ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

# ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

# ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

# ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

# МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.



*«Մաթեմատիկա» ամ-*

## Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

*Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝*

*1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։*

*Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։*

*2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։*

*Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։*

*3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։*

*Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները՝ շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։*

*4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։*

*5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։*

*Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։*

*6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։*

*7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։*

*8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։*

*9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։*

*10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։*

*11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։*

*Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։*

# ВЕСОВЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ И В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

**М. М. Джрбашян**

**Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №4, 1993**

**Основные результаты работы – формулы вида $f(z) = P(f)(z) + T(\overline{\partial} f)(z)$, установленные в следующих двух случаях : (а) $f(z)$ - функция класса $C^1$ в единичном круге $\mathbb{D}$ и $P$ - ортогональный проектор пространства $L^2\{\mathbb{D};\ (1-|z|^\rho)^\alpha |z|^\gamma dm(z)\}$ на свое подпространство аналитических функций ; (b) $f(z)$ - функция класса $C^1$ в комплексной плоскости (подчиненная определенным условиям роста на бесконечности) и $P$ - ортогональный проектор пространства $L^2\{\mathbb{C};\ e^{-\sigma|z|^\rho}|z|^\gamma dm(z)\}$ на свое подпространство целых функций. В обоих случаях получены явные формулы для ядер интегральных операторов $P$ и $T$.**

"... и возвращается ... на круги своя"
Книга Екклесиаста 1,6

## §0. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] автором впервые были введены пространства $H^p(\alpha)$ $(1 \le p < \infty$, $\alpha > -1)$ голоморфных в единичном круге $\mathbb{D}$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p (1-|\zeta|^2)^\alpha \, d\xi \, d\eta < +\infty, \quad \zeta = \xi + i\eta. \tag{0.1}$$

В этих же работах было установлено, что произвольная функция $f \in H^p(\alpha)$ допускает интегральное представление вида

$$f(z) = \frac{\alpha+1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-z\overline{\zeta})^{2+\alpha}} \, d\xi \, d\eta, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{0.2}$$

Более того, интегральный оператор, порожденный правой частью этой формулы, действует в гильбертовом пространстве измеримых в $\mathbb{D}$ функций с конечным интегралом (0.1) с $p = 2$ как оператор ортогонального проектирования на $H^2(\alpha)$.

Эти результаты уже в указанных работах [1, 2] нашли существенные применения в вопросах построения теории факторизации весовых классов мероморфных в круге $\mathbb{D}$ функций. В дальнейшем были найдены многочисленные другие применения ( за подробностями отсылаем, например, к обзорной работе [3]).

Позднее выяснилось (см., например, [4, 5]), что для гладких в $\mathbb{D}$ функций класса $C^1(\mathbb{D})$ имеет место формула типа (0.2), а именно :

$$f(z) = \frac{\alpha+1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-z\overline{\zeta})^{2+\alpha}}\, d\xi\, d\eta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{\partial f/\partial\overline{\zeta}}{\zeta - z}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\overline{\zeta}}\right)^{1+\alpha} d\xi\, d\eta,$$

$$z \in \mathbb{D}, \quad \alpha > -1. \tag{0.3}$$

В частности, для аналитических в $\mathbb{D}$ функций $f \in C^1(\overline{\mathbb{D}})$ отсюда вновь получаем представление (0.2). По-видимому, автор работы [4] не был знаком с упомянутыми выше исследованиями. Только этим можно объяснить то обстоятельство, что в [4] формулы (0.2), (0.3) приводятся в качестве общеизвестного (почти фольклорного) факта, без какой-либо ссылки.

В §§1,2 настоящей работы для функций класса $C^1(\overline{\mathbb{D}})$ (это условие можно значительно ослабить!) устанавливаются новые весовые интегральные представления, являющиеся существенными обобщениями формулы (0.3) (а значит, и (0.2)) .

В работах [6, 2] автором были введены весовые классы целых функций $M_2(\sigma,\rho)$ $(\sigma,\rho > 0)$, удовлетворяющих условию

$$\iint\limits_{\mathbf{C}} |f(w)|^2 e^{-\sigma|w|^\rho}|w|^{\rho-2}\, du\, dv < +\infty, \quad w = u + iv \tag{0.4}$$

и для них были установлены интегральные представления вида

$$f(z) = \frac{\rho\sigma}{2\pi}\iint\limits_{\mathbf{C}} f(w)e^{-\sigma|w|^\rho}|w|^{\rho-2}E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}z\overline{w};1)\, du\, dv, \quad z \in \mathbf{C}, \tag{0.5}$$

где

$$E_{\rho/2}(w;1) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k}{\Gamma(1+2k/\rho)}, \quad w \in \mathbf{C}$$

суть целая функция типа Миттаг-Лефлера. Было показано также, что интегральный оператор, естественным образом возникающий из (0.5), действует в гильбертовом пространстве измеримых в $\mathbf{C}$ функций, удовлетворяющих (0.4), как оператор ортогонального проектирования на $M_2(\sigma,\rho)$. Заметим, что при $\rho = 2$ формула (0.5) принимает весьма простой вид

$$f(z) = \frac{\sigma}{\pi}\iint\limits_{\mathbf{D}} f(w)e^{-\sigma|w|^2}e^{\sigma z\overline{w}}\,du\,dv, \quad z\in\mathbf{C}. \tag{0.6}$$

В работе [7] были рассмотрены классы целых функций, удовлетворяющих условию

$$\iint\limits_{\mathbf{C}} |f(w)|^p e^{-\sigma|w|^\rho}|w|^\gamma\,du\,dv<\infty, \quad 1<p<\infty, \quad \sigma,\rho>0, \quad \gamma>-2,$$

обобщающему (0.4). Для этих классов было установлено интегральное представление вида

$$f(z) = \frac{\rho\sigma^\mu}{2\pi}\iint\limits_{\mathbf{C}} f(w)e^{-\sigma|w|^\rho}|w|^\gamma E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}z\overline{w};\mu)\,du\,dv, \quad z\in\mathbf{C}, \tag{0.7}$$

где

$$E_{\rho/2}(w;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k}{\Gamma(\mu+2k/\rho)}, \quad w\in\mathbf{C}, \quad \mu=\frac{2+\gamma}{\rho}.$$

При $p = 2$ было доказано соответствующее утверждение об ортогональном проекторе. Отметим также, что в работе [7] установлены и многомерные аналоги формулы (0.7) ; даны некоторые приложения. В связи с формулой (0.7) возникает задача получения ее аналогов для гладких в $\mathbf{C}$ функций. В специальном случае $\rho = 2$, $\gamma = 0$ такая формула известна. А именно, справедливо следующее обобщение (0.6), вытекающее из некоторых общих формул работы [8] :

$$f(z) = \frac{\sigma}{\pi}\iint\limits_{\mathbf{C}} f(w)e^{-\sigma|w|^2}e^{\sigma z\overline{w}}\,du\,dv - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbf{C}}\frac{\partial f/\partial\overline{w}}{w-z}e^{-\sigma|w|^2}e^{\sigma z\overline{w}}\,du\,dv, \quad z\in\mathbf{C} \tag{0.8}$$

В работе [8] подобного рода формулы устанавливаются для функций многих комплексных переменных. Что же касается той части содержащихся там результатов, которые имеют отношение к функциям одного комплексного переменного, то необходимо отметить, что в [8] рассматривается весьма общий случай, когда вместо весовой функции $e^{-\sigma|w|^2}$ берется вес вида $e^{-\varphi(w)}$, где $\varphi(w)$ $(w\in\mathbf{C})$ - дважды гладкая выпуклая функция. В этом случае устанавливается формула типа (0.8), также имеющая в своей правой части два слагаемых. Однако, авторы [8] отмечают, что за исключением частного случая $\varphi(w) \equiv \sigma|w|^2$, не совсем ясно, является ли первое слагаемое полученной ими формулы соответствующим интегральным оператором ортогонального проектирования (см. правую часть (0.7)).

В §3 данной работы, основываясь на формулах §2 и совершая предельный переход от круга к плоскости, установлены новые весовые интегральные формулы, являющиеся аналогами (0.7) для гладких функций $\mathbf{C}$. В §4 дается прямое (не опирающееся на результаты §2) доказательство этих же интегральных представлений. В частности, получены также далеко идущие обобщения формулы (0.8). В §5 рассмотрены важные специальные случаи формул §4, представляющие самостоятельный интерес.

В заключение отметим, что результаты этой работы, безусловно могут быть эффективно использованы при построении минимальных решений $\overline{\partial}$-уравнения в соответствующих областях.

## §1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**1.1. Пространство $H^p_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$.** Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ – единичный круг и

$$\rho > 0, \quad \alpha > -1, \quad \gamma > -2 \tag{1.1}$$

– произвольные параметры. Введем также вспомогательный параметр

$$\mu = \frac{\gamma + 2}{\rho}, \tag{1.2}$$

и обозначим через $H^p_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ множество аналитических в $\mathbb{D}$ функций $f(z)$ с конечной нормой

$$\|f\| = \left(\iint\limits_{\mathbb{D}} (1 - |z|^\rho)^\alpha |z|^\gamma |f(z)|^p \, dm(z)\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty, \tag{1.3}$$

где $dm(z) = r dr\, d\varphi$ $(z = re^{i\varphi})$. Прежде всего докажем следующую лемму.

**Лемма 1.1.** *Если $f(z) \in H^p_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ $(\rho > 0, \quad \alpha > -1, \quad \gamma > -2)$, то $f_\kappa(z) \equiv$ $\equiv f(\kappa z) \to f(z)$ при $\kappa \to 1 - 0$ по норме (1.3), т.е.*

$$\lim_{\kappa \to 1-0} \iint\limits_{\mathbb{D}} (1 - |z|^\rho)^\alpha |z|^\gamma |f(z) - f(\kappa z)|^p \, dm(z) = 0.$$

**Доказательство.** Для данного $\varepsilon > 0$ выберем такое $\delta \in (0, 1)$, чтобы

$$\iint\limits_{\delta<|z|<1} (1-|z|^\rho)^\alpha |z|^\gamma |f(z)|^p \, dm(z) < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Далее, используя неравенство $(a+b)^p \le 2^p(a^p+b^p)$ $(a, b \ge 0,\ 0 < p < \infty)$, получим

$$I \equiv \iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|z|^\rho)^\alpha |z|^\gamma |f(z) - f(\kappa z)|^p \, dm(z) \le I_1 + I_2 + I_3, \tag{1.5}$$

где

$$I_1 = \iint\limits_{|z|\le\delta} (1-|z|^\rho)^\alpha |z|^\gamma |f(z) - f(\kappa z)|^p \, dm(z),$$

$$I_2 = 2^p \iint\limits_{\delta<|z|<1} (1-|z|^\rho)^\alpha |z|^\gamma |f(z)|^p \, dm(z),$$

$$I_3 = 2^p \iint\limits_{\delta<|z|<1} (1-|z|^\rho)^\alpha |z|^\gamma |f(\kappa z)|^p \, dm(z).$$

Очевидно, что $I_1 < \varepsilon$ при $\kappa$ $(\kappa_o \le \kappa < 1)$ достаточно близких к 1, поскольку $f$ равномерно непрерывна в круге $|z| \le \delta$. Кроме того, $I_2 < 2^p\varepsilon$ в силу (1.4). Для оценки $I_3$ воспользуемся тем известным фактом, что интеграл

$$M_p(f, r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p \, d\varphi, \quad 0 \le r < 1$$

является неубывающей функцией от $r$, и поэтому $I_3 \le I_2 < 2^p\varepsilon$ в силу (1.4). В результате из (1.5) следует неравенство $I < (1 + 2^{p+1})\varepsilon$, $\kappa_o \le \kappa < 1$, и ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ утверждение леммы установлено.

**1.2. Интегральное представление.** Напомним определение функции типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)}, \quad \rho > 0, \tag{1.6}$$

которая при любом $\mu \in \mathbf{C}$ является целой функцией порядка $\rho$ и типа 1. Используя условие (1.1), докажем следующую теорему.

**Теорема 1.1.** *Любая функция $f(z) \in H^p_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ допускает интегральное представление*

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|w|^\rho)^\alpha |w|^\gamma f(w) \Phi_\alpha(z, w) \, dm(w), \tag{1.7}$$

*где ядро*

$$\Phi_\alpha(z,w)=\frac{\rho}{2\Gamma(1+\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+\mu+2k/\rho)}{\Gamma(\mu+2k/\rho)}(z\overline{w})^k=$$

$$=\frac{\rho}{2\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}E_{\rho/2}(t^{2/\rho}z\overline{w};\mu)t^{\alpha+\mu}\,dt,\quad z\in\mathbb{D},\quad w\in\overline{\mathbb{D}}\tag{1.8}$$

*по $z$ голоморфно в $\mathbb{D}$, а по $w$ антиголоморфно в $\mathbb{D}$ и непрерывно в $\overline{\mathbb{D}}$.*

**Доказательство.** Рассмотрим интегралы

$$I_{k,m}=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}}(1-|\zeta|^\rho)^\alpha|\zeta|^\gamma\zeta^k\overline{\zeta}^m\,dm(\zeta),\quad k,m=0,1,\ldots.$$

Переходя к полярным координатам $\zeta=re^{i\varphi}$, $dm(\zeta)=rdr\,d\varphi$, получим

$$I_{k,m}=0,\quad k\neq m,\quad k,m=0,1,\ldots,\tag{1.9}$$

$$I_{k,k}=2\int_0^1(1-r^\rho)^\alpha r^{\gamma+2k+1}dr=\frac{2}{\rho}B(1+\alpha,\mu+2k/\rho)=$$

$$=\frac{2}{\rho}\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\mu+2k/\rho)}{\Gamma(1+\mu+\alpha+2k/\rho)},\quad k=0,1,\ldots\tag{1.10}$$

Совокупность формул (1.9) – (1.10) может быть записана также в виде :

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}}(1-|\zeta|^\rho)^\alpha|\zeta|^\gamma\zeta^k\left[\frac{\rho}{2\Gamma(1+\alpha)}\frac{\Gamma(1+\alpha+\mu+2m/\rho)}{\Gamma(\mu+2m/\rho)}(z\overline{\zeta})^m\right]dm(\zeta)=$$

$$=\begin{cases}z^k & \text{при}\quad m=k\\ 0 & \text{при}\quad m\neq k\end{cases}\qquad m,k=0,1,\ldots$$

Суммируя эти формулы по индексу $m=0,1,\ldots$, для фиксированного $k\geq0$ получаем

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}}(1-|\zeta|^\rho)^\alpha|\zeta|^\gamma\zeta^k\Phi_\alpha(z,\zeta)\,dm(\zeta)=z^k,\quad k=0,1,\ldots\tag{1.11}$$

Отметим, что произведенная при этом перемена порядков суммирования по $m\geq0$ и интегрирования по $\mathbb{D}$ законна, поскольку разложение (1.8) ядра $\Phi_\alpha(z,w)$ при любом фиксированном $z\in\mathbb{D}$ сходится равномерно по переменной $w\in\mathbb{D}$ (в этом можно легко убедиться, пользуясь формулой Стирлинга). Далее, если

$$f(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\zeta^k,\quad \zeta\in\mathbb{D},$$

то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\kappa\zeta)^k = f(\kappa\zeta), \quad 0 < \kappa < 1$$

сходится равномерно по $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$. Поэтому равенства (1.11) очевидным образом приводят к интегральной формуле

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^\rho)^\alpha |\zeta|^\gamma \Phi_\alpha(z, \zeta) f(\kappa\zeta) \, dm(\zeta) = f(\kappa z), \quad z \in \mathbb{D}, \quad 0 < \kappa < 1. \quad (1.12)$$

Формула (1.7), которая является основным утверждением теоремы, следует из (1.12) путем предельного перехода при $\kappa \to 1 - 0$ на основе Леммы 1.1. Действительно, в случае $p = 1$ непосредственно, а при $1 < p < \infty$ применением неравенства Гельдера получаем

$$\left| \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^\rho)^\alpha |\zeta|^\gamma \Phi_\alpha(z, \zeta) f(\zeta) \, dm(\zeta) - f(\kappa z) \right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^\rho)^\alpha |\zeta|^\gamma |\Phi_\alpha(z, \zeta)| \cdot |f(\zeta) - f(\kappa\zeta)| \, dm(\zeta) \to 0, \quad \kappa \to 1 - 0.$$

Остается установить второе из представлений (1.8) ядра $\Phi_\alpha(z, w)$ :

$$\Phi_\alpha(z, w) = \frac{\rho}{2\Gamma(1+\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + \alpha + \mu + 2k/\rho)}{\Gamma(\mu + 2k/\rho)} (z\overline{w})^k =$$

$$= \frac{\rho}{2\Gamma(1+\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z\overline{w})^k}{\Gamma(\mu + 2k/\rho)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha+\mu+2k/\rho} dt =$$

$$= \frac{\rho}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha+\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z\overline{w})^k t^{2k/\rho}}{\Gamma(\mu + 2k/\rho)} \, dt =$$

$$= \frac{\rho}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha+\mu} E_{\rho/2}(t^{2/\rho} z\overline{w}; \mu) \, dt.$$

Законность перемены порядков суммирования и интегрирования следует из того факта, что $E_{\rho/2}(w; \mu)$ - целая функция порядка $\rho/2$ и типа 1.

**1.3. Минимальное свойство.** При прежних ограничениях (1.1) обозначим через $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ множество всех измеримых в круге $\mathbb{D}$ комплекснозначных функций $f(z)$ с конечным интегралом

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^\rho)^\alpha |\zeta|^\gamma |f(\zeta)|^2 \, dm(\zeta).$$

Очевидно, что $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$[f,g] = \iint_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^\rho)^\alpha |\zeta|^\gamma f(\zeta)\overline{g(\zeta)}\, dm(\zeta).$$

Кроме того, пространство $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ аналитических в $\mathbb{D}$ функций является замкнутым подпространством в $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$. В $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ определим интегральный оператор

$$T_{\rho,\alpha,\gamma}(f)(z) = \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^\rho)^\alpha |\zeta|^\gamma \Phi_\alpha(z,\zeta) f(\zeta)\, dm(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Докажем следующую теорему.

**Теорема 1.2.** *Оператор $T_{\rho,\alpha,\gamma}$ действует в пространстве $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ как ортогональный проектор на замкнутое подпространство $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$.*

**Доказательство.** Пусть $f \in L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ . Тогда функция $T_{\rho,\alpha,\gamma}(f)(z)$ определена при всех $z \in \mathbb{D}$ и аналитична в круге $\mathbb{D}$, так как ядро $\Phi_\alpha(z,w)$ голоморфно по $z$ и равномерно ограничено по $|z| \le r$, $|w| \le 1$ $(0 < r < 1)$. Согласно общей теории гильбертовых пространств справедливо представление

$$L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D}) = H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D}) \oplus \tilde{H}^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D}),$$

где $\tilde{H}^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ - ортогональное дополнение к $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$. В частности, функция $f$ единственным образом представляется в виде

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{1.13}$$

где $f_1 \in H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$, $f_2 \in \tilde{H}^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$. Для доказательства теоремы нам следует установить тождество

$$T_{\rho,\alpha,\gamma}(f)(z) \equiv f_1(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Так как $f_1 \in H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$, то из (1.13) и Теоремы 1.1 получаем

$$T_{\rho,\alpha,\gamma}(f)(z) = T_{\rho,\alpha,\gamma}(f_1)(z) + T_{\rho,\alpha,\gamma}(f_2)(z) = f_1(z) + T_{\rho,\alpha,\gamma}(f_2)(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Следовательно, нам остается убедиться в том, что

$$T_{\rho,\alpha,\gamma}(f_2)(z) = 0, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{1.14}$$

С этой целью заметим, что при фиксированном $z \in \mathbb{D}$

$$T_{\rho,\alpha,\gamma}(f_2)(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^{\rho})^{\alpha}|\zeta|^{\gamma}\Phi_{\alpha}(z,\zeta) f_2(\zeta)\, dm(\zeta) = \frac{1}{\pi}[f_2(\zeta), \overline{\Phi_{\alpha}(z,\zeta)}]. \quad (1.15)$$

Но при любом фиксированном $z \in \mathbb{D}$, $\overline{\Phi_{\alpha}(z,\zeta)}$ как функция от $\zeta$, очевидно, принадлежит пространству $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$. И желаемое тождество (1.14) следует из (1.15), поскольку $f_2$ принадлежит ортогональному дополнению $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$.

Из Теоремы 1.2 в качестве следствия вытекает теорема о наилучшем приближении.

**Теорема 1.3.** *Пусть* $f(z) \in L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$. *Тогда минимум функционала*

$$\mathcal{D}(f,g) = \iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^{\rho})^{\alpha}|\zeta|^{\gamma}|f(\zeta)-g(\zeta)|^2\, dm(\zeta),$$

*определенного на семействе функций* $g(z) \in H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$, *реализует функция*

$$g_f(z) = T_{\rho,\alpha,\gamma}(f)(z) \in H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D}).$$

*Иными словами*

$$\mathcal{D}(f,g) \geq \mathcal{D}(f,g_f), \quad g \in H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D}). \quad (1.16)$$

**Доказательство.** Заметим, что $\mathcal{D}(f,g) = [f-g, f-g]$. Далее, произвольная функция $f \in L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ представляется в виде $f = g_f + \tilde{f}$, где $\tilde{f}$ принадлежит $\tilde{H}^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$, т.е. $\tilde{f}$ ортогональна пространству $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$. Теперь, если $g \in H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$, то

$$\mathcal{D}(f,g) = [f-g, f-g] = [\tilde{f} + (g_f - g), \tilde{f} + (g_f - g)] =$$

$$= [\tilde{f},\tilde{f}] + [g_f - g, g_f - g] + [\tilde{f}, g_f - g] + [g_f - g, \tilde{f}].$$

Но $[\tilde{f}, g_f - g] = [g_f - g, \tilde{f}] = 0$, так как $\tilde{f} \in \tilde{H}^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$, а $g_f - g \in H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$. Следовательно

$$\mathcal{D}(f,g) = [\tilde{f},\tilde{f}] + [g_f - g, g_f - g] = [f - g_f, f - g_f] + [g_f - g, g_f - g] =$$

$$= \mathcal{D}(f,g_f) + \mathcal{D}(g_f,g) \geq \mathcal{D}(f,g_f)$$

и, таким образом, (1.16) установлено.

## §2. ТЕОРЕМЫ ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

**2.1. Интегральные представления в пространстве $C^1(\overline{\mathbb{D}})$.** Прежде всего напомним определение хорошо известных дифференциальных операторов

$$D=\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \overline{D}=\frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad z=x+iy.$$

Отметим, что для заданной в некоторой комплексной области непрерывно дифференцируемой комплекснозначной функции $f$ условия Коши-Римана (т.е. условия голоморфности) могут быть записаны как $\overline{D}f(z)=0$. Далее, как и выше, $\mathbb{D}$ - единичный круг в $\mathbb{C}$, а $f\in C^1(\overline{\mathbb{D}})$, если эта функция и все ее производные первого порядка непрерывны в замкнутом круге $\overline{\mathbb{D}}$. Как известно, для функций $f\in C^1(\overline{\mathbb{D}})$ имеет место формула Коши-Грина

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}}\frac{\overline{D}f(\zeta)}{\zeta-z}\,dm(\zeta),\quad z\in\mathbb{D}. \tag{2.1}$$

Эта формула для аналитических в $\mathbb{D}$ функций переходит в известную формулу для единичного круга.[1]

В связи с Теоремой 1.1 мы естественным образом приходим к задаче получения формулы типа Коши-Грина

$$\begin{aligned} f(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}}(1-|\zeta|^{\rho})^{\alpha}|\zeta|^{\gamma}\Phi_\alpha(z,\zeta)f(\zeta)\,dm(\zeta)-\\ -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}}\frac{\overline{D}f(\zeta)}{\zeta-z}\Psi_\alpha(z,\zeta)\,dm(\zeta),\quad z\in\mathbb{D}\end{aligned} \tag{2.2}$$

для функций $f\in C^1(\overline{\mathbb{D}})$. Очевидно, для аналитических в $\mathbb{D}$ функций $f\in C^1(\overline{\mathbb{D}})$, (2.2) переходит в интегральную формулу (1.7) Теоремы 1.1. Мы *a priori* предполагаем, что неизвестное ядро $\Psi_\alpha$, удовлетворяет следующим условиям :

[1]Хорошо известно, что интегральная формула Коши на самом деле справедлива для значительно более широких классов аналитических в круге $\mathbb{D}$ функций (например, для классов Харди $H^p$, $p\geq 1$). Что касается формулы Коши-Грина (2.1), то и она остается в силе для более широких, чем $C^1(\overline{\mathbb{D}})$, классов функций. Однако, в данной работе автор, избрав себе основной целью получение новых интегральных формул, счел целесообразным оставаться в рамках класса $C^1(\overline{\mathbb{D}})$.

(a) Функция $\Psi_\alpha(z,\zeta)$ определена при $z \in \mathbb{D}, \zeta \in \overline{\mathbb{D}}$ и, при фиксированном $z \in \mathbb{D}$ принадлежит, например, классу $C^1(\mathbb{D})$,

(b) $\Psi_\alpha(z,\zeta) \equiv 0$ при $z \in \mathbb{D}$ и $\zeta \in \partial\mathbb{D}$,

(c) $\Psi_\alpha(z,z) \equiv 1$ при любом $z \in \mathbb{D}$.

Ниже мы увидим, что эти условия естественны.

Итак, пусть функция $f \in C^1(\overline{\mathbb{D}})$ произвольна. Для фиксированного $z \in \mathbb{D}$ введем в рассмотрение дифференциальную форму

$$\varphi_z(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)\Psi_\alpha(z,\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad \zeta \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{z\}. \tag{2.3}$$

Далее, выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы круг $\mathbb{D}_\varepsilon(z) = \{\zeta \in \mathbf{C} : |\zeta - z| < < \varepsilon\}$ вместе с границей $\partial\mathbb{D}_\varepsilon(z) = \gamma_\varepsilon(z)$ лежал внутри $\mathbb{D}$. Затем применим к дифференциальной форме $\varphi_z(z)$ формулу Стокса в замкнутой области $\overline{\mathbb{D}}\setminus\mathbb{D}_\varepsilon(z)$ :

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \varphi_z(\zeta) - \int_{\gamma_\varepsilon(z)} \varphi_z(\zeta) = \int\int_{\mathbb{D}\setminus\mathbb{D}_\varepsilon(z)} d\varphi_z(\zeta) \tag{2.4}$$

и заметим, что $\int_{\partial\mathbb{D}} \varphi_z(\zeta) = 0$, в силу свойства (b) ядра $\Psi_\alpha$. Кроме того

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon(z)} \varphi_z(\zeta) = f(z)$$

в силу свойства (c). В результате, устремляя $\varepsilon \downarrow 0$ в формуле (2.4), получим $-f(z) = \iint\limits_{\mathbb{D}} d\varphi_z(\zeta)$. Записав затем $d\varphi_z(\zeta)$ в виде (2.3) и принимая во внимание, что $\overline{D}(1/\zeta - z) \equiv 0$, $\zeta \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{z\}$, приходим к формуле

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)\overline{D}_\zeta\Psi_\alpha(z,\zeta)}{\zeta - z}\, dm(\zeta) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{\overline{D}f(\zeta)}{\zeta - z}\Psi_\alpha(z,\zeta)\, dm(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{2.5}$$

справедливой, таким образом, для произвольной функции $f \in C^1(\overline{\mathbb{D}})$. Сравнивая формулы (2.2) и (2.5), легко заметить, что вторые слагаемые в их правых частях совпадают. Для совпадения и первых слагаемых предположим, что соотношение

$$\overline{D}_\zeta\Psi_\alpha(z,\zeta) = -(\zeta - z)(1 - |\zeta|^\rho)^\alpha|\zeta|^\gamma\Phi_\alpha(z,\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{D} \tag{2.6}$$

выполняется для каждого фиксированного $z \in \mathbb{D}$. Таким образом, задача нахождения интегральной формулы (2.2) типа Коши-Грина для класса функций $C^1(\overline{\mathbb{D}})$ свелась к поиску ядра $\Psi_\alpha(z,\zeta)$ $(z \in \mathbb{D}, \zeta \in \overline{\mathbb{D}})$, удовлетворяющего условиям (a), (b), (c), а также уравнению (2.6).

**Лемма 2.1.** *Если существует ядро, удовлетворяющее условиям (a), (b), (c) и уравнению (2.6), то для него справедливо представление вида*

$$\Psi_\alpha(z,w) = 1 - \frac{\rho(w-z)}{\Gamma(1+\alpha)w}\int_0^{|w|}(1-|r|^\rho)^\alpha r^{\gamma+1}\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha+\mu}E_{\rho/2}(t^{2/\rho}r^2z/w;\mu)\,dt\,dr,$$
$$z\in\mathbb{D},\quad w\in\mathbb{D}\setminus\{0\}. \tag{2.7}$$

**Доказательство.** Зафиксируем $z\in\mathbb{D}$, запишем формулу Коши-Грина (2.1) для функции $\Psi_\alpha(z,\zeta)\in C^1(\overline{\mathbb{D}})$ :

$$\Psi_\alpha(z,w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{\Psi_\alpha(z,\zeta)}{\zeta-w}\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{D}}\frac{\overline{D}_\zeta\Psi_\alpha(z,\zeta)}{\zeta-w}\,dm(\zeta),\quad w\in\mathbb{D}.$$

Отсюда, ввиду условия (b) и (2.6)

$$\Psi_\alpha(z,w) = \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{D}}(1-|\zeta|^\rho)^\alpha|\zeta|^\gamma\Phi_\alpha(z,\zeta)\frac{\zeta-z}{\zeta-w}\,dm(\zeta) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{D}}(1-|\zeta|^\rho)^\alpha|\zeta|^\gamma\Phi_\alpha(z,\zeta)\,dm(\zeta) + \frac{w-z}{\pi}\iint_{\mathbb{D}}(1-|\zeta|^\rho)^\alpha|\zeta|^\gamma\frac{\Phi_\alpha(z,\zeta)}{\zeta-w}\,dm(\zeta),$$
$$z\in\mathbb{D},\quad w\in\mathbb{D}.$$

Заметим теперь, что первое слагаемое в правой части тождественно равно 1 (это легко следует из Теоремы 1.1, если положим $f\equiv 1$). Поэтому, с учетом (1.8), получаем

$$\Psi_\alpha(z,w) = 1 + \frac{\rho}{2\Gamma(1+\alpha)}\frac{w-z}{\pi}\iint_{\mathbb{D}}\frac{(1-|\zeta|^\rho)^\alpha|\zeta|^\gamma}{\zeta-w}\times$$
$$\times\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha+\mu}E_{\rho/2}(t^{2/\rho}z\overline{\zeta};\mu)\,dt\,dm(\zeta),\quad z\in\mathbb{D},\quad w\in\mathbb{D}.$$

Меняя порядок интегрирования и переходя к полярным координатам, будем иметь

$$\Psi_\alpha(z,w) = 1 + \frac{\rho(w-z)}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha+\mu}\int_0^1(1-r^\rho)^\alpha\frac{r^{\gamma+1}}{2\pi i}\times$$
$$\times\int_{|\zeta|=r}\frac{E_{\rho/2}(t^{2/\rho}r^2z/\zeta;\mu)}{\zeta(\zeta-w)}\,d\zeta\,dr\,dt,\quad z\in\mathbb{D},\quad w\in\mathbb{D}. \tag{2.8}$$

Далее, разлагая функцию типа Миттаг-Леффлера в ряд, из теоремы о вычетах получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{E_{\rho/2}(t^{2/\rho}r^2z/\zeta;\mu)}{\zeta(\zeta-w)}\,d\zeta = \sum_{k=0}^\infty\frac{t^{2k/\rho}r^{2k}z^k}{\Gamma(\mu+2k/\rho)}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{d\zeta}{\zeta^{k+1}(\zeta-w)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k/\rho} r^{2k} z^k}{\Gamma(\mu + 2k/\rho)} \times \begin{cases} 0, & \text{если } r > |w| \\ -w^{-k-1}, & \text{если } r < |w| \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } r > |w| \\ -w^{-1} E_{\rho/2}(t^{2/\rho} r^2 z/w; \mu), & \text{если } r < |w|. \end{cases}$$

Теперь из (2.8) следует, что

$$\Psi_\alpha(z, w) = 1 + \frac{\rho(w - z)}{\Gamma(1 + \alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha+\mu} \int_0^{|w|} (1 - r^\rho)^\alpha r^{\gamma+1} \times$$

$$\times \left(-\frac{1}{w}\right) E_{\rho/2}(t^{2/\rho} r^2 z/w; \mu)\, dr\, dt, \quad z \in \mathbb{D}, \quad w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$$

После упрощений и перемены порядков интегрирования получается формула (2.7) и, тем самым, доказательство завершено.

После того, как Лемма 2.1 доказана, естественно определить ядро $\Psi_\alpha$ при $z \in \mathbb{D}$, $w \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$ по формуле (2.7) и выявить его свойства.

**Лемма 2.2.** *Пусть ядро $\Psi_\alpha(z, w)$ определено формулой (2.7). Тогда при каждом фиксированном $z \in \mathbb{D}$ справедливы следующие утверждения :*

*1. Функция $\Psi_\alpha(z, w)$ принадлежит классу $C^1(\overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\})$ и в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ удовлетворяет уравнению (2.6).*

*2. При $w \to 0$ справедливы представления :*

$$\Psi_\alpha(z, w) = 1 + O(|w|^{\gamma+1}), \qquad \text{если } z \neq 0, \tag{2.9}$$

$$\Psi_\alpha(0, w) = 1 + O(|w|^{\gamma+2}). \tag{2.10}$$

*3.* $\quad \Psi_\alpha(z, w) = 0, \qquad w \in \partial\mathbb{D}.$

*4.* $\quad \Psi_\alpha(z, z) = 1, \qquad \text{если} \quad z \neq 0, \qquad (2.11)$

$$\lim_{w \to 0} \Psi_\alpha(o, w) = 1. \tag{2.12}$$

**Доказательство.** Из формулы (2.7) легко следует, что $\Psi_\alpha(z, w)$, как функция от $w$, принадлежит классу $C^1(\overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\})$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{\partial \Psi_\alpha(z, w)}{\partial \overline{w}} = -\frac{\rho}{\Gamma(1 + \alpha)} \frac{w - z}{w} (1 - |w|^\rho)^\alpha |w|^{\gamma+1} \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha+\mu} E_{\rho/2}(t^{2/\rho} |w|^2 z/w; \mu)\, dt\, \frac{\partial |w|}{\partial \overline{w}}, \quad w \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}.$$

И поскольку $\dfrac{\partial|w|}{\partial\overline{w}} = \dfrac{w}{2|w|}$, то используя (1.8) получаем (2.6). Тем самым, утверждение 1 доказано. Далее, (1.8) очевидным образом влечет оценку

$$|\Psi_\alpha(z,w)-1| \le \frac{\rho}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha+\mu}E_{\rho/2}(t^{2/\rho}|z|;\mu)\,dt\,\frac{|w-z|}{|w|}\times$$
$$\times\int_0^{|w|}(1-r^\rho)^\alpha r^{\gamma+1}\,dr,\quad w\in\overline{\mathbb{D}}\setminus\{0\},$$

откуда легко следуют (2.9) и (2.10). Затем, если $w\in\partial\mathbb{D}$, т.е. $|w|=1$, то после простых преобразований получаем

$$\Psi_\alpha(z,w) = 1-\frac{\rho}{\Gamma(1+\alpha)}\frac{w-z}{w}\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha+\mu}\sum_{k=0}^\infty\frac{t^{2k/\rho}(z\overline{w})^k}{\Gamma(\mu+2k/\rho)}\times$$
$$\times\int_0^1(1-r^\rho)^\alpha r^{2k+\gamma+1}\,dr\,dt = 1-\frac{w-z}{w\Gamma(1+\alpha)}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^\infty\frac{B(1+\alpha,\mu+2k/\rho)(z\overline{w})^k}{\Gamma(\mu+2k/\rho)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha+\mu+2k/\rho}\,dt =$$
$$=1-\frac{w-z}{w}\sum_{k=0}^\infty(z\overline{w})^k = 1-\frac{w-z}{w}\cdot\frac{1}{1-z\overline{w}} = 0.$$

Что же касается утверждения 4, то (2.11) непосредственно следует из (2.7), а (2.12) является следствием (2.10), так как $\gamma > -2$. Итак, лемма полностью доказана.

**Замечание 2.1.** Напомним, что нашей целью являлось нахождение ядра, удовлетворяющего условиям (a), (b), (c) и уравнению (2.6). А между тем, как это видно из Леммы 2.2, построенное нами по формуле (2.7) ядро $\Psi_\alpha$ удовлетворяет несколько иным условиям. Тем не менее легко видеть, что при этих условиях проведенные выше эвристические рассуждения (вплоть до получения формулы (2.5)) сохраняют силу. Поэтому справедлива следующая основная

**Теорема 2.1.** *Пусть ядра $\Phi_\alpha$ и $\Psi_\alpha$ определены, соответственно, по формулам (1.8) и (2.7). Тогда произвольная функция $f\in C^1(\overline{\mathbb{D}})$ представляется в виде (2.2).*

**Замечание 2.2.** Первое слагаемое в правой части (2.2) - оператор ортогонального проектирования $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ на свое подпространство $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ (см. Теорему 1.2). Следовательно, второе слагаемое в формуле (2.2) порождает оператор ортогонального проектирования $C^1(\overline{\mathbb{D}})\subset L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ на $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$.

Следующая лемма дополняет утверждения 1 – 4 Леммы 2.2

**Лемма 2.3.** *1. При каждом $z \in \mathbb{D}$ справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{w \to e^{i\theta}} \frac{\Psi_\alpha(z,w)}{(1-|w|^\rho)^{1+\alpha}} = \frac{1-e^{-i\theta}z}{\Gamma(2+\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha+\mu} E_{\rho/2}(t^{2/\rho} e^{-i\theta} z; \mu)\, dt. \tag{2.13}$$

*2. Для произвольного компакта $K \subset \mathbb{D}$ равномерно по $z \in K$*

$$\Psi_\alpha(z,w) = O\{(1-|w|^\rho)^{1+\alpha}\} \quad \text{при } |w| \to 1. \tag{2.14}$$

**Краткое доказательство.** Используя легко проверяемое тождество

$$1 \equiv \frac{\rho(w-z)}{\Gamma(1+\alpha)w} \int_0^1 (1-r^\rho)^\alpha r^{\gamma+1} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha+\mu} E_{\rho/2}(t^{2/\rho} r^2 z/w; \mu)\, dt\, dr,$$
$$|z| < |w| \le 1,$$

запишем формулу (2.7) в виде

$$\Psi_\alpha(z,w) = \frac{\rho}{\Gamma(1+\alpha)}(1-\frac{z}{w}) \int_{|w|}^1 (1-r^\rho)^\alpha r^{\gamma+1} \times$$
$$\times \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha+\mu} E_{\rho/2}(t^{2/\rho} r^2 z/w; \mu)\, dt\, dr, \quad |z| < |w| \le 1.$$

Отсюда соотношения (2.13) и (2.14) получаются стандартными рассуждениями, которые мы опускаем.

**2.2. Частный случай Теоремы 2.1.** Рассмотрим частный случай Теоремы 2.1, имеющий принципиальное значение. Пусть $\rho = 2$, $\alpha > -1$, $\gamma = 0$ (и тогда $\mu = 1$). В этом случае из (1.8) следует, что

$$\Phi_\alpha(z,w) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha+1} E_1(tz\overline{w}; 1)\, dt =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^\infty e^{-t(1-z\overline{w})} t^{\alpha+1}\, dt = \frac{\alpha+1}{(1-z\overline{w})^{\alpha+2}} \tag{2.15}$$

при любых $z \in \mathbb{D}$ и $w \in \overline{\mathbb{D}}$. Далее, из (2.7) следует, что при $z \in \mathbb{D}$ и $w \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$ имеем

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(z,w) &= 1 - \frac{w-z}{\Gamma(1+\alpha)w} \int_0^{|w|^2} (1-x)^\alpha \int_0^\infty e^{-t(1-xz/w)} t^{\alpha+1}\, dt\, dx = \\ &= 1 - (\alpha+1)(1-\frac{z}{w}) I_\alpha(z,w), \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$I_\alpha(z,w) = \int_0^{|w|^2} \frac{(1-x)^\alpha}{(1-xz/w)^{2+\alpha}}\, dx. \tag{2.17}$$

Заметим, что

$$I_\alpha(z,w) = I_\alpha^{(1)} + I_\alpha^{(2)}, \tag{2.18}$$

где

$$I_\alpha^{(1)} = \int_0^{|w|^2} \frac{(1-x)^{\alpha+1}}{(1-xz/w)^{2+\alpha}}\,dx = \frac{w}{z(\alpha+1)}\left[\left(\frac{1-|w|^2}{1-z\overline{w}}\right)^{\alpha+1} - 1\right] +$$

$$+\frac{w}{z}\int_0^{|w|^2} \frac{(1-x)^{\alpha}}{(1-xz/w)^{\alpha+1}}\,dx, \tag{2.19}$$

$$I_\alpha^{(2)} = \int_0^{|w|^2} \frac{(1-x)^{\alpha}x}{(1-xz/w)^{2+\alpha}}\,dx. \tag{2.20}$$

Из (2.17) - (2.20) следует соотношение

$$I_\alpha(z,w) = \frac{w}{z(\alpha+1)}\left[\left(\frac{1-|w|^2}{1-z\overline{w}}\right)^{\alpha+1} - 1\right] + \frac{w}{z} I_\alpha(z,w).$$

Отсюда

$$(\alpha+1)(1-z/w)I_\alpha(z,w) = 1 - \left(\frac{1-|w|^2}{1-z\overline{w}}\right)^{\alpha+1}. \tag{2.21}$$

Наконец, сравнением (2.16) и (2.21) получим, что

$$\Psi_\alpha(z,w) = \left(\frac{1-|w|^2}{1-z\overline{w}}\right)^{\alpha+1}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad w \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}. \tag{2.22}$$

Заметим, что в рассмотренном частном случае ограничение $w \neq 0$ оказывается излишним.

Комбинируя формулы (2.2), (2.15) и (2.22), мы приходим к утверждению, которое, хотя и является частным случаем Теоремы 2.1, целесообразно сформулировать в виде отдельной теоремы.

**Теорема 2.2.** *Если $f \in C^1(\overline{\mathbb{D}})$, то при любом $\alpha > -1$ справедлива интегральная формула (0.3).*

Таким образом, отмеченная во введении формула (0.3) представляет собой специальный случай (2.2).

## §3. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ОТ КРУГА К ПЛОСКОСТИ

В этом параграфе мы будем опираться на классический результат, принадлежащий Лапласу (см., например, [9], Раздел II, Глава 5, Задача 201), который можно сформулировать следующим образом.

Пусть функции $\varphi(x)$, $h(x)$ и $f(x) = \exp[h(x)]$ определены в конечном или бесконечном интервале $a \le x \le b$ и удовлетворяют следующим условиям :

1. При всех целых $r = 0, 1, \ldots$ (или просто при всех $0 \le r < \infty$) функции $\varphi(x)[f(x)]^r = \varphi(x)e^{rh(x)}$ абсолютно интегрируемы в $[a, b]$ .[2]

2. Функция $h(x)$ в некоторой точке $\xi \in (a, b)$ достигает максимума, причем в каждом замкнутом отрезке, не содержащем $\xi$, $\sup h(x) < h(\xi)$.

3. В некоторой окрестности точки $\xi$ существует и непрерывна $h''(x)$, причем $h''(\xi) < 0$.

4. Функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке $\xi$, причем $\varphi(\xi) \ne 0$.

Тогда при $r \to \infty$ имеет место асимптотическая формула[3]

$$\int_a^b \varphi(x)[f(x)]^r\, dx \sim \varphi(\xi)[f(\xi)]^{r+1/2}\sqrt{-\frac{2\pi}{rf''(\xi)}} = \varphi(\xi)e^{rh(\xi)}\sqrt{-\frac{2\pi}{rh''(\xi)}}. \tag{3.1}$$

Мы будем рассматривать класс $C^1(\mathbb{C})$ функций $F(z)$, непрерывных во всей $z$-плоскости $\mathbb{C}$ вместе со своими производными первого порядка. Если $F(z)$ - произвольная функция из $C^1(\mathbb{C})$, то очевидно при любом $R > 0$ $F(z) \in C^1(\overline{\mathbb{D}_R})$, где $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Следовательно, простая замена переменных в интегральном представлении (2.2) Теоремы 2.1 приводит к формуле

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}_R} F(w)(1 - |w/R|^\rho)^\alpha |w|^\gamma R^{-\mu\rho}\Phi_\alpha\left(\frac{z}{R}, \frac{w}{R}\right)\, dm(w) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}_R} \frac{\overline{D}F(w)}{w - z}\Psi_\alpha\left(\frac{z}{R}, \frac{w}{R}\right)\, dm(w), \quad z \in \mathbb{D}_R \tag{3.2}$$

при любом $R > 0$, и $\rho$, $\gamma$, $\alpha$, $\mu$, удовлетворяющим условиям (1.1) , (1.2). Ядра $\Phi_\alpha$ и $\Psi_\alpha$ определяются соответственно формулами (1.8) и (2.7). Зафиксировав

---

[2] В упомянутой Задаче 201 эти условия формулируются для значений $r = 0, 1, \ldots$, но нетрудно заметить, что результат остается в силе вообще для всех $r \ge 0$.

[3] Здесь и в дальнейшем запись $a(r) \sim b(r)$, $r \to \infty$ означает, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{a(r)}{b(r)} = 1.$$

произвольное $\sigma > 0$, положим

$$r = R^\rho, \qquad \alpha = \sigma R^\rho = \sigma r \tag{3.3}$$

и введем обозначения

$$\Phi_{\sigma,r}(z,w) = R^{-\mu\rho}\Phi_\alpha\left(\frac{z}{R},\frac{w}{R}\right) \equiv R^{-\mu\rho}\Phi_{\sigma r}\left(\frac{z}{R},\frac{w}{R}\right), \quad z,w \in \mathbb{D}_R, \tag{3.4}$$

$$\Psi_{\sigma,r}(z,w) = \Psi_\alpha\left(\frac{z}{R},\frac{w}{R}\right) \equiv \Psi_{\sigma r}\left(\frac{z}{R},\frac{w}{R}\right), \quad z \in \mathbb{D}_R, \quad w \in \mathbb{D}_R \setminus \{0\}. \tag{3.5}$$

Тогда, с учетом (1.8), (2.7) и (3.3) – (3.5), будем иметь

$$\Phi_{\sigma,r}(z,w) = \frac{\rho\sigma^\mu(\sigma r)^{r\sigma+1}}{2\Gamma(r\sigma+1)}\int_0^\infty [e^{-\sigma x}x^\sigma]^r x^\mu E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}x^{2/\rho}z\overline{w};\mu)\,dx,$$
$$z,w \in \mathbb{D}_R, \tag{3.6}$$

$$\Psi_{\sigma,r}(z,w) = 1 - \frac{\rho\sigma^\mu(w-z)}{w}\int_0^{|w|}\left(1-\frac{\tau^\rho}{r}\right)^{r\sigma}\tau^{\gamma+1}J_{\sigma,r}(\tau)d\tau,$$
$$z \in \mathbb{D}_R, \quad w \in \overline{\mathbb{D}_R} \setminus \{0\}, \tag{3.7}$$

где

$$J_{\sigma,r}(\tau) = \frac{(\sigma r)^{r\sigma+1}}{\Gamma(r\sigma+1)}\int_0^\infty [e^{-\sigma x}x^\sigma]^2 x^\mu E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}x^{2/\rho}\tau^2 z/w;\mu)\,dx.$$

Кроме того, формула (3.2) принимает вид

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{D}_R} F(w)\left(1-\left(\frac{|w|}{R}\right)^\rho\right)^{\sigma R^\rho}|w|^\gamma\Phi_{\sigma,r}(z,w)\,dm(w) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{D}_R}\frac{\overline{D}F(w)}{w-z}\Psi_{\sigma,r}(z,w)\,dm(w), \quad z \in \mathbb{D}_R. \tag{3.8}$$

Теперь мы намерены в этой формуле устремить $R \to +\infty$ (или, что то же самое, устремить $r \to +\infty$). Для этого, опираясь на сформулированный выше классический результат Лапласа, выясним асимптотическое поведение ядер $\Phi_{\sigma,r}(z,w)$ и $\Psi_{\sigma,r}(z,w)$ при $r \to +\infty$. В случае интеграла (3.6) положим

$$\varphi(x) = x^\mu E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}x^{2/\rho}z\overline{w};\mu), \quad x \in [0,\infty),$$

$$f(x) = e^{-\sigma x}x^\sigma, \quad h(x) = \ln f(x) = -x\sigma + \sigma\ln x, \quad x \in [0,\infty),$$

а для интеграла (3.7) при тех же $f(x), h(x)$ возьмем

$$\varphi(x) = x^{\mu} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} x^{2/\rho} \tau^2 z/w; \mu), \quad x \in [0, \infty).$$

Тогда легко видеть, что в обоих рассматриваемых случаях функция $h(x)$ достигает максимума в точке $\xi = 1$, $h''(\xi) = -\sigma < 0$ и $\varphi(\xi) \neq 0$. Таким образом, условия, необходимые для справедливости асимптотической формулы типа (3.1), соблюдены. Воспользовавшись формулой Стирлинга

$$\Gamma(r\sigma + 1) \sim \sqrt{2\pi}(r\sigma)^{r\sigma+1/2} e^{-r\sigma}, \quad r \to +\infty$$

получим следующую теорему.

**Теорема 3.1.** *1. При любых $z, w \in \mathbb{C}$ справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{r \to +\infty} \Phi_{\sigma,r}(z, w) = \frac{\rho\sigma^{\mu}}{2} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} z\overline{w}; \mu) = \Phi_{\sigma,\infty}(z, w).$$

*2. При $z \in \mathbb{C}$ и $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{r \to +\infty} \Psi_{\sigma,r}(z, w) = 1 - \rho\sigma^{\mu} \frac{w - z}{w} \int_0^{|w|} e^{-\sigma|\tau|^{\rho}} \tau^{\gamma+1} \times$$
$$\times E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} \tau^2 z/w; \mu)\, d\tau \equiv \Psi_{\sigma,\infty}(z, w).$$

Наконец, в (3.8) устремляя $R \to +\infty$ в формуле (3.8), получаем основную теорему этого параграфа.

**Теорема 3.2.** *Если функция $F(z) \in C^1(\mathbb{C})$ подчинена некоторым дополнительным ограничениям, то для нее справедлива интегральная формула*

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} F(w) e^{-\sigma|w|^{\rho}} |w|^{\gamma} \Phi_{\sigma,\infty}(z, w)\, dm(w) -$$
$$- \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\overline{D}F(w)}{w - z} \Psi_{\sigma,\infty}(z, w)\, dm(w), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{3.9}$$

**Замечание 3.1.** Упомянутые в формулировке Теоремы 3.2 дополнительные ограничения на функцию $F(z) \in C^1(\mathbb{C})$ будут указаны в следующем параграфе, где проводится прямое доказательство формулы (3.9), во многом схожее с доказательством Теоремы 2.1.

## §4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Пусть $\rho, \sigma > 0$, $\gamma > -2$ и $\mu = (\gamma+2)/\rho$. Обозначим через $L^p_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbf{C})$ $(1 < p < \infty)$ класс измеримых в $\mathbf{C}$ комплекснозначных функций $f(w)$ с конечным интегралом

$$\iint\limits_{\mathbf{C}} |f(w)|^p e^{-\sigma|w|^\rho} |w|^\gamma \, dm(w) < \infty.$$

Далее, обозначим через $H^p_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbf{C})$ подмножество целых функций из $L^p_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbf{C})$. Как уже отмечалось в §0, в работах [6, 7] было установлено, что функции класса $H^p_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbf{C})$ допускают интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbf{C}} e^{-\sigma|w|^\rho} |w|^\gamma \Phi_\infty(z,w) f(w) \, dm(w), \quad z \in \mathbf{C}, \tag{4.1}$$

где

$$\Phi_\infty(z,w) = \frac{\rho\sigma^\mu}{2} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} z\overline{w}; \mu), \quad z, w \in \mathbf{C}. \tag{4.2}$$

Кроме того, было доказано, что при $p = 2$, интегральный оператор, порождаемый правой частью формулы (4.1) - оператор ортогонального проектирования пространства $L^2_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbf{C})$ на свое замкнутое подпространство $H^2_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbf{C})$.

В этом параграфе наша цель установить аналог формулы (4.1) для функций класса $C^1(\mathbf{C})$ (удовлетворяющих, конечно, определенным условиям роста на бесконечности). Иными словами, мы намерены получить формулу типа Коши-Грина

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbf{C}} e^{-\sigma|w|^\rho} |w|^\gamma \Phi_\infty(z,w) f(w) \, dm(w) -$$

$$- \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbf{C}} \frac{\overline{D} f(w)}{w - z} \Psi_\infty(z,w) \, dm(w), \quad z \in \mathbf{C} \tag{4.3}$$

которая для целых функций очевидным образом переходит в формулу (4.1). Ядро $\Psi_\infty$ в (4.3) пока нам неизвестно. Предположим, что

(a) $\Psi_\infty(z,w)$ определено при $z, w \in \mathbf{C}$, при любом фиксированном $z \in \mathbf{C}$, как функция от $w$, принадлежит классу $C^1(\mathbf{C})$;

(b) При фиксированном $z \in \mathbf{C}$ функция $\Psi_\infty(z,w)$ достаточно быстро убывает на бесконечности (смысл этой фразы будет уточнен ниже);

(c) $\Psi_\infty(z,z) \equiv 1$, $z \in \mathbf{C}$.

Для нахождения явного вида ядра $\Psi_\infty$ мы проведем эвристическое рассуждение, аналогичное тому, которое было применено в §2. Предполагая, что $f \in C^1(\mathbf{C})$ и точка $z \in \mathbf{C}$ фиксирована, рассмотрим дифференциальную форму

$$\varphi_z(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)\Psi_\infty(z,\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad \zeta \in \mathbf{C} \setminus \{z\}, \tag{4.4}$$

класса $C^1$. Затем, при $0 < \varepsilon < R < \infty$ положим $\gamma_\varepsilon(z) = \partial\mathbb{D}_\varepsilon(z)$, $\gamma_R(z) = \partial\mathbb{D}_R(z)$. Далее, применяя к форме $\varphi_z$ формулу Стокса в замкнутый области $\overline{\mathbb{D}_R(z)} \setminus \mathbb{D}_\varepsilon(z)$, получим

$$\int_{\gamma_R(z)} \varphi_z(\zeta) - \int_{\gamma_\varepsilon(z)} \varphi_z(\zeta) = \iint\limits_{\overline{\mathbb{D}_R(z)}\setminus\mathbb{D}_\varepsilon(z)} d\varphi_z(\zeta). \tag{4.5}$$

Затем заметим, что в силу условия (b) (конечно, пока довольно неопределенного) $\int_{\gamma_R(z)} \varphi_z(\zeta) \to 0$ при $R \to +\infty$, а в силу условия (c) $\int_{\gamma_\varepsilon(z)} \varphi_z(\zeta) \to f(z)$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому, устремив $R \to +\infty$, $\varepsilon \to 0$ в формуле (4.5) и вычислив $d\varphi_z(\zeta)$, на основании (4.4) получим

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbf{C}} f(\zeta) \frac{\overline{D_\zeta}\Psi_\infty(z,\zeta)}{\zeta - z}\, dm(\zeta) - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbf{C}} \frac{\overline{D}f(\zeta)}{\zeta - z} \Psi_\infty(z,\zeta)\, dm(\zeta), \quad z \in \mathbf{C}. \tag{4.6}$$

Сравнение (4.3) и (4.6) показывает, что необходимо выполнение следующего соотношения при любом $z \in \mathbf{C}$:

$$\overline{D_\zeta}\Psi_\infty(z,\zeta) = -(\zeta - z)e^{-\sigma|\zeta|^\rho}|\zeta|^\gamma \Phi_\infty(z,\zeta), \quad \zeta \in \mathbf{C}. \tag{4.7}$$

Итак, мы должны найти ядро $\Psi_\infty$, удовлетворяющее условиям (a), (b), (c) и уравнению (4.7).

**Лемма 4.1.** *Если ядро $\Psi_\infty$ с требуемыми свойствами существует, то для него справедливо представление вида*

$$\Psi_\infty(z,w) = 1 - \rho\sigma^\mu \frac{w - z}{w} \int_0^{|w|} e^{-\sigma|r|^\rho} r^{\gamma+1} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} r^2 z/w; \mu)\, dr,$$
$$z \in \mathbf{C}, \quad w \in \mathbf{C} \setminus \{0\}. \tag{4.8}$$

**Доказательство.** При фиксированном $z \in \mathbf{C}$, в силу обычной формулы Коши-Грина, для $|w| < R$ мы имеем

$$\Psi_\infty(z,w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\Psi_\infty(z,\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|\zeta|<R} \frac{\overline{D_\zeta}\Psi_\infty(z,\zeta)}{\zeta - w}\, dm(\zeta). \tag{4.9}$$

Если $R \to +\infty$, то первое слагаемое в правой части (4.9) будет стремиться к нулю, в силу условия (b) на ядро $\Psi_\infty$. Поэтому, с учетом (4.7) получим

$$\Psi_\infty(z,w) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbf{C}} e^{-\sigma|w|^\rho}|\zeta|^\gamma \frac{\Phi_\infty(z,\zeta)}{\zeta - w}(\zeta - z)\,dm(\zeta), \quad w \in \mathbf{C}.$$

Далее, если воспользоваться формулой (4.1) при $f \equiv 1$, то это представление можно записать в виде

$$\Psi_\infty(z,w) = 1 + \frac{w-z}{\pi}\iint\limits_{\mathbf{C}} e^{-\sigma|\zeta|^\rho}|\zeta|^\gamma \frac{\Phi_\infty(z,\zeta)}{\zeta - w}\,dm(\zeta), \quad w \in \mathbf{C}.$$

Подставляя сюда выражение (4.2) и переходя в интеграле к полярным координатам, получим

$$\Psi_\infty(z,w) = 1 + \rho\sigma^\mu(w-z)\int_0^\infty e^{-\sigma|r|^\rho} r^{\gamma+1}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}r^2 z/\zeta;\mu)}{\zeta(\zeta - w)}\,d\zeta\,dr, \quad w \in \mathbf{C}. \tag{4.8}$$

Но легко видеть, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}r^2 z/\zeta;\mu)}{\zeta(\zeta - w)}\,d\zeta = \begin{cases} 0, & r > |w|, \\ -\frac{1}{w}E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}r^2 z/w;\mu), & r < |w|. \end{cases}$$

Таким образом, (4.8) следует из (4.10) и лемма доказана.

Установленная лемма позволяет перейти от эвристических рассуждений к строгим выкладкам. А, именно, определив ядро $\Psi_\infty$ по формуле (4.8) можно перейти к выяснению основных свойств этого ядра. Прежде всего, справедлива простая

**Лемма 4.2.** *Пусть ядро $\Psi_\infty$ определено по формуле (4.8). Тогда при каждом фиксированном $z \in \mathbf{C}$ справедливы утверждения :*

*1. Функция $\Psi_\infty(z,w)$ принадлежит классу $C^1(\mathbf{C}\setminus\{0\})$ и удовлетворяет уравнению (4.7)*

*2. При $w \to 0$*

$$\Psi_\infty(z,w) = 1 + O(|w|^{\gamma+1}), \quad \text{если } z \neq 0,$$

$$\Psi_\infty(0,w) = 1 + O(|w|^{\gamma+2}).$$

*3.* $\Psi_\infty(z,z) = 1, \quad$ *если* $\; z \neq 0,$

$\lim_{w\to 0}\Psi_\infty(0,w) = 1.$

Доказательство по существу повторяет аргументацию Леммы 2.2, и., поэтому, мы его опускаем.

Лемма 4.3. *Пусть ядро $\Psi_\infty(z,w)$ определено по формуле (4.8). Тогда для любого $\varepsilon \in (0,1)$ и для произвольного компакта $K \subset \mathbb{C}$*

$$\Psi_\infty(z,w) = O(e^{-\sigma(1-\varepsilon)|w|^\rho}), \quad |w| \to \infty$$

*равномерно по $z \in K$.*

**Доказательство.** Во-первых, отметим тождество

$$1 \equiv \rho\sigma^\mu \frac{w-z}{w} \int_0^\infty e^{-\sigma r^\rho} r^{\gamma+1} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} r^2 z/w; \mu)\, dr, \quad |z| < |w| < \infty,$$

которое легко устанавливается почленным интегрированием разложением в ряд функции типа Миттаг-Леффлера. Следовательно, формула (4.8) при $|z| < |w| < \infty$ может быть записана в виде

$$\Psi_\infty(z,w) = \rho\sigma^\mu\left(1 - \frac{z}{w}\right) \int_{|w|}^\infty e^{-\sigma|r|^\rho} r^{\gamma+1} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} r^2 z/w; \mu)\, dr =$$

$$= \sigma^\mu\left(1 - \frac{z}{w}\right) \int_{|w|^\rho}^\infty e^{-\sigma x} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} x^{2/\rho} z/w; \mu) x^{\mu-1}\, dx. \tag{4.11}$$

Далее, поскольку $E_{\rho/2}(w;\mu)$ - целая функция порядка $\rho/2$ и типа 1, то можно подобрать такую константу $A > 0$, чтобы во всей плоскости $\mathbb{C}$ была справедлива оценка

$$|E_{\rho/2}(w;\mu)| \le Ae^{2|w|^{\rho/2}}, \quad w \in \mathbb{C}. \tag{4.12}$$

Однако, если $\varepsilon \in (0,1)$ произвольно и $|z| \le R$, а $|w| \ge (4/\varepsilon)^{2/\rho} R$, то имеем $|z/w|^{\rho/2} \le \varepsilon/4$ (в частности, $|z| < |w|$). Следовательно, из (4.12) следует, что

$$|E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} x^{2/\rho} z/w; \mu)| \le Ae^{\varepsilon\sigma x/2}, \quad x \in (0,\infty)$$

равномерно по $|z| \le R$ и $|w| > (4/\varepsilon)^{2/\rho} R$. На основании этой оценки из (4.11) следуют соотношения

$$|\Psi_\infty(z,w)| \le 2\sigma^\mu A \int_{|w|^\rho}^\infty e^{-\sigma x} e^{\varepsilon\sigma x/2} x^{\mu-1}\, dx =$$

$$= 2\sigma^\mu A \int_{|w|^\rho}^\infty e^{-\sigma(1-\varepsilon)x} \left[e^{-\varepsilon\sigma x/2} x^{\mu-1}\right] dx \le A^* \exp[-\sigma(1-\varepsilon)|w|^\rho],$$

где $|z| \le R$, $|w| \ge (4/\varepsilon)^{2/\rho} R$ и

$$A^* = 2\sigma^\mu A \int_0^\infty e^{-\varepsilon\sigma x/2} x^{\mu-1}\, dx < +\infty.$$

Лемма доказана.

**Замечание 4.1.** В итоге мы построили по формуле (4.8) ядро $\Psi_\infty$. Однако, как это следует из Лемм 4.2 и 4.3, первоначально требуемые от ядра $\Psi_\infty$ априорные свойства несколько видоизменились и уточнились. Но легко видеть, что проведенные выше эвристические рассуждения (вплоть до получения формулы (4.8)) остаются в силе, если должным образом подобрать класс функций $f(z)$. Тем самым, справедлива следующая

**Теорема 4.1.** *Пусть ядра $\Phi_\infty$ и $\Psi_\infty$ определены соответственно по формулам (4.2) и (4.8). Тогда интегральное представление (3.9), где $\Phi_{\sigma,\infty} \equiv \Phi_\infty$ и $\Psi_{\sigma,\infty} \equiv \Psi_\infty$, справедливо для каждой функции $f(z) \in C^1(\mathbf{C})$, удовлетворяющей следующим дополнительным условиям :*

*(a) для некоторого $\varepsilon \in (0,1)$*

$$f(z) = O(e^{\sigma(1-\varepsilon)|z|^\rho}) \quad \text{при } |z| \to \infty; \tag{4.13}$$

*(b) для некоторого $\varepsilon \in (0,1)$*

$$\overline{D}f(z) = O(e^{\sigma(1-\varepsilon)|z|^\rho}) \quad \text{при } |z| \to \infty.$$

В частности, для целых функций $f(z)$, при некотором $\varepsilon \in (0,1)$ удовлетворяющих оценке (4.13), мы вновь получаем представление (4.1).

**Замечание 4.2.** Заметим, что Теоремой 4.1 вновь устанавливается формула (3.9) предыдущего параграфа, но уже с конкретным указанием соответствующего класса функций.

Наконец, обсудим один важный частный случай Теоремы 4.1. Пусть $\rho = 2$, $\sigma > 0$ и $\gamma = 0$ (следовательно, $\mu = 1$). В этом случае формула (4.2) принимает вид

$$\Phi_\infty(z,w) = \sigma E_1(\sigma z\overline{w}; 1) = \sigma e^{\sigma z\overline{w}}, \quad z, w \in \mathbf{C}.$$

Далее, из (4.8) при $z \in \mathbf{C}$ и $w \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ получаем

$$\Psi_\infty(z,w) = 1 - 2\sigma\frac{w-z}{w}\int_0^{|w|} e^{-\sigma r^2} rE_1(\sigma r^2 z/w; 1)\,dr =$$

$$= 1 - \sigma\left(1 - \frac{z}{w}\right)\int_0^{|w|^2} e^{-\sigma x(1-z/w)}\,dx = e^{-|w|^2\sigma + \sigma z\overline{w}}. \tag{4.14}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае ограничение $w \neq 0$ излишне. Следовательно, основная формула (4.28) принимает вид (0.8), где функция $f(z) \in C^1(\mathbf{C})$ удовлетворяет соответствующим условиям роста на бесконечности.

## §5. ВАЖНЕЙШИЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ТЕОРЕМЫ 4.1

**5.1. Специальные случаи ядра $\Psi_\infty$.** Напомним, что при $z \in \mathbf{C}$, $w \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ ядро $\Psi_\infty(z, w)$ определялось по формуле (4.8), где $\rho, \sigma > 0$, $\gamma > -2$. В настоящем параграфе мы будем предполагать, что указанные параметры не произвольны, а выбраны следующим образом :

$$\rho = \frac{2}{p}\ (p = 1, 2, ...), \quad \gamma = \frac{2(1+\kappa)}{p} - 2, \quad \mu = \frac{2+\gamma}{\rho} = 1 + \kappa, \tag{5.1}$$

где $\kappa \geq 0$ - любое целое число. Ввиду обозначений (5.1) формула (4.8) после простых преобразований запишется в следующем виде :

$$\Psi_\infty(z, w) = 1 - \frac{w - z}{w} \int_0^{\sigma|w|^{2/p}} e^{-x} x^\kappa E_{1/p}(x^p z/w; 1 + \kappa)\, dx, \quad z \in \mathbf{C}, \quad w \in \mathbf{C} \setminus \{0\}. \tag{5.2}$$

Далее, положим $\omega_p = \exp[2\pi i/p]$, и отметим очевидные формулы

$$\sum_{h=0}^{p-1} \omega_p^{kh} = \begin{cases} p, & \text{если } k = 0 \pmod p \\ 0, & \text{если } k \neq 0 \pmod p \end{cases} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...). \tag{5.3}$$

Затем, воспользовавшись разложением

$$E_1(\zeta^{1/p}\omega_p^h; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^{k/p}\omega_p^{kh}}{\Gamma(\mu + k)}, \quad \zeta \in \mathbf{C}, \quad 0 \leq h \leq p - 1,$$

придем к тождеству

$$\frac{1}{p}\sum_{h=0}^{p-1} E_1(\zeta^{1/p}\omega_p^h; \mu) \equiv E_{1/p}(\zeta; \mu), \quad \zeta \in \mathbf{C}. \tag{5.4}$$

**Лемма 5.1.** *В предположении (5.1) относительно параметров $\rho, \gamma$ и $\mu$ при $z \in \mathbf{C}$, $w \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ имеет место представление вида*

$$\Psi_\infty(z, w) = 1 - \frac{w - z}{pw}\left(\frac{w}{z}\right)^{\kappa/p} [U_1 - U_2], \tag{5.5}$$

где

$$U_1 = \sum_{h=0}^{p-1} \omega_p^{-\kappa h} \int_0^{\sigma|w|^{2/p}} \exp\left[-\left(1 - \sqrt[p]{\frac{z}{w}}\,\omega_p^h\right) x\right] dx, \tag{5.6}$$

$$U_2 = \sum_{h=0}^{p-1} \omega_p^{-\kappa h} \sum_{k=0}^{\kappa-1} \left(\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h\right)^k \frac{1}{\Gamma(1+k)} \int_0^{\sigma|w|^{2/p}} e^{-x} x^k\, dx. \tag{5.7}$$

**Доказательство.** Прежде всего отметим, что при любых $\kappa = 0, 1, \ldots$ справедливо тождество

$$E_1(\zeta; 1+\kappa) = \zeta^{-\kappa}\left[e^{\zeta} - \sum_{k=0}^{\kappa-1} \frac{\zeta^k}{\Gamma(1+k)}\right], \quad \zeta \in \mathbf{C}, \tag{5.8}$$

причем в случае $\kappa = 0$ сумма по индексу $k$ попросту отсутствует. Далее, в силу (5.4) имеем

$$E_{1/p}(x^p z/w; 1+\kappa) = \frac{1}{p}\sum_{h=0}^{p-1} E_1\left(x\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h; 1+\kappa\right).$$

Следовательно, согласно (5.8) получаем

$$E_{1/p}(x^p z/w; 1+\kappa) = \frac{1}{p}\sum_{h=0}^{p-1} x^{-\kappa}\left(\frac{w}{z}\right)^{\kappa/p} \omega_p^{-\kappa h}\left[e^{x\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h} - \sum_{k=0}^{\kappa-1} \frac{x^k\left(\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h\right)^k}{\Gamma(1+k)}\right].$$

Наконец, из (5.2) получим представление (5.5).

5.2. **Дополнительные определения.** Мы намерены провести дальнейшие преобразования и упрощения формул (5.5) – (5.7). С этой целью необходимо ввести дополнительные обозначения и установить некоторые соотношения.

Пусть $p = 1, 2, \ldots$ и $\kappa = 0, 1, \ldots$ – произвольные целые числа. Очевидно, что $\kappa$ единственным образом может быть представлено в виде

$$\kappa = \nu_0 p + r_0, \tag{5.9}$$

где $\nu_0 \geq 0$ и $0 \leq r_0 \leq p-1$ – также целые числа. Более того, легко видеть, что $\nu_0 = [\kappa/p]$. Далее, введем в рассмотрение полиномы от $\zeta \in \mathbf{C}$ :

$$P_{0,0}(\zeta) \equiv 1, \quad P_{p-1,h}(\zeta) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq h}}^{p-1}(1-\omega_p^j\zeta), \quad p \geq 2, \quad 0 \leq h \leq p-1. \tag{5.10}$$

**Лемма 5.2.** *Имеет место тождество :*

$$\frac{1}{p}\sum_{h=0}^{p-1} \omega_p^{-h\kappa} P_{p-1,h}(\zeta) \equiv \zeta^{r_0}, \quad \zeta \in \mathbf{C}. \tag{5.11}$$

**Доказательство.** Прежде всего отметим тождество

$$1 - \zeta^p = \prod_{j=1}^{p-1}(1-\omega_p^j\zeta), \quad \zeta \in \mathbf{C}. \tag{5.12}$$

В его справедливости легко убедиться, если заметить, что в (5.12) слева и справа присутствуют полиномы степени $p$, имеющие одинаковую совокупность простых нулей $\{\omega_p^j : 0 \leq j \leq p-1\}$ и в точке $\zeta = 0$, принимающие одно и то же значение 1. Следовательно, ввиду (5.12) и (5.10) будем иметь

$$\sum_{h=0}^{p-1} \omega_p^{-h\kappa} P_{p-1,h}(\zeta) = (1-\zeta^p) \sum_{h=0}^{p-1} \frac{\omega_p^{-h\kappa}}{1-\omega_p^h \zeta}, \quad \zeta \in \mathbf{C}. \tag{5.13}$$

Однако, если $\zeta \in \mathbb{D}$, то

$$\sum_{h=0}^{p-1} \frac{\omega_p^{-h\kappa}}{1-\omega_p^h \zeta} = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k \sum_{h=0}^{p-1} \omega_p^{(k-\kappa)h}. \tag{5.14}$$

С другой стороны, ввиду (5.3) и (5.9), имеем

$$\sum_{h=0}^{p-1} \omega_p^{(k-\kappa)h} = \begin{cases} p, & \text{если } k = r_0 + np, \quad n = 0, 1, ..., \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{5.15}$$

Отсюда и из (5.14) следует, что

$$\sum_{h=0}^{p-1} \frac{\omega_p^{-h\kappa}}{1-\omega_p^h \zeta} = p \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^{r_0+kp} = \frac{p\zeta^{r_0}}{1-\zeta^p}, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{5.16}$$

Наконец, из (5.13) и (5.16) получаем формулу (5.11) при $\zeta \in \mathbb{D}$, а значит, и при всех $\zeta \in \mathbf{C}$. Таким образом, лемма доказана.

**Следствие.** Справедливы следующие формулы :

$$\frac{1}{p} \sum_{h=0}^{p-1} P_{p-1,h}(\zeta) \equiv 1, \quad \zeta \in \mathbf{C},$$

$$\frac{1}{p} \sum_{h=0}^{p-1} \frac{1}{1-\omega_p^h \zeta} \equiv \frac{1}{1-\zeta^p}, \quad \zeta \in \mathbf{C}, \quad \zeta^p \neq 1. \tag{5.17}$$

**5.3. Основная теорема о представлении ядра $\Psi_\infty$.**

**Теорема 5.1.** *В предположении (5.1) относительно параметров $\rho, \gamma$ и $\mu$ при $z \in \mathbf{C}$, $w \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ имеет место следующее представление :*

$$\Psi_\infty(z, w) = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{z}{w}\right) \left(\frac{z}{w}\right)^{-\kappa/p} e^{-\sigma|w|^{2/p}} [V_1(z, w) - V_2(z, w)], \tag{5.18}$$

*где*

$$V_1(z, w) \equiv V_1 = \left(1 - \frac{z}{w}\right)^{-1} \sum_{h=0}^{p-1} \omega_p^{-h\kappa} P_{p-1,h}\left(\sqrt[p]{z/w}\right) e^{\sigma \sqrt[p]{z\bar{w}}\, \omega_p^h}, \tag{5.19}$$

$$V_2(z,w)\equiv V_2=p\left(\frac{z}{w}\right)^{\kappa/p}\sum_{n=0}^{\nu_0-1}\left(\frac{z}{w}\right)^{n-\nu_0}\sum_{m=0}^{r_0+np}\frac{\sigma^m(\sqrt[p]{|w|^2})^m}{\Gamma(1+m)}. \tag{5.20}$$

**Доказательство.** Сперва займемся упрощением выражений для $U_1$ и $U_2$ в представлении (5.5) . Очевидно

$$U_1=\sum_{h=0}^{p-1}\frac{\omega_p^{-\kappa h}}{1-\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h}-e^{-\sigma|w|^{2/p}}\sum_{h=0}^{p-1}\frac{\omega_p^{-\kappa h}}{1-\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h}e^{\sigma\sqrt[p]{z\overline{w}}\omega_p^h}. \tag{5.21}$$

Кроме того, последовательным интегрированием по частям получаем

$$\frac{1}{\Gamma(1+k)}\int_0^{\sigma|w|^{2/p}}e^{-x}x^k\,dx=1-e^{-\sigma|w|^{2/p}}\sum_{m=0}^{k}\frac{(\sigma|w|^{2/p})^m}{\Gamma(1+m)},\quad k=0,1,\ldots$$

Поэтому величина $U_2$ может быть представлена в виде

$$U_2=\sum_{h=0}^{p-1}\omega_p^{-\kappa h}\sum_{k=0}^{\kappa-1}\left(\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h\right)^k-e^{-\sigma|w|^{2/p}}\times$$
$$\times\sum_{h=0}^{p-1}\omega_p^{-\kappa h}\sum_{k=0}^{\kappa-1}\left(\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h\right)^k\sum_{m=0}^{k}\frac{(\sigma|w|^{2/p})^m}{\Gamma(1+m)}. \tag{5.22}$$

Комбинируя (5.21) и (5.22), получим

$$U_1-U_2=U_1^*-U_2^*, \tag{5.23}$$

где

$$U_1^*=\sum_{h=0}^{p-1}\frac{\omega_p^{-\kappa h}}{1-\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h}-\sum_{h=0}^{p-1}\omega_p^{-\kappa h}\sum_{k=0}^{\kappa-1}\left(\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h\right)^k, \tag{5.24}$$

$$U_2^*=e^{-\sigma|w|^{2/p}}[U_3^*-U_4^*], \tag{5.25}$$

$$U_3^*=\sum_{h=0}^{p-1}\frac{\omega_p^{-\kappa h}}{1-\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h}e^{\sigma\sqrt[p]{z\overline{w}}\omega_p^h},$$

$$U_4^*=\sum_{h=0}^{p-1}\omega_p^{-\kappa h}\sum_{k=0}^{\kappa-1}\left(\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h\right)^k\sum_{m=0}^{k}\frac{(\sigma|w|^{2/p})^m}{\Gamma(1+m)}.$$

Далее, согласно (5.17) и (5.24)

$$U_1^*=\sum_{h=0}^{p-1}\frac{\omega_p^{-\kappa h}}{1-\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h}\left(\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h\right)^\kappa=p\left(\frac{z}{w}\right)^{\kappa/p}\left(1-\frac{z}{w}\right)^{-1}=\frac{pw}{w-z}\left(\frac{z}{w}\right)^{\kappa/p}. \tag{5.26}$$

Кроме того, из соотношений (5.10) и (5.12) следует, что

$$U_3^*=\left(1-\frac{z}{w}\right)^{-1}\sum_{h=0}^{p-1}\omega_p^{-\kappa h}P_{p-1,h}\left(\sqrt[p]{z/w}\right)e^{\sigma\sqrt[p]{z\overline{w}}\omega_p^h}. \tag{5.27}$$

Наконец, преобразуем величину $U_4^*$ :

$$U_4^* = \sum_{k=0}^{\kappa-1} \left(\frac{z}{w}\right)^{k/p} \sum_{m=0}^{k} \frac{\sigma^m (|w|^{2/p})^m}{\Gamma(1+m)} \sum_{h=0}^{p-1} \omega_p^{(k-\kappa)h}.$$

С учетом (5.15) и (5.9) последнее соотношение принимает вид

$$U_4^* = p \sum_{\substack{k=r_0+np \\ 0\leq n\leq \nu_0-1}} \left(\frac{z}{w}\right)^{k/p} \sum_{m=0}^{k} \frac{\sigma^m (|w|^{2/p})^m}{\Gamma(1+m)} =$$

$$= p \left(\frac{z}{w}\right)^{\kappa/p} \sum_{n=0}^{\nu_0-1} \left(\frac{z}{w}\right)^{n-\nu_0} \sum_{m=0}^{r_0+np} \frac{\sigma^m (|w|^{2/p})^m}{\Gamma(1+m)}. \tag{5.28}$$

Тем самым, комбинируя (5.23), (5.25) - (5.28), получим

$$U_1 - U_2 = \frac{pw}{w-z} \left(\frac{z}{w}\right)^{\kappa/p} - e^{-\sigma|w|^{2/p}} \times$$

$$\times \left[ \left(1 - \frac{z}{w}\right)^{-1} \sum_{h=0}^{p-1} \omega_p^{-\kappa h} P_{p-1,h}\left(\sqrt[p]{z/w}\right) e^{\sigma \sqrt[p]{z\overline{w}}\,\omega_p^h} - \right.$$

$$\left. - p \left(\frac{z}{w}\right)^{\kappa/p} \sum_{n=0}^{\nu_0-1} \left(\frac{z}{w}\right)^{n-\nu_0} \sum_{m=0}^{r_0+np} \frac{\sigma^m (|w|^{2/p})^m}{\Gamma(1+m)} \right]. \tag{5.29}$$

Наконец, формула (5.18) легко следует из (5.5) и (5.29). Этим завершается доказательство теоремы.

В заключение рассмотрим некоторые специальные случаи общей формулы (5.18).

**Случай $p = 1$, $\kappa \geq 0$ целое.** Очевидно $\omega_p = \omega_1 = 1$, кроме того, в этом случае $P_{0,0}(\zeta) \equiv 1$ и $\nu_0 = \kappa$, $r_0 = 0$. Следовательно, согласно (5.18) - (5.20)

$$V_1(z,w) = \frac{w}{w-z} e^{\sigma z \overline{w}},$$

$$V_2(z,w) = \left(\frac{z}{w}\right)^{\kappa} \sum_{n=0}^{\kappa-1} \left(\frac{z}{w}\right)^{n-\kappa} \sum_{m=0}^{n} \frac{\sigma^m |w|^{2m}}{\Gamma(1+m)},$$

$$\Psi_\infty(z,w) = \left(\frac{z}{w}\right)^{-\kappa} e^{\sigma z\overline{w}} e^{-\sigma|w|^2} - \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{-\sigma|w|^2} \sum_{n=0}^{\kappa-1} \left(\frac{z}{w}\right)^{n-\kappa} \sum_{m=0}^{n} \frac{\sigma^m |w|^{2m}}{\Gamma(1+m)}. \tag{5.30}$$

Заметим, что если $\kappa = 0$, то второе слагаемое в правой части (5.30) отсутствует, и мы получаем

$$\Psi_\infty(z,w) = \exp[\sigma z\overline{w} - \sigma|w|^2],$$

что вполне согласуется с формулой (4.14).

Переходя к рассмотрению случая $p = 2$, предварительно отметим, что тогда $\omega_p = \omega_2 = e^{i\pi} = -1$ и, кроме того $P_{1,0}(\zeta) \equiv 1 + \zeta$, $P_{1,1}(\zeta) \equiv 1 - \zeta$.

**Случай $p = 2$, $\kappa \geq 0$ – четное.** Очевидно $\kappa = 2\nu_0$ $(\nu_0 \geq 0)$ и $r_0 = 0$. Поэтому

$$V_1(z, w) = \frac{w}{w - z} \sum_{h=0}^{1} \omega_2^{-\kappa h} P_{1,h}(\sqrt{z/w}) \exp[\sigma\sqrt{z\overline{w}}\omega_2^h] =$$

$$= \frac{2w}{w - z} [\operatorname{ch} \sigma\sqrt{z\overline{w}} + \sqrt{z/w} \operatorname{sh} \sigma\sqrt{z\overline{w}}],$$

$$V_2(z, w) = 2\left(\frac{z}{w}\right)^{\nu_0} \sum_{n=0}^{\nu_0 - 1} \left(\frac{z}{w}\right)^{n-\nu_0} \sum_{m=0}^{2n} \frac{\sigma^m |w|^m}{\Gamma(1 + m)}.$$

Следовательно, получаем представление

$$\Psi_\infty(z, w) = \frac{w - z}{2w} \left(\frac{z}{w}\right)^{-\nu_0} e^{-\sigma|w|}[V_1(z, w) - V_2(z, w)] =$$

$$= \left(\frac{z}{w}\right)^{-\nu_0} e^{-\sigma|w|}[\operatorname{ch} \sigma\sqrt{z\overline{w}} + \sqrt{z/w} \operatorname{sh} \sigma\sqrt{z\overline{w}}] -$$

$$- \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{-\sigma|w|} \sum_{n=0}^{\nu_0 - 1} \left(\frac{z}{w}\right)^{n-\nu_0} \sum_{m=0}^{2n} \frac{\sigma^m |w|^m}{\Gamma(1 + m)}.$$

В частности, при $\kappa = 0$ (т.е. при $\nu_0 = 0$) получаем следующее простое выражение :

$$\Psi_\infty(z, w) = e^{-\sigma|w|}[\operatorname{ch} \sigma\sqrt{z\overline{w}} + \sqrt{z/w} \operatorname{sh} \sigma\sqrt{z\overline{w}}].$$

Кстати, в этом случае ядро $\Phi_\infty$ тоже записывается просто

$$\Phi_\infty(z, w) = \frac{\sigma}{2} \operatorname{ch} \sigma\sqrt{z\overline{w}}.$$

**Случай $p = 2$, $\kappa \geq 1$ – нечетное.** Очевидно $\kappa = 2\nu_0 + 1$ $(\nu_0 \geq 0)$и $r_0 = 1$. Следовательно

$$V_1(z, w) = \frac{w}{w - z} \sum_{h=0}^{1} \omega_2^{-\kappa h} P_{1,h}(\sqrt{z/w}) \exp[\sigma\sqrt{z\overline{w}}\omega_2^h] =$$

$$= \frac{2w}{w - z} [\operatorname{sh} \sigma\sqrt{z\overline{w}} + \sqrt{z/w} \operatorname{ch} \sigma\sqrt{z\overline{w}}],$$

$$V_2(z, w) = 2\left(\frac{z}{w}\right)^{\nu_0 + 1/2} \sum_{n=0}^{\nu_0 - 1} \left(\frac{z}{w}\right)^{n-\nu_0} \sum_{m=0}^{2n+1} \frac{\sigma^m |w|^m}{\Gamma(1 + m)}.$$

Отсюда получаем

$$\Psi_\infty(z, w) = \frac{w - z}{2w} \left(\frac{z}{w}\right)^{-\nu_0 - 1/2} e^{-\sigma|w|}[V_1(z, w) - V_2(z, w)] =$$

$$= \left(\frac{z}{w}\right)^{-\nu_0} e^{-\sigma|w|}[\operatorname{ch} \sigma\sqrt{z\overline{w}} + \sqrt{w/z} \operatorname{sh} \sigma\sqrt{z\overline{w}}] -$$

$$\left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{-\sigma|w|} \sum_{n=0}^{\nu_0 - 1} \left(\frac{z}{w}\right)^{n-\nu_0} \sum_{m=0}^{2n+1} \frac{\sigma^m |w|^m}{\Gamma(1 + m)}.$$

В частности, при $\kappa = 1$ (т.е. при $\nu_0 = 0$), имеем

$$\Psi_\infty(z, w) = e^{-\sigma|w|}\left[\,\mathrm{ch}\,\sigma\sqrt{z\overline{w}} + \sqrt{w/z}\,\mathrm{sh}\,\sigma\sqrt{z\overline{w}}\right],$$

и

$$\Phi_\infty(z, w) = \frac{\sigma}{2}\frac{\mathrm{sh}\,\sigma\sqrt{z\overline{w}}}{\sqrt{z\overline{w}}}.$$

**ABSTRACT.** The main results of the paper consist in the establishment of formulas of the form $f(z) = P(f)(z) + T(\overline{\partial} f)(z)$ in the following two cases : (a) $f(z)$ is a function of class $C^1$ in the unit disk $\mathbb{D}$ and $P$ is the operator of orthogonal projection of the space $L^2\{\mathbb{D};\ (1-|z|^\rho)^\alpha |z|^\gamma dm(z)\}$ onto its subspace of analytic functions ; (b) $f(z)$ is a function of class $C^1$ in the complex plane (satisfying certain growth conditions near infinity) and $P$ is the operator of orthogonal projection of the space $L^2\{\mathbb{C};\ e^{-\sigma|z|^\rho}|z|^\gamma dm(z)\}$ onto its subspace of entire functions. In both cases explicit formulas for kernels of the integral operators $P$ and $T$ are obtained.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, " О каноническом представлении мероморфных функций в единичном круге функций", ДАН Арм. ССР, т. 3, № 3, стр. 3 – 9, 1945.
2. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Инст. мат. и мех. АН Арм. ССР, т. 2, стр. 3 – 40, 1948.
3. М. М. Джрбашян, " Краткий обзор результатов исследований математиков Армении в области теории факторизации мероморфных функций и ее приложений", Изв. Ан Армении, Математика, т. 23, №6, стр. 517 – 545, 1988.
4. Ph. Charpentier, "Formules explicities pour les solutions minimales de l'equation $\overline{\partial}u = f$ dans la boule et dans le polydisque de $\mathbf{C}^n$", Ann. Inst. Fourier, vol. 30, no. 4, pp. 121 – 154, 1980.
5. Ф. А. Шамоян, "Приложения интегральных представлений Джрбашяна к некоторым задачам анализа", ДАН СССР, т. 261, №3, стр. 557 - 561, 1981.
6. М. М. Джрбашян, " О представимости некоторых классов целых функций" ДАН Арм. ССР, т. 7, №5, стр. 193 - 197, 1947.
7. М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян, " Интегральные представления и теоремы единственности для целых функций многих переменных", Изв. АН Армении, Математика, т. 26, №1, стр. 3 – 19, 1991.
8. B. Bendtsson, M. Andersson, "Henkin-Ramirez formulas with weight factors", Ann. Inst. Fourier, vol. 32, no. 3, pp. 91 – 110, 1982.
9. Г. Полиа, Г. Сеге, Задачи и Теоремы из Анализа, часть 1, М., Гостехиздат, 1956.

28 Августа 1993

Институт математики
НАН Армении

Посвящается профессору
Мхитару М. Джрбашяну
в связи с 75-летним юбилеем

# О ТЕОРЕМЕ САРАСОНА

С. А. Григорян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, №4, 1993

**Пусть $T$ – единичный круг. По теореме Сарасона, $H^\infty + C(T)$ является равномерной подалгеброй в $\mathcal{L}^\infty(\sigma)$. Эта теорема расширяется для обобщенных аналитических функций. В частности, доказывается результат для почти периодических аналитических функций.**

## §0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Gamma$ – подгруппа группы рациональных чисел $Q$, наделенное дискретной топологией, $G$ – компактная группа характеров группы $\Gamma$. На локально компактном пространстве $\Delta$, полученном из декартового произведения $G \times [0, 1]$ отождествлением слоя $G \times \{0\}$ в точку, рассмотрим множество функций $\{\varphi^a\}_{a\in\Gamma_+}$, определенных посредством $\varphi^a(\alpha \cdot r) = \alpha(a) \cdot r^a$, где $\Gamma_+ = \{a \in \Gamma;\ a \geq 0\}$. Обозначим через $H^\infty$ алгебру ограниченных непрерывных функций на $\Delta^0 = \Delta \setminus (G \times \{1\})$, которые локально аппроксимируются в окрестности каждой точки из $\Delta^0$ линейными функциями $\varphi^a$, $a \in \Gamma_+$.

Пусть $\sigma$ – нормализованная мера Хаара на $G$. Для каждой $f \in H^\infty$ существует (для $\sigma$-почти всех $\alpha \in G$) предел

$$f^*(\alpha) = \lim_{r\to 1} f(\alpha \cdot r), \tag{1}$$

принадлежащий $\mathcal{L}^\infty(\sigma)$ [1].

Отождествим $f \in H^\infty$ с его граничной функцией $f^*$. Пространство ограниченных функций $H^\infty$ является подалгеброй банаховой алгебры $\mathcal{L}^\infty(\sigma)$, которую мы обозначим также символом $H^\infty$. Если $\Gamma$ является группой целых чисел, то $G$ – единичный круг и алгебра $H^\infty$ является алгеброй ограниченных аналитических функций на открытом единичном диске $\{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ в комплексной плоскости. В этом случае, по одной из теорем Сарасона, пространство $H^\infty + C(G)$ является замкнутой подалгеброй банаховой алгебры $\mathcal{L}^\infty(\sigma)$ ($C(G)$ – алгебра всех непрерывных функций на $G$) (см. [2]).

В настоящей заметке доказывается более общая теорема.

**Теорема.** *Пусть $\Gamma$ – подгруппа группы рациональных чисел $Q$. Тогда $H^\infty + C(G)$ – замкнутая подалгебра $\mathcal{L}^\infty(\sigma)$.*

## §1. НЕОБХОДИМЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Начнем с некоторых предварительных результатов.

**Лемма 1.** *Пусть $a \in \Gamma_+$, $a \neq 0$. Тогда существует множество $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ в $\Gamma_+$ такое, что*

*i) $a = a_0$,*

*ii) $a_k = m_k \cdot a_{k+1}$ для некоторого $m_k \in \mathbb{Z}_+$,*

*iii) Для каждого $b \in \Gamma_+$ существует $a_n \in \{a_k\}_{k=0}^\infty$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ такие, что $b = m \cdot a_n$.*

**Доказательство.** Поскольку группа $\Gamma$ является счетным множеством, пронумеруем элементы $\Gamma$. Пусть $\Gamma = \{b_i\}_{i=1}^\infty$. Положим $a_0 = a$ и рассмотрим группу $\Gamma_1 = \{a_0; b_1\}$, порожденную элементами $a_0$ и $b_1$. Поскольку $\Gamma_1$ изоморфна целым числам, то существует $a_1 \in \Gamma_1 \cap \Gamma_+$ такое, что $a_0 = ma_1$ и $b_1 = na_1$, где $m, n \in \mathbb{Z}$. Возьмем теперь $b_2 \in \Gamma$, найдем $a_2 \in \Gamma_+$ и $m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$ такие, что $a_1 = m_1 a_2$ и $b_2 = n_1 a_2$. Продолжая этот процесс, мы можем получить последовательность $\{a_k\}_{k=0}^\infty$.

По теореме двойственности Понтрягина, $G$ является группой характеров группы $\Gamma$. Пусть $A$ – замкнутая в sup норме подалгебра алгебры $C(G)$, порожденная характерами из $\Gamma_+$. Пространство максимальных идеалов этой алгебры есть

$\Delta$. Поэтому мы отождествим $G$ с $G \ltimes \{1\}$. Обозначим также через $A$ преобразование Гельфанда алгебры $A$. Эта алгебра в точности совпадает с пространством функций из $H^\infty$, которые непрерывно расширяются на $\Delta$ (см. [1], [3]).

Замкнутое подмножество $E$ из $\Delta$ называется ***интерполяционным*** множеством для $A$, если сужение $A$ на $E$ есть $C(E)$.

**Лемма 2.** *Пусть* $E = \{s \in \Delta : \varphi^a(s) = r\}$, $a \neq 0$. *Тогда* $E$ – ***интерполяционное множество для*** $A$.

**Доказательство.** Для доказательства леммы используем следующее замечание : пусть $K$ – компакт и $B$ – замкнутое подпространство в $C(K)$. Замкнутое подмножество $F \subset K$ является интерполяционным множеством для $B$ тогда и только тогда, когда существует $c > 0$ такое, что $||\mu_F|| < c||\mu_{K \setminus F}||$ для всех $\mu \in B^\perp$ ($\mu_F$ – сужение $\mu$ на $F$).

Напомним, что по теореме Карлесона последовательность $\{z_j\}_1^\infty$ в диске $D$ является интерполяционной последовательностью для $H^\infty$, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\inf_k \prod_{j \neq k} \left| \frac{z_k - z_j}{1 - \bar{z}_k z_j} \right| > \delta. \tag{2}$$

Это условие эквивалентно следующему : существует число $c = c(\delta)$, зависящее только от $\delta$ и такое, что каждая интерполяционная задача $f(z_j) = c_j$, $j = 1, 2, \ldots$ с $\{c_j\} \in l^\infty$ имеет решение $f \in H^\infty$ такое, что

$$||f||_\infty \leq c(\delta)\, ||f(z_j)||_{l^\infty}. \tag{3}$$

Ввиду дуальности банаховых пространств, (3) эквивалентно условию

$$||\mu_{\{z_k\}_1^\infty}|| \leq c(\delta)\, ||\mu_{D \setminus \{z_k\}_1^\infty}||, \qquad \mu \in (H^\infty)^\perp. \tag{4}$$

Заметим, что $c(\delta) = 2e \log(e\delta^{-2})/\delta$ (см. [4]).

Пусть теперь $\{a_k\}_0^\infty$ – подмножество в $\Gamma_+$, удовлетворяющее условиям i), ii) и iii). Для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ определим $\Psi_k : \Delta \to D$, $\Psi_k(s) = \varphi^{a_k}(s)$.

Так как $a_0 = ma_k$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}_+$, имеем $\Psi_k(E) = \{z_n\}_{n=0}^{m-1}$, где $z_k = r^{\frac{1}{m}} \exp\left(i\dfrac{2\pi k}{m}\right)$ и $E = \{s \in \Delta : \varphi^{a_0}(s) = r\}$. Конечная последовательность

$\{z_k\}_{k=0}^{m-1}$ в точности совпадает с множеством корней уравнения $z^m = r$, и следовательно, для проверки условий Карлесона в этих точках достаточно подсчитать

$$\delta(m) = \prod_{k=0}^{m-1} \left| \frac{r^{\frac{1}{m}} - r^{\frac{1}{m}} \exp\left(i\frac{2\pi k}{m}\right)}{1 - r^{\frac{2}{m}} \exp\left(i\frac{2\pi k}{m}\right)} \right|.$$

Так как

$$z^m - r = \prod_{k=0}^{m-1} \left| z - r^{\frac{1}{m}} \exp\left(i\frac{2\pi k}{m}\right) \right|,$$

получим

$$\delta(m) = \lim_{z \to r^{\frac{1}{m}}} \left| \frac{(z^m - r)(1 - r^{\frac{1}{m}} z)}{(1 - rz^m)(z - r^{\frac{1}{m}}} \right|.$$

Следовательно

$$\delta(m) = mr^{\frac{m-r}{m}} \frac{1 - r^{\frac{2}{m}}}{1 - r^2}$$

и

$$\delta = \lim_{m \to \delta} \delta(m) = \frac{-2 \log r}{1 - r^2}. \tag{5}$$

С помощью отображения $\Psi_k$ определим для $\mu \in A^{\perp}$ меру $\mu^{(k)}$ на $\overline{D}$ так, что

$$\mu^{(k)}(F) = \mu(\Psi_k^{-1}(F)), \quad F \subset \overline{D}.$$

Так как

$$\int_{\overline{D}} z^n \, d\mu^{(k)} = \int_{\Delta} \varphi^{n a_k} \, d\mu = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{6}$$

то мера $\mu^{(k)}$ ортогональна к диск-алгебре. Рассмотрим теперь группу $G_k = \{\alpha \in \in G\colon \alpha(a_k) = 1\}$ и фактор-группу $B_k = G/G_k$. Отображение $\Psi_k$ порождает изоморфизм между $\overline{D}$ и $\Delta_k = B_k \times [0,1]/B_k \times \{0\}$. Поскольку $G_k \supset G_{k+1}$ и $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \{e\}$, ($e$ - единица грппы $G$), существует индуктивный предел пространств $\Delta_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Можно показать, что

$$\operatorname{Ind} \lim \Delta_k = \Delta.$$

Следовательно, если $F$ борелево множество в $\Delta$, то

$$\lim_{k \to \infty} \|\mu_{F_k}^{(k)}\| = \|\mu_F\|, \tag{7}$$

где $F_k = \Psi_k(F)$.

Пусть $E = \{s \in \Delta : \varphi^{a_0}_{r}(s) = r\}$ и $F = \Delta \setminus E$. Из (4) получим

$$\|\mu^{(k)}_{E_k}\| < c(\delta_k)\,\|\mu^{(k)}_{F_k}\|, \tag{8}$$

где

$$E_k = \Psi_k(E) = \left\{ r^{\frac{1}{m}} \exp\left( i\frac{2\pi n}{m} \right) \right\}_{n=0}^{m-1}.$$

Наконец, комбинируя (4) – (7) и (8) имеем

$$\|\mu_E\| < c\left\{ \frac{-2\ln 2}{1-r^2} \right\} \|\mu_{\Delta\setminus E}\|.$$

Используя теперь вышеуказанное замечание, получим, что $E$ есть интерполяционное множество для $A$.

Если $\beta \in G$ и $\rho \in [0,1]$ для всех $s \in \Delta$, $s = \alpha \circ r$, то согласно определению $\beta s = (\beta\alpha)r \in \Delta$ и $\rho s = \alpha(r\rho)$. Следовательно, для $f \in A$ можно определить

$$f_\beta(s) = f(\beta s) \quad \text{and} \quad f_\rho(s) = f(\rho s).$$

Эти функции принадлежат $A$. Для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ пусть $A_k$ – замкнутая подалгебра алгебры $A$, порожденная $\varphi^{a_k}$ и единицей. Эта алгебра изоморфна диск-алгебре.

Пусть $\nu_k$ – нормализованная мера Хаара на $G_k$. Линейный оператор $P_k : A \to A_k$, определенный следующим образом

$$P_k f = \int_{G_k} f_\beta \, d\nu_k(\beta),$$

есть ограниченный оператор из $A$ на $A_k$ такой, что $P^2 = P$. Это означает, что $P$ проекция. Если $H^\infty_k$ – алгебра ограниченных непрерывных функций на $\Delta^0$, которая локально аппроксимируется в окрестности каждой точки из $\Delta^0$ функциями из $A_k$, то мы можем определить проекцию

$$P_k f = \lim_{\rho\to 1} \int_{G_k} (f_\rho)_\beta \, d\nu(\beta). \tag{9}$$

Очевидно, что последовательность $f_k = P_k f$ равномерно сходится к $f$ на $\Delta$, когда $f \in A$ и равномерно сходится к $f$ на компактном множестве из $\Delta^0$, когда $f \in H^\infty$.

**Лемма 3.** $H^\infty = A + (\varphi^{a_0} - r)H^\infty$, $0 < r < 1$.

**Доказательство.** По Лемме 2 множество $E = \{s \in \Delta\colon \varphi^{a_0}(s) = r\}$ является интерполяционным множеством для $A$ и $H^\infty$. Следовательно для всех $f \in H^\infty$ существует $g \in A$ такое, что $f = g$ на $E$, и следовательно, $f_\rho = g_\rho$ на $1/\rho \cdot E$. Так как $G \times \{r^{1/m}\}$ - множество в $E$, где $1/m = a_0/a_1$, из (9) имеем $f_k = g_k$ на $E$. Поскольку функции $f_k$ и $g_k$ являются аналитическими функциями по $\varphi^{a_k}$, и $a_0 = ma_k$, то можно написать

$$f_k = g_k + (\varphi^{a_0} - r)h_k, \quad h_k \in H^\infty_k.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим

$$f = g + (\varphi^{a_0} - r)h. \Diamond$$

Следующая лемма опубликована Рудиным [5].

**Лемма 4.** *Пусть $Y$ и $W$ - замкнутые подпространства банахова пространства $X$, и пусть $\{\Phi\}$ - множество ограниченных линейных $X$ таких, что*

*i) $\Phi(X) \subset Y$ и $\Phi(W) \subset W$ для всех $\Phi \in \{\Phi\}$,*

*ii) $\sup\limits_{\{\Phi\}} ||\Phi|| < \infty$,*

*iii) Для всех $y \in Y$ и $\varepsilon > 0$ существует $\Phi \in \{\Phi\}$ такое, что $||\Phi y - y|| < \varepsilon$.*

Тогда $Y + W$ замкнутое подпространство от $X$.

## §2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Так как $\Gamma = \Gamma_+ \cup (-\Gamma_+)$, то, по теореме Стоуна-Вейерштрасса, алгебра $A$ является алгеброй Дирихле на $G$, т. е. $\operatorname{Re} A = \{\operatorname{Re} f; f \in A\}$ равномерно плотно в $C_R(G)$. Поскольку $G$ - граница Шилова для $A$, каждая функция $f \in C(G)$ однозначно определяет функции $f \in \overline{\operatorname{Re} A} + i\overline{\operatorname{Re} A} \subset C(\Delta)$.

Пусть $X$ замкнуто по норме $\mathcal{L}^\infty(\sigma)$ пространства $H^\infty + C(G)$, и пусть $Y = C(G)$ и $W = H^\infty$. Для каждого $\rho \in (0,1)$ определим ограниченный линейный оператор $\Phi_\rho\colon H^\infty + C(G) \to C(G)$ посредством $\Phi_\rho(f+g) = f_\rho + g_\rho$ на $G$. Очевидно, что $||\Phi_\rho|| = 1$ и $\Phi_\rho(H^\infty) \subset A \subset C(G)$. Виду непрерывности $g$ на $\Delta$, для $g \in C(G)$ и для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\rho \in (0,1)$ так, что $||\Phi_\rho g - g|| < \varepsilon$. Следовательно, по Лемме 4 пространство $H^\infty + C(G)$ замкнуто в $\mathcal{L}^\infty(d\sigma)$.

Наконец, покажем, что $H^\infty + C(G)$ является алгеброй. Для этого достаточно показать, что если $f \in H^\infty$ и $a \in \Gamma$, то $f/\varphi^a \in H^\infty + C(G)$. Так как согласно Лемме 3 $H^\infty = A + (\varphi^a - r)\,H^\infty$, то функция $f/(\varphi^a - r)$ принадлежит $H^\infty + C(G)$. Устремляя $r \to 0$, получим $f/\varphi^a \in H^\infty + C(G)$.

## §3. ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В этом параграфе покажем одно применение вышеуказанной теоремы к почти периодическим функциям. Нам необходимы следующие определения.

a) Функция $f$ называется функцией класса $A_\Gamma$, если для $\varepsilon > 0$ существует $\{\lambda_k\}_0^n \subset \Gamma_+$ так, что

$$\sup_{\mathbb{R}} |f(x) - \sum_0^n a_k \exp(i\lambda_k x)| < \varepsilon, \quad a_k \in \mathbf{C}.$$

Заметим, что класс $A_\Gamma$ является классом почти периодических функций на $\mathbb{R}$. Из основной теоремы почти периодических функций [3] имеем, что $A_\Gamma$ – банахова алгебра в $\sup\limits_{\mathbb{R}}$-норме.

b) Пусть $H_\Gamma^\infty$ – подалгебра алгебры всех ограниченных аналитических функций на верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$, так что его сужение на линию $\{x + i\mathbb{R}\}$ принадлежит $A_\Gamma$. По теореме Фату, для $f \in H^\infty$ почти всех $t \in \mathbb{R}$ существует предел

$$\lim_{y \to 0} f(x + iy) = f^*(x).$$

Мы отождествляем $f$ с $f^*$.

c) Пусть $C_\Gamma(\mathbb{R})$ – алгебра функций, которые равномерно на $\mathbb{R}$ аппроксимируются полиномами Дирихле $\sum\limits_0^m a_k \exp(i\lambda_k z)$, $\lambda_k \in \Gamma$. По теореме Аренса – Зингера существуют изометрический изоморфизм между $A_\Gamma, A, H_\Gamma^\infty, H^\infty$ и $C_\Gamma(\mathbb{R}), C(G)$.

**Следствие.** $H_\Gamma^\infty + C_\Gamma(\mathbb{R})$ – *замкнутая подалгебра* $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}, dx)$.

**ABSTRACT.** Let $T$ be the unit circle. By Sarason's theorem, $H^\infty + C(T)$ is a uniform subalgebra in $\mathcal{L}^\infty(\sigma)$. This theorem is extended to generalized analytic functions. In particular, we prove the corresponding result for analytic almost periodic functions.

## ЛИТЕРАТУРА

1. K. Hoffman, "Boundary behavior of generalized analytic functions," T. A. M. S., vol. 87, pp. 447 – 466, 1958.
2. D. Sarason, "Algebras of functions on the unit circle," Bull. Amer. Math. Soc., vol. 79, pp. 286 – 299, 1973.
3. R. Arens and I. Singer, "Generalized analytic functions," T. A. M. S., vol. 81, pp. 379 – 393, 1956.
4. J. B. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, 1981.
5. W. Rudin, "Spaces of type $H^\infty + C(T)$," Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 25, no. 1, pp. 99 – 125, 1975.

3 Августа 1993

Институт математики
НАН Армении

Посвящается профессору
Мхитару М. Джрбашяну
в связи с 75-летним юбилеем

# О СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ, ИМЕЮЩИХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ МАЖОРАНТЫ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

**А. М. Джрбашян**

**Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №4, 1993**

**В работе найдена полная характеристика роста субгармонических в верхней полуплоскости функций, имеющих там неотрицательные гармонические мажоранты. Этот результат в специальном случае содержит факторизацию Неванлинны в полуплоскости. Доказаны также модификации теоремы единственности Неванлинны и теоремы типа Фрагмена-Линделефа, принадлежащей М. Хейнсу и Л. Альфорсу, в которых общепринятое условие**

$$\limsup_{z \to t,\ \operatorname{Im} z > 0} u(z) \leq 0, \quad -\infty < t < +\infty$$

**заменено условием менее ограничительным. Использованные методы дают возможность установить также теорему о весовых классах $H^p$ в полуплоскости.**

## §1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Как хорошо известно, результат Неванлинны о факторизации класса $N$ мероморфных функций ограниченного вида в единичном круге [1] (см. также [2], гл. VII) приводит к следующему полному описанию роста функций $u(z)$, субгармонических в $|z| < 1$ и имеющих там неотрицательные гармонические мажоранты :

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta})d\theta = \liminf_{r \to 1-0} \int_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta})d\theta < +\infty \tag{1.1}$$

(здесь и всюду ниже полагаем $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = u^+ - u$). В отличие от этого, задача нахождения естественного полного описания роста функций такого же типа в полуплоскости решена лишь частично, ибо пара условий

$$\liminf_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^\pi u^+(Re^{i\theta})\sin\theta d\theta<+\infty, \tag{1.2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u^+(x)\frac{dx}{1+x^2}<+\infty, \tag{1.3}$$

возникающих из неванлинновской факторизации в верхней полуплоскости $G^{(+)}=\{z\,:\,\operatorname{Im} z>0\}$ [3], задает полное описание роста таких функций лишь в том частном случае, когда они субгармоничны в $\overline{G^{(+)}}=\{z\,:\,\operatorname{Im} z\geq 0\}$ (см. также [4], п.п. 6.3-6.5, где $u(z)$ в некотором смысле может быть непрерывно продолжена на вещественную ось).

2. Основными результатами статьи являются нижеследующие три теоремы, которые в частности содержат полное описание роста всего класса функций, субгармонических в $G^{(+)}$ и имеющих там неотрицательные гармонические мажоранты. Кроме того, эти теоремы содержат усиления теоремы единственности Неванлинны ([2], гл. III, п. 38), а также теоремы типа Фрагмена-Линделефа, установленной М. Хейнсом и Л. Альфорсом [5], где общепринятое условие

$$\limsup_{z\to t,\ \operatorname{Im} z>0} u(z)\leq 0,\quad -\infty<t<+\infty \tag{1.4}$$

заменено условием менее ограничительным. С другой стороны, основные результаты данной статьи являются усилениями результатов [6] и [7].

Теорема 1. *Пусть $S(\Omega)$ - класс субгармонических в $G^{(+)}$ функций $u(z)\not\equiv-\infty$, удовлетворяющих условиям (1.2) и*

$$\liminf_{R\to+\infty}\liminf_{y\to+0}\int_{-R}^{R}u^+(x+iy)\Omega(x)\,dx<+\infty, \tag{1.5}$$

*где $\Omega(x)$ - непрерывная функция, такая, что $\Omega(x)\geq C(1+x^2)^{-1}$ $(-\infty<x<+\infty)$ при некоторой постоянной $C>0$. Тогда :*

*1°. $S(\Omega)$ совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$u(z)=\iint\limits_{G(+)}\log\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right|d\nu(\zeta)+hy+\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{(x-t)^2+y^2},\quad z=x+iy\in G^{(+)}, \tag{1.6}$$

*где $\nu(\zeta)$ - неотрицательная Борелевская мера такая, что*

$$\iint\limits_{G^{(+)}} \frac{Im\,\zeta}{1+|\zeta|^2}d\nu(\zeta) < +\infty, \tag{1.7}$$

*$h$ - вещественное число, а $\mu(t)$ - функция, представимая в виде разности $\mu(t) = \mu_+(t) - \mu_-(t)$ двух неубывающих функций, таких что*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(t)\,d\mu_+(t) < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu_-(t)}{1+t^2} < +\infty. \tag{1.8}$$

$2^o$. *Если представление (1.6) - (1.8) имеет место, то функции $\mu_\pm(t)$ могут быть найдены из соотношений*

$$\mu_\pm(t) = \lim_{y\to+0} \int_0^t u^\pm(x+iy)\,dx, \quad -\infty < t < +\infty. \tag{1.9}$$

*При таком выборе $\mu_\pm(t)$*

$$\bigvee_a^b \mu = \bigvee_a^b \mu_+ + \bigvee_a^b \mu_-, \quad \forall[a,b] \subset (-\infty, +\infty) \tag{1.10}$$

*и*

$$\lim_{y\to+0} \int_a^b u^\pm(x+iy)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,d\mu_\pm(x) \tag{1.11}$$

*для любой функции $g(x)$ - непрерывной в $[a,b]$. Кроме того*

$$\lim_{R\to+\infty} \lim_{y\to+0} \int_{-R}^{R} u^+(x+iy)\Omega(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(x)\,d\mu_+(x), \tag{1.12}$$

$$\lim_{y\to+0} \int_{-\infty}^{+\infty} u^-(x+iy)\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu_-(x)}{1+x^2}, \tag{1.13}$$

*и справедливо соотношение*

$$\lim_{y\to+0} \int_{-\infty}^{+\infty} u^+(x+iy)\Omega(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(x)\,d\mu_+(x), \tag{1.14}$$

*если $\Omega(x) = (1+|x|)^{-\gamma}$ $(1 < \gamma \le 2)$, или $\Omega(x) = (1+|x|)^{-\gamma}$ $(-1 < \gamma \le 1)$ и $h \le 0$.*

$3^o$. *Если справедливо представление (1.6) - (1.8), то*

$$h^\pm = \frac{2}{\pi} \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi u^\pm(Re^{i\theta}) \sin\theta d\theta, \tag{1.15}$$

*для любого $\theta \in (0,\pi)$*

$$h\sin\theta = \limsup_{R\to+\infty} R^{-1}u(Re^{i\theta}), \quad h^+\sin\theta = \limsup_{R\to+\infty} R^{-1}u^+(Re^{i\theta}) \tag{1.16}$$

*и для любого $\theta \in (0, \pi)$, кроме, быть может, множества нулевой внешней емкости*

$$h^{\pm}\sin\theta = \lim_{R\to+\infty} R^{-1}u^{\pm}(Re^{i\theta}). \tag{1.17}$$

**Замечание 1.** Как хорошо известно, класс функций, субгармонических в $G^{(+)}$ и имеющих там неотрицательные гармонические мажоранты, совпадает с множеством функций, представимых в виде (1.6) – (1.8), где $\Omega(x) = (1 + x^2)^{-1}$, т.е. этот класс совпадает с $S((1+x^2)^{-1})$. Тем самым, пара условий (1.2) и (1.5) представляет из себя полное описание роста таких функций, если $\Omega(x) = (1 + x^2)^{-1}$. Кроме того, очевидно, что если $u(x)$ субгармонична в $\overline{G^{(+)}}$, то условие (1.5) с $\Omega(x) = (1 + x^2)^{-1}$ эквиваленты ограничению на вещественной оси (1.3). Далее, необходимо отметить, что соотношения (1.5) – (1.7) хорошо известны даже в наиболее общем случае когда $\Omega(x) = (1 + x^2)^{-1}$ (эти соотношения верны для $h$, $h^+$ и $h^-$, поскольку $u(z)$ и $u^+(z)$ имеют ту же наименьшую неотрицательную гармоническую мажоранту).

**Замечание 2.** Используя результаты Е. Д. Соломенцева [8], можно убедиться в том, что подмножество функций $S(1)$ ($\Omega(x) \equiv 1$), для которых $h \le 0$, совпадает с классом субгармонических в $G^{(+)}$ функций удовлетворяющих условию

$$\sup_{y>0}\int_{-\infty}^{+\infty} u^+(x+iy)\,dx < +\infty. \tag{1.18}$$

**Теорема 2.** *Пусть $u(z)$ субгармонична в $G^{(+)}$, и пусть существует последовательность $R_n \uparrow +\infty$ такая, что при любом $n \ge 1$*

$$\int_0^{\pi} u^+(R_n e^{i\theta})\sin\theta d\theta < +\infty \quad \text{и} \quad \liminf_{y\to+0}\int_{-R_n}^{R_n} u^+(x+iy)\,dx < +\infty. \tag{1.19}$$

*Тогда, если при каком-либо $R_o > 0$*

$$\liminf_{R\to+\infty}\left\{\frac{1}{R}\int_0^{\pi} u(Re^{i\theta})\sin\theta d\theta + \liminf_{y\to+0}\int_{-R}^{R} u(x+iy)g_{R,R_o}(x)\,dx\right\} = -\infty, \tag{1.20}$$

*где*

$$g_{R,R_o}(x) = \begin{cases} 2^{-1}(x^{-2} - R^{-2}), & \text{при } R_o \le |x| \le R \\ 2^{-1}(R_o^{-2} - R^{-2}), & \text{при } |x| < R_o, \end{cases}$$

*то $u(z) \equiv -\infty$.*

**Замечание**. Эта теорема является усилением теоремы единственности Неванлинны, так как рассмотренные им условия (1.1) и

$$\liminf_{R\to+\infty} R^{-1}M(R) = -\infty \quad (M(R) = \sup_{0<\theta<\pi} u(Re^{i\theta}))$$

более ограничительны, чем условия (1.19) – (1.20).

**Теорема 3.** *Пусть $u(z)$ субгармонична в $G^{(+)}$ и*

$$\liminf_{y\to+0} \int_{-R}^{R} u^+(x+iy)\,dx = 0 \tag{1.21}$$

*при любом $R>0$. Тогда :*

$$1^o. \quad \lim_{R\to+\infty} R^{-1}M(R) = \lim_{R\to+\infty} R^{-1}[M(R)]^+ =$$
$$= \frac{2}{\pi} \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi u^+(Re^{i\theta}) \sin\theta d\theta = \beta \in [0,+\infty]. \tag{1.22}$$

*Кроме того, если $\alpha = \sup_{Im\ z>0} (Im\ z)^{-1} u(z)$, то*

$$\alpha^+ = \sup_{Im\ z>0} (Im\ z)^{-1} u^+(z) = \beta. \tag{1.23}$$

*$2^o$. Если $\beta = \alpha^+ < +\infty$, то для $h^+ = \beta = \alpha^+$ верны соотношения (1.15) - (1.17).*

**Замечание**. Эта теорема является усилением теоремы типа Фрагмена – Линделефа, установленной М. Хейнсом и Л. Альфорсом [5], так как с использованием условия (1.4), более ограничительного, чем (1.20), они, по существу, доказали те же самые утверждения.

**3.** Техника, использованная для доказательства Теоремы 1, применима также для установления теоремы, относящейся к некоторым весовым классам $H^p$ в $G^{(+)}$. Вводя класс $H^p(\Omega(x)\,dx)$ $(0 < p < +\infty)$ как множество тех функций $f(z)$, аналитических в $G^{(+)}$, для которых

$$\liminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi |f(Re^{i\theta})|^p \sin\theta d\theta < +\infty \tag{1.24}$$

и

$$\liminf_{R\to+\infty} \liminf_{y\to+0} \int_{-R}^{R} |f(x+iy)|^p \Omega(x)\,dx < +\infty, \tag{1.25}$$

легко видеть, что по Теореме 1, $H^p((1+x^2)^{-1}dx)$ очевидно совпадает с множеством тех функций $f(z)$ аналитических в $G^{(+)}$, для которых $|f(z)|^p$, имеет гармоническую мажоранту в $G^{(+)}$, т.е. этот класс совпадает с конформным переводом в $G^{(+)}$ класса $H^p$ Харди для круга. Кроме того, в силу Замечания 2 к Теореме 1, $H^p(dx)$ совпадает с классом $H^p$, введенным Хилле и Тамаркиным посредством наложения условия (1.18), где $u(z) = |f(z)|^p$. В общем случае верна следующая

**Теорема 4.** *Пусть $0 < p < +\infty$ и $\Omega(x)$ – измеримая функция такая, что почти всюду $\Omega(x) \geq C(1+x^2)^{-1}$ с некоторой постоянной $C > 0$, и ограниченная почти всюду в $(-R, R)$ при любом $R > 0$. Тогда :*

$1^o$. *Класс $H^p(\Omega(x)\,dx)$ совпадает с подмножеством тех функций из конформного отображения класса Харди, для которых $f(x) \in L_p(\Omega(x)\,dx)$.*

$2^o$. *Замена условия (1.24) условием*

$$\liminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\int_0^{\pi} \log^+ |f(Re^{i\theta})| \sin\theta d\theta = 0 \tag{1.26}$$

*не меняет класса $H^p(\Omega(x)\,dx)$. Кроме того, если $f(z) \in H^p(\Omega(x)\,dx)$, то*

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\int_0^{\pi} |f(Re^{i\theta})|^p \sin\theta d\theta = 0. \tag{1.27}$$

$3^o$. *Если $\Omega(x)$ удовлетворяет дополнительному условию*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log^+\Omega(x)}{1+x^2}dx < +\infty, \tag{1.28}$$

*то*

$$H^p(\Omega(x)\,dx) = [\Omega(z)]^{-1/p} H^p(dx), \tag{1.29}$$

*где*

$$\Omega(z) = exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+tz}{t-z}\frac{\log\Omega(t)}{1+t^2}dt\right\}, \quad z \in G^{(+)}.$$

*В частности*

$$H^p((1+|x|)^{-\gamma}dx) = (z+i)^{\gamma/p} H^p(dx), \quad -\infty < \gamma \leq 2. \tag{1.30}$$

## §2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ПОЛУКРУГЕ

Основным техническим инструментом, использованным в статье, является теорема о необходимых и достаточных условиях, при которых функция, субгармоническая в полукруге, большем чем $G_R^{(+)} = \{z : \operatorname{Im} z > 0, \ |z| < R\}$ имеет неотрицательную гармоническую мажоранту в $G_R^{(+)}$. Прежде чем доказать теорему, устанавливающую эти условия, рассмотрим функцию

$$\omega_\rho(\zeta, z) = \frac{\left(\frac{R_\rho+\zeta-i\rho}{R_\rho-\zeta+i\rho}\right)^{\pi/\alpha} - \left(\frac{R_\rho+z-i\rho}{R_\rho-z+i\rho}\right)^{\pi/\alpha}}{\left(\frac{R_\rho+\zeta-i\rho}{R_\rho-\zeta+i\rho}\right)^{\pi/\alpha} - \left(\frac{R_\rho+\bar{z}+i\rho}{R_\rho-\bar{z}-i\rho}\right)^{\pi/\alpha}},$$

где $0 \le \rho < R$, $R_\rho = \sqrt{R^2-\rho^2}$ и $\alpha = \arccos(\rho/R)$, и докажем некоторые вспомогательные леммы. Легко видеть, что $\omega_\rho(\zeta, z)$ задает конформное, взаимнооднозначное отображение кругового сегмента $G_{R,\rho}^{(+)} = \{\zeta : \operatorname{Im}\zeta > \rho, \ |\zeta| < R\}$ на единичный круг, и $\omega_\rho(z,z) = 0$. Поэтому, функцией Грина $G_{R,\rho}^{(+)}$ является $g_{R,\rho}(\zeta, z) = -\log|\omega_\rho(\zeta, z)|$, $z, \zeta \in G_{R,\rho}^{(+)}$. Если $u(z)$ – функция, субгармоническая в полукруге $G_{R^*}^{(+)}$ $(R^* > R)$, то по теореме Рисса

$$u(z) = -\iint\limits_{G_{R,\rho}^{(+)}} g_{R,\rho}(\zeta, z)\,d\nu(\zeta) + \int_\beta^{\pi-\beta} u(Re^{i\theta})\varphi_{R,\rho}(\theta, z)\,d\theta +$$

$$+\int_{-R_\rho}^{R_\rho} u(t+i\rho)\psi_{R,\rho}(t,\zeta)\,dt, \quad z \in G_{R,\rho}^{(+)}, \tag{2.1}$$

где $\nu(\zeta)$ – неотрицательная борелевская мера в $G_{R^*}^{(+)}$, конечная в любой области $D$, компактно содержащейся в $G_{R^*}^{(+)}$, а $\varphi_{R,\rho}$, $\psi_{R,\rho}$ – представления ядра Пуассона $G_{R,\rho}^{(+)}$, записанные для дуги $\{\zeta = Re^{i\theta} : \beta < \theta < \pi-\beta\}$ $(\beta = \arcsin(\rho/R) = \pi/2-\alpha)$ и для интервала $\{\zeta = t+i\rho : -R_\rho < t < R_\rho\}$. Пользуясь известной формулой

$$\frac{\partial g_{R,\rho}(\zeta, z)}{\partial n}|d\zeta| = \frac{1}{i}\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\omega_\rho(\zeta, z)\right]\frac{d\zeta}{\omega_\rho(\zeta, z)},$$

где $\partial n$ - операция дифференцирования вдоль внутренней нормали, легко вычислить,

$$\varphi_{R,\rho}(\theta, z) = \frac{2i}{\alpha}R_\rho R e^{i\theta}[R_\rho^2 - (Re^{i\theta} - i\rho)^2]^{\pi/\alpha-1}\left\{\operatorname{Im}\left(\frac{R_\rho+z-i\rho}{R_\rho-z+i\rho}\right)^{\pi/\alpha}\right\} \times$$

$$\times\left\{(R_\rho + Re^{i\theta} - i\rho)^{\pi/\alpha} - (R_\rho - Re^{i\theta} + i\rho)^{\pi/\alpha}\left(\frac{R_\rho + z - i\rho}{R_\rho - z + i\rho}\right)^{\pi/\alpha}\right\}^{-1} \times$$

$$\times\left\{(R_\rho + Re^{i\theta} - i\rho)^{\pi/\alpha} - (R_\rho - Re^{i\theta} + i\rho)^{\pi/\alpha}\left(\frac{R_\rho + \overline{z} + i\rho}{R_\rho - \overline{z} - i\rho}\right)^{\pi/\alpha}\right\}^{-1}, \qquad (2.2)$$

$$\psi_{R,\rho}(t,z) = \frac{2}{\alpha}R_\rho(R_\rho^2 - t^2)^{\pi/\alpha - 1}\left\{\mathrm{Im}\left(\frac{R_\rho + z - i\rho}{R_\rho - z + i\rho}\right)^{\pi/\alpha}\right\}\times$$

$$\times\left|(R_\rho + t)^{\pi/\alpha} - (R_\rho - t)^{\pi/\alpha}\left(\frac{R_\rho + z - i\rho}{R_\rho - z + i\rho}\right)^{\pi/\alpha}\right|^{-2}.$$

и установить, что $\varphi_{R,\rho}(\theta, z) \geq 0$ $(\beta \leq \theta \leq \pi - \beta)$ и $\psi_{R,\rho}(t,z) \geq 0$ $(-R_\rho \leq t \leq R_\rho)$. В нижеследующих двух леммах выявлено поведение этих функций при $\rho \to +0$.

**Лемма 2.1.** *Если $R > 0$ и $z \in G_R^{(+)}$ – фиксированные числа и $\rho \geq 0$ достаточно мало, то*

$$C_1 \leq \left(\sin\frac{\pi(\theta - \beta)}{\pi - 2\beta}\right)^{1-\pi/\alpha}\varphi_{R,\rho}(\theta, z) \leq C_2, \quad \beta \leq \theta \leq \pi - \beta, \qquad (2.3)$$

*где $C_{1,2} > 0$ – постоянные, зависящие только от $z$ и $R$. Кроме того*

$$\lim_{\rho\to+0}\varphi_{R,\rho}(\theta,z) = \frac{2Im\ z}{\pi}\frac{R(R^2 - |z|^2)\sin\theta}{|Re^{i\theta} - z|^2|Re^{-i\theta} - z|^2} \equiv \varphi_R(\theta, z) \qquad (2.4)$$

*равномерно внутри $(0,\pi)$.*

**Доказательство.** Сначала докажем неравенства (2.3) в случае, когда $\theta$ достаточно близко к концам $[\beta, \pi - \beta]$. Затем докажем соотношение (2.4). Далее, оценивая $\varphi_R(\theta, z)$, распространим неравенства (2.3) на все $\theta \in [\beta, \pi - \beta]$. Начнем с очевидного соотношения

$$\lim_{\rho\to+0}\arg\left(\frac{R_\rho + z - i\rho}{R_\rho - z + i\rho}\right) = \arctan\frac{2Ry}{R^2 - |z|^2} \equiv \eta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad y = \mathrm{Im}\ z,$$

используя которое можно проверить, что для достаточно малых $\rho > 0$

$$\lambda\frac{4R^2}{\pi}\left(\frac{y}{5R}\right)^3 < \left|\frac{2i}{\alpha}R_\rho Re^{i\theta}\mathrm{Im}\left(\frac{R_\rho + z - i\rho}{R_\rho - z + i\rho}\right)^{\pi/\alpha}\right| < \frac{6R^2}{\pi}\left(\frac{5R}{y}\right)^3, \qquad (2.5)$$

где $\lambda = \sin\eta$, при $0 < \eta \leq \pi/4$, и $\lambda = \sin(\pi/2 - \eta)$, при $\pi/4 < \eta < \pi/2$. Для оценки знаменателя в (2.2) сначала заметим, что

$$|R_\rho + Re^{i\theta} - i\rho|^{\pi/\alpha} + |R_\rho - Re^{i\theta} + i\rho|^{\pi/\alpha}\left|\frac{R_\rho + z - i\rho}{R_\rho - z + i\rho}\right|^{\pi/\alpha} < \left(\frac{5R}{2}\right)^3\left[1 + \left(\frac{5R}{y}\right)^3\right]$$

для достаточно малых $\rho > 0$. Далее заметим, что

$$|R_\rho + Re^{i\theta} - i\rho|^{\pi/\alpha} - |R_\rho - Re^{i\theta} + i\rho|^{\pi/\alpha} \left| \frac{R_\rho + z - i\rho}{R_\rho - z + i\rho} \right|^{\pi/\alpha} \geq$$

$$\geq |R_\rho + R\cos\delta|^{\pi/\alpha} - \left(4R\sin\frac{\delta}{2}\right)^2 \left(\frac{5R}{y}\right)^3 > R^2$$

для достаточно малых $\rho$, $\delta > 0$ ($\delta > \beta$) и любых $\theta \in [\beta, \delta]$. Теперь, используя (2.5) два последних неравенства (где оцененные величины являются четными функциями от $\theta - \pi/2$), получим, что для достаточно малых $\rho$, $\delta > 0$ ($\delta > \beta$) и любых $\theta \in [\beta, \delta] \cup [\pi - \delta, \pi - \beta]$

$$a_1 \leq |R_\rho^2 - (Re^{i\theta} - i\rho)^2|^{1-\pi/\alpha} \varphi_{R,\rho}(\theta, z) \leq a_2,$$

где $a_{1,2} > 0$ - постоянные, зависящие только от $z$ и $R$.

Поскольку $|R_\rho^2 - (Re^{i\theta} - i\rho)^2| = 2R^2 \sin[(\theta - \beta)/2] \sin[(\pi - \beta - \theta)/2]$, заключаем, что оценки (2.3) верны для достаточно малых $\rho$, $\delta > 0$ ($\delta > \beta$) и любых $\theta \in [\beta, \delta] \cup [\pi - \delta, \pi - \beta]$. Заметим, что (2.4) легко вывести для любого $\theta \in (0, \pi)$. Чтобы убедиться, что это соотношение имеет место равномерно в $[\delta, \pi - \delta]$ при любом $\delta \in (0, \pi/2)$, достаточно показать, что пределы числителя и знаменателя $\varphi_{R,\rho}(\theta, z)$ равномерно отделены от нуля. Наконец, из (2.4) следует, что при любых $\theta \in [\delta, \pi - \delta]$ ($0 < \delta < \pi/2$) имеем $0 < a_1^* \leq \varphi_R(\theta, z) \leq a_2^* < +\infty$, где постоянная $a_1^*$ зависит только от $z$, $R$ и $\delta$, а постоянная $a_2^*$ - только от $z$ и $R$. Используя равномерность (2.4) и оценки (2.3) (которые пока что доказаны для $\theta \in [\beta, \delta] \cup [\pi - \delta, \pi - \beta]$), получаем, что эти оценки верны при любых $\theta \in [\beta, \pi - \beta]$.

[illegible] $z \in G_R^{(+)}$ *фиксированные числа и* $\rho \geq 0$ *достаточно*

[illegible]

$$[illegible]^{1-\pi/\alpha} \psi_{R,\rho}(t, z) \leq C_2^*, \quad -R_\rho \leq t \leq R_\rho, \tag{2.6}$$

[illegible] *зависящие только от* $z$ *и* $R$. *Кроме того*

$$[illegible] \left\{ \frac{1}{|t - z|^2} - \frac{R^2}{|R^2 - tz|^2} \right\} =$$

$$[illegible] \frac{(R^2 - t^2)(R^2 - |z|^2)}{|t - z|^2 |R^2 - tz|^2} \equiv \psi_R(t, z), \quad y = Im\, z \tag{2.7}$$

[illegible]

[illegible]огично доказательству предыдущей леммы.

**Теорема 2.1.** *Пусть функция $u(z) \not\equiv -\infty$ субгармонична в полукруге $G^{(+)}_{R^*}$ $(0 < R^* \le +\infty)$. Тогда $u(z)$ имеет неотрицательную гармоническую мажоранту в $G^{(+)}_R$ $(0 < R < R^*)$ в том и только в том случае, если удовлетворены следующие условия :*

$$\int_0^\pi u^+(Re^{i\theta})\sin\theta d\theta < +\infty, \tag{2.8}$$

$$\liminf_{y\to+0}\int_{-R_y}^{R_y}(R_y^2 - x^2)^{\pi/\alpha-1}u^+(u+iy)dx < +\infty, \tag{2.9}$$

*где $R_y = \sqrt{R^2 - y^2}$ и $\alpha = \arccos(y/R)$. Если эти условия удовлетворены, то*

$$u(z) = \iint\limits_{G_R^{(+)}} \log\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\frac{R^2-\zeta z}{R^2-\bar\zeta z}\right|d\nu(\zeta)+$$

$$+\frac{2y}{\pi}R(R^2-|z|^2)\int_0^\pi \frac{u(Re^{i\theta})\sin\theta}{|Re^{i\theta}-z|^2|Re^{-i\theta}-z|^2}d\theta+$$

$$+\frac{y}{\pi}\int_{-R}^{R}\left\{\frac{1}{|t-z|^2}-\frac{R^2}{|R^2-tz|^2}\right\}d\mu(t), \quad z = x+iy\in G_R^{(+)}, \tag{2.10}$$

*где $\nu(\zeta)$ - неотрицательная борелевская мера в $G^{(+)}_{R^*}$ такая, что*

$$\iint\limits_{G_R^{(+)}}(R-|\zeta|)Im\,\zeta d\nu(\zeta) < +\infty, \tag{2.11}$$

*а $\mu(t)$ - функция представимая в виде разности $\mu(t) = \mu_+(t) - \mu_-(t)$ двух неубывающих функций таких, что*

$$\int_{-R}^{R}(R^2-t^2)d\mu_\pm(t) < +\infty. \tag{2.12}$$

*Функции $\mu_\pm(t)$ могут быть определены из соотношений*

$$\mu_\pm(t) = \lim_{y\to+0}\int_0^t u^\pm(x+iy)dx, \quad -R < t < R. \tag{2.13}$$

*При таком выборе $\mu_\pm(t)$ имеем*

$$\bigvee_a^b \mu = \bigvee_a^b \mu_+ + \bigvee_a^b \mu_-, \quad \forall[a,b]\subset(-R,R) \tag{2.14}$$

*и*

$$\lim_{y\to+0}\int_a^b u^\pm(x+iy)g(x)dx = \int_a^b g(x)d\mu_\pm(x) \tag{2.15}$$

*для любой функции $g(x)$, непрерывной в $[a,b]$. Кроме того*

$$\int_0^\pi |u(R_0e^{i\theta})|\sin\theta d\theta < +\infty \tag{2.16}$$

*для любого $R_0$ $(0 < R_0 \le R)$.*

**Доказательство.** Выберем $0 < y_0 < R$ так, что $u(iy_0) \neq -\infty$, затем возьмем $z = iy_0$ и предположим, что $\rho > 0$ в формуле (2.1) достаточно мало , чтобы обеспечить справедливость оценок (2.3) и (2.6). Тогда, применяя эти оценки, получим

$$\iint\limits_{G_{R,\rho}^{(+)}} g_{R,\rho}(\zeta, z)d\nu(\zeta) + C_1 \int_{\beta}^{\pi-\beta} u^-(Re^{i\theta}) \left(\sin\frac{\pi(\theta-\beta)}{\pi-2\beta}\right)^{\pi/\alpha-1} d\theta +$$

$$+C_1^* \int_{-R_\rho}^{R_\rho} (R_\rho^2 - t^2)^{\pi/\alpha-1} u^-(t+i\rho)dt \leq u^-(iy_0)+$$

$$+C_2 \int_{\beta}^{\pi-\beta} u^+(Re^{i\theta}) \left(\sin\frac{\pi(\theta-\beta)}{\pi-2\beta}\right)^{\pi/\alpha-1} d\theta + C_2^* \int_{-R_\rho}^{R_\rho} (R_\rho^2 - t^2)^{\pi/\alpha-1} u^+(t+i\rho)dt. \tag{2.17}$$

Далее, предполагая, что $\lambda_m \downarrow 0$ какая-либо последовательность такая, что последний интеграл равномерно ограничен для $\rho = \lambda_m$ $(m \geq 1)$, заключаем, что правая часть (2.17) равномерно ограничена для таких $\rho$. Таким образом

$$\sup_{m\geq 1} \iint\limits_{G_{R,\lambda_m}^{(+)}} g_{R,\lambda_m}(\zeta, iy_0)d\nu(\zeta) < +\infty,$$

$$\sup_{m\geq 1} \int_{\beta_m}^{\pi-\beta_m} u^-(Re^{i\theta}) \left(\sin\frac{\pi(\theta-\beta_m)}{\pi-2\beta_m}\right)^{\pi/\alpha_m-1} d\theta < +\infty,$$

$$\sup_{m\geq 1} \int_{-R_{\lambda_m}}^{R_{\lambda_m}} (R_{\lambda_m}^2 - t^2)^{\pi/\alpha_m-1} u^{\pm}(t+i\lambda_m)dt < +\infty, \tag{2.18}$$

где $\alpha_m = \arccos(\lambda_m/R)$, $\beta_m = \pi/2-\alpha_m$ и $R_{\lambda_m} = \sqrt{R^2-\lambda_m^2}$. Нетрудно проверить, что первое из этих соотношений эквивалентно (2.11), а второе, вместе с (2.8), дает (2.16) для $R_0 = R$. Пусть теперь $\delta_n \downarrow 0$ $(0 < \delta_n < R)$ – любая последовательность. Тогда, согласно (2.18), неубывающие функции

$$\mu_m^{(\pm)}(t) = \int_0^t u^{\pm}(x+i\lambda_m)dx$$

равномерно ограничены в любом отрезке $[-(R-\delta_n), (R-\delta_n)]$ $(n \geq 1)$, если только $m > N(n) \geq 1$. Следовательно, по теореме Хелли, существует подпоследовательность $\{\lambda_m^{(n)}\} \subseteq \{\lambda_m\}$ такая, что соотношения (2.13) верны, когда $t \in [-(R-\delta_n), (R-\delta_n)]$ и $y = \lambda_m^{(n)} \downarrow 0$. Поэтому соотношения (2.13) верны для любого $t \in (-R, R)$, если $y$ принимает значения из диагональной последовательности $\{\rho_n\} = \{\lambda_n^{(n)}\}$. Одновременно, по теореме Хелли о предельном переходе под знаком интеграла, соотношения (2.15) справедливы при $y = \rho_n \downarrow 0$. Отсюда следует (2.14). Введем теперь неубывающие функции

$$\Lambda_n^{(\pm)}(t) = \int_0^t (R_{\rho_n}^2 - x^2)^{\pi/\alpha_n - 1} d\mu_n^{(\pm)}(t), \quad -R_{\rho_n} \le t \le R_{\rho_n} \tag{2.19}$$

и положим $\Lambda_n^{(\pm)}(t) = \Lambda_n^{(\pm)}(R_{\rho_n})$ $(R_{\rho_n} < t \le R)$, $\Lambda_n^{(\pm)}(t) = \Lambda_n^{(\pm)}(-R_{\rho_n})$ $(-R \le t < -R_{\rho_n})$. Тогда, согласно (2.18), эти функции равномерно ограничены в $[-R, R]$. Следовательно, по теореме Хелли, существует подпоследовательность из $\{\rho_n\}$ (которую для удобства изложения будем обозначать снова через $\{\rho_n\}$) такая, что $\Lambda_n^{(\pm)}(t) \to \Lambda_\pm(t)$ $(-R \le t \le R)$ при $n \to \infty$, где $\Lambda_\pm(t)$ - неубывающие, ограниченные функции. Ясно, что

$$\Lambda_\pm(t) = \int_0^t (R^2 - x^2) d\mu_\pm(x), \quad -R \le t \le R, \tag{2.20}$$

и, тем самым, справедливы соотношения (2.12). С другой стороны, по другой теореме Хелли, для мер $d\Lambda_n^{(\pm)}(t)$ соотношения (2.15) справедливы в любом отрезке $[a, b] \subseteq [-R, R]$ . Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \bigvee_a^b \Lambda_n^{(\pm)} = \bigvee_a^b \Lambda_\pm, \tag{2.21}$$

и, поскольку функция $\psi_R(t, z)/(R^2 - t^2)$ непрерывна в $[-R, R]$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-R}^R \frac{\psi_R(t, z)}{R^2 - t^2} d\Lambda_n^{(\pm)}(t) = \int_{-R}^R \frac{\psi_R(t, z)}{R^2 - t^2} d\Lambda_{(\pm)}(t). \tag{2.22}$$

Пусть

$$\int_{-R}^R \frac{\psi_{R,\rho_n}(t, z)}{(R_{\rho_n}^2 - t^2)^{\pi/\alpha_n - 1}} d\Lambda_n^{(\pm)}(t) = \int_{-R}^R \frac{\psi_R(t, z)}{R^2 - t^2} d\Lambda_n^{(\pm)}(t) + Q_n^{(\pm)}. \tag{2.23}$$

Тогда

$$|Q_n^{(\pm)}| \le \int_{R-\delta<|t|<R} \left[\frac{\psi_{R,\rho_n}(t, z)}{(R_{\rho_n}^2 - t^2)^{\pi/\alpha_n - 1}} + \frac{\psi_R(t, z)}{R^2 - t^2}\right] d\Lambda_n^{(\pm)}(t) +$$

$$+ \int_{-(R-\delta)}^{(R-\delta)} \left|\frac{\psi_{R,\rho_n}(t, z)}{(R_{\rho_n}^2 - t^2)^{\pi/\alpha_n - 1}} - \frac{\psi_R(t, z)}{R^2 - t^2}\right| d\Lambda_n^{(\pm)}(t) \equiv J_n' + J_n'' \tag{2.24}$$

для любого $\delta$ $(0 < \delta < R)$. Полагая, что $\varepsilon > 0$ произвольно, выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\left(\bigvee_{-R}^{-(R-\delta)} + \bigvee_{R-\delta}^{R}\right)\Lambda_{\pm} < \frac{\varepsilon}{8C_2^*},$$

где $C_2^*$ - постоянная из оценки (2.6). Тогда, согласно (2.21)

$$\left(\bigvee_{-R}^{-(R-\delta)} + \bigvee_{R-\delta}^{R}\right)\Lambda_{\pm} < \frac{\varepsilon}{4C_2^*},$$

если только $n \geq 1$ достаточно велико. Поэтому, $J_n' < \varepsilon/2$ по (2.6). С другой стороны, из (2.7) следует, что подынтегральная функция $J_n''$ стремится к нулю равномерно в $[-(R-\delta), (R-\delta)]$, когда $n \to \infty$. Следовательно, по (2.21), $J_n'' < \varepsilon/2$ для достаточно больших $n \geq 1$ и, применяя соотношения (2.19) - (2.24) получаем

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-R_{\rho_n}}^{R_{\rho_n}} u^{\pm}(t+i\rho_n)\psi_{R,\rho_n}(t,z)dt = \int_{-R}^{R}\psi_R(t,z)d\mu_{\pm}(t). \tag{2.25}$$

Далее, как следует из (2.3), $0 \leq \varphi_{R,\rho}(\theta, z) \leq C_2\sin\theta$ для достаточно малых $\rho > 0$. Поэтому используя соотношение (2.16) (доказанное пока для $R_0 = R$), получаем

$$\lim_{\rho\to+0}\int_{\beta}^{\pi-\beta} u^{\pm}(Re^{i\theta})\varphi_{R,\rho}(\theta,z)d\theta = \frac{2y}{\pi}R(R^2-|z|^2)\int_0^{\pi}\frac{u^{\pm}(Re^{i\theta})\sin\theta}{|Re^{i\theta}-z|^2|Re^{-i\theta}-z|^2}d\theta. \tag{2.26}$$

Для следующего перехода к пределу заметим, что функция $\Phi(z) = g_R(\zeta, z) - g_{R,\rho}(\zeta, z)$ гармонична в замыкании $G_{R,\rho}^{(+)}$, каково бы ни было $\zeta \in G_{R,\rho}^{(+)}$. Кроме того, $\Phi(Re^{i\theta}) = 0$ $(\beta \leq \theta \leq \pi-\beta)$ и $\Phi(t+i\rho) = g_R(\zeta, t+i\rho) > 0$ $(-R_\rho < t < R_\rho)$. Поэтому $\Phi(z) > 0$ в $G_{R,\rho}^{(+)}$, и $g_R(\zeta, z) > g_{R,\rho}(\zeta, z)$ при любых $z, \zeta \in G_{R,\rho}^{(+)}$. Легко доказать, что условие (2.11) достаточно для сходимости интеграла

$$\iint_{G_R^{(+)}} g_R(\zeta,z)d\nu(\zeta) \equiv \iint_{G_R^{(+)}}\log\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\frac{R^2-\zeta z}{R^2-\bar\zeta z}\right|d\nu(\zeta).$$

Используя это, можно показать, что

$$\lim_{\rho\to+0}\iint_{G_{R,\rho}^{(+)}} g_{R,\rho}(\zeta,z)d\nu(\zeta) = \iint_{G_R^{(+)}} g_R(\zeta,z)d\nu(\zeta). \tag{2.27}$$

Соотношения (2.25) - (2.27) позволяют совершить предельный переход $\rho = \rho_n \downarrow 0$ в формуле (2.1) и получить таким образом представление (2.10) - (2.12). С другой стороны, такое представление необходимо и достаточно для существования неотрицательной гармонической мажоранты $u(z)$ в $G_R^{(+)}$, ибо оно легко может быть получено из аналогичного представления функций такого же типа в единичном круге посредством конформного отображения. Таким образом, $u(z)$ имеет неотрицательную гармоническую мажоранту в $G_R^{(+)}$, и, поскольку $u(z)$ имеет ту же мажоранту и в любом полукруге $G_{R_o}^{(+)}$ $(0 < R_o < R)$, соотношение (2.16) справедливо для любого $R_o$ $(0 < R_o \leq R)$. Наконец, соотношения (2.13) и (2.15) без индексов $(\pm)$ легко проверить пользуясь непосредственно представлением (2.10). Однако, $u^+(z)$ тоже субгармоническая функция, имеющая ту же неотрицательную гармоническую мажоранту. Отсюда вытекают соотношения (2.13) и (2.15) с индексом $(+)$, тем самым они верны автоматически и с индексом $(-)$.

## §3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 — 4

**Доказательство Теоремы 1.** Пусть $u(z) \not\equiv -\infty$ - функция из $S(\Omega)$, и пусть $R_k \uparrow \infty$ - последовательность, на которой достигается нижний предел (1.2). Тогда условия Теоремы 2.1 удовлетворены при любом $R = R_k$. Тем самым, представление (2.10) справедливо при любом $R = R_k$, и если отнять из (2.10) то же самое представление, записанное для меньшего полукруга $G_{R_o}^{(+)}$ $(0 < R_o < R)$, подставить $z = iy$, разделить полученное равенство на $2y$ и устремить $y \to +0$, то получим следующую формулу типа Карлемана :

$$\iint\limits_{G_R^{(+)} \setminus G_{R_o}^{(+)}} \left(\frac{1}{|\zeta|^2} - \frac{1}{R^2}\right) \operatorname{Im} \zeta d\nu(\zeta) + \left(\frac{1}{R_o^2} - \frac{1}{R^2}\right) \iint\limits_{G_{R_o}^{(+)}} \operatorname{Im} \zeta d\nu(\zeta) =$$

$$= \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi u(Re^{i\theta}) \sin\theta d\theta + \int_{R_o+0<|t|<R} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2}\right) d\mu(t) +$$

$$+ \left(\frac{1}{R_o^2} - \frac{1}{R^2}\right) \int_{-R_o}^{R_o} d\mu(t) - \frac{1}{\pi R_o} \int_0^\pi u(R_o e^{i\theta}) \sin\theta d\theta. \tag{3.1}$$

При $R = R_k \to +\infty$ правая сторона этой формулы ограничена сверху, как это следует из (1.2), (2.16) и из соотношения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(x) d\mu_+(x) = \liminf_{R \to +\infty} \liminf_{y \to +0} \int_{-R}^{R} u^+(x+iy)\Omega(x)\, dx < +\infty, \tag{3.2}$$

являющегося следствием (1.5) и (2.15). Поэтому, левая сторона (3.1) тоже ограничена. Используя это, приходим к соотношению (1.7). Доказательство сходимости второго интеграла (1.8), а также доказательство справедливости представления (1.6) аналогичны доказательствам соответствующих утверждений теорем Неванлинны [3] ( см., также [4], п.п. 6.3-6.5). Предположим теперь, что $u(z)$ – функция представимая в виде (1.6) – (1.8). Тогда очевидно, что

$$u^+(z) \leq h^+ y + \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu_+(t)}{(x-t)^2+y^2} \equiv U(z), \quad z = x + iy \in G^{(+)}.$$

Отсюда следует (1.2). Далее, легко показать, что для любого $R > 0$ существует постоянная $C > 0$, такая что

$$\frac{y}{\pi}\int_{-R}^{R} \frac{\Omega(x)dx}{(x-t)^2+y^2} \leq \frac{C}{1+t^2}, \quad 0 < y < 1, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Применяя теорему Лебега об ограниченной сходимости, отсюда мы получаем соотношение (1.12) для $U(z)$. Тем самым, выполнено условие (1.5), и $u(z) \in S(\Omega)$. Следовательно, меры $\mu_\pm(t)$ могут быть определены из соотношений (1.9) а (1.10), (1.11) вытекают из (2.14), (2.15) Теоремы 2.1. Далее, имеем

$$\limsup_{R\to+\infty}\limsup_{y\to+0}\int_{-R}^{R} u^+(x+iy)\Omega(x)\,dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty}\Omega(x)d\mu_+(x),$$

так как (1.2) верно для $U(z)$. Это неравенство, вместе с (3.2) дает (1.12). С другой стороны, можно показать, что если $0 < y < M < +\infty$ и $-1 < \gamma \leq 1$ любые заданные числа, то существует постоянная $C > 0$, зависящая только от $M$ и $\gamma$ такая, что

$$\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-t)^2+y^2}\frac{dx}{(1+|x|)^\gamma} \leq \frac{C}{(1+|t|)^\gamma}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Поэтому, если $\Omega(t) = (1+|t|)^{-\gamma}$ $(1 < \gamma \leq 2)$ или $\Omega(t) = (1+|t|)^{-\gamma}$ $(-1 < \gamma \leq 1)$ и $h \leq 0$, то используя теорему Лебега, получаем

$$\limsup_{y\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty} u^+(x+iy)\Omega(x)\,dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty}\Omega(x)d\mu_+(x).$$

Однако, обратное неравенство верно для нижнего предела, как это следует из (3.2). Следовательно, справедливо соотношение (1.14). Для доказательства (1.13) заметим, что функция

$$\iint_{G(+)} \log\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}\right| d\nu(\zeta) - u(z)$$

принадлежит $S((1+|x|)^{-2})$. Поэтому для нее справедливо соотношение (1.14) с $\Omega(x) = (1+|x|)^{-2}$. Используя это соотношение, мы приходим к (1.13).

**Замечание.** Использование рассуждений, примененных в доказательстве Теоремы 1 дает возможность установить, что класс $S(\Omega_1, \Omega_2)$ субгармонических в $G^{(+)}$ функций, удовлетворяющих условию (1.2), условию (1.5) с $\Omega \equiv \Omega_1$, а также условию

$$\liminf_{R\to+\infty} \liminf_{y\to+0} \int_{-R}^{R} u^-(x+iy)\Omega_2(x)\,dx < +\infty,$$

где $\Omega_{1,2}(x)$ непрерывны и таковы, что $\Omega_{1,2} \geq C_{1,2}(1+x^2)^{-1}$ при некоторых $C_{1,2} > 0$, совпадает с множеством функций представимых в виде (1.6) - (1.7), где функции $\mu_\pm(t)$ удовлетворяют условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_1(x)d\mu_+(x) < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_2(x)d\mu_-(x) < +\infty.$$

Кроме того, пользуясь результатами Е. Д. Соломенцева [8], можно убедиться в том, что подмножество $S(1,1)$ $(\Omega_1 \equiv \Omega_2 \equiv 1)$, для которого $h = 0$ и

$$\iint_{G(+)} \operatorname{Im} \zeta d\nu(\zeta) < +\infty$$

совпадает с классом тех функций $u(z)$, субгармонических в $G^{(+)}$, которые подчинены условию

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x+iy)|dx < +\infty.$$

**Доказательство Теоремы 2.** Предполагая, что $u(z) \not\equiv -\infty$, заметим, что условия Теоремы 2.1 удовлетворены при любом $R = R_n$. Поэтому, очевидно, они удовлетворены при любом $R > 0$, и кроме того, если $\mu_\pm(t)$ определены из соотношений (2.13), то формулы (2.15), (2.10) – (2.12) и (3.1) справедливы при любых $R$, $R_o$ $(0 < R_o < R < +\infty)$. Пользуясь (3.1) и (2.15), получаем

$$\frac{1}{R_o}\int_0^\pi u(R_o e^{i\theta})\sin\theta d\theta \leq \frac{1}{R}\int_0^\pi u(Re^{i\theta})\sin\theta d\theta + \lim_{y\to+0}\int_{-R}^{R} g_{R,R_o}(x)u(x+iy)dx,$$

где интеграл слева абсолютно сходится согласно (2.16). Тем самым, предположение $u(z) \not\equiv -\infty$ противоречит условию (1.20).

**Доказательство Теоремы 3.** 1°. Пусть $\limsup R^{-1}M(R) = +\infty$ при $R \to +\infty$. В этом случае для любого $K > 0$ можно найти $z = x + iy \in G^{(+)}$ такое, что $u(z) > K|z| \geq Ky$. Отсюда следует, что $\alpha = \alpha^+ = +\infty$. Если одновременно имеем $\liminf R^{-1}M(R) < +\infty$ при $R \to +\infty$, то согласно Теореме 1, $u(z)$ допускает представление вида (1.6) - (1.8), где $\mu_+(t) \equiv 0$. Таким образом, $u(z)$ удовлетворяет условию (1.4), и, по теореме М. Хейнса и Л. Альфорса, существует $\lim R^{-1}M(R)$ при $R \to +\infty$. Мы, очевидно, пришли к противоречию. Поэтому, если при $R \to +\infty$ имеем $\limsup R^{-1}M(R) = +\infty$, то при $R \to +\infty$ существует предел $\lim R^{-1}M(R) = +\infty$, и $\alpha^+ = \beta = +\infty$. Кроме того, в рассматриваемом случае

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\int_0^\pi u^+(Re^{i\theta})\sin\theta d\theta = +\infty,$$

поскольку иначе функция $u(z)$ допускала бы представление вида (1.6) - (1.8), где $\mu_+(t) \equiv 0$, и, очевидно, имели бы $\alpha \le h < +\infty$, что есть противоречие. Теперь рассмотрим случай, когда при $R \to +\infty$ $\limsup R^{-1}M(R) < +\infty$. В этом случае $u(z)$ очевидно представима в виде (1.6) - (1.8) с $\mu_+(t) \equiv 0$, имеет место (1.4) и существует предел $\lim R^{-1}M(R) = \beta = \alpha^+$ при $R \to +\infty$, согласно теореме М. Хейнса и Л. Альфорса. Кроме того, из (1.6) - (1.8) непосредственно следует, что $\alpha \le h$. С другой стороны, согласно первому из соотношений (1.16), $\alpha \ge \limsup y^{-1}u(iy)$ при $y \to +\infty$. Таким образом, $\alpha^+ = h^+ = \beta$, и, к тому же справедливо соотношение (1.15).

$2^o$. Если $\beta = \alpha^+ < +\infty$, то $u(z)$ представима в виде (1.6) - (1.8), а для таких функций соотношения (1.15) - (1.17) с $h = \beta = \alpha^+$ хорошо известны.

**Доказательство Теоремы 4.** $1^o$. Пусть $f(z) \in H^p(\Omega(x)dx)$. Тогда $|f(z)|^p$ имеет гармоническую мажоранту в $G^{(+)}$ согласно Теореме 1. Тем самым, $f(z)$ принадлежат конформному отображению класса Харди и имеют некасательные граничные значения $f(x)$ почти всюду на $(-\infty, +\infty)$. Согласно лемме Фату

$$\int_{-R}^{R} |f(x)|^p\Omega(x)dx \le \liminf_{y\to+0}\int_{-R}^{R} |f(x+iy)|^p\Omega(x)dx < +\infty, \quad R > 0, \tag{3.3}$$

и, таким образом, $f(x) \in L_p(\Omega(x)dx)$. Пусть теперь $f(z)$ - функция, принадлежащая конформному отображению класса Харди $H^p$ для $|z| < 1$, и пусть $f(x) \in L_p(\Omega(x)dx)$. Тогда, пользуясь факторизацией $f(z)$, получим

$$|f(z)|^p \le \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|f(t)|^p dt}{(x-t)^2+y^2}, \quad z = x+iy \in G^{(+)}. \tag{3.4}$$

С другой стороны, легко видеть, что для почти всех $t \in (-\infty, +\infty)$

$$\frac{y}{\pi}\int_{-R}^{R}\frac{\Omega(x)dx}{(x-t)^2+y^2} \le C^*\Omega(t), \quad 0<y<1, \quad R>0,$$

где $C^* > 0$ – постоянная, зависящая только от $R$ и $\Omega(x)$. Следовательно

$$\limsup_{y\to+0}\int_{-R}^{R}|f(x+iy)|^p\Omega(x)dx \le \int_{-R}^{R}|f(t)|^p\Omega(t)dt \tag{3.5}$$

по теореме Лебега. Соотношение (1.27) следует из (3.4).

2°. Если $f(z) \in H^p(\Omega(x)dx)$, то, очевидно, эта функция принадлежит конформному отображению класса Харди. Пользуясь факторизацией этой функции приходим к (1.26). Пусть теперь (1.24) заменено на (1.26). Тогда ясно, что $\log^+|f(z)|$ имеет гармоническую мажоранту в $G^{(+)}$, т.е. $f(z)$ ограниченного вида в $G^{(+)}$. Поэтому $|f(Re^{i\theta})|^p$ непрерывно в $0 \le \theta \le \pi$ почти для всех $R > 0$. Одновременно, имеем

$$\liminf_{y\to+0}\int_{-R}^{R}|f(x+iy)|^p\frac{dx}{1+x^2} < +\infty$$

для любого $R > 0$. Следовательно, по Теореме 2.1, $|f(z)|^p$ имеет гармоническую мажоранту в любом полукруге $G_R^{(+)}$ $(R>0)$, т.е. в любом полукруге $G_R^{(+)}$ функция $f(z)$ принадлежит конформному отображению класса Харди. Преобразование соответствующей факторизации посредством конформного отображения $|z|<1$ на $G_R^{(+)}$ приводит к представлению

$$\begin{aligned}\log|f(z)| = &\sum_{z_k\in G_R^{(+)}}\log\left|\frac{z-z_k}{z-\overline{z}_k}\frac{R^2-zz_k}{R^2-z\overline{z}_k}\right| + \\ &+\frac{2y}{\pi}R(R^2-|z|^2)\int_0^{\pi}\frac{\log|f(Re^{i\theta})|\sin\theta}{|Re^{i\theta}-z|^2|Re^{-i\theta}-z|^2}d\theta + \\ &+\frac{y}{\pi}\int_{-R}^{R}\left\{\frac{1}{|t-z|^2}-\frac{R^2}{|R^2-tz|^2}\right\}d\mu(t), \quad z=x+iy\in G_R^{(+)}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь $z_k$ – нули функции, а $f(z)$, а $d\mu(t) = \log|f(t)|dt - d\omega(t)$, где $\omega(t)$ – неубывающая функция такая, что $\omega'(t) = 0$ для почти всех $t \in (-R, R)$. Однако, как уже доказано, $\log^+|f(z)|$ имеет гармоническую мажоранту в $G^{(+)}$. Тем самым, очевидно, что предельный переход $R \to +\infty$ в (3.6) приводит к факторизации

$$f(z) = \prod_{z_k \in G^{(+)}} \frac{z - z_k}{z - \overline{z_k}} \frac{|1 + z_k^2|}{1 + z_k^2} \times$$
$$\times \exp\left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + tz}{t - z} \frac{d\mu(t)}{1 + t^2} + ihz + iC \right\}, \quad z \in G^{(+)}, \tag{3.6}$$

где $d\mu(t) = \log|f(t)|dt - d\omega(t)$ $(-\infty < t < +\infty)$, $\operatorname{Im} C = 0$, и

$$h = \frac{2}{\pi} \lim_{R \to +\infty} \frac{2}{R} \int_0^\pi \log|f(Re^{i\theta})| \sin\theta d\theta \leq 0$$

согласно (1.15) и (1.26). Отсюда следует, что $f(z)$ принадлежит конформному отображению класса Харди, и поэтому справедливо неравенство (3.4). Следовательно, имеет место неравенство (1.27).

3°. Пусть $f(z) \in H^p(\Omega(x)dx)$, где $\Omega(x)$ удовлетворяет дополнительному условию (1.28). Тогда очевидно, что функция $\Omega(z)$ и

$$[\Omega(z)]^{1/p} \equiv \exp\left\{ \frac{1}{p\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + tz}{t - z} \frac{\log \Omega(t)}{1 + t^2} dt \right\}$$

аналитичны и не имеют нулей в $G^{(+)}$. Воспользовавшись (3.7), нетрудно получить, что

$$|f(z)[\Omega(z)]^{1/p}|^p \leq \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|^p \Omega(t)}{(x - t)^2 + y^2} dt, \quad z = x + iy \in G^{(+)},$$

где $|f(t)|^p \Omega(t) \in L_1(dt)$. Поэтому $f(z)[\Omega(z)]^{1/p} \in H^p(dx)$. Тем самым, $H^p(\Omega(x)dx)[\Omega(z)]^{1/p} \subseteq H^p(dx)$. С другой стороны, полагая, что $f(z) \in H^p(dx)$, получим $f(x)[\Omega(x)]^{-1/p} \in L_p(\Omega(x)dx)$. Поэтому $f(z)[\Omega(z)]^{-1/p} \in H^p(\Omega(x)dx)$, согласно уже доказанному утверждению 1°, и $H^p(dx)[\Omega(z)]^{-1/p} \subseteq H^p(\Omega(x)dx)$. Равенство (1.30) является частным случаем (1.29), где $\Omega(x) = (1 + x^2)^{-\gamma/2}$.

**ABSTRACT.** In the paper a complete characterization is obtained for the growth of functions subharmonic in the upper half- plane and having there nonnegative harmonic majorants. This result contains, as a special case, the Nevanlinna factorization in the half-plane. Modifications of Nevanlinna uniqueness theorem and of the Phragmén-Lindelöf type theorem due to M. Heins and L. Ahlfors are proved in which the traditional condition

$$\limsup_{z \to t, \operatorname{Im} z > 0} u(z) \leq 0, \quad -\infty < t < +\infty$$

is replaced by a less restrictive one. The methods used make it possible to prove also a theorem on weighted $H^p$ classes over a half-plane.

## ЛИТЕРАТУРА

1. R. Nevanlinna, "Über eine Klasse von meromorphen Funktionen", Math. Ann., vol. 92, 1924.
2. Р. Неванлинна, Однозначные Аналитические Функции, М.- Л., ОГИЗ, ГИТТЛ, 1941.
3. R. Nevanlinna, "Über die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum", Acta Soc. Sci. Fennicae, vol. 50, no. 12, pp. 3 – 45, 1925.
4. R. P. Boas, Entire Functions, Ac. Press, New York, 1954.
5. L. V. Ahlfors, M. Heins, "Questions of regularity connected with the Phragmén-Lindelöf principle", Ann. of Math., vol. 50(2), pp. 341 – 346, 1949.
6. А. М. Джрбашян, "Классы функций ограниченного вида в полуплоскости, теорема единственности и теорема типа Фрагмена - Линделефа", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 23, №4, стр. 396 – 401, 1988.
7. A. M. Jerbashian, "On functions of bounded and generalized bounded type in the half-plane", Rev. Roum. Math. Pur. et Appl., vol. 36, nos 7 - 8, pp. 425 - 432, 1991.
8. Е. Д. Соломенцев, "О классах функций, субгармонических в полупространстве", Вестник МГУ, сер. мат., т. 5, стр. 73 – 91, 1959.

13 Июля 1993

Институт математики
НАН Армении

Посвящается профессору
Мхитару М. Джрбашяну
в связи с 75-летним юбилеем

# О ПОЛНОТЕ МНОГОЧЛЕНОВ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

**И. О. Хачатрян**

**Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №4, 1993**

**Пусть $w(t)$ – весовая функция, определенная на лучах $L_\rho = \{z: |\arg z| = \frac{\pi}{2\rho}, \rho \geq 1\}$, а $C_w(L_\rho)$ – пространство непрерывных на $L_\rho$ функций, удовлетворяющих условию $w^{-1}(t)\, f(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$, $t \in L_\rho$. Нормой элемента $f \in C_w(L_\rho)$ назовем число $||f|| = \sup\limits_{t \in L_\rho} w^{-1}(t)\,|f(t)|$. Пусть $P_w(L_\rho)$ означает замыкание системы полиномов в $C_w(L_\rho)$, а $C_w^*(L_\rho)$ – множество целых функций порядка $\rho$ и минимального типа, принадлежащих $C_w(L_\rho)$. Для весовой функции $w(t) = \exp\{a\,|t|^\alpha\}$, $0 < \alpha < \rho(2\rho-1)^{-1}$, $t \in L_\rho$, $a > 0$ в работе доказано, что $P_w(L_\rho) = C_w^*(L_\rho)$.**

Для данного числа $\rho \geq 1$ обозначим через $\Delta(\rho)$ и $\Delta^*(\rho)$ взаимно дополнительные угловые области :

$$\Delta(\rho) = \{z: \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}, \quad 0 < |z| < \infty\},$$

$$\Delta^*(\rho) = \{z: \quad \frac{\pi}{2\rho} < |\arg z| < \pi, \quad 0 < |z| < \infty\}.$$

Общую границу этих областей обозначим через $L_\rho$. Пусть на $L_\rho$ определена измеримая функция $W(t) \geq 1$ такая, что

$$t^n W^{-1}(t) \to 0 \quad \text{при} \quad |t| \to +\infty, \quad t \in L_\rho;\ n = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

Обозначим через $C_w(L_\rho)$ пространство непрерывных на $L_\rho$ функций, удовлетворяющих условию $f(t)\, W^{-1}(t) \to 0$ при $|t| \to +\infty$, $t \in L_\rho$.

Норму элемента $f \in C_w(L_\rho)$ определим по формуле

$$||f|| = \sup_{t \in L_\rho} |f(t)|\, W^{-1}(t).$$

Обозначим через $C^*_w(\mathbb{R})$ множество целых функций нулевой степени, входящих в $C_w(\mathbb{R})$. Имеет место

**Теорема D.** ([4]). *Пусть* $P_w(\mathbb{R}) \neq C_w(\mathbb{R})$. *Тогда* $P_w(\mathbb{R}) \subset C^*_w(\mathbb{R})$.

Обозначим через $\mathcal{N}_w$ множество целых функций нулевой степени, для которых $\|(t-i)^{-1}f(t)\| \leq 1$, а $\widetilde{W}_1(z) = \sup\{|f(z)| : f \in \mathcal{N}_w\}$.

**Теорема E** ([5]). $(P_w(\mathbb{R}) = C^*_w(\mathbb{R})) \Longleftrightarrow (\widetilde{W}(z) = \widetilde{W}_1(z), \operatorname{Im} z \neq 0)$.

Примером весовой функции, для которой $\widetilde{W}(z) = \widetilde{W}_1(z)$, может служить весовая функция типа Бернштейна. А, именно, справедлива

**Теорема F** ([6]). *Пусть* $W(t)$ *– целая четная функция с неотрицательными коэффициентами*

$$W(t) = \sum_0^\infty a_k t^{2k}, \quad a_0 \geq 1, \ a_k \geq 0, \ k = 1, 2, ...,$$

*и пусть* $I(W, 1, \mathbb{R}) < \infty$. *Тогда* $P_w(\mathbb{R}) = C^*_w(\mathbb{R})$.

При доказательстве этой теоремы применяется следующее свойство : функцию Бернштейна $W(t)$ и полином $p_{2n}(z) = \sum_0^n a_k t^{2k}$ можно представить как :

$$W(z) = \omega(z)\overline{\omega}(z) \quad (W(t) = |\omega(t)|^2, t \in \mathbb{R}),$$

$$p_{2n}(z) = Q_n(z)\overline{Q}_n(z) \quad (p_{2n}(t) = |Q_n(t)|^2, t \in \mathbb{R}),$$

соответственно, где все нули функций $\omega(z)$ и $Q_n(z)$ расположены в нижней полуплоскости. Поэтому трудно рассчитывать на обобщение этой теоремы для случая аппроксимации в комплексной плоскости.

Если $W(t)$ – нормально возрастающая функция, то с помощью Теоремы F легко доказывается, что если $I(W, 1, \mathbb{R}) < +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $f \in C^*_w(\mathbb{R})$ существует $p(t)$ такой, что $\|(t^2+1)^{-1}(f(t) - p(t))\| < \varepsilon$.

В работе [7] Н. Левинсон и Н. П. Мак Кин рассмотрели аппроксимацию в квадратичной метрике и получили аналогичный результат без множителя $(t^2+1)^{-1}$. В специальном случае, когда $W(t) = \exp\left(2|t|^{1/2}\right)$ в той же работе [7] был доказано следующее утверждение : замыкание множества полиномов в средне-квадратичной метрике совпадает с множеством целых функций нулевой степени.

В настоящей заметке мы также приводим независимое от Теоремы F доказательство совпадения $P_w(\mathbb{R}) = C^*_w(\mathbb{R})$ для весовых функций более общего вида : $W(t) = \exp(a\,|t|^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, $a > 0$. Наш метод позволяет также описать замыкание $P_w(L_\rho)$, когда $0 < \alpha < \rho^* < \rho$. Это достигается с помощью применения теоремы М. М. Джрбашяна.

**Теорема 1.** *Пусть* $W(t) = \exp(a\,|t|^\alpha)$, *при* $a > 0, 0 < \alpha < 1$. *Тогда* $P_w(\mathbb{R}) = C^*_w(\mathbb{R})$.

**Доказательство.** Пусть $f \in C^*_w(\mathbb{R})$. Рассмотрим функцию

$$F(z) = f(z)\exp\left(-a\sec\frac{\pi\alpha}{2}\exp\left(-i\frac{\pi\alpha}{2}\right)z^\alpha\right), \quad \operatorname{Im} z > 0.$$

Имеем

$$|F(x)| = |f(x)|\exp(-a\,|x|^\alpha) \le C, \quad x \in \mathbb{R},$$

и так как

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln\max_{0\le\theta\le\pi}|F(re^{i\theta})|}{r} \le 0,$$

то по принципу Фрагмена-Линделефа имеем $|F(z)| \le C$, $\operatorname{Im} z > 0$ или

$$|f(r\,e^{i\theta})| \le C\exp\left(a\sec\frac{\pi\alpha}{2}\cos(\alpha\theta - \frac{\pi\alpha}{2})\,r^\alpha\right), \quad 0 \le \theta \le \pi. \tag{4}$$

Аналогичная оценка верна в нижней полуплоскости :

$$|f(r\,e^{i\theta})| \le C\exp\left(a\sec\frac{\pi\alpha}{2}\cos(\alpha\theta + \frac{\pi\alpha}{2})\,r^\alpha\right), \quad -\pi \le \theta \le 0. \tag{4'}$$

Таким образом, можем написать, что $|f(z)| \le C\exp(\sigma|z|^\alpha)$, $\sigma = a\sec\frac{\pi\alpha}{2}$, $z \in \mathbf{C}$. По теореме М. М. Джрбашяна (см. [8], стр. 325) функция $f(z)$ допускает представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} E_\alpha(z\zeta;1)\,g_{\alpha,1}(\zeta)\,d\zeta, \quad z \in \mathbf{C}, \sigma = a\sec\frac{\pi\alpha}{2}, \quad R > \sigma^{1/\alpha}, \tag{5}$$

где $E_\alpha(z;\mu)$ – функция Миттаг-Леффлера, а $g_{\alpha,\mu}(\zeta)$ – обобщенное преобразование Бореля функции $f(z)$ (см. [8], стр. 323).

Пусть теперь $\mathcal{F}$ – произвольный линейный функционал, удовлетворяющий условию $\mathcal{F}[t^n] = 0$. Из асимптотических свойств функции $E_\alpha(z;1)$ следует, что $E_\alpha(t\zeta;1) \in C_w(\mathbb{R})$ при $|\zeta| < a^{1/\alpha}$ (см. [8], стр. 134).

Следуя Б. Я. Левину рассмотрим функцию

$$\varphi(u) \stackrel{def}{=} F[E_\alpha](ut;1) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_\alpha(ut;1)\exp\left(-a\,|t|^\alpha\right) d\sigma(t), \tag{6}$$

которая, согласно сказанному, голоморфна в круге $|u| < a^{1/\alpha}$.

Имеем

$$\varphi^{(n)}(0) = C_n\,\mathcal{F}[t^n] = 0,$$

поэтому $\varphi(u) \equiv 0$ и следовательно

$$\mathcal{F}[E_\alpha(ut;1)] = 0, \quad |u| < a^{1/\alpha}. \tag{7}$$

Из (5) имеем

$$f(\gamma t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} E_\alpha(t\zeta\gamma;1)\,g_{\alpha,1}(\zeta)\,d\zeta. \tag{8}$$

Ясно, что если $|\gamma| < \left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right)^{1/\alpha}$, то $f(\gamma t) \in C_w(\mathbb{R})$.

Пусть $t \in (0,+\infty)$. Если $0 < \varphi = \arg\gamma < \pi$, то $0 < \varphi = \arg(\gamma t) < \pi$ и согласно (4) можем написать, что

$$|f(\gamma t)| \le C\exp\left(a\sec\frac{\pi\alpha}{2}\cos\left(\alpha(\varphi - \frac{\pi}{2})\right)|\gamma|^\alpha\,|t|^\alpha\right). \tag{4''}$$

Если же $-\pi < \arg\gamma < 0$, то $-\pi < \arg(\gamma t) < 0$ и согласно $(4')$ имеем

$$|f(\gamma t)| \le C\exp\left(a\sec\frac{\pi\alpha}{2}\cos\left(\alpha(\varphi + \frac{\pi}{2})\right)|\gamma|^\alpha\,|t|^\alpha\right). \tag{4'''}$$

Пусть теперь $0 < \delta < 1$ – произвольное число, а $\nu_0 = \nu_0(\delta)$ выбрано так, что

$$\sec\frac{\pi\alpha}{2}\cos\left(\alpha(\nu_0 \pm \frac{\pi}{2})\right)\delta^\alpha < 1.$$

Тогда из $(4'')$ и $(4''')$ вытекает, что для всех $\gamma$, удовлетворяющих $|\gamma| < \delta$, $|\arg\gamma| < \nu_0$ существует число $\varepsilon(\delta) > 0$ такое, что

$$|f(\gamma t)| < C\exp\left((a-\varepsilon)\,|t|^\alpha\right), \quad t \in (0,+\infty).$$

Такая же оценка верна и при $t \in (-\infty, 0)$.

Для таких $\gamma$ существует и аналитична функция

$$\Psi(\gamma) \stackrel{def}{=} \mathcal{F}[f(\gamma t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|^\alpha} f(\gamma t)\,d\sigma(t).$$

В окрестности $|\gamma| < \left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right)^{1/\alpha}$ точки $\gamma = 0$ имеем

$$\Psi(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} g_{\alpha,1}(\zeta)\,\mathcal{F}[E_\alpha(\zeta t\gamma;1)]\,d\zeta.$$

Следовательно, на основании (7) получаем, что $\Psi(\gamma) = 0$ в окрестности нуля. Отсюда следует, что $\Psi(\gamma) \equiv 0$ при $|\gamma| < \delta$, $|\arg\gamma| < \nu_0$. В частности, имеем $\Psi(\gamma) \equiv 0$, $\gamma < \delta$, и так как $\delta < 1$ – произвольное число, то $\Psi(\gamma) = \mathcal{F}[f(\gamma t)] = 0$, $0 \leq \gamma < 1$.

Таким образом, получаем, что $f(\gamma t) \in P_w(\mathbb{R}) f \in C_w^*(\mathbb{R})$ и для произвольной функции $f \in C_w^*(\mathbb{R})$ и любого значения $0 < \gamma < 1$.

Покажем теперь, что $f \in P_w(\mathbb{R})$.

Для данного $\varepsilon > 0$ возьмем $A > 0$ настолько большим, чтобы

$$|f(t)|\exp(-a|t|^\alpha) < \varepsilon, \quad |f(\gamma t)|\exp(-a|t|^\alpha) < \varepsilon,\ 0 < \gamma < 1 \quad |t| \geq A,\ t \in L_\rho.$$

Выберем $0 < \gamma_0 < 1$ так, чтобы

$$\max_{|t|\leq A}|f(t) - f(\gamma_0 t)| < \varepsilon.$$

Так как $f(\gamma_0 t) \in P_w(\mathbb{R})$, то существует $p(t)$ такой, что $\|f(\gamma_0 t) - p(t)\| < \varepsilon$. Далее имеем

$$\|f(t) - p(t)\| \leq \|f(t) - f(\gamma_0 t)\| + \|f(\gamma_0 t) - p(t)\| \leq$$

$$\max_{|t|\leq A}|f(t) - f(\gamma_0 t)|\exp(-a|t|^\alpha) + \max_{|t|>A}|f(t) - f(\gamma_0 t)|\exp(-a|t|^\alpha) + \varepsilon \leq 4\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь весовую аппроксимацию на полуоси $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$. Классы $C_w$, $P_w$, $\mathcal{M}_w$ и функция $\widetilde{W}(z)$ определяются аналогично.

Если весовая функция нормально возрастающая, то справедлива (см. [3])

**Теорема A$_1$.** $P_w(\mathbb{R}^+) = C_w(\mathbb{R}^+) \Longleftrightarrow I(W, \frac{1}{2}, \mathbb{R}^+) = \infty$.

В общем случае имеет место (см. [6])

**Теорема B$_1$.** $P_w(\mathbb{R}^+) = C_w(\mathbb{R}^+) \Longleftrightarrow I(\widetilde{W}, \frac{1}{2}, \mathbb{R}^+) = \infty$.

Обозначим через $C_w^*(\mathbb{R}^+)$ множество целых функций половинного порядка и минимального типа, принадлежащих $C_w(\mathbb{R}^+)$. Справедлива

**Теорема $C_1$.** *Пусть $P_w(\mathbb{R}^+) \neq C_w(\mathbb{R}^+)$. Тогда $P_w(\mathbb{R}^+) \subset C^*_w(\mathbb{R}^+)$.*

Следующая теорема является аналогом Теоремы E.

**Теорема 2.** *Пусть $W(t)$ - целая функция с неотрицательными коэффициентами Тейлора, т. е.*

$$W(t) = \sum_{0}^{\infty} a_k t^k, \quad a_0 \geq 1, a_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

*для которой $I(W, \frac{1}{2}, \mathbb{R}^+) < \infty$. Тогда $P_w(\mathbb{R}^+) = C^*_w(\mathbb{R}^+)$.*

**Доказательство.** Теоремы $A_1$ и $B_1$ обеспечивают включение $P_w(\mathbb{R}^+) \subset$

$\subset C^*_w(\mathbb{R}^+)$. Докажем обратное включение, т. е. докажем, что любую функцию $f \in C^*_w(\mathbb{R}^+)$ можно приблизить полиномами. Рассмотрим функцию

$$W_1(t) = W(t^2) = \sum_{0}^{\infty} a_k t^{2k}.$$

Пусть $f(t)$ - произвольная целая функция порядка $\frac{1}{2}$ и минимального типа из множества $C^*_w$. Положим $f_1(t) = f(t^2)$. Заметим, что $f_1(t)$ - целая, четная функция первого порядка и минимального типа и принадлежит пространству $C_{w_1}(\mathbb{R})$. Следовательно, по Теореме E ее можно приблизить полиномами, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $p(t)$ такой, что

$$\frac{|f_1(t) - p(t)|}{W_1(t)} < \varepsilon, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{+}$$

Переписав это неравенство в виде

$$\frac{|f_1(-t) - p(-t)|}{W_1(-t)} < \varepsilon, \qquad t \in \mathbb{R}$$

и учитывая четность функций $f_1$ и $w_1$, получим

$$\frac{|f_1(t) - p(-t)|}{W_1(t)} < \varepsilon, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{-}$$

Из (+) и (-) следует, что

$$\frac{|f_1(t) - \frac{1}{2}(p(t) + p(-t))|}{W_1(t)} < \varepsilon, \qquad t \in \mathbb{R},$$

т. е. функцию $f_1(t)$ можно приблизить четными полиномами

$$\frac{|f_1(t) - Q(t^2)|}{W_1(t)} < \varepsilon, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, вспомнив определения функций $f_1$ и $W_1$, получим

$$\frac{|f(t^2) - Q(t^2)|}{W(t^2)} < \varepsilon, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Таким образом

$$\frac{|f(t) - Q(t)|}{W(t)} < \varepsilon, \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

Теорема доказана.

Приведем аналог Теоремы 1 на полуоси.

**Теорема 3.** *Пусть* $W(t) = \exp(a|t|^\alpha)$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. *Тогда* $P_w(\mathbb{R}^+) = C_w^\circ(\mathbb{R}^+)$.

**Доказательство.** Достаточно доказать, что произвольную функцию $f \in C_w^\circ(\mathbb{R}^+)$ можно аппроксимировать полиномами. Пусть $f \in C_w^\circ(\mathbb{R}^+)$. Рассмотрим функцию

$$F(z) = f(z) \exp\left(-\sec \alpha\pi\, e^{-i\alpha\pi} z^\alpha\right).$$

Очевидно, что $F(z)$ голоморфна в области $G = \mathbf{C} \setminus \mathbb{R}^+$ и удовлетворяет условиям

$$\lim \frac{\ln \sup\limits_{0<\theta<2\pi} |F(re^{i\theta})|}{r^{1/2}} = 0,$$

$$\lim_{z \to \zeta \in \partial G} |F(z)| \le C.$$

Следовательно, по принципу Фрагмена–Линделефа

$$|F(z)| \le C, \quad z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{R}^+.$$

Принимая во внимание, что $f(z)$ – целая функция из $C_w(\mathbb{R}^+)$, получаем

$$|f(re^{i\theta})| \le C \exp\left(a \sec(\alpha\pi) \cos(\alpha(\theta - \pi)) r^\alpha\right), \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Отсюда следует, что $f(z)$ – целая функция порядка $\alpha$ и конечного типа $\sigma = a\sec(\alpha\pi)$. Следовательно, по теореме М. М. Джрбашяна $f(z)$ допускает представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} E_\alpha(z\zeta; 1)\, g_{\alpha,1}(\zeta)\, d\zeta, \quad z \in \mathbf{C}, \quad \sigma = a\sec(\pi\alpha), \quad R > \sigma^{1/\alpha}, \quad (5')$$

аналогичное представлению (5). Дальнейшая часть доказательства незначительно отличается от доказательства Теоремы 1, поэтому мы ее опускаем.

Рассмотрим теперь случай $\rho > 1$. Пусть $W(t) = \exp(a|t|^\alpha)$, $t \in L_\rho$, $a > 0$. Обозначим через $C^*_w(L_\rho)$ множество целых функций $f \in C_w(L_\rho)$ порядка $\rho$ минимального типа, удовлетворяющих условиям

$$|f(z)| < A \exp\{\varepsilon|z|^\rho\}, \quad z \in \Delta(\rho),$$

$$|f(z)| < A \exp\left\{\varepsilon|z|^{\rho^*}\right\}, \quad z \in \Delta^*(\rho).$$

**Теорема 4.** *Пусть* $W(t) = \exp(a|t|^\alpha), t \in L_\rho, 0 < \alpha < \rho^* < \rho$. *Тогда* $P_w(L_\rho) = C^*_w(L_\rho)$.

**Доказательство.** Включение $P_w(L_\rho) \subset C^*_w(L_\rho)$ следует из сходимости интеграла $I(W, \rho^*, L_\rho)$. Докажем обратное включение. Пусть $f \in C^*_w(L_\rho)$. Применяя принцип Фрагмена-Линделефа, получим

$$|f(re^{i\theta})| \le C \exp\left(a \sec\left(\frac{\pi\alpha}{2\rho}\right)\cos(\alpha\theta)\, r^\alpha\right), \quad re^{i\theta} \in \Delta(\rho), \tag{9}$$

$$|f(re^{i\theta})| \le C \exp\left(a \sec\left(\frac{\pi\alpha}{2\rho^*}\right)\cos(\alpha(\pi-\theta))\, r^\alpha\right), \quad re^{i\theta} \in \Delta^*(\rho). \tag{10}$$

Отсюда следует, что целая функция $f(z)$ имеет рост $(\alpha, \sigma_1)$, $\sigma_1 = a \sec\left(\frac{\pi\alpha}{2\rho^*}\right)$ и как в предыдущей теореме, получим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R_1} E_\alpha(z\zeta; 1)\, g_{\alpha,1}(\zeta)\, d\zeta, \quad z \in \mathbf{C},\ R_1 > \sigma_1^{1/\alpha}. \tag{11}$$

Далее, если $\mathcal{F}$ – произвольный линейный функционал такой, что $\mathcal{F}[t^n] = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, то

$$\mathcal{F}[E_\alpha(ut; 1)] = 0, \quad |u| < a^{1/\alpha}.$$

Из (11) следует, что

$$f(\gamma t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R_1} E_\alpha(\gamma\zeta t; 1)\, g_{\alpha,1}(\zeta)\, d\zeta, \quad R_1 > \sigma_1^{1/\alpha}. \tag{12}$$

Если $|\gamma| < \left(\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2\rho^*}\right)\right)^{1/\alpha}$, то $f(\gamma t) \in C_w(L_\rho)$. Используя оценки (9) и (10) покажем, что $f(\gamma t) \in C_w(L_\rho)$ для более широкого множества $\gamma$. С этой целью заметим, что если $\arg t = \frac{\pi}{2\rho}$ и $0 < \varphi = \arg\gamma < \varepsilon$, то в силу оценки (10) $\gamma t \in \Delta^*(\rho)$, имеем

$$\begin{aligned} |f(\gamma t)| &= \left|f\left(|\gamma|\,|t| \exp\left(i(\varphi + \frac{\pi}{2\rho})\right)\right)\right| \le \\ &\le C \exp\left(a \sec\left(\frac{\pi\alpha}{2\rho^*}\right)\cos(\alpha(\pi - \frac{\pi}{2\rho} - \varphi))\,|\gamma|^\alpha |t|^\alpha\right) = \\ &= C \exp\left(a \sec\left(\frac{\pi\alpha}{2\rho^*}\right)\cos(\alpha(\frac{\pi}{2\rho^*} - \varphi))\,|\gamma|^\alpha |t|^\alpha\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Пусть $0 < \delta < 1$ - произвольное число. Число $\nu_1 > 0$ выберем так, чтобы при $0 < \varphi < \nu_1$ выполнялось неравенство

$$\sec\frac{\pi\alpha}{2\rho^*}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2\rho^*} - \alpha\varphi\right)|\delta|^\alpha < 1.$$

Тогда существует $\varepsilon_1(\delta) > 0$ такое, что для всех $\gamma$, удовлетворяющих условию $|\gamma| < \delta$, $0 < \arg\gamma < \nu_1$, из (13) получим, что

$$f(\gamma t)\exp\left(-(\theta - \varepsilon_1)|t|^\alpha\right) \to 0, \quad |t| \to +\infty, \quad \arg t = \frac{\pi}{2\rho}. \tag{14}$$

Пусть теперь $\arg t = -\frac{\pi}{2\rho}$, тогда $\gamma t \in \Delta(\rho)$ при $0 < \arg\gamma < \nu_1$, а следовательно, в силу (9), имеем

$$|f(\gamma t)| = \left|f\left(|\gamma||t|\exp\left(i\left(-\frac{\pi}{2\rho} + \varphi\right)\right)\right)\right| \leq$$

$$\leq C\exp\left(|t|^\alpha|\gamma|^\alpha a\sec\left(\frac{\pi\alpha}{2\rho}\right)\cos\left(\alpha\left(\frac{\pi}{2\rho} - \varphi\right)\right)\right). \tag{14'}$$

Число $\nu_2 > 0$ выберем так, чтобы при $0 < \varphi < \nu_2$

$$\sec\left(\frac{\pi\alpha}{2\rho}\right)\cos\left(\alpha\left(\frac{\pi}{2\rho} - \varphi\right)\right)\delta^\alpha < 1.$$

Тогда из (14') получим, что при $0 < \arg\gamma < \nu_2$, $|\gamma| < 1$

$$f(\gamma t)\exp\left(-(a - \varepsilon_2)|t|^\alpha\right) \to 0, \quad |t| \to +\infty, \quad \arg t = -\frac{\pi}{2\rho}.$$

Повторяя вышеприведенные рассуждения для $|\gamma| < \delta$, $\arg\gamma < 0$ заключаем, что для произвольного $0 < \delta < 1$ существует число $\varepsilon(\delta) > 0$ такое, что для всех $\gamma$, удовлетворяющих условию $|\arg\gamma| < \nu_0$, $|\gamma| < \delta$, имеет место равенство

$$\lim_{\substack{|t| \to +\infty \\ t \in L_\rho}}\left[f(\gamma t)\exp\left(-(a - \varepsilon)|t|^\alpha\right)\right] = 0.$$

Это означает, что

$$f(\gamma t) \in C_w(L_\rho), \quad |\arg\gamma| < \nu_0(\delta)$$

и что функция $\Psi(\gamma) = \mathcal{F}[f(\gamma t)]$ аналитична для таких $\gamma$.

Доказательство завершается как в Теореме 1.

Рассмотрим теперь случай $\alpha = \rho^*$. Имеем

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln W(t)}{1 + |t|^{1+\rho^*}}\,dt = +\infty \qquad (I(W, \rho^*, L_\rho) = +\infty). \tag{15}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln W(t)}{1+|t|^{1+\rho}}\, dt < +\infty \quad (I(W,\rho,L_\rho) < +\infty). \tag{16}$$

Из (16) следует, что $P_w(L_\rho) \neq C_w(L_\rho)$. Обозначим через $C_w^*(L_\rho)$ множество функций $f \in C_w(L_\rho)$, голоморфных в $\Delta(\rho)$, непрерывных в $\overline{\Delta}(\rho)$ и удовлетворяющих условию

$$|f(z)| \leq C \exp\{\varepsilon |z|^\rho\}, \quad z \in \Delta(\rho). \tag{17}$$

В работе [5] доказано, что $P_w(L_\rho) \subset C_w^*(L_\rho)$. Справедлива следующая

**Теорема 5.** *Пусть* $W(t) = \exp(a|t|^\alpha)$, $\alpha = \rho^* < \rho$, $t \in L_\rho$. *Тогда* $P_w(L_\rho) = C_w^*(L_\rho)$.

**Доказательство.** Пусть $\mathcal{F}$ - произвольный линейный функционал такой, что $\mathcal{F}[t^n] = 0$, $n = 0, 1, \ldots$. Тогда из (15) следует, что (см. [5])

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{t-z}\right] = 0, \quad z \in \Delta^*(\rho). \tag{18}$$

Из следующего представления ядра Коши ( см. [8])

$$\exp(i\mu\alpha\pi)\,\frac{z^{1-\mu\alpha}}{z-t} = \int_0^{+\infty} \exp(-(-z)^\alpha \tau)\, E_\alpha(-t\tau^{1/\alpha};\mu)\, \tau^{\mu-1}\, d\tau,$$
$$t \in L_\rho, \quad z \in \Delta^*(\rho)$$

и из (18) мы получим, что

$$\mathcal{F}\left[E_\alpha(-ut;\mu)\right] = 0, \quad u \geq 0. \tag{19}$$

Равенство (19) означает, что для некоторой функции ограниченной вариации $\sigma(t)$, $t \in L_\rho$ имеет место тождество

$$\int_{L_\rho} E_\alpha(-ut;\mu)\exp(-a|t|^\alpha)\, d\sigma(t) = 0, \qquad u \geq 0. \tag{20}$$

Обозначим $-t = \tau$, $\sigma(t) = \sigma(-\tau) = \sigma_1(\tau)$, $\tau \in L_\alpha$ и перепишем (20) в виде

$$\int_{L_\alpha} E_\alpha(u\tau;\mu)\exp(-a|\tau|^\alpha)\, d\sigma_1(\tau) = 0, \qquad u \geq 0. \tag{21}$$

В работе [9] доказано, что из (21) следует равенство

$$\int_{L_\alpha} f(\tau)\exp(-a|\tau|^\alpha)\, d\sigma_1(\tau) = 0 \tag{22}$$

для любой функции $f$, голоморфной в $\Delta^*(\alpha)$, непрерывной в замкнутом угле $\overline{\Delta^*(\alpha)}$ и удовлетворяющей условию

$$f \in C_w(L_\alpha), \quad |f(z)| \le C_f\,|h(z)|, \quad z \in \Delta^*(\alpha), \tag{23}$$

где $h(z) = \exp(u(z) + i\,v(z))$, а $u(z)$ – гармоническая в $\Delta^*(\alpha)$ функция с граничными значениями $a\,|\tau|^\alpha$; $v(z)$ – сопряженная с $u(z)$ гармоническая функция. Легко видеть, что $u(z)$ имеет вид

$$u(r\,e^{i\nu}) = a\,r^\alpha \cos(\pi+\nu)\alpha \sec\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), \quad |\pi+\nu| \le \frac{\pi}{2\rho}. \tag{24}$$

Пусть теперь $f \in C_w^*(L_\rho)$. Применяя принцип Фрагмена–Линделефа, получим неравенство

$$|f(r\,e^{i\nu})| \le C \exp\left(a \sec\left(\frac{\alpha\pi}{2\rho}\right) \cos(\alpha\nu)\,r^\alpha\right), \quad |\nu| < \frac{\pi}{2\rho}. \tag{25}$$

Рассмотрим функцию $F(z) = f(-z)$. Она определена и голоморфна в $\Delta^*(\alpha) = \Delta^*(\rho^*)$, непрерывна в $\overline{\Delta^*(\alpha)}$ и согласно (25)

$$|F(r\,e^{i\nu})| \le C \exp\left(a \sec\left(\frac{\alpha\pi}{2\rho}\right) \cos(\alpha(\pi+\nu))\,r^\alpha\right), \quad r\,e^{i\nu} \in \Delta^*(\alpha), \ F \in C_w(L_\alpha). \tag{26}$$

Следовательно, $F(z)$ удовлетворяет условиям (23). Таким образом

$$\int_{L_\alpha} F(\tau) \exp(-a|\tau|^\alpha)\,d\sigma_1(\tau) = 0. \tag{27}$$

Переходя к переменной $t = -\tau$ и учитывая обозначения $\sigma_1(\tau) = \sigma(t)$, $F(\tau) = f(t)$, равенство (27) перепишем в виде

$$\int_{L_\rho} f(t) \exp(-a|t|^\alpha)\,d\sigma(t) = 0$$

или

$$\mathcal{F}[f(t)] = 0 \qquad \text{для произвольного} \quad f \in C_w^*(L_\rho).$$

Следовательно, $f \in P_w$. Теорема доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность С. А. Акопяну за полезное обсуждение.

**ABSTRACT.** Let $w(t)$ be a weight function defined on $L_\rho = \{z : |\arg z| = \frac{\pi}{2\rho}, \rho \geq 1\}$ and let $C_w(L_\rho)$ be the class of continuous functions on $L_\rho$ satisfying the condition $w^{-1}(t)\, f(t) \to 0$ as $|t| \to \infty$, $t \in L_\rho$. For $f \in C_w(L_\rho)$ we define $||f|| = \sup_{t \in L_\rho} w^{-1}(t)\, |f(t)|$. Let $P_w(L_\rho)$ denote the closure in $C_w(L_\rho)$ of the polynomials and let $C^*_w(L_\rho)$ denote the set of entire functions of order $\rho$ and of minimal type, belonging to $C_w(L_\rho)$. For a weight function $w(t) = \exp\{a\,|t|^\alpha\}$, $0 < \alpha < \rho(2\rho-1)^{-1}$, $t \in L_\rho$, $a > 0$ the paper proves that $P_w(L_\rho) = C^*_w(L_\rho)$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. S. Bernstein, "Le probleme de l'approximation des fonctions continues sur tout l'axe reel et l'une de ses applications," Bull. Soc. Mathem de France, vol. 52, pp. 399 - 410, 1924.
2. А. Л. Шагинян, "О полноте семейства аналитических функций в комплексной области," Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН Арм.ССР, вып. 1, 1947.
3. М. М. Джрбашян, "Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области," Мат. сб., т. 36, №3, стр. 353 - 440, 1955.
4. С. Н. Мергелян, "Весовые приближения многочленами," Успехи мат. наук, т. 11, вып. 5(71), стр. 107 - 152, 1952.
5. И. О. Хачатрян, " О взвешенно-равномерном приближении непрерывных функций полиномами на двух лучах," Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 3, №4 - 5, стр. 301 - 326, 1968.
6. И. О. Хачатрян, " О взвешенно-равномерном приближении целых функций нулевой степени многочленами на действительной оси," Записки мех-мат. факультета ХГУ и Харьковского мат. общества, т. 29, №4, стр. 129 - 142, 1963.
7. M. Levinson and H. P. McKean, "Weighted trigonometrical approximation on $\mathbb{R}^1$ with application to the germ field of a stationary Gaussian noise," Acta Mathem., vol. 112, no. 1-2, pp. 99 - 143, 1964.
8. М. М. Джрбашян, Интегральные Преобразования и Представления Функций в Комплексной Области, М., Наука, 1966.
9. Н. И. Ахиезер, " О взвешенном приближении непрерывных функций многочленами на всей числовой оси," Успехи мат. наук, т. 11, вып. 4(70), стр. 3 - - 43, 1956.
10. И. О. Хачатрян, " О замыкании семейства функций типа Миттаг-Леффлера при взвешенно-равномерном приближении в комплексной области," Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 10, №4, стр. 373-384, 1975.

15 Августа 1993

Ереванский государственный университет

Посвящается профессору
Мхитару М. Джрбашяну
в связи с 75-летним юбилеем

# О СУЩЕСТВЕННОЙ ВАРИАЦИИ В СМЫСЛЕ ВИТАЛИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

**Ф. А. Талалян**

**Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №4, 1993**

**В настоящей работе излагаются некоторые результаты, относящиеся к понятию существенной вариации в смысле Витали функций многих переменных. Показывается, что существенная вариация суммируемой функции может быть вычислена с помощью ее интегральных средних. Доказываются также многомерные аналоги двух теорем конечности существенной вариации.**

## §1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе излагаются некоторые результаты, относящиеся к понятию существенной вариации по Витали функции многих переменных. Данное понятие мы здесь вводим по аналогии с рассмотренной в [2], [3] существенной абсолютной непрерывностью по Витали.[1].

Всюду в дальнейшем будем пользоваться терминологией и обозначениями работы [4]. В частности, для каждого $n$-мерного сегмента $J$ обозначим через $\operatorname{vert}(J)$ множество вершин $J$, а $\Delta_n(f, J)$ - это $n$-мерная разность функции $f$ на $J$. Если $c$ - действительное число, то полагаем $\bar{c} = (c, ..., c) \in \mathbb{R}^n$, Далее, через $Q^n$ обозначим $n$-мерный единичный куб, а через $\lambda_n$ – $n$-мерную меру Лебега. Пусть $f$ – действительная функция, заданная на $n$-мерном сегменте $J$ и $E \subset J$

[1] В [2] вместо "существенной" был использован термин "обобщенная".

– некоторое множество точек. Положим

$$\operatorname{var}(f; E) = \sup \sum_k |\Delta_n(f; J_k)|, \tag{1}$$

где верхняя грань берется по всем конечным системам попарно неперекрывающихся сегментов $J_k$ с вершинами из $E$.

Здесь под неперекрывающимися сегментами мы понимаем сегменты без общих внутренних точек.

**Определение.** Пусть $f$ есть функция $n$ переменных, заданная на $n$–мерном сегменте $J$. Величина

$$\operatorname{ess\,var}(f; J) = \inf \{\operatorname{var}(f; E): \quad E \subset J,\ \lambda_n(J \setminus E) = 0\} \tag{2}$$

называется существенной вариацией Витали функции $f$ на $J$.

Заметим, что в (2) нижнюю грань можно взять по всем $E$, содержащимся внутри $J$ ($E \subset \operatorname{int}(J)$) с $\lambda_n(J \setminus E) = 0$. Заметим также, что указанная нижняя грань достигается на некотором $E$.

В параграфе 2 доказывается основной результат данной работы – Теорема 1, согласно которой для вычисления существенной вариации суммируемой функции можно использовать ее "усреднения по разбиениям". В параграфе 3 доказывается, что существенная вариация существенно абсолютно непрерывной функции выражается интегралом от слабой смешанной производной данной функции. Наконец , в параграфе 4 доказывается, что из справедливости некоторого асимптотического равенства следует конечность существенной вариации суммируемой функции. Этот результат в одномерном случае был доказан Г. Харди и Дж. Литтльвудом (см. [1], Теорема 24). Для его распространения на многомерный случай были применены результаты работ [2], [3].

## §2. СУЩЕСТВЕННАЯ ВАРИАЦИЯ И УСРЕДНЕНИЯ

Пусть $\overline{a} = (a_1, ..., a_n)$ и $\overline{b} = (b_1, ..., b_n)$ – точки $\mathbb{R}^n$, причем $\overline{a} < \overline{b}$, $\overline{m} = (m_1, ..., m_n)$ – положительная целочисленная точка и для каждого $i = 1, ..., n$

$$a_i = t_0^{(i)} < t_1^{(i)} < ... < t_{m_i}^{(i)} = b_i$$

– некоторая система действительных чисел.

Пусть $J = [\bar{a}, \bar{b}]$ - сегмент, определенный точками $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Для каждой целочисленной точки $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in [\bar{0}, \bar{m}]$ положим $\bar{t}_{\bar{z}} = (t^{(1)}_{z_1}, \ldots, t^{(n)}_{z_n})$.

Систему точек

$$P = \{\bar{t}_{\bar{z}} : \quad \bar{z} \in [\bar{0}, \bar{m}]\}$$

назовем разбиением сегмента $J$. При этом точки $\bar{t}_{\bar{z}}$ будут называться узлами, а сегменты $[\bar{t}_{\bar{z}-\bar{1}}, \bar{t}_{\bar{z}}]$, $\bar{z} \in [\bar{1}, \bar{m}]$ - ячейками разбиения $P$. Узлы $\bar{t}_{\bar{z}}$ при $\bar{z} \in [\bar{1}, \bar{m} - \bar{1}]$ назовем внутренними.

Обозначим через $\mathrm{int}\,(P)$ множество внутренних узлов разбиения $P$, а через $\mathrm{cell}\,(P)$ - множество его ячеек. Заметим, что $\mathrm{int}\,(P)$ есть разбиение сегмента $[\bar{t}_{\bar{1}}, \bar{t}_{\bar{m}-\bar{1}}]$.

Пусть $f$ – суммируемая функция на $J$. Положим

$$A_f(\bar{z}) = \frac{1}{\lambda_n(J_{\bar{z}})} \int_{J_{\bar{z}}} f \, d\lambda_n; \quad \bar{z} \in [\bar{1}, \bar{m}], \tag{4}$$

где $J_{\bar{z}} = [\bar{t}_{\bar{z}-\bar{1}}, \bar{t}_{\bar{z}}]$.

Функцию

$$\sum_{\bar{z}=\bar{1}}^{\bar{m}} A_f(\bar{z})\, \chi_{J_{\bar{z}}}(\bar{x}) \tag{5}$$

назовем усреднением функции $f$ по разбиению $P$. Существенную вариацию Витали суммируемых функций можно вычислить с помощью их усреднения.

**Теорема 1.** *Пусть $J$ – $n$-мерный сегмент и $f \in L^1(J)$. Тогда*

$$\mathit{ess\,var}(f; J) = \sup \sum_{\bar{z}=\bar{1}}^{\bar{m}-\bar{1}} |\Delta_n(A_f; [\bar{z}, \bar{z} + \bar{1}])|, \tag{6}$$

*где верхняя грань берется по всем разбиениям $J$.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

**Лемма 1.** *Пусть $f$ – действительная измеримая функция на $n$-мерном сегменте $J$. Тогда*

$$\mathrm{ess\,var}\,(f; J) = \inf \left\{ \sup_{\mathrm{int}\,(P) \subset E} \sum_{I \in \mathrm{cell}(\mathrm{int}\,(P))} |\Delta_n(f; I)| : E \subset \mathrm{int}\,(J),\ \lambda_n(J \setminus E) = 0 \right\}. \tag{7}$$

**Доказательство.** Правую часть (7) для краткости обозначим через $A$. Очевидно, имеем $\operatorname{ess\,var}(f; J) \geq A$.

Для доказательства обратного неравенства мы воспользуемся теоремой об аппроксимативной непрерывности почти всюду измеримых функций.

Пусть множество $E \subset \operatorname{int}(J)$ выбрано так, что $\lambda_n(J \setminus E) = 0$,

$$\operatorname{ess\,var}(f; J) = \operatorname{var}(f; E) \tag{8}$$

и

$$A = \sup_{\operatorname{int}(P) \subset E} \sum_{I \in \operatorname{cell}(\operatorname{int}(P))} |\Delta_n(f; I)|. \tag{9}$$

При этом можно считать, что все точки $E$ являются точками аппроксимативной непрерывности функции $f$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное фиксированнное число. Возьмем систему $\{J_k\}$ попарно неперекрывающихся сегментов с вершинами из $E$ так, чтобы

$$\operatorname{ess\,var}(f; J) - \varepsilon \leq \sum_k |\Delta_n(f; J_k)|. \tag{10}$$

Пусть $P$ есть разбиение $J$, порожденное системой $\{J_k\}$. Имеем

$$\bigcup_k \operatorname{vert}(J_k) \subset \operatorname{int}(P).$$

В силу теоремы об аппроксимативной непрерывности существует такой достаточно малый вектор $\overline{a}$, что

$$\operatorname{int}(P) + \overline{a} \subset E \tag{11}$$

и

$$\sum_k |\Delta_n(f; J_k)| \leq \sum_k |\Delta_n(f; J_k + \overline{a})| + \varepsilon. \tag{12}$$

Тогда из (10) и (12) следует, что

$$\operatorname{ess\,var}(f; J) \leq \sum_k |\Delta_n(f; J_k + \overline{a})| + 2\varepsilon \leq \sum_{I \in \operatorname{cell}(\operatorname{int}(P_0))} |\Delta_n(f; I)| + 2\varepsilon,$$

где, в силу (11), $P_0$ – разбиение $J$, для которого $\operatorname{int}(P_0) \subset E$.

Отсюда и из (9), в силу произвольности $\varepsilon$, получим $\operatorname{ess\,var}(f; J) \leq A$, что и требовалось доказать.

**Лемма 2.** *Пусть $(X, \mu)$ — пространство с мерой, $f \in L^1(X, \mu)$ и $E \subset X$ - измеримое множество положительной меры. Тогда существуют точки $x_1, x_2 \in X$ такие, что*

$$f(x_1) \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu \leq f(x_2). \tag{13}$$

**Доказательство.** Предположим обратное. Пусть, например, для всех $x \in E$

$$f(x) < \frac{1}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu.$$

Тогда существует $\varepsilon > 0$ и множество $A \subset E$ с $\mu(A) > 0$ такие, что для всех $x \in A$

$$f(x) < \frac{1}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu - \varepsilon.$$

Тогда

$$\int_E f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_{E\setminus A} f\,d\mu \leq \frac{\mu(A)}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu - \varepsilon\,\mu(A) +$$
$$+ \frac{\mu(E) - \mu(A)}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu = \int_E f\,d\mu - \varepsilon\mu(A),$$

и мы приходим к противоречию.

**Лемма 3.** *Пусть $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{a} < \bar{b}$, $J = [\bar{a}, \bar{b}]$, $f \in L^1(J)$, а $E \subset int(J)$ - множество с $\lambda_n(J \setminus E) = 0$ и*

$$P = \{\bar{t}_{\bar{z}} \colon \ \bar{z} \in [\bar{0}, \overline{m}]\}$$

*- некоторое разбиение $J$. Тогда существует другое разбиение $P_0$ сегмента $J$ такое, что $int(P_0) \subset E$ и имеет место неравенство*

$$\sum_{\bar{z}=\bar{1}}^{\overline{m}-\bar{1}} |\Delta_n(A_f; [\bar{z}, \bar{z} + \bar{1}])| \leq \sum_{I \in cell(int\,(P_0))} |\Delta_n(f; I)|. \tag{14}$$

**Доказательство.** Положим

$$S = \prod_{\substack{1 \leq k_i \leq m_i \\ 1 \leq i \leq n}} [t^{(i)}_{k_i - 1}, t^{(i)}_{k_i}],$$

$$M_{\bar{z}} = \left\{(x_1^{(1)}, ..., x_1^{(m_1)}, ..., x_1^{(n)}, ..., x_{m_n}^{(n)}) \in S \ \ (x^{(1)}_{z_1}, ..., x^{(n)}_{z_n}) \in E \cap J_{\bar{z}}\right\}; \quad \bar{z} \in [\bar{1}, \overline{m}]$$

и

$$M = \bigcap_{\bar{z}=\bar{1}}^{\overline{m}} M_{\bar{z}}.$$

Тогда имеем

$$M \subset S, \quad \lambda_{|\overline{m}|}(S \setminus M) = 0, \tag{15}$$

где $|\overline{m}| = m_1 + \ldots + m_n$.

Рассмотрим на $S$ функцию $|\overline{m}|$ переменных

$$F(x_1^{(1)}, \ldots, x_{m_1}^{(1)}, \ldots, x_1^{(n)}, \ldots, x_{m_n}^{(n)}) = \sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{m}-\overline{1}} \varepsilon_{\overline{z}} \Delta_n(f; [\overline{x}_{\overline{z}}, \overline{x}_{\overline{z}+\overline{1}}]), \tag{16}$$

где для каждого $\overline{z} \in [\overline{1}, \overline{m} - \overline{1}]$

$$\overline{x}_{\overline{z}} = (x_{z_1}^{(1)}, \ldots, x_{z_n}^{(n)}) \quad \text{и} \quad \varepsilon_{\overline{z}} = \operatorname{sign} \Delta_n(A_f; [\overline{z}, \overline{z} + \overline{1}]).$$

В силу (15) имеем

$$\frac{1}{\lambda_{|\overline{m}|}(M)} \int_M F\, d\lambda_{|\overline{m}|} = \frac{1}{\lambda_{|\overline{m}|}(S)} \int_S F\, d\lambda_{|\overline{m}|} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_{|\overline{m}|}(S)} \int_S \sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{m}-\overline{1}} \varepsilon_{\overline{z}} \sum_{\overline{\alpha} \in \operatorname{vert}(Q_n)} (-1)^{n-|\overline{\alpha}|} f((\overline{1} - \overline{\alpha})\, \overline{x}_{\overline{z}} + \overline{\alpha}\, \overline{x}_{\overline{z}+\overline{1}})\, d\lambda_{|\overline{m}|} =$$

$$= \sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{m}-\overline{1}} \varepsilon_{\overline{z}} \sum_{\overline{\alpha} \in \operatorname{vert}(Q_n)} \frac{(-1)^{n-|\overline{\alpha}|}}{\prod_{i=1}^n \left((1 - \alpha_i)(t_{z_i}^{(i)} - t_{z_i-1}^{(i)}) + \alpha_i (t_{z_i+1}^{(i)} - t_{z_i}^{(i)})\right)} \int_{J_{\overline{z}+\overline{\alpha}}} f\, d\lambda_n =$$

$$= \sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{m}-\overline{1}} \varepsilon_{\overline{z}} \Delta_n(A_f; [\overline{z}, \overline{z} + \overline{1}]) = \sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{m}-\overline{1}} |\Delta_n(A_f; [\overline{z}, \overline{z} + \overline{1}])|. \tag{17}$$

В силу Леммы 2, из (17) следует существование точки

$$(\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_{m_1}^{(1)}, \ldots, \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{m_n}^{(n)}) \in M$$

такой, что

$$\sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{m}-\overline{1}} |\Delta_n(A_f; [\overline{z}, \overline{z} + \overline{1}])| \le \left| F(\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_{m_1}^{(1)}, \ldots, \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{m_n}^{(n)}) \right|.$$

Отсюда, в силу (16) имеем

$$\sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{m}-\overline{1}} |\Delta_n(A_f; [\overline{z}, \overline{z} + \overline{1}])| \le \sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{m}-\overline{1}} |\Delta_n(f; [\overline{\xi}_{\overline{z}}, \overline{\xi}_{\overline{z}+\overline{1}}])|, \tag{18}$$

где $\overline{\xi}_{\overline{z}} = (\xi_{z_1}^{(1)}, \ldots, \xi_{z_n}^{(n)})$, $\overline{\xi}_{\overline{z}+\overline{1}} = (\xi_{z_1+1}^{(1)}, \ldots, \xi_{z_n+1}^{(n)})$.

Легко видеть, что точки $\overline{\xi}_{\overline{z}}$, $\overline{z} \in [\overline{1}, \overline{m}]$ образуют разбиение сегмента $[\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_m] \subset \operatorname{int}(J)$, узлы которого принадлежат $E$. Продолжим его до разбиения $P_0$ всего сегмента $J$. Тогда $\operatorname{int}(P_0) \subset E$, и, в силу (18), неравенство (14) справедливо. Лемма доказана.

**Доказательство Теоремы 1.** Пусть $D_k$ — двоичное разбиение $k$-го ранга сегмента $J$. Это означает, что для $D_k$, $\overline{m} = \overline{2^k}$ и

$$t_j^{(i)} = a_i + \frac{j}{2^k}(b_i - a_i); \quad j = 0, 1, ..., 2^k.$$

Сегменты $J_{\overline{z}}$ и средние $A_f(\overline{z})$, соответствующие разбиению $D_k$, обозначим через $J_{\overline{z}}^{(k)}$ и $A_f^{(k)}(\overline{z})$, соответственно. Пусть $E$ - множество тех точек $\overline{x} \in \operatorname{int}(J)$, для которых

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{2^k}} A_f^{(k)}(\overline{z})\, \chi_{J_{\overline{z}}^{(k)}}(\overline{x}) = f(\overline{x}). \tag{19}$$

Тогда по теореме Лебега $\lambda_n(J \setminus E) = 0$.

Пусть $P$ - произвольное разбиение $J$ с $\operatorname{int}(P) \subset E$ и $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Тогда, в силу (19), для достаточно больших $k$ имеем

$$\sum_{I\in \operatorname{cell}(\operatorname{int}(P))} |\Delta_n(f; I)| \le \sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{2^k}-\overline{1}} \left|\Delta_n(A_f^{(k)}; [\overline{z}, \overline{z}+\overline{1}])\right| + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon$, отсюда и из Леммы 1 следует неравенство

$$\operatorname{ess\,var}(f; J) \le \sup \sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{m}-\overline{1}} \left|\Delta_n(A_f; [\overline{z}, \overline{z}+\overline{1}])\right|. \tag{20}$$

С другой стороны, так как в формулировке Леммы 3 разбиение $P$ и множество $E$ независимы, то еще раз применяя Лемму 1, из (14) получим

$$\sup \sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{m}-\overline{1}} \left|\Delta_n(A_f; [\overline{z}, \overline{z}+\overline{1}])\right| \le \operatorname{ess\,var}(f; J). \tag{21}$$

Равенство (6) следует из (20) и (21).

## §3. СУЩЕСТВЕННО АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Напомним определение существенной абсолютной непрерывности по Витали (см. [2], [3])

**Определение.** Функция $f$ называется существенно абсолютно непрерывной по Витали на $n$-мерном сегменте $J$, если существует множество $E \subset J$ с $\lambda_n(J \setminus E) = 0$, обладающее свойством : для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что каково бы ни было конечное семейство $\{J_k;\ k = 1, \ldots, l\}$ попарно неперекрывающихся $n$-мерных сегментов с вершинами из $E$ и с суммой мер

$$\sum_{k=1}^{l} \lambda_n(J_k) < \delta,$$

имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{l} |\Delta_n(f; J_k)| < \varepsilon.$$

Справедлива следующая

**Теорема 2.** *Пусть функция $f$ существенно абсолютно непрерывна по Витали на сегменте $J$. Тогда*

$$ess\,var(f; J) = \int_J \left|D^{\bar{1}} f\right| d\lambda_n < \infty, \tag{22}$$

*где производная $D^{\bar{1}} f = \dfrac{\partial^n f}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$ понимается в смысле теории распределений.*

**Доказательство.** Согласно Теореме 1 работы [3] существует единственная функция $g \in L^1(J)$ и множество $M \subset J$ с $\lambda_n(J \setminus M) = 0$ такие, что для каждого $n$-мерного сегмента $I$ с вершинами, принадлежащими $M$, имеет место равенство

$$\Delta_n(f; I) = \int_I g\, d\lambda_n. \tag{23}$$

Покажем теперь, что $g = D^{\bar{1}} f$. Для этого зафиксируем некоторую точку $\bar{c} \in M$ так, чтобы для почти всех $\bar{x}$ выполнялось равенство

$$\Delta_n(f; [\bar{c}, \bar{x}]) = \int_{[\bar{c}, \bar{x}]} g\, d\lambda_n \tag{24}$$

Пусть теперь задана произвольная функция $\varphi \in C_0^\infty(J)$. Так как разность $f(\bar{x}) - \Delta_n(f; [\bar{c}, \bar{x}])$ представляет собой сумму, в которой каждое слагаемое зависит от меньшего, чем $n$ числа переменных, то

$$\int_J (f(\bar{x}) - \Delta_n(f; [\bar{c}, \bar{x}]))\, D^{\bar{1}} \varphi(\bar{x})\, d\lambda_n(\bar{x}) = 0. \tag{25}$$

Из (24) и (25) интегрированием по частям получим

$$\int_J f\, D^{\bar{1}} \varphi\, d\lambda_n = \int_J (\Delta_n(f; [\bar{c}, \bar{x}]) + f(\bar{x}) - \Delta_n(f; [\bar{c}, \bar{x}]))\, D^{\bar{1}} \varphi(\bar{x})\, d\lambda_n(\bar{x}) =$$
$$= \int_J \Delta_n(f; [\bar{c}, \bar{x}])\, D^{\bar{1}} \varphi(\bar{x})\, d\lambda_n(\bar{x}) =$$
$$= \int_J \left( \int_{[\bar{c}, \bar{x}]} g\, d\lambda_n \right) D^{\bar{1}} \varphi(\bar{x})\, d\lambda_n(\bar{x}) = (-1)^n \int_J g\, \varphi\, d\lambda_n.$$

Таким образом, равенство $g \doteq D^{\bar{1}} f$ доказано. Перейдем теперь к доказательству равенства (22). Сначала заметим, что

$$\operatorname{ess\,var}(f; J) \leq \operatorname{var}(f; \dot{M}) = \sup \sum_k |\Delta_n(f; J_k)| = \sup \sum_k \left| \int_J D^{\bar{1}} f \, d\lambda_n \right| \leq \\ \leq \int_J \left| D^{\bar{1}} f \right| d\lambda_n, \tag{26}$$

где верхняя грань берется по всевозможным конечным системам попарно неперекрывающихся сегментов $\{J_k\}$ с вершинами, принадлежащими $\dot{M}$.

Докажем неравенство

$$\operatorname{ess\,var}(f; J) \geq \int_J \left| D^{\bar{1}} f \right| d\lambda_n. \tag{27}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы для каждого множества $A \subset J$

$$\lambda_n(A) < \delta \Longrightarrow \int_A \left| D^{\bar{1}} f \right| d\lambda_n < \varepsilon. \tag{28}$$

Теперь построим конечную систему $S = \{J_k \subset J;\ k = 1, \ldots, l\}$ попарно неперекрывающихся сегментов так, чтобы имело место неравенство

$$\lambda_n \left( J \setminus \bigcup_{k=1}^{l} J_k \right) < \delta \tag{29}$$

и, чтобы для каждого $k = 1, \ldots, l$ выполнялось одно из следующих двух соотношений :

$$\lambda_n(J_k^0) > \left( 1 - \frac{\delta}{\lambda_n(J)} \right) \lambda_n(J_k) \tag{30}$$

или

$$\lambda_n(J_k^1) > \left( 1 - \frac{\delta}{\lambda_n(J)} \right) \lambda_n(J_k), \tag{31}$$

где $J_k^0 = \{\bar{x} \in J_k : \ D^{\bar{1}} f(\bar{x}) \geq 0\}$, $J_k^1 = \{\bar{x} \in J_k : \ D^{\bar{1}} f(\bar{x}) < 0\}$.

Указанную систему сегментов можно построить следующим образом : если для сегмента $J$ выполняется (30) или (31) (с $J$ вместо $J_k$), то требуемая система $S$ состоит из одного $J$. В противном случае, разделим $J$ на $2^n$ равных частей и отнесем к $S$ те из них, для которых справедливо (30) или (31). Каждый из оставшихся сегментов разделим на $2^n$ равных частей и произведем такой же выбор.

Из теоремы о точках плотности измеримого множества легко следует, что при неограниченном продолжении описанного процесса наступит момент, когда для построенных сегментов $J_1, \dots, J_l$ выполняется (29). Тогда полагаем $S = \{J_1, \dots, J_l\}$.

Пусть

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 0, & \text{если выполняется (30)} \\ 1, & \text{если выполняется (31);} \end{cases} \quad k = 1, \dots, l. \tag{32}$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{l} \lambda_n \left(J_k^{1-\varepsilon_k}\right) < \delta. \tag{33}$$

Пусть теперь $E \subset J$, с $\lambda_n(J \setminus E) = 0$ и

$$\operatorname{ess\,var}(f; J) = \operatorname{var}(f; E). \tag{34}$$

Для каждого $k, k = 1, \dots, l$, выберем сегмент $I_k \subset J_k \in S$ с вершинами, принадлежащими $E \cap M$ так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{l} \lambda_n (J_k \setminus I_k) < \delta. \tag{35}$$

Тогда, в силу (23), (28), (29), (33)-(35), получим

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ess\,var}(f; J) = \operatorname{var}(f; E) = \operatorname{var}(f; E \cap M) \geq \\
&\geq \sum_k \left| \int_{I_k} D^{\bar{1}} f \, d\lambda_n \right| \geq \sum_k \left| \int_{J_k} D^{\bar{1}} f \, d\lambda_n \right| - \\
&- \varepsilon = \sum_k \left| \int_{J_k^{\varepsilon_k}} D^{\bar{1}} f \, d\lambda_n + \int_{J_k^{1-\varepsilon_k}} D^{\bar{1}} f \, d\lambda_n \right| - \\
&- \varepsilon \geq \sum_k \left| \int_{J_k^{\varepsilon_k}} D^{\bar{1}} f \, d\lambda_n \right| - \sum_k \left| \int_{J_k^{1-\varepsilon_k}} D^{\bar{1}} f \, d\lambda_n \right| \\
&- \varepsilon = \sum_k \int_{J_k^{\varepsilon_k}} \left| D^{\bar{1}} f \right| d\lambda_n - \sum_k \int_{J_k^{1-\varepsilon_k}} \left| D^{\bar{1}} f \right| d\lambda_n - \\
&- \varepsilon \geq \sum_k \int_{J_k^{\varepsilon_k}} \left| D^{\bar{1}} f \right| d\lambda_n - 2\varepsilon \geq \sum_k \int_{J_k} \left| D^{\bar{1}} f \right| d\lambda_n - \\
&- 3\varepsilon \geq \int_J \left| D^{\bar{1}} f \right| d\lambda_n - 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon$, отсюда следует (27).

## §4. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ КОНЕЧНОСТИ СУЩЕСТВЕННОЙ ВАРИАЦИИ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе мы докажем многомерный аналог одного достаточного условия конечности существенной вариации суммируемых функций, принадлежащий Г. Харди и Дж. Литтльвуду.

**Теорема 3.** *Пусть $J$ – $n$-мерный сегмент, $f \in L^1(J)$ и*

$$\int_J \left|\Delta_n(f;[\overline{x},\overline{x}+\overline{h}])\right| d\lambda_n(\overline{x}) = O(|\overline{h}|^n). \tag{36}$$

*Тогда* $ess\,var(f;J) < \infty$. *(Вне $J$ можно считать, что $f=0$.)*

**Доказательство.** Положим

$$\varphi_k(\overline{x}) = k^n \int_{[\overline{x},\overline{x}+\frac{\overline{1}}{k}]} f\, d\lambda_n; \quad k = 1,2,\dots. \tag{37}$$

Тогда по теореме Лебега, для почти всех $\overline{x} \in J$

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(\overline{x}) = f(\overline{x}). \tag{38}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned}
&\int_J \left|\Delta_n(\varphi_k;[\overline{x},\overline{x}+\overline{h}])\right| d\lambda_n(\overline{x}) = \\
&= \int_J \left|\sum_{\overline{\alpha}\in \mathrm{vert}\,(Q^n)} (-1)^{n-|\overline{\alpha}|}\varphi_k((\overline{1}-\overline{\alpha})\overline{x}+\overline{\alpha}(\overline{x}+\overline{h}))\right| d\lambda_n(\overline{x}) = \\
&= k^n \int_J \left|\sum_{\overline{\alpha}\in \mathrm{vert}\,(Q^n)} (-1)^{n-|\overline{\alpha}|}\int_{[\overline{0},\frac{\overline{1}}{k}]} f(\overline{u}+(\overline{1}-\overline{\alpha})\overline{x}+\right. \\
&\left. +\,\overline{\alpha}(\overline{x}+\overline{h}))\, d\lambda_n(\overline{u})\right| d\lambda_n(\overline{x}) \le \\
&\le k^n \int_{[\overline{0},\frac{\overline{1}}{k}]} d\lambda_n(\overline{u}) \int_J \left|\Delta_n(f;[\overline{x}+\overline{u},\overline{x}+\overline{u}+\overline{h}])\right| d\lambda_n(\overline{x}) = O(|\overline{h}|^n).
\end{aligned} \tag{39}$$

С другой стороны, очевидно функции $\varphi_k$ абсолютно непрерывны по Витали (см. [2], определение 1). Поэтому, согласно Теореме 1 из [3], существует множество $E_0 \subset J$ с $\lambda_n(J \setminus E_0) = 0$ и последовательность функций $\Psi_k \in L^1(J)$ такие, что для каждого сегмента $I \subset J$, вершины которого принадлежат $E_0$, имеет место равенство

$$\Delta_n(\varphi_k;I) = \int_I \Psi_k\, d\lambda_n; \qquad k = 1,2,\dots. \tag{40}$$

Из (40) следует, что для почти всех $\overline{x} \in J$

$$\lim_{m\to\infty} 2^{mn}\, \Delta_n(\varphi_k; [\overline{x}, \overline{x} + \frac{\overline{1}}{2^m}]) = \Psi_k(\overline{x}). \tag{41}$$

Отсюда, в силу леммы Фату и условия (39), получим

$$\int_J |\Psi_k|\, d\lambda_n \leq C; \qquad k = 1, 2, ..., \tag{42}$$

где $C$ не зависит от $k$.

Пусть теперь $\{J_1, ..., J_l\}$ – произвольная конечная система попарно неперекрывающихся сегментов с вершинами из $E_0$. В силу (40) и (42), имеем

$$\sum_{m=1}^{l} |\Delta_n(\varphi_k; J_m)| \leq C; \qquad k = 1, 2, .... \tag{43}$$

Пусть

$$E = E_0 \cap \left\{ \overline{x} \in J : \lim_{k\to\infty} \varphi_k(\overline{x}) = f(\overline{x}) \right\}.$$

Тогда $\lambda_n(J \setminus E) = 0$ и для каждой конечной системы попарно неперекрывающихся сегментов $J_1, ..., J_l$ с вершинами из $E$, предельным переходом при $k \to \infty$, из (43) получим

$$\sum_{m=1}^{l} |\Delta_n(f; J_m)| \leq C,$$

что и требовалось доказать.

**ABSTRACT.** The concept of essential variation in the sense of Vitali of functions of several variables is considered. We show that the essential variation of a summable function can be calculated by means of its integral averages. We also prove multidimensional analogues of two theorems on finiteness of essential variations.

## ЛИТЕРАТУРА

1. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, "Some properties of fractional integrals , I, Math. Zeitsch., vol. 27 (1128).
2. А. А. Талалян, Ф. А. Талалян, " О представлении абсолютно непрерывных функций многих переменных", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 24, №1, стр. 3– 21, 1989.
3. Ф. А. Талалян,"О существенно абсолютно непрерывных функциях многих переменных", Изв. АН Армении, Математика, т. 26, №2 стр. 138 – 150, 1991.
4. Ф. А. Талалян, " Монотонные функции многих переменных и многомерная вторая теорема о среднем", Изв. АН Армении, Математика, т. 27, №2, стр. 72 89, 1992.

21 Июля 1993

Институт прикладных проблем физики НАН Армении

Посвящается профессору
Мхитару М. Джрбашяну
в связи 75-летним юбилеем

*КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ*

# О ТЕОРЕМЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

**А. А. Вагаршакян**

**Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №4, 1993**

Обозначим через $h_1$ класс гармонических функций, определенных на единичном круге и удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|u(r\, e^{ix})\right| dx < \infty.$$

Согласно классической теореме Рисса-Герглотца $h_1$ совпадает с множеством функций, допускающих представление

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}\, d\mu(t),$$

где $d\mu$ – конечная мера. Из этого представления следует, что любую функцию $u(z) \in h_1$ можно записать в виде

$$u(z) = u_1(z) - u_2(z), \tag{1}$$

где $u_1(z)$ и $u_2(z)$ – неотрицательные гармонические функции

В работе рассматривается более широкий чем $h_1$ класс $h$ гармонических функций. Мы обсудим следующий вопрос : можно ли представить любую функцию $u(z) \in h$ в виде (1), каждая из функций $u_1$, $u_2$ допускает оценки значительно лучшие, чем это возможно для всех функций из $h$ ?

1°. Рассмотрим функции

$$A(z) = 1 + r\cos x + \sum_{n=2}^{\infty} r^n \cos(nx)\ln n, \quad z = re^{ix}$$

и

$$B(z) = 1 + r\cos x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^n}{\ln n}\cos(nx), \quad 0 < r < 1.$$

Гармоническая функция $u(z)$ принадлежит классу $h$, если

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{it}) B(re^{i(x-t)})\, dt \right| dx < \infty. \tag{2}$$

Заметим, что аналогичные классы гармонических функций были введены и исследованы в работе М. М. Джрбашяна [1]. Они обозначались через $U_\omega$, где $\omega(x)$ – неотрицательная интегрируемая функция, определенная на $[0,1]$. Вопрос существования и построения функции $\omega_0(t)$, для которой определены $U_{\omega_0} \equiv h$ нам представляется не простой задачей.

Теорема 1. *Класс $h$ совпадает с множеством гармонических функций, допускающих представление*

$$u(z) = \int_{-\pi}^{\pi} A(ze^{-it})\, d\mu(t), \tag{3}$$

*где $d\mu$ – конечная мера.*

Доказательство очевидно и непосредственно следует из теоремы Ф. Рисса и Г. Герглотца.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 2. *Любое $u(z) \in h$ можно записать в виде*

$$u(z) = u_1(z) - u_2(z),$$

*где $u_1(z)$ и $u_2(z)$ принадлежат классу $h$ и допускают оценку*

$$u_k(z) \le \frac{M}{(1-|z|)\log\frac{2}{1-|z|}}, \quad |z| < 1,\ k = 1, 2.$$

Доказательство. Из теории чисел хорошо известна функция $\Lambda(n)$, которая определена на натуральных числах следующим образом : если $n = p^m$, где $p$

- простое число, то $\Lambda(p^m) = \ln p$; для всех других $n$, $\Lambda(n) = 0$. Из определения $\Lambda(n)$ имеем

$$\ln n = \sum_{n/d} \Lambda(d),$$

где $n/d$ означает, что $d$ - делитель $n$.

Обозначим через $\xi_n = \exp\left(\frac{2\pi}{n} i\right), n = 1, 2, \dots$ . Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |z|^2}{|1 - z\xi_n^k|^2} - 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} r^{|j|} \xi_n^{jk} e^{ijx} \right) - 1 \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} r^j \left( \sum_{j/n} \Lambda(n) \right) \cos(jx) = \sum_{j=1}^{\infty} r^j \cos(jx) \ln j.$$

Легко видеть, что

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |z|^2}{|1 - z\xi_n^k|^2} = \frac{1 - |z|^{2n}}{|1 - z^n|^2}.$$

Следующее неравенство справедливо для любых $z$, $|z| < 1$

$$-|z|^{\frac{n}{2}} \leq \frac{1 - |z|^{2n}}{|1 - z^n|^2} - 1.$$

В самом деле, так как

$$|1 - z^n|^2 \leq (1 + |z|^n)^2 \leq \frac{\left(1 - |z|^{\frac{n}{2}}\right)\left(1 + |z|^{\frac{n}{2}}\right)(1 + |z|^n)}{1 - |z|^{\frac{n}{2}}} = \frac{1 - |z|^{2n}}{1 - |z|^{\frac{n}{2}}},$$

то требуемое неравенство верно.

Функция $A(z)$ допускает представление

$$-\sum_{p} \ln p \left( \sum_{m=1}^{\infty} |z|^{\frac{p^m}{2}} \right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) |z|^{\frac{n}{2}} \leq A(z),$$

где сумма берется по всем простым числам. Далее, имеем

$$-\int_2^{\infty} \frac{|z|^{\frac{x}{2}}}{\ln x} dx \leq -\int_2^{\infty} \frac{\pi(x)}{x} |z|^{\frac{x}{2}} dx \leq -\int_2^{\infty} \left( \int_t^{\infty} \frac{|z|^{\frac{y}{2}}}{y} dy \right) d\pi(t) =$$

$$= -\int_2^{\infty} \left( \int_1^{\infty} |z|^{\frac{tx}{2}} dx \right) \ln t \, d\pi(t) \leq A(z),$$

где $|z| < 1$ and $\pi(x)$ количество простых чисел, не превосходящих $x$. В последнем неравенстве мы использовали известную оценку $\pi(x) \leq \frac{x}{\ln x}$. Таким образом

$$-\frac{A}{(1 - |z|) \ln \frac{2}{1 - |z|}} \leq A(z), \quad |z| < 1. \tag{4}$$

Конечная мера $d\mu$ в (3) представляется в виде

$$d\mu = d\mu_1 - d\mu_2,$$

где $d\mu_1$ и $d\mu_2$ — неотрицательные меры. Положим

$$u_1(z) = \int_{-\pi}^{\pi} A(ze^{-it})\,d\mu_2(t), \qquad u_2(z) = \int_{-\pi}^{\pi} A(ze^{-it})\,d\mu_1(t).$$

Из (4) следует, что $u_1(z)$ и $u_2(z)$ допускают требуемую оценку.

2°. Теорему 2 нельзя улучшить. Действительно, любая функция из $h$ не может быть представлена в виде (1), где гармонические функции $u_1(z)$ и $u_2(z)$ допускают оценку

$$u_k(z) \le \frac{M}{(1-|z|)\ln^{1+\varepsilon}\frac{2}{1-|z|}}, \quad |z| < 1,\ k = 1, 2.$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – фиксированное число. В самом деле, в силу теоремы Никольского [2], если гармоническая функция удовлетворяет условию

$$u(z) \le \varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right), \quad |z| < 1,$$

где $\varphi(t) > 0$ и правильно растет, то при $t \to +\infty$ имеем

$$|u(z)| \le \frac{c}{1-|z|}\left(\int_0^{(1-|z|)^{-1}} \sqrt{\frac{\varphi(t)}{t^3}}\,dt\right)^2, \quad |z| < 1.$$

Используя эту теорему, получаем

$$-\frac{c}{1-|z|}\ln^{1-\varepsilon}\frac{2}{1-|z|} \le u_k(z).$$

Поэтому

$$|u(z)| \le |u_1(z)| + |u_2(z)| \le \frac{2c}{1-|z|}\ln^{1-\varepsilon}\frac{2}{1-|z|}, \quad |z| < 1. \tag{5}$$

Однако $A(z) \in h$ не удовлетворяет условию (5), так как

$$\frac{c}{1-r}\ln\frac{2}{1-r} \le 1 + r + \sum_{n=2}^{\infty} r^n \ln n = A(r), \quad 0 < r < 1$$

для некоторого $c > 0$.

Для функции из $h$ возможно привести другое интегральное представление, где ядро Пуассона сохраняется, однако вместо $d\mu$ стоит обобщенная функция. Именно этот путь обобщения формулы Рисса-Герглотца рассмотрен в работе [3]. Для класса $h$ можно привести аналогичное интегральное представление. Тогда Теорема 2 станет своеобразным обобщением для некоторого класса обобщенных функций теоремы Жордана о представлении конечной меры в виде разности двух неотрицательных мер.

## ЛИТЕРАТУРА


1. М. М. Джрбашян, "Обобщенный оператор Римана - Лиувилля и некоторые его применения", Изв. АН СССР, Математика, т. 32, стр. 1075 - 1111, 1968.
2. Н. К. Никольский, " Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального синтеза", Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 120, 1974.
3. W. Hayman and B. Korenblum, "An extension of the Riesz – Herglotz formula," Annals Acad. Sci. Fennice, series AI, Mathem., vol. 2, pp. 175 - 201, 1976


10 Августа 1993

Институт математики
НАН Армении

## СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 28 НОМЕР 4 1993

## ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

**серия Математика**

Страницы

Весовые интегральные представления аналитических и гладких функций в единичном круге
М. М. Джрбашян .......... 3

О теореме Сарасона
С. А. Григорян .......... 34

О субгармонических функциях, имеющих неотрицательные гармонические мажоранты в полуплоскости
А. М. Джрбашян .......... 42

О полноте многочленов в весовом пространстве целых функций
И. О. Хачатрян .......... 62

О существенной вариации в смысле Витали функций многих переменных
Ф. А. Талалян .......... 75

**Краткие сообщения**

О теореме представления гармонических функций
А. А. Вагаршакян .......... 87