ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966г.
Выходит 6 раз в году
на русском и английском языках

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, ովքեր ցանկանում են հոդվածներ հրատարակել Հայաստանի գիտությունների ազգային ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները.

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի, քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը ոչ ավելի, քան 5 – 6 մեքենագրված էջ: Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածները ընդունվում են հրատարակման բացառիկ դեպքերում խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով: Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները իրենց ցանկությամբ կարող են հրատարակվել համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը երկու գծիկով վերևում: Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով:

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով դրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում:

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը: Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (բնագրի համեմատությամբ) չեն թույլատրվում:

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը, և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը:

Խմբագրության հասցեն *Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ:*
Գիտությունների ազգային ակադեմիայի Տեղեկագիր,
սերիա «Մաթեմատիկա»:

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ТРУБЧАТЫХ ОБЛАСТЯХ НАД АФФИННО–ОДНОРОДНЫМИ КОНУСАМИ[1]

А. О. Карапетян

Известия Академии Наук Армении. Математика,
том 27, 3, 1992

В настоящей статье рассматривается класс функций $f(z) \equiv f(x+iy)$ голоморфных в трубчатых областях $T_V = \{z = x+iy \in \mathbb{C}^n : x \in \mathbb{R}^n, y \in V\}$ и удовлетворяющих условию $\int_V \{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+iy)|^p\,dx\}^s \gamma(y)\,dy < +\infty$, $(0 < p, s < +\infty)$. Здесь V – аффинно-однородный острый открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$ с рангом $l \geq 1$, т.е. $V = \{y \in \mathbb{R}^n : \chi_m(y) > 0, \quad (1 \leq m \leq l)\}$, где $\chi_m (1 \leq m \leq l)$ – рациональные функции, ассоциированные с конусом V, а $\gamma(y) > 0$ – весовая функция вида $\gamma(y) \equiv \prod\limits_{m=1}^{l} \varphi_m(\chi_m(y))$, $y \in V$, где $\varphi_m(\tau)$ $(1 \leq m \leq l)$ положительны и непрерывны и $\tau \in (0,+\infty)$. Для $1 \leq p \leq 2$ найдены некоторые условия на параметр s и функцию φ_m $(1 \leq m \leq l)$, которые гарантируют существование интегральных представлений типа Пэли–Винера и воспроизводящих ядер для классов голоморфных функций.

§0. ВВЕДЕНИЕ

0.1. Хорошо известное пространство Харди H^2 в правой полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ определяется как класс тех голоморфных функций $f(z) \equiv f(x+iy)$, $\operatorname{Re} z > 0$, для которых

$$\sup_{0<x<+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2\,dy \right\} < +\infty. \tag{0.1}$$

Классическая теорема Винера–Пэли (см. [1,2]) утверждает, что класс $H^2\{\operatorname{Re} z > 0\}$ совпадает с множеством функций, допускающих представление

$$f(z) = \int_0^{+\infty} F(t) \cdot e^{-zt}\,dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \tag{0.2}$$

где $F(t) \in L^2(0,\infty)$.

---

[1] Настоящая работа была депонирована в АрмНИИНТИ 16 ноября 1990г., деп. 48–Ар90, Ереван, 42 стр. (1990)

Этот важный результат имеет обобщения в различных направлениях. С. Бохнер [3] установил аналог интегрального представления (0.2) для многомерных пространств Харди в радиальных трубчатых областях (т.е. в трубчатых областях над конусами).

М. М. Джрбашян и А. Е. Аветисян [4] установили новые интегральные представления типа (0.2) для весовых пространств Харди в угловых областях. Эти представления записывались посредством ядер типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)}. \qquad (0.3)$$

В дальнейшем эти результаты были развиты в монографии М. М. Джрбашяна [5] по гармоническому анализу и интегральным преобразованиям в комплексной области.

Особый интерес представляет работа С. Г. Гиндикина [6], где рассматривались довольно общие многомерные области (так называемые области Зигеля). Эти области являются обобщениями радиальных трубчатых областей.

С. Г. Гиндикин [6] обобщил результат С. Бохнера на случай произвольной области Зигеля. Кроме того, в [6] были получены интегральные представления типа Винера-Пэли для квадратично интегрируемых голоморфных функций. С помощью этих представлений для соответствующих классов голоморфных функций были построены воспроизводящие ядра посредством интеграла Лапласа. Эти результаты С. Г. Гиндикина были развиты М. М. Джрбашяном и В. М. Мартиросяном [7, 8], Т. Г. Генчевым [9 - 11], С. Саито [12] (см. также работы автора [13 - 16], причем последние две содержат подробные обзоры).

В [6] была поставлена следующая задача: в какой степени формулы, полученные в [6] для воспро- изводящих ядер L^2-классов функций, голоморфных в произвольных областях Зигеля, упрощаются в случае аффинно-однородных областей? В [6] было найдено, что в этом случае воспроизводящие ядра могут быть записаны посредством специальных степенных функций.

Р. Р. Койфман и Р. Рохберг [17] утверждают, что использованием аналогичных методов можно получить воспроизводящие ядра для специальных весовых L^2–классов функций, голоморфных в симметрических аффинно-однородных областях Зигеля.

0.2. В настоящей работе мы рассматриваем интегральные представления типа Винера–Пэли и строим воспроизводящие ядра для весовых классов функций, голоморфных в трубчатых областях над аффинно-однородными острыми ОВК (открытыми выпуклыми конусами) в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$. Острота V означает, что V не содержит целиком какой-либо прямой из $\mathbb{R}^n$.
В §1 мы приводим сводку некоторых необходимых сведений из работы С. Г. Гиндикина [6] относительно аффинно-однородных конусов. В §2 мы вычисляем несколько интегралов, в частности

$$\int_V e^{-[t,y]}\gamma(y)\,dy, \quad t \in \mathbb{R}^n, \tag{0.4}$$

где V – аффинно-однородный острый ОВК в $\mathbb{R}^n$, $[\cdot,\cdot]$ – скалярное произведение (в $\mathbb{R}^n$), ассоциированное с V, и

$$\gamma(y) \equiv \prod_{m=1}^{l} \varphi_m(\chi_m(y)), \quad y \in V. \tag{0.5}$$

Здесь $\varphi_m(\tau)$, $\tau \in (0,+\infty)$, $1 \leq m \leq l$ – непрерывные положительные функции, χ_m $(1 \leq m \leq l)$ – рациональные функции, естественным образом связанные с V (их определение см. в [6]) и такие, что

$$V = \{y \in \mathbb{R}^n : \chi_m(y) > 0, \quad 1 \leq m \leq l\}. \tag{0.6}$$

Соответствие, определяемое (0.5), мы будем обозначать $\gamma \prec (\varphi_1, ..., \varphi_l)$.

В §3 содержатся основные результаты. Мы рассматриваем функции $f(z) \equiv f(x+iy)$, голоморфные в трубчатой области $T_V \subset \mathbb{C}^n$, для которых

$$M^p_{s,\gamma}(f) = \int_V \left\{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+iy)|^p\,d\nu(x)\right\}^s \gamma(y)\,d\nu(y) < +\infty. \tag{0.7}$$

Здесь $1 \leq p \leq 2$, $0 < s < +\infty$, $d\nu$ кратна n-мерной мере Лебега и $\gamma \prec (\varphi_1, ..., \varphi_l)$. При определенных условиях на функции φ_m $(1 \leq m \leq l)$ и параметр s, мы получаем интегральные представления типа Винера-Пэли (теорема 3.1) и строим воспроизводящие ядра (теорема 3.2 и формула (3.9)) для этих классов голоморфных функций.

Автор признателен академику М. М. Джрбашяну и профессору С. Г. Гиндикину за постановку задачи и полезные обсуждения.

§1. ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ГИНДИКИНА ОТНОСИТЕЛЬНО АФФИННО-ОДНОРОДНЫХ КОНУСОВ

1.1. Пусть V – острый ОВК в пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geq 1)$, и $L(V)$ обозначает группу всех невырожденных линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^k$, сохраняющих V. Конус V называется аффинно-однородным, если группа $L(V)$ действует на нем транзитивно.

Отображение $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^k$ назовем V-билинейной симметрической формой на пространстве $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 0)$, если выполняются следующие условия:

1) $F(s_1 + s_2, t) = F(s_1, t) + F(s_2, t), \quad s_1, s_2, t \in \mathbb{R}^m$;

2) $F(\lambda s, t) = \lambda \cdot F(s, t), \quad s, t \in \mathbb{R}^m, \quad \lambda \in \mathbb{R}$;

3) $F(t, s) = F(s, t), \quad s, t \in \mathbb{R}^m$;

4) $F(t, t) \in \overline{V}$ (замыкание V), $t \in \mathbb{R}^m$, причём $F(t, t) = 0 \in \mathbb{R}^k$ лишь при $t = 0 \in \mathbb{R}^m$.

Через $\mathcal{P}_{V,F}$ будем обозначать вещественную область Зигеля, ассоциированную с острым ОВК $V \subset \mathbb{R}^k$ и V-билинейной симметрической формой F на $\mathbb{R}^m$. По определению

$$\mathcal{P}_{V,F} = \{(y, t) \in \mathbb{R}^{k+m} : \quad y \in \mathbb{R}^k, \quad t \in \mathbb{R}^m, \quad y - F(t, t) \in V\}.$$

Отметим, что при $m = 0$, $\mathcal{P}_{V,F}$ совпадает с исходным конусом $V \subset \mathbb{R}^k$. Вещественная область Зигеля $\mathcal{P}_{V,F} \subset \mathbb{R}^{k+m}$ называется аффинно-однородной, если

а) конус V аффинно-однородный;

б) существует подгруппа $G(V) \subset L(V)$, продолжающая действовать транзитивно на V и такая, что для каждого $g \in G(V)$ найдется невырожденное линейное преобразование $\bar{g}$ пространства $\mathbb{R}^m$, при котором

$$gF(t,t) = F(\bar{g}t, \bar{g}t), \qquad t \in \mathbb{R}^m. \tag{1.1}$$

Пусть E – произвольное непустое множество в $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$. Положим

$$V(E) = \{(v, r) \in \mathbb{R}^{N+1}: \quad v \in \mathbb{R}^N, r \in \mathbb{R}, r > 0, v/r \in E\}. \tag{1.2}$$

Предложение 1.1. (см. [6]) *Пусть V – острый ОВК в $\mathbb{R}^k$ $(k \geq 1)$, а F есть V-билинейная симметрическая форма на $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 0)$. Если вещественная область Зигеля $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{V,F} \subset \mathbb{R}^{k+m}$ аффинно-однородна, то $V(\mathcal{P}) \subset \mathbb{R}^{k+m+1}$ является аффинно-однородным острым ОВК.*

Теперь опишем индуктивный алгоритм для построения бесконечной последовательности аффинно-однородных острых ОВК V^i. На первом шаге положим $V^1 = (0, +\infty)$. Очевидно, V^1 есть аффинно-однородный острый ОВК в $\mathbb{R}^1$. Допустим, что после i-го шага построен некоторый аффинно-однородный острый ОВК V^i. Тогда на $(i+1)$-ом шаге выбирается V^i-билинейная симметрическая форма F^{i+1} таким образом, чтобы ассоциированная с V^i и F^{i+1} вещественная область Зигеля $\mathcal{P}^{i+1} = \mathcal{P}_{V^i, F^{i+1}}$, была бы аффинно-однородной, и после этого полагается $V^{i+1} = V(\mathcal{P}^{i+1})$. Согласно предложению 1.1, V^{i+1} является аффинно-однородным острым ОВК.

Аффинно-однородный острый ОВК $V \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ называется приведенным, если он может быть построен при помощи описанной выше процедуры за конечное число шагов. При этом количество этих шагов называется рангом V.

Теорема 1.1. (см. [6]) *Каждый аффинно-однородный острый ОВК $V \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ некоторым линейным изоморфизмом $L: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ может быть преобразован в приведенный аффинно-однородный острый ОВК.*

1.2. Всюду дальше V будет обозначать лежащий в пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ приведенный аффинно-однородный острый ОВК ранга $l = l(V)$. Пусть $V^i (1 \leq i \leq l)$ суть конусы, участвующие в индуктивном построении V. Вещественное координатное пространство, содержащее конус V^i, обозначим через $\mathbb{R}(i)$, $1 \leq i \leq l$, причем заметим, что $V^l = V$, $\mathbb{R}(l) = \mathbb{R}^n$.

Обозначим через R_{i+1} вещественное координатное пространство, на котором задается форма F^{i+1}. Очевидно, $\mathcal{P}^{i+1} \subset \mathbb{R}(i) \times R_{i+1}$. Поэтому $V^{i+1} \subset \mathbb{R}(i) \times R_{i+1} \times R_{i+1\,i+1}$, где $R_{i+1\,i+1}$ суть одномерное вещественное координатное пространство. Таким образом, имеем

$$\mathbb{R}(i+1) = \mathbb{R}(i) \times R_{i+1} \times R_{i+1\,i+1}, \tag{1.3}$$

и следующее каноническое разбиение всего пространства $\mathbb{R}^n$, порожденное конусом $V \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = R_{11} \times R_2 \times R_{22} \times \ldots \times R_{l-1} \times R_{l-1\,l-1} \times R_l \times R_{ll}. \tag{1.4}$$

Здесь $R_{ii}\,(1 \leq i \leq l)$ являются одномерными вещественными координатными пространствами, а $R_j\,(2 \leq j \leq l)$ суть вещественные координатные пространства размерности $n_j \geq 0$. Очевидно,

$$n = l + \sum_{j=2}^{l} n_j. \tag{1.5}$$

Заметим также, что при всех $i\,(1 \leq i \leq l)$ имеем разбиения:

$$\mathbb{R}(i) = R_{11} \times R_2 \times R_{22} \times \ldots \times R_i \times R_{ii}. \tag{1.6}$$

Далее, для произвольного вектора $x \in \mathbb{R}^n$ через $x_{ii}\,(1 \leq i \leq l)$ и $x_j\,(2 \leq j \leq l)$ соответственно обозначаются проекции x на подпространства $R_{ii}\,(1 \leq i \leq l)$ и $R_j\,(2 \leq j \leq l)$. Зафиксируем теперь некоторое j, $2 \leq j \leq l$. Тогда, как это следует из способа построения конуса V, на R_j задана V^{j-1}-билинейная симметрическая форма F^j. Кроме того,

$$V^{j-1} \subset \mathbb{R}(j-1) = R_{11} \times R_2 \times R_{22} \times \ldots \times R_{j-1} \times R_{j-1\,j-1}. \tag{1.7}$$

Обозначим через F^j_{ii} проекции формы F^j на одномерные пространства R_{ii} $(1 \leq i < j)$. Очевидно, F^j_{ii} $(1 \leq i < j)$ являются уже скалярными неотрицательными билинейными симметрическими формами, заданными на пространстве R_j. Оказывается R_j разбивается на прямую сумму определенных подпространств R_{ij} $\quad(1 \leq i < j)$:

$$R_j = \bigoplus_{1 \leq i < j} R_{ij}, \tag{1.8}$$

где при $1 \le i < j$ форма F^j_{ii} сосредоточена на R_{ij}. Таким образом F^j_{ii} является скалярной положительной билинейной симметрической формой на R_{ij}. Для размерностей n_{ij} $(1 \le i < j)$ подпространств R_{ij} имеем

$$n_j = \sum_{1\le i<j} n_{ij}. \tag{1.9}$$

Рассмотрим следующие l-компонентные векторы:

$$N = N(V) = (N_1, ..., N_l), \quad M = M(V) = (M_1, ..., M_l), \tag{1.10}$$

$$\begin{gathered} N_1 = 0, \quad N_m = \sum_{i=1}^{m-1} n_{im} = n_m \quad (2 \le m \le l), \\ M_m = \sum_{j=m+1}^{l} n_{mj} \quad (1 \le m \le l-1), \quad M_l = 0, \end{gathered} \tag{1.11}$$

$$d = d(V) = (d_1, ..., d_l), \tag{1.12}$$

$$d_m = -\left(1 + \frac{N_m + M_m}{2}\right) \quad (1 \le m \le l). \tag{1.13}$$

Наконец, если $x \in \mathbb{R}^n$, то через x_{ij} обозначается проекция вектора x на R_{ij}.

1.3. Пусть V – приведенный аффинно-однородный острый ОВК. В [6] построена группа $G(V) \subset L(V)$, действующая просто транзитивно на V, т.е. для произвольных $y_1, y_2 \in V$ существует ровно одно преобразование $g \in G(V)$ такое, что $y_2 = g\,y_1$. Затем условиями

$$e_{ii} = 1 \quad (1 \le i \le l), \quad e_j = 0 \in R_j \quad (2 \le j \le l) \tag{1.14}$$

в конусе V выделяется точка e, с помощью которой между V и группой $G(V)$ устанавливается биекция $x \mapsto g(x)$. А именно, если $x \in V$, то $g(x)$ есть то единственное отображение из $G(V)$, для которого

$$x = g(x)\,e. \tag{1.15}$$

Таким образом, V становится группой относительно бинарной операции

$$x \cdot y = g(x)\,y, \quad \forall x, y \in V. \tag{1.16}$$

Точка $e \in V$ – единица этой группы. Заметим, что (1.16) позволяет придать смысл выражению $x \cdot y$ и при $x \in V$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Функции χ_i, $1 \le i \le l$ (см. (0.6)) являются непрерывными мультипликативными характерами группы V, т.е.

$$\begin{aligned} &\chi_i(x \cdot y) = \chi_i(x) \cdot \chi_i(y), \quad x, y \in V; \\ &\chi_i(e) = 1. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Кроме того,

$$\chi_i(\alpha \cdot y) = \alpha \cdot \chi_i(y), \quad \alpha > 0, \quad y \in V \quad (1 \le i \le l). \tag{1.18}$$

Наличие функций χ_i позволяет определить в конусе V следующие степенные функции: для произволь- ного $\rho = (\rho_1, \dots \rho_l) \in \mathbb{C}^l$ положим

$$y^\rho = \prod_{i=1}^{l} [\chi_i(y)]^{\rho_i}, \quad y \in V. \tag{1.19}$$

При $\lambda \in V$

$$|\det g(\lambda)| = \lambda^{-d}, \quad d = d(V), \tag{1.20}$$

и поэтому

$$d(\lambda \cdot y) = \lambda^{-d} \cdot dy, \quad y \in V. \tag{1.21}$$

1.4. Теперь мы введем ассоциированное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$[x, y] = \sum_{i=1}^{l} x_{ii} \cdot y_{ii} + \sum_{\substack{2 \le j \le l \\ 1 \le i < j}} F_{ii}^j(x_{ij}, y_{ij}). \tag{1.22}$$

Для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\text{сп}(x) = [x, e] = \sum_{i=1}^{l} x_{ii}. \tag{1.23}$$

Отметим, что подпространства R_{ii} $(1 \le i \le l)$ и R_j $(2 \le j \le l)$ в каноническом разбиении (1.4) пространства $\mathbb{R}^n$ взаимно ортогональны в смысле скалярного произведения (1.22). Более того, при фиксированном j, $2 \le j \le l$, подпространства R_{ij} $(1 \le i < j)$ в разложении (1.8) также взаимно ортогональны.

Зафиксируем далее некоторое j, $2 \le j \le l$. Обозначим через $d\nu_j$ меру Лебега в R_j,

$$d\nu_j(s) = c_j \cdot ds, \quad s \in R_j, \tag{1.24}$$

нормированную условием

$$\int_{R_j} e^{-[s,s]}\, d\nu_j(s) = \pi^{n_j/2}. \tag{1.25}$$

Затем с учетом (1.4) определим в $\mathbb{R}^n$ меру

$$d\nu(x) = \prod_{i=1}^{l} dx_{ii} \times \prod_{j=2}^{l} d\nu_j(x_j), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.26}$$

кратную мере Лебега, т.е.

$$d\nu(x) = \text{ const } \cdot dx, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.27}$$

причем константа определяется лишь конусом $V \subset \mathbb{R}^n$ и

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-[x,x]}\, d\nu(x) = \pi^{n/2}. \tag{1.28}$$

1.5. Специальной заменой переменных интегрирование по произвольному приведенному аффинно-однородному острому ОВК $V \subset \mathbb{R}^n$ может быть сведено к интегрированию по более простой области. Положим

$$T^+ = \{t \in \mathbb{R}^n : \quad t_{ii} > 0 \quad (1 \le i \le l), t_j \in R_j\, (2 \le j \le l)\}. \tag{1.29}$$

Тогда существует диффеоморфизм $x = x(t)$: $T^+ \mapsto V$:

$$x_{ii} = t_{ii}^2 + \sum_{k=i+1}^{l} F_{ii}^k(t_k, t_k), \quad 1 \le i \le l,$$

$$x_j = t_{jj} \cdot t_j + \sum_{k=j+1}^{l} F_j^k(t_k, t_k), \quad 2 \le j \le l. \tag{1.30}$$

Здесь F_j^k обозначает проекцию формы F^k на подпространство R_j. Для этого диффеоморфизма справед- ливы следующие соотношения:

$$\text{sp } (x(t)) = [t, t], \quad t \in T^+; \tag{1.31}$$

$$\chi_m(x(t)) = t_{mm}^2, \quad t \in T^+ \quad (1 \le m \le l); \tag{1.32}$$

$$dx(t) = 2^l \prod_{i=1}^{l} (t_{ii})^{N_i+1}\, dt, \quad t \in T^+. \tag{1.33}$$

1.6. Обозначим

$$V^* = \{v \in \mathbb{R}^n: \quad [v,y] \geq 0, \quad \forall y \in V\}. \tag{1.34}$$

Оказывается, что $\mathrm{Int}\ V^* \subset \mathbb{R}^n$ также является приведенным аффинно-однородным острым ОВК того же ранга l. Далее, для произвольного $\rho = (\rho_1, ..., \rho_l) \in \mathbf{C}^l$ условимся полагать $\rho^* = (\rho_l, ..., \rho_1) \in \mathbf{C}^l$. Тогда имеем (см. [6])

$$N(\mathrm{Int}\ V^*) = M^*, \quad M(\mathrm{Int}\ V^*) = N^*, \quad d(\mathrm{Int}\ V^*) = d^*. \tag{1.35}$$

Условия (1.15), примененные к V или $\mathrm{Int}\ V^*$, в обоих случаях выделяют одну и ту же точку e. Положим далее

$$G^*(V) = \{g^*: \quad g \in G(V)\}, \tag{1.36}$$

где для данного $g \in G(V)$, g^* означает отображение, сопряженное относительно скалярного произведения $[\cdot,\cdot]$. Тогда группа $G^*(V)$ сохраняет конус $\mathrm{Int}\ V^*$ и к тому же действует просто транзитивно на нем. Следовательно, по аналогии с тем как строилась биекция между V и $G(V)$, между $\mathrm{Int}\ V^*$ и $G^*(V)$ также устанавливается биективное отображение. В частности, на $\mathrm{Int}\ V^*$ индуцируется групповая структура. В результате мы приходим к биекции $x \mapsto x^*$ между V и $\mathrm{Int}\ V^*$:

$$x \in V \mapsto x^* = (g(x))^* e \in \mathrm{Int}\ V^*. \tag{1.37}$$

Для произвольных $x \in V$ и $y \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned} [x^*, y] &= \mathrm{sp}\ (x \cdot y), \\ [x, y] &= \mathrm{sp}\ (x^* \cdot y). \end{aligned} \tag{1.38}$$

Как и с V, с конусом $\mathrm{Int}\ V^*$ можно ассоциировать некоторые функции χ_i^*, $(1 \leq i \leq l)$, задающие его и являющиеся непрерывными мультипликативными характерами группы $\mathrm{Int}\ V^*$. Наличие этих функций позволяет определить в $\mathrm{Int}\ V^*$ следующие степенные функции:

$$(\lambda)_*^{\rho} = \prod_{i=1}^{l} [\chi_i^*(\lambda)]^{\rho_i}, \quad \lambda \in \mathrm{Int}\ V^*. \tag{1.39}$$

Функции χ_i и χ_i^* $(1 \le i \le l)$ взаимосвязаны:

$$\chi_i^*(y^*) \equiv \chi_{l-i+1}(y), \ y \in V. \tag{1.40}$$

Комбинируя (1.19), (1.39) и (1.40), получаем

$$(y^*)_*^\rho = y^{\rho^*}, \quad y \in V. \tag{1.41}$$

Наконец, через $[.,.]_*$ и $d\nu_*$ соответственно будут обозначаться скалярное произведение и мера, каноническим образом ассоциированные с приведенным аффинно-однородным острым ОВК $\operatorname{Int} V^* \subset \mathbb{R}^n$. В частности, полагаем

$$\mathrm{sp}_*(x) = [x, e]_*, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.42}$$

Очевидно,

$$\mathrm{sp}_*(x) = \varepsilon \mathrm{p}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.43}$$

и $d\nu_*$ кратна n-мерной мере Лебега.

§2 ВЫЧИСЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

2.1. Пусть C_+ – класс непрерывных положительных функций, определенных на $(0, +\infty)$. Для $\varphi(\tau) \in C_+$ положим

$$\varphi^*(t) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} \varphi(\tau)\, d\tau, \qquad -\infty < t < +\infty. \tag{2.1}$$

Мы изучим подклассы C_+ при условии, что:

(А) $\quad \lim\limits_{\tau \to +\infty} \dfrac{\ln \varphi(\tau)}{\tau} = 0;$

(Б) $\quad \limsup\limits_{\tau \to +\infty} \dfrac{\ln \varphi(\tau)}{\tau} \le 0;$

(В) $\quad \underline{\lim}_{\tau \to +\infty} \dfrac{\ln \varphi(\tau)}{\tau} \ge 0;$

(Г) $\quad \varphi \in L^1(0, +\infty);$

(Д) $\quad \varphi \in L^1(0, R)$ при любом $R \in (0, +\infty);$

(Е) $\quad \varphi(2\tau) \le C\varphi(\tau), \quad \tau \in (0, +\infty),$ где константа $C > 0$.

Из Предложений 1.2 [15] и 2.4 [13] имеем информацию о свойствах функции $\varphi^*(t)$ в зависимости от свойств $\varphi(\tau)$. Всюду ниже предполагается, что $\gamma \prec (\varphi_1, \dots, \varphi_l)$ (см. (0.5)).

Предложение 2.1. *Пусть* $\{\varphi_m(\tau)\}_1^l$ *– произвольные функции из* C_+. *Положим* $\tilde{\varphi}_m(\tau) \equiv \varphi_m(\tau) \cdot \tau^{N_m/2}$ $(1 \leq m \leq l)$. *Тогда*

$$\int_V e^{-sp(\lambda \cdot y)} \gamma(y)\, d\nu(y) = \pi^{\frac{n-l}{2}} \cdot \lambda^{-M/2} \cdot \prod_{m=1}^{l} \tilde{\varphi}_m(\chi_m(\lambda)), \quad \lambda \in V. \tag{2.2}$$

Доказательство. Полагая $y = \lambda^{-1} \cdot x$, согласно (1.21) мы имеем

$$dy = \lambda^d\, dx. \tag{2.3}$$

Принимая во внимание (1.27), получаем

$$d\nu(y) = \lambda^d\, d\nu(x). \tag{2.4}$$

Поскольку функции χ_m являются мультипликативными характерами группы V, то

$$\chi_m(y) = \chi_m(\lambda^{-1} \cdot x) = \frac{\chi_m(x)}{\chi_m(\lambda)}. \tag{2.5}$$

Из (2.4) и (2.5) следует, что

$$I = \int_V e^{-sp(\lambda \cdot y)} \gamma(y)\, d\nu(y) = \lambda^d \int_V e^{-sp(x)} \prod_{m=1}^{l} \varphi_m\left(\frac{\chi_m(x)}{\chi_m(\lambda)}\right) d\nu(x). \tag{2.6}$$

Произведя замену переменной $x = x(t)$, $t \in T^+$ и воспользовавшись соотношениями (1.31)–(1.33), получим

$$I = \lambda^d \cdot 2^l \cdot \int_{T^+} e^{-[t,t]} \cdot \prod_{m=1}^{l} \varphi_m\left(\frac{t_{mm}^2}{\chi_m(\lambda)}\right) \cdot \prod_{m=1}^{l} (t_{mm})^{N_m+1}\, d\nu(t). \tag{2.7}$$

Используя описание (1.29) множества T^+ и (1.26), (2.7) можно записать следующим образом:

$$I = \lambda^d \cdot 2^l \cdot \prod_{m=1}^{l} A_m \cdot \prod_{j=2}^{l} B_j, \tag{2.8}$$

где

$$A_m = \int_0^{+\infty} e^{-t_{mm}^2} \cdot (t_{mm})^{N_m+1} \cdot \varphi_m\left(\frac{t_{mm}^2}{\chi_m(\lambda)}\right) dt_{mm}, \tag{2.9}$$

$$B_j = \int_{R_j} e^{-[t_j,t_j]}\, d\nu_j(t_j); \tag{2.10}$$

Из условий (1.25) следует, что $B_j = \pi^{n_j/2}$. Поэтому

$$\prod_{j=2}^{l} B_j = \pi^{1/2\sum_{j=2}^{l} n_j} = \pi^{\frac{n-l}{2}}. \tag{2.11}$$

Произведя естественную замену переменной $t_{mm} = (\tau\cdot\chi_m(\lambda))^{1/2}$, $\tau\in(0,+\infty)$, получим

$$A_m = \frac{1}{2}\cdot[\chi_m(\lambda)]^{1+N_m/2}\cdot\tilde{\varphi}^*_m(\chi_m(\lambda)). \tag{2.12}$$

Заметим теперь, что $1+N_m/2 = -d_m - M_m/2$. Следовательно,

$$\prod_{m=1}^{l} A_m = \frac{1}{2^l}\cdot\lambda^{-d-\frac{M}{2}}\cdot\prod_{m=1}^{l}\tilde{\varphi}^*_m(\chi_m(\lambda)). \tag{2.13}$$

Наконец, комбинируя (2.8), (2.11) и (2.13), мы получим (2.2). Предложение 2.1 доказано.

Поскольку Int V^*, как и V, является приведенным аффинно-однородным острым ОВК ранга l в пространстве $\mathbb{R}^n$, то можем заменить в Предложении 2.1 V на Int V^*. Принимая во внимание (1.35), получаем

Следствие 2.1. Пусть $\{\Psi_m(\tau)\}_1^l$ – произвольные функции из C_+. Положим $\bar{\Psi}_m(\tau)\equiv\Psi_m(\tau)\cdot\tau^{M_{l-m+1}/2}$, $(1\le m\le l)$. Тогда

$$\int_{\mathrm{Int}\,V^*} e^{-sp_*(\lambda\cdot t)}\cdot\prod_{m=1}^{l}\Psi_m(\chi^*_m(t))\,d\nu_*(t) =$$

$$= \pi^{\frac{n-l}{2}}\cdot(\lambda)_*^{-N^*/2}\cdot\prod_{m=1}^{l}\bar{\Psi}^*_m(\chi^*_m(\lambda)),\quad \forall\lambda\in\mathrm{Int}\,V^*. \tag{2.14}$$

Доказанные утверждения допускают полезные переформулировки:

Предложение 2.2. *В условиях Предложения 2.1*

$$\gamma^*_V(t)\stackrel{def}{=}\int_V e^{-[t,y]}\cdot\gamma(y)\,d\nu(y) = \pi^{\frac{n-l}{2}}\cdot(t)_*^{-M^*/2}\cdot\prod_{m=1}^{l}\tilde{\varphi}^*_m(\chi^*_{l-m+1}(t)),\quad t\in\mathrm{Int}\,V^*. \tag{2.15}$$

Доказательство. Из (1.38),(1.40) и (1.41) следует, что для $\lambda\in V$ такого, что $t=\lambda^*$, справедливы соотношения

$$\mathrm{sp}\,(\lambda\cdot y) = [t,y],\quad \chi_m(\lambda) = \chi^*_{l-m+1}(t)\ \text{и}\quad \lambda^{-M/2} = (t)_*^{-M^*/2}. \tag{2.16}$$

Сопоставляя Предложение 2.1 с (2.16), непосредственно получаем (2.15).

Следствие 2.2. В условиях следствия 2.1 имеет место

$$\int_{\operatorname{Int} V^*} e^{-[y,t]} \cdot \prod_{m=1}^{l} \Psi_m(\chi_m^*(t))\, d\nu_*(t) = \pi^{\frac{n-1}{2}} \cdot (y)^{-N/2} \cdot \prod_{m=1}^{l} \bar{\Psi}_m^*(\chi_{l-m+1}(y)), \quad \forall y \in V \tag{2.17}$$

Доказательство. Из (1.38), (1.40), (1.41) и (1.43) следует, что

$$(y^*)_*^{-N^*/2} = y^{-N/2}, \quad sp_*(y^* \cdot t) = [y,t] \quad \text{и} \quad \chi_m^*(y^*) = \chi_{l-m+1}(y). \tag{2.18}$$

Используя (2.18), перепишем (2.14) в виде (2.17).

2.2. Сформулируем следующую простую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть E - открытое непустое множество в $\mathbb{R}^N$. Для любой измеримой неотрицательной функции f, определенной на $V(E)$ (см. (1.2)), имеем*

$$\int_{V(E)} f(y)\, dy = \int_0^{+\infty} r^N \int_E f(r \cdot v, r)\, dv\, dr. \tag{2.19}$$

Доказательство оставляется читателю.

На основании этой леммы получается

Лемма 2.2. *Пусть $\{\varphi_m(\tau)\}_1^l$ - произвольные функции из C_+, удовлетворяющие условию (B). Тогда*

$$\gamma_V^*(t) \equiv +\infty, \quad t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*. \tag{2.20}$$

Доказательство. Поскольку $V \subset \mathbb{R}^n$ - приведенный аффинно-однородный острый ОВК ранга l, то $V = V(\mathcal{P}^l)$, где $\mathcal{P}^l$ - вещественная аффинно-однородная область Зигеля в $\mathbb{R}^{n-1}$. Зафиксируем произвольное $t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*$. Тогда при некотором $y_0 \in V = V(\mathcal{P}^l)$ имеет место

$$[t, y_0] < 0. \tag{2.21}$$

Поскольку

$$y_0 = (r_0 \cdot v_0, r_0) = r_0 \cdot (v_0, 1), \quad r_0 > 0, \quad v_0 \in \mathcal{P}^l, \tag{2.22}$$

то (2.21) влечет

$$[t, (v_0, 1)] < 0. \tag{2.23}$$

Следовательно, существует компактная окрестность $W \subset \mathcal{P}^l$ точки v_0 такая, что

$$[t,(v,1)] \le -\varepsilon, \quad v \in W, \tag{2.24}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. При этом нетрудно заметить, что существуют также числа $0 < a < A < +\infty$, для которых справедливы неравенства:

$$a \le \chi_m((v,1)) \le A, \quad v \in W, \quad (1 \le m \le l). \tag{2.25}$$

Далее, так как все функции φ_m $(1 \le m \le l)$ обладают свойством (В), то можно подобрать такое $R \in (0,+\infty)$, что

$$\varphi_m(\tau) \ge \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{2lA}\cdot\tau\right\}, \quad \tau \ge R. \tag{2.26}$$

С учетом формулы (2.19) и соотношений (2.24) - (2.26) приходим к следующей цепочке неравенств:

$$\begin{aligned}
\gamma_V^*(t) &\ge \int_{V(W)} e^{-[t,y]}\gamma(y)\,d\nu(y) \ge \\
&\ge \text{ const } \int_{R/a}^{+\infty} r^{n-1}\int_W e^{-r\,[t,(v,1)]}\cdot\prod_{m=1}^{l}\varphi_m(r\cdot\chi_m((v,1)))\,dv\,dr \ge \\
&\ge \text{ const }\cdot\int_{R/a}^{+\infty} r^{n-1}e^{\varepsilon r}\int_W\prod_{m=1}^{l}\exp\left\{-\frac{\varepsilon}{2lA}\cdot r\cdot A\right\}dv\,dr = \\
&= \text{ const }\cdot\int_W dv\cdot\int_{R/a}^{+\infty} r^{n-1}\cdot e^{\varepsilon/2\,r}\,dr = +\infty.
\end{aligned}$$

Поскольку $t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*$ произвольно, доказательство завершено.

Комбинируя Предложение 2.2 и Лемму 2.2 с [15, предложение 1.2] или [13, предложение 2.4], приходим к следующему утверждению:

Предложение 2.3. *Пусть выполнены условия Предложения 2.1 и кроме того, функции φ_m удовлетворяют условию (Б), а функции $\tilde{\varphi}_m$ - условию (Д). Тогда $\gamma_V^*(t)$ непрерывна в конусе $\operatorname{Int} V^*$ и*

$$0 < \gamma_V^*(t) < +\infty, \quad t \in \operatorname{Int} V^*.$$

Справедливо также следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Пусть* $\{\varphi_m(\tau)\}_1^l$ *- произвольные функции из* C_+, *удовлетворяющие условию (В). Допустим также, что* $1 < p \le 2$, $q = p/(p-1)$ *и* $0 < s < +\infty$. *Если измеримая функция* $F(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условию*

$$\int_V \{\int_{\mathbb{R}^n} |F(t)|^q \cdot e^{-q[y,t]}\, d\nu(t)\}^{s(p-1)} \gamma(y)\, d\nu(y) < +\infty, \tag{2.27}$$

то $F(t) = 0$ *для почти всех* $\mathbb{R}^n \setminus V^*$.

Доказательство. Рассуждения будут приблизительно такими же, как и при доказательстве Леммы 2.2. Зафиксируем произвольное $t_0 \in \mathbb{R}^n \setminus V^*$. Существуют окрестность $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^n \setminus V^*$ точки t_0 и компактная окрестность $W \subset \mathcal{P}^l$ точки v_0, такие что для $t \in \mathrm{U}$ и $v \in W$ выполнены (2.24) и (2.25). Поскольку функции φ_m обладают свойством (Б), то существует $R \in (0, +\infty)$, для которого

$$\varphi_m(\tau) \ge \exp\left\{-\frac{\varepsilon p s}{2 l A} \cdot \tau\right\}, \quad \tau \ge R. \tag{2.28}$$

Тогда на основании Леммы 2.1, соотношений (2.24), (2.25) и (2.28) приходим к следующей цепочке неравенств:

$$+\infty > \int_V \{\int_{\mathbb{R}^n} |F(t)|^q \cdot e^{-q[y,t]}\, d\nu(t)\}^{s(p-1)} \gamma(y)\, d\nu(y) \ge$$

$$\ge \int_{V(W)} \{\int_{\mathrm{U}} |F(t)|^q \cdot e^{-q[y,t]}\, d\nu(t)\}^{s(p-1)} \gamma(y)\, d\nu(y). \ge$$

$$\ge \mathrm{const} \int_{R/a}^{+\infty} r^{n-1} \int_W \{\int_{\mathrm{U}} |F(t)|^q \cdot e^{q r \varepsilon} dt\}^{s(p-1)} \times \prod_{m=1}^{l} \varphi_m(r \cdot \chi_m((v,1)))\, dv\, dr \ge$$

$$\ge \mathrm{const} \cdot \{\int_{\mathrm{U}} |F(t)|^q\, dt\}^{s(p-1)} \cdot \int_W dv \cdot \int_{R/a}^{+\infty} r^{n-1} \cdot e^{p s \varepsilon/2 \cdot r}\, dr.$$

Следовательно,

$$\int_{\mathrm{U}} |F(t)|^q\, dt = 0, \tag{2.29}$$

т.е. $F(t) = 0$ почти всюду на U. Таким образом, мы получили, что для произвольной точки $t_0 \in \mathbb{R}^n \setminus V^*$ существует её окрестность $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^n \setminus V^*$, в которой $F = 0$ п.в. Следовательно, $F = 0$ п.в. на $\mathbb{R}^n \setminus V^*$. Лемма доказана.

2.3. Наконец, докажем следующее важное утверждение.

Лемма 2.4. *Пусть* $\{\varphi_m(\tau)\}_1^l$ *- произвольные функции из* C_+. *Допустим, что функции* φ_m *удовлетво- ряют условию (Б), а функции* $\widetilde{\varphi}_m$ *- условию (Д).*

Для $\lambda \in V$ и $\delta \in (0,+\infty)$, $\alpha \in [0,+\infty)$ функция

$$\eta(t) \stackrel{def}{=} \frac{e^{-[\lambda,t]}}{[\gamma_V^*(\delta \cdot t)]^\alpha},\ t \in Int V^*, \tag{2.30}$$

принадлежит пространствам $L^p(\mathrm{Int}\ V^*)$ *при всех* $0 < p < +\infty$.

Доказательство. При фиксированном $p \in (0,+\infty)$ положим

$$J = \int_{\mathrm{Int}\ V^*} [\eta(t)]^p\, dt = \frac{1}{\delta^n} \cdot \int_{\mathrm{Int}\ V^*} \frac{e^{-[y,t]}}{[\gamma_V^*(t)]^{p\alpha}}\, dt, \tag{2.31}$$

где $y = p/\delta \cdot \lambda \in V$. Согласно предложению 2.2 имеем:

$$\frac{1}{[\gamma_V^*(t)]^{p\alpha}} = \mathrm{const} \cdot \frac{\prod_{m=1}^{l} [\chi_m^*(t)]^{p\alpha/2 \cdot M_{l-m+1}}}{\prod_{m=1}^{l} [\widetilde{\varphi}_m^*(\chi_{l-m+1}^*(t))]^{p\alpha}}. \tag{2.32}$$

Затем введем функции

$$\Psi_m(\tau) = \frac{\tau^{p\alpha/2 \cdot M_{l-m+1}}}{[\widetilde{\varphi}_{l-m+1}^*(\tau)]^{p\alpha}},\ \tau \in (0,+\infty), \tag{2.33}$$

так что (см. следствие 2.1)

$$\widetilde{\Psi}_m(\tau) = \frac{\tau^{(p\alpha+1)/2 \cdot M_{l-m+1}}}{[\widetilde{\varphi}_{l-m+1}^*(\tau)]^{p\alpha}},\ \tau \in (0,+\infty). \tag{2.34}$$

Очевидно, функции $\widetilde{\varphi}_m$ обладают свойствами (Б) и (Д). Поэтому, в силу (2.33) и предложения 1.2(б) работы [15], функции Ψ_m непрерывны и положительны. Кроме того, согласно предложению 1.2(в) работы [15], для любого $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{[\widetilde{\varphi}_{l-m+1}^*(\tau)]^{p\alpha}} \leq \mathrm{const} \cdot e^{\varepsilon p \alpha \tau}, \quad \tau \in (0,+\infty) \tag{2.35}$$

Комбинируя (2.33) - (2.35), получаем что функции $\{\widetilde{\Psi}_m(\tau)\}_1^l$, $\tau \in (0,+\infty)$ обладают свойствами (Б) и (Д). Следовательно, $0 < \widetilde{\Psi}_m^*(x) < +\infty$, $x \in (0,+\infty)$, $(1 \leq m \leq l)$. Мы также имеем

$$\frac{1}{[\gamma_V^*(t)]^{p\alpha}} = \mathrm{const} \cdot \prod_{m=1}^{l} \Psi_m(\chi_m^*(t)),\ t \in \mathrm{Int}\ V^*. \tag{2.36}$$

Применяя следствие 2.2 и (2.36), получим

$$J = \mathrm{const} \cdot y^{-N/2} \cdot \prod_{m=1}^{l} \widetilde{\Psi}_m^*(\chi_{l-m+1}(y)). \tag{2.37}$$

А это влечет, что $J < +\infty$ и доказательство завершено.

§3. ОСНОВНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

3.1. Через $H^p_{s,\gamma}(T_V)$ обозначим пространство голоморфных в трубчатой области $T_V \subset \mathbb{C}^n$ функций f, для которых $M^p_{s,\gamma}(f) < +\infty$.

Преобразование Фурье некоторой функции $g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ определим как

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \cdot e^{-i[t,x]}\, d\nu(x), \quad t \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Комбинируя леммы 2.2 и 2.3 с теоремой 2 работы [14] или с теоремами 2.3, 2.5 диссертации [13] (см. также [15], §0, теорема 11), получаем следующий результат типа Винера-Пэли.

Теорема 3.1. *Пусть $\{\varphi_m(\tau)\}_1^l$ - произвольные функции из C_+, удовлетворяющие условию (B). Если $f \in H^p_{s,\gamma}(T_V)$, $1 \le p \le 2$, $0 < s < +\infty$, то*

$$f(z) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{V^*} F(t) \cdot e^{i[z,t]}\, d\nu(t), \quad z \in T_V, \tag{3.2}$$

где

1. При $p = 1$ функция $F(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ непрерывна и удовлетворяет условиям

$$F(t) \equiv 0, \qquad t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*, \tag{3.3}$$

$$\sup_{t \in V^*} \{|F(t)|^s \cdot \gamma^*_V(s \cdot t)\} \le \frac{M^1_{s,\gamma}(f)}{(2\pi)^{n/2 \cdot s}} < +\infty. \tag{3.4}$$

2. При $1 < p \le 2$ функция $F(t)$, $t \in V^*$ измерима и удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} &\int_V \left\{ \int_{V^*} |F(t)|^q \cdot e^{-q[y,t]}\, d\nu(t) \right\}^{s(p-1)} \cdot \gamma(y)\, d\nu(y) \le \\ &\le \frac{M^p_{s,\gamma}(f)}{(2\pi)^{n/2 \cdot s(2-p)}} < +\infty, \quad (q = p/(p-1)). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Кроме того, для почти всех $y \in V$ справедливо следующее равенство:

$$\hat{f}_y(t) = \begin{cases} F(t) \cdot e^{-[y,t]}, & t \in V^*, \\ 0, & t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*, \end{cases} \tag{3.6}$$

где $f_y(x) \equiv f(x + iy)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

При $p = 2$ интегральное представление (3.2) класса $H^p_{s,\gamma}(T_V)$ является параметрическим, т.е. $H^2_{s,\gamma}(T_V)$ совпадает с множеством функций $f(z)$, задаваемых формулой (3.2), где $F(t)$, $t \in V^*$ - произвольная измеримая функция, удовлетворяющая условию (3.5) (для $p = q = 2$). Кроме того, в этом случае выполняется равенство Парсеваля

$$M^2_{s,\gamma}(f) = \int_V \left\{ \int_{V^*} |F(t)|^2 \cdot e^{-2[y,t]}\, d\nu(t) \right\} \gamma(y)\, d\nu(y). \tag{3.7}$$

3.2. Всюду далее предполагается, что функции φ_m обладают свойством (А), а функции $\tilde{\varphi}_m$ обладают свойством (Д).

Для произвольных $z \in T_V$ и $v \in V$ положим:

$$R_{z,v}(t) = \begin{cases} 0, & t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*, \\ (2\pi)^{n/2} \cdot \frac{e^{i[z+iv,t]}}{\gamma^*_V(2\cdot t)}, & t \in V^*. \end{cases} \tag{3.8}$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z,w) = \int_{\mathrm{Int}\, V^*} \frac{e^{i[z-\overline{w},t]}}{\gamma^*_V(2\cdot t)}\, d\nu(t),\ z, w \in T_V. \tag{3.9}$$

На основании Леммы 2.4 непосредственно получается

Лемма 3.1. (а) *Интеграл (3.9) абсолютно сходится при любых $z, w \in T_V$; функция $\Phi(z,w)$ голоморфна по z и антиголоморфна по w.*

(б) Для любых фиксированных $z \in T_V$ и $v \in V$ функция $R_{z,v}(t), t \in \mathbb{R}^n$ принадлежит $L^p(\mathbb{R}^n)$ при всех $0 < p < +\infty$. При этом $\Phi(z, u+iv)$, как функция от $u \in \mathbb{R}^n$ является преобразованием Фурье функции $R_{z,v}(t)$.

Замечание. Пусть константы c и c_* определяются из соотношений $d\nu(t) = c\, dt$ и $d\nu_*(t) = c_*\, dt$ соответственно. Кроме того, введем следующие функции:

$$\Psi_m(\tau) = \frac{\tau^{M_{l-m+1}/2}}{\tilde{\varphi}^*_{l-m+1}(\tau)}, \quad \tilde{\Psi}_m(\tau) = \Psi_m(\tau) \cdot \tau^{M_{l-m+1}/2},\ \tau \in (0,+\infty), (1 \le m \le l).$$

Комбинируя формулы (3.9), (2.15) и (2.17), получаем

$$\Phi(z,z) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{c}{c_*} \cdot \left(\frac{z-\overline{z}}{2i} \right)^{-N/2} \cdot \prod_{m=1}^{l} \tilde{\Psi}^*_m \left(\chi_{l-m+1} \left(\frac{z-\overline{z}}{2i} \right) \right), \quad z \in T_V. \tag{3.10}$$

Из (3.10) вытекает (по крайней мере, формально)

$$\Phi(z,w) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{c}{c_*} \cdot \left(\frac{z-\overline{w}}{2i} \right)^{-N/2} \cdot \prod_{m=1}^{l} \tilde{\Psi}^*_m \left(\chi_{l-m+1} \left(\frac{z-\overline{w}}{2i} \right) \right), \quad z, w \in T_V. \tag{3.11}$$

Заметим далее, что функции $\tilde{\Psi}_m$ $(1 \le m \le l)$ обладают свойствами (Б) и (Д), в чем можно убедиться, рассуждая так же, как и при доказательстве леммы

2.4. Следовательно, функции $\tilde{\Psi}^*_m$ допускают аналитическое продолжение с полуоси $(0,+\infty)$ в правую полуплоскость. Поэтому формула (3.11) в предположении, что $\mathrm{Re}\,\chi_m(z) > 0$ при $\mathrm{Re}\,z \in V$, действительно верна. Однако автору не ясно, насколько правомерно такое предположение. Из работы [6] нам известно лишь, что $\chi_m(z) \neq 0$ при $\mathrm{Re}\,z \in V$.

Наш основной результат следующий:

Теорема 3.2. *Пусть $\{\varphi_m(\tau)\}_1^l$ – функции из C_+. Допустим, что функции φ_m удовлетворяют условию (А), а функции $\tilde{\varphi}_m$ удовлетворяют условию (Д). Пусть ядро $\Phi(z,w)$ определено по формуле (3.9). Допустим, наконец, что $1 \le p \le 2$ и либо*

(а) $1/p \le s \le 2/p$,

либо

(б) $1/p \le s \le 1/(p-1)$, но при этом функции φ_m обладают дополнительно свойством (Е).

Тогда каждая функция $f \in H^p_{s,\gamma}(T_V)$ допускает представление

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_{T_V} f(w)\cdot\Phi(z,w)\cdot\gamma(v)\,d\nu(u)\,d\nu(v), \quad z \in T_V\ (w = u+iv), \tag{3.12}$$

причем интеграл абсолютно сходится при каждом $z \in T_V$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $f \in H^p_{s,\gamma}(T_V)$ и $z = x+iy \in T_V$. Предполагая, что интеграл в правой части (3.12) абсолютно сходится, мы в силу теоремы 3.1 и леммы 3.1 имеем:

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\cdot\int_{T_V} f(w)\cdot\Phi(z,w)\cdot\gamma(v)\,d\nu(u)\,d\nu(v) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot\int_V \gamma(v)\int_{\mathbb{R}^n} f_v(u)\cdot\Phi(z,u+iv)\,d\nu(u)\,d\nu(v) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot\int_V \gamma(v)\int_{\mathbb{R}^n} f_v(u)\cdot R_{z,v}(u)\,d\nu(u)\,d\nu(v) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot\int_V \gamma(v)\int_{\mathbb{R}^n} f_v(t)\cdot R_{z,v}(t)\,d\nu(t)\,d\nu(v) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\cdot\int_{\mathrm{Int}\,V^*} F(t)\cdot e^{i[z,t]}\cdot\frac{1}{\gamma^*_V(2t)}\int_V e^{-2[v,t]}\gamma(v)\,d\nu(v)\,d\nu(t) = \tag{3.13}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\cdot\int_{\mathrm{Int}\,V^*} F(t)\cdot e^{i[z,t]}\,d\nu(t) = f(z).$$

Остаётся убедиться в конечности интеграла

$$I(z) = \int_{T_V} |f(w)| \cdot |\Phi(z, w)| \cdot \gamma(v)\, d\nu(u)\, d\nu(v) = \\ = \int_V \cdot \gamma(v) \int_{\mathbb{R}^n} |f_v(u)| \cdot |\Phi(z, u+iv)|\, d\nu(u)\, d\nu(v). \tag{3.14}$$

Используем для оценки внутреннего интеграла в (3.14) интегральное неравенство Гёльдера, лемму 3.1 (б) и теорему Хаусдорфа–Юнга. Тогда

$$I(z) \leq \text{ const } \cdot J, \quad J = \int_V \tilde{f}(v) \cdot \tilde{R}(v) \cdot \gamma(v)\, d\nu(v), \tag{3.15}$$

где

$$\tilde{f}(v) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_v(u)|^p\, d\nu(u) \right)^{1/p}, \quad v \in V, \tag{3.16}$$

$$\tilde{R}(v) = \left(\int_{\mathrm{Int}\ V^*} \frac{e^{-p[y+v,t]}}{[\gamma_V^*(2t)]^p}\, d\nu(t) \right)^{1/p}, \quad v \in V. \tag{3.17}$$

Итак, достаточно установить конечность интеграла J. Заметим, что условие $f \in H^p_{s,\gamma}(T_V)$ влечет

$$\int_V [\tilde{f}(v)]^{ps} \cdot \gamma(v)\, d\nu(v) < +\infty. \tag{3.18}$$

Далее, введем меру

$$d\mu(t) = \frac{e^{-p[y,t]}}{[\gamma_V^*(2t)]^p}\, d\nu(t), \quad t \in \mathrm{Int}\ V^*. \tag{3.19}$$

В силу леммы 2.4,

$$\mu_0 = \int_{\mathrm{Int}\ V^*} d\mu(t) < +\infty. \tag{3.20}$$

Из (3.17) имеем:

$$[\tilde{R}(v)]^p = \int_{\mathrm{Int}\ V^*} e^{-p[v,t]}\, d\mu(t), \quad v \in V. \tag{3.21}$$

В частности,

$$\sup_{v \in V} [\tilde{R}(v)] < +\infty. \tag{3.22}$$

Далее, если $s = 1/p$, то из соотношений (3.18) и (3.22) следует $J < +\infty$. Допустим теперь, что $s > 1/p$ и что $1/ps + 1/r = 1$. Ввиду интегрального неравенства Гёльдера достаточно показать, что

$$J_1 = \int_V [\tilde{R}(v)]^r \cdot \gamma(v)\, d\nu(v) < \infty. \tag{3.23}$$

Поскольку $r/p \geq 1$, то, применяя к (3.21) интегральное неравенство Йенсена, получим

$$[\tilde{R}(v)]^r \leq (\mu_0)^{r/p-1} \cdot \int_{\mathrm{Int}\, V^*} e^{-r[v,t]}\, d\mu(t), \quad v \in V. \tag{3.24}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J_1 \leq & \text{ const } \cdot \int_{\mathrm{Int}\, V^*} \gamma_V^*(r \cdot t)\, d\mu(t) = \\ = & \text{ const } \cdot \int_{\mathrm{Int}\, V^*} e^{-p[y,t]} \cdot \frac{\gamma_V^*(r \cdot t)}{[\gamma_V^*(2t)]^p}\, d\nu(t). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Как следует из предложения 2.2, при всех $t \in \mathrm{Int}\, V^*$

$$\gamma_V^*(\delta \cdot t) = \text{ const } \cdot (\delta \cdot t)^{-M^*/2} \cdot \prod_{m=1}^{l} \widetilde{\varphi}_m^*(\delta \cdot \chi_{l-m+1}^*(t)), \quad \forall \delta > 0. \tag{3.26}$$

Заметим, что в случае (а) мы имеем $r \geq 2$. Что же касается случая (б), то здесь уже неравенство $r \geq 2$, вообще говоря, неверно. Но в этом случае функции φ_m и $\widetilde{\varphi}_m$ удовлетворяют дополнительному условию (E). В любом случае из (3.26) и предложения 1.2 (г,д) работы [15] или предложения 2.4 (д,е) диссертации [13] следует неравенство

$$\gamma_V^*(r \cdot t) \leq \text{ const } \cdot \gamma_V^*(2 \cdot t), \quad t \in \mathrm{Int}\, V^*. \tag{3.27}$$

Наконец, комбинируя (3.25) и (3.27) с леммой 2.4, получаем:

$$J_1 \leq \int_{\mathrm{Int}\, V^*} \frac{e^{-p[y,t]}}{[\gamma_V^*(2 \cdot t)]^{p-1}}\, d\nu(t) < +\infty,$$

что и завершает доказательство.

Замечание. Частный случай теоремы 3.2 (когда конус V самосопряженный, $p = 2$, $s = 1$, а функции $\{\varphi_m(\tau)\}_1^l$, $\tau \in (0, +\infty)$ суть специальные степенные функции) следует из одного результата Р. Р. Койфмана и Р. Рохберга [17].

ABSTRACT. The present paper considers classes of functions $f(z) \equiv f(x+iy)$ holomorphic in tube domains $T_V = \{z = x+iy \in \mathbf{C}^n : x \in \mathbb{R}^n, y \in V\}$ and satisfying the condition $\int_V \{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+iy)|^p\, dx\}^s \gamma(y)\, dy < +\infty$, $(0 < p, s < +\infty)$. Here V is an affine-homogeneous sharp open convex cone of rank

$l \geq 1$ in $\mathbb{R}^n$ i.e. $V = \{y \in \mathbb{R}^n : \chi_m(y) > 0, \quad (1 \leq m \leq l)\}$, where $\chi_m(1 \leq m \leq l)$ are rational functions canonically associated with cone V, while $\gamma(y) > 0$ is a weight function of the form $\gamma(y) \equiv \prod_{m=1}^{l} \varphi_m(\chi_m(y)), \quad y \in V$, where $\varphi_m(\tau)$ $(1 \leq m \leq l)$ are positive and continuous and $\tau \in (0, +\infty)$. For $1 \leq p \leq 2$, we find certain conditions on parameter s and functions $\varphi_m \quad (1 \leq m \leq l)$ which guarantee the existence of Paley–Wiener type integral representations and of reproducing kernels for our classes of holomorphic functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Paley, N. Wiener, Fourier Transforms in the Complex Domain. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 19, Amer. Math. Soc., New York, 1934.
2. Н. Винер, Р. Пэли. Преобразование Фурье в комплексной области, М., Наука, 1964.
3. S. Bochner, "Group invariance of Cauchy's formula in several variables," Ann. Math., том 45, № 4, стр. 686 – 707, 1944.
4. М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян, "Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла", ДАН СССР, том 120, № 3, стр. 457 – 460, 1958.
5. М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Наука, 1966.
6. С. Г. Гиндикин, "Анализ в однородных областях", Успехи Мат. Наук, том 19, № 4, стр. 3 – 92, 1964.
7. М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян, "Интегральные представления некоторых классов функций, голоморфных в полосе или в полуплоскости", ДАН СССР, том 283, № 5, стр. 1054 – 1057, 1985.
8. M. M. Dzhrbashyan, V. M. Martirosian, "Integral representations for some classes of functions holomorphic in a strip or in a half-plane", Analysis Math., том 12, № 3, стр. 191 – 212, 1986.
9. T. G. Genchev, "Paley–Wiener type theorems for functions holomorphic in half-plane," Докл. Болг. Акад. Наук, том 37, № 2, стр. 141 – 144, 1983.
10. T. G. Genchev, "Integral representations for functions holomorphic in tube domains," Докл. Болг. Акад. Наук, том 37, стр. 717 – 720, 1984.
11. T. G. Genchev, "Paley–Wiener type theorems for functions in Bergman spaces over tube domains," J. Math. Anal. Appl., том 118, № 2, стр. 496 – 501, 1986.
12. S. Saitoh, "Fourier–Laplace transform in Bergman spaces," Proc. Amer. Math. Soc., том 102, № 4, стр. 985 – 992, 1988.
13. А. О. Карапетян, "Некоторые вопросы интегральных представлений в многомерном комплексном анализе", Кандидат. диссертация, Ереван, 1987.
14. А. О. Карапетян, "Интегральные представления в трубчатых областях", Изв. АН Арм.ССР, Математика, том 23, № 1, стр. 91 – 96, 1988.
15. А. О. Карапетян, "Интегральные представления весовых пространств функций, голоморфных в трубчатых областях", Изв. АН Арм.ССР, Математика, том 25, № 4, стр. 315 – 332, 1990.
16. А. О. Карапетян, "Интегральные представления голоморфных функций в радиальных трубчатых областях", Инст. Мат. АН Армении, Ереван, 1990, 40 стр. (Рукоп. деп. в АрмНИИНТИ, 16.11.1990, № 49 – Ар 90).
17. R. R. Coifman, R. Rochberg, " Representations theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p," Astérisque, том 77, стр. 11 – 66, 1980.

4. Февраля 1992 — Институт Математики АН Армении

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГИББСА В МОДЕЛИ ИЗИНГА ВБЛИЗИ ТОЧЕК ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ПЕРВОГО РОДА

Д. Г. Мартиросян

Известия Академии Наук Армении. Математика,
том 27, № 3, 1992

В этой статье мы изучаем состояния Гиббса в классической моде изинговского ферромагнетика на целочисленной решетке Z^ν ($\nu \geq 2$ при низких температурах $\beta (\beta \geq \beta_o)$ и внешних полях h. Доказано, чт существуют c_1 и c_2, $0 < c_1 < c_2 < \infty$, зависящие только от β и ν такие, чт распределения Гиббса на W_n (где W_n — куб на Z^ν, с центром в начал координат и с длиной стороны $2n+1$) с (-1) граничными условиями вн W_n и внешними полями $h = c'/n$ и $h = c''/n$, соответственно, $0 \leq c' \leq c_1$ $c_2 \leq c''$, слабо сходятся к чистым фазам P_β^- и P_β^+, соответственно, пр $n \to \infty$.

Настоящая работа посвящена асимптотическому исследованию предельны распределений Гиббса в модели классического изинговского ферромагне тика для объемов, стремящихся к бесконечности, при низких температу рах и внешних полях, стремящихся к нулю с ростом объема. При нулево внешнем поле в рассматриваемой модели имеем по крайней мере два ра зличных состояния Гиббса (так называемых чистых фаз). В этом случа чистые фазы зависят в основном от граничных условий. А именно, распре деления Гиббса в конечном объеме с разными граничными условиями пр стремлении объема к бесконечности сходятся, вообще говоря, к различны гиббсовским состояниям. Напротив, при наличии ненулевого постоянног внешнего поля имеет место единственность гиббсовского поля, т.е. пре дельное распределение Гиббса не зависит от последовательности гранич ных условий. В настоящей работе мы получаем оценки для переменны внешних полей, при которых роль граничных условий несущественна. Эт оценки являются в некотором смысле неулучшаемыми.

Перейдём к определениям. Пусть Z^ν — ν-мерная целочисленная решетка. Расстояние между точками $x, y \in Z^\nu$, $x = (x_1, \ldots, x_\nu)$, $y = (y_1, \ldots, y_\nu)$ положим равным

$$d(x, y) = \max_{1 \le i \le \nu} |x_i - y_i|.$$

Иногда мы также будем пользоваться метрикой

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{\nu} |x_i - y_i|.$$

Для множества A через $|A|$ будет обозначаться число элементов в A, а через A^c дополнение к A.

Для $A \subset Z^\nu$, $|A| < \infty$ обозначим через ∂A множество всех тех $x \in A$, для которых существует $y \in Z^\nu$, такое что $d_1(x, y) = 1$ и $y \notin A$.

Для целого $i > 0$ обозначим через W_i множество

$$W_i = \{x \in Z^\nu : d(0, x) \le i\}.$$

Мы будем использовать следующее определение распределения Гиббса (см. [2], [3]). Пусть $S = \{+1, -1\}$. Отображение $\varphi : Z^\nu \mapsto S$ будем называть *конфигурацией*. Ограничение конфигурации φ на множество $V \subset Z^\nu$ обозначается через $\varphi(V)$ и называется конфигурацией на V. На $\mathcal{M}(V)$, $V \subset Z^\nu$ рассмотрим обычную σ-алгебру, порождённую цилиндрическими множествами вида

$$\{\varphi(V) \in \mathcal{M}(V) : \varphi(t_1) = s_1, \ldots, \varphi(t_k) = s_k, \quad t_1, \ldots, t_k \in V, \quad s_1, \ldots, s_k \in S\}.$$

Для конфигураций $\varphi_1(V_1)$ и $\varphi_2(V_2)$ с $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ обозначим через $(\varphi_1(V_1), \varphi_2(V_2))$ конфигурацию $\varphi(V_1 \cup V_2)$ такую, что её ограничения на множества V_1 и V_2 совпадают с $\varphi(V_1)$ и $\varphi(V_2)$, соответственно.

Приводимое ниже определение гамильтониана несколько отличается от обычного. Пусть $V \subset Z^\nu$, $|V| < \infty$ — конечное множество, и пусть $\varphi(V)$ и $\varphi(V^c)$ — конфигурации на V и $V^c \subset Z^\nu$, соответственно, и пусть $\mu_V(x)$ — действительная функция, зависящая от V и $x \in V$. Определим гамильтониан $H_V(\varphi(V)|\varphi(V^c))$ следующим образом:

$$H_V(\varphi(V)|\varphi(V^c)) = -\sum_{x \in V} \mu_V(x)\varphi(x) - \frac{1}{2}\sum_{x, y \in V} \varphi(x)\varphi(y) - \frac{1}{2}\sum_{x \in V, y \in V^c} \varphi(x)\varphi(y). \quad (1)$$

где суммирование проводится по всем парам x, y, являющимся ближайшими соседями на решётке. $\mu_V(x)$ будем называть *химическим потенциалом*. Пусть $V \subset Z^\nu$, $|V| < \infty$ и пусть $\varphi(V^c) \in \mathcal{M}(V^c)$ — конфигурация на V^c. Вероятностное распределение на $\mathcal{M}(V)$, заданное по формуле

$$q_{V,\beta,h_V}(\varphi(V)|\varphi(V^c)) = \frac{\exp[-\beta H_V(\varphi(V)|\varphi(V^c))]}{\Xi(V,\beta,\mu,\varphi(V^c))}, \qquad (2)$$

называется *распределением Гиббса* на V, соответствующим гамильтониану (1) с граничными условиями $\varphi(V^c)$, параметру $\beta > 0$, обратной температуре, и химическому потенциалу $\mu_V(x)$. Здесь Ξ — нормирующий множитель. $h_V(x) = \beta\mu_V(x)$ мы будем называть *внешним полем*.

В дальнейшем мы будем использовать следующие специальные обозначения для распределений Гиббса на V, отвечающих гамильтониану (1):

$q^+_{V,\beta,h_V(x)}(\cdot)$ (соответственно, $q^-_{V,\beta,h_V(x)}(\cdot)$), если граничные условия — $\varphi(V^c) \equiv +1$ (соответственно, $\varphi(V^c) \equiv -1$).

$q^+_{V,\beta,c}(\cdot)$ (соответственно, $q^-_{V,\beta,c}(\cdot)$), если внешнее поле постоянно, т.е. $h_V(x) \equiv c$ для всех $x \in V$, и с граничными условиями $\varphi(V^c) \equiv +1$ (соответственно, $\varphi(V^c) \equiv -1$).

Мы будем также писать $q^+_{n,\beta,c}(\cdot) \equiv q^+_{W_n,\beta,c}(\cdot)$.

При условии $h_V(x) \equiv 0$ распределение вероятностей (2) является распределением Гиббса для модели классического изинговского ферромагнетика в конечном объёме V, отвечающим нулевому внешнему полю, обратной температуре $\beta > 0$ и граничным условиям $\varphi(V^c)$. Известно (см. [4]), что существует $\beta_0 > 0$, такое что при всех $\beta > \beta_0$ для любой последовательности убывающих объёмов V_n, таких что $\cup V_n = Z^\nu$, гиббсовские распределения $q^-_{V_n,\beta,0}(\cdot)$ и $q^+_{V_n,\beta,0}(\cdot)$, при $n \to \infty$ слабо сходятся к взаимно сингулярным распределениям вероятностей на $\mathcal{M}(Z^\nu)$. Эти два распределения вероятностей всюду в дальнейшем будут обозначаться P^-_β и P^+_β, соответственно.

Пусть $\beta_o > 0$ и пусть $c_1(\beta,\nu)$ и $c_2(\beta,\nu)$ — функции, определённые для всех $\beta > 0$, такие что $0 < c_1(\beta,\nu) < c_2(\beta,\nu)$. Рассмотрим плоские области

$$D_1(\beta_o, c_1(\beta,\nu)) = \{(\beta,c') \in \mathbb{R}^2: \quad \beta > \beta_o, \quad 0 < c' \le c_1(\beta,\nu)\}, \qquad (3)$$

$$D_2(\beta_o, c_2(\beta,\nu)) = \{(\beta, c'') \in \mathbb{R}^2 : \quad \beta > \beta_o, \quad c'' \geq c_2(\beta,\nu)\}.$$

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. *Существуют $\beta_o > 0$ и $c_1(\beta,\nu)$, $c_2(\beta,\nu)$ $(0 < c_1(\beta,\nu) < c_2(\beta,\nu)$ для всех $\beta > \beta_o)$ таких, что*

а) *если $(\beta, c') \in D_1(\beta_o, c_1(\beta,\nu))$, то $q^-_{n,\beta,c'/n}(\cdot)$ слабо сходится к P^-_β, при $n \to \infty$;*

б) *если $(\beta, c'') \in D_2(\beta_o, c_2(\beta,\nu))$, то $q^-_{n,\beta,c''/n}(\cdot)$ слабо сходится к P^+_β, при $n \to \infty$.*

Определение 1. Пусть $V_1 \subset V_2 \subset \ldots, \cup V_i = Z^\nu$ — последовательность возрастающих объёмов, и $h_{V_i}(x)$, $i = 1, 2, \ldots$ — последовательность внешних полей. Мы скажем, что $\{h_{V_i}(x)\}_{i=1,2,\ldots}$ удовлетворяет:

условию а), если $|h_{V_i}(x)| \leq c' h_o(x)$ для всех V_i, $x \in V_i$, где c' — постоянная и

$$h_o(x) = \begin{cases} [d(0,x)]^{-1}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 1, & \text{если} \quad x = 0; \end{cases}$$

условию б), если $h_{V_i}(x) \to 0$ для любого $x \in Z^\nu$, при $i \to \infty$;

условию в), если $|h_{V_i}(x)| \leq c''$ для всех V_i, $x \in V_i$, где c'' — постоянная.

Первая часть теоремы может быть усилена.

Теорема 2. *Существует $\beta_o > 0$ такое, что для всех $\beta > \beta_o$ найдётся $c(\beta,\nu) > 0$ такое, что для любой возрастающей последовательности объёмов $V_1 \subset V_2 \subset \ldots, \cup V_i = Z^\nu$ и любой последовательности внешних полей $h_{V_i}(x)$, удовлетворяющих условиям а) и б) с постоянной $c(\beta,\nu)$, распределения Гиббса $q^-_{V_i,\beta,h_V(x)}$ слабо сходятся к P_- при $i \to \infty$.*

Замечание. Нетрудно видеть, что условия Теоремы 2 выполнены для $V_n = W_n$ и $h_{W_n}(x) = c'/n$, $x \in W_n$, где $0 < c' \leq c(\beta,\nu)$ с $c(\beta,\nu)$ как в Теореме 2. Следовательно, из Теоремы 2 следует справедливость соответствуюшего утверждения Теоремы 1.

В дальнейшем нам потребуется ряд дополнительных определений. Через $A(x)$, $x \in Z^\nu$ будем обозначать единичный замкнутый куб с центром в точке $x \in Z^\nu$, и рёбрами, параллельными координатным осям. Для точек

$x, y \in Z^\nu$ таких, что $d(x,y) = 1$, пересечение $A(x) \cap A(y)$ будем называть *гранью* (в $\mathbb{R}^\nu$), разделяющей точки x и y.

Пусть φ — такая конфигурация, что $\{x \in Z^\nu : \varphi(x) = +1\}$ — конечное множество. Объединение граней, разделяющих точки x и y такие, что $d(x,y) = 1$ и $\varphi(x)\varphi(y) = -1$, называется *границей* конфигурации φ. Пусть $G = \{g_1, ..., g_m\}$ — множество всех граней, содержащихся в границе конфигурации φ. Множество $\mathbb{R}^\nu \setminus \{g_1 \cup ... \cup g_m\}$ разбивается на связные (в $\mathbb{R}^\nu$) компоненты, которые обозначим через $O_1, ..., O_s$. В точности одна из этих компонент неограничена. Для простоты предположим, что через O_1 обозначена неограниченная компонента. Граница (в $\mathbb{R}^\nu$) множества O_1 называется *внешней границей* конфигурации φ. (Внешняя граница φ содержится в границе φ).

Мы нумеруем грани в G, так что $G^{(ext)} = \{g_1, ..., g_{m'}\}$, $m' < m$ является множеством всех граней, содержащихся во внешней границе конфигурации φ. Далее, пусть $O'_1, O'_2, ..., O'_s$ — связные (в $\mathbb{R}^\nu$) компоненты множества $\mathbb{R}^\nu \setminus \{g_1 \cup ... \cup g_m\}$. Граница (в $\mathbb{R}^\nu$) множества O'_i, $i \geq 2$ называется *внешним контуром* конфигурации φ (ср. с определением, данным в [5]). Аналогичным образом выделяются контуры из множества оставшихся граней. Продолжая этот процесс до исчерпания, мы получим разбиение границы конфигурации φ на контуры. Контуры будут обозначаться в дальнейшем через Γ, а через $|\Gamma|$ мы будем обозначать число граней, входящих в контур Γ.

Пусть Γ — контур конфигурации φ. Дополнение к этому контуру в $\mathbb{R}^\nu$ разбивается на две связные компоненты O' и O'', где O' — ограниченная, а O'' — неограниченная компонента. Множество $\text{int}(\Gamma) = O' \cap Z^\nu$ называется *внутренностью* контура Γ.

Пусть теперь $V \subset Z^\nu$, $|V| < \infty$. Рассмотрим гамильтониан

$$H(\varphi(V)|\varphi(V^c) \equiv -1) = \sum_{x \in V} \mu_V(x)(1 + \varphi(x)) + \sum{}' |\Gamma_j|. \qquad (4)$$

где последняя сумма в (4) берётся по всем контурам конфигурации φ, такой что её ограничения на множества V и V^c совпадают с $\varphi(V)$ и $\varphi(V^c) \equiv -1$.

соответственно. Используя определение контура, нетрудно видеть, что распределения Гиббса (2) на V, отвечающие гамильтонианам (1) и (4), соответственно, и обшим граничным условиям $\varphi(V^c) \equiv -1$ при совпадении параметров β и внешних полей $h_V(x) = \beta\mu_V(x)$, также совпадают. Пусть $V \subset Z^\nu$, $|V| < \infty$, и пусть H_V — гамильтониан, заданный посредством (4), и пусть граничные условия $\varphi(V^c) \equiv -1$. Для контура Γ такого, что $\mathrm{int}(\Gamma) \subset V$, обозначим через

$$\mathcal{M}(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \text{ является единственным контуром для } \varphi\}$$

(в частности, из условия $\varphi \in \mathcal{M}(\Gamma)$ вытекает, что $\varphi(x) = -1$ для всех $x \in V \setminus \mathrm{int}(\Gamma)$).

Выражение

$$\Xi(\Gamma | H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1) = \sum_{\varphi \in \mathcal{M}(\Gamma)} \exp\{-\beta H_V(\varphi(V) | \varphi(V^c) \equiv -1)\} \qquad (5)$$

назовем *кристаллической статистической суммой*.

Далее, пусть $V' \subset V$. Разреженной статистической суммой назовем

$$\Xi(V' | H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1) = \sum_{\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_s\}} \prod_{i=1}^{s} \Xi(\Gamma_i | H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1). \qquad (6)$$

где суммирование проводится по всем наборам внешних контуров таких, что $\mathrm{int}(\Gamma_j)$, $j = 1, \dots, s$ целиком содержится в $V' \setminus \partial V'$.

Через $\rho_s(\Gamma_1, \dots, \Gamma_s | H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1)$ обозначим корреляционную функцию, равную вероятности того, что $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s$ являются внешними контурами конфигурации φ. Пусть $(Z^\nu)^*$ — решётка, получаемая из решётки $Z^\nu \subset \mathbb{R}^\nu$ сдвигом на вектор $(1/2, \dots, 1/2)$. Для произвольного $x^* \in (Z^\nu)^*$ и для $\beta > 0$ рассмотрим ряд

$$\sigma(\beta, \nu) = \sum_{x^* \in \Gamma} \exp\{-\beta |\Gamma|\}. \qquad (7)$$

Заметим, что $\sigma(\beta, \nu)$ не зависит от x^* и существует $\beta_0 > 0$ такое, что $\sigma(\beta, \nu) < \infty$ для всех $\beta > \beta_0$.

Лемма 1. *Существует $\beta_0 > 0$ такое, что для всех $\beta > \beta_0$ найдётся $c_1(\beta,\nu) > 0$, такое что если $h_V(x)$ удовлетворяет условию а) с одной и той же постоянной $c_1(\beta,\nu)$ для всех V, т.е.*

$$|h_V(x)| \leq c_1(\beta,\nu)h^{(o)}(x), \quad x \in V, \tag{8}$$

то корреляционные функции удовлетворяют неравенству

$$\rho_s(\Gamma_1,...,\Gamma_s | H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1) \leq \exp\{-\frac{(\beta+\beta_0)}{2}\sum_{j=1}^{s}|\Gamma_j|\}. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть Γ — контур конфигурации φ. Учитывая, что $\varphi(x) = \pm 1$, из условия (8) получаем

$$\left|\sum_{x\in \mathrm{int}(\Gamma)} h_V(x)[1+\varphi(x)]\right| \leq 2\sum_{x\in \mathrm{int}(\Gamma)}|h_V(x)| \leq 2c_1(\beta,\nu)\sum_{x\in \mathrm{int}(\Gamma)} h^{(o)}(x). \tag{10}$$

Перейдём к оценке правой части неравенства (10). Зафиксируем целое положительное число u и выберем k так, чтобы $|W_k| \leq u < |W_{k+1}|$. Для заданного $U \subset Z^\nu$, $|U| < \infty$, положим

$$f(U) = \sum_{x\in U} h^{(o)}(x).$$

Мы докажем, что при фиксированном значении $|U| = u$ функция $f(U)$ принимает наибольшее значение на тех подмножествах U решётки Z^ν, для которых $W_k \subseteq U \subset W_{k+1}$. Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что если $|U| = u$ и условие $W_k \subseteq U \subset W_{k+1}$ нарушено, то существует U' такое, что $|U'| = |U| = u$ и $f(U') > f(U)$.

Предположим сначала, что $W_k \not\subseteq U$. Тогда найдётся $y \in W_k$ такое, что $y \notin U$. Отсюда и из того, что $|W_k| \leq u = |U|$, следует, что существует $z \in U$ такое, что $z \notin W_k$. Рассмотрим множество $U' = \{U \setminus \{z\}\} \cup \{y\}$. Очевидно

$$f(U') = \sum_{x\in U'} h^{(o)}(x) = \sum_{x\in U} h^{(o)}(x) - h^{(o)}(z) + h^{(o)}(y) = f(U) - h^{(o)}(z) + h^{(o)}(y).$$

Используя условие $y \in W_k$ заключаем, что $h^{(o)}(y) \geq 1/k$, а из условия $z \notin W_k$ следует, что $h^{(o)}(z) < 1/k$. Следовательно, $f(U') > f(U)$. В случае $U \not\subset W_{k+1}$ доказатеьство проводится аналогичным способом.

Пусть $W_k \subseteq U \subset W_{k+1}$. Замечая, что $|W_k| = (2k+1)^\nu$, получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in U} h^{(o)}(x) &= |W_o| + |W_1 \setminus W_o| + \frac{1}{2}|W_2 \setminus W_1| + \cdots + \frac{1}{k+1}|U \setminus W_k| = \\
&= \frac{1}{1\cdot 2}|W_1| + \frac{1}{2\cdot 3}|W_2| + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}|W_k| + \frac{|U|}{k+1} = \\
&= \frac{1}{1\cdot 2}3^\nu + \frac{1}{2\cdot 3}5^\nu + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}(2k+1)^\nu + \frac{|U|}{k+1} < \\
&< (2k+1)^{\nu-2}\left[\sum_{s=1}^{k} \frac{(2s+1)^2}{s(s+1)}\right] + \frac{|U|}{k+1} = \\
&= (2k+1)^{\nu-2}\left[\sum_{s=1}^{k}(4 + \frac{1}{s(s+1)}\right] + \frac{|U|}{k+1} < \\
&< (2k+1)^{\nu-2}(4k+1) + \frac{|U|}{k+1} < 2(2k+1)^{\nu-1} + \frac{|U|}{k+1},
\end{aligned} \tag{11}$$

Мы также имеем $(2k+1)^\nu = |W_k| \le |U|$ и $k+1 > \frac{1}{3}(2k+3) = \frac{1}{3}|W_{k+1}|^{1/\nu} > \frac{1}{3}|U|^{1/\nu}$. Следовательно

$$2(2k+1)^{\nu-1} + \frac{|U|}{k+1} < 2|U|^{\frac{\nu-1}{\nu}} + 3|U|^{\frac{\nu-1}{\nu}} = 5|U|^{\frac{\nu-1}{\nu}}. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует, что для любого $U \subset Z^\nu$, $|U| < \infty$

$$\sum_{x \in U} h^{(o)}(x) < 5|U|^{\frac{\nu-1}{\nu}}. \tag{13}$$

Полагая в (13) $U = \mathrm{int}(\Gamma)$, мы получаем из (9) и (13), что

$$\left|\sum_{x \in \mathrm{int}(\Gamma)} h_V(x)[1+\varphi(x)]\right| \le 10c_1(\beta,\nu)|\mathrm{int}(\Gamma)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}. \tag{14}$$

Обозначим через $H_V^{(o)}$ гамильтониан вида (4), подчинённый условию $h_V(x) = \beta\mu_V(x) \equiv 0$. Используя определения кристаллической и разрежённой статистических сумм и оценку (14), получаем

$$\begin{aligned}
&\Xi(\Gamma|\, H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1) \le \\
&\le \exp[10c_1(\beta,\nu)|\mathrm{int}(\Gamma)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}]\Xi(\Gamma|\, H_V^{(o)}, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1),
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
&\Xi(\mathrm{int}(\Gamma)|\, H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1) \ge \\
&\ge \exp[-10c_1(\beta,\nu)|\mathrm{int}(\Gamma)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}]\Xi(\mathrm{int}(\Gamma)|\, H_V^{(o)}, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1).
\end{aligned} \tag{16}$$

Далее, в силу определения корреляционной функции имеем

$$\rho_s(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s|\, H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1) = \frac{\Xi(V \setminus \bigcup_{i=1}^{s} \mathrm{int}(\Gamma_j)|\, H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1)\prod_{i=1}^{s} \Xi(\Gamma_j|\, H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1)}{\Xi(V|\, H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1)} \tag{17}$$

и поскольку

$$\Xi(V|H_V,\beta,\varphi(V^c)\equiv -1)\geq$$
$$\geq \Xi(V\setminus\bigcup_{j=1}^{s}\operatorname{int}(\Gamma_j)|H_V,\beta,\varphi(V^c)\equiv -1)\prod_{j=1}^{s}\Xi(\operatorname{int}(\Gamma_j)|H_V,\beta,\varphi(V^c)\equiv -1), \tag{18}$$

то из (14) - (17) вытекает оценка

$$\rho_s(\Gamma_1,...,\Gamma_s|H_V,\beta,\varphi(V^c)\equiv -1)\leq$$
$$\leq\prod_{j=1}^{s}\exp[20c_1(\beta,\nu)|\operatorname{int}(\Gamma_j)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}]\frac{\Xi(\Gamma_j|H_V^{(o)},\beta,\varphi(V^c)\equiv -1)}{\Xi(\operatorname{int}(\Gamma_j)|H_V^{(o)},\beta,\varphi(V^c)\equiv -1)}. \tag{19}$$

Наконец, заметим, что распределение Гиббса (2) на V, отвечающее гамильтониану $H_V^{(o)}$, является распределением Гиббса на V для модели классического изинговского ферромагнетика с нулевым внешним полем. Известно (см. [4]), что для этой модели справедливо неравенство Пайерлса:

$$\frac{\Xi(\Gamma_j|H_V^{(o)},\beta,\varphi(V^c)\equiv -1)}{\Xi(\operatorname{int}(\Gamma_j)|H_V^{(o)},\beta,\varphi(V^c)\equiv -1)}\leq\exp[-\beta|\Gamma_j|]. \tag{20}$$

Из (19) и (20) получаем

$$\rho_s(\Gamma_1,...,\Gamma_s]H_V,\beta,\varphi(V^c)\equiv -1)\leq\prod_{j=1}^{s}\exp[-\beta|\Gamma_j|+20c_1(\beta,\nu)|\operatorname{int}(\Gamma_j)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}]. \tag{21}$$

Перейдём к выбору постоянных $\beta_o(\nu)$, $c_1(\beta,\nu)$ и $c_2(\beta,\nu)$. Вначале мы выберем $\beta_o(\nu)$ таким образом, чтобы гарантировать сходимость ряда (7). Далее воспользуемся изопериметрическим неравенством

$$c_{(is)}(\nu)|\operatorname{int}(\Gamma_j)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}\leq|\Gamma_j|,\quad j=1,...,s, \tag{22}$$

справедливым для любого контура Γ_j. Здесь $c_{(is)}(\nu)$ — изопериметрическая постоянная, зависящая только от размерности решётки. Полагая теперь

$$c_1(\beta,\nu)=\frac{1}{40}[\beta-\beta_o(\nu)]c_{(is)}(\nu),$$

мы получаем из (21) и (22) оценку (9) с $c_2(\beta,\nu)>\{\beta+\beta_o(\nu)]/2$. Лемма 1 доказана.

Определение 2. Пусть $V_1 \subset V_2 \subset \ldots, \cup V_i = Z^\nu$ — возрастающая последовательность объёмов и $h_{V_i}(x)$, $i = 1, 2, \ldots$ — последовательность внешних полей. Мы будем говорить, что $\{h_{V_i}(x)\}_{i=1,2,\ldots}$ удовлетворяет *условию* г), если

$$\rho_s(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s | H_{V_i}, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1) \leq \exp[-c''' \sum_{j=1}^{s} |\Gamma_j|], \qquad (23)$$

где c''' — постоянная, а $H_{V_i}(x)$ являются гамильтонианами вида (4) с внешними полями $h_{V_i}(x)$.

Обозначим через $H_{V_i}^{(t)}$ гамильтониан вида (4) с $V = V_i$ и внешними полями $h_{V_i}^{(t)} = t h_{V_i}(x)$, $\quad 0 \leq t \leq 1$.

Лемма 2. *Пусть $V_1 \subset V_2 \subset \ldots, \cup V_i = Z^\nu$, пусть β_o таково, что $\sigma(\beta_o, \nu) < \infty$, и пусть $\{h_{V_i}(x)\}_{i=1,2,\ldots}$ — последовательность внешних полей, удовлетворяющих условиям б) и в) с некоторой постоянной $c_o > 0$. Тогда, если внешние поля $\{h_{V_i}^{(t)}(x), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots\}$ удовлетворяют при всех t условию г) с некоторой постоянной $c_3(\beta, \nu) > \beta_o$, то $q^-_{V_i, \beta, h_{V_i}(x)}(\cdot)$ слабо сходятся к P_- при $i \to \infty$.*

Доказательство. Мы будем опираться на некоторые результаты работы Р. А. Минлоса и Я. Г. Синая [4]. Введём обозначения

$$\Xi(\Gamma | V_i, t) = \Xi(\Gamma | H_{V_i}^{(t)}, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1),$$

$$\Xi(V_i, t) = \Xi(V_i | H_{V_i}^{(t)}, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1).$$

Из формулы (17) вытекает, что для всех t, $\quad 0 \leq t \leq 1$

$$\ln \rho_s(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s | V_i, t) = \ln \Xi(V_i \setminus \bigcup_{j=1}^{s} \mathrm{int}(\Gamma_j) | V_i, t) - \ln \Xi(V_i, t) + \sum_{j=1}^{s} \ln \Xi(\Gamma_j | V_i, t). \quad (24)$$

Следовательно

$$\ln \rho_s(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s | V_i, 1) = \ln \rho_s(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s | V_i, 0) +$$
$$+ \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} [\ln \Xi(V_i \setminus \bigcup_{j=1}^{s} \mathrm{int}(\Gamma_j) | V_i, t) - \ln \Xi(V_i, t) + \sum_{j=1}^{s} \ln \Xi(\Gamma_j | V_i, t)] dt. \qquad (25)$$

Заметим, что для любого контура Γ

$$\frac{\partial}{\partial t}\Xi(\Gamma|V_i,t) = \frac{\partial}{\partial t}\sum_{\varphi\in\mathcal{M}(\Gamma)}\exp\left[-\beta|\Gamma| - \beta\sum_{k=1}^{m}|\Gamma_k(\varphi)| + \right.$$

$$\left. + t\sum_{x\in\mathrm{int}(\Gamma)} h_V(x)(1+\varphi(x))\right] = \sum_{\varphi\in\mathcal{M}(\Gamma)}\left[\sum_{x\in\mathrm{int}(\Gamma)} h_{V_i}(x)(1+\right. \tag{26}$$

$$\left.+\varphi(x))\right]\exp\left[-\beta|\Gamma| - \beta\sum_{k=1}^{m}|\Gamma_k(\varphi)| + t\sum_{x\in\mathrm{int}(\Gamma)} h_V(x)(1+\varphi(x))\right],$$

где через $\Gamma_k(\varphi)$, $k = 1,\dots,m$ обозначены контуры конфигурации φ, $\mathrm{int}(\Gamma_k(\varphi)) \subset \mathrm{int}(\Gamma)$.

Обозначая для данного t, $0 \le t \le 1$, через $E_{\Gamma,t}$ условное математическое ожидание, при условии, что Γ является контуром конфигурации φ. Из (26) мы получим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma|V_i,t) = E_{\Gamma,t}\sum_{x\in\mathrm{int}(\Gamma)} h_{V_i}(x)[1+\varphi(x)]. \tag{27}$$

Поскольку $h_V(x)$ удовлетворяет условиям б) и в), величина

$$\left|\sum_{x\in\mathrm{int}(\Gamma)} h_{V_i}(x)[1+\varphi(x)]\right|$$

не превосходит $2c_0|\mathrm{int}(\Gamma)|$ (ср. с (10)) и для фиксированного Γ стремится к нулю при $i\to\infty$. Следовательно, правая часть (27) (и $\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma|V_i,t)$, соответственно) стремится к нулю равномерно по t, $0\le t\le 1$.

Далее, в силу определения разреженной статистической суммы для любого $V' \subseteq V_i$ получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(V'|V_i,t) = [\Xi(V'|V_i,t)]^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{\{\Gamma_1,\dots,\Gamma_m\}}\prod_{j=1}^{m}\Xi(\Gamma_j|V_i,t), \tag{28}$$

где суммирование в правой части (28) проводится по всевозможным наборам внешних контуров

$\{\Gamma_1,\dots,\Gamma_m\}$, $\mathrm{int}(\Gamma_j)\subseteq V'\setminus\partial V'$, $j=1,\dots,m$. Из (28) следует, что ([5])

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(V'|V_i,t) = [\Xi(V'|V_i,t)]^{-1}\sum_{\{\Gamma_1,\dots,\Gamma_m\}}\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma_j|V_i,t)\right]\prod_{j=1}^{m}\Xi(\Gamma_j|V_i,t) =$$

$$= \sum_{\Gamma:\mathrm{int}(\Gamma)\subsetneq V'\setminus\partial V'} \rho_1(\Gamma|V_i,t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma|V_i,t). \tag{29}$$

Используя формулу (29), заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(V_i\setminus\bigcup_{j=1}^{s}\mathrm{int}(\Gamma_j)|V_i,t) - \frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(V_i,t) = \sum_{\Gamma}{}'\rho_1(\Gamma|V_i,t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma|V_i,t), \tag{30}$$

где суммирование в $\sum'$ проводится по $\{\Gamma : \mathrm{int}(\Gamma)\cap\bigcup_{j=1}^{s}\mathrm{int}(\Gamma_j) \neq \emptyset\}$. Из формул (25) и (30) получаем

$$\begin{aligned}&\ln\rho_s(\Gamma_1,\dots,\Gamma_s|V_i,1) = \ln\rho_s(\Gamma_1,\dots,\Gamma_s|V_i,0)+\\&+\int_0^1\left[-\sum_{\Gamma}{}'\rho_1(\Gamma|V_i,t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma|V_i,t)+\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma_j|V_i,t)\right]dt\end{aligned} \tag{31}$$

Зафиксируем в (31) набор внешних контуров $\{\Gamma_1,\dots,\Gamma_s\}$ и оценим подынтегральное выражение. В силу сделанных выше замечаний величина $\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma_j|V_i,t)$ при $i\to\infty$ равномерно по t стремится к нулю. Поскольку

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma|V_i,t)\right| \leq 2|\mathrm{int}(\Gamma)|$$

и $\rho_1(\Gamma|V_i,t)$, в силу условия г), удовлетворяет неравенству

$$\rho_1(\Gamma|V_i,t)\leq\exp[-c(\beta,\nu)|\Gamma|],$$

мы имеем

$$\left|\sum_{\Gamma}{}'\rho_1(\Gamma|V_i,t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma|V_i,t)\right| \leq 2\sum_{\Gamma}{}'|\mathrm{int}(\Gamma)|\exp[-\beta|\Gamma|]. \tag{32}$$

Правая часть (32) сходится для любого фиксированного набора контуров (см. [4]). Следовательно, ряд

$$\sum{}'\rho_1(\Gamma|V_i,t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma|V_i,t) \tag{33}$$

сходится абсолютно и равномерно по t, $0\leq t\leq 1$. Поскольку для каждого фиксированного Γ, $\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma|V_i,t)$ стремится к нулю при $i\to\infty$, ряд (33) стремится к нулю равномерно по t.

Наконец, $\rho_s(\Gamma_1,...,\Gamma_s|V_i,0)$, при $i\to\infty$ сходятся к предельным коррелыационным функциям (см. [4]), которые мы обозначим через $\rho_s(\Gamma_1,...,\Gamma_s)$. Отсюда и из (31) следует, что $\rho_s(\Gamma_1,...,\Gamma_s|V_i,1)$ стремится к $\rho_s(\Gamma_1,...,\Gamma_s)$, при $i\to\infty$, что и доказывает лемму.

Перейдём к доказательству Теоремы 2. Выберем, в соответствии с Леммой 1, β_o и $c_1(\beta,\nu)$ так, чтобы выполнялась оценка (8). Тогда для внешнего поля $h_V(x)$ выполнены условия б), в) и г). Применяя Лемму 2, мы получим доказательство Теоремы 2. В силу замечания к Теореме 2 мы получим отсюда в качестве следствия также доказательство соответствующего утверждения Теоремы 1.

Доказательство оставшейся части Теоремы 1 опирается на так называемую "теорему о полоске" (см. [6]). Для полноты изложения приведём формулировку этой теоремы из работы [6] в удобной для дальнейшего изложения форме.

Теорема о полоске. *Найдутся $\beta_o>0$ и $c(\beta,\nu)>0$, определённая для всех $\beta>\beta_o$ такие, что для любой последовательности внешних полей $h_{W_n}(x)$, $n=1,2,...$, удовлетворяющих неравенству $h_{W_n}(x)\ge c(\beta,\nu)/n$, мы имеем*

$$\lim_{n\to\infty} q^{-}_{n,\beta,h_{W_n}(x)}(E_n)=1,$$

где E_n — следующее событие:

$$E_n=\{\varphi(W_n): \text{существует внешний контур } \Gamma \text{ конфигурации}$$
$$(\varphi(W_n),\varphi(W_n^c)\equiv -1) \text{ такой, что } \mathrm{int}(\Gamma)\supset W_{[n/6]}\}$$

Доказательство Теоремы 1. Предположим, что $c(\beta,\nu)$ как в Теореме о полоске. Обозначим через $\mathcal{A}(\Gamma)$ событие

$$\mathcal{A}(\Gamma)=\{\Gamma \text{ наибольший контур, содержащий } W_{[n/6]}\},$$

а через $\mathcal{A}_o$ событие

$$\mathcal{A}_o=\{\text{ куб } W_{[n/6]} \text{ не содержится во внутренности}$$
$$\text{ни одного из внешних контуров }\}.$$

Если $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$, то события $\mathcal{A}(\Gamma_1)$ и $\mathcal{A}(\Gamma_2)$ несовместимы. Поэтому для любого события C

$$q_n(C) = \sum_{\mathcal{A}(\Gamma)} q_n(C|\mathcal{A}(\Gamma))q_n(\mathcal{A}(\Gamma)) + q_n(C|\mathcal{A}_o)q_n(\mathcal{A}_o), \tag{34}$$

где через $q_n(\cdot)$ обозначены распределения Гиббса на W_n с граничными условиями $\varphi(W_n^c) \equiv -1$, параметром β и внешними полями $h_{W_n}(x) = c/n$. Рассмотрим теперь условные вероятности $q_n(\cdot|\mathcal{A}(\Gamma))$. Используя специальный вид гамильтониана (1) (или (4)), можно заключить, что условное распределение вероятностей на множестве $\mathrm{int}(\Gamma) \setminus \partial\mathrm{int}(\Gamma)$, при условии, что Γ является внешним контуром конфигурации φ, зависит только от $\varphi(\partial\mathrm{int}(\Gamma))$ и не зависит от $\varphi\big((\mathrm{int}(\Gamma))^c\big)$. Далее, если $\varphi \in \mathcal{A}(\Gamma)$, то $\varphi(\partial\mathrm{int}(\Gamma)) \equiv +1$. Отсюда вытекает, что указанное условное распределение вероятностей является распределением вероятностей для модели классического изинговского ферромагнетика, отвечающим обратной температуре β, граничным условиям $\varphi(\partial\mathrm{int}(\Gamma)) = +1$ и постоянному внешнему полю $h = c/n$. Рассмотрим следующие корреляционные функции на множестве $\mathrm{int}(\Gamma) \setminus \partial\mathrm{int}(\Gamma)$.
Контур γ будем называть *внешним контуром конфигурации* $\varphi \in \mathcal{A}(\Gamma)$ *на множестве* $\mathrm{int}(\Gamma) \setminus \partial\mathrm{int}(\Gamma)$, если

1) $\mathrm{int}\,(\gamma) \subset \mathrm{int}(\Gamma)$;

2) не существует контура γ' такого, что $\mathrm{int}\,(\gamma) \subset \mathrm{int}\,(\gamma') \subset \mathrm{int}(\Gamma)$.

Для $h \geq 0$, через $\rho_n^{(m)}(\gamma_1, ..., \gamma_m|\mathcal{A}(\Gamma), h)$ обозначим условную вероятность того, что $\gamma_1, ..., \gamma_m$ являются внешними контурами конфигурации φ на множестве $\mathrm{int}(\Gamma) \setminus \partial\mathrm{int}(\Gamma)$. Из результатов работы [5] (ср. с [7]) следует, что $\rho_n^{(m)}(\gamma_1, ..., \gamma_m|\mathcal{A}(\Gamma), h)$ являются монотонно убывающими функциями от h при фиксированных $\gamma_1, ..., \gamma_m, \Gamma$ и $h \geq 0$. Следовательно, поскольку оценка (23) с $c_3(\beta, \nu) = \beta$ выполнена для $h = 0$, она остаётся справедливой для всех $h > 0$. Таким образом

$$\rho_n^{(m)}(\gamma_1, ..., \gamma_m|\mathcal{A}(\Gamma), h) \leq \exp[-\beta \sum_{l=1}^{m} |\gamma_l|]. \tag{35}$$

Далее, для $V \subset Z^\nu$, $|V| < \infty$ численное значение гамильтониана (1) не изменится при одновременной замене $\varphi(x)$ на $-\varphi(x)$, и $h_V(x)$ на $-h_V(x)$ во всех точках $x \in V$, и $\varphi(V^c)$ на $-\varphi(V^c)$ в точках $x \in V^c$. Следовательно, мы можем использовать Лемму 2 для доказательства теоремы. Условия б) и в), очевидно, выполнены, а условие г) следует из формулы (35). Следовательно, для фиксированных $\gamma_1, ..., \gamma_m$, $\rho_n^{(m)}(\gamma_1, ..., \gamma_m | \mathcal{A}(\Gamma), c/n)$ стремится к пределу $\rho^{(m)}(\gamma_1, ..., \gamma_m)$, при $n \to \infty$ равномерно по всем Γ таким, что $\mathrm{int}(\Gamma) \supset W_{[n/6]}$. По Теореме о полоске $q_n(\mathcal{A}_o)$ стремится к нулю. Таким образом, в силу формулы (34) распределения вероятностей $q_n(\cdot)$ слабо сходятся к P_β^+. Теорема 1 доказана.

В заключение автор благодарит Я. Г. Синая и Е. И. Динабурга за полезные обсуждения, и Р. В. Амбарцумяна за замечания, которые существенно улучшили текст работы.

ABSTRACT. We study in this article Gibbs states in classical Ising ferromagnet on the integer lattice Z^ν ($\nu \geq 2$) for large inverse temperature β ($\beta \geq \beta_o$) and variable external fields h. We prove that there exist c_1 and c_2, $0 < c_1 < c_2 < \infty$, depending only on β and ν, such that the Gibbs distributions on W_n (where W_n is a cube on Z^ν, centered at the origin with the side lenght $2n+1$) with (-1) boundary conditions outside W_n and external fields $h = c'/n$ and $h = c''/n$ respectively, $0 \leq c' \leq c_1$, $c_2 \leq c''$, converge weakly to the pure phases P_β^- and P_β^+ respectively, as $n \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Ruelle, "On the use of "small external fields" in the problem of symmetry breakdown in statistical mechanics," Annals of Physics, vol. 69, no. 2, pp. 364 – 374, 1972.
2. O. E. Lanford, D. Ruelle, "Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics," Commun. in Math. Phys., vol. 13, pp. 194 – 215, 1968.
3. Р. Л. Добрушин, "Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием," Функц. Анализ и его прил., том 2, стр. 292 – 301, 1968.
4. Я. Г. Синай, Теория Фазовых Переходов, М., Наука, 1980.
5. Р. А. Минлос, Я. Г. Синай, "Новые результаты о фазовых переходах 1-го рода в моделях решетчатого газа," Труды ММО, том 17, стр. 213 – 243, 1967.
6. Д. Г. Мартиросян, "Теоремы о полосках в модели классического изинговского ферромагнетика," Изв. АН Армении, Математика [английский перевод: Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)], том 23, № 3, стр. 272 – 297, 1987.
7. R. B. Griffiths, "Correlations in Ising ferromagnets," J. Math. Phys., vol. 8, pp. 478 – 489, 1967.

13 Апреля 1992

Институт Математики АН Армении

ПРИНЦИП ВАРИАЦИИ КАСАТЕЛЬНОЙ В КОМПЛЕКСНОМ АНАЛИЗЕ

Г. А. Барсегян

Известия Академии Наук Армении. Математика,
том 27, № 3, 1992

Много задач в комплексном анализе и физике можно свести к изучению прообразов $w^{-1}(\Gamma)$, где w есть комплексное отображение в области D, а Γ — кривая в комплексной плоскости. В настоящей статье предлагается некоторый подход к изучению таких множеств. Получены оценки для длин прямых $w^{-1}(\Gamma)$ в терминах различных функционалов, таких как вариация касательной и распределение массы.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $w(z)$ — заданное в области D комплексное отображение, и пусть Γ — кривая в комплексной плоскости. Прообразы $w^{-1}(\Gamma)$ будем называть Γ-линиями.

В физике Γ-линии интерпретируются как линии постоянной температуры, напряжения и так далее. Исследование Γ-линий приводит к новому типу задач в теории целых и мероморфных функций, где представляет интерес не только число a-точек (как в классической теории), но и их месторасположение.

Вероятно, понятие Γ–линий окажется одним из важных понятий в комплексном анализе. Ниже мы приводим некоторые проблемы, связанные с Γ-линиями.

A) Γ-*линии и a-точки*. Γ-линии являются объединением a–точек $w^{-1}(a)$, $a \in \Gamma$.

Возникает следующий вопрос: можно ли построить теорию Γ–линий наподобие известной теории a-точек [1]?

Заметим, что для мероморфных в $\mathbf{C}$ функций установлены некоторые аналоги соотношениям дефектов в теорях Р. Неванлинны и Л. Альфорса (см. [2]), где число a-точек были заменены длинами $L(D,\Gamma)$ Γ-линий.

Б) *Γ-линии и распределение значений функций* $\operatorname{Re} w(z)$, $\operatorname{Im} w(z)$, $|w(z)|$.
Классические проблемы распределения a-точек $\{z : w(z) = a = \mathrm{const}\}$ мероморфных функций $w(z)$ можно распространить на вещественные функции $\operatorname{Re} w(z)$, $\operatorname{Im} w(z)$, $|w(z)|$. В этом случае задача сводится к изучению Γ-линий. Например, решение уравнения $\operatorname{Im} w(z) = A = const$ представляет собой Γ-линии при $\Gamma = \{w: \ \operatorname{Im} w = A\}$.

В) *Применения к a-точкам. Γ-линии и близость a-точек.*
Оценки $L(D,\Gamma)$ приводят к информации о взаимных расположениях a–точек (если $a_1, a_2 \in \Gamma$, то из малости $L(D,\Gamma)$ следует близость a_1 и a_2-точек).
Для мероморфных функций в $\mathbf{C}$ этот подход был использован в [2], где было сформулировано "свойство близости a-точек".
Этим путём были усилены основные заключения теорий Р. Неванлинны и Л. Альфорса [2]-[4].

Г) *Связь с суммами Бляшке.*
Для аналитических в единичном круге $D(1)$ функций $w(z)$ хорошо известны суммы Бляшке

$$\sum_{a_k \in D(1)} (1 - |a_k|),$$

характеризующие плотность их нулей a_k.
В случае произвольной области D представляется естественным обобшение этих сумм в виде

$$B(D,w) = \sum_{a_k \in D} \rho(a_k, \partial D),$$

где $\rho(a_k, \partial D)$ есть расстояние от точки a_k до границы ∂D, а каждый нуль засчитывается с учётом его кратности.
Легко показать, что если Γ — вещественная полуось, то для функции w выполняется следующая оценка $B(D,w) \leq L(D,\Gamma,w)$.
Таким образом, $L(D,\Gamma,w)$ являются оценками для плотности нулей a_k функции w.

Д) *Связь с теорией Альфорса покрытия поверхностей.*

Теория Альфорса покрытия поверхностей связана с множествами $w(w^{-1}(\Gamma))$. С этой точки зрения задача исследования Г-линий (множества $w^{-1}(\Gamma)$) приводит к изучению поведения w^{-1}-образов покрытия Альфорса. На этом пути, наряду с соотношением дефекта Альфорса, требуется соответствую щее соотношение дефекта для Г-линий.

E) *Связь с принципом длины и площади.*

Следующий принцип является классическим принципом длины и площади Альфорса: для регулярной функции w в области D

$$\int_0^{\infty} \frac{L^2(D,\Gamma(R))}{R\,p(R)}\,dR \leq S(D), \tag{1}$$

где $\Gamma(R)$ есть окружность $|w| = R$, $L(D,\Gamma(R))$ — суммарная длина кривых $D \cap w^{-1}(\Gamma(R))$,

$$p(R) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(D, Re^{i\theta})\,d\theta,$$

где $n(D, Re^{i\theta})$ число корней уравнения $w(z) = a$ в D, $S(D)$ — площадь области D.

Много интересных исследований в комплексном анализе основываются на неравенстве (1) (см. [5]-[7]).

Указанные постановки требуют создания методов исследования Г-линий.

В настоящей статье устанавливаются различные оценки для $L(D,\Gamma)$ для различных классов функций: в §1 приводятся различные модификации принципа длины и площади; в §2 вводится принцип, который мы называем принципом вариации касательной, и который позволяет получить оценки для $L(D,\Gamma)$; в §3 мы оцениваем суммы длин для конечных наборов Г–кривых; в §4 мы обобщаем основные результаты §§2 и 3 на класс обобщённых квази–конформных отображений.

§1. МОДИФИКАЦИИ ПРИНЦИПА ДЛИНЫ И ПЛОЩАДИ

1.1. Пусть

$$\begin{aligned} S_j(D) &= \iint_D |w(re^{i\varphi})|^j\, r\,dr\,d\varphi, \qquad j = 1,2, \\ A_j(D) &= \iint_D \left(\frac{|w(re^{i\varphi})|}{1+|w(re^{i\varphi})|^2}\right)^j r\,dr\,d\varphi, \quad j = 1,2. \end{aligned} \tag{1}$$

Величина $S_2(D)$ представляет собой площадь w-образа области D, $A_2(D)$ есть сферическая площадь w-образа области D. Обе площади учитывают кратность покрытия.

Приведём два новых неравенства, которые могут рассматриваться как модификации принципа длины и площади.

Для регулярной в области D функции w

$$\int_0^\infty L(D,\Gamma(R))\,dR = S_1(D) \leq (S_2(D)\cdot S(D))^{1/2}. \tag{2}$$

Для мероморфной в D функции w

$$\int_0^\infty \frac{L(D,\Gamma(R))}{1+R^2}\,dR = A_1(D) \leq (A_2(D)\cdot S(D))^{1/2}. \tag{3}$$

Неравенства (2) и (3) несколько проще, чем (1) в §0.

Приведём соотношения связывающие интегралы от L с другими известными величинами.

Пусть теперь w регулярна в единичном круге $D(1)$, $D(r) = \{z;\quad |z| < r\}$.

Обозначим

$$J_p(r,w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |w(r\,e^{i\theta})|^p\,d\theta,$$

$$L(r,w) = \int\limits_{|z|=r} \frac{|w(r\,e^{i\theta})|}{1+|w(r\,e^{i\theta})|^2}\,d\theta.$$

Из неравенства (2) и неравенства Гёльдера для $p>1$ мы имеем

$$\int_0^\infty L(r,\Gamma(R))\,dR = S_1(r) \leq 2\pi\int_0^r J_p^{1/p}(t,w')\,t\,dt, \tag{2'}$$

$$\int_0^\infty L(r,\Gamma(R))\,dR \leq \left(\iint\limits_{D(r)} |w'|^p\,d\sigma\right)^{1/p} (S(r))^{1-1/p}, \tag{2''}$$

где $d\sigma$ есть элемент площади.

Из неравенства (3) получаем

$$\int_0^\infty \frac{L(r,\Gamma(R))}{1+R^2}\,dR \leq A_1(r) = \int_0^r L(t,w)\,dt \leq \pi^{1/2}\,(A_2(r)\,S(r))^{1/r}. \tag{4}$$

Последние соотношения интересны тем, что функция w принадлежит классу H_p (если $\sup\limits_r J_p(r,w) < \infty$) и классу Цудзи (если $\sup\limits_r L(r,w) < \infty$). Неравенство (4) интересно ещё тем, что величина $A_2(r)/\pi$ совпадает с классической альфорсовской характеристикой $A(r)$.

Следующее соотношение связывает двойной интеграл от L с величинами J_p. Для любого $p > 0$

$$\frac{p^2}{2\pi^2}\int_{r_0}^{r}\left(\int_0^\infty \frac{L(t,\Gamma(R))}{R^{1-\frac{p}{2}}}\,dR\right)^2\frac{dt}{t} \le J_p(r,w) - J_p(r_0,w). \tag{5}$$

Для вывода неравенств (2) – (5) нам понадобится следующее утверждение.

1.2. Основное тождество. Пусть $w(z)$ мероморфна в области D и пусть $\Psi(R)$ — непрерывная положительная функция на $0 \le R < \infty$. Тогда

$$\int_0^\infty \frac{L(D,\Gamma(R))}{\Psi(R)}\,dR = \iint_D \left|\frac{w'(z)}{\Psi(|w(z)|)}\right| d\sigma, \tag{6}$$

где $\Gamma(R)$ и $L(D,\Gamma(R))$ как и в §0.

Начнём с некоторых замечаний, касающихся общих гладких жордановых кривых Γ.

Мы будем использовать следующие обозначения (см. Рис. 1): $l_x(\Gamma)$ и $l_y(\Gamma)$ — две совокупности площадей из $w^{-1}(\Gamma) \cap D$, определяемых из условия, что в каждой точке $u \in l_t(\Gamma)$, $t = x$ или y, наименьший угол α_t между касательной к u и t-осью не больше чем $\frac{\pi}{4}$ (если $t = x$) и меньше чем $\frac{\pi}{4}$ (если $t = y$); $L_t(D,\Gamma)$ есть суммарная длина площадок $l_t(\Gamma)$; D_t есть множество точек $z \in D$ таких, что дуга $l(\Gamma(|w(z)|)$, содержащая z, принадлежит $l_t(\Gamma(|w(z)|)$; $J_t = D \cap \{z; \quad \operatorname{Re} z = t\}$, если $t = x$ и $J_t = D \cap \{z; \quad \operatorname{Im} z = t\}$, если $t = y$; $\Phi(D,t,\Gamma)$ — число точек $z_{i,t}(\Gamma)$, в которых пересекаются J_t и $l_t(\Gamma)$; $\alpha_{i,t}(\Gamma)$ есть наименьший из углов между t-осью и касательной к дуге из $l_t(r)$ в точке $z_{i,t}(\Gamma)$.

Множество кривых $w^{-1}(\Gamma) \cap D$ можно представить как $l_x(\Gamma) \cup l_y(\Gamma)$ и, следовательно

$$L_x(D,\Gamma) + L_y(D,\Gamma) = L(D,\Gamma) \tag{7}$$

и

$$D_x + D_y = D. \tag{8}$$

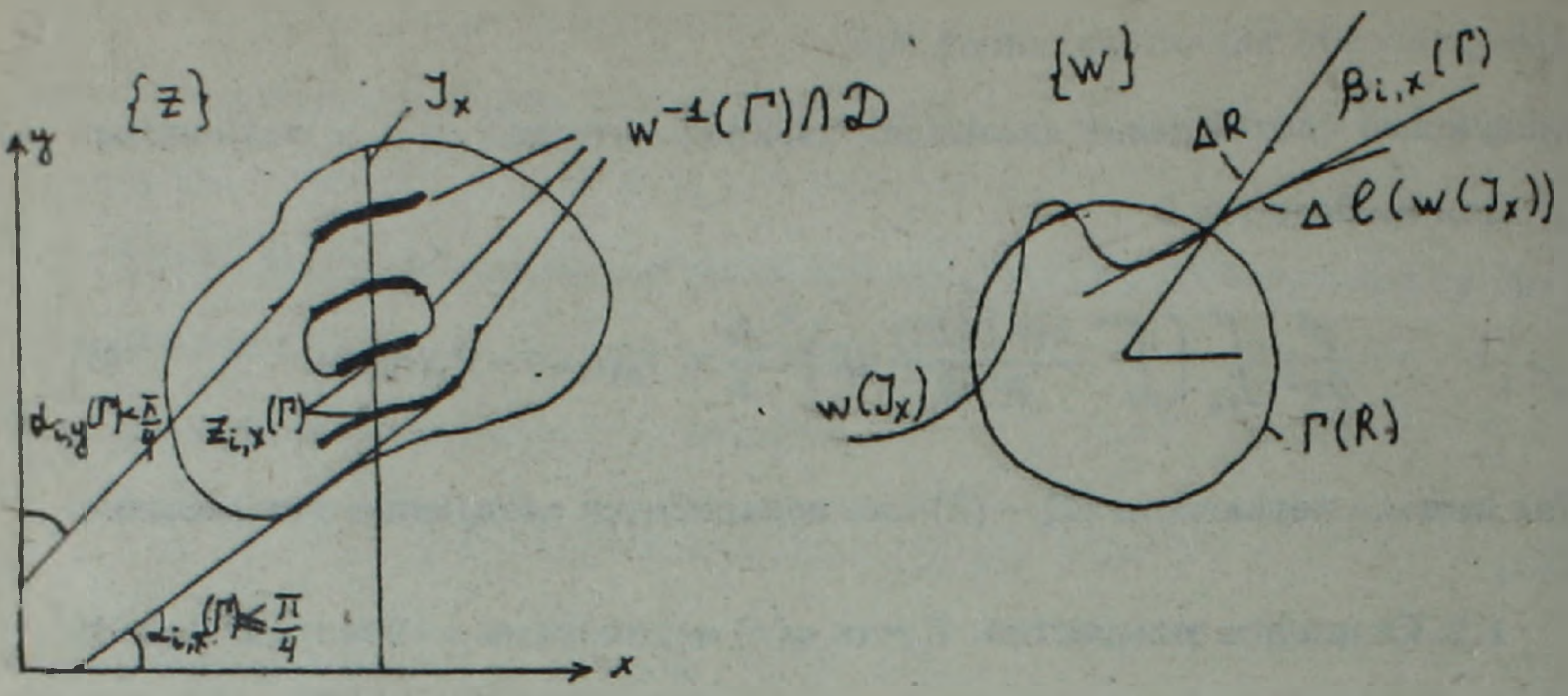

Рис. 1. жирными линиями представлены кривые $l_x(\Gamma)$

Так как $\alpha_{i,x}(\Gamma) \leq \frac{\pi}{4}$, то для элемента длины Δl дуги из $l_x(\Gamma)$ в $z_{i,x}(\Gamma)$ мы имеем $\Delta l \sim \dfrac{\Delta x}{\cos \alpha_{i,x}(\Gamma)}$. Следовательно, выполняется тождество

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^{\Phi(D,x,\Gamma)} \frac{1}{\cos \alpha_{i,x}(\Gamma)}\, dx = L_x(D,\Gamma), \tag{9}$$

где $x_1 = \min\limits_{z\in\partial D} Re z$; $x_2 = \max\limits_{z\in\partial D} Re z$.

Доказательство (6). Пусть $\Gamma = \Gamma(R)$; $w(z_{i,x}(\Gamma)) = Re^{i\theta_{i,x}}$; $\beta_{i,x}(\Gamma(R))$ — наименьший угол между лучём $\{t e^{i\theta_{i,x}};\quad t > 0\}$ и касательной к дуге $w(J_x)$ в точке $Re^{i\theta_{i,x}}$.

Для элемента длины $\Delta l(w(J_x))$ в точке $Re^{i\theta_{i,x}}$ имеем (см. Рис. 1)

$$\Delta l(w(J_x)) \sim \frac{\Delta R}{\cos \beta_{i,x}(\Gamma(R))}.$$

Поэтому

$$\int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{\Phi(D,x,\Gamma(R))} \frac{1}{\Psi(R) \cos \beta_{i,x}(\Gamma(R))} \right) dR = \int\limits_{J_x \cap D_x} \left| \frac{w(z)}{\Psi(|w(z)|)} \right| dy \tag{10}$$

(так как обе части этого неравенства представляют полную массу на кривых $w(J_x \cap D_x)$, $\Psi^{-1}(R) = \Psi^{-1}(|w(z)|)$ есть плотность).

В силу конформности, в каждой точке $z_{i,x}(\Gamma)$, за исключением конечного их числа, где производная w' равна нулю, имеем $\alpha_{i,x}(\Gamma(R)) = \beta_{i,x}(\Gamma(R))$.

Следовательно, левая часть (10) равна интегралу

$$\int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{\Phi(D,x,\Gamma(R))} \frac{1}{\Psi(R)\cos\alpha_{i,x}(\Gamma(R))} \right) dR.$$

Отсюда и из соотношений (9), (10), используя теорему Фубини, получаем

$$\int_0^\infty \frac{L_x(D,\Gamma(R))}{\Psi(R)}\,dR = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_0^\infty \sum_{i=1}^{\Phi(D,x,\Gamma(R))} \frac{1}{\Psi(R)\cos\alpha_{i,x}(\Gamma(R))}\,dR \right) dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \int_{J_x\cap D_x} \left| \frac{w(z)}{\Psi(|w(z)|)} \right| dy\,dx = \iint_{D_x} \left| \frac{w'(z)}{\Psi(|w(z)|)} \right| d\sigma.$$

Заменяя x на y, получаем

$$\int_0^\infty \frac{L_y(D,\Gamma(R))}{\Psi(R)} = \iint_{D_y} \left| \frac{w'(z)}{\Psi(|w(z)|)} \right| d\sigma.$$

Следовательно, (6) следует из (7), (8) и последних двух тождеств.

1.3. Следствия. Тождество (6) имеет следующую геометрическую интерпретацию. Имеем

$$\iint_D \left| \frac{w'(z)}{\Psi(|w(z)|)} \right| d\sigma = \int_{x_1}^{x_2} m_\Psi(J_x)\,dx = \int_{y_1}^{y_2} m_\Psi(J_y)\,dy,$$

где $m_\Psi(J_t)$, $t = x, y$ есть суммарная масса, распределённая на кривой $w(J_t)$ с плотностью $\Psi(|w(z)|)$. Для $\Psi \equiv 1$ величина $m_\Psi(J_t) = l(w(J_t))$ — длина кривой $w(J_t)$.

Следовательно, тождество (6) можно переписать в виде

$$\int_0^\infty \frac{L(D,\Gamma(R))}{\Psi(R)}\,dR = \int_{x_1}^{x_2} m_\Psi(J_x)\,dx = \int_{y_1}^{y_2} m_\Psi(J_y)\,dy. \tag{11}$$

В случае $\Psi \equiv 1$

$$\int_0^\infty L(D,\Gamma(R))\,dR = \int_{x_1}^{x_2} l(w(J_x))\,dx = \int_{y_1}^{y_2} l(w(J_y))\,dy. \tag{11'}$$

Тождество (11) мы называем "принципом распределения масс", а тождество (11′) выражает "принцип длины".

Выведем теперь неравенства (2),(3) и (5).

Взяв $\Psi(R) \equiv 1$ и применив неравенство Коши–Буняковского к правой части (6), получим (2). Аналогично, взяв $\Psi(R) = 1 + R^2$, мы получаем (3). Заметим, что по неравенству Гёльдера мы имеем следующее обобщение (2''): для $p > 0$

$$\int_0^\infty \frac{L(D,\Gamma(R))}{\Psi(R)}\, dR \le \left(\iint_D \left|\frac{w'(z)}{\Psi(|w(z)|)}\right|^p d\sigma\right)^{1/p} \cdot (S(D))^{1-\frac{1}{p}}. \tag{12}$$

Для того, чтобы доказать неравенство (5) нам понадобится следующее тождество Харди–Штейна–Спенсера (см. В. Хейман [1], п 42): для любого $p > 0$

$$r\frac{d}{dr}J_p(r) = \frac{p^2}{2\pi}\int_0^r \rho \int_0^{2\pi} \frac{|w'(\rho e^{i\theta}|^2}{|w((\rho e^{i\theta}|^{2-p}}\, d\theta d\rho = p^2 \int_0^\infty p(r,R)\, R^{p-1}\, dR.$$

Полагая $\Psi(R) = R^{1-\frac{p}{2}}$ и $D = D(r)$, из (12) и последнего тождества получаем

$$\int_0^\infty \frac{L(r,\Gamma(R))}{R^{1-\frac{p}{2}}}\, dR \le \left(\int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{|w'(\rho e^{i\theta}|^2}{|w((\rho e^{i\theta}|^{2-p}}\, \rho d\theta d\rho\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^{1/2} r =$$
$$\frac{\sqrt{2}\pi r^{3/2}}{p}\left[\frac{d}{dr}J_p(r)\right]^{1/2},$$

откуда следует (5).

1.4. Случай прямой линии. Пусть $\gamma(u)$ — прямая линия $\{w : \operatorname{Re} w = u\}$, и пусть $\Psi(u), u \in (-\infty,\infty)$ — непрерывная положительная функция. Справедлив следующий аналог тождества (6):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L(D,\gamma(u))}{\Psi(u)}\, du = \iint_D \left|\frac{w'(z)}{\Psi(\operatorname{Re} w(z))}\right| d\sigma. \tag{13}$$

Взяв $\Psi(u) \equiv 1$ и применив неравенство Коши–Буняковского к правой части (13), получим следующую модификацию принципа длины и площади:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(D,\gamma(u))\, du \le S_2^{1/2}(D) \cdot S(D)^{1/2}. \tag{14}$$

Применив неравенство Гёльдера к правой части (13), мы получим следующий аналог неравенства (12): для любого $p > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L(D,\gamma(u))}{\Psi(u)}\,du \le \left(\iint\limits_D \left| \frac{w'(z)}{\Psi(Re w(z))} \right|^p d\sigma \right)^{1/p} (S(D))^{1-\frac{1}{p}}. \qquad (15)$$

§2. ПРИНЦИП ВАРИАЦИИ КАСАТЕЛЬНОЙ

2.1. Исследование прообразов $w^{-1}(\Gamma)$, (в частности их длин) было начато в [8], [9], [2], [10].

В этом параграфе мы даём общий метод, который мы называем "принципом вариации касательной". Для достаточно широких классов функций w и кривых Γ, этот принцип позволяет оценить длины $L(D,\Gamma)$.

2.2. Описание метода. Характеристика $V(D)$.

В этом параграфе D — ограниченная область с кусочно гладкой границей; $w(z)$ обозначает мероморфную функцию в замыкании D.

Мы используем обозначения параграфа 1.2. Так как $\alpha_{i,x}(\Gamma) \le \frac{\pi}{4}$, $\alpha_{j,y}(\Gamma) < \frac{\pi}{4}$, то из неравенств (7), (9), (9′) параграфа 1.2, мы получаем

$$L(D,\Gamma) \le \sqrt{2} \int_{x_1}^{x_2} \Phi(D,x,\Gamma)\,dx + \sqrt{2} \int_{y_1}^{y_2} \Phi(D,y,\Gamma)\,dy. \qquad (1)$$

Для заданного x, через $\{m_x^{(p)}\}$ обозначим совокупность интервалов, составляющих множество J_x; $m_{x,i}^{(p)} \subset m_x^{(p)}$ — интервал с концами $z_{i,x}(\Gamma)$ и $z_{i+1,x}(\Gamma)$; Φ_p — число точек $z_{i,x}(\Gamma)$ на $m_x^{(p)}$.

Предположим теперь, что Γ — вещественная ось и для заданного x все особые точки $w(z)$ не лежат на J_x. Мы также предположим, что $\Phi_p \ge 2$. В каждой из концевых точек $w(z_{i,x}(\Gamma))$ и $w(z_{i+1,x}(\Gamma))$ кривой $w(m_{x,i}^{(p)})$ (они лежат на действительной оси) меньший из углов между касательной к этой кривой и вещественной осью больше, чем $\frac{\pi}{4}$ (следует из определения точек $z_{i,x}(\Gamma)$ и конформности $w(z)$ в этих точках).

Существует точка z_i^* между $z_{i,x}(\Gamma)$ и $z_{i+1,x}(\Gamma)$ такая, что касательная к $w(m_{x,i}^{(p)})$ в $w(z_i^*)$ параллельна вещественной оси. Следовательно, полное изменение угла касательной к кривой $w(m_{x,i}^{(p)})$, вычисляемое между точками $w(z_{i,x}(\Gamma))$ и $w(z_i^*)$ (или между точками $w(z_i^*)$ и $w(z_{i+1,x}(\Gamma))$), не меньше чем $\frac{\pi}{4}$ (см. Рис. 2).

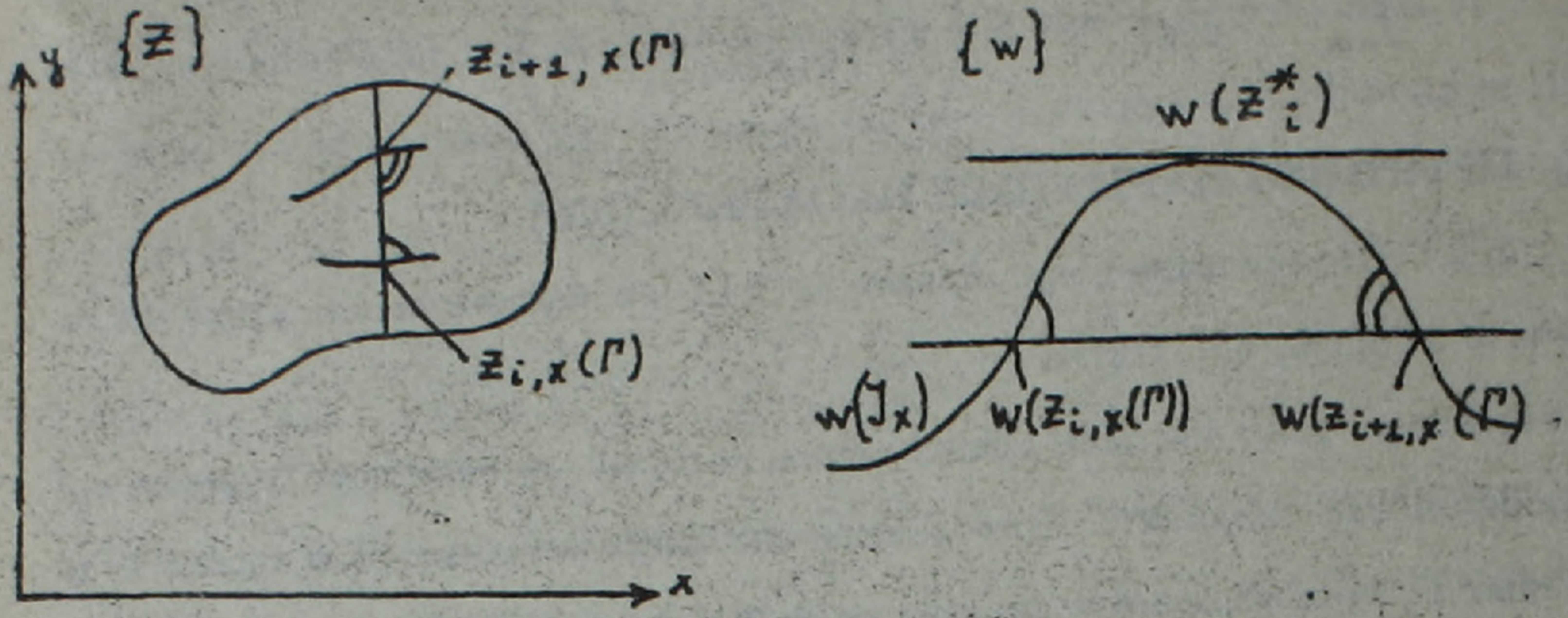

Рис. 2

Обозначив через $\alpha_x(y) = \arg \frac{\partial}{\partial y} w(z)$ угол между действительной осью и касательной к $w(J_x)$ в $w(z)$, $z = x + iy$, получаем

$$Var_{m^{(p)}_{x,i}} \alpha_x(y) > \frac{\pi}{2}, \tag{2}$$

где $\mathrm{Var}_X f$ — вариация функции f на X.

Суммируя по всем i, получим

$$Var_{m^{(p)}_x} \alpha_x(y) \geq (\Phi_p - 1)\frac{\pi}{2}$$

или

$$\Phi_p \leq \frac{2}{\pi} Var_{m^{(p)}_x} \alpha_x(y) + 1. \tag{3}$$

Очевидно, неравенство (3) верно также в случае $\Phi_p < 2$.

Из (3), суммируя получаем

$$\begin{aligned} \Phi(D, x, \Gamma) = \sum_{\{m^{(p)}_x\}} \Phi_p \leq \frac{2}{\pi} \sum_{\{m^{(p)}_x\}} Var_{m^{(p)}_x} \alpha_x(y) + \sum_{\{m^{(p)}_x\}} 1 = \\ = \frac{2}{\pi} Var_{J_x} \alpha_x(y) + \sum_{\{m^{(p)}_x\}} 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Предположим, что часть области D, заключённая между сечениями $\{z;\ \mathrm{Re}\, z = x'\}$ и $\{z:\ \mathrm{Re}\, z = x''\}$, можно разложить на некоторое число n связных компонент, граница каждой из которых имеет общие точки с $J_{x'}$ и

$J_{x''}$. Тогда для любого $x \in (x', x'')$ имеем

$$\sum_{\{m_x^{(p)}\}} 1 = n \qquad \text{и} \qquad \int_{x'}^{x''} \left(\sum_{\{m_x^{(p)}\}} 1 \right) dx = n(x'' - x'),$$

где величина $n(x'' - x')$ есть сумма проекций выше упомянутых компонент на оси X.

Легко видеть, что $2n(x''-x')$ меньше, чем длина части ∂D между нашими сечениями.

Следовательно, разбив интервал (x_1, x_2) на участки описанного выше типа, получим

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\sum_{\{m_x^{(p)}\}} 1 \right) dx \leq \frac{l(D)}{2}, \tag{5}$$

где $l(D)$ — длина ∂D.

Из (4) и (5) получаем

$$\int_{x_1}^{x_2} \Phi(D, x, \Gamma)\, dx < \frac{2}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} Var_{J_x} \alpha_x(y)\, dx + \frac{l(D)}{2}. \tag{6}$$

Число точек x, для которых множество J_x содержит сингулярности w, конечно. Нам не надо оценивать $\Phi(D, x, \Gamma)$ в таких точках, потому что они не дают вклада в интеграл.

Аналогичным образом, заменяя x на y и обозначая через $\alpha_y(x) = \arg \frac{\partial}{\partial x} w(z)$ угол между касательной к $w(J_y)$ в $w(z)$ и вещественной осью, получаем

$$\int_{y_1}^{y_2} \Phi(D, y, \Gamma)\, dy < \frac{2}{\pi} \int_{y_1}^{y_2} Var_{J_y} \alpha_y(x)\, dy + \frac{l(D)}{2}. \tag{7}$$

Суммируя неравенства (6), (7) и учитывая (1), получим

$$L(D, \Gamma) < \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left\{ \int_{x_1}^{x_2} Var_{J_x} \alpha_x(y)\, dx + \int_{y_1}^{y_2} Var_{J_y} \alpha_y(x)\, dy \right\} + \sqrt{2}\, l(D). \tag{8}$$

Это неравенство и есть принцип вариации касательной в случае, когда Γ вещественная ось.

Выражение в фигурных скобках мы будем обозначать через $V(D)$. Обозначив $V(x, D) := Var_{J_x} \alpha_x(y)$; $V(y, D) := Var_{J_y} \alpha_y(x)$, получим

$$V(D) := \int_{x_1}^{x_2} V(x, D)\, dx + \int_{y_1}^{y_2} V(y, D)\, dy. \tag{9}$$

Легко видеть, что

$$V(D)=\int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{J_x}\left|\frac{\partial}{\partial y}\arg\frac{\partial}{\partial y}w(z)\right|dy\right)dx+$$
$$+\int_{y_1}^{y_2}\left(\int_{J_y}\left|\frac{\partial}{\partial x}\arg\frac{\partial}{\partial x}w(z)\right|dx\right)dy\le \tag{10}$$
$$\le\iint_D\left|\frac{\partial}{\partial x}\ln|w'(z)|\right|d\sigma+\iint_D\left|\frac{\partial}{\partial y}\ln|w'(z)|\right|d\sigma\le 2\iint_D\left|\frac{w''(z)}{w'(z)}\right|d\sigma.$$

2.3. Общий случай. Пусть теперь Γ — гладкая жорданова кривая. Рассмотрим следующую величину:

$$v(\Gamma)=Var_{z\in\Gamma}\alpha_\Gamma(z), \tag{11}$$

где $\alpha_\Gamma(z)$ — угол между касательной к Γ в $z\in\Gamma$ и вещественной осью. Мы будем называть $v(\Gamma)$ касательной вариацией кривой Γ.

Установим сначала неравенство типа (8) для кривых, для которых $v(\Gamma)<\frac{\pi}{4}$. Пусть $\alpha_i^*(+)\le\frac{\pi}{2}$ — угол между касательной к $w(J_x)$ в $w(z_{i,x}(\Gamma))$, и прямой соединяющей $w(z_{i,x}(\Gamma))$ и $w(z_{i+1,x}(\Gamma))$; $\tilde\alpha_i^*(+)\le\frac{\pi}{2}$ — угол между касательной к Γ в $w(z_{i,x}(\Gamma))$, и прямой соединяющей $w(z_{i,x}(\Gamma))$ и $w(z_{i+1,x}(\Gamma))$; $\tilde\alpha_i(+)\le\frac{\pi}{2}$ — угол между кривыми $w(J_x)$ и Γ в $w(z_{i,x}(\Gamma))$. Определим углы $\alpha_{i+1}^*(-)$, $\tilde\alpha_{i+1}^*(-)$, $\tilde\alpha_{i+1}(-)$, поменяв местами $z_{i,x}(\Gamma)$ и $z_{i+1,x}(\Gamma)$. Допустим, что на множестве J_x нет особых точек функции $w(z)$. Тогда, очевидно, существует точка $z_i^*\in m_{x,i}^{(p)}$ такая, что касательная к $w(m_{x,i}^{(p)})$ в $w(z_i^*)$ параллельна к прямой, соединяющей $w(z_{i,x}(\Gamma))$ и $w(z_{i+1,x}(\Gamma))$. Следовательно, для касательной вариации кривой $w(m_{x,i}^{(p)})$ мы находим

$$Var_{\{m_{x,i}^{(p)}\}}\alpha_x(y)\ge\alpha_i^*(+)+\alpha_{i+1}^*(-). \tag{12}$$

Из определения $\alpha_i^*(+)$, $\tilde\alpha_i^*(+)$, $\tilde\alpha_i(+)$ следует, что или $\alpha_i^*(+)=\tilde\alpha_i(+)-\tilde\alpha_i^*(+)$, или $\alpha_i^*(+)=\tilde\alpha_i(+)+\tilde\alpha_i^*(+)$ (см. Рис. 3).

Так что в любом случае мы имеем $\alpha_i^*(+)+\alpha_{i+1}^*(-)>\tilde\alpha_i(+)+\tilde\alpha_{i+1}(-)-[\tilde\alpha_i^*(+)+\tilde\alpha_{i+1}^*(-)]$. Поскольку $\tilde\alpha_i^*(+)+\tilde\alpha_{i+1}^*(-)<v(\Gamma)$, из (12) следует неравенство

$$Var_{\{m_{x,i}^{(p)}\}}\alpha_x(y)\ge\tilde\alpha_i(+)+\tilde\alpha_{i+1}(-)-v(\Gamma). \tag{13}$$

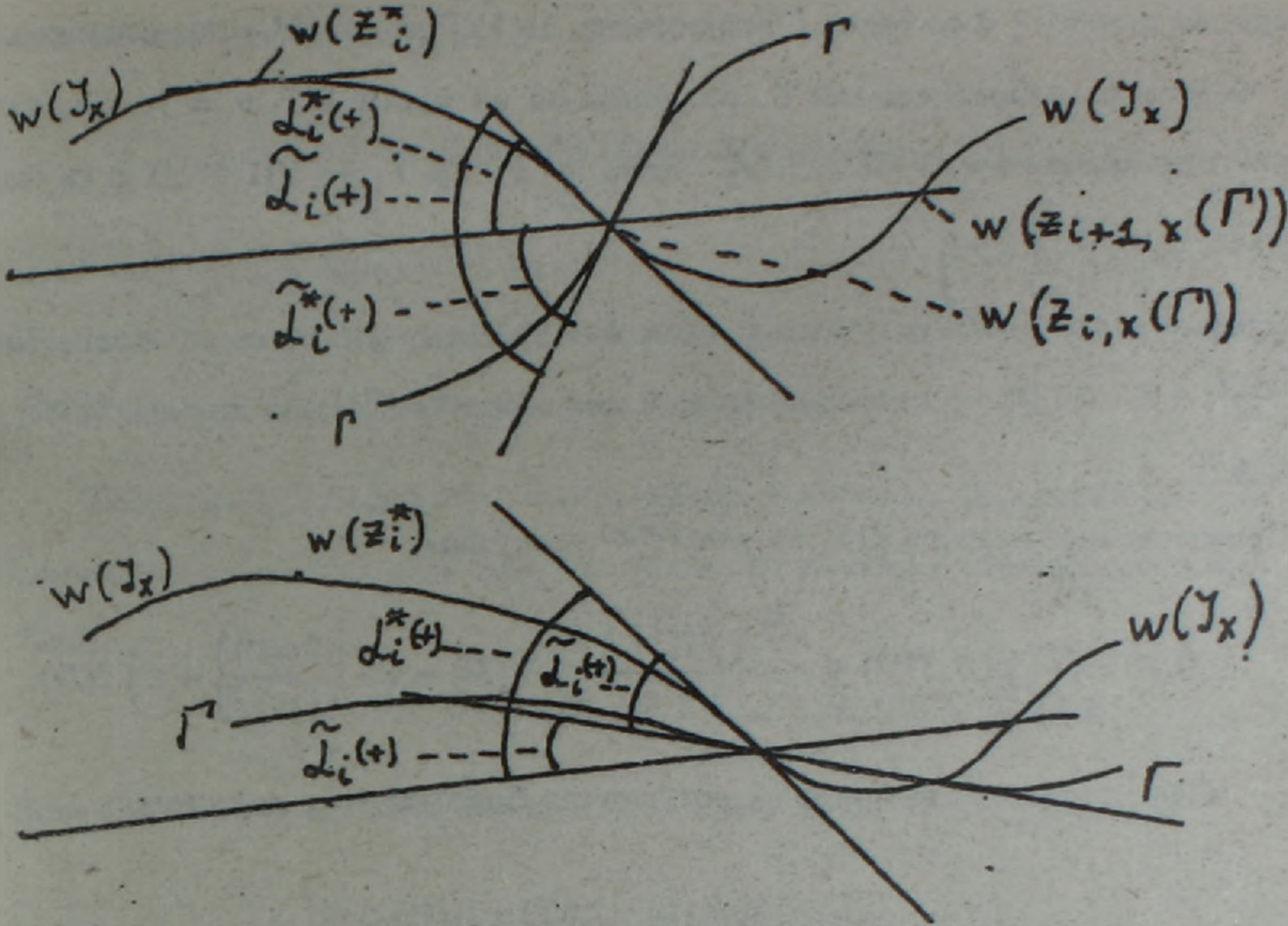

Рис. 3

Заметим, что $\tilde{\alpha}_i(+)$ совпадает с углом между кривь Г и $w(\{z: \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_{i,x}(\Gamma)\})$ в точке $w(z_{i,x}(\Gamma))$.

По определению точки $z_{i,x}(\Gamma)$ и по конформности о бражения $w(z)$, $\tilde{\alpha}_i(+) = \frac{\pi}{2} - \alpha_{i,x}(\Gamma)$, при этом $\alpha_{i,x}(\Gamma) \le \frac{\pi}{4}$. Поэтому $\tilde{\alpha}_i(+) \ge$. Аналогично, $\tilde{\alpha}_{i+1}(-) \ge \frac{\pi}{4}$.

Таким образом, выполняется следующий ан ог неравенства (2):

$$Var_{\{m^{(p)}_{x,i}\}} \alpha_x(y) \ge \frac{\pi}{2} - \qquad (14)$$

Следовательно, неравенства (4), (6) и (7) остают ерными с заменой π на $\pi - 2v(\Gamma)$.

Рассуждая как и при доказательстве (8), получаем

$$L(D,\Gamma) \le \frac{\sqrt{2}}{\frac{\pi}{2} - v(\Gamma)} V(D) + \sqrt{2}\, l(D). \qquad (15)$$

Это есть принцип вариации касательной в случае $v(\Gamma) < \frac{\pi}{4}$.

Пусть теперь $\varepsilon_0 = const < \frac{\pi}{4}$, и пусть Γ — произвольная гладкая жорданова кривая $\varepsilon_0 \le v(\Gamma) < \infty$ (если Γ ограничена, то $V(\Gamma) < \infty$). Начиная движение с одного из концов кривой Γ, разобьём её на части $\Gamma^{(\nu)}$, $\nu = 1, \dots, k$, так, что для каждого ν, $V(\Gamma^{(\nu)}) = \varepsilon_0$. Если $\bigcup\limits_{\nu=1}^{k} \Gamma^{(\nu)} \ne \Gamma$, то $V(\Gamma^{(k+1)}) < \varepsilon_0$, где $\Gamma^{(k+1)} = \Gamma \setminus \left[\bigcup\limits_{\nu=1}^{k} \Gamma^{(\nu)}\right]$.

Следовательно, общее число k (или $k+1$) таких участков не более чем $\left[\frac{v(\Gamma)}{\varepsilon_0}\right] + 1$, где $[x]$ — целая часть x, и для каждого $\Gamma^{(\nu)}$ мы имеем $V(\Gamma^{(\nu)}) \le \varepsilon_0 < \frac{\pi}{4}$.

Применяя неравенство (15) ко всем $\Gamma^{(\nu)}$, получим

$$L(D,\Gamma) = \sum_{(\nu)} L(D,\Gamma^{(\nu)}) \le \frac{\sqrt{2}\left(\left[\frac{v(\Gamma)}{\varepsilon_0}\right]+1\right)}{\frac{\pi}{2}-\varepsilon_0} V(D) + \sqrt{2}\left(\left[\frac{v(\Gamma)}{\varepsilon_0}\right]+1\right) l(D).$$

Следовательно, выбирая ε_0 достаточно близким к $\frac{\pi}{4}$, получаем

$$L(D,\Gamma) < K(\Gamma)\cdot(V(D) + l(D)),$$

где $K(\Gamma) = 3(v(\Gamma)+1)$.

Мы приходим к принципу вариации касательной в его полной форме.

Теорема 1. *Следующее неравенство выполняется для любой мероморфной функции $w(z)$ в $\bar{D}$ и для любой гладкой жордановой кривой Γ:*

$$L(D,\Gamma) < K(\Gamma)\cdot(V(D) + l(D)). \qquad (16)$$

§3 ОЦЕНКИ ДЛЯ СОВОКУПНОСТИ Г-ЛИНИЙ

3.1. В этом параграфе мы будем обозначать конечное множество попарно не имеющих общих точек гладких жордановых кривых через $\Gamma_1, \dots, \Gamma_q$. Принимая во внимание неравенство $V(D_r) \le K \cdot A(r)$, $r = r_n \to \infty$ (верное для любой мероморфной функции в $\mathbf{C}$, см. [2]), мы немедленно из Теоремы 1 получаем

$$\sum_{\nu=1}^{q} L(r,\Gamma_\nu) \le K\left(\sum_{\nu=1}^{q} K(\Gamma_\nu)\right) rA(r) + 2\pi r \sum_{\nu=1}^{q} K(\Gamma_\nu)$$

(здесь и ниже через K будем обозначать абсолютные константы).

Однако коэффициент при $r \cdot A(r)$ зависит от Γ_ν. Нашей целью являеца установление соотношений вида

$$\sum_{\nu=1}^{q} L(r, \Gamma_\nu) \le KV(D_r) + S(w, D_r, \Gamma_1, ..., \Gamma_q),$$

где $S = o(V(D_r))$, при $r = r_n \to \infty$.

Другими словами, нам нужно установить некоторый "аналог" второй фундаментальной теоремы Неванлинны для Г-кривых.

Теорема 2. *Пусть $w(z)$ мероморфна в замыкании D, и пусть $\Gamma_1, ..., \Gamma_q$ — ограниченные гладкие жордановые кривые, не имеющие попарно общих точек. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{q} L(D, \Gamma_\nu) \le K\,V(D) + h(\Gamma_1, ..., \Gamma_q)\, A_1(D) + \sqrt{2}\, l(D). \tag{1}$$

Если Γ — неограниченная гладкая жорданова кривая с $K(\Gamma) < \infty$, то

$$L(D, \Gamma) \le K\,V(D) + h(\Gamma)\, A_1(D) + 3\sqrt{2}\, l(D). \tag{1'}$$

Здесь и ниже через $h = h(c)$ ... обозначаем константы, ... ящие только от c.

3.2. Будем использовать следующие обозна... ния: w, Γ и $\Gamma_1, ..., \Gamma_q$ те же, что и в Теореме 2; $\mu = \mu(t)$, $t \in (0, 1)$ — ...жды непрерывно дифференцируемая кривая, целиком лежащая в $\bar{D}$; ... — длина кривой $w(\mu(t))$, $t \in (0, 1)$ в сферической метрике; $n^*(\mu)$ — число особых точек функции $z_i \in \mu$; $\Phi_\alpha(\mu, \Gamma_\nu)$ — число точек $z_i \in \mu$ таких ...то 1) $w(z_i) \in \Gamma$ и 2) меньший из углов между кривыми $w(\mu(t))$ и Γ_ν в $w(z_i)$ ... ьше чем $\alpha > 0$.

Для доказательства (1) нам понадобится следу...

Лемма 1. *Используя приведенные выше обознач...я, мы имеем*

$$\sum_{\nu=1}^{q} \Phi_\alpha(\mu, \Gamma_\nu) \le \frac{2}{\alpha} \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial t} \arg \frac{\partial}{\partial t} w(\mu(t)) \right| dt + h(\Gamma_1, ..., \Gamma_q, \alpha) + 2n^*(\mu) + 1, \tag{2}$$

и если Γ — неограниченная гладкая жорданова кривая с $K(\Gamma) < \infty$, то

$$\Phi_\alpha(\mu, \Gamma) \le \frac{6}{\alpha} \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial t} \arg \frac{\partial}{\partial t} w(\mu(t)) \right| dt + h(\Gamma_1, ..., \Gamma_q)\, L(\mu) + 6n^*(\mu) + 3. \tag{2'}$$

Доказательство. Пусть $\{z_i\}$ — объединение множества точек z_i в определении $\Phi_\alpha(\mu,\Gamma_\nu), \nu = 1,...,q$. Вначале докажем (2) при условии, что число этих точек $\{z_i\}$ больше 1.

Перенумеруем все точки z_i на $\mu(t)$ в порядке возрастания t от 0 до 1 и разобьём их на следующие подмножества:

а) Обозначим через $z_i' \in \{z_i\}$ точки z_i такие, что хотя бы для одной из точек z_{i-1}, z_{i+1} точки $w(z_{i-1})$ и $w(z_i)$ (соответственно, $w(z_i)$ и $w(z_{i+1})$) лежат на разных кривых $\Gamma_\nu, \nu = 1,...,q$; n' — число таких точек; t_i' — точки, для которых $\mu(t_i') = z_i'$.

б) Обозначим через $z_i^j \in \{z_i\}$ точки, лежащие между z_j' и z_{j+1}' после перенумерации точек z_i; n_j — их число; t_i^j — точки, для которых $\mu(t_i^j) = z_i^j$. Легко видеть, что

$$\sum_{\nu=1}^{q} \Phi_\alpha(\mu,\Gamma_\nu) = n' + \sum_{\{z_j'\}} n_j. \tag{3}$$

Покажем сначала, что

$$n' < h(\Gamma_1,...,\Gamma_q)\, L(\mu). \tag{4}$$

Пусть R — такое число, что кривые $\Gamma_\nu, \nu = 1,...,q$ лежат в круге $|w| \le \frac{R}{2}$; c_0 — минимальное расстояние между кривыми $\Gamma_\nu, \nu = 1,...,q$. Тогда для любого j такого, что $w(z_j')$ и $w(z_{j+1}')$ лежат на различных кривых Γ_ν, образ l_j отрезка $[t_j', t_{j+1}']$ при отображении $w(\mu(t))$ имеет концы на различных Γ_ν. Длина $|l_j \cap \{w: \quad |w| < R\}|$ больше или равна c_0.

Следовательно

$$n' \le \frac{2}{c_0} \sum_{\{z_j'\}} |l_j|. \tag{5}$$

Так как $|l_i| \le (1+R^2)\, L_i$, где L_i — сферическая длина кривой l_i, то из (5) получаем

$$n' \le \frac{2(R^2+1)}{c_0} \sum_{\{z_j'\}} |L_j| \le \frac{2(R^2+1)}{c_0} L(\mu) = h(\Gamma_1,...,\Gamma_q)\, L(\mu).$$

Покажем, что для любого j

$$n_j \le \frac{2}{\alpha} \int_{t_j'}^{t_{j+1}'} \left| \frac{\partial}{\partial t} \arg \frac{\partial}{\partial t} w(\mu(t)) \right| dt + h\, L_j + 2n_j^*, \tag{6}$$

где $h = h(\Gamma_1, ..., \Gamma_q) < \infty$, и n_j^* — число особых точек функции $w(z)$ на l_j. Ясно, что все эти точки z_i^j лежат на одной из кривых Γ_ν. Разобьём Γ_ν на конечное число частей Γ_ν^k так, чтобы для каждой тройки $\Gamma_\nu^k, \Gamma_\nu^{k+1}, \Gamma_\nu^{k+2}$ касательная вариация была бы меньше, чем $\frac{\alpha}{4}$.

Пусть h_ν^k — минимальное расстояние между Γ_ν^k и $\Gamma_\nu^{k'}$ для $k' \neq k-1, k+1$, и пусть $c_\nu = \min\limits_k h_\nu^k$. Построим соответствующие разбиения для всех $\Gamma_\nu, \nu = 1, ..., q$, и положим $c' = \min\limits_\nu c_\nu$.

Возможны следующие три случая:

А) Пары точек z_j', z_1^j (соответственно, z_i^j, z_{i+1}^j или $z_{n_j}^j$, z_{j+1}') лежат или на одной кривой Γ_ν^k, или на двух соседних Γ_ν^k и для $t \in [t_j', t_1^j]$ (соответственно $t \in [t_i^j, t_{i+1}^j\}$ и $t \in [t_{n_j}^j, t_{j+1}'])$ на кривой $w[\mu(t)]$ не лежит не одна особая точка функции $w(z)$; n_j' обозначает число таких пар.

Выберем $t^* \in [t_j', t_1^j]$ так, чтобы касательная к $w[\mu(t)]$ в $z^* = \mu(t^*)$ была бы параллельна прямой, соединяющей точки $w(z_j')$ и $w(z_1^j)$. Углы между этой прямой и касательной к $w[\mu(t)]$ в $w(z_j')$ и $w(z_1')$ не меньше чем $\alpha/2$. Теперь ясно, что абсолютное значение разности углов между касательными к $w[\mu(t)]$ в $w(z_j')$ и $w(z^*)$ (соответственно, в $w(z^*)$ и $w(z_1^j)$) не меньше, чем $\frac{\alpha}{2}$. Так как угол между касательной к $w[\mu(t)]$ и вещественной осью равен $\arg \frac{\partial}{\partial t} w[\mu(t)]$, получаем

$$\int_{t_j'}^{t^*} \left| \frac{\partial}{\partial t} \arg \frac{\partial}{\partial t} w(\mu(t)) \right| dt \geq \frac{\alpha}{2}, \qquad \int_{t^*}^{t_1^j} \left| \frac{\partial}{\partial t} \arg \frac{\partial}{\partial t} w(\mu(t)) \right| dt \geq \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно

$$\int_{t_j'}^{t_1^j} \left| \frac{\partial}{\partial t} \arg \frac{\partial}{\partial t} w(\mu(t)) \right| dt \geq \alpha.$$

Аналогично для пар z_i^j, z_{i+1}^j или $z_{n_j}^j, z_{j+1}'$, удовлетворяющих условию А), имеем

$$\int_{t_i^j}^{t_{i+1}^j} \left| \frac{\partial}{\partial t} \arg \frac{\partial}{\partial t} w(\mu(t)) \right| dt \geq \alpha, \qquad \int_{t_{n_j}^j}^{t_{j+1}'} \left| \frac{\partial}{\partial t} \arg \frac{\partial}{\partial t} w(\mu(t)) \right| dt \geq \alpha.$$

Суммируя, получим

$$n'_j \le \frac{1}{\alpha}\int_{t'_j}^{t'_{j+1}} \left|\frac{\partial}{\partial t}\arg\frac{\partial}{\partial t}w(\mu(t))\right| dt. \qquad (7)$$

Б) Пары точек z'_j, z^j_1 (соответственно, z^j_i, z^j_{i+1} или $z^j_{n_j}$, z'_{j+1}) лежат на разных кривых Γ^k_ν и $\Gamma^{k'}_\nu$ с $k' \ne k-1, k+1$, и для $t \in [t'_j, t^j_1]$ (соответственно, $t \in [t^j_i, t^j_{i+1}]$ и $t \in [t^j_{n_j}, t'_{j+1}]$) кривая $w[\mu(t)]$ не содержит особых точек функции $w(z)$; n''_j обозначает число таких точек.

Пусть $|l(z'_j, z^j_1)|, |l(z^j_i, z^j_{i+1})|$ и $|l(z^j_{n_j}, z'_{j+1})|$ — длины участков кривой $w[\mu(t)] \cap \{w\colon\ |w| \le R\}$, которые соответствуют сегментам $[t'_j, t^j_1], [t^j_i, t^j_{i+1}]$ и $[t^j_{n_j}, t'_{j+1}]$. Каждая из этих длин не меньше c'. С другой стороны, сумма всех этих длин меньше или равна $|l_j|$. Следовательно, $n''_j \cdot c' \le |l_j|$ и

$$n''_j \le \frac{1}{c'}|l_j| \le \frac{1+R^2}{c'} L_j, \qquad (8)$$

$$\sum_{(j)} n''_j \le \frac{1+R^2}{c'} \sum_{(j)} L_j \le h(\Gamma_1, \dots, \Gamma_q)\, L(\mu). \qquad (8')$$

В) Пары z'_j, z^j_1 (соответственно, z^j_i, z^j_{i+1} или $z^j_{n_j}$, z'_{j+1}), для которых хотя бы одна особая точка функции $w(z)$ лежит на части кривой $w[\mu(t)]$, соответствующей отрезку $[t'_j, t^j_1]$ (соответственно, $[t^j_i, t^j_{i+1}]$ или $[t^j_{n_j}, t'_{j+1}]$); n'''_j — число таких точек.

Легко убедиться, что

$$n'''_j \le n^*_j, \qquad (9)$$

$$\sum_{(j)} n'''_j \le n^*(\mu). \qquad (9')$$

Неравенство (6) вытекает из (7), (8), (9) и очевидного соотношения $n_j \le 2(n'_j + n''_j + n'''_j)$.

Наконец, из соотношений (3),(4),(6),(8′) и (9′) следует

$$\sum_{\nu=1}^{q} \Phi_\alpha(\mu, \Gamma_\nu) \le \frac{2}{\alpha}\int_0^1 \left|\frac{\partial}{\partial t}\arg\frac{\partial}{\partial t}w(\mu(t))\right| dt + h\,L_\mu + 2n^*_\mu.$$

Это доказывает (2) при условии, что число z_i не меньше 2. Если же это число равно 1, то получим (2), прибавляя 1 к правой части последнего неравенства.

Неравенство (2) доказано.

Докажем (2'). Заметим, что существует такое число R_0, что множество $\Gamma \cap \{w: \quad |w| > R_0\}$ состоит из одной или двух неограниченных кривых типа Γ_q^k (скажем Γ_1 и Γ_2), хотя множество $\Gamma_3 = \Gamma \cap \{w: \quad |w| \le R_0\}$ состоит из одной связной компоненты. Следовательно, рассуждая как и выше, получим

$$\Phi_\alpha(\mu, \Gamma_\nu) \le \frac{2}{\alpha} \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial t} \arg \frac{\partial}{\partial t} w(\mu(t)) \right| dt + 2n_\mu^* + 1, \quad \nu = 1, 2, 3.$$

Просуммировав эти неравенства, получим (2').

3.3. Докажем теперь Теорему 1. Предположим, что для заданного x множество J_x не содержит особых точек функции $w(z)$. Используем Лемму 1 с $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\mu = \mu^{(p)} = m_x^{(p)}$. По определению $z_{i,x}(\Gamma)$ и по конформности функции w, получим

$$\Phi(D, x, \Gamma_\nu) = \sum_{(p)} \Phi_{\frac{\pi}{4}}(m_x^{(p)}, \Gamma_\nu), \tag{10}$$

$$\sum_{(p)} \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial t} \arg \frac{\partial}{\partial t} w(\mu(t)) \right| dt = \sum_{(p)} Var_{m_x^{(p)}} \alpha_x(y) = V(x, D), \tag{11}$$

$$\sum_{(p)} L_{m_x^{(p)}} = \int_{J_x} \frac{|w'(z)|}{1 + |w(z)|^2} dy, \tag{12}$$

$$\sum_{(p)} n^*_{m_x^{(p)}} = 0. \tag{13}$$

Следовательно, из неравенства (2) Леммы 1 получим

$$\sum_{\nu=1}^q \Phi(D, x, \Gamma_\nu) \le \frac{8}{\pi} V(x, D) + h \int_{J_x} \frac{|w'(z)|}{1 + |w(z)|^2} dy + \sum_{\{m_x^{(p)}\}} 1.$$

Число особых точек функции w конечно. Используя (5) параграфа 2, интегрируя получим

$$\sum_{\nu=1}^q \int_{x_1}^{x_2} \Phi(D, x, \Gamma_\nu)\, dx \le \frac{8}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} V(x, D)\, dx + h \iint_D \frac{|w'(z)|}{1 + |w(z)|^2} d\sigma + \frac{l(D)}{2}.$$

Аналогично, имеем

$$\sum_{\nu=1}^q \int_{y_1}^{y_2} \Phi(D, y, \Gamma_\nu)\, dy \le \frac{8}{\pi} \int_{y_1}^{y_2} V(y, D)\, dy + h \iint_D \frac{|w'(z)|}{1 + |w(z)|^2} d\sigma + \frac{l(D)}{2}.$$

(1) следует из последних двух неравенств и (1) из §2. Аналогично можно доказать неравенство (1′), используя (2′) вместо (2) в Лемме 2.

3.4. Приведем одно уточнение Теоремы 2.

Пусть $\varepsilon = const > 0$, $\Gamma_\nu(\varepsilon)$, $\nu = 1, 2, ..., q$ — ε- окрестность кривых Γ_ν и пусть

$$J_x^{(\varepsilon)} = \left(\cup_{\nu=1}^q w^{-1}(\Gamma_\nu(\varepsilon))\right) \cap J_x, \quad J_y^{(\varepsilon)} = \left(\cup_{\nu=1}^q w^{-1}(\Gamma_\nu(\varepsilon))\right) \cap J_y, ;$$

$$D_\varepsilon(r) = D(r) \cap \cup_{\nu=1}^q w^{-1}(\Gamma_\nu(\varepsilon)).$$

Теорема 3. *В условиях Теоремы 2 имеем*

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^q L(D, \Gamma_\nu) \le K \left[\int_{x_1}^{x_2} Var_{J_x^{(\varepsilon)}} \alpha_x(y)\, dx + \int_{y_1}^{y_2} Var_{J_y^{(\varepsilon)}} \alpha_y(x)\, dy\right] + \\
&+ h(\Gamma_1, ..., \Gamma_q, \varepsilon) \left[\int_{x_1}^{x_2} \int_{J_x^{(\varepsilon)}} \frac{|w'(z)|}{1 + |w(z)|^2}\, dydx + \right. \\
&\left. + \int_{y_1}^{y_2} \int_{J_y^{(\varepsilon)}} \frac{|w'(z)|}{1 + |w(z)|^2}\, dxdy\right] + \sqrt{2}\, l(D) \le \\
&\le 2K \iint_{D_\varepsilon(r)} \left|\frac{w''(z)}{w'(z)}\right| d\sigma + \\
&+ h(\Gamma_1, ..., \Gamma_q, \varepsilon) \iint_{D_\varepsilon(r)} |w(z)|\, d\sigma + \sqrt{2}\, l(D).
\end{aligned} \tag{14}$$

Это означает, что $L(D, \Gamma_\nu)$ могут быть получены, исходя лишь из информации о поведении функции $w(z)$ на прообразах малых окрестностей кривых Γ_ν.

Доказательство Теоремы 3. Очевидно

$$\Phi(D, x, \Gamma_\nu) = \sum_{(p)} \Phi_{\frac{\pi}{4}}(m_x^{(p)}, \Gamma_\nu) = \sum_{(p)} \sum_{(n)} \Phi_{\frac{\pi}{4}}(m_x^{(p,n)}, \Gamma_\nu), \tag{15}$$

где $m_x^{(p,n)}$ — компоненты множества $m_x^{(p)} \cap \left\{\cup_{\nu=1}^q w^{-1}(\Gamma_\nu(\varepsilon))\right\}$, содержащие хотя бы одну точку из точек $z_{i,x}(\Gamma_\nu)$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Возможны два случая:

1) Отрезок $m_x^{(p,n)}$ совпадает с $m_x^{(p)}$, т.е. кривая $w(m_x^{(p)})$ целиком лежит в $\cup_{\nu=1}^q \Gamma_\nu(\varepsilon)$.

2) $m_x^{(p,n)} \ne m_x^{(p)}$.

Во втором случае найдется дуга $m_x^{(p,n)}$, соединяющая некоторую точку $w(z_{i,x}(\Gamma_\nu)) \in w(m_x^{(p,n)}) \cap \{\cup_{\nu=1}^q \Gamma_\nu\}$ с границей множества $\cup_{\nu=1}^q \Gamma_\nu(\varepsilon)$. Мы имеем

$L_{m_x^{(p,n)}} \geq c^*(\varepsilon)$, где $c^*(\varepsilon)$ — сферическое расстояние между $\cup_{\nu=1}^{q}\Gamma_\nu$ и границей $\cup_{\nu=1}^{q}\overline{\Gamma_\nu(\varepsilon)}$.

Для каждого p можно найти не более одной дуги типа 1), поэтому

$$\sum_{(p)}\sum_{(n)} 1 \leq \frac{1}{c^*(\varepsilon)}\sum_{(p)}\sum_{(n)} L_{m_x^{(p,n)}} + \sum_{(p)} 1. \tag{16}$$

Учитывая неравенства (15) и (16) и применив Лемму 1, суммированием получим

$$\sum_{\nu=1}^{q}\Phi(D,x,\Gamma_\nu) \leq$$

$$\leq \frac{8}{\pi}\sum_{(p)}\sum_{(n)} Var_{m_x^{(p,n)}}\alpha_x(y) + h(\Gamma_1,\dots,\Gamma_q)L_{m_x^{(p,n)}} + \sum_{(p)}\sum_{(n)} 1 + \sum_{(p)}\sum_{(n)} n^*_{m_x^{(p,n)}} \leq$$

$$\leq \frac{8}{\pi}\sum_{(p)}\sum_{(n)} Var_{m_x^{(p,n)}}\alpha_x(y) + \left(h(\Gamma_1,\dots,\Gamma_q) + \frac{1}{c^*(\varepsilon)}\right)\sum_{(p)}\sum_{(n)} L_{m_x^{(p,n)}} +$$

$$+\sum_{(p)} 1 + \sum_{(p)}\sum_{(n)} n^*_{m_x^{(p,n)}} \leq\leq \frac{8}{\pi} Var_{J_x^{(\varepsilon)}}\alpha_x(y) +$$

$$+ h(\Gamma_1,\dots,\Gamma_q,\varepsilon)\int_{J_x^{(\varepsilon)}} \frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}\,dy + \sum_{(p)} 1 + \sum_{(p)}\sum_{(n)} n^*_{m_x^{(p,n)}}.$$

Рассуждая как и в параграфе 3.3, получим

$$\int_{x_1}^{x_2}\sum_{\nu=1}^{q}\Phi(D,x,\Gamma_\nu)\,dx \leq \frac{8}{\pi}\int_{x_1}^{x_2} Var_{J_x^{(\varepsilon)}}\alpha_x(y)\,dx +$$

$$+ h(\Gamma_1,\dots,\Gamma_q,\varepsilon)\int_{x_1}^{x_2}\int_{J_x^{(\varepsilon)}} \frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}\,dy\,dx + \frac{l(D)}{2},$$

и аналогично

$$\int_{y_1}^{y_2}\sum_{\nu=1}^{q}\Phi(D,y,\Gamma_\nu)\,dy \leq \frac{8}{\pi}\int_{y_1}^{y_2} Var_{J_y^{(\varepsilon)}}\alpha_x(y)\,dy +$$

$$+ h(\Gamma_1,\dots,\Gamma_q,\varepsilon)\int_{y_1}^{y_2}\int_{J_y^{(\varepsilon)}} \frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}\,dx\,dy + \frac{l(D)}{2}.$$

Теорема 3 вытекает из последних двух неравенств и оценки (1) параграфа 2.

§4 ОБОБЩЕННЫЕ КВАЗИ–КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ИХ Г-ЛИНИИ

4.1. Известны два характерных свойства аналитичности ((A) и (Б)).

(А). однозначная аналитическая функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 ($f'(z_0) = 0$) переводит "малый" круг с центром в точке z_0 в "малый" диск с центром в $f(z_0)$.

(Б): (конформность): угол $\alpha(z_0)$ (образованный двумя произвольными прямыми, пересекающимися в точке z_0) равен углу $\alpha(f(z_0))$ (образованному f-образами этих прямых в точке $f(z_0)$).

Классическое понятие квази–конформности основано на обобщении свойства (А): квази–конформное отображение переводит "малый" круг в "малый" эллипс.

Мы предлагаем определение, основанное на обобщении свойства (Б): функция $f(z)$ "квази–конформна", если существуют константы $0 < c_1 < 1 < c_2$ такие, что

$$c_1 \leq \frac{\alpha(f(z))}{\alpha(z)} \leq c_2 \tag{1}$$

для "почти каждой" z. Случай $c_1 = c_2 = 1$ означает конформность.

Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условию:

$$\text{если} \quad \alpha' < \alpha(z) < \frac{\pi}{2}, \quad \text{то} \quad \alpha < \alpha(f(z)) < \pi - \alpha, \quad 0 < \alpha < \alpha'. \tag{2}$$

Это означает, что f-образы достаточно больших углов не должны быть очень маленькими. Следовательно, (2) можно рассматривать как "обобщенную квази–конформность" функции $f(z)$.

Дадим необходимые определения.

1) Внутреннее отображение (согласно С.Стоилову [11]), такое отображение, которое переносит любое открытое множество в открытое множество и не переводит континуум в единственную точку.

2) Внутреннее отображение $w(z)$, определенное в D, будет принадлежать классу $M_\alpha(D)$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, если в любой точке $z \in \bar{D}$, за исключением конечного числа особых точек из D, выполнены следующие условия:

а) $w(z)$, $\quad z = x + iy$ имеет непрерывные вторые производные по x и y;

б) если $\frac{\pi}{4} \leq \alpha(z) < \frac{\pi}{2}$, то $\alpha \leq \alpha(w(z)) < \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Функции из $M_\alpha(D)$ мы называем обобщёнными квази–конформными функциями.

Класс $M^*(D)$ мы определим аналогично, только вместо условия б) мы будем требовать

в) если $\alpha(z) < \frac{\pi}{4}$, то $\alpha(w(z)) < \frac{\pi}{2}$.

4.2. Принцип вариации касательной для $w \in M_\alpha(D)$.

Теорема 4. *Пусть $w(z) \in M_\alpha(D)$; $V(x, D) < \infty$ на $x_1 < x < x_2$, $V(y, D) < \infty$ на $y_1 < y < y_2$; и Γ — гладкая жорданова кривая с $v(\Gamma) < \infty$. Тогда существует константа $K(\Gamma, \alpha) < \infty$, зависящая от $v(\Gamma)$ и α такая, что*

$$L(D, \Gamma) \leq K(\Gamma, \alpha)(V(D) + l(D)). \tag{3}$$

Доказательство. Заметим, что расуждения и соотношения §2 вплоть до неравенства (13) остаются в силе для $w \in M_\alpha(D)$. По определению, $\widetilde{\alpha}_i(+)$ есть w-образ угла $\alpha(z) = \frac{\pi}{2} - \alpha_{i,x}(\Gamma)$ (образованного J_x и касательной к $w^{-1}(\Gamma)$ в $z_{i,x}(\Gamma)$). Так как $\alpha_{i,x}(\Gamma) \leq \frac{\pi}{4}$, то мы имеем $\alpha(z) \geq \frac{\pi}{4}$. Следовательно, из условия $w \in M_\alpha(D)$ имеем $\alpha \leq \widetilde{\alpha}_i(+) := \alpha(w(z)) < \pi - \alpha$. Аналогично получаем $\alpha < \widetilde{\alpha}_{i+1}(-) < \pi - \alpha$.

Неравенство (15) параграфа 2.3 можно теперь переписать в виде

$$Var_{m^{(\nu)}_{x,i}} \alpha_x(y) \geq \widetilde{\alpha}_i(+) + \widetilde{\alpha}_{i+1}(-) - v(\Gamma) \geq 2\alpha - v(\Gamma).$$

Предположим сначала, что $v(\Gamma) < \alpha$. Тогда последнее неравенство дает

$$Var_{m^{(\nu)}_{x,i}} \alpha_x(y) \geq \alpha. \tag{4}$$

Следовательно, неравенства (4),(6) и (7) параграфа 2 остаются в силе, если заменить $\frac{2}{\pi}$ на $\frac{1}{\alpha}$.

Рассуждая как и при доказательстве (8) параграфа 2, из (4) получаем

$$L(D, \Gamma) \leq \frac{\sqrt{2}}{\alpha} V(D) + \sqrt{2}\, l(D). \tag{5}$$

Это и есть требуемое неравенство при условии $v(\Gamma) < \alpha$.

Как и для случая $\alpha < v(\Gamma) < \infty$, аргументы, аналогичные использованным в §2, дают

$$L(D, \Gamma) = \sum_{(\nu)} L(D, \Gamma_{(\nu)}) \leq \frac{v(\Gamma) + 1}{\alpha^2} (V(D) + l(D)).$$

Обозначая $K(\Gamma,\alpha)=\frac{2(v(\Gamma)+1)}{\alpha^2}$ и учитывая неравенство $\alpha\leq\frac{\pi}{4}$, получаем (1).

4.3. Оценки для $\sum_{(\nu)} L(D,\Gamma_\nu$.

В этом параграфе мы делаем следующие предположения:

1) $V(x,D)<\infty$ на $x_1<x<x_2$; 2) $V(y,D)<\infty$ на $J_1<J<J_2$;

3) Величина $L_{J_x}:=\int_{J_x}\frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}dy$ существует и ограничена на $x_1<x<x_2$,

4) Величина $L_{J_y}:=\int_{J_y}\frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}dx$ существует и ограничена при $y_1<y<y_2$.

Теорема 5. *Пусть $w\in M_\alpha(D)$; $\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_q$ — ограниченные жордановы кривые, не имеющие общих точек. Тогда существует постоянная $h=h(\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_q,\alpha)$ такая, что*

$$\sum_{\nu=1}^{q}L(D,\Gamma_\nu)\leq\frac{2\sqrt{2}}{\alpha}V(D)+h\left(\int_{x_1}^{x_2}L_{J_x}\,dx+\int_{y_1}^{y_2}L_{J_y}\,dy\right)+\sqrt{2}l(D).\qquad(6)$$

Доказательство. Мы можем использовать Лемму 1 из §3 к $\mu:=\mu^{(p)}:=m_x^{(p)}$.

Пусть $\alpha(z)$ — угол между J_x и касательной к $w^{-1}(\Gamma)$ в $z_{i,x}(\Gamma_\nu)$. Так как $\alpha(z)=\frac{\pi}{2}-\alpha_{i,x}(\Gamma_\nu)$ и $\alpha_{i,x}(\Gamma_\nu)\leq\frac{\pi}{4}$, мы имеем $\alpha(z)\geq\frac{\pi}{4}$. Следовательно, по определению $M_\alpha(D)$ мы имеем $0<\alpha<\alpha(w(z))<\pi-\alpha$.

Поэтому $\Phi_p:=\Phi_p(\Gamma_\nu)\leq\Phi_\alpha(m_x^{(p)},\Gamma_\nu)$, и

$$\Phi(D,x,\Gamma_\nu)=\sum_{(p)}\Phi_p(\Gamma_\nu)=\sum_{(p)}\Phi_\alpha(m_x^{(p)},\Gamma_\nu).\qquad(7)$$

Если предположить, что на J_x нет особых точек функции w, то получим

$$\sum_{(p)}\int_0^1\left|\frac{\partial}{\partial t}\arg\frac{\partial}{\partial t}w(\mu^{(p)}(t))\right|dt=\sum_{(p)}Var_{m_x^{(p)}}\alpha_x(y)=V(x,D),\qquad(8)$$

$$\sum_{(p)}L_{\mu^{(p)}}=\sum_{(p)}L_{m_x^{(p)}}=L_{J_x},\qquad(9)$$

$$\sum_{(p)}n_{m_x^{(p)}}=0.\qquad(10)$$

Из соотношений (7) – (10) и Леммы 1 получаем

$$\sum_{\nu=1}^{q}\Phi(D,x,\Gamma_\nu)\leq\frac{2}{\alpha}V(x,D)+h(\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_q,\alpha)L_{J_x}+\sum_{m_x(p)}1.\qquad(11)$$

Так как все слагаемые в правой части (11) ограничены, а также число особых точек функции w конечно, мы имеем

$$\sum_{\nu=1}^{q} \Phi(D,x,\Gamma_\nu) \le \frac{2}{\alpha}\int_{x_1}^{x_2} V(x,D)\,dx + h\int_{x_1}^{x_2} L_{J_x}\,dx + \frac{l(D)}{2}.$$

Аналогично

$$\sum_{\nu=1}^{q} \Phi(D,x,\Gamma_\nu) \le \frac{2}{\alpha}\int_{y_1}^{y_2} V(y,D)\,dy + h\int_{y_1}^{y_2} L_{J_y}\,dy + \frac{l(D)}{2}.$$

Теперь из неравенства (1) параграфа 2 и последних двух неравенств мы получаем (6).

4.4. В этом параграфе мы используем обозначения параграфов 1.3. и 1.4.

Теорема 6. *Пусть $w \in M^*(D)$. Тогда*

$$\int_0^\infty \frac{L(D,\Gamma(R))}{\Psi(R)}\,dR \le \int_{x_1}^{x_2} m_\Psi(J_x)\,dx + \int_{y_1}^{y_2} m_\Psi(J_y)\,dy, \tag{12}$$

для $\Psi \equiv 1$

$$\int_0^\infty L(D,\Gamma(R))\,dR \le \int_{x_1}^{x_2} l(w(J_x))\,dx + \int_{y_1}^{y_2} l(w(J_y))\,dy. \tag{12$'$}$$

Доказательство. Заметим, что для функций из $M^*(D)$ справедливы неравенства (7), (9) и (9′) параграфа 1.3.

Следовательно

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{L_x(D,\Gamma(R))}{\Psi(R)}\,dR = \\
&= \int_0^\infty \int_{x_1}^{x_2} \left(\sum_{i=1}^{\Phi(D,x,\Gamma(R))} \frac{1}{\Psi(R)\cos\alpha_{i,x}(\Gamma(R))} \right) dx\,dR \le \\
&\le \int_{x_1}^{x_2} \int_0^\infty \frac{\Phi(D,x,\Gamma(R))}{\Psi(R)}\,dR\,dx
\end{aligned} \tag{13}$$

и

$$\int_0^\infty \frac{L_y(D,\Gamma(R))}{\Psi(R)}\,dR \le \int_{y_1}^{y_2} \int_0^\infty \frac{\Phi(D,y,\Gamma(R))}{\Psi(R)}\,dR\,dy. \tag{13$'$}$$

Как и в параграфе 1.3 мы имеем

$$\Delta l(w(J_x)) \sim \frac{\Delta R}{\cos\beta_{i,x}(\Gamma(R))},$$

если $\beta_{i,x}(\Gamma(R)) < \frac{\pi}{2}$.

Так как $\beta_{i,x}(\Gamma(R))$ есть w-образ угла $\alpha_{i,x}(\Gamma(R)) \le \frac{\pi}{2}$, по определению $M^*(D)$ мы имеем $\beta_{i,x}(\Gamma(R)) < \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, $\Delta l(w(J_x)) \ge \Delta R$ и

$$\Delta m_\Psi(J_x) \ge \frac{\Delta R}{\Psi(R)}.$$

Поэтому

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_0^\infty \frac{\Phi(D, x, \Gamma(R))}{\Psi(R)}\, dR dx \le \int_{x_1}^{x_2} m_\Psi(J_x \cap D_x)\, dx \le \int_{x_1}^{x_2} m_\Psi(J_x)\, dx$$

и

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_0^\infty \frac{\Phi(D, y, \Gamma(R))}{\Psi(R)}\, dR dy \le \int_{y_1}^{y_2} m_\Psi(J_y)\, dy.$$

Неравенство (12) следует из неравенств (13), (13′) и (7) параграфа 1.3.

ABSTRACT. A number of problems in complex analysis and physics can be reduced to the study of preimages $w^{-1}(\Gamma)$, where w is a complex mapping in a domain D and Γ is a curve in complex plane. In the present paper some approaches toward investigation of such sets are proposed. The principles we propose supply bounds for lengths of lines $w^{-1}(\Gamma)$ in terms of different functionals, such as tangent variation and mass distribution.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Functionen. Springer-Verlag,1936; English transl. of 2nd ed. Springer–Verlag, 1970.
2. Г. А. Барсегян, "О геометрии мероморфных функций," Мат. Сборник, том 114 (156), стр.179 – 226, 1981.
3. Г. А. Барсегян, "Свойство близости a-точек мероморфных функций," Мат. Сборник, том 120 (162), стр. 42 – 63, 1983.
4. Г. А. Барсегян, "Свойство близости a-точек мероморфных функций и структура римановых поверхностей," Изв. АН Армении, Математика [английский перевод:Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)], том 20, стр. 375 – 400, 1985; том 20, стр. 407 – 427, 1985.
5. J. Lelong-Ferrand, Représentation Conforme et Transformations à Intégral de Dirichlet Bornée. Paris. 1955.
6. Г. Д. Суворов, Обобщенный принцип длины и площади в теории отображений, Киев, 1985.
7. В. К. Хейман, Многолистные Функции. Кембридж; 1958.
8. Г. А. Барсегян, "К распределению искажений при отображениях мероморфных функций," Докл. АН СССР, том 237, стр. 761 – 763, 1977.

9. Г. А. Барсегян, "Новые результаты в теории мероморфных функций," Докл. АН СССР, том 238, стр. 777 – 780, 1978.
10. W. K. Hayman, J. M. Whu, "Level sets of univalent functions," Comment. Math. Helv., vol. 56, pp. 366 – 400, 1981.
11. С. Стоилов, Теория Функций Комплексного Переменного, том. 2, Москва, 1962.

3 Апреля 1992

Институт Математики
Национальной Академии Наук Армении

КВАЗИМАКСИМАЛЬНЫЕ ПОЛУГРУППЫ

Л. М. Акопян

Известия Академии Наук Армении. Математика,
том 27, № 3, 1992

В работе продолжается исследование квазимаксимальных групп, начатое в [2] (частные случаи таких полугрупп рассматривались в [3–5]). Даётся критерий квазимаксимальности в терминах характеров полугрупп Γ_0, характеризующих геометрическую структуру пространства $M_{A(\Gamma_0)}$ максимальных идеалов алгебры $A(\Gamma_0)$, обобщенных алгебраических функций, порожденной полугруппой Γ_0. Формулируется теорема, характеризующая квазимаксимальные полугруппы на оси с точки зрения теории групп [2], геометрии (структура пространства $M_{A(\Gamma_0)}$) и аппроксимационных свойств равномерной алгебры $A(\Gamma_0)$.

1. Пусть Γ — абелева группа (в аддитивной записи), порожденная собственной полугруппой Γ_0 с единицей, а $\widehat{\Gamma}$ — её компактная группа характеров. Мы также предполагаем, что в Γ нет элементов конечного порядка, что равносильно связности $\widehat{\Gamma}$.

Согласно теореме двойственности Понтрягина, Γ отождествляется с группой характеров группы $\widehat{\Gamma}$ соотношением $a \longrightarrow \chi_a$, где $\chi_a(\alpha) = \alpha(a)$, $\alpha \in \widehat{\Gamma}$.

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: $A(\Gamma_0)$ – равномерная алгебра на $\widehat{\Gamma}$, порожденная полугруппой Γ_0 (т.е. характерами χ_a, $a \in \Gamma_0$, заметим что $A(\Gamma_0)$ есть алгебра обобщенных аналитических функций в смысле Аренса-Зингера [1]); $M_{A(\Gamma_0)}$ — пространство максимальных идеалов $A(\Gamma_0)$; Hom Γ_0 — полугруппа характеров Γ_0, т.е. гомоморфизмов Γ_0 в единичный круг; Phom Γ_0 — полугруппа положительных характеров Γ_0, т.е. Phom $\Gamma_0 = \{p \in \text{Hom } \Gamma_0;\ \ p(a) \geq 0$ для всех $a \in \Gamma_0\}$; Ihom Γ_0 — полугруппа идемпотентных характеров, т.е. Ihom $\Gamma_0 = \{\rho \in \text{Hom } \Gamma_0,\ \rho^2 = \rho\}$.

Мы пользуемся также следующими утверждениями (см. [1]):

1) $M_{A(\Gamma_0)} = \mathrm{Hom}\ \Gamma_0$ (с точностью до гомеоморфизма);

2) в $\mathrm{Hom}\ \Gamma_0$ имеет место полярное разложение: для каждого $\xi \in \mathrm{Hom}\ \Gamma_0$

$$\xi = p\alpha, \tag{1}$$

где $\alpha \in \widehat{\Gamma}$, $p \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0$;

3) для любого $p \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0$ и $t > 0$, $p^t \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0$, где $p^t(a) = \exp(t \ln p(a))$, если $p(a) > 0$ и $p^t(a) = 0$, если $p(a) = 0$;

4) в полугруппе $\mathrm{Ihom}\ \Gamma_0$ всегда имеются тривиальные идемпотенты $\rho \equiv 1$ и ρ_0, где $\rho_0 = 1$ на $\Gamma_0 \cap (-\Gamma_0)$ и $\rho_0 = 0$ на $\Gamma_0 \setminus (\Gamma_0 \cap (-\Gamma_0))$.

2. Полярное разложение (1) и гомеоморфизм $M_{A(\Gamma_0)} = \mathrm{Hom}\ \Gamma_0$ сводит задачу к описанию полугрупп $\mathrm{Phom}\ \Gamma_0$.

В случае, когда Γ_0 — максимальная полугруппа в Γ (т.е. Γ_0 не содержится ни в одной собственной полугруппе группы Γ), пространство $M_{A(\Gamma_0)}$ одномерно в том смысле, что для любых $p, q \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0 \setminus \mathrm{Ihom}\ \Gamma_0$ существует такое $t > 0$, что $q = p^t$ (и $\mathrm{Ihom}\ \Gamma_0 = \{1, \rho_0\}$) (см. [2],[6]).

Последнее обстоятельство мы записываем как

$$\mathrm{Phom}\ \Gamma_0 \setminus \mathrm{Ihom}\ \Gamma_0 = \{p^t : \quad t > 0\}$$

и говорим, что группа $\mathrm{Hom}\ \Gamma_0$ одномерна.

Определение. Порождающая группу Γ собственная полугруппа Γ_0 с единицей называется квазимаксимальной, если любая полугруппа в Γ, содержащая Γ_0, либо совпадает с Γ, либо содержится в одной и только одной максимальной полугруппе группы Γ.

Класс квазимаксимальных полугрупп содержит максимальные полугруппы. Легко видеть, что в группе Γ имеется ровно одна максимальная полугруппа, содержащая Γ_0. В частности, все собственные полугруппы группы Γ, содержащие Γ_0, лежат в одной и той же максимальной полугруппе группы Γ, которую будем обозначать через Γ_+.

Следующий пример показывает, что, вообще говоря, полугруппа Γ_0, содержащаяся только в одной максимальной полугруппе группы Γ, порожденной Γ_0, не обязана быть квазимаксимальной.

Пример 1. Пусть $\mathbb{Z}^\infty$ — счетная прямая сумма групп $\mathbb{Z}$ целых чисел и G_0 — множество тех финитных $(n_1, n_2, \dots) \in \mathbb{Z}^\infty$, для которых последняя ненулевая компонента положительна или все компоненты равны нулю. Пусть $G = G_0 \cup (-G_0)$ и $\Gamma = \mathbb{Z} \times G$. Полугруппа $\Gamma_0 = \mathbb{Z}_+ \times G_0$ содержится только в максимальной полугруппе $\Gamma_+ = \mathbb{Z}_+ \times G$, но не квазимаксимальна в группе $\Gamma = \mathbb{Z} \times G$.

Пояснение: полугруппа $\Gamma_1 = \mathbb{Z} \times G_0$, содержащая Γ_0, не содержится в максимальной полугруппе Γ_+ группы Γ, и поэтому не квазимаксимальна. Полугруппа Γ_0 не содержится ни в одной максимальной полугруппе за исключением Γ_+: это следует из того, что Γ_1 не содержится ни в одной максимальной полугруппе группы Γ (так как $\mathbb{Z}^\infty$ не имеет максимальных полугрупп).

Теорема 1. *Полугруппа Γ_0 квазимаксимальна тогда и только тогда, когда существует такой характер $q \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0 \setminus \mathrm{Ihom}\ \Gamma_0$, что для каждого $p \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0, p \not\equiv 1$ либо $pq = p$, либо $p = q^t$ при некотором $t > 0$.*

Доказательство основывается на следующей лемме, которая представляет и независимый интерес (показывающий, в частности, существование неидемпотентных положительных характеров произвольной полугруппы Γ_0).

Лемма. *Пусть Γ_0 — собственная полугруппа Γ с единицей, порождающая Γ. Для любого необратимого элемента $a \in \Gamma_0$ существует характер $p \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0$ такой, что $0 < p(a) < 1$.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть $a \in \Gamma_0$ такой, что $-a \notin \Gamma_0$ и $|\zeta(a)| = 0$ или 1 для всех $\zeta \in \mathrm{Hom}\ \Gamma_0$. Так как $\mathrm{Hom}\ \Gamma_0$ совпадает с пространством максимальных идеалов алгебры $A(\Gamma_0)$, сделанное предположение означает, что спектр $\sigma(\chi_a) = \{\zeta(a): \quad \zeta \in \mathrm{Hom}\ \Gamma_0\}$ элемента $\chi_a \in A(\Gamma_0)$ состоит из 0 и подмножества единичной окружности. ($0 \in \sigma(\chi_a)$, так как a не обратим в Γ_0 и поэтому $\rho_0(a) = 0$, где $\rho_0 \in \mathrm{Hom}\ \Gamma_0$ — тривиальный идемпотент, который равен 1 только на обратимых элементах полугруппы Γ_0.) Применяя функциональное исчисление к банаховой алгебре $A(\Gamma_0)$, можно указать такую функцию $f \in A(\Gamma_0)$, что $\hat{f}(\rho_0) = 1$ и $|\hat{f}| < 1$ на $\hat{\Gamma}$, где $\hat{f}$ есть преобразование Гельфанда функции f, чего не может быть, поскольку $|\hat{f}|$ принимает максимальное значение модуля на $\hat{\Gamma}$. Лемма доказана.

Замечание. Для любого $a \in \Gamma_0$ существует характер $p \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0 \backslash \mathrm{Ihom}\ \Gamma_0$ такой, что $p(a) > 0$.

В силу Леммы достаточно рассмотреть случай когда a обратим в Γ_0. Так как Γ_0 — собственная полугруппа группы Γ, то существует $a_0 \in \Gamma_0$. По Лемме ему соответствует характер $p \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0$, соответствующий a_0 такой, что $0 < p(a_0) < 1$, т.е. $p \notin \mathrm{Ihom}\ \Gamma_0$. Тогда $p(a)p(-a) = p(0) = 1$ и следовательно $p(a) = 1 > 0$.

3. Доказательство Теоремы 1. Пусть Γ_0 — квазимаксимальная полугруппа в порожденной ею группе Γ и $p \notin \mathrm{Phom}\ \Gamma_0$, $p \not\equiv 1$.

Предположим сначала, что p — строго положительный. Тогда можно продолжить гомоморфизм p на всю группу Γ, полагая $p(a) = p(-a)^{-1}$ для $a \in (-\Gamma_0)$.

Положим $\Gamma_+^p = \{a \in \Gamma : \quad p(a) \leq 1\}$. Покажем, что $\Gamma_+^p = \Gamma_+$, где Γ_+ — максимальная полугруппа в Γ, содержащая Γ_0.

Пусть $a, b \in \Gamma \setminus \Gamma_+^p$. Тогда $p(a) > 1$, $p(b) > 1$, поэтому $p(b)p(a)^{-n} \to 0$ при $n \to \infty$. Откуда следует, что, начиная с некоторого номера n

$$p(b - na) = p(b)p(a)^{-n} < 1,$$

т.е. $b - na \in \Gamma_+^p$. Это означает, что полугруппа $[a; \Gamma_+^p]$, порожденная произвольным элементом $a \notin \Gamma_+^p$ и полугруппой Γ_+^p, совпадает с Γ, что равносильно максимальности Γ_+^p. Так как Γ_+ — единственная максимальная полугруппа в Γ, содержащая Γ_0, мы заключаем, что $\Gamma_+^p = \Gamma_+$.

Таким образом, строго положительный характер p полугруппы Γ_0 продолжается до положительного характера максимальной полугруппы Γ_+.

Поскольку $\mathrm{Phom}\,\Gamma_+ \setminus \mathrm{Ihom}\,\Gamma_+ = \{q^t : \quad t > 0\}$ мы получаем, что $p = q^t$ для некоторого $t > 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда p может принимать и нулевые значения. Пусть $J = \{a \in \Gamma_0 : \quad p(a) > 0\}$. По предположению J является собственной подполугруппой Γ_0. Пусть Γ_0' — полугруппа, порожденная множеством $\Gamma_0 \cup (-J)$. Покажем, что $\Gamma_0' \neq \Gamma$ (более того, $(-(\Gamma_0 \setminus J)) \cap \Gamma_0' = \emptyset$).

Пусть $-a = a_1 + a_2 \in -(\Gamma_0 \setminus J)$, где $a_1, a_2 \in \Gamma_0 \cup (-J)$ (т.е. $-a \in \Gamma_0'$). Тогда $a_1 \in \Gamma_0, a_2 \in (-J)$. Заметим, что если $a_1, a_2 \in \Gamma_0$ или $a_1, a_2 \in (-J)$, то $-a = a_1 + a_2 \in \Gamma_0 \cup (-J)$ (Γ_0 и J полугруппы). А это означает, что либо a обратим в Γ_0 (т.е. $p(a) = 1$), либо $a \in J$ (т.е. $p(a) > 0$).

Таким образом, имеется разложение $-a_2 = a_1 + a, -a_2 \in J, a_1 \in \Gamma_0, a \in \Gamma_0 \setminus J$. Откуда $0 < p(-a_2) = p(a_1)p(a) = 0$. Полученное противоречие показывает, что $\Gamma_0' \neq \Gamma$.

Так как Γ_0 квазимаксимальна, то $\Gamma_0' \subset \Gamma_+$. Следовательно, Γ_+ содержит группу, порожденную полугруппой J и поэтому $q(a) = 1$ для всех $a \in J$. Тогда $(pq)(a) = p(a)$ для $a \in J$ и $(pq)(a) = 0 = p(a)$ для $a \in \Gamma_0 \setminus J$, т.е. $pq = p$.

Доказательство обратного утверждения. Покажем, во-первых, что $q(a) > 0$ для всех $a \in \Gamma_0$. По Лемме, для любого $a \in \Gamma_0$ существует характер $p \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0 \setminus \mathrm{Ihom}\ \Gamma_0$ такой, что $p(a) > 0$. По условию $pq = p^t$ при некотором $t > 0$, откуда $q(a) > 0$.

Продолжим гомоморфизм q на всю группу Γ, полагая $q(a) = q(-a)^{-1}$ для $a \in (-\Gamma_0)$ и определим $\Gamma_+ = \{a \in \Gamma : q(a) \leq 1\}$. Полугруппа Γ_+ максимальна и $\Gamma_+ \supset \Gamma_0$. Покажем, что любая собственная полугруппа Γ_1 группы Γ, содержащая Γ_0, содержится в Γ_+.

Пусть $a = a' - a'' \in \Gamma_+, a', a'' \in \Gamma_0$. По Лемме найдется характер $p \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_1 \setminus \mathrm{Ihom}\ \Gamma_1$ такой, что $p(a') > 0$. По условию, для любого $\tau > 0$ найдется такое $t > 0$, что $p^\tau q = p^t$ на Γ_0 (ясно, что $p \not\equiv 1$ на Γ_0). Тогда $p^\tau(a')q(a') = p^\tau(a)p^\tau(a'')q(a)q(a'') = p^t(a') = p^t(a'')p^t(a)$. Так как $p(a)p(a'') = p(a') > 0$ и $p^\tau(a'')q(a'') = p^t(a'')$, получаем $p^\tau(a)q(a) = p^t(a)$.

Теперь, так как τ произвольно и $p(a) \leq 1$, мы заключаем, что $q(a) \leq 1$, т.е.

$a \in \Gamma_+$.

Теорема 1 доказана.

Следующее следствие дает удобное геометрическое условие квазимаксимальности.

Следствие 1. Пусть Phom $\Gamma_0 \setminus$ Ihom $\Gamma_0 = \{p^t : \quad t > 0\}$. Тогда Γ_0 квазимаксимальна (и Ihom $\Gamma_0 = \{1, \rho_0\}$).

Доказательство. В силу Теоремы 1 достаточно показать, что $\rho p = \rho$ для всех $\rho \in$ Ihom Γ_0, $\rho \not\equiv 1$.

На обратимых элементах $a \in \Gamma_0 \cap (-\Gamma_0)$ все положительные характеры равны 1, поэтому для идемпотентного характера ρ_0, равного 1 только на обратимых элементах Γ_0, мы имеем $(\rho_0 p)a = \rho_0(a)p(a) = \rho_0(a) = 1$. В случае же, когда a не обратим, $\rho_0(a) = 0$ и тогда $(\rho_0 p)a = \rho_0(a)p(a) = 0 = \rho_0(a)$.

Следовательно, осталось показать, что Ihom $\Gamma_0 = \{1, \rho_0\}$.

По Лемме, для любого необратимого элемента $a \in \Gamma_0$ мы имеем $0 < p(a) < 1$.

Тогда для любого идемпотента $\rho, \rho \not\equiv 1$ произведение ρp также есть идемпотент (в противном случае $p\rho = p^t$ при некотором $t > 0$ и так как характер p всюду положителен, то $\rho \equiv 1$). Если теперь $\rho(a) = 1$ при некотором необратимом a, то $0 < (\rho_0 p)(a) = p(a) < 1$, что противоречит идемпотентности $p\rho$.

Таким образом, $\rho = \rho_0$, что и требовалось доказать.

Следующий пример показывает необратимость последнего утверждения.

Пример 2. Пусть $\Gamma_0 = [\{0\} \times \mathbb{Z}_+] \cup [(\mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z}], (m, n) \in \Gamma_0$. Квазимаксимальность Γ_0 (в $\Gamma = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) очевидна (в данном случае собственной полугруппой группы Γ, содержащей Γ_0, является максимальная полугруппа $\Gamma_+ = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}$). Легко убедиться, что Phom $\Gamma_+ \setminus$ Ihom $\Gamma_+ = \{q^t : \quad t > 0\}$, где $q(m, n) = e^{-m}$ есть положительный характер группы Γ_0.

Пусть $p \in$ Phom Γ_0, $p \neq 1, \rho_0$ и $p \neq q^t$ для всех $t > 0$. Из Теоремы 1, $pq = p$. Поэтому из равенства $p(m, n)e^{-m} = p(m, n)$ следует, что $p(m, n) = 0$ для $m > 0$. Для $m = 0$ мы имеем $p(0, n) = [p(0, 1)]^n$, тогда если $p(0, 1) = 1$, то p идемпотент; в случае $p(0, 1) < 1$ получаем $p(0, n) = e^{-n}$.

Однако, для полугруппы на полуоси Следствие 1 обратимо.

Следствие 2. Пусть Γ_0 — квазимаксимальная полугруппа неотрицательных целых чисел. Тогда

а) $\mathrm{Ihom}\ \Gamma_0 = \{1, \rho_0\}$,

б) $\mathrm{Phom}\ \Gamma_0 \setminus \mathrm{Ihom}\ \Gamma_0 = \{p^t : \quad t > 0\}$.

Доказательство. Пусть $\Gamma_+ = \mathbb{R}_+ \cap \Gamma$, где Γ — группа, порожденная Γ_0, и пусть $q \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0 \setminus \mathrm{Ihom}\ \Gamma_0$. По Теореме 1 мы имеем $\rho q = \rho$ для всех $\rho \in \mathrm{Ihom}\ \Gamma_0$. Так как $0 < q(a) < 1$ для всех $a \in \Gamma_+$ (полугруппа Γ_+ не содержит нетривиальных подгрупп), то либо $\rho \equiv 1$, либо $\rho = \rho_0$.
Для доказательства б) достаточно показать, что каждый неидемпотентный положительный характер группы Γ_0 можно продолжить до положительного характера максимальной полугруппы Γ_+. Для этого достаточно показать, что гомеоморфизм p строго положительный.
Пусть $p \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0 \setminus \mathrm{Ihom}\ \Gamma_0$ и $J = \{a \in \Gamma_0 : p(a) = 0\}$. Определим характер ρ, полагая $\rho \equiv 0$ на J и $\rho \equiv 1$ на $\Gamma_0 \setminus J$ (ρ — характер, так как J идеал в Γ_0 и $\Gamma_0 \setminus J$ полугруппа). Тогда, в силу утверждения а), $\rho \equiv 1$, т.е. J пусто. Следствие доказано.
Отметим, что в [2] дается геометрическое доказательство этого результата. Приведем пример квазимаксимальной полугруппы Γ_0, для которой пространство $M_{A(\Gamma_0)}$ одномерно, однако Γ_0 не принадлежит $\mathbb{R}_+$.

Пример 3. Пусть $\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y \geq \ln(|x| + 1)\}$. Полугруппа Γ_0 порождает $\Gamma = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Единственной максимальной полугруппой, которая содержит все собственные полугруппы группы Γ, содержащие Γ_0, есть $\Gamma_+ = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Следовательно, Γ_0 квазимаксимальна. Покажем, что $M_{A(\Gamma_0)}$ одномерна. Заметим, что одним из положительных (неидемпотентных) характеров группы Γ_0 является $q(x, y) = e^{-y}$, который является положительным характером Γ_+. Любой другой характер $p \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0 \setminus \mathrm{Ihom}\ \Gamma_0$ удовлетворяет условию $p(0, y) = e^{-ty}, y \geq 0 (t > 0)$. Сужение p на $\{0\} \times \mathbb{R}_+$ либо имеет указанный вид, либо всюду, кроме точки $(0, 0)$, равен нулю. В последнем случае, очевидно, $p(z) = 0$ для всех $z \in \Gamma_0, z \neq 0$, т.е. $p = \rho_0$. Следовательно, $p > 0$ всюду на Γ_0, и поэтому продолжается на максимальную полугруппу Γ_+ с сохранением положительности. Следовательно, получаем $p = q^t$.

4. Объединяя Теорему 1 с Предложением 1.3 [2] и Теорему 2 [3], мы можем сформулировать результат, характеризующий квазимаксимальные полугруппы на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Теорема 2. *Пусть $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}_+$ — полугруппа. Следующие условия эквивалентны:*

а) Γ_0 квазимаксимальна;

б) для каждого $a \in \Gamma$ существует целое число $n \neq 0$, такое, что $na \in \Gamma_0$;

в) $\mathrm{Phom}\ \Gamma_0 \setminus \mathrm{Ihom}\ \Gamma_0 = \{p^t : t > 0\}$;

г) равномерная алгебра $A(\Gamma_0)$ — проникающая, т.е. для любого собственного замкнутого подмножества $F \subset \widehat{\Gamma}$ все непрерывные функции на F равномерно аппроксимируются функциями из $A(\Gamma_0)$.

ABSTRACT. The present paper continues investigation of the quasimaximal semigroups started in [2] (special cases of such semigroups were considered in [3 - 5]). We obtain a criterion of quasimaximality in terms of characters of a semigroup Γ_0 that characterizes the geometrical structure of space $M_{A(\Gamma_0)}$ of maximal ideals of the algebra $A(\Gamma_0)$ of generalised analytic functions, generated by a quasimaximal semigroup. We state a result which characterizes the quasimaximal semigroups on semiaxis from the points of view of group theory [2], geometry (the structure of space $M_{A(\Gamma_0)}$) and in terms of the approximation properties of uniform algebra $A(\Gamma_0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Arens, I. Singer, "Generalized analytic functions," Trans. Amer. Math. Soc., vol. 81, pp. 379 - 393, 1956.
2. Л. М. Акопян, "Некоторые свойства точечных дифференцирований и автоморфизмов на алгебрах обобщенных аналитических функций," Изв. АН Армении, Математика [английский перевод: Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)], том 22, стр. 152 - 165, 1987.
3. Л. М. Акопян, "Представление квазимаксимальных полугрупп в равномерную алгебру," Докл. АН Армении, , том 89, стр. 203 - 206, 1989.

4. С. А. Григорян, "Об алгебрах конечного типа на компактной группе G," Изв. АН Армении, Математика [английский перевод: Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)], том 14, стр. 168 – 183, 1979.
5. Л. М. Акопян, С. А. Григорян, "Об одном представлении подполугруппы группы рациональных чисел в равномерную алгебру," Докл. Болг. АН, том 38, стр. 829 – 830, 1985.
6. Т. Гамелин, Равномерные Алгебры, Мир, Москва, 1973.

3 Июня 1991 Ереванский Государственный университет

ЗАДАЧА ТИПА КОШИ-РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А. А. Андрян

Известия Академии Наук Армении. Математика,
том. 27, 3, 1992

Пусть $u(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \overline{\Pi}_\alpha)$ аналитическая $t \in \Pi_\alpha = \{t | 0 < \arg t < \alpha < \pi\}$ с полиномиалным ростом. Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^n A_j \left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^{n-j} u(x,t)}{\partial t^{n-j}} = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \Pi_\alpha.$$

Предполагаем, что число корней характеристического уравнения $\lambda^n + A_1(\xi)\lambda^{n-1} + \cdots + A_n(\xi) = 0$, принадлежащих $\Pi_\alpha^* = \{t | \pi/2 \le \arg t \le \frac{3}{2}\pi - \alpha\}$ постоянный для $\xi > 0$ и $\xi < 0$. Изучаются задача типа Коши-Римана-Гильберта и общая граничная задача. Основаной результат этой статьи состоит в том, что задача типа Коши-Римана-Гильберта всегда имеет решение. Для общей граничной задачи приводятся необходимые и достаточные условия её разрешимости. Получен класс корректности в случае $f(x,t) \equiv 0$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Введем углы $\Pi_\alpha = \{t | 0 < \arg t < \alpha < \pi\}$, $\Pi_\alpha^* = \{t | \pi/2 \le \arg t \le \frac{3}{2}\pi - \alpha\}$ в комплексной плоскости Π. Через M_β обозначим класс функций $u(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \overline{\Pi}_\alpha)$, аналитических по $t \in \Pi_\alpha$ и удовлетворящих оценкам

$$|D_x^j D_t^l u(x,t)| \le c_{jl}(1+|x|)^{\beta_{jl}}(1+|t|)^{\gamma_{jl}}, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \overline{\Pi}_\alpha, \tag{1}$$

где β-целое, а $\beta_{jl} < \beta$. Пусть $M = \cup_{\beta \ge 0} M_\beta$.

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффицентами вида

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t) = \frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^n A_j \left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^{n-j} u(x,t)}{\partial t^{n-j}} = f(x,t), \tag{2}$$

$$(x,t) \in \mathbb{R} \times \Pi_\alpha,$$

где $A_j(\xi)$–полиномы от ξ, f и u–функции из M. Через $\lambda_1(\xi),...,\lambda_n(\xi)$ мы обозначим, с учетом их кратностей, корни характеристического уравнения

$$P_n(\xi,\lambda) = \lambda^n + A_1(\xi)\lambda^{n-1} + \cdots + A_n(\xi) = 0, \tag{3}$$

а через-$\rho(\xi)$-число корней, принадлежащих Π_α^- в точке ξ.

Мы предполагаем, что

$$\rho(\xi) = k, \quad \text{при } \xi > 0, \qquad \rho(\xi) = m, \quad \text{при } \xi < 0, \tag{4}$$

где k и m–константы и $m > k$ (случай, когда $m = k$ изучен в [1]).

В работе изучают ся следующие задачи. Требует ся найти решение $u \in M$ уравнения (2), удовлетворяющее граничным условиям:

Задача A1. (задача Коши-Римана-Гильберта)

$$\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j} = f_j(x), \quad j = 0,...,k-1, \tag{5}$$

$$\mathrm{Re}\,\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j} = f_j(x), \quad j = k,...,m-1. \tag{6}$$

Задача A2. (общая граничная задача)

$$\sum_{l=0}^{n-1} a_{jl}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^l u(x,0)}{\partial t^l} = f_j(x), \quad j = 0,...,k-1, \tag{7}$$

$$\mathrm{Re}\sum_{l=0}^{n-1} a_{jl}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^l u(x,0)}{\partial t^l} = f_j(x), \quad j = k,...,m-1, \tag{8}$$

где $f_j(x)$–заданные функции из M, а $a_{jl}(\xi)$–полиномы с постоянными коэффициентами.

Основной результат состоит в том, что задача A1 всегда имеет решение, что касаеця задачи A2, то приводяця необходимые и достаточные условия ее разрешимости. Наконец, если в (2) $f \equiv 0$ и все $f_j \in M_o$, то имеем теорему существования и единственности решения задачи A1 в M_0.

§1. РАЗРЕШИМОСТЬ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ (2)

Корни $\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_n(\xi)$ уравнения (3) на основании (4) будем нумеровать так, чтобы

$$\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_k(\xi) \in \Pi_\alpha^*; \quad \lambda_{k+1}(\xi), \dots, \lambda_n(\xi) \in C\Pi_\alpha^* = \Pi \setminus \Pi_\alpha^*, \text{ при } \xi < 0, \tag{1.1}$$

$$\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_m(\xi) \in \Pi_\alpha^*; \quad \lambda_{m+1}(\xi), \dots, \lambda_n(\xi) \in C\Pi_\alpha^*, \text{ при } \xi > 0. \tag{1.2}$$

Разложение в ряд Пюизье корня $\lambda_j(\xi)$ имеет вид

$$\lambda_j(\xi) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{jk} \left[(\xi - \xi_\circ)^{1/r_j}\right]^k, \qquad \xi \in (\xi_\circ, \xi_\circ + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \quad r_j \in N. \tag{1.3}$$

Аналогичное разложение имеет место и при $\xi \in (\xi_\circ - \varepsilon, \xi_\circ)$, $\varepsilon > 0$.

В окрестности же точек $|\xi| = \infty$ имеем

$$\lambda_j(\xi) = \sum_{k=-N_j}^{+\infty} c_{jk} \left[\xi^{-1/p_j}\right]^k, \quad p_j, N_j \in N, \tag{1.4}$$

вообще говоря разные, при $\xi = +\infty$ и $\xi = -\infty$.

Введем следующие полиномы по λ:

$$Q_1^-(\xi, \lambda) = \prod_{j=1}^{k} [\lambda - \lambda_j(\xi)] = \sum_{j=0}^{k} q_{j1}^-(\xi)\lambda^{k-j};$$

$$R_1^-(\xi, \lambda) = \prod_{j=1}^{n-k} [\lambda - \lambda_{k+j}(\xi)] = \sum_{j=0}^{n-k} r_{j1}^-(\xi)\lambda^{n-k-j} \quad (\xi < 0), \tag{1.5}$$

$$Q_1^+(\xi, \lambda) = \prod_{j=1}^{m} [\lambda - \lambda_j(\xi)] = \sum_{j=0}^{m} q_{j1}^+(\xi)\lambda^{m-j};$$

$$R_1^+(\xi, \lambda) = \prod_{j=1}^{n-m} [\lambda - \lambda_{m+j}(\xi)] = \sum_{j=0}^{n-m} r_{j1}^+(\xi)\lambda^{n-m-j}, \tag{1.6}$$

$$(\xi > 0, \quad q_{01}^\pm(\xi) = r_{01}^\pm(\xi) \equiv 1).$$

Заметим, что коэффициенты введенных полиномов бесконечно дифференцируемы, непрерывны, соответственно, слева и справа в точке $\xi = 0$ и удовлетворяют оценке

$$|D_\xi^j a(\xi)| \le c_j |\xi|^{\varepsilon - j} (1 + |\xi|)^{m_j}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad 0 < \varepsilon \le 1, \tag{1.7}$$

откуда следует их локальная интегрируемость, а также их первых производных.

1. Пусть $f(x,t) = a(t)x^\nu$, $a(t) \in M$, $\nu \geq 0$–целое. Решение уравнения (2) ищем в виде

$$w(x,t) = \sum_{j \leq \nu} c_j(t)x^j, \tag{1.8}$$

где $c_j(t) \in M$ подлежат определению. Подставляя $w(x,t)$ из (1.8) в уравнение (2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x^j, получим

$$P_n\left(0, \frac{\partial}{\partial t}\right) c_\nu(t) = a(t), \quad t \in \Pi_a; \tag{1.9}$$

$$P_n\left(0, \frac{\partial}{\partial t}\right) c_j(t) = L_j\big(c_{j+1}(t), ..., c_\nu(t)\big), \quad j = 0, ..., \nu - 1, \tag{1.10}$$

где $L_j(\cdot)$–линейные выражения относительно своих аргументов.

В работе [2] доказана разрешимость уравнения (1.9) в классе M, поэтому из системы (1.9), (1.10) последовательно определим функции $c_\nu(t), ..., c_o(t)$, то есть уравнение (2) с правой частью вида $a(t)x^\nu$, $a \in M$, разрешимо. Отсюда вытекает, что если вместо $f(x,t)$ в правой части (2) взять $(i\frac{\partial}{\partial x})^\nu f(x,t)$ и доказать разрешимость такого уравнения, то мы получим разрешимость уравнения (2) и с правой частью $f(x,t)$. Действительно, пусть

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u_o(x,t) = \left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu f(x,t),$$

а $u_1 \in M$ такая, что $(i\frac{\partial}{\partial x})^\nu u_1 = u_o$. Отсюда имеем

$$\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu \left[P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u_1(x,t) - f(x,t)\right] = 0$$

или

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u_1(x,t) = f(x,t) + \sum_{j \leq \nu - 1} a_j(t)x^j, \tag{1.11}$$

где $a_j(t) \in M$–вполне определенные функции. Теперь, если $u(x,t)$– решение уравнения (2), то подставляя $u_1 = u + w$ в (1.11), для определения $w(x,t)$ мы получим расмотренную выше задачу.

2. Пусть $f(x,t) = (i\frac{\partial}{\partial x})^\nu g(x)t^l$, $g(x) \in M$. Заметим, что $M \subset S'(R) \forall t \in \Pi_a$. Перейдя в (2) к образам Фурье по x, получим

$$\frac{\partial^n \hat{u}(\xi,t)}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^{n} A_j(\xi) \frac{\partial^{n-j} \hat{u}(\xi,t)}{\partial t^{n-j}} = \xi^\nu \hat{g}(\xi)t^l, \quad t \in \Pi_a, \tag{1.12}$$

где $\hat{u}(\xi,t) = F_x[u(x,t)]$, $\hat{g}(\xi) = F[g(x)]$–обобщенные преобразования Фурье. Пусть при каждом $\xi \neq 0$ $\gamma^-(\xi)$ обозначает замкнутый контур, содержащий внутри себя только те корни уравнения (3), которые принадлежат области Π_σ^* и точку $\lambda = 0$. Введем функционал

$$\hat{u}_o(\xi,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-(\xi)} \frac{\xi^\nu \hat{g}(\xi)}{\lambda^{l+1}P_n(\xi,\lambda)} e^{\lambda t} d\lambda, \quad t \in \Pi_\sigma, \quad \xi \neq 0. \qquad (1.13)$$

Покажем, что его прообраз Фурье есть искомое решение.

Так как полиномы $Q_1^-(\xi,\lambda)$, $R_1^-(\xi,\lambda)$ и $Q_1^+(\xi,\lambda)$, $R_1^+(\xi,\lambda)$ взаимно просты при $\xi < 0$ и $\xi > 0$, соотвецтвенно, то имеем

$$1 = r_1^\pm(\xi,\lambda)Q_1^\pm(\xi,\lambda) + q_1^\pm(\xi,\lambda)R_1^\pm(\xi,\lambda), \qquad (1.14)$$

где $r_1^\pm(\xi,\lambda)$, $q_1^\pm(\xi,\lambda)$ полиномы по λ, коэффиценты которых удовлетворяют оценкам 1–ого типа (1.7). Рас-

смотрим функцию

$$\hat{V}(\xi,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-(\xi)} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{l+1}P_n(\xi,\lambda)} d\lambda =$$

$$= \frac{\theta^-(\xi)}{2\pi i}\int_{\gamma^-(\xi)} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{l+1}Q_1^-(\xi,\lambda)R_1^-(\xi,\lambda)} d\lambda + \frac{\theta^+(\xi)}{2\pi i}\int_{\gamma^-(\xi)} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{l+1}Q_1^+(\xi,\lambda)R_1^+(\xi,\lambda)} d\lambda.$$

Учитывая (1.14), представим $\hat{V}(\xi,t) = \hat{V}_1^-(\xi,t) + \hat{V}_1^+(\xi,t)$, где

$$\hat{V}_1^\pm(\xi,t) = \frac{\theta^\pm(\xi)}{2\pi i}\int_{\gamma^-(\xi)} \frac{q_1^\pm(\xi,\lambda)e^{\lambda t}}{\lambda^{l+1}Q_1^\pm(\xi,\lambda)} d\lambda, \quad t \in \overline{\Pi}_\sigma. \qquad (1.15)$$

Лемма 1.1. Функции $\hat{V}_1^\pm(\xi,t)$ удовлетворяют оценкам

$$|\hat{V}_1^\pm(\xi,t)| \leq c|\xi|^{\epsilon_o}(1+|\xi|)^{m_o}(1+|t|)^{n_o}, \qquad (1.16)$$

$$|D_\xi^j D_t^k \hat{V}_1^\pm(\xi,t)| \leq c_{jk}|\xi|^{\epsilon_j}(1+|\xi|)^{m_j}(1+|t|)^{n_j},\ j = 1,2,\ldots. \qquad (1.17)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что $D_\xi^j D_t^k \hat{V}_1^\pm(\xi,0)$ удовлетворяют приведенным оценкам, в чем можно убедиться, вычисляя интегралы в (1.15) по теореме о вычетах в точке $\lambda = \infty$, используя при этом оценки (1.7). С другой стороны, эти функции удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^{l+1}}{\partial t^{l+1}} Q_1^\pm(\xi, \frac{\partial}{\partial t})\hat{V}_1^\pm(\xi,t) = 0, \quad \xi \neq 0, \quad t \in \Pi_\sigma, \qquad (1.18)$$

все корни характеристических уравнений которых принадлежат Π^*_o и в окрестности точки $\xi = 0$ и $\xi = \infty$ удовлетворяют оценкам (1.17). Представляя левую часть (1.18) в виде произведения операторов первого порядка и используя указанные свойства характеристических корней, мы без труда выведем оценки (1.16), (1,17). Лемма 1.1 доказана.

Пусть β такое, что $g(x) \in M_\beta$.

Лемма 1.2. Существуют натуральные $\nu(\beta)$ и $k_o(\beta)$ такие, что прообраз Фурье

$$V_o(x,t) = F_\xi^{-1}\left[\frac{\xi^\nu \hat{V}(\xi,t)}{(1+\xi^2)^{k_o}}\right]$$

удовлетворяет оценке

$$|D_t^j V_o(x,t)| \leq c_j \frac{(1+|t|)^{p_j}}{(1+x^2)^{\beta+1}}, \qquad j = 0,\dots,n-1. \tag{1.19}$$

Доказательство. Выбирая ν мы можем, в силу Леммы 1.1, добиться любой наперед заданной

гладкости функции $\xi^\nu \hat{V}(\xi,t)$ в точке $\xi = 0$. Выбирая $k_o \gg 1$ мы легко получим оценку (1.19). Лемма 1.2 доказана.

Теперь ясно, что

$$u_o(x,t) = V_\sigma(x,t) * \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{k_o} \left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu g(x) \in M_\beta \tag{1.20}$$

и имеет место

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u_o(x,t) = \left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu g(x)t^l + \sum_{j<\beta} a_j(t)x^j,$$

где $a_j(t) \in M$–вполне определенные функции.

Согласно пункту 1 существует $w_o(x,t)$ такая, что

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) w_o(x,t) = \sum_{j<\beta} a_j(t)x^j$$

и тогда $u(x,t) = u_o(x,t) - w_o(x,t)$ есть решение уравнения (2) с правой частью $f(x,t) = \left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu g(x)t^l$.

3. Общий случай. Используя представление

$$f(x,t) = [f(x,0) + tf_t'(x,0) + \cdots + \frac{t^l}{l!} f_t^{(l)}(x,0)] + g(x,t), \tag{1.21}$$

а также случаи, изученные в пунктах 1, 2, мы сведём вопрос о разрешимости уравнения (2) к разрешимости уравнения

$$\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^n}+\sum_{j=1}^{n}A_j\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{n-j}u(x,t)}{\partial t^{n-j}}=\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu}g(x,t),\quad (x,t)\in\mathbb{R}\times\Pi_\alpha,\tag{1.22}$$

где $D_t^j g(x,0)=0$, j,ν,l–наперед заданные целые числа, $j\le l$. Границу угла Π_α^* обозначим через Γ_o, а $\Gamma_\varepsilon=\Gamma_o+\varepsilon e^{-i\alpha/2}$, $\varepsilon>0$. Пусть $g(t)\in M$ удовлетворяет условиям

$$|D_t^j g(t)|\le c_j(1+|t|)^\gamma,\quad \gamma\ge 0 \text{ целое},\quad t\in\overline{\Pi}_\alpha,\tag{1.23}$$

$$D_t^j g(0)=0\quad \forall j\le l.\tag{1.24}$$

Через $G(p)$ или $L[g](p)$ обозначим образ Лапласа функции $g(t)$, когда $t\in\mathbb{R}^+$. В работе [3] доказана

Лемма 1.3. Функция $G_o(p)=L[g(t)(1+t)^{-\gamma-2}]$ аналитична в области $C\Pi_\alpha^*$ и удовлетворяет оценкам

$$|G_o(p)|\le c(1+|p|)^{-l-1},\quad p\in\overline{C\Pi_\alpha^*},\tag{1.25}$$

$$|G_o^{(s)}(p)|\le c_s(\tilde{\Pi}_\alpha)(1+|p|)^{-l-s-1},\quad s=0,1,\dots,p\in\tilde{\Pi}_\alpha\subseteq C\Pi_\alpha^*.\tag{1.26}$$

Образ Фурье решения уравнения (1.22) представится в виде

$$\hat{u}(\xi,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon(\xi)}\frac{\xi^\nu \hat{G}(\xi,\lambda)}{P_n(\xi,\lambda)}e^{\lambda t}d\lambda=$$

$$=\frac{\theta^-(\xi)}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon(\xi)}\frac{\xi^\nu \hat{G}(\xi,\lambda)}{P_n(\xi,\lambda)}e^{\lambda t}d\lambda+\frac{\theta^+(\xi)}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon(\xi)}\frac{\xi^\nu \hat{G}(\xi,\lambda)}{P_n(\xi,\lambda)}e^{\lambda t}d\lambda=\hat{u}^-(\xi,t)+\hat{u}^+(\xi,t),$$
$$\xi\ne 0,\tag{1.27}$$

где контур $\Gamma_\varepsilon(\xi)$ для $\xi\ne 0$ выбирается так, чтобы корни, принадлежащие Π_α^* и $C\Pi_\alpha^*$ лежали по разные стороны от него.

Покажем, что прообраз Фурье функционала $\hat{u}^-(\xi,t)$ принадлежит классу M. Аналогичным образом мы поступим и с $\hat{u}^+(\xi,t)$.

Используя представление (1.14), перепишем $\hat{u}^-(\xi,t)$ в форме

$$\hat{u}^-(\xi,t)=\frac{\theta^-(\xi)}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon(\xi)}\frac{\xi^\nu q_1^-(\xi,\lambda)}{Q_1^-(\xi,\lambda)}\hat{G}(\xi,\lambda)e^{\lambda t}d\lambda+$$

$$+\frac{\theta^-(\xi)}{2\pi i}\int_{\Gamma_o(\xi)}\frac{\xi^\nu r_1^-(\xi,\lambda)}{R_1^-(\xi,\lambda)}\hat{G}(\xi,\lambda)e^{\lambda t}d\lambda=\hat{u}_1^-(\xi,t)+\hat{u}_2^-(\xi,t). \tag{1.28}$$

Следуя лемме 1.3 представим $\hat{G}(\xi,\lambda)(1-\frac{\partial}{\partial\lambda})^{\gamma+\alpha}\hat{G}_o(\xi,\lambda)$, где функционал $\hat{G}_o(\xi,\lambda)$, зависящий от параметра λ, удовлетворяет оценкам (1.25), (1.26), затем интегрированием по частям преобразуем $\hat{u}_2^-(\xi,t)$ к виду

$$\hat{u}_2^-(\xi,t)=\frac{\theta^-(\xi)}{2\pi i}\int_{\Gamma_o(\xi)}\xi^\nu\left(1+\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{\gamma+2}\left[\frac{r_1^-(\xi,\lambda)e^{\lambda t}}{R_1^-(\xi,\lambda)}\right]\hat{G}_o(\xi,\lambda)d\lambda=$$

$$=\frac{\theta^-(\xi)}{2\pi i}\int_{\Gamma_o}\xi^\nu\left(1+\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{\gamma+2}\left[\frac{r_1^-(\xi,\lambda)e^{\lambda t}}{R_1^-(\xi,\lambda)}\right]\hat{G}_o(\xi,\lambda)d\lambda. \tag{1.29}$$

Введем функцию

$$\psi(\xi,\lambda,t)=\left(1+\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{\gamma+2}\left[\frac{r_1^-(\xi,\lambda)e^{\lambda t}}{R_1^-(\xi,\lambda)}\right],\qquad \xi<0,\quad \lambda\in\Gamma_o,\quad t\in\overline{\Pi}_\alpha. \tag{1.30}$$

Имеет место

Лемма 1.4. Справедлива оценка:

$$|D_\xi^j D_\lambda^k D_t^l\psi(\xi,\lambda,t)|\le c_{jkl}|\xi|^{m_{jkl}}(1+|\xi|)^{n_{jkl}}(1+|\lambda|)^{p_{jkl}}(1+|t|)^{q_{jkl}}. \tag{1.31}$$

Доказательство. Лемма 1.4 следует из оценки (1.7) и того, что

$$|\lambda-\lambda_j(\xi)|\ge c_j|\xi|^{m_j}(1+|\xi|)^{n_j},\qquad \lambda\in\Gamma_o,\quad \xi<0,\quad j\ge k+1. \tag{1.32}$$

Докажем оценку (1.32). При $-M<\xi\le-\delta<0$ (1.32) вытекает из непрерывности корня $\lambda_j(\xi)$. Поэтому достаточно установить (1.32), при $-\delta<\xi<0$ и $\xi\lll-1$. Ограничимся случаем $-\delta<\xi<0$ (в случае $\xi\lll-1$ доказательство аналогично). Согласно (1.3) имеем

$$\lambda_j(\xi)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_{jk}|\xi|^{k/r_j},\quad -\delta<\xi<0. \tag{1.33}$$

От сюда и из того, что $\lambda_j(\xi)\in C\Pi_\alpha^*$, $j\ge k+1$, $-\delta<\xi<0$ вытекает существование $\theta_j\in[0,\alpha]$ такого, что

$$\mathrm{Re}\,[e^{i\theta_j}\lambda_j(\xi)]>0,\quad \forall\xi\in(-\delta,0). \tag{1.34}$$

Из (1.33), (1.34) имеем

$$\mathrm{Re}\,[e^{i\theta_j}\lambda_j(\xi)]\ge c_j|\xi|^{m_j},\quad \xi\in(-\delta,0). \tag{1.35}$$

А теперь заметим, что

$$|\lambda-\lambda_j(\xi)|=|e^{i\theta_j}\lambda-e^{i\theta_j}\lambda_j(\xi)|\ge\mathrm{Re}\,[e^{i\theta_j}\lambda_j(\xi)]\ge c_j|\xi|^{m_j}, \tag{1.36}$$

и оценка (1.32) получена. Лемма 1.4 доказана.

Замечание 1.1. Оценка (1.32) легко выводится и из принципа Зайденберга-Тарского (см. Теорему А.2.5 в [4]).

Из оценки (1.31), при подходящем выборе ν, вытекает гладкость функции $\theta^-(\xi)\xi^\nu\psi(\xi,\lambda,t)$ по ξ до наперед заданного порядка. Отсюда получаем (см. Лемму 1.2 и (1.20))

$$u_1^-(x,t) = F_\xi^{-1}[\hat{u}_1^-(\xi,t)](x,t) = \int_{\Gamma_0} \varphi(x,\lambda,t) * \hat{G}_0(x,\lambda)d\lambda \in M, \tag{1.37}$$

где

$$\varphi(x,\lambda,t) = F_\xi^{-1}\left[\frac{\theta^-(\xi)\xi^\nu\psi(\xi,\lambda,t)}{(1+\xi^2)^{k_0}}\right], \quad k_0 \gg 1;$$

$$\hat{G}(x,\lambda) = \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{k_0} G_0(x,\lambda).$$

Займемся теперь функционалом $\hat{u}_2^-(\xi,t)$. Пусть целое $l_0 \geq 0$ таково, что

$$\left|\frac{q_1^-(\xi,\lambda)}{\lambda^{l_0}Q_1^-(\xi,\lambda)}\right| \leq \frac{c(\xi)}{|\lambda|}, \qquad |\lambda| > 1, \quad \xi < 0. \tag{1.38}$$

Введем функцию

$$\psi_1(\xi,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-(\xi)} \frac{q_1^-(\xi,\lambda)}{\lambda^{l_0}Q_1^-(\xi,\lambda)}e^{\lambda t}d\lambda, \qquad t \in \overline{\Pi}_0, \quad \xi < 0, \tag{1.39}$$

где $\gamma^-(\xi)$ определена в (1.13). В силу Леммы 1.1 функция $\psi_1(\xi,t)$ удовлетворяет оценкам (1.16), (1.17). Теперь, если положим

$$\varphi_1(x,t) = F_\xi^{-1}\left[\frac{\theta^-(\xi)\xi^\nu\psi_1(\xi,t)}{(1+\xi^2)^{k_0}}\right], \quad k_0 \gg 1,$$

то будем иметь

$$u_2^-(x,t) = \int_0^t \varphi_1(x,\tau) * g(x,t-\tau)d\tau \in M,$$

где $g(x,t) = (1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{k_0}(\frac{\partial}{\partial t})^{l_0}g(x,t)$. Следовательно, прообраз Фурье $u_0(x,t)$ функционала $\hat{u}(\xi,t)$ из (1.27) принадлежит классу M и, вообще говоря, от решения $u(x;t)$ уравнения (1.22) отличается на функцию вида $\sum c_j(t)x^j$, которая легко находится согласно пункту 1.

Таким образом, получена

Теорема 1.1. Неоднородное уравнение $P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u=f(x,t)$ имеет решение в классе M для всех $f\in M$.

Теорема 1.1 позволяет при исследовании граничных задач А1 и А2 в уравнении (2) считать $f(x,t)\equiv 0$, что мы и будем предполагать. Заметим, что если в (2) $f\in M_\beta$, то решение $u\in M_{\beta_1}$ с $\beta_1\geq\beta$, что подтверждают следующие примеры. В $\mathbb{R}\times\Pi_\alpha$, с $\pi/2<\alpha<\pi$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,t).$$

1) Пусть $f(x,t)\equiv 1\in M_1$, тогда $u(x,t)=-it\in M_1$.

2) Если же $f(x,t)=\sqrt{x+i}\in M_1$, то $u(x,t)=2/3(x+i)^{3/2}+\varphi(x+it)$, где $\varphi(\cdot)$–целая аналитическая функция, а значит в классе $\varphi(\cdot)\in M_\beta$ есть многочлен и ясно, что невозможно подобрать $\varphi(\cdot)\in M_\beta$ так, чтобы $u\in M_1$.

§2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ А1

В этом параграфе в отличие от §1 корни $\lambda_1(\xi),...,\lambda_n(\xi)$ характеристического уравнения (3) перенумеруем так, чтобы

$$\lambda_1(\xi),...,\lambda_k(\xi)\in\Pi^*_\alpha,\quad \xi\in\mathbb{R};$$

$$\lambda_{k+1}(\xi),...,\lambda_m(\xi)\in\begin{cases}C\Pi^*_\alpha, & \xi>0,\\ \Pi^*_\alpha, & \xi<0;\end{cases}\tag{2.1}$$

$$\lambda_{m+1}(\xi),...,\lambda_n(\xi)\in C\Pi^*_\alpha,\quad \xi\neq 0.$$

Отметим, что в силу (1.3) введенные множества корней могут пересекаться лишь в конечном числе точек и так как характер этих точек ничем не отличается от точки $\xi=0$, то мы будем предполагать, что $\xi=0$ – единственная такая точка. Введем полиномы по λ:

$$P_k(\xi,\lambda)=\prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j(\xi))=\lambda^k+\sum_{j=1}^{k}p_j(\xi)\lambda^{k-j},$$

$$Q_{m-k}(\xi,\lambda)=\prod_{j=1}^{m-k}(\lambda-\lambda_{k+j}(\xi))=\lambda^{m-k}+\sum_{j=1}^{m-k}q_j(\xi)\lambda^{m-k-j},\tag{2.2}$$

$$R_{n-m}(\xi,\lambda)=\prod_{j=1}^{n-m}(\lambda-\lambda_{m+j}(\xi))=\lambda^{n-m}+\sum_{j=1}^{n-m}r_j(\xi)\lambda^{n-m-j}.$$

Заметим, что коэффициенты введенных полиномов удовлетворяют оценкам (1.7). Рассмотрим функции

$$\hat{V}_j(\xi,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(\xi)} \frac{\lambda^{m-k-j-1} + q_1(\xi)\lambda^{m-k-j-2} + \ldots + q_{m-k-j-1}(\xi)}{Q_{m-k}(\xi,\lambda)} e^{\lambda t} d\lambda,$$

$$t \in \overline{\Pi}_a, \quad \xi \neq 0, \tag{2.3}$$

где замкнутый контур $\gamma(\xi)$ содержит все корни полинома $Q_{m-k}(\xi,\lambda)$. На основании Леммы 1.1 функция $\theta^-(\xi)\hat{V}_j(\xi,t)$ удовлетворяет оценкам (1.16), (1.17) с $\varepsilon_o = 0$, $\varepsilon_j = \varepsilon - j$, $0 < \varepsilon < 1$. Положим

$$\hat{w}_j(\xi,t) = \frac{\theta^-(\xi)\hat{V}_j(\xi,t)}{(1+\xi^2)^{k_o}}, \quad k_o \gg 1. \tag{2.4}$$

Лемма 2.1. Прообраз Фурье $w_j(x,t)$ функции $\hat{w}_j(\xi,t)$ продолжается аналитически в верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\, z > 0$, $z = x + iy$ и удовлетворяет там оценке

$$|w_j(z,t)| \leq c_j \frac{(1+|t|)^{l_j}}{1+|z|}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что $\hat{V}_j(\xi,t)$ непрерывна слева и справа в точке $\xi = 0$ и имеет место

$$|\hat{V}_j(0\pm,t)| \leq c_j(1+|t|)^{l_{j1}}. \tag{2.6}$$

Очевидно также, что

$$|w_j(z,t)| \leq c_j(1+|t|)^{l_{j2}}, \quad \mathrm{Im}\, z \geq 0, \quad t \in \overline{\Pi}_a. \tag{2.7}$$

Далее, имеем

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\hat{w}_j(\xi,t) = -\frac{2k_o\xi}{(1+\xi^2)^{k_o+1}}\theta^-(\xi)\hat{V}_j(\xi,t) + \hat{V}_j(0-,t)\delta(\xi) + \frac{\theta^-(\xi)}{(1+\xi^2)^{k_o}}\frac{\partial}{\partial\xi}\hat{V}_j(\xi,t), \tag{2.8}$$

где $\delta(\xi)$–дельта-функция Дирака. Применяя к (2.8) обратное преобразование Фурье и используя оценки (1.16), (1.17), получим

$$|zw_j(z,t)| \leq c_j(1+|t|)^{l_j}. \tag{2.9}$$

Из (2.7) и (2.9) вытекает утверждение леммы 2.1.

Лемма 2.2. Пусть $V(x,t) \in M_\beta$, а её образ Фурье $\hat{V}(\xi,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$Q_{m-k}\left(\xi, \frac{\partial}{\partial t}\right)\hat{V}(\xi,t) = 0, \qquad \xi \neq 0, \quad t \in \Pi_\alpha. \tag{2.10}$$

Тогда $V(x,t)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z \geq 0$ и удовлетворяет оценкам

$$|D_z^j D_t^k V(z,t)| \leq c_{jk}(1+|z|)^{\beta_{jk}}(1+|t|)^{\gamma_{jk}}, \quad \beta_{jk} < \beta. \tag{2.11}$$

Доказательство. Так как характеристические корни полинома Q_{m-k} при $\xi > 0$ принадлежат области $C\Pi_\alpha^*$, то из (2.10) легко вывести, что $\operatorname{supp}\hat{V}(\xi,t) \subset \overline{\mathbb{R}^-}$. Функцию $V_o(x,t) = (i+x)^{-\beta}V(x,t) \in M_o$ представим в виде [5]

$$V_o(x,t) = \Pi^+ V_o + \Pi^- V_o = V_o^+ + V_o^-, \tag{2.12}$$

где

$$V_o^\pm = \Pi^\pm V_o = \lim_{y\to 0\pm} \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V_o(\eta,t)}{x-\eta+iy}\,d\eta,$$

удовлетворяют оценкам

$$|D_z^j D_t^k V_o^+(z,t)| \leq c_{jk}(1+|z|)^{\beta_{jk}}(1+|t|)^{\gamma_{jk}}, \quad \beta_{jk} < 0, \quad \operatorname{Im} z \geq 0, \quad t \in \overline{\Pi}_\alpha. \tag{2.13}$$

Для $V_o^-(z,t)$ такая же оценка имеет место в $\operatorname{Im} z \leq 0$, $t \in \overline{\Pi}_\alpha$.

Таким образом, $v(x,t) \in M_\beta$ может быть представлена в виде

$$V(x,t) = V^+(x,t) + V^-(x,t), \tag{2.14}$$

где $V^\pm(z,t)$ аналитически продолжаются, соотвецтвенно, в верхнюю и нижнюю полуплоскости, удовлетворяя оценкам (2.11). Заметим, что $M_o \subset \tilde{H}_\delta$, $|\delta| < 1/2$, где

$$\tilde{H}_\delta = \{u(\xi) : \|(1+|\xi|)^\delta u(\xi)\|_{L_2} < +\infty\}$$

–пространство Соболева и как показано в [5]

$$\Pi^\pm V_o^\pm = V_o^\pm = F[\theta^\pm(\xi)F^{-1}[V_o^\pm(x,t)](\xi,t)](x,t); \quad \Pi^\pm V_o^\mp = 0.$$

Отсюда легко вывести, что $\mathrm{supp} V^{\mp}(\xi,t) \subset \overline{\mathbb{R}^{\pm}}$ и так как $\mathrm{supp}\hat{V}(\xi,t) \subset \overline{\mathbb{R}^{-}}$, то носитель $F_x[V(x,t)-V^{+}(x,t)](\xi,t)$ сосредоточен в точке $\xi = 0$, следовательно

$$V(x,t) - V^{+}(x,t) = \sum_{j<\beta} a_j(t)x^j, \quad a_j(t) \in M. \tag{2.15}$$

Из (2.15) вытекает утверждение Леммы 2.2.

Нам понадобится также

Лемма 2.3. Если $u(x,t) \in M_\beta$ является решением однородной $(f_j \equiv 0)$ задачи A1, то

$$u(x,t) = \sum_{j\leq\beta-1} a_j(t)x^j, \quad a_j(t) \in M. \tag{2.16}$$

Доказательство. Представляя $u(x,t) = u^{+}(x,t) + u^{-}(x,t)$ (см. (2.14)), будем иметь

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u^{+}(x,t) = -P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u^{-}(x,t). \tag{2.17}$$

Так как левая часть аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, а правая–в нижнюю, имея степенной рост, то по Теореме Лиувилля

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u^{\pm}(x,t) = \pm\sum_{j\leq\beta-1} b_j(t)x^j, \quad b_j(t) \in M. \tag{2.18}$$

Граничное условие (5) также перепишется в виде $f_j \equiv 0$

$$\frac{\partial^j u^{\pm}(x,0)}{\partial t^j} = \pm\sum_{s\leq\beta-1} q_{sj}x^s, \quad j = 0,\dots,k-1, \tag{2.19}$$

где q_{sj}–постоянные. Переходя в (2.18), (2.19) к образам Фурье, получим

$$P_n\left(\xi,\frac{\partial}{\partial t}\right)\hat{u}^{-}(\xi,t) = 0, \qquad \xi \neq 0, \quad t \in \Pi_\alpha; \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial^j \hat{u}^{-}(\xi,0)}{\partial t^j} = 0, \qquad \xi \neq 0, \quad j = 0,\dots,k-1. \tag{2.21}$$

Уравнение (2.20) легко редуцируется к уравнению

$$Q_{m-k}\left(\xi,\frac{\partial}{\partial t}\right)P_k\left(\xi,\frac{\partial}{\partial t}\right)\hat{u}^{-}(\xi,t) = 0, \qquad \xi \neq 0, \quad t \in \Pi_\alpha, \tag{2.22}$$

откуда (см. Лемму 2.2) $\mathrm{supp} P_k\left(\xi,\frac{\partial}{\partial t}\right)\hat{u}^{-} \subset \overline{\mathbb{R}^{-}}$ и так как $\mathrm{supp}\hat{u}^{-} \subset \overline{\mathbb{R}^{+}}$, то

$$P_k\left(\xi,\frac{\partial}{\partial t}\right)\hat{u}^{-}(\xi,t) = 0, \quad \xi \neq 0. \tag{2.23}$$

Решая задачу Коши (2.23), (2.21), получим $\hat{u}^-(\xi,t) = 0$, $\xi \neq 0$. Используя это, образ Фурье однородных $f_j \equiv 0$ условий (6) перепишем в виде

$$\frac{\partial^j \hat{u}^+(\xi,0)}{\partial t^j} + \frac{\partial^j \overline{\hat{u}^+}(-\xi,0)}{\partial t^j} = 0, \quad j = k,...,m-1, \quad \xi \neq 0,$$

откуда

$$\frac{\partial^j \hat{u}^+(\xi,0)}{\partial t^j} = 0, \quad j = k,...,m-1, \quad \xi \neq 0. \tag{2.24}$$

Ясно, что $\hat{u}^+(\xi,t)$ также удовлетворяет уравнению (2.22) и граничным условиям (2.21), которые вместе с условиями (2.24) представляют однородную задачу Коши для уравнения (2.22), поэтому $\hat{u}^+(\xi,t) = 0$, $\xi \neq 0$.

Таким образом, $\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}^+ + \hat{u}^- = 0$, при $\xi \neq 0$, откуда и следует представление (2.16). Лемма 2.3 доказана.

I. **ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ А1**. Отметим сразу, что в классе M_o, $u \equiv 0$, (вытекает из Леммы 2.3). Согласно этой же лемме решение однородной задачи А1 в классе M_β, $\beta > 0$ есть многочлен по x степени $\beta - 1$ и поэтому условие (6) $f_j \equiv 0$ может быть переписано в форме

$$\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j} = i(c_o^j + c_1^j x + \cdots + c_{\beta-1}^j x^{\beta-1}), \tag{2.25}$$

где $c_k^j \in \mathbb{R}$–произвольные числа.

Таким образом, однородная задача А1 принимает вид:

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t) = 0, \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j} = 0, \quad j = 0,...,k-1, \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j} = i(c_o^j + c_1^j x + \cdots + c_{\beta-1}^j x^{\beta-1}), \quad j = k,...,m-1. \tag{2.28}$$

Очевидно $\rho(0) \geq m$, где $\rho(0)$–число корней характеристического уравнения (3), принадлежащих области Π_α°. Подставляя $u(x,t)$ из (2.16) в (2.26)–(2.28), мы без труда установим:

Теорема 2.1. Однородная задача А1 в классе M_β, $\beta > 0$ целое, имеет $r \geq \beta(m-k)$ линейно независимых решений.

Следствие. Однородная задача A1 в классе M имеет бесконечно много линейно независимых решений.

II. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ A1. Напомним, что в (2) $f(x,t) \equiv 0$, в силу Теоремы 1.1. Используя представление (2.14) как для решения $u(x,t)$, так и для функций $f_j(x)$, задачу A1 расчленим на следующие задачи:

1.

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u^-(x,t) = 0, \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial^j u^-(x,0)}{\partial t^j} = f_j^-(x), \quad j = 0, ..., k-1. \tag{2.30}$$

2.

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u^+(x,t) = 0, \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial^j u^+(x,0)}{\partial t^j} = f_j^+(x), \quad j = 0, ..., k-1, \tag{2.32}$$

$$\text{Re}\ \frac{\partial^j u^+(x,0)}{\partial t^j} = f_j(x) - \ \text{Re}\ \frac{\partial^j u^-(x,0)}{\partial t^j} = g_j(x), \quad j = k, ..., m-1. \tag{2.33}$$

Освободимся от символа Re в (2.33). Если $g_j(x) \in M_0$, то имеем

$$\frac{\partial^j u^+(x,0)}{\partial t^j} = 2g_j^+(x), \quad j = k, ..., m-1; \ g_j^+ = \Pi^+ g_j. \tag{2.34}$$

Если же $g_j(x) \in M_\beta$, $\beta \geq 1$, то представляя $g_j(x) = g_j(0) + ... + \frac{x^{\beta-1}}{(\beta-1)!} g_j^{(\beta-1)}(0) + g_j^0(x)$, заметим, что $q_{j0}(x) = g_j^0(x)/x^\beta \in M_0$, и поэтому из (2.33) легко выводим

$$\frac{\partial^j u^+(x,0)}{\partial t^j} = g_j(0) + ... + \frac{x^{\beta-1}}{(\beta-1)!} g_j^{(\beta-1)}(0) + x^\beta q_{j0}^+(x) = q_j^+(x),$$

$$j = k, ..., m-1; \ q_{j0}^+ = \Pi^+ q_{j0}. \tag{2.35}$$

Вначале докажем разрешимость задачи 1, а затем, подставляя $u^-(x,t)$ в (2.33), и разрешимость задачи 2. Переходя к образам Фурье в (2.29), (2.30), мы как и выше (см. доказательство леммы 2.3), получим

$$P_k\left(\xi, \frac{\partial}{\partial t}\right) \hat{u}^-(\xi,t) = 0, \quad \xi \neq 0, \quad t \in \Pi_\alpha, \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial^j \hat{u}^-(\xi,0)}{\partial t^j} = \hat{f}_j^-(\xi), \quad j = 0, ..., k-1. \tag{2.37}$$

Нам понадобится

Лемма 2.4. Пусть $f(x) \in M_o$, а $|V(x)| \leq (1+|x|)^{-1}$. Тогда их свёртка $f * V \in M_o$.

Доказательство. Имеем

$$|D_x^j(V * f)| = |V * D_x^j f| \leq c_j \int \frac{d\tau}{(1+|x-\tau|)(1+|\tau|)^{\beta_j}}, \quad 0 < \beta_j < 1.$$

Из $|\tau| \leq |x|/2$ следует, что $1+|x-\tau| \geq 1+|x|-|\tau| \geq 1+|x|/2$, поэтому

$$\int_{|\tau|\leq|x|/2} \frac{d\tau}{(1+|x-\tau|)(1+|\tau|)^{\beta_j}} \leq \frac{2}{1+|x|/2}\int_0^{|x|/2} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{\beta_j}} \leq c_{jo}\frac{1}{(1+|x|)^{\beta_j}}.$$

Пусть $\epsilon > 0$–достаточно малое заданное число, а $q \in \mathbb{R}$ такое, что $q\epsilon > 1$. Используя неравенство Гёльдера, получим

$$\int_{|\tau|>|x|/2} \frac{d\tau}{(1+|x-\tau|)(1+|\tau|)^{\beta_j}} = \int_{|\tau|>|x|/2} \frac{1}{(1+|x-\tau|)}\frac{1}{(1+|\tau|)^{\epsilon}}\frac{d\tau}{(1+|\tau|)^{\beta_j-\epsilon}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(1+\frac{|x|}{2})^{\beta_j-\epsilon}}\left(\int\frac{d\tau}{(1+|x-\tau|)^p}\right)^{1/p}\left(\int\frac{d\tau}{(1+|\tau|)^{q\epsilon}}\right)^{1/q} \leq \frac{c}{(1+|x|)^{\beta_j-\epsilon}},$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Объединяя полученные оценки, установим утверждение леммы 2.4.

Следствие 2.4. Если $f \in M_\beta$, а $|v(x)| \leq (1+|x|)^{-\beta-1}$, то $f * v \in M_\beta$.

Доказательство. В силу неравенства Питре

$$(1+|x-\tau|)^{-\beta} \leq (1+|x|)^{\beta}(1+|\tau|)^{-\beta}.$$

будем иметь

$$|v * f| \leq \int \frac{(1+|x|)^{\beta}d\tau}{(1+|x-\tau|)(1+|\tau|)^{\beta-\beta_j}} \leq c_j(1+|x|)^{\gamma_j}, \quad \gamma_j < \beta.$$

Пусть $v_j^{(1)}(\xi,t)$ обозначают функции из (2.3), построенные для полинома $P_k(\xi,\lambda)$, которые также удовлетворяют оценкам (1.16), (1.17).

Рассмотрим функционал

$$\bar{u}_o^-(\xi,t) = \sum_{j\leq k-1} \theta^+(\xi)v_j^{(1)}(\xi,t)f_j^-(\xi). \tag{2.38}$$

Пусть вначале $f_j \in M_o$, $j = 0, ..., k-1$. Тогда в силу Лемм 2.1 и 2.4

$$u_o^-(x,t) = F_\xi^{-1}[\hat{u}^-(\xi,t)] = \sum_{j \le k-1} F_\xi^{-1}[\theta^+(\xi) v_j^{(1)}(\xi,t)] * f_j^-(x) \in M_o \tag{2.39}$$

является решением задачи 1 (здесь мы используем тот факт, что элементы пространства M_o стремятся к нулю при $x \to \infty$). Если же $f_j \in M_\beta$, $\beta \ge 1$, то поступаем следующим образом. Пусть $k_o \gg 1$ такое, что

$$\left| F_\xi^{-1} \left[\frac{\theta^+(\xi) v_j^{(1)}(\xi,t)\xi^\beta}{(1+\xi^2)^{k_o}} \right] \right| \le c \frac{(1+|t|)^{m_o}}{(1+|x|)^{\beta+1}}. \tag{2.40}$$

В условии (5), а значит и в (2.30) вместо $f_j(x) \in M_\beta$ возьмем $D_x^\beta f_j(x) \in M_\beta$. Тогда формула (2.38) примет вид

$$\hat{u}_o^-(\xi,t) = \sum_{j \le k-1} \frac{\theta^+(\xi) v_j^{(1)}(\xi,t)\xi^\beta}{(1+\xi^2)^{k_o}} (1+\xi^2)^{k_o} \hat{f}_j^-(\xi) \tag{2.41}$$

и в силу следствия 2.4 и из Леммы 2.4 $u_o^-(x,t) = F^{-1}[\hat{u}_o^-(\xi,t)] \in M_\beta$. Построенная функция $u_o^-(x,t)$ удовлетворяет задаче

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u_o^-(x,t) = \sum_{l \le \beta-1} a_j(t) x^j, \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial^j u_o^-(x,0)}{\partial t^j} = D_x^\beta f_j^-(x) + \sum_{s \le \beta-1} b_{sj} x^s, \quad j = 0, ..., k-1. \tag{2.43}$$

Заменяя $u_o^-(x,t) = D_x^\beta u_1^-(x,t)$, где $u_1^- \in M_{2\beta}$ в (2.42), (2.43) получим

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u_1^-(x,t) = \sum_{j \le 2\beta-1} a_{j1}(t) x^j, \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial^j u_1^-(x,0)}{\partial t^j} = f_j^-(x) + \sum_{s \le 2\beta-1} b_{js} x^s, \quad j = 0, ..., k-1. \tag{2.45}$$

Очевидно задача

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) w = \sum_{j \le 2\beta-1} a_{j1}(t) x^j, \tag{2.46}$$

$$\frac{\partial^j w(x,0)}{\partial t^j} = \sum_{s \le 2\beta-1} b_{js} x^s, \quad j = 0, ..., k-1 \tag{2.47}$$

имеет решение $w \in M_{2\beta}$ вида $\sum_{j \le 2\beta-1} c_j(t) x^j$. Тогда функция

$$u^-(x,t) = u_1^-(x,t) - w(x,t) \in M_{2\beta}$$

является решением задачи 1. Исследование задачи 2 проводится аналогичным образом, при этом в образах Фурье вместо задачи (2.36), (2.37) мы будем иметь (см. доказательство Леммы 2.3)

$$Q_{m-k}\left(\xi, \frac{\partial}{\partial t}\right) P_k\left(\xi, \frac{\partial}{\partial t}\right) \hat{u}^{+}(\xi, t) = 0, \quad \xi \neq 0, \tag{2.48}$$

$$\frac{\partial^j \hat{u}^{+}(\xi, 0)}{\partial t^j} = f_j^{+}(\xi), \quad j = 0, ..., k-1, \quad \xi \neq 0, \tag{2.49}$$

$$\frac{\partial^j \hat{u}^{+}(\xi, 0)}{\partial t^j} = q_j^{+}(\xi), \quad j = k, ..., m-1, \quad \xi \neq 0. \tag{2.50}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2.2. Неоднородная задача A1 в классе M разрешима. При этом, если $f_j \in M_o$, $j = 0, ..., m-1$, то решение $u \in M_o$, если же $f_j \in M_\beta$, $\beta \geq 1$, то $u \in M_{2\beta}$.

Объединяя теоремы 2.1 и 2.2, получим:

Теорема 2.3. Задача Коши-Римана-Гильберта (К-Р-Г) в классе M_o имеет единственное решение. Если же $f_j \in M_\beta$, то неоднородная задача К-Р-Г в классе $M_{2\beta}$ имеет решение, а однородная задача в этом же классе имеет конечное число линейно независимых решений. В классе $M = \cup_{\beta \geq 0} M_\beta$ неоднородная задача К-Р-Г имеет решение, а однородная–бесконечно много линейно независимых решений.

§3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Введём полиномы по λ:

$$a_j(\xi, \lambda) = \sum_{l \leq n-1} a_{jl}(\xi) \lambda^l, \quad j = 0, ..., m-1, \tag{3.1}$$

$$b_j(\xi, \lambda) = a_j(\xi, \lambda) (\mathrm{mod}\ P_k(\xi, \lambda)) = \sum_{l \leq k-1} b_{jl}^{(1)}(\xi) \lambda^l, \quad j = 0, ..., k-1, \quad \xi > 0, \tag{3.2}$$

$$b_j'(\xi, \lambda) = a_j(\xi, \lambda) (\mathrm{mod}\ Q_{m-k}(\xi, \lambda) P_k(\xi, \lambda)) = \sum_{l \leq m-1} b_{jl}^{(2)}(\xi) \lambda^l,$$

$$j = 0, ..., m-1, \xi < 0. \tag{3.3}$$

Пусть

$$B_1(\xi) = \left(b_{jl}^{(1)}(\xi)\right)_{j,l=0}^{k-1}, \xi > 0, \tag{3.4}$$

$$B_2(\xi) = \left(b_{jl}^{(2)}(\xi)\right)_{j,l=0}^{m-1}, \xi < 0 \tag{3.5}$$

–матрицы порядков k и m.

Теорема 3.1. Условия

$$\det B_1(\xi) \not\equiv 0, \tag{3.6}$$

$$\det B_2(\xi) \not\equiv 0 \tag{3.7}$$

необходимы и достаточны для разрешимости неоднородной задачи А2 в классе M.

Теорема 3.2. Условия

$$\det B_1(\xi) \neq 0 \ \forall \xi \geq 0 \tag{3.8}$$

$$\det B_2(\xi) \neq 0 \ \forall \xi \leq 0 \tag{3.9}$$

необходимы и дастаточны для существования и единственности решения задачи А2 в классе M_0.

Доказательство теоремы 3.1. Докажем достаточность условий (3.6), (3.7). Из разложения в ряд Пюизьё элементов матриц $B_1(\xi)$, $B_2(\xi)$ следует, что функции $\det B_1(\xi)$, $\det B_2(\xi)$ могут иметь лишь конечное число нулей или быть тождественным нулем. Мы ограничимся лишь единственной точкой $\xi = 0$, в которой $\det B_1(0+) = \det B_2(0-) = 0$.

Заметим, что $b_{jl}^{(1)}(\xi) \in C^\infty(R^+)$, $b_{jl}^{(2)}(\xi) \in C^\infty(R^-)$, при $\xi \neq 0$.

Представляя $u(x,t)$ в виде $u(x,t) = u^+(x,t) + u^-(x,t)$ (см. (2.14)), мы вместо задачи (2), (7), (8), получим задачи:

3.

$$P_n(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t})u^-(x,t) = 0, \tag{3.10}$$

$$\sum_{l=0}^{n-1} a_{jl}(i\frac{\partial}{\partial x})\frac{\partial^l u^-(x,0)}{\partial t^l} = f_j^-(x), \quad j = 0,...,k-1. \tag{3.11}$$

4.

$$P_n(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t})u^+(x,t) = 0, \tag{3.12}$$

$$\sum_{l=0}^{n-1} a_{jl}(i\frac{\partial}{\partial x})\frac{\partial^l u^+(x,0)}{\partial t^l} = f_j^+(x), \quad j = 0,...,k-1, \tag{3.13}$$

$$\sum_{l=0}^{n-1} a_{jl}(i\frac{\partial}{\partial x})\frac{\partial^l u^+(x,0)}{\partial t^l} = q_j^+(x), \quad j = k,...,m-1. \tag{3.14}$$

Условие (3.14) мы получаем так же, как и (2.35) из (2.33).

Рассмотрим вспомогательную задачу

5.

$$P_n(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t})w(x,t) = \sum_{j\le N_0} a_j(t)x^j, \tag{3.15}$$

$$\sum_{l\le n-1} a_{jl}(i\frac{\partial}{\partial x})\frac{\partial^l w(x,0)}{\partial t^l} = \sum_{s\le N_0} b_{js}x^s, \quad j=0,...,k-1, \tag{3.16}$$

где $a_j(t) \in M, b_{js} \in C$. Покажем, что задача 5 в классе M имеет решение, если выполнено условие (3.6).

Рассмотрим

$$P_{\rho(0)}(\xi,\lambda) = \prod_{j=1}^{\rho(0)}(\lambda - \lambda_{r_j}(\xi)) = \lambda^{\rho(0)} + \sum_{j=1}^{\rho(0)} p_j(\xi)\lambda^{\rho(0)-j}, \quad |\xi| < \varepsilon, \tag{3.17}$$

где $\lambda_{r_j}(\xi)$–те из корней, которые принадлежат области $\Pi^{\bullet}_{\lambda}$ при $\xi = 0$. Очевидно, что коэффициенты $p_j(\xi)$ полинома $P_{\rho(0)}(\xi,\lambda)$ бесконечно дифференцируемы. Мы имеем

$$P_{\rho(0)}(\xi,\lambda) = Q_{\rho(0)-k}(\xi,\lambda)P_k(\xi,\lambda), \quad |\xi| < \varepsilon, \tag{3.18}$$

где $Q_{\rho(0)-k}(\xi,\lambda)$–полином по λ степени $\rho(0)-k$.

Положим

$$c_j(\xi,\lambda) = a_j(\xi,\lambda)(\bmod P_{\rho(0)}(\xi,\lambda)) = \sum_{l=0}^{\rho(0)-1} c_{jl}(\xi)\lambda^l, \quad j=0,...,k-1, \quad |\xi| < \varepsilon \tag{3.19}$$

и введем прямоугольную матрицу

$$C(\xi) = (c_{jl}(\xi)), \quad j = 0,...,k-1;\ l = 0,...,\rho(0)-1. \tag{3.20}$$

Имеет место

Лемма 3.1. Справедлива формула

$$\mathrm{rank}C(\xi) = k \quad \forall\xi \in (0,\varepsilon). \tag{3.21}$$

Доказательство. Напомним, что по предположению $\mathrm{rank}b^{(1)}_{jl}(\xi) = k$ при $0 < \xi < \varepsilon$, где $b^{(1)}_{jl}(\xi)$ определены в (3.2). Согласно (3.18) имеем

$$c_j(\xi,\lambda) = P_k(\xi,\lambda)r_j(\xi,\lambda) + b_j(\xi,\lambda), \quad j=0,...,k-1, \quad \xi \in (0,\varepsilon), \tag{3.22}$$

где $r_j(\xi,\lambda)$–полиномы от λ, а $b_j(\xi,\lambda)$ определены в (3.2). Если в некоторой точке $\xi_0 \in (0,\varepsilon)$ ранг матрицы $C(\xi_0)$ меньше k, то $\mathrm{rank}(b_{jl}^{(1)}(\xi_0)) < k$, что противоречит условию $\mathrm{rank}(b_{jl}^{(1)}(\xi)) = k$ при $\xi > 0$.

Согласно работе [6] матрица $C(\xi)$ может быть представлена в форме:

$$C(\xi) = R_1(\xi)D(\xi)R_2(\xi), \quad |\xi| < \varepsilon, \tag{3.23}$$

где $D(\xi) = \{\xi^{n_j}\delta_l^j\}$–диагональная матрица порядка k, элементы матриц $R_1(\xi)$, $R_2(\xi)$ аналитичны при $|\xi| < \varepsilon$, $\det R_1(\xi) \neq 0$, $\mathrm{rank} R_2(0) = k$.

Теперь мы готовы к доказательству разрешимости задачи 5.

Заметим, что правая часть в (3.15) может быть взята равной нулю (см. Теорему 1.1). Таким образом имеем

$$P_{\rho(0)}(\xi, \frac{\partial}{\partial t})\widehat{w}(\xi,t) = 0, \tag{3.24}$$

$$\sum_{l=0}^{\rho(0)-1} c_{jl}(\xi)\frac{\partial^l \widehat{w}(\xi,0)}{\partial t^l} = \alpha_j(\xi), \quad j = 0,...,k-1, \tag{3.25}$$

где $\alpha_j(\xi) = F[\sum_{s\leq N_0} b_{js} x^s]$ сосредоточен в точке $\xi = 0$.

Положим

$$v = (v_0,...,v_{k-1}) = R_2(\xi)\left(\widehat{w}(\xi,0),..., \frac{\partial^{\rho(0)-1}\widehat{w}(\xi,0)}{\partial t^{\rho(0)-1}}\right). \tag{3.26}$$

Условия (3.25) перепишут ся в виде

$$\xi^{n_j} v_j(\xi) = \alpha_j^{(1)}(\xi), \quad j = 0,...,k-1, \tag{3.27}$$

где функционалы $\alpha_j^{(1)}(\xi)$ также сосредоточены в точке $\xi = 0$. Ясно, что система (3.27) допускает решение, сосредоточенное в точке $\xi = 0$. Следовательно, из (3.26) получим

$$\sum_{l=0}^{\rho(0)-1} r_{jl}^{(2)}(\xi)\frac{\partial^l \widehat{w}(\xi,0)}{\partial t^l} = \beta_j(\xi), \quad j = 0,...,k-1, \tag{3.28}$$

где $\mathrm{rank}(r_{jl}^{(2)}(\xi)) = k$, при $|\xi| < \varepsilon$, а $\beta_j(\xi)$ сосредоточены в точке $\xi = 0$. Добавляя к условиям (3.28) $\rho(0) - k$ условий такого же вида так, чтобы определитель полученной системы был отличен от нуля, при $|\xi| < \varepsilon$, мы найдём

$$\frac{\partial^j \widehat{w}(\xi,0)}{\partial t^j} = \gamma_j(\xi), \quad j = 0, ..., \rho(0)-1, \tag{3.29}$$

где функционалы $\gamma_j(\xi)$ сосредоточены в точке $\xi = 0$. Таким образом, для определения $\widehat{w}(\xi,t)$ мы получили задачу Коши (3.24), (3.29), решение которой запишется в виде

$$\widehat{w}(\xi,t) = \sum_{j=0}^{\rho(0)-1} v_j(\xi,t)\gamma_j(\xi), \tag{3.30}$$

где $v_j(\xi,t) \in C^\infty$ аналитичны по $t \in \Pi_\alpha$, определяются формулой (2.3), выписанной для полинома $P_{\rho(0)}(\xi,\lambda)$, $|\xi| < \varepsilon$. Так как все корни полинома $P_{\rho(0)}(\xi,\lambda)$ в точке $\xi = 0$ принадлежат области Π_α^*, то

$$|D_\xi^l D_t^k v_j(0,t)| \le c_{lk}(1+|t|)^{m_{lk}}, \; t \in \overline{\Pi}_\alpha. \tag{3.31}$$

Остается заметить, что формула (3.30) зависит от функции $D_\xi^l v_j(0,t)$, поскольку функционал $\gamma_j(\xi)$ сосредоточен в точке $\xi = 0$. Таким образом, $\dot{w}(x,t) = F^{-1}[\widehat{w}(\xi,t)] \in M$ и разрешимость задачи 5 доказана.

Исследуем теперь задачи 3, 4. Переходя к образам Фурье в (3.10), (3.11) и используя обозначение (3.2), будем иметь (см. (2.36))

$$P_k(\xi, \frac{\partial}{\partial t})\widehat{u}^-(\xi,t) = 0, \quad \xi > 0, \tag{3.32}$$

$$\sum_{l=0}^{k-1} b_{jl}^{(1)}(\xi)\frac{\partial^l \widehat{u}^-(\xi,0)}{\partial t^l} = \widehat{f}_j^-(\xi), \; \xi > 0, \; j = 0, ..., k-1. \tag{3.33}$$

Условие (3.33) перепишем в форме

$$\frac{\partial^j \widehat{u}(\xi,0)}{\partial t^j} = \sum_{l=0}^{k-1} B_{jl}^{(1)}(\xi)\widehat{f}_l^-(\xi), \; j = 0, ..., k-1, \tag{3.34}$$

где $B_{jl}^{(1)}(\xi)$–элементы матрицы $(B_1(\xi))^{-1}$. Так как коэффициенты полинома $P_k(\xi,\lambda)$ удовлетворяют

оценкам (1.7), то имеем

$$|D_\xi^s B_{jl}^{(1)}(\xi)| \le c_s|\xi|^{m_s}(1+|\xi|)^{n_s}. \tag{3.35}$$

Предположим, что $f_j(x) \in M_\beta, j = 0, ..., m-1$, а $k_0, \nu_0 \gg 1$ такие, что (см. (2.38),(2.40))

$$\left| F_\xi^{-1} \left[\frac{\theta^+(\xi^{\nu_0}) B_{jl}^{(1)}(\xi) v_j^{(1)}(\xi,t)}{(1+\xi^2)^{k_0}} \right] \right| \leq c \frac{(1+|t|)^{m_{01}}}{(1+|x|)^{\beta+1}}. \quad (3.36)$$

Тогда, взяв в условиях (7), (3.11), вместо $f_j \in M_{beta}$ функцию $D_x^{\nu_0} f_j \in M_\beta$, получим

$$u_0^-(x,t) = F_\xi^{-1} \left[\sum_{j \leq k-1} \frac{\theta^+(\xi^{\nu_0}) B_{jl}^{(1)}(\xi) v_j^{(1)}(\xi,t)}{(1+\xi^2)^{k_0}} \right] * (1 - \frac{d^2}{dx^2})^{k_0} f_j(x) \in M_\beta. \quad (3.37)$$

Функция $u_0^-(x,t)$ удовлетворяет равенствам (см. также (2.46), (2.47))

$$P_n(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) u_0^-(x,t) = \sum_{j \leq \beta-1} a_j(t) x^j, \quad (3.38)$$

$$\sum_{l=0}^{n-1} a_{jl}(i\frac{\partial}{\partial x}) \frac{\partial^l u^-(x,0)}{\partial t^l} = D_x^{\nu_0} f_j^-(x) + \sum_{s \leq \beta-1} b_{js} x^s, \quad j = 0, ..., k-1. \quad (3.39)$$

Далее, поступая как и при исследовании задачи (2.42), (2.43), мы сведём вопрос о разрешимости задачи 3 к разрешимости задачи 5. Таким образом, задача 3 имеет решение. Задача 4 исследует ся аналогично и доказывает ся её разрешимость.

Итак, достаточность условий (3.6), (3.7) доказана. Теперь докажем их необходимость. Для определенности пусть $\det B_1(\xi) \equiv 0$ при $\xi \geq 0$. Покажем, что задача A2 в классе M имеет решение не для всех $f_j(x)$. Заметим, что если задача A2 имеет решение u, то образ Фурье $\widehat{u}^-$ функции u^- (см. 2.14) удовлетворяет задаче:

$$P_k(\xi, \frac{\partial}{\partial t}) \widehat{u}^-(\xi, t) = 0, \xi > \delta > 0, \quad (3.40)$$

$$\sum_{l=0}^{k-1} b_{jl}^{(1)}(\xi) \frac{\partial^l \widehat{u}^-(\xi,0)}{\partial t^l} = \widehat{f}_j^-(\xi), \, j = 0, ..., k-1, \xi > \delta > 0. \quad (3.41)$$

Заметим также, что элементы $b_{jl}^{(1)}(\xi)$ матрицы $B_1(\xi)$-аналитические функтсии от $\xi > 0$ и имеют конечное число нулей при $\xi \geq \delta > 0$ или равны тождественно нулю. От сюда следует, что существует интервал $(a, b) \subset \{\xi > \delta\}$, на котором

$$B_1(\xi) = M_1(\xi) D_1(\xi) N_1(\xi), \quad (3.42)$$

где $\det M_1(\xi) \neq 0, \det N_1(\xi) \neq 0$, а $D_1(\xi)$– диагональная матрица, элементы этих матриц также аналитичны. Так как $\det B_1(\xi) \equiv 0$, то по крайней мере один из диагональных элементов матрицы $D_1(\xi)$ равен тождественно нулю. Используя (3.42) и (3.41), убедимся, что задача (3.40), (3.41) имеет решение не для всех правых частей. Необходимость условий (3.6), (3.7), а заодно и Теорема 3.1 доказана.

Доказательство теоремы 3.2 очевидно.

§4 ПРИМЕРЫ

I. Модельным уравнением вида (2) является уравнение Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad u \in M, x \in \mathbb{R}, t \in \Pi_\alpha. \tag{4.1}$$

Имеем, $\lambda(\xi) = \xi$ и поэтому $\rho(\xi) = 0$, при $\xi > 0$ и $\rho(\xi) = 1$, при $\xi \leq 0$, если $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Если же $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\rho(\xi) = 0$, при $\xi \neq 0$. В наших обозначениях $m = 1$, $k = 0$, при $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ и $m = k = 0$, при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Очевидно, при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ граничная задача для уравнения (4.1) отсутствует, а при $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ имеем задачу Римана-Гильберта

$$\mathrm{Re}\, u(x,0) = f(x), \quad f \in M. \tag{4.2}$$

Исследуем задачу (4.1),(4.2). Представим решение уравнения (4.1) в виде $u(x,t) = \varphi(x+it)$. Так как $u(x,t)$ аналитична для $t \in \Pi_\alpha$ при всех $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(.)$ — аналитическая функция в верхней полуплоскости. Заметим, что для $\alpha > \frac{\pi}{2}$ функция $\varphi(.)$ целая и поскольку $u \in M$ имеет рост, не выше степенного, то по теореме Лиувилля $u(x,t)$ есть многочлен по x и по t. В этом случае не может быть речи о граничной задаче. Итак, мы имеем задачу нахождения функции φ, аналитической в верхней полуплоскости, имеющей степенной рост и удовлетворяющей следующему условию:

$$\mathrm{Re}\,\varphi(x) = f(x). \tag{4.3}$$

Решение этой задачи известно и в классе M_0 задаётся формулой

$$\varphi(x+iy) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - (x+iy)}\, d\tau.$$

От сюда имеем

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\tau)}{\tau-(x+it)}\,d\tau\in M_0.$$

Для случая $f\in M_\beta$, $\beta\geq 1$, решение (4.3) может быть получено следующим образом. Пусть $D_x^j f(0)=0$ для всех $j\leq\beta-1$, тогда $g(x)=\frac{f(x)}{x^\beta}\in M_0$ и поэтому

$$\varphi(x+iy)=\frac{(x+iy)^\beta}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\tau)}{\tau^\beta(\tau-x-iy)}\,d\tau.$$

Используя разложение $f(x)=f(0)+\ldots+\frac{x^{\beta-1}}{(\beta-1)!}f^{(\beta-1)}(0)+q(x)$, мы решим (4.3) и, следовательно, (4.1) и (4.2) для любой $f\in M_\beta$.

II. Пусть $\mu_1,\ldots,\mu_n$–попарно различные действительные числа такие, что $\mu_1,\ldots,\mu_m>0$ и $\mu_{m+1},\ldots,\mu_n<0$. Рассмотрим уравнение вида:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\mu_1\frac{\partial}{\partial t}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\mu_n\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=0,\quad (x,t)\in\mathbb{R}\times\Pi_\alpha,\ 0<\alpha\leq\frac{\pi}{2}. \tag{4.4}$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид:

$$(-i\xi+i\mu_1\lambda)\cdots(-i\xi+i\mu_n\lambda)=0.$$

Откуда $\lambda_j=\xi/\mu_j$, $j=1,\ldots,n$ и $\rho(\xi)=m$ при $\xi<0$ и $\rho(\xi)=n-m=k$, при $\xi>0$. Предположим, что $m>k$, с граничными условиями

$$\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j}=f_j(x),\quad j=0,\ldots,k-1, \tag{4.5}$$

$$\mathrm{Re}\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j}=f_j(x),\quad j=k,\ldots,m-1, \tag{4.6}$$

мы получаем задачу A1, для которой укажем схему доказательства существования решения.

Решение уравнения (4.4) представим в виде

$$u(x,t)=\sum_{j=1}^{m}\varphi_j\left(x+i\frac{t}{\mu_j}\right)+\sum_{j=m+1}^{n}\varphi_j\left(x+i\frac{t}{\mu_j}\right), \tag{4.7}$$

где $\varphi_1(.),\ldots,\varphi_m(.)$ и $\varphi_{m+1}(.),\ldots,\varphi_n(.)$ —функции, имеющие степенной рост и аналитические в верхней и нижней полуплоскости, соответственно. Подставляя (4.7) в (4.5) и (4.6), мы получим

$$\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{i}{\mu_l}\right)^j\varphi_l^{(j)}(x)+\sum_{l=m+1}^{n}\left(\frac{i}{\mu_l}\right)^j\varphi_l^{(j)}(x)=f_j(x),\quad j=0,\ldots,k-1, \tag{4.8}$$

$$\operatorname{Re}\left[\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{i}{\mu_l}\right)^j \varphi_l^{(j)}(x)+\sum_{l=m+1}^{n}\left(\frac{i}{\mu_l}\right)^j \varphi_l^{(j)}(x)\right]=f_j(x), \quad j=k,...,m-1. \quad (4.9)$$

Решая уравнения в (4.8), находим

$$\sum_{l=m+1}^{n}\left(\frac{i}{\mu_l}\right)^j \varphi_l^{(j)}(x)=g_j^-(x), \quad j=0,...,k-1, \quad (4.10)$$

$$\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{i}{\mu_l}\right)^j \varphi_l^{(j)}(x)=g_j^+(x), \quad j=0,...,k-1. \quad (4.11)$$

Дифференцируя $k-j-1$ раз j-ое уравнение в (4.10), получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно функций $\varphi_{m+1}^{(k-1)}(x),...,\varphi_n^{(k-1)}(x)$ с определителем Вандермонда, отличным от нуля. Таким образом, мы найдём функции $\varphi_{m+1}(x),...,\varphi_n(x)$, подставляя которые в (4.9), получим

$$\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{i}{\mu_l}\right)^j \varphi_l^{(j)}(x)=q_j^+(x), \quad j=k,...,m-1. \quad (4.12)$$

Решая систему (4.11), (4.12), мы найдём функции $\varphi_1(x),...,\varphi_m(x)$, это завершает решение задачи (4.4) – (4.6).

III. Рассмотрим уравнение вида (4.1) с младшим членом:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial t}+u=0, \quad u\in M_0,\ x\in\mathbb{R},\ t\in\Pi_\alpha,\ 0<\alpha\le\frac{\pi}{2}. \quad (4.13)$$

Имеем $\lambda=\xi+i$ и рассматриваем задачу

$$\operatorname{Re}u(x,0)=f(x)\in M_0. \quad (4.14)$$

Общее решение уравнения (4.13) можно записать в виде

$$u(x,t)=e^{it}\varphi(x+it), \quad (4.15)$$

где $\varphi(.)$ — функция, аналитическая в верхней полуплоскости. Из (4.15), при $t\in\mathbb{R}^+$ имеем $\varphi(x+it)=e^{-it}u\in M_0$. Следовательно, задача $\operatorname{Re}\varphi(x)=f(x)$ решается как и в примере 1. Так как $|e^{it}|\le 1$, $t\in\Pi_\alpha$, то по формуле (4.15) найдём искомое решение рассматриваемой задачи.

В заключении отметим, что если вместо (4.13) рассмотреть уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial t}-u=0, \quad x\in\mathbb{R},\ t\in\Pi_\alpha,\ 0<\alpha\le\frac{\pi}{2}, \quad (4.16)$$

то $\lambda(\xi) = \xi - i$ и ясно, что условие (4) не имеет места. Поэтому уравнение (4.16) не входит в изученный класс. Но если рассмотреть (4.16) только для $t \in \mathbb{R}^+$, то полученные результаты остаются в силе.

ABSTRACT. Let $u(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \overline{\Pi}_\alpha)$ be analytic in $t \in \Pi_\alpha = \{t | 0 < \arg t < \alpha < \pi\}$ having polynomial growth. We consider partial differential equation $\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^n A_j\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{n-j}u(x,t)}{\partial t^{n-j}} = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \Pi_\alpha$. The main assumption is that the number of roots of characteristic equation $\lambda^n + A_1(\xi)\lambda^{n-1} + \cdots + A_n(\xi) = 0$ within angular domain $\Pi_\alpha^* = \{t | \pi/2 \leq \arg t \leq \frac{3}{2}\pi - \alpha\}$ remains constant for $\xi > 0$ and $\xi < 0$. The Cauchy-Riemann-Hilbert type problem and the general boundary value problem are posed. The main result of the paper is that the Cauchy-Riemann-Hilbert type problem always has a solution. For general boundary value problem the necessary and sufficient condition of solvability is obtained. A class of correctness is given for $f(x,t) \equiv 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андрян, "Задача Коши для уравнений с частными производными в угловых областях в классе функций полиномиального роста," Доклады расш. заседаний семинара ИПМ им. Векуа, том 5, № 1, 1990.
2. А. А. Андрян, "Граничные задачи в двугранных углах для уравнений в частных производных, не разрешённых относительно старшей производной," Докл. Акад. Наук Армении, том 93, № 1, стр. 11 – 16, 1992.
3. A. A. Andrian, "On the existence of solution of system of partial differential equations" (to appear).
4. Л. Хермандер, Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, том 2, Москва, Мир, 1986.
5. Г. И. Эскин, Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений, Москва, Наука, 1973.
6. Н. Е. Товмасян, "Краевые задачи для нерегулярных систем дифференциальных уравнений на полуплоскости в классе обобщённых функции и функций полиномиального роста," Математ. сборник, том 131 (173), № 2 (10), 1986.

12 Мая 1992

Ереванский Инженерный Университет

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 27 НОМЕР 3 1992

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы

Интегральные представления в трубчатых областях над аффинно–однородными конусами
А. О. Карапетян 1

Распределения Гиббса в модели Изинга вблизи точек фазового перехода первого рода
Д. Г. Мартиросян 24

Принцип вариации касательной в комплексном анализе
Г. А. Барсегян 39

Квазимаксимальные полугруппы
Л. М. Акопян 66

Задача типа Коши–Римана–Гильберта для нерегулярных дифференциальных уравнений в частных производных
А. А. Андрян 75

CONTENTS

VOLUME 27 NUMBER 3 1992

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(ARMENIAN ACADEMY OF SCIENCES)

PAGES

Integral representation in tube domains over affine-homogeneous cones
A. H. Karapetyan 1

Gibbs distribution in the Ising model near points of the first order phase transition
D. H. Martirosian 24

Tangent variation principle in complex analysis
G. A. Barsegian 39

Quasimaximal semigroups
L. M. Hakobian 66

A Cauchy–Riemann–Hilbert type problem for irregular partial differential equations
A. A. Andrian 75