

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966г.

Выходит 6 раз в году

на русском и английском языках

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ս. Ս. Ջրբաժյան

Ն. Զ. Առաքելյան

Բ. Դ. Զասլավսկի

Ա. Ա. Թալալյան

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Ս. Ն. Մեղեքյան

Ա. Բ. Ներսիսյան

Ռ. Լ. Շաիրադյան

Գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու լրատվար Ս. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԿԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է սույն անձանց, որոնք գանկանում են հոդվածներ հրատարակել Հայաստանի գիտությունների ազգային ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա»-ում տպագրում, հազվի առնել հետևյալ կանոնները:

1. Հոդվածների ծավալը, որոնք կանոն, պետք է գերազանցի մեկ տրագրադիսն սամուր տոսիսն ոչ ավելի, րաւ սեւսի 24 մեհնագրիւմ էօ, իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը ոչ ավելի, րաւ 5 - 6 մեհնագրիւմ էօ: Մեկ տրագրական սամուր գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրատարակման բազադիկ դեղիերուն խմբագրական կոլեգիայի հասուկ որոշումաւ:

2. Հոդվածները պետք է սերկայագվեն գրամեհնագրիւմ, երկու օրիսակով: Բուսերես հալերեսն՝ սերկայագված հոդվածին անհրաժեւ է կգել ամփոփումներ հալերես, տնգերես եւ բուսերես լեգումներով: Օտաւերկրա հեղինակների հոդվածները իրենց գանկուրրաւ կարող եւ հրատարակվել համադրասասիւսն ,եգվով:

3. Մի ժաւաւ լաիհնսիկան սաւերը, որուն սիսնսուն են համանուն փոհրասաւելիս, պետք է ընդգծվեն սեւ մասիսով երկու գծերով մեհնաւսն իսկ փոհրասաւերը երկու գծիկով վերեւուն: Հունակուն սաւերը պետք է ընդգծվեն կարսիւ մասիսով ինդիսները շրամգվեն սեւ մասիսով, իսկ կուսիկ սաւերը ընդգծվեն ալիսաժեւ գծով:

4. Գծագրերը սերկայագվում են աւաւնժին էօերի վրա, երկու օրիսակով: Սեկով մրունգ հասաւեր եւ սերը սեւսուն էօի ծաիւ մասուն:

5. Գրականութիւնը տեղավորվում է հոդվածի վերուն, ընդ որուն, գրիերի հասաւ մեվուն է հեղիսակը, գրիւ տնունը, հրասարակունն սերը, հրասարակութիւնը, հրասարակունն սաւերիկը, հոդվածների հասաւ մեվուն է հեղիսակը, հոդվածի տնունը, տնսագիերը, հասաւը, սաւերիկը եւ էօերը: Օգտագործված գրականութիւնը մեվուն է րաւսկուսի փոհրագծերուն, սեւսի համադրասասիւսն եղուն:

6. Արագութիւնը ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված միջքեւ շաւ գգալի փոհրադարտութիւնները րեւագի համեհասութիւնը՝ սեւ բաղաւրիւմ:

7. Հոդվածը վերաւորակունն սոդասակով հեղինակին վերադարձնելու դեղիւսն, որոնք հոդվածի սաւանուն ժաւեհ համադրուն է վերադարձուն սեւսի սաւագուն օրը:

8. Հոդվածի սեւժաւն դեղիւսն հեղինակին վերադարձվում է ձեւագրի մեկ օրիսակը եւ խմբագրութիւնը իրավուն է վերադարձուն պրոդվել սեւժաւն տրասաւերների տարգարասունով:

9. Հոդվածի վերուն տնիւմեհ է սեւ տաւ հիսնակի լիկ տնունը, որեւէ կատարված է սվուն տեհասասաւը:

10. Հեղինակը պետք է ստրագի հոդվածը, եւ իր լիկ հասգես, տնունը եւ հալրասունը:

Խմբագրութիւնն ոհսոցեն

երեւան, Մարալ Բաղրաժյանի տող., 24ր:

Գիտությունների ազգային ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»:

ОБЩАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА В ДВУГРАННОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А. А. Андриян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, №2, 1993

Пусть M - класс вектор-функций $u(x, t) \in C^\infty(R^n \times \Pi_\alpha)$, аналитических в $t \in \Pi_\alpha = \{t | 0 < \arg t < \alpha < \pi\}$ и имеющих полиномиальный рост по (x, t) . Пусть $A(\xi)$, $\xi \in R^n$ - квадратная матрица порядка m с полиномиальными элементами. Для системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(i \frac{\partial}{\partial x})u, \quad u \in M, \quad (x, t) \in R^n \times \Pi_\alpha \quad (1)$$

определим строго регулярные и регулярные случаи. Пусть r обозначает порядок регулярности системы (1), а $B(\xi)$ - полиномиальная матрица размерности $r \times m$. Поставим граничное условие :

$$B(i \frac{\partial}{\partial x})u(x, 0) = f(x), \quad f(x) \in M. \quad (2)$$

Получены условия корректности задачи (1), (2) в строго регулярном случае. В регулярном случае аналогичные условия гарантируют существование решения.

Также изучена однородная ($f \equiv 0$) задача.

0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Pi_\alpha = \{t | 0 < \arg t < \alpha < \pi\}$, $\Pi_\alpha^* = \{\lambda | \frac{\pi}{2} \leq \arg \lambda \leq \frac{3}{2}\pi - \alpha\}$ - угловые области в комплексной плоскости Π , а $A(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n$ - квадратная матрица порядка m , элементы которой полиномы с постоянными коэффициентами.

Обозначим через M_γ , $\gamma \in R$, класс вектор-функций $u(x, t) \in C^\infty(R^n \times \Pi_\alpha)$, аналитических по $t \in \Pi_\alpha$ и удовлетворяющих неравенствам

$$|(i \frac{\partial}{\partial x})^k u(x, t)| \leq c_k (1 + |x|)^\gamma (1 + |t|)^\beta, \quad (x, t) \in R^n \times \Pi_\alpha, \quad (1)$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$ - мультииндекс, $(i \frac{\partial}{\partial x})^k = i^{|k|} \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$,

$i = \sqrt{-1}$, $\beta \in R$, $c_k \geq 0$.

Положим

$$M = \bigcup_{\gamma \in R} M_\gamma.$$

Рассмотрим систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(i \frac{\partial}{\partial x})u, \quad (x, t) \in R^n \times \Pi_\alpha, \quad (2)$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$ - мультииндекс, $(i \frac{\partial}{\partial x})^k = \frac{i^{|k|} \partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$, $|k| = \sum_{i=1}^n k_i$ и $u = (u_1, \dots, u_m) \in M$.

Обозначим через $\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_m(\xi)$ корни (с учетом их кратности) характеристического уравнения

$$P_m(\xi, \lambda) = \det(\lambda E_m - A(\xi)) = 0, \quad (3)$$

соответствующие системе (2), где E_m - единичная матрица порядка m .

Пусть $\rho(\xi)$ - число корней уравнения (3), принадлежащих Π_α^* . Система (2) называется *строго регулярной*, если

$$a) \rho(\xi) = \text{const} = r \quad \text{для любых } \xi \in R^n$$

и *регулярной*, если

$$b) \rho(\xi) = \text{const} = r \quad \text{за исключением быть может конечного числа точек.}$$

Для определенности предположим, что $\rho(\xi) = r$ для любых $\xi \in R^n \setminus \{O\}$, $\rho(0) > r$, тогда система (2) является регулярной (это не ограничивает общности).

Пусть $B(\xi)$ - полиномиальная матрица с постоянными коэффициентами размерности $r \times m$. Для решения u системы (2) рассматривается граничная

Задача А.

$$B(i \frac{\partial}{\partial x})u(x, 0) = f(x), \quad x \in R^n, \quad (4)$$

где $f = (f_1, \dots, f_r) \in M$.

Введем матрицу-функцию

$$P^+(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+(\xi)} (\lambda E_m - A(\xi))^{-1} d\lambda, \quad (5)$$

где замкнутый контур $\gamma^+(\xi)$ содержит только те корни характеристического уравнения (3), которые принадлежат области $S\Pi_\alpha^* = \Pi \setminus \Pi_\alpha^*$.

Основной результат работы следующий.

Теорема 1. Пусть система (2) строго регулярна. Тогда условие

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} P^+(\xi) \\ B(\xi) \end{pmatrix} = m \quad \text{для любых } \xi \in R^n \quad (6)$$

является необходимым и достаточным для существования и единственности решения Задачи А. Если $f \in M_\gamma$, то $u \in M_\gamma$. Если система (2) регулярна ($\rho(0) > \tau$) и условие (6) нарушается только в конечном числе точек, то неоднородная Задача А разрешима для любых f , а однородная Задача А имеет бесконечное число линейно независимых решений.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} - \lambda u(t) = f(t), \quad (1.1)$$

где $\lambda \in \Pi$, $f \in M$ и $u \in M$ - искомая функция.

Имест место

Лемма 1.1. Уравнение (1.1) разрешимо для любой функции $f(t)$. Если $\lambda \in \Pi_\alpha^*$, то однородное уравнение имеет одно нетривиальное решение; если же $\lambda \in C\Pi_\alpha^*$, то однородное уравнение имеет только нулевое решение.

Доказательство. Утверждение леммы относительно однородного уравнения очевидно. Пусть $\lambda \in \Pi_\alpha^*$. Решение уравнения (1.1) имеет вид

$$u(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau \in M,$$

где интегрирование производится по отрезку $[0, t]$.

Пусть теперь $\lambda \in C\Pi_\alpha^*$. Введем новых функций $v(t) = u(\frac{t}{\lambda})$, $g(t) = \frac{1}{\lambda} f(\frac{t}{\lambda})$ уравнение (1.1) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial v(t)}{\partial t} - v(t) = g(t), \quad t \in \lambda\Pi_\alpha = \Pi_\alpha^\lambda = \{z | z = \lambda t, \quad t \in \Pi_\alpha\}. \quad (1.2)$$

Так как $-\frac{\pi}{2} - \alpha < \arg \lambda < \frac{\pi}{2}$, то по крайней мере одна сторона угла Π_α^λ будет находиться в правой полуплоскости. Пусть это $L_0 = \{z | z = \lambda t, \quad \arg t = 0\}$. Тогда, очевидно, что функция

$$v(t) = - \int_t^\infty e^{t-\tau} g(\tau) d\tau = - \int_{L_0} e^{-\eta} g(t + \eta) d\eta \in M,$$

где интегрирование производится по лучу $[t, \infty) \cap L_\alpha$, является требуемым решением. Аналогично поступаем и в случае $L_1 = \{z | z = \lambda t, \arg t = \alpha\}$. Лемма 1.1 доказана.

Рассмотрим теперь систему

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} - A u(t) = f(t), \quad t \in \Pi_\alpha, \quad (1.3)$$

где A - постоянная квадратная матрица порядка n и $u(t), f(t) \in M$. Используя жорданову форму матрицы A и Лемму 1.1 легко установить разрешимость системы (1.3) и подсчитать число линейно независимых решений однородной системы.

II. В произвольной точке $\xi \neq 0$ корни уравнения (3) будем нумеровать так, чтобы $\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_r(\xi) \in \Pi_\alpha^*$ и $\lambda_{r+1}(\xi), \dots, \lambda_m(\xi) \in C\Pi_\alpha^*$. Очевидно

$$|\lambda_j(\xi)| \leq c_0(1 + |\xi|^2)^{m_0}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.4)$$

Пусть Γ_α обозначает границу угла Π_α^* .

Лемма 1.2. В случае а) справедлива оценка

$$\text{dist}(\lambda_j(\xi), \Gamma_\alpha) \geq c(1 + |\xi|^2)^{s_0}, \quad \xi \in R^n, \quad (1.5)$$

а в случае б)

$$\text{dist}(\lambda_j(\xi), \Gamma_\alpha) \geq c|\xi|^{s_1}(1 + |\xi|^2)^{s_2}, \quad \xi \in R^n \setminus \{O\}, \quad (1.6)$$

$j = r + 1, \dots, m$.

Доказательство. Начнем со случая а). Введем множество

$$E_1 = \{(x, y, \xi, \dots) | x = 1 + |\xi|^2, y = |\lambda - \lambda_j(\xi)|^2, P_m(\xi, \lambda_j(\xi)) = 0,$$

$$j = r + 1, \dots, m, \lambda = i\rho \text{ или } \lambda = \rho e^{i\alpha}, \rho \geq 0\},$$

которое очевидно является полуалгебраическим и рассмотрим полуалгебраическую функцию одной переменной x :

$$f(x) = \inf\{y | (x, y, \xi, \dots) \in E_1\}.$$

Поскольку при больших x функция $f(x)$ принимает только конечные положительные значения, то имеем представление [1]

$$f(x) = Ax^a(1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty, \quad A > 0.$$

Это означает, что $y \geq \frac{A}{2}x^a$ при $x \gg 1$, следовательно неравенство (1.5) имеет место при $|\xi| \gg 1$. Воспользовавшись непрерывностью корня $\lambda_j(\xi)$, легко получаем оценку (1.5) для ограниченных $|\xi|$.

В случае регулярной системы (2) введем множества

$$E_2 = \{(x, y, \xi, \dots) | x|\xi|^2 = 1, \quad y = |\lambda - \lambda_j(\xi)|^2, \quad P_m(\xi, \lambda_j(\xi)) = 0,$$

$$j = r + 1, \dots, m, \quad \lambda = i\rho \quad \text{or} \quad \lambda = \rho e^{i\alpha}, \quad \rho \geq 0\}$$

и установим неравенство (1.6) в окрестности точки $\xi = 0$. Остальные ξ рассматривались выше. Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. *Элементы $p_{ij}^+(\xi)$ матрицы $P^+(\xi)$ принадлежат $C^\infty(R^n)$ в случае а), а в случае б) принадлежат $C^\infty(R^n \setminus \{O\})$ и удовлетворяют, соответственно, оценкам :*

$$a) \quad \left| \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} p_{ij}^+(\xi) \right| \leq c_k(1 + |\xi|)^{m_k}, \quad \xi \in R^n, \quad (1.7)$$

$$b) \quad \left| \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} p_{ij}^+(\xi) \right| \leq c_k |\xi|^{n_k} (1 + |\xi|)^{p_k}, \quad \xi \neq 0, \quad n_k \geq 0. \quad (1.8)$$

Доказательство. Гладкость элементов матрицы $P^+(\xi)$ следует из формулы (5) и из того, что множества $\{\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_r(\xi)\}$, $\{\lambda_{r+1}(\xi), \dots, \lambda_m(\xi)\}$ разьединены для любых $\xi \in R^n$ в случае а) и для $\forall \xi \in R^n \setminus \{O\}$ в случае б). Введем полиномы :

$$Q(\xi, \lambda) = \prod_{j=1}^r (\lambda - \lambda_j(\xi)) = \lambda^r + \sum_{k=1}^r q_k(\xi) \lambda^{m-k}; \quad (1.9)$$

$$R(\xi, \lambda) = \prod_{j=r+1}^m (\lambda - \lambda_j(\xi)) = \lambda^{m-r} + \sum_{k=1}^{m-r} r_k(\xi) \lambda^{m-r-k}.$$

Имеем

$$R(\xi, \lambda) + R_1(\xi, \lambda)(\lambda - \lambda_1(\xi)) = R(\xi, \lambda_1(\xi)), \quad (1.10)$$

где $R_1(\xi, \lambda)$ - некоторый полином от λ .

Применяя (1.10), получим

$$\begin{aligned}
 P^+(\xi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+(\xi)} \frac{a(\xi, \lambda)}{P_m(\xi, \lambda)} d\lambda = \\
 &= \frac{1}{2\pi i R(\xi, \lambda_1(\xi))} \times \int_{\gamma^+(\xi)} a(\xi, \lambda) \frac{R(\xi, \lambda) + R_1(\xi, \lambda)(\lambda - \lambda_1(\xi))}{R(\xi, \lambda)(\lambda - \lambda_1(\xi)) \cdots (\lambda - \lambda_r(\xi))} d\lambda = \\
 &= \frac{1}{2\pi i R(\xi, \lambda_1(\xi))} \int_{\gamma^+(\xi)} \frac{a(\xi, \lambda)}{Q(\xi, \lambda)} d\lambda + \\
 &+ \frac{1}{2\pi i R(\xi, \lambda_1(\xi))} \int_{\gamma^+(\xi)} a(\xi, \lambda) \frac{R_1(\xi, \lambda)}{R(\xi, \lambda)(\lambda - \lambda_2(\xi)) \cdots (\lambda - \lambda_r(\xi))} d\lambda = \quad (1.11) \\
 &= \frac{1}{2\pi i R(\xi, \lambda_1(\xi))} \int_{\gamma^+(\xi)} \frac{a(\xi, \lambda) R_1(\xi, \lambda)}{R(\xi, \lambda)(\lambda - \lambda_2(\xi)) \cdots (\lambda - \lambda_r(\xi))} d\lambda, \\
 a(\xi, \lambda) &= (\lambda E_m - A(\xi))^{-1} P_m(\xi, \lambda)
 \end{aligned}$$

Преобразовывая интеграл (1.11) таким же образом, получим

$$P^+(\xi) = \frac{1}{2\pi i \omega(\xi)} \int_{\gamma^+(\xi)} \frac{a(\xi, \lambda) r(\xi, \lambda)}{R(\xi, \lambda)} d\lambda, \quad (1.12)$$

где $r(\xi, \lambda)$ - вполне определенный полином от λ с коэффициентами, имеющими степенной рост, а

$$\omega(\xi) = \prod_{j=1}^r R(\xi, \lambda_j(\xi)). \quad (1.13)$$

Используя Лемму 1.2 для оценки функции $\omega(\xi)$ и вычисляя интеграл в (1.12) по теореме о вычетах в точке $\lambda = \infty$, легко получим оценки (1.7), (1.8) при $k = 0$.

Производные оцениваются аналогично. Лемма 1.3 доказана.

Введем матрицы-функции

$$V^-(\xi, t) = e^{A(\xi)t} P^-(\xi), \quad V^+(\xi) = e^{A(\xi)t} P^+(\xi), \quad t \in \Pi_\omega,$$

$$P^-(\xi) = E_m - P^+(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-(\xi)} (\lambda E_m - A(\xi))^{-1} d\lambda, \quad (1.14)$$

где замкнутый контур $\gamma^-(\xi)$ окружает только те корни уравнения (3), которые принадлежат Π_α^* . Из представления $V^-(\xi, t) = e^{P^-(\xi)A(\xi)t} P^-(\xi)$, оценок (1.7), (1.8) и того, что все характеристические корни матрицы $P^-(\xi)A(\xi)$ принадлежат области Π_α^* , непосредственно следует

Лемма 1.4. Матрица-функция $V^-(\xi, t)$ удовлетворяет, соответственно, в случаях а) и б) оценкам :

$$a) \quad \left| \frac{\partial^k V^-(\xi, t)}{\partial \xi^k} \right| \leq c_k (1 + |\xi|^2)^{m_k} (1 + |t|)^{n_k}, \quad (1.15)$$

$$b) \quad \left| \frac{\partial^k V^-(\xi, t)}{\partial \xi^k} \right| \leq c_k |\xi|^{-p_k} (1 + |\xi|^2)^{q_k} (1 + |t|)^{r_k}, \quad p_k \geq 0. \quad (1.16)$$

Обозначим через S и S' , соответственно, пространство Шварца и ему сопряженнос. Включение $M(R^n \times \Pi_\alpha) \subset S'(R^n)$ при каждом фиксированном $t \in \Pi_\alpha$ и очевидно имеет место оценка

$$| \langle u(x, t), \varphi(x) \rangle | \leq c \|\varphi\|_{p(\gamma)} (1 + |t|)^\beta, \quad \varphi \in S, \quad (1.17)$$

где $\|\cdot\|_{p(\gamma)}$ - p -ая полунорма в $S(R^n)$.

Обозначим через $u(\xi, t)$ или $F[u(x, t)](\xi, t)$ преобразование Фурье в x функции $u(x, t) \in M(R^n \times \Pi_\alpha)$, рассматривая ее как обобщенную функцию. Образ Фурье системы (2) имеет вид

$$\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} = A(\xi)u(\xi, t), \quad t \in \Pi_\alpha. \quad (1.18)$$

Произвольное решение системы (1.18) задается формулой

$$u(\xi, t) = e^{A(\xi)t} u(\xi, 0), \quad t \in \Pi_\alpha. \quad (1.19)$$

Нас интересуют только те решения, которые удовлетворяют оценке (1.17). Имеет место

Лемма 1.5. Пусть $u(\xi, t)$, определенная формулой (1.19), удовлетворяет оценке (1.17). Тогда

$$P^+(\xi)u(\xi, 0) = 0 \quad \text{в} \quad R^n, \quad (1.20)$$

в случае а) и

$$P^+(\xi)u(\xi, 0) = 0 \quad \text{в} \quad R^n \setminus \{0\}, \quad (1.21)$$

в случае б).

Доказательство. Доказательства формул (1.20), (1.21) идентичны, (они носят локальный характер). Поэтому докажем только формулу (1.20). Перепишем (1.19) в виде

$$u(\xi, t) = V^-(\xi, t)P^-(\xi)u(\xi, 0) + V^+(\xi, t)P^+(\xi)u(\xi, 0), \quad t \in \Pi_\alpha. \quad (1.22)$$

В силу Леммы 1.4 первое слагаемое в (1.22) удовлетворяет неравенству (1.17). В произвольной точке $\xi_0 \in R^n$ пусть $\operatorname{Re} \lambda_{r+j}(\xi_0) > 0$, $j = 1, \dots, k$ (k зависит от ξ_0) и $\operatorname{Re} \lambda_{r+j}(\xi_0) \leq 0$, $j = k+1, \dots, m-r$. Очевидно существуют числа $\delta > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что

$$\operatorname{Re} \lambda_{r+j}(\xi) > \varepsilon_0, \quad j = 1, \dots, k, \quad |\xi - \xi_0| < \delta, \quad (1.23)$$

$$\operatorname{Re} \lambda_{r+j}(\xi) < \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad \operatorname{Re} (e^{i\alpha} \lambda_{r+j}(\xi)) > \varepsilon_0, \quad j = k+1, \dots, m-r, \quad |\xi - \xi_0| < \delta. \quad (1.24)$$

Матрицу $P^+(\xi)$ представим в виде

$$P^+(\xi) = P_1^+(\xi) + P_2^+(\xi),$$

где $P_1^+(\xi)$ и $P_2^+(\xi)$ соответствуют корням $\lambda_{r+1}(\xi_0), \dots, \lambda_{r+k}(\xi_0)$ и $\lambda_{r+k+1}(\xi_0), \dots, \lambda_m(\xi_0)$, соответственно.

Имеют место следующие оценки :

$$|e^{-A(\xi)t} P_1^+(\xi)| \leq c e^{-\varepsilon_0 t}, \quad \arg t = 0, \quad |\xi - \xi_0| < \delta,$$

$$|e^{A(\xi)t} P_2^+(\xi)| \leq c e^{\frac{\varepsilon_0}{2} t}, \quad \arg t = 0, \quad |\xi - \xi_0| < \delta, \quad (1.25)$$

$$|e^{-A(\xi)t} P_2^+(\xi)| \leq c e^{-\varepsilon_0 |t|}, \quad \arg t = \alpha, \quad |\xi - \xi_0| < \delta.$$

При $\arg t = 0$ и $|\xi - \xi_0| < \delta$ перепишем (1.22) в виде

$$u(\xi, t) = V^-(\xi, t)P^-(\xi)u(\xi, 0) + e^{A(\xi)t} P_1^+(\xi)u(\xi, 0) + e^{A(\xi)t} P_2^+(\xi)u(\xi, 0). \quad (1.26)$$

Из (1.25) имеем

$$| \langle P_1^+(\xi)u(\xi, 0), \varphi(\xi) \rangle | \leq c(1+t)^\beta e^{-\frac{\varepsilon_0}{2} t} \|\varphi\|_p \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(|\xi - \xi_0| < \delta).$$

Отсюда при $t \rightarrow +\infty$ получаем

$$P_1^+(\xi)u(\xi, 0) = 0, \quad |\xi - \xi_0| < \delta. \quad (1.27)$$

Принимая во внимание аналитичность по $t \in \Pi_\alpha$ и (1.27), получаем

$$u(\xi, t) = V^-(\xi, t)P^-(\xi)u(\xi, 0) + e^{\Lambda(\xi)t}P_2^+(\xi)u(\xi, 0). \quad (1.28)$$

Рассматривая (1.28) при $\arg t = \alpha$, $|\xi - \xi_0| < \delta$ имеем

$$P_2^+(\xi)u(\xi, 0) = 0, \quad |\xi - \xi_0| < \delta. \quad (1.29)$$

Соотношение (1.20) следует из (1.27), (1.29). Лемма 1.5 доказана.

В силу Леммы 1.5 из (1.22) следует

$$u(\xi, t) = V^-(\xi, t)P^-(\xi)u(\xi, 0) = V^-(\xi, t)u(\xi, 0). \quad (1.30)$$

III. Пусть система (2) строго регулярна и имеет место условие (6). Рассмотрим алгебраическую систему уравнений

$$P^+(\xi)v_j(\xi) = 0, \quad B(\xi)v_j(\xi) = e_j, \quad e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad (1.31)$$

Лемма 1.6. Система (1.31) имеет единственное решение, которое принадлежит $C^\infty(R^n)$ и удовлетворяет оценке

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} v_j(\xi) \right| \leq c_k (1 + |\xi|^2)^{m_k}. \quad (1.32)$$

Доказательство. Единственность очевидна. Заметим, что

$$P^+(\xi) = \frac{\mu(\xi, \lambda_1(\xi), \dots, \lambda_m(\xi))}{\omega(\xi)}, \quad (1.33)$$

где элементы $\mu(\dots)$ - полиномы от своих аргументов, а $\omega(\xi)$ определена формулой (1.13) (см. доказательство Леммы 1.3). Пусть l - число миноров $\alpha_k(\xi)$ порядка m матрицы в (6). Положим

$$\alpha(\xi) = \sum_{k=1}^l |\alpha_k(\xi)|^2. \quad (1.34)$$

В силу (6), $\alpha(\xi) > 0$, $\xi \in R^n$. Используя представление (1.33), оценку функции $\omega(\xi)$ по Лемме 1.2 и теорему Зайденберга-Тарского, легко показать, что [2]

$$\alpha(\xi) > c(1 + |\xi|^2)^s, \quad c > 0, \quad s \in R. \quad (1.35)$$

Очевидно, что наибольший по модулю минор $\alpha_{k_0}(\xi)$ (порядка m) удовлетворяет неравенству (1.35) с некоторой постоянной c , не зависящей от ξ . Заметим также, что [3]

$$\text{rank } P^+(\xi) = m - r \quad \forall \xi \in R^n, \quad (1.36)$$

и поэтому система (1.31) эквивалентна системе

$$A_{k_0}(\xi)v_j(\xi) = b_j, \quad b_j = (0, \dots, 0, e_j), \quad (1.37)$$

где $\det A_{k_0}(\xi) = \alpha_{k_0}(\xi) \neq 0$ в некоторой окрестности ξ . Из (1.37) следует, что $v_j(\xi) = A_{k_0}^{-1}(\xi)b_j \in C^\infty$ и удовлетворяет оценке (1.32) при $k = 0$. Для оценки производных $v_j(\xi)$ дифференцируем (1.31) по ξ_k , получим

$$P^+(\xi) \frac{\partial v_j}{\partial \xi_k} = - \frac{\partial P^+}{\partial \xi_k} v_j, \quad B(\xi) \frac{\partial v_j}{\partial \xi_k} = - \frac{\partial B}{\partial \xi_k} v_j.$$

Учитывая, что правая часть системы удовлетворяет неравенству (1.32), аналогично проверяется неравенство (1.32) для $\frac{\partial v_j}{\partial \xi_k}$. Лемма 1.6 доказана.

Замечание 1.1. Если предположим, что условие (6) нарушается в единственной точке $\xi = 0$, то, поступая аналогично, получим оценку

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} v_j(\xi) \right| \leq c_k |\xi|^{m_k} (1 + |\xi|^2)^{n_k}, \quad m_k \leq 0. \quad (1.38)$$

Пусть теперь система (2) регулярна (напомним, что $\rho(\xi) = r$, $\xi \neq 0$, $\rho(0) > r$). Очевидно условие (6) не выполнено в точке $\xi = 0$, так как $\text{rank } P^+(0) = m - \rho(0) < m - r$. Условие (6) все еще предполагается для точек $\xi \neq 0$. Тогда ясно, что оценка (1.32) для решения системы (1.31) в этом случае принимает вид (1.38).

IV. Введем матрицу-функцию

$$P_\mu^+(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\mu(\xi)} (\lambda E_m - A(\xi))^{-1} d\lambda, \quad |\xi| < \delta, \quad (1.39)$$

где замкнутый контур $\gamma_\delta(\xi)$ содержит те и только те корни характеристического уравнения (3), которые при $\xi = 0$ принадлежат области $C\Pi_\alpha^*$, $\delta > 0$ достаточно мало. Очевидно, что

$$P_o^+(\xi) \in C^\infty(|\xi| < \delta) \text{ и } \text{rank } P_o^+(\xi) = m - \rho(0),$$

$$\text{rank}(P^+(\xi) - P_o^+(\xi)) = \rho(0) - r \text{ при } |\xi| < \delta.$$

Справедлива [4]

Лемма 1.7. *Имеет место следующая формула :*

$$\text{rank} \begin{pmatrix} P_o^+(\xi) \\ B(\xi) \end{pmatrix} = m - \rho(0) + r, \quad 0 < |\xi| < \delta. \quad (1.40)$$

Доказательство. При $0 < |\xi| < \delta$ имеем

$$\begin{aligned} m = \text{rank} \begin{pmatrix} P^+(\xi) \\ P_o^+(\xi) \\ B(\xi) \end{pmatrix} &= \text{rank} \begin{pmatrix} P^+(\xi) - P_o^+(\xi) \\ P_o^+(\xi) \\ B(\xi) \end{pmatrix} \leq \\ &\leq \text{rank}(P^+(\xi) - P_o^+(\xi)) + \text{rank} \begin{pmatrix} P_o^+(\xi) \\ B(\xi) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

следовательно

$$\text{rank} \begin{pmatrix} P_o^+(\xi) \\ B(\xi) \end{pmatrix} \geq m - \rho(0) + r.$$

Заметим, что

$$\text{rank} \begin{pmatrix} P_o^+(\xi) \\ B(\xi) \end{pmatrix} \leq \text{rank } P_o^+(\xi) + \text{rank } B(\xi) \leq m - \rho(0) + r,$$

поэтому формула (1.40) верна. Лемма 1.7 доказана.

Рассмотрим теперь систему

$$P^+(\xi)v(\xi) = 0, \quad B(\xi)v(\xi) = \alpha(\xi), \quad (1.41)$$

где $\alpha(\xi)$ - заданный функционал, сосредоточенный в точке $\xi = 0$. Из условия (6) (напомним, что (6) предполагается для любых $\xi \neq 0$, а система (2) - строго регулярна) следует, что решение системы (1.41) сосредоточено в точке $\xi = 0$.

Покажем существование решения системы (1.41). В некоторой окрестности точки $\xi = 0$ система (1.41) эквивалентна системе (см. (1.37))

$$C(\xi)v(\xi) = \beta(\xi), \quad (1.42)$$

где $\beta(\xi) = (0, \alpha(\xi))$ - m -мерный вектор-функционал, сосредоточенный в точке $\xi = 0$ и $\det C(\xi) \neq 0$ для любых $\xi \neq 0$.

Предположим вначале, что $n = 1$. Тогда согласно [5] имеем представление

$$C(\xi) = R(\xi)D(\xi)C_0(\xi), \quad (1.43)$$

где $R(\xi)$ - рациональная матрица с $\det R(\xi) = 1$, $\det C_0(\xi) \neq 0$ для $|\xi| < \epsilon$, $C_0(\xi) \in C^\infty(|\xi| < \epsilon)$ а $D(\xi) = \{\delta_j^l \xi^{k_j}\}$ - диагональная матрица (δ_j^l - символ Кронеккера).

Вводя обозначения $C_0(\xi)v(\xi) = w(\xi)$, $\beta_1(\xi) = R^{-1}(\xi)\beta(\xi)$, сведем систему (1.42) к разрешимой системе

$$\xi^{k_j} w_j(\xi) = \beta_{1j}(\xi), \quad (w_1, \dots, w_m) = w, \quad (\beta_{11}(\xi), \dots, \beta_{1m}(\xi)) = \beta_1(\xi). \quad (1.44)$$

Однородная ($\alpha(\xi) \equiv 0$) система (1.41) имеет $k_1 + \dots + k_m \geq 1$ линейно независимых решений.

Пусть теперь $n \geq 2$, $\xi = (\xi_1, \xi')$, $\xi' = (\xi_2, \dots, \xi_n)$. Представим функционал $\beta(\xi)$ из (1.42) следующим образом:

$$\beta(\xi) = \sum_{j_2 \leq \nu_2, \dots, j_n \leq \nu_n} a_{j_2, \dots, j_n}(\xi_1) \delta^{(j_2)}(\xi_2) \otimes \dots \otimes \delta^{(j_n)}(\xi_n), \quad (1.45)$$

где $\delta^{(j)}$ обозначает производную порядка j функционала Дирака $\delta(\cdot)$. Решение (1.42) будем искать в виде (1.45)

$$v(\xi) = \sum_{j_2 \leq \nu_2, \dots, j_n \leq \nu_n} c_{j_2, \dots, j_n}(\xi_1) \delta^{(j_2)}(\xi_2) \otimes \dots \otimes \delta^{(j_n)}(\xi_n) \quad (1.46)$$

с неизвестными $c_{j_2, \dots, j_n}(\xi_1)$.

Подставляя $v(\xi)$ из (1.46) в (1.42) и используя линейную независимость системы функционалов $\{\delta^{(j_2)}(\xi_2) \otimes \dots \otimes \delta^{(j_n)}(\xi_n)\}$, получим систему для определения вектор-функционалов $c_{\nu_2, \dots, \nu_n}(\xi_1)$:

$$C(\xi_1, 0, \dots, 0) c_{\nu_2, \dots, \nu_n}(\xi_1) = a_{\nu_2, \dots, \nu_n}(\xi_1),$$

которая исследована выше. Остальные функционалы $c_{j_2, \dots, j_n}(\xi_1)$ находятся аналогичным образом. Следовательно, система (1.41) имеет решение для любых $\alpha(\xi)$.

Рассмотрим теперь однородную ($\beta(\xi) \equiv 0$) систему (1.42) при $n = 2$. Решение будем искать в виде

$$v(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j \leq \nu_2} c_j(\xi_1) \delta^{(j)}(\xi_2), \quad (1.47)$$

подставляя которое в (1.42), получим

$$C(\xi_1, 0)c_{\nu_2}(\xi_1) = 0, \quad C(\xi_1, 0)c_j(\xi_1) + B_j(c_{j+1}(\xi_1), \dots, c_{\nu_2}(\xi_1)) = 0, \quad j \leq \nu_2 - 1,$$

где $B_j(\dots)$ - вполне определенные линейные выражения. Очевидно, что эта система допускает ненулевое решение ($c_{\nu_2}(\xi_1) \neq 0$) и так как целое ν_2 можно взять произвольным, то заключаем, что при $n = 2$ однородная система (1.42) имеет бесконечно много линейно независимых решений. Если $n \geq 3$, то решение однородной системы (1.42) ищем в виде

$$v(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \sum_{j_2 \leq \nu_2} c_{j_2}(\xi_1) \delta^{(j_2)}(\xi_2) \otimes \delta(\xi_3) \otimes \dots \otimes \delta(\xi_n).$$

Окончательно, получаем следующий результат

Лемма 1.8. Пусть система (2) строго регулярна и условие (6) выполнено за исключением конечного числа точек. Тогда система (1.41) всегда разрешима. Однородная система (1.41) имеет конечное число линейно независимых решений при $n = 1$ и бесконечно много линейно независимых решений при $n \geq 2$.

Замечание 1.2. Альтернатива получения разрешимости системы (1.41) основывается на подготовительной теореме Мальгранжа. Обозначим $\Delta(\xi) = \det C(\xi)$.

Имеем $\Delta(\xi) \in C^\infty(|\xi| < \varepsilon)$ и поскольку $\Delta(\xi_1, 0)$ - аналитична относительно ξ_1 можно найти натуральное j такое, что $\Delta(0) = \dots = \frac{\partial^{j-1} \Delta(0)}{\partial \xi_1^{j-1}} = 0$, однако $\frac{\partial^j \Delta(0)}{\partial \xi_1^j} \neq 0$. Согласно упомянутой теореме имеем представление [1]

$$\Delta(\xi_1, \xi') = a(\xi_1, \xi')(\xi_1^j + a_{j-1}(\xi')\xi_1^{j-1} + \dots + a_0(\xi')), \quad (1.48)$$

где $a_j \in C^\infty(|\xi'| < \varepsilon)$, $a(\xi_1, \xi') \in C^\infty(|\xi| < \varepsilon)$ и $a(0, 0) \neq 0$, $a_j(0) = 0$. Представим функционал $\beta(\xi)$ в виде

$$\beta(\xi) = \sum a_{j_1, \dots, j_n}(\xi_1) \delta^{(j_1)}(\xi_1) \otimes \dots \otimes \delta^{(j_n)}(\xi_n).$$

Пусть $C_1(\xi_1, \xi')$ - матрица, транспонированная к матрице, составленной из алгебраических дополнений элементов матрицы $C(\xi)$, а $k_0 \gg 1$ - целое. Тогда функционал

$$\begin{aligned} \langle v(\xi_1, \xi'), \varphi(\xi_1, \xi') \rangle = & \sum_{j_1 \leq \nu_1, \dots, j_n \leq \nu_n} a_{j_1, \dots, j_n} \langle \delta^{(j_1 + k_0)}(\xi_1) \\ & \langle \delta^{(j_2)}(\xi_2) \otimes \dots \otimes \delta^{(j_n)}(\xi_n), \frac{\xi_1^{k_0} C_1(\xi_1, \xi') \varphi(\xi_1, \xi')}{a(\xi_1, \xi')(\xi_1^j + a_{j-1}(\xi') \xi_1^{j-1} + \dots + a_0(\xi'))} \rangle, \\ & \forall \varphi \in C_0^\infty(|\xi| < \varepsilon) \end{aligned}$$

является решением системы (1.41).

Предположим теперь, что система (2) регулярна ($\rho(0) > r$), и рассмотрим следующую алгебраическую систему:

$$P_0^+(\xi)v(\xi) = 0, \quad B(\xi)v(\xi) = \alpha(\xi), \quad |\xi| < \delta, \quad (1.49)$$

где $P_0^+(\xi)$ определена формулой (1.39), а $\alpha(\xi)$ - функционал, сосредоточенный в точке $\xi = 0$. Пусть $n = 1$, тогда система (1.49) эквивалентна системе

$$C_0(\xi)v(\xi) = \beta(\xi), \quad (1.50)$$

где $C_0(\xi) \in C^\infty(|\xi| < \varepsilon)$ - матрица размерности $(m - \rho(0) + r) \times m$ такая, что $\text{rank} C_0(\xi) = m - \rho(0) + r$ при $\xi \neq 0$, а $\beta(\xi) = (0, \alpha(\xi))$. Так как элементы матрицы $C_0(\xi)$ аналитические функции от ξ , то существует постоянная матрица C_1 размерности $(\rho(0) - r) \times m$ такая, что

$$\text{rank} \begin{pmatrix} C_0(\xi) \\ C_1 \end{pmatrix} = m, \quad 0 < |\xi| < \delta.$$

Система

$$C_1 v(\xi) = 0, \quad C_0(\xi)v(\xi) = \beta(\xi)$$

имеет решение (см. (1.42)). Следовательно, система (1.50) также разрешима.

Как и выше, случай $n \geq 2$ сводится к случаю $n = 1$. Таким образом, справедлива

Лемма 1.9. Пусть система (2) регулярна и имеет место условие (б) за исключением конечного числа точек. Тогда система (1.49) имеет решение и однородная система (1.49) имеет бесконечно много линейно независимых решений.

В предположении, что условие (6) нарушено в единственной точке $\xi = 0$ рассмотрим следующую вспомогательную задачу :

Задача В. Найти решение $u(x, t) \in M$ системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(i \frac{\partial}{\partial x})u + \sum_{|j| \leq \nu_0} a_j(t)x^j, \quad j = (j_1, \dots, j_n), \quad x^j = x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}, \quad (1.51)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$B(i \frac{\partial}{\partial x})u(x, 0) = \sum_{|j| \leq \nu_0} b_j x^j, \quad (1.52)$$

где $a_j(t) \in M$, $b_j \in R^r$.

Заметим сначала, что система (1.51) имеет решение

$$u_0(x, t) = \sum_{|j| \leq \nu_0} c_j(t)x^j.$$

Действительно, подставляя $u_0(x, t)$ в (1.51) и воспользовавшись линейной независимостью полиномов $\{x^j, |j| \leq \nu_0\}$, получим для $c_j(t)$ систему в виде (1.3) для $c_j(t)$, которая разрешима. Это означает, что правую часть системы (1.51) считаем равной нулю.

Пусть вначале система (2) строго регулярна. Пусть также $v(\xi)$ - решение системы (1.41) с $\alpha(\xi) = F[\sum_{|j| \leq \nu_0} b_j x^j](\xi)$. Тогда можно проверить, что прообраз Фурье функционала $u(\xi, t) = V^-(\xi, t)v(\xi)$, где $V^-(\xi, t)$ определен формулой (1.14), есть искомое решение задачи В.

Теперь предположим, что система (2) регулярна, и пусть $v(\xi)$ - решение системы (1.49) с $\alpha(\xi) = F[\sum_{|j| \leq \nu_0} b_j x^j](\xi)$, а $P_o^-(\xi) = (P_m - P_o^+(\xi)) \in C^\infty(|\xi| < \delta)$.

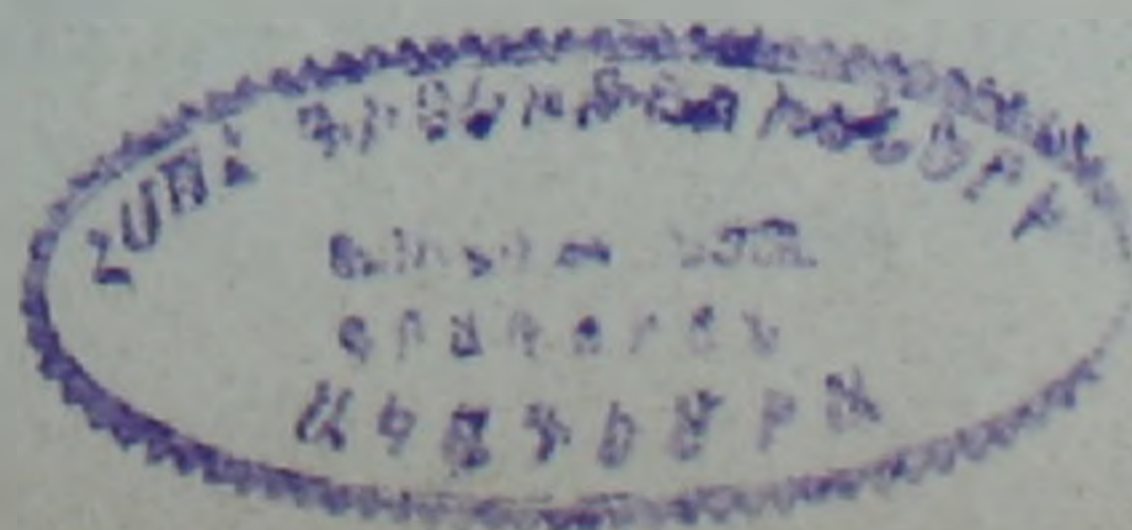
Прообраз Фурье функционала

$$u(\xi, t) = e^{A(\xi)t} P_o^-(\xi) v(\xi) = e^{P_o^-(0)A(0)t} \sum_{|j| \leq \nu_0} t^j \alpha_j(\xi), \quad t \in \Pi_\alpha,$$

где $\alpha_j(\xi)$ - вполне определенные функционалы, сосредоточенные в точке $\xi = 0$, будет решением задачи В. Так как все собственные значения матрицы $P_o^-(0)A(0)$ принадлежат области Π_α^* , то прообраз $u(\xi, t)$ принадлежит классу M .

Таким образом, доказана

Лемма 1.10. *Задача В всегда разрешима.*



§2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ А

Вначале предположим, что система (2) строго регулярна и что условие (6) имеет место для любых $\xi \in R^n$. Покажем, что прообраз Фурье $u(x, t)$ функционала

$$u(\xi, t) = \sum_{j=1}^r V^-(\xi, t) v_j(\xi) f_j(\xi), \quad (2.1)$$

где $v_j(\xi)$ обозначает решение системы (1.31), является решением задачи А.

Выберем $k_0(l) \gg 1$ таким образом, чтобы для любых натуральных l

$$\left| \frac{\partial^q}{\partial t^q} \left(\frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \frac{V^-(\xi, t) v_j(\xi)}{(1 + |\xi|^2)^{k_0}} \right) \right| \leq c \frac{(1 + |t|)^s}{(1 + |\xi|)^{n+1}} \quad \forall |k| \leq l; \quad q = 0, 1.$$

Очевидно, что обратное преобразование Фурье

$$K_j(x, t) = F_\xi^{-1} \left[\frac{V^-(\xi, t) v_j(\xi)}{(1 + |\xi|^2)^{k_0}} \right] (x, t)$$

удовлетворяет оценке

$$\left| \frac{\partial^q}{\partial t^q} K_j(x, t) \right| \leq c \frac{(1 + |t|)^s}{(1 + |x|)^l}, \quad q = 0, 1.$$

Применяя неравенство Питре $(1 + |x - \tau|)^{-|\eta|} \leq (1 + |x|)^{\eta} (1 + |\tau|)^{-\eta}$ легко показать, что

$$M \ni u(x, t) = \sum_{j=1}^r K_j(x, t) * (1 - \Delta_x)^{k_0} f_j(x), \quad \Delta_x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Заметим также, что если $f_j \in M_\gamma$, то $u \in M_\gamma$.

Случаи, когда система (2) строго регулярна и условие (6) нарушено или система (2) регулярна, будут рассмотрены одновременно. Отметим вновь, что условие (6) не выполняется только в точке $\xi = 0$. Заметим также, что уравнение $\Delta_x u(x, t) = f(x, t)$ разрешимо в M . При $n = 1$ это очевидно. Заменяя f на $\frac{\partial^{\nu_1} f(x, t)}{\partial x_1^{\nu_1}}$, $\nu_1 \gg 1$, случай $n \geq 2$ сводим к случаю $n = 1$ и так далее.

Для заданного $f(x)$ заменим граничное условие (4) на следующее

$$B(i \frac{\partial}{\partial x}) u(x, 0) = \Delta_x^\nu f(x), \quad (2.2)$$

где $\nu \gg 1$ - целое.

Заметим, что если доказать разрешимость задачи (2), (2.2), то разрешимость задачи (2), (4) сведется к рассмотрению задачи В (см. (1.51), (1.52)). Действительно, пусть $u_0(x, t)$ - решение задачи (2), (2.2) и $u_1(x, t) \in M$ такое, что $\Delta_x^\nu u_1 = u_0$. Подставляя $u_0(x, t)$ в (2), (2.2), получим

$$\Delta_x^\nu \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - A(i \frac{\partial}{\partial x}) u_1 \right) = 0, \quad \Delta_x^\nu B(i \frac{\partial}{\partial x}) u_1(x, 0) = \Delta_x^\nu f(x)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - A(i \frac{\partial}{\partial x}) u_1 &= \sum_{|j| \leq 2\nu} a_j(t) x^j, \\ B(i \frac{\partial}{\partial x}) u_1(x, 0) &= f(x) + \sum_{|j| \leq 2\nu} b_j x^j, \end{aligned}$$

где $a_j(t) \in M$ и $b_j \in R^r$ вполне определены.

Теперь, если $u(x, t)$ - решение задачи (2), (4), то замена $w = u_1 - u$ приведет к задаче В для w . Таким образом, мы ограничимся исследованием задачи (2), (2.2).

Формула (2.1) в этом случае примет вид

$$u(\xi, t) = \sum_{j=1}^r V^-(\xi, t) v_j(\xi) |\xi|^{2\nu} f_j(\xi), \quad \xi \neq 0,$$

где $V^-(\xi, t)$, $v_j(\xi)$ удовлетворяют неравенствам (1.16), (1.38), соответственно.

Выбором ν можем добиться любой, наперед заданной гладкости в R^n вектор-функций $V^-(\xi, t) v_j(\xi) |\xi|^{2\nu}$, а затем как и выше показать, что прообраз Фурье $u(\xi, t)$ принадлежит классу M и является решением задачи (2), (2.2). Таким образом, разрешимость задачи А при выполнении условия (6) доказана для любого $\xi \neq 0$.

Рассмотрим теперь однородную ($f \equiv 0$) задачу А.

Пусть система (2) строго регулярна и условие (6) выполняется за исключением конечного числа точек. Тогда в силу Леммы 1.8 однородная задача А имеет только конечное число линейно независимых решений при $n = 1$ и бесконечно много линейно-независимых решений при $n \geq 2$.

В случае же регулярной системы (2) ($\rho(0) > r$) однородная задача А имеет бесконечно много линейно-независимых решений при любых $n \geq 1$ (следует из Леммы 1.9).

Таким образом, Теорема 1, сформулированная во введении, доказана.

В заключение, рассмотрим несколько простых примеров.

1. В $R \times R^+$ рассмотрим оператор Гельмгольца (эллиптический)

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad k \in R \setminus \{0\} \quad (2.3)$$

с характеристическими корнями $\lambda_1(\xi) = \sqrt{\xi^2 - k^2}$, $\lambda_2(\xi) = -\sqrt{\xi^2 - k^2}$. Это уравнение не является α -регулярным для любых $\alpha \in R$ (определение см. [6]).

Однако легко видеть, что в $R \times \Pi_\alpha$, $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, уравнение (2.3) регулярно с порядком регулярности $r = 1$. Исключительными точками являются $\xi = \pm k$. В соответствии с полученными результатами, для уравнения (2.3) ставится задача Дирихле

$$u(x, 0) = f(x).$$

2. Для уравнения Клейна-Гордона

$$(\Diamond + m_o^2)u = 0, \quad \Diamond = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta, \quad m_o \neq 0, \quad (2.4)$$

имеем $\lambda_{1,2}(\xi) = \pm i\omega(\xi)$, $\omega(\xi) = \sqrt{a^2|\xi|^2 + m_o^2}$.

Уравнение (2.4) - α регулярно для любых $\alpha \geq 0$ с $r = 2$ и задача Коши корректна.

Рассмотрим уравнение (2.4) в $R^n \times \Pi_\alpha$, $0 < \alpha < \pi$. Ясно, что уравнение (2.4) теперь строго регулярно с порядком регулярности $r = 1$ и задача Дирихле (2.3) корректна.

3. Наконец, рассмотрим систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (x, t) \in R \times \Pi_\alpha, \quad 0 < \alpha < \pi, \quad (2.5)$$

где A - постоянная квадратная матрица порядка $2n$.

Предположим, что собственные значения A действительны. Пусть n из них неположительны. Система (2.5) является регулярной с порядком регулярности $r = n$ ($\xi = 0$ одна изолированная точка). Соответствующая матрица $P^+(\xi)$ имеет вид

$$P^+(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma+(\xi)} (\lambda E_{2n} - i\xi A)^{-1} d\lambda,$$

и, очевидно, кусочно-постоянна

$$P^+(\xi) = \begin{cases} P_1, & \text{при } \xi > 0 \\ P_2, & \text{при } \xi < 0, \end{cases}$$

где P_j - постоянные матрицы и $\text{rank } P_j = n$.

Пусть C_j - постоянные матрицы размерности $n \times 2n$ такие, что

$$\text{rank} \begin{pmatrix} P_j \\ C_j \end{pmatrix} = 2n.$$

Среди матриц $B_\tau = \tau C_1 + (1 - \tau)C_2$, $0 \leq \tau \leq 1$, существует B_{τ_0} , для которой

$$\text{rank} \begin{pmatrix} P_j \\ B_{\tau_0} \end{pmatrix} = 2n, \quad j = 1, 2.$$

Для системы (2.5) можно поставить граничную задачу

$$B_{\tau_0} u(x, 0) = f(x). \quad (2.6)$$

Эта задача корректна, так как

$$\text{rank} \begin{pmatrix} P^+(\xi) \\ B_{\tau_0} \end{pmatrix} = 2n, \quad \text{для } \xi \neq 0,$$

т.е. условие (6) нарушается лишь в точке $\xi = 0$.

ABSTRACT. Let M be the class of vector-functions $u(x, t) \in C^\infty(R^n \times \Pi_\alpha)$ analytic in $t \in \Pi_\alpha = \{t | 0 < \arg t < \alpha < \pi\}$ and having polynomial growth in (x, t) . Let $A(\xi)$, $\xi \in R^n$ be a square matrix of order m with polynomial elements. For the system

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(i \frac{\partial}{\partial x}) u, \quad u \in M, \quad (x, t) \in R^n \times \Pi_\alpha \quad (1)$$

we define the strictly regular and regular cases. Let r denote the order of regularity of (1) and $B(\xi)$ let be a polynomial matrix of dimension $r \times m$. We impose the boundary condition :

$$B(i \frac{\partial}{\partial x}) u(x, 0) = f(x), \quad f(x) \in M, \quad (2)$$

For strictly regular case a condition of correctness of problem (1), (2) is obtained. For regular case an analogous condition guarantees the existence of solution.

The homogeneous ($f \equiv 0$) problem is studied too.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Хермандер, Анализ Линейных Дифференциальных Операторов с Частными Производными, том 2, М., Мир, 1986.
2. А. Л. Павлов, "Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве", Мат. сборник, том 103 (145), №3 (7), стр. 367-391, 1977.
3. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, Устойчивость Решения Дифференциальных Уравнений в Банаховом Пространстве, М., Наука, 1970.
4. Н. Е. Товмасян, "Красовые задачи для нерегулярных систем дифференциальных уравнений на полуплоскости в классе обобщенных функций и функций полиномиального роста, Мат. сборник, том 131 (173), №2 (10), стр. 185-212, 1986.
5. З. Пресдорф, Некоторые Классы Сингулярных Уравнений, М., Мир, 1979.
6. А. И. Комеч, "Линейные дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами", Современные проблемы математики. Фундаментальные исследования, том 31, Москва, 1988.

27 Мая 1992

Армянский государственный
инженерный университет

О РАЗМЕРНОСТЯХ ЯДРА И КОЯДРА МАТРИЧНОГО ТЕПЛИЦЕВА ОПЕРАТОРА

Р. З. Мкртчян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, №2, 1993

Пусть $T_n = (T_{ij})_{i,j=1}^n$ - операторная матрица, где T_{ij} , $i, j = 1, n$ - теплицевы операторы, определенные на пространстве Харди H^2 . В настоящей работе получены достаточные условия обратимости T_n , которые не предполагают перестановочности операторов T_{ij} . Получены также оценки размерностей ядра и коядра операторных матриц T_n , которые являются в то же время векторнозначными теплицевыми операторами.

1. Пусть A, B, C, D - операторы, определенные на некотором гильбертовом пространстве H . Рассмотрим вопросы обратимости операторных матриц типа

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \quad (1)$$

В случае, когда некоторые из элементов матрицы (1) перестановочны, эта проблема рассмотрена в работах [1], [2]. Было выяснено, что в этом случае обратимость матрицы (1) связана с обратимостью формальных определителей $AD - BC$. В работе [1], стр. 43 была поставлена следующая задача: найти условия обратимости матрицы (1), когда элементы матрицы (1), вообще говоря, не перестановочны. Мы исследуем эту задачу в случае, когда A, B, C, D - теплицевы. А наш результат можно распространить на матрицу размерности $n \times n$.

Пусть $T_n = (T_{ij})_{i,j=1}^n$, где T_{ij} , $i, j = 1, n$ - теплицевы операторы, определенные на пространстве Харди H^2 . В настоящей работе получены некоторые достаточные условия обратимости операторных матриц T_n , без требования перестановочности операторов T_{ij} , $i, j = 1, n$. Получены также оценки размерностей ядра и коядра операторной матрицы T_n .

Оператор T_n определен на пространстве $H_n^2 = H^2 \oplus \dots \oplus H^2$, т.е. на прямой сумме пространств Харди. Элементы пространства H_n^2 имеют вид

$$x_n = \text{tr} (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}), \quad \text{где} \quad x^{(i)} \in H^2 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Норма и скалярное произведение в H_n^2 определяются следующим образом

$$\|x_n\|_{H_n^2}^2 = \sum_{p=1}^n \|x^{(p)}\|_{H^2}^2, \quad (x_n, y_n)_{H_n^2} = \sum_{p=1}^n (x^{(p)}, y^{(p)})_{H^2}.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \|T_2 x_2\|_{H_2^2}^2 &= \|T_{11} x^{(1)}\|_{H^2}^2 + \|T_{12} x^{(2)}\|_{H^2}^2 + \|T_{21} x^{(1)}\|_{H^2}^2 + \|T_{22} x^{(2)}\|_{H^2}^2 + \\ &+ 2\text{Re} (T_{21} x^{(1)}, T_{22} x^{(2)})_{H^2} + 2\text{Re} (T_{11} x^{(1)}, T_{12} x^{(2)})_{H^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

В следующем пункте получено представление для норм $\|T_2 x_2\|^2$, позволяющее оценить размерности как ядра, так и коядра оператора T_2 .

2. В этом пункте дадим необходимые определения и получим представление для скалярного произведения (Tx, Qy) , где T и Q - теплицевы операторы, определенные на H^2 .

Ганкелев оператор χ_ψ и теплицев оператор T_ψ определяются следующим образом :

$$\chi_\psi u = P_- \psi u,$$

$$T_\psi u = P_+ \psi u,$$

где $u \in H^2$, $\psi \in L^\infty$, P_+ и P_- - операторы проектирования из L_2 на пространства H^2 и $H_-^2 = L^2(\ominus)H^2$, соответственно. Функция ψ называется символом операторов χ_ψ и T_ψ .

Ганкелевы и теплицевы операторы связаны соотношением

$$\chi_\psi u + T_\psi u = \psi u, \quad u = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{ik\theta} \in H^2, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty. \quad (3)$$

Мы будем предполагать, что символ ψ теплицева оператора T_ψ удовлетворяет условию :

$$P_- \psi \in L^\infty.$$

Пусть символы теплицевых операторов T и Q имеют следующий вид :

$$T \sim \psi(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ik\theta} \in L^\infty, \quad Q \sim \omega(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{ik\theta} \in L^\infty.$$

Определим теплицевы операторы $T^{(n)}$ и $Q^{(n)}$ так, что соответствующими им символами будут следующие функции :

$$\begin{aligned} T^{(n)} \sim \psi^{(n)}(\theta) &= \sum_{k=-\infty}^{-n-1} a_k e^{ik\theta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ Q^{(n)} \sim \omega^{(n)}(\theta) &= \sum_{k=-\infty}^{-n-1} b_k e^{ik\theta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогично определим ганкелевы операторы χ_T , $\chi_T^{(n)}$, χ_Q и $\chi_Q^{(n)}$ с символами $\psi(\theta)$, $\psi^{(n)}(\theta)$, $\omega(\theta)$ и $\omega^{(n)}(\theta)$, соответственно.

Пусть

$$H_p^2 = \{u(\theta); u(\theta) = \sum_{m=p}^{\infty} x_m e^{im\theta}\} \quad \text{и} \quad H_{m,p}^2 = H_m^2 \oplus H_p^2 \subset H_2^2.$$

Поскольку скалярное произведение теплицевых и ганкелевых операторов равно нулю, имеем

$$\begin{aligned} (Tu_p, Qv_q) &= ((T + \chi_T)u_p, (Q + \chi_Q)v_q) - ((T^{(p)} + \chi_T)u_p, (Q^{(q)} + \\ &+ \chi_Q)v_q) + (T^{(p)}u_p, Q^{(q)}v_q). \end{aligned} \quad (5)$$

Легко видеть, что

$$\chi_T u_p = \chi_T^{(p)} u_p \quad \text{и} \quad \chi_Q v_q = \chi_Q^{(q)} v_q,$$

для $u_p \in H_p^2$, $v_q \in H_q^2$.

Следовательно, равенство (5) можно записать следующим образом :

$$\begin{aligned} (Tu_p, Qv_q) &= ((T + \chi_T)u_p, (Q + \chi_Q)v_q) - \\ &- ((T^{(p)} + \chi_T^{(p)})u_p, (Q^{(q)} + \chi_Q^{(q)})v_q) + (T^{(p)}u_p, Q^{(q)}v_q). \end{aligned} \quad (6)$$

Принимая во внимание (3), получим

$$(Tu_p, Qv_q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\psi \bar{\omega} - \psi^{(p)} \bar{\omega}^{(q)}) u_p \bar{v}_q d\theta + (T^{(p)}u_p, Q^{(q)}v_q), \quad (7)$$

где $u_p \in H_p^2$, $v_q \in H_q^2$.

В частном случае, когда $T = Q$, из (7) следует

$$\|Tu_p\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|\psi|^2 - |\psi^{(p)}|^2) |u_p|^2 d\theta + \|T^{(p)}u_p\|^2, \quad (8)$$

где $u_p \in H_p^2$.

Замечание 1. Из равенств (8) получаются оценки для размерности ядра оператора T , которые даны в работе [4].

3. В этом пункте получим представление для норм $\|T_n\|^2$ и оценим размерности как ядра, так и коядра оператора T_n .

Аналогично равенству (8) можно написать

$$\|T_{ml}u_p\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|\psi_{ml}|^2 - |\psi_{ml}^{(p)}|^2) |u_p|^2 d\theta + \|T_{ml}^{(p)}u_p\|^2, \quad (9)$$

где $u_p \in H_p^2$, и функция $\psi_{ml} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^{(m,l)} e^{ik\theta} \in L^\infty$ - символ оператора T_{ml} , $m, l = 1, 2, \dots$

В силу (7), получим

$$(T_{ml}u_p, T_{ks}v_q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\psi_{ml}\bar{\psi}_{ks} - \psi_{ml}^{(p)}\bar{\psi}_{ks}^{(q)}) u_p \bar{v}_q d\theta + (T_{ml}^{(p)}u_p, T_{ks}^{(q)}v_q), \quad (10)$$

где $m, l, s, k = 1, 2, \dots$, $u_p \in H_p^2$, $v_q \in H_q^2$.

Нам необходимы следующие обозначения :

$$\begin{aligned} A_{nk}(\theta) &= A_{np_k} = \sum_{m=1}^n (|\psi_{mk}|^2 - |\psi_{mk}^{(p_k)}|^2), \\ A_{nk}^*(\theta) &= A_{np_k}^* = \sum_{m=1}^n (|\bar{\psi}_{km}|^2 - |(\bar{\psi}_{km})^{(p_k)}|^2), \\ B_{n,k,l}(\theta) &= B_{np_k p_l} = \sum_{m=1}^n (\psi_{mk}\bar{\psi}_{ml} - \psi_{mk}^{(p_k)}\bar{\psi}_{ml}^{(p_l)}), \\ B_{n,k,l}^*(\theta) &= B_{np_k p_l}^* = \sum_{m=1}^n (\bar{\psi}_{lm}\psi_{km} - \overline{(\bar{\psi}_{lm})^{(p_l)}}(\psi_{km})^{(p_k)}), \\ E_{n,k,l} &= E_{np_k p_l} = \{\theta; |B_{np_k p_l}|^2 < A_{np_k} A_{np_l}, \quad k \neq l\}, \\ E_{n,k,l}^* &= E_{np_k p_l}^* = \{\theta; |B_{np_k p_l}^*|^2 < A_{np_k}^* A_{np_l}^*, \quad k \neq l\}. \end{aligned}$$

Учитывая (9) и (10), перепишем равенство (2) следующим образом :

$$\begin{aligned} \|T_2 x_2\|^2 &= \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_{2j}(\theta) |u_{p_j}|^2 d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\operatorname{Re} [B_{212} u_{p_1} \bar{u}_{p_2}] d\theta + \\ &+ \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^2 \|T_{mj}^{(p_j)} u_{p_j}\|^2 + \sum_{m=1}^2 2\operatorname{Re} (T_{m1}^{(p_1)} u_{p_1}, T_{m2}^{(p_2)} u_{p_2}), \end{aligned} \quad (11)$$

где $u_{p_j} \in H_{p_j}^2$, $j = 1, 2$, $x_2 = {}^{\text{tr}} (u_{p_1}, u_{p_2}) \in H_{p_1, p_2}^2$. Так как сумма последних двух слагаемых в правой части равенства (11) неотрицательна, то получим следующее неравенство:

$$\|T_2 x_2\|^2 \geq \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_{2j}(\theta) |u_{p_j}|^2 d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\operatorname{Re} [B_{212}(\theta) u_{p_1} \bar{u}_{p_2}] d\theta. \quad (12)$$

Имест место следующая

Теорема 1. Из условий

- (i) $A_{2k}(\theta) \geq 0$, $k = 1, 2$, почти всюду,
- (ii) $|B_{212}(\theta)|^2 \leq A_{21}(\theta) A_{22}(\theta)$, почти всюду,
- (ii)' $\mu(E_{212}) > 0$, где μ - лебегова мера,

следует, что $\dim \operatorname{Ker} T_2 \leq p_1 + p_2$.

Доказательство. Функции A_{2k} , $k = 1, 2$ не могут быть тождественными нулями. В противном случае

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_{2k} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^2 (|\psi_{mk}|^2 - |\psi_{mk}^{(p_k)}|^2) d\theta = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |a_l^{(1,k)}|^2 - \sum_{l=-\infty}^{-p_k-1} |a_l^{(1,k)}|^2 + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |a_l^{(2,k)}|^2 - \sum_{l=-\infty}^{-p_k-1} |a_l^{(2,k)}|^2 = \\ &= \sum_{l=-p_k}^{+\infty} |a_l^{(1,k)}|^2 + \sum_{l=-p_k}^{+\infty} |a_l^{(2,k)}|^2, \end{aligned}$$

и отсюда следует, что $a_l^{(1,k)} = 0$, $a_l^{(2,k)} = 0$, когда $-p_k \leq l < +\infty$. Следовательно, $\psi_{mk} = \psi_{mk}^{(p_k)}$, $m = 1, 2$, что невозможно.

Согласно условиям (ii), (ii)' существуют функции $h_1(\theta)$, $h_2(\theta)$, удовлетворяющие условиям

$$h_1(\theta)h_2(\theta) = B_{212}(\theta) \quad |h_1(\theta)|^2 \leq A_{21}(\theta), \quad |h_2(\theta)|^2 \leq A_{22}(\theta) \quad (13)$$

и, по крайней мере одно из этих неравенств строгое на некотором множестве $F \subseteq E_{212}$ с $\mu(F) > 0$.

Неравенство (12) можно переписать следующим образом:

$$\|T_2 x_2\|^2 \geq \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (A_{2j}(\theta) - |h_j(\theta)|^2 + |h_j(\theta)|^2) |u_{p_j}|^2 d\theta +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 \operatorname{Re} [h_1(\theta) h_2(\theta) u_{p_1}(\theta) \bar{u}_{p_2}(\theta)] d\theta = \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h_1 u_{p_1} + h_2 u_{p_2}|^2 d\theta + \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (A_{2j} - |h_j|^2) |u_{p_j}|^2 d\theta. \quad (14)
\end{aligned}$$

Учитывая тот факт, что

$$\mu\{\theta : \varphi(\theta) \in H^2, |\varphi(\theta)|^2 = 0\} = 0 \quad \text{и} \quad A_{2,k}(\theta) \neq 0, \quad k = 1, 2,$$

закключаем, что правая часть неравенства (12) строго положительна, если одна из функций u_{p_k} , $k = 1, 2$ равна нулю. В случае, когда функции $u_{p_1}, u_{p_2} \neq 0$, согласно (13) получаем, что правая часть неравенства (14) строго положительна, чем и завершается доказательство Теоремы 1.

Замечание 2. Условия Теоремы 1 можно ослабить.

Пусть

$$\bar{\psi}_{mn}(\theta) = \psi_{mn}(\theta) - \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(m,n)} e^{ik\theta} - \sum_{k=-p_n}^{-1} c_k^{(m,n)} e^{ik\theta},$$

где $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k^{(m,n)}|^2 < \infty$, $m, n = 1, 2$.

Тогда вместо (i), (ii), (ii)' достаточно потребовать выполнения следующих условий :

$$(i') \quad A'_{2k}(\theta) = \sum_{m=1}^2 (|\psi_{mk}|^2 - |\bar{\psi}_{mk}|^2) \geq 0, \quad k = 1, 2, \text{ почти всюду.}$$

$$(ii') \quad |B'_{212}(\theta)|^2 = |\sum_{m=1}^2 (\psi_{m1} \psi_{m2} - \bar{\psi}_{m1} \bar{\psi}_{m2})|^2 \leq A'_{21}(\theta) A'_{22}(\theta), \text{ почти всюду,}$$

$$(ii')' \quad \mu(E'_{212}) > 0, \text{ где } E'_{212} = \{\theta; |B'_{212}|^2 < A'_{21} A'_{22}\},$$

так как символом оператора T'' является функция, сопряженная символу T' и

$$T_2^* = \begin{pmatrix} T_{11}^* & T_{21}^* \\ T_{12}^* & T_{22}^* \end{pmatrix}.$$

Теорема 1*. Из условий

$$(i^*) \quad A_{2k}(\theta) \geq 0, \quad k = 1, 2, \text{ почти всюду,}$$

$$(ii^*) \quad |B_{212}^*(\theta)|^2 \leq A_{21}^*(\theta) A_{22}^*(\theta), \text{ почти всюду,}$$

$$(ii^*)' \quad \mu(E_{212}^*) > 0,$$

следует, что $\dim \operatorname{Coker} T_2 = \dim \operatorname{Ker} T_2^* \leq p_1 + p_2$.

Из Теорем 1 и 1*, получим достаточные условия для обратимости оператора T_2 .

Теорема 2. Пусть условия Теорем 1 и 1' выполнены с $p_1 = p_2 = 0$. Тогда оператор T_2 обратим.

Приведем примеры символов, удовлетворяющих условиям Теоремы 1 и принадлежащих пространствам H^∞ и L^∞ . Для этого воспользуемся следующей хорошо известной теоремой (см. [3], стр. 81) :

Если $h = |f|^2 \in L^1$, то $f \in H^2$ тогда и только тогда, когда $\log h \in L^1$.

Пример 1. Пусть неотрицательные функции h_{mn} , $m, n = 1, 2$ удовлетворяют условиям

$$0 < M \leq h_{ii}(\theta) \leq 2M, \quad \text{если } 0 \leq \theta \leq \pi, \quad i = 1, 2,$$

$$0 < N \leq h_{ii}(\theta) \leq 2N, \quad \text{если } \pi < \theta \leq 2\pi, \quad i = 1, 2,$$

$$M \leq h_{ij}(\theta) \leq 2M, \quad \text{если } \pi < \theta \leq 2\pi, \quad i \neq j,$$

$$N \leq h_{ij}(\theta) \leq 2N, \quad \text{если } 0 \leq \theta \leq \pi, \quad i \neq j.$$

Так как $\log h_{mn} \in L^1(0, 2\pi)$, $m, n = 1, 2$, то в силу приведенной теоремы из работы [3], существуют функции $\psi_{mn}(\theta) \in H^2$, $m, n = 1, 2$ такие, что $h_{mn}(\theta) = \|\psi_{mn}(\theta)\|^2$. Более того, в силу принципа максимума модуля аналитической функции, $\psi_{mn}(\theta) \in H^\infty$. Если взять число M достаточно большим относительно N , то легко видеть, что функция ψ_{mn} удовлетворяет условиям (ii), (ii)' Теоремы 1. Условие (i) выполняется автоматически.

Пример 2. Пусть

$$\varphi_{mn}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{-1} d_k^{(m,n)} e^{ik\theta}, \quad m, n = 1, 2$$

коаналитические функции, удовлетворяющие условиям $|\varphi_{mn}| < \delta$. Легко видеть, что при достаточно малом δ функции $\tilde{\psi}_{mn} = \psi_{mn} + \varphi_{mn}$, где ψ_{mn} функции, построенные в Примере 1, принадлежат пространству L^∞ и удовлетворяют условиям Теоремы 1.

Распространим теперь наш результат на n -мерный случай. Для $n \times n$ -мерной операторной матрицы $T_n = (T_{rs})_{r,s=1}^n$ справедлива следующая

Теорема 3. Из условий

$$(i_k) \quad A_{nk}(\theta) \geq 0 \text{ п. н., } k = 1, n,$$

$$(i_{kl}) |B_{nkl}(\theta)|^2 \leq A_{nk}(\theta)A_{nl}(\theta), \text{ н. в.}, k, l = 1, n, k \neq l,$$

$$(i_{kl})' \mu(E_{nkl}) > 0, k, l = 1, n, k \neq l,$$

следует, что $\dim \text{Ker } T_n \leq p_1 + \dots + p_n$.

Теорема 3*. Из условий

$$(i_k^*) A_{nk}^*(\theta) \geq 0 \text{ н. в.}, k = 1, n,$$

$$(i_{kl}^*) |B_{nkl}^*(\theta)|^2 \leq A_{nk}^*(\theta)A_{nl}^*(\theta) \text{ н. в.}, k, l = 1, n, k \neq l$$

$$(i_{kl}^*)' \mu(E_{nkl}^*) > 0, kl = 1, n, k \neq l$$

следует, что $\dim \text{Coker } T_n = \dim \text{Ker } T_n^* \leq p_1 + \dots + p_n$.

Доказательства Теорем 3 и 3* аналогичны двумерному случаю и поэтому мы их опускаем.

Как известно, теплицев оператор имеет следующее представление

$$T_\psi u = P_+ u \psi = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{\psi(\xi)u(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad (15)$$

где $\psi \in L^\infty$, $u \in H^2$.

В силу (15) уравнение

$$T_n x_n = y_n, \quad \text{где } x_n, y_n \in \mathbf{H}_n^2$$

можно записать в виде системы интегральных уравнений

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{\psi_{mk}(\xi)x_k(\xi)}{\xi - z} d\xi = y_m(z), \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

Для системы (16) имеем следующие аналоги Теорем 3 и 3*.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (i_k) , (i_{kl}) и $(i_{kl})'$, $k, l = 1, n, k \neq l$.

Тогда размерность ядра системы (16) не превосходит $p_1 + p_2 + \dots + p_n$.

Теорема 4*. Пусть выполнены условия (i_k^*) , (i_{kl}^*) и $(i_{kl}^*)'$, $k, l = 1, n, k \neq l$.

Тогда размерность коядра системы (16) не превосходит $p_1 + p_2 + \dots + p_n$.

4. В этом пункте рассмотрим бесконечномерный матричный оператор

$$T_\infty = (T_{rs})_{r,s=1}^\infty,$$

где T_{rs} , $r, s = 1, 2, \dots$ - теплицевы операторы, определенные на H^2 , с символами

$$\psi_{rs}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^{(r,s)} e^{ik\theta} \in L^\infty, \quad r, s = 1, 2, \dots$$

Предположим, что операторы T_{rs} , $r, s = 1, 2, \dots$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{r=1}^{\infty} \|T_{rs}\|^2 < M, \quad s = 1, 2, \dots, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \|T_{rs}^*\|^2 < M, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

где M - положительные постоянные.

Так как $\|T_{rs}\|^2 = \text{esssup} |\psi_{rs}(\theta)|^2$, условия (17) можно записать в виде

$$\sum_{r=1}^{\infty} \text{esssup} |\psi_{rs}(\theta)|^2 < M, \quad s = 1, 2, \dots, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \text{esssup} |\psi_{rs}(\theta)|^2 < M, \quad r = 1, 2, \dots. \quad (18)$$

При выполнении условия (17), операторы T_{∞} и T_{∞}^* определены на пространстве

$$H_{\infty}^2 = H^2 \oplus H^2 \oplus \dots$$

Норма и скалярное произведение в H_{∞}^2 определяются следующим образом :

$$\|x\|_{H_{\infty}^2}^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \|x^{(p)}\|_{H^2}^2, \quad (x, y)_{H_{\infty}^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (x^{(k)}, y^{(k)})_{H^2},$$

где

$$x = \text{tr} (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots), \quad x^{(i)} \in H^2 \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$y = \text{tr} (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}, \dots), \quad y^{(i)} \in H^2 \quad i = 1, 2, \dots$$

Легко видеть, что

$$\|T_{\infty} x\|_{H_{\infty}^2}^2 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|T_{ks} x^{(s)}\|_{H^2}^2 + 2\text{Re} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s, m=1}^{\infty} (T_{rs} x^{(s)}, T_{rm} x^{(m)})_{H^2}. \quad (19)$$

При $\Gamma = (p_1, p_2, \dots)$ определим подпространство $H_{\Gamma}^2 \subset H_{\infty}^2$ следующим образом :

$$H_{\Gamma}^2 = \{x_{\Gamma} = \text{tr} (x_{p_1}^{(1)}, x_{p_2}^{(2)}, \dots, x_{p_n}^{(n)}, \dots), \quad \text{где} \quad x_{p_k}^{(k)} \in H_{p_k}^2\}.$$

Принимая во внимание (9), (10) и (19), для $x_{\Gamma} \in H_{\Gamma}^2$ получаем

$$\begin{aligned} \|T_{\infty} x_{\Gamma}\|_{H_{\infty}^2}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_{\infty, k}(\theta) |x_{p_k}^{(k)}|^2 d\theta + \\ &+ \sum_{k, l=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\text{Re} [B_{\infty, k, l} x_{p_k}^{(k)} \bar{x}_{p_l}^{(l)}] d\theta + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \|T_{mk}^{(p_k)} x_{p_k}^{(k)}\|^2 + \sum_{k, s=1}^{\infty} \sum_{k \neq s}^{\infty} 2\text{Re} (T_{mk}^{(p_k)} x_{p_k}^{(k)}, T_{ms}^{(p_s)} x_{p_s}^{(s)}), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$A_{\infty,k}(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} (|\psi_{mk}|^2 - |\psi_{mk}^{(p_k)}|^2),$$

$$B_{\infty,k,l}(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} (\psi_{mk} \bar{\psi}_{ml} - \psi_{mk}^{(p_k)} \bar{\psi}_{ml}^{(p_l)}).$$

Так как сумма последних двух слагаемых в правой части равенства (20) неотрицательна, то справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|T_{\infty} x_P\|^2 &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_{\infty,k}(\theta) |x_{p_k}^{(k)}|^2 d\theta + \\ &+ \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\operatorname{Re} [B_{\infty,k,l}(\theta) x_{p_k}^{(k)} \bar{x}_{p_l}^{(l)}] d\theta. \end{aligned} \quad (21)$$

Непосредственным следствием (21) является следующая

Теорема 5. Из условий

$$(j_k) \quad A_{\infty,k}(\theta) \geq 0 \text{ п. п., } k = 1, 2, \dots;$$

$$(j_{kl}) \quad |B_{\infty,k,l}(\theta)|^2 \leq A_{\infty,k}(\theta) A_{\infty,l}(\theta) \text{ п. в., } k \neq l, k, l = 1, 2, \dots;$$

$$(j_{kl})' \quad \mu(E_{\infty,k,l}) > 0, k \neq l, k, l = 1, 2, \dots,$$

где $E_{\infty,k,l} = \{\theta; |B_{\infty,k,l}|^2 < A_{\infty,k} A_{\infty,l}, k \neq l\}$, следует, что $\dim \operatorname{Ker} T_{\infty} \leq \sum_{k=1}^{\infty} p_k$.

Теорема 5*. Из условий

$$(j_k^*) \quad A_{\infty,k}^*(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} (|\psi_{km}|^2 - |(\psi_{km})^{(p_k)}|^2) \geq 0 \text{ п. п., } k = 1, 2, \dots;$$

$$(j_{kl}^*) \quad |B_{\infty,k,l}^*(\theta)|^2 = |\sum_{m=1}^{\infty} (\psi_{km} \bar{\psi}_{lm} - (\psi_{km})^{(p_k)} \overline{(\psi_{lm})^{(p_l)}})|^2 \leq A_{\infty,k}^*(\theta) A_{\infty,l}^*(\theta)$$

п. п., $k \neq l, k, l = 1, 2, \dots$;

$$(j_{kl}^*)' \quad \mu(E_{\infty,k,l}^*) > 0, k \neq l, k, l = 1, 2, \dots,$$

где $E_{\infty,k,l}^* = \{\theta; |B_{\infty,k,l}^*|^2 < A_{\infty,k}^* A_{\infty,l}^*, k \neq l\}$, следует, что $\dim \operatorname{Coker} T_{\infty} = \dim \operatorname{Ker} T_{\infty}^* \leq \sum_{k=1}^{\infty} p_k$.

Доказательства Теорем 5 и 5* аналогичны двумерному случаю и поэтому мы их опускаем.

Замечание 3. Если среди чисел $p_k, k = 1, 2, \dots$ имеется лишь конечное число отличных от нуля, то ядро и коядро оператора T_{∞} конечномерны.

Уравнение $T_\infty x = y$ можно представить в виде бесконечной системы интегральных уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{\psi_{mk}(\xi) x_k(\xi)}{\xi - z} d\xi = y_m(z), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (22)$$

где $\psi_{mk} \in L^\infty$, $m, k = 1, 2, \dots$ и удовлетворяют условиям (18).

Для систем (22) имеют место следующие аналоги Теорем 5 и 5*.

Теорема 6. Пусть выполнены условия (j_k) , (j_{kl}) и $(j_{kl})'$, $k, l = 1, 2, \dots$, $k \neq l$.

Тогда размерность ядра системы (22) не превосходит $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$.

Теорема 6*. Пусть выполнены условия (j_k^*) , (j_{kl}^*) и $(j_{kl}^*)'$, $k, l = 1, 2, \dots$, $k \neq l$.

Тогда размерность коядра системы (22) не превосходит $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$.

(Обсудим теперь частный случай, когда $T_{r,s} = T_{r,-s}$. Положим

$$\tilde{T}_\infty = (T_{r,-s})_{r,s=1}^\infty,$$

и предположим, что операторы T_k , $k = 0, \pm 1, \dots$ удовлетворяют оценке

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{ss} \sup |\psi_k(\theta)|^2 < M \quad (23)$$

для некоторого положительного M , $\psi_k(\theta) \in L^\infty$ - символ теплицева оператора T_k .

В этом случае Теорему 5 можно переформулировать следующим образом:

Теорема 5. Из условий

$$(j_p) \quad A_p(\theta) = \sum_{k=-p}^{\infty} (|\psi_k|^2 - |\psi_k^{(0)}|^2) \geq 0 \text{ п. в.}, \quad p = 1, 2, \dots;$$

$$(j_{pj}) \quad |B_{pj}(\theta)|^2 = |\sum_{k=-p}^{\infty} (\psi_k \psi_{k-j} - \psi_k^{(0)} \psi_{k-j}^{(0)})|^2 \leq \Lambda_p(\theta) \Lambda_j(\theta) \text{ п. в.}, \quad p \neq j,$$

$$p = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots;$$

$$(j_{pj})' \quad \mu(E_{pj}) > 0, \quad p \neq j, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где $E_{pj} = \{\theta; |B_{pj}|^2 < \Lambda_p \Lambda_j, \quad p \neq j\}$ следует, что $\dim \text{Ker } T_\infty = 0$.

5. В этом пункте рассматривается бесконечная операторная матрица

$$K = (\Lambda_{i-j})_{i,j=1}^\infty$$

где $\Lambda_k = (a_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^n$ и $a_{ij}^{(k)} \in \mathbb{C}^1$.

Предположим, что

$$\sum_{p,m=1}^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{mp}^{(k)}|^2 < +\infty. \quad (24)$$

Оператор K определен на

$$C_{\infty}^n = C^n \oplus C^n \oplus \dots$$

Положим

$$l_n^2 = l^2 \oplus l^2 \oplus \dots \oplus l^2.$$

Рассмотрим операторную матрицу $K' = (B_{kj})_{k,j=1}^n$, определенную на пространстве l_n^2 , где $B_{kj} = (a_{kj}^{p-q})_{p,q=1}^{\infty}$ — теплицевы матрицы с символами

$$B_{kj} \sim \psi_{kj}(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{kj}^{(m)} e^{im\theta}, \quad k, j = 1, n.$$

Из условий (24) следует $\psi_{kj} \in L^2$, $k, j = 1, n$.

При сильном предположении $\psi_{kj} \in L^{\infty}$, $k, j = 1, n$, операторы K' и K определены на l_n^2 и C_{∞}^n , соответственно, и одновременно обратимы (см. [4]).

Таким образом, принимая во внимание, что

$$\dim \ker K = \dim \ker K' \quad \text{и} \quad \dim \operatorname{coker} K = \dim \operatorname{coker} K'$$

и используя Теоремы 3 и 3*, получаем оценки размерностей ядер и коядер векторзначных теплицевых операторов K .

ABSTRACT. Let $T_n = (T_{ij})_{i,j=1}^n$ be an operator matrix, where T_{ij} , $i, j = 1, n$ are Toeplitz operators defined on Hardy space H^2 . In this paper we obtain some sufficient conditions for invertibility of T_n which do not assume permutability of operators T_{ij} . We also obtain bounds for dimensions of kernel and cokernel of the operator matrices T_n , as well as of vector-valued Toeplitz operator matrices.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Халмош, Гильбертово Пространство в Задачах, Мир, Москва, 1970.
2. D. R. Brown, "On the spectrum of operator matrices", Glas. Mat., vol 21, no.2, pp. 357–362, 1986.
3. К. Голдман, Банаховы Пространства Аналитических Функций, Москва, 1975.
4. Р. Мкртчян, "О размерностях ядра и коядра теплицевых операторов", Труды научной конференции, посвященной памяти академика Р. А. Александрияна, Ереванский Государственный Университет, 1993.

9 Марта 1992

Армянский государственный
инженерный университет

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВРЕМЕННЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

М. Рейссиг, К. А. Ягджян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, №2, 1993

В работе рассматривается задача Коши в классах Жевре для квазилинейных слабо гиперболических уравнений второго порядка с характеристиками, совпадающими на линии, несущей начальные условия. Приводятся условия на нелинейные младшие члены $f(x, t, u_x)$, которые являются достаточными для локальной теоремы существования. Доказывается также существование конуса зависимости.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в ряде работ [1, 5, 13] описывались конструкции параметрикса и фундаментального решения задачи Коши для вырождающихся линейных гиперболических уравнений. Эти результаты тесно связаны с изучением условий корректности для линейных гиперболических уравнений с кратными характеристиками и вселяют надежду на успех в получении результатов для нелинейных и, в частности, квазилинейных вырождающихся уравнений.

В квазилинейном случае в дополнение к трудностям, связанным с нелинейностью оператора возникает проблема нахождения так называемых условий Леви и выбора пространств функций, в которых задача Коши была бы корректной. Условиями Леви мы будем называть алгебраические условия между младшими членами оператора, включая и их производные, и главной частью оператора.

Достаточные условия корректности задачи Коши в классах Жевре описаны в [5, 12] для линейных операторов. Эти условия близки к необходимым [5, 7, 14].

С другой стороны, известны результаты и для нелинейного случая при подходящем выборе пространств Жевре, а именно, когда показатель λ класса

меньше $m/(m-1)$, где m - кратность характеристических корней. В этом случае можно обойтись без условий Леви. Так, например, в работах [1, 3, 6, 9] наряду с другими результатами доказана локальная теорема существования. Итак, для уравнения второго порядка упомянутые работы дают результат только в классах Жевре с показателем $s < 2$.

Целью настоящей работы является исследование задачи Коши

$$u_{tt} - \lambda^2(t)a(x,t)u_{xx} = f(x,t,u_x), \quad (1.1)$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad (1.2)$$

где $\lambda(0) = 0$, $\lambda(t) > 0$, $\lambda'(t) \geq 0$ для $t > 0$ и $a(x,t) \geq \text{const} > 0$, в пространствах Жевре с произвольным показателем. Очевидно, что без ограничения общности, мы можем рассматривать только задачу с однородными начальными условиями.

Указанная задача Коши содержит все трудности, упомянутые выше. С одной стороны, мы имеем нелинейность в правой части уравнения, с другой стороны, характеристические корни имеют, вообще говоря, переменную кратность. Далее, для получения результата в классах Жевре с произвольным показателем мы нуждаемся в условиях Леви. Наш основной результат (см. Теорему 1.2) состоит в нахождении условий, при выполнении которых задача (1.1), (1.2) является корректной. Как обычно, корректность означает существование решения, его единственность и существование конуса зависимости. Необходимо подчеркнуть, что условие Леви (1.8) позволяет исследовать задачу Коши в пространствах Жевре с произвольным показателем.

После линеаризации единственность в задаче (1.1), (1.2) может быть получена из теоремы единственности следующей однородной задачи Коши [13]:

$$w_{tt} - \lambda^2(t)a(x,t)w_{xx} = b(x,t)w_x, \quad w(x,0) = w_t(x,0) = 0. \quad (1.3)$$

Единственность для (1.3) есть предмет отдельного исследования, весьма интересного. Этим объясняется большое количество статей, посвященных единственности и неединственности в задаче (1.3). Первая причина - нарушение условий Леви между b и $\lambda^2 a$ [2,7], вторая - наличие осцилляций [2]. Единственность доказывается, как правило, в пространстве C^∞ - функций. Мы также следуем этому

подходу и напомним, что согласно [2] решение задачи Коши

$$w_{tt} - a(t)w_{xx} = 0, \quad w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0$$

вообще говоря, неединственно, если функция $a(t) \in C^\infty(0, T)$ имеет нуль бесконечного порядка в точке $t = 0$. Используя результат работы [13] (см. Приложение), мы получаем теорему единственности для (1.3). Действительно, предположим, что $\lambda_m = \sup \lambda(t) \sqrt{a(x, t)} < \infty$ и рассмотрим для точки $A = (x_A, t_A)$ с $t_A > 0$ множества

$$C_A = \{(x, t) : \lambda_m^2(t - t_A)^2 - (x - x_A)^2 \geq 0, \quad 0 \leq t \leq t_A\},$$

$$D_A = C_A \cap \{t = 0\}.$$

Теорема 1.1. (существование конуса зависимости) Рассмотрим квазилинейное слабо гиперболическое уравнение (1.1). Предположим, что с некоторыми положительными постоянными a_0, a_1

$$0 < a_0 \leq a(x, t) \leq a_1 \quad \text{для всех } (x, t) \in \mathbb{R}_x \times [0, T], \quad (1.4)$$

вещественнозначная функция λ принадлежит $C^\infty[0, T]$, $\lambda^2 \Lambda^{-1} \in C^\infty[0, T]$, а функции a и f удовлетворяют следующим условиям (ниже $c > 1/2$, $c, c_0, c_k, C_{i,k}, C_{i,k,l,K}$ - положительные постоянные, а $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau$):

$$c\lambda(t)/\Lambda(t) \leq \lambda'(t)/\lambda(t) \leq c_0\lambda(t)/\Lambda(t) \quad \text{для всех } t > 0, \quad (1.5)$$

$$|\lambda^{(k)}(t)| \leq c_k(\lambda'(t)/\lambda(t))^{k-1} \lambda'(t) \quad \text{для всех } k = 1, 2, \dots, \quad t > 0, \quad (1.6)$$

$$|\partial_t^i \partial_x^k a(x, t)| \leq C_{i,k}(\lambda(t)/\Lambda(t))^i \quad \text{для всех } t > 0, \quad (1.7)$$

$$|\partial_t^i \partial_x^k \partial_p^l f(x, t, p)| \leq C_{i,k,l,K} \lambda^{2+i}(t)/\Lambda^{1+i}(t) \quad \text{для всех}$$

$$i, k, l, \quad l \geq 1, \quad (x, t, p) \in \mathbb{R}_x \times (0, T] \times K, \quad (1.8)$$

где $K \subset \mathbb{R}_p$ есть произвольное компактное множество.

Если два решения u_1 и u_2 уравнения (1.1) принадлежат $C^\infty(C_A)$ и

$$u_1 = u_2, \quad \partial_t u_1 = \partial_t u_2 \quad \text{на } D_A, \quad (1.9)$$

то u_1 и u_2 совпадают на S_A .

Условия (1.8) являются условиями Леви, естественными для операторов с кратными характеристиками (ср. с [4] в случае $\lambda(t) = t^k$). С другой стороны, эти условия допускают функции $\lambda = \lambda(t)$, имеющие нули бесконечного порядка [13], например, $\lambda(t) = \exp(-t^{-2})$.

Для изучения корректности задачи в классах Жевре мы должны более точно описать постоянные $C_{i,k,l,K}, C_{i,k}$:

$$C_{i,k,l,K} = C_{K,i} M_{K,i}^{(k+l)s} l!^{s'} k!^s, \quad s' < s, \quad C_{i,k} = C_i M_i^{ks} k!^s. \quad (1.10)$$

Более того, мы требуем выполнения следующих условий:

$$|\partial_x^k \partial_p^l f(x, t, p)| \leq C_K M_K^{(k+l)s} l!^{s'} k!^s o(\lambda^2(t)/\Lambda(t)) \quad (1.11)$$

для всех $k, l, l \geq 1, (x, t, p) \in \mathbb{R}_x \times (0, T] \times K$, а также

$$|\partial_i^i \partial_x^k f(x, t, p)| \leq C_{K,i} M_{K,i}^{ks} k!^s (\lambda(t)/\Lambda(t))^i \quad (1.12)$$

для всех $i, k, (x, t, p) \in \mathbb{R}_x \times (0, T] \times K$. Здесь $o(\lambda^2(t)/\Lambda(t))$ обозначает известный символ Ландау.

Для формулировки нашего основного результата мы используем следующие обозначения.

Для заданных фиксированных постоянных $\rho > 0$ и $s \geq 1$, определим

$$X_\rho^s = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}_x) : |\partial_x^k u(x)| \rho^{ks} \leq C_u k!^s \text{ для всех } k \geq 0\},$$

$$Y_\rho^s = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}_x) : \|\partial_x^k u(x)\| \rho^{ks} \leq C_u k!^s \text{ для всех } k \geq 0\},$$

$$X_{\text{loc}}^{s,s'}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_p) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_p) : |\partial_x^k \partial_p^l u(x, p)| \leq C_K M_K^{(k+l)s} k!^s l!^{s'} \text{ для всех } k, l \geq 0, (x, p) \in \mathbb{R}_x \times K, \text{ где постоянные } C_K \text{ и } M_K \text{ зависят от выбранного компактного множества } K\}.$$

Здесь $\|\cdot\|$ есть L_2 -норма. Как обычно, X_{+0}^s, Y_{+0}^s означают индуктивные пределы семейств $\{X_\rho^s\}_{\rho>0}, \{Y_\rho^s\}_{\rho>0}$, соответственно.

Используя указанные предположения и обозначения, мы доказываем следующий основной результат настоящей статьи :

Теорема 1.2. *Рассмотрим следующую задачу Коши для слабо гиперболического уравнения*

$$u_{tt} - \lambda^2(t)a(x, t)u_{xx} = f(x, t, u_x),$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

В дополнение к (1.4) - (1.8), (1.10) - (1.12) предположим, что

$$|\partial_t^i \partial_x^k a(x, t)| \leq C_i M_i^{k,s} k!^s (\lambda(t)/\Lambda(t))^i \quad \text{для всех } t > 0, \quad (1.13)$$

$$\lambda^2 a \in C^\infty([0, T]; X_{+0}^s), \quad (1.14)$$

$$f \in C^\infty([0, T]; X_{loc}^{s,s'}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_p)), \quad (1.15)$$

$$\|\partial_t^i \partial_x^k \partial_p^l f(x, t, 0)\| \leq C_i M_i^{(k+l)s} k!^s l!^{s'}, \quad (1.16)$$

Тогда существует единственным образом определяемое решение

$$u \in C^\infty([0, \bar{T}]; Y_{+0}^s), \quad (1.17)$$

где достаточно маленькая положительная постоянная $\bar{T} \leq T$ зависит от a и f . Более того, у рассматриваемой задачи Коши существует конус зависимости.

§2. ПРИВЕДЕНИЕ РАССМАТРИВАЕМОЙ ЗАДАЧИ К ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим задачу Коши

$$u_{tt} - \lambda^2(t)a(x, t)u_{xx} = f(x, t, u_x), \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

Предположим, что существует классическое решение $u = u(x, t)$, определенное на $\mathbb{R}_x \times [0, T]$. Более того предположим, что выполнены все предположения Теоремы 1.2.

шаг за шагом приводит к желаемому асимптотическому поведению в плоскости $p = 0$. Таким образом, мы получаем в (2.4) в качестве правой части функцию

$$g_n(x, t, v_x) = f(x, t, u_x^{(0)} + \dots + u_x^{(n)} + v_x) - f(x, t, u_x^{(0)} + \dots + u_x^{(n-1)}) + \lambda^2(t)a(x, t)u_{xx}^{(n)} \quad (2.6)$$

с

$$g_n(x, t, 0) \sim \lambda^n(t),$$

где n может быть сделано достаточно большим. А именно, имеет место следующая

Лемма 2.1. Пусть функции λ, a, f из (2.1) удовлетворяют предположениям (1.4) - (1.6), (1.8), (1.10), (1.12) - (1.16). Тогда для каждого фиксированного n после процесса редукции функции g_n и, следовательно, правая часть уравнения (2.4) удовлетворяет

$$g_n(x, t, p) \in C^\infty([0, T]; X_{loc}^{s, s'}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_p)), \quad (2.7)$$

$$|\partial_x^i \partial_p^l g_n(x, t, p)| \leq C_{K, n} M_{K, n}^{(i+l)s} l!^{s'} i!^s o(\lambda^2(t)/\Lambda(t)),$$

$$\text{для всех } i, l, l \geq 1, (x, t, p) \in \mathbb{R}_x \times [0, T] \times K, \quad (2.8)$$

$$|\partial_x^i g_n(x, t, p)| \leq C_{K, n} M_{K, n}^{is} i!^s \text{ для всех } i, (x, t, p) \in \mathbb{R}_x \times [0, T] \times K, \quad (2.9)$$

$$\|\partial_x^i g_n(x, t, 0)\| \leq C_n M_n^{is} i!^s \lambda^n(t), \text{ для всех } i, t \in [0, T]. \quad (2.10)$$

Более того, решения $u^{(k)}, k = 0, \dots, n$, задач (2.2), (2.3) принадлежат $C^\infty([0, T]; Y_{+0}^s)$ и удовлетворяют неравенствам

$$\|\partial_x^i u^{(k)}(x, t)\| \leq C_k M_k^{is} i!^s \lambda^k(t). \quad (2.11)$$

Доказательство. Согласно (2.2), (2.3), (1.16) имеем

$$\|\partial_t^2 \partial_x^\nu u^{(0)}(x, t)\| \leq \|\partial_x^\nu f(x, t, 0)\| \leq C_0 M_0^{\nu s} \nu!^s, \quad (2.12)$$

и, следовательно, в силу (2.3)

$$\|\partial_x^\nu u^{(0)}(x, t)\| \leq C_0 M_0^{\nu s} \nu!^s t^2.$$

Из (1.15) получаем $u^{(0)} \in C^\infty([0, T]; Y_{+0}^s)$.

Обозначив $p = u_x^{(0)} \in C^\infty([0, T]; Y_{+0}^s)$, рассмотрим

$$u_{ii}^{(1)} = f(x, t, p) - f(x, t, 0) + \lambda^2(t)a(x, t)p_x, \quad u^{(1)}(x, 0) = u_i^{(1)}(x, 0) = 0.$$

Согласно формуле Лейбница

$$\begin{aligned} \partial_x^i \{f(x, t, p) - f(x, t, 0)\} &= \int_0^p f^{(i,0,1)}(x, t, v) dv + \\ &+ \sum_{k+i=i} \frac{i!}{k!} \sum_{\nu=1}^l \frac{1}{\nu!} f^{(k,0,\nu)}(x, t, p) \sum_{\substack{m_1+\dots+m_\nu=l \\ m_i \geq 1}} \frac{(\partial_x^{m_1} p) \dots (\partial_x^{m_\nu} p)}{m_1! \dots m_\nu!}, \end{aligned}$$

где $f^{(k,l,\nu)}(x, t, p)$ обозначает $\partial_x^k \partial_t^l \partial_p^\nu f(x, t, p)$. Согласно последнему соотношению и принимая во внимание вложение $C^\infty([0, T]; Y_{+0}^s) \subset C^\infty([0, T]; X_{+0}^s)$ и (1.8), заключаем

$$\begin{aligned} \|\partial_x^i \{f(x, t, p) - f(x, t, 0)\}\| &\leq C_1 M_1^{is} i!^s \|p\| \frac{\lambda^2(t)}{\Lambda(t)} + \\ &+ \sum_{k+l=i} \frac{i!}{k!} \sum_{\nu=1}^l \frac{1}{\nu!} C_1 M_1^{(k+\nu)s} k!^s \nu!^{s'} \frac{\lambda^2(t)}{\Lambda(t)} \times \\ &\times \sum_{\substack{m_1+\dots+m_\nu=l \\ m_i \geq 1}} \frac{\|\partial_x^{m_1} p\|_\infty \dots \|\partial_x^{m_{\nu-1}} p\|_\infty \|\partial_x^{m_\nu} p\|_2}{m_1! \dots m_{\nu-1}! m_\nu!}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы оценить вторую сумму нам необходимы некоторые вычисления, которые мы здесь опускаем. Читатель может найти их в [10], в то время как их краткое изложение приведено в следующем пункте. Действительно, можно доказать следующую оценку :

$$\begin{aligned} &\sum_{k+l=i} \frac{i!}{k!} \sum_{\nu=1}^l \frac{1}{\nu!} C_1 M_1^{(k+\nu)s} k!^s \nu!^{s'} \frac{\lambda^2(t)}{\Lambda(t)} \times \\ &\times \sum_{\substack{m_1+\dots+m_\nu=l \\ m_i \geq 1}} \frac{\|\partial_x^{m_1} p\|_\infty \dots \|\partial_x^{m_{\nu-1}} p\|_\infty \|\partial_x^{m_\nu} p\|_2}{m_1! \dots m_{\nu-1}! m_\nu!} \leq C_1 M_1^{is} i!^s \frac{\lambda^2(t)}{\Lambda(t)} t^2. \end{aligned}$$

Наконец, получаем

$$\|\partial_t^2 \partial_x^i u^{(1)}(x, t)\| \leq C_1 M_1^{is} i!^s \frac{\lambda^2(t)}{\Lambda(t)} t^2,$$

и, соответственно

$$\|\partial_x^i u^{(1)}(x, t)\| \leq C_1 M_1^{is} i!^s \lambda(t).$$

Это асимптотическое поведение при $t \rightarrow 0$ достаточно для последующего. Более того, (2.2), (2.3), (1.14) и (1.15) приводят к включению $u^{(1)} \in C^\infty([0, T]; Y_{+0}^s)$.

Обозначая $p_0 = u_x^{(0)}, p_1 = u_x^{(1)}$, принадлежащие $C^\infty([0, T]; Y_{+0}^s)$, получаем для $u^{(2)}$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \partial_x^i u^{(2)}(x, t) &= \sum_{k+l=i} \frac{i!}{k!} \sum_{\nu=0}^l \frac{1}{\nu!} f^{(k,0,\nu)}(x, t, p_1 + p_0) \times \\ &\times \sum_{\substack{m_1+\dots+m_\nu=l \\ m_i \geq 1}} \frac{(\partial_x^{m_1}(p_1 + p_0)) \dots (\partial_x^{m_\nu}(p_1 + p_0))}{m_1! \dots m_\nu!} - \\ &- \sum_{k+l=i} \frac{i!}{k!} \sum_{\nu=0}^l \frac{1}{\nu!} f^{(k,0,\nu)}(x, t, p_0) \times \\ &\times \sum_{\substack{m_1+\dots+m_\nu=l \\ m_i \geq 1}} \frac{(\partial_x^{m_1} p_0) \dots (\partial_x^{m_\nu} p_0)}{m_1! \dots m_\nu!} + \partial_x^i (\lambda^2(t) a(x, t) p_{1,x}). \end{aligned}$$

Можно оценить $u^{(2)}$ с помощью аналогичных рассуждений. Необходимо только принять во внимание, что каждый член суммы содержит либо $\partial_x^{m_\nu} p_1$ либо $\int_{p_0}^{p_0+p_1} f^{(k,0,\nu+1)}(x, t, v) dv$. Это дает желаемое асимптотическое разложение. Итак

$$\|\partial_t^2 \partial_x^i u^{(2)}(x, t)\| \leq C_2 M_2^{i,s} i!^s \frac{\lambda^2(t)}{\Lambda(t)} \lambda(t)$$

и

$$\|\partial_x^i u^{(2)}(x, t)\| \leq C_2 M_2^{i,s} i!^s \lambda^2(t).$$

Таким образом, последовательно доказываем последнее утверждение леммы.

Осталось доказать (2.7) - (2.10) для

$$g_n(x, t, p) = f(x, t, u_x^{(0)} + \dots + u_x^{(n)} + p) - f(x, t, u_x^{(0)} + \dots + u_x^{(n-1)}) + \lambda^2(t) a(x, t) u_{xx}^{(n)}.$$

Свойство (2.7) следует непосредственно из (1.14), (1.15) и включений $u^{(k)} \in C^\infty([0, T]; Y_{+0}^s)$, $k = 0, \dots, n$. Используя $C^\infty([0, T]; Y_{+0}^s) \subset C^\infty([0, T]; X_{+0}^s)$, (1.8) для $i = 0$ и (1.10), получаем

$$|\partial_x^i \partial_p^l g_n(x, t, p)| = |\partial_x^i \partial_p^l f(x, t, u_x^{(0)} + \dots + u_x^{(n)} + p)| \leq C_{K,n} M_{K,n}^{(i+l)s} i!^{s'} i!^s o(\lambda^2(t)/\Lambda(i));$$

т.е. (2.8). Аналогично, принимая во внимание (1.14), (1.15), получаем (2.9). Для доказательства (2.10), т.е.

$$\begin{aligned} \|\partial_x^i g_n(x, t, 0)\| &= \|f(x, t, u_x^{(0)} + \dots + u_x^{(n)}) - \\ &- f(x, t, u_x^{(0)} + \dots + u_x^{(n-1)}) + \lambda^2(t) a(x, t) u_{xx}^{(n)}\| \leq C_{n+1} M_{n+1}^{i,s} i!^s \lambda^n(t), \end{aligned}$$

мы вводим $p_0 = u_x^{(0)} + \dots + u_x^{(n-1)}$, $p_1 = u_x^{(n)}$. Очевидно, p_0 и p_1 принадлежат $C^\infty([0, T]; Y_{+0}^s)$. Тогда (1.14), (2.11) для $k = n$ и рассуждения, использованные для оценивания $\|\partial_t^2 \partial_x^i u^{(2)}(x, t)\|$ дают (2.10), где мы снова напомним, что в каждом члене имеется либо $\int_{p_0}^{p_0+p_1} f^{(k,0,\nu+1)}(x, t, v) dv$ либо $\partial_x^{m_i} p_1$. Эти члены обеспечивают асимптотическое поведение нормы $\|\partial_x^i g_n(x, t, 0)\|$ по переменной t . Этим завершается доказательство леммы.

Ниже следующая лемма является результатом утверждений, содержащихся в начале настоящего пункта и Леммы 2.1.

Лемма 2.2. Пусть функции λ, a, f из (2.1) удовлетворяют предположениям (1.4) - (1.6), (1.8), (1.10), (1.12) - (1.16). Далее, пусть функции $u^{(0)}, \dots, u^{(n)}$, принадлежащие $C^\infty([0, T]; Y_{+0}^s)$, построены как решения задачи (2.2), (2.3). Если $v \in C^k([0, T]; Y_{+0}^s)$ есть решение задачи (2.4), (2.5), то $u = v + u^{(0)} + \dots + u^{(n)}$ есть решение задачи (2.1), принадлежащее $C^k([0, T]; Y_{+0}^s)$.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Определим для функций u из $Y_{\rho(t)}^s$ частичные энергии ($j \geq 1$)

$$e_j(t) = \left(\int_{\mathbb{R}} (\lambda^2(t) a(x, t) |\partial_x^j u|^2 + |\partial_x^{j-1} u|^2 + j^2 |\partial_x^{j-1} u|^2) dx \right)^{1/2},$$

и энергии конечного порядка

$$E_N(t) = \sum_{j=1}^N \eta(j) \quad \text{для } N \geq 1,$$

где обозначено $\eta(j) = e_j(t) \rho(t)^{j-k} j^{ks} / j!^s$, k - фиксированное натуральное число, в одномерном случае $k = 3$ [1]. Функция $\rho(t) = \rho_0 \exp(-Ct)$, подчиненная дополнительному условию $\rho(t) \geq \rho_0/2$ определяет интервал существования $[0, T^*]$.

3.1. Последовательные приближения

Благодаря Лемме 2.2, остается только исследовать задачу

$$v_{tt} - \lambda^2(t) a(x, t) v_{xx} = g_n(x, t, v_x), \quad v(x, 0) = v_t(x, 0) = 0, \quad (3.1)$$

где g_n удовлетворяет предположениям (2.7) - (2.10). Мы предполагаем следующую схему последовательных приближений

$$v_{tt}^{(p+1)} - \lambda^2(t)a(x, t)v_{xx}^{(p+1)} = g_n(x, t, v_x^{(p)}), \quad (3.2)$$

$$v^{(p+1)}(x, 0) = v_t^{(p+1)}(x, 0) = 0 \quad (3.3)$$

для $p = 0, 1, \dots$. Натуральное число n выбирается достаточно большим.

Мы стартуем с $v^{(0)} = 0$. Согласно (2.8) и Лемме А.1 Приложения, существует решение $v^{(1)} \in C^2([0, T]; Y_{+0}^s)$ с тем же асимптотическим поведением в $t = 0$, то есть

$$\|\partial_x^i v^{(1)}(x, t)\| \leq CM^{1s} i!^s \lambda^n(t) \quad \text{для всех } t \in [0, T] \quad \text{и } i \geq 0.$$

Здесь и далее через C и M обозначены универсальные постоянные. Принимая во внимание

$$g_n(x, t, v_x^{(1)}) = g_n(x, t, 0) + \int_0^{v_x^{(1)}} \partial_p g_n(x, t, p) dp,$$

получаем

$$\lambda^{-n} g_n(x, t, v_x^{(1)}) \in C([0, T]; Y_{+0}^s)$$

и

$$\|\partial_x^i g_n(x, t, v_x^{(1)})\| \leq CM^{1s} i!^s \lambda^n(t) \quad \text{для всех } t \in [0, T], \quad i \geq 0.$$

Следовательно, мы можем применить Лемму А.1 к (3.2), (3.3) для $p = 1$.

Рассуждая последовательно, получаем решения $v^{(p)} \in C^2([0, T]; Y_{+0}^s)$, где

$$\|\partial_x^i v^{(p)}(x, t)\| + \|\partial_x^i g_n(x, t, v_x^{(p)})\| \leq CM^{1s} i!^s \lambda^n(t). \quad (3.4)$$

Итак схема последовательных приближений (3.2), (3.3) является приемлемой в предположениях Теоремы 1.2.

3.2. Энергетические оценки

Обозначим $E_N^{(p)}(t) = E_N(v^{(p)})(t)$, где

$$E_N(v)(t) = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\mathbb{R}} (\lambda^2(t)a(x, t)|\partial_x^j v|^2 + |\partial_x^{j-1} v_t|^2 + j^2 |\partial_x^{j-1} v|^2) dx \right)^{1/2} \rho(t)^{j-\frac{1}{2}} j^{ks} / j!^s. \quad (3.5)$$

Нашей целью является оценка энергии конечного порядка $E_N^{(p)}(t)$ для $N \geq 1$.

Дифференцирование частичных энергий e_j даёт

$$e_j(t)e_j'(t) = \int_{\mathbb{R}} (\lambda^2(t)a(x,t)\partial_x^j v \partial_x^j v_t + \partial_x^{j-1} v_t \partial_x^{j-1} v_{tt} + j^2 \partial_x^{j-1} v \partial_x^{j-1} v_t) dx + \\ + \int_{\mathbb{R}} (\lambda'(t)\lambda(t)a(x,t) + \lambda^2(t)a_t(x,t)) |\partial_x^j v|^2 dx.$$

Согласно условию (1.4) и уравнению (3.1), имеем

$$e_j(t)e_j'(t) \leq \int_{\mathbb{R}} \left\{ (\lambda^2(t)[\partial_x^{j-1}, a(x,t)\partial_x^2]v) \partial_x^{j-1} v_t + Q \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} \lambda^2(t)a(x,t) |\partial_x^j v|^2 + \right. \\ \left. + j^2 \partial_x^{j-1} v \partial_x^{j-1} v_t \right\} dx + \int_{\mathbb{R}} \partial_x^{j-1} v_t \partial_x^{j-1} g_n(x,t,v_x) dx,$$

где положительная постоянная Q зависит только от a и λ . Следовательно

$$e_j'(t) \leq j e_j(t) + Q \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} e_j(t) + \|\lambda^2(t)[\partial_x^{j-1}, a(x,t)\partial_x^2]v\| + \|\partial_x^{j-1} g_n(x,t,v_x)\|.$$

Тогда

$$E_N'(t) \leq \sum_{j=1}^N \left\{ e_j'(t) + \frac{\rho'}{\rho} (j-k) e_j(t) \right\} \rho(t)^{j-k} j^{ks} / j!^s + A_N + B_N \leq \\ \leq \sum_{j=1}^N \left[(j-k)\rho' + j\rho + \rho Q \frac{\lambda'}{\lambda} \right] e_j(t) \rho(t)^{j-k-1} j^{ks} / j!^s + A_N + B_N, \quad (3.6)$$

где

$$A_N(t) = \sum_{j=1}^N \|\lambda(t)[\partial_x^{j-1}, a(x,t)\partial_x^2]v\| \rho(t)^{j-k} j^{ks} / j!^s, \\ B_N(t) = \sum_{j=1}^N \|\partial_x^{j-1} g_n(x,t,v_x)\| \rho(t)^{j-k} j^{ks} / j!^s.$$

Сначала рассмотрим коммутатор

$$[\partial_x^{j-1}, a(x,t)\partial_x^2]v = (j-1)a_x(x,t)\partial_x^j v + \sum_{h=0}^{j-2} \binom{j}{h} a_x^{(j-h)}(x,t)\partial_x^{h+1} v.$$

Ввиду (1.4), (1.14) и (3.5)

$$\lambda(t)\|(j-1)a_x(x,t)\partial_x^j v\| \leq C(j-1)e_j(t).$$

Согласно предположению (1.13)

$$\left\| \sum_{h=0}^{j-2} \binom{j}{h} a_x^{(j-h)}(x, t) \partial_x^{h+1} v \right\| / j!^s \leq \sum_{h=1}^{j-1} \binom{j}{h-1}^{1-s} C M^{s(j-h+1)} \frac{\|\partial_x^h v\|}{(h-1)!^s}.$$

Использование теперь неравенств

$$\binom{j}{h-1}^{1-s} \leq C h^{1-s} (h+1)^{1-s} \quad \text{при } h = 1, \dots, j-1$$

приводит к оценке

$$\left\| \sum_{h=0}^{j-2} \binom{j}{h} a_x^{(j-h)}(x, t) \partial_x^{h+1} v \right\| / j!^s \leq C \sum_{h=1}^{j-1} M^{s(j-h+1)} \|\partial_x^h v\| (h-1)!^{-s} h^{1-s} (h+1)^{1-s}.$$

Суммируя и меняя порядок суммирования, получаем

$$A_N(t) \leq C \sum_{h=1}^{N-1} e_{h+1} \rho(t)^{h+1-k} (h+1)^{ks+1-s} h!^{-s} \quad (3.7)$$

в предположении, что $M^s \rho(t) \leq 1/2$.

Теперь займемся выбором функции $\rho(t)$. Заметим, что можно включить оценку для $A_N(t)$ в первую сумму в оценке $E'_N(t)$. Таким образом

$$E'_N(t) \leq \sum_{j=1}^N \left[(j-k)\rho' + j\rho + \rho Q \frac{\lambda'}{\lambda} + C\rho j \right] e_j(t) \rho(t)^{j-k-1} j^{ks} / j!^s + B_N.$$

Функция $\rho = \rho(t)$ определяется теперь как решение задачи

$$\frac{1}{2}\rho'(t) + (C+1)\rho(t) = 0, \quad \rho(0) = \rho_0, \quad \rho_0 M^s \leq 1/2, \quad \rho_0 M_K^s \leq 1/2, \quad (3.8)$$

где дополнительно требуется $\rho(t) \geq \rho_0/2$. Компактное множество K будет

определено позже. Итак, $\rho = \rho(t)$ определена только на интервале $[0, T^*]$, где

$T^* \leq T$ зависит от коэффициента $\lambda^2(t)a(x, t)$. Следовательно, $(j-k)\rho' + (C+1)\rho j \leq$

0 для $j \geq 2k$. Мы можем опустить эти члены и прийти к

$$E'_N(t) \leq 2Q \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} E_N(t) + B_N(t), \quad (3.9)$$

в предположении, что T^* достаточно мало. Согласно Лемме А.1 и результату

пункта 3.1 для всех p

$$\begin{aligned} B_N^{(p)}(t) &= \sum_{j=1}^N \|\partial_x^{j-1} g_n(x, t, v_x^{(p)})\| \rho(t)^{j-k} j^{ks} / j!^s = \\ &= O(\lambda^n(t)), \quad E_N^{(p)}(t) = O(\lambda^n(t)), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где n достаточно велико. Поэтому, из (3.9), (3.10), применяя Лемму А.2, мы выводим из

$$E_N^{(p+1)'}(t) \leq 2Q \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} E_N^{(p+1)}(t) + B_N^{(p)}(t)$$

неравенство

$$E_N^{(p+1)}(t) \leq \lambda^{2Q}(t) \int_0^t \lambda^{-2Q}(\tau) B_N^{(p)}(\tau) d\tau, \quad n \geq 2Q. \quad (3.11)$$

Для $p = 0$ из (3.2) имеем

$$B_N^{(0)}(t) \leq \sum_{j=1}^N \|g_n^{(j-1,0,0)}(x, t, 0)\| \rho(t)^{j-k} j^{ks} / j!^s \leq |||g_n(x, t, 0)|||, \quad (3.12)$$

где использовано обозначение

$$|||g_n(x, t, 0)||| = \sum_{j=1}^{\infty} \|g_n^{(j-1,0,0)}(x, t, 0)\| \rho(t)^{j-k} j^{ks} / j!^s. \quad (3.13)$$

Итак

$$E_N^{(1)}(t) \leq \lambda^{2Q}(t) \int_0^t \lambda^{-2Q}(\tau) |||g_n(x, \tau, 0)||| d\tau. \quad (3.14)$$

Далее, согласно формуле Лейбница

$$\begin{aligned} \partial_x^{j-1} g_n(x, t, v_x^{(p)}(x, t)) &= \sum_{i+l=j-1} \frac{(j-1)!}{i!} \sum_{\nu=0}^l \frac{1}{\nu!} g_n^{(i,0,\nu)}(x, t, v_x^{(p)}) \times \\ &\times \sum_{\substack{m_1+\dots+m_\nu=1 \\ m_i \geq 1}} \frac{1}{m_1! \dots m_\nu!} (\partial_x^{m_1+1} v^{(p)}) (\partial_x^{m_2+1} v^{(p)}) \dots (\partial_x^{m_\nu+1} v^{(p)}). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Оценим теперь $B_N^{(p)}$. С этой целью рассмотрим отдельно следующих три случая :

- а) $i = 0, \quad l = j - 1;$
- б) $i = j - 1, \quad l = 0;$
- в) сумму S_j всех других членов, возникающих в формуле (3.15).

Мы будем использовать (1.11) в эквивалентной форме

$$|\partial_x^k \partial_p^l f(x, t, p)| \leq \alpha(t) C_K M_K^{(k+l)s} l!^s k!^s \lambda^2(t) / \Lambda(t), \quad l \geq 1,$$

где $\alpha(t)$ стремится к 0 при t , стремящемся к 0.

Случай а). Мы должны оценить случаи $1 \leq \nu \leq j-1$. Для $\nu = 1$ получаем из условий Леви (1.11) и (2.8)

$$\begin{aligned} \|g_n^{(0,0,1)}(x, t, v_x^{(p)}) \partial_x^j v^{(p)}(x, t)\| &\leq \alpha(t) C_K M_K^s \lambda'(t) \|\partial_x^j v^{(p)}(x, t)\| \leq \\ &\leq \alpha(t) C_K M_K^s a_0^{-1/2} \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} c_j(v^{(p)}). \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^N \|g_n^{(0,0,1)}(x, t, v_x^{(p)}) \partial_x^j v^{(p)}(x, t)\| \rho(t)^{j-k} j^{ks} / j!^s &\leq \\ &\leq \alpha(t) C_K M_K^s a_0^{-1/2} E_N^{(p)}(t) \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Для остальных ν , благодаря условиям Леви (2.8), имеем

$$\begin{aligned} R_j &= \sum_{\nu=2}^{j-1} \frac{(j-1)!}{\nu!} \|g_n^{(0,0,\nu)}(x, t, v_x^{(p)}) \sum_{\substack{|m|=j-1 \\ m_i \geq 1}} \frac{1}{m_1! \dots m_\nu!} (\partial_x^{m_1+1} v) \dots (\partial_x^{m_\nu+1} v)\| \leq \\ &\leq \alpha(t) \sum_{\nu=2}^{j-1} C_K M_K^{s\nu} a_0^{-1/2} \nu!^{s'-1} \nu^{-ks} \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} \times \\ &\times \sum_{\substack{|m|=j-1 \\ m_i \geq 1}} \frac{(j-1)!}{m_1! \dots m_{\nu-1}!} \|(\partial_x^{m_1+1} v) \dots (\partial_x^{m_{\nu-1}+1} v) \lambda(t) \sqrt{a(x, t)} (\partial_x^{m_\nu+1} v) / m_\nu!\|, \end{aligned}$$

где мы несколько увеличили постоянную M_K . Итак (см. [10, 11])

$$\begin{aligned} R_j &\leq \alpha(t) \sum_{\nu=2}^{j-1} C_K M_K^{s\nu} \nu!^{s'-1} \nu^{-(k-1)s} \frac{\lambda'}{\lambda} \times \\ &\times \sum_{|m|=j-1, 1 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_\nu} (j-1)! \frac{\|\partial_x^{m_1+1} v^{(p)}\|_\infty \dots \|\partial_x^{m_{\nu-1}+1} v^{(p)}\|_\infty}{m_1! \dots m_{\nu-1}!} \times \\ &\times \|\lambda(t) \sqrt{a(x, t)} \partial_x^{m_\nu+1} v^{(p)}\| / m_\nu!, \end{aligned}$$

и, наконец, в силу теоремы вложения

$$\begin{aligned} R_j &\leq \alpha(t) \frac{C_K}{C_0} a_0^{-1/2} (j-1)!^s \sum_{\nu=2}^{j-1} (M_K^s C_0)^\nu \nu^{-(k-1)s} \nu!^{s'-s} \frac{\lambda'}{\lambda} \times \\ &\times \sum_{|m|=j-1, 1 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_\nu} \frac{c_{m_1+k} (m_1+k)^{ks}}{(m_1+k)!^s (m_1+k)} \dots \frac{c_{m_{\nu-1}+k} (m_{\nu-1}+k)^{ks}}{(m_{\nu-1}+k)!^s (m_{\nu-1}+k)} \times \end{aligned}$$

$$\times \frac{e_{m_\nu+1}(m_\nu+1)^{ks}}{m_\nu!^s(m_\nu+1)} \left(\frac{m_1! \dots m_\nu! \nu!}{(j-1)!} \right)^{s-1}$$

В одномерном случае $k = 3$, C_0 - постоянная вложения.

Принимая во внимание неравенство $\nu! m_1! \dots m_\nu! \leq (j-1)!$ и $j \leq \nu m_\nu$, когда $1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_\nu \leq j-1$, $|m| = j-1$, заключаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=3}^N R_j \rho(t)^{j-k} j^{ks} / j!^s &\leq \alpha(t) \frac{C_K}{C_0} a_0^{-1/2} \sum_{\nu=2}^N (M_K^s C_0)^\nu \nu^{-(k-1)s} \nu!^{s'-s} \frac{\lambda'}{\lambda} \times \\ &\times \sum_{j=\nu+1}^N \sum_{\substack{|m|=j-1 \\ 1 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_\nu}} \eta(m_1+k) \dots \eta(m_\nu+k) \leq \\ &\leq \alpha(t) \frac{C_K}{C_0} \frac{\lambda'}{\lambda} a_0^{-1/2} \sum_{j=1}^{\infty} (M_K^s C_0 E_N^{(p)}(t))^j j!^{s'-s}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Заметим, что не только $m_\nu + 1 \leq N$, но и $m_i + k \leq n$ ($k = 3$).

Случай б) Для $p \geq 1$ очевидное соотношение

$$g_n^{(j-1,0,0)}(x, t, v_x^{(p)}) = g_n^{(j-1,0,0)}(x, t, 0) + \int_0^{v_x^{(p)}} g_n^{(j-1,0,1)}(x, t, v) dv$$

и условия Леви (2.8), (2.10) приводят к оценке

$$\|g_n^{(j-1,0,0)}(x, t, v_x^{(p)})\| \leq \|g_n^{(j-1,0,0)}(x, t, 0)\| + \alpha(t) C_K M_K^{js} j!^s (j+1)^{-ks} \lambda'(t) \|v_x^{(p)}(x, t)\|.$$

Отсюда и из (3.8) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \|g_n^{(j-1,0,0)}(x, t, v_x^{(p)})\| \rho(t)^{j-k} j^{ks} / j!^s &\leq \|g_n(x, t, 0)\| + \\ &+ \alpha(t) \sum_{j=1}^{\infty} C_K M_K^{js} \lambda'(t) \rho(t)^{j-k} \|v_x^{(p)}(x, t)\| \leq \\ &\leq \|g_n(x, t, 0)\| + \alpha(t) C(\rho_0) C_K a_0^{-1/2} \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} E_1^{(p)}(t). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Случай с) Для изучения этого случая принимаем во внимание, что $\nu > 0$, $l \leq j-2$. Используя (2.8) и (2.10), получаем (M_K - несколько увеличено)

$$\begin{aligned} S_j &\leq \alpha(t) \sum_{i+l=j-1} \frac{(j-1)!}{i!} \sum_{\nu=0}^l \frac{1}{\nu!} C_K M_K^{s(i+\nu)} i!^s \nu!^{s'} (i+1)^{-ks} (\nu+1)^{-ks} \times \\ &\times \nu \lambda'(t) \sum_{\substack{|m|=j-1 \\ 1 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_\nu}} \frac{\|\partial_x^{m_1+1} v^{(p)}\|_\infty \dots \|\partial_x^{m_{\nu-1}+1} v^{(p)}\|_\infty \|\partial_x^{m_\nu+1} v^{(p)}\|_\infty}{m_1! \dots m_{\nu-1}! m_\nu!}. \end{aligned}$$

Отсюда, согласно теореме вложения для одномерного случая, следует

$$S_j \leq \frac{C_K}{C_0} \frac{\lambda'}{\lambda} (j-1)!^s \sum_{i+l=j-1} \sum_{\nu=0}^l M_K^{s(i+\nu)} C_0^\nu \nu!^{s'-s} \left(\frac{i!l!}{(j-1)!} \right)^{s-1} \times \\ \times \alpha(t) (i+1)^{-(k-1)s} \nu^{-(k-1)s} \left(\frac{m_1! \dots m_{\nu-1}! m_\nu! \nu!}{l!} \right)^{s-1} \times \sum_{\substack{|m|=l \\ 1 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_\nu}} \\ \frac{e_{m_1+k}(m_1+k)^{ks}}{(m_1+k)!^s (m_1+k)} \dots \frac{e_{m_{\nu-1}+k}(m_{\nu-1}+k)^{ks}}{(m_{\nu-1}+k)!^s (m_{\nu-1}+k)} \frac{e_{m_\nu+2}(m_\nu+2)^{ks}}{m_\nu!^s (m_\nu+2)^{ks+1}} a_0^{-1/2}.$$

На данном этапе мы нуждаемся в (3.8), в неравенстве $\frac{i!l!}{(j-1)!} \leq 1/(j-1) \leq 1/(m_\nu+1)$ справедливом ввиду $l \leq j-2$ и $m_\nu \geq l/\nu$, и соотношения $(m_\nu+2)\nu(\nu+1)(i+1) \geq j$. После суммирования мы получаем оценку

$$\sum_{j=2}^N S_j \rho(t)^{j-k} j^{ks} / j!^s \leq \frac{C_K}{C_0} \frac{\lambda'}{\lambda} \sum_{i+l=j-1} \sum_{\nu=0}^l (M_K^s C_0)^\nu \nu!^{s'-s} (\rho(t) M_K^s)^i \times \\ \times \alpha(t) a_0^{-1/2} \sum_{\substack{|m|=l \\ 1 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_\nu}} \eta(m_1+k) \dots \eta(m_{\nu-1}+k) \eta(m_\nu+2) \leq \\ \leq \alpha(t) \frac{C_K}{C_0} a_0^{-1/2} \frac{\lambda'}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} (2M_K^s C_0 E_N^{(p)}(t))^j j!^{s'-s}. \quad (3.19)$$

Из неравенств (3.15) - (3.19) получаются оценки для $B_N^{(p)}(t)$

$$B_N^{(p)}(t) \leq C(\rho_0) \alpha(t) \frac{C_K}{C_0} a_0^{-1/2} \frac{\lambda'}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} (2M_K^s C_0 E_N^{(p)}(t))^j j!^{s'-s} + |||g_n(x, t, 0)||| \quad (3.20)$$

для всех $p \geq 0$, $t \in [0, T^*]$. Из (3.11), (3.20) следует, что

$$E_N^{(p+1)}(t) \leq \lambda^{2Q}(t) \int_0^t \lambda^{-2Q}(\tau) |||g_n(x, \tau, 0)||| d\tau + \lambda^{2Q}(t) \int_0^t \lambda'(\tau) \lambda^{-(2Q+1)}(\tau) \times \\ \times \alpha(t) C(\rho_0) \frac{C_K}{C_0} a_0^{-1/2} \sum_{j=1}^{\infty} (2M_K^s C_0 E_N^{(p)}(\tau))^j j!^{s'-s} d\tau \quad (3.21)$$

для всех $N \geq 0$, $t \in [0, T^*]$.

3.3. Компактность

Лемма 3.1. (априорная оценка для приближений) Для решенной задачи (3.2), (3.3) можно найти положительные постоянные $\bar{D}_n$ и $\bar{T} \leq T^*$ такие, что для всех $p \geq 0$, $N \geq 1$

$$E_N^{(p)}(t) \leq \bar{D}_n \lambda^n(t) \quad \text{для всех } t \in [0, \bar{T}], \quad n > 2Q \quad (3.22)$$

Доказательство. Существует постоянная $\overline{D}_n$ такая, что

$$|||g_n(x, t, 0)||| \leq \overline{D}_n \lambda^n(t)/3,$$

и согласно (3.11)

$$E_N^{(1)}(t) \leq \overline{D}_n \lambda^n(t)/3$$

для всех N и всех $t \in [0, T^*]$. Следовательно

$$\lambda^{2Q}(t) \int_0^t \lambda^{-2Q}(\tau) |||g_n(x, \tau, 0)||| d\tau \leq \overline{D}_n \lambda^n(t)/3 \quad \text{для всех } t \in [0, T^*]. \quad (3.23)$$

Далее, выбираем компактное множество $K(\overline{D}_n) = [-C(\overline{D}_n), C(\overline{D}_n)]$ так, чтобы из $E_N(u)(t) \leq \overline{D}_n$ следовало бы включение $u_x(x, t) \in [-C(\overline{D}_n), C(\overline{D}_n)]$ для всех $x \in \mathbb{R}, t \in [0, T^*]$. Пусть теперь положительное $\overline{T} \leq T^*$ выбрано так, что для всех $t \in [0, \overline{T}]$ выполняется неравенство ($K = K(\overline{D}_n)$)

$$\frac{\alpha(t)}{n-2Q} \frac{C(\rho_0)}{C_0} a_0^{-1/2} C_K \sum_{j=1}^{\infty} (2M_K^s C_0 \overline{D}_n)^j j!^{s'-s} \leq \overline{D}/3. \quad (3.24)$$

Такое число $\overline{T} > 0$ существует, поскольку $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = 0$. Используя (3.23) и (3.24), из (3.21) получаем

$$\begin{aligned} E_N^{(p+1)}(t) &\leq \overline{D}_n \lambda^n(t)/3 + \lambda^{2Q}(t) \int_0^t \lambda'(\tau) \lambda^{-(2Q+1)}(\tau) \lambda^n(\tau) \overline{D}_n/3 d\tau \leq \\ &\leq \overline{D}_n \lambda^n(t)/3 + \overline{D}_n \lambda^n(t)/3 \leq \overline{D}_n \lambda^n(t) \end{aligned}$$

для всех $t \in [0, \overline{T}]$ и всех N . Применение метода математической индукции завершает доказательство леммы.

Доказательство Теоремы 1.2

Итак, выбираем последовательные итерации $\{v^{(p)}\}$ согласно (3.2), (3.3). Из Леммы 3.1 следует оценка $E_N^{(p)}(t) \leq \overline{D}_n$ для всех $p \in \mathbb{N}_0, N \geq 1$ и $t \in [0, \overline{T}]$. Учитывая еще и уравнение (3.2), получаем включение $v^{(p)} \in C^2([0, \overline{T}]; Y_{+0}^s)$, а также $\|v^{(p)}(x, t)\|_{s, \rho_1} \leq D_1$ для всех $p \in \mathbb{N}_0$ с некоторой, достаточно малой положительной постоянной ρ_1 . Компактность Y_{+0}^s , выбор последовательных приближений и однозначная разрешимость (3.1) обеспечивают сходимость $v^{(p)} \rightarrow v$ в

$C^1([0, \bar{T}]; Y_{+0}^s)$, причем стандартными рассуждениями доказывается, что v есть решение задачи (3.1). Сама задача показывает, что тогда $v \in C^2([0, \bar{T}]; Y_{+0}^s)$. Благодаря Лемме 2.2, $u = v + u^{(0)} + \dots + u^{(n)}$ есть $C^2([0, \bar{T}]; Y_{+0}^s)$ - решение задачи (1.1), (1.2). Вместе с предположениями (1.14) - (1.16), из $u \in C^k([0, \bar{T}]; Y_{+0}^s)$ следует $u \in C^{k+1}([0, \bar{T}]; Y_{+0}^s)$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$. Следовательно, $u \in C^\infty([0, \bar{T}]; Y_{+0}^s)$. Существование конуса зависимости и, следовательно, единственность следуют из Теоремы 1.1, (1.4) и (1.14). Этим завершается доказательство Теоремы 1.2.

Замечание. Можно доказать эту теорему и в том случае, когда условие (1.11) заменено на следующее :

$$|\partial_x^k \partial_t^l f(x, t, p)| \leq C_K M_K^{(k+l)s} l!^s k!^s \lambda^2(t) / \Lambda(t).$$

Действительно, используя последнее условие возможно доказать вместо Леммы 3.1, что можно найти постоянные $\bar{D}$ и $\bar{T}_n$ такие, что $E_N^{(p)}(t) \leq \bar{D} \lambda^n(t)$ для всех $t \in [0, \bar{T}_n]$, где $n > 2Q$ - конечное число. Доказательство этого утверждения требует слишком длинных вычислений для того, чтобы быть представленным здесь.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В статье [13] построены параметрикс и фундаментальное решение задачи Коши для линейного гиперболического уравнения, вырождающегося по времени. Используя этот результат, мы докажем теорему единственности и существование конуса зависимости в задаче Коши для квазилинейного уравнения (1.1).

Действительно, рассмотрим задачу Коши

$$Lu = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}_x \times [0, T], \quad (\text{A.1})$$

$$D_t^j u|_{t=0} = \psi_j(x), \quad j = 0, 1, \quad x \in \mathbb{R}_x, \quad (\text{A.2})$$

где $t, s \in J = [0, T]$, $T > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $D_t = -i\partial/\partial t$, $D_x = -i\partial/\partial x$, а L есть дифференциальный оператор

$$L = D_t^2 u + \sum_{j+\alpha \leq 2, j \leq 2} a_{j,\alpha}(x, t) D_x^\alpha D_t^j u \quad (\text{A.3})$$

с гладкими коэффициентами $a_{j,\alpha} \in C^\infty(\mathbb{R}_x \times [0, T])$. Предположим, что главная часть P_2 оператора L представима в следующем виде :

$$P_2(x, t; \xi, \tau) = (\tau - \lambda_1(x, t, \xi))(\tau - \lambda_2(x, t, \xi)), \quad (\text{A.4})$$

где функции $\lambda_1(x, t, \xi)$, $\lambda_2(x, t, \xi)$ являются вещественнозначными и удовлетворяют неравенствам

$$|\lambda_j(x, t, \xi)| \leq C\lambda(t)|\xi| \quad \text{для всех } t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.5})$$

$$|\lambda_1(x, t, \xi) - \lambda_2(x, t, \xi)| \geq \delta\lambda(t)|\xi| \quad \text{для всех } t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}, \quad \xi \in \mathbb{R} \quad (\text{A.6})$$

с положительной постоянной δ и с функцией $\lambda(t)$, описанной в пункте 1. Предположим также, что коэффициенты $a_{j,\alpha}(x, t)$ удовлетворяют следующим неравенствам :

$$|D_t^k D_x^\beta a_{j,\alpha}(x, t)| \leq C_{k,\beta} |\lambda(t)|^{2-j} \left| \frac{\ln|\lambda(t)|}{\lambda(t)} \right|^{2-j-\alpha} \left| \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right|^k, \quad (\text{A.7})$$

$$|D_t^k D_x^\beta \operatorname{Im} a_{0,1}(x, t)| \leq C_{k,\beta} \lambda(t) \left| \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right|^{k+1}. \quad (\text{A.8})$$

Если L удовлетворяет всем перечисленным выше условиям, то формально сопряженный оператор

$${}^t L v = D_t^2 v + \sum_{j+\alpha \leq 2, j \leq 2} (-1)^{j+\alpha} D_x^\alpha D_t^j (a_{j,\alpha}(x, t) v) \quad (\text{A.9})$$

также удовлетворяет этим же условиям. Следовательно, согласно результатам работы [13], задача Коши

$${}^t L v = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_x \times [0, T], \quad (\text{A.10})$$

$$v(s, x) = 0, \quad v_t(s, x) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}_x \quad (\text{A.11})$$

с $s > 0$ и $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x)$ имеет решение $v \in C^\infty(\mathbb{R}_x \times [0, T])$. Более того, существует компактное множество $K \subset \mathbb{R}$ такое, что $\operatorname{supp} v(t) \subseteq K$ для всех $t \in [0, T]$. Таким образом, можно доказать единственность для задачи (A.1), (A.2) с $s = 0$. В случае $s > 0$ единственность очевидна. Действительно, если $u \in C^\infty(\mathbb{R}_x \times [0, T])$ - решение уравнения $Lu = 0$ такое, что $D_t^j u|_{t=0} =$

$= 0$ для всех j , то $\int_0^t dt \int_{\mathbb{R}^n} dx u^t Lv = 0$ влечет $\int u(s, x) \psi(x) dx = 0$ для всех $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Следовательно, $u = 0$. Далее, задача (A.1), (A.2) имеет свойство конечной скорости распространения. Действительно, в силу уже доказанной единственности, $u(x, t) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} u(x, t, \varphi)$, где $u(x, t, \varphi)$ есть решение уравнения (A.1) с данными Коши $D_t^j u(x, \varphi, \varphi) = \psi_j(x)$, $j = 0, 1$, $\varphi > 0$.

Доказательство Теоремы 1.1

Функция $w = u_1 - u_2$, принадлежащая $C^\infty(C_A)$ есть решение задачи Коши (1.3). Предположения (A.4) - (A.7) выполнены для символа $\tau^2 - \lambda^2(t)a(x, t)\xi^2$. Свойства f обеспечивают принадлежность $b(x, t)$ классу $C^\infty(C_A)$ и выполнимость (A.7), (A.8). Действительно

$$b(x, t) = \int_0^1 (\partial_p f)(x, t, u_1(x, t) + \tau(u_2(x, t) - u_1(x, t))) d\tau. \quad (A.12)$$

Отсюда следует

$$|D_t^k D_x^\beta b(x, t)| \leq C_{k, \beta} \lambda(t) \left| \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right|^{1+k}.$$

Таким образом, условия (A.7), (A.8) выполнены. Поэтому $w = 0$ в силу результата единственности для линейного уравнения (1.3). Теорема 1.1 доказана.

Лемма A.1. (Лемма 3 [12]). *Рассмотрим задачу Коши для слабо гиперболического уравнения*

$$v_{tt} - \lambda^2(t)a(x, t)v_{xx} = g(x, t), \quad (A.13)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0. \quad (A.14)$$

В дополнение к (1.4), (1.5) предположим, что

$$\lambda^2 a \in C^2([0, T]; X_{+0}^s). \quad (A.15)$$

Тогда существует достаточно большое положительное число M такое, что для любой функции g , для которой

$$\lambda^{-M} g(x, t) \in C([0, T]; Y_{+0}^s), \quad (A.16)$$

существует единственное решение $v(x, t)$, причем $\lambda^{-M} v(x, t) \in C^2([0, T]; Y_{+0}^s)$.

Лемма А.2. [8] (Лемма Нерссяна - обобщение известной леммы Гронуолла на дифференциальные неравенства с сингулярным коэффициентом). Пусть задано дифференциальное неравенство

$$y'(t) \leq K(t)y(t) + f(t) \quad (\text{А.17})$$

в $t \in (0, T)$, где функции $K = K(t)$ и $f = f(t)$ принадлежат $C(0, T)$, $T > 0$.

Если

$$\int_0^\varphi K(\tau) d\tau = \infty, \quad \int_\varphi^T K(\tau) d\tau < \infty \quad \text{для всех } \varphi \in (0, T), \quad (\text{А.18})$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \int_\varphi^t \exp\left(\int_s^t K(\tau) d\tau\right) f(s) ds \quad \text{существует для каждого } t \in (0, T], \quad (\text{А.19})$$

$$y(\varphi) \exp\left(\int_\varphi^t K(\tau) d\tau\right) = o(\varphi) \quad (\text{А.20})$$

то любое $C([0, T]) \cap C^1(0, T)$ -решение неравенства (А.19) удовлетворяет неравенству

$$y(t) \leq \int_0^t \exp\left(\int_s^t K(\tau) d\tau\right) f(s) ds. \quad (\text{А.21})$$

Благодарности : Идеи настоящей работы возникли в период пребывания второго из авторов в Техническом Университете Горной Академии Фрайберга с февраля по май 1993. Оба автора благодарят DFG (Немецкое Исследовательское Общество) за финансовую поддержку, а также Горную Академию Фрайберга за гостеприимство.

ABSTRACT. We consider the Cauchy problem in Gevrey classes for quasilinear weakly hyperbolic second order equations with characteristics coinciding on initial line. We suggest conditions on nonlinear lower order term $f(x, t, u_x)$ which are sufficient for the local existence theorem. We prove also the existence of cone of dependence.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Cattabriga, L. Zanghirati, "Fourier integral operators of infinite order on Gevrey spaces, application to the Cauchy problem for certain hyperbolic operators",

- Journal of Math. of Kyoto Univ., vol. 30, no. 1, pp. 149 – 192, 1990.
2. F. Colombini, S. Spagnolo, "A non-uniqueness result for the operators with principal part $\partial_t^2 + a(t)\partial_x^2$ ", in : Partial Differential Equations and the Calculus of Variations, vol. 1, Essays in Honor of Enrico de Giorgi, Progress in Non-linear Differential Equations and their applications, Birkhäuser, pp. 331 – 353, 1989.
 3. P. D'Ancona, R. Manfrin, "The Cauchy problem in abstract Gevrey spaces for nonlinear weakly hyperbolic equation of second order", Preprints di Matematica, vol. 145, October 92, Scuola Normale Superiore, Pisa, pp. 1 – 17, 1992.
 4. В. Я. Иврий, В. М. Петков, "Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрогих гиперболических уравнений", Успехи мат. наук, том 29, № 5, стр. 3 – 70, 1974.
 5. В. Я. Иврий, "Линейные гиперболические уравнения", в книге : Линейные Уравнения с Частными Производными, том 197, №4, (Проблемы Современной Математики : Фундаментальные Направления) том 33, стр. 157 – 247, 1988.
 6. K. Kajitani, "Local solution of Cauchy problem for nonlinear hyperbolic systems in Gevrey classes", Hokkaido Math. J., vol. 12, 434 – 460, 1983.
 7. S. Nakane, "Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem for a class of operators of degenerate type - II", Proc. Japan Acad. vol. 59, pp. 318 – 320, 1983.
 8. А. Б. Нерсисян, "О задаче Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка", Докл. АН СССР, том 166, стр. 1288 – 1291, 1966.
 9. T. Nishitani, "Sur les equations hyperboliques a coefficients hölderiens en t et de classe de Gevrey en x ", Bull. Sc. math., 2^e serie, vol. 107, pp. 113 – 138, 1983.
 10. M. Reissig, K. Yagdjian, "Levi conditions and global Gevrey regularity for the solutions of quasilinear weakly hyperbolic equations", to appear.
 11. S. Spagnolo, "Analytic regularity of the solutions of a semi-linear weakly hyperbolic equation", Ricerche di Matematica, Suppl., vol. 36, pp. 193 – 202, 1987.
 12. К. А. Ягджян, "Задача Коши для слабо гиперболического уравнения в классах Жевре", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том. 13, №1, стр. 3 – 22, 1978.
 13. К. А. Ягджян, "Псевдодифференциальные операторы с параметром и фундаментальное решение задачи Коши для операторов с кратными характеристиками", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том. 21, №4, стр. 317 – 344, 1986. [English translation : Soviet Journal of Contemporary Math. Anal. (Armenian Academy of Sciences)], vol. 21, no. 4, pp. 1 – 29, 1986.
 14. К. А. Ягджян, "Необходимые условия корректности задачи Коши для операторов с кратными характеристиками", Изв. АН Арм. ССР, Математика, [English translation : Soviet Journal of Contemporary Math. Anal. (Armenian Academy of Sciences)], vol. 23, no. 5, pp. 36 – 61, 1988.

25 Июня 1993

Технический университет
Горной Академии Фрайберга, ФРГ

Институт математики
НАН Армении

ОБ ОДНОМ КОНЕЧНО-АДДИТИВНОМ ФУНКЦИОНАЛЕ В $\mathbb{R}^3$

Р. В. АМБАРЦУМЯН

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, №2, 1993

Руководствуясь некоторым разложением Комбинаторной Интегральной Геометрии, мы определяем конечно-аддитивный функционал на ограниченных выпуклых многогранниках в $\mathbb{R}^3$. При некоторых предположениях гладкости, найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы этот функционал определял бы знакопеременную меру в $\mathbb{R}^3$. Этот результат применяется к задаче порождения знакопеременной меры в пространстве плоскостей в $\mathbb{R}^3$ с помощью стереографии.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Идея аддитивного функционала, зависящего от функций, определенных в пространстве клиньев (функция клина) возникла в Комбинаторной Интегральной Геометрии, см. [1],[2]. Рассмотренные в [1], [2] функции клина зависели от мер m , определенных в пространстве $\mathbb{E}$ плоскостей в $\mathbb{R}^3$, и давали возможность комбинаторного вычисления значений m на подмножествах $\mathbb{E}$ из так называемого класса Бюффона.

Настоящая заметка посвящена следующей задаче: дана функция клина, как выяснить, порождает ли она посредством соответствующего аддитивного функционала Комбинаторной Интегральной Геометрии меру в пространстве $\mathbb{E}$ или нет. Примеры подобных "обращений" "прямых" результатов Комбинаторной Интегральной Геометрии можно найти уже в [1] (теорема о порождении мер в пространстве прямых линейно-аддитивными, непрерывными псевдометриками). Тем не менее, прогресс в этом направлении для клиньев в $\mathbb{R}^3$ и мер в $\mathbb{E}$ являлся трудной задачей до появления концепций флага и флаговой плотности, которые были развиты в [2]. Значительные аналитические преимущества возникают при переформулировке задачи для $\mathbb{E}$ в пространство $\mathbb{R}^3$ с использованием стерео-

графического отображения, предложенного в [3], где оно с успехом применялось в двумерном случае. Основным принципом этого преобразования является то, что после стереографии образ флага есть (двойственный) флаг, а образ клина - (двойственный) клин.

В результате, после стереографии, мы вновь получаем задачу порождения меры посредством функции клина, однако теперь пространство, где мы хотели бы иметь меру есть $\mathbb{R}^3$, а не $\mathbb{E}$. Именно эта версия задачи рассматривается ниже. Читатель заметит, что рассматриваемый ниже аддитивный функционал X есть дуальная переформулировка известного разложения Комбинаторной Интегральной Геометрии [1],[2].

Целью этой работы является описание основных шагов решения, и, поэтому, где возможно, мы не вдаемся в детали, включая переформулировку результатов в терминах пространства $\mathbb{E}$. Надеемся, что позже этот недостаток будет компенсирован в других публикациях, касающихся этого вопроса.

§2. КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Начнем с некоторых необходимых определений.

Флагом f в $\mathbb{R}^3$ называется тройка $f = (P, g, e)$, где P - точка в $\mathbb{R}^3$, g - прямая, проходящая через P , а e - плоскость, содержащая g . Пространство флагов обозначим через $\mathcal{F}$.

Свободным флагом называется пара $r = (\Omega, \phi)$, где Ω - направление в $\mathbb{R}^3$, ϕ - угол вращения вокруг Ω .

Клином называется пара $w = (s, V)$, где s - отрезок прямой в $\mathbb{R}^3$, V - вертикальная двугранная область в $\mathbb{R}^3$, ограниченная парой плоскостей, пересекающихся по прямой, содержащей s .

Имеется взаимно-однозначное соответствие между клиньями $w = (s, V)$ и множествами флагов в $\mathbb{R}^3$:

$$w = \{f = (P, g, e) : P \in s, g \text{ - продолжение } s, e \subset V\} \subset \mathcal{F},$$

что приводит к эквивалентному определению клина.

Каждому клину w соответствует *свободный клин*, который определяется как

следующее множество свободных флагов :

$$W = \{r = (\Omega, \phi) : r \text{ соответствует } f \text{ из } w\}.$$

Через W_0 обозначим множество клиньев (s, V) , для которых замыкание V не содержит начала координат O .

Мы рассмотрим аддитивные функционалы, определенные на W_0 .

Функция F , определенная на W_0 называется аддитивной, если для любых двух клиньев $w_1, w_2 \in W_0$ таких, что

$$\text{int } w_1 \cap \text{int } w_2 = \emptyset \text{ и } w_1 \cup w_2 \text{ есть снова клин,}$$

имеем

$$F(w_1) + F(w_2) = F(w_1 \cup w_2).$$

Выше мы использовали интерпретацию клиньев как подмножеств $\mathcal{F}$.

Мы будем рассматривать аддитивные функции клина, имеющие на ребрах из W_0 интегральное представление

$$F(w) = \int_w \rho(f) df, \quad (1)$$

где df обозначает перенос и вращение инвариантной меры на семействе

$$\Theta_g = \{f = (P, g, e) : P \in g, g \subset e\},$$

т.е.

$$df = dl d\phi,$$

где dl - элемент длины на g , $d\phi$ - элемент угла вращения. Назовем $\rho(f)$ *флаговой плотностью* F' . Так как мы не предполагали неотрицательности ρ , то (1) означает, что F определяет *знакопеременную меру* на каждом семействе Θ_g . Для выполнимости нижеследующих утверждений, ρ предполагается достаточно гладкой функцией.

Заметим, что (1) можно переписать, используя свободные клинья. Полагая, что $w = (s, W)$, находим

$$F(w) = \int_s l(P, W) dl, \quad (2)$$

где

$$I(P, W) = \int_W \rho(P, \Omega, \phi) d\phi.$$

Определим функционал X на классе C_0 ограниченных выпуклых многогранников, не содержащих начала координат O .

Дано $C \in C_0$, через $\{a_i\}$ обозначим множество ребер C . С каждым a_i мы ассоциируем два клина, ограниченные плоскостями двух граней C , пересекающихся по a_i , т.е.

$$(a_i, V_i) \text{ и } (a_i, V_i^c), \text{ где } V_i^c \text{ есть дополнение } V_i.$$

Обозначим через w_i тот из этих двух клиньев, который принадлежит множеству W_0 . Это w_i может содержать C (в этом случае w_i называется *покрывающим*), или не содержать (тогда w_i называется *внешним*). Через $W(a_i)$ обозначим свободный клин, соответствующий w_i .

Предложение. Для любого F , определенного по формуле (1), выражение

$$X(C) = \sum_{\substack{\text{по покрывающим} \\ \text{клиньям}}} F(w_i) - \sum_{\substack{\text{по внешним} \\ \text{клиньям}}} F(w_i) \quad (3)$$

определяет конечно-аддитивный функционал на C_0 .

Доказательство проводится, используя аддитивность F и правило знака, принятое в (3). Например, из этого правила следует, что если $C_1, C_2 \in C_0$ с $\text{int } C_1 \cap \text{int } C_2 = \emptyset$ обладают общим ребром, которое не является ребром для $C_1 \cup C_2$, то соответствующие $F(w_i)$ из (3), записанные для C_1 и C_2 , входят в (3) с разными знаками.

§3. БРУСКИ И ИХ ФРАГМЕНТЫ

Всюду ниже полагаем, что в $\mathbb{R}^3$ имеется фиксированная Декартова система координат.

Бруски.

Под *бруском* мы понимаем прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям x, y и z . Буквой B будем обозначать бруски в $\mathbb{R}^3$.

Для удобства назовем плоскость x, y - *горизонтальной*, а направление z - *вертикальным*.

Через $2h_x, 2h_y, 2h_z$ обозначим длины ребер B , параллельных осям x, y и z , соответственно.

В качестве параметра величины бруска выбираем его объем - $V = 8h_x h_y h_z$; а его форма определяется отношениями $\frac{h_y}{h_x}, \frac{h_z}{h_x}$.

B^* фрагменты.

Этот термин будет относиться к выпуклым многогранникам $B^* \subset \mathbb{R}^3$, которые могут быть представлены в виде пересечения

$$B^* = B \cap H,$$

где B - брусок, а H - полупространство, граничная плоскость ∂H , которая удовлетворяет следующим условиям:

- а) ∂H содержит внутреннюю диагональ d бруска B ;
- б) ∂H не касается ни одной из двух горизонтальных граней B .

Единственную вершину B^* , для которой три исходящих ребра совпадают с ребрами B , назовем верхушкой T фрагмента B^* . Ромбоидальную грань S фрагмента B^* , не являющуюся частью какой-либо грани B , назовем *наклонной гранью* B^* . Ясно, что S всегда *правильный ромбоид*: ромбоид назовем правильным, если проекции его сторон на горизонтальную плоскость параллельны осям x и y . Выберем площадь $||S||$ грани S в качестве параметра величины B^* ; форма B^* определяется формой соответствующего B и ориентацией в плоскости e_0 . Существуют восемь различных типов B^* : тип зависит от выбора диагонали d и верхушки T .

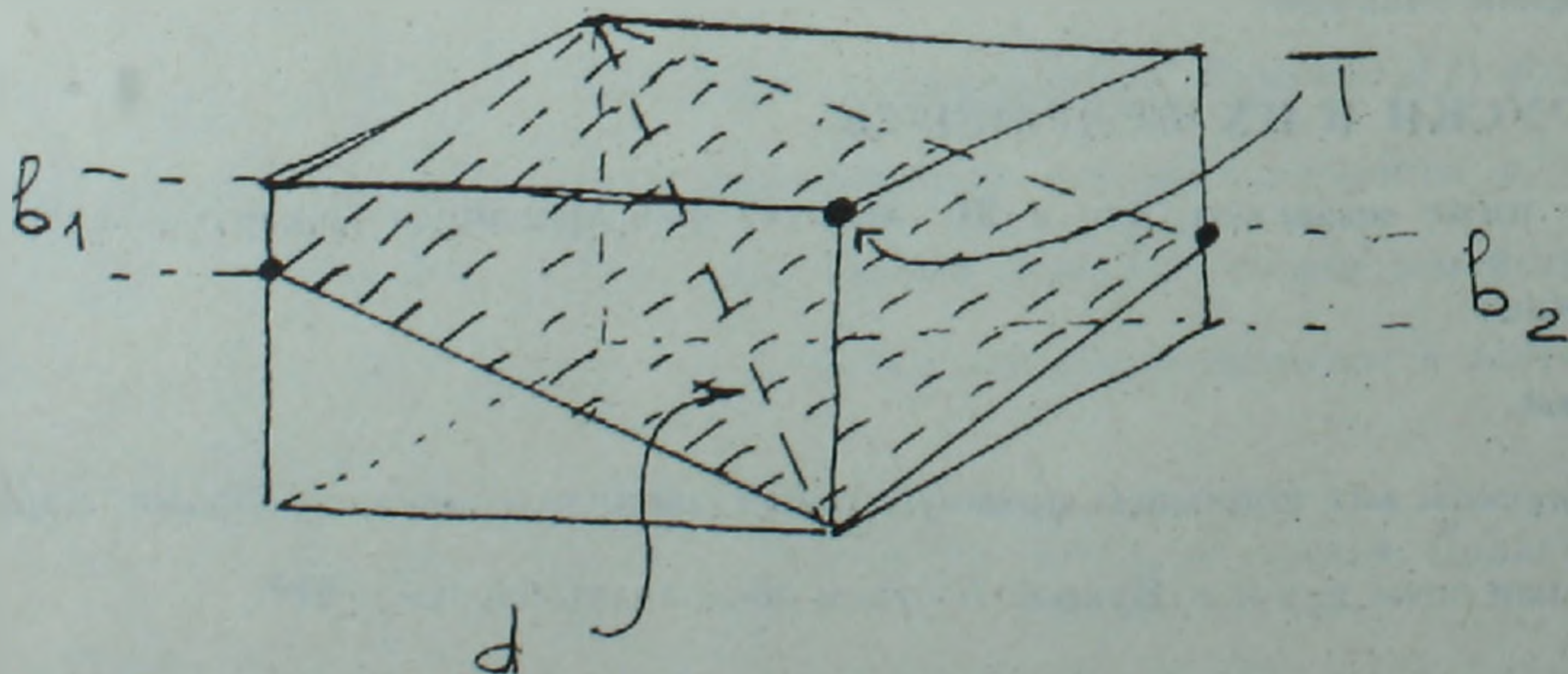


Рис. 1. T - верхушка, наклонная грань заштрихована

Построение 1. Даны полупространство H в общем положении, а также *правильный* ромбоид $S \subset \partial H$. Существует единственный фрагмент $B^* \subset H$, для которого S является скатом.

Этот B^* построен следующим образом.

При любом $(x, y, z) \in \partial H$ из соотношения $(x, y, z + \varepsilon) \in H$ следует, что
либо а) $\varepsilon > 0$, либо б) $\varepsilon < 0$.

Пусть $P_i, i = 1, \dots, 4$ - вершины S :

$$P_i = (x_i, y_i, z_i).$$

Можем предположить, что

$$z_1 = \min(z_1, z_2, z_3, z_4), \quad z_4 = \max(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

Тогда верхушка T фрагмента B^* имеет координаты

$$T = (x_1, y_1, z_4) \quad \text{в случае а)}$$

и

$$T = (x_4, y_4, z_1) \quad \text{в случае б)}.$$

Тело, ограниченное горизонтальной плоскостью, проходящей через T , а также вертикальными плоскостями, проходящими через стороны S и через само S и есть искомос B^* .

B^{} фрагменты.**

Определим квадрант Q как часть $\mathbb{R}^3$, ограниченную двумя полуплоскостями (гранями), одна из которых вертикальна. Грань, которая не вертикальна называется наклонной. Отрезок прямой, по которой пересекаются вертикальная и наклонная грани, обозначается через L и называется ребром квадранта Q .

Вертикальная плоскость V , проходящая через диагональ d и заштрихованная плоскость, показанная на Рис 1., порождают четыре квадранта Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 .

Они порождают также $B_i^{**} = B \cap Q_i$.

Тем не менее, вообще говоря, наклонная грань квадранта Q может пересекать горизонтальные основания бруска B .

Выберем длину $|L|$ отрезка L в качестве параметра *размера* для фрагмента B^{**} ; форма параметров B^{**} такая же, как для B^* , однако существует 16 типов (зависящих от выбора d и квадрантов Q_i).

Построение 2. Даны квадрант Q и не горизонтальный прямолинейный отрезок L на ребре квадранта Q_0 . Существует единственный фрагмент B^{**} , для которого $B^{**} \subset Q$, L является ребром B^{**} и наклонная грань квадранта Q содержит грань фрагмента B^{**} .

Это B^{**} может быть построено как пересечение $B \cap Q$, где B - брусок, ограниченный плоскостями, параллельными координатным плоскостям, и проходящими через концы отрезка L .

§4. ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ БРУСКИ И ФРАГМЕНТЫ БРУСКОВ

В этом параграфе рассмотрим асимптотическое поведение функционала X на брусках и фрагментах бруска, предполагая, что их области стягиваются к точкам (которые определяют их положение), тогда как параметры размера стремятся к нулю. Предположим также, что их формы остаются фиксированными.

Опишем основной принцип, лежащий в основе нижеследующего анализа :

инфинитезимальные бруски и B^ фрагменты обладают группами ребер a_i , для которых свободные клинья $W(a_i)$ совпадают. Внутри соответствующих групп слагаемых в (3) разложения в ряд Тейлора выражений (2) могут быть алгебраически просуммированы.*

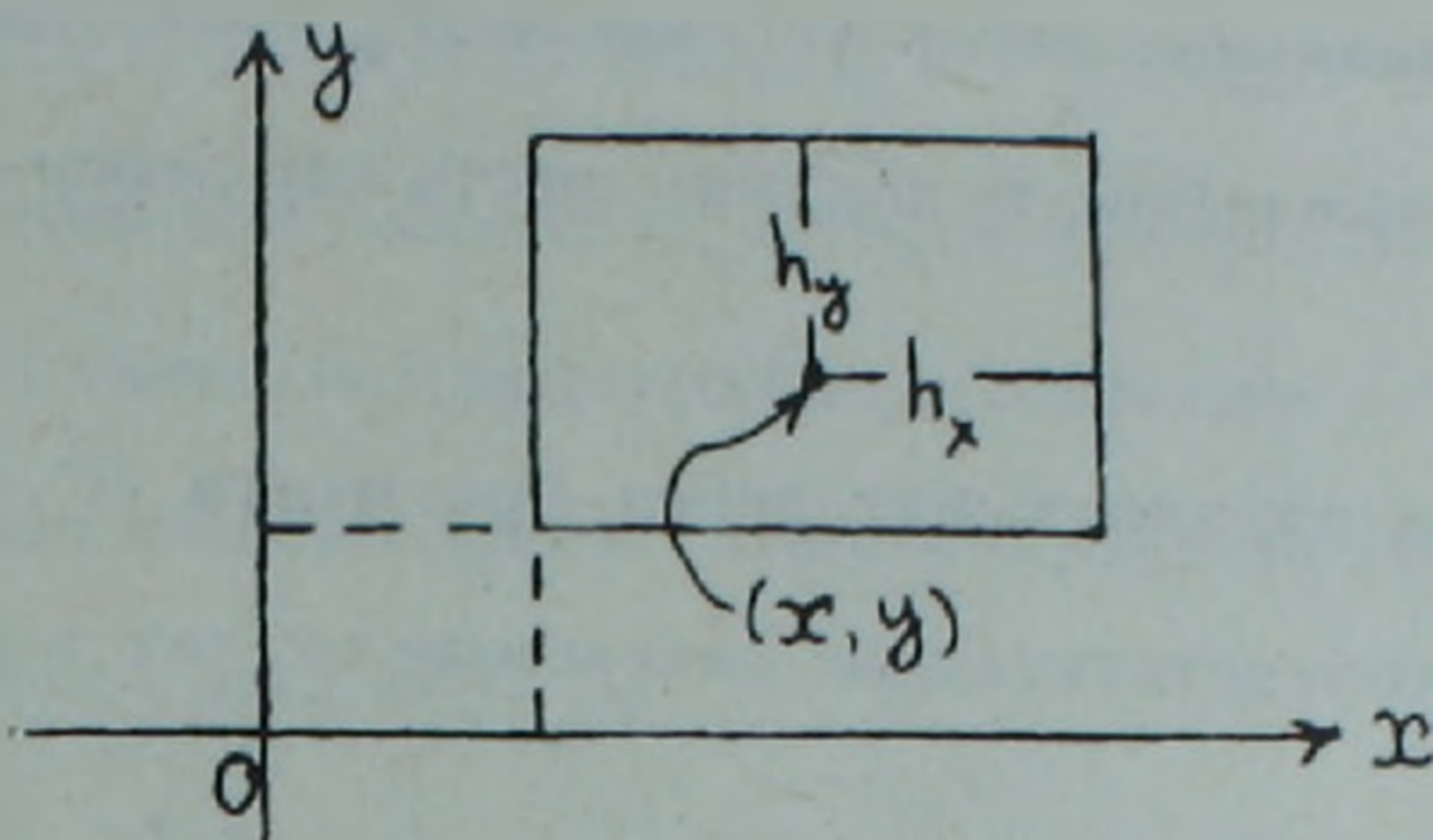
Инфинитезимальные бруски.

Начнем с последовательности брусков $B \subset \mathbb{C}_0$, предполагая, что они стягиваются к общему центру $P = (x, y, z)$. Объем B обозначим через dV .

Мы выберем из группы слагаемых в (3), соответствующие ребрам a_i , параллельным оси z . Для ребер из этой группы свободные клинья $W(a_i)$ совпадают, положим

$$W_z = W(a_i).$$

Ситуация, изображенная на Рис. 2, а) (соответствует определенному выбору

Рис. 2. Проекция бруска B на плоскость x, y .

знаков), их совместный вклад равен

$$\begin{aligned} & \int_{z-h_z}^{z+h_z} l(x+h_x, y-h_y, l, W_z) dl + \int_{z-h_z}^{z+h_z} l(x-h_x, y+h_y, l, W_z) dl - \\ & - \int_{z-h_z}^{z+h_z} l(x+h_x, y+h_y, l, W_z) dl - \int_{z-h_z}^{z+h_z} l(x-h_x, y-h_y, l, W_z) dl \end{aligned}$$

что, очевидно, эквивалентно

$$-\frac{1}{8} \frac{\partial^2 l(x, y, z, W_z)}{\partial x \partial y} dV.$$

Для ситуации, показанной на Рис. 2, б), получаем тот же результат, но с противоположным знаком. Учитывая группы ребер, параллельных осям x и y , получаем (обозначение очевидно)

$$X(B) = H_1(P) dV, \quad (4)$$

где

$$H_1(P) = c_z(P) \frac{\partial^2 l(P, W_z)}{\partial x \partial y} + c_x(P) \frac{\partial^2 l(P, W_x)}{\partial y \partial z} + c_y(P) \frac{\partial^2 l(P, W_y)}{\partial x \partial z}.$$

Функции $c(P)$ могут принимать значения $+1$ или -1 . Например,

$$c_z(P) = 1, \quad \text{если } xy > 0, \quad -1, \quad \text{если } xy < 0.$$

Инфинитезимальные B^* фрагменты.

Выберем полупространство H , правильный ромбoid с инфинитезимальной площадью dS в плоскости $e = \partial H$. Пусть $P \in e$ - центр этого ромбоида. Используя Построение 1, получим B^* , который стягивается к P . Разделим вертикальное ребро B^* с концом в вершине T на две части b_1 и b_2 , длины которых эквивалентны

длинам двух других вертикальных ребер фрагмента B^* . Если будем рассматривать эти части как отдельные ребра, то получим шесть пар ребер эквивалентной длины.

Пусть a_1, a_2 - i -тая пара параллельных ребер фрагмента B^* . Всегда имеем $W(a_1) = W(a_2) = W$ и соответствующие слагаемые входят в (3) с противоположными знаками.

Используя разложение Тейлора, находим

$$t_i(P) = \lim(dS)^{-1} \left[\int_{a_1} I(P, W) dl - \int_{a_2} I(P, W) dl \right] = q_1 \frac{\partial I(P, W)}{\partial a} + q_2 \frac{\partial I(P, W)}{\partial \alpha},$$

где $\frac{\partial}{\partial a}$ - производная в положительном направлении a , $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ - производная в предельном положительном направлении диагонали ромбоида, определяемой посредством a_1, a_2 . (Можем предполагать, что эти положительные направления были определены, согласно некоторой трансляционно-инвариантной договоренности).

Для данной пары a_1, a_2 величины $|q_1|, |q_2|$ зависят исключительно от формы нашего B^{**} и его типа; знаки этих коэффициентов зависят от типа B^{**} и сдвига точки P в плоскости e .

Из предыдущего уравнения следует, что

$$X(B^*) = H_2(P) dS, \quad \text{где} \quad H_2(P) = \sum_{i=1}^6 t_i(P). \quad (5)$$

Замечание. Упомянутый выше результат справедлив также для инфинитезимальных треугольных призм, которые могут быть получены как пределы B^* фрагментов.

Инфинитезимальные B^{} фрагменты.**

Выберем квадрант Q и интервал с центром в P , с длиной dL на ребре квадранта Q . Воспользовавшись Построением 2, получим последовательность фрагментов B^{**} , которые стягиваются к P . Все слагаемые в (3), записанные для $X(B^*)$, асимптотически пропорциональны dL . Получаем

$$X(B^*) = H_3(P) dS, \quad \text{где} \quad H_3(P) = \sum u_i I(P, W(a_i)), \quad (6)$$

a_i - ребра фрагмента B^{**} , $|u_i|$ - пределы отношений $\frac{|a_i|}{dL}$, зависящие от формы B^{**} . Если заданы форма и тип B^* , то знаки этих коэффициентов зависят от выбора точки P .

§5. УСЕЧЕННЫЕ ПРАВИЛЬНЫЕ ПРИЗМЫ

Через Π_r обозначим выпуклое тело, которое может быть получено из правильной призмы с горизонтальным прямоугольным основанием сечением наклонной плоскостью, не пересекающей горизонтальные основания (см. Рис. 3 а). Обозначим через σ наклонную грань тела Π_r .

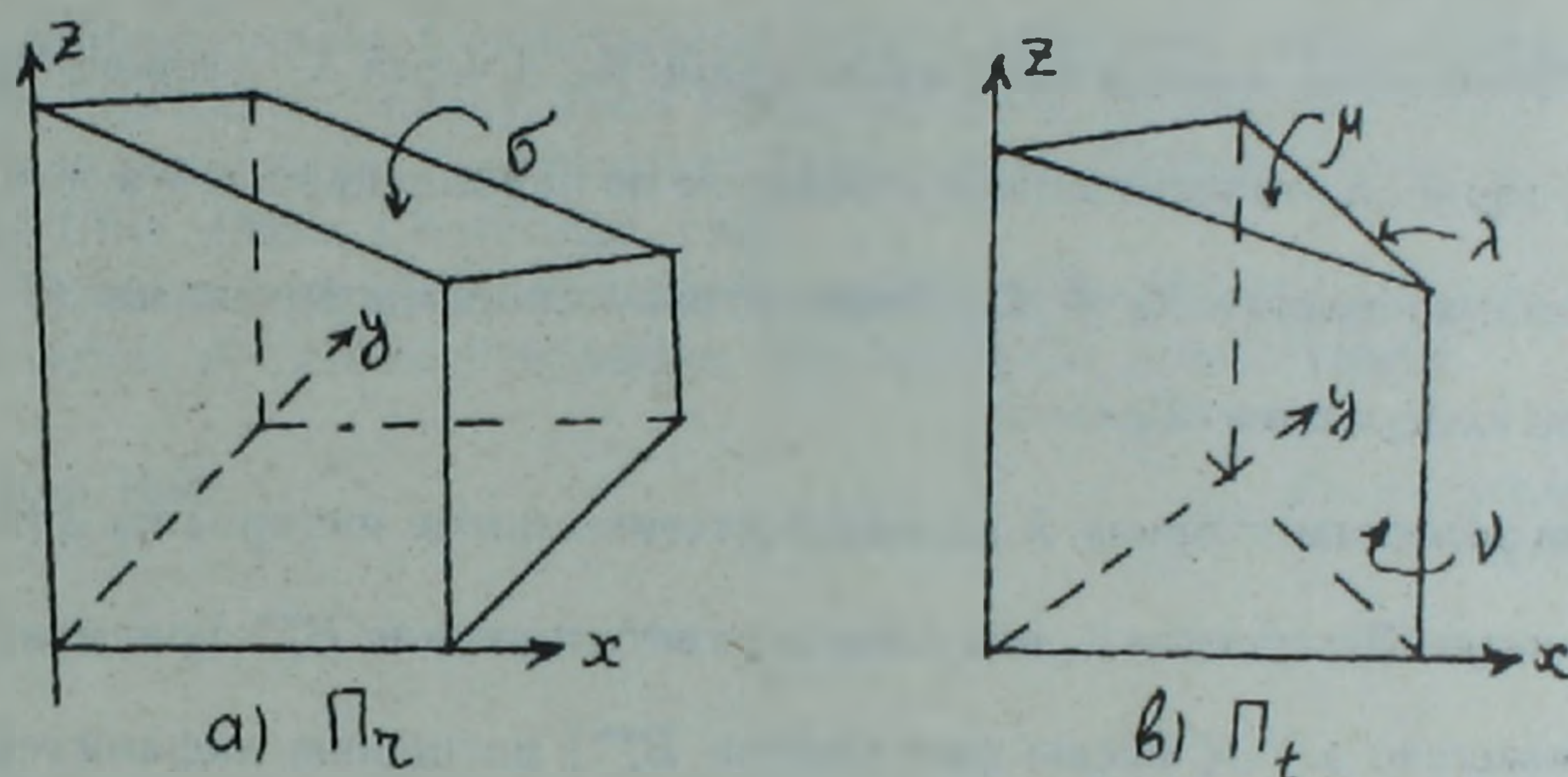


Рис. 3.

Разобьем данное тело $\Pi_r \in C_0$ инфинитезимальными брусками и B_i^* фрагментами следующим образом.

Сначала разобьем грань σ с помощью правильных ромбоидов dS_i , тогда в силу Построения 1 получим соответствующие B_i^* внутри тела Π_r . Множество $\Pi_r \setminus \cup B_i^*$ принадлежит тому типу, который можно разбить инфинитезимальными брусками B_s (это возможно, так как часть тела Π_r под каждым B_i^* является бруском).

В силу аддитивности функционала X

$$X(\Pi_r) = \sum X(B_s) + \sum X(B_i^*). \quad (7)$$

Подставляя (4) и (5) в (7), получим

$$X(\Pi_r) = \int_{\Pi_r} H_1 dV + \int_{\sigma} H_2 dS.$$

Повторяя рассуждения, применяемые в похожей ситуации в плоском случае в [3], приходим к следующему необходимому условию.

Условие 1. Если X порождает меру в $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, то обязательно $H_1 \equiv 0$ (для всех типов, форм и положений P).

Пусть Π'_i - правильная призма, горизонтальное основание которой - правильный треугольник со сторонами, параллельными осям x и y . Через Π_i обозначим выпуклое тело, которое может быть получено из призмы Π'_i сечением наклонной плоскостью, которое не пересекает горизонтальные основания призмы Π'_i (см. Рис. 3 б)). Обозначим через μ наклонную грань Π_i , а через λ - сторону грани μ , проекция которой на горизонтальное основание не параллельно оси x или оси y . Разобьем данную призму $\Pi_i \in \mathbf{C}_0$ инфинитизимальными брусками B^* и B^{**} фрагментами следующим образом.

Сначала разделим сторону λ на инфинитезимальные интервалы длины dl_i . Тогда, используя Построение 1, получим соответствующие B_i^{**} фрагменты внутри Π_i . Множество $\mu \setminus \cup \{ \text{следы фрагментов } B_i^{**} \}$ расщепим инфинитезимальными правильными ромбоидами с площадью dS_i для которых построим (Построение 1) соответствующие B_i^* . Такую же операцию мы совершаем на вертикальной грани ν тела Π_i , содержащего сторону λ , и получим множества B_i^* , которые касаются грани ν . Множество $\Pi_i \setminus \cup B_i^*$ допускает разбиение брусками.

Поступая так же как выше, получаем представление

$$X(\Pi_i) = \int_{\Pi_i} H_1 dV + \int_{\cup \nu_i} H_2(P) dS + \int_{\lambda} H_3 dl.$$

Применяя Условия 1, получаем

2. Если X порождает меру в $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, то обязательно $H_2 \equiv 0$ (для всех типов, форм и положений P).

Теорема. Одновременное выполнение тождеств $H_1 \equiv 0$ и $H_2 \equiv 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы конечно-аддитивный функционал $X(B)$, определенный посредством (3), являлся бы мерой $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ с плотностью $H_1(P)$.

Доказательство. Необходимость доказана выше. Доказательство достаточности основывается на представлении функционала $X(C)$ для любого $C \in \mathbf{C}_0$ в виде линейной комбинации значений X на конечном числе тел типа Π_i .

ABSTRACT. Guided by a decomposition in Combinatorial Integral Geometry, we define a finite-additive functional on bounded convex polyhedrons in $\mathbb{R}^3$. Under certain smoothness assumptions, we find necessary and sufficient conditions when this functional defines a signed measure in $\mathbb{R}^3$. The result applies via stereography, in signed measure generation in the space of planes in $\mathbb{R}^3$.

REFERENCES

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
2. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
3. R. V. Ambartzumian "Planar measure generation by Euler functionals." Submitted to Journal of Applied Probability, Stochastic Geometry Section.

19 Февраля 1993

Институт математики
НАН Армении

О МЕРАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ФЛАГОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Г. С. Сукиасян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, №2, 1993

В работе рассматривается задача порождения знакопеременных мер в пространстве $\mathbb{E}$ плоскостей в $\mathbb{R}^3$ с помощью флаговых функций с использованием алгоритма из комбинаторной интегральной геометрии. Найдены условия на флаговые функции, обеспечивающие порождение меры в $\mathbb{E}$. Найдены также дополнительные условия, обеспечивающие неотрицательность порожденной меры.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{R}^3$ - трехмерное евклидово пространство, $\mathbb{E}$ - пространство плоскостей в $\mathbb{R}^3$, $P_1|P_2$ - множество плоскостей, разделяющих точки P_1 и P_2 . Для всякой меры μ в $\mathbb{E}$, $\mu(P_1|P_2)$ как функция от P_1, P_2 является псевдометрикой в $\mathbb{R}^3$. Одна из формулировок 4-ой проблемы Гильберта в $\mathbb{R}^3$ может быть изложена следующим образом : можно ли непрерывную и линейно-аддитивную метрику $F(P_1, P_2)$ представить в виде

$$F(P_1, P_2) = \mu(P_1 | P_2), \quad (1)$$

где μ - некоторая мера в $\mathbb{E}$?

Известно (см. [1]), что для достаточно гладких метрик F , имеет место представление (1), если под μ понимать *обобщенную меру*, т.е. разрешить μ принимать и отрицательные значения. Однако, восстановление знакопеременной меры μ по данной метрике F требует множества сложных вычислений. Некоторые задачи здесь остаются нерешенными, например, описание класса псевдометрик, порождаемых неотрицательными мерами посредством (1), описание класса функций на отрезках, которые могут быть представлены с помощью знакопеременной

меры посредством (1), описание класса знакопеременных мер, порождающих метрики посредством (1).

В настоящей работе рассматривается задача порождения знакопеременных мер в пространстве $\mathbb{E}$ плоскостей в $\mathbb{R}^3$ с помощью т.н. флаговых функций с использованием алгоритма из комбинаторной интегральной геометрии [2, 3]. Найдены условия на флаговые функции, обеспечивающие порождение меры в $\mathbb{E}$. Найдены также дополнительные условия, обеспечивающие неотрицательность порожденной меры.

§1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ КОМБИНАТОРНОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Напомним некоторые основные факты комбинаторной интегральной геометрии (см. [2], [3], [6]). Пусть $\{P_i\}$ - конечное множество точек в $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{R}(\{P_i\})$ - соответствующее кольцо Радона подмножеств пространства $\mathbb{E}$, а $\mathcal{R} = \cup \mathcal{R}(\{P_i\})$, где объединение берется по всем конечным множествам $\{P_i\}$. Для любого $B \in \mathcal{R}$ и каждой знакопеременной меры μ в $\mathbb{E}$ значение $\mu(B)$ можно представить в виде конечной суммы

$$\mu(B) = \sum_w c_w W(w), \quad (2)$$

где c_w - целочисленные коэффициенты, зависящие от B , но не от выбора меры μ , W - функция, определенная в пространстве клиньев. Дадим определение клина в терминах т. н. флагов. Флагом f называется тройка (P, γ, e) , где P - точка, γ - прямая, e - плоскость, причем $P \in \gamma \subset e$. Мы будем использовать также обозначение $f = (P, \gamma, \varphi)$, где φ есть угол поворота плоскости e вокруг γ .

Пусть ν - отрезок P_1, P_2 , обозначим через $\bar{\nu}$ прямую, содержащую ν . Множество флагов (см. Рис. 1)

$$w(\nu, \Phi) = \{(P, \gamma, \varphi) : P \in \nu, \gamma = \bar{\nu}, \varphi \in \Phi\}, \quad \Phi \subset [0, \pi)$$

называется клином (ν называется ребром, а Φ - раствором клина w).

В [2] функция W зависит от выбора знакопеременной меры μ . При каждом выборе μ , W порождает семейство знакопеременных мер $\{m_\gamma\}$ [3], каждая m_γ определена на линейном семействе флагов

$$\{(P, \gamma, \varphi) : P \in \gamma, \varphi \in [0, \pi]\}$$

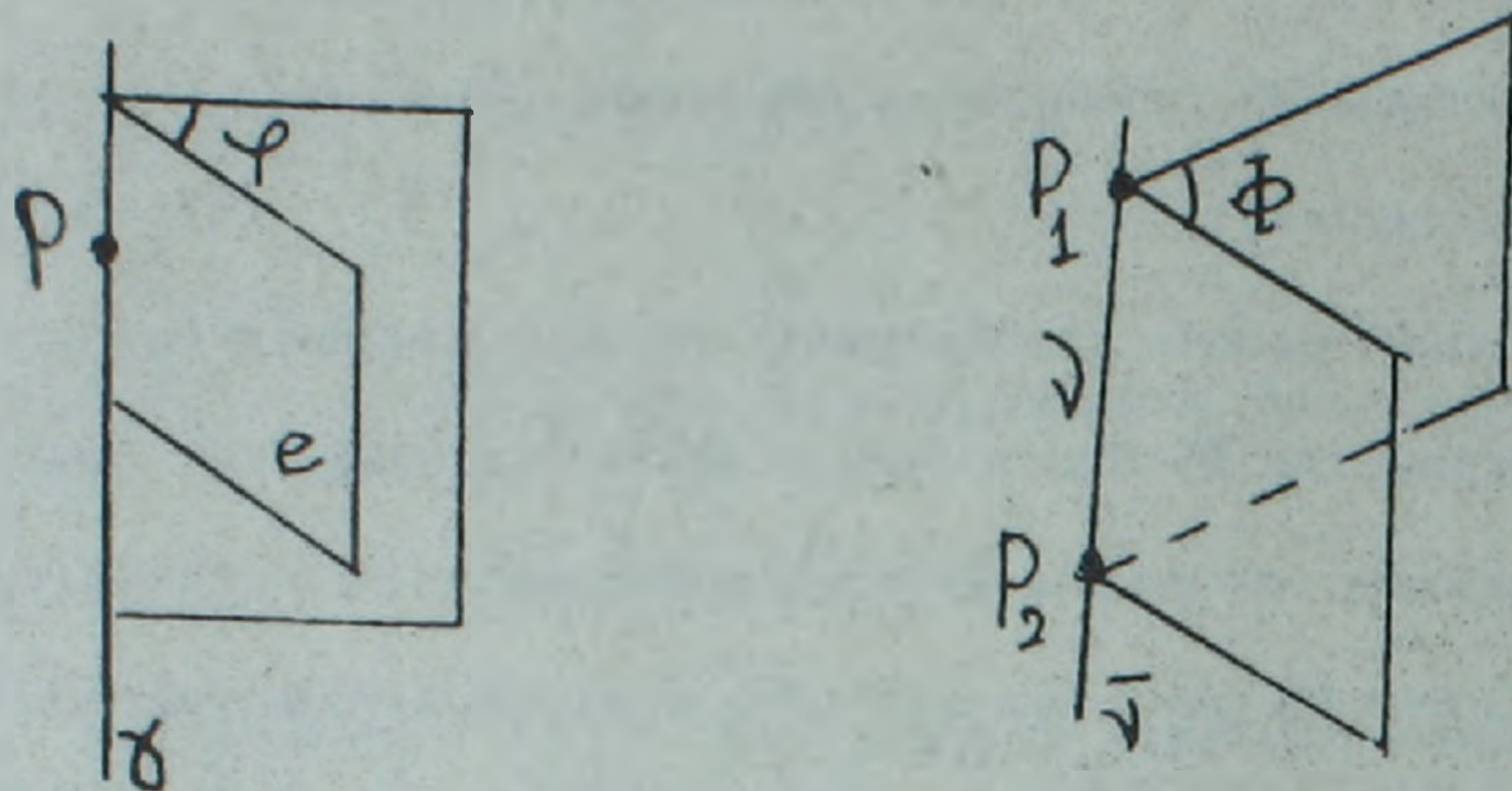


Рис. 1. Флаг и клин

соотношением

$$W(w(\nu, \Phi)) = m_{\bar{\nu}}(w(\nu, \Phi)). \quad (3)$$

Р. В. Амбарцумяном была поставлена следующая задача. Предположим, что задано семейство знакопеременных мер m_γ . Каким условиям должно удовлетворять семейство мер $\{m_\gamma\}$, чтобы оно порождало знакопеременную меру μ на $\mathbb{E}$ посредством (2), (3). Связь с 4-ой проблемой Гильберта в $\mathbb{R}^3$ в том, что если μ - неотрицательная мера, то

$$F(P_1, P_2) = m_{\bar{\nu}}(w(\nu, [0, \pi])), \quad \nu = [P_1, P_2] \quad (4)$$

есть *псевдометрика* в $\mathbb{R}^3$.

Мы решаем эту задачу при дополнительном условии существования *плотности* ρ :

$$m_{\bar{\nu}}(w(\nu, \Phi)) = \int_{P_1}^{P_2} dx \int_{\Phi} \rho(x, \bar{\nu}, \varphi) d\varphi. \quad (5)$$

Плотность ρ есть функция, определенная в пространстве флагов и в силу (4), (5) ее можно назвать *дезинтегрированной метрикой*. Таким образом, нашу задачу можно сформулировать так: какие условия необходимы и достаточны, чтобы дезинтегрированная метрика ρ порождала меру (или знакопеременную меру) μ посредством (2), (3), (5).

§2. ФУНКЦИОНАЛЫ Ψ И Ψ'

Пусть ρ - флаговая функция. Ниже (см. (10) и (13)), мы используем разложение Тейлора функции ρ . Предположим, что ρ столь гладкая, что обеспечивается справедливость разложений (10) (13).

Для заданной флаговой функции ρ построим клиновую функцию W посредством (3) и (5). Следуя подходу, предложенному в [4], [5] и подражая комбинаторной формуле (2), построим следующий функционал Ψ в $\mathcal{R}$:

$$\Psi(B) = \sum_w c_w W(w).$$

Функционал Ψ конечно-аддитивен в $\mathcal{R}$. Рассмотрим значения функционала Ψ на множествах $Q|S$, определенных ниже. Рассмотрим плоскость $e_o \subset \mathbb{R}^3$, выпуклый многоугольник $S \subset e_o$ с вершинами $\{P_i\}$ и точку $Q \in \mathbb{R}^3$ вне e_o . Предположим, что ортогональная проекция O точки Q на e_o лежит внутри S . Обозначим через $Q|S$ множество плоскостей, отделяющих точку Q от S . Через T обозначим пирамиду с вершиной Q и основанием S . Согласно (2) имеем (см. [3])

$$\Psi(Q|S) = \sum_{V_1} W(b_i, \Phi'_i) - \sum_{V_2} W(a_j, \Phi''_j). \quad (6)$$

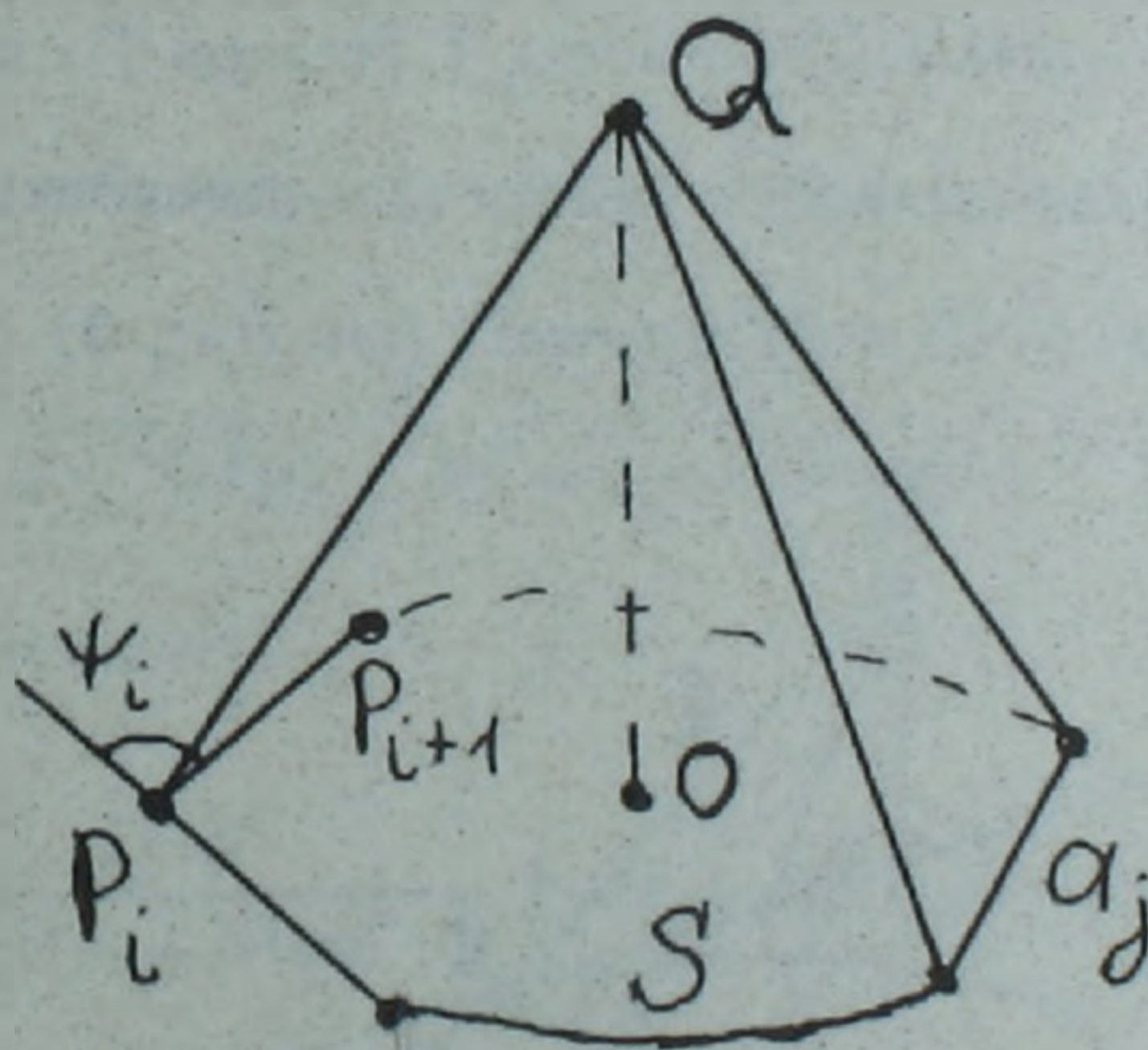


Рис. 2.

В (6) первое суммирование ведется по множеству (см. Рис. 2):

$$V_1 = \{w = (b_i, \Phi'_i) : b_i = QP_i - \text{боковое ребро пирамиды } T,$$

Φ'_i - внешний двугранный угол при $b_i\}$.

Второе суммирование ведется по множеству

$$V_2 = \{w = (a_j, \Phi''_j) : a_j = P_jP_{j+1} - \text{сторона основания},$$

Φ''_j - внутренний двугранный угол при $a_j\}$.

При исследовании правой части (6) нам предстоит переход в первой сумме к интегральному выражению для W . Обозначим через φ' угол между ребром P_i, P_{i+1} и следом на e_o плоскости флага. Перейдем от переменной φ к φ' :

$$W(w(b_i, \Phi'_i)) = \int_{b_i} dx \int_{\psi_i} \rho(x, \bar{b}_i, \varphi) J d\varphi',$$

где J - якобиан, ψ_i - внешний угол многоугольника S при вершине P_i . Вместе с Ψ рассмотрим предел функционала Ψ , определенный на множествах $Q|S$, где $S \subset e_o$ - уже выпуклая область с границей, обладающей гладкой кривизной. Этот предел определяет другой функционал Ψ' на вышеупомянутых множествах. Ψ' задается формулой

$$\Psi'(Q|S) = \int_{\partial S} J k(l) dl \int_{b(l)} \rho(x, \bar{b}, e_l(l)) dx - \int_{\partial S} dl \int_{\Phi(l)} \rho(l, t(l), \varphi) d\varphi, \quad (7)$$

где ∂S - граница S , l - переменная точка из ∂S , $b(l)$ - отрезок Ql , $k(l)$ - кривизна ∂S в точке l , флаговая плоскость $e_l(l)$ касается T (теперь T - конус) по образующей b , раствор $\Phi(l)$ есть двугранный угол между e_o и плоскостью, проходящей через вершину Q и касательную $t(l)$ к ∂S в точке l (см. Рис. 3).

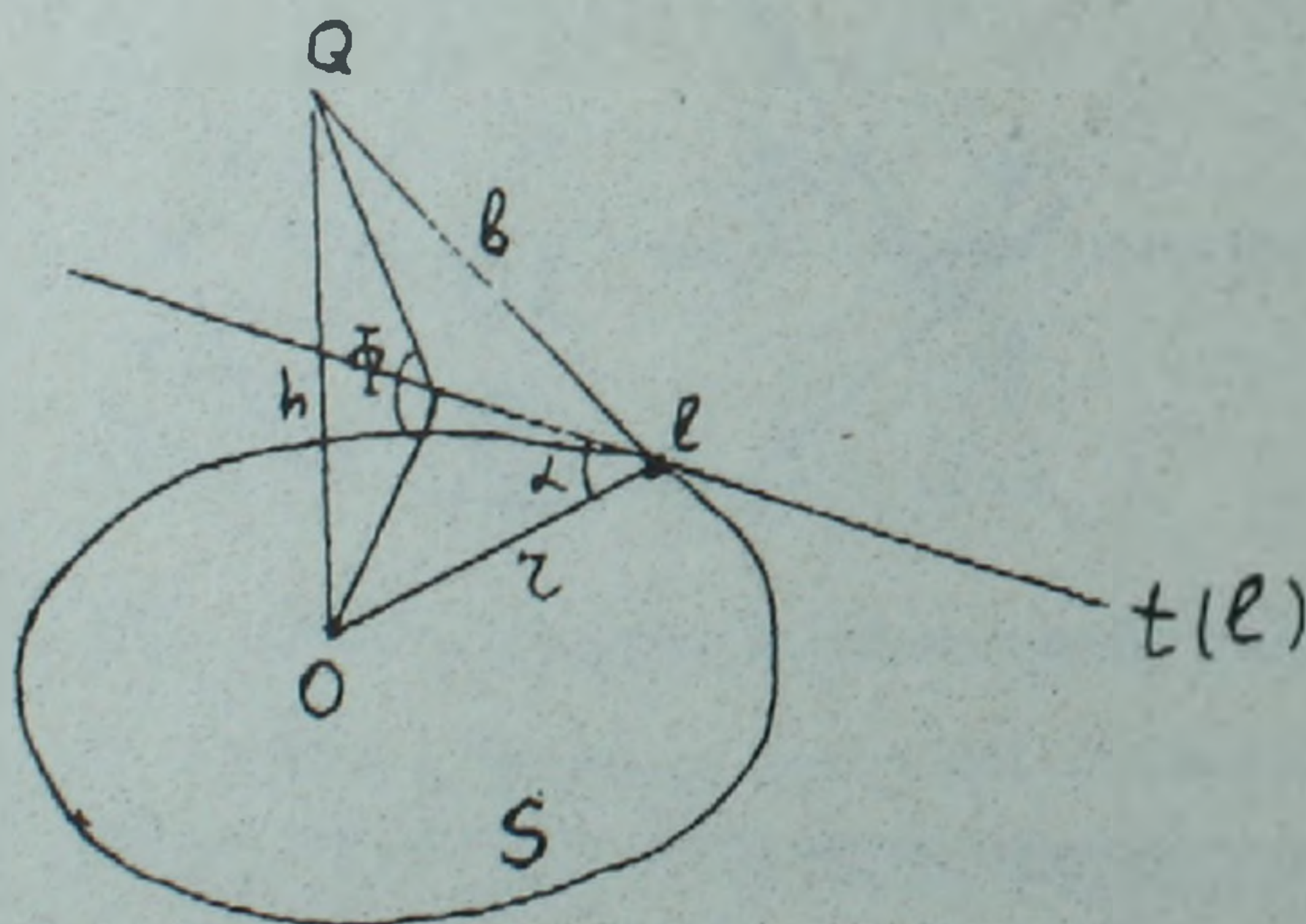


Рис. 3

На рис. 3 применены следующие обозначения: $r(l)$ - это радиус-вектор точки $l \in \partial S$, h - высота QO , α - угол между r и касательной $t(l)$. В этих обозначениях имеем (здесь и далее отрезки и их длины обозначены одинаково)

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{h}{r \sin \alpha}. \quad (8)$$

В (7) мы использовали соотношение $d\varphi' = k dl$. С помощью Рис.4 и известных формул сферической тригонометрии находим связь между углами φ и φ'

$$\operatorname{tg} \varphi = \cos \beta \operatorname{ctg}(\alpha + \varphi'), \quad \cos \beta = h/b.$$

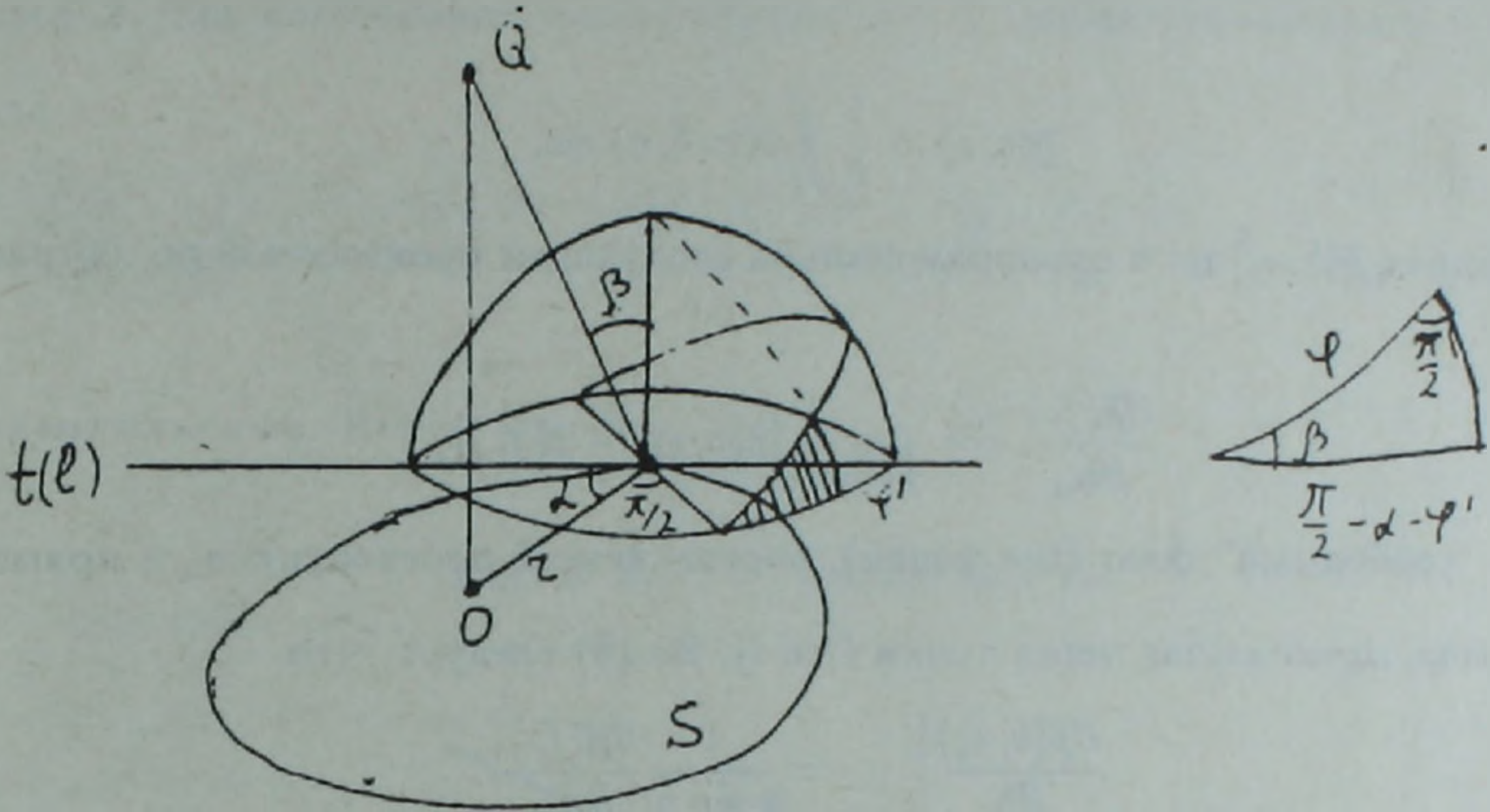


Рис. 4. Зависимость между φ и φ'

Вычислим значение якобиана J в точке $\varphi' = 0$:

$$J = \frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{\cos \beta}{\sin^2 \alpha} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{\cos \beta}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta \cos^2 \alpha} = \frac{bh}{b^2 \sin^2 \alpha + h^2 \cos^2 \alpha}.$$

Подставляя в (7), получаем

$$\Psi'(Q|S) = h \int_{\partial S} \frac{bk dl}{b^2 \sin^2 \alpha + h^2 \cos^2 \alpha} \int_b \rho(x, \bar{b}, e_i(l)) dx - \int_{\partial S} dl \int_0^\Phi \rho(l, t(l), \varphi) d\varphi. \quad (9)$$

Наша цель - получить разложение Тейлора для (9) при $h \downarrow 0$. Обозначим через $f_1(l)$ флаг $(l, t(l), e_o)$. Имеем

$$\rho(l, t(l), \varphi) = \rho(f_1) + \varphi \frac{\partial \rho(f_1)}{\partial \varphi} + \frac{\varphi^2}{2} \frac{\partial^2 \rho(f_1)}{\partial \varphi^2} + o(\varphi^2).$$

С помощью (8) получим

$$\begin{aligned} \int_0^\Phi \rho(l, t(l), \varphi) d\varphi &= \Phi \rho(f_1) + \frac{\Phi^2}{2} \frac{\partial \rho(f_1)}{\partial \varphi} + \frac{\Phi^3}{6} \frac{\partial^2 \rho(f_1)}{\partial \varphi^2} + o(\Phi^3) = \\ &= \frac{h \rho(f_1)}{r \sin \alpha} + \frac{h^2}{2} (r \sin \alpha)^{-2} \frac{\partial \rho(f_1)}{\partial \varphi} + \frac{h^3}{6} (r \sin \alpha)^{-3} \left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2}(f_1) - 2\rho(f_1) \right] + o(h^3). \quad (10) \end{aligned}$$

Заметим, что $b^2 = h^2 + r^2$ и величины r и α не зависят от h . Следовательно

$$\frac{b^2}{b^2 \sin^2 \alpha + h^2 \cos^2 \alpha} = \frac{\sin^{-2} \alpha}{1 + \frac{h^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{h^2 + r^2}} = \sin^{-2} \alpha \left(1 - \frac{h^2}{r^2} \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) + o(h^3). \quad (11)$$

Через $\bar{\rho}(b, e)$ обозначим интегральное среднее значение плотности ρ на отрезке b :

$$\bar{\rho}(b, e) = \frac{1}{b} \int_b \rho(x, \bar{b}, e) dx.$$

Производная $\bar{\rho}(b, e_i)$ по h пропорциональна следующей производной по направлению:

$$\frac{\partial \bar{\rho}(f_r)}{\partial n_\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Phi \rightarrow 0} \frac{1}{\Phi} [\bar{\rho}(b, e_i) - \bar{\rho}(f_r)],$$

где f_r - "свободный" флаг (без точки), определяемый плоскостью e_0 и прямой $\bar{r}$ ($\bar{r}$ - прямая, проходящая через точки O и I). Из (8) следует, что

$$\left. \frac{\partial \bar{\rho}(b, e_i)}{\partial h} \right|_{h=0} = \frac{1}{r \sin \alpha} \frac{\partial \bar{\rho}(f_r)}{\partial n_\alpha}.$$

Заметим, что при $\alpha = 0$ имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial n_0} = \frac{\partial \rho}{\partial \varphi}. \quad (12)$$

Для плотности $\bar{\rho}$ имеет место следующее разложение:

$$\bar{\rho}(b, e_i) = \bar{\rho}(f_r) + \frac{h}{r \sin \alpha} \frac{\partial \bar{\rho}(f_r)}{\partial n_\alpha} + \frac{h^2}{2r^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 \bar{\rho}(f_r)}{\partial n_\alpha^2} + o(h^2). \quad (13)$$

Подставляя выражения (10), (11) и (13) в (9), получаем следующий результат

Лемма 1. Для любой выпуклой области S с границей ∂S , имеющей гладкую кривизну k и для достаточно гладкой флаговой плотности ρ имеет место следующее разложение:

$$\Psi'(Q|S) = A'_1(\rho, S)h + A'_2(\rho, S)h^2 + A'_3(\rho, S)h^3 + o(h^3), \quad (14)$$

где

$$A'_1(\rho, S) = \int_{\partial S} \left[\frac{k \bar{\rho}(f_r)}{\sin^2 \alpha} - \frac{\rho(f_i)}{r \sin \alpha} \right] dl, \quad (15)$$

$$A'_2(\rho, S) = \int_{\partial S} \left[\frac{k}{r \sin^3 \alpha} \frac{\partial \bar{\rho}(f_r)}{\partial n_\alpha} - \frac{1}{2r^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial \rho(f_i)}{\partial \varphi} \right] dl, \quad (16)$$

$$A'_3(\rho, S) = \int_{\partial S} \left\{ \frac{k}{2r^2 \sin^4 \alpha} \left[\frac{\partial^2 \bar{\rho}(f_r)}{\partial n_\alpha^2} - 2 \cos^2 \alpha \bar{\rho}(f_r) \right] - \frac{1}{6r^3 \sin^3 \alpha} \left[\frac{\partial^2 \rho(f_i)}{\partial \varphi^2} - 2\rho(f_i) \right] \right\} dl. \quad (17)$$

Пример. Рассмотрим в $\mathbb{E}$ (неотрицательную) меру μ_0 , инвариантную относительно группы евклидовых движений пространства $\mathbb{R}^3$. Инвариантной мере μ_0 соответствует флаговая плотность $\rho(x, \gamma, e) = c = \text{const}$, см. [3, 6].

Лемма 2. Для постоянной плотности $\rho = c$ и для любой области S имеет место

$$A'_1(c, S) = A'_2(c, S) = 0, \quad A'_3(c, S) \geq 0.$$

Доказательство. Имеем (см. Рис. 5) :

$$k \, dl = d\varphi', \quad \sin \alpha \, dl = r \, d\psi.$$

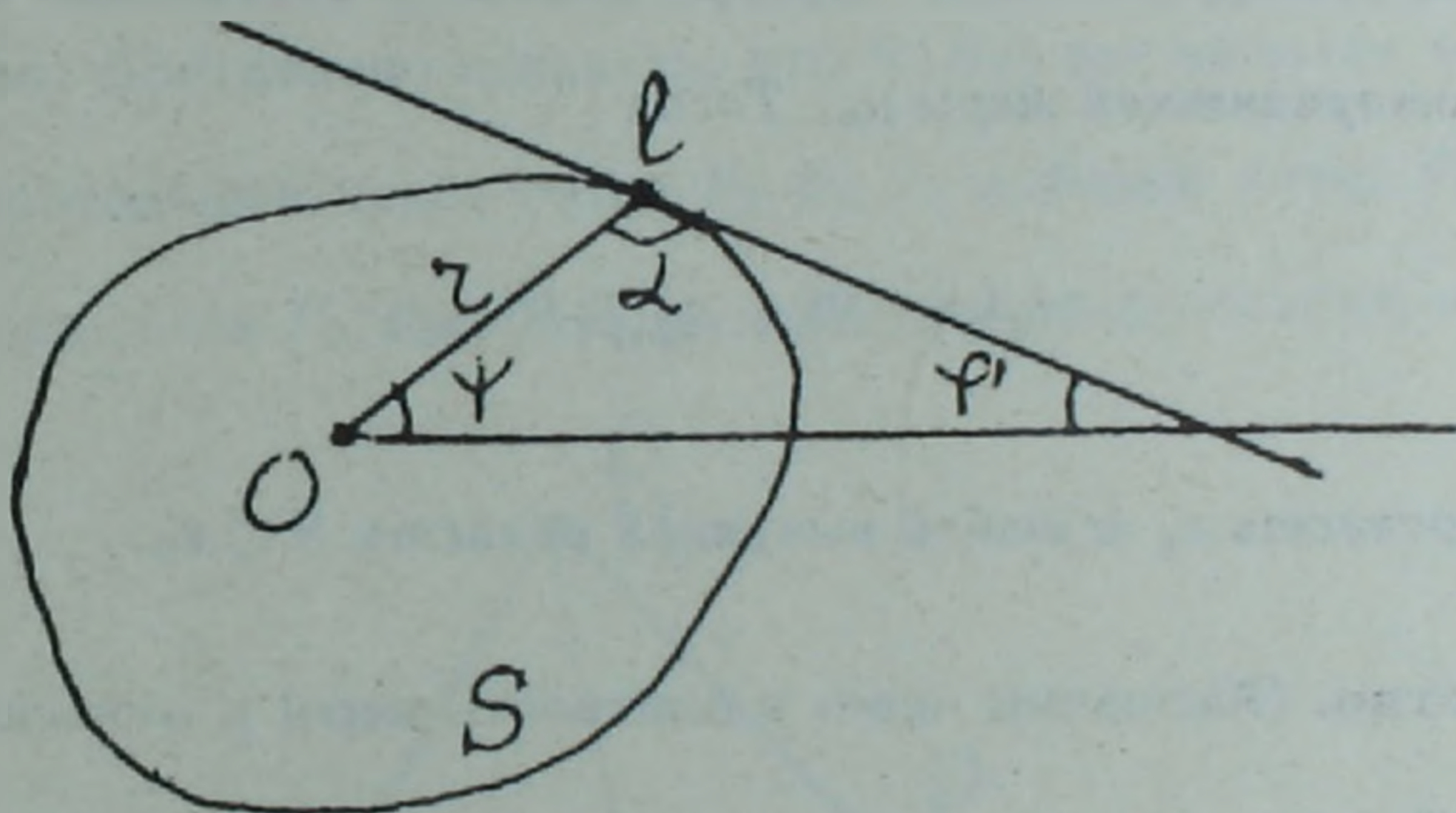


Рис. 5.

Отсюда получаем другой вид формулы (15) :

$$A'_1(\rho, S) = \int_0^{2\pi} \bar{\rho}(f_r) \sin^{-2} \alpha \, d\varphi' - \int_0^{2\pi} \rho(f_l) \sin^{-2} \alpha \, d\psi. \quad (18)$$

В случае $\rho(x, \gamma, e) = c = \text{const}$ имеем $\bar{\rho} = c$. Из (18) и (16) следует $A'_1 = A'_2 = 0$.

Применяя Лемму 1, получаем

$$\mu_0(Q|S) = A'_3(c, S)h^3 + o(h^3).$$

Однако, инвариантная мера μ_0 неотрицательна, следовательно, $A'_3(c, S) \geq 0$.

Лемма 2 доказана.

§3. ПОРОЖДЕНИЕ МЕР ПОСРЕДСТВОМ ФУНКЦИОНАЛА Ψ

Лемма 3. Для любого выпуклого многоугольника $S \subset e_o$ имеет место

$$\Psi(Q|S) = A_1(\rho, S)h + A_2(\rho, S)h^2 + A_3(\rho, S)h^3 + o(h^3).$$

Значения A_i можно получить из значений A'_i формальной подстановкой в (15) - (17) вместо кривизны k соответствующих комбинаций δ -функций.

Доказательство получается прямым вычислением, с фактическим повторением доказательства Леммы 1.

Предложение 1. Пусть флаговая функция ρ служит флаговой плотностью для некоторой знакопеременной меры μ , причем μ абсолютно непрерывна относительно инвариантной меры μ_o . Тогда

$$A_1(\rho, S) = A_2(\rho, S) = 0 \quad (19)$$

для любой плоскости e_o и любой выпуклой области $S \subset e_o$.

Доказательство. Обозначим через v плотность меры μ относительно инвариантной меры μ_o :

$$\mu(de) = v(e) \mu_o(de).$$

Так как множество плоскостей $Q|S$ при $h \downarrow 0$ стремится к $\{e_o\}$, плотность $v(e)$ можно вычислить по формуле

$$v(e_o) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu(Q|S)}{\mu_o(Q|S)}. \quad (20)$$

Из (2) и Лемм 1, 3 следует, что

$$\mu(Q|S) = A_1(\rho, S)h + A_2(\rho, S)h^2 + A_3(\rho, S)h^3 + o(h^3). \quad (21)$$

Согласно Лемме 2, знаменатель в (20) имеет порядок h^3 . Следовательно, тот же порядок имеет и числитель. Из разложения (21) следует искомое равенство (19).

Предложение доказано.

Для доказательства того, что соотношение (18) является достаточным условием, необходимо напомнить некоторые сведения из комбинаторной интегральной геометрии [2, 3, 6]. Обозначим через $\{P_i\}|\{P'_j\}$ множество плоскостей, разделяющих точки множеств $\{P_i\}$ и $\{P'_j\}$. Известно, см. [2], что значения функционала Ψ на множествах $H_1 = P_1 | P_2, P_3, P_4$ и $H_2 = P_1, P_2 | P_3, P_4$ определяют значения Ψ на всем $\mathcal{R}$. Любое $B \in \mathcal{R}$ можно представить в виде $B = \sum B_i$, где B_i - непересекающиеся множества вида H_1 или H_2 , причем мы можем взять B_i бесконечно малыми (так называемый "принцип триангуляции", см. [2]).

Лемма 4. Функционал Ψ на $\mathcal{R}$ полностью определяется заданием значений Ψ на множествах $Q|S$, где S - треугольник либо плоский, выпуклый четырехугольник.

Доказательство. Достаточно показать, что $\Psi(H_2)$ выражается через $\Psi(Q|S)$. На плоскости, проходящей через точки P_2, P_3, P_4 выберем точку P_5 так, чтобы выпуклая оболочка точек P_2, P_3, P_4, P_5 являлась четырехугольником (см. Рис. 6).

Имеем

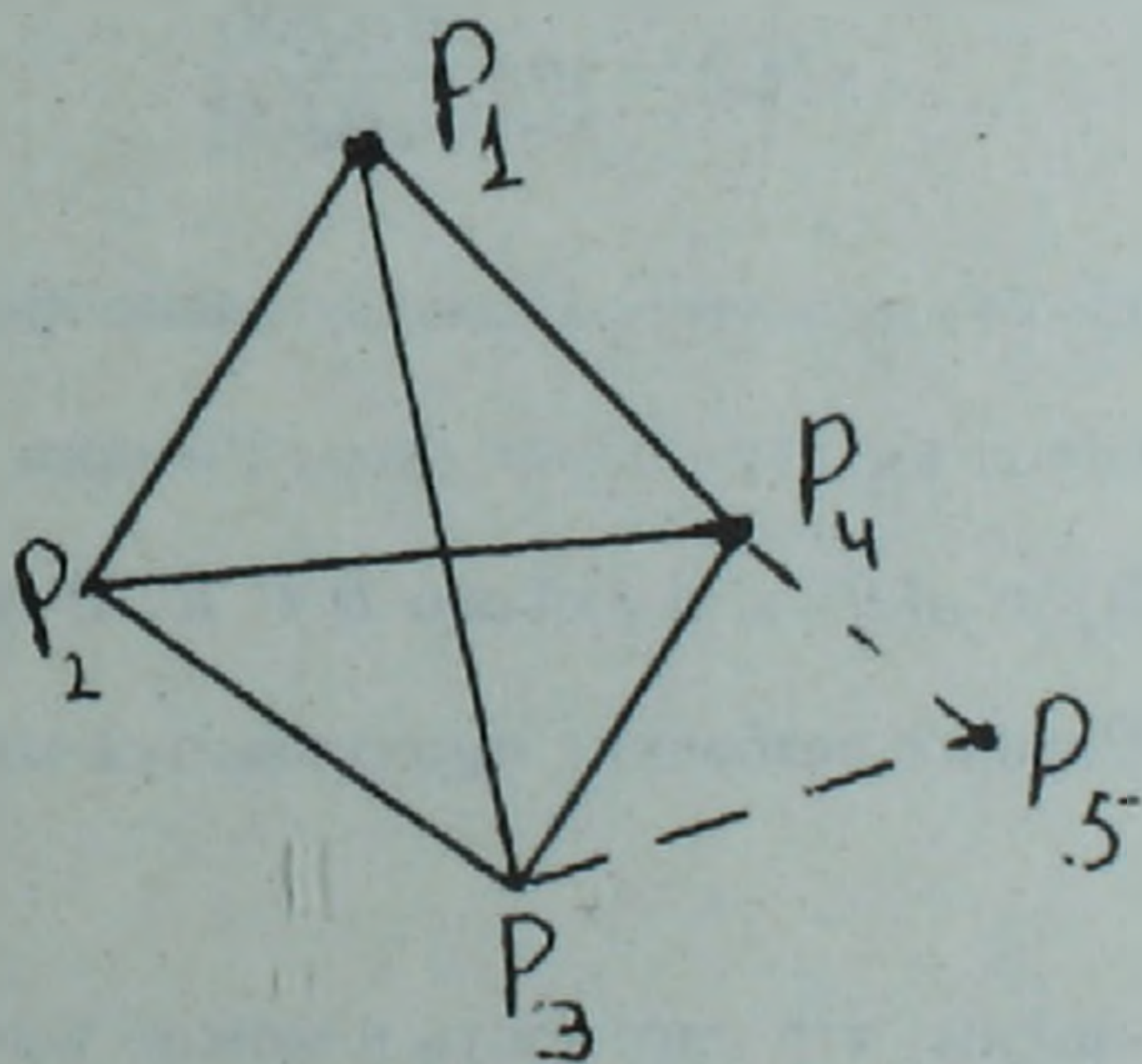


Рис. 6.

$$P_1 | P_3, P_4, P_5 = P_1, P_2 | P_3, P_4, P_5 \oplus P_1 | P_2, P_3, P_4, P_5,$$

здесь $\oplus$ означает объединение непересекающихся множеств. Но $P_1, P_2 | P_3, P_4$,

$P_5 = P_1, P_2 | P_3, P_4$, следовательно

$$\Psi(H_2) = \Psi(P_1 | P_3, P_4, P_5) - \Psi(P_1 | P_2, P_3, P_4, P_5). \quad (22)$$

Лемма 4 доказана.

Теорема 1. *Достаточно гладкая флаговая функция ρ является флаговой плотностью для некоторой знакопеременной меры μ , абсолютно непрерывной относительно инвариантной меры μ_0 тогда и только тогда, когда*

$$A_1(\rho, S) = A_2(\rho, S) = 0 \quad (23)$$

для любой плоскости e_0 и любой выпуклой области $S \subset e_0$.

При этом если $A_3(\rho, S) \geq 0$, то мера μ неотрицательна.

Доказательство. Необходимость доказана в Предложении 1.

Достаточность : Для заданной гладкой флаговой функции ρ , удовлетворяющей условию (23), построим функционал Ψ . Из (23) и Леммы 3 для любой плоскости e_0 получим

$$\Psi(Q|S) = A_3(\rho, S)h^3 + o(h^3).$$

Следовательно, существует предел

$$v(e_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Psi(Q|S)}{\mu_0(Q|S)}$$

Рассмотрим меру μ , плотность которой относительно инвариантной меры μ_0 есть v . Тогда, используя метод интегральных сумм Римана, который применен в [4], [5], докажем, что $\Psi(B) = \mu(B)$ для любого $B \in \mathcal{R}$. В силу (22) при построении интегральных сумм Римана разбиение производится множествами вида H_1 или H_2 .

В заключение заметим, что плотность v можно вычислить по формуле

$$v(e_0) = A_3(\rho, S) \cdot A_3^{-1}(c, S). \quad (24)$$

Из Леммы 2 имеем $A_3(c, S) \geq 0$, а из (24) следует, что неравенство $A_3(\rho, S) \geq 0$ является достаточным условием для неотрицательности меры μ . Теорема 1 доказана.

ABSTRACT. In the paper we consider the problems of signed measure generation in the space $\mathbb{E}$ of planes in $\mathbb{R}^3$ by means of flag functions using an algorithm from combinatorial integral geometry. We find conditions which guarantee, that a flag function generates a signed measure on $\mathbb{E}$.

We find also some additional conditions on flag function which imply that actually we have a non-negative measure.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Погорелов, Четвертая Проблема Гильберта, М. Наука, 1976.
2. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology. John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
3. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
4. Р. В. Амбарцумян, "Заметки о порождении мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$ " Изв. АН Армении, Математика, том 27, №5, стр. 1 – 21, 1992.
5. R. V. Ambartzumian, "Planar measure generation by Euler functionals", Submitted to Journal of Applied Probability.
6. Р. В. Амбарцумян, И. Мекке, Д. Штойян, Введение в Стохастическую Геометрию, М., Наука, 1989.

21 Апреля 1993

Институт математики
НАН Армении

ФЛАГ-ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ, ПОЛУЧАЕМОЕ ПРИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЕЛОНЕ

Р. Г. Арамян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №2, 1993

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе Р.В. Амбарцумяна [1] было указано на существование так называемых *флаг-представлений* функций ширины выпуклых тел в $\mathbb{R}^3$.

Флаг - это пара $f = f(g, e)$, где g - прямая, содержащая O , а e - плоскость, содержащая g . Мы представим $f = f(\Omega, \phi)$, где Ω - пространственное направление g в $\mathbb{R}^3$, ϕ - вращение e вокруг g .

Пусть $H(\xi)$ - ширина некоторого выпуклого тела K в направлении ξ . Тогда [1]

$$H(\xi) = \int_{S^1 \times S^2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega, \phi) m(d\Omega, d\phi), \quad (1)$$

где S^i - единичная сфера в $\mathbb{R}^{i+1}$, $i = 1, 2$, $\Omega, \xi \in S^2$, m - некоторая мера на $S^1 \times S^2$, α - угол между $\Omega \in S^2$ следом $e_\xi \cap e(\Omega, \phi)$, e_ξ - плоскость с нормалью ξ , и $e(\Omega, \phi)$ - плоскость флага $f(\Omega, \phi)$. Представление (1) неединственно (для данного H существует много мер m). В [2] было получено некоторое (дискретное) флаг-представление для гладких выпуклых тел, при этом использовалась аппроксимация многогранниками. В [3] было получено другое (непрерывное) флаг-представление для гладких выпуклых тел с помощью стохастической аппроксимации (аппроксимации Вороного) многогранниками, натянутыми на точки независимо сброшенные на поверхность тела.

В настоящей работе находится флаг-представление, получаемое с помощью другой стохастической аппроксимации (Делоне) выпуклых тел. А именно, на выпуклое тело K независимо друг от друга бросается n точек с одним и тем

же распределением P . Рассматривается случайный многогранник, ограниченный касательными плоскостями к ∂K в этих точках, выписывается стандартное флаг-представление для этого многогранника. Затем усредняется это представление относительно $P \times \dots \times P$ и рассматривается предельное представление при $n \rightarrow \infty$. Доказывается, что предел есть флаг-представление для K и что этот предел не зависит от P (для класса распределений). Найдена плотность этого представления в терминах кривизны поверхности ∂K , которая совпадает с плотностью представления, полученного при стохастической аппроксимации Вороного (см. [3]).

2. АППРОКСИМАЦИЯ ДЕЛОНЕ

Пусть K - достаточно гладкое (трижды непрерывно дифференцируемое) выпуклое тело в $\mathbb{R}^3$. Предположим, что во всех точках ∂K гауссова кривизна положительна. Тогда отображение Гаусса поверхности ∂K на единичную сферу S^2 является гомеоморфизмом.

На S^2 независимо друг от друга бросим n точек $P_1, \dots, P_n$ с одним и тем же распределением P . Пусть $dP = f(\omega)d\omega$, где плотность $f(\omega) > 0$ непрерывна, $d\omega$ - элемент лебеговой меры на S^2 . Через $P_1^*, \dots, P_n^*$ обозначим образы точек $P_1, \dots, P_n$ при отображении, обратном отображению Гаусса. Обозначим через $L_{P_i^*}$ замкнутое полупространство, ограниченное касательной плоскостью к поверхности ∂K в точке P_i^* , которое содержит тело K (см. Рис. 1).

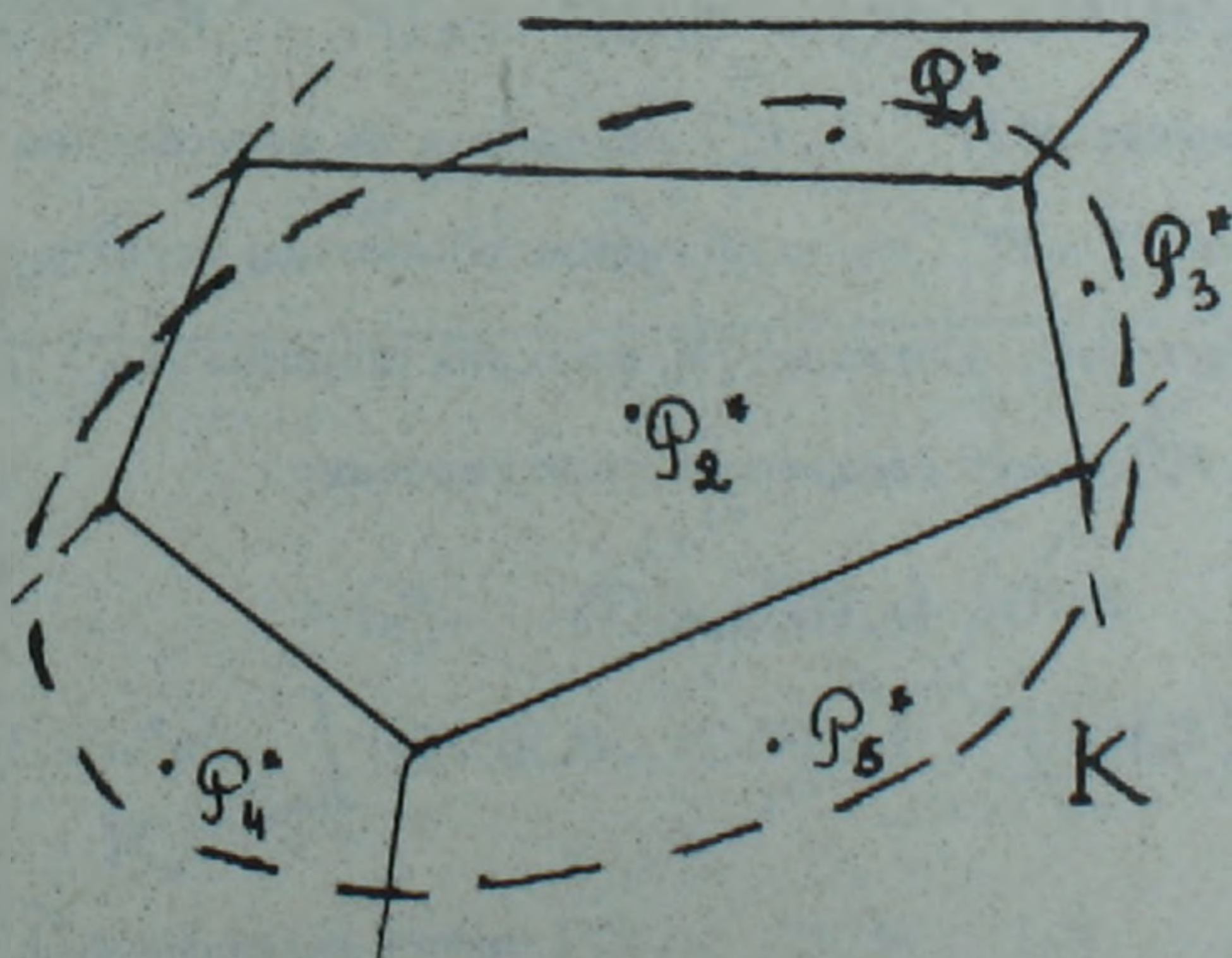


Рис. 1.

Здесь возникают следующие трудности :

1. $P^n(\{(P_1, \dots, P_n) : \cap_{i=1}^n L_{P_i^*} \text{ неограничено}\}) > 0$ для всех n , где $P^n = P \times \dots \times P$.
2. Условное среднее функции ширины $\cap_{i=1}^n L_{P_i^*}$ при условии, что $\{\cap_{i=1}^n L_{P_i^*} \text{ есть многогранник}\}$, бесконечно.

Нам необходима следующая лемма. Обозначим через

$$\Pi_F = \{(P_1, \dots, P_n) : \cap_{i=1}^n L_{P_i^*} \subset F\},$$

где F - выпуклое тело, содержащее K .

Лемма 1. Для любого n существуют целое число k и $0 < p_0 < 1$ такие, что

$$P^n(\Pi_F^c) \leq p_0^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor},$$

где $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ - целая часть $\frac{n}{k}$, Π_F^c - дополнение Π_F .

Пусть $M\{P_1^*, \dots, P_n^*\} = \cap_{i=1}^n L_{P_i^*}$.

Лемма 2. Пусть $H(\xi)$ - функция ширины выпуклого тела K , а $H_{P_1, \dots, P_n}(\xi)$ - функция ширины многогранника $M\{P_1^*, \dots, P_n^*\}$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int H_{P_1, \dots, P_n}(\xi) I_{\Pi_{B(r)}}(P_1, \dots, P_n) dP_1 \dots dP_n = H(\xi),$$

где $B(r)$ - шар с радиусом r , содержащий тело K .

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Рассмотрим $M\{P_1^*, \dots, P_n^*\} = \cap_{i=1}^n L_{P_i^*}$ при $(P_1, \dots, P_n) \in \Pi_{B(r)}$. Каждое ребро многогранника $M\{P_1^*, \dots, P_n^*\}$ находится на пересечении двух касательных плоскостей к P_i^* и P_j^* . Это пересечение обозначим через g_{ij} , а соответствующее ребро - через $Q_i Q_j$. Согласно [1], функция ширины $H_{P_1, \dots, P_n}(\xi)$ многогранника $M\{P_1^*, \dots, P_n^*\}$ имеет следующее представление :

$$\begin{aligned} & 2\pi H_{P_1, \dots, P_n}(\xi) I_{\Pi_{B(r)}}(P_1, \dots, P_n) = \\ & = I_{\Pi_{B(r)}}(P_1, \dots, P_n) \sum_{i < j}^n I_{D_{ij}}(P_1, \dots, P_n) |Q_i Q_j| \int_{[\nu_{ij}]} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{ij}, \phi) d\phi, \end{aligned} \quad (2)$$

где $D_{ij} = \{(P_1, \dots, P_n) : M\{P_1^*, \dots, P_n^*\} \text{ имеет ребро на } g_{ij}\}$, $|Q_i Q_j|$ - длина ребра $Q_i Q_j$, $[\nu_{ij}]$ - внешний двугранный угол $Q_i Q_j$, Ω_{ij} - направление g_{ij} .

Усредним обе части (2). Из соображения симметрии

$$2\pi H(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{2} \int_{(S^2)^n} [I_{D_{12}} \cdot I_{\Pi_{B(r)}} \cdot |Q_1 Q_2| \times \\ \times \int_{[\nu_{12}]} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{12}, \phi) d\phi] dP_1 \dots dP_n. \quad (3)$$

Возьмем P_1 в качестве полюса и запишем P_2 в (φ, ν) -координатах :

$$dP_2 = f(\omega) d\omega = f(\varphi, \nu) \sin \nu d\nu d\varphi.$$

Следовательно, получаем

$$2\pi H(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{2} \int_{S^2 \times S^1} \left[\int_{[\nu]} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega, \phi) d\phi \right] \cdot \left[\int_{(S^2)^{n-2}} I_{D_{12}} \cdot I_{\Pi_{B(r)}} \times \right. \\ \left. \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} I_{Q_1 Q_2}(l) dl \right] dP_3 \dots dP_n \right] dP_1 f(\varphi, \nu) \sin \nu d\nu d\varphi, \quad (4)$$

где $[\nu] = [\nu_{12}]$, $\Omega = \Omega_{12}$, l - расстояние от точки на g_{12} до проекции P_1^* .

4. СЛУЧАЙ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим случай равномерного распределения, т.е. $f(\omega) = (S_0 C(\omega))^{-1}$, где S_0 - полная площадь поверхности K , $C(\omega)$ - гауссова кривизна в точке P_ω^* на ∂K с нормалью ω . Рассмотрим конус $C(K, l)$ с вершиной в точке $l \in g_{12}$, который касается ∂K (см. Рис. 2).

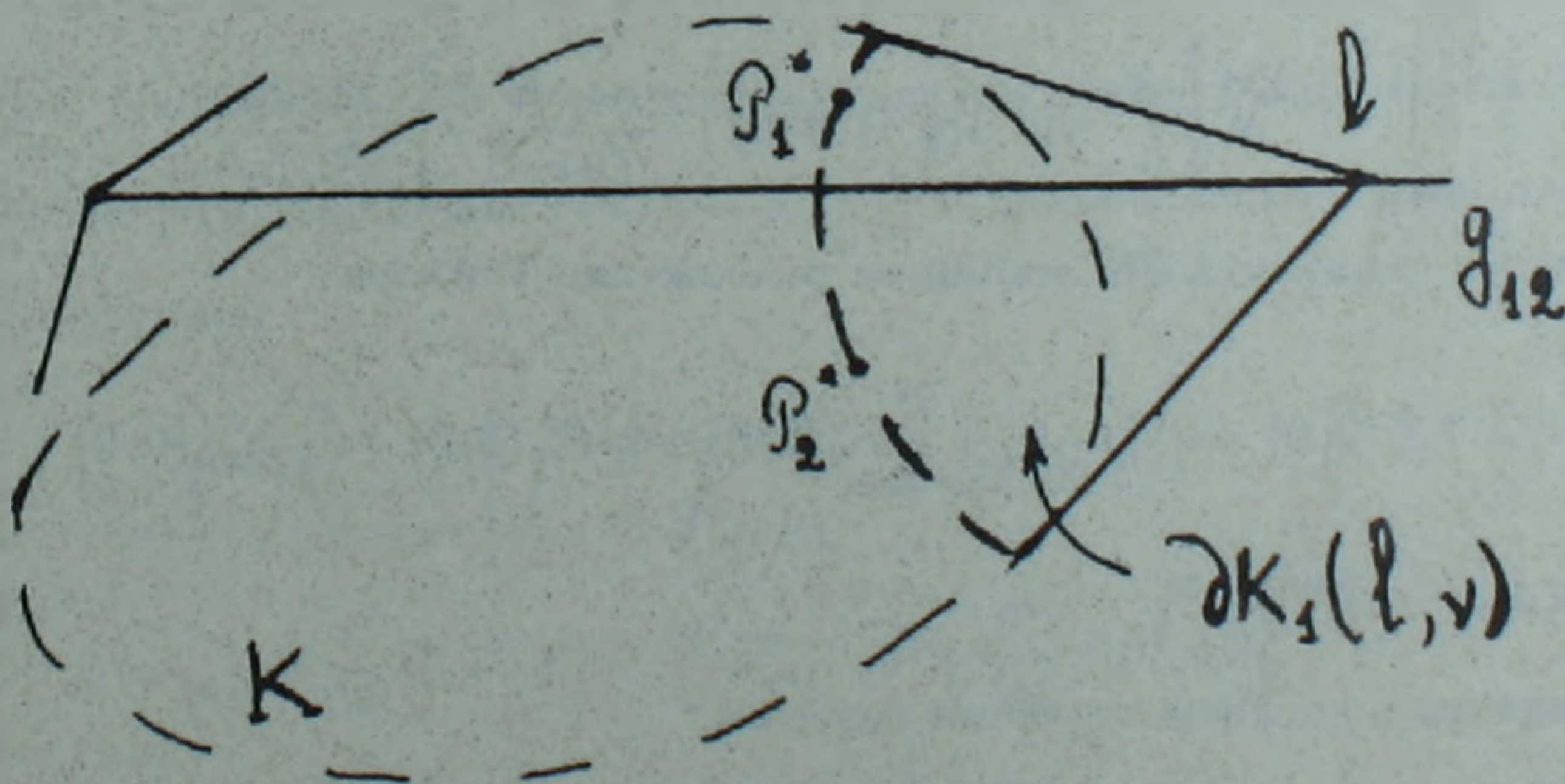


Рис. 2.

Касательная кривая разбивает ∂K на две части. Пусть $S(l, \nu)$ - площадь части $\partial K_1(l, \nu)$ (см. Рис. 2). Применяя теорему Фубини во внутреннем интеграле (4), получаем

$$2\pi H(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{2} \int_{S^2 \times S^1 \times [0, \frac{\pi}{2}]} \left[\int_{[\nu]} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega, \phi) d\phi \right] \times \\ \times \left[\int_{-R(\nu, l)}^{R(\nu, l)} \left(1 - \frac{S(\nu, l)}{S_0}\right)^{n-2} dl \right] \frac{\sin \nu}{S_0^2 C(\omega) C(\nu, \varphi)} d\omega d\nu d\varphi, \quad (5)$$

где $C(\nu, \varphi)$ - гауссова кривизна в точке со сферическими координатами (ν, φ) , соответствующая ω , $R(\nu, l) \leq R$.

Заметим, что (ν, l) можно рассматривать только в $[0, \nu_0] \times [-l_0, l_0]$, где ν_0 и l_0 - сколь угодно малые фиксированные числа. В самом деле, существует $q > 0$ такое, что

$$1 > S_0^{-1} S(\nu, l) > q > 0$$

для всех $(\nu, l) \notin [0, \nu_0] \times [-l_0, l_0]$. Следовательно, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{2} \left| \int_{S^2 \times S^1} \left[\int_{([0, \nu_0] \times [-l_0, l_0])^c} \left(1 - \frac{S(\nu, l)}{S_0}\right)^{n-2} \left[\int_{[\nu]} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega, \phi) d\phi \right] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\sin \nu d\nu dl}{C(\nu, l)} \right] \frac{d\omega d\varphi}{S_0^2 C(\omega)} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{2} A_0 (1 - q)^{n-2} = 0.$$

Таким образом, получаем

$$2\pi H(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{2} \int_{S^2 \times S^1} \left[\int_{[0, \nu_0] \times [-l_0, l_0]} \left(1 - \frac{S(\nu, l)}{S_0}\right)^{n-2} \times \right. \\ \left. \times \left[\int_{[\nu]} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega, \phi) d\phi \right] \frac{\sin \nu d\nu dl}{C(\nu, l)} \right] \frac{d\omega d\varphi}{S_0^2 C(\omega)}. \quad (6)$$

Используя гладкость ∂K , напомним разложение Тейлора

$$S(\nu, l) = l S'_l(0, 0) + \nu S'_\nu(0, 0) + \frac{l^2}{2} S''_{ll}(0, 0) + l\nu S''_{l\nu}(0, 0) + \frac{\nu^2}{2} S''_{\nu\nu}(0, 0) + R(\nu, l), \quad (7)$$

где $R(\nu, l) = o(l^2 + \nu^2)$.

Из теоремы о среднем значении находим

$$\int_{[\nu]} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega, \phi) d\phi = |\nu| \sin^2 \alpha(\xi, \Omega, \phi_\nu), \quad (\phi_\nu \in [\nu]) \quad (8)$$

После подстановки (7) и (8) в (6) и замены переменных $\alpha = \nu\sqrt{n}$, $\beta = l\sqrt{n}$, получаем

$$H(\xi) = (2\pi)^{-1} \int_{S^2 \times S^1} \frac{\sin^2 \alpha(\xi, \omega, \varphi + \frac{\pi}{2})}{2C^2(\omega)} \times \\ \times \left[\int_0^\infty \alpha^2 d\alpha \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2} S''_{\nu\nu}(0,0) - \alpha\beta S''_{\nu l}(0,0) - \frac{\beta^2}{2} S''_{ll}(0,0)} d\beta \right] d\omega d\varphi, \quad (9)$$

где $\alpha(\xi, \omega, \varphi)$ - угол между направлением φ на e_ω (плоскость с нормалью ω) и следом e_ξ на e_ω .

5. СЛУЧАЙ ОБЩЕГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Теорема 1. Флаг-представление функции ширины $H(\xi)$ гладкого тела K , полученное при стохастической аппроксимации Делоне не зависит от плотности распределения P .

Доказательство. Из (4) и теоремы Фубини следует, что

$$2\pi H(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{2} \int_{S^2 \times S^1} \left[\int_{(0,\pi) \times \mathbb{R}^1} \left[\int_{[\nu]} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega, \phi) d\phi \right] \times \right. \\ \left. \times (1 - P(\nu, l))^{n-2} f(\varphi, \nu) \sin \nu d\nu dl \right] f(\omega) d\omega d\varphi, \quad (10)$$

где $\Omega = \Omega_{12}$, $[\nu] = [\nu_{12}]$, $P(\nu, l) = P(\{P^* \in \partial K_1(\nu, l)\})$ (см. Рис. 2).

Мы можем рассматривать переменные (ν, l) в $[0, \nu_0] \times [-l_0, l_0]$, где ν_0 и l_0 сколь угодно малы.

Из теоремы о среднем значении следует, что

$$P(\nu, l) = S(\nu, l) f_1(\omega_{\nu, l}), \quad (11)$$

где $f_1(\omega) = f(\omega)C(\omega)$, $\omega_{\nu, l}$ - точка на сферическом образе $\partial K_1(\nu, l)$ (см. Рис. 2).

После соответствующей подстановки в (10) и замены переменных $\alpha = \nu\sqrt{n}$, $\beta = l\sqrt{n}$, получаем

$$2\pi H(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{2} \int_{S^2 \times S^1} \left[\int_0^{\nu_0\sqrt{n}} \int_{-l_0\sqrt{n}}^{l_0\sqrt{n}} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega, \phi) \times \right. \\ \times \left[1 - f_1(\omega_{\nu_n, l_n}) \left(\frac{\alpha^2}{2n} S''_{\nu\nu}(0,0) + \frac{\alpha\beta}{n} S''_{\nu l}(0,0) + \frac{\beta^2}{2n} S''_{ll}(0,0) \right) \right]^{n-2} \times \\ \left. \times \frac{\alpha(\alpha + o(n^{-\frac{1}{2}})\sqrt{n})}{n^2 C(\varphi, \frac{\alpha}{\sqrt{n}})} f_1(\varphi, \frac{\alpha}{\sqrt{n}}) d\alpha d\beta \right] \frac{f_1(\omega)}{C(\omega)} d\omega d\varphi, \quad (12)$$

где $\nu_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}$, $l_n = \frac{\beta}{\sqrt{n}}$.

Меняя порядок интегрирования и суммирования, а также учитывая, что

$$f_1(\omega_{\nu_n, l_n}) \rightarrow f_1(\omega)$$

при $n \rightarrow \infty$, получаем (9).

6. ПЛОТНОСТЬ ФЛАГ-ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Нам необходима следующая

Лемма 3. $S'_\nu(0,0)$, $S'_l(0,0)$, $S''_{ll}(0,0)$, $S''_{l\nu}(0,0)$, $S''_{\nu\nu}(0,0)$ зависят только от значений производных первого и второго порядков поверхности ∂K в точке P_ω^* с нормалью ω .

Следовательно, соответствующие производные можем вычислить для соприкасающегося параболоида ∂K в точке P_ω^* с нормалью ω .

После соответствующих вычислений и подстановки в (9) получаем следующую теорему.

Теорема 2. Для любого достаточно гладкого выпуклого тела K имеет место следующее флаг-представление :

$$H(\xi) = (2\pi^2)^{-1} \int_{S^2 \times S^1} \sin^2 \alpha(\xi, \omega, \varphi) \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{k^2(\omega, \varphi)} d\omega d\varphi, \quad (13)$$

где k_i , $i = 1, 2$ - главные нормали кривизны, $k(\omega, \varphi)$ - нормальная кривизна в направлении φ в точке P_ω^* поверхности ∂K с нормалью ω .

Замечание. Флаг-представление (13) совпадает с флаг-представлением, полученным при стохастической аппроксимации Вороного (см. [3]).

Автор выражает благодарность Р. В. Амбарцумяну за постановку задачи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, "Combinatorial integral geometry, metric and zonoids", Acta Appl. Math., vol. 9, 1987.
2. Г. Ю. Панина, "Выпуклые тела и трансляционно-инвариантные меры", Зап. науч. семинаров Ленинград. отд. Матем. ин-та АН СССР, том 157, 1986.
3. Р. Г. Арамян, "О стохастической аппроксимации выпуклых тел", Изв. АН Армении, Математика, том 22, №5, стр. 427 - 438, 1986.

23 Ноября 1992

Институт математики
НАН Армении

ЗАМЕЧАНИЕ О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ ТЕПЛИЦЕВА ТИПА ОТ СТАЦИОНАРНЫХ ГАУССОВСКИХ ВЕЛИЧИН

М. С. Гиновян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, №2, 1993

1. Пусть $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \dots$ - стационарная гауссовская последовательность с нулевым средним и спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, $f(-\lambda) = f(\lambda)$.

Рассмотрим вопрос применимости Центральной Предельной Теоремы для следующих квадратичных форм теплицева типа :

$$L_n = \sum_{k,j=1}^n a_{k-j} X(k)X(j), \quad (1)$$

где

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} g(\lambda) d\lambda, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

- коэффициенты Фурье некоторой вещественной, четной, интегрируемой функции $g(\lambda)$ на $[-\pi, \pi]$, которую назовем порождающей для квадратичной формы L_n .

Эта проблема впервые была изучена Гренандером и Сеге [6] в качестве применения их теории об асимптотическом поведении следа произведения теплицевых матриц.

В последнее время снова возник интерес к этой проблеме (см. [1]-[5], [7]). В частности, результаты Аврама [1], Фокса и Таку [2] можно объединить в следующую теорему.

Теорема А. *Предположим, что выполнено одно из условий Q1), Q2) :*

$$Q1) \quad f(x) \in L_{p_1}, \quad g(x) \in L_{p_2}, \quad \text{где } p_1, p_2 \geq 1 \text{ и } \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{2}.$$

$$Q2) \quad f(x) < c|x|^{-\alpha}, \quad |g(x)| < c|x|^{-\beta}, \quad \text{где } \alpha, \beta < 1 \text{ и } \alpha + \beta < \frac{1}{2}.$$

Тогда распределение нормированной квадратичной формы $\tilde{L}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} (L_n - EL_n)$ стремится (при $n \rightarrow \infty$) к нормальному распределению $N(0, \sigma^2)$ с дисперсией

$$\sigma^2 = 16\pi^3 \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda) g^2(\lambda) d\lambda. \quad (2)$$

Доказательство Теоремы А в [1], [2] основано на следующем хорошо известном представлении

$$\chi_k(\tilde{L}_n) = \begin{cases} 2^{k-1}(k-1)! n^{-k/2} \text{tr}(T_n(f)T_n(g))^k, & k \geq 2 \\ 0, & k = 1 \end{cases}$$

k -того кумулянта $\chi_k(\cdot)$ квадратичной формы $\tilde{L}_n$, где в правой части записан след произведения теплицевых матриц $T_n(g) = \|a_{k-j}\|_{k,j=\overline{1,n}}$ и $T_n(f) = \|r_{k-j}\|_{k,j=\overline{1,n}}$; $r_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} f(\lambda) d\lambda$ - ковариация последовательности $X(k)$.

В работе Гиравитиса и Сургалиса [5] был применен другой подход, позволяющий распространить Теорему А на линейные последовательности. В гауссовском случае их результат формулируется следующим образом.

Теорема В. *Предположим, что*

$$\chi_2(\tilde{L}_n) = \frac{2}{n} \text{tr}(T_n(f)T_n(g))^2 \longrightarrow 16\pi^3 \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda) g^2(\lambda) d\lambda < \infty. \quad (3)$$

Тогда справедливо утверждение Теоремы А.

В работах [1] и [2] было установлено, что каждое из условий Q1), Q2) Теоремы А влечет (3), т.е. (3) слабее Q1) или Q2). К сожалению, (3) не является явным условием.

В той же работе [5] выдвигается гипотеза, что (3) верно при единственном условии, что интеграл в правой части (3) сходится. В этой работе дается отрицательный ответ на эту гипотезу, а именно, строятся функции $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$, такие, что $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda) g^2(\lambda) d\lambda < \infty$, но сходимость в (3) не имеет места.

2. Рассмотрим функции

$$f(\lambda) = \begin{cases} \left(\frac{2^s}{s^2}\right)^{1/p}, & \text{если } 2^{s-1} \leq \lambda \leq 2^s, s = 2m \\ 0, & \text{если } 2^{s-1} \leq \lambda \leq 2^s, s = 2m + 1 \end{cases}$$

и

$$g(\lambda) = \begin{cases} \left(\frac{2^s}{s^2}\right)^{1/q}, & \text{если } 2^{s-1} \leq \lambda \leq 2^{-s}, s = 2m + 1 \\ 0, & \text{если } 2^{s-1} \leq \lambda \leq 2^{-s}, s = 2m, \end{cases}$$

где m - положительное целое число, а $p, q \geq 1$.

Легко видеть, что $f(\lambda) \in L_p, g(\lambda) \in L_q, f(\lambda)g(\lambda) \in L_r$ для любых r и $\sigma^2 = 0$.

Покажем теперь, что для $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$

$$\chi_2(\tilde{L}_n) = \frac{2}{n} \operatorname{tr} (T_n(f)T_n(g))^2 \longrightarrow \infty, \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

и, следовательно, сходимость в (3) не имеет места.

Обозначая через $\lambda_k, k = \overline{1, n}$ собственные значения $T_n(f)T_n(g)$, получаем следующее легко проверяемое соотношение :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \lambda_k &= \operatorname{tr} (T_n(f)T_n(g)) = \\ &= 2 \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{n}{2}(t-\lambda)}{\sin^2 \frac{1}{2}(t-\lambda)} f(\lambda) g(t) d\lambda dt = 2 \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} h(x) dx, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$h(x) = \int_0^\pi f(\lambda) g(\lambda + x) d\lambda.$$

Имеем $h(0) = 0$ и для $x \neq 0$ сегмент $[2^{s-1} + x; 2^{-s} + x]$ содержится в $[2^{-s}; 2^{-s+1}]$ до тех пор, пока $x \in [2^{s-1}; 2^{-s}]$.

Таким образом, при $s = 2m$ и $\lambda, x \in [2^{s-1}; 2^{-s}]$ получаем

$$f(\lambda) g(\lambda + x) = \left(\frac{2^s}{s^2}\right)^{1/p} \left(\frac{2^{s-1}}{(s-1)^2}\right)^{1/q} \gtrsim c \cdot \left(\frac{2^s}{s^2}\right)^{1/p+1/q} \quad (6)$$

и

$$h(x) \gtrsim c \cdot x^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+1} (\ln x)^{-2/p-2/q}. \quad (7)$$

Здесь и ниже буквой c обозначаются положительные постоянные.

Легко видеть, что оценки (6) и (7) справедливы в случае, когда $s = 2m + 1$.

Поэтому, принимая во внимание тот факт, что для $0 < x < \frac{1}{n}$

$$\frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{n^2 \sin^2 \frac{x}{2}} \geq c,$$

в силу (5) и (7), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \lambda_k &= 2n^2 \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{n^2 \sin^2 \frac{x}{2}} h(x) dx \geq c \cdot n^2 \int_0^{1/n} h(x) dx \gtrsim \\ &\gtrsim cn^2 \int_0^{1/n} x^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+1} (\ln x)^{-2/p-2/q} dx \geq c \cdot n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} (\ln n)^{-2/p-2/q}. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Шварца, получаем

$$\chi_2(\tilde{L}_n) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \geq \frac{2}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right)^2 \geq c \cdot n^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-2} (\ln n)^{-4/p-4/q}.$$

Очевидно, если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$, то последнее выражение стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, мы показали, что условие $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda) g^2(\lambda) d\lambda < \infty$ не гарантирует сходимости в (3).

В заключение, мы выдвигаем гипотезу, что из условия

$$0 < \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda) g^2(\lambda) d\lambda < \infty$$

следует сходимость в (3).

Автор выражает благодарность профессору И.А.Ибрагимову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Avram, "On bilinear forms in Gaussian random variables and Toeplitz matrices", Probab. Th. Rel. Fields, vol. 79, pp. 37 – 45, 1988.
2. R. Fox, M. S. Taqqu, "Central limit theorem for quadratic forms in random variables having long-range dependence", Probab. Th. Rel. Fields, vol. 74, pp. 213 – 240, 1987.
3. М. С. Гиновян, "Асимптотически эффективное непараметрическое оценивание функционалов на спектральной плоскости, имеющей нули", Теория вероятностей и ее приложения, том 33, стр. 315 – 322, 1988.
4. M. S. Ginovian, "On Toeplitz type quadratic functionals in Gaussian stationary process", Probab. Th. Rel. Fields (in press).
5. L. Giraitis, D. Surgailis, "A central limit theorem for quadratic forms in strongly dependent linear variables and its application to asymptotical normality of Whittle's estimate", Probab. Th. Rel. Fields, vol. 86, pp. 87 – 104, 1990.
6. U. Grenander, G. Szegő, Toeplitz Forms and Their Applications, University of California Press, 1958.
7. R. Z. Hasminskii, I. A. Ibragimov, "Asymptotically efficient nonparametric estimation of functionals of a spectral density function", Probab. Th. Rel. Fields, vol. 73, pp. 447 – 461, 1986.

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 28

НОМЕР 2

1993

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы

Общая граничная задача в двугранной области для системы уравнений в частных производных А. А. Андриян	3
О размерностях ядра и коядра матричного теплицева оператора Р. З. Мкртчян	23
О задаче Коши для квазилинейных слабо гиперболических уравнений с временным вырождением М. Рейссиг, К. Ягджян	35
Об одном конечно-аддитивном функционале в R^3 Р. В. Амбарцумян	58
О мерах, порожденных флаговыми функциями Г. С. Сукиасян	70
Краткие сообщения	
Флаг-представление выпуклых тел, получаемое при стохастической аппроксимации Делоне Р. Г. Арамян	82
Замечание о центральной предельной теореме для квадратичных форм теплицева типа от стационарных гауссовых величин М. С. Гиновян	89