ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

«Մաթեմատիկա» ամ-

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղադրվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

ГАУССОВСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ФИКСИРОВАННОЙ И ВОЗРАСТАЮЩЕЙ РАЗМЕРНОСТИ

В. Р. Фаталов, В. - Д. Рихтер

Известия Академии Наук Армении. Математика, том 27, №1, 1992

В работе методом Лапласа для кратных интегралов получено асимптотическое поведение вероятности $P((\sum_{i=1}^{k}|X_i|^p)^{\frac{1}{p}} > u)$, $u \to \infty, p > 0$ для гауссовских независимых случайных величин X_i. Исследовано также большое уклонение плотности функционала Минковского для возрастающей размерности k.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Большие уклонения вероятностей норм или более общих функционалов гауссовских векторов со значениями в различных функциональных пространствах вызывают широкий интерес специалистов (см., например, [2,3,4,7,14], а асимптотическое поведение супремума норм гауссовских элементов в $C(T)$ исследовалось в работах [3,5,7,11,17].

Пространствам l_p и

$$l_p^{(k)} = \{x \in R^k : (\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\}, p > 0$$

уделялось мало внимания. Пусть $X = (X_1, X_2, ..., X_k, ...)$ и $X^{(k)} = (X_1, ..., X_k)$ обозначают гауссовские случайные векторы с независимыми координатами в l_p и $l_p^{(k)}$, соответственно. Положим

$$||X||_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |X_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Точное асимптотическое поведение вероятности $P(||X||_p > u)$, при $u \to \infty$ изучено в работах [3,8,9,12,18] при $p \geq 2$ (менее изучен случай $p < 2$). В [3, Теорема 4.4] верхние и нижние оценки даны для $P(||X^{(k)}||_{p,k} > u)$, при $0 < p < 2$, а в [14] установлен порядок асимптотического поведения $P(||X^{(k)}||_{p,k} > u)$, при $u \to \infty$ для $1 \le p < 2$.

Естественно, что задачи больших уклонений в l_p и $l_p^{(k)}$ тесно связаны. Предположим, что математические ожидания всех компонент X_i выше определенного гауссовского вектора X равны нулю. Пусть σ_i^2 обозначает дисперсию $X_i, i = 1, 2, \ldots$ и предположим, что

$$\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2 \ge \sigma_3^2 \ge \ldots$$

Далее, пусть выполнено условие для некоторой неограниченно возрастающей последовательности (d_k)

$$\limsup_{k\to\infty} k d_k B_k \log k < \infty,$$

где

$$B_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} \sigma_i^p.$$

В работах [12,15] было показано, что если $p > 2$, то

$$P(||X||_p > u) \sim P(||X^{(k)}||_{p;k} > u) \qquad \text{при} \quad u \to \infty$$

с размерностью k, порождающей некоторую функцию $k = k(u)$, удовлетворяющую соотношению асимптотической эквивалентности

$$k(u) \sim \frac{u^2}{d_u^{\frac{1}{3}} \log u} \qquad \text{при} \quad u \to \infty.$$

При доказательстве этого результата показывается, что поведение большого уклонения гауссовской меры определяется поведением меры в некоторых малых окрестностях таких точек множества уклонения, которые расположены вблизи начала координат.

В §3, мы приводим результаты подобного вида и доказываем аналогичные теоремы в локальном случае, а именно, для плотностей некоторых типов функционала Минковского гауссовских случайных векторов. Размерности этих векторов стремятся к бесконечности. Мы используем геометрический метод доказательства, впервые примененный в работах [13,14,16].

В §2, исследуется асимптотическое поведение вероятности больших уклонений $P(||X^{(k)}||_{p,k} > u)$, $u \to \infty$ для фиксированной размерности k. Случаи $p > 2, p = 2, 0 < p < 2$ изучаются с помощью метода Лапласа для кратных интегралов [1,4,6].

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧНОЙ АСИМПТОТИКИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ МЕТОДОМ ЛАПЛАСА

Всюду в этом параграфе $X^{(k)} = (X_1, ..., X_k)$ обозначает гауссовский случайный вектор со значениями в k-мерном евклидовом пространстве R^k, k фиксировано. Предположим, что математическое ожидание $EX^{(k)}$ – нулевой элемент в R^k, а ковариантная матрица $EX^T X = R$ предполагается диагональной

$$R = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, ..., \sigma_k^2)$$

с элементами σ_i^2 , удовлетворяющими

$$\sigma_1^2 = ... = \sigma_m^2 > \sigma_{m+1}^2 \geq \sigma_{m+2}^2 \geq ... \geq \sigma_k^2$$

для некоторого $m \in \{1, 2, ..., k\}$. Положим

$$\Psi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} x^{-1} \exp(-\frac{x^2}{2}),\ x \neq 0.$$

Теорема 1. *(i) Если $p > 2$ и $C_p = 2m$ для всех p, то*

$$P(||X^{(k)}||_{p,k} > x) = C_p \Psi(\frac{x}{\sigma_1})(1 + O(x^{-2})), \quad x \to \infty.$$

(ii) Если $p = 2$, то

$$P(||X^{(k)}||_{p,k} > x) = C_2 x^{m-1} \Psi(\frac{x}{\sigma_1})(1 + O(x^{-2})), \quad x \to \infty,$$

где

$$C_2 = 2^{\frac{3-m}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} \sigma^{1-m} \prod_{i=m+1}^{k} \frac{(1 - \frac{\sigma_i^2}{\sigma_1^2})^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})},$$

и Γ - гамма функция.

(iii) Если $2 > p > 0$, то

$$P(||X^{(k)}||_{p,k} > x) = C_p \Psi(\frac{x}{\sigma(p)})(1 + O(x^{-2})),\ x \to \infty,$$

где

$$C_p = 2^k(2-p)^{\frac{1-k}{2}}$$

и

$$\sigma(p) = (\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^{\frac{2p}{2-p}})^{\frac{2-p}{2p}}.$$

Замечания

1. Напомним, что если Φ обозначает стандартное гауссовское распределение в R^k, а H - произвольное полупространство в R^k с евклидовым расстоянием от начала координат равным единице, то

$$\Phi(xH) = \Psi(x)(1 + O(1)) \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

2. В [18] дана оценка точного асимптотического поведения вероятности

$$P(||X||_2 > x) \quad \text{при} \quad x \to \infty$$

для гильбертова пространства l_2-значных гауссовских случайных элементов $X = (X_1, X_2, ...)$. Это соотношение в случае (ii) является непосредственным следствием результата в [18]. Более того, мы приведем здесь другое доказательство, тесно связанное с доказательством в других конечномерных случаях (i) и (iii). Это доказательство показывает откуда возникает существенное различие в асимптотическом поведении $P(||X^{(k)}||_{p,k} > x)$, $x \to \infty$. Напомним, что метод, использованный в [18], был основан на преобразовании Лапласа и интегрировании вдоль границы в комплексной плоскости.

3. С помощью формулы нового геометрического представления многомерного стандартного гаусссовского распределения, в [14] были доказаны соотношения типа

$$0 < \liminf_{x \to \infty} \frac{P(||X^{(k)}||_{p,k} > x)}{\Psi(x)} \le \limsup_{x \to \infty} \frac{P(||X^{(k)}||_{p,k} > x)}{\Psi(x)} < \infty,$$

при $1 \le p < 2$, $2 < p$, $\sigma_1 = 1$ и $m = k$. В [10] было показано, что существуют постоянные C_p такие, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(||X^{(k)}||_{p,k} > x)}{\Psi(x)} = C_p.$$

Однако, в [10] авторам не удалось оценить их. Случай $0 < p < 1$ не был изучен.

Как упоминалось выше, мы будем использовать метод Лапласа для определения постоянных C_p в трех случаях Теоремы 1. Для этого используем соответствующий результат из теории многомерных интегралов Лапласа, который можно найти в [6, Теорема 4.5]. Прежде, чем сформулировать этот результат мы рассмотрим уравнение

$$P(\|X^{(k)}\|_{p,k} > x) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} x^k \prod_{i=1}^{k} \sigma_i^{-1} J(x),$$

$$J(x) = \underset{\{y \in R^k : \|y\|_{p,k} > 1\}}{\int \cdots \int} \exp\left(-\frac{x^2}{2} \sum_{i=1}^{k} \frac{y_i^2}{\sigma_i^2}\right) dy_1 \ldots dy_k.$$

Пусть теперь

$$F(x) = \int_{y \in \Omega} f(y) \exp(xS(y)) dy, \quad x > 0$$

обозначает произвольный интеграл Лапласа по области $\Omega \subset R^k$ от вещественнозначных функций f и S, определенных на замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω и удовлетворяющих следующим условиям :

(C1) f и S непрерывны на $\overline{\Omega}$.

(C2) функция S имеет только один максимум в y^o, $y^o \in \partial\Omega$, где $\partial\Omega$ обозначает границу Ω.

(C3) Нормальная производная S по внутренней нормали n от $\partial\Omega$ существует в точке y^o и не совпадает с нулевым элементом R^k : $\frac{\partial S}{\partial n}(y^o) \neq 0$.

(C4) Функции f , S также как и граница $\partial\Omega$, дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности y^o.

(C5) Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$ обозначает координаты точки в ортонормированном базисе в касательной гиперплоскости к границе $\partial\Omega$ в точке y^o, а $\widetilde{S}$ - сужение S на $\partial\Omega$ в окрестности точки y^o. Предположим, что

$$B = \left(\frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(y^o) \right) \quad i, j = 1, \ldots, k-1,$$

– отрицательно определенная матрица.

Замечание 4. Точка y^o, удовлетворяющая условиям (C3) и (C5), называется невырожденной.

Теорема 2. ([6]) *Если выполнены предположения (C1) - (C5), то*

$$F(x) = Cx^{-\frac{k+1}{2}} f(y^o)\exp(xS(y^o))(1+O(x^{-1})), \quad x \to \infty, \tag{1}$$

где

$$C = (2\pi)^{\frac{k-1}{2}} |\det B|^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{\partial S}{\partial n}(y^o)\right)^{-1}.$$

Замечание 5. Если S имеет конечное число точек максимума на $\partial\Omega$, то из аддитивности интеграла, $F(x)$ равно сумме членов в правой части (1), соответствующих всем точкам максимума.

Для доказательства Теоремы 1 применим Теорему 2 к $J(x)$. Для этого положим

$$\Omega = \{y \in R^k : ||y||_{p,k} > 1\}$$

и

$$-S(y) = \sum_{i=1}^{k} \frac{y_i^2}{\sigma_i^2}, y \in \Omega.$$

Лемма 1. *(i) Если $p > 2$, то $\min(-S(y) : y \in \Omega) = \frac{1}{\sigma_1^2}$ и*

$$y_\pm^i = (0, ..., 0, \pm 1, 0, ..., 0), \quad i = 1, ..., m,$$

где ± 1 являются точками минимума функции $-S$ на границе $\partial\Omega$, причем ори фиксированном i, ± 1 расположены на i-том месте.

(ii) Если $2 > p > 0$, то $\min(-S(y) : y \in \Omega) = \frac{1}{\sigma^2(p)}$ и 2^k точек минимума на $\partial\Omega$ состоит из всех точек $z = (z_1, ..., z_k)$ с

$$z_i = \pm\left(\frac{\sigma(p)}{\sigma_1}\right)^{-\frac{2}{2-p}}, \quad i = 1, ..., k.$$

Доказательство. Из теоремы Вейерштрасса об экстремуме непрерывной функции, определенной на компактном множестве и

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{y_i^2}{\sigma_i^2} \to \infty \qquad \text{при} \quad ||y||_{2,k} \to \infty$$

следует, что для функции $-S$ существует точка минимума. При решении задачи на экстремум мы используем метод множителей Лагранжа и определяем функцию Лагранжа

$$L(y; \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 \sum_{i=1}^{k} \frac{y_i^2}{\sigma_i^2} + \lambda_1\left(1 - \sum_{i=1}^{k} |y_i|^p\right), \qquad \lambda_0, \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_0 + \lambda_1 > 0.$$

Из условия дифференцируемости (C4) для границы $\partial\Omega$, а также необходимого условия для существования экстремального значения, после дифференцирования L по y_i, получаем

$$2\lambda_0\sigma_i^{-2}y_i - \lambda_1 p|y_i|^{p-1}\mathrm{sign}(y_i) = 0, \quad i = 1, ..., k. \tag{2}$$

Кроме того, имеем уравнение

$$\lambda_1(1 - \sum_{i=1}^{k}|y|_i^p) = 0. \tag{3}$$

Если $\lambda_0 = 0$, то из (2) следует, что $\lambda_1 \neq 0$ и $y_i = 0$, при $p > 1$, а $y_i = \infty$, при $p < 1$. А это противоречит (3). Следовательно, $\lambda_0 \neq 0$.

Положим $\lambda_0 = 1$, тогда $\lambda_1 \neq 0$. Из (2) следует, что либо

$$|y_i| = \left(\frac{1}{2}\lambda_1 p\sigma_i^2\right)^{\frac{1}{2-p}} \tag{4a}$$

либо

$$y_i = 0 \qquad \text{при} \quad p > 1. \tag{4b}$$

Пусть $l \in \{1, ..., k\}$ обозначает число отличных от нуля координат критической точки y, а $I_l \subset \{1, 2, ..., k\}$ - множество индексов этих координат. Заметим, что если $1 > p > 0$, то $l = k$.

Из уравнений (2) - (4) следует, что

$$1 = \sum_{i\in I_l}|y_i|^p = \frac{2}{\lambda_1{}^p}\sum_{i\in I_l}\frac{y_i^2}{\sigma_i^2}$$

и

$$\lambda_1 = \frac{2}{p}\left(\sum_{i\in I_l}\sigma_i^{\frac{2p}{2-p}}\right)^{\frac{p-2}{p}}$$

Таким образом

$$|y_i| = \begin{cases} \sigma_i^{\frac{2}{2-p}}\left(\sum_{j\in I_l}\sigma_j^{\frac{2p}{2-p}}\right)^{-\frac{1}{p}} & , i \in I_l \\ 0 & , i \notin I_l. \end{cases}$$

И, следовательно

$$\min_{l\in\{1,...,k\}}\min_{I_l}\sum_{i\in I_l}\frac{y_i^2}{\sigma_i^2} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_i^2} & , \text{при} \quad p > 2 (l = 1) \\ \left(\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^{\frac{2p}{2-p}}\right)^{\frac{p-2}{p}} & , \text{при} \quad 2 > p > 0 (l = k). \end{cases}$$

Отсюда мы получаем структуру минимальной точки, и Лемма 1 доказана.

Доказательство утверждения (i) Теоремы 1. Применяем пункт (i) Леммы 1. Функция $S(y) = -\sum_{i=1}^{k} \frac{y_i^2}{\sigma_i^2}$ достигает максимума в точках на границе $y_+^1, y_-^1, \dots, y_+^m, y_-^m$ области $\overline{\Omega} = \{y \in R^k : ||y||_{p,k} \geq 1\}$. Каждая из этих точек удовлетворяет условиям Теоремы 2. Направление внутренней нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω в точках максимума совпадает с направлениями координатных осей. Нормальными производными являются

$$\frac{\partial S}{\partial y_i}(y_\pm^i) = \mp \frac{2y_i}{\sigma_i^2}\bigg|_{y_i=\pm 1} = -\frac{2}{\sigma_i^2}, \qquad i = 1, \dots, m.$$

Касательные гиперплоскости H_+^i и H_-^i к $\partial\Omega$ в точках максимума y_+^i и y_-^i, соответственно, параллельны к гиперплоскости, образованной $k-1$ векторами, направления которых совпадают с направлением координатных осей $y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_k$.

Для оценки B_+^1, обозначающей матрицу B точки y_+^1, рассмотрим сужение $\widetilde{S}_{1,+}$ функции S на $\partial\Omega$ в окрестности точки y_+^1 :

$$\widetilde{S}_{1,+}(\tilde{y}) = S|_{\partial\Omega}(\tilde{y}) = S(((1 - \sum_{i=1}^{k} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}, y_2, \dots, y_k)) =$$

$$= -\frac{1}{\sigma_1^2}(1 - \sum_{i=1}^{k} |y_i|^p)^{\frac{2}{p}} - \sum_{i=1}^{k} \frac{y_i^2}{\sigma_i^2}, \quad \tilde{y} = (y_2, \dots, y_k).$$

В точке y_+^1 имеем $\tilde{y} = 0 \in R^{k-1}$ и

$$\frac{\partial^2 \widetilde{S}_{1,+}}{\partial y_i \partial y_j}(0) = -\frac{2\delta_{i,j}}{\sigma_i^2}, \qquad i, j = 2, \dots, k,$$

где $\delta_{i,j} = 0$, при $i \neq j$ и $\delta_{i,j} = 1$, при $i = j$. Следовательно

$$B_+^1 = -2\,\mathrm{diag}\,(\frac{1}{\sigma_2^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_k^2}).$$

Аналогично, для всех $l \in \{1, \dots, k\}$ получаем, что

$$B_\pm^l = -2\,\mathrm{diag}(\frac{1}{\sigma_1^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_{l-1}^2}, \frac{1}{\sigma_{l+1}^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_k^2}),$$

т. е. отрицательно определена. Остается применить Теорему 2.

Доказательство утверждения (ii) Теоремы 1. Снова применим Теорему 2 к $J(x)$. Но так как в этом случае множество точек максимума функции

$$y \mapsto S(y) = -\sum_{i=1}^{k} \frac{y_i^2}{\sigma_i^2}$$

есть некоторое многообразие, т.е. не существует конечного числа изолированных точек, как предполагалось в Замечании 5, мы должны ограничить $J(x)$ так, чтобы выполнялись бы все условия Теоремы 2. Далее, определим частные сферические координаты $(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}, \tilde{y}_{m+1}, \dots, \tilde{y}_k)$ формулами

$$y_1 = r\cos\varphi_1,\ y_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \dots,$$

$$y_{m-1} = r\sin\varphi_1 \dots \sin\varphi_{m-2}\cos\varphi_{m-1},$$

$$y_m = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2 \dots \sin\varphi_{m-2}\sin\varphi_{m-1},$$

$$y_{m+1} = \tilde{y}_{m+1}, \dots, y_k = \tilde{y}_k.$$

Якобианом этого преобразования является

$$r^{m-1}(\sin\varphi_1)^{m-2}(\sin\varphi_2)^{m-3} \dots \sin\varphi_{m-2}.$$

Следовательно

$$J(x) = \omega_m \int_{\substack{(r^2 + \sum_{i=m+1}^{k} y_i^2 > 1, \\ r \geq 0)}} \cdots \int \exp\left(-\frac{x^2}{2}\left(\frac{r^2}{\sigma_1^2} + + \sum_{i=m+1}^{k} \frac{y_i^2}{\sigma_i^2}\right)\right) r^{m-1} dr dy_{m+1} \dots dy_k,$$

где

$$\omega_m = \int_0^{\pi} (\sin\varphi_1)^{m-2} d\varphi_1 \dots \int_0^{\pi} \sin\varphi_{m-2} d\varphi_{m-2} \int_0^{\pi} d\varphi_{m-1} = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})}$$

равно площади поверхности единичной сферы в R^m. Применим Теорему 2 к интегралу

$$I(x) = \int \cdots \int z_1^{m-1} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\left(\frac{z_1^2}{\sigma_1^2} + \sum_{i=2}^{k-m+1} \frac{z_i^2}{\sigma_{m+i-1}^2}\right)\right) dz_1 \dots dz_{k-m+1}$$

с областью интегрирования

$$\{z \in R^m : \sum_{i=1}^{k-m+1} z_i^2 > 1,\ z_1 \geq 0\}.$$

Для применения формулы (1), сформулируем без доказательства следующую лемму.

Лемма 2. *Минимум функции*

$$z \mapsto -S(z) = \frac{z_1^2}{\sigma_1^2} + \sum_{i=2}^{k-m+1} \frac{z_i^2}{\sigma_{m+i-1}^2}$$

в области

$$\overline{\Omega} = \{z \in R^{k-m+1} : \sum_{i=1}^{k-m+1} z_i^2 \geq 1, z_1 \geq 0\}$$

достигается в точке $z^o = (1, 0, ..., 0) \in \partial\Omega$, *и только в ней, и равен* $\frac{1}{\sigma_1^2}$.

Возвращаясь к доказательству утверждения (ii) Теоремы 1, рассмотрим условие (C3). $n = (z_1, 0, ..., 0)$ является внутренней нормалью к $\partial\Omega$ в точке z^o, а нормальной производной функции S по этой нормали является

$$\frac{\partial S}{\partial n}(z^o) = \frac{\partial S}{\partial z_1}(z^o) = -\frac{2}{\sigma_1^2}.$$

Наконец, остается оценить матрицу B из условия (C5). Касательная гиперплоскость к границе $\partial\Omega$ в точке z^o параллельна координатной гиперплоскости H_o, которая определяется уравнением $z_1 = 0$. Через $z_2, ..., z_{k-m+1}$ обозначим координаты точки из H_o относительно некоторого ортогонального базиса в H_o. Сужение $\widetilde{S}$ функции S на границу $\partial\Omega$ в окрестности точки z^o представляется в виде :

$$\widetilde{S}(\tilde{z}) = S|_{\partial\Omega}(\tilde{z}) = S\left(\left(\left(1 - \sum_{i=2}^{k-m+1} z_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, z_2, ..., z_{k-m+1}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sigma_1^2} - \sum_{i=2}^{k-m+1}\left(\frac{1}{\sigma_{m+i-1}^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right) z_i^2, \quad \tilde{z} = (z_2, ..., z_{k-m+1}).$$

Следовательно

$$\frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial z_i \partial z_j}(0) = -2\delta_{i,j}\left(\frac{1}{\sigma_{m+i-1}^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)$$

и

$$B = -2(\mathrm{diag}(\frac{1}{\sigma_{m+1}^2}, ..., \frac{1}{\sigma_k^2}) - \frac{1}{\sigma_1^2} I),$$

т. е. отрицательно определена, здесь I обозначает $(k-m) \times (k-m)$-мерную матрицу. Применение Теоремы 2 завершает доказательство.

Доказательство утверждения (iii) Теоремы 1. Также как и при доказательстве утверждений (i) и (ii), мы применим Теорему 2 к функции $J(x)$ (определенной после Замечания 3). Пусть $z^o = (z_1^o, ..., z_k^o)$ - одна из точек $z = (z_1, ..., z_k)$

с $z_i = \pm(\frac{\sigma(p)}{\sigma_1})^{\frac{2}{p-2}}, i = 1, ..., k$ из Леммы 1. Что касается условия (С3), покажем, что

$$\frac{\partial S}{\partial n}(z^o) = -2\left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^{\frac{4(p-1)}{2-p}}\right)^{\frac{1}{2}} \sigma(p)^{\frac{2}{p-2}}, \tag{5}$$

где $n = (n_1, ..., n_k)$ - внутренняя нормаль к

$$\partial\Omega = \{y \in R^k : \sum_{i=1}^{k} |y_i|^p = 1\}$$

в точке z^o. Заметим, что $n_i = \frac{\partial G}{\partial y_i}(z^o)$, где $G(y) = \sum_{i=1}^{k} |y_i|^p - 1$. Следовательно

$$n_i = p|z_i^o|^{p-1} \operatorname{sign} z_i^o, \ i = 1, ..., k.$$

Теперь, равенство (5) следует из

$$\frac{\partial S}{\partial n}(z^o) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial S}{\partial y_i}(z^o) \frac{n_i}{||n||_{2,k}}.$$

Что касается матрицы $B = (b_{j,q})$ покажем, что в данном случае из условия (С5) следует, что

$$\det B = (-2(2-p))^{k-1} \cdot \prod_{i=1}^{k} \sigma_i^{-2} \sum_{j=1}^{k} \frac{\sigma_j^2 n_j^2}{||n||_{2,k}^2}, \tag{6}$$

а B отрицательно определена. Наконец, заметим, что касательная гиперплоскость к границе $\partial\Omega = \{y \in R^k : G(y) = 0\}$ в точке z^o удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=1}^{k} (y_i - z_i^o) n_i = 0. \tag{7}$$

Сделаем замену переменных $u = T(y - z^o)$, где $T = (t_{i,j})_{i,j=1,...,k}$ - некоторая ортогональная матрица с

$$(t_{k,1}, ..., t_{k,k}) = \frac{n}{||n||_{2,k}}.$$

Тогда (7) эквивалентно уравнению $u_k = 0$, т.е. касательная гиперплоскость совпадает с координатной гиперплоскостью $Ou_1u_2...u_{k-1}$. Границу $\partial\Omega$ можем записать в новых координатах :

$$\partial\Omega^* = \{u \in R^k : \sum_{i=1}^{k} |z_i^o + \sum_{j=1}^{k} \theta_{ij} u_j|^p = 1\},$$

где $\theta = (\theta_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$ - обратная к T матрица.

Из теоремы о неявной функции получаем, что в окрестности точки $u = 0$ граница удовлетворяет уравнению

$$u_k = g(\tilde{u}), \qquad \tilde{u} = (u_1, \dots, u_{k-1}).$$

Здесь g - некоторая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\sum_{i=1}^{k} |z_i^o + \sum_{j=1}^{k-1} \theta_{ij} u_j + \theta_{ik} g(u_1, \dots, u_{k-1})|^p = 1 \tag{8}$$

в некоторой окрестности точки $u = (u_1, \dots, u_k) = 0$. Функцию S можно записать также в виде :

$$S(y) = S(T^{-1}u + z^o) = -\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^{-2} (z_i^o + \sum_{j=1}^{k} \theta_{ij} u_j)^2 := S^*(u).$$

Сужением $\widetilde{S}$ функции S^* на $\partial\Omega^*$ в окрестности точки z^o является

$$\widetilde{S}(\tilde{u}) = S^*|_{\partial\Omega^*}(\tilde{u}) = -\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^{-2} (z_i^o + \sum_{j=1}^{k-1} \theta_{ij} u_j + \theta_{ik} g(u_1, \dots, u_{k-1}))^2. \tag{9}$$

Из определения функции g следует, что $g(\tilde{0}) = 0$. Из геометрических соображений имеем

$$\operatorname{grad} g(\tilde{0}) = \tilde{0} = (0, \dots, 0) \in R^{k-1}.$$

Это соотношение можно получить также аналитически, дифференцируя (8) по u_j и используя соотношение $g(\tilde{0}) = 0$. Имеем

$$\frac{\partial g}{\partial u_j}(\tilde{0}) = -\frac{\sum_{i=1}^{k} \theta_{ij} |z_i^o|^{p-1} \operatorname{sign} z_i}{\sum_{i=1}^{k} \theta_{ik} |z_i^o|^{p-1} \operatorname{sign} z_i}, \qquad j = 1, \dots, k-1.$$

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{k} \theta_{ij} |z_i^o|^{p-1} \operatorname{sign} z_i^o = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{k} \theta_{ij} n_i.$$

Из определения θ следует, что

$$\sum_{i=1}^{k} \theta_{ij} |z_i^o|^{p-1} \operatorname{sign} z_i^o = \delta_{k,j} p^{-1} ||n||_{2,k}, \qquad j = 1, \dots, k \tag{10}$$

Следовательно

$$\frac{\partial g}{\partial u_j}(\bar{0}) = 0, \qquad j = 1, ..., k-1.$$

Оценивая теперь частные производные второго порядка обеих частей (8) и используя соотношение (10), получаем

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u_j \partial u_q}(\bar{0}) = -\frac{p(p-1)}{||n||_{2,k}} \sum_{i=1}^{k} |z_i^o|^{p-2} \theta_{ij} \theta_{iq},$$
$$j, q = 1, ..., k-1.$$

Отсюда следует, что

$$b_{jq} = \frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial u_j \partial u_q}(\bar{0}) = -2 \sum_{i=1}^{k} \sigma_i{}^{-2} \theta_{ij} \theta_{iq} + \frac{2p(p-1)}{||n||_{2,k}} \sum_{i=1}^{k} \sigma_i{}^{-2} z_i \theta_{ik} \sum_{s=1}^{k} |z_s^o|^{p-2} \theta_{sj} \theta sq,$$
$$j, q = 1, ..., k-1.$$

Из (10) имеем

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i{}^{-2} z_i^o \theta_{ik} = ||n||_{2,k} \sigma(p)^{-2} p^{-1}$$

и

$$\sum_{i=1}^{k} |z_i^o|^{p-2} \theta_{ij} \theta_{iq} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i{}^{-2} \theta_{ij} \theta_{iq} \sigma^2(p).$$

Наконец

$$b_{jq} = -2(2-p) \sum_{i=1}^{k} \sigma_i{}^{-2} \theta_{ij} \theta_{iq}.$$

Прямое вычисление det B громоздко и потому опускается. Теоремой 2 и формулами (5) и (6) доказательство завершается .

§3. БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ПЛОТНОСТЕЙ ФУНКЦИОНАЛА МИНКОВСКОГО ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ ВОЗРАСТАЮЩИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Всюду в этом параграфе $||.||^*$ и $||.|| = ||.||_{2,k}$ обозначают произвольную и евклидову нормы в R^k , соответственно. Положим

$$A^* = \{y \in R^k : ||y||^* \geq 1\}$$

и определим квадрат расстояния A^* от начала координат следующим образом :

$$a^* = a(A^*) = \inf\{||y||^2 : y \in A^*\}.$$

Как упоминалось выше, одним из интересных вопросов теории больших уклонений является описание таких малых окрестностей $\bar{A}^*$ области

$$M(A^*) = \{y \in A^* : ||y||^2 = a^*\},$$

что асимптотическое поведение $\Phi(xA^*), x \to \infty$ полностью определяется асимптотическим поведением $\Phi(x\bar{A}^*)$, при $x \to \infty$. Здесь

$$xA^* = \{(xy_1, ..., xy_k) : (y_1, ..., y_k) \in A^*\}, \qquad x > 0.$$

Для формулировки результата

$$B^*(x) = \{y \in R^k : ||y||^2 \le a^* + 2\frac{\rho(x)}{x^2}\},$$

где ρ - функция из $[1, \infty]$ в $[0, \infty]$. Как видно из следующей теоремы можем считать, что

$$\bar{A}^* = A^* \cap B^*(x) \ .$$

для подходящей функции ρ.

Теорема 3([15]). *Если* $\rho(x) \ge (k+2)\log x$, *то*

$$\Phi(xA^*) \sim \Phi(x[A^* \cap B^*(x)]), \qquad x \to \infty.$$

Предположим ниже, что размерность k зависит от параметра x, т.е. $k = k(x)$. Обозначим через $A(x), x \ge 1$ такие подмножества пространства R^k, что их дополнения $A^c(x) = R^k \setminus A(x)$ являются выпуклыми окрестностями начала координат в соответствующих пространствах R^k и удовлетворяют условию

$$0 < C_o \le a(A(x)) \le C_1 < \infty.$$

Следующая теорема из [16] обобщает Теорему 3 в двух направлениях : возможного увеличения размерности и рассмотрения более общего класса множеств $A(x)$ по сравнению с классом множеств A^*.

Теорема 4 ([16]). *Если* $\rho(x) \geq 2k(x)\log x, \rho(x) = o(x^2), k(x) = o(x^2)$, *при* $x \to \infty$, *то*

$$\Phi(xA(x)) \sim \Phi(x[A(x) \cap B(A(x))]) \qquad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Здесь

$$B(A(x)) = \{y \in R^k : ||y||^2 \leq a(A(x)) + 2\frac{\rho(x)}{x^2}\}.$$

Целью параграфа является доказательство аналогичного локального результата. Определим функционал Минковского по формуле

$$h_A(y) = \inf\{r > 0 : y \in rA\}, y \in R^k,$$

где $A = A(x)$ как и выше. Тогда

$$\Phi(rA(x)) = \Phi(\{y \in R^k : h_{A(x)}(y) > r\}).$$

Положим

$$\varphi(r; A(x)) = \frac{d}{dr}\Phi(rA(x)), \quad r > 0.$$

Пусть

$$S(v) = \{y \in R^k : ||y|| = v\}, \quad v > 0$$

и

$$\mathcal{F}(v; A) = U_o(A \cap S(v)), \quad v > 0,$$

где через U_o обозначена равномерное вероятностное распределение на $S(v)$. Изучение асимптотического поведения плотности $\varphi(r; A(x))$ функционала Минковского $h_{A(x)}(X)$ некоторого стандартного гауссовского случайного вектора $X = X^{(k)}$ в R^k, $k = k(x)$ начнем со следующей формулы из работы [10].

Лемма 3 ([10]). *Если* $A \subset R^k$ *измеримо, то*

$$\varphi(r; A) = C(k)r^{k-3}\exp(-\frac{1}{2}r^2 a)I(r; A),$$

где

$$I(r; A) = \int_0^\infty (a + \frac{2c}{r^2})^{\frac{k}{2}-1} e^{-c}(k - ar^2 - 2c)F(\frac{2c}{r^2}; A)dc,$$

причем

$$F(\epsilon; A) = \mathcal{F}((a+\epsilon)^{\frac{1}{2}}; A), \epsilon > 0, \quad a = a(A), \quad C(k) = 2^{1-\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})^{-1}.$$

Теорема 5. *Если выполнены предположения Теоремы 4, то*

$$\varphi(x; A(x)) \sim \varphi(x; A(x) \cap B(A(x))), x \to \infty.$$

Прежде чем доказать эту теорему заметим, что

$$\varphi(x; A(x)) = \varphi(x; A(x) \cap B(A(x))) + \varphi(x; A(x) \cap B^c(A(x)))).$$

Лемма 4. *При предположениях Теоремы 4*

$$\exp(-\frac{1}{2}x^2 a(A(x))) = O(1)|\varphi(x; A(x) \cap B(A(x))|, \quad x \to \infty.$$

Доказательство. Из Леммы 3 следует, что

$$\varphi(x; A(x) \cap B(A(x))) = C(k) r^{k-3} \exp(-\frac{1}{2}r^2 a(A(x)))\tilde{I}(r; \rho(x)),$$

где

$$\tilde{I}(r; \rho(x)) = I(r; A(x) \cap B(A(x))).$$

Пусть $H(x)$ обозначает полупространство в R^k, удовлетворяющее условию

$$H(x) \subseteq A(x) \qquad \text{и} \qquad a(H(x)) = a(A(x)) = a.$$

Тогда

$$-\varphi(x; A(x) \cap B(A(x))) \geq \int_0^{\rho(x)} (a + \frac{2c}{x^2})^{\frac{k}{2}-1} e^{-c}(ax^2 + 2c - k) F(\frac{2c}{x^2}; H(x)) dc. \quad (11)$$

Из доказательств в [14, Теорема 4] следует, что

$$F(\frac{2c}{x^2}; H(x)) \sim \omega_{k-1}\omega_k^{-1} \int_0^{\alpha(x)} (\sin\theta)^{k-2} d\theta, x \to \infty,$$

где

$$\alpha(x) = \arctan((\frac{2c}{a})^{\frac{1}{2}}/x)$$

(ω_k было определено в параграфе 2). Методом Лапласа получаем

$$\int_0^{\alpha(x)} (\sin\theta)^{k-2} d\theta \sim (\frac{\alpha(x)}{k-2})(\sin\alpha(x))^{k-2}, x \to \infty.$$

Следовательно

$$F(\frac{2c}{x^2}; H(x)) \sim (\frac{k}{2\pi a})^{\frac{1}{2}} (\frac{2c}{x^2})^{\frac{k-1}{2}} (a + \frac{2c}{x^2})^{1-\frac{k}{2}}$$

при $x \to \infty$. Так как $ax^2 - 2c - k \sim ax^2, x \to \infty$,, мы получаем

$$(\frac{a}{2\pi})^{\frac{1}{2}} \exp(-\frac{1}{2}x^2 a)$$

является асимптотическим представлением для нижней границы фупкции $-\varphi(x; A(x) \cap B(A(x)))$ (см. в (11)).

Лемма 5. *Если выполнены предположения Теоремы 4, то*

$$\varphi(x; A(x) \cap B^c(A(x))) = o(1)\varphi(x; A(x) \cap B(A(x))), \ x \to \infty.$$

Доказательство. В силу Леммы 3 имеем

$$\varphi(x; A(x) \cap B^c(A(x))) = C(k)x^{k-3} \exp(-\frac{1}{2}ax^2 - \rho(x)) I(x),$$

где

$$I(x) = \int_0^\infty (a + \frac{2\rho(x) + 2c}{x^2})^{\frac{k}{2}-1} e^{-c} dc.$$

В [16,доказательство Теоремы 3] показано, что

$$I(x) = o(1)x^{1-k} C(k)^{-1} \exp(\rho(x)), x \to \infty.$$

Следовательно

$$\varphi(x; A(x) \cap B^c(A(x))) = o(x^{-2})\varphi(x; A(x) \cap B(A(x))), \quad \text{при} x \to \infty.$$

Замечание 6. Последний шаг в доказательстве Леммы 5 показывает, что при переходе от интеграла к локальному случаю возможна замена условия

$$\rho(x) \geq 2k \log x$$

на более слабое

$$\rho(x) \geq 2(k-1)\log x.$$

Замечание 7. Леммы 4 и 5 доказывают Теорему 5.

Замечание 8. После того как настоящая работа была подготовлена к печати, мы получили оттиск работы В. Линде "Гауссовы меры больших шаров в R^n", в которой автор доказывает Теорему 1 другим способом, без оценивания порядка остаточных членов.

ABSTRACT. The asymptotical behaviour of the probabilities $P((\sum_{i=1}^{k}|X_i|^p)^{\frac{1}{p}} > u)$, $u \to \infty, p > 0$ for Gaussian independent random variables X_i is obtained by Laplace method for multiple integrals. Also large deviations for the densities of Minkowski functionals of Gaussian vectors for increasing dimensions k are investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Birndt , W.-D. Richter , "Vergleichende Betrachtungen Bestimmung des asymptotischen Verhaltens mehrdimensionaler Laplace-Gauss -Integrale", Z. Anal. Anwen., vol. 4, pp. 269 – 276, 1985.
2. C. Borell, "The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space", Invent. Math., vol. 30, pp. 207 – 216, 1975.
3. V. Dobric, M. B. Marcus, M. Weber, "The distribution of large values of the supremum of a Gaussian processes", Asterisque, no. 157/158, pp. 95 – 127, 1988.
4. R. S. Ellis, J. S. Rosen, " Laplace's method for Gaussian integrals with an application to Statistical Mechanics", Ann. Prob., vol. 10, pp. 46 – 66, 1982.
5. В. Р. Фаталов, "Точная асимптотика функции распределения максимума гауссовского неоднородного случайного поля", Докл. АН Арм. ССР, т.77, №1, стр. 25 – 29, 1983.
6. М. В. Федорюк, Метод Седловой Точки, Москва, 1977.
7. X. Fernique," Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes", Lect. Notes in Math., vol 480, pp. 1 – 96, 1975.
8. A. Hertle, " On the asymptotic behaviour of Gaussian spherical integrals", Lect. Notes in Math., vol. 990, pp. 221 – 234, 1983.
9. C. R. Hwang, "Gaussian measure of large balls in a Hilbert space", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 78, pp. 107 – 110, 1980 (Erratum ibidem, p. 188, 1985).
10. G. Pap, W.-D. Richter, "Zum asymtotischen Verhalten der Verteilungen und der Dichten gewisser Funktionale Gaußscher Zufallsvektoren", Math. Nachr., vol. 135, pp. 119 – 124, 1988.
11. В. И. Питербарг, Асимптотические Методы в Теории Гауссовских Случайных Процессов и Полей, изд. МГУ, Москва, 1988.
12. W.-D. Richter, "Gaußische Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen im Banachraum l_p", Wissensch. Z. TU Dresden, vol. 34, no. 4, p. 60, 1985.
13. W.-D. Richter, "Laplace-Gauss integrals, Gaussian measure asymptotic behaviour and probabilities of moderate deviations", Z. Anal. Anwen., vol. 4, pp. 257 – 267. 1985.
14. W.-D. Richter, "Laplace integrals and probabilities of moderate deviations, In : Probab. Distrib. and Mathem. Stat. Fan, Tashkent, pp. 406-420, 1986.
15. W.-D. Richter, "Moderate deviations for a certain class of sets in finite dimensional space", Theory Probab. Appl., vol. 31, pp. 174 – 175, 1986.
16. W.-D. Richter, " Multidimensional domains of large deviations", to appear.

17. M. Talagrand, "Small tails for the supremum of a Gaussian process", Ann. Inst. H. Poincaré", Ser. B, vol. 24, pp. 307 – 315, 1988.
18. V. M. Zolotarev, "Concerning a certain probability problem", Theory Probab. Appl., vol. 6, pp. 201 – 204, 1961.
19. V. R. Fatalov, " The asymptotics of distribution of the bivariate Kolmogorov-Smirnov statistics in testing the hypothesis on normality", In : Proceedings of the 1st World Congress of the Bernoulli Society, v. 2, (N.N. Bogolyubov, editor), Math. Inst. of USSR Acad. of Scien., Moscow, Tula, pp. 269-274, 1988.

9 Апреля 1991

Ереванский госуниверситет,
Ростокский университет (Германия)

О КОНФИГУРАЦИЯХ, ПОРОЖДЕННЫХ СЛУЧАЙНЫМИ ХОРДАМИ ПЛОСКОЙ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ

В. К. Оганян

Известия Академии Наук Армении. Математика, том 27, №1, 1992

Пусть D - ограниченная выпуклая область в R^2, а $|\partial D|$ - длина границы D. Основными результатами работы являются представления для значений $p_{nk} = \frac{\mu_n(A_k)}{|\partial D|^n}$ при $n = 3, 4$, где $\mu_n = \underbrace{\mu \times \ldots \times \mu}_{n \text{ раз}}$ (μ- инвариантная мера в пространстве прямых в плоскости). Эти представления имеют вид линейных комбинаций некоторых "интегральных параметров", зависящих от выпуклой области D. Возникает естественный вопрос : определяется ли значениями p_{nk} область D единственным образом (с точностью до движений) ? В этой связи мы исследуем следующую задачу : возможно ли по крайней мере представить наши интегральные параметры в терминах вероятностей p_{nk} ? Это задача обращения соответствующих линейных уравнений. Эта задача разрешается после дополнительных уравнений для p_{nk} так называемыми дополнительными соотношениями между интегральными параметрами. Некоторые дополнительные соотношения являются так называемыми обобщенными тождествами Плейеля.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Мы будем использовать следующие обозначения :

D – ограниченная выпуклая область в R^2, ∂D – граница области D, S – площадь области D, G – пространство прямых в R^2, $g \in G$, μ – мера на G, инвариантная относительно группы евклидовых движений R^2, dg – элемент меры μ, $[D] = \{g \in G : g \cap D \neq \emptyset\}$, $C_n = \{(g_1, \ldots, g_n)$: существует пара прямых g_i, g_j, для которых $g_i \cap g_j \cap \partial D \neq \emptyset\}$.

Рассмотрим множество $[D]^n \setminus C_n$. Для любого n это множество является объединением конечного числа связных подмножеств B_{nk} из G^n, т. е.

$$[D]^n \setminus C_n = \bigcup_k B_{nk}, \quad \text{где } B_{ni} \cap B_{nj} = \emptyset, \quad \text{для} \quad i \neq j.$$

Для любого n существует только конечное число таких множеств B_{nk}. Некоторые множества эквивалентны с точностью до перестановок прямых B_1 и B_2 и называются эквивалентными, если для любых $(g_1^o, \ldots, g_n^o) \in B_1$ существует перестановка $(i_1, \ldots, i_n)$ множества $\{1,\ldots,n\}$ такая, что $(g_{i_1}^o, \ldots, g_{i_n}^o) \in B_2$ и наоборот. Пусть A_{nk} – объединение всех эквивалентных множеств B_{nk}. Назовем A_{nk} компонентой. Следовательно, каждое A_{nk} полностью описывается любым из своих элементов. Например, при $n = 2$ существуют две компоненты A_{20} и A_{21} : $[D]^2 \setminus C_2 = A_{20} \cup A_{21}$, где

$$A_{20} = \{(g_1, g_2) : g_1 \cap g_2 = P_{12} \notin \overline{D}\}, \qquad A_{21} = \{(g_1, g_2) : g_1 \cap g_2 = P_{12} \in D\}$$

$\overline{D}$ - замыкание D. При $n = 3, 4$ существуют пять и семнадцать компонент, соответственно.

Ниже мы используем следующее обозначение :

$$\mu_n = \mu \underbrace{\times \ldots \times}_{n \text{ раз}} \mu, \qquad \mu_n(A_{nk}) = \mu_n(A_k)$$

Так как $\sum\limits_k \mu_n(A_k) = |\partial D|^n$ ($|\partial D|$ - длина ∂D) рассмотрим вероятности A_{nk} :

$$p_{nk} = \mu_n(A_k)\,|\partial D|^{-n}$$

Представления мер компонент при $n = 2$ были получены В. Бляшке (см. [4]). Р. Суланке [1] и Р. Амбарцумян [2] (стр. 58-64) получили представления меры $\mu_n(A_k)$ при $n = 3$. Результат в работе [1] доказан с помощью формулы Крофтона, а в [2] – посредством многоугольных приближений.

Цель настоящей работы является демонстрация общего комбинаторного подхода к этой проблеме. Основные результаты - представление для значений p_{nk}, при n=3,4. Эти выражения имеют вид линейных комбинаций некоторых "интегральных параметров", зависящих от ограниченной выпуклой области D. Два примера интегральных параметров следующие :

$$I_n = \int\limits_{[D]} \chi^n(g)\,dg$$

(n-тый момент хорды $\chi(g) = g \cap D$, введенной В. Бляшке [5]) и

$$J_n = \iint_{(\partial D)^2} \chi^n(l_1, l_2) dl_1 dl_2$$

(опять n-тый момент хорды, но относительно другой меры, где $\chi(l_1, l_2)$ - хорда области D, соединяющая точки $l_1, l_2 \in \partial D$, а dl - элемент меры длины на ∂D).

Возникает естественный вопрос : определяется ли значениями p_{nk} область D единственным образом (вплоть до движений) ? В этой связи мы исследуем следующую задачу : возможно ли по крайней мере представить наши интегральные параметры в терминах вероятностей p_{nk} ? Это задача обращения соответствующих линейных уравнений. Она разрешается после дополнения уравнений для p_{nk} так называемыми дополнительными соотношениями между интегральными параметрами. Некоторые дополнительные соотношения являются обобщенными тождествами Плейеля, которые мы доказываем в §4. В §3 применяется наш общий комбинаторный подход получения представлений меры компонент в случаях $n = 2$ и 3. В §5 записаны все дополнительные соотношения, необходимые в случае $n = 4$. В параграфах 6 и 7 в случае $n = 4$ получены представления мер компонент и разрешена задача обращения системы линейных уравнений.

§2. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Обозначим через $N_n = N_n(g_1, ..., g_n)$ число точек пересечения $P_{ij} = g_i \cap g_j$, лежащих в D. При $n = 3$ имеем следующие пять компонент :

$$A_{3k} = \{(g_1, g_2, g_3) : N_3 = k\}, \quad k = 3, 2, 1 ,$$

$$A_{301} = \{(g_1, g_2, g_3) : N_3 = 0 \quad \text{и существует прямая из множества } \{g_1, g_2, g_3\}$$
$$\text{которая отделяет хорду от двух других прямых } \} \quad ,$$

$$A_{302} = A_{30} \setminus A_{301}, \text{ где } A_{30} = \{(g_1, g_2, g_3) : N_3 = 0\}.$$

Подчеркнем, что A_{30} - не компонента. Теперь опишем 17 компонент при n = 4. Заметим, что среди множеств

$$A_{4k} = \{(g_1, g_2, g_3, g_4) : N_4 = k\}, \qquad k = 0, 1, ..., 6$$

лишь A_{46} и A_{45} являются компонентами.

Мы будем использовать тройной индекс в обозначении некоторых компонент в том случае, если первые два индекса не определяют компоненту однозначно. Имеем

$A_{441} = \{(g_1, g_2, g_3, g_4)$: $N_4 = 4$ существует прямая из множества $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ такая, что все точки пересечения этой прямой с другими тремя принадлежат $D\}$

$$A_{442} = A_{44} \setminus A_{441},$$

$A_{431} = A_{43} \cap \{(g_1, g_2, g_3, g_4)$: существует прямая из множества $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ такая, что все точки пересечения этой прямой с тремя другими не принадлежат $\overline{D}\}$,

$A_{432} = A_{43} \cap \{(g_1, g_2, g_3, g_4)$: существует прямая из множества $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ такая, что все точки пересечения этой прямой принадлежат D $\}$

$$A_{433} = A_{43} \setminus (A_{431} \cup A_{432}).$$

Другие компоненты определены на Рис .1 ;

$$\bigcup_{i=1}^{3} A_{42i} = A_{42}, \qquad \bigcup_{i=1}^{4} A_{41i} = A_{41}, \qquad \bigcup_{i=1}^{3} A_{40i} = A_{40}.$$

Теперь опишем интегральные параметры, возникающие при вычислении меры компонент (или вероятностей p_{nk}) в случаях n = 3,4). Здесь и ниже используем следующее обозначение : $B_{ij} = \{g_i \cap g_j \in D\}$, $E_{ij} = \{g_i \cap g_j \notin \overline{D}\}$),

$$U = \iint_{B_{12}} (\sum_{i=1}^{4} \rho_i) dg_1 dg_2 \qquad (1)$$

$$x = \iint_{B_{12}} \chi(g_1)\chi(g_2)\, dg_1 dg_2, \qquad y = \iint_{B_{12}} (\chi(g_1) + \chi(g_2))(\sum_{i=1}^{4} \rho_i) dg_1 dg_2,$$

$$z = \iint_{B_{12}} (\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_4 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_4)\, dg_1 dg_2, \qquad u = \iint_{B_{12}} (\sum_{i=1}^{4} \rho_i^2)\, dg_1 dg_2,$$

$$t = \iint_{B_{12}} (\sum_{i=1}^{4} \rho_i)^2 dg_1 dg_2, \qquad m = \iint_{E_{12}} (d_1 + d_2 - s_1 - s_2)(s_1 + s_2) dg_1 dg_2, \qquad (2)$$

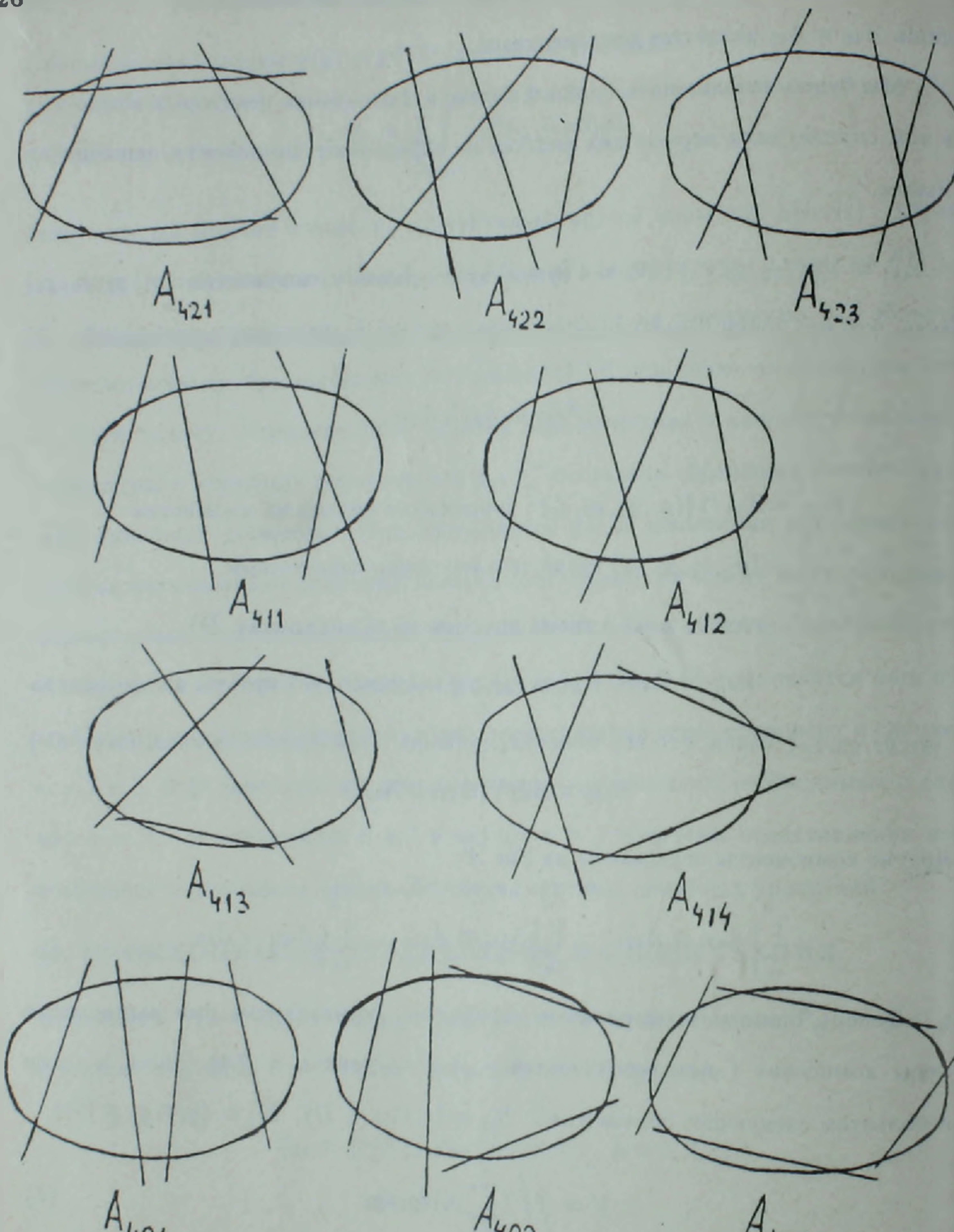

Рис. 1. Первый индекс равен числу прямых; второй равен числу точек пересечения внутри D.

$$l = \iint\limits_{E_{12}} (d_1^2 + d_2^2 - s_1^2 - s_2^2) dg_1 dg_2, \qquad q = \iint\limits_{E_{12}} (\chi(g_1) + \chi(g_2))(d_1 + d_2) dg_1 dg_2,$$

$$w = \iint\limits_{E_{12}} \chi(g_1)\gamma_1 dg_1 dg_2, \qquad h = \iint\limits_{E_{12}} (\chi(g_1) + \chi(g_2))(d_1 + d_2 - s_1 - s_2) dg_1 dg_2,$$

$$c = \iint\limits_{E_{12}} (d_1 + d_2)^2 dg_1 dg_2, \qquad v = \iint\limits_{E_{12}} (d_1 + d_2 - s_1 - s_2)(\beta_1 + \beta_2) dg_1 dg_2,$$

$$g = \iint\limits_{E_{12}} (\chi(g_1) + \chi(g_2))(\beta_1 + \beta_2) dg_1 dg_2, \qquad b = \iint\limits_{E_{12}} (d_1 + d_2)(\beta_1 + \beta_2) dg_1 dg_2,$$

$$e = \iint\limits_{E_{12}} [\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)(\beta_1 + \beta_2) - (s_2\beta_2 + s_1\beta_1) + (s_1^2 + s_2^2)] dg_1 dg_2,$$

$$a = \iint\limits_{E_{12}} (d_1 + d_2 - s_1 - s_2)(d_1 + d_2) dg_1 dg_2, \qquad f = \iint\limits_{E_{12}} (d_1 + d_2 - s_1 - s_2)(\gamma_1 + \gamma_2) dg_1 dg_2,$$

где сегменты ρ_i показаны на Рис. 2; d_1 и d_2 - диагонали четырехугольника, вершинами которого являются концы хорд $\chi(g_1)$ и $\chi(g_2)$; s_1 и s_2 - стороны четырехугольника, отличные от $\chi(g_1)$и $\chi(g_2)$(см. Рис. 3); $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ - непересекающиеся дуги границы ∂D, отделяемые концами хорд $\chi(g_1), \chi(g_2)$, показанные на Рис. 4 (концы γ_i совпадают с концами $\chi(g_i)$).

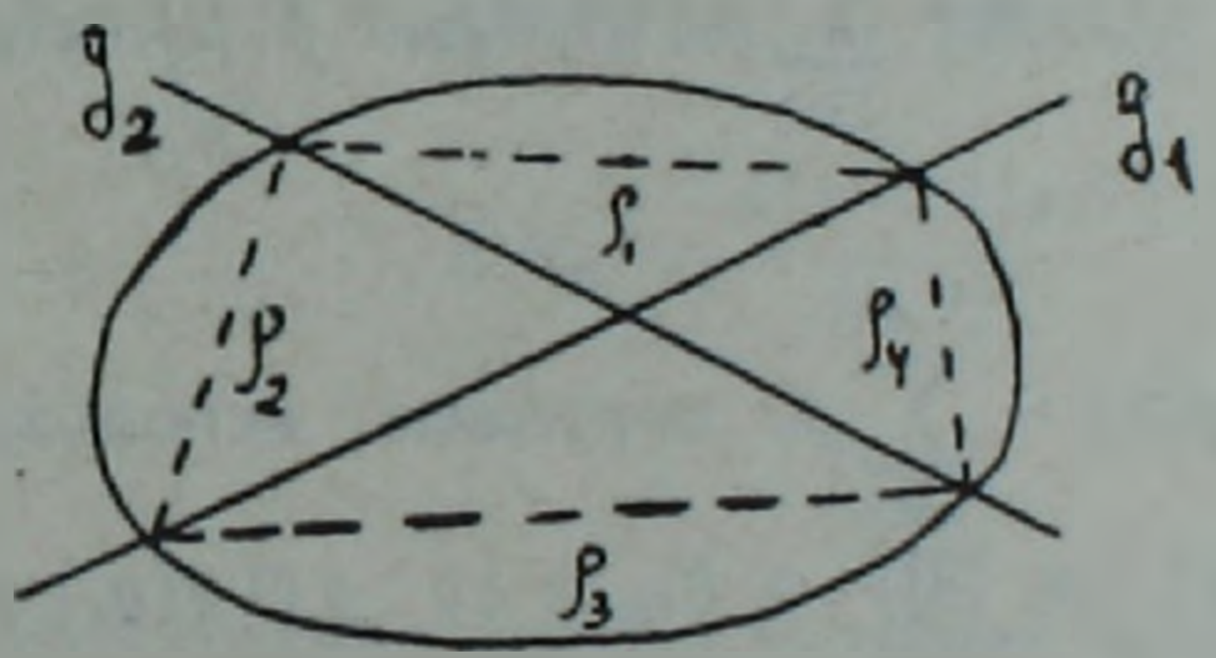

Рис. 2 $\sum\limits_{i=1}^{4} \rho_i$ - периметр четырехугольника, вершинами которого является концами хорд $\chi(g_1)$и $\chi(g_2)$

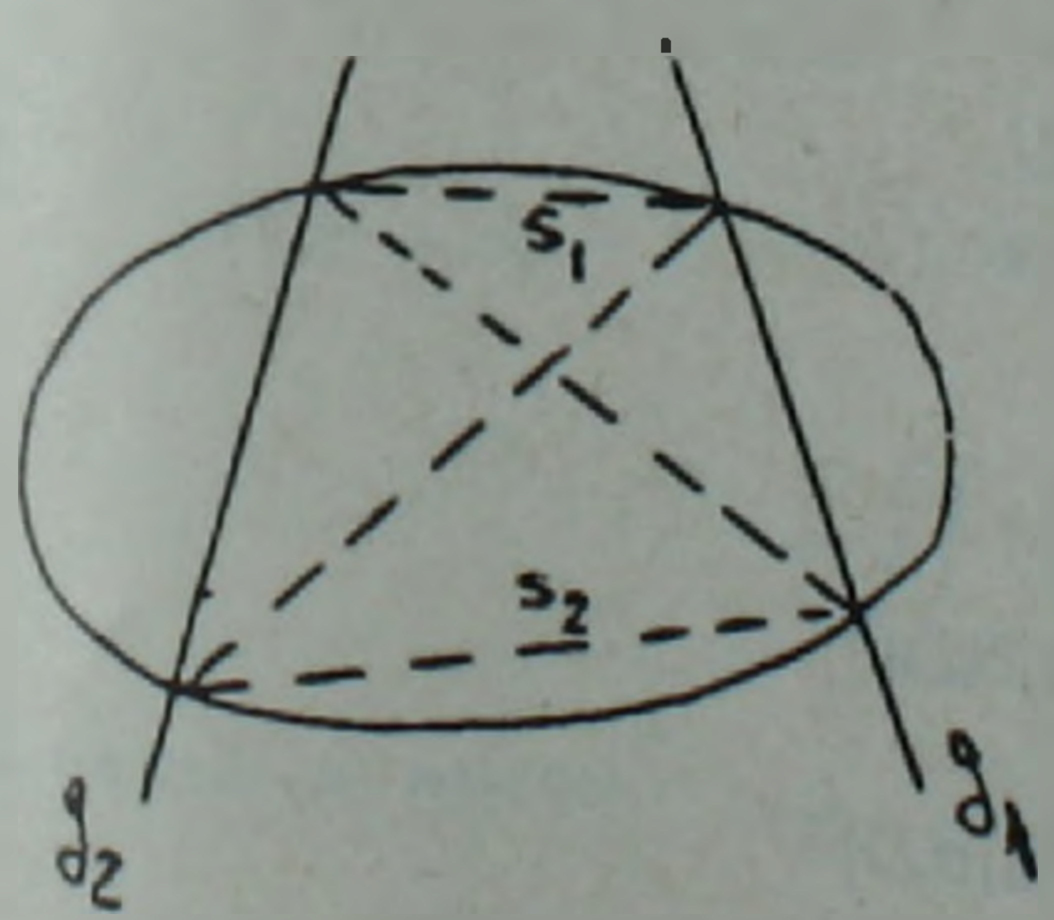

Рис. 3

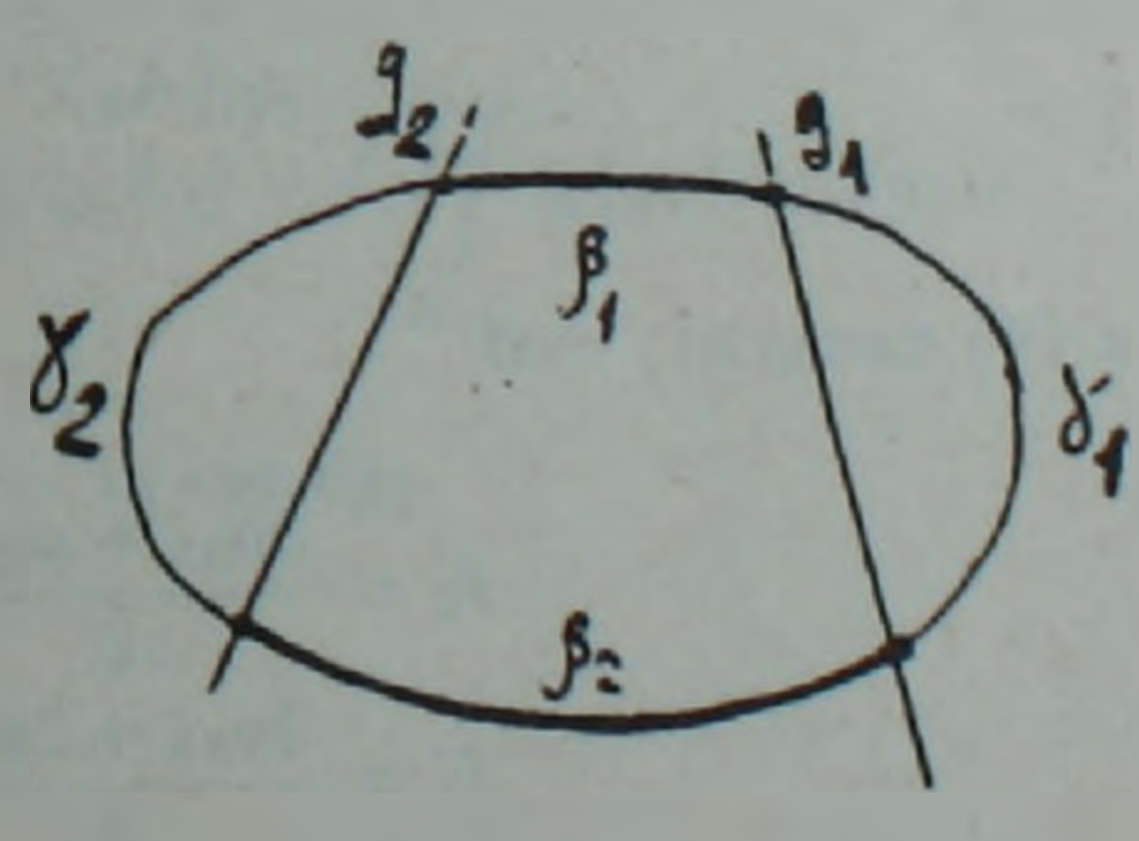

Рис. 4

§3. МЕРА КОМПОНЕНТ ПРИ n= 2,3

Для полноты дадим представления для $\mu_2(A_1)$ и $\mu_2(A_0)$.

$$\mu_2(A_1) = \iint_{B_{12}} dg_1 dg_2 = 2I_1 = 2\pi S \qquad (\text{см. [4]}), \qquad \mu_2(A_0) = |\partial D|^2 - 2I_1.$$

Следовательно, $I_1 = \frac{1}{2} p_{21} |\partial D|^2$ и

$$S = p_{21}\,(2\pi)^{-1}\,|\partial D|^2 = c_1 |\partial D|^2 \tag{3}$$

Перейдем к случаю трех прямых. Легко видеть, что

$$\mu_3(A_3) = \iiint_{N_3=3} dg_1 dg_2 dg_3 = \iint_{B_{12}} dg_1 dg_2 \int_{F_{12}} dg_3 =$$
$$= \iint_{B_{12}} [2(\chi(g_1) + \chi(g_2)) - \sum_{i=1}^{4} \rho_i]\, dg_1 dg_2 = 4 \iint_{B_{12}} \chi(g_1) dg_1 dg_2 - U,$$

где $\int_{F_{12}} dg_3 = 2(\chi(g_1) + \chi(g_2)) - \sum_{i=1}^{4} \rho_i$ получаем, используя комбинаторную формулу Р. В. Амбарцумяна (см. [3]) , а $F_{ij} = \{g : g \cap \chi(g_i) \neq \emptyset,\ g \cap \chi(g_j) \neq \emptyset\}$. Таким образом, получаем

$$\mu_3(A_3) = 8I_2 - U. \tag{4}$$

Используя ту же комбинаторную формулу, по симметрии имеем

$$\mu_3(A_2) = -12I_2 + 3U. \tag{5}$$

Из (3) и (4) следует, что

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{3p_{33} + p_{32}}{12} |\partial D|^3 = c_2 |\partial D|^3, \\ U &= \frac{3p_{33} + 2p_{32}}{3} |\partial D|^3 = c_3 |\partial D|^3. \end{aligned} \tag{6}$$

Мы можем найти $\mu_3(A_2)$ и другим способом, а именно, заменой порядка интегрирования :

$$\mu_3(A_2) = 3 \iint \int_{E_{12}\cap B_{13}\cap B_{23}} dg_1 dg_2 dg_3 = 3 \iint_{E_{12}} (d_1 + d_2 - s_1 - s_2) dg_1 dg_2 \tag{7}$$

Мы пользуемся тем, что $\mu\{g : g \cap \chi(g_1) \neq \emptyset,\ g \cap \chi(g_2) \neq \emptyset\} = d_1 + d_2 - s_1 - s_2$. Из (5),(6) и (7) получаем требуемое дополнительное соотношение :

$$\iint_{E_{12}} (d_1 + d_2 - s_1 - s_2) dg_1 dg_2 = U - 4I_2 = \frac{1}{3} p_{32} |\partial D|^3 = c_4 |\partial D|^3. \tag{8}$$

Воспользовавшись снова симметрией и комбинаторной формулой, получаем

$$\mu_3(A_1) = 6\pi |\partial D| S - 3U. \tag{9}$$

Из (9) и (6) следует, что

$$S = \frac{3p_{33} + 2p_{32} + p_{31}}{6} |\partial D|^2$$

Сравнивая коэффициенты в правой части этой формулы, вместе с (3) получаем $3p_{21} = 3p_{33} + 2p_{32} + p_{31}$, что есть частный случай (n=3) формулы для среднего числа точек пересечения P_{ij} внутри D (см. [4]) :

$$EN_n = \frac{n(n-1)\pi S}{|\partial D|^2} \tag{10}$$

($EN_3 = 3p_{21}$).

Заметим, что при вычислении $\mu_3(A_1)$ методом, используемым при нахождении $\mu_3(A_2)$, мы опять получим соотношение (8).

Переходя к $\mu_3(A_0)$, получаем

$$\mu_3(A_0) = \iiint_{N_3=0} dg_1 dg_2 dg_3 = \iint_{E_{12}} [|\partial D| - \chi(g_1) - 2\chi(g_2) +$$

$$+ (d_1 + d_2 - s_1 - s_2)] dg_1 dg_2 = |\partial D| \mu_2(A_0) - 4 \iint_{E_{12}} \chi(g_1) dg_1 dg_2 +$$

$$+ \iint_{E_{12}} (d_1 + d_2 - s_1 - s_2) dg_1 dg_2.$$

Окончательно имеем

$$\mu_3(A_0) = |\partial D|^3 - 6\pi |\partial D| S + 8I_2 + \iint_{E_{12}} (d_1 + d_2 - s_1 - s_2) dg_1 dg_2. \tag{11}$$

Мы можем получить другое представления для $\mu_3(A_0)$, используя соотношение $\sum_{i=0}^{3} \mu_3(A_i) = |\partial D|^3$ и (4), (5), (9). Имеем

$$\mu_3(A_0) = |\partial D|^3 + 4I_2 + U - 6\pi |\partial D| S \tag{12}$$

Сравнивая (12) и (11), снова получаем (8).

Заметим, что (8) - классическое тождество Плейеля для $n = 2$ (см. [3], а также §4).

Рассмотрим $\mu_3(A_{301})$:

$$\mu_3(A_{01}) = 3\iint\limits_{E_{12}} dg_1dg_2 \int\limits_{B} dg_3 = 3\iint\limits_{E_{12}} (d_1 + d_2 - \chi(g_1) - \chi(g_2))dg_1dg_2,$$

где $B = \{g : g$ отделяет $\chi(g_1)$ от $\chi(g_2)\}$.

Окончательно, получаем

$$\mu_3(A_{01}) = 3\iint\limits_{E_{12}} (d_1 + d_2)dg_1dg_2 - 6\pi|\partial D|S + 12I_2. \tag{13}$$

Результат для $\mu_3(A_i), i = 0, 1, 2, 3$ можно найти в [1], а для $\mu_3(A_{01})$ - в [2]. Приведем результат Амбарцумяна ([2]) :

$$\mu_3(A_{01}) = 6I_2 - 6\pi|\partial D|S + 6J_1. \tag{14}$$

Используя (13) и (14), заключаем

$$\iint\limits_{E_{12}} (d_1 + d_2)dg_1dg_2 = 2J_1 - 2I_2. \tag{15}$$

Докажем (15). Имеем

$$\iint\limits_{E_{12}} (d_1 + d_2)dg_1dg_2 = \iint\limits_{[D]^2} \chi(g_1, g_2)I_d(g_1, g_2)dg_1dg_2,$$

где $\chi(g_1, g_2)$ - хорда D, соединяющая первые точки пересечения $g_1 \cap D$ и $g_2 \cap D$; интегрирование ведется по множеству прямых ; интегрирование ведется по $[D]^2$, так как если $I_d = 1$, т. е. g_1 и g_2 лежат в различных полуплоскостях относительно $\chi(g_1, g_2)$, то $g_1 \cap g_2 \notin D$.

Используя стандартную формулу интегральной геометрии $dg = \sin\psi d\psi dl$ (координаты (l, ψ) показаны на Рис. 5), находим

$$\iint\limits_{E_{12}} (d_1 + d_2)dg_1dg_2 = 2J_1 - 2\iint\limits_{(\partial D)^2} \chi(l_1, l_2)\cos\alpha_1\cos\alpha_2 dl_1dl_2.$$

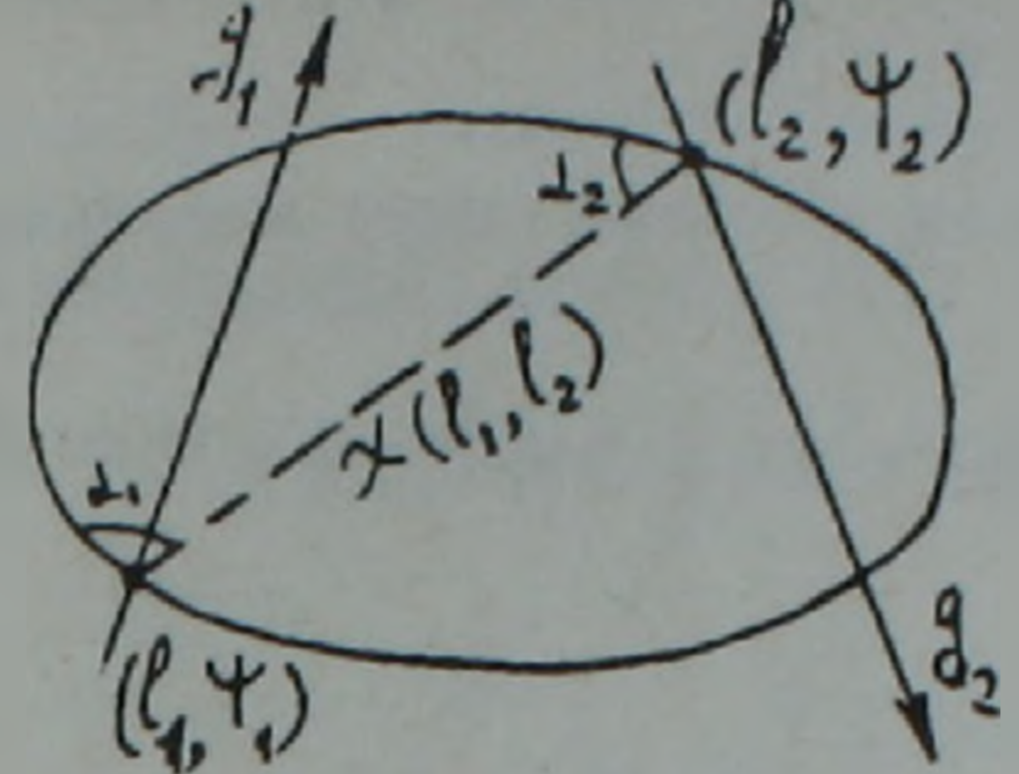

Рис. 5. α_i - угол между ∂D и $\chi(l_1, l_2)$ в точке l_i ; α_1 и α_2 лежат в одной полуплоскости относительно хорды χ внутри D.

Выше мы использовали следующее равенство :

$$\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \sin\psi_1 \sin\psi_2 \, l_d \, d\psi_1 d\psi_2 = 2(1 - \cos\alpha_1 \cos\alpha_2).$$

Применяя тождество Плейеля (см. [3]), получаем (15).

Так как $\mu_3(A_0) = \mu_3(A_{01}) + \mu_3(A_{02})$, то

$$\mu_3(A_{02}) = |\partial D|^3 - 6J_1 - 2I_2 + U. \tag{16}$$

Из (14),(15) и (16) следует, что

$$J_1 = \iint\limits_{(\partial D)^2} \chi(l_1, l_2) dl_1 dl_2 = \frac{2p_{301} - 3p_{33} - p_{32} + 6p_{21}}{12} |\partial D|^3 = c_5 |\partial D|^3, \tag{17}$$

$$\iint\limits_{E_{12}} (d_1 + d_2) dg_1 dg_2 = \frac{2p_{301} - 6p_{33} - 2p_{32} + p_{21}}{6} |\partial D|^3 = c_6 |\partial D|^3. \tag{18}$$

Представления для J_1, задаваемые (16) и (17), совпадают.

$\mu_3(A_{02})$ можно получить следующим путем :

$$\mu_3(A_{02}) = \iint\limits_{E_{12}} [|\partial D| - \mu\{g : g \text{ пересекается по крайней мере с одной из хорд;}$$

$$\chi(g_1), \chi(g_2)\} - \mu\{g : \text{в тройке } g, g_1, g_2 \text{ одна из хорд, порождамая}$$

$$\text{тройкой, отделяется от двух других } \}] dg_1 dg_2.$$

Таким образом, получаем

$$\mu_3(A_{02}) = |\partial D|^3 - 3 \iint\limits_{E_{12}} (d_1 + d_2) dg_1 dg_2 - 8I_2 + U. \tag{19}$$

Легко видеть, что (16) следует из (19) и (15).

Теперь получим следующие соотношения, которые будут использоваться ниже.

$$\iint_{E_{12}} (\gamma_1 + \gamma_2) dg_1 dg_2 = 4J_1 - 2\pi|\partial D|S, \tag{20}$$

$$\iint_{E_{12}} (\beta_1 + \beta_2) dg_1 dg_2 = |\partial D|^3 - 4J_1. \tag{21}$$

Для доказательства (20) рассмотрим меру μ_3 тройки (g_1, g_2, g_3), которая удовлетворяет условию $A = \{g_3$ отделяет $\chi(g_1)$ от $\chi(g_2)\}$. Меру на множестве можно вычислить тремя методами (они различаются порядком интегрирования)

$$\mu_3(A) = \iint_{E_{12}} dg_1 dg_2 \int_A dg_3 = \iint_{E_{12}} (d_1 + d_2) dg_1 dg_2 - 2\pi|\partial D|S + 4I_2,$$

$$\mu_3(A) = \iint_{E_{23}} dg_2 dg_3 \int_A dg_1 = \iint_{E_{23}} \gamma_2 dg_2 dg_3 - \pi|\partial D|S + 2I_2,$$

$$\mu_3(A) = \iint_{E_{13}} dg_1 dg_3 \int_A dg_2 = \iint_{E_{13}} \gamma_1 dg_1 dg_3 - \pi|\partial D|S + 2I_2.$$

Заметим, что (20) следует из этих равенств и (15). Так как

$$\iint_{E_{12}} (\gamma_1 + \gamma_2) dg_1 dg_2 + \iint_{E_{12}} (\beta_1 + \beta_2) dg_1 dg_2 = |\partial D| \mu_2(A_0),$$

то из этого равенства и (20) опять следует (21).

Пример. Для круга радиуса R $I_2 = \frac{16}{3}\pi R^3$, $U = \frac{2}{3}\pi R^3(16 + 3\pi^2)$, $J_1 = 16\pi R^3$, $p_{33} = p_{30} = \frac{4}{\pi^2} - \frac{1}{4} \approx 0.1553$, $p_{32} = p_{31} = \frac{3}{4} - \frac{4}{\pi^2} \approx 0.3447$, $p_{30} = p_{301} + p_{302}$, $p_{301} = \frac{16}{\pi^2} - \frac{3}{2} \approx 0.1211$, $p_{302} = \frac{5}{4} - \frac{12}{\pi^2} \approx 0.0342$.

§4. ОБОБЩЕННОЕ ТОЖДЕСТВО ПЛЕЙЕЛЯ

В [3] было доказано равенство

$$8I_n = -n \iint_{[D]^2} \chi_{12}^{n-1} [I_d - I_s] dg_1 dg_2, \tag{22}$$

названное тождеством Плейеля. В (22) интегрирование ведется по парам направленных прямых ; χ_{12} - хорда D, соединяющая первые точки пересечения $\chi(g_1)$ и

$\chi(g_2)$; индикатор $I_d = 1$, если $\chi(g_1)$ и $\chi(g_2)$ лежат в полуплоскостях относительно χ_{12} , $I_d = 0$ в остальных случаях ; $I_s(.) = 1 - I_d(.)$.

Для $n = 2$, имеем $U - 4I_2 = \iint\limits_{E_{12}} (d_1 + d_2 - s_1 - s_2) dg_1 dg_2$, т. е. (8), а для $n = 3$

$$\frac{8}{3} I_3 = u - l \tag{23}$$

как следует из (33) и (34).

Для доказательства тождества

$$-8I_n = \iint\limits_{[D]^2} [\chi^{n-2}(g_1) + \chi^{n-2}(g_2)]\, \chi_{12} [I_d - I_s] dg_1 dg_2, \tag{24}$$

которое назовем обобщенным тождеством Плейеля (при $n = 2$ см. (8)) рассмотрим следующий интеграл :

$$\iint\limits_{E_{12}\cap E_{13}\cap B_{23}} \int \chi^{n-2}(g_2) dg_1 dg_2 dg_3 = \iint\limits_{E_{12}} \chi^{n-2}(g_2) dg_1 dg_2 \int\limits_{\{\chi(g_1)=\emptyset\chi(g_2)\neq\emptyset\}} dg_3 =$$

$$= \iint\limits_{E_{12}} \chi^{n-2}(g_2)[2\chi(g_2) - (d_1 + d_2 - s_1 - s_2)] dg_1 dg_2 = 2|\partial D| I_{n-1} - 4I_n -$$

$$- \iint\limits_{E_{12}} \chi^{n-2}(g_2)(d_1 + d_2 - s_1 - s_2) dg_1 dg_2. \tag{25}$$

Этот интеграл можно вычислить и другим способом :

$$\iint\limits_{B_{23}} \chi^{n-2}(g_2) dg_2 dg_3 \int\limits_{\{\chi(g_2)=\emptyset\,\chi(g_3)=\emptyset\}} dg_3 = 2|\partial D| I_{n-1} - \iint\limits_{E_{12}} \chi^{n-2}(g_2)(\sum_{i=1}^{n} \rho_i) dg_1 dg_2. \tag{26}$$

Приравнивая правые части (25) и (26), получаем (24). При $n = 3$ обобщенное тождество Плейеля принимает вид (32).

§5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Нижеприведенные соотношения будут доказаны в этом параграфе и в §6 и будут использованы в §7 при обращении системы линейных уравнений (68).

$$a = -8I_3 + t - 4z + 2u, \tag{27}$$

$$h + 2l = -16I_3 + y + 4u - 2z, \tag{28}$$

$$3h = -32I_3 + 3y - 6z + 6u, \tag{29}$$

$$2\iint\limits_{E_{12}} (d_1 + d_2 - s_1 - s_2)dg_1dg_2 = l + m + t - 2z - 2u, \tag{30}$$

$$\iint\limits_{E_{12}} \chi(g_1)\gamma_2 dg_1dg_2 = -|\partial D|I_2 + 2I_3 + \frac{q}{2}, \tag{31}$$

$$8I_3 = y - h, \tag{32}$$

$$u - z = \frac{4}{3}I_3 \tag{33}$$

$$l = 2z - u, \tag{34}$$

$$f = |\partial D|(U - 4I_2) - v, \tag{35}$$

$$\iint\limits_{E_{12}} (d_1 + d_2)(\gamma_1 + \gamma_2)dg_1dg_2 = 2|\partial D|(J_1 - I_2) - b, \tag{36}$$

$$\iint\limits_{E_{12}} (s_1 + s_2)(\gamma_1 + \gamma_2)dg_1dg_2 = |\partial D|(2J_1 - U + 2I_2) + v - b, \tag{37}$$

$$\iint\limits_{E_{12}} (d_1 + d_2)(s_1 + s_2)dg_1dg_2 = 8I_3 - t + 4z - 2u + c, \tag{38}$$

$$\iint\limits_{E_{12}} (\chi(g_1) + \chi(g_2))(s_1 + s_2)dg_1dg_2 = q - h, \tag{39}$$

$$\iint\limits_{E_{12}} (\chi(g_1) + \chi(g_2))(\gamma_1 + \gamma_2)dg_1dg_2 = 2|\partial D|(|\partial D|\pi S - 2I_2) - g, \tag{40}$$

$$\iint\limits_{E_{12}} (\gamma_1 + \gamma_2)(\beta_1 + \beta_2)dg_1dg_2 + 2\iint\limits_{E_{12}} (s_1\beta_2 + s_2\beta_1 + 2s_1s_2)dg_1dg_2 =$$

$$= 2(e + v - b + m + t - 4z + 2u - c) - 16I_3, \tag{41}$$

$$\iint\limits_{E_{12}} (s_1 + s_2)(\beta_1 + \beta_2)dg_1dg_2 = b - v, \tag{42}$$

$$\iint\limits_{E_{12}} (\beta_1 + \beta_2)^2 dg_1dg_2 = |\partial D|^4 - 4|\partial D|J_1 - \iint\limits_{E_{12}} (\beta_1 + \beta_2)(\gamma_1 + \gamma_2)dg_1dg_2. \tag{43}$$

Докажем (31). Для этого представим $\iint\limits_{g_2\|g_1,g_3}\int \chi(g_1)dg_1dg_2dg_3$ двумя различными способами (здесь и ниже $g_2 \| g_1, g_3$ - множество троек (g_1, g_2, g_3), в которых g_2 отделяет $\chi(g_1)$от $\chi(g_3$:)

$$\iint\limits_{g_2\|g_1,g_3}\int \chi(g_1)dg_1dg_2dg_3 = \iint\limits_{E_{12}} \chi(g_1)\gamma_2 dg_1dg_2 - \iint\limits_{E_{12}} \chi(g_1)\chi(g_2)dg_1dg_2,$$

$$\iint\limits_{g_3 \| g_1, g_3} \int \chi(g_1) dg_1 dg_2 dg_3 = - |\partial D| I_2 + 2I_3 -$$

$$- \iint\limits_{E_{13}} \chi(g_1)\chi(g_3) dg_1 dg_3 + \iint\limits_{E_{13}} (d_1 + d_2)\chi(g_1) dg_1 dg_3.$$

Приравнивая правые части, получаем (31).

К решению системы уравнений (68) мы также будем применять следующую формулу (см. [4]) :

$$EN_n^2 = 2\pi \binom{n}{2} \frac{S}{|\partial D|^2} + 24\pi^2 \binom{n}{4} \frac{S^2}{|\partial D|^4} + 24 \binom{n}{3} \frac{I_2}{|\partial D|^3}. \tag{44}$$

§6. МЕРЫ КОМПОНЕНТ ПРИ n = 4

Начнем с меры A_{46}.

$$\mu_4(A_6) = \iiiint\limits_{N_4 = 6} dg_1 dg_2 dg_3 dg_4 = \iiint\limits_{A_{33}} dg_1 dg_2 dg_3 \int\limits_{\alpha_1} dg_4,$$

где $\alpha_1 = \{g : g \cap \chi(g_i) \neq \emptyset, i = 1, 2, 3\}$.

Применяя комбинаторную формулу, получаем

$$\int\limits_{\alpha_1} dg_4 = 2 \sum_{i=1}^{3} \chi(g_i) - \sum_{k<l} \sum_{i=1}^{4} \rho_i^{(k,l)} I_{\rho_i^{(k,l)}}(g_3), \tag{45}$$

где индикатор $I_\rho(g) = 1$, при $g \cap \rho \neq \emptyset$ (см. Рис.6 для обозначений)

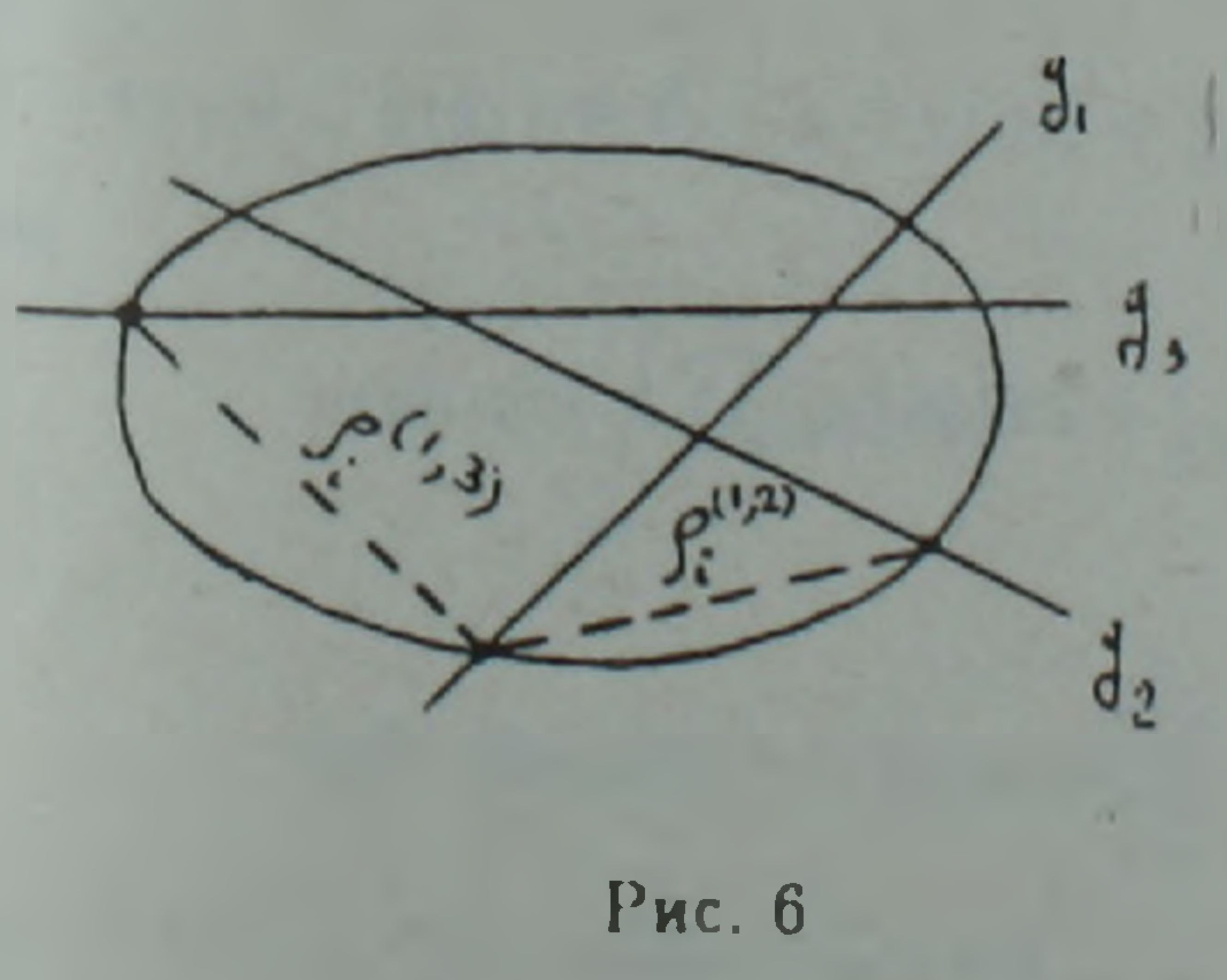

Рис. 6

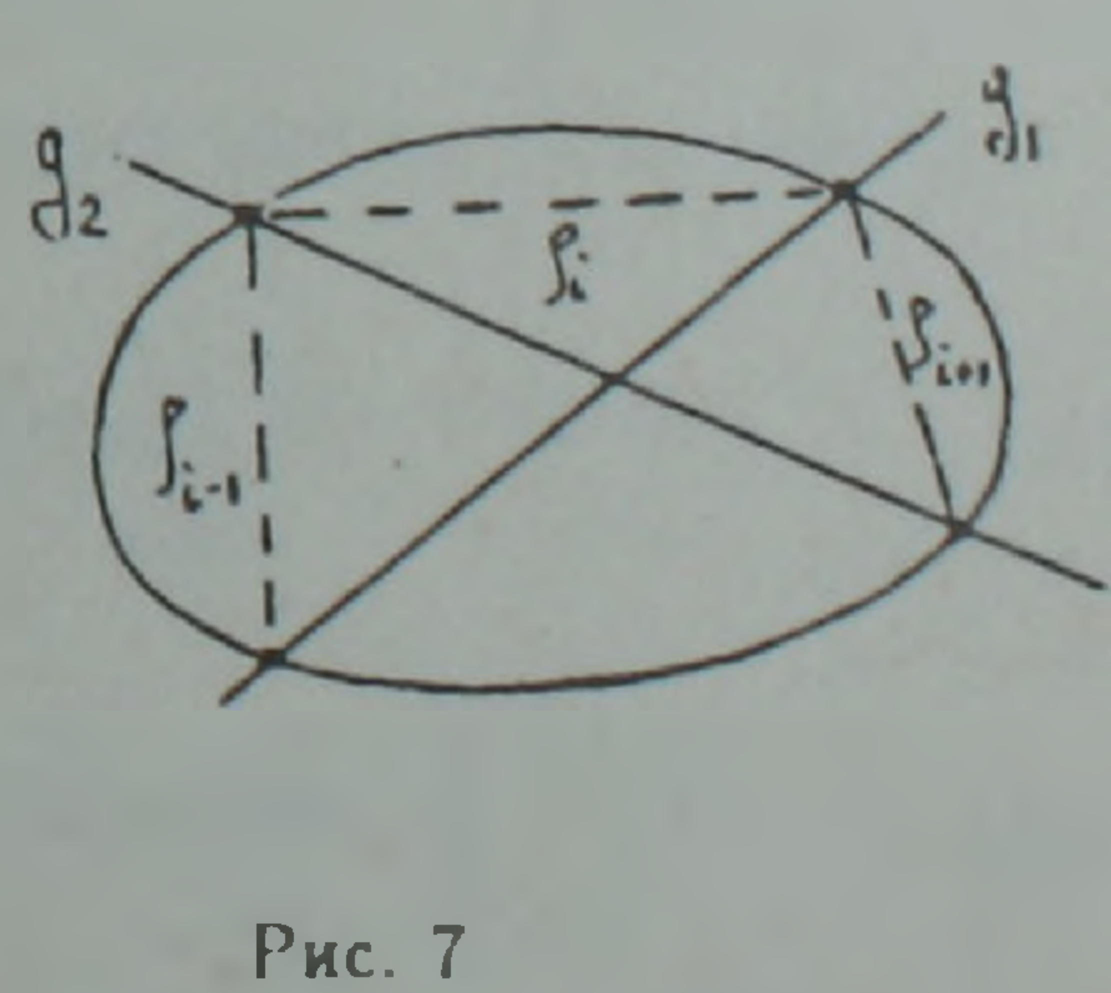

Рис. 7

Поэтому, в силу симметрии, получаем

$$\mu_4(A_6) = 6 \iint\limits_{B_{12}} \chi(g_1) dg_1 dg_2 \int\limits_{F_{12}} dg_3 - 3 \iint\limits_{B_{12}} [\sum_{i=1}^{4} \rho_i^{(1,2)} \int\limits_{F_{12}} I_{\rho_i^{(1,2)}}(g_3)\, dg_3] dg_1 dg_2,$$

Применяя снова комбинаторную формулу, находим (см. Рис. 7) :

$$\int\limits_{F_{12}} I_{\rho_i^{(1,2)}}(g_3) = \chi(g_1) + \chi(g_2) - \rho_{i-1} - \rho_{i+1} \tag{46}$$

Таким образом

$$\mu_4(A_6) = 6 \iint\limits_{B_{12}} \chi(g_1)[2(\chi(g_1) + \chi(g_2)) - \sum_{i=1}^{4} \rho_i] dg_1 dg_2 -$$

$$-3 \iint\limits_{B_{12}} \sum_{i=1}^{4} \rho_i (\chi(g_1) + \chi(g_2) - \rho_{i-1} - \rho_{i+1}) dg_1 dg_2.$$

Окончательно получаем

$$\mu_4(A_6) = 24 I_3 + 12x - 6y + 6z. \tag{47}$$

Перейдем к $\mu_4(A_5)$. Используя симметрию, имеем

$$\mu_4(A_5) = 6 \iiint\limits_{A_{33}} dg_1 dg_2 dg_3 \int\limits_{\alpha_2} dg_4,$$

где $\alpha_2 = \{g : g \cap \chi(g_1) \neq \emptyset, \quad g \cap \chi(g_2) \neq \emptyset, \quad g \cap \chi(g_3) = \emptyset\}$.

Согласно комбинаторной формуле, внутренние интегралы равны

$$\int\limits_{\alpha_2} dg_4 = -2\chi(g_3) - \sum_{i=1}^{4} \rho_i^{(1,2)} (1 - I_{\rho_i^{(1,2)}}(g_3)) + \sum_{i=1}^{4} \rho_i^{(1,3)} I_{\rho_i^{(1,3)}}(g_2) + \sum_{i=1}^{4} \rho_i^{(2,3)} I_{\rho_i^{(2,3)}}(g_1). \tag{48}$$

Следовательно, из (46) получаем, что

$$\mu_4(A_5) = -12 \iint\limits_{B_{13}} \chi(g_3)(2\chi(g_1) + 2\chi(g_3) - \sum_{i=1}^{4} \rho_i) dg_1 dg_3 -$$

$$-6 \iint\limits_{B_{12}} \sum_{i=1}^{4} \rho_i (\chi(g_1) + \chi(g_2) - \sum_{i=1}^{4} \rho_i + \rho_{i-1} + \rho_{i+1}) dg_1 dg_2 +$$

$$+12 \iint\limits_{B_{13}} \sum_{i=1}^{4} \rho_i [\chi(g_1) + \chi(g_3) - \rho_{i-1} - \rho_{i+1}] dg_1 dg_3.$$

Отсюда (см. (2) для обозначений)

$$\mu_4(A_5) = -48 I_3 - 24x + 12y - 36z + 6t. \tag{49}$$

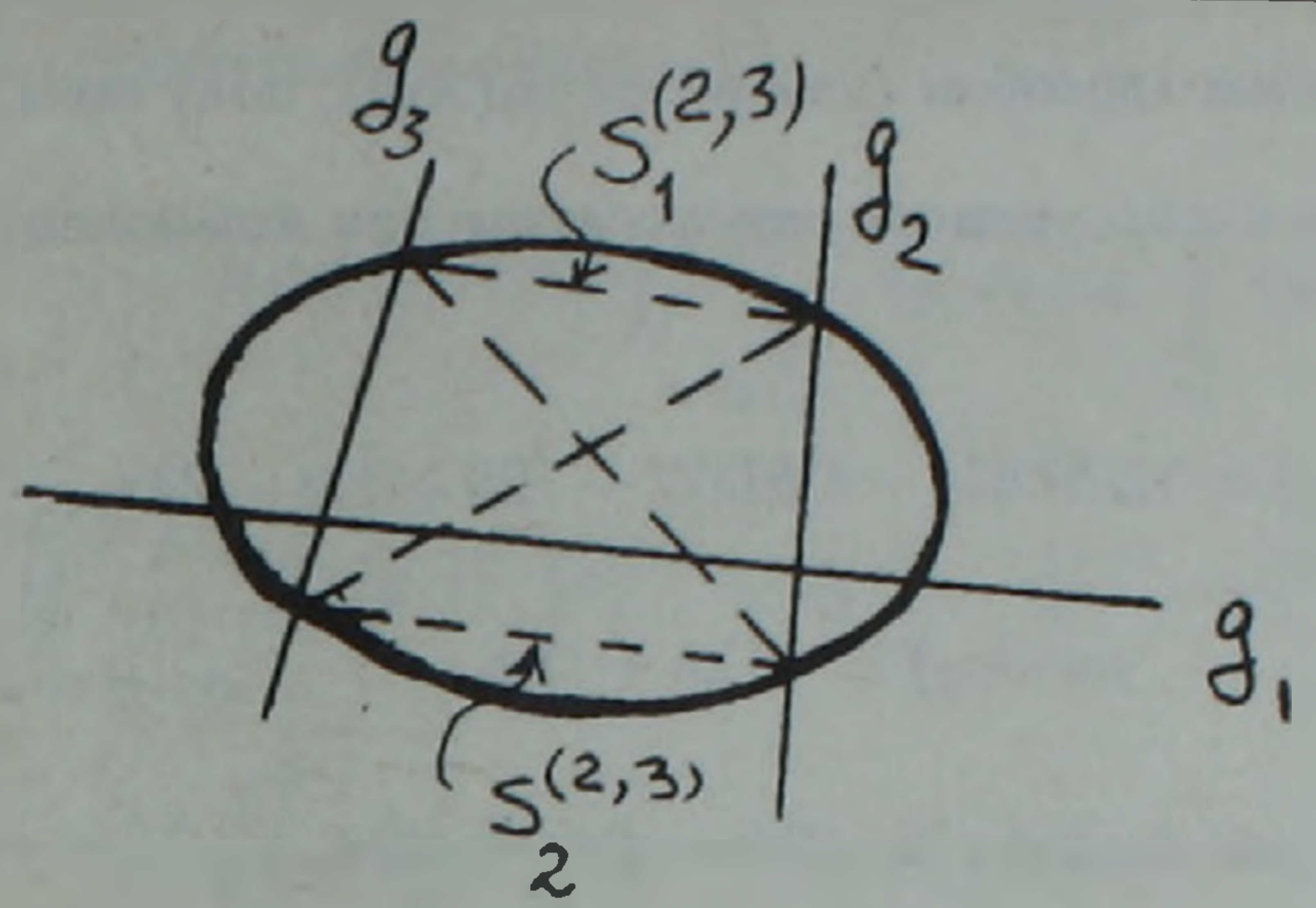

Рис. 8 Пунктирные прямые - диагонали $d_1^{(2,3)}$ и $d_2^{(2,3)}$ четырехугольника, образованного хордами $\chi(g_2)$и $\chi(g_3.)$

Мы можем вычислить $\mu_4(A_5)$ другим способом

$$\mu_4(A_5) = 6 \int\limits_{B_{12}\cap B_{13}\cap E_{23}} \int dg_1 dg_2 dg_3 \int\limits_{\alpha_1} dg_4.$$

Тогда согласно комбинаторной формуле, имеем

$$\int\limits_{\alpha_1} dg_4 = 2\chi(g_1) - \sum_{i=1}^{4} \rho_i^{(1,2)} I_{\rho_i^{(1,2)}}(g_3) - \sum_{i=1}^{4} \rho_i^{(1,3)} I_{\rho_i^{(1,3)}}(g_2) + (d_1^{(2,3)} + d_2^{(2,3)}) \quad (50)$$

Следовательно

$$\mu_4(A_5) = 12 \iint\limits_{B_{12}} \chi(g_1) dg_1 dg_2 \int\limits_{\alpha_3} dg_3 -$$

$$-12 \iint\limits_{B_{12}} \left(\sum_{i=1}^{4} \rho_i \int I_{\rho_i}(g_3) dg_3 \right) dg_1 dg_2 + 6 \iint\limits_{E_{13}} (d_1 + d_2) dg_2 dg_3 \int\limits_{F_{23}} dg_1,$$

где $\alpha_3 = \{g : g \cap \chi(g_1) \neq \emptyset, \quad g \cap \chi(g_2) = \emptyset\}$.

Так как

$$\int\limits_{\alpha_3} I_{\rho_i}(g_3) dg_3 = -\chi(g_2) + \rho_i + \rho_{i+1}, \quad (51)$$

то

$$\mu_4(A_5) = -24x + 12y - 12u - 12z + 6a. \quad (52)$$

Сравнивая (49) и (52), получаем (27).

Аналогично находятся представления для $\mu_4(A_{41})$ и $\mu_4(A_{42})$. Получаем

$$\mu_4(A_{41}) = 12y - 24t + 72z, \quad (53)$$

$$\mu_4(A_{42}) = 12x - 6y + 6u + 6z - 3m. \quad (54)$$

Вычисляя $\mu_4(A_{41})$ вторым способом (как и для $\mu_4(A_5)$), получаем (28).

Аналогично, приходим к следующим результатам для компонент A_{431}, A_{432} и A_{433}

$$\mu_4(A_{31}) = 32|\partial D|I_2 - 4|\partial D|U - 12y + 12t - 24z, \tag{55}$$

$$\mu_4(A_{32}) = -12h + 12a, \tag{56}$$

$$\mu_4(A_{33}) = 12t - 24u - 24z + 12m. \tag{57}$$

Вычисляя $\mu_4(A_{31})$ и $\mu_4(A_{32})$ вторым способом, получаем (29) и (30). Теперь найдем $\mu_4(A_{21})$:

$$\mu_4(A_{21}) = 12 \iiint\limits_{A_{302}} dg_1 dg_2 dg_3 \int\limits_{\alpha_2} dg_4 =$$

$$= 12 \iiint\limits_{A_{302}} (d_1^{(1,2)} + d_2^{(1,2)} - s_1^{(1,2)} - s_2^{(1,2)}) dg_1 dg_2 dg_3 =$$

$$= 12 \iint\limits_{B_{12}} (d_1 + d_2 - s_1 - s_2)[(\beta_1 + \beta_2) - ((s_1 + s_2))] dg_1 dg_2.$$

Окончательно, получаем

$$\mu_4(A_{21}) = 12v - 12m \tag{58}$$

Далее

$$\mu_4(A_{22}) = 12 \iiint\limits_{A_{301}} dg_1 dg_2 dg_3 \int\limits_{\alpha_2} dg_4 = 24 \iint \int\limits_{g_2 || g_1, g_3} [(d_1^{(1,2)} + d_2^{(1,2)} - s_1^{(1,2)} - s_2^{(1,2)}) -$$

$$-(d_1^{(1,3)} + d_2^{(1,3)} - s_1^{(1,3)} - s_2^{(1,3)})] dg_1 dg_2 dg_3 =$$

$$= 24 \iint\limits_{E_{13}} (d_1 + d_2 - s_1 - s_2)(-\chi(g_1) - \chi(g_3) + (d_1 + d_2)) dg_1 dg_3 +$$

$$+24 \iint\limits_{E_{12}} (d_1 + d_2 - s_1 - s_2)(\gamma_2 - \chi(g_2)) dg_1 dg_2.$$

Следовательно

$$\mu_4(A_{22}) = 12h - 24a + 12f. \tag{59}$$

Опустим вычисление для A_{423} и запишем результат как

$$\mu_4(A_{23}) = 12(\pi^2 S^2 - x) - 6(h - l + m). \tag{60}$$

Перейдем к компоненте A_{411}. Имеем

$$\mu_4(A_{11}) = 12 \iint\limits_{g_2 \| g_1, g_3} \int dg_1 dg_2 dg_3 \int\limits_{\alpha_4} dg_4 =$$

$$= 12 \iint\limits_{g_2 \| g_1, g_3} \int [2\chi(g_1) - (d_1^{(1,2)} + d_2^{(1,2)} - s_1^{(1,2)} - s_2^{(1,2)})] dg_1 dg_2 dg_3 =$$

$$= 24 \iint\limits_{E_{13}} \chi(g_1)[-\chi(g_1) - \chi(g_3) + ((d_1 + d_2))] dg_1 dg_3 -$$

$$-12 \iint\limits_{E_{12}} ((d_1 + d_2 - s_1 - s_2))(\gamma_2 - \chi(g_2)) dg_1 dg_2,$$

где $\alpha_4 = \{g : g \cap \chi(g_1) \neq \emptyset, g \cap \chi(g_2) = \emptyset, g \cap \chi(g_3) = \emptyset\}$.

Таким образом

$$\mu_4(A_{11}) = 48I_3 - 24|\partial D|I_2 - 24(\pi^2 S^2 - x) + 12q + 6h - 6f. \tag{61}$$

Перейдем к компоненте A_{412}.

$$\mu_4(A_{12}) = 6 \iint\limits_{g_2 \| g_1, g_3} \int dg_1 dg_2 dg_3 \int\limits_{\alpha_5} dg_4 = 6 \iint\limits_{g_1 \| g_2, g_3} \int [2\chi(g_1) -$$

$$-(d_1^{(1,2)} + d_2^{(1,2)}) - (d_1^{(1,3)} + d_2^{(1,3)}) + (d_1^{(2,3)} + d_2^{(2,3)})] dg_1 dg_2 dg_3,$$

где $\alpha_5 = \{g_4 : g_4 \| g_2, g_3\} \cap \{g_4 : g_4 \cap \chi(g_1) \neq \emptyset\}$.

Окончательно

$$\mu_4(A_{12}) = 24I_3 - 12|\partial D|I_2 + 12w + 6c - 6 \iint\limits_{E_{12}} ((d_1 + d_2))((\gamma_1 + \gamma_2)) dg_1 dg_2. \tag{62}$$

Аналогично

$$\mu_4(A_{13}) = 6m - 6v + 6 \iint\limits_{E_{12}} ((\gamma_1 + \gamma_2))((s_1 + s_2)) dg_1 dg_2 -$$

$$-6 \iint\limits_{E_{12}} ((d_1 + d_2))((s_1 + s_2)) dg_1 dg_2, \tag{63}$$

$$\mu_4(A_{14}) = 6g - 6v + 6m - 6 \iint\limits_{E_{12}} (\chi(g_1) + \chi(g_2))(s_1 + s_2) dg_1 dg_2. \tag{64}$$

Перейдем к вычислению мер последних трех компонент.

$$\mu_4(A_{01}) = 3\iint\limits_{g_1\|g_2,g_3}\int dg_1dg_2dg_3\int\limits_{A_{401}} dg_4 =$$

$$= 3\iint\limits_{g_1\|g_2,g_3}\int [\gamma(g_2)+\gamma(g_3)-2\sum_{i=1}^{3}\chi(g_i)+$$

$$+(d_1^{(1,2)}+d_2^{(1,2)})+(d_1^{(1,3)}+d_2^{(1,3)})]dg_1dg_2dg_3,$$

обозначения показаны на Рис. 9. Далее

$$\mu_4(A_{01}) = 3\iint\limits_{E_{23}}(\gamma(g_2)+\gamma(g_3))[-\chi(g_2)-\chi(g_3)+(d_1+d_2)]dg_2dg_3-$$

$$-6\iint\limits_{E_{23}}(\chi(g_2)+\chi(g_3))[-\chi(g_2)-\chi(g_3)+((d_1+d_2))]dg_2dg_3-$$

$$-6\iint\limits_{E_{12}}\chi(g_1)[\gamma(g_1)-\chi(g_1)]dg_1dg_2+6\iint\limits_{E_{12}}((d_1+d_2))[\gamma(g_1)-\chi(g_1)]dg_1dg_2.$$

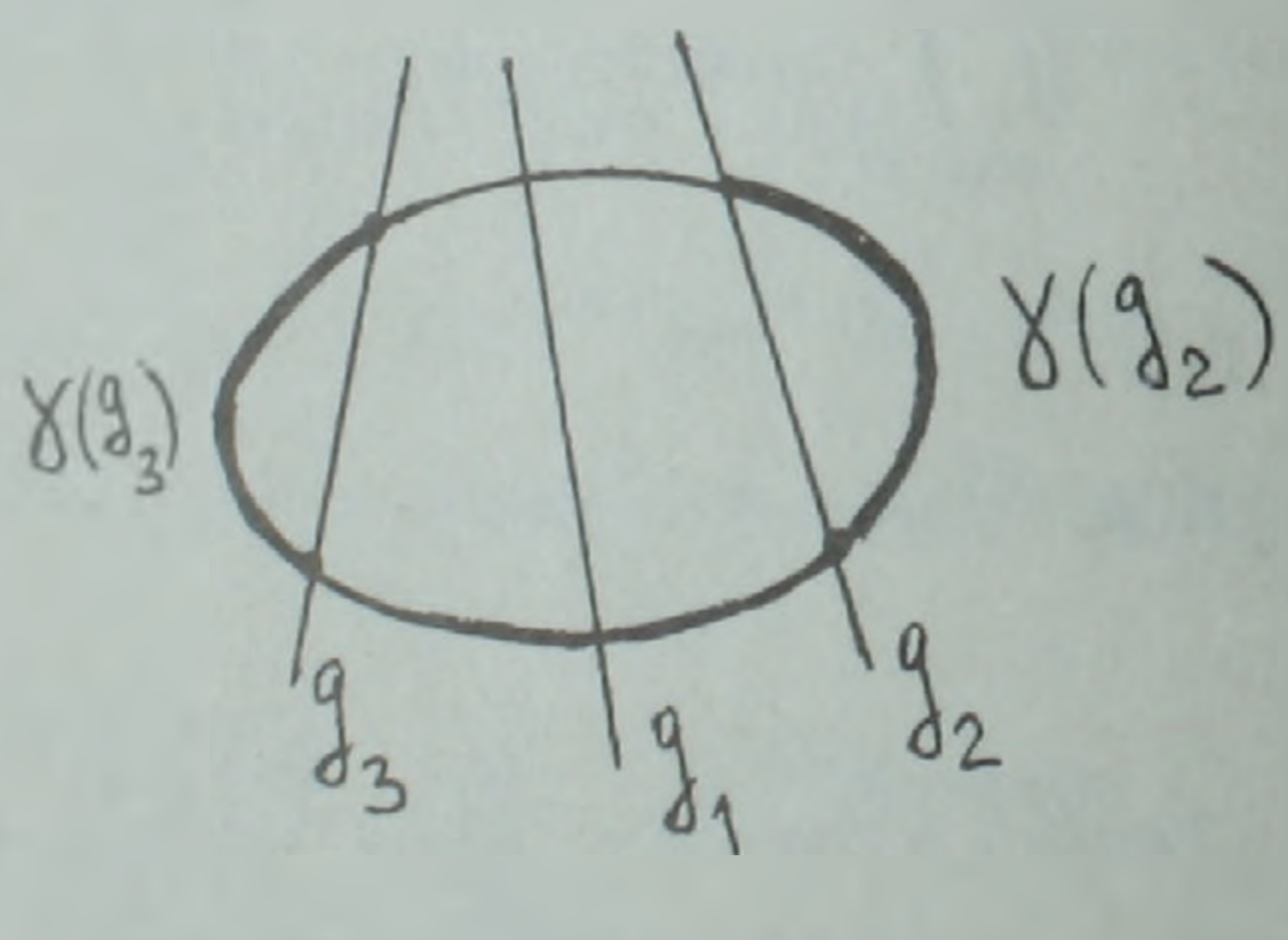

Рис. 9

Используя (31), заключаем

$$\mu_4(A_{01}) = -6\iint\limits_{E_{12}}((\gamma_1+\gamma_2))(\chi(g_1)+\chi(g_2))dg_1dg_2+$$

$$+6\iint\limits_{E_{12}}((\gamma_1+\gamma_2))((d_1+d_2))dg_1dg_2+12|\partial D|I_2-24I_3+12(\pi^2S^2-x)-6q. \quad (65)$$

Теперь рассмотрим $\mu_4(A_{02})$.

$$\mu_4(A_{02}) = 3\iint\limits_{g_1\|g_2,g_3}\int dg_1dg_2dg_3\int\limits_{A_{402}} dg_4 + \iiint\limits_{A_{302}} dg_1dg_2dg_3\int\limits_{A_{402}} dg_4 =$$

$$= 3\iint\limits_{g_1\|g_2,g_3}\int [\beta_1^{(1,2)}+\beta_2^{1,2)}-(s_1^{(1,2)}+s_2^{(1,2)})+\beta_1^{(1,3)}+\beta_2^{1,3)}-(s_1^{(1,3)}+s_2^{(1,3)})]dg_1dg_2dg_3+$$

$$+3\iiint\limits_{A_{302}}[\sum_{i=1}^{3}\gamma(g_i)-2\sum_{i=1}^{3}\chi(g_i)-(s_2^{(1,2)}+s_2^{(1,3)}+s_2^{(2,3)})+$$

$$+(d_1^{(1,2)}+d_2^{(1,2)})+(d_1^{(1,3)}+d_2^{(1,3)})+(d_1^{(2,3)}+d_2^{(2,3)})]dg_1dg_2dg_3.$$

Так как $\beta_i^{(1,2)}+\beta_i^{(1,3)}=\beta_i^{(2,3)}, i=1,2$, то

$$\mu_4(A_{02}) = 6\iint\limits_{E_{12}}(\chi(g_1)+\chi(g_2))(s_1+s_2)dg_1dg_2 - 3\iint\limits_{E_{12}}(d_1+d_2)(s_1+s_2)dg_1dg_2-$$

$$-\frac{9}{2}\iint\limits_{E_{12}}(\gamma_1+\gamma_2)(s_1+s_2)dg_1dg_2 - 6g+6b+3e. \tag{66}$$

Остается найти $\mu_4(A_{03})$.

$$\mu_4(A_{03}) = \iiint\limits_{A_{302}} dg_1dg_2dg_3\int\limits_{A_{403}} dg_4 =$$

$$= \iiint\limits_{A_{302}}[\beta_1^{(1,2)}+\beta_1^{(1,3)}+\beta_1^{(2,3)}-(s_1^{(1,2)}+s_1^{(1,3)}+s_1^{(2,3)})]dg_1dg_2dg_3 =$$

$$= \iiint\limits_{A_{302}}[\beta_1^{(1,2)}+\beta_2^{1,2)}-\gamma(g_3)-(s_1^{(1,2)}+s_1^{(1,3)}+s_1^{(2,3)})]dg_1dg_2dg_3,$$

где мы воспользовались равенством $\beta_1^{(1,3)}+\beta_1^{(2,3)}=\beta_2^{(1,2)}-\gamma(g_3)$.

Окончательно получаем

$$\mu_4(A_{03}) = \iint\limits_{E_{12}}(\beta_1+\beta_2)^2dg_1dg_2 - \iint\limits_{E_{12}}(\beta_1+\beta_2)(s_1+s_2)dg_1dg_2+$$

$$6\iint\limits_{E_{12}}s_1s_2dg_1dg_2 - 3\iint\limits_{E_{12}}(s_1\beta_2+s_2\beta_1)dg_1dg_2 - \frac{1}{2}\iint\limits_{E_{12}}(\gamma_1+\gamma_2)(\beta_1+\beta_2)dg_1dg_2+$$

$$+\frac{1}{2}\iint\limits_{E_{12}}(\gamma_1+\gamma_2)(s_1+s_2)dg_1dg_2. \tag{67}$$

Вычисляя $\mu_4(A_{1i})$ вторым способом, получаем (33) и (34).

Мы получили представления мер 17 компонент, содержащие в правых частях больше интегральных параметров, чем число уравнений. При этом мы использовали дополнительные соотношения, полученные в параграфах 4 и 5.

Таким образом, получаем следующую систему линейных уравнений :

$$\mu_4(A_6) = 24I_3 + 12x - 6y + 6z,$$

$$\mu_4(A_5) = -48I_3 - 24x + 12y - 36z + 6t,$$

$$\mu_4(A_{41}) = 12y - 24t + 72z,$$

$$\mu_4(A_{42}) = 12x - 6y + 6u + 6z - 3m,$$

$$\mu_4(A_{31}) = 32|\partial D|I_2 - 4|\partial D|U - 12y + 12t - 24z,$$

$$\mu_4(A_{32}) = -12h - 96I_3 + 12t - 48z + 24u,$$

$$\mu_4(A_{33}) = 12t - 24u - 24z + 12m,$$

$$\mu_4(A_{21}) = 12v - 12m,$$

$$\mu_4(A_{22}) = 192I_3 - 24t + 96z + 12h - 48u + 12|\partial D|U - 48|\partial D|I_2 - 12v,$$

$$\mu_4(A_{23}) = 12(\pi^2 S^2 - x) - 6h + 6l - 6m,$$

$$\mu_4(A_{11}) = 48I_3 - 24(\pi^2 S^2 - x) + 12q + 6h + 6v - 6|\partial D|U,$$

$$\mu_4(A_{12}) = 24I_3 + 6c + 12w + 6b - 12|\partial D|J_1 \quad , \tag{68}$$

$$\mu_4(A_{13}) = -48I_3 + 6t - 24z + 12u - 6c + 6m - 6b + 12|\partial D|J_1 - 6|\partial D|U + 12|\partial D|I_2,$$

$$\mu_4(A_{14}) = 6g - 6q + 6h - 6v + 6m,$$

$$\mu_4(A_{01}) = -24I_3 + 12(\pi^2 S^2 - x) - 6q - 6b + 12|\partial D|J_1 + 6g - 12|\partial D|^2\pi S + 24|\partial D|I_2,$$

$$\mu_4(A_{02}) = 3t - 24I_3 - 12z + 6u - 3c - 6g + 6b - 9|\partial D|J_1 + +6q - 6h-$$

$$-9|\partial D|I_2 + \tfrac{9}{2}(b - v + |\partial D|U) + 3c,$$

$$\mu_4(A_{03}) = |\partial D|^4 + 24I_3 - 3t + 12z - 6u + 3c - 3|\partial D|J_1 + \tfrac{9}{2}(v - b) - \tfrac{1}{2}|\partial D|U + |\partial D|I_2.$$

Проверим, что

$$\sum_k \mu_4(A_k) = |\partial D|^4. \tag{69}$$

Суммируя правые части (68) и воспользовавшись (31), получаем

$$\sum_k \mu_4(A_k) = |\partial D|^4 + 48I_3 - 30u + 24z + 6l.$$

Из (34) и (33) следует, что $48I_3 - 30u + 24z + 6l = 0$.

§7. ОБРАЩЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (68)

Для решения системы уравнений (68) применим результаты §3 (при $n = 2$ и 3), а именно, (3), (6), (17), (18), (20) и (21), а также хорошо известную формулу интегральной геометрии (см. [4]) :

$$I_3 = 3S^2 = c_7|\partial D|^4. \tag{70}$$

Таким образом, 17 (не независимых, см. (69)) уравнений с 15 неизвестными.

Решение имеет вид

$$x = \frac{1}{48}(p_{433} - 3p_{431} + 4p_{442} - p_{441})|\partial D|^4 + (2I_2 - \tfrac{1}{4}U)|\partial D|, \tag{71}$$

$$y = \frac{1}{12}(p_{441} + 4p_{442} + 2p_{nk} + p_{433})|\partial D|^4 + 8I_3, \tag{72}$$

$$z = \frac{1}{24}(2p_{nk} + 2p_{441} + 4p_{442} + 2p_{431} + p_{433})|\partial D|^4 + 4I_3(\tfrac{1}{3}U - \tfrac{8}{3}I_2)|\partial D|, \tag{73}$$

$$t = \frac{1}{12}(4p_{nk} + 3p_{441} + 8p_{442} + 3p_{431} + 2p_{433})|\partial D|^4 + 16I_3 + (U - 8I_2)|\partial D|, \tag{74}$$

$$u = \frac{1}{48}(2p_{nk}2p_{441} + 4p_{442} + 2p_{431} - p_{432} - p_{421} - p_{422})|\partial D|^4 + \\ + 4I_3(\tfrac{5}{12}U - \tfrac{7}{3}I_2)|\partial D|, \tag{75}$$

$$m = -\frac{1}{24}(2p_{nk} + 4p_{442} + p_{432} + p_{421} + p_{422})|\partial D|^4 + (\tfrac{1}{2}U - 2I_2)|\partial D|, \tag{76}$$

$$h = \frac{1}{24}(2p_{nk} + 4p_{442} - 3p_{432} - p_{421} - p_{422})|\partial D|^4 + (\tfrac{1}{2}U - 2I_2)|\partial D|, \tag{77}$$

$$v = \frac{1}{24}(p_{421} - 2p_{nk} - 4p_{442} - p_{432} - p_{422})|\partial D|^4 + (\tfrac{1}{2}U - 2I_2)|\partial D|, \tag{78}$$

$$l = \frac{1}{24}(4p_{442} - p_{441} - 3p_{431} - 4p_{432} + p_{433} - 2p_{421} - 2p_{422} + 4p_{423})|\partial D|^4 - \\ - 2\pi^2S^2 + \tfrac{1}{2}U|\partial D|, \tag{79}$$

$$q = \frac{1}{24}(p_{441} - 4p_{442} + 3p_{431} + 2p_{432} - p_{433} + p_{422} + 2p_{411})|\partial D|^4 + 2\pi^2S^2 - \\ - 4I_3 + (\tfrac{1}{2}U - 2I_2)|\partial D|, \tag{80}$$

$$g = \frac{1}{24}(p_{441} - 2p_{nk} - 8p_{442} + 3p_{431} + 5p_{432} - p_{433} + 3p_{421} + 2p_{422} + 2p_{411} + \\ + 4p_{414})|\partial D|^4 + 2\pi^2S^2 - 4I_3, \tag{81}$$

$$w = \frac{1}{48}(2p_{nk} - 2p_{441} + 12p_{442} - 6p_{431} - 7p_{432} + 2p_{433} - 3p_{421} - 3p_{422} - 4p_{411} - \\ - 4p_{414})|\partial D|^4 + \pi|\partial D|^2S - 2\pi^2S^2 + 2I_3 - \tfrac{1}{4}|\partial D|U, \tag{82}$$

$$b = \frac{1}{24}(p_{441} - 2p_{nk} - 8p_{442} + 3p_{431} + 3p_{432} - p_{433} + 3p_{421} + p_{422} +$$

$$+ 4p_{414} - 4p_{401})|\partial D|^4 + 2|\partial D|J_1 + 2|\partial D|I_2 - 2\pi|\partial D|^2 S - 4I_3 + 2\pi^2 S^2, \quad (83)$$

$$c = \frac{1}{24}(p_{441} - 4p_{442} + 3p_{431} + 4p_{432} - p_{433} + 2p_{422} + 4p_{411} + 4p_{412} +$$

$$+ 4p_{401})|\partial D|^4 - 2|\partial D|I_2 + \tfrac{1}{2}|\partial D|U - 4I_3 + 2\pi^2 S^2, \quad (84)$$

$$e = \frac{1}{48}(4p_{nk} - 5p_{441} + 28p_{442} - 15p_{431} - 14p_{432} + 5p_{433} - 8p_{421} - 4p_{422} +$$

$$+ 12p_{411} + 12p_{412} - 12p_{414} + 36p_{401} + 16p_{402})|\partial D|^4 + 10I_3 -$$

$$- 4|\partial D|J_1 - \tfrac{3}{4}|\partial D|I_2 - 5\pi^2 S^2 + 7\pi|\partial D|^2 S - 7|\partial D|I_2. \quad (85)$$

Теперь несколько слов о решении системы (68). Заметим, что первые семь (не независимых) уравнений в (68) зависят от 7 неизвестных x, y, z, t, u, m, h и могут быть решены отдельно. Найдем представления (71) - (74) для переменных x, y, z, t и некоторые представления для u, h в терминах m.

Подставляя результат в оставшиеся уравнения, получим в некоторой степени простую новую систему, легко разрешимую методом исключения переменных.

Легко проверить, что решение (74) - (85) удовлетворяет дополнительным соотношениям §§4, 5.

В заключение, заметим, что вероятности, отсутствующие в вышеприведенном списке, могут быть представлены в виде комбинаций вероятностей из этого списка. Например

$$4p_{nk} = 4p_{nk} - 2p_{nk} - p_{441} - p_{431}.$$

ABSRACT. Let D be a bounded convex domain in R^2 and $|\partial D|$ be the length of the boundary of D. The main results are expressions for the values of $p_{nk} = \frac{\mu_n(A_k)}{|\partial D|^k}$ for $n = 3, 4$, where $\mu_n = \mu \underbrace{\times \ldots \times}_{n\ раз} \mu$, ($\mu$ is the invariant measure in the space of lines in the plane).These expressions have the form of linear combinations of some "integral parameters" which depend on the bounded convex domain D. There is a natural question : Do the values p_{nk} determine D uniquely (up to motions)? In this connection the following problem arises : Is it possible to at least express our integral parameters in terms of the probabilities p_{nk} ? This is the problem of inversion of the corresponding linear equations. This problem receives positive solution after complementing the equations for p_{nk} by so-called additional relations between the integral parameters. Some of these additional relations are provided by what we call the generelized Pleijel identities.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Sulanke, " Schnittpunkte zufälliger Geraden", Arch. Math., vol. 16, pp. 320-- 324, 1965.
2. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry, J. Wiley & Sons, Chichester, 1982.
3. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge Univ. Press, 1990.
4. L. A. Santalo, Integral Geometry and Geometric Probability, Addison Wesley, 1976.
5. W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie, 3rd ed., Deutsch. Verlag Wiss., Berlin, 1955.

26 Декабря 1990

Ереванский государственный университет

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

К. А. Ягджян

Известия Академии Наук Армении. Математика,
том 27, №1, 1992

В работе рассматривается задача Коши для слабо гиперболических уравнений, вырождающихся по пространственным переменным. Предполагается, что коэффициенты удовлетворяют некоторым условиям, сформулированным посредством нулей полного символа и характеристических корней. Для таких операторов строится параметрикс и фундаментальное решение задачи Коши с помощью разбиения на зоны кокасательного расслоения и специальных классов псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача Коши

$$Pu = f(t, x), \tag{0.1}$$

$$D_t^j u|_{t=s} = \psi_j(x), \quad j = 0, 1, ..., m-1, \tag{0.2}$$

где $s, t \in [0, T], T > 0$, $x \in R^n$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$, $D_t = -i\partial/\partial t$, α - мультииндекс, P - дифференциальный оператор с частными производными

$$P = D_t^m + \sum_{j+|\alpha| \leq m, j<m} a_{j,\alpha}(t, x) D_t^j D_x^\alpha \tag{0.3}$$

и с гладкими коэффициентами $a_{j,\alpha}(t, x) \in C^\infty([0, T] \times R^n)$. Описание класса операторов дается с помощью вещественнозначной функции $\lambda \in C^\infty(R^n)$, $\lambda^2(x) \leq \leq 1/2$, любая производная которой ограничена в R^n. Обозначим

$$Z = \{x \in R^n \mid \lambda(x) = 0\}, \qquad NZ = R^n \setminus Z,$$

и предположим, что для любого α существует постоянная C_α такая, что

$$|D_x^\alpha \lambda(x)| \leq C_\alpha K^{|\alpha|-1}(x)(|\lambda(x)| + |\nabla\lambda(x)|) \tag{0.4}$$

для всех $x \in NZ$. Здесь $K(x) = (|\lambda(x)| + |\nabla\lambda(x)|)/|\lambda(x)|$. Предполагается также, что с некоторой положительной постоянной $\epsilon < 1/2$

$$K(x) \leq C|\lambda(x)|^{-\epsilon} \quad \text{для всех} \quad x \in NZ. \tag{0.5}$$

Пусть M и N - положительные постоянные. Введем обозначения

$$Z_h(M,N) = \{(x,\xi) \in R^{2n} \,|\, \lambda^2(x)\langle\xi\rangle^2 \geq N^2 \ln^2\langle\xi\rangle, \langle\xi\rangle \geq M\}, \tag{0.6}$$

$$\partial Z_h(M,N) = \{(x,\xi) \in R^{2n} \,|\, \lambda^2(x)\langle\xi\rangle^2 = N^2 \ln^2\langle\xi\rangle, \langle\xi\rangle \geq M\}. \tag{0.7}$$

Здесь $\langle\xi\rangle^2 = e^2 + |\xi|^2$. Пусть $\tau_j(t,x,\xi), j = 1,...,m,$ - нули символа $P(t,x,\tau,\xi) = P_m(t,x,\tau,\xi) + P_{m-1}(t,x,\tau,\xi) + \cdots + P_o(t,x)$ оператора P, т. е. $\tau_j(t,x,\xi), j = 1,...,m,$ - непрерывные корни уравнения

$$\tau^m + \sum_{j+|\alpha|\leq m, j<m} a_{j,\alpha}(t,x)\tau^j\xi^\alpha = 0. \tag{0.8}$$

Основным условием на оператор P является следующее :

(A) При $x \in Z$ нули $\tau_j(t,x,\xi), j = 1,...,m,$ не зависят от ξ. Существуют положительные постоянные M, N, δ такие, что для любых k, α, β найдется постоянная $C_{k,\alpha,\beta}$ такая, что

$$|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \tau_j(t,x,\xi)| \leq C_{k,\alpha,\beta}|\lambda(x)|\langle\xi\rangle^{1-|\alpha|}K^{|\beta|}(x), \tag{0.9}$$

$$|\tau_j(t,x,\xi) - \tau_l(t,x,\xi)| \geq \delta|\lambda(x)|\langle\xi\rangle, \quad j \neq l, \tag{0.10}$$

$$|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \ \operatorname{Im} \ \tau_j(t,x,\xi)| \leq C_{k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}K^{|\beta|}(x)\ln\langle\xi\rangle \tag{0.11}$$

для всех $t \in [0,T], (x,\xi) \in Z_h(M,N)$ и всех $j, l = 1,...,m$.

Целью настоящей работы является построение фундаментального решения задачи (0.1),(0.2).

Статья написана по следующему плану. В §1 приведено эквивалентное описание условия (A) посредством нулей $\lambda_j(t,x,\xi)$ главного символа $P_m(t,x,\tau,\xi)$ и следующего условия на коэффициенты $a_{j,\alpha}(t,x)$ $(j+|\alpha|\le m, j<m)$:

$$\begin{cases} |D_t^k D_x^\beta a_{j,\alpha}(t,x)| \le C_{k,\beta}|\lambda(x)|^{|\alpha|}K^{|\beta|}(x)|\ln\lambda^2(x)|^{m-j-|\alpha|}, & t\in[0,T], x\in NZ, \\ a_{j,\alpha}(t,x)=0, & t\in[0,T], x\in Z, \\ & |\alpha|\ne 0. \end{cases} \tag{0.12}$$

В §2 мы вводим специальные классы псевдодифференциальных операторов (ПДО) и символов, связанных с условием (0.9), и строим алгебру таких операторов. В §3 мы приводим задачу (0.1) - (0.2) к задаче для системы первого порядка и затем строим для последней совершенный, в смысле работ [1],[10], диагонализатор. В §4 мы конструируем фундаментальное решение для скалярного оператора. В заключительных §§5,6 формулируется и доказывается основная теорема настоящей работы.

Задача Коши для слабо гиперболического уравнения второго порядка была рассмотрена О. А. Олейник [2]. Некоторые условия корректности задачи Коши для слабо гиперболических операторов, вырождающихся по пространственным переменным, были получены Т. Мандаи [3]. В [4] Т. Нишитани привел необходимые и достаточные условия C^∞-корректности для уравнения второго порядка с одной пространственной переменной $n=1$ и с аналитическими коэффициентами. С. Тарама [5] доказал, что задача корректно поставлена, если (0.5) выполнено для всех $\epsilon>0$. Основное условие на младшие коэффициенты, предложенное в [5], имеет форму, аналогичную (0.12). Как следствие нашей конструкции параметрикса и фундаментального решения получаются корректность задачи Коши и возможность более точного определения потери гладкости. Более того, построенное фундаментальное решение позволяет исследовать вопрос распространения и ветвления сингулярностей и доказать необходимость для C^∞-корректности задачи Коши условий (0.12) на младшие коэффициенты оператора.

§1. ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ

Следующее предложение показывает, почему условие (A) может быть названо условием гиперболичности.

Предложение 1.1. *Условие (A) эквивалентно следующему :*

(T) Характеристические корни $\lambda_j(t,x,\xi), j = 1,\dots,m$ оператора P вещественны и с некоторыми положительными постоянными C, δ_1 удовлетворяют следующим неравенствам :

$$|\lambda_j(t,x,\xi)| \le C|\lambda(x)||\xi|, \qquad t\in[0,T], \quad x\in R^n, \tag{1.1}$$

$$|\lambda_j(t,x,\xi) - \lambda_l(t,x,\xi)| \ge \delta_1|\lambda(x)||\xi|, \qquad t\in[0,T], \quad x\in R^n,\ j\ne l \tag{1.2}$$

и для любых k,β,j,α выполнено (0.12).

Доказательство. Во-первых докажем, что (A) влечет (T). Действительно, если $j+|\alpha| = m$, $(x,\xi)\in Z_h(M,N)$, то

$$\alpha!|D_t^k D_x^\beta a_{j,\alpha}(t,x)| = |D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \sum_{i_1<\dots<i_{m-j}} \tau_{i_1}(t,x,\xi)\cdots\tau_{i_{m-j}}(t,x,\xi)| \le$$
$$\le C_{k,\beta}K^{|\beta|}(x)|\lambda(x)|^{m-j},$$

где постоянная $C_{k,\beta}$ не зависит от (t,x,ξ). Так как левая часть нижеследующего неравенства не зависит от ξ, мы выбираем ξ таким, что $(x,\xi)\in\partial Z_h(M,N)$ и для $j+|\alpha| = m-1$ получаем

$$|D_t^k D_x^\beta a_{j,\alpha}(t,x)| \le C\{|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \sum_{i_1<\dots<i_{m-j}} \tau_{i_1}(t,x,\xi)\cdots\tau_{i_{m-j}}(t,x,\xi)|+$$
$$+|\xi|\sum_{|\gamma|=m-j}|D_t^k D_x^\beta a_{j,\gamma}(t,x)|\} \le C'_{k,\beta}|\xi||\lambda(x)|^{m-j}K^{|\beta|}(x) \le$$
$$\le C_{k,\beta}|\lambda(x)|^{m-j-1}|\ln\lambda^2(x)|K^{|\beta|}(x).$$

Для оставшихся коэффициентов $a_{j,\alpha}(t,x)$ неравенства (0.12) доказываются аналогично.

Для доказательства (1.1), (1.2), мы осуществляем замену $\lambda = |\lambda(x)||\xi|\mu$, $\tau = |\lambda(x)||\xi|\gamma$, после которой уравнение для нулей главного символа и (0.8) переходят в

$$\mu^m + \sum_{0\le j<m}(\sum_{|\alpha|=m-j}(|\lambda(x)||\xi|)^{j-m}a_{j,\alpha}(t,x)\xi^\alpha)\mu^j = 0, \tag{1.3}$$

$$\gamma^m + \sum_{0\le j<m}(\sum_{|\alpha|=m-j}(|\lambda(x)||\xi|)^{j-m}a_{j,\alpha}(t,x)\xi^\alpha + B_{j+1}(t,x,\xi) + \Delta B_{j+1})\gamma^j = 0, \tag{1.4}$$

соответственно, где $x \in NZ$, $\Delta B_j = 0$, $j = 1, ..., m$, и

$$B_{j+1}(t,x,\xi) = \sum_{|\alpha| \le m-j-1} (|\lambda(x)||\xi|)^{j-m} a_{j,\alpha}(t,x)\xi^\alpha, \qquad j = 0, ..., m-1.$$

В соответствии с (0.12) для $(x,\xi) \in Z_h(M,N)$, $t \in [0,T]$ имеем

$$|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha B_{j+1}(t,x,\xi)| \le C_{k,\alpha,\beta} K^{|\beta|}(x)\langle\xi\rangle^{-|\beta|} \frac{|\ln \lambda^2(x)|}{|\lambda(x)|\langle\xi\rangle} \tag{1.5}$$

и поэтому мы рассматриваем (1.3) как возмущенное уравнение (1.4) с возмущениями $\Delta B_j = -B_j(t,x,\xi)$, $j = 1, ..., m$, в коэффициентах. Согласно (0.10) корни уравнения (1.4) аналитически зависят от возмущений $\Delta B \in C^m$ в некоторой окрестности начала координат. Далее, очевидно, что

$$|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \gamma_l(t,x,\xi)| \le C_{k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|} K^{|\beta|}(x), \tag{1.6}$$

$$|\gamma_l(t,x,\xi) - \gamma_j(t,x,\xi)| \ge \delta' > 0, \qquad l \ne j, \tag{1.7}$$

$$|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \ \operatorname{Im}\ \gamma_l(t,x,\xi)| \le C_{k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|-1} K^{|\beta|}(x)(\ln\langle\xi\rangle)/|\lambda(x)|, \tag{1.8}$$

для всех $t \in [0,T]$, $(x,\xi) \in Z_h(M,N)$ и всех $j, l = 1, ..., m$.

Более того, достаточно показать, что при возмущении некоторым $\Delta B_{j+1} = = -B_{j+1}(t,x,\xi)$ при отсутствии других $\Delta B_1 = \cdots = \Delta B_j = \Delta B_{j+2} = \cdots = = \Delta B_m = 0$, корни уравнения

$$P(t,x,\xi;\mu) - \mu^j B_{j+1}(t,x,\xi) = 0, \tag{1.9}$$

где $P(t,x,\xi;\mu) = (\mu - \gamma_1(t,x,\xi))\cdots(\mu-\gamma_m(t,x,\xi))$, наследуют свойства (1.6)-(1.8) (быть может с новыми постоянными $M, N, \delta', C_{k,\alpha,\beta}$). Действительно, в силу (1.7) имеем

$$\mu_l(t,x,\xi) = \gamma_l(t,x,\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(l)}(t,x,\xi)(-\Delta B_{j+1})^n, \qquad l = 1, ..., m, \tag{1.10}$$

где

$$C_n^{(l)}(t,x,\xi) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-\gamma_l|=\rho} \frac{(w-\gamma_l(t,x,\xi))(wP'_w(t,x,\xi;w) - jP(t,x,\xi;w))w^{jn-1}}{(P(t,x,\xi;w))^{n+1}} dw =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}}\left\{\left(\frac{w-\gamma_l(t,x,\xi)}{P(t,x,\xi;w)}\right)^{n+1} w^{jn-1}(wP'_w(t,x,\xi;w)-\right.\right.$$
$$\left.\left. -jP(t,x,\xi;w))\right\}\right]_{w=\gamma_l(t,x,\xi)}. \tag{1.11}$$

Поэтому, для $0 < 2\rho < \delta'$ мы имеем неравенства

$$|C_n^{(l)}(t,x,\xi)| \le C\,2^{-n} \text{ для всех } t \in [0,T],\ (x,\xi) \in Z_h(M,N), \tag{1.12}$$

в которых постоянная C не зависит от t,x,ξ,l,j. Следовательно, радиус сходимости r_{j+1} рядов в (1.10) ($|\Delta B_{j+1}| < r_{j+1}$) не зависит от $t \in [0,T], (x,\xi) \in Z_h(M,N), l, j$, при условии, что N достаточно велико. Более того, легко видеть, что при $\Delta B_{j+1} = -B_{j+1}(t,x,\xi)$

$$|\mu_l(t,x,\xi) - \mu_j(t,x,\xi)| \ge \delta_2 > 0, \qquad l \ne j, \tag{1.13}$$

$$|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \mu_l(t,x,\xi)| \le C_{k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}K^{|\beta|}(x) \tag{1.14}$$

для всех $t \in [0,T], (x,\xi) \in Z_h(M,N)$, быть может с новой постоянной N. Действительно, мы можем оценить производные $|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \mu_l(t,x,\xi)$, либо оценивая производные коэффициентов $C_n^{(l)}(t,x,\xi)$, либо с помощью формулы производной неявной функции индукцией по $r = k + |\alpha| + |\beta|$. Более того

$$|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \ \operatorname{Im}\ \mu_l(t,x,\xi)| \le |D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \ \operatorname{Im}\ \gamma_l(t,x,\xi)| +$$
$$+|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha B_{j+1}(t,x,\xi)\sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(l)}(t,x,\xi)B_{j+1}^{n-1}(t,x,\xi)| \le$$
$$\le C_{k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}K^{|\beta|}(x)(\ln\langle\xi\rangle)/(\langle\xi\rangle|\lambda(x)|). \tag{1.15}$$

Таким образом, для корней уравнения (1.3) и , следовательно, для нулей $\{\lambda_l(t,x,\xi)\}_1^m$ главного символа, справедливы неравенства, соответствующие (0.9), (0.10), и более того

$$|\ \operatorname{Im}\ \lambda_l(t,x,\xi)| \le C\ln\langle\xi\rangle, \qquad l = 1,\dots,m$$

для всех $t \in [0,T], (x,\xi) \in Z_h(M,N)$. Если теперь мы предположим, что для некоторых $t_o, x_o \in NZ, \xi_o \ne 0, i_o$, $\operatorname{Im}\ \lambda_{i_o}(t_o,x_o,\xi_o) \ne 0$, то для достаточно больших $|\xi|$ точка $(x_o, |\xi|\xi_o)$ войдет в зону $Z_h(M,N)$ и, в виду однородности по переменной ξ функции $\lambda_{i_o}(t,x,\xi)$, последнее неравенство нарушается при $|\xi| \to \infty$. Поэтому, все $\lambda_i(t,x,\xi)$ вещественны. Импликация (A) $\Rightarrow$ (T) доказана.

Доказательство импликации (T) $\Rightarrow$ (A) почти идентично вышеизложенному : мы рассматриваем (1.4) как возмущенное уравнение (1.3). Этим завершается доказательство предложения.

§2. КЛАССЫ СИМВОЛОВ

Пусть J компакт в $R^d, t \in J$, обозначим через $S^m_{\rho,\delta}$ пространство Хермандера символов псевдодифференциальных операторов. В дальнейшем мы всегда предполагаем, что $\delta + \epsilon < 1/2 < \rho \leq 1$.

Определение 2.1. Для вещественных чисел m_1, m_2, m_3, ρ, δ, N через $S_{\rho,\delta}\{m_1, m_2, m_3\}_N$ обозначим пространство всех C^∞-функций $a(t,x,\xi)$, определенных на $J \times R^n_x \times R^n_\xi$ таких, что для некоторых ρ_1, δ_1, m

$$a \in C^\infty_t(J; S^m_{\rho_1,\delta_1}(R^n_x \times R^n_\xi)) \tag{2.1}$$

и для любых k, α, β существует положительная постоянная $C_{k,\alpha,\beta}$ такая, что

$$|D^k_t D^\beta_x D^\alpha_\xi a(t,x,\xi)| \leq C_{k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m_1 - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}|\lambda(x)|^{m_2} K^{m_3+|\beta|}(x) \tag{2.2}$$

для всех $t \in J, (x,\xi) \in Z_h(M,N)$.

Положим $S\{m_1, m_2, m_3\}_N = S_{1,0}\{m_1, m_2, m_3\}_N$ и

$$\mathcal{H}_{\rho,\delta}\{m_1, m_2, m_3\}_N = \bigcap_\nu S_{\rho,\delta}\{m_1 - \nu, m_2 - \nu, m_3\}_N,$$

$$Z_{pd}(M,N) = \{(x,\xi) | \lambda^2(x)\langle\xi\rangle^2 \leq N^2 \ln^2\langle\xi\rangle, \langle\xi\rangle \geq M\}.$$

Предложение 2.1. *(i) Пусть* $a_\nu(t,x,\xi) \in S_{\rho,\delta}\{m_{1(\nu)}, m_2, m_3\}_N$, $m_{1(\nu)} \downarrow -\infty$, *где* $\nu \to \infty$, *и пусть*

$$a_\nu(t,x,\xi) = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in J, (x,\xi) \in Z_{pd}(M,N), \qquad \nu = 0, 1, \ldots \tag{2.3}$$

Тогда существует символ $a(t,x,\xi) \in S_{\rho,\delta}\{m_{1(0)}, m_2, m_3\}_N$ *такой, что*

$$a \sim a_o + a_1 + a_2 + \cdots \quad mod\, C^\infty_t(J; S^{-\infty})(= C^\infty(S^{-\infty})) \tag{2.4}$$

в том смысле, что

$$a - \sum_{\nu=0}^{V} a_\nu \in S_{\rho,\delta}\{m_{1(V)}, m_2, m_3\}_N \quad \text{для всех} \quad V, \tag{2.5}$$

и любые символы со свойством (2.5) отличаются на элемент $C^\infty(S^{-\infty})$, *при условии, что они совпадают на* $J \times Z_{pd}(M,N)$.

(ii) Пусть $b_\nu(t,x,\xi) \in S_{\rho,\delta}\{m_1-\nu, m_2-\nu, m_3\}_N$, $\nu = 0,1,\ldots$, *и предположим, что*

$$b_\nu(t,x,\xi) = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in J, (x,\xi) \in Z_{pd}(M,N), \quad \nu = 0,1,\ldots. \tag{2.6}$$

Тогда существует символ $b(t,x,\xi) \in S_{\rho,\delta}\{m_1,m_2,m_3\}_N$, *для которого имеет место разложение*

$$b \sim b_o + b_1 + b_2 + \cdots \quad mod\, \mathcal{H}_{\rho,\delta}\{m_1,m_2,m_3\}_N \tag{2.7}$$

в том смысле, что

$$b - \sum_{\nu=0}^{V-1} b_\nu \in S_{\rho,\delta}\{m_1 - V, m_2 - V, m_3\}_N \quad \text{для всех} \quad V \tag{2.8}$$

и любые символы со свойством (2.8) отличаются на элемент из класса $\mathcal{H}_{\rho,\delta}\{m_1,m_2,m_3\}_N$.

Доказательство. Пусть $\chi(z)$ есть C^∞-функция на R^1 такая, что $0 \le \chi(z) \le 1$ и $\chi(z) = 1$ для $|z| \le 1$, в то время как для $|z| \ge 2$ $\chi(z) = 0$. Определим функции

$$\psi_{\epsilon_\nu}(\xi) = 1 - \chi(\epsilon_\nu\langle\xi\rangle), \quad \gamma_{\epsilon_\nu}(x,\xi) = 1 - \chi(\epsilon_\nu\lambda^2(x)\langle\xi\rangle^2) \tag{2.9}$$

и положим

$$a(t,x,\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_{\epsilon_\nu}(\xi) a_\nu(t,x,\xi), \tag{2.10}$$

$$b(t,x,\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\epsilon_\nu}(x,\xi) b_\nu(t,x,\xi). \tag{2.11}$$

Очевидно, что при подходящем выборе последовательности $\{\epsilon_\nu\}_0^\infty$, $1 \ge \epsilon_o > > \epsilon_1 > \cdots > \epsilon_\nu > \cdots \to 0$, ряд (2.10) будет абсолютно сходящимся и (2.5) будет выполненным. Предположим теперь, что a и $\tilde{a}$ - два символа со свойством (2.5), что $a(t,x,\xi) = \tilde{a}(t,x,\xi)$ для всех $(x,\xi) \in Z_{pd}(M,N)$. Тогда $(a - \tilde{a}) \in$

$\in S_{\rho,\delta}\{m_{1(V)}, m_2, m_3\}_N$ для всех V, и поэтому

$$|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha (a(t,x,\xi) - \tilde{a}(t,x,\xi))| \leq C_{k,\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{m_{1(V)}-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} |\lambda(x)|^{m_2} (K(x))^{m_3+|\beta|} \leq$$

$$\leq C_{k,\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{m_{1(V)}-\rho|\alpha|+(\delta+\epsilon)|\beta|+\epsilon m_3+|m_2|} \quad \text{для всех} \quad (x,\xi) \in Z_h(M,N).$$

Последнее неравенство, ввиду $m_{1(V)} \downarrow -\infty$, доказывает пункт (i) предложения.

Для доказательства части (ii) мы выбираем последовательность $\{\epsilon_\nu\}_0^\infty$, $1 \geq \geq \epsilon_o > \epsilon_1 > \cdots > \epsilon_\nu > \cdots \to 0$ в (2.11) так, что для любых j, k, α, β, $k + |\alpha| + |\beta| \leq \leq j$, $j = 0, 1, \ldots$, имеем

$$|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha (\gamma_{\epsilon_j}(x,\xi) b_j(t,x,\xi))| \leq 2^{-j} \langle\xi\rangle^{m_1-j+1-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} |\lambda(x)|^{m_2-j+1} K^{m_3+|\beta|}(x)$$

для всех $(x,\xi) \in Z_h(M,N)$, $t \in J$. Поэтому для остатка ряда (2.11), имеем

$$|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \sum_{j=r+1}^{\infty} \gamma_{\epsilon_j}(x,\xi) b_j(t,x,\xi)| \leq$$

$$\leq \langle\xi\rangle^{m_1-r-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} |\lambda^{m_2-r}(x)| K^{m_3+|\beta|}(x) 2^{-r} \sum_{j=0}^{\infty} (2\langle\xi\rangle|\lambda(x)|)^{-j} \leq$$

$$\leq C_{k,\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{m_1-r-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} |\lambda^{l_2-r}(x)| K^{m_3+|\beta|}(x).$$

Таким образом, $\sum_{j=r+1}^{\infty} \gamma_{\epsilon_j} b_j \in S_{\rho,\delta}\{m_1 - r, m_2 - r, m_3\}_N$ для всех $r \geq 0$. Этим завершается доказательство предложения.

Для $c(y,\eta) \in S_{\rho,\delta}$ и для мультииндексов α и β мы используем обозначение $c_{(\beta)}^{(\alpha)}(y,\eta) = i^{|\alpha|} D_\eta^\alpha D_y^\beta c(y,\eta)$ и определяем (см. [7]) осциллирующий интеграл $Os - \iint e^{-iy\cdot\eta} c(y,\eta)(2\pi)^{-n} dy d\eta$ следующим образом :

$$Os - \iint e^{-iy\cdot\eta} c(y,\eta)(2\pi)^{-n} dy d\eta = \lim_{\Theta\to 0} (2\pi)^{-n} \iint e^{-iy\cdot\eta} \psi(\Theta y, \Theta\eta) c(y,\eta) dy d\eta,$$

где функция $\psi(y,\eta)$ выбрана из пространства Шварца $\mathcal{S}$ быстро убывающих функций в R^{2n} и $\psi(0,0) = 1$.

Предложение 2.2. *Для* $a(t,x,\xi) \in S_{\rho,\delta}\{m_1, m_2, m_3\}_N$, $b(t,x,\xi) \in \in S_{\rho,\delta}'\{m_1', m_2', m_3'\}_N$ *определим символ* $a \circ b(t,x,\xi)$ *следующим образом :*

$$a \circ b(t,x,\xi) = Os - \iint e^{-iy\cdot\eta} a(t,x,\xi+\eta) b(t,x+y,\eta)(2\pi)^{-n} dy d\eta.$$

Предположим, что либо

$$a(t,x,\xi)=0 \quad \textit{для всех} \quad t\in J,\,(x,\xi)\in Z_{pd}(M,N) \tag{2.12}$$

либо

$$b(t,x,\xi)=0 \quad \textit{для всех} \quad t\in J,\,(x,\xi)\in Z_{pd}(M,N). \tag{2.13}$$

Тогда

$$a\circ b(t,x,\xi)\in S_{\rho,\delta}\{m_1+m_1',m_2+m_2',m_3+m_3'\}_N \tag{2.14}$$

и для псевдодифференциальных операторов $a(t,x,D_x), b(t,x,D_x)$ *имеем*

$$a(t,x,D_x)b(t,x,D_x)=a\circ b(t,x,D_x) \tag{2.15}$$

и

$$a\circ b(t,x,\xi)\sim\sum_\alpha a^{(\alpha)}(t,x,\xi)b_{(\alpha)}(t,x,\xi)/\alpha! \quad mod\, C^\infty(S^{-\infty}). \tag{2.16}$$

Доказательство. Утверждения (2.15) и (2.16) следуют из Теоремы D [7]. Далее, для любого α, ввиду (0.5), имеем

$$K(x)\le C(N\ln\langle\xi\rangle)^{-\epsilon}\langle\xi\rangle^{\epsilon} \quad \text{для всех} \quad (x,\xi)\in Z_h(M,N), \tag{2.17}$$

$$a^{(\alpha)}b_{(\alpha)}\in S_{\rho,\delta}\{m_1+m_1'-\rho|\alpha|+\delta|\alpha|,m_2+m_2',m_3+m_3'+|\alpha|\}_N,$$

$$a^{(\alpha)}(t,x,\xi)b_{(\alpha)}(t,x,\xi)=0 \quad \text{для всех} \quad (x,\xi)\in Z_{pd}(M,N),\ t\in J.$$

Поэтому утверждение (2.14) следует из пункта (i) Предложения 2.1. Предложение доказано.

Если $A(t,x,D_x)$ - $m\times m$ матричный псевдодифференциальный оператор, то запись $A(t,x,\xi)\in S_{\rho,\delta}\{m_1,m_2,m_3\}_N$ означает, что элементы $A_{i,j}(t,x,\xi)$ символа оператора $A(t)(=A(t,x,D_x))$ принадлежат указанному классу символов для всех $i,j=1,...,m$.

Предложение 2.3. *Пусть задана последовательность матричных символов* $N^{(\nu)}(t,x,\xi)\in S_{\rho,\delta}\{-\nu,-\nu,0\}_N$, $\nu=1,2,...,$ *и пусть*

$$N^{(\nu)}(t,x,\xi)=0 \quad \textit{для всех} \quad t\in J,(x,\xi)\in Z_{pd}(M,N). \tag{2.17}$$

Тогда существует оператор $N(t)$ с символом $N(t,x,\xi)$, принадлежащим классу $S_{\rho,\delta}\{0,0,0\}_N$ и таким, что

$$N(t) \sim I + N^{(1)}(t) + N^{(2)}(t) + \cdots \quad mod\, \mathcal{H}_{\rho,\delta}\{0,0,0\}_N.$$

Более того, для $N(t)$ существует параметрикс $N^{\#}(t)$ такой, что $N^{\#}(t,x,\xi) \in$ $\in S_{\rho,\delta}\{0,0,0\}_N$ и $N^{\#}(t)N(t) - I$, $N(t)N^{\#}(t) - I \in C^{\infty}(\Psi^{-\infty})$.

Доказательство. Существование символа $N(t,x,\xi) \in S_{\rho,\delta}\{0,0,0\}_N$ следует из пункта (ii) Предложения 2.1. Следовательно

$$||I - N(t,x,\xi)|| \le C/(N \ln\langle\xi\rangle) \quad \text{для всех} \quad (x,\xi) \in Z_h(M,N)$$

и поэтому $\det N(t,x,\xi) \neq 0$ для всех $t \in J, (x,\xi) \in R^{2n}$, для достаточно больших M. Конструкция параметрикса $N^{\#}(t)$ отличается от хорошо известной в теории псевдодифференциальных операторов в основном только использованием Предложения 2.1. Предложение доказано.

§3. ПРИВЕДЕНИЕ К СИСТЕМЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Для вектора $u = {}^t(u, D_t u, \ldots, D_t^{m-1} u)$ из уравнения (0.1) получаем систему $D_t\mathcal{U} =$ $= A\mathcal{U} + F_1$, где $F_1 = {}^t(0,\ldots,0,f)$. Положим

$$H(x,D_x) = \begin{pmatrix} h^{m-1}(x,D_x) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & h^{m-2}(x,D_x) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где $h(x,D_x)$ - есть псевдодифференциальный оператор с символом

$$h(x,\xi) = \chi\Big(\frac{\lambda^2(x)\langle\xi\rangle^2}{N^2\ln^2\langle\xi\rangle}\Big)\ln\langle\xi\rangle + \Big(1 - \chi\Big(\frac{\lambda^2(x)\langle\xi\rangle^2}{N^2\ln^2\langle\xi\rangle}\Big)\Big)|\lambda(x)|\langle\xi\rangle, \tag{3.2}$$

где функция χ была определена в доказательстве Предложения. Далее, пусть $H^{\#}(x,D_x)$ - параметрикс оператора $H(x,D_x)$, т. е.

$$H^{\#}(x,D_x)H(x,D_x) - I,\ H(x,D_x)H^{\#}(x,D_x) - I \in C^{\infty}(\Psi^{-\infty})$$

Тогда для вектор-функции $U = H(x,D_x)\mathcal{U}$ уравнение (0.1) приводит к системе

$$D_t U = A_o U + R_1\mathcal{U} + F_2, \tag{3.3}$$

где $R_1 \in C^\infty(\Psi^{-\infty})$, $F_2 = HF_1, A_o = HAH^\#$.

Теперь мы упорядочим корни уравнения (0.8) следующим образом :

$$\mathrm{Re}\ \tau_1(t,x,\xi) < \ \mathrm{Re}\ \tau_2(t,x,\xi) < \cdots < \ \mathrm{Re}\ \tau_m(t,x,\xi), t \in [0,T], (x,\xi) \in Z_h(M,N).$$

Далее, выбираем постоянные $d_1 < d_2 < \cdots < d_m$ и рассматриваем функции

$$\varphi_k(t,x,\xi) = d_k \chi(\frac{\lambda^2(x)\langle\xi\rangle^2}{N^2 \ln^2\langle\xi\rangle}) \ln\langle\xi\rangle + (1 - \chi(\frac{\lambda^2(x)\langle\xi\rangle^2}{N^2 \ln^2\langle\xi\rangle}))\tau_k(t,x,\xi), \quad k = 1,...,m. \tag{3.4}$$

По системе $\{\varphi_k(t,x,\xi)/h(x,\xi)\}_1^m$ строим матрицу Вандермонда $M^\#(t,x,\xi) =$ $= V(\varphi_1/h, \varphi_2/h, ..., \varphi_m/h)$ и пусть $M(t,x,D_x)$ - параметрикс для $M^\#(t,x,D_x)$. Тогда вектор $V = M(t)U$будет решением системы

$$D_t V = MA_o M^\# V - iM_t M^\# V + R_2 U + F_3,$$

где $R_2 \in C^\infty(\Psi^{-\infty})$. Поэтому мы рассматриваем следующую систему :

$$(D_t - \mathcal{D}(t) + \mathcal{B}(t))V = F, \tag{3.5}$$

в которой $\mathcal{D}(t) - \mathcal{B}(t) = MA_o M^\# + iM_t M^\#$ и $\mathcal{D}(t)$ - оператор с диагональным символом $\mathcal{D}(t,x,\xi)$, с элементами $\varphi_1, ..., \varphi_m$, а $\mathcal{B}(t)$ - оператор с символом $\mathcal{B}(t,x,\xi) \in S\{0,0,0\}_N$ таким, что для любых k, α, β выполняются неравенства

$$||D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \mathcal{B}(t,x,\xi)|| \le C_{k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\varepsilon|\beta|-|\alpha|} \ln\langle\xi\rangle \tag{3.6}$$

для всех $t \in [0,T], (x,\xi) \in Z_{pd}(M,2N)$.

Теорема 3.1. *Существуют операторы $N(t), F(t), R(t)$ (с символами $N(t,x,\xi)$, $F(t,x,\xi)$, $R(t,x,\xi)$, соответственно) такие, что*

$$(D_t - \mathcal{D}(t) + \mathcal{B}(t))N(t) = N(t)(D_t - \mathcal{D}(t) + F(t) + R(t)) \quad mod\, C^\infty(\Psi^{-\infty}) \tag{3.7}$$

и

(i) $N(t,x,\xi) \in S\{0,0,0\}_N$, $|det\, N(t,x,\xi)| > const > 0$ для всех $t \in [0,T], (x,\xi) \in R^{2n}$,

$$N(t,x,\xi) = I \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T], (x,\xi) \in Z_{pd}(M,N);$$

(ii) $F(t,x,\xi)$ *есть диагональная матрица,* $F(t,x,\xi) \in S\{0,0,0\}_N$,

$$F(t,x,\xi) = 0 \quad \textit{для всех} \quad t \in [0,T], (x,\xi) \in Z_{pd}(M,N);$$

(iii) $R((t,x,\xi) \in \mathcal{H}\{0,0,0\}_N$, *и для любых* k, α, β *неравенства*

$$||D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha R((t,x,\xi)|| \le C_{k,\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{\epsilon|\beta|-|\alpha|} \ln\langle\xi\rangle \tag{3.8}$$

выполняются для всех $t \in [0,T], (x,\xi) \in Z_{pd}(M,2N)$.

Доказательство. Мы ищем матрицы $N(t,x,\xi)$, $F(t,x,\xi)$, имеющие представления :

$$N(t,x,\xi) \sim I + N^{(1)}(t,x,\xi) + N^{(2)}(t,x,\xi) + \cdots \quad mod\, \mathcal{H}\{0,0,0\}_N,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N^{(\nu)}(t,x,\xi) = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T], (x,\xi) \in Z_{pd}(M,N), \nu = 1,2,... \\ N^{(\nu)}(t,x,\xi) \in S\{-\nu,-\nu,0\}_N. \end{array} \right. \tag{3.9}$$

$$F(t,x,\xi) \sim F^{(o)}(t,x,\xi) + F^{(1)}(t,x,\xi) + \cdots \quad mod\, \mathcal{H}\{0,0,0\}_N.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F^{(\nu)}(t,x,\xi) = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T], (x,\xi) \in Z_{pd}(M,N), \nu = 0,1,... \\ F^{(\nu)}(t,x,\xi) \in S\{-\nu,-\nu,0\}_N. \end{array} \right. \tag{3.10}$$

Пусть $F^{(o)}(t,x,\xi) = \gamma_1(x,\xi)\ \mathrm{diag}[\mathcal{B}(t,x,\xi)]$. Здесь diag $[\mathcal{B}]$ обозначает диагональную часть матрицы $\mathcal{B}$, а функция $\gamma_1(x,\xi)$ была определена в (2.9). Положим

$$N^{(1)}(t,x,\xi) = \gamma_1(x,\xi)(n_{j,k}^{(1)}(t,x,\xi)),$$

где

$$n_{j,k}^{(1)} = \left\{ \begin{array}{l} b_{j,k}(t,x,\xi)/(\varphi_j(t,x,\xi) - \varphi_k(t,x,\xi)),\ j \ne k, \\ 0, \quad j = k, \end{array} \right.$$

а $b_{j,k}(t,x,\xi)$ - элементы матрицы $\mathcal{B}(t,x,\xi)$. Ясно, что (3.9) с $\nu = 1$ и (3.10) с $\nu = 0$ выполнены. Если теперь для $\nu = 1,2,...$ положим

$$\mathcal{B}^{(\nu+1)}(t) = \mathcal{B}(t)(\gamma_1(x,D_x) - 1) + (D_t - \mathcal{D}(t) + \mathcal{B}(t))(\sum_{\mu=1}^{\nu+1} N^{(\mu)}(t) + I) -$$

$$-(I + \sum_{\mu=1}^{\nu+1} N^{(\mu)}(t))(D_t + \mathcal{D}(t) + \sum_{\mu=0}^{\nu} F^{(\mu)}(t)), \quad \nu = 0,1,...,$$

$$F^{(\nu)} = \mathrm{diag}[\mathcal{B}^{(\nu)}], \qquad N^{(\nu+1)}(t,x,\xi) = (n_{j,k}^{(\nu+1)}(t,x,\xi)),$$

$$n_{j,k}^{(\nu+1)}(t,x,\xi) = \left\{ \begin{array}{l} b_{j,k}^{(\nu)}(t,x,\xi)/(\varphi_j(t,x,\xi) - \varphi_k(t,x,\xi)), \quad j \ne k, \\ 0, \quad j = k. \end{array} \right.$$

тогда по индукции мы получим (3.9),(3.10) для всех $\nu = 0, 1, \ldots$. С помощью Предложений 2.1, 2.2 и 2.3 мы строим символы $N(t, x, \xi)$, $F(t, x, \xi)$ такие, что для оператора

$$\tilde{R}(t) = (D_t - \mathcal{D}(t) + \mathcal{B}(t))N(t) - N(t)(D_t - \mathcal{D}(t) + F(t))$$

имеет место включение $\tilde{R}(t, x, \xi) \in \mathcal{H}\{0, 0, 0\}_N$ и $\tilde{R}(t, x, \xi) = \mathcal{B}(t, x, \xi)$ для всех $t \in \in [0, T], (x, \xi) \in Z_{pd}(M, N)$. Пусть теперь $N^{\#}(t)$ - параметрикс оператора $N(t)$. Мы полагаем $R(t) = N^{\#}(t)\tilde{R}(t)$. Теорема доказана.

§4. ПОСТРОЕНИЕ ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ

Очевидно, что можно предполагать, что функции $\varphi_k(t, x, \xi)$ (3.4) определены для всех $t \in [0, T], x \in R^n, \xi \in R^n : \langle\xi\rangle \geq M/2$. Обозначим через $\lambda(t, x, \xi)$ вещественную часть одной из функций $\chi(M/\langle\xi\rangle)\varphi_k(t, x, \xi)$, а через d - соответствующую постоянную d_k из (3.4), k=1,...,m. Рассмотрим далее следующую задачу Коши для системы Гамильтона :

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = -\nabla_\xi \lambda(t, q, p), & \dfrac{dp}{dt} = \nabla_x \lambda(t, q, p) \text{ на } 0 \leq t \leq T_o \\ q|_{t=s} = y, & p|_{t=s} = \xi, \quad s \in [0, T_o]. \end{cases} \tag{4.1}$$

Согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений решение $(q(t, s, y, \xi), p(t, s, y, \xi))$ задачи (4.1) существует для всех $(t, s) \in J = [0, T_o] \times \times [0, T_o], y \in R^n, \xi \in R^n$, если T_o достаточно мало.

Лемма 4.1. *Существуют постоянные T_o, C, C_1, C_2 такие, что*

(i) если $(y, \xi) \in Z_{pd}(M, N/2)$, то $(q(t, s, y, \xi), p(t, s, y, \xi)) \in Z_{pd}(M/2, N)$, а если $(y, \xi) \in Z_h(2M, N/2)$, то

$$(q(t, s, y, \xi), p(t, s, y, \xi)) \in Z_h(M, N/4) \quad \textit{для всех} \quad (t, s) \in J;$$

(ii) если $(y, \xi) \in Z_{pd}(2M, N/2)$, то для всех $(t, s) \in J$

$$p(t, s, y, \xi) = \xi, \quad q(t, s, y, \xi) = y - d(t - s)\nabla_\xi \ln\langle\xi\rangle;$$

(iii) если $(y, \xi) \in Z_h(2M, N/2)$, то для всех $(t, s) \in J$

$$|q(t, s, y, \xi) - y| \leq C|\lambda(y)|, \quad |p(t, s, y, \xi) - \xi| \leq C|\lambda(y)|K(y)\langle\xi\rangle,$$

$$C_1^{-1}|\lambda(y)| \leq |\lambda(q(t, s, y, \xi))| \leq C_1|\lambda(y)|, \quad C_2^{-1}K(y) \leq K(q(t, s, y, \xi)) \leq C_2K(y);$$

(iv) $p(t, s, y, \xi) - \xi \in S\{1, 1, 1\}_{N/2}, \qquad q(t, s, y, \xi) - y \in S\{0, 1, 0\}_{N/2}.$

Доказательство. Существует постоянная C_3 такая, что

$$\sum_{|\alpha|\le 2} |\lambda^{(\alpha)}(y)| \le C_3 \quad \text{для всех} \quad y \in R^n.$$

Поэтому $|q(t)-y| \le C_4 T_o$, $|p(t)-\xi| \le C_4 T_o(\xi)$. Таким образом, для любого $\delta > 0$ существует T_o такое, что

$$(1-\delta)\langle\xi\rangle \le \langle p(t,s,y,\xi)\rangle \le (1+\delta)\langle\xi\rangle \quad \text{для всех} \quad (t,s) \in \dot{J},\ (y,\xi) \in R^{2n}.$$

Далее

$$|q(t)-y| \le \left|\int_s^t |\nabla_\xi \lambda(\tau, q(\tau), p(\tau))| d\tau\right| \le$$

$$\le \left|\int_s^t \{C_5\langle p(\tau)\rangle^{-1} + C_6|\lambda(q(\tau))|\} d\tau\right| \le |t-s|(C_7\langle\xi\rangle^{-1} +$$

$$+ C_4C_6|\lambda(y)|) + C_8\left|\int_s^t |q(\tau)-y| d\tau\right|.$$

Отсюда следует

$$|q(t)-y| \le C_9|t-s|(\langle\xi\rangle^{-1} + |\lambda(y)|) \quad \text{для всех} \quad (t,s) \in J,\ (y,\xi) \in R^{2n},$$

если T_o достаточно мало.

Если теперь $(y,\xi) \in Z_{pd}(M, N/2)$, то

$$|\lambda(q(t))| \le C_3|q(t)-y| + |\lambda(y)| \le C_3C_9|t-s|(1+\delta)\langle p(t)\rangle^{-1} +$$

$$+ (C_3C_9|t-s|+1)\langle\xi\rangle^{-1}(N/2)\ln\langle\xi\rangle,$$

что означает, что для любой положительной постоянной $\delta_1 > 0$

$$|\lambda(q(t))|\langle p(t)\rangle \le (C_4C_9|t-s|(1+\delta) + (N/2)(C_4C_9|t-s|+1)\times$$

$$\times(1+\delta)(1+\delta_1))\ln\langle p(t)\rangle \le N\ln\langle p(t)\rangle,$$

если T_o достаточно мало. Далее, для $(y,\xi) \in Z_h(2M, N/2)$ имеем

$$|\lambda(y)| \le C_3|q(t)-y| + |\lambda(q(t))| \le C_3C_9|t-s|(\langle\xi\rangle^{-1} + |\lambda(y)|) +$$

$$+ |\lambda(q(t))| \le |\lambda(q(t))| + 5C_3C_9|t-s||\lambda(y)|,$$

что приводит к неравенству $|\lambda(q(t))| \geq (2/3)|\lambda(y)|$. Следовательно

$$|\lambda(q(t))|\langle p(t)\rangle \geq (2/3)(1-\delta)\langle\xi\rangle|\lambda(y)| \geq (N/4)\ln\langle p(t)\rangle,$$

если T_o достаточно мало. Это доказывает (i).

Утверждение (ii) следует из (i). Для доказательства (iii) мы замечаем, что $(y,\xi) \in Z_h(2M, N/2)$

$$|\lambda(q(t))| \leq (1 + 2C_3C_9|t-s|)|\lambda(y)| \leq C_{10}|\lambda(y)|,$$

если T_o достаточно мало. Далее, для любого $\alpha, |\alpha| = 1$, имеем

$$|\lambda^{(\alpha)}(q(t))| \leq C_3|q(t) - y| + |\lambda^{(\alpha)}(y)| \leq 2C_3C_9|t-s||\lambda(y)| + |\lambda^{(\alpha)}(y)|.$$

Следовательно

$$|\lambda^{(\alpha)}(q(t))/\lambda(q(t))| \leq C_{11}|t-s| + C_{10}|\lambda^{(\alpha)}(y)/\lambda(y)|,$$

что приводит к неравенству $K(q(t)) \leq C_{12}K(y)$. Аналогично

$$|\lambda^{(\alpha)}(y)/\lambda(y)| \leq C_{13} + C_{13}|\lambda^{(\alpha)}(q(t))/\lambda(q(t))|.$$

Утверждение (iii) доказано. Утверждение (iv) есть следствие (i)-(iii). Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Существуют положительные постоянные T_o и ϵ_o такие, что*

$$||\partial q(t,s,y,\xi)/\partial y - I|| \leq 1 - \epsilon_o \quad \textit{для всех} \quad (y,\xi) \in R^{2n}, (t,s) \in J.$$

Более того, у отображения $x = q(t,s,y,\xi)$: $R^n_y \ni y \mapsto x \in R^n_x$, в котором t,s,ξ рассматриваются как параметры, существует обратное отображение $y = y(t,s,x,\xi)$ такое, что $y(t,s,x,\xi) - x \in S\{0,1,0\}_{N/3}$,

$$y(t,s,x,\xi) = x + d(t-s)\nabla_\xi \ln\langle\xi\rangle \quad \text{для всех} \quad (x,\xi) \in Z_{pd}(M, N/3),\ (t,s) \in J,$$

$$||\partial y(t,s,x,\xi)/\partial x - I|| \leq (1-\epsilon_o)/\epsilon_o \quad \text{для всех} \quad (x,\xi) \in R^{2n},\ (t,s) \in J.$$

Доказательство. Настоящая лемма является непосредственным следствием Леммы 4.1 и теоремы о неявной функции.

Теперь мы переходим к построению фазовой функции. С этой целью рассматриваем следующую задачу Коши для уравнения эйканала :

$$\begin{cases} \partial_t \Phi - \lambda(t, x, \nabla_x \Phi) = 0 & \text{на } 0 \le t \le T_o, \\ \Phi(s, s, x, \xi) = x \cdot \xi, & s \in [0, T_o]. \end{cases} \tag{4.2}$$

Лемма 4.3. *Существует постоянная T_o такая, что задача (4.2) имеет единственное решение $\Phi(t, s, x, \xi)$ на J, и, более того*

$$\Phi(t, s, x, \xi) = x \cdot \xi + d(t - s) \ln\langle\xi\rangle \quad \text{для всех} \quad (x, \xi) \in Z_h(M, N)(M, N/2), \tag{4.3}$$

$$|\nabla_x \Phi(t, s, x, \xi) - \xi| \le C|t - s|\, K(x)\, |\lambda(x)| \langle\xi\rangle, \quad (x, \xi) \in Z_h(M, N/2), (t, s) \in J, \tag{4.4}$$

$$||\nabla_x \nabla_\xi \Phi(t, s, x, \xi) - I|| \le C|t - s|\, K(x)\, |\lambda(x)|, \quad (x, \xi) \in Z_h(M, N/2), (t, s) \in J, \tag{4.5}$$

$$\Phi(t, s, x, \xi) - x \cdot \xi \in S\{1, 1, 0\}_{N/2}. \tag{4.6}$$

Доказательство. Пусть $y = y(t, s, x, \xi)$ - отображение из Леммы 4.2. Определим функцию $u = u(t, s, y, \eta)$ следующим образом :

$$u(t, s, y, \eta) = y \cdot \eta + \int_s^t [\lambda - p\nabla_\xi \lambda](\tau, q(\tau, s, y, \eta), p(\tau, s, y, \eta)) d\tau.$$

Тогда фазовая функция может быть задана формулой $\Phi(t, s, x, \xi) = u(t, s, y(t, s, x, \xi), \xi)$. Утверждения (4.4) - (4.6) являются следствиями последней формулы и Лемм 4.1 - 4.2. Лемма доказана.

Следствие 4.1. Существуют $T_o, \epsilon_o, \epsilon'_o$ такие, что функции $\Phi(t, s, x, \xi)$ удовлетворяют следующим условиям :

$$\Phi(t, s, x, \xi) - x \cdot \xi \in C^\infty(S^{-\infty})(J : S^1_{1,\epsilon}),$$

$$|\nabla_x \Phi(t, s, x, \xi) - \xi| \le (1 - \epsilon_o)|\xi| + C \quad (0 < \epsilon_o \le 1, C > 0),$$

$$||\nabla_x \nabla_\xi \Phi(t, s, x, \xi) - I|| \le 1 - \epsilon'_o \qquad (0 < \epsilon'_o \le 1).$$

Таким образом, функция $\Phi(t, s, x, \xi)$ удовлетворяет всем условиям, предъявляемым к фазовым функциям в работе [7].

§5. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть L - элементарный гиперболический оператор следующего вида

$$L = D_t - \lambda(t, x, D_x) + f(t, x, D_x) \quad \text{на}\, [0, T_o] \times R^n_x, \tag{5.1}$$

где функция $\lambda(t, x, \xi)$ описана выше, $f(t, x, \xi) \in C^\infty(S^{-\infty})([0, T_o] \times R^{2n})$, и

$$f(t, x, \xi) = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0, T_o], (x, \xi) \in Z_{pd}(M, N), \tag{5.2}$$

$$f(t, x, \xi) \in S\{0, 0, 0\}_N. \tag{5.3}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} Lu = \varphi & \text{на} \quad [0, T_o] \times R^n_x, \\ u|_{t=s} = \psi(x) & \quad s \in [0, T_o]. \end{cases} \tag{5.4}$$

Предварительно мы строим параметрикс задачи (5.4), т.е. интегральный оператор Фурье (ИОФ) $E^o_\Phi(t, s)$ такой, что

$$\begin{cases} LE^o_\Phi(t, s) = 0 & mod\, C^\infty(S^{-\infty})(J; C^\infty(\Psi^{-\infty})) \quad \text{на} \quad (t, s) \in J, \\ E^o_\Phi(s, s) = I & \text{(тождественный оператор)}. \end{cases} \tag{5.5}$$

Мы ищем параметрикс как оператор, действующий согласно следующей формуле :

$$E^o_\Phi(t, s)\psi(x) = Os - \iint e^{i(\Phi(t,s,x,\xi) - y\cdot\xi)} e^o(t, s, x, \xi)\psi(y)(2\pi)^{-n}\, dyd\xi$$

с символом $e^o(t, s, x, \xi)$, допускающим асимптотическое разложение

$$e^o(t, s, x, \xi) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} e_\nu(t, s, x, \xi) \quad mod\, C^\infty(S^{-\infty})(J; S^{-\infty}). \tag{5.6}$$

Определим

$$g(t, s, x, \xi) = -i \sum_{|\alpha|=2} \lambda^{(\alpha)}(t, x, \nabla_x\Phi(t, s, x, \xi))\partial^\alpha_x\Phi(t, s, x, \xi)/\alpha! +$$
$$+ f(t, x, \nabla_x\Phi(t, s, x, \xi)), \tag{5.7}$$

$$G = D_t - \sum_{|\alpha|=1} \lambda^{(\alpha)}(t, x, \nabla_x\Phi(t, s, x, \xi))D^\alpha_x + g(t, s, x, \xi). \tag{5.8}$$

Если $e_{\nu,\Phi}(t,s)$ – ИОФ с символом $e_\nu(t,s,x,\xi)$ и фазовой функцией $\Phi(t,s,x,\xi)$, то (см. [7])

$$\sigma(Le_{\nu,\Phi}(t,s))(x,\xi) = G\dot{e}_\nu(t,s,x,\xi) + r_\nu(t,s,x,\xi),$$

где

$$r_\nu(t,s,x,\xi) \sim - \sum_{|\alpha|\geq 2} \{D_y^\alpha(\lambda^{(\alpha)}(t,x,\bar{\nabla}_x\Phi(t,s,x,y,\xi))e_\nu(t,s,y,\xi)/\alpha!)\}_{y=x} \tag{5.9}$$
$$mod\, C^\infty(S^{-\infty})(J;S^{-\infty})(\nu = 0,1,...)$$

$$\bar{\nabla}_x\Phi(t,s,x,y,\xi) = \int_0^1 \nabla_x\Phi(t,s,y+\theta(x-y),\xi)d\theta. \tag{5.10}$$

Поэтому, полагаем

$$\begin{cases} Ge_o = 0, & Ge_\nu + r_{\nu-1} = 0, \quad 0 \leq t \leq T_o, \\ e_o(s,s) = 1, & e_\nu(s,s) = 0, \quad \nu = 1,2,... \end{cases} \tag{5.11}$$

Следовательно, получаем

$$e_o(t,s,x,\xi) = \exp[-i\int_s^t g(\sigma,s,q(\sigma,s,y(t,s,x,\xi),\xi),\xi)d\sigma], \tag{5.12}$$

$$e_\nu(t,s,x,\xi) = -i\int_s^t r_{\nu-1}(\sigma,s,q(\sigma,s,y(t,s,x,\xi),\xi),\xi)\times$$
$$\times \exp[-i\int_o^t g(\sigma',s,q(\sigma',s,y(t,s,x,\xi),\xi),\xi)d\sigma']d\sigma \quad \nu = 1,2,... \tag{5.13}$$

Очевидно, что если $(x,\xi) \in Z_h(M,N)(M,N/2)$, то

$$e_o(t,s,x,\xi) = 1, \quad r_{\nu-1}(t,s,x,\xi) = e_\nu(t,s,x,\xi) = 0$$

$$\text{для всех} \quad (t,s) \in J,\ \nu = 1,2,... \tag{5.14}$$

Теорема 5.1. *Существует единственный символ $e(t,s,x,\xi)$ такой, что $e(t,s,x,\xi) \in S\{0,0,0\}_{N/2}$ и*

$$e(t,s,x,\xi) = 1 \quad \textit{для всех} \ (x,\xi) \in Z_h(M,N)(M,N/2),\ (t,s) \in J \tag{5.15}$$

и такой, что интегральный оператор Фурье $E_\Phi(t,s) = e_\Phi(t,s,x,D_x)$ с фазовой функцией $\Phi(t,s,x,\xi)$ из Леммы 4.8 , есть фундаментальное решение задачи Коши (5.4), т. е.

$$\begin{cases} LE_\Phi(t,s) = 0 & \textit{на} \quad (t,s) \in J, \\ E_\Phi(s,s) = I & (\textit{тождественный оператор}). \end{cases} \tag{5.16}$$

Доказательство. Из (5.7)-(5.14) следует, что

$$e_\nu(t,s,x,\xi) \in S\{-\nu,0,0\}_{N/2}, \quad \nu = 0,1,... \tag{5.17}$$

и, поэтому, согласно Предложению 2.1 и (5.6) найдется символ $e^o(t,s,x,\xi) \in$ $\in S\{0,0,0\}_{N/2}$ такой, что $E^o_\Phi(t,s) = e^o_\Phi(t,s,x,D_x)$ будет параметриксом для (5.4). Таким образом, $LE^o_\Phi(t,s) = R_\infty(t,s)$, где $R_\infty(t,s) = r_\infty(t,s,x;D_x) \in$ $\in C^\infty(S^{-\infty})(J;C^\infty(\Psi^{-\infty}))$. Полагая

$$W_1(t,s) = -R_\infty(t,s), \quad W_{\nu+1}(t,s) = \int_s^t W_1(t,\theta)W_\nu(\theta,s)d\theta$$
$$(\nu = 1,2,...)$$

и с помощью теории ПДО с кратными символами (см., например, [7]) мы получаем фундаментальное решение в следующей форме :

$$E_\Phi(t,s) = E^o_\Phi(t,s) + \int_s^t E^o_\Phi(t,\theta)\sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu(\theta,s)d\theta$$

с символом $e(t,s,x,\xi) = e^o(t,s,x,\xi) + e_\infty(t,s,x,\xi)$, где $e_\infty(t,s,x,\xi) \in$ $\in C^\infty(S^{-\infty})(J;S^{-\infty})$. Следовательно, $e(t,s,x,\xi) \in C^\infty(S^{-\infty})(J;S^o_{1,\epsilon})$. Теорема доказана.

Следствие 5.1. *Решение $u(t,s) \in C^\infty(S^{-\infty})(J;\mathcal{S})$ задачи Коши (5.4) с $\varphi(t) \in$ $\in C^\infty(S^{-\infty})([0,T_o];\mathcal{S})$ и $\psi \in \mathcal{S}$ существует, единственно и представимо в следующем виде :*

$$u(t,s,x) = E_\Phi(t,s)\psi(x) + i\int_s^t E_\Phi(t,\theta)\varphi(\theta)d\theta. \tag{5.18}$$

В дальнейшем мы будем использовать обозначения Re $\mathcal{D}(t)$, Re $\varphi_j(t,x,D_x)$ для операторов с символами Re $\mathcal{D}(t,x,\xi)$, Re $\varphi_j(t,x,\xi)$, соответственно, и обозначать через $\delta_{i,j}$ символ Кронеккера.

Следствие 5.2. *Пусть L_2 - матричный $m \times m (m \geq 2)$ диагональный оператор вида $L_2 = D_t - Re\mathcal{D}(t) + F(t)$, с $\mathcal{D}(t)$ и $F(t)$, описанными в Теореме 3.1. Тогда фундаментальное решение $E_2(t,s)((t,s) \in J)$ задачи Коши*

$$\begin{cases} L_2U = \Phi(t) & \text{на} \quad [0,T_o], \\ U|_{t=s} = \Psi, & s \in [0,T_o] \end{cases} \tag{5.19}$$

существует, единственно и имеет вид

$$E_2(t,s) = (\delta_{i,j} E_{i,\Phi_i}(t,s))_{i,j=1}^m,$$

где $E_{i,\Phi_i}(t,s)\,(i=1,\dots,m)$ *– фундаментальное решение задачи Коши для оператора* $D_t - \mathrm{Re}\,\varphi_i(t,x,D_x) + F_{ii}(t,x,D_x)$, *построенное с помощью Теоремы 5.1.*

§6. ЗАВЕРШЕНИЕ ПОСТРОЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Предварительно докажем следующие леммы.

Лемма 6.1. *Пусть* $A_\Phi = a_\Phi(t,s,x,D_x)$ *– интегральный оператор Фурье с фазовой функцией* $\Phi(t,s,x,\xi)$ *из Леммы 4.3, с символом* $a(t,s,x,\xi) \in S\{m_1,m_2,m_3\}_N$, *и пусть* $R = r(t,s,x,D_x)$ *– псевдодифференциальный оператор с символом* $r(t,s,x,\xi) \in \mathcal{H}\{m_1',m_2',m_3'\}_N$. *Если*

$$a(t,s,x,\xi) = r(t,s,x,\xi) = 0 \quad \textit{для всех} \quad (x,\xi) \in Z_{pd}(M,N),\ (t,s) \in J. \tag{6.1}$$

то и $R_1 = A_\Phi R$, *и* $R_2 = RA_\Phi$ *являются псевдодифференциальными операторами с символами* $r_1(t,s,x,\xi)$, $r_2(t,s,x,\xi)$, *соответственно, причем*

$$r_j(t,s,x,\xi) \in \mathcal{H}\{m_1+m_1', m_2+m_2', m_3+m_3'\}_N, \quad j=1,2 \tag{6.2}$$

$$r_j(t,s,x,\xi) = 0 \quad \textit{для всех} \quad (x,\xi) \in Z_{pd}(M,N), \quad (t,s) \in J, \quad j=1,2. \tag{6.3}$$

Доказательство. Для символа $\tilde r_1(t,s,x,\xi)$ интегрального оператора Фурье $\tilde R_{1\Phi} = A_\Phi R$, используя Теорему 2.3 [7], получаем, что

$$\tilde r_1(t,s,x,\xi) \sim \sum_\alpha \partial_\eta^\alpha \{a(t,s,x,\eta) r_{(\alpha)}(t,s,\tilde\nabla_\xi \Phi(t,s,x,\eta,\xi),\xi)/\alpha!\}_{\eta=\xi} \sim$$

$$\sim a(t,s,x,\xi) r(t,s,\nabla_\xi\Phi(t,s,x,\xi),\xi) + \sum_{j=1}^n a^{(j)}(t,s,x,\xi) r_{(j)}(t,s,\nabla_\xi\Phi(t,s,x,\xi),\xi) +$$

$$+\frac{i}{2} a(t,s,x,\xi)[\sum_{j,k=1}^n r_{(j,k)}(t,s,\nabla_\xi\Phi(t,s,x,\xi),\xi) \frac{\partial^2}{\partial\xi_j\partial\xi_k}\Phi(t,s,x,\xi)] + \cdots,$$

где

$$\tilde{\nabla}_\xi \Phi(t,s,x,\eta,\xi) = \int_0^1 \nabla_\xi \Phi(t,s,x,\xi+\theta(\eta-\xi))d\theta.$$

Далее, в силу Леммы 4.1, имеем для любых $k,l,\alpha,\beta,\nu,\gamma$ неравенства

$$|D_t^k D_x^\beta D_t^k D_s^l r_{(\gamma)}(t,s,\nabla_\xi\Phi(t,s,x,\xi),\xi)| \le$$

$$\le C_{k,\alpha,\beta,l,\gamma,\nu}\langle\xi\rangle^{m_1'-|\alpha|-\nu}|\lambda^{m_2'-\nu}|(\nabla_\xi\Phi(t,s,x,\xi))K^{m_3'+|\beta+\gamma|}(\tilde{\nabla}_\xi\Phi(t,s,x,\xi)) \le$$

$$\le C'_{k,\alpha,\beta,l,\gamma,\nu}\langle\xi\rangle^{m_1'-|\alpha|-\nu}|\lambda^{m_2'-\nu}(x)|K^{m_3'+|\beta+\gamma|}(x)$$

$$\text{для всех} \quad (x,\xi)\in Z_h(M,N),\ (t,s)\in J.$$

Поэтому, согласно Предложению 2.1(i), для каждого ν имеем

$$|D_t^k D_x^\beta D_t^k D_s^l \tilde{r}_1(t,s,x,\xi)| \le C_{k,\alpha,\beta,l,\gamma,\nu}\langle\xi\rangle^{m_1+m_1'-|\alpha|-\nu}|\lambda^{m_2+m_2'-\nu}(x)|K^{m_3+m_3'+|\beta|}(x)$$

$$\text{для всех} \quad (x,\xi)\in Z_h(M,N), \quad (t,s)\in J,$$

в то время как для $(x,\xi)\in Z_{pd}(M,N)$ имеем $\tilde{r}_1(t,s,x,\xi)=0$. Таким образом, $\tilde{r}_1 \in \mathcal{H}\{m_1+m_1', m_2+m_2', m_3+m_3'\}_N$ и, следовательно, согласно Лемме 4.3, символ $r_1(t,s,x,\xi)=\tilde{r}_1(t,s,x,\xi)\exp i(\Phi(t,s,x,\xi)-x\cdot\xi)$ принадлежит $\mathcal{H}\{m_1+m_1', m_2+m_2', m_3+m_3'\}_N$. Оператор R_2 рассматривается аналогичным образом. Лемма доказана.

Лемма 6.2. *Пусть $E_\Phi(t,s)$ – фундаментальное решение, задаваемое Теоремой 5.1, и предположим, что $r(t,x,\xi)$ символ такой, что*

$$r(t,x,\xi)=0 \quad \textit{для всех} \quad t\in[0,T_o], \quad (x,\xi)\in Z_{pd}(M,N) \tag{6.4}$$

и

$$(r(t,x,\xi)/\ln\langle\xi\rangle)\in S_{\rho,\delta}\{m_1,m_2,m_3\}_N. \tag{6.5}$$

Тогда оператор $\tilde{R}(t,s,x,D_x)=E_\Phi(s,t)r(t,x,D_x)E_\Phi(t,s)$ является псевдодифференциальным оператором с символом $\tilde{r}(t,s,x,\xi)$ таким, что $(mod C^\infty(S^{-\infty})(J;S^{-\infty}))$

$$\tilde{r}(t,s,x,\xi)=0 \quad \textit{для всех} \quad (x,\xi)\in Z_h(M,N)(M,N/2), \quad (t,s)\in J \tag{6.6}$$

и

$$(\tilde{r}(t,s,x,\xi)/\ln\langle\xi\rangle) \in S_{\rho,\delta}\{m_1,m_2,m_3\}_{N/2}. \tag{6.7}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $m_1 = m_2 = m_3 = 0$. Для оператора $P(t) = E_\Phi(t,s)r(s,x,D_x)\ E_\Phi(s,t)$ имеем

$$D_t P(t) = (\lambda(t,x,D_x) - f(t,x,D_x))P(t) -$$

$$-P(t)(\lambda(t,x,D_x) - f(t,x,D_x)),\ P(s) = r(s,x,D_x).$$

Поэтому рассмотрим следующую задачу Коши :

$$\begin{cases} D_t Q(t) - [\lambda(t,x,D_x) - f(t,x,D_x), \quad Q(t)] \in C^\infty(S^{-\infty})(J; C^\infty(\Psi^{-\infty})), \\ Q(s) = r(s,x,D_x). \end{cases}$$

Решение $Q(t)$ последней задачи есть псевдодифференциальный оператор $q(t,s,x,D_x)$ с символом $q(t,s,x,\xi)$ таким, что

$$q(t,s,x,\xi) \sim q_0(t,s,x,\xi) + q_1(t,s,x,\xi) + \cdots,$$

где

$$D_t q_0 - i\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\xi_j}\frac{\partial q_0}{\partial x_j} - \frac{\partial\lambda}{\partial x_j}\frac{\partial q_0}{\partial\xi_j}\right) = 0,$$

$$D_t q_k - i\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\xi_j}\frac{\partial q_k}{\partial x_j} - \frac{\partial\lambda}{\partial x_j}\frac{\partial q_k}{\partial\xi_j}\right) = a_k(t,s,x,\xi),$$

$$a_k(t,s,x,\xi) = \sum_{l=0}^{k-1}\Big[\sum_{|\alpha|=k-l+1}\frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}(\lambda^{(\alpha)}q_{l(\alpha)} - \lambda_{(\alpha)}q_l^{(\alpha)}) -$$

$$-\sum_{|\alpha|=k-l}\frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}(f^{(\alpha)}q_{l(\alpha)} - f_{(\alpha)}q_l^{(\alpha)})\Big],$$

$$q_0(s,s,x,\xi) = r(s,x,\xi), \quad q_k(s,s,x,\xi) = 0, \quad k = 1,2,\ldots$$

Очевидно, что если $(x,\xi) \in Z_h(M,N)(M,N/2)$, то

$$q_k(t,s,x,\xi) = 0 \quad \text{для всех} \quad (t,s) \in J, \quad k = 1,2,\ldots$$

Далее, рассмотрим для системы из (4.1) задачу Коши с условиями $q|_{t=s} = y, p|_{t=s} = \eta$. Согласно Леммам 4.1, 4.2, для отображения $R^n_y \times R^n_\eta \ni (y,\eta) \mapsto$

$\mapsto (x,\xi) \in R^n_x \times R^n_\xi$ с параметрами (t,s) существует обратное отображение $y = y(t,s,x,\xi)$, $\eta = \eta(t,s,x,\xi)$ такое, что $y(t,s,x,\xi) - x \in S\{0,1,0\}_{N/2}$, $\eta(t,s,x,\xi) - \xi \in S\{1,1,1\}_{N/2}$. Следовательно, для решений

$$q_o(t,s,x,\xi) = r(s, y(t,s,x,\xi), \eta(t,s,x,\xi)),$$

$$q_k(t,s,x,\xi) = i\int_s^t a_k(\sigma, s, q(\sigma, s, y(t,s,x,\xi), \eta(t,s,x,\xi)),$$

$$p(\sigma, s, y(t,s,x,\xi), \eta(t,s,x,\xi)))d\sigma, \quad k = 1,2,\ldots$$

имеем $(q_k(t,s,x,\xi)/\ln\langle\xi\rangle) \in S_{\rho,\delta}\{-k,0,0\}_{N/2}$, и, следовательно, $(q(t,s,x,\xi)/\ln\langle\xi\rangle)$ принадлежит классу $S_{\rho,\delta}\{0,0,0\}_{N/2}$. Для доказательства того, что $P(t) - Q(t)$ является сглаживающим оператором, рассмотрим для любого распределения с компактным носителем $u \in \mathcal{E}'(R^n_x)$ функцию $v(t) = Q(t)E_\Phi(t,s)u$. Тогда $v(s) = r(s,x,D_x)u(x)$ и

$$D_t v - \lambda(t,x,D_x)v + f(t,x,D_x)v \in C^\infty(S^{-\infty})(J \times R^n_x).$$

Следовательно, функция $w(t) = v(t) - E_\Phi(t,s)r(s,x,D_x)u$ есть решение задачи Коши

$$D_t w - \lambda(t,x,D_x)w + f(t,x,D_x)w \in C^\infty(S^{-\infty})(J \times R^n_x), \qquad w(s) = 0$$

и поэтому $w \in C^\infty(S^{-\infty})(J \times R^n_x)$. Лемма доказана.

Лемма 6.3. *Пусть $A_\Phi = a_\Phi(t,s,x,D_x)$ - интегральный оператор Фурье с фазовой функцией $\Phi(t,s,x,\xi)$ из Леммы 4.3, с символом $a(t,s,x,\xi) \in S\{m_1,m_2,m_3\}_N$, и пусть $R = r(t,s,x,D_x)$ - псевдодифференциальный оператор с символом $r(t,s,x,\xi) \in S\{m_1',m_2',m_3'\}_N$. Если либо*

$$a(t,s,x,\xi) = 0 \quad \textit{для всех} \quad (x,\xi) \in Z_h(M,3N), \quad (t,s) \in J, \tag{6.8}$$

либо

$$r(t,s,x,\xi) = 0 \quad \textit{для всех} \quad (x,\xi) \in Z_h(M,3N), \quad (t,s) \in J, \tag{6.9}$$

то и $R_1 = A_\Phi R$ и $R_2 = RA_\Phi$ являются псевдодифференциальными операторами с символами $r_1(t,s,x,\xi)$, $r_2(t,s,x,\xi)$, соответственно, причем для $j = 1,2$ имеет место включение

$$r_j(t,s,x,\xi) \in \bigcap_{\delta>0} S_{1,\delta}\{m_1+m_1', m_2+m_2', m_3+m_3'\}_N \tag{6.10}$$

и

$$r_j(t,s,x,\xi)=0 \quad \text{для всех} \quad (x,\xi)\in Z_h(M,4N),\ (t,s)\in J. \tag{6.11}$$

Доказательство. Заметим, что если $q(t,s,x,\xi)\in S\{m_1,m_2,m_3\}_N$ и $q(t,s,x,\xi)=$ $=0$ для всех $(x,\xi)\in Z_h(M,3N)$, то

$$q(t,s,x,\xi)\exp i(\Phi(t,s,x,\xi)-x\cdot\xi)\in\bigcap_{\delta>0}S_{1,\delta}\{m_1+m_1',m_2+m_2',m_3+m_3'\}_N.$$

Поэтому лемма непосредственно следует из Леммы 4.3 и Теоремы 2.3 [7].

Рассмотрим следующую задачу Коши :

$$\begin{cases} D_tQ(t,s)+R(t,s)Q(t,s)+R_o(t,s)\in C(J;C^\infty(\Psi^{-\infty})),\\ Q(s,s)=0, \qquad s\in[0,T_o] \end{cases} \tag{6.12}$$

где $R(t,s), R_o(t,s), Q(t,s)$ есть $d\times d$-матричные псевдодифференциальные операторы.

Предложение 6.1. *Пусть $R(t,s)$ и $R_o(t,s)$ есть матричные псевдодифференциальные операторы с символами $r(t,s,x,\xi)$, $r_o(t,s,x,\xi)$, соответственно, такие, что*

$$r(t,s,x,\xi), r_o(t,s,x,\xi)\in C(J;\bigcup_l S^l_{\rho,\delta}).$$

Предположим далее, что с некоторыми p,K,m для любых α,β с положительными постоянными $C_{\alpha,\beta},C_o$ для всех $(t,s)\in J, x\in R^n,\xi\in R^n$ выполняются неравенства

$$||D_t^kD_x^\beta r(t,s,x,\xi)||\le C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|}g(t,\xi), \tag{6.13}$$

$$||D_t^kD_x^\beta r_o(t,s,x,\xi)||\le C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{p+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}g(t,\xi) \tag{6.14}$$

с непрерывной функцией $g(t,\xi)\in C([0,T_o]\times R^n)$ такой, что

$$\int_0^{T_o}g(\tau,\xi)d\tau\le K\ln\langle\xi\rangle, \qquad g(t,\xi)\le C_o\langle\xi\rangle^m. \tag{6.15}$$

Тогда существует решение $Q(t,s)=q(t,s,x,D_x)$ задачи (6.12) с матричным символом $q(t,s,x,\xi)$, удовлетворяющим неравенствам

$$||D_t^kD_x^\beta q(t,s,x,\xi)||\le C'_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{K+p+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}(\ln\langle\xi\rangle)^{|\alpha+\beta|+1}$$

$$\textit{для всех } (t,s) \in J, x \in R^n, \xi \in R^n \tag{6.16}$$

и, следовательно, принадлежащим классу

$$q \in C(J; \bigcap_{0<\epsilon\le 1} S^{K+p+\epsilon}_{\rho,\delta}) \cap C^1(J; \bigcap_{0<\epsilon\le 1} S^{K+p+m+\epsilon}_{\rho,\delta}).$$

Это решение единственно по модулю $C^1(J; C^\infty(\Psi^{-\infty}))$.

Доказательство. Выберем собственные представители класса эквивалентности $R(t,s)$, $R_o(t,s)$ и построим собственный оператор $Q(t,s)$. Очевидно, что достаточно рассмотреть случай $p = 0$. Решение ищем в следующем виде :

$$q \sim q_o + q_1 + q_2 + \cdots \quad mod\, C^1(J; S^{-\infty}), \tag{6.17}$$

где

$$q_k(t,s,x,\xi) = -i\int_s^t r_k(s_1,s,x,\xi)ds_1 +$$

$$+\sum_{l=2}^{\infty}(-i)^l \int_s^t ds_1 \int_s^{s_1} ds_2 \cdots \int_s^{s_{l-1}} ds_l\, r(s_1,s,x,\xi)\cdots r(s_{l-1},s,x,\xi)\cdots \tag{6.18}$$

$$\cdots r_k(s_l,s,x,\xi) \quad (k = 0,1,\ldots),$$

$$r_k(t,s,x,\xi) = \sum_{l=0}^{k-1}\sum_{|\alpha|=k-l}\frac{1}{\alpha!}(\partial_\xi^\alpha r(t,s,x,\xi))(D_x^\alpha q_l(t,s,x,\xi)) \quad (k = 1,2,\ldots). \tag{6.19}$$

Определим оператор $(I(p))(t) = \int_s^t p(s_1,s,x,\xi)ds_1$ и перепишем (6.18) в следующем виде :

$$q_k = -I(r_k) + \sum_{l=2}^{\infty}(-i)^l I(rI(r\cdots(I(rI(r_k)))\cdots)).$$

Из (6.18)следует, что

$$||D_t^k D_x^\beta q_o(t,s,x,\xi)|| \le C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l^{|\alpha+\beta|}}{l!}|\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau|^l.$$

Лемма 6.4. *Для любых* α, β, k *имеют место следующие неравенства :*

$$||D_t^k D_x^\beta r_k(t,s,x,\xi)|| \le C_{k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|-(\rho-\delta)k} g(t,\xi)\times$$

$$\times\sum_{l=1}^{\infty} l^{|\alpha+\beta|+2k-1}|\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau|^l/l!, \tag{6.20}$$

$$||D_t^k D_x^\beta q_k(t,s,x,\xi)|| \le C_{k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|-(\rho-\delta)k}\times$$

$$\times \sum_{l=1}^{\infty} l^{|\alpha+\beta|+2k} \left| \int_s^t g(\tau,\xi)d\tau \right|^{l+1} / (l+1)!, \quad k = 1,2,\dots \tag{6.21}$$

Доказательство. Мы доказываем лемму индукцией по k. Имеем

$$\|D_t^k D_x^\beta r_1(t,s,x,\xi)\| \le C_{\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|-\rho+\delta} g(t,\xi) \times$$
$$\times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^{|\alpha+\beta|+1}}{l!} \left(\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau\right)^l \quad \text{для всех} \quad 0 \le s \le t \le T_o.$$

Следовательно

$$\|D_t^k D_x^\beta q_1(t,s,x,\xi)\| \le C_{\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|-\rho+\delta} [\sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^{|\alpha+\beta|+1}}{(l+1)!} \left(\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau\right)^{l+1} +$$
$$+ \sum_{i=0}^{|\alpha+\beta|} \sum_{l=2}^{\infty} (l-1)^i I(gI(g\cdots I(g\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha+\beta|+1-i}}{m!} (I(g))^m)\cdots))] \le$$
$$\le C_{\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|-\rho+\delta} [\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha+\beta|+1}}{(m+1)!} \left(\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau\right)^{m+1} +$$
$$+ \sum_{i=0}^{|\alpha+\beta|} \sum_{l=2}^{\infty} (l-1)^i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha+\beta|+1-i}}{(m+l)!} \left(\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau\right)^{m+l} \le$$
$$\le C_{\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|-\rho+\delta} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^{|\alpha+\beta|+2}}{(l+1)!} \left(\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau\right)^{l+1}, \quad s \le t.$$

Таким образом, (6.20),(6.21) доказаны для $k = 1$. Теперь предположим, что (6.20),(6.21) уже доказаны для k и докажем их для $k+1$. Для любых $\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma, l; \alpha_1 + +\alpha_2 = \alpha, \beta_1 + \beta_2 = \beta; 0 < l \le k$ имеют место неравенства

$$\|(\partial_\xi^{\gamma+\alpha_1} D_x^{\beta_1} r(t,s,x,\xi))(\partial_\xi^{\alpha_2} D_x^{\gamma+\beta_2} q_l(t,s,x,\xi))\| \le$$
$$\le C_{k,\alpha,\beta} g(t,\xi) \langle\xi\rangle^{\delta(|\gamma+\beta|+l)-\rho(|\gamma+\alpha|+l)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha_2+\beta_2+\gamma|+2l}}{(m+1)!} \left(\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau\right)^{m+1} \le$$
$$\le C_{k,\alpha,\beta} g(t,\xi) \langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|-(k+1)(\rho-\delta)} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m^{|\alpha+\beta|+2(k+1)-1}}{m!} \left(\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau\right)^m.$$

Поэтому (6.19) следует из (6.20). Рассмотрим теперь q_{k+1} для $0 \le s \le t \le T_o$:

$$\|D_t^k D_x^\beta q_{k+1}(t,s,x,\xi)\| \le C_{k,\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|-(k+1)(\rho-\delta)} \times$$
$$\times [\sum_{m=1}^{\infty} m^{|\alpha+\beta|+2(k+1)-1} \left(\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau\right)^{m+1} / (m+1)! +$$
$$+ \sum_{i=0}^{|\alpha+\beta|} \sum_{l=2}^{\infty} (l-1)^i \sum_{m=1}^{\infty} m^{|\alpha+\beta|+2(k+1)-1-i} \left(\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau\right)^{m+l} / (m+l)!] \le$$
$$\le C_{k,\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|-(k+1)(\rho-\delta)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha+\beta|+2(k+1)}}{(m+1)!} \left(\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau\right)^{m+1}.$$

Таким образом, неравенства (6.20) и (6.21) доказаны для $0 \le s \le t \le T_o$. Случай $t \le s$ ничем не отличается от рассмотренного выше. Лемма доказана.

Завершение доказательства Предложения 6.1. Из (6.21) следует, что ($k = 1, 2, \ldots$)

$$||D_t^k D_x^\beta q_k(t,s,x,\xi)|| \le C_{k,\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|-k(\rho-\delta)} (\ln\langle\xi\rangle)^{|\alpha+\beta|+2(k+1)}$$

равномерно относительно $(t,s) \in J$. Аналогичные оценки имеют место и для q_0. Таким образом, существование решения $Q(t,s)$ доказано. Для доказательства единственности замечаем, что задача Коши, сопряженная к (6.12), удовлетворяет тем же условиям (6.13),(6.14), и, следовательно, достаточно использовать стандартные рассуждения. Предложение доказано.

Следствие 6.1. *Пусть $R(t,s)$ и $R_o(t,s)$ удовлетворяют условиям Предложения 6.1. Тогда для задачи Коши*

$$\begin{cases} D_t Q(t,s) + Q(t,s)R(t,s) + R_o(t,s) \in C(J; C^\infty(\Psi^{-\infty})), \\ Q(s,s) = 0, \qquad s \in [0, T_o] \end{cases} \tag{6.22}$$

верны все утверждения Предложения 6.1.

Следствие 6.2. *Если $R(t,s) = R_o(t,s)$, то для оператора $I + Q(t,s)$ существует параметрикс $(I+$*
$+Q(t,s))^\#$, который может быть представлен в виде $I + Q^\#(t,s)$, где $Q^\#(t,s)$ есть решение следующей задачи :

$$\begin{cases} D_t Q^\#(t,s) - Q^\#(t,s)R_o(t,s) - R_o(t,s) \in C(J; C^\infty(\Psi^{-\infty})), \\ Q^\#(s,s) = 0, \qquad s \in [0, T_o]. \end{cases} \tag{6.23}$$

Теперь мы рассматриваем задачу Коши

$$\begin{cases} (D_t - \mathcal{D}(t) + F(t) + R(t))U = \Phi(t) & \text{на} \quad [0, T_o] \times R^n, \\ U|_{t=s} = \Psi, & s \in [0, T_o], \end{cases} \tag{6.24}$$

где операторы $\mathcal{D}(t)$, $F(t)$, $R(t)$ были описаны в Теореме 3.1. Будем искать фундаментальное решение $E_1(t,s)$ задачи (6.24) в следующем виде :

$$E_1(t,s) = E_2(t,s)(I + Q(t,s)) + Q_\infty(t,s), \tag{6.25}$$

где $Q_\infty(t,s) \in C^\infty(S^{-\infty})(J; C^\infty(\Psi^{-\infty}))$, а $E_2(t,s)$ был построен в Следствии 5.2. Используя Предложение 1.1 и Леммы 6.1 - 6.3, легко проверить, что все предположения Предложения 6.1 выполнены

$$R(t,s) = R_o(t,s) = -E_2(s,t)(-\mathrm{Im}\mathcal{D}(t) + R(t))E_2(t,s).$$

Здесь $\mathrm{Im}\mathcal{D}(t) = \mathcal{D}(t) - \mathrm{Re}\mathcal{D}(t)$ (см. также Следствие 5.2). Следовательно, псевдодифференциальный оператор $Q(t,s)$ существует и определяется однозначным образом. Далее, перепишем задачу Коши (0.1), (0,2) в эквивалентной форме (см. §3) :

$$D_t\mathcal{U} - A(t)\mathcal{U} = \Phi(t) \quad \text{на} \quad [0,T_o] \times R^n, \tag{0.1'}$$

$$\mathcal{U}|_{t=s} = \Psi, \quad s \in [0,T_o] \tag{0.2'}$$

для вектора $\mathcal{U} = {}^t(u, D_t u, ..., D_t^{m-1}u)$.

Напомним, что операторы $H(x,D_x)$, $M(t,x,D_x)$, $N(t,x,D_x)$, $H^\#(x,D_x)$, $M^\#(t,x,D_x)$, $N^\#(t,x,D_x)$ были описаны в §3, а фазовые функции $\Phi_j(t,s,x,\xi)$ были построены в §4. Таким образом, мы доказали следующий основной результат настоящей работы.

Теорема 6.1 *Предположим, что оператор P из (0.3) удовлетворяет условию (A). Тогда фундаментальное решение $E(t,s)$ задачи Коши (0.1'),(0,2') (а, следовательно, и фундаментальное решение задачи Коши (0.1),(0.2)) может быть построено в следующем виде :*

$$E(t,s) =$$

$$= H^\#(x,D_x)M^\#(t,x,D_x)N(t,x,D_x)E_1(t,s)N^\#(t,x,D_x)M(t,x,D_x)H(x,D_x)+$$

$$+R_\infty(t,s,x,D_x), \tag{6.26}$$

где $R_\infty(t,s) \in C^\infty(S^{-\infty})(J;C^\infty(\Psi^{-\infty}))$, а $E_1(t,s)$ – матричный интегральный оператор Фурье из (6.25) с фазовыми функциями $\Phi_j(t,s,x,\xi)$, $j = 1,...,m$.

Далее $||v||_\sigma$ обозначает норму элемента v соболевского пространства $H_{(\sigma)}(R^n_x)$ с действительными σ.

Теорема 6.2. *Предположим, что оператор P из (0.3) удовлетворяет условию (A). Тогда решение $u(t,x)$ задачи Коши (0.1),(0.2) на $[0,T_o] \times R^n_x$ с $f(t,x) \in$ $\in C^\infty(S^{-\infty})([0,T_o];\mathcal{S})$ и с $\psi_j \in \mathcal{S}$, $j = 0,1,...,m-1$ существует, единственно и может быть представлено в следующем виде :*

$$u(t,x) = \sum_{j=0}^{m-1} E^{1,j+1}(t,s)\psi_j(x) + i\int_s^t E^{1,m}(t,\tau)f(\tau,x)d\tau, \tag{6.27}$$

где $E^{l,j}(t,s)$ есть (l,j)-элемент фундаментального решения $E(t,s)$ из (6.26) задачи Коши (0.1'),(0.2'). Следовательно, существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что для любого вещественного σ с некоторой постоянной C_σ имеет место энергетическое неравенство

$$\sum_{l=0}^{m-1} ||D_t^l u(t)||^2_{\sigma+m-1-l} \leq C_\sigma [\sum_{l=0}^{m-1} ||\psi_l||^2_{\sigma+\gamma-1-l+m} + |\int_s^t ||f(\tau)||^2_{\gamma+\sigma} d\tau|]. \qquad (6.28)$$

Таким образом, для задачи (0.1),(0.2) существует конус зависимости.

Доказательство. Представление (6.27) и энергетическое неравенство (6.29) являются прямыми следствиями Теоремы 6.1. Более того, имеет место и теорема существования в $[0,T] \times R^n$. Далее, для доказательства последнего утверждения теоремы $s = 0$ для всех $A = (x_A, t_A)$, $t_A \in [0, T_o]$ мы обозначаем через S_θ пространственноподобную гиперповерхность, определяемую следующим уравнением :

$$\lambda^2_{\max}(t - t_A)^2 - |x - x_A|^2 = \theta, \quad 0 < t < t_A,$$

где

$$\lambda_{\max} = \sup\{|\lambda_j(t,x,\xi)/(2\lambda(x))|;\, x \in NZ, \xi \in R^n, |\xi| = 1, t \in [0,T_o], j = 1,...,m\}$$

есть положительное число в нетривиальном случае $Z \neq R^n$, и где $0 < \theta < \lambda^2_{\max} t_A^2$. Пусть C_A есть объединение $\bigcup_\theta S_\theta$. Предположим, что $Pu = 0$ в C_A и что $D_t^l u|_{t=0} = 0$ в $\bar{C}_A \cap \{t = 0\}, l = 0,...,m-1$. Мы должны показать, что $u = 0$ в C_A. С этой целью заметим прежде всего, что можно считать условия (T) выполненными для всех $t \in [-T, T]$. Заметим также, что после преобразования координат $x' = x, t' = t + |x|^2$, новый оператор P' также удовлетворяет условию (T) в окрестности начала координат в R^{n+1}. Следовательно, имеет место локальная теорема единственности. Действительно, оператор P'^* также удовлетворяет условию (A) и, согласно Теореме 6.1, для любого $\varphi \in C_o^\infty$ задача Коши $P'^* v = \varphi$, $D_{t'}^l v|_{t'=\epsilon'} = 0\,(l = 0,...,m-1)$ разрешима. Отсюда следует, что

$$u(t,x) = 0 \quad \text{для всех} \quad t, x, t + |x|^2 \leq \epsilon', 0 < \epsilon'.$$

Далее, для вектора $\alpha \in R^n, |\alpha| < 1/\lambda_{\max}$, уравнение

$$P_m(t, x, \lambda(x)\mu, \xi + \mu\lambda(x)\alpha) = 0$$

имеет m различных действительных корней $\mu_1, \ldots, \mu_m$ для всех $t \in [0,T], x \in \in \overline{NZ} \cap \{|x| \leq \text{const}\}, \xi \in R^n, |\xi| = 1$ (см. также Предложения 6.5 [10]). Очевидно, что для любой точки $(x^o, t^o) \in C_A$, если $D^l_\nu u|_{S_{\theta^o}} = 0 (l = 0, \ldots, m-1)$ в некоторой окрестности точки (x^o, t^o), то и $u = 0$ в окрестности точки (x^o, t^o). Здесь $\theta^o = \lambda^2_{\max}(t^o - t_A)^2 - |x^o - x_A|^2$, а $\partial/\partial\nu$ есть векторное поле, нормальное к S_{θ^o}. Действительно, можно локально изменить координаты $t' = \lambda^2_{\max}(t - t_A)^2 - -|x - x_A|^2 - \theta^o$, $x' = x$ и в этих новых координатах оператор P переходит в новый, который также удовлетворяет условию (T). Поэтому можно применить локальную теорему единственности , и, следовательно, $u = 0$ в C_A. Этим завершается доказательство теоремы.

ABSTRACT. We consider the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations which degenerate with respect to the spatial variables. We assume that the coefficients satisfy some conditions formulated both by means of the zeros of the complete symbol and by means of characteristic roots. For these operators we construct the parametrix and the fundamental solution of the Cauchy problem by means of zonal subdivision of the cotangent bundle and of specific classes of pseudo-differential operators and Fourier integral operators.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Kumano-go, "Fundamental solution for a hyperbolic system with diagonal principal part", Comm. Partial Diff. Equations, vol. 4, p. 959 – 1015, 1979.
2. O. A. Oleinik, " On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations", Comm. Pure Appl. Math., vol. 23, p. 569 - 586, 1970.
3. T. Mandai, "Generalized Levi conditions for weakly hyperbolic equations – An attempt to treat the degeneracy with respect to the space variables", Publ. RIMS, Kyoto Univ., vol. 22, p. 1 – 23, 1986.
4. T. Nishitani, " A necessary and sufficient condition for the hyperbolisity of second order equations with two independent variables", J. Math. Kyoto Univ., vol. 24, no.1, p. 91 – 104, 1984.
5. S. Tarama, "Sur le probleme de Cauchy pour une class des operateurs differentieles du type faiblement hyperbolique", J. Math. Kyoto Univ., vol.22, p. 333 – 368, 1982.
6. К. А. Ягджян, "Псевдодифференциальные операторы с параметром и фундаментальное решение задачи Коши для операторов с кратными характеристиками", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 21, № 4, стр. 317 – 344, 1986.
7. H. Kumano-go, " A calculus of Fourier integral operators on and the fundamental solution for the operator of hyperbolic type", Comm. Partial Diff. Equat, vol. 1, p. 1 – 44, 1976.
8. L. Hormander, Analysis of Linear Partial Differential Operators, vol. IV : Fourier integral operators, Berlin, Springer, 1985.

9. К. А. Ягджян, "Экспонента псевдодифференциальных операторов и вырождающиеся уравнения", Успехи мат. наук, т. 42, вып.4, стр. 170, 1987.
10. S. Mizohata, The Theory of Partial Differential Equations, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.
11. K. Shinkai, " On the fundamental solution for a degenerate hyperbolic systems", Osaka J. Math., vol. 18, p. 257 - 288, 1981.

24 Марта 1992

Институт математики
АН Армении

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА МЕТОДОМ АВТОМАТИЧЕСКОГО СГУЩЕНИЯ СЕТКИ

А. Л. Гамарян, А. Б. Нерсесян, Г. А. Оганян

Известия Академии Наук Армении. Математика, том 27, №1, 1992

В работе предложен метод обнаружения быстрой осцилляции решения интегрального уравнения Фредгольма второго года. Модифицирован алгоритм работы [1]. Усовершенствование состоит в применении более чувствительного механизма сгущения сетки в комбинации со сплайн-интерполяцией.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] предложен следующий метод решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода :

$$y(x) = \int_0^1 K(x,t)y(t)dt + f(x), \tag{1}$$

где $f(x) \in C^2([0,1])$ и $K(x,t) \in C^2([0,1] \times [0,1])$.

Интеграл в уравнении (1) заменяется конечной суммой, полученной по формуле трапеций :

$$\int_0^1 K(x,t)y(t)dt = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2}h_i(K_i(x)y_i + K_{i+1}(x)y_{i+1}) - \sum_{i=1}^{N-1} \tau_i h_i^3, \tag{2}$$

где $h_i = x_{i+1} - x_i$ (на первом шаге $h_i = h = \mathrm{const}$), $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = 1$ - разбиение $[0,1]$, $K_i(x) = K(x, x_i)$, $y_i = y(x_i)$, $\tau_i \le \max|(K(x,t)y(t))_{tt}|$.

При подстановке (2) в (1) задача с точностью порядка $O(h^2)(h = \frac{1}{n} \to 0)$ сводится к решению системы

$$(I - KD)Y = F, \tag{3}$$

В наших экспериментах, - на первом этапе применения метода работы [1], на каждом шаге почти все интервалы делились пополам (за исключением тех, на которых функции оставались практически постоянными). В то же время мы ожидали, что окончательное разбиение будет иметь сгущение на интервалах с достаточно быстрой вариацией производных решения $y(x)$ и что будет скорее мало интервалов со "спокойным" поведением. Однако, такая модель редко соблюдалась на практике на начальных этапах.

В настоящей работе мы предлагаем автоматическое разбиение интервалов на два, четыре и восемь частей, зависящее от степени отклонения от оценок (4) и (5). Введем в правой части соотношений (4) и (5) весовые множители 2 и 4.

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |y'(x)|dx \leq 2\delta(\max_{\forall i} |y_i|), \tag{4.1}$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |y'(x)|dx \leq 4\delta(\max_{\forall i} |y_i|), \tag{4.2}$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |y''(x)|dx \leq 2\gamma(\max_{\forall x} |\frac{dy}{dx}|, x = x_i), \tag{5.1}$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |y''(x)|dx \leq 4\gamma(\max_{\forall x} |\frac{dy}{dx}|, x = x_i). \tag{5.2}$$

После проверки условий (4), (4.1), (4.2), (5), (5.1) и (5.2) мы поступаем следующим образом :

- если, по крайней мере, одно из соотношений (4.2) или (5.2) не выполнено, то интервал $[x_j, x_{j+1}]$ делится на восемь частей ;

- если, по крайней мере, одно из соотношений (4.1) или (5.1) не выполнено, то интервал $[x_j, x_{j+1}]$ делится на четыре части ;

- если, по крайней мере, одно из соотношений (4) или (5) не выполнено, то интервал $[x_j, x_{j+1}]$ делится на две части.

На этом пути, мы получаем очень быстрое сгущение сетки, на которой достигается требуемая точность. Сохраненное время можно использовать для решения системы прямым методом, что значительно лучше, чем итерации (как в [1]). Тем самым расширяется область применения алгоритма.

§2. ПРИМЕНЕНИЕ СПЛАЙНОВ

Во многих численных экспериментах экстраполяция решения, использующая кубические сплайны, дает хорошие результаты. Это позволяет найти, в частности, приближения высокой точности даже на интервалах, где производные решения имеют быстрые вариации.

Необходимо отметить, что использование сплайнов вместе с автоматическим разбиением интервалов особенно выгодно, так как это используется при вычислении производных на каждом шаге. Удобно использовать эрмитовы кубические сплайны. После последнего шага достаточно найти значения производных на концах отрезка $[0, 1]$, а потом построить глобальный кубический сплайн. Это приводит к значительному увеличению точности по сравнению со сплайнами со свободными концами, в то время как время практически не увеличивается.

Построение сплайна n-точками нуждается только в $O(n)(n \to \infty)$ дополнительных операциях. Альтернативой является решение системы n-того порядка, когда в итерационных методах сложность имеет порядок $O(n^2)$, тогда как в прямых методах сложность имеет порядок $O(n^3)$, т. е. разница во времени счета существенна.

§3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В компьютерных вычислениях мы используем три алгоритма, которые обозначим через A, B и C.

Алгоритм A основан на методе работы [1];

Алгоритм B улучшает метод работы [1], используя автоматическое разбиение разбиение интервалов на два, четыре или восемь частей (см. §1);

Алгоритм C на первых двух этапах использует алгоритм B. На третьем, заключительном этапе, строится кубический сплайн, используя значения y в точках разбиения и значения y' на концах отрезка $[0,1]$. Результатом является наше решение.

Рассмотрим следующие два ядра :

$$K_1(x,t) = (x-0.5)^2(t-0.5)^2,$$
$$K_2(x,t) = (x-0.5)^2(t-0.5)^2\sin\left[\frac{1}{(x-0.75)^2+0.15}\right].$$

Случай ядра K_1 был изучен в работе [1], с которой сравниваются численные результаты. В отличие от K_1, для ядра K_2 мы добавим сильно осциллирующий в окрестности точки $x = 0.75$ множитель, и поэтому осциляции решения зависят не только от правой части f.

Таблица 1 содержит некоторые тестовые задачи для решения которых проводились численные эксперименты.

Задача	Ядро	$y(x)$	$f(x)$
$P1$	K_1	$\begin{cases} -4x^2+4x, \\ x\in[0;0.25]\cup[0.75;1]; \\ 0.75+8\pi x, \\ x\in(0.25;0.75) \end{cases}$	$y(x) - \frac{29}{640}(x-0.5)^2$
$P2$	K_1	$\begin{cases} 1, \\ x\in[0;0.5]\cup[0.75;1]; \\ (8x-5)^2, \\ x\in[0.5;0.75] \end{cases}$	$y(x) - \frac{31}{480}(x-0.5)^2$
$P3$	K_1	$(x-0.4)\times$ $\times\sin(5\pi(x-0.15))$	$y(x)-(x-0.5)^2\times$ $\times\frac{\sqrt{2}(-25\pi^3+150\pi^2)}{5000\pi^4}+$ $+\frac{\sqrt{2}(48\pi-48)}{5000\pi^4}$
$P4$	K_2	$(x-0.4)\times$ $\times\sin(5\pi(x-0.15))$	$y(x)-(x-0.5)^2\times$ $\times\sin\left[\frac{1}{(x-0.75)^2+0.15}\right]\times$ $\times\frac{\sqrt{2}(-25\pi^3+150\pi^2)}{5000\pi^4}+$ $+\frac{\sqrt{2}(48\pi-48)}{5000\pi^4}$

Таблица 1.

Предположим, что $\delta = 0.5$, $\gamma = 0.5$ (см. [4], [5]).

Результаты вычислений приведены в Таблице 2 и на Рис. 1, 2, 3. В задачах, описанных в Таблице 1 и на Рис. 2, 3, начальное число точек сети было равно 5, на Рис. 1 число точек равно 10. В Таблице 2 мы привели окончательное число точек сети. Вычисления произведены на компьютере IBM PC/AT 286.

Задача	Алгоритм	Число сетей	Ошибка	Время
	A	57	$1.15\,E-3$	1' – 18"
$P1$	B	67	$1.15\,E-3$	0' – 52"
	C	33	$2.17\,E-2$	0' – 18"
	A	21	$8.62\,E-3$	0' – 25"
$P2$	B	34	$8.82\,E-3$	0' – 23"
	C	26	$1.35\,E-2$	0' – 09"
	A	49	$3.50\,E-3$	1' – 02"
$P3$	B	52	$1.44\,E-4$	0' – 35"
	C	33	$1.64\,E-4$	0' – 17"
	A	37	$4.84\,E-3$	1' – 32"
$P4$	B	39	$2.82\,E-3$	1' – 08"
	C	27	$2.83\,E-3$	0' – 23"

Таблица 2.

Вычисления, использующие все три метода в Задаче P3 было достаточно проверить, а чистое время, необходимое для построения сплайна по 33 точкам было равно 0'-01.48".

Заметим, что в Задаче P4 решение $y(x)$ значительно отличается от правой части $f(x)$, и в этом случае алгоритм C имеет существенное преимущество в скорости работы. При применении алгоритма C начальное число точек было равно пяти, а после первого этапа число точек стало равно 27 и они были использованы при построении кубического сплайна.

На Рис. 1 показан график зависимости логарифма значения корня от ошибки и затраченное время во всех трех алгоритмах. На Рис. 2 и 3 даны графики сравнения для времени и ошибки соответственно для различных задач.

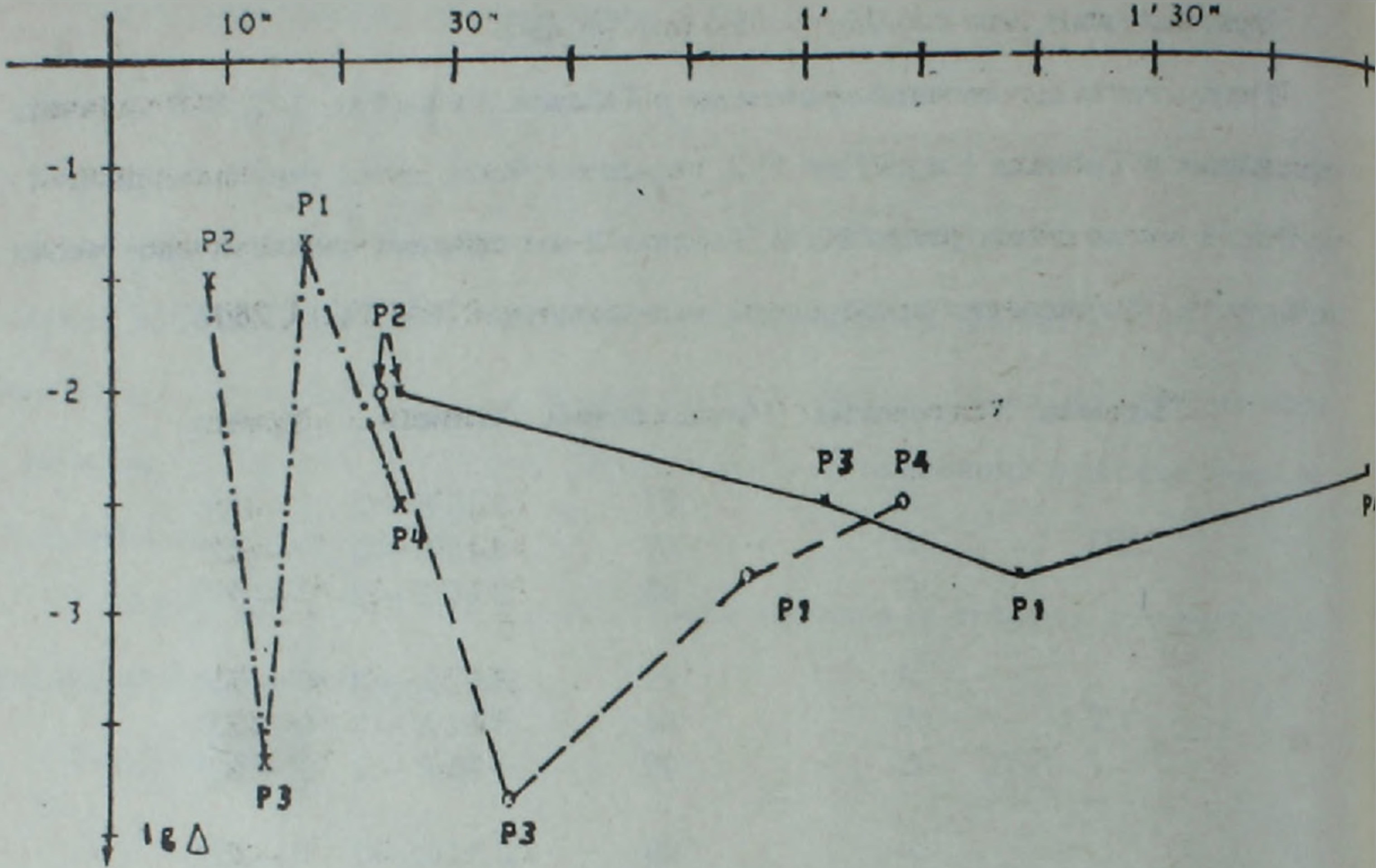

Рис. 1.

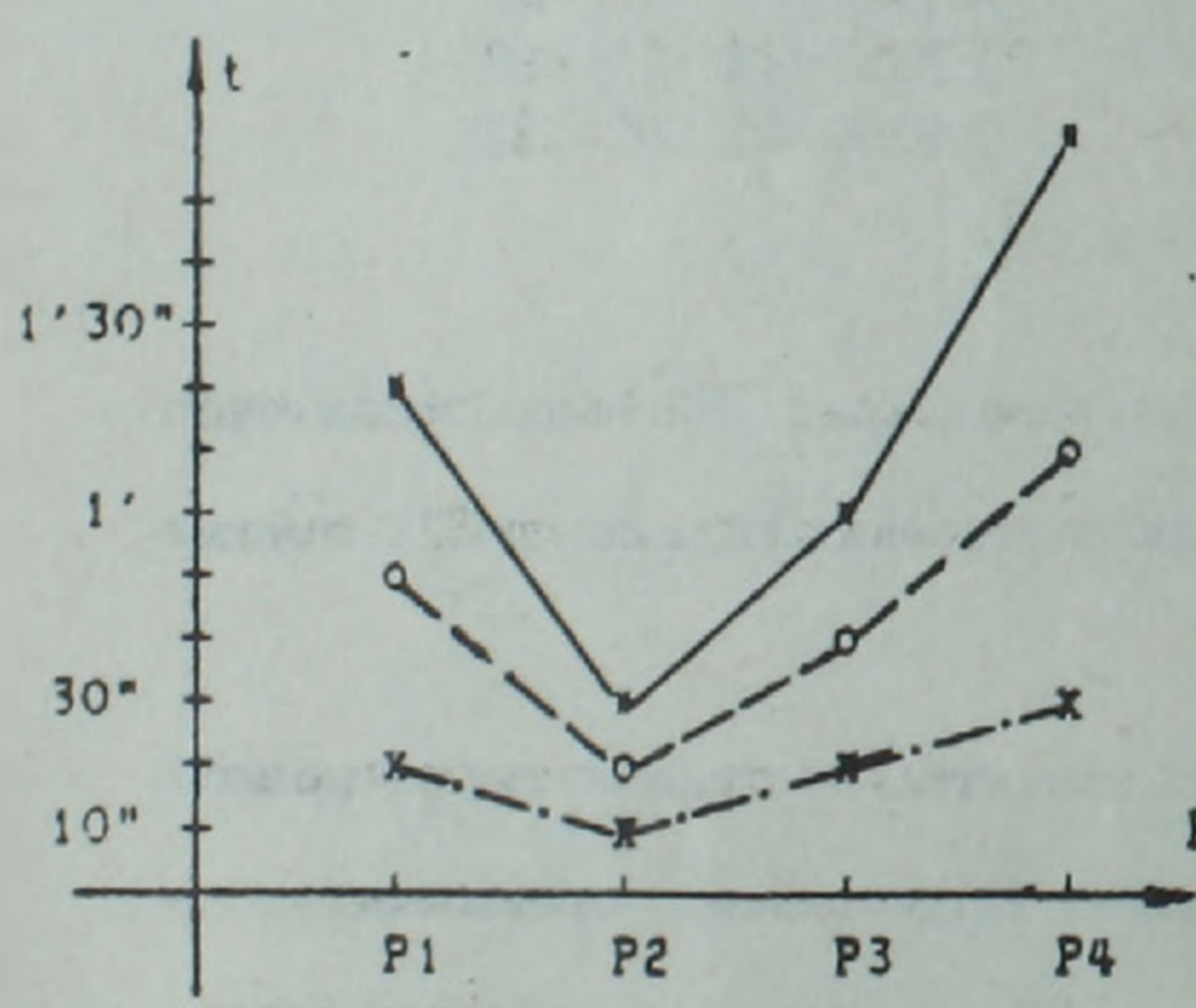

Fig. 2.

Рис. 2.

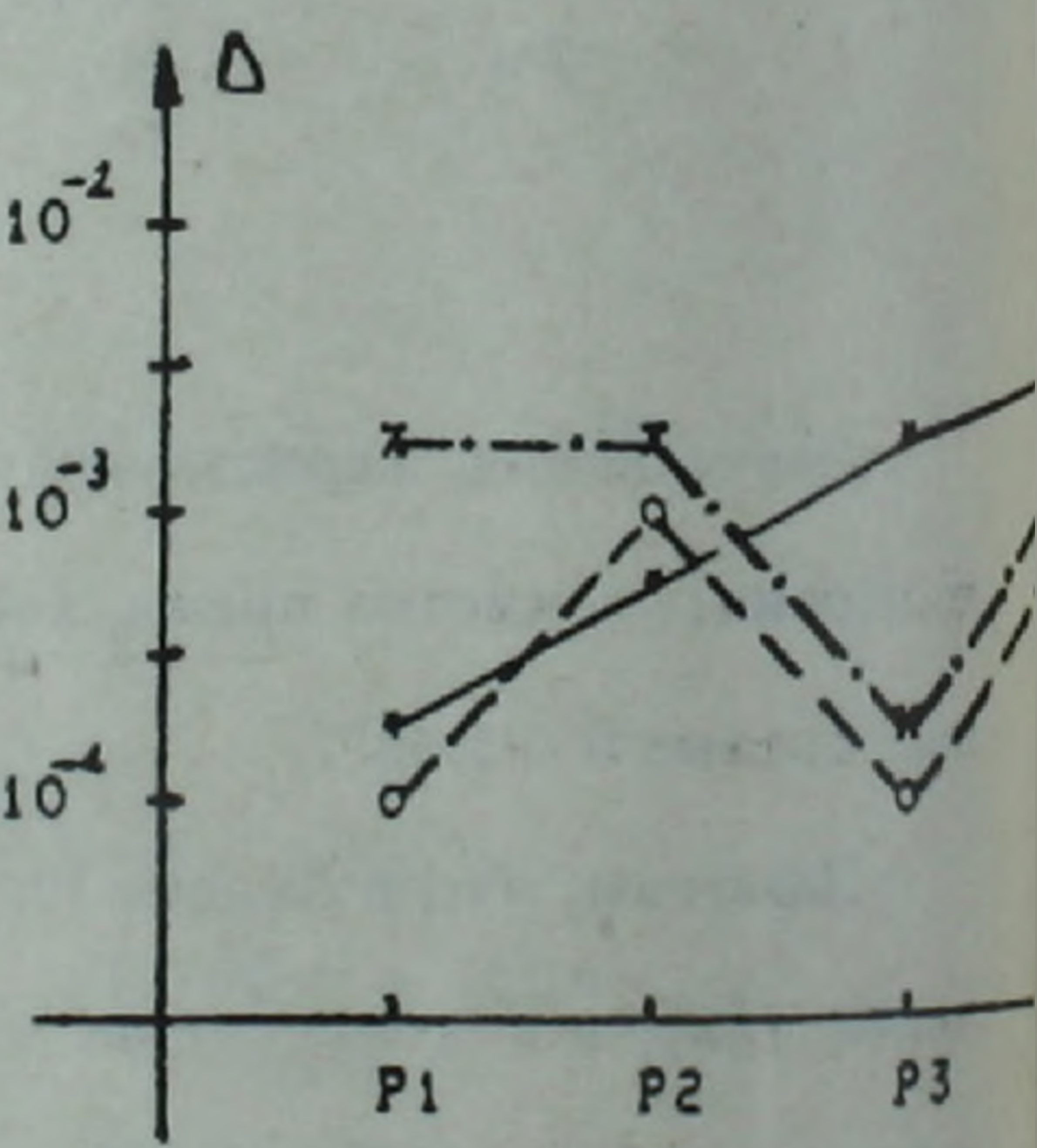

Fig. 3.

Рис. 3.

§4. ВЫВОДЫ

Результаты численных экспериментов дают возможность сделать следующие выводы :

а) автоматическое разбиение интервалов, используемое в алгоритме В, позволяет получить в областях сильной вариации y, y', y'' более густых сетей, чем это получается в алгоритме A ;

b) алгоритм B дает вполне удовлетворительные результаты в трех из четырех шагов, тогда как алгоритм A обычно требует большего числа шагов ;

c) алгоритм C превосходит оба алгоритма (A и B) во всех основных характеристиках. Сплайн допускает нахождение приближенного решения на всем отрезке [0,1] и эффективен для выявления колебаний решения ;

d) при плохих (быстро осциллирующих) ядрах преимущество алгоритмов B и C над алгоритмом A особенно заметно (получается более высокая точность и сокращается время применения методов).

Для дальнейшего исследования промежуточное сгущение сетей можно сделать очень устойчивым, если применить эрмитовы сплайны (а также сплайны пятого порядка на заключительных этапах, так как можно вычислить значения $y''(x_i)$). Применение этой схемы внушает надежду для решения изменяющихся в процессе счета уравнений, для которых экономия времени вычисления особенно важна.

В заключение заметим, что наш подход можно применить для решения уравнений первого рода, используя метод регуляризации (см., например, [3]). Отметим, что при этом самосопряженность и положительная определенность интегрального оператора в (1), вероятно, повысит эффективность метода.

ABSTRACT. A numerical method for detection of sharp oscillations of solutions of Fredholm integral equations is suggested. The algorithm is a modified approach of the paper [1]. The improvement consists in an application of a more sensitive mechanism of grid condensation combined with the spline interpolation.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Neta, P. Nelson, " An adaptive method for numerical solution of Fredholm integral equation of the second kind. I. Regular kernels", Applied Math. and Computation, vol. 21, pp. 171–184, 1987.
2. С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин, Сплайны в Вычислительной Математике, М., Наука, 1976.
3. А. Н. Тихонов, А. Б. Гончарский, Б. Б. Степанов, А. Г. Ягола, Численные Методы Решения Некорректных Задач, М., Наука, 1990.

2 Февраля 1992

Институт математики НАН Армении,
Ереванский государственный университет

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Г. В. Вирабян

Известия Академии Наук Армении. Математика,
том 27, №1, 1992

Работа посвящена разрешимости первой краевой (Дирихле) задачи для биволнового уравнения. Доказано существование по крайней мере одного самосопряженного расширения дифференциального оператора, порожденного такой задачей. Построены так называемые самосопряженные расширения таких операторов и описаны все положительно определенные самосопряженные расширения таких операторов. Показана также тесная связь таких операторов с операторами типа Соболева.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для гиперболических уравнений второго порядка с условиями на всей границе были рассмотрены в многочисленных работах как советских, так и зарубежных авторов (см., например, [1]). Они имели значительные приложения в теории малых колебаний континуумов. В частности, в теории волноводов, малых колебаний вращающейся идеальной жидкости и т.д.

Мы исследуем здесь первую краевую (Дирихле) задачу для биволнового уравнения. Задача Дирихле для гиперболического уравнения четвертого порядка с параметром была впервые рассмотрена в [2].

Пусть Ω - ограниченная область в плоскости x, y с аналитической границей $\partial\Omega$. Мы рассмотрим в Ω первую краевую (Дирихле) задачу для биволнового уравнения

$$D^4_{xxyy}u \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = f(x,y), \tag{I}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{II}$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ - обозначает дифференцирование в направлении внешней нормали к $\partial\Omega$. Соответствующую однородную задачу (т. е. когда $f(x,y) = 0$) обозначим через

$(I_0),(II_0)$. Более детальные формулировки краевых задач $(I),(II),(I_0),(II_0)$ будут даны ниже.

§1. ФОРМУЛА ГРИНА ВОЛНОВОГО-D^2_{xy} И БИВОЛНОВОГО-D^4_{xxyy} ОПЕРАТОРОВ

Пусть $u(x,y)$ и $v(x,y)$ - произвольные функции из класса $C^4(\overline{\Omega})$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Легко проверить следующие тождества :

$$vD^2_{xy}u - uD^2_{xy}v = \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right), \qquad \forall u,v \in C^2(\overline{\Omega}) \tag{1}$$

$$vD^4_{xxyy}u - uD^4_{xxyy}v = \frac{\partial}{\partial x}\left\{v\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}u\right\},$$
$$\forall u,v \in C^4(\overline{\Omega}). \tag{2}$$

Интегрируя тождества (1), (2) по области Ω, получаем формулы Грина для двумерного волнового и биволнового операторов :

$$\iint\limits_{\Omega}\{vD^2_{xy}u - uD^2_{xy}v\}dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial y}dy + u\frac{\partial v}{\partial x}dx, \qquad \forall u,v \in C^2(\overline{\Omega}), \tag{3}$$

$$\iint\limits_{\Omega}\{vD^4_{xxyy}u - uD^4_{xxyy}v\}dxdy = \int\limits_{\partial\Omega}\left[v\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]dy +$$
$$+\left[\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}u - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y}\right]dx, \quad \forall u,v \in C^4(\overline{\Omega}). \tag{4}$$

Переходя к пределу и воспользовавшись теоремами вложения Соболева [3], можно убедиться, что формулы Грина (3) и (4) остаются справедливыми для любых $u,v \in W^2_2(\Omega)$ и $u,v \in W^4_2(\Omega)$, соответственно. Все производные в (3) и (4) понимаются в обобщенном смысле.

Обозначим через $\dot{W}^1_2(\Omega)$ соболевское пространство функций из $W^1_2(\Omega)$, обращающихся в нуль почти всюду на $\partial\Omega$, а через $\tilde{W}^2_2(\Omega)$ - пространство функций из W^2_2, удовлетворяющих краевым условиям (II) в смысле теорем вложения Соболева. Через $\dot{C}_\infty(\overline{\Omega})$ обозначим множество бесконечно дифференцируемых функций на замкнутом множестве $\overline{\Omega}$, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$, а через $\tilde{C}_\infty(\overline{\Omega})$ - множество бесконечно дифференцируемых функций на $\overline{\Omega}$, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$ вместе со своими нормальными производными.

Вместе с краевыми задачами (I),(II) мы рассмотрим также задачу Дирихле для двумерного волнового уравнения

$$D^2_{xy}u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = g(x, y), \tag{III}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{IV}$$

Соответствующую однородную задачу ($g(x, y) = 0$) мы обозначим через (III_0), (IV_0).

Введем некоторые определения, уточняющие формулировки краевых задач (I), (II) и (III), (IV).

Определение 1.1. Функция $u(x, y)$ называется регулярным (классическим) решением краевой задачи (I), (II), если $u(x, y) \in C^2(\overline{\Omega})$ удовлетворяет уравнению в области Ω и обращается в нуль на границе $\partial\Omega$ вместе со своими нормальными производными.

Определение 2.1. Функция $u(x, y)$ называется сильно обобщенным решением краевой задачи (I), (II), если $u(x, y) \in \ddot{W}_2^2(\Omega)$ и равенство

$$\iint_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\, dxdy = \iint_\Omega f(x, y)\, \psi(x, y)\, dxdy \tag{5}$$

имеет место для всех $\psi(x, y) \in \ddot{W}_2^2(\Omega)$.

Определение 3.1. Функция $u(x, y)$ называется слабо обобщенным решением краевой задачи (I), (II), если $u(x, y) \in W_2^2(\Omega)$ и интегральное равенство

$$\iint_\Omega u(x, y) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\, dxdy = \iint_\Omega f(x, y)\, \varphi(x, y)\, dxdy + \int_{\partial\Omega} \{u \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\} dy \tag{6}$$

имеет место для всех $\varphi(x, y) \in \ddot{C}_\infty(\overline{\Omega})$.

Определение 1°.1. Функция $u(x, y)$ называется регулярным (классическим) решением краевой задачи (III), (IV), если $u(x, y) \in C(\overline{\Omega})$ удовлетворяет уравнению (III) в области Ω и краевому условию (IV).

Определение 2°.1 Функция $u(x, y)$ называется сильно обобщенным решением краевой задачи (III), (IV), если $u(x, y) \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ и равенство

$$\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y}\, dxdy = -\iint_\Omega f(x, y)\, \psi(x, y) dxdy \tag{7}$$

имеет место для всех $\psi(x, y) \in \dot{W}_2^1(\Omega)$.

Определение 3°.1 Функция $u(x,y)$ называется слабо обобщенным решением краевой задачи (III), (IV), если $u(x,y) \in L_2(\Omega)$ и интегральное равенство

$$\iint\limits_{\Omega} u(x,y)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\,dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial\varphi}{\partial n}dy + \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\varphi(x,y)\,dxdy \tag{8}$$

имеет место для $\varphi(x,y) \in \dot{C}_\infty(\overline{\Omega})$.

Замечание 1.1. Легко проверить, что регулярные решения наших краевых задач являются сильно обобщенными решениями, а, следовательно,также и слабо обобщенными решениями. Обратное верно только при дополнительных условиях гладкости.

§2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Докажем следующую лемму.

Лемма 1.2. *Если $u(x,y)$ является регулярным решением краевой задачи (III), (IV) и удовлетворяет условию*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{9}$$

то $u(x,y) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ - регулярное решение задачи (III), (IV), удовлетворяющее условию (9). Тогда $u(x,y)$ можно представить в виде

$$u(x,y) = f(x) + g(y), \tag{10}$$

где $f(x) \in C^1[\alpha,\beta]$, $g(y) \in C^1[\gamma,\delta]$. Из краевых условий (II) следует, что

$$u|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\partial\Omega} = 0. \tag{11}$$

Из (10) и (11) имеем

$$f'(x) = 0, \qquad g'(y) = 0, \quad \alpha \le x \le \beta, \quad \gamma \le y \le \delta, \tag{12}$$

т.е. $f(x) \equiv c_1$, $g(y) \equiv c_2$, а из краевого условия (IV) следует, что $c_1 = -c_2$, т.е. $u(x,y) \equiv 0$. Лемма доказана.

Теорема 1.2. *Однородная краевая задача Дирихле для биволнового уравнения в классе регулярных решений из пространства $C^4(\overline{\Omega})$ имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Пусть $u(x,y) \in C^4(\overline{\Omega})$ - регулярное решение задачи (I_o),(II_o). Подставляя $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \in C^2(\overline{\Omega})$ вместо $v(x,y)$, получаем

$$\iint\limits_{\Omega} \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big)^2 dxdy = \iint\limits_{\Omega} u \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} dxdy + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial y} dy + \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx. \tag{13}$$

Так как $u(x,y)$ удовлетворяет биволновому уравнению, а из краевых условий (II) следует (11), то

$$\iint\limits_{\Omega} \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big)^2 dxdy = 0. \tag{14}$$

Таким образом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \text{в} \quad \Omega \tag{15}$$

и условия (11) выполнены.

Согласно Лемме 1.2 $u(x,y) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. *В классе сильно обобщенных решений из $C^1(\overline{\Omega})$ однородная краевая задача Дирихле для биволнового уравнения имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Пусть $u(x,y) \in C^1(\overline{\Omega})$ - сильно обобщенное решение задачи (I),(II). Это означает, что

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dxdy = 0, \qquad \forall \psi(x,y) \in \ddot{W}_2^2(\Omega). \tag{16}$$

Возьмем $\psi(x,y) = u(x,y)$. Из (16) имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \text{в} \quad L_2(\Omega). \tag{17}$$

Тогда по лемме Березанского [3](стр. 299) можно представить $u(x,y)$ в виде (10).

Из того, что $u(x,y) \in \ddot{W}_2^2(\Omega)$ следует, что

$$[f(x) + g(y)]|_{\partial\Omega} = 0, \tag{18}$$

$$f'(x) = 0, \qquad x \in [\alpha, \beta], \tag{19}$$

$$g'(y) = 0, \qquad y \in [\gamma, \delta]. \tag{20}$$

Из (18) - (20) получаем, что $u(x,y) = 0$. Теорема доказана.

§3. ОПЕРАТОРНАЯ ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БИВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Целью настоящего параграфа является установления теорем разрешимости неоднородной краевой задачи для биволнового уравнения замсной краевой задачи соответствующим операторным уравнением.

Обозначим через $\mathbf{D}^4$ дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным выражением $\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$ и действующим из $\ddot{C}_\infty(\overline{\Omega})$ в $L_2(\Omega)$

$$\mathbf{D}^4 : \qquad \ddot{C}_\infty(\overline{\Omega}) \longmapsto L_2(\Omega). \tag{21}$$

Из формулы Грина (4) следует симметричность этого оператора. Легко проверить, что оператор $\mathbf{D}^4$ допускает замыкание в метрике пространства $L_2(\Omega)$. Это замыкание обозначим через $\overline{\mathbf{D}^4}$ (так называемый минимальный оператор, порожденный дифференциальным выражением $\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$). Область определения замыкания $\overline{\mathbf{D}^4}$ обозначим через $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}^4}$,)а область значений оператора $\overline{\mathbf{D}^4}$ через $R(\overline{\mathbf{D}^4})$. Вместо краевой задачи для биволнового уравнения рассмотрим операторное уравнение

$$\overline{\mathbf{D}^4}u = f(x,y), \qquad f(x,y) \in L_2(\Omega), \tag{$\bar{\mathrm{I}}$}$$

$$u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}^4}). \tag{$\overline{\mathrm{II}}$}$$

Решения задачи (I), ($\overline{\mathrm{II}}$) назовем сильно обобщенными решениями краевой задачи (I),(II). Краевое условие (II) заменено требованием того, чтобы функция $u(x,y)$ принадлежала пространству $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}^4}$.)

Оператор, сопряженный $\overline{\mathbf{D}^4}$ относительно скалярного произведения в $L_2(\Omega)$, обозначим через $\overline{\mathbf{D}^4}^*$ (максимальный оператор), а его область определения через - $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}^4}^*)$.

Рассмотрим операторное уравнение

$$\overline{\mathbf{D}^4}^* u = f(x,y), \qquad f(x,y) \in L_2(\Omega), \tag{I^*}$$

$$u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}^4}^*). \tag{$\overline{\mathrm{II}}^*$}$$

Решения уравнения (I^*) из пространства $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}^4}^*)$считаются слабо обобщенными решениями задачи (I),(II). Очевидно, что $\overline{\mathbf{D}^4} \subseteq \overline{\mathbf{D}^4}^*$. Обозначим через

D^4_o оператор $D^4 = \dfrac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$ на многообразии $\Phi_4(\overline{\Omega})$ четырежды непрерывно-дифференцируемых и финитных функций в Ω и рассмотрим уравнения

$$D^4_o u = f(x,y), \qquad u \in \mathcal{D}(D^4_o) = \Phi_4(\overline{\Omega}), \tag{I}$$

$$D^{4^*}_o v = f(x,y), \qquad v \in \mathcal{D}(D^{4^*}_o), \tag{I*}$$

где $D^{4^*}_o$ - сопряженный к D^4, действующий в $L_2(\Omega)$.

Лемма 1.3. *Оператор D^4_o симметричен, а $\mathcal{D}(D^{4^*}_o)$ совпадает с множеством всех функций $u \in L_2(\Omega)$, имеющих обобщенные производные $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \in L_2(\Omega)$.*

Доказательство следует из формулы Грина (4) и из определения обобщенной функции в смысле Соболева.

Лемма 2.3. *Оператор D^4_o на области его значений $R(D^4_o)$ имеет ограниченный обратный $D^{4^{-1}}_o$.*

Доказательство. Повторно применяя неравенство Фридрихса [4] к произвольной функции $u(x,y) \in \mathcal{D}(D^4_o)$, получаем

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq c \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right\|_{L_2(\Omega)}, \tag{22}$$

где c - постоянная, зависящая только от области Ω. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Операторное уравнение (I^*) для произвольной функции $f(x,y) \in$ $\in L_2(\Omega)$ имеет решение из пространства $\mathcal{D}(D^{4^*}_o)$.*

Доказательство следует из того, что если симметрический оператор D^4_o на области своих значений $R(D^4_o)$ имеет ограниченный обратный, то $R(D^{4^*}_o) =$ $= L_2(\Omega)$.

Аппроксимируя функции $u(x,y) \in \mathcal{D}(D^4_o)$средними в смысле Соболева функциями, легко видеть, что неравенство (22) выполняется и для оператора D^4. Более того, неравенство (22) справедливо также для оператора $\overline{D^4}$, который, будучи замыканием симметрического оператора D^4, является замкнутым симметрическим оператором. Таким образом, операторы D^4 и $\overline{D^4}$ имеют ограниченные обратные с областью значений $R(D^4)$ и $R(\overline{D^4})$, соответственно, а $R(\overline{D^4})$ является подпространством в $L_2(\Omega)$. Следовательно, справедливая следующая

Теорема 3.3. *Для любых* $f(x,y) \in L_2(\Omega)$ *операторное уравнение*

$$\mathbf{D}^{4^*} u = f(x,y) \tag{23}$$

имеет решение.

Определение. Операторное уравнение

$$Ax = y \tag{$*$}$$

или оператор A в гильбертовом пространстве H называется нормально разрешимым, если условие : $y \in H$ -ортогонально к подпространству решений уравнения

$$A^* z = 0. \tag{$**$}$$

является необходимым и достаточным (не обязательно однозначно) для разрешимости уравнения $(*)$.

Теорема 4.3. *Операторное уравнение* $(\bar{I})$ *является нормально (не обязательно однозначно) разрешимым в* $L_2(\Omega)$.

Так как симметрический замкнутый оператор $\overline{\mathbf{D}^4}$ с плотной в $L_2(\Omega)$ областью определения $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}^4})$имеет ограниченный обратный на подпространстве $R(\overline{\mathbf{D}^4})$, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.3. *Оператор* $\overline{\mathbf{D}^4}$ *имеет не менее одного самосопряженного расширения* T_o *в* $L_2(\Omega)$ *такого, что уравнение*

$$T_o u = f(x,y) \tag{24}$$

однозначно разрешимо для любых $f(x,y) \in L_2(\Omega)$.

Решения операторного уравнения (24) считаются обобщенными решениями задачи (I),(II).

Замечание 1.3. Область определения $\mathcal{D}(T_o)$самосопряженного расширения T_o оператора $\overline{\mathbf{D}^4}$ можно представить как прямую сумму

$$\mathcal{D}(T_o) = \mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}^4}) \dot{+} M, \tag{25}$$

где M - множество всех таких функций из $L_2(\Omega)$, которые имеют обобщенные производные $\mathbf{D}^4 u$ и $(\mathbf{D}^4)^2 u$ из $L_2(\Omega)$ и ортогональны ко всем решениям уравнения

$$\overline{\mathbf{D}^4}^{*}\, v = 0. \tag{26}$$

Оператор T_o действует на функциях $u \in \mathcal{D}(T_o)$как обобщенная производная в смысле Соболева

$$T_o u = \mathbf{D}^4 u \in L_2(\Omega). \tag{27}$$

Замечание 2.3 Теорема 2.2 означает, что ядро оператора $\overline{\mathbf{D}^4}$ состоит из нулевого элемента.

Замечание 3.3. Теоремы 3-5 об операторных уравнениях можно переформулировать, как теоремы существования и единственности (нормальной разрешимости) сильно обобщенного или слабо обобщенного решения краевой задачи (I), (II). Для этого достаточно заменить в формулировках указанных теорем соответствующее операторное уравнение задачей Дирихле (I),(II) для биволнового уравнения.

§4. РАСШИРЕНИЕ ПО ФРИДРИХСУ БИВОЛНОВОГО ОПЕРАТОРА

В предыдущем параграфе через $\mathbf{D}_o^4$ мы обозначили биволновой оператор $\mathbf{D}^4$, отображающий $\Phi_4(\overline{\Omega})$ в $L_2(\Omega)$. Симметрический оператор $\mathbf{D}_o^4$ допускает замыкание $\overline{\mathbf{D}_o^4}$. Следующая лемма описывает область определения $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}_o^4})$этого замыкания.

Лемма 1.4. *Область определения $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}_o^4})$оператора $\overline{\mathbf{D}_o^4}$ состоит из тех функций из пространства $L_2(\Omega)$, для которых обобщенные производные Соболева $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \in L_2(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть последовательность функций $u_n(x,y) \in L_2(\Omega)\,(n = 1,2,3...)$ такова, что

$$u_n(x,y) \longrightarrow u(x,y) \in L_2(\Omega), \tag{28}$$

$$\frac{\partial^4 u_n(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} \longrightarrow w(x,y) \in L_2(\Omega) \qquad \text{где} \qquad n \to \infty, \tag{29}$$

По формуле Грина (4) для любого $\varphi(x,y) \in \Phi_4(\overline{\Omega})$ имеем

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial^4 u_n}{\partial x^2 \partial y^2}\, \varphi(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{\Omega} u_n(x,y)\, \frac{\partial^4 \varphi(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}\, dxdy. \qquad (30)$$

Переходя к пределу в (32) и используя (30),(31), получаем

$$\iint\limits_{\Omega} w(x,y)\, \varphi(x,y) dxdy = \iint\limits_{\Omega} u(x,y) \frac{\partial^4 \varphi(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}\, dxdy \qquad (31)$$

для любых $\varphi(x,y) \in \Phi_4(\overline{\Omega})$.

А это означает, что $w(x,y)$ - обобщенная производная Соболева для $u(x,y)$: $w(x,y) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \in L_2(\Omega)$. Лемма доказана.

Замечание 4.1 Доказывая Лемму 2.3, мы установили неравенство (22), которое справедливо также для симметрических замкнутых операторов $\mathbf{D}_o^{4^*}$.

Таким образом, мы доказали следующую лемму.

Лемма 2.4. *Оператор $\overline{\mathbf{D}_o^4}$ полуограничен снизу .*

На линейном многообразии $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}_o^4})$введем скалярное произведение

$$[u,v] = \left(\overline{\mathbf{D}_o^4} u, v\right)_{L_2(\Omega)} = \left(\mathbf{D}^2 u, \mathbf{D}^2 v\right)_{L_2(\Omega)}, \qquad u,v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}_o^4}.) \qquad (32)$$

Обозначим через $H(\overline{\mathbf{D}_o^4})$ гильбертово пространство, пополняющее линейное многообразие $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}_o^4})$в норме $||\cdot||_\phi = ||\mathbf{D}^2\cdot||_{L_2(\Omega)}$, порожденной скалярным произведением (32).

Гильбертово пространство $H(\overline{\mathbf{D}_o^4})$ состоит из функций $u(x,y) \in L_2(\Omega)$, имеющих обобщенные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \in L_2(\Omega)$.

Область определения $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}_o^4}^*)$сопряженного оператора $\overline{\mathbf{D}_o^4}^*$ состоит из всех таких функций $u(x,y) \in L_2(\Omega)$, которые имеют в Ω, обобщенные производные Соболева $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \in L_2(\Omega)$. Это следует из определения обобщенной функции и тождества

$$\iint\limits_{\Omega} \overline{\mathbf{D}_o^4} u\, v dxdy = \iint\limits_{\Omega} u\, \overline{\mathbf{D}_o^4}^*\, v dxdy \qquad \text{для всех} \quad u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}_o^4}),\ v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}_o^4}^*). \qquad (33)$$

Оператор $\mathbf{D}^4{}_\phi$, действующий на множестве функций $\mathcal{D}(\mathbf{D}^4{}_\phi) = H(\overline{\mathbf{D}_o^4}) \cap \cap \mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}_o^4}^*)$по формуле

$$\mathbf{D}^4{}_\phi u = \overline{\mathbf{D}_o^4}^* u, \qquad (34)$$

является самосопряженным (жестким) расширением по Фридрихсу биволнового оператора $\overline{\mathbf{D}^4_o}$.

Операторное уравнение

$$\mathbf{D}^4{}_\phi u = f(x,y) \in L_2(\Omega) \tag{35}$$

можно рассматривать как обобщение задачи (I), (II), а решения (35) являются обобщенными решениями краевой задачи (I), (II) для биволнового уравнения.

Замечание 2.4. Область определения квадратного корня оператора $\overline{\mathbf{D}^4_o}$ совпадает с $H(\overline{\mathbf{D}^4_o})$.

Замечание 3.4. Область определения любого положительного самосопряженного расширения $\widetilde{\overline{\mathbf{D}^4_o}}$ оператора $\overline{\mathbf{D}^4_o}$ можно представить как

$$\mathcal{D}(\widetilde{\overline{\mathbf{D}^4_o}}) = \mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}^4_o}) \dot{+} ({\mathbf{D}^4{}_\phi}^{-1} + A)U. \tag{36}$$

где A - некоторый ограниченный самосопряженный положительный оператор, действующий на подпространстве $U = Ker\, \overline{\mathbf{D}^4_o}^*$.

§5. СВЯЗЬ МЕЖДУ БИВОЛНОВЫМ ОПЕРАТОРОМ И ОПЕРАТОРОМ ТИПА СОБОЛЕВА

Пусть $\dot{W}^4_2(\Omega)$ - соболевское гильбертово пространство функций, обобщенные производные Соболева вплоть до четвертого порядка суммируемы вместе с квадратом в Ω. Функции вместе со своими производными первого порядка должны обращаться в нуль на $\partial\Omega$. Скалярное произведение в $\dot{W}^4_2(\Omega)$ дается формулой

$$(u,v)_{\dot{W}^4_2(\Omega)} = \iint\limits_{\Omega} \Delta^2 u\, v\, dx dy. \tag{37}$$

Обозначим через T биволновой оператор, отображающий гильбертово пространство $\dot{W}^4_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ по следующему закону :

$$Tu = \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} : \quad \dot{W}^4_2(\Omega) \longrightarrow L_2(\Omega), \tag{38}$$

где использованы обобщенные производные.

В гильбертовом пространстве $\dot{W}_2^4(\Omega)$ рассмотрим оператор типа Соболева

$$\wp^4 = \Delta^{-2}\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \tag{39}$$

где Δ^{-2} - оператор, обратный к двумерному бигармоническому оператору Δ^2 при нулевых условиях (II) на границе.

Оператор (39), порожденный системой типа Соболева дифференциальных уравнений типа Соболева высокого порядка был рассмотрен в [5]. В этой работе, в частности, установлено существование полной совокупности полиномиальных собственных функций оператора $\wp^4$ в $\dot{W}_2^4(\Omega)$, в случае круговых областей. Оператор (39) является симметрическим и ограниченным оператором на линейном многообразии бесконечно дифференцируемых и финитных в Ω функций. Самосопряженное расширение оператора $\wp^4$ во всем гильбертовом пространстве обозначается той же буквой и рассматривается как отображение $L_2(\Omega)$ в гильбертово пространство $\dot{W}_2^4(\Omega)$ с областью определения $\mathcal{D}(\wp^4) = \dot{W}_2^4(\Omega) \subset L_2(\Omega)$

$$\wp^4 : \mathcal{D}(\wp^4) \longrightarrow \dot{W}_2^4(\Omega). \tag{40}$$

Следующая теорема показывает связь биволнового оператора с операторами типа Соболева.

Теорема 1.5. *Операторы T и $\wp^4$ взаимно сопряжены.*

Доказательство. Действительно, для любых $u(x,y) \in \mathcal{D}(T)$ и $v(x,y) \in$ $\in \mathcal{D}(\wp^4)$имеем

$$\begin{aligned}(Tu, v)_{L_2(\Omega)} &= \Big(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}, v\Big)_{L_2(\Omega)} = \Big(u, \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2}\Big)_{L_2(\Omega)} = \\ &= \Big(u, \Delta^2\Delta^{-2}\frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2}\Big)_{L_2(\Omega)} = \big(\Delta^2 u, \wp^4 v\big)_{L_2(\Omega)} = \big(u, \wp^4 v\big)_{\dot{W}_2^4(\Omega)}.\end{aligned} \tag{41}$$

Это означает, что $T^* = \wp^4$. Теорема доказана.

Замечание 1.5. Оператор T является ограниченным оператором, определенным на всем $\dot{W}_2^4(\Omega)$, и, следовательно, замкнутым.

Рассмотрим следующие уравнения :

$$Tu = f(x,y), \qquad f(x,y) \in L_2(\Omega), \tag{A}$$

$$\wp^4 v = F(x,y), \qquad F(x,y) \in \dot{W}_2^4(\Omega). \tag{A^*}$$

Соотношения, установленные выше и соответствующие результаты из работы [6] показывают, что между разрешимостью (в различных смыслах) задач (A) и (A^*) имеется взаимосвязь. Это, в свою очередь указывает на связь разрешимости задачи Дирихле для биволнового уравнения со свойствами оператора типа Соболева $\wp^4$.

ABSTRACT. The paper is devoted to the solvability of the first boundary (Dirichlet's) problem for the biwave equation. The existence of at least one selfadjoint extention of the differential operator generated by such problem is proved. The so-called Fridrich's selfadjoint (rigid) extention for such operator is constructed and all positive definite selfadjoint extentions for such operator is described. The close connection of such operator with the Sobolev type operator is shown.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. A. Aleksandrian R.A.,Berezansky, Il'in, Kostjucenko, " Some questions in spectral theory for partial differential equations", Amer. Math. Soc. Transl., vol. 2, p. 105, 1976.
2. Г. В. Вирабян, " О спектре оператора и задаче Дирихле для уравнения $\Diamond^2 u + 4\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Diamond u + 2\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = f(x,y,z,t)$", ДАН СССР, т. 132, №5, 1960.
3. Ю. М. Березанский, Разложение Самосопряженных Операторов по Собственным Функциям, Киев, Наукова Думка, 1965.
4. В. И. Смирнов, Курс Высшей Математики, т. 5, Москва, 1959.
5. В. Г. Вирабян, Диссертация, Ереван, 1964.
6. С.Г. Крейн, Линейные Уравнения в Банаховом Пространстве, Москва, 1971.

18 Ноября 1990

Ереванский государственный университет

ЗАДАЧА ТИПА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Н. Е. Товмасян

Известия Академии Наук Армении. Математика,
том 27, №1, 1992

В работе рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения

$$\frac{\partial^{m+n} u}{\partial z^m \partial \bar{z}^n} = 0; \qquad \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial z} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Задача сводится к задаче Дирихле для n - гармонического уравнения и доказывается теорема существования. В случае круга задача явно разрешима.

Пусть D - односвязная область с достаточно гладкой границей Г. Рассмотрим однородное эллиптическое уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = 0, \tag{1}$$

где A_k - комплексные постоянные, $A_n \neq 0$.

Уравнение (1) называется эллиптическим, если характеристическое уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \lambda^k = 0 \tag{2}$$

не имеет вещественных корней. Уравнение (1) называется правильно эллиптическим, если оно эллиптическое и число корней (каждый корень учитывается вместе со своей кратностью) характеристического уравнения (2), для которых $\operatorname{Im} \lambda > 0$ и $\operatorname{Im} \lambda < 0$ совпадает. В остальных случаях эллиптическое уравнение называется неправильно эллиптическим.

Хорошо известно, что в любой односвязной области задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения является фредгольмовой. Для уравнения (1) второго порядка задача Неймана и задача с косой производной (задача Пуанкаре) является либо фредгольмовой, либо неттеровой [1], [2]. Для неправильно эллиптических уравнений эти классические задачи не являются ни фредгольмовыми, ни неттеровыми [2].

Цель настоящей работы - предложить аналог задачи Дирихле для неправильно эллиптических уравнений, для которых однородная задача имеет конечное число линейно независимых решений, в то время как неоднородная задача разрешима всегда.

Для простоты мы рассмотрим задачу, для которой характеристическое уравнение имеет либо два различных корня $\lambda = -i$ и $\lambda = i$ с кратностью m и n, соответственно $(n > m)$, либо один корень с кратностью n. Такое однородное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^{m+n} u}{\partial z^m \partial \bar{z}^n} = 0, \quad z \in D; \qquad n > m \geq 0,\ z = x + iy, \tag{3}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right); \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Задачу типа Дирихле для уравнения (3) мы ставим следующим образом :

Задача А. В односвязной области D найти регулярное решение уравнения (3), удовлетворяющее граничным условиям

$$\frac{\partial^k u(z)}{\partial N^k} = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{4}$$

$$\mathrm{Re}\ \frac{\partial^k u(z)}{\partial N^k} = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = m, \ldots, n-1, \tag{5}$$

где $f_k(z), (k = 1, \ldots, n-1)$ - достаточно гладкие функции, $f_0(z), \ldots, f_{m-1}(z)$ - комплекснозначные, тогда как $f_m(z), \ldots, f_{n-1}(z)$ - вещественнозначные функции, N - внешняя нормаль к Γ в точке $z \in \Gamma$. В случае $m = 0$ условие (4) не имеет места. Решение задачи А называется регулярным, если оно удовлетворяет уравнению и граничным условиям в классическом смысле.

Уравнение (3) - обобщение n-гармонического уравнения (для $m = n$ уравнение (3) - n-гармоническое).

В случае $m > n$ задача А ставится аналогично : в условиях (4) и (5) меняем местами m и n. В [4], [5] задача А рассматривается в полуплоскости.

Если $f_k(z) \equiv 0, \quad k = 0, 1, ..., n-1$, то задача А называется однородной. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Неоднородная задача А разрешима всегда, в то время как соответствующая однородная задача А имеет ровно $(m-n)^2$ линейно независимых решений.*

Теорема 2. *Если $m = 0$, то полная система линейно независимых решений однородной задачи А состоит из функций*

$$i(z^k \overline{z}^l + \overline{z}^k z^l), \qquad z^p \overline{z}^\rho - \overline{z}^p z^\rho, \tag{6}$$

где k, l, p, ρ - неотрицательные целые, удовлетворяющие условиям

$$0 \leq l \leq k, \quad 0 \leq \rho < p; \qquad 0 \leq k, l, p, \rho \leq n-1.$$

Теорема 3. *Если область D - единичный круг $(|z| < 1)$, то полная система линейно независимых решений задачи А определяется формулами*

$$i(z^k \overline{z}^l + \overline{z}^k z^l)(1 - z\overline{z})^m, \qquad (z^p \overline{z}^\rho - \overline{z}^p z^\rho)(1 - z\overline{z})^m,$$

где l, k, p, ρ - неотрицательные целые, удовлетворяющие условиям

$$0 \leq l \leq k, \quad 0 \leq p < \rho; \qquad 0 \leq k, l, p, \rho \leq n-m.$$

Линейная независимость решений однородной задачи А связана с полем вещественных чисел. Здесь и далее $\overline{z}$ обозначает комплексное сопряжение к z.

Доказательства Теорем 1 и 2. Сначала докажем существование решения задачи А. Хорошо известно, что задача Дирихле для n-гармонического уравнения однозначно разрешима. Пусть v - (вещественное) решение n-гармонического уравнения

$$\Delta^n v = 0, \quad z \in D, \tag{7}$$

удовлетворяющее граничному условию Дирихле

$$\frac{\partial^k v(z)}{\partial N^k} = \operatorname{Re} f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{8}$$

где $f_k(z)$ - функции из (4) и (5), а Δ - оператор Лапласа :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Так как v - вещественное решение, то оно может быть представлено в виде [1] :

$$v = \operatorname{Re} u_o(z),$$

где

$$u_o(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k \varphi_k(z),$$

$\varphi_k(z)$ - некоторые аналитические в D функции.

Очевидно, что $u_o(z)$ - решение уравнения (3). Обозначим через w (вещественное) решение следующей задачи Дирихле :

$$\begin{gathered}\Delta^m w = 0, \quad z \in D, \\ \frac{\partial^k w(z)}{\partial N^k} = \operatorname{Im} f_k(z) - \operatorname{Im} \frac{\partial^k u_o(z)}{\partial N^k}, \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., m-1.\end{gathered} \tag{9}$$

Заметим, что n-гармоническое уравнение (9) можно записать также в виде :

$$\frac{\partial^{2m} w}{\partial z^m \partial \bar{z}^m} = 0, \quad z \in D,$$

поэтому $iw(z)$ - также решение (3).

Очевидно, что функция $u(z) = u_o(z) + iw(z)$ - решение задачи A. Существование решения задачи A доказано.

Теперь докажем Теорему 2. Легко видеть, что для $m = 0$ функции (6) являются решениями однородной задачи A, линейно независимы над полем вещественных чисел и их число равно n^2 .

Пусть $u(z)$ - решение однородной задачи для $m = 0$, т. е.

$$\frac{\partial^n u}{\partial \bar{z}^n} = 0, \quad z \in D, \tag{10}$$

$$\operatorname{Re} \frac{\partial^k u}{\partial N^k} = 0, \quad k = 0, 1, ..., n-1. \tag{11}$$

Хорошо известно [1], что в односвязной области D общее решение уравнения (10) представляется в виде

$$\omega(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z),$$

где $\varphi_k(z)$ - произвольные аналитические функции в области D. Следовательно, решение $u(z)$ однородной задачи также можно представить в виде

$$u(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z), \tag{12}$$

где $\varphi_k(z)$ - некоторые аналитические функции.

Обозначим $v(z) = \operatorname{Re} u(z), \quad z \in D$. Согласно представлению (12)

$$\Delta^n v = 0, \quad z \in D.$$

Условие (11) можно записать в виде

$$\frac{\partial^k v}{\partial N^k} = 0, \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Из единственности решения задачи Дирихле для n-гармонического уравнения следует, что

$$v(z) \equiv 0, \quad z \in D,$$

и, следовательно

$$\operatorname{Re} u(z) \equiv 0, \quad z \in D. \tag{13}$$

Подставляя представление (12) в (13), получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\bar{z}^k \varphi_k(z) + z^k \bar{\varphi}_k(z)) = 0, \quad z \in D. \tag{14}$$

Пусть

$$\varphi_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} C_{kj} z^j, \quad k = 0, 1, ..., n-1 \tag{15}$$

- разложения в ряд Тейлора функций $\varphi_k(z)$ в окрестности $z = 0 \in D$. Подставляя (15) в (14), получаем

$$C_{kl} = 0 \qquad \text{при} \quad l \geq n, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{16}$$

$$C_{kl} + \bar{C}_{lk} = 0; \quad k = 0, 1, ..., n-1; \quad l = 0, 1, ..., n-1, \tag{17}$$

Подставляя (15) в (12) и пользуясь соотношениями (16) и (17), замечаем, что общее решение однородной задачи (10) и (11) является линейной комбинацией (с действительными коэффициентами) функций (6). Этим завершается доказательство Теоремы 2.

Теперь перейдем к доказательству второй части Теоремы 1. Пусть $u_o(z)$ - решение однородной задачи A при условии $n > m > 0$. Известно, что общее решение уравнения (1) в односвязной области D допускает представление [1]

$$u(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z) + \sum_{k=0}^{m-1} z^k \bar{\psi}_k(z), \tag{18}$$

где $\varphi_k(z)$ и $\psi_k(z)$ - произвольные аналитические функции в D. Представим функцию $\psi_k(z)$ в виде

$$\psi_k(z) = P_k(z) + \omega_k(z), \quad k = 0, 1, ..., m-1, \tag{19}$$

где $P_k(z)$ - многочлены порядка не более $n-1$, а $\omega_k(z)$ аналитичны в D и удовлетворяют дополнительным условиям

$$\omega_k^{(j)}(0) = 0, \qquad j = 0, 1, ..., n-1, \quad k = 0, 1, ..., m-1. \tag{20}$$

Подставляя ψ_k из (19) в (18), получаем

$$u(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \phi_k(z) + \sum_{k=0}^{m-1} z^k \bar{\omega}_k(z),$$

где $\phi_k(z)$ также аналитична в D. Заметим, что дополнительными условиями (20) аналитические функции $\phi_k(z)$ и $\omega_k(z)$ определяются через $u(z)$ однозначно. Следовательно, решение $u_o(z)$ однородной задачи A можно представить в виде

$$u_o(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \phi_k(z) + \sum_{k=0}^{m-1} z^k \bar{\omega}_k(z), \tag{21}$$

где $\phi_k(z)$ и $\omega_k(z)$ - некоторые аналитические в D функции, а $\omega_k(z)$ удовлетворяют условиям (20).

Положим

$$v_o(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \phi_k(z) + \sum_{k=0}^{m-1} \bar{z}^k \omega_k(z). \tag{22}$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial^n v_o(z)}{\partial \bar{z}^n} = 0; \quad z \in D, \tag{23}$$

$$\operatorname{Re}\ v_o(z) = \operatorname{Re}\ u_o(z); \quad z \in D. \tag{24}$$

Граничные условия (4) и (5) для решения $u_o(z)$ однородной задачи A можно переписать в виде :

$$\operatorname{Re}\ \frac{\partial^k u_o(z)}{\partial N^k} = 0, \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{25}$$

$$\operatorname{Im}\ \frac{\partial^k u_o(z)}{\partial N^k} = 0, \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., m-1. \tag{26}$$

Из (24) следует, что условия (25) можно записать как

$$\operatorname{Re}\ \frac{\partial^k v_o(z)}{\partial N^k} = 0, \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1. \tag{27}$$

Следовательно, функция $v_o(z)$ является решением задачи (23),(27). Согласно Теореме 2

$$v_o(z) = \sum_{k=1}^{n^2} C_k u_k(z), \tag{28}$$

где $u_k(z)$ - функции (6), а C_k - действительные постоянные. Из (22) и (28) имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \phi_k(z) = \sum_{k=1}^{n^2} C_k u_k(z) - \sum_{k=0}^{m-1} \bar{z}^k \omega_k(z). \tag{29}$$

В силу (29) равенство (21) можно переписать в виде

$$u_o(z) = \sum_{k=1}^{n^2} C_k u_k(z) + \sum_{k=0}^{m-1} [z^k \bar{\omega}_k(z) - \bar{z}^k \omega_k(z)] \tag{30}$$

Так как функция $u_k(z)$ является решением однородной задачи (23),(27), легко видеть, что функция $u_o(z)$, определенная формулой (30), при любых вещественных постоянных есть решение уравнения (3) и уловлетворяет граничному условию (25). Подставляя $u_o(z)$ из (30) в граничные условия (26) и учитывая то, что $u_k(z)$ - чисто мнимые функции, а C_k - действительные постоянные, получаем

$$\operatorname{Re}\ \frac{\partial^j \omega(z)}{\partial N^j} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n^2} iC_k \frac{\partial^j u_k(z)}{\partial N^j}; \quad z \in \Gamma, \quad j = 0, 1, ..., m-1, \tag{31}$$

где

$$\omega(z) = \sum_{k=0}^{m-1} i\bar{z}^k \omega_k(z). \tag{32}$$

Очевидно, что $\omega(z)$ - решение уравнения

$$\frac{\partial^m \omega}{\partial z^m} = 0, \quad z \in D. \tag{33}$$

Поэтому $\omega(z)$ является решением задачи (33),(31). Как и выше однородная задача (33),(31) (при $C_k = 0$) имеет m^2 линейно независимых решений, а неоднородная задача всегда разрешима.

Обозначим через $v_k(z)$ решение уравнения (33), удовлетворяющее граничному условию

$$\mathrm{Re}\ \frac{\partial^j v_k}{\partial N^j} = \frac{1}{2} i \frac{\partial^j u_k}{\partial N^j}, \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., m-1 \tag{34}$$

Тогда решение задачи (33), (31) задается формулой

$$\omega(z) = \sum_{k=1}^{n^2} C_k v_k(z),$$

где C_k - постоянные из (31). Поэтому, в силу Теоремы 2 общее решение задачи (31),(33) можно записать как

$$\omega(z) = \sum_{k=1}^{n^2} C_k v_k(z) + \sum_{k=1}^{m^2} d_k u_k(z), \tag{35}$$

где d_k - произвольные вещественные постоянные, $u_k(z)\,(k = 1, ..., m^2)$ - функции (6), после замены n на m. В обозначениях (32) условие (20) эквивалентно следующему :

$$\frac{\partial^{k+j} \omega(0)}{\partial \bar{z}^k \partial z^j} = 0; \quad k = 0, 1, ..., m-1; \quad j = 0, 1, ..., n-1. \tag{36}$$

Условие (36) можно записать в виде

$$\mathrm{Re}\ \frac{\partial^{k+j} \omega(0)}{\partial \bar{z}^k \partial z^j} = 0, \quad \mathrm{Im}\ \frac{\partial^{k+j} \omega(0)}{\partial \bar{z}^k \partial z^j} = 0, \quad k = 0, 1, ..., m-1,\ j = 0, 1, ..., n-1 \tag{37}$$

Подставляя (35) в (37), получим следующую систему уравнений :

$$AC = 0, \tag{38}$$

из которой можно определить действительные постоянные C_k и d_k. Здесь $C = (C_1, C_2, ..., C_{n^2}, d_1, ..., d_{m^2})$ искомый вещественный вектор-столбец, и A - вещественная матрица. A имеет $2mn$ строчек и $m^2 + n^2$ столбцов.

Теперь покажем, что $\mathrm{rang} A = 2mn$. С этой целью рассмотрим задачу А со следующими функциями :

$$f_k(z) = 2i\frac{\partial^k}{\partial N^k}\ \mathrm{Re}\ [\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n-1} C_{jl}\bar{z}^j z^l], \quad k = 0, 1, ..., m-1;$$
$$f_k(z) = 0, \quad k = m, ..., n-1, \tag{39}$$

где C_{jl} - произвольные комплексные постоянные. В этом случае граничные условия (4) и (5) можно записать следующим образом :

$$\mathrm{Re}\ \frac{\partial^k u(z)}{\partial N^k} = 0, \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{40}$$

$$\mathrm{Im}\ \frac{\partial^k u(z)}{\partial N^k} = 2\frac{\partial^k}{\partial N^k}\ \mathrm{Re}\ [\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n-1} C_{jl}\bar{z}^j z^l], \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., m-1. \tag{41}$$

При изучении задачи А с граничными условиями (40) и (41) применяется подход, аналогичный примененному при изучении однородной задачи А. Из уравнения (3) и граничного условия (40) следует, что решение $u(z)$ имеет вид (30). Поэтому, подставляя (30) в (41), получаем

$$\mathrm{Re}\ \frac{\partial^k}{\partial N^k}[\omega(z) - \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n-1} C_{jl}\bar{z}^j z^l] = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n^2} iC_j\frac{\partial^k u_j(z)}{\partial N^k}, \quad z \in \Gamma, \tag{42}$$

где $\omega(z)$ определено формулой (32). Заметим, что функция в квадратных скобках также является решением уравнения (33). Следовательно (ср. с (35))

$$\omega(z) - \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n-1} C_{jl}\bar{z}^j z^l = \sum_{k=1}^{n^2} C_k v_k(z) + \sum_{k=1}^{m^2} d_k u_k(z), \quad z \in D, \tag{43}$$

где C_k и d_k - снова произвольные действительные постоянные. Если подставим $\omega(z)$ из (43) в (37) при произвольных постоянных C_k и d_k, то получим уравнение

$$AC = b, \tag{44}$$

где матрица A и искомый вектор C такие же как в (38), а b - вектор-столбец с компонентами $\mathrm{Re}\ C_{jl}$ и $\mathrm{Im}\ C_{jl}(j = 0, 1, ..., m-1\ ;\ l = 0, 1, ..., n-1$.

Поэтому b в правой части алгебраического уравнения (44) может быть произвольным вектор-столбцом. Для любой правой части b уравнение (44) всегда разрешимо, так как неоднородная задача А всегда разрешима. Следовательно, rang $A = 2mn$. Поэтому при $b = 0$ алгебраическое уравнение (44) имеет ровно $m^2 + n^2 - 2mn$ линейно независимых решений.

Формулу (30) можно переписать в виде

$$u_o(z) = \sum_{k=1}^{n^2} C_k u_k(z) - \sum_{k=0}^{m-1} 2i \ \mathrm{Im} \ \omega(z), \tag{45}$$

где $\omega(z)$ определено посредством (32).

Таким образом, каждому решению C однородной системы (38) соответствует решение однородной задачи A, задаваемое формулой (45), где $\omega(z)$ определено формулой (35) и $C = (C_1, ..., C_{n^2}, d_1, ..., d_{m^2})$.

Можно показать, что (45) - сохраняющее линейную независимость отображение решений однородной системы на решения однородной задачи. Это можно доказать методом, используемым в [3], стр. 292 – 297.

Так как однородная система (38) имеет $(n-m)^2$ линейно независимых решений, то однородная задача A имеет столько же линейно независимых решений. Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 3. Легко проверить, что функции в утверждении Теоремы 3 линейно независимы. Они являются решениями однородной задачи A в единичном круге, а их число равно $(n-m)^2$. Отсюда и Теоремы 1 следует, что в единичном круге эти функции образуют полную систему линейно независимых решений однородной задачи A.

ABSRACT. In the paper a Dirichlet type problem for the elliptic equation

$$\frac{\partial^{m+n} u}{\partial z^m \partial \bar{z}^n} = 0; \qquad \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial u}{\partial z} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

is considered. The problem is reduced to a Dirichlet problem for n-harmonic equation and the existence theorem is proved. In the case of a circle the problem is explicitly solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Е. Товмасян, "Общая краевая задача для эллиптической системы второго порядка с постоянными коэффициентами", Дифф. уравнения, т. 2,№№ 1,2, 1966.
2. А. В. Бицадзе, Краевые Задачи для Эллиптических Уравнений Второго Порядка, М., Наука, 1966.
3. И. Н. Векуа, Обобщенные Аналитические Функции, М., Физ-мат. лит., 1959.
4. И. А. Бикчантаев, " Краевая задача для эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами", Изв. вузов, Математика, т. 6, стр. 3 – 13, 1975.
5. В. В. Асатрян," Краевые задачи для неправильно эллиптических уравнений высокого порядка в полуплоскости", Препринт, Ереван, 1987.

19 Февраля 1990

Ереванский политехнический институт

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 27 НОМЕР 1 1992

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

CONTENTS

VOLUME 27 NUMBER 1 1992

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(ARMENIAN ACADEMY OF SCIENCES)

PAGES