ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966г.
Выходит 6 раз в году
на русском и английском языках

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրատարակել Հայաստանի գիտությունների ազգային ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները.

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ, իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը ոչ ավելի քան 5 - 6 մեքենագրված էջ: Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածները ընդունվում են հրատարակման բացառիկ դեպքերում խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն, հայերեն ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով: Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները իրենց ցանկությամբ կարող են հրատարակվել համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանման փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը երկու գծիկով վերևում: Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները՝ շրջանակվեն սև մատիտով, իսկ կոտորակային տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով:

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով դրանց տեղը տեքստում էջի ձախ մասում:

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում գրքերի համար նշվում է հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը: Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (բնագրի նկատմամբ) չեն թույլատրվում:

7. Հոդվածի վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը:

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ:
Գիտությունների ազգային ակադեմիայի Տեղեկագիր,
սերիա «Մաթեմատիկա»:

КРУГОВЫЕ ПАРАМЕТРЫ. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Б. Л. Голинский

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, No. 1, 1993

Пусть $\Phi_n(z) = z^n + \ldots$, многочлены, определяемые по рекуррентной формуле $\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \overline{a}_n\Phi_n^*(z)$, $\Phi_0(z) = 1$, $\Phi_n^*(z) = z^n\overline{\Phi}_n\left(\frac{1}{z}\right)$, где $\{a_n\}_0^\infty$ удовлетворяют условию $|a_n| < 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ По известной теореме система $\{\Phi_n(z)\}$ ортогональна на единичной окружности $z = e^{i\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$ относительно некоторого распределения $d\sigma(\theta)$, причем $\sigma(\theta)$ определяется по системе к.п. единственным образом, если $\sigma(\theta - 0) = \sigma(\theta)$. В работе рассмотрены определенные структуры убывания модулей к.п., при которых оказывается, что функция распределения $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна и плотность распределения $\sigma'(\theta) = \varphi(\theta)$ непрерывна или удовлетворяет условиям гладкости, выраженным определенным видом убывания модуля непрерывности $\omega(\delta, \varphi^{(m)})$, $m = 0, 1, \ldots, p$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{a_n\}_0^\infty$ – последовательность комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|a_n| < 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Мы рассмотрим следующие две системы многочленов :

$$\Phi_0(z) = 1, \quad \Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \overline{a}_n\Phi_n^*(z), \quad \Phi_n^*(z) = z^n\overline{\Phi}_n\left(\frac{1}{z}\right), \tag{1_1}$$

и

$$\varphi_0(z) = \kappa_0\Phi_0(z), \quad \varphi_n\,\Phi_n(z), \quad \kappa_n^2 = c_0^{-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - |a_k|^2\right)^{-1}, \tag{1_2}$$

$$\kappa_0 = \frac{1}{\sqrt{c_0}}, \quad a_n = -\frac{\overline{\varphi_{n+1}(0)}}{\kappa_{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Очевидно

$$\varphi_n(z) = \kappa_n z^n + \ldots; \quad \varphi_n^*(z) = \overline{\varphi_n(0)}z^n + \ldots + \kappa_n, \; \kappa_n > 0, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

По теореме Фавара (см. [1], стр. 161 ; [2], стр. 44) первая из них ортогональная (ОМ), вторая - ортонормированная (ОНМ) на единичной окружности $\Gamma(: z = e^{i\theta},$

$0 \le \theta \le 2\pi$) относительно некоторого распределения $d\sigma(\theta)$, т.е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \varphi_{\sigma,n}(z)\overline{\varphi_{\sigma,m}(z)}\, d\sigma(\theta) = \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, 2, ..., \tag{2}$$

$$\varphi_n(z) \equiv \varphi_{\sigma,n}(z), \quad \kappa_n \equiv \kappa_{\sigma,n}, \quad c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma(t).$$

Числа $\{a_n\}_0^\infty$ называют круговыми параметрами (к.п.), функцию $\sigma(\theta)$ функцией распределения (ф.р.) : т.е. это - неубывающая ограниченная функция с бесчисленным множеством точек роста на интервале $[0, 2\pi]$. Множество этих точек обозначим E_σ. Если считать $\sigma(\theta - 0) = \sigma(\theta)$, то при условиях $\kappa_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ и (2) ф.р. определяется однозначно по последовательности к.п. $\{a_n\}_0^\infty$. Соотношения (1_1) и (1_2) называют представлениями ОМ и ОНМ, соответственно. Почти всюду (п.в) существующую 2π-периодическую функцию $\sigma'(\theta) = \varphi(\theta)$ называют плотностью распределения (п.р.). Если $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна ($: \sigma(\theta) \in AC(0, 2\pi)$), то (п.р.) называют весовой функцией (в.ф.). В этом случае через ОНМ обозначим $\{\varphi_n(e^{i\theta})\}_0^\infty$.

Функция Сеге $\mathcal{D}(z)$:

$$\mathcal{D}^{-1}(z) \equiv \pi(f_0; z) = \exp\left[-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\ln f_0(t)\, dt\right], \ |z| < 1$$

определяется для любой неотрицательной функции $f_0(t)$, суммируемой вместе со своим логарифмом.

Если $f_0(t) \equiv \varphi(t)$, то будем писать $\pi(\varphi, z) \equiv \pi_\sigma(z)$. Как известно, (см. [1], стр. 25) функция $\pi_\sigma(z)$ аналитична и отлична от нуля в единичном круге, (п.в.) в Γ существуют радиальные граничные значения

$$\pi_\sigma(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1-0}\pi_\sigma(re^{i\theta}) = \frac{1}{\sqrt{\varphi(\theta)}}\exp\{i\gamma(\varphi;\theta)\},$$

$$\lim_{n\to\infty}\kappa_{\sigma n} \equiv \kappa = \pi_\sigma(0),$$

$$\gamma(\varphi;\theta) = \arg\pi_\sigma\left(e^{i\theta}\right) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cot\frac{t-\theta}{2}\ln\varphi(t)\, dt,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения Коши. Обозначим $\pi_0(\theta) = \pi(\varphi; \exp\{i\theta\})X_E(\theta)$, где $X_E(\theta)$ характеристическая функция множества $E_0 =$

$= \{\theta \in [0, 2\pi] : 0 < \sigma'(\theta) < \infty\} \subset E_\sigma$. Если для $\theta \in [0, 2\pi] \setminus E_0$ считать $\pi(\varphi; \exp\{i\theta\}) = 0$, то $|\pi(\varphi; \exp\{i\theta\})| = \{\varphi(\theta)\}^{-\frac{1}{2}}$ для всех $\theta \in [0, 2\pi]$.

Если в (1_1) $\{a_n\}_0^\infty$ заменить на $\{-a_n\}_0^\infty$, то получим многочлены $\{\Psi_n\}$, ортогональные на Γ относительно распределения $d\tau(\theta)$, где $\tau(\theta)$ аналогична $\sigma(\theta)$ и $\tau'(\theta) = \Psi(\theta)$. Основные свойства этих многочленов, называемых ОПМ второго рода, изложены в [3].

Обозначим через $\delta_{\sigma,n}$ наилучшее приближение функции $\pi_0(\theta)$ многочленами $Q_n(z)$ степени $\leq n$ в пространстве $L^2_{d\sigma}(\Gamma)$:

$$f \in L^2_{d\sigma}(\Gamma): \ ||f||_{2,d\sigma} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma |f(z)|^2 \, d\sigma(\theta) \right\}^{1/2} < \infty, \ z = e^{i\theta}.$$

$E_{n,2}(g)$ обозначает наилучшее приближение комплекснозначной функции $g(\theta)$ тригонометрическими многочленами степени $\leq n$ в пространстве $L^2(0, 2\pi)$ и $E_n(h)$ обозначает наилучшее приближение непрерывной функции $h(\theta)$ тригонометрическими многочленами степени $\leq n$ в пространстве $C_{2\pi}$. Здесь $C_{2\pi}$ обозначает пространство 2π-периодических непрерывных функций, определенных на интервале $(-\infty, \infty)$.

Если $0 < m_0 \leq g(\theta) \leq M$ п.в. в $[0, 2\pi]$, $g(\theta)$ 2π-периодична и $\omega_2(\delta, g) = O(\delta^\alpha)$, $0 < < \alpha < 1(: g(\theta) \in \mathrm{Lip}(\alpha, 2))$, где

$$\omega_2(\delta, g) = \sup_{|h| \leq \delta} ||g(\theta + h) - g(\theta)||_2, \ ||g||_2 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 \, dt \right\}^{1/2} < \infty,$$

то будем это записывать так : $g(\theta) \in \mathcal{L}(m_0, M; \alpha, 2)$. Для $h \in C_{2\pi}$ определим

$$\omega(\delta, h) = \max ||h(\theta + \varepsilon) - h(\theta)||, \ ||h|| = \max |h(\theta)|, \ 0 < \theta \leq 2\pi$$

Если $\omega(\delta, h) = O(\delta^\alpha)$, то будем писать $h(\theta) \in \mathrm{Lip}\alpha$

Результаты, не принадлежащие автору, приведены здесь по следующим соображениям : 1) привести их полные доказательства (Лемма 2.1, [4]) ; Теорема 2.1, [5]) ; 2) привести новое доказательство Теоремы 1.1 из [6] ; 3) привести примеры и дополнения результатов указанных теорем.

Настоящая статья примыкает и дополняет работу автора [3].

§1. ХАРАКТЕР УБЫВАНИЯ КРУГОВЫХ ПАРАМЕТРОВ И ГЛАДКОСТНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Лемма 1.1. *Если* $\sigma(\theta) \in AC(0, 2\pi)$ *и* $0 < m_0 < \varphi(\theta) \leq M$ *п. в. в* $[0, 2\pi]$, *то*

$$\sqrt{m_0}\, E_{n,2}(\pi_0) \leq \delta_{\sigma,n} \leq \sqrt{M}\, E_{n,2}(\pi_0),$$

где

$$\delta_{\sigma,n} = \min_{\{Q_n\}} \|(\pi_0 - Q_n)\|_{2,d\sigma} = \min_{\{Q_n\}} \|(\pi_0 - Q_n)\sqrt{\varphi}\|_2 \equiv \delta_n(\varphi).$$

Доказательство. Известно (см [1], стр. 26), что

$$\delta_{\sigma,n} = \frac{1}{\kappa}\left\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty} |\varphi_\nu(0)|^2\right\}^{1/2} = \left\| \left(\pi_0 - \frac{\kappa_n}{\kappa}\right)\sqrt{\varphi}\right\|_2 = \delta_n(\varphi) \leq \sqrt{M}\, E_{n,2}(\pi_0).$$

С другой стороны

$$E_{n,2}(\pi_0) = \left\| \left(\pi_0 - \frac{\kappa_n}{\kappa}\varphi_n^*\right)\right\|_{2,d\sigma} \leq \frac{1}{\sqrt{m_0}} \left\| \left(\pi_0 - \frac{\kappa_n}{\kappa}\varphi_n^*\right)\sqrt{\varphi}\right\|_2 = \frac{1}{\sqrt{m_0}}\delta_{\sigma,n}.$$

Теорема 1.1. *Предположим, что в. ф.* $\varphi(\theta)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$\varphi^{(m)} \in Lip(\alpha, 2) \quad 0 < m_0 \leq \varphi(\theta) \leq M \quad \text{п. в.} \quad \text{в}[0, 2\pi]. \tag{1.1}$$

где $0 < \alpha < 1$, m — *целое; для* $m = 0$ *считаем* $\alpha > 1/2$. *Тогда*

$$\delta_{\sigma,n} = \frac{1}{\kappa}\left\{\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^2\right\}^{1/2} = O\left\{n^{-(m+\alpha)}\right\}.$$

Доказательство. Известно (см. [7], стр. 306), что

$$E_{n,2}(f) \leq \frac{3}{n^m}\omega_2\left(\frac{1}{n}, f^{(m)}\right). \tag{1.2}$$

Из (1.2) при $f = \varphi$ и условия (1.1) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1} E_{n,2}(\varphi) < \infty.$$

Тогда (см. [7], стр.317) $\varphi(\theta)$ совпадает п.в. с функцией $\varphi_0(\theta)$, имеющей абсолютно непрерывную производную $\varphi_0^{(m-1)}(\theta)$ и $\varphi_0^{(m)}(\theta) \in L^2(0, 2\pi)$.

Мы используем следующий результат Конюшкова (см. [8], Теорема 11.1) : из условия

$$J(\gamma,\beta;p)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-\frac{\beta}{p'}} E^{\beta}_{n,p}<\infty,\ 1<p\le 2,\ \beta<p',\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1 \tag{1.3}$$

следует сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma}|c_n(f)|^{\beta}<\infty,\quad c_n(f)=\alpha_n(f)+i\beta_n(f), \tag{1.4}$$

где $\{c_n(f)\}_1^{\infty}$ – коэффициенты Фурье функции $f(\theta)$.

Полагая в (1.3) $p=2$, $\beta=1$ и применяя (1.2), получим

$$J(\gamma,1;2)\le C_1\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-(\frac{1}{2}+m+\alpha)}. \tag{1.3'}$$

1. Пусть $m=1$, $\gamma=\alpha$. Из (1.3) и (1.4) при $\beta=1$ получим

$$J(\alpha,1;2)<\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}|c_n(\varphi)|<\infty.$$

Следовательно

$$R_n\equiv\sum_{k=n}^{\infty}|c_k(\varphi)|=o(n^{-\alpha}).$$

Мы используем следующую теорему Лоренца (см. [9], стр. 209) , утверждающую, что из $R_n=O(n^{-\alpha})$, следует, что $\varphi(\theta)\in \mathrm{Lip}\alpha$, т.е.

$$\omega(\delta,\varphi)=O(\delta^{\alpha}),\quad \varphi(\theta)\le M. \tag{1.5}$$

Так как $\varphi(\theta)\ge m_0>0$, то

$$|\ln y_1-\ln y_2|\le\frac{1}{m_0}|y_1-y_2|\quad (y_1,y_2\ge m_0>0)$$

и следовательно

$$\Psi(\theta)=\ln\varphi(\theta)\in \mathrm{Lip}\alpha:\ \omega(\delta,\Psi)=O(\delta^{\alpha}). \tag{1.6}$$

По теореме Привалова $\tilde{\Psi}(\theta)\in \mathrm{Lip}\alpha$, т.е.

$$\omega(\delta,\tilde{\Psi})=O(\delta^{\alpha}). \tag{1.7}$$

В силу определения функции Сеге и (1.5), (1.6), имеем

$$\pi_0(\theta) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\Psi(\theta) + i\widetilde{\Psi}(\theta)\right)\right\}, \quad \pi_0(\theta) \in C_{2\pi}, \ |\pi_0(\theta)| \le \frac{1}{\sqrt{m_0}}. \tag{1.8}$$

Но

$$|z_1 - z_2| < |\ln z_1 - \ln z_2| \max\{|z_1|, |z_2|\}.$$

Поэтому

$$|\pi_0(\theta + h) - \pi_0(\theta)| \le \frac{1}{2\sqrt{m_0}}\left\{\Psi(\theta + h) - \Psi(\theta)| + |\widetilde{\Psi}(\theta + h) - \widetilde{\Psi}(\theta)|\right\}.$$

Применяя (1.6) и (1.7), получим

$$\omega(\delta, \pi_0) = O(\delta^\alpha). \tag{1.9}$$

Легко видеть, что

$$|\Delta\Psi'| \le m_0^{-1}|\varphi'(\theta + h) - \varphi'(\theta)| + m_0^{-2}|\varphi'(\theta)|\,|\varphi(\theta + h) - \varphi(\theta)|.$$

Поэтому

$$\omega_2(\delta, \Psi') \le m_0^{-1}\omega(\delta, \varphi') + m_0^{-2}||\varphi'||_2\,\omega(\delta, \varphi). \tag{1.10}$$

Так как $m = 1$, $\omega_2(\delta, \varphi') = O(\delta^\alpha)$, то $||\varphi'||_2 < \infty$.

Применяя (1.5) и (1.10), получим

$$\omega_2(\delta, \Psi') = O(\delta^\alpha) \quad (||\Psi'||_2 \le M_1). \tag{1.11}$$

По теореме М.Рисса

$$\omega_2(\delta, \widetilde{\Psi}') = O(\delta^\alpha) \quad (||\widetilde{\Psi}'||_2 \le M_2). \tag{1.12}$$

Так как

$$\pi_0'(e^{i\theta})i = \pi_0(e^{i\theta})\left\{-\frac{1}{2}\left[\Psi'(\theta) + i\widetilde{\Psi}'(\theta)\right]\right\} = \pi(e^{i\theta}) \cdot \lambda'(\theta), \tag{1.13}$$

то применяя (1.11) и (1.12), получим

$$||\pi'||_2 \le \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{m_0}}\left\{||\Psi'||_2 + ||\widetilde{\Psi}'||_2\right\} \le \frac{1}{2\sqrt{m_0}}(M_1 + M_2). \tag{1.14}$$

Но

$$\Delta\pi_0'(\theta) = -\frac{1}{2}\Phi_n\left(\frac{1}{z}\right)(\theta+h)\left\{\Delta\Psi' + i\Delta\widetilde{\Psi}'\right\} - \pi_0^{-1}(\theta)\,\pi_0'(\theta)\,\Delta\pi_0(\theta). \qquad (1.15)$$

Объединяя (1.8)–(1.15), имеем

$$\omega_2(\delta,\pi') = O(\delta^\alpha).$$

2. Пусть $m = 2$, $\gamma = 1+\alpha$. Теперь $\varphi'(\theta) \sim \varphi_0'(\theta) \in AC(0,2\pi)$, $||\varphi'|| \le M_4$, следовательно $\varphi_0(\theta) \in AC(0,2\pi)$, $\omega(\delta,\varphi_0) = O(\delta)$. Из (1.3') следует, что $J(1+ +\alpha,1;2) < \infty$ и $\sum n^{\alpha+1}|c_n(\varphi)| < \infty$. Так как $\alpha_n(\varphi') = -n\,\beta_n(\varphi)$, $\beta_n(\varphi') = n\,\alpha_n(\varphi)$, то $|c_n(\varphi')| = n\,|c_n(\varphi)|$ и $\sum n^\alpha |c_n(\varphi')| < \infty$. Применяя теорему Лоренца, получим $\varphi'(\theta) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$:

$$\omega(\delta,\varphi') = O(\delta^\alpha), \quad \omega(\delta,\varphi) = O(\delta), \quad |\varphi'| \le M_3. \qquad (1.16)$$

По теореме Привалова и неравенству для логарифмов $\omega(\delta,\Psi) = O(\delta)$, $\omega(\delta,\widetilde{\Psi}) = = O(\delta\ln\frac{1}{\delta})$. Поэтому из (1.16) следует, что

$$\omega(\delta,\pi_0) = O(\delta^\alpha). \qquad (1.17)$$

Следующие неравенства очевидны:

$$\omega_2(\delta,\Psi') \le ||\Delta\Psi'||_2 \le ||\Delta\Psi'|| \le \{||\varphi||\,||\Delta\varphi'|| + ||\varphi'||\,||\Delta\varphi||\}\,m_0^{-2} = O(\delta^\alpha),$$

$$||\Psi'||_2 \le M_5. \qquad (1.18)$$

По теореме М. Рисса

$$\omega_2(\delta,\widetilde{\Psi}') = O(\delta^\alpha) \;\; (||\widetilde{\Psi}||_2 \le M_6). \qquad (1.19)$$

В силу (1.13)

$$||\pi'||_2 \le \frac{1}{2}||\pi_0||\left\{\Psi'||_2 + ||\widetilde{\Psi}||\right\} \le \frac{1}{2\sqrt{m_0}}(M_1 + M_2).$$

В силу (1.15), (1.17)–(1.19) имеем

$$\omega_2(\delta,\pi') = O(\delta^\alpha). \qquad (1.20)$$

Так как

$$\Delta\Psi'' = [\Delta\varphi''\varphi^2(\theta)\varphi(\theta+h) + \Delta\varphi\varphi''(\theta)\varphi^2(\theta) + \Delta\varphi^2\varphi''(\theta)\varphi(\theta) + \Delta\varphi'^2\varphi^2(\theta) + $$
$$+\Delta\varphi^2\varphi'^2\varphi'^2(\theta)]\cdot[\varphi^2(\theta)\varphi^2(\theta+h)]^{-1}, \quad \|\Delta\varphi'^2\| \le 2M\|\Delta\varphi'\|,$$

то

$$\|\Delta\Psi''\|_2 \le m_0^{-1}\{M^3\|\Delta\varphi''\|_2 + M^2\|\varphi''\|_2\|\Delta\varphi\|+ \\ +2M^3\|\Delta\varphi\|\|\varphi''\|_2 + 2M^3\|\Delta\varphi'\| + 2MM_3^2\|\Delta\varphi\|\}. \tag{1.21}$$

Объединяя (1.16) – (1.21), получим

$$-\pi_0''(e^{i\theta}) = \pi_0'(e^{i\theta})\lambda'(\theta) + \pi_0(e^{i\theta})\lambda''(\theta).$$

Поэтому

$$|\pi_0''(e^{i\theta})| = |\Delta\pi_0'(e^{i\theta})\lambda'(\theta+h) + \pi_0'(e^{i\theta})\Delta\lambda'(\theta) + \pi_0(e^{i(\theta+h)})\Delta\lambda(\theta) + \lambda''(\theta)\,\Delta\pi_0(e^{i\theta})|.$$

Применяя полученные оценки и прежние рассуждения, заключаем, что $\pi''(e^{i\theta}) \in$ $\in \mathrm{Lip}(\alpha,2)$. Полагая $m = p$, $\gamma = p-1+\alpha$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha+p-1}c_n(\varphi) < \infty, \quad \text{но} \quad |c_n(\varphi^{(p-1)})| = n^{p-1}|c_n(\varphi)|,$$

следовательно

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}|c_n(\varphi^{(p-1)})| < \infty \quad \text{и} \quad \varphi^{(p-1)}(\theta) \in \mathrm{Lip}\,\alpha.$$

Повторяя прежние рассуждения, заключаем, что $\pi^{(m)}(e^{i\theta}) \in \mathrm{Lip}(\alpha,2)$ для каждого $m > 2$. В силу (1.2), имеем $E_{n,2}(\pi) = O\left\{n^{-(m+\alpha)}\right\}$. Применяя Лемму 1.1 получим доказательство Теоремы 1.1.

Лемма 1.2. *Пусть* $0 < m_0 \le f(\theta)$, $f^{(m-1)}(\theta) \in C(0,2\pi)$, *а* $f^{(m)}(\theta) \in Lip(\alpha,2)$, $0 < \alpha < 1$. *Тогда функция* $g(\theta) = 1/f(\theta)$ *обладает теми же свойствами.*

Доказательство. При $m = 0$ это очевидно. Для $m = 1$ имеем $g'(\theta)f(\theta) + g(\theta)f'(\theta) = 0$, $g'(\theta+h)f(\theta+h) - g(\theta+h)f'(\theta+h) = 0$ и $f(\theta+h)\Delta g' + g'\Delta f + g(\theta+h)\Delta f' + f'(\theta)\Delta g = 0$. Поэтому

$$\|\Delta g'\|_2 \le C_1\|\Delta f\|_2 + C_2\|\Delta f'\|_2, \quad \omega_2(\delta,g') \le C_3\omega_2(\delta,f').$$

Для $m = 2$ имеем

$$\Delta g'' + g''\Delta f + 2g'(\theta+h)\Delta f' + 2f'(\theta)\Delta g + g(\theta+h)\Delta f'' + f''(\theta)\Delta g = 0,$$

$$g'' = -f^{-4}\left(f''f^2 - 2ff'^2\right), \quad \|g''\|_2 = O(1), \quad \|\Delta g\| = O(h), \quad \|f''\|_2 = O(1)$$

Следуя этим путем, докажем лемму для любого $m > 2$.

Теорема 1.2. *Пусть* $\delta_{\sigma,n} = O\left\{n^{-(m+\alpha)}\right\}$, $0 < \alpha < 1$, $m \geq 0$. *Для* $m = 0$ *предположим* $\alpha > 1/2$. *Тогда*

$$\sigma(\theta) \in AC(0, 2\pi), \quad \varphi^{(m)}(\theta) \in Lip(\alpha, 2).$$

Доказательство. Известно (см. [1], стр. 230), что

$$\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} |b_k| \leq b \sum_{\nu=\left[\frac{n}{4}\right]}^{\infty} \frac{B_\nu}{\sqrt{\nu}}, \quad B_\nu = \left\{\sum_{k=\nu}^{\infty} |b_k|^2\right\}^{1/2}.$$

Полагая $b_k = a_k$, получим $\lambda_n = O\left(n^{-(m+\alpha-\frac{1}{2})}\right)$. Следовательно, $\sum |a_k| < \infty$ и поэтому $\sigma(\theta) \in AC(0, 2\pi)$, $0 < \varphi(\theta) \in C_{2\pi}$ $(0 < m_0 \leq \varphi(\theta) \leq M)$, $\pi(z)$ непрерывна при $|z| \leq 1$ и $|\pi(e^{i\theta})| \geq M^{-1/2}$ (см. [2], стр. 167). В силу Леммы 1.1

$$E_{n,2}(\pi) \leq \frac{\delta_n}{\sqrt{m_0}} = O\left(n^{-(m+\alpha)}\right). \tag{1.22}$$

Так как (см. [7], стр. 347) при $f(\theta) \in L^2(0, 2\pi)$

$$\omega_2\left(\frac{1}{n}, f^{(m)}\right) \leq C_5 \left\{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} (\nu+1)^m E_{\nu,2}(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1} E_{\nu,2}(f)\right\}, \tag{1.23}$$

то заменяя f на π и применяя (1.22), заключаем, что для $\frac{1}{n+1} \leq \delta < \frac{1}{n}$, $\omega_2(\delta, \pi^{(m)}) = O(\delta^\alpha)$. По Лемме 1.2 имеем также $\omega_2(\delta, g^{(m)}) = O(\delta^\alpha)$, где $g(e^{i\theta}) = \pi^{-1}(e^{i\theta})$. Пусть $T_n(e^{i\theta}, g)$ — тригонометрический многочлен наилучшего приближения функции g в метрике пространства $L^2(0, 2\pi)$. Обозначая $|T_n(e^{i\theta})|^2 \equiv Q_{2n}(e^{i\theta})$, получим

$$E_{2n,2}(\varphi) \leq \|\varphi - Q_{2n}\|_2 = \|\,|g|^2 - |T_n|^2\|_2 \leq$$

$$\leq \|g\|_2\|g - T_n\| + \|T_n\|_2\|g - T_n\| = O\{E_{n,2}(g)\}.$$

Так как $E_{2n+1,2}(\varphi) < E_{2n,2}(\varphi)$, в силу (1.23) и (1.22) имеем $\varphi^{(m)}(\theta) \in \mathrm{Lip}(\alpha, 2)$.

Лемма 1.3. *Пусть* $ds = d\sigma + 2\pi\mu\delta(z - \zeta)$, *где* $\mu > 0$, $z = e^{i\theta}$, $\zeta = e^{it}$, $\delta(z-\zeta) = d(sgn(\theta - t))$. *Обозначая через* $\{\varphi_{s,n}(z)\}_0^\infty$ *соответствующие ОНМ, имеем*

$$\varphi^*_{s,n}(z)\} = \frac{\kappa_{\sigma,n}}{\kappa_{s,n}}\left\{\varphi^*_{\sigma,n}(z) - \mu K_{\sigma,n}(z,\zeta)\frac{\varphi^*_{\sigma,n}(\zeta)}{1 + \mu K_{\sigma,n}(\zeta)}\right\}, \tag{1.24}$$

$$K_{\sigma,n}(\zeta) \equiv K_{\sigma,n}(\zeta,\zeta).$$

В частности, полагая $z=0$, получим

$$a_{s,n} = \left(\frac{\kappa_{\sigma,n+1}}{\kappa_{s,n+1}}\right)^2 \left\{a_{\sigma,n} + \mu \frac{\overline{\varphi_{\sigma,n+1}(\zeta)}\varphi^*_{\sigma,n}(\zeta)}{1+\mu K_{\sigma,n}(\zeta)}\right\}. \tag{1.25}$$

Доказательство. Известно (см. [1], стр. 14), что

$$K^{-1}_{s,n}(z_0) = \min_{\mathcal{P}} \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\mathcal{P}(z)|^2\, d\sigma + \mu|\mathcal{P}(\zeta)|^2\right\}, \quad \deg\mathcal{P} = n, \quad \mathcal{P}(z_0) = 1. \tag{1.26}$$

Соответствующим экстремальным многочленом будет

$$\tilde{\mathcal{P}}(z,z_0) = \sum_{\nu=0}^{n} d_\nu \varphi_{\sigma,\nu}(z) = K_{s,n}(z,z_0)K^{-1}_{s,n}(z_0). \tag{1.27}$$

В силу (1.26) имеем

$$K^{-1}_{s,n} = \min_{\{d_\nu\}_0^n} \left\{\sum_{\nu=0}^{n} |d_\nu|^2 + \mu \sum_{k=0}^{n} d_k\varphi_{\sigma,k}(\zeta) \sum_{\nu=0}^{n} \overline{d}_\nu \overline{\varphi_{\sigma,k}(\zeta)}, \sum_{\nu=0}^{n} d_\nu \varphi_{\sigma,\nu}(\overline{z}_0) = 1\right\}, \tag{1.28}$$

где

$$K_{\sigma,n}(z,\zeta) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_{\sigma,k}(z)\overline{\varphi_{\sigma,k}(\zeta)}.$$

Условия минимума запишутся следующим образом :

$$\overline{d}_k + \mu\varphi_{\sigma,k}(\zeta)\sum_{\nu=0}^{n} \overline{d}_\nu \overline{\varphi_{\sigma,\nu}(\zeta)} - \lambda\varphi_{\sigma,k}(z_0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{1.29}$$

Умножая обе части (1.29) на d_k и суммируя их, получим

$$\lambda = K^{-1}_{s,n}(z_0). \tag{1.30}$$

В силу (1.27), (1.29) и (1.30) имеем

$$d_k = K^{-1}_{s,n}(z_0)\overline{\varphi_{\sigma,k}(z_0)} - \mu\overline{\varphi_{\sigma,k}(\zeta)}K_{s,n}(\zeta,z_0)K^{-1}_{s,n}(z_0). \tag{1.31}$$

Умножая обе части (1.31) на $\varphi_{\sigma,k}(z)$ и суммируя их, получим

$$K_{s,n}(z,z_0)K^{-1}_{s,n}(z_0) = K_{\sigma,n}(z,z_0)K^{-1}_{s,n}(z_0) - \mu K_{\sigma,n}(z,\zeta)K^{-1}_{s,n}(z_0)K_{s,n}(\zeta,z_0). \tag{1.32}$$

Полагая $z_0 = 0$ и учитывая, что (см. [1], стр. 14)

$$K_{\sigma,n}(z,0) = \kappa_{\sigma,n}\varphi^*_{\sigma,n}(z), \quad K_{s,n}(z,0) = \kappa_{s,n}\varphi^*_{s,n}(z),$$

получим из равенства (1.32)

$$\varphi^*_{s,n}(z) = \frac{\kappa_{\sigma,n}}{\kappa_{s,n}}\varphi^*_{\sigma,n}(z) - \mu K_{\sigma,n}(z,\zeta)\varphi^*_{s,n}(\zeta). \tag{1.33}$$

Полагая $z = \zeta$ в (1.33), найдем $\varphi^*_{s,n}(\zeta)$, подставляя которое в (1.33), получим (1.24). Положим теперь $z = 0$ в (1.24). Тогда

$$\kappa^2_{s,n} = \kappa^2_{\sigma,n}\left\{1 - \mu\frac{|\varphi_{\sigma,n}(\zeta)|^2}{1+\mu K_{\sigma,n}(\zeta)}\right\}, \tag{1.34}$$

$$\left(\frac{\kappa_{s,n}}{\kappa_{\sigma,n}}\right)^2 = \frac{1+\mu K_{\sigma,n-1}(\zeta)}{1+\mu K_{\sigma,n}(\zeta)}. \tag{1.34'}$$

Следовательно

$$\varphi^*_{s,n}(z) = \sqrt{\frac{1+K_{\sigma,n}(\zeta)}{1+K_{\sigma,n-1}(\zeta)}}\left\{\varphi^*_{\sigma,n}(z) - \mu\frac{\varphi^*_{\sigma,n}(\zeta)K_{\sigma,n}(z,\zeta)}{1+\mu K_{\sigma,n}(\zeta)}\right\}. \tag{1.35}$$

Применяя тот же подход к мере

$$ds = d\sigma + 2\pi\sum_{k=1}^{m}\mu_k\delta(z-\zeta_k), \ m > 1,$$

получим следующую версию (1.24)

$$\varphi^*_{s,n}(z) = \frac{\kappa_{\sigma,n}}{\kappa_{s,n}}\left\{\varphi^*_{\sigma,n}(z) - \sum_{k=1}^{m}\mu_k\frac{\varphi^*_{\sigma,\cdot}(\zeta_k)}{1+\mu K_{\sigma,n}(\zeta_k)}K_{\sigma,n}(z,\zeta_k)\right\}. \tag{1.24'}$$

Полагая $z = 0$, получим

$$\kappa^2_{s,n} = \kappa^2_{\sigma,n}\left\{1 - \sum_{k=1}^{m}\mu_k\frac{|\varphi_{\sigma,n}(\zeta_k)|^2}{1+\mu K_{\sigma,n}(\zeta_k)}\right\}. \tag{1.34''}$$

Докажем теперь (1.25). В силу (1.24) имеем

$$\overline{\varphi}_{s,n} = \frac{\kappa_{\sigma,n}}{\kappa_{s,n}}\left\{\overline{\varphi}_{\sigma,n}(z) - \mu K_{\sigma,n}\left(\frac{1}{z},\zeta\right)z^n b_n(\zeta)\right\}, \quad b_n(\zeta) = \mu\frac{\varphi^*_{\sigma,n}(\zeta)}{1+\mu K_{\sigma,n}(\zeta)}.$$

Но

$$K_{\sigma,n}\left(\frac{1}{z},\zeta\right)z^n\Big|_{z=0} = \kappa_{\sigma,n}\overline{\varphi_{\sigma,n}(\zeta)},$$

$$\overline{\varphi_{s,n+1}(0)} = -a_{s,n}, \quad \overline{\varphi_{\sigma,n+1}(0)} = -a_{\sigma,n}.$$

Из последнего соотношения следует (1.25). Формула, аналогичная (1.24) только для многочлена $\varphi_{s,n}(z)$ была впервые получена Я. Л. Геронимусом другим методом (см. [10]).

Следствие 1.1. Если $a_{\sigma,n} \to 0 (n \to \infty)$, то

a) $|a_{\sigma,n} - a_{s,n}| \to 0 \, (n \to \infty)$,

b) $\frac{\kappa_{\sigma,n}}{\kappa_{s,n}} \to 1 \, (n \to \infty)$.

Доказательство. Известно (см. [11]), что

$$\frac{|\varphi_{\sigma,n}(z)|^2}{K_{\sigma,n}(z)} \to 0 \, (n \to \infty), \quad \frac{\kappa_{\sigma,n+1}}{\kappa_{\sigma,n}} \to 1 \, (n \to \infty), \quad |z| \le 1.$$

Так как $a_{\sigma,n} = -\overline{\Phi_{\sigma,n+1}(0)}$, $a_{s,n} = -\overline{\Phi_{s,n+1}(0)}$ и $K_{\sigma,n}(0, \zeta_0) = \kappa_{\sigma,n} \overline{\varphi_{\sigma,n}(\zeta_0)}$, в силу (1.37), получим

$$a_{s,n} = a_{\sigma,n} + \mu \frac{\varphi_{\sigma,n}(\zeta_0) \overline{\varphi^*_{\sigma,n+1}(\zeta_0)}}{1 + \mu K_{\sigma,n}(\zeta_0)}.$$

Далее, имеем (см. [11], стр. 56)

$$|\varphi^*_{\sigma,n+1}(\zeta)| \le (1 + |\zeta|) \, |\varphi^*_{\sigma,n}(\zeta)| \left| \frac{\kappa_{\sigma,n+1}}{\kappa_{\sigma,n}} \right| \quad (|\zeta| \le 1),$$

Следовательно, $|a_{\sigma,n} - a_{s,n}| \to 0 \, (n \to \infty)$. Второе утверждение Следствия 1.1 следует из соотношения (1.34). Заметим, что мы имеем тот же результат в случае, когда

$$ds = d\sigma + \sum_{k=1}^{m} \mu_k \delta(z - \zeta_k), \quad \zeta_k = e^{it_k}, \quad \zeta = e^{it}.$$

c) Для $z \in \Gamma \setminus \{\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_m\}$ имеем $\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_{s,n}(z)}{\varphi_{\sigma,n}(z)} = 1$, $|z| = 1$.

Пример 1. Пусть $d\sigma \equiv d\theta$, $ds = d\sigma + 2\pi\delta(z - \zeta_0)$, $\zeta_0 = 1 \, (t_0 = 0)$, $\mu = 1$, $d = 2\pi$. Тогда

$$\varphi^*_{s,n}(z) = \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \left\{ 1 - \frac{1}{n+2} \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \right\} = \frac{n + 1 - z(z^{n-1} + ... + 1)}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}.$$

Круговыми параметрами будут

$$a_{s,n} = -\frac{\overline{\varphi_{s,n+1}(0)}}{\kappa_{s,n+1}} = \frac{1}{n+2}, \quad \lim_{n\to\infty} \varphi^*_{s,n}(z) = \pi_s(z) = 1.$$

Очевидно, что $\pi_s(1) = 1$, а $\lim_{n\to\infty} \varphi^*_{s,n}(1) = 0$, т.е. равномерное асимптотическое представление $\lim_{n\to\infty} \varphi^*_{s,n}(e^{i\theta}) = \pi_s(e^{i\theta})$ на Γ не выполняется. Отметим, что условие Сеге $\sum |a_n|^2 < \infty$ имеет место.

Определим соответствующую плотность распределения $\Psi(\theta)$ для ОНМ второго рода $\{\varphi_{\tau,n}(z)\}_0^\infty$, $\tau'(\theta) = \Psi(\theta)$. Круговыми параметрами будут $a_{\tau,n} = -\frac{1}{n+2}$ и п.в. имеем (см. [3])

$$c_0 = 2, \quad \varphi(\theta) = 1, \quad \widetilde{\varphi}_s(\theta) = -\cot\frac{\theta}{2}, \quad \Psi(\theta) = c_0^2\frac{4\varphi(\theta)}{\varphi(\theta) + \widetilde{\varphi}_s^2(\theta)} = |e^{i\theta} - 1|^2.$$

Пример 2. Пусть $m = 2$, $\zeta_1 = -\zeta_2 = 1$, $d\sigma \equiv d\theta$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$. В этом случае $\kappa_{\sigma,n} = 1$ и

$$\varphi^*_{s,n}(z) = \frac{1}{\kappa_{\sigma,n}}\left\{1 - \frac{1+z+\ldots+z^n}{n+2} - \frac{1-z+z^2-\ldots+(-1)^n z^n}{n+2}\right\},$$

$$\kappa^2_{s,n} = \frac{n}{n+2},$$

$$\varphi_{s,n}(z) = \sqrt{\frac{n+2}{n}}\left\{z^n - \frac{z^n+z^{n-1}+\ldots+1}{n+2} - \frac{z^n - z^{n-1}+\ldots+(-1)^n}{n+2}\right\}$$

$$\varphi_{\sigma,n}(0) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{n(n+2)}}, & \text{если } n \text{ четное} \\ 0, & \text{если } n \text{ нечетное} \end{cases} \quad \text{и } a_{s,n} = \begin{cases} \frac{2}{n+1}, & \text{если } n \text{ четное} \\ 0, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Для плотности распределения имеем

$$c_0 = 3, \quad \varphi(\theta) = 1, \quad \widetilde{\varphi}_s(\theta) = -\cot\frac{\theta}{2} + \tan\frac{\theta}{2},$$
$$\Psi(\theta) = c_0^2\frac{9\varphi(\theta)}{\varphi(\theta) + \widetilde{\varphi}_s^2(\theta)} = 9\frac{\sin^2\theta}{4 - 3\sin^2\theta}.$$

Заметим, что в [12] для в.ф. $\varphi(\theta) = \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2\gamma_1}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2\gamma_2}$, $\gamma_1, \gamma_2 > -\frac{1}{2}$ получены следующие значения для к.п.

$$a_n = -\frac{\gamma_1 + (-1)^{n+1}\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2+n+1}, \quad n = 0, 1, 2 \ldots.$$

При $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$ эти значения совпадают с найденными в примере 1.

Теорема 1.3. *1) Если*

$$\delta_{\sigma,n} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}|a_{\sigma,k}|^2\right\}^{1/2} = O\left(n^{-1/2}\right), \tag{1.36}$$

то

a) п.в. на $[0, 2\pi]$ имеет место поточечная ограниченность ОНМ первого и второго рода : $|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\theta})|, |\Psi_{\sigma,n}(e^{i\theta})| \le C_0 = C_0(\theta)$,

b) утверждение "п.в." нельзя заменить на "всюду".

2) Если $\delta_{\sigma,n} = O\left(n^{-(\frac{1}{2}+\varepsilon)}\right)$, $1 \geq \varepsilon > 0$, *то* $\sigma(\theta) \in AC(0,2\pi)$, *п.р. непрерывна и строго положительна, а* $\omega(\delta,\varphi) = O(\delta^{\varepsilon})$.

Доказательство. Докажем сначала утверждение а). Известно следующее неравенство :

$$|\varphi^*_{\sigma,n}(z)| \leq |\pi(\rho_n z)| \left\{C_\sigma + C_\sigma \sqrt{n}\, \delta_{\sigma,n}\right\}, \; |z| \leq 1, \rho_n = 1 - \frac{1}{n}. \tag{1.37}$$

Оно является усилением соответствующего неравенства Я.Л.Геронимуса (см. [1], стр. 81) и может быть найдено в [13] или [14]. Мы приведем здесь новое доказательство неравенства (1.37). Мы используем неравенство (см. [1],стр. 81)

$$|\varphi^*_{\sigma,n}(re^{i\theta})| \leq |\pi_0(re^{i\theta})| \left\{1 + \frac{C_r \delta_{\sigma,n}}{\sqrt{1-r}}\right\}, \; r < 1, \tag{1.38}$$

также как и

$$|\mathcal{P}_n(r_2 e^{i\theta})| \leq |\mathcal{P}_n(r_1 e^{i\theta})| \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{n}{2}}, \; 0 < r_1 \leq r_2 \leq 1, n \geq 2. \tag{1.39}$$

доказанное Е. А. Рахмановым в [15], где $\mathcal{P}_n(z)$ – произвольный многочлен степени n, нули которого $\{\zeta_k\}_1^n$ лежат в области $|\zeta| > 1$.
Полагая $r_2 e^{i\theta} = z$, $\frac{r_1}{r_2} = \rho_n = 1 - \frac{1}{n}$, $r_2 = 1$ в (1.39), получим

$$|\mathcal{P}_n(z)| \leq |\mathcal{P}(\rho_n z)| \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{2e}\, |\mathcal{P}_n(\rho_n z)|. \tag{1.39 '}$$

Применим теперь (1.39') к $\varphi^*_{\sigma,n}(z)$. Положим $re^{i\theta} = \rho_n z$, $r = |\rho_n z| \leq \rho_n$. В силу (1.38) и (1.39'), получим

$$\begin{aligned} |is\varphi^*_{\sigma,n}(z)| &\leq \sqrt{2e}|\varphi^*_{\sigma,n}(\rho_n z)| \leq \sqrt{2e}|\pi_\sigma(\rho_n z)| \left\{1 + \frac{C_8}{\sqrt{1-\rho_n}}\, \delta_{\sigma,n}\right\} = \\ &= |\pi_\sigma(\rho_n z)| \left\{C_9 + C_{10}\sqrt{n}\delta_{\sigma,n}\right\}. (C_9 \equiv C_5,\, C_{10} \equiv C_6). \end{aligned} \tag{1.40}$$

Из условия (1.36) следует, что $\ln \sigma'(\theta) \in L(0,2\pi)$, поэтому во всех точках, где $\ln \frac{1}{\sigma(\theta)}$ является производной своего неопределенного интеграла, имеем

$$\lim_{n\to\infty} |\pi_\sigma(\rho_n e^{i\theta})| = |\pi_\sigma(e^{i\theta})| = \frac{1}{\sqrt{\sigma'(\theta)}},$$

что и доказывает утверждение а).

Для доказательства b) рассмотрим следующий

Пример 3. Пусть

$$a_{\sigma,k}(\varepsilon) = -\frac{1}{k+2}\{\ln(k+2)\}^{-\frac{1+\varepsilon}{2}}, \ 0 < \varepsilon < 1, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

и $\left\{\varphi_{\sigma,n}^{(\varepsilon)}(z)\right\}_0^\infty$ соответствующее ОНМ. Имеем $\{a_{\sigma,k}(\varepsilon)\}_0^\infty \in l^2$. Действительно

$$\sum_{k=n-2}^{\infty} |a_{\sigma,k}(\varepsilon)|^2 < \frac{1}{n}\int_n^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{n}(\ln n)^{-\varepsilon}, \quad \delta_{\sigma,n}(\varepsilon) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Обозначим

$$L_n(\varepsilon) = \ln \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1 + |a_{\sigma,k}(\varepsilon)|}{1 - |a_{\sigma,k}(\varepsilon)|}.$$

Имеем

$$L_n(\varepsilon) > 2\sum_{k=0}^{n-1} |a_{\sigma,k}(\varepsilon)| > 2\left\{((\ln n)^{\frac{1-\varepsilon}{2}} - (\ln 3)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\right\} > C_{11}(\ln n)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}.$$

Так как $a_{\sigma,k(\varepsilon)} < 0$, $k = 1, 2, \ldots$, для соответствующих ОНМ имеем (см. [2], стр. 165 - 166)

$$\varphi_{\sigma,n}^{(\varepsilon)}(1) = \frac{1}{\sqrt{C_0}}\exp\left(L_n^{1/2}(\varepsilon)\right) \geq C_{12}\exp\left\{(\ln n)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\right\} \to \infty, \ n \to \infty.$$

Таким образом, утверждение "п.в." существенно.

Утверждение а) Теоремы 1.3 можно доказать проще, если воспользоваться следующей теоремой Радемахера и Меньшова.

Теорема (см. [16], стр. 190 ; [17], стр. 87). *Пусть $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$ произвольная ортонормированная система функций. Если $\sum c_k^2 \ln^2 k < \infty$, то ортогональный ряд $\sum c_k\varphi_k(x)$ сходится почти всюду.*

В [17] и [18] указанная теорема доказана для вещественнозначных ортонормированных систем. Ее доказательство весьма сложно, чего нельзя сказать о неравенстве (1.37).

Наши рассуждения в случае а) не выходят за рамки общей теории ортогональных многочленов на единичной окружности.

Выведем теперь утверждение а) из теоремы Радемахера - Меньшова. Применим преобразование Абеля (см. [17], стр. 78)

$$\sum_{k=m+1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=m+2}^{n}(u_k - u_{k-1})\sum_{\nu=m+1}^{\infty} v_\nu + u_{m+1}\sum_{\nu=m+1}^{\infty} v_n u - u_n \sum_{\nu=n+1}^{\infty} v_\nu, \qquad (*)$$

где $\{u_k\}$, $\{v_k\}$ - действительные числа и $\sum v_\nu < \infty$. Положим $v_\nu = |\varphi_\nu(0)|^2$, $m = 0$, $u_k = \ln^2 k$ $(k = 1, 2, ...)$. В силу условия $\sum_{\nu=n}^{\infty} |\varphi_\nu(0)| = O(1/n)$, последнее слагаемое в (*) стремится к нулю, предпоследнее слагаемое равно нулю при всех n. Так как $u_k - u_{k-1} = (\ln k - \ln(k-1))(\ln k + \ln(k-1)) = O(\ln k/k)$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2 \ln^2 k < \infty.$$

Полагая $c_n = \overline{\varphi_n(0)}$, где $\{\varphi_n(z)\}_0^\infty$ - ОНМ на Γ и применяя теорему Радемахера -Меньшова, получим, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \overline{\varphi_k(0)}\varphi_k(z)$ сходится п.в. на Γ. Так как

$$\kappa_n \varphi_n^*(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi_k(0)}\varphi_k(e^{i\theta}), \ \kappa_0 \le \kappa_n \le \kappa,$$

то п.в. на Γ имеем поточечную ограниченность ОНМ.

Докажем теперь утверждение 2). Известно (см. [1], стр. 169), что

$$A_{\sigma,n} \equiv \sum_{k=n}^{\infty} |a_{\sigma,k}| \le C_{13} \sum_{\nu=[n/4]} \frac{\delta_{\sigma,\nu}}{\sqrt{\nu}} \le C_{14} \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{-(1+\epsilon)} < C_{15} n^{-\epsilon}.$$

Следовательно, $\sigma(\theta) \in AC(0, 2\pi)$, $0 < \sigma'(\theta) = \varphi(\theta) \in C(0, 2\pi)$ и система ОНМ равномерно ограничена (см. [1], р. 167). Применяя неравенство (см. [3],

$$\omega(\frac{1}{n}, \varphi) \le \frac{C_{16}}{n} \sum_{\nu=0}^{n} A_{\sigma,[\nu/4]} \le \frac{C_{17}}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-\epsilon} < C_{18} n^{-\epsilon},$$

получим $\omega(\delta, \varphi) = O(\delta^{\epsilon})$, $\frac{1}{n+1} \le \delta < \frac{1}{n}$. Теорема 1.3 доказана.

Пример 4. Согласно условию (1.36), п.р. может иметь нули.

Рассмотрим в.ф. $\psi(\theta) = |e^{i\theta} - 1|^2$, $ds = \psi\, d\theta$. Имеем $a_{s,n} = \dfrac{1}{n+2}$ и $\delta_{s,n} = O(n^{-1/2})$.

Пример 5. Согласно условию (1.36) ф.р. может иметь точки разрыва.

Рассмотрим функцию распределения $ds_1 = ds + 2\pi\delta(z - \zeta_0)$, $\zeta_0 = e^{it_0}$, $0 < \theta_1 + \varepsilon < t_0 < \theta_2 - \varepsilon \le 2\pi$. Имеем

$$a_{s_1,n} = \left(\frac{\kappa_{s,n+1}}{\kappa_{s_1,n+1}}\right)^2 \left\{\frac{a_{s,n} + \mu\varphi^*_{s,n+1}(\zeta)\overline{\varphi_{s,n+1}(\zeta)}}{1 + \mu K_{s,n+1}(\zeta)}\right\},$$

и

$$\left(\frac{\kappa_{s,n+1}}{\kappa_{s_1,n+1}}\right)^2 = \frac{1 + K_{s,n}(\zeta)}{1 + K_{s,n+1}(\zeta)} < 1.$$

Известно (см. [1], стр. 54, 56), что если $\sigma(\theta') - \sigma(\theta'') \geq m_0(\theta' - \theta'')$, $\alpha \leq \theta' < < \theta'' \leq \beta$, $m_0 > 0$, то $K_{\sigma,n}(\theta) \leq C_{19}(n+1)$, $\theta \in \mathcal{E}_\varepsilon(\alpha,\beta) = [\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon]$. Если $\sigma(\theta) \in AC(0,2\pi)$ и $\varphi(\theta) \leq M$, то $K_{\sigma,n}(\theta) \geq C_{20}(n+1)$, $\theta \in \mathcal{E}_\varepsilon(\alpha,\beta)$. В нашем случае $[\alpha,\beta] \equiv [\theta_1,\theta_2]$ и $K_{s,n}(t) \simeq n$, $t \in \mathcal{E}_\varepsilon(\theta_1,\theta_2)$. Так как $ds = \psi(\theta)\,d\theta$ и $\psi'(\theta) \in C(\theta_1,\theta_2)$, то $\omega'(\delta,\varphi) = O(\delta)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \Psi^*_{s,n}(e^{i\theta}) = \pi_s(e^{i\theta}), \qquad \lim_{n\to\infty} |\Psi_{s,n}(e^{i\theta})|^2 = \Psi^{-1}(\theta),$$

равномерно для $\theta \in \mathcal{E}_\varepsilon(\theta_1,\theta_2)$ (см. [16]). Следовательно, $\Psi_{s,n}(e^{i\theta})| = O(1)$, $\theta \in \mathcal{E}_\varepsilon(\theta_1,\theta_2)$. Поэтому

$$|a_{s_1,n}| \leq |a_{s,n}| + \frac{C_{21}}{n}, \qquad \delta_{s_1,n} \leq \delta_{s,n} + \frac{C_{22}}{\sqrt{n}} \leq C_{23}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, ф.р. $s_1(\theta)$ имеет точку разрыва при $\theta = t_0$ и обращается в нуль при $\theta = 0$ и $\delta_{s_1,n} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Пример 6. Пусть

$$\sigma'(t) = \varphi(t) = h(t) \prod_{\nu=1}^{m} |e^{it} - e^{i\theta_\nu}|^{2\gamma_\nu} \equiv h(t)\,\gamma(t), \tag{1.41}$$

где $\gamma(t)$ обобщенный якобиев вес и $h(t) \in L(m_0, M; \frac{1}{2}, 2)$. Тогда

$$|\varphi_n(e^{i\theta})| \leq C_{24} \prod_{\nu=1}^{m} \left[|e^{i\theta} - e^{i\theta_\nu}| + \frac{1}{n}\right]^{-\gamma_\nu}. \tag{1.42}$$

Для случая $\gamma_1 = ... = \gamma_m = 0$ это неравенство было доказано Я. Л. Геронимусом (см. [1], стр. 48). Докажем (1.42) в общем случае. Имеем

$$\pi(z;\varphi) = \exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \ln\{h(t)\gamma(t)\}\,dt\right\} = \pi(z,h)\,\pi(z,\gamma). \tag{1.43}$$

Легко показать, что

$$\pi(z,\gamma) = \exp\left\{i\sum_{\nu=1}^{m}\gamma_\nu\theta_\nu\right\}\prod_{\nu=1}^{m}(z_\nu - z)^{-\gamma_\nu}. \tag{1.44}$$

Полагая $z = \left(1 - \frac{1}{n}\right)e^{i\theta}$, получим

$$|\pi(z,\gamma)| \leq \prod_{\nu=1}^{m}\left[|e^{i\theta} - e^{i\theta_\nu}| + \frac{1}{n}\right]^{-\gamma_\nu}. \tag{1.45}$$

П.в. в $[0, 2\pi]$ имеем $|\pi(e^{i\theta}, h)| \le m_0^{-1/2}$, $\pi(z; h) \in H^2$. Следовательно

$$\pi(z; h) \le C_{25}, \quad |z| < 1. \tag{1.46}$$

Оценка (1.42) теперь следует из (1.37), (1.41) - (1.45) и из того, что при (1.41) имеем $\delta_{\sigma, n} = O\left(n^{-1/2}\right)$. Последнее утверждение было доказано в [19] (Теорема 4) при условии, что в (1.41) $\gamma_\nu > 0$ при всех $\nu = 1, 2, ..., m$. Здесь мы докажем это утверждение в случае, когла некоторые из $\{\gamma_\nu\}_1^m$ отрицательные числа. Предположим, что $\gamma_\nu < 0$, $\nu = 1, 2, ..., k$; $m \ge k$. Положим

$$\lambda(\theta) = \gamma(\theta) \prod_{\nu=1}^{k} |e^{i\theta} - e^{i\theta_\nu}|^2,$$

где

$$\gamma(\theta) = \prod_{\nu=1}^{m} |e^{i\theta} - e^{i\theta_\nu}|^{2\gamma_\nu}, \quad 2\gamma_\nu > -1 \tag{1.47}$$

Очевидно, все показатели функции $\lambda(\theta)$ будут положительными. Имеем

$$\pi(\lambda; z) = \pi(\gamma; z) \exp\left\{i \sum_{\nu=1}^{k} \theta_\nu\right\} \prod_{\nu=1}^{k} (z_\nu - z)^{-1} = \pi(\gamma; z) \prod_{\nu=1}^{k} \frac{e^{i\theta_\nu}}{z_\nu - z}$$

и

$$\pi(\gamma; z) = \pi(\lambda; z) \prod_{\nu=1}^{k} (1 - ze^{-i\theta_\nu}). \tag{1.48}$$

Очевидно

$$\delta_n(\gamma) \le ||[\pi(\gamma; e^{i\theta}) - Q_n(e^{i\theta})] \sqrt{\gamma(\theta)}||_2. \tag{1.49}$$

Пусть $Q_{n-k}(\lambda; z)$ - многочлен степени $\le n - m$, для которого

$$\delta_{n-k}(\lambda) = ||[\pi(\lambda; e^{i\theta}) - Q_{n-k}(\lambda; e^{i\theta})] \sqrt{\lambda(\theta)}||_2.$$

Подставляя

$$Q_n(z) = \prod_{\nu=1}^{k} \left(1 - ze^{-i\theta_\nu}\right) Q_{n-k}(\lambda; z)$$

в (1.49) и применяя (1.50), получим

$$\delta_n(\gamma) \le || \prod_{\nu=1}^{k} \left(e^{i\theta} - e^{i\theta_\nu}\right) [\pi(\lambda; z) - Q_{n-k}(\lambda; z)] \sqrt{\lambda}||_2 \le$$
$$\le 2^k || [\pi(\lambda; z) - Q_{n-k}(\lambda; z)] \sqrt{\lambda}||_2 \le 2^k \delta_{n-k}(\lambda).$$

В силу Леммы 4 из [19] следует, что $\delta_n(\gamma) = O\left(n^{-1/2}\right)$.

Теорема 1.4. *Пусть к.п. удовлетворяет одному из двух условий*

1) $|a_n| \le \dfrac{\alpha}{n+\beta}$, $\alpha \le \dfrac{1}{2}$, $\beta \ge \alpha$, $n = 0, 1, \ldots$

при $\alpha = 1:$ $\sigma(+0) - \sigma(-0) = 2\pi/\beta$, $\sigma'(\theta) = \dfrac{\beta - 1}{\beta}\,(\theta \ne 0)$ *(см. [10])*

2) $\{a_n\}_1^\infty$ *вещественные и* $a_n \ge \dfrac{1}{2n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Тогда в случае 1) имеем $\sigma(\theta) \in C(0, 2\pi)$ *и в случае 2)* $\sigma(\theta)$ *имеет точку разрыва при* $\theta = 0$.

Доказательство. 1) По известному неравенству (см. [1], стр. 167)

$$|\varphi_n(z)|^2 \ge \frac{1}{\sqrt{c_0}} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - |a_k|}{1 + |a_k|} \ge \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\beta - \alpha + k}{\beta + \alpha + k}, \ |z| = 1.$$

Но $A(A+1)\ldots(A+n-1) = \frac{\Gamma(A+n)}{\Gamma(A)}$, следовательно

$$|\varphi_n(z)|^2 \ge \frac{1}{\sqrt{c_0}} \frac{\Gamma(\beta - \alpha + n)\,\Gamma(\beta + \alpha)}{\Gamma(\beta + \alpha + n)\,\Gamma(\beta + \alpha)}. \tag{1.50}$$

Известно (см. [20, стр.62), что

$$\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x+b)} = x^{a-b}\left[1 + \frac{1}{2x}(a-b)(a+b-1) + O(x^{-2}\right]. \tag{1.51}$$

Полагая $a = \beta - \alpha$, $b = \beta + \alpha$, $x = n$ в (1.51) и учитывая (1.50), для $\theta \in [0, 2\pi]$, получим

$$K_\sigma(\theta) = \lim_{n\to\infty} K_{\sigma,n}(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_{\sigma,k}(e^{i\theta})|^2 \ge$$

$$\ge C_{15} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\alpha}\left[1 - (2\beta + 1)\frac{\alpha}{n} + O(n^{-2})\right] = \infty.$$

Так как (см. [10]) $\sigma(\theta + 0) - \sigma(\theta - 0) = 2\pi K_\sigma^{-1}(\theta)$, то $\sigma(\theta) \in C(0, 2\pi)$.

Доказательство 2). Имеем

$$\Phi_n^*(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - a_k z \frac{\Phi_k(z)}{\Phi_k^*(z)}\right), \ |a_k| \le a < 1, \ k = 0, 1, \ldots, \tag{1.52}$$

$$\kappa_n^{-2} = c_0 \prod_{k=0}^{n-1}(1 - |a_k|^2), \ \varphi_n(e^{i\theta}) = \kappa_n \Phi_n(e^{i\theta}).$$

Поэтому

$$\frac{1}{c_0} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - |a_k|}{1 + |a_k|} \le |\varphi_n^*(z)|^2 \le \frac{1}{c_0} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - |a_k|}{1 + |a_k|}, \ c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma(\theta).$$

и

$$\ln|\varphi_n^*(z)| \le \ln\frac{1}{c_0} + \sum_{k=0}^{n-1}\ln\frac{1-|a_k|}{1+|a_k|}. \tag{1.53}$$

Но

$$\ln\frac{1-|a_k|}{1+|a_k|} = 2\sum_{p=0}^{\infty}\frac{|a_k|^{2p+1}}{2p+1} < 2|a_k|\sum_{p=0}^{\infty}|a_k|^{2p} < \frac{2|a_k|}{1-a^2}. \tag{1.54}$$

Следовательно

$$|\varphi_n^*(z)|^2 \le \frac{1}{c_0}\exp(2cs_{n-1}), \quad s_n = \sum_{k=0}^{n}|a_k|, \quad c = \sqrt{1-a^2}.$$

Рассмотрим теперь случай $\{a_k < 0\}$. В силу (1.54) имеем

$$\Phi_n^*(1) = \prod_{k=0}^{n-1}(1+a_k)$$

и

$$|\varphi_n^*(1)|^2 = \frac{1}{c_0}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1-|a_k|}{1+|a_k|}. \tag{1.55}$$

Так как

$$\ln\frac{1-|a_k|}{1+|a_k|} > 2|a_k| \; (|a_k| < 1, \; k = 0, 1, \ldots),$$

то при $\{a_k < 0\}$,имеем (согласно (1.54))

$$\varphi_n^2(1) > \frac{1}{c_0}\exp(2s_{n-1}). \tag{1.56}$$

Если $\{\psi_n(z)\}_0^\infty$ — система ОПМ второго рода (для этих многочленов круговыми параметрами будут $\{a_n\}_0^\infty$, $a_n > 0$), то исходя из тождества (см. [1], стр.16)

$$\varphi_n^*(z)\,\psi_n(z) + \psi_n^*(z)\,\varphi_n(z) = \frac{2}{c_0}z^n,$$

и вещественности к.п., имеем

$$\varphi_n(1)\,\psi_n(1) = \frac{1}{c_0}. \tag{1.57}$$

Применяя (1.56) и (1.57), получим

$$\psi_{\sigma,n}^2(1) < \frac{1}{c_0}\exp(-2s_{n-1}).$$

В силу взаимности ОПМ $\{\varphi_{\sigma,n}(z)\}_0^\infty$ и $\{\psi_{\sigma,n}(z)\}_0^\infty$, получим

$$\varphi_{\sigma,n}^2(1) < \frac{1}{c_0}\exp(-2s_{n-1}).$$

для $\{a_{\sigma,n} > 0\}_0^\infty$. Поэтому

$$K_{\sigma,n}(1) < \frac{1}{c_0}\sum_{k=0}^{n} \exp(-2s_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n} u_k,\ s_{-1} = 0.$$

Для определения сходимости ряда $\sum u_k$ применим признак Раабе. Обозначим $R_n = n\,[u_n/u_{n+1} - 1]$, имеем $u_n/u_{n+1} = \exp[2(s_n - s_{n-1})] = \exp(2a_n)$ и $R_n = n\,[\exp(2a_n) - 1]$. Если $R_n \geq 1$, то ряд $\sum u_k$ сходится. Так как

$$\exp(2a_n) - 1 = 2a_n + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2a_n)^k}{k!} > 2a_n,$$

то $R_n > 2a_n \geq 1$, и $K_n(1) < \infty$, поэтому $\theta = 0$ – точка разрыва непрерывности $\sigma(\theta)$, так как $\sigma(\theta + 0) - \sigma(\theta - 0) = 2\pi K_{\sigma,n}^{-1}(\theta)$.

§2. ХАРАКТЕР УБЫВАНИЯ КРУГОВЫХ ПАРАМЕТРОВ И АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Теорема 2.1. *Пусть числовая последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ удовлетворяет следующим условиям :*

$$\Lambda_k = \sum_{j=k_0}^{k} \lambda_j \quad \text{и} \quad \sum_{k=k_0}^{\infty} \Lambda_k |a_k|^2 < \infty, \quad 0 < |a_k| \leq 1,$$

и

$$\sum_{k=k_0} \lambda_k \exp\left\{-\beta\sqrt{\sum_{j=k_0}^{k} \Lambda_j^{-1}}\right\} = \infty, \quad 0 < \beta < \frac{1}{\sqrt{2}},\ k_0 \geq 1. \tag{2.1}$$

Тогда ф.р. $\sigma(\theta) \in AC(0, 2\pi)$.

Доказательство. Известно (см. [1], стр. 165), что

$$|\Phi_n(e^{i\theta})| \geq M_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - |a_k|),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \tag{2.2}$$

Поскольку $\ln(1 - |a_k|) \geq -\dfrac{|a_k|}{1 - a}$, то

$$\ln|\Phi_n(e^{i\theta})| \geq \frac{1}{1 - a}\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|. \tag{2.3}$$

Выберем m так, чтобы

$$\frac{2}{1 - a}\left(\sum_{k=m}^{\infty} \Lambda_k |a_k|^2\right)^{1/2} < \beta < 1, \quad \sum_{k=0}^{m-1} |a_k| \leq d,\ m > k_0 > 1.$$

Согласно (2.3) имеем

$$|\Phi_n(e^{i\theta})|^2 \geq \exp\left\{-\frac{2}{1-a}\sum_{k=0}^{m-1}|a_k|\exp\left\{-\frac{2}{1-a}\sum_{k=m}^{n-1}|a_k|\right\}\right\}. \qquad (2.4)$$

Но

$$\sum_{k=m}^{n-1}|a_k| < \left\{\sum_{k=m}^{n-1}\Lambda_k|a_k|^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=m}^{n-1}\Lambda_k^{-1}\right\}^{1/2} \leq \frac{\beta}{2}(1-a)\left\{\sum_{k=k_0}^{n-1}\Lambda_k^{-1}\right\}^{1/2}.$$

Применяя (2.4), получим

$$|\Phi_n(e^{i\theta})| \geq m_0\exp\left\{-\beta\left(\sum_{k=k_0}^{n-1}\Lambda_k^{-1}\right)^{1/2}\right\}, \qquad (2.5)$$

где m_0 не зависит от n и θ.

Известно (см. [1], стр. 33), что

$$\int_0^{2\pi}|\Phi_n(e^{i\theta})|^2\,d\sigma_1(\theta) \geq C_{26}\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|^2, \qquad (2.6)$$

где $\sigma_1(\theta)$ – сумма функции скачков и сингулярной компоненты ф.р. $\sigma(\theta)$. Применяя (2.5) и (2.6), получим

$$\exp\left\{-\beta\left(\sum_{j=k_0}^{k}\Lambda_j\right)^{1/2}\right\}\int_0^{2\pi}d\sigma_1(\theta) \geq C_{27}\sum_{j=k}^{\infty}|a_j|^2.$$

Так как

$$\sum_{k=k_0}^{n}\lambda_k\sum_{j=k}^{\infty}|a_j|^2 = \sum_{j=k_0}^{\infty}|a_j|^2\Lambda_j,$$

то

$$\int_0^{2\pi}d\sigma_1(\theta)\sum_{k=k_0}^{n}\lambda_k\exp\left\{-\beta\left(\sum_{j=k_0}^{k}\Lambda_j\right)^{1/2}\right\} \leq$$

$$\leq C_{28}\sum_{k=k_0}^{n}\lambda_k\sum_{j=k}^{\infty}|a_j|^2 = C_{29}\sum_{j=k_0}^{\infty}\Lambda_j|a_j|^2 = C_{30}.$$

Учитывая (2.1), получим $\int_0^{2\pi}d\sigma_1(\theta) = 0$ и, следовательно, $\sigma(\theta) \in AC(0, 2\pi)$.

Частные случаи.

1. Пусть $\lambda_k = 1$, $k = 0, 1, \ldots$, тогда $\Lambda_k = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j = k + 1$, $\sum_{j=0}^{k} \Lambda_j^{-1} \simeq \ln k$,

и

$$\exp\left\{-\beta\sqrt{\ln k}\right\} > \exp\{-\beta \ln k\} = \left(\frac{1}{k}\right)^{\beta},$$

$$\sum \lambda_k \exp\left\{-\beta\left(\sum_{j=0}^{k}\Lambda_j\right)^{-1/2}\right\} > \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{\beta} = \infty \ (\beta < 1).$$

Этот случай впервые был рассмотрен в [21] и затем другим методом в [3].

2. Пусть $\Lambda_k = \dfrac{k}{\ln k}$, тогда при $k \geq k_0 > 1$ имеем

$$\lambda_k = \Lambda_k - \Lambda_{k-1} = \frac{\ln\left\{k\left(\frac{k-1}{k}\right)^{k}\right\}}{\ln k \ln(k-1)}.$$

Поэтому

$$\lambda_k > \frac{a}{1-a}\left[\ln k \ln(k-1)\right]^{-1}.$$

Но

$$\sum_{k=k_0}^{n} \Lambda_k^{-1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} \leq 2\ln^2 n$$

и значит

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \lambda_k \exp\left\{-\beta\left(\sum_{j=k_0}^{k}\Lambda_j^{-1}\right)^{1/2}\right\} > \frac{a}{1-a}\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{\exp\{-\beta\sqrt{2}\ln k\}}{\ln k \ln(k-1)} >$$

$$> \frac{a}{1-a}\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 k}\cdot\frac{1}{k^{\beta_1}} = \infty, \quad (\beta_1 = \beta\sqrt{2} < 1).$$

Следовательно условие (2.1) выполняется.

Заметим, что Теорема 2.1 и частный случай 2 изложены в [5]. Там доказательство Теоремы 2.1 основано на первом методе из [3]. В [1], стр. 167 доказано, что если $\sum |a_n| < \infty$, то $\sigma(\theta) \in AC(0, 2\pi)$, $d\sigma = \varphi(\theta)\, d\theta$ и вес $\varphi(\theta)$ строго положителен и непрерывен на $[0, 2\pi]$. Это условие отличается от нашего условия $\sum n|a_n|^2 < \infty$. Действительно, полагая

$$a_n = \left[(n+2)\left(\ln(n+2)\right)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}\right]^{-1}, \quad (\varepsilon < 1),$$

получим
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \quad \text{а} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 < \infty.$$

Наоборот, полагая
$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}}, & \text{если } n = m^{2\nu},\ \nu > 1,\ m = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{если } n \neq m^{2\nu} \end{cases}$$

получим $\sum a_n < \infty$, в то время как $\sum n a_n^2 = \infty$.

Рассмотрим теперь пример, иллюстрирующий частный случай 2 Теоремы 2.1.

Пусть
$$a_n = \left[(n+2)\left(\ln(n+2)\right)^{\varepsilon}\right]^{-1}, \quad \varepsilon < \frac{1}{2},$$

тогда $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n^2 = \infty$, $\sum a_n = \infty$, и
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln n} a_n^2 < 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left\{(n+2)\left[\ln(n+2)\right]^{1+2\varepsilon}\right\}^{-1} < \infty, \quad \sigma(\theta) \in AC(0, 2\pi).$$

В заключение автор хотел бы выразить свою благодарность рецензенту за его замечания.

ABSTRACT. Let $\Phi_n(z) = z^n + \dots$ be the system of polynomials, satisfying the recurrence formula $\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \Phi_n^*(z)$, $\Phi_0(z) = 1$, $\Phi_n^*(z) = z^n \overline{\Phi}_n\left(\frac{1}{z}\right)$, where the reflection coefficients $\{a_n\}_0^{\infty}$ satisfy the condition $|a_n| < 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$. As is well known, the system $\{\Phi_n(z)\}$ is orthogonal on the unit circle with respect to some finite positive Borel measure $d\sigma(\theta)$, $\sigma(\theta - 0) = \sigma(\theta)$, which is uniquely determined up to a positive constant factor. It turns out, that under some decreasing conditions on measure $\sigma(\theta)$ is absolutely continuous and the weight function $\sigma'(\theta) = \varphi(\theta)$ is continuous and satisfies some smoothness conditions. These conditions can be expressed in terms of moduli of continuity $\omega(\delta, \varphi^{(m)})$, $m = 0, 1, \dots, p$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Геронимус, Полиномы, Ортогональные на Окружности и на Отрезке, М., Физматгиз, 1958.
2. Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн, О Некоторых Вопросах Теории Моментов, Харьков 1938.
3. Б. Л. Голинский, "О связи между порядком убывания параметров ортогональных многочленов и свойствами соответствующей функции распределения," Изв. АН Армении, Математика, том 15, no. 2, стр. 127 – 144, 1980.
4. Е. М. Никишин, "Об одной оценке ортогональных многочленов," Acta Sci. Math., vol. 48, pp. 395 – 399, 1985.
5. А. В. Абраамян, "О круговых параметрах," Вестник МГУ, Математика и механика, no. 2, 1985.
6. И. А. Ибрагимов, "Об асимптотическом поведении ошибки прогноза," Теория вероятностей и ее применения, том 9, no. 4, стр. 695 – 703, 1964.

7. А. Ф. Тиман, Теория Приближения Функций Действительного Переменного, М., Физматгиз, 1960.
8. А. А. Конюшков, "Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье," Мат. сб., том 44 (86), no. 1, стр. 53 – 84, 1974.
9. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, М., Физматгиз, 1961.
10. Я. Л. Геронимус, "Полиномы, ортогональные на круге и их приложения," Зап. научно-иссл. ин-та математ. и механики ХМО, том 19, no. 4, стр. 35 – 121, 1948.
11. A. Máté, P. Nevai and V. Fotik, "Extensions of Szegös theory of orthogonal polynomials, II, Constr. Approx., vol. 3, pp. 57 – 72, 1987.
12. Б. Л. Голинский, "О проблеме Стеклова в теории ортогональных многочленов," Мат. зам., том. 15, no. 2, стр. 21 – 32, 1974.
13. В. М. Бадков, "Асимптотические свойства ортогональных многочленов," Конструктивная теория функций, София, стр. 21 – 27, 1983.
14. В. М. Бадков, "Порядок наилучшего приближения функции Сеге," Приближение функций полиномами и сплайнами, УНЦ АН СССР, Свердловск, стр. 25 – 40, 1985.
15. Е. А. Рахманов, "Об оценках роста ортогональных многочленов, вес которых ограничен от нуля," Мат. сб., том 114 (156), no.2, стр. 269 — 298, 1981.
16. Б. Л. Голинский, "Асимптотическое представление ортогональных многочленов," УМН, том 35 (212), no. 2, стр. 145 – 196, 1980.
17. С. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория Ортогональных Рядов, М., Физматгиз, 1958.
18. Г. Алексич, Проблемы Сходимости Ортогональных Рядов, М.,Иностр. Лит.,1963.
19. Б. Л. Голинский, "Об асимптотическом поведении ошибки прогноза," Теория вероятност. и ее применения, том 19, no. 4, стр. 724 – 739, 1974.
20. Р. Бейтман, А. Эрдейи, Высшие Трансцендентные Функции, том 1, Москва, Наука, 1965.
21. Б. Л. Голинский, И. А. Ибрагимов, "О предельной теореме Г Сеге," Изв. АН СССР, сер. матем., том 35, стр. 408 – 427, 1971.

3 Июля 1991

Харьковский авиационный институт.

О ПРИБЛИЖЕНИИ СЛУЧАЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СРЕДНИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ СРЕДНИМ ЧАСТНЫХ СУММ ИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Н. А. Талалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика. том 28, No. 1, 1993

В статье доказаны теоремы о приближении интегральных средни периодическими функциями нескольких переменных интегральны средними частных сумм их рядов Фурье. Интегральные средние б рутся по ячейкам случайного разбиения пространства.

§1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Обозначим через $\mathbb{R}^m$ – m-мерное вещественное евклидово пространство. Дл $x, y \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, ..., x_m)$ и $y = (y_1, ..., y_m)$ положим

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_m + y_m), \quad xy = \sum_{j=1}^{m} x_j y_j. \tag{1}$$

Через $n = (n_1, n_2, ..., n_m)$ обозначим вектор с целочисленными координата Будем рассматривать m – кратную тригонометрическую систему

$$e^{inx} = e^{i(n_1 x_1 + \cdots + n_m x_m)} = e^{in_1 x_1} e^{in_2 x_2} \cdots e^{in_m x_m}, \tag{2}$$

где $x \in T_m$, $T_m = [0, 2\pi] \times \cdots (m \text{ раз}) \times [0, 2\pi]$. Пусть $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$ – периодическа по каждой переменной функция, с периодом 2π, которая принимает действител ные значения и интегрируема по Лебегу на T_m. Тогда

$$\sum_n c_n e^{inx} = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} c_{n_1 n_2 \ldots n_m} e^{in_1 x_1} e^{in_2 x_2} \cdots e^{in_m x_m} \tag{3}$$

– ряд Фурье функции $f(x)$. Здесь

$$c_n = c_{n_1 \ldots n_m} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T_m} f(x) e^{-inx}\, dx =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(x_1, ..., x_m) e^{-in_1 x_1} \cdots e^{-in_m x_m}\, dx_1 \cdots dx_m. \tag{4}$$

Через $S_N(t,x)$ обозначим кубические частные ряда Фурье функции $f(t+x)$, где $x \in T_m$, а $t \in T_m$ рассматривается как параметр. Через $S_N(x)$ обозначим кубические частные ряда Фурье функции $f(x)$. Тогда

$$S_N(t,x) = \sum_{|n|\le N} c_n e^{in(t+x)} = S_N(t+x) =$$
$$= \sum_{|n_1|\le N} \cdots \sum_{|n_m|\le N} c_{n_1\ldots n_m} e^{in_1t_1} \cdots e^{in_mt_m} e^{in_1x_1} \cdots e^{in_mx_m}. \tag{5}$$

Здесь и в дальнейшем запись $|n| \le N$ означает $|n_j| \le N$, $1 \le j \le m$. Равенства (5) верны, так как

$$\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{T_m} f(t+x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{(2\pi)^m}e^{int}\int_{T_m} f(x)e^{-inx}\,dx = e^{int}c_n. \tag{6}$$

Для натурального числа k и вектора $\nu = (\nu_1, ..., \nu_m)$, где $1 \le \nu_j \le k$ - натуральные числа, $1 \le j \le m$, обозначим через Δ_k^ν m-мерный интервал

$$\Delta_k^\nu = \left[\frac{2\pi(\nu_1-1)}{k}, \frac{2\pi\nu_1}{k}\right) \times \cdots \times \left[\frac{2\pi(\nu_m-1)}{k}, \frac{2\pi\nu_m}{k}\right). \tag{7}$$

Через $\Delta_k^\nu(t)$ обозначим интервал, полученный из интервала Δ_k^ν сдвигом по вектору $t = (t_1, ..., t_m)$;

$$\Delta_k^\nu(t) = \left[t_1 + \frac{2\pi(\nu_1-1)}{k}, t_1 + \frac{2\pi\nu_1}{k}\right) \times \cdots \times \left[t_m + \frac{2\pi(\nu_m-1)}{k}, t_m + \frac{2\pi\nu_m}{k}\right). \tag{8}$$

Через $\mu(E)$ обозначается m-мерная мера Лебега множества $E \subset \mathbb{R}^m$. Для интервалов Δ_k^ν и $\Delta_k^\nu(t)$ имеем

$$\mu(\Delta_k^\nu) = \mu(\Delta_k^\nu(t)) = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^m. \tag{9}$$

Рассмотрим две функции, которые постоянны на интервалах Δ_k^ν. Они определяются как значения соответствующих интегральных средних :

$$\Phi_k(t,x) = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-m}\int_{\Delta_k^\nu} f(t+\varphi)\,d\varphi, \quad x \in \Delta_k^\nu, \tag{10}$$

$$\Psi_N(t,x) = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-m}\int_{\Delta_k^\nu} S_N(t+\varphi)\,d\varphi, \quad x \in \Delta_k^\nu. \tag{11}$$

Мы собираемся изучить величины

$$\max_{x\in T_m} |\Phi_k(t,x) - \Psi_N(t,x)|, \tag{12}$$

$$\int_{T_m} |\Phi_k(l,x) - \Psi_N(l,x)|^2\, dx \tag{13}$$

при значениях N, зависящих от k. Рассмотрим параметр сдвига l как случайную величину, имеющую однородное распределение на T_m, и нашей целью будет получение определенных вероятностных оценок для (12) и (13). Обозначим через $\mathbb{E}$ соответствующее математическое ожидание, т.е. интеграл по нормированной мере Лебега

$$P(dl) = \frac{1}{(2\pi)^m}\, dl$$

на T_m.

Обозначим

$$\varepsilon_N = \max_{1\le j\le m}\left(\max_{|n_j|>N} |c_n|\right) = \max_{1\le j\le m}\left(\max_{|n_j|>N} |c_{n_1\ldots n_j\ldots n_m}|\right). \tag{14}$$

В случае $N = k^{2m}$ и $N = k^{3m}$ мы докажем следующие две теоремы.

Теорема 1. *При* $k \ge 7$

$$\mathbb{E}\left(\int_{T_m} |\Phi_k(l,x) - \Psi_{k^{2m}}(l,x)|^2\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^l}\int_{T_m}\left(\int_{T_m} |\Phi_k(l,x) - \Psi_{k^{2m}}(l,x)|^2\, dx\right) dl \le \frac{1}{2} m \left(\frac{16}{\pi}\right)^m \varepsilon^2_{k^{2m}}. \tag{15}$$

Теорема 2.

$$\begin{aligned} &P\left\{l \in T_m : \max_{x\in T_m} |\Phi_k(l,x) - \Psi_{k^{3m}}(l,x)| < \sqrt{\varepsilon_{k^{3m}}}\right\} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m}\mu\left\{l \in T_m : \max_{x\in T_m} |\Phi_k(l,x) - \Psi_{k^{3m}}(l,x)| < \sqrt{\varepsilon_{k^{3m}}}\right\} > \\ &> 1 - \frac{1}{2} m (8/9)^m \varepsilon_{k^{3m}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Из теории рядов Фурье известно, что ε_N стремится к нулю при $N \to \infty$. Поэтому из Теорем 1 и 2 следует, что величины (13) и (14) стремятся к нулю по вероятности относительно параметра l, при $k \to \infty$.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $B \subseteq (1, 2, ..., m)$, $B \ne \emptyset$. Если $B = \{j_1, j_2, ..., j_q\}$, $1 \le q \le m$, $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_q \le m$, то через $Q(B)$ обозначим множество векторов n, удовлетворяющих условию

$$\begin{cases} n_j = 0 & \text{при } j \notin B, \\ n_j \ne 0 & \text{при } j \in B. \end{cases} \tag{17}$$

Пусть

$$\alpha_{n(B)}(\Delta_k^\nu) = \prod_{p=1}^{|B|} \left(e^{in_{j_p}k^{-1}\nu_{j_p}2\pi} - e^{in_{j_p}k^{-1}(\nu_{j_p}-1)2\pi} \right), \tag{18}$$

где $|B| = q$ – число элементов множества B.

Тогда имеем

$$\int_{\Delta_k^\nu} S_N(t,x)\,dx = c_0 \left(\frac{2\pi}{k}\right)^m +$$
$$+\sum_B \Big(\sum_{n\in Q(B),|n|\le N} c_n \alpha_{n(B)}(\Delta_k^\nu) e^{int} \prod_{p=1}^{|B|} (in_{j_p})^{-1} \Big) \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{m-|B|}, \tag{19}$$

$$\frac{1}{\mu(\Delta_k^\nu)} \int_{\Delta_k^\nu} S_N(t,x)\,dx = c_0 +$$
$$+\sum_B \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-|B|} \sum_{n\in Q(B),|n|\le N} c_n \alpha_{n(B)}(\Delta_k^\nu) e^{int} \prod_{p=1}^{|B|} (in_{j_p})^{-1}, \tag{20}$$

где c_0 - значение коэффициента c_n, когда n - нулевой вектор. Здесь внешняя сумма $\sum_B$ распространяется на непустые множества $B \subseteq (1,2,...,m)$.

Лемма 2.1. *Пусть $f(x) = f(x_1,...,x_m)$ - интегрируемая на T_m и 2π-периодическая по каждой переменной функция. Тогда для каждого интервала Δ_k^ν, определенного равенством (7), имеем*

$$\frac{1}{\mu(\Delta_k^\nu)} \int_{\Delta_k^\nu} f(t+x)\,dx = \frac{1}{\mu(\Delta_k^\nu(t))} \int_{\Delta_k^\nu(t)} f(x)\,dx =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\mu(\Delta_k^\nu)} \int_{\Delta_k^\nu} S_N(t,x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\mu(\Delta_k^\nu(t))} \int_{\Delta_k^\nu(t)} S_N(x)\,dx. \tag{21}$$

Доказательство. Достаточно показать, что для любого m-мерного интервала $\Delta = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_m,b_m]$, $\Delta \subset T_m$ имеет место следующее равенство

$$\int_\Delta f(t+x)\,dx = \int_{\Delta(t)} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_\Delta S_N(t,x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_{\Delta(t)} S_N(x)\,dx, \tag{22}$$

где

$$\Delta(t) = [a_1+t_1, b_1+t_1] \times \cdots \times [a_m+t_m, b_m+t_m], \quad t = (t_1,...,t_m). \tag{23}$$

Заметим, что если интегрируемая на T_m функция $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = \varphi(x_1,x_2,...,x_m) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\cdots\varphi_m(x_m),$$

где каждая функция φ_i интегрируема на $[0, 2\pi]$ и имеет период 2π, то кубическая сумма $S_N(\varphi, x)$ ее ряда Фурье имеет вид

$$S_N(\varphi, x) = S_N(\varphi, x_1, ..., x_m) = \prod_{i=1}^{m} S_N(\varphi_i, x_i), \tag{24}$$

где $S_N(\varphi_i, x_i)$ – частная сумма ряда Фурье функции $\varphi_i(x_i)$.

Положим

$$\varphi_i(x_i) = \begin{cases} 1, & x \in [a_i, b_i], \\ 0, & x \in [0, 2\pi) \setminus [a_i, b_i]. \end{cases} \tag{25}$$

Тогда

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{m} \varphi_i(x_i) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta, \\ 0, & x \in T_m \setminus \Delta. \end{cases} \tag{26}$$

Известно, что если $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi)$ и $\chi(u)$ - характеристическая функция интервала $[\alpha, \beta]$, то частные суммы ее ряда Фурье $S_N(\chi, u)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{N\to\infty} S_N(\chi, u) = \begin{cases} 1, & u \in (\alpha, \beta), \\ \frac{1}{2}, & u = \alpha \text{ или } u = \beta, \\ 0, & u \in [0, 2\pi) \setminus [\alpha, \beta]; \end{cases} \tag{27}$$

$$|S_N(\chi, u)| \le M, \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi), \tag{28}$$

где M - абсолютная постоянная.

Поэтому согласно (24) – (26) при любом фиксированном t и для почти всех $x \in T_m$

$$\lim_{N\to\infty} f(t + x) S_N(\varphi, x) = f(t + x)\varphi(x), \tag{29}$$

$$|f(t + x) S_N(\varphi, x)| \le M^m |f(t + x)|. \tag{30}$$

Так как для фиксированного t функция $|f(t + x)|$ интегрируема, то согласно (29) и (30) можно перейти к пределу под знаком интеграла. Получим

$$\lim_{N\to\infty} \int_{T_m} f(t + x) S_N(\varphi, x)\, dx = \int_{T_m} f(t + x)\varphi(x)\, dx = \int_{\Delta} f(t + x)\, dx. \tag{31}$$

Пусть

$$a_n = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T_m} \varphi(x) e^{inx}\, dx, \quad b_n = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T_m} f(t + x) e^{-inx}\, dx, \tag{32}$$

тогда

$$\int_{T_m} S_N(\varphi, x) f(t+x)\,dx = \int_{T_m} \left(\sum_{|n|\le N} a_n e^{inx} \right) f(t+x)\,dx = \\ = \sum_{|n|\le N} a_n \int_{T_m} f(t+x) e^{inx}\,dx = (2\pi)^m \sum_{|n|\le N} a_n b_{-n}. \tag{33}$$

Аналогично

$$\int_{T_m} S_N(f(t+x), x)\varphi(x)\,dx = (2\pi)^m \sum_{|n|\le N} a_{-n} b_n. \tag{34}$$

Так как правые части равенств (33) и (34) действительные числа и a_n, a_{-n}; b_n, b_{-n} комплексно сопряжены, то получаем

$$\sum_{|n|\le N} a_n b_{-n} = \overline{\sum_{|n|\le N} a_n b_{-n}} = \sum_{|n|\le N} \overline{a_n}\,\overline{b_{-n}} = \sum_{|n|\le N} a_{-n} b_n. \tag{35}$$

Из (33) - (35) следует, что

$$\int_{T_m} S_N(\varphi, x) f(t+x)\,dx = \int_{T_m} S_N(f(t+x), x)\varphi(x)\,dx = \\ = \int_{T_m} S_N(t, x)\varphi(x)\,dx = \int_{\Delta} S_N(t, x)\,dx. \tag{36}$$

С другой стороны, согласно (31)

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\Delta} S_N(t, x)\,dx = \int_{\Delta} f(t+x)\,dx. \tag{37}$$

Так как $S_N(t, x) = S_N(t+x)$,то из (37) следуют равенства (22). Лемма 2.1 доказана.

Для натуральных чисел N, k и вектора $\nu = (\nu_1, ..., \nu_m)$, $1 \le \nu_j \le k$, положим

$$R_N(\Delta_k^\nu, t) = \frac{1}{\mu(\Delta_k^\nu)} \int_{\Delta_k^\nu} f(t+x)\,dx - \frac{1}{\mu(\Delta_k^\nu)} \int_{\Delta_k^\nu} S_N(t+x)\,dx. \tag{38}$$

Заметим, что согласно Лемме 2.1 и (20) имеем

$$\lim_{N\to\infty} \left(c_0 + \sum_B \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-|B|} \sum_{n\in Q(B), |n|\le N} c_n \alpha_{n(B)}(\Delta_k^\nu) e^{int} \prod_{p=1}^{|B|} (in_{j_p})^{-1} \right) = \\ = \frac{1}{\mu(\Delta_k^\nu)} \int_{\Delta_k^\nu} f(t+x)\,dx \tag{39}$$

для всех $t \in T_m$.

Нам понадобится также следующая

Лемма 2.2 *При фиксированных* N *и* k, $k \geq 7$ *и для любого интервала* Δ_k^ν, $\nu = (\nu_1, ..., \nu\ )$, $1 \leq \nu_j \leq k$ *имеет место следующее неравенство :*

$$\int_{T_m} |R_N(\Delta_k^\nu, t)|^2\, dt \leq \frac{1}{2} m (16/\pi)^m k^{2m} \frac{\varepsilon_N^2}{N}. \tag{40}$$

Доказательство. Для $B = (j_1, ..., j_q)$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq m$, $q = |B|$ через $Q_N(B)$ обозначим

$$Q_N(B) = \{n = (n_1, ..., n_m) \in Q(B):\ \text{хотя бы}$$

$$\text{для одного } p,\quad 1 \leq p \leq q,\quad |n_{j_p}| > N\}.$$

Из (39)следует, что в метрике $L^2(T_m)$ верно равенство

$$R_N(\Delta_k^\nu, t) = c_0 + \sum_B \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-|B|} \sum_{n \in Q(B)} c_n \alpha_{n(B)}(\Delta_k^\nu) e^{int} \prod_{p=1}^{|B|} (in_{j_p})^{-1} -$$

$$- \left(c_0 + \sum_B \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-|B|} \sum_{n \in Q(B), |n| \leq N} c_n \alpha_{n(B)}(\Delta_k^\nu) e^{int} \prod_{p=1}^{|B|} (in_{j_p})^{-1}\right) = \tag{41}$$

$$= \sum_B \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-|B|} \sum_{n \in Q_N(B)} c_n \alpha_{n(B)}(\Delta_k^\nu) e^{int} \prod_{p=1}^{|B|} (in_{j_p})^{-1}.$$

Тогда согласно (20), (38), (39), (41) и ограниченности $|\alpha_{n(B)}(\Delta_k^\nu)| \leq 2^{|B|}$, имеем

$$\int_{T_m} |R_N(\Delta_k^\nu, t)|^2\, dt = \sum_B \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-2|B|} (2\pi)^m \sum_{n \in Q_N(B)} |c_n|^2 |\alpha_{n(B)}(\Delta_k^\nu)|^2 \prod_{p=1}^{|B|} n_{j_p}^{-2} \leq$$

$$\leq \sum_B \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-2|B|} (2\pi)^m 2^{2|B|} \sum_{n \in Q_N(B)} |c_n|^2 \prod_{p=1}^{|B|} n_{j_p}^{-2}. \tag{42}$$

Очевидно, что

$$\sum_{n \in Q_N(B)} |c_n|^2 \prod_{p=1}^{|B|} n_{j_p}^{-2} \leq \sum_{p=1}^{|B|} \left(\sum_{|n_{j_p}| > N} \sum_{l \neq p} \sum_{|n_{j_l}| \geq 1} \frac{|c'(n_{j_1}, ..., n_{j_{|B|}})|^2}{n_{j_p}^2} \prod_{s \neq l, s=1}^{|B|} n_{j_s}^{-2} \right), \tag{43}$$

где

$$c'(n_{j_1}, ..., n_{j_{|B|}}) = c_n \qquad \text{при } n_j = \begin{cases} 0, & \text{при } j \neq j_p, \\ n_{j_p}, |n_{j_p}| \geq 1, & \text{при } j = j_p. \end{cases} \tag{44}$$

Из (43), (44) и (14) следует

$$\sum_{n \in Q_N(B)} |c_n|^2 \prod_{p=1}^{|B|} n_{j_p}^{-2} \leq \frac{2\varepsilon_N^2}{N} |B| \sum_{|n_1|=1}^{\infty} \cdots \sum_{|n_{|B|-1}|=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{|B|-1} n_l^{-2} =$$

$$= \frac{2\varepsilon_N^2}{N} |B| \left(\sum_{|s|=1}^{\infty} \frac{1}{s^2}\right)^{|B|-1} \leq 2 \cdot 4^{|B|-1} |B| \frac{\varepsilon_N^2}{N}. \tag{45}$$

Так как $\left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-2|B|} < \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-2m}$ при $k \geq 7$ и количество множеств подмножества $B \subseteq (1, 2, \dots, m)$ не превосходит 2^m, то из (42), (45) получим

$$\int_{T_m} |R_N(\Delta_k^\nu, t)|^2 \, dt \leq \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-2m} (2\pi)^m 2^{2m} 2^m 2 \cdot 4^{m-1} m \frac{\varepsilon_N^2}{N}. \tag{46}$$

Теперь формула (10) следует из (46) и Лемма 2.2 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Доказательство Теоремы 1. Пусть $C(m) = 1/2m(16/\pi)^m$. Согласно Лемме 2.2 и формулам (10), (11), (38) имеем

$$\int_{T_m} \left(\int_{T_m} |\Phi_k(t, x) - \Psi_N(t, x)|^2 \, dx \right) dt =$$

$$= \int_{T_m} \left(\sum_{\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)} \int_{\Delta_k^\nu} |\Phi_k(t, x) - \Psi_N(t, x)|^2 \, dx \right) dt =$$

$$= \int_{T_m} \left(\sum_{\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)} \int_{\Delta_k^\nu} |R_N(\Delta_k^\nu, t)|^2 \, dx \right) dt =$$

$$= \left(\frac{2\pi}{k}\right)^m \sum_{=(\nu_1, \dots, \nu_m)} \int_{T_m} |R_N(\Delta_k^\nu, t)|^2 \, dt \leq \left(\frac{2\pi}{k}\right)^m C(m) k^{2m} \frac{\varepsilon_N^2}{N} k^m. \tag{47}$$

Здесь использован тот факт, что количество векторов $\nu = (\nu_1, \dots \nu_m)$, $1 \leq \nu_j \leq$ $\leq k$ равно k^m и что T_m - объединение попарно непересекающихся m-мерных сегментов Δ_k^ν при фиксированном k. Положим $N = k^{2m}$, тогда

$$\int_{T_m} \left(\int_{T_m} |\Phi_k(t, x) - \Psi_{k^{2m}}(t, x)|^2 \, dx \right) dt \leq (2\pi)^m C(m) \varepsilon_{k^{2m}}^2 \tag{48}$$

или в терминах вероятности P на T_m, $dp = \frac{1}{(2\pi)^m} dt$ имеем

$$\mathbb{E} \left(\int_{T_m} |\Phi_k(t, x) - \Psi_{k^{2m}}(t, x)|^2 \, dx \right) \leq C(m) \varepsilon_{k^{2m}}^2. \tag{49}$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2. Заметим, что согласно (38), (10) и (11)

$$\Phi_k(t, x) - \Psi_N(t, x) = R_N(\Delta_k^\nu, t), \quad x \in \Delta_k^\nu. \tag{50}$$

Полагая в равенстве (50) $N = k^{3m}$, получим

$$|\Phi_k(t, x) - \Psi_{k^{3m}}(t, x)|^2 = |R_{k^{3m}}(\Delta_k^\nu, t)|^2, \quad x \in \Delta_k^\nu. \tag{51}$$

Согласно Лемме 2.2, для $N = k^{3m}$ имеем

$$\int_{T_m} |R_{k^{3m}}(\Delta_k^\nu, t)|^2\, dt \le C(m)\frac{\varepsilon_{k^{3m}}^2}{k^m}. \tag{52}$$

Обозначим

$$E_k^\nu = \{t \in T_m : |R_{k^{3m}}(\Delta_k^\nu, t)|^2 > \varepsilon_{k^{3m}}\}. \tag{53}$$

Из (52) для всех $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$

$$\mu(E_k^\nu) \le C(m)\frac{\varepsilon_{k^{3m}}}{k^m}, \tag{54}$$

и поэтому

$$\mu\left(\bigcup_{\nu=(\nu_1,\dots,\nu_m)} E_k^\nu\right) \le \sum_{\nu=(\nu_1,\dots,\nu_m)} \mu(E_k^\nu) < C(m)\varepsilon_{k^{3m}}. \tag{55}$$

Если $x \in T_m$ и

$$t \in T_m \setminus \bigcup_\nu E_k^\nu, \tag{56}$$

то $x \in \Delta_k^\nu$ для некоторого ν и так как $t \notin E_k^\nu$, то имеем

$$|\Phi_k(t, x) - \Psi_{k^{3m}}(t, x)| \le \sqrt{\varepsilon_{k^{3m}}}. \tag{57}$$

Из (55) и (57) следует, что

$$\mu\{t \in T_m : \max |\Phi_k(t, x) - \Psi_{k^{3m}}(t, x)| < \sqrt{\varepsilon_{k^{3m}}}\} > (2\pi)^m - C(m)\varepsilon_{k^{3m}} \tag{58}$$

и следовательно

$$\begin{gathered} P\{t \in T_m : \max |\Phi_k(t, x) - \Psi_{k^{3m}}(t, x)| < \sqrt{\varepsilon_{k^{3m}}}\} > \\ > 1 - \frac{1}{(2\pi)^m}C(m)\varepsilon_{k^{3m}} > 1 - \frac{1}{2}m(8/9)^m\varepsilon_{k^{3m}}. \end{gathered} \tag{59}$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1 Для конкретных значений m постоянную $C(m) = 1/2m(16/\pi)^m$ в Теоремах 1 и 2 можно сделать меньше. Например, если $m = 1$, то эту постоянную можно заменить числом 2.

Замечание 2. Согласно Лемме 2.2, при подходящем выборе последовательности $\{N_k\}$, средние $\Psi_{N_k}(t, x)$ сходятся в L_p, $p \ge 1$-метрике к функции $f(t + x)$ для почти всех t.

Теперь возможно также оценить скорость приближения. Верна следующая

Теорема 3. *Пусть $f(x) \in L^p(T_m)$, $1 < p < 2$, 2π- периодична по каждой переменной x_j, $1 \le j \le m$, тогда для почти всех $t \in T_m$ существует натуральное число $k(t)$ такое, что при $k > k(t)$*

$$\left(\int_{T_m} |\Psi_{k^{2m+2}}(t,x) - f(t+x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le$$
$$\le c\varepsilon_{k^{2m+2}} + \left(\int_{T_m} |\Phi_k(t,x) - f(t+x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \tag{60}$$

где c - постоянная, зависящая от p и m

$$\Psi_{k^{2m+2}}(t,x) = \frac{1}{\mu(\Delta_k^\nu)}\int_{\Delta_k^\nu} S_{k^{2m+2}}(t+u)\,du, \quad x \in \Delta_k^\nu, \tag{61}$$

а $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ - последовательность кубических частных сумм ряда Фурье функции $f(x)$.

Доказательство. Из равенства (50) следует, что

$$\int_{T_m}\left(\int_{T_m} |\Phi_k(t,x) - \Psi_N(t,x)|^p\,dx\right)dt =$$
$$= \int_{T_m}\left(\sum_\nu \int_{\Delta_k^\nu} |\Phi_k(t,x) - \Psi_N(t,x)|^p\,dx\right)dt =$$
$$\int_{T_m}\left(\sum_\nu \mu(\Delta_k^\nu)|R_N(\Delta_k^\nu,t)|^p\right)dt = \tag{62}$$
$$= \left(\frac{2\pi}{k}\right)^m \sum_\nu \int_{T_m} |R_N(\Delta_k^\nu,t)|^p\,dt.$$

Применяя неравенство Гельдера для сопряженных чисел $p' = 2/p$, $q' = 2/(2-p)$, из неравенства (40) получим

$$\int_{T_m} |R_N(\Delta_k^\nu,t)|^p\,dt \le \left(\int_{T_m} |R_N(\Delta_k^\nu,t)|^2\,dt\right)^{p/2} \left((2\pi)^m\right)^{\frac{2-p}{2}} \le ck^{mp}\frac{\varepsilon_N^p}{N^{p/2}}, \tag{63}$$

где постоянная c зависит от p и m.

Легко видеть , что неравенство (63) верно также при $p = 1$. Из (62) и (63) следует, что при $N = k^{2m+2}$, $k = 7, 8, \ldots$

$$\int_{T_m}\left(\int_{T_m} |\Phi_k(t,x) - \Psi_{k^{2m+2}}(t,x)|^p\,dx\right)dt \le c\left(\frac{2\pi}{k}\right)^m k^m k^{mp}\frac{\varepsilon_{k^{2m+2}}^p}{k^p k^{mp}} \le c'\frac{\varepsilon_{k^{2m+2}}^p}{k^p}. \tag{64}$$

Обозначим через E_k множество всех тех $t \in T_m$, для которых

$$\int_{T_m} |\Phi_k(t,x) - \Psi_{k^{2m+2}}(t,x)|^p \, dx > c' \varepsilon^p_{k^{2m+2}}. \tag{65}$$

Тогда согласно (64)

$$\mu(E_k) < k^{-p}. \tag{66}$$

Пусть

$$E = \bigcap_{l=7}^{\infty} \bigcup_{k=l}^{\infty} E_k. \tag{67}$$

Так как $p > 1$, то в силу (66), имеем

$$\mu(E) = 0. \tag{68}$$

Если $t \in T_m \setminus E$, то $t \notin E_k$, $k \geq l = l(t)$ и

$$\left(\int_{T_m} |\Phi_k(t,x) - \Psi_{k^{2m+2}}(t,x)|^p \, dx \right)^{1/p} \leq c'' \varepsilon_{k^{2m+2}}. \tag{69}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} &\left(\int_{T_m} |\Psi_{k^{2m+2}}(t,x) - f(t+x)|^p \, dx \right)^{1/p} \leq \\ &\leq c'' \varepsilon_{k^{2m+2}} + \left(\int_{T_m} |\Phi_k(t,x) - f(t+x)|^p \, dx \right)^{1/p}. \end{aligned} \tag{70}$$

Теорема 3 доказана.

Рассматривая определенные на $T_m(t) = [t_1, t_1 + 2\pi) \times \cdots \times [t_m, t_m + 2\pi)$ функции

$$\Phi^*_k(u) = \frac{1}{\mu(\Delta^\nu_k(t))} \int_{\Delta^\nu_k(t)} f(v) \, dv, \quad u \in \Delta^\nu_k(t), \tag{71}$$

$$\Psi^*_{k^{2m+2}}(u) = \frac{1}{\mu(\Delta^\nu_k(t))} \int_{\Delta^\nu_k(t)} S_{k^{2m+2}}(v) \, dv, \quad u \in \Delta^\nu_k(t), \tag{72}$$

и заметив, что

$$\Psi_{k^{2m+2}}(t,x) = \Psi^*_{k^{2m+2}}(t+x), \quad \Phi_k(t,x) = \Phi^*_k(t+x), \quad x \in \Delta^\nu_k, \tag{73}$$

из (70) получаем, что для почти всех $t \in T_m$ выполняется неравенство

$$\left(\int_{T_m(t)} |f(u) - \Psi^*_{k^{2m+2}}(u)|^p \, du \right)^{1/p} \leq c'' \varepsilon_{k^{2m+2}} + \left(\int_{T_m(t)} |\Phi^*_k(u) - f(u)|^p \, du \right)^{1/p} \tag{74}$$

при всех k не превосходящих некоторого $k(t)$.

Второе слагаемое правой части неравенства (74) стремится к нулю при $k \to \infty$. Так как $\varepsilon_N \to 0$, то при $N \to \infty$ получаем

Следствие 1. *Пусть $f(x) \in L^p(T_m)$, $1 < p < 2$. Тогда почти для всех $t \in T_m$*

$$\lim_{k\to\infty} \left(\int_{T_m(t)} |f(u) - \Psi^*_{k^{2m+2}}(u)|^p \, du \right)^{1/p} = 0 \tag{75}$$

и для $k > k(t)$ выполняется неравенство (74).

Пусть $p = 1$ и $N_k = ([k^{2+\varepsilon}] + 1)k^{2m}$, где $\varepsilon > 0$ и $[\cdot]$ обозначает целую часть числа. Тогда из неравенства (63) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{T_m} |R_{([k^{2+\varepsilon}]+1)k^{2m}}(\Delta^\nu_k, t)| \, dt \le ck^m \varepsilon_{([k^{2+\varepsilon}]+1)k^{2m}}(([k^{2+\varepsilon}] + 1)k^{2m})^{-1/2} \le \\ \le c\varepsilon_{([k^{2+\varepsilon}]+1)k^{2m}} k^{-1-\varepsilon/2}. \end{aligned} \tag{76}$$

Повторяя вышеприведенные рассуждения и применяя неравенство (76), получаем

Следствие 2. *Пусть $f(x) \in L^1(T_m)$ – функция 2π-периодическая по каждой переменной и $\varepsilon > 0$. Тогда для почти всех $t \in T_m$*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{T_m(t)} \left| f(u) - \Psi^*_{([k^{2+\varepsilon}]+1)k^{2m}}(u) \right| du = 0 \tag{77}$$

Более того, неравенство

$$\int_{T_m(t)} \left| f(u) - \Psi^*_{([k^{2+\varepsilon}]+1)k^{2m}}(u) \right| du \le c\varepsilon_{([k^{2+\varepsilon}]+1)k^{2m}} + \int_{T_m(t)} |f(u) - \Phi^*_k(u)| \, du \tag{78}$$

выполняется для всех $k \ge k(t)$, где c – абсолютная постоянная и

$$\Psi^*_{([k^{2+\varepsilon}]+1)k^{2m}}(u) = \frac{1}{\mu(\Delta^\nu_k(t))} \int_{\Delta^\nu_k(t)} S_{([k^{2+\varepsilon}]+1)k^{2m}}(v) \, dv, \quad u \in \Delta^\nu_k(t). \tag{79}$$

Замечание 3. Вышеприведенные результаты могут быть использованы при приближенном вычислении сумм рядов Фурье. Решения многих прикладных задач находятся в форме одномерных или кратных рядов Фурье, следовательно возникает задача приближенного вычисления сумм этих рядов. Если сумма ряда Фурье является разрывной или сильно колеблющейся функцией, то вместо вычисления значений функции в отдельных точках целесообразно вычислять значения интегральных средних этой функции на интервалах, полученных разбиением области определения на малые участки.

Известно, что даже в одномерном случае существуют ряды Фурье

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{80}$$

которые расходятся почти всюду на отрезке $[0,2\pi)$, см. [1], стр. 391 и [2]. Поэтому вычисление значения суммы $f(x)$ в индивидуальной точке при помощи предела ее частных сумм вообще говоря невозможно.

С другой стороны, коэффициенты a_n, b_n ряда Фурье (80) могут стремиться к нулю сколь угодно медленно, см. [1], стр. 222. Поэтому затруднено вычисление интегральных средних функции $f(x)$, хотя как известно (см. Лемму 2.1), для любого интервала $[a,b]\subset[0,2\pi)$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{b-a}\int_a^b S_N(x)\,dx=\\&=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}(\sin nb-\sin na)+\frac{b_n}{n}(\cos na-\cos nb)\right)\end{aligned} \tag{81}$$

и ряд в правой части (81) сходится. При медленном стремлении к нулю коэффициентов a_n, b_n ряд из абсолютных значений коэффициентов ряда (81) не будет абсолютно сходиться. В этом случае невозможно оценить точность приближения частных сумм ряда к их пределу.

Согласно Теоремам 1 и 2, для любого ряда Фурье с заданными коэффициентами и при достаточно больших k с большей вероятностью и с большей точностью можно вычислить значение средних $\Phi_k^*(u)$ на торах $T_m(t)$, полученных случайными сдвигами по вектору $t=(t_1,\dots,t_m)$ тора T_m. Согласно определениям $\Phi_k^*(u)$ и $\Delta_k^\nu(t)$ (см. (8) и (71)), достаточно вычислить величины

$$\frac{1}{\mu(\Delta_k^\nu(t))}\int_{\Delta_k^\nu(t)}S_N(v)\,dv \tag{82}$$

для $N=k^{2m},k^{3m}$ и заданных значений $t\in T_m$. Здесь $S_{k^{2m}}(v)$ и $S_{k^{3m}}(v)$ являются m-мерными тригонометрическими полиномами степени k^{2m} и k^{3m}, соответственно, коэффициенты которых заданы.

Вычисление интегральных средних целесообразно также в том случае, когда ряды Фурье сходятся и можно не применять случайные сдвиги.

Пример. В качестве примера рассмотрим медленно сходящийся ряд

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, \tag{83}$$

являющийся рядом Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,\pi); \\ 1, & x \in [\pi, 2\pi). \end{cases} \tag{84}$$

В случае $k = 32$, используя компьютер IBM-80286 и язык PASCAL (см. Приложение 1) вычислены интегральные средние

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{32^2}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, \tag{85}$$

на интервалах

$$\Delta_j = \left[\frac{2\pi(j-1)}{32}, \frac{2\pi j}{32}\right).$$

Из приведенной ниже таблицы (Приложение 2) видно, что отклонение полученных чисел от интегральных средних $f(x)$ на некоторых интервалах достаточно мало.

На интервалах, "далеких" от точек разрыва, это отклонение имеет порядок 10^{-8}, а на "близких" к точкам разрыва – имеет порядок 10^{-3}. Последнее обстоятельство вызвано явлением Гиббса.

В заключение автор выражает благодарность Г.Г.Геворкяну за полезные дискуссии.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

```
Program fit ;
var F,r : double ;
    j,n : longint ;
    k,k2 : longint ;
    outf : text ;
begin
    Assign(outf,'fit.dat') ; rewrite(outf) ;
    write('k = ') ; readln(k) ;
    writeln(outf,' k =',k) ;
    writeln(outf,' j =',j) ;
    k2 := 1 shl (k - 1) ; j := 1 ;
repeat F := 0.0 ;
    for n := 1 to (1 shl (2*l)) do begin
```

```
    r := cos(((2*n - 1)*j/k2)*Pi);
    r := r - cos(((2*n - 1) * (j - 1)/k2)*Pi);
    F := F + r/sqr(2*n - 1); end;
    F := 0.5 + F*(k2 shl 1)/sqr(Pi);
    writeln(outf,j,' ',j*Pi/k2,' ',F);
    j := j + 1;
until j> 2*k2;
    close(outf);
end.
```

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

Table 1, $k = 32$

j	x	F
1	0.19634954084936	0.00079156195838
2	0.39269908169872	0.00000000734476
3	0.58904862254808	0.00000000136438
4	0.78539816339744	0.00000000048298
5	0.98174770424681	0.00000000023047
6	1.17809724509617	0.00000000013410
7	1.37444678594553	0.00000000009268
8	1.57079632679490	0.00000000007655
9	1.76714586764426	0.00000000007655
10	1.96349540849362	0.00000000009268
11	2.15984494934298	0.00000000013410
12	2.35619449019234	0.00000000023017
13	2.55254403104171	0.00000000048298
14	2.74889357189107	0.00000000136438
15	2.94524311274043	0.00000000734476
16	3.14159265358979	0.00079156195838
17	3.33794219443916	0.99920843804162
18	3.53429173528852	0.99999999265524
19	3.73064127613788	0.99999999863562
20	3.92699081698724	0.99999999951702
21	4.12334035783660	0.99999999976953
22	4.31968989868597	0.99999999986590
23	4.51603943953533	0.99999999990732
24	4.71238898038469	0.99999999992345
25	4.90873852123405	0.99999999992345
26	5.10508806208341	0.99999999990732
27	5.30143760293279	0.99999999986590
28	5.49778714378214	0.99999999976953
29	5.69413668463150	0.99999999951702
30	5.89048622548086	0.99999999863562
31	6.08683576633022	0.99999999265524
32	6.28318530717959	0.99920843804162

ABSTRACT. The paper contains theorems on approximation of integral means of periodic function of several variables by integral means of partial sums of their Fourier series. The integral means are taken over cells in a random partition of space.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Москва, Наука, 1960.
2. A. N. Kolmogorov, "Une serie de Fourier-Lebesgue divergente presque partout", FM. vol. 4, pp. 324 – 328, 1923.

1 Декабря 1992

Ереванский государственный университет,
Институт прикладных проблем физики
НАН Армении

О ФАКТОРИЗАЦИИ f-ЦИРКУЛЯНТНЫХ МАТРИЦ ФУНКЦИЙ

А. Г. Камалян, В. А. Оганян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, No. 1, 1993

В работе рассматривается задача Винера–Хопфа факторизации в винеровской алгебре для матриц–функций f–циркулянтного типа в случае, когда f - тригонометрический полином. Устанавливается, что факторизацию этих матриц функций можно свести к факторизации рациональных матриц–функций. При некоторых f построена мероморфная факторизация.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{T}$ - единичная окружность в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, W - винеровская алгебра всех функций, разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды Фурье

$$W = \left\{ a : \mathbb{T} \longmapsto \mathbb{C}, \quad a = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k t^k, \quad \|a\|_W = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| < \infty \right\},$$

I - единичный оператор, а S - оператор сингулярного интегрирования вдоль $\mathbb{T}$, действующего в пространствах $L_2(\mathbb{T})$ и W :

$$(Sa)(t) = \frac{1}{i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{a(\tau)}{\tau - t} \, d\tau.$$

Рассмотрим следующие проекторы $P_\pm = 1/2(I \pm S)$, $\pi_m^\pm = t^m P_\pm t^{-m} (m \in \mathbb{Z})$, $\pi_{m,n} = I - (\pi_n^+ + \pi_m^-)$ $(m, n \in \mathbb{Z} : m < n)$. Легко видеть, что

$$\pi_m^+(a) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k t^k, \quad \pi_m^-(a) = \sum_{k=-\infty}^{m-1} a_k t^k, \quad \pi_{m,n}(a) = \sum_{k=m}^{n-1} a_k t^k,$$

где

$$a = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k t^k \in L_2(\mathbb{T}).$$

Определим следующие классы функций : $W_+ = \pi_0^+(W)$, $W_- = \pi_1^-(W)$, $M_\pm =$

$= W_\pm + \mathcal{R}$, где $\mathcal{R}$ – алгебра рациональных функций с полюсами вне $\mathbb{T}$. Условимся в дальнейшем множество n – мерных векторов (матриц порядка $n \times n$) с элементами из класса L обозначать через L^n $(L^{n\times n})$.

Под факторизацией Винера-Хопфа (или просто факторизацией) матрицы-функции $G \in W^{n\times n}$ в винеровской алгебре W понимается следующее представление :

$$G(t) = G_+(t)\Lambda(t)G_-(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{1}$$

где $G_+^{\pm 1} \in W_+^{n\times n}$, $G_-^{\pm} \in W_-^{n\times n}$, $\Lambda(t) = \operatorname{diag}\,[t^{\kappa_1}, ..., t^{\kappa_n}]$ и $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \cdots \geq \kappa_n$ – целые числа, называемые *частными индексами* матрицы-функции G. В случае нулевых частных индексов факторизация называется *канонической*.

Для факторизуемости матрицы-функции $G \in W^{n\times n}$ необходимо и достаточно, чтобы $\det G(t) \neq 0$ всюду на $\mathbb{T}$ (см. [1]). Хорошо известно, что в скалярном случае $(n = 1)$ факторы $G_\pm$ могут быть построены в явном виде посредством проекторов $P_\pm$. Однако в матричном случае $(n > 1)$ эффективные методы факторизации известны только для частных классов (см. [1], [2]). Наиболее глубокие результаты в этом направлении получены для рациональных матриц-функций (см. [1] - [7]).

Под мероморфной факторизацией $G \in W^{n\times n}$ в пространстве W будем понимать представление

$$G(t) = A_+(t)A_-(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{2}$$

где $A_\pm^{\pm 1} \in M_\pm^{n\times n}$. Как известно, представление (1) можно получить из мероморфной факторизации с помощью конечного числа алгебраических операций (см. [2]). Представление (2) будем называть *функционально - теоретической факторизацией* матрицы-функции G, если $A_\pm^{\pm 1}$ определены почти всюду и допускают аналитическое продолжение, соответственно, в области $\mathbb{T}_\pm = \{z : |z| \lessgtr 1\}$.

В последние два десятилетия появилось большое количество работ, посвященных исследованию факторизации матриц-функций вида $\sum_{k=0}^{n-1} a_k Q^k$. Здесь

$a_k \in L_\infty(\mathbb{T})$, $Q \in \mathcal{R}^{n\times n}$, а $Q^n = fI_n$ (I_n – единичная матрица), $f \in \mathcal{R}$. Важным подклассом этих матриц-функций являются f- *циркулянтные матрицы-функции* :

$$\begin{pmatrix} a_o & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1}f & a_o & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2}f & a_{n-1}f & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 f & a_2 f & \cdots & a_o \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Интерес к этим матрицам-функциям вызван в первую очередь многочисленными приложениями в математической физике (см., например, [8] – [11]). Функционально-теоретическая факторизация матриц-функций вида (3) построена в работах [8], [12] ($n = 2$), [13] ($n \geq 2$). В [14] (см. также [9]) предложена процедура преобразования функционально-теоретической факторизации в факторизацию Винер-Хопфа. Наибольший прогресс при исследовании этих матриц-функций достигнут в случае $f = g^n$, $g \in \mathcal{R}$. Так, в работах [15] ($n = 2$) и [16] ($n \geq 2$) предложены эффективные методы факторизации. А в [18] ($n = 2$) получены необходимые и достаточные условия канонической факторизации и найдены факторы. Случаи конкретных f рассмотрены в [18] – [20]. Так, например, в работе [20] (более подробно см. [1], глава 6, §1), полностью исследован случай $f = t^{-1}$. Матрицы-функции вида (3) рассмотрены также в [21], [22]. В [23] задача мероморфной факторизации более широкого класса матриц-функций сведена к последовательному решению нескольких задач Римана на некоторой римановой поверхности.

В настоящей работе предлагается процедура сведения проблемы факторизации матрицы-функции к проблеме вида (3) к факторизации рациональной матрицы-функции (Теоремы 6, 7). В отличие от [14], мы избегаем всякого рода аппроксимаций. Для частных случаев f построены явные формулу мероморфной факторизации (Теорема 8).

§1. КОММУТАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ

Пусть

$$f = \sum_{k=m_2}^{m_1} f_k z^k, \quad (z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, \quad m_2 \leq m_1),$$

$f(z) \neq 0$ на $\mathbb{T}$ и максимум функции $|f|$ на $\mathbb{T}$ достигается в точке $z_o = e^{i\theta_o}$ $(-\pi < \theta_o < \pi)$. Выберем некоторую ветвь функции $f^{1/n}$, голоморфную в области

$$U = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad |\arg z - \theta_o| < \pi\}.$$

В частности $f^{1/n}$ непрерывна на множестве $\mathbb{T} \setminus \{-z_o\}$. Мы воспользуемся этой специальной ветвью в §4.

Каждому $a = \operatorname{col}[a_i]_{i=0}^{n-1} \in L_2^n(\mathbb{T})$ сопоставим матрицу-функцию ω_a, определенную формулой (3). Ясно, что $\omega_a\omega_b = \omega_b\omega_a$ для любых $a, b \in L_2^n(\mathbb{T})$. Пусть $A \subset L_\infty(\mathbb{T})$ – некоторая банахова алгебра с единицей, содержащая f, с нормой $\|\cdot\|_A$. Нетрудно убедиться, что $\Omega_A(f) = \{\omega_a;\ a \in A^n\}$ – коммутативная банахова алгебра с нормой

$$\|\omega_a\|_\Omega = \sum_{k=0}^{n-1} \|f\|_A^{k/n} \|a_k\|_A, \quad a = \operatorname{col}[a_i]_{i=0}^{n-1} \in A^n.$$

Оператор $\omega : A^n \longmapsto \Omega_A(f)$ $(\omega(a) = \omega_a)$ естественным образом определяет произведение на A^n: $ab = \omega^{-1}(\omega_a\omega_b)$. Легко видеть, что если $c = ab = \operatorname{col}[c_i]_{i=0}^{n-1}$, где $a = \operatorname{col}[a_i]_{i=0}^{n-1}$, $b = \operatorname{col}[b_i]_{i=0}^{n-1}$, то

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} + f \sum_{j=i+1}^{n-1} a_j b_{n-j+i}. \tag{4}$$

Определенное таким образом произведение с нормой $\|a\|_{A^n} = \|\omega_a\|_\Omega$ превращает A^n в коммутативную банахову алгебру с единицей $e = \operatorname{col}[1, 0, \dots, 0]$. Обозначим эту алгебру через $A^n(f)$. Очевидно, что ω является изометрическим изоморфизмом алгебр $A^n(f)$ и $\Omega_A(f)$. Условимся также группу обратимых элементов произвольной алгебры B обозначать через GB.

Сопоставим вектор-функции $a = \operatorname{col}[a_i]_{i=0}^{n-1} \in L_\infty^n(f)$ диагональную матрицу-функцию $\lambda_a = \operatorname{diag}[\lambda_0^a, \dots, \lambda_{n-1}^a]$, где

$$\lambda_k^a = \sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon^{sk} a_s f^{s/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad \varepsilon = \exp(2i\pi/n). \tag{5}$$

Пусть $D_A = \{\lambda_a : a \in A^n(f)\}$. Введем матрицы-функции $F = \operatorname{diag}[1, f^{1/n}, \dots, f^{(n-1)/n}]$ и $E = [\varepsilon^{ks}]_{k,s=0}^{n-1}$.

Лемма 1. *Для любого $a \in L^n_\infty(f)$ имеет место следующее равенство :*

$$\omega_a = FE\lambda_a E^{-1}F^{-1}. \tag{6}$$

Доказательство. Учитывая, что

$$E^{-1} = \frac{1}{n}[\varepsilon^{-ks}]_{k,s=0}^{n-1}$$

в справедливости этого утверждения можно убедиться непосредственной проверкой.

Следствие 1. *Множество собственных значений матрицы $\omega_a(t)$ совпадает с множеством $\{\lambda_k^a(t)\}_{k=0}^{n-1}$* и $\det \omega_a = \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k^n$.

Следствие 2. *Пусть D_∞ – множество всех диагональных матриц-функций из $L^{n\times n}_\infty(\mathbb{T})$. Тогда $D_\infty = D_{L_\infty}$. Отображение $\lambda : L^n_\infty(f) \longmapsto D_\infty$, действующее по правилу $\lambda(a) = \lambda_a$ является изоморфизмом этих алгебр. Если $\mu \in D_\infty$, $\mu = diag\,[\mu_0, \mu_1, ..., \mu_{n-1}]$, $c = \lambda^{-1}(\mu) = col\,[c_i]_{i=0}^{n-1}$, то*

$$c_k = \frac{1}{n} f^{-k/n} \sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon^{-sk} \mu_s, \quad k = 0, 1, ..., n-1. \tag{7}$$

Следствие 3. *Для того чтобы $a \in GL^n_\infty(f)$ необходимо и достаточно, чтобы $\lambda_a \in GD_\infty$.*

Следствие 4. *Для $a \in L^n_\infty(f)$ справедливо равенство*

$$\exp(\omega_a) = FE\exp(\lambda_a)E^{-1}F^{-1}. \tag{8}$$

Из Следствия 3 вытекает, что $\ln \lambda_a \in D_\infty$ как только $a \in GL^n_\infty(f)$. Следовательно, в силу Следствия 2. мы можем определить отображение $\tau : GL^n_\infty(f) \longmapsto L^n_\infty(f)$ действующее следующим образом : $\tau(a) = \tau_a = \lambda^{-1}(\ln \lambda_a)$. Пусть $\tau_a = col\,[\tau_i^a]_{i=0}^{n-1}$.

Лемма 2. *Если $a \in GL^n_\infty(f)$, то τ_a является логарифмом a, и*

$$\tau_k^a = \frac{1}{n} f^{-k/n} \sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon^{-sk} \ln \lambda_s^a, \quad k = 0, 1, ..., n-1. \tag{9}$$

Доказательство. Из определения τ_a и равенства (6) имеем

$$\omega_{\tau_a} = FE\ln(\lambda_a)E^{-1}F^{-1}.$$

В силу Следствия 4 получаем, что $\exp(\omega_{\tau_a}) = FE\lambda_a E^{-1}F^{-1} = \omega_a$, т.е. $\exp\tau_a = a$. Таким образом, (9) является следствием (7). Лемма 2 доказана.

§2 ФУНКЦИОНАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ

Пусть $m_- = \min(0; -m_1)$, $m_+ = \max(0; -m_2)$. При $m_+ - m_- \geq 1$ проекторы π_+, π_0, π_-, действующие на $L_2^n(\mathbb{T})$, определим следующим образом :

$$\pi_+ a = \operatorname{col}\,[\pi_0^+ a_0, \pi_{m_+}^+ a_1, ..., \pi_{m_+}^+ a_{n-1}],$$

$$\pi_- a = \operatorname{col}\,[\pi_0^- a_0, \pi_{m_-+1}^- a_1, ..., \pi_{m_-+1}^- a_{n-1}], \quad \pi_0 a = a - (\pi_+ a + \pi_- a),$$

где $a = \operatorname{col}\,[a_i]_{i=0}^{n-1}$. В случае $m_+ = m_-$, сохраняя определение π_+, будем считать, что $\pi_- a = a - \pi_+ a$ и $\pi_0 a = 0$.

Замечание 1. Если $m_+ - m_- \geq 2$, то $\pi_0 a = \operatorname{col}\,[0, \pi_{m_-+1,m_+} a_1, ..., \pi_{m_-+1,m_+} a_{n-1}]$; если $m_+ - m_- \leq 1$, $\pi_0 a \equiv 0$. Легко видеть, что $m_+ - m_- = 0$ эквивалентно $m_1 = m_2 = 0$, т.е. $f \equiv f_0$. Аналогично из $m_+ - m_- = 1$ следует, что либо $m_2 = -1, m_1 = 0$, либо $m_2 = 0, m_1 = 1$ (т.е. $f = f_{-1}t^{-1} + f_0$ или $f = f_0 + f_1 t$).

Теорема 1. *Для любого* $a \in GL_\infty^n(f)$

$$\omega_a = \exp[\omega(\pi_+\tau_a)]\exp[\omega(\pi_0\tau_a)]\exp[\omega(\pi_-\tau_a)]. \tag{10}$$

Доказательство. Из равенства $\tau_a = \pi_+\tau_a + \pi_0\tau_a + \pi_-\tau_a$ и Леммы 2 получаем $\omega_a = \exp[\omega(\pi_+\tau_a + \pi_0\tau_a + \pi_-\tau_a)]$. Откуда, из коммутативности матриц-функций $\omega(\pi_+\tau_a), \omega(\pi_0\tau_a), \omega(\pi_-\tau_a)$, следует равенство (10).

Замечание 2. Множители $\exp[\omega(\pi_\pm\tau_a)]$ в формуле (10) допускают непрерывное продолжение в $\mathbb{T}_\pm$, соответственно. Средний множитель аналитичен всюду в расширенной комплексной плоскости за исключением 0 и ∞, которые являются существенно особыми точками. Если средний множитель соединить с правым получится функционально-теоретическая факторизация матрицы-функции ω_a.

Записанная в такой форме формула (10) является точным аналогом формул, полученных в работах [8], [12], [13].

Замечание 3. Пусть $a \in GW^n(f)$. Вообще говоря, формула (10) не является факторизацией Винера-Хопфа матрицы-функции ω_a по двум причинам: 1) правый и левый крайние множители в (10) не обязаны принадлежать $W_{\pm}^{n\times n}$, 2) сингулярное поведение среднего множителя в точках 0 и ∞.

Следствие 5. *Пусть $a \in GW^n(f)$. Если $\tau_a \in W^n(f)$ и $\pi_0\tau_a \equiv 0$, то формула (10) представляет факторизацию Винера-Хопфа матрицы-функции ω_a.*

Наша дальнейшая цель - описание процедуры преобразования представления (10) в факторизацию ω_a в пространстве W, в случае $a \in W^n(f)$.

§3. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ $\tau_a \in W^n(f)$

Рассмотрим множество $W_{z_0}^n = \{a \in W^n(f) : a(-z_0) = e\}$. Очевидно, что $W_{z_0}^n$ является подалгеброй $W^n(f)$ и для $a \in W_{z_0}^n$ функции λ_k^a, $k = 0, 1, ..., n-1$ являются непрерывными. Вектор $\mathrm{col}\,[\lambda_i^a]_{i=0}^{n-1} \in \mathbb{Z}^n$ для $a \in GW_{z_0}^n$ назовем λ-*индексом* и обозначим его через $\mathrm{ind}_\lambda a$. Из мультипликативности λ следует, что $\mathrm{ind}_\lambda ab = \mathrm{ind}_\lambda a + \mathrm{ind}_\lambda b$. В частности, множество

$$\overset{\circ}{W}{}_{z_0}^n = \{a \in GW_{z_0}^n : \quad \mathrm{ind}_\lambda a = 0\}$$

является подгруппой $GW_{z_0}^n$. Множество рациональных матриц-функций из $W_{z_0}^n$ и $\overset{\circ}{W}{}_{z_0}^n$ будем обозначать через $\mathcal{R}W_{z_0}^n$ и $\mathcal{R}\overset{\circ}{W}{}_{z_0}^n$, соответственно.

Теорема 2. *Пусть $a \in \overset{\circ}{W}{}_{z_0}^n$. Тогда $\tau_a \in W^n(f)$.*

Доказательство. Пусть $a = \mathrm{col}\,[a_i]_{i=0}^{n-1} \in \overset{\circ}{W}{}_{z_0}^n$. Поскольку $a_i(-z_0) = 0$, $i = 1, 2, ..., n-1$, то из формул (5) и (6) следует, что τ_i^c, $i = 0, 1, ..., n-1$ непрерывна на $\mathbb{T}$. В силу теоремы Винера (см. [24]) достаточно доказать, что для каждой точки $z \in \mathbb{T}$ существует некоторая окрестность и функция из W, совпадающая с τ_i^c в этой окрестности.

В силу теоремы Винера-Литкина (см. [24]), существует $v_\delta \in W$, принимающая значения в сегменте $[0, 1]$, равное нулю в $U_\delta = \{z \in \mathbb{T} : |z + z_0| \leq \delta\}$ и равное единице вне $U_{2\delta} = \{z \in \mathbb{T} : |z + z_0| \leq 2\delta\}$ такое, что a_k является пределом функций $b_{k,\delta} = a_k v_\delta$, $k = 1, 2, ..., n-1$. Положим $b_\delta = \mathrm{col}\,[b_{k,\delta}]_{k=0}^{n-1}$, где

$b_{0,\delta} = 1 + v_\delta(a_0 - 1)$. Для малых $\delta > 0$ $\operatorname{ind}_\lambda b_\delta = 0$, т.е. $b_\delta \in \overset{\circ}{W}{}^n_{z_0}$. Поскольку очевидно, что $v_\delta f^{k/n} \in W$, то $b_{k,\delta} f^{k/n} = a_k v_\delta f^{k/n} \in W$ т.е. $\lambda_k^{b_\delta} \in W$. В силу теоремы Винера–Леви $\ln \lambda_k^{b_\delta} \in W$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Учитывая, что $\ln \lambda_k^{b_\delta} \equiv 0$. на U_δ из равенства (9) получаем, что $\tau_k^{b_\delta} \in W$. Так как $\tau_a = \tau_{b_\delta}$ на $\mathbb{T} \setminus U_{2\delta}$, то τ_k^a, $k = 0, 1, \dots, n-1$ локально принадлежат W для всех $z \in \mathbb{T} \setminus \{-z_0\}$.

Исследуем теперь функции τ_k^a, $k = 0, 1, \dots, n-1$ в окрестности точки $\{-z_0\}$. Пусть

$$c_0 = (1 - v_\delta)(a_0 - 1), \quad c_k = (1 - v_\delta)a_k,$$

$$c = \operatorname{col}[c_0 + 1, c_1, \dots, c_{n-1}], \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Очевидно, что c совпадает с a на U_δ и если δ достаточно мало, то условие $|\lambda_k^c - 1| < 1$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ будет выполнено всюду на $\mathbb{T}$.

Пусть $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ – мультииндекс

$$|\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}, \quad \beta_\alpha = \sum m\alpha_m, \quad \gamma_{\alpha,k} = \frac{1}{n}(\beta_\alpha - k),$$

$$N_+ = \{i \in \mathbb{Z};\ i \geq 0\},\ k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Тогда

$$\ln \lambda_s^c = \ln\Big(1 + \sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon^{ms} c_m f^{m/n}\Big) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \left(\sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon^{ms} c_m f^{m/n}\right)^l =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=l} \frac{(-1)^{l-1}(l-1)!}{\alpha_0! \alpha_1! \cdots \alpha_{n-1}!} c_0^{\alpha_0} c_1^{\alpha_1} \cdots c_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \varepsilon^{s\beta_\alpha} f^{\beta_\alpha/n}.$$

Учитывая, что

$$1/n \sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon^{sm} = \begin{cases} 1, & \text{при } m \equiv 0 \pmod n, \\ 0, & \text{при } m \not\equiv 0 \pmod n, \end{cases}$$

из равенства (9) получим

$$\tau_k^c = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=l} \frac{(-1)^{l-1}(l-1)!}{\alpha_0! \alpha_1! \cdots \alpha_{n-1}!} c_0^{\alpha_0} c_1^{\alpha_1} \cdots c_{n-1}^{\alpha_{n-1}} f^{\gamma_{\alpha,k}} \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon^{s(\beta_\alpha - k)} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=l,\ \gamma_{\alpha,k} \in N_+} \frac{(-1)^{l-1}(l-1)!}{\alpha_0! \alpha_1! \cdots \alpha_{n-1}!} c_0^{\alpha_0} c_1^{\alpha_1} \cdots c_{n-1}^{\alpha_{n-1}} f^{\gamma_{\alpha,k}}.$$

Последнее равенство означает, что $\tau_k^c \in W$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ и поскольку $\tau_c = \tau_a$ на U_δ, то Теорема 2 доказана.

§4. КОНСТРУКЦИЯ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ λ-ИНДЕКСОМ

Пусть $f^{1/n}(z_0) = Me^{i\beta}$ и

$$g_m(\theta) = e^{-i\theta}e^{\frac{im}{2}(\theta-\theta_o)}f^{1/n}(e^{i\theta}), \quad |\theta-\theta_o| \le \pi, \quad m = 1, 2, \dots$$

Легко видеть, что

$$(\operatorname{Im} g_m)'|_{\theta=\theta_o} = \frac{m-1}{2}M + (\operatorname{Im} g_1)'\Big|_{\theta=\theta_o}.$$

Следовательно, $(\operatorname{Im} g_k)'|_{\theta=\theta_o} > 0$ при некотором $m = k$.

Введем $u(z) = -\gamma e^{-i(k\theta_o+\beta)}(z+z_0)^k$, $(\gamma > 0)$ и $p_k = \operatorname{col}\,[1, \varepsilon^{-k}u, 0, \dots, 0]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Учитывая, что

$$z + z_0 = 2\cos\frac{\theta-\theta_o}{2}e^{i(\theta+\theta_o)/2},$$

получим

$$\lambda_m^{p_0}(e^{i\theta}) = 1 - 2^k\gamma\cos^k\frac{\theta-\theta_o}{2}\varepsilon^m g_k(\theta), \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Заметим, что

$$\operatorname{Im}\lambda_m^{p_0}(e^{i\theta_o}) = -2^k\gamma M\sin\frac{2m\pi}{n}, \quad m = 0, 1, \dots, n-1$$

и

$$(\operatorname{Im}\lambda_0^{p_0})'|_{\theta=\theta_o} = -2^k\gamma(\operatorname{Im} g_k)'\Big|_{\theta=\theta_o} < 0.$$

Следовательно, существует некоторое $\sigma > 0$ такое, что

$$\operatorname{Im}\lambda_m^{p_0}(e^{i\theta}) \ne 0, \quad m = 1, 2, \dots, n-1, \quad \text{при } |\theta-\theta_o| < \sigma,$$

$$\operatorname{Im}\lambda_0^{p_0}(e^{i\theta}) < 0, \quad \text{при } \theta_o < \theta < \theta_o + \sigma$$

и

$$\operatorname{Im}\lambda_0^{p_0}(e^{i\theta}) > 0, \quad \text{при } \theta_o - \sigma < \theta < \theta_o.$$

Лемма 3. *Пусть* $\delta = \cos^k\sigma/2$, $\gamma \in (\frac{1}{2^kM}; \frac{1}{2^kM\delta})$. *Тогда* $\operatorname{ind}_\lambda p_0 = \operatorname{col}\,[1, 0, \dots, 0]$.

Доказательство. При $|\theta-\theta_o|<\sigma$ имеем

$$\mathrm{Re}\,\lambda_m^{p_o}(e^{i\theta})=1-2^k\gamma\cos^k\frac{\theta-\theta_o}{2}\mathrm{Re}\,[\varepsilon^m g_k(\theta)]>1-2^k\gamma M\delta>0,\quad m=0,1,...,n-1.$$

Откуда в частности следует, что множество $\{\theta;\,|\theta-\theta_o|\le\pi;\ \mathrm{Re}\,\lambda_m^{p_o}(e^{i\theta})\le 0;$ $\mathrm{Im}\,\lambda_m^{p_o}(e^{i\theta})=0\}$ – пустое при $m>0$ и совпадает с $\{\theta_o\}$ при $m=0$. Учитывая поведение $\mathrm{Im}\,\lambda_0^{p_o}(e^{i\theta})$ в точке $\theta=\theta_o$, легко видеть, что $\mathrm{ind}\,\lambda_0^{p_o}=1$ и $\mathrm{ind}\,\lambda_m^{p_o}=0$, $m=1,2,...,n-1$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть* $\gamma\in(\frac{1}{2^kM};\frac{1}{2^kM\sigma})$, $\chi=\ col\,[\chi_i]_{i=0}^{n-1}\in\mathbb{Z}^n$, $p=p_0^{\chi_0}p_1^{\chi_1}\cdots p_{n-1}^{\chi_{n-1}}$. *Тогда* $\mathrm{ind}_\lambda p=\chi$.

Доказательство. Так как $\lambda_m^{p_s}=\lambda_{m-s}^{p_o}$, $s=0,1,...,n-1$ при $s\le m$ и $\lambda_m^{p_s}=\lambda_{n+m-s}^{p_o}$, $s=1,2,...,n-1$ при $s>m$, то

$$\mathrm{ind}_\lambda p_s=\mathrm{col}\,\{\underbrace{0,\ldots,0}_{s\ \text{раз}},1,0,...,0\},\quad s=0,1,...,n-1,$$

откуда в силу мультипликативности λ получим

$$\mathrm{ind}\,\lambda_s^p=\mathrm{ind}\,[(\lambda_s^{p_o})^{\chi_0}\cdots(\lambda_s^{p_{n-1}})^{\chi_{n-1}}]=\sum_{m=0}^{n-1}\chi_m\ \mathrm{ind}\,\lambda_s^{p_m}=\chi_s,\quad s=0,1,...,n-1.$$

Теорема доказана.

Замечание 4. При условии $(\mathrm{Im}\,g_k)'|_{\theta=\theta_o}\neq 0$, целое число k в функции g можно выбрать равным 1 или 2. В случае $(\mathrm{Im}\,g_k)'|_{\theta=\theta_o}<0$ получим, что $\mathrm{ind}\,\lambda_0^{p_o}=-1$. Приведенная выше конструкция универсальна для всех f. При конкретных f ее можно упростить.

Замечание 5. Результаты этого параграфа отвечают на вопрос, поставленный в параграфе 6 работы [14].

§5. ОДНО СВОЙСТВО $\mathcal{R}W_{x_0}^n$

В этом параграфе мы докажем, что в случае $m_+-m_->1$ для любого $b\in$ $\in\pi_0(W^n(f))$ существует некоторое $q\in\mathcal{R}\dot{W}_{x_0}^n$ такое, что $\pi_0\tau_q=b$. Пусть

$$\Delta=\{(k,j)\in\mathbb{Z}^2:\ \ 1\le k\le n-1,\quad m_-+1\le j\le m_+-1\},$$

$$b=\ \mathrm{col}\,[b_i]_{i=0}^{n-1}\in\pi_0(W^n(f)),$$

где

$$b_0 \equiv 0, \quad b_k = \sum_{s=m_-+1}^{m_+-1} b_s^{(k)} t^s, \quad k = 1, 2, ..., n-1.$$

Сопоставим каждому $b \in \pi_0(W^n(f))$ вектор $\sigma_1 b \in \mathbf{C}^l (l = (n-1)(m_+ - m_- - 1))$:

$$\sigma_1 b = \operatorname{col}\,[b_{m_-+1}^{(1)}, ..., b_{m_+-1}^{(1)}, b_{m_-+1}^{(2)}, ..., b_{m_+-1}^{(n-1)}].$$

Очевидно, что σ_1 является изоморфизмом линейных пространств $\pi_0(W^n(f)), \mathbf{C}^l$.

Предположим, что в $\mathbf{C}^l$ задана обычная евклидова метрика :

$$\|\sigma_1 b\|_2 = \left(\sum_{(k,j)\in\Delta} |b_j^{(k)}|^2 \right)^{1/2}.$$

Положим

$$\rho' = \min[\|f\|_W, 1], \quad \rho = \max[\|f\|_W, 1], \quad d = \operatorname{col}[t + z_o, 0, ..., 0] \in W^n(f).$$

$$U = \left\{ \alpha \in \mathbf{C}^l : \|\alpha\|_2 \le \frac{1}{2\sqrt{n}\rho} \right\}.$$

Пусть V обозначает множество $e + d\sigma_1^{-1}(U) \subset W_{z_0}^n$. Определим отображение $\sigma_2 : U \longmapsto V$, действующее следующим образом : $\sigma_2(\alpha) = e + d\sigma_1^{-1}(\alpha)$.

Лемма 4. *Отображения σ_1, σ_2 являются гомеоморфизмами, $\mathcal{R}\mathring{V}_{z_0}^n$ содержит V.*

Доказательство. Пусть $b = \operatorname{col}\,[b_i]_{i=0}^{n-1}$. В силу неравенства Гельдера

$$\|b\|_{W^n} = \sum_{k=1}^{n-1} \|f\|_W^{k/n} \sum_{s=m_-+1}^{m_+-1} |b_s^{(k)}| \le \rho\sqrt{n}\|\sigma_1 b\|_2.$$

ругой стороны

$$\|\sigma_1 b\|_2 \le \sum_{(k,j)\in\Delta} |b_j^{(k)}| \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\rho'} \|f\|_W^{k/n} \sum_{s=m_-+1}^{m_+-1} |b_s^{(k)}| = \frac{1}{\rho'} \|b\|_{W^n},$$

и поэтому

$$\rho'\|\sigma_1 b\|_2 \le \|b\|_{W^n} \le \rho\sqrt{n}\|\sigma_1 b\|_2. \tag{11}$$

Следовательно, σ_1 является гомеоморфизмом.

Единичная сфера $\{b \in \pi_0(W^n(f)) : \|b\|_{W^n} = 1\}$ пространства π_0 компактна. Поэтому, непрерывная относительно b функция $\|db\|_{\mathring{W}^n}$ принимает на ней свое минимальное значение $\nu > 0$. Учитывая (11), получим

$$\|db\|_{W^n} \ge \nu\|b\|_{W^n} \ge \nu\rho'\|\sigma_1 b\|_2, \quad b \in \pi_0(W^n(f)). \tag{12}$$

Принимая во внимание (11) и (12), имеем

$$\|\sigma_2(\alpha)-\sigma_2(\beta)\|_{W^n} = \|d(\sigma_1^{-1}(\alpha)-\sigma_1^{-1}(\beta))\|_{W^n} \le 2\|\sigma_1^{-1}(\alpha-\beta)\|_{W^n} \le 2\rho\sqrt{n}\|\alpha-\beta\|_2$$

и

$$\|\sigma_2(\alpha)-\sigma_2(\beta)\|_{W^n} = \|d\sigma_1^{-1}(\alpha-\beta)\|_{W^n} \ge \nu\rho'\|\alpha-\beta\|_2.$$

Эти неравенства доказывают, что σ_2 является гомеоморфизмом. Пусть

$$a = \operatorname{col}[a_i]_{i=0}^{n-1} \in V, \quad \alpha = \sigma_2^{-1}(a) = \operatorname{col}[\alpha_{m_-+1}^{(1)},...,\alpha_{m_+-1}^{(1)},\alpha_{m_-+1}^{(2)},...,\alpha_{m_+-1}^{(n-1)}],$$

$$b = \sigma_1^{-1}(\alpha) = \operatorname{col}[b_i]_{i=0}^{n-1}.$$

Ясно, что

$$a = e + db, \quad a_0 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 0, \quad a_s = (t+z_0)b_s,$$

$$b_s = \sum_{k=m_-+1}^{m_+-1} \alpha_k^{(s)} t^k, \quad s = 1,2,...,n-1.$$

Пользуясь (11) и тем, что $\alpha \in U$, получим

$$|\lambda_j^a - 1| = \left|\sum_{s=1}^{n-1} \varepsilon^{sj} a_s j^{s/n}\right| \le 2\sum_{s=1}^{n-1} |b_s|\cdot|j|^{s/n} < 2\rho\sqrt{n}\|\alpha\|_2 < 1.$$

Из этой оценки следует, что $\operatorname{ind}_\lambda a = 0$. Лемма 4 доказана.

Рассмотрим отображение $\Psi = \sigma_1\pi_0\tau\sigma_2$ $(\Psi : U \longmapsto \mathbf{C}^r)$

Лемма 5. *Комплексный якобиан $J\Psi$ отображения Ψ в точке $0 \in U$ равен z_0^l.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in U$, $\alpha = \operatorname{col}[\alpha_{m_-+1}^{(1)},...,\alpha_{m_+-1}^{(1)},\alpha_{m_-+1}^{(2)},...,\alpha_{m_+-1}^{(n-1)}]$, $a = \operatorname{col}[a_i]_{i=0}^{n-1} = \sigma_2(\alpha)$. Следовательно

$$a_0 \equiv 1, \quad a_s = (t+z_0)^s \sum_{k=m_-+1}^{m_+-1} \alpha_k^{(s)} t^k, \quad s = 1,2,...,n-1$$

и $\Psi = \operatorname{col}[\Psi_{m_-+1}^{(1)},...,\Psi_{m_+-1}^{(1)},\Psi_{m_-+1}^{(2)},...,\Psi_{m_+-1}^{(n-1)}]$, где

$$\Psi_k^{(s)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \tau_s^a(t)t^{-k-1}\,dt, \quad (s,k) \in \Delta.$$

Пусть δ_{ij} — символ Кронеккера. Пользуясь тем, что

$$\frac{\partial a_s}{\partial \alpha_j^{(k)}} = (t+z_0)^j \delta_{sk}, \quad s,k = 1,2,...,n-1; \qquad \lambda_k^a\big|_{\alpha=0} = 1, \quad k = 0,1,...,n-1$$

и $|k-s| < n-1$, получим

$$\left.\frac{\partial\tau_k^a}{\partial\alpha_j^{(s)}}\right|_{\alpha=0} = \frac{1}{n}f^{-k/n}\left.\left(\sum_{p=0}^{n-1}\varepsilon^{-pk}\frac{1}{\lambda_p^a}\frac{\partial}{\partial\alpha_j^{(s)}}\lambda_p^a\right)\right|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{1}{n}f^{\frac{s-k}{n}}(t+z_0)t^j\sum_{p=0}^{n-1}\varepsilon^{p(s-k)} = (t+z_0)t^j\delta_{ks}.$$

Следовательно

$$\left.\frac{\partial\Psi_i^{(k)}}{\partial\alpha_j^{(s)}}\right|_{\alpha=0} = \frac{\delta_{ks}}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}(t+z_0)t^{j-i-1}\,dt = \delta_{ks}(z_0\delta_{ij}+\delta_{i,j+1}).$$

Лемма 5 доказана.

Теорема 4.

$$\pi_0\tau(\mathcal{R}\mathring{W}^n_{z_0}) = \pi_0(W^n(f)).$$

Доказательство. Из теоремы об обратном отображении и Леммы 5 следует, что $\Psi(U)$ содержит открытую окрестность точки $0 \in \mathbb{C}^l$. Так как в силу Леммы 4, σ_1, σ_2 являются гомеоморфизмами, а $\pi_0\tau = \sigma_1^{-1}\Psi\sigma_2^{-1}$, то существует открытая окрестность нуля $B \subset \pi_0(W^n(f))$ такая, что $B \subset \pi_0\tau(V)$. Пусть $m \in N$ и $V^m = \{a^m : a \in V\}$. Тогда, поскольку $\pi_0\tau(a^m) = m\pi_0\tau(a)$ и согласно Лемме 4 $V^m \subset \mathcal{R}\mathring{W}^n_{z_0}$, то

$$\pi_0(W^n(f)) = \bigcup_{m\in N} mB \subset \pi_0\tau(\mathcal{R}\mathring{W}^n_{z_0}).$$

Замечание 6. Теорема 4 означает, что для любого $b \in \pi_0(W^n(f))$, $\sigma_1 b = \mathrm{col}\,[b^{(1)}_{m_-+1},\dots,b^{(1)}_{m_+-1}, b^{(2)}_{m_-+1},\dots,b^{(n-1)}_{m_+-1}]$ существуют $m \in N$ и $q = \mathrm{col}\,[q_i]_{i=0}^{n-1} \in \mathcal{R}\mathring{W}^n_{z_0}$,

$$q_0 \equiv 1, \quad q_k = (t+z_0)\sum_{j=m_-+1}^{m_+-1} q_j^{(k)}t^j,$$

$$\tilde{q} = \mathrm{col}\,[q^{(1)}_{m_-+1},\dots,q^{(1)}_{m_+-1}, q^{(2)}_{m_-+1},\dots,q^{(n-1)}_{m_+-1}] \in U$$

такие, что справедливо следующее равенство :

$$\frac{m}{2n\pi i}\int_{\mathbb{T}} f^{-k/n}t^{-j-1}\sum_{s=0}^{n-1}\varepsilon^{-sk}\ln\left(1+\sum_{p=1}^{n-1}\varepsilon^{ps}q_p f^{p/n}\right)dt = b_j^k, \quad (k,j)\in\Delta. \quad (13)$$

Как при доказательстве Теоремы 2, в силу условия $\tilde{q} \in U$, левую часть уравнения (13) можно разложить в ряд от неизвестных $q_j^{(k)}$, $(k,j) \in \Delta$.

Замечание 7. Идея построения рациональных q такого типа принадлежит Даниэлю. Им же несколько в иной ситуации было доказано существование таких q при $n = 2$, см. [9].

§6. МЕРОМОРФНАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦЫ ФУНКЦИИ

В этом параграфе мы построим мероморфную факторизацию матрицы-функции ω_a в случае, когда $a \in \exp \pi_0(W^n(f))$, а функция f удовлетворяет одному из следующих трех условий :

$$m_1 - m_2 = 0; \tag{14.1}$$

$$m_1 - m_2 = 1, \quad m_1 \equiv 0 \pmod n \text{ либо } m_1 \equiv 1 \pmod n; \tag{14.2}$$

$$m_1 - m_2 = 2, \quad n = 2, \quad m_1 \text{ -- четное }. \tag{14.3}$$

Пусть $\Delta_+ = \{(k,j) \in \Delta : km_2 + jn \geq 0\}$, $\Delta_- = \{(k,j) \in \Delta : km_1 + jn \leq 0\}$, $\Delta_0 = \Delta \setminus (\Delta_+ \cup \Delta_-)$.

Лемма 6. *Для того, чтобы множество Δ_0 было пустым, необходимо и достаточно, чтобы имело место одно из условий (14).*

Доказательство. Пусть $\tilde{q} = \mathbb{Z} \cap (-km_1/n; -km_2/n)$, $\Delta_k = \{(k,j) \in \mathbb{Z}^2 : j \in \tilde{q}\}$, $k = 1, 2, ..., n-1$. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что $\Delta_0 = \cup_{k=1}^{n-1} \Delta_k$ и поэтому $\Delta_0 = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\cup_{k=1}^{n-1} \tilde{q} = \emptyset$. Если $m_1 - m_2 = 0$, то очевидно $\tilde{q} = \emptyset$, $k = 1, 2, ..., n-1$. Пусть $m_1 - m_2 = 1$ и $m_1 \equiv p \pmod n$, где $p = 0, 1, ..., n-1$. Тогда $m_1 = nl + p$ ($l \geq 0, l \in \mathbb{Z}$) и при $p \geq 2$

$$\tilde{\Delta}_{n-1} = \mathbb{Z} \cap (-m_1 + l + \frac{p}{n}; -m_1 + l + 1 + \frac{p-1}{n}) = \{-m_1 + l + 1\} \neq \emptyset$$

В случае $p = 1$ имеем $\tilde{q} = \mathbb{Z} \cap (-kl - k/n; -kl) = \emptyset$, $k = 1, 2, ..., n-1$. Аналогично, при $p = 0$, $\tilde{q} = \mathbb{Z} \cap (-kl; -kl + k/n) = \emptyset$, $k = 1, 2, .., n-1$. Пусть теперь либо $m_1 - m_2 > 2$, либо $m_1 - m_2 = 2$, но $n > 2$. Тогда $\frac{n-1}{n}(m_1 - m_2) > 1$ и очевидно $\tilde{\Delta}_{n-1} \neq \emptyset$.

Осталось рассмотреть случай, когда $n = 2$ и $m_1 - m_2 = 2$. Имеем $\Delta_0 = \Delta_1$ и поэтому $\Delta_0 = \emptyset$ тогда и только тогда, когда

$$\tilde{\Delta}_1 = \mathbb{Z} \cap \left(-\frac{m_1}{2}; -\frac{m_1}{2} + 1\right) = \emptyset.$$

Но это возможно лишь при четных m_1. Лемма доказана.

Пусть $b = \operatorname{col}[b_i]_{i=0}^{n-1} \in \pi_0(W^n(f))$ с $b_0 \equiv 0$ и

$$b_k = \sum_{j=m_-+1}^{m_+-1} b_j^{(k)} t^j, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

Обозначим через $e_j^{(k)}(b)$ $((k,j) \in \Delta)$ вектор $\operatorname{col}[0, \dots, 0, b_j^{(k)} t^j, 0, \dots, 0]$.

Лемма 7. *Пусть $b \in \pi_0(W^n(f))$ и $(k,j) \in \Delta_+$ ($(k,j) \in \Delta_-$). Тогда*

$$\exp e_j^{(k)}(b) \in (M_+)^n \quad \left(\exp e_j^{(k)}(b) \in (M_-)^n\right).$$

Доказательство. Пусть $\exp c_j^{(k)}(b) = \operatorname{col}[c_i]_{i=0}^{n-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} c_s &= \frac{1}{n} f^{-s/n} \sum_{p=0}^{n-1} \varepsilon^{-ps} \exp \lambda_p^{e_j^{(k)}(b)} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{jm}}{m!} \left(b_j^{(k)}\right)^m f^{(km-s)/n} \sum_{p=0}^{n-1} \varepsilon^{p(mk-s)}, \quad s = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \tag{15}$$

Пусть $n = n_1 d$, $k = k_1 d$, где d – наибольший общий делитель чисел n и k. Очевидно, что если $s \neq s_1 d$, $s_1 \in \mathbb{Z}$, то

$$\sum_{p=0}^{n-1} \varepsilon^{p(mk-s)} = 0.$$

Следовательно, в силу (15) для таких s имеем $c_s \equiv 0$. В случае $s = s_1 d$, через l_0 обозначим наименьшее целое неотрицательное значение l, для которого число $(s_1 + n_1 l)/k_1$ – целое, а через σ_0 обозначим $(s_1 + n_1 l_0)/k_1$. Легко видеть, что для $s = s_1 d$

$$\frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \varepsilon^{p(mk-s)} = \begin{cases} 1, & \text{при } m \equiv \sigma_0 \pmod{n_1} \\ 0, & \text{при остальных значениях } m. \end{cases}$$

Из (15) получим

$$c_s = \left(b_j^{(k)}\right)^{\sigma_0} t^{j\sigma_0} f^{l_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(\sigma_0 + nl/d)!} \left(b_j^{(k)}\right)^{nl/d} (t^{jn} f^k)^{l/d}.$$

Остается заметить, что $t^{jn} f^k \in W_+$ ($\in W_-$) при $(k,j) \in \Delta_+$ ($\in \Delta_-$). Лемма доказана.

Теорема 5. *Предположим, что f удовлетворяет одному из условий (14) и*

$$b \in \pi_0(W^n(f)), \quad b_\pm = \sum_{(k,j) \in \Delta_\pm} e_j^{(k)}(b).$$

Тогда представление

$$\exp\omega_b = \exp\omega_{b_+}\exp\omega_{b_-} \tag{16}$$

является мероморфной факторизацией $\exp\omega_b$.

Доказательство. Из Леммы 6 следует, что $\Delta_0 = \emptyset$. Следовательно

$$b = \sum_{(k,j)\in\Delta_+} e_j^{(k)}(b) + \sum_{(k,j)\in\Delta_-} e_j^{(k)}(b),$$

откуда следует (16). Поскольку

$$\exp(b_\pm) = \prod_{(k,j)\in\Delta_\pm} \exp e_j^{(k)}(b), \qquad \exp(-b_\pm) = \prod_{(k,j)\in\Delta_\pm} \exp e_j^{(k)}(-b),$$

то согласно Лемме 7 $\exp(b_\pm), \exp(-b_\pm) \in (M_\pm)^n$. Теорема доказана.

Замечание 8. Если выполняется одно из условий (14), то $m_+m_- = 0$.

§7. ФАКТОРИЗАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ

Прежде, чем доказать основные результаты настоящей работы, введем следующее понятие. Пусть $a \in GW^n(f)$ и $\gamma =$ col $[\gamma_i]_{i=0}^{n-1}$ - некоторый логарифм $a^{-1}(-z_0)$ в алгебре $W^n(f(-z_0))$. Вектор-функцию $h = \exp\gamma \in W^n(f)$ (exp берется уже в алгебре $W^n(f)$) назовем z_0-*обратной* к a. Утверждение следующей леммы проверяется непосредственно.

Лемма 8. *Пусть $a \in GW^n(f)$, $h = \exp\gamma$ - z_0-обратная к a, $\gamma =$ col $[\gamma_i]_{i=0}^{n-1}$. Тогда $ah \in W_{z_0}^n$, $\pi_\pm(-\gamma) \in W_\pm^n$ и*

$$h^{-1} = \exp[\pi_+(-\gamma)]\exp[\pi_0(-\gamma)]\exp[\pi_-(-\gamma)]. \tag{17}$$

Более того, $h^{-1} = \exp[\pi_+(-\gamma)]$ для $m_+ = 0$, $h^{-1} = \exp[\pi_-(-\gamma)]$ при $m_- = 0$ $(m_+ \neq m_-)$ и $h^{-1} = \exp(-\gamma)\cdot \exp[\pi_0(\gamma_0 e - \gamma)]$ при $m_+m_- < 0$.

Теорема 6. *Пусть $m_+ - m_- \geq 2$, $a \in GW^n(f)$, $h = \exp\gamma$ является z_0-обратной к a, $\gamma =$ col $[\gamma_i]_{i=0}^{n-1}$ и вектор-функции $p \in \mathcal{R}W_{z_0}^n$, $q \in \mathcal{R}\mathring{W}_{z_0}^n$ удовлетворяют следующим условиям :*

$$ind_\lambda p = -\ ind_\lambda ah, \quad \pi_0\tau_q = -\pi_0(\tau_{ahp} - \gamma)$$

Если $\omega_{p^{-1}q^{-1}} = Q_+\Lambda Q_-$ - факторизация рациональной матрицы-функции $\omega_{p^{-1}q^{-1}}$ в пространстве W, то представление

$$\omega_a = \exp[\omega(\pi_+(\tau_{ahp} + \tau_q - \gamma))]Q_+\Lambda Q_-\exp[\omega(\pi_-(\tau_{ahp} + \tau_q - \gamma))] \tag{18}$$

является факторизацией матрицы-функции ω_a в пространстве W.

Доказательство. Представление (18) следует из равенства $a = h^{-1}p^{-1}q^{-1}aphq$, формулы (10), примененной к aph и q, соответственно, и (17). Из Леммы 8 следует, что $ah \in W^n_{z_0}$. Так как $\operatorname{ind}_\lambda ahp = 0$ (т.е. $aph \in \overset{\circ}{W}{}^n_{z_0}$), то в силу Теоремы 2, τ_{ahp} и τ_q принадлежат $W^n(f)$. Используя Лемму 8, получим

$$\exp[\pm\omega(\pi_+(\tau_{ahp} + \tau_q - \gamma))] \in W_+^{n\times n}, \quad \exp[\pm\omega(\pi_-(\tau_{ahp} + \tau_q - \gamma))] \in W_-^{n\times n}.$$

Теорема доказана.

При $m_+ - m_- \leq 1$ ситуация сильно упрощается. Учитывая, что $\pi_0(-\gamma) = 0$, аналогичными рассуждениями нетрудно убедиться, что справедлива

Теорема 7. *Пусть $m_+ - m_- \leq 1$, $a \in GW^n(f)$, $h = \exp\gamma$ - z_0-обратная к a, $p \in \mathcal{R}W^n_{z_0}$ и $\operatorname{ind}_\lambda p = -\operatorname{ind}_\lambda ah$. Если $\omega_{p^{-1}} = K_+\Lambda K_-$ — факторизация матрицы-функции $\omega_{p^{-1}}$ в пространстве W, то*

$$\omega_a = \exp[\omega(\pi_+(\tau_{ahp} - \gamma))]K_+\Lambda K_- \exp[\omega(\pi_-(\tau_{ahp} - \gamma))] \tag{19}$$

является факторизацией матрицы-функции ω_a в пространстве W.

Замечание 9. Как следует из Леммы 8 одна из вектор-функций $\pi_\pm(-\gamma)$ в равенствах (18), (19) равна нулю.

Замечание 10. Существование вектор-функций p и q с требуемыми свойствами обеспечивается Теоремами 3 и 4.

Таким образом, Теоремы 6 и 7 позволяют сводить факторизацию матрицы-функции ω_a к факторизации рациональной матрицы-функции. Но применение формулы (18) (в отличие от (19)) затруднено в связи с задачей построения вектор-функции q в явном виде. Результаты §6 позволяют в некоторых случаях избежать этого. Более точно, справедлива следующая

Теорема 8. *Предположим, что $m_+ - m_- \geq 2$, f удовлетворяет одному из условий (14), $a \in GW^n(f)$, $h = \exp\gamma$ - z_0-обратная к a, $p \in \mathcal{R}W^n_{z_0}$ и $\operatorname{ind}_\lambda p = -\operatorname{ind}_\lambda ah$. Тогда*

$$\omega_a = \exp[\omega(\pi_+(\tau_{ahp} - \gamma))]\omega_{p^{-1}}A_+A_- \exp[\omega(\pi_-(\tau_{ahp} - \gamma))], \tag{20}$$

где

$$A_{\pm} = \exp\left[\omega\left(\sum_{(k,j)\in\Delta_{\pm}} c_j^{(k)}(\pi_0 \tau_{ahp})\right)\right]$$

является мероморфной факторизацией матрицы-функции ω_a .

Доказательство. Из (16) следует, что

$$\omega_a = \omega_{h^{-1}}\omega_{p^{-1}} \exp[\omega(\pi_+ \tau_{ahp})] \exp[\omega(\pi_0 \tau_{ahp})] \exp[\omega(\pi_- \tilde{\tau}_{ahp})] \tag{21}$$

Согласно Замечанию 8, одно из чисел m_+ и m_- равно нулю. Из Лемма 8 следует, что $\pi_0(-\gamma) \equiv 0$. Пользуясь равенством (17) и Теоремой 5, получим равенство (20). Принадлежность множителей правой части (20) к соответствующим классам, с учетом Теоремы 5, проверяется аналогично тому, как это было сделано при доказательстве Теоремы 6. Теорема 8 доказана.

ABSTRACT. In this paper the problem of the Wiener-Hopf factorization in the Wiener algebra of a class of matrix functions of f-circulant type is considered in the case f is trigonometric polynomial. It is proved, that the factorization of these matrix-functi ns is possible reduce to the factorization of rational matrix functions. For some f meromorphic factorization is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Clancey, I. Gohberg, "Factorization of matrix functions and singular integral operators", Operator Theory : Advances and Appl., vol. 3, Birkhäuser, Basel, 1981.
2. G. S. Litvinchuk, I. M. Spitkovski, Factorization of Matrix Functions, Akademie--Verlag, Berlin, 1987.
3. Н. Н. Векуа, Системы Сингулярных Интегральных Уравнений, М., Наука, 1970.
4. H. Bart, I. Gohberg, M. A. Kaashoek "Minimal factorizations of matrix and operator functions", Operator Theory : Advances and Appl., vol. 1, Birkhäuser, Basel, 1979.
5. H. Bart, I. Gohberg, M. A. Kaashoek "Explicit Wiener-Hopf factorization and realization", Operator Theory : Advances and Appl., vol. 21, Birkhäuser, Basel, 1986.
6. I. Gohberg, L. Lerer, L. Rodman, "Factorization indices for matrix polynomials", Bull. AMS, vol. 84, pp. 275 - 277, 1978.
7. J. A. Ball, K. F. Clancey, "An elementary description of partial indi es of rational matrix functions", Integral Equations and Operator Theory, vol. 13, pp. 306 - -322, 1990.
8. А. А. Храпков, " Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил" Прикл. Мат. Мех., том 35, стр.. 677 - 689, 1971.
9. V. G. Daniele, "On the solution of two coupled Wiener-Hopf equations", SIAM J.

Appl. Math., vol. 44, pp. 667 – 679, 1984.
10. E. Meister, F.- O. Speck, "The explicit solution of elastodynamical diffraction problems by symbol factorization", Z. Anal. Anwendungen, vol. 8, no. 4, pp. 307 – 328.
11. A. F. des Santos, A. B. Lebre, F. S. Teixeire, "The diffraction problem for a half plane with different face impedances revisited", J. Math. Anal. and Appl. vol. 140, no. 2, pp. 485 – 509, 1989.
12. V. G. Daniele, "On the factorization of Wiener–Hopf matrices in problems solvable with Hurd's method", IEEE Trans. Autennes Propag., vol. AP-26, pp. 614 – 616, 1978.
13. D. S. Jones, "Commutative Wiener–Hopf factorization of a matrix", Proc. Roy. Soc., London, Ser. A393, pp. 185 – 192, 1984.
14. S. Prössdorf, F.- O. Speck, "A factorization procedure for two by two matrix functions on th circle with two rationally independent entries", Proc. Roy. Soc., Edinburgh, vol. 115, pp. 119 – 138, 1990.
15. E. Meister, F.- O. Speck, "Wiener–Hopf factorization of certain non-rational matrix functions in mathematical physics", The Gohberg Anniversery Collection, vol. 11, pp. 385 – 394, Birkhäuser, Basel, 1989.
16. А. Г. Камалян, "Эффективная факторизация некоторых классов матриц-функций", ДАН Армении, том 93, no. 3, стр. 99 – 104, 1992.
17. A. B. Lebre, "Factorization in the Wiener algebra of a class of 2 × 2 matrix functions", Integral Equations and Operator Theory, vol. 12, pp. 408 – 423, 1989.
18. И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, "Об индексах кра ных расширений матриц-функций", Изв. АХ Молд, ССР, том 8, стр.76 – 80, 1967.
19. A. B. Lebre, A. F. des Santos, "Generalized factorization for a class of non-rational 2 × 2 matrix functions", Integral Equations and Operator Theory, vol. 13, no. 5, pp. 671 – 700, 1990.
20. Г. Н. Чеботарев, " К решению в замкнутой форме краевой задачи Римана для системы n пар функций", Уч. Зап. Казан. Унив., том. 116, no. 4, стр. 31- 58, 1956.
21. В. Н. Гавдзинский, И. М. Спитковский, " Об одном способе эффективного построения факторизации", Укр. мат. журн., том 34, no. 1, стр. 15 - 19, 1982.
22. В. Н. Гордиенко, " Факторизация матриц-функций частного вида", Укр. мат журн., том 23, no. 1, стр. 81 – 88, 1971.
23. Н. Г. Моисеев, "О факторизации матриц-функций специального вида", ДАН СССР, том 305, no. 1, стр. 44 – 47, 1989.
Ж. П. Кахан, Абсолютно Сходящиеся Ряды Фурье, М., Мир, 1976.

13 Апреля 1992

Институт математики
АН Армении

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТИПА ГОЛУЗИНА-КРЫЛОВА ДЛЯ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ ДЖРБАШЯНА $H_p(\alpha)$ И H_p ХАРДИ

С. С. Степанян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, No. 1, 1993

Цель настоящей работы – получение представлений для функций из классов Джрбашяна $H_p(\alpha)$ $(0 < p < \infty, \alpha > -1)$ и Харди $H_p (0 \leq p \leq 2)$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Класс функций $H_p(\alpha)$, $(p > 0, \alpha > -1)$ - аналитических в единичном круге, был введен М.М.Джрбашяном в 1945 году. Этот класс обобщает классы Харди H_p и определяется следующим образом (см. [1] и [2]) :

Класс $H_p(\alpha) (p > 0, \alpha > -1)$ состоит из всех функций $f(z)$, голоморфных в единичном круге $|z| < 1$, для которых существует интеграл

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^{\alpha}|f(\rho e^{i\theta})|^p\,\rho\,d\rho\,d\theta.$$

Нетрудно убедиться, что $H_p \subset H_p(\alpha)$ для любых $p > 0$ и $\alpha > -1$, где H_p – класс Харди.

Для $f(z) \in H_2(\alpha)$ имеет место следующее интегральное представление :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}\frac{\varphi(t)}{(1-\bar{t}z)^{\frac{\alpha+3}{2}}}\,dt, \ |z| < 1, \tag{1}$$

где

$$\varphi(z) = \frac{\alpha+1}{2}\int_0^1(1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{2}}f(\rho z)\,d\rho$$

принадлежит классу Харди H_2 и, следовательно, $\varphi(t) \in \mathcal{L}_2$ (см. [2], Теорема 5).

Если $f(z) \in H_p(\alpha)$ $(0 < p \leq 2, \alpha > -1)$, то имеет место следующее интегральное представление :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}\frac{\varphi(t)}{(1-\bar{t}z)^{\frac{\alpha+2}{p}+\frac{1}{2}}}\,dt, \ |z| < 1, \tag{2}$$

где $\varphi(t) \in \mathcal{L}_2$, а если $f(z) \in H_p(\alpha)$ $(2 \le p < \infty,\ \alpha > -1)$, то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \frac{\varphi(t)}{(1 - \bar{t}z)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}}\, dt, \quad |z| < 1, \tag{3}$$

где опять $\varphi(t) \in \mathcal{L}_2$

Интегральные представления подобного типа имеют место для функций класса Харди H_p $(0 < p \le 2)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \frac{\varphi(t)}{(1 - \bar{t}z)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}}\, dt, \quad |z| < 1, \tag{4}$$

где $\varphi(t) \in \mathcal{L}_2$

Г. В. Голузин и В. И. Крылов [3] дали представление функции $f(z) \in H_1$ по угловым граничным значениям $f(z)$, заданным на множестве точек единичной окружности, имеющем положительную меру. Это представление имеет вид

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{e^{-n\psi(z)}}{2\pi i} \int_E \frac{f(t)\, e^{n\psi(t)}}{t - z}\, dt, \quad |z| < 1, \tag{5}$$

где $\psi(z) = U(z) + iV(z)$ - аналитическая функция в круге

$$U(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_E(e^{i\theta}) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi)}\, d\theta.$$

Здесь E – множество положительной меры по Лебегу, принадлежащее единичному кругу : $mE > 0$, $E \subset \Gamma = \{t : |t| = 1\}$, $I_E(e^{i\theta})$ - характеристическая функция этого множества, $0 \le r < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$ и n - натуральное число.

Цель настоящей работы - получение представлений типа (5) для функций из $H_p(\alpha)$ $(0 < p < \infty,\ \alpha > -1)$ и H_p $(0 < p \le 2)$, с помощью интегральных представлений типа (1) – (4).

Результаты в этом направлении были получены в [4] (стр. 74) в случае, когда показатели экспонент $\frac{\alpha+3}{2}$, $\frac{\alpha+2}{p} + \frac{1}{2}$, $\frac{\alpha+1}{p} + 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{2}$ в представлениях (1) – (4) являются натуральными числами, большими единицы.

Теперь же представления типа (5) даны для произвольных показателей, больших единицы.

Лемма 1. *Для $f(z) \in H_p(\alpha)$ $(0 < p < \infty)$ или $f(z) \in H_p$ $(0 < p \le 2)$ имеет место следующее представление :*

$$f(z) = \mathcal{D}^{\beta} \left\{ \frac{r^{\beta} \varphi(z)}{\Gamma(1 + \beta)} \right\}, \quad z = re^{i\theta}, 0 \le r < 1, \tag{6}$$

где $\beta = \dfrac{\alpha+2}{p} - \dfrac{1}{2}$ $(0 < p \le 2, \alpha > -1)$, $\beta = \dfrac{\alpha+1}{p}$ $(2 \le p < \infty, \alpha > -1)$, $\beta = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2}$ $(0 < p \le 2)$, *функция* $\varphi(z)$ *взята из представлений (2), (3) и (4), соответственно, а* $\mathcal{D}^{\beta}$ *– интегро- дифференциальный оператор в смысле Римана-*

-Лиувилля.

Доказательство. В представлениях (2), (3) и (4) $\varphi(z) \in H_2 \subset H_1$, следовательно ,согласно теореме Фихтенгольца ([5], стр. 97), имеем

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \ |z| < 1, \tag{7}$$

где a_k – коэффициенты разложения в ряд Тейлора функции $\varphi(z)$.

Воспользовавшись разложением

$$\frac{1}{(1-z)^{1+\beta}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\beta+k)}{\Gamma(1+\beta)\,\Gamma(1+k)} z^k, \ |z| < 1,$$

и представлениями (2), (3), (4), заключаем, что

$$\varphi(\ ) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{\varphi(t)}{t-z}\,|dt| = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(1+\beta+k)}{\Gamma(1+\beta)\,\Gamma(1+k)} z^k, \tag{8}$$

где β – один из показателей, указанных в Лемме 1. Тогда

$$\frac{r^{\beta}\varphi(z)}{\Gamma(1+\beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{r^{k+\beta} e^{ik\theta}}{\Gamma(1+\beta)}, \quad z = re^{i\theta}. \tag{9}$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{D}^{\beta}\left\{\frac{r^{\beta}\varphi(z)}{\Gamma(1+\beta)}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k e^{ik\theta}}{\Gamma(1+\beta)} \mathcal{D}^{\beta}\left(r^{k+\beta}\right). \tag{10}$$

Используя формулу (см. [6], стр. 569) , получим что

$$\mathcal{D}^{\beta}\left\{\frac{r^{k+\beta}}{\Gamma(1+\beta+k)}\right\} = \frac{r^k}{\Gamma(1+k)}. \tag{11}$$

Теперь (6) следует из формул (8), (9) и (11). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если* $f(z) \in H_p(\alpha)$ $(0 < p < \infty, \alpha > -1)$ *или* $f(z) \in H_p$ $(0 < p \le 2)$, *то имеет место следующее представление :*

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)}\int_0^r (r-x)^{m-\beta-1}\mathcal{D}^m\left\{\frac{x^{\beta}\varphi(xe^{i\theta})}{\Gamma(1+\beta)}\right\} dx, \tag{12}$$

причем $\beta = \dfrac{\alpha+2}{p} - \dfrac{1}{2}(0 < p \le 2, \alpha > -1)$, $\beta = \dfrac{\alpha+1}{p}(2 \le p < \infty, \alpha > -1)$, $\beta = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2}(0 < p \le 2)$, $z = re^{i\theta}$, $0 \le r < 1$, *функция* $\varphi(z)$ *взята из представлений* (2), (3) *и* (4) , *соответственно.* m - *натуральное число,* $m \ge 1$, $m-1 < \beta < m$.

Доказательство. Для доказательства Леммы 2 воспользуемся представлением (6). Пусть

$$F(r) = \frac{r^{\beta}\varphi(re^{i\theta})}{\Gamma(1+\beta)},$$

тогда $f(r) = \mathcal{D}^{\beta}F(r)$, $0 \le r < 1$. Функция $F(r)$ вместе со своими производными до $(m-1)$ порядка включительно непрерывна в промежутке $(0,l)$, $l < 1$ и $F^{(m)}(r) \in \mathcal{L}(0,l)$. Поэтому

$$F^{(m-1)}(r) = \frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^{k} \left[\varphi(re^{i\theta})\right]^{(m-1-k)} \left(r^{\beta}\right)^{(k)}. \tag{13}$$

где функции $F(r), F'(r), ..., F^{(m-1)}(r)$ непрерывны на $[0,l]$, $l < 1$, при условии $\beta > m-1$. Используя (13), получим

$$\int_0^l |F^{(m)}(r)|\, dr \le \frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \sum_{k=0}^{m} C_m^k \int_0^l \left| \left[\varphi(re^{i\theta})\right]^{(m-k)} \right| \cdot \left| \left(r^{\beta}\right)^{(k)} \right| dr. \tag{14}$$

Так как $\varphi(z)$ аналитична в единичном круге $|z| < 1$, то при $0 \le r \le l < 1$ имеет место следующая оценка :

$$\left| \left[\varphi(re^{i\theta})\right]^{(m-k)} \right| \le M_{l,k},\ k = 0, 1, .., m.$$

где $M_{l,m}$ - постоянная, зависящая от l и m. Из (14) следует, что

$$\int_0^l |F^{(m)}(r)|\, dr \le \frac{M_{l,m}}{\Gamma(1+\beta)} \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\beta(\beta-1)...(\beta-k+1)}{\beta-k+1} l^{\beta-k+1}. \tag{15}$$

Из (15) имеем, что $F^{(m)} \in \mathcal{L}(0,l)$. Учитывая (13), (15) и свойство интегро-дифференциальных операторов (см. [6], стр. 572. Свойство 6) , можем написать

$$\mathcal{D}^{\beta}F(r) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{F^{(k)}(0)\, r^{k-\beta}}{\Gamma(1+k-\beta)} + \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^r (r-x)^{m-\beta-1} \mathcal{D}^m F(x)\, dx. \tag{16}$$

Так как $\beta > m-1$, из (13) получим, что $F^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, ..., (m-1)$. Следовательно, представление (12) следует из (16). Лемма 2 доказана.

Используя эти леммы, докажем несколько теорем.

Теорема 1. *Пусть* $f(z) \in H_p(\alpha)$ $(0 < p < \infty, \alpha > -1)$ *или* $f(z) \in H_p$ $(0 < p \le 2)$. *Для любого подмножества E положительной меры на единичной окружности $|t| = 1$ существует функция $\varphi(z) \in H_2$ такая, что*

$$f(z) = D^{\beta} \left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{r^{\beta}\, e^{-n\psi(z)}}{\Gamma(1+\beta)\, 2\pi i} \int_E \frac{\varphi(t)\, e^{n\psi(t)}}{t - z}\, dt \right\},\ |z| < 1 \tag{17}$$

где $\psi(t)$ известна из представления (5), $\varphi(t) \in \mathcal{L}_2$, а $\beta = \dfrac{\alpha+2}{p} - \dfrac{1}{2}$ $(0 < p \le \le 2, \alpha > -1$, $\beta = \dfrac{\alpha+1}{p}$ $(2 \le p < \infty, \alpha > -1)$, $\beta = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2}$ $(0 < p \le 2)$.

Доказательство. Если $f(z) \in H_p(\alpha)$, то $\varphi(z) \in H_2 \subset H_1$. Следовательно, в силу представления (5) имеем

$$\varphi(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n\psi(z)}}{2\pi i} \int_E \frac{\varphi(t)\, e^{n\psi(t)}}{t - z}\, dt,\ |z| < 1 \tag{18}$$

Из Леммы 1 и формулы (18), получаем представление (17). Теорема доказана.

Подставляя $p = 2$ и $\beta = 0$ в представление (17), получим представление (5). Но из (4) следует, что $f(t) = \varphi(t)$ $(|t| = 1)$ почти всюду..

Следующая теорема дает интегральное представление функции $f(z)$ без оператора дифференцирования.

Теорема 2. *Пусть* $f(z) \in H_p(\alpha)$ $(0 < p < \infty, \alpha > -1)$ *или* $f(z) \in H_p$ $(0 < p \le 2)$. *Для каждого подмножества E единичной окружности $|t| = 1$ положительной меры существует функция $\varphi(z) \in H_2$ такая, что*

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_E \int_0^r \frac{\varphi(t)\, e^{n\psi(t)}\, e^{-n\psi(xe^{i\theta})}\, Q_n(t, x)}{(t - x e^{i\theta})^{m+1}}\, dt\, dx, \tag{19}$$

где $\beta = \dfrac{\alpha+2}{p} - \dfrac{1}{2}$ $(0 < p \le 2, \alpha > -1)$, $\beta = \dfrac{\alpha+1}{p}$ $(2 \le p < \infty, \alpha > -1)$, $\beta = = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2}$ $(0 < p \le 2)$, $z = re^{i\theta}$, $0 \le r < 1$, $m \ge 1$ – *натуральное число*, $m - 1 < \beta < m$, *а*

$$Q_n(t, x) = \frac{(t - x e^{i\theta})^{m+1}\, e^{n\psi(xe^{i\theta})}}{\Gamma(1+\beta)\, \Gamma(m-\beta)\, (r - x)^{1+\beta-m}}\, D^m \left\{ \frac{x^{\beta}\, e^{-n\psi(xe^{i\theta})}}{t - xe^{i\theta}} \right\}. \tag{20}$$

Доказательство. Так как в представлениях (2) – (4), $\varphi(z) \in H_2$, то $\varphi(z)\, e^{n\psi(z)} \in H_2 \subset H_1$. Согласно теореме Г. М. Фихтенгольца ([5], стр. 97) эта функция представляется интегралом через свои граничные значения :

$$\varphi(xe^{i\theta})\, e^{n\psi(xe^{i\theta})} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{\varphi(t)\, e^{n\psi(t)}}{t - x e^{i\theta}}\, dt,\ 0 \le x < 1. \tag{21}$$

Из формулы (21) и Леммы 2 следует, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \int_0^r \frac{\varphi(t)\, e^{n\psi(t)}}{(r-x)^{1+\beta-m}} \left\{ \frac{x^\beta\, e^{-n\psi(xe^{i\theta})}}{t - xe^{i\theta}} \right\}^{(m)} \frac{dt\, dx}{\Gamma(1+\beta)\,\Gamma(m-\beta)}. \tag{22}$$

Принимая во внимание (20) и (22), можем записать

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \int_0^r \frac{\varphi(t)\, e^{n\psi(t)}\, e^{-n\psi(xe^{i\theta})}\, Q_n(t,x)}{(t - x\, e^{i\theta})^{m+1}}\, dt\, dx \tag{23}$$

Разобьем теперь интеграл (23) на два интеграла J_1 и J_2, где

$$J_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma\setminus E} \int_0^r \frac{\varphi(t)\, e^{n\psi(t)}\, e^{-n\psi(xe^{i\theta})}\, Q_n(t,x)}{(t - x\, e^{i\theta})^{m+1}}\, dt\, dx,$$

а J_1 тот же интеграл, но рассматриваемый на множестве E. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} J_2 = 0$. Согласно свойству интеграла Пуассона – Стилтьеса (см. [5], стр. 52), если $t \in \Gamma \setminus E$, то

$$|\exp(n\,\psi(t))| = 1 \quad \text{и} \quad |\exp(-n\psi(xe^{i\theta}))| =$$

$$= \exp\left(-\frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi} I_E(e^{i\omega})\, \frac{(1-x^2)\, d\omega}{1+x^2-2x\cos(\omega-\theta)}\right) \leq \tag{24}$$

$$\leq \exp\left\{-\frac{n}{2\pi}\,\frac{1-x}{1+x}\, mE\right\} \leq \exp\left(-\frac{n}{2\pi}\,\frac{1-r}{1+r}\, mE\right\},\quad 0 \leq x \leq r < 1.$$

Так как $|t| = 1$, $|xe^{i\theta}| = x \leq r \leq t < 1$, $|\psi^{(k)}(xe^{i\theta})| \leq R_k(r)$, $k = 1, 2, \ldots$, где $R_k(r)$ ограниченные величины, зависящие от r, то нетрудно убедиться, что

$$|Q_n(t,x)| \leq \frac{P_m(n)}{x^{m-\beta}\,(r-x)^{1+\beta-m}}, \tag{25}$$

где $P_m(n)$ – многочлен m-ой степени относительно n с ограниченными положительными коэффициентами, зависящими от r.

Теперь из (24) и (25) получим

$$|J_2| \leq \frac{P_m(n)\exp\left\{-\frac{n}{2\pi}\,\frac{1-r}{1+r}\, mE\right\}}{2\pi\,(1-r)^{m+1}} \int_{\Gamma\setminus E}\int_0^r |\varphi(t)|\, \frac{|dt|\, dx}{x^{m-\beta}\,(r-x)^{1+\beta-m}}. \tag{26}$$

Так как $\varphi(t) \in \mathcal{L}_1$, $\int_{\Gamma\setminus E} |\varphi(t)|\,|dt| = A$, то из неравенства (26) следует, что

$$|J_2| \leq \frac{A\, P_m(n)\exp\left\{-\frac{n}{2\pi}\,\frac{1-r}{1+r}\, mE\right\}}{2\pi\,(1-r)^{m+1}} \int_0^r x^{\beta-m}\,(r-x)^{m-\beta-1}\, dx. \tag{27}$$

Подставляя $x = ry$ в (27), получим

$$\int_0^r x^{\beta-m}(r-x)^{m-\beta-1}\,dx = B(m-\beta, 1+\beta-m), \tag{28}$$

где B — функция Эйлера. Так как $m-\beta>0$ и $1+\beta-m>0$, то

$$|J_2| \le \frac{A\,P_m(n)\,B(m-\beta, 1+\beta-m)}{2\pi(1-r)^{m+1}} \exp\left\{-\frac{n}{2\pi}\frac{1-r}{1+r}mE\right\}. \tag{29}$$

Из (29) следует, что $\lim_{n\to\infty} J_2 = 0$. Теорема 2 доказана.

Теперь получим интегральное представление без знака предела. Согласно формуле Карлемана

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{F(t)}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty d\sigma \int_E \frac{F(t)}{t-z}\left[\frac{\gamma(t)}{\gamma(z)}\right]^\sigma \ln\left(\frac{\gamma(t)}{\gamma(z)}\right) dt,$$

где $F(z)\in H_1$, $mE>0$, $|\gamma(t)|=1$, $t\in\Gamma\setminus E$, $|\gamma(z)|>1$, $|z|<1$. Мы можем положить $\gamma(z)=\exp(\psi(z))$, $\varphi(z)$ вместо $F(z)$ и в представлениях (2) - (4) взять β равным $\beta = \dfrac{\alpha+2}{p}-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\alpha+1}{p}$, $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{2}$.

Теорема 3. *Пусть $f(z)\in H_p(\alpha)$ $(0<p<\infty, \alpha>-1)$ или $f(z)\in H_p$ $(0<p\le 2)$. Для любого подмножества E единичной окружности $|t|=1$ с положительной мерой существует функция $\varphi(z)\in H_2$ такая, что*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{\varphi(t)}{(1-tz)^{1+\beta}}\frac{dt}{t} +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \int_E \int_0^r \frac{\varphi(t)\,e^{\sigma\psi(t)}\,e^{-\sigma\psi(xe^{i\theta})}N_\sigma(t,x)}{(t-xe^{i\theta})^{m+1}}\,d\sigma\,dt\,dx,$$

где $\beta = \dfrac{\alpha+2}{p}-\dfrac{1}{2}$ $(0<p\le 2, \alpha>-1)$, $\beta=\dfrac{\alpha+1}{p}$ $(2\le p<\infty, \alpha>-1)$, $\beta = \dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{2}$ $(0<p\le 2)$, $z=re^{i\theta}$, $0\le r<1$, $m\ge 1$ *— натуральное число* $m-1<\beta<m$, *а* $N_\sigma(t,x)$ *определяется из равенства*

$$\frac{(r-x)^{m-\beta-1}}{\Gamma(1+\beta)\,\Gamma(m-\beta)}D^m\left\{\frac{x^\beta(\psi(t)-\psi(xe^{i\theta}))\,e^{-\sigma\psi(xe^{i\theta})}}{t-xe^{i\theta}}\right\} = \frac{N_\sigma(t,x)\,e^{-\sigma\psi(xe^{i\theta})}}{(t-xe^{i\theta})^{m+1}}. \tag{30}$$

Доказательство. Так как $\varphi(z)\in H_2\subset H_1$, то согласно формуле Карлемана

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty d\sigma\int_E \frac{\varphi(t)}{t-z}\left[\frac{e^{\psi(t)}}{e^{\psi(z)}}\right]^\sigma \ln\left[\frac{e^{\psi(t)}}{e^{\psi(z)}}\right] dt.$$

Умножая обе части этого равенства на $\frac{r^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)}$ и используя Лемму 1, получим

$$
\begin{aligned}
f(z) = \mathcal{D}^{\beta}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{E}\frac{\varphi(t)}{t-z}\frac{r^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)}\,dt\right\} + \\
+\mathcal{D}^{\beta}\left\{\frac{r^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}d\sigma\int_{E}\frac{\varphi(t)}{t-z}\left[\frac{e^{\psi(t)}}{e^{\psi(z)}}\right]^{\sigma}(\psi(t)-\psi(z))\,dt\right\}.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Прежде всего покажем, что

$$
\mathcal{D}^{\beta}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{E}\frac{\varphi(t)}{t-z}\frac{r^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)}\,dt\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{E}\frac{\varphi(t)}{(1-\bar{t}z)^{1+\beta}}\cdot\frac{dt}{t}. \tag{32}
$$

Имеем

$$
\mathcal{D}^{\beta}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{E}\frac{\varphi(t)}{t-z}\frac{r^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)}\,dt\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{E}\frac{\varphi(t)}{t^{n+1}}\mathcal{D}^{\beta}\left\{\frac{r^{n+\beta}\,e^{in\theta}\,dt}{\Gamma(1+\beta)}\right\}. \tag{33}
$$

Согласно формуле (11)

$$
\mathcal{D}^{\beta}\left\{\frac{r^{n+\beta}}{\Gamma(1+\beta)}\right\}e^{in\theta} = \frac{\Gamma(1+\beta+n)}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1+n)}\,z^{n}. \tag{34}
$$

Теперь (32) следует из (7), (33) и (34).

Тем же способом получим, что

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\beta}\left\{\frac{r^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)\,2\pi i}\int_{0}^{\infty}d\sigma\int_{E}\frac{\varphi(t)}{t-z}\left[\frac{e^{\psi(t)}}{e^{\psi(z)}}\right]^{\sigma}(\psi(t)-\psi(z))\,dt\right\} = \\
= \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}d\sigma\int_{E}\varphi(t)\,e^{\sigma\psi(t)}\mathcal{D}^{\beta}\left\{\frac{r^{\beta}(\psi(t)-\psi(re^{i\theta}))\,e^{-\sigma\psi(re^{i\theta})}}{\Gamma(1+\beta)\,(t-re^{i\theta})}\,dt\right\}.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Согласно (16)

$$
\begin{aligned}
D^{\beta}\left\{\frac{r^{\beta}(\psi(t)-\psi(re^{i\theta})\,e^{-\sigma\psi(re^{i\theta})}}{\Gamma(1+\beta)\,(t-re^{i\theta})}\right\} = \\
= \frac{1}{\Gamma(m-\beta)}\int_{0}^{r}(r-x)^{m-\beta-1}\mathcal{D}^{m}\left\{\frac{x^{\beta}(\psi(t)-\psi(xe^{i\theta}))\,e^{-\sigma\psi(xe^{i\theta})}}{\Gamma(1+\beta)(t-xe^{i\theta})}\right\}dx.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Теорема 3 теперь следует из формул (30) – (32), (35) и (36). Дифференцирование под знаком интеграла здесь допустимо, в силу хорошо известной теоремы анализа (см. [7], стр. 218).

ABSTRACT. The aim of the present paper is to obtain representations of some type for functions from the Djrbashian $H_p(\alpha)\,(0 < p < \infty,\ \alpha > -1)$ and the Hardy $H_p(0 \le p < 2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, "О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций," ДАН Арм.ССР, том 3, no. 1, стр. 3 – 9, 1945.

2. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций," Сообщения Института математики и механики АН Арм.ССР, no. 2, стр. 3 – 40, 1948.

3. Г. М. Голузин, В. И. Крылов, "Обобщение формулы Карлемана и приложение ее к аналитическому продолжению функции," Матем. сборник, том 40, no. 2, 1933.

4. С. С. Степанян, "Об интегральном представлении функций класса М. М. Джрбашяна $H_p(\alpha)$," ДАН Арм.ССР, том 19, no. 2, стр. 74 – 81, 1979.

5. И. И. Привалов, Граничные Свойства Аналитических Функций, М. – Л., 1950.

6. М. М. Джрбашян, Интегральные Преобразования и Представления Функций в Комплексной Области, М., 1966.

7. Г. М. Фихтенгольц, О Простых Кратных Интегралах, Зависящих от Параметра, 1918.

21 Апреля 1992

Армянский педагогический институт

СМЕШАННЫЕ ОБЪЕМЫ НЕВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Г. Ю. Паника

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика.
том 28, No 1, 1993

Два тела K и K' в $\mathbb{R}^n$ имеют *одинаковое поведение относительно смешанных объемов*, если для всех выпуклых тел $K_2, ..., K_n$ имеем

$$V(K, K_2, ..., K_n) = V(K', K_2, ..., K_n).$$

В настоящей работе даны необходимые и достаточные условия того, чтобы два тела с кусочно гладкой поверхностью имели одинаковое поведение.

Будем говорить, что два тела K и K', лежащие в $\mathbb{R}^n$ имеют *одинаковое поведение относительно смешанных объемов*, если для всех выпуклых тел $K_2, ..., K_n$ имеем

$$V(K, K_2, ..., K_n) = V(K', K_2, ..., K_n).$$

Легко доказать, что два выпуклых тела с одинаковым поведением равны с точностью до параллельного переноса. Однако, это утверждение неверно для невыпуклых тел. В настоящей работе даны необходимые и достаточные условия (Теоремы 4.4 и 7.2) того, чтобы два тела с кусочно-гладкой поверхностью имели одинаковое поведение. В Теореме 4.4 рассматриваются тела с многогранной поверхностью, а условия формулируются в терминах "сетей". Теорема 7.2 относится к гладким телам и имеет простую формулировку.

Пусть тело $K \subset \mathbb{R}^n$ ограничено кусочно-гладкой поверхностью. Определим функцию

$$\{H\}(\omega) = \sum_{\text{по ветвям}} H^j(\omega)\,(-1)^{k^j(\omega)}, \qquad (0$$

где $H^j(\omega)$ – расстояние от O до j-той гиперплоскости с нормалью ω, касательной к K в точке $u^j(\omega)$, $k^j(\omega)$ – число отрицательных радиусов кривизны в точке $u^j(\omega)$

Два кусочно-гладких тела имеют одинаковое поведение относительно смешанных объемов тогда и только тогда, когда их $\{H\}$ функции совпадают.

Предварительные сведения

$\mathbb{R}^n$ – n-мерное пространство с началом в O;

E_n^o – пространство ориентированных гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$, содержащих O;

F_n – пространство *флагов* в $\mathbb{R}^n$ (флаг f определяется как пара $f =$ (прямая L, содержащая O; гиперплоскость e, содержащая L));

Ω^{n-1} – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ с центром в O;

S_{n-1} – площадь Ω^{n-1}.

Мы будем использовать *стандартное сферическое представление*, в котором гиперплоскости отображаются в точки на Ω^{n-1} (соответствующие их нормалям), прямые – большие $(n-2)$-мерные сферы и т.д.

Тело K называется *кусочно-гладким*, если оно имеет границу с почти всюду определенными и ограниченными вторыми производными.

Будем говорить, что ориентированная гиперплоскость e с нормалью ω касательна к K в $u \in \partial K$, если e локально касается ∂K в точке u и $u + \varepsilon\omega$ не лежит в K для малых ε.

Для заданного такого K построим многозначную *опорную функцию* H_K, определенную на Ω^{n-1}. Ее j-тое значение $H_K^j(\omega)$ определяется как расстояние от O до j-той локальной касательной гиперплоскости с нормалью ω.

Напомним определение *смешанных объемов* для невыпуклых тел (см. [3]).

Пусть $K_1, K_2, ..., K_n \subset \mathbb{R}^n$-некоторые тела. Для $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$, функция

$$F(K_1, ..., K_n; \lambda_1, ..., \lambda_n) = \int ... \int I_1(x_1 - x_2 - ... - x_n) I_2(x_2) ... \cdot$$
$$I_n(x_n) d\chi(x_n) ... d\chi(x_2) dx_1,$$

где $d\chi$ обозначает интегрирование по эйлеровым характеристикам, является однородным полиномом от $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Коэффициент при $\lambda_1 ... \lambda_n$ называется смешанным объемом $V(K_1, ..., K_n)$.

§1. СЕТИ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Пусть K – выпуклый многогранник. Рассмотрим его ребра ν_i, лежащие на прямой L_i со смежными гранями $e_{1i}, ..., e_{mi}$. Сферические образы всех опорных гиперплоскостей, содержащих ν_i, формируют $(n-2)$-мерный сферический многогранник ω_{1i}. Этот многогранник лежит на большой сфере $\Omega^{n-2} \subset \Omega^{n-1}$, которая является сферическим образом прямой L_i. Вершины этого многогранника – сферические образы $e_{1i}, ..., e_{mi}$.

Образ всех ребер формирует сеть, т. е. производит разложение Ω^{n-1} в сферический многогранник. Вершины такого разложения являются образами всех гиперплоскостей граней K.

Определение 1.1. Предположим, что в этом разложении каждому $(n-2)$-мерному многограннику задан "вес", равный длине ν_i. Тогда имеем *сеть* для многогранника K.

Сеть каждого многогранника удовлетворяет свойствам А) и В) :

А) Каждый сферический многогранник в этом разложении является геодезически выпуклым

В) Свойство постоянства : пусть κ, κ' – два $(n-1)$-мерных многогранника этой сети. Пусть P – путь из $A \in \kappa$ в $B \in \kappa'$ (см Рис. 1.1). Пусть этот путь пересекает $(n-2)$-мерную грань сети, соответствующей ребрам $L_1, ..., L_m$. Тогда для каждого вектора ξ сумма $\sum_P |L_i| \cos(L_i, \xi)$ не зависит от всего пути P, а только от точек A и B.

Теорема 1.1. *Пусть имеется сеть с положительными весами на Ω^{n-1}, удовлетворяющим условиям А) и В). Тогда существует единственный (с точностью до параллельного переноса) выпуклый многогранник K в $\mathbb{R}^n$, обладающий такой сетью.*

§2. СЕТИ ДЛЯ НЕВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – многогранник, который необязательно выпуклый. Рассмотрим многозначную функцию s с ветвями s_i, определенными на E_n^o по следующему правилу :

$$s_i(e) = I(e)|\nu_i|[1 - \chi(e \cap K \cap U_{[\nu_i]})],$$

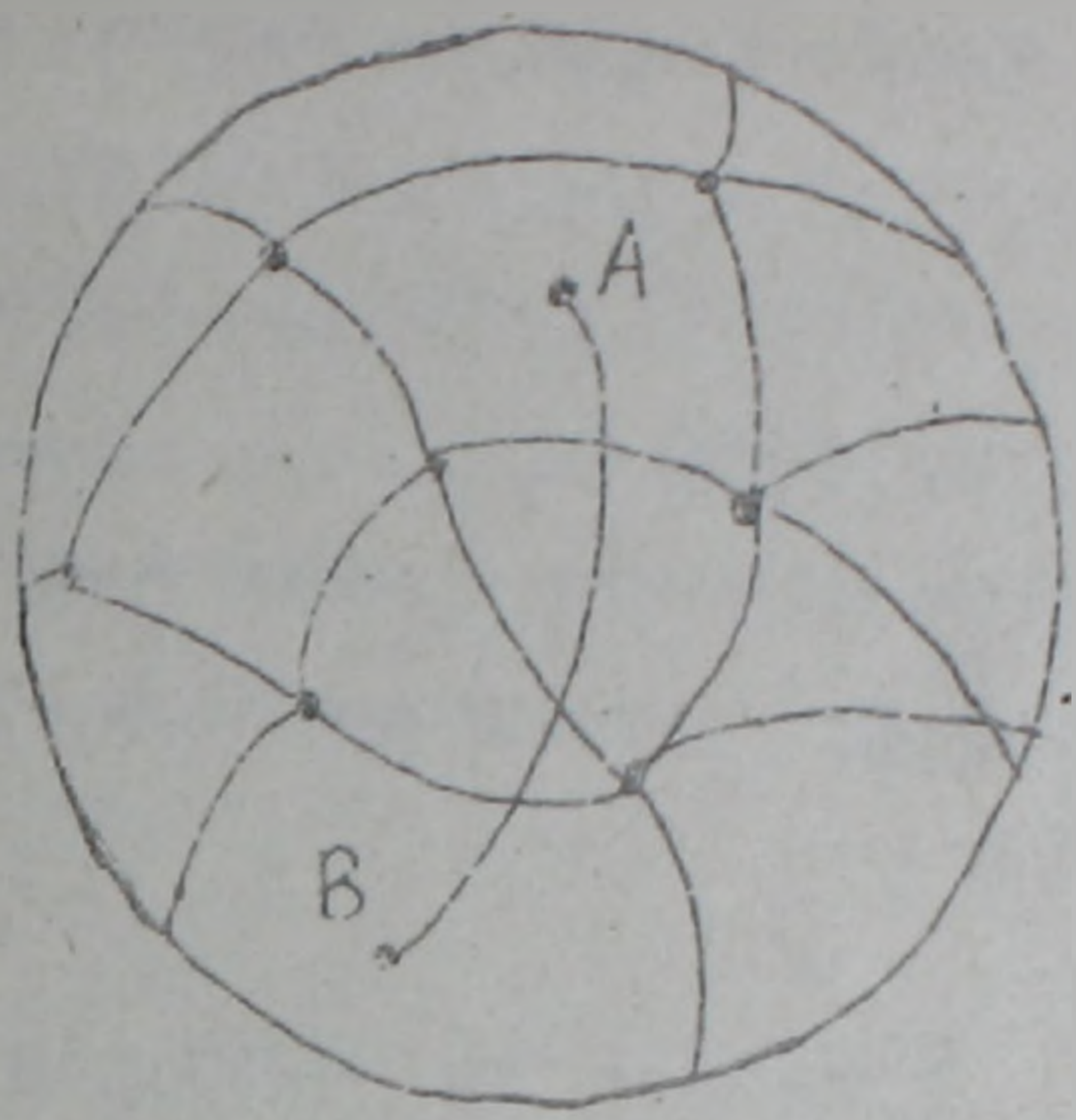

Рис. 1.1.

где

$$I(e) = \begin{cases} 1, & \text{если, после определенного параллельного переноса,} \\ & e \text{ содержит ребро } \nu_i \text{ многогранника } K, \\ 0, & \text{в противном случае (т. е. почти всюду),} \end{cases}$$

$|\nu_i|$ - длина ребра, χ - эйлерова характеристика, $U_{[\nu_i]}$ - полусфера с маленьким радиусом с центром во внутренней точке ребра ν_i и лежащая в гиперплоскости $\nu_i^{\perp}$. Полюс $U_{[\nu_i]}$ - конец нормали e.

Пример. Если K - выпуклый, тогда

$$s(e) = \begin{cases} |\nu_i|, & \text{если, после параллельного переноса, } e \text{ - опорная плоскость} \\ & \text{многогранника } K \text{ и содержит } \nu_i \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определим

$$\{s\}(e) = \sum s_i(e)$$

Носитель $\{s\}$ является объединением сферических $(n-2)$ многогранников и формирует сеть $\sum_K$ на Ω^{n-1}. Его вес (возможно отрицательный) определяется как значение $\{s\}$. Верны следующие простые теоремы.

Теорема 2.1. *Сеть $\sum_K$ для невыпуклого многогранника K удовлетворяет свойству постоянства B (см. §1).*

Теорема 2.2. *Если вес $\sum_K$ (т. е. значение $\{s\}$) невыпуклого многогранника - неотрицательный, то $\{\sum\}$ удовлетворяет свойству A (см. §1), т. е. сферические многогранники соответствующем разложении выпуклы.*

Определение 2.1. Пусть свертка $\{s\}$ многогранника K неотрицательна. Тогда мы говор.. м, что поверхность K *квазивыпукла*. Согласно Теореме 1.1 существует выпуклый многогранник $\mathrm{Conv}(K)$, с сетью $\sum_K$. Этот многогранник называется выпуклой версией многогранника K.

Имеется простое условие существования выпуклой версии многогранника.

Теорема 2.3 *Полиэдр K - квазивыпуклый тогда и только тогда, если для каждого флага $f(L, e)$*

$$\sum |\nu_i| I(L)[1 - \chi(e \cap K \cap U_{[L]})] \geq 0,$$

где суммирование ведется по ребрам K, параллельным L.

§3. ПРИМЕРЫ КОМПЛЕКСНЫХ ВЕРСИЙ

Пример 3.1. Пусть $K = K_1 \cup K_2$, где K_1 и K_2 непересекающиеся выпуклые тела. Тогда K имеет выпуклую версию $\mathrm{Conv}(K) = K_1 \oplus K_2$.

Пример 3.2. Пусть $K_1 \subset K_2$ - выпуклые многогранники, $\partial K_1 \cap \partial K_2 = \emptyset$. Если n - четное , то $\mathrm{Conv}(K_2 \setminus K_1) = K_1 \oplus K_2$; если n - нечетное, то $\mathrm{Conv}(K_2 \setminus K_1) =$ $= K_2 \ominus K_1$ (условное существование разности Минковского).

Пример 3.3. Каждый многоугольник имеет выпуклую версию, и множество его ребер равно множеству ребер его выпуклой версии.

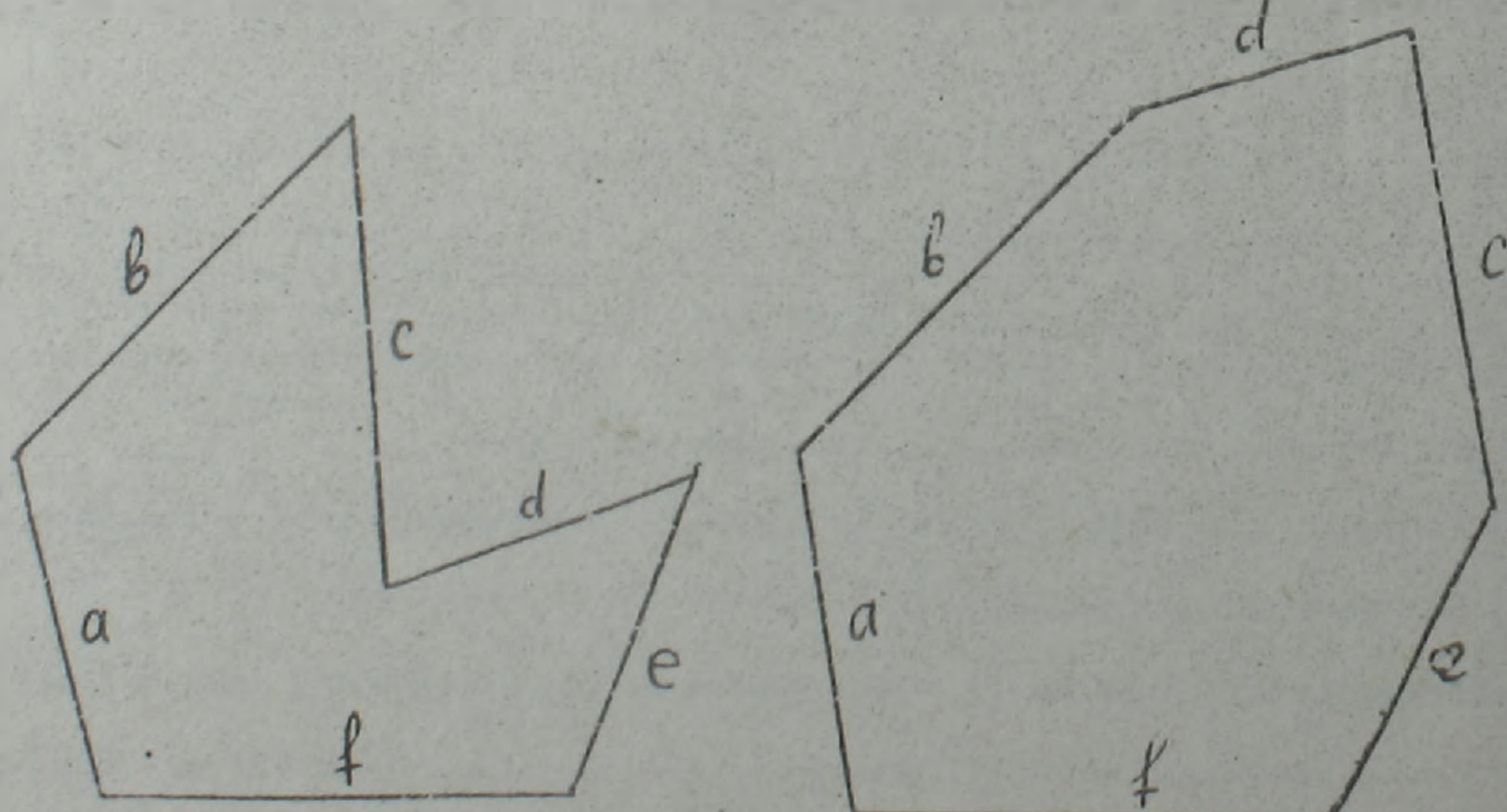

Рис. 3.1

§4. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПОЛИЭДРАХ

Следующее построение будет важным. Предположим, что K и Π – многогранники из $\mathbb{R}^n$, Π – выпуклый и содержит O. Пусть ν – ребро K ; $Pr\,\Pi = Pr_\nu \Pi$ - проекция Π на гиперплоскость, ортогональную к ν. Определим функцию $T = T_W(X)$ на $Pr_\nu \Pi$ следующим образом : пусть прямая (O, X) пересекает границу $Pr\,\Pi$ в точке с нормалью $v(X)$. Пусть $e(X)$ – гиперплоскость, содержащая ребро ν, с нормалью $v(X)$. Тогда множество

$$T(X) = 1 - \chi(e(X) \cap K \cap U_{[\nu]}),$$

где χ – эйлерова характеристика, $U_{[\nu]}$ – сфера с малым радиусом вокруг некоторой внутренней точки ребра ν.

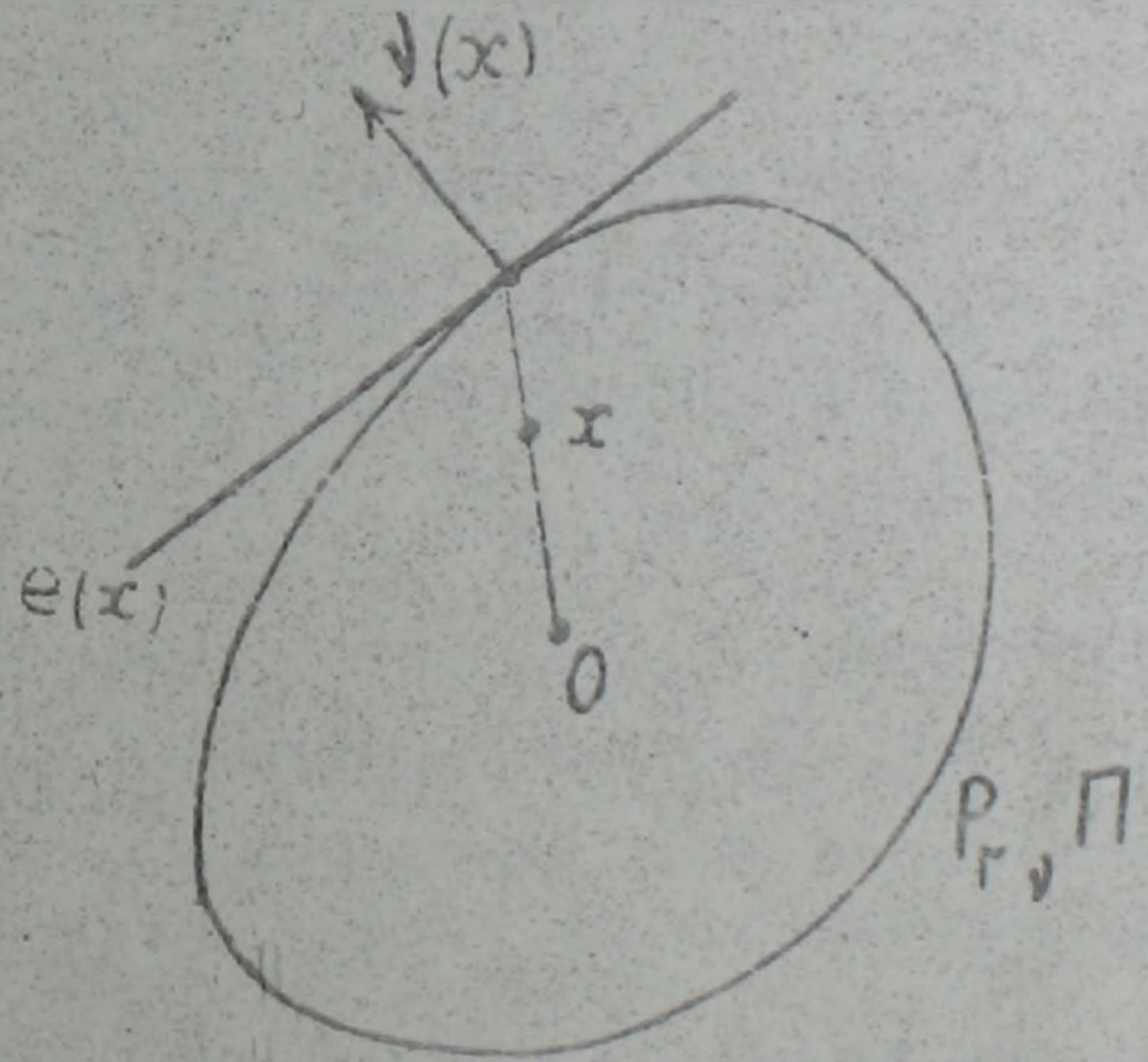

Рис. 4.1.

Теорема 4.1. *Для выпуклого многогранника K и положительного λ имеем*

$$V(\lambda K + \Pi) = V(\Pi) + \sum_{\nu_i - \text{ ребро } K} |\nu_i| \int_{Pr_{\nu_i}\Pi} T(X)\,dX + o(\lambda),$$

при $\lambda \to 0$.

Теорема 4.2. *Для произвольного многогранника K и любого положительного λ имеем*

$$\iint I_{\lambda K}(x - y) I_\Pi(y)\,d\chi(y)\,dx = V(\Pi) + \lambda \sum_{\nu_i - \text{ ребро } K} |\nu_i| \int_{Pr_{\nu_i}\Pi} T(X)\,dX + o(\lambda),$$

при $\lambda \to 0$. *Здесь* $d\chi(y)$ *означает интегрирование по эйлеровым характеристикам,* I *– характеристическая функция :*

$$I_{\lambda K}(X) = \begin{cases} 1, & \text{если } X \in \lambda K \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 4.3. *Пусть* $K, K_2, \ldots, K_n$ *– многогранники из* $\mathbb{R}^n$. *Тогда*

$$V(K, K_2, \ldots, K_n) = V(Conv(K), K_2, \ldots, K_n).$$

Теорема 4.4. *Пусть* $K, K' \subset \mathbb{R}^n$ *– многогранники с* $\sum_K = \sum_{K'}$. *Тогда для любых* $K_2, \ldots, K_n$

$$V(K, K_2, \ldots, K_n) = V(K', K_2, \ldots, K_n).$$

§5. СИЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ НЕВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Введем топологию сильной сходимости на множестве тел с кусочно гладкой границей, которая важна, так как смешанный объем (как функция от n тел) непрерывен относительно этой топологии.

Определение 5.1. Последовательность тел K_m с кусочно-гладкими границами *сильно сходится* к телу K, если для каждого m существует взаимно-однозначное непрерывное отображение $f_m : \partial K \to \partial K_m$ и подмножество B в ∂K с нулевой лебеговой мерой такой, что

1. $\lim_{m\to\infty} \sup_{\partial K \setminus B} |f_m(x), x| = 0;$
2. $\lim_{m\to\infty} \sup_{\partial K \setminus B} |\omega(f_m(x)), \omega(x)| = 0,$

где $\omega(f_m(x))$ – нормаль к поверхности K_m в точке $f_m(x)$ (должна существовать для почти всех m), $\omega(x)$ – нормаль в точке x поверхности K.

Теорема 5.1. *Пусть для* $j = 1, 2, \ldots, n$, $\lim_{m\to\infty} K_m^j = K^j$, *где* K_m^j *и* K^j *кусочно-гладкие тела в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда*

$$\lim V(K_m^1, \ldots, K_m^n) = V(K^1, \ldots, K^n).$$

§6. ЯДЕРНЫЕ МЕРЫ

Приведем вспомогательное построение. Пусть П – выпуклое тело, содержащее O; f – флаг $f = f(\omega, L)$; $X(\omega) = X(\omega, L)$ – точка на границе проекции П на $L^{\perp}$ с нормалью ω; $x(\omega) = |O, X(\omega)|$; $\phi(\omega) = \phi(\omega, L)$ – единичный вектор, параллельный $O\,X(\omega)$; $\Delta(\omega, L) = \dfrac{d\phi}{n\, d\omega}$.

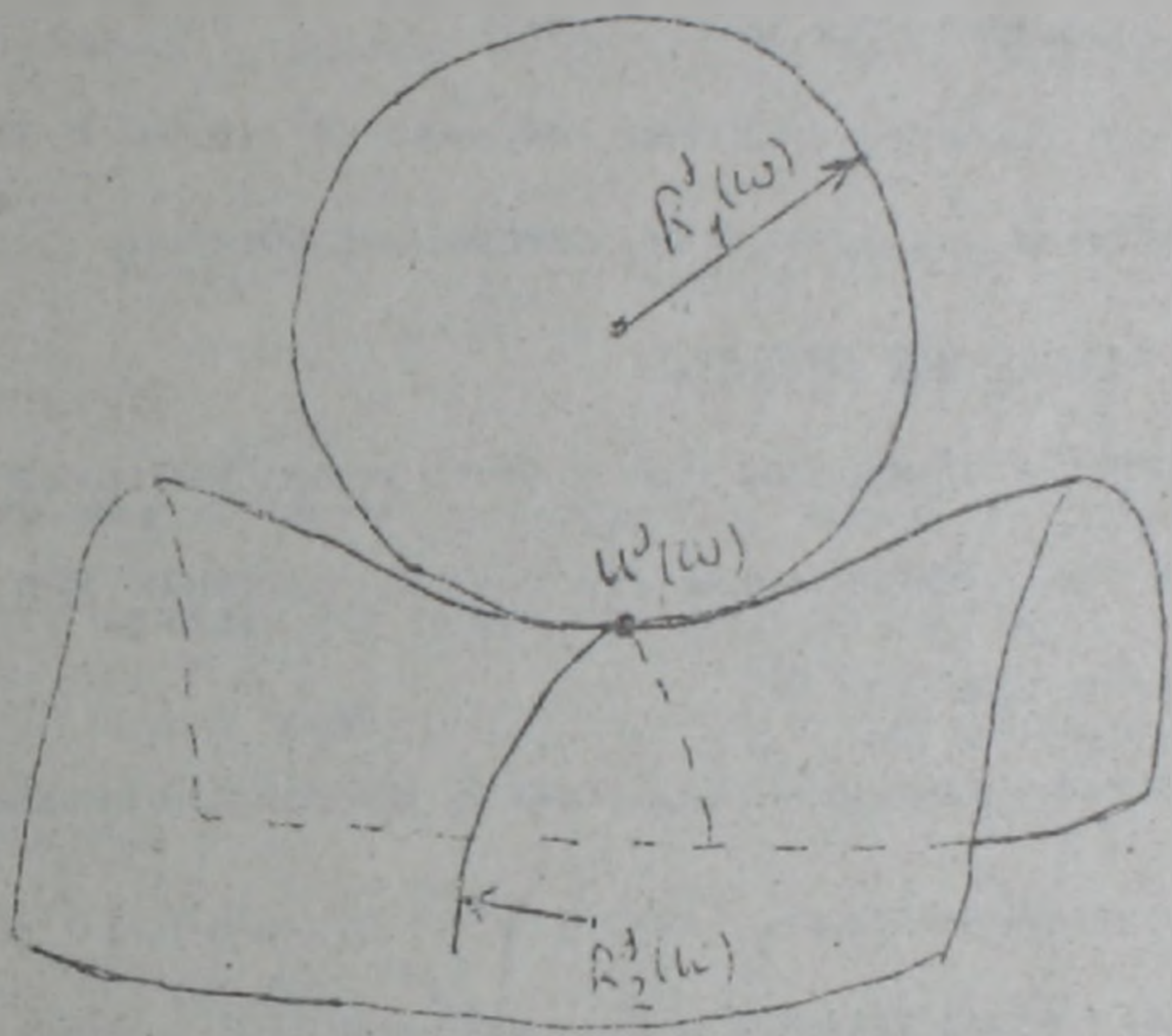

Рис. 6.1.

Определение 6.1. Мера μ, определенная на множестве флагов F_n, является ядерной мерой для тела $K \subset \mathbb{R}^n$, если для любого выпуклого П

$$V(K, \underbrace{П, ..., П}) = \int_{F_n} x(\omega, L)\, \Delta(\omega, L)\, d\mu(f(\omega, L)).$$

Теорема 6.1. *Пусть тела K и K' имеют общую ядерную меру. Тогда для любых* $П_2, ..., П_n$

$$V(K, П_2, ..., П_n) = V(K', П_2, ..., П_n).$$

Оказывается, мы имеем уже вычисленные ядерные меры для многогранников.

Теорема 6.2. *Пусть K – многогранник в $\mathbb{R}^n$, $\{s\}$ – функция, введенная в §2. Рассмотрим меру μ_K такую, что для любой непрерывной функции, определенной на F_n*

$$\int_{F_n} A(f)\, d\mu_K(f) = \sum_{v_i} \int_{L_i \subset \omega} A(\omega, L_i)\{s\}(\omega)\, d\omega(L_i),$$

где ν_i – ребра K, L_i – прямая, параллельная ν_i, $d\omega(L_i)$ – обычная мера Лебега на множестве гиперплоскостей, содержащих L_i.

Такая мера является ядерной для K.

Доказательство. Это утверждение есть переформулировка Теоремы 1.2.

Определение 6.2. Пусть K и K' – тела. Предположим, что K' выпуклый, и что K и K' имеют одну и ту же ядерную меру. Тогда тело K' называется *выпуклой версией* K и обозначается через $\mathrm{Conv}(K)$.

Заметим, что основное свойство сохраняется : тело и его выпуклая версия взаимозаменяемы при вычислении смешанных объемов.

§7. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – C^2-гладкое тело с почти всюду неотрицательными главными кривизнами. Мы собираемся найти одну из ядерных мер для K и получить условие квазивыпуклости K.

Рассмотрим специальные приближения K многогранниками.

Локальное приближение. Для $\omega \in \Omega^{n-1}$, пусть $u^j(\omega)$ - точки на ∂K с нормалью ω, $R_i^j(\omega)$ – i-тый главный радиус кривизны ∂K в точке $u^j(\omega)$, L_i^j — прямая с i-тым главным направлением в точке $u^j(\omega)$, k^j – число неотрицательных чисел среди R_i^j.

Построим окружности O_i^j, касающиеся L_i^j в точке $u^j(\omega)$, с радиусами $R_i^j(\omega)$, приблизим каждую O_i^j многоугольником K_i^j и рассмотрим сумму $S^j = \oplus_i K_i^j$. После определенной трансляции, S^j даст локальное приближение ∂K около точки $u^j(\omega)$.

Глобальное приближение. Пусть Φ_t - покрытие Ω^{n-1} непокрывающими множествами Φ_l с кусочно-гладкими границами и с радиусами, не превосходящими t. Отметим в каждом Φ_l внутреннюю точку ω_l, так что главные кривизны в этой точке не равны 0. Теперь приблизим ∂K следующим образом : в окрестности точки $u^j(\omega_l)$ приблизим ∂K с помощью части S^j, тогда, транслируя грани каждой S^j, отметим их касательную к ∂K. Таким образом, мы получим приближение $K_{t,m}$ тела K. Используя это приближение, можно получить следующую теорему :

Теорема 7.1. *Пусть K - C^2-гладкое тело с почти всюду ненулевыми главными кривизнами. Тогда мера μ_K, определенная соотношением*

$$\int_{F_n} \Lambda(f)\, d\mu_K(f) = \int_{\Omega^{n-1}} \sum_j \sum_i R_i^j(\omega)\, k^j(\omega)\, \Lambda(f(\omega, L_i^j))\, d\omega,$$

- ядерная мера для тела K.

Эта теорема следует из нашего основного результата :

Теорема 7.2. *Пусть K - гладкое тело. Пусть H_K - многозначная опорная функция K и*

$$\{H_K\}(\omega) = \sum_{\text{по ветьям}} H_K^j(\omega)\,(-1)^{k^j(\omega)}.$$

Тогда

1. K - квазивыпукло тогда и только тогда, когда $\{H_K\}$ - выпуклая функция, и опорная функция его выпуклой версии равна $\{H_K\}$.

2. Для гладких тел K и M, $\{H_K\} = \{H_M\}$ тогда и только тогда, когда для всех тел $K_2, ..., K_n$

$$V(K, K_2, ..., K_n) = V(M, K_2, ..., K_n).$$

ABSTRACT. **We say that two bodies K and K' in $\mathbb{R}^n$ have** ***the same behavior with respect to mixed volumes*** **if for all convex bodies $K_2, ..., K_n$, we have**

$$V(K, K_2, ..., K_n) = V(K', K_2, ..., K_n).$$

The present paper gives necessary and sufficient conditions for two bodies with piecewise smooth surface to have the same behavior.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. A. Santalo, Integral Geometry and Geometric Probability, Addison--Wesley, Reading, Mass., 1976.
2. K. Leichtweiss, Konvexe Mengen, VEB, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980.
3. H. Groemer, "Minkowski addition and mixed volumes", Geom. d-d.,vol. 6, no. 2, pp. 141–163, 1977.
4. Ю. Бураго, Б. Залгаллер, Геометрические Неравенства,Ленинград, Наука,1980.

5 Сентября 1992

Санкт-Петербург
Л. О. М. И.

ПАРАМЕТРИКС СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕОДНОРОДНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Р. Г. Айрапетян, Г. Р. Александрян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, No 1, 1993

Настоящая работа посвящена построению параметрикса смешанной задачи для волнового уравнения в виде интегрального оператора Фурье. Описание канонического отношения основывается на известном законе геометрической оптики об отражении.

В работах [1 – 2] такое построение было осуществлено для смешанной задачи с однородным граничным условием. Естественно, неоднородное граничное условие более усложняет структуру канонического отношения, что, в свою очередь, усложняет построение главного символа.

1. Постановка задачи. Пусть X – область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей ∂X. Рассмотрим следующую смешанную задачу

$$\Diamond u = u_{tt} - \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j} = 0 \quad \text{в} \quad X \times \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$u(0, x) = 0, \; u_t(0, x) = 0 \quad \text{на} \quad X, \tag{2}$$

$$u(t, x) = g(t, x) \quad \text{на} \quad \mathbb{R}_+ \times \partial X. \tag{3}$$

Введем следующие пространства распределений :

$$\mathcal{D}'_\delta(\mathbb{R}_+ \times \partial X) = \{g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \partial X) : \; \text{singsupp}\, g \subset [\delta, +\infty) \times \partial X\},$$

$$\mathcal{D}'_a(\mathbb{R}_+ \times X) = \{g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times X) : \; \exists \tilde{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}) \quad \text{такое, что}$$

$$\tilde{u}|_{\mathbb{R}_+ \times \partial X} = u \quad \text{и} \quad WF(\tilde{u}) \cap \left[N_{0 \times \mathbb{R}^n} \mathbb{R}^{n+1} \cup N_{\mathbb{R}_+ \times \partial X} \mathbb{R}^{n+1}\right] = \emptyset\}.$$

Следовательно, определены следы распределений $\mathcal{D}'_a(\mathbb{R}_+ \times X)$ на границу $\mathbb{R}_+ \times \partial X$ и на начальную гиперплоскость $t = 0$.

Определение. Интегральный оператор Фурье E_δ называется параметриксом смешанной задачи (1) – (3), если

$$E_\delta : \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \partial X) \longrightarrow \mathcal{D}'_u(\mathbb{R}_+ \times X)$$

и $E_\delta g - u \in C^\infty\left(\overline{\mathbb{R}_+ \times X}\right)$, где u - точное решение задачи.

Предположим, что

Условие 1. Бихарактеристика, исходящая из $\overset{\circ}{T}{}^* X$ пересекает границу области $\mathbb{R}_+ \times \partial X$ трансверсально, причем область X выпукла относительно характеристических лучей.

2. Каноническое отношение. Бихарактеристики, соответствующие корням $\pm|\xi|$ характеристического уравнения $\tau^2 - |\xi|^2 = 0$ и исходящие из точек $(y,\tau) \in \overset{\circ}{T}{}^* X$ задаются равенствами :

$$\tau = \pm|\xi|,\ \xi = \eta,\ x = -\frac{\xi}{\tau}\cdot t + y,\ t \in [0, t^1_+(y,\eta)], \tag{4}$$

где $t^1_\pm(y,\eta)$ есть момент времени, в который проекция $x(t,y,\eta)$ бихарактеристики на базу впервые пересекает границу ∂X.

Мы используем следующую инволюцию ([2]) на $\overset{\circ}{T}{}^*(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)\Big|_{\mathbb{R}_+\times\partial X}$:

$$(t,\tau,x,\xi) \longmapsto (t,\tau,x,\xi),$$

где $|\xi| = |\xi|$, $\xi \neq \xi$ и $\xi - \xi = 0$ на $T^*\partial X$. Эта инволюция является гладким отображением ([2]). Отраженные бихарактеристики определим соотношениями

$$\begin{aligned} &\tau = \pm|\xi|,\ x = -\frac{\xi}{\tau}\left(t - t^1_\pm(y,\eta)\right) + x(t^1_\pm(y,\eta), y, \eta), \\ &\xi = \eta,\ t \in [t^1_\pm(y,\eta), t^2_-(y,\eta)], \end{aligned} \tag{5}$$

где $t^2_\pm(y,\eta)$ - момент времени, в который проекция отраженной бихарактеристики впервые пересекает границу ∂X. Продолжая эту процедуру, получаем последовательность точек $\{t^j_\pm(y,\eta)\}$ и ломаные бихарактеристики.

Начнем теперь с построения канонического отношения. Пусть $K^\pm(t,x,\xi)$ - число пересечений с границей проекций ломаной бихарактеристики, на которой лежит точка $(t,\pm|\xi|,x,\xi)$ до момента времени t. Предположим также выполненным

Условие 2. Для каждой точки $(t, \pm|\xi|, x, \xi) \in T^*(\mathbb{R}_+ \times X)$

$$K^\pm(t, x, \xi) < \infty.$$

Пусть $\Phi_t^\pm : T^*(X) \mapsto T^*(\mathbb{R}_+ \times X)$ - отображение, переводящее точку $(y, \eta) \in T^*(X)$ в такую точку $(t, \pm|\xi|, x, \xi) \in T^*(\mathbb{R}_+ \times X)$, что точки $(0, \pm|\eta|, y, \eta)$ и $(t, \pm|\xi|, x, \xi)$ принадлежат некоторой ломаной бихарактеристике.

Пусть π - естественная проекция

$$\pi : \; T^*(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)|_{\mathbb{R}_+ \times \partial X} \longmapsto T^*(\mathbb{R}_+ \times \partial X).$$

Положим

$$C_{ij}^\pm = \{(t, \pm|\xi|, x, \xi, \tilde{t}, \pm|\xi|, \tilde{x}, \xi) \in \mathring{T}^*(\mathbb{R}_+ \times X) \times \mathring{T}^*(\mathbb{R}_+ \times \partial X) :$$
$$K^\pm(t, x, \xi) = i \quad \tilde{t} = t_\pm^j(y, \eta), \; (y, \eta) = \left(\Phi_t^\pm\right)^{-1}(t, \pm|\xi|, x, \xi),$$
$$(\tilde{t}, \pm|\xi|, \tilde{x}, \tilde{\xi}) = \pi\Phi_{\tilde{t}}^\pm(y, \eta)\}, C^\pm = \cup_{i \geq j \geq 1} C_{i,j}^\pm, \quad C = C^+ \cup C^-.$$

Лемма 1. *Отношение C есть замкнутое каноническое лагранжево подмногообразие в $\mathring{T}(\mathbb{R}_+ \times X) \times \mathring{T}^*(\mathbb{R}_+ \times \partial X)$ с канонической 2 формой $\sigma_{\mathbb{R}_+ \times X} - -\sigma_{\mathbb{R}_+ \times \partial X}$ на пространстве произведения.*

3. Построение оператора E_δ. Пусть ε достаточно малое положительное число

$$\mathbb{R}_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R} : \; t > -\varepsilon\}, \quad X_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \; \mathrm{dist}(x, X) < \varepsilon\}.$$

Существует замкнутое каноническое лагранжево подмногообразие $\tilde{C}$ в $\mathring{T}^*(\mathbb{R}_\varepsilon \times X_\varepsilon) \times \mathring{T}^*(\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X)$ с канонической 2 формой $\sigma_{\mathbb{R}_\varepsilon \times X_\varepsilon} - \sigma_{\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X}$ на пространстве произведения такое, что

$$\tilde{C} = \cup_{i \geq j \geq 1} \left(\tilde{C}_{i,j}^+ \cup \tilde{C}_{i,j}^-\right),$$

$$\tilde{C}_{i,j}^\pm \cap \left(\mathring{T}^*(\mathbb{R}_+ \times X) \times \mathring{T}^*(\mathbb{R}_+ \times \partial X)\right) = C_{ij}^\pm.$$

Пусть Γ и B - канонические отношения операторов ограничений на многообразия $O \times X_\varepsilon$ и $\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X$, соответственно. Обозначим через $\mathcal{F}_\Gamma$ и $\mathcal{F}_B$ соответствующие интегральные операторы Фурье.

Докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пересечения канонических отношений $\widetilde{C}$ с Γ и B являются собственными и трансверсальными.*

Начнем с построения оператора $\widetilde{\mathcal{F}}$ в виде асимптотического разложения

$$\widetilde{\mathcal{F}} \sim \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{\mathcal{F}}_l$$

со следующими свойствами

$$\widetilde{\mathcal{F}}_l \in I^{-\frac{1}{4}-l}\left(\mathbb{R}_\varepsilon \times X_\varepsilon, \mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X, \widetilde{C}\right),$$

$$\diamond \sum_{j=0}^{l} \widetilde{\mathcal{F}}_j \in I^{-\frac{1}{4}-l}\left(\mathbb{R}_\varepsilon \times X_\varepsilon, \mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X, \widetilde{C}\right),$$

$$\mathcal{F}_B \circ \sum_{j=0}^{l} \mathcal{F}_j - \mathrm{Id}_{(\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X)} \in I^{-1-l}\left(\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X, \mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X, B \circ \widetilde{C}\right),$$

$$\mathcal{F}_\Gamma \sum_{j=0}^{l} \widetilde{\mathcal{F}}_j \in I^{-1-l}\left(X_\varepsilon, \mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X, \Gamma \circ \widetilde{C}\right),$$

$$\mathcal{F}_\Gamma \circ \mathcal{D}_t \circ \sum_{j=0}^{l} \mathcal{F}_j \in I^{-l}\left(X_\varepsilon, \mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X, \Gamma \circ \widetilde{C}\right).$$

Обозначим через $\widetilde{a}_l$ главный символ оператора $\widetilde{\mathcal{F}}_l$. Поскольку существует стандартная полуплотность $|dt\, dx|^{1/2}$, имеющая естественное ограничение на $\mathbb{R}_\varepsilon \times \times \partial X$, то можно рассматривать $\widetilde{a}_l$ как функцию. Обозначим $\widetilde{a}_l^{\pm} = \widetilde{a}_l|_{\widetilde{C}^{\pm}}$. Символы $\widetilde{a}_l$ будем искать удовлетворяющими следующим транспортным уравнениям

$$\frac{1}{i} H_{\widetilde{P}} \widetilde{a}_l = -\sigma\left(\diamond \sum_{j=0}^{l-1} \mathcal{F}_j\right) \quad \text{на} \quad \widetilde{C}, \tag{6}$$

где $\widetilde{P}(t, \tau, x, \xi, \widetilde{t}, \widetilde{\tau}, \widetilde{x}, \widetilde{\xi}) = \tau^2 - |\xi|^2$ и $\sigma(J)$ - главный символ оператора J. Здесь $\widetilde{a}_0^{\pm}$ - константа на $\widetilde{C}_{i,j}^{\pm}$ для фиксированных $(\widetilde{t}, \widetilde{x}, \widetilde{\xi})$. Пусть

$$A_{i,j}^{\pm} = \{(t, \pm|\xi|, x, \xi, \widetilde{t}, \pm|\xi|, \widetilde{x}, \widetilde{\xi}) \in \mathring{T}^*(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)\Big|_{\mathbb{R}_+ \times \partial X} \times \mathring{T}^*(\mathbb{R}_+ \times \partial X):$$
$$t = t_i^{\pm}(y, \tau),\ \widetilde{t} = t_j^{\pm}(y, \eta),\ (y, \eta) \in T^*X,\ (t, \pm|\xi|, x, \xi) = \Phi_{t-0}^{\pm}(y, \tau),$$
$$(\widetilde{t}, \pm|\xi|, \widetilde{x}, \widetilde{\xi}) = \pi\Phi_{t+0}^{\pm}(y, \eta)\}.$$

Тогда

$$\widetilde{a}_0^{\pm}|_{\widetilde{C}_{i,j}} = a_0^{\pm}|_{A_{i,j}^{\pm}}.$$

Следовательно, достаточно определить $\widetilde{a}_0^{\pm}$ лишь на $A_{i,j}^{\pm}$. Положим

$$a_0^{\pm}|_{A_{i,j}^{\pm}} = (-1)^{i-j}.$$

Согласно (6), значения $\widetilde{a}_l^{\pm}, l \geq 1$ на $C_{ij}^{\pm}$ определяются значениям на $A_{i,j}^{\pm}$. Положим

$$\widetilde{a}_l^{\pm}|_{A_{i,i}^{\pm}} = \sigma\left(Id - \mathcal{F}_B\sum_{j=0}^{l-1}\mathcal{F}_j\right)\Bigg|_{A_{i,i}^{\pm}}.$$

Определим $\widetilde{a}_l^{\pm}$ $(l \geq 1)$ на $A_{i,j}^{\pm}$ по индукции. Пусть $\widetilde{a}_l^{\pm}$ уже определены на $\cup_{j<k\leq i}A_{k,j}^{\pm}$. Отсюда следует, что $\widetilde{a}_l^{\pm}$ заданы и на $\cup_{j<k\leq i}\widetilde{C}_{k,j}^{\pm}$.

Определим теперь $\widetilde{a}_l^{\pm}$ на $A_{i+1,j}^{\pm}$ следующим образом :

$$\widetilde{a}_l^{\pm}(t, \pm|\xi|, x, \widetilde{t}, \pm|\xi|, \widetilde{x}, \widetilde{\xi}) = -\lim_{s\to t-0}\widetilde{a}_l^{\pm}(\Phi_s^{\pm}(y,\eta), \widetilde{t}, \pm|\xi|, \widetilde{x}, \widetilde{\xi}), \tag{7}$$

где $(y,\eta) = \left(\Phi_t^{\pm}\right)^{-1}(t, \pm|\xi|, x, \xi)$. Правая часть в (7) задана, поскольку $(\Phi_s^{\pm}(y,\eta),$ $\widetilde{t}, \pm|\xi|, \widetilde{x}, \xi) \in \widetilde{C}_{i,j}^{\pm}$, при условии, что $|t-s|$ достаточно мало.

Обозначим $a_l = \widetilde{a}_l|_C$, и пусть $\mathcal{F}_l$ - интегральный оператор Фурье с каноническим отношением C и главным символом a_l. Пусть $\rho_\delta(t) \in C^\infty(0,\infty)$ такое, что $\rho_\delta(t) = 0$ при $t < \delta/4$ и $\rho_\delta(t) = 1$ при $t > \delta/2$. Определим E_δ в виде следующего асимптотического разложения

$$E_\delta \sim \rho_\delta(t)\sum_{l=0}^{\infty}\mathcal{F}_l.$$

4. Теорема *Предположим, что условия 1 и 2 выполнены. Интегральный оператор Фурье E_t, построенный выше, является параметриксом задачи (1 - 3).*

Приведем схему доказательства теоремы. Заметим, что для любой $g \in$ $\in \mathcal{D}'_t(\mathbb{R}_+ \times \partial X)$ ограничение $\widetilde{\mathcal{F}}_l g$ на $\mathbb{R}_+ \times X$ совпадает с $\mathcal{F}_l g$ по модулю $C^\infty(\mathbb{R}_+ \times X)$. Из построения оператора E_δ следует, что

$$\Diamond E_\delta g \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times X),\ \Diamond E_\delta g|_{t=0} \in C^\infty(X),$$

$$\mathcal{D}_t E_\delta g|_{t=0} \in C^\infty(X).$$

Покажем, что

$$E_\delta g|_{\mathbb{R}_+\times\partial X} - g \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \partial X).$$

Для этого достаточно показать, что

$$\mathcal{F}_B \circ \sum_{l=0}^{m} \mathcal{F}_l - \mathrm{Id} \in I^{-1-m}\left(\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X, \mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X, B \circ \tilde{C}\right). \qquad (8)$$

Пусть

$$C = \tilde{C} \cap \left(\mathring{T}^*(\mathbb{R}_\varepsilon \times \mathbb{R}^n))\Big|_{\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X} \times \dot{T}^*(\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X)\right).$$

Рассмотрим отображение $\pi = (\pi_\varepsilon, \mathrm{id}_\varepsilon)$:

$$(T^*(\mathbb{R}_\varepsilon \times \mathbb{R}^n))|_{\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X} \times T^*(\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X) \longmapsto T^*(\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X) \times T^*(\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X),$$

где π_ε - естественная проекция, а id_ε - тождественное отображение. Заметим, что π - сюръективное отображение. Представим C в виде объединения двух непересекающихся множеств :

$$C = C^0 \cup C^1,$$

где

$$C^0 = \cup_{i \in N}\left(A^+_{i,i} \cup A^-_{i,i}\right).$$

Для детального описания C^1, рассмотрим следующие подмножества C^1 :

$$B^\pm_{i,j} = \{(t, \pm|\xi|, x, \xi, \tilde{t}, \pm|\xi|, \tilde{x}, \tilde{\xi}) \in \mathring{T}^*(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)\Big|_{\mathbb{R}_+ \times \partial X} \times \dot{T}^*(\mathbb{R}_+ \times \partial X) :$$
$$t = t^\pm_i(y, \tau),\ \tilde{t} = t^\pm_j(y, \eta),\ (t, \pm|\xi|, x, \xi) = \Phi^\pm_{t-0}(y, \tau),$$
$$(\tilde{t}, \pm|\xi|, \tilde{x}, \tilde{\xi}) = \pi\Phi^\pm_{\tilde{t}+0}(y, \eta)\}.$$

Нетрудно показать, что

$$C^1 = \cup_{i>j}\left(A^+_{i,j} \cup A^-_{i,j} \cup B^+_{i,j} \cup B^-_{i,j}\right).$$

Имеет место представление

$$B \circ \tilde{C} = \pi C^0 \cup \pi C^1,$$

где $\pi|_{C^0}$ - биекция, а $\pi|_{C^1}$ - двулистное накрытие. Так как оператор $\mathcal{F}_B$ является оператором ограничения, для любых $l \in N$ и для произвольных $\alpha \in B \circ \tilde{C}$ имеем

$$\sigma\left(\mathcal{F}_B \circ \tilde{\mathcal{F}}_l\right)(\alpha) = \sum_{\beta \in \tilde{C}, \pi(\beta) = \alpha} \sigma\left(\mathcal{F}_l(\beta)\right).$$

Ясно, что если $\alpha \in \pi C^0$, то $\beta = \pi^{-1}(\alpha) \in \cup A^{\pm}_{i,i}$. Следовательно

$$\sigma(\mathcal{F}_B \circ \mathcal{F}_0)(\alpha) = \widetilde{a}_0(\beta) = 1,$$

$$\sigma(\mathcal{F}_B \circ \mathcal{F}_l)(\alpha) = \widetilde{a}_l(\beta) = \sigma\left(\mathrm{Id} - \mathcal{F}_B \sum_{j=0}^{l-1} \mathcal{F}_j\right).$$

Если же $\alpha \in \pi C^1$, то $\pi^{-1}(\alpha) = \{\beta_1, \beta_2\}$, где $\beta_1 \in A^{\pm}_{i,j}$, $\beta_2 \in B^{\pm}_{i,j}$ для некоторых $i, j (i > j)$. Согласно (9), имеем

$$\widetilde{a}_l(\beta_1) = -\widetilde{a}_l(\beta_2).$$

Отсюда, для $\alpha \in \pi C^1$ имеем

$$\sigma\left(\mathcal{F}_B \circ \widetilde{\mathcal{F}}_l\right)(\alpha) = 0$$

и (11) доказано.

Для завершения доказательства теоремы мы должны показать, что

$$E_\delta g - u \in C^\infty.$$

Для этого покажем сначала, что $\mathcal{F}g - E_\delta g \in C^\infty$. Действительно, при $t > \delta$ имеем

$$\mathcal{F}g - E_\delta g = (1 - \rho(t))\,\mathcal{F}g = 0.$$

С другой стороны ясно, что

$$\mathcal{F}g \in C^\infty\left((0, \delta) \times X\right).$$

Поэтому $w = E_\delta g - u$ есть решение смешанной задачи с C^∞ данными, причем эти данные C^∞ - согласованы на $0 \times \partial X$.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Chazarain, "Construction de parametrix du probleme mixte hyperbolique pour l'equation des ondes," C. R. Acad. Sci., vol. 276, no. 18, pp 1213 – 1215, 1973.
2. J. Chazarain, "Parametrix du probleme mixte pour l'equation des ondes a l'interieur dun domaine convexe pour les bicharacteristiques," Asterisque, 34 – 35, pp. 165 – 181, 1976.
3. J. J. Duistermaat, Fourier Integral Operators, Courant Inst. of Math. Sciences, New York University, 1973.
4. Ф. Трев, Введение в Теорию Псевдодифференциальных Операторов и Интегральных Операторов Фурье, т. 1,2, Москва, Мир, 1984.

3 Июня 1992

Межвузовский научный центр по прикладным проблемам математики, Американский университет Армении (АУА)

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 28 НОМЕР 1 1993

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика