ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966г.
Выходит 6 раз в году
на русском и английском языках

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրատարակել Հայաստանի գիտությունների ազգային ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետեւյալ կանոնները.

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի, քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը ոչ ավելի, քան 5 – 6 մեքենագրված էջ: Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածները ընդունվում են հրատարակման բացառիկ դեպքերում խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն եւ ռուսերեն լեզուներով: Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները իրենց ցանկությամբ կարող են հրատարակվել համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սեւ մատիտով երկու գծերով ներքեւում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերեւում: Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները՝ շրջանցվեն սեւ մատիտով, իսկ կոտրիկ տառերը ընդգծվեն ալիքաձեւ գծով:

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը եւ տեղը տեքստում էջի ձախ մասում:

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը եւ էջերը: Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (բնագրի համեմատությամբ) չեն թույլատրվում:

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը, եւ խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը եւ հայրանունը:

Խմբագրության հասցեն　*Երեւան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ:*
Գիտությունների ազգային ակադեմիայի Տեղեկագիր
սերիա «Մաթեմատիկա»:

ЗАМЕЧАНИЯ О ПОРОЖДЕНИИ МЕР В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМЫХ В $\mathbb{R}^3$

Р. В. Амбарцумян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 27, № 5, 1992

В работе рассмотрены два разных способа порождения мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$: с помощью функционалов, определяемых в терминах системы пластинок в $\mathbb{R}^3$ и с помощью метрик в $\mathbb{R}^3$. При первом подходе полная аналогия с изученным ранее плоским случаем может быть достигнута только при дополнительном предположении о существовании плотности. Во втором подходе теорема о порождении плоских мер линейно-аддитивными непрерывными псевдометриками обобщается на $\mathbb{R}^3$ по крайней мере в одном направлении в общем случае и в обоих направлениях в трансляционно-инвариантном случае.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Результаты комбинаторной интегральной геометрии на плоскости (см. [1], [2]) допускают следующую интерпретацию. Предположим, что на каждой прямой g в $\mathbb{R}^2$ определена знакопеременная мера m_g. Тогда при выполнении некоторых условий (см. ниже Предложение 1) существует единственная знакопеременная мера μ в простанстве $\mathbf{G}$ прямых в $\mathbb{R}^2$, для которой для любой иглы (отрезка) $\nu \subset \mathbb{R}^2$ имеет место

$$\mu([\nu]) = m_g(\nu),$$

где $\nu \subset g$ и $[\nu] = \{g \in \mathbf{G} : g \text{ пересекает } \nu\}$ (в этом случае m_g называется *проекцией* меры μ на прямую g).

При этом μ является неотрицательной мерой тогда и только тогда, когда функция F, определенная на иглах посредством $F(\nu) = m_g(\nu)$, является псевдометрикой в $\mathbb{R}^2$. Мотивом настоящего исследования был вопрос : справедливы ли подобные соотношения для семейств мер m_e, которые заданы на плоскостях $e \subset \mathbb{R}^3$? Пусть задано семейство мер m_e, мы ищем меру μ в пространстве Γ прямых в $\mathbb{R}^3$, для которой m_e являются проекциями т.е. $\mu([\pi]) = m_e(\pi)$, где $\pi \subset e$ и $[\pi] = \{g \in G : g$ пересекает $\pi\}$ для каждой пластины $\pi \subset \mathbb{R}^3$ (пластина – ограниченная выпуклая часть плоскости, лежащая в $\mathbb{R}^3$).

Для удобства читателей мы даем в §1 полную логическую структуру получения плоских результатов в [1] с помощью функционального подхода (и пользуясь случаем, переформулируем их для знакопеременных мер, так как в [1] и [2] рассмотрены только неотрицательные меры). В §2 показано, как аналогичный функциональный подход применить для порождения мер в пространстве Γ.

В §§4,5 изучены взаимосвязи между метриками в $\mathbb{R}^3$ и мерами в Γ. Здесь основным результатом является следующее достаточное условие существования и единственности (неотрицательной) меры μ в пространстве Γ : меры m_e должны быть порождены гладкой линейно-аддитивной метрикой F в $\mathbb{R}^3$. А именно, каждая m_e должна быть образом меры $\mu_{F,e} \times \mu_{F,e}$ при отображении

$$\text{пара прямых в } e \longmapsto \text{ точка их пересечения},$$

где $\mu_{F,e}$ – мера, порожденная сужением F на e, как это обычно делается в интегральной геометрии на плоскости. Мы покажем, что в трансляционно-инвариантном случае это условие является также и необходимым.

Большинство рассуждений не зависят от предположения о трансляционной инвариантности, за исключением §4, где мы пользуемся некоторыми фактами из теории выпуклых тел. Здесь основными источниками являются [2], [3], [6].

Результаты, публикуемые впервые, названы предложениями, в то время, как термин теорема сохранен за уже опубликованными результатами

§1. ЭКСКУРС В КОМБИНАТОРНУЮ ИНТЕГРАЛЬНУЮ ГЕОМЕТРИЮ НА ПЛОСКОСТИ

Мы будем пользоваться следующими обозначениями :

$\mathbf{G}$ – пространство прямых в $\mathbb{R}^2$, $g \in \mathbf{G}$,

μ_o – единственная (с точностью до постоянного множителя) мера на $\mathbf{G}$, инвариантная относительно группы евклидовых движений в $\mathbb{R}^2$,

dg – элемент меры μ_o,

ν – *игла* (отрезок прямой в $\mathbb{R}^2$),

$[\nu] = \{g \in \mathbf{G} : g$ пересекает иглу $\nu\}$,

$r\{\nu_i\}$ – минимальное кольцо подмножеств $\mathbf{G}$, которое содержит все множества $[\nu_i]$ для некоторой конечной совокупности игл $\{\nu_i\}$ в $\mathbb{R}^2$,

μ – общая знакопеременная мера на $\mathbf{G}$.

В основе всех наших построений лежит следующее утверждение из интегральной геометрии на плоскости.

Теорема 1. *Пусть μ – мера в $\mathbf{G}$, равная нулю на каждом пучке прямых, проходящих через точку, и пусть $\{\nu_i\}$ – некоторая конечная совокупность игл в $\mathbb{R}^2$. Для каждого $B \in r\{\nu_i\}$ имеет место следующее представление*

$$\mu(B) = \frac{1}{2}\sum_{i<j} c_{ij}(B)\mu([P_i, P_j]), \tag{1.1}$$

где суммирование ведется по парам точек из множества $\{P_i\}$ концов игл. Коэффициенты $c_{ij}(B)$ суть целые числа, алгоритм нахождения которых приведен ниже.

Достаточно рассмотреть случай, когда среди точек P_i есть хотя бы три не лежащие на одной прямой. В дальнейшем мы всегда это предполагаем

Алгоритм :

$$c_{ij}(B) = \begin{cases} 0 & \text{если точки } P_i, P_j \text{ разделены,} \\ n_\alpha(i,j;B) - n_\beta(i,j,B) & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{1.2}$$

Мы говорим, что P_i и P_j *разделены*, если на прямой g_{ij}, проходящей через точки P_i, P_j, существует точка P_s такая, что на g_{ij} P_s лежит между P_i и P_j.

Для определения величин $n_\alpha(i,j)$ заметим, что имеются два атома кольца $r\{\nu_i\}$ (обозначим их α_1 и α_2), которые удовлетворяют условиям

$$g_{i,j} \in \partial\alpha_1, \quad g_{i,j} \in \partial\alpha_2, \quad \alpha_1 \subset [P_i, P_j], \quad \alpha_2 \subset [P_i, P_j].$$

Тогда

$$n_\alpha(i,j;B) = \text{ число атомов } \alpha_k, \text{ принадлежащих } B.$$

Пусть P^* и P^{**} – две точки из $\{P_i\}$, занимающие на прямой $g_{i,j}$ крайние положения. Имеются два атома (обозначим их β_1 и β_2), которые удовлетворяют условиям

$$g_{i,j} \in \partial\beta_1, \quad g_{ij} \in \partial\beta_2, \quad \beta_1 \subset [P^*, P^{**}]^c, \quad \beta_2 \subset [P^*, P^{**}]^c$$

(c означает дополнение). Тогда

$$n_\beta(i,j;B) = \text{ число атомов } \beta_k, \text{ принадлежащих } B.$$

Доказательство теоремы вместе с алгоритмом можно легко вывести из аналогичного результата, содержащегося в [1] при предположении, что никакие три точки из $\{P_i\}$ не лежат на одной прямой. Переход к этому простому случаю можно осуществить аппроксимацией точек в коллинеарных группах (если таковые имеются) точками на выпуклых кривых, кривизна которых стремится к нулю. Полное доказательство, основанное на топологической интерпретации, можно найти в [4].

Пусть $F(P_1, P_2)$ – функция, определенная на $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, непрерывная в топологии $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ и линейно аддитивная, т.е. если P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой и P_2 лежит между P_1 и P_3, то

$$F(P_1, P_2) + F(P_2, P_3) = F(P_1, P_3).$$

В частности, F может быть порождена семейством m_g, $g \in \mathbf{G}$, где каждая m_g есть знакопеременная мера на соответствующей прямой g. Для любых двух точек P_1, P_2 положим

$$F(P_1, P_2) = m_g(\text{отрезок } (P_1, P_2)),$$

где g – прямая, проходящая через P_1, P_2. Этим связывается функциональный подход с плоской задачей, упомянутой во введении.

1. **Построение функционала.** Для заданной конечной совокупности игл $\{\nu_i\}$ построим функционал Φ, подставив в (1.2) вместо $\mu([P_i, P_j])$ значения $F(P_1, P_2)$, т.е.

$$\Phi = \Phi(B; \{\nu_i\}) = \frac{1}{2} \sum_{i<j} c_{ij}(B) F(P_i, P_j). \tag{1.3}$$

2. **Свойство состоятельности.** Естественно ввести для подмножеств $\mathbf{G}$ отношение эквивалентности : два множества в $\mathbf{G}$ эквивалентны, если они совпадают с точностью до конечного числа пучков $[P]$,

$$[P] = \{g \in \mathbf{G} : P \in g\}, \quad P \in \mathbb{R}^2.$$

Мы можем утверждать, что

$$\text{если } \{\nu_i\} \subset \{\nu_k'\}, \quad \text{то необходимо} \quad r\{\nu_i\} \subset r\{\nu_k'\} \tag{1.4}$$

в том смысле, что каждое $B \in r\{\nu_i\}$ *эквивалентно* некоторому $B' \in r\{\nu_k'\}$. Для таких эквивалентных множеств B, B' имеем

$$\Phi(B; \{\nu_i\}) = \Phi(B; \{\nu_k'\}).$$

Отсюда, в частности, следует, что функционал Φ единственным образом определен на классе $U_G = \cup r\{\nu_i\}$, где объединение берется по всем конечным совокупностям $\{\nu_i\}$, и мы вправе использовать обозначение $\Phi = \Phi(B)$.

3. **Проекции Φ на прямые.** Сужение Φ на подмножества некоторой фиксированной прямой g называем проекцией Φ на g. Непосредственным применением Алгоритма убеждаемся, что

$$\Phi([P_1, P_2]) = F(P_1, P_2). \tag{1.5}$$

В случае, когда функция F порождена семейством мер m_g, (1.5) означает, что проекции функционала Φ на прямые g суть меры m_g.

4. **Конечная аддитивность.** Функционал Φ конечно аддитивен на U_G. Из (1.4) следует, что для всякой конечной совокупности множеств $B_i \in U$

мы можем найти конечное множество игл $\{\nu_j\}$ такое, что $B_i \in r\{\nu_j\}$ для всех i и наше утверждение следует из аддитивности коэффициентов $c_{ij}(B)$ по B.

5. Неотрицательность Φ влечет непрерывность Φ. Согласно теории продолжения мер, для того, чтобы конечно аддитивный неотрицательный функционал Φ можно было бы продолжить до меры, Φ должен быть в некотором смысле непрерывным. В нашем контексте достаточно выполнения следующего условия непрерывности :

$$\lim \Phi([\tau_n] \cap [\nu_n]) = 0, \tag{1.6}$$

где τ_n – последовательность коллинеарных игл, стягивающихся к точке, ν_n – произвольная последовательность игл, обе последовательности содержатся в некотором ограниченном многоугольнике $D \subset \mathbb{R}^2$. Предположим, что функционал Φ неотрицателен. Тогда из конечной аддитивности следует, что

$$\Phi([\tau_n] \cap [\nu_n]) \leq \Phi([\tau_n] \cap [\nu_n]) + \Phi([\tau_n] \cap [\nu_n]^c) = \Phi([\tau_n]). \tag{1.7}$$

Отсюда и из свойства 3 получаем (1.6).

6. Условие неотрицательности. Сейчас (и ниже в пунктах 7, 8) мы дополнительно предположим, что F является *псевдометрикой* (т.е. $F \geq 0$ и F удовлетворяет неравенству треугольника). Тогда функционал Φ будет неотрицательным. Естественное доказательство этого получается моделированием пространства $\mathbf{G}$ с помощью стереографической проекции

$$\mathbb{R}^2 \longmapsto \text{открытая полусфера}$$

(при которой каждая прямая g отображается в геодезическую линию) и последующим полярным отображением, при котором каждая геодезическая представляется своим полюсом.

Суперпозиция этих двух отображений переводит $\mathbf{G}$ в полусферу, у которой склеены диаметрально противоположные точки экватора и выброшен полюс Q (топологически это открытый лист Мёбиуса). На этой метрической модели пучкам прямых в $\mathbf{G}$ соответствуют большие полуокружности, а каждому сферическому треугольнику, не содержащему полюс Q, соответствует множество прямых

$$\Delta = [P_1, P_2] \cap [P_1, P_3] \tag{1.8}$$

для некоторой тройки точек P_1, P_2, P_3 из $\mathbb{R}^2$. Прямым вычислением коэффициентов в (1.3) получаем, что

$$\Phi(\Delta) = F([P_1, P_2]) + F([P_1, P_3]) - F([P_2, P_3]) \geq 0$$

если F – псевдометрика. При этом отображении каждое $B \in U$ представимо как объединение геодезически выпуклых многоугольников на сфере, не содержащих полюс Q. Но всякое такое множество может быть представлено в виде конечного объединения треугольников

$$B = \cup\Delta_i, \quad \text{внутренность } \Delta_i \cap \text{внутренность } \Delta_j = \emptyset,$$

и из аддитивности F следует, что $\Phi(B) \geq 0$ для всякого $B \in U$.

7. Построение семейства мер. Зафиксируем пару прямых g_1, g_2 на $\mathbb{R}^2$ и рассмотрим Φ на множествах вида

$$[\nu_1] \cap [\nu_2], \quad \nu_1 \subset g_1, \quad \nu_2 \subset g_2.$$

Ясно, что эти множества образуют полукольцо в произведении пространств $g_1 \times g_2$. Свойства 5, 6 гарантируют применимость стандартной теоремы о продолжении меры с полукольца. Образ этой меры при отображении

$$(l_1, l_2) \longmapsto \text{прямая, проходящая через } l_1, l_2, \quad l_1 \in g_1, l_2 \in g_2,$$

есть мера μ_{g_1, g_2} в пространстве прямых, пересекающих обе прямые g_1 и g_2 (она априори зависит от выбора g_1 и g_2).

8. Состоятельность мер в семействе. Докажем, что все меры из семейства, определенного в 7., совпадают с некоторой мерой μ на $\mathbf{G}$. Выберем некоторое $A \in U_G$ и пусть $\nu_1, \ldots, \nu_n$ – набор игл, для которых

$A \in r\{\nu_i\}$. Далее выбираем многоугольник D, который накрывает иглы ν_i. Пусть $a_1, ..., a_m$ суть стороны многоугольника D и

$$[D] = \{g \in \mathbf{G} : g \text{ пересекает } D\} \in U_G.$$

Через μ_{ij} обозначим меру из семейства, построенного в 7., которая соответствует прямым, содержащим отрезки a_i и a_j. На множестве $[D]$ мы рассмотрим меру μ_D, определяемую как сумма $\mu_D = \sum \mu_{ij}$. Имеем

$$\mu_D(A) = \sum \mu_{ij}(A \cap [a_i] \cap [a_j]) = \sum \Phi(A \cap [a_i] \cap [a_j]) = \Phi(A).$$

Когда D расширяется до всего $\mathbb{R}^2$, меры m_D остаются состоятельными. Следовательно, $\mu(B) = \mu_D(B)$ для $B \subset [D]$ определяет меру μ на $\mathbf{G}$, для которой $\mu(A) = \Phi(A)$ при $A \in U_G$. Таким образом доказана

Теорема 2. *Пусть $F(P_1, P_2)$ – линейно-аддитивная, непрерывная псевдометрика в $\mathbb{R}^2$. Тогда существует единственная мера μ на $\mathbf{G}$, обращающаяся в ноль на каждом пучке прямых, проходящих через точку, для которой*

$$F(P_1, P_2) = \mu([P_1, P_2]).$$

На U_G имеем $\mu(A) = \Phi(A)$, где $\Phi(A)$ определена по (1.3).

В следующем утверждении условие, что F – псевдометрика опускается

Предложение 1. *Пусть m_g – семейство знакопеременных мер на прямых $g \in \mathbf{G}$. Предположим, что функция*

$$F(P_1, P_2) = m_g(\text{ отрезок } (P_1, P_2)), \quad P_1, P_2 \in g$$

непрерывна. Построим функционал Φ по (1.3). Если для каждого множества Δ вида (1.8) отношение $\Phi([\Delta])/\mu_o(\Delta)$ остается ограниченным снизу при P_1, P_2, P_3, меняющихся в ограниченной части $\mathbb{R}^2$, то существует единственная знакопеременная мера μ на $\mathbf{G}$, обращающаяся в ноль на каждом пучке прямых, проходящих через точку, для которой $F(P_1, P_2) = \mu([P_1, P_2])$.

Доказательство. Пусть D – ограниченный выпуклый многоугольник в $\mathbb{R}^2$. Существует константа $C > 0$ такая, что

$$\Phi(\Delta)/\mu_o(\Delta) > -C$$

для всех возможных $P_1, P_2, P_3 \subset D$. Определим подкласс $U_D \subset U_G$:

$$A \in U_D \quad \text{тогда и только тогда, когда } A \in r\{\nu_i\} \quad \text{и } \nu_i \subset D.$$

Сужение на U_D функционала $\Phi_1 = \Phi + C\mu_o$ сохраняет все свойства 2 – 8 (или точнее, их версий, переписанных для D). Следовательно, Φ_1 можно продолжить до меры μ'_D на $[D]$; это значит, что Φ по существу есть знакопеременная мера на этом множестве. Доказательство завершается расширением D до всей плоскости, так как упомянутые знакопеременные меры остаются состоятельными (их значения для $B \in U_D$ даны посредством (1.3) и не зависят от D).

Пусть задана знакопеременная мера μ на $\mathbf{G}$, имеющая плотность ρ, последняя может быть вычислена как предел

$$\rho(g_o) = \lim \Phi([\tau_1] \cap [\tau_2])(dg_o)^{-1}.$$

Здесь dg_o – значение инвариантной меры множества $[\tau_1] \cap [\tau_2]$, τ_1, τ_2 – две бесконечно малые иглы, которые стягиваются к двум разным точкам $l_1, l_2 \in g_o$. Говоря о бесконечно малой игле τ, мы имеем в виду последовательность игл, лежащих на одной прямой и монотонно стягивающихся к точке l. Мы используем обозначение $\lim \tau = (l, \psi)$, чтобы выделить направление ψ иглы τ, которое остается неизменным, когда длина τ стремится к нулю. Напомним, что (см. [2])

$$dg_o = \sin\psi_1 \sin\psi_2 \, r^{-1} \, dl_1 \, dl_2, \tag{1.9}$$

где ψ_i – угол между g_o и прямой, содержащей τ_i, r – расстояние между бесконечно малыми иглами, dl_i – длина τ_i.

Следующее утверждение дает некоторые условия, при которых функционал Φ определяет знакопеременную меру на $\mathbf{G}$, имеющую плотность.

Предложение 2. *Пусть Φ – аддитивный функционал, определенный на классе U_G. Предположим, что предел*

$$\lim \Phi([\tau_1] \cap [\tau_2])(dg_o)^{-1} = V(l_1, \psi_1; l_2, \psi_2) \tag{1.10}$$

существует для всякой пары бесконечно малых неколлинеарных игл τ_1, τ_2 и

$$\lim \tau_i = (l_i, \psi_i), \quad l_1 \neq l_2.$$

Если функция V непрерывна и равномерно ограничена в любой компактной области из $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, то V зависит только от прямой g_o, соединяющей l_1 с l_2, и Φ есть знакопеременная мера с плотностью V.

Доказательство. Выберем две иглы ν_1, ν_2 и разобьем их на бесконечно малые иглы $\tau_i^{(n)}$:

$$\nu_i = \bigcup_n \tau_i^{(n)}, \quad i = 1, 2.$$

Построим римановы суммы для интеграла (1.11). Ввиду (1.9), (1.10) и аддитивности Φ для этих римановых сумм имеем асимптотическое равенство

$$\sum_{k,l} \Phi([\tau_1^{(k)}] \cap [\tau_2^{(l)}]) = \Phi([\nu_1] \cap [\nu_2]).$$

Иначе говоря,

$$\Phi([\nu_1] \cap [\nu_2]) = \int_{\nu_1} \int_{\nu_2} V(l_1, \psi_1; l_2, \psi_2) r^{-1} \sin\psi_1 \sin\psi_2 \, dl_1 \, dl_2. \tag{1.11}$$

Вначале предположим, что $V \geq 0$. Отсюда следует непрерывность Φ и $\Phi([\nu_1] \cap [\nu_2]) \geq 0$. Повторяя вышеописанные шаги 7, 8, получаем, что Φ – мера на $\mathbf{G}$. В случае знакопеременной функции V, наше допущение об ограниченности позволяет воспользоваться приемом, использованным нами при доказательстве Предложения 1, и этим завершить доказательство.

§2. СОСТОЯТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В Г

Используем обозначения

Γ – пространство прямых в $\mathbb{R}^3$, $\gamma \in \Gamma$,

μ_o – единственная (с точностью до постоянного множителя) мера на Γ, инвариантная относительно группы евклидовых движений $\mathbb{R}^3$,

$d\gamma$ – элемент меры μ_o,

π – *пластина* (ограниченная выпуклая часть плоскости, лежащая в $\mathbb{R}^3$),

$[\pi] = \{\gamma \in \Gamma : \gamma$ пересекает пластину $\pi\}$,

$r\{\pi_i\}$ – минимальное кольцо подмножеств Γ, содержащее все множества $[\pi_i]$ для некоторого конечного набора $\{\pi_i\}$ пластин в $\mathbb{R}^3$,

μ – общая знакопеременная мера в Γ,

$U_\Gamma = \cup\{A : A \in r\{\pi_i\}\}$, где объединение берется по всем конечным наборам пластин $\{\pi_i\}$,

$\mathbb{E}$ – пространство плоскостей в $\mathbb{R}^3$, $\quad e \in \mathbb{E}$.

$\mathbf{G}_e$ – пространство прямых, лежащих на плоскости e, $g \in \mathbf{G}_e$,

de – единственная (с точностью до постоянного множителя) мера на $\mathbb{E}$, инвариантная относительно группы евклидовых движений $\mathbb{R}^3$,

ν – отрезок прямой в $\mathbb{R}^3$.

Пусть имеем семейство функций F_e, зависящих от параметра $e \in \mathbb{E}$. Предположим, что на каждой плоскости e функция

$$F_e = F_e(P_1, P_2), \quad P_1, P_2 \in e$$

является непрерывной линейно-аддитивной псевдометрикой. Через Φ_e обозначим функционал Φ, построенный на $\mathbf{G}_e$ с помощью F_e процедурой, описанной в предыдущем параграфе. Для заданной системы пластин $\{\pi_i\}$ и всякой $A \in r\{\pi_i\}$ множество

$$A \cap e = \{g \in \mathbf{G}_e : g \in A\}$$

принадлежит кольцу $r\{\nu_i\}$ подмножеств $\mathbf{G}_e$, порожденному иглами $\nu_i = \pi_i \cap e$. Пусть m – мера в $\mathbb{E}$. Выражение

$$\Psi(A) = \int \Phi_e(A \cap e)\, m(de) \tag{2.1}$$

является для каждого m примером функционала, состоятельного на классе U_Γ и допускающего продолжение до меры μ на Γ.

Функционал Ψ *состоятелен* на U_Γ, если для каждой пары множеств $A, A' \in U_\Gamma$, совпадающих с точностью до конечного числа множеств типа

$$[\partial\pi] = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \text{ пересекает границу } \partial\pi \text{ пластины } \pi\},$$

имеем $\Psi(A) = \Psi(A')$.

Верхнее утверждение приводит к следующему замечанию. Пусть μ_e – мера в $\mathbf{G}_e$, соответствующая F_e согласно Теореме 2. В расслоенном пространстве

$$\{(e, g) : e \in \mathbb{E}, \quad g \in \mathbf{G}_e\},$$

рассмотрим меру $m(de)\mu_e(dg)$. Искомая мера μ есть образ $m(de)\mu_e(dg)$ при отображении

$$(e, g) \longmapsto \gamma,$$

где $\gamma \in \Gamma$ и $g \in \mathbf{G}$ совпадают, как множества в $\mathbb{R}^3$. Доказательство следует прямым интегрированием $m(de)\mu_e(dg)$ и применением Теоремы 1.

Теперь перейдем к рассмотрению общих аддитивных функционалов состоятельно определенных на U_Γ. Для заданного на U_Γ функционала Ψ его сужение на класс $\{[\pi] : \pi \subset e\}$ назовем проекцией Ψ на плоскость e, а значения Ψ на классе

$$\{[\pi_1] \cap [\pi_2] : \pi_1 \in e_1, \pi_2 \in e_2\}$$

назовем проекцией Ψ на произведение $e_1 \times e_2$.

Автору не известны в классе U_Γ простые множества, роль которых сравнима с ролью множеств Δ в $\mathbf{G}$ (см §1, пункт 8). В частности, для множеств $[\pi_1] \cap [\pi_2]$ доказательство пункта 5 из §1 не проходит. Это может быть обойдено требованием, что проекция Ψ на каждое произведение $e_1 \times e_2$ должна определять знакопеременную меру на $e_1 \times e_2$. При этом условии мы получаем следующий неполный аналог Предложения 1 с $[\pi_1] \cap [\pi_2]$ вместо Δ.

Лемма. *Пусть Ψ – конечно аддитивный функционал, определенный на U_Γ, чьи проекции на каждое произведение $e_1 \times e_2$ суть знакопеременные меры. Если* *отношение*

$$\Psi([\pi_1]\cap[\pi_2])/\mu_o([\pi_1]\cap[\pi_2])$$

остается ограниченным снизу для каждой пары прямоугольных пластин в ограниченной части $\mathbb{R}^3$, *то существует единственная знакопеременная мера* μ *в* Γ, *которая совпадает с* Ψ *на* U_Γ.

Доказательство. Отображением

$$e_1\times e_2\longmapsto\Gamma,$$

которое каждой паре точек $P_1\in e_1$, $P_2\in e_2$ ставит в соответствие прямую, проходящую через P_1, P_2, проекция Ψ на $e_1\times e_2$ индуцирует знакопеременную меру на $[e_1]\cap[e_2]$. Остается показать, что все такие меры на самом деле являются соответствующими сужениями некоторой знакопеременной меры μ на Γ. Это следует из предположенной конечной аддитивности Ψ и применением приема, использованного в пункте 8 §1, с заменой многоугольников и их сторон на многогранники и их грани.

Говоря о бесконечно малых пластинах, мы имеем в виду последовательность пластин, которые лежат в одной плоскости e и монотонно стягиваются к точке P. Бесконечно малую пластину мы обозначаем через δ и пишем $\lim\delta=(\omega,P)$, где ω – пространственное направление нормали к e. Ниже в Предложении 3 δ_1,δ_2 – две произвольные выпуклые бесконечно малые пластины, для которых $\lim\delta_i=(\omega_i,P_i)$, $i=1,2$, а $d\gamma_o$ обозначает инвариантную меру множества $[\delta_1]\cap[\delta_2]$. Через γ_o обозначим прямую, соединяющую δ_1 с δ_2. Напомним, что (см. [2])

$$d\gamma_o=r^{-2}\cos\alpha_1\cos\alpha_2\,dP_1\,dP_2,$$

где dP_i – плоская мера Лебега пластины δ_i, α_i – угол между ω_i и прямой γ_o, которая соединяет dP_1 с dP_2, r – расстояние между δ_1 и δ_2.

Имеем следующий аналог Предложения 2.

Предложение 3. *Пусть* Ψ *– конечно аддитивный функционал, определенный на* U_Γ. *Предположим, что существует предел*

$$\lim\Psi([\delta_1]\cap[\delta_2])(d\gamma_o)^{-1}=W(\omega_1,P_1;\omega_2,P_2) \tag{2.2}$$

для прямоугольных некомпланарных бесконечно малых пластин δ_1, δ_2 с центрами в $P_1 \neq P_2$. Если функция W непрерывна и равномерно ограничена в любой компактной области из $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, то функция W зависит только от прямой γ_o, проходящей через P_1, P_2, и существует знакопеременная мера μ в Γ, для которой W служит плотностью, а Ψ совпадает с μ на U_Γ.

Доказательство. По существу тем же способом, что и при доказательстве Предложения 2, можно показать, что для любых двух пластин π_1, π_2,

$$\Psi([\pi_1] \cap [\pi_2]) = \int_{\pi_1} \int_{\pi_2} W(\omega_1, P_1; \omega_2, P_2) r^{-2} \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \, dP_1 \, dP_2 \tag{2.3}$$

т.е. Ψ – знакопеременная мера на $e_1 \times e_2$. Остается применить Лемму.

§3. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Настоящий параграф содержит некоторые замечания, касающиеся взаимосвязей между метриками в $\mathbb{R}^3$ и мерами в Γ. Каждая мера μ в Γ, имеющая плотность $\rho(\gamma)$ относительно $d\gamma$, может быть представлена в виде (2.1) с $m(de) = de$. Это можно показать с помощью известного соотношения (см. [2])

$$d\gamma \, d\phi = de \, dg, \tag{3.1}$$

где dg – инвариантная мера в $\mathbf{G}_e$, $d\phi$ – равномерная угловая мера в пространстве поворотов ϕ вокруг оси γ; или же с помощью его следующего варианта

$$\rho(\gamma) \, d\gamma \, d\phi = \rho(g) \, de \, dg.$$

Вычислить $\mu(A)$ при $A \in U_\Gamma$ можно следующим образом :

$$\mu(A) = \pi^{-1} \int de \int_{A \cap e} \rho(g) \, dg = \pi^{-1} \int \Phi_e(A \cap e, \{\pi_i \cap e\}) \, de,$$

здесь использована Теорема 1, Φ_e порождена посредством

$$F_e(\nu) = \int_{\nu \cap e} \rho(g) \, dg.$$

Однако выбор меры m не единственен. Более того, мы можем получить неотрицательную меру на Γ в виде (2.1) с помощью знакопеременной меры

m на $\mathbb{E}$. Класс примеров приведен в *Теории Зоноидов*, см. ниже §4. В рамках следующих двух параграфов мы рассмотрим порождение мер в Γ при помощи (2.1), причем F и m, удовлетворяют следующим условиям :

Предположение А.1. F не зависит от e, т.е.

$$F = F(P_1, P_2), \quad P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$$

и достаточно гладкая линейно аддитивная псевдометрика в $\mathbb{R}^3$.

Предположение А.2. m есть знакопеременная мера на $\mathbb{E}$, чей образ при отображении

$$e \longmapsto e \cap \Pi, \quad \Pi - \text{фиксированная плоскость}$$

есть неотрицательная мера m_Π в пространстве G_Π для любого $\Pi \in \mathbb{E}$. Следовательно, функционал Ψ задаваемый посредством (2.1) определяет знакопеременную меру μ в Γ. Найдем проекции на плоскости функционала (2.1). Для отдельной пластины $\pi \subset \Pi$ имеем

$$\Psi([\pi]) = \int_E F(\pi \cap e)\, m(de) = \int_{G_\Pi} F(X) m_\Pi(dg) = S_\Pi(\pi), \tag{3.2}$$

где $X = \pi \cap e$ – функция, зависящая лишь от прямой

$$g = \Pi \cap e \in \mathbf{G}_\Pi$$

Ясно, что при А.1, А.2 S_Π есть мера на плоскости Π.

Попробуем применить Предложение 3 к нашему Ψ. Рассмотрим отношение

$$(d\gamma_o)^{-1} \Psi([\delta_1] \cap [\delta_2]) = (d\gamma_o)^{-1} \int_B \Phi_e([\tau_1] \cap [\tau_2])\, m(de),$$

предел которого должен дать (если Ψ – знакопеременная мера) значение плотности $\rho(\gamma)$. Здесь $\tau_i = \delta_i \cap e$ – бесконечно малые иглы,

$$B = \{e \in \mathbb{E} : e \text{ пересекает } \delta_1 \text{ и } \delta_2\}.$$

Так как F_e – гладкая плоская псевдометрика, согласно Предложению 1 имеем

$$\Phi_e([\tau_1] \cap [\tau_2]) = V_e(g)\, dg.$$

где V_e – гладкая функция, зависящая от прямых в $\mathbf{G}_e$ (плотность) а dg равна инвариантной мере в $\mathbf{G}_e$ множества $[\tau_1] \cap [\tau_2]$. На множестве

$$C = \{(e, g) : g = \gamma \in [\delta_1] \cap [\delta_2]\}$$

каждая непрерывная функция $v(e, g)$ имеет асимптотическое представление $v(e, g) = v(\phi, \gamma_o)$, где ϕ обозначает угол поворота e вокруг γ_o. Слегка изменив обозначение $V_e(g) = V_\phi(\gamma_o)$, мы приходим к соотношению

$$\rho(\gamma_o) = (d\gamma_o)^{-1} \int_C V_\phi(\gamma_o)\, dg\, m(de).$$

Далее мы предполагаем существование непрерывной плотности u : $m(de) = u(e)\, de$. На множестве B имеет место асимптотическое равенство $u(e) = u(\gamma_o, \phi)$. Следовательно,

$$\rho(\gamma_o) = (d\gamma_o)^{-1} \int_C V_\phi(\gamma_o) u(\gamma_o, \phi)\, de\, dg = (d\gamma_o)^{-1} \int_C V_\phi(\gamma_o) u(\gamma_o, \phi)\, d\gamma\, d\phi. \tag{3.3}$$

Здесь мы снова использовали равенство (3.1). В (3.3) можно выполнить интегрирование по $d\gamma$ и получить значение $d\gamma_o$. Следовательно,

$$\rho(\gamma_o) = \int V_\phi(\gamma_o) u(\gamma_o, \phi)\, d\phi. \tag{3.4}$$

Таким образом мы получили следующий

Критерий. *Неравенство*

$$\int V_\phi(\gamma_o) u(\gamma_o, \phi)\, d\phi \geq 0 \tag{3.5}$$

гарантирует, что Ψ *порождает по (2.1) меру в* Γ *(для которой* $\rho(\gamma)$ *служит плотностью).*

§4. ГЛАДКИЕ МЕТРИКИ МИНКОВСКОГО В $\mathbb{R}^3$ ПОРОЖДАЮТ МЕРЫ В Γ И НАОБОРОТ

Критерий (3.5) приводит к неожиданному результату в случае, когда F – гладкая метрика Минковского в $\mathbb{R}^3$, а знакопеременная мера m связана с F "уравнением зоноида". Метрику F мы называем метрикой Минковского, если она имеет вид (который влечет линейную аддитивность)

$$F(\nu) = |\nu|\, f(\Omega), \tag{4.1}$$

где $|\nu|$ - евклидова длина иглы ν, Ω - пространственное направление ν, f - функция, определенная в пространстве направлений в $\mathbb{R}^3$ и в случае гладкости удовлетворяющая "условию выпуклости"

$$f(\Omega) + \frac{d^2}{d\alpha^2} f(\Omega) \geq 0, \tag{4.2}$$

где $d^2/d\alpha^2$ - вторая производная по направлению α (на сфере пространственных направлений α определяется большой окружностью, проходящей через Ω, или же точкой на большой окружности, ортогональной к Ω). Функция f, удовлетворяющая (4.2), обязательно является опорной функцией некоторого гладкого центрально-симметричного выпуклого тела $B \subset \mathbb{R}^3$.

Напомним, (см. [2]) что функция

$$V_\alpha(\Omega) = f(\Omega) + \frac{d^2}{d\alpha^2} f(\Omega) \tag{4.3}$$

совпадает с плотностью меры μ_e в $\mathbf{G}_e$, которая по Теореме 2 соответствует сужению F_e метрики F на e.

Здесь плоскость e предполагается параллельной большой окружности, проходящей через Ω и α. Слегка изменив обозначения, мы можем записать $V_\alpha(\Omega) = V_e(\beta)$, понимая, что направление β лежит в плоскости e и совпадает с Ω, а $\mu_e(dg) = V_e(\beta)\, dg$, где β - направление прямой $g \subset e$. Подчеркнем, что (4.3) может быть получено предельным переходом, описанным в Предложении 1, как показано в [2]. Величина V имеет и другое выражение (см. [7], стр. 40) :

$$V_\alpha(\Omega) = \int \sin^2\psi\, Z\, d\psi. \tag{4.4}$$

Здесь интегрирование ведется по окружности направлений, ортогональных к Ω, причем за начало отсчета $\psi = 0$ берется точка α. Функцию

$$Z = Z(\xi), \quad \xi \text{ — направление в } \mathbb{R}^3,$$

определяем как решение *уравнения зоноида*

$$f(\Omega) = \int |\cos(\Omega,\xi)|\, Z(\xi)\, d\xi, \tag{4.5}$$

где $d\xi$ – обычная инвариантная мера вращений в пространстве направлений в $\mathbb{R}^3$ (т.е. телесный угол), (Ω,ξ) – угол между двумя пространственными направлениями.

Доказательство равенства (4.4) может быть обосновано стандартной формулой из интегральной геометрии (см. [7], стр. 61)

$$de = \sin^2\psi\, d\psi\, dg, \tag{4.6}$$

где g – образ e при отображении $e \longmapsto e\cap\Pi = g$, ψ – двугранный угол между e и плоскостью Π.

Следующие утверждения I – III или хорошо известны, или могут быть проверены с помощью результатов из [7], стр. 41.

I. Для всякой достаточно гладкой опорной функции f уравнение (4.5) имеет единственное решение Z, которое не обязательно неотрицательно. Функция Z обеспечивает полное описание центрально-симметричного тела B. Требование неотрицательности Z существенно сужает B до подкласса выпуклых тел, называемых *зоноидами*, см. [3].

II. Функция $Z(\xi)$ определяет посредством (4.5), (4.1) метрику Минковского F в $\mathbb{R}^3$ (т.е. выпуклое тело B) тогда и только тогда, когда интегралы (4.4) остаются неотрицательными для любых Ω и любом выборе α на окружности, ортогональной к Ω.

III (следует из II). Если $Z(\xi)$ определяет метрику F посредством (4.5), (4.1), то знакопеременная мера $Z(\xi)\,de$ (ξ – направление нормали к e) удовлетворяет условию A.2.

Мы теперь в состоянии сформулировать и доказать наш результат относительно метрик Минковского. Пусть задана метрика Минковского F в $\mathbb{R}^3$, на каждой плоскости e определим меру

$$\sigma_e^{(F)}(\pi) = \int_{\mathbf{G}_e} F(\pi\cap g)\,\mu_e(dg), \quad \pi\subset e, \tag{4.7}$$

которая (при трансляционной инвариантности) пропорциональна плоской мере Лебега L_2 : $\sigma_e^{(F)} = \lambda_\omega L_2$, где коэффициент пропорциональности λ_ω зависит от направления ω нормали к e.

Согласно II, III плоские меры (4.7) совпадают с проекциями функционала

$$\Psi = \int \Phi_\omega Z(\omega)\, d\omega \tag{4.8}$$

на плоскости e. В (4.8) Φ_ω – функционал в $\mathbf{G}_e$, построенный как в §1 с использованием F_e (этот функционал зависит только от ориентации e т.е. от направления ω нормали к e); $Z(\omega)$ – решение уравнения (4.5), где f связана с нашей метрикой F посредством (4.1).

Предложение 4. *Для каждой гладкой метрики Минковского F в $\mathbb{R}^3$ существует единственная трансляционно-инвариантная мера μ в Γ, чей образ на каждой плоскости e при отображении*

$$\Gamma \longmapsto e: \quad \gamma \longmapsto \gamma \cap e \tag{4.9}$$

совпадает с мерой $\sigma_e^{(F)}$. Значения меры μ на U_Γ даются функционалом (4.8).

Доказательство. Покажем, что (4.8) имеет продолжение до неотрицательной меры μ. Для этого мы покажем, что неравенство (3.4) выполнено, когда V задано по (4.4) и u совпадает с Z. Другими словами мы должны доказать, что

$$I = \iint \sin^2(\alpha - \psi)\, Z(\alpha) Z(\psi)\, d\alpha\, d\psi \geq 0, \tag{4.10}$$

если Z такова, что

$$V_\alpha(\Omega) = \int \sin^2(\alpha - \psi)\, Z(\psi)\, d\psi \geq 0$$

для всех значений α из окружности направлений, ортогональных некоторому фиксированному направлению Ω. Эта окружность является областью интегрирования для последнего интеграла, а её квадрат – областью интегрирования для предшествующего двойного интеграла.

Очевидно, имеем $I = a^2 - (b^2 + c^2)$, где

$$a = \int Z(\alpha)\, d\alpha, \quad b = \int Z(\alpha) \sin 2\alpha\, d\alpha, \quad c = \int Z(\alpha) \cos 2\alpha\, d\alpha$$

и

$$V(\alpha) = a - [b \sin 2\alpha + c \cos 2\alpha] = a - (b^2 + c^2)^{1/2} \sin(\theta + 2\alpha),$$

где

$$\cos\theta = b\left(b^2+c^2\right)^{-1/2}, \quad \sin\theta = c\left(b^2+c^2\right)^{-1/2}.$$

Из последнего выражения для $V(\alpha)$ заключаем, что требование

$$V(\alpha) \geq 0 \text{ для всех значений } \alpha \in (0,\pi)$$

влечет

$$a \geq \left(b^2+c^2\right)^{1/2} \geq 0$$

($V(\alpha)$ достигает своего минимума, когда $\sin(\theta+2\alpha) = 1$). Последнее неравенство эквивалентно $I \geq 0$. Так как это верно для любого направления Ω, то наше требование $\Psi = \mu$ выполнено. Выше уже объяснено, что проекции Ψ на плоскости e совпадают с $\sigma_e^{(F)}$. Единственность следует из того, что для любой трансляционно-инвариантной меры μ в Γ, которая порождает меру $\sigma_e^{(F)}$ на плоскостях, имеем

$$\lambda_\omega = \int |\cos(\omega\xi)|\, m(d\xi), \tag{4.11}$$

где m есть "роза направлений" меры μ (см. [2]). Мера m определяется этим уравнением единственным образом (см. [3]). Но совпадение роз направлений влечет совпадение трансляционно-инвариантных мер в Γ. Предложение 4 полностью доказано.

Замечательно, что утверждение, обратное Предложению 4, также верно.

Предложение 5. *Каждой трансляционно-инвариантной мере μ на Γ, имеющей достаточно гладкую плотность соответствует единственная метрика Минковского F в $\mathbb{R}^3$ такая, что на каждой плоскости e образ μ при отображении (4.9) совпадает с мерой $\sigma_e^{(F)}$.*

Доказательство. Образ μ при отображении (4.9) пропорционален плоской мере Лебега с коэффициентом $\tau_e = \tau_\omega$, зависящим лишь от направления ω нормали к e. Очевидно,

$$\tau_\omega = \int |\cos(\omega\xi)|\, m(d\xi),$$

где m – роза направлений меры μ, т.е. τ_ω есть опорная функция зоноидального тела. В силу предположения о существовании плотности, это тело не является плоским. Согласно известной теореме (см. [3]) этот зоноид является проекционным телом. Другими словами, существует единственное центрально-симметричное выпуклое тело K такое, что

$$\tau_\omega = \text{ площади проекции } K \text{ на плоскость } e \text{ с нормалью } \omega.$$

Искомую метрику F мы определяем, как метрику порождаемую телом K обычным (Минковского) способом. Остается показать, что

$$\tau_\omega = \lambda_\omega. \tag{4.12}$$

Это следует из формул (которые можно найти в [6]), выражающих площадь τ_ω плоской выпуклой области D в терминах опорной функции f

$$\tau_\omega = \frac{1}{2}\int (f^2 - f'^2)d\beta$$

и варианта формулы (4.7) (см. [2], стр. 142),

$$\lambda_\omega = \int f(\beta)V_e(\beta)\,d\beta,$$

где $V_e(\beta)$ задано по (4.3). Интегрирование по частям и приводит к (4.11). Предложение 5 доказано.

Следствие. На самом деле мы установили два способа вычисления λ_ω : первый, с помощью (4.11), причем мера m имеет плотность, задаваемую по (4.10) ; и второй, как площадь проекции выпуклого тела B, чья функция $Z(\omega)$ участвует в (4.10). Второй путь приводит к тому, что

$$\lambda_\omega = \int |\cos(\omega\xi)|(R_1R_2)_\xi\,d\xi,$$

где $(R_1R_2)_\xi$ означает произведение двух главных радиусов кривизны в точке ∂B, где внешняя нормаль имеет направление ξ. Сравнивая это равенство с (4.11), из уже упомянутого результата о единственности для *уравнения зоноида* заключаем, что

$$(R_1R_2)_\xi = \frac{1}{2\pi^2}\iint \sin^2(\alpha-\psi)Z(\alpha)Z(\psi)\,d\alpha\,d\psi,$$

где интегрирование ведется по квадрату большой окружности, ортогональной к ξ. Эта формула имеется в [6] в ином контексте.

§5. ОТКАЗ ОТ ТРЕБОВАНИЯ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ В ОДНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Мы в этом параграфе покажем, что утверждения Предложения 4 могут быть распространены на случаи, не требующие трансляционной инвариантности. Начнем с важного замечания :

Всякая гладкая метрика F в $\mathbb{R}^3$ – асимптотически Минковская, если её рассматривать в бесконечно малом объеме.

Точнее говоря, это означает следующее. Рассмотрим шар с центром в фиксированной точке Q пространства $\mathbb{R}^3$ и бесконечно малым радиусом ε. Перенесем Q в O и изменим масштаб так, чтобы наш бесконечно малый шар преобразовался в шар единичного радиуса с центром в O. На последнем шаре рассмотрим новую метрику F_ε :

$$F_\varepsilon(x_1, x_2) = \varepsilon^{-1} F(P_1, P_2),$$

где x_1, x_2 суть образы точек P_1, P_2. В пределе F_ε (когда ε стремится к нулю) будет сужением на единичный шар некоторой метрики Минковского F_1. Мы докажем это, явно найдя f_1, связанную с F_1 посредством (4.1). Возьмем точки P_1, P_2 внутри бесконечно малого шара. Используя векторные обозначения, имеем

$$P_1 - P_2 = \varepsilon(x_1 - x_2)$$

где x_1, x_2 уже из единичного шара. Так как F предполагается гладкой, то

$$F(P_1, P_2) = f(Q, \Omega)|x_1, x_2|\varepsilon + o(\varepsilon),$$

где Ω – направление, а $|x_1, x_2|$ – евклидова длина отрезка x_1, x_2 и

$$f(Q, \Omega) = \left|\frac{\partial F(Q, P)}{\partial_\Omega P}\right|, \tag{5.1}$$

есть модуль производной по направлению Ω. Следовательно,

$$F_\varepsilon(x_1, x_2) = f(Q, \Omega)\, |x_1, x_2| + o(1),$$

т.е. $f_1(\Omega) = f(Q, \Omega)$.

Следствие. Если F – гладкая метрика в $\mathbb{R}^3$, то в каждой точке Q функция (5.1) удовлетворяет условию выпуклости (4.2). Таким образом F определяет семейство центрально-симметричных выпуклых тел $B(Q)$ (а значит и семейство метрик Минковского), зависящее от $Q \in \mathbb{R}^3$.

Мы основываем наше обобщение Предложения 5 на результате Погорелова [5], утверждающего, что всякая достаточно гладкая линейно аддитивная метрика F в $\mathbb{R}^3$ допускает представление посредством знакопеременных мер $z(e)\,de$ в пространстве $\mathbb{E}$:

$$F(P_1, P_2) = \int_{[P_1, P_2]} z(e)\,de, \tag{5.2}$$

где $[P_1, P_2]$ обозначает множество плоскостей, разделяющих точки $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$.

Предложение 6. *Пусть F – достаточно гладкая линейно аддитивная метрика в $\mathbb{R}^3$. В пространстве Γ существует единственная мера μ, у которой для каждой плоскости e мера $\sigma_e^{(F)}$ есть образ μ при отображении*

$$\Gamma \longmapsto \varepsilon : \quad \gamma \longmapsto \gamma \cap \varepsilon. \tag{5.3}$$

Доказательство. Заметим, что из (5.2) следует, что $z(e)\,de$ удовлетворяет условию A.2 из §3, так как искомая мера m_Π совпадает с мерой в G_Π, порожденной (согласно Теореме 2) сужением F_Π нашей метрики F на плоскость Π. Чтобы показать это, рассмотрим плоскость Π, проходящую через P_1, P_2 и, используя (4.6), преобразуем (5.2) (причем ψ – плоский угол между Π и e) к виду

$$F(P_1, P_2) = \int_{[P_1, P_2]_\bullet} dg \int z(e) \sin^2 \psi\, d\psi,$$

где $[P_1, P_2]_\bullet \subset G_\Pi$ – множество прямых, отделяющих P_1 от P_2. В силу Теоремы 2 и Предложения 1, F_Π имеет подобное представление

$$F(P_1, P_2) = F_\Pi(P_1, P_2) = \int_{[P_1, P_2]_\bullet} x(g)\,dg$$

с некоторой плотностью $x(g) \geq 0$, единственной в классе знакопеременных плотностей. Из этого следует, что

$$\int z(e)\sin^2\psi\,d\psi = x(g) \geq 0.$$

Рассмотрим функционал

$$\Psi = \int \Phi_e z(e)\,de,$$

где Φ_e построен с помощью F_e, $e \in \mathbb{E}$. Функционал Ψ удовлетворяет условиям A.1, A.2, следовательно, проекции Ψ на плоскости образуют меры $\sigma_e^{(F)}$. Остается доказать, что Ψ – мера в Г. Поскольку $z(e) = z_1(e) - z_2(e)$, где $z_1, z_2 \geq 0$ и имеют непересекающиеся носители, то из результатов §3 заключаем, что функционал Ψ порождает знакопеременную меру в Г с знакопеременной плотностью $\rho(\gamma)$. Теперь достаточно показать, что ρ неотрицательна.

Для всякой прямой γ_o значение $\rho(\gamma_o)$ может быть вычислено предельным переходом (2.2) с использованием только пластин из шара радиуса ε с центром Q, лежащим на γ_o. Следовательно, то же можно сделать, используя пластины из единичного шара и функционал Ψ_ε, основанный на F_ε (см. замечание в начале настоящего параграфа). Хотя результат не зависит от ε, удобнее думать, что мы сперва вычисляем предел (2.2), а затем устремляем ε к нулю.

Если F достаточно гладка, то можно поменять порядок двух предельных переходов. Это означает, что $\rho(\gamma_o)$ может быть вычислена процедурой (2.2) с использованием значений F_1. Однако мы знаем из Предложения 4, что для метрик Минковского результат может быть только неотрицательным. Этим завершается доказательство.

ABSTRACT. The paper considers two different approaches to measure generation in the space of lines in $\mathbb{R}^3$: by means of functionals defined in terms of system of plates in $\mathbb{R}^3$ and by means of metrics in $\mathbb{R}^3$. Under the first approach, complete analogy with previously studied planar case could be reached only under additional assumption of existence of density. Under the second approach, it is shown that the planar theorem about generation of measures by linearly additive continuous pseudometrics generalizes to $\mathbb{R}^3$ at least in one direction in general case, and in both directions in translation invariant case.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry, Wiley & Sons, 1982.
2. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, 1990.
3. R. Schneider, W. Weil, "Zonoids and related topics", In : Convexity and its Applications, P.Gruber and J.M Wills eds, Birkhauser, Basel, pp. 296-317, 1983.
4. R. V. Ambartzumian, Buffon Needle : a Plaything or More?, Preprint.
5. А. В. Погорелов, Четвертая Проблема Гильберта, М., Наука, 1974.
6. В. Бляшке, Круг и Шар, М., Наука, 1967.
7. Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штойян, Введение в Стохастическую Геометрию, М., Наука, 1989.

26 Августа 1992

Институт Математики
Национальной Академии Наук Армении

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РОЗЫ НАПРАВЛЕНИЙ ПО ФЛАГОВОЙ ПЛОТНОСТИ В $\mathbb{R}^3$

Р. Г. Арамян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 27, № 5, 1992

Пусть $\mathbb{E}$ пространство плоскостей в $\mathbb{R}^3$, μ - трансляционно-инвариантная (Т.И.) мера на $\mathbb{E}$ (с элементом $d\mu = m(d\xi) \times dp$). Мера $m(\cdot)$ называется розой направлений меры μ. Мера μ индуцирует меру на пространстве флагов, которая имеет т.н. флаговую плотность ρ. В работе решена следующая задача. Восстановлена роза направлений меры μ по флаговой плотности ρ. В частности, найдена интегральная формула, позволяющая вычислить значение меры $m(\cdot)$ на сферических областях, ограниченных кусочно-гладкими кривыми.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{E}$ пространство плоскостей в $\mathbb{R}^3$, μ - трансляционно-инвариантная (Т.И.) мера на $\mathbb{E}$ (с элементом $d\mu = m(d\xi) \times dp$). Мера m называется розой направлений меры μ.

По определению, флаг есть пара $f = (g, e)$, где g прямая, содержащая O, а e плоскость содержащая g (см. [1]). Имеются два эквивалентных описания флага :

$$f = f(\Omega, \Phi) \quad \text{и} \quad f = f(\varphi, \omega),$$

где Ω - пространственное направление g в $\mathbb{R}^3$, Φ - определяет поворот e вокруг g, ω - направление нормали плоскости e, а φ - плоское направление g в e. Мера μ индуцирует меру на пространстве флагов, которая имеет т.н. флаговую плотность (см. [1])

$$\rho(f(\Omega, \Phi)) = \int_{\mathcal{E}_2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega, \Phi) m(d\xi). \tag{0.1}$$

Здесь $f(\Omega, \Phi)$ — флаг, $\alpha(\xi, \Omega, \Phi)$ — угол между g и следом $e_\xi \cap e$, где e_ξ — плоскость с нормалью $\xi \in \mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_2$ — элиптическая плоскость (см [5]).

В статье решена следующая задача. На пространстве флагов имеется мера с плотностью ρ, индуцированная некоторой мерой μ с помощью (0.1). Требуется найти меру $m(\cdot)$ в терминах ρ. В статье найдена интегральная формула, позволяющая вычислить значение меры $m(\cdot)'$ на сферических областях, ограниченных кусочно-гладкими кривыми.

§1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $S^2(O,h)$ — сфера с центром O и радиусом h, для краткости вместо $S^2(O,1)$ будем писать S^2. Обозначим через $[A] = \{e \in \mathbb{E} : e \cap A \neq \emptyset\}$, где $A \subset \mathbb{R}^3$. Нам потребуется следующая теорема

Теорема 1. *Пусть μ — трансляционно-инвариантная мера. Для любого гладкого выпуклого тела K имеет место следующее флаговое представление*

$$\mu([K]) = (2\pi)^{-1} \int_{\partial K} [k_1 \rho(f(s,\varphi_2)) + k_2 \rho(f(s,\varphi_1))]\, ds, \tag{1.1}$$

где k_i, $i = 1,2$ — главные нормальные кривизны поверхности ∂K в точке $s \in \partial K$, $f(s,\varphi_i)$ — флаг с плоскостью, касательной к ∂K в точке s и прямой, совпадающей с i-тым главным направлением поверхности ∂K в точке s.

Заметим, что этот результат впервые получен в [2] путем пространственной аппроксимации тела K. Имеются и другие доказательства путем стохастической аппроксимации тела K (см. [3],[5]). Здесь для полноты приведем новое более краткое доказательство.

Доказательство теоремы 1. Сначала докажем (1.1) для опорной функции $H(\xi)$ тела K, т.е. когда $d\mu = \delta_\xi \times dp$, где δ_ξ — δ-мера Дирака. В этом случае μ сконцентрировано на параллельных плоскостях с нормалью ξ. Докажем, что в этом случае

$$H(\xi) = (2\pi)^{-1} \int_{\partial K} [k_1 \sin^2 \alpha(\xi,\omega,\varphi_2)) + k_2 \sin^2 \alpha(\xi,\omega,\varphi_1))]\, ds. \tag{1.2}$$

Пусть K_ϕ проекция K на плоскость e_ϕ, которая проходит (или параллельна) через ξ, а ϕ определяет поворот e вокруг ξ. Аппроксимируем K_ϕ многоугольниками (см. Рис. 1).

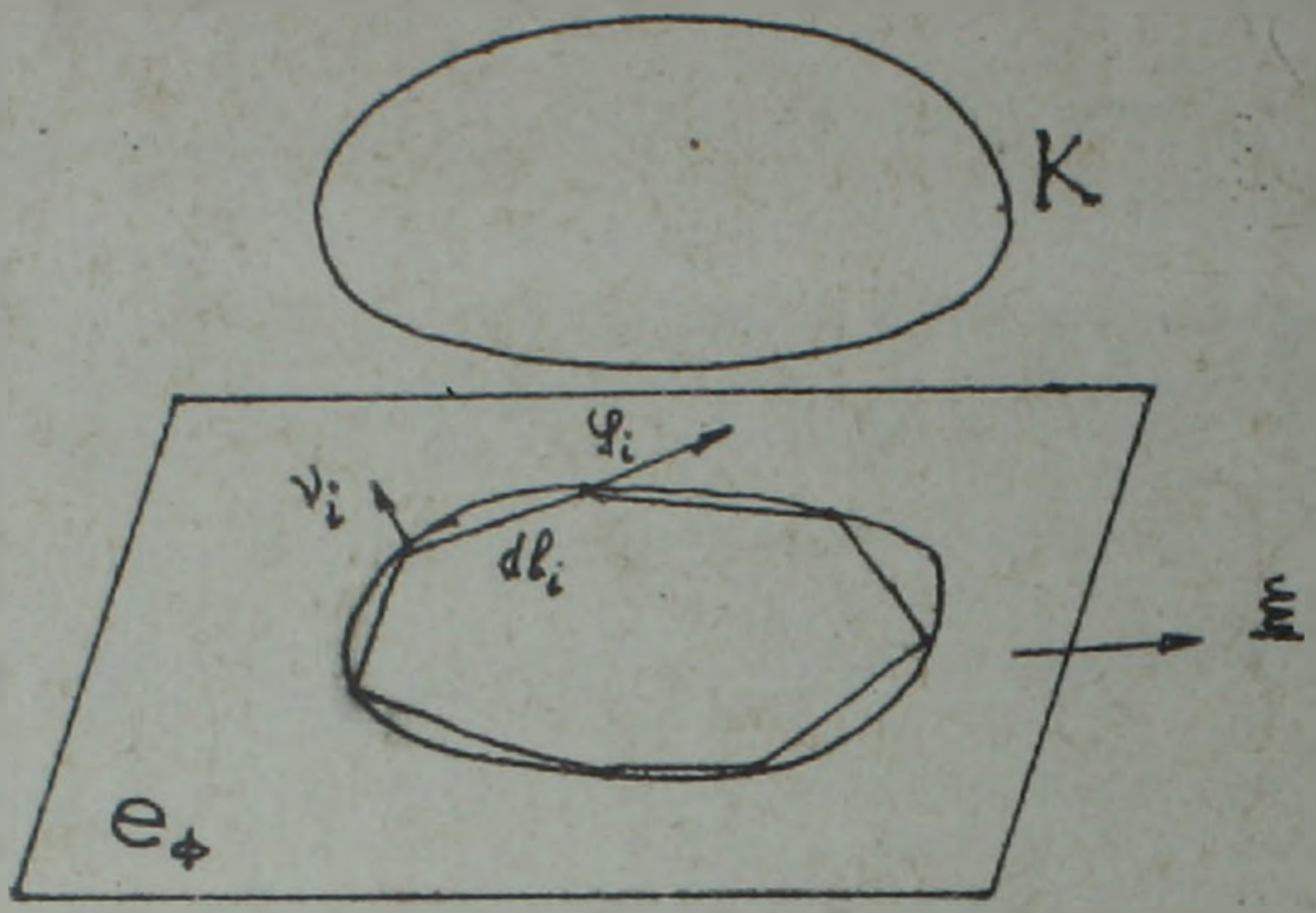

Рис. 1.

Имеем

$$2H(\xi) = 2H_{K_\phi}(\xi) = \lim \sum_i dl_i |\cos(\xi, \varphi_i)| = \lim \sum_i dl_i \sin(\xi, \nu_i) =$$

$$= \lim \sum_i R(\nu_i) \sin(\xi, \nu_i) d\nu_i = \int_0^\pi R(\nu, \phi) \sin\nu \, d\nu + \int_0^\pi R(\nu, \phi + \pi) \sin\nu \, d\nu, \quad (1.3)$$

где dl_i — сторона многоугольника, φ_i — направление dl_i, ν — нормаль к dl_i, а $R(\nu)$ — радиус кривизны в точке ∂K_ϕ с нормалью ν.

Проинтегрировав (1.3) по ϕ, получим

$$2\pi H(\xi) = \int_0^\pi \left[\int_0^\pi R(\nu, \phi) \sin\nu \, d\nu + \int_0^\pi R(\nu, \phi + \pi) \sin\nu \, d\nu\right] d\phi =$$

$$= \int_{S^2} R(\xi, \omega) \, d\omega, \quad (1.4)$$

где $R(\xi, \omega)$ — радиус кривизны в точке на $K_{\xi,\omega}$, с нормалью ω. Здесь $K_{\xi,\omega}$ - проекция K на плоскость, которая параллельна ξ и ω. Это завершает доказательство в частном случае когда $m(\cdot)$ есть δ — мера Дирака, так как имеем (см. [4])

$$R(\xi, \omega) = R_1 \sin^2 \alpha(\xi, \omega, \varphi_1) + R_2 \sin^2 \alpha(\xi, \omega, \varphi_2), \quad ds = R_1 R_2 \, d\omega,$$

где R_i - главные радиусы кривизны ∂K в точке с нормалью ω.

В общем случае, (1.1) получается после интегрирования (1.2) по $m(\cdot)$.

Теорема доказана.

Пусть $A \subset S^2$ геодезически выпуклое множество, целиком лежащее на некоторой полусфере.

Обозначим через $A_h \subset \mathbb{R}^3$ - выпуклое множество, ограниченное сферой $S^2(O, 1+h)$, касательными плоскостями к сфере S^2 в точках ∂A (граница A) и конической поверхностью с основанием A (см. Рис. 2).

Определение. Флаг f называется опорным флагом к A в точке $l \in \partial A$, если плоскость флага f касается S^2 в точке $l \in \partial A$, а прямая f является опорной к ∂A в l. Если l точка гладкости ∂A, тогда опорный флаг в точке l называется касательным флагом.

Теорема 2. *Пусть μ трансляционно инвариантная мера на $\mathbb{E}$ ($d\mu = m(d\xi) \times dp$), $A \subset S^2$ - открытое выпуклое множество, принадлежащее некоторой полусфере. Тогда*

$$m(A) = \lim_{h \to 0} \frac{\mu([A_h]) - \mu([A_o])}{h}. \tag{1.5}$$

Доказательство.

$$\mu([A_h]) = \mu([A_o]) + \mu([A_h] \setminus [A_o]) = \mu([A_o]) + \int_{[A_h]\setminus[A_o]} dp\, m(d\xi) =$$

$$= \mu([A_o]) + h\mu(A^h) + \int_{A \setminus A^h} h(\xi)\, m(d\xi),$$

где A^h - телесный угол, соответствующий $\partial A_h \cap S^2(O, 1+h)$ (см. Рис. 2). Здесь $h(\xi)$ результат интегрирования по dp, $0 \leq h(\xi) \leq h$. Ясно, что A^h стремится к A, при $h \to 0$ (монотонная сходимость). Следовательно,

$$\left| \frac{\mu([A_h]) - \mu([A_o])}{h} - \mu(A) \right| \leq |\mu(A) - \mu(A^h)| + |h^{-1} \int_{A \setminus A^h} h(\xi)\, m(d\xi)| \leq$$

$$\leq |\mu(A) - \mu(A^h)| + \mu(A \setminus A^h) \to 0$$

при $h \to 0$. Теорема доказана.

Определение. Мы используем также производную $\rho_\phi(f)$:

$$\rho'_\phi(f) = \lim_{\Delta\phi \to 0} \frac{\rho(f(\phi + \Delta\phi, \Omega)) - \rho(f(\phi, \Omega))}{\Delta\phi}, \tag{1.4}$$

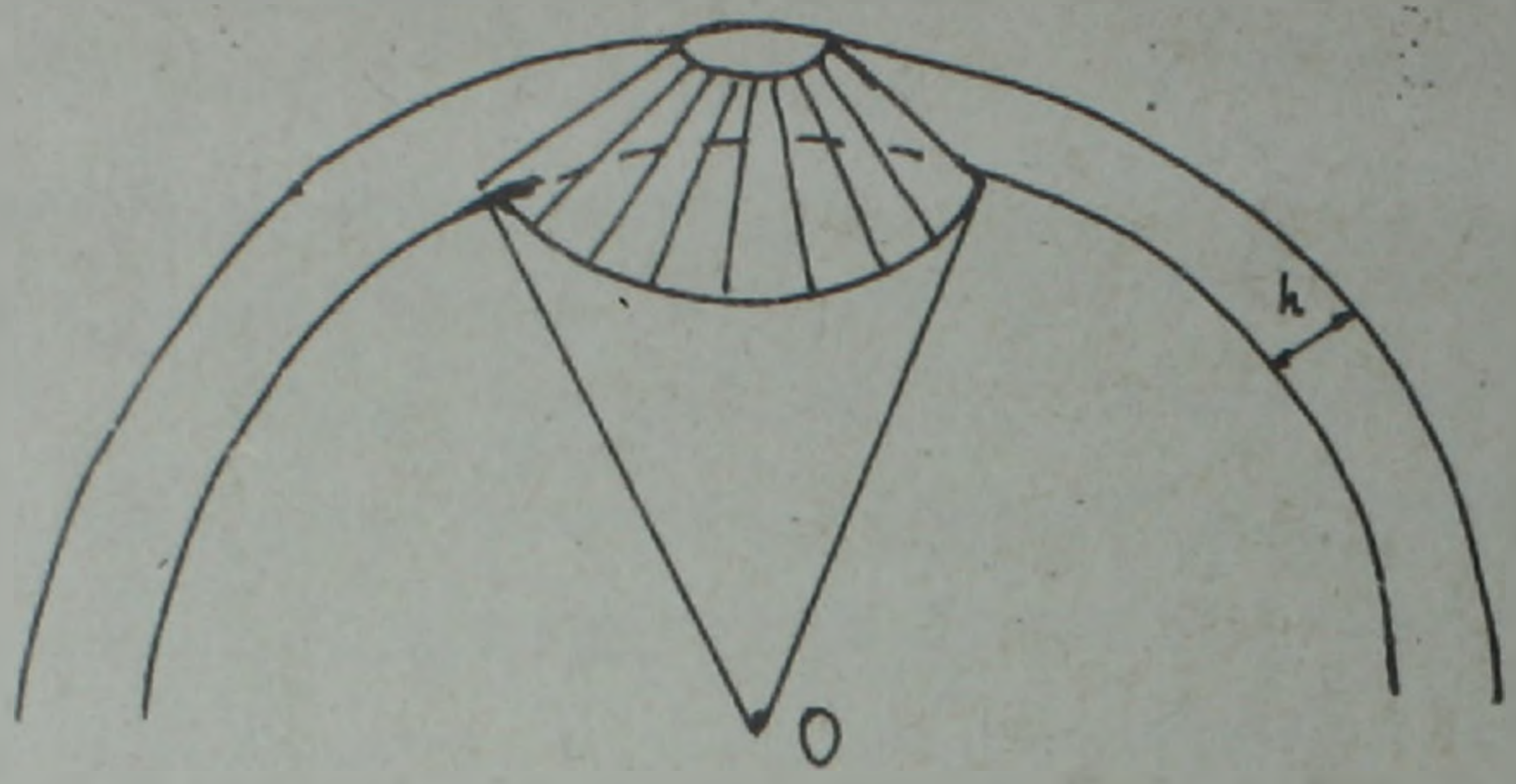

Рис. 2.

которая полностью определена, если для заданного направления Ω указано положительное направление изменения ϕ. Мы рассматриваем ρ' только для опорных флагов некоторых областей. Для заданной области A, при малых $\varepsilon \geq 0$ мы определяем флаг $f(\Omega, \phi + \varepsilon)$, учитывая условие, *что плоскость флага $f(\Omega, \phi + \varepsilon)$ не пересекает внутренность A*. Это определение остаётся верным и для не выпуклых областей.

M — тотальная мера m.

§2. ЗНАЧЕНИЕ $m(\cdot)$ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИХ СЕГМЕНТОВ

Пусть $A \subset S^2$ - сферический сегмент с центром $Q \in S^2$. Принимая Q как полюс, рассмотрим сферическую координатную систему на S^2. В частности, если радиус A равен α, то $\partial A = \{(\varphi, \alpha) : 0 \leq \varphi < 2\pi\}$.

Теорема 3. *Пусть ρ — флаговая плотность, а $m(\cdot)$ — роза направлений трансляционно инвариантной меры μ в $\mathbb{E}$. Тогда для любого сферического сегмента $A \subset S^2$, имеем*

$$m(A) = M - \frac{\cos\alpha}{\pi} \int_0^{2\pi} \rho(f(\varphi, \alpha))d\varphi - \frac{\sin\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho'_\phi(f(\varphi, \alpha))d\varphi, \qquad (2.1)$$

где α - радиус A, $f(\varphi, \alpha)$ - касательный флаг к A в точке (φ, α).

Доказательство. Согласно Теореме 1 нам надо вычислить $\mu([A_h])$ и $\mu([A_o])$. Но A_h и A_o не являются гладкими телами, так что нам надо рассмотреть

$A_h + S^2(O,\varepsilon)$ и $A_o + S^2(O,\varepsilon)$ (внешнее параллельное множество). Имеем

$$\mu([A_h]) = \lim_{\varepsilon\to 0}\mu([A_h + S^2(O,\varepsilon)]), \quad \mu([A_o]) = \lim_{\varepsilon\to 0}\mu([A_o + S^2(O,\varepsilon)]). \tag{2.2}$$

Чтобы вычислить $\mu([A_h + S^2(O,\varepsilon)])$ с помощью формулы (1.1), разделим поверхность $A_h + S^2(O,\varepsilon)$ на области I- VI как это показано на Рис. 3, вычислим соответствующие интегралы по этим областям и просуммируем.

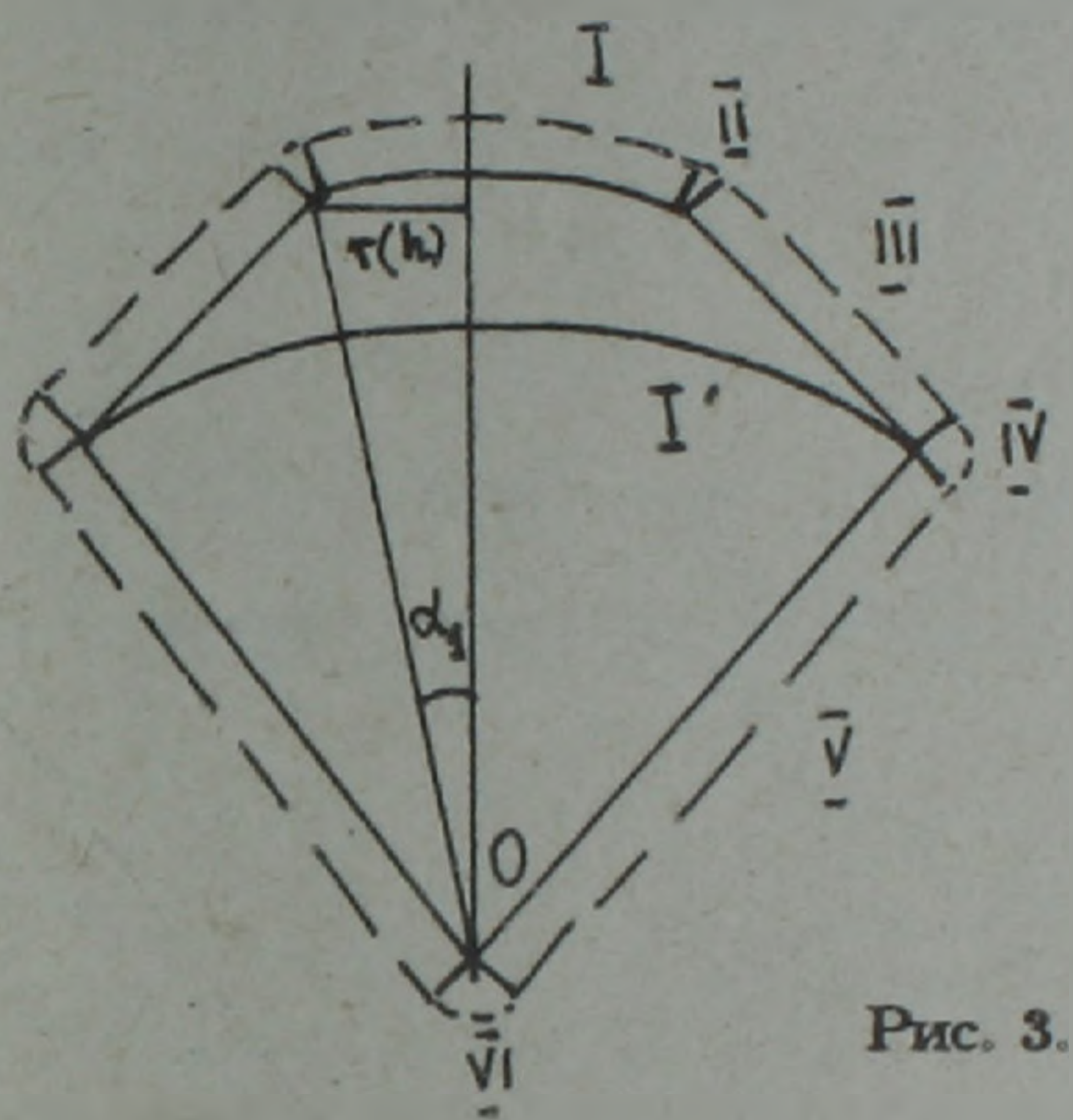

Рис. 3.

а) В любой точке области I, имеем $k_1 = k_2 = (1+h+\varepsilon)^{-1}$. Из (0.1) следует, что

$$\rho(f(s,\varphi_1)) + \rho(f(s,\varphi_2)) = m(\mathcal{E}_2) = M. \tag{2.3}$$

Таким образом, имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_I [k_1\rho(f(s,\varphi_2)) + k_2\rho(f(s,\varphi_1))]ds = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{M\,S(h+\varepsilon)}{(1+h+\varepsilon)} = \frac{M\,S(h)}{1+h}, \tag{2.4}$$

где $S(h+\varepsilon)$ - площадь области I

б) Область II из себя представляет кусок тора с радиусом осевой окружности $r(h) = (1+h)\sin\alpha_1$, и с радиусом меридиана — ε (см. Рис. 3). Элемент поверхности тора имеет следующее представление

$$ds = \varepsilon(r(h) + \varepsilon\sin\phi)\,d\phi\,d\varphi, \tag{2.5}$$

где φ — определяет положение на осевой окружности (меридиан), а ϕ - определяет положение точки на меридиане. В точке на торе одно главное направление совпадает с направлением меридиана, и $k_1 = \varepsilon^{-1}$, а другое главное направление перпендикулярно ему, и k_2 ограничена снизу. Таким образом, имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{II} [k_1 \rho(f(s, \varphi_2)) + k_2 \rho(f(s, \varphi_1))] ds =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{II} r(h) \rho(f(s, \varphi_2)) d\phi \, d\varphi = r(h) \int_0^{2\pi} \left[\int_{\phi_1(h)}^{\phi_2(h)} \rho(f(\varphi, \phi)) d\phi \right] d\varphi, \qquad (2.6)$$

где $f(\varphi, \phi)$ - флаг с плоскостью касательной поверхности тора в точке (φ, ϕ), а прямая флага $f(\varphi, \phi)$ перпендикулярна меридиану. Из Рис. 3 видно, что $\phi_1(h) = \alpha_1$, а $\phi_2(h) = \alpha$.

в) Область III из себя представляет кусок конической поверхности. Точку на этой конической поверхности можно определить параметрами (φ, l), где φ - определяет образующую, а l - положение точки на ней (см. Рис. 4, l измеряем от O').

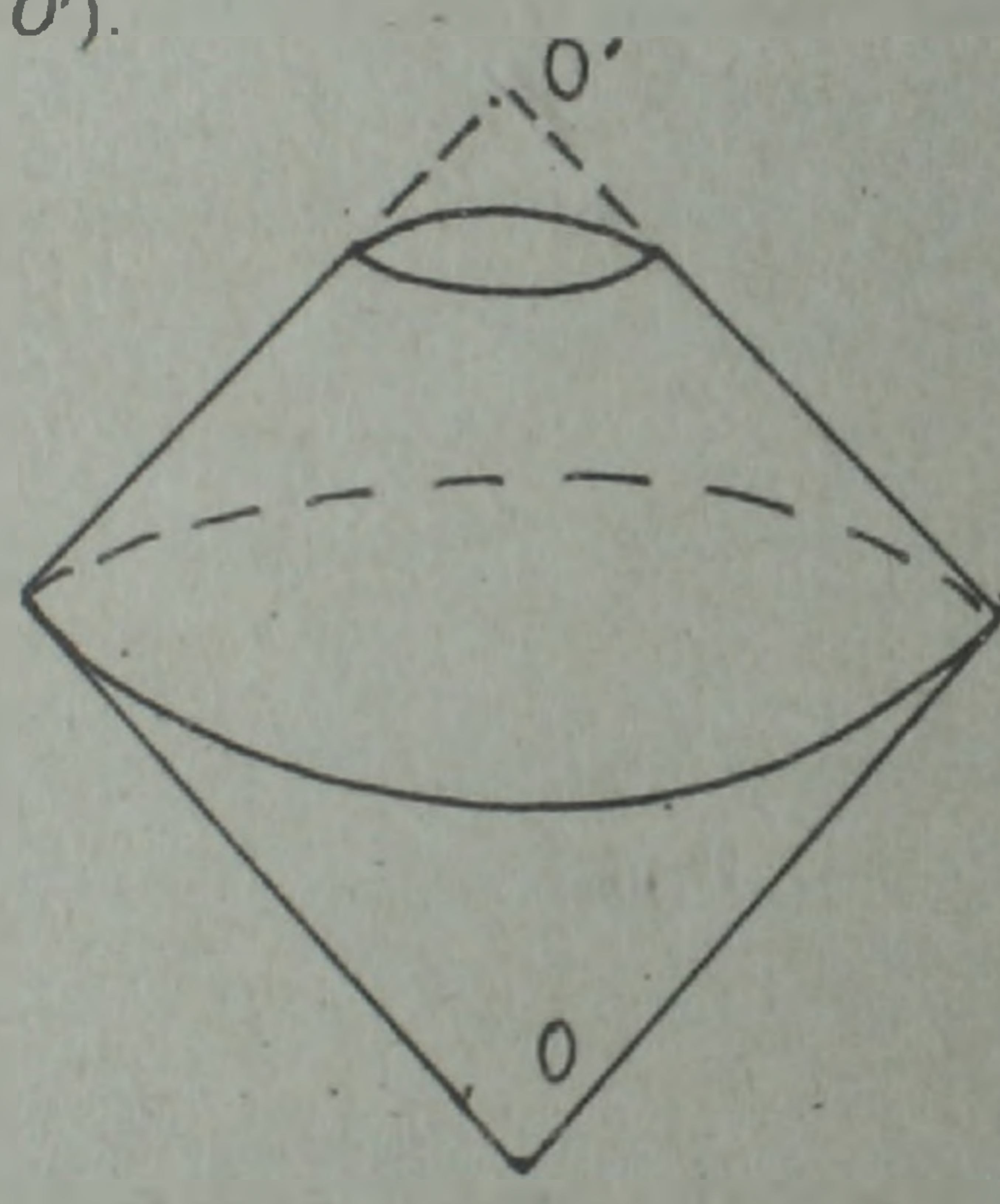

Рис. 4.

В этих координатах

$$ds = l \cos \alpha d\varphi \, dl. \qquad (2.7)$$

На точке с координатами (φ, l) одно главное направление - это направление образующей и по этому направлению $k_1 = 0$. Для другого главного направления $k_2 = \operatorname{tg} \alpha \, l^{-1}$. Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{III} [k_1 \rho(f(s, \varphi_2)) + k_2 \rho(h(s, \varphi_1))] ds = \sin \alpha \sqrt{2h + h^2} \int_0^{2\pi} \rho(f(\varphi, l)) d\varphi, \qquad (2.8)$$

где $f(\varphi, l)$ - флаг, с плоскостью касательной в точке (φ, l), а прямая совпадает с образующей.

Интегралы по областям IV, V, VI, не будем рассматривать, так как подобные интегралы появляются и при вычислении $\mu([A_o])$, и следовательно, они исчезнут при вычитании.

Аналогично получаем выражение для $\mu([A_o + S^2(0,\varepsilon)])$. Учитывая выше сказанное, достаточно рассматривать только

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{l'}[k_1\rho(f(s,\varphi_2)) + k_2\rho(f(s,\varphi_1))]ds = M\,S(0), \tag{2.9}$$

где l' показано на Рис. 3.

Таким образом, имеем

$$\mu([A_h]) - \mu([A_o]) = \frac{M\,S(h)}{1+h} + r(h)\int_0^{2\pi}\left[\int_{\phi_1(h)}^{\phi_2(h)}\rho(f(\varphi,\phi))d\phi\right]d\varphi+$$

$$+\sin\alpha\sqrt{2h+h^2}\int_0^{2\pi}\rho(f(\varphi,l))d\varphi - M\,S(0). \tag{2.10}$$

Теперь рассмотрим предел (1.3). Подставляя выражение для $S(h)$, получаем

$$2\pi m(A) = \lim_{h\to 0} h^{-1}[2\pi M(1+h)(1-\cos\alpha_1) - 2\pi M(1-\cos\alpha)+$$

$$+(1+h)\sin\alpha_1\int_0^{2\pi}\left[\int_{\alpha_1}^{\alpha}\rho(f(\varphi,\phi))d\phi\right]d\varphi+\sin\alpha\sqrt{2h+h^2}\int_0^{2\pi}\rho(f(\varphi,l))d\varphi]. \tag{2.11}$$

По разложению Тейлора имеем

$$\rho(f(\varphi,\phi)) = \rho(f(\varphi,\alpha)) + \rho'_\alpha(f(\varphi,\alpha))(\phi-\alpha) + o(\phi-\alpha).$$

Из Рис. 3 видно, что

$$\cos\alpha_1 = \cos(\alpha-(\alpha-\alpha_1)) = \cos\alpha(1+h)^{-1} + \sin\alpha(1+h)^{-1}\sqrt{2h+h^2}$$

и

$$(1+h)\sin\alpha_1 = \sin\alpha - \cos\alpha\sqrt{2h+h^2}, \quad (\alpha-\alpha_1)\sim\sin(\alpha-\alpha_1) = (1+h)^{-1}\sqrt{2h+h^2}.$$

Подставляя в (2.11) и используя (2.3), получаем

$$2\pi m(A) = \lim_{h\to 0} h^{-1}[2\pi M(h - \sin\alpha\sqrt{2h+h^2})+$$

$$+(\sin\alpha - \cos\alpha\sqrt{2h+h^2})(\alpha-\alpha_1)\int_0^{2\pi}\rho(f(\varphi,\alpha))d\varphi - (\sin\alpha - \cos\alpha\sqrt{2h+h^2})\times$$

$$\times\frac{(\alpha-\alpha_1)^2}{2}\int_0^{2\pi}\rho'_\alpha(f(\varphi,\alpha))d\varphi + \sqrt{2h+h^2}\sin\alpha\int_0^{2\pi}\rho(f(\varphi,l))d\varphi] =$$

$$= 2\pi M - 2\cos\alpha\int_0^{2\pi}\rho(f(\varphi,\alpha))d\varphi - \sin\alpha\int_0^{2\pi}\rho'_\alpha(f(\varphi,\alpha))d\varphi.$$

Теорема 3 доказана.

§3. ЗНАЧЕНИЕ МЕРЫ $m(\cdot)$ ДЛЯ ЛУНОК

Лунка — часть S^2, ограниченная двумя большими окружностями. Вершины лунки обозначим через P_1 и P_2, см. Рис. 5.

Теорема 4. *Пусть ρ - флаговая плотность, а $m(\cdot)$ — роза направлений трансляционно-инвариантной меры μ в $\mathbb{E}$. Тогда для любой лунки $A \subset S^2$ имеем*

$$m(A) = M - \pi^{-1}\sum_{i=1}^{2}\int_{\alpha_i^c}\rho(f(\varphi,P_i))d\varphi - (2\pi)^{-1}\int_{\partial A}\rho'_\phi(f(l))dl. \qquad (3.1)$$

В первом интеграле α_i^c внешний угол при вершине P_i, т.е. интегрирование ведется по всем опорным к A флагам в P_i, $f(l)$ - касательный флаг к A в точке $l \in \partial A$.

Доказательство. Рассмотрим следующую сглаженность лунки A. Пусть $A(r) \subset S^2$ сглаженная лунка, т.е. ограничена дугами двух больших окружностей A и двумя маленькими окружностями с радиусом r, расположенными близ вершин лунки A (см. Рис. 5).

Как и в предыдущем случае мы рассмотрим $A_h(r)$ и $A_h(r) + S^2(O,\epsilon)$ (сумму понимаем в смысле Минковского). Разделим поверхность $A_h(r) + S^2(O,\epsilon)$ на области I– VI как это показано на Рис. 5, и согласно (1.1) рассмотрим интегралы по этим областям.

а) Интеграл по I. Этот случай аналогичен случаю а) предыдущего параграфа. Так что из (2.4) имеем

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_I[k_1\rho(f(s,\varphi_2)) + k_2\rho(f(s,\varphi_1))]ds = \frac{M\,S(h)}{(1+h)}, \qquad (3.2)$$

где $S(h)$ — площадь фигуры $A'B'C'D'$ (см. Рис. 6).

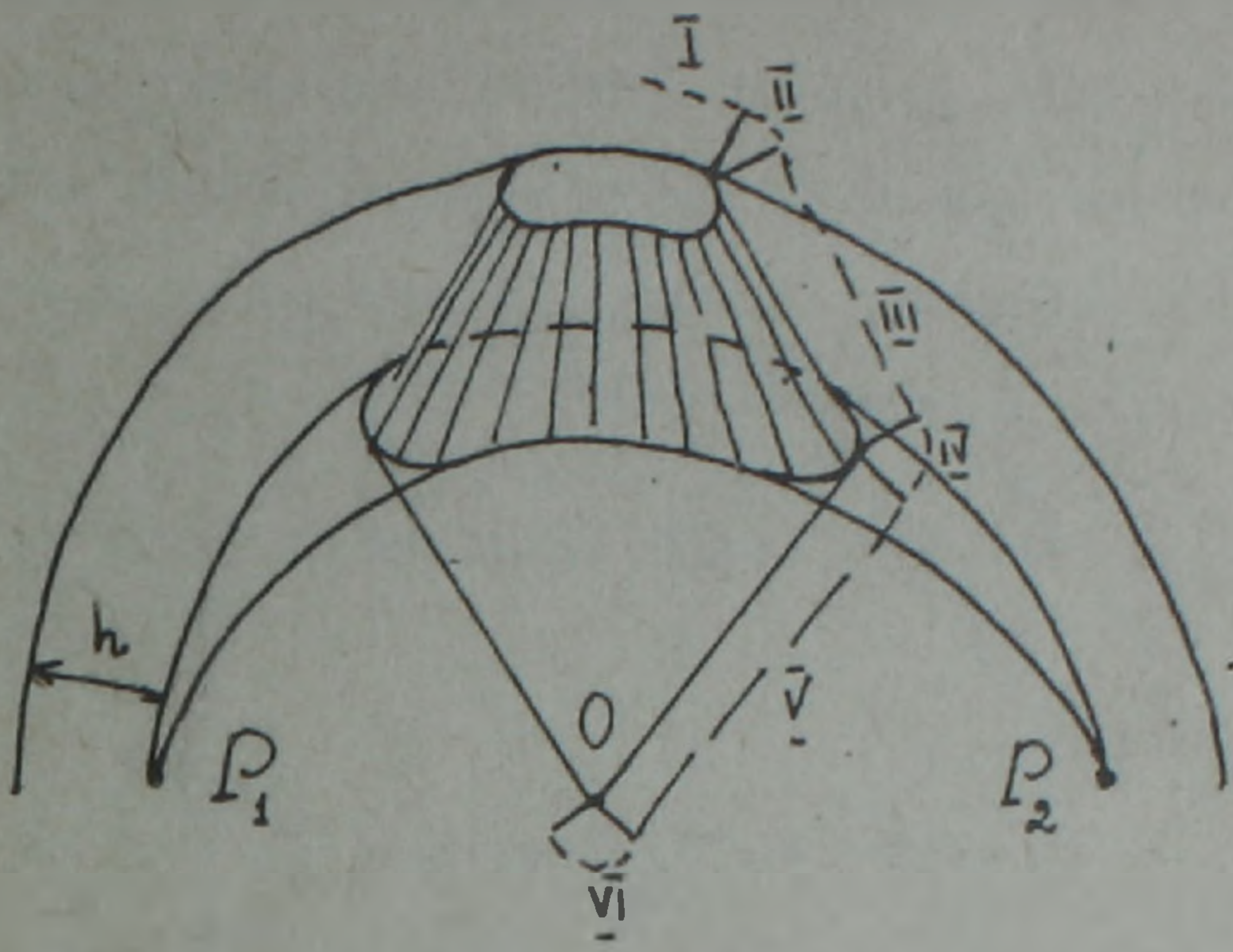

Рис. 5.

б) Область II - это объединение двух тороидальных частей. Осевая окружность для первой части $\{A'B' \cup C'D'\}$, соответствующей дугам $A'B'$ и $C'D'$, имеет радиус 1. Осевая окружность для второй части $\{B'C' \cup D'A'\}$, соответствующей дугам $B'C'$ и $D'A'$ имеет радиус r. На тороидальной части $\{B'C'\}$, соответствующей дуге $B'C'$, ситуация сходна со случаем б) предыдущего параграфа. Так что из (2.6) имеем

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\{B'C'\}} [k_1 \rho(f(s, \varphi_2)) + k_2 \rho(f(s, \varphi_1))] ds =$$

$$= r(h) \int_{B'C'} \left[\int_{\phi_1(h)}^{\phi_2(h)} \rho(f(\varphi, \phi)) d\phi \right] d\varphi, \tag{3.3}$$

где (см. Рис. 5)

$$(1 + h) \sin \phi_1 = r(h), \quad \cos(\phi_2 - \phi_1) = (1 + h)^{-1}, \quad \sin \phi_2 = r.$$

Часть $\{A'B'\}$ отличается от $\{B'C'\}$ тем, что радиус осевой окружности равен 1. Имеем

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\{A'B'\}} [k_1 \rho(f(s, \varphi_2)) + k_2 \rho(f(s, \varphi_1))] ds =$$

$$= r(h) \int_{A'B'} \left[\int_{\phi_1^*}^{\phi_2^*} \rho(f(\varphi, \phi)) d\phi \right] d\varphi, \tag{3.4}$$

где $\phi_2^* = \frac{\pi}{2}$, $\sin \phi_1^* = (1 + h)^{-1}$

в) Область III есть объединение двух частей : коническая часть $\{BC \cup AD\}$ соответствует дугам $BC \cup AD$, и цилиндрическая часть $\{AB \cup CD\}$. Оба эти случая аналогичны случаю в) предыдующего параграфа. Только в случае $\{AB \cup CD\}$ радиус осевой окружности равен 1, а в случае $\{BC \cup AD\}$ радиус равен r. Из формулы (2.8) имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{BC\}} [k_1 \rho(f(s, \varphi_2)) + k_2 \rho(f(s, \varphi_1))] ds = r\sqrt{2h + h^2} \int_{BC} \rho(f(\varphi, l))\, d\varphi \qquad (3.5)$$

и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{AB\}} [k_1 \rho(f(s, \varphi_2)) + k_2 \rho(f(s, \varphi_1))] ds = \sqrt{2h + h^2} \int_{AB} \rho(f(\varphi, l))\, d\varphi. \qquad (3.6)$$

Интегралы по областям IV, V, VI, не будем рассматривать, так как подобные интегралы появляются и при вычислении $\mu([A_o(r)])$, и следовательно, они исчезнут при вычитании.

Аналогично вычисляем $\mu([A_o(r) + S^2(0, \varepsilon)])$. Учитывая выше сказанное достаточно рассматривать только

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{I'} [k_1 \rho(f(s, \varphi_2)) + k_2 \rho(f(s, \varphi_1))] ds = M\, S(0), \qquad (3.7)$$

где, область интегрирования I' показано на Рис. 5.

Нам необходимо также вычислить $S(h)$ - площадь фигуры $A'B'C'D'$ (см. Рис.6). Для сферического образа фигуры $ABCD$ на $S^2(O, 1 + h)$ имеем

$$S(h) = S_{A'B'C'D'} = S_{A_1B_1C_1D_1} - S_{A_1B_1C_1D_1 \setminus A'B'C'D'}.$$

Заметим, что ширина полосы $A_1B_1C_1D_1 \setminus A'B'C'D'$ постоянна и равна $\arccos(1 + h)^{-1}$ (см. (3.4) и (3.5)). Из этих соображений получаем

$$S(h) = (1 + h)^2 S(0) - (1 + h) L_{AB \cup CD} \sqrt{2h + h^2} -$$
$$-(1 + h)^2 \left[\frac{\sqrt{1 - r^2}}{1 + h} + \frac{\sqrt{2h + h^2}}{1 + h} r - \sqrt{1 - r^2} \right] \alpha_{BC \cup AD}, \qquad (3.8)$$

где $\alpha_{BC \cup AD}$ - угол соответствующий дугам AD и BC.

Таким образом, из теоремы 1 и из (0.1), (3.2) - (3.8) окончательно получаем

$$2\pi m(A) = \lim_{h \to 0} h^{-1} \left[\frac{M\, S(h)}{1 + h} + r(h) \int_{B'C' \cup D'A'} \left[\int_{\phi_1}^{\phi_2} \rho(f(\varphi, \phi)) d\phi \right] d\varphi + \right.$$

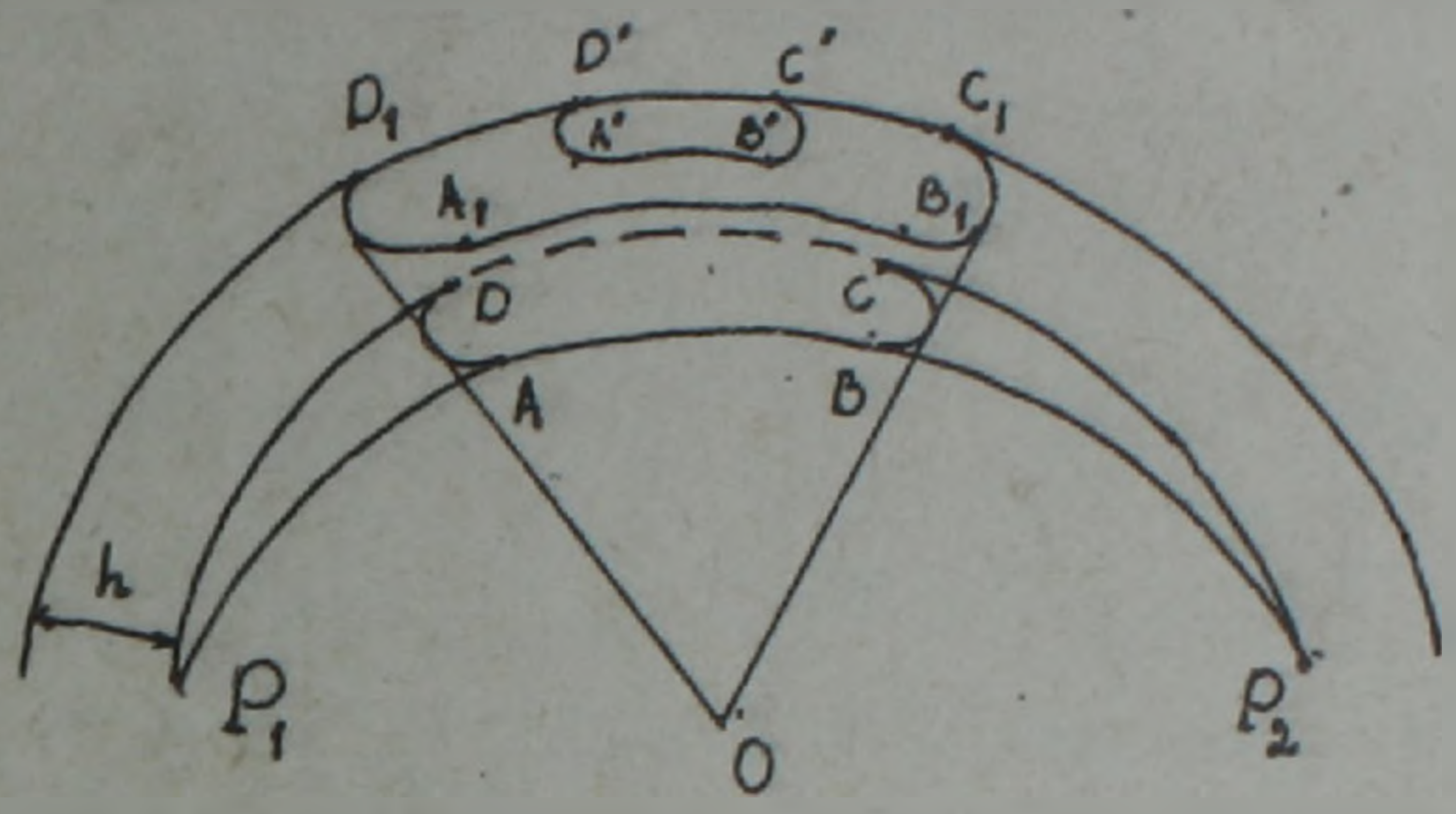

Рис. 6.

$$+\int_{A'B'\cup C'D'}\left[\int_{\phi_1^*}^{\phi_2^*}\rho(f(\varphi,\phi))d\phi\right]d\varphi+r\sqrt{2h+h^2}\int_{BC\cup AD}\rho(f(\varphi,l))\,d\varphi+$$

$$+\sqrt{2h+h^2}\int_{AB\cup CD}\rho(f(\varphi,l))\,d\varphi-M\,S(0)\Bigg]=\lim_{h\to 0}h^{-1}\,[M\,h\,S(0)-$$

$$-M\,L_{AB\cup CD}\sqrt{2h+h^2}-M\,\alpha_{BC\cup AD}r\sqrt{2h+h^2}+M\,\alpha_{BC\cup AD}h\sqrt{1-r^2}+r(h)\times$$

$$\times(\phi_2-\phi_1)\int_{B'C'\cup D'A'}\rho(f(\varphi,\alpha))d\varphi-r(h)\frac{(\phi_2-\phi_1)^2}{2}\int_{B'C'\cup D'A'}\rho'_\phi(f(\varphi,\alpha))\,d\varphi+$$

$$+(\phi_2^*-\phi_1^*)\int_{A'B'\cup C'D'}\rho(f(\varphi,\frac{\pi}{2}))\,d\varphi-\frac{(\phi_2-\phi_1)^2}{2}\int_{A'B'\cup C'D'}\rho'_\phi(f(\varphi,\frac{\pi}{2}))\,d\varphi+$$

$$+r\sqrt{2h+h^2}\int_{BC\cup AD}\rho(f(\varphi,l))\,d\varphi+\sqrt{2h+h^2}\int_{AB\cup CD}\rho(f(\varphi,l))\,d\varphi\Bigg],\qquad(3.9)$$

где

$$\sin\alpha=r,\quad r(h)=(1+h)\sin\phi_1,\quad \sin\phi_2=r,\quad \cos(\phi_2-\phi_1)=(1+h)^{-1},$$

$$\phi_2^*=\frac{\pi}{2},\quad \sin\phi_1^*=(1+h)^{-1},\quad \phi_2-\phi_1\sim\sqrt{2h+h^2}\sim\phi_2^*-\phi_1^*,$$

$$r(h)=(1+h)\sin(\phi_2-(\phi_2-\phi_1))=r-\sqrt{1-r^2}\,\sqrt{2h+h^2}.$$

Из (3.9) получаем

$$2\pi m(A)=\lim_{h\to 0}h^{-1}\,\Big[M\,h\,S(0)-M\,L_{AB\cup CD}\sqrt{2h+h^2}-M\,\alpha_{BC\cup AD}r\sqrt{2h+h^2}+$$

$$+M\,\alpha_{BC\cup AD}h\sqrt{1-r^2}+r\sqrt{2h+h^2}\int_{B'C'\cup D'A'}\rho(f(\varphi,\alpha))\,d\varphi-\sqrt{1-r^2}(2h+h^2)\times$$

$$\times \int_{B'C'\cup D'A'} \rho(f(\varphi,\alpha))\,d\varphi - \frac{r(2h+h^2)}{2}\int_{B'C'\cup D'A'} \rho'_\phi(f(\varphi,\alpha))\,d\varphi +$$

$$+\sqrt{2h+h^2}\int_{A'B'\cup C'D'} \rho(f(\varphi,\frac{\pi}{2}))\,d\varphi - \frac{2h+h^2}{2}\int_{A'B'\cup C'D'} \rho'_\phi(f(\varphi,\frac{\pi}{2}))\,d\varphi +$$

$$+r\sqrt{2h+h^2}\int_{BC\cup AD} \rho(f(\varphi,\bar{l}))\,d\varphi + \sqrt{2h+h^2}\int_{AB\cup CD} \rho(f(\varphi,l))\,d\varphi\Big] =$$

$$= M\,S_o + M\alpha_{BC\cup AD}\sqrt{1-r^2} - 2\sqrt{1-r^2}\int_{BC\cup DA} \rho(f(\varphi,\alpha))\,d\varphi -$$

$$-r\int_{BC\cup DA} \rho'_\phi(f(\varphi,\alpha))\,d\varphi - \int_{AB\cup CD} \rho'_\phi(f(\varphi,\frac{\pi}{2}))\,d\varphi.$$

При $r \to 0$ получаем, что мера лунки равна :

$$2\pi m(A) = M\,S_o + 2M(\pi - \alpha_o) - 2\sum_{i=1}^{2}\int_{\alpha_i^c} \rho(f(\varphi,P_i))\,d\varphi - \int_{\partial A} \rho'_\phi(f(l,\frac{\pi}{2}))\,dl.$$

Учитывая, что $S_o = 2\alpha_o$ получаем (3.1). Теорема доказана.

§4. ЗНАЧЕНИЕ $m(\cdot)$ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Выпуклый сферический многоугольник - это часть сферы, ограниченная большими окружностями.

Теорема 5. *Пусть ρ - флаговая плотность, а m - роза направлений трансляционно инвариантной меры μ в $\mathbb{E}$. Тогда для сферического многоугольника $A \subset S^2$*

$$m(A) = M - \pi^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_i^c} \rho(f(\varphi,P_i))d\varphi - (2\pi)^{-1}\int_{\partial A} \rho'_\phi(f(l))dl \qquad (4.1)$$

В первом интеграле α_i^c внешний угол при вершине P_i, т.е. интегрирование ведется по всем опорным к A флагам в P_i, $f(l)$ - касательный флаг к A в точке $l \in \partial A$.

Доказательство. Теорему 5 можно вывести из теоремы 4 комбинаторным способом. Покажем это. Сперва получим (4.1) для сферических треугольников. Пусть τ сферический треугольник и A_1, A_2, A_3 лунки, соответствующие внутренним углам τ.

Непосредственной проверкой можно установить следующее тождество

$$2m(\tau) = m(A_1) + m(A_2) + m(A_3) - M. \qquad (4.2)$$

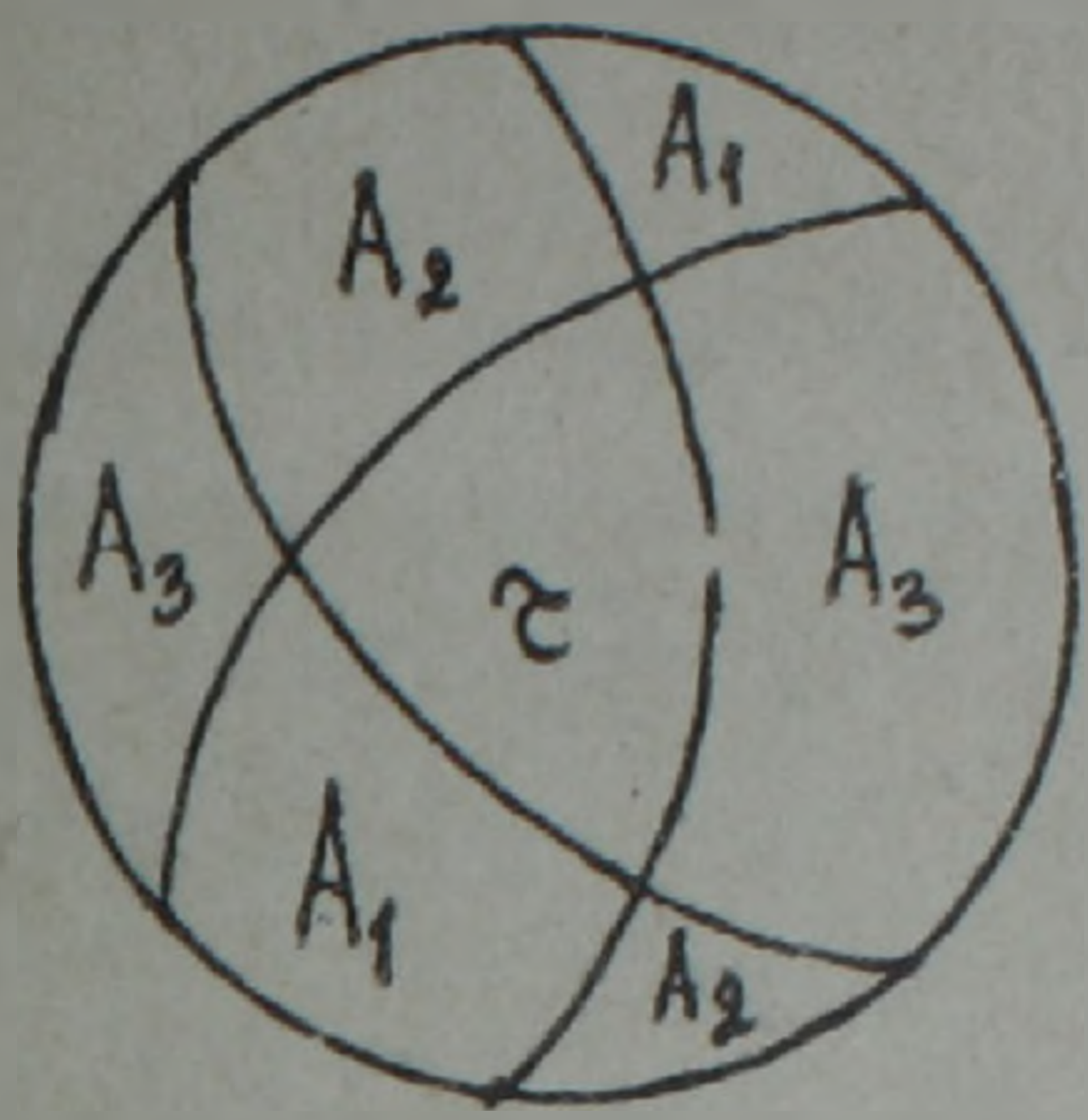

Рис. 7. Моделью эллиптического пространства $\mathcal{E}_2$ может служить сфера S^2, на которой склеены пары диаметрально противоположных точек.

Запишем выражение (3.1) с помощью интегралов по внутренним углам. Из определения $\rho(f)$ имеем

$$\rho(f(\varphi, P_i)) + \rho(f(\varphi + \frac{\pi}{2}, P_i)) = \int [\sin^2\alpha + \cos^2\alpha]\, m(d\xi) = M. \qquad (4.3)$$

С другой стороны

$$\int_{\alpha_i} \rho(f)\, d\varphi + \int_{\alpha_i^c} \rho(f)\, d\varphi = \int_0^{\pi} \rho(f)\, d\varphi = \frac{\pi}{2} M. \qquad (4.4)$$

Следовательно, после соответствующих подстановок в (3.1), получим :

$$m(A_j) = \pi^{-1} \sum_{i=1}^{2} \int_{\alpha_{ji}} \rho(f(\varphi, P_i))\, d\varphi - (2\pi)^{-1} \int_{\partial A_j} \rho'_\phi(f(l))\, dl.$$

Подставим эти выражения в (4.3). Получим интегралы от $\rho(f)$ по углам лунок и интегралы от ρ'_ϕ по границам лунок. По каждой дуге, которая разделяет лунки и не является стороной треугольника, получим по два интеграла от ρ'_ϕ, написанные для этих лунок. Из определения ρ'_ϕ и из Теоремы 3 ясно, что эти подынтегральные выражения различаются только по знакам (так как производная вычисляется по противоположным направлениям). Следовательно, сумма этих интегралов равна нулю. Таким образом, учитывая ещё трансляционную инвариантность μ, получаем

$$2m(\tau) = 2\pi^{-1} \sum_{i=1}^{3} \int_{\alpha_i} \rho(f(\varphi, P_i))\, d\varphi - \pi^{-1} \int_{\partial\tau} \rho'_\phi(f(l))\, dl - M, \qquad (4.5)$$

где α_i - внутренний угол τ.

Из формулы (4.5) легко перейти к более общей формуле, верной для сферических многоугольников.

Пусть D — сферический многоугольник, с помощью обычной триангуляции D разбивается на τ_i. Для каждого из треугольников τ_i запишем (4.5). Используя аддитивность соответствующих интегралов суммированием по i, получаем

$$2m(D) = 2\pi^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_i}\rho(f(\varphi,P_i))\,d\varphi - \pi^{-1}\int_{\partial D}\rho'_\phi(f(l))\,dl - M(n-2), \tag{4.6}$$

где α_i - внутренние углы D при i-той вершине P_i, n - число сторон многоугольника D. С помощью (4.4), переходя к интегрированию по внешним углам, получаем (4.1). Теорема доказана.

§5. ЗНАЧЕНИЕ $m(\cdot)$ ДЛЯ ОБЩИХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

Теорема 6. *Пусть G - сферическая область ограниченная достаточно гладкой кривой γ, ρ - флаговая плотность, а $m(\cdot)$ — роза направлений трансляционно-инвариантной меры μ в $\mathbb{E}$. Тогда*

$$m(G) = M - \pi^{-1}\int_\gamma \rho(f(l))\kappa(l)\,dl - (2\pi)^{-1}\int_\gamma \rho'_\phi(f(l))dl, \tag{5.1}$$

где $f(l)$ - касательный флаг к G в точке $l\in\gamma$, κ - знакопеременная геодезическая кривизна γ в точке $l\in\gamma$ ($\kappa\geq 0$ там, где кривая γ обращена выпуклостью наружу области G, и $\kappa\leq 0$ там, где она обращена выпуклостью внутрь).

Доказательство. Пусть D_n - последовательность выпуклых сферических многоугольников, которая аппроксимирует G. Напишем формулу (4.1) для D_n и используем

$$|\alpha_i^c| \sim \kappa(l)\,dl.$$

В пределе получим (5.1) что, доказывает теорему в выпуклом случае. Теперь, пусть G -невыпуклая область. В (4.6), написанной для многоугольников D_n, перейдем к интегралам по внешним углам. В тех вершинах D_n,

Рис. 8.

которые находятся на части ∂G, обращенной выпуклостью внутрь, имеем (см. Рис. 8)

$$\int_{\alpha_i} \rho(f)\, d\varphi = \int_0^{\pi} \rho(f)\, d\varphi + \int_{\alpha_i^c} \rho(f)\, d\varphi = \frac{\pi}{2} M - \int_{\alpha_i^c} -\rho(f)\, d\varphi.$$

Поэтому, при переходе к пределу там, где кривая обращена выпуклостью внутрь, геодезическую кривизну γ будем считать отрицательной. Теорема доказана.

В случае, когда γ - кусочно-гладкая с внутренними углами в точках излома α_i, получаем

$$m(G) = M - \pi^{-1} \int_\gamma \rho(f(l))\, dl - (2\pi)^{-1} \int_\gamma \rho'_\phi(f(l)) dl - \pi^{-1} \sum_i \int_{\alpha_i^c} \rho(f(\varphi, P_i))\, d\varphi.$$

Следствие. В случае, когда μ - инвариантная мера, то из формулы (5.1) получается формула Гаусса–Бонне для сферы.

Автор выражает благодарность Р.В.Амбарцумяну за постановку задачи и ценные советы.

ABSTRACT. Let $\mathbb{E}$ be the space of planes in $\mathbb{R}^3$, and μ be a translation invariant measure in $\mathbb{E}$ (with element $d\mu = m(d\xi) \times dp$). The measure $m(\cdot)$ is called the rose of directions of μ. The measure μ induces a family of measure on the space of flags, which has a flag density ρ. The problem which we solve in this article is to express $m(\cdot)$ in terms of ρ. We find certain integral formulas expressing the values of measure $m(\cdot)$ on circles and polygons on the sphere. The result is extended to spherical domains bounded by piecewise smooth curves.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, "Combinatorial integral geometry, metrics and zonoids", Acta Appl. Math., vol.9, 1987.
2. Г. Ю. Панина, "Выпуклые тела и трансляционно-инвариантные меры", Зап. науч. семинаров. Л. отд. Мат. ин-та АН СССР, том 157, 1986.
3. Р. Г. Арамян, "О стохастической аппроксимации выпуклых тел", Изв. АН Армении, Математика [английский перевод : Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of sciences)], том 22, № 5, стр. 427 – 438, 1986.
4. W. Blaschke, Kreis und Kugel, Berlin, 1956.
5. Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штойян Введение в Стохастическую Геометрию, М., Наука, 1989.

19 Сентября 1992

Институт Математики
Национальной Академии Наук Армении

ТОЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ГАУССОВСКИХ МЕР В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. Р. Фаталов

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 27, № 5, 1992

Пусть P_A — гауссовская вероятностная мера со средним нуль и ковариационным оператором A в вещественном гильбертовом пространстве H, Ω — борелевское подмножество пространства H, удовлетворяющее некоторым ограничениям. В статье найдена точная асимптотика $P_A(u\,\Omega)$, $u \to \infty$. Также получена асимптотика $P\left\{\left(\sum_{i=1}^{k}|X_i|^p\right)^{1/p} > u\right\}$, $u \to \infty$, $p > 1$, где $X_i, i = 1,2,\ldots,k$ независимые гауссовские случайные величины. Метод исследования новый : асимптотический метод Лапласа в гильбертовом пространстве, случай граничной точки максимума.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть H – сепарабельное вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $< .,. >$ и нормой $\|\cdot\|$. Пусть P_A — гауссовская вероятностная мера в H со средним нуль и ковариационным оператором A. В работе получена точная асимптотика для вероятности P_A при $u \to \infty$, для класса измеримых подмножеств $\Omega \subset H$. Аналогичный метод используется для асимптотического анализа гауссовских интегралов

$$\int_\Omega f(x)\exp\left(-u^2F(x)\right)dP_A(ux), \quad u \to \infty. \tag{1}$$

Из работ на данную тему укажем работы [1-3], где рассматривались логарифмические асимптотики вероятностей больших уклонений для некоторых множеств Ω (так-называемый принцип больших уклонений основанный на функционале действия). Также, точные асимптотики для эллипсоидов в гильбертовом пространстве изучались в [4-6] при помощи преобразований Лапласа.

Наш метод исследования может быть назван методом Лапласа в гильбертовом пространстве, случай граничной точки максимума, и идейно основан на работе [7, глава 2], где изложен метод Лапласа в конечномерном евклидовом пространстве, и статье [8], где изучена асимптотика интегралов типа (1) с $\Omega = H$.

Перейдём к формулировке основного результата.

Без ограничения общности предположим, что ковариационный оператор A невырожден, т. е. $Ker A = \{0\}$. Отсюда следует, что оператор A будучи симметричным и ядерным (см. [9] - [11]) является также строго положительным, т. е. $< Ax, x >> 0$ для всех $x \in H$, $x \neq 0$. Из результатов статьи [12] следует, что $\overline{R(A)} = H$, где $R(A)$ — множество значений оператора A. Здесь и ниже черта сверху означает замыкание в норме H.

Пусть G — некоторая числовая функция определённая на H. Определим замкнутое борелевское множество $\Omega = \{x \in H : \quad G(x) \geq 0\}$ и предположим, что или Ω, или его дополнение $H \setminus \Omega$ представимо в виде конечного объединения непересекающихся выпуклых множеств, Ω не содержит нуля и внутренность $\overset{\circ}{\Omega}$ множества Ω не пуста.

Пусть квадратичная форма $\frac{1}{2} < A^{-1}x, x >$ достигает своего минимума[1] на множестве Ω в конечном числе точек $y^1, y^2, ..., y^m$, принадлежащих границе $\partial\Omega = \{x : \quad G(x) = 0\}$. Предположим, что существуют производные Фреше первого и второго порядков $G'(y^i), G''(y^i)$ в точках y^i; $i = 1, ..., m$, $G'(y^i) \neq 0$ и операторы $B_i = I - \lambda_i G''(y^i) A$ — невырожденны, где $\lambda_i = | < G'(y^i), y^i > |^{-1} < A^{-1}y^1, y^1 >$, I — тождественный оператор в H, $< G'(y^i), y^i > \neq 0$. Мы предположим, также, что $P_A(\partial\Omega) = 0$.

Теорема 1. *При сделанных выше предположениях на P_A, Ω и $G(\cdot)$, мы имеем следующее асимптотическое соотношение*

$$P_A(u\,\Omega) = \exp\left\{-\frac{u^2}{2} < A^{-1}y^1, y^1 >\right\} \frac{u^{-1}}{\sqrt{2\pi}} \times$$

[1] Если $x \notin D(A^{-1})$, то считаем $< A^{-1}x, x >= +\infty$. Здесь и ниже $D(A)$ обозначает область определения оператора A.

$$\times \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\lambda_i} |\det B_i < AB_i^{-1} G'(y^i), G'(y^i) > |^{-1/2} \left(1 + O\left(u^{-2}\right)\right), \; u \to \infty. \qquad (2)$$

Замечание 1. Условие выпуклости Ω можно заменить на следующее $\inf\{I(x) : x \in \Omega\} = \inf\{I(x) : x \in \dot{\Omega}\}$, где $I(x)$ — определённый в §1 функционал действия (см. [3]).

Определение и свойства $\det B$ ядерных операторов $I - B$ приведены в [13].

Мы разобъём доказательство Теоремы 1 на несколько этапов. Для простоты изложения мы считаем, что $m = 1$. Для $m > 1$ доказательство требует несколько очевидных изменений.

§1. РЕШЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ В H И ВЫДЕЛЕНИЕ МАЛОЙ ПОЛУОКРЕСТНОСТИ

Пусть $A^{1/2}$ — положительный симметричный квадратный корень из оператора A и $A^{-1/2}$ — обратный оператор для $A^{1/2}$. Поскольку $D(A^{-1}) \subset D(A^{-1/2})$, то $\overline{D(A^{-1/2})} = H$. В $D(A^{-1/2})$ введём скалярное произведение $< x, y >_A = < A^{-1/2}x, A^{-1/2}y >$, $x, y \in D(A^{-1/2})$. Как известно (см. [9, 10]), этим путём область $D(A^{-1/2})$ превращается в гильбертово пространство H_A с нормой $\|\cdot\|_A$.

Для гауссовской меры P_A определим функционал действия $I(x)$ (см [1]), называемый также энтропийным функционалом, по формуле

$$I(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\|x\|_A^2, & \text{если} \quad x \in H_A \\ +\infty, & \text{если} \quad x \notin H_A. \end{cases}$$

Пусть $y^1 \in \Omega \cap H_A$ — точка в которой достигается минимум функционала $I(x), x \in \Omega$. В Лемме 1 мы покажем, что $y^1 \in D(A^{-1})$. Заметим, что функционал действия $I(x)$ не дифференцируем по Фреше на всём H, но дифференцируем на H_A с производной $I'(x)$ такой, что $I'(x)[y] = < x, y >_A$ для всех $y \in H_A$ (см. [14], стр. 48). Пусть $I''(x)$ — вторая производная по Фреше функционала $I(x)$, $x \in H_A$. Очевидно, для $x \in D(A^{-1})$, имеем $I'(x) = A^{-1}x$, $I''(x) = A^{-1}$.

В гильбертовом пространстве $(H, < \cdot, \cdot >)$ рассмотрим экстремальную задачу $I(x) \to \inf$ с ограничением $G(x) \geq 0$. Используя правило множителей Лагранжа (см. [15], стр. 285, 289), получаем необходимые условия для минимума функционала $I(x)$. Рассмотрим функцию Лагранжа $\mathcal{L}(x, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 I(x) - \lambda_1 G(x)$, $x \in H$. Если $y^1 \in H_A$ есть точка минимума функционала $I(x)$, то найдутся $\widehat{\lambda}_0$ и $\widehat{\lambda}_1$ (множители Лагранжа) такие, что выполнены следующие условия :

а) условие стационарности :

$$\mathcal{L}_x(y^1, \widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1) = 0 \quad \text{т. е.} \quad \widehat{\lambda}_0 I'(y^1) - \widehat{\lambda}_1 G'(y^1) = 0,$$

б) условие согласованности знаков :

$$\widehat{\lambda}_0 \geq 0, \qquad \widehat{\lambda}_1 \geq 0, \qquad \widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_1 > 0,$$

в) условие дополняющей нежёсткости :

$$\widehat{\lambda}_1 G(y^1) = 0,$$

г) условие второго порядка : для любого $h \in L$, где $L = \{h \in H : \ < G'(y^1), h >= 0\}$

$$\mathcal{L}_{xx}(y^1, \widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1)[h, h] \geq 0, \quad \text{т. е.} \quad \left(\widehat{\lambda}_0 I''(y^1) - \widehat{\lambda}_1 G''(y^1)\right)[h, h] \geq 0.$$

Заметим, что при наших условиях $\widehat{\lambda}_0 > 0$, так как если $\widehat{\lambda}_0 = 0$, то условие а) влечёт $G'(y^1) = 0$, что противоречит предположениям Теоремы 1. Следовательно, мы можем положить $\widehat{\lambda}_0 = 1$. Ниже всегда мы будем писать λ вместо $\widehat{\lambda}_1$.

Лемма 1. *Точка минимума y^1 принадлежит $D(A^{-1})$ и*

$$A^{-1} y^1 - \lambda G'(y^1) = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Из условия а) имеем для всех $x \in H_A$:

$$0 = (I'(y^1) - \lambda G'(y^1))[x] = < y^1, x >_A - \lambda < G'(y^1), x > = < y^1 - \lambda A G'(y^1), x >_A,$$

поскольку

$$< G'(y^1), x > = < A^{-1/2} A\, G'(y^1), A^{-1/2} x > = < AG'(y^1), x >_A .$$

Следовательно, $y^1 - \lambda A\, G'(y^1) = 0$. Так как $G'(y^1) \in H$, то $y^1 \in D(A^{-1})$ и выполнено (3). Лемма 1 доказана.

Используя выпуклость Ω и Следствие 4 из [2], получаем логарифмическую асимптотику интересующей нас вероятности.

Лемма 2. (С. Шеве) *Справедливо равенство*

$$\lim_{u \to \infty} u^{-2} \log P_A(u\,\Omega) = -\inf\{I(x): \quad x \in \Omega\} = -\frac{1}{2} < A^{-1} y^1, y^1 > .$$

Для любого $\delta > 0$, обозначим через $U_\delta(y^1) \equiv U = \{x \in \Omega : \quad ||x - y^1|| < \delta\}$ открытую δ–"полуокрестность" точки y^1.

Лемма 3. *Для любого $\delta > 0$ найдётся такое $c = c(\delta) > 0$, что*

$$\exp\left(u^2 I(y^1)\right) P_A(u(\Omega \setminus U)) = O(\exp(-u^2 c)). \tag{4}$$

Доказательство. Как и при доказательстве Леммы 4.1 из [8], используя полунепрерывность снизу функционала действия $I(x)$ и замкнутость множества $\Omega \setminus U$, мы получаем $\inf\{I(x): \quad x \in \Omega \setminus U\} = d > I(y^1)$. Следовательно, существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $c = d - \left(I(y^1) + \varepsilon_0\right) > 0$.

К множеству $\Omega \setminus U$ применима Лемма 2, поэтому

$$\lim_{u \to \infty} u^{-2} \log P_A\left(u(\Omega \setminus U)\right) = -\inf\{I(x): \quad x \in \Omega \setminus U\} = -d.$$

Но тогда для любого $\epsilon > 0$ найдётся такое u_0, что при всех $u > u_0$

$$\exp\left(u^2 I(y^1)\right) P_A(u(\Omega \setminus U)) \le \exp\left(-u^2(d - I(y^1) + \varepsilon)\right),$$

откуда при $\epsilon = \varepsilon_0$ мы получаем соотношение (4). Лемма 3 доказана.

Итак, основной вклад в искомую асимптотику даёт вероятность малой полуокрестности $U(y^1)$:

$$P_A(u\,\Omega) = P_A(u\,U)\ \left(1 + O(\exp(-u^2 c_1))\right),\ u \to \infty,\ c_1 > 0. \tag{5}$$

§2. АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ГАУССОВСКИЕ МЕРЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ СДВИГА И ПОВОРОТА

В этом параграфе мы будем изучать интеграл $J_0 = \int_U dP_A(ux)$, $x \in H$, при $u \to \infty$. Необходимые сведения о таких интегралах можно найти в [16]. Рассмотрим следующие замены переменной в интеграле J_0.

2а) Преобразование сдвига. Положим $y = x - y^1$, тогда будем иметь

$$J_0 = \int_{U'} dP_A(uy + uy^1), \quad \text{где} \quad U' = U - y^1 = \{z - y^1,\ z \in U\}.$$

Поскольку $y^1 \in D(A^{-1})$, то y^1 — допустимый сдвиг меры P_A (см. [16], стр. 139). Следовательно, по Теореме 2 из [16] следует, что мера $P_A(\cdot + uy^1)$ абсолютно непрерывна относительно меры $P_A(\cdot)$ и

$$\frac{dP_A(uy + uy^1)}{dP_A(uy)} = \exp\left(-\frac{u^2}{2} < A^{-1}y1, y^1 > -u^2 < A^{-1}y^1, y >\right).$$

Таким образом, из равенства (3) получаем

$$J_0 = \exp\left(-\frac{u^2}{2} < A^{-1}y^1, y^1 >\right) J, \tag{6}$$

где

$$J = \int_{U'} \exp\left(-u^2 \lambda < G'(y^1), y >\right) dP_A(uy).$$

2б) Преобразование вращения. Без ограничения общности можем считать, что в качестве ортонормированного базиса в H выбрана система собственных векторов $\{e_i\}$ оператора A. Пусть $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \ldots > 0$ — соответствующие собственные значения. Тогда оператор A можно представить в виде бесконечной диагональной матрицы по диагонали которой стоят числа $A = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots)$. Ниже все координатные записи элементов H относятся к этому базису. В силу теоремы Люстерника (см. [14], стр. 41), единичная внутренняя нормаль $\overline{n} = (n_1, n_2, \ldots)$ к $\partial\Omega = \{x : \quad G(x) = 0\}$ в точке y^1 корректно определяется по равенству $\overline{n} = \pm\frac{1}{l} G'(y^1), l = \|G'(y^1)\|$, где знак выбран так, чтобы $< \overline{n}, y^1 > > 0$. Мы всегда будем использовать знак "+". Найдётся унитарный оператор T на H такой, что $T\overline{n} = e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$

Оператор T представляет собой двумерное вращение бесконечномерного гильбертова пространства H (см. [17], стр. 187) причём в матричной форме T записывается как $(t_{ij})_{i,j=\overline{1,\infty}}$ с первой строкой равной $t_{1j} = n_j$, $j = \overline{1,\infty}$.

Рассмотрим подробнее структуру оператора T. Для этого обозначим через Π двумерную плоскость, натянутую на векторы e_1 и $\overline{n}$. Пусть $K = \Pi^{\perp}$ — ортогональное дополнение к Π в H, т. е. $H = \Pi \oplus K$, где $\oplus$ — знак прямой суммы.

Сужение T_K оператора T на подпространство K является тождественным преобразованием в K, а сужение T_{Π} оператора T на Π есть обычное двумерное вращение в Π на угол φ, $\cos\varphi = < \overline{n}, e_1 > = n_1$. Мы не рассматриваем тривиальные случаи $\varphi = 0, \pi$ (см. Замечание 5). Итак, для любого $x \in H$, $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, $x^{(1)} \in \Pi$, $x^{(2)} \in K$ мы имеем

$$Tx = T_{\Pi}x^{(1)} + x^{(2)}. \tag{7}$$

Пусть $f_1 = e_1$, f_2 — ортонормированный базис в Π а $f_3, f_4, \dots$ — ортонормированный базис в K, так что $\{f_i\}_{i=\overline{1,\infty}}$ — ортонормированный базис в H.

Тогда в силу (7) имеем $Tf_i = f_i$, $i \geq 3$. Следовательно, f_i, $i \geq 3$ — собственные векторы оператора T, соответствующие собственному значению 1. Других собственных векторов ортогональных к $\{f_i\}_{i\geq 3}$, и соответствующих ненулевому собственному значению у оператора T нет, так как $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi$.

Вернёмся к интегралу J, где произведём замену переменной $x = Ty$. Тогда множество $U^* = TU' = \{Tx, x \in U'\}$ будет такой полуокрестностью начала координат, что внутренняя нормаль к U^* в O совпадает с e_1. Следовательно, гиперплоскость касательная к U^* в O совпадает с координатной гиперплоскостью $\widetilde{H} = \{x : x_1 = 0\}$, $x = (x_1, x_2, \dots)$.

Следовательно, принимая $T^* = T^{-1}$, имеем

$$J = \int_{U^*} \exp\left(-u^2 \lambda\, l x_1\right) dP_{TAT^{-1}}(ux). \tag{8}$$

Здесь мы использовали соотношение $TG'(y^1) = lT\overline{n} = l e_1$ и формулу

$$< Bx, y >= \int_{T^{-1}H} < x, Tv >< y, Tv > \, dP_A(v) =< AT^* x, T^* y >=< TAT^{-1}x, y >.$$

которая выполняется для всех $x, y \in H$, где B — ковариационный оператор преобразованной гауссовской меры $P_A(T^{-1}(\cdot))$.

Дальнейшее исследование последнего интеграла в (8) основано на следующей лемме.

Лемма 4. *Гауссовская мера $P_{TAT^{-1}}$ абсолютно непрерывна относительно исходной меры P_A с производной Радона-Никодима*

$$\frac{dP_{TAT^{-1}}(x)}{dP_A(x)} = \exp\left[-\frac{1}{2} < \left(TA^{-1}T^{-1} - A^{-1}\right)x, x >\right]. \tag{9}$$

Доказательство основано на следующем утверждении, являющемся слегка изменённым предложением из [11], стр. 582.

Теорема 2. *Пусть P_A и P_B — гауссовские меры в гильбертовом пространстве H со средним нуль и невырожденными ковариационными операторами A и B. Из условий а) операторы $A^{-1}B$ и $B^{-1}A$ ограничены; б) $\mathrm{Sp}V < \infty, \mathrm{Sp}V^*V < \infty$; в) -1 не является точкой спектра оператора $V = B^{-1}A - I$ следует, что $P_B \ll P_A$ и*

$$\frac{dP_B(x)}{dP_A(x)} = \sqrt{\det B^{-1}A}\exp\left(-\frac{1}{2} < (B^{-1} - A^{-1})x, x >\right).$$

Доказательство теоремы можно провести подобно доказательству Теоремы 4 из [11]. Разница заключается в том, что у нас в тождестве умножение на оператор справа. Необходимые сведения о компактных и ядерных операторах и следе операторов можно найти в [18],[19].

Доказательство Леммы 4. Покажем, что для операторов A и $B = TAT^{-1}$ выполнены условия Теоремы 2. Операторы $A^{-1}B$ и $B^{-1}A$ ограничены, что доказывается аналогично для обоих операторов. Имеем $A^{-1}TA = A^{-1}(T - I)A + I$. Покажем, что оператор $A^{-1}(T - I)A$ компактен. Для произвольного ограниченного множества C в H, множество $C_1 = A(C)$ предкомпактно в H. В силу формулы (7) оператор $T - I$ двумерен с областью значений $R(T - I) = \Pi$. Поэтому множество $C_2 = (T - I)(C_1)$ ограничено в Π. Так как A^{-1} инъективен и линеен, то $A^{-1}(C_2)$ ограничено. Следовательно, $A^{-1}(C_2)$ предкомпактно в H.

Покажем теперь, что компактный оператор $A^{-1}(T-I)A$ имеет только нулевые собственные значения, т. е. является вольтеровым (см. [13], стр. 33). Легко видеть, что при условии $f_i \in D(A^{-1})$ векторы $A^{-1}f_i$, $i \geq 3$ являются собственными векторами оператора $A^{-1}(T-I)A$ соответствующими собственному значению нуль :

$$A^{-1}(T-I)AA^{-1}f_i = A^{-1}(T-I)f_i = 0,$$

так как $(T-I)f_i = 0$, $i \geq 3$.

Других собственных векторов, отвечающих ненулевому собственному значению и линейно независимых с векторами $\{A^{-1}f_i\}$, $i \geq 3$ у оператора $A^{-1}(T-I)A$ нет. Действительно, так как A инъективен и $\{f_i\}_{i=\overline{1,\infty}}$ составляют ортонормированный базис в H, то противное означало бы, что для некоторых чисел α и β, $\alpha^2+\beta^2>0$, $\mu \neq 0$

$$A^{-1}(T-I)(\alpha f_1+\beta f_2) = \mu A^{-1}(\alpha f_1+\beta f_2), \text{ т.е. } (T_\Pi - I)(\alpha f_1+\beta f_2) = \mu(\alpha f_1+\beta f_2).$$

Последнее равенство невозможно при $\mu \neq 0$ и $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi$.

Итак оператор $A^{-1}(T-I)A$ вольтеров. Точно также можно показать, что операторы $A^{-1}(T^{-1}-I)A$ и $T-I$ вольтеровы. Следовательно, $A^{-1}B$ и $B^{-1}A$ ограничены. Далее, оператор $V = TA^{-1}(T^{-1}-I)A + T - I$ компактен как сумма двух компактных операторов, и кроме того он четырёхмерен, как сумма двух двумерных. Следовательно, $\mathrm{Sp}V < \infty$. Оператор VV^* представим в виде суммы четырёх конечномерных операторов, поэтому мы имеем $\mathrm{Sp}VV^* < \infty$.

Таким образом, все условия Теоремы 2 выполнены и формула (9) будет доказана, если мы покажем, что $\det TA^{-1}T^{-1}A = 1$. Имеем, $A^{-1}T^{-1}A = I + A^{-1}(T^{-1}-I)A$, где, как установлено выше, операторы $T-I$ и $A^{-1}(T^{-1}-I)A$ вольтеровы. Поэтому используя известное свойство мультипликативности детерминантов (см. [13], стр. 206), получаем, что $\det B^{-1}A$ определён и верно равенство

$$\det B^{-1}A = \det(I+(T-I)) \cdot \det(I + A^{-1}(T^{-1}-I)A) = 1,$$

так как для вольтерова оператора W имеем $det(I+W)=1$ (см. [13], стр. 199). Лемма 4 доказана.

§3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ПЕРЕМЕННОЙ x_1.

Лемма 4 позволяет записать последний интеграл в (8) в следующем виде

$$J=\int_{U^*}\exp\left(-u^2\lambda\, l x_1\right)\exp\left[-\frac{u^2}{2}<\left(TA^{-1}T^{-1}-A^{-1}\right)x,x>\right]dP_A(ux).$$

При достаточно малом $\delta>0$ применима теорема о неявных функциях к границе ∂U^* множества U^* (см. [15], стр. 166) : существует окрестность $\widetilde{U}=\{\widetilde{x}\in\widetilde{H}:\ \ \|\widetilde{x}\|<\delta_1\}$ точки $\widetilde{0}=(0,0,\ldots)\in\widetilde{H}$ и отображение $\varphi:\widetilde{U}\longmapsto$ ось Ox_1 такие, что поверхность ∂U^* запишется в виде $x_1=\varphi(\widetilde{x})$, $\widetilde{x}=(x_2,x_3,\ldots)\in\widetilde{U}$. Здесь и далее мы отождествляем точки $(0,x_2,x_3,\ldots)$ и $(x_2,x_3,\ldots)$; пространство $\widetilde{H}$ само рассматривается как гильбертово пространство точек $\widetilde{x}$, скалярное произведение в котором индуцировано скалярным произведением в H. В $\widetilde{H}$ мы сохраняем обозначения $\|\cdot\|$ и $<\cdot,\cdot>$. Для $x\in U^*$ мы имеем $\widetilde{x}\in\widetilde{U}$, $\varphi(\widetilde{x})\le x_1\le\delta$, $\varphi(\widetilde{0})=0$, $\varphi'(\widetilde{0})=0$, и существует вторая производная по Фреше $\varphi''(\widetilde{0})$. Следовательно, интеграл J можно записать в виде повторного интеграла

$$\begin{aligned}J=\int_{\widetilde{U}}\int_{\varphi(\widetilde{x})}^{\delta}&\exp\left(-u^2\lambda\, l x_1\right)dP_{\sigma_1^2}(ux_1)\times\\ &\times\exp\left[-\frac{u^2}{2}<\left(TA^{-1}T^{-1}-A^{-1}\right)x,x>\right]dP_{\widetilde{A}}(u\widetilde{x}),\end{aligned}\tag{10}$$

здесь мы использовали факторизацию

$$dP_A(ux)=dP_{\sigma_1^2}(ux_1)\,dP_{\widetilde{A}}(u\widetilde{x}),$$

где $dP_{\sigma_1^2}(\cdot)$ — одномерная гауссовская мера со средним нуль и дисперсией σ_1^2, и $dP_{\widetilde{A}}(\cdot)$ есть гауссовская мера в $\widetilde{H}$ со средним нуль и ковариационным оператором $\widetilde{A}=\mathrm{diag}(\sigma_2^2,\sigma_3^2,\ldots)$.

Сейчас наша цель — асимптотически точно оценить внутренний интеграл в (10), при $u\to\infty$. Поскольку T — унитарный оператор , то квадратичная форма в показателе экспоненты в (10) имеет вид

$$<\Theta x, x> = \sum_{i,j=2}^{\infty} \theta_{ij} x_i x_j + 2x_1 \sum_{j=2}^{\infty} \theta_{1j} x_j + \theta_{11} x_1^2,$$

где $\Theta = TA^{-1}T^{-1} - A^{-1} = (\theta_{ij})_{i,j=\overline{1,\infty}}$ и

$$\theta_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_{ik} t_{jk}}{\sigma_k^2} - \frac{\delta_{ij}}{\sigma_i^2}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{11}$$

Таким образом, внутренний интеграл в (10) имеет вид

$$J_1 = J_1(\widetilde{x}) = \frac{u}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} \int_{\varphi(\widetilde{x})}^{\delta} \exp\left(-\frac{u^2}{2}(2\alpha x_1 + \beta x_1^2)\right) dx_1,$$

где

$$\alpha = \alpha(\widetilde{x}) = \lambda l + \sum_{j=2}^{\infty} \theta_{1j} x_j, \qquad \beta = \theta_{11} + \sigma_1^{-2} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-2} t_{1k}^2 > 0.$$

Мы имеем

$$J_1 = \exp\left(\frac{u^2\alpha^2}{2\beta}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}\,\sigma_1} \int_{u\sqrt{\beta}(\frac{\alpha}{\beta}+\varphi(\widetilde{x}))}^{u\sqrt{\beta}(\frac{\alpha}{\beta}+\delta)} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \tag{12}$$

К последнему интегралу можно применить метод Лапласа (см. [7], стр. 55), но для последующего интегрирования по x_1, мы используем асимптотически точные оценки. Пусть $\gamma(t)$ и $\Phi(s)$ — плотность и функция распределения стандартного нормального закона. Хорошо известны следующие оценки для $t > 0$

$$t^{-1}\gamma(t)(1 - t^{-2}) \le 1 - \Phi(t) \le t^{-1}\gamma(t) \tag{13}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta_1 > 0$, что при всех $\widetilde{x}$, $||\widetilde{x}|| < \delta_1$ имеем $\beta^{-1}\lambda l + \varepsilon \ge \beta^{-1}\alpha(\widetilde{x}) + \varphi(\widetilde{x}) \ge \beta^{-1}\lambda l - \varepsilon$. Применяя (13) к интегралу (12), получаем следующие оценки для J :

$$J_2 \ge J \ge J_2 - J_3 - J_4, \tag{14}$$

где

$$J_2 = \int_{\widetilde{U}} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \varphi(\widetilde{x})\right)^{-1} \Lambda(u, \widetilde{x})\, dP_{\widetilde{A}}(u\widetilde{x}),$$

$$J_3 = u^{-2}\beta^{-1} \int_{\widetilde{U}} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \varphi(\widetilde{x})\right)^{-3} \Lambda(u, \widetilde{x})\, dP_{\widetilde{A}}(u\widetilde{x}),$$

$$J_4 = \int_{\widetilde{U}} \left(\frac{\alpha}{\beta}+\delta\right)^{-1} \Lambda(u,\widetilde{x})\, dP_{\widetilde{A}}(u\widetilde{x}),$$

$$\Lambda(u,\widetilde{x}) = (u\beta\sigma_1)^{-1} \exp\left(\frac{u^2\alpha^2}{2\beta}\right) \gamma\left(u\sqrt{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}+\varphi(\widetilde{x})\right)\right) \exp\left(-\frac{u^2}{2}\sum_{i,j=2}^{\infty}\theta_{ij}x_ix_j\right).$$

Ниже мы увидем, что

$$J_3 = o(J_2), \quad J_4 = o(J_2), \ u \to \infty.$$

§4 НАХОЖДЕНИЕ АСИМПТОТИКИ ИНТЕГРАЛА J_2

Нам понадобится следующий результат Р. Эллиса и Дж. Розена из [8], который мы сформулируем в нужной нам локальной форме.

Теорема 3 ([8]). *Пусть P_A — гауссовская мера со средним нуль и невырожденным ковариационным оператором A на вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве H. Пусть $\psi(x)$ и $F(x)$ — действительные функции, заданные в некоторой окрестности $U \subset H$ нуля и имеющие там производные по Фреше второго порядка (см. Замечание 2). Пусть*

$$H(x) = \begin{cases} F(x) + \frac{1}{2} < A^{-1/2}x, A^{-1/2}x >, & \text{если} \quad x \in H_A \\ +\infty & \text{если} \quad x \in H \setminus H_A \end{cases}$$

(Здесь H_A тоже что и в §1).

Предположим, что функционал $H(x)$ имеет единственную точку минимума $0 \in U$ (внутренней точке множества U) и $\mathrm{Ker} H''(0) = \{0\}$. Пусть $\psi(0) \neq 0$ и оператор $F''(0)A$ — ядерный. Тогда верно следующее асимптотическое соотношение

$$\int_U \psi(x) \exp\left(-u^2 F(x)\right) dP_A(ux) = \exp\left(-u^2 F(0)\right) \psi(0) \left(\det(I + F''(0)A)\right)^{-1/2} \left(1 + O(u^{-2})\right), \ u \to \infty. \tag{15}$$

Замечание 2. По определению [8], существование второй производной Фреше означает возможность тейлоровского разложения $H(x)$ в окрестности нуля $(H'(0) = 0)$:

$$H(x) = H(0) + \frac{1}{2} < H''(0)x, x > +O(\|x\|^3), \ x \to 0,$$

где, как следует из экстремального характера точки 0

$$H''(0) = F''(0) + A^{-1},$$

но оператор A^{-1}, как обратный к компактному неограничен.

Замечание 3. Основная Лемма 4.2 работы [8] остаётся справедливой и в том случае, когда в разложении Тейлора

$$F(x) = F(0) + < F'(0), x > + \frac{1}{2} < F''(0)x, x > + O(||x||^3), \quad x \to 0$$

оператор $F''(0)A$ — ядерный.

Наконец, заметим, что в нашей Теореме 1, y^1 — граничная точка множества Ω и этим обусловлена невозможность прямого использования результата из [8].

В гильбертовом пространстве $\widetilde{H}$ применим Теорему 3 к интегралу J_2. Если $\widetilde{x} \in \widetilde{H}$ и a — число, то запись $[a, \widetilde{x}]$ означает вектор $(a, x_2, x_3, \ldots)$ в H. Интеграл J_2 можно записать в виде

$$J_2 = \left(\sqrt{2\pi}\, u\sigma_1\right)^{-1} \int_{\widetilde{U}} \exp\left(-u^2 F(\widetilde{x})\right) \psi(\widetilde{x})\, dP_{\widetilde{A}}(u\widetilde{x}), \tag{16}$$

где

$$\psi(\widetilde{x}) = \left[\left(\theta_{11} + \sigma_1^{-2}\right) \varphi(\widetilde{x}) + \lambda l + \sum_{j=2}^{\infty} \theta_{1j}\, x_j \right]^{-1}, \quad \widetilde{x} \in \widetilde{U},$$

$$F(\widetilde{x}) = \frac{1}{2} < \left(TA^{-1}T^{-1} - A^{-1}\right) [\varphi(\widetilde{x}), \widetilde{x}], [\varphi(\widetilde{x}), \widetilde{x}] > + \lambda l \varphi(\widetilde{x}) + 2\sigma_1^{-2} \varphi^2(\widetilde{x}).$$

Таким образом, в нашем случае функционал $H(\widetilde{x})$, для $\widetilde{x} \in \widetilde{H}_{\widetilde{A}}$ имеет вид

$$H(\widetilde{x}) = \frac{1}{2} F(\widetilde{x}) + \frac{1}{2} < \widetilde{A}^{-1/2} \widetilde{x}, \widetilde{A}^{-1/2} \widetilde{x} >$$

Так как $A^{-1} = \mathrm{diag}(\sigma_1^{-2}, \sigma_2^{-2}, \ldots)$, то

$$< A^{-1} [\varphi(\widetilde{x}), \widetilde{x}], [\varphi(\widetilde{x}), \widetilde{x}] >= \sigma_1^{-2} \varphi(\widetilde{x}) + < \widetilde{A}^{-1/2} \widetilde{x}, \widetilde{A}^{-1/2} \widetilde{x} >$$

Поэтому

$$H(\widetilde{x}) = \frac{1}{2} < A^{-1}T^{-1} [\varphi(\widetilde{x}), \widetilde{x}], T^{-1} [\varphi(\widetilde{x}), \widetilde{x}] > + \lambda l \varphi(\widetilde{x}), \quad \widetilde{x} \in \widetilde{H}_{\widetilde{A}}.$$

Поскольку $\lambda \geq 0$, $l \geq 0$, $\varphi(\widetilde{x}) \geq 0$ и оператор A^{-1} положительный, то $H(\widetilde{x}) \geq 0$ и минимум достигается в единственной точке 0 :

$$\inf\{H(\widetilde{x}) : \quad \widetilde{x} \in \widetilde{U}\} = H(\widetilde{0}) = 0$$

$\operatorname{Ker} H''(\widetilde{0}) = \{0\}$ следует из невырожденности $B_1 = I - \lambda G''(y^1)A$ в условии Теоремы 1.

Применение Теоремы 3 к интегралу (16) даёт

$$J_2 = \left(\sqrt{2\pi}\, u\lambda\, l\sigma_1\right)^{-1} \left(\det(\widetilde{I} + F''(\widetilde{0})\widetilde{A})\right)^{-1/2} (1 + O(u^{-2})), \tag{17}$$

поскольку $F(\widetilde{0}) = 0$ и $F'(\widetilde{0}) = 0$, где $\widetilde{I}$ — тождественный оператор в $\widetilde{H}$.

§5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ $\det(\widetilde{I} + F''(\widetilde{0})\widetilde{A})$

5a) Вычисление $F''(\widetilde{0})$. Вначале избавимся от оператора T и функции φ. Обозначим $\widetilde{G}(x) = G(T^{-1}x + y^1)$. Тогда, очевидно, $\widetilde{G}(x) = 0$ для $x \in aU^*$. В силу выбора функции φ в начале параграфа 3, имеем :

$$\widetilde{G}([\varphi(\widetilde{x}), \widetilde{x}]) \equiv 0, \ \widetilde{x} \in \widetilde{U}. \tag{18}$$

Поскольку $\varphi(\widetilde{0}) = 0$, $\varphi'(\widetilde{0}) = 0$, то матричное представление оператора $F''(\widetilde{0}) = (f_{ij})_{i,j=\overline{2,\infty}}$ имеет следующий вид $f_{ij} = \theta_{ij} + \lambda l \frac{\partial^2 \varphi(\widetilde{0})}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = \overline{2, \infty}$, где θ_{ij} определены в (11). В силу (18) и используя теорему о неявной функции (см. [15], стр. 166) получаем формулу

$$\varphi'(\widetilde{x}) = -\left[\widetilde{G}_{x_1}(x_1, \widetilde{x})\Big|_{x_1 = \varphi(\widetilde{x})}\right]^{-1} \left[\widetilde{G}_{\widetilde{x}}(x_1, \widetilde{x})\Big|_{x_1 = \varphi(\widetilde{x})}\right], \tag{19}$$

где $\widetilde{G}(x) \equiv \widetilde{G}(x_1, \widetilde{x})$, $x_1 \in Ox_1$ и $\widetilde{x} \in \widetilde{H}$.

Пусть $\widetilde{T} = (t_{ij})_{i=\overline{2,\infty}, j=\overline{1,\infty}}$ обозначает прямоугольную подматрицу матрицы T, $\widetilde{T}^*$ — транспонированная матрица к $\widetilde{T}$.

Пользуясь формулой (19) и теоремой о дифференцируемости суперпозиции дифференцируемого и линейного отображения (см. [15], стр. 147), а также тем, что $TG'(y^1) = le_1$, имеем $\varphi''(\widetilde{0}) = -l^{-1}\widetilde{T}\, G''(y^1)\, \widetilde{T}^*$. Здесь и ниже произведение надо понимать как конпозицию соответствующих отображений. Следовательно, $\varphi''(\widetilde{0}) : \widetilde{H} \longmapsto \widetilde{H}$. Мы также имеем $F''(\widetilde{0}) = \widetilde{T}\,(A^{-1} - \lambda G''(y^1))\,\widetilde{T}^* - \widetilde{A}^{-1}$.

Так как $\widetilde{0} \in D(\widetilde{A}^{-1})$, мы имеем

$$H''(\widetilde{0}) = \frac{1}{2}F''(\widetilde{0}) + \frac{1}{2}\widetilde{A}^{-1} = \widetilde{T}\,(I - \lambda G''(y^1)A)\, A^{-1}\widetilde{T}^* \tag{20}$$

и $H''(\widetilde{0})$ — невырожден (см. конец доказательства Теоремы 1).

5б) Вычисление детерминанта $\det\left(\widetilde{I} + F''(\widetilde{0})\widetilde{A}\right)$. Оператор $F''(\widetilde{0})\widetilde{A}$ из формулы (17) имеет вид $F''(\widetilde{0})\widetilde{A} = \widetilde{T}R\widetilde{T}^*\widetilde{A} - \widetilde{I}$, где $R = A^{-1} - \lambda G''(y^1) = B_1A^{-1}$. Оператор R — невырожден, поэтому определён вектор $a = R^{-1}\overline{n}$, где $\overline{n}$ — нормаль, определённая в §2. Пусть $T_a = \begin{pmatrix} a \\ \widetilde{T} \end{pmatrix}$. Мы имеем

$$\Delta: = T_aRT^* = \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{0} \\ \times & \widetilde{T}R\widetilde{T}^* \end{pmatrix}$$

$$\Delta A = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \widetilde{0} \\ \times & \widetilde{T}R\widetilde{T}^*\widetilde{A} \end{pmatrix} \tag{21}$$

здесь вид элементов обозначенных крестиком "×" не важен.

Этот оператор отображает H в H. Его сужение $\Delta A|_{\widetilde{H}}$ на $\widetilde{H}$ совпадает с $\widetilde{T}R\widetilde{T}^*\widetilde{A}$ и тогда $\Delta A|_{\widetilde{H}} = F''(\widetilde{0})\widetilde{A} + \widetilde{I}$. Кроме того, из (21) следует, что

$$\det\Delta A = \sigma_1^2 \det\left(F''(\widetilde{0})\,\widetilde{A} + \widetilde{I}\right). \tag{22}$$

Далее имеем

$$\Delta A - I = T_aA^{-1}\left(T^{-1} - I\right)A + (T_a - I) - T_a\lambda G''(y^1)T^{-1}A.$$

Как следует из доказательства Леммы 4, все три оператора ядерные, потому что T_a — ограничен. Итак, оператор $\Delta A - I$ ядерный в H и его сужение $F''(\widetilde{0})\widetilde{A}$ ядерно в $\widetilde{H}$. Поскольку $\Delta A = T_aB_1A^{-1}T^{-1}A$, то $\det\Delta A = \det T_a \det B_1 \det\left(A^{-1}T^{-1}A\right)$, где $\det\left(A^{-1}T^{-1}A\right) = 1$ (см. доказательство Леммы 4). Так как $T_a\,T^{-1} = \begin{pmatrix} < a, \overline{n} > & x \\ \widetilde{0} & \widetilde{I} \end{pmatrix}$, то $\det T_a =< a, \overline{n} >$, и поэтому $\det\Delta A =< R^{-1}\overline{n}, \overline{n} > \det B_1$.

Принимая во внимание (17) и (22), получаем

$$J_2 = \left(\sqrt{2\pi}\lambda u\right)^{-1} \left|\det B_1 < AB_1^{-1}G'(y^1), G'(y^1) >\right|^{-1/2} \left(1 + O(u^{-2})\right), \; u \to \infty.$$

Используя (14), убеждаемся, что получили главный член асимптотики интеграла J с оценкой остаточного члена, так как пользуясь аналогичными выкладками, можно показать, что $J_3 = O\left(u^{-2}J_2\right)$ и $J_4 = O\left(\exp(-u^2c)J_2\right)$, $c > 0$. В самом деле, интеграл J_3 отличается от J_2 наличием множителя

u^{-3}. Интеграл J_4 экспоненциально мал по сравнению с J_2, так как у него функция аналогичная функции F имеет вид

$$F_1(\widetilde{x}) = \frac{1}{2} < \left(TA^{-1}T^{-1} - A^{-1}\right)[\delta, \widetilde{x}], [\delta, \widetilde{x}] > +\lambda l\delta + \left(2\sigma_1^2\right)^{-1}\delta^2$$

и $F_1(\widetilde{0}) \geq \lambda l\delta > 0$. Отсюда в силу (15) J_4 экспоненциально мало. Наконец, отметим, что в силу (20) имеем $H''(\widetilde{0}) = \Delta|_{\widetilde{H}}$ и невырожденность оператора $H''(\widetilde{0})$ следует из невырожденности Δ. Теорема 1 полностью доказана.

§6 ДАЛЬНЕЙШИЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ПРИМЕРЫ

Замечание 4. Рассуждения и выкладки использованные при доказательстве Теоремы 1 применимы и к гауссовскому интегралу (1). Асимптотики интегралов типа (1) используются в некоторых задачах статистической физики (см. [8], [20]).

Замечание 5. Пусть выполнены все условия Теоремы 1, кроме условия невырождения оператора B_1. Пусть в некотором ортонормированном базисе $\{e_i\}_{i=\overline{1,\infty}}$ гильбертова пространства H мы имеем $G'(y^1) = le_1$, $l \in \mathbb{R}^1$, $A = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots)$. Тогда вклад точки y^1 в асимптотику вероятности $P_A(u\Omega)$ будет равен

$$\exp\left(-\frac{u^2}{2} < A^{-1}y^1, y^1 >\right)\left(u\sqrt{2\pi}\sigma_1\lambda_1 |l|\right)^{-1}\left|\det\left(\widetilde{I} - \lambda_1\widetilde{G}''(y^1)\widetilde{A}\right)\right|^{-1/2}$$

$$\left(1 + O(u^{-2})\right), \ u \to \infty,$$

при условии необращения в нуль последнего детерминанта. Здесь оператор $\widetilde{G}''(y^1)$ получается из матричного представления оператора $G''(y^1)$ вычёркиванием первой строки и первого столбца, так что, если $G''(y^1) = (g_{ij})_{i,j=\overline{1,\infty}}$, то $\widetilde{G}''(y^1) = (g_{ij})_{i,j=\overline{2,\infty}}$.

Примеры множеств Ω и функции $G(x)$ могут быть самые разнообразные. Укажем некоторые из них.

Пример 1. Пусть $H = l^2$, $G(x) = ||x||^2 - 1$, $||x|| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{1/2}$, $A = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots)$, $\sigma_1 > \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \ldots > 0$, $\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i^2 < \infty$. Тогда как известно (см. [14], стр. 274), что $\inf\left(\frac{1}{2} < A^{-1}x, x > : \ ||x|| \geq 1\right) = (2\sigma_1^2)^{-1}$ и этот инфимум достигается в двух точках, $y^1 = (1,0,0,\ldots)$ и $y^2 = (-1,0,0,\ldots)$. Простые вычисления дают

$$G'(y^1) = (2,0,0,\ldots),\ G''(y^1) = \mathrm{diag}(2,2,\ldots),\ l = 2,\ \lambda = (2\sigma_1^2)^{-1}.$$

Вычисления для точки y^2 аналогичны. Здесь операторы B_1, B_2 вырождены, но применимо Замечание 5, использование которого даёт известную формулу Золотарёва (см. [4]) :

$$P_A(\|x\| > u) = \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}\right) u^{-1}\frac{\sqrt{2}\,\sigma_1}{\sqrt{\pi}}\prod_{i=2}^{\infty}(1-\sigma_1^{-2}\sigma_i^2)^{-1/2}\,(1+O(u^{-2}))\,,\ u\to\infty$$

В [4] этот результат получен методом преобразования Лапласа с последующим контурным интегрированием.

Пример 2. Пусть $G(x) = \|x-a\| - 1$, $a \neq 0$. Точные вычисления здесь затруднены из-за наличия более сложной экстремальной задачи. Но подход Теоремы 1 в принципе применим и позволяет найти асимптотику вероятности $P_A(\|x-a\| > u)$, $u\to\infty$ (ср. с [5]).

Наконец, отметим, что результаты типа Теоремы 1, по-видимому, справедливы и для гауссовских распределений в некоторых банаховых пространствах. Как частный результат такого типа, приведём асимптотику больших уклонений для гауссовского вектора в конечномерном банаховом пространстве l_k^p с нормой $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^k |x_i|^p\right)^{1/p}$, $x = (x_1,\ldots,x_k)$.

Теорема 4. *Пусть $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ — гауссовский вектор в $\mathbb{R}^k$ со средним нуль и невырожденной ковариационной матрицей $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,k}}$. Пусть $z^1, z^2, \ldots, z^m$ — точки из множества $Z = \{x\in\mathbb{R}^k : \|x\|_p = 1\}$, в которых достигается минимум : $\min\{< A^{-1}x, x > \ : x\in Z\} = \sigma^{-2} > 0$, где $<\cdot,\cdot>$ — обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$ и $z^i = (z_{i1}, z_{i2}, \ldots, z_{ik})$.*

i) *Если $p > 2$, то имеет место асимптотическое соотношение*

$$P\left\{\left(\sum_{i=1}^k |X_i|^p\right)^{1/p} > u\right\} = \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}u}\sqrt{|p-2|}\sum_{i=1}^m |\det B_i|^{-1/2}\,(1+O(u^{-2}))\,,\ u\to\infty, \tag{23}$$

где $B_i = I - (p-1)\sigma^{-2}\mathrm{diag}\left(|z_{i1}|^{p-2}, ..., |z_{ik}|^{p-2}\right) A$.

ii) *Если* $2 > p \geq 1$ *и все компоненты* z_{ij} *векторов* z^i *ненулевые, то справедлива формула (23).*

iii) *Если* $1 > p > 0$, *то* $z_{ij} \neq 0$ *и верно (23)*

Для диагональной матрицы A асимптотика найдена в [21].

ABSTRACT. Let P_A be a mean zero Gaussian measure with covariance operator A on a real Hilbert space H, Ω be a Borelian subset of H, satisfying some restrictions. In the paper the exact asymptotic of $P_A(u\Omega)$, $u \to \infty$ is found. Also the asymptotic of $P\left\{\left(\sum_{i=1}^{k} |X_i|^p\right)^{1/p} > u\right\}$, $u \to \infty, p > 1$, is given, where $X_i, i = 1, 2, ..., k$ are the dependent Gaussian random variables. Research method is new : the asymptotic Laplace method in Hilbert space, the case of boundary maximum point.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин, Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, Наука, Москва, 1979.
2. S. Chevet, "Gaussian measures and large deviations", Lect. Notes Math., vol. 990, pp. 30 – 46, 1983.
3. N. C. Jain, "An introduction to large deviations", Lect. Notes Math., vol. 1153, pp. 273 – 296, 1985.
4. В. М. Золотарёв, "Об одной вероятностной задаче," Теория Вероятн. и её применения, том 6, № 6, стр. 219 – 222, 1961.
5. C. -R. Hwang, "Gaussian measure of large balls in a Hilbert space", Proc. Amer. Math, Soc., vol. 78, no. 1, pp. 107 – 110, 1980 ; Proc. Amer. Math. Soc., vol. 94, no. 1, p. 188, 1985.
6. A. Hertle, "On the asymptotic behaviour of Gaussian spherical integrals, Lect. Notes Math., vol. 990, pp. 221 – 234, 1983.
7. М. В. Федорюк, Асимптотика : Интегралы и ряды, Наука, Москва, 1987.
8. R. S. Ellis, J. S. Rosen, "Asymptotic analysis of Gaussian integrals", I, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 273, no. 2, pp. 447 – 481, 1982.
9. Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян, Вероятностные распределения в банаховом пространстве, Наука, Москва, 1985.
10. Х.- С. Го, Гауссовские меры в банаховых пространствах, Мир, Москва, 1979.
11. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Теория случайных процессов, том 1, Наука, Москва, 1971.
12. B. S. Rajput, "The support of Gaussian measures on Banach spaces", Теория Вероятностей и её Прим., том 17, № 4, стр. 775 – 782, 1972.
13. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов, Наука, Москва, 1965.

14. А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, Теория экстремальных задач, Наука, Москва, 1974.
15. В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, Оптимальное управление, Москва, 1979.
16. А. В. Скороход, Интегрирование в гильбертовом пространстве, Наука, Москва, 1975.
17. Т. Хида, Броуновское движение, Наука, Москва, 1984.
18. Функциональный Анализ (ред. С. Г. Крейн), Наука, Москва, 1972.
19. И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, Обобщённые функции, № 4, Некоторые применения гармонического анализа. Оснащённые гильбертовы пространства, Физматгиз, Москва, 1961.
20. В. В. Борзов, "Об асимптотическом поведении функционального гауссова интеграла", Записки Научн. Семин. ЛОМИ, том 184, стр. 26 – – 36, 1990.
21. В. Р. Фаталов, Ш.-Д. Рихтер, "Гауссовские вероятности больших уклонений для фиксированной или возврастающей размерностей," Изв. Акад. Наук Армении, Математика, том 27, № 1, стр. 1– 16, 1992. [Английский перевод : Journal of Contemporary Math. Anal. (Armenian Academy of Sciences)], vol. 27, no.1, 1992.

22 Мая 1992

Ереванский государственный университет
Межвузовский научный центр
по прикладным проблемам математики

ОБЛАСТЬ ДОСТИЖИМЫХ СКОРОСТЕЙ КАНАЛА МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА И НАДЕЖНОСТЬ

Е. А. Арутюнян, М. Е. Арутюнян, А. Э. Аветисян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 27, № 5, 1992

Рассмотрено несколько моделей канала множественного доступа с двумя кодерами и одним декодером и канал множественного доступа с иерархией источников. Решена задача построения внешней и внутренней границы для E–пропускной способности.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Канал множественного доступа (КМД) с двумя кодерами и одним декодером $\mathcal{W} = \{W : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \longmapsto \mathcal{Y}\}$ определяется матрицей переходных вероятностей

$$W = \{W(y|x_1, x_2), \quad x_1 \in \mathcal{X}_1, \quad x_2 \in \mathcal{X}_2, \quad y \in \mathcal{Y}\},$$

где $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ – алфавиты первого и второго входов канала, а $\mathcal{Y}$ – выходной алфавит. Пусть $\mathbf{x}_i = (x_i^1, x_i^2, ..., x_i^n) \in \mathcal{X}_i^n$, $i = 1,2$ и $\mathbf{y} = (y^1, y^2, ..., y^n) \in \mathcal{Y}^n$. Мы изучаем каналы без памяти, для которых

$$W^n(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \prod_{t=1}^{n} W(y^t|x_1^t, x_2^t).$$

В настоящей статье будет рассмотрено несколько моделей КМД. Первая модель – это КМД с коррелированными источниками, который был впервые исследован Слепяном и Вулфом [1].

В этой модели имеются три источника, один из которых связан с обеими кодерами,, а каждый из двух других связан с одним из кодеров. Множества сообшений источников обозначим соответственно M_0, M_1, M_2. Кодом длины n для такой модели называется тройка отображений

$$f_1: \quad M_0 \times M_1 \longmapsto \mathcal{X}_1^n, \qquad f_2: \quad M_0 \times M_2 \longmapsto \mathcal{X}_2^n,$$

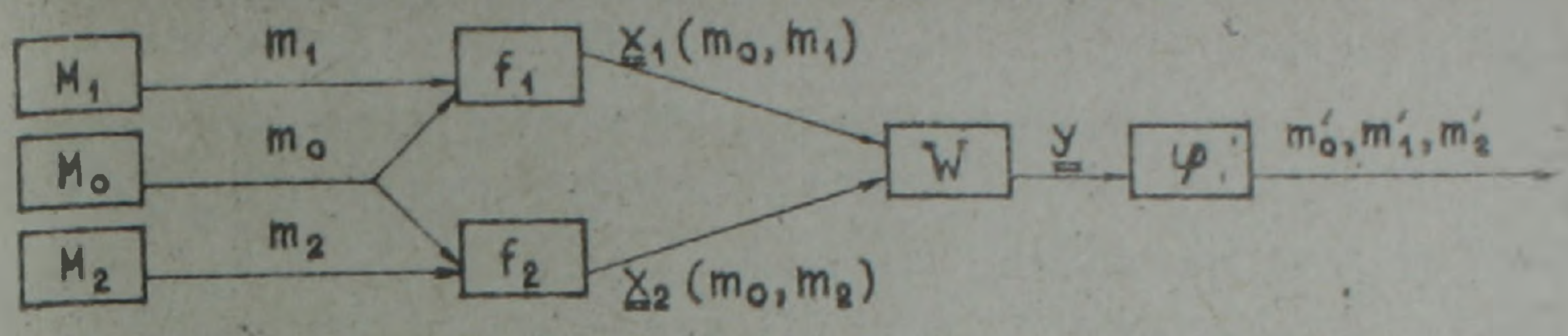

Рис. 1. КМД с коррелированными источниками

$$\varphi : \quad \mathcal{Y}^n \longmapsto M_0 \times M_1 \times M_2,$$

где f_1 и f_2 суть кодирования, а φ – декодирование. Основными характеристиками кода являются тройка скоростей передачи (все логарифмы и экспоненты в статье имеют основание 2)

$$\frac{1}{n} \log |M_i|, \quad i = 0, 1, 2$$

и вероятность ошибки декодирования. Обозначим для $m_i \in M_i$, $i = 0, 1, 2$

$$e_{m_0,m_1,m_2}(f_1, f_2, \varphi, n) = W^n(y : \varphi(y) \neq (m_0, m_1, m_2) \,|\, f_1(m_0, m_1), f_2(m_0, m_2)). \quad (1)$$

Средняя $\overline{e}(f_1, f_2, \varphi, n)$ и максимальная $e(f_1, f_2, \varphi, n)$ вероятности ошибки определяются как обычно :

$$\overline{e}(f_1, f_2, \varphi, n) = \frac{1}{|M_0| \cdot |M_1| \cdot |M_2|} \sum_{m_0,m_1,m_2} e_{m_0,m_1,m_2}(f_1, f_2, \varphi, n),$$

$$e(f_1, f_2, \varphi, n) = \max_{m_0,m_1,m_2} e_{m_0,m_1,m_2}(f_1, f_2, \varphi, n).$$

Тройка неотрицательных чисел R_0, R_1, R_2 называется *ε-достижимой* для КМД $\mathcal{W}$, если для любого $\delta > 0$ и для каждого достаточно большого n существует код (f_1, f_2, φ) длины n такой, что

$$\frac{1}{n} \log |M_i| \geq R_i - \delta, \quad i = 0, 1, 2$$

а средняя вероятность ошибки удовлетворяет условию

$$\overline{e}(f_1, f_2, \varphi, n) \leq \varepsilon.$$

Областью пропускной способности КМД W называется множество всех достижимых троек скоростей для всех $\varepsilon > 0$. В отличие от дискретного канала без памяти (ДКБП), для КМД области пропускной способности для максимальной и средней вероятностей ошибок могут быть различными.

Наша цель – изучение области ε–достижимых скоростей для $\varepsilon = 2^{-nE}$, $E > 0$, которую мы называем *областью E–пропускной способности*. Показатель E будем называть *надежностью*. Функциональная зависимость скорости от надежности (см. обзор [2]) была исследована для различных каналов и источников.

Ранее [1,3] для КМД была рассмотрена задача исследования зависимости надежности E от скоростей R_0, R_1, R_2 из области пропускной способности. В частном случае, когда $|M_0| = 1$, получаем классический КМД, впервые введенный Шенноном [4] и изученный Алсведе [5, 6] и Ван дер Меленом [7]. Шеннон описал область пропускной способности этого канала. Алсведе [5] получил простую характеризацию области пропускной способности, а также другую характеризацию в [6].

В [1] была найдена область достижимых скоростей КМД с коррелированными источниками и построена граница случайного кодирования (нижняя граница) в "форме Галлагера" для надежности как функции скорости. Для этой же функции в [3] была получена верхняя граница (граница сферической упаковки).

В настоящей статье приведены внутренние и внешние границы области E–пропускной способности для различных моделей КМД аннонсированные в [8]. Внешнюю границу мы называем *границей сферической упаковки*, а внутренюю границу – *границей случайного кодирования*. В частном случае $|M_2| = 1$, КМД называется *асимметричным* [9]. В этом случае внешняя и внутреняя границы (для надежности – как функции скорости и для области E–пропускной способности) совпадают при малых E.

В работе [3] показано, что формы аналитической записи Арутюняна и Галлагера для границы сферической упаковки эквивалентны. Там же было показано, что внешняя и внутреняя границы для скорости, как функции надежности, при малых E совпадают также для КМД с коррелированными источниками, когда матрица переходных вероятностей, определяющая канал симметрична. Аналогичный факт можно доказать для границ, обсуждаемых в настоящей статье.

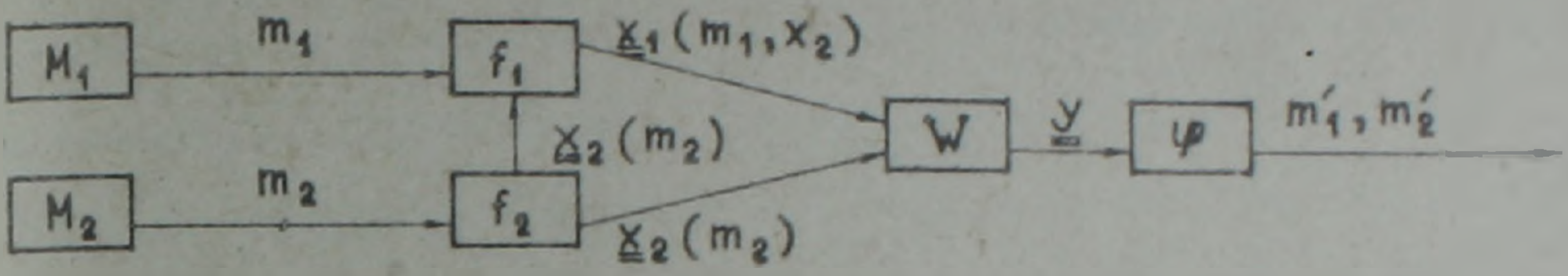

Рис. 2. КМД с подглядывающим кодером

Следующая модель, рассматриваемая в настоящей статье, – это КМД с подглядывающим кодером, введенная Виллемсом и Ван дер Меленом [10, 11]. В этом случае (см. Рис. 2) первый кодер получает полную информацию о втором кодере, а общий источник отсутствует, т.е. $|M_0| = 1$. Полученные для этой модели внутренние и внешние границы области E-пропускной способности также совпадают при малых E.

Результат для асимметричного КМД естественно обобщается на случай модели КМД с S входами, связанными с S источниками согласно следующей иерархии (см. Рис. 3)

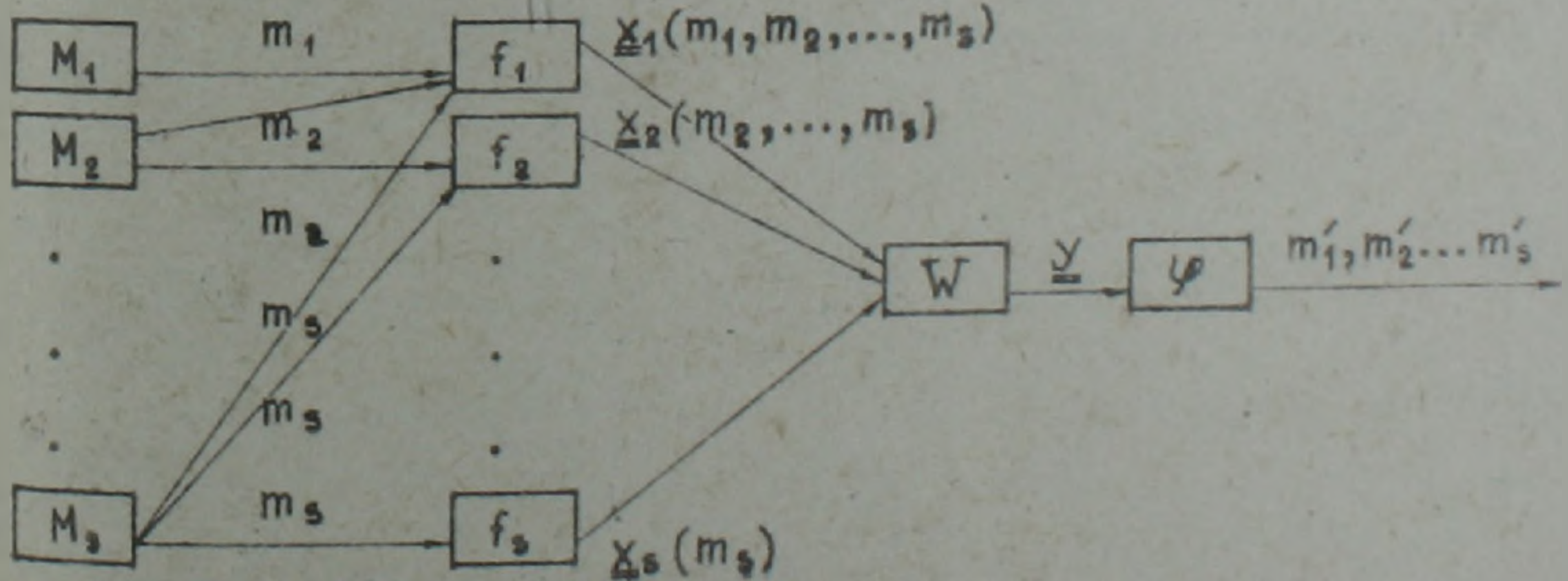

Рис. 3. КМД с иерархией источников

r-ый источник ($r = 1, ..., S$) связан с первыми r кодерами. Эта модель была рассмотрена Преловым [12], который определил область пропускной способности такого КМД. Мы приведем внешние и внутренние границы области E-пропускной способности этого канала.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Очевидно, что внешняя граница области достижимых скоростей, построенная при экспоненциальном убывании средней вероятности ошибки с заданной надежностью E, верна также в случае аналогичного убывания максимальной вероятности ошибки. При исследовании же внутренней границы области достижимых скоростей достаточно рассматривать только максимальную вероятность ошибки. Это отражено в нижеследующих теоремах.

Введем вспомогательную случайную величину U со значениями в конечном множестве $\mathcal{U}$. Пусть случайные величины U, X_1, X_2, Y образуют цепь Маркова и задаются совместными распределениями вероятностей (РВ)

$$P = \{P(u, x_1, x_2) = P_0(u)P(x_1, x_2|u), \quad u \in \mathcal{U}, \quad x_1 \in \mathcal{X}_1, \quad x_2 \in \mathcal{X}_2\}$$

и

$$P \circ V = \{P(u, x_1, x_2)V(y|x_1, x_2), \quad u \in \mathcal{U}, \quad x_1 \in \mathcal{X}_1, \quad x_2 \in \mathcal{X}_2, \quad y \in \mathcal{Y}\}$$

с некоторой матрицей $V = \{V(y|x_1, x_2), \quad x_1 \in \mathcal{X}_1, \quad x_2 \in \mathcal{X}_2, \quad y \in \mathcal{Y}\}$.

Мы пользуемся следующими обозначениями :

для дивергенции

$$D(V||W|P) = D(P \circ V||P \circ W) = \sum_{u, x_1, x_2, y} P(u, x_1, x_2)V(y|x_1, x_2) \log \frac{V(y|x_1, x_2)}{W(y|x_1, x_2)},$$

для энтропии

$$H_P(X_1, X_2|U) = -\sum_{u, x_1, x_2} P(u, x_1, x_2) \log P(x_1, x_2|u),$$

$$H_{P,V}(Y|X_1, X_2, U) = H_{P,V}(Y|X_1, X_2) =$$

$$= - \sum_{u,x_1,x_2,y} P(u,x_1,x_2) V(y|x_1,x_2) \log V(y|x_1,x_2)$$

и для взаимных информаций

$$I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2) = H_P(X_1, X_2) - H_{P,V}(X_1, X_2|Y),$$

$$I_{P,V}(Y \wedge X_1|X_2, U) = H_P(X_1|X_2, U) - H_{P,V}(X_1|X_2, Y, U),$$

$$I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2|U) = H_P(X_1, X_2|U) - H_{P,V}(X_1, X_2|Y, U).$$

Для удобства введем специальные обозначения для внешней и внутренней границы области E-пропускной способности. Пусть W – матрица переходных вероятностей КМД и $\mathcal{D}(W, E)$ – облась E-пропускной способности этого канала. Область $\mathcal{D}_{sp}(W, E)$ в координатном пространстве R_0, R_1, R_2 назовем *границей сферической упаковки* для $\mathcal{D}(W, E)$, если для заданного $E > \delta > 0$ и любого кода f_1, f_2, φ из

$$\overline{e}(f_1, f_2, \varphi, n) \leq \exp(-n(E - \delta))$$

при достаточно больших n для скоростей этого кода следует

$$(R_0 - \delta, R_1 - \delta, R_2 - \delta) \in \mathcal{D}_{sp}(W, E).$$

Внутреняя граница для $\mathcal{D}(W, E)$, называемая *границей случайного кодирования* и обозначаемая $\mathcal{D}_r(W, E)$, имеет следующее свойство : для $E > \delta > 0$ и для достаточно больших n существует код f_1, f_2, φ для КМД такой, что

$$e(f_1, f_2, \varphi, n) \leq \exp(-n(E - \delta))$$

и

$$(R_0 + \delta, R_1 + \delta, R_2 + \delta) \in \mathcal{D}_r(W, E).$$

Теорема 1. *Для КМД с коррелированными источниками обединение областей*

$$0 \leq R_1 \leq \min_{V: D(V||W|P) \leq E} I_{P,V}(Y \wedge X_1|U, X_2), \tag{2}$$

$$0 \leq R_2 \leq \min_{V: D(V||W|P) \leq E} I_{P,V}(Y \wedge X_2|U, X_1), \tag{3}$$

$$R_1 + R_2 \leq \min_{V: D(V||W|P) \leq E} I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2|U), \tag{4}$$

$$0 \leq R_0 + R_1 + R_2 \leq \min_{V: D(V||W|P) \leq E} I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2) \tag{5}$$

по различным РВ P на $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{U}$ есть $\mathcal{D}_{sp}(W, E)$.

Следствие 1. При $|M_0| = 1$ объединение областей

$$R_0 = 0,$$

$$0 \leq R_1 \leq \min_{V: D(V\|W|P) \leq E} I_{P,V}(Y \wedge X_1|X_2),$$

$$0 \leq R_2 \leq \min_{V: D(V\|W|P) \leq E} I_{P,V}(Y \wedge X_2|X_1),$$

$$R_1 + R_2 \leq \min_{V: D(V\|W|P) \leq E} I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2)$$

по различным РВ P на $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ есть $\mathcal{D}_{sp}(W, E)$.

Следствие 2. Если $|M_2| = 1$, то объединение областей

$$R_2 = 0,$$

$$0 \leq R_1 \leq \min_{V: D(V\|W|P) \leq E} I_{P,V}(Y \wedge X_1|X_2),$$

$$0 \leq R_0 + R_1 \leq \min_{V: D(V\|W|P) \leq E} I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2)$$

по различным РВ P на $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ есть $\mathcal{D}_{sp}(W, E)$.

В следующей теореме мы предполагаем, что в КМД с подглядывающим кодером второй кодер получает полную информацию о первом кодере, а $|M_0| = 1$.

Теорема 2. *Для КМД с подглядывающим кодером и $|M_0| = 1$ объединение областей*

$$R_0 = 0,$$

$$0 \leq R_1 \leq H_P(X_1),$$

$$0 \leq R_2 \leq \min_{V: D(V\|W|P) \leq E} I_{P,V}(Y \wedge X_2|X_1),$$

$$R_1 + R_2 \leq \min_{V: D(V\|W|P) \leq E} I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2)$$

по различным РВ P на $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ есть $\mathcal{D}_{sp}(W, E)$.

Следующие результаты – о построении внутренней границы E–пропускной способности.

Теорема 3. *Для КМД с коррелированными источниками выпуклая оболочка области*

$$R_1 \le \min_{V: D(V||W|P) \le E} |I_{P,V}(Y \wedge X_1|U, X_2) + D(V||W|P) - E|^+,$$

$$R_2 \le \min_{V: D(V||W|P) \le E} |I_{P,V}(Y \wedge X_2|U, X_1) + D(V||W|P) - E|^+,$$

$$R_1 + R_2 \le \min_{V: D(V||W|P) \le E} |I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2|U) + D(V||W|P) - E|^+,$$

$$R_0 + R_1 + R_2 \le \min_{V: D(V||W|P) \le E} |I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2) + D(V||W|P) - E|^+$$

при РВ P на $\mathcal{U} \times \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ таких, что случайные величины X_1, X_2 условно независимы от заданной U, то есть

$$P = \{P(u, x_1, x_2) = P_0(u)P_1(x_1|u)P_2(x_2|u), \quad u \in \mathcal{U}, \quad x_1 \in \mathcal{X}_1, \quad x_2 \in \mathcal{X}_2\},$$

является $\mathcal{D}_r(W, E)$.

Следствие 3. При $|M_0| = 1$, выпуклая оболочка области

$$R_0 = 0,$$

$$R_1 \le \min_{V: D(V||W|P) \le E} |I_{P,V}(Y \wedge X_1|X_2) + D(V||W|P) - E|^+,$$

$$R_2 \le \min_{V: D(V||W|P) \le E} |I_{P,V}(Y \wedge X_2|X_1) + D(V||W|P) - E|^+,$$

$$R_1 + R_2 \le \min_{V: D(V||W|P) \le E} |I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2) + D(V||W|P) - E|^+$$

при РВ P на $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ таких, что случайные величины X_1, X_2 независимы

$$P = \{P(x_1, x_2) = P_1(x_1)P_2(x_2), \quad x_1 \in \mathcal{X}_1, \quad x_2 \in \mathcal{X}_2\},$$

является $\mathcal{D}_r(W, E)$.

Следствие для случая асимметричного КМД формулируется аналогично. В отличие от общего случая в этой границе (как и в Следствии 2) входное РВ P – произвольное совместное распределение на $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$.

Теорема 4. *Для КМД с подглядывающим кодером выпуклая оболочка области*

$$R_0 = 0,$$

$$R_2 \leq \min_{V: D(V||W|P) \leq E} |I_{P,V}(Y \wedge X_2|X_1) + D(V||W|P) - E|^+,$$

$$R_1 + R_2 \leq \min_{V: D(V||W|P) \leq E} |I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2) + D(V||W|P) - E|^+$$

при различных РВ P на $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ есть $\mathcal{D}_r(W, E)$.

Теперь сформулируем результаты для случая КМД, описанного в §1, с $S \geq 2$ входами и с иерархией источников. Канал определяется матрицей

$$W: \quad \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \cdots \times \mathcal{X}_S \longmapsto \mathcal{Y}.$$

Определения кода, вероятности ошибки, скоростей передачи $R_1, ..., R_S$, дивергенции и взаимной информации, областей $\mathcal{D}_{sp}$ и $\mathcal{D}_r$ для этого случая обобщаются естественным образом.

Теорема 5. *Для КМД с иерархией источников объединение областей*

$$0 \leq R_1 \leq \min_V I_{P,V}(X_1 \wedge Y|X_2, ..., X_S),$$

$$0 \leq R_1 + R_2 \leq \min_V I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y|X_3, ..., X_S), .$$

....

$$0 \leq R_1 + R_2 + \cdots + R_S \leq \min_V I_{P,V}(X_1, ..., X_S \wedge Y),$$

по произвольным РВ P на $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \cdots \times \mathcal{X}_S$, где минимум во всех случаях берется по матрицам $V : \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_S \longmapsto \mathcal{Y}$, удовлетворяющим условию

$$D(V||W|P) \leq E,$$

является $\mathcal{D}_{sp}(W, E)$.

Теорема 6. *Для КМД с иерархией источников выпуклая оболочка областей*

$$R_1 \leq \min_V |I_{P,V}(X_1 \wedge Y|X_2, ..., X_S) + D(V||W|P) - E|^+,$$

$$R_1 + R_2 \leq \min_V |I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y|X_3, ..., X_S) + D(V||W|P) - E|^+,$$

....

$$0 \le R_1 + R_2 + \cdots + R_S \le \min_V |I_{P,V}(X_1, ..., X_S \wedge Y) + D(V\|W|P) - E|^+,$$

для произвольных РВ P на $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \cdots \times \mathcal{X}_S$, где минимум во всех случаях берется по матрицам $V : \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_S \longmapsto \mathcal{Y}$, удовлетворяющим условию

$$D(V\|W|P) \le E,$$

является $\mathcal{D}_r(W, E)$.

Вывод границы сферической упаковки $\mathcal{D}_{sp}$ для различных случаев отличается лишь некоторыми деталями, то же имеет место и для границы случайного кодирования $\mathcal{D}_r$. Мы ограничимся изложением доказательств лишь Теорем 1, 3 и 6.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

В доказательствах теорем и лемм используем понятие типа, условного типа и некоторые хорошо известные комбинаторные неравенства из книги [13] (глава 1, §2). Неравенство (5) является следствием границы сферической упаковки для E-пропускной способности ДКБП, поскольку КМД W имеет не больше возможностей, чем ДКБП с входным алфавитом $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ и той же матрицей переходных вероятностей W.

Доказательства неравенств (2), (3) и (4) аналогичны, поэтому мы докажем только неравенство (2). Из условия

$$\overline{e}(f_1, f_2, \varphi, n) \le \exp(-n(E - \delta))$$

следует, что

$$\frac{1}{|M_0| \cdot |M_1| \cdot |M_2|} \sum_{m_0, m_1, m_2} W^n(\mathcal{Y}^n - \varphi^{-1}(m_0, m_1, m_2) | \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2)) \le$$
$$\le \exp(-n(E - \delta)). \tag{6}$$

Рассмотрим конечное множество $\mathcal{U}$ такое, что $|\mathcal{U}|^n \ge |M_0|$. Кроме отображений f_1 и f_2 рассмотрим также отображение $f_0 : M_0 \longmapsto \mathcal{U}^n$. Обозначим

$$f(m_0, m_1, m_2) = (\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2))$$

и через $f(M_0, M_1, M_2)$ – множество всех троек $(\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2))$, $m_i \in M_i$, $i = 0, 1, 2$.

Пусть фиксировано РВ

$$P = \{P(u, x_1, x_2) = P_0(u)P(x_1, x_2|u), \quad u \in \mathcal{U}, \quad x_1 \in \mathcal{X}_1, \quad x_2 \in \mathcal{X}_2\}.$$

Напомним некоторые комбинаторные понятия из [13]. Обозначим через $N(u|\mathbf{u})$ число появлений $u \in \mathcal{U}$ в последовательности $\mathbf{u}$. Типом последовательности $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^n$ называется распределение P_0 на $\mathcal{U}$ такое, что

$$P_0(u) = \frac{1}{n}N(u|\mathbf{u}) \quad \text{для каждой } u \in \mathcal{U}.$$

Множество всех последовательностей типа P_0 на $\mathcal{U}^n$ обозначается $T_{P_0}(U)$. Будем говорить, что $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathcal{X}_1^n \times \mathcal{X}_2^n$ имеет условный тип P для заданной $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^n$, если

$$N(u, x_1, x_2|\mathbf{u}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = N(u|\mathbf{u})P(x_1, x_2|u)$$

для любых $u \in \mathcal{U}$, $x_1 \in \mathcal{X}_1$, $x_2 \in \mathcal{X}_2$. Для $\mathbf{u} \in T_{P_0}(U)$ и стохастической матрицы $P : \mathcal{U} \longmapsto \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ множество всех пар $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathcal{X}_1^n \times \mathcal{X}_2^n$, имеющих условный тип P, обозначается $T_P(X_1, X_2|\mathbf{u})$. Мы будем пользоваться совокупностью множеств различных типов $T_{P_0}(U)$, $T_P(U, X_1, X_2)$, $T_P(X_1, X_2|\mathbf{u})$, $T_P(X_1|\mathbf{u}, \mathbf{x}_2)$ и т.д., которые определяются аналогично.

Введем следующие множества

$$A_{P_0} = \{f_0(M_0) \cap T_{P_0}(U)\},$$

$$A_P = \{f(M_0, M_1, M_2) \cap T_P(U, X_1, X_2)\},$$

$$A_P(\mathbf{u}(m_0)) = (f_1(m_0, M_1) \times f_2(m_0, M_2)) \cap T_P(X_1, X_2|\mathbf{u}(m_0)),$$

$$A_P(\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_2(m_0, m_2)) = \{f_1(m_0, M_1) \cap T_P(X_1|\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_2(m_0, m_2))\}.$$

Пусть тип P таков, что

$$(n+1)^{-|\mathcal{U}|}|M_0| \leq |A_{P_0}| \tag{7}$$

и

$$(n+1)^{-|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|}|M_1| \cdot |M_2| \leq |A_P(\mathbf{u}(m_0))|, \quad \mathbf{u}(m_0) \in A_{P_0}. \tag{8}$$

Неравенство (6) можно переписать следующим образом

$$\sum_{\mathbf{u}(m_0)\in A_{P_0}} \sum_{(\mathbf{x}_1(m_0,m_1),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))\in A_P(\mathbf{u}(m_0))} W^n(\mathcal{Y}^n - \varphi^{-1}(m_0,m_1,m_2)|\,\mathbf{x}_1(m_0,m_1),$$

$$\mathbf{x}_2(m_0,m_2)) \leq (n+1)^{|\mathcal{U}^2|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|}|A_{P_0}|\cdot|A_P(\mathbf{u}(m_0))|\exp(-n(E-\delta)). \qquad (9)$$

Вместо $T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_1(m_0,m_1),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))$ в левой части (9) можно взять $\mathcal{Y}^n$. Учитывая, что при этом вероятность W^n будет зависеть лишь от P и V, получим

$$\sum_{\mathbf{u}(m_0)\in A_{P_0}} \sum_{(\mathbf{x}_1(m_0,m_1),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))\in A_P(\mathbf{u}(m_0))} W^n(\mathbf{y}|\,\mathbf{x}_1(m_0,m_1),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))\cdot$$

$$\cdot\big[|T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_1(m_0,m_1),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))|-$$

$$-|T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_1(m_0,m_1),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))\cap\varphi^{-1}(m_0,m_1,m_2)|\big] \leq$$

$$\leq (n+1)^{|\mathcal{U}^2|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|}|A_{P_0}|\cdot|A_P(\mathbf{u}(m_0))|\exp(-n(E-\delta)).$$

Отсюда следует, что для больших n

$$|T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_1(m_0,m_1),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))\cap\varphi^{-1}(m_0,m_1,m_2)| \geq$$

$$\geq |T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_1(m_0,m_1),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))| - \frac{\exp(-n(E-\delta))}{W^n(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1(m_0,m_1),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))}. \qquad (10)$$

Зафиксируем m_0 и m_2 и заметим, что

$$|A_P(\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))| \leq |T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))|\times$$

$$\times\Big[\min_{\mathbf{x}_1(m_0,m_1)\in A_P(\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))}$$

$$|T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_1(m_0,m_1),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))\cap\varphi^{-1}(m_0,m_1,m_2)|\Big]^{-1}.$$

С учетом (10) и комбинаторных неравенств [13] получим

$$|A_P(\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))| \leq$$

$$\leq \frac{\exp[nH_{P,V}(Y|X_2,U) - nH_{P,V}(Y|U,X_1,X_2)]}{(n+1)^{-|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|\cdot|\mathcal{Y}|} - \exp[n(D(V||W|P) - E - 2\delta)]}. \qquad (11)$$

При условии положительности знаменателя правую часть (11) можно минимизировать по V. Достаточным условием для этого является

$$D(V||W|P) \leq E - \delta.$$

Поэтому для части кодовых слов $A_P(\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))$ фиксированного условного типа получаем оценку (2).

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Доказательство Теоремы 3 основано на методе случайного кодирования, предложенном Шенноном [14, 15]. Сначала мы докажем следующую модификацию леммы об упаковке [13]. Пусть

$$P_0 = \{P_0(u),\ u \in \mathcal{U}\}, \quad P_i = \{P_i(x_i|u),\ x_i \in \mathcal{X}_i,\ u \in \mathcal{U}\}, \quad i = 1,2$$

суть некоторые РВ и

$$P = \{P(u, x_1, x_2) = P_0(u)P_1(x_1|u)P_2(x_2|u), \quad u \in \mathcal{U}, \quad x_1 \in \mathcal{X}_1, \quad x_2 \in \mathcal{X}_2\}.$$

Лемма 1. *Пусть $E > \delta \geq 0$ и тип P на $\mathcal{U} \times \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ задан. Пусть*

$$\frac{1}{n}\log|M_0 \times M_1 \times M_2| \leq \min_{V: D(V\|W|P)\leq E} |I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2) + D(V\|W|P) - E - \delta|^+, \quad (12)$$

$$\frac{1}{n}\log|M_1 \times M_2| \leq \min_{V: D(V\|W|P)\leq E} |I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2|U) + D(V\|W|P) - E - \delta|^+, \quad (13)$$

$$\frac{1}{n}\log|M_1| \leq \min_{V: D(V\|W|P)\leq E} |I_{P,V}(Y \wedge X_1|X_2, U) + D(V\|W|P) - E - \delta|^+, \quad (14)$$

$$\frac{1}{n}\log|M_2| \leq \min_{V: D(V\|W|P)\leq E} |I_{P,V}(Y \wedge X_2|X_1, U) + D(V\|W|P) - E - \delta|^+. \quad (15)$$

Тогда существуют векторы $\mathbf{u}(m_0) \in T_{P_0}(U)$, $\mathbf{x}_1(m_0, m_1) \in T_P(X_1|\mathbf{u}(m_0))$, $\mathbf{x}_2(m_0, m_2) \in T_P(X_2|\mathbf{u}(m_0))$, $m_i \in M_i$, $i = 0, 1, 2$ такие, что для каждой тройки номеров m_0, m_1, m_2 и для каждой пары стохастических матриц $V, V' : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \longmapsto \mathcal{Y}$, при $n \geq n_0(|\mathcal{U}|, |\mathcal{X}_1|, |\mathcal{X}_2|, |\mathcal{Y}|, \delta)$ имеет место неравенство

$$\Big|T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2)) \bigcap \bigcup_{(m_0', m_1', m_2') \neq (m_0, m_1, m_2)} T_{P,V'}(Y|\mathbf{u}(m_0'),$$

$$\mathbf{x}_1(m_0', m_1'), \mathbf{x}_2(m_0', m_2'))\Big| \leq$$

$$\leq |T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2))| \exp[-n|E - D(V'\|W|P)|^+]. \quad (16)$$

Доказательство. Для заданных M_0, M_1, M_2, удовлетворяющих условиям (12) – (15), случайным образом выберем три набора векторов

$$\mathbf{u}(m_0) \in T_{P_0}(U), \quad \mathbf{x}_1(m_0, m_1) \in T_P(X_1|\mathbf{u}(m_0)),$$

$$\mathbf{x}_2(m_0, m_2) \in T_P(X_2|\mathbf{u}(m_0)), \quad m_i = 1, \ldots, 2|M_i|, \quad i = 0, 1, 2.$$

Обозначим через $\mathcal{C}(M_0, M_1, M_2)$ множество всех упорядоченных наборов

$$C = \{\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2), \quad m_i = 1, ..., 2|M_i|, \quad i = 0, 1, 2\}.$$

Если для C выполняется (16) для всех m_0, m_1, m_2 и V, V', то тройки векторов $(\mathbf{u}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ обязательно будут разными для разных троек (m_0, m_1, m_2). Для каждого набора C из $\mathcal{C}(M_0, M_1, M_2)$ обозначим через $A_{m_0,m_1,m_2}(C, V, V')$ левую часть (16). Если $D(V'||W|P) \geq E$, то $\exp[-n|E - D(V'||W|P)|^+] = 1$ и (16) верно для любого набора векторов.

Нам остается рассмотреть случай $D(V'||W|P) < E$. Пусть

$$A_{m_0,m_1,m_2}(C) = (n+1)^{-|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|\cdot|\mathcal{Y}|} \sum_{V} \sum_{V': D(V'||W|P)<E} A_{m_0,m_1,m_2}(C, V, V') \times$$

$$\times \exp[n(E - D(V'||W|P) - H_{P,V}(Y|U, X_1, X_2))].$$

Если $A_{m_0,m_1,m_2}(C) \leq 1$ для всех m_0, m_1, m_2, то (16) имеет место для всех m_0, m_1, m_2, V, V'. Отметим, что если для $C \in \mathcal{C}(M_0, M_1, M_2)$

$$\frac{1}{8|M_0 \times M_1 \times M_2|} \sum_{m_0,m_1,m_2} A_{m_0,m_1,m_2}(C) \leq \frac{1}{2}, \tag{17}$$

то $A_{m_0,m_1,m_2}(C) \leq 1$ по крайней мере для $|M_0 \times M_1 \times M_2|$ троек (m_0, m_1, m_2). Кроме того, если C' является частью набора C, то

$$A_{m_0,m_1,m_2}(C') \leq A_{m_0,m_1,m_2}(C) \leq 1$$

для всех таких троек. Поэтому достаточно показать, что для всех троек (m_0, m_1, m_2) при случайном выборе C

$$\mathbf{E}A_{m_0,m_1,m_2}(C) \leq 1/2. \tag{18}$$

Чтобы это показать, оценим $\mathbf{E}A_{m_0,m_1,m_2}(C, V, V')$. Имеем

$$\mathbf{E}A_{m_0,m_1,m_2}(C, V, V') = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n} Pr[\mathbf{y} \in T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2)) \bigcap$$

$$\bigcap \bigcup_{(m_0', m_1', m_2') \neq (m_0, m_1, m_2)} T_{P,V'}(Y|\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2))].$$

Здесь Pr обозначает вероятность события в скобках при случайном выборе C методом, указанным в начале доказательства леммы. Обозначим

$$Pr(V, m_0, m_1, m_2) = Pr[\mathbf{y} \in T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2))].$$

Пусть

$$Pr(V', m_1'|m_0, m_2) = Pr[\mathbf{y} \in T_{P,V'}(Y|\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1'), \mathbf{x}_2(m_0, m_2))]$$

есть условная вероятность при условии, что только $\mathbf{x}_1(m_0, m_1')$ выбирается случайно для фиксированных $\mathbf{u}$ и $\mathbf{x}_2$. Аналогично определим $Pr(V', m_2'|m_0, m_1)$, $Pr(V', m_1', m_2'|m_0)$. Имеем

$$\mathbf{E}A_{m_0,m_1,m_2}(C, V, V') = \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}^n} Pr(V, m_0, m_1, m_2) \left[\sum_{m_1'\neq m_1} Pr(V', m_1'|m_0, m_2) + \right.$$

$$+ \sum_{m_2'\neq m_2} Pr(V', m_2'|m_0, m_1) + \sum_{m_1'\neq m_1, m_2'\neq m_2} Pr(V', m_1', m_2'|m_0) +$$

$$\left. + \sum_{m_0'\neq m_0, m_1'\neq m_1, m_2'\neq m_2} Pr(V', m_0', m_1', m_2')\right]. \tag{19}$$

В первой сумме в квадратных скобках имеем

$$Pr(V', m_1'|m_0, m_2) = |T_P(X_1|\mathbf{u})|^{-1}|\{\mathbf{x}_1 : \mathbf{x}_1 \in T_P(X_1|\mathbf{u}),\ \mathbf{y} \in T_{P,V'}(Y|\mathbf{u}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\}| \leq$$

$$\leq (n+1)^{|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|} \exp[-n(H_P(X_1|U) - H_{P,V'}(X_1|U, X_2, Y))] =$$

$$= (n+1)^{|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|} \exp[-nI_{P,V'}(Y \wedge X_1|U, X_2)].$$

В последнем равенстве учтено, что вследствие условной независимости случайных величин X_1 и X_2, для заданной U имеет место

$$I_{P,V'}(X_2, Y \wedge X_1|U) = I_{P,V'}(Y \wedge X_1|U, X_2).$$

По аналогии, для второй суммы получим

$$Pr(V', m_2'|m_0, m_1) \leq (n+1)^{|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|} \exp[-nI_{P,V'}(Y \wedge X_2|U, X_1)].$$

В третьей сумме

$$Pr(V', m_1', m_2'|m_0) =$$

$$= \frac{|\{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) : \mathbf{x}_1 \in T_P(X_1|\mathbf{u}), \mathbf{x}_2 \in T_P(X_2|\mathbf{u}), \mathbf{y} \in T_{P,V'}(Y|\mathbf{u}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\}|}{|T_P(X_1|\mathbf{u})| \cdot |T_P(X_2|\mathbf{u})|} \leq$$

$$\leq (n+1)^{|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|} \exp[-n(H_P(X_1, X_2|U) - H_{P,V'}(X_1, X_2|U, Y))] =$$

$$= (n+1)^{|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|} \exp[-nI_{P,V'}(Y \wedge X_1, X_2|U)].$$

Наконец, для $Pr(V', m_0', m_1', m_2')$ и, аналогично, для $Pr(V, m_0, m_1, m_2)$ имеем

$$Pr(V, m_0, m_1, m_2) =$$

$$= \frac{|\{\mathbf{u} \in T_{P_0}(U), \mathbf{x}_1 \in T_P(X_1|\mathbf{u}), \mathbf{x}_2 \in T_P(X_2|\mathbf{u}), \mathbf{y} \in T_{P,V}(Y|\mathbf{u}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\}|}{|T_{P_0}(U)| \cdot |T_P(X_1|\mathbf{u})| \cdot |T_P(X_2|\mathbf{u})|} \leq$$

$$\leq (n+1)^{|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|} \exp[-n(H_P(U, X_1, X_2) - H_{P,V}(U, X_1, X_2|Y))] =$$

$$= (n+1)^{|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|} \exp[-nI_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2)].$$

Заметим, что если $\mathbf{y} \notin T_{P,V}(Y)$, то $Pr(V, m_0, m_1, m_2) = 0$. Из (19) и полученных оценок для вероятностей получим

$$\mathbf{E}A_{m_0,m_1,m_2}(C, V, V') \leq \exp[nH_{P,V}(Y) - nI_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2)] \cdot (n+1)^{2|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|} \times$$

$$\times \{(2|M_1|-1) \exp[-nI_{P,V'}(Y \wedge X_1|U, X_2)] + (2|M_2|-1) \exp[-nI_{P,V'}(Y \wedge X_2|U, X_1)] +$$

$$+(2|M_1|-1)(2|M_2|-1) \exp[-nI_{P,V'}(Y \wedge X_1, X_2|U)] +$$

$$+(2|M_0|-1)(2|M_1|-1)(2|M_2|-1) \exp[-nI_{P,V'}(Y \wedge X_1, X_2)]\}. \qquad (20)$$

Согласно определению $A_{m_0,m_1,m_2}(C)$ имеем

$$\mathbf{E}A_{m_0,m_1,m_2}(C) = (n+1)^{|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|(|\mathcal{Y}|+2)} \sum_{V} \sum_{V': D(V'\|W|P)<E}$$

$$\exp[n(E - D(V'\|W|P) - H_{P,V}(Y|U, X_1, X_2))] \mathbf{E}A_{m_0,m_1,m_2}(C, V, V').$$

Из (20), неравенств (12) – (15), комбинаторных неравенств [13], а также $D(V'\|W|P) < E$ следует, что

$$\mathbf{E}A_{m_0,m_1,m_2}(C) \leq 8(n+1)^{|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|(|\mathcal{Y}|+2)} \sum_{V,V'} \exp[-n\delta].$$

Учитывая верхнюю оценку числа всех условных типов, имеем

$$\mathbf{E}A_{m_0,m_1,m_2}(C) \leq 8(n+1)^{|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|(3|\mathcal{Y}|+2)} \exp[-n\delta],$$

откуда при $n \geq n_0(|\mathcal{U}|, |\mathcal{X}_1|, |\mathcal{X}_2|, |\mathcal{Y}|, \delta)$ получим

$$\mathbf{E}A_{m_0,m_1,m_2}(C) \leq \frac{1}{2}.$$

Лемма доказана.

Доказательство Теоремы 3. Нам нужно построить код с указанными свойствами. Для кодирования ограничимся выбором кодовых слов из соответствующих фиксированных типов

$$\mathbf{u}(m_0) \in T_{P_0}(U), \quad \mathbf{x}_1(m_0, m_1) \in T_P(X_1|\mathbf{u}(m_0)), \quad \mathbf{x}_2(m_0, m_2) \in T_P(X_2|\mathbf{u}(m_0)).$$

Согласно Лемме 1 существует $|M_0 \times M_1 \times M_2|$ различных троек последовательностей, удовлетворяющих (12) – (15) для заданных P и E.

Теперь определим метод декодирования. Пусть при декодировании каждому y ставится в соответствие такая тройка (m_0, m_1, m_2), для которой

$$\mathbf{y} \in T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2))$$

с таким V, что $D(V||W|P)$ минимальна. Иначе говоря, применим декодирование по минимуму дивергенции. Оценим сверху вероятность ошибки. Если произошла ошибка при передаче тройки сообщений (m_0, m_1, m_2), то существует такая тройка (m_0', m_1', m_2') и матрица V', что

$$\mathbf{y} \in T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2)) \cap$$
$$\cap T_{P,V'}(Y|\mathbf{u}(m_0'), \mathbf{x}_1(m_0', m_1'), \mathbf{x}_2(m_0', m_2'))$$

и

$$D(V'||W|P) \le D(V||W|P).$$

Поэтому вероятность ошибки можно оценить сверху следующим образом :

$$e(m_0, m_1, m_2) \le$$
$$\le W^n \Bigg[\bigcup_{V':D(V'||W|P) \le D(V||W|P)} T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2)) \bigcap$$
$$\bigcap \bigcup_{(m_0', m_1', m_2') \ne (m_0, m_1, m_2)} T_{P,V'}(Y|\mathbf{u}(m_0'), \mathbf{x}_1(m_0', m_1'), \mathbf{x}_2(m_0', m_2')) \Bigg] \le$$
$$\le W^n(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \sum_{V':D(V'||W|P) \le D(V||W|P)} \Big| T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2)) \bigcap$$
$$\bigcap \bigcup_{(m_0', m_1', m_2') \ne (m_0, m_1, m_2)} T_{P,V'}(Y|\mathbf{u}(m_0'), \mathbf{x}_1(m_0', m_1'), \mathbf{x}_2(m_0', m_2')) \Big|.$$

Согласно (16) получим, что вероятность ошибки достаточно мала :

$$e(m_0, m_1, m_2) \leq \sum_{V': D(V'||W|P) \leq D(V||W|P)} \exp[-n(E - D(V'||W|P)] \times$$

$$\times \exp[-nD(V||W|P)] \leq (n+1)^{|\mathcal{Y}|} \exp[-nE] \leq \exp[-n(E-\delta)].$$

Теорема 3 доказана.

§5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6

Нам будет нужна модификация Леммы 1.

Лемма 2. *Пусть $E > \delta \geq 0$ и тип P на $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \cdots \times \mathcal{X}_S$ задан. Пусть*

$$\frac{1}{n} \log |M_1| \leq \min_{V: D(V||W|P) \leq E} |I_{P,V}(X_1 \wedge Y | X_2, ..., X_S) + D(V||W|P) - E - \delta|^+,$$

$$\frac{1}{n} \log(|M_1 \times M_2|) \leq \min_{V: D(V||W|P) \leq E} |I_{P,V}(X_1 X_2 \wedge Y | X_3, ..., X_S) + D(V||W|P) - E - \delta|^+,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{21}$$

$$\frac{1}{n} \log(|M_1 \times \cdots \times M_S|) \leq \min_{V: D(V||W|P) \leq E} |I_{P,V}(X_1 ... X_S \wedge Y) + D(V||W|P) - E - \delta|^+.$$

Тогда существуют M_S векторов $\mathbf{x}_S(m_S)$ из $T_P(X_S)$, для каждого m_S существуют M_{S-1} векторов $\mathbf{x}_{S-1}(m_{S-1}, m_S)$ из $T_P(X_{S-1}|\mathbf{x}_S(m_S))$, ... и для заданных $m_2, ..., m_S$ существует вектор $\mathbf{x}_1(m_1, ..., m_S)$ из $T_P(X_1|\mathbf{x}_2(m_2, ..., m_S), ..., \mathbf{x}_S(m_S))$, что для любых $m_1, ..., m_S$ и для каждой пары стохастических матриц $V : \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_S \longmapsto \mathcal{Y}$ при достаточно больших n имеет место

$$\Big|T_{P,V}(Y|\mathbf{x}_1(m_1, ..., m_S), ..., \mathbf{x}_S(m_S)) \bigcap \bigcup_{(m'_1,...,m'_S) \neq (m_1,...,m_S)}$$

$$T_{P,V'}(Y|\mathbf{x}_1(m'_1, ..., m'_S), ..., \mathbf{x}_S(m'_S))\Big| \leq$$

$$\leq |T_{P,V}(Y|\mathbf{x}_1(m_1, ..., m_S), ..., \mathbf{x}_S(m_S))| \exp[-n|E - D(V'||W|P)|^+]. \tag{22}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству Леммы 1.

Для доказательства Теоремы 6 сначала нам нужно построить код. Выберем кодовые слова $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_S$ из соответствующих типов :

$$T_P(X_1|\mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_S),\ T_P(X_2|\mathbf{x}_3, ..., \mathbf{x}_S), ..., T_P(X_S).$$

Согласно Лемме 2 для заданных P и E существуют $M_1 \times \cdots \times M_S$ различных наборов по s последовательностей, удовлетворяющих (21). Снова воспользуемся декодированием по минимуму дивергенции (см. §4). Используя (22) и комбинаторные неравенства [13], вероятность ошибки можно оценить сверху следующим образом

$$e(m_1, ..., m_S) \leq W^n \left[\bigcup_{V': D(V'||W|P) \leq D(V||W|P)} T_{P,V}(Y|\mathbf{x}_1(m_1, ..., m_S), ..., \mathbf{x}_S(m_S)) \bigcap \right.$$

$$\left. \bigcup_{(m_1', ..., m_S') \neq (m_1, ..., m_S)} T_{P,V'}(Y|\mathbf{x}_1(m_1', .., m_S'), .., \mathbf{x}_S(m_S'))|\mathbf{x}_1(m_1, .., m_S), .., \mathbf{x}_S(m_S) \right] \leq$$

$$\leq \exp[-n(E - \delta)].$$

Теорема 6 доказана.

ABSTRACT. Several models of multiple–access channels with two encoders and one decoder and a multiple–access channel with a hierarchy of sources are considered. The problem of constructing the outer and the inner bounds for E–capacity region is solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Slepian, J. K. Wolf, "A coding theorem for multiple access channels with correlated sources", Bell System Techn. J., vol. 52, pp. 1037 – 1076, 1973.
2. E. A. Haroutunian, "Rate - reliability function", Proc. of the 3-rd internat. Colloquium on coding theory in Dilijan, 1990, Yerevan, pp. 52 – 68, 1991.
3. Е. А. Арутюнян, "Нижняя граница вероятности ошибки для канала с множественным доступом", Проблемы передачи Информации, том 11, № 2, стр. 23 – 36, 1975.
4. C. E. Shannon, "Coding theorems for a discrete source with a fidelity criterion", IRE National Convention record, part 4, pp. 142 – 163, 1959.
5. R. Ahlswede, "Multi - way communication channels", Proc. 2-nd Internat. Symp. on Inform. Theory, Tsakhkadzor, Armenia, USSR, 1971, Hungarian Press, pp. 23 – 52, 1973.
6. R. Ahlswede, "The capacity region of a channel with two senders and two receivers", Annals of Probability, vol. 2, no. 5, pp. 805 – 814, 1974.
7. E. C. Van der Meulen, "The discrete memoryless channel with two senders i one receiver", Proc. 2-nd Internat. Symp. on Inform. Theory, Tsakhkadzor, Armenia, USSR, 1971, Hungarian Press, pp. 103 – 135, 1973.
8. Е. А. Арутюнян, М. Е. Арутюнян, "Границы достижимых скоростей передачи по каналу с множественным доступом при заданной экспоненте вероятности ошибки", Доклады АН Арм.ССР, том 91, № 3, стр. 3 – 7, 1990.

9. E. C. Van der Meulen, Some recent results on the asymmetric multiple - access channel", Proc. 2-nd Joint Swedish – Soviet Intern. Workshop on Inform. Theory, Gränna, Sweden, pp. 172 – 176, 1985.
10. F. J. Willems, "Informationtheoretical results for the discrete memoryless multiple access channel", Ph. D. dissertation, Katholieke university, Leuven, 156p, 1982.
11. F. J. Willems, E. C. Van der Meulen, "The discrete memoryless multiple access channel with cribbing encoders", IEEE Trans. on Inform. Theory, vol. 31, no. 3, pp. 313 – 327, 1985.
12. В. В. Прелов, "Передача информации по каналу с множественным доступом с некоторой иерархией источников", Проблемы передачи информации, том 20, № 4, стр. 3 – 10, 1984.
13. И. Чисар, Я. Кёрнер, Теория Информации . Теоремы кодирования для дискретных систем без памяти, М., Мир, 1985.
14. C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication", Bell System Techn. J., vol. 27, no. 3, pp. 379 – 423, 1948.
15. C. E. Shannon, "Certain results in coding theory for noisy channels", Inform. and Control, vol. 1, no. 1, pp. 6 – 25, 1957.

30 Июня 1992

Институт Проблем Информации и Автоматизации
Национальной Академии Наук Армении,
Ереванский Государственный Университет

О ПОСТРОЕНИИ МЕР В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМЫХ ФИНСЛЕРОВЫМИ МЕТРИКАМИ

В. К. Оганян, А. Абдалла

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 27, № 5, 1992

финслерова метрика ρ описывается своей плотностью (финслеровой плотностью), которая является функцией $f(x,y,\varphi)$ зависящей от $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, и $\varphi \in S_1$ (S_1 – окружность направлений на плоскости). В статье доказано, что если неотрицательная локально–выпуклая функция f определённая на $\mathbb{R}^2 \times S_1$ удовлетворяет дифференциальному уравнению: $-\frac{\partial f}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial\varphi}\cos\varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial\varphi}\sin\varphi = 0$, то f – финслерова плотность и соответствующая метрика ρ определяет меру $m(\cdot)$ в пространстве $\mathbf{G}$ прямых на плоскости. Если условие локальной выпуклости и неотрицательности функции f опустить, то для того, чтобы существовала бы обобщённая мера $m(\cdot)$ в $\mathbf{G}$ необходимо и достаточно, чтобы функция f удовлетворяла бы этому дифференциальному уравнению. Если f достаточно гладкая, то $m(\cdot)$ необходимо имеет плотность, для которой найдено точное выражение в терминах f.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Флаг на плоскости $\mathbb{R}^2$ есть пара

$$(\mathcal{P},\varphi) = (x,y,\varphi),$$

где $\mathcal{P} = (x,y)$ – точка на плоскости, и $\varphi \in S_1$ (S_1 – окружность направлений на плоскости).

Пусть $f(\mathcal{P},\varphi) = f(x,y,\varphi)$ – неотрицательная функция определённая в пространстве флагов $\mathbb{R}^2 \times S_1$. Рассмотрим интегралы

$$\rho(\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2) = \int_{\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2} f(F,\varphi)\,dl, \tag{1}$$

где интеграл берётся по всем точкам F принадлежашим отрезку $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$, dl – элемент длины на этом сегменте. Значение параметра φ в аргументе f совпадает с направлением отрезка $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$.

f называется финслеровой метрикой, если $\rho(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ определённая по (1) есть метрика на плоскости (см. [4]).

Очевидно, что функция ρ определённая по (1) аддитивна и непрерывна. Следовательно, если ρ – метрика, то по хорошо известной теореме комбинаторной интегральной геометрии ([1], [2]) существует (единственная) мера m в пространстве $\mathbf{G}$ прямых на плоскости такая, что

$$\rho(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = m([\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2]), \tag{2}$$

где $[\mathcal{P}, \mathcal{Q}] = \{g \in \mathbf{G}:$ прямая g разделяет точки $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}\}$.
Этим путём финслеровы плотности $f(x, y, \varphi)$ всегда определяют меры в пространстве $\mathbf{G}$.

В этой статье мы доказываем следующее утверждение : если локально-выпуклая функция $f(x, y, \varphi)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\frac{\partial f}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial\varphi}\cos\varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial\varphi}\sin\varphi = 0, \tag{3}$$

то f необходимо финслерова плотность.
Отсюда следует, что (3) есть достаточное условие для того, чтобы f определяла бы по (1) – (2) меру в пространстве $\mathbf{G}$.

И обратно, если мы имеем меру m в $\mathbf{G}$, которая имеет плотность $\gamma(g)$, $g \in \mathbf{G}$, то функция ρ заданная по (2) есть финслерова метрика и её финслерова плотность f удовлетворяет уравнению (3).

При некоторых дополнительных условиях гладкости на функцию f, в §3 мы находим точное выражение (23) для γ в терминах f.
Пусть μ – мера в $\mathbf{G}$, инвариантная относительно евклидовых движений плоскости (μ единственна с точностью до постоянного множителя). Ниже мы рассматриваем меры $m(\cdot)$, которые абсолютно непрерывны относительно μ :

$$dm = \gamma(g)\, dg, \tag{4}$$

где dg – элемент меры μ.

Функцию $\gamma(g)$ мы назовём плотностью меры $m(\cdot)$.

Заметим, что если $m = \mu$, то $f(x, y, \varphi) = c$ – постоянная, и $m([\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2]) = c \cdot |\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2|$, где $|\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2|$ – длина отрезка $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$. Если $m(\cdot)$ – трансляционно-инвариантная мера, то $f(x, y, \varphi) = f(\varphi)$ и $m([\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2]) = f(\varphi) \cdot |\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2|$.

§2. ПЛОТНОСТЬ КАК ПРЕДЕЛ КРОФТОНА

Пусть $m(\cdot)$ – мера в $\mathbf{G}$, которая имеет плотность $\gamma(g)$. Тогда метрика ρ (соответствующая мере $m(\cdot)$ по формуле (2)) имеет финслерову плотность f.

Рассмотрим диаграмму на Рис. 1, представляющую два бесконечно малых отрезка a_1, a_2 ; мы предполагаем, что точки $A, B \in g$ также как и углы α_1, α_2 остаются фиксированными, тогда как длины отрезков стремятся к нулю.

Плотность γ на g можно вычислить как предел

$$\gamma(g) = \lim_{\substack{a_1 \downarrow \{A\} \\ a_2 \downarrow \{B\}}} \frac{m([a_1] \cap [a_2])}{\mu([a_1] \cap [a_2])}, \tag{5}$$

где $[a] = \{g \in \mathbf{G} : \quad g \cap a \neq \emptyset\}$.

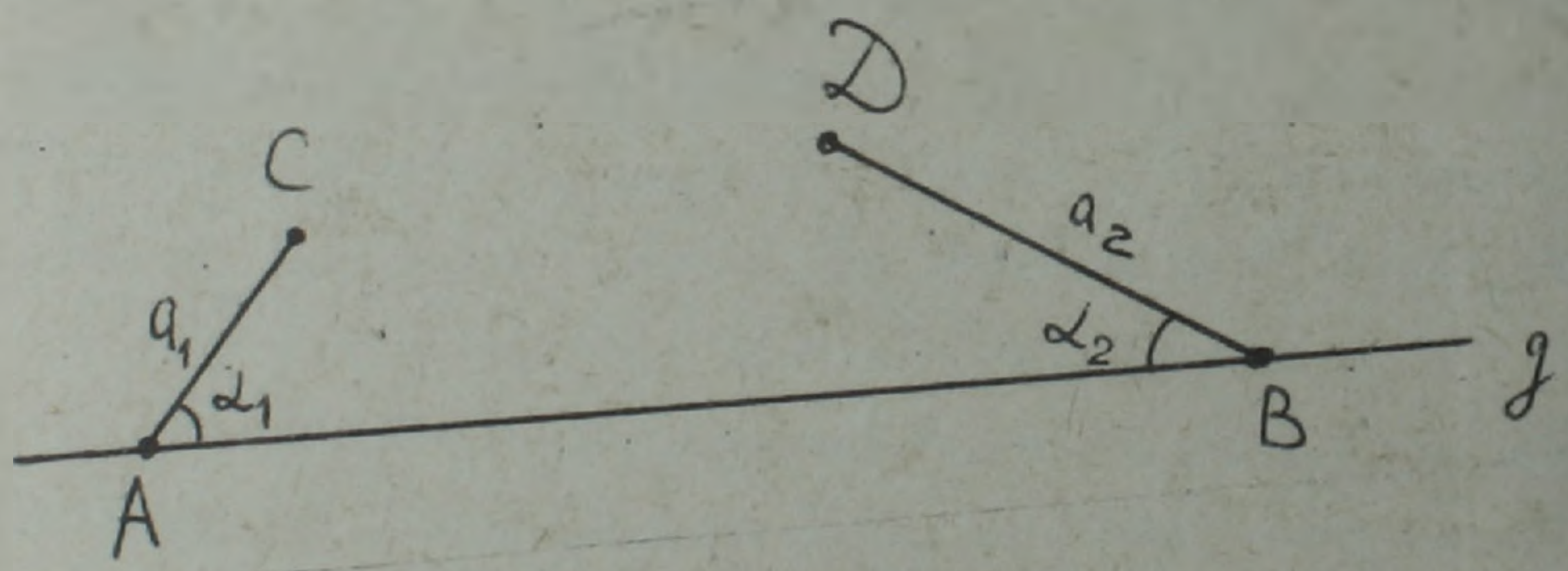

Рис. 1

По обобщённой формуле Крофтона (см. [2], стр. 26)

$$2m([a_1] \cap [a_2]) = m([AD]) + m([BC]) - m([AB]) - m([CD]). \tag{6}$$

Мы также имеем

$$\mu([a_1] \cap [a_2]) = \frac{\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2}{|L|} \cdot a_1 \cdot a_2 \quad (a_i \to 0). \tag{7}$$

Используя (1), (5), (6) и (7) получим

$$\gamma_f(g) = \frac{|L|}{2} \lim_{\substack{a_1 \downarrow \{A\} \\ a_2 \downarrow \{B\}}} \left\{ \left(\int_{AD} f(x,y,\varphi_1)\, dl + \int_{BC} f(x,y,\varphi_2)\, dl - \int_L f(x,y,\varphi)\, dl - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_{CD} f(x,y,\varphi_3)\, dl \right) (\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot a_1 \cdot a_2)^{-1} \right\}, \tag{8}$$

где φ_1, φ_2, φ_3 и φ — направления отрезков AD, BC, CD и AB соответственно.

Мы приходим к следующему заключению :

Если f – финслерова плотность, которая соответствует мере $m(\cdot)$ обладающей непрерывной плотностью, то предел Крофтона (8) необходимо существует.

Пусть f – произвольная флаговая функция (*априори* не финслерова плотность). Возникают два естественных вопроса :

1. Какими условиями должна обладать f, чтобы существовал бы предел Крофтона (8).

2. При каких дополнительных условиях на f предел Крофтона (8) будет зависеть только от прямой g.

Заметим, что, априори, предел Крофтона может зависеть от таких параметров как положение точек A и B на прямой g, а также от углов α_1, α_2.

Согласно результату Р. В. Амбарцумяна (опубликованному в этом номере, [3]), второй вопрос можно заменить следующим

2′. При каких дополнительных условиях отношение в (8) ограниченно снизу;

Ниже мы получим условие, которое влечёт как 2 так и 2′ одновременно.

§3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА КРОФТОНА

Предполагая достаточную гладкость функции f, разложим интегралы в (8) по степеням бесконечно малых величин a_1, a_2 с точностью до второго порядка. Мы убедимся, что числитель в (8) эквивалентен $c \cdot a_1 \cdot a_2$ и поэтому предел (8) существует для любой достаточно гладкой флаговой функции.

Пусть направление оси X нашей координатной системы совпадает с направлением прямой g_0 (см. Рис. 2). Мы начнём с разложения интеграла

$$\int_{CD} f(F, \varphi_3)\, dl. \tag{9}$$

Координаты точки $F \in CD$ суть $F = (x, y(x, a_1, a_2))$ (для обозначений см Рис. 2), где

$$y(x, a_1, a_2) = \\ = \frac{(a_1 \sin\alpha_1 - a_2 \sin\alpha_2)\cdot x + a_1 a_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) - l_2 a_1 \sin\alpha_1 + l_1 a_2 \sin\alpha_2}{a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 - (l_2 - l_1)} \tag{10}$$

и направление отрезка CD есть

$$\varphi_3(a_1, a_2) = \operatorname{arctg}\frac{a_1 \sin\alpha_1 - a_2 \sin\alpha_2}{a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 - (l_2 - l_1)}. \tag{11}$$

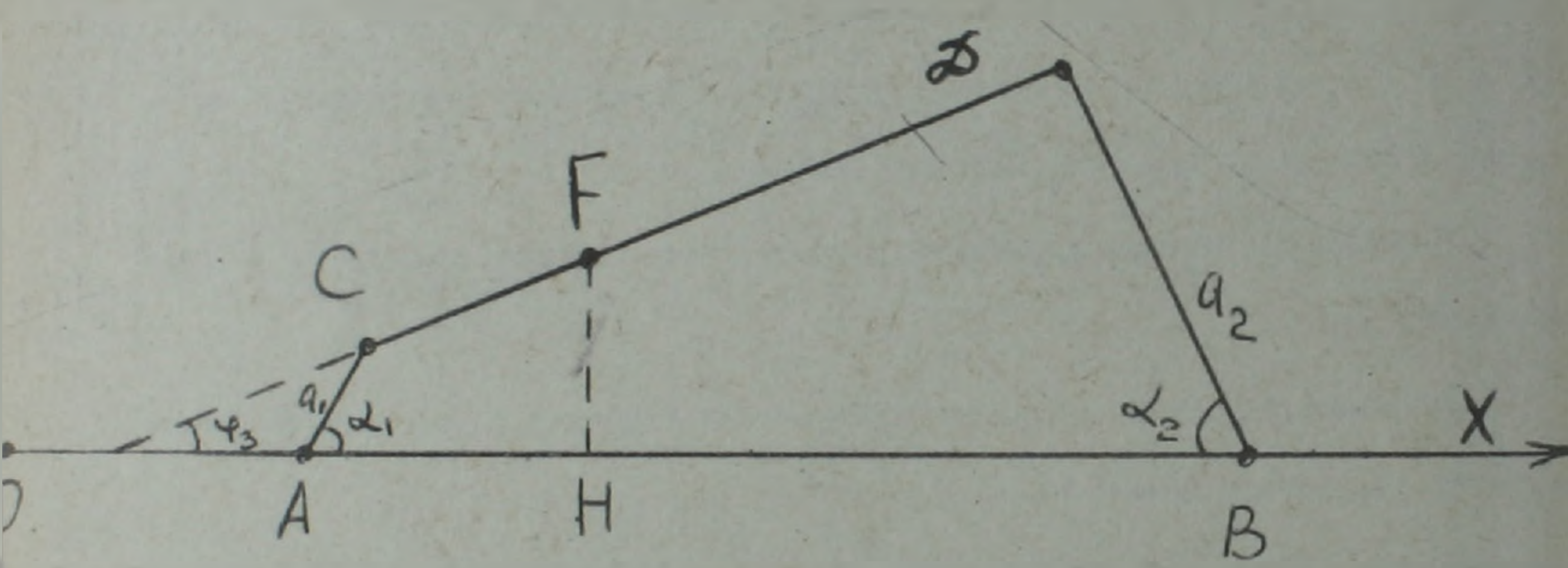

Рис. 2 $OH = x, OA = l_1, OB = l_2, FH = y(x, a_1, a_2), AC = a_1, BD = a_2.$

Очевидно, что

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y(x, a_1, a_2)}{\partial x}\right)^2}\, dx = I(a_1, a_2)\, dx. \tag{12}$$

Мы будем использовать следующее приближённое выражение для $I(a_1, a_2)$, которое следует из (12) с помошью формулы Тейлора :

$$I(a_1, a_2) = 1 + \frac{1}{2(l_2 - l_1)^2}\left(a_1^2 \sin^2\alpha_1 + a_2^2 \sin^2\alpha_2 - 2a_1 \cdot a_2 \cdot \sin\alpha_1 \sin\alpha_2\right). \tag{13}$$

Мы имеем

$$\int_{CD} f(F, \varphi_3(a_1, a_2))\, dl = \int_{l_1}^{l_2} f(x, y(x, a_1, a_2), \varphi_3(a_1, a_2)) \cdot I(a_1, a_2)\, dx - \\ - \int_{l_1}^{l_1 + a_1\cos\alpha_1} f \cdot \varphi(a_1, a_2)\, dx - \int_{l_2 - a_2\cos\alpha_2}^{l_2} f \cdot \varphi(a_1, a_2)\, dx \tag{14}$$

Запишем разложение Тейлора для $f(F,\varphi_3)$ как функции от a_1, a_2 в точке $a_1 = a_2 = 0$. Заметим, что предельное положение флага (F,φ_3) есть флаг $(H,0) = (x,0,0)$:

$$
\begin{aligned}
f(x(l), y(x,a_1,a_2,\varphi_3(a_1,a_2))) &= f(x,0,0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial a_1} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \phi_3}{\partial a_1}\right] a_1 + \\
&+ \left[\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial a_2} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi_3}{\partial a_2}\right] a_2 + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial a_1^2} + \right.\\
&+ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial a_1}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial \varphi_3}{\partial a_1} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial a_1^2}\right]\frac{a_1^2}{2} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial a_2}\right)^2 + \right.\\
&+ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial a_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial a_2}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial \varphi_3}{\partial a_2} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial a_2^2}\right]\frac{a_2^2}{2} + \\
&+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial a_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial a_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \varphi}\left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\cdot\frac{\partial \varphi_3}{\partial a_2} + \frac{\partial y}{\partial a_2}\cdot\frac{\partial \varphi_3}{\partial a_1}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_2} + \right.\\
&+ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\cdot\frac{\partial \varphi_3}{\partial a_1}\cdot\frac{\partial \varphi_3}{\partial a_2} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial a_1 \partial a_2}\right] a_1\cdot a_2.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Значения производных функций $y(x,a_1,a_2)$ и $\varphi_3(a_1,a_2)$ в точке $a_1 = a_2 = 0$ можно найти из (10) и (11).

Мы должны подставить окончательное выражение, а также (13) в интегралы в правой части (14). Заметим, что в случаях двух последних интегралов (где интеграл берётся по бесконечно малым интервалам) достаточно подставить только первые три слагаемых из (15). После некоторых преобразований, которые очень громоздки для того, чтобы воспроизвести их здесь, мы получаем нужное нам выражение для интеграла (9).

$$
\begin{aligned}
\int_{CD} f\cdot ds &= A_1 + A_2 - \int_{l_1}^{l_2} f(x,0,0)\,dx + \left[\frac{1}{(l_2-l_1)^2}\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\times\right.\\
&\times\left(-\int_{l_1}^{l_2} f(x,0,0)\,dx - \int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(l_2-x)(l_1-x)\,dx + \right.\\
&+ \left.\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial\varphi}(l_2-x)\,dx - \int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial\varphi}(x-l_1)\,dx\right) - \\
&- \frac{\sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_2}{(l_2-l_1)^2}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial f}{\partial y}(x-l_1)\,dx - \frac{\sin\alpha_2\cdot\cos\alpha_1}{(l_2-l_1)^2}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial f}{\partial y}(l_2-x)\,dx -
\end{aligned}
$$

$$
- \frac{\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2}{(l_2-l_1)^2}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\,dx - \frac{\sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\cdot\sin\alpha_2}{(l_2-l_1)^2}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\,dx -
$$
$$
- \frac{\sin\alpha_2\cdot\cos\alpha_1}{l_2-l_1}\cdot\frac{\partial f(l_1,0,0)}{\partial\varphi} - \frac{\sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_2}{l_2-l_1}\cdot\frac{\partial f(l_2,0,0)}{\partial\varphi}\Bigg]\, a_1\cdot a_2. \tag{16}
$$

Здесь A_i — квадратный многочлен по a_i $(i=1,2)$:

$$
A_i = \int_{l_1}^{l_2} f(x,0,0)\,dx + \Bigg[\Bigg(\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial f(x,0,0)}{\partial y}\cdot(l_s - x)\,dx -
$$
$$
- \int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial f(x,0,0)}{\partial\varphi}\,dx\Bigg)\cdot(-1)^s\cdot\frac{\sin\alpha_i}{l_2-l_1} - f(l_i,0,0)\cos\alpha_i\Bigg]\cdot a_i +
$$
$$
+ \Bigg[(-1)^i\frac{\partial f(l_i,0,0)}{\partial x}\cdot\frac{\cos^2\alpha_i}{2} - \frac{\partial f(l_i,0,0)}{\partial y}\cdot\sin\alpha_i\cdot\cos\alpha_i -
$$
$$
- (-1)^s\cdot\frac{\partial f(l_i,0,0)}{\partial\varphi}\cdot\frac{\sin\alpha_i\cdot\cos\alpha_i}{l_2-l_1} + \int_{l_1}^{l_2} f(x,0,0)\,dx\cdot\frac{\sin\alpha_i}{2(l_2-l_1)^2} +
$$
$$
+ \int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial^2 f(x,0,0)}{\partial y^2}\cdot(l_s-x)^2\,dx\cdot\frac{\sin^2\alpha_i}{2(l_2-l_1)^2} + \tag{17}
$$
$$
+ \int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial f(x,0,0)}{\partial y}\cdot(l_s-x)\,dx\cdot(-1)^s\cdot\frac{\sin\alpha_i\cdot\cos\alpha_i}{(l_2-l_1)^2} -
$$
$$
- \int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial^2 f(x,0,0)}{\partial y\partial\varphi}\cdot(l_s-x)\,dx\cdot\frac{\sin\alpha_i}{(l_2-l_1)^2} + \int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial^2 f(x,0,0)}{\partial\varphi^2}\,dx \times
$$
$$
\times\frac{\sin^2\alpha_i}{2(l_2-l_1)^2} + (-1)^i\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial f(x,0,0)}{\partial\varphi}\,dx\cdot\frac{\sin\alpha_i\cdot\cos\alpha_i}{(l_2-l_1)^2}\Bigg]\cdot a_i^2,
$$

где $\quad s = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad i=2 \\ 2 & \text{если} \quad i=1. \end{cases}$

Интегралы $\int_{AD} f\,dl$ и $\int_{BC} f\,dl$ зависят только от a_2 и a_1 соответственно. Действуя как и выше, получим

$$
\int_{AD} f\,dl = A_2 + o(a_2^2), \tag{18}
$$

$$
\int_{BC} f\,dl = A_1 + o(a_1^2). \tag{19}
$$

Подставляя (16), (18), (19) в правую часть (8), мы получим следующее выражение для предела Крофтона $\gamma_f(g_0)$:

$$
\begin{aligned}
\gamma_f(g_0) = \Bigg[& \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f(l_1,0,0)}{\partial\varphi} - \frac{1}{2(l_2-l_1)}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\,dx + \\
& + \frac{1}{2(l_2-l_1)}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial f}{\partial y}(l_2-x)\,dx\Bigg]\operatorname{ctg}\alpha_1 + \\
& + \Bigg[-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f(l_2,0,0)}{\partial\varphi} + \frac{1}{2(l_2-l_1)}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\,dx - \\
& - \frac{1}{2(l_2-l_1)}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial f}{\partial y}(l_1-x)\,dx\Bigg]\operatorname{ctg}\alpha_2 + \\
& \frac{1}{2(l_2-l_1)}\Bigg[\int_{l_1}^{l_2} f(x,0,0)\,dx + \int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\,dx - \int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial\varphi}(l_2-x)\,dx + \\
& + \int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial\varphi}(x-l_1)\,dx + \int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(l_2-x)(l_1-x)\,dx\Bigg].
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Заметим, что полученный результат имеет вид комбинации $\operatorname{ctg}\alpha_i$:

$$\gamma_f(g_0) = B_1\operatorname{ctg}\alpha_1 + B_2\operatorname{ctg}\alpha_2 + C$$

Если предел $\gamma_f(g_0)$ определяет плотность меры в $\mathbf{G}$, то правая часть (20) не должен зависеть от углов α_1 и α_2. Следовательно, в этом случае коэффициенты B_1 и B_2 необходимо равны нулю :

$$\frac{\partial f(l_1,0,0)}{\partial\varphi} - \frac{1}{l_2-l_1}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial f(x,0,0)}{\partial\varphi}\,dx + \frac{1}{l_2-l_1}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial f(x,0,0)}{\partial y}(l_2-x)\,dx = 0 \tag{21}$$

и

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\partial f(l_2,0,0)}{\partial\varphi} + \frac{1}{l_2-l_1}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial f(x,0,0)}{\partial\varphi}\,dx - \\
& - \frac{1}{l_2-l_1}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial f(x,0,0)}{\partial y}(l_1-x)\,dx = 0.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Так как выбор прямой g_0 и $l_1 \in g_0$ были произвольными, то (21) можно переписать как результат относящийся к значению f на семействе флагов $L = \{(\mathcal{P},\varphi) :\ \mathcal{P}$ меняется на направленном прямолинейном отрезке исходящем из $\mathcal{P}_1$, длина которого есть $|L|$ и направление — $\varphi\}$.

А именно, (21) можно записать как

$$\frac{\partial f(\mathcal{P}_1,\varphi)}{\partial\varphi} - \frac{1}{|L|}\int_L\frac{\partial f(x(l),y(l),\varphi)}{\partial\varphi}\,dl + \frac{1}{|L|}\int_L\frac{\partial f(x(l),y(l),\varphi)}{\partial n^+}(|L|-l)\,dl = 0, \tag{23}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n^+}$ обозначает дифференцирование в направлении "положительной" нормали к L, направление которого соответствует координатной системе на Рис. 1.

Очевидно, что (22) есть частный случай (23). Если имеют место и (21), и (22), то $\gamma(g_0)$ равен C.

Мы доказали следующую лемму :

Лемма 1. *Если неотрицательная функция флага f порождает меру в пространстве $\mathbf{G}$ в смысле описанном в §1, то она необходимо удовлетворяет (23).*

Используя (20), (23), мы получим окончательное выражение для $\gamma_f(g_0)$:

$$\gamma_f(g_0) = \frac{1}{2(l_2 - l_1)}\left[\int_{l_1}^{l_2} f(x,0,0)\,dx + \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\,dx - \right.$$
$$\left. - \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial\varphi}\,((l_1 - x) + (l_2 - x))\,dx + \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(l_2 - x)(l_1 - x)\,dx\right]. \tag{24}$$

И вновь, (24) можно записать для произвольной прямой g, направление которой есть φ. Следовательно, плотность меры прямых соответствующая заданной функции f может быть найдена по формуле :

$$\gamma_f(g_0) = \frac{1}{2|L|}\left[\int_L f(x(l), y(l), \varphi)\,dl + \int_L \frac{\partial^2 f(x(l), y(l), \varphi)}{\partial\varphi^2}\,dl - \right.$$
$$\left. - \int_L \frac{\partial^2 f(x(l), y(l), \varphi)}{\partial\varphi\,\partial n^+}\,(|L| - 2l)\,dl - \int_L \frac{\partial^2 f(x(l), y(l), \varphi)}{\partial(n^+)^2}\,(|L| - l)\,l\,dl\right]. \tag{25}$$

Таким образом, (23) является ответом на вопрос 2 параграфа 2. Очевидно, из (23) также следует ограниченность крофтоновского отношения. Мы используем этот факт ниже в §5.

§4. ПРОВЕРКА

Пусть $\gamma(\varphi, p) = \gamma(g)$ — плотность меры $m(\cdot)$ в $\mathbf{G}$, абсолютно непрерывная относительно dg. (φ, p) — полярные координаты основания перпендикуляра опущенного из начала координат O на прямую g.

В этом случае соответствующая флаговая функция f может быть представлена в виде :

$$f(x, y, \varphi) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \gamma(\varphi + \psi, p(x, y, \varphi + \psi)) \cdot |\sin\psi|\,d\psi. \tag{26}$$

Проверим, что условие (23) удовлетворяется для функции f заданной по (26).

Так как $p(x, y, \varphi + \psi) = t \cdot \sin\left(\varphi + \psi, \arcsin \frac{y}{t}\right)$, где $t = \sqrt{x^2 + y^2}$, то заменой переменной в (26), получаем

$$f(x, y, \varphi) = \frac{1}{2} \int_{\varphi}^{2\pi + \varphi} \gamma(\nu, p(x, y, \nu)) \cdot |\sin(\nu - \varphi)|\, d\nu.$$

Найдём производные $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ и $\frac{\partial f}{\partial n^+}$. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y, \varphi)}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\pi + \varphi} \gamma(\nu, p(x, y, \nu)) \cdot \cos(\nu - \varphi)\, d\nu + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\pi + \varphi}^{2\pi + \varphi} \gamma(\nu, p(x, y, \nu)) \cdot \cos(\nu - \varphi)\, d\nu.\end{aligned} \tag{27}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \gamma(\varphi + \psi, p(x, y, \varphi + \psi)) \cdot \cos\psi \operatorname{sign}[\sin\psi]\, d\psi. \tag{28}$$

где

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad x > 0 \\ 0 & \text{если} \quad x = 0 \\ -1 & \text{если} \quad x < 0 \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|L|} \int_L \frac{\partial f}{\partial \varphi}\, dl = \\ &= -\int_0^{2\pi} \cos\psi \cdot \operatorname{sign}[\sin\psi]\, d\psi \left(\frac{1}{2|L|} \int_L \gamma(\varphi + \psi, p(x(l), y(l), \varphi + \psi)\, dl \right)\end{aligned} \tag{29}$$

Перейдём к $\frac{\partial f}{\partial n^+}$.

$$\frac{\partial f}{\partial n^+} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \gamma}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial n^+} \cdot |\sin\psi|\, d\psi. \tag{30}$$

Так как $\frac{\partial l}{\partial n^+} = -\operatorname{ctg}\psi$ (см. Рис. 3), мы получим

$$\frac{\partial f}{\partial n^+} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\psi \cdot |\sin\psi| \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial l}\, d\psi. \tag{31}$$

Заметим, что $\operatorname{ctg}\psi \cdot |\sin\psi| = \cos\psi \cdot \operatorname{sign}[\sin\psi]$.

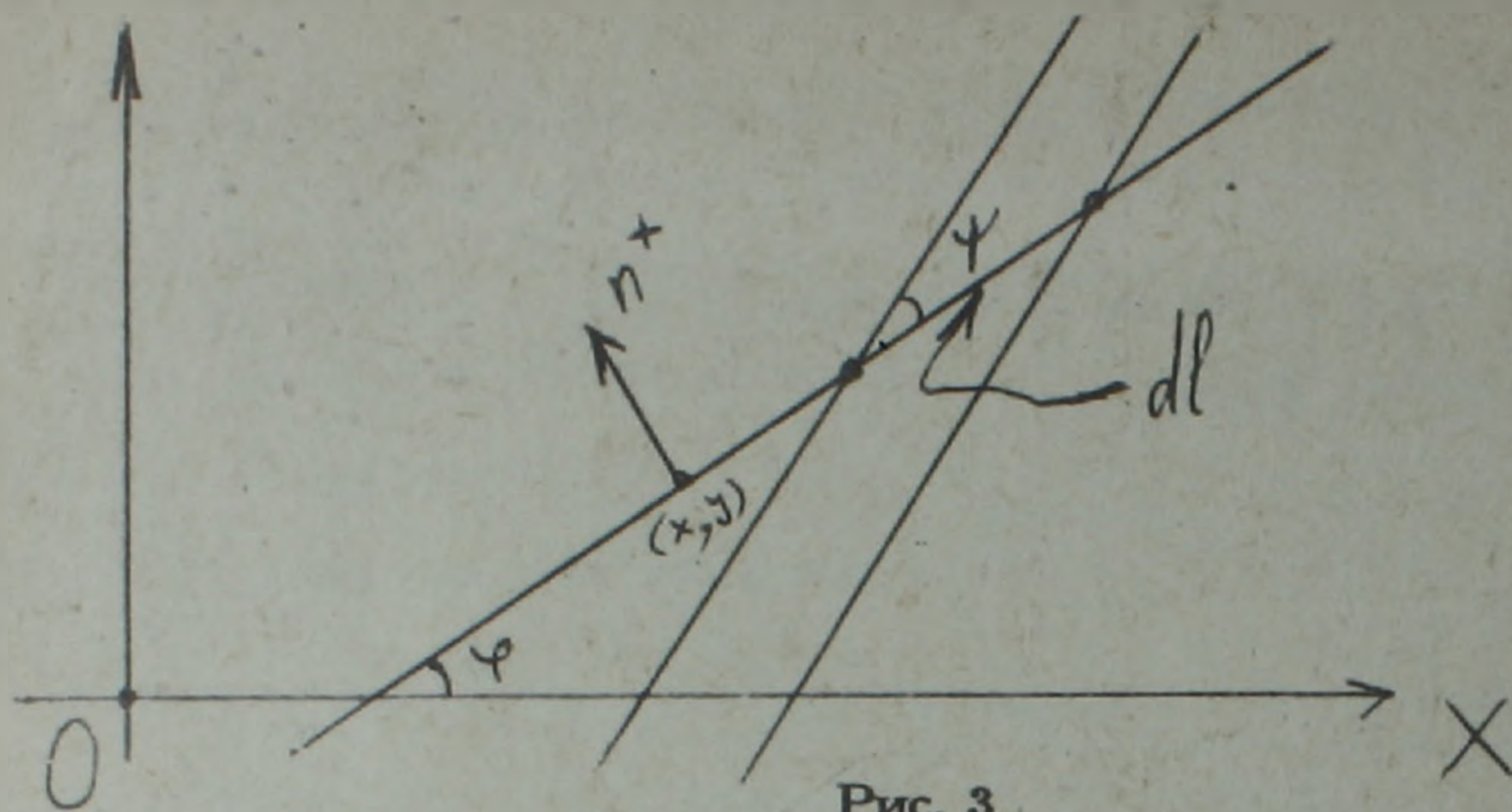

Рис. 3

Поэтому

$$\frac{1}{|L|}\int_L \frac{\partial f}{\partial n^+}(|L|-l)\,dl =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos\psi\cdot\operatorname{sign}[\sin\psi]\,d\psi\cdot\left[\frac{1}{|L|}\int_0^{|L|}\frac{\partial\gamma}{\partial l}\cdot(|L|-l)\,dl\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos\psi\cdot\operatorname{sign}[\sin\psi]\cdot\gamma\,d\psi - \tag{32}$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos\psi\cdot\operatorname{sign}[\sin\psi]\cdot\left[\frac{1}{|L|}\int_L\gamma\,dl\right]\,d\psi,$$

здесь мы использовали $\frac{1}{|L|}\int_0^{|L|}\frac{\partial\gamma}{\partial l}\cdot(|L|-l)\,dl = -\gamma + \frac{1}{|L|}\int_L\gamma\,dl$.

Подставляя (27), (29) и (32) в (23) получим тождество. Таким образом, для f типа (26) условие (23) удовлетворяется.

Проверим, также, что результатом применения (25) есть плотность $\gamma(\varphi,p)$. Имеем

$$\frac{1}{2|L|}\int_L f(x(l),y(l),\varphi)\,dl = \int_0^{2\pi}|\sin\psi|\cdot\left[\frac{1}{4|L|}\int_L\gamma\cdot dl\right]\,d\psi. \tag{33}$$

Дифференцируя (27) по φ получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} = \gamma(\varphi,p(x,y,\varphi)) + \gamma(\pi+\varphi,p(x,y,\pi+\varphi)) - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\gamma\cdot|\sin\psi|\,d\psi.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2|L|}\int_L\frac{\partial^2 f(x(l),y(l),\varphi)}{\partial\varphi^2}\,dl =$$
$$= \frac{1}{2}[\gamma(\varphi,p(x,y,\varphi)) + \gamma(\pi+\varphi,p(x,y,\pi+\varphi))] - \tag{34}$$
$$-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}|\sin\psi|\cdot\left[\frac{1}{|L|}\int_L\gamma\,dl\right]\,d\psi,$$

Используя (31), мы находим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial(n^+)^2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}^2\psi \cdot |\sin\psi| \cdot \frac{\partial^2\gamma}{\partial l^2}\, d\psi. \tag{35}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2|L|}\int_L \frac{\partial^2 f}{\partial(n^+)^2}(|L|-l)\, l\, dl = \\ &= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}^2\psi \cdot |\sin\psi| \left[\gamma(\varphi, p(x,y,\varphi)) + \gamma(\pi+\varphi, p(x,y,\pi+\varphi))\right] d\psi + \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}^2\psi \cdot |\sin\psi| \left[\frac{1}{|L|}\int_L \gamma\, dl\right] d\psi. \end{aligned} \tag{36}$$

Используя (28), получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial n^+} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\partial\gamma}{\partial l} \operatorname{ctg}\psi \cdot \cos\psi \cdot \operatorname{sign}[\sin\psi]\, d\psi.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2|L|}\int_L \frac{\partial^2 f(x(l), y(l), \varphi)}{\partial\varphi\,\partial n^+}(|L|-2l)\, dl = \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\psi \cdot \cos\psi \cdot \operatorname{sign}[\sin\psi] \left\{[\gamma(\varphi, p(x,y,\varphi)) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma(\pi+\varphi, p(x,y,\pi+\varphi))] - \frac{2}{|L|}\int_L \gamma\, dl\right\} d\psi. \end{aligned} \tag{37}$$

Используя (33), (34), (36) и (37), получаем

$$\gamma_f(g) = \gamma(\varphi, p)$$

(здесь мы использовали тождество $\operatorname{ctg}^2\psi \cdot |\sin\psi| = \operatorname{ctg}\psi\cos\psi \cdot \operatorname{sign}[\sin\psi]$).

Мы проверили необходимость условия (23). Заметим, что (25) можно рассматривать как решение интегрального уравнения (26).

§5. ОБОБЩЕНИЕ НА ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ МЕРЫ

Все меры и плотности, рассмотренные нами в предыдущих параграфах были неотрицательны. Однако часть полученных выше результатов остаются в силе если заменить меры и плотности в формулировках результатов на знакопеременные меры и плотности.

Заметим также что проверка в §4 остаётся в силе, еслии опустить условие неотрицательности функции f. Однако в контексте с знакопеременными плотностями утверждения касающиеся финслеровых метрик не имеют место. Однако, эта потеря конпенсируется замечанием, что (23) в случае знакопеременных мер становится и достаточным условием. Для доказательства этого утверждения используется результат Р. В. Амбарцумяна опубликованный в этом же номере журнала (Предложение 2).

Теорема. *Пусть f достаточно гладкая флаговая функция. Тогда условие (23) необходимо и достаточно для существования локально-конечной знакопеременной меры в пространстве прямых* $\mathbf{G}$, *которая имеет плотность* $\gamma(g)$, *удовлетворяющую (26).*

Доказательство. Рассмотрим предел Крофтона (8) для следующего интеграла

$$\int_{\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2} f(F,\varphi)\,dl$$

(предел (8) существует, так как неотрицательность f, которая предполагалась в §3 несущественна).

Если уравнение (23) удовлетворено, то крофтоновское отношение остаётся ограниченным (коэффициенты B_1 и B_2 перед $\operatorname{ctg}\alpha_1$ и $\operatorname{ctg}\alpha_2$ равны нулю) и следовательно, упомянутая теорема (см. [3]) имеет место. Мы доказали существование знакопеременной меры $m(\cdot)$ в $\mathbf{G}$, для которой

$$m([\nu]) = \int_\nu f\,dl$$

и (25) даёт значение её плотности. Отсюда следует представление (26).

Замечание 1. Неотрицательность правой части (25) эквивалентна условию выпуклости функции f т. е.

$$f(x,y,\varphi) + \frac{\partial^2 f(x,y,\varphi)}{\partial\varphi^2} \geq 0.$$

Замечание 2. Условие (23) эквивалентно следующему условию

$$-\frac{\partial f}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial\varphi}\cos\varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial\varphi}\sin\varphi = 0. \tag{38}$$

Доказательство. Умножая (23) на $|L|$, дифференцируя дважды по $|L|$ и используя

$$\frac{\partial f}{\partial n^+} = -\frac{\partial f}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\varphi$$

получаем (38).

Замечание 3. Хорошо известен следующий факт касающийся плоских финслеровых метрик (см. [5]) : для того чтобы геодезические определяемые некоторой метрикой были бы прямыми, необходимо, чтобы соответствующая финслерова плотность удовлетворяла бы уравнениям Эйлера. Наше условие (3) является линейной комбинацией уравнений Эйлера.

ABSTRACT. A Finsler metric ρ is described by its density (Finsler density), which is a function $f(x,y,\varphi)$ depending on $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, and $\varphi \in S_1$ (S_1 is the circle of planar directions). It is proved that if a nonnegative locally convex function f defined on $\mathbb{R}^2 \times S_1$ satisfies the differential equation : $-\frac{\partial f}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \varphi}\cos\varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \varphi}\sin\varphi = 0$ then f is a Finsler density and the corresponding metric ρ determines a measure $m(\cdot)$ in the space **G** of lines in the plane. If the condition of local convexity and nonnegativity of f is removed then this differential equation presents a necessary and sufficient condition for the existence of a signed measure $m(\cdot)$ in **G**. If f is sufficiently smooth, then $m(\cdot)$ necessarily has a density, for which an explicit expression in terms of f is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry, John Wiley and Sons, 1982.
2. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, 1990.
3. Р. В. Амбарцумян, "Замечания о порождении мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$," Изв. АН Армении, серия Математика, [английский перевод : Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)], том 27, № 5, стр. 1 – 21, 1992.
4. Х. Рунд, Дифференциальная Геометрия Финслеровых Пространств, Наука, 1981.
5. А. В. Погорелов, Четвёртая проблема Гильберта, Наука, 1974.

17 Ноября 1992

Ереванский государственный университет

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 27 НОМЕР 5 1992

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы

CONTENTS

VOLUME 27 NUMBER 5 1992

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)

PAGES