ISSN 0002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

# ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

# ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

# ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

# МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Ն. Հ. ԱՐԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Գ. ՂԱԶԱՐԱՎԻՉԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ
Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԴԵԼՅԱՆ
Ա. Ռ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ի. Լ. ՇԱՀԲՈՒՂՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու քարտուղար Մ. Ա. Հովհաննիսյան

*«Մաթեմատիկա ամ-*

## Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

*Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» «Մաթեմատիկա ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝*

*1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։*

*Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։*

*2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։*

*Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։*

*3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։*

*Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով. ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։*

*4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։*

*5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։*

*Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։*

*6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (սրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։*

*7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։*

*8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չգրաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։*

*9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։*

*10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։*

*11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։*

*Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։*

# О СХОДИМОСТИ И ЯВЛЕНИИ ГИББСА КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИИ

О. Г. Саргсян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №3, 1993

В работе доказываются теоремы о сходимости кратных рядов Фурье непрерывных функций нескольких переменных ограниченной гармонической вариации. Рассматривается также явление Гиббса для кратных рядов Фурье.

## §0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $g(t)$ - $2\pi$-периодическая, интегрируемая на $[-\pi,\pi]$ функция и

$$a_0(g)+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(g)\cos nt + b_n(g)\sin nt \qquad (1)$$

- ряд Фурье функции $g(t)$. Хорошо известна следующая теорема (см. [1], стр. 121).

Теорема А. *Если $g(t)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-\pi,\pi]$, то*

*a) в каждой точке $t\in[-\pi,\pi]$ ряд (1) сходится к $\frac{1}{2}[g(t-0)+g(t+0)]$;*

*b) если, кроме того, $g(t)$ непрерывна в каждой точке отрезка $[a,b]\subset$ $\subset[-\pi,\pi]$, то ряд (1) сходится к $g(t)$ равномерно на $[a,b]$.*

Эта теорема обобщалась в различных направлениях (см. [2 – 7]).

Д. Ватерман (см. [8]) распространил этот результат на класс функций ограниченной гармонической вариации HBV :

$$\mathrm{HBV}\equiv\mathrm{HBV}([-\pi,\pi])=\{g(t): V_H(g)\equiv V_H(g,[-\pi,\pi])=\sup\sum_n\frac{|g(I_n)|}{n}<\infty\},$$

где $g(I)=g(b)-g(a)$, если $I=(a,b)$, а supremum берется по всем системам $\{I_n\}_{n=1}^{n_0}$ попарно непересекающихся интервалов из $[-\pi,\pi]$. В [8] Д. Ватерман доказал следующую теорему :

**Теорема B.** *Для произвольной функции $g \in HBV$ справедливы утверждения a) и b) Теоремы A .*

В [9] Г. Харди определил класс $H^2$ функций двух переменных ограниченной вариации. Им был доказан аналог Теоремы A для функций из этого класса.

Этот результат Г. Харди был обобщен Голубевым (см. [10]).

В [11] А. А. Саакян определил класс HBV функций двух переменных гармонической вариации и доказал аналог Теоремы B, обобщающий результат В. И. Голубова. Результаты Саакяна и настоящей работы будут сформулированы в следующем параграфе.

## §1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $N = (N_1, ..., N_n)$, где $N_k$, $k = \overline{1,n}$ - неотрицательные целые числа и пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_k = \pm 1$, $k = \overline{1,n}$. Скажем, что последовательность $N = (N_1, ..., N_n)$ стремится к $+\infty$, если каждое $N_k \to +\infty$, и скажем, что последовательность $\{S_N\}$ сходится к пределу $S$, если для любого $\eta > 0$ имеем $|S_N - S| < \eta$, при условии, что все $N_j$ достаточно велики. Пусть $\omega(x) = \max\{|x_i|, |x_i - x_j|,\ i, j = 1, 2, ..., n\}$ и $\|A\|_\omega = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\omega(Ax)}{\omega(x)}$ обозначают нормы вектора $x$ и матрицы $A$.

Положим

$$\Delta_{\varepsilon_i}(x_i; h) = \left[x_i + \frac{\varepsilon_i h - |\varepsilon_i| h}{2};\ x_i + \frac{\varepsilon_i h + |\varepsilon_i| h}{2}\right], \quad \varepsilon_i = \pm 1,$$

$$\Pi_\varepsilon(x; h) = \Delta_{\varepsilon_1}(x_1, h) \times \Delta_{\varepsilon_2}(x_2, h) \times ... \times \Delta_{\varepsilon_n}(x_n, h),$$

$$\Pi(x; h) = \bigcup_\varepsilon \Pi_\varepsilon(x; h).$$

Пусть $E^0$ - внутренность множества $E$, а $\partial I = \{a\} \cup \{b\}$, где $I$ - либо $(a, b)$, либо $[a, b]$.

Ниже всюду функцию $f(x)$ будем считать измеримой и $2\pi$-периодической по каждой переменной $x_i$, $i = \overline{1,n}$.

Обозначим через $S_N(f, x)$ прямоугольную частичную сумму ряда Фурье функции $f(x) \in L^1([-\pi, \pi]^n)$ :

$$S_N(f, x) = \sum_{m_1=-N_1}^{N_1} ... \sum_{m_n=-N_n}^{N_n} c_{m_1, m_2, ..., m_n} \exp\left(i(m_1 x_1 + ... + m_n x_n)\right),$$

где

$$c_{m_1,\dots,m_n} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\exp\left(-i(m_1x_1+\dots+m_nx_n)\right)dx_1\dots dx_n$$

- коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Точка $x^0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$ называется точкой разрыва первого рода для функции $f(x)$, если существуют пределы

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in\Pi_\varepsilon^0(x^0,h)}} f(x)=d_\varepsilon(x^0).$$

Положим

$$d(x^0)=\frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon} d_\varepsilon(x^0).$$

Точка $x^0$ называется точкой устранимого разрыва, если $d_\varepsilon(x^0)=d(x^0)$ для всех $\varepsilon$.

Скажем, что последовательность функций $\{f_N(x)\}$, определенных в окрестности точки $x^0$, равномерно сходится к пределу $s$ в точке $x^0$, если для каждого $\eta>0$ существуют $\delta=\delta(\eta)$ и $p=p(\eta)$ такие, что $|f_N(x)-s|<\eta$ при $\max\limits_{i=1,2,\dots,n}|x_i^0-x_i|<\delta$ и $N_i>p$, $i=1,2,\dots,n$.

Пусть $I^1\subset(-\infty,+\infty)$ - интервал или отрезок с концами $a^1$ и $b^1$. Через $\Omega(I^1)$ обозначим множество всех конечных систем попарно непересекающихся интервалов $I_m^1=(a_m^1,b_m^1)$, удовлетворяющих условию $[a_m^1,b_m^1]\subset I^1$.

Определим гармоническую вариацию для функции двух переменных $f(x_1,x_2)$.

При фиксированном $x_2^0$ положим

$$f(I^1,x_2^0)=f(b^1,x_2^0)-f(a^1,x_2^0).$$

Обозначим

$$V_{x_1}(f(x_1,x_2^0),I^1)=\sup\sum_m\frac{|f(I_m^1,x_2^0)|}{m}.$$

Аналогично, при фиксированном $x_1^0$ определяются $f(x_1^0,I^1)$ и $V_{x_2}(f(x_1^0,x_2),I^1)$.

Положим также ($I^2$ - интервал или отрезок с концами $a^2$ и $b^2$)

$$f(I^1,I^2)=f(a^1,a^2)-f(a^1,b^2)-f(b^1,a^2)+f(b^1,b^2),$$

$$V_{x_1,x_2}(f, I^1 \times I^2) = \sup \sum_{\substack{m,k \\ I_m^1 \in \Omega(I^1) \\ I_k^2 \in \Omega(I^2)}} \frac{|f(I_m^1, I_k^2)|}{mk},$$

$$V_H(f, D_2) = V_{x_1,x_2}(f, I^1 \times I^2) + V_{x_1}(f(x_1, a^2), I^1) + V_{x_2}(f(a^1, x_2), I^2).$$

Скажем, что фунцкия $f(x_1, x_2)$ имеет ограниченную гармоническую вариацию на прямоугольнике $D_2 = I^1 \times I^2 (f \in \mathrm{HBV}(D_2))$, если $V_H(f, D_2) < +\infty$.

Нам понадобятся следующие обозначения :

$$\hat{x}_n^0 = x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \hat{x}_n^i = x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n;$$

$$\hat{x}_n^i(a) = x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n;$$

$$D_n = I^1 \times I^2 \times \ldots \times I^n;\ D_n^i = I^1 \times \ldots \times I^{i-1} \times I^{i+1} \times \ldots \times I^n,$$

где $I^j$ - интервал или отрезок в $(-\infty, +\infty)$ с концами $a^j$ и $b^j$.

По индукции определим гармоническую вариацию и класс $\mathrm{HBV}(D_n)$ для функций $n$ $(n \geq 3)$ переменных. Предположим, что для $k = n-1$ определены гармоническая вариация и класс $\mathrm{HBV}(D_{n-1})$. Определим для $k = n$

$$V_{\hat{x}_n^n}(f(x), D_n) = \sup_{\substack{I_{k_i}^i \in \Omega(I^i) \\ i=1,2,\ldots,n}} \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \frac{|f(I_{k_1}^1, \ldots, I_{k_n}^n)|}{k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n},$$

$$f(I_{k_1}^1, \ldots, I_{k_n}^n) = f(a_{k_1}^1, I_{k_2}^2, \ldots, I_{k_n}^n) - f(b_{k_1}^1, I_{k_2}^2, \ldots, I_{k_n}^n),$$

$$I_{k_i}^i = (a_{k_i}^i, b_{k_i}^i), [a_{k_i}^i, b_{k_i}^i] \subset I^i,$$

$$V_H(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} V_{\hat{x}_n^i}(f(\hat{x}_n^i(a^i)), D_n^i) + V_{\hat{x}_n^0}(f(x), D_n).$$

Скажем, что $f \in \mathrm{HBV}(D_n)$, если $V_H(f(x), D_n) < +\infty$.

Через HBV и $V_H(f)$ обозначим $\mathrm{HBV}([-\pi, \pi]^n)$ и $V_H(f; [-\pi, \pi]^n)$, соответственно.

**Теорема С.** *Если $f \in HBV$, то*

*a) в каждой точке разрыва первого рода*

$$\lim_{N \to \infty} S_N(f, x) = d(x), \tag{2}$$

*b) если, кроме того, $f(x)$ непрерывна на некотором открытом множестве $E$, то имеет место равенство (2) равномерно на каждом компакте $K \subset E$.*

При $n = 2$ эта теорема доказана А. А. Саакяном [11], при $n \geq 3$ доказательство можно провести аналогично.

В настоящей работе будет усилена Теорема С и будут доказаны следующие теоремы :

Теорема 1. *Если $f \in HBV$ имеет устранимый разрыв в точке $x^0$, то последовательность прямоугольных частных сумм $S_N(f, x)$ равномерно сходится к $d(x^0)$ в точке $x^0$.*

Теорема 2. *Если $f \in HBV$, то*

*a) в каждой точке разрыва первого рода имеет место равенство (2);*

*b) если, кроме того, $f(x)$ непрерывна в точках компакта $K$, то равенство (2) имеет место равномерно на $K$.*

Опишем явление Гиббса. Сначала рассмотрим поведение частичных сумм $S_n(t)$ рядов ( см. [12], стр. 105)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu i}{\nu} = \frac{1}{2}(\pi - i) = \varphi(t), \quad t \in (0, 2\pi)$$

в окрестности точки $t = 0$. Пусть $G(t) = \int_0^t \frac{\sin s}{s}\, ds$, $t > 0$, $G(0) = 0$.

Напомним, что $G(t)$ непрерывна, $l = G(\pi) \geq G(t) > 0$ при $t > 0$, а $\frac{\pi}{2} = G(+\infty) = \lim_{t \to \infty} G(t) < G(\pi) < \pi$.

Хотя $S_n(t)$ стремится к $\varphi(t)$ в каждой фиксированной точке $t \in (0, 2\pi)$, но кривые $y = S_n(t)$, проходящие через начало координат накапливаются к интервалу $0 \leq y \leq l$ и

$$\frac{l}{\varphi(+0)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt = 1.179....$$

Так как $S_n(t)$ - нечетные функции от $t$, аналогичная ситуация имеет место в левой части окрестности точки $t = 0$, где кривые $y = S_n(t)$ накапливаются к интервалу $-l \leq y \leq 0$. Такое поведение частичных сумм называется явлением Гиббса. Его общая форма может быть описана следующим образом.

Пусть последовательность $\{f_N(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ при $x \in \Pi_\varepsilon(x^0, h)$ и существует $d_\varepsilon(x^0)$. (Скажем, что для $\{f_N(x)\}$ имеет место явление Гиббса в

$\Pi_\varepsilon(x^0, h)$, если

$$\limsup_{\substack{N\to\infty \\ x\to x^0 \\ x\in\Pi_\varepsilon(x^0,h)}} f_N(x) > d_\varepsilon(x^0) \quad \text{или} \quad \liminf_{\substack{N\to\infty \\ x\to x^0 \\ x\in\Pi_\varepsilon(x^0,h)}} f_N(x) < d_\varepsilon(x^0).$$

Положим

$$\overline{P}_\varepsilon(x^0) = \limsup_{\substack{N\to\infty \\ x\to x^0 \\ x\in\Pi_\varepsilon(x^0,h)}} S_N(f,x); \quad \underline{P}_\varepsilon(x^0) = \liminf_{\substack{N\to\infty \\ x\to x^0 \\ x\in\Pi_\varepsilon(x^0,h)}} S_N(f,x),$$

$$\overline{P}(x^0) = \max_\varepsilon \overline{P}_\varepsilon(x^0); \ \underline{P}(x^0) = \min_\varepsilon \underline{P}_\varepsilon(x^0),$$

$$\overline{d}(x^0) = \max_\varepsilon d_\varepsilon(x^0); \ \underline{d}(x^0) = \min_\varepsilon d_\varepsilon(x^0).$$

**Теорема 3.** *Если $f \in HBV$ и в точке $x^0$ функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода, то*

*a)* $\underline{P}_\varepsilon(x^0) \le d(x^0) \le \overline{P}_\varepsilon(x^0)$;

*b) если $x^0$ - точка неустранимого разрыва, то*

$$\underline{P}_\varepsilon(x^0) < d_\varepsilon(x^0) < \overline{P}_\varepsilon(x^0);$$

*в противном случае* $\overline{P}_\varepsilon(x^0) = \underline{P}_\varepsilon(x^0) = d_\varepsilon(x^0) = d(x^0)$ *для всех* $\varepsilon$;

*c)* $|d(x^0) - d_\varepsilon(x^0)| \le Q_n \left(\overline{P}_\varepsilon(x^0) - \underline{P}_\varepsilon(x^0)\right)$;

*d)* $\underline{Q}_n \cdot \left(\overline{P}(x^0) - \underline{P}(x^0)\right) \le \overline{d}(x^0) - \underline{d}(x^0) \le \overline{Q}_n \left(\overline{P}(x^0) - \underline{P}(x^0)\right)$,

*где* $Q_n, \underline{Q}_n, \overline{Q}_n \in (0,1)$ - *константы, зависящие только от* $n$.

## §2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Построим вспомогательные функции, используемые в доказательстве Теорем 2 и 3.

Через $i(k), 1 \le k \le n$, обозначим множество $k$ мерных векторов с монотонно растущими натуральными координатами, не превосходящими $n$, т.е. если $(i_1, \dots, i_k) \in i(k)$, то $1 \le i_1 < i_2 < \dots \le n$. Положим $i(0) = \{(0)\}$.

Скажем, что $(i_1, \dots, i_k) < (j_1, \dots, j_m)$, если либо $k < m$, либо $k = m$ и существует $s_0 \ge 1$ такое, что $i_s = j_s$, при $s = 1, \dots, s_0 - 1$ и $i_{s_0} < j_{s_0}$. Для $(i_1, \dots, i_k) \in i(k)$ положим $(0) < (i_1, \dots, i_k)$.

Через $\sigma$ обозначим биективное отображение $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ на $\bigcup_{k=0}^{n} i(k)$, удовлетворяющее условию $\sigma(i) < \sigma(j)$ при $i < j$. Для $\sigma(i) = (i_1, \dots, i_k)$ положим $|\sigma(i)| = k$

Пусть $\varepsilon(i_1, \ldots, i_k) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_m = 1$, если $m \neq i_j$, при всех $j = 1, \ldots, k$, а для остальных $m$ возьмем $\varepsilon_m = -1$. Положим

$$\varepsilon(0) = (1, 1, \ldots, 1) = \varepsilon_0; \quad (i_1, \ldots, i_k)(x) = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}; \quad (0)(x) = 1.$$

Построим функцию $\Psi(x)$ на $[0, 2\pi]^n$ следующим образом :

$$\Psi(x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \lambda_{\sigma(i)}\, \sigma(i)(x), \quad \text{если} \quad x \in [0, 2\pi]^n,$$

где $\lambda_{\sigma(i)}$, $i = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$, определяются из системы

$$\left\{ d_\varepsilon(0) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \lambda_{\sigma(j)}\, \sigma(j)(\pi(\varepsilon_0 - \varepsilon)) \right\}. \tag{3}$$

Положим

$$\Delta_{ij} = \sigma(j)(\pi(\varepsilon_0 - \varepsilon(\sigma(i)))), \quad \Delta = \{\Delta_{ij}\}_{i,j=0}^{2^n-1}, \quad \lambda = \{\lambda_{\sigma(j)}\}_{j=0}^{2^n-1}.$$

Так как $\Delta_{ij} = 0$, если $i < j$ и $\Delta_{ii} = (2\pi)^{|\sigma(i)|}$ , то $\operatorname{rang}\Delta = 2^n$. Следовательно, система (3) имеет единственное решение.

Построим теперь $2\pi$ -периодическую функцию $\Psi_1(x)$ следующим образом :

$$\Psi_1(x) = \begin{cases} \Psi(x), & \text{если} \quad x \in (0, 2\pi)^n \\ 0, & \text{на границе} \ [0, 2\pi]^n. \end{cases}$$

Лемма 1. *Если $g(t) \in HBV([a, b])$, то*

*a) $g(t)$ имеет только разрывы первого рода ;*

*b) $\lim\limits_{h \to 0} V_H(g, [t_0, t_o + h]) = 0$ тогда и только тогда, когда $g(t)$ непрерывна в точке $t_0$.*

Лемма 2. *Если $f \in HBV(D_2)$, то для произвольных $x, x^1 \in D_2$*

*a) $V_{x_i}(f(x), I^i) \leq V_H(f, D_2)$, $i = 1, 2$ ;*

*b) $|f(x) - f(x^1)| \leq 2V_H(f, D_2)$.*

Лемма 3. *Пусть $f \in HBV(D_2)$ и в точке $x \in D_2$ существует предел $d_\varepsilon(x)$.*

*Тогда*

$$\lim_{h \to 0} V_H(f; \Pi_\varepsilon^0(x, h)) = 0.$$

Доказательства этих Лемм можно найти в работах [8] и [11].

Повторяя рассуждения и выкладки работы [11, стр. 526 – 528], получим следующим результат :

**Лемма 4.** *Если* $f \in HBV$, *то*

$$|f(x) - S_N(f,x)| \le C \sum_{\epsilon} V_H(f, \Pi_\epsilon(x,h)) + o(1),$$

*где при фиксированном* $h$ $o(1)$ *стремится к нулю при* $N \to \infty$, *равномерно по* $x$, *а* $C$ - *абсолютная постоянная.*

**Лемма 5.** *Для любых* $f_1(x), f_2(x) \in HBV(D_2)$

$$V_H(f_1 + f_2, D_2) \le V_H(f_1, D_2) + V_H(f_2, D_2).$$

Доказательство очевидно.

Лемма 6. *Пусть* $f \in HBV(\Pi_\epsilon(x^0,h))$ *и в точке* $x^0$ *существует предел* :

$\lim\limits_{\substack{x \to x^0 \\ x \in \Pi_\epsilon(x^0,h)}} f(x) = f(x^0)$. *Тогда*

$$\lim_{h \to 0} V_H(f; \Pi_\epsilon(x^0,h)) = 0.$$

**Доказательство.** Для простоты докажем ее в случае $n = 2$. В общем случае $n \ge 3$ можно поступить аналогично. Определим функцию $f^*(x_1,x_2)$ на $\Pi_\epsilon(x^0,h)$. Сначала на множестве

$$\Pi_\epsilon(x^0,h) \setminus ((\Delta_{\epsilon_1}(x_1^0,h) \times \{x_2^0\}) \cup (\{x_1^0\} \times \Delta_{\epsilon_2}(x_2^0,h))$$

положим $f^* = f$. $\Lambda$ на множестве

$$\{x_1^0\} \times (\Delta_{\epsilon_2}(x_2^0,h) \setminus \{x_2^0\})$$

положим

$$f^*(x_1^0,x_2) = \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_1 \in \Delta^0_{\epsilon_1}(x_1^0,h)}} f^*(x_1,x_2). \tag{4}$$

На множестве $\Delta_{\epsilon_1}(x_1^0,h) \times \{x_2^0\}$ определим $f^*(x_1,x_2)$ следующим образом :

$$f^*(x_1,x_2^0) = \lim_{\substack{x_2 \to x_2^0 \\ x_2 \in \Delta^0_{\epsilon_2}(x_2^0,h)}} f^*(x_1,x_2). \tag{5}$$

Из Леммы 2 следует, что $f(x_1, x_2) \in \mathrm{HBV}(\Delta_{\epsilon_i}(x_i, h)), i = 1, 2$, а из Леммы 1 вытекает, что существуют пределы (4) и (5). Следовательно функция $f^*(x_1, x_2)$ определена корректно.

Из определения функции $f^*(x_1, x_2)$ и Леммы 2, часть а) следует, что

$$\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in \Pi_\epsilon(x^0, h)}} f^*(x) = f^*(x^0) = f(x^0) \tag{6}$$

и

$$V_{x_1}(f^*(x_1, x_2^0); \Delta_{\epsilon_1}(x_1^0, h)) \le V_H(f; \Pi_\epsilon(x^0, h)), \tag{7}$$

$$V_{x_2}(f^*(x_1^0, x_2); \Delta_{\epsilon_2}(x_2^0, h)) \le V_H(f; \Pi_\epsilon(x^0, h)). \tag{8}$$

Учитывая Лемму 5, неравенства (7) и (8), получаем

$$V_H(f^*; \Pi_\epsilon(x^0, h)) \le V_H(f^* - f; \Pi_\epsilon(x^0, h)) + V_H(f; \Pi_\epsilon(x^0, h)) \le$$

$$\le 5V_H(f; \Pi_\epsilon(x^0, h)) < \infty.$$

Следовательно

$$f^* \in \mathrm{HBV}(\Pi_\epsilon(x^0, h)). \tag{9}$$

Согласно (6) и (9) функция $f^*(x)$, удовлетворяет условиям Леммы 6.

Теперь проверим, что утверждение Леммы 6 справедливо для функции $f^*(x)$.

Так как функции $f^*(x_1, x_2^0)$ и $f^*(x_1^0, x_2)$ непрерывны в точках $x_1^0$ и $x_2^0$, соответственно, из Леммы 1 имеем

$$\lim_{h \to 0} V_{x_1}(f^*(x_1, x_2^0); \Delta_{\epsilon_1}(x_1^0, \frac{h}{2})) = 0 \tag{10}$$

и

$$\lim_{h \to 0} V_{x_2}(f^*(x_1^0, x_2); \Delta_{\epsilon_2}(x_2^0, \frac{h}{2})) = 0. \tag{11}$$

Убедимся, что имеет место неравенство

$$V_{x_1, x_2}(f^*(x_1, x_2); \Pi_\epsilon(x^0, \frac{h}{2})) \le V_{x_1, x_2}(f^*(x_1, x_2); \Pi_\epsilon^0(x^0, h)). \tag{12}$$

Принимая во внимание определение $V_{x_1, x_2}(f^*(x_1, x_2); \Pi_\epsilon(x^0, \frac{h}{2}))$, достаточно рассмотреть те системы интервалов $\{I_m^1\}_{m=1}^{m_0}$ и $\{I_k^2\}_{k=1}^{k_0}$, для которых точки $x_1^0$ и

$x_2^0$ являются вершинами интервалов $I_{m_1}^1 = (a_{m_1}^1, b_{m_1}^1)$ и $I_{k_1}^2 = (a_{k_1}^2, b_{k_1}^2)$, соответственно. Пусть $x_1^0 = a_{m_1}^1$, $x_2^0 = a_{k_1}^2$.

Из определения функции $f^*(x)$ имеем

$$|f^*(I_m^1, I_{k_1}^2)| = \lim_{\substack{x_2 \to x_2^0 \\ x_2 \in I_{k_1}^2}} |f^*(I_m^1, (x_2, b_{k_1}^2))|, \quad m = 1, \ldots, m_0,$$

$$|f^*(I_{m_1}^1, I_k^2)| = \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_1 \in I_{m_1}^1}} |f^*((x_1, b_{m_1}^1), I_k^2)|, \quad k \neq k_1, \ k = 1, \ldots, k_0,$$

$$|f^*(I_{m_1}^1, (x_2, b_{k_1}^2))| = \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_1 \in I_{m_1}^1}} |f^*((x_1, b_{m_1}^1), (x_2, b_{k_1}^2))|.$$

Положим

$$\widetilde{I}_{m_1}^1 = (x_1, b_{m_1}^1), \ \widetilde{I}_m^1 = I_m^1, \ m \neq m_1, \ m = 1, \ldots, m_0,$$

$$\widetilde{I}_{k_1}^2 = (x_2, b_{k_1}^2), \ \widetilde{I}_k^2 = I_k^2, \ k \neq k_1, \ k = 1, \ldots, k_0.$$

Из определения гармонической вариации функции $f^*(x)$ на $\Pi_\varepsilon^0(x^0, h)$ имеем

$$\sum_{m=1}^{m_0} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{|f^*(\widetilde{I}_m^1, \widetilde{I}_k^2)|}{mk} \leq V_{x_1, x_2}(f^*; \Pi_\varepsilon^0(x^0, h)).$$

Следовательно

$$V_{x_1, x_2}(f^*; \Pi_\varepsilon^0(x^0, h)) \geq \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_1 \in I_{m_1}^1}} \lim_{\substack{x_2 \to x_2^0 \\ x_2 \in I_{k_1}^2}} \left( \sum_{m=1}^{m_0} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{|f^*(\widetilde{I}_m^1, \widetilde{I}_k^2)|}{mk} \right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{m_0} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{|f^*(I_m^1, I_k^2)|}{mk}.$$

Неравенство (12) доказано.

Согласно неравенствам (10) - (12), из Леммы 3 следует, что

$$\lim_{h \to 0} V_H(f^*, \Pi_\varepsilon(x^0, \frac{h}{2})) = 0. \tag{13}$$

Докажем Лемму 6 для функции $f(x)$. Из непрерывности функций $f(x_1^0, x_2)$ и $f(x_1, x_2^0)$ в точках $x_2^0$ и $x_1^0$, соответственно, имеем

$$\lim_{h \to 0} V_{x_1}(f(x_1, x_2^0); \Delta_{\varepsilon_1}(x_1^0, \frac{h}{2})) = 0, \tag{14}$$

и

$$\lim_{h \to 0} V_{x_2}(f(x_1^0, x_2); \Delta_{\varepsilon_2}(x_2^0, \frac{h}{2})) = 0. \tag{15}$$

Легко видеть, что

$$V_{x_1,x_2}(f;\Pi_\varepsilon(x^0,\frac{h}{2})) \le V_{x_1,x_2}(f^*-f;\Pi_\varepsilon(x^0,\frac{h}{2})) + V_{x_1,x_2}(f^*;\Pi_\varepsilon(x^0,\frac{h}{2})) \le$$

$$\le V_H(f^*;\Pi_\varepsilon(x^0,\frac{h}{2})) + V_{x_1}(f(x_1,x_2^0);\Delta_{\varepsilon_1}(x_1^0,\frac{h}{2})) + V_{x_2}(f(x_1^0,x_2);\Delta_{\varepsilon_2}(x_2^0,\frac{h}{2})). \tag{16}$$

Согласно (13) – (16), получаем

$$\lim_{h\to 0} V_H(f,\Pi_\varepsilon(x^0,\frac{h}{2})) = 0.$$

**Следствие.** Пусть $f \in \mathrm{HBV}(\Pi(x^0,h))$ и $f(x)$ непрерывна в точке $x^0$. Тогда

$$\lim_{h\to 0} V_H(f;\Pi(x^0,h)) = 0.$$

**Доказательство** следует из неравенства

$$V_H(f;\Pi(x^0,h)) \le C\sum_\varepsilon V_H(f;\Pi_\varepsilon(x^0,h)),$$

где $C$ - абсолютная постоянная.

## §3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

**Доказательство Теоремы 1.** Для простоты проведем доказательство для $n=2$. В общем случае теорема доказывается аналогично. Пусть $\tilde f(x_1,x_2)$ - $2\pi$-периодическая функция по каждой переменной, удовлетворяющая условиям

$$\tilde f(x_1,x_2^0) = d(x^0);\quad \tilde f(x_1^0,x_2) = d(x^0);\quad \tilde f(x) = f(x)$$

$$\text{при}\quad x\in(x_1^0;x_1^0+2\pi)\times(x_2^0,x_2^0+2\pi).$$

Легко видеть, что при $x\in\Pi(x^0,\frac{h}{2})$ имеем

$$V_H(\tilde f;\Pi_\varepsilon(x,\frac{h}{2})) \le C\,V_H(\tilde f;\Pi(x^0,h)).$$

Из Леммы 4 следует, что

$$|\tilde f(x) - S_N(\tilde f,x)| \le C\sum_\varepsilon V_H(\tilde f;\Pi(x,\frac{h}{2})) + o(1) \le C\,V_H(\tilde f;\Pi(x^0,h)) + o(1).$$

Следовательно

$$|d(x^0) - S_N(f,x)| \le C\,V_H(\tilde f;\Pi(x^0,h)) + o(1) + |\tilde f(x) - \tilde f(x^0)|.$$

Из непрерывности $\widetilde{f}(x)$ в точке $x^0$ и из следствия получаем, что для любого $\delta > 0$ существует $h_0 = h(\delta) > 0$ такое, что при $x \in \Pi(x^0, h_0)$

$$C\ V_H(\widetilde{f}; \Pi(x^0, 2h_0)) + |\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(x^0)| < \frac{\delta}{2}.$$

Следовательно, для достаточно больших $N_1, N_2$ и при фиксированном $h_0$ имеем

$$|d(x^0) - S_N(f, x)| < \delta \quad \text{при} \quad N_1 > N_1^0,\ N_2 > N_2^0,\ x \in \Pi(x^0, h).$$

Теорема доказана.

**Доказательство Теоремы 2** a) Без ограничения общности можем считать, что $x = 0$. Так как в точке $x = 0$ функция $f(x) - \Psi_1(x)$ имеет устранимый разрыв, то из Теоремы 1 следует, что $S_N(f - \Psi_1, 0)$ сходится к 0.

Легко видеть, что

$$\lim_{N\to\infty} S_N(\Psi_1, 0) = d(0). \tag{17}$$

Следовательно, учитывая, что

$$\lim_{N\to\infty} (S_N(f, 0) - S_N(\Psi_1, 0)) = 0,$$

получаем

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f, 0) = d(0).$$

b) Поскольку по предположению функция $f(x)$ непрерывна в точках компакта $K$, в силу Теоремы 1 для любого $\delta > 0$ и каждой точки $x \in K$ существуют окрестность $U_x$ точки $x$ и число $N_x = N(\delta, x)$ такие, что

$$|f(z) - S_N(f, z)| < \delta \quad \text{при} \quad z \in U_x \quad \text{и} \quad N > N_x.$$

Так как множество $\bigcup_{x\in K} U_x$ является открытым покрытием компакта $K$, то существуют $U_{\widetilde{x}_1}, \ldots, U_{\widetilde{x}_n}$ такие, что $\bigcup_{i=1}^{n} U_{\widetilde{x}_i} \supset K$ и $|f(x) - S_N(f, x)| < \delta$ при $x \in K$, $N > \max_{i=1,\ldots,m} N_{\widetilde{x}_i}$. Теорема 2 доказана.

**Доказательство Теоремы 3.** Без ограничения общности можем предположить, что $x^0 = 0$. Так как функция $f - \Psi_1$ имеет устранимый разрыв, то из Теоремы 1 следует, что в точке 0 функция $S_N(f - \Psi_1, x)$ равномерно сходится к

0. Таким образом, поведение $S_N(f,x)$ в окрестности точки 0 полностью определяется поведением $S_N(\Psi_1,x)$, т.е.

$$\underline{P}_\varepsilon(f,0)=\underline{P}_\varepsilon(\Psi_1,0),\quad \overline{P}_\varepsilon(f,0)=\overline{P}_\varepsilon(\Psi_1,0)\quad \text{для всех}\quad \varepsilon.$$

Из определения $\Psi_1$ имеем

$$d_\varepsilon(f,0)=d_\varepsilon(\Psi_1,0)\quad \text{для всех}\quad \varepsilon$$

и

$$S_N(\Psi_1,x)=\sum_{i=0}^{2^n-1}\lambda_{\sigma(i)}S_N(\sigma(i)(\cdot),x),$$

$$S_N(\Psi,x)=\sum_{i=0}^{2^n-1}\lambda_{\sigma(i)}\prod_{j=1}^{|\sigma(i)|}\left(\pi-2\sum_{m=1}^{N_{i_j}}\frac{\sin mx_{i_j}}{m}\right),$$

$$|\sigma(i)|=k,\ \ \sigma(i)=(i_1,i_2,\ldots,i_j,\ldots,i_k).$$

Определим функцию $\Psi^*(x)$ на $[-l,l]^n$ следующим образом :

$$\Psi^*(x)=\sum_{i=0}^{2^n-1}\lambda_{\sigma(i)}\prod_{j=1}^{|\sigma(i)|}(\pi-2x_{i_j}),\tag{18}$$

где $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in[-l,l]^n$, $\sigma(i)=(i_1,\ldots,i_k)$. Представим функцию $\Psi^*(x)$ в виде

$$\Psi^*(x)=\sum_{i=0}^{2^n-1}\lambda^*_{\sigma(i)}\sigma(i)(x).\tag{19}$$

Из (18) и (19) получим систему уравнений

$$\lambda^*_{\sigma(i)}=(-2)^{|\sigma(i)|}\lambda_{\sigma(i)}+\ldots,\ \ i=0,1,\ldots,2^n-1$$

или эквивалентное уравнение $\lambda^*=\Delta^*\lambda$, где $\lambda^*=\{\lambda^*_{\sigma(i)}\}_{i=0}^{2^n-1}$, а $\Delta^*=\{\Delta^*_{ij}\}_{i,j=0}^{2^n-1}$.

Имеем $\Delta^*_{ij}=0$, если $i>j$ и $\Delta^*_{ii}=(-2)^{|\sigma(i)|}$. Следовательно, $\det\Delta^*=2^n$.

Известно (см. [12], стр. 105), что

$$S_m(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin kt}{k}=\int_0^{mt}\frac{\sin s}{s}\,ds+R_m(t),\quad t\in[0,\pi],\tag{20}$$

где $|R_m(t)|<\delta$, если $t<\delta$ и $m>m_0(\delta)$. Из (20) получим

$$\limsup_{\substack{t\to0+\\ m\to+\infty}}S_m(t)=l,\qquad \liminf_{\substack{t\to0+\\ m\to+\infty}}S_m(t)=0,$$

а также, что для любого $t_0 \in [0,l]$ существуют последовательности $\{t_k\}$ и $\{m_k\}$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty} S_{m_k}(t_k) = t_0.$$

Следовательно

$$\overline{P}_\varepsilon(0) = \max_{x\in\Pi_\varepsilon(0,l)} \Psi^*(x); \qquad \underline{P}_\varepsilon(0) = \min_{x\in\Pi_\varepsilon(0,l)} \Psi^*(x).$$

Имеем

$$\Psi^*(0) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \lambda_{\sigma(i)}\, \pi^{|\sigma(i)|};$$

$$d(0) = \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon} d_\varepsilon(0) = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{2^n-1} \lambda_{\sigma(i)} \left(\sum_{\varepsilon} \sigma(i)(\pi(\varepsilon_0-\varepsilon))\right);$$

$$\sum_{\varepsilon} \sigma(i)(\pi(\varepsilon_0+\varepsilon)) = 2^n \pi^{|\sigma(i)|}.$$

Следовательно, получаем $\Psi^*(0) = d(0)$.

Очевидно, что

$$\underline{P}_\varepsilon(0) = \min_{x\in\Pi_\varepsilon(0,l)} \Psi^*(x) \le \Psi^*(0) \le \max_{x\in\Pi_\varepsilon(0,l)} \Psi^*(x) = \overline{P}_\varepsilon(0),$$

тем самым утверждение a) доказано.

Для доказательства утверждения b) заметим, что

$$\Psi^*\left(\frac{\pi}{2}\varepsilon\right) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \lambda_{\sigma(i)} \prod_{j=1}^{|\sigma(i)|} (\pi - \pi\varepsilon_{i_j}) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \lambda_{\sigma(i)} (\sigma(i)(\pi(\varepsilon_0-\varepsilon))) = d_\varepsilon(0).$$

Поскольку $\operatorname{rang}\Delta = \operatorname{rang}\Delta^* = 2^n$, то 0 является точкой устранимого разрыва функций $f(x)$ и $\Psi_1(x)$ тогда и только тогда, когда $\Psi^*(x) \equiv \text{const}$. В этом случае имеем

$$\overline{P}_\varepsilon(0) = \underline{P}_\varepsilon(0) = d_\varepsilon(0) = d(0) \quad \text{для всех} \quad \varepsilon.$$

В случае, когда 0 является точкой неустранимого разрыва, имеем $\Psi^*(x) \not\equiv \text{const}$. Следовательно, $\Psi^*(x)$ не может принять максимальное или минимальное значение внутри $\Pi_\varepsilon(0,l)$, так как при фиксировании $n-1$ переменных $\Psi^*(x)$ становится линейной функцией. Следовательно

$$\underline{P}_\varepsilon(0) = \min_{x\in\Pi_\varepsilon(0,l)} \Psi^*(x) < \Psi^*\left(\frac{\pi}{2}\varepsilon\right) < \max_{x\in\Pi_\varepsilon(0,l)} \Psi^*(x) = \overline{P}_\varepsilon(0).$$

Утверждение b) доказано.

Для доказательства утверждения c) предположим, без ограничения общности, что $\varepsilon = \varepsilon_0$. Так как фиксация $n-1$ переменных превращает $\Psi^*(x)$ в линейную функцию, то

$$\underline{P}_{\varepsilon_0}(0) = \min_{x \in \Pi_{\varepsilon_0}(0,l)} \Psi^*(x) = \min_{x \in \partial\Delta_{\varepsilon_1}(0,l) \times \ldots \times \partial\Delta_{\varepsilon_n}(0,l)} \Psi^*(x) = \min_{\varepsilon} \Psi^*\left(\frac{l}{2}(\varepsilon_0 - \varepsilon)\right),$$

$$\overline{P}_{\varepsilon_0}(0) = \max_{x \in \Pi_{\varepsilon_0}(0,l)} \Psi^*(x) = \max_{x \in \partial\Delta_{\varepsilon_1}(0,l) \times \ldots \times \partial\Delta_{\varepsilon_n}(0,l)} \Psi^*(x) = \max_{\varepsilon} \Psi^*\left(\frac{l}{2}(\varepsilon_0 - \varepsilon)\right).$$

Следовательно, получаем систему уравнений

$$\left\{ \Psi^*\left(\frac{l}{2}(\varepsilon_0 - \varepsilon)\right) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \lambda^*_{\sigma(j)} \left( \sigma(j)\left(\frac{l}{2}(\varepsilon_0 - \varepsilon)\right)\right) \right\},$$

т.е. $\mu = A\lambda^*$, где $\mu = \{\mu_i\}_{i=0}^{2^n-1}$, $\mu_i = \Psi^*\left(\frac{l}{2}(\varepsilon_0 - \varepsilon(\sigma(i)))\right)$, $A = \{A_{ij}\}_{i,j=0}^{2^n-1}$, $A_{ij} = \sigma(j)\left(\frac{l}{2}(\varepsilon_0 - \varepsilon(\sigma(i)))\right)$.

Имеем $A_{ij} = 0$, если $i < j$, а $A_{ii} = l^{|\sigma(i)|}$. Следовательно, $\operatorname{rang} A = 2^n$.

Легко видеть, что

$$\overline{P}_{\varepsilon_0}(0) - \underline{P}_{\varepsilon_0}(0) = \omega(\tilde{A}\tilde{\lambda}^*), \quad \text{где} \quad \tilde{\lambda}^* = \{\lambda^*_{\sigma(i)}\}_{i=1}^{2^n-1},$$

$$\tilde{A} = \{A_{ij}\}_{i,j=1}^{2^n-1}; \quad d_{\varepsilon_0}(0) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \lambda^*_{\sigma(j)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{|\sigma(j)|} \sigma(j)(\varepsilon_0);$$

$$d_{\varepsilon_0}(0) - d(0) = \sum_{j=1}^{2^n-1} \lambda^*_{\sigma(j)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{|\sigma(j)|} \sigma(j)(\varepsilon_0);$$

$$|d_{\varepsilon_0}(0) - d(0)| = \omega(B\tilde{\lambda}^*),$$

где $B = \{B_{ij}\}_{i,j=1}^{2^n-1}$, а $B_{ij} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{|\sigma(j)|} \sigma(j)(\varepsilon_0)$; $B_{ij} = 0$, если $i > 1$.

В случае $\omega(\tilde{\lambda}^*) = 0$ неравенство

$$|d(0) - d_{\varepsilon_0}(0)| \le Q_n\left(\overline{P}_{\varepsilon_0}(0) - \underline{P}_{\varepsilon_0}(0)\right)$$

очевидно.

При $\omega(\tilde{\lambda}^*) \neq 0$ имеем

$$\frac{\omega(B\tilde{\lambda}^*)}{\omega(\tilde{A}\tilde{\lambda}^*)} = \frac{\omega(B\tilde{A}^{-1}L)}{\omega(L)} \le \|B\tilde{A}^{-1}\|\omega,$$

где $L = \widetilde{A}\widetilde{\lambda}^*$, $\widetilde{\lambda}^* = \widetilde{A}^{-1}L$.

Из a) и b) вытекает, что

$$\frac{\omega(B\widetilde{\lambda}^*)}{\omega(\widetilde{A}\widetilde{\lambda}^*)} = \frac{\omega(B\widetilde{A}^{-1}L)}{\omega(L)} < 1.$$

Следовательно, $\|B\widetilde{A}^{-1}\|_\omega < 1$, обозначая через $Q_n = \|B\widetilde{A}^{-1}\|_\omega$, мы завершим доказательство утверждения c). Докажем теперь утверждение d). Рассуждая как и выше, легко видеть, что

$$\overline{P}(0) = \max_\epsilon \overline{P}_\epsilon(0) = \max_{x\in[-l,l]^n} \Psi^*(x) = \max_{x\in\partial[-l,l]\times\ldots\times\partial[-l,l]} \Psi^*(x), \tag{21}$$

$$\underline{P}(0) = \min_\epsilon \underline{P}_\epsilon(0) = \min_{x\in[-l,l]^n} \Psi^*(x) = \min_{x\in\partial[-l,l]\times\ldots\times\partial[-l,l]} \Psi^*(x), \tag{22}$$

$$\underline{d}(0) = \min_\epsilon d_\epsilon(0) = \min_{x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]^n} \Psi^*(x) = \min_{x\in\partial[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times\ldots\times\partial[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \Psi^*(x), \tag{23}$$

$$\overline{d}(0) = \max_\epsilon d_\epsilon(0) = \max_{x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]^n} \Psi^*(x) = \max_{x\in\partial[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times\ldots\times\partial[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \Psi^*(x). \tag{24}$$

Если $\omega(\widetilde{\lambda}^*) = 0$, то $\widetilde{\lambda}^* = 0$ и $\Psi^*(x) = \text{const}$. Следовательно, $\overline{P}(0) = \underline{P}(0) = \overline{d}(0) = \underline{d}(0)$ и неравенство d) очевидно.

В случае,когда $\omega(\widetilde{\lambda}^*) \neq 0$, имеем $\widetilde{\lambda}^* \neq 0$ и $\Psi^*(x) \not\equiv \text{const}$. Поэтому в силу (21)-(24) получаем

$$\underline{P}(0) < \underline{d}(0) < \overline{d}(0) < \overline{P}(0). \tag{25}$$

Легко видеть, что

$$\overline{P}(0) - \underline{P}(0) = \omega((\Psi^*(l\epsilon(\sigma(i))) - \Psi^*(l\epsilon_0))_{i=1}^{2^n-1}),$$

$$\overline{d}(0) - \underline{d}(0) = \omega((\Psi^*(\frac{\pi}{2}\epsilon(\sigma(i))) - \Psi^*(\frac{\pi}{2}\epsilon_0))_{i=1}^{2^n-1}).$$

Имеем

$$\Psi^*(l\epsilon(\sigma(i))) - \Psi^*(l\epsilon_0) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \lambda^*_{\sigma(j)} l^{|\sigma(j)|}(\sigma(j)(\epsilon(\sigma(i)) - 1),$$

$\overline{P}(0) - \underline{P}(0) = \omega(\widetilde{Q}\widetilde{\lambda}^*)$, где $\widetilde{Q} = \{\widetilde{Q}_{ij}\}_{i,j=1}^{2^n-1}$, $\widetilde{Q}_{ij} = l^{|\sigma(j)|}(\sigma(j)(\epsilon(\sigma(i)) - 1)$,

$\overline{d}(0) - \underline{d}(0) = \omega(\widetilde{R}\widetilde{\lambda}^*)$, $\widetilde{R} = \{\widetilde{R}_{ij}\}_{i,j=1}^{2^n-1}$, $\widetilde{R}_{ij} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{|\sigma(j)|}(\sigma(j)(\epsilon(\sigma(i))) - 1)$.

Для выполнения условия $\text{rang}\widetilde{Q} = \text{rang}\widetilde{R} = 2^n - 1$ достаточно, чтобы $\text{rang}\widetilde{\sigma} = 2^n - 1$, где $\widetilde{\sigma} = \{\widetilde{\sigma}_{ij}\}_{i,j=1}^{2^n-1}$, $\widetilde{\sigma}_{ij} = \sigma(j)(\epsilon(\sigma(i))) - 1$.

Докажем, что матрица $\sigma = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=0}^{2^n-1}$, $\sigma_{ij} = \sigma(j)(\varepsilon(\sigma(i)))$ ортогональна.

Если $k_1 \neq k_2$, то существует $k_3 \geq 1$ такое, что $\sigma_{k_1 j} \cdot \sigma_{k_2 j} = \sigma_{k_3 j}$ для всех $j = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$.

Следовательно

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} \sigma_{k_1 j} \cdot \sigma_{k_2 j} = \sum_{j=0}^{2^n-1} \sigma_{k_3 j} = 0.$$

Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{2^n-1} \tilde{\sigma}_{k_1 j}\, \tilde{\sigma}_{k_2 j} = \sum_{j=0}^{2^n-1} (\sigma_{k_1 j} - 1)(\sigma_{k_2 j} - 1) = 2^n, \tag{26}$$

$$\sum_{j=1}^{2^n-1} \tilde{\sigma}_{kj}\, \tilde{\sigma}_{kj} = 2^n - 1. \tag{27}$$

Из соотношений (26) и (27) следует, что $\operatorname{rang}\tilde{\sigma} = 2^n - 1$. Имеем

$$\|\tilde{Q}\tilde{R}^{-1}\|_\omega^{-1} \leq \frac{\omega(z)}{\omega(\tilde{Q}\tilde{R}^{-1}z)} = \frac{\omega(\tilde{R}\tilde{\lambda}^*)}{\omega(\tilde{Q}\tilde{\lambda}^*)} = \frac{\omega(\tilde{R}\tilde{Q}^{-1}L)}{\omega(L)} \leq \|\tilde{R}\tilde{Q}^{-1}\|_\omega,$$

где $\omega(\tilde{\lambda}^*) \neq 0$, $L = \tilde{Q}\tilde{\lambda}^*$, $\tilde{\lambda}^* = \tilde{Q}^{-1}L$, $\omega(L) \neq 0$, $z = \tilde{R}\tilde{\lambda}^*$.

Из (25) получаем

$$\frac{\omega(\tilde{R}\tilde{\lambda}^*)}{\omega(\tilde{Q}\tilde{\lambda}^*)} = \frac{\omega(\tilde{R}\tilde{Q}^{-1}L)}{\omega(L)} < 1.$$

Значит, $\|\tilde{R}\tilde{Q}^{-1}\|_\omega < 1$.

Таким образом, обозначая $\overline{Q}_n = \|\tilde{R}\tilde{Q}^{-1}\|_\omega$, $\underline{Q}_n = \|\tilde{Q}\tilde{R}^{-1}\|_\omega^{-1}$, получаем требуемое утверждение. Теорема доказана.

В заключение, автор выражает благодарность профессору Г.Г. Геворкяну за постановку задачи и обсуждения результатов работы.

**ABSTRACT. Theorems on convergence of multiple Fourier series of several variables continuous functions with harmonic bounded variation are proved. Also the Gibbs phenomenon for multiple Fourier series is considered.**

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Физ.- Мат. Гиз., Москва, 1961.
2. N. Wiener, "The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients," Massachuetts. J. Math., vol. 3, pp. 72 94, 1924.
3. J. Marcinkiewicz, "On a class of function and their Fourier series," Compt. Rend.

Soc-Sci. Varsowie, vol. 26, pp. 71 – 77, 1934.
4. L. C. Jung, "General inequalities for Stiltjes integrals and the convergence of Fourier series," Mat. Ahn., vol. 115, pp. 581 – 612, 1938.
5. Salem, Essais Sur Les Series Trigonometriques. Actualite Sci et Industr., Paris, 862, 1940.
6. C. Goffman, "Everywhere convergence of Fourier series," Indiana Univ. Math. J., vol. 20, no. 2, pp. 107 – 112, 1970.
7. К. И. Осколков, "Обобщенная вариация, индикатриса Банаха и равномерная сходимость рядов Фурье," Мат. Заметки, том 12, №3, стр. 313 – 324, 1972.
8. D. Waterman, "On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation," Studia Math., vol. 44, no. 2, pp. 107 – 117, 1972.
9. G. H. Hardy, "On double Fourier series and espesiasially those which represanthe double zeta-function with reale and incommensurable parameters," Quart. J. Math., vol. 37, no. 1, pp. 53 – 79, 1906.
10. В. И. Голубов, "О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной обобщенной вариации", Сиб. мат, журн., том 15, №2, стр. 262 – 292, 1974.
11. А. А. Саакян,"О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации," Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 21, №6, стр. 517 – 529, 1986.
12. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, том 1, М., Мир, 1965.

22 Февраля 1993

Ереванский государственный университет

# СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ТИПА СОБОЛЕВА

Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, №3, 1993

В работе исследована разрешимость смешанной задачи для некоторого класса вырождающихся квазилинейных систем уравнений с частными производными третьего порядка. Не исключается зависимость коэффициентов от пространственных переменных. Доказано существование и единственность решения смешанной задачи в подходящих функциональных пространствах доказана при некоторых условиях, налагаемых на главный символ оператора и младшие члены (условия типа Леви), связанных с вырождением на границе.

1. Пусть $\Omega$ - ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, принадлежащая полупространству $\mathbb{R}^n_+ = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+,\ x_n > 0\right\}$. Предположим, что $\Gamma \cap \{x_n = 0\} \neq \emptyset$.

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial t} Lu(t,x) + Mu(t,x) = 0 \tag{1}$$

в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$, а операторы $L$ и $M$ задаются следующим образом :

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(B_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_n}\left(B_{nn}(x)\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) + c(x)\,u,$$

$$Mu = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{1j}(x,\nabla u_1), a_{2j}(x,\nabla u_2), \ldots, a_{Nj}(x,\nabla u_N)\right)^{tr},$$

где $u(t,x) = (u_1(t,x), \ldots, u_N(t,x))$, а оператор $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

Выделение в представлении для оператора $L$ слагаемого, содержащего дифференцирование в направлении $\frac{\partial}{\partial x_n}$, обусловлено тем обстоятельством, что допускается вырождение на гиперплоскости $x_n = 0$. Как будет установлено ниже постановка начально-краевой задачи для уравнения (1) будет тесно связана с характером вырождения.

2. Предполагается выполнение следующих условий :

а) Матрицы $B_{ij}(x)(i,j=1,2,....n-1)$ и $B_{nn}$ (порядка $N\times N$) симметричны, их элементы непрерывны в $\overline{\Omega}$ и $B_{ij}=B_{ji}$ для любых $i,j=1,2,...,n-1$. Матрица $C(x)$ неотрицательна при любом $x\in\overline{\Omega}$.

b) Для любых вещественных векторов $\xi^1,\xi^2,...,\xi^n$ ($\xi^k=(\xi_1^k,...,\xi_N^k), k=1,2,...,n$) таких, что $\sum_{i=1}^n|\xi^i|^2\neq 0$ и любого $x\in\overline{\Omega}$ справедливо неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n-1}\left(B_{ij}(x)\xi^i,\xi^j\right)+\left(B_{nn}(x)\xi^n,\xi^n\right)\geq\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha^i(x)\xi^i,\xi^i\right), \tag{2}$$

где $(.,.)$ - скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$; $\alpha^i(x)$ - некоторая матрица вида

$$\alpha^i(x)=\begin{pmatrix}\alpha_{11}^i(x) & 0 & ... & 0\\ 0 & \alpha_{22}^i(x) & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & \alpha_{NN}^i(x)\end{pmatrix} \tag{3}$$

с непрерывными в $\overline{\Omega}$ элементами $\alpha_{kk}^i(x)\,(i=1,2,...,n;\ k=1,2,...,N)$ и существует постоянная $c_0>0$ такая, что $\alpha_{kk}^i(x)\geq c_0>0$, при $i=1,...,n-1;\ k=1,2,...,N$. Предполагается, что существуют показатели $m_r\geq 0\,(r=1,2,...,N)$ такие, что справедливы неравенства

$$\gamma_1\leq x_n^{-m_r}\,\alpha_{rr}^n(x)\leq\gamma_2,\quad r=1,2,...,N \tag{1}$$

с некоторыми константами $\gamma_1>0,\gamma_2>0$.

c) Функции $a_{kj}(x,\xi)$, $k=1,2,...,N, j=1,2,...,n$, определяющие оператор $M$, предполагаются вещественными и принадлежащими пространству $C^2(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^n)$. Обозначим далее

$$A_j=\begin{pmatrix}a_{1j} & 0 & ... & 0\\ 0 & a_{2j} & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & a_{Nj}\end{pmatrix},\quad j=1,2,...,n,$$

$$J(x;\xi^1,...,\xi^n)\overset{def}{=}\sum_{i,j=1}^{n-1}\left(B_{ij}(x)\xi^i,\xi^j\right)+\left(B_{nn}(x)\xi^n,\xi^n\right)$$

и предположим, что для любых векторов $\xi^1,...,\xi^n;\eta^1,...,\eta^n$, принадлежащих $\mathbb{R}^n$ и любого $x\in\overline{\Omega}$ справедливы следующие неравенства :

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\left(A_j(x,\xi^1,...,\xi^n)\xi^j,1\right)\geq c_1\,J(x,\xi^1;...,\xi^n),\\ &\sum_{j=1}^{n}\left(A_j(x,\xi^1,...,\xi^n)\eta^j,1\right)\leq c_2\,J^{1/2}(x,\xi^1,...,\xi^n)\,J^{1/2}(x,\eta^1,...,\eta^n),\end{aligned} \tag{5}$$

$$c_1' J(x,\xi^1,\dots,\xi^n) \le \sum_{j=1}^{n} \left(A_j^i(x,\xi^1,\dots,\xi^n)\xi^i,\xi^j\right) \le c_2' J(x,\xi^1,\dots,\xi^n), \qquad (6)$$

где $c_1, c_2, c_1', c_2'$ - положительные постоянные, а $A_j^i$ матрицы вида

$$A_j^i = \begin{pmatrix} a_{1j}^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2j}^i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{Nj}^i, \end{pmatrix}$$

элементы которых

$$a_{kj}^i(x,\tau^k) = \frac{\partial a_{kj}(x,\tau^k)}{\partial \tau_i^k}, \quad \tau^k = (\tau_1^k,\dots,\tau_n^k).$$

Условие b) характеризует степень вырождения оператора $L$. Точнее, неравенство (2) - это условие сильной эллиптичности оператора $L$ в области $\Omega_\delta = \Omega \times \{x_n > \delta\}$ ($\delta > 0$ - любое), а оценка (4) свидетельствует о том, что $L$ допускает вырождение на части $\Gamma_0 = \Gamma \cap \{x_n = 0\}$ границы $\Gamma$. Условие c) естественно для задач с вырождением.

### 3. Постановка краевой задачи.

Представим границу $\Gamma$ области $\Omega$ в виде

$$\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma_0, \quad \Gamma' \subset \mathbb{R}_+^n.$$

Обозначим, далее

$$\Gamma_l \overset{def}{=\!=} \begin{cases} \Gamma', & \text{при } 1 \le m_l < 2 \\ \Gamma, & \text{при } 0 \le m_l < 1, \end{cases} \quad l = 1,2,\dots,N. \qquad (7)$$

Для системы дифференциальных уравнений (1) рассмотрим следующую начально-краевую задачу :

$$u|_{t=0} = u^0(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \qquad (8)$$

$$u_l|_{\Gamma_l} = 0, \quad t \ge 0, \; l = 1,2,\dots,N. \qquad (9)$$

Функциональные пространства, в которых изучается поставленная задача, будут введены ниже. Основной результат, полученный в статье, - теорема существования и единственности.

Впервые задача (1), (8), (9) в том частном случае, когда оператор $L = -\Delta(\Delta -$ трехмерный оператор Лапласа), $M = \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, была рассмотрена С. Л. Соболевым ( см. [1]), в связи с исследованиями, посвященными изучению малых колебаний вращающейся идеальной жидкости. Дальнейшие обобщения содержатся в работах [2]–[6], подробную библиографию по этому вопросу можно найти в [7].

4. Введем необходимые обозначения и функциональные пространства.

Пусть $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ - пространство векторнозначных бесконечно дифференцируемых финитных функций $\varphi = (\varphi_1(x), ..., \varphi_N(x))$, определенных на $\Omega$.

Обозначим через $\mathbf{L}_2(\Omega)$ гильбертово пространство $N$-мерных вещественнозначных вектор-функций $\mathbf{u}(x) = (u_1(x), ..., u_N(x))$ с компонентами $u_i \in L_2(\Omega)$, $i = 1, 2, ..., N$, со скалярным произведением

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_0 = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_i(x)\, v_i(x)\, dx$$

и нормой

$$\|\mathbf{u}\|_0 = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_0}.$$

Опишем функциональное пространство, в котором будет действовать оператор, порожденный задачей (1), (8),(9). Заметим вначале, что оператор $L$ определен на всюду плотном в пространстве $\mathbf{L}_2(\Omega)$ множестве $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$.

**Лемма 1.** *Оператор $L$ симметричен и положительно определен.*

**Доказательство.** Симметричность оператора $L$ на $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ очевидна, поскольку для произвольных $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$, пользуясь формулой интегрирования по частям, имеем

$$(L\mathbf{u}, \mathbf{v})_0 = (\mathbf{u}, L\mathbf{v})_0. \tag{10}$$

Докажем положительную определенность оператора $L$. Рассмотрим скалярное произведение $(L\mathbf{u}, \mathbf{u})_0$, $\mathbf{u} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$. В силу (2), (3) и условия неотрицательной

определенности матрицы $C(x)$, имеем

$$(Lu,u)_0 = \int_\Omega \left( -\sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(B_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_n}\left(B_{nn}(x)\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) + \right.$$

$$\left. + (C(x)u,u))\,dx = \int_\Omega \left[ -\sum_{i,j=1}^{n-1}\left(B_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \left(B_{nn}(x)\frac{\partial u}{\partial x_n},\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) + \right. \tag{11}$$

$$\left. +(C(x)u,u)\right]\,dx \geq\geq \int_\Omega \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\,dx \geq$$

$$\geq \int_\Omega \left(\alpha^1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\,dx \geq \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u_N}{\partial x_1}\right)^2\right]\,dx.$$

Неравенство Фридрихса, примененное к правой части (11), немедленно приводит к нужной оценке

$$(Lu,u)_0 \geq c\|u\|_0^2 \tag{12}$$

с некоторой константой $c > 0$ (здесь и далее буквой $c$ будут обозначаться различные постоянные).

Лемма доказана.

Далее, обозначим через $H_L$ гильбертово пространство, определяемое как замыкание линейного многообразия $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$, в норме

$$\|u\|_{H_L} = \sqrt{[u,u]},$$

порожденной скалярным произведением

$$[u,v] = (Lu,v)_0 = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n-1}\left(B_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(B_{nn}(x)\frac{\partial u}{\partial x_n},\frac{\partial v}{\partial x_n}\right) + (C(x)u,v)\right]\,dx. \tag{13}$$

Из оценки (12) следует вложение $H_L \subset \mathbf{L}_2(\Omega)$.

Замечание. В силу сильной эллиптичности оператора $L$ в подобластях $\Omega_\delta$, $\delta > 0$, норма $\|\cdot\|_{H_L}$ эквивалентна интегралу Дирихле, и, стало быть, в соответствии с теоремой вложения Соболева, вектор-функции пространства $H_L$ исчезают на части $\Gamma_\delta = \Gamma' \cap \{x_n > \delta\}$ границы $\Gamma$. Это обстоятельство диктует соответствующую постановку начально-краевой задачи.

Приводимая ниже лемма уточняет структуру пространства $H_L$.

**Лемма 2.** *Пусть* $0 \leq m_r < 1$, *тогда* $r$*-тая компонента* $u_r$ *вектора* $u \in H_L$ *обращается в нуль на всей границе* $\Gamma$.

**Доказательство.** Пусть $\mathbf{u}(x) \in H_L$ - предел последовательности $\{\mathbf{u}^{(m)}(x)\}_{m=1}^{\infty}$, $\mathbf{u}^{(m)} \in \mathbf{C}_0^{\infty}(\Omega)$ в том смысле, что

$$||\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}||_{H_L} \to 0, \quad m \to \infty.$$

Оценим

$$||\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(k)}||^2_{H_L} \geq \int_\Omega \left[ \sum_{i,j=1}^{n-1} \left( B_{ij}(x) \frac{\partial(\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(k)})}{\partial x_i}, \frac{\partial(\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(k)})}{\partial x_j} \right) + \left( B_{nn}(x) \frac{\partial(\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(k)})}{\partial x_n}, \frac{\partial(\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(k)})}{\partial x_n} \right) \right] dx.$$

В силу неравенства (2) имеем

$$||\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(k)}||^2_{H_L} \geq \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left( \alpha^i(x) \frac{\partial(\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(k)})}{\partial x_i}, \frac{\partial(\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(k)})}{\partial x_i} \right) dx \geq$$

$$\geq \int_\Omega \left( \sum_{i=1}^{n} \alpha^i_{rr}(x) \left| \frac{\partial(u_r^{(m)} - u_r^{(k)})}{\partial x_i} \right|^2 \right) dx.$$

Последовательность $\{u^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ фундаментальна в $H_L$. Поэтому, из последней оценки следует, что

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \alpha^i_{rr} \left| \frac{\partial u_r^{(m)}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial x_i} \right|^2 dx \to 0, \quad m, k \to \infty. \tag{14}$$

Введем в рассмотрение оператор $L_r$, заданный на всюду плотном подмножестве $C_0^{\infty}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$, по формуле

$$L_r u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \alpha^i_{rr}(x)(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

Проведя рассуждения, используемые при доказательстве Леммы 1, легко установить симметричность и положительную определенность оператора $L_r$.

Введем энергетическое скалярное произведение по формуле

$$[u, v] = (L_r u, v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \alpha^i_{rr}(x)(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

для любых $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Замкнув множество $C_0^\infty(\Omega)$ в энергетической норме, порожденной скалярным произведением $[\cdot,\cdot]$, придем к гильбертову пространству $H_{L_r}$.

Из (14) следуст, что последовательность $\{u_r^{(m)}\}$ фундаментальна в пространстве $H_{L_r}$, и поскольку $m_r < 1$, то предельная функция $u_r$ исчезает на Г (см. [6]). Лемма 2 доказана.

Как известно, симметрический и положительно определенный оператор $L$, заданный на $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$, допускает фридрихсовское расширение до самосопряженного оператора, определенного на $H_L$.

Расширенный таким образом оператор вновь обозначим через $L$. Он гомеоморфно отображает пространство $H_L$ на $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Следовательно, существует ограниченный обратный к $L$ оператор $L^{-1}$, отображающий $\mathbf{L}_2(\Omega)$ на пространство $H_L$.

Применяя к обеим частям уравнения (1) оператор $L^{-1}$, получим эквивалентное ему уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A\mathbf{u} = 0 \qquad (*)$$

с оператором $A = L^{-1}M$, определенным на линейном многообразии $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$.

Опишем область определения замыкания оператора $A$.

Лемма 3. *Область определения замыкания оператора $A$ совпадает с пространством $H_L$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{u} \in H_L$ и последовательность $\{\mathbf{u}^{(m)}\}_{m=1}^\infty$, $\mathbf{u}^{(m)} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$, $\|\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}\|_{H_L} \to 0$, при $m \to \infty$. Для любого $\mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\left[A\mathbf{u}^{(m)}, \mathbf{v}\right] = \int_\Omega \left(LL^{-1}M\mathbf{u}^{(m)}, \mathbf{v}\right) dx = \int_\Omega \left(M\mathbf{u}^{(m)}, \mathbf{v}\right) dx =$$

$$= \int_\Omega \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} a_{1j}(x, \nabla u_1^{(m)}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{Nj}(x, \nabla u_N^{(m)}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_j} \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial v_N}{\partial x_j} \end{pmatrix} dx = \qquad (15)$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N \int_\Omega a_{kj}(x, \nabla u_k^{(m)}) \frac{\partial v_k}{\partial x_j} dx.$$

Оценим разность

$$\left| \left[A\mathbf{u}^{(m)}, \mathbf{v}\right] - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N \int_\Omega a_{kj}(x, \nabla u_k) \frac{\partial v_k}{\partial x_j} dx \right| =$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega} \left\{ a_{kj}(x, \nabla u_k^{(m)}) - a_{kj}(x, \nabla u_k) \right\} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \, dx \right| =$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega} \int_{0}^{1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{kj}(x, \nabla u_k + t(\nabla u_k^{(m)} - \nabla u_k))}{\partial \xi_i^k} \left( \frac{\partial u_k^{(m)}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \, dt \, dx \right| = \left| \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega} \int_{0}^{1} a_{kj}^{i} \cdot \left( \frac{\partial u_k^{(m)}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \, dt \, dx \right| =$$

$$= \left| \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \int_{0}^{1} \left( A_j^i \frac{\partial (\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u})}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) dt \, dx \right| \leq \tag{16}$$

$$\leq \int_{\Omega} \int_{0}^{1} \left| \sum_{i,j=1}^{n} \left( A_j^i \frac{\partial \mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u})}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \right| dt \, dx.$$

Из условия (5) и последнего неравенства имеем оценку

$$\left| \left[ A\mathbf{u}^{(m)}, \mathbf{v} \right] - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega} a_{kj}(x, \nabla u_k) \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \, dx \right| \leq$$

$$\leq c \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,j=1}^{n-1} \left( B_{ij}(x) \frac{\partial (\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u})}{\partial x_i}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j} \right) + \left( B_{nn}(x) \frac{\partial (\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u})}{\partial x_n}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_n} \right) dx \right] =$$

$$= c \left\{ [\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}, \mathbf{v}] - \int_{\Omega} \left( C(x) (\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}, \mathbf{v}) \right) dx \right\} \tag{17}$$

для любого $\mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^{\infty}(\Omega)$ с некоторой константой $c > 0$.

Докажем, что правая часть неравенства (17) сходится к нулю при $m \to \infty$.

Действительно

$$\lim_{m \to \infty} [\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}, \mathbf{v}] = 0, \tag{18}$$

поскольку последовательность $\{\mathbf{u}^{(m)}\}_1^{\infty}$ сильно сходится к $\mathbf{u}$ в пространстве $H_L$.

Имеем

$$\left| \int_{\Omega} \left( C(x) (\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}), \mathbf{v} \right) dx \right| \leq c' \|\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}\|_0 \, \|\mathbf{v}\|_0 \leq c'' \|\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}\|_{H_L} \cdot \|\mathbf{v}\|_0$$

где $c' > 0$, $c'' > 0$ - некоторые постоянные. Следовательно

$$\lim_{m \to \infty} \int_{\Omega} \left( C(x) (\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}), \mathbf{v} \right) dx = 0. \tag{19}$$

Возвращаясь к неравенству (17), с учетом (18) и (19), заключаем, что последовательность $(A\mathbf{u}^{(m)})_1^{\infty}$ имеет слабый предел в пространстве $H_L$. В силу со

единственности, мы можем продолжить оператор $\mathcal{A}$ с $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ на пространство $H_L$, положив для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_L$

$$[\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\int_\Omega a_{kj}(x, \nabla u_k)\,\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\,dx. \tag{20}$$

Лемма 3 доказана.

5. В этом пункте будет установлен основной результат статьи - однозначная разрешимость задачи (*) – (8), к которой редуцируется задача (1), (8), (9) (см. пункт 4).

Доказательство опирается на известный "метод монотонности"(см. [8], [9]).

Перед формулировкой нашего основного результата приведем необходимые определения и одну общую теорему, доказанную в [10].

Пусть оператор $A$ (вообще говоря, линейный) действует из сепарабельного рефлексивного пространства $X$ в пространство $X^*$ линейных непрерывных функционалов над $X$.

**Определение 1.** Оператор $A$ называется *монотонным*, если для любых $u, v \in X$ имеет место неравенство

$$< Au - Av, u - v > \geq 0. \tag{21}$$

**Определение 2.** Оператор $A$ называется *полунепрерывным*, если он всякую сильно сходящуюся последовательность в $X$ переводит в слабо сходящуюся последовательность в $X^*$.

**Определение 3.** Оператор $A$ называется *ограниченным*, если образ всякого ограниченного множества из $X$ является ограниченным множеством в пространстве $X^*$.

Обозначим через $L_p(0, T; X)$, $(p > 1)$ пространство функций $u(t)\colon [0, T] \to X$, с нормой

$$||u|| = \left(\int_0^T ||u(t)||_X^p\,dx\right)^{1/p},$$

где $||\cdot||_X$ - норма банахова пространства $X$.

Пусть, далее, $A(t,u)$ - монотонный оператор, зависящий от параметра $t \in [0,T]$, действующий из $L_p(0,T;X)$ в сопряженное пространство $L_{p'}(0,T;X^*)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

Рассмотрим следующую задачу :

$$Lu = u' + A(t,u) = h, \tag{22}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \tag{23}$$

где $h(t)$ - произвольно заданный элемент пространства $L_{p'}(0,T;X^*)$.

Обозначим, наконец, через $H(u_0)$ пространство функций $u(t) \in L_p(0,T;X)$ таких, что $u' \in L_{p'}(0,T;X)$, $u(0)=u_0$, $u_0 \in X$.

**Теорема А.** *([10], Теорема 13). Пусть выполнены следующие условия :*

*1. Для почти всех $t \in [0,T]$ и любого $u \in L_p(0,T;X)$ справедливо неравенство*

$$< A(t,u), u > \geq c_0 ||u||_X^p - k(t)$$

*с некоторой постоянной $c_0 > 0$, $k(t)$ - ограниченная функция.*

*2. Оператор $A(t,u)\colon L_p(0,T;X) \to L_{p'}(0,T;X^*)$ ограничен и полунепрерывен.*

*Тогда отображение $L\colon H(u_0) \to L_{p'}(0,T;X)$ есть эпиморфизм, иными словами, для любого $h \in L_{p'}(0,T;X^*)$ задача (22), (23) разрешима.*

**Теорема 1.** *Оператор $A$, действующий в пространстве $H_L$, является монотонным, ограниченным и полунепрерывным, при этом справедлива оценка*

$$[Au, u] \geq c\,||u||^2_{H_L}, \tag{24}$$

*где $c > 0$ - некоторая постоянная.*

**Доказательство.** Для произвольных $u, v \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ оценим

$$\begin{aligned}
[Au - Av, u - v] &= \int_\Omega (Mu - Mv, u - v)\,dx = \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\int_\Omega [a_{kj}(x, \nabla u_k) - a_{kj}(x, \nabla v_k)]\ \frac{\partial}{\partial x_j}(u_k - v_k)\,dx = \\
&= \int_0^1 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_j^i(x, \nabla v_k + t(\nabla u_k - \nabla v_k))\right) \left(\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}\,\frac{\partial(u-v)}{\partial x_j}\right) dx\,dt \geq \\
&c_1' \int_\Omega J\left(x, \frac{\partial(u-v)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial(u-v)}{\partial x_n}\right) dx,
\end{aligned} \tag{25}$$

где мы воспользовались гладкостью функций $a_{kj}(x, \tau^k)$ и условием (6).

Заметим, далее, что

$$\|\mathbf{u}\|_0^2 \leq c \int_\Omega J(x, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n})\, dx, \tag{26}$$

где $c > 0$ - некоторая постоянная. Действительно, имеем в силу (2)

$$\|\mathbf{u}\|_0^2 \leq \kappa \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right|^2 dx \leq \kappa_1 \int_\Omega \sum_{i=1}^n (\alpha^i(x) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i})\, dx \leq$$
$$\leq \kappa_2 \int_\Omega J(x, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n})\, dx,$$

где $\kappa$, $\kappa_1$, $\kappa_2$ - некоторые положительные постоянные.

Из (26) следует, что

$$\|\mathbf{u}\|_{H_L}^2 \leq c \int_\Omega J(x, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n})\, dx. \tag{27}$$

Возвращаясь к неравенству (25), с учетом (27) получаем оценку

$$[A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}] \geq c \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{H_L}^2. \tag{28}$$

Пусть теперь $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_L$ и $\{\mathbf{u}^{(k)}\}_{k=1}^\infty, \{\mathbf{v}^{(k)}\}_{k=1}^\infty$, где $\mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{v}^{(k)} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ - последовательности такие, что

$$\|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}\|_{H_L} \underset{k\to\infty}{\to} 0, \quad \|\mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{v}\|_{H_L} \underset{k\to\infty}{\to} 0. \tag{29}$$

Имеем, в силу (28)

$$\left[A\mathbf{u}^{(k)} - A\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\right] = \left[A\mathbf{u}^{(k)} - A\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{u} - \mathbf{u}^{(k)}\right] +$$
$$+ \left[A\mathbf{u}^{(k)} - A\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{v}^{(k)}\right] + \left[A\mathbf{u}^{(k)} - A\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{v}\right] \geq$$
$$\geq \left[A\mathbf{u}^{(k)} - A\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{u} - \mathbf{u}^{(k)}\right] + \left[A\mathbf{u}^{(k)} - A\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{v}\right] + c\|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{v}^{(k)}\|_{H_L}^2. \tag{30}$$

Заметим, что в силу Леммы 3, последовательности $\{A\mathbf{u}^{(k)}\}, \{A\mathbf{v}^{(k)}\}$ ограничены (они сходятся в пространстве $H_L$). Отсюда, учитывая (29), получаем

$$\left|\left[A\mathbf{u}^{(k)} - A\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{u} - \mathbf{u}^{(k)}\right]\right| \leq c\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(k)}\|_{H_L} \underset{k\to\infty}{\to} 0. \tag{31}$$

Аналогично

$$\lim_{k\to\infty} \left[A\mathbf{u}^{(k)} - A\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{v}\right] = 0. \tag{32}$$

Возвращаясь к неравенству (30), в силу (31), (32) получаем, что (для достаточно больших $k$)

$$\left[\mathcal{A}\mathbf{u}^{(k)} - \mathcal{A}\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\right] \geq 0,$$

откуда в пределе имеем

$$[\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, \mathbf{u} - \mathbf{v}] \geq 0, \tag{33}$$

и монотонность оператора $\mathcal{A}$ установлена.

Пусть $B$ - произвольное ограниченное множество в $H_L$ :

$$B = \{\mathbf{u}: \quad \mathbf{u} \in H_L, \ \|\mathbf{u}\|_{H_L} \leq R < \infty\}.$$

Рассмотрим функционал

$$[\mathcal{A}\mathbf{u}^0, \mathbf{v}] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\int_\Omega a_{kj}(x, \nabla u_k^0)\,\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\,, dx$$

$\mathbf{u}^0 \in B$ и $\mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$.

В силу (20) и условия (5) имеем

$$[\mathcal{A}\mathbf{u}^0, \mathbf{v}] = \sum_{j=1}^{n}\int_\Omega \left(A_j\left(x, \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_n}\right)\,\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j}, 1\right) dx \leq$$

$$\leq c_2\left(\int_\Omega J\left(x, \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_n}\right) dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega J\left(x, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_n}\right) dx\right)^{1/2} \leq \tag{34}$$

$$\leq c\|\mathbf{u}^0\|_{H_L} \cdot \|\mathbf{v}\|_{H_L} \leq cR\|\mathbf{v}\|_{H_L}.$$

Следовательно

$$\|\mathcal{A}\mathbf{u}^0\|_{H_L} \leq cR, \quad \forall \mathbf{u}^0 \in B,$$

т.е. оператор $\mathcal{A}$ ограничен.

В силу Леммы 3 для любого $\mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ и произвольной последовательности $\{\mathbf{u}^{(m)}\}_{m=1}^\infty$, $\mathbf{u}^{(m)} \in H_L$ такой, что

$$\|\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}\|_{H_L} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

имеем

$$\left[\mathcal{A}\mathbf{u}^{(m)}, \mathbf{v}\right] \to [A, \mathbf{v}] \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

а это означает, что оператор $\mathcal{A}$ полунепрерывен.

Наконец, докажем оценку (24).

В силу условия (5) и оценки (27), для $\mathbf{u} \in H_L$ имеем

$$[A\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \sum_{j=1}^{n} \left( A_j \left( x, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n} \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}, 1 \right) dx \geq$$

$$\geq c_1 \int_\Omega J \left( x, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n} \right) dx \geq c \|\mathbf{u}\|^2_{H_L}$$

с постоянной $c > 0$. Теорема доказана.

Пусть банахово пространство $X = H_L$. Рассмотрим гильбертово пространство $L_2(0, T; H_L)$ вектор-функций $\mathbf{u}(t, x)$, заданных в цилиндре $Q_T$ со скалярным произведением

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \int_0^T [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \, dt. \tag{35}$$

$|\cdot|$ обозначает норму, порожденную скалярным произведением (35).

**Теорема 2.** *Для любого $\mathbf{u}^0 \in H_L$ задача (*), (8) разрешима в пространстве $L_2(0, T; H_L)$.*

**Доказательство.** Из неравенства (33) имеем для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L_2(0, T; H_L)$

$$\{A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\} \geq 0,$$

следовательно, оператор $A$ монотонный. Далее, пусть $B$ - ограниченное подмножество в $L_2(0, T; H_L)$. Тогда для любого $\mathbf{u} \in B$ и любого $t \in [0, T]$, в силу (34), имеем

$$\|A\mathbf{u}\|_{H_L} \leq c$$

с некоторой постоянной $c > 0$. Из последней оценки следует, что

$$|A\mathbf{u}| \leq cT < \infty,$$

т.е. оператор $A$ ограничен в $L_2(0, T; H_L)$. Полунепрерывность оператора $A$ очевидным образом следует из Теоремы 1.

Таким образом, оператор $A$ удовлетворяет всем условиям Теоремы А, откуда вытекает, что для любого $\mathbf{u}^0 \in H_L$ в $L_2(0, T; H_L)$ существует по крайней мере одно решение задачи (*), (8). Теорема доказана.

**Теорема 3.** *Для любых начальных данных* $\mathbf{u}^0 \in H_L$ *решение задачи* (*), (8) *единственно в пространстве* $L_2(0,T;H_L)$.

**Доказательство.** Пусть $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{u}^2 \in L_2(0,T;H_L)$ - два решения одной и той же задачи (*), (8). Тогда их разность $\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2) + A\mathbf{u}^1 - A\mathbf{u}^2 = 0.$$

Умножая обе части последнего тождества скалярно в $H_L$ на $\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2$ и интегрируя по $t \in [0,\tau]$, $0 < \tau \leq T$, получим

$$\int_0^\tau \left[\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2), \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\right] dt + \int_0^\tau \left[A\mathbf{u}^1 - A\mathbf{u}^2, \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\right] dt = 0.$$

В силу монотонности оператора $A$ отсюда следует оценка

$$\int_0^\tau \left[\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2), \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\right] dt \leq 0.$$

Следовательно

$$\frac{1}{2}\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t}\|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\|^2_{H_L} dt \leq 0.$$

Учитывая теперь, что $(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2)\big|_{t=0} = 0$, получаем

$$\|\mathbf{u}^1(\tau,x) - \mathbf{u}^2(\tau,x)\|_{H_L} = 0.$$

В силу произвольности $\tau$ заключаем, что $\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^2$ в цилиндре $Q_T$.

Теорема доказана.

**ABSTRACT.** The solvability of the mixed problem for a class of Sobolev type degenerate quasilinear systems of partial differential equations of third order is studied. Dependence of on space variables is not excluded. The exictence and uniqueness of solutions of mixed problems in suitable functional spaces is proved under certain conditions concerning the principal symbols of the operators and the lower terms (Levi type conditions) connected with the degeneration on the boundary.

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. Л. Соболев, "Об одной новой задаче математической физики," Изв. АН СССР, Математика, том 18, стр. 3 – 50, 1954.
2. Р. А. Александрян, "Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа Соболева," Труды ММО, том 9, стр. 455 – 505, 1960.

3. С. А. Гальперн, "Задача Коши для общих систем линейных уравнений," Труды ММО, том 9, стр. 401 – 423, 1960.
4. М. И. Вишик, "Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения," Мат. сборник, том 39, №1, стр. 51 – 148, 1956.
5. R. E. Showalter, "Existence and representation theorems for a semilinear Sobolev equation in Banach space," SIAM J. Math. Anal., vol. 3, no. 3, pp. 527 – 543, August 1972.
6. Г. С. Акопян, "О начально-краевых задачах для вырождающихся уравнений типа Соболева," Ученые зап. ЕГУ, №1 (161), стр. 20 – 26, 1986.
7. R. A. Aleksandrian, Ju. M. Berezanskii, V. A. Il'in, A. G. Kostjučenko, "Some questions in spectral theory for partial differential equations," Amer. Math. Soc. Transl., vol. 105 (2), 1976.
8. Ж.- Л. Лионс, Некоторые Методы Решения Нелинейных Краевых Задач, М., Мир, 1972.
9. А. В. Бабин, М. И. Вишик, Аттракторы Эволюционных Уравнений, М., Наука, 1989.
10. Ю. А. Дубинский, "Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка," Усп. мат. наук, том 23, №1(123), стр. 45 – 90, 1968.

23 Июня 1993

Республика Армения
Межвузовский научный центр
по прикладным проблемам математики
Ереванский государственный университет

# О РАВНОМЕРНО-КАСАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ЛАКУНАРНЫМИ СТЕПЕННЫМИ РЯДАМИ НА КРИВЫХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Г. В. Арутюнян, В. А. Мартиросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №3, 1993

В работе получены результаты о возможности равномерно-касательных приближений на кривых из комплексной плоскости целыми или голоморфными в круге функциями, представимыми лакунарными степенными рядами.

## §0. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе исследуются некоторые вопросы о возможности равномерно-касательных приближений на кривых из конечной комплексной плоскости целыми (голоморфными в круге) функциями, представимыми лакунарными степенными рядами.

Исчерпывающее решение проблемы комплексной полиномиальной аппроксимации, полученное в 1951 году С. Н. Мергеляном [1], послужило основой для развертывания исследований о возможности равномерных и касательных приближений в комплексной области целыми функциями. Такие приближения впервые рассмотрел в 1927 году Т. Карлеман [2]. Фундаментальная теория возможности равномерных и касательных приближений целыми и голоморфными функциями была детально разработана в работах М. В. Келдыша, Н. У. Аракеляна и других авторов (см. [3], [4]). Решение проблемы комплексной полиномиальной аппроксимации, с другой стороны, способствовало активизации исследований с начала 70-ых годов вопросов о возможности равномерных приближений на компактах комплексной плоскости многочленами с пропусками. В этом круге вопросов получен ряд законченных результатов как для специальных классов компактов (см. [5 10]), так и для общих компактов (см. [11], [12]). Мы перейдем к исследованию

аппроксимативных свойств целых или голоморфных в круге функций, представимых лакунарными степенными рядами.

Работа состоит из трех частей : в §1 приведены формулировки полученных результатов, в §3 - их доказательства, а в §2 доказываются вспомогательные леммы, имеющие самостоятельный интерес.

## §1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем сначала некоторые обозначения. Для множества $e$ из комплексной конечной плоскости $\mathbf{C}$ будем обозначать через $\bar{e}$ и $\partial e$, соответственно, его замыкание и границу. Пусть $C(e)$ - множество всех непрерывных на $e$ комплекснозначных функций. Для компакта $e \subset \mathbf{C}$ пусть $A(e)$ - банахово пространство всех непрерывных на $e$ и голоморфных на его внутренности комплекснозначных функций с нормой $||f|| = \sup |f|(e)$.

Положим

$$D_r = \{z \in \mathbf{C}: \quad |z| < r\} \quad \text{при} \quad 0 \leq r \leq +\infty;$$

при этом считаем $D_0 = \emptyset$ и $D_\infty = \mathbf{C}$. Пусть $H(D_r)$ - множество всех голоморфных в круге $D_r$, $0 < r \leq +\infty$ функций.

Для подпоследовательности $Q$ натуральных чисел $\mathbb{N}$ через $\Delta_{\min}(Q)$, $\Delta_{\max}(Q)$ будем обозначать, соответственно, ее минимальную и максимальную плотности в смысле Г. Полиа ([13], стр. 26).

Пусть $\Gamma_0$ - жорданова дуга из круга $D_R, 0 < R \leq +\infty$, соединяющая начало координат с $\partial D_R$ и состоящая из конечного или счетного числа гладких дуг $\gamma_k (k = 1, 2, ...)$, удовлетворяющих следующим условиям :

a) дуга $\Gamma_0$ пересекается с любой окружностью $\partial D_r, 0 < r < R$, один раз ;

b) в любом круге $D_r, 0 < r < R$, содержится лишь конечное число дуг $\gamma_k$ ;

c) каждая дуга $\gamma_k$ в любой точке $z \in \gamma_k$ с пересекающей ее окружностью $\partial D_{|z|}$ образует угол, который больше некоторого числа $\alpha \in (0, \pi/2]$, где $\alpha$ не зависит от $z \in \gamma_k$ и от $k$.

Для дуги $\Gamma_0$ и числа $m \in \mathbb{N}$ положим

$$\Gamma_m = \bigcup_{k=0}^{m-1} \Gamma_k, \tag{1}$$

где

$$\Gamma_k = \{z \in D_R: \quad z = w\exp(2\pi ki/m), \quad w \in \Gamma_0\}.$$

Для подпоследовательности $Q = \{q_n\}_1^\infty \subset \mathbb{N}$ обозначим

$$Q_k = \{q_n \in Q: \quad q_n \equiv k(\mathrm{mod}\ m)\}, \quad k = 0, 1, ..., m-1.$$

**Теорема 1.** *Пусть $f$ и $\varepsilon > 0$ - произвольные функции из $C(E_m)$, $Q$ - подпоследовательность из $\mathbb{N}$, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{q_n \in Q_k} q_n^{-1} = \infty \quad при \quad k = 0, 1, ..., m-1. \tag{2}$$

*Тогда существует функция $g \in H(D_R)$, представимая степенным рядом вида*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n, \quad где \quad g_n = 0 \quad при \quad n \notin Q \cup \{0\} \tag{3}$$

*и такая, что*

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon(z) \quad при \quad z \in E_m. \tag{4}$$

**Замечание 1.** Множество вида (1) с $\Gamma_0 = [0, R)$ удовлетворяет условиям Теоремы 1. В этом случае для справедливости Теоремы 1 выполнение условий (2) необходимо. Это легко следует из теоремы Мюнца. Более общие кривые подобного типа получаются использованием комплексных аналогов теоремы Мюнца (см. [6], [7]).

**Замечание 2.** Частный случай Теоремы 1, когда $R = +\infty, m = 2$ и $E_2 = (-\infty, +\infty)$, обобщает и усиливает известную теорему Т. Карлемана [2].

В следующей теореме рассматривается более широкий класс кривых аппроксимации.

Рассмотрим множество $E_m$ вида (1), где $\Gamma_k \quad (k = 0, 1, ..., m-1)$ - жорданова дуга из круга $D_R$, соединяющая начало координат с $\partial D_R$, $\Gamma_k \cap \Gamma_j = \{0\}$ при $k \neq j$ и удовлетворяющая следующему условию: существует последовательность окружностей $\{\partial D_{r_n}\}_1^\infty$ такая, что $r_n \uparrow R$ при $n \to \infty$ и любая $\partial D_{r_n}$ пересекает $\Gamma_k$ только один раз. Пусть $\theta(t)$ - максимальный раствор тех открытых дуг, из которых состоит множество $(D_R \setminus E_m) \cap \partial D_t$, $0 < t < R$.

**Теорема 2.** *Пусть $f$ и $\epsilon > 0$ - произвольные функции из $C(E_m)$, $Q$ - подпоследовательность из $\mathbb{N}$, удовлетворяющая условию*

$$\Delta_{\min}(Q) > 1 - \frac{\theta}{2\pi}, \quad \theta = \inf_{t \in (0,R)} \theta(t).$$

*Тогда существует функция $g \in H(D_R)$, представимая степенным рядом вида (3) и удовлетворяющая (4).*

В заключение параграфа отметим, что Теоремы 1,2, выявляющие аппроксимативные свойства целых или голоморфных в круге функций с лакунарными степенными рядами, можно использовать для построения таких функций, имеющих наперед заданное асимптотическое поведение вдоль определенных кривых.

## §2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Для множеств $E_m$, фигурирующих в Теоремах 1 и 2, и для чисел $r, a$, где $0 < r < a < R$, положим

$$e_m(r,a) = \overline{D}_r \cup (E_m \cap \overline{D}_a).$$

**Лемма 1.** *Пусть $E_m$ - множество из Теоремы 1, $Q$ - подпоследовательность из $\mathbb{N}$, удовлетворяющая условиям (2), и $f$ - произвольная функция из $A(e_m(r,a))$, представимая в окрестности нуля степенным рядом вида*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad \text{где} \quad f_n = 0 \quad \text{при} \quad n \notin Q \cup \{0\}. \tag{5}$$

*Тогда для любого числа $\epsilon > 0$ существует многочлен*

$$p(z) = \sum_{n=0}^{s} c_n z^n, \quad c_n = 0 \quad \text{при} \quad n \notin Q \cup \{0\}, \tag{6}$$

*такой, что*

$$|f(z) - p(z)| < \epsilon \quad \text{для} \quad z \in e_m(r,a). \tag{7}$$

**Доказательство.** Докажем сперва лемму в том частном случае, когда $m = 1$. Пусть, $\pi(Q)$ - полупространство пространства $A(e)$, где $e = e_1(r,a)$, порожденное всеми многочленами вида (6). Требуется доказать, что $f \in \pi(Q)$. Согласно

теоремам Хана–Банаха и Ф. Рисса достаточно доказать, что для произвольной комплексной меры Бореля $\mu$ на $\partial e$, удовлетворяющей соотношениям

$$\int_{\partial e} z^n \, d\mu(z) = 0 \quad \text{при} \quad n \in Q \cup \{0\}, \tag{8}$$

будет выполняться также условие

$$\int_{\partial e} f(z) \, d\mu(z) = 0. \tag{9}$$

Рассмотрим преобразование Коши

$$G(t) = \int_{\partial e} \frac{d\mu(z)}{t - z}, \; t \in \overline{\mathbf{C}} \setminus \partial e.$$

Функция $G(t)$ голоморфна по $t \in \overline{\mathbf{C}} \setminus \partial e$ ($\overline{\mathbf{C}}$ - расширенная комплексная плоскость).

В силу соотношений (8) в окрестности бесконечности она разлагается в ряд Лорана

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{-p_n - 1} \int_{\partial e} z^{p_n} \, d\mu(z), \; |t| > a, \tag{10}$$

где $P = \{p_n\}_1^{\infty}$ - подпоследовательность, дополнительная к $Q$ относительно $\mathbb{N}$.

Докажем, что ряд (10) сходится для всех $t$, $|t| > r$.

С этой целью введем функцию

$$F(t) = \int_{\partial e \setminus \overline{D}_r} \exp(t \log z) \, d\mu(z), \quad t \in \mathbf{C},$$

где $\log z = \log |z| + i \arg z$ - однозначная ветвь логарифма, для которой $|\arg z| < \pi$.

Очевидно, что $F$ - целая функция экспоненциального типа. Для нее соотношения (8) означают, что

$$F(n) = -\int_{\partial D_r} z^n \, d\mu(z) \quad \text{при} \quad n \in Q \cup \{0\},$$

откуда непосредственно следует оценка

$$\limsup_{n \to \infty, \, n \in Q} \frac{1}{n} \log |F(n)| \leq \log r. \tag{11}$$

Далее, из теоремы Кореваара-Цеистры [10] в применении к функции $F$ и последовательности $Q$ следует, что

$$\limsup_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \log |F(x)| = \limsup_{n \to \infty, \, n \in Q} \frac{1}{n} \log |F(n)|. \tag{12}$$

Заметим, что коэффициенты ряда (10) удовлетворяют неравенствам

$$\left|\int_{\partial e} z^{p_n}\, d\mu(z)\right| \le \left|\int_{\partial D_r} z^{p_n}\, d\mu(z)\right| + |F(p_n)|,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Следовательно, с учетом (11), (12) получим

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{p_n} \log \left|\int_{\partial e} z^{p_n}\, d\mu(z)\right| \le \log r,$$

откуда, согласно формуле Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда, вытекает, что ряд (10) сходится для $|t| > r$.

Обозначим через $G_1(t), |t| > r$, сумму ряда (10). Поскольку функции $G(t), G_1(t)$ совпадают для $|t| > a$, то по теореме единственности аналитических функций оно совпадают для всех $t \in \overline{\mathbf{C}} \setminus e$. Отсюда, применив теорему единственности для преобразования Коши, получим, что мера $\mu$ сосредоточена на $\partial D_r$. Теперь уже вывод условия (9) из соотношений (8) не представляет трудности : достаточно отметить, что средние арифметические для частичных сумм степенного ряда произвольной функции $f$ из $A(\overline{D}_r)$ равномерно сходятся к ней на $\overline{D}_r$. Лемма 1 для случая $m = 1$ доказана.

Докажем теперь общий случай. Отметим сперва, что произвольная функция $f \in A(e_m(r, a))$ представима в виде суммы

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} f_k(z) \quad \text{при} \quad z \in e_m(r, a) \tag{13}$$

функций $f_k \in A(e_m(r, a))$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, таких, что

$$f_k\left(z \exp\left(i\frac{2\pi}{m}\right)\right) = \exp\left(i\frac{2\pi}{m}k\right) f_k(z) \quad \text{при} \quad z \in e_m(r, a). \tag{14}$$

В самом деле, чтобы убедиться в этом, достаточно положить

$$f_k(z) = \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{m-1} f\left(z \exp\left(i\frac{2\pi}{m}s\right)\right) \exp\left(-i\frac{2\pi}{m}ks\right),\ k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Из (14) следует, в частности, что $f_k(0) = 0$ при $k = 1, \ldots, m-1$.

Применяя теперь к каждой функции $f_k$ и последовательности $Q_k$ доказанный выше частный случай леммы, найдем многочлены $p_k(z), k = 0, 1, \ldots, m-1$ вида

$$p_k(z) = \sum_{n=0}^{s_k} c_{k,n}\, z^n, \quad c_{k,n} = 0 \quad \text{при} \quad n \notin Q_k \cup \{0\},$$

удовлетворяющие неравенствам

$$|f_k(z) - p_k(z)| < \frac{\varepsilon}{m} \quad \text{при} \quad z \in e_1(r, a),\ k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{15}$$

Каждый $p_k$, очевидно, удовлетворяет равенству (14) с заменой в нем $f_k$ на $p_k$.

Следовательно, положив

$$p(z) = \sum_{n=0}^{m-1} p_k(z),\ z \in \mathbf{C}$$

и учитывая (13)–(15) получим, что $p(z)$ - многочлен вида (6), удовлетворяющий (7). Лемма 1 полностью доказана.

**Лемма 2.** *Пусть $E_m$ - множество из Теоремы 2, $Q$ - подпоследовательность из* $\mathbf{N}$, *удовлетворяющая условию*

$$\Delta_{\min}(Q) > 1 - \frac{\theta(r, a)}{2\pi}, \quad \theta(r, a) = \inf_{t \in (r, a]} \theta(t), \tag{16}$$

*а $f$ - произвольная функция из $A(e_m(r, a))$, представимая в окрестности нуля степенным рядом вида (5). Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует многочлен $p$ вида (6), удовлетворяющий (7).*

**Доказательство.** Пусть $\pi(Q)$ - подпространство для $A(e)$, где $e = e_m(r, a)$, порожденное всеми многочленами вида (6). Требуется доказать, что $f \in \pi(Q)$. Согласно теоремам Хана-Банаха и Ф. Рисса достаточно доказать, что для произвольной комплексной меры Бореля $\mu$ на $\partial e$ из соотношений (8) следует (9). Возьмем произвольную меру $\mu$ указанного вида и рассмотрим ее преобразование Коши $G$. В силу соотношений (8) функция $G(t)$ в окрестности бесконечности $|t| > a$ представляется рядом Лорана (10). Докажем, что ряд (10) сходится для всех $t$, $|t| > r$. В самом деле, поскольку функция $G$ голоморфна в области $\overline{\mathbf{C}} \setminus e$, то в силу (10) этот ряд аналитически продолжается на $\overline{\mathbf{C}} \setminus e$. Из (16) вытекает, что на каждой окружности $\partial D_s$, $r < s \leq a$ существует открытая дуга $\theta(s)$, содержащаяся в $\overline{\mathbf{C}} \setminus e$ и удовлетворяющая соотношению

$$\Delta_{\max}(P) = 1 - \Delta_{\min}(Q) < \frac{\theta(s)}{2\pi}, \quad r < s \leq a.$$

Пусть $s$ - радиус сходимости ряда (10). Если бы $s > r$, то согласно теореме Фабри-Полиа [13] на любой открытой дуге окружности $\partial D_s$ раствора $\theta(s)$ этот

ряд обязательно имел бы хоть одну особую точку. Полученное противоречие показывает, что $s \leq r$, т.е. ряд (10) сходится при $|t| > r$. Теперь уже (9) легко следует из (8). Лемма 2 доказана.

## §3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Доказательства теорем основаны на Леммах 1 и 2 и аналогичны рассуждениям, использовавшимися Т. Карлеманом (см. [15]).

**Доказательства Теорем 1, 2.** Пусть $\{\partial D_{r_n}\}_1^\infty$ - последовательность окружностей из Теоремы 2. Возьмем последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}_0^\infty$ так, чтобы $\delta_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$, $\delta_n < \inf\{\varepsilon(z):\ z \in E_m \cap (\overline{D}_{r_{n+1}} \setminus D_{r_n})\}$ при $n = 0, 1, \ldots (r_0 = 0)$ и положим

$$\alpha_n = \delta_{n+1} - \delta_{n+2} \quad (\alpha_{-1} = 0).$$

Положим также $a_{k,n} = \Gamma_k \cap \partial D_{r_n}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$; $n = 1, 2, \ldots$.

Согласно комплексным аналогам известной теоремы Мюнца (см. [10] и [14], стр. 201) найдется многочлен $p_0$ вида (6) такой, что

$$|f(z) - p_0(z)| < \alpha_0 \quad \text{при} \quad z \in E_m \cap \overline{D}_{r_1}.$$

На первом шаге положим

$$h_1(z) = \begin{cases} p_0(z) & \text{при } z \in \overline{D}_{r_1}, \\ f(z) - \dfrac{a_{k,2} - z}{a_{k,2} - a_{k,1}} [f(a_{k,1}) - p_0(a_{k,1})] & \text{при } z \in \Gamma_k \cap (\overline{D}_{r_2} \setminus D_{r_1}), \end{cases}$$

где $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Так как $h_1 \in A(c_m(r_1, r_2))$, то по Лемме 1(2) найдется многочлен $p_1$ вида (6), для которого

$$|h_1(z) - p_1(z)| < \alpha_1 \quad \text{при} \quad z \in c_m(r_1, r_2).$$

В частности, имеем

$$|p_0(z) - p_1(z)| < \alpha_1 \quad \text{при} \quad z \in \overline{D}_{r_1}$$

и

$$|f(z) - p_1(z)| \leq \begin{cases} \alpha_1 & \text{при} \quad z = a_{k,2},\ k = 0, 1, \ldots, m-1, \\ \alpha_1 + \alpha_0 & \text{при} \quad z \in E_m \cap (\overline{D}_{r_2} \setminus D_{r_1}). \end{cases}$$

На $n$-том шаге положим

$$h_n(z) = \begin{cases} p_{n-1}(z) & z \in \overline{D}_{r_n}, \\ f(z) - \dfrac{a_{k,n+1} - z}{a_{k,n+1} - a_{k,n}} [f(a_{k,n}) - p_{n-1}(a_{k,n})] & z \in \Gamma_k \cap (\overline{D}_{r_{n+1}} \setminus D_{r_n}), \end{cases}$$

где $k = 0, 1, \ldots, m-1$, и по Лемме 1(2) найдем многочлен $p_n$ вида (6), для которого

$$|h_n(z) - p_n(z)| < \alpha_n \quad \text{при} \quad z \in e_m(r_n; r_{n+1});$$

в частности, имеем

$$|p_{n-1}(z) - p_n(z)| < \alpha_n \quad \text{при} \quad z \in \overline{D}_{r_n}$$

и

$$|f(z) - p_n(z)| \leq \begin{cases} \alpha_n & \text{при} \quad z = a_{k,n+1},\ k = 0, 1, \ldots, m-1, \\ \alpha_n + \alpha_{n-1} & \text{при} \quad z \in E_m \cap (\overline{D}_{r_{n+1}} \setminus D_{r_n}). \end{cases}$$

Полученные неравенства справедливы и при $n = 0$ (так как $\alpha_{-1} = 0$).

Если положить

$$g(z) = \lim_{n \to \infty} p_n(z) = p_0(z) + \sum_{k=0}^{\infty} (p_{k+1}(z) - p_k(z)),$$

то $g$ будет функцией из $H(D_R)$, поскольку определяющий ее полиномиальный ряд сходится локально-равномерно в $D_R$ и очевидно она имеет вид (3). Пусть теперь $z \in E_m$, например, $z \in E_m \cap (\overline{D}_{r_{n+1}} \setminus D_{r_n})$.

Тогда

$$f(z) - g(z) = [f(z) - p_n(z)] + [p_n(z) - g(z)],$$

где

$$|f(z) - p_n(z)| < \alpha_n + \alpha_{n-1},$$

$$|g(z) - p_n(z)| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} (p_{k+1}(z) - p_k(z)) \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k+1}.$$

Следовательно, имеем

$$|f(z) - g(z)| < \sum_{k=n-1}^{\infty} \alpha_k = \begin{cases} \delta_n & \text{при} \quad n > 0, \\ \delta_1 < \delta_0 & \text{при} \quad n = 0. \end{cases}$$

Учитывая выбор чисел $\delta_n$, получим

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon(z) \qquad \text{при} \quad z \in E_m.$$

Этим завершается доказательство Теорем 1,2.

ABSTRACT. Results on the possibility of uniform tangential approximations on curves from complex plane by entire or holomorphic in a disk functions possessing lacunary power series are established.

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Мергелян, "О представлении функций комплексного переменного рядами полиномов на замкнутых множествах," ДАН СССР, том 78, №3, стр. 405 - 408, 1951.
2. T. Carleman, "Sur un theoreme de Weierstrass," Ark. Mat. Astron. Fys., vol. 20, no. 4, pp. 1 – 5, 1927.
3. С. Н. Мергелян, "Равномерные приближения функций комплексного переменного," Успехи мат. наук, том 7, №2 (48), стр. 31 – 122, 1952.
4. N. U. Arakelian, "Approximation complexe et proprietes des functions analytiques," Actes Congres Internat. Math., t. 2, pp. 595 – 600, Nice, 1970; Gauthier - Villars, Paris, 1971.
5. A. Beurling, P. Malliavin, "On the closure of characters and the zeros of entire functions," Acta Math., vol. 118, pp. 79 – 93, 1967.
6. J. A. Siddiqi, "Approximation polynomiale sur un arc dans le plan complexe," Comp. rend. Acad. sci., vol. 277, no. 15, pp. 731 – 733, 1973.
7. J. Korevaar, "Lacunary forms of Walsh' approximation theorems," Труды Межд. Конф. по Теории Приближения Функций, стр. 229 – 237, Калуга, 1975; Наука, Москва, 1977.
8. P. Malliavin, J. A. Siddiqi, "Classes de fonctions monogenes et approximation par des sommes d'exponentielles sur un arc rectifiable de $\mathbb{C}$," Compt. rend. Acad. sci., vol. 282, no. 18, pp. 1091 – 1094, 1976.
9. J. Korevaar, "Müntz approximation on arcs and Macintyre exponents," Lect. Notes Math., vol. 747, pp. 205 - 218, 1979.
10. J. Korevaar, R. Zeinstra, "Transformees de Laplase pour les courbles a pent. bornee et un resultat correspondand du type Müntz–Szasz," Compt. rend Acad. sci., vol. 301, no. 14, pp. 695 – 698, 1985.
11. Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, "Равномерные приближения на комплексной плоскости многочленами с пропусками," ДАН СССР, том 235, №2, стр. 249 – 252, 1977.
12. В. А. Мартиросян, "О равномерном комплексном приближении многочленами с пропусками," Мат. сборник, том 120 (162), №4, стр. 151 – 172, 1983.
13. Л. Бибербах, Аналитическое Продолжение, М., Наука, 1967.
14. А. Ф. Леонтьев, Последовательности Полиномов из Экспонент, М.,Наука, 1980.
15. Д. Гайер, Лекции по Теории Аппроксимации в Комплексной Области, М., Мир, 1986.

10 Июня 1993

Институт математики
НАН Армении
Ереванский госуниверситет

# МЕТОД КОНСТРУКТИВНОГО ПОСТРОЕНИЯ ФАКТОРИЗАЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

А. Г. Камалян, В. А. Оганян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №3, 1993

В работе предлагается метод эффективной факторизации Винера-Хопфа для матриц-функций вида $FUF^{-1}$, где $F$ - рациональная матрица-функция, а факторизация матрицы-функции $U$ известна. Построены явные формулы факторизации относительно замкнутого контура.Эти формулы приведены в терминах базисов ядер конечного числа операторов, действующих в конечномерных пространствах. Получены также формулы для частных индексов.

## §0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Gamma$ - положительно ориентированный, спрямляемый замкнутый жорданов контур в комплексной плоскости $\mathbf{C}$, ограничивающий область $D_+$ $(0 \in D_+)$. Дополнение $D_+ \cup \Gamma$ в плоскости $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ обозначим через $D_-$.

Пусть $I$ - единичный оператор, а $S$ - оператор сингулярного проектирования вдоль $\Gamma$, действующий в пространстве $L_p$ $(L_p = L_p(\Gamma),\ 1 < p < \infty)$ :

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{i\pi} v.p. \int_\Gamma \frac{1}{\tau - t}\varphi(\tau)\, d\tau, \quad \varphi \in L_p.$$

Относительно контура $\Gamma$ дополнительно будем предполагать, что оператор $S$ ограничен в пространствах $L_p$. Как известно, этому предположению удовлетворяют в частности гладкие и слабо липшицевы контуры. Полное описание таких контуров можно найти в [1].

Введем проекторы $P_\pm = 1/2(I \pm S)$ и классы функций $L_p^+ = P_+ L_p$, $L_p^- = P_- L_p + \mathrm{const}$. В дальнейшем, множество $n$-мерных векторов ( матриц порядка $n \times n$) с элементами из класса $L$ будем обозначать через $L^n$ ($L^{n\times n}$). Пусть $R$ - алгебра рациональных функций с полюсами вне $\Gamma$. Для любой алгебры $A$ с единицей через $GA$ будем обозначать группу обратимых элементов алгебры $A$.

Напомним, что *правой обобщенной факторизацией Винер-Хопфа* (или просто правой обобщенной факторизацией) относительно контура $\Gamma$ матрицы-функции $W \in GL_\infty^{n\times n}$ в пространстве $L_p$ является представление

$$W(t) = W_-(t)\Lambda_W W_+(t), \quad t \in \Gamma, \tag{1}$$

где

(i) $W_+ \in [L_q^+]^{n\times n}$ $(q = p/(p-1))$, $W_+^{-1} \in [L_p^+]^{n\times n}$, $W_- \in [L_p^-]^{n\times n}$, $W_-^{-1} \in \in [L_q^-]^{n\times n}$, $\Lambda_W(t) = \operatorname{diag}[t^{\kappa_1}, \ldots, t^{\kappa_n}]$, а числа $\kappa_1 \geq \cdots \geq \kappa_n$ называемые *правыми частными индексами* $W$ являются целыми.

(ii) Оператор $W_- P_+ W_-^{-1}$ ограничен в $L_p^n$.

Если все частные индексы равны нулю, то факторизация называется *канонической*. Число $\kappa = \kappa_1 + \cdots + \kappa_n$ назовем *суммарным индексом* $W$. Для непрерывных матриц-функций $W$ число $\kappa$ равно индексу Коши $\det W$ : $\kappa = \operatorname{ind}_\Gamma \det W$.

Левая обобщенная факторизация определяется аналогично. Все результаты, полученные в этой работе, могут быть перенесены на случай левой обобщенной факторизации как независимо (см. Замечание 6), так и с использованием обычных связей между правой и левой факторизацией [2, 3]. Так как в дальнейшем мы будем рассматривать только правую обобщенную факторизацию, то условимся опускать термины "правая" и "обобщенная".

Введем оператор $T(W) = P_+ W + P_-$. В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться одним результатом И. Б. Симоненко (см. [2, 3]) :

Теорема S. *Оператор $T(W)$, действующий в $L_p^n$ $(1 < p < \infty)$, является фредгольмовым тогда и только тогда, когда матрица-функция $W$ допускает факторизацию в пространстве $L_p$. При выполнении этого условия*

$$\dim \operatorname{Ker} T(W) = -\sum_{\kappa_i \leq 0} \kappa_i, \qquad \dim \operatorname{Coker} T(W) = \sum_{\kappa_i \geq 0} \kappa_i, \qquad \operatorname{Ind} T(W) = -\kappa.$$

Эффективные критерии существования факторизации известны для широкого класса матриц-функций [2, 3]. В скалярном случае факторы $W_\pm$ можно найти в явном виде с помощью проекторов $P_\pm$. Однако в матричном случае $(n > 1)$ эффективные методы факторизации известны лишь для некоторых специальных

классов матриц-функций (в частности, треугольных [2, 3]) и функционально-коммутативных матриц-функций [3]).

Еще более узок класс матриц-функций, для которых в замкнутой форме построены факторизационные факторы и найдены формулы для частных индексов. Наиболее завершенные результаты были в этом направлении получены для матриц-функций, допускающих мероморфное продолжение в области $\Gamma_+$ [6 – 8].

В данной работе исследуется класс матриц-функций вида

$$W = FUF^{-1}, \quad F \in GR^{n\times n}, \tag{2}$$

где факторизация матрицы-функции $U$ предполагается известной. Возможность эффективной факторизации для таких матриц-функций, основанной на использовании метода "отщепления нулей" Ф. Д. Гахова [9], подчеркнута в работе [10]. Но в силу своего алгоритмического характера этот метод не позволяет в явном виде вычислить частные индексы и строить факторизацию.

Предложенный здесь метод позволяет вычислить частные индексы $W$ в терминах размерностей ядер конечного семейства операторов, действующих в конечномерных пространствах, явный вид которых восстанавливается с помощью матриц-функций $F$ и факторизационных факторов $U$ (см. §3). Факторы $W$ строятся с помощью базисов ядер этих операторов (см. §4). Получены также эффективные критерии канонической факторизации и устойчивости частных индексов $W$ (см. §3). Метод основан на одном операторном тождестве (§1), выраженном в форме матричного сцепления (matrical coupling) [11]. Это тождество позволяет свести исследование фредгольмовых характеристик оператора $T(W)$ свести к изучению конечномерного оператора, действующего на конечномерном пространстве (см. §2). Ранее, подобный подход был использован в работе [12], где построена каноническая факторизация матрицы-функции, известная под названием Хренкова-Даниэля (см. §5). В §5 приведены также примеры матриц-функций $W$, допускающих представление (2), и интересных с точки зрения приложения.

## §1. ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА МАТРИЧНОГО СЦЕПЛЕНИЯ

Пусть $A: X_1 \longmapsto Y_1$ и $B: Y_2 \longmapsto X_2$ - линейные ограниченные операторы, действующие в соответствующих банаховых пространствах. Операторы $A$ и $B$ называют *матрично сцепленными*, если существует обратимый матричный оператор

$$\Phi = \begin{pmatrix} A & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} : \quad X_1 \times X_2 \longmapsto Y_1 \times Y_2,$$

обратный которого имеет вид

$$\Psi = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B \end{pmatrix} : \quad Y_1 \times Y_2 \longmapsto X_1 \times X_2,$$

Оператор $B$ называют *индикатором* $A$, а равенство $\Phi^{-1} = \Psi$ - *соотношением сцепления* операторов $A$ и $B$. Определение и свойства матричного сцепления даны в работе [11]. Там, в частности, доказывается, что образ, ядро и обратный оператор (и другие фредгольмовы характеристики) оператора $A$ могут быть выражены в явном виде с помощью элементов соотношения сцепления и соответствующих объектов индикатора $B$. Здесь мы приведем одну частную реализацию этого метода, имеющую важное значение для дальнейшего.

Лемма 1. *Пусть $X_1, X_2$ - банаховы пространства, $T: X_1 \longmapsto X_2$, $K: X_1 \longmapsto X_2$ - линейные ограниченные операторы. Предположим, что оператор $T$ обладает обобщенным обратным $T^{(-1)}$ (т.е. $T = TT^{(-1)}T$, $T^{(-1)} = T^{(-1)}TT^{(-1)}$), а оператор $K$ нормально разрешим. Далее, пусть $Y_1 = Im\ K \times Ker\ T$ $Y_2 = Im\ K \times Ker\ T^{(-1)}$, $A: Y_1 \longmapsto Y_2$ - линейный оператор, действующий следующим образом:*

$$A = \begin{pmatrix} (I - KT^{(-1)})|_{Im\ K} & -K|_{Ker\ T} \\ (I - TT^{(-1)})|_{Im\ K} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

*где $I$ - тождественный оператор на $X_2$. Тогда операторы $T - K$ и $A$ матрично сцеплены.*

Доказательство. Введем следующие операторы:

$$B_1 = (-I|_{Im\ K} \quad I|_{Ker\ T^{(-1)}}) : \quad Y_2 \longmapsto X_2,$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} K \\ I - T^{(-1)}T \end{pmatrix} : \quad X_1 \longmapsto Y_1,$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} I_{\mathrm{Im}\,K} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \quad Y_2 \longmapsto Y_1,$$

$$C_1 = T^{(-1)} : \quad X_2 \longmapsto X_1, \qquad C_2 = (T^{(-1)}|_{\mathrm{Im}\,K} \quad I|_{\mathrm{Ker}\,T}) : \quad Y_1 \longmapsto X_1,$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} -KT^{(-1)} \\ I - TT^{(-1)} \end{pmatrix} : \quad X_2 \longmapsto Y_2.$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в равенстве

$$\begin{pmatrix} T-K & B_1 \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & A \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство является соотношением сцепления. Лемма доказана.

Из Леммы 1 и Теорем 1.1 и 1.2 работы [11] следует

**Теорема 1.** *В условиях Леммы 1 оператор $T-K$ имеет обобщенный обратный (соответственно, левый, правый, двусторонний) тогда и только тогда, когда $A$ имеет обобщенный обратный (соответственно, левый, правый, двусторонний). Если $A^{(-1)}$ - обобщенный обратный к $A$, то*

$$(T-K)^{(-1)} = C_1 - C_2 A^{(-1)} C_3$$

*является обобщенным обратным к $T-K$. Далее, $T-K$ - (полу)фредгольмов тогда и только тогда, когда (полу)фредгольмов оператор $A$, в этом случае*

$$\dim \mathrm{Ker}\,(T-K) = \dim \mathrm{Ker}\,A, \quad \dim \mathrm{Coker}\,(T-K) = \dim \mathrm{Coker}\,A,$$

$$Ker\,(T-K) = C_2(\,Ker\,A), \qquad \mathrm{Im}\,(T-K) = C_3^{-1}\,Im\,A.$$

**Замечание 1.** Теорема 1 представляет особый интерес в случае, когда $K$ - конечномерный оператор. В этом случае индикатор $A$ также является конечномерным. Если одновременно оператор $T$ фредгольмов, то $A$ действует из одного конечномерного пространства в другое. Таким образом, Теорема 1 позволяет восстанавливать обобщенный обратный, ядро и образ фредгольмова оператора при конечномерном возмущении с помощью решения одной конечной алгебраической системы. Следует отметить, что результаты такого рода встречаются у многих авторов (см. [12, 13]). В частности, в работе [12] при дополнительном предположении, что $T$ - фредгольмов оператор с нулевым индексом, а $K$ - конечномерный

оператор, исследование оператора $T - K$ сводится к оператору, совпадающему с $A$, заданному в виде (3). Применение метода сцепления позволяет не только освободиться от дополнительных предположений, но и сильно упростить доказательство.

## §2. ТЕОРЕМА ОБ ОБОБЩЕННОМ ОБРАТНОМ

Предположим, что матрица-функция $U \in GL_\infty^{n\times n}$ допускает факторизацию $U = U_- \Lambda_U U_+$ в пространстве $L_p$ $(1 < p < \infty)$, $\Lambda_U = \operatorname{diag}[t^{\kappa_1}, \ldots, t^{\kappa_n}]$, $F \in GR^{n\times n}$, а матрица-функция $W \in L_\infty^{n\times n}$ определена равенством (2). Обозначим матрицы-функции $t^{-j}U$, $t^{-j}W$ $(j \in \mathbb{Z})$ через $U_j, W_j$ соответственно (в частности, $U_0 \equiv U$, $W_0 \equiv W$). Из равенств

$$T(W_j) = F(P_+U_j + P_-)F^{-1} + (P_-F - FP_-)F^{-1} + (P_+F - FP_+)U_jF^{-1}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

следует справедливость представлений

$$T(W_j) = FT(U_j)F^{-1} - K_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где операторы $K_j$ определены равенством

$$K_j = \frac{1}{2}(FS - SF)(U_j - I)F^{-1}, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Так как $FS - SF$ является конечномерным, то конечномерными являются также операторы $K_j$ $(j \in \mathbb{Z})$. Если представить матрицу-функцию $F$ в виде

$$F(t) = \sum_{k=0}^{m_0} F_{0k}t^k + \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{m_i} F_{ik}\frac{1}{(t-\lambda_i)^k}, \quad F_{00}, F_{ik} \in \mathbf{C}^{n\times n},$$
$$i = 0, 1, \ldots, s; \quad k = 1, \ldots, m_i,$$

то

$$K_jy = \sum_{l=0}^{m_0-1} t^l\Phi_{0l}^{(j)}y + \sum_{i=1}^{s}\sum_{l=1}^{m_i}\frac{1}{(t-\lambda_i)^l}\Phi_{il}^{(j)}y, \quad y \in L_p^n, \quad j \in \mathbb{Z},$$

где $\Phi_{0l}^{(j)} : L_p^n \longmapsto \mathbf{C}^n$ $(l = 0, 1, \ldots, m_0 - 1)$ и $\Phi_{il}^{(j)} : L_p^n \longmapsto \mathbf{C}^n$ $(l = 0, 1, \ldots, m_i;$ $i = 1, \ldots, s)$ гомоморфизмы определенные по формулам :

$$\Phi_{0l}^{(j)}y = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sum_{k=l+1}^{m_0} F_{0k}\tau^{k-l-1}(U_j(\tau) - I)F^{-1}(\tau)y(\tau)\,d\tau,$$

$$\Phi_{il}^{(j)} y = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \sum_{k=l}^{m_i} \frac{1}{(\tau - \lambda_i)^{k-l+1}} F_{ik}(U_j(\tau) - I) F^{-1}(\tau) y(\tau)\, d\tau.$$

В силу Теоремы S, $FT(U_j)F^{-1}$ фредгольмов и, следовательно, обладает обобщенным обратным. Из представлений

$$FT(U_j)F^{-1} = F(P_+U_- + P_-U_+^{-1})(P_+t^{-j}\Lambda_U + P_-)U_+F^{-1} \tag{6}$$

следует, что $[FT(U_j)F^{-1}]^{(-1)}$ может быть найдена по формуле

$$C_1^{(j)} = [FT(U_j)F^{-1}]^{(-1)} = FU_+^{-1}(P_+t^j\Lambda_U^{-1} + P_-)(P_+U_-^{-1} + P_-U_+)F^{-1}, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Пусть $\Omega_j$ и $\Xi_j$ - ядра операторов $FT(U_j)F^{-1}$ и $C_1^{(j)}$ $(j \in \mathbb{Z})$, соответственно. Как видно из равенства (6) пространство $\Omega_j$ $(j \in \mathbb{Z})$ совпадает с множеством вектор-функций вида $FU_+^{-1}q$, где $q = \mathrm{col}\,[q_1, ..., q_n]$, а $q_i$ $(i = 1, ..., n)$ - произвольный многочлен степени не более $j - \kappa_i - 1$ и тождественно равный нулю при $\kappa_i \geq j$. Аналогично, из равенств (7) следует, что пространство $\Xi_j$ $(j \in \mathbb{Z})$ совпадает с множеством вектор-функций $FP_+U_-q$, где $q = \mathrm{col}\,[q_1, ..., q_n]$, а $q_i$ $(i = 1, ..., n)$ - многочлен степени не более $\kappa_i - j - 1$ и тождественно равный нулю при $\kappa_i \leq j$.

Как известно, оператор $\pi_j$, определенный равенством

$$\pi_j = I - FT(U_j)F^{-1}C_1^{(j)}, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$

является конечномерным проектором, см. [5]. Это утверждение легко следует из также конечномерности оператора $P_+t^{-j}\Lambda_U P_-$ и соотношения

$$\pi_j = FP_+U_-P_+t^{-j}\Lambda_U P_-(t^j\Lambda_U^{-1} - I)(P_+U_-^{-1} + P_-U_+)F^{-1}.$$

Введем операторы :

$$\begin{aligned} C_2^{(j)} &= \begin{pmatrix} C_1^{(j)} & I \end{pmatrix} : \quad \mathrm{Im}\, K_j \times \Omega_j \longmapsto L_p^n, \\ C_3^{(j)} &= \begin{pmatrix} -K_jC_1^{(j)} \\ \pi_j \end{pmatrix} : \quad L_p^n \longmapsto \mathrm{Im}\, K \times \Xi_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} A_1^{(j)} &= (I - K_jC_1^{(j)}) : \quad \mathrm{Im}\, K_j \longmapsto \mathrm{Im}\, K_j, \\ A_2^{(j)} &= -K_j : \quad \Omega_j \longmapsto \mathrm{Im}\, K_j, \end{aligned} \tag{10}$$

$$A_3^{(j)} = \pi_j : \quad \mathrm{Im}\, K_j \longmapsto \Xi_j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$A_j = \begin{pmatrix} A_1^{(j)} & A_2^{(j)} \\ A_3^{(j)} & 0 \end{pmatrix} : \quad \mathrm{Im}\, K_j \times \Omega_j \longmapsto \mathrm{Im}\, K_j \times \Xi_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Из представлений (4), Теоремы S и Теоремы 1 немедленно следует

**Теорема 2.** *Пусть* $F \in GR^{n\times n}$, $U \in GL_\infty^{n\times n}$ *и* $W = FUF^{-1}$. *Матрицы-функции* $W_j$ $(j \in \mathbb{Z})$ *допускают факторизацию в* $L_p$ $(1 < p < \infty)$ *и операторы* $T(W_j)$ *фредгольмовы в* $L_p$ *тогда и только тогда, когда матрица-функция* $U$ *допускает факторизацию в пространстве* $L_p$. *Если представление* $U = U_-\Lambda_U U_+$ *является факторизацией* $U$ *в пространстве* $L_p$, *то обобщенный обратный к* $T(W_j)$ *может быть построен по формуле*

$$T^{(-1)}(W_j) = C_1^{(j)} - C_2^{(j)} A_j^{(-1)} C_3^{(j)}, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{12}$$

*где операторы* $C_k^{(j)}$, $A_j$ $(k = 1,2,3;\ j \in \mathbb{Z})$ *определяются соотношениями (5), (8) – (11). Более того, справедливы равенства*

$$\begin{gathered}\dim \operatorname{Ker} T(W_j) = \alpha_j, \quad \dim \operatorname{Coker} T(W_j) = \beta_j, \\ \operatorname{Ker} T(W_j) = C_2^{(j)}(\operatorname{Ker} A_j), \quad \operatorname{Im} T(W_j) = (C_3^{(j)})^{-1}(\operatorname{Im} A_j),\end{gathered} \tag{13}$$

*где* $\alpha_j = \dim \operatorname{Ker} A_j$, $\beta_j = \dim \operatorname{Coker} A_j$, $j \in \mathbb{Z}$.

**Замечание 2.** Используя разложения типа (4), результаты подобного характера могут быть получены и для операторов $WP_+ + P_-$, $P_+ + WP_-$, $P_+ + P_-W$, $P_+W|_{[L_p^+]^n}$, $P_-W|_{[L_p^-]^n}$.

## §3. ФОРМУЛА ДЛЯ ЧАСТНЫХ ИНДЕКСОВ И НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ

Пусть матрица-функция $U$ допускает факторизацию $U = U_-\Lambda_U U_+$, а $W$ определена равенством (2). Тогда из Теоремы 2 следует, что матрица-функция $W$ также допускает факторизацию вида (1) с суммарным индексом $\kappa$. Из представления (4) при $j = 0$, конечномерности $K_0$ и Теоремы 5 следует, что суммарный индекс $U$ также равен $\kappa$ (см. [5]). Очевидно, что частные индексы $W_j$ $(j \in \mathbb{Z})$ равны числам $\kappa_1 - j, \ldots, \kappa_n - j$. Пользуясь Теоремами 5 и 2, получим

$$\alpha_j = \dim \operatorname{Ker} T(W_j) = \sum_{\kappa_i \le j} (j - \kappa_i), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{14}$$

Откуда, в частности, следует, что последовательность неотрицательных чисел $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ монотонно возрастает. Записав (14) в виде

$$\alpha_j = nj - \kappa + \sum_{\kappa_i > j} (\kappa_i - j), \quad j \in \mathbb{Z},$$

легко заметить, что

$$\begin{cases} \alpha_j = 0, & \text{при } j \le \kappa_n, \\ \alpha_j > \max[0, nj - \kappa], & \text{при } \kappa_n < j < \kappa_1, \\ \alpha_j = nj - \kappa, & \text{при } j \ge \kappa_1. \end{cases} \tag{15}$$

**Теорема 3.** *Пусть представление* $U = U_- \Lambda_U U_+$ *является факторизацией матрицы-функции* $U$ *в пространстве* $L_p$ $(1 < p < \infty)$, *операторы* $A_j$ $(j \in \mathbb{Z})$ *определены равенством (11),* $\alpha_j = \dim \operatorname{Ker} A_j$ *и матрица-функция* $W$ *определена равенством (2). Тогда* $\nu(j)$ *- количество частных индексов матрицы-функции* $W$, *равных* $j$, *определяется по формуле*

$$\nu(j) = \alpha_{j+1} - 2\alpha_j + \alpha_{j-1}, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

**Доказательство.** Записав формулу (14) в виде

$$\alpha_j = \sum_{m=-\infty}^{j} (j - m)\nu(m), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{17}$$

получим

$$\alpha_{j+1} - \alpha_j = \sum_{m \le j} \nu(m), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{18}$$

откуда следует равенство (16). Теорема доказана.

Как известно (теорема Гохберга-Крейна-Боярского), частные индексы матрицы-функции $W$ устойчивы при малых возмущениях тогда и только тогда, когда $\kappa_1 - \kappa_n \le 1$. Этот факт позволяет получить следующий эффективный критерий устойчивости частных индексов.

**Теорема 4.** *Пусть выполнены условия Теоремы 3,* $\kappa$ *- суммарный индекс матрицы-функции* $U$, *а целые числа* $q$ *и* $r$ $(0 \le r < n)$ *определяются из соотношения* $\kappa = qn + r$. *Тогда для устойчивости частных индексов* $W$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\alpha_q = 0, \qquad \alpha_{q+1} = n - r. \tag{19}$$

**Доказательство.** Пусть выполнены условия (19). Поскольку $n - r = n(q+1) - \kappa$, то из соотношения (15) следует, что $\kappa_1 \le q + 1$ и $\kappa_n \ge q$. Для доказательства достаточности остается применить теорему Гохберга-Крейна-Боярского.

Докажем необходимость. Из теоремы Гохберга-Крейна-Боярского следует существование таких $j \in \mathbb{Z}$, что

$$\nu(j) + \nu(j+1) = n, \qquad j\nu(j) + (j+1)\nu(j+1) = \kappa.$$

Отсюда имеем $jn + \nu(j+1) = \kappa$. Учитывая, что $\kappa = qn + r$, получим $\nu(q) = n - r$ и $\nu(q+1) = r$, т.е.

$$\kappa_1 = \cdots = \kappa_r = q+1, \qquad \kappa_{r+1} = \cdots = \kappa_n = q.$$

Равенства (19) следуют теперь из соотношений (17). Теорема доказана.

Заметим, что матрица-функция $W$ допускает каноническую факторизацию тогда и только тогда, когда $\alpha_0 = 0$ и $\kappa = 0$. Следующая теорема дает критерий канонической факторизации только посредством чисел $\alpha_j$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия Теоремы 3. Тогда, для того чтобы все частные индексы матрицы-функции $W$ равнялись числу $q$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\alpha_q = 0, \qquad \alpha_{q+1} = n.$$

*В частности, чтобы матрица-функция $W$ допускала каноническую факторизацию в пространстве $L_p$, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_1 = n$.*

**Доказательство.** Необходимость следует из Теоремы 4. Докажем достаточность. В силу (18) имеем $\alpha_{j+1} - \alpha_j \leq n$ $(j \in \mathbb{Z})$, причем равенство выполняется только при условии $j \geq \kappa_1$. Следовательно, $q \geq \kappa_1$. Осталось заметить, что из соотношений (15) следует, что $q \leq \kappa_n$. Теорема доказана.

**Замечание 3.** Для $j \notin [\kappa_n, \kappa_1]$ имеем $\nu(j) = 0$. Поскольку, $\kappa_n \geq -\alpha$ и $\kappa_1 \leq \beta_0$, то из соотношений (15) следует, что для определения частных индексов $W$ достаточно определить размерности ядер $\alpha_0 + \beta_0 - 1$ конечномерных операторов $A_{-\alpha_0+1}, \ldots, A_{\beta_0-1}$. Лучше всего начать вычисление $\alpha_j$ с $j = q$, где $q$ определяется из соотношения $\kappa = qn + r$ $(q, r \in \mathbb{Z},\ 0 \leq r < n)$. Далее следует уменьшать $j$ до тех пор, пока $\alpha_j$ станет равным нулю и увеличивать $j$, пока $\alpha_j$ станет равным $nj - \kappa$.

**Замечание 4.** Зафиксировав некоторые базисы пространств $\mathrm{Im}\ K_j$, $\Omega_j$, $\Xi_j$ ($j \in \mathbb{Z}$) и записав матричные представления операторов $A_j$ в этих базисах, Теоремы 3 - 5 можно сформулировать посредством рангов соответствующих матриц.

## §4. ФАКТОРИЗАЦИЯ

Введем подпространства $N_j \subset L_p^n$ ($j \in \mathbb{Z}$) равенствами $N_j = C_2^{(j)}(\mathrm{Ker}\ A_j)$, где операторы $C_2^{(j)}$, $A_j$ определены формулами (9) - (11).

**Лемма 2.** *Пусть матрица-функция $U \in GL_\infty^{n\times n}$ допускает факторизацию в пространстве $L_p$ : $U = U_- \Lambda_U U_+$. Пусть частные индексы матрицы-функции $W$, определенной равенством (2), принимают значения $\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_s$, т.е.*

$$\kappa_1 = \cdots = \kappa_{i_1} = \mu_1 > \kappa_{i_1+1} = \cdots = \kappa_{i_2} = \mu_2 > \cdots = \mu_{s-1}$$
$$> \kappa_{i_{s-1}+1} = \cdots = \kappa_n = \mu_s,$$

*а $\mu_{s+1} \in \mathbb{Z}$ - произвольное число, удовлетворяющее неравенству $\mu_{s+1} < \mu_s$. Тогда*

$$t^j N_{\mu_{i+1}+1} \subset N_{\mu_i+1}, \quad j = 0, 1, \ldots, \mu_i - \mu_{i+1}; \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

*Более того, подпространство*

$$N_{\mu_{i+1}+1} + tN_{\mu_{i+1}+1} + \cdots + t^{\mu_i-\mu_{i+1}} N_{\mu_{i+1}+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, s$$

*обладает прямым дополнением в пространстве $N_{\mu_i+1}$ с размерностью равной $\nu(\mu_i)$.*

**Доказательство.** Из Теоремы 2 следует, что $N_j = \mathrm{Ker}\ T(W_j)$. Пусть представление $W = \tilde{W}_- \Lambda_W \tilde{W}_+$ является некоторой факторизацией матрицы-функции $W$ в пространстве $L_p$. Как уже указывалось в §2, пространство $N_j$ ($j \in \mathbb{Z}$) совпадает с множеством вектор-функций $\tilde{W}_+^{-1} q$, где $q = \mathrm{col}\,[q_1, \ldots, q_n]$, а $q_i$ - многочлен степени не более чем $j - \kappa_i - 1$ и тождественно равный нулю при $\kappa_i > j$.

Пусть $Y_{11}, \ldots, Y_{1\nu(\mu_1)}, \ldots, Y_{s1}, \ldots, Y_{s\nu(\mu_s)}$ столбцы матрицы-функции $\tilde{W}_+^{-1}$, а $\mu_0 \in \mathbb{Z}$ - произвольное число, удовлетворяющее неравенству $\mu_0 > \mu_1$. Легко

видеть, что если $j \le \mu_s$, то $N_j = \{0\}$, а при $j \in (\mu_i, \mu_{i-1}]$ $(i = 1, \dots, s)$ в качестве базиса $N_j$ можно выбрать систему вектор-функций

$$\{t^l Y_{k,m} : k = i, \dots, s;\ m = 1, \dots, \nu(\mu_k);\ l = 0, 1, \dots, j - \mu_k - 1\}.$$

В частности

$$N_{\mu_i+1} = (N_{\mu_{i+1}+1} + \cdots + t^{\mu_i - \mu_{i+1}} N_{\mu_{i+1}+1}) + \{Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{i\nu(\mu_i)}\}, \quad i = 1, \dots, s, \tag{20}$$

откуда следуют все утверждения леммы. Лемма доказана.

Теперь докажем, что факторизационные факторы $W$ могут быть восстановлены с помощью базисных элементов пространств $N_j$ $(j \in \mathbb{Z})$.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия Леммы 2, $H_i$ $(i = 1, \dots, s)$ - некоторое прямое дополнение к пространству $N_{\mu_i+1} + \cdots + t^{\mu_i - \mu_{i+1}} N_{\mu_{i+1}+1}$ в пространстве $N_{\mu_i+1}$, система вектор-функций $X_{i1}, \dots, X_{i\nu(\mu_i)}$ есть произвольный базис в $H_i$ $(i = 1, \dots, s)$, а матрицы-функции $X, W_+, \Lambda_W, W_-$ определены следующим образом :*

$$X = [X_{11}, \dots, X_{1\nu(\mu_1)}, X_{21}, \dots, X_{s\nu(\mu_s)}], \quad W_+ = X^{-1},$$

$$\Lambda_W = \operatorname{diag}[t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}], \quad W_- = W W_+^{-1} \Lambda_W^{-1}.$$

*Тогда представление (1) является факторизацией $W$ в пространстве $L_p$.*

Доказательство. Используя обозначения Леммы 2, из (20) получим, что

$$X_{mi} = \sum_{k=m}^{s} \sum_{l=1}^{\nu(\mu_k)} q_{mi}^{kl} Y_{kl}, \quad m = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, \nu(\mu_m), \tag{21}$$

где $q_{mi}^{kl}$ - многочлен со степенью не выше, чем $\mu_m - \mu_k$. Рассмотрим матричные полиномы $Q_m^k$ $(k = 1, \dots, s;\ m = 1, \dots, s)$ порядка $\nu(\mu_k) \times \nu(\mu_m)$ :

$$Q_m^k = \begin{pmatrix} q_{m1}^{k1} & \cdots & q_{m\nu(\mu_m)}^{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m1}^{k\nu(\mu_k)} & \cdots & q_{m\nu(\mu_m)}^{k\nu(\mu_k)} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что равенства (21) эквивалентны матричному равенству $X = W^{-1} Q$, где $Q$ - блочная матрица-функция вида

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1^1 & 0 & \cdots & 0 \\ Q_1^2 & Q_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_1^s & Q_2^s & \cdots & Q_s^s \end{pmatrix}.$$

Из построения системы вектор-функций $X_{ki}$ $(k = 1, ..., s;\ i = 1, ..., \nu(\mu_k))$ следует их линейная независимость, а поскольку диагональные блоки $Q$ - постоянные матрицы, то $\det Q \equiv \text{const} \neq 0$. Следовательно, $W_+ = X^{-1} = Q^{-1}\tilde{W}_+$. Исходя из предположений, сделанных относительно $\tilde{W}_+$ и структуры матрицы-функции $Q^{-1}$, мы теперь можем применить теорему об общем виде факторов (см. [2], гл. VII, Теорема 1.2). Теорема 6 доказана.

**Замечание 5.** В случае канонической факторизации факторы могут быть построены иначе. В этом случае $W_+^{-1}$ можно взять равным $T^{(-1)}(W)E_n$, где $E_n$ - единичная матрица-функция порядка $n \times n$ (более подробно, см. [2], гл. VII, §3).

**Замечание 6.** Левая факторизация $W$ строится аналогичным образом. Для этого вместо операторов $T(U)$ и $T(W)$ надо взять $P_+ + P_-U$, $P_+ + P_-W$, а построение факторов начать с $W^{-1}$.

## §5. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Пусть $f \in GR$, $w_{11}, w_{12}, w_{22} \in L_\infty$. Рассмотрим матрицы функции порядка $(2 \times 2)$ вида

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ f^2 w_{12} + f(w_{11} - w_{22}) & w_{22} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Легко видеть, что $W = FUF^{-1}$, где

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ f & -f \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} w_{11} + f w_{12} & w_{11} - w_{22} \\ 0 & w_{22} - f w_{12} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, факторизация матрицы-функции (22) сводится к факторизации треугольной матрицы-функции $U$. Проблема эффективной факторизации треугольной матрицы-функции второго порядка достаточно хорошо исследована и ее подробное изложение можно найти в [2], гл. IV и в [3], гл. IV. Явная факторизация построена в работе [14].

Наиболее простым является случай $w_{11} = w_{22}$. Действительно, в этом случае $U$ - диагональная матрица, и ее явная факторизация сводится к факторизации двух скалярных функций $W_{11} \pm fW_{12}$. Матрица-функция такого вида, с более слабым требованием относительно $f$ (а именно с заменой $f \in R$ на $f^2 \in R$), известна в литературе под названием функции Хапкова-Даниэля. В связи с

приложениями в теории дифракции, акустики и упругости, она исследована многими авторами (см. [12], [15] - [21]). В работе [12] построена каноническая факторизация (22) при $W_{11} = W_{22} = 1$.

Заметим, что матрицы-функции вида (22) с точностью до подобия постоянной матрицы описывают класс матриц-функций вида $FUF^{-1}$ с матрицей-функцией $U$, имеющей верхне-треугольный вид и $F \in GR^{2\times 2}$. Действительно, если

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix},$$

то требуя, чтобы левый нижний элемент матрицы-функции $F^{-1}WF$ был равен нулю получим

$$w_{21} = \left(\frac{f_{21}}{f_{11}}\right)^2 w_{12} + \frac{f_{21}}{f_{11}}(w_{11} - w_{22}).$$

Требование $f_{11} \neq 0$ можно удовлетворить, переходя от $W$ к матрице-функции

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Рассмотрим матрицы-функции вида

$$W = \sum_{k=0}^{n-1} a_k Q^k, \quad a_k \in L_\infty, \quad Q \in \mathcal{R}^{n\times n}. \tag{23}$$

Без потери общности можно считать, что $Q$ - полиномиальная матрица.

Пусть $\varphi_j(\lambda, t)$ $(j = 1, 2, ..., m;\ m \leq n,\ \lambda \in \mathbf{C},\ t \in \Gamma)$ - элементарные делители матрицы-функции $Q$ над полем рациональных функций, $\phi_j$ - сопровождающие матрицы $\varphi_j(\lambda, t)$, $\phi = \mathrm{diag}\,[\phi_1, ..., \phi_m]$ - вторая нормальная форма $Q$, $F$ - преобразующая матрица-функция (см. [22]). Так как

$$W = F\left\{\sum_{k=0}^{n-1} a_k \phi^k\right\} F^{-1},$$

то факторизация $W$ редуцируется к факторизации матрицы-функции

$$V_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \phi_j^k.$$

В работе [23] указан способ сведения факторизации матриц-функций такого типа (а также общего вида (23)) к последовательному решению нескольких

скалярных задач Римана нас римановой поверхности, заданной неприводимыми алгебраическими уравнениями $\psi_j = 0$, где $\psi_j$ определяются из равенств $\varphi_j = \psi_j^*$. Алгоритм для конструктивного решения последней задачи можно найти в [24].

В частном случае, когда элементарный делитель имеет вид $\lambda^s - f(t)$, матрица-функция $V_j$ является $f$-циркулянтной и ее факторизация может быть сведена к факторизации рациональной матрицы-функции [25]. Указанному условию удовлетворяют матрицы-функции вида (23) с дополнительным условием $\operatorname{tr} Q = \operatorname{tr} Q^2 = \cdots = \operatorname{tr} Q^{n-1} = 0$ [26].

Подход, предлагаемый в данной работе, наиболее эффективен в том случае, когда все элементарные делители представляются в виде $\varphi_j = (\lambda - g_j)^{s_j}$ $(j = 1, \ldots, m)$. Действительно, тогда рациональным преобразованием матрицу-функцию $Q$ можно привести к третьей нормальной форме. Следовательно, матрица-функция вида (23) представима в виде (2), где $U$ имеет треугольную форму. Если $s_j = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$, то матрица-функция $U$ диагональна. Очевидно, что при непрерывности (либо кусочно-непрерывности) $W$, Теоремы 3 и 6 дают явные формулы для вычисления частных индексов и факторизационных факторов $W$ (ср. с [27]). В качестве примера матрицы-функции, обладающей указанным свойством, можно рассмотреть матрицу

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & f_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f_{n-1} \\ f_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

где $f_1 f_2 \cdots f_n = g^n$ и $g \in \mathcal{R}$.

**ABSTRACT.** The paper presents an effective method of Wiener-Hopf factorization for the matrix functions of the form $FUF^{-1}$, where $F$ is a rational matrix function and the factorization of the matrix function $U$ is known. Explicit formulas for factorization, relative to a closed contour are constructed. These formulas are given in terms of basises of kernels of finite number of operators acting in finite dimensional spaces. Also formulas for the partial indices are given.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Лынькин, Б. П. Осиленкер, "Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения", Итоги науки и техники, ВИНИТИ. Мат. анализ, том. 21,

стр. 42 – 192, 1983.
2. K. Clancey, I. Gohberg, "Factorization of matrix functions and singular integral operators", Operator Theory : Advances and Appl., vol. 3, Birkhäuser, Basel, 1981.
3. G. S. Litvinchuk, I. M. Spitkovski, Factorization of Matrix Functions, Akademie--Verlag, Berlin, 1987.
4. И. Б. Симоненко, "Некоторые общие вопросы теории краевой задачи Римана", Изв. АН СССР, сер. мат., том 32, №5, стр. 567 – 587, 1968.
5. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Введение в Теорию Одномерных Сингулярных Операторов, Кишинев, Штиинца, 1973.
6. I. Gohberg, L. Lerer, L. Rodman, "Factorization indices for matrix polynomials", Bull. AMS, vol. 84, pp. 275 277, 1978.
7. В. М. Адуков, "Факторизация Винера-Хопфа мероморфных матриц-функций", Алгебра и анализ, том 4, №1, стр. 54 – 74, 1992.
8. I. A. Ball, K. F. Clancey, "An elementary description of partial indices of rational matrix functions", Integral Equations and Operator Theory, vol. 13, pp. 316 - - 322, 1990.
9. Ф. Д. Гахов, "Краевая задача Римана для системы n пар функций", Успехи мат. наук, том 7, №4, стр. 3 – 54, 1952.
10. В. В. Гавдзинский, И. М. Спитковский, "Об одном способе эффективного построения факторизации", Укр. мат. журнал, том 34, №1, стр. 15 – 20, 1982.
11. H. Bart, I. Gohberg, M. A. Kaashoek "The coupling method for solving integral equations", Operator Theory : Advances and Appl., vol. 12, pp. 39 73, Birkhäuser, Basel, 1984.
12. A. B. Lebre, "Factorization in the Wiener algebra of a class of 2 x 2 matrix functions", Integral Equations and Operator Theory, vol. 12, pp. 408 423, 1989.
13. A. Pietsch, "Zur Theorie der $\sigma$-Transformation in lokalkonvexen Vectorraumen", Mathematische Nachrichten, vol. 21, no. 6, pp. 347 – 369, 1960.
14. В. М. Адуков, "Факторизация треугольных матриц-функций второго порядка", деп. в ВИНИТИ 01.12.82, №5930–82, стр. 1 – 14, 1982.
15. А. А. Храпков, "Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметрическим надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил", Прикл. мат. мех., том 35, стр. 677 – 689, 1971.
16. V. G. Daniele, "On the solution of two coupled Wiener–Hopf equations", SIAM J. Appl. Math., vol. 44, pp. 667 679, 1984.
17. A. D. Rawlins, "A note on the factorization of matrices occuring in Wiener–Hopf problems", IEEE Trans. Antennes Propag., vol. AP–28, pp. 933 – 934, 1980.
18. E. Meister, F.- O. Speck, "Wiener–Hopf factorization of certain non-rational matrix functions in mathematical physics", The Gohberg Anniversery Collection, vol. 11, pp. 385 – 394, Birkhäuser, Basel, 1989.
19. S. Prössdorf, F.- O. Speck, "A factorization procedure for two by two matrix functions on the circle with two rationally independent entries", Proc. Roy. Soc., Edinburgh, vol. 115, pp. 119 – 138, 1990.
20. Ю. А. Антипов, Н. Г. Моисеев, "Точное решение плоской задачи для составной

плоскости с разрезом, пересекающим линию раздела сред", Прикл. мат. мех., том 55, №4, стр. 662 – 671, 1991.
21. A. B. Lebre, A. F. des Santos, "Generalized factorization for a class of non-rational 2 x 2 matrix functions", Integral Equations and Operator Theory, vol. 13, no. 5, pp. 671 – 700, 1990.
22. Б. Л. Ван - дер - Варден, Алгебра, М., Наука, 1976.
23. Н. Г. Моисеев, "О факторизации матриц-функций специального вида", ДАН СССР, том. 305, №1, стр. 44 – 47, 1989.

24. Э. И. Зверович, "Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях", Успехи мат. наук, том 26, №1, стр. 113 - 179, 1971.
25. А. Г. Камалян, В. А. Оганян, "О факторизации $f$-циркулянтных матриц-функций", Изв. АН Армении, том 28, №1, стр. 38 - 54, 1993.
26. D. S. Jones, "Commutative Wiener-Hopf factorization of a matrix", Proc. Roy. Soc., London, Ser. A393, pp. 185 – 192, 1984.
27. А. Г. Камалян, "Эффективная факторизация некоторых классов матриц-функций", ДАН Армении, том. 93, №3, стр. 99 – 104, 1992.

13 Апреля 1992

Институт математики
НАН Армении

# ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА $L^{\Phi}_{\omega}(S^{n-1})$ И $L^{\Phi}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$

С. С. Казарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №3, 1993

Для функций $(w(x),\omega(x))$, определенных на единичной сфере $S^{n-1}$ $n$-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, найдены необходимые и достаточные условия, при которых выполняется следующее неравенство

$$\int_{S^{n-1}} \Phi(w(x)\tilde{M}(f,x))\omega(x)dx \le C\int_{S^{n-1}} \Phi(w(x)f(x))\omega(x)dx,$$

где $\tilde{M}(f,x)$ - максимальная функция Харди-Литтлвуда, определенная на $S^{n-1}$.

Аналогичный результат доказан для максимальной функции Харди-Литтлвуда, определенной в $\mathbb{R}^n$.

Эти неравенства дают возможность обобщить некоторые результаты теории гармонических функций и доказать весовые интегральные неравенства для класса Кальдерона- Зигмунда.

## §1. ВВЕДЕНИЕ

В 1930 Г. Харди И Дж. Литтлвуд [1] определили максимальную фукцию

$$M_1(f,x) = \sup_{i\in I}\frac{1}{|I|}\int_I |f(t)|dt, \tag{1.1}$$

где $I \subset \mathbb{R}^1$ - произвольный интервал, и доказали что для $p > 1$

$$\int_{\mathbb{R}^1}[M_1(f,x)]^p dx \le C_p\int_{\mathbb{R}^1}|f(x)|^p dx, \tag{1.2}$$

где $C_p > 0$ зависит только от $p$.

Максимальная функция Харди-Литтлвуда и ее модификации имеют важные приложения в гармоническом анализе, эргодической теории и в теории кратных интегралов (см. [2] - [4]).

В работах Г.Рауха [5], К. Смита [6] был доказан аналог теоремы Харди-Литтлвуда для единичной сферы $S^{n-1}$ $n$-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

В 1972 Б. Макенхаупт [7] нашел необходимое и достаточное условие на весовую функцию в $R^n$, при котором выполняется интегральное неравенство типа (1.2) . При этом в определении (1.1) supremum берется по всем кубам из пространства $\mathbb{R}^n$, содержащим точку $x$. Этот результат послужил толчком для получения многочисленных результатов в различных областях современной математики.

На сфере $S^{n-1}$ максимальная функция Харди-Литтлвуда определяется следующим образом :

$$\tilde{M}(f,x) = \sup_{x \in \tilde{Q}} \frac{1}{\sigma(\tilde{Q})} \int_{\tilde{Q}} |f(t)| d\sigma_t, \tag{1.3}$$

где supremum берется по всем сферическим сегментам $\tilde{Q}$, содержащим точку $x$, а $\sigma(\tilde{Q})$ - мера множества $\tilde{Q}$. Отметим, что сферический сегмент с центром в $t$ и радиусом $r$ есть множество : $\tilde{Q}(t,r) = \{y \in S^{n-1} : |y-t| < r\}$.

Используя результаты работ [8], [9] и [10], в [11] была доказана следующая

**Теорема А.** *Пусть $\omega(x) \geq 0$ - весовая функция, определенная на $S^{n-1}$. Для того, чтобы при всех $f \in L^p_\omega(S^{n-1})$, $1 < p < \infty$ выполнялось неравенство*

$$\int_{S^{n-1}} [\tilde{M}(f,t)]^p \omega(t) d\sigma_t \leq C_p \int_{S^{n-1}} |f(t)|^p \omega(t) d\sigma_t,$$

*где $C_p > 0$ - постоянная, не зависящая от $f$, необходимо и достаточно, чтобы для $\omega(t)$ выполнялось бы условие $A^\sigma_p$, т. е. для любого сферического сегмента $\tilde{Q} \subset S^{n-1}$*

$$\frac{1}{\sigma(\tilde{Q})} \int_{\tilde{Q}} \omega(t) d\sigma_t \Big[\frac{1}{\sigma(\tilde{Q})} \int_{\tilde{Q}} \omega(t)^{-\frac{1}{p-1}} d\sigma_t\Big]^{p-1} \leq C,$$

*где $C > 0$ не зависит от $\tilde{Q}$.*

Р. Керман и А. Торчинский [12] распространили результат Б. Макенхаупта на классы Орлича. Ими была доказана следующая теорема (см. §2 после необходимых определений).

**Теорема B.** *Пусть функция Юнга* $\Phi(t)$ *и ее дополнительная функция* $\Psi(t)$ *удовлетворяют условию* $\Delta_2$. *Тогда следующие условия (I), (II) и (III) эквивалентны* :

*(I)*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(M_n(f,x))\omega(x)dx \le C\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(f(x))\omega(x)dx,$$

*где постоянная* $C>0$ *не зависит от* $f$ ;

*(II) неотрицательная, локально-интегрируемая функция* $\omega(x)$ *принадлежит классу* $A_\Phi$ : *для всех кубов* $Q\subset \mathbb{R}^n$ *и любого* $\varepsilon>0$

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \varepsilon\omega(x)dx\right)\varphi\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon\omega(x)}\right)dx\right)\le K,$$

*где* $K>0$ *не зависит от* $Q$ *и произвольных чисел* $\varepsilon$ ;

*(III)* $\omega(x)\in A_{p_0^*}$, *где* $p_0^*$ - *нижний индекс функции Юнга* $\Phi(t)$ :

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)dx\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{-\frac{1}{p_0^*-1}}dx\right)^{p_0^*-1}\le D$$

*для всех кубов* $Q\subset \mathbb{R}^n$.

В работе [13] был доказан подобный результат в случае, когда весовая функция находится внутри метрики функции Юнга $\Phi$.

Следующая теорема была доказана в [13].

Для любой локально-интегрируемой функции $w(x)$ определим соответствующую максимальную функцию :

$$H_w(f,x)=\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}|w(x)|\int_Q\left|\frac{f(t)}{w(t)}\right|dt.$$

**Теорема C.** *Пусть функция Юнга* $\Phi(t)$ *и дополнительная к ней функция* $\Psi(t)$ *удовлетворяют условию* $\Delta_2$. *Пусть* $p_0^*$, $p_1^*$ - *нижний и верхний индексы функции* $\Phi(t)$, *а* $q_0^*$, $q_1^*$ - *нижний и верхний индексы функции* $\Psi(t)$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны* :

*(a')* *локально-интегрируемая функция* $w(x)$ *принадлежит классу* $B_\Phi$, *т.е. для любых кубов* $Q\subset \mathbb{R}^n$ *и* $\varepsilon>0$

$$\frac{1}{|Q|}\|\chi_Q w\|_{L_\Phi^*}\left\|\frac{\chi_Q}{\varepsilon w}\right\|_{L_\Phi^*}\le D_\Phi,$$

*где* $D_\Phi > 0$ *не зависит от* $Q$ *и* $\varepsilon$.

($b'$) $w(x) \in B_{p_i}$, $i = 0, 1$, *т.е. для любого куба* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *справедливы неравенства*

$$\frac{1}{|Q|}\|\chi_Q w\|_{L^{p_0}}\|\frac{\chi_Q}{w}\|_{L^{q_0}} \le D_{p_0},$$

$$\frac{1}{|Q|}\|\chi_Q w\|_{L^{p_1}}\|\frac{\chi_Q}{w}\|_{L^{q_1}} \le D_{p_1}.$$

($c'$) *Существует некоторая константа* $C_\Phi > 0$ *такая, что для любого* $\varepsilon > 0$ *и произвольной функции* $f \in L^\Phi$

$$\|H_w(f)\|_{L^\Phi_\varepsilon} \le C_\Phi \|f\|_{L^\Phi_\varepsilon}.$$

($d'$) *Существует постоянная* $C'_\Phi > 0$ *такая, что для произвольной функции* $f \in L^\Phi$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(H_w(f, x))dx \le C'_\Phi \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(f(x))dx.$$

($e'$) *Существует постоянная* $D'_\Phi > 0$ *такая, что для всех кубов* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *и любого* $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q S_\Phi(\varepsilon|w(x)|)dx\, \varphi\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \Psi(\frac{1}{\varepsilon|w(x)|})dx\right) \le D'_\Phi,$$

*где*

$$S_\Phi(\lambda) = \inf_{t>0} \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)}.$$

($f'$) *Справедливы неравенства*

$$\|H_w(f)\|_{L^{p_0}} \le C_{p_0}\|f\|_{L^{p_0}},$$

$$\|H_w(f)\|_{L^{p_1}} \le C_{p_1}\|f\|_{L^{p_1}},$$

*где* $C_{p_i} > 0$, $i = 0, 1$ *не зависит от* $f$.

Нам необходимы следующие определения.

**Определение 1.** Скажем, что пара функций $(w(x), \omega(x))$, $x \in S^{n-1}$, $\omega(x) \ge 0$, принадлежит классу $AB_\Phi(S^{n-1})$, если для любого сферического сегмента $\tilde{Q} \subset S^{n-1}$ и $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{\sigma(\tilde{Q})}\|\chi_{\tilde{Q}} w\|_{L^\Phi_\omega(S^{n-1})}\|\frac{\chi_{\tilde{Q}}}{\varepsilon\omega w}\|_{L^\Psi_\omega(S^{n-1})} \le D_\Phi, \tag{1.4}$$

где $D_\Phi > 0$ не зависит от $\tilde{Q}$.

**Определение 2.** Скажем, что пара локально-интегрируемых функций $(w(x), \omega(x))$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega(x) \geq 0$ принадлежит классу $AB_\Phi(\mathbb{R}^n)$, если для любого куба $Q \subset \mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{|Q|}\|\chi_Q w\|_{L^*_{\omega\omega}(\mathbb{R}^n)}\|\frac{\chi_Q}{\varepsilon\omega w}\|_{L^*_{\omega\omega}(\mathbb{R}^n)} \leq D'_\Phi, \tag{1.5}$$

где $D'_\Phi > 0$ не зависит от $Q$.

Для любой локально-интегрируемой функции $w(x)$ определим соответствующую максимальную функцию на $S^{n-1}$ следующим образом :

$$\tilde{H}_w(f, x) = \sup_{x \in \tilde{Q}} \frac{1}{\sigma(\tilde{Q})}|w(x)| \int_{\tilde{Q}} |\frac{f(t)}{w(t)}|d\sigma_t,$$

где $\tilde{Q} \subset S^{n-1}$ - сферический сегмент.

В §3 доказывается следующая

**Теорема 1.** *Пусть функция Юнга $\Phi(t)$ и дополнительная к ней функция $\Psi(t)$ удовлетворяют условию $\Delta_2$. Тогда следующие утверждения эквивалентны :*

*(a)* $(w(x), \omega(x)) \in AB_\Phi(S^{n-1})$.

*(b)* $(w(x), \omega(x)) \in AB_{p_i^*}(S^{n-1})$, $i = 1, 2$, *т.е. для любого сферического сегмента* $\tilde{Q} \subset S^{n-1}$ *справедливо следующее неравенство :*

$$\frac{1}{\sigma(\tilde{Q})}\|\chi_{\tilde{Q}} w\|_{L^{p_0^*}_{\omega^{p_0^*}}(S^{n-1})}\|\frac{\chi_{\tilde{Q}}}{\omega w}\|_{L^{q_0^*}_{\omega^{q_0^*}}(S^{n-1})} \leq D_0, \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{\sigma(\tilde{Q})}\|\chi_{\tilde{Q}} w\|_{L^{p_1^*}_{\omega^{p_1^*}}(S^{n-1})}\|\frac{\chi_{\tilde{Q}}}{\omega w}\|_{L^{q_1^*}_{\omega^{q_1^*}}(S^{n-1})} \leq D_1, \tag{1.7}$$

*где* $D_0 > 0$ *и* $D_1 > 0$ *не зависят от* $\tilde{Q}$.

*(c) Пусть* $w(x)$ *и* $\omega(x) \geq 0$ *интегрируемы на* $S^{n-1}$. *Тогда существует постоянная* $C'_\Phi > 0$ *такая, что*

$$\int_{S^{n-1}} \Phi(\tilde{H}_w(f, x))\omega(x)d\sigma_x \leq C'_\Phi \int_{S^{n-1}} \Phi(f(x))\omega(x)d\sigma_x. \tag{1.8}$$

*(d) Пусть* $w(x)$ *и* $\omega(x) \geq 0$ *интегрируемы на* $S^{n-1}$. *Тогда существует постоянная* $C''_\Phi > 0$ *такая, что*

$$\|\tilde{H}_w(f)\|_{L^*_{\omega\omega}(S^{n-1})} \leq C''_\Phi \|f\|_{L^*_{\omega\omega}(S^{n-1})}. \tag{1.9}$$

Эта теорема позволяет получить ряд результатов теории гармонических функций на сфере $S^{n-1}$.

Аналогично Теореме 1 доказывается следующая

Теорема 2. *Пусть функция Юнга* $\Phi(t)$ *и дополнительная к ней функция* $\Psi(t)$ *удовлетворяют условию* $\Delta_2$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны :*

$(a_1)$ $(w(x),\omega(x)) \in A\,B_\Phi(\mathbb{R}^n)$.

$(b_1)$ $(w(x),\omega(x)) \in A\,B_{p_i^*}(\mathbb{R}^n)$, $i=1,2$, *т.е. для любого куба* $Q \subset \mathbb{R}^n$ :

$$\frac{1}{|Q|}\|\chi_Q w\|_{L^{p_0^*}_{\omega_0}(\mathbb{R}^n)}\|\frac{\chi_Q}{\omega w}\|_{L^{q_1^*}_{\omega_1}(\mathbb{R}^n)} \le B_0, \tag{1.10}$$

$$\frac{1}{|Q|}\|\chi_Q w\|_{L^{p_1^*}_{\omega_1}(\mathbb{R}^n)}\|\frac{\chi_Q}{\omega w}\|_{L^{q_0^*}_{\omega_0}(\mathbb{R}^n)} \le B_1, \tag{1.11}$$

*где* $B_0>0$ *и* $B_1>0$ *не зависят от* $Q$.

$(c_1)$ *Пусть* $w(x)$ *и* $\omega(x)\ge 0$ *локально-интегрируемы на* $\mathbb{R}^n$. *Тогда существует постоянная* $B'_\Phi>0$ *такая, что*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(H_w(f,x))\omega(x)dx \le B'_\Phi\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(f(x))\omega(x)dx. \tag{1.12}$$

$(d)$ *Пусть* $w(x)$ *и* $\omega(x)\ge 0$ *локально-интегрируемы на* $\mathbb{R}^n$. *Тогда существует постоянная* $B''_\Phi>0$ *такая, что*

$$\|H_w(f)\|_{L^\Phi_{\omega w}(\mathbb{R}^n)} \le B''_\Phi\|f\|_{L^\Phi_{\omega w}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.13}$$

Теорема 2 обобщает Теоремы B и C.

## §2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\varphi$ - функция на $(0,\infty)$, удовлетворяющая условиям : $\varphi(0)=0$, $\varphi(\tau)>0$, при $\tau>0$, $\varphi$ не убывает и непрерывна справа $\lim_{\tau\to\infty}\varphi(\tau)=+\infty$.

Обозначим через

$$\Phi(t)=\int_0^{|t|}\varphi(\tau)d\tau$$

соответствующую функцию Юнга.

Скажем, что функция $\Phi$ удовлетворяет *условию* $\Delta_2$, если $\Phi(2t)\le B\Phi(t)$ для некоторого $B>0$.

Функция

$$\Psi(t)=\int_0^{|t|}\varphi^{-1}(\tau)d\tau,$$

где $\varphi^{-1}(\tau)=\sup\{s : \varphi(s)\le\tau\}$, называется *дополнительной* к $\Phi$. Пусть $x\in S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n : |x_1|^2+\cdots+|x_n|^2=1\}$. Весовое пространство Орлича

$L^{\Phi}_{\omega}(S^{n-1})$, где $\omega(x) \geq 0$ - интегрируемая функция на $S^{n-1}$, состоит из функций на $S^{n-1}$ таких, что

$$\left| \int_{S^{n-1}} u(x)v(x)\omega(x)dx \right| < \infty$$

для любой $v(x)$, уловлетворяющей условию

$$\int_{S^{n-1}} \Psi(v(x))\omega(x)dx < \infty.$$

Пространство $L^{\Phi}_{\omega}(S^{n-1})$ - банахово пространство относительно нормы Люксембурга, которое определяется следующим образом :

$$\|f\|_{L^{\Phi}_{\omega}(S^{n-1})} = \inf_{\int_{S^{n-1}} \Phi(\frac{|f(x)|}{k})\omega(x)dx \leq 1} k, \quad k > 0. \tag{2.1}$$

В дальнейшем сферу $S^{n-1}$ будем обозначать через $S$.

Мы будем использовать следующее свойство функции Юнга (см. [14], стр.37) :

$$C^{-1}t\varphi(t) \leq \Phi(t) \leq Ct\varphi(t). \tag{2.2}$$

B. Матусевска и В. Орлич в [15] рассмотрели функцию

$$\overline{S}_{\Phi}(\lambda) = \sup_{t>0} \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)}. \tag{2.3}$$

Справедлива следующая лемма (см. [16], стр. 35).

Лемма А. *Функция $\overline{S}_{\Phi}(\lambda)$ ограничена на любом компакте и существуют числа $p_0$ и $p_1$ $(p_0 \leq p_1)$ такие, что*

$$\overline{S}_{\Phi}(\lambda) = O(\max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1})) \tag{2.4}$$

*при $\lambda \to 0$ или $\lambda \to \infty$.*

Положим $p_0^* = \sup p_0$, $p_1^* = \inf p_1$, тогда

$$p_1^* = \inf_{1<\lambda<\infty} \frac{\ln \overline{S}_{\Phi}(\lambda)}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{\ln \overline{S}_{\Phi}(\lambda)}{\ln \lambda}, \tag{2.5}$$

$$p_0^* = \sup_{0<\lambda<1} \frac{\ln \overline{S}_{\Phi}(\lambda)}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\ln \overline{S}_{\Phi}(\lambda)}{\ln \lambda}. \tag{2.6}$$

Из определения функции $\overline{S}_{\Phi}(\lambda)$ следует, что существует постоянная $C > 0$ такая, что при $p_0 < p_0^*$ и $p_1 > p_1^*$

$$\Phi(\lambda t) \leq C \max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1})\Phi(t), \quad p_0 \leq p_1. \tag{2.7}$$

Пусть

$$\underline{S}_\Phi(\lambda) = \inf_{t>0} \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)}. \tag{2.8}$$

Справедливы следующие соотношения (см. [17]) :

$$p_0^* = \sup_{1<\lambda<\infty} \frac{\ln \underline{S}_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\ln \underline{S}_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda}, \tag{2.9}$$

$$p_1^* = \inf_{0<\lambda<1} \frac{\ln \underline{S}_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\ln \underline{S}_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda}. \tag{2.10}$$

Числа $p_0^*$ и $p_1^*$ называются *нижним* и *верхним* индексами функции $\Phi(t)$. Из работы [18] следует, что верхний и нижний индексы $q_0^*$ и $q_1^*$ дополнительной функции $\Psi(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\frac{1}{p_0^*} + \frac{1}{q_1^*} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{q_0^*} + \frac{1}{p_1^*} = 1. \tag{2.11}$$

## §3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

**Доказательство Теоремы 1.** Используя неравенства (2.2) условие (1.8) можно переписать в следующем виде :

$$\int_S \Phi(\tilde{H}_w(f,x))\omega(x)d\sigma_x \le \int_S \Phi(Cf(x))\omega(x)d\sigma_x, \tag{3.1}$$

где $C > 0$ не зависит от $f$.

Из определения нормы Люксембурга следует, что

$$\int_S \Phi\left(\frac{Cf(x)}{C\|f\|_{L^*_{\Phi\omega}}}\right)\varepsilon\omega(x)d\sigma_x \le 1,$$

поэтому в условии (3.1), заменяя $f$ на $f_1 = \frac{f}{C\|f\|_{L^*_{\Phi\omega}}}$, получаем

$$\|\tilde{H}_w(f)\|_{L^*_{\Phi\omega}(S)} \le D''_\Phi \|f\|_{L^*_{\Phi\omega}(S)}. \tag{3.2}$$

Таким образом, импликация $(c) \Longrightarrow (d)$ доказана.

Согласно определению максимальной функции $\tilde{H}_w(f,x)$

$$\frac{1}{\sigma(\tilde{Q})}\chi_{\tilde{Q}}(x)w(x)\int_Q |\frac{f(y)}{w(y)}|d\sigma_y \le \tilde{H}_w(\chi_{\tilde{Q}}f,x).$$

Поэтому, используя (3.2), получаем

$$\frac{1}{\sigma(\tilde{Q})}\|\chi_{\tilde{Q}}w\|_{L^*_{\Phi\omega}(S)}\int_{\tilde{Q}} |\frac{f(y)}{\varepsilon\omega(y)w(y)}|\varepsilon\omega(y)d\sigma_y \le C\|\chi_{\tilde{Q}}f\|_{L^*_{\Phi\omega}(S)},$$

откуда следует импликация $(d) \Longrightarrow (a)$.

Докажем теперь импликацию $(a) \Longrightarrow (b)$. Пусть $\tilde{Q}$ - сферический сегмент и $\tilde{Q}_N = \{x : |w(x)| \geq N\} \cap \tilde{Q}$. Согласно условиям (2.8) и (2.10) для произвольного $\varepsilon_1 > 0$ можем выбрать такое $\xi_N > 0$, что

$$\xi_N^{p_1^\bullet + \varepsilon_1} |w(x)|^{p_1^\bullet + \varepsilon_1} < \underline{S}_\Phi(\xi_N |w(x)|), \quad x \in \tilde{Q}'_N = \tilde{Q} \setminus \tilde{Q}_N,$$

где $p_1^\bullet$ - верхний индекс функции Юнга $\Phi(t)$. Для сферического сегмента $\tilde{Q}$ и любого числа $N$ имеем

$$\int_{\tilde{Q}'_N} \Phi\left(\frac{\xi_N w(x)}{k}\right) \omega(x) d\sigma_x \geq \Phi(1) \int_{\tilde{Q}'_N} \underline{S}_\Phi\left(\frac{\xi_N w(x)}{k}\right) \omega(x) d\sigma_x \geq$$

$$\geq \Phi(1) \int_{\tilde{Q}'_N} \left(\frac{\xi_N w(x)}{k}\right)^{p_1^\bullet + \varepsilon_1} \omega(x) d\sigma_x. \tag{3.3}$$

Из определения нормы Люксембурга и неравенств (3.3) получаем

$$\|\chi_{\tilde{Q}'_N} w\|_{L^{p_1^\bullet + \varepsilon_1}_{\omega}(S)} \leq C \|\chi_{\tilde{Q}'_N} w\|_{L^*_{\omega}(S)}, \tag{3.4}$$

где $C > 0$ не зависит от $Q$ и $N$.

Отсюда при $N \to \infty$ следует, что

$$\|\chi_{\tilde{Q}} w\|_{L^{p_1^\bullet + \varepsilon_1}_{\omega}(S)} \leq C \|\chi_{\tilde{Q}} w\|_{L^*_{\omega}(S)}. \tag{3.5}$$

Аналогично находим, что

$$\left\|\frac{\chi_{\tilde{Q}}}{\varepsilon \omega w}\right\|_{L^{q_1^\bullet + \varepsilon_2}_{\omega}(S)} \leq C \left\|\frac{\chi_{\tilde{Q}}}{\varepsilon \omega w}\right\|_{L^*_{\omega}(S)}, \tag{3.6}$$

где $q_1^\bullet$ - верхний индекс функции Юнга $\Psi(t)$.

Используя неравенства (3.5), (3.6) и условие (a) устанавливаем справедливость условий (1.6) и (1.7). Импликация $(a) \Longrightarrow (b)$ доказана.

Теперь докажем импликацию $(b) \Longrightarrow (c)$.

Положим

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{при } |f(x)| > \lambda \\ 0, & \text{при } |f(x)| \leq \lambda, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), & \text{при } |f(x)| \leq \lambda \\ 0, & \text{при } |f(x)| > \lambda. \end{cases}$$

Согласно условиям (1.6), (1.7) и неравенствам (3.5) (3.6), существуют числа $r_1 < p_0^*$ и $r_2 < p_1^*$ такие, что $\omega_i(x) = (\omega(x)|w(x)|^{r_i})$ удовлетворяют условию $A^{\sigma}_{r_i}$, $i = 1, 2$. Поэтому, так как $H_w(f, x) = w(x)\tilde{M}(f, x)$, то из Теоремы A получаем

$$\int_S |\tilde{H}_w(f_i, x)|^{r_i}\omega(x)d\sigma_x \le C_{r_i}\int_S |f_i(x)|^{r_i}\omega(x)d\sigma_x, \quad i = 1, 2. \tag{3.7}$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_{\tilde{Q}}(\{\tilde{H}_w(\chi_{\tilde{Q}}f_1, x) > \lambda\}) \le C_{r_1}\frac{1}{\lambda^{r_1}}\int_{\tilde{Q}} |f_1(x)|^{r_1}\omega(x)d\sigma_x; \tag{3.8}$$

$$\sigma_{\tilde{Q}}(\{\tilde{H}_w(\chi_{\tilde{Q}}f_2, x) > \lambda\}) \le C_{r_2}\frac{1}{\lambda^{r_2}}\int_{\tilde{Q}} |f_2(x)|^{r_2}\omega(x)d\sigma_x. \tag{3.9}$$

Используя свойство (2.2), находим

$$\int_{\tilde{Q}} \Phi(\tilde{H}_w(f, x))\omega(x)d\sigma_x \le C\int_0^{\infty} \sigma_{\tilde{Q}}(\{\tilde{H}_w(f, x) > \lambda\})\frac{\Phi(\lambda)}{\lambda}d\lambda. \tag{3.10}$$

Так как

$$\{\tilde{H}_w(f, x) > \lambda\} \subset \{\tilde{H}_w(f_1, x) > \frac{\lambda}{2}\} \cup \{\tilde{H}_w(f_2, x) > \frac{\lambda}{2}\},$$

то из (3.8)–(3.10) следует, что

$$\int_0^{\infty} \sigma_{\tilde{Q}}(\{\tilde{H}_w(\chi_{\tilde{Q}}f, x) > \lambda\})\frac{\Phi(\lambda)}{\lambda}d\lambda \le$$

$$\le 2^{r_1}C_{r_1}\int_{\tilde{Q}} |f(x)|^{r_1}\left(\int_0^{|f(x)|} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^{r_1+1}}d\lambda\right)\omega(x)d\sigma_x +$$

$$+2^{r_2}C_{r_2}\int_{\tilde{Q}} |f(x)|^{r_2}\left(\int_{|f(x)|}^{\infty} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^{r_2+1}}d\lambda\right)\omega(x)d\sigma_x. \tag{3.11}$$

Положим $r = \frac{r_1+p_0^*}{2}$ и $r' = \frac{r_2+p_1^*}{2}$, тогда из (3.11) и (2.7) вытекает

$$\int_{\tilde{Q}} |f(x)|^{r_1}\left(\int_0^{|f(x)|} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^{r_1+1}}d\lambda\right)\omega(x)d\sigma_x \le$$

$$\le C\int_{\tilde{Q}} |f(x)|^{r_1-r}\left(\int_0^{|f(x)|} \lambda^{r-r_1-1}d\lambda\right)\Phi(|f(x)|)\omega(x)d\sigma_x \le C_r\int_{\tilde{Q}} \Phi(f(x))\omega(x)d\sigma_x.$$

Подобным образом получаем, что

$$\int_{\tilde{Q}} |f(x)|^{r_2}\left(\int_{|f(x)|}^{\infty} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^{r_2+1}}d\lambda\right)\omega(x)d\sigma_x \le C_{r'}\int_{\tilde{Q}} \Phi(f(x))\omega(x)d\sigma_x.$$

Импликация $(b) \Longrightarrow (c)$ доказана и доказательство Теоремы 1 завершено.

Эта теорема позволяет доказать ряд теорем, обобщающих результаты братьев Рисс [19], Г. Рауха [5] и других.

**Теорема 3.** *Пусть функция Юнга $\Phi(l)$ и дополнительная к ней $\Psi(l)$ удовлетворяют условию $\Delta_2$. Пусть $u(r,x)$, $|x|=1$ - гармоническая функция в $n$-мерном шаре $B_n$ с граничным значением $f(x)$ на единичной сфере $S$. Если $w(x)$ и $\omega(x)\geq 0$ интегрируемы на $S$ и $w(x)f(x)\in L^{\Phi}_{\omega}(S)$, то интегральное неравенство*

$$\int_S \Phi(w(x)U(x))\omega(x)d\sigma_x \leq C_\Phi \int_S \Phi(w(x)f(x))\omega(x)d\sigma_x, \qquad (3.12)$$

*где $C_\Phi>0$ не зависит от $f$, а $U(x)=\sup_{0\leq r<1}|u(r,x)|$, имеет место тогда и только тогда, когда $(w(x),\omega(x))\in A\,B_\Phi(S)$.*

**Доказательство.** Достаточность следует из Теоремы 1 и того факта, что $U(x)\leq A_n M(f,x)$, $A_n>0$ (см. [5]).

Необходимость. Допустим, что неравенство (3.12) имеет место. Тогда, так же как при выводе (3.2) из (3.1), для любого $\varepsilon>0$ получаем

$$\|wU\|_{L^{\Phi}_{\omega}(S)}\leq C\|wf\|_{L^{\Phi}_{\omega}(S)}.$$

Отсюда следует

$$\|wu\|_{L^{\Phi}_{\omega}(S)}\leq C\|wf\|_{L^{\Phi}_{\omega}(S)}.$$

Возьмем произвольный сферический сегмент $\tilde{Q}_1\subset S$. Пусть неотрицательная функция $f(x)\geq 0$ равна нулю вне $\tilde{Q}_1$. Используя представление гармонической функции $u(r,x)$ через ядро Пуассона, получаем

$$u(r,x)\geq C\left(\frac{1}{\sigma(\tilde{Q}_1)}\int_{\tilde{Q}_1} f(t)d\sigma_t\right)\chi_{\tilde{Q}_1}(x),$$

где $\chi_{\tilde{Q}_1}(x)$ - характеристическая функция сегмента $\tilde{Q}_1$. Следовательно

$$\|\chi_{\tilde{Q}_1}w\|_{L^{\Phi}_{\omega}(S)}\left(\frac{1}{\sigma(\tilde{Q}_1)}\int_{\tilde{Q}_1} f(t)d\sigma_t\right)\leq C\|wf\|_{L^{\Phi}_{\omega}(S)}.$$

Положим $f_1(x)=w(x)f(x)$. Тогда

$$\frac{1}{\sigma(\tilde{Q}_1)}\|\chi_{\tilde{Q}_1}w\|_{L^{\Phi}_{\omega}(S)}\sup_{\|f_1\|_{L^{\Phi}_{\omega}(S)}=1}\int_{\tilde{Q}_1}\frac{f_1(t)}{\varepsilon\omega(t)w(t)}\varepsilon\omega(t)d\sigma_t\leq C,$$

откуда сразу следует условие (1.4). Теорема 3 доказана.

**Теорема 4.** *Пусть функция Юнга $\Phi(t)$ и дополнительная к ней $\Psi(t)$ удовлетворяют условию $\Delta_2$. Пусть $u(r,x)$ - гармоническая функция в шаре $B_n$ такая, что*

$$\int_S \Phi(w(x)u(r,x))\omega(x)d\sigma_x \le C'_\Phi, \quad 0 \le r < 1. \tag{3.13}$$

*Если $(w(x),\omega(x)) \in \Lambda B_\Phi(S)$, то*

$$\int_S \Phi(w(x)U(x))\omega(x)d\sigma_x \le C''_\Phi. \tag{3.14}$$

**Доказательство.** Пусть

$$U_R(x) = \sup_{0\le r<R<1} |u(r,x)|.$$

Тогда согласно Теореме 3 имеем

$$\int_S \Phi(w(x)U_R(x))\omega(x)d\sigma_x \le C\int_S \Phi(w(x)u(R,x))\omega(x)d\sigma_x \le CC'_\Phi.$$

Используя теорему Леви о предельном переходе под знаком интеграла получим неравенство (3.14).

**Теорема 5.** *Пусть функция Юнга $\Phi(t)$ и дополнительная к ней $\Psi(t)$ удовлетворяют условию $\Delta_2$. Предположим, что гармоническая функция $u(r,x)$ удовлетворяет условию (3.13), где $(w(x),\omega(x)) \in \Lambda B_\Phi(S)$. Тогда на сфере $S$ существует функция $f(x)$ такая, что*

$$\lim_{r\to 1}\int_S \Phi(w(x)(u(r,x)-f(x)))\omega(x)d\sigma_x = 0. \tag{3.15}$$

**Доказательство.** Канторовским диагональным процессом из последовательности функций $u(r_m,x)$, удовлетворяющих (3.13), где $r_m \to 1$ при $m \to \infty$, мы можем выделить такую подпоследовательность $u(r_{m_j},x)$, что для всех функций $G_y(x)$

$$F_y(G) = \lim_{j\to\infty}\int_S G_y(x)w(x)u(r_{m_j},x)\omega(x)d\sigma_x. \tag{3.16}$$

Согласно условию (3.13) $||w(\cdot)u(r_{m_j},\cdot)||_{L^{\Phi}_{\omega}(S)} \le C'_{\Phi}$, поэтому предел (3.16) существует для всех $G \in L^{\Psi}_{\omega}(S)$. Следовательно, существует функция $f(x)$ такая, что $w(x)f(x) \in L^{\Phi}_{\omega}(S)$ и

$$F(G_y) = \int_S G_y(x)w(x)f(x)\omega(x)d\sigma_x \tag{3.17}$$

для всех $G \in L^{\Psi}_{\omega}(S)$. Положим

$$u_k(|x|, \frac{x}{|x|}) = u((1-\frac{1}{k})|x|, \frac{x}{|x|}).$$

Тогда $u_k(|x|, \frac{x}{|x|})$ - гармоническая функция в открытом шаре $B_n = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < \frac{1}{1-\frac{1}{k}}\}$, следовательно

$$u_{k_j}(|y|, \frac{y}{|y|}) = \int_S P(x,y)u_{k_j}(1,x)d\sigma_x, \quad |y| = r,$$

где

$$P(x,y) = \frac{1}{m(S)} \cdot \frac{1-|y|^2}{|x-y|^n}$$

- ядро Пуассона для единичного шара $\mathbb{R}^n$. Зафиксируем произвольное $y \in B_n$ и возьмем

$$G_y(x) = \frac{P(x,y)}{w(x)\omega(x)}.$$

Тогда

$$F(G_y) = \lim_{j\to\infty} \int_S P(x,y)u_{k_j}(1,x)d\sigma_x = \int_S P(x,y)f(x)d\sigma_x. \tag{3.18}$$

По определению

$$\lim_{j\to\infty} u_{k_j}(|y|, \frac{y}{|y|}) = u(|y|, \frac{y}{|y|}),$$

поэтому из (3.18) следует, что

$$u(|y|, \frac{y}{|y|}) = \int_S P(x,y)f(x)d\sigma_x.$$

Так как $(w(x), \omega(x)) \in A\,B_{\Phi}(S)$, то $w(x)$ почти всюду конечна и отлична от нуля. Отсюда легко получаем, что функции вида $w(x)g(x)$, где $g(x)$ непрерывна на $S$, всюду плотны в пространстве $L^{\Phi}_{\omega}(S)$, откуда, не нарушая общности, можно предположить, что граничная функция $f(x)$ непрерывна на $S$.

Обозначим через $S_\delta(x)$ множество точек $x' \in S$, для которых $\rho(x,x') < \delta$. Тогда для $r = |y|$ и $x = \frac{y}{|y|}$ имеем

$$\int_S \Phi(w(x)(u(r,x) - f(x)))\omega(x)d\sigma_x \le \int_S \Phi(w(x)) \left( \int_{S_\delta(x)} p(x,x')|f(x') - f(x)|d\sigma_x + \right.$$

$$\left. + \int_{S_\delta^c(x)} p(x,x')|f(x') - f(x)|d\sigma_{x'} \right) \omega(x)d\sigma_x,$$

где $S_\delta^c(x) = S \setminus S_\delta(x)$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\int_{S_\delta(x)} p(x,x')|f(x') - f(x)|d\sigma_x \le \varepsilon.$$

Обозначим через $M$ верхнюю грань функции $|f(y)|$. Тогда

$$2M \int_{S_\delta^c(x)} p(x,x')d\sigma_{x'} < \varepsilon,$$

если $|x|$ достаточно близко к единице. Таким образом, справедливость соотношения (3.15) доказана.

Далее в работе будем рассматривать общий сингулярный интегральный оператор $T : f \to K * f$ в $\mathbb{R}^n$ с ядром, удовлетворяющим стандартным условиям:

$$(a'') \quad \|K\|_{L^\infty} \le C,$$

$$(b'') \quad |K(x)| < \frac{C}{|x|^n},$$

$$(c'') \quad |K(x) - K(x-y)| \le C\frac{|y|}{|x|^{n+1}} \quad \text{при} \quad |y| < \frac{|x|}{2}.$$

Для таких интегральных операторов справедлива следующая теорема, обобщающая теорему Р. Койфмана и Ч. Феффермана [20].

**Теорема 6.** *Пусть функция Юнга $\Phi(t)$ и дополнительная к ней $\Psi(t)$ удовлетворяют условию $\Delta_2$. Если $(w(x), \omega(x)) \in A B_\Phi(\mathbb{R}^n)$, где $w(x)$ и $\omega(x) \ge 0$ локально интегрируемы, то*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(w(x)T(f,x))\omega(x)dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(w(x)f(x))\omega(x)dx. \qquad (3.19)$$

Доказательство повторяет доказательство импликации $(a) \Longrightarrow (c)$ Теоремы 1. При этом сферический сегмент заменяется кубом в $\mathbb{R}^n$.

Для преобразования Гильберта

$$T_1(f,x) = \text{v.p.}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{x-y}dy$$

справедлива следующая

**Теорема 7.** *Пусть функция $\Phi(t)$ и дополнительная к ней $\Psi(t)$ удовлетворяют условию $\Delta_2$. Тогда для локально-интегрируемой на $\mathbb{R}^1$ функций $w(x)$ и $\omega(x) \geq 0$ интегральное неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^1}\Phi(w(x)T_1(f,x))\omega(x)dx \leq C\int_{\mathbb{R}^1}\Phi(w(x)f(x))\omega(x)dx \tag{3.20}$$

*имеет место тогда и только тогда, когда $(w(x),\omega(x)) \in A\,B_\Phi(\mathbb{R}^1)$.*

**Доказательство.** Необходимость. Возьмем произвольный интервал $I_o \subset \subset \mathbb{R}^1$. Обозначим через $I_1$ и $I_2$ половины интервала $I_o$. Пусть функция $f(x) \geq 0$ равна нулю вне $I_1$. Тогда

$$|w(x)T_1(f,x)| \geq C\left(\frac{1}{|I_1|}|w(x)|\int_{I_1}f(t)dt\right)\chi_{I_2}(x). \tag{3.21}$$

Следуя рассуждениям, проведенным при доказательстве импликации $(c) \Longrightarrow (d)$ Теоремы 1 или импликации $(c_1) \Longrightarrow (d_1)$ Теоремы 2, из условия (3.20) получаем, что для любого $\epsilon > 0$

$$\|wT_1(f)\|_{L^*_\omega(\mathbb{R}^1)} \leq C\|wf\|_{L^*_\omega(\mathbb{R}^1)}. \tag{3.22}$$

Отсюда, учитывая (3.21), имеем

$$\left(\frac{1}{|I_1|}\int_{I_1}f(t)dt\right)\|\chi_{I_2}w\|_{L^*_\omega(\mathbb{R}^1)} \leq C\|wf\|_{L^*_\omega(\mathbb{R}^1)}$$

или

$$\left(\frac{1}{|I_1|}\int_{I_1}\frac{f(t)}{w(t)}dt\right)\|\chi_{I_2}w\|_{L^*_\omega(\mathbb{R}^1)} \leq C\|f\|_{L^*_\omega(\mathbb{R}^1)}. \tag{3.23}$$

Подставляя $f(t) = \chi_{I_1}(t)w(t)$ в (3.23), получаем

$$\|\chi_{I_2}w\|_{L^*_\omega(\mathbb{R}^1)} \leq C\|\chi_{I_1}w\|_{L^*_\omega(\mathbb{R}^1)}. \tag{3.24}$$

Аналогично

$$\|\chi_{I_1} w\|_{L^*_{\omega}(\mathbb{R}^1)} \le C\|\chi_{I_2} w\|_{L^*_{\omega}(\mathbb{R}^1)}. \tag{3.25}$$

Теперь из (3.23)–(3.25) следует

$$\frac{1}{|I_1|}\|\chi_{I_1} w\|_{L^*_{\omega}(\mathbb{R}^1)} \int_{I_1} \frac{f(t)}{\varepsilon\omega(t)w(t)}\varepsilon\omega(t)dt \le C\|f\|_{L^*_{\omega}(\mathbb{R}^1)}.$$

Следовательно

$$\frac{1}{|I_1|}\|\chi_{I_1} w\|_{L^*_{\omega}(\mathbb{R}^1)}\|\frac{\chi_{I_1}}{\varepsilon\omega w}\|_{L^*_{\omega}(\mathbb{R}^1)} \le C.$$

Необходимость доказана. Достаточность следует из Теоремы 6.

Подобным образом доказывается

Теорема 8. *Пусть функция Юнга $\Phi(t)$ и дополнительная к ней $\Psi(t)$ удовлетворяют условию $\Delta_2$. Если $w(x)$ и $\omega(x) \ge 0$ - $2\pi$-периодические измеримые функции, то интегральное неравенство*

$$\int_T \Phi(w(x)\tilde{f}(x))\omega(x)dx \le C\int_T \Phi(w(x)f(x))\omega(x)dx$$

*с $\tilde{f}(x) = -\text{v.p.}\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cot\frac{(t-x)}{2}dt$ и $T = [-\pi,\pi)$ имеет место тогда и только тогда, когда $(w(x),\omega(x)) \in A\,B_\Phi(T)$.*

Отметим, что весовые неравенства для потенциалов Рисса в классах Орлича были получены в работах [21], [22].

**ABSTRACT.** For the pair of functions $(w(x),\omega(x))$ defined on the unite sphere $S^{n-1}$ of the $n$-dimension Euclidean space $\mathbb{R}^n$ necessary and sufficient conditions are found for which the following inequality

$$\int_{S^{n-1}} \Phi(w(x)\tilde{M}(f,x))\omega(x)dx \le C\int_{S^{n-1}} \Phi(w(x)f(x))\omega(x)dx$$

is satisfied, where $\tilde{M}(f,x)$ is the maximal Hardy-Littlewood function defined on the $S^{n-1}$. Analogous result is proved for the Hardy-Littlewood maximal function defined in $\mathbb{R}^n$.
With the help of these inequalities some results of the harmonic function theory are generalized and weighted integral inequalities for the class of Calderon-Zygmund operators are proved.

## ЛИТЕРАТУРА

1. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, "A maximal theorem with function-theoretic applications", Acta Math., vol. 54, pp. 81-116, 1930.

2. N. Wiener, "The ergodic theorem", Duke Math. J., vol. 5, pp.1-18, 1939.
3. A. P. Calderon, "A general ergodic theorem", Ann. Math., vol. 8, pp. 182–191, 1953.
4. A. P. Calderon, A. Zygmund, "On the existence of certain singular integrals", Acta Math., vol. 88, pp. 85–139, 1952.
5. H. E. Rauch, "Harmonic and analytic functions of several variables and the maximal theorem of Hardy and Littlewood", Canad. J. Math., vol. 8, pp. 171–188, 1956.
6. K. Smith, "A generalization of an inequality of Hardy and Littlewood", Canad. J. Math., vol. 8, pp. 157–170, 1956.
7. B. Muckenhoupt, "Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function", TAMS, vol. 165, pp. 207–226, 1972.
8. A. P. Calderon, "Inequalities for the maximal function relative to a metric", Studia Math., vol. 57, pp. 297–306, 1976.
9. R. Macias, C. Segovia, "A well-behaved quasi-distance for spaces of homogeneous type", Trab. Mat. Inst. Argentino, vol. 32, pp. 1–18, 1981.
10. H. Aimar, R. Macias, "Weighted norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal operator on spacees of homogeneous type", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 91, pp. 213–216, 1984.
11. К. С. Казарян, "Задача Дирихле в весовой метрике для шара в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$", ДАН СССР, том 301, №5, стр. 1044–1048, 1988.
12. R. Kerman, A. Torchinsky, "Integral inequalities with weights for the Hardy maximal functions", Studia Math., vol. 71, pp. 277–284, 1982.
13. С. С. Казарян, "Неравенства в пространствах Орлича для одной максимальной функции", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 22, №4, стр. 358–377, 1987.
14. М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, Выпуклые Функции и Пространства Орлича, Москва, 1958.
15. W. Matuszewska, W. Orlicz, "On certain properties of functions", Bull. Acad. Polon. Sci., vol. 8, no. 7, pp. 439–443, 1960.
16. J. Gustavsson, J. Peetre, "Interpolation of Orlicz spaces", Studia Math., vol. 60, pp. 33–59, 1977.
17. Е. Хилле, Р. Филипс, Функциональный Анализ и Полугруппы, М., ИЛ, 1962.
18. D. Boyd, "Indices of functions spaces and their relationship to interpolation", Canad. J. Math., vol. 21, pp. 1245–1254, 1969.
19. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, том I, Москва, 1965.
20. R. Coifman, C. Fefferman, "Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals", Studia Math., vol. 54, pp. 221–237, 1974.
21. В. М. Кокилашвили, "Весовые оценки для классических интегральных операторов", Нелинейный анализ, функциональные пространства и приложения, том 4, №119, стр. 86–103, 1990.
22. В. М. Кокилашвили, "Сингулярные интегралы в весовых классах Орлича", Труды Тбилис. Мат. Инст. Размадзе АН Груз. ССР, том 89, стр. 42–50, 1988.

7 Апреля 1991

Институт математики
АН Армении

# ЗАДАЧА ТИПА РИМАНА ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССЕ $L^1$

Г. М. Айрапетян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №3, 1993

В работе рассматривается задача типа Римана в $L^1$ для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} + a\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + bu = 0, \quad z \in D^+,$$

где $D^+ = \{z : |z| < 1\}$, $a, b$ - комплексные числа. При предположении, что корни соответствующего характеристического уравнения не совпадают, доказывается, что эта задача нетерова и ее индекс равен 4.

1. В данной работе, в единичном круге $D^+ = \{z : |z| < 1\}$ комплексной $z$-плоскости, для уравнения

$$L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} + a\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + bu = 0, \quad z \in D^+, \tag{1}$$

исследуется задача типа Римана : найти регулярное решение уравнения (1), которое удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to 1-0} \| \operatorname{Re} u(rt) - f_0(t)\|_1 = 0, \\ &\lim_{r\to 1-0} \| \operatorname{Re} \frac{\partial u(rt)}{\partial r} - f_1(t)\|_1 = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $a, b$ - комплексные числа, $f_0(t)$, $f_1(t)$ - действительные функции на $T = \{z : |z| = 1\}$ такие, что $f_0'(t), f_1(t) \in L^1(T)$, $\frac{\partial}{\partial r}$ - производная по радиусу круга $D^+$.

При предположении, что корни $\lambda_1$ и $\lambda_2$ характеристического уравнения $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ не совпадают, доказывается, что такая задача нетерова и ее индекс равен 4.

2. Общее решение уравнения (1) можно представить в виде

$$u(z) = e^{\lambda_1 \bar{z}}\varphi_1(z) + e^{\lambda_2 \bar{z}}\varphi_2(z), \quad z \in D^+, \tag{3}$$

где $\varphi_1, \varphi_2$ - произвольные аналитические функции в $D^+$.

Пусть $z = rt$, $r < 1$, $t \in T$. Подставляя (3) в (2), получим следующую граничную задачу относительно функций $\varphi_1$ и $\varphi_2$ :

$$\lim_{r\to 1-0} \| \operatorname{Re} (e^{\lambda_1 r\bar{t}}\varphi_1(rt) + e^{\lambda_2 r\bar{t}}\varphi_2(rt)) - f_0(t)\|_1 = 0,$$

$$\lim_{r\to 1-0} \| \operatorname{Re} (\lambda_1 \bar{t} e^{\lambda_1 r\bar{t}}\varphi_1(rt) + \lambda_2 r\bar{t} e^{\lambda_2 r\bar{t}}\varphi_2(rt) + \tag{4}$$

$$+ te^{\lambda_1 r\bar{t}}\varphi_1'(rt) + te^{\lambda_2 r\bar{t}}\varphi_2'(rt)) - f_1(t)\|_1 = 0.$$

Очевидно, что задача (1) - (2) эквивалентна граничной задаче (4) в классе аналитических в $D^+$ функций .

Введем в рассмотрение функции

$$\Psi_1(f_0, f_1, z) = \frac{e^{-\lambda_1/z}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\frac{\lambda_2}{2\pi i}\int_T f_0(\tau)\frac{\tau + z}{\tau - z}\frac{d\tau}{\tau} - \frac{z}{2\pi i}\int_T \frac{f_1(\tau) + \tau f_0'(\tau)}{2}\frac{\tau + z}{\tau - z}\frac{d\tau}{\tau}\right) \tag{5}$$

и

$$\Psi_2(f_0, f_1, z) = \frac{e^{-\lambda_2/z}}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{\lambda_1}{2\pi i}\int_T f_0(\tau)\frac{\tau + z}{\tau - z}\frac{d\tau}{\tau} - \right.$$

$$\left. - \frac{z}{2\pi i}\int_T \frac{f_1(\tau) + \tau f_0'(\tau)}{2}\frac{\tau + z}{\tau - z}\frac{d\tau}{\tau}\right). \tag{6}$$

Ясно, что функции $\Psi_1$ и $\Psi_2$ аналитичны в $D^+$ за исключением точки $z = 0$.

**Лемма 1.** *Функции $\Psi_1(f_0, f_1, z)$ и $\Psi_2(f_0, f_1, z)$ удовлетворяют условиям (4).*

**Доказательство.** Легко видеть, что функции $\Psi_1$ и $\Psi_2$ удовлетворяют равенствам

$$e^{\lambda_1/z}\Psi_1(f_0, f_1, z) + e^{\lambda_2/z}\Psi_2(f_0, f_1, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T f_0(\tau)\frac{\tau + z}{\tau - z}\frac{d\tau}{\tau}, \tag{7}$$

$$\frac{\lambda_1}{z}e^{\lambda_1/z}\Psi_1(f_0, f_1, z) + \frac{\lambda_2}{z}e^{\lambda_2/z}\Psi_2(f_0, f_1, z) + ze^{\lambda_1/z}\Psi_1'(f_0, f_1, z) +$$

$$+ ze^{\lambda_2/z}\Psi_2(f_0, f_1, z) == \frac{1}{2\pi i}\int_T f_1(\tau)\frac{\tau + z}{\tau - z}\frac{d\tau}{\tau}, \quad z \in D^+. \tag{8}$$

В силу равенства (7), для любого $r < 1$ и $|t| = 1$, имеем

$$\operatorname{Re} (e^{\lambda_1 r\bar{t}}\Psi_1(f_0, f_1, rt) + e^{\lambda_2 r\bar{t}}\Psi_2(f_0, f_1, rt)) =$$

$$= \operatorname{Re}\left((e^{\frac{\lambda_1 r}{t}} - e^{\frac{\lambda_1}{rt}})\Psi_1(f_0, f_1, rt) + (e^{\frac{\lambda_2 r}{t}} - e^{\frac{\lambda_2}{rt}})\Psi_2(f_0, f_1, rt)\right) +$$

$$+ \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_T f_0(\tau)\frac{\tau + rt}{\tau - rt}\frac{d\tau}{\tau}.$$

Учитывая, что

$$\left|e^{\frac{\lambda_j \tau}{t}} - e^{\frac{\lambda_j}{\tau t}}\right| < \text{const}\,(1-\tau), \quad j = 1, 2,$$

$$\lim_{\tau \to 1-0} \| \int_T f_0(\tau) \frac{\tau + \tau t}{\tau - \tau t} \frac{d\tau}{\tau} - f_0(t) \|_1 = 0,$$

получим первое равенство в (4). Для доказательства второго равенства в (4) выберем последовательность действительных функций $f_{jn}(t)$, $j, n = 1, 2$ так, чтобы $f_{jn}(t) \in C^{2+\alpha}(T)$ $(\alpha > 0)$ и $f_{jn}(t) \to f_j(t)$ при $n \to \infty$ по метрике $L^1(T)$. Согласно равенству (8) для любого $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$\text{Re}\,(\lambda_1 \bar{t} e^{\lambda_1 \bar{t}} \Psi_1(f_{0n}, f_{1n}, t) + \lambda_2 \bar{t} e^{\lambda_2 \bar{t}} \Psi_2(f_{0n}, f_{1n}, t) +$$

$$+ t e^{\lambda_1 \bar{t}} \Psi_1'(f_{0n}, f_{1n}, t) + t e^{\lambda_2 \bar{t}} \Psi_2'(f_{0n}, f_{1n}, t)) = f_{1n}(t), \quad t \in T.$$

Так как функции $\Psi_1(f_0, f_1, z)$ и $\Psi_2(f_0, f_1, z)$ принадлежат классу $C^{1+\alpha}(D_\varepsilon)$, где $D_\varepsilon = \{z : \varepsilon \le |z| \le 1\}$, $\alpha, \varepsilon > 0$, то для любого $n = 1, 2, \ldots$ также имеем

$$\lim_{r \to 1-0} \| \text{Re}\,(\lambda_1 \bar{t} e^{\lambda_1 r \bar{t}} \Psi_1(f_{0n}, f_{1n}, rt) + \lambda_2 \bar{t} e^{\lambda_2 r \bar{t}} \Psi_2(f_{0n}, f_{1n}, rt) +$$

$$+ t e^{\lambda_1 r \bar{t}} \Psi_1'(f_{0n}, f_{1n}, rt) + t e^{\lambda_2 r \bar{t}} \Psi_2'(f_{0n}, f_{1n}, rt)) - f_{1n}(t) \|_1 = 0. \tag{9}$$

Далее

$$\text{Re}\,(\lambda_1 \bar{t} e^{\lambda_1 r \bar{t}} \Psi_1(f_0, f_1, rt) + \lambda_2 \bar{t} e^{\lambda_2 r \bar{t}} \Psi_2(f_0, f_1, rt) +$$

$$+ t e^{\lambda_1 r \bar{t}} \Psi_1'(f_0, f_1, rt) + t e^{\lambda_2 r \bar{t}} \Psi_2'(f_0, f_1, rt)) - f_1(t) = J_1(r, t) + J_2(r, t),$$

где

$$J_1(r, t) = \text{Re}\,(\lambda_1 \bar{t} e^{\lambda_1 r \bar{t}} \Psi_1(f_{0n}, f_{1n}, rt) + \lambda_2 \bar{t} e^{\lambda_2 r \bar{t}} \Psi_2(f_{0n}, f_{1n}, rt) +$$

$$+ t e^{\lambda_1 r \bar{t}} \Psi_1'(f_{0n}, f_{1n}, rt) + t e^{\lambda_2 r \bar{t}} \Psi_2'(f_{0n}, f_{1n}, rt)) - f_{1n}(t),$$

$$J_2(r, t) = \text{Re}\,(\lambda_1 \bar{t} e^{\lambda_1 r \bar{t}} \Psi_1(f_0 - f_{0n}, f_1 - f_{1n}, rt) + \lambda_2 \bar{t} e^{\lambda_2 r \bar{t}} \Psi_2(f_0 - f_{0n}, f_1 - f_{1n}, rt) +$$

$$+ t e^{\lambda_1 r \bar{t}} \Psi_1'(f_0 - f_{0n}, f_1 - f_{1n}, rt) + t e^{\lambda_2 r \bar{t}} \Psi_2'(f_0 - f_{0n}, f_1 - f_{1n}, rt)) - [f_1(t) - f_{1n}(t)].$$

Используя равенство (7), получим

$$J_2(r, t) = \text{Re}\,((\lambda_1 \bar{t} e^{\lambda_1 r \bar{t}} - \frac{\lambda_1}{rt} e^{\frac{\lambda_1}{rt}}) \Psi_1(f_0 - f_{0n}, f_1 - f_{1n}, rt) +$$

$$+ (\lambda_2 \bar{t} e^{\lambda_2 r \bar{t}} - \frac{\lambda_2}{rt} e^{\frac{\lambda_2}{rt}}) \Psi_2(f_0 - f_{0n}, f_1 - f_{1n}, rt) +$$

$$+(\bar{l}e^{\lambda_1 r\bar{l}} - \frac{1}{rl}e^{\frac{\lambda_1}{rl}})\Psi_1'(f_0 - f_{0n}, f_1 - f_{1n}, rl)+$$

$$+(\bar{l}e^{\lambda_2 r\bar{l}} - \frac{1}{rl}e^{\frac{\lambda_2}{rl}})\Psi_2'(f_0 - f_{0n}, f_1 - f_{1n}, rl))+$$

$$+ \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_T [f_1(\tau) - f_{1n}(\tau)]\frac{\tau + rl}{\tau - rl}\,\frac{d\tau}{\tau} - [f_1(t) - f_{1n}(t)].$$

Так как

$$\left|\lambda_j \bar{l}e^{\lambda_j r\bar{l}} - \frac{\lambda_j}{rl}e^{\frac{\lambda_j}{rl}}\right| < \text{const}\,(1-r), \quad j = 1, 2,$$

$$\| \int_T f(\tau)\frac{1-r^2}{|\tau - rl|^2}\,|d\tau| \,\|_1 \le \text{const}\,\|f\|_1, \quad f \in L^1(T),$$

$$\lim_{r\to 1-0} \| \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_T [f_1(\tau) - f_{1n}(\tau)]\frac{\tau + rl}{\tau - rl}\,\frac{d\tau}{\tau} - [f_1(t) - f_{1n}(t)]\|_1 = 0,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ существует $r_0 < 1$ и $N_0$ такие, что $\|J_2(\tau, t)\|_1 < \varepsilon$, если $r_0 < r < 1$ и $n > N_0$. С учетом (9) доказательство Леммы 1 завершается.

3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} + a\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + bu = g(z), \quad z \in D^+ \tag{10}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to 1-0} \| \operatorname{Re} u(rt)\|_1 = 0, \\ &\lim_{r\to 1-0} \| \operatorname{Re}\frac{\partial u(rt)}{\partial r}\|_1 = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где $g(z)$ - бесконечно-дифференцируемая функция на $\overline{D}^+$. Справедлива

Лемма 2. *Любое решение $u(z)$ задачи (10), (11) является бесконечно-дифференцируемой функцией на $\overline{D}^+$.*

Доказательство. Положим

$$g_1(z) = -\frac{e^{\lambda_1 \bar{z}}}{\pi}\iint\limits_{D^+}\frac{e^{-\lambda_1\bar{\zeta}}g(\zeta)}{\tau - z}\,d\xi\,d\eta, \quad z \in D^+, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Функцию $u(z)$ можно представить в виде

$$u(z) = e^{\lambda_1 \bar{z}}\varphi_1(z) + e^{\lambda_2 \bar{z}}\varphi_2(z) + G(z), \tag{12}$$

где $\varphi_1$ и $\varphi_2$ - некоторые аналитические функции в $D^+$ и

$$G(z) = -\frac{e^{\lambda_2 \bar{z}}}{\pi}\iint\limits_{D^+}\frac{e^{-\lambda_2\bar{\zeta}}g_1(\zeta)}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta, \quad z \in D^+.$$

Подставляя (12) в (11), относительно функций $\varphi_1$ и $\varphi_2$ получаем условия :

$$\lim_{r\to 1-0} \| \operatorname{Re}\left(e^{\lambda_1 r\bar{t}}\varphi_1(rt) + e^{\lambda_2 r\bar{t}}\varphi_2(rt) + G(rt)\right)\|_1 = 0, \tag{13}$$

$$\lim_{r\to 1-0} \| \operatorname{Re}\left(\lambda_1 \bar{t} e^{\lambda_1 r\bar{t}}\varphi_1(rt) + \lambda_2 \bar{t} e^{\lambda_2 r\bar{t}}\varphi_2(rt) + G(rt) + \right.$$

$$\left. + t e^{\lambda_1 rt}\varphi_1'(rt) + t e^{\lambda_2 rt}\varphi_2'(rt) + tG'(rt)\right)\|_1 = 0, \tag{14}$$

Отметим, что детерминант, составленный из коэффициентов производных искомых аналитических функций $\varphi_1$ и $\varphi_2$ в задаче (13), (14) обращается тождественно в нуль. Поэтому здесь нельзя применить результаты работы [1]. Обозначая

$$f_{0r}(t) = \operatorname{Re}\left(e^{\lambda_1 r\bar{t}}\varphi_1(rt) + e^{\lambda_2 r\bar{t}}\varphi_2(rt) + G(rt)\right), \quad t \in T,$$

получаем

$$\operatorname{Re}\left(e^{\lambda_1 \frac{r}{t}}\varphi_1(rt) + e^{\lambda_2 \frac{r}{t}}\varphi_2(rt)\right) = f_{0r}(t) - \operatorname{Re} G(rt) \tag{15}$$

и

$$\lim_{r\to 1-0} \|f_{0r}(t)\|_1 = 0. \tag{16}$$

Так как функция $e^{\lambda_k r z^{-1}}\varphi_k(rz)$ $(k = 1, 2)$ аналитична в кольце $0 < |z| < r^{-1}$, то ее можно представить в виде

$$e^{\lambda_k \frac{r}{z}}\varphi_k(rz) = \phi_{kr}^+(z) + \phi_{kr}^-(z), \quad k = 1, 2.$$

Функции $\phi_{kr}^+(z)$ и $\phi_{kr}^-(z)$ аналитичны в областях $D^+$ и $D^- = \{z : |z| > 1\}$, соответственно, причем

$$\phi_{kr}^+(z) = \frac{(r+1)s}{4r\pi i}\int_T \frac{e^{\frac{2\lambda_k r^2}{(1+r)\tau}}\varphi_k\left(\frac{s(1+r)}{2}\tau\right)}{\frac{s(r+1)}{2r}\tau - z}\, d\tau, \quad s < 1, \quad k = 1, 2 \tag{17}$$

и

$$\phi_{kr}^-(z) = \frac{1}{4\pi i}\int_T \frac{e^{\frac{2\lambda_k r}{\tau}}\varphi_k\left(\frac{r}{2}\tau\right)}{\frac{1}{2}\tau - z}\, d\tau, \quad |z| > \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \tag{18}$$

где $s > 0$ - произвольное число, $|z| < s$.

Теперь (15) можно переписать следующим образом :

$$\operatorname{Re}\left(\phi_{1r}^+(t) + \phi_{2r}^+(t)\right) = f_{0r}(t) + \operatorname{Re} G(rt) - \operatorname{Re}\phi_{1r}^-(t) - \operatorname{Re}\phi_{2r}^-(t), \quad t \in T.$$

Применяя формулу Шварца, получаем

$$\phi_{1r}^{+}(z)+\phi_{2r}^{+}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{T}[f_{0r}(\tau)-\ \mathrm{Re}\,(G(r\tau)+\phi_{1r}^{-}(\tau)+\phi_{2r}^{-}(\tau))]\frac{\tau+z}{\tau-z}\,d\tau. \quad (19)$$

Положим

$$\phi_{k}^{-}(t)=\lim_{r\to 1-0}\phi_{kr}^{-}(t)=\frac{1}{4\pi i}\int_{T}\frac{e^{\frac{2\lambda_k}{\tau}}\varphi_k(\tau)}{\frac{1}{2}\tau-t}\,d\tau,\quad t\in T,\quad k=1,2.$$

Учитывая (16) и переходя к пределу в (19), при $r\to 1-0$, получим

$$\phi_{1}^{+}(z)+\phi_{2}^{+}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{T}[\ \mathrm{Re}\,(G(\tau)+\phi_{1}^{-}(\tau)+\phi_{2}^{-}(\tau))]\frac{\tau+z}{\tau-z}\,d\tau, \quad (20)$$

где

$$\phi_{k}^{+}(z)=\frac{s}{2\pi i}\int_{T}\frac{e^{\frac{\lambda_1}{s\tau}}\varphi_k(s\tau)}{s\tau-z}\,d\tau,\quad |z|<s,\quad 0<s<1. \quad (21)$$

Так как $G(t)$, $\phi_1^-(t)$ и $\phi_2^-(t)$ бесконечно-дифференцируемые функции на $T$, то правая часть равенства (20) представляет бесконечно-дифференцируемую функцию на $\overline{D}^+$. Полагая

$$F_1(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{T}\mathrm{Re}\,(G(\tau)+\phi_{1}^{-}(\tau)+\phi_{2}^{-}(\tau))\frac{\tau+z}{\tau-z}\,d\tau,\quad z\in D^{+}$$

и учитывая (20) и (21), получаем

$$\frac{s}{2\pi i}\int_{T}\frac{e^{\frac{\lambda_1}{s\tau}}\varphi_1(s\tau)}{s\tau-z}\,d\tau+\frac{s}{2\pi i}\int_{T}\frac{e^{\frac{\lambda_2}{s\tau}}\varphi_2(s\tau)}{s\tau-z}\,d\tau=F_1(z),\quad |z|<s. \quad (22)$$

Дифференцируя (22) по $\theta$ ($z=rt=re^{i\theta}$), будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{T}e^{\frac{\lambda_1}{s\tau}}\varphi_1(s\tau)\left(\frac{1}{s\tau-rt}\right)_{\tau}'d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_{T}e^{\frac{\lambda_2}{s\tau}}\varphi_2(s\tau)\left(\frac{1}{s\tau-rt}\right)_{\tau}'d\tau=-rF_1'(rt).$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{T}\frac{\lambda_1}{s\tau^2}e^{\frac{\lambda_1}{s\tau}}\varphi_1(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{T}\frac{\lambda_2}{s\tau^2}e^{\frac{\lambda_2}{s\tau}}\varphi_2(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau-z}-$$

$$-\frac{s}{2\pi i}\int_{T}e^{\frac{\lambda_1}{s\tau}}\varphi_1'(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau-z}-\frac{s}{2\pi i}\int_{T}e^{\frac{\lambda_2}{s\tau}}\varphi_2'(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau-z}=F_1'(z). \quad (23)$$

Из (14) аналогично имеем

$$\frac{\lambda_1}{2\pi i}\int_{T}e^{\frac{\lambda_1}{s\tau}}\varphi_1(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau(s\tau-z)}+\frac{\lambda_2}{2\pi i}\int_{T}e^{\frac{\lambda_2}{s\tau}}\varphi_2(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau(s\tau-z)}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_T \tau e^{\frac{\lambda_1}{s\tau}}\varphi_1'(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_T \tau e^{\frac{\lambda_2}{s\tau}}\varphi_2'(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau-z}=F_2(z),\quad |z|<s, \quad (24)$$

где $F_2(z)$ - аналитическая в $D^+$ и бесконечно-дифференцируемая на $\overline{D}^+$ функция.

Из равенств (23) и (24) следует, что

$$\frac{\lambda_1}{2\pi i}\int_T e^{\frac{\lambda_1}{s\tau}}\varphi_1(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau-z}+\frac{\lambda_2}{2\pi i}\int_T e^{\frac{\lambda_2}{s\tau}}\varphi_2(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau-z}=F_3(z). \quad (25)$$

Здесь $F_3(z)$ - также аналитическая в $D^+$ и бесконечно-дифференцируемая на $\overline{D}^+$ функция. Из (22) и (25) получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_T e^{\frac{\lambda_1}{s\tau}}\varphi_1(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau-z}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(F_3(z)-\frac{\lambda_2}{s}F_1(z)\right)\equiv F_4(z),\quad |z|<s, \quad (26)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_T e^{\frac{\lambda_2}{s\tau}}\varphi_2(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau-z}=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(F_3(z)-\frac{\lambda_1}{s}F_1(z)\right)\equiv F_5(z),\quad |z|<s. \quad (27)$$

Равенство (26) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{T_s}\left(e^{\frac{\lambda_1}{\tau}}\varphi_1(\tau)-F_4(\tau)\right)\frac{d\tau}{\tau-z}=0,\quad |z|<s,$$

где $T_s=\{z;\ |z|=s\}$. Полагая

$$\varphi_{s1}^-(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{T_s}\left(e^{\frac{\lambda_1}{\tau}}\varphi_1(\tau)-F_4(\tau)\right)\frac{d\tau}{\tau-z},\quad |z|>s,$$

находим

$$\varphi_1^+(t)-e^{-\frac{\lambda_1}{t}}\varphi_{s1}^-(t)=F_4(t)e^{-\frac{\lambda_1}{t}},\quad |t|=s. \quad (28)$$

Так как $\exp(-\lambda_1 z^{-1})\cdot\varphi_{s1}^-(z)$ аналитична в $|z|>s$ и обращается в нуль на бесконечности, то из 28) получаем

$$\varphi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{T_s}\frac{F_4(\tau)e^{-\frac{\lambda_1}{\tau}}}{\tau-z}d\tau=\frac{s}{2\pi i}\int_T\frac{F_4(s\tau)e^{-\frac{\lambda_1}{s\tau}}}{s\tau-z}d\tau,\quad |z|<s$$

для любого $|z|<1$. Переходя к пределу при $s\to 1-0$ в последнем равенстве, будем иметь

$$\varphi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{F_4(\tau)e^{-\frac{\lambda_1}{\tau}}}{\tau-z}d\tau,\quad z\in D^+.$$

Следовательно, $\varphi_1(z)$ - бесконечно-дифференцируемая функция на $\overline{D}^+$. Аналогично, из (27) следует, что $\varphi_2(z)$ также бесконечно-дифференцируемая функция на $\overline{D}^+$. Лемма 2 доказана.

4. Теперь приведем наш основной результат.

**Теорема.** *Задача (1), (2) нетерова и ее индекс равен 4.*

**Доказательство.** Положим

$$u_o(z) = e^{\lambda_1 \bar{z}} \Psi_1(f_o, f_1, z) + e^{\lambda_2 \bar{z}} \Psi_2(f_o, f_1, z), \quad z \in D^+, \tag{29}$$

где $\Psi_1$ и $\Psi_2$ определяются равенствами (5) и (6), соответственно.

Пусть $h(z)$ - бесконечно-дифференцируемая функция на $\overline{D^+}$ такая, что

$$h(z) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \le |z| \le 1, \\ 0, & |z| < \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Пусть $v(z) = u(z) + u_o(z)h(z)$. Если $u(z)$ удовлетворяет уравнению (1), то функция $v(z)$ будет уловлетворять неоднородному уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z}^2} + a\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} + bv = -L(u_o h). \tag{30}$$

Условия (2) примут вид

$$\lim_{r \to 1-0} \| \operatorname{Re} v(rt)\|_1 = 0, \quad t \in T,$$

$$\lim_{r \to 1-0} \| \operatorname{Re} \frac{\partial v(rt)}{\partial r}\|_1 = 0, \quad t \in T. \tag{31}$$

Так как $L(u_o h)$ - бесконечно-дифференцируемая на $\overline{D}^+$ функция, то применяя Лемму 2, заключаем, что каждое решение задачи (30), (31) также бесконечно-дифференцируемая функция на $\overline{D}^+$. Следовательно, условия (31) можно записать следующим образом

$$\operatorname{Re} v(t) = 0, \quad t \in T,$$

$$\operatorname{Re} \frac{\partial v(t)}{\partial r} = 0, \quad t \in T. \tag{32}$$

Положим

$$g_1(z) = -\frac{e^{\lambda_1 z}}{\pi} \iint_{D^+} \frac{e^{-\lambda_1 \bar{\zeta}} L(u_o h)}{\zeta - z} d\xi\, d\eta, \quad z \in D^+, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Общее решение уравнения (30) можно представить в виде

$$v(z) = e^{\lambda_1 \bar{z}} \varphi_1(z) + e^{\lambda_2 \bar{z}} \varphi_2(z) + G(z),$$

где $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ - произвольные аналитические функции на $D^+$ и

$$G(z) = -\frac{e^{\lambda_2 \bar{z}}}{\pi} \iint\limits_{D^+} \frac{e^{-\lambda_2 \bar{\zeta}} g_1(\zeta)}{\zeta - z} d\xi\, d\eta.$$

Подставляя $v(z)$ в (32), получаем

$$\operatorname{Re}\left(e^{\lambda_1 \bar{t}} \varphi_1(t) + e^{\lambda_2 \bar{t}} \varphi_2(t)\right) = -\operatorname{Re} G(t), \quad t \in T,$$

$$\operatorname{Re}\left(\lambda_1 \bar{t} e^{\lambda_1 \bar{t}} \varphi_1(t) + \lambda_2 \bar{t} e^{\lambda_2 \bar{t}} \varphi_2(t) + t e^{\lambda_1 \bar{t}} \varphi_1'(t) + t e^{\lambda_2 \bar{t}} \varphi_2'(t)\right) = \operatorname{Re} \frac{\partial G(t)}{\partial r}. \qquad (33)$$

Функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ допускают представления (см. [2])

$$\varphi_j(z) = \frac{1}{\pi i} \int_T \mu_j(t) \ln\left(1 - \frac{z}{t}\right) dt + iC_j, \quad j = 1, 2, \qquad (34)$$

где $\mu_j(t)$, $j = 1, 2$, - вещественнозначные функции, а $C_j$, $j = 1, 2$, - некоторые действительные числа. Если $\varphi_j(z)$, $j = 1, 2$ - бесконечно-дифференцируемы на $T$, то $\mu_j(t)$, $j = 1, 2$ также бесконечно-дифференцируема на $T$. В представлении (34) величины $\mu_j(t)$ и $C_j$ определяются однозначно через $\varphi_j(t)$. Подставляя (34) в (33) получаем систему интегральных уравнений относительно функций $\mu_j(t)$. Такая система в классе бесконечно-дифференцируемых функций исследована в работе [3],в которой был вычислен индекс. Применяя результаты этой работы получим доказательство теоремы.

**ABSTRACT.** The paper considers a Riemann type problem in $L^1$ for the equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} + a\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + bu = 0, \quad z \in D^+,$$

where $D^+ = \{z : |z| < 1\}$ and $a, b$ are complex numbers. We prove that this problem is Noetherian and of index 4, provided that the roots of the corresponding characteristic equation are distinct.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Г. М. Айрапетян, "Корректные граничные задачи для неправильно-эллиптических уравнений в классе $L^1$", Изв. АН Армении, Математика, том 26, №4, стр. 309 328, 1991.
2. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения, М., Наука, 1968.
3. Н. Е. Товмасян, "К теории сингулярных интегральных уравнений", Лифф. уравнения, том 3, №1, стр. 69-80, 1967.

7 Декабря 1992

Армянский государственный
инженерный университет

# ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ПОСРЕДСТВОМ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

**Г. А. Барсегян, В. Г. Петросян**

**Известия Академии Наук Армении. Математика,**
**том 28, №3, 1993**

Оценки логарифмических производных играют важную роль в теории распределения значений мероморфных функций (см. [1]).

Оценки для величин

$$\int_{|z|=r}\left|\frac{w'(re^{i\varphi})}{w(re^{i\varphi})}\right|\,d\varphi=\int_{\Delta(r,0)}\left|\frac{w'(re^{i\varphi})}{w(re^{i\varphi})}\right|\,d\varphi+\int_{\Delta(r,\infty)}\left|\frac{w'(re^{i\varphi})}{w(re^{i\varphi})}\right|\,d\varphi,$$

где $w(z)$ - мероморфная функция в $|z|<\infty$,

$$\Delta(r,a)=\Delta(r,a,w)=\{z:\quad |z|=r;\quad |w(z)-a|\le 1\}$$

и

$$\Delta(r,\infty)=\Delta(r,\infty,w)=\{z:\quad |z|=r;\quad |w(z)|>1\}$$

были получены в [2] [4].

Однако оценки логарифмических производных рассматривались как простые вспомогательные технические средства. Между тем в [5] было установлено, что для интеграла

$$P(r,a)\overset{def}{=\!=}r\int_{\Delta(r,a)}\left|\frac{w'(re^{i\varphi})}{w(re^{i\varphi})-a}\right|\,d\varphi$$

имеют место некоторые аналоги второй основной теоремы Р.Неванлинны и соотношения дефектов, характеризующих уже новые исключительные значения фукции $w(z)$. Другим примером приложений логарифмических производных является следующее простое предложение, связывающее характеристику $P(r,a)$

с классическими величинами : если мероморфная в $|z| < \infty$ функция $w(z)$ имеет по крайней мере два исключительных значения в смысле В. П. Петренко, т.е. существуют значения $a_1$ и $a_2$ такие, что $\beta(a_1) > 0$ и $\beta(a_2) > 0$, где

$$\beta(a) = \beta(a, w) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{1}{T(r)} \left( \max_{|z|=r} \ln^+ \frac{1}{|w(z) - a|} \right),$$

и $T(r)$ - характеристики Неванлинна, тогда для любого $a \in \mathbf{C}$ и $r$ мы имеем

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta(r,a)} \ln^+ \frac{1}{|w(z) - a|}\, d\varphi \le \max_{|z|=r} \ln^+ \frac{1}{|w(z) - a|} \le$$

$$\le r \int_{\Delta(r,a)} \left| \frac{w'(z)}{w(z) - a} \right| d\varphi + O(1), \quad r \to \infty, \quad z = re^{i\varphi}. \tag{1}$$

Заметим также, что результаты работы [5] и неравенство (1) позволяют обобщить некоторые результаты В. Фукса [3] и В. П. Петренко [4]. В настоящей работе мы рассматриваем величины

$$P_k(r, a) \overset{def}{=\!=} r \int_{\Delta(r,a)} \left| \ln^{(k)}(w(z) - a) \right|^{1/k} d\varphi, \quad k \in N, \quad k \ge 1,$$

зависящие от производных высшего порядка мероморфной функции $w(z)$. Для этих величин мы устанавливаем аналоги второй основной теоремы Р. Неванлинны и соотношения дефектов.

**Теорема 1.** *Пусть $w(z)$ - мероморфная в $|z| < \infty$ функция конечного нижнего порядка $\lambda > 0$ и пусть $a_\nu \in \mathbf{C}$ $(\nu = 1, 2, ..., q)$ - конечный набор попарно различных комплексных значений. Тогда на некоторой неограниченной последовательности значений $r_n$ выполняется неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^{q} r \int_{\Delta(r,a_\nu)} \left| \ln^{(k)}(w(z) - a_\nu) \right|^{1/k} d\varphi \le K(k, \lambda) T(r), \quad r \to \infty, \tag{2}$$

*где $K(k, \lambda)$ - постоянная, зависящая от $k$ и $\lambda$.*

**Замечание.** При $k = 1$ неравенство (2) было установлено в [5] ([5], Теорема 1).

Из Теоремы 1 мы получаем некоторый аналог соотношения дефектов Р. Неванлинны.

**Следствие.** Для мероморфной в $|z| < \infty$ функции $w(z)$ конечного нижнего порядка $\lambda > 0$ множество

$$\left\{ a : \quad D_k(a) = D_k(a, w) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{P_k(r, a)}{T(r)} > 0 \right\}$$

не более чем счетно, и имеет место неравенство

$$\sum_a D_k(a) \le K(k,\lambda). \tag{3}$$

**Теорема 2.** *В предположениях Теоремы 1 справедливо неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^{q} r\int_{\Delta(r,a_\nu)} \left|\frac{w''(z)}{w(z)-a_\nu}\right|^{1/2} d\varphi \le K(\lambda)T(r), \tag{1}$$

*где* $K(\lambda)$ - *постоянная, зависящая от* $\lambda$.

Приведем теперь вкратце доказательство Теоремы 1. Сначала докажем существование значений $b_\nu$ $(\nu = 1,2,...,q)$ , для которых величины

$$r\int_{\Delta(r,a_\nu)} \left|\ln^{(k)}(w(z)-b_\nu)\right|^{1/k} d\varphi$$

"малы". Оценки для $P_k(r,a_\nu)$ будут близки к оценкам следующих величин :

$$r\int_{\Delta(r,a_\nu)} \left|\ln^{(k)}\left(\frac{w(z)-a_\nu}{w(z)-b_\nu}\right)\right|^{1/k} d\varphi. \tag{5}$$

Далее, к последнему интегралу применяем"свойство близости $a$-точек" мероморфных функций (см. [6]).После представления подынтегрального выражения (5) формулой Неванлинны, получаем разности однотипных факторов, зависящих от $a_\nu$-точек и $b_\nu$-точек функции $w(z)$. Учитывая тот факт, что $a_\nu$-точки и $b_\nu$-точки близки в среднем, заключаем, что указанные разности "малы". Таким образом, мы получаем "малость" суммы $\sum_{\nu=1}^{q} P_k(r,a_\nu)$ в том смысле, что правая часть (2) не зависит от $q$.

Теорема 2 непосредственно выводится из Теоремы 1.

## Л И Т Е Р А Т У Р А


1. Р. Неванлинна, Однозначные Аналитические Функции, ОГИЗ, 1941.
2. W. H. Fuchs, "A theorem on the Nevanlinna deficiencies of meromorphic functions of finite order", Ann. Math., vol. 68, no. 2, pp. 203 209, 1958.
3. W. H. Fuchs, "Proof of a conjecture of G. Polya concerning gap series. III", J. Math., vol. 7, no. 4, pp. 661 – 667, 1963.
4. В. П. Петренко, Рост Мероморфных функций, Вище школа, Харьков, 1978.
5. Г. А. Барсегян, "Исключительные значения , ассоциированные с логарифмическими производными мероморфных функций ", Изв АН Арм.ССР, Математика, том 16, №5, стр. 408 – 423, 1981.
6. Г. А. Барсегян, "Свойство близости $a$-точек мероморфных функций" , Мат. сборник, том 120 (162), стр. 42 – 67, 1983.


20 Сентября 1990

Институт математики
НАН Армении

# СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 28 НОМЕР 3 1993

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы

О сходимости и явлении Гиббса кратных рядов Фурье функции ограниченной гармонической вариации
О. Г. Саргсян . . . . . 3

Смешанная задача для вырождающихся нелинейных систем типа Соболева
Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян . . . . . 21

О равномерно-касательных приближениях лакунарными степенными рядами на кривых комплексной плоскости
Г. В. Арутюнян, В. А. Мартиросян . . . . . 36

Метод конструктивного построения факторизации для матриц-функций
А. Г. Камалян, В. А. Оганян . . . . . 46

Оценки максимальных функций в пространствах Орлича $L^{\Phi}_{\omega}(S^{n-1})$ и $L^{\Phi}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$
С. С. Казарян . . . . . 63

Задача типа Римана для неправильно-эллиптических уравнений в классе $L^1$
Г. М. Айрапетян . . . . . 80

Краткие сообщения

Исключительные значения мероморфных функций, определяемые посредством производных высшего порядка
Г. А. Барсегян, В. Г. Петросян . . . . . 89