ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966г.
Выходит 6 раз в году
на русском и английском языках

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրատար Հայաստանի գիտությունների ազգային ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամ րում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը ինչը ոչ ավելի, քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը ավելի, քան 5 - 6 մեքենագրված էջ: Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդ ների ընդունվում են հրատարակման բացառիկ դեպքերում խմբագրական կոլեգիայի հա որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (րեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուս լեզուներով: Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները իրենց ցանկությամբ կարող են հրատա վել համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում: նական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները՝ շրջանցվեն սև մատիտով, կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով:

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց հա րը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում:

5. Գրականությունը տեղադրվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է ղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, վածների համար նշվում է հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և րը: Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապա խան տեղում:

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխ յունները (բնագրի համեմատությամբ) չեն թույլատրվում:

7. Հոդվածի վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հո ծի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը, և բագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված յալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը:

Խմբագրության հասցեն *Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ,*
Գիտությունների ազգային ակադեմիայի Տեղեկա
սերիա «Մաթեմատիկա»:

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА В КАТЕГОРНОЙ ТЕОРИИ ГАЛУА

С.Г.Далалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 27, № 4, 1992

Развивается "теория Галуа" для общих (абстрактных) категорий. В частности, на абстрактные категории переносится основная теорема классической теории Галуа.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Полное и окончательное решение вопроса разрешимости полиномиального уравнения от одного неизвестного в радикалах, финально оформившееся в классическую теорию Галуа, базируется на трёх фундаментальных достижениях. Первым из них является введение понятия поля и переход от рассмотрения неприводимого многочлена к ассоциированному расширению поля коэффициентов этого многочлена. Во – вторых, это – введение понятия группы, рассмотрение группы автоморфизмов расширения полей и построение соответствия Галуа между промежуточными полями и подгруппами этой группы. Наконец, третий этап – перевод на язык полей и групп проблемы разрешимости полиномиального уравнения в радикалах и решение возникающей теоретико - групповой задачи. Сердцевиной и главным звеном этой программы является второй пункт, в рамках которого доказывается

Основная теорема классической теории Галуа.

Пусть поле K является расширением Галуа конечной степени поля k, G – группа Галуа этого расширения.

а) Соответствие Галуа устанавливает биекцию между промежуточными полями E рассматриваемого расширения и подгруппами H группы G.

б) Поле K является расширением Галуа поля E.

в) Поле E является расширением Галуа поля k в том и только в том случае, если подгруппа H нормальна в G; группа Галуа этого расширения изоморфна факторгруппе G/H.

Главным первоисточником этих результатов является [1], современные изложения –[2], [3]. Здесь нас будут интересовать, главным образом, те результаты, которые связаны с обобщениями основной теоремы или доказательством её аналогов.

Прежде всего, основная теорема теории Галуа была перенесена на случай расширения полей бесконечной степени ([4]). Оказалось, что утверждения п.п. б) и в) справедливы и для бесконечных расширений Галуа. Однако в этом случае нарушается свойство п. а) : разным подгруппам группы G может соответствовать одно и то же промежуточное поле E. Для восстановления биективности надо рассматривать только "замкнутые" подгруппы группы G, каковыми являются наибольшие подгруппы, соответствующие промежуточным расширениям ([5]). Здесь замкнутость можно понимать как в смысле соответствия Галуа, так и, эквивалентно, относительно топологии на группе Галуа, имеющей в качестве базы окрестностей единицы все подгруппы группы G, являющиеся группами Галуа промежуточных расширений Галуа конечной степени над k.

Последний результат допускает максимальное в теории полей обобщение : при произвольном расширении K поля k с группой k-автоморфизмов G соответствием Галуа устанавливается биекция между множеством всех промежуточных полей E, над которыми K является расширением Галуа, и множеством всех компактных подгрупп группы G ([6]-[9]).

В [10] теория Галуа переносится на тела, точнее доказывается утверждение п. а) основной теоремы в случае подтела k инвариантных элементов тела K относительно конечной группы внешних автоморфизмов G, действующих на тело K. Этот результат дополняется утверждением о равенстве степени верхнего подрасширения, определенного промежуточным телом E, порядку соответствующей подгруппы H, а степени нижнего подрасширения – индексу H в G.

Основную теорему удается перенести и на некоммутативные кольца линейных преобразований векторного пространства над телом ([11]). При этом она претерпевает изменения, уже встречавшиеся в случае произвольного расширения полей и вызванные тем феноменом, что как "замкнутые" подкольца, так и "замкнутые" подгруппы не совпадают с множествами, соответственно, всех промежуточных подколец и всех подгрупп уже в случае конечной группы Галуа. Основные технические трудности связаны именно с описанием "замкнутых" подколец и "замкнутых" подгрупп ([11]-[14]). Как частный результат развитой теории получается полный аналог классической основной теоремы для случая подтела k данного тела K, образованного элементами, инвариантными относительно конечной группы его произвольных (а не только внешних) автоморфизмов. Однако "замкнутыми" оказываются все подтела, но не все подгруппы. Этот результат удается распространить на случай бесконечной группы Галуа, только когда она состоит из внешних автоморфизмов ([11]).

Известны обобщения п. а) основной теоремы на случай, когда K – коммутативное кольцо без нетривиальных идемпотентов, являющееся конечно порожденным проективным модулем над подкольцом k элементов, инвариантных относительно группы Галуа G ([15]-[19]).

Весьма плодотворным оказалось приложение идей классической теории Галуа к обыкновенным дифференциальным уравнениям ([20]-[25]), обзорно [26]. Параллельная теория была развита для дифференциальных полей с аналогичной основной теоремой, подвергшейся двум модификациям.

Во-первых, место расширений Галуа обычных полей занимают расширения Пикара–Вессио (или, более общо, сильно нормальные расширения [15]) дифференциальных полей. В частности, это относится к исходному расширению K над k, причем предполагается , что k имеет алгебраически замкнутое поле констант характеристики нуль. Во-вторых, биекция множества промежуточных дифференциальных полей устанавливается , как и в случае расширения Галуа бесконечной степени для обычных полей, не со всеми подгруппами "дифференциальной" группы Галуа, а только с её "алгебраическими" (замкнутыми в смысле соответствия Галуа) подгруппами. Группа Галуа расширения Пикара–Вессио является алгебраической матричной группой. Венцом теории является результат о том, что разрешимости компоненты единицы дифференциальной группы Галуа соответствует разрешимость дифференциального уравнения в квадратурах ([26]).

В самое последнее время была развита теория Галуа для пучков множеств, доказан аналог основной теоремы (точнее п. а) этой теоремы) и полученные результаты были применены к предсхемам ([27]). Несколько особняком от общей канвы развития стоит, так называемая, треугольная теория Галуа ([28]).[1]

Понятия и результаты, двойственные к тем, что составляют классическую теорию Галуа, а также её вышеприведенные модификации, возникают в тесно связанных друг с другом теориях римановых поверхностей, алгебраических функций и алгебраических кривых, и в общем виде в алгебраической геометрии (в частности, в связи с вопросами униформизации алгебраических многообразий (см.[8]).
Так в [29], определяется группа монодромии римановой поверхности (более точно, конечнолистного накрытия комплексной сферы, которое ассоциировано с римановой поверхностью по построению), являющаяся не чем иным, как группой Галуа соответствующего конечного расщирения полей рациональных функций.

В [30] вводится понятие группы накрывающих преобразований накрытия $p\colon Y \mapsto X$ топологических пространств и доказывается , что в случае,

[1] Рецензент привлёк внимание автора к статьям ([41]–[45]), которые содержат приложение идей классической теории Галуа к банаховым алгебрам. Согласно ([46]) имеется также небольшое число работ, посвященных теории Галуа общих алгебраических систем ([47], [48]).

когда X-риманова поверхность, а накрытие p индуцировано расширением L, получающимся присоединением к полю K мероморфных функций на X алгебраической функции, являющейся корнем целого многочлена с коэффициентами из K, группа накрывающих преобразований изоморфна группе автоморфизмов поля L над K. При этом накрытие Галуа можно определить либо требованием, чтобы соответствующее расширение полей мероморфных функций было расширением Галуа, либо эквивалентным условием транзитивности действия группы накрывающих преобразований на любом слое накрытия. Отметим, что, в частности, универсальное накрытие любого связного многообразия X есть накрытие Галуа и его группа Галуа изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(X)$ ([30]). Именно такой подход, основанный на использовании групп Галуа, позволяет ввести понятие фундаментальной группы для произвольных схем ([31] и обзорно [32]).

Отображение

$$\text{кривая} \longmapsto \text{поле рациональных функций на ней} \qquad (*)$$

устанавливает двойственность между категориями полных неособых алгебраических кривых над фиксированным полем k и конечных расширений трансцендентного расширения $k(t)$ поля k. К сожалению, для многообразий высших размерностей такой двойственности не существует : гладкая полная модель соответствует полю степени трансцендентности ≥ 2 неоднозначно даже с точностью до бирегулярного изоморфизма ([33]). Тем не менее, нормальное накрытие алгебраического многообразия X имеет бирациональный характер, т.е. зависит только от (конечного сепарабельного) расширения L поля K рациональных функций многообразия X, верное для алгебраических многообразий произвольной размерности, позволяет перенести всю терминологию для расширений полей на конечные накрытия нормальных алгебраических многообразий вместе с некоторыми двойственными результатами ([34]).

В [15] "в наиболее общем смысле" теория Галуа трактуется как "теория, изучающая те или иные математические объекты на основе их группы автоморфизмов". Значит естественно было ожидать развитие теории Галуа в рамках теории категорий. Однако автору такие попытки не известны. Первым шагом в этом направлении представляется настоящая работа. Под разрабатываемой "категорной теорией Галуа" подразумевается теория, которая ставит своей целью изучение зависимости между группой автоморфизмов (и более обшо – полугруппой эндоморфизмов) объекта и его подобъектами (двойственно, факторобъектами) в абстрактной и по возможности максимально общей категории. При этом оказывается , что часто удобнее вместо подобъектов и факторобъектов данного объекта рассматривать морфизмы в него и из него или даже их семейства.

С одной стороны, категорная теория Галуа может быть рассмотрена как одна из параллелей классической теории Галуа наряду с её вышеприведенными аналогами и обобшениями. Вместе с тем, она занимает в этой цепи особое место в силу объемлюшего, объединяюшего и унифицируюшего характера теоретико-категорного метода. Его специфика проявляется также в том, что в то время, как результаты категорной теории Галуа навеяны, а иногда просто скалькированы с классической или параллельных теорий Галуа, их доказательства полностью отличаются от известных, опираюшихся на теоретико-множественный подход доказательств. Возможность категорного обобщения теории Галуа показывает её истинное место в математике.

Отметим, что частные теории Галуа служат не только эталоном для подражания для категорной теории, но и возможной областью приложения. Так, интерес автора к разрабатываемой тематике был обусловлен работами ([35], [36]) (в которых факторизацией по подгруппам группы Галуа строятся башни накрытий кривых и исследуются многообразия Прима этих накрытий), стремлением строго обосновать применение теории Галуа.

Статья состоит из трех параграфов. В §1 изучаются группы и полугруппы, стандартно ассоциируемые с произвольным морфизмом. В §2 вводятся понятия стабилизации и, двойственно, факторизации объекта по подмножеству его эндоморфизмов и исследуются их свойства. Здесь доказывается теорема 2, являющаяся обобщением п. (в) основной теоремы классической теории Галуа. В §3 приводится конструкция соответствия Галуа и ассоциированного с ним оператора замыкания, доказываются результаты, обобщающие утверждение п. (а) основной теоремы классической теории Галуа (теорема 3).

Сводка некоторых обозначений и соглашений

Морфизм φ из объекта A в объект B обозначается $A\varphi B$, множество всех морфизмов из объекта A в объект B –$\mathrm{Mor}(A,B)$. Композиция морфизмов $A\varphi B$ и $B\psi C$ записывается слева направо : $\varphi\psi$. Полугруппа эндоморфизмов объекта A обозначается $\mathrm{End}A$, группа автоморфизмов – $\mathrm{Aut}A$, их единичный элемент – 1_A.

Класс всех подклассов класса A (в частности, множество всех подмножеств множества A) обозначается $\mathbf{B}(A)$ и называется булианом A.

Если $A\varphi B$ – отображение множеств или классов, образ $A \subset A$ обозначается $A\varphi$, а прообраз $B \subset B$ – $B\varphi^{-1}$.

Частично упорядоченные множества и классы называются ординалами. Отображение $A\varphi A$ ординала A называется увеличивающим, если $a\varphi \geq a$ для любого $a \in A$. Двойственно определяется уменьшающее отображение.

Морфизмы $A\varphi B$ и $B\psi A$ называются квазиобратными друг к другу, если $\varphi\psi\varphi = \varphi$ и $\psi\varphi\psi = \psi$.

Класс всех морфизмов в объект A обозначается $\check{A}$, класс всех морфизмов из объекта A – $\hat{A}$. С каждым морфизмом $A\varphi B$ ассоциированы отображения $\check{A}\varphi_\bullet\check{B}$: $\kappa\varphi_\bullet = \kappa\cdot\varphi$ и $\hat{B}\varphi^\bullet\hat{A}$: $\lambda\varphi^\bullet = \varphi\cdot\lambda$. Класс всех подобъектов объектов A обозначается $\mathcal{P}(A)$, факторобъектов – $\mathcal{Q}(A)$. Подобъект и факторобъект записываются с помощью любого представляющего их морфизма.

В статье используется теоретико-категорная терминология, принятая в [38]. В частности, это касаеттся терминов конус, коконус, разделяющий конус, коразделяющий (плотный) коконус.

Формулировки двойственных понятий и свойств в тексте приводятся в исключительных случаях. Для названий двойственных понятий используется приставка "ко", ссылка на дуальные к сформулированным утверждения осуществляется с помощью верхнего индекса "звездочка".

Параграфы делятся на пункты, каждый из которых содержит не более одного утверждения, формулируемого как "предложение". При ссылке на него указывается номер соответствующего пункта. Значок $\diamond$ свидетельствует о конце доказательства (или его отсутствии в тривиальном случае). Отметим одно отличие в терминологии по сравнению с [38]. Расслоенные произведения называются коамальгамами, двойственно, корасслоенные произведения - амальгамами.

§1 ПОЛУГРУППЫ И ГРУППЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С МОРФИЗМАМИ

1.1. Для произвольных объектов A и B рассмотрим тернарное отношение, определяемое равенством $\alpha\varphi = \varphi\beta$, где $\alpha \in \mathrm{End}A$, $\beta \in \mathrm{End}B$ и $\varphi \in \mathrm{Mor}(A, B)$. Будем называть α перестановочным слева эндоморфизмом, β перестановочным справа эндоморфизмом, (α, β) парой ассоциированных перестановочных эндоморфизмов относительно морфизма φ. Множество всех пар ассоциированных перестановочных эндоморфизмов определяет соответствие $\mathcal{E}(\varphi)$ на $\mathrm{End}A \times \mathrm{End}B$, а множество всех пар ассоциированных перестановочных эндоморфизмов - соответствие $\mathbf{A}(\varphi)$ на $\mathrm{Aut}A \times \mathrm{Aut}B$.

1.2. Предложение. *(а) Соответствие $\mathcal{E}(\varphi)$ - полугрупповое, соответствие $\mathbf{A}(\varphi)$ - групповое.*

(б) Соответствия $\mathcal{E}(\varphi)$ и $\mathbf{A}(\varphi)$ транзитивны в следующем смысле :

$$\mathcal{E}(\varphi) \cdot {}^{t}\mathcal{E}(\varphi) \cdot \mathcal{E}(\varphi) \subset \mathcal{E}(\varphi),\ {}^{t}\mathcal{E}(\varphi) \cdot \mathcal{E}(\varphi) \cdot {}^{t}\mathcal{E}(\varphi) \subset {}^{t}\mathcal{E}(\varphi),$$

$$\mathbf{A}(\varphi) \cdot {}^{t}\mathbf{A}(\varphi) \cdot \mathbf{A}(\varphi) \subset \mathbf{A}(\varphi),\ {}^{t}\mathbf{A}(\varphi) \cdot \mathbf{A}(\varphi) \cdot {}^{t}\mathbf{A}(\varphi) \subset {}^{t}\mathbf{A}(\varphi),$$

где значок t показывает транспонированное соответствие. $\diamond$

1.3. Стандартным образом определяются правые и левые образы подмножеств относительно соответствий $\mathcal{E}(\varphi)$ и $\mathrm{A}(\varphi)$. Правый образ $\mathcal{A}\varphi_e$ подмножества $\mathcal{A} \subset \mathrm{End}A$ относительно соответствия $\mathcal{E}(\varphi)$ срстоит из всех $\beta \in \mathrm{End}B$, для которых существуют $\alpha \in \mathcal{A}$ такие, что $(\alpha, \beta) \in \mathcal{E}(\varphi)$. Таким образом получаем отображения

$$\mathrm{B}(\mathrm{End}A)\varphi_e\mathrm{B}(\mathrm{End}B), \qquad \mathrm{B}(\mathrm{End}B)\varphi^e\mathrm{B}(\mathrm{End}A)\cdot$$

$$\mathrm{B}(\mathrm{Aut}A)\varphi_a\mathrm{B}(\mathrm{Aut}B), \qquad \mathrm{B}(\mathrm{Aut}B)\varphi^a\mathrm{B}(\mathrm{Aut}A).$$

1.4. Предложение. *Отображения φ_e, φ^e и φ_a, φ^a удовлетворяют следующим свойствам.*

(а) Все они изотонны.

(б) Композиции $\varphi_e\varphi^e$, $\varphi^e\varphi_e$ и $\varphi_a\varphi^a$, $\varphi^a\varphi_a$ – увеличивающие отображения.

(в) Отображения φ_e, φ^e и φ_a, φ^a квазиобратны друг к другу.

(г) Отображения φ_e и φ^e переводят подполугруппы с единицей в подполугруппы с единицей, а отображения φ_a и φ^a переводят подгруппы в подгруппы.

Доказательство. Утверждения (а) и (б) справедливы для отображений, ассоциированных с произвольным соответствием, а (г) – для произвольных полугрупповых и групповых соответствий ([37], гл.1,§2). На булианах множеств подразумевается естественный порядок по включению. Что касается утверждения (в), включение $\mathcal{A}\varphi_e\varphi^e\varphi_e \supset \mathcal{A}\varphi_e$ следует из (а), (б), а обратное включение вытекает из свойства транзитивности соответствия $\mathcal{E}(\varphi)$ $\diamond$.

1.5. Применив свойство (г) к тривиальному и тотальному подполугруппам полугруппы $\mathrm{End}A$ и подгруппам группы $\mathrm{Aut}A$, получаем следующие образы :

$\mathcal{S}^{(\varphi)} = (\mathrm{End}A)\varphi_e$ — полугруппа правых перестановочных с φ эндоморфизмов или аллотропная полугруппа морфизма φ ;

$\mathcal{G}^{(\varphi)} = (\mathrm{Aut}A)\varphi_a$ — группа правых перестановочных с φ автоморфизмов или аллотропная группа морфизма φ ;

$S^{\varphi} = \{1_A\}\varphi_e$ — полугруппа правых изотропных для φ эндоморфизмов или изотропная полугруппа морфизма φ;

$G^{\varphi} = \{1_A\}\varphi_a$ — группа правых изотропных для φ автоморфизмов или изотропная группа морфизма φ;

Двойственные коаллотропные и коизотропные полугруппы и группы обозначаются аналогично с помощью нижнего индекса.

1.6. Предложение. *Если φ – мономорфизм, то*

(а) $\mathcal{E}(\varphi)$ – график гомоморфизма полугрупп $S^{(\varphi)}\varphi^e \mathrm{End}A$ с образом $S_{(\varphi)}$;

(б) $\mathrm{A}(\varphi)$ – график гомоморфизма групп $G^{(\varphi)}\varphi^a \mathrm{Aut}A$ с образом $G_{(\varphi)}$ и ядром G^{φ}.

Доказательство. Если $\alpha_1\varphi = \alpha_2\varphi = \varphi\beta$, то $\alpha_1 = \alpha_2$ ввиду мономорфности φ, поэтому φ^e и φ^a – отображения. Гомоморфность этих отображений следует из того, что соответствия $\mathcal{E}(\varphi)$ и $\mathrm{A}(\varphi)$ замкнуты относительно покомпонентного умножения. Утверждения об образах очевидны, а $\ker\varphi^a = G^{\varphi}$, потому что равенство $\varphi\beta = 1\varphi$ по определению изотропной группы означает, что $\beta \in G^{\varphi}$.◇

Следствие. *Если φ – биморфизм, то соответствия $\mathcal{E}(\varphi)$ и $\mathrm{A}(\varphi)$ определяют изоморфизмы полугрупп $S^{(\varphi)}\varphi^e S_{(\varphi)}$ и групп $G^{(\varphi)}\varphi^a G_{(\varphi)}$ обратными к которым будет $S_{(\varphi)}\varphi_e S^{(\varphi)}$ и $G_{(\varphi)}\varphi_a G^{(\varphi)}$ соответственно.*

Следствие немедленно вытекает из доказанного предложения и двойственного к нему утверждения 1.6^{*}.◇

В частности, при изоморфизме $A\varphi B$ имеем изоморфизмы полугрупп эндоморфизмов

$$(\mathrm{End}A)\varphi_e(\mathrm{End}B) \mid \alpha\varphi_e = \varphi^{-1}\alpha\varphi, \qquad (\mathrm{End}B)\varphi^e(\mathrm{End}A) \mid \beta\varphi^e = \varphi\beta\varphi^{-1}$$

и групп автоморфизмов $\mathrm{Aut}A$, $\mathrm{Aut}B$.

1.7. Предложение. *Полугруппа изотропии S^{φ} и группа изотропии G^{φ} инвариантны относительно сопряжений элементами аллотропной группы $G^{(\varphi)}$.*

Доказательство. Для произвольных эндоморфизмов $\beta \in G^{(\varphi)}$ и $b \in S^{\varphi}$

$$\varphi\beta b = \alpha\varphi b = \alpha\varphi = \varphi\beta,$$

откуда следует, что $\beta b\beta^{-1} \in S^{\varphi}$. Поэтому $\beta S^{\varphi}\beta^{-1} \subset S^{\varphi}$. Поменяв β на β^{-1}, получим обратное включение. Если $b \in G^{\varphi}$, то точно так же получается равенство $\beta^{-1}G^{\varphi}\beta = G^{\varphi}$.◇

Следствие. *Нормализаторы полугруппы изотропии S^{φ} и группы изотропии G^{φ} в группе $\mathrm{Aut}B$ содержат аллотропную группу $G^{(\varphi)}$.*◇

Как будет показано в следующем параграфе, для определенного класса морфизмов верно и обратное включение.

В следующих пунктах исследуем поведение полугрупп и групп, ассоциированных с морфизмами $A\varphi B$, $B\psi C$, $A\chi C$ в том случае, когда χ является композицией φ и ψ.

1.8. Предложение. *Если $\chi = \varphi\psi$ и ψ изоморфизм, то*

$$S^{(\chi)} = \psi^{-1}S^{(\varphi)}\psi, \quad S^{\chi} = \psi^{-1}S^{\varphi}\psi, \quad G^{(\chi)} = \psi^{-1}G^{(\varphi)}\psi, \quad G^{\chi} = \psi^{-1}G^{\varphi}\psi.$$

Доказательство. Пусть $\beta \in \mathrm{End}B$ и $\gamma = \beta\psi_e = \psi^{-1}\beta\psi \in \mathrm{End}C$. Тогда, как нетрудно проверить, $\gamma \in G^{(\chi)}$, если и только если $\beta \in G^{(\varphi)}$. Это означает, что $G^{(\chi)} = \psi^{-1}G^{(\varphi)}\psi$. Аналогично доказываются остальные три равенства.

1.9. Предложение. *Если $\chi = \varphi\psi$, то выполняются следующие свойства.*

(а) Соответствия $\mathcal{E}(\chi)$ и $\mathbf{A}(\chi)$ содержат соответственно произведения соответствий $\mathcal{E}(\varphi)\cdot\mathcal{E}(\psi)$ в качестве подполугруппы и $\mathbf{A}(\varphi)\cdot\mathbf{A}(\psi)$ в качестве подгруппы.

(б) Изотропная полугруппа S^{ψ} является подполугруппой изотропной полугруппы S^{χ}, а изотропная группа G^{ψ} – подгруппой изотропной группы G^{χ}.

(в) Правые образы $(S_{(\psi)} \cap S^{(\varphi)})\,\psi_e$ и $(S_{(\psi)} \cap S^{\varphi})\,\psi_e$ являются подполугруппами полугрупп $S^{(\psi)} \cap S^{(\chi)}$ и $S^{(\psi)} \cap S^{\chi}$ соответственно. Аналогично $(G_{(\psi)} \cap G^{(\varphi)})\,\psi_a \le G^{(\psi)} \cap G^{(\chi)}$, $(G_{(\psi)} \cap G^{\varphi})\,\psi_a \le G^{(\psi)} \cap G^{\chi}$.

(г) Правые образы $(S_{(\varphi)}\cap S_{(\chi)})\varphi_e$ *и* $(S_{(\varphi)}\cap S_{\chi})\varphi_e$ *содержат подполугруппы* $S^{(\varphi)}\cap S_{(\psi)}$ *и* $S^{(\varphi)}\cap S_{\psi}$ *соответственно. Аналогично* $(G_{(\varphi)}\cap G_{(\chi)})\varphi_a \geq G^{(\varphi)}\cap G_{(\psi)}$, $(G_{(\varphi)}\cap G_{\chi})\varphi_a \geq G^{(\varphi)}\cap G_{\psi}$.

(д) Если ψ *- мономорфизм, то* $S_{\chi}=S_{\varphi}$, $G_{\chi}=G_{\varphi}$;

$$S_{(\psi)}\cap S^{\varphi}=\left(S^{(\psi)}\cap S^{\chi}\right)\psi^{e},\qquad G_{(\psi)}\cap G^{\varphi}=\left(G^{(\psi)}\cap G^{\chi}\right)\psi^{a},$$

$$\left(S_{(\psi)}\cap S^{\varphi}\right)\psi_e=S^{(\psi)}\cap S^{\chi},\qquad \left(G_{(\psi)}\cap G^{\varphi}\right)\psi_a=G^{(\psi)}\cap G^{\chi}.$$

Прежде, чем перейти к доказательству, сделаем два замечания. Только утверждение п. (а) из вышеприведенных является самодвойственным. При переходе к двойственным утверждениям включения не меняются на противоположные.

Доказательство. Проведем детальное доказательство только для п. (а). Прежде всего, произведение соответствий для φ и ψ лежит в одноименном соответствии для χ, потому что из равенств $\alpha\varphi=\varphi\beta$ и $\beta\psi=\psi\gamma$ следует равенство $\alpha\chi=\chi\gamma$. Проверим замкнутость относительно покомпонентной композиции произведения одноименных соответствий для φ и ψ. Пары (α,γ) и (α',γ') принадлежат произведению соответствий для φ и ψ тогда и только тогда, когда для некоторых β и β' выполняются равенства $\alpha\varphi=\varphi\beta$, $\beta\psi=\psi\gamma$ и $\alpha'\varphi=\varphi\beta'$, $\beta'\psi=\psi\gamma'$. Но тогда $(\alpha\alpha')\varphi=\varphi(\beta\beta')$, $(\beta\beta')\psi=\psi(\gamma\gamma')$, т.е. $(\alpha\alpha',\gamma\gamma')$ также принадлежит произведению рассматриваемых соответствий. Наконец, если $(\alpha,\gamma)\in\mathbf{A}(\varphi)\cdot\mathbf{A}(\psi)$, то $\alpha\varphi=\varphi\beta$ и $\beta\psi=\psi\gamma$ при некотором $\beta\in \mathrm{Aut}B$. Поэтому $\alpha^{-1}\varphi=\varphi\beta^{-1}$, и $\beta^{-1}\psi=\psi\gamma^{-1}$, следовательно, $(\alpha^{-1},\gamma^{-1})\in\mathbf{A}(\varphi)\cdot\mathbf{A}(\psi)$.

(б) Достаточно заметить, что $\psi\gamma=\psi$ влечет $\chi\gamma=\chi$.

(в,г) Если $\alpha\varphi=\varphi\beta$ и $\beta\psi=\psi\gamma$, то $\alpha\chi=\chi\gamma$. Из этого факта следуют первое и третье соотношения п.п. (в,г). Подставив в приведенной имплекации $\alpha=1$, можно вывести доказательства второго и четвертого соотношений п. (в), а подстановкой $\gamma=1$ - доказательство второго и четвертого соотношений п. (г).

(д) Если $\alpha\varphi\psi = \alpha\chi = \chi = \varphi\psi$, то, сокращая на мономорфизм ψ, получаем $\alpha\varphi = \varphi$. Поэтому справедливы включения, обратные к включениям п. (б)*, что доказывает первые два равенства п. (д).

Из равенств $\beta\psi = \psi\gamma$ и $\chi\gamma = \chi$ следует равенство $\varphi\beta\psi = \varphi\psi\gamma = \varphi\psi$ и после сокращения на мономорфизм ψ получаем $\varphi\beta = \varphi$. Поэтому справедливы включения, обратные ко второму и четвертому включениям п. (г), что доказывает вторую пару равенств п. (д). Третья пара равенств получается из второй, если учесть, что при мономорфном ψ ψ^e является гомоморфным отображением, а ψ_e задает его полный прообраз.◇

1.10. **Предложение.** *Если $\chi = \varphi\psi$, то $G^{(\psi)} \cap G^{\chi}$ является подгруппой нормализатора G^{ψ} в G^{χ}.*

Доказательство. Если $\gamma \in G^{(\psi)} \cap G^{\chi}$, то $\gamma \in G^{\chi}$ и $\psi\gamma = \beta\psi$ для некоторого автоморфизма β. Используя свойства 1.9.(д)* и 1.8, получаем $G^{\psi} = G^{\beta\psi} = G^{\psi\gamma} = \gamma^{-1}G^{\psi}\gamma$. Это означает, что γ принадлежит нормализатору G^{ψ} в G^{χ} ◇

Замечание. Единственным препятствием для справедливости аналога доказанного предложения, получаемого заменой $S^{(\psi)}$ на $G^{(\psi)}$ и S^{ψ} на G^{ψ}, является то обстоятельство, что появляющийся в доказательстве эндоморфизм β, вообще говоря, не эпиморфен, поэтому не действует свойство 1.9 (д)*. Чтобы поправить дело, достаточно $S^{(\psi)}$ заменить правым образом $\hat{E}(B)\psi_e$ полугруппы $\hat{E}(B)$ эпиморфных эндоморфизмов объекта B.

1.11. Если $\chi = \varphi\psi$ и φ изоморфизм, то в силу 1.9(д)* имеем равенство изотропных полугрупп $S^{\chi} = S^{\psi}$ и групп $G^{\chi} = G^{\psi}$. Поэтому корректно определяются понятия изотропной полугруппы и группы подобъекта с помощью его произвольного представителя.

Двойственно вводятся понятия коизотропной полугруппы и группы факторобъекта.

Определение. Суммой или композитом семейства подобъектов $K_i \kappa_i A$, $i \in I$ называется их объединение $K\kappa A$ (т.е. точная верхняя грань), обладающая следующим дополнительным свойством : коконус $K_i\sigma_i K$, однозначно определяемый условием $\sigma_i\kappa = \kappa_i$ $i \in \mathcal{I}$, плотный в смысле ([38]), то есть если для морфизмов $K\varphi_1 B$ и $K\varphi_2 B$ все композиции $\kappa_i\varphi_1$ и $\kappa_i\varphi_2$ совпадают, то $\varphi_1 = \varphi_2$.

1.12. **Предложение.** *Пусть $K_i\kappa_i A$, $i \in \mathcal{I}$ – произвольное семейство подобъектов, $K_0\kappa_0 A$ содержит все κ_i. Тогда $S^{\kappa_0} \leq \cap_{i\in\mathcal{I}} S^{\kappa_i}$ а $G^{\kappa_0} \leq \cap_{i\in\mathcal{I}} G^{\kappa_i}$. Если κ_0 - композит подобъектов κ_i, $i \in \mathcal{I}$, то справедливы и обратные включения, т.е.*

$$S^{\kappa_0} = \cap_{i\in\mathcal{I}} S^{\kappa_i}, \quad G^{\kappa_0} = \cap_{i\in\mathcal{I}} G^{\kappa_i}.$$

Доказательство: Поскольку $\kappa_i \leq \kappa_0$, то согласно 1.9 (б) $G^{\kappa_i} \geq G^{\kappa_0}$, $S^{\kappa_i} \geq S^{\kappa_0}$, следовательно $\cap_{i\in\mathcal{I}} G^{\kappa_i} \geq G^{\kappa_0}$, $\cap_{i\in\mathcal{I}} S^{\kappa_i} \geq S^{\kappa_0}$. Чтобы доказать обратное включение, заметим, что для любого α из $\cap_{i\in\mathcal{I}} S^{\kappa_i}$ выполняются равенства $\kappa_i\alpha = \kappa_i 1$ при всех $i \in \mathcal{I}$, поэтому по определению композита $\kappa\alpha = \kappa 1$, т.е. $\alpha \in S^{\kappa}$.

Замечания. (а) Утверждения доказанного предложения справедливы в более общей ситуации. Для любого семейства морфизмов $K_i\kappa_i A$, $i \in \mathcal{I}$, если морфизм $K\kappa A$ делит это семейство морфизмов т.е. $\kappa_i = \sigma_i\kappa$ для подходящих $K_i\sigma_i K$ при всех $i \in \mathcal{I}$, верны включения $\cap_{i\in\mathcal{I}} S^{\kappa_i} \geq S^{\kappa}$, $\cap_{i\in\mathcal{I}} G^{\kappa_i} \geq G^{\kappa}$. Обратные включения справедливы, если коконус $K_i\sigma_i K$, $i \in \mathcal{I}$ коразделяющий (плотный).

(б) Для пересечения $K\kappa A$ семейства объектов $K_i\kappa_i A$, $i \in \mathcal{I}$ можно доказать только, что изотропная полугруппа S^{κ} содержит композит всех изотропных полугрупп S^{κ_i}, $i \in \mathcal{I}$, а изотропная группа G^{κ} – композит всех изотропных групп G^{κ_i}.

Более общо, эти включения справедливы для произвольного морфизма $K\kappa A$, кратного семейству морфизмов $K_i\kappa_i A$, $i \in \mathcal{I}$.

1.13. Обозначим через $\mathcal{P}(\mathrm{End}A)$ – множество всех подполугрупп полугруппы $\mathrm{End}A$, а через $\mathcal{P}(\mathrm{Aut}A)$ множество всех подгрупп группы $\mathrm{Aut}A$. Они являются ординалами относительно операции включения. Класс $\hat{A}$ всех морфизмов в объект A является предординалом с отношением делимости морфизмов (которое, очевидно, рефлексивно, транзитивно, но не антисимметрично), однако класс $\mathcal{P}(A)$ подобъектов объекта A уже является ординалом.

Сопоставление морфизму или подобъекту его изотропных полугруппы и группы определяет отображения

$$\bar{A}e_0\mathcal{P}(\mathrm{End}A),\quad \bar{A}a_0\mathcal{P}(\mathrm{Aut}A),\quad \mathcal{P}(A)e\mathcal{P}(\mathrm{End}A),\quad \mathcal{P}(A)a\mathcal{P}(\mathrm{Aut}A),$$

которые согласно предложению 1.9 (б) антиизотонны.

Если морфизм $K\kappa A$ имеет кообраз $K\kappa_c K_c$, то дополнительный к нему морфизм $K_c\kappa'_c A$ равенством $\kappa_c\kappa'_c = \kappa$ определяется однозначно и согласно предложению 1.9 (д)* имеет те же изотропные полугруппу и группу, что и морфизм κ. Сам кообраз морфизма $K\kappa A$ определяется однозначно как факторобъект объекта K. Если дополнительный к кообразу морфизм κ'_c мономорфен, то он задает подобъект объекта A.

Предположим, что все морфизмы $\kappa \in \bar{A}$ имеют кообраз и дополнительные к кообразам морфизмы мономорфны (это условие, в частности, выполняется , если все $\kappa \in \bar{A}$ разлагаются в композицию кообраза и образа). Тогда сопоставление морфизму κ дополнительного к его кообразу морфизма κ'_c определяет отображение $Ac\mathcal{P}(A)$, которое согласно вышесказанному удовлетворяет равенствам $ce = e_0$, $ca = a_0$.

Распространим понятия изотропных полугруппы и группы на семейства морфизмов и семейства подобъектов $\kappa_{\mathcal{I}} = (K_i\kappa_i A,\ i \in \mathcal{I})$, определив изотропную полугруппу $S^{\kappa_{\mathcal{I}}}$ как множество всех эндоморфизмов, а изотропную группу $G^{\kappa_{\mathcal{I}}}$ как множество всех автоморфизмов α объекта A, удовлетворяющих равенствам $\kappa_i\alpha = \kappa_i$ при всех $i \in \mathcal{I}$. Таким образом, по определению изотропные полугруппа и группа семейства морфизмов или семейства подобъектов $K_i\kappa_i A,\ i \in \mathcal{I}$ совпадает с пересечением, соответственно, изотропных полугрупп и групп всех морфизмов или подобъектов этого семейства.

Соответственно определяются отображения

$$\mathbf{B}(\dot{A})\tilde{e}_0\mathcal{P}(\mathrm{End}A), \quad \mathbf{B}(\dot{A})\tilde{a}_0\mathcal{P}(\mathrm{Aut}A),$$

$$\mathbf{B}\,(\mathcal{P}(A))\,\tilde{e}\mathcal{P}(\mathrm{End}A), \quad \mathbf{B}\,(\mathcal{P}(A))\,\tilde{a}\mathcal{P}(\mathrm{Aut}A).$$

Эти отображения антиизотонны и переводят объединения в пересечения. Кроме того композит образов элементов булианов содержится в образе пересечения этих элементов.

Действительно, антиизотонность отображений сразу следует из определений. Для любых элементов булианов (т.е. семейств) $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ из соотношений $\mathcal{I} \leq \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$, $\mathcal{J} \leq \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ и антиизотонности следует, что $\mathcal{I}\tilde{e} \geq (\mathcal{I} \cup \mathcal{J})\tilde{e}$, $\mathcal{J}\tilde{e} \geq (\mathcal{I} \cup \mathcal{J})\tilde{e}$ и значит $\mathcal{I}\tilde{e} \cap \mathcal{J}\tilde{e} \geq (\mathcal{I} \cup \mathcal{J})\tilde{e}$. Обратно, если $\alpha \in \mathcal{I}\tilde{e} \cap \mathcal{J}\tilde{e}$, то $\kappa\alpha = \kappa$ для любого κ, принадлежащего $\mathcal{I}$ или $\mathcal{J}$, поэтому $\alpha \in (\mathcal{I} \cup \mathcal{J})\tilde{e}$. Наконец, если α принадлежит композиту образов $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$, то $\alpha = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ причем для каждого α_i выполняются равенства $\kappa\alpha_i = \kappa$ либо для всех $\kappa \in \mathcal{I}$, либо для всех $\kappa \in \mathcal{J}$. Поэтому $\kappa\alpha = \kappa$ для любого $\kappa \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$, т.е. $\alpha \in (\mathcal{I} \cap \mathcal{J})\tilde{e}$.

Далее, если предположить, что существуют композиты произвольных семейств подобъектов, то, сопоставляя каждому семейству подобъектов композит этого семейства, получим отображение $\mathbf{B}\,(\mathcal{P}(A))\,\sigma\mathcal{P}(A)$, которое, как легко проверяется, изотонно и удовлетворяет равенствам $\sigma e = \tilde{e}$, $\sigma a = \tilde{a}$.

Соответствующее отображение определяется и для булиана класса морфизмов в объект A сопоставлением семейству морфизмов $K_i\kappa_i A$, $i \in \mathcal{I}$ дополнительного морфизма к кообразу этого семейства $K_i\sigma_i K$, $i \in \mathcal{I}$, естественно, в предположении, что кообраз всегда определен. Напомним, что кообразом семейства (коконуса) морфизмов $K_i\kappa_i A$, $i \in \mathcal{I}$ называется коразделяющий (плотный) коконус $K_i\sigma_i K$, $i \in \mathcal{I}$, для которого существует дополнительный морфизм $K\kappa A$, удовлетворяющий следующим свойствам :

(i) $\sigma_i\kappa = \kappa_i$ при всех $i \in \mathcal{I}$;

(ii) если для коразделяющего коконуса $K_i\sigma_i' K'$, $i \in \mathcal{I}$ существует дополнительный морфизм $K'\kappa' A$, подчиняющийся равенствам $\sigma_i'\kappa' = \kappa_i$, $i \in \mathcal{I}$, то $\sigma_i = \sigma_i'\sigma'$, $i \in \mathcal{I}$ при некотором морфизме $K'\sigma' K$.

Полученное отображение $\mathbf{B}(\mathring{A})\sigma_0\mathring{A}$ также изотонно и удовлетворяет равенствам $\sigma_0 e_0 = \bar{e}_0, \sigma_0 a_0 = \bar{a}_0$. Полученные результаты соберем в

Предложение. *(а) Сопоставление семейству морфизмов в объект A и семейству его подобъектов полугруппы и группы изотропии определяет антиизотонные отображения*

$$\mathring{A}e_0\mathcal{P}(\mathrm{End}A),\quad \mathcal{P}(A)e(\mathrm{End}A),\quad (\mathring{A})\bar{e}_0\mathcal{P}(\mathrm{End}A),\quad \mathbf{B}(\mathcal{P}(A))\bar{e}\mathrm{P}(\mathrm{End}A);$$

$$\mathring{A}a_0\mathcal{P}(\mathrm{Aut}A),\quad \mathcal{P}(A)a(\mathrm{Aut}A),\quad (\mathring{A})\bar{a}_0\mathcal{P}(\mathrm{Aut}A),\quad \mathbf{B}(\mathcal{P}(A))\,\bar{a}\mathrm{P}(\mathrm{Aut}A);$$

(б) Отображения $\bar{e}_0, \bar{e}, \bar{a}_0, \bar{a}$ переводят объединение элементов булианов в пересечение их образов, а образ пересечения этих элементов содержит композит их образов. Если существуют кообразы семейств морфизмов в объект A и композиты семейств подобъектов объекта A, то аналогичные утверждения справедливы для отображений e_0, e, a_0, a при соответствующей замене объединения элементов на их кообраз и композит.

(в) При условии существования кообразов морфизмов из $\mathring{A}$ и мономорфности дополнительного к кообразу морфизма, сопоставляя морфизмам из $\mathring{A}$ дополнительный к кообразу морфизм, получаем изотонное отображение $\mathring{A}c\mathcal{P}(A)$, удовлетворяющее равенствам $ce = e_0, ca = a_0$.

(г) В предположениях п.(б), отображения $\mathbf{B}(\mathring{A})\sigma_0 A$, $\mathbf{B}(\mathcal{P}(A))\,\sigma\mathcal{P}(A)$ изотонные и удовлетворяют равенствам $\sigma_0 e_0 = \bar{e}_0$, $\sigma_0 a_0 = \bar{a}_0$, $\sigma e = \bar{e}$, $\sigma a = \bar{a}$.

§2 МОРФИЗМЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С МНОЖЕСТВАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ ОБЪЕКТА

Если в предыдушем параграфе исследовались полугруппы и группы, связанные с морфизмом, в этом параграфе изучаются морфизмы, стандартно ассоциируемые с подмножествами полугруппы эндоморфизмов объекта.

2.1. Морфизм $K\kappa A$ называется неподвижным или стабильным относительно эндоморфизма α объекта A, если он является неподвижной точкой отображения $\mathring{A}\alpha_{\bullet}\mathring{A}$, т.е. $\kappa\alpha_{\bullet} = \kappa\cdot\alpha = \kappa$. Морфизм $K\kappa A$ называется неподвижным или стабильным относительно множества эндоморфизмов $M \subset \mathrm{End}A$, если он стабилен относительно всех $\alpha \in M$.

Перечислим простейшие свойства стабильности морфизмов :

(а) Если морфизм $K\kappa A$ стабилен относительно множества $M \subset \mathrm{End} A$ и $K'\sigma K$ – произвольный морфизм, то и композиция $K'\sigma\kappa A$ стабильна относительно множества M.

Из этого свойства следует, что корректно определяется стабильность подобъекта объекта A как стабильность произвольного представителя $K\kappa A$ этого подобъекта.

(б) Если $K_i\sigma_i K$, $i \in \mathcal{I}$ – коразделяющий (плотный) коконус морфизмов и все морфизмы $\sigma_i\kappa$ стабильны относительно множества эндоморфизмов M, то и морфизм κ стабилен относительно M. В частности, если композиция эпиморфизма σ и некоторого морфизма κ стабильна относительно множества эндоморфизмов M, то и морфизм κ стабилен относительно M.

Применяя это свойство к подобъектам, получаем, что если семейство подобъектов стабильно относительно некоторого множества эндоморфизмов, то и композит этого семейства стабилен относительно данного множества эндоморфизмов.

(в) Если морфизм или подобъект $K\kappa A$ стабилен относительно множества $M \subset \mathrm{End} A$, то он стабилен и относительно его любого подмножества L.

(г) Если морфизм или подобъект $K\kappa A$ стабилен относительно эндоморфизмов $\alpha, \alpha' \in \mathrm{End} A$, то стабилен и относительно их композиции. Если $K\kappa A$ стабилен относительно автоморфизма $\alpha \in \mathrm{Aut} A$, то стабилен и относительно обратного автоморфизма α^{-1}.

Как следствие, если $K\kappa A$ стабилен относительно множества эндоморфизмов или автоморфизмов M объекта A, то он стабилен относительно полугруппы и, соответственно, группы, порожденной множеством M.

(д) Каждый морфизм и подобъект стабильны относительно своей полугруппы изотропии. Более того, если морфизм или подобъект $K\kappa A$ стабилен относительно множества эндоморфизмов M, то M лежит в полугруппе изотропии S^κ. Если все эндоморфизмы из M обратимы (т.е. являются автоморфизмами), то M лежит в группе изотропии G^{κ}.

Следовательно, для любого морфизма и подобъекта максимальным множеством эндоморфизмов, относительно которых он стабилех, является его изотропная полугруппа, а максимальным множеством автоморфизмов, относительно которых он стабилен – его изотропная группа.

(е) Обозначим через $\check{A}_M$ и $\mathcal{P}_M(A)$, соответственно, классы всех морфизмов в объект A и всех подобъектов этого объекта, стабильных относительно множества эндоморфизмов M. Согласно свойствам (а) и (б) класс $\check{A}_M$ замкнут относительно левых композиций и сокращений на эпиморфизмы, а класс $\mathcal{P}_M(A)$ вместе с каждым подобъектом содержит все лежащие в нем подобъекты и вместе с каждым семейством подобъектов - композит этого семейства.

2.2. Принадлежащий классу $\check{A}_M$ мономорфный правый наибольший общий делитель этого класса называется стабилизацией объекта A по множеству эндоморфизмов M. Таким образом, мономорфизм $K \kappa A$ называется стабилизацией объекта A по множеству эндоморфизмов M этого объекта, если

(i) $\kappa\alpha = \kappa$ для любого $\alpha \in M$;

(ii) для каждого морфизма $K'\kappa' A$, удовлетворяющего равенствам $\kappa'\alpha = \kappa'$ при всех $\alpha \in M$, существует морфизм $K'\sigma K$ такой, что $\kappa' = \sigma\kappa$.

Заметим, что в силу мономорфности κ морфизм σ вышеприведенным равенством определяется однозначно; более того, условие мономорфности κ эквивалентно условию единственности σ.

Нетрудно проверить, что любой левый эпиморфный делитель стабилизации $K \kappa A$ объекта A по $M \subset \mathrm{End} A$ является изоморфизмом. Морфизмы, удовлетворяющие такому свойству мы называем копростыми.

Стабилизация любого объекта по произвольному подмножеству его полугруппы эндоморфизмов в случае существования определяется с точностью до умножения слева на изоморфизмы, т.е. по существу является подобъектом рассматриваемого объекта, определенным однозначно. Точнее, он является наибольшим подобъектом класса $\mathbf{P}_M(A)$.

2.3. Предложение. *Мономорфизм $K\kappa A$ является стабилизацией объекта A по некоторому множеству эндоморфизмов $M \subset \mathrm{End}A$ тогда и только тогда, когда отображение $\check{K}\kappa_\bullet\check{A}$, $v\kappa_\bullet = v\cdot\kappa$ инъективно и имеет образом $\check{A}_M$, т.е. определяет биекцию между $\check{K}$ и $\check{A}_M$.*

Доказательство. Прежде всего, инъективность отображения $\kappa_\bullet$ эквивалентна мономорфности морфизма κ.

Предположим, что $\kappa_\bullet$ отображает $\check{K}$ на $\check{A}_M$. Тогда $1_K\kappa_\bullet = \kappa \in \check{A}_M$. Кроме того, для произвольного M-стабильного морфизма $v \in \check{A}$ существует морфизм $u \in \check{K}$ такой, что $v = u\kappa_\bullet = u\kappa$. Следовательно, κ стабилизация A по M.

Обратно, предположим, что κ – стабилизация A по M. Для произвольного морфизма $u \in \check{K}$ и любого эндоморфизма $\alpha \in M$ имеем $(u\kappa_\bullet)\alpha = u\kappa\alpha = u\kappa_\bullet$, так что $u\kappa_\bullet \in \check{A}_M$.◇

2.4. В силу свойства 2.1 (г), если $K\kappa A$ является стабилизацией по множеству эндоморфизмов $M \subset \mathrm{End}A$, то является также стабилизацией по полугруппе эндоморфизмов, порожденной множеством M, или даже по подгруппе автоморфизмов, порожденной множеством M, в том случае, когда все эндоморфизмы из M обратимы. Поэтому резонно рассматривать стабилизации только по подполугруппам (в частности, подгруппам) полугруппы эндоморфизмов данного объекта.

Обозначим через $\mathcal{P}_s(\mathrm{End}A)$ множество всех подполугрупп G полугруппы $\mathrm{End}A$, по которым стабилизация объекта A существует, через $\mathcal{P}_i(\mathrm{End}A)$ и $\mathcal{P}_{i_0}(\mathrm{End}A)$ – множества всех подполугрупп G полугруппы $\mathrm{End}A$, для которых соответственно классы $\mathcal{P}_G(A)$ и $\check{A}_G$ не пустые. Очевидно $\mathcal{P}_s(\mathrm{End}A) \subset \mathcal{P}_i(\mathrm{End}A) \subset \mathcal{P}_{i_0}(\mathrm{End}A)$.

Предложение. *С помощью сопоставления подходящим подполугруппам полугруппы $\mathrm{End}A$ стабилизаций по ним, а также множеств всех стабильных относительно них подобъектов объекта A и морфизмов в объект A определяются* *антиизотонные отображения*

$$\mathcal{P}_s(\mathrm{End}A)s\mathcal{P}(A), \quad \mathcal{P}_i(\mathrm{End}A)\bar{s}\mathrm{B}(\mathcal{P}(A)), \quad \mathcal{P}_{i_0}(\mathrm{End}A)\bar{s}_0\mathrm{B}(A),$$

связанные равенствами $\bar{s}\sigma = s$, $\bar{s}_0 c = \bar{s}$ *при условии существования отображений* σ *и* c *(см 1.13.(в),(г)).*

Доказательство. Приведем доказательство только для первого равенства. Если $G \in \mathcal{P}_i(\mathrm{End}A)$, то $G\bar{s} = \mathcal{P}_G(A)$, а $\mathcal{P}_G(A)\sigma$ композит всех подобъектов из $\mathcal{P}_G(A)$, являющийся согласно п. 2.1.(б) наибольшим подобъектом класса $\mathcal{P}_G(A)$, т.е. стабилизацией A но G.$\diamondsuit$

Следствие. Для существования стабилизации объекта A по подполугруппе (на самом деле то же верно для произвольного подмножества) G полугруппы $\mathrm{End}A$ достаточно, чтобы $\mathcal{P}_G(A)$ было непусто и существовала сумма всех подобъектов объекта A, принадлежащих $\mathcal{P}_G(A)$.

2.5. Предложение. *Пусть* $K\kappa A$ *стабилизация по множеству* $M \subset \mathrm{End}A$. *Наибольшим множеством эндоморфизмов, стабилизация по которому представляется морфизмом* κ, *будет изотропная полугруппа* S^κ. *Морфизм* κ *является стабилизацией по любому множеству эндоморфизмов* L, *удовлетворяющему соотношениям* $M \subset L \subset S^\kappa$. *Если* $M \subset \mathrm{Aut}A$, *аналогичные утверждения с заменой полугруппы изотропии* S^κ *на группу изотропии верны для множеств автоморфизмов, по которым* κ *является стабилизацией.*

Доказательство. Если морфизм κ является стабилизацией по некоторому множеству эндоморфизмов L, то L состоит из изотропных эндоморфизмов морфизма κ, а S^κ по определению есть множество всех изотропных эндоморфизмов морфизма κ. Поэтому $L \subset S^\kappa$.

Далее, из включения $L \subset S^\kappa$ следует, что S^κ-стабильный морфизм κ тем более будет L-стабильным. С другой стороны, из включения $M \subset L$ вытекает, что всякий L-стабильный морфизм κ' будучи и M-стабильным, будет делиться на M-стабилизацию κ. Значит κ является L-стабилизацией.$\diamondsuit$

Таким образом, вообще говоря, множество эндоморфизмов, по которому данный морфизм является стабилизацией, определяется неоднозначно.

Морфизм $K\kappa A$ называется совершенной стабилизацией, если является стабилизацией по единственной полугруппе эндоморфизмов $S \subset \mathrm{End}A$, замкнутой относительно обращения элементов.

Следствие. Если $K\kappa A$ - совершенная стабилизация по полугруппе эндоморфизмов S, то S совпадает с полугруппой изотропии S^κ. Если к тому же $S \subset \mathrm{Aut}A$, то $S = G^\kappa = S^\kappa$. ◇

2.6. **Предложение.** *(а) Если морфизм $K\kappa A$ стабилен по действию множества $M \subset \mathrm{End}A$ и α - произвольный автоморфизм обьекта A, то морфизм $K\kappa\alpha A$ стабилен относительно действия сопряженного множества эндоморфизмов $\alpha^{-1}M\alpha$.*

(б) Если $K\kappa A$ - стабилизация по множеству $M \subset \mathrm{End}A$, то при произвольном автоморфизме α обьекта A композиция $K\kappa\alpha A$ будет стабилизацией по сопряженному множеству $\alpha^{-1}M\alpha$.

(в) Если морфизм $K\kappa A$ стабилен по подмножеству $M \subset \mathrm{End}A$ и α - элемент нормализатора M в $\mathrm{End}A$, то и композиция $\kappa\alpha$ стабильна по M.

(г) Если $K\kappa A$ - стабилизация по $M \subset \mathrm{End}A$, то для любого элемента α нормализатора M в $\mathrm{End}A$ найдется эндоморфизм β такой, что $\kappa\alpha = \beta\kappa$. Таким образом, нормализатор M в $\mathrm{End}A$ содержится в аллотропной полугруппе $S^{(\kappa)}$.

(д) Если $K\kappa A$ - стабилизация по подмножеству M группы автоморфизмов обьекта A, то нормализатор M в $\mathrm{Aut}A$ лежит в аллотропной группе $G^{(\kappa)}$ морфизма κ.

Доказательство. (в) По определению, принадлежность α нормализатору множества M в $\mathrm{End}A$ означает, что $\alpha \in \mathrm{End}A$ и $\alpha M = M\alpha$. Поэтому для любого $a \in M$ найдется $a' \in M$ такой, что $\alpha a = a'\alpha$. Но тогда $\kappa\alpha a = \kappa a'\alpha = \kappa\alpha$. Заметим, что (в) следует из (а) только в случае обратимости α.
(г) следует из (в) и определения стабилизации κ.
(д) Если α принадлежит нормализатору M в $\mathrm{Aut}A$, то и α^{-1} принадлежит,

поэтому согласно (г) найдутся эндоморфизмы β и β', удовлетворяющие равенствам $\kappa\alpha = \beta\kappa$ и $\kappa\alpha^{-1} = \beta'\kappa$. Тогда $\beta\beta'\kappa = \beta'\beta\kappa = \kappa$ и в силу мономорфности κ $\beta' = \beta^{-1}$.◊

Соберем воедино результаты следствия к предложению 1.7 и предложения 2.6 (г,д).

Теорема 1. *Если морфизм $K\kappa A$ является стабилизацией, то*

(i) нормализатор его изотропной полугруппы S^κ в группе $\mathrm{Aut}A$ содержит аллотропную группу $G^{(\kappa)}$ и содержится в аллотропной полугруппе $S^{(\kappa)}$ морфизма κ ;

(ii) нормализатор изотропной группы G^κ морфизма κ в $\mathrm{Aut}A$ совпадает с аллотропной группой $G^{(\kappa)}$ этого морфизма.

Вернемся к сюжету, затронутому в первом параграфе и касающемуся морфизмов $A\varphi B$, $B\psi C$, $A\chi C$, связанных равенством $\chi = \varphi\psi$.

2.7. Предложение. *Пусть ψ - стабилизация по множеству эндоморфизмов M, $S^{(\psi)}\psi^e S_{(\psi)}$ и $G^{(\psi)}\psi^a G_{(\psi)}$ - индуцированные гомоморфизмы перестановочных относительно морфизма ψ полугрупп и групп. Тогда*

(а) $(S^\varphi \cap S_{(\psi)})(\psi^e)^{-1} = S^{(\psi)} \cap S^\chi$ содержит нормализатор M в S^χ ;

(б) $(G^\varphi \cap G_{(\psi)})(\psi^a)^{-1} = G^{(\psi)} \cap G^\chi$ содержит нормализатор M в G^χ и совпадает с нормализатором G^ψ в G^χ, если $M \subset \mathrm{Aut}C$.

Доказательство. Согласно 1.9 (д) $(S^\varphi \cap S_{(\psi)})(\psi^e)^{-1} = (S^\varphi \cap S_{(\psi)})\psi_e = S^{(\psi)} \cap S^\chi$ и аналогичные равенства верны для соответствующих групп автоморфизмов и их отображений. В силу 2.6 (г,д) $S^\chi \cap S^{(\psi)}$ содержит пересечение S^χ с нормализатором M в $\mathrm{End}C$, т.е. нормализатор M в S^χ (отметим, что утверждение (а), в частности, верно при $M = S^\psi$), и аналогичные соображения верны для групп в случае, когда $M \subset \mathrm{Aut}C$. При этом согласно предложению 1.10 справедливо также обратное включение, что доказывает последнее утверждение п. (б).◊

2.8. Предложение. *Если $\chi = \varphi\psi$ и (β,γ) - пара перестановочных с ψ ассоциированных эндоморфизмов, то из стабильности φ относительно β*

следует стабильность χ относительно γ. Обратная импликация верна при условии мономорфности ψ.

Доказательство. При условии $\varphi\beta = \varphi$ имеем $\chi\gamma = \varphi\psi\gamma = \varphi\beta\psi = \varphi\psi = \chi$. Обратно, если $\chi\gamma = \chi$, то $\varphi\beta\psi = \varphi\psi\gamma = \varphi\psi$ и после сокращения на мономорфизм ψ получаем $\varphi\beta = \varphi$.◊

2.9. Предложение. *(а) Пусть $\chi = \varphi\psi$, χ - стабилизация по множеству эндоморфизмов M, а ψ - произвольный мономорфизм. Рассмотрим гомоморфизмы полугрупп $S^{(\psi)}\psi^e S_{(\psi)}$ и групп $G^{(\psi)}\psi^a G_{(\psi)}$. Если $M \subset S^{(\psi)}$ или $G^{(\psi)}$, то φ - стабилизация по $M\psi^e$ и, соответственно, $M\psi^a$.*

(б) Пусть $\chi = s_M$, $\psi = s_L$ стабилизации по множествам эндоморфизмов $L \subset M \subset \mathrm{End}C$. Тогда существует единственный мономорфизм $\varphi = s_M^L$ такой, что $\chi = \varphi\psi$. Если M лежит в нормализаторе L в $\mathrm{End}C$, в частности, если L инвариантно относительно сопряжений элементами M, то $\varphi = s_K$ - стабилизация по множеству $K = M\psi^e$.

(в) Если $\chi = s_M$ и $\psi = s_L$ являются стабилизациями по подгруппам группы автоморфизмов объекта $C : L < M < \mathrm{Aut}C$, и L - нормальный делитель M, то $\varphi = s_M^L = s_K$ - стабилизация по группе автоморфизмов $K = M\psi^a$, которая изоморфна факторгруппе $M/M \cap G^\psi$, сводящейся к M/L при $L = G^\psi$.

Доказательство. (а) Стабильность φ относительно K следует из предложения 2.8 в силу мономорфности стабилизации ψ.

Предположим, что φ' - стабильный относительно множества K морфизм. Тогда согласно тому же предложению композиция $\chi' = \varphi'\psi$ будет стабильна относительно M. Следовательно, по определению стабилизации χ по M для некоторого морфизма σ $\chi' = \sigma\chi$. Подставив в последнее равенство соответствующие значения для χ и χ' и сократив на мономорфизм ψ, получим $\varphi' = \sigma\varphi$.

(б) Существование морфизма φ, удовлетворяющего нужному равенству, следует из определения L- стабилизации ψ и стабильности χ относительно $L \subset M$. Если M лежит в нормализаторе L в $\mathrm{End}C$ (в частности, при L, инвариантном относительно сопряжений элементами множества M, когда $M \subset \mathrm{Aut}C$), поскольку согласно предложению 2.6 (г) M лежит в аллотропной полугруппе $S^{(\psi)}$ морфизма ψ, выполняются предпосылки утверждения п. (а), следовательно, верно его заключение.

(в) Если L - нормальный делитель M, то M содержится в нормализаторе L в $\mathrm{Aut}C$ и применимо утверждение п. (б), согласно которому φ является стабилизацией по образу K гомоморфизма групп $M\psi^a G_{(\psi)}$ с ядром $M \cap G^{\psi}$.◇

2.10. Предложение. *Пусть $B\psi C$ стабилизация по множеству $L \subset \mathrm{End}C$, $A\varphi B$ стабилизация по множеству $K \subset S_{(\psi)}$. Тогда их композиция $\chi = \varphi\psi$ - стабилизация по множеству*

(а) $M = K' \cup L$ при любом $K' \subset \mathrm{End}C$ таком, что $K'\psi^e = K$, в частности, при $K' = K\psi_e = K(\psi^e)^{-1}$;

(б) $M = K\psi_e = K(\psi^e)^{-1}$, если $K \ni 1_B$;

(в) $M = K\psi_a = K(\psi^a)^{-1}$, если $L \subset \mathrm{Aut}C$, $K \subset \mathrm{Aut}B$ и содержит $1_B \in K$.

Доказательство. Прежде всего, стабильность χ относительно M немедленно следует из предложения 2.8. Далее предположим, что χ' стабильно относительно M. Так как в каждом из случаев (а-в) $L \subset M$, морфизм χ' стабилен по L и по определению L-стабилизации ψ существует морфизм φ' такой, что $\chi' = \varphi'\psi$. Опять на основании предложения 2.8. морфизм φ' стабилен относительно K. Поскольку φ - K-стабилизация, $\varphi' = \sigma\varphi$ при некотором морфизме σ. Итого $\chi' = \sigma\chi$.◇

Следствие. Если ψ - стабилизация по множеству автоморфизмов, а φ - стабилизация по группе K автоморфизмов, перестановочных с морфизмом ψ, так что $K \subset G_{(\psi)}$, то их композиция $\chi = \varphi\psi$ является стабилизацией по нормализатору N группы изотропии G^{ψ} в группе изотропии G^{χ}.

Доказательство. Используя предложения 2.5, 1.4 (а), 1.9 (в), 2.7 (б), получаем цепь включений

$$K\psi_a \subset G^{\varphi}\psi_a \subset G^{\chi} \cap G^{(\psi)} = N \subset G^{\chi}.$$

В силу п. (в) вышедоказанного предложения χ является стабилизацией по множеству $K\psi_a$, а следовательно, по любому множеству, содержащему это множество и лежашему в G^χ, в том числе, по N. Если стабилизация χ - совершенная, то $N = G^\chi$, а это в точности означает, что G^ψ является нормальным делителем G^χ.◇

Основываясь на предложении 2.9 (в) и выше полученном следствии, сформулируем теорему, являющуюся категорным аналогом утверждения (в) основной теоремы классической теории Галуа.

Теорема 2. *Пусть $\chi = \varphi\psi$ совершенная стабилизация с группой изотропии G, а ψ стабилизация с группой изотропии H. Тогда H является подгруппой группы G, причем φ является стабилизацией по $G\psi^a \cong G/H$ в том случае, когда H нормальный делитель группы G. Обратно, если φ - стабилизация по множеству автоморфизмов, перестановочных с ψ, то H - нормальный делитель G.*

2.11 Предложение. *Пусть $K_i\kappa_i A$ - стабилизации по подмножествам эндоморфизмов $M_i \subset \mathrm{End}A$, $i \in \mathcal{I}$, соответственно, M, M' подмножества полугруппы $\mathrm{End}A$, образованные соответственно из всевозможных произведений элементов подмножеств M_i и всевозможных произведений элементов M_i и обратных им элементов. Тогда если существует коамальгама $K\sigma_i K_i$, $i \in \mathcal{I}$ семейства морфизмов $K_i\sigma_i A$, $i \in \mathcal{I}$, то сквозной морфизм $\kappa = \sigma_i\kappa_i$ является стабилизацией как по M, так и по M'. Обратно, если $K\kappa A$ - стабилизация по множеству M или M', то из включений $M_i \subset M, M'$ следует, что существует семейство морфизмов $K\sigma_i K_i$, $i \in \mathcal{I}$ каждое из которых однозначно определяется равенством $\sigma_i\kappa_i = \kappa$, причем это семейство задает коамальгаму семейства морфизмов $K_i\kappa_i A$, $i \in \mathcal{I}$.*

Доказательство. Если $K\sigma_i K_i$ - коамальгама семейства $K_i\kappa_i A$, $i \in \mathcal{I}$, то сквозной морфизм $\kappa = \sigma_i\kappa_i$ не зависит от выбора $i \in \mathcal{I}$, и для любого эндоморфизма $\alpha = \alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}...\alpha_r^{m_r}$, где каждый эндоморфизм α_j принадлежит некоторому M_i, а $m_j = \pm 1$, без труда проверяется , что $\kappa\alpha = \kappa$. Поэтому κ стабилен относительно M и M'. Кроме того, произвольный стабильный относительно M или M' морфизм $K'\kappa' A$ стабилен относительно всех M_i, поэтому $\kappa' = \sigma_i'\kappa_i$ для подходящих морфизмов $K'\sigma_i' K_i$. По определению коамальгамы существует морфизм $K'\sigma'K$ такой, что $\sigma'\sigma_i = \sigma'_i$ при всех $i \in \mathcal{I}$. Умножив обе части последнего равенства на κ_i, получаем $\sigma'\kappa = \kappa'$.

Обратно, проверим, что семейство $K\sigma_i K_i$, $i \in \mathcal{I}$ задает коамальгаму семейства $K_i\kappa_i A$, $i \in \mathcal{I}$. Равенства $\kappa = \sigma_i\kappa_i$ выполняются по определению. Предположим, что аналогичные равенства $\kappa' = \sigma'_i\kappa_i$ выполняются для семейства морфизмов $K'\sigma'_i K_i$, $i \in \mathcal{I}$. Тогда сквозной морфизм κ' неподвижен относительно M и M', поэтому существует морфизм $K'\sigma'K$, удовлетворяющий равенству $\sigma'\kappa = \kappa'$. Тогда $\sigma'\sigma_i\kappa_i = \sigma'_i\kappa_i$ и, разделив на мономорфизм κ_i, получаем $\sigma'\sigma_i = \sigma'_i$ при всех $i \in \mathcal{I}$.◇

Следствие 1. Пусть N - наименьший нормальный делитель группы Aut$A$, содержащий её подгруппу G. В категории с коамальгами, если существует стабилизация по G, то существует и стабилизация по N.

Достаточно применить доказанное предложение к семейству морфизмов $K\kappa\alpha A$, $\alpha \in \mathrm{Aut}A$, каждый из которых является согласно предложению 2.6 (б) стабилизацией по группе $G^\alpha = \alpha^{-1}G\alpha$, имея в виду, что N порождается всеми указанными группами. Отметим, что здесь нам достаточно, чтобы существовала коамальгама семейства морфизмов $K\kappa\alpha A$, $\alpha \in \mathrm{Aut}A$.◇

Следствие 2. В категории, каждый морфизм которой разлагается в композицию кообраза и образа, в предпосылках предложения 2.11 пересечение семейства подобъектов $K_i\kappa_i A$, $i \in \mathcal{I}$ и стабилизации по множествам M и/или M' существуют одновременно и совпадают.

На самом деле здесь достаточно, чтобы в композицию кообраза и образа разлагался любой морфизм, стабильный относительно M или M'.◇

2.12. Предложение. *Пусть $K_0\sigma_i K_i$, $i \in \mathcal{I}$ произвольное семейство морфизмов, $K_i\kappa_i A$, $i \in \mathcal{I}$ - амальгама этого семейства, $\kappa_0 = \sigma_i\kappa_i$ - сквозной морфизм, S^{κ_i} - изотропные полугруппы морфизмов κ_i, $i \in \mathcal{I} \cup \{o\}$. Пересечение $\bigcap_{i\in I} S^{\kappa_i}$ изотропных полугрупп $S^{\kappa_i} \subset S^{\kappa_0}$ тривиально при условии существования стабилизации объекта A по любому элементу $\alpha \in \bigcap_{i\in I} S^{\kappa_i}$.*

Доказательство. Пусть $T\tau A$ стабилизация по элементу $\alpha \in \bigcap_{i\in I} S^{\kappa_i}$. Тогда все морфизмы κ_i стабильны относительно α и при подходящем выборе морфизма $K_i\rho_i T$ $\kappa_i = \rho_i\tau$. Подставляя эти значения κ_i, κ_0 в равенство $\kappa_0 = \sigma_i\kappa_i$ и сокращая на мономорфизм τ, получаем равенство $\rho_0 = \sigma_i\rho_i$ при произвольном $i \in \mathcal{I}$. По определению амальгамы существует морфизм $A\tau' T$ такой, что $\kappa_i\tau' = \rho_i$ при всех $i \in \mathcal{I}$. Подставляя значение ρ_i в равенство $\kappa_i = \rho_i\tau$ получаем $\kappa_i = \kappa_i\tau'\tau$, для всех $i \in \mathcal{I}$. Опять по определению амальгамы $\tau'\tau = 1$. Поэтому из равенства $\tau\alpha = \tau$ следует, что $\alpha = 1$.$\diamond$

§3. СООТВЕТСТВИЯ ГАЛУА.

3.1. Напомним одну достаточно известную конструкцию (см. [39], [37] [40]). Пусть $W \subset X \times Y$ произвольное соответствие из класса X в класс Y. Для любых $x \in X$ и $y \in Y$ можно определить подклассы :

$xW_\bullet \subset Y$, состоящий из всех элементов $y \in Y$, так что $(x, y) \in W$;

$yW^\bullet \subset X$, образованный всеми элементами $x \in X$, удовлетворяющими соотношению $(x, y) \in W$.

Обозначив через $\mathbf{B}(X)$ и $\mathbf{B}(Y)$ классы всех подклассов (булианы) классов X и Y соответственно, определим отображения $\mathbf{B}(X)W_\bullet\mathbf{B}(Y)$ и $\mathbf{B}(Y)W^\bullet\mathbf{B}(X)$ равенствами $UW_\bullet = \cap_{x\in U} xW_\bullet$ и $VW^\bullet = \cap_{y\in V} yW^\bullet$.

Эти отображения обладают следующими свойствами : они антиизотонны и их композиции - увеличивающие отображения.

3.2. Пара отображений ординалов $\mathcal{X}w_\bullet\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}w^\bullet\mathcal{X}$, где

(а) $w_\bullet$ и $w^\bullet$ - антиизотонные отображения ;

(б) $w_\bullet w^\bullet$ и $w^\bullet w_\bullet$ - увеличивающие отображения,

называется соответствием Галуа и далее кратко обозначается w.

Из определяюих свойств (а) и (б) соответствия Галуа легко выводятся следующие важные свойства.

(в) Отображения $w_\bullet$ и $w^\bullet$ квазиобратны друг к другу.

(г) Для любых классов элементов $\mathcal{I} \subset \mathcal{X}$ и $\mathcal{J} \subset \mathcal{Y}$ ($\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ - ординалы) справедливы включения :

$$(\cup_{u\in\mathcal{I}} u)\, w_\bullet = \cap_{u\in\mathcal{I}} uw_\bullet, \qquad (\cap_{u\in\mathcal{I}} u)\, w_\bullet \geq \cup_{u\in\mathcal{I}} uw_\bullet,$$

$$(\cup_{v\in\mathcal{J}} v)\, w^\bullet = \cap_{v\in\mathcal{J}} vw^\bullet, \qquad (\cap_{v\in\mathcal{J}} v)\, w^\bullet \geq \cup_{v\in\mathcal{J}} vw^\bullet,$$

(естественно, при условии существования соответствующих объединений и пересечений).

3.3. Элементы $\bar{u} = uw_{\bullet}w^{\bullet}$ и $\bar{v} = vw^{\bullet}w_{\bullet}$ называются замыканиями элементов $u \in \mathcal{X}$ и $v \in \mathcal{Y}$ соответственно относительно соответствия Галуа w. Используя свойства (а)–(г) соответствия Галуа нетрудно доказать следующие свойства замыкания.

(i) $\bar{u} \geq u, \quad \bar{v} \geq v$;

(ii) $u \geq u' \Longrightarrow \bar{u} \geq \bar{u}', \quad v \geq v' \Longrightarrow \bar{v} \geq \bar{v}'$;

(iii) $\bar{\bar{u}} = \bar{u}, \quad \bar{\bar{v}} = \bar{v}$.

Эти три свойства в совокупности означают, что преобразования $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, сопоставляющее каждому элементу его замыкание, являются операторами замыкания.

(iv) $\bar{u} = u \iff u = vw^{\bullet}, \quad \bar{v} = v \iff v = uw_{\bullet}$;

(v) Для любого класса элементов $\mathcal{I}$ ордината $\mathcal{X}$ справедливы включения

$$\overline{\cap_{u\in\mathcal{I}} u} \leq \cap_{u\in\mathcal{I}} \bar{u}, \quad \overline{\cup_{u\in\mathcal{I}} u} \geq \cup_{u\in\mathcal{I}} \bar{u}.$$

Аналогичные включения верны для произвольного класса элементов $\mathcal{J}$ ордината $\mathcal{Y}$. Эти включения немедленно следуют из свойства изотонности (ii).

В общем случае классы замкнутых элементов

$$\mathcal{X}(w) = \{w \in \mathcal{X} : \quad \bar{u} = u\}, \quad \mathcal{Y}(w) = \{w \in \mathcal{Y} : \quad \bar{v} = v\}$$

не замкнуты относительно объединений. Однако они замкнуты относительно пересечений, т.е. образуют систему замыканий ([37]), ассоциированную с оператором замыкания, получаемому из соответствия Галуа.

Ограничения $w_{\bullet}$ и $w^{\bullet}$ на $\mathcal{X}(w)$ и $\mathcal{Y}(w)$ определяют взаимно обратные биекции между этими классами (это следует из 3.2 (в) и (iv)).

3.4. Результаты предыдущих пунктов этого параграфа применим в следующей ситуации. Пусть A объект произвольной категории.

Определим соответствия $\overrightarrow{A}$ из $\hat{A}$ в $\hat{A} \times \hat{A}$ и $\overleftarrow{A}$ из $\hat{A}$ в $\hat{A} \times \hat{A}$ как классы всех троек морфизмов $(\varphi, \psi_1, \psi_2) \in \hat{A} \times (\hat{A} \times \hat{A})$ и $(\psi, \varphi_1, \varphi_2) \in \hat{A} \times (\hat{A} \times \hat{A})$, удовлетворяющих равенствам $\varphi\psi_1 = \varphi\psi_2$ и $\varphi_1\psi = \varphi_2\psi$ соответственно. При этом морфизм φ называется уравнителем пары морфизмов (ψ_1, ψ_2), а ψ - коуравнителем (φ_1, φ_2).

Согласно общей конструкции пара отображений

$$\mathbf{B}(\hat{A})\overrightarrow{A}_{\bullet}\mathbf{B}(\hat{A} \times \hat{A}) \text{ и } \mathbf{B}(\hat{A} \times \hat{A})\overrightarrow{A}^{\bullet}\mathbf{B}(\hat{A})$$

и двойственная её пара отображений

$$\mathbf{B}(\hat{A})\overleftarrow{A}_{\bullet}\mathbf{B}(\hat{A} \times \hat{A}) \text{ и } \mathbf{B}(\hat{A} \times \hat{A})\overleftarrow{A}^{\bullet}\mathbf{B}(\hat{A})$$

являются соответствиями Галуа. Поэтому к ним применимы полученные выше результаты. В частности, соответствие Галуа $(\overrightarrow{A}_{\bullet}, \overrightarrow{A}^{\bullet})$ индуцирует системы замыканий $\mathbf{B}_0(\hat{A})$ на классе $\hat{A}$ и $\mathbf{B}_0(\hat{A} \times \hat{A})$ на классе $\hat{A} \times \hat{A}$, причем ограничения отображений $\overrightarrow{A}_{\bullet}$ и $\overrightarrow{A}^{\bullet}$ определяют взаимно обратные биекции между классами замкнутых подклассов $\mathbf{B}_0(\hat{A})$ и $\mathbf{B}_0(\hat{A} \times \hat{A})$. Двойственный результат верен для соответствия Галуа $(\overleftarrow{A}_{\bullet}, \overleftarrow{A}^{\bullet})$.

Приведем некоторые внутренние характеристики классов из $\mathbf{B}_0(\hat{A})$ и $\mathbf{B}_0(\hat{A} \times \hat{A})$.

3.5. Предложение. *$(\vec{1}^{\bullet})$ Элементы из $\mathbf{B}_0(\hat{A})$ устойчивы относительно композиций слева, т.е. для любого морфизма из замкнутого подкласса φ композиция $\xi\varphi$ также принадлежит этому подклассу (если $\xi\varphi$ определена).*

$(\vec{2}^{\bullet})$ Если $(\varphi_i, i \in \mathcal{I})$ - кораздeляющий (плотный) коконус морфизмов, а φ - такой морфизм, что все композиции $\varphi_i\varphi$ принадлежат некоторому замкнутому подклассу класса $\hat{A}$, то и φ принадлежит ему. В частности, элементы из $\mathbf{B}_0(\hat{A})$ устойчивы относительно сокращения слева на эпиморфизмы.

$(\vec{3}^{\bullet})$ Если морфизм φ принадлежит некоторому элементу из $\mathbf{B}_0(\hat{A})$ и эндоморфизм $\alpha \in \operatorname{End} A$ перестановочен с φ, то и композиция $\varphi\alpha$ принадлежит тому же классу.

($\bar{0}_\bullet$) *Элементы класса* $\mathrm{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$ *являются отношениями эквивалентности на классе* $\hat{A}$ *морфизмов из объекта* A.

($\bar{1}_\bullet$) *Элементы класса* $\mathrm{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$ *устойчивы относительно умножений справа, точнее, если* (ψ,ψ') *- произвольная пара морфизмов, принадлежащая этому элементу, то и пара* $(\psi\eta,\psi'\eta)$ *принадлежит ему при любом морфизме* η, *для которого композиции определены.*

($\bar{2}_\bullet$) *Если* $(\eta_i, i\in\mathcal{I})$ *- разделяющий конус морфизмов и все пары* $(\psi\eta_i,\psi'\eta_i)$ *принадлежат некоторому элементу класса* $\mathrm{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$, *то и пара* (ψ,ψ') *принадлежит этому элементу. В частности, элементы класса* $\mathrm{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$ *устойчивы относительно покоординатного сокращения справа на один и тот же мономорфизм.*

($\bar{3}_\bullet$) *Если для пары морфизмов* (ψ,ψ') *из некоторого элемента класса* $\mathrm{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$ *и эндоморфизма* $\alpha\in\mathrm{End}A$ *существует эндоморфизм* β *такой, что* $\alpha\psi=\psi\beta$ *и* $\alpha\psi'=\psi'\beta$, *то пара* $(\alpha\psi,\alpha\psi')$ *принадлежит тому же элементу класса* $\mathrm{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$, *что и* (ψ,ψ').

Доказательство очевидно.$\diamondsuit$

Замечание. Если элементы из $\mathrm{B}_0(\hat{A})$ являются подклассами класса $\hat{A}$, то элементы из $\mathrm{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$ можно интерпретировать как факторклассы класса $\hat{A}$, исходя из того, что они являются отношениями эквивалентности на $\hat{A}$.

3.6. Обрисованная общая картина соответствий Галуа, ассоциированных с объектом категории, упрощается и сводится к рассмотренной в первых двух параграфах ситуации, если ввести некоторые ограничения на исходную категорию или, точнее, на объект A.

Ограничение 1. Морфизмы в объект A разлагаются в композицию кообраза и образа.

Тогда ввиду свойств ($\bar{1}^\bullet$) и ($\bar{2}^\bullet$) классы морфизмов, представляющих элементы из $\mathrm{B}_0(\hat{A})$, однозначно определяются подклассами мономорфизмов этих классов, а в силу устойчивости элементов из $\mathrm{B}_0(\hat{A})$ относительно умножения слева на изоморфизмы они редуцируются к классу подобъектов объекта A, представленных в рассматриваемом элементе.

Ограничение 2. Для произвольных семейств подобъектов объекта A существуют суммы (композиты).

При ограничениях 1 и 2 любой замкнутый класс, являющийся элементом $B_0(\dot{A})$, состоит из всех левых кратных мономорфизма, представляющего сумму всех подобъектов, лежащих в рассматриваемом замкнутом классе.

Универсальным уравнителем класса $\mathcal{A} \subset \dot{A} \times \dot{A}$ или стабилизацией по этому классу называется мономорфизм $K \kappa A$

1) принадлежащий $\mathcal{A}\overrightarrow{A}^{\bullet}$, т.е. удовлетворяющий равенствам $\kappa\psi = \kappa\psi'$ при всех $(\psi, \psi') \in \mathcal{A}$;

2) делящий любой морфизм из $\mathcal{A}\overrightarrow{A}^{\bullet}$, что означает существование для любого морфизма φ, удовлетворяющего равенствам $\varphi\psi = \varphi\psi'$ при всех $(\psi, \psi') \in \mathcal{A}$, такого морфизма ξ, что $\varphi = \xi\kappa$.

Универсальный уравнитель любого класса $\mathcal{A} \subset \dot{A} \times \dot{A}$ в случае существования определяется однозначно как подобъект объекта A. Ограничения 1 и 2 задают достаточные условия его существования (при $\mathcal{A}\overrightarrow{A}^{\bullet} \neq \emptyset$).

Чтобы сформулировать последнее ограничение, рассмотрим для произвольного подкласса a класса $\dot{A}$ его группу изотропии G^a, т.е. совокупность всех автоморфизмов α объекта A, удовлетворяющих равенствам $\varphi\alpha = \varphi$ при всех морфизмах φ класса a. С любой подгруппой G группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}A$ ассоциируется отношение эквивалентности $\mathcal{A}_G \subset \dot{A} \times \dot{A}$, состоящее из всевозможных пар $(\psi, \psi') \in \dot{A} \times \dot{A}$ таких, что $\psi' = \alpha\psi$ при некотором $\alpha \in G$. Легко проверить, что отношение эквивалентности $a\overrightarrow{A}_{\bullet}$ содержит $\mathcal{A}_G$ при $G = G^a$.

Подкласс a класса $\dot{A}$ назовём супернормальным, если $a\overrightarrow{A}_{\bullet} = \mathcal{A}_{G^a}$, т.е. если из справедливости равенств $\varphi\psi = \varphi\psi'$ при всех $\varphi \in a$ следует, что $\psi' = \alpha\psi$ при некотором $\alpha \in G^a$.

Ограничение 3. Все образы $\mathcal{A}\overrightarrow{A}^{\bullet}$ классов $\mathcal{A} \in B_0(\dot{A} \times \dot{A})$ супернормальны.

При ограничении 3 существует биекция между классами, представляющими элементы $\mathbf{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$, и группами изотропии их универсальных уравнителей.

Теорема 3. *При ограничениях 1–3 следующие классы биективны.*

(i) Класс $\mathbf{B}_0(\hat{A})$ элементов $a\in\mathbf{B}(\hat{A})$ замкнутых относительно соответствия Галуа $(\overrightarrow{A}_\bullet, \overrightarrow{A}^\bullet)$.

(i') Класс $\mathcal{P}_0(A)$ всех подобъектов объекта A, являющихся универсальными уравнителями подклассов $\mathcal{A}$ класса $\hat{A}\times\hat{A}$.

(ii) Класс $\mathbf{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$ элементов $\mathcal{A}\in\mathbf{B}(\hat{A}\times\hat{A})$, замкнутых относительно соответствия Галуа $(\overrightarrow{A}_\bullet, \overrightarrow{A}^\bullet)$.

(ii') Класс $\mathcal{P}_0(\mathrm{Aut}A)$ всех подгрупп группы $\mathrm{Aut}A$, являющихся группами изотропии подклассов a класса $\hat{A}$.

Следствие. Все вышеприведенные классы являются множествами (потому, что множеством является $\mathcal{P}_0(\mathrm{Aut}A)$).◇

Доказательство. Биективность $\mathbf{B}_0(\hat{A})$ и $\mathbf{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$ - получается на основании результатов п. 3.3. Биекция между $\mathbf{B}_0(\hat{A})$ и $\mathcal{P}_0(A)$ устанавливается сопоставлением элементу $a\in\mathbf{B}_0(\hat{A})$ стабилизации по отношению эквивалентности $a\overrightarrow{A}_\bullet\in\mathbf{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$. Надо только проверить инъективность построенного отображения. Действительно, если $a,a'\in\mathbf{B}_0(\hat{A})$ и стабилизации по $a\overrightarrow{A}_\bullet$ и $a'\overrightarrow{A}_\bullet$ совпадают, то $a\overrightarrow{A}_\bullet\overrightarrow{A}^\bullet=a'\overrightarrow{A}_\bullet\overrightarrow{A}^\bullet$, а a,a' ввиду замкнутости совпадают со своими замыканиями $a\overrightarrow{A}_\bullet\overrightarrow{A}^\bullet$ и $a'\overrightarrow{A}_\bullet\overrightarrow{A}^\bullet$.

Наконец, сопоставляя элементу $\mathcal{A}\in\mathbf{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$ группу изотропии образа $\mathcal{A}\overrightarrow{A}^\bullet$, получаем в силу ограничения 3 инъективное отображение из $\mathbf{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$ в $\mathcal{P}_0(\mathrm{Aut}A)$, являющееся биективным по определению $\mathcal{P}_0(\mathrm{Aut}A)$.◇

Замечание 1. При существовании универсальных уравнителей ограничение 3 эквивалентно требованию, чтобы универсальные уравнители классов $\mathcal{A}\subset\hat{A}\times\hat{A}$ были супернормальными.

Замечание 2. Нами получена следующая цепочка биекций :

$$\mathcal{P}_0(A)\longleftrightarrow\mathbf{B}_0(\hat{A})\longleftrightarrow\mathbf{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})\longleftrightarrow\mathcal{P}_0(\mathrm{Aut}A).$$

На самом деле биекцию между $\mathcal{P}_0(A)$ и $\mathcal{P}_0(\mathrm{Aut}A)$ можно установить непосредственно с помощью соответствия Галуа, индуцированного соответствием из $\dot{A}$ в $\mathrm{Aut}A$, образованным всеми парами $(\varphi, \alpha) \in \dot{A} \times \mathrm{Aut}A$, удовлетворяющими равенству $\varphi\alpha \doteq \varphi$. При этом $\mathcal{P}_0(A)$ и $\mathcal{P}_0(\mathrm{Aut}A)$ возникают как классы замкнутых элементов относительно указанного соответствия Галуа. Это означает, что $\mathcal{P}_0(A)$ совпадает с классом подобъектов объекта A, которые являются стабилизацией по подгруппам группы $\mathrm{Aut}A$, а каждая подгруппа из $\mathcal{P}_0(\mathrm{Aut}A)$ представляет из себя изотропную группу некоторого подобъекта объекта A. Таким образом, биективность $\mathcal{P}_0(A)$ и $\mathcal{P}_0(\mathrm{Aut}\ddot{A})$ есть непосредственное следствие результатов п 3.3.

Замечание 3. Часто рассматриваются не все подобъекты объекта A, а только те подобъекты, которые содержат некоторый его фиксированный подобъект $K_0\kappa_0 A$. Совокупность всех таких подобъектов обозначим через $\mathcal{P}(A, \kappa_0)$. Введенное выше соответствие Галуа определяет биекцию между множеством $\mathrm{P}_0(A, \kappa_0)$ замкнутых относительно этого соответствия элементов $\mathcal{P}(A, \kappa_0)$ и замкнутыми подгруппами группы изотропии подобъекта G^{κ_0}.

Операция замыкания на множестве подгрупп $\mathrm{P}(G^{\kappa_0})$ группы изотропии G^{κ_0}, возникающая из соответствия Галуа, удовлетворяет следующему свойству.

3.7. Предложение. Если H - нормальная подгруппа группы G^{κ_0}, то и ее замыкание $\bar{H}$ нормально в G^{κ_0}. ◇

ABSTRACT. Connections between semigroups and groups associated with a morphism and its intermediate subobjects are investigated in case of an abstract category. Results similar to the statements of the main theorem of Galois theory are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Галуа. Сочинения, М.-Л., 1936.
2. E. Artin, Galoische theorie, Lpz, 1959.
3. М. М. Постников, Теория Галуа, Москва, Наука, 1963.
4. W. Krull, "Galoische theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen," Math. Ann., vol. C, 1928.

5. Н. Бурбаки, Алгебра. Многочлены и Поля. Упорядоченные Группы, М., Наука, 1965.
6. Г. Шимура, Введение в Арифметическую Теорию Автоморфных Функций, М., Мир, 1973.
7. N. Jacobson, Lectures in Abstract Algebra, vol.III, 1964.
8. И. И. Пятецкий-Шапиро, И. Р. Шафаревич, "Теория Галуа трансцендентных расширений и униформизация", Изв. АН. СССР, серия Матем., том 30, стр. 671 – 704, 1966.
9. Y. Yhara, On Congruence Monodromy Problem, Lect. Notes, University of Tokio, vol. I, II, 1968 – 69.
10. Н. Джекобсон, Теория Колец, М., 1947.
11. Н. Джекобсон, Строение Колец, М., 1961.
12. A. Rosenberg, D. Zelinsky, "Extension of derivations in continuous transformation rings," Trans. Amer. Math. Soc., vol.79, pp. 453–458, 1955.
13. A. Rosenberg, D. Zelinsky, "Galois theory of continuous transformation rings," Trans. Amer. Math. Soc., vol. 79, pp. 429–452, 1955.
14. D. Zelinsky, Noncommutative Galois theory, Translated by Nobuo Nobusawa, Sūgaku, vol. 8, 1956–57.
15. Математическая энциклопедия, т. 1, М., 1977, т. 2, М., 1979.
16. S. U. Chase, M. E. Swedler, Hopf Algebras and Galois Theory, B.– Hdlb.– N.Y., 1969.
17. F. De Meyer, E. Ingraham, Separable Algebras over Commutative Rings, B.– Hdlb.– N.Y., 1971.
18. A. R. Magid, The Separable Galois Theory of Commutative Rings, N.Y., 1974.
19. S. U. Shase, D. K. Harrison, A. Rosenberg, "Galois theory and Galois cohomology of commutative rings," Mem. AMS, vol. 52, pp. 15–33, 1965.
20. E. R. Kolchin, "Extentions of differential fields," Ann. of Math., vol. I, no. 43, pp. 724–729, 1942.
21. E. R. Kolchin, "Galois theory of differential fields," Amer. J. of Math., vol. 75, pp. 753–824, 1953.
22. E. R. Kolchin, "On the Galois theory of differential fields," Amer. J. of Math., vol. 77, pp. 868–894, 1955.
23. E. R. Kolchin, Differential Algebra and Algebraic gruppas, N. Y.–L., 1973.
24. J. F. Ritt, Differential Algebras, Amer. Math. Soc. Coll. Pub., vol. 33, 1950.
25. J. F. Ritt, Differential Equations from the Algebraic Standpoint, Amer. Math. Soc. Coll. Pub., vol. 14, 1932..
26. И. Капланский, Введение в Дифференциальную Алгебру, М., 1959.
27. А. В. Яковлев, " Теория Галуа для пучков множеств", Труди МИАН СССР, Л., Наука, т. 148, стр. 253–268, 1978.
28. Р. Баер, Линейная Алгебра и Проективная Геометрия, М., 1955.
29. Н. Г. Чеботарев, Теория Алгебраических Функций, М.–Л., 1948.
30. О. Форстер, Римановы Поверхности, М., Мир, 1980.
31. J. Murre, Lectures on an Introduction to Grothendieck's Theory of the Fundamental gruppa, L. N., Bombay, 1967.
32. Дж. Милн, Этальные Когомологии, М., Мир, 1983.
33. И. Р. Шафаревич, Основы Алгебраической Геометрии, т. 1, М., Наука, 1988.
34. Ж.-П. Серр, Алгебраические Группы и Поля Классов, М., Мир, 1968.
35. С. Г. Далалян, "Башни кривых и многообразия Прима", Изв. АН АрмССР, Математика, том 14, № 1, стр. 49 – 69, 1979.

36. С. Г. Далалян, "О многообразии Прима разветвленного двулистного накрытия тригональной кривой", Учен. записки ЕГУ, естест. науки, № 1 (155), стр. 7–13, 1984.
37. П. Кон, Универсальная Алгебра, М., Мир, 1968.
38. М. Ш. Цаленко, Е. Г. Шульгейфер, Основы Теории Категорий, М., Наука, 1974.
39. Г. Биркгоф, Теория Решоток, М., Наука, 1984.
40. А. Г. Курош, Общая Алгебра, М., 1962.
41. Ю. В. Зюзин, В. Я. Лин, "Неразветвленные алгебраические расширения коммутативных банаховых алгебер", Матем. сб., т. 91 (133), № 3(7) стр. 402 - 420, 1973.
42. С. Григорян, "Полиномиальные расширения коммутативных банаховых алгебр", Изв. АН АрмССР, Математика, том 20, № 2, стр. 112 – 130, 1985.
43. D. T. Brown, "Galois theory for Banach algebras", Pacific J. Math., 30, no. 3, pp. 577 – 600, 1969.
44. R. Arens, K. Hoffman, "Algebraic extensions of normal algebras", Proc. AMS, 7, pp. 203 – 210, 1956.
45. J. A. Zindberg, "Algebraic extensions of commutative Banach algebras", Pacific J. Math., 14, pp. 559 – 584, 1964.
46. Б. И. Плоткин, Группы Автоморфизмов Алгебраических Систем, М., Наука, 1966.
47. M. Krasner, "Une generalisation de la notion de corps", J. Math. pures et appl., 17, f. 4, 367 – 385, 1938.
48. A. Adam, "A theorem of algebraic operators in the most general sense", Acta scint. math., 18, № 3–4, pp. 205 – 206, 1957.

25 Марта 1992 Ереванский государственный университет

О ТОЧНЫХ ПОПЕРЕЧНИКАХ КЛАССА ФУНКЦИЙ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХСЯ СВЁРТКОЙ

С. А. Айунц

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 27, № 4, 1992

В работе вычислены колмогоровский, бернштейновский и линейный точные n–поперечники функционального класса $W_\infty^{*K}(I) = \{x(\cdot) \mid \quad x(t) = (K * u)(t),\ t \in I,\ u(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}),\ ||u(\cdot)||_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq 1\}$ в пространстве $L_\infty(I)$, $I = [0,1]$, $K(\cdot)$ – непрерывная и интегрируемая на вещественной оси $\mathbb{R}$ функция такая, что $\int_{-\infty}^{+\infty} K(t)\,dt = 1$ и функция $F(t,\xi) = K(t-\xi)$ строго вполне положительна на $\mathbb{R}^2$. Доказано, что значения поперечников равны норме сверточного совершенного K сплайна, наименее уклоняющегося от нуля в метрике $L_\infty(I)$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей статьи вычислить точные n-поперечники класса

$$W_\infty^{*K}(I) = \{x(\cdot) \mid \quad x(t) = (K * u)(t),\ t \in I,\ u(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}),\ ||u(\cdot)||_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq 1\},$$

в пространстве $L_\infty(I)$, $I = [0,1]$, $K(\cdot)$ – непрерывная и интегрируемая на вещественной оси $\mathbb{R}$ функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi)\,d\xi = 1 \quad \text{и} \quad F(t,\xi) := K(t-\xi) \quad \text{строго вполне положительна,} \tag{1}$$

а $(K * u)(\cdot)$ обозначает свёртку функций $K(\cdot)$ и $u(\cdot)$.

Напомним (см. [1]), что функция $F(\cdot)$ называется строго вполне положительной на $\mathbb{R}^2$, если

$$F\begin{pmatrix} t_1, & \dots & ,t_n \\ \xi_1, & \dots & ,\xi_n \end{pmatrix} := \det\left(F(t_i,\xi_j)\right)_{i,j=1}^n > 0,$$

для любых действительных $t_1 < \dots < t_n$, $\xi_1 < \dots < \xi_n$ и $n \in \mathbb{N}$.

Статья основана на работе В. М. Тихомирова [2], которая получила дальнейшее развитие в работах С. А. Мичелли и А. Пинкуса (см. [1]). Мы докажем, что точные n-поперечники класса $W_\infty^{*K}(I)$ в $L_\infty(I)$ равны значению следующей экстремальной задачи

$$(P) \qquad \|1 + 2\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \Phi(t-\theta_i)\|_{C(I)} \to \inf; \quad -\infty < \theta_1 \le \theta_2 \le \ldots \le \theta_n < +\infty,$$

где $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} K(\xi)\,d\xi$, а минимум ищется по всевозможным точкам θ_i, $1 \le i \le n$.

Эта задача чебышевского типа и была решена в [2] с использованием топологических методов. Здесь мы приводим экстремальное решение этой задачи. В нашем случае удаётся реализовать метод предложенный В. М. Тихомировым для полиномиальных совершенных сплайнов (см. [2], [4]).

При решении задачи (P), мы используем необходимые и достаточные условия минимума в выпуклых задачах, теорему об очистке и основную теорему алгебры для свёрточных совершенных K-сплайнов. Последняя теорема доказана в статье [5], с использованием свойств чебышевских совершенных K-сплайнов. Здесь приведено другое, более короткое доказательство этого результата.

Отметим, что топологический подход в подобных задачах достаточно эффективен (см. [1], [6], [7]), но экстремальный подход имеет преимущество, так как он универсален для широкого класса экстремальных задач теории приближений.

§1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Прежде всего приведём определения колмогоровского, линейного и бернштейновского n–поперечников.

Пусть X – линейное нормированное пространство и W – некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество X. Величина

$$d_n(W, X) = \inf_{L_n \in \mathrm{Lin}_n(X)} \sup_{x \in W} \inf_{y \in L_n} \|x - y\|,$$

где нижняя грань берётся по всем подпространствам L_n размерности n пространства X, называется колмогоровским n-поперечником. Подпространство L_n при котором достигается нижняя грань называется оптимальным для $d_n(W, X)$.

Бернштейновским n-поперечником называется величина

$$b_n(W, X) = \sup_{X_{n+1}} \sup\{\lambda : \quad \lambda S(X_{n+1}) \subset W\},$$

где верхняя грань берётся по всем $(n+1)$-мерным подпространствам X_{n+1} из X, а $S(\cdot)$ – единичный шар в X_{n+1}.

Линейным n-поперечником называется величина

$$\lambda_n(W, X) = \inf_{L_n \in \mathrm{Lin}_n(X), \Lambda \in \mathcal{L}(X, L_n)} \sup_{x \in W} \|x - \Lambda x\|,$$

где нижняя грань берётся по всем подпространствам X конечной размерности $\le n$ и всем линейным операторам из X в L_n.

Пусть $K(\cdot)$ удовлетворяет условию (1), $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} K(\xi)\, d\xi$, и пусть $\theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n$ произвольные точки заданные на $\mathbb{R}$.

Определение 1. Функция $x(\cdot)$ называется свёрточным совершенным K-сплайном с узлами в точках θ_i, если $x(t) = (K * u_\theta)(t)$, где $u_\theta(t) = (-1)^i$ для $\theta_{i-1} \le t < \theta_i$, $1 \le i \le n+1 (\theta_0 := -\infty, \theta_{n+1} := +\infty)$.

Нетрудно убедится, что свёрточный совершенный K- сплайн можно представить в следующей форме

$$x(t) = 1 + 2\sum_{i=1}^{n} (-1)^i\, \Phi(t - \theta_i). \tag{2}$$

Определение 2. Непрерывная функция $x(\cdot)$ имеет "n-альтернанс" на отрезке $I = [0, 1]$ (и пишем $\mathrm{Alt}(x(\cdot), I) = n$), если существуют точки $0 \le \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{n+1} \le 1$, в которых $|x(\tau_i)| = \|x(\cdot)\|_{C(I)}$ и $x(\tau_i)\, x(\tau_{i+1}) < 0$, $1 \le i \le n$ и нет систем из большего чем $n+1$ элементов, обладающих описанным свойством.

Обозначим через $Z(x(\cdot), I)$ число простых нулей непрерывной функции $x(\cdot)$ на I а через $S(u(\cdot), \mathbb{R})$ число перемен знаков кусочно непрерывной функции $u(\cdot)$ на $\mathbb{R}$. Пусть $\{\theta_i\}_{i=1}^{n}$ и $\{\eta_i\}_{i=1}^{m}$ две системы точек на $\mathbb{R}$. Определим следующие две кусочно постоянные функции : $u_\theta(t) = (-1)^i$ для $t \in [\theta_i, \theta_{i+1})$, $0 \le i \le n$ и $u_\eta(t) = (-1)^j$ для $t \in [\eta_j, \eta_{j+1})$, $0 \le j \le m (\theta_0 = \eta_0 = -\infty, \theta_{n+1} = \eta_{m+1} = +\infty)$.

Доказательство следующих лемм можно найти в [1].

Лемма 1.

$$S(u_\theta(\cdot) \pm u_\eta(\cdot), \mathbb{R}) \le \min(n, m),$$

если $m = n$, *то* $S(u_\theta(\cdot) - u_\eta(\cdot), \mathbb{R}) \le n - 1.$

Лемма 2. *Пусть* $K(\cdot)$ *удовлетворяет условию (1). Тогда имеет место неравенство*

$$Z\left((K * u)(\cdot), \mathbb{R}\right) \le S(u(\cdot), \mathbb{R}). \tag{3}$$

§2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ ДЛЯ СВЁРТОЧНЫХ СОВЕРШЕННЫХ K- СПЛАЙНОВ

Теорема 1. *Для любых* $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$ *существует единственный сверточный совершенный* K*-сплайн* $x_\theta(\cdot) = (K * u_\theta)(\cdot)$ *с* n *узлами в* $\theta_1 < \ldots < \theta_n$ *такой, что* $x_\theta(\alpha_j) = 0$, $1 \le j \le n$.

Доказательство. Для простоты предположим, что все α_j принадлежат $I = [0, 1]$ для всех j (в противном случае рассмотрим отрезок $[\alpha_1, \alpha_n]$). Для $n = 1$ утверждение очевидно. При $n > 1$ рассмотрим единичную сферу в $\mathbb{R}^{n+1}$

$$O^n = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} | \quad \sum_{i=1}^{n+1} |z_i| = 1\}$$

относительно нормы $||z||_1 = \sum\limits_{i=1}^{n+1} |z_i|$. Каждой точке $z \in O^n$ ставим в соответствие следующий набор точек отрезка I :

$$\widetilde{t}_i(z) = \sum_{l=0}^{i} |z_l|, \ 1 \le i \le n+1, \ z_0 = 0, \quad \widetilde{t}_{n+1}(z) = 1.$$

Далее обозначим

$$t_i(z) = \widetilde{t}_i(z), \quad 2 \le i \le n-1,$$

$$t_1(z) = \begin{cases} \widetilde{t}_1(z), & z_1 z_2 < 0, \\ -\widetilde{t}_1(z) / (\widetilde{t}_2(z) - \widetilde{t}_1(z)), & z_1 z_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$t_n(z) = \begin{cases} \widetilde{t}_n(z), & z_n z_{n+1} < 0, \\ \widetilde{t}_n(z) / (\widetilde{t}_n(z) - \widetilde{t}_{n-1}(z)), & z_n z_{n+1} \ge 0. \end{cases}$$

Рассмотрим следующую функцию на $\mathbb{R}$

$$u(t,z) = \begin{cases} -\operatorname{sign} z_2, & -\infty < t < t_1(z), \\ \operatorname{sign} z_i, & t_{i-1}(z) \le t < t_i(z),\ 2 \le i \le n, \\ -\operatorname{sign} z_n, & t_n(z) \le t < +\infty. \end{cases}$$

Заметим, что эта функция $u(t,z)$ меняет знак на $\mathbb{R}$ не более чем n раз, причём имеет не более двух перемен знака вне отрезка I.

Положим

$$x(t,z) = (K * u(\cdot, z))(t).$$

Определим отображение $F\colon O^n \mapsto \mathbb{R}^n$ следующим способом

$$F(z_1, ..., z_{n+1}) = (x(\alpha_1, z), ..., x(\alpha_n, z)).$$

Нетрудно проверить, что F нечётное и непрерывное отображение. Следовательно, по теореме Борсука (см., например, [4]) получим, что существует $\bar{z} \in O^n$ такое, что $F(\bar{z})$, т.е. $x(\alpha_j, \bar{z}) = 0$, $1 \le j \le n$. Теорема доказана.

§3. ЧЕБЫШЕВСКИЕ СВЁРТОЧНЫЕ СОВЕРШЕННЫЕ K-СПЛАЙНЫ

В этом параграфе мы докажем существование и единственность решения экстремальной задачи

$$(P) \qquad ||1 + 2\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\,\Phi(t-\theta_i)||_{C(I)} \to \inf;\quad -\infty < \theta_1 \le \theta_2 \le ... \le \theta_n < +\infty,$$

и опишем свойства однозначно характеризующие решение.

Лемма 3. *Решение задачи (P) существует.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(\theta_1, ..., \theta_n) = ||1 + 2\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\,\Phi(t-\theta_i)||_{C(I)}$$

определённую на расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\pm\infty\}$.

Нетрудно убедится, что функция f непрерывна. Следовательно, Лемма 3 является прямым следствием теоремы Вейерштрасса.

Пусть $\hat{x}(t) = 1 + 2\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\,\Phi(t-\bar{\theta}_i)$ – решение задачи (P).

Обозначим через

$$L_m^K = \{y(\cdot)| \quad y(t) = \sum_{i=1}^{m} y_i\,K(t-\bar{\theta}_i),\ y_i \in \mathbb{R}\}$$

m-мерное подпространство K-полиномов.

Лемма 4. *Наилучшее приближение $\hat{x}(\cdot)$ подпространством L_m^K в метрике $C(I)$ равно $||\hat{x}(\cdot)||_{C(I)}$, т.е.*

$$d(\hat{x}(\cdot), L_m^K; C(I)) := \inf_{y(\cdot)\in L_m^K} ||\hat{x}(\cdot) - y(\cdot)||_{C(I)} = ||\hat{x}(\cdot)||_{C(I)}.$$

Доказательство. Предположим, что существует K-полином $\overline{y}(t) = = 2\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\overline{y}_i K(t-\hat{\theta}_i)$ такой, что для некоторого $\delta_0 > 0$

$$||\hat{x}(\cdot) + \overline{y}(\cdot)||_{C(I)} = ||\hat{x}(\cdot)||_{C(I)} - \delta_0. \tag{4}$$

Обозначим

$$x_\varepsilon(t) = 1 + 2\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\Phi(t - \hat{\theta}_i - \varepsilon\overline{y}_i).$$

По формуле Лагранжа существуют числа $\widetilde{\varepsilon}_i \in (0,\varepsilon]$, $1 \le i \le m$ такие, что

$$x_\varepsilon(t) = 1 + 2\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\left(\Phi(t-\hat{\theta}_i) - \varepsilon\overline{y}_i\,K(t-\hat{\theta}_i - \widetilde{\varepsilon}_i\overline{y}_i)\right) = \hat{x}(t) + \varepsilon\widetilde{y}_\varepsilon(t), \tag{5}$$

где

$$\widetilde{y}_\varepsilon(t) = 2\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\overline{y}_i\,K(t-\hat{\theta}_i - \widetilde{\varepsilon}_i\overline{y}_i).$$

Далее, из непрерывности функции $K(\cdot)$, для $\delta_0 > 0$ найдётся $\varepsilon \in (0,1)$ такое, что

$$||\overline{y}(\cdot) - \widetilde{y}_\varepsilon(\cdot)||_{C(I)} < \delta_0.$$

Используя соотношения (4) и (5), получим

$$||x_\varepsilon(\cdot)||_{C(I)} = ||(1-\varepsilon)\hat{x}(\cdot) + \varepsilon(\hat{x}(\cdot) + \widetilde{y}_\varepsilon(\cdot))||_{C(I)} \le$$

$$\le (1-\varepsilon)||\hat{x}(\cdot)||_{C(I)} + \varepsilon||\hat{x}(\cdot) + \overline{y}(\cdot)||_{C(I)} + \varepsilon||\overline{y}(\cdot) - \widetilde{y}_\varepsilon(\cdot)||_{C(I)} < ||\hat{x}(\cdot)||_{C(I)},$$

что противоречит минимальности $\hat{x}(\cdot)$. Лемма доказана.

Из леммы 4 следует, что функция $y(\cdot) = 0$ является решением следующей выпуклой экстремальной задачи

$$g(y) \mapsto \inf; \quad y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$$

где

$$g(y) = \max_{t\in I}|\hat{x}(t) + \sum_{i=1}^{m} y_i\,K(t-\hat{\theta}_i)|.$$

Необходимое и достаточное условие минимума для этой выпуклой задачи есть следующее условие $0 \in \partial g(\hat{y})$, $\hat{y} = (0,...,0)$. Следовательно, по теореме об очистке (см. [4]) существуют точки $\{\tau_i\}_{i=1}^s$, $s \leq m+1$, $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < .. < \tau_s \leq 1$ и числа $\{\alpha_i\}_{i=1}^s$, $\alpha_i > 0$, $\sum\limits_{i=1}^s \alpha_i = 1$ такие, что $|\hat{x}(\tau_i)| = ||\hat{x}(\cdot)||_{C(I)}$, $1 \leq i \leq s$ и

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_i)\, y(\tau_i) = 0 \quad \text{для любой} \quad y(\cdot) \in L_m^K. \tag{6}$$

Докажем, что $s = m+1$. Допустим, что $s \leq m$ и рассмотрим следующий K-полином

$$\widetilde{y}(t) = K * \begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 & \hat{\theta}_2 & \dots & \hat{\theta}_{s-1} & \hat{\theta}_s \\ \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_{s-1} & t \end{pmatrix} :=$$

$$:= \begin{vmatrix} K(\tau_1 - \hat{\theta}_1) & \dots & K(\tau_{s-1} - \hat{\theta}_1) & K(t - \hat{\theta}_1) \\ K(\tau_1 - \hat{\theta}_2) & \dots & K(\tau_{s-1} - \hat{\theta}_2) & K(t - \hat{\theta}_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(\tau_1 - \hat{\theta}_s) & \dots & K(\tau_{s-1} - \hat{\theta}_s) & K(t - \hat{\theta}_s) \end{vmatrix}.$$

В силу условий (1) система функций $\{K(t - \hat{\theta}_j)\}_{j=1}^s$ является чебышевской. Следовательно, $\widetilde{y}(\tau_s) > 0$. Но если подставить функцию $\widetilde{y}(\cdot)$ в (6) получим

$$\alpha_s \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_s)\, \widetilde{y}(\tau_s) = 0$$

(по определению $\widetilde{y}(\tau_s)(\cdot)$ следует, что $\widetilde{y}(\tau_i) = 0$, $1 \leq i \leq s-1$).

Следовательно $\widetilde{y}(\tau_s) = 0$. Это противоречие доказывает, что $s = m+1$.

Покажем теперь, что $\hat{x}(\cdot)$ имеет "m-альтернанс", т.е. максимумы и минимумы $\hat{x}(\cdot)$ чередуются в точках τ_j, $1 \leq j \leq m+1$.

Положим

$$y_j(t) = K * \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_{j-1} & \theta_j & \dots & \theta_{m-1} & \theta_m \\ \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_{j-1} & \tau_{j+1} & \dots & \tau_m & t \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Если подставим эти функции в уравнение (6) с $s = m+1$, получим

$$\alpha_j \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_j)\, y_j(\tau_j) + \alpha_{m+1} \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_{m+1})\, y_j(\tau_{m+1}) = 0. \tag{7}$$

Так как система функций $\{K(t - \hat{\theta}_j)\}_1^{m+1}$ чебышевская, то $\operatorname{sign} y_j(\tau_{m+1}) = 1$, $\operatorname{sign} y_j(\tau_j) = (-1)^{m-j+1}$.

Следовательно, из (7) получаем

$$\operatorname{sign} \hat{x}(\tau_j) = (-1)^{m-j} \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_{m+1}), \; 1 \leq j \leq m.$$

Это означает, что в точках τ_j знаки $\hat{x}(\cdot)$ чередуются.

Докажем, что $\tau_1 = 0, \tau_s = 1$. Предположим, что $\tau_1 > 0$. Тогда производная функции $\hat{x}(\cdot)$ имеет по крайней мере m нулей в точках $\tau_1, ..., \tau_m$. С другой стороны, производная функции $\hat{x}(\cdot)$ – K-полином "степени" $m-1$, который, как известно, имеет не более $m-1$ нулей. Это противоречие доказывает утверждение. Аналогично доказывается, что $\tau_s = 1$.

Покажем теперь, что число узлов решения максимальное, т.е. $m = n$. Предположим, что $m < n$. Обозначим через $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_m$ нули функции $\hat{x}(\cdot)$ на $(0,1)$ и выберем α_{m+1} так, чтобы $\alpha_m < \alpha_{m+1} < 1$. По Теореме 1 существует сверточный совершенный K-сплайн

$$\overline{x}(t) = \left(K * u_{\overline{\theta}}\right)(t) = 1 + 2\sum_{i=1}^{m+1}(-1)^i\Phi(t-\overline{\theta}_i)$$

с $m+1$ узлами $\overline{\theta}_1 < \overline{\theta}_2 < ... < \overline{\theta}_{m+1}$ такой, что $\overline{x}(\alpha_j) = 0$.

Для того, чтобы доказать наше утверждение, достаточно показать, что $\|\overline{x}(\cdot)\|_{C(I)} < \|\hat{x}(\cdot)\|_{C(I)}$. Так как система функций $\{K(\alpha_j - \xi)\}_1^m$ – чебышевская, то для каждого $t \in I$ следующая система уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} c_i\, K(\alpha_i - \hat{\theta}_j) = K(t - \hat{\theta}_j),\ j = 1, ..., m,$$

имеет единственное решение, причём

$$\operatorname{sign}(K(t-\xi) - \sum_{i=1}^{m} c_i\, K(\alpha_i - \xi)) = \operatorname{sign}\hat{x}(t)u_{\hat{\theta}}(\xi). \tag{8}$$

Пусть $\overline{c}_i$, $1 \le i \le m$ решение этой системы. Тогда учитывая, что $\hat{x}(\alpha_j) = 0$, $1 \le j \le m$ и условие (8) имеем

$$|\hat{x}(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} K(t-\xi)u_{\hat{\theta}}(\xi)\,d\xi\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}(K(t-\xi) - \sum_{i=1}^{m}\overline{c}_i\, K(\alpha_i - \xi))u_{\hat{\theta}}(\xi)\,d\xi\right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left|K(t-\xi) - \sum_{i=1}^{m}\overline{c}_i\, K(\alpha_i-\xi)\right|d\xi.$$

Следовательно,

$$|\overline{x}(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} K(t-\xi)u_{\overline{\theta}}(\xi)\,d\xi\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}(K(t-\xi) - \sum_{i=1}^{m}\overline{c}_i\, K(\alpha_i - \xi))u_{\overline{\theta}}(\xi)\,d\xi\right| \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} \left| K(t-\xi) - \sum_{i=1}^{m} \overline{c}_i K(\alpha_i - \xi) \right| d\xi = |\hat{x}(t)|.$$

Для того, чтобы доказать неравенство $||\overline{x}(\cdot)||_{C(I)} < ||\hat{x}(\cdot)||_{C(I)}$, заметим, что если существует $\tilde{\tau} \in I$, для которого $|\overline{x}(\tilde{\tau})| = ||\hat{x}(\cdot)||_{C(I)}$, то найдётся $\tilde{t} \in I, \tilde{t} \ne \alpha_i$ такая, что $\overline{x}(\tilde{t}) = \hat{x}(\tilde{t})$. Но тогда функция $\hat{x}(\cdot) - \overline{x}(\cdot)$ имеет не менее $(m+1)$ нулей. Но по Лемме 1, этот факт противоречит неравенству

$$Z(\hat{x}(\cdot) - \overline{x}(\cdot), \mathbb{R}) \le S(u_{\hat{g}}(\cdot) - u_{\overline{g}}(\cdot), \mathbb{R}) \le m.$$

Противоречие доказывает, что $m = n$.

Докажем единственность решения задачи (P). Допустим существуют две функции $x_1(\cdot) = (K * u_1)(\cdot)$ и $x_2(\cdot) = (K * u_2)(\cdot)$ такие, что

$$\mathrm{Alt}(x_i(\cdot, I) = S(u_i(\cdot), \mathbb{R}) = n, \quad |u_i(t)| \equiv 1, \ i = 1, 2.$$

Так как $\mathrm{Alt}(x_i(\cdot), I) = n$, то $Z(x_1(\cdot) - x_2(\cdot), I) \ge n$. По Лемме 1 имеем $S(u_1(\cdot) - u_2(\cdot), \mathbb{R}) \le n - 1$. Следовательно,

$$Z(x_1(\cdot) - x_2(\cdot), I) > S(u_1(\cdot) - u_2(\cdot), \mathbb{R}),$$

что противоречит утверждению Леммы 2.

Как и в работе [3], обозначим единственное решение задачи (P) через $x_n^{*K}(\cdot)$ и назовём чебышевским свёрточным совершенным K-сплайном. Таким образом мы доказали следующую

Теорема 2. *Если $n \ge 0$ – целое число, то существует единственный с точностью до знака свёрточный совершенный K-сплайн $x_n^{*K}(\cdot) = (K * u_n)(\cdot)$ с n узлами, имеющий на отрезке I "n-альтернанс".*

Аналогично можно доказать существование золотаревских свёрточных совершенных K-сплайнов, которые были введены в работе [3].

§4. ТОЧНЫЕ n-ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССА $W_\infty^{*K}(I)$ В $L_\infty(I)$.

Ниже $||\cdot||_\infty$ обозначает $L_\infty(I)$-норму, которая совпадает с $C(I)$-нормой.

Теорема 3. *Колмогоровский n-поперечник $W_\infty^{*K}(I)$ в $L_\infty(I)$ равен*

$$d_n(W_\infty^{*K}(I), L_\infty(I)) = ||x_n^{*K}(\cdot)||_\infty.$$

Подпространство $L_n^K = \operatorname{lin}\{K(\cdot - \hat\theta_1), ..., K(\cdot - \hat\theta_n)\}$ *является оптимальным для* $d_n(W_\infty^{*K}(I), L_\infty(I))$, *где* $\{\hat\theta_i\}$ *узлы чебышевского свёрточного совершенного* K*-сплайна.*

Доказательство. Мы разделим доказательство на две части :

А) Оценка снизу. Поскольку имеет место неравенство $b_n(W, X) \leq \leq d_n(W, X)$ (см. [1]), то оценку снизу достаточно получить для бернштейновского n-поперечника $W_\infty^{*K}(I)$ в $L_\infty(I)$. Докажем, что $b_n(W_\infty^{*K}(I), L_\infty(I)) \geq ||x_n^{*K}(\cdot)||_\infty$. Для этого достаточно показать, что $||x_n^{*K}(\cdot)||_\infty S(\bar x_{n+1}) \subset W_\infty^{*K}(I)$, где $\bar x_{n+1} = \operatorname{lin}\{1, \Phi(t - \hat\theta_1), ..., \Phi(t - \hat\theta_n)\}$. Ясно, что K-сплайн $y(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} y_i \Phi(t - \hat\theta_i)$ из подпространства $\bar x_{n+1}$ принадлежит классу $W_\infty^{*K}(I)$ тогда и только тогда, когда $|y_i| \leq 1$, $1 \leq i \leq n$. Следовательно, осталось показать, что из условия

$$||y_0 + \sum_{i=1}^{n} y_i \Phi(t - \hat\theta_i)||_\infty \leq ||x_n^{*K}(\cdot)||_\infty \tag{9}$$

следует, что $|y_i| \leq 1$, $0 \leq i \leq n$. Предположим обратное, т.е. существует K-сплайн $\overline{y}(t) = \overline{y}_0 + \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i \Phi(t - \hat\theta_i)$, который удовлетворяет условию (9) и тем не менее $|\overline{y}_{i_0}| = \max_{0 \leq i \leq n} |\overline{y}_i| > 1$. Тогда для $z(t) = \overline{y}(t) / |\overline{y}_{i_0}|$ имеем

$$||z(\cdot)||_\infty = ||y_0 / \overline{y}_{i_0} + \sum_{i=1}^{n} (y_i / \overline{y}_{i_0}) \Phi(t - \hat\theta_i)||_\infty < ||x_n^{*K}(\cdot)||_\infty.$$

Так как $\operatorname{Alt}(x_n^{*K}(\cdot), I) = n$, то $S(x_n^{*K}(\cdot) - z(\cdot), I) \geq n$. С другой стороны, узлы сплайнов $x_n^{*K}(\cdot)$ и $z(\cdot)$ совпадают и $u_n(t) - u_z(t) \equiv 0$, если $t \in [\hat\theta_{i_0}, \hat\theta_{i_0+1}]$. Следовательно, $S(u_n(\cdot) - u_z(\cdot), \mathbb{R}) \leq n - 1$. Это противоречит неравенству $Z(x_n^{*K}(\cdot) - z(\cdot), I) \leq S(u_n(\cdot) - u_z(\cdot), \mathbb{R})$, и оценка снизу доказана.

Б) Оценка сверху. Заметим, что для любого $x(\cdot) \in W_\infty^{*K}(I)$ существует интерполяционный K-полином из подпространства $L_n^K = \operatorname{lin}\{K(\cdot - \hat\theta_1), ..., K(\cdot - \hat\theta_n)\}$ такой, что $y(\alpha_i) = x(\alpha_i)$, $1 \leq i \leq n$, где α_i – нули функции $x_n^{*K}(\cdot)$. Докажем, что $||x(\cdot) - y(\cdot)||_\infty \leq ||x_n^{*K}(\cdot)||_\infty$. Нетрудно убедится, что интерполяционный K-полином для функции $x(\cdot) \doteq (K * u)(\cdot)$ имеет следующий вид

$$y(t) = -\left[K_* \begin{pmatrix} \hat\theta_1 & \dots & \hat\theta_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}\right]^{-1} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{vmatrix} K(\alpha_1 - \hat\theta_1) & \dots & K(\alpha_1 - \hat\theta_n) & K(\alpha_1 - \xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(\alpha_n - \hat\theta_1) & \dots & K(\alpha_n - \hat\theta_n) & K(\alpha_n - \xi) \\ K(t - \hat\theta_1) & \dots & K(t - \hat\theta_n) & 0 \end{vmatrix} u(\xi)\, d\xi.$$

Следовательно,

$$x(t) - y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,\xi)\, u(\xi)\, d\xi,$$

где

$$G(t,\xi) = K * \begin{pmatrix} \hat\theta_1 & \dots & \hat\theta_n & \xi \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n & t \end{pmatrix} \Big/ K * \begin{pmatrix} \hat\theta_1 & \dots & \hat\theta_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$|x(t) - y(t)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,\xi)|\, d\xi. \tag{10}$$

Так как $\operatorname{sign} G(t,\xi) = (-1)^{i+j}$ для $t \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$ и $\xi \in (\hat\theta_j, \hat\theta_{j+1})$, равенство в (10) достигается для $u(\cdot) = u_{\hat\theta}(\cdot)$. Но при таком $u(\cdot)$ верно следующее соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(t,\xi)\, u_{\hat\theta}(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-\xi)\, u_{\hat\theta}(\xi)\, d\xi.$$

Следовательно, мы имеем

$$|x(t) - y(t)| \le \left|\left(K * u_{\hat\theta}\right)(t)\right|, \, t \in I.$$

Таким образом, оценка сверху доказана, и более того получено равенство

$$\sup_{x(\cdot)\in W_\infty^{*K}(I)} \|x(t) - y(\cdot)\|_\infty = \|x_n^{*K}(\cdot)\|_\infty,$$

которое завершает доказательство Тоеремы 3.

Из неравенства $b_n \le d_n$ а также из того, что оценка сверху для d_n получена линейным методом, мы приходим к следующему результату

Следствие. Имеют место следующие равенства

$$\lambda_n(W_\infty^{*K}(I), L_\infty(I)) = b_n(W_\infty^{*K}(I), L_\infty(I)) = \|x_n^{*K}(\cdot)\|_\infty,$$

причём оптимальным линейным отображением для λ_n будет отображение ранга n, которое каждому $x(\cdot) \in W_\infty^{*K}(I)$ ставит в соответствие его интерполяционный K-полином в точках $\{\alpha_i\}$, где α_i – нули $x_n^{*K}(\cdot)$.

ABSTRACT. In this paper we calculate the exact n-widths due to Kolmogorov and Bernstein as well as linear n-width of a functional class $W_{\infty}^{*K}(I) = \{x(\cdot) \mid \; x(t) = (K * u)(t), t \in I, u(\cdot) \in L_{\infty}(\mathbb{R}), ||u(\cdot)||_{L_{\infty}(\mathbb{R})} \leq 1\}$ in the space $L_{\infty}(I)$, $I = [0,1]$. Here $K(\cdot)$ is a continuous, integrable function defined on the real axis $\mathbb{R}$, with properties $\int_{-\infty}^{+\infty} K(t)\,dt = 1$ and the function $F(t,\xi) = K(t-\xi)$ is strictly totally positive on $\mathbb{R}^2$. We prove that all three n-widths considered are equal to $||x_n^{*K}(\cdot)||_{\infty}$, where $x_n^{*K}(\cdot)$ is the convolution perfect K-spline least deviating from zero in $L_{\infty}(I)$ norm.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Pinkus, n-widths in Approximation Theory, Berlin, Springer, 1985.
2. В. М. Тихомиров, "Наилучшие методы приближения и интерполирования гладких функций в пространстве $C[-1,1]$," Мат. Сборник, том 80, № 2, стр. 290–304, 1969.
3. С. А. Айунц, "Обобщённые совершенные сплайны и их экстремальные свойства," Автореф. канд. дисс., Ереван, 1989.
4. В. М. Тихомиров, Некоторые вопросы теории приближения, Изд–во МГУ, Москва, 1976.
5. С. А. Айунц, "Основная теорема алгебры для свёрточных совершенных K-сплайнов и оптимальная K-интерполяция," , Изв. АН Армении, Математика [английский перевод :Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of sciences)], том 26, № 3, стр. 268–287, 1991.
6. S. Karlin "Oscillatory perfect splines and related extremal problems," In : "Spline Function and Approximation Theory," (ed. by S. Karlin, C. Micchaelli, A. Pinkus and J. Schoenberg), Acad. Press, no. 4, pp. 371–400, 1976.
7. А. А. Женсыкбаев, "Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы," УМН, том 36, № 4, стр. 367–384, 1981.

12 Ноября 1991

Ереванский Государственный Университет

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ РАЗНОЙ АНИЗОТРОПИИ

А. Г. Багдасарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 27, № 4, 1992

В работе исследуются пространства $H_p^s(\mu; R_n)$ типа Соболева-Лиувилля и пространства $B_{p,q}^s(\mu; R_n)$ типа Никольского-Бесова , порожденные бесконечно дифференцируемой вне начала координат функцией μ. Доказывается независимость нулевых классов от порождающей функции и свойство изоморфизма оператора типа лиувиллевского дифференцирования. Причем анизотропия оператора не зависит от анизотропии пространства, в котором он действует. Основной является интерполяционная теорема для пространств типа H и B разной анизотропии.

В работе вводятся и исследуются некоторые пространства $B_{p,q}^s(\mu; R_n)$ типа Никольского-Бесова , которые при конкретизации функции $\mu(\xi)$ совпадают с классическими (изотропными или анизотропными) пространствами Никольского-Бесова (см. [1]).

Изучаемые B-пространства естественным образом возникают при исследовании краевых задач для гипоэллиптических дифференциальных операторов в соответствующих пространствах типа Соболева-Лиувилля. Рассматриваемые H-пространства исследованы в [2] (особое внимание уделено случаю $p = 2$).

Пространства $H_p^s(\mu; R_n)$ и $B_{p,q}^s(\mu; R_n)$, порожденные вполне правильным многогранником $\mathcal{N}$ введены и изучены в [3,4]. В этих работах основные исследования (теоремы вложения разных метрик и разных измерений, теоремы интерполяции и так далее) проводились для фиксированной функции $\mu(\xi)$, отвечающей фиксированному многограннику $\mathcal{N}$. В настоящей работе рассматриваются пространства разной анизотропии. Устанавливается независимость нулевых классов от порождающей функции и доказывается свойство изоморфизма для оператора I типа лиувиллевского дифференцирования, анизотропность которого отличается от анизотропии пространства, в котором он рассматривается .

Основной является Теорема 7, в которой доказываются интерполяционные утверждения для пространств типа Никольского-Бесова и Соболева-Лиувилля разной анизотропии.

1°. Будем пользоваться следующими обозначениями :

R_n – n-мерное евклидово пространство,

Z_n^+ – множество мультииндексов, т.е. векторов с целыми неотрицательными компонентами.

Для $\xi \in R_n$, $\alpha \in Z_n^+$ положим

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \quad \xi^\alpha = \prod_{i=1}^{n} \xi_i^{\alpha_i}, \quad |\xi| = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{1/2}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}.$$

Обозначим через G_o^+ множество положительных функций $\mu(\xi)$ бесконечно дифференцируемых вне начала координат и таких, что

$$\lim_{|\xi|\to 0} \mu(\xi) = 0, \quad \lim_{|\xi|\to +\infty} \mu(\xi) = +\infty, \quad |\xi^\alpha D^\alpha \mu(\xi)| \le c\mu(\xi), \quad c > 0; \tag{1}$$

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \quad \alpha_i = 0, 1, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Функции, удовлетворяющие оценке (1), рассматривались в работах Х. Трибеля (см. [5]). Далее все пространства типа H и B будут рассматриваться в R_n.

Определение 1. Пусть $1 < p < \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\mu \in G_o^+$. Положим

$$H_p^s(\mu) \equiv H_p^s(\mu; R_n) = \left\{ f \in S' : ||f||_{H_p^s} = ||F^{-1}[(1+\mu^2)^{s/2} F f]||_{L_p(R_n)} < \infty \right\},$$

где S' – пространство, сопряженное к пространству Шварца S, и F – прямое преобразование Фурье. Если для $\mu \in G_o^+$ функция $(1 + \mu^2(\xi))^{s/2}$ не является бесконечно дифференцируемой в R_n, то пространство $H_p^s(\mu)$ определяется как пополнение пространства Шварца S. Доказательства утверждений для

H-пространств этого типа получаются предельным переходом из соответствующих соотношений для функций класса Шварца. Такая техника широко известна, поэтому при доказательстве утверждений мы не будем вдаваться в подробности.

Определение 2. Пусть $\mu \in G_o^+$. Через $\Phi(\mu) = \Phi(\mu; R_n)$ обозначим множество систем функций $\{\varphi_k(\mu, x)\}_{k=0}^{\infty}$ обладающих следующими свойствами

$$\text{а)} \quad \varphi_k \in S, \quad (F\varphi_k)(\xi) \geq 0, \quad k = 0, 1, \ldots;$$

$$\text{б)} \ \operatorname{supp} F\varphi_o \subset \{\xi \in R_n;\, \mu(\xi) \leq 2\},$$

$$\operatorname{supp} F\varphi_k \subset \{\xi \in R_n;\, 2^{k-1} \leq \mu(\xi) \leq 2^{k+1}\}, \quad k = 1, 2, \ldots;$$

$$\text{в)} \quad \|F\varphi_k\|_{M_p^q} \leq c, \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{2}$$

$$\text{г)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (F\varphi_k)(\xi) \equiv 1, \quad \xi \in R_n, \tag{3}$$

где M_p^q – множество мультипликаторов Фурье типа (p, q). Пример системы $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu)$ приведен в [3].

Определение 3. Пусть $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\mu \in G_o^+$, $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu)$. Положим

$$B_{p,q}^s(\mu) \equiv B_{p,q}^s(\mu; R_n) = \left\{ f \in S';\, \|f\|_{B_{p,q}^s} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} \|f * \varphi_k\|_{L_p(R_n)}^q \right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

Пространства $B_{p,\infty}^s(\mu)$ определяются обычным образом.

Как и в случае классических пространств Бесова $B_{p,q}^s(R_n)$ нетрудно убедиться, что пространства $B_{p,q}^s(\mu)$ не зависят от выбора системы $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu)$.

Замечание 1. Обобщениями пространств Никольского-Бесова (а также Лизоркина-Трибеля) занимались многие авторы. Отметим работы Трибеля, Штёкерта, Гольдмана, Калябина. В работах [6 – 8] был развит метод построения $\mathcal{B}$- и F-пространств с помощью покрытий R_n прямоугольными параллелепипедами со сторонами, параллельными координатным осям. Частными реализациями такого метода являются классические изотропные и анизотропные пространства Никольского-Бесова и Лизоркина–Трибеля.

Следуя рассуждениям теоремы 6.2.1 из [5], нетрудно убедиться, (во всяком случае при $p = 2$, $q \neq 2$) что рассматриваемые здесь B-пространства не могут быть характеризованы посредством этого метода.

2°. Для банаховых пространств A_o, A_1 символы $[A_o, A_1]_\theta$, $(A_o, A_1)_{\theta,q}$ означают интерполяционные пространства между A_o и A_1, полученные соответственно "комплексным" и "вещественным" методами.

В работе [3] доказана интерполяционная теорема (см. теорему 1) для $H_p^s(\mu)$, где функция μ порождена полным многогранником $\mathcal{N}$ (см. [9]). То же самое доказательство годится и для функции $\mu \in G_o^+$. То есть справедлива

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s_o \neq s_1 < \infty$, $s = (1-\theta)s_o + \theta s_1$, $\mu \in G_o^+$. *Тогда*

$$\left(H_p^{s_o}(\mu), H_p^{s_1}(\mu)\right)_{\theta,q} = B_{p,q}^s(\mu).$$

Поскольку H-пространства банаховы (см. [2]), то из Теоремы 1 и из теоремы 3.4.2 из [10] следует полнота B-пространств. Далее, поскольку пространство $\mathcal{S}$ плотно в $H_p^s(\mu)$, $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$ (см. [2]), то из тех же Теорем 1 и 3.4.2 следует, что $\mathcal{S}$ плотно и в $B_{p,q}^s(\mu)$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$. Дальнейшая цель этого пункта доказательство интерполяционных формул для B-пространств.

Определение 4. (см. [10]) Пусть A_o, A_1 два банаховых пространства. Пространство A_1 называется *ретрактом пространства* A_o если существуют операторы $S \in L(A_1, A_o)$, $R \in L(A_o, A_1)$ такие, что $RS = E$ (тождественный оператор из $L(A_1, A_1)$). При этом операторы R и S называются *ретракцией* и *коретракцией* соответственно.

Пусть $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty \in \Phi(\mu)$, $\mu \in G_o^+$. Положим

$$\overline{\varphi}_k = \sum_{j=-2}^{2} \varphi_{k+j},$$

где $\varphi_k \equiv 0$ при $k < 0$. Тогда из (3), (5) имеем

$$\overline{\varphi}_k * \varphi_k = \varphi_k, \quad k = 0, 1, \dots . \tag{4}$$

Далее для $f \in S'$ и $g = \{g_j\}_{j=0}^{\infty}$, $g_j \in S'$ положим

$$Sf = \{\varphi_j * f\}_{j=0}^{\infty}, \quad Rg = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\varphi}_j * g_j. \tag{5}$$

Оператор R определен только на тех последовательностях $\{g_j\}$, для которых ряды, задающие Rg сходятся в S'.

Теорема 2. *Пусть $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $\mu \in G_o^+$. Тогда пространство $B^s_{p,q}(\mu)$ является ретрактом пространства $l^s_q(L_p)$. Соответствующие операторы R и S определяются соотношениями (5).*

Доказательство. Заметим, что

$$||f||_{B^s_{p,q}} = ||Sf||_{l^s_q(L_p)}, \qquad ||Rg||_{B^s_{p,q}} \le c||g||_{l^s_q(L_p)}.$$

Таким образом

$$S \in L\left(B^s_{p,q}(\mu), l^s_q(L_p)\right), \quad R \in L\left(l^s_q(L_p), B^s_{p,q}(\mu)\right).$$

Так как из соотношений (3), (4) следует, что

$$R(Sf) = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\varphi}_j * (Sf)_j = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\varphi}_j * \varphi_j * f = f.$$

то $B^s_{p,q}(\mu)$ есть ретракт пространства $l^s_q(L_p)$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $0 < \theta < 1$, $s^* = (1-\theta)s_o + \theta s_1$, $\mu \in G_o^+$, $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1-\theta}{p_o} + \dfrac{\theta}{p_1}$, $\dfrac{1}{q^*} = \dfrac{1-\theta}{q_o} + \dfrac{\theta}{q_1}$. Тогда*

а) для $\quad -\infty < s_o \ne s_1 < \infty, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 \le r, q_o, q_1 \le \infty$

$$\left(B^{s_o}_{p,q_o}(\mu), B^{s_1}_{p,q_1}(\mu)\right)_{\theta,r} = B^{s^*}_{p,r}(\mu);$$

б) для $\quad -\infty < s_o \ne s_1 < \infty, \quad 1 < p_o, p_1 < \infty, \quad 1 \le q_o, q_1 \le \infty, \quad p^* = q^*$

$$\left(B^{s_o}_{p_o,q_o}(\mu), B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mu)\right)_{\theta,p^*} = B^{s^*}_{p^*,q^*}(\mu);$$

в) для $\quad -\infty < s < \infty, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 \le q_o \ne q_1 \le \infty$

$$\left(B^{s}_{p,q_o}(\mu), B^{s}_{p,q_1}(\mu)\right)_{\theta,q^*} = B^{s}_{p,q^*}(\mu);$$

г) для $-\infty < s_o, s_1 < \infty, \quad 1 < p_o, p_1 < \infty, \quad 1 \le q_o, q_1 \le \infty$

$$[B^{s_o}_{p_o,q_o}(\mu), B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mu)]_\theta = B^{s^*}_{p^*,q^*}(\mu).$$

Доказательство. Теорема 6.4.2 из [10] и наша Теорема 2 позволяют свести доказательство Теоремы 3 к доказательству соответствующих утверждений для пространств $l^s_q(L_p)$. Утверждения а) и в) получаются из теоремы 5.6.1, б) – из теоремы 5.6.2 а г) – из теоремы 5.6.3 книги [10].

3°. Докажем независимость нулевых классов от порождающей функции. Для анизотропных B-классов этот результат приведен в [11].

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $\mu_o, \mu_1 \in G^+_o$. *Тогда*

$$B^o_{p,q}(\mu_o) = B^o_{p,q}(\mu_1).$$

Доказательство. На основании (2), (3) имеем

$$\|f\|_{B^{-r_i}_{p,\infty}(\mu_o)} = \sup_k 2^{-kr_i} \|f * \varphi_k(\mu_o)\|_{L_p} \le c\|f\|_{L_p} \le$$

$$\le c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kr_i} \|f * \varphi_k(\mu_1)\|_{L_p} = c\|f\|_{B^{r_i}_{p,1}(\mu_1)}, \tag{6}$$

где $\{\varphi_k(\mu_i)\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu_i)$, $r_i > 0$, $i = 0, 1$ и постоянная c не зависит от r_i. Интерполируя на основании утверждения а) Теоремы 3, при $1 \le q \le \infty$, $0 < \theta < 1$, $r = (1-\theta)r_o + \theta r_1$ из оценки (6), получаем

$$\|f\|_{B^{-r}_{p,q}(\mu_o)} \le c\,\|f\|_{B^r_{p,q}(\mu_1)}.$$

Устремляя r к нулю (c не зависит от r) получаем оценку для норм нулевых классов. Теорема 4 доказана.

Для дальнейшего полезной оказывается следующая

Теорема 5. *Пусть* $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $r > 0$, $\mu \in G^+_o$. *Тогда*

$$B^s_{p,q}(\mu^r) = B^{sr}_{p,q}(\mu). \tag{7}$$

Доказательство. Соотношение (7) получается с помощью Теоремы 1 с использованием следующих очевидных соотношений

$$H^{s_o}_p(\mu_r) = H^{s_or}_p(\mu), \quad H^{s_1}_p(\mu^r) = H^{s_1r}_p(\mu).$$

Отметим, что Теорема 5 могла бы быть получена и из теоремы вложения разных метрик для B-пространств разной анизотропии (Теорема 6 из [12]). Из этой же теоремы следует, что $B^1_{p,q}(\mu_o) = B^1_{p,q}(\mu_1)$ если $\mu_o \sim \mu_1$, то есть

$$(1+\mu_o^2)^{1/2}(1+\mu_1^2)^{-1/2} \in M_p^p, \quad (1+\mu_1^2)^{1/2}(1+\mu_0^2)^{-1/2} \in M_p^p.$$

Поэтому в дальнейшем, пространства порожденные эквивалентными функциями, мы не будем различать.

Пусть $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\lambda)$. Рассмотрим наряду с этой систему $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$, где

$$\psi_o = \varphi_o, \quad \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{2^{-ks} I_\lambda \varphi_k\right\}_{k=1}^{\infty}, \quad -\infty < s < \infty.$$

Здесь через I_λ обозначен оператор

$$I_\lambda \varphi = F^{-1}\{(1+\lambda^2)^{1/2} F\varphi\}.$$

Ясно, что система $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям а), б) и неравенству

$$\sum_{k=0}^{\infty} (F\psi_k)(\xi) \geq c > 0.$$

Кроме того, теорема Лизоркина о мультипликаторах (см. [13]) показывает, что для системы $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ выполняется оценка (2).

Докажем свойство изоморфизма для оператора I. Ниже знак $\sim$ между нормами означает их эквивалентность, то есть наличие двусторонней оценки. Для простоты мы будем писать $B_1 \sim^{\nu} B_2$, если $\|f\|_{B_1} \sim \|I_\nu f\|_{B_2}$.

Теорема 6. *Пусть функция $\mu(\xi)$ бесконечно дифференцируема вне начала координат и имеет полиномиальный рост. Положим $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\nu, \nu \cdot \mu^{-1} \in G_o^+$. Тогда оператор I_μ осуществляет непрерывное взаимно-однозначное отображение $B^1_{p,q}(\nu)$ на $B^1_{p,q}(\nu \cdot \mu^{-1})$.*

Доказательство. Имеем для $f \in L_p$

$$\|I_\mu f\|_{B^1_{p,q}(\nu \cdot \mu^{-1})} \sim \|I_\nu f\|_{B^o_{p,q}(\nu \cdot \mu^{-1})}. \tag{8}$$

В (8) мы использовали приведенные выше соображения и свойства системы $\{\varphi_k\}$ (см. Определение 2). Тогда

$$B^1_{p,q}(\nu) \sim^{\nu} B^o_{p,q}(\nu). \tag{9}$$

Теперь Теорема 4 и соотношения (8), (9) доказывают Теорему 6.

Теорема 7. *Пусть* $0<\theta<1$, $1<p_o,p_1,p<\infty$, $1\le r,q_o,q_1\le\infty$, $\frac{1}{p^*}=\frac{1-\theta}{p_o}+\frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q^*}=\frac{1-\theta}{q_o}+\frac{\theta}{q_1}$, *и пусть* $\mu_o,\mu_1,\mu_o\mu_1^{-1}\in G_o^+$. *Тогда*

а) $\left(B^1_{p,q_o}(\mu_o),B^1_{p,q_1}(\mu_1)\right)_{\theta,r}=B^1_{p,r}(\mu_o^{1-\theta}\cdot\mu_1^{\theta})$,

б) $\left(B^1_{p_o,q_o}(\mu_o),B^1_{p_1,q_1}(\mu_1)\right)_{\theta,p^*}=B^1_{p^*,q^*}(\mu_o^{1-\theta}\cdot\mu_1^{\theta})$,

в) $\left[B^1_{p_o,q_o}(\mu_o),B^1_{p_1,q_1}(\mu_1)\right]_{\theta}=B^1_{p^*,q^*}(\mu_o^{1-\theta}\cdot\mu_1^{\theta})$,

г) $\left(H^1_p(\mu_o),H^1_p(\mu_1)\right)_{\theta,r}=B^1_{p,r}(\mu_o^{1-\theta}\cdot\mu_1^{\theta})$.

Доказательство. Положим

$$s_o>s_1>0,\quad s=(1-\theta)s_o+\theta s_1,\quad \lambda=(\mu_1^{s_o}\cdot\mu_o^{-s_1})^{\frac{1}{s_o-s_1}},\quad \rho=(\mu_o\cdot\mu_1^{-1})^{\frac{1}{s_o-s_1}}.$$

Тогда

$$\mu_i=\lambda\cdot\rho^{s_i},\quad i=0,1;\quad \rho\in G_o^+.$$

Ясно, что функция $\lambda(\xi)$ бесконечно дифференцируема вне начала координат и имеет полиномиальный рост. Из Теоремы 6 для $i=0,1$ имеем

$$B^1_{p,q}(\mu_i)\sim^{\lambda}B^1_{p,q}(\mu_i\lambda^{-1}),$$

то есть (см. Теорему 5)

$$B^1_{p,q}(\mu_i)\sim^{\lambda}B^{s_i}_{p,q}(\rho),\quad i=0,1.$$

Тогда (интерполяционное свойство)

$$\left(B^1_{p,q_o}(\mu_o),B^1_{p,q_1}(\mu_1)\right)_{\theta,r}\sim^{\lambda}\left(B^{s_o}_{p,q_o}(\rho),B^{s_1}_{p,q_1}(\rho)\right)_{\theta,r},\tag{10}$$

$$\left(B^1_{p_o,q_o}(\mu_o),B^1_{p_1,q_1}(\mu_1)\right)_{\theta,p^*}\sim^{\lambda}\left(B^1_{p_o,q_o}(\rho),B^1_{p_1,q_1}(\rho)\right)_{\theta,p^*},\tag{11}$$

$$\left[B^1_{p_o,q_o}(\mu_o),B^1_{p_1,q_1}(\mu_1)\right]_{\theta}\sim^{\lambda}\left[B^{s_o}_{p_o,q_o}(\rho),B^{s_1}_{p_1,q_1}(\rho)\right]_{\theta}.\tag{12}$$

Используя Теоремы 3, 5, 6 из (10) – (12) получим

$$\left(B^1_{p,q_o}(\mu_o),B^1_{p,q_1}(\mu_1)\right)_{\theta,r}\sim^{\lambda}B^s_{p,r}(\rho),$$

$$B^1_{p,r}(\mu_o^{1-\theta}\cdot\mu_1^{\theta})=B^1_{p,r}(\lambda\cdot\rho^s)\sim^{\lambda}B^s_{p,r}(\rho);\tag{13}$$

$$\left(B^1_{p_o,q_o}(\mu_o),B^1_{p_1,q_1}(\mu_1)\right)_{\theta,p^*}\sim^{\lambda}B^s_{p^*,q^*}(\rho),$$

$$B^1_{p^*,q^*}(\mu_o^{1-\theta}\cdot\mu_1^{\theta}) = B^1_{p^*,q^*}(\lambda\cdot\rho^{\theta}) \sim^{\lambda} B^{s}_{p^*,q^*}(\rho);$$

$$\left[B^1_{p_o,q_o}(\mu_o), B^1_{p_1,q_1}(\mu_1)\right]_{\theta} \sim^{\lambda} B^{s}_{p^*,q^*}(\rho).$$

Соотношения а) – в) доказаны.

Нетрудно убедиться (см. теорему о мультипликаторах в [13]), что

$$H^1_p(\mu_i) \sim^{\lambda} H^{s_i}_p(\rho), \quad i = 0,1.$$

Интерполируя, на основании Теоремы 1 получим

$$\left(H^1_p(\mu_o), H^1_p(\mu_1)\right)_{\theta,r} \sim^{\lambda} B^{s}_{p,r}(\rho). \tag{14}$$

Соотношения (13) и (14) доказывают утверждение г). Теорема 7 доказана.

Замечание 2. В а) – г) справа и слева верхний индекс можно заменить на (-1). Доказательство полученных формул аналогично доказательству утверждений а) – г).

Замечание 3. Пусть функции μ_o, μ_1 порождены полными многогранниками $\mathcal{N}_o, \mathcal{N}_1$, т.е.

$$\mu_o(\xi) = \left(\sum_{j=1}^{N_o} \xi^{2\alpha^j}\right)^{1/2}, \quad \mu_1(\xi) = \left(\sum_{i=1}^{N_1} \xi^{2\beta^i}\right)^{1/2},$$

где $\alpha^j = (\alpha^j_1, ..., \alpha^j_n)$, $\beta^i = (\beta^i_1, ..., \beta^i_n)$ суть вершины многогранников $\mathcal{N}_o, \mathcal{N}_1$ и

$$\alpha^j_k \geq 0, \quad \beta^i_k \geq 0, \quad j = 1, ..., N_o, \quad i = 1, ..., N_1, \quad k = 1, ..., n.$$

Тогда условие $\mu_o\mu_1^{-1} \in G^+_o$ Теоремы 7 означает, в частности, что $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_o$ и некоординатные грани многогранников не имеют общих точек.

Замечание 4. Аналогично можно доказать формулу "комплексной" интерполяции. (см. [5, 14, 15]) :

$$\left[H^1_{p_o}(\mu_o), H^1_{p_1}(\mu_1)\right]_{\theta} = H^1_{p^*}(\mu_o^{1-\theta}\cdot\mu_1^{\theta}),$$

$$1 < p_o, p_1 < \infty, \quad 0 < \theta < 1, \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1-\theta}{p_o} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \mu_o, \mu_1, \mu_o\mu_1^{-1} \in G^+_o.$$

ABSTRACT. The paper considers spaces $H^s_p(\mu; R_n)$ of Sobolev–Liouville and $B^s_{p,q}(\mu; R_n)$ of Nikolp1skogo-Besova types, which generalize the classical H and B spaces. Independence of zero class from the function μ is proved and a property of isomorphism for Liouville differential type operator is demonstrated. The main result is an interpolation theorem for spaces H and B type with differing anisotropies.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Никольский, Приближение Функций Многих Переменных и Теоремы Вложения, М. Наука, 1977.
2. А. Г. Волевич, Б. П. Панеях, "Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения", УМН, том 20, № 1, стр. 3 – 74, 1965.
3. А. Г. Багдасарян, "Об интерполяции и следах функций из некоторых анизотропных функциональых пространств", Изв. АН Армении, Математика, том 23, № 4, стр. 353 – 365, 1988.
4. А.Г.Багдасарян, "Интерполяция и следы функций из некоторых функциональных пространств", Докл. АН Арм.ССР, том 87, № 5, стр. 207 – 211, 1988.
5. H. Triebel, "General function spaces III. (spaces $B_{p,q}^{g(x)}$ and $F_{p,q}^{g(x)}$, $1 < p < \infty$: basic properties)", Analysis Mathematica, vol. 3, pp. 221 – 249, 1977.
6. B. Stöckert, H. Triebel, "Decomposition methods for function spaces of $B_{p,q}^s$ type and $F_{p,q}^s$ type", Math. Nachr., vol. 89, pp. 247 – 267, 1979.
7. H. Triebel, Fourier Analysis and Function Spaces, Teubner Verl., Leipzig, 1977.
8. М. Л. Гольдман, "Метод покрытий для описания общих пространств типа Бесова", Труды МИАН СССР, том 156, стр. 47 – 81, 1980.
9. В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, том 91, стр. 59 – 81, 1967.
10. Й. Берг, Й. Лёфстрём, Интерполяционные Пространства. Введение, М. Мир, 1980.
11. П. И. Лизоркин, "Обобщенные Гёльдеровы пространства $B_{p,q}^r$ и их соотношения с пространствами Соболева $L_p^{(r)}$", Сиб. Мат. ж., том 9, стр. 1127 – 1152, 1968.
12. А. Г. Багдасарян, "Теоремы вложения и интерполяция для обобщенных пространств Никольского-Бесова ", Межвуз. Сбор. Математика, том 6, стр. 218 – 234, 1988.
13. П. И. Лизоркин, "(L_p, L_q)-мультипликаторы интегралов Фурье", ДАН СССР, том 152, стр. 808 – 811, 1963.
14. M. Schecter, "Interpolation spaces by complex methods", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 72, pp. 526 – 533, 1966.
15. A. Favini, "Su una estensione del metodo d'interpolazione complesso", Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, vol. 47, pp. 243 – 298, 1972.

29 Мая 1991

Ереванский государственный университет

ПОСТРОЕНИЕ АТТРАКТОРА ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Р. Л. Шахбагян, Г. С. Акопян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 27, № 4, 1992

В статье дается некоторое применение результатов авторов (см. [1,2]) к нелинейному параболическому уравнению $\frac{\partial u}{\partial t} + L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^m \times \times \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^m}{\partial x_i^m}\left(\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)^{p-1}\right) = 0$ в цилиндре $Q = (0,\infty) \times \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$ и $p > 2$ чётно. Ставится следующая начально-краевая задача : $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, $\mathcal{D}^\omega u|_\Sigma = 0$, $|\omega| \le m-1$, где $\Sigma = (0,\infty) \times \Gamma$. Эти результаты связаны с построением аттракторов полугрупп, порожденных смешанными задачами для нелинейных параболических уравнений высокого порядка и исследованию глобальной функции Ляпунова.

Рассмотрим нелинейное параболическое уравнение порядка $2m\,(m > 1)$ вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^m \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^m}{\partial x_i^m}\left(\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)^{p-1}\right) = 0 \tag{1}$$

в цилиндре $Q = (0,\infty) \times \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$ и $p > 2$ – четное число.

Поставим следующую начально-краевую задачу :

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$\mathcal{D}^\omega u|_\Sigma = 0, \quad |\omega| \le m-1, \tag{3}$$

где $\Sigma = (0,\infty) \times \Gamma$.

В настоящей статье для модельной задачи (1) – (3) приводится приложение результатов, полученных авторами в [1,2], по построению аттракторов полугрупп, порождаемых смешанными задачами для нелинейных параболических уравнений высокого порядка и исследованию глобальной функции Ляпунова.

1°. В первую очередь нам надлежит установить однозначную разрешимость задачи (1) – (3). С этой целью приведем соответствующий результат работы [1]. В ней исследована начально-краевая задача для следующего класса операторов :

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}+L(u)=0,\\ L(u)=\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}\mathcal{D}^{\alpha}(\mathcal{A}_{\alpha}(t,x,\mathcal{D}^{\gamma}u)),\end{gathered}\tag{4}$$

где функции $\mathcal{A}_\alpha(t,x,\xi_\gamma)$ определены для $(t,x)\in Q$ и всех ξ_γ, при этом выполнены следующие условия :

1) Функции $\mathcal{A}_\alpha(t,x,\xi_\gamma)$ непрерывны по t и ξ_γ и удовлетворяют неравенству

$$|\mathcal{A}_\alpha(t,x,\xi_\gamma)|\le K_1\left(\sum_{|\alpha|\le m}|\xi_\gamma|^{p-1}+1\right),\ p\ge 2,\tag{5}$$

где $K_1>0$ – постоянная.

2) <u>Условие эллиптичности</u> : для любой функции $u(x,t)$, $u\in$ $\in L_p^{\mathrm{loc}}(0,\infty;\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))$ (т.е. для любого $T>0$ $u\in L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))$) справедливо неравенство

$$\sum_{|\alpha|\le m}(\mathcal{A}_\alpha(t,x,\mathcal{D}^\gamma u),\mathcal{D}^\alpha u)\ge a_0\,||u(x,t)||^p_{m,p}-k(t),\tag{6}$$

где $a_0>0$ – постоянная, $k(t)$ – непрерывная на полуоси $[0,\infty)$ функция. Круглыми скобками $(,)$ обозначено скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$, а $||\cdot||_{m,p}$ – норма в $W_p^m(\Omega)$.

3) <u>Условие сильной эллиптичности</u> : для любого $T>0$ и любых функций $u,v\in L_p^{\mathrm{loc}}(0,\infty;W_p^m(\Omega))$ таких, что $u-v\in L_p^{\mathrm{loc}}(0,\infty;\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))$, имеет место неравенство

$$\begin{gathered}\sum_{|\alpha|\le m}\int_0^T\int_\Omega(\mathcal{A}_\alpha(t,x,\mathcal{D}^\gamma u)-\mathcal{A}_\alpha(t,x,\mathcal{D}^\gamma v))\,\mathcal{D}^\alpha(u-v)\,dx\,dt\ge\\ \ge a_1\int_0^T||u-v||^p_{m,p}\,dt,\end{gathered}\tag{7}$$

где $a_1 > 0$ - некоторая постоянная.

Для дальнейшего нам необходимо следующее обозначение. Пусть $\overset{\circ}{H}(T)$ - банахово пространство функций, получаемое замыканием линейного многообразия гладких функций $z(x,t)$ таких, что

$$z(x,0) = 0, \quad \mathcal{D}^{\omega} z|_{\Sigma_T} = 0, \ |\omega| \le m-1$$

по норме

$$|||z(x,t)|||' = \left(\int_0^T \|z(x,t)\|^p_{m,p}\, dt\right)^{1/p} + \left(\int_0^T \|\frac{\partial z}{\partial t}\|^q_{-m,q}\, dt\right)^{1/q},$$

где $\Sigma_T = (0,T) \times \Gamma$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Далее через $H_T(u_0)$ обозначим множество функций вида

$$u(x,t) = u_0(x) + z(x,t),$$

где $z \in \overset{\circ}{H}(T)$.

Определение 1. Функция $u(x,t) \in L_p^{\mathrm{loc}}(0,\infty; W_p^m(\Omega))$ называется обобщённым решением задачи (2)-(4), если для любого $T > 0$, $u(x,t) \in H_T(u_0)$ и для любой функции $v(x,t) \in L_p^{\mathrm{loc}}(0,\infty; \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))$ имеет место интегральное тождество :

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v(x,t)\, dx\, dt + \sum_{|\alpha|\le m} \int_0^T \int_\Omega A_\alpha(t,x,\mathcal{D}^\gamma u)\, \mathcal{D}^\alpha v\, dx\, dt = 0.$$

Теорема А ([1], Теорема II) *Пусть оператор L удовлетворяет условиям 1)-3), тогда задача (2)-(4) имеет единственное обобщенное решение для любых начальных данных.*

Для доказательства аналогичной теоремы для оператора

$$L(u) \equiv (-1)^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial^m}{\partial x_i^m}\left(\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)^{p-1}\right)$$

достаточно проверить, что он удовлетворяет условиям Теоремы А.

Очевидно, условие 1) следует из оценки

$$|A_i(t,x,\xi_\gamma)| = |\xi_\gamma|^{p-1} \le K_1 \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p-1} + 1\right), \tag{8}$$

где мультииндекс $\gamma = (0, ..., m, 0, ..., 0)$.

Легко проверяется также условие 2) (условие эллиптичности) Теоремы А. Действительно, для любого $u \in L_p^{\mathrm{loc}}(0, \infty; \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)^{p-1} \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\, dx = ||u||_{m,p}^p, \tag{9}$$

откуда следует оценка (6).

Наконец, справедливость условия сильной эллиптичности легко следует из нетрудно проверяемого неравенства

$$\int_0^1 |a + \tau b|^{p-2}\, d\tau \geq c\,|b|^{p-2}, \tag{10}$$

верного для любых a и b, а постоянную $c > 0$ можно выбрать не зависящей от a и b.

Действительно, в силу (7) для любых $u, v \in L_p^{\mathrm{loc}}(0, \infty; W_p^m(\Omega))$ таких, что $u - v \in L_p^{\mathrm{loc}}(0, \infty; \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))$ рассмотрим выражение

$$J = \sum_{i=1}^{n} \int_0^T \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)^{p-1} - \left(\frac{\partial^m v}{\partial x_i^m}\right)^{p-1}\right] \frac{\partial^m (u-v)}{\partial x_i^m}\, dx\, dt.$$

Нетрудно заметить, что последнее выражение можно записать в следующем виде :

$$J = \sum_{i=1}^{n} \int_0^T \int_\Omega \left\{\int_0^1 (p-1)\left[\frac{\partial^m v}{\partial x_i^m} + \tau \frac{\partial^m (u-v)}{\partial x_i^m}\right]^{p-2} d\tau\right\} \cdot \left(\frac{\partial^m (u-v)}{\partial x_i^m}\right)^2 dx\, dt.$$

Используя неравенство (10), для интеграла J получаем следующую оценку :

$$J \geq c(p-1) \sum_{i=1}^{n} \int_0^T \int_\Omega \left|\frac{\partial^m (u-v)}{\partial x_i^m}\right|^p dx\, dt = c(p-1) \int_0^T ||u-v||_{m,p}^p\, dt. \tag{11}$$

Следовательно, условие (7) сильной эллиптичности выполнено. Из оценок (8), (9), (11) и Теоремы А вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Задача (1) – (3) имеет единственное обобщенное решение для любых начальных данных* $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$.

2°. В этом пункте будет доказано существование компактного аттрактора полугруппы, порождённой задачей (1)–(3).

Заметим, что Теорема 1 позволяет ввести полугруппу S_t, $t \geq 0$ операторов, определяемых следующим образом :

$$S_t u_0 = u(t),$$

где $u(t)$ – траектория, выходящая из точки u_0.

Справедливо следующее утверждение.

Предложение. *Пусть решение $u(x,t)$ задачи (1)–(3) принадлежит пространству $L_p^{\mathrm{loc}}(0,\infty; W_p^{m+1}(\Omega))$ и $p > 2$ – чётное число. Тогда семейство операторов $\{S_t\}$, порождённое задачей (1)–(3), отображает множества, ограниченные в $L_2(\Omega)$, в ограниченные множества пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, и, стало быть, компактные в $L_2(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $T > 0$ произвольным образом выбрано и фиксировано, а $U_0 = \{u_0 \in L_2(\Omega) : \quad ||u_0|| \leq M\}$ – произвольное ограниченное множество в $L_2(\Omega)$.

Подставляя решение $u(x,t)$ задачи в уравнение (1), умножая обе части последнего тождества на $t^2 \Delta u$ (Δ – оператор Лапласа по пространственным переменным x) и интегрируя его по области Ω, получим

$$\int_\Omega t^2 \frac{\partial u}{\partial t} \Delta u \, dx + (-1)^m \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial^m}{\partial x_i^m} \left(\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right)^{p-1} \right) t^2 \Delta u \, dx = 0.$$

Интегрируя последнее тождество по частям, придём к следующему соотношению :

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega t^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx + \sum_{i=1}^n t^2 \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right)^{p-1} \right) \frac{\partial^{m+1} u}{\partial x_j \partial x_i^m} \, dx = 0. \qquad (12)$$

Теперь, произведя в (12) интегрирование по $t \in [0,T]$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(T \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx = 2 \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_\Omega t \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \, dt - \\ 2 \sum_{i,j=1}^n \int_0^T \int_\Omega t^2 (p-1) \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right)^{p-2} \cdot \left(\frac{\partial^{m+1} u}{\partial x_j \partial x_i^m} \right)^2 dx \, dt. \end{aligned} \qquad (13)$$

Поскольку $p > 2$ – чётное, то последнее слагаемое в правой части (13) положительно, и следовательно, получаем оценку

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(T \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \leq 2 \sum_{i=1}^{n} \int_0^T \int_{\Omega} t \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx\, dt.$$

Из последнего неравенства вытекает, что

$$\|u(x,T\|_{1,2}^2 \leq c|||u(x,t)|||_{1,2}^2, \tag{14}$$

где $c > 0$ – постоянная, а

$$|||u(x,t)|||_{1,2} = \left(\int_0^T \|u(x,t)\|_{1,2}^2\, dt \right)^{1/2}.$$

Используя как и в [1] модифицированный метод Галёркина и совершая предельный переход, получаем следующую оценку для обобщённого решения задачи (1)–(3) (ср. с неравенством (31) из [1])

$$|||u(x,t)|||_{1,2} \leq c_1 \|u_0(x)\|, \tag{15}$$

где $c_1 > 0$ – некоторая постоянная.

Оценка

$$\|S_T u_0\|_{1,2} = \|u(x,T)\|_{1,2} \leq c_2 \|u_0\| \leq c_2 M, \ \ u_0 \in U_0$$

непосредственно следует из (14) и (15).

Таким образом, оператор S_T отображает ограниченные множества пространства $L_2(\Omega)$ в ограниченные множества пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Отсюда, в силу компактности оператора вложения из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, следует наше утверждение.

Повторяя рассуждения, проведённые при доказательстве Леммы 2 в [1] нетрудно убедится в справедливости следующего утверждения.

Лемма 1. *Обобщённое решение задачи (1)-(3) удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|^2 \leq e^{-2t} \|u_0\|^2. \tag{16}$$

Легко устанавливается также следующая

Лемма 2. *Пусть $u_{10}(x)$ и $u_{20}(x)$ - произвольные элементы пространства $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$, а $u_1(x,t), u_2(x;t) \in L_p^{\mathrm{loc}}(0,\infty; W_p^m(\Omega))$ соответствующие им обобщённые решения задачи (1)-(3). Тогда имеет место оценка :*

$$\|S_t u_{10}(x) - S_t u_{20}(x)\| = \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\| \le \|u_{10}(x) - u_{20}(x)\|. \tag{17}$$

Приведём теперь одну общую теорему о существовании аттрактора, доказанную в [3].

Теорема Б ([3], Теорема 1.1). *Пусть полугруппа $\{S_t\}$ операторов, действующих в банаховом пространстве X, удовлетворяет следующим условиям :*

а) полугруппа $\{S_t\}$ равномерно ограниченна, т.е. для любого $R > 0$ существует постоянная $C(R) > 0$ такая, что

$$\|S_t u\| \le C(R), \quad \text{при} \quad \|u\| \le R \quad \text{и для любого} \quad t > 0;$$

б) существует компактное в X поглощающее множество $B_0 \subset X$, т.е. для любого ограниченного множества $B \subset X$ существует такое число $T > 0$, что при $t \ge T$, $S_t B \subset B_0$;

ц) операторы $S_t : X \mapsto X$ непрерывны при $t \ge 0$.

Тогда у полугруппы S_t имеется компактный аттрактор.

Таким образом доказана следующая

Теорема 2. *Пусть $p > 2$ - чётное число. Тогда полугруппа S_t, $t \ge 0$, порождённая задачей (1)-(3), обладает аттрактором, компактным в пространстве $L_2(\Omega)$.*

Доказательство следует из Лемм 1,2 и Предложения.

3°. Как известно ([2]-[4]), структура аттракторов полугрупп конструктивно описывается при условии существования глобальной функции Ляпунова. Более точно, она описывается явно с помощью неустойчивых инвариантных многообразий, проходящих через неподвижные точки полугруппы S_t.

В настоящем пункте будет построена функция Ляпунова для задачи (1)–(3) и, стало быть, описана структура аттрактора порождённой ею полугруппы S_t.

Прежде чем сформулировать основной результат приведём необходимые определения и одну общую теорему о структуре аттракторов (см. [2], [3]).

Определение 2. Пусть $\{S_t\}$ – полугруппа операторов, действующих в банаховом пространстве X. Точка $z \in X$ называется неподвижной точкой полугруппы $\{S_t;\ t \geq 0\}$, если $S_t z = z$ для любого $t \geq 0$.

Определение 3. Пусть $z \in X$ – неподвижная точка полугруппы $\{S_t\}$. Множество $M(z) \subset X$ называется неустойчивым инвариантным многообразием, выходящим из точки z, если существует такая непрерывная кривая $u(\tau)$, $-\infty < \tau < \infty$ в X, что

1) $u(0) = u$;

2) $S_t\, u(\tau) = u(t+\tau)$, $\forall \tau \in \mathbb{R}^1$, $\forall t \geq 0$;

3) $u(\tau) \to z$ при $\tau \to -\infty$.

Определение 4. Пусть $Y \subset X$ – слабо инвариантное множество полугруппы $\{S_t\}$: $S_t Y \subset Y$, $\forall t \geq 0$. Непрерывный на Y функционал $\Phi : Y \to \mathbb{R}^1$ называется функцией Ляпунова полугруппы $\{S_t\}$ на Y, если выполнены следующие условия :

1) для любого $u \in Y$, функция $\Phi(S_t u)$ убывает по t при $t \geq 0$;

2) если $\Phi(S_t u) = \Phi(S_\theta u)$ при некотором $t > \theta$, то $S_\theta u$ является неподвижной точкой полугруппы $\{S_t\}$.

Теорема C (см. [3], Теоремы 10.1 и 10.2). *Пусть полугруппа $\{S_t\}$ обладает компактным аттрактором $\mathcal{M}$ и на множестве $\mathcal{M}$ обладает функцией Ляпунова Φ. Предположим, далее, что множество $\mathcal{N}$ неподвижных точек $\{S_t\}$ конечно и, кроме того, для любого $u \in \mathcal{M}$, функция $\Phi(S_t u)$ непрерывно зависит от t (по норме X). Тогда*

$$\mathcal{M} = \bigcup_{z \in \mathcal{N}} M(z),$$

где $M(z)$ – неустойчивое инвариантное многообразие, выходящее из точки z.

Имеет место следующая

Теорема 3. *Функционал*

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right|^p dx, \tag{18}$$

определённый на пространстве $\overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)$, *является функцией Ляпунова полугруппы* $\{S_t\}$, *порождённой задачей (1)-(3).*

Доказательство. Непрерывность функционала Φ на $\overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)$ очевидна, поскольку $\Phi(u) = ||u||^p_{m,p}$.

Для того, чтобы показать, что $\Phi(S_t u)$ убывает по t при $t \geq 0$, рассмотрим выражение

$$\Phi(u+v) - \Phi(u) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} + \frac{\partial^m v}{\partial x_i^m}\right)^p - \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)^p\right] dx, \tag{19}$$

для $u, v \in \overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)$.

Выделением линейной части в (19) убеждаемся, что Φ дифференцируем в смысле Фреше, а дифференциал $\Phi'(u)$ действует на v по формуле

$$< \Phi'(u), v >= \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)^{p-1}\frac{\partial^m v}{\partial x_i^m}\,dx.$$

Последний интеграл существует, поскольку

$$\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)^{p-1} \in L_q(\Omega) \quad \text{и} \quad \frac{\partial^m v}{\partial x_i^m} \in L_p(\Omega),\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Следовательно, для решения $u(x,t)$ задачи (1)–(3) имеем

$$\begin{aligned}
&\partial_t\Phi(S_t u) = \partial_t\Phi(u(x,t)) =< \Phi'(u(x,t)), \frac{\partial u}{\partial t} >= \\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)^{p-1}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right) dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)^{p-1}\frac{\partial^m}{\partial x_i^m}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) dx = \\
&= (-1)^m\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial^m}{\partial x_i^m}\left(\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)^{p-1}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\,dx = \\
&\int_{\Omega} L(u)\frac{\partial u}{\partial t}\,dx = -\int_{\Omega}(L(u))^2\,dx \leq 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом, функция $\Phi(S_t u)$ убывает при $t \geq 0$.

Проверим, наконец, условие 2) определения 4. С этой целью предположим, что при некотором $t_0 > 0$ имеем

$$\Phi(u(x,t_0)) = \Phi(u(x,0)).$$

Тогда, в силу (20)

$$0 = \Phi(u(x,t_0)) - \Phi(u_0) = \int_0^{t_0} \partial_t\left(\Phi(u(x,t))\right) dt =$$
$$= -\int_0^{t_0}\int_\Omega (L(u))^2\, dx\, dt = \int_0^{t_0}\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\, dt.$$

Следовательно, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ при $t \in [0,t_0]$, т.е. $L(u) = 0$. Так как $L(u_0) = L(u(x,0)) = 0$ и $\dfrac{\partial u_0}{\partial t} = 0$, то $z = u_0(x)$ является решением задачи (1)–(3) и $S_t z = z$, т.е. $z = u(x,0) = u_0(x)$ является неподвижной точкой полугруппы $\{S_t\}$. Теорема доказана.

Теоремы 2 и 3 с учётом Теоремы C, позволяют описать структуру аттрактора полугруппы $\{S_t\}$, порождённой задачей (1)–(3).

Теорема 4. *Пусть $p > 2$ - чётное число. Если множество $\mathcal{N} = \{z_1(x), z_2(x), \ldots, z_r(x)\}$ неподвижных точек полугруппы $\{S_t\}$, порождённой задачей (1)–(3), конечно, то аттрактор $\mathcal{M}$ полугруппы $\{S_t\}$ совпадает с обьединением неустойчивых инвариантных многообразий $M(z_j)$, $j = 1, 2, \ldots, r$, выходящих из z_j, т.е.*

$$\mathcal{M} = \bigcup_{z_j \in \mathcal{N}} M(z_j).$$

ABSTRACT. The paper gives some applications of earlier results by the authors (see [1,2]) on the nonlinear parabolic equation $\dfrac{\partial u}{\partial t} + L(u) \equiv \dfrac{\partial u}{\partial t} + (-1)^m \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial^m}{\partial x_i^m}\left(\left(\dfrac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)^{p-1}\right) = 0$ in a cylinder $Q = (0,\infty)\times\Omega$, where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain with sufficiently smooth boundary $\Gamma = \partial\Omega$ and $p > 2$ is even. We pose the following initial–boundary problem $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, $\mathcal{D}^\omega u|_\Sigma = 0$, $|\omega| \le m-1$, where $\Sigma = (0,\infty)\times\Gamma$. These results relate to construction of attractors of semigroups generated by initial-boundary problems for high-order nonlinear parabolic equations, as well as to investigation of global Lyapunov function.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян, "Построение аттракторов нелинейных параболических операторов высокого порядка," Изв. АН Армении, серия Математика, [английский перевод : Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of sciences)], том 25, № 6, стр. 549 – 559, 1990.
2. Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян, "О функции Ляпунова полугрупп, порождённых нелинейными параболическими уравнениями высокого порядка," Изв. АН Армении, серия Математика, [английский перевод : Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of sciences)], том 26, № 3, стр. 242 – 250, 1991.
3. А. В. Бабин, М. И. Вишик, "Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности," УМН, том 38, № 4(232), стр. 133 – 187, 1983.
4. А. В. Бабин, М. И. Вишик, Аттракторы Эволюционных Уравнений, Наука, Москва, 1989.

25 Декабря 1991

Ереванский государственный университет,
Межвузовский научный центр
по прикладным проблемам математики

КОНСТРУКТИВНОЕ ОПИСАНИЕ КОНЕЧНОПОРОЖДЕННЫХ ИДЕАЛОВ В АЛГЕБРАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ, ГЛАДКИХ ВПЛОТЬ ДО ЕГО ГРАНИЦЫ

Ф. А. Шамоян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 27, №. 4, 1992

Пусть ω – функция типа модуля непрерывности, т.е. неотрицательная, монотонно возрастающая функция удовлетворяющая условию Зигмунда $\int_0^\delta \frac{\omega(u)}{u}\,du = o(\omega(\delta)), \quad \delta \to 0$. В статье рассматриваются конечнопорожденные идеалы в алгебре голоморфных в единичном круге функций f, для которых $|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \le C_f\omega(|\xi_1 - \xi_2|), \quad |\xi_1|, |\xi_2| \le 1$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости, Γ – его граница, ω – функция типа модуля непрерывности, т.е. неотрицательная, полуаддитивная, монотонно возрастающая функция на $(0, +\infty)$. Обозначим через Λ_ω^a класс голоморфных в D функций f, для которых

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \le C_f\omega(|\xi_1 - \xi_2|), \quad \xi_1, \xi_2 \in \bar{D}.$$

Здесь и в дальнейшем $C_{\alpha,\ldots}$ означает положительное число, зависящее только от $\alpha, \ldots$.

В настоящей статье мы будем предполагать, что ω удовлетворяет известному условию Зигмунда, т.е.

$$\int_0^\delta \frac{\omega(u)}{u}\,du \le C\omega(\delta), \quad 0 < \delta < 1. \tag{1}$$

Введем в Λ_ω^a норму

$$\|f\|_{\Lambda_\omega^a} = \|f\|_\infty + \sup_{\xi_1,\xi_2 \in D} \left\{ \frac{|f(\xi_1) - f(\xi_2)|}{\omega(|\xi_1 - \xi_2|)} \right\}. \tag{2}$$

Легко видеть, что относительно поточечного умножения и сложения Λ_ω^a является банаховой алгеброй. Из общей теории банаховых алгебр можно вывести следующее обобщение теоремы Карлесона о короне [1]. Если функции $f_1, f_2, \dots, f_n \in \Lambda^a_\omega$ не имеют общих нулей в замыкании $\bar{D}$ единичного круга, то найдутся такие функции $h_1, h_2, \dots, h_n \in \Lambda^a_\omega$, что

$$f_1 h_1 + f_2 h_2 + \cdots + f_n h_n = 1.$$

Однако общая теория не позволяет явно построить множители h_j, $1 \le j \le n$ и оценить их. Мы выпишем формулы, выражающие h_j через данные f_j. Эти формулы позволяют дать некоторый ответ на следующий, более общий вопрос : какие функции g принадлежат идеалу, порожденному в алгебре Λ^a_ω данными функциями $f_1, f_2, \dots, f_n$? Иначе говоря, какие функции g из Λ^a_ω представимы в виде

$$g = f_1 h_1 + f_2 h_2 + \cdots + f_n h_n, \quad h_k \in \Lambda^a_\omega, \quad 1 \le k \le n? \tag{3}$$

Для этого, очевидно, необходимо, чтобы

$$|g(\xi)| \le C(|f_1(\xi)| + \cdots + |f_n(\xi)|), \quad \xi \in D. \tag{4}$$

Однако мы приведем примеры, показываюшие, что не только (4), но и оценки

$$|g(\xi)| \le C\left(|f_1(\xi)|^2 + \cdots + |f_n(\xi)|^2\right), \quad \xi \in D \tag{5}$$

недостаточно для представимости функции $g \in \Lambda^a_\omega$ в виде (3). Тем не менее, справедлива следующая

Теорема 1. *Если функции $g, f_1, \dots, f_n \in \Lambda^a_\omega$ удовлетворяют условию (5) и $||g||_{\Lambda^a_\omega} \le 1$, $||f_j||_{\Lambda^a_\omega} \le 1$, $1 \le j \le n$ то найдутся функции $h_1, \dots, h_n \in \Lambda^a_\omega$, такие что*

$$g^2(\xi) = f_1(\xi)h_1(\xi) + f_2(\xi)h_2(\xi) + \cdots + f_n(\xi)h_n(\xi), \quad \xi \in D. \tag{6}$$

При этом

$$\max_{1 \le j \le n} ||h_j||_{\Lambda^a_\omega} \le \text{const}\, ||\frac{g}{S}||_\infty, \tag{7}$$

где

$$S(\xi) = |f_1(\xi)|^2 + |f_2(\xi)|^2 + \cdots + |f_n(\xi)|^2. \tag{8}$$

Подчеркнем, что функции h_j, участвующие в (6), выражаются явно через g и $f_1, \ldots, f_n$ (см. Лемму 2). Это построение подсказано "схемой Хёрмандера", сводящей проблему короны к $\overline{\partial}$ проблеме [2]. Эта последняя решается с помощью модификации известной формулы М. Джрбашяна [3].

§1 настоящей статьи посвящен доказательству вспомогательных утверждений, §2 – доказательству Теоремы 1 и ее точности. В §3 мы докажем некоторый аналог Теоремы 1 для случая высших производных. Отметим также, что часть результатов этой работы ранее была анонсирована в заметке [4].

§1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Перейдем к доказательству вспомогательных утверждений, применяемых при доказательстве Теоремы 1. Здесь мы получим некоторое обобщение интегральных представлений классов Джрбашяна A^p_α. Пусть $A(D)$ означает класс всех аналитичных в D функций. Следуя Джрбашяну [3], обозначим через $A^p(\alpha)$, $-1 < \alpha < \infty$, $0 < p < \infty$ следующий класс функций :

$$A^p(\alpha) = \left\{ f \in A(D) : \|f\|_{A^p(\alpha)} \stackrel{def}{=} \left(\int_D |f(\xi)|^p (1-|\xi|^2)^\alpha \, dm_2(\xi) \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

где dm_2 – плоская мера Лебега.

По теореме М. М. Джрбашяна каждая $f \in A^p(\alpha)$, $p \geq 1$ допускает интегральное представление :

$$f(z) = \frac{\alpha+1}{\pi} \int_D \frac{(1-|\xi|^2)^\alpha f(\xi)\, dm_2(\xi)}{(1-\bar{\xi} z)^{\alpha+2}}, \quad z \in D.$$

Следующая лемма непосредственно следует из этой формулы (см. [4], [5]). Для полноты изложения приведем её доказательство.

Лемма 1. *Если h – функция класса $C^1(D)$ и* grad h *суммируем на D, то при $\alpha > -1$ имеет место представление :*

$$h(z) = \frac{\alpha+1}{\pi} \int_D \frac{(1-|\xi|^2)^\alpha h(\xi)}{(1-\bar{\xi} z)^{\alpha+2}} \, dm_2(\xi) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_D \frac{(1-|\xi|^2)^{\alpha+1} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} h(\xi)}{(1-\bar{\xi} z)^{\alpha+1}(z-\xi)} \, dm_2(\xi), \quad z \in D. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $h \in C^1(D)$ и $\operatorname{grad} h \in L^1(D, dm_2)$. Положим

$$f_h(z) = \frac{\alpha+1}{\pi} \int_D \frac{(1-|\xi|^2)^\alpha h(\xi)}{(1-\bar{\xi}z)^{\alpha+2}}\, dm_2(\xi), \quad z \in D.$$

Воспользовавшись равенством

$$\frac{\alpha+1}{\pi} \int_D \frac{(1-|\xi|^2)^\alpha}{(1-\bar{\xi}z)^{\alpha+2}}\, dm_2(\xi) = 1,$$

мы получим

$$f_h(z) - h(z) = \frac{\alpha+1}{\pi} \int_D \frac{(1-|\xi|^2)^\alpha (h(\xi)-h(z))}{(1-\bar{\xi}z)^{\alpha+2}}\, dm_2(\xi). \qquad (10)$$

Теперь заметим, что

$$\frac{\alpha+1}{(1-\bar{\xi}z)^{\alpha+2}}(1-|\xi|^2)^\alpha = \frac{1}{z-\xi}\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1}.$$

Поэтому из (10) получаем

$$f_h(z) - h(z) = \frac{1}{\pi}\int_D \frac{h(\xi)-h(z)}{z-\xi}\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1} dm_2(\xi) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_D \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}}\left[(h(\xi)-h(z))\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1}\right]\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_D \left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1}\frac{\partial h}{\partial \bar{\xi}}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}.$$

Рассмотрим первый интеграл. Для $\psi \in C^1(D)$ имеем по формуле Помпейю [6]

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi}\int_D \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\xi}}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\psi(\xi)}{z-\xi}\, d\xi.$$

Положим в этом равенстве

$$\psi_z(\xi) = (h(\xi)-h(z))\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1}$$

и учитывая, что $\psi_z(z) = \psi_z(e^{i\theta}) = 0$, получим

$$f_h(z) - h(z) = -\frac{1}{\pi}\int_D \left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1}\frac{\partial h}{\partial \bar{\xi}}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}.$$

Отсюда непосредственно следует (9). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть функции $g, f_1, f_2, \ldots, f_n$ принадлежат Λ^a_ω. Тогда функции*

$$h_k(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^{n} \frac{f_m(z)}{\pi} \int_D S^{-2}(\xi)[\overline{f'_m(\xi) f_k(\xi)} - \overline{f'_k(\xi) f_m(\xi)}] g^2(\xi) \times$$

$$\times \left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1} \frac{dm_2(\xi)}{z-\xi} + \frac{\overline{f_k(z)} g^2(z)}{S(z)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n; \quad z \in D \qquad (*)$$

аналитичны в D и удовлетворяют уравнению (6).

Доказательство. Сначала докажем, что $h_k \in A(D)$. Имеем по Лемме 1

$$\frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}} = \frac{g^2(z)}{S^2(z)} \left[\overline{f'_k}(z) \sum_{m=1}^{n} |f_m(z)|^2 - \overline{f_k}(z) \sum_{m=1}^{n} \overline{f'_m}(z) f_m(z)\right] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n} f_m(z) [\overline{f'_m}(z) \overline{f_k}(z) - \overline{f'_k(z) f_m(z)}] \frac{g^2(z)}{S^2(z)}.$$

Из этого равенства следует, что $\dfrac{\partial h_k}{\partial \bar{z}} = 0$, $1 \le k \le n$, т.е. $h_k \in A(D)$. Первое утверждение леммы коказано. Перейдем к доказательству второго утверждения. Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} f_k h_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{f_k f_m}{\pi} \int_D S^{-2}(\xi)[\overline{f'_m(\xi) f_k(\xi)} - \overline{f'_k(\xi) f_m(\xi)}] g^2(\xi) \times$$

$$\times \left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1} \frac{dm_2(\xi)}{z-\xi} + \frac{g^2}{S^2} \sum_{m=1}^{n} |f_m(z)|^2 = g^2.$$

Лемма 2 доказана.

Следующую лемму можно вывести из результатов работы [7].

Лемма 3. *Пусть $f \in \Lambda^a_\omega$, где ω удовлетворяет условию (1). Тогда имеет место оценка*

$$|f'(z)| \le C_f \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}, \quad z \in D. \qquad (11)$$

И обратно, если $f \in A(D)$ и f' удовлетворяет оценке (11), то $f \in \Lambda^a_\omega$.

Лемма 4. *Если $\|f_m\|_{\Lambda^a_\omega} \le 1$, $1 \le m \le n$ и $\|g\|_{\Lambda^a_\omega} \le 1$, то*

$$\|h_k\|_\infty \le \text{const}\, \|g^2 S^{-3/2}\|_\infty.$$

Доказательство. Из (*) имеем

$$|h_k(z)| \le \sum_{m=1}^{n} \frac{|f_m(z)|}{\pi} \int_D S^{-2}(\xi)|z-\xi|^{-1}|f'_m(\xi) f_k(\xi) - f'_k(\xi) f_m(\xi)|\, |g^2(\xi)| \times$$

$$\times \left|\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi} z}\right|^{\alpha+1} dm_2(\xi) + \|g^2 S^{-3/2}\|_\infty \le$$

$$\le \|g^2 S^{-3/2}\|_\infty \left[1 + \sum_{m=1}^{n} \int_D |z-\xi|^{-1}[|f'_m(\xi)| + |f'_k(\xi)|] \left|\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi} z}\right|^{\alpha+1} dm_2(\xi)\right].$$

Отсюда, используя Лемму 3, получаем

$$|h_k(z)| \le \|g^2 S^{-3/2}\|_\infty \times$$

$$\times \left[1 + \sum_{m=1}^{n} (\|f_m\|_{\Lambda^\omega_\alpha} + \|f_k\|_{\Lambda^\omega_\alpha}) \int_D \frac{\omega(1-|\xi|)(1-|\xi|^2)^\alpha}{|1-\bar{\xi} z|^{\alpha+1}|z-\xi|}\, dm_2(\xi)\right].$$

Приступим к оценке интеграла

$$I = \int_D \frac{\omega(1-|\xi|)(1-|\xi|^2)^\alpha}{|1-\bar{\xi} z|^{\alpha+1}|z-\xi|}\, dm_2(\xi) =$$

$$= \int_0^1 \omega(1-\rho)(1-\rho^2)^\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho\, d\rho\, d\varphi}{|1-\rho r e^{i(\theta-\varphi)}|^{\alpha+1}|\rho e^{i\varphi} - r e^{i\theta}|}. \tag{12}$$

Внутренний интеграл оценим следующим образом. Разобьем область интегрирования на две части : $|\varphi| < |\rho - r|$ и $|\varphi| \ge |\rho - r|$. Имеем

$$\int_{|\varphi|<|\rho-r|} [(1-\rho r)^2 + 4r\rho \sin^2 \varphi/2]^{-\frac{\alpha+1}{2}} [(\rho-r)^2 + 4r\rho\sin^2\varphi/2]^{-\frac{1}{2}}\, d\varphi \le$$

$$\le (1-\rho r)^{-\alpha-1} \int_{|\varphi|<|\rho-r|} [(\rho-r)^2 + 4r\rho\sin^2\varphi/2]^{-\frac{1}{2}}\, d\varphi \le \frac{\text{const}}{(1-\rho r)^{\alpha+1}} \tag{13}$$

и

$$\int_{|\varphi|\ge|\rho-r|} |1-\rho r e^{i\varphi}|^{-\alpha-1} |r-\rho e^{i\varphi}|^{-1}\, d\varphi \le \frac{\text{const}}{(1-\rho r)^{\alpha+1}} \log\frac{1}{|\rho - r|}. \tag{14}$$

Таким образом, учитывая (13) и (14), получаем

$$I \le C \int_0^1 \omega(1-\rho)(1-\rho^2)^\alpha (1-r\rho)^{-\alpha-1} \left(1 + \log\frac{1}{|\rho-r|}\right) d\rho \le$$

$$\le C\left(\int_0^1 \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho}\, d\rho + \int_0^1 \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho} \log\frac{1}{|\rho-r|}\, d\rho\right) =$$

$$= C\left(\int_0^1 \frac{\omega(u)}{u}\, du + \int_0^1 \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho}\log\frac{1}{|\rho-r|}\, d\rho\right).$$

Первый интеграл сходится ввиду условия (1). Оценим второй интеграл :

$$\int_0^1 \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho}\log\frac{1}{|\rho-r|}\,d\rho = \int_0^r \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho}\log\frac{1}{r-\rho}\,d\rho + \int_r^1 \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho}\log\frac{1}{\rho-r}\,d\rho.$$

$$\int_0^r \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho}\log\frac{1}{r-\rho}\,d\rho = \int_{1-r}^1 \frac{\omega(t)}{t}\log\frac{1}{t-(1-r)}\,dt.$$

Легко видеть, что

$$\int_{1-r}^{2(1-r)} \frac{\omega(t)}{t}\log\frac{1}{t-(1-r)}\,dt \le C_o\omega(1-r)\log\frac{1}{1-r}. \tag{15}$$

и

$$\int_{2(1-r)}^1 \frac{\omega(t)}{t}\log\frac{1}{t-(1-r)}\,dt \le \int_{2(1-r)}^1 \frac{\omega(t)}{t}\log\frac{2}{t}\,dt \le$$

$$\le C\log\frac{2}{1-r}\int_0^{2(1-r)}\frac{\omega(t)}{t}\,dt + \int_{2(1-r)}^1 \frac{1}{t}\int_0^t \frac{\omega(u)}{u}\,du\,dt.$$

Учитывая (15), получаем

$$\int_{2(1-r)}^1 \frac{\omega(t)}{t}\log\frac{1}{t-(1-r)}\,dt \le C\left[\omega(1-r)\log\frac{1}{1-r}+1\right].$$

Используя оценку (1), легко доказать, что

$$\sup_{0<x\le 1}\left(\omega(x)\log\frac{1}{x}\right) < +\infty. \tag{16}$$

Поэтому,

$$\sup_{0<r\le 1}\left(\int_r^1 \frac{\omega(1-t)}{1-t}\log\frac{1}{t-r}\,dt\right) < +\infty.$$

Учитывая (15), получаем $I \le \text{const}$, и тем самым

$$|h_k(z)| \le \text{const}\;\|g^2 S^{-3/2}\|_\infty.$$

Лемма 4 доказана

Следующее утверждение непосредственно следует из верхних лемм

Лемма 4' *Если ω удовлетворяет условию (1), то*

$$\sup_{z\in D} I < +\infty$$

Лемма 5 *В условиях Теоремы 1 имеет место оценка :*

$$|\mathrm{grad}\,[g^2(z)S^{-2}(z)\overline{f_k(z)}f_m(z)]| \le \text{const}\;\|g/S\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|} \tag{17}$$

Доказательство. Для краткости положим $\psi \stackrel{def}{=} g^2 S^{-2}\overline{f_k} f_m$. Поскольку

$$|\text{grad } \psi(\xi)| \le 2\left|\frac{\partial\psi}{\partial\xi}(\xi)\right| + 2\left|\frac{\partial\psi}{\partial\bar\xi}(\xi)\right|, \quad \xi \in D,$$

то следующим образом можно оценить обе производные функции ψ. Имеем

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi}(\xi) = 2g(\xi)g'(\xi)S^{-2}(\xi)\overline{f_k}(\xi)f_m(\xi) + g^2(\xi)S^{-2}(\xi)\overline{f_k}(\xi)f'_m(\xi)-$$

$$-2g^2(\xi)S^{-3}(\xi)\overline{f_k(\xi)}f_m(\xi)\sum_{j=1}^{n} f_j(\xi)\overline{f'_j(\xi)}$$

и следовательно,

$$\left|\frac{\partial\psi(\xi)}{\partial\xi}\right| \le C\frac{\omega(1-|\xi|)}{1-|\xi|}\left(\|gS^{-1}\|_\infty + \|g^2S^{-3/2}\|_\infty\right) \le C_1\|gS^{-1}\|_\infty\frac{\omega(1-|\xi|)}{1-|\xi|} \quad (18)$$

Оценим теперь $\dfrac{\partial\psi}{\partial\bar\xi}$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\bar\xi}(\xi) = g^2(\xi)S^{-2}(\xi)f_m(\xi)\overline{f'_k}(\xi) - g^2(\xi)S^{-3}(\xi)f_m(\xi)\overline{f_k(\xi)}\sum_{j=1}^{n}\overline{f'_j(\xi)}f_j(\xi).$$

Отсюда находим

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial\bar\xi}(\xi)\right| \le C_2\frac{\omega(1-|\xi|)}{1-|\xi|}\|g^2S^{-3/2}\|_\infty \le C_3\|gS^{-1}\|_\infty\frac{\omega(1-|\xi|)}{1-|\xi|} \quad (19)$$

И лемма 5 следует из неравенств (17) – (19).

Пусть $1 \le m \le n$, $1 \le k \le n$, f_m, f_k и g – функции из Теоремы 1. Положим

$$I_m(z) = \frac{1}{\pi}\int_D \frac{(f_m(z)-f_m(\xi))\left(\overline{f'_m(\xi)f_k(\xi)} - \overline{f'_k(\xi)f_m(\xi)}\right)g^2(\xi)}{(z-\xi)S^2(\xi)} \times$$

$$\times\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar\xi z}\right)^{\alpha+1} dm_2(\xi).$$

Лемма 6. *Имеет место оценка*

$$\left|\frac{\partial I_m(z)}{\partial z}\right| \le \text{const}\ \|gS^{-3/2}\|_\infty\frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}, \quad z \in D,$$

где, как обычно, $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, $z = x + iy$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\frac{\partial I_m(z)}{\partial z} = \frac{1}{\pi}\int_D \frac{f'(z)\left(\overline{f'_m(\xi)f_k(\xi)} - \overline{f'_k(\xi)f_m(\xi)}\right)g^2(\xi)}{(z-\xi)S^2(\xi)}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar\xi z}\right)^{\alpha+1} dm_2(\xi) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_D \frac{(f_m(z)-f_m(\xi))\left(\overline{f'_m(\xi)f_k(\xi)} - \overline{f'_k(\xi)f_m(\xi)}\right)g^2(\xi)}{(z-\xi)^2S^2(\xi)}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar\xi z}\right)^{\alpha+1} dm_2(\xi) +$$

$$+\frac{\alpha+1}{\pi}\int_D \frac{(f_m(z)-f_m(\xi))\left(\overline{f'_m(\xi)f_k(\xi)} - \overline{f'_k(\xi)f_m(\xi)}\right)g^2(\xi)\bar\xi}{(z-\xi)S^2(\xi)}\times$$

$$\times\frac{(1-|\xi|^2)^\alpha}{(1-\bar\xi z)^{\alpha+2}}\,dm_2(\xi) = I_m^1 + I_m^2 + I_m^3.$$

Оценим I_m^1 :

$$|I_m^1(z)| \le \frac{|f'(z)|}{\pi}\int_D \frac{|f'_m(\xi)f_k(\xi) - f'_k(\xi)f_m(\xi)|\,|g^2(\xi)|}{|z-\xi|S^2(\xi)}\left|\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar\xi z}\right|^{\alpha+1} dm_2(\xi) \le$$

$$\le C\frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}\int_D \frac{|f'_m(\xi)f_k(\xi) - f'_k(\xi)f_m(\xi)|\,|g^2(\xi)|}{|z-\xi|S^2(\xi)}\left|\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar\xi z}\right|^{\alpha+1} dm_2(\xi) \le$$

$$\le \mathrm{const}\,\|g^2S^{-3/2}\|_\infty\frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|},\quad z\in D. \tag{20}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались Леммой 4* и оценкой (11) для $|f'_m(z)|$.

Теперь оценим I_m^2 :

$$I_m^2(z) = \frac{1}{\pi}\int_{D_z}(\cdot)\,dm_2(\xi) + \frac{1}{\pi}\int_{CD_z}(\cdot)\,dm_2(\xi) \stackrel{def}{=} \tilde I_m^2 + \tilde{\tilde I}{}_m^2.$$

Здесь $D_z \stackrel{def}{=} \{\xi : |z| < |\xi| < 1\}$, $CD_z = D\setminus D_z$. Имеем

$$|\tilde I_m^2(z)| \le C\int_{D_z} \frac{|f'(\xi_z)|\,|f'_m(\xi)f_k(\xi) - f'_k(\xi)f_m(\xi)|\,|g^2(\xi)|}{S^2(\xi)|z-\xi|}\left|\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar\xi z}\right|^{\alpha+1} dm_2(\xi) \le$$

$$\le C\|g^2S^{-3/2}\|_\infty\int_{D_z}|z-\xi|^{-1}|f'(\xi_z)|\,[|f'_m(\xi)| + |f'_k(\xi)|]\left|\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar\xi z}\right|^{\alpha+1} dm_2(\xi),$$

где ξ_z - некоторая точка из отрезка, соединяющего z и ξ. Но поскольку $|z|\le|\xi|$, то $|z|\le|\xi_z|\le|\xi|$. Следовательно, из (11) вытекает, что

$$|\tilde I_m^2(z)| \le C_1\|g^2S^{-3/2}\|_\infty\int_{|z|}^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\omega^2(1-|\xi|)(1-|\xi|)^{\alpha-1}}{|\xi-z|\,|1-\bar\xi z|^{\alpha+1}}\,dm_2(\xi) \le$$

$$\leq C_2\|g^2S^{-3/2}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}\int_0^1 \omega(1-\rho)(1-\rho)^{\alpha-1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi\, d\rho}{|1-\rho re^{i\varphi}|^\alpha|\rho-re^{i\varphi}|}\leq$$

$$\leq C_3\|g^2S^{-3/2}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}\int_0^1 \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho}\log\frac{1}{|\rho-r|}\,d\rho.$$

Но, как было установлено при доказательстве Леммы 4, последний интеграл равномерно ограничен на $[0\,;1]$. Поэтому в итоге получаем

$$|\tilde{I}_m^2(z)|\leq C_4\|gS^{-3/2}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|},\quad z\in D. \tag{21}$$

Перейдем теперь к оценке $\tilde{\tilde{I}}_m^2$:

$$|\tilde{\tilde{I}}_m^2(z)|\leq \int_0^{|z|}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f_m(z)-f_m(\xi)}{(z-\xi)^2}\right| |f_m'(\xi)f_k(\xi)-f_k'(\xi)f_m(\xi)|\,|g^2(\xi)S^{-2}(\xi)|\times$$

$$\times\left|\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right|^{\alpha+1} dm_2(\xi).$$

Заметим, что

$$|f_m(\xi)-f_m(z)|\leq C\frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}|\xi-z|,\quad \xi,z\in CD_z. \tag{21'}$$

В самом деле, снова используем неравенство

$$|f_m(\xi)-f_m(z)|\leq |f'(\xi_z)|\,|\xi-z|,\quad \xi_z\in\Gamma_{\xi,z},$$

где $\Gamma_{\xi,z}$ – отрезок, соединяющий точки ξ и z, но поскольку $|\xi|\leq|z|$, то $|\xi_z|\leq|z|$. Следовательно,

$$|f'(\xi_z)|\leq C\frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}.$$

Итак, получаем оценку

$$|\tilde{\tilde{I}}_m^2(z)|\leq C\|g^2S^{-3/2}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}\int_0^{|z|}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-|\xi|^2)^\alpha\omega(1-|\xi|)}{|1-\bar{\xi}z|^{\alpha+1}|\xi-z|}\,dm_2(\xi).$$

Используя Лемму 4*, приходим к неравенству

$$|\tilde{\tilde{I}}_m^2(z)|\leq C_2\|g^2S^{-3/2}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|},\quad z\in D. \tag{22}$$

Применяя оценки (20) - (22), окончательно получаем

$$|I_m^2(z)| \le \text{const}\ \|g^2 S^{-3/2}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}, \quad z \in D.$$

Для доказательства Леммы 6 осталось оценить I_m^3. Интеграл, фигурирующий в $I_m^3(z)$, представим в виде суммы двух интегралов $\tilde{I}_m^3$ и $\tilde{\tilde{I}}_m^3$, с областями интегрирования D_z и CD_z. Сначала оценим $\tilde{I}_m^3$:

$$|\tilde{I}_m^3(z)| \le C \int_{|z|}^1 \omega(1-\rho)(1-\rho)^\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{g^2(\rho e^{i\varphi})}{S^2(\rho e^{i\varphi})}\right| \times$$

$$\times \frac{|f_m'(\rho e^{i\varphi})|\,|f_k(\rho e^{i\varphi})| + |f_k'(\rho e^{i\varphi})|\,|f_m(\rho e^{i\varphi})|}{|1-r\rho e^{i(\theta-\varphi)}|^{\alpha+2}} \rho\, d\rho\, d\varphi. \tag{23}$$

Здесь мы использовали неравенство (21'). Из (23) получаем

$$|\tilde{I}_m^3(z)| \le C_2 \|g^2 S^{-3/2}\|_\infty \int_{|z|}^1 \omega^2(1-\rho)(1-\rho)^{\alpha-1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi\, d\rho}{|1-r\rho e^{i\varphi}|^{\alpha+2}}$$

и следовательно,

$$|\tilde{I}_m^3(z)| \le C_3 \|g^2 S^{-3/2}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|} \int_0^1 \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho} d\rho \le$$

$$\le C_4 \|g^2 S^{-3/2}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}, \quad z \in D.$$

Приступим к оценке $\tilde{\tilde{I}}_m^3$. Используя неравенство (21') для $|\xi| \le |z|$, получим

$$|\tilde{\tilde{I}}_m^3(z)| \le C_1 \|g^2 S^{-3/2}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|} \int_0^{|z|} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\omega(1-\rho)(1-\rho^2)^\alpha \rho\, d\rho\, d\varphi}{|1-\rho e^{-i\varphi} z|^{\alpha+2}} \le$$

$$\le C_1 \|g^2 S^{-3/2}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}, \quad z \in D.$$

Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть*

$$\psi(\xi) = \frac{g^2(\xi)}{S^2(\xi)} \overline{f_k(\xi)} f_m(\xi), \quad 1 \le m, k \le n$$

где g и S – функции из Теоремы 1. Положим

$$V(z) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{\psi(\xi)\overline{f_m'(\xi)}(1-|\xi|^2)^{\alpha+1}}{(1-\bar{\xi} z)^{\alpha+1}} \frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}, \quad z \in D, \quad \alpha > 0.$$

Тогда имеет место оценка

$$\left|\frac{\partial V}{\partial z}(z)\right| \leq \text{const } \|gS^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}, \quad z \in D.$$

Доказательство. Имеем

$$V(z) = \frac{1}{\pi}\int_D (\psi(\xi)-\psi(z))\overline{f'_m(\xi)}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}+$$

$$+\frac{\psi(z)}{\pi}\int_D \overline{f'_m(\xi)}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}, \quad z \in D. \tag{24}$$

Из Леммы 1 следует, что

$$\frac{1}{\pi}\int_D \overline{f'_m(\xi)}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_D \frac{\partial}{\partial\bar{\xi}}\overline{f_m(\xi)}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi} = \overline{f_m(z)} - \overline{f_m(0)}.$$

Поэтому

$$V(z) = \frac{1}{\pi}\int_D [\psi(\xi)-\psi(z)]\overline{f'_m(\xi)}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}+$$

$$+\psi(z)[\overline{f_m(z)} - \overline{f_m(0)}], \quad z \in D.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial V}{\partial z}(z) = -\frac{1}{\pi}\int_D \frac{\psi(\xi)-\psi(z)}{(z-\xi)^2}\overline{f'_m(\xi)}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1} dm_2(\xi)+$$

$$+\frac{\alpha+1}{\pi}\int_D [\psi(\xi)-\psi(z)]\overline{f'_m(\xi)}(1-|\xi|^2)^{\alpha}(1-\bar{\xi}z)^{-\alpha-2}\bar{\xi}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_D \overline{f'_m(\xi)}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}\psi'(z) + \psi'(z)[\overline{f_m(z)} - \overline{f_m(0)}],$$

где $\psi' = \frac{\partial}{\partial z}\psi$. Используя равенство (24), получаем

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -W_1(z) + W_2(z), \quad z \in D,$$

где

$$W_1(z) = \frac{1}{\pi}\int_D \frac{\psi(\xi)-\psi(z)}{(z-\xi)^2}\overline{f'_m(\xi)}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1} dm_2(\xi),$$

$$W_2(z) = \frac{\alpha+1}{\pi}\int_D [\psi(\xi)-\psi(z)]\overline{f'_m(\xi)}(1-|\xi|^2)^{\alpha}(1-\bar{\xi}z)^{-\alpha-2}\bar{\xi}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}.$$

Сначала оценим W_1. Для этого запишем его в виде суммы двух интегралов W_1^1 и W_1^2 по отрезкам $(|z|;1)$ и $(0,|z|)$. Из Леммы 5 следует

$$\left|\frac{\psi(\xi)-\psi(z)}{(\xi-z)^2}\right| \le \text{const}\ \|gS^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|\xi|)}{1-|\xi|}\frac{1}{|\xi-z|}.$$

Но $|\xi|\ge|z|$, а $|\operatorname{grad}\psi|$ удовлетворяет оценке (17), следовательно,

$$|W_1^1(z)| \le \text{const}\ \|gS^{-1}\|_\infty \int_{|z|}^1 \frac{\omega^2(1-\rho)}{(1-\rho^2)^{1-\alpha}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{|1-r\rho e^{i\varphi}|^{\alpha+1}|\rho-re^{i\varphi}|} \le$$

$$\le \text{const}\ \|gS^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}\int_D \frac{\omega(1-|\xi|)(1-|\xi|)^{\alpha-1}}{|1-\bar{\xi}z|^\alpha|\xi-z|}\,dm_2(\xi).$$

Теперь, используя Лемму 4*, получим оценку

$$|W_1^1(z)| \le \text{const}\ \|gS^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}. \tag{25}$$

Рассмотрим теперь интеграл W_1^2:

$$|W_1^2(z)| \le \text{const}\ \|gS^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}\int_0^{|z|}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f'(\rho e^{i\varphi})|(1-\rho^2)^{\alpha+1}}{|z-\rho e^{i\varphi}|\,|1-z\rho e^{-i\varphi}|^{\alpha+1}}\rho\,d\rho\,d\varphi \le$$

$$\le \text{const}\ \|gS^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}\int_D \frac{\omega(1-|\xi|)(1-|\xi|^2)^\alpha}{|\xi-z|\,|1-\bar{\xi}z|^{\alpha+1}}\,dm_2(\xi).$$

Для оценки последнего интеграла используем Лемму 4* и приходим к неравенству

$$|W_1^2(z)| \le \text{const}\ \|gS^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}, \quad z\in D. \tag{26}$$

Объединяя оценки (25) и (26), получим

$$|W_1(z)| \le \text{const}\ \|gS^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}, \quad z\in D. \tag{27}$$

Итак, для получения подходящей оценки $\frac{\partial V}{\partial z}$ осталось оценить W_2. Как и прежде, интеграл, определяющий W_2, представим в виде суммы двух интегралов W_2^1 и W_2^2 с областями интегрирования $(|z|;1)$ и $(0,|z|)$. Из Лемм 3 и 5 следует

$$|W_2^1(z)| \le \text{const}\ \|gS^{-1}\|_\infty \int_{|z|}^1\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\omega^2(1-\rho)(1-\rho^2)^{\alpha-1}}{|1-z\rho e^{-i\varphi}|^{\alpha+2}}\rho\,d\rho\,d\varphi \le$$

$$\le \text{const}\ \|gS^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}\int_0^1 \omega(1-\rho)(1-\rho)^{\alpha-1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{|1-z\rho e^{-i\varphi}|^{\alpha+1}}.$$

Отсюда нетрудно получить оценку

$$|W_2^1(z)| \le \text{const } \|gS^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|} \int_0^1 \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho}\, d\rho \le$$

$$\le \text{const } \|gS^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}, \quad z \in D.$$

Теперь оценим W_2^2. Снова используя Леммы 3, 5 и проводя аналогичные рассуждения, приведенные при оценке W_2^1, получим

$$|W_2^2(z)| \le \text{const } \|gS^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}.$$

Лемма 7 доказана

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Обозначим

$$J_m(z) = f_m(z) \int_D [\overline{f'_m(\xi) f_k(\xi)} - \overline{f'_k(\xi) f_m(\xi)}] g^2(\xi) S^{-2}(\xi) \left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi} z}\right)^{\alpha+1} \frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}.$$

Функции

$$h_k(z) = \overline{f_k(z)} g^2(z) S^{-1}(z) + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\pi} J_m(z)$$

по Леммам 2 и 4 голоморфны, ограничены в D и удовлетворяют уравнению (6). Нужно доказать, что эти функции принадлежат Λ_ω^a и справедливы оценки типа (7) для $h'_k(z)$, $1 \le k \le n$. Используя оператор $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, получаем

$$|h'_k(z)| \le \left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{f_k}(z) g^2(z) S^{-1}(z)\right)\right| + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial z} J_m(z)\right|.$$

Нетрудно видеть справедливость оценки

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{f_k}(z) g^2(z) S^{-1}(z)\right)\right| \le C\|g^2 S^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}, \quad z \in D.$$

Для доказательства теоремы достаточно получить необходимую оценку для $\frac{\partial}{\partial z} J_m$, $1 \le m \le n$. Положим $J_m = I_m + V$, где

$$V = \int_D f_m(\xi) [\overline{f'_m(\xi) f_k(\xi)} - \overline{f'_k(\xi) f_m(\xi)}] g^2(\xi) S^{-2}(\xi) \left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi} z}\right)^{\alpha+1} \frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}.$$

Используя Леммы 6 и 7, получаем

$$|h_k'(z)| \le \text{ const } \|gS^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}, \quad z \in D.$$

Отсюда, используя Леммы 3 и 4, получаем

$$\|h_k\|_{\Lambda_\omega^a} \le \text{ const } \|gS^{-1}\|_\infty.$$

Теорема доказана.

Докажем, что условие (5) в известном смысле необходимо для представимости функции g^2 в виде (6). В следующей теореме мы используем обозначение $\Lambda_\alpha^a \stackrel{def}{=} \Lambda_{t^\alpha}^a$, т.е. рассматриваем случай $\omega(t) = t^\alpha$. В частности, Λ_α^a означает Гёльдеровский класс функций, голоморфных в D.

Теорема 2 *Для произвольного $\gamma \in [2,3)$ существуют функции $f_\alpha, g_\alpha \in \Lambda_\alpha^a$, $0 < \alpha \le 1$, удовлетворяющие условию*

$$|g_\alpha(z)| \le |f_\alpha(z)|^\gamma, \quad z \in D \tag{28}$$

и такие, что

$$g_\alpha(z)/f_\alpha(z) \notin \Lambda_\alpha^a.$$

Доказательство Положим для $0 < \alpha \le 1$ и $2 \le \gamma < 3$

$$f_\alpha(z) \stackrel{def}{=} (1-z)^\alpha, \quad z \in D,$$

$$g_\alpha(z) \stackrel{def}{=} (1-z)^{\alpha\gamma} \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right), \quad z \in D.$$

Ясно, что функции f_α, g_α удовлетворяют условию (28). Легко видеть, что для производной имеет место

$$|g_\alpha'(z)| \le C(\alpha,\gamma)(1-|z|)^{\frac{\alpha\gamma}{2}-1}, \quad z \in D.$$

Отсюда, используя теорему Харди–Литтлвуда, получим $g \in \Lambda_\alpha^a$ при $2 \le \gamma < \infty$. Но на окружности $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ имеем

$$|g_\alpha'(z)| \ge C_o(\alpha,\gamma)(1-|z|)^{\frac{\alpha\gamma}{2}-1}, \quad C_o(\alpha,\gamma) > 0. \tag{29}$$

Поэтому при $0 \le \gamma < 2$ имеет место $g_\alpha \notin \Lambda_\alpha^a$. Теперь предположим, что существует $\psi \in \Lambda_\alpha^a$, такая что $g(z) = \psi(z) f(z), \quad z \in D$. Тогда получаем

$$\psi(z) = (1-z)^{\alpha(\gamma-1)} \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right) \in \Lambda_\alpha^a,$$

что невозможно при $0 < \gamma < 3$ ввиду (29). Теорема доказана.

§3. ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ КОРОНЫ В $\Lambda_\alpha^{(m)} (m \geq 1)$

В этом параграфе мы обобщим часть результатов предыдущего параграфа на алгебре $\Lambda_\alpha^{(m)}$, $0 < \alpha < 1$, $m \geq 1$. Напомним определение $\Lambda_\alpha^{(m)}$:

$$\Lambda_\alpha^{(m)} \stackrel{def}{=\!=} \left\{ f \in C_A^{(m)} : \sup_{\xi_1, \xi_2 \in \overline{D}} \frac{|f^{(m)}(\xi_1) - f^{(m)}(\xi_2)|}{|\xi_1 - \xi_2|^\alpha} + \|f\|_\infty = \|f\|_{\Lambda_\alpha^{(m)}} < \infty \right\}.$$

Здесь $C_A^{(m)} \stackrel{def}{=\!=} C^{(m)}(\overline{D}) \cap A(D)$.

Теорема 3. *Пусть* $f_1, f_2, ..., f_n \in \Lambda_\alpha^{(m)}$, $\|f_j\|_{\Lambda_\alpha^{(m)}} \leq 1$, $1 \leq j \leq n$ *и*

$$S(z) = |f_1(z)|^2 + \cdots + |f_n(z)|^2 \geq \delta, \quad z \in D.$$

Тогда в $\Lambda_\alpha^{(m)}$ *можно построить функции* $h_1, h_2, ..., h_n$, *такие что*

$$f_1(z)h_1(z) + \cdots + f_n(z)h_n(z) = 1, \quad z \in D \tag{30}$$

и

$$\|h_j\|_{\Lambda_\alpha^{(m)}} \leq \text{ const } \delta^{-1-\frac{m+1}{2}}. \tag{31}$$

Доказательству Теоремы 3 предпошлем несколько лемм.

Лемма 8. *(см. [8], стр. 63) Для* $0 < \alpha < 1$ *имеет место*

$$\int_D \frac{dm_2(\xi)}{(1 - |\xi|)^{1-\alpha} |\xi - e^{i\theta_1}| \, |\xi - e^{i\theta_2}|} \leq \frac{C(\alpha)}{|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|^{1-\alpha}}.$$

Лемма 9. *(см. [5], стр. 78) Пусть* g *принадлежит классу Соболева* W_1^m. *Тогда*

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m} \int_D g(\xi) \frac{dm_2(\xi)}{z - \xi} = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{\partial^m g}{\partial \xi^m} \frac{dm_2(\xi)}{z - \xi} + \sum_{k=1}^{m} \frac{(k-1)!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\partial^{m-k} g(\xi)}{\partial \xi^{m-k}} (\xi - z)^{-k} \, d\xi.$$

Лемма 10.

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial \theta^l} \frac{\partial^{m-k}}{\partial \xi^{m-k}} S^{-2}(\xi) \right| \leq \text{ const } S^{-\frac{m-k+l}{2}-2},$$

$$l = 0, 1, ..., k; \quad k = 1, 2, ..., m; \quad \xi = \rho e^{i\theta}.$$

Доказательство. Меняя порядок дифференцирования и используя формулу Фаа-ди-Бруно (см. [9]), получим

$$\frac{\partial^{m-k}}{\partial \xi^{m-k}} \frac{\partial^l}{\partial \theta^l} S^{-2}(\xi) = \sum_{\substack{\nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + l\nu_l = l \\ \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_l = p}} C_{\nu_1, \nu_2, ..., \nu_l} \frac{\partial^{m-k}}{\partial \xi^{m-k}} (S^{(1)})^{\nu_1} \cdots (S^{(l)})^{\nu_l} S^{-p-2}, \tag{32}$$

где $S^{(j)} = \frac{\partial^j}{\partial\theta^j} S(re^{i\theta})$, $C_{\nu_1,\dots,\nu_l}$ – абсолютные постоянные, зависящие только от $\nu_1, \dots, \nu_n$.

Теперь оценим выражение

$$\Phi_1(\xi) \overset{def}{=\!=} \frac{\partial^{m-k}}{\partial\xi^{m-k}}[(S^{(1)}(\xi))^{\nu_1} S(\xi)^{-p-2}\psi(\xi)],$$

где для удобства положено

$$\psi(\xi) = \left(S^{(2)}(\xi)\right)^{\nu_2} \cdots \left(S^{(l)}(\xi)\right)^{\nu_l}.$$

Очевидно, что в условиях леммы производные от ψ' равномерно ограничены. Используя формулу Лейбница, получаем

$$\Phi_1(\xi) = \sum_{q=0}^{m-k} C^q_{m-k}\Phi_2(\xi)\frac{\partial^{m-k-q}\psi(\xi)}{\partial\xi^{m-k-q}}, \tag{33}$$

где

$$\Phi_2(\xi) \overset{def}{=\!=} \frac{\partial^q}{\partial\xi^q}[(S^{(1)}(\xi))^{\nu_1} S(\xi)^{-p-2}].$$

Снова применяя формулу Лейбница, получаем

$$\Phi_2(\xi) = \sum_{r=0}^{q} C^r_q \frac{\partial^{q-r}}{\partial\xi^{q-r}}(S^{(1)})^{\nu_1}\frac{\partial^r}{\partial\xi^r}S^{-p-2}(\xi).$$

Используя формулу Фаа-ди-Бруно, легко установить оценку

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial\xi^r}S^{-p-2}\right| \le \text{ const } [S(\xi)]^{-p-2-\frac{r}{2}}, \quad r = 0, 1, \dots, q$$

И следовательно,

$$|\Phi_2(\xi)| \le C\sum_{r=0}^{q}\left|\frac{\partial^{q-r}}{\partial\xi^{q-r}}[S^{(1)}(\xi)]^{\nu_1}[S(\xi)]^{-p-2-\frac{r}{2}}\right|.$$

Если теперь $\nu_1 \ge q - r$, то получаем

$$\left|\frac{\partial^{q-r}}{\partial\xi^{q-r}}[S^{(1)}(\xi)]^{\nu_1}\right| \le C_1|S^{(1)}(\xi)|^{\nu_1-q+r} \le C_2 S^{\frac{\nu_1-q+r}{2}}(\xi).$$

Если же $\nu_1 < q - r$, то

$$S^{-p-2-\frac{r}{2}} \le \text{ const } S^{-p-2-\frac{q-\nu_1}{2}}$$

Таким образом, в обоих случаях имеем

$$|\Phi_2(\xi)| \leq \text{ const } [S(\xi)]^{-p-2-\frac{m-k-\nu_1}{2}}.$$

Подставляя эту оценку в (33), находим

$$|\Phi_1(\xi)| \leq \text{ const } [S(\xi)]^{-p-2-\frac{m-k-\nu_1}{2}}.$$

Но учитывая равенство (32), легко видеть, что $p - \nu_1/2 \leq l/2$. Следовательно,

$$|\Phi_1(\xi)| \leq \text{ const } [S(\xi)]^{-2-\frac{m-k+l}{2}}.$$

Лемма 10 доказана.

Доказательство Теоремы 3. Мы явно построим требуемую функцию. Положим, как и при доказательстве Теоремы 1

$$h_k(z) = \overline{f_k}(z)S^{-1}(z) + \sum_{m=1}^{n} \frac{f_m(z)}{\pi} \int_D [\overline{f'_m(\xi)f_k(\xi)} - \overline{f'_k(\xi)f_m(\xi)}]S^{-2}(\xi)\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}.$$

Точно таким же образом легко установить, что $h_k \in A(D)$ и h_k удовлетворяет уравнению (30), $1 \leq k \leq n$. Докажем, что $h_k \in \Lambda_\alpha^{(m)}$ и оценим норму этих функций в пространстве $\Lambda_\alpha^{(m)}$. Положим $g_{i,j} = \overline{f'_i f_j} S^{-2}$. Сначала оценим норму функции $H(z)$:

$$H(z) \stackrel{def}{=\!=} \frac{\partial^m}{\partial z^m}\frac{1}{\pi}\int_D g_{i,j}(\xi)\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}, \quad z \in \overline{D},$$

в пространстве $C_\alpha(\Gamma)$. Используя Лемму 9, получаем $H = H_1 + H_2$, где

$$H_1(z) = \frac{1}{\pi}\int_D \frac{\partial^m g_{i,j}(\xi)}{\partial \xi^m}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi},$$

$$H_2(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(k-1)!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\partial^{m-k} g_{i,j}}{\partial \xi^{m-k}}(\xi - z)^{-k} d\overline{\xi}.$$

Сначала оценим норму функции H_2. С этой целью положим

$$G_k(z) \stackrel{def}{=\!=} \frac{(k-1)!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\partial^{m-k} g_{i,j}(\xi)}{\partial \xi^{m-k}}(\xi - z)^{-k} d\overline{\xi} = \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\partial^{m-k} g_{i,j}}{\partial \xi^{m-k}}(\xi - z)^{-1} d\overline{\xi}.$$

Для оценки нормы G_k в $C_\alpha(\Gamma)$ по теореме Привалова достаточно оценить

$$F_k \stackrel{def}{=\!=} \frac{\partial^k}{\partial \theta^k}\frac{\partial^{m-k}}{\partial \xi^{m-k}} g_{i,j}(\xi), \quad \xi = re^{i\theta}, \quad 0 \leq k \leq m-1.$$

Имеем

$$F_k = \frac{\partial^k}{\partial\theta^k}\overline{f_i'f_j}\frac{\partial^{m-k}}{\partial\xi^{m-k}}S^{-2}(\xi).$$

Используя формулу Лейбница, получаем

$$F_k = \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \frac{\partial^{k-l}\overline{f_i'f_j}}{\partial\theta^{k-l}}\frac{\partial^l}{\partial\theta^l}\frac{\partial^{m-k}}{\partial\xi^{m-k}}S^{-2}(\xi) + \overline{f_i'(\xi)f_j(\xi)}\frac{\partial^{m-k}S^{-2}(\xi)}{\partial\xi^{m-k}}.$$

Из Леммы 10 непосредственно следует

$$|F_k| \leq \text{ const } [S(\xi)]^{-1-\frac{m+1}{2}}, \quad 1 \leq i,j \leq n, \quad 0 \leq k \leq m-1.$$

Следовательно,

$$||G_k||_{\Lambda_\alpha} \leq \text{ const } \delta^{-1-\frac{m+1}{2}}, \quad 1 \leq k \leq m-1.$$

Теперь оценим норму функции G_m. Заметим, что

$$F_m = \frac{d^{m-1}}{d\theta^{m-1}}g_{i,j}(e^{i\theta})$$

принадлежит классу $C_\alpha(\Gamma)$. Используя вновь формулу Лейбница, получаcм

$$F_m = \psi(e^{i\theta})\overline{f_j}(e^{i\theta})S^{-2}(e^{i\theta}) + \Phi_3(e^{i\theta}),$$

где

$$\Phi_3 \stackrel{def}{=\!=} \sum_{k=0}^{m-2} C_{m-1}^k \frac{d^k}{d\theta^k}\overline{f_i'}\frac{d^{m-1-k}}{d\theta^{m-1-k}}\overline{f_j}S^{-2}.$$

Повторяя вышеизложенные рассуждения, мы получаем оценку

$$|\Phi_3^{(1)}(e^{i\theta})| \leq \text{ const } [S(e^{i\theta})]^{-\frac{m+1}{2}-1}. \tag{34}$$

Следовательно,

$$||\Phi_3||_{C_\alpha(\Gamma)} \leq \text{ const } \delta^{-\frac{m+1}{2}-1}. \tag{35}$$

Поскольку $m \geq 1$, то имеем

$$||\psi\overline{f_j}S^{-2}||_{C_\alpha(\Gamma)} \leq C_1\delta^{-3/2} + C_2\delta^{-2} \leq C_3\delta^{-\frac{m+1}{2}-1}. \tag{36}$$

Используя оценки (34) – (36), получаем $||G_m||_{\Lambda_\alpha} \leq C_4\delta^{-\frac{m+1}{2}-1}$. Осталось оценить нормы $\overline{f_k}S^{-2}$ и H_1. Имеем

$$|H_1(e^{i\theta_1}) - H_1(e^{i\theta_2})| = \frac{|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|}{\pi}\left|\int_D \frac{\partial^m g_{i,j}}{\partial\xi^m}(\xi - e^{i\theta_1})^{-1}(\xi - e^{i\theta_2})^{-1}\, dm_2(\xi)\right| \leq$$

$$\leq \text{ const } |e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|\int_D(1-|\xi|)^{\alpha-1}|\xi-e^{i\theta_1}|^{-1}|\xi-e^{i\theta_2}|^{-1}\,dm_2(\xi)\leq \text{ const } |e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|^{\alpha}.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались Леммами 8 и 10. Из Леммы 10 вытекает

$$\left\|\overline{f_k}\,\frac{\partial^m S^{-2}}{\partial\xi^m}\right\|_{C_\alpha(\Gamma)}\leq \text{ const } \delta^{-\frac{m+1}{2}-1}. \tag{37}$$

Из (34) - (37) окончательно получаем

$$\|h_k\|_{\Lambda_\alpha^{(m)}}\leq \text{ const } \delta^{-\frac{m+1}{2}-1}.$$

Теорема 3 доказана.

Замечание. В связи с равенством (30) и оценкой (31) отметим также работы [10] - [12], где получены решения проблемы короны в пространстве ограниченных аналитических функций, однако без явного построения множителей.

Теперь докажем, что оценка, полученная в Теореме 3, близка к точной. Пусть $f_1,f_2,...,f_n\in\Lambda_\alpha^{(m)}$,

$$C(f_1,f_2,...,f_n)=\inf\{\|g_1\|_{\Lambda_\alpha^{(m)}}+\cdots+\|g_n\|_{\Lambda_\alpha^{(m)}}\},$$

где инфимум берется по всем функциям из $\Lambda_\alpha^{(m)}$, удовлетворяющим уравнению (30), и пусть

$$C(\delta)=\sup\left\{C(f_1,...,f_n);\ |f_1(z)|^2+|f_2(z)|^2+\cdots+|f_n(z)|^2\geq\delta;\ \|f_j\|_{\Lambda_\alpha^{(m)}}\leq 1\right\}.$$

Из Теоремы 2 следует, что $C(\delta)\leq C(m)\delta^{-\frac{m+1}{2}-1}$. Докажем, что имеет место также оценка

$$C(\delta)\geq C_1(m)\delta^{-\frac{m+1}{2}-\frac{\alpha}{2}},\quad C_1>0. \tag{38}$$

Положим $f_1(z)=\dfrac{1-(1\sqrt{\delta})z}{6}$, $0<\delta<1/2$. Легко установить, что $\|f_1\|_{\Lambda_\alpha^{(m)}}\leq 1$, $m=0,1,...$. Положим далее $f_2=f_3=\cdots=f_n=0$. Тогда если $f_1g_1=1$, т.е. $g_1(z)=\dfrac{6}{1-(1-\sqrt{\delta})z}$, то используя неравенство

$$\|g_1\|_{\Lambda_\alpha^{(m)}}\geq C\max_{z\in D}\{|g^{(m+1)}(z)|(1-|z|)^{1-\alpha}\}$$

получаем

$$\|g\|_{\Lambda_\alpha^{(m)}} \geq C(m,\alpha)\delta^{-\frac{m+1}{2}-\frac{\alpha}{2}}, \quad C>0.$$

Оценка (38) установлена.

ABSTRACT. Let ω be a function of modulus continity type, i.e. a nonnegative, increasing function satisfying Zygmund condition $\int_0^\delta \frac{\omega(u)}{u}\,du = o(\omega(\delta))$, $\delta \to 0$. The paper considers finitely generated ideals in the algebra of holomorphic in unit disc functions f, for which $|f(\xi_1)-f(\xi_2)| \leq C_f\omega(|\xi_1-\xi_2|)$, $|\xi_1|,|\xi_2| \leq 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Carleson, "Interpolation by bounded analytic functions and corona problem," Ann. Math., vol. 76, pp. 547 – 559, 1962.
2. L. Hörmander, "Generators for some rings of analytic functions," Bull. Amer. Math. Soc., vol. 73, pp. 943 – 949, 1967.
3. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций," Сообщ. Инст. Матем. и Мех. АН Арм.ССР, том 2, стр. 3 – 55, 1948.
4. Ф. А. Шамоян, "Приложения интегральных предсталений М. Джрбашяна к некоторым вопросам анализа," ДАН СССР, том 261, № 3, 1981.
5. A. E. Djrbashian, F. A. Shamoyan, Topics in the Theory of A^p_α Spaces, Teubner, Leipzig, 1988.
6. И. Н. Векуа, Обобщенные Аналитические Функции, Наука, М., 1962.
7. Я. Л. Геронимус, "О некоторых свойствах аналитических функций, непрерывных в замкнутом круге или круговом секторе," Мат. Сборник, том 38(80), № 3, 1958.
8. Л. Карлесон, Избранные Проблемы Теории Исключительных Множеств, М., Мир, 1971.
9. Н. Бурбаки, Функции Действительных Переменных, М., Наука, 1965.
10. P. Jones, "Estimates for the corona problem," Journ. Funct. Anal., vol. 39, pp. 162 – 182, 1981.
11. В. А. Толоконников, "Оценки в теореме Карлесон о короне, идеалы алгебры H^∞, задача Секефальви-Надя," Записки Науч. Семин. ЛОМИ АН СССР, том 113, стр. 178 – 198, 1981.
12. M. Rosenblum, "A corona theorem for countably many functions," Integral Equat. Operator Theory, vol. 3, № 1, стр. 125 – 137, 1980.

26 Августа 1992

Институт Математики
Национальной Академии Наук Армении

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

В. А. Яврян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 27, №. 4, 1992

1. Пусть $\varphi(x,\lambda)$–решение дифференциальной системы

$$-\varphi'' + v(x)\varphi - \lambda\varphi = 0, \quad \varphi(0,\lambda) = 1, \quad \varphi'(0,\lambda) = h \ (0 \le x < l), \tag{1}$$

где v–вещественная функция, $v \in L^1(0,r)$ для любого $0 < r < l$, h–вещественное число.

Неубывающая функция $\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0)$ $(-\infty < \lambda < \infty,\ \tau(-\infty) = 0)$ называется спектральной функцией системы (1), если для всякой l-финитной (равной нулю в некоторой левой окрестности точки l) функции $\xi \in L^2(0,l)$ выполняется

$$\int_0^l |\xi(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^l \xi(x)\,\varphi(x,\lambda)\,dx \right|^2 d\tau(\lambda).$$

Как уточнение известной теоремы Гельфанда–Левитана ([1]), в работе М. Г. Крейна [2] установлена

Теорема 1. *Для того, чтобы данная неубывающая функция $\tau(\lambda)$ была спектральной функцией системы (1), для заданной l, необходимо и достаточно, чтобы :*

1) функция

$$\Pi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos\sqrt{\lambda}t}{\lambda}\,d\tau(\lambda) \quad (0 \le t < 2l)$$

была конечной и имела две абсолютно непрерывные производные на любом сегменте $[0, r]$, $(r < 2l)$;

2) $\Pi'(0) = 1$,

3) $\limsup_{\rho \to +\infty} N(\rho) / \sqrt{\rho} \geq l / \pi$,

$N(\rho)$*–число точек спектра функции* τ *в интервале* $(0, \rho)$.

Эта теорема впервые была указана М. Г. Крейном в [3] ; однако там при её формулировке, как отмечает автор в [2], "по недосмотру было опущено условие 3)". Это условие можно заменить (см., например, [4]) следующим :

3′) Если

$$\tilde{\xi}(\lambda) = \int_0^l \xi(t) \cos \sqrt{\lambda} t \, dt,$$

где $\xi \in L^2(0, l)$– l-финитная функция и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\xi}(\lambda)|^2 \, d\tau(\lambda) = 0,$$

то $\xi(t) = 0$.

Цель этой заметки показать, что условие 3′) (значит и условие 3)) лишнее, т.е. оно есть следствие условий 1) и 2).

2. Пусть $\Phi(x)$ – вещественная непрерывная функция в интервале $[0, 2l)$, $(0 < l \leq \infty)$

$$f(s, t) = \frac{1}{2} \left(\Phi(t + s) + \Phi(|t - s|) \right)$$

и такая, что для всякой l–финитной функции $\xi \in L^2(0, l)$ выполняется условие

$$\int_0^l |\xi(t)|^2 \, dt + \int_0^l \int_0^l f(t, s) \, \xi(t) \overline{\xi(s)} \, dt ds \geq 0. \tag{2}$$

Отсюда следует, что

$$(\xi, \eta)_1 \overset{def}{=\!=} \int_0^l \xi(t) \overline{\eta(t)} \, dt + \int_0^l \int_0^l f(t, s) \, \xi(t) \overline{\eta(s)} \, dt ds$$

есть квазискалярное произведение в $L = \{\xi : \xi \in L^2(0, l), \xi \ -l\text{-финитна}\}$.

Легко проверить, что оператор

$$A\xi = -\xi'', \ \xi'(0) = 0$$

симметричен, т.е. $(A\xi, \eta)_1 = (\xi, A\eta)_1$ для любых ξ и η из L, имеющих первую абсолютно непрерывную производную и $\xi'(0) = \eta'(0) = 0$.

Легко проверить, что

$$\Psi(\xi, \lambda) = \int_0^l \xi(t) \cos\sqrt{\lambda}t \, dt, \quad \xi \in L$$

есть направляющий функционал для оператора A, т.е. уравнение

$$(A - \lambda I)\xi = \eta$$

имеет решение в том и только в том случае, когда $\Psi(\eta, \lambda) = 0$. Поэтому из теоремы М. Г. Крейна ([5], [6]) следует, что существует неубывающая функция $\tau(\lambda)$, $(-\infty < \lambda < \infty)$ такая, что для любой функции $\xi \in L$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^l \xi(t) \cos\sqrt{\lambda}t \, dt \right|^2 d\tau(\lambda) = \int_0^l |\xi(t)|^2 \, dt + \int_0^l \int_0^l f(t, s) \xi(t) \overline{\xi(s)} \, dt \, ds \quad (3)$$

Лемма. *Однородное интегральное уравнение*

$$\xi(t) + \int_0^r f(t, s)\xi(s) \, ds = 0 \quad (0 \le t \le r < l) \quad (4)$$

при любом r $(0 < r < l)$ имеет только тривиальное решение.

Доказательство Пусть $\xi_0(t)$ $(0 \le t \le r_0 < l)$ - решение уравнения (4) при $r = r_0$. Пусть $r_0 < r < l$ и

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi_0(t), & \text{для} \quad 0 \le t \le r_0 \\ 0, & \text{для} \quad r_0 \le t \le r. \end{cases}$$

Тогда из (3) следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^r \xi(t) \cos\sqrt{\lambda}t \, dt \right|^2 d\tau(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^{r_0} \xi_0(t) \cos\sqrt{\lambda}t \, dt \right|^2 d\tau(\lambda) = 0.$$

Отсюда вытекает, что при любом $0 < \delta < r - r_0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\cos\sqrt{\lambda}\delta \int_0^r \xi(t)\cos\sqrt{\lambda}t\,dt\right|^2 d\tau(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\int_0^r \xi_\delta(t)\cos\sqrt{\lambda}t\,dt\right|^2 d\tau(\lambda) = 0,$$

где

$$\xi_\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\xi(t+\delta) + \xi(|t-\delta|), & \text{для} \quad 0 \le t \le r_0 + \delta \\ 0, & \text{для} \quad r_0 + \delta \le t \le r. \end{cases}$$

Следовательно, из (3) получаем, что

$$\int_0^r |\xi_\delta(t)|^2\,dt + \int_0^r \int_0^r f(t,s)\xi_\delta(t)\overline{\xi_\delta(s)}\,dt\,ds = 0.$$

Отсюда, учитывая (2) следует, что функции $\xi_\delta(t)$ удовлетворяют уравнению (4). Если предположить что $\xi_0 \in L^2(0,r)$ ненулевая, то получаем, что

$$\hat{\xi}(\lambda) = \int_0^r \xi(t)\cos\sqrt{\lambda}t\,dt \not\equiv 0.$$

В этом случае для любых $0 < \delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_n < r - r_0$ система функций $\{\xi_{\delta_k}\}$ будет линейно независимой. Действительно, из

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_{\delta_k}(t) = 0, \; 0 \le t \le r$$

следует, что

$$\hat{\xi}(\lambda) \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos\delta_k\sqrt{\lambda} = 0$$

для любого $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Отсюда

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \cos\delta_k\sqrt{\lambda} = 0$$

для любого λ, и следовательно, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Таким образом, из $\xi_0 \neq 0$ в $L^2(0, r_0)$ следует, что однородное уравнение (4) имеет бесконечное число линейно независимых решений, что невозможно.

Теорема. *Для того, чтобы данная неубывающая функция $\tau(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ была спектральной функцией некоторой системы (1), где l $(0 < l \le \infty)$ задано, достаточно выполнение условий 1) и 2) теоремы 1.*

Доказательство. Как известно ([4]), условие 3') (или 3)) равносильно тому, что уравнение (4), где

$$f(t,s) = \frac{1}{2}\left(\Pi''(t+s) + \Pi''(|t-s|)\right), \tag{5}$$

при любом $0 < r < l$ не имеет нетривиального решения. Поэтому согласно лемме, достаточно проверить условие (2). Последнее следует из легко проверяемого соотношения

$$2\int_0^l \xi^2(t)\,dt + \int_0^l \int_0^l \left(\Pi''(t+s) + \Pi''(|t-s|)\right)\xi(t)\,\xi(s)\,dt\,ds =$$
$$= \int_0^l \int_0^l \left(\Pi(t+s) - \Pi(|t-s|)\right)\xi'(t)\,\xi'(s)\,dt\,ds \geq 0.$$

Отметим, что эта теорема при $l = \infty$ приведена в монографии В. А. Марченко ([7], стр. 117). Её доказательство основано на известной асимптотической формуле для спектральной функции, установленной Б. М. Левитаном и В. А. Марченко.

Заметим также, что функции $\tau(\lambda)$, фигурирующие в теореме 1 и соотношении (3) при (5), совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, "Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции", Изв. АН. СССР, сер. математика, 15, стр. 309 – 360, 1951.
2. М. Г. Крейн, "О континуальном аналоге одной формулы Кристоффеля из теории ортогональных многочленов", ДАН. СССР, том 113, № 5, стр. 970 – 973, 1957.
3. М. Г. Крейн, "О переходной функции одномерной краевой задачи второго порядка", ДАН. СССР, том 88 № 3, стр. 405 – 408, 1953.
4. Б. М. Левитан, Обратные задачи Штурма–Лиувилля, Изд. Наука, Москва, 1984.
5. М. Г. Крейн, "Об одном методе разложения положительно–определенных ядер на элементарные произведения", ДАН. СССР, том 53, № 1, стр. 3–6, 1946.
6. Н. И. Ахиезер, Классическая Проблема Моментов, Изд. ФМ, М., 1961.
7. В. А. Марченко, Спектральная Теория Операторов Штурма–Лиувилля, Киев, 1972.

15 Ноября 1992

Ереванский государственный университет

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 27 НОМЕР 4 1992

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы

Основная теорема в категорной теории Галуа
С. Г. Далалян 1

О точных поперечниках класса функций определяющихся свёрткой
С. А. Айунц 37

Интерполяция некоторых функциональных пространств разной анизотропии
А. Г. Багдасарян 49

Построение аттрактора одного модельного нелинейного параболического уравнения высокого порядка
Р. Л. Шахбагян, Г. С. Акопян 59

Конструктивное описание конечнопорожденных идеалов в алгебрах аналитических в круге функций, гладких вплоть до его границы
Ф. А. Шамоян 70

Краткие сообщения

Об условиях разрешимости обратной задачи Штурма-Лиувилля
В. А. Яврян 91

CONTENTS

VOLUME 27 NUMBER 4 1992

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)

PAGES

Main theorem in categorial Galois theory
S. H. Dalalian 1

On exact widths of a functional class defined by convolution
S. A. Ayunts 37

Interpolation of functional spaces with differing anisotropies
A. G. Bagdasarian 49

Construction of attractor for high-order nonlinear parabolic equation
R. L. Shachbagian and G. S. Hakobian 59

Constructive description of finitely generated ideals in an algebra of functions analitic in an open disc and smooth in its closure
F. A. Shamoyan 70

Brief Communications

On solvability of inverse Sturm–Liouville problem
V. A. Javrian 91