ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

ПАРАМЕТРИКС СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Р. Г. Айрапетян, Г. Р. Александрян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 27, № 6, 1992

В работе построен параметрикс смешанной задачи для гиперболической системы в ситуации, когда бихарактеристики системы трансверсальны боковой границе. Параметрикс построен в виде глобального Интегрального Оператора Фурье (ИОФ). Тем самым, конструкция параметрикса смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка, предложенная Ж. Шазареном, распространена на гиперболические системы. В качестве канонического отношения этого оператора выступает многообразие ломаных бихарактеристик C, оснащённое структурой однородного иммерсированного лагранжева подмногообразия. Символ ИОФ построен в виде асимптотической суммы гладких сечений определённым образом выбранных векторных расслоений над C.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе конструкция параметрикса смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка, предложенная Ж. Шазареном в работах [1-2] распространяется на случай строго гиперболической системы уравнений в частных производных первого порядка. Как и в работах [1] и [2], предполагается, что бихарактеристики системы не касаются боковой границы. Параметрикс построен в виде глобального Интегрального Оператора Фурье (каноноческий оператор Маслова). В §2 описано каноническое отношение этого оператора, для чего введено многообразие ломаных бихарактеристик. В §3 и §5 выписан символ этого оператора. Построение символа основано на гладком продолжении канонического отношения (§4). Основной результат работы сформулирован в §6 и доказан в §7.

Микролокальный параметрикс смешанной задачи, в случае когда бихарактеристики касаются границы области, построен в [8-10].

Пусть X — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей ∂X. Обозначим $Q = \mathbb{R}_+ \times X$, $Q_0 = \{0\} \times X$, $\partial Q = \mathbb{R}_+ \times \partial X$. Рассмотрим следующие классы распределений :

$$\mathcal{E}'_{r,\delta}(\partial Q) = \{g = (g_1, ..., g_r): \quad g_j \in \mathcal{E}'(\partial Q),$$

$$\operatorname{singsupp} g_j \subset [\delta, +\infty) \times \partial X, \ j = 1, ..., r\};$$

$$\mathcal{D}'_{m,\delta}(Q_0) = \{u = (u_1, ..., u_m): \quad u_j \in \mathcal{D}'(Q_0),$$

$$\operatorname{singsupp} u_j \subset Q_0, \ \operatorname{dist}(\operatorname{singsupp} u_j, \partial Q) \geq \delta, \ j = 1, .., m\};$$

$$\mathcal{D}'_m(Q) = \{u = (u_1, ..., u_m): \quad u_j \in \mathcal{D}'(Q)$$

и существует продолжение $\tilde{u}_j \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ такое, что

$$WF(\tilde{u}_j) \cap [N_{Q_0}(\mathbb{R}^{n+1}) \cup N_{\partial Q}(\mathbb{R}^{n+1})] = 0, \ j = 1, ..., m\}.$$

Отметим, что распределения из класса $\mathcal{D}'_m(Q)$ имеют ограничения на Q_0 и ∂Q.

Пусть $A_j(x)$, $j = 0, 1, ..., n$ — гладкие матрично-значные функции (размера $m \times m$), определённые в некоторой окрестности $\overline{Q}$, $B(x)$ — гладкая матрично-значная функция (размера $r \times m$), определённая на ∂Q.

В работе рассматривается следующая смешанная задача

$$Au = \frac{\partial u}{\partial x_0} - \sum_{j=1}^{n} A_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} - A_0(x) u = 0 \quad \text{в} \quad Q, \tag{1.1}$$

$$u|_{Q_0} = u_0, \quad Bu|_{\partial Q} = g, \tag{1.2}$$

где $x = (x_0, x')$, $x_0 \in \mathbb{R}_+$, $x' = (x_1, ..., x_n) \in X$, $u_0 \in \mathcal{D}'_{m,\delta}(Q_0)$, $g \in \mathcal{E}'_{r,\delta}(\partial Q)$, и решение u ищется в классе $\mathcal{D}'_m(Q)$.

Определение 1.1. Оператор E_δ называется параметриксом задачи (1.1) - (1.2), если

$$E_\delta : \mathcal{E}'_{r,\delta}(\partial Q) \times \mathcal{D}'_{m,\delta}(Q_0) \longrightarrow \mathcal{D}'_m(Q) \tag{1.3}$$

и $E_\delta(g, u_0) - u \in C^\infty(\overline{Q})$, где u точное решение задачи.

Наша цель заключается в построении параметрикса задачи (1.1) - (1.2) в форме глобального Интегрального Оператора Фурье (ИОФ).

Для $z = (x,\xi) \in T^*\overline{Q}$, обозначим через $\sigma_A(z)$ главный символ оператора A, т. е. матрицу $\xi_0 I - \sum_{j=1}^{n} A_j(x)\xi_j$, где I — единичная матрица и $\xi = (\xi_0,\xi')$, $\xi_0 \in \mathbb{R}$, $\xi' = (\xi_1,...,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Будем использовать также следующее обозначение : $p(z) = \det\sigma_A(z)$. Предположим, что система (1.1) строго гиперболична, т. е. выполнено следующее условие.

Условие 1. Для каждого $x \in Q, \xi' \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ уравнение $p(x,\xi) = 0$ относительно ξ_0 имеет ровно m различных действительных корней.

Мы предполагаем также нехарактеристичность границы, т. е. предполагается выполненным

Условие 2. Для каждого z из конормального расслоения $N(\partial Q)$,

$$p(z) \neq 0.$$

Пусть $\pi_Q: \quad T^*\overline{Q} \mapsto \overline{Q}$ — естественная проекция. Введём следующие обозначения

$$\mathrm{Char} A = \{z \in T^*\overline{Q}: \quad p(z) = 0\}$$

$$\mathrm{Char}_b A = \{z \in \mathrm{Char} A: \pi_Q z \in \partial Q, \ \frac{\partial p}{\partial \xi_0}(z) > 0\}.$$

Пусть $\Phi_s: \quad \mathrm{Char} A \longmapsto \mathrm{Char} A$ бихарактеристический поток, т. е. Φ_s — поток гамильтонова векторного поля H_p. Обозначим

$$\mathrm{Char}_b^+ A = \{z \in \mathrm{Char}_b A: \quad \text{существует } \varepsilon > 0$$

$$\text{такое, что для любого } s \in (0,\varepsilon), \ \pi_Q \Phi_s z \in Q\}$$

$$\mathrm{Char}_b^- A = \{z \in \mathrm{Char}_b A: \quad \text{существует } \varepsilon > 0$$

$$\text{такое, что для любого } s \in (0,\varepsilon), \ \pi_Q \Phi_s z \notin \overline{Q}\}.$$

Обозначим также через π_b каноническую проекцию $\pi_b: \quad T^*\overline{Q}|_{\partial Q} \longmapsto T^*(\partial Q)$.

Условие 3. Отображение

$$\pi_b: \quad \mathrm{Char}_b^+ A \longmapsto T^*(\partial Q)$$

является r– кратным накрытием.

Условие 3 означает, что из каждой точки границы в область $\dot{T}^* Q$ входят ровно r бихарактеристик.

Условие 4. Каждая бихарактеристика исходящая из $\dot{T}^*Q$ трансверсальн пересекает границу области Q.

Мы также предполагаем, что выполнено условие Лопатинского. Дл того, чтобы сформулировать его в удобной для нас форме, рассмотри тривиальное векторное расслоение E^m над $\dot{T}^*\overline{Q}$, где слоем является $\mathbb{R}^m$ Поскольку для любого $z \in \dot{T}^*\overline{Q}$ матрица $\sigma_A(z)$ имеет m различных действительных собственных значений, слой над точкой z разлагается в пр мую сумму m инвариантных подпространств матрицы $\sigma_A(z)$. Рассмотри сужение этого векторного расслоения на $\mathrm{Char}A$, т. е. тривиальное векторное расслоение $\mathrm{Char}A \times \mathbb{R}^m \longmapsto \mathrm{Char}A$. Это векторное расслоени имеет линейное подрасслоение $K \longmapsto \mathrm{Char}A$, в котором слоем над точкой $z \in \mathrm{Char}A$ является $\mathrm{Ker}\,\sigma_A(z)$ (см. [11]). Аналогично рассмотрим тривиальное векторное расслоение $E^m(\dot{T}^*\partial Q) = \mathbb{R}^m \times \dot{T}^*\partial Q \longmapsto \dot{T}^*\partial Q$ и тривиальное гладкое расслоение $G_{m,r}(\dot{T}^*\partial Q)$, где слоем над точкой $m \in \dot{T}^*\partial Q$ является грассманово многообразие r–мерных подпространств в $\mathbb{R}^m$. Из условия 3 следует, что для каждого $z \in \dot{T}^*\partial Q$ имеем $\pi_b^{-1}(z) = (z_1, ..., z_r)$, где $z_j \in \mathrm{Char}_b^+ A$, $j = 1, ..., r$.

Пусть $V(z)$ — сечение расслоения $G_{m,r}(\dot{T}^*\partial Q)$ определённое следующим образом :

$$V(z) = K(z_1) + K(z_2) + ... + K(z_r),$$

где $\{z_1, ..., z_r\} = \pi_b^{-1}(z)$.

Условие 5. Для каждого $z \in \dot{T}^*\partial Q$, $\quad B \in \mathrm{Is}(V, E^r(\dot{T}^*\partial Q))$.

§2. КАНОНИЧЕСКОЕ ОТНОШЕНИЕ

Пусть

$$\mathrm{Ref}\,A = \{(z_+, z_-): \quad z_\pm \in \mathrm{Char}_b^\pm A, \pi_Q z_+ = \pi_Q z_-, \ z_+ - z_- = 0 \quad \text{на} \quad T_{\pi_Q z_+}\partial Q\}.$$

Обозначим

$$\mathrm{Char}_0 A = \{z \in \mathrm{Char}A: \quad \pi_Q z \in Q_0\}.$$

Определение 2.1. (см. [12]). Ломанной бихарактеристикой оператора A назовём отображение

$$\gamma: \quad [s_0, s_1] \setminus J_\gamma \longmapsto \dot{T}^*Q,$$

где $J_\gamma = \{\widehat{s}_0, ..., \widehat{s}_{k(\gamma)}\}$ — конечное подмножество $[s_0, s_1]$ такое, что

(i) если I – интервал лежащий в $[s_0, s_1] \setminus J_\gamma$, то кривая $I \ni s \longmapsto \gamma(s)$ есть бихарактеристика оператора A лежащая над Q;

(ii) $s_0 = \widehat{s}_0 < \widehat{s}_1 < ... < \widehat{s}_{k(\gamma)} < s_1$, $\gamma(s_0) \in \mathrm{Char}_0 A \cup \mathrm{Char}_b^+ A$;

(iii) существуют пределы $\gamma(\widehat{s}_0 + 0)$, $\gamma(\widehat{s}_j \pm 0)$ и

$$(\gamma(\widehat{s}_j + 0), \gamma(\widehat{s}_j - 0)) \in \mathrm{Ref} A, \tag{2.1}$$

где $j = 1, ..., k(\gamma)$.

Обозначим через C — множество ломанных бихарактеристик, а через C_i — множество, состояшее из ломанных бихарактеристик имеющих i отражений от границы, т. е. $C_i = \{\gamma \in C: \quad k(\gamma) = i\}$.

Пусть $\pi_0: \dot{T}^*\overline{Q}\Big|_{Q_0} \longmapsto \dot{T}^*Q_0$ — естественная проекция. Определим отображение π

$$\pi: \quad (\mathrm{Char}_0 A \cup \mathrm{Char}_b^+ A) \longmapsto \dot{T}^*Q_0 \cup \dot{T}^*(\partial Q)$$

следующим образом $\pi|_{\mathrm{Char}_0 A} = \pi_0, \quad \pi|_{\mathrm{Char}_b^+ A} = \pi_b$. Рассмотрим также отображения

$$\kappa_0: \quad C_i \longmapsto \mathrm{Char} A \cup \mathrm{Char}^+ A, \quad \kappa_j: \quad C_i \longmapsto \mathrm{Char}_b^+ A,$$
$$j = 1, ..., i, \quad \chi: C_i \longmapsto \dot{T}^*Q$$

определённые следующим образом :

$$\kappa_j(\gamma) = \gamma(\widehat{s}_j + 0), \ j = 0, 1, ..., i, \ \chi(\gamma) = \gamma(s_1). \tag{2.2}$$

Открытыми множествами на C_i назовём прообразы открытых множеств при этих отображениях. На $C_i, i = 0, 1, ...$ введём топологии, порождённые этими открытыми множествами. Эти топологии, в свою очередь, порождают топологии на C.

Покажем, что для любой $\gamma \in C$ существует окрестность $U_\gamma \subset C$ такая, что отображение $\chi|_{U_\gamma}$ есть биекция на образ. Действительно, пусть U_j такая окрестность точки $\gamma(\widehat{s}_j + 0)$, что равенство $\pi z_1 = \pi z_2$ влечёт $z_1 = z_2$ для всех $z_1, z_2 \in U_j$. Существование такой окрестности следует из Условия 4. Теперь в качестве U_γ возьмём

$$U_\gamma = \bigcap_{j=0}^{k(\gamma)} \kappa_j^{-1}(U_j).$$

Покроем C такими окрестностями, а в качестве координатных отображений возьмём композиции отображения χ с координатными отображениями многообразия $\mathrm{Char}A$. Получаем атлас на C, порождающий C^∞–структуру, которая превращает C в $(2n+1)$ – мерное многообразие.

Обозначим через $\imath$ следующее отображение

$$\imath : C \longmapsto \mathrm{Char}A \times (\dot{T}^* Q_0 \cup \dot{T}^* \partial Q), \tag{2.3}$$

где

$$\imath(\gamma) = (\chi(\gamma), \pi \circ \kappa_0(\gamma)). \tag{2.4}$$

Многообразие C имеет следующую стратификацию

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3,$$

где $C_1 = \kappa_0^{-1}(\mathrm{Char}_b^+ A)$, $C_2 = \kappa_0^{-1}(\mathrm{Char}_0 A)$, $C_3 = (\pi_Q \circ \kappa_0)^{-1}(\overline{\partial Q} \cap \overline{Q}_0)$.

Легко видеть, что C_1 и C_2 — $(2n+1)$–мерные, а C_3 — $2n$–мерное многообразия.

Рассмотрим симплектические многообразия $\dot{T}^* Q \times \dot{T}^*(\partial Q)$ и $\dot{T}^* Q \times \dot{T}^*(Q_0)$ с каноническими 2-формами $\omega_b = \sigma_{T^*Q} - \sigma_{T^*(\partial Q)}$ и $\omega_0 = \sigma_{T^*Q} - \sigma_{T^*Q_0}$ соответственно.

Теорема 2.1. $(C_1, \imath)$ и $(C_2, \imath)$ суть однородные лагранжевы подмногообразия в $\dot{T}^* Q \times \dot{T}^*(\partial Q)$ и $\dot{T}^* Q \times \dot{T}^*(Q_0)$ соответственно.

Доказательство. Докажем теорему только для многообразия $(C_1, \imath)$ (для $(C_2, \imath)$ доказательство аналогично). По определению формы ω_b имеем

$$\imath^* \omega_b = \chi^* \sigma_{T^*Q} - (\pi \circ \kappa_0)^* \sigma_{T^*\partial Q}. \tag{2.5}$$

Легко показать, что каждая точка $\gamma_0 \in C_1$ имеет такую окрестность U_{γ_0}, что отображение

$$\imath_0 = \pi \circ \kappa_0 : U_{\gamma_0} \longmapsto \pi \circ \kappa_0(U_{\gamma_0})$$

является диффеоморфизмом. Следовательно,

$$\imath^* \omega_b = \imath_0^* (\imath_0^{-1} \chi^* \sigma_{T^*Q} - \sigma_{T^*\partial X}). \tag{2.6}$$

Определим отображение

$$\widetilde{\Phi} : \imath_0(U_{\gamma_0}) \longmapsto \chi(U_{\gamma_0})$$

следующим образом : $\widetilde{\Phi} = \chi \circ \imath_0^{-1}$. Покажем, что $\widetilde{\Phi}$ — симплектоморфизм, т. е.

$$\widetilde{\Phi}^* \sigma_{T^*Q} - \sigma_{T^*\partial Q} = 0. \tag{2.7}$$

$\widetilde{\Phi} z_0 = z$ влечёт существование такой $\gamma \in U_{\gamma_0}$, что $\kappa_0(\gamma) = z_0, \chi(\gamma) = z$. Окрестность U_{γ_0} может быть выбрана так, что для каждого $\gamma \in U_{\gamma_0}$, $k(\gamma) = k(\gamma_0)$. В случае, когда $k(\gamma_0) = 0$ имеем, что $\widetilde{\Phi} = \Phi_{s_1 - s_0}$ и равенство (2.7) следует из известного результата о том, что Φ_s — симплектоморфизм. Покажем, что оно сохраняется и при наличии отражений ($k(\gamma_0) > 0$). Пусть

$$S_j^{\pm} = \{ z \in \mathrm{Char}_b^{\pm} A : \quad \text{существует } \gamma \in U_{\gamma_0} \text{ такое что } z = \gamma(\widehat{s}_j \pm 0) \}. \tag{2.8}$$

Определим отображение

$$r_j : S_j^- \longmapsto S_j^+,$$

где $r_j(z_-) = z_+$, если существует $\gamma \in U_{\gamma_0}$ такое, что $z_\pm = \gamma(\widehat{s}_j \pm 0)$.

Пусть $k(\gamma_0) = k > 0$, тогда

$$\widetilde{\Phi} = \Phi_{s_1 - \widehat{s}_k} \circ r_k \circ \Phi_{\widehat{s}_k - \widehat{s}_{k-1}} \circ r_{k-1} \circ \ldots \circ r_1 \circ \Phi_{\widehat{s}_1 - s_0}. \tag{2.9}$$

Для того, чтобы показать, что $\widetilde{\Phi}$ — симплектоморфизм, достаточно показать, что r_j, $j = 1, 2, \ldots, k$ имеют то же свойство. В достаточно малой окрестности V_j точки $\pi_Q \gamma(\widehat{s}_j + 0)$ выберем систему координат таким образом.

чтобы граница области Q записывалась как $x_n = 0$. Пусть $\xi = (\xi_0, ..., \xi_n)$ — двойственные координаты, тогда

$$r_j(x_0, x_1, ..., x_{n-1}, 0, \xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1}, \xi_n) = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, 0, \xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1}, \widetilde{\xi}_n) \tag{2.10}$$

и

$$\sigma = \sum_{j=0}^{n} d\xi_j \wedge dx_j.$$

Заметим, что на $TS_j^{\pm}$ форма dx_n равна нулю, и

$$r_j^* \sigma - \sigma = 0. \tag{2.11}$$

Из (2.5) и (2.6) следует, что $(C_1, \imath)$ — лагранжево. Докажем, что оно однородное.

Определим на C действие группы $\mathbb{R}_+$, порождённое действием этой группы на $T^*\overline{Q}$, т. е. паре $\gamma \in C$ и $\rho \in \mathbb{R}_+$ ставится в соответствие ломаная бихарактеристика $\rho\gamma$ следующим образом

$$[\rho^{1-m}\widehat{s}_0, \rho^{1-m}\widehat{s}_1] \setminus \{\rho^{1-m}\widehat{s}_0, ..., \rho^{1-m}s_{k(\gamma)}\} \ni s \longmapsto \rho\gamma = \rho_0\gamma(s) \in \dot{T}^* Q. \tag{2.12}$$

Для того, чтобы убедится в том, что $\rho\gamma$ действительно является ломанной бихарактеристикой достаточно заметить, что система Гамильтона–Якоби и условие (2.1) инвариантны относительно следующей замены переменной :

$$s \longmapsto \rho^{1-m}s, \ x \longmapsto x, \ \xi \longmapsto \rho\xi.$$

Из опрелеления действия группы $\mathbb{R}_+$ на C следует, что

$$\imath \circ \rho = \rho \circ \imath. \tag{2.13}$$

Пусть ζ — векторное поле на C_1, порождённое действием группы $\mathbb{R}_+$. Из (2.13) получаем, что векторные поля $d\chi(\zeta)$ и $d(\pi \circ \kappa_0)\zeta$ порождаются действием группы $\mathbb{R}_+$ на T^*Q и $T^*\partial Q$. Поэтому

$$\imath^*\alpha = \chi^*\alpha_{T^*Q} - (\pi \circ \kappa_0)^*\alpha_{T^*\partial Q} = \chi^*(d\chi\zeta \rfloor \sigma_{T^*Q}) - (\pi \circ \kappa_0)^*(d(\pi \circ \kappa_0)\zeta \rfloor \sigma_{T^*\partial Q}) = 0,$$

т. е. C_1 — однородное лагранжево многообразие.

§3. ГЛАВНЫЙ СИМВОЛ ИОФ F_0

Пусть $\Omega^{1/2}(\mathrm{Char}A)$ — линейное расслоение полуплотностей на $\mathrm{Char}A$. Обозначим через K_Ω — линейное расслоение над $\mathrm{Char}A$, являющееся тензорным произведением расслоений K и $\Omega^{1/2}$. Рассмотрим проектор

$$P(z)\colon \mathbb{R}^m \longmapsto \mathrm{Ker}\,\sigma_A(z),$$

порождённый разложением $\mathbb{R}^m$ в прямую сумму инвариантных подпространств матрицы $\sigma_A(z)$. Соответственно, обозначим через

$$P_\Omega\colon \mathbb{R}^m \bigotimes \Omega^{1/2}(\mathrm{Char}A) \longmapsto K_\Omega$$

гомоморфизм векторных расслоений, порождённых проектором $P(z)$.

Для произвольной точки $z_0 \in \mathrm{Char}A$ существуют окрестность $U_{z_0} \subset T^*Q$ и гладкая функция $\lambda(z)$, определённая на U_{z_0} такие, что для каждого $z \in U_{z_0}$, $\lambda(z)$ есть собственное значение матрицы $\sigma_A(z)$ обращающееся в нуль в точке z_0. Таким образом, в некоторой окрестности $\mathrm{Char}A$ определена гладкая функция $\lambda(z)$, обращающаяся в нуль на $\mathrm{Char}A$. Пусть v — гладкое сечение расслоения K_Ω. Определим следующую скобку Пуассона

$$\{\sigma_A - \lambda I, v\} = \sum_{j=0}^{n} [(\sigma_A - \lambda I)_{\xi_j} v_{x_j} - (\sigma_A - \lambda I)_{x_j} v_{\xi_j}]. \tag{3.1}$$

Для того, чтобы убедится в корректности этого определения, покажем, что дифференцирование сечения v в правой части (3.1) производится по касательным к $\mathrm{Char}A$ направлениям. В окрестности точки $z_0 \in \mathrm{Char}A$ рассмотрим собственный вектор $v(z)$ матрицы $\sigma_A(z)$, соответствующий собственному значению $\lambda(z)$ и гладко зависящий от z. Продифференцировав равенство $(\sigma_A - \lambda I)v = 0$ по ξ_0 и воспользовавшись очевидным соотношением $(\sigma_A)_{\xi_0} = I$ получаем

$$v + \sigma_A v_{\xi_0} - \lambda v_{\xi_0} - \lambda_{\xi_0} v = 0.$$

Теперь применим к обеим частям этого равенства проектор $P(z)$. Так как $P(z)\sigma_A(z) = 0$ мы получаем, что $\lambda_{\xi_0} = 1$ на $\mathrm{Char}A$. Продифференцировав равенство $(\sigma_A - \lambda I)v = 0$ по ξ_0 и x_0 получаем

$$(\sigma_A - \lambda I)\, v_{\xi_0 x_0} + (\sigma_A - \lambda I)_{\xi_0} v_{x_0} + (\sigma_A - \lambda I)_{x_0} v_{\xi_0} - \lambda_{x_0 \xi_0} = 0.$$

Применяя проектор $P(z)$ к этому равенству получаем, что

$$(\sigma_A - \lambda I)_{x_0} v_{\xi_0} = \lambda_{x_0 \xi_0} v \tag{3.2}$$

на Char$A$. Для $i = 1, .., n$ аналогично получаем

$$(\sigma_A - \lambda I)_{x_i} v_{\xi_0} = \lambda_{x_i \xi_0} v, \tag{3.3}$$

$$(\sigma_A - \lambda I)_{\xi_i} v_{\xi_0} = \lambda_{\xi_i \xi_0} v. \tag{3.4}$$

Так как гамильтоново векторное поле H касается Char$A$, имеем

$$\{\lambda, \sigma_A\} v_{\xi_0} = \{\lambda, \lambda_{\xi_0}\} v = (H_\lambda \lambda_{\xi_0}) v = 0. \tag{3.5}$$

Следовательно, на Char$A$

$$\begin{aligned}\{\sigma_A, v\} = \{\sigma_A, v\} + \{\lambda, \sigma_A\} v_{\xi_0} = \sum_{j=0}^{n} (\sigma_A)_{\xi_j} (\lambda_{\xi_0} v_{x_j} - \lambda_{x_j} v_{\xi_0}) - \\ - \sum_{j=1}^{n} (\sigma_A)_{x_j} (\lambda_{\xi_0} v_{\xi_j} - \lambda_{\xi_j} v_{\xi_0}).\end{aligned} \tag{3.6}$$

1–форма $d\lambda$ обращается в нуль на векторных полях $\lambda_{\xi_0} \frac{\partial}{\partial x_j} - \lambda_{x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_0}$ и $\lambda_{\xi_0} \frac{\partial}{\partial \xi_j} - \lambda_{\xi_j} \frac{\partial}{\partial \xi_0}$, $j = 1, ..., n$, и поэтому они касаются Char$A$. Для завершения доказательства остаётся заметить, что $\{\lambda I, v\} = H_\lambda v$ и что векторное поле H_λ касается Char$A$.

Рассмотрим ненулевое гладкое сечение $v(z)$ расслоения K_Ω в окрестности U_{z_0} точки $z_0 \in$ Char$A$. Определим функцию $\mu(z)$ на U_{z_0} с помощью соотношения

$$\mu(z) v(z) = P(z) \left[\sigma_1(z) v(z) + \{\sigma_A - \lambda I, v\}\right], \tag{3.7}$$

где $\sigma_1(z)$ — субсимвол оператора A, т. е.

$$\sigma_1(z) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} A_j - A_0 = \frac{1}{2} \sigma(A + A^*). \tag{3.8}$$

Покажем, что функция $\mu(z)$ не зависит от выбора локального сечения $v(z)$ и, следовательно, инвариантным образом определена на всём Char$A$.

Другими словами, $\mu(z)$ инвариантна при замене $v(z) \longmapsto \rho(z)v(z)$, где $\rho(z)$ произвольная скалярная гладкая функция определённая на U_{z_0}. Для того, чтобы показать это, заметим, что на Char$A$

$$P(z)\left[\sigma_1(z)\rho(z)v(z) + \{\sigma_A - \lambda I, \rho v\}\right] - \rho(z)\,P(z)\left[\sigma_1(z)\,v(z) + \{\sigma_A - \lambda I, v\}\right] =$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\left[\rho_{x_j}P(z)(\sigma_A - \lambda I)_{\xi_j}v - \rho_{\xi_j}P(z)(\sigma_A - \lambda I)_{x_j}v\right] =$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\rho_{x_j}P(z)\left[\lambda_{\xi_0}(\sigma_A - \lambda I)_{\xi_j} - \lambda_{\xi_j}(\sigma_A - \lambda I)_{\xi_0}\right]v(z) -$$
$$- \sum_{j=0}^{n}\rho_{\xi_j}P(z)\left[\lambda_{\xi_0}(\sigma_A - \lambda I)_{x_j} - \lambda_{x_j}(\sigma_A - \lambda I)_{\xi_0}\right]v(z).$$

Покажем, что последнее выражение равно нулю. Для этого достаточно применить векторные поля

$$\lambda_{\xi_0}\frac{\partial}{\partial \xi_j} - \lambda_{\xi_j}\frac{\partial}{\partial \xi_0}, \qquad j = 0, 1, \dots, n,$$

и

$$\lambda_{\xi_0}\frac{\partial}{\partial x_j} - \lambda_{x_j}\frac{\partial}{\partial \xi_0}, \qquad j = 0, 1, \dots, n$$

к обеим частям равенства $(\sigma_A - \lambda I)v = 0$ а затем подействовать проектором $P(z)$. Определим на C функцию μ_C следующим образом :

$$\mu_C(\gamma) = \int_{s_0}^{s_1}\mu(\gamma(s))\,ds.$$

Далее, на линейном расслоении K_Ω определим линейную связность ∇. Пусть η — векторное поле на Char$A$, $v(z)$ — сечение расслоения K_Ω, рассматриваемое как сечение тривиального векторного расслоения

$$\Omega^{1/2}(\mathrm{Char}A) \times \mathbb{R}^m \longmapsto \mathrm{Char}A.$$

Определим

$$\nabla_\eta v(z) = P(z)\left[D_\eta v(z)\right], \tag{3.9}$$

где D_η — производная Ли сечения v вдоль векторного поля η. Эта связность имеет простой геометрический смысл : для того, чтобы осуществить параллельный перенос вектора из слоя расслоения K_Ω вдоль некоторой кривой

γ нужно параллельно перенести его вдоль кривой.как вектор из слоя трииального расслоения $\Omega^{1/2}(\mathrm{Char}A)\otimes\mathbb{R}^m\longmapsto\mathrm{Char}A$, а затем полученный вектор спроектировать с помощью проектора $P(z)$.

Пусть $\gamma(z_1,z_2)$ — бихарактеристика, соединяющая $z_1,z_2\in T^*\overline{Q}$. Обозначим через $R^{\nabla,K}_{z_1,z_2}$ оператор параллельного переноса в расслоении K_Ω вдоль кривой $\gamma(z_1,z_2)$, порождённый связностью ∇. Таким образом, если $v_1\in K_{z_1}$, то $R^{\nabla,K}_{z_1,z_2}v_1=v_2\in K_{z_2}$, причём существует сечение s расслоения K_Ω для которого $\nabla s=0$, $s(z_1)=v_1$, $s(z_2)=v_2$.

Рассмотрим векторное расслоение $\mathcal{M}^r_K=K\times K\times\ldots\times K$ (r сомножителей) над $\mathrm{Char}A$. Слоем в $\mathcal{M}^r_K$ является r–мерное векторное пространство матриц размера $m\times r$, столбцы которых принадлежат слою расслоения K. Таким образом, оператор $R^{\nabla,K}_{z_1,z_2}$, действующий в K_Ω, порождает оператор параллельного переноса $R^{\nabla}_{z_1,z_2}$, действующий в расслоении $\mathcal{M}^r_K$.

Полагая $z_o\in\dot{T}^*\partial Q$, из Условия 3 находим $\pi_b^{-1}z=\{z_1,\ldots,z_r\}$, где $z_j\in\mathrm{Char}^+_bA$, $j=1,\ldots,r$. Пусть U_{z_0} — окрестность точки z_0 такая, что существуют гладкие ненулевые сечения $v_i(z)$ линейного векторного расслоения K_Ω, определённые в окрестностях $U_{z_i^0}$ точек z_i^0 и $U_{z_0}\subset\pi_bU_{z_i^0}$ для $i=1,\ldots,r$. Поэтому можно определить гладкую матричнозначную функцию $V(z)$ в U_{z_0}, столбцами которой являются $v_1(z),\ldots,v_r(z)$.

Теперь определим следующие матричные функции в U_{z_0} (см. [13])

$$W(z)=V(z)\,[B(z)V(z)]^{-1}\,. \tag{3.10}$$

Наше определение корректно, так как из Условия 5 следует, что $B(z)V(z)$ есть невырожденная матрица. $W(z)$ не зависит от выбора $V(z)$, и, поэтому, она определена на $\dot{T}^*\partial Q$. Рассмотрим следующие сечения Ω_0 и Ω расслоения $\mathcal{M}^r_K$:

$$\Omega_0(z)=P(z)W(\pi_bz), \tag{3.11}$$

$$\Omega(z)=-P(z)W(\pi_bz)B(\pi_bz). \tag{3.12}$$

Обозначим через $\mathcal{M}^r_K(C_1)$ векторное расслоение полученное поднятием слоёв расслоения $\mathcal{M}^r_K$ относительно отображения $\chi:C_1\longmapsto\mathrm{Char}A$. Определим главный символ оператора $\mathcal{F}_0$ как гладкое сечение расслоения $\mathcal{M}_K^r(C_1)\bigotimes\Omega^{1/2}(C_1)$.

Пусть $\nu_{\partial Q}$ — произвольное ненулевое сечение расслоения $\Omega^{1/2}(\partial Q)\longmapsto\partial Q$, $\gamma\in C_1$, и главный символ $\sigma_{\mathcal{F}_0}$ определяется формулой

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathcal{F}_0}(\gamma)=\chi^*\exp[-\mu_C(\gamma)]\,&\mathrm{R}^{\nabla}_{\kappa_{k(\gamma)-1}(\gamma),\chi(\gamma)}\Omega(\kappa_{k(\gamma)-1}(\gamma))\circ\\ &\circ\mathrm{R}^{\nabla}_{\kappa_{k(\gamma)-2}(\gamma),\kappa_{k(\gamma)-1}(\gamma)}\Omega(\kappa_{k(\gamma)-2}(\gamma))\ldots\circ\\ &\circ\mathrm{R}^{\nabla}_{\kappa_1(\gamma),\kappa_2(\gamma)}\Omega(\kappa_1(\gamma))\circ\mathrm{R}^{\nabla}_{\kappa_0(\gamma),\kappa_1(\gamma)}\Omega_0(\kappa_0(\gamma))\bigotimes\\ &\bigotimes\pi_Q^*|dx|^{1/2})\bigotimes\pi_Q^*\nu_{\partial Q})).\end{aligned}\tag{3.13}$$

Заметим, что поднятие полуплотностей с Q и ∂Q на $\mathrm{Char}A$ и Char_b^+A относительно отображения π_Q и с $\mathrm{Char}A$ на C относительно отображения χ корректно, поскольку отображения $\pi_Q\colon\ \mathrm{Char}A\longmapsto Q$, $\pi_Q\colon\ \mathrm{Char}_b^+A\longmapsto\partial Q$ и $\chi\colon\ C\longmapsto\mathrm{Char}A$ сюръективны.

Аналогично, обозначим через $\mathcal{M}_K^m(C_2)$ векторное расслоение над C_2 полученное поднятием слоёв расслоения $\mathcal{M}_K^m$ над $\mathrm{Char}A$ относительно отображения $\chi\colon\ C_2\longmapsto\mathrm{Char}A$. Соответственно, для $\gamma\in C_2$ определим $\sigma_{\mathcal{F}_0}(\gamma)$ как гладкое сечение расслоения $\mathcal{M}_K^m(C_2)\bigotimes\Omega^{1/2}(C_2)$ формулой :

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathcal{F}_0}(\gamma)=\chi^*\exp[-\mu_C(\gamma)]\,&\mathrm{R}^{\nabla}_{\kappa_{k(\gamma)-1}(\gamma),\chi(\gamma)}\Omega(\kappa_{k(\gamma)-1}(\gamma))\circ\\ &\circ\mathrm{R}^{\nabla}_{\kappa_{k(\gamma)-2}(\gamma),\kappa_{k(\gamma)-1}(\gamma)}\Omega(\kappa_{k(\gamma)-2}(\gamma))\ldots\circ\\ &\circ\mathrm{R}^{\nabla}_{\kappa_1(\gamma),\kappa_2(\gamma)}\Omega(\kappa_1(\gamma))\circ\mathrm{R}^{\nabla}_{\kappa_0(\gamma),\kappa_1(\gamma)}\Omega(\kappa_0(\gamma))\bigotimes\\ &\bigotimes\pi_Q^*|dx|^{1/2})\bigotimes\pi_{Q_0}^*dx')).\end{aligned}\tag{3.14}$$

§4. ПРОДОЛЖЕННОЕ КАНОНИЧЕСКОЕ ОТНОШЕНИЕ

Обозначим через $\widetilde{Q}$ открытую окрестность множества $\overline{Q}$, в которой определены коэффициенты оператора A. Соответственно

$$\widetilde{\mathrm{Char}}^{\pm}A=\{z\in\dot{T}^*\widetilde{Q}:\quad p(z)=0,\ \pm\frac{\partial p}{\partial\xi_0}>0\}.\tag{4.1}$$

Пусть $\mathrm{Bich}^{\pm}A$ — множества бихарактеристик оператора A направленных относительно оси t вверх $(+)$ или вниз $(-)$, т. е. $\mathrm{Bich}A$ есть множество отображений γ таких, что

$$(-\infty,\infty)\supset[s_0,s_1]\ni s\longmapsto\gamma(s)\in\widetilde{\mathrm{Char}}^{\pm}A,\ s_0<s_1.$$

Рассмотрим отображения $\beta_j:\quad \mathrm{Bich}^{\pm}A\longmapsto\widetilde{\mathrm{Char}}^{\pm}A,\ j=0,1$ такие, что $\beta_j(\gamma)=\gamma(s_j)$. Наделим $\mathrm{Bich}^{\pm}A$ структурой $(2n+2)$–мерного C^{∞}–многообразия, порождённой отображением

$$\beta=\beta_0\times\beta_1:\quad \mathrm{Bich}^{\pm}A\longmapsto\widetilde{\mathrm{Char}}^{\pm}A\times\widetilde{\mathrm{Char}}^{\pm}A.$$

Обозначим

$$\mathrm{Bich}_b^{\pm}A=\{\gamma\in\mathrm{Bich}^{\pm}A:\quad \beta_0(\gamma)\in\mathrm{Char}_b^{+}A\},$$

$$\mathrm{Bich}_bA=\mathrm{Char}_b^{+}A\cup\mathrm{Bich}_b^{+}A\cup\mathrm{Bich}_b^{-}A.$$

Для того, чтобы продолжить отображения β_0,β_1,β на Bich_bA доопределим их на $\mathrm{Char}_b^{+}A$ следующим образом :

$\beta_j|_{\mathrm{Char}_b^{+}A}=\mathrm{id}$, $\beta=\beta_0\times\beta_1$. При этом Bich_bA наделяется структурой гладкого $(2n+1)$–мерного многообразия.

Определение 4.1. Отображение

$$\gamma:[s_0,s_1]\setminus J\ni s\longmapsto\gamma(s)\in\mathrm{Char}A,$$

мы называем продолженной до границы ломанной бихарактеристикой оператора A, если выполнены следующие условия :

1) для любого $\tilde{s}_1\in(s_0,s_1)\setminus J$ ограничение γ на $[s_0,\tilde{s}_1]$ является ломанной бихарактеристикой оператора A ;

2) $\chi(\gamma)=\gamma(s_1-0)\in\mathrm{Char}_b^{+}A$.

Обозначим через $\widehat{C}$ множество всех продолженных до границы ломанных бихарактеристик оператора A. Введём на $\widehat{C}$ топологию, являющуюся прообразом топологии на $\mathrm{Char}_b^{+}A$ относительно отображений $\kappa_0,\ldots,\kappa_{k(\gamma)},\chi$. Затем мы наделяем $\widehat{C}$ структурой $2n$–мерного C^{∞}–многообразия с помощью χ.

В многообразии $(\mathrm{Char}_b^{+}A\cup\widehat{C})\times\mathrm{Bich}_bA$ рассмотрим следующие подмногообразия :

$\widetilde{C}_{1,i}=\{(\gamma_1,\gamma_2):\quad \gamma_1\in\mathrm{Char}_b^{+}A,\ \gamma_2\in\mathrm{Char}_b^{+}A\cup\mathrm{Bich}_b^{+}A$ для $i=1$ и

$\gamma_2\in\mathrm{Bich}_b^{-}A$ для $i=2,\ \gamma_1=\beta_0(\gamma_2)\}$,

$$\widetilde{C}_{2,i} = \{(\gamma_1, \gamma_2): \quad \gamma_1 \in \widehat{C},\ \gamma_2 \in \mathrm{Char}_b^+ A \cup \mathrm{Bich}_b^+ A \text{ для } i = 1 \text{ и}$$

$$\gamma_2 \in \mathrm{Bich}_b^- A \text{ для } i = 2,\ (\beta_0(\gamma_2), \chi(\gamma_1)) \in \mathrm{Ref} A\}.$$

Пусть $\widetilde{C} = \widetilde{C}_{11} \cup \widetilde{C}_{12} \cup \widetilde{C}_{21} \cup \widetilde{C}_{22}$. В силу Условия 4 $\widetilde{C}$ является $(2n+1)$–мерным C^∞–многообразием и $C \subset \widetilde{C}$. Заметим, что

$$\widetilde{C} = \widetilde{C}_1 \cup \widetilde{C}_2 \cup \widetilde{C}_3 \quad \text{и} \quad C_i \subset \widetilde{C}_i,\ i = 1, 2, 3.$$

Рассмотрим отображение $\tau\colon\ \widetilde{C} \longmapsto \dot{T}^*(\widetilde{Q}) \times (\dot{T}^*(\partial Q) \times \dot{T}^*(Q_0))$, определённое следующим образом $\tau = \beta_1 \times \pi \circ \kappa_0$, где κ_0 доопределено на $\mathrm{Char}_b^+ A$ как тождественное отображение.

Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве Теоремы 2.1, можно показать, что $(\widetilde{C}_1, \tau)$ и $(\widetilde{C}_2, \tau)$ — иммерсированные однородные лагранжевы подмногообразия в $\dot{T}^*(\widetilde{Q}) \times \dot{T}^*(\partial Q)$ и $\dot{T}^*(\widetilde{Q}) \times (\dot{T}^*(Q_0)$. Назовём $(\widetilde{C}, \tau)$ продолженным каноническим отношением. Если $\overline{C}$ — замыкание C в $\widetilde{C}$, то

$$\partial C = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in \widetilde{C}_{1,1} \cup \widetilde{C}_{2,1}: \quad \beta_1(\gamma_2) \in \dot{T}^*\overline{Q}\big|_{\partial Q}\}.$$

Границу ∂C можно представить в виде обьединения непересекающихся подмногообразий

$$\partial C = \partial_0 C \cup \partial_+ C \cup \partial_- C, \tag{4.2}$$

где

$$\partial_0 C = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in \widetilde{C}_{1,1}: \quad \gamma_1 = \gamma_2\} \sim \mathrm{Char}_b^+ A,$$

$$\partial_+ C = \partial C \cap \widetilde{C}_{2,1} = \{(\gamma_1, \gamma_2): \quad \gamma_1 \in \widehat{C}, \gamma_2 \in \mathrm{Char}_b^+ A,\ (\chi(\gamma_1), \gamma_2) \in \mathrm{Ref} A\},$$

$$\partial_- C = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in \partial C: \quad \gamma_2 \in \mathrm{Bich}_b^+ A\} \sim \widehat{C}.$$

Из Условия 3 следует, что $\partial_+ C$ является r–кратным надкрытием над $\partial_- C$ относительно отображения

$$\partial_+ C \ni (\gamma_1, \gamma_2) \longmapsto \gamma_1 \in \widehat{C} \sim \partial_- C.$$

Наша цель продолжить ИОФ $\mathcal{F}_0$ до ИОФ $\widetilde{\mathcal{F}}_0$ с каноническим отношением $\widetilde{C}$. Таким образом, мы должны продолжить главный символ оператора $\mathcal{F}_0$

с C на $\widetilde{C}$. С этой целью рассмотрим линейное расслоение $\widetilde{K}_\Omega \longmapsto \widetilde{\mathrm{Char}A}$, определённое аналогично расслоению $K_\Omega \longmapsto \mathrm{Char}A$.

Естественным образом продолжим функцию $\mu(z)$ с $\mathrm{Char}A$ на $\widetilde{\mathrm{Char}A}$ и линейную связность ∇ с K на $\widetilde{K}$. Соответственно, определим оператор параллельного переноса $R^{\nabla,\widetilde{K}}_{z_1,z_2}$. Определим теперь главный символ оператора $\widetilde{\mathcal{F}}_0$ следующим образом :

1) если $(\gamma_1,\gamma_2) \in C_{1,1} \cup C_{1,2}$, то

$$\sigma_{\widetilde{\mathcal{F}}_0}(\gamma_1,\gamma_2) = R^{\nabla,\widetilde{K}_\Omega}_{\beta_1(\gamma_2),\beta_0(\gamma_2)}\Omega_0(\pi_b\gamma_1) \bigotimes \beta_1^*|dx|^{1/2} \bigotimes \beta_0^*\nu_{\partial Q}. \tag{4.3}$$

2) если $(\gamma_1,\gamma_2) \in \widetilde{C}_{2,1} \cup \widetilde{C}_{2,2}$, то

$$\sigma_{\widetilde{\mathcal{F}}_0}(\gamma_1,\gamma_2) = R^{\nabla,\widetilde{K}_\Omega}_{\beta_1(\gamma_2),\beta_0(\gamma_2)}\Omega(\pi_b\beta_0(\gamma_2))\sigma_{\mathcal{F}_0}(\gamma_1), \tag{4.4}$$

где $\sigma_{\mathcal{F}_0}$ определён на продолженных до границы ломанных бихарактеристиках по непрерывности.

Таким образом, построен ИОФ $\widetilde{\mathcal{F}}_0$: $\mathcal{E}'_{r,s}(\partial Q) \times D'_{m,s}(Q_0) \longmapsto \widetilde{D}'_m(Q)$ такой, что для любого $(g,u) \in \mathcal{E}'_{r,s}(\partial Q) \times D'_{m,s}(Q_0)$

$$\widetilde{\mathcal{F}}_0(g,u)\Big|_Q = \mathcal{F}_0(g,u). \tag{4.5}$$

§5. ГЛАВНЫЕ СИМВОЛЫ ОПЕРАТОРОВ ИОФ $\mathcal{F}_j$, $j \geq 1$

Мы начнём с описания процедуры интегрирования сечений линейного расслоения со связностью вдоль кривых лежащих на базе.

Пусть M — произвольное гладкое многообразие, L — линейное расслоенбие над M, ∇ — линейная связностпе на L, v — сечение L и γ: $[s_0,s_1] \longmapsto$ M — непрерывная кривая на M.

Определим интеграл от v по γ следующим образом :

$$\int v(s)\,ds = \int_{s_0}^{s_1} f(\gamma(s))\,\omega(\gamma(s_1))\,ds, \tag{5.1}$$

где ω — горизонтальное относительно связности ∇ ненулевое сечение расслоения L над кривой γ, f — функция, определённая на кривой γ соотношением $v = f\omega$. Заметим, что интеграл в (5.1) не зависит от выбора горизонтального сечения ω. Действительно, пусть ω_1 — другое горизонтальное ненулевое сечение такое, что $\omega = \rho\omega_1$ и ξ — векторное поле $d\gamma\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)$, тогда

$$0 = \nabla_\xi \omega = \nabla_\xi(\rho\omega_1) = (\xi\rho)\omega_1 + \rho\,\nabla_\xi\,\omega_1 = (\xi\rho)\omega_1,$$

и $\rho = \mathrm{const}$ вдоль кривой γ. Поэтому $v = f_1\omega_1$ влечёт $f_1 = \rho f$ и

$$\int_{s_0}^{s_1} f(\gamma(s))\omega(\gamma(s_1))\,ds = \int_{s_0}^{s_1} f_1(\gamma(s))\omega_1(\gamma(s_1))\,ds.$$

Обозначим через $\mathcal{F}_b$ ИОФ с каноническим отношением

$$C_b = \{(z_1, z_2) \in \dot{T}^*\partial Q \times \dot{T}^*\partial Q: \quad \pi_Q z_2 \in \partial Q,\ \pi_b z_2 = z_1\} \tag{5.2}$$

и символом $B(\pi_Q z_1) \bigotimes \nu_{\partial Q} \bigotimes |dx|^{1/2}$ ([14]). Заметим, что

$$\mathcal{F}_b \in I^{1/4}(\partial Q, \widetilde{Q}, C_b, \Omega^{1/2}_{\partial Q\times\widetilde{Q}} \times \mathrm{Hom}(E^r(\partial Q), E^m(\widetilde{Q})).$$

Нашей целью является построение последовательности ИОФ $\widetilde{\mathcal{F}}_j$, $j = 1, 2, \ldots$, с одним и тем же каноническим отношением $\widetilde{C}$ и главными символами, определёнными рекурентными соотношениями и удовлетворяющими следующим условиям :

$$\widetilde{\mathcal{F}}_j \in I^{\frac{-1}{4}-j}(\widetilde{Q}, \partial Q, \widetilde{C}, \Omega^{1/2}_{\widetilde{Q}\times\partial Q} \bigotimes \mathrm{Hom}(E^m(\widetilde{Q}), E^r(\partial Q))), \tag{5.3}$$

$$A \circ \sum_{j=0}^{l} \widetilde{\mathcal{F}}_j \in I^{\frac{-1}{4}-l}(\widetilde{Q}, \partial Q, \widetilde{C}, \Omega^{1/2}_{\widetilde{Q}\times\partial Q} \bigotimes \mathrm{Hom}(E^m(\widetilde{Q}), E^r(\partial Q))), \tag{5.4}$$

$$\mathcal{F}_b \circ \sum_{j=0}^{l} \widetilde{\mathcal{F}}_j - Id \in I^{-1-l}(\partial Q, \partial Q, C_b \circ \widetilde{C}, \Omega^{1/2}_{\partial Q\times\partial Q} \bigotimes \mathrm{Hom}(E^r(\widetilde{Q}). E^r(\partial Q))), \tag{5.5}$$

$$l = 0, 1, \ldots.$$

На языке символов соотношение (5.4) можно записать следующим образом :

$$\sigma\left(A \circ \sum_{j=0}^{l} \widetilde{\mathcal{F}}_j\right) \in S^{\frac{3}{2}-1-l}(\widetilde{C}, \Omega^{1/2}_{\widetilde{C}} \bigotimes \mathrm{Hom}(E^m(\widetilde{C}), E^r(\widetilde{C})). \tag{5.6}$$

Будем предполагать, что выполнено также следующее соотношение

$$P\sigma\left(A \circ \sum_{j=0}^{l} \widetilde{\mathcal{F}}_j\right) \in S^{\frac{3}{2}-1-l}(\widetilde{C}, \Omega^{1/2}_{\widetilde{C}} \bigotimes \mathrm{Hom}(E^m(\widetilde{C}), E^r(\widetilde{C})). \tag{5.7}$$

Отметим, что композиция ИОФ $\mathcal{F}_b$ и $\tilde{\mathcal{F}}_j$ корректно определены, потому что из Условия 4 следует, что композиция канонических отношений C_b и $\tilde{C}$ трансверсальна (§7). Также отметим, что ИОФ $\tilde{\mathcal{F}}_0$ построенный в §§2,3 удовлетворяет всем этим условиям для $l = 0$ (это будет показано в §7).

Пусть $z_0 \in \mathrm{Char} A$, $M_1(z)$ — гладкая матричнозначная (размера $(m-1) \times m$) функция, столбцами которой являются базисные векторы пространства $(I - P(z))\mathbf{R}^m$. Матрица $M_1(z)$ определена с точностью до правого действия группы $GL(m-1, \mathbf{R})$.

Из Условия 1 следует, что $\sigma_A(z)$ — автоморфизм подпространства $(I - P(z))\mathbf{R}^m$.

В окрестности z_0 рассмотрим гладкую матричнозначную (размера $m \times m$) функцию

$$M(z) = M_1(z)\left[M_1^{tr}(z)\,\sigma_A(z)\,M_1(z)\right]^{-1} M_1^{tr}(z). \tag{5.8}$$

Из инвариантности $M(z)$ относительно правого действия $GL(m-1, \mathbf{R})$ на $\widetilde{M}_1(z)$ следует, что $M(z)$ не зависит от выбора базиса в $(I - P(z))\mathbf{R}^m$ и поэтому $M(z)$ определена на всём $\widetilde{\mathrm{Char}} A$.

Обозначим через $M_C(\gamma)$, $\tilde{K}_C$ и $\tilde{\nabla}_C$ гладкую матричнозначную функцию, линейное расслоение и линейную связность, полученные поднятием $M(z)$, $\tilde{K}_C$ и ∇ относительно отображения $\tilde{\chi}\colon\ \tilde{C} \longmapsto \widetilde{\mathrm{Char}} A$.

Рассмотрим векторное расслоение $\mathrm{Hom}(E^r(\widetilde{\mathrm{Char}} A),\ E^m(\widetilde{\mathrm{Char}} A))$ над $\widetilde{\mathrm{Char}} A$, слоем которого является векторное пространство матриц размера $m \times r$. Пусть $\mathcal{M}$ есть векторное расслоение, полученное поднятием $\mathrm{Hom}(E^r(\widetilde{\mathrm{Char}} A), E^m(\widetilde{\mathrm{Char}} A))$ относительно $\chi\colon\ \tilde{C} \longmapsto \widetilde{\mathrm{Char}} A$. Обозначим через $\mathcal{M}_\Omega$ тензорное произведение $\mathcal{M} \bigotimes \Omega^{1/2}$ над $\tilde{C}$. Главные символы операторов $\tilde{\mathcal{F}}_j$ будут сечениями этого расслоения. Рассмотрим гладкие сечения

$$f_j(\gamma) = M(\gamma)\,\sigma\left(A \circ \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{\mathcal{F}}_j\right) \tag{5.9}$$

расслоения $\mathcal{M}_{\Omega}$ и ИОФ $\widetilde{\mathcal{F}}_{j,1}$ с каноническим отношением $\widetilde{C}$ и главными символами f_j. Из (5.8) следует, что

$$P\sigma(A \circ \mathcal{F}_{j,1}) \in S^{\frac{k}{2}-1-j}(\widetilde{C}, \Omega^{1/2}_{\widetilde{C}} \bigotimes \mathrm{Hom}(E^m(\widetilde{C}), E^r(\widetilde{C})). \tag{5.10}$$

Определим процедуру поднятия ломанной бихарактеристики $\gamma \in \widetilde{C}$ из $\mathrm{Char} A$ в $\widetilde{C}$ следующим способом :

каждой ломанной бихарактеристике $\gamma \in \widetilde{C}$, γ: $[s_0, s_1] \setminus J \longmapsto \mathrm{Char} A$, сопоставим кусочно–непрерывную функцию $\gamma \in \widetilde{C}$, γ: $[s_0, s_1] \setminus J \longmapsto \widetilde{C}$ такую, что для $\widetilde{s} \in [s_0, s_1] \setminus J$, $\gamma(\widetilde{s})$: $[s_0, \widetilde{s}] \setminus J \longmapsto \mathrm{Char} A$ и $\widetilde{\gamma}(\widetilde{s}) = \gamma|_{[s_0, s_1] \setminus J}$. Рассмотрим гладкое сечение

$$\sigma^j = -P\sigma\left(A\widetilde{\mathcal{F}}_{j,1} + \sum_{i=0}^{j-1} A\widetilde{\mathcal{F}}_i\right) \tag{5.11}$$

расслоения $\mathcal{M}_{\Omega}$. Пусть $\gamma \in \widetilde{C}$ и $\widetilde{\gamma}$ — соответствующая ломанная на $\widetilde{C}$. Для произвольных точек γ_1 и γ_2 принадлежащич $\widetilde{\gamma}$ обозначим через $\mathbf{R}^{C}_{\gamma_{1,2}}$ оператор параллельного переноса вдоль бихарактеристической дуги $\gamma_{1,2}$ соединяющей точки $\widetilde{\gamma}_1 = \widetilde{\gamma}(\widetilde{s}_1)$ и $\widetilde{\gamma}_2 = \widetilde{\gamma}(\widetilde{s}_2)$. Обозначим через $\mathbf{S}^{C,j}_{\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2}$ оператор переноса в слоях расслоения $\mathcal{M}_{\Omega}$, порождённый интегрированием гладкого сечения σ^j вдоль дуги $\widetilde{\gamma}_{1,2}$, т. е. если v принадлежит слою над точкой $\widetilde{\gamma}_1$ расслоения $\mathcal{M}_{\Omega}$, то

$$\mathbf{S}^{C,j}_{\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2} v = \mathbf{R}^{C}_{\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2} v + \int_{\widetilde{\gamma}_{1,2}} \exp \mu_C(\widetilde{\gamma}(s))\, \sigma^j(\widetilde{\gamma}(s))\, ds \tag{5.12}$$

принадлежит слою над точкой $\widetilde{\gamma}$.

Пусть $\widetilde{\pi}_1$ и $\widetilde{\pi}_2$ — проекции $\dot{T}^*\widetilde{Q} \times \dot{T}^*\partial Q$, соответственно на первый и второй сомножители. Рассмотрим композицию

$$C_b \circ \widetilde{C} = \{(z_1, z_2, \gamma): \quad (z_1, z_2) \in C_b,\ \gamma \in \partial C,\ \widetilde{\pi}_1 \circ \tau(\gamma) = z_2\} \tag{5.13}$$

канонических отношений C_b и $\widetilde{C}$, и отображение $\imath_b$: $C_b \circ \widetilde{C} \longmapsto \dot{T}^*\partial Q \times \dot{T}^*\partial Q$, действующее по правилу $\imath_b(z_1, z_2, \gamma) = (z_1, \widetilde{\pi}_2(\tau(\gamma))$. Тогда $(C_b \circ \widetilde{C}, \imath_b)$ — однородное иммерсированное лагранжево подмногообразие в $\dot{T}^*\partial Q \times \dot{T}^*\partial Q$. Определим отображение φ: $\partial C \longmapsto C_b \circ \widetilde{C}$:

$$\varphi(\gamma) = ((\pi_b \circ \widetilde{\pi}_1 \circ \tau)(\gamma), (\pi_1 \circ \tau)(\gamma), \gamma). \tag{5.14}$$

являющееся диффеоморфизмом, $\imath_b \circ \varphi = (\pi_b \circ \beta_1) \times (\pi_b \circ \kappa_0)$. Поэтому, $(\partial C, \imath_b \circ \varphi)$ — однородное иммерсированное лагранжево подмногообразие в $\dot{T}^*\partial Q$ $\dot{T}^*\partial Q$ и существует диффеоморфизм из $(\partial C, \imath_b \circ \varphi)$ в $(C_b \circ \widetilde{C}, \imath_b)$.

Обозначим через $\mathcal{M}_\Omega(\partial C)$ ограничение расслоения $\mathcal{M}_\Omega$ на $\partial C \subset \widetilde{C}$. Рассмотрим гладкое сечение расслоения $\mathcal{M}_\Omega(\partial C)$ определённое следующим образом

$$\sigma_b^j(\gamma) = \Omega_0(\chi(\gamma))\, \sigma_{Id - \mathcal{F}_b \circ \sum\limits_{i=0}^{j-1} \widetilde{\mathcal{F}}_i}(\gamma), \tag{5.15}$$

где $\gamma \in \partial C$. Пусть теперь $\gamma \in \widetilde{C}$, $J_\gamma = (s_0, s_1, \ldots, s_k)$, и $\widetilde{\gamma}$ — соответствующая ломанная на $\widetilde{C}$. Заметим, что $\widetilde{\gamma}(s_1), \ldots, \widetilde{\gamma}(s_k) \in \widetilde{C} \sim \partial_- C \subset \partial C$ $\kappa_0(\gamma) \in \mathrm{Char}_b^+ A \sim \partial_0 C \subset \partial C$.

Главный символ ИОФ $\mathcal{F}_{j,2}$ определим формулой :

$$\begin{gathered}
\sigma_{\mathcal{F}_{j,2}}(\gamma) = \exp\left[-\mu_C(\gamma)\right] \mathrm{S}^{Cj}_{\widetilde{\gamma}(s_k),\gamma} \Big[\sigma_b^j(\widetilde{\gamma}(s_k)) + \\
+ \Omega(\kappa_k(\gamma))\, \mathrm{S}^{Cj}_{\widetilde{\gamma}(s_{k-1}),\widetilde{\gamma}(s_k)} \Big[\sigma_b^j(\widetilde{\gamma}(s_{k-1})) + \Omega(\kappa_{k-1}(\gamma))\, \mathrm{S}^{Cj}_{\widetilde{\gamma}(s_{k-2}),\widetilde{\gamma}(s_{k-1})} \cdots \\
\cdots \Big[\sigma_b^j(\widetilde{\gamma}(s_1)) + \Omega(\kappa_1(\gamma))\, \mathrm{S}^{Cj}_{\widetilde{\gamma}(s_1),\widetilde{\gamma}(s_0)} \sigma_b^j(\kappa_0(\gamma))\Big] \ldots\Big].
\end{gathered} \tag{5.16}$$

Наконец, ИОФ $\widetilde{\mathcal{F}}_j$ определим как сумму

$$\widetilde{\mathcal{F}}_j = \widetilde{\mathcal{F}}_{j,1} + \widetilde{\mathcal{F}}_{j,2}.$$

Заметим, что если $\widetilde{\mathcal{F}}_j$ есть ИОФ с каноническим отношением C и главным символом $\sigma_{\mathcal{F}_j} = \sigma_{\widetilde{\mathcal{F}}_j}\Big|_C$, тогда для любого $g \in \mathcal{E}'(\partial Q)$ получаем

$$\mathcal{F}_j g = \widetilde{\mathcal{F}}_j g\Big|_Q. \tag{5.17}$$

§6. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим асимптотическую сумму

$$\mathcal{F} \sim \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{F}_j \tag{6.1}$$

и функцию $\rho_\delta(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ такую, что $\rho_\delta(x) = 0$ в $\delta/2$–окрестности $\partial Q \cap Q_0$ и $\rho_\delta(x) = 1$ вне δ–окрестности $\partial Q \cap Q_0$.

Определим оператор

$$E^{\delta}: \quad \mathcal{E}'_{r,\delta}(\partial Q) \times D'_{m,\delta}(Q_0) \longmapsto \hat{\mathcal{D}}'_m(Q) \tag{6.2}$$

следующим образом

$$E^{\delta}(g, u_0) \bigotimes |dx|^{1/2} = \rho_\delta(x) \times \mathcal{F}(g \bigotimes \nu_{\partial Q}, u_0 \bigotimes |dx'|^{1/2}), \tag{6.3}$$

где $\nu_{\partial Q}$ — ненулевая полуплотность на ∂Q, введённая в §3.

Для формулировки теоремы необходимо следующее

Условие 6. Для любого $x \in \overline{Q}$ множество $\chi^{-1}(x)$ — конечно.

Теорема 6.1. Если Условия 1 - 6 выполнены то оператор E_δ является параметриксом Задачи (1.1) — (1.2).

§7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1

Пусть X и Y — C^∞-многообразия, $E \mapsto X$, $F \mapsto Y$ — векторные расслоения и $(C, \imath)$ — каноническое отношение из Y в X. Будем называть $(C, \imath)$ локально-конечным каноническим отношением, если для любого $z \in \imath(C)$ существуют окрестность $U_z \subset \dot{T}^*X \times \dot{T}^*Y$ и натуральное число k_z такие, что ограничение $\imath$ на $\imath^{-1}(U_z)$ есть k_z-листное накрытие.

Пусть $(C_1, \imath_1)$ и $(C_2, \imath_2)$ — локально-конечные канонические отношения из Y в X. Будем говорить, что $(C_1, \imath_1)$ редуцируется к $(C_2, \imath_2)$, если существует гладкое отображение f из C_1 в C_2 такое, что $\imath_1 = \imath_2 \circ f$. Пусть $\mathcal{F}_i \in I^m(X \times Y, C_i)$, $i = 1, 2$, и отображение f редуцирует $(C_1, \imath_1)$ к $(C_2, \imath_2)$. Обозначим через $\tilde{\mathcal{F}}_1$ ИОФ с каноническим отношением $(C_2, \imath_2)$ и главным символом

$$\sigma_{\tilde{\mathcal{F}}_1}(\gamma) = \sum \sigma_{\mathcal{F}_1}(\gamma_i), \tag{7.1}$$

где суммирование ведётся по всем прообразам $\gamma_i \in C_1$ точки $\gamma \in C_2$ относительно отображения f. Тогда

$$\tilde{\mathcal{F}}_1 \in I^m(X \times Y, C_2)$$

и

$$\tilde{\mathcal{F}}_1 = \mathcal{F}_2 (\mathrm{mod} I^{m-1}(X \times Y, C_2)). \tag{7.2}$$

Далее, пусть X, Y, Z — C^∞-многообразия, $E \mapsto X$, $F \mapsto Y$, $G \mapsto Z$ — векторные расслоения, $(C_i, \imath_i)$, $i = 1, 2$ — однородные иммерсированные лагранжевы подмногообразия симплектических многообразий $(\dot{T}^*X \times \dot{T}^*Y, \omega_1)$ и $(\dot{T}^*Y \times \dot{T}^*Z, \omega_2)$, соответственно, где $\omega_1 = \omega_{T^*X} - \omega_{T^*Y}$, $\omega_2 = \omega_{T^*Y} - \omega_{T^*Z}$. Тогда $(C_1 \times C_2, \imath_1 \times \imath_2)$ — иммерсированное подмногообразие в $\dot{T}^*X \times \dot{T}^*Y \times \dot{T}^*Y \times \dot{T}^*Z$. Пусть Δ — диагональ в $\dot{T}^*Y \times \dot{T}^*Y$. Обозначим через C прообраз множества $\dot{T}^*X \times \Delta \times \dot{T}^*Z$ относительно отображения $\imath_1 \times \imath_2$. Будем предполагать, что отображение $\imath_1 \times \imath_2$ трансверсально к $\dot{T}^*X \times \Delta \times \dot{T}^*Z$. Тогда C есть подмногообразие в $C_1 \times C_2$ (см. [15]).

Пусть

$$\pi_{X\times Z}: \quad T^*X \times T^*Y \times T^*Y \times T^*Z \longmapsto T^*X \times T^*Z$$

каноническая проекция и

$$\imath = \pi_{X\times Z} \circ (\imath_1 \times \imath_2)|_C : \quad C \longmapsto T^*X \times T^*Z. \tag{7.3}$$

Однородное иммерсированное лагранжево подмногообразие $(C, \imath)$ в $(\dot{T}^*X \times \dot{T}^*Z, \omega_{T^*X} - \omega_{T^*Z})$ будем называть трансверсальной композицией канонических отношений $(C_1, \imath_1)$ и $(C_2, \imath_2)$. Заметим, что если $(C_1, \imath_1)$ и $(C_2, \imath_2)$ локально-конечны, то их трансверсальная композиция также локально-конечна.

Перейдём к доказательству теоремы. Рассмотрим иммерсированное лагранжево подмногообразие $(T^*\partial Q \cup \widehat{C}, \hat{\imath})$ в $T^*\partial Q \times T^*\partial Q$, где

$$\hat{\imath}|_{T^*\partial Q} = \mathrm{id} \times \mathrm{id}, \quad \hat{\imath}|_{\widehat{C}} = \chi \times (\pi_\flat \circ \chi_0).$$

Определим отображение $f: \partial C \mapsto T^*\partial Q \cup \widehat{C}$ следующим образом : $f|_{\partial_0 C} = \pi$ — r-листное накрытие, $f|_{\partial_- C}: \partial_- C \mapsto \widehat{C}$ — диффеоморфизм, $f|_{\partial_+ C}: \partial_+ C \mapsto \partial_- C \sim \widehat{C}$ — r-листное накрытие. Выполнено следующее соотношение

$$\hat{\imath} \circ f = \imath_\flat \circ \varphi. \tag{7.4}$$

Рассмотрим ИОФ $\mathcal{F}_\flat \circ \widetilde{\mathcal{F}}_j$ с каноническим соотношением $C_\flat \circ \widetilde{C}$. Отображение f редуцирует $C_\flat \circ \widetilde{C}$ к $(T^*\partial Q \cup \widehat{C}, \hat{\imath})$. Из диаграммы (7.4) и формулы (7.1) следует, что

$$\mathcal{F}_b \circ \widetilde{\mathcal{F}}_j = \\ = \hat{\mathcal{F}}_j(\mathrm{mod} I^{j-1}(\partial Q, \partial Q, T^*\partial Q \cup \widehat{C}, \Omega^{1/2}_{\partial Q\times\partial Q} \bigotimes \mathrm{Hom}(E^r(\partial Q), E^r(\partial Q)))), \tag{7.5}$$

где $\hat{\mathcal{F}}_j$ — ИОФ с каноническим отношением $(T^*\partial Q \cup \widehat{C}, \mathrm{i})$ и главным символом :

а) для $\gamma \in T^*\partial Q$

$$\sigma_{\hat{\mathcal{F}}_j}(\gamma) = \sum_{j=1}^{r} \sigma_{\mathcal{F}_b \circ \widetilde{\mathcal{F}}_j}(\widetilde{\gamma}_j), \tag{7.6}$$

б) для $\gamma \in \widehat{C}$

$$\sigma_{\hat{\mathcal{F}}_j}(\gamma) = \sigma_{\mathcal{F}_b \circ \widetilde{\mathcal{F}}_j}(\gamma) + \sum_{j=1}^{r} \sigma_{\mathcal{F}_b \circ \widetilde{\mathcal{F}}_j}(\widetilde{\gamma}_j), \tag{7.7}$$

где $(\widetilde{\gamma}_1, ..., \widetilde{\gamma}_r) = f^{-1}(\gamma)$.

Для того, чтобы доказать (5.5) при $l = 0$, выпишем главный символ оператора $\mathcal{F}_b \circ \widetilde{\mathcal{F}}_0$. Поскольку $\varphi\colon\ \partial C \mapsto C_b \circ \widetilde{C}$ — диффеоморфизм, мы имеем

$$\varphi^* \sigma_{\mathcal{F}_b \circ \widetilde{\mathcal{F}}_0} \in S^{n/2}(\partial C, \Omega^{1/2}_{\partial C} \bigotimes \mathrm{Hom}(E^r(\partial C), E^r(\partial C))).$$

Из соотношений (3.13), (4.3), (4.4) и формулы композиции для ИОФ (см. [12]), получаем

а) для $\gamma \in \mathrm{Char}^+_b A \sim \partial_0 C$

$$\Phi^* \sigma_{\mathcal{F}_b \circ \widetilde{\mathcal{F}}_0} = B(\pi_Q \circ \pi_b(\gamma))\Omega_0(\pi_b(\gamma)) \bigotimes \pi_b^* \nu_{\partial Q} \bigotimes \pi_b^* \nu_{\partial Q}. \tag{7.8}$$

б) для $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \partial_+ C \cup \partial_- C$

$$\begin{aligned} \varphi^* \sigma_{\mathcal{F} \circ \widetilde{\mathcal{F}}} = \exp[-\mu_c(\gamma_1)]\, \pi_Q^* \nu_{\partial Q} \bigotimes B(\pi_Q \circ \pi_b(\gamma_2)) \pi_Q^* |dx|^{-1/2} \times \\ \times R^{\nabla}_{\kappa_{k(\gamma_1)-1}(\gamma_1), \kappa(\gamma_1)} \Omega(\kappa_{k(\gamma_1)-1}(\gamma_1) \circ ... \\ ... \circ R^{\nabla}_{\kappa_0(\gamma_1), \kappa_1(\gamma_1)}(\Omega_0(\kappa_0(\gamma_1) \bigotimes \\ \bigotimes \pi_Q^* |dx|^{1/2}) \bigotimes \pi_Q^* \nu_{\partial Q}. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Из соотношений (7.6) – (7.9) получаем

а) для $\gamma \in T^*\partial Q$

$$\sigma_{\hat{\mathcal{F}}_0}(\gamma) = \sum_{j=1}^{r} B(\pi_Q \circ \pi_b(\widetilde{\gamma}_j))\Omega_0(\pi_b(\widetilde{\gamma}_j)) \bigotimes \pi_b^* \nu_{\partial Q} \bigotimes \pi_b^* \nu_{\partial Q}. \tag{7.10}$$

Отсюда и из соотношений (3.10), (3.11) следует, что

$$\sigma_{\mathcal{F}_0}(\gamma) = B(\pi_Q(\gamma)) \sum_{j=1}^{r} P(\widetilde{\gamma}_j) V(\gamma)[B(\gamma)V(\gamma)]^{-1} \bigotimes \pi_b^* \nu_{\partial Q} \bigotimes \pi_b^* \nu_{\partial Q}. \tag{7.11}$$

Пусть $E_+(\gamma)$ — линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$, натянутое на столбцы матрицы $V(\gamma)$. Проектор $\sum\limits_{j=1}^{r} P(\widetilde{\gamma}_j)$ действует на $E_+(\gamma)$ как тождественный оператор. Следовательно, получаем

$$\sigma_{\mathcal{F}_0}(\gamma) = \mathrm{Id} \bigotimes \pi_b^* \nu_{\partial Q} \bigotimes \pi_b^* \nu_{\partial Q}. \tag{7.12}$$

б) для $\gamma \in \widehat{C}$

$$\sigma_{\mathcal{F}_0}(\gamma) = \exp[-\mu_C(\gamma)]\, \pi_Q^* \nu_{\partial Q} \bigotimes B(\pi_Q \circ \chi(\gamma)) \pi_Q^* |dx|^{-1/2} \times$$
$$\times R^{\nabla}_{\kappa_{k(\gamma)-1}(\gamma), \chi(\gamma)} \Omega(\kappa_{k(\gamma)-1}(\gamma) \circ \dots$$
$$\dots \circ R^{\nabla}_{\kappa_0(\gamma), \kappa_1(\gamma)} (\Omega_0(\kappa_0(\gamma) \bigotimes \pi_Q^* |dx|^{1/2}) \bigotimes \pi_Q^* \nu_{\partial Q} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{r} \exp[-\mu_c(\widetilde{\gamma}_j)]\, \pi_Q^* \nu_{\partial Q} \bigotimes B(\pi_Q \circ \chi(\widetilde{\gamma}_j)) \bigotimes \pi_Q^* |dx|^{-1/2} \times \Omega(\kappa(\widetilde{\gamma}_j))$$
$$R^{\nabla}_{\kappa_{k(\widetilde{\gamma}_j)-1}(\widetilde{\gamma}_j), \chi(\widetilde{\gamma}_j)} \Omega(\kappa_{k(\widetilde{\gamma}_j)-1}(\widetilde{\gamma}_j) \circ \dots \circ R^{\nabla}_{\kappa_0(\widetilde{\gamma}_j), \kappa_1(\widetilde{\gamma}_j)} (\Omega_0(\kappa_0(\widetilde{\gamma}_j) \bigotimes$$
$$\bigotimes \pi_Q^* |dx|^{1/2}) \bigotimes \pi_Q^* \nu_{\partial Q},$$

где $(\widetilde{\gamma}_1, \dots, \widetilde{\gamma}_r) = f^{-1}(\gamma)$.

Заметим, что

$$\pi_Q \circ \chi(\widetilde{\gamma}_j) = \pi_Q \circ \chi(\gamma),\ \kappa_i(\widetilde{\gamma}_j) = \kappa_i(\gamma),$$

$$R^{\nabla}_{\kappa_i(\widetilde{\gamma}_j), \kappa_{i+1}(\widetilde{\gamma}_j)} = R^{\nabla}_{\kappa_i(\gamma), \kappa_{i+1}(\gamma)},\ i = 0, \dots, k_\gamma - 1,\ \mu_C(\widetilde{\gamma}_j) = \mu_C(\gamma),\ j = 1, \dots, r.$$

Таким образом, получаем

$$\sigma_{\mathcal{F}_0}(\gamma) = \exp[-\mu_c(\gamma)]\, \pi_Q^* \nu_{\partial Q} \bigotimes B(\pi_Q \circ \chi(\gamma)) \pi_Q^* |dx|^{-1/2} \times$$
$$(I + \sum_{j=1}^{r} \Omega(\chi(\widetilde{\gamma}_j))) R^{\nabla}_{\kappa_{k(\gamma)-1}(\gamma), \chi(\gamma)} \Omega(\kappa_{k(\gamma)-1}(\gamma) \circ \dots \tag{7.13}$$
$$\dots \circ R^{\nabla}_{\kappa_0(\gamma), \kappa_1(\gamma)} (\Omega_0(\kappa_0(\gamma) \bigotimes \pi_Q^* |dx|^{1/2}) \bigotimes \pi_Q^* \nu_{\partial Q}.$$

Из (3.12) следует, что

$$B(\pi_Q \circ \chi(\gamma))(I + \sum_{j=1}^{r} \Omega(\chi(\widetilde{\gamma}_j))) =$$

$$= B(\pi_Q \circ \chi(\gamma)) - \sum_{j=1}^{r} P(\chi(\widetilde{\gamma}_j)) \times W(\pi_b \circ \chi(\widetilde{\gamma}_j)) B(\pi_Q \circ \chi(\widetilde{\gamma}_j)) =$$

$$= B(\pi_Q \circ \chi(\widetilde{\gamma}_j)) - B(\pi_Q \circ \chi(\gamma)) \times \left(\sum_{j=1}^{r} P(\chi(\widetilde{\gamma}_j)) \right) \times \tag{7.14}$$

$$\times W(\pi_b \circ \chi(\gamma)) B(\pi_Q \circ \chi(\gamma)).$$

Проектор $\sum\limits_{j=1}^{r} P(\chi(\widetilde{\gamma}_j))$ действует на $E_+(\chi(\gamma))$ как тождественный оператор, поэтому используя соотношение (3.10), получаем

$$B(\pi_Q \circ \chi(\gamma)) \times \left(\sum_{j=1}^{r} P(\chi(\widetilde{\gamma}_j)) \right) \times W(\pi_b \circ \chi(\gamma)) B(\pi_Q \circ \chi(\gamma)) =$$

$$B(\pi_Q \circ \chi(\gamma)) \times \left(\sum_{j=1}^{r} P(\chi(\widetilde{\gamma}_j)) \right) V(\pi_b \circ \chi(\gamma)) [B(\pi_Q \circ \chi(\gamma)) \times \tag{7.15}$$

$$\times V(\pi_b \circ \chi(\gamma))]^{-1} B(\pi_Q \circ \chi(\gamma)) = B(\pi_Q \circ \chi(\gamma)).$$

Из (7.13) – (7.15) следует, что $\sigma_{\dot{\mathcal{F}}_0}(\gamma) = 0$ для $\gamma \in \widehat{C}$. Тем самым (5.5) доказано для $l = 0$. Соотношение (5.5) для $l = 1, 2, \ldots$ доказываются аналогично.

Мы не будем останавливаться на доказательстве (5.6), поскольку оно проводится стандартными рассуждениями, и перейдём к доказательству (5.7).

Покажем, что

$$P\sigma_{-1}(A\mathcal{F}_0) = 0. \tag{7.16}$$

Хорошо известно (см. [12], [16]), что

$$\sigma_{-1}(A\mathcal{F}_0) = \{\sigma_A, \sigma_{\mathcal{F}_0}\} + \sigma_{-1}(A)\sigma_{\mathcal{F}_0}.$$

Отсюда

$$P\sigma_{-1}(A\mathcal{F}_0) = P(\{\sigma_A - \lambda I, \sigma_{\mathcal{F}_0}\} + \sigma_{-1}(A)\sigma_{\mathcal{F}_0}) + P\{\lambda, \sigma_{\mathcal{F}_0}\} = \mu\sigma_{\mathcal{F}_0} + P\mathcal{D}_{H_p}\sigma_{\mathcal{F}_0} =$$

$$= \mu\sigma_{\mathcal{F}_0} + \nabla_{H_p}\sigma_{\mathcal{F}_0} = (\nabla_{H_p} + \mu)\exp[-\mu_C(\gamma)] \times \chi^* R^{\nabla}_{\kappa_b(\gamma)-1(\gamma), \chi(\gamma)} v =$$

$$\nabla_{H_p} R^{\nabla} v = 0.$$

Аналогично,

$$P\sigma(A \circ \mathcal{F}_j) = P\sigma(A \circ \mathcal{F}_{j,1}) + P\sigma(A \circ \mathcal{F}_{j,2}) = P\sigma(A \circ \mathcal{F}_{j,1}) + (\nabla_{H_p} + \mu)\sigma(\mathcal{F}_{j,2}).$$

Используя (5.16), (5.12) и (5.11) последнее выражение можно переписать в виде

$$P\sigma(A \circ \mathcal{F}_{j,1}) - P\sigma(A \circ \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_{j,1}) - P\sigma(\sum_{i=0}^{j-1} A \circ \mathcal{F}_j),$$

т. е. выполнены соотношения (5.7).

Нам осталось показать, что разность между $E_\delta(g, u_0)$ и точным решением задачи (1.1) - (1.2) принадлежит $C^\infty(\overline{Q})$. Пусть $V_\delta(\partial Q)$ — δ–окрестность множества ∂Q в $\mathbb{R}^{n+1}$. Для $x \notin V_\delta(\partial Q)$ имеем

$$\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}(g, u_0) - E^\delta(g, u_0) = (1 - \rho_\delta(x))\, \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}(g, u_0) = 0.$$

С другой стороны, $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}(g, u_0) \in C^\infty(\overline{Q} \subset V_\delta(\partial Q))$. Поэтому $\omega = E_\delta(g, u_0) - u$ — решение смешанной задачи с бесконечно дифференцируемыми данными и эти данные C^∞–согласованны.

ABSTRACT. In the paper a parametrix for mixed problem for a hyperbolic system in a situation where the bicharacteristics are transversal to the boundary is constructed in the form of a global Fourier Integral Operator (FIO). So the construction of the parametrix of a mixed problem for second order hyperbolic equations, suggested by J.Chazarain, is extended to hyperbolic systems. The manifold of broken bicharacteristics, supplied with a structure of a homogeneous immersed Lagrangian submanifold, playes the role of the canonical relation for FIO. The symbol of FIO is constructed as an asymptotic sum of smooth sections of certain vector bundls on C.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Chazarain, "Construction de la parametrix du probleme mixte hyperbolique pour l'equation des ondes", C. R. Acad. Sc. Paris, vol. 276, ser. A, pp. 1213 - 1215, 1973.
2. J. Chazarain, "Parametrix du probleme mixte pour l'equation des ondes a l'interieur dun domaine convexepour les bicharacteristiques", Asterisque, vol. 34 - 35, pp. 165 - 181, 1976.
3. R. B. Melrose, "Microlocal parametrices for difractive boundary value problems", Duke Math. J., vol. 42, pp. 583 - 604, 1975.
4. M. Taylor, "Grasing rays and reflection of singularities of solutions to wave equations", Comm. Pure Appl. Math., vol. 29, pp. 1 - 38, 1976.
5. G. Eskin, "Parametrix and propagation of singularities for the interior mixed hyperbolic problem", J. Analyse Math., vol. 32, pp. 17 - 62, 1977.
6. G. Eskin, "General initial–boundary problems for second order hyperbolic equations", In : Sing. in boundary value problems. D.Reidel Publ. So., Dordrecht, Boston, London, pp. 19 - 54, 1981.
7. G. Eskin, "Initial boundary value problem for second order hyperbolic equations

with general boundary conditions 1", J. Analyse, Math., vol. 40, pp. 43 – 89, 1981.

8. R. B. Melrose, J. Sjostrand, "Singularities of boundary value problems 1, 2", Comm. Pure Appl. Math., vol. 31, pp. 593 – 617, 1978 ; vol. 35, pp. 129 – 168, 1982.
9. K. Kubota, "Microlocal parametrices and propagation of singularities near gliding points for hyperbolic mixed problems", Hokk. Math. J., vol. 15, no. 2, pp. 243 – – 308, 1986.
10. Р. Г. Айрапетян, "Фундаментальное решение модельной смешанной задачи для нестрого вогнутых областей," Изв. Акад Наук Армении, Математика [английский перевод : Journal of Contemporary Math. Anal. (Armenian Academy of Sciences)], том 26, № 4, стр. 1 – 20, 1991.
11. В. Гийемин, С. Стернберг, Геометрические Асимптотики, Мир, Москва, 1981.
12. Л. Хермандер, Анализ Линейных Дифференциальных Операторов, том 3, Мир, Москва, 1987.
13. K. Kasahara, "On weak well-posedness of mixed problems for hyperbolic systems," Publ. RIMS Kyoto Univ., vol. 6, no. 3, pp. 503 – 514, 1971.
14. J. J. Duistermaat, Fourier Integral Operators. Courant Inst. of Math. Sciences. New York University, 1973.
15. М. Голубицкий, В. Гиймин, Устойчивые Отображения и их Особенности, Мир, Москва, 1977.
16. Ф. Трев, Введение в Теорию Псевдодифференциальных Операторов и Интегральных операторов Фурье, тома 1, 2, Мир, Москва, 1984.

5 Ноября 1992

Республика Армения
Межвузовский научный центр по
Прикладным проблемам Математики,
Ереванский государственный университет

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА В КАТЕГОРНОЙ ТЕОРИИ ГАЛУА В РЕГУЛЯРНОМ СЛУЧАЕ

С. Г. Далалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 27, № 6, 1992

Доказывается, что основная теорема теории Галуа в классическом виде верна в любой абстрактной категории с мономорфными морфизмами, в которой существуют композиты пар подобъектов и регулярные замыкания морфизмов.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является продолжением статьи [1]. Главная цель этих статей - изложение теории Галуа в рамках общей теории категорий. По сравнению с [1] здесь ситуация более приближена к классической. Во-первых, предполагается (если не оговорено противное), что все морфизмы являются мономорфизмами. Для этого достаточно от пройзвольной категории C перейти к категории C', состоящей из всех объектов категории C и ее мономорфизмов. Во-вторых, изучаются , так называемые, регулярные морфизмы, которые занимают место алгебраических расширений полей классической теории, но не сводятся к ним (Предложение 2.2). Окончательный результат (Теорема 7.6) аналогичен основной теореме классической теории Галуа.

В данной статье мы придерживаемся всех обозначений и соглашений, которые приняты в [1]. Двойственные понятия и результаты формулируются в редких случаях, хотя они не менее интересны с точки зрения приложений.

§1. МНОЖЕСТВА ЧАСТНЫХ

1.1. Множество морфизмов $B\psi C$, в композиции с морфизмом $A\varphi B$ дающих морфизм $A\chi C$, будем называть *множеством левых частных* морфизма χ по морфизму (или относительно морфизма) φ и обозначать $\varphi\backslash\chi$. Двойственно определяется множество правых частных χ/ψ.

В частности, $\chi\backslash\chi$ - изотропная полугруппа, а χ/χ - коизотропная полугруппа морфизма χ. Для любого эпиморфизма φ мощность $|\varphi\backslash\chi|$ множества левых частных не больше единицы, и двойственно $|\chi/\psi| \leq 1$ для любого мономорфизма ψ.

1.2. Предложение. *Для произвольного морфизма $X\xi A$ верно включение $\varphi\backslash\chi \subset \xi\varphi\backslash\xi\chi$, которое превращается в равенство, если ξ - эпиморфизм. Двойственно, $\chi/\psi \subset \chi\xi/\psi\xi$ при любом морфизме $C\xi Z$, а в случае мономорфного ξ имеет место равенство.*

Более общо, для произвольного семейства морфизмов $(X_i\xi_i A,\ i \in I)$ верно включение

$$\varphi\backslash\chi \subset \bigcap_{i\in I} \xi_i\varphi\backslash\xi_i\chi,$$

которое превращается в равенство, если семейство плотное (коразделяющее). Двойственное утверждение верно для всякого семейства морфизмов $(C\xi_j Z_j, j \in J)$.

1.3. Предположим, что морфизм $A\varphi B$ имеет кообраз ξ и φ' дополнительный к кообразу морфизм, так что $\varphi = \xi\varphi'$. Тогда для любого морфизма $A\chi C$ и произвольного $\chi' \in \xi\backslash\chi$ получим равенство $\varphi\backslash\chi = \varphi'\backslash\chi'$, где φ' - копростой морфизм (т.е. такой, все левые эпиморфные делители которого являются изоморфизмами ; это - простое свойство дополнительного к кообразу морфизма)..

Поэтому, если морфизм φ имеет кообраз, то любое множество левых частных $\varphi\backslash\chi$ совпадает с множеством левых частных $\varphi'\backslash\chi'$, где φ' - копростой морфизм (равный дополнительному к кообразу φ морфизму). В частности, если φ разлагается в композицию кообраза и образа, то φ' – мономорфизм. Это свойство в некоторой степени обосновывает целесообразность перехода к рассмотрению категорий, все морфизмы которой являются мономорфизмами, при решении задач, формулируемых с помощью множества левых частных морфизмов.

1.4. Предложение. *Для произвольных морфизмов $A\varphi B$, $A\chi C$, AuW и для любых $\psi \in \varphi\backslash\chi$, $w \in \chi\backslash u$ справедливы включения*

$$\psi(\chi\backslash u) \subset \varphi\backslash u, \quad (\varphi\backslash\chi)w \subset \varphi\backslash u.$$

Поэтому

$$(\varphi\backslash\chi)(\chi\backslash u) \subset \varphi\backslash u.$$

Здесь под произведением $\psi(\chi\backslash u)$ подразумевается множество композиций ψw, где w пробегает множество $\chi\backslash u$, а под произведением $(\varphi\backslash\chi)(\chi\backslash u)$ - множество композиций ψw с $\psi \in \varphi\backslash\chi$, $w \in \chi\backslash u$.

Дополнительно к включению $\psi(\chi\backslash u) \subset \varphi\backslash u$ отметим, что отображение $(\chi\backslash u)\psi^*(\varphi\backslash u)$, $w\psi^* = \psi w$ является инъективным при эпиморфном ψ и является сюръективным тогда и только тогда, когда выполняется следующее часто встречающееся в дальнейшем условие :

(0) морфизм ψ, делящий $v \in \varphi\backslash u$ слева, делит все морфизмы из $\varphi\backslash u$.

Аналогично, отображение $(\varphi\backslash\chi)w_*(\varphi\backslash u)$, $\psi w_* = \psi w$ инъективно при мономорфном w и сюръективно, если и только если

(1) морфизм w, делящий $v \in \varphi\backslash u$ справа, делит каждый морфизм из $\varphi\backslash u$.

Следствие. Если множество $\varphi\backslash\chi$ содержит морфизм ψ, делящий все морфизмы множества $\varphi\backslash u$, то $\psi(\chi\backslash u) = \varphi\backslash u$. Если $\chi\backslash u$ содержит морфизм w, делящий все морфизмы из $\varphi\backslash u$, то $(\varphi\backslash\chi)w = \varphi\backslash u$. В указанных случаях $(\varphi\backslash\chi)(\chi\backslash u) = \varphi\backslash u$.

1.5. Предложение.

(а) Если $v = \psi w$ и w - мономорфизм, то равенство $\varphi_1\backslash\varphi_1 v = \varphi_2\backslash\varphi_2 v$ влечет равенство $\varphi_1\backslash\varphi_1\psi = \varphi_2\backslash\varphi_2\psi$.

(б) Если к тому же каждый морфизм из множеств частных $\varphi_1\backslash\varphi_1 v$ и $\varphi_2\backslash\varphi_2 v$ делится на w, то справедлива обратная импликация.

Доказательство. Проверим, что $\varphi_1\backslash\varphi_1\psi \subset \varphi_2\backslash\varphi_2\psi$. Пусть $\psi' \in \varphi_1\backslash\varphi_1\psi$. Тогда $\psi' w$ принадлежит $\varphi_1\backslash\varphi_1 v$ и, следовательно, $\varphi_2\backslash\varphi_2 v$. Сокращая обе части равенства $\varphi_2\psi' w = \varphi_2\psi w$ на мономорфизм w, получаем, что $\psi' \in$

$\varphi_2\backslash\varphi_2\psi$. По симметрии верно и обратное включение. Аналогично доказывается второе утверждение.

1.6. Определение. *Множеством* $\varphi\backslash u/w$ *двусторонних частных* морфизма $A\,u\,W$ относительно морфизмов $A\varphi B$ и $C\,w\,W$ называется множество всех морфизмов $B\psi C$, удовлетворяющих равенству $u=\varphi\psi w$.

Очевидно, что $\varphi\backslash\chi/1_C=\varphi\backslash\chi$ и $1_A\backslash\chi/\psi=\chi/\psi$. Более общо, $\varphi\backslash u/w=\varphi\backslash\chi$, если w - мономорфизм и $u=\chi w$. Двойственно, $\varphi\backslash u/w=v/w$ при эпиморфном φ и $u=\varphi v$.

1.7. Следующие утверждения очевидны. Множество левых частных $\varphi\backslash\chi$ замкнуто относительно умножений :

(а) справа на элементы γ изотропной полугруппы S^χ (и только на такие элементы) ;

(б) слева на элементы β изотропной полугруппы S^φ (более общо, ψ и $\beta\psi$ принадлежат $\varphi\backslash\chi$ тогда и только тогда, когда $\beta\in\varphi\backslash\chi/\psi$).

Двойственные результаты справедливы для множества правых частных χ/ψ.

Множество двусторонних частных $\varphi\backslash u/w$ замкнуто относительно умножений :

(а$'$) справа на элементы $\gamma\in S_w$ (более общо, $\psi,\psi\gamma\in\varphi\backslash u/w\iff\gamma\in\varphi\psi\backslash u/w$) ;

(б$'$) слева на элементы $\beta\in S^\varphi$ (более общо, $\psi,\beta\psi\in\varphi\backslash u/w\iff\beta\in\varphi\backslash u/\psi w$).

В соответствии с этим для множеств частных получаем разложения в объединение непересекающихся подмножеств :

$$\varphi\backslash\chi=\bigcup_i\psi_iG^\chi=\bigcup_j G^\varphi\psi_j=\bigcup_k G^\varphi\psi_kG^\chi;$$

$$\chi/\psi=\bigcup_i G_\chi\varphi_i=\bigcup_j\varphi_jG_\psi=\bigcup_k G_\chi\varphi_kG_\psi;$$

$$\varphi\backslash u/w=\bigcup_i G^\varphi\psi_i=\bigcup_j\psi_jG_w=\bigcup_k G^\varphi\psi_kG_w.$$

Здесь G с верхним индексом обозначает изотропную группу соответствующего морфизма, с нижним индексом - коизотропную группу.

Морфизм $A\varphi B$ называется *регулярным* в морфизме $A\chi C$, если $\varphi\backslash\chi = \psi G^{\chi}$ и *нормальным*, если $\varphi\backslash\chi = G^{\varphi}\psi$.

1.8. Множество двусторонних частных $\varphi\backslash\chi/\psi$, при $\chi = \varphi\psi$, называется множеством *биизотропных эндоморфизмов* пары (φ, ψ). Если φ - эпиморфизм или ψ - мономорфизм, множество биизотропных эндоморфизмов $\varphi\backslash\chi/\psi$ совпадает, соответственно, с коизотропной полугруппой S_{ψ} или изотропной полугруппой S^{φ} и, следовательно, замкнуто относительно композиций. В общем случае это не верно, однако справедливо

Предложение. *Множество биизотропных эндоморфизмов $\varphi\backslash\chi/\psi$ замкнуто относительно умножения слева на перестановочные с φ биизотропные эндоморфизмы и умножения справа на ψ-перестановочные биизотропные эндоморфизмы. Кроме того оно содержит изотропную полугруппу S^{φ} и сводится к ней при мономорфном ψ, и двойственно, содержит коизотропную полугруппу S_{ψ}, причем сводится к ней, если φ - эпиморфизм.*

§2. РЕГУЛЯРНОСТЬ

Для простоты предположим, что рассматривается категория, все морфизмы которой являются мономорфизмами.

2.1. Морфизм $A\varphi B$ называется *регулярным* относительно морфизма $B\psi C$, если из равенства $\varphi\psi = \varphi\psi'$ следует равенство $\psi' = \psi\gamma$, при некотором автоморфизме γ.

Поскольку $\varphi\psi = \varphi\psi' = \varphi\psi\gamma$, автоморфизм γ принадлежит изотропной группе G^{χ} морфизма $\chi = \varphi\psi$.

Таким образом, регулярность φ относительно ψ означает, что отображение

$$G^{\chi}\psi^{*}(\varphi\backslash\chi), \quad \gamma\psi^{*} = \psi\gamma$$

сюръективно. То есть справедливо

Предложение. *Морфизм $A\varphi B$ регулярен в морфизме $A\chi C$ тогда и только тогда, когда он регулярен относительно некоторого (и, следовательно, любого) морфизма ψ множества частных $\varphi\backslash\chi$.*

Заметим, что поскольку равенство $\gamma\psi^* = \gamma'\psi^*$ выполняется в том и только том случае, когда $\gamma'\gamma^{-1} \in G^\psi$, из регулярности φ в χ следует, что отображение ψ^* индуцирует биекцию между множествами левых частных $\varphi\backslash\chi$ и левых смежных классов $G^\psi\backslash G^\chi$.

Согласно п. 1.7 изотропная группа G^χ действует на множество частных $\varphi\backslash\chi$ правыми композициями. Регулярность морфизма φ в χ эквивалентна условию транзитивности этого действия.

2.2. Предложение. *Расширение полей $A\varphi B$ регулярно относительно расширения BvW (или в $u = \varphi v$), если степень трансцендентности расширения u конечна и поле W алгебраически замкнуто.*

Доказательство. Пусть $u = \varphi v = \varphi v'$. Степени трансцендентности морфизмов v и v' равны, ибо при условии конечности степени трансцендентности $\operatorname{tr} u$ композиции $u = \varphi v$ справедлива формула $\operatorname{tr} u = \operatorname{tr}\varphi + \operatorname{tr} v$ (см., например, [2], §5.3).

Выберем базисы трансцендентности $(t_i, i \in I)$ и $(t'_i, i \in I)$ расширений v и v', соответственно. Согласно свойству продолжения изоморфизмов ([2],§6.1) существует эндоморфизм $W\omega W$ такой, что $v = v'\omega$ и $\omega(t'_i) = t_i$ при всех $i \in I$. Образ $\omega(W)$ совпадает с W и, следовательно, ω - автоморфизм, потому что $\omega(W) \subset W$ и оба они являются алгебраическими замыканиями чисто трансцендентного расширения поля $v(B)$, получаемого присоединением элементов $t_i, i \in I$.

Следствие. Всякое алгебраическое расширение $A\varphi B$ регулярно в алгебраическом замыкании AuW. Более того, каждое алгебраическое расширение регулярно в кратном ему нормальном расширении.

Действительно, пусть $A\chi C$ - произвольное нормальное расширение и CwW - некоторое вложение в алгебраическое замыкание поля A, так что $\chi w = u$. Если $\chi = \varphi\psi = \varphi\psi'$, то $u = \varphi\psi w = \varphi\psi' w$ и согласно первому утверждению следствия $\psi' w = \psi w\omega$ при подходящем автоморфизме ω. Поскольку χ - нормальное расширение, найдется автоморфизм γ такой, что $w\omega = \gamma w$. Применив это равенство к предыдущему и сократив на мономорфизм w, получим $\psi' = \psi\gamma$. Покажем, что при чисто трансцендентных расширениях $A\varphi B$ и BvW морфизм φ не регулярен относительно v. Зафиксируем базисы трансцендентности $(t_i, i \in I)$ для φ и $(t_j, j \in J)$ для v. Рассмотрим морфизм $Bv'W$, определяемый условиями

$$\varphi v' = \varphi v, \quad v'(t_i) = t_i \ (i \in I \setminus \nu), \quad v'(t_\nu) = t_\nu^2.$$

Существуют эндоморфизмы $W\omega W$ такие, что $v' = v\omega$. Например, эндоморфизм, однозначно определяемый условиями

$$u\omega = u, \quad \omega(t_k) = t_k \ (k \in I \cup J \setminus \nu), \quad \omega(t_\nu) = t_\nu^2.$$

Ясно, что последнее равенство должно выполняться для всех эндоморфизмов ω, подчиняющихся соотношению $v' = v\omega$. Поэтому все они не сюръективны. Действительно, если бы $\omega(c) = t_\nu$, при некотором $c \in W$, то поскольку t_ν является корнем многочлена $X^2 - t_\nu^2 = X^2 - \omega(t_\nu)$, c должно быть корнем многочлена $X^2 - t_\nu$, в противоречии с тем, что $(t_i, i \in I \cup J)$ базис трансцендентности расширения u.

2.3. Пусть морфизм $A\varphi B$ регулярен в морфизме $A\chi C$, а ψ - произвольный элемент множества $\varphi\backslash\chi$. Тогда для любого автоморфизма $\beta \in \mathrm{Aut}B$, подчиняющегося равенствам $\chi = \varphi\psi = \varphi\beta\psi$ существует автоморфизм $\gamma \in \mathrm{Aut}C$ такой, что $\beta\psi = \psi\gamma$. Иначе говоря, подмножество обратимых элементов $(\varphi\backslash\chi/\psi)^*$ соответствующего биизотропного множества перестановочно с ψ, т.е. лежит в коаллотропной группе $G_{(\psi)}$ (см. [1], §1). Так как $(\varphi\backslash\chi/\psi)^*$ содержит изотропную группу G^φ и даже совпадает с ней при мономорфном ψ, получаем

Предложение. *Если φ регулярно в χ, то $G^\varphi \subset G_{(\psi)}$ при любом $\psi \in \varphi\backslash\chi$.*

2.4. Предложение. *Если морфизм $A\varphi B$ регулярен в морфизме AuW, а морфизм $B\psi C$ - в некотором морфизме $v \in \varphi\backslash u$, то ψ регулярен в любом частном $v' \in \varphi\backslash u$.*

Доказательство. Ввиду регулярности φ в u для любых $v, v' \in \varphi\backslash u$ существует автоморфизм $\omega \in G^u$ такой, что $v' = v\omega$. Равенства $v' = \psi w = \psi w'$

влекут равенства $v = \psi w\omega^{-1} = \psi w'\omega^{-1}$ и $w'\omega^{-1} = w\omega^{-1}\omega'$, $\omega' \in G^v$ в силу регулярности ψ в v. Отсюда $w' = w\omega^{-1}\omega'\omega$, причем $\omega^{-1}\omega'\omega \in G^v$.

На основании доказанного предложения можно корректно определить регулярность морфизма ψ в множестве частных $\varphi\backslash u$, при условии регулярности φ в u.

2.5. Предложение. *Пусть композиция $A\chi C$ морфизмов $A\varphi B$ и $B\psi C$ регулярна относительно морфизма CwW (или в $u = \chi w$). Тогда*

(а) морфизм ψ регулярен относительно w (в любом $v \in \varphi\backslash u$);

(б) морфизм φ регулярен относительно композиции $v = \psi w$ (в u) тогда и только тогда, когда выполняется условие (0) п. 1.4.

Доказательство. (а) Если $v = \psi w = \psi w'$, то умножая слева на φ и применяя условие регулярности χ, получаем, что $w' = w\omega$, при некотором автоморфизме ω.

(б) Достаточность. Из равенств $u = \varphi v = \varphi v'$ подстановкой $v = \psi w$, $v' = \psi w'$ в силу регулярности χ в u получаем, что $w' = w\omega$ и, следовательно, $v' = v\omega$ при подходящем $\omega \in AutW$.

Необходимость. Для произвольного $v \in \varphi\backslash u$ из равенств $u = \chi w = \varphi\psi w = \varphi v$ ввиду регулярности φ в u следует, что $v = \psi w\omega$.

Следствие. Если χ регулярно в u и при некотором $\psi \in \varphi\backslash\chi$ все $v \in \varphi\backslash u$ делятся на ψ, то при любом $\psi' \in \varphi\backslash\chi$ все $v \in \varphi\backslash u$ делятся на ψ'.

Достаточно дважды применить пункт (б) доказанного предложения.

2.6. Предложение. *Пусть морфизмы $A\varphi B$, $B\psi C$ и CwW обладают следующими свойствами :*

(i) φ регулярно относительно ψ (следовательно, в $\chi = \varphi\psi$),

(ii) w делит любой морфизм $v' \in \varphi\backslash u$, где $u = \chi w$,

(iii) все автоморфизмы $\gamma \in G^{\chi}$ перестановочны с w (более сильным является требование, чтобы композиция $\chi = \varphi\psi$ была регулярна относительно w, следовательно, в u).

Тогда морфизм φ регулярен относительно $v = \psi w$ (и значит в морфизме u)

Доказательство. Предположим, что $u = \varphi v = \varphi v'$. В силу свойства (ii) $v' = \psi' w$. Подстановкой и сокращением на w получаем $\varphi\psi' = \varphi\psi$. Согласно свойству (i) найдется автоморфизм $\gamma \in G^{\chi}$ такой, что $\psi' = \psi\gamma$. Ввиду свойства (iii) $\gamma w = w\omega$ при подходящем автоморфизме $\omega \in \mathrm{Aut}W$. Следовательно, $v' = \psi' w = \psi\gamma w = \psi w\omega = v\omega$, причем $\omega \in G^{u}$.

2.7. Предложение. *Из регулярности морфизма $A\varphi B$ в AuW и морфизма $B\psi C$ - в некотором частном $v \in \varphi\backslash u$ следует регулярность композиции $\chi = \varphi\psi$ в u.*

Доказательство. Пусть $u = \chi w = \chi w'$. Подставляя $\chi = \varphi\psi$ и используя регулярность φ в u, получаем, что $\psi w' = \psi w\omega' = v'$, где $\omega' \in \mathrm{Aut}W$, а $v' \in \varphi\backslash u$. Согласно Предложению 2.4, ψ регулярно в v', поэтому $w' = w\omega'\omega''$ с $\omega'' \in \mathrm{Aut}W$.

2.8. Предложение. *Пусть морфизм $A\varphi B$ регулярен относительно морфизма BvW, морфизмы $A\bar{\varphi}\bar{B}$ и $\bar{B}\bar{v}W$ в композиции дают морфизм $u = \varphi v$, CwW - композит морфизмов v и $\bar{v}$, а $B\psi C$ и $\bar{B}\bar{\psi}C$ - ассоциированные с композитом морфизмы. Тогда морфизм $\bar{\psi}$ регулярен относительно морфизма w, если*

$$G^{u} = \{\omega'\omega'' | \omega' \in G^{v},\ \omega'' \in G^{\bar{v}}\} = G^{v}G^{\bar{v}}. \qquad (*)$$

Напомним, что композитом морфизмов BvW и $\bar{B}\bar{v}W$ называется мономорфизм CwW, удовлетворяющий следующим условиям :

(i) w делит v и $\bar{v}$: $v = \psi w$, $\bar{v} = \bar{\psi} w$;

(ii) w делится на любой морфизм , делящий v и $\bar{v}$;

(iii) пара морфизмов $(\psi, \bar{\psi})$ плотная (коразделяющая), т.е. равенства $\psi\mu = \psi\nu$, $\bar{\psi}\mu = \bar{\psi}\nu$ выполняются тогда и только тогда, когда $\mu = \nu$.

Доказательство. Прежде всего, подставляя $v = \psi w$ и $\bar{v} = \bar{\psi} w$ в равенство $\varphi v = \bar{\varphi}\bar{v}$ и сокрашая на w, получаем $\varphi\psi = \bar{\varphi}\bar{\psi}$.

Предположим теперь, что $\bar{v} = \bar{\psi} w = \bar{\psi} w'$. Тогда $u = \bar{\varphi}\bar{v} = \bar{\varphi}\bar{\psi} w = \bar{\varphi}\bar{\psi} w'$ и, следовательно, $u = \varphi\psi w = \varphi\psi w'$. Вследствие регулярности φ в u имеем $\psi v' = \psi w\omega$ при некотором $\omega \in G^{u}$. Согласно наложенному условию (*),

$\omega = \omega'\omega''$, где $\omega' \in G^{\psi}$, $\omega'' \in G^{\bar\psi}$. При этом $\psi w' = \psi w\omega'\omega'' = \psi w\omega''$ и $\bar\psi w' = \bar v = \bar\psi w\omega''$. Отсюда по определению композита $w' = w\omega''$.

Следствие. Если в условиях предложения $\bar\varphi$ регулярно в u, то и композиция $\chi = \varphi\psi$ регулярна в u.

§3. НОРМАЛЬНОСТЬ

3.1. Нормальность морфизма $A\varphi B$ относительно морфизма $B\psi C$ определяется условием

$$\chi = \varphi\psi = \varphi\psi' \Longrightarrow \psi' = \beta\psi, \quad \beta \in \mathrm{Aut}B.$$

При этом β принадлежит подмножеству обратимых элементов $(\varphi\backslash\chi/\psi)^*$ соответствующего биизотропного множества, которое совпадает с изотропной группой G^{φ} при мономорфизме ψ. Поэтому нормальность φ относительно ψ эквивалентна сюръективности отображения

$$G^{\varphi}\psi_{*}(\varphi\backslash\chi)| \quad \beta\psi_{*} = \beta\psi.$$

В частности, условия нормальности φ в χ и относительно любого $\psi \in \varphi\backslash\chi$ совпадают. Кроме того, отображение ψ_* инъективно при мономорфном ψ и, следовательно, определяет биекцию между G^{φ} и $\varphi\backslash\chi$.
Если рассмотреть действие изотропной группы G^{φ} на множестве частных $\varphi\backslash\chi$ с помощью левых композиций, то нормальность φ в χ равносильна транзитивности этого действия. Отметим, что из-за мономорфности ψ указанное действие эффективно.

3.2. Предложение. *Если морфизм φ нормален относительно морфизма ψ, то все автоморфизмы γ изотропной группы G^{χ} композиции $\chi = \varphi\psi$ перестановочны с ψ, иначе говоря, G^{χ} содержится в аллотопной группе $G^{(\psi)}$.*
Доказательство следует из определения нормальности.

3.3. При $\chi = \varphi\psi$ с мономорфным ψ определен гомоморфизм групп

$$(G^{\chi} \cap G^{(\psi)})\psi^{a}G^{\varphi}, \quad \gamma\psi^{a} = \beta, \quad \beta\psi = \psi\gamma.$$

Ядро этого гомоморфизма совпадает с изотропной группой G^{ψ}, которая является нормальным делителем в $G^{\chi} \cap G^{(\psi)}$.

(а) Пусть морфизм φ регулярен в морфизме χ. Тогда ψ^{a} - эпиморфизм.

(б) Если φ нормален в χ, то согласно Предложению 3.2 $G^{\chi} = G^{\chi} \cap G^{\psi}$, поэтому G^{ψ} - нормалная подгруппа изотропной группы G^{χ}.

(в) Если φ одновременно регулярно и нормально в χ, то к вышесказанному можно добавить, что изотропная группа G^{φ} изоморфна факторгруппе G^{χ}/G^{ψ}.

(г) Верно такое обращение утверждения п. (б) : Пусть N - нормальная подгруппа изотропной группы G^{χ} морфизма $A\chi C$, а $B\psi C$ - стабилизация по действию группы N. Согласно Предложению 2.6 (д) [1] нормализатор подгруппы N в Aut$C$, очевидно, содержащий изотропную группу N, содержится в аллотропной группе $G^{(\psi)}$. Отсюда $G^{\chi} \subset G^{(\psi)}$. Поэтому канонический морфизм φ, определяемый равенством $\varphi\psi = \chi$, нормален в u, если только он регулярен в χ.

3.4. Предложение. *Если морфизм $A\varphi B$ регулярен в морфизме AuW, а его композиция χ с морфизмом $B\psi C$ нормальна в u, то φ регулярен в χ.*

Доказательство. Пусть $\chi = \varphi\psi = \varphi\psi'$. Взяв композиции с морфизмом $w \in \chi\backslash u$, получим $u = \varphi\psi w = \varphi\psi' w$. По регулярности φ в u существует автоморфизм ω такой, что $\psi' w = \psi w\omega$. После подстановки в предыдущее равенство и использования нормальности χ в u получим, что $\gamma w = w\omega$ при подходящем автоморфизме γ. Сокращая равенство $\psi' w = \psi\gamma w$ на w, получаем, что φ регулярно в χ.

3.5. Предложение. *(а) Морфизм $A\varphi B$, нормальный в морфизме AuW, нормален в любом делителе $A\chi C$ морфизма u, кратном φ.*

(б) Нормальный в χ морфизм φ нормален в $u \doteq \chi w$, если и только если любой морфизм $v \in \varphi\backslash u$ делится на w.

Доказательство. (а). Пусть $\chi = \varphi\psi = \varphi\psi'$. Умножив справа на $w \in \chi\backslash u$ и воспользовавшись нормальностью φ в u, получаем, что $\psi' w = \beta\psi w$ для подходящего автоморфизма β, а после сокращения на w - $\psi' = \beta\psi$.

(б). Достаточность. Пусть $u = \varphi v = \varphi v'$ и $v = \psi w$, $v' = \psi' w$. Тогда $\chi = \varphi\psi = \varphi\psi'$ и в силу нормальности φ в χ $\psi' = \beta\psi$, для некоторого автоморфизма β. Но тогда $v' = \beta v$.

Необходимость. Из нормальности φ в u следует, что для любого $v \in \varphi\backslash u$ существует автоморфизм β такой, что $v = \beta\psi w$, где $\psi \in \varphi\backslash\chi$.

3.6. Предложение. *Расширение полей $A\varphi B$ конечной степени трансцендентности нормально относительно алгебраически замкнутого расширения полей BvW в категорном смысле тогда и только тогда, когда φ — нормальное алгебраическое расширение или v — тривиальное расширение.*

Доказательство. Пусть сначала φ — трансцендентное расширение и $(t_i, i \in I)$ — его конечный базис трансцендентности. Предположим кроме того, что

(*) существует элемент $t \in W$, не принадлежащий $B \equiv v(B)$ и такой, что семейство $(t, t_i, i \in I \setminus \nu)$ алгебраически свободно над A (ν — некоторый элемент из I).

Тогда согласно свойству продолжения изоморфизмов существует морфизм v' удовлетворящий условиям

$$\varphi v' = \varphi v,\ v'(t_i) = v(t_i),\ \text{Если}\ \ i \in I \setminus \nu,\ \text{и}\ v'(t_\nu) = t.$$

Для такого морфизма v' не существует эндоморфизма β подчиняющегося равенству $\beta v = v'$. Это ясно из того, что образ t_ν относительно βv принадлежит B, тогда как $v'(t_\nu) = t \notin B$. Таким образом, при условии (*) φ не нормально относительно v.

Условие (*) выполнено в следующих двух случаях.

1) W трансцендентно над B. Тогда достаточно взять элемент t трансцендентным над B, а в качестве ν — произвольный элемент I.

2) $W \setminus B$ содержит элемент t, алгебраический над B, но не алгебраический над A. В этом случае t будет алгебраичным и над чисто трансцендентным расширением $A(t_i | i \in I)$ поля A, причем его неприводимый многочлен над этим полем будет иметь хотя бы один коэффициент, зависящий от некоторого t_ν, $\nu \in I$. При этом семейство $(t, t_i | i \in I \setminus \nu)$ будет алгебраически свободным над A, потому что в противном случае существовал

бы многочлен с коэффициентами из поля $A(t_i | i \in I \setminus \nu)$, обнуливающийся в t, что противоречит выбору ν.

Итак, если нормальное относительно алгебраически замкнутого расширения полей v расширение φ трансцендентно, то v — алгебраическое расширение и все элементы $W \setminus B$ алгебраичны над A.

Если $c \in W \setminus B$ — алгебраический над A элемент, а $t \in B$— произвольный трансцендентный над A элемент, то элемент $ct \in W \setminus B$ также должен быть алгебраичным над A, что противоречит трансцендентности t над A. Значит $B = W$, т.е. расширение BvW тривиально, и, следовательно, $A\varphi B$ — алгебраически замкнутое расширение. Тогда $A\varphi B$ нормально относительно тождественного морфизма 1_B.

Действительно, если $\varphi v = \varphi$, то используя конечность степени трансцендентности расширения φ, получим, что B и $v(B) \subset B$ являются алгебраическими замыканиями чисто трансцендентного расширения $A(v(t_i) | i \in I)$, поэтому совпадают. Следовательно v — автоморфизм.

Осталось исследовать случай алгебраического расширения $A\varphi B$. В силу алгебраической замкнутости расширения BvW множество C всех элементов W, алгебраических над A, будет алгебраическим замыканием поля A. Пусть $A\chi C$ и CwW — естественные вложения, так что $\chi w = \varphi v = u$. Ввиду алгебраичности расширения $A\varphi B$ существует (неканоническое) вложение $B\psi C$ и $\chi = \varphi\psi$.

Для любого $v' \in \varphi\backslash u$ образ $v'(B)$ лежит в C, ибо состоит из алгебраических над A элементов, следовательно, v' делится на w. Поэтому согласно предложению 3.5 φ нормально относительно v тогда и только тогда, когда φ нормально в χ. Последнее в свою очередь означает, что $A\varphi B$ — нормальное алгебраическое расширение (Теорема 4, §3, гл. 7, [3]).

3.7. Предложение. *Пусть композиция $A\chi C$ морфизмов $A\varphi B$ и $B\psi C$ нормальна в морфизме AuW. Тогда для нормальности ψ в $v \in \varphi\backslash u$ необходимо и достаточно, чтобы v делилось на ψ. Последнее условие выполняется, если φ регулярно в u.*

Доказательство. Необходимость очевидна. В обратную сторону надо только проверить, что для любых $w, w' \in \psi\backslash v$ найдется автоморфизм γ, подчиняющийся равенству $w' = \gamma w$. А это немедленно следует из нормальности χ в u, потому, что $w, w' \in \chi\backslash u$. Если φ регулярно в u, то из равенств $\varphi v = \varphi\psi w = u$ вытекает, что $v = \psi w\omega$ при подходящем автоморфизме ω.

Заметим, что в отличие от соответствующих свойств регулярности нормальность φ в u из нормальности χ в u, а также нормальность композиции $\chi = \varphi\psi$ в u при условии нормальности φ в u и ψ в некотором $v \in \varphi\backslash u$ не следуют даже в категории полей (см. [3], гл. 7,§3).

3.8. Предложение. *Пусть композиция $A\chi C$ морфизмов $A\varphi B$ и $B\psi C$ нормальна в морфизме AuW и каждый морфизм из $\varphi\backslash u$ делится на ψ. Тогда следующие условия эквивалентны :*

(i) морфизм φ нормален в u.

(ii) морфизм φ нормален в χ.

(iii) морфизм ψ перестановочен со всеми автоморфизмами $\gamma \in G^{\chi}$.

Доказательство. Импликация (i) $\Longrightarrow$ (ii) верна без всяких дополнительных условий лишь бы u делилось на χ (Предложение. 3.5 (a)). Импликация (ii) $\Longrightarrow$ (iii) суть Предложение 3.2. Проверим импликацию (iii) $\Longrightarrow$ (i).

Пусть $w \in \chi\backslash u$ и $v' \in \varphi\backslash u$. Тогда согласно предпосылкам $v' = \psi w'$ с $w' \in \chi\backslash u$ и $w' = \gamma w$, при подходящем автоморфизме γ. Отсюда $u = \chi w = \chi\gamma w$ и, следовательно, $\chi = \varphi\psi = \varphi\psi\gamma$. Согласно (iii) существует автоморфизм β такой, что $\psi\gamma = \beta\psi$. Поэтому, $v' = \psi\gamma w = \beta v$, $v = \psi w$.

3.9. Предложение. *Пусть композиции морфизмов $A\varphi_i B_i$ и $B_i v_i W$ $(i = 1,2)$ равны u. Пусть CwW — их композит, $B_i\psi_i C$ — ассоциированные с композитом морфизмы, а пара морфизмов $(B\eta_1 B_1, B\eta_2 B_2)$ представляет коамальгаму пары (v_1, v_2), т.е. сквозной морфизм $v = \eta_1 v_1 = \eta_2 v_2$ представляет пересечение подобъектов v_1 и v_2. Пусть $A\varphi B$ — морфизм , однозначно определяемый равенствами $\varphi\eta_i = \varphi_i$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) Из нормальности φ_1 в u следует нормальность ψ_2 в v_2, если и только если для любого $\beta \in G^{\varphi_1}$ такого, что $\beta\psi_1 w = \psi_1 w'$ при некотором w'.

удовлетворяющем равенству $\psi_2 w = \psi_2 w'$, существует автоморфизм $\gamma \in G^{\psi_2}$ такой, что $\beta\psi_1 = \psi_1\gamma$.

(б) Из нормальности φ_i в u $(i = 1, 2)$ следует нормальность $\chi = \varphi_1\psi_1 = \varphi_2\psi_2$ в u тогда и только тогда, когда для любых автоморфизмов $\beta_i \in G^{\varphi_i}$ таких, что $\beta_i\psi_i w = \psi_i w'$ $(i = 1, 2)$, при некотором w', удовлетворяющем равенству $\chi w = \chi w'$, существует автоморфизм $\gamma \in G^{\chi}$ такой, что $\beta_i\psi_i = \psi_i\gamma$.

(в) Из нормальности φ_i в u $(i = 1, 2)$ следует нормальность φ в u, если морфизм φ регулярен в морфизме u.

Доказательство. (а) Пусть $v_2 = \psi_2 w = \psi_2 w'$. Тогда $\varphi_2 v_2 = \varphi_2\psi_2 w = \varphi_2\psi_2 w'$ и, следовательно, $u = \varphi_1\psi_1 w = \varphi_1\psi_1 w'$. Из-за нормальности φ_1 в u существует автоморфизм $\beta \in G^{\varphi_1}$ такой, что $\psi_1 w' = \beta\psi_1 w$. Согласно наложенному условию $\beta\psi_1 = \psi_1\gamma$ при некотором $\gamma \in G^{\psi_2}$. Поэтому $\psi_1 w' = \psi_1\gamma w$ и $\psi_2 w' = \psi_2\gamma w$. Так как пара морфизмов (ψ_1, ψ_2) — плотная, по определению композита, получаем $w' = \gamma w$.

Обратно, предположим, что φ_1 нормально в u, ψ_2 нормально в v_2. Тогда если w' удовлетворяет равенству $\psi_2 w = \psi_2 w'$, то $w' = \gamma w$, при некотором $\gamma \in G^{\psi_2}$ и условие $\beta\psi_1 w = \psi_1 w'$ влечет равенство $\beta\psi_1 = \psi_1\gamma$.

(б) Прежде всего, равенство $\chi = \varphi_1\psi_1 = \varphi_2\psi_2$ получается из равенства $u = \varphi_1 v_1 = \varphi_2 v_2$ после подстановки $v_i = \psi_i w$ и сокращения на w. В остальном доказательство проводится аналогично предыдущему.

(в) Пусть $u = \varphi v = \varphi v'$. Согласно наложенному условию $v' = v\omega$, $\omega \in G^u$, и вследствие нормальности φ_i в u найдется автоморфизм $\beta_i \in G^{\varphi_i}$ такой, что $\beta_i v_i = v_i\omega$ $(i = 1$ и $2)$. При этом $(\eta_i\beta_i)v_i = v'$ и по определению коамальгамы существует морфизм $B\beta B$ такой, что $\beta\eta_i = \eta_i\beta_i$. Тогда $v' = \beta v$.

Проверим, что β — изоморфизм. Поскольку $(\eta_i\beta_i^{-1})v_i = \eta_i v_i\omega^{-1} = v\omega^{-1}$ совпадают при $i = 1, 2$, существует морфизм $B\beta' B$ такой, что $\beta'\eta_i = \eta_i\beta_i^{-1}$. Тогда $\beta'\beta\eta_i = \eta_i$ при $i = 1, 2$. Поскольку коамальгама (η_1, η_2) — разделяющая пара морфизмов, $\beta'\beta = 1$ и аналогично $\beta\beta' = 1$.

Замечание. Громоздкие необходимые и достаточные условия пп. (а) и (б) можно заменить простыми и "естественными", но лишь достаточными условиями : пара морфизмов (ψ_1, ψ_2) является амальгамой пары (φ_1, φ_2) и сквозной морфизм $\chi = \varphi_i\psi_i$ (а при (а) — ψ_2) регулярен относительно морфизма w.

Действительно, например, в случае (а) $\varphi_1\beta\psi_1 w = \varphi_1\psi_1 w' = \varphi_2\psi_2 w' = \varphi_2\psi_2 w$, поэтому $\varphi_1(\beta\psi_1) = \varphi_2\psi_2$. По определению амальгамы существует морфизм $C\gamma C$ такой, что $\beta\psi_1 = \psi_1\gamma$, $\psi_2 = \psi_2\gamma$. Из-за регулярности ψ_2 относительно w имеем $w' = w\omega$, $\omega \in G^u$, следовательно, $\beta^{-1}\psi_1 u = \psi_1 w\omega^{-1}$. Как и выше проверяется , что $\varphi_1(\beta^{-1}\psi_1) = \varphi_2\psi_2$, поэтому $\psi_1\gamma' = \beta^{-1}\psi_2$ и $\psi_2\gamma' = \psi_2$ для некоторого $C\gamma' C$. Тогда $\gamma\gamma'$ и $\gamma'\gamma$ принадлежат изотропным группам G^{ψ_1} и G^{ψ_2} и в силу плотности амальгамы (ψ_1, ψ_2) $\gamma\gamma' = \gamma'\gamma = 1$, т.е. γ — автоморфизм .

§4. СТЕПЕНЬ СЕПАРАБЕЛЬНОСТИ

4.1. Степенью сепарабельности морфизма $A\varphi B$ в морфизме $A\chi C$ называется мощность $|\varphi\backslash\chi|$ множества левых частных $\varphi\backslash\chi$. Обозначение — $\mathrm{sep}_\chi\varphi$.

Если морфизм φ регулярен в морфизме χ, то множество левых частных $\varphi\backslash\chi$ биективно множеству левых смежных классов $G^\psi\backslash G^\chi$ при любом $\psi \in \varphi\backslash\chi$ (п. 2.1). Поэтому $\mathrm{sep}_\chi\varphi$ равна индексу подгруппы G^ψ изотропной группы G^χ.

Если морфизм φ нормален в морфизме χ, то $\varphi\backslash\chi$ биективно изотропной группе G^φ (п. 3.1), следовательно, $\mathrm{sep}_\chi\varphi = |G^\varphi|$.

4.2. Пусть морфизм $A\chi C$ есть композиция морфизмов $A\varphi B$ и $B\psi C$. Тогда определено стандартное отображение для AuW :

$$(\chi\backslash u)\psi^*(\varphi\backslash u), \quad w\psi^* = \psi w.$$

Слоем точки $v \in \varphi\backslash u$ этого отображения служит множество частных $\psi\backslash v$. Поэтому

(а) $\chi\backslash u = \bigcup_{v\in\varphi\backslash u} \psi\backslash v$;

(б) отображение ψ^* сюръективно, если и только если $\psi\backslash v \neq \emptyset$ при любом $v \in \varphi\backslash u$, т.е. выполняется условие (0) п. 1.4.

В качестве следствия (а) получаем соотношение .

$$\mathrm{sep}_u\chi = \sum_{v\in\varphi\backslash u} \mathrm{sep}_v\psi.$$

Если слои $\psi\backslash v$ всех точек $v \in \varphi\backslash u$ равномощны (в частности, выполняется свойство (б)), то

$$\mathrm{sep}_u\chi = \mathrm{sep}_u\varphi \cdot \mathrm{sep}_v\psi.$$

Это равенство известно под названием свойство мультипликативности степени сепарабельности. Здесь предполагается конечность степеней сепарабельности.

4.3. **Предложение**. *Если морфизм φ и композиция $\chi = \varphi\psi$ регулярны в u, то степень сепарабельности $\mathrm{sep}_u\chi$ мультипликативна относительно разложения $\chi = \varphi\psi$.*

Достаточно заметить, что для любых двух точек $v, v' \in \varphi\backslash u$ существует автоморфизм ω такой, что $v' = v\omega$ и отображение

$$(\psi\backslash v)\omega_*(\psi\backslash v'), \quad w\omega_* = w\omega$$

биективно.

§5. ЧИСТАЯ НЕСЕПАРАБЕЛЬНОСТЬ

5.1. Морфизм $A\varphi B$ называется *чисто несепарабельным* относительно морфизма BvW (в морфизме $u = \varphi v$), если v — единственный морфизм, подчиняющийся равенству $u = \varphi v$. Последнее условие означает, что

$$|\varphi\backslash u| = \mathrm{sep}_u\varphi = 1.$$

Всякий эпиморфизм чисто несепарабелен в любом делящемся на него слева морфизме. В частности, произвольный изоморфизм $A\varphi B$ чисто несепарабелен в любом морфизме $A\chi C$ потому, что $\varphi\backslash\chi = \{\varphi^{-1}\chi\}$.

Из определения сразу следует, что, если мономорфизм φ чисто несепарабелен относительно v (в $u = \varphi v$), то он регулярен и нормален относительно v (в u).

Если морфизм φ чисто несепарабелен относительно v (в u), то совпадают изотропные полугруппы S^v, S^u и группы G^v, G^u а множество биизотропных элементов $\varphi\backslash u/v$, изотропные полугруппа S^φ и группа G^φ тривиальны.

5.2. Предложение. *(а) Если морфизм φ чисто несепарабелен относительно морфизма v, то он чисто несепарабелен и относительно любого его левого делителя ψ.*

(б) Пусть морфизм φ чисто несепарабелен относительно морфизма ψ, а композиция $\chi = \varphi\psi$ нормальна относительно морфизма w. Тогда для чистой несепарабельности φ относительно $v = \psi w$ необходимо и достаточно, чтобы φ было регулярным относительно v.

Доказательство. (а) Пусть $v = \psi w$. Если $\varphi\psi = \varphi\psi'$, то $\varphi v = \varphi\psi w = \varphi\psi' w$, следовательно, $v = \psi w = \psi' w$. Сокращая на w, получаем $\psi = \psi'$.

(б) Необходимость очевидна. Проверим достаточность. В силу регулярности φ относительно v, для любого $v' \in \varphi\backslash u$ существует $\omega \in G^u$ такой, что $v' = \psi w\omega$. Ввиду нормальности χ относительно w, имеем $w\omega = \gamma w$ для некоторого автоморфизма γ. Тогда $\varphi\psi w = \varphi\psi w\omega = \varphi\psi\gamma w$ и после сокращения на w, получаем $\varphi\psi = \varphi\psi\gamma = \chi$. Из чистой несепарабельности φ в χ имеем $\gamma \in G^\psi$ и $v' = v$.

5.3. Предложение. *(а) Пусть композиция $A\chi C$ морфизмов $A\varphi B$ и $B\psi C$ чисто несепарабельна относительно морфизма CwW. Тогда*

(i) ψ чисто несепарабелен относительно w;

(ii) φ чисто несепарабелен относительно $v = \psi w$ (или в $u = \varphi v$), если и только если все $v' \in \varphi\backslash u$ делятся на ψ, эквивалентно, φ регулярно в u;

(б) Обратно, если ψ чисто несепарабельно относительно w, а φ — относительно композиции $v = \psi w$, то $\chi = \varphi\psi$ чисто несепарабельно относительно w

Доказательство. (а) Из равенства $\psi w = \psi w'$ следует равенство $\chi w = \chi w'$, откуда в силу чистой несепарабельности χ относительно w, имеем $w = w'$, что доказывает (i).

Если φ чисто несепарабельно относительно w то, как мы уже знаем, φ регулярно относительно w, а при этом выполняется условие (0) п. 1.4. Если же все элементы множества частных $\varphi\backslash u$ делятся на ψ, то из равенства $\varphi v = \varphi v' = u$ следует равенство $\chi w = \chi w'$, где $v' = \psi w'$. Так как χ чисто несепарабельно относительно w, имеем $w = w'$ и, следовательно, $v = v'$.

(б) Пусть $\chi w = \chi w' = u$. Тогда $\varphi(\psi w) = \varphi(\psi w') = u$ и ввиду чистой несепарабельности φ в u, имеем $\psi w = \psi w'$, а из чистой несепарабельности ψ относительно w получаем $w = w'$.

Заметим, что если потребовать регулярность φ в u, то все результаты доказанного предложения следуют из свойства мультипликативности степени сепарабельности.

5.4. **Предложение.** *Пусть композиции морфизмов $A\varphi B$ и BvW, $A\bar{\varphi}\bar{B}$ и $\bar{B}\bar{v}W$ равны AuW. Пусть CwW — композит морфизмов v и $\bar{v}$, а $B\psi C$ и $\bar{B}\bar{\psi}C$ — ассоциированные с композитом морфизмы. Тогда*

(а) Если φ чисто несепарабелен в u, то $\bar{\psi}$ чисто несепарабелен относительно w.

(б) Если φ и $\bar{\varphi}$ чисто несепарабельны в u, то $\chi = \varphi\psi = \bar{\varphi}\bar{\psi}$ чисто несепарабелен в u.

Доказательство. Из равенства $\bar{\psi}w = \bar{\psi}w'$ следует, что $\bar{\varphi}\bar{\psi}w = \bar{\varphi}\bar{\psi}w' = u$, а значит и $\varphi\psi w = \varphi\psi w' = u$. Согласно свойству чистой несепарабельности φ в u имеем $\psi w = \psi w'$. Пара морфизмов $(\psi, \bar{\psi})$ ассоциированная с композитом, является плотной, поэтому $w = w'$. Утверждение (б) сразу следует из утверждения (а) и Предложения 5.3 (б).

§6. СЕПАРАБЕЛЬНОСТЬ

6.1. Мономорфизм $A\varphi B$ называется *сепарабельным* относительно мономорфизма BvW, если из равенства множеств частных $\eta\backslash\eta v = \eta'\backslash\eta' v$ для правых мономорфных делителей $X\eta B$ и $X'\eta' B$ морфизма φ следует существование изоморфизма $X\sigma X'$ такого, что $\eta' = \sigma\eta$. В дальнейшем предполагаем, что в рассматриваемой категории все морфизмы являются мономорфизмами.

При любом $X\eta B$, делящем $A\varphi B$, множество частных $\eta\backslash\eta v$ лежит в множестве частных $\varphi\backslash u$, где $u = \varphi v$. Поэтому имеем отображение

$$\mathcal{P}_\varphi(B) b_v B(\varphi\backslash u), \quad \eta \longmapsto \eta b_v = \eta\backslash\eta v,$$

где $\mathcal{P}_\varphi(B)$ — множество подобъектов объекта B, содержащих подобъект φ, а $B(\varphi\backslash u)$ — булиан множества частных $\varphi\backslash u$. Сепарабельность морфизма φ относительно морфизма v эквивалентна условию инъективности отображения b_v.

Морфизм $A\varphi B$ называется *сепарабельным* в морфизме AuW, если φ сепарабельно относительно любого $v \in \varphi\backslash u$.

6.2. Если морфизм $A\varphi B$ регулярен в морфизме AuW, то из сепарабельности φ относительно некоторого морфизма $v \in \varphi\backslash u$, следует его сепарабельность относительно любого $v' \in \varphi\backslash u$.

Действительно, по определению регулярности имеем $v' = v\omega$ при подходящем автоморфизме ω. Поэтому для любых правых делителей $X\eta B$ и $X'\eta' B$ морфизма φ имеем

$$\eta\backslash\eta v \cdot \omega = \eta\backslash\eta v', \quad \eta'\backslash\eta' v \cdot \omega = \eta'\backslash\eta' v'.$$

Следовательно, равенство $\eta\backslash\eta v' = \eta'\backslash\eta' v'$ влечет равенство $\eta\backslash\eta v = \eta'\backslash\eta' v$, и значит существование изоморфизма σ такого, что $\eta' = \sigma\eta$.

Таким образом, в случае регулярности морфизма φ в u сепарабельность φ в u сводится к сепарабельности φ относительно некоторого $v \in \varphi\backslash u$.

Кроме того, если φ регулярен относительно v, то и любой его правый делитель η регулярен относительно v, т.е. $\eta\backslash\eta v = vG^{\eta v}$. Поэтому равенство $\eta\backslash\eta v = \eta'\backslash\eta' v$ влечет равенства $vG^{\eta v} = vG^{\eta' v}$ и, следовательно, $G^{\eta v} = G^{\eta' v}$. Действительно, для всякого $\omega' \in G^{\eta' v}$ найдется $\omega \in G^{\eta v}$ такой, что $v\omega = v\omega'$. Отсюда $v = v\omega'\omega^{-1}$ и, следовательно, $\omega' \in G^v\omega$. Поскольку $G^v\omega \subset G^{\eta v}$, из сказанного следует, что $G^{\eta' v} \subset G^{\eta v}$ и аналогично $G^{\eta v} \subset G^{\eta' v}$.

Предложение. *Если морфизм $A\varphi B$ регулярен относительно морфизма BvW, то для сепарабельности φ относительно v необходимо и достаточно, чтобы* *в случае равенства изотропных групп $G^{\eta v} = G^{\eta' v}$ для правых делителей $X\eta B$ и $X'\eta' B$ морфизма φ, выполнялось равенство $\eta' = S^{(\psi)}\eta$ при подходящем изоморфизме $S^{(\psi)}$, т.е. отображение*

$$\mathcal{P}_{\varphi}(B)a_v\mathcal{P}(G^{\varepsilon v}), \quad \eta a_v = G^{\eta v}$$

было инъективным. Регулярный в AuW морфизм $A\varphi B$ сепарабелен в нем, если он сепарабелен относительно некоторого $v \in \varphi\backslash u$.

6.3. В случае, когда для любых морфизмов, делящих морфизм $A\varphi B$, существует композит, условие сепарабельности φ относительно морфизма BvW можно заменить несколько более слабым условием :

для любого разложения морфизма $A\varphi B$ в композицию морфизмов $A\xi X$, $X\eta Y$ и $Y\zeta B$, равенство множеств частных $\eta\zeta\backslash\eta\zeta v = \zeta\backslash\zeta v$ возможно только при изоморфизме η.

Достаточно проверить, что из этого условия следует условие сепарабельности (ибо обратное очевидно).

Лемма. *Пусть η'_1 и η'_2 — правые делители морфизма φ, а ζ — их композит Тогда*

$$\eta'_1\backslash\eta'_1 v \cap \eta'_2\backslash\eta'_2 v = \zeta\backslash\zeta v.$$

Доказательство. Пусть $\eta'_i = \eta_i\zeta$, $i = 1,2$. Согласно Предложению 1.2

$$\zeta\backslash\zeta v \subset \eta'_1\backslash\eta'_1 v \cap \eta'_2\backslash\eta'_2 v.$$

Обратное включение следует из того, что равенство $\eta'_i v = \eta'_i v'$ можно переписать в виде $\eta_i\zeta v = \eta_i\zeta v'$, $i = 1,2$ и на основании плотности пары морфизмов (η_1, η_2), ассоциированной с композитом ζ, вывести, что $\zeta v = \zeta v'$.

Теперь, если η'_1 и η'_2 правые делители морфизма φ со свойством $\eta'_1\backslash\eta'_1 v = \eta'_2\backslash\eta'_2 v$ и ζ — их композит, то, как следует из леммы, $\zeta\backslash\zeta v$ совпадает с предыдущими множествами частных. Поскольку при этом η'_1 и η'_2 делятся на ζ, согласно новому условию, $\eta'_i = \eta_i\zeta$, $i = 1,2$ при подходящих изоморфизмах η_i. Отсюда $\eta'_2 = \eta_2\eta_1^{-1}\eta'_1$.

6.4. Условие $\eta\zeta\backslash\eta\zeta v = \zeta\backslash\zeta v$ означает чистую несепарабельность η относительно ζv, если только любой морфизм множества частных $\eta\backslash\eta\zeta v$ делится на ζ. Действительно, в этом случае всякий морфизм из $\eta\backslash\eta\zeta v$ имеет вид $\zeta v'$, где v' принадлежит множествам частных $\eta\zeta\backslash\eta\zeta v = \zeta\backslash\zeta v$. Поэтому $\zeta v' = \zeta v$ и, следовательно, $|\eta\backslash\eta\zeta v| = 1$.

В другую сторону, предположим, что $\eta\backslash\eta\zeta v$ состоит из единственного морфизма, к тому же делящегося на ζ. Тогда этим морфизмом должна быть композиция ζv. Поэтому если $v' \in \eta\zeta\backslash\eta\zeta v$, то $\zeta v' \in \eta\backslash\eta\zeta v$ и $\zeta v' = \zeta v$, т.е. $v' \in \zeta\backslash\zeta v$. Тем самым справедливо включение $\eta\zeta\backslash\eta\zeta v \subset \zeta\backslash\zeta v$. Обратное включение верно в силу Предложения 1.2.

Отметим, что каждый морфизм из $\eta\backslash\eta\zeta v$ делится на ζ, если η регулярно относительно ζv. Обратное утверждение верно, если φ регулярно относительно v (Предложение 2.5).

6.5. Рассмотрим случай, когда морфизм $A\varphi B$ нормален относительно морфизма BvW (или в композиции $u = \varphi v$).

Предложение. *Если морфизм φ сепарабелен относительно некоторого морфизма $v \in \varphi\backslash u$, то он сепарабелен относительно любого морфизма $v' \in \varphi\backslash u$ и, следовательно, сепарабелен в u. Для сепарабельности φ относительно v необходимо и достаточно, чтобы равенство групп изотропии $G^\eta = G^{\eta'}$ влекло равенство $\eta' = \sigma\eta$ при подходящем изоморфизме σ, где η и η' правые делители морфизма φ.*

Доказательство. Поскольку любой правый делитель η морфизма φ, нормального относительно v, нормален относительно произвольного $v' \in \varphi\backslash\varphi v$ (т.е. $\eta\backslash\eta v' = G^\eta v'$), то равенство множеств частных $\eta\backslash\eta v = \eta'\backslash\eta' v$ эквивалентно равенству групп изотропии $G^\eta = G^{\eta'}$.

6.6. **Предложение**. *Пусть $v = \psi w$, $\chi = \varphi\psi$ и $u = \varphi v = \chi w$, где $A\varphi B$, $B\psi C$ и CwW морфизмы.*

(а) Если морфизм φ сепарабелен относительно ψ (в χ), то он сепарабелен и относительно v (в u).

(б) Обратно, если морфизм φ сепарабелен относительно v (в морфизме

и), то он сепарабелен и относительно ψ (в χ) при условии (1) п. 1.4.

Доказательство следует из Предложений 1.5 и 1.2.

6.7. Предложение. *Если композиция χ морфизмов $A\varphi B$ и $B\psi C$ сепарабельна относительно морфизма CwW, то морфизм ψ сепарабелен относительно w, а φ сепарабелен относительно $v = \psi w$.*

Доказательство. Пусть $\psi = \xi_1\eta_1 = \xi_2\eta_2$ и $\eta_1\backslash\eta_1 w = \eta_2\backslash\eta_2 w$. Тогда $\chi = (\varphi\xi_1)\eta_1 = (\varphi\xi_2)\eta_2$ и в силу сепарабельности χ относительно w имеем $\eta_2 = \sigma\eta_1$ для подходящего изоморфизма σ. Если же $\varphi = \xi_1\eta_1 = \xi_2\eta_2$ и $\eta_1\backslash\eta_1 v = \eta_2\backslash\eta_2 v$, то $\eta_1\psi\backslash\eta_1\psi w = \eta_2\psi\backslash\eta_2\psi w$ и опять ввиду сепарабельности χ относительно w имеем $\eta_2\psi = \sigma\eta_1\psi$, для некоторого изоморфизма σ. Сокращая на ψ, получаем $\eta_2 = \sigma\eta_1$.

6.8. Предложение. *Пусть морфизм $B\psi C$ сепарабелен относительно морфизма CwW, а морфизм $A\varphi B$ регулярен и сепарабелен относительно композиции $v = \psi w$. Тогда морфизм $\chi = \varphi\psi$ сепарабелен относительно морфизма w, если выполняются следующие условия :*

(i) для любого правого делителя $X\eta C$ морфизма χ существуют композит $Y\sigma C$ и пересечение $Z\tau C$ подобъектов η и ψ, причем изотропная группа $G^{\tau w}$ порождается изотропными группами $G^{\eta w}$ и $G^{\psi w}$;

(ii) решётка подобъектов объекта C модулярна.

Доказательство. Пусть $\chi = \xi_1\eta_1 = \xi_2\eta_2$ и $\eta_1\backslash\eta_1 w = \eta_2\backslash\eta_2 w$. Пусть $Y_i\sigma_i C$ — композиты морфизма ψ с η_i $(i = 1, 2)$. Согласно Лемме 6.3

$$\sigma_1\backslash\sigma_1 w = \psi\backslash\psi w \cap \eta_1\backslash\eta_1 w = \psi\backslash\psi w \cap \eta_2\backslash\eta_2 w = \sigma_2\backslash\sigma_2 w.$$

Следовательно, по определению сепарабельности ψ относительно w подобъекты σ_1 и σ_2 равны.

Теперь пусть $Z_i\tau_i C$ — пересечение η_i с ψ $(i = 1, 2)$. Из $\eta_1\backslash\eta_1 w = \eta_2\backslash\eta_2 w$ легко вывести, что $G^{\eta_1 w} = G^{\eta_2 w}$. Но тогда $G^{\tau_1 w} = G^{\tau_2 w}$, поскольку согласно условию (i) они порождаются предыдущими изотропными группами и группой $G^{\psi w}$. В силу сепарабельности φ относительно ψw подобъекты τ_1 и τ_2 совпадают.

Итак, композиты (объединения) и пересечения подобъектов η_1 и η_2 объекта C с подобъектом ψ совпадают. Вследствие модулярности решетки подобъектов объекта C мы имеем равенство $\eta_1 = \eta_2$.

6.9. Предложение. *Пусть композиции морфизмов $A\varphi_i B_i$ и $B_i v_i W$ равны u $(i = 1, 2)$, CwW — композит v_1 и v_2, $B_i\psi_i C$ — ассоциированные с композитом морфизмы. Из сепарабельности морфизма φ_1 относительно морфизма v_1 следует сепарабельность морфизма ψ_2 относительно w, если*

(i) множество $\mathcal{P}_\chi(C)$ подобъектов объекта C, содержащих подобъект $\chi = \varphi_i\psi_i$, является модулярной решеткой с композитами в качестве объединений;

(ii) каждый морфизм $v_1' \in \varphi_1\backslash u$ делится на ψ, причем, существует морфизм $w' \in \psi_1\backslash v_1'$, принадлежащий $\psi_2\backslash v_2$.

Условие (ii) выполняется, если морфизм φ_1 регулярен относительно v_1 и $G^u = G^{v_1}G^{v_2}$.

Доказательство. Пусть $\psi_2 = \tau\zeta = \tau'\zeta'$ и $\zeta\backslash\zeta w = \zeta'\backslash\zeta' w$. Рассмотрим пересечения $\kappa = \eta\zeta = \rho\psi_1$ и $\kappa' = \eta'\zeta' = \rho'\psi_1$ подобъектов ζ и ζ' с ψ_1 и морфизмы ξ и ξ', однозначно определяемые равенствами

$$\xi\rho = \xi'\rho' = \varphi_1, \quad \xi\eta = \varphi_2\tau, \quad \xi'\eta' = \varphi_2\tau'.$$

В силу модулярности решетки $\mathcal{P}_\chi(C)$ имеем

$$\kappa \cup \psi_2 = (\zeta \cap \psi_1) \cup \psi_2 = \zeta \cap (\psi_1 \cup \psi_2) = \zeta \cap 1_C = \zeta,$$

причем согласно (i), ζ является композитом κ и ψ_2. Множества частных $\rho\backslash\rho v_1$ и $\rho'\backslash\rho' v_1$ равны, потому что они соответственно равны совпадающим множествам $\psi_1(\zeta\backslash\zeta w)$ и $\psi_1(\zeta'\backslash\zeta' w)$. Включение $\psi_1(\zeta\backslash\zeta w) \subset \rho\backslash\rho v_1$ очевидно. Обратно, возьмем произвольный $v' \in \rho\backslash\rho v_1$. Согласно (ii) $v_1' = \psi_1 w'$ с $w' \in \psi_2\backslash v_2$. Поэтому

$$\eta(\zeta w') = \rho\psi_1 w' = \rho\psi_1 w = \eta(\zeta w), \quad \tau(\zeta w') = \psi_2 w' = \psi_2 w = \tau(\zeta w).$$

Так как пара морфизмов, ассоциированная с композитом, является плотной, получаем, что $\zeta w' = \zeta w$, т.е. $w' \in \zeta\backslash\zeta w$.

Итак, $\xi(\rho v_1) = \xi'(\rho' v_1)$ и $\rho\backslash\rho v_1 = \rho'\backslash\rho' v_1$. Согласно сепарабельности φ относительно v_1 подобъекты κ и κ' (т.е. пересечения ζ и ζ' с ψ_1) совпадают. Объединения ζ и ζ' с ψ_1 лежат в объединении ψ_2 с ψ_1, поэтому равны тотальному подобъекту 1_C. Вследствие модулярности решетки $\mathcal{P}_\chi(C)$, подобъекты ζ и ζ' равны. Сепарабельность ψ_2 относительно w доказана.

Проверим последнее утверждение предложения. По определению регулярности имеем $v_1' = v_1\omega = \psi_1 w\omega$, где $\omega \in G^u$. Следовательно, $\omega = \omega_1\omega_2$ с компонентами $\omega_i \in G^{v_i}$. Тогда $v_1' = \psi_1(w\omega_2)$ и $\psi_2 v w\omega_2 = v_2\omega_2 = v_2$, т.е. $w' = w\omega_2 \in \psi_2\backslash v_2$.

Следствие. В условиях (i), (ii) Предложения 6.9 и $G^u = G^{v_1}G^{v_2}$, κ сепарабелен относительно w, если φ_2 регулярен и сепарабелен относительно v_2.

Доказательство. Достаточно применить Предложения 6.9 и 6.8.

6.10. В заключение этого параграфа отметим, что введенное общекатегорное понятие сепарабельности морфизма $A\varphi B$ в морфизме AuW в категории полей совпадает с классическим понятием сепарабельности алгебраического расширения полей φ, если в качестве u взять, например, алгебраическое замыкание поля A.

Действительно, сепарабельность конечного расширения полей $A\varphi B$ можно определить условием равенства степени этого расширения и его сепарабельной степени ([3], гл. 7, §4). Ввиду мультипликативности степени и сепарабельной степени расширения получаем, что, если в разложении морфизма $\varphi = \xi\eta\zeta$, расширение η чисто несепарабельно, то η является изоморфизмом.

Обратно, если φ сепарабельно в категорном смысле, то, взяв его разложение в композицию чисто несепарабельного и сепарабельного морфизмов (в классическом смысле), получим, что чисто несепарабельный морфизм является изоморфизмом. Здесь мы пользуемся очевидным фактом, что классическое и категорное понятия чистой несепарабельности полностью адекватны.

§7. МОРФИЗМЫ ГАЛУА

7.1. Морфизм $A\chi C$ называется *морфизмом Галуа* относительно CwW (или в $u = \chi w$), если он регулярен, нормален и сепарабелен относительно w (соотв., в u). Определяемый морфизмом Галуа подобъект объекта C называется *подобъектом Галуа*.

Группа изотропии G^{χ} морфизма (подобъекта) Галуа χ называется *группой Галуа*. Из Предложений 2.5(a), 3.7 и 6.7 следует, что любой морфизм $B\psi C$ делящий χ справа, также будет морфизмом Галуа. Соответствующие им подгруппы группы Галуа называются *подгруппами Галуа*.

7.2. Предложение. *Если $A\chi C$ — морфизм Галуа и композит любой пары морфизмов в C существует, то любой правый делитель $B\psi C$ морфизма χ есть стабилизация по своей группе Галуа G^{ψ}.*

Доказательство. Поскольку каждый морфизм ψ стабилен относительно своей группы изотропии G^{ψ}, надо только проверить, что любой морфизм $X\xi C$, стабильный относительно G^{ψ}, делится на ψ. Пусть $B_{\xi}\psi_{\xi}C$ — композит морфизмов ψ и ξ, $B\psi'_{\xi}B_{\xi}$, $X\xi'B_{\xi}$ ассоциированные с ним морфизмы. Согласно Предложению 1.12 [1] имеем $G^{\psi_{\xi}} = G^{\xi}\cap G^{\psi} = G^{\psi}$. Так как морфизм χ регулярен, нормален и сепарабелен относительно w, в силу п. 3.3 и Предложению 6.2 существует изоморфизм σ такой, что $\psi_{\xi} = \sigma\psi$. Поэтому $\xi = \xi'\psi_{\xi} = \xi'\sigma\psi$.

Следствие. Пусть χ — морфизм Галуа, $\mathcal{P}_{\chi}(C)$ — множество всех подобъектов объекта C, содержащих подобъект χ, $\mathcal{P}_{Gal}(G)$ — множество всех подгрупп Галуа группы Галуа $G = G^{\chi}$. Пара отображений

$$(i)\quad \mathcal{P}_{\chi}(C)g\mathcal{P}_{Gal}(G),\quad \psi g = G^{\psi},$$

$$(ii)\quad \mathcal{P}_{Gal}(G)h\mathcal{P}_{\chi}(C),\quad Hh = \text{стабилизация } C \text{ по } H$$

образует соответствие Галуа, причем $\mathcal{P}_{\chi}(C)$, $\mathcal{P}_{Gal}(G)$ являются множествами замкнутых относительно этого соответствия Галуа элементов. Поэтому $\mathcal{P}_{\chi}(C)$ биективно $\mathcal{P}_{Gal}(G)$.

Доказательство. Прежде всего, стабилизации по подгруппам галуа H группы G существуют согласно доказанному предложению. То, что отображения (i) и (ii) образуют соответствие Галуа, является общим фактом и доказано в [1]. Наконец, $\mathcal{P}_{Gal}(G)$ — множество замкнутых автоморфизмов по определению и свойству квазиобратности соответствий Галуа, а $\mathcal{P}_\chi(C)$ — множество замкнутых морфизмов согласно доказанному предложению.

7.3. Предложение. *Пусть $A\chi C$ — морфизм Галуа относительно CwW (в $u = \chi w$), $A\varphi B$ — его левый делитель и $\psi \in \varphi\backslash\chi$.*

(a) Если φ — морфизм Галуа относительно $v = \psi w$ (в u), то φ — морфизм Галуа и относительно ψ (в χ).

(б) Если φ — морфизм Галуа относительно ψ (в χ), то он является морфизмом Галуа относительно v (в u) тогда и только тогда, когда выполняется условие (1) п. 1.4.

Доказательство. Из нормальности φ относительно ψ следует его нормальность относительно v согласно Предложению 3.5(а). Согласно Предложению 3.5(б), из нормальности φ относительно v следует выполнение условия (1) п. 1.4, поэтому согласно Предложению 6.6(б) морфизм φ сепарабелен относительно ψ, если он сепарабелен относительно v. Регулярность φ относительно ψ устанавливается на основании Предложения 3.4.

Обратно, из сепарабельности φ относительно ψ следует его сепарабельность относительно v согласно Предложению 6.6(а). Поскольку φ регулярен относительно ψ, предполагается выполнение условия (1) п. 1.4 и $\chi = \varphi\psi$ регулярен относительно v, в силу Предложения 2.6 морфизм φ регулярен относительно v. Наконец, на основании Предложения 3.5(б) при нормальности φ относительно ψ, необходимым и достаточным условием нормальности φ относительно v является условие (1) п. 1.4.

7.4. Предложение. *Пусть $A\chi C$ — морфизм Галуа относительно w (в $u = \chi w$) и $\chi = \varphi\psi$.*

(а) Если φ — морфизм Галуа относительно $v = \psi u$ (в u), то группа Галуа G^ψ является нормальным делителем группы Галуа G^χ.

(б) Если G^{ψ} — нормальный делитель группы G^{χ}, то φ — морфизм Галуа относительно v (в u) при условии выполнения свойств (0) и (1) п. 1.4 и существования композитов любых двух морфизмов в объект C.

Доказательство. Согласно Предложению 7.3, если φ — морфизм Галуа относительно v, то φ — морфизм Галуа относительно ψ, а при условии (1) п. 1.4 верна и обратная импликация. Утверждение (а) немедленно следует из п. 3.3(б).

Обратно, на основании п. 3.3(г) и Предложения 7.2 следует совпадение ψ со стабилизацией по своей изотропной группе и из нормальности подгруппы G^{ψ} в G^{χ} вытекает нормальность φ относительно ψ, если только φ регулярно относительно ψ. На основании Предложения 2.5(б) и условия (0) п. 1.4, получаем что морфизм φ регулярен относительно v.

Регулярность и сепарабельность φ относительно ψ следуют соответственно из Предложений 3.4, 6.7 и 6.6(б) ввиду условия (1) п. 1.4.

7.5. Замечание. Если χ нормально относительно w, то условие (0) влечет условие (1) п. 1.4.

Пусть v' произвольный морфизм из $\varphi\backslash u$. Согласно условию (0), существует морфизм w' такой, что $v' = \psi w'$. При этом $\chi w' = \varphi\psi w' = u = \chi w$ и в силу нормальности χ относительно w имеем $w' = \gamma w$, где γ — автоморфизм. Отсюда $v' = \psi\gamma w$.

Отметим, что условие (0) похоже на "свойство продолжения изоморфизмов" классической теории Галуа.

7.6. Теорема. *Пусть $A\chi C$ — морфизм Галуа относительно CwW (в $u = \chi w$) и $\chi = \varphi\psi$ — произвольное разложение. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(а) Морфизм ψ является морфизмом относительно w (в $v = \psi w$);

(б) Если существует композит любых двух морфизмов в объект C, то существуют стабилизации по всем подгруппам Галуа H группы Галуа G^{χ} и пара отображений из Следствия 7.2 составляет соответствие Галуа с множествами замкнутых элементов $\mathcal{P}_{\chi}(C)$ и $\mathcal{F}_{Gal}(G)$, которые a posteriori

биективны.

(в) Если морфизм φ является морфизмом Галуа относительно v (в u), то группа Галуа G^ψ является нормальным делителем группы Галуа G^χ. Обратная импликация выполняется в случае, когда для всяких двух морфизмов в объект C существует композит и каждый морфизм множества частных $\varphi\backslash u$ делится на ψ. При этом группа Галуа G^φ изоморфна факторгруппе $G^\chi\backslash G^\psi$.

§8. РЕГУЛЯРНЫЕ ЗАМЫКАНИЯ

8.1. Всякий изоморфизм — (более обще, любой эпиморфизм, а при наших ограничениях на рассматриваемую категорию — каждый биморфизм) $A\varphi B$ чисто несепарабелен относительно произвольного морфизма $B\psi C$, следовательно, в любом морфизме $\chi = \varphi\psi$.

Объект A называется *регулярно замкнутым*, если из регулярности морфизма $A\varphi B$ относительно некоторого морфизма $B\varphi C$ (или в морфизме $\chi = \varphi\psi$) следует, что φ — изоморфизм.

8.2. Морфизм AuW называется *регулярным замыканием* объекта A, если

(i) объект W регулярно замкнут;

(ii) морфизм $A\varphi B$ регулярен относительно морфизма $B\psi C$ (в $\chi = \varphi\psi$) тогда и только тогда, когда $u = \chi w$ делится на χ.

Отметим, что в силу условия (ii) каждый левый делитель морфизма u регулярен в нем.

В случае существования, регулярное замыкание объекта A определяется однозначно, с точностью до изоморфизма объекта W. Действительно, предположим, что AuW и $Au'W'$ — регулярные замыкания объекта A. Тогда согласно (ii) u' регулярно в себе, следовательно, делит u слева. Аналогично u делит слева u'. Частные $\sigma \in u'\backslash u$ и $\sigma' \in u\backslash u'$ в композиции дают элемент изотропной полугруппы $S^u = u\backslash u$, совпадает с изотропной группой G^u ввиду регулярности u в u. Отсюда нетрудно вывести, что σ и σ' — изоморфизмы. С другой стороны, очевидно, что если AuW — регулярное замыкание объекта A, а $W\sigma W'$ — изоморфизм, то и $u' = u\sigma$ — регулярное замыкание объекта A.

Пример. Рассмотрим категорию, объектами которой служат поля, а морфизмами — алгебраические расширения полей. В этой категории любой объект имеет регулярное замыкание, совпадающее с алгебраическим замыканием поля (точнее, с естественным морфизмом данного поля в его алгебраическое замыкание).

8.3. Предположим, что объект A обладает регулярным замыканием. Тогда всякий морфизм $A\varphi B$, регулярный в каком-нибудь морфизме $A\chi C$, регулярен в алгебраическом замыкании AuW т.е. существует универсальный морфизм, в котором регулярны все регулярные в каком-нибудь морфизме морфизмы из A. Поэтому можно ввести (безотносительное) понятие регулярности морфизма $A\varphi B$, всегда имея в виду его регулярность в регулярном замыкании объекта A.

Отметим, что это определение корректно, потому что не зависит от выбора регулярного замыкания объекта A. Более того, аналогично можно ввести (безотносительные) понятия нормальности и сепарабельности морфизма $A\varphi B$.

8.4. **Предложение.** *Пусть $A:W$ — регулярное замыкание объекта A, $A\chi C$ — произвольный регулярный морфизм, $A\varphi B$ — левый делитель морфизма χ. Тогда*

(а) морфизм φ регулярен относительно любого морфизма $v \in \varphi\backslash u$;

(б) для любого морфизма $\psi \in \varphi\backslash\chi$ выполняется условие (0) п. 1.4, т.е. каждый морфизм $v \in \varphi\backslash u$ делится на ψ;

(в) каждый морфизм $\psi \in \varphi\backslash\chi$ регулярен относительно всякого морфизма $w \in \chi\backslash u$ или в любом морфизме $v \in \varphi\backslash u$.

Доказательство. (а) Морфизм φ делит χ и, следовательно, и слева. Значит он регулярен согласно условию (ii) определения регулярного замыкания.

(б) следует из Предложения 2.5 (б) и п. (а) настоящего предложения.

(в) есть непосредственное следствие Предложения 2.5(а).

8.5. **Предложение.** *Если объект A обладает регулярным замыканием AuW, $A\varphi B$ — регулярный морфизм, то любой морфизм $BvW \in \varphi\backslash u$ будет* *регулярным замыканием объекта B при условии, что B обладает регулярным замыканием.*

Доказательство. Пусть $Bv'W'$ — регулярное замыкание B. Согласно Предложению 8.4(в) морфизм v регулярен в себе. Поэтому согласно (ii) определения регулярного замыкания v делит v'. Аналогично морфизму v частное $\sigma \in v\backslash v'$ регулярно в себе. По определению регулярной замкнутости объекта W это возможно, только если σ — изоморфизм. Поэтому $v = v'\sigma^{-1}$ — регулярное замыкание объекта B.

Замечание. Условие (i) выполняется без предположения существования регулярного замыкания объекта B.

8.6. Теорема 7.6 принимает вполне классический вид, если предположить, что объект A обладает регулярным замыканием, а объект C — композитами подобъектов. Таким образом, в классическом виде Теорема Галуа верна для произвольных категорий с регулярными замыканиями и композитами подобъектов.

ABSTRACT. Connections between semigroups and groups associated with a morphism and its intermediate subobjects are investigated in case of an abstract category. Results similar to the statements of the main theorem of Galois theory are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Далалян,"Основная теорема в категорной теории Галуа", Изв. Акад. Наук Армении. Математика, [Английский перевод : Journal of Contemporary Math. Anal. (Armenian Academy of Sciences)], том 27, № 4, стр. 1 - 36, 1992.
2. Н. Бурбаки, Алгебра. Многочлены и Поля. Упорядоченные Группы. М., Наука, 1965.
3. С. Ленг, Алгебра, М., Мир, 1968.

22 Декабря 1992

Ереванский государственный университет

АСИМПТОТИКИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ГАУССОВСКИХ ПОЛЕЙ

В. Р. Фаталов

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 27, № 6, 1992

Пусть $X(t)$ - гауссовское локально однородное случайное поле с нулевым средним, заданное на компакте $T \subset \mathbb{R}^n$. В работе доказаны теоремы об асимптотике вероятности $\mathrm{P}\{\sup_{t\in T} X(t) > u\}$, $u \to \infty$. Метод исследования – т.н. "Метод двойной суммы".

ВВЕДЕНИЕ

Одной из первых работ, посвященных нахождению точной асимптотики вероятности $\mathrm{P}\{\sup_{t\in T} X(t) > u\}$, $u \to \infty$ была статья [1]. В ней был предложен эффективный метод исследования указанной вероятности для гауссовского стационарного процесса $X(t)$, $t \in [0,1]$ с правильно меняющейся в нуле ковариационной функцией. Развитие данного метода для гауссовских однородных полей было осуществлено в [2], [3]. Затем в [4] была найдена асимптотика вероятности большого выброса для гауссовского локально стационарного [5] процесса, дисперсия которого достигает абсолютного максимума в конечном числе точек. Наконец, в [6], [7] были изложены теоремы об асимптотиках больших уклонений широкого класса гауссовских локально однородных полей, дисперсия которых может достигать своего максимума на произвольном компактном множестве в $\mathbb{R}^n$.

Оказалось, что в этот класс входят широко распространенные в теории и приложениях винеровские и связанные с ними процессы и поля : многопараметрическое броуновское движение (в смысле Н. Н. Ченцова [8]), т.н. винеровский лист, а также гауссовские процессы и поля, являющиеся слабыми пределами соответствующих эмпирических процессов и полей при проверке разнообразных статистических гипотез. Асимптотические распределения супремумов последних играют важную роль, например, в теории статистик Колмогорова–Смирнова. В настоящей работе излагаются результаты [6], [7] с подробными доказательствами, особое внимание уделяется статистическим применениям.

§1. ТОЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМУМА ГАУССОВСКОГО НЕОДНОРОДНОГО ПОЛЯ

Введем необходимые обозначения. Пусть $e_1, e_2 ..., e_k$, $\sum_{i=1}^{k} e_i = n$ – натуральные числа, а $\alpha_1, ..., \alpha_k$ – положительные числа. Для вектора $t = (t_1, ..., t_n)$ определим величину

$$|t|_\alpha = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=E(i-1)+1}^{E(i)} t_j^2 \right)^{\alpha_i/2}, \quad E(i) = \sum_{j=0}^{i} e_j, \quad e_0 = 0. \tag{1.1}$$

Аналогично величину $|t|_\beta$ определяют числа $f_1, ..., f_m$, $\sum_{i=1}^{m} f_i = n$, $\beta_1, ..., \beta_m$, $\beta_i > 0$, $i = 1, ..., m$. Составим векторы

$$\alpha = (\underbrace{\alpha_1, ..., \alpha_1}_{e_1 \text{ раз}}, ..., \underbrace{\alpha_k, ..., \alpha_k}_{e_k \text{ раз}}) \in \mathbb{R}^n, \quad \beta = (\underbrace{\beta_1, ..., \beta_1}_{f_1 \text{ раз}}, ..., \underbrace{\beta_m, ..., \beta_m}_{f_m \text{ раз}}) \in \mathbb{R}^n,$$

которые мы будем записывать также в виде $\alpha = (\alpha_{(1)}, ..., \alpha_{(n)})$, $\beta = (\beta_{(1)}, ..., \beta_{(n)})$.

Для невырожденной матрицы A размера $n \times n$ определим "расстояние" между t и s : $\rho_{A,\beta}(t,s) = |A(t-s)|_\beta$. Для компактного $G \subset \mathbb{R}^n$ положим

$$\rho_{A,\beta}(t,G) = \inf\{\rho_{A,\beta}(t,s) : \; s \in G\}.$$

Если $A = I$ (единичная матрица), то будем писать просто $\rho_\beta(t,s)$.

Пусть $X(t)$ – гауссовское сепарабельное случайное поле, заданное на компактном множестве $T \subset \mathbb{R}^n$, с непрерывными траекториями. Пусть $R(t,s)$, $r(t,s)$ и σ_t^2 обозначают соответственно ковариационную, корреляционную функции и дисперсию поля $X(t)$. Пусть

$$S^\varepsilon = \{t \in T : \; \rho(t,S) \le \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0$$

означает ε-окрестность множества $S \subset T$, а $\rho(t,s) \equiv |t-s|$ - евклидово расстояние между t и s.

В данной работе предполагаем выполненными для поля $X(t)$ следующие четыре условия (I) - (IV) :

(I). 1) Дисперсия σ_t^2 непрерывна на T и имеет место асимптотическое соотношение

$$\sigma_t = \sigma - \rho_{A,\beta}(t,T_o) + o(\rho_{A,\beta}(t,T_o)), \quad \rho_{A,\beta}(t,T_o) \to 0,$$

причем $T_o = \{t \in T : \sigma_t = \sigma\}$, где σ - максимальное значение σ_t на T.

2) Найдется такое $\mu > 0$, что

$$\text{mes}\,\{t \in T : 0 < \sigma - \sigma_t \leq x\} = x^\mu(1 + o(1)), \quad x \downarrow 0$$

где mes - мера Лебега на $\mathbb{R}^n$. Заметим, что это условие заведомо выполняется , если множество T_o имеет гладкую границу.

3) Существует такое открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$, что $T_o \subset \overline{U} \subset T$, где $\overline{U}$ - замыкание U.

4) Условие конуса : для всех $t \in \partial T \cap \partial T_o$

$$t + \Gamma(e(t), H) \subset T,$$

где Γ - прямой круговой конус с вершиной в начале координат, фиксированного раствора ε_1 и высотой $0 < H < \infty$; $e(t)$ - единичный вектор направления оси конуса Γ а ∂T - граница множества T.

(II). Условие локальной однородности : для всех $t, s \in T_o^{\varepsilon_o}$ имеет место

$$r(t,s) = 1 - |D(t,s)(t-s)|_\alpha(1 + o(1)), \quad \rho(t,s) \to 0,$$

где $D(t,s) = (d_{ij}(t,s))_{i,j=\overline{1,n}}$ - матричная функция, заданная на $T \times T$, det $D(t,t) \neq 0$ для $t \in T_o^{\varepsilon_o}$, элементы $d_{ij}(t,s)$ непрерывны на $T_o^{\varepsilon_o} \times T_o^{\varepsilon_o}$ и для всех $t, s \in T_o^{\varepsilon_o}$ либо $d_{ij}(t,s) \equiv 0$ при $|t-s| < \varepsilon'$, $\varepsilon' > 0$, либо $d_{ij}(t,t) \neq 0$.

(III). Существуют $C > 0$, $\gamma > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ такие, что для всех $t, s \in T$, $|t-s| < \varepsilon_2$ выполнено одно из следующих неравенств

$$|1 - r(t,s)| \leq C \sum_{i=1}^{n} |t_i - s_i|^\gamma, \tag{i}$$

$$\mathbf{E}(X(t)-X(s))^2 \le C\sum_{i=1}^{n}|t_i-s_i|^{\gamma}. \qquad \text{(ii)}$$

(IV). Для любого $\tau > 0$

$$\sup\{R(t,s) : t,s \in T_o^{\varepsilon_o}, |t-s| \ge \tau\} < \sigma^2$$

Теорема 1.1. *Пусть гауссовское непрерывное поле $X(t)$ компактно в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условиям (I) – (IV). Пусть далее выполнено одно из следующих двух условий :*

а) $\beta_i > \alpha_j$, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,k$;

б) $\beta_{(i)} > \alpha_{(i)}$, $i = \overline{1,n}$ *и для некоторого* $\varepsilon_3 > 0$ *матрицы* $A, D(t,s)$ *диагональны,* $t,s \in T_o^{\varepsilon_o}$, $|t-s| < \varepsilon_3$.

Тогда для любой функции $\delta(u)$, удовлетворяющей соотношениям

$$\delta(u) \downarrow 0, \quad (\ln u)^{-1}u^2\delta(u) \to \infty, \quad u\delta(u) \to 0, \quad \textit{для } u \to \infty \qquad (1.2)$$

верно асимптотическое равенство

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\} = \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right]\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{-1}\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{2e_i/\alpha_i}(2\pi)^{-1/2}H_\alpha \times$$

$$\times \int_{T_\delta(A)} \exp\left[-\frac{u^2}{\sigma^3}\rho_{A,\beta}(t,T_o)\right]|\det D(t,t)|\,dt\,(1+o(1)), \quad u\to\infty, \qquad (1.3)$$

где

$$T_\delta(A) = \{t \in T : \rho_{A,\beta}(t,T_o) \le \delta(u)\},$$

$$0 < H_\alpha = \lim_{S\to\infty}\frac{H_\alpha(S)}{S^n} < \infty, \qquad (1.4)$$

$$H_\alpha(S) = 1 + \int_0^\infty e^x \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in[0,S]^n}\chi(t) > x\right\}dx,$$

и $\chi(t)$ – гауссовское поле с п.н. непрерывными траекториями,

$$\mathbf{E}\chi(t) = -|t|_\alpha, \quad \mathrm{Cov}\,(\chi(t),\chi(s)) = |t|_\alpha + |s|_\alpha - |t-s|_\alpha.$$

Существование предела (1.4) доказано в [3]. Условия а) и б) являются наиболее распространенными в приложениях и во многих случаях позволяют явно вычислить асимптотику интеграла в (1.3). Остальные возможные случаи зависимости между α и β более сложны. Однако, когда T_o содержит конечное число точек, мы имеем исчерпывающий результат.

Обозначим через $\mathrm{diag}(c_1, ..., c_n)$ диагональную матрицу с c_j на главной диагонали.

Теорема 1.2. *Пусть гауссовское непрерывное поле $X(t)$, $t \in T$ удовлетворяет условиям (I) - (III) и $T_o = \{t_o\}$, t_o - внутренняя точка множества T. Пусть $D = D(t_o, t_o)$ и $\Gamma(\cdot)$ - гамма-функция. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Пусть $A = \mathrm{diag}(a_1, ..., a_n)$, $a_i \neq 0$, $i = \overline{1,n}$ и $D = \mathrm{diag}(d_1, ..., d_n)$, $d_i \neq 0$, $i = \overline{1,n}$ и для некоторого целого p*

$$F(q-1) + 1 \leq p \leq F(q); \quad \alpha_{(i)} < \beta_{(i)}, \quad i = 1, ..., p;$$

$$\alpha_{(i)} > \beta_{(i)}, \quad i = p+1, ..., n; \quad 1 \leq p \leq n,$$

где

$$F(q) = \sum_{i=1}^{q} f_i, \quad F(0) = 0.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\} = \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right] \left(\frac{u}{\sigma}\right)^{-1} \prod_{i=1}^{p} \left(\frac{u}{\sigma}\right)^{2/\alpha_{(i)}} \left(\frac{u^2}{\sigma^3}\right)^{-1/\beta_{(i)}} \frac{|d_i|}{|a_i|} \times$$

$$\times \prod_{i=p+1}^{n} \sigma^{-1/\beta_{(i)}} |a_i| H_{\alpha^{(p)}} 2^{q-1/2} \pi^{(p-1)/2} \prod_{i=1}^{q-1} \Gamma(\frac{f_i}{\beta_i}) \left(\beta_i \Gamma(\frac{f_i}{2})\right)^{-1} \times$$

$$\times \Gamma(\frac{p - F(q-1)}{\beta_q}) \left(\beta_q \Gamma(\frac{p - F(q-1)}{2}\right)^{-1} (1 + o(1)), \quad u \to \infty,$$

где $\alpha^{(p)} = (\alpha_{(1)}, ..., \alpha_{(p)})$.

(ii) *Если $k = m$, $e_i = f_i$, $\alpha_i = \beta_i$, $i = 1, 2, ..., k$, то*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\} = \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right] \left(\frac{u}{\sigma}\right)^{-1} (2\pi)^{-1/2} H_{\frac{\alpha}{2}}^{\mathbf{1}}(DA^{-1})(1 + o(1)), \quad u \to \infty,$$

где $\mathbf{1} = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^k$,

$$0 < H_\alpha^b(C) = \lim_{\lambda\to\infty} H_\alpha^b((-\lambda, \lambda); C) < \infty,$$

величины H_α^b определены ниже в Лемме 2.2.

(iii) *Пусть для некоторого целого p, $0 \leq p \leq n$*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix},$$

где A_1, D_1 – матрицы размера $p\times p$ и A_2, D_2 – матрицы размера $(n-p)\times(n-p)$. Если

$$p = F(q) = E(v), \quad e_{v+1} = f_{q+1}, \dots, e_k = f_m,$$

$$\alpha_{(i)} < \beta_{(j)}, \quad i,j = 1,\dots,p; \qquad \alpha_{(i)} = \beta_{(i)}, \quad i = p+1,\dots,n,$$

то

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\} =$$

$$= \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right]\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{-1}\prod_{i=1}^{v}\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{2e_i/\alpha_i}\prod_{i=1}^{q}\left(\frac{u^2}{\sigma^3}\right)^{-f_i/\beta_i}\Gamma\left(\frac{f_i}{\beta_i}\right)\left(\beta_i\Gamma\left(\frac{f_i}{2}\right)\right)^{-1}\times$$

$$\times|\det D_1|\cdot|\det A_1|^{-1}2^{q-1/2}\pi^{(p-1)/2}H_{\alpha(p)}H^{\frac{1}{\sigma}1}_{\alpha(p,n)}(D_2A_2^{-1})(1+o(1)), \quad u\to\infty,$$

где $\alpha^{(p,n)} = (\alpha_{(p+1)},\dots,\alpha_{(n)})$.

(iv) *Пусть в условиях пункта* (iii) *вместо (1.5) выполнено*

$$e_{v+1} = f_{q+1},\dots,e_k = f_m, \quad \alpha_{(i)} > \beta_{(i)}, \quad i = 1,\dots,p; \quad \alpha_{(i)} = \beta_{(i)}, \quad i = p+1,\dots,n.$$

Тогда (при $u\to\infty$)

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\} = \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right]\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{-1}H^{\frac{1}{\sigma}1}_{\alpha(p,n)}(D_2A_2^{-1})(2\pi)^{-1/2}(1+o(1)).$$

Замечание 1.1. Пусть дисперсия σ_t^2 гауссовского непрерывного поля $X(t)$, определенного на компакте T достигает своего максимума σ^2 в конечном числе внутренних точек $s_1,\dots,s_l\in T$. Пусть для каждой точки s_i, $i = 1,\dots,l$ выполнены условия (I) – (III) с величинами A_i,β^i,D_i,α^i, $i = 1,2,\dots,l$. Пусть V_i – достаточно малые взаимно непересекающиеся компактные окрестности точек s_i, $i = 1,\dots,l$. Обозначим через $L_i(u,A_i,\beta^i,D_i,\alpha^i,\sigma)$ точную асимптотику вероятности

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in V_i} X(t) > u\right\}, \qquad u\to\infty,$$

вычисленную по Теореме 1.2. Тогда

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\} = \sum_{i=1}^{l} L_i(u,A_i,\beta^i,D_i,\alpha^i,\sigma)(1+o(1)), \quad u\to\infty.$$

Некоторые численные значения констант $H_\alpha, H_\alpha^b(C)$ будут даны в следующем параграфе.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В этом параграфе мы изложим основные результаты, на которых базируется наш метод исследования асимптотик.

Теорема 2.1. (Д. Слепян, [10]) *Пусть $X(t), Y(t)$ - гауссовские сепарабельные функции с нулевыми средними, заданные на некотором параметрическом множестве T. Если*

$$\mathbf{E}X^2(t) = \mathbf{E}Y^2(t), \quad \mathbf{E}X(t)X(s) \le \mathbf{E}Y(t)Y(s), \quad t, s \in T,$$

то

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\} \ge \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} Y(t) > u\right\}.$$

Введем следующие обозначения :

$$K(s,t) = \{x \in \mathbb{R}^n : s_i \le x_i \le t_i, \, i = 1, 2, ..., n\}, \quad t = (t_1, ..., t_n), \quad s = (s_1, ..., s_n),$$

$$K(t) = K(0,t), \quad K^a(t) = K(t) + a = \{x + a : x \in K(t)\}, \quad a \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 2.1. (В. И. Питербарг, [9]) *Пусть $X(t)$ - гауссовское сепарабельное поле, заданное на параллелепипеде $K(t)$, $T = (T_1, ..., T_n)$, где $T_i = T_i(u)$, $i = \overline{1,n}$ - монотонные функции от $u \ge 0$, и существуют $\gamma, T_o > 0$ такие, что $T_i(u) \ge T_o u^{-2/\gamma}$, $i = 1, ..., n$. Предположим, что*

$$\sup\{|\mathbf{E}X(t)| : t \in K(T)\} \le m < \infty, \quad \sup\{\mathbf{D}X(t) : t \in K(T)\} \le \sigma^2 < \infty$$

и для некоторого $L > 0$ поле $X(t)$ удовлетворяет одному из следующих условий :

(i) *Корреляционная функция $r(t,s)$ поля $X(t)$ удовлетворяет неравенству*

$$1 - r(t,s) \le L \sum_{i=1}^{n} |t_i - s_i|^\gamma, \quad t, s \in K(T).$$

(ii) *Функции $\mathbf{E}X(t)$, $\mathbf{D}X(t)$ непрерывны и*

$$\mathbf{D}(X(t) - X(s)) \le L \sum_{i=1}^{n} |t_i - s_i|^\gamma, \quad t, s \in K(T).$$

Тогда найдется константа C, зависящая лишь от L,γ,n,T_0,m,σ такая, что для всех $u>0$ имеет место оценка

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{K(T)} X(t)>u\right\}\le C\prod_{i=1}^{n}\left[T_i u^{\frac{2n}{\gamma}-1}\exp\left[-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}\right]\right].$$

Следствие 2.1. Пусть $X(t)$, $t\in K(T)$ – гауссовское поле с непрерывными траекториями и для некоторых $m,\sigma^2,C,\gamma>0$

$$|\mathbf{E}X(t)|\le m<\infty,\quad \mathbf{D}X(t)\le\sigma^2<\infty,$$

$$\mathbf{D}(X(t)-X(s))\le C\sum_{i=1}^{n}|t_i-s_i|^{\gamma},\quad t,s\in K(T).$$

Пусть, кроме того, существует $\delta>0$ такое, что для всех $t,s\in K(T)$

$$(\mathbf{D}X(t)\mathbf{D}X(s))^{-1/2}\ \mathrm{cov}\ (X(t),X(s))>-1+\delta.$$

Тогда найдется такое $\rho>0$, что для любого замкнутого $A\subset K(T)$ имеет место

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{A}|X(t)|>u\right\}=\mathbf{P}\left\{\sup_{A}X(t)>u\right\}+\mathbf{P}\left\{\sup_{A}(-X(t))>u\right\}+$$

$$+O\left(\exp\left[-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}(1+\rho)\right]\right),\quad u\to\infty.$$

Доказательство. Очевидно,

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{A}X(t)>u,\ \sup_{A}(-X(t))>u\right\}\le\mathbf{P}\left\{\sup_{A\times A}(X(t)-X(s))>2u\right\}.$$

Дисперсия и модуль математического ожидания поля $X(t)-X(s)$ не превосходят величины $2\sigma^2(2-\delta)$ и $2m$. Теперь остается применить Лемму 2.1 для куба $K(T)\times K(T)$, взяв ρ таким, что $(2-\delta)^{-1}>(\rho+1)/2$. Следствие доказано.

Пусть числа $e_1,\dots,e_k$, $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ определяют величину $|t|_\alpha$ по формуле (1.1). Тогда будем иметь представление $\mathbb{R}^n$ в виде прямого произведения ортогональных подпространств : $\mathbb{R}^n=\bigotimes_{i=1}^{k}\mathbb{R}^{e_i}$.

Определим следующие преобразования пространства $\mathbb{R}^n$:

$$g_u \mathbb{R}^n = \bigotimes_{i=1}^{k} \left(u^{-2/\alpha_i} \mathbb{R}^{e_i} \right), \quad u > 0;$$

$$h_b \mathbb{R}^n = \bigotimes_{i=1}^{k} \left(b_i^{1/\alpha_i} \mathbb{R}^{e_i} \right), \quad b = (b_1, ..., b_k), \quad b_i \geq 0, \quad i = 1, ..., k,$$

где $(h\mathbb{R}^e)$ означает гомотетию пространства $\mathbb{R}^e$ относительно начала координат с коэффициентом h. Отметим, что $|g_u t|_\alpha = u^{-2}|t|_\alpha$.

Лемма 2.2. (В. И. Питербарг [9]) *Пусть $X(t)$ - гауссовское однородное поле на $\mathbb{R}^n$ с нулевым средним и непрерывными траекториями. Предположим, что для некоторых $e_i, \alpha_i > 0$, $i = \overline{1,k}$ и невырожденной матрицы C ковариационная функция $r(t)$ поля $X(t)$ удовлетворяет условию*

$$r(t) = 1 - |Ct|_\alpha + o(|Ct|_\alpha), \quad t \to 0.$$

Тогда для любых $T_1 \geq 0, ..., T_n \geq 0$, $S_1 \leq 0, ..., S_n \leq 0$, $T = (T_1, ..., T_n)$, $S = (S_1, ..., S_n)$ имеет место

$$\lim_{u \to \infty} \mathbf{P} \left\{ \sup_{g_u K(S,T)} X(t)(1 + |h_b t|_\alpha)^{-1} > u \right\} \exp(u^2/2)\sqrt{2\pi} u = H_\alpha^b((S,T); C),$$

где

$$H_\alpha^b((S,T); C) = 1 + \int_0^\infty e^x \mathbf{P} \left\{ \sup_{C[K(S,T)]} (\chi(t) - |h_b(C^{-1}t)|_\alpha) > x \right\} dx,$$

$$C[K(S,T)] = \{Ct : t \in K(S,T)\}$$

и $\chi(t)$ определено в Теореме 1.1.

Доказательство Леммы 2.2 в случае, когда $C = I$ можно найти в [9]. Для произвольной невырожденной матрицы утверждение леммы получается заменой переменных. Для краткости обозначим

$$H_\alpha(T; C) = H_\alpha^0((0,T); C), \quad H_\alpha(S,T) = H_\alpha^0((S,T); I), \quad H_\alpha(T) = H_\alpha(0,T). \tag{2.1}$$

Для множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ и для вектора α из (1.1) определим

$$\rho_\alpha(A, B) = \inf\{|t - s|_\alpha : t \in A, s \in B\}.$$

Имеем

$$\rho_\alpha(g_u A, g_u B) = u^{-2}\rho_\alpha(A, B).$$

Определение 2.1. Будем говорить, что ковариационная функция $r(t,s)$, $t,s \in T$ некоторого поля удовлетворяет обобщенному условию локальной стационарности (ОЛС), если существуют $\epsilon_r, D_1, D_2 > 0$ такие, что для всех $t,s \in T$, $|t-s| < \epsilon_r$ имеет место

$$1 - D_1|t-s|_{\alpha'} \geq r(t,s) \geq 1 - D_2|t-s|_{\alpha''},$$

где

$$\alpha^i = \Big(\underbrace{\alpha_1^i, \ldots, \alpha_1^i}_{e_1^i}, \ldots, \underbrace{\alpha_{k^i}^i, \ldots, \alpha_{k^i}^i}_{e_{k^i}^i}\Big) = (\alpha_{(1)}^i, \ldots, \alpha_{(n)}^i),$$

$$\alpha_j^i > 0, \quad j = 1, \ldots, k^i, \quad i = {}', {}''.$$

Сформулируем теперь еще один нужный нам результат, имеющий самостоятельный интерес. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $b_i > 0$. Обозначим через $N_-(b, A)$ число параллелепипедов вида $K(b) + l \cdot b$, $l \cdot b = (l_1 b_1, \ldots, l_n b_n)$, содержащихся в A и через $N_+(b, A)$ – число параллелепипедов того же вида, имеющих с A непустое пересечение. Пусть $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$.

Определение 2.2. ([9]) Систему множеств $A_u \subset \mathbb{R}^n$, $u \geq 0$ назовем равномерно измеримой, если каждое из них измеримо по Жордану и равномерно по u

$$\prod_{i=1}^n \Delta_i (N_+(\Delta, A_u) - N_-(\Delta, A_u))[\,\mathrm{mes}\,(A_u) + (\,\mathrm{mes}\,(A_u))^{-1}] \to 0, \quad \Delta \to 0.$$

Пусть $\mathcal{F}_\delta$ означает класс монотонных функций f на $[0, \infty)$ таких, что

$$u^{-1} f(u) \to 0 \text{ при } u \to \infty \quad \text{и} \quad \liminf_{u\to\infty} \exp(\delta u^2) f(u) > 0.$$

Теорема 2.2. (Ю. К. Беляев, В. И. Питербарг) *Предположим, что ковариационная функция $r(t)$ гауссовского однородного поля $X(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ с нулевым средним имеет представление*

$$r(t) = 1 - |Ct|_\alpha + o(|Ct|_\alpha), \quad t \to 0,$$

где C – невырожденная $n \times n$ матрица. Предположим также, что система замкнутых множеств $\{A_u,\ u \geq 0\}$ удовлетворяет условиям

а) для любого $\varepsilon > 0$

$$\sup\{r(t-s) : t, s \in A_u,\ u \geq 0,\ |t-s| \geq \varepsilon\} < 1;$$

б) система множеств $\{CA_u,\ u \geq 0\}$ равномерно измерима, где $CA_u = \{Ct : t \in A_u\}$.

Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что для произвольной $f \in \mathcal{F}_\delta$ имеет место

$$\lim_{u\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{C^{-1}g_{f(u)}CA_u} X(t) > u\right\} \exp(u^2/2)u \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{u}{f(u)}\right)^{-2e_i/\alpha_i} \frac{\sqrt{2\pi}}{\operatorname{mes}(A_u)} =$$

$$= H_\alpha |\det C|, \tag{2.2'}$$

где

$$0 < H_\alpha = \lim_{S\to\infty} \frac{H_\alpha(\mathbf{S})}{S^n} < \infty, \quad \mathbf{S} = (S, ..., S) \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство Теоремы 2.2 можно найти в [9, гл. 2]. Из Леммы 5 работы [3] следует более общее соотношение

$$\lim_{T_i\to\infty, i=\overline{1,n}} H_\alpha(T;C) \Big/ \left(|\det C| \prod_{i=1}^{n} T_i\right) = H_\alpha, \quad T = (T_1, ..., T_n). \tag{2.2}$$

Для оценивания двойных сум в §3 нам понадобятся следующие два утверждения.

Лемма 2.3. *Пусть ковариационная функция $r(t,s)$ гауссовского поля $X(t)$, $t \in T \subset \mathbb{R}^n$ с нулевым средним удовлетворяет условию ОЛС. Пусть $\Delta = \Delta(u) = (\Delta_1(u), ..., \Delta_n(u))$ – непрерывная вектор-функция и*

$$\Delta_i(u) \downarrow 0, \quad \Delta_i(u) u^{2/\alpha''_{(i)}} \to \infty, \quad i = 1, ..., n$$

при $u \to \infty$. Предположим, что векторы $t_0 = t_0(u) \in \mathbb{R}^n$, $s_0 = s_0(u) \in \mathbb{R}^n$ таковы, что $t_0 \downarrow 0$, $s_0 \downarrow 0$ при $u \to \infty$ и множества $K^{t_0}(\Delta), K^{s_0}(\Delta) \subset T$ не пересекаются.

Тогда существуют константы $0 < C < \infty$, $u_0 > 0$ такие, что для любых $a, b > 0$, $u > u_0$ имеет место оценка

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{K^{t_0}(\Delta)} X(t) > au,\ \sup_{K^{s_0}(\Delta)} X(t) > bu\right\} \leq$$

$$\leq C \text{ mes } (K^{t_\bullet}(\Delta)) \text{ mes } (K^{s_\bullet}(\Delta)) \prod_{i=1}^{k''} (u \max(a,b))^{4e_i''/\alpha_i''} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{u^2}{8}(a+b)^2[1+\frac{D_1}{2}\rho_{\alpha'}(K^{t_\bullet}(\Delta), K^{s_\bullet}(\Delta))]\right\}(a+b)^{-1}u^{-1}.$$

Доказательство Леммы 2.3 аналогично доказательству Леммы 6.6 из [9], с дополнительным использованием Теоремы 2.2.

Лемма 2.4. *Пусть поле $X(t)$ удовлетворяет условиям Леммы 2.3 с той же самой функцией $\Delta(u)$. Предположим, что векторы $t_0 = (t_{01}, ..., t_{0n})$, $s_0 = (s_{01}, ..., s_{0n})$ таковы, что $|t_{0i} - s_{0i}|$ равно либо Δ_i, либо нулю, $i = 1, ..., n$, но $\rho(K^{t_\bullet}(\Delta), K^{s_\bullet}(\Delta)) = 0$. Пусть $\Delta_0(u)$ - непрерывная функция такая, что при $u \to \infty$*

$$\Delta_0(u) \downarrow 0, \quad \Delta_0(u)/\Delta_i(u) \to 0, \quad \Delta_0(u)u^{2/\alpha_{(i)}'} \to \infty, \quad i = 1, ..., n.$$

Пусть $(i = 1, ..., n)$

$$\Delta_i' = \begin{cases} \Delta_i, & \text{если } |t_{0i} - s_{0i}| = 0, \\ \Delta_0, & \text{если } |t_{0i} - s_{0i}| = \Delta_i, \end{cases} \qquad \Delta_i'' = \begin{cases} \Delta_i, & \text{если } t_{0i} - s_{0i} = -\Delta_i, \\ 0, & \text{если } t_{0i} - s_{0i} = 0, \\ -\Delta_i, & \text{если } t_{0i} - s_{0i} = \Delta_i. \end{cases}$$

Тогда найдется константа $C > 0$ такая, что для любых $a, b > 0$ и для достаточно больших и имеет место оценка

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{K^{t_\bullet}(\Delta)} X(t) > au, \sup_{K^{s_\bullet}(\Delta)} X(t) > bu\right\} \leq \mathbf{P}\left\{\sup_{\bar{K}(\Delta)} X(t) > bu\right\} +$$

$$+ C \text{ mes } (K^{t_\bullet}(\Delta)) \text{ mes } (K^{s_\bullet}(\Delta) \setminus \bar{K}(\Delta)) \prod_{i=1}^{k''} (u \max(a,b))^{4e_i''/\alpha_i''} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{u^2}{8}(a+b)^2(1+\frac{D_1}{2}\Delta_0^{\alpha'})\right](a+b)^{-1}u^{-1},$$

где $\bar{K}(\Delta) = K^{t_\bullet}(\Delta') + \Delta'' \subset K^{s_\bullet}(\Delta)$ и $\alpha' = \max_{1 \leq i \leq k'} \alpha_i'$.

Утверждение Леммы 2.4 можно получить, используя Лемму 6.6 из [9]. Теперь укажем некоторые свойства величин $H_\alpha^b((S,T);C)$, введенных в Лемме 2.2. Нетрудно видеть, что

$$H_\alpha^b((S,T);C) = \mathbf{E}\exp\left[\sup_{C[K(S,T)]}(\chi(t) - |h_b(C^{-1}t)|_\alpha)\right]. \qquad (2.3)$$

Поле $\chi(t)$ можно рассматривать как сумму k независимых гауссовских полей $\chi_j(t^j)$, $t^j = (t_{E(j-1)+1}, ..., t_{E(j)})$, $j = 1, ..., k$, где

$$E(j) = \sum_{i=1}^{j} e_i, \quad \mathbf{E}\chi_j(t^j) = -|t^j|^{\alpha_j} = -\left(\sum_{i=E(j-1)+1}^{E(j)} t_i^2\right)^{\alpha_j/2}.$$

$$\mathrm{cov}\,(\chi_j(t^j), \chi_j(s^j)) = |t^j|^{\alpha_j} + |s^j|^{\alpha_j} - |t^j - s^j|^{\alpha_j}.$$

Пусть матрица C диагональна, т.е. C =diag$(c_1, ..., c_n)$. Обозначая $c = (c_1, ..., c_n)$, C^j =diag$(c_{E(j-1)+1}, ..., c_{E(j)})$, $S^j = (S_{E(j-1)+1}, ..., S_{E(j)})$ и учитывая (2.3) и равенство $C[K(S,T)] = K(c \cdot S, c \cdot T)$, получим факторизацию

$$H_\alpha^b((S,T);C) = \prod_{j=1}^{k} H_{\alpha^j}^{b_j}((S^j,T^j);C^j), \quad \alpha^j = (\alpha_j, ..., \alpha_j) \in \mathbb{R}^{e_j}, \qquad (2.4)$$

где $c \cdot S = (c_1 S_1, ..., c_n S_n) \in \mathbb{R}^n$.

В частности, имеем

$$H_\alpha^b((S,T);C) = \prod_{j=1}^{v} H_{\alpha^j}(c^j \cdot S^j, c^j \cdot T^j) \prod_{j=v+1}^{k} H_{\alpha^j}^{b_j}((S^j,T^j);C^j), \qquad (2.5)$$

где $b = (0, ..., 0, b_{v+1}, ..., b_k)$ и $c^j = (c_{E(j-1)+1}, ..., c_{E(j)})$.

Важное значение для асимптотик распределений супремума гауссовского процесса имеет предельное поведение величин $H_\alpha^b((-\mathbf{S},\mathbf{S});C)$, $H_\alpha(\mathbf{S})$, $\mathbf{S} = (S, ..., S)$, $S \to \infty$ В Теореме 2.2 указано на существование конечного предела $H_\alpha = \lim_{S\to\infty} H_\alpha(\mathbf{S})/S^{r}$. В процессе доказательства Теоремы 1.2 будет установлено существование конечного и положительного предела

$$H_\alpha^b(C) = \lim_{S\to\infty} H_\alpha^b((-\mathbf{S},\mathbf{S});C),$$

где $b_j \neq 0$, $j = 1, ..., k$.

Пусть $H_\alpha^b = H_\alpha^b(I)$. В силу (2.4) получаем для C =diag $(c_1, ..., c_n)$

$$H_\alpha^b(C) = \prod_{i=1}^{k} H_{\alpha^i}^{b_i}(C^i), \quad H_\alpha = \prod_{i=1}^{k} H_{\alpha^i}, \qquad (2.6)$$

Наконец укажем, что известны следующие частные случаи :

1) если $e_1 = \cdots = e_n = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$, то $H_1 = 1$, $H_1^1 = 2^n$;

2) если $e_1 = \cdots = e_n = 1$, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 2$, то $H_2 = \pi^{-n/2}$, $H_2^1 = 2^{n/2}$, где $\mathbf{2} = (2, ..., 2) \in \mathbb{R}^n$.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1.1 И 1.2

Здесь мы полностью докажем Теорему 1.1 и утверждение (ii) Теоремы 1.2. Вкратце укажем на отличие в доказательстве других утверждений Теоремы 1.2. Основные идеи доказательства теорем типа 1.1 и 1.2, основанные на методе двойных сумм, заключаются в следующем :

1) мы показываем, что искомая вероятность имеет асимптотику, совпадающую с асимптотикой вероятности выхода траектории гауссовского поля за высокий уровень на множестве $T_\delta(A)$;

2) разбиваем множество T_δ решеткой, измельчающейся с ростом u, и применяем неравенство Бонферрони ;

3) используя теоремы Слепяна и Беляева–Питербарга, находим асимптотики соответствующих сумм ;

4) применяя результаты §2, доказываем, что двойная сумма в неравенстве Бонферрони является по отношению к найденной асимптотике бесконечно малой более высокого порядка.

Следующие три леммы справедливы для произвольных α и β, а $\delta(u)$ удовлетворяет условию (1.2).

Лемма 3.1. *Пусть* $T_\delta = T_\delta(I)$, $t_0 = (t_{01}, ..., t_{0n})$,

$$T_{t_0} = \left\{ t \in T : |t_i - t_{0i}| \leq (f_j)^{-1/2} (\delta/m)^{1/\beta_j},\ F(j-1) + 1 \leq i \leq F(j),\ j = \overline{1, m} \right\},$$

$$\tilde{T}_{t_0} = \left\{ t \in T : |t_i - t_{0i}| \leq \delta^{1/\beta_{(i)}},\ i = 1, ..., n \right\}, \quad F(j) = \sum_{i=1}^{j} f_i, \quad F(0) = 0.$$

Тогда для некоторых констант $C_1, C_2 > 0$ *имеет место*

$$\bigcup_{t \in T_0} T_t \subset T_\delta \subset \bigcup_{t \in T_0} \tilde{T}_t, \quad C_1 \prod_{i=1}^{m} \delta^{f_i/\beta_i} \leq \text{mes}\,(T_\delta) \leq C_2.$$

Доказательство. Для достаточно больших u и для некоторого $\varepsilon_0 > 0$

имеет место $T_\delta \subset T_o^{\varepsilon_o}$. Кроме того, в силу компактности T_o и непрерывности функции $\rho_{A,\beta}(t,s)$, для любого $t \in T$ найдется точка $s_t \in T_o$ такая, что $\rho_{A,\beta}(t,T_o) = \rho_{A,\beta}(t,s_t)$. Отсюда легко получаются утверждения леммы.

Здесь и далее мы полагаем $\sigma = 1$.

Лемма 3.2. *Для любой функции $\delta(u)$, удовлетворяющей (1.2), имеет место*

$$\lim_{u\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\} / \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T_\delta(A)} X(t) > u\right\} = 1.$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\} = \mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta(A)} X(t) > u\right\} + \mathbf{P}\left\{\sup_{T\setminus T_\delta(A)} X(t) > u\right\}. \tag{3.1}$$

Разобъем множество $T \setminus T_\delta(A)$ на кубы K_i со стороной $\varepsilon_2/\sqrt{n}$, где ε_2 из условия (III). Пусть $N < \infty$ – число таких кубов, покрывающих $T \setminus T_\delta(A)$. Тогда

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{T\setminus T_\delta(A)} X(t) > u\right\} \le N \max_{1\le i\le N} \mathbf{P}\left\{\sup_{K_i\cap(T\setminus T_\delta(A))} X(t) > u\right\}. \tag{3.2}$$

В силу условия (III) поле $X(t)$, $t \in K_i$ удовлетворяет предположениям Леммы 2.1. Для достаточно больших u по условию (I) имеем

$$\sup\{\sigma_t^2 : t \in K_i \cap (T \setminus T_\delta(A))\} \le 1 - \delta(u)/2.$$

Следовательно, применяя Лемму 2.1, получим

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{K_i\cap(T\setminus T_\delta(A))} X(t) > u\right\} \le C_1 u^{2n/\gamma-1} \exp\left[-\frac{u^2}{2(1-\delta/2)^2}\right] = o\left(u^{-1}\exp[-\frac{u^2}{2}]\right).$$

Последнее соотношение верно в силу выбора $\delta(u)$. В то же время, для произвольной точки $t_o \in T_o$ имеем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta(A)} X(t) > u\right\} \ge \mathbf{P}\{X(t_o) > u\} = (\sqrt{2\pi}u)^{-1} \exp(-u^2/2)(1 + o(1)), \quad u \to \infty.$$

Из последних двух формул и (3.1), (3.2) получаем утверждение леммы.

Обозначим

$$X^c(t) = X(t)\sigma_c(t)/\sigma_t, \quad \sigma_c(t) = (1 + c\rho_{A,\beta}(t,T_o))^{-1}, \quad c > 0. \tag{3.3}$$

Лемма 3.3. *Для любого $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства*

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} X^{1+\varepsilon}(t) > u\right\}}{\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} X(t) > u\right\}} \le 1 \le \liminf_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} X^{1-\varepsilon}(t) > u\right\}}{\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} X(t) > u\right\}}.$$

Доказательство. В силу условия (I), для любого $\varepsilon > 0$ и для достаточно больших u имеем $\sigma_{1+\varepsilon}(t) \le \sigma(t) \le \sigma_{1-\varepsilon}(t)$, $t \in T_\delta$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} X^{1+\varepsilon}(t) > u\right\} \le \mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} X(t) > u\right\} \le \mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} X^{1-\varepsilon}(t) > u\right\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.3 показывает, что для нахождения искомой асимптотики нужно вычислить асимптотику вероятности $\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} X^c(t) > u\right\}$ для значений c близких к 1.

Доказательство Теоремы 1.1. Преобразование масштаба и нормировка подсказывают нам, что можно ограничиться случаем $A = I$ и $\sigma = 1$. Для единой записи доказательства обоих вариантов Теоремы 1.1 введем следующие обозначения

$$\alpha^i = \Big(\underbrace{\alpha^i_1, \dots, \alpha^i_1}_{e_1}, \dots, \underbrace{\alpha^i_k, \dots, \alpha^i_k}_{e_k}\Big) = (\alpha^i_{(1)}, \dots, \alpha^i_{(n)}), \quad i = {}', {}'', \tag{3.4}$$

где

$$\alpha'_i = \begin{cases} \bar\alpha, & \text{вариант а)} \\ \alpha_i, & \text{вариант б)}, \end{cases} \qquad \bar\alpha = \max_{1\le i\le k} \alpha_i,$$

$$\alpha''_i = \begin{cases} \alpha_0, & \text{вариант а)} \\ \alpha_i, & \text{вариант б)}, \end{cases} \qquad \alpha_0 = \min_{1\le i\le k} \alpha_i.$$

Итак, для обоих вариантов $\beta_{(i)} > \alpha'_{(i)}$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть $\Delta(u) = (\Delta_i)$, $i = \overline{1, n}$ – непрерывная вектор-функция, для которой при $u \to \infty$ выполнено

$$\Delta_i(u) \downarrow 0, \quad \Delta_i^{-\beta_{(i)}}\delta \to \infty, \Delta_i u^{2/\alpha'_{(i)}} \to \infty, \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.5}$$

Разобьем множество T_δ измельчающейся с ростом u решеткой, образованной множествами

$$K_l(\Delta) = K(\Delta) + l \cdot \Delta = \{t \in T : l_i\Delta_i \le t_i \le (l_i + 1)\Delta_i, \quad i = 1, \dots, n\},$$

где $l \in Z^n$, Z^n - решетка точек с целочисленными координатами в $\mathbb{R}^n$. Применяя неравенство Бонферрони, получаем

$$\sum_{l \in \mathcal{L}^+} \mathbf{P}\left\{\sup_{K_l(\Delta)} X^c(t) > u\right\} \geq \mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} X^c(t) > u\right\} \geq \tag{3.6}$$

$$\geq \sum_{l \in \mathcal{L}^-} \mathbf{P}\left\{\sup_{K_l(\Delta)} X^c(t) > u\right\} - \sum_{l,l' \in \mathcal{L}^+, l \neq l'} \mathbf{P}\left\{\sup_{K_l(\Delta)} X^c(t) > u, \sup_{K_{l'}(\Delta)} X^c(t) > u\right\},$$

где

$$\mathcal{L}^+ = \{l : K_l(\Delta) \cap T_\delta \neq \emptyset\}, \quad \mathcal{L}^- = \{l : K_l(\Delta) \subset T_\delta\}.$$

Вследствие условия (II), для каждого $l \in \mathcal{L}^+$ функция $|D(t,s)(t-s)|_\alpha$ равномерно непрерывна на компакте $K_l \times K_l$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует u_o такое, что для всех $u > u_o$ и для всех $t, s \in K_l(\Delta)$ имеет место

$$|D^-(t_l, t_l)(t-s)|_\alpha \leq |D(t,s)(t-s)|_\alpha \leq |D^+(t_l, t_l)(t-s)|_\alpha, \tag{3.7}$$

где $t_l \in K_l(\Delta)$ выбирается произвольно и

$$D^\pm(t_l, t_l) = ((1 \pm \varepsilon) d_{ij}(t_l, t_l))_{ij=\overline{1,n}}.$$

В силу равномерной непрерывности функции $\rho_{A,\beta}$ на компакте K_l, для любого $\varepsilon > 0$ найдется u_1 такое, что для всех $u > u_1$ и для всех $t \in K_l(\Delta)$ имеет место

$$(1-\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t_l, T_o) \leq \rho_{A,\beta}(t, T_o) \leq (1+\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t_l, T_o). \tag{3.8}$$

Для каждого $l \in \mathcal{L}^+$ обозначим через $Y^\pm_{l,\Delta}(t)$ однородные гауссовские поля с нулевыми средними, единичными дисперсиями и ковариационными функциями $r^\pm_{l,\Delta}(t) = \exp[-|D^\pm(t_l, t_l)t|_\alpha]$. В силу (3.7) для любого $\varepsilon > 0$, всех $t, s \in K_l(\Delta)$ и для достаточно больших u имеем

$$r^+_{l,\Delta}(t-s) \leq r(t,s) \leq r^-_{l,\Delta}(t-s).$$

По Теореме 2.1 с учетом (3.8) получаем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \in K_l} Y^-_{l,\Delta}(t)\sigma_{c+\varepsilon}(t_l) > u\right\} \leq \mathbf{P}\left\{\sup_{t \in K_l} X^c(t) > u\right\} \leq$$

$$\leq \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in K_l} Y^{+}_{l,\Delta}(t)\sigma_{c-\varepsilon}(t_l) > u\right\}. \tag{3.9}$$

Для краткости значки "$\pm$" и "$\pm\varepsilon$" писать не будем. Имеем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in K_l} Y_{l,\Delta}(t) > \frac{u}{\sigma_c(t_l)}\right\} = \mathbf{P}\left\{\sup_{D(t_l,t_l)[K_l]} Y(t) > \frac{u}{\sigma_c(t_l)}\right\},$$

где $Y(t)$ – однородное гауссовское поле с нулевым средним и ковариационной функцией $r(t) = 1 - |t|_\alpha + o(|t|_\alpha)$, $t \to 0$.

Предположения теоремы и соотношение (3.5) позволяют применить Теорему 2.2. Имеем

$$\left|1 - \sum_l \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in K_l} Y_{l,\Delta}(t) > \frac{u}{\sigma_c(t_l)}\right\} \times\right.$$

$$\times \left[H_\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}u}\prod_{i=1}^{k} u^{2e_i/\alpha_i}\sum_l \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_c^2(t_l)}\right)\sigma_c(t_l)\times\right.$$

$$\left.\left.\times \prod_{i=1}^{k}(\sigma_c(t_l))^{-2e_i/\alpha_i}|\det D(t_l,t_l)|\ \mathrm{mes}\ (K_l(\Delta))\right]^{-1}\right| \leq \kappa(u), \tag{3.10}$$

где $\kappa(u) \to 0$ при $u \to \infty$. Пользуясь тем, что суммирование в (3.10) производится по тем l, для которых $K_l \cap T_\delta \neq \emptyset$ и следовательно $\rho_{A,\beta}(t_l, T_o) \leq \delta$, можем записать

$$\exp[-(cu\delta)^2/2] \leq \sum_l \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma_c^2(t_l)}\right]\sigma_c(t_l)\prod_{i=1}^{k}(\sigma_c(t_l))^{-2e_i/\alpha_i}|\det D(t_l,t_l)|\times$$

$$\times\ \mathrm{mes}\ (K_l)\left[\exp(-u^2/2)\sum_l \exp(-u^2 c\rho_{A,\beta}(t_l,T_o))\,|\det D(t_l,t_l)|\ \mathrm{mes}\ (K_l)\right]^{-1} \leq$$

$$\leq (1+c\delta)^{-1}\prod_{i=1}^{k}(1+c\delta)^{2e_i/\alpha_i}. \tag{3.11}$$

В силу равномерной непрерывности функций $\rho_{A,\beta}$ и $|\det D(t,t)|$ на K_l, соотношения (3.5) и Леммы 3.1, имеем для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших u

$$(1-\varepsilon)\sum_l \int_{K_l} \exp[-u^2(c+\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t,T_o)]\,|\det D(t,t)|\,dt \leq$$

$$\leq \sum_l \exp[-u^2 c\rho_{A,\beta}(t_l, T_o)] \, |\det D(t_l, t_l)| \text{ mes } (K_l) \leq$$

$$\leq (1+\varepsilon) \sum_l \int_{\bar{K}_l} \exp[-u^2(c-\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t, T_o)] \, |\det D(t,t)| \, dt. \tag{3.12}$$

Учитывая Леммы 3.2 и 3.3, неравенства (1.2), (3.6) и (3.9) - (3.12), имеем для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших u

$$(1-\varepsilon) H_\alpha (\sqrt{2\pi} u)^{-1} \exp(-u^2/2) \prod_{i=1}^{k} u^{2e_i/\alpha_i} \int_{T_\delta} \exp[-u^2(1+\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t, T_o)] \times$$

$$\times |\det D(t,t)| \, dt - \sum\nolimits^{1+\varepsilon} \leq \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\} \leq \tag{3.13}$$

$$\leq \frac{(1+\varepsilon) H_\alpha}{\sqrt{2\pi} u} \exp(-u^2/2) \prod_{i=1}^{k} u^{2e_i/\alpha_i} \int_{T_\delta} \exp[-u^2(1-\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t, T_o)] \, |\det D(t,t)| \, dt,$$

где $\sum^c(u)$ означает двойную сумму из (3.6).

Далее, несложно показать, что интеграл

$$I_u^c = \int_{T_\delta} \exp[-u^2 c\rho_{A,\beta}(t, T_o)] \, |\det D(t,t)| \, dt$$

асимптотически (при $u \to \infty$) эквивалентен следующему выражению

$$I_u^c = cu^2 \int_0^\delta \exp(-u^2 cx) g(x) \, dx \, (1 + o(1)), \tag{3.14}$$

где

$$g(x) = \int_{G(x)} |\det D(t,t)| \, dt, \quad G(x) = \{t \in T : \rho_{A,\beta}(t, T_o) \leq x\}.$$

Соотношения

$$\text{mes } \{t \in T : 0 < \sigma - \sigma_t \leq x\} = x^\mu (1 + o(1)), \quad x \downarrow 0$$

и (3.14) позволяют заключить, что для всяких $c, \varepsilon > 0$ имеет место

$$1 \leq \lim_{u\to\infty} I_u^{c-\varepsilon} / I_u^c \leq$$

$$\leq \lim_{u\to\infty} \int_0^{c\delta} g\left(\frac{y}{c-\varepsilon}\right) \exp(-u^2 y) \, dy \Big/ \int_0^{c\delta} g(y/c) \exp(-u^2 y) \, dy \leq L(c, \varepsilon), \tag{3.15}$$

где $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} L(c, \varepsilon) = 1$.

Итак, из формулы (3.13) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства

$$1-\varepsilon \le \varliminf_{u\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\} / Q_\delta(u) \le (1+\varepsilon)L(1,\varepsilon) - \varliminf_{u\to\infty} \sum\nolimits^{1+\varepsilon}(u)/Q_\delta(u),$$

где Q_δ обозначает главный член асимптотики в правой части (1.3).

Оценка двойной суммы в (3.6). Докажем, что

$$\lim_{u\to\infty} \sum\nolimits^{1+\varepsilon}(u)/Q_\delta(u) = 0.$$

В условиях теоремы и в соответствии с (3.4) существуют такие константы $D_1, D_2, \varepsilon_r > 0$, что корреляционная функция $r(t,s)$ поля $X(t)$ удовлетворяет неравенству

$$1 - D_1|t-s|_{\alpha'} \ge r(t,s) \ge 1 - D_2|t-s|_{\alpha''}, \quad t,s\in T, \quad |t-s| < \varepsilon_r. \tag{3.16}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\operatorname{diam} T_o < \varepsilon_r$. По определению поля $X^c(t)$ в силу (3.3) и (3.8) для любого $\varepsilon > 0$ и для достаточно больших u имеем

$$X^c(t) \le X(t)/[\sigma_1(1+(c-\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t_l,T_o))],$$

где $t \in K_l(\Delta)$ и $\omega \in \{\omega : X(t,\omega) > 0\}$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{K_l} X^c(t) > u, \sup_{K_{l'}} X^c(t) > u\right\} \le \mathbf{P}\left\{\sup_{K_l} X(t)/\sigma_1 > u(1+(c-\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t_l,T_o)),\right.$$

$$\left.\sup_{K_{l'}} X(t)/\sigma_1 > u(1+(c-\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t_{l'},T_o))\right\} \equiv p_{l,l'}(u). \tag{3.17}$$

Множество суммирования в двойной сумме $\sum^c$ разобьем на две части :

$$\mathcal{L}_1^+ = \{(l,l') : l,l' \in \mathcal{L}^+,\, l \ne l',\, \rho(K_l,K_{l'}) > 0\}$$

и

$$\mathcal{L}_2^+ = \{(l,l') : l,l' \in \mathcal{L}^+,\, l \ne l',\, \rho(K_l,K_{l'}) = 0\}.$$

Неравенство (3.17) позволяет записать $\sum^c \le \sum_1^c + \sum_2^c$, где $\sum_i^c = \sum\limits_{(l,l')\in\mathcal{L}_i^+} p_{l,l'}$, $i = 1,2$.

Докажем, что $\sum_i^{1+\varepsilon}(u) = o(Q_\delta(u))$, $u\to\infty$. Пусть $(l,l') \in \mathcal{L}_1^+$, т.е. множества K_l и $K_{l'}$ не имеют общих вершин. Ковариационная функция $r(t,s)$

поля $X(t)/\sigma_t$ удовлетворяет неравенству (3.16). Значит выполнено условие ОЛС (см. §2). Учитывая (3.5), можем применить Лемму 2.3 и получить

$$p_{l,l'}(u) \le C_1 u^{-1} \exp(-u^2/2) \prod_{i=1}^{k} u^{4\varepsilon_i/\alpha_i''} \exp\left[-\frac{u^2}{2}(c-\varepsilon)[\rho_{A,\beta}(t_l,T_o)+\rho_{A,\beta}(t_{l'},T_o)]\right]$$

$$\times \exp\left[-\frac{u^2}{16} D_1 \rho_{\alpha'}(K_l,K_{l'})\right] \text{ mes }(K_l) \text{ mes }(K_{l'}). \qquad (3.18)$$

Мы использовали здесь неравенство $\rho_{A,\beta}(t_l,T_o) \le \delta$, верное для $l \in \mathcal{L}^+$. Так как $(l,l') \in \mathcal{L}_1^+$, то найдется такой индекс $\nu = \nu(l,l')$, что $|l_\nu - l'_\nu| \ge 2$. Тогда

$$\rho_{\alpha'}(K_l,K_{l'}) \ge [(|l_\nu - l'_\nu|-1)\Delta_\nu]^{\alpha'(\nu)} \ge z(u) = \min_{1\le i\le n} [(\Delta_i(u))^{\alpha'(i)}].$$

В силу (3.5) имеем $\lim\limits_{u\to\infty} u^2 z(u) = \infty$. С учетом (3.18) имеем ($C_i > 0$):

$$\Sigma_1^c \le C_1 u^{-1} \exp(-u^2/2) \prod_{i=1}^{k} u^{4\varepsilon_i/\alpha_i''} \exp[-C_2 u^2 z(u)] \times$$

$$\times \left[\sum_{l\in\mathcal{L}^+} \exp[-\frac{u^2}{2}(c-\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t_l,T_o)] \text{ mes }(K_l)\right]^2 \le 2C_1 u^{-1} \exp(-u^2/2) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{k} u^{4\varepsilon_i/\alpha_i''} \exp[-C_2 u^2 z(u)] \left[\int_{T_\delta} \exp[-\frac{u^2}{2}(c-2\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t,T_o)]\,dt\right]^2 \qquad (3.19)$$

Используя неравенство (3.15) и Лемму 3.1, для достаточно больших u получаем

$$\left[\int_{T_\delta} \exp[-\frac{u^2}{2}(c-2\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t,T_o)]\,dt\right]^2 / \int_{T_\delta} \exp[-u^2 c \rho_{A,\beta}(t,T_o)]\,dt \le$$

$$\le C_3 \int_{T_\delta} \exp[-u^2(\frac{c}{2}-\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t,T_o)]\,dt = O(1), \quad u\to\infty. \qquad (3.20)$$

Следовательно, в силу (3.19), (3.20) и указанного выше свойства функции $z(u)$, получаем $\sum_1^{1+\varepsilon} / Q_\delta(u) \to 0$.

Пусть теперь $(l,l') \in \mathcal{L}_2^+$, т.е. $\rho(K_l,K_{l'}) = 0$. В силу (3.16) к полю $X(t)/\sigma(t)$ применима Лемма 2.4, причем $t_o = l\cdot\Delta$ и $s_o = l'\cdot\Delta$. Имеем

$$p_{l,l'}(u) \le \mathbf{P}\left\{\sup_{K_{l,l'}} X(t)/\sigma_t > u(1+(c-\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t_{l'},T_o))\right\} +$$

$$+C_1 u^{-1} \exp(-u^2/2) \prod_{i=1}^{k} u^{4\varepsilon_i/\alpha_i''} \exp\left[-\frac{u^2}{2}(c-\varepsilon)[\rho_{A,\beta}(t_l,T_o)+\rho_{A,\beta}(t_{l'},T_o)]\right]$$

$$\exp\left[-\frac{u^2}{16}D_1\Delta_0^{\bar{\alpha}}\right] \text{ mes }(K_l) \text{ mes }(K_{l'}), \tag{3.21}$$

где $K_{l,l'} = K(\Delta') + l \cdot \Delta + \Delta'' \subset K(\Delta) + l' \cdot \Delta$. Сумму по $(l,l') \in \mathcal{L}_2^+$ вторых слагаемых в (3.21) оценим так же, как и выше (см. (3.18),(3.19)) ; эта сумма будет величиной порядка $o(Q_\delta(u))$, так как $u^2\Delta_0^{\bar{\alpha}} \to \infty$, $u \to \infty$.

Рассмотрим оставшуюся сумму

$$\sum_{(l,l')\in\mathcal{L}_2^+} \mathbf{P}\left\{\sup_{K_{l,l'}} X(t)/\sigma_t > u(1+(c-\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t_{l'},T_o))\right\}. \tag{3.22}$$

Переходя от поля $X(t)/\sigma_t$, $t \in K_{l,l'} \subset K_{l'}$ к полю $Y^+_{l',\Delta}(t)$, замечаем, что для достаточно больших u, (3.22) не превосходит

$$C_2u^{-1}\exp(-u^2/2)\prod_{i=1}^k u^{2e_i/\alpha_i} \sum_{(l,l')\in\mathcal{L}_2^+} \exp[-u^2(c-\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t_{l'},T_o)]\times$$

$$\times \text{ mes }(K_{l'}) \prod_{\{i:\, l_i\neq l_i'\}} [\Delta_o(u)/\Delta_i(u)]. \tag{3.23}$$

Поскольку для фиксированного l' существует конечное число параллелепипедов, имеющих с $K_{l'}(\Delta)$ общие вершины, то, как и в (3.12), получаем, что (3.23) не превосходит

$$C_3u^{-1}\exp(-u^2/2)\prod_{i=1}^k u^{2e_i/\alpha_i}\int_{T_\varepsilon}\exp[-u^2(c-2\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t,T_o)]\,dt\,\Delta_o(u)\times$$

$$\times\left[\max_{1\le i\le n}\Delta_i(u)\right]^{-1}.$$

В силу (3.15), так как $\Delta_0 = o(\Delta_i)$, $i = \overline{1,n}$, последнее выражение есть $o(Q_\delta(u))$ при $u \to \infty$. Следовательно, $\sum_2^{1+\epsilon}(u) = o(Q_\delta(u))$. Таким образом, $\sum^{1+\epsilon} = o(Q_\delta(u))$, если diam $T_o < \varepsilon_r$ и Теорема 1.1 доказана в этом случае.

Пусть теперь diam $T_o \ge \varepsilon_r$. Разобьем T_o n-мерной решеткой с шагом $\varepsilon_r/(2\sqrt{n})$ на замкнутые подмножества $S_1,...,S_N$, диаметры которых не превосходят $\varepsilon_r/2$, т.е. $T_o = \bigcup_{i=1}^N S_i$ и $S_i \cap S_j = \partial S_i \cap \partial S_j$, $i \neq j$. Так как T_o ограничено, то $N < \infty$. Обозначим $S_{i\delta} = \{t \in T : \rho_{A,\beta}(t,S_i) \le \delta\}$. Тогда

$$\rho_{A,\beta}(t,T_o) = \min_{1\le i\le N}\rho_{A,\beta}(t,S_i), \quad T_\delta = \bigcup_{i=1}^N S_{i\delta}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}\left\{\sup_{S_{i\delta}} X(t) > u\right\} \ge \mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} X(t) > u\right\} \ge \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}\left\{\sup_{S_{i\delta}} X(t) > u\right\} - \sum{}', \quad (3.24)$$

где

$$\sum{}' = \sum_{i\neq j} \mathbf{P}\left\{\sup_{S_{i\delta}} X(t) > u, \sup_{S_{j\delta}} X(t) > u\right\}.$$

Обозначим также

$$F(u) = H_\alpha(\sqrt{2\pi}u)^{-1}\exp(-u^2/2)\prod_{i=1}^{k} u^{2e_i/\alpha_i},$$

$$I_u(S_i) = \int_{S_{i\delta}} \exp[-u^2 \rho_{A,\beta}(t, S_i)]\,|\det D(t,i)|\,dt.$$

Имеем

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}\left\{\sup_{S_{i\delta}} X(t) > u\right\} = F(u)\sum_{i=1}^{N} I_u(S_i)(1+o(1)), \quad u\to\infty.$$

Поскольку $\operatorname{mes}(S_i \cap S_j) = 0$, $i \neq j$, то несложно показать, что

$$\lim_{u\to\infty} (I_u(S_i) + I_u(S_j))/I_u(S_i \cup S_j) = 1, \quad i \neq j.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}\left\{\sup_{S_{i\delta}} X(t) > u\right\} = F(u) I_u\Big(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\Big)(1+o(1)) =$$

$$= Q_\delta(u)(1+o(1)), \quad u\to\infty. \quad (3.25)$$

Покажем, что $\sum' = o(Q_\delta(u))$. В силу (3.25) для соседних подмножеств S_i, S_j, $\operatorname{diam}(S_i \cup S_j) \le \varepsilon_r$ имеем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{S_{i\delta}} X(t) > u, \sup_{S_{j\delta}} X(t) > u\right\} = o(Q_\delta(u)), \quad u\to\infty.$$

Пусть теперь подмножества S_i и S_j не соседние, тогда $\rho(S_i, S_j) \ge \varepsilon_r(2\sqrt{n})^{-1}$ и

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{S_{i\delta}} X(t) > u, \sup_{S_{j\delta}} X(t) > u\right\} \le \mathbf{P}\left\{\sup_{S_{i\delta}\times S_{j\delta}} [X(t) + X(s)] > 2u\right\}.$$

Используя условие (IV) для ковариационной функции $R(t,s)$ поля $X(t)$, убеждаемся, что найдется такое число κ, $0 < \kappa < 1$, что для $(t,s) \in S_{i\delta} \times S_{j\delta}$

имеет место $\mathrm{D}[X(t)+X(s)] \le 2(2-\kappa)$. В силу условия (III) поле $X(t)+X(s)$ удовлетворяет условиям Леммы 2.1. Следовательно,

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{S_{i\delta}\times S_{j\delta}} [X(t)+X(s)] > 2u\right\} \le C_1 u^{C_2} \exp\left(-\frac{u^2}{2-\kappa}\right).$$

Далее, обозначая $\kappa_1 = \kappa(4-2\kappa)^{-1}$, имеем при $u \to \infty$

$$C_1 u^{C_2} \exp\left(-\frac{u^2}{2-\kappa}\right) Q_\delta^{-1} = C_3 u^{C_4} \exp(-u^2\kappa_1) / \int_{T_\delta} \exp[-u^2 \rho_{A,\beta}(t,T_o)]\, dt \to 0,$$

так как

$$\int_{T_\delta} \exp[-u^2 \rho_{A,\beta}(t,T_o)]\, dt \ge C_5 \exp[-u^2 \delta(u)] \prod_{i=1}^{m} \delta^{f_i/\beta_i},$$

где $\delta(u)$ удовлетворяет соотношениям (1.2). Поскольку в $\sum'$ входит конечное число слагаемых, то мы доказали, что $\sum'(u) = o(Q_\delta(u))$. Теорема 1.1 полностью доказана.

Доказательство Теоремы 1.2. Для $1 \le i \le p$ мы можем использовать подход Теоремы 1.1, а для $p < i \le n$ множество T_δ можно выбрать более "узким". В силу соотношения между векторами α и β теперь в дополнение к (1.2) потребуем, чтобы $\delta^{1/\beta_{(i)}} u^{2/\alpha_{(i)}} \to 0$, $i = p+1, \ldots, n$, в то время как $\delta^{1/\beta_{(i)}} u^{2/\alpha_{(i)}} \to \infty$, $i = 1, \ldots, p$. Заметим, что когда множество T_o состоит из одной точки, интеграл в (1.3) считается явно (см. [11], стр. 403).

Доказательство п. (ii). Без ограничения общности считаем, что $A = I$, $t_o = 0$. В силу Лемм 3.1 – 3.3 достаточно найти асимптотики вероятности $\mathrm{P}\{\sup_{T_\delta} X^c(t) > u\}$, $u \to \infty$ для значений c, близких к 1. Введем обозначения

$$A_{l,\Delta} = K\left(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right) + l\cdot\Delta = \left\{t \in T : \left(l_i - \frac{1}{2}\right)\Delta_i \le t_i \le \left(l_i + \frac{1}{2}\right)\Delta_i, \quad i = \overline{1,n}\right\},$$

$$\Delta_i = \lambda u^{-2/\alpha_{(i)}}, \quad l \in Z^n.$$

Согласно (1.2) имеем

$$\delta^{1/\alpha_{(i)}}/\Delta_i \to \infty, \quad u \to \infty, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.26}$$

Следовательно, по Лемме 3.1 множества $A_{l,\Delta}$ образуют разбиение множества T_δ. Как и прежде, обозначим через $Y^\pm$ два гауссовских поля с нулевыми средними, единичными дисперсиями и ковариационными функциями вида

$$r^\pm(t) = \exp[-|D^\pm t|_\alpha], \quad D^\pm = ((1\pm\varepsilon)d_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}, \quad \varepsilon > 0.$$

По Теореме 2.1, для любого $\varepsilon > 0$ и для достаточно больших u имеем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} Y^-(t)\sigma_\varepsilon(t) > u\right\} \le \mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} X^\varepsilon(t) > u\right\} \le \mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} Y^+(t)\sigma_\varepsilon(t) > u\right\}. \quad (3.27)$$

Далее, опуская индексы "$\pm$", имеем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{K(-\Delta/2,\Delta/2)} Y(t)/(1+\mathbf{c}|t|_\alpha) > u\right\} \le \mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} Y(t)\sigma_\varepsilon(t) > u\right\} \le$$

$$\le \mathbf{P}\left\{\sup_{K(-\Delta/2,\Delta/2)} Y(t)/(1+\mathbf{c}|t|_\alpha) > u\right\} + \quad (3.28)$$

$$+\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta \setminus K(-\Delta/2,\Delta/2)} Y(t)/(1+\mathbf{c}|t|_\alpha) > u\right\}.$$

Применение Леммы 2.2 позволяет записать

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{K(-\Delta/2,\Delta/2)} Y(t)/(1+\mathbf{c}|t|_\alpha) > u\right\} =$$

$$= (\sqrt{2\pi}u)^{-1}\exp(-u^2/2)H_\alpha^{\mathbf{c}}((-\overline{\lambda}/2,\overline{\lambda}/2);D)(1+\kappa(u)), \quad (3.29)$$

где $\Delta = g_u\overline{\lambda}$, $\overline{\lambda} = (\lambda,...,\lambda) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c} = (c,...,c) \in \mathbb{R}^k$, $\kappa(u) \to 0$, $u \to \infty$.

Оценим сверху оставшееся слагаемое в (3.28). Пусть $N_i(u) = \mathrm{Ent}(\delta^{1/\alpha_{(i)}}/\Delta_i)$, $i = \overline{1,n}$, где $\mathrm{Ent}(x)$ означает целую часть числа x. В силу (3.26) имеем $N_i \to \infty$ при $u \to \infty$, $i = 1,...,n$. Используя однородность поля $Y(t)$ и Леммы 2.2 и 3.1, получаем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta \setminus K(-\Delta/2,\Delta/2)} Y(t)/(1+\mathbf{c}|t|_\alpha) > u\right\} \le \sum_{l\in\mathcal{N}} \mathbf{P}\left\{\sup_{A_{l,\Delta}} Y(t) > uq_l\right\} =$$

$$= \sum_{l\in\mathcal{N}} (\sqrt{2\pi}u)^{-1} q_l^{-1}\exp(-u^2q_l^2/2)H_\alpha(\tilde{q}_l\cdot\overline{\lambda};D)(1+\kappa_1(uq_l)), \quad (3.30)$$

где

$$\mathcal{N} = \{l : 0 \le |l_i| \le N_i,\ i = \overline{1,n},\ l \ne 0\},$$

$$q_l = 1 + \frac{c}{2}u^{-2}|l\cdot\overline{\lambda}|_\alpha, \quad \tilde{q}_l = (q_l^{2/\alpha_{(1)}},...,q_l^{2/\alpha_{(n)}}),$$

и $\kappa_1(x) \to \infty$ при $x \to 0$. В силу (2.2), для достаточно больших λ

$$H_\alpha(\tilde{q}_l\cdot\overline{\lambda};D) \le C_1\lambda^n H_{\alpha_1} \quad q_l^{-1}\exp(-u^2q_l^2/2) \le C_2\exp(-\frac{u^2}{2} - C_3|l\cdot\overline{\lambda}|_\alpha).$$

Здесь и далее $C_i > 0$. Следовательно, учитывая (3.30), имеем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta\setminus K(-\Delta/2,\Delta/2)} Y(t)/(1+c|t|_\alpha) > u\right\} \le$$

$$\le C_4 u^{-1}\exp(-u^2/2)\lambda^n \sum_{l\in Z^n, l\neq 0} \exp[-C_3|l\cdot\overline{\lambda}|_\alpha] = u^{-1}\exp(-u^2/2)\kappa_2(\lambda), \quad (3.31)$$

где $\kappa_2(\lambda) \to 0$, $\lambda \to \infty$. Итак, учитывая (3.28), (3.29) и (3.31), заключаем, что

$$H^c_\alpha((-\overline{\lambda}/2,\overline{\lambda}/2);D) \le \liminf_{u\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} Y(t)\sigma_c(t) > u\right\}\exp(u^2/2)\sqrt{2\pi}u \quad (3.32)$$

и

$$\limsup_{u\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} Y(t)\sigma_c(t) > u\right\}\exp(u^2/2)\sqrt{2\pi}u \le$$

$$\le H^c_\alpha((-\overline{\lambda}/2,\overline{\lambda}/2);D) + \kappa_2(\lambda). \quad (3.33)$$

Из определения величины $H^c_\alpha((-\overline{\lambda}/2,\overline{\lambda}/2);D)$ следует, что она является монотонно возрастающей функцией от λ. Следовательно, существует предел

$$\lim_{\lambda\to\infty} H^c_\alpha((-\overline{\lambda}/2,\overline{\lambda}/2);D) = H^c_\alpha(D).$$

Покажем, что этот предел конечен. Используя (2.2) и неравенство $H^c_\alpha((-\overline{\lambda}/2,\overline{\lambda}/2);D) \le H_\alpha(\overline{\lambda};D)$, получаем для достаточно больших λ_o

$$H^c_\alpha((-\overline{\lambda}_o/2,\overline{\lambda}_o/2);D) \le C_5 H_\alpha \lambda_o^n,$$

Отсюда в силу (3.33) следует, что

$$\limsup_{u\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} Y(t)\sigma_c(t) > u\right\} u\exp(u^2/2) < \infty.$$

Из этого и (3.32) получается $H^c_\alpha(D) < \infty$. Итак, учитывая Леммы 3.2 и 3.3, соотношения (3.27), (3.32) и (3.33), для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\liminf_{u\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\}\exp(u^2/2)\sqrt{2\pi}u \ge H^{1+\overline{\varepsilon}}_\alpha((-\overline{\lambda}/2,\overline{\lambda}/2);D^-), \quad (3.34)$$

и

$$\limsup_{u\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\}\exp(u^2/2)\sqrt{2\pi}u \le$$

$$\leq H_\alpha^{1-\overline{\varepsilon}}((-\overline{\lambda}/2, \overline{\lambda}/2); D^+) + \kappa_2(\lambda), \qquad (3.35)$$

где $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon, ..., \varepsilon) \in \mathbb{R}^k$. Функции $H_\alpha^{1\pm\overline{\varepsilon}}((-\overline{\lambda}/2, \overline{\lambda}/2); D^{\mp})$ непрерывны по ε, поэтому устремляя $\varepsilon \to 0$ и затем $\lambda \to \infty$ в (3.34) и (3.35) получаем утверждение (ii).

Утверждения (iii) – (iv) можно вывести с учетом формул (2.5) и (2.6).

ABSTRACT. Let $X(t)$ be a mean zero Gaussian locally homogeneous random field defined on a compact set $T \subset \mathbb{R}^n$. In the paper the theorems on the asymptotic of probability $\mathrm{P}\{\sup_{t\in T} X(t) > u\}$, $u \to \infty$ are proved. Research method is the so-called Double Sum Method.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Pickands III, "Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 145, pp. 51 – 73, 1969.
2. C. Qualls, H. Watanabe, "Asymptotic properties of Gaussian random fields", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 177, pp. 155 – 171, 1973.
3. Ю. К. Беляев, В. И. Питербарг, "Асимптотика среднего числа A-точек выбросов гауссовского поля за высокий уровень", В сб. "Выбросы случайных полей", М., изд. МГУ, стр. 62 – 89, 1972.
4. В. И. Питербарг, В. П. Присяжнюк, "Асимптотика вероятности большого выброса гауссовского нестационарного процесса", Теория Вероятн. и Мат. Стат., Киев, вып. 18, стр. 121 – 133, 1978.
5. S. M. Berman, "Sojourns and extremes of Gaussian processes", Ann. Prob., vol. 2, no. 6, pp. 999 – 1026, 1974.
6. В. Р. Фаталов, " Точная асимптотика функции распределения максимума гауссовского неоднородного случайного поля", Докл. АН Арм.ССР, том 77, № 1, стр. 25 – 29, 1983.
7. В. Р. Фаталов, "Асимптотики вероятностей больших уклонений гауссовских полей и их применения в теории статистик Колмогорова–Смирнова", Теория Вероятн. и Примен., том 29, № 1, стр. 178 – 180, 1984.
8. Н. Н. Ченцов, "Винеровские случайные поля от нескольких параметров" ДАН СССР, том 106, № 4, стр. 607 – 609, 1956.
9. В. И. Питербарг, Асимптотические Методы в Теории Гауссовских Случайных Процессов, М., МГУ, 1988.
10. D. Slepian, "The one-sided barrier problem for the Gaussian noise", Bell System Tech. J., vol. 41, no. 2, pp. 463 – 501, 1962.
11. Г. М. Фихтенгольц, Курс Дифференциального и Интегрального Исчисления, том 3, Наука, М., 1970.

30 Июня 1992 Ереванский государственный университет

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ КЛАССА $\widetilde{W}^r H_p^\omega$ РЯДАМИ ИЗ ГЛАДКИХ СПЛАЙНОВ И ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ ИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

А. А. Китбалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 27, № 6, 1992

Хорошо известны представления функций конечной гладкости рядами из гладких сплайнов и применение этих представлений в различных задачах теории приближений (см. [1]). В настоящей заметке даётся представление сплайновыми рядами периодических функций из более общих классов $\widetilde{W}^r H_p^\omega$, у которых гладкость r-той производной задаётся в терминах интегральных p-тых модулей непрерывности. На основе этого представления вычисляется порядок сложности по Колмогорову ε-приближённого вычисления этих классов функций.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Ниже всегда : $r, k \in \mathbf{Z}_+$, $n = 2^k, 1 \leq p \leq \infty$. Через I обозначим единичный интервал $[0, 1]$, $L_p(I)$ – пространство интегрируемых на I в p-той степени функций, $\|\cdot\|_{L_p(I)}$ — норма в нём.

Для $\delta \geq 0$ и однопериодической функции $x(\cdot) \in L_p(I)$ определим интегральный модуль непрерывности :

$$\omega(x(\cdot), \delta)_p = \sup_{|\tau| \leq \delta} \|x(\cdot + \tau) - x(\cdot)\|_{L_p(I)},$$

где $W_p^r(I)$ — класс функций Соболева, т. е. класс r-тых интегралов от функций из $L_p(I)$.

Определим теперь исследуемый класс функций $\widetilde{W}^r H_p^\omega(I)$.

Пусть $\omega(\cdot)$ — фиксированный модуль непрерывности. Для $r = 0$, $\widetilde{W}^0 H_p^\omega(I) = H_p^\omega(I)$ определяется как класс однопериодических функций

$x(\cdot) \in L_p(I)$, удовлетворяющих условию $\omega(x(\cdot),\delta)_p = O(\omega(\delta))$. При $r = 1,2,\ldots$, $\widetilde{W}^r H_p^\omega(I)$ есть класс r-тых периодических интегралов от функций из $H_p^\omega(I)$. (Определение и простейшие свойства модулей непрерывности, классов функций $W_p^r(I)$ и $\widetilde{W}^r H_p^\omega(I)$ можно найти, например, в [2]).

Через $\widetilde{S}_n^r(I)$ обозначим линейное пространство периодических сплайнов степени r минимального дефекта по равномерному разбиению I на $n = 2^k$ частей. В пространстве $\widetilde{S}_n^r(I)$ существует базис из B- сплайнов $\{N_{i,k}(\cdot)\}_{i=0}^{n-1}$ (см. [2]), нормированных условием $\sum\limits_{i=0}^{n-1} N_{i,k}(t) = 1$, $t \in I$.

Для величин α, β будем писать $\alpha \ll \beta$, если существует константа $c > 0$ (зависящая только от r и p) такая, что

$$\alpha \le c\beta \quad \alpha \gg \beta \Longleftrightarrow \beta \ll \alpha \quad \alpha \asymp \beta \Longleftrightarrow \alpha \ll \beta \ll \alpha.$$

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ КЛАССА $\widetilde{W}^r H_p^\omega(I)$ РЯДАМИ ИЗ ГЛАДКИХ СПЛАЙНОВ

Теорема 1. *Пусть $x(\cdot) \in \widetilde{W}^r H_p^\omega(I)$, тогда $x(\cdot)$ представима в виде сходящегося сплайнового ряда*

$$x(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} a_{i,k} N_{i,k}(\cdot),$$

где $s_k(\cdot) \in \widetilde{S}_n^r(I)$ и

$$\|s_k(\cdot)\|_{L_p(I)} \asymp 2^{-rk}\omega(x^{(r)}(\cdot),2^{-k})_p,$$

$$\|\{a_{i,k}\}_{i=0}^{n-1}\|_{l_p^n} \ll 2^{-rk+\frac{k}{p}}\omega(x^{(r)}(\cdot),2^{-k})_p.$$

Доказательство Теоремы 1 опирается на следующие три леммы.

Лемма 1. (см. [3])

$$s_k(\cdot) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,k} N_{i,k}(\cdot) \in \widetilde{S}_n^r(I) \Rightarrow \|s_k(\cdot)\|_{L_p(I)} \asymp 2^{-\frac{k}{p}}\|\{a_{i,k}\}_{i=0}^{n-1}\|_{l_p^n}. \tag{1}$$

Лемма 2. (см. [4]) *Существует проектор $S_K : L_p(I) \to \widetilde{S}_n^r(I)$ с нормой (оператора из $L_p(I)$ в $L_p(I)$) $\|S_K\| \asymp 1$.*

Лемма 3. *Для любого* $x(\cdot) \in W_p^r(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}), i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ *существует полином* $p(\cdot)$ *степени* r *такой, что*

$$\|x(\cdot) - p(\cdot)\|^p_{L_p(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})} \ll n^{-rp+1} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} |x^{(r)}(t+\tau) - x^{(r)}(\tau)|^p \, d\tau dt.$$

Доказательство Леммы 3. Доказательство для $r = 0$ содержится в [5], стр. 82. Для $r = 1, 2, \ldots$ представим $x(\cdot)$ в виде ряда Тейлора с остаточным членом в интегральной форме :

$$x(t) = x\left(\frac{i}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{(r-1)!} x^{(r-1)}\left(\frac{i}{n}\right)\left(t - \frac{i}{n}\right)^{r-1} + \frac{1}{(r-1)!}\int_{\frac{i}{n}}^{t} (t-\tau)^{r-1} x^{(r)}(\tau) d\tau$$

и возьмём

$$p(t) = x\left(\frac{i}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{(r-1)!} x^{(r-1)}\left(\frac{i}{n}\right)\left(t - \frac{i}{n}\right)^{r-1} + \frac{n}{r!}\left(t - \frac{i}{n}\right)^{r} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} x^{(r)}(\xi)\, d\xi.$$

Дальнейшие выкладки аналогичны случаю $r = 0$.

Лемма 4. *Пусть* $x(\cdot) \in \widetilde{W}^r H_p^\omega(I)$, *тогда*

$$\|x(\cdot) - S_k x(\cdot)\|_{L_p(I)} \ll 2^{-kr} \omega(x^{(r)}(\cdot), 2^{-k})_p.$$

Доказательство. Доказательство основано на Леммах 2 и 3. Имеем

$$\|x(\cdot) - S_k x(\cdot)\|^p_{L_p(I)} = \sum_{i=0}^{n-1} \|x(\cdot) - S_K x(\cdot)\|^p_{L_p(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \|x(\cdot) - p_i(\cdot) - S_K(x(\cdot) - p_i(\cdot))\|^p_{L_p(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})} \le \sum_{i=0}^{n-1} \Big[\|x(\cdot) - p_i(\cdot)\|_{L_p(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})} +$$

$$+ \|S_K x(\cdot) - p_i(\cdot)\|_{L_p(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})}\Big]^p \ll \sum_{i=0}^{n-1} \|x(\cdot) - p_i(\cdot)\|^p_{L_p(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})} \ll$$

$$\ll \sum_{i=0}^{n-1} n^{-rp+1} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} |x^{(r)}(t+\tau) - x^{(r)}(\tau)|^p \, d\tau dt =$$

$$= n^{-rp+1} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \int_{0}^{1} |x^{(r)}(t+\tau) - x^{(r)}(\tau)|^p \, d\tau dt \ll$$

$$\ll n^{-rp+1} n^{-1} \sup_{|t| \le \frac{1}{n}} \int_0^1 |x^{(r)}(t+\tau) - x^{(r)}(\tau)|^p \, d\tau \ll n^{-rp} \omega^p(x^{(r)}(\cdot), \frac{1}{n})_p,$$

откуда следует искомое неравенство.

Доказательство Теоремы 1. Сопоставим функции $x(\cdot)$ из $\widetilde{W}^r H_p^\omega(I)$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k(\cdot) = S_o x(\cdot) + (S_1 x(\cdot) - S_o x(\cdot)) + \ldots + (S_{k+1} x(\cdot) - S_k x(\cdot)) + \ldots$$

Поскольку

$$\widetilde{S}_n^r(I) \subset \widetilde{S}_{2n}^r(I), \quad \text{то} \quad S_{k+1} x(\cdot) - S_k x(\cdot) = s_{k+1}(\cdot) \in \widetilde{S}_{2n}^r(I).$$

По Лемме 4, частные суммы ряда $x_N(t) = \sum_{k=0}^{N} s_k(t) = S_N x(t)$ стремятся к $x(t)$ со скоростью геометрической прогрессии.

Докажем первое неравенство Теоремы. Имеем

$$\|s_k(\cdot)\|_{L_p(I)} = \|S_{k+1} x(\cdot) - S_k x(\cdot)\|_{L_p(I)} \leq$$

$$\leq \|S_k x(\cdot) - x(\cdot)\|_{L_p(I)} + \|x(\cdot) - S_{k-1} x(\cdot)\|_{L_p(I)} \ll$$

$$\ll 2^{-kr} \omega(x^{(r)}(\cdot), 2^{-k})_p + 2^{-kr+r} \omega(x^{(r)}(\cdot), 2^{-k+1})_p \ll 2^{-kr} \omega(x^{(r)}(\cdot), 2^{-k})_p$$

Из первого неравенства Теоремы и Леммы 1 следует второе неравенство.

Замечание 1. При $n \leq r$ все функции $s(\cdot) \in \widetilde{S}_n^r(I)$ тождественно равны нулю (см. [2]), поэтому суммирование в $\sum_{k=0}^{\infty} s_k(\cdot)$ начинается с номера $k_o = [\log_2 r]$.

3. ПОРЯДОК СЛОЖНОСТИ ПО КОЛМОГОРОВУ ПРИБЛИЖЁННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА $\widetilde{W}^r H_p^\omega(I)$

Многими авторами развиваются идеи и методы подсчёта сложности вычислительного алгоритма или задачи (см., например, [7]). В 1962 А. Н. Колмогоров [6] предложил определение сложности к задаче о вычислении непрерывной функции с точностью до ε. Подход Колмогорова основан на сведении проблемы к вычислению сложности булевых функций, которая была определена К. Шенноном в конце сороковых годов. Подробные определения, свойства и обзор известных результатов по колмогоровской сложности ε–приближённого вычисления непрерывных функций и классов непрерывных функций даны в статье Асарина [8]. В частности, в [8] содержится алгоритм, вычисляюший с точностью до ϵ произвольную функцию $x(\cdot) \in W^{\alpha}_{\infty}(I)$ и имеющий сложность в смысле Колмогорова

$$O\left([\epsilon^{\frac{1}{\alpha}} \log_2 \left(\frac{1}{\epsilon}\right)]^{-1}\right)$$

(здесь α — произвольное положительное число). Эта же оценка остаётся верной и для классов функций $W^{\alpha}_{p}(I)$, $1 \le p \le \infty$, $\alpha > \dfrac{1}{p}$ (см. [9]), и несложно обобщается на многомерный случай (см. [10]).

Опираясь на [8] М. О. Макаров вычислил порядок колмогоровской сложности класса $\widetilde{W}^r H^{\omega}_{\infty}(I)$ (доклад на математической конференции в Алуште, 1990). Приближение гладкими сплайнами, которое использовал Ю. Маковоз [9] для вычисления колмогоровской сложности, позволяет обобщить результат Макарова для классов функций $\widetilde{W}^r H^{\omega}_{p}(I)$ с произвольным p, $1 \le p \le \infty$.

Обозначим через $\widetilde{W}^r H^{\omega}_{p}$ подмножество тех функций из класса $\widetilde{W}^r H^{\omega}_{p}(I)$, для которых $\omega(x^{(r)}(\cdot), \delta) \le \omega(\delta)$ и значения которых лежат в $[-1, 1]$, а через $K_{\epsilon}(\widetilde{W}^r H^{\omega}_{p})$ — колмогоровскую сложность ϵ-приближённого вычисления этого класса функций.

Теорема 2. *Пусть δ — решение уравнения $\delta^r \omega(\delta) = \epsilon$, $r > \dfrac{1}{p}$, тогда*

$$K_{\epsilon}(\widetilde{W}^r H^{\omega}_{p}) \asymp \frac{\delta^{-1}}{\log_2 \delta^{-1}}.$$

Доказательство. Получение нижней оценки в Теореме 2 стандартно. Сложность ϵ-приближённого вычисления класса функций W оценивается через его 2ϵ-ёмкость $C_{2\epsilon}(W)$ (см. [8]) : $K_{\epsilon}(W) \gg \frac{C_{2\epsilon}(W)}{\log_2 C_{2\epsilon}(W)}$. Затем используется известная оценка ёмкости класса $\widetilde{W}^r H^{\omega}_{p}$:

$$C_{2\epsilon}(\widetilde{W}^r H^{\omega}_{p}) \ge C_{2\epsilon}(\widetilde{W}^r H^{\omega}_{\infty}) \gg \delta^{-1}.$$

Для доказательства оценки сверху заметим, что для произвольной функции $x(\cdot) \in \widetilde{W}^r H^{\omega}_{p}$ частные суммы ряда из гладких сплайнов $x_N(\cdot)$ построенные в Теореме 1, дают следующую оценку приближения

$$||x(\cdot) - x_N(\cdot)||_{C(I)} \ll 2^{-rN + \frac{N}{p}} \omega(2^{-N}).$$

Из Леммы 1, второго неравенства Теоремы 1 и с учётом того, что $r > \frac{1}{p}$ мы имеем :

$$\|x(\cdot) - x_N(\cdot)\|_{C(I)} = \|\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} a_{i,k}N_{i,k}(\cdot)\|_{C(I)} \leq$$

$$\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \|\sum_{i=0}^{n-1} a_{i,k}N_{i,k}(\cdot)\|_{C(I)} \ll \sum_{k=N+1}^{\infty} \max_{0\leq i\leq n-1} |a_{i,k}| \leq$$

$$\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} (\sum_{i=0}^{n-1} |a_{i,k}|^p)^{\frac{1}{p}} \ll \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-kr+\frac{k}{p}}\omega(2^{-k}) \leq$$

$$\leq \omega(2^{-N}) \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-kr+\frac{k}{p}} \ll 2^{-Nr+\frac{N}{p}}\omega(2^{-N}).$$

Пусть $\varepsilon = 2^{-mr}\omega(2^{-m})$. Выбрав $N = [m\frac{r}{r-\frac{1}{p}}]$ будем иметь $\|x(\cdot) - x_N(\cdot)\|_{C(I)} \ll \varepsilon$. Это позволяет доказать лемму, аналогичную Лемме 2 в [9]. Дальнейшее доказательство (построение алгоритма вычисления функции $x_N(\cdot)$ и подсчёт сложности этого алгоритма) повторяет доказательство Маковоза с соответствующими изменениями.

Замечание 2. Условие $r > \frac{1}{p}$ обеспечивает компактность класса $\widetilde{W}^r H_p^\omega$ в пространстве $C(I)$.

Замечание 3. Рассмотрение периодических классов функций $\widetilde{W}^r H_p^\omega(I)$ в Теоремах 1 и 2 связано лишь с упрощением технических деталей формулировок и доказательств. Утверждения обеих теорем остаются в силе и для непериодических классов функций $W^r H_p^\omega(I)$ и соответствующих им непериодических сплайнов $S_n^r(I)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Hollig, "Diameters of classes of smooth functions", Quantitative Approximation, Acad. Press, Orlando Fla., pp. 163 – 175, 1980.
2. Н. П. Корнейчук, Сплайны в Теории Приближения, Наука, Москва, 1984.
3. C. de Boor, "Splines as linear combinations of B–splines", Approximation Theory 2, Acad. Press, pp. 1 – 47, 1976.
4. C. de Boor, G. Fix, "Spline approximation by quasiinterpolants", Journal Approximation Theory, vol. 7, pp. 19 – 45, 1973.
5. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Наука, Москва, 1984.

6. А. Н. Колмогоров, "Различные подходы к оценке трудности приближённого задания и вычисления функций," в кн. : Теория Информации и Теория Алгоритмов, Наука, Москва, стр. 199 – 204, 1984.
7. Дж. Трауб, Г. Васильковский, Х. Вожняковский, Информация, Неопределённость, Сложность, Мир, Москва, 1988.
8. Е. А. Асарин, "О сложности равномерных приближений непрерывных функций," Успехи Матем. Наук, том 39, № 3, стр 157 – 169, 1984.
9. Yu. Makovoz, "On the Kolmogorov complexity of functions of finite smoothness", Journal of Complexity, vol. 2, no. 2, pp. 121–130, 1986.
10. А. А. Китбалян, "О колмогоровской сложности неизотропных классов гладких функций," Депонировано в ВИНИТИ АН СССР, № 7077 – Б89, 1989.

22 Мая 1992

Ереванский государственный университет

CONTENTS

VOLUME 27 **NUMBERS 1 — 6** **1992**

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)

NUMBER

R. G. Airapetyan, G. R. Alexandryan
Parametrix of the mixed problem for the hyperbolic systems of first order partial differential equations 6

R. V. Ambartzumian
Remarks on measure generation in the space of lines in R^3 . . . 5

A. A. Andrian
A Cauchy–Riemann–Hilbert type problem for irregular partial differential equations 3

R. H. Aramian
Recovering rose of directions from flag densities in R^3 5

S. A. Ayunts
On exact widths of a functional class defined by convolution . . 4

A. G. Bagdasarian
Interpolation of functional spaces with differing anisotropies . . 4

G. A. Barsegian
Tangent variation principle in complex analysis 3

S. H. Dalalian
Main theorem in categorial Galois theory 4

S. H. Dalalyan
Main theorem in categorial Galois theory in regular case 6

V. R. Fatalov, W.-D. Richter
Gaussian probabilities of large deviation for fixed or increasing dimension 1

V. R. Fatalov
Exact asymptotics of large deviations for Gaussian measures on Hilbert space 5

V. R. Fatalov
Asymptotics of large deviation probabilities for Gaussian fields 6

A. L. Gamarian, H. B. Nersessian, H. A. Ohanian
Numerical solution of a Fredholm integral equation by the method of automatic grid condensation 1

L. M. Hakobian
Quasimaximal semigroups 3

E. A. Haroutunian, M. E. Haroutunian, A. E. Avetissian
Multiple-access channel achievable rates region and reliability . . . 5

V. A. Javrian
On solvability of inverse Sturm–Liouville problem 4

A. H. Karapetyan
Integral representation in tube domains over affine-homogeneous cones 3

A. A. Kitbalian
Representation of functions of classes $\widetilde{W}^r H_p^\omega$ by series of smooth splines and estimation of their calculation complexity 6

D. H. Martirosian
Gibbs distribution in the Ising model near points of the first order phase transition 3

H. B. Nersessian
On efficient numerical solution of integral equations 2

V. K. Oganian
On configurations generated by random chords of a planar convex domain 1

V. K. Oganian
On random approximation of convex body in $\mathbb{R}^3$ 2

V. K. Oganian, A. Abdallah
On generation of measures in the space of lines by Finsler metrics 5

R. L. Shachbagian, G. S. Hakobian
Construction of attractor for high-order nonlinear parabolic equation 4

F. A. Shamoyan
Constructive description of finitely generated ideals in an algebra of functions analitic in an open disc and smooth in its closure . . 4

F. A. Talalyan
Monotone functions of several variables and multidimensional second mean-value theorem 2

N. E. Tovmasian
Dirichlet type problem for a class of higher-order improperly elliptic equations 1

G. V. Virabian
On the Dirichlet problem for a biwave equation 1

K. H. Yagdjian
Fundamental solution of the Cauchy problem for hyperbolic operators with multiple characteristics 1

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 27 №№ 1 — 6 1992

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Номер

Р. Г. Айрапетян, Г. Р. Александрян
Параметрикс смешанной задачи для гиперболической системы уравнений с частными производными первого порядка 6

Л. М. Акопян
Квазимаксимальные полугруппы 3

Р. В. Амбарцумян
Замечания о порождении мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$ 5

А. А. Андрян
Задача типа Коши–Римана–Гильберта для нерегулярных дифференциальных уравнений в частных производных . . 3

Р. Г. Арамян
Восстановление розы направлений по флаговой плотности в $\mathbb{R}^3$ 5

Е. А. Арутюнян, М. Е. Арутюнян, А. Э. Аветисян
Область достижимых скоростей канала множественного доступа и надежности 5

С. А. Айунц
О точных поперечниках класса функций определяющихся свёрткой 4

А. Г. Багдасарян
Интерполяция некоторых функциональных пространств разной анизотропии 4

Г. А. Барсегян
Принцип вариации касательной в комплексном анализе . . 3

Г. В. Вирабян
О задаче Дирихле для биволнового уравнения 1

А. Л. Гамарян, А. Б. Нерсесян, Г. А. Оганян
Численное решение интегрального уравнения Фредгольма методом автоматического сгущения сетки 1

С. Г. Далалян
Основная теорема в категорной теории Галуа 4

С. Г. Далалян
Основная теорема в категорной теории Галуа в регулярном случае 6

А. О. Карапетян
Интегральные представления в трубчатых областях над аффинно-однородными конусами 3

А. А. Китбалян
Представление функций класса $\widetilde{W^r H_p^\omega}$ рядами из гладких сплайнов и оценка сложности их вычислений 6

Д. Г. Мартиросян
Распределения Гиббса в модели Изинга вблизи точек фазового перехода первого рода 3

А. Б. Нерсесян

Об эффективном численном решении интегральных уравнений 2

В. К. Оганян

О конфигурациях порождённых случайными хордами плоской выпуклой области 1

В. К. Оганян

О случайной аппроксимации выпуклых тел в $\mathbb{R}^3$ 2

В. К. Оганян, А. Абдалла

О построении мер в пространстве прямых финслеровыми метриками 5

Ф. А. Талалян

Монотонные функции нескольких переменных и многомерная теорема о среднем 2

Н. Е. Товмасян

Задача типа Дирихле для одного класса несобственных эллиптических уравнений высшего порядка 1

В. Р. Фаталов, В.-Д. Рихтер

Гауссовские вероятности больших уклонений для фиксированной и возрастающей размерностей 1

В. Р. Фаталов

Точные асимптотики больших уклонений гауссовских мер в гильбертовом пространстве 5

В. Р. Фаталов

Асимптотики вероятностей больших уклонений гауссовских полей 6

Ф. А. Шамоян

Конструктивное описание конечнопорожденных идеалов в алгебрах аналитических в круге функций, гладких вплоть до его границы 4

Р. Л. Шахбагян, Г. С. Акопян

Построение аттрактора одного модельного нелинейного параболического уравнения высокого порядка 4

В. А. Яврян

Об условиях разрешимости обратной задачи Штурма–Лиувилля 4

К. А. Ягджян

Фундаментальное решение задачи Коши для гиперболических операторов с многомерными характеристиками 1

CONTENTS

VOLUME 27 **NUMBER 6** **1992**

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)

PAGES

Parametrix of the mixed problem for the hyperbolic systems of first order partial differential equations
R. G. Airapetyan, G. R. Alexandryan 1

Main theorem in categorial Galois theory in regular case
S. H. Dalalyan 28

Asymptotics of large deviation probabilities for Gaussian fields
V. R. Fatalov 59

Brief Communications

Representation of functions of classes $\widetilde{W}^r H_p^\omega$ by series of smooth splines and estimation of their calculation complexity
A. A. Kitbalian 86

Index 93

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 27 НОМЕР 6 1992

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы

Параметрикс смешанной задачи для гиперболической системы уравнений с частными производными первого порядка
Р. Г. Айрапетян, Г. Р. Александрян 1

Основная теорема в категорной теории Галуа в регулярном случае
С. Г. Далалян 28

Асимптотики вероятностей больших уклонений гауссовских полей
В. Р. Фаталов 59

Краткие сообщения

Представление функций класса $\widetilde{W}^r H_p^\omega$ рядами из гладких сплайнов и оценка сложности их вычислений
А. А. Китбалян 86

Содержание 26-го тома 93