1})\sum_{i=1}^{n}|t_i - s_i| + o(|t-s|_1), \quad t,s \to b^1.$$

При некоторых $C > 0, \varepsilon > 0$ верно также неравенство

$$\mathbf{E}(W_0(t) - W_0(s))^2 \le C|t-s|_1, \quad |t-s| < \varepsilon.$$

Рассмотрим теперь поле $W^1(t) = W_0(Bt)$, заданное на компактном множестве $B^{-1}(V_1)$, где $V_1$ - компактная окрестность $b^1$ (см. Замечание 1.1 из [1]), а $B$ - невырожденная матрица такая, что $B\Lambda_1 B = I$. Применим теперь Теорему 1.2 (iii) из [1] с $p = n$ к полю $W^1(t)$. В обозначениях Теоремы 1.2 из [1] имеем

$$f_1 = \cdots = f_n = 1, \quad \beta_1 = \cdots = \beta_n = 2, \quad e_1 = \cdots = e_n = 1, \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1.$$

Для матриц $A$ и $D$ имеем (ср. (1.8) и (1.9)) :

$$A = (2\sqrt{\sigma})^{-1}I, \qquad D = \frac{1}{2}\sigma^{-2}(b_1)^{n-1}(1-(b_1)^{n-1})I.$$

Соответствующие постоянные можно вычислить по формуле (2.3).

Утверждение a) Следствия 2.1 вытекает из Теоремы 2.3, приведенной ниже, так как при $n = 2$ соотношение (2.2) принимает вид

$$\mathbf{E}W_0(t)W_0(s) = \prod_{i=1}^{2}[\min(t_i, s_i) - t_i s_i].$$

Утверждение b) легко вывести из (2.3), так как при $n = 3$ уравнение для точек максимума дисперсии $\sigma_0^2(t)$ принимает вид $4y^2 - y - 1 = 0$ и имеет единственный корень $b_1 \in (0,1)$, $b_1 = (1+\sqrt{17})/8 \approx 0.6404$.

Отметим, что при произвольном $n$ нужно будет решать уравнение

$$(2n-2)y^{n-1} - (y^{n-2} + y^{n-3} + \cdots + y + 1) = 0.$$

Численные расчеты по формуле (2.3) могут быть приведены и для $n > 3$.

В некоторых задачах статистики (например, при проверке той же гипотезы о независимости, см. [11, стр. 47], [20, стр. 45], [21, стр. 23]) возникает гауссовское случайное поле $W_1(t)$, $t = (t_1, ..., t_n) \in [0,1]^n$ со средним нуль и ковариационной функцией

$$\mathbf{E}W_1(t)W_1(s) = \prod_{i=1}^{n}[\min(t_i, s_i) - t_i s_i].$$

Поле $W_1(t)$ является одним из многомерных аналогов броуновского моста, так как распределение $W_1$ совпадает с условным распределением поля $\{W(t)/W(s) = 0, s \in J\}$, где

$$J = \{s = (s_1, ..., s_n) \in [0,1]^n : \text{существует } i,\ 1 \le i \le n \text{ такое, что } s_i = 1\},$$

а $W(t)$, $t \in [0,1]^n$ – винеровское поле, введенное Н. Н. Ченцовым [22] (см также Дж. Йех [23]). Заметим, что $W(t)$ – гауссовское поле с непрерывными траекториями, нулевым средним и ковариационной функцией $\mathbf{E}W(t)W(s) = \prod_{i=1}^{n} \min(t_i, s_i)$, называемой многопараметрическим броуновским движением.

**Теорема 2.3.** *Для поля $W_1(t)$ справедливо следующее асимптотическое разложение :*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^n} |W_1(t)| > u\right\} = 2\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^n} W_1(t) > u\right\}(1 + o(1)) =$$

$$= \exp(-2^{2n-1}u^2)u^{n-1}\pi^{(n-1)/2}(\sqrt{2})^{2n^2-n+1}(1 + o(1)), \quad u \to \infty. \tag{2.4}$$

**Доказательство** вновь основано на Теореме 1.2(i) из [1] с $p = n$. Дисперсия $\sigma_1^2(t) = \prod_{i=1}^{n} t_i(1 - t_i)$ поля $W_1(t)$ достигает своего максимума $\sigma_1^2 = 2^{-2n}$ на $[0,1]^n$ в единственной точке $\frac{1}{2}\mathbf{1} = (\frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2})$. Справедливы следующие разложения : для дисперсии

$$\sigma_1(t) = 2^{-n} - 2^{1-n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \frac{1}{2})^2 + o\left(|t - \frac{1}{2}\mathbf{1}|^2\right), \quad t \to \frac{1}{2}\mathbf{1}$$

и для корреляционной функции $r_1(t,s)$ поля $W_1(t)$

$$r_1(t,s) = 1 - 2\sum_{i=1}^{n}|t_i - s_i| + o(|t - s|_1), \qquad t, s \to \frac{1}{2}\mathbf{1}.$$

Имеет место также неравенство

$$\mathbf{E}(W_1(t) - W_1(s))^2 \le \sum_{i=1}^{n}|t_i - s_i|, \quad t, s \in [0,1]^n.$$

Как видим, здесь $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$, $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 2$, $A = (\sqrt{2})^{-n-1}I$, $D = 2I$. Применяя Теорему 1.2(i) из [1], получаем (2.4).

**Другой способ проверки гипотезы о независимости** $H_0$. В работе [24] (см. также [21, стр.22]) доказано, что при гипотезе $H_0$ предельное (при $N \to \infty$) распределение статистики

$$K_N = \sqrt{N} \sup \left\{ |F_N(x) - F(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

совпадает с распределением случайной величины $\sup\{|W_2(t)|, \ t \in [0,1]^n\}$. Здесь $W_2(t)$ – другое распространенное в статистике гауссовское поле с нулевым средним и ковариационной функцией

$$\mathbf{E} W_2(t) W_2(s) = \prod_{i=1}^{n} \min(t_i, s_i) - \prod_{i=1}^{n} t_i s_i .$$

Это так называемый броуновский (винеровский) лист или многопараметрический броуновский мост. Это поле может быть рассмотрено как условное винеровское поле вида $W_2(t) = \{W(t)/W(\mathbf{1}) = 0\}$. Это гауссовское поле интересно тем, что его дисперсия достигает своего максимума на $(n-1)$-мерном множестве.

**Теорема 2.4.** *Имеет место соотношение*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(K_N > u) = \mathbf{P}\left\{ \sup_{[0,1]^n} |W_2(t)| > u \right\} = 2\mathbf{P}\left\{ \sup_{[0,1]^n} W_2(t) > u \right\} (1 + o(1)) =$$

$$= \exp(-2u^2) u^{2n-2} 2 (4 \ln 2)^{n-1} (1 + o(1)), \quad u \to \infty. \tag{2.5}$$

**Доказательство** основано на Теореме 2.1. Дисперсия

$$\sigma_2^2(t) = \mathrm{Var} W_2(t) = \prod_{i=1}^{n} t_i - \prod_{i=1}^{n} t_i^2$$

достигает своего максимума $\sigma_2^2 = 1/4$ на $(n-1)$-мерном многообразии $T_0 = \{t \in [0,1]^n : \prod_{i=1}^{n} t_i = 1/2\}$. В окрестности этого множества справедливы разложения

$$\sigma_2(t) = \frac{1}{2} - \left( \prod_{i=1}^{n} t_i - \frac{1}{2} \right)^2 + o\left( \left( \prod_{i=1}^{n} t_i - \frac{1}{2} \right)^2 \right), \quad \prod_{i=1}^{n} t_i \to \frac{1}{2}$$

для корреляционной функции $r_2(t,s)$ поля $W_2$

$$r_2(t,s) = 1 - \sum_{i=1}^{n} (t_i s_i)^{-1/2} |t_i - s_i| + o(|t-s|_1), \quad t - s \to 0.$$

Имеет место неравенство

$$\mathbf{E}(W_2(t) - W_2(s))^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |t_i - s_i|, \quad t, s \in [0, 1]^n.$$

Условия Теоремы 2.1 выполнены для поля $W_2$ с

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1, \quad \beta = 2, \quad D(t, s) = \operatorname{diag}((t_1 s_1)^{-1/2}, ..., (t_n s_n)^{-1/2}),$$

$$G(t) = \prod_{i=1}^{n} t_i - \frac{1}{2}.$$

Для функции $\delta(u)$, удовлетворяющей (2.1) с $\beta = 2$, асимптотика интеграла из формулировки Теоремы 2.1 легко вычисляется и равна $(\ln 2)^{n-1}\sqrt{\pi/2}u^{-1}$. Применение Теоремы 2.1 завершает доказательство.

Приведем таблицу квантилей статистик $D_N$ и $K_N$ $(n = 2)$, вычисленных по асимптотикам (2.4) и (2.5) и методом статистического моделирования (см. [25, стр. 30]) ; $\mathbf{P}(D_N > u_\gamma) = \gamma$, $\mathbf{P}(K_N > v_\gamma) = \gamma$.

| | $\gamma$ | 0.30 | 0.25 | 0.20 | 0.15 | 0.10 | 0.05 | 0.025 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Статистики | Квантили | | | | | | | |
| $D_N$ | моделир. $u_\gamma$ | 0.75 | 0.76 | 0.78 | 0.80 | 0.85 | 0.90 | 1.02 |
| $D_N$ | асимпт. $u_\gamma$ | 0.69 | 0.71 | 0.73 | 0.76 | 0.80 | 0.85 | 0.91 |
| $K_N$ | моделир$v_\gamma$ | 1.34 | 1.39 | 1.45 | 1.52 | 1.60 | 1.72 | 1.79 |
| $K_N$ | асимпт.$v_\gamma$ | 1.31 | 1.36 | 1.42 | 1.48 | 1.56 | 1.68 | 1.81 |

Таким образом, асимптотики являются достаточно хорошим приближением, начиная с уровня $\gamma = 0.2$.

Наконец, приведем последний результат этого раздела, касающийся многопараметрического броуновского движения $W(t)$, который был установлен В. И. Питербаргом.

**Теорема 2.5.** *Для гауссовского поля*

$$W(t), \quad t \in [0, 1]^n, \quad \mathbf{E}W(t) = 0, \quad \mathbf{E}W(t)W(s) = \prod_{i=1}^{n} \min(t_i, s_i)$$

*имеет место соотношение*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^n} |W(t)| > u\right\} = 2\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^n} W(t) > u\right\}(1 + o(1)) =$$

$$= \exp(-u^2/2)u^{-1}2^{n+1}(2\pi)^{-1/2}(1+o(1)), \quad u \to \infty. \tag{2.6}$$

**Доказательство.** Дисперсия $\sigma^2(t) = \prod_{i=1}^{n} t_i$ поля $W(t)$ достигает на $[0,1]^n$ своего максимума, равного 1 в единственной точке $\mathbf{1}$, которая является граничной точкой единичного куба $[0,1]^n$. В окрестности этой точки имеет место разложение

$$\sigma(t) = 1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(1 - t_i) + o(|\mathbf{1} - t|_1), \quad t \to \mathbf{1}.$$

Для корреляционной функции $r(t,s)$ поля $W$ выполнено условие

$$r(t,s) = 1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|t_i - s_i| + o(|t - s|_1), \quad t, s \to \mathbf{1}.$$

Справедливо неравенство

$$\mathbf{E}(W(t) - W(s))^2 \le \sum_{i=1}^{n}|t_i - s_i|, \qquad t, s \in [0,1]^n.$$

Следовательно, для поля $W(t)$ имеем $\alpha_1 = \beta_1 = 1, \ldots, \alpha_n = \beta_n = 1$ (см. условия (I), (II) из [1]). Граничный характер точки максимума $\mathbf{1}$ требует слегка изменить рассуждения, связанные с появлением константы $H_\alpha^b$ (см доказательство Теоремы 1.2 (ii) из [1]). Асимптотика будет зависеть теперь от новой константы $\tilde{H}_1^1 = \lim_{S\to\infty} H_1^1((0,\mathbf{S}); I)$, $\mathbf{S} = (S, \ldots S)$ :

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^n} W(t) > u\right\} = \exp(-u^2/2)u^{-1}\tilde{H}_1^1(2\pi)^{-1/2}(1+o(1)), \quad u \to \infty.$$

Используя тождество (2.4) из [1] и известную формулу распределения максимума винеровского процесса ($n = 1$), получаем $\tilde{H}_1^1 = 2^n$. Теорема доказана.

При $n = 2$ соотношение (2.6) было получено в [26] посредством рассмотрения броуновского движения со значениями в банаховом пространстве. Теоремы 2.3–2.5 впервые доказаны в [27] в результате непосредственного асимптотического анализа. Теорема 2.2 и Следствие 2.1(b) новые.

## §3. АСИМПТОТИКИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВЫСОКИХ ВЫБРОСОВ

**Теорема 3.1.** *Пусть $X_1(t), ..., X_k(t)$, $t \in [0,T]$ - гауссовские сепарабельные, дифференцируемые в среднем квадратичные, независимые одинаково распределенные случайные процессы. Пусть дисперсия $\sigma^2(t)$ процесса $X_1(t)$ достигает своего максимума $\sigma^2$ в конечном числе точек $b_1, ..., b_l$, $b_i \in (0,T)$, причем*

$$\frac{d^2}{dt^2}\sigma(b_i) = \sigma''(b_i) < 0, \quad \mathbf{E}(X_1'(b_i))^2 > 0, \quad i = 1, ..., l,$$

*где $X_1'$ обозначает производную в ср. кв. процесса $X_1(t)$. Тогда для процесса*

$$Z_{p,a}(t) \equiv Z(t) = \left(\sum_{i=1}^{k} |a_i X_i(t)|^p\right)^{1/p}, \quad a_i > 0, \quad i = 1, ..., k$$

*имеют место соотношения при ( $u \to \infty$) :*

*(i) Если $p > 2$ и $a_1 = \cdots = a_m > a_{m+1} \geq a_{m+2} \geq \cdots \geq a_k$, $k \geq m \geq 1$, то*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]} Z(t) > u\right\} = \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2 a_1^2}\right) u^{-1}\frac{2m\sigma a_1}{\sqrt{2\pi}} \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{l}\left[1 - \frac{\mathbf{E}(X_1'(b_i))^2}{\sigma\sigma''(b_i)}\right]^{1/2}(1 + o(1));$$

*(ii) Если $2 > p > 1$, то*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]} Z(t) > u\right\} = \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2 d^2}\right) u^{-1}\frac{\sigma d}{\sqrt{2\pi}} 2^k (2-p)^{(1-k)/2} \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{l}\left[1 - \frac{\mathbf{E}(X_1'(b_i))^2}{\sigma\sigma''(b_i)}\right]^{1/2}(1 + o(1)),$$

*где* $d = \left[\sum_{i=1}^{k} a_i^{2p/(2-p)}\right]^{(2-p)/2p}$

Случай $p = 2$ исследован в работе [28].

Изучение вероятностей больших уклонений процесса $Z(t)$ будем проводить основываясь на следующем приеме. Рассмотрим обычную норму

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad p > 1$$

в пространстве $l_k^p = \{x = (x_1, ..., x_k) : ||x||_p < \infty\}$. Из общего вида непрерывного линейного функционала на пространстве $l_k^p$ получим

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,T]} Z(t) > u\right\} = \mathbf{P}\left\{\sup_{[0,T]\times S} Y(t,x) > u\right\},$$

где $Y(t,x) = \sum_{i=1}^{k} x_i a_i X_i(t)$ – гауссовское поле, заданное на цилиндре $[0,T] \times S$, $S = \{x \in \mathbb{R}^k : ||x||_q = 1\}$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Наша цель – преобразовать поле $Y(t,x)$ и к преобразованному полю применить Теорему 1.2 из [1]. Для простоты изложения будем считать $l = 1$, $b_1 = b$ (версия Замечания 1.1 из [1] справедлива и в условиях Теоремы 3.1 из [1]).

**Лемма 3.1.** *Дисперсия* $\sigma^2(t,x) = \sigma^2(t) \sum_{i=1}^{k} a_i^2 x_i^2$ *поля* $Y(t,x)$ *достигает своего максимума* $\sigma^2 d^2$ *на множестве* $[0,T] \times S$ *:*

*(i) при* $p > 2$ *в* $2m$ *точках* $(b, y_+^i)$, $(b, y_-^i)$, $i = 1, \dots, m$, *где* $y_+^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ *(единица на i-том месте),* $y_-^i = (0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)$ *(-1 на i-том месте),* $d = a_1$ *;*

*(ii) при* $2 > p > 1$ *в* $2^k$ *точках* $(b, z)$, *где*

$$z = (z_1, \dots, z_k), \quad z_i = \pm(a_i/d)^{2/(q-2)}, \quad d = \left[\sum_{i=1}^{k} a_i^{2p/(2-p)}\right]^{(2-p)/2p}$$

*(берутся все возможные* $2^k$ *комбинации знаков "+" и "-").*

Доказательство леммы легко проводится с помощью метода множителей Лагранжа аналогично Лемме 1 из [29].

Обозначим через $R(t,s)$ ковариационную функцию процесса $X_1(t)$. Тогда ковариационная функция процесса $Y(t,x)$ будет иметь вид $R(t,s) \sum_{i=1}^{k} a_i^2 x_i v_i$. По формуле Лагранжа имеем

$$R(t,s) - \sigma(t)\sigma(s) = (t-s)^2[(\sigma'(\xi_1))^2 - \mathbf{E}(X_1'(\xi_2))^2]$$

для некоторых точек $\xi_1$, $\xi_2$, лежащих между $t$ и $s$. Отсюда несложно вывести следующее неравенство :

$$\mathbf{E}(Y(t,x) - Y(s,v))^2 \le C\left[(t-s)^2 + \sum_{i=1}^{k}(x_i - v_i)^2\right] \tag{3.1}$$

для некоторого $C > 0$. Далее, имеем

$$\sigma(t) = \sigma + \frac{1}{2}\sigma''(b)(t-b)^2 + o((t-b)^2), \quad t \to b. \tag{3.2}$$

Пусть

$$T_\delta = \{t \in [0,T] : \sigma^2 - \sigma^2(t) \le \delta\}, \quad S_\delta = \{x \in S : d^2 - \sum_{i=1}^{k} a_i^2 x_i^2 \le \delta\}, \quad \delta > 0$$

и $h_\delta = T_\delta \times S_\delta$ – объединение непересекающихся (при достаточно малом $\delta$) компактных окрестностей $h_\delta(b, z^i)$ точек максимума $(b, z^i)$, $i = 1, \ldots, N$ дисперсии $\sigma^2(t, x)$.

**Лемма 3.2.** *Имеет место соотношение*

$$\lim_{u\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{[0,T]\times S} Y(t,x) > u\right\} / \mathbf{P}\left\{\sup_{h_\delta} Y(t,x) > u\right\} = 1.$$

Доказательство леммы проводится аналогично доказательству Леммы 3.1 из [1].

Принимая во внимание Лемму 3.2, применяя неравенство Бонферрони и оценивая двойную сумму в нем с помощью Леммы 2.1 из [1], получим

$$\lim_{u\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{[0,T]\times S} Y(t,x) > u\right\} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}\left\{\sup_{h_\delta(b,z^i)} Y(t,x) > u\right\}(1 + o(1)). \qquad (3.3)$$

Перейдем к доказательству Теоремы 3.1 и начнем с утверждения (ii). Перейдем к нахождению асимптотики правой части формулы (3.3).

Доказательство Теоремы 3.1(ii). Итак, $1 < p < 2$ и $N = 2^k$. Достаточно ограничиться нахождением асимптотики одного слагаемого в сумме (3.3), например, для точки $(b, z)$, $z = (z_1, \ldots, z_k)$, $z_i = (d/a_i)^{2/(2-q)}$, $h_\delta(b,z) = T_\delta \times U_\delta$. В окрестности $U_\delta \subset S_\delta$ точки $z$ имеем

$$x_k = \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i^q\right)^{1/q}$$

следовательно поле $Y$ можно локально представить как

$$Y_1(t, \tilde{x}) = \sum_{i=1}^{k-1} x_i a_i X_i(t) + \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i^q\right)^{1/q} a_k X_k(t), \quad \tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{k-1}),$$

которое определено в окрестности $T_\delta \times \widetilde{U}_\delta$ точки $(b, \tilde{z})$, $\tilde{z} = (z_1, \ldots, z_{k-1})$ в $k$-мерном пространстве точек $(t, \tilde{x})$, где

$$\widetilde{U}_\delta = \left\{\tilde{x} : \quad \left(x_1, \ldots, x_{k-1}, \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i^q\right)^{1/q}\right) \in U_\delta\right\}$$

– малая окрестность точки $\tilde{z}$. Применим Теорему 1.2 (ii) из [1] к полю $Y_1(t, \tilde{x})$, $(t, \tilde{x}) \in T_\delta \times \widetilde{U}_\delta$. Дисперсия

$$\sigma_1^2(t, \tilde{x}) = \sigma^2(t)\left[\sum_{i=1}^{k-1} a_i^2 x_i^2 + a_k^2\left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i^q\right)^{2/q}\right]$$

поля $Y_1(t,\tilde{x})$ достигает максимума $\sigma^2 d^2$ в точке $(b,\tilde{z})$, которая является внутренней точкой множества $T_\delta \times \tilde{U}_\delta$. Принимая во внимание (3.2), в окрестности точки $(b,\tilde{z})$ имеем разложение Тейлора функции $\sigma_1(t,\tilde{x})$

$$\sigma_1(t,\tilde{x}) = \sigma d + \frac{d}{2}\sigma''(b)(t-b)^2 - \frac{\sigma(q-2)}{2d}(\tilde{x}-\tilde{z})\Lambda(\tilde{x}-\tilde{z})^T + \\ + o((t-b)^2 + |\tilde{x}-\tilde{z}|^2), \quad t \to b, \quad \tilde{x} \to \tilde{z}, \tag{3.4}$$

где $\Lambda = (\lambda_{ij})_{i,j=\overline{1,k-1}}$ – неотрицательно определенная матрица с элементами

$$\lambda_{ij} = -(2(q-2))^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[\sum_{i=1}^{k-1} a_i^2 x_i^2 + a_k^2\left(1-\sum_{i=1}^{k-1} x_i^q\right)^{2/q}\right]\Bigg|_{\tilde{x}=\tilde{z}},$$
$$i,j = 1,\dots,k-1.$$

Для корреляционной функции поля $Y_1(t,\tilde{x})$ имеем разложение $r_1(t,\tilde{x};s,\tilde{v})$

$$r_1(t,\tilde{x};s,\tilde{v}) = 1 - (2\sigma^2)^{-1}\mathbf{E}(X_1'(b))^2(t-s)^2 - (2d)^{-1}(\tilde{x}-\tilde{v})\Lambda(\tilde{x}-\tilde{v})^T + \\ + o((t-s)^2 + |\tilde{x}-\tilde{v}|^2), \quad t,s \to b, \quad \tilde{x},\tilde{v} \to \tilde{z}. \tag{3.5}$$

Существует такая невырожденная матрица $Q$, что $Q\Lambda Q^T$ – диагональная матрица. Поле $Y_2(t,\tilde{x}) = Y_1(t,Q\tilde{x})$, заданное на множестве $T_\delta \times Q^{-1}(\tilde{U}_\delta)$, удовлетворяет условиям Теоремы 1.2 (ii) из работы [1] с $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 2$, $\beta_1 = \dots = \beta_k = 2$, $\gamma = 2$ (см. условия (I) - (III) из [1]). Применяя эту теорему и учитывая (3.4) и (3.5), получаем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta \times \tilde{U}_\delta} Y_1(t,\tilde{x}) > u\right\} = \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2 d^2}\right] u^{-1}\frac{\sigma d}{\sqrt{2\pi}} H_{\mathbf{2}}^{\frac{1}{2}\mathbf{1}}(C)(1+o(1)), \quad u \to \infty,$$

где

$$C = \begin{pmatrix} \left[-\frac{\mathbf{E}(X_1'(b))^2}{\sigma^2 d\sigma''(b)}\right]^{1/2} & 0 \\ 0 & (\sigma d(q-2))^{-1/2} I \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{2} = (2,\dots,2) \in \mathbb{R}^k, \quad \mathbf{1} = (1,\dots,1) \in \mathbb{R}^k.$$

В силу неравенства (2.4) из [1] и тождества $H_2^{\frac{1}{2}}(\mu) = \sqrt{1+\mu^2}$, $\mu \in \mathbb{R}^1$ (см. Лемму 3 из [28]), имеем

$$H_{\mathbf{2}}^{\frac{1}{2}\mathbf{1}}(C) = [1 - (\sigma\sigma''(b))^{-1}\mathbf{E}(X_1'(b))^2]^{1/2}\left(\frac{q-1}{q-2}\right)^{(k-1)/2}.$$

Из последних двух соотношений и (3.3) получаем требуемое утверждение.

**Доказательство Теоремы 3.1(i).** Соотношение (3.3) верно и при $p > 2$. Найдем асимптотику одного слагаемого из (3.3), а именно, для точки максимума $(b, y^1_+)$, $y^1_+ = (1, 0, ..., 0)$ дисперсии $\sigma^2(t, x)$. Поле $Y(t, x)$ вновь локально представимо как поле

$$Y_1(t, \widetilde{x}) = \sum_{i=2}^{k} x_i a_i X_i(t) + \left(1 - \sum_{i=2}^{k} |x_i|^q\right)^{1/q} a_1 X_1(t), \quad \widetilde{x} = (x_2, ..., x_k),$$

заданное в окрестности $T_\delta \times \widetilde{U}_\delta$ точки $(b, \widetilde{0})$, $\widetilde{0} = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^k$. Теперь уже дисперсия $\sigma_1^2(t, \widetilde{x})$ поля $Y_1(t, \widetilde{x})$ удовлетворяет соотношению

$$\sigma_1(t, \widetilde{x}) = \sigma a_1 + \frac{a_1}{2}\sigma''(b)(t - b)^2 - \frac{\sigma a_1}{q} \sum_{i=2}^{k} |x_i|^q + o\left((t - b)^2 + \sum_{i=2}^{k} |x_i|^q\right)$$

при $t \to b$, $\widetilde{x} \to \widetilde{0}$ и показатели равны : $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = \cdots = \beta_k = q < 2$. Разложение корреляционной функции $r_1(t, \widetilde{x}; s, \widetilde{v})$ поля $Y_1(t, \widetilde{x})$ при $t, s \to b$, $\widetilde{x}, \widetilde{v} \to \widetilde{0}$ имеет вид

$$r_1(t, \widetilde{x}; s, \widetilde{v}) = 1 - (2\sigma^2)^{-1} \mathbf{E}(X_1'(b))^2 (t - s)^2 -$$
$$- (2a_1^4)^{-1} \sum_{i=2}^{k} a_i^2 (x_i - v_i)^2 + o((t - s)^2 + |\widetilde{x} - \widetilde{v}|^2),$$

откуда заключаем, что $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 2$. Поэтому, можем применить Теорему 1.2 (iv) из [1]. Теорема доказана.

Заметим, что подход к доказательству Теоремы 3.1 применим и в некоторых иных аналогичных ситуациях, например, когда процессы $X_i(t)$, $i = 1, ..., k$ стационарны, или когда их дисперсии достигают своего максимума на множествах ненулевой лебеговой меры.

## §4. АСИМПТОТИКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $l^p_k$-НОРМЫ ГАУССОВСКОГО КОНЕЧНОМЕРНОГО ВЕКТОРА

**Теорема 4.1.** *Пусть $(X_1, ..., X_k)$ – гауссовский вектор со средним нуль и невырожденной ковариационной матрицей $B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,k}}$. Пусть $z^1, ..., z^m$ – точки из множества*

$$S = \left\{ t = (t_1, ..., t_k) \in \mathbb{R}^k : \quad \sum_{i=1}^{k} |t_i|^q = 1 \right\}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

*в которых достигается* $\max\{<Bt,t>: \ t\in S\}=\sigma^2>0$, $z^i=(z_{i1},\dots,z_{ik})$, $<\cdot,\cdot>$ *– обычное скалярное произведение в* $\mathbb{R}^k$. *Тогда*

*(i) Если* $p>2$, *то имеет место асимптотическое соотношение*

$$\mathbf{P}\left\{\left(\sum_{i=1}^k|X_i|^p\right)^{1/p}>u\right\}=\exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right]\frac{\sigma}{u\sqrt{2\pi}}\sqrt{|p-2|}\sum_{i=1}^m|\det C_i|^{-1/2}(1+O(u^{-2})),$$
$$u\to\infty, \tag{4.1}$$

*где* $C_i=I-((q-1)\sigma^2)^{-1}B\ diag(|z_{i1}|^{2-q},\dots,|z_{ik}|^{2-q})$.

*(ii) Если* $1<p<2$, *то все компоненты* $z_{ij}$ *векторов* $z^i$ *ненулевые и справедлива формула (4.1).*

**Доказательство** теоремы основано на Теореме 1.2(ii) из [1] и проводится аналогично доказательству Теоремы 3.1. Укажем на основные моменты. Имеет место равенство

$$\mathbf{P}\left\{\left(\sum_{i=1}^k|X_i|^p\right)^{1/p}>u\right\}=\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in S}Y(t)>u\right\},$$

где $Y(t)=\sum\limits_{i=1}^k t_iX_i$ – гауссовское поле, заданное на множестве $S$, со средним нуль.

**Лемма 4.1.** *Пусть дисперсия* $\sigma^2(t)=\sum b_{ij}t_it_j$ *поля* $Y(t)$ *достигает своего максимума* $\sigma^2$ *на* $S$ *в точке* $z=(z_1,\dots,z_k)$. *Тогда координаты вектора* $z$ *удовлетворяют условию*

$$\sum_{j=1}^k b_{ij}z_j=\sigma^2|z_i|^{q-1}\ \mathrm{sign}\ z_i,\quad i=1,\dots,k;\quad \sum_{i=1}^k|z_i|^q=1, \tag{4.2}$$

*и матрица* $-C=((q-1)\sigma^2)^{-1}B\ diag(|z_1|^{2-q},\dots,|z_k|^{2-q})-I$ *отрицательно определена.*

**Доказательство** проводится методом множителей Лагранжа.

Далее можно показать, что для поля $Y(t)$ верно неравенство типа (3.3), поэтому достаточно найти асимптотику вероятности $\mathbf{P}\{\sup_V Y(t)>u\}$, где $V\subset$ $\subset S$ – малая компактная окрестность точки максимума $z=(z_1,\dots,z_k)$. Для простоты, полагая, что $z_k>0$ и $t_k>0$, при $t=(t_1,\dots,t_k)\in V$, имеем локальное представление поля $Y(t)$ :

$$Y_1(\tilde{t})\doteq\sum_{i=1}^{k-1}t_iX_i+X_k\left(1-\sum_{i=1}^{k-1}|t_i|^q\right)^{1/q}$$

где $\widetilde{t} = (t_1, \ldots, t_{k-1})$ принадлежит компактной $(k-1)$-мерной окрестности

$$\widetilde{V} = \left\{ \widetilde{t}: \quad (t_1, \ldots, t_{k-1}, \left[1 - \sum_{i=1}^{k-1} |t_i|^q\right]^{1/q} ) \in V \right\}$$

точки $\widetilde{z} = (z_1, \ldots, z_{k-1})$. Разложение дисперсии поля $Y_1(\widetilde{t})$ имеет вид

$$\sigma_1(\widetilde{t}) = \sigma - (2\sigma)^{-1}(\widetilde{t} - \widetilde{z})\Lambda(\widetilde{t} - \widetilde{z})^T + o(|\widetilde{t} - \widetilde{z}|^2), \quad \widetilde{t} \to \widetilde{z}, \tag{4.3}$$

где $\Lambda = (\lambda_{ij})_{i,j=\overline{1,k-1}}$ – положительно определенная матрица с элементами

$$\lambda_{ij} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j}\sigma_1^2(\widetilde{t})\bigg|_{\widetilde{t}=\widetilde{z}}, \quad i, j = 1, \ldots, k-1.$$

В силу (4.2) можем записать разложение дисперсии $r_1(\widetilde{t}, \widetilde{s})$ of $Y_1(\widetilde{t})$ :

$$r_1(\widetilde{t}, \widetilde{s}) = 1 - (2\sigma^2)^{-1}(\widetilde{t} - \widetilde{s})M(\widetilde{t} - \widetilde{s})^T + o(|\widetilde{t} - \widetilde{s}|^2), \quad \widetilde{t}, \widetilde{s} \to \widetilde{z}, \tag{4.4}$$

где $M = (q-1)\sigma^2 z_k^{-q}\Gamma - \Lambda$ – положительно определенная матрица,

$$\Gamma = (\gamma_{ij})_{i,j=\overline{1,k-1}}, \quad \gamma_{ii} = \gamma_i^2 + |z_i|^{q-2} z_k^q, \quad \gamma_{ij} = \gamma_i \gamma_j, \quad i \neq j, \quad \gamma_i = |z_i|^{q-1} \operatorname{sign} z_i.$$

Известно (см., например, [30, p. 80]), что найдется такая невырожденная матрица $Q$ такая, что $QMQ^T = I$ и $Q\Gamma Q^T = \operatorname{diag}(g_1, \ldots, g_{k-1})$, где $g_1, \ldots, g_{k-1}$ – собственные числа матрицы $M^{-1}\Gamma$. Гауссовское поле $Y_2(\widetilde{t}) = Y_1(Q\widetilde{t})$, $\widetilde{t} \in Q^{-1}(\widetilde{V})$ удовлетворяет условиям Теоремы 1.2 (ii) из [1] с $\alpha_i = \beta_i = 2$, $i = 1, \ldots, k-1$. Применение этой теоремы с учетом (4.3) и (4.4) дает

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{\widetilde{V}} Y_1(\widetilde{t}) > u\right\} = \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right]\frac{\sigma}{u\sqrt{2\pi}} H_2^{1/\sigma 1}(DA^{-1})(1 + o(1)),$$

где

$$D = (\sqrt{2}\sigma)^{-1} I,$$

$$A = (2\sigma)^{-1/2} \operatorname{diag}(\sqrt{(q-1)g_1}\,\sigma z_k^{-q/2} - 1, \ldots, \sqrt{(q-1)g_{k-1}}\,\sigma z_k^{-q/2} - 1).$$

Несложные вычисления показывают, что

$$H_2^{1/\sigma 1}(DA^{-1}) = \sqrt{|p-2|}\, |\det C|^{-1/2}.$$

Оценку остаточного члена в (4.1) можно получить на основе метода Лапласа для кратных интегралов (ср. [29]). Теорема доказана.

В заключение отметим, что для диагональной матрицы $B$ Теорема 4.1 была доказана в [29] методом Лапласа, включая случаи $0 < p \leq 1$, $p = 2$. Можно доказать, что асимптотика типа (4.1) справедлива и при $0 < p \leq 1$ (подробности см. в [31], где найдена асимптотика $P_B(u\Delta)$, $u \to \infty$ для гауссовской меры $P_B$ в гильбертовом пространстве $H$ при некоторых ограничениях на множество $\Delta \in H$).

**ABSTRACT. The article is devoted to applications of the results of [1] in the following problems : a) the asymptotics of the limiting distributions of Kolmogorov–Smirnov statistic, b) the asymptotics of the limiting distributions of the maxima of Wiener fields, c) the asymptotics of the limiting distributions of maximum of $l_k^p$–norm of vector-valued Gaussian stochastic process.**

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Р. Фаталов, "Асимптотики вероятностей больших уклонений гауссовских полей", Изв. АН Армении, Математика, т. 27, №6, стр. 59 – 85, 1992.
2. A. N. Kolmogorov, "Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione", Giorn. dell'Inst. Ital. degli Att., vol. 4, pp. 83 – 91, 1933.
3. Н. В. Смирнов, "Об уклонениях эмпирической кривой распределения", Мат. сборн., т. 6(48), №1, стр. 3 – 24, 1939.
4. H. Cramer, Mathematical Methods of Statistics, 1946.
5. J. Durbin, "Weak convergence of the sample distribution function when parameters are estimated", Ann. Math. Statist., vol. 1, pp. 279 – 290, 1973.
6. Г. А. Несененко, Ю. Н. Тюрин, "Асимптотика статистики Колмогорова для параметрического семейства", ДАН СССР, т. 239, №6, стр. 1292 – 1294, 1978.
7. Ю. Н. Тюрин, "О предельном распределении статистик Колмогорова–Смирнова", Изв. АН СССР, сер. математика, т. 48, №6, стр. 1314 – 1343, 1984.
8. В. Р. Фаталов, "Асимптотики вероятностей больших уклонений гауссовских полей и их применения в теории статистик Колмогорова–Смирнова", Теория вероятн. и ее примен., т. 29, №1, стр. 178 – 180, 1984.
9. M. A. Stephens, "Use of Kolmogorov–Smirnov, Cramer–von Mises and related statistics – without extensive tables", J. R. Stat. Soc., vol. 32, pp. 115 – 122, 1970.
10. Biometrika Tables for Statisticians (Edit. E. S. Pearson, H. O. Hartley), vol. 2, Cambridge Univ. Press, 1972.
11. Г. В. Мартынов, Критерии Омега-Квадрат, М., Наука, 1978.
12. К. О. Джапаридзе, М. С. Никулин, "Распределения вероятностей статистик Колмогорова и омега-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба", Записки научн. семин. ЛОМИ АН СССР, т. 85, стр. 46 – 74, 1979.
13. J. Durbin, "Kolmogorov–Smirnov tests when parameters are estimated with applications to tests of exponentiality and tests of spacings", Biometrika, vol. 62, no. 1, pp. 5 – 22, 1975.
14. Н. Е. Саввушкина, Ю. Н. Тюрин, "Критерий согласия для распределения Вейбулла–Гнеденко", Изв. АН СССР, сер. Техн. кибернетика, №3, стр. 109-

- 112, 1984.
15. M. Chandra, N. D. Singpurwalla, M. A. Stephens, "Kolmogorov statistics for test of fit for the extreme-value and Weibull distribution", JASA, vol. 76, p. 375, 1981.
16. С. Р. Рао, Линейные Статистические Методы и их Применения, М., Наука, 1968.
17. M. D. Burke, M. Csörgő, S. Csörgő, P. Révész, "Approximations of the empirical process when parameters are estimated", Ann. Probab., vol. 7, pp. 790 - 810, 1979.
18. Э. Н. Кривякова, "О критерии Крамера-фон Мозеса-Смирнова в многомерном случае", в сб. Математическая статистика и ее приложения, вып. 4, Изд. Томского универ., стр. 14 – 28, Томск, 1976.
19. В. Р. Фаталов, "Асимптотика распределения статистики Колмогорова-Смирнова в задаче проверки гипотезы о нормальности двумерной выборки", в сб. Труды Первого Всемирного Конгресса Общества им. Бернулли, т. 2, стр. 269 – 274, МИАН СССР, Москва–Тула, 1988.
20. P. Deheuvels, "Multivariate tests of independence", Lect. Notes Math. vol. 861, pp. 42 – 50, 1981.
21. Ю. Н. Тюрин, "Линейная модель в многомерной непараметрической статистике ", в сб. Многомерный статистический анализ в социально-экономических исследованиях, М., Наука, 1974.
22. Н. Н. Ченцов, "Винеровские случайные поля от нескольких параметров", ДАН СССР, т. 106, №4, стр. 607 – 609, 1956.
23. J. Yeh, "Wiener measure in a space of functions of two variables", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 95, pp. 443 – 450, 1960.
24. R. M. Dudley, "Weak convergence of probabilities on nonseparable metric spaces and empirical measure on Euclidean spaces", Illinois J. Math., vol. 10, pp. 109 - - 126, 1966.
25. Практикум по теории вероятностей и математической статистике (Ред. Ю. К. Беляев, В. П. Носко), изд. МГУ, М., 1988.
26. V. Goodman, "Distribution estimates for functionals of the two-parameter Wiener process", Ann. Prob., vol. 4, no. 6, pp. 977 – 983, 1976.
27. В. И. Питербарг, В. Р. Фаталов, " Точные асимптотики для вероятностей больших уклонений некоторых, используемых в статистике гауссовских полей," в сб. Вероятностно-статистические методы исследования, стр. 123 - - 140, изд. МГУ, М., 1983.
28. V. I. Piterbarg, "High excursions for nonstationary generalized chi-square processes", Preprint of Lund Inst. of Technology, 1991.
29. В.-Д. Рихтер, В. Р. Фаталов, " Гауссовские вероятности больших уклонений для фиксированной и возрастающей размерностей", Изв. АН Армении, Математика, т. 27, №1, стр. 3 – 21, 1992.
30. Р. Беллман, Введение в Теорию Матриц, М., Наука, 1976.
31. В. Р. Фаталов, " Точные асимптотики больших уклонений гауссовских мер в гильбертовом пространстве", Изв. АН Армении, Математика, т. 27, №5, стр. 43 – 61, 1992.

2 Октября 1992

Ереванский государственный университет

# О НОРМЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ С КОНЕЧНОГО ИНТЕРВАЛА НА КОНЕЧНЫЙ ИНТЕРВАЛ

**А. В. Карабегов**

**Известия Национальной Академий Наук Армении. Математика, том 28, №5, 1993**

**В работе рассматривается интегральный оператор с ядром $\exp(2\pi ixy)$, действующий из пространства $L^2(\gamma,\delta)$ в $L^2(\alpha,\beta)$. Его норма $\rho_s$, зависит исключительно от $s = (\alpha-\beta)\cdot(\gamma-\delta)$. Показано, что существуют постоянные $C_1$, $C_2$ такие, что для достаточно больших $c$ справедлива оценка $\exp(-C_1 s) < 1-\rho_s < \exp(-C_2 s)$.**

## §0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ – множества конечной лебеговой меры, а $f$ – функция из $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$, причем $f = 0$ на дополнении к $B$. М. Бенедикс [1] показал, что если Фурье-образ $\hat{f}$ функции $f$ обращается в нуль на дополнении к $A$, то $f = 0$ почти всюду.

Для измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ определим ортогональный проектор $P_E$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$ формулой $P_E f = \chi_E \cdot f$, где $\chi_E$ – характеристическая функция $E$, и пусть $F$ – преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

У. Амрейн и А. Бертье [2] доказали результат М. Бенедикса методами гильбертова пространства. В их работе было использовано следующее важное наблюдение. Для множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры и функций из $L^2(\mathbb{R}^n)$ результат М. Бенедикса эквивалентен тому, что норма оператора $\rho = ||P_A F P_B||$ строго меньше единицы.

В настоящей работе оценивается норма $\rho = ||P_A F P_B||$ в случае, когда $A$ и $B$ – отрезки прямой в $\mathbb{R}$. Эта норма – функция площади $s$, где $s$ – площадь прямоугольника $A \times B$, $\rho = \rho_s$. Мы покажем, что существуют положительные постоянные $C_1$ и $C_2$ такие, что для достаточно больших $s$ справедлива двусторонняя оценка

$$\exp(-C_1 s) < 1 - \rho_s < \exp(-C_2 s).$$

## §1. ИНВАРИАНТНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОЦЕНКА СВЕРХУ

В пространстве $L^2(\mathbb{R})$ определим следующие унитарные операторы : преобразование $F$, заданное на $L^1 \cap L^2$ интегралом

$$Ff(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2\pi ixy)\, f(y)\, dy;$$

оператор сдвига $T_t$ определяется по формуле $T_t f(x) = f(x+t)$; оператор $M_t$ умножения на экспоненту $\exp(2\pi itx)$ - $M_t f(x) = \exp(2\pi itx) f(x)$; для $\lambda \neq 0$ определим оператор растяжения $\Lambda_\lambda$, $\Lambda_\lambda f = |\lambda|^{1/2} f(\lambda x)$.

Пусть $E = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ - отрезок. Положим $\lambda E + t = [\lambda\alpha + t, \lambda\beta + t]$.

Следующие соотношения между операторами $F$, $T_t$, $M_t$, $\Lambda_\lambda$ и $P_E$ проверяются непосредственно :

$$\begin{aligned} T_t F = F M_t, \qquad M_{-t} F = F T_t, \qquad \Lambda_\lambda F = F \Lambda_{1/\lambda}, \\ M_t P_E = P_E M_t, \quad T_t P_{E+t} = P_E T_t, \quad \Lambda_\lambda P_{\lambda E} = P_E \Lambda_\lambda. \end{aligned} \tag{1}$$

**Предложение 1.** *Пусть $A = [\alpha, \beta]$ и $B = [\gamma, \delta]$ - отрезки из $\mathbb{R}$. Норма оператора $P_A F P_B$ зависит только от площади $s = (\alpha - \beta)(\gamma - \delta)$ прямоугольника $A \times B$.*

**Доказательство.** Пользуясь соотношениями (1), можно выписать цепочку равенств

$$T_t P_{A+t} F P_B = P_A T_t F P_B = P_A F M_t P_B = P_A F P_B M_t,$$

Таким образом, $T_t (P_{A+t} F P_B) = (P_A F P_B)\, M_t$. Из унитарности операторов $T_t$ и $M_t$ следует, что $\|P_{A+t} F P_B\| = \|P_A F P_B\|$. Аналогично доказывается, что $M_{-t}(P_A F P_{B+t}) = (P_A F P_B) T_t$ и $\Lambda_\lambda \left(P_{\lambda A} F P_{1/\lambda B}\right) = (P_A F P_B) \Lambda_{1/\lambda}$. Следовательно, $\|P_A F P_{B+t}\| = \|P_A F P_B\|$ и $\|P_{\lambda A} F P_{1/\lambda B}\| = \|P_A F P_B\|$.

Площадь прямоугольника $A \times B$ инвариантна относительно трансляций $A \times B \mapsto (A+t) \times B$ и $A \times B \mapsto A \times (B+t)$ и гиперболических поворотов

$A \times B \mapsto \lambda A \times 1/\lambda B$. Заметим также, что любые два прямоугольника в $\mathbb{R}^2$ со сторонами, параллельными осям координат и одинаковой площади могут быть получены друг из друга указанными преобразованиями.

**Лемма 1.** *Оператор $P_A F P_B$ является оператором Гильберта-Шмидта и его норма Гильберта-Шмидта равна $\sqrt{s}$, где $s$ – площадь $A \times B$.*

**Доказательство** немедленно следует из того, что ядро оператора $P_A F P_B$, равное $\chi_A(x)\ \exp(2\pi i x y)\ \chi_B(y)$, квадратично интегрируемо.

**Следствие 1.** Имеет место неравенство $\rho_s \leq \sqrt{s}$.

**Доказательство** вытекает из хорошо-известного неравенства между равномерной операторной нормой и нормой Гильберта-Шмидта.

**Лемма 2.** *Существует функция $f \in L^2(\mathbb{R})$ такая, что $||f|| = 1$, $||P_A F P_B f|| = ||P_A F P_B||$, при этом и $f = P_B f$.*

**Доказательство.** Согласно Лемме 1, оператор $P_A F P_B$ компактен, следовательно, отображение $L^2(\mathbb{R}) \ni g \mapsto ||P_A F P_B g||$ непрерывно в слабой топологии на $L^2(\mathbb{R})$ и поэтому достигает максимума на единичном шаре на некоторой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$, так что $||P_A F P_B|| = ||P_A F P_B f||$. Поскольку $||P_A F P_B f|| \leq ||P_A F P_B|| \cdot ||f||$, то $||f|| = 1$. Если при этом $f \neq P_B f$, то $||P_B f|| < ||f|| = 1$. Тогда, пользуясь тем, что $P_B^2 = P_B$, получим

$$||P_A F P_B f|| = ||P_A F P_B P_B f|| \leq ||P_A F P_B|| \cdot ||P_B f|| < ||P_A F P_B||,$$

что противоречит выбору $f$. Лемма доказана.

**Предложение 2.** *Функция $\rho_s$ обладает следующими свойствами :*

*a) $\rho_s$ строго возрастающая,*

b) $\rho_s < 1$,

c) $\lim\limits_{s \to \infty} \rho_s = 1$.

**Доказательство.** Докажем сначала b). Для заданного $s$, пусть $A$ и $B$ – отрезки, для которых площадь $A \times B$ равна $s$. В силу Леммы 2, $\rho_s = ||P_A \hat{f}||$, где $\hat{f} = Ff$ – преобразование Фурье функции $f$.

Так как носитель функции $f$ компактен, то из теоремы Пэли-Винера (см. [3]) следует, что $\widehat{f}$ – целая функция. С другой стороны, целая функция не может быть сосредоточена на отрезке. Следовательно, $\rho_s = ||P_A\widehat{f}|| < ||\widehat{f}|| = 1$, что доказывает b). Пусть теперь $A'$ – интервал, строго содержащий $A$ и $s'$ $(s' > s)$ – площадь $A' \times B$. Согласно вышеприведенному аргументу, $||P_A\widehat{f}|| < ||P_{A'}\widehat{f}||$. Следовательно, $\rho_s < ||P_{A'}FP_Bf|| \leq ||P_{A'}fP_B|| = \rho_{s'}$. Откуда следует a). Наконец, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать отрезок $A'$ такой, что $||P_{A'}\widehat{f}|| > 1 - \varepsilon$ и, тем самым, $\rho_{s'} > 1 - \varepsilon$, что доказывает c). Предложение доказано.

Для оценки сверху разности $1 - \rho_s$, рассмотрим функцию $u(x) = \exp(-\pi x^2)$. Эта функция совпадает со своим преобразованием Фурье $u = Fu$ и $||u|| = 2^{-1/4}$ (см. [4]).

**Предложение 3.**

$$1 - \rho_s \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{s}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\pi}{2}s\right).$$

**Доказательство.** Пусть $E = [-\alpha, \alpha]$, $s = 4\alpha^2$ и $\rho_s = ||P_EFP_E||$. Положим $P_{E'} = 1 - P_E$. Из цепочки очевидных неравенств

$$||u|| \leq ||P_Eu|| + ||P'_Eu|| = ||P_EFu|| + ||P'_Eu|| \leq ||P_EFP_Eu|| +$$
$$+ ||P_EFP'_Eu|| + ||P'_Eu|| \leq ||P_EFP_E|| \cdot ||u|| + 2||P'_Eu||$$

получаем

$$1 - ||P_EFP_E|| \leq \frac{||P'_Eu||}{||u||}. \tag{2}$$

Остается оценить $||P'_Eu||$. Пользуясь четностью $u(x)$, получим

$$||P'_Eu||^2 = 2\int_\alpha^\infty \exp(-2\pi x^2)\,dx \leq \frac{2}{\alpha}\int_\alpha^\infty x\exp(-2\pi x^2)\,dx = \frac{1}{2\pi\alpha}\exp(-2\pi\alpha^2). \tag{3}$$

Подставляя в (3) значение $\alpha = \sqrt{s}/2$ и оценивая с помощью (3) правую часть (2), получаем требуемую оценку.

**Следствие 2.** При достаточно больших $s$ справедлива оценка

$$1 - \rho_s < \exp\left(-\frac{\pi}{2}s\right).$$

## §2. ОЦЕНКА $\rho_s$ ЧЕРЕЗ НОРМЫ ОПЕРАТОРОВ КОНЕЧНОГО РАНГА

В данном параграфе мы получим нижнюю и верхнюю оценки $\rho_s$ для натуральных значений $s$. Поскольку $\rho_s$ монотонна, эти оценки можно будет распространить на все значения $s$.

Пусть $n$ – фиксированное натуральное число, $A = [0, n]$, $B = [-1/2, 1/2]$, $C = \mathbb{R} \setminus A$, следовательно площадь прямоугольника $A \times B$ равна $n$. Обозначим через $V$ образ проектора $P_B$ и определим семейство функций $\{e_\theta(x)\}$, принадлежащих $V$, формулой

$$e_\theta(x) = \begin{cases} \exp(-2\pi i\theta x), & \text{если} \quad |x| \le \frac{1}{2} \\ 0, & \text{если} \quad |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Для заданного $\tau \in \mathbb{R}$ функции $\{e_{l-\tau}(x)\}$, $l \in \mathbb{Z}$ образуют ортонормированный базис в $V$. Пусть $W_\tau$ – пространство, порожденное функциями $\{e_{l-\tau}(x)\}$, $l = 1, 2, ..., n$, а $Q_\tau$ – ортогональный проектор в $L^2(\mathbb{R})$ на $W_\tau$. Мы будем оценивать $\rho_n$ через нормы операторов конечного ранга $P_A F Q_\tau$. Положим

$$\eta_n(\tau) = ||P_A F Q_\tau||, \qquad \eta_n = \sup_{\tau \in [0,1]} \eta_n(\tau).$$

**Лемма 3.** *Справедлива оценка*

$$\eta_n \le \rho_n.$$

**Доказательство.** Поскольку $W_\tau$ – подпространство $V$, имеет место неравенство $P_B Q_\tau = Q_\tau$, и, следовательно, $\eta_n(\tau) = ||P_A F P_B Q_\tau|| \le ||P_A F P_B|| = \rho_n$, откуда сразу следует утверждение леммы.

Согласно Лемме 2, существует функция $f \in V$, удовлетворяющая условию $||f|| = 1$, и $||P_A F P_B f|| = \rho_n$. Определим функции $g_\tau = Q_\tau f$ и $h_\tau = (1 - Q_\tau) f$. Тогда $f = g_\tau + h_\tau$, $g_\tau \in W_\tau$ и $g_\tau$ ортогональна $h_\tau$.

**Лемма 4.** *Разложение $g_\tau$ по базису $\{e_{l-\tau}(x)\}, l = 1, 2, ..., n$ в пространстве $W_\tau$ имеет вид*

$$g_\tau(x) = \sum_{l=1}^{n} \hat{f}(l - \tau)\, e_{l-\tau}(x).$$

**Доказательство** следует из того, что коэффициенты Фурье разложения функции $f$ по базису $\{e_{l-\tau}(x)\}, l \in \mathbb{Z}$, равны $\{\hat{f}(l - \tau)\}$.

Норму функции $v \in L^2(\mathbb{R})$ на множество $E \subset \mathbb{R}$ обозначим через $||v||_E = = ||P_E v||$.

**Лемма 5.** *Имеет место формула*

$$||\widehat{f}||_A^2 = \int_0^1 ||g_\tau||^2\, d\tau.$$

**Доказательство.** Поскольку

$$||\widehat{f}||_A^2 = \int_0^n |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi = \sum_{l=1}^n \int_{l-1}^l |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi,$$

то полагая $\xi = l - \tau$, получим

$$||\widehat{f}||_A^2 = \sum_{l=1}^n \int_0^1 |\widehat{f}(l-\tau)|^2\, d\tau = \int_0^1 ||g_\tau||^2\, d\tau.$$

**Следствие 3.** Существует $\tau_0 \in [0,1]$ такое, что $||g_{\tau_0}|| \geq ||\widehat{f}||_A$. В самом деле, полагая $g = g_{\tau_0}$ и $h = h_{\tau_0}$, получим $||g|| \geq ||\widehat{f}||_A$.

**Лемма 6.** *Справедливо неравенство*

$$||\widehat{f}||_C \geq ||h||.$$

**Доказательство.** Поскольку $g$ и $h$ ортогональны, то $||f||^2 = ||g||^2 + ||h||^2$. С другой стороны, $||\widehat{f}||^2 = ||\widehat{f}||_A^2 + ||\widehat{f}||_C^2$. Таким образом, остается воспользоваться равенством Парсеваля $||f|| = ||\widehat{f}||$ и Следствием 3.

**Лемма 7.** *Справедливо неравенство*

$$||\widehat{g}||_C \geq \sqrt{1-\eta_n^2}\, ||g||.$$

**Доказательство.** Так как $g_\tau \in W_\tau$, то $g_\tau = Q_\tau g_\tau$, и, следовательно, $||\widehat{g}_\tau||_A = = ||P_A F Q_\tau g_\tau|| \leq \eta_n(\tau)\, ||g_\tau||$. Полагая $\tau = \tau_0$ и учитывая, что $\tau_0 \in [0,1]$, получим $||\widehat{g}||_A \leq \eta_n(\tau_0)\, ||g|| \leq \eta_n\, ||g||$. Теперь утверждение леммы следует из соотношения $g^2 = ||\widehat{g}||^2 = ||\widehat{g}||_A^2 + ||\widehat{g}||_C^2$.

**Лемма 8.** *Справедливо неравенство*

$$||\widehat{f}||_C \geq \sqrt{1-\eta_n^2}\, ||g|| - ||h||.$$

**Доказательство.** Так как $\hat{f} = \hat{g} + \hat{h}$, то $||\hat{f}||_C \geq ||\hat{g}||_C - ||\hat{h}||_C$. Утверждение леммы получается теперь из Леммы 7 и того, что $||h|| \geq ||\hat{h}||_C$.

Пусть $\psi$ – угол между векторами $f$ и $g$, $\psi \in [0, \pi/2]$. Тогда $||g|| = \cos\psi$, $||h|| = \sin\psi$. Поскольку $f = P_B f$, то $||\hat{f}||_A = \rho_n$. Утверждение Лемм 6 и 8 можно записать так :

$$\sqrt{1-\rho_n^2} \geq \max\left\{\sqrt{1-\eta_n^2}\cos\psi - \sin\psi, \sin\psi\right\}. \qquad (4)$$

**Лемма 9.** *При* $\varphi \in [0, \pi/2]$ *справедливо неравенство*

$$\sqrt{1-\rho_n^2} \geq \sqrt{\frac{1-\eta_n^2}{5-\eta_n^2}}.$$

**Доказательство.** При $\varphi \in [0, \pi/2]$ функция $u(\varphi) = \sqrt{1-\eta_n^2}\cos\varphi - \sin\varphi$ убывает, а функция $v(\varphi) = \sin\varphi$ возрастает. Поскольку $u(0) \geq v(0)$ и $u(\pi/2) < v(\pi/2)$, то минимальное значение $\max\{u, v\}$ достигается при $u(\varphi) = v(\varphi)$ и равно $\frac{\sqrt{1-\eta_n^2}}{\sqrt{5-\eta_n^2}}$.

**Лемма 10.** *Справедливо неравенство*

$$\rho_n \leq \frac{2}{\sqrt{5-\eta_n^2}}.$$

**Лемма 11.** *При* $x \in [0, 1]$ *справедливо неравенство*

$$\frac{2}{\sqrt{5-x^2}} \leq \frac{9+x}{10}.$$

Из Лемм 3, 10 и 11 следует

**Теорема 1.** *Величина* $\rho_n$ *допускает двустороннюю оценку через* $\eta_n$ *:*

$$\frac{1}{10}(1-\eta_n) \leq 1-\rho_n \leq 1-\eta_n.$$

**Следствие 4.** Пусть $n-1 \leq s \leq n$, тогда

$$\frac{1}{10}(1-\eta_n) \leq 1-\rho_s \leq 1-\eta_{n-1}.$$

## §3. ОЦЕНКА $\eta_n$ ЧЕРЕЗ НОРМЫ СЕМЕЙСТВА КОНЕЧНЫХ МАТРИЦ

Для оценки нормы $\eta_n(\tau) = ||P_A F Q_\tau||$ нам предстоит сделать некоторые приготовления.

**Лемма 12.** *Преобразование Фурье функции $e_\theta(x)$ задается формулой*

$$\widehat{e}_\theta(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi(\xi - \theta)}{\pi(\xi - \theta)}, & \text{при} \quad \xi \neq \theta \\ 1, & \text{при} \quad \xi = \theta. \end{cases}$$

**Доказательство.** Лемма доказывается прямым вычислением.

Для $t \in \mathbb{R}$ определим бесконечную матрицу $L(t) = (L(t))_{k,l}$ :

$$(L(t))_{k,l} = \begin{cases} \frac{\sin \pi(k-l+t)}{\pi(k-l+t)}, & \text{если} \quad t \notin \mathbb{Z} \\ (-1)^{k+l+t}\delta_{k+t,l}, & \text{если} \quad t \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{6}$$

где $k, l \in \mathbb{Z}$ и $\delta_{k,l}$ – символ Кронекера. Подматрицу матрицы L($t$) в которой индексы $k, l = 1, 2, ..., n$ обозначим через $L_n(t)$.

**Лемма 13.** *Матрица $L(t)$ унитарна.*

**Доказательство** следует из того, что $L(t)$ является матрицей перехода из базиса $\{e_l(x)\}$ в базис $\{e_{k+t}(x)\}$.

**Следствие 5.** Норма матрицы $L_n(t)$ не превосходит единицы.

**Лемма 14.** *Для оператора конечного ранга $P_A F Q_\tau$ существует функция $w_\tau \in \in L^2(\mathbb{R})$ такая, что $||w_\tau|| = 1$ и $||P_A F Q_\tau w_\tau|| = \eta_n(\tau)$. Более того, $w_\tau \in W_\tau$ и $\eta_n(\tau) = ||\widehat{w}_\tau||_A$.*

Доказательство аналогично доказательству Леммы 2.

Пусть $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ – вектор, компонентами которого являются координаты $w_\tau$ в базисе $\{e_{l-\tau}(x)\}, l = 1, 2, ..., n$, т. е.

$$w_\tau(x) = \sum_{l=1}^{n} a_l e_{l-\tau}(x). \tag{7}$$

Очевидно, что $||a|| = 1$. Для $\sigma \in \mathbb{R}$ зададим вектор $b(\sigma) = (b_1(\sigma), ..., b_n(\sigma))$ с компонентами $b_k(\sigma) = \widehat{w}_\tau(k - \sigma)$.

**Лемма 15.** *Справедлива формула*

$$b(\sigma) = L_n(\tau - \sigma)a.$$

**Доказательство** следует из (6), (7) и Леммы 12.

**Лемма 16.** *Справедлива формула*

$$\eta_n^2(\tau) = \int_0^1 ||b(\sigma)||^2 \, d\sigma.$$

**Доказательство.** Согласно Лемме 14 имеем

$$\eta_n^2(\tau) = ||\widehat{\omega}_\tau||_A^2 = \int_0^n |\widehat{\omega}_\tau(\xi)|^2 \, d\xi = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k |\widehat{\omega}_\tau(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Полагая $\xi = k - \sigma$, получаем

$$\eta_n^2(\tau) = \sum_{k=1}^n \int_0^1 |\widehat{\omega}_\tau(k-\sigma)|^2 \, d\sigma = \int_0^1 ||b(\sigma)||^2 \, d\sigma,$$

откуда следует утверждение леммы.

**Предложение 4.** *Справедлива оценка*

$$\eta_n^2 \le \sup_{\tau \in [0,1]} \int_0^1 ||L_n(\tau - \sigma)||^2 \, d\sigma.$$

**Доказательство.** Так как $||a|| = 1$, из Леммы 15 следует $||b(\sigma)|| \le ||L_n(\tau - \sigma)||$. Применяя его к Лемме 16, получаем, что

$$\eta_n^2(\tau) \le \int_0^1 ||L_n(\tau - \sigma)||^2 \, d\sigma,$$

откуда следует требуемое неравенство.

Для $t \in \mathbb{R}$ определим функцию $\kappa(t)$ соотношением :

$$\kappa(t) = \begin{cases} ||L_n^{-1}(t)||^{-1}, & \text{если} \quad L_n(t) \text{ обратима} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что для произвольного $n$-мерного вектора $c$ имеет место неравенство $||L_n(t)c|| \ge \kappa(t) \, ||c||$. Ниже мы оценим норму матрицы $L_n(t)$ через функцию $\kappa(t)$.

По вектору $c = (c_1, \dots, c_n)$ построим вектор $\widetilde{c} = (\widetilde{c}_k)$ , $k \in \mathbb{Z}$, с компонентами $\widetilde{c}_k = c_k$, при $k = 1, \dots, n$ и $\widetilde{c}_k = 0$, при $k > n$. Пусть вектор $\widetilde{d} = \left(\widetilde{d}_k\right)$ , $k \in \mathbb{Z}$ такой, что $\widetilde{d} = L(t)\widetilde{c}$. По этому вектору $\widetilde{d}$ построим семейство $n$-мерных векторов, зависящее от $q \in \mathbb{Z}$, $d(q) = (d_1(q), \dots, d_n(q))$, полагая $d_k(q) = \widetilde{d}_{k+qn}$.

**Лемма 17.** *Имеет место соотношение*

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} ||d(q)||^2 = ||c||^2.$$

**Доказательство.** Из унитарности $L(t)$ следует, что $||\widetilde{d}|| = ||\widetilde{c}||$, а кроме того, $||\widetilde{c}|| = ||c||$. Утверждение Леммы следует теперь из очевидной формулы $||\widetilde{d}||^2 = \sum_{q=-\infty}^{\infty} ||d(q)||^2$.

**Лемма 18.** *Справедлива формула*

$$d(q) = L_n(t+qn)c.$$

**Доказательство** проводится непосредственными вычислениями.

Пусть теперь вектор $c$ выбран так, что $||c|| = 1$ и $||L_n(t)c|| = ||L_n(t)||$.

**Предложение 5.** *Справедлива оценка*

$$||L_n(t)||^2 \le 1 - \sum_{q \ne 0} \kappa^2(t+qn).$$

**Доказательство.** В силу Леммы 18 $||d(0)|| = ||L_n(t)||$ и $||d(q)|| = ||L_n(t+qn)c|| \ge \ge \kappa(t+qn)$. Для завершения доказательства остается воспользоваться Леммой 17.

Для получения окончательного результата нам понадобится более слабая оценка

$$||L_n(t)||^2 \le 1 - \kappa^2(t+n). \tag{8}$$

**Теорема 2.** *Справедлива оценка*

$$\eta_n \le 1 - \frac{1}{2} \inf_{\tau \in [0,1]} \int_0^1 \kappa^2(\tau - \sigma + n)\, d\sigma.$$

**Доказательство.** Пользуясь оценкой (8) и Предложением 4, получим

$$\eta_n^2 \le 1 - \inf_{\tau \in [0,1]} \int_0^1 \kappa^2(\tau - \sigma + n)\, d\sigma. \tag{9}$$

Остается применить неравенство $1 - x \le (1 - x/2)^2$ к правой части формулы (9).

## §4. СТРУКТУРА МАТРИЦЫ $L_n(t)$ И ОЦЕНКА $\kappa(t)$

В пространстве многочленов степени, меньшей $n$, зададим оператор сдвига $N(t)$ по формуле $N(t)\colon p(x) \mapsto p(x+t)$. В качестве координат многочлена $p$ возьмем его значения в узлах $k = 1, 2, ..., n$. Матрицу, соответствующую оператору $N(t)$, обозначим тем же символом $N(t)$. Заметим, что $N^{-1}(t) = N(-t)$.

**Лемма 19.** *Элементы матрицы $N(t)$ задаются формулой*

$$(N(t))_{k,l} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne l}}^{n} \frac{k - j + t}{l - j},$$

*где $k, l = 1, 2, ..., n$.*

**Доказательство.** Для доказательства достаточно воспользоваться формулой интерполяционного многочлена Лагранжа.

Лемма 20. *При* $k, l = 1, 2, \dots, n$ *и* $t \notin \mathbb{Z}$

$$\frac{\sin \pi(k - l + t)}{\pi(k - l + t)} = \frac{\Gamma(l)\Gamma(n + 1 - l)}{\Gamma(k + t)\Gamma(n + 1 - k - t)} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n} \frac{k - j + t}{l - j}. \tag{10}$$

**Доказательство** использует функциональные уравнения $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ и $\Gamma(z)\,\Gamma(1 - z) = \pi/\sin \pi z$ (см. [5]).

Обозначим через $D(t)$ диагональную матрицу порядка $n$ с элементами $\Gamma(k+t)\times$ $\times\Gamma(n + 1 - k - t)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Заметим, что при $t \notin \mathbb{Z}$ матрица $D(t)$ обратима. Из Лемм 19 и 20 следует

**Предложение 6.** *При* $t \notin \mathbb{Z}$ *имеет место формула*

$$L_n(t) = D^{-1}(t)N(t)D(0).$$

**Следствие 6.** При $t \notin \mathbb{Z}$ матрица $L_n(t)$ обратима и $L_n^{-1}(t) = D^{-1}(0)N(-t)D(t)$.

Утверждение Следствия 6 следует из равенства $N^{-1}(t) = N(-t)$.

**Предложение 7.** *При* $t \notin \mathbb{Z}$ *имеет место соотношение*

$$L_n^{-1}(t) = D^{-1}(0)D(-t)L_n(-t)D^{-1}(0)D(t).$$

Доказательство непосредственно выводится из Предложения 6, примененного к матрице $L_n(-t)$ и Следствия 6.

**Лемма 21.** *Имеет место равенство*

$$||D^{-1}(0)D(t)|| = ||D^{-1}(0)D(-t)||.$$

**Доказательство.** Норма диагональной матрицы $D^{-1}(0)D(t)$ выражается формулой

$$||D^{-1}(0)D(t)|| = \max_{1\leq k\leq n}\left|\frac{\Gamma(k + t)\Gamma(n + 1 - k - t)}{\Gamma(k)\Gamma(n + 1 - k)}\right|. \tag{11}$$

Заменяя в (11) $k$ на $n + 1 - k$, получим аналогичное выражение для нормы $||D^{-1}(0)D(-t)||$. Отсюда следует утверждение леммы.

**Предложение 8.** *При $t \notin \mathbb{Z}$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{\kappa(t)} \le \|D^{-1}(0)D(t)\|^2.$$

**Доказательство.** Согласно Следствию 5 имеем $\|L_n(-t)\| \le 1$. Пользуясь Предложением 7, получим

$$\frac{1}{\kappa(t)} = \|L_n^{-1}(t)\| = \|D^{-1}(0)D(-t)L_n(-t)D^{-1}(0)D(t)\| \le$$
$$\le \|D^{-1}(0)D(-t)\| \cdot \|D^{-1}(0)D(t)\|.$$

Для завершения доказательства достаточно воспользоваться Леммой 21.

Нам потребуется оценить $\kappa(t)$ при $t = \alpha + n$, $0 < |\alpha| < 1$.

**Лемма 22.** *При $t = \alpha + n$, $0 < |\alpha| < 1$ справедливо неравенство*

$$\left|\frac{\Gamma(k+t)\Gamma(n+1-k-t)}{\Gamma(k)\Gamma(n+1-k)}\right| \le \frac{\pi}{|\sin \pi\alpha|}\,\frac{(n+k)!}{(k-1)!k!(n-k)!}. \tag{12}$$

**Доказательство.** Пользуясь формулой $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$, получим

$$\Gamma(1-k-\alpha) = \frac{(-1)^k \pi}{\Gamma(k+\alpha)\sin \pi\alpha}. \tag{13}$$

Подставляя $t = \alpha + n$ в левую часть (12) и применяя формулу (13), получим

$$\left|\frac{\Gamma(n+k+\alpha)\Gamma(1-k-\alpha)}{\Gamma(k)\Gamma(n+1-k)}\right| = \left|\frac{\pi\Gamma(n+k+\alpha)}{\sin \pi\alpha\Gamma(k)\Gamma(k+1)\Gamma(n+1-k)}\right|. \tag{14}$$

Отношение $\Gamma(n+k+\alpha)/\Gamma(k+\alpha)$ есть многочлен от $\alpha$. Легко видеть, что он монотонно возрастает и положителен при $|\alpha| < 1$. Поэтому правую часть (14) можно оценить выражением

$$\frac{\pi}{|\sin \pi\alpha|}\,\frac{\Gamma(n+k+\alpha)}{\Gamma(k)\Gamma(k+1)\Gamma(n+1-k)}.$$

Остается воспользоваться тем, что $\Gamma(m) = (m-1)!$.

**Лемма 23.** *Для $1 \le k \le n$ выражение*

$$\nu(k) = \frac{(n+k)!}{(k-1)!k!(n-k)!}$$

*достигает максимума при $k = k_n$ таком, что*

$$k_n = \frac{n}{\sqrt{2}} + O(1).$$

**Доказательство.** Легко проверить, что отношение

$$\frac{\nu(k+1)}{\nu(k)} = \frac{(n+k+1)(n-k)}{k(k+1)}$$

не меньше единицы при $k \le \zeta$ и строго меньше единицы при $k > \zeta$, где

$$\zeta = \frac{\sqrt{2n^2+2n+1}-1}{2}.$$

Поэтому $\nu(k)$ возрастает с ростом $k$, пока $k \le \zeta$, а при больших значениях $k$ убывает, так что $\nu(k)$ достигает максимального значения при $k = k_n$ таком, что $k_n > \zeta$ и $k_n \le \zeta + 1$. Таким образом

$$k_n > \frac{n}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \qquad \text{и} \qquad k_n < \frac{n}{\sqrt{2}} + 1.$$

Из полученных оценок прямо следует утверждение леммы.

**Лемма 24.** *Пусть $p, q, r \in \mathbb{Z}$ таковы, что $pn + qk_n + r > 0$. При $n \to \infty$ имеет место асимптотическая формула*

$$\frac{1}{n}\ln\left((pn+qk_n+r)!\right) = \left(p + \frac{q}{\sqrt{2}}\right)\left(\ln n + \ln\left(p+\frac{q}{\sqrt{2}}\right) - 1\right) + o(1).$$

**Доказательство** получается прямым вычислением с использованием Леммы 23 и формулы (см. [5]) :

$$\ln n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{1}{2}\ln 2\pi + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

**Лемма 25.**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\nu(k_n) = 2\ln(\sqrt{2}+1).$$

**Доказательство** следует из Леммы 24.

**Следствие 7.** Для любого $C > 2\ln(\sqrt{2}+1)$ и всех $n > n(C)$ справедливо неравенство

$$\nu(k_n) < e^{Cn},$$

где $n(C)$ – некоторая величина, зависящая от $C$.

**Лемма 26.** *Пусть* $|\alpha| \le 1$ *и* $C > 2\ln(\sqrt{2}+1)$. *Тогда для* $n \ge n(C)$ *выполняется неравенство*

$$\kappa(\alpha+n) \ge \frac{\sin^2 \pi\alpha}{\pi^2} e^{-2Cn}.$$

**Доказательство.** Пользуясь формулой (11), Леммой 22 и Следствием 7, получим, что при $0 < |\alpha| \le 1$ и $n \ge n(C)$ справедлива оценка

$$||D^{-1}(0)D(\alpha+n)|| \le \frac{\pi}{|\sin \pi\alpha|}\nu(k_n) < \frac{\pi}{|\sin \pi\alpha|}e^{Cn}.$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться Предложением 8.

Чтобы оценить $\eta_n$ с помощью Теоремы 2, нам понадобится следующая

**Лемма 27.** *При* $C > 2\ln(\sqrt{2}+1)$, $n \ge n(C)$ *и* $\tau \in [0,1]$

$$\int_0^1 \kappa^2(\tau-\sigma+n)\,d\sigma > \frac{3}{8\pi^4}e^{-4Cn}. \tag{15}$$

**Доказательство.** Отметим, что при $\sigma, \tau \in [0,1]$ разность $\alpha = \tau - \sigma$ удовлетворяет неравенству $|\alpha| \le 1$. Поэтому, пользуясь Леммой 26, оценим снизу левую часть (15) интегралом

$$e^{-4Cn}\int_0^1 \frac{\sin^4 \pi(\tau-\sigma)}{\pi^4}\,d\sigma = \frac{3}{8\pi^4}e^{-4Cn}.$$

Лемма доказана.

**Лемма 28.** *Для любого* $C > 8\ln(\sqrt{2}+1)$, *начиная с некоторого* $n$, *выполняется оценка*

$$1-\eta_n > e^{-Cn}.$$

**Доказательство.** Применяя Лемму 27 к Теореме 2, мы получим, что для произвольного $C' > 2\ln(\sqrt{2}+1)$ и $n \ge n(C')$ имеет место оценка

$$1-\eta_n > \frac{3}{16\pi^4}e^{-4C'n},$$

откуда с очевидностью следует утверждение леммы.

Наконец, из Следствия 2, Леммы 28 и Следствия 4 получим наш основной результат.

**Теорема 3.** *Для любого* $C_1 > 8\ln(\sqrt{2}+1)$ *и* $C_2 = \frac{\pi}{2}$, *при достаточно больших* $s$ *справедлива двусторонняя оценка*

$$\exp(-C_1 s) < 1 - \rho_s < \exp(-C_2 s).$$

**ABSTRACT. The integral operator from $L^2(\gamma,\delta)$ to $L^2(\alpha,\beta)$ with the kernel $\exp(2\pi i x y)$ is considered. Its norm $\rho_s$ depends solely on $s = (\alpha-\beta)\cdot(\gamma-\delta)$. The paper demonstrates the existence of constants $C_1$, $C_2$, such that for sufficiently large $s$ the estimate $\exp(-C_1 s) < 1 - \rho_s < \exp(-C_2 s)$ holds.**

## ЛИТЕРАТУРА

1. M. Benedicks, "Fourier transforms of functions supported on sets of finite Lebesgue measure," J. Math. An. Appl., vol. 106, pp. 180 – 183, 1985.
2. W. O. Amrein, A. M. Berthier, "On support properties of $L^p$-functions and their Fourier transforms," J. Funct. Anal., vol. 24, pp. 258 – 267, 1977.
3. Н. Винер, Р. Пэли, Преобразование Фурье в Комплексной Области, М., 1964.
4. Л. Шварц, Математические Методы для Физических Наук, М., Мир, 1965.
5. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, Курс Современного Анализа, т. 2, М., 1963.

28 Декабря 1991

Межвузовский научный центр
по прикладным проблемам
математики

# КЛАССЫ ХАРДИ И ФОРМУЛЫ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ШАРЕ

**А. И. Хейфиц**

**Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №5, 1993**

**Классы Харди $H^p(c)$ были введены обычным образом для непрерывных решений уравнения $\Delta u - c(x)u = 0$ в единичном круге $B \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, где $\Delta$ – лапласиан, $c \geq 0$ и $c \in L^s(B)$, $s > n$. Были получены представления для функций $u \in H^p(c)$, $1 \leq p \leq \infty$, имеющих вид обобщенного интеграла Пуассона (или интеграла Пуассона-Стильтьеса при $p = 1$). Исследовано поведение функций на границе. В частности, доказан аналог теоремы Фату о существовании почти всюду некасательных граничных значений. Получены и исследованы формулы средних значений.**

1. В этой работе рассматриваем обобщенные гармонические функции, т.е. функции, гармонические относительно оператора Шредингера $L_c = -\Delta + c(x)I$, где $\Delta$ – лапласиан, $I$ – тождественный оператор, а свойства потенциала $c$ будут описаны ниже.

Пусть $\Omega$ – ограниченная область в евклидовом пространстве $R^n$, $n \geq 2$. Через $\mathcal{C}(\Omega)$ обозначим класс неотрицательных функций $c(x)$, $x \in \Omega$ таких, что $c \in L^s_{\text{loc}}(\Omega)$ с некоторым $s > n/2$ при $n \geq 4$ и $s = 2$ при $n = 2, 3$. Если $c \in \mathcal{C}(\Omega)$, то оператор $L_c$ можно стандартным образом расширить с $C_0^\infty(\Omega)$ до самосопряженного в $L^2(\Omega)$. Разумеется, это продолжение возможно при значительно менее жестких ограничениях на потенциал, однако при $c \in \mathcal{C}(\Omega)$ продолженный оператор $L_c$ имеет в $\Omega$ функцию Грина $G(x, y)$ с необходимыми свойствами.

Непрерывная функция $u : \Omega \to R$ называется обобщенной гармонической функцией [1],[2] (о.г.ф.), если в каждой точке $x \in \Omega$ при всех $r$, $0 < r < r(x)$ она удовлетворяет обобщенному равенству средних значений :

$$u(x) = \int_{S(x,r)} u(y) \frac{\partial G_r(x, y)}{\partial n(y)} d\sigma(y).$$

Здесь $G_r$ – функция Грина оператора $L_c$ в круге $B(x, r) = \{y \in R^n : |x - y| < r\}$ с нулевыми граничными условиями на сфере $S(x, r) = \partial B(x, r)$, $d\sigma$ – поверхностная мера на $S(x,r)$, а $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по внутренней нормали. Естественно назвать этот интеграл обобщенным интегралом Пуассона или $c$-интегралом Пуассона. Класс о.г.ф. обозначим через $H(c,\Omega)$. В случае $c=0$, о.г.ф. – обычные гармонические функции. Как и при $c=0$ определение о.г.ф. равносильно равенству $L_c u = 0$, понимаемому в смысле распределений. Некоторые свойства о.г.ф. как решений уравнения в частных производных рассмотрены, например, в [3]–[6], но систематическое их изучение с точки зрения теории функций началось недавно [7]–[13].

В этой работе мы вводим для о.г.ф. в единичном шаре $B=B(0,1)$ аналоги классов Харди $H^p$. О.г.ф из этих классов представляются в виде обобщенных интегралов Пуассона, либо Пуассона-Стильтьеса. С помощью этих представлений для о.г.ф. доказывается аналог теоремы Фату о существовании почти всюду некасательных граничных значений. Наконец, мы выводим из этих представлений формулы средних значений для о.г.ф.. Эти формулы дополняют результаты Г. Р. Оганесяна [14].

2. Для $x \in R^n$ обозначим $r=|x|$, $\theta = x/r \in S = \partial B$.

Классы Харди о.г.ф. определим обычным образом, а именно, обозначим через $H^p(c)$ семейство тех функций $u \in H(c,B)$, для которых

$$||u||_{H^p(c)} = \sup_{0<r<1} \left\{ \int_S |u(r,\theta)|^p d\sigma(\theta) \right\}^{1/p} < \infty.$$

Отметим, что монотонность и выпуклость различных усреднений о.г.ф. рассматривались в [2],[7],[8].

В этом параграфе будут получены представления в виде обобщенных интегралов Пуассона для функций из классов $H^p(c)$. Тем самым, дается решение некоторой задачи Дирихле в шаре для оператора $L_c$. Однако известно [6] , что если потенциал $c$ при приближении к границе области достаточно быстро растет, то эта задача Дирихле может не иметь решения. В то же время определение класса $C(\Omega)$ не накладывает никаких ограничений на поведение входящих в этот класс функций вблизи границы. Поэтому далее мы сузим рассматриваемую совокупность потенциалов. Через $C_1(B)$ обозначим класс таких $c \in C(B)$, что $c \in L^s(B)$ с некоторым $s > n$.

Нижеследующие доказательства в существенном следуют рассуждениям в случае $c(x) = 0$ (см., например [15], гл. 1). Однако появляется принципиальное отличие, состоящее в том, что $c$-ядро Пуассона не является аппроксимативной единицей. Связанная с этим трудность преодолевается благодаря тому, что при $c \in C_1(B)$ шар $B$ является регулярной областью для задачи Дирихле относительно оператора $L_c$. Необходимые в дальнейшем свойства функции Грина $G$ изложены в [3],[8],[11]. Отметим лишь следующее :

при $x \in B$, $\theta \in S$ $G(x,\theta) = 0$;

при $|x-y| \to 0$, $G$ нормирована условием

$$G(x,y) \sim \begin{cases} -\gamma_2 \ln|x-y|, & n = 2 \\ \gamma_n |x-y|^{2-n}, & n \geq 3, \end{cases}$$

где $\gamma_2 = (2\pi)^{-1}$, $\gamma_n = ((n-2)\sigma_n)^{-1}$, при $n \geq 3$ и $\sigma_n$ - площадь поверхности единичной сферы $S$ в $\mathbb{R}^n$;

если $c \in C_1(\bar{B})$, то $\frac{\partial G(x,\theta)}{\partial n(\theta)}$ положительна и непрерывна при $x \in B$ и $\theta \in S$;

$G(x,y) \leq g(x,y)$, где $g$ – функция Грина лапласиана.

Пусть $y_o \in S$ – граничная точка, а $y \in B$ лежит на внутренней нормали к $y_o$. Переписывая последнее неравенство в виде $G(x,y) - G(x,y_o) \leq g(x,y) - g(x,y_o)$ (напомним, что $G(x,y_o) = g(x,y_o) = 0$), деля на $|y-y_o|$ и устремляя $y \to y_o$, приходим к неравенству

$$\frac{\partial G(x,\theta)}{\partial n(\theta)} \leq \frac{\partial g(x,\theta)}{\partial n(\theta)}. \tag{1}$$

Иными словами, $c$-ядро Пуассона мажорируется гармоническим ядром Пуассона.

**Лемма 1.** *Если $c \in C_1(B)$, то для любой функции $u \in H^p(c)$, $1 \leq p \leq \infty$, найдется функция $f \in L^p(S)$ такая, что при всех $x \in B$*

$$u(x) = \int_S f(\theta) \frac{\partial G(x,\theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta). \tag{2}$$

*Если $u \in H^1(c)$, то существует конечная (не обязательно положительная) борелевская мера $\mu$ такая, что при всех $x \in B$*

$$u(x) = \int_S \frac{\partial G(x,\theta)}{\partial n(\theta)} d\mu(\theta). \tag{3}$$

**Доказательство.** Сначала рассмотрим случай $p > 1$. Пусть $\{r_l\}_{l=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел, монотонно возрастающих к $1 : 0 < r_1 < r_2 < . . . < r_l \uparrow 1$, $l \to \infty$. Положим $u_l(\theta) = u(x)$ для $|x| = r_l$, $\theta \in S$, $l = 1, 2, \ldots$. Так же как в [15] доказывается , что для некоторой подпоследовательности $\{l_j\}_{j=1}^{\infty}$ и для каждой функции $k \in L^q(S)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ существует предел $L\,k = = \lim_{j\to\infty} \int_S k(\theta) u_{l_j}(\theta) d\sigma(\theta)$, который является ограниченным линейным функционалом на $L^q(S)$. Поэтому найдется функция $f \in L^p(S)$ такая, что

$$L\,k = \int_S k(\theta) f(\theta) d\sigma(\theta). \tag{4}$$

Рассмотрим функции $v_l(x) = u(r_l x)$, которые являются $c_l$–гармоническими с потенциалом $c_l(x) = r_l^2 c(r_l x)$, $|x| < 1$ в большом шаре $B(O, r_l^{-1})$. Отметим, что $v_l(\theta) = u_l(\theta)$, $\theta \in S$. Представим $v_{l_j}(\theta)$, $j = 1, 2, \ldots$ в $B$ по обобщенной формуле Пуассона-Иенсена [11],[13] :

$$v_{l_j}(x) = \int_S v_{l_j}(\theta) \frac{\partial G^{[l_j]}(x,\theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta).$$

Здесь $G^{[l_j]}$ – функция Грина оператора $L_{c_{l_j}}$ в $B$. В силу неравенства (1), $k_o(\theta) = = \frac{\partial G^{[l_j]}(x,\theta)}{\partial n(\theta)} \in L^q(S)$ при любом фиксированном $x \in B$. Следовательно, по формуле (4)

$$L\,k_o = \int_S f(\theta) \frac{\partial G^{[l_j]}(x,\theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta).$$

С другой стороны, по определению функционала $L$ имеем

$$L\,k_o = \lim_{j\to\infty} \int_S u_{l_j}(\theta) \frac{\partial G^{[l_j]}(x,\theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta) =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \int_S v_{l_j}(\theta) \frac{\partial G^{[l_j]}(x,\theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta).$$

Но последний интеграл равен $v_{l_j}(x)$ по определению о.г.ф.. Ввиду непрерывности последних получаем $L\,k_o = \lim_{j\to\infty} v_{l_j}(x) = u(x)$, т.е.

$$u(x) = \int_S f(\theta) \frac{\partial G^{[l_j]}(x,\theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta).$$

Переходя здесь к пределу при $j \to \infty$ под знаком интеграла, с учетом (1) и теоремы о мажорированной сходимости, приходим к представлению (2).

При $p = 1$, ввиду непрерывности $\frac{\partial G}{\partial n}$, рассуждения аналогичны случаю $c = 0$.

**Лемма 2.** *Если $c \in C_1(B)$, $u \in H(c, B)$ и $u > 0$, то и представима по формуле (3), где $\mu$ – положительная мера.*

**Доказательство.** По теореме Zhao [16] найдется постоянная $A > 0$ такая, что $G(x, y) \geq Ag(x, y)$ для всех $x, y \in B$. И, следовательно, аналогично неравенству (1), для всех $x \in B$, $\theta \in S$, имеет место неравенство

$$\frac{\partial G(x,\theta)}{\partial n(\theta)} \geq A \frac{\partial g(x,\theta)}{\partial n(\theta)}.$$

Теперь по определению о.г.ф. и формуле Пуассона–Йенсена [8],[13] при всех $r$, $0 < r < 1$, получаем (см. доказательство Леммы 1)

$$u(0) = \int_S u(r,\theta) \frac{\partial G^{[r]}(0,\theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta) = \int_S |u(r,\theta)| \frac{\partial G^{[r]}(0,\theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta) \geq$$

$$\geq A \int_S |u(r,\theta)| \frac{\partial g^{[r]}(0,\theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta) \geq A_1 \int_S |u(r,\theta)| d\sigma(\theta),$$

где постоянный множитель можно, очевидно, выбрать не зависящим от $r$, $0 < r < 1$. Таким образом, $u \in H^1(c)$, т. е. согласно Лемме 1 1, $u$ Допускает представление (3), где мера $\mu$ положительна.

Утверждения, обратные к Леммам 1 и 2, непосредственно следуют из аналогичных свойств обычных гармонических функций, неравенства (1) и того факта, что интегралы (2)-(3) являются c-гармоническими функциями [8],[13]. Поэтому справедлива

**Теорема 1.** *Пусть $c \in C_1(B)$. Для того, чтобы о.г.ф. $u \in H^p(c)$, $1 \leq p \leq \infty$ необходимо и достаточно, чтобы $u$ можно было представить в виде (3) с конечной мерой $\mu$. При $p > 1$ эта мера абсолютно непрерывна : $d\mu(\theta) = f(\theta)d\sigma(\theta)$, где $f \in L^p(S)$, а в случае $u > 0$ эта мера положительна.*

**3.** Изучим граничные свойства о.г.ф. классов $H^p(c)$, $1 \leq p \leq \infty$.

**Теорема 2.** *Пусть $c \in C_1(B)$ и о.г.ф. $u$ задается формулой (2). Тогда*

*1) если $f$ непрерывна на $S$, то для всех $\theta \in S$ существует равномерный на $S$ предел*

$$\lim_{r \to 1} u(x) = f(\theta), \tag{5}$$

*2) если $f \in L^1(S)$, то предел (5) существует почти всюду на $S$.*

**Доказательство.** Имеем

$$u(x) - f(\theta) = \int_{\psi\in S:\ |\psi-\theta|<\delta} [f(\psi) - f(\theta)] \frac{\partial G(x,\psi)}{\partial n(\psi)} d\sigma(\psi) +$$

$$+ \int_{\psi\in S:\ |\psi-\theta|\geq\delta} [f(\psi) - f(\theta)] \frac{\partial G(x,\psi)}{\partial n(\psi)} d\sigma(\psi) +$$

$$+ f(\theta)\left\{\int_S \frac{\partial G(x,\psi)}{\partial n(\psi)} d\sigma(\psi) - 1\right\} \equiv I_1 + I_2 + I_3.$$

Слагаемые $I_1$ и $I_2$ мажорируются аналогичными интегралами

$$\int |f(\psi) - f(\theta)| \frac{\partial g(x,\psi)}{\partial n(\psi)} d\sigma(\psi),$$

которые, если $f \in L^1(S)$, стремятся к нулю при $r \to 1$. Тогда так как $c \in C_1$, то шар $B$ $c$-регулярен относительно задачи Дирихле для оператора $L_c$ [6],[11]. Поэтому

$$\lim_{r\to1} \int_S \frac{\partial G(x,\psi)}{\partial n(\psi)} d\sigma(\psi) = 1.$$

Это означает, что $\lim_{r\to1} I_3 = 0$, если $|f(\theta)| < \infty$, т.е. почти всюду в случае 2).

**Следствие.** *Пусть $c \in C_1(B)$ и о.г.ф.*

$$u(x) = \int_S \frac{\partial G(x,\theta)}{\partial n(\theta)} d\mu(\theta),$$

*где $\mu$ – мера (не обязательно положительная) конечной вариации на $S$. Пусть $d\mu(\theta) = f(\theta)d\sigma(\theta) + d\lambda(\theta)$ – ее лебегово разложение на абсолютно непрерывную и сингулярную компоненты относительно поверхностной меры на $S$. Тогда для почти всех $\theta \in S$ существует предел $\lim_{r\to1} u(x) = f(\theta)$.*

**Доказательство.** Положим $u(x) = u_f(x) + u_\lambda(x)$, где

$$u_\lambda(x) = \int_S \frac{\partial G(x,\theta)}{\partial n(\theta)} d\lambda(\theta),$$

а $u_f$ имеет вид (2). Так как $f \in L^1(S)$, то согласно Теореме 2 существует предел $\lim_{r\to1} u_f(x) = f(\theta)$ для почти всех $\theta \in S$. Тогда $|\lambda|$ – сингулярная мера вместе с $\lambda$, и благодаря (1) $|u_\lambda(x)| \leq \int_S \frac{\partial g(x,\theta)}{\partial n(\theta)} |d\lambda(\theta)| \to 0$ при $r \to 1$, почти всюду на $S$ [15].

Теорема 2 справедлива также для всех $\psi$, удовлетворяющих условию $|f(\psi)| = \infty$.

**Теорема 3.** *Если* $c \in C_1(B)$ *и о.г.ф. и имеет место представление (2) с* $f \in L^1(S)$, *причем* $\lim_{\theta\to\psi} f(\theta) = \infty$. *Тогда* $\lim_{r\to 1} u(x) = \infty$.

**Доказательство.** При фиксированном $\delta > 0$ запишем

$$u(x) = \int_{|\psi-\theta|<\delta} f(\theta)\frac{\partial G(x,\theta)}{\partial n(\theta)}d\sigma(\theta) + \int_{|\psi-\theta|\geq\delta} f(\theta)\frac{\partial G(x,\theta)}{\partial n(\theta)}d\sigma(\theta) \equiv I_1 + I_2.$$

Пусть $f(\psi) = +\infty$. Для произвольного числа $M > 0$ выберем такое $\delta > 0$, что $f(\theta) > M$ при $|\theta - \psi| < \delta$. Вновь используя результат [16], получаем оценку

$$I_1 \geq A\,M \int_{|\psi-\theta|<\delta} \frac{\partial g(x,\theta)}{\partial n(\theta)}d\sigma(\theta) \geq A\,\frac{M}{2},$$

и последняя величина может быть сделана сколь угодно большой вместе с $M$. С другой стороны, соотношение

$$|I_2| \leq \int_{|\psi-\theta|\geq\delta} |f(\theta)|\frac{\partial g(x,\theta)}{\partial n(\theta)}d\sigma(\theta) = o(1), \quad r \to 1,$$

при любом фиксированном $\delta > 0$ для гармонического интеграла Пуассона хорошо известно.

Заметим, что доказательство Теоремы 2 опирается на два обстоятельства : существование нулевых предельных значений у некоторых интегралов с обычным ядром Пуассона и регулярность точек сферы $S$ относительно задачи Дирихле для оператора $L_c$. Однако по определению регулярной области внутренняя точка может стремиться к границе произвольным образом, а вышеупомянутые интегралы имеют нулевые граничные значения не только по нормали (при $r \to 1$), но и по некасательным путям. Поэтому заключения Теоремы 2 и Следствия справедливы и при некасательном стремлении точки $x \in B$ к граничной $\theta \in S$. В частности, справедливо следующее обобщение теоремы Фату.

**Теорема 4.** *Пусть* $c \in C_1(B)$, $u \in H^p(c)$, $1 \leq p \leq \infty$, *в частности* $u > 0$ *в* $B$. *Тогда почти всюду на* $S$ *и имеет некасательные граничные значения* $f \in L^p(S)$.

Разумеется, все утверждения справедливы в шарах любого радиуса, и мы получаем следующее

**Следствие.** *Пусть* $c \in C(\Omega)$ *и* $u \in H(c,\Omega)$ *в произвольной области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq$

$\geq 2$. *Если для почти каждой точки $x_o \in \partial\Omega$ найдется такой шар $B(x_1, r_1) \subset \Omega$, что $x_o \in S(x_1, r_1)$, $c \in C_1(B(x_1, r_1))$ и $u \in H^p(c, B(x_1, r_1))$, $1 \leq p \leq \infty$, то почти всюду на $\partial\Omega$ $u$ имеет некасательные граничные значения.*

Докажем также, что при $1 \leq p < \infty$ о.г.ф. стремится к своим граничным значениям в среднем.

**Теорема 5.** *Пусть $c \in C_1(B)$ и о.г.ф. $u$ представима в виде (2) $s$ $f \in L^p(S)$, $1 \leq p < \infty$. Тогда $||u(x) - f(\theta)||_{L^p(S)} \to 0$ при $r \to 1$.*

Доказательство. Вновь рассмотрим разность

$$u(x) - f(\theta) = \int_S [f(\psi) - f(\theta)] \frac{\partial G(x,\psi)}{\partial n(\psi)} d\sigma(\psi) +$$
$$+ f(\theta)\left\{\int_S \frac{\partial G(x,\psi)}{\partial n(\psi)} d\sigma(\psi) - 1\right\} \equiv I_1 + I_2.$$

Как и прежде, $0 < 1 - \int_S \frac{\partial G(x,\psi)}{\partial n(\psi)} d\sigma(\psi) \leq 1$ при $x \in \overline{B}$, т.е. эта разность ограничена равномерно по $x$. Но $f \in L^p(S)$ и по теореме о мажорированной сходимости $\lim_{r\to 1} ||I_2||_{L^p(S)} = 0$.

Для оценки $I_1$ вновь используем неравенство (1) :

$$|I_1| \leq \int_S |f(\psi) - f(\theta)| \frac{\partial g(x,\psi)}{\partial n(\psi)} d\sigma(\psi) \equiv I_{11}.$$

Осталось учесть, что соотношение $||I_{11}||_{L^p(S)} = o(1)$, $r \to 1$, доказано в [15]. Заметим, что в [15] рассмотрен лишь плоский случай $n = 2$, но аналогичное доказательство справедливо при любых $n \geq 2$.

4. Формулы (2) и (3) непосредственно приводят к соотношениям для средних значений о.г.ф. Например, полагая в (2) $x = 0$ и учитывая Теорему 2, получаем для любой функции $u \in H^p(c)$, $1 < p \leq \infty$, $c \in C_1(B)$ равенство

$$u(0) = \int_S u(\theta) \frac{\partial G(0,\theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta), \tag{6}$$

где $u(\theta)$, $\theta \in S$ – это существующие почти всюду граничные значения $u$. Разумеется, аналогичные формулы можно написать для любого шара $B(x, r)$, в котором выполнены условия Леммы 1.

Теоремам о среднем посвящена работа Г. Р. Оганесяна [14], в которой рассмотрены $q$-гармонические функции класса $C^2$ в открытом шаре радиуса $\rho$ в $\mathbb{R}^n$,

$n \geq 3$, причем потенциал $q > 0$, непрерывный, радиальный (т.е. зависящий лишь от $r = |x|$) и неограниченно возрастает при $r \uparrow \rho$. С другой стороны, потенциал класса $C_1(B)$ не может расти слишком быстро, при $r \to 1$, в частности, может быть и ограниченным. А $c$-гармонические функции непрерывные, но могут не принадлежать классу $C^2$. В этом смысле наши результаты о средних значениях о.г.ф. дополняет утверждения [14].

Для радиальных потенциалов $q(r) \in C_1(B)$ в [10] доказано равенство $\frac{\partial G(0,\theta)}{\partial n(\theta)} = -W'(1)$, где $W(r)$ - главное (убывающее при $0 < r \uparrow 1$) решение уравнения

$$y'' + (n-1)r^{-1}y' - q(r)y = 0, \quad 0 < r < 1,$$

нормированное при $W(r) \sim -(2\pi)^{-1}\ln r$ при $r \to 0$, $n = 2$ и $W(r) \sim \gamma_n r^{2-n}$ при $n \geq 3$. Формула (6) в этом случае принимает вид

$$u(0) = \{-W'(1)\} \int_S u(\theta)d\sigma(\theta). \tag{7}$$

Рассмотрим два примера. Пусть $q_1(r) = q_1 r^\rho$, где $q_1 \geq 0$ и $\rho > -2$. Для определенности предположим, что $n \geq 3$ и число $\nu = \frac{n-2}{2+\rho}$ - нецелое. Тогда общее решение уравнения $y'' + (n-1)r^{-1}y' - q_1(r)y = 0$ имеет вид [17]

$$y(r) = Ar^{1-n/2}J_\nu(i\delta r^\gamma) + Br^{1-n/2}J_{-\nu}(i\delta r^\gamma),$$

где $\gamma = 1 + \rho/2$, $\delta = \gamma^{-1}\sqrt{q_1}$, а $J_{\pm\nu}$ - функция Бесселя. Вычисляя коэффициенты $A$ и $B$ из условий $W(1) = 0$, $W(r) \sim \gamma_n r^{2-n}$, $r \to +0$ получаем теорему о среднем для $q(r)$-гармонических функций

$$u(0) = B(\rho) \int_S u(\theta)d\sigma(\theta), \tag{8}$$

где $B(\rho) = q_1^{\nu/2}(2+\rho)^{1-\nu}\{\Gamma(\nu)I_\nu(\delta)\}^{-1}$, а $I_\nu$ - модифицированная функция Бесселя. Заметим, что $B(0) = q_1^{(n/2-1)/2}\{(2\pi)^{n/2}I_{n/2-1}(q_1^{1/2})\}^{-1}$, и из (8) получается известное соотношение средних значений для решений уравнения $\Delta u - q_1 u = 0$, $q_1 = \text{const}$ (см. [18]).

В качестве второго примера рассмотрим неограниченный потенциал $q_2(r) = q_2/(r(1-r))$, $q_2 = \text{const} \geq 0$. Общее решение уравнения $y'' + (n-1)r^{-1}y' -$

$-q_2(r)y = 0$, $0 < r < 1$, имеет вид [17]

$$y(r) = A\,F(\alpha - 1, n - 1 - \alpha; n - 1; r) + B(1 - r)F(n - \alpha, \alpha; 2; 1 - r),$$

где $F ={}_2 F_1$ - гипергеометрическая функция Гаусса, $\alpha = (n+((n-2)^2-4q_2)^{1/2})/2$, $A$ и $B = B(q_2)$ - произвольные постоянные. Пусть $n \geq 4$ и $0 \leq q_2 < n-3$. Условия при $r = 1$ и $r \to +0$ для главного решения дают $A = 0$, $B = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{(n-4)!(n-3-q_2)}\gamma_n$, и из (7) получаем формулу средних значений для $q_2(r)$-гармонических функций

$$u(0) = B\int_S u(\theta)d\sigma(\theta).$$

Заметим, что $B(0) = \frac{1}{\sigma_n}$.

**ABSTRACT. Hardy classes $H^p(c)$ are introduced in the usual way for continuous solutions of the equation $\Delta u - c(x)u = 0$ in the unit ball $B \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ where $\Delta$ is the Laplacian, $c \geq 0$ and $c \in L^s(B)$, $s > n$. Representations are obtained for the functions $u \in H^p(c)$, $1 \leq p \leq \infty$, which have the form of generalized Poisson integrals (or Poisson-Stieltjes integral when $p = 1$) The boundary behavior of the functions is investigated. In particular an analogue of the Fatou theorem on the almost everywhere existence of boundary values is proved. Some mean value identities are derived and examples considered.**

## ЛИТЕРАТУРА

1. L I. Myrberg, "Über subelliptische Funktionen", Suomalais. tied. toim. Ser. AI, vol. 290, pp. 1 - 9, 1960.
2. A. Dinghas, "Über einige konvexitats Pragen bei partiellen Differentialgleichungen vom Sturmschen typus", Math. Ann., vol. 155, pp. 397 - 421, 1964.
3. J. Stampacchia, "Le probleme de Dirichlet pour les equations elliptiques du second ordre á coefficients discontinus", Ann. Inst. Fourier, vol. 15, pp. 189 - 257, 1965.
4. R. M. Herve, M. Herve, "Les fonctions surharmoniques associees á un operateur elliptique du second ordre á coefficients discontinus", Ann. Inst. Fourier, vol. 19, pp. 305 - 359, 1969.
5. F. Y. Maeda, "Boundary value problems for the equation $\Delta u - q\,u = 0$ with respect to an ideal boundary", J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, Div. 1, vol. 32, pp. 85 - - 146, 1968.
6. F. Y. Maeda, "On regularity of boundary points for Dirichlet problems of the equation $\Delta u = qu$ $(q \geq 0)$", Hiroshima Math. J., vol. 1, pp. 373 - 404, 1971.
7. Б. Я. Левин, А. И. Хейфиц, "Асимптотическое поведение субфункций оператора Шредингера в $n$-мерном конусе", ДАН СССР, т. 301, стр. 540 - 543, 1988.
8. А. И. Хейфиц, "Субфункция оператора Шредингера", Ростов-на-Дону, РГУ, 137 стр., 1988. Рукопись депонирована в ВИНИТИ 19.10.1988, №: 7544-В88, РЖМат. 1989, 2В484Деп.
9. А. М. Руссаковский , "Об асимптотическом поведении субфункций оператора Шредингера конечного нижнего порядка", Сиб. Матем. журн., т. 30, стр.

160 – 170, 1989.

10. А. И. Хейфиц, "Субфункция оператора Шредингера *II*", Ростов-на-Дону, РГУ, 42 стр., 1989. Рукопись депонирована в ВИНИТИ 9.01.1989, № 199-В89, РЖМат. 1989, 4В541Деп.
11. А. И. Хейфиц, "Субфункция оператора Шредингера *III*", Ростов-на-Дону, РГУ, 101 стр., 1990. Рукопись депонирована в ВИНИТИ 26.06.1990, № 3650-В90, РЖМат. 1990, 11В383Деп.
12. А. И. Хейфиц , "Распределение значений и представление обобщенных субгармонических функцийв", ДАН СССР, т. 314, стр. 568 – 572, 1990.
13. А. И. Хейфиц , "Устранимые множества, регулярные граничные точки и формула Пуассона–Иенсена для обобщенных субгармонических функций", ДАН СССР, т. 318, стр. 288 – 290, 1991.
14. Г. Р. Оганесян, "Весовая теорема о среднем для сингулярно возмущенного уравнения Лапласа", Изв. АН Армении, Математика, т. 23, №4, стр. 325 - 335, 1988.
15. П. Кусис, Введение в Теорию Пространств $H^p$, М., Мир, 1984.
16. Zhongxin Zhao, "Green Function for Schrödinger Operator and Conditioned Feynman-Kac Gauge", J. Math. Anal. and Appl., vol. 116, pp. 309 – 334, 1986.
17. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие Трансцендентные Функции, т. 1, М., Наука, 1965.
18. Р. Курант, Уравнения в Частных Производных, М., Мир, 1964.

3 Июля 1991

Ростовский государственный университет

# МАРКИРОВАННЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ, ПОРОЖДЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫМИ ПРОЦЕССАМИ ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ

**В. К. Оганян, А. А. Абдаллах**

**Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №5, 1993**

**Пусть задан однородный и изотропный случайный процесс прямых на плоскости. В работе исследован маркированный точечный процесс пересечений с угловыми марками на тестовой прямой. Методом интегрирования комбинаторной формулы Амбарцумяна получены формулы, связывающие конечномерные распределения точечного процесса пересечений с распределениями Пальма первого и второго порядка процесса прямых.**

## §1. ВВЕДЕНИЕ

Случайный процесс прямых на плоскости можно определять как случайный точечный процесс в пространстве прямых $\mathbf{G}$. Прямую $g \in \mathbf{G}, g \subset \mathbb{R}^2$ определяют парой $g = (\varphi, p)$, где $(\varphi, p)$ – полярные координаты основания перпендикуляра, опущенного из начала координат $O$ на прямую $g$ ($\varphi$ – точка на единичной окружности $\mathbf{S}^1$, $p \in [0, \infty)$). Естественная топология на $\mathbf{G}$ – это топология листа Мебиуса (см. [1]). Обычное определение точечного процесса для пространства $\mathbf{G}$ дается следующим образом (стандартная литература для точечных процессов – [1], [2], [14]).

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех подмножеств $\mathbf{m} \subset \mathbf{G}$, удовлетворяющих условию $\mathrm{card}(\mathbf{m} \cap B) < \infty$ для любого ограниченного борелевского множества $B \subset \mathbf{G}$. Обозначим через $\mathcal{A}$ минимальную $\sigma$-алгебру подмножеств $\mathcal{M}$, относительно которой функции $\mathrm{card}(\mathbf{m} \cap B)$ измеримы для всех борелевских множеств $B \subset \mathbf{G}$. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ – некоторое вероятностное пространство. Измеримое отображение $\mathbf{m}: \Omega \longmapsto \mathcal{M}$, $\omega \in \Omega$ называется случайным точечным процессом в $\mathbf{G}$. Вероятность $P$ на $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, индуцированная $\mathbf{m}(\omega)$, называется распределением случайного процесса прямых на плоскости.

Группа $\mathbb{M}_2$ всех евклидовых движений плоскости индуцирует группу преобразований $\mathcal{M}$ в себя (группа движений $\mathcal{M}$). Процесс $\mathbf{m}(\omega)$ называется однородным и изотропным, если его распределение $P$ инвариантно относительно группы движений $\mathcal{M}$ ( $\mathbb{M}_2$-инвариантно).

Хорошо известным $\mathbb{M}_2$-инвариантным случайным процессом прямых служит пуассоновский процесс прямых, управляемый мерой $\lambda \cdot dg$, где $dg$ – инвариантная мера на $\mathbb{G}$ (см. [1], [3] и [13]), $\lambda > 0$.

Пусть $\mathbf{m}(\omega)$ – произвольный случайный процесс прямых конечной интенсивности $\lambda$, распределение которого инвариантно относительно группы евклидовых движений $\mathbb{R}^2$. Через $P$ будем обозначать распределение процесса $\mathbf{m}(\omega)$. Нас будут интересовать маркированные точечные процессы пересечений $\{x_i, \alpha_i\}$, индуцированные процессом $\mathbf{m}(\omega)$ на фиксированной тестовой прямой $g$. По определению $\{x_i\} = \mathbf{m}(\omega) \cap g$ (т. е. $\{x_i\}$ – случайное множество точек пересечений прямых случайного процесса с $g$) ; марка $\alpha_i$ есть угол в точке $x_i$, под которым прямая из реализации $\mathbf{m}$ пересекает тестовую прямую $g$.

Пусть $\mathcal{A}_g$ является $\sigma$–алгеброй событий, соответствующая $\{x_i, \alpha_i\}$. Очевидно, что $\mathcal{A}_g \subset \mathcal{A}$. Обозначим через $P_*$ распределение маркированного точечного процесса пересечений $\{x_i, \alpha_i\}$. $P_*$ определена на $\mathcal{A}_g$ и является сужением $P$ на $\mathcal{A}_g$. (Из предположения инвариантности $P$ относительно $\mathbb{M}_2$ следует, что $P_*$ не зависит от прямой $g$, на которой рассматривается процесс пересечений). Продолжение $P_*$ на $\mathcal{A}$ единственно в классе $\mathbb{M}_2$-инвариантных распределений и совпадает с $P$.

И обратно, мы можем начать со случайной последовательности $\{x_i, \alpha_i\}$, где $\{x_i\}$ – случайный точечный процесс на $g$, марки $\alpha_i$ принадлежат $(0, \pi)$. Через $\mathbf{p}$ обозначим распределение $\{x_i, \alpha_i\}$, которое является вероятностью на $\mathcal{A}_g$. Пусть $\{g_i\}$ – случайный процесс прямых, соответствующий $\{x_i, \alpha_i\}$ : в множестве $g_i$, есть прямая, пересекающая ось $X$ в точке $x_i$, под углом $\alpha_i$. Через $P_0$ обозначим распределение построенного таким способом процесса прямых $\{g_i\}$. Результаты работы касаются следующей общей проблемы стохастической геометрии : каков класс распределений процесса $\{x_i, \alpha_i\}$, для которого $P_0$ $\mathbb{M}_2$–инвариантно ? Иными словами : когда $\{g_i\}$, построенный по $\{x_i, \alpha_i\}$ будет однородным и изотропным случайным процессом прямых ?

В работе изучаются $\mathbb{M}_2$-инвариантные распределения $P$ второго порядка процессов прямых на $\mathbb{R}^2$. Рассматриваются конечномерные распределения $\{x_i\}$ :

$$p_{k_1,...,k_m}(\tau_1, ..., \tau_m) = P\{\mathbf{m}: \quad \mathrm{card}(\mathbf{m} \cap \tau_i) = k_i, \ i = 1, ..., m\},$$

где $\tau_1, ..., \tau_m$ – произвольные непересекающиеся интервалы прямой $g$, а $k_1, ..., k_m$ – неотрицательные целые числа.

Мы будем использовать метод усреднения комбинаторных разложений, который ранее применялся при изучении процессов прямых в [4–6], [11] (см. также [2,3] и [9]). Однако там были рассмотрены только одномерные распределения $p_k(t)(m = 1)$.

Настоящее обобщение на многомерные распределения стало возможным, благодаря новой версии комбинаторной формулы Р. В. Амбарцумяна (см. [7]), где условие отсутствия колинеарных точек не обязательно.

Основной результат работы суть формулы, связывающие конечномерные распределения точечного процесса пересечений с распределениями Пальма первого $(\Pi_g)$ и второго $(\Pi_{g_1 g_2})$ порядков. Оба распределения Пальма впервые рассматривались в [1]. В частности, в [1] было показано, что $\Pi_g$ и $\Pi_{g_1 g_2}$ можно вычислить в терминах распределения $\mathbf{p}$ маркированного случайного точечного процесса $\{x_i, \alpha_i\}$. Следовательно, полученные нами формулы служат необходимыми условиями, для того чтобы $P_0$ описывала бы $\mathbb{M}_2$–инвариантный случайный процесс прямых.

## §2. КОМБИНАТОРНАЯ ФОРМУЛА Р. В. АМБАРЦУМЯНА

Предположим, что дано конечное множество точек $\{P_i\}$ на плоскости. Обозначим через $\rho_{ij}$ отрезок с концами $P_i$ и $P_j$ (или его длину) и $[\rho_{ij}] = \{g \in \mathbf{G}: g \cap \cap \rho_{ij} \neq \emptyset\}$. Пусть $a\{P_i\}$ – минимальная (конечная) алгебра подмножеств $\mathbf{G}$, содержашая все множества $[\rho_{ij}]$. Бьюффоновым кольцом $Br\{P_i\}$ называется кольцо ограниченных элементов алгебры $a\{P_i\}$ (см. [2], [3], [12]).

**Определение 1.** Две точки $P_i$ и $P_j$ называются соседними, если отрезок $\rho_{ij}$ не содержит других точек из множества $\{P_i\}$.

Через $\mu$ обозначим $M_2$–инвариантную меру на $\mathbf{G}$.

**Теорема.** (Р. В. Амбарцумян [7]). *Инвариантная мера любого множества $C$ из кольца $Br\{P_i\}$ представляется линейной комбинацией расстояний $\rho_{ij}$ между соседними точками $P_i$ и $P_j$ с целочисленными коэффициентами :*

$$\mu(C) = \sum_{i<j} c_{ij}(C)\, \rho_{ij}, \tag{2}$$

*где сумма $\sum\limits_{i<j}$ берется по всем парам соседних точек множества $\{P_i\}$. Целочисленные коэффициенты $c_{ij}$ могут быть вычислены по формуле "четырех индикаторов" :*

$$c_{ij}(C) = I_C(\overset{+}{i}, \bar{j}) + I_C(\bar{i}, \overset{+}{j}) - I_C(\bar{i}, \bar{j}) - I_C(\overset{+}{i}, \overset{+}{j}), \tag{2'}$$

*где*

$$I_C(\overset{+}{i}, \overset{+}{j}) = \lim_{\substack{g \to g_{ij} \\ g \in B_1}} I_C(g), \qquad I_C(\bar{i}, \bar{j}) = \lim_{\substack{g \to g_{ij} \\ g \in B_2}} I_C(g),$$

$$I_C(\overset{+}{i}, \bar{j}) = \lim_{\substack{g \to g_{ij} \\ g \in B_3}} I_C(g), \qquad I_C(\bar{i}, \overset{+}{j}) = \lim_{\substack{g \to g_{ij} \\ g \in B_4}} I_C(g),$$

*$g_{ij}$ – прямая, проходящая через точки $P_i$, $P_j$, направленная от $P_i$ к $P_j$*

$B_1 = \{g \in \mathbf{G}:$ *все точки, лежащие на прямой $g_{ij}$, расположены в правой полуплоскости, относительно прямой $g_{ij}\}$,*

$B_2 = \{g \in \mathbf{G}:$ *все точки, лежащие на прямой $g_{ij}$, расположены в левой полуплоскости, относительно прямой $g_{ij}\}$,*

$B_3 = \{g \in \mathbf{G}:$ *точка $P_i$ принадлежит правой полуплоскости, относительно прямой $g_{ij}$, а $P_j$ – в левой $\}$.*

$B_4 = \{g \in \mathbf{G}:$ *точка $P_i$ принадлежит левой полуплоскости, ограниченной относительно прямой $g_{ij}$, а $P_j$ – в правой$\}$.*

Коэффициенты в $(2')$ не зависят от выбора направления прямой $g_{ij}$.

Здесь и далее $I_A(g) = 1$, если $g \in A$ и 0 – в остальных случаях.

## §3. ПЛАН ДЕЙСТВИЙ

Нижеприведенное геометрическое построение обобщает построение, использованное при изучении одномерных распределений $\{x_i, \alpha_i\}$ в [1].

Ввиду однородности и изотропности $P$ , мы можем предполагать, что отрезки $\tau_1, ..., \tau_m$ берутся на оси $X$, а левый конец отрезка $\tau_1$ совпадает с началом координат $O$. (см. Рис. 1).

Заметим, что вероятность $p_{k_1,...,k_m}(\tau_1, ..., \tau_m)$ на самом деле является функцией $(2m-1)$ числовых переменных

$$p_{k_1,...,k_m}(t_1, ..., t_m, \delta_1, ..., \delta_{m-1}) = p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{\delta}) = P\{\mathbf{m} : \mathrm{card}(\mathbf{m} \cap \tau_i) = k_i, \ i = 1, ..., m\}, \tag{1}$$

где $t_1, ..., t_m$ – длины интервалов $\tau_i$, $\delta_i$ – расстояния между $\tau_i$ (см. Рис. 1).

Рассмотрим прямоугольник $R$, основанием которого является объединение отрезков $\tau_1, \delta_1, ..., \delta_{m-1}, \tau_m$ (см. Рис.1), ширина $R$ равна

$$|Q_1, Q_2| = |\nu_1| = |Q_3, Q_4| = |\nu_2| = l.$$

Вершины прямоугольника $R$ обозначим через $Q_i$, $i = 1, ..., 4$. Обозначим через $D_i \subset R$ прямоугольник, лежащий в $R$, одна из сторон которого есть отрезок $\tau_i$, а длина другой стороны равна $l$ (см. Рис. 1), а остальные отрезки, перпендикулярные оси $X$ и являющиеся границами $D_1, ..., D_m$, будем обозначать через $a_1, ..., a_{2m-1}$ (см. Рис. 1).

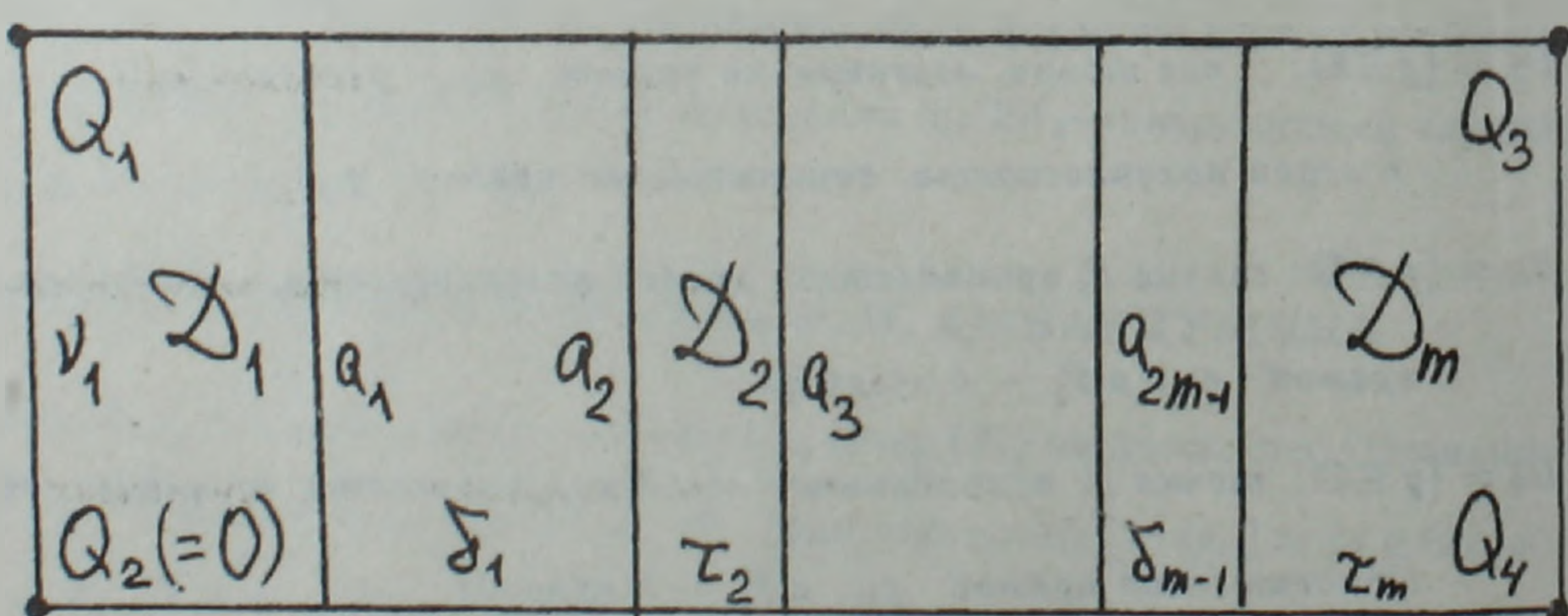


**Рис. 1**

Обозначим через $\mathbf{m}_R(\omega) = \{g_1, \ldots, g_M\}$ прямые из реализации $\mathbf{m}(\omega)$, которые пересекают $R$ ($M$ – число прямых, пересекающих $R$). Пусть $\chi_i(g_k) = g_k \cap D_i$ – случайные хорды прямоугольника $D_i$, порожденные прямыми из $\{g_k\}_{k=1}^M$. Далее, пусть $\{P_j\}_{j=1}^s$ – множество точек пересечения прямых из $\mathbf{m}_R(\omega)$ с отрезками $a_1, \ldots, a_{2m-1}$ и сторонами прямоугольника $R$. Пусть $A = [\nu_1] \cap [\nu_2]$, где $[\nu] = \{g \in \in \mathbf{G}\colon\ g \cap \nu \neq \emptyset\}$ и

$$B_{k_1,\ldots,k_m} = B_{\overline{k}} = \{g \in \mathbf{G}\colon \mathrm{card}(\mathbf{m}_R(\omega) \cap \chi_i(g)) = k_i,\ i = 1, \ldots, m\}.$$

Легко видеть, что

$$A \cap B_{\overline{k}} \in Br\{\{P_j\} \cup \{Q_i\}\}.$$

В следующем параграфе мы запишем комбинаторную формулу (2) для инвариантной меры $A \cap B_{\overline{k}}$. В §5 мы усредним это комбинаторное разложение относительно распределения $P$ $\mathbb{M}_2$-инвариантного процесса прямых второго порядка. Процесс прямых называется процессом второго порядка, если первая и вторая моментные меры $\Lambda_1(\cdot)$ и $\Lambda_2(\cdot)$ локально конечны. Результат усреднения мы будем разлагать в ряд Тейлора по параметру $l$ и выделять члены порядка $l^2$ ($l \to 0$). Таким способом мы приходим к требуемому результату для $p_{\overline{k}}(\overline{l}, \overline{r})$.

Ниже, при интегрировании комбинаторного представления, мы будем использовать следующие две формулы, которые связывают математические ожидания случайных сумм с распределениями Пальма этих процессов (случай произвольного пространства можно найти в [2], [8], [10]) :

$$E_P \sum_{g_i \in \mathbf{m}} \varphi_1(g_i, \mathbf{m}) = \int_{\mathbf{G}} d\Lambda_1(g) \int_{\mathcal{M}} \varphi_1(g, \mathbf{m})\, \Pi_g(d\mathbf{m}), \tag{3}$$

$$E_P \sum_{g_i, g_j \in \mathbf{m}} \varphi_2(g_i, g_j, \mathbf{m}) = \int_{\mathbf{G}\times\mathbf{G}} \Lambda_2(dg_1, dg_2) \int_{\mathcal{M}} \varphi_2(g_1, g_2, \mathbf{m})\, \Pi_{g_1, g_2}(d\mathbf{m}). \tag{4}$$

Здесь $\varphi_1 : \mathbf{G} \times \mathcal{M} \longmapsto \mathbb{R}^1$ и $\varphi_2 : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathcal{M} \longmapsto \mathbb{R}^1$ – неотрицательные измеримые функции, $\Pi_g$ и $\Pi_{g_1, g_2}$ – распределения Пальма $\mathbf{m}(\omega)$ первого и второго порядков. В действительности тождества (3) и (4) могут служить определениями $\Pi_g$ и $\Pi_{g_1, g_2}$, соответственно. Заметим, однако, что $\Pi_g$ и $\Pi_{g_1, g_2}$ имеют интуитивное толкование как условные распределения процесса прямых $\mathbf{m}(\omega)$ при условии, что в $g \in \mathbf{G}$ (или в $(g_1, g_2) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G}$) имеются прямые из $\mathbf{m}(\omega)$.

Так как первая моментная мера наследует свойство $\mathbb{M}_2$-инвариантности, то

$$\Lambda_1(B) = \lambda\,\mu(B), \tag{5}$$

где $\mu$ – инвариантная мера в $\mathbf{G}$, $\lambda > 0$ называется интенсивностью $P$.

Мы предполагаем также, что вторая моментная мера $\Lambda_2(\cdot)$ абсолютно непрерывна относительно $dg_1\,dg_2$ :

$$\Lambda_2(dg_1\,dg_2) = f(g_1, g_2)\,dg_1\,dg_2, \tag{6}$$

где плотность $f(g_1, g_2)$ непрерывна.

## §4. КОМБИНАТОРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Теперь в (2) мы возьмем $C = A \cap B_{\overline{k}}$, а сумма в правой части (2) распространяется на все пары соседних точек множества $\{P_j\}_{j=1}^{s} \cup \{Q_i\}_{i=1}^{4}$. Это множество пар соседних точек разбивается на четыре непересекающиеся подмножества, на которых коэффициенты $c_{ij}(A \cap B_{\overline{k}})$ вычисляются по одной и той же формуле. Следовательно

$$\mu(A \cap B_{\overline{k}}) = \sum_{i=1}^{4} A_i, \tag{7}$$

где

$$A_1 = \sqrt{t^2 + l^2}\cdot I_{\cdot}(Q_1, Q_4) + \sqrt{t^2 + l^2}\cdot I_{\cdot}(Q_2, Q_3) - t\cdot I_{\cdot}(Q_1, Q_3) - t\cdot I_{\cdot}(Q_2, Q_4), \tag{8}$$

$$A_2 = 2\sum_{g_n \in A}\sum_{i=1}^{m} |\chi_i(g_n)|\cdot[I_{k_i-1}(\chi_i) - I_{\cdot}(\chi_i)], \tag{9}$$

$$A_3 = \sum_{P_i, P_j} |t_{ij}|\cdot[I_d(t_{ij}) - I_s(t_{ij})]I_A(t_{ij})w_{ij}(\overline{k}), \tag{10}$$

$$A_4 = \sum_{i=1}^{4}\sum_{P_j} |\beta_{ij}|\cdot I_A(\beta_{ij})[I_d(\beta_{ij}) - I_s(\beta_{ij})]\cdot[I_{k_i-1}(\beta_{ij}) - I_{\cdot}(\beta_{ij})]\,. \tag{11}$$

Здесь $t$ – длина интервала $Q_2Q_4$ ; $I_{k_i-q}$ – индикаторная функция множества

$$B_{\overline{k}(k_i-q)} = \{g \in \mathbf{G}:\ \mathrm{card}(\mathbf{m}_R(\omega) \cap \tau_j) = k_j, j \neq i$$
$$\text{и } \mathrm{card}(\mathbf{m}_R(\omega) \cap \tau_i) = k_i - q\},\ q = 1, 2,$$

$I_{k_i-1,k_j-1}$ – индикаторная функция множества

$$B_{\bar{k}(k_i-1)(k_j-1)} = \{g \in \mathbf{G}:\ \mathrm{card}(\mathbf{m}_R(\omega) \cap \tau_n) = k_n, n \neq i, j$$
$$\text{и } \mathrm{card}(\mathbf{m}_R(\omega) \cap \tau_s) = k_s - 1,\ s = i, j\},$$

$I_{B_{\bar{k}}} \equiv I.$ ; $t_{ij}$ – отрезок типа $P_iP_j$ и $g_{ij} \notin \mathbf{m}$ ; $|\cdot|$ – лебегова длина ; $w_{ij}(\bar{k})$ – алгебраическая сумма индикаторов типа $I.$, $I_{k_i-q}$ и $I_{k_i-1,k_j-1}$ и зависит от расположения $t_{ij}$ ; $\beta_{ij}$ – отрезок типа $Q_iP_j$ ; $I_d(t_{ij}) = 1$, если хорды $\chi_l$ и $\chi_n$ прямоугольников $D_l$ и $D_n$ ($P_i \in \partial D_l$, $P_j \in \partial D_n$) лежат в разных полуплоскостях, ограниченных прямой $g_{ij}$ ; $I_s(\cdot) = 1 - I_d(\cdot)$ ; $I_d(\beta_{ij})$ (см. на Рис. 2.)

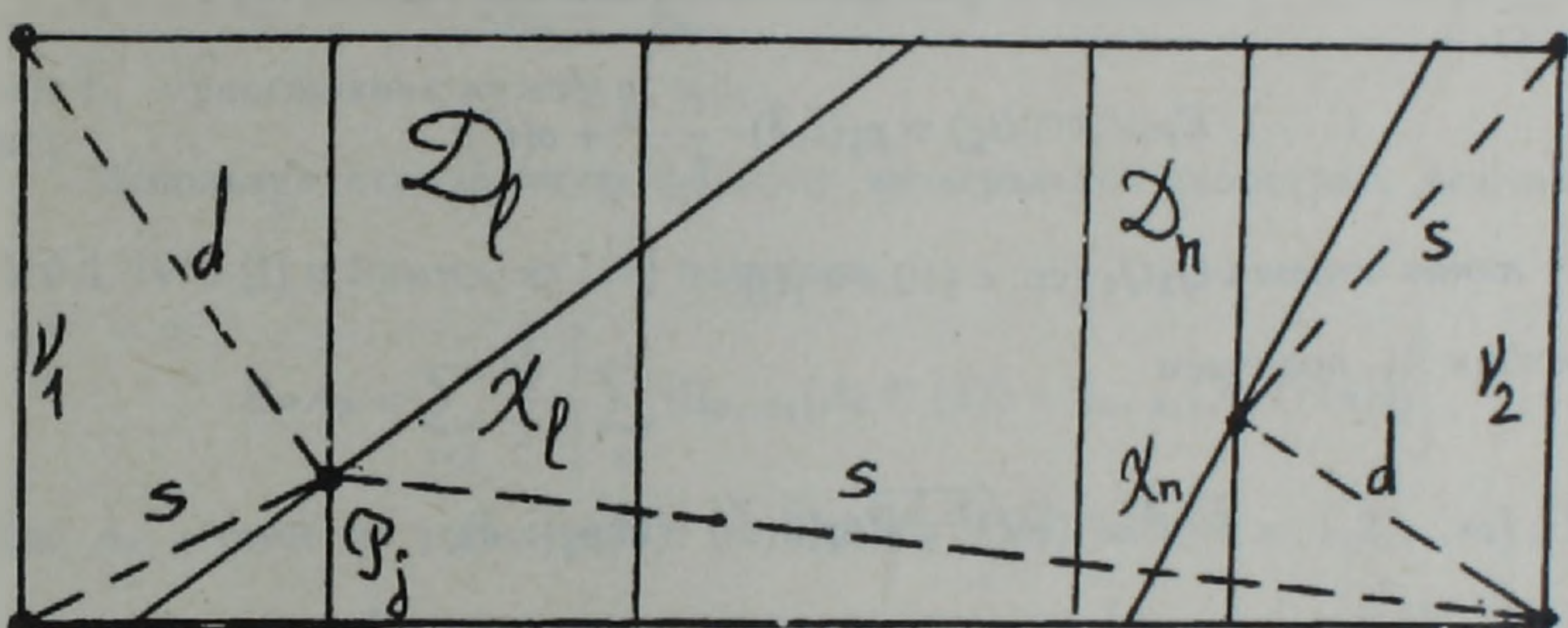


**Рис. 2** $P_j$ – конец хорды $\chi_l$. Пунктирные линии соединяют $Q_iP_j$. Тип отрезка $Q_iP_j$ зависит от направления отрезков $\nu_1$ (или $\nu_2$) и $\chi_l$, которые исходят из конца отрезка $Q_iP_j$. Отрезок $Q_iP_j$ имеет тип $s$, если оба последних отрезка лежат в одной полуплоскости относительно прямой $g_{Q_iP_j}$, и тип $d$ – в противном случае.

Заметим, что последние два слагаемых в выражении $A_1$ являются результатом суммирования слагаемых, соответствующих соседним парам, лежащим на $Q_1Q_3$ или $Q_2Q_4$.

## §5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ КОМБИНАТОРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ (2)

Пусть $P$ – распределение случайного процесса прямых, $\mathbb{M}_2$-инвариантного, второго порядка и с вероятностью 1 не имеющего в реализации пар параллельных прямых. Нашей целью является усреднение относительно $P$ комбинаторного разложения (7), зависящего от $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$. Полученные величины зависят от параметра $l$ ($l \to 0$). Мы будем выписывать ниже главные члены, которые имеют порядок $l^2$.

Интегрируя по $P$ левую часть (7) и применяя теорему Фубини, получаем

$$E_P\mu(A \cap B_{\overline{k}}) = \int_A E_P I_{\cdot}(g)\,dg = \int_A p_{\overline{k}}(\chi_1(g), \ldots, \chi_m(g))\,dg. \qquad (12)$$

Здесь $E_P$ обозначает математическое ожидание относительно распределения $P$ и

$$p_{\overline{k}}(\chi_1(g), \ldots, \chi_m(g)) = E_P I_{\cdot}(g) = P(g \in B_{\overline{k}}) = p_{\overline{k}}(\overline{\chi}(g), \overline{\delta}(g)). \qquad (13)$$

Предполагая, что $l$ стремится к нулю, выделим главный член в (12) :

$$E_P\mu(A \cap B_{\overline{k}}) = p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{\delta}) \cdot \frac{1}{t} \cdot l^2 + o(l^2). \qquad (14)$$

где $t$ – длина отрезка $Q_2Q_4$ (ср. с §10.4 в [1]).

Переходя к $A_1$, получаем

$$E_P A_1 = 2\sqrt{t^2 + l^2}\,p_{\overline{k}}(\overline{d}, \overline{\delta}') - 2t\,p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{\delta}),$$

где $d_i = (Q_2, Q_3) \cap D_i$, $i = 1, \ldots, m$ и $\delta'_1, \ldots, \delta'_m$ пробелы между $d_i$.

Так как $\sqrt{t^2 + l^2} = t + \dfrac{l^2}{2t^2}\,l^2 + o(l^2)$, $d_i - t_i = \dfrac{t_i}{2t^2}\,l^2 + o(l^2)$ и $\delta'_i - \delta_i = \dfrac{\delta_i}{2t^2}\,l^2 + o(l^2)$, то

$$E_P A_1 = p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{\delta}) \cdot \frac{l^2}{t} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{\delta})}{\partial t_i}\frac{t_i}{t} \cdot l^2 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{\delta})}{\partial \delta_i}\frac{\delta_i}{t} \cdot l^2 + o(l^2). \qquad (15)$$

Используя формулы (3) и (5), находим

$$E_P A_2 = 2\lambda \int_A dg \sum_{i=1}^{m} |\chi_i(g)| \cdot \left[\pi_{k_i - 1}(\overline{\chi}(g), \overline{\delta}(g) - \pi_{\overline{k}}(\overline{\chi}(g), \overline{\delta}(g)\right],$$

где

$$\pi_{\overline{k}}(\overline{\chi}(g), \overline{\delta})(g) = \Pi_g(A_{\overline{k}}),\ \pi_{k_i - 1}(\overline{\chi}(g), \overline{\delta}(g) = \Pi_g(A_{k_i - 1}),$$

$$A_{\overline{k}} = \{\mathbf{m}(\omega):\ \operatorname{card}(\mathbf{m}_R(\omega) \cap \chi_i(g) = k_i,\ i = 1, \ldots, m\},$$

$$A_{k_i - 1} = \{\mathbf{m}(\omega):\ \operatorname{card}(\mathbf{m}_R(\omega) \cap \chi_j(g) = k_j,\ j \neq i,\ \operatorname{card}(\mathbf{m}_R(\omega) \cap \chi_i(g) = k_i - 1\}.$$

Нетрудно выделить главный член в выражении $E_P A_2$ при $l \to 0$. Получим

$$E_P A_2 = \frac{2\lambda}{t} \sum_{i=1}^{m} t_i \left[\pi_{k_i-1}(\bar{t}, \bar{\delta} - \pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{\delta})\right] l^2 + o(l^2). \tag{16}$$

Аналогично, используя формулы (4), (6), получим

$$E_P A_3 = \sum_{i<j} \int_{x_1 \in a_i} dg_1 \int_{x_2 \in a_j} dg_2 t'_{ij} [I_d(t_{ij} - I_s(t_{ij})] f(g_1, g_2) \cdot E_{g_1 g_2}(w_{ij}(\bar{k})), \tag{17}$$

где $x_1 = a_i \cap g_1$, $x_2 = a_j \cap g_2$ и $E_{g_1 g_2}$ обозначает математическое ожидание относительно распределения Пальма второго порядка $\Pi_{g_1 g_2}$, $t'_{ij}$ – длина отрезка между $x_1$ и $x_2$.

**Лемма.**

$$\int_{a_i} dx_1 \int_{a_j} dx_2 I_A t'_{ij} = \frac{t_{ij}^2}{t} l^2 + o(l^2),$$

*где $t_{ij}$ – расстояние между $a_i$ и $a_j$.*

Используя стандартную формулу интегральной геометрии, результат в §10.3, IV в [1] и Лемму, из (17) получаем

$$E_P A_3 = \sum_{i<j} \frac{t_{ij}^2}{t} \left[\sum_n [\Pi_{x_1,x_2}(A_n \cap \{d\}) - \Pi_{x_1,x_2}(A_n \cap \{s\})]\right], \tag{18}$$

где $A_n$ – событие типа $\{\mathbf{m}(\omega):\ \mathrm{card}(\mathbf{m}_R(\omega) \cap \tau_i) = k_i,\ i = 1, 2, ..., m\}$; $\Pi_{x_1,x_2}$ – распределение Пальма второго порядка процесса $\{x_i, \alpha_i\}$, ( т.е. $\Pi_{x_1 x_2}(A)$ есть условная вероятность события $A$ при условии, что имеются пересечения в точках $x_1, x_2$).

Рассуждая как в работе [6] и §10.4 в [1], получаем

$$E_P A_4 = -2E_P A_2 - 2E_P A_3 + o(l^2). \tag{19}$$

Приравнивая коэффициенты порядка $l^2$ в правой и левой частях усредненной формулы (7), из (14) – (18) получаем требуемый результат :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{\delta})}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{\delta})}{\partial \delta_i} \delta_i = 2\lambda \sum_{i=1}^{m} t_i \left[\pi_{k_i-1}(\bar{t}, \bar{\delta} - \pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{\delta})\right] + \\ + \sum_{i<j} t_{ij}^2 \left[\sum_n [\Pi_{x_1,x_2}(A_n \cap \{d\}) - \Pi_{x_1,x_2}(A_n \cap \{s\})]\right].\end{aligned} \tag{20}$$

Как уже упоминалось во введении это уравнение является необходимым условием для того, чтобы случайная последовательность $\{x_i, \alpha_i\}$ порождала $\mathbb{M}_2$-инвариантный процесс прямых на плоскости.

## §6. ОБСУЖДЕНИЕ

Результат (20) приводит к следующей задаче : каков класс распределений **p** процессов $\{x_i, \alpha_i\}$, для которых последнее слагаемое обращается в нуль? В самом деле, предположение, что $\{\alpha_i\}$ – последовательность независимых углов, является достаточным. Однако, это предположение, как показывает следующее построение, может быть слишком сильным.

Пусть **p** – распределение произвольного процесса $\{x_i, \alpha_i\}$, для которого последовательность $\{\alpha_i\}$, как и последовательности $\{x_i\}$ и $\{\alpha_i\}$ могут быть зависимыми. Преобразуем этот процесс в процесс $\{x_i, \alpha'_i\}$ следующим образом. Пусть $\{\varepsilon_i\}$ – последовательность Бернулли независимых случайных величин, $\varepsilon_i = 1$ с вероятностью $1/2$ и $\varepsilon_i = 0$ с вероятностью $1/2$.

1) точки $x_i$ остаются без изменения.

2) $\alpha'_i = \begin{cases} \alpha_i, & \text{если } \varepsilon_i = 1 \\ \pi - \alpha_i, & \text{если } \varepsilon_i = 0. \end{cases}$

*Для процесса* $\{x_i, \alpha'_i\}$ *последнее слагаемое в (20) обращается в нуль, т. е. (20) принимает вид*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{\delta})}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{\delta})}{\partial \delta_i} \delta_i = 2\lambda \sum_{i=1}^{m} t_i \left[\pi_{k_i - 1}(\overline{t}, \overline{\delta} - \pi_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{\delta})\right]. \tag{21}$$

Ниже, в следующей теореме, отсутствие последнего слагаемого в (20) рассматривается как условие описания специального класса распределений **p**, и называется “условие (21)”.

**Теорема.** *Если маркированный точечный процесс* $\{x_i, \alpha_i\}$ *удовлетворяет условию (21) и распределение Пальма первого порядка* $\Pi_g$ *совпадает с* $P$, *то точечный процесс* $\{x_i\}$ *является пуассоновским, т. е.*

$$p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{\delta}) = \prod_{i=1}^{m} \frac{(2\lambda t_i)^{k_i}}{k_i!} \exp(-2\lambda t_i).$$

**Доказательство.** Для простоты предположим, что нет пропусков между $t_i$. Обозначим через $\Phi(\overline{t}, \overline{z})$ производящую функцию вероятностей $p_{\overline{k}}(\overline{t})$, т. е.

$$\Phi(\overline{t}, \overline{z}) = \sum_{\overline{k}} p_{\overline{k}}(\overline{t}) \cdot \overline{z}^{\overline{k}}$$

и $\Phi(\bar{0},\bar{z}) = 1$ для всех $\bar{z}$. Перепишем уравнение (21) для функции $\Phi$, получаем

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Phi(\bar{t},\bar{z})}{\partial t_i} t_i = 2\lambda \sum_{i=1}^{m} t_i(z_i - 1) \cdot \Phi(\bar{t},\bar{z}). \tag{22}$$

Заметим, что для производящей функции пуассоновского точечного процесса, т.е. для $\Phi(\bar{t},\bar{z}) = \exp\left(2\lambda \sum_{i=1}^{m} t_i(z_i - 1)\right)$, справедливо уравнение (22). Будем искать решения уравнения (22) в виде

$$\Phi(\bar{t},\bar{z}) = \exp\left(2\lambda \sum_{i=1}^{m} t_i(z_i - 1)\right) \cdot F(\bar{t},\bar{z}), \tag{23}$$

где

$$F(\bar{0},\bar{z}) = 1 \quad \text{для всех} \quad \bar{z}. \tag{24}$$

Подставляя (23) в (22), получим уравнение для $F(\bar{t},\bar{z})$ :

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F(\bar{t},\bar{z})}{\partial t_i} t_i = 0. \tag{25}$$

Это хорошо известное уравнение Эйлера для однородных функций порядка 0,т. е.

$$F(\bar{t},\bar{z}) = F(k\bar{t},\bar{z}) \quad \text{для всех } k > 0$$

общее решение уравнения (24). Если $k \to 0$, то из (24) получаем, что $F(\bar{t},\bar{z}) \equiv 1$.

Теорема доказана.

**ABSTRACT. Let homogeneous and isotropic line process in the plane be given. The marked point process of intersections with angular marks generated on a test line is investigated. By the method of integration of a version Ambartzumian's combinatorial formula we obtain formulae connecting finite dimensional distributions of the point process of intersections with the first and the second order Palm distributions of the line process.**

## ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штоян, Введение в Стохастичекую Геометрию, М., Наука, 1989.
2. Й. Керстан, К. Маттес, Й. Мекке, Безгранично Делимые Точечные Процессы, М., Наука, 1982.
3. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology. John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
4. V. K. Oganian, "On Palm distributions of processes of lines in the plane," Stochastic Geometry, Geometric Statistics, stereology, eds. by R. V. Ambartzu-

mian and W. Weil, Teubner Texte zur Mathematik, vol. 65, pp. 124 – 132, 1984.
5. В. К. Оганян, "Комбинаторные принципы в стохастической геометрии случайных процессов отрезков", ДАН Арм. ССР, т. 68, стр. 150 –154, 1979.
6. V. K. Oganian, "Combinatorial decompositions and homogeneous geometrical processes," Acta Applicandae Math., vol. 9, pp. 71 – 81, 1987.
7. R. V. Ambartzumian, "Beyond the Buffon needle," Preprint, 1993.
8. R. V. Ambartzumian, "Probability distribution in Stereology of random geometrical processes," in Recent Trends in Math., Reinhardbrunn (collection of papers), BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, vol. 50, pp. 5 –12, 1982.
9. R. V. Ambartzumian, "Factorization in integral and stochastic geometry," Teubner Texte zur Mathematik, vol. 65, pp. 14 – 33, 1984.
10. O. Kallenberg, Random Measures, Akademie Verlag, Berlin, Reading, Mass., 1983.
11. В. К. Оганян, "О распределении длины "типичного" ребра случайного разбиения", Изв. АН Армении, Математика, т. 19, стр. 248 – 256, 1984.
12. R. V. Ambartzumian, "Stochastic geometry from the standpoint of integral geometry," Adv. Appl. Prob., vol. 9, pp. 792 – 823, 1977.
13. Л. Сантало, Интегральная Геометрия и Геометрические Вероятности, М., Наука, 1983.
14. D Stoyan, W. S. Kendall and J. Mecke, Stochastic Geometry and its Applications, John Wiley, Chichester, 1987.

22 Октября 1993

Ереванский государственный университет

# МОНОТОННЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Э. А. Даниелян, К. Р. Таталян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, №5, 1993

## §1. РЕЗУЛЬТАТЫ

Результаты настоящей заметки относятся к теории систем Маркова, описанной в книгах [1], [2]. Свойство монотонности, которое мы вводим для последовательности обобщенных функций многих переменных, было известно ранее и широко использовалось в линейном случае.

Пусть $k$ – натуральное число, $(y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$, $(z_1, ..., z_m) \in \mathbb{R}^m$. Пишем

$$(y_1, ..., y_m) \prec_k (z_1, ..., z_m), \tag{1}$$

если не существуют натуральные числа $s_1, ..., s_k$, $1 \leq s_1 < \cdots < s_k \leq m$ такие, что

$$(-1)^{k-i} y_{s_i} > (-1)^{k-i} z_{s_i}, \qquad i = 1, ..., k.$$

Отношение (1) означает, что в последовательности $z_1 - y_1, ..., z_m - y_m$ происходит не более $k-1$ перемен знака, причем если число перемен знака равно $k-1$, то последний знак – "+".

Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $n \leq m$, называетсяis $M$-*матрицей* (см. [1]), если

$$\begin{vmatrix} a_{1,s+1} & a_{1,s+2} & \cdots & a_{1,s+r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,s+1} & a_{r,s+2} & \cdots & a_{r,s+r} \end{vmatrix} > 0$$

для любых $1 \le r \le n$, $0 \le s \le m - r$.

Пусть (2) является $M$-матрицей. Известно [1], [2], что для системы функций

$$f_i(x_1, ..., x_m) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{im}x_m + b_i, \quad i = 1, ..., n,$$

имеем

$$f_k(y_1, ..., y_m) < f_k(z_1, ..., z_m), \tag{3}$$

как только

$$f_i(y_1, ..., y_m) = f_i(z_1, ..., z_m), \quad i = 1, ..., k-1, \tag{4}$$

и справедливо (1), $1 \le k \le n$.

Введем следующее

**Определение.** Система функций

$$f_1(x_1, ..., x_m), \ldots, f_n(x_1, ..., x_m), \quad n \le m, \tag{5}$$

определенных на множестве $V \subset \mathbb{R}^m$, называется ***монотонной***, если из (1) и равенств (4) следует (3), где $(y_1, ..., y_m) \in V$, $(z_1, ..., z_m) \in V$, $1 \le k \le n$.

Целью настоящей работы является формулировка и доказательство следующей теоремы.

**Теорема.** *Пусть (5) – система непрерывно дифференцируемых функций и $V$ такое как в (a), (b) или (c) :*

$$(a) \qquad V = \{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_m): \quad -\infty \le a_i < x_i < b_i \le +\infty, \quad i = 1, ..., m\};$$

$$(b) \qquad V = \{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_m): \quad -\infty \le a < x_1 < \cdots < x_m < b \le +\infty, \};$$

$$(c) \qquad V = \{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_m): \quad +\infty \ge b > x_1 > \cdots > x_m > a \ge -\infty, \}.$$

*Если для всех $\mathbf{x} \in V$*

$$\left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right)_{i=1,...,n}^{j=1,...,m} \tag{6}$$

*является $M$-матрицей, то система функций (5) монотонна.*

**Доказательство Теоремы** дано в §3.

## §2. ПРИМЕРЫ

1. Система функций

$$f_1(x_1,...,x_n) = x_1 + \cdots + x_n,$$

$$f_2(x_1,...,x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n,$$

$$f_3(x_1,...,x_n) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_n(x_1,...,x_n) = x_1x_2\cdots x_n,$$

определенных на множестве $V = \{(x_1,...,x_n) : x_1 > \cdots > x_n\}$, монотонна.

Докажем это основываясь на приведенной выше Теореме. В то же время отметим существование другого доказательства, основанного на формулах Виета. Доказательство опирается на следующие свойства :

$$(1) \qquad \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = f_{i-1}^j(\mathbf{x}),$$

$$(2) \qquad f_i^s(\mathbf{x}) - f_i^r(\mathbf{x}) = (x_r - x_s)f_{i-1}^{s,r}(\mathbf{x}),$$

где

$$f_0^j(\mathbf{x}) = 1, \quad f_i^j(\mathbf{x}) = f_i(x_1,...,x_{j-1},0,x_{j+1},....,x_n),$$

$$f_i^{s,r}(\mathbf{x}) = f_i(x_1,...,x_{s-1},0,x_{s+1},....,x_{r-1},0,x_{r+1},....,x_n), \quad s < r.$$

Согласно нашей Теореме достаточно показать, что для любых $1 \leq k \leq n$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ и $\mathbf{x} \in V$ определитель

$$D = \left|\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_{j_r}}\right|_{i,r=1}^k$$

положителен. Доказательство проводится индукцией по $k$. При $k = 1, 2$ утверждение очевидно. Предположим, что положительность имеет место при $k-1$. Тогда

$$D = \left|f_{i-1}^{j_r}(\mathbf{x})\right|_{i,r=1}^k = \prod_{s=1}^{k-1}(x_{j_k} - x_{j_s})\left|f_{i-1}^{j_r,j_k}(\mathbf{x})\right|_{i,r=1}^{k-1}.$$

Последний определитель положителен согласно сделанному предположению.

2. Сначала напомним [1], что функции $u_1(t),...,u_n(t)$, $t \in (a,b)$ образуют $M$-систему, если $\left(u_i(t_j)\right)_{i,j=1}^n$ является $M$-матрицей для любых $a < t_1 < \cdots < t_n < b$.

Пусть $g_1(t), ..., g_n(t)$, $t \in (a, b)$ – непрерывно дифференцируемые функции такие, что их производные $g_1'(t), ..., g_n'(t)$ образуют $M$-систему. Тогда система функций $m \geq n$ переменных

$$f_1(x_1, ..., x_m) = g_1(x_1) + \cdots + g_1(x_m),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_n(x_1, ..., x_n) = g_n(x_1) + \cdots + g_n(x_m),$$

определенных на множестве $V = \{(x_1, ..., x_m) : x_1 > \cdots > x_m\}$, монотонна. Доказательство очевидным образом следует из Теоремы.

## §3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Существуют определенные различия в доказательствах случаев (a), (b) или (c). Начнем со случая (a).

**Случай (a).** Доказательство проводится индукцией по $n$. Пусть $n = 1$ и

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_j} > 0, \quad j = 1, ..., m, \quad \mathbf{x} \in V.$$

Тогда функция $f_1(x_1, ..., x_m)$ строго возрастает по всем переменным. Следовательно, $f_1(\mathbf{x}') < f_1(\mathbf{x}'')$, как только $\mathbf{x}' \prec_1 \mathbf{x}''$, $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in V$.

Предположим, что Теорема доказана для системы $f_1(\mathbf{x}), ..., f_{n-1}(\mathbf{x})$. Докажем ее для системы (5). Допустим противное, т. е. что существуют $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in V$ такие, что $\mathbf{x}' \prec_n \mathbf{x}''$, $f_1(\mathbf{x}') = f_1(\mathbf{x}''), ..., f_{n-1}(\mathbf{x}') = f_{n-1}(\mathbf{x}'')$ и $f_n(\mathbf{x}') \geq f_n(\mathbf{x}'')$.

Обозначим через $V_1$ множество всех точек в $\mathbb{R}^m$, компоненты которых лежат между соответствующими координатами точек $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ :

$$V_1 = \{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_m) : \quad x_{*j} \leq x_j \leq x_j^*, \quad 1 \leq j \leq m\},$$

где $x_j^* = \max\{x_j', x_j''\}$, $x_{*j} = \min\{x_j', x_j''\}$. Так как множество

$$V_1' = \{\mathbf{x} \in M_1 : \quad f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}') = f_i(\mathbf{x}''), \quad i = 1, ..., n-1\}$$

замкнуто, то существует точка $\mathbf{x}^o = (x_1^o, ..., x_m^o)$ в $V_1'$ такая, что

$$f_n(\mathbf{x}^o) \geq f_n(\mathbf{x}) \quad \text{для всех } \mathbf{x} \in V_1'. \tag{7}$$

Мы полагаем, что $\mathbf{x}^o \neq \mathbf{x}''$, так как если

$$f_n(\mathbf{x}') = f_n(\mathbf{x}'') = f_n(\mathbf{x}^o), \tag{8}$$

то множество $\mathbf{x}^o = \mathbf{x}'$. Из предположения индукции и

$$f_i(\mathbf{x}^o) = f_i(\mathbf{x}''), \quad i = 1, ..., n-1, \tag{9}$$

следует, что как отношение $\mathbf{x}'' \prec_{n-1} \mathbf{x}^o$, так и $\mathbf{x}^o \prec_{n-1} \mathbf{x}''$ не имеют места. Так как $\mathbf{x}^o \in V_1$, то $\mathbf{x}^o \prec_n \mathbf{x}''$. Следовательно, существуют натуральные числа $1 \le j_1 < \cdots < j_n \le m$ такие, что

$$(-1)^{n-s} x^o_{j_s} < (-1)^{n-s} x''_{j_s}, \quad s = 1, ..., n. \tag{10}$$

Таким образом

$$(-1)^{n-s} x'_{j_s} \le (-1)^{n-s} x^o_{j_s} < (-1)^{n-s} x''_{j_s}, \quad s = 1, ..., n. \tag{11}$$

Рассмотрим функции $f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, ..., n$, как функции $n$ переменных $x_{j_1}, ..., x_{j_n}$, определенных на множестве $\{a_{j_1} < x_{j_1} < b_{j_1}, ..., a_{j_n} < x_{j_n} < b_{j_n}\}$, при фиксированных $x_i = x_i^o$, $i \neq j_1, ..., j_n$. По теореме Фекете (см. [1]), имеем

$$A = \left| \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^o)}{\partial x_{j_k}} \right|_{i,k=1}^{n} > 0.$$

Следовательно, для системы уравнений $y_k = f_k(\mathbf{x})$, $k = 1, ..., n$, выполнены условия теоремы об обратной функции. Мы приходим к следующему заключению :

**1.** Существует взаимно однозначное соответствие между достаточно малыми окрестностями $X$ и $Y$ точек $(x^o_{j_1}, ..., x^o_{j_n})$ и $(y^o_1, ..., y^o_n)$, соответственно, где $y^o_k = f_k(\mathbf{x}^o)$, $k = 1, ..., n$.

В частности, для точек $(y^o_1, ..., y^o_{n-1}, y^o_n + \varepsilon) \in Y$ с малыми $\varepsilon$ существует единственная точка $(x_{j_1}(\varepsilon), ..., x_{j_n}(\varepsilon)) \in X$ такая, что

$$y^o_i = f_i(\mathbf{x}(\varepsilon)), \quad i = 1, ..., n-1, \quad y^o_n + \varepsilon = f_n(\mathbf{x}(\varepsilon)), \tag{12}$$

где $\mathbf{x}(\varepsilon) = (x_1(\varepsilon), ..., x_m(\varepsilon))$, $x_i(\varepsilon) = x^o_i$ для $i \neq j_1, ..., j_n$.

2. Обратные функции $x_{j_k} = x_{j_k}(y_1, ..., y_n)$, $k = 1, ..., n$ непрерывно дифференцируемы в точке $(y_1^o, ..., y_n^o)$. Следовательно, существуют производные

$$x'_{j_k}(0) = x'_{j_k}(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial x_{j_k}(y_1^o, ..., y_n^o)}{\partial y_n}, \quad k = 1, ..., n.$$

Дифференцируя по $\varepsilon$ равенства (12) в точке $\varepsilon = 0$, получим

$$\left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}^o)}{\partial x_{j_k}}\right)_{i,k=1}^n \begin{pmatrix} x'_{j_1}(0) \\ \vdots \\ x'_{j_n}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

По формуле Крамера

$$x'_{j_s}(0) = (-1)^{n-s}\frac{A_s}{A}, \quad s = 1, ..., n,$$

где $A_s$ – определитель матрицы, которая получается из матрицы в (13) удалением $n$-той строки $s$-го столбца.

Так как $A > 0$ и $A_s > 0$ для всех $s = 1, ..., n$, то

$$(-1)^{n-s}x'_{j_s}(0) > 0, \quad s = 1, ..., n. \tag{14}$$

По определению $x_j(0) = x_j^o$ для всех $j = 1, ..., m$. Следовательно, согласно (14) и (11), существует $\delta > 0$ такое, что

$$(-1)^{n-s}x'_{j_s} \le (-1)^{n-s}x^o_{j_s} < (-1)^{n-s}x_{j_s}(\delta) < (-1)^{n-s}x''_{j_s}, \quad s = 1, ..., n.$$

Таким образом, $\mathbf{x}(\delta) \in V'_1$ и из (12) имеем $f_n(\mathbf{x}(\delta)) = f_n(\mathbf{x}^o) + \delta$, что противоречит определению $\mathbf{x}^o$. Следовательно, Теорема в случае (a) доказана.

**Случай (b).** Пусть $n$ – минимальное натуральное число, для которого Теорема не имеет места. Это означает существование точек $\mathbf{x}' = (x'_1, ..., x'_m)$ , $\mathbf{x}'' = (x''_1, ..., x''_m)$ в $V$ таких, что $\mathbf{x}' \prec_n \mathbf{x}''$, $f_i(\mathbf{x}') = f_i(\mathbf{x}'')$, $i = 1, ..., n-1$ и $f_n(\mathbf{x}') \ge f_n(\mathbf{x}'')$. Обозначим :

$\Delta(\mathbf{x}) = \min\{x_2 - x_1, ..., x_m - x_{m-1}\}, \quad \mathbf{x} = (x_1, ..., x_m) \in V,$

$V_0 = \{\mathbf{x} \in V : \Delta(\mathbf{x}) \ge \Delta'\}$ , где $0 < \Delta' < \min\{\Delta(\mathbf{x}'), \Delta(\mathbf{x}'')\}$,

$V_1 = \{\mathbf{x} \in V_0 : x_{*j} \le x_j \le x_j^*, \quad 1 \le j \le m\},$

где $x_{*j} = \min\{x'_j, x''_j\}$, $x^*_j = \max\{x'_j, x''_j\}$, $j = 1, ..., m$;

$$V'_1 = \{\mathbf{x} \in V_1 : \quad f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}') = f_i(\mathbf{x}''), \quad i = 1, ..., n-1\}.$$

Существует точка $\mathbf{x}^o = (x^o_1, ..., x^o_m)$ в $V'_1$, удовлетворяющая (7). Полагаем $\mathbf{x}^o \neq \mathbf{x}''$, так как в случае (8) мы определим $\mathbf{x}^o = \mathbf{x}'$. Из (9) и определения $n$ следует, что ни отношение $\mathbf{x}'' \prec_{n-1} \mathbf{x}^o$, ни $\mathbf{x}^o \prec_{n-1} \mathbf{x}''$ не имеют места. С другой стороны, так как $\mathbf{x}^o \in V_1$, то $\mathbf{x}^o \prec_n \mathbf{x}''$. Таким образом, существуют натуральные числа $1 \leq j_1 < \cdots < j_n \leq m$, удовлетворяющие (10). Выберем эти числа так, чтобы их сумма

$$\sum_{s=1}^{n} (-1)^{n-s} j_s \tag{15}$$

была бы максимальной. Тогда

$$x^o_{j_s} < x^o_{j_s+1} - \Delta', \quad \text{если } n-s \text{ четно и } j_s < m. \tag{16}$$

В самом деле, иначе $x^o_{j_s+1} = x^o_{j_s} + \Delta'$, следовательно, $x^o_{j_s+1} < x''_{j_s+1}$ и сумма (15) не является максимальной. Аналогично

$$x^o_{j_s-1} + \Delta < x^o_{j_s} \quad \text{если } n-s \text{ нечетно и } j_s > 1. \tag{17}$$

Рассматривая функции $f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, ..., n$ как функции $n$ переменных $x_{j_1}, ..., x_{j_n}$ при фиксированных остальных, доказательство можно продолжить аналогично предыдущему случаю. Необходимо лишь отметить, что из (16) и (17) имеем $\Delta(\mathbf{x}(\delta)) \geq \Delta'$ для достаточно малых $\delta > 0$.

Случай (c) доказывается аналогично предыдущему.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн, Осциляционные Матрицы и Ядра и Малые Колебания Механических Систем, М.-Л., Гостехиздат, 1950.
2. S. Karlin, Total Positivity and Applications, Stanford Univ. Press, Stanford, CA, 1968.

13 Июля 1993

Ереванский государственный университет

# СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 28 НОМЕР 5 1993

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика