ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրատարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրատարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրատարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղադրվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 6, 1991 Математика

УДК 517.547

А. О. КАРАПЕТЯН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В РАДИАЛЬНЫХ ТРУБЧАТЫХ ОБЛАСТЯХ*

§ 0. Введение

0.1. Класс Харди H^2 в правой полуплоскости состоит из всех тех голоморфных функций $f(z)\equiv f(x+iy)$, $\operatorname{Re} z>0$, которые удовлетворяют условию

$$\sup_{0<x<+\infty}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x+iy)|^2\,dy\right\}<+\infty. \tag{0.1}$$

Известный результат Винера и Пэли [1] (см. также [2]) гласит, что указанный класс совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление вида

$$f(z)=\int\limits_0^{+\infty}F(t)\cdot e^{-z\cdot t}\,dt,\ \operatorname{Re} z>0, \tag{0.2}$$

с произвольной функцией $F(t)\in L^2(0,+\infty)$. Иными словами, формула (0.2) задает параметрическое интегральное представление всего класса Харди H^2 в правой полуплоскости. Этот классический результат (как, впрочем, и многие другие результаты монографии [1]) инициировал в свое время многочисленные исследования, продолжающиеся и по настоящее время. В работе [3] мы постарались достаточно подробно осветить исследования, обобщающие теорему Винера—Пэли в том или ином направлении. Ввиду этого ниже приводится лишь беглый обзор некоторых принципиальных работ.

Так, в работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна [4], а также в монографии М. М. Джрбашяна [5, гл. VII] для весовых классов Харди в угловых областях были установлены существенно новые (и более общие, чем (0.2)) интегральные представления посредством ядер Миттаг—Леффлера $E_\rho(z;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k/\Gamma(\mu+k/\rho)$. Это удалось осуществить на основе исследований М. М. Джрбашяна по гармоническому анализу и теории интегральных преобразований в комплексной области, подытоженных в его монографии [5].

В области многомерного комплексного анализа также проводились исследования с целью получить различные обобщения теоремы Винера—Пэли. Так, Бохнер [6] для многомерных классов Харди H^2 в радиальных трубчатых областях получил аналог интегрального пред-

---

* Настоящая работа была депонирована в АрмНИИНТИ 16 ноября 1990 г., деп. № 49—Ар90, Ереван, 40 стр. (1990).

ставления (0.2). Принципиальное значение имела работа С. Г. Гиндикина [7], где в качестве многомерного аналога полуплоскости рассматривались области Зигеля, являющиеся более общими по сравнению с радиальными трубчатыми областями. В этой работе наряду с дальнейшим обобщением результата Бохнера впервые была поставлена и решена задача иного рода: получить параметрические интегральные представления типа Винера—Пэли для классов голоморфных в областях Зигеля функций, квадратично интегрируемых по всей области определения. В дальнейшем исследования в этом направлении были продолжены различными авторами, и мы вкратце остановимся на их работах.

0.2. Пусть $n \geqslant 1$, B — область в $\mathbf{R}^n$ и $\gamma(y)$, $y \in B$ — произвольная непрерывная положительная (т. е. $\gamma(y) > 0$, $y \in B$) функция. При $0 < p$, $s < +\infty$ обозначим через $H^p_{s,\gamma}(T_B)$ пространство всех голоморфных в трубчатой области $T_B \equiv \{z = x + iy \in \mathbf{C}^n\colon x \in \mathbf{R}^n,\ y \in B\}$ функций $f(z) \equiv f(x+iy)$, подчиненных условию:

$$M^p_{s,\gamma}(f) \equiv \int_B \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} |f(x+iy)|^p\,dx \right\}^s \cdot \gamma(y)\,dy < +\infty. \tag{0.3}$$

При $\gamma(y) \equiv 1$, $y \in B$, эти пространства удобнее обозначать просто через $H^p_s(T_B)$. Отметим также, что при $s = 1$ пространство $H^p_{s,\gamma}(T_B) = H^p_{1,\gamma}(T_B)$ состоит из голоморфных в $T_B \subset \mathbf{C}^n$ функций, принадлежащих $L^p(T_B;\ \gamma(y)\,dx\,dy)$.

В работах Генчева [8—10] были установлены интегральные представления типа Винера—Пэли для классов $H^p_s(T_b)$, где $1 \leqslant p \leqslant 2$, $s = 1$ или же $1 < p < 2$, $s = 1/(p-1)$. Следует отметить однако, что в наиболее важном случае $p = 2$, когда эти представления являются параметрическими, результаты Генчева следуют из более общих теорем работы С. Г. Гиндикина [7].

В работах М. М. Джрбашяна и В. М. Мартиросяна [11, 12] иными по сравнению с [7], [8—10] методами были получены интегральные представления типа Винера—Пэли для более общих, чем $H^p_s(T_B)$, классов голоморфных функций одного комплексного переменного.

Случай, когда весовая функция $\gamma(y) \not\equiv 1$, был рассмотрен в диссертации [13, гл. II] и в работе [14]. Там, в частности, было установлено, что если $1 < p \leqslant 2$, $0 < s < +\infty$, то каждая функция $f \in H^p_{s,\gamma}(T_B)$ допускает интегральное представление вида

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbf{R}^n} F(t)\, e^{i\langle z,\, t\rangle}\,dt,\quad z \in T_B, \tag{0.4}$$

где функция $F(t)$, $t \in \mathbf{R}^n$, подчинена определенным условиям, и $\langle z, t\rangle = \sum_{k=1}^n z_k \cdot t_k$, если $z = (z_1, \cdots, z_n)$, $t = (t_1, \cdots, t_n)$.

Как видим, функция $F(t)$ в интегральном представлении (0.4) определена, вообще говоря, на всем пространстве $\mathbf{R}^n$. В этой связи возникает следующая задача: выяснить, при каких естественных условиях, наложенных на область $B \subset \mathbb{R}^n$ и весовую функцию $\gamma(y)$, $y \in B$, представляющие функции $F(t)$ (независимо от выбора $f \in H^p_{s,\gamma}(T_B)$) окажутся сосредоточенными на некотором собственном подмножестве пространства $\mathbb{R}^n$. В тех же работах [13, 14] эта задача была решена в случае, когда

$$B = \{y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_1 > \sum_{k=2}^{n} y_k^2\}, \tag{0.5}$$

$$\gamma(y) = \varphi(y_1 - \sum_{k=2}^{n} y_k^2), \quad y = (y_1, \cdots, y_n) \in B, \tag{0.6}$$

и функция $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0, +\infty)$, подчинена определенным условиям. При этом были построены воспроизводящие ядра для рассматриваемых весовых классов голоморфных функций.

В работе Саито [15] аналогичная задача описания носителя представляющих функций $F(t)$ (см. (0.4)) решена уже в случае произвольной области $B \subset \mathbb{R}^n$, но при существенных предположениях $\gamma(y) \equiv 1$, $y \in B$, и $s = 1$. Здесь также построены соответствующие воспроизводящие ядра.

Наконец, в работе [3] рассмотрены пространства $H^p_{s,\gamma}(T_V)$, где $1 \leqslant p \leqslant 2$, $0 < s < +\infty$ и V—острый (т. е. не содержащий целиком ни одной прямой) открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$. Установлено, что если

$$\varliminf_{|y| \to +\infty} \frac{\ln \gamma(y)}{|y|} \geqslant 0 \quad (y \in V), \tag{0.7}$$

то в интегральном представлении (0.4) класса $H^p_{s,\gamma}(T_V)$ представляющие функции $F(t)$ с необходимостью обращаются в нуль вне сопряженного конуса V^*. Для соответствующих весовых классов построены воспроизводящие ядра, но в том случае, когда функция $\gamma(y)$, $y \in V$, подчинена, помимо (0.7), некоторым дополнительным условиям.

0.3. Перейдем теперь к сжатому описанию результатов, установленных в настоящей работе. По ходу нам придется ввести некоторые новые обозначения, которые, впрочем, понадобятся и в дальнейшем.

Как обычно, $\mathbb{R}^n$ рассматривается как вполне вещественное подпространство в $\mathbb{C}^n$. Если $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $w = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n$, то полагаем

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k \cdot \overline{w_k}, \quad |z| = \langle z, z \rangle^{1/2}. \tag{0.8}$$

В частности, z и w в (0.8) могут принадлежать пространству $\mathbb{R}^n$.

Далее, через V обычно будем обозначать некоторый открытый выпуклый конус (ОВК) в пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$. При этом для произвольной непрерывной положительной функции $\gamma(y)$, $y \in V$, полагаем

$$\gamma_V^*(t) \equiv \int_V e^{-\langle y, t \rangle} \cdot \gamma(y)\, dy, \quad t \in \mathbb{R}^n. \tag{0.9}$$

Если $n=1$ и $V=(0, +\infty)\subset R^1$, то предпочтем более простое обозначение

$$\gamma^*(t)\equiv\int\limits_0^{+\infty} e^{-y\cdot t}\cdot\gamma(y)\,dy,\ t\in(-\infty, +\infty). \tag{0.10}$$

Пусть V — ОВК в R^n и $\gamma(y)>0$, $y\in V$ — непрерывная функция. Сформулируем ряд свойств, которыми может обладать или не обладать функция γ (см. [13], пункт 1.3.).

(А) $\lim\limits_{|y|\to+\infty}\dfrac{\ln\gamma(y)}{|y|}=0\ (y\in V)$,

(Б) $\varlimsup\limits_{|y|\to+\infty}\dfrac{\ln\gamma(y)}{|y|}\leqslant 0\ (y\in V)$,

(В) $\varliminf\limits_{|y|\to+\infty}\dfrac{\ln\gamma(y)}{|y|}\geqslant 0\ (y\in V)$,

(Г) $\gamma\in L^1(V)$,

(Д) При $\forall R\in(0, +\infty)$: $\gamma\in L^1\ (V_R)$, где $V_R=\{y\in V: |y|<R\}$,

(Е) $\gamma(2\cdot y)\leqslant C\cdot\gamma(y)$, $y\in V$, $C\in(0, +\infty)$.

Зависимость свойств функции $\overset{*}{\gamma}_V(t)$, $t\in R^n$, от наличия у функции $\gamma(y)$, $y\in V$, перечисленных выше свойств установлена в работе [3, предложение 1.2].

Далее, множества E_1 и E_2 из R^n назовем линейно эквивалентными, если существует линейный изоморфизм L пространства R^n такой, что $L(E_1)=E_2$.

Наконец, для произвольного $y=(y_1,\cdots, y_n)\in R^n$ положим $y'=(y_1,\cdots, y_{n-1})\in R^{n-1}$, так что $y=(y', y_n)$.

В § 1 работы изучаются так называемые специальные ОВК в $R^n(n>1)$, которые отличаются от обычных ОВК лишь специальным расположением в пространстве R^n.

В § 2 класс специальных ОВК из R^n сужается, и теперь уже рассматриваются нормальные специальные ОВК. Фактически, они тоже отличаются лишь особым расположением в пространстве R^n, ибо согласно предложению 2.1 любой острый ОВК в R^n линейно эквивалентен некоторому нормальному специальному ОВК. Далее, устанавливается важная теорема 2.1, которая позволяет на основании имеющегося эффективного описания нормального специального ОВК $V\subset R^n$ получить столь же эффективное описание сопряженного конуса V^*. Кроме того, с произвольным нормальным специальным ОВК $V\subset R^n$ ассоциируется (см. (2.36)) интеграл $I_V(a)$, зависящий от параметра $a\in R^{n-1}$. Предложение 2.6 уставливает важную связь между V^* и множеством $\{a\in R^{n-1}: I_V(a)<+\infty\}$.

Основным в работе является § 3. Здесь рассматриваются нормальные специальные ОВК $V \subset \mathbf{R}^n$ и особого рода весовые функции $\gamma(y)$, $y \in V$. Необходимо отметить, что в отличие от работы [3], где функции $\gamma(y)$, $y \in V$, характеризовались в основном на бесконечности (т. е. при $|y| \to +\infty$), здесь весовые функции γ характеризуются также около границы конуса V. В указанном случае удается получить достаточно явное выражение для $\gamma^*_V(t)$ через интеграл I_V (см. предложение 3.1), что существенно используется в дальнейшем. Затем устанавливаются интегральные представления типа Винера—Пали (теорема 3.1) и конструируются воспроизводящие ядра (см. (3.32)) и теорему 3.2) для пространств $H^p_{s,\gamma}(T_V)$.

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность академику АН Армении М. М. Джрбашяну за постановку задач и постоянное внимание к настоящей работе.

§ 1. Изучение специальных открытых выпуклых конусов

1.1. Как и в работе [16], открытый выпуклый конус (ОВК) $V \subset \mathbf{R}^n$ договоримся называть специальным, если выполняются условия:

1) $V \subset \{y = (y', y_n) \in \mathbf{R}^n: y_n > 0\}$;

2) $e_n = (0, \cdots, 0, 1) \in V$.

Напомним также (см. [16, предложение 5]), что каждый ОВК $V \subset \mathbf{R}^n$ $(V \neq \mathbf{R}^n)$ линейно эквивалентен некоторому специальному ОВК $V_1 \subset \mathbf{R}^n$, причем если конус V острый, то и V_1 является таковым.

Всюду дальше предполагается, что $n > 1$.

Справедливо следующее

Предложение 1.1. *Пусть V — специальный ОВК в пространстве $\mathbf{R}^n$. Тогда для каждого $y' \in \mathbf{R}^{n-1}$ множество*

$$E(y') = \{\sigma \in \mathbf{R}: (y', \sigma) \in V\} \tag{1.1}$$

не пусто; более того, $E(y')$ имеет вид $(b, +\infty)$, где $0 \leqslant b < +\infty$.

За доказательством мы отсылаем к работе [16] (предложение 6)

Этот факт позволяет ассоциировать с каждым специальным ОВК $V \in \mathbf{R}^n$ функцию, заданную на пространстве $\mathbf{R}^{n-1}$ и сопоставляющую каждому $y' \in \mathbf{R}^{n-1}$ число $b = b(y')$, фигурирующее в предложении 1.1. Более точно, пусть V—произвольный специальный ОВК в $\mathbf{R}^n$, введем в рассмотрение функцию

$$\sigma_V(y') = \inf\{\sigma \in \mathbf{R}: (y', \sigma) \in V\}, \quad y' \in \mathbf{R}^{n-1}, \tag{1.2}$$

и выясним ее свойства.

Предложение 1.2. 1°. *Пусть V — специальный ОВК в $\mathbf{R}^n$, тогда:*

а) $\sigma_V(y') \geqslant 0$, $y' \in \mathbf{R}^{n-1}$; $\sigma_V(0) = 0$;

2) $\sigma_V(y'_1 + y'_2) \leqslant \sigma_V(y'_1) + \sigma_V(y'_2)$, $y'_1, y'_2 \in \mathbf{R}^{n-1}$;

в) $\sigma_V(\alpha \cdot y') = \alpha \cdot \sigma_V(y')$, $y' \in \mathrm{R}^{n-1}$, $\alpha > 0$;

г) *функция* $\sigma_V(y')$ *непрерывна в каждой точке пространства* R^{n-1};

д) $V = \{y = (y', y_n) \in \mathrm{R}^n: y_n > \sigma_V(y')\}$.

2°. *Пусть* $\sigma(y')$, $y' \in \mathrm{R}^{n-1}$ — *некоторая функция, обладающая свойствами* (а)—(г) *и положим*

$$V \overset{\text{def}}{=} \{y = (y', y_n) \in \mathrm{R}^n;\ y_n > \sigma(y')\}. \tag{1.3}$$

Тогда V *является специальным ОВК в* R^n *и при этом*

$$\sigma_V(y') \equiv \sigma(y'),\ y' \in \mathrm{R}^{n-1}. \tag{1.4}$$

Доказательство. Пусть $y' \in \mathrm{R}^{n-1}$, тогда в силу предложения 1.1 $E(y') = (b, +\infty)$, где $0 \leqslant b < +\infty$, поэтому $\sigma_V(y') = b \geqslant 0$. Кроме того, поскольку $e_n = (0, 1) \in V$, то и $\sigma\, e_n = (0, \sigma) \in V$ при любом $\sigma > 0$. А значит, $E(0) = (0, +\infty)$, и поэтому $\sigma_V(0) = 0$. Итак, свойство (а) установлено. Далее, пусть y_1', $y_2' \in \mathrm{R}^{n-1}$ и числа σ_1, σ_2 таковы, что

$$\sigma_V(y_i') < \sigma_i\ (i = 1, 2). \tag{1.5}$$

Тогда $(y_i', \sigma_i) \in V, (i = 1, 2)$, и поскольку V суть выпуклый конус, то и

$$(y_1' + y_2', \sigma_1 + \sigma_2) \in V. \tag{1.6}$$

Следовательно, $\sigma_1 + \sigma_2 \in E(y_1' + y_2')$, поэтому

$$\sigma_V(y_1' + y_2') = \inf E(y_1' + y_2') \leqslant \sigma_1 + \sigma_2, \tag{1.7}$$

и это для произвольных σ_1, σ_2, удовлетворяющих (1.5). Тем самым свойство (б) также установлено.

Пусть $y' \in \mathrm{R}^{n-1}$, тогда $(y', \sigma) \in V$ при любом $\sigma > \sigma_V(y')$. И если $\alpha > 0$, то

$$(\alpha \cdot y', \alpha \cdot \sigma) \in V, \tag{1.8}$$

поэтому $\sigma_V(\alpha \cdot y') \leqslant \alpha \cdot \sigma$. Поскольку это верно при произвольном $\sigma > \sigma_V(y')$, то приходим к неравенству

$$\sigma_V(\alpha \cdot y') \leqslant \alpha \cdot \sigma_V(y'). \tag{1.9}$$

Так как (1.9) справедливо при любых $y' \in \mathrm{R}^{n-1}$ и $\alpha > 0$, то имеем также

$$\sigma_V(y') = \sigma_V\left(\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha \cdot y'\right) \leqslant \frac{1}{\alpha} \cdot \sigma_V(\alpha \cdot y'). \tag{1.10}$$

Наконец, комбинируя (1.9) и (1.10), получаем (в).

Далее, убедимся в непрерывности функции $\sigma_V(y')$ в точке $y' = 0 \in \mathrm{R}^{n-1}$. Так как V открыто и $e_n \in V$, то существует $\eta_0 > 0$ такое, что $(x', 1) \in V$ при $x' \in \mathrm{R}^{n-1}$, $|x'| < \eta_0$. Затем для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$ положим $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon \cdot \eta_0$ и покажем, что

$$|\sigma_V(y') - \sigma_V(0)| < \varepsilon \text{ при } |y'| < \delta. \tag{1.11}$$

Действительно, если $|y'|<\delta$, то $|y'/\varepsilon|<\eta_0$, поэтому $(y'/\varepsilon, 1)\in V$, или, что то же самое, $(y', \varepsilon)\in V$. Следовательно, $\sigma_V(y')<\varepsilon$, что, с учетом свойства (а), совпадает с (1.11). Итак, функция $\sigma_V(y')$ непрерывна в точке $0\in \mathbf{R}^{n-1}$. Если же зафиксировать произвольную точку $y_0'\in \mathbf{R}^{n-1}$, то в силу свойства (б) справедливы неравенства:

$$\begin{gathered}\sigma_V(y')-\sigma_V(y_0')\leqslant\sigma_V(y'-y_0'),\ y'\in \mathbf{R}^{n-1},\\ \sigma_V(y_0')-\sigma_V(y')\leqslant\sigma_V(y_0'-y'),\ y'\in \mathbf{R}^{n-1},\end{gathered}\tag{1.12}$$

из которых следует непрерывность функции $\sigma_V(y')$ и в точке $y_0'\in \mathbf{R}^{n-1}$. Таким образом, свойство (г) проверено. Наконец, (д) непосредственно вытекает из самого определения функции $\sigma_V(y')$, $y'\in \mathbf{R}^{n-1}$, и тем самым утверждение 1° полностью доказано. Что же касается утверждения 2°, то оно легко проверяется, и на этом мы останавливаться не будем.

1.2. Наряду с функцией $\sigma_V(y')$, $y'\in \mathbf{R}^{n-1}$, с каждым специальным ОВК $V\subset \mathbf{R}^n$ можно ассоциировать также функцию

$$\tau_V(y)\equiv y_n-\sigma_V(y'),\ y=(y', y_n)\in \mathbf{R}^n.\tag{1.13}$$

Очевидно, функция $\tau_V(y)$, $y\in \mathbf{R}^n$, всюду непрерывна, причем

$$V=\{y\in \mathbf{R}^n:\tau_V(y)>0\}.\tag{1.14}$$

Далее, если V (не обязательно специальный) ОВК в $\mathbf{R}^n$, то договоримся обозначать через $\rho_V(y)$, $y\in V$, евклидово расстояние от точки y до границы ∂V, а точнее,

$$\rho_V(y)=\inf\{|v-y|:v\in\partial V\},\ y\in V.\tag{1.15}$$

Нетрудно проверить, что $\rho_V(y)$, $y\in V$, является непрерывной положительной функцией в конусе V.

В работе [16] доказано следующее важное

Предложение 1.3. *Пусть V — специальный ОВК в $\mathbf{R}^n$, тогда существует число $a\in(0, 1]$, зависящее только от V и такое, что*

$$a\leqslant\frac{\rho_V(y)}{\tau_V(y)}\leqslant 1,\ y\in V.\tag{1.16}$$

Доказательство этого факта опускается (см. [16], предложение 7).

Наконец, полезно отметить следующее

Предложение 1.4. *Для произвольного специального ОВК $V\subset \mathbf{R}^n$ справедливо равенство*

$$\partial V=\{(x, \sigma_V(x)):x\in \mathbf{R}^{n-1}\}.\tag{1.17}$$

Доказательство. Пусть $y=(y', y_n)\in\partial V$, тогда существует последовательность $\{y^{(k)}\}_1^\infty\subset V$, сходящаяся к y. В силу непрерывности функции τ_V имеем

$$\lim_{k\to\infty}\tau_V(y^{(k)})=\tau_V(y).\tag{1.18}$$

Далее, поскольку $y^{(k)} \in V$ $(k = 1, 2, \cdots)$, то $\tau_V(y^{(k)}) > 0$; следовательно, $\tau_V(y) \geqslant 0$. Но так как $y \bar{\in} V$, то неравенство $\tau_V(y) > 0$ исключается, и мы окончательно получаем равенство:

$$\tau_V(y) = y_n - \sigma_V(y') = 0. \tag{1.19}$$

Таким образом, точка $y = (y', y_n)$ имеет вид $(x, \sigma_V(x))$, где $x = y' \in \in \mathbf{R}^{n-1}$. Наоборот, пусть $y = (x, \sigma_V(x))$, $x \in \mathbf{R}^{n-1}$. Тогда очевидно, что $y \bar{\in} V$. Но в то же время

$$y = \lim_{k \to \infty} y^{(k)}, \tag{1.20}$$

где $y^{(k)} = (x, \sigma_V(x) + 1/k) \in V$, $k = 1, 2, \cdots$. Следовательно, $y \in \partial V$ и, тем самым, предложение полностью доказано.

§ 2. Изучение нормальных специальных открытых выпуклых конусов

2.1. Договоримся для произвольного непустого множества $E \subset \mathbf{R}^{n-1}$ использовать обозначение

$$V(E) = \{y = (y', y_n) \in \mathbf{R}^n : y_n > 0,\ y'/y_n \in E\}. \tag{2.1}$$

При этом отметим, что если множество E ограничено, то справедливо соотношение

$$\overline{V(E)} = V(\overline{E}) \cup \{0\} \Leftrightarrow \overline{V(E)} \setminus \{0\} = V(\overline{E}), \tag{2.2}$$

где черта над множеством обозначает его замыкание в соответствующем пространстве.

Заметим также, что если $E \subset \mathbf{R}^{n-1}$ — открытое выпуклое множество, содержащее начало координат $0 \in \mathbf{R}^{n-1}$, то $V(E)$ суть специальный ОВК в пространстве $\mathbf{R}^n$.

Далее, пусть V — специальный ОВК в $\mathbf{R}^n$ и положим

$$\Pi_V = \{y' \in \mathbf{R}^{n-1} : (y', 1) \in V\}. \tag{2.3}$$

Тогда нетрудно проверить, что $\Pi_V \subset \mathbf{R}^{n-1}$ — открытое выпуклое множество, содержащее начало координат $0 \in \mathbf{R}^{n-1}$, причем $V = V(\Pi_V)$.

Определение. *Специальный ОВК $V \subset \mathbf{R}^n$ назовем нормальным, если область $\Pi_V \subset \mathbf{R}^{n-1}$ ограничена.* Легко видеть, что каждый нормальный специальный ОВК является острым ОВК; обратное, конечно же, неверно. Более того, не всякий острый специальный ОВК является нормальным. Тем не менее справедливо

Предложение 2.1. *Каждый острый* ОВК $V \subset \mathbf{R}^n$ *линейно эквивалентен некоторому нормальному специальному ОВК $V_1 \subset \mathbf{R}^n$.*

Доказательство этого факта не представляет особого труда и потому опускается.

Предложение 2.2. *Специальный ОВК $V\subset\mathbb{R}^n$ является нормальным лишь при выполнении условия*

$$\sigma_V(y')>0,\ y'\in\mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть конус V нормальный; выберем произвольное $y'\in\mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$ и покажем, что $\sigma_V(y')>0$. Действительно, в противном случае мы бы имели

$$(y',\sigma)\in V,\ 0<\sigma<+\infty \tag{2.5}$$

или же

$$y'/\sigma\in\Pi_V,\ 0<\sigma<+\infty. \tag{2.6}$$

И поскольку $|y'|\neq 0$, то $|y'/\sigma|\to+\infty$ при $\sigma\downarrow 0$, что противоречит ограниченности области Π_V. Наоборот, пусть выполнено условие (2.4), но в то же время допустим, что область $\Pi_V\subset\mathbb{R}^{n-1}$ неограничена, то есть существует последовательность $\{y'_k\}_1^\infty\subset\Pi_V$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty}|y'_k|=+\infty. \tag{2.7}$$

Полагая $\zeta'_k=y'_k/|y'_k|$ $(k=1,2,\cdots)$, заметим, что последовательность $\{\zeta'_k\}_1^\infty$ принадлежит единичной сфере S_{n-1} пространства $\mathbb{R}^{n-1}$. Причем в силу компактности этой сферы мы без ограничения общности можем предположить, что

$$\lim_{k\to\infty}\zeta'_k=\zeta'_0,\ |\zeta'_0|=1. \tag{2.8}$$

Далее, из условия $y'_k\in\Pi_V$ $(k=1,2,\cdots)$, означающего, что

$$(y'_k,1)\in V\ (k=1,2,\cdots), \tag{2.9}$$

мы имеем

$$(\zeta'_k,1/|y'_k|)\in V\ (k=1,2,\cdots). \tag{2.10}$$

Следовательно, при $k=1,2,\cdots$ справедливы неравенства

$$\sigma_V(\zeta'_k)<1/|y'_k|. \tag{2.11}$$

И тогда из (2.11) с учетом (2.7), (2.8) и непрерывности функции σ_V получаем равенство $\sigma_V(\zeta'_0)=0$, что противоречит условию (2.4). Итак, предложение полностью доказано.

2.2. Всюду дальше V будет обозначать нормальный специальный ОВК в пространстве $\mathbb{R}^n$. При этом, как обычно, сопряженным конусом называется множество

$$V^*=\{y\in\mathbb{R}^n:\langle y,v\rangle\geqslant 0 \text{ при всех } v\in V\}. \tag{2.12}$$

Предложение 2.3. *Справедливо следующее равенство:*

$$\operatorname{Int}V^*=\{y\in\mathbb{R}^n:\langle y,v\rangle>0 \textit{ при всех } v\in\partial V\setminus\{0\}\}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [3], предложение 1.1 (в)), что

$$\operatorname{Int}V^*=\{y\in\mathbb{R}^n:\langle y,v\rangle>0 \text{ при всех } v\in\overline{V}\setminus\{0\}\}. \tag{2.14}$$

Поскольку $\partial V \subset \overline{V}$, то нам достаточно установить следующее: если $y \in R^n$ и $<y, v> > 0$ при всех $v \in \partial V \setminus \{0\}$, то $<y, v> > 0$ при всех $v \in V \setminus \{0\}$. Для этого прежде всего вспомним, что $V = V(\Pi_V)$, причем, поскольку область Π_V ограничена, в силу (2.2) имеем

$$\overline{V} \setminus \{0\} = V(\overline{\Pi}_V), \ \partial V \setminus \{0\} = V(\partial \Pi_V). \tag{2.15}$$

Следовательно, наша задача сводится к следующей: показать, что если $y \in R^n$ и $<y, v> > 0$ при всех $v = (v', 1)$, $v' \in \partial \Pi_V$, то $<y, v> > 0$ при всех $v = (v', 1)$, $v' \in \overline{\Pi}_V$. Итак, пусть $v = (v', 1)$, $v' \in \overline{\Pi}_V$, тогда есть такие $v_1', v_2' \in \partial \Pi_V$, что v' принадлежит отрезку $[v_1', v_2']$, то есть

$$v' = \alpha \cdot v_1' + (1 - \alpha) \cdot v_2', \ \alpha \in [0, 1]. \tag{2.16}$$

Полагая затем $v_1 = (v_1', 1)$, $v_2 = (v_2', 1)$, мы будем иметь

$$v = \alpha \cdot v_1 + (1 - \alpha) \cdot v_2, \ \alpha \in [0, 1], \tag{2.17}$$

причем

$$<y, v_1> > 0, \ <y, v_2> > 0. \tag{2.18}$$

Сопоставляя (2.17) с (2.18), мы получаем, что $<y, v> > 0$, и этим доказательство завершается.

На основании соотношения (2.13) устанавливается

Предложение 2.4. *Пусть $a \in R^{n-1}$, тогда $\tilde{a} = (a, 1) \in \operatorname{Int} V^*$ лишь при выполнении условия*

$$\min_{\zeta \in S_{n-1}} \{\sigma_V(\zeta) + <\zeta, a>\} > 0. \tag{2.19}$$

Доказательство. Если $\tilde{a} = (a, 1) \in \operatorname{Int} V^*$, то в силу предложения 2.3 $<\tilde{a}, v> > 0$ при всех $v \in \partial V \setminus \{0\}$. А с учетом предложения 1.4 мы имеем

$$<\tilde{a}, v> > 0, \ v = (x, \sigma_V(x)), \ x \in R^{n-1} \setminus \{0\}, \tag{2.20}$$

или же

$$<a, x> + \sigma_V(x) > 0, \ x \in R^{n-1} \setminus \{0\}. \tag{2.21}$$

Поскольку $S_{n-1} \subset R^{n-1} \setminus \{0\}$, то

$$\sigma_V(\zeta) + <a, \zeta> > 0, \ \zeta \in S_{n-1}. \tag{2.22}$$

Наконец, в силу непрерывности функции σ_V и компактности единичной сферы S_{n-1} из (2.22) получаем

$$\min_{\zeta \in S_{n-1}} \{\sigma_V(\zeta) + <\zeta, a>\} > 0. \tag{2.23}$$

Пусть теперь для некоторого $a \in R^{n-1}$ выполнено условие (2.19), покажем, что $\tilde{a} = (a, 1) \in \operatorname{Int} V^*$. Для этого необходимо показать, что $<\tilde{a}, v> > 0$ при всех $v \in \partial V \setminus \{0\}$. Действительно, пусть $v = (x, \sigma_V(x)) \in \partial V \setminus \{0\}$, где $x \in R^{n-1} \setminus \{0\}$.

Тогда имеем

$$\langle \tilde{a}, v\rangle = \langle a, x\rangle + \sigma_V(x) = |x|\cdot\langle a, x/|x|\rangle + |x|\cdot\sigma_V(x/|x|) =$$
$$= |x|\cdot\{\langle a, x/|x|\rangle + \sigma_V(x/|x|)\} = |x|\cdot\{\langle a, \zeta\rangle + \sigma_V(\zeta)\} > 0, \quad (2.24)$$

где $\zeta = x/|x| \in S_{n-1}$. Таким образом, предложение 2.4 доказано.

Заметим (и это нетрудно проверить), что если V (пусть даже острый) — специальный ОВК, то $\operatorname{Int} V^*$ может уже не быть специальным ОВК. В то же время справедлива

Теорема 2.1. *Пусть V — нормальный специальный ОВК в $\mathbf{R}^n$ и $U = \operatorname{Int} V^*$. Тогда:*

(а) *U — нормальный специальный ОВК в $\mathbf{R}^n$;*

(б) $\Pi_U = \{a \in \mathbf{R}^{n-1} : \sigma_V(\zeta) + \langle \zeta, a\rangle > 0, \ \forall \zeta \in S_{n-1}\}$;

(в) *При любом $t \in \mathbf{R}^{n-1}$ справедливо равенство*

$$\sigma_U(t) = \max_{\zeta\in S_{n-1}}\left\{-\frac{\langle\zeta, t\rangle}{\sigma_V(\zeta)}\right\} = -\min_{\zeta\in S_{n-1}}\left\{\frac{\langle\zeta, t\rangle}{\sigma_V(\zeta)}\right\}. \quad (2.25)$$

Доказательство. Очевидно, что U является, по крайней мере, острым ОВК в $\mathbf{R}^n$. Кроме того, если $y = (y', y_n) \in U$, то $\langle y, v\rangle > 0$ при $v \in \overline{V}\setminus\{0\}$, поэтому, в частности, $\langle y, e_n\rangle = y_n > 0$. Следовательно

$$U \subset \{y = (y', y_n) \in \mathbf{R}^n : y_n > 0\}. \quad (2.26)$$

Затем проверим, что $e_n \in U$, то есть

$$\langle e_n, v\rangle > 0, \forall v = (x, \sigma_V(x)), \ x \in \mathbf{R}^{n-1}\setminus\{0\}. \quad (2.27)$$

Действительно, $\langle e_n, v\rangle = \sigma_V(x) > 0$ (в силу нормальности V). Итак, U является специальным ОВК, и при этом и... ложения 2.4) следует, что

$$\Pi_U = \{a \in \mathbf{R}^{n-1} : \sigma_V(\zeta) + \langle\zeta, a\rangle > 0, \ \forall \zeta \in S_{n-1}\}.$$

Для установления нормальности конуса U мы должны показать ограниченность области $\Pi_U \subset \mathbf{R}^{n-1}$. Допустив противное, приходим к существованию последовательности $\{a^{(k)}\}_1^\infty \subset \Pi_U$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} |a^{(k)}| = +\infty$. Не ограничивая общности, можно предположить также, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a^{(k)}}{|a^{(k)}|} = \zeta_0 \in S_{n-1}. \quad (2.28)$$

Зафиксируем затем произвольное $\zeta \in S_{n-1}$. Поскольку $a^{(k)} \in \Pi_U$ $(k = 1, 2, \cdots)$, то

$$\sigma_V(\zeta) + \langle\zeta, a^{(k)}\rangle > 0 \quad (k = 1, 2, \cdots) \quad (2.29)$$

или же

$$\sigma_V(\zeta)/|a^{(k)}| + \langle\zeta, a^{(k)}/|a^{(k)}|\rangle > 0 \quad (k = 1, 2, \cdots). \quad (2.30)$$

Устремляя $k \to \infty$, получим

$$\langle\zeta, \zeta_0\rangle \geqslant 0 \quad (2.31)$$

и это для произвольного $\zeta \in S_{n-1}$, что конечно же, противоречит условию $\zeta_0 \in S_{n-1}$. Таким образом, $U = \operatorname{Int} V^*$ является нормальным специальным ОВК. Переходя к установлению формулы (2.25), с самого начала предположим, что $t \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, ибо случай $t=0$ тривиален. Нам предстоит доказать следующее: если $\sigma \in \mathbb{R}$, то $(t, \sigma) \in U$ лишь при условии

$$\sigma > -\frac{<\zeta, t>}{\sigma_V(\zeta)}, \ \forall \zeta \in S_{n-1}. \tag{2.32}$$

Если $(t, \sigma) \in U$, то $\sigma > 0$ и $t/\sigma \in \Pi_U$, поэтому

$$\sigma_V(\zeta) + <\zeta, t/\sigma> > 0, \ \forall \zeta \in S_{n-1}, \tag{2.33}$$

что равносильно (2.32). Если же вещественное число σ удовлетворяет условию (2.32), то оно положительно и поэтому удовлетворяет и условию (2.33), которое влечет

$$t/\sigma \in \Pi_U, \tag{2.34}$$

так что $(t, \sigma) \in U$. Таким образом, теорема 2.1 полностью доказана.

2.3. Как и выше, V будет обозначать нормальный специальный ОВК в пространстве $\mathbb{R}^n$. С каждым таким конусом можно связать две величины, положив

$$m_V = \min_{\zeta \in S_{n-1}} \sigma_V(\zeta), \ M_V = \max_{\zeta \in S_{n-1}} \sigma_V(\zeta), \tag{2.35}$$

причем очевидно, что $0 < m_V \leqslant M_V < +\infty$. По ходу заметим, что равенство $m_V = M_V$ будет иметь место лишь в том случае, когда конус V круговой, то есть функция $\sigma_V(x)$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ на самом деле зависит только от $|x|$.

Далее, введем в рассмотрение интеграл

$$I_V(a) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\sigma_V(x) - <x, a>} dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} r^{n-2} \int_{S_{n-1}} e^{-r \cdot \{\sigma_V(\zeta) + <\zeta, a>\}} d\sigma_{n-1}(\zeta) dr, \ a \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{2.36}$$

где $d\sigma_{n-1}$ обозначает поверхностную меру Лебега на сфере S_{n-1}. Некоторые свойства этого интеграла устанавливает

Предложение 2.5. *Пусть* $a_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, *тогда*

1°. *Если*

$$\min_{\zeta \in S_{n-1}} \{\sigma_V(\zeta) + <\zeta, a_0>\} > 0, \tag{2.37}$$

то интеграл $I_V(a)$ *сходится равномерно в некоторой окрестности точки* a_0.

2°. *Если*

$$\min_{\zeta \in S_{n-1}} \{\sigma_V(\zeta) + <\zeta, a_0>\} < 0, \tag{2.38}$$

то $I_V(a) \equiv +\infty$ *в некоторой окрестности точки* a_0.

Доказательство. Если выполнено условие (2.37), то существуют окрестность $W \subset \mathbf{R}^{n-1}$ точки a_0 и положительное число ε такие, что

$$\sigma_V(\zeta) + \langle \zeta, a \rangle \geqslant \varepsilon > 0, \ \forall \zeta \in S_{n-1}, \ \forall a \in W. \tag{2.39}$$

Тогда при любом $a \in \overline{W}$ справедлива оценка

$$e^{-\sigma_V(x) - \langle x, a \rangle} = e^{-|x| \cdot \{\sigma_V(x/|x|) + \langle x/|x|, a \rangle\}} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\varepsilon \cdot |x|} = \psi(x) \in L^1(\mathbf{R}^{n-1}), \tag{2.40}$$

из которой и следует утверждение 1°.

Если же точка $a_0 \in \mathbf{R}^{n-1}$ удовлетворяет условию (2.38) то существует $\zeta_0 \in S_{n-1}$, при котором

$$\sigma_V(\zeta_0) + \langle \zeta_0, a_0 \rangle < 0.$$

Тогда можно найти окрестность $W \subset \mathbf{R}^{n-1}$ точки a_0, окрестность $\Omega \subset S_{n-1}$ точки ζ_0 и положительное число ε, для которых выполняется неравенство

$$\sigma_V(\zeta) + \langle \zeta, a \rangle \leqslant -\varepsilon, \ \forall \zeta \in \Omega, \ \forall a \in W. \tag{2.41}$$

Следовательно при любом $a \in W$ имеем

$$I_V(a) = \int_0^{+\infty} r^{n-2} \int_{S_{n-1}} e^{-r \cdot \{\sigma_V(\zeta) + \langle \zeta, a \rangle\}} d\sigma_{n-1}(\zeta)\, dr \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{+\infty} r^{n-2} \int_{\Omega} e^{-r \cdot \{\sigma_V(\zeta) + \langle \zeta, a \rangle\}} d\sigma_{n-1}(\zeta)\, dr \geqslant$$

$$\geqslant \int_{\Omega} d\sigma_{n-1}(\zeta) \cdot \int_0^{+\infty} r^{n-2} \cdot e^{\varepsilon \cdot r}\, dr = +\infty, \tag{2.42}$$

и утверждение 2° также доказано.

Для дальнейшего полезно ввести в рассмотрение множество

$$A_V = \{a \in \mathbf{R}^{n-1} : I_V(a) < +\infty\}. \tag{2.43}$$

Можно показать, что множество $A_V \subset \mathbf{R}^{n-1}$ выпукло, причем имеют место включения

$$\{a \in \mathbf{R}^{n-1} : |a| < m_V\} \subset A_V \subset \{a \in \mathbf{R}^{n-1} : |a| \leqslant M_V\}. \tag{2.44}$$

Поскольку эти факты в дальнейшем не найдут особого применения, на доказательствах мы останавливаться не будем.

Предложение 2.6. *Пусть* $U = \operatorname{Int} V^*$, *тогда*:

1°. $\Pi_U = \operatorname{Int} A_V$;

2°. *Интеграл* $I_V(a)$ *сходится равномерно на компактах из* Π_U *и определяет в области* Π_U *непрерывную положительную функцию.*

Доказательство. С учетом теоремы 2.1 (б) утверждение 1 равносильно выполнению равенства

$$\operatorname{Int} A_V = \{a \in \mathbb{R}^{n-1} : \sigma_V(\zeta) + \langle \zeta, a \rangle > 0,\ \forall \zeta \in S_{n-1}\}. \tag{2.45}$$

Если для некоторого $a \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\min_{\zeta \in S_{n-1}} \{\sigma_V(\zeta) + \langle \zeta, a \rangle\} > 0, \tag{2.46}$$

то согласно предложению 2.5 (1°) интеграл I_V сходится в некоторой окрестности точки a, поэтому $a \in \operatorname{Int} A_V$. Наоборот, пусть теперь $a \in \operatorname{Int} A_V$ и убедимся в том, что условие (2.46) выполняется. С этой целью допустим противное:

$$\min_{\zeta \in S_{n-1}} \{\sigma_V(\zeta) + \langle \zeta, a \rangle\} \leqslant 0. \tag{2.47}$$

Но тогда в (2.47) не может иметь места строгое неравенство, ибо в силу предложения 2.5 (2°) мы получаем $I_V(a) = +\infty$, что несовместимо с исходным предположением $a \in \operatorname{Int} A_V$. Следовательно, наше допущение (2.47) принимает вид

$$\min_{\zeta \in S_{n-1}} \{\sigma_V(\zeta) + \langle \zeta, a \rangle\} = 0, \tag{2.48}$$

а значит, существует $\zeta_0 \in S_{n-1}$, при котором

$$\sigma_V(\zeta) + \langle \zeta_0, a \rangle = 0. \tag{2.49}$$

Полагая далее $a_\delta = a - \delta \cdot \zeta_0$, $\delta \in (0, +\infty)$, будем иметь

$$\sigma_V(\zeta_0 + \langle \zeta_0, a_\delta \rangle = -\delta < 0. \tag{2.50}$$

Следовательно

$$\min_{\zeta \in S_{n-1}} \{\sigma_V(\zeta) + \langle \zeta, a_\delta \rangle\} < 0,\ \delta \in (0, +\infty), \tag{2.51}$$

и потому, в силу предложения 2.5. (2°)

$$a_\delta \overline{\in} A_V,\ \delta \in (0, +\infty). \tag{2.52}$$

Остается заметить, что $a_\delta \to a$, $\delta \to 0$, и это противоречит предположению $a \in \operatorname{Int} A_V$. Итак, утверждение 1° доказано. Далее, согласно предложению 2.5 (1°) интеграл I_V сходится равномерно в окрестности каждой точки области Π_V. Используя лемму Гейне—Бореля, заключаем, что интеграл I_V равномерно сходится на компактах из Π_U, и тем самым, определяет в области Π_V непрерывную положительную функцию.

§ 3. Основные интегральные представления

3.1. Пусть V — ОВК в $\mathbb{R}^n$ и $\rho(y)$, $y \in V$—суть произвольная (вообще говоря, комплекснозначная) функция. Назовем ρ однородной, если

$$\rho(\alpha \cdot y) = \alpha \cdot \rho(y),\ y \in V,\ \alpha \in (0, +\infty). \tag{3.1}$$

Приведем примеры таких функций. Если V — произвольный ОВК в $\mathbb{R}^n$ ($V \neq \mathbb{R}^n$), то $\rho_V(y)$, $y \in V$ (см. (1.5)), является однородной непрерывной положительной функцией. Если же V — специальный ОВК в $\mathbb{R}^n$, то и $\tau_V(y), y \in V$ (см. (1.13)), является однородной непрерывной положительной функцией.

Справедлива следующая

Лемма 3.1. *Пусть V — острый ОВК в $\mathbb{R}^n$, $\rho(y)$, $y \in V$ — однородная непрерывная положительная функция, $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0, +\infty)$ — непрерывная положительная функция, обладающая свойством* (B) *и $\gamma = \varphi \circ \rho$. Допустим также, что $1 < p \leqslant 2$, $q = p/(p-1)$ и $s \in \in (0, +\infty)$. Если измеримая функция $F(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяет условию вида*

$$\int_V \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |F(t)|^q \cdot e^{-q<y, t>} dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \gamma(y)\, dy < +\infty, \qquad (3.2)$$

то $F(t) = 0$ для почти всех $t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $t_0 \in \mathbb{R}^n \setminus V^*$, тогда в силу (2.12) $< t_0, \zeta_0 > < 0$ для некоторого $\zeta_0 \in V_S$, где (см. [3], пункт 1.1) V_S обозначает образ конуса V при радиальном проектировании $y \to y/|y|$ на единичную сферу $S_n \subset \mathbb{R}^n$. При этом множество $V_S \subset S_n$ открыто (относительно индуцированной топологии). Затем подберем окрестность $W \subset \mathbb{R}^n / V^*$ точки t_0, компактную окрестность $\Omega \subset V_S$ точки ζ_0 и положительное число ε такими, что

$$< t, \zeta > \leqslant -\varepsilon, \quad \forall t \in W, \ \forall \zeta \in \Omega. \qquad (3.3)$$

Причем легко видеть, что существуют положительные числа a, A, для которых

$$0 < a \leqslant \rho(\zeta) \leqslant A < +\infty, \ \zeta \in \Omega. \qquad (3.4)$$

Далее, поскольку функция φ обладает свойством (B), то существует $R \in (0, +\infty)$, такое, что

$$\varphi(\tau) \geqslant \exp\{-ps\varepsilon/2A \cdot \tau\}, \ \tau \geqslant R > 0. \qquad (3.5)$$

На основании всего этого приходим к следующей цепочке неравенств:

$$+\infty > \int_V \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |F(t)|^q \cdot e^{-q<y, t>} dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \gamma(y)\, dy \geqslant$$

$$\geqslant \int_V \left\{ \int_W |F(t)|^q \cdot e^{-q<y, t>} dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \varphi(\rho(y))\, dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} r^{n-1} \int_{V_S} \left\{ \int_W |F(t)|^q \cdot e^{-q<r\cdot\zeta, t>} dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \varphi(\rho(r\cdot\zeta))\, d\sigma_n(\zeta)\, dr \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{+\infty} r^{n-1} \int_{\Omega} \left\{ \int_W |F(t)|^q \cdot e^{-qr<\zeta, t>} dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \varphi(r \cdot \rho(\zeta))\, d\sigma_n(\zeta)\, dr \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{+\infty} r^{n-1} \cdot e^{qr\varepsilon\cdot s(p-1)} \int_\Omega \varphi(r\cdot\rho(\zeta))\, d\sigma_n(\zeta)\, dr \cdot \left\{\int_W |F(t)|^q\, dt\right\}^{s(p-1)} \geqslant$$

$$\geqslant \left\{\int_W |F(t)|^q\, dt\right\}^{s(p-1)} \cdot \int_{R/a}^{+\infty} r^{n-1} \cdot e^{p\varepsilon s\cdot r} \int_\Omega \varphi(r\cdot\rho(\zeta))\, d\sigma_n(\zeta)\, dr \geqslant$$

$$\geqslant \left\{\int_W |F(t)|^q\, dt\right\}^{s(p-1)} \cdot \int_{R/a}^{+\infty} r^{n-1} \cdot e^{p\varepsilon s\cdot r} \int_\Omega e^{-p\varepsilon s/2A\cdot r\cdot\rho(\zeta)}\, d\sigma_n(\zeta)\, dr \geqslant$$

$$\geqslant \left\{\int_W |F(t)|^q\, dt\right\}^{s(p-1)} \cdot \int_{R/a}^{+\infty} r^{n-1} \cdot e^{p\varepsilon s/2\cdot r}\, dr \cdot \int_\Omega d\sigma_n(\zeta). \tag{3.6}$$

Но поскольку

$$\int_{R/a}^{+\infty} r^{n-1} \cdot e^{p\varepsilon s/2\cdot r}\, dr = +\infty,\ 0 < \int_\Omega d\sigma_n(\zeta) < +\infty, \tag{3.7}$$

то из (3.6) получаем, что

$$\left\{\int_W |F(t)|^q\, dt\right\}^{s(p-1)} = 0, \tag{3.8}$$

поэтому $F(t) \underset{\text{п. в.}}{=} 0$ в W. Таким образом, для любой точки $t_0 \in \mathbb{R}^n \setminus V^*$ существует такая ее окрестность $W \subset \mathbb{R}^n \setminus V^*$, в которой $F(t) \underset{\text{п. в.}}{=} 0$. Следовательно, $F(t) = 0$ для п. в. $t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*$, и лемма полностью доказана.

Точно такими же рассуждениями может быть доказана

Лемма 3.2. *Пусть* V — *острый ОВК в* $\mathbb{R}^n$, $\rho(y)$, $y \in V$ — *однородная непрерывная положительная функция*, $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0, +\infty)$ — *непрерывная положительная функция, обладающая свойством* (B) *и* $\gamma = \varphi\circ\rho$. *Тогда*

$$\overset{*}{\gamma}_V(t) = +\infty,\ t \in \mathbb{R}^n / V^*. \tag{3.9}$$

На доказателььтве мы останавливаться не будем.

Комбинируя леммы 3.1 и 3.2 с теоремой 2 работы [14] или теоремами 2.3, 2.5 диссертации [13] (см. также [3], § 0, теорема I]), получаем следующий важный результат.

Теорема 3.1. *Пусть* V — *острый ОВК в* $\mathbb{R}^n$, $\rho(y)$, $y \in V$ — *однородная непрерывная положительная функция*, $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0, +\infty)$ — *нерперывная положительная функция, обладающая свойством* (B), *и* $\gamma = \varphi\circ\rho$. *Допустим также, что* $1 \leqslant p < 2$ *и* $s \in (0, +\infty)$. *Тогда каждая функция* $f \in H^p_{s,\gamma}(T_V)$ *допускает интегральное представление вида*

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\cdot\int\limits_{V^*}F(t)\cdot e^{i<z,\,t>}\,dt,\quad z\in T_V,\tag{3.10}$$

где

1°. *При* $p=1$ *функция* $F(t)$, $t\in\mathbb{R}^n$ *непрерывна и удовлетворяет условиям:*

$$F(t)\equiv 0,\quad t\in\mathbb{R}^n\setminus V^*,\tag{3.11}$$

$$\sup_{t\in V^*}\{|F(t)|\cdot\gamma_V^*(s\cdot t)\}\leqslant\frac{M^1_{s,\gamma}(f)}{(2\pi)^{n/2\cdot s}}<+\infty.\tag{3.12}$$

2°. *При* $1<p\leqslant 2$ *функция* $F(t)$, $t\in V^*$, *измерима и удовлетворяет условию* ($q=p/(p-1)$)

$$\int\limits_V\left\{\int\limits_{V^*}|F(t)|^q\cdot e^{-q<y,\,t>}dt\right\}^{s(p-1)}\cdot\gamma(y)\,dy\leqslant\frac{M^p_{s,\gamma}(f)}{(2\pi)^{n/2\cdot s(2-p)}}<+\infty.\tag{3.13}$$

При этом для почти всех $y\in V$ *справедливо равенство* ($f_y(x)\equiv f(x+iy)$, $y\in V$, $x\in\mathbb{R}^n$)

$$\hat f_y(t)=\begin{cases}0, & t\in\mathbb{R}^n\setminus V^*,\\ F(t)\cdot e^{-<y,\,t>}, & t\in V^*.\end{cases}\tag{3.14}$$

Кроме того, при $p=2$ *интегральное представление* (3.10) *класса* $H^p_{s,\gamma}(T_V)$ *является параметрическим. Более точно, класс* $H^2_{s,\gamma}(T_V)$ *совпадает с множеством функций* $f(z)$ *вида* (3.10), *где* $F(t)$, $t\in V^*$ — *произвольная измеримая функция, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_V\left\{\int\limits_{V^*}|F(t)|^2\cdot e^{-2<y,\,t>}\,dt\right\}^s\cdot\gamma(y)\,dy<+\infty,\tag{3.15}$$

причем выполняется равенство Парсеваля

$$M^2_{s,\gamma}(f)=\int\limits_V\left\{\int\limits_{V^*}|F(t)|^2\cdot e^{-2<y,\,t>}\,dt\right\}^s\cdot\gamma(y)\,dy.\tag{3.16}$$

3.2. Всюду дальше предполагается, что V — нормальный специальный ОВК в $\mathbb{R}^n$ ($n>1$), $\varphi(\tau)$, $\tau\in(0,+\infty)$ — некоторая непрерывная положительная функция и $\gamma=\varphi\circ\tau_V$. При этом очевидно, что и функция $\gamma(y)=\varphi(\tau_V(y))$, $y\in V$, непрерывна и положительна. Для дальнейшего было бы желательно иметь более явное выражение для функции

$$\gamma_V^*(t)=\int\limits_V e^{-<t,\,y>}\cdot\gamma(y)\,dy,\quad t\in\mathbb{R}^n.\tag{3.17}$$

И оказывается, что независимо от каких бы то ни было свойств исходной непрерывной положительной функции φ имеет место

Предложение 3.1. *Справедлива формула*

$$\gamma_V^*(t)=\begin{cases}+\infty,\ t\in\mathbb{R}^n\setminus V^*,\\ \dfrac{\varphi^*(t_n)}{(t_n)^{n-1}}\cdot I_V(t'/t_n),\ t=(t',t_n)\in\operatorname{Int}V^*.\end{cases}\tag{3.18}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $t=(t',t_n)\in\mathbb{R}^n$, тогда справедлива цепочка равенств

$$\gamma_V^*(t)=\int\limits_V e^{-\langle t,y\rangle}\cdot\varphi(\tau_V(y))\,dy=$$

$$=\int\limits_V e^{-\langle t',y'\rangle-t_n\cdot y_n}\cdot\varphi(y_n-\sigma_V(y'))\,dy'dy_n=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\langle t',y'\rangle-t_n\cdot\sigma_V(y')}\int\limits_{\sigma_V(y')}^{+\infty} e^{-t_n\cdot(y_n-\sigma_V(y'))}\times$$

$$\times\varphi(y_n-\sigma_V(y'))\,dy_n dy'=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\langle t',y'\rangle-t_n\cdot\sigma_V(y')}\int\limits_0^{+\infty} e^{-t_n\cdot\tau}\cdot\varphi(\tau)\,d\tau dy'=$$

$$=\varphi^*(t_n)\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\langle t',y'\rangle-t_n\cdot\sigma_V(y')}\,dy'.\tag{3.19}$$

Если $t_n\leqslant 0$, то

$$-t_n\cdot\sigma_V(y')\geqslant 0,\ \forall y'\in\mathbb{R}^{n-1},\tag{3.20}$$

поэтому из (3.19) получаем

$$\gamma_V^*(t)\geqslant\varphi^*(t_n)\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\langle t',y'\rangle}\,dy'=+\infty.\tag{3.21}$$

Если же $t_n>0$, то опять же из (3.19) имеем

$$\gamma_V^*(t)=\varphi^*(t_n)\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\langle t',y'\rangle-\sigma_V(t_n\cdot y')}\,dy'=$$

$$=\frac{\varphi^*(t_n)}{(t_n)^{n-1}}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\sigma_V(x)-\langle x,t'/t_n\rangle}\,dx=\frac{\varphi^*(t_n)}{(t_n)^{n-1}}\cdot I_V(t'/t_n).\tag{3.22}$$

Таким образом, мы пришли к следующему равенству:

$$\gamma_V^*(t)=\begin{cases}+\infty,\ t=(t',t_n),\ t_n\leqslant 0,\\ \dfrac{\varphi^*(t_n)}{(t_n)^{n-1}}\cdot I_V(t'/t_n),\ t=(t',t_n),\ t_n>0.\end{cases}\tag{3.23}$$

Полагая затем $U = \operatorname{Int} V^*$, в силу теоремы 2.1 (а) получим, что U — нормальный специальный ОВК в $\mathbf{R}^n$. Тогда область $\Pi_U \subset \mathbf{R}^{n-1}$ ограничена, причем $U = V(\Pi_U)$. Кроме того, поскольку $V^* = \overline{U}$, то согласно (2.2) имеем

$$V^* \setminus \{0\} = V(\overline{\Pi}_V). \tag{3.24}$$

Следовательно, если $t = (t', t_n) \in \mathbf{R}^n$ и $t_n > 0$, то $t \in \mathbf{R}^n \setminus V^*$ лишь при условии, что $t'/t_n \overline{\in} \overline{\Pi}_U$, и $t \in \operatorname{Int} V^*$ лишь при условии, что $t'/t_n \in \Pi_U$. После этого остается заметить, что формула (3.18) будет следовать из (3.23), как только мы установим следующий факт: если $t = (t', t_n) \in \mathbf{R}^n \setminus V^*$ и $t_n > 0$, то $\gamma_V^*(t) = +\infty$. А это действительно так, ибо тогда $t'/t_n \overline{\in} \overline{\Pi}_U$, причем в силу предложения 2.6 (1°) и выпуклости множества A_V

$$\overline{\Pi}_U = \overline{A}_V, \tag{3.25}$$

так что $t'/t_n \overline{\in} \overline{A}_V$. Следовательно, $I_V(t'/t_n) = +\infty$, а значит $\gamma_V^*(t) = +\infty$, что и завершает доказательство.

Далее, нас будет интересовать следующий вопрос: в какой мере свойства функции $\gamma = \varphi \circ \sigma_V$ зависят от свойств функции φ?

Предложение 3.2. *Если функция* $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0, +\infty)$, *обладает свойством* (Д), *то и функция* $\gamma(y)$, $y \in V$ *обладает этим свойством.*

Доказательство. Нам надо проверить, что при любом $R \in (0, +\infty)$, $\gamma \in L^1(V_R)$, где

$$V_R = \{y \in V : |y| < R\}. \tag{3.26}$$

Для этого рассмотрим множество

$$E(R) = \{y' \in \mathbf{R}^{n-1} : \sigma_V(y') < R\} \tag{3.27}$$

и заметим, что оно ограничено, а точнее

$$E(R) \subset \{y' \in \mathbf{R}^{n-1} : |y'| < R/m_V\}. \tag{3.28}$$

Следовательно, имеем

$$\int_{V_R} \gamma(y)\, dy = \int_{V_R} \varphi(y_n - \sigma_V(y'))\, dy'dy_n \leqslant \int_{\substack{y \in V \\ 0 < y_n < R}} \varphi(y_n - \sigma_V(y'))\, dy'dy_n \leqslant$$

$$\leqslant \int_{E(R)} dy' \int_{\sigma_V(y')}^{R} \varphi(y_n - \sigma_V(y'))\, dy_n = \int_{E(R)} dy' \int_0^{R - \sigma_V(y')} \varphi(\tau)\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^R \varphi(\tau)\, d\tau \cdot \int_{E(R)} dy' < +\infty, \tag{3.29}$$

и предложение 3.2 доказано.

Справедливо также

Предложение 3.3. *Пусть функция* $\varphi(\tau)$, $\tau\in(0, +\infty)$, *обладает свойствами* (Б) *и* (Д), *тогда*

1°. *Функция* $\gamma_V^*(t)$ *непрерывна в конусе* $\operatorname{Int} V^*$ *и при этом*

$$0<\gamma_V^*(t)<+\infty,\ t\in\operatorname{Int} V^*. \tag{3.30}$$

2°. *Если* $a\in V$ *и* $\delta\in(0, +\infty)$, $\alpha\in[0, +\infty)$, *то*

$$\eta(t)\equiv\frac{e^{-<a,t>}}{[\gamma_V^*(\delta\cdot t)]^{\alpha}}\in L^p(\operatorname{Int} V^*) \tag{3.31}$$

при всех $0<p<\infty$.

Доказательство. Комбинируя предложения 3.1, 2.6 (2°) и [3, предложение 1.2 (б) при $n=1$], сразу же получаем утверждение 1°. Что же касается утверждения 2°, то оно является следствием предложения 3.2 и [3, лемма 3.2].

3.3. Пусть, как и выше, V обозначает нормальный специальный ОВК в пространстве R^n ($n>1$). Допустим также, что $\varphi(\tau)$, $\tau\in(0, +\infty)$ — непрерывная положительная функция, обладающая свойствами (А) и (Д), и $\gamma=\varphi\circ\tau_V$. В этих предположениях рассмотрим функцию

$$\Phi(z, w)=\int\limits_{\operatorname{Int} V^*}\frac{e^{i<z-\overline{w},t>}}{\gamma_V^*(2\cdot t)}dt=2^{n-1}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{\Pi_U}\frac{da}{I_V(a)}\int\limits_0^{+\infty}\frac{r^{2n-2}}{\varphi^*(2r)}e^{ir<z-\overline{w},(a,1)>}dr,\ z, w\in T_V. \tag{3.32}$$

Кроме того, для любых $z\in T_V$, $v\in V$ положим

$$R_{z,v}(t)=\begin{cases}0,\ t\in\mathrm{R}^n\setminus V^*,\\ (2\pi)^{n/2}\cdot\dfrac{e^{i<z+iv,t>}}{\gamma_V^*(2\cdot t)},\ t\in\operatorname{Int} V^*.\end{cases} \tag{3.33}$$

На основании предложения 3.3 (2°) и [3, лемма 3.1] без особого труда устанавливается

Лемма 3.3. а) *Функция* $\Phi(z, w)$, *задаваемая формулой* (3.32), *определена при всех* $z, w\in T_V$ *и является голоморфной относительно переменной* z *и антиголоморфной относительно переменной* w. (б) *Если* $z\in T_V$, $v\in V$ *то* $R_{z,v}(t)\in L^p(\mathrm{R}^n)$ *при всех* $0<p\leqslant\infty$ *и при этом ядро* $\Phi(z, u+iv)$, *как функция от* $u\in\mathrm{R}^n$, *является преобразованием Фурье функции* $R_{v,v}(t)$.

Далее, справедлив следующий основной результат.

Теорема 3.2. *Пусть* V — *нормальный специальный ОВК в* R^n, $\varphi(\tau)$, $\tau\in(0, +\infty)$ — *непрерывная положительная функция, обладающая свойствами* (А) *и* (Д), $\gamma=\varphi\circ\tau_V$ *и ядро* $\Phi(z, w)$ *определено по формуле* (3.32). *Допустим также, что* $1\leqslant p\leqslant 2$ *и положительное число* s *удовлетворяет одному из следующих условий:*

а) $1/p \leqslant s \leqslant 2/p$;

б) $1/p \leqslant s \leqslant 1/(p-1)$, *но при этом функция* φ *обладает дополнительным свойством* (E).

Тогда каждая функция $f \in H^p_{s,\gamma}(T_V)$ *допускает интегральное представление вида*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int\limits_{T_V} f(w) \cdot \Phi(z, w) \cdot \gamma(v)\, du dv, \quad z \in T_V, \quad (w = u + iv) \tag{3.34}$$

причем интеграл справа абсолютно сходится при каждом $z \in T_V$.

Доказательство. Ход рассуждений будет приблизительно таким же, что и при доказательстве теоремы 3.1 работы [3]. Поэтому мы остановимся лишь на узловых моментах, опуская при этом некоторые подробности.

Итак, пусть $f \in H^p_{s,\gamma}(T_V)$, тогда по теореме 3.1 справедливо интегральное представление вида

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int\limits_{V^*} F(t) \cdot e^{i<z,t>}\, dt, \quad z \in T_V, \tag{3.35}$$

где при $p = 1$ функция $F(t)$, $t \in \mathbf{R}^n$, непрерывна и удовлетворяет условиям (3.11), (3.12), а при $1 < p \leqslant 2$ функция $F(t)$, $t \in V^*$, измерима и удовлетворяет условию (3.13). Кроме того, для почти всех $v \in V$ имеет место равенство

$$\hat{f}_v(t) = \begin{cases} F(t) \cdot e^{-<v,t>}, & t \in V^*, \\ 0, & t \in \mathbf{R}^n \setminus V^*. \end{cases} \tag{3.36}$$

Зафиксируем затем произвольное $z = x + iy \in T_V$ и положим

$$I(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int\limits_{T_V} f(w) \cdot \Phi(z, w) \cdot \gamma(v)\, du dv \quad (w = u + iv). \tag{3.37}$$

Если интеграл $I(z)$ абсолютно сходится, то

$$I(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int\limits_V \gamma(v) \int\limits_{\mathbf{R}^n} f_v(u) \cdot \Phi(z, u + iv)\, du dv =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int\limits_V \gamma(v) \int\limits_{\mathbf{R}^n} f_v(u) \cdot \hat{R}_{z,v}(u)\, du dv =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int\limits_V \gamma(v) \int\limits_{\mathbf{R}^n} \hat{f}_v(t) \cdot R_{z,v}(t)\, dt dv =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int\limits_V \gamma(v) \int\limits_{V^*} F(t) \cdot e^{-<v,t>} \cdot \frac{e^{i<z+iv,t>}}{\gamma^*_V(2 \cdot t)}\, dt dv =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/1}} \cdot \int_{V^*} \frac{F(t)\cdot e^{i<z,t>}}{\gamma_V^*(2\cdot t)} \int_V e^{-2<v,t>} \cdot \gamma(v)\, dv dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/1}} \cdot \int_{V^*} F(t)\cdot e^{i<z,t>}\, dt = f(z). \tag{3.38}$$

Остается убедиться в абсолютной сходимости интеграла $I(z)$, то есть показать, что

$$\tilde{I}(z) = \int_V \gamma(v) \int_{\mathbb{R}^n} |f_v(u)| \cdot |\Phi(z, u+iv)|\, du dv < +\infty. \tag{3.39}$$

Для этого введем обозначения

$$\tilde{f}(v) = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f_v(u)|^p du \Big)^{1/p}, \quad v \in V; \tag{3.40}$$

$$\tilde{R}(v) = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |R_{z,v}(t)|^p dt \Big)^{1/p} =$$

$$= (2\pi)^{n/2} \cdot \Big(\int_{V^*} \frac{e^{-p<y+v,t>}}{[\gamma_V^*(2\cdot t)]^p} dt \Big)^{1/p}, \quad v \in V. \tag{3.41}$$

Тогда на основании интегрального неравенства Гельдера, леммы 3.3 (б) и теоремы Хаусдорфа—Юнга получаем

$$\tilde{I}(z) \leqslant \text{const} \cdot J, \quad J = \int_V \tilde{f}(v) \cdot \tilde{R}(v) \cdot \gamma(v)\, dv. \tag{3.42}$$

Нам достаточно показать, что $J < +\infty$, при этом в силу условия $f \in H^p_{s,\gamma}(T_V)$ в нашем распоряжении имеется неравенство

$$\int_V [\tilde{f}(v)]^{ps} \cdot \gamma(v)\, dv < +\infty. \tag{3.43}$$

Введем далее положительную меру

$$d\mu(t) = \frac{e^{-p<y,t>}}{[\gamma_V^*(2\cdot t)]^p} dt, \quad t \in V^*, \tag{3.44}$$

полная масса μ_0 которой конечна в силу предложения 3.3 (2°). После этого (3.41) может быть записано следующим образом:

$$[\tilde{R}(v)]^p = \text{const} \cdot \int_{V^*} e^{-p<v,t>} d\mu(t), \quad v \in V, \tag{3.45}$$

откуда, в частности, получим

$$\sup_{v \in V} [\tilde{R}(v)] < +\infty. \tag{3.46}$$

Если $s = 1/p$, то из (3.43) и (3.46) легко следует, что $J < +\infty$. Если же $s > 1/p$, то подберем число $r \in (1, +\infty)$ таким, чтобы $1/r + 1/ps = 1$.

И тогда в силу интегрального неравенства Гельдера и соотношения (3.43) задача сводится к установлению конечности интеграла

$$J_1 = \int_V [\tilde{R}(v)]^r \cdot \gamma(v)\, dv. \tag{3.47}$$

Поскольку $r/p \geqslant 1$, то применив к (3.45) интегральное неравенство Йенсена, получим

$$[\tilde{R}(v)]^r \leqslant \mathrm{const} \cdot (\mu_0)^{r/p-1} \cdot \int_{V^*} e^{-r<v,t>}\, d\mu(t),\ v \in V. \tag{3.48}$$

Следовательно

$$J_1 \leqslant \mathrm{const} \cdot \int_V \gamma(v) \int_{V^*} e^{-r<v,t>} d\mu(t)\, dv = \mathrm{const} \times$$

$$\times \int_{\mathrm{Int}\, V^*} \gamma_V^*(r \cdot t)\, d\mu(t) = \mathrm{const} \cdot \int_{\mathrm{Int}\, V^*} \frac{e^{-p<y,t>} \cdot \gamma_V^*(r \cdot t)}{[\gamma_V^*(2 \cdot t)]^p}\, dt. \tag{3.49}$$

Затем учтем, что согласно предложению 3.1 при $t = (t', t_n) \in \mathrm{Int}\, V^*$ справедливы равенства

$$\gamma_V^*(r \cdot t) = \frac{\varphi^*(r \cdot t_n)}{(r \cdot t_n)^{n-1}} \cdot I_V(t'/t_n), \tag{3.50}$$

$$\gamma_V^*(2 \cdot t) = \frac{\varphi^*(2 \cdot t_n)}{(2 \cdot t_n)^{n-1}} \cdot I_V(t'/t_n). \tag{3.51}$$

Кроме того, имеем неравенство

$$\varphi^*(r \cdot t_n) \leqslant \mathrm{const} \cdot \varphi^*(2 \cdot t_n)\ \ t_n \geqslant 0, \tag{3.52}$$

которое (см. [3, предложение 1.2 (г, д)]) в случае (а) выполняется в силу того, что тогда $r \geqslant 2$, а в случае (б) — ввиду того, что φ обладает свойством (Е). Комбинируя (3.50)—(3.52), получим

$$\gamma_V^*(r \cdot t) \leqslant \mathrm{const} \cdot \gamma_V^*(2 \cdot t),\ t \in \mathrm{Int}\, V^*. \tag{3.53}$$

Принимая во внимание (3.49), приходим к неравенству:

$$J_1 < \mathrm{const} \cdot \int_{\mathrm{Int}\, V^*} \frac{e^{-p<y,t>}}{[\gamma_V^*(2 \cdot t)]^{p-1}}\, dt. \tag{3.54}$$

Наконец, из (3.54) на основании предложения 3.3 (2°) получаем, что $J_1 < +\infty$ и, тем самым, теорема 3.2 полностью доказана.

3.4. Теперь обсудим один важный частный случай теоремы 3.2. Пусть опять V — нормальный специальный ОВК в $\mathbb{R}^n$, положим

$$\varphi(\tau) \equiv \tau^\alpha,\ \tau \in (0, +\infty),\ \alpha > -1. \tag{3.55}$$

Легко проверяется, что функция φ обладает как свойствами (А), (Д), так и свойством (Е). Кроме того, справедлива формула

$$\varphi^*(t_n) = \Gamma(\alpha+1)/(t_n)^{\alpha+1},\ t_n > 0. \tag{3.56}$$

Поэтому, полагая

$$\gamma(y)=\varphi(\tau_V(y))\equiv[\tau_V(y)]^{\alpha},\ y\in V, \tag{3.57}$$

согласно предложению 3.1 имеем

$$\gamma_V^{*}(t)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(t_n)^{n+\alpha}}\cdot I_V(t'/t_n),\ t=(t',t_n)\in \operatorname{Int} V^{*}. \tag{3.58}$$

При этом формула (3.32) принимает вид

$$\Phi(z,w)=\frac{2^{n+\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\cdot\int\limits_{\operatorname{Int} V^{*}}\frac{e^{i\langle z-\overline{w},t\rangle}}{I_V(t'/t_n)}\cdot(t_n)^{n+\alpha}\,dt=$$

$$=2^{n+\alpha}\cdot\frac{\Gamma(2n+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_{\Pi_U}\frac{da}{I_V(a)}\cdot\frac{1}{\langle i(\overline{w}-z),(a,1)\rangle^{2n+\alpha}}. \tag{3.59}$$

С учетом сказанного из теоремы 3.2 вытекает

Теорема 3.3. *Пусть V — нормальный специальный ОВК в $\mathbf{R}^n$, $\alpha>-1$ и ядро $\Phi(z,w)$ определено по формуле* (3.59). *Допустим также, что $1\leqslant p\leqslant 2$ и $1/p\leqslant s\leqslant 1/(p-1)$. Тогда каждая голоморфная в трубчатой области T_V функция $f(z)\equiv f(x+iy)$, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_{V}\left\{\int\limits_{\mathbf{R}^n}|f(x+iy)|^p\,dx\right\}^{s}\cdot[\tau_V(y)]^{\alpha}\,dy<+\infty, \tag{3.60}$$

допускает интегральное представление вида

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi)^n}\cdot\int\limits_{T_V}f(w)\cdot\Phi(z,w)\cdot[\tau_V(v)]^{\alpha}\,du\,dv,\ z\in T_V\ (w=u+iv), \tag{3.61}$$

причем интеграл справа абсолютно сходится при всех $z\in T_V$.

Замечание. Комбинируя предложения 1.3, 2.1 и теорему 3.4, можно получить аналогичные интегральные представления для голоморфных в трубчатых областях $T_V\subset\mathbf{C}^n$ функций f, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{V}\left\{\int\limits_{\mathbf{R}^n}|f(x+iy)|^p\,dx\right\}^{p}\cdot[\tilde{\rho}_V(y)]^{\alpha}\,dy<+\infty, \tag{3.62}$$

где V — острый ОВК в $\mathbf{R}^n$, $\alpha>-1$, $1\leqslant p\leqslant 2$ и $1/p\leqslant s<1/(p-1)$. На этом мы останавливаться не будем; отметим лишь, что пространства голоморфных функций, удовлетворяющих условиям типа (3.62), рассматривались и ранее (см. [16]), но в другой связи.

Институт математики
АН Армении

Поступила 4.IV.1991

Ա. Հ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ. Ռադիալ խողովակաձև տիրույթներում հոլոմորֆ ֆունկցիաների ինտեգրալ ներկայացումները *(ամփոփում)*։

Սույն աշխատանքում դիտարկվում են $T_V=\{z=x+iy\in C^n : x\in R^n, y\in V\}$ *խողովակաձև տիրույթում հոլոմորֆ այն* $f(z)\equiv f(x+iy)$ *ֆունկցիաների դասերը, որոնք բավարարում են*

$$\int\limits_V\left\{\int\limits_{R^n}|f(x+iy)|^p dx\right\}^s\cdot\gamma(y)\,dy<+\infty\quad(0<p,\ s<+\infty)$$

պայմանին։ Այստեղ V-*ն* R^n-*ում հատուկ ձևով դասավորված (ուստի և նորմալ կոչվող) սուր բաց ուռուցիկ կոն է։ Բացի այդ,* $\gamma(y)$ *կշռային ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝* $\gamma(y)\equiv\varphi(\tau_V(y))$, $y\in V$, *որտեղ* $\varphi(\tau)$-*ն,* $\tau\in(0,+\infty)$, *դրական է և անընդհատ, իսկ* $\tau_V(y)$, $y\in R^n$, *ֆունկցիան կապված է* V *կոնի հետ, որոշում է այն՝* $V=\{y\in R^n : \tau_V(y)>0\}$ *է, բացի այդ* $\tau(y)\asymp \operatorname{dist}(y,\partial V)$, $y\in V$։ *Ենթադրելով, որ* $1<p<2$, *իսկ* s *պարամետրը և* φ *ֆունկցիան բավարարում են որոշակի պայմանների, աշխատանքում դիտարկվող դասերի համար հաստատվում են Պելի-Վիների տիպի ինտեգրալ ներկայացումներ և կառուցվում են վերարտադրող կորիզներ։*

A. H. KARAPETYAN. *Integral representations of holomorphic functions in tube domains over cones* (summary)

In present paper we consider the classes of functions $f(z)\equiv f(x+iy)$ holomorpic in tube domains $T_V=\{z=x+iy\in C^n: x\in R^n,\ y\in V\}$ and satisfying the condition

$$\int\limits_V\left\{\int\limits_{R^n}|f(x+iy)|^p dx\right\}^s\cdot\gamma(y)\,dy<+\infty\quad(0<p,\ s<+\infty).$$

Here V is a sharp open convex cone situated in R^n in a special way (and therefore called normal). Moreover, $\gamma(y)>0$ is a weight function of the form $\gamma(y)=\varphi(\tau_V(y))$, $y\in V$. Here $\varphi(\tau)$, $\tau\in(0,+\infty)$, is positive and continuous and the function $\tau_V(y)$, $y\in R^n$, is associated with cone V, determines it, i. e. $V=\{y\in R^n: \tau_V(y)>0\}$ and $\tau_V(y)\asymp \operatorname{dist}(y,\partial V)$, $y\in V$. For $1<p<2$ and under certain conditions on parameter s and function φ we establish Paley—Wiener type integral representations and construct reproducing kernels for the classes of holomorphic functions under consideration.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Paley, N. Wiener.* Fourier Transforms in the Complex Domain. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 19, Amer. Math. Soc. New York, 1934.
2. *Н. Винер, Р. Пэли.* Преобразование Фурье в комплексной области, М., Наука, 1964.
3. *А. О. Карапетян.* Интегральные представления весовых пространств функций голоморфных в трубчатых областях, Изв. АН Армении, Математика, 25, № 4, 1990, 315—332.
4. *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян.* Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460.
5. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Наука, 1966.
6. *S. Bochner.* Group invariance of Cauchy's formula in several variables, Ann. Math., 45. № 4, 1944, 686—707.
7. *С. Г. Гиндикин.* Анализ в однородных областях, УМН, 19, № 4, 1964, 3—92.
8. *T. G. Genchev.* Paley—Wiener type theorems for functions holomophic in a half—plane, Докл. Болг. АН, 37, 1983, 141—144.

9. *T. G. Genchev*. Integral representations for functions holomorphic in tube domains, Докл. Болг. АН, 37, 1984, 717—720.
10. *T. G. Genchev*. Paley—Wiener type theorems for functions in Bergman spaces over tube domains, J. Math. Anal. Appl., 118, № 2, 1986, 496—501.
11. *М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян*. Интегральные представления некоторых классов функций, голоморфных в полосе или в полуплоскости, ДАН СССР, 283, № 5, 1985, 1054—1057.
12. *M. M. Dzhrbashyan, V. M. Martirosyan*. Integral representations for some classes of functions holomorphic in a strip or in a halfplane, Anal. Math., 12, № 3, 1986, 191—212.
13. *А. О. Карапетян*. Некоторые вопросы интегральных представлений в многомерном комплексном анализе. Кандидатская диссертация, Ереван, 1987.
14. *А. О. Карапетян*. Интегральные представления в трубчатых областях, Изв. АН Арм.ССР, Математика, 23, № 1, 1988, 91—96.
15. *S. Saitoh*. Fourier—Laplace transform and Bergman Spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 102, № 4, 1988, 985—992.
16. *А. Э. Джрбашян, А. О. Карапетян*. Интегральные неравенства между сопряженными плюригармоническими функциями в многомерных областях, Изв. АН Арм.ССР, Математика, 23, № 3, 1988, 216—236.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 6, 1991 Математика

УДК 517.53

К. Г. КАЗАРЯН, В. М. МАРТИРОСЯН

ВОПРОСЫ БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ФАБЕРА–ДЖРБАШЯНА В ПРОСТРАНСТВАХ В. И. СМИРНОВА И ИХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ

Введение

0.1. М. М. Джрбашян [1] для произвольного ограниченного континуума Γ, содержащего более одной точки, построил системы рациональных функций. Они являются обобщениями полиномов Фабера в том смысле, что полюсы этих функций вместо бесконечности расположены на заданной последовательности точек $\{z_n\}_0^\infty \subset G^-$ (G^- — та из смежных с Γ связных компонент, которая содержит точку $z=\infty$), причем, если, в частности, $z_n=\infty$ $(n>0)$, то указанная система обращается в систему полиномов Фабера. В последующем эти рациональные функции и их модификации изучались в других работах М. М. Джрбашяна [2, 3], а также в работах Г. Ц. Тумаркина [4, 5], Г. С. Кочаряна [6, 7] и А. М. Лукацкого [8, 9]. В монографии П. К. Суетина [10] кратко изложен ряд важных свойств рациональных функций Фабера—Джрбашяна.

Для произвольного значения параметра s $(0<s\leqslant 1)$ рациональные функции Фабера—Джрбашяна $M_n^{(s)}(z)$ $(n\geqslant 0)$ строятся следующим образом. Пусть $w=\Phi(z)$ — функция, конформно отображающая G^- на область $|w|>1$ и удовлетворяющая условиям нормировки $\Phi(\infty)=\infty$, $\Phi'(\infty)>0$. Эта функция определяет внутри единичного круга последовательность точек $\alpha_n=1/\overline{\Phi(z_n)}$ $(n\geqslant 0)$. Рассмотрим систему рациональных функций Такенака—Мальмквиста [11—13, 3]

$$\varphi_0(w)=\frac{(1-|\alpha_0|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_0 w},\quad \varphi_n(w)=\frac{(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_n w}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha_k-w}{1-\bar{\alpha}_k w}\,\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\ (n\geqslant 0). \tag{0.1}$$

Для этих функций выполняется условие ортонормированности

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|w|=1}\varphi_n(w)\,\overline{\varphi_k(w)}\,|dw|=\delta_{nk} \tag{0.2}$$

(δ_{nk} — символ Кронкекера) и ряды по ним являются некоторым обобщением рядов Тейлора [11—13, 3]. При всех $n\geqslant 0$ функции $M_n^{(s)}(z)$ определяются как сумма главных частей (и постоянных слагаемых при $z_k=\infty$) в лорановском разложении функции

$$G_n^{(s)}(z)=\varphi_n[\Phi(z)]\,[\Phi'(z)]^s \tag{0.3}$$

в окрестностях всех отличных друг от друга точек $z=z_k$ $(k=0,1,\cdots,n)$.

0.2. В работах [1—3] (и в [4, 5] при $s=1/2$) исследованы вопросы разложения аналитических функций в ряд по системе $\{M_n^{(s)}(z)\}_0^\infty$ $(0 < s \leqslant 1)$ в том случае, когда Γ есть спрямляемая граница конечной односвязной жордановой области G^+ и $[\Phi'(t)]^{s-1/2} \in L_2(\Gamma)$. Установлено интегральное представление

$$M_n^{(s)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi_n[\Phi(t)][\Phi'(t)]^s}{t-z}\, dt, \quad z \in G^+$$

и введена система функций $\{\chi_n^{(s)}(z)\}_0^\infty$:

$$\chi_n^{(s)}(z) = [\Phi'(z)]^{1-s}\, [\Phi(z)]^{-1}\, \overline{\varphi}_n[1/\Phi(z)], \quad z \in G^+,$$

$(\overline{\varphi}_n(w) = \overline{\varphi_n(\overline{w})})$, которая биортогональна в $\{M_n^{(s)}(z)\}_0^\infty$ в следующем смысле:

$$\int_\Gamma M_n^{(s)}(t)\, \chi_k^{(s)}(t)\, dt = \delta_{nk}.$$

Введем классы $K_2^{(s)}(G^+)$ голоморфных в G^+ функций, представимых в G^+ в виде интеграла типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(t)}{t-z}\, dt, \quad g(t)\, [\Phi'(t)]^{1/2-s} \in L_2(\Gamma)$$

и установлено, что если

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\Phi(z_n)|^{-1}) = \infty, \tag{0.4}$$

то функция $f(z) \in K_2^{(s)}(G^+)$ допускает абсолютно и равномерно сходящееся внутри области G^+ разложение

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n M_n^{(s)}(z) \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty, \ c_n = \int_\Gamma g(t)\, \chi_n^{(s)}(t)\, dt \right). \tag{0.5}$$

Подробно исследован также случай, когда

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\Phi(z_n)|^{-1}) < \infty. \tag{0.6}$$

При условии (0.6) в работе [3] было установлено следующее представление ядра Коши:

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(s)}(z)\, \chi_n^{(s)}(t) + \frac{[\Phi'(t)]^{1-s}}{2\pi i B[\Phi(t)]} \int_\Gamma \frac{B[\Phi(\eta)]\, [\Phi'(\eta)]^s}{(\eta - z)\, [\Phi(t) - \Phi(\eta)]}\, d\eta \tag{0.7}$$

для $z \in G^+$, $t \in G^-$ и почти для всех $t \in \Gamma$ ($B(w)$ — произведение Бляшке для круга $|w| < 1$ с последовательностью нулей $\{\alpha_n\}_0^\infty$). Это привело к эффективному определению разности между функцией $f(z) \in K_2^{(s)}(G^+)$ и ее разложением в ряд по системе $\{M_n^{(s)}(z)\}_0^\infty$. Отсюда, в качестве непосредственного следствия, была выявлена полная внутренняя характеристика и структурное представление класса $\widetilde{K}_2^{(s)}(G^+)$

функций, допускающих при условии (0.6) разложение в абсолютно и равномерно сходящийся ряд вида (0.5). Установлено, что $\widetilde{K}_2^{(s)}(G^+)$ совпадает с классом функций, аналитических в отдельности в каждой из областей G^+, $G^-/\{z_n\}_0^\infty$ и являющихся в определенном смысле „аналитическими продолжениями" друг друга через общую границу Г этих областей; установлено совпадение этих классов функций, представимых внутри этих областей абсолютно и равномерно сходящимся рядом вида (0.5).

0.3. Из результатов, анонсированных Г. Ц. Тумаркиным в работах [4] (с. 15) и [5] (с. 257) можно вывести, что если конечная односвязная область G^+ ограничена спрямляемой жордановой кривой Г, которая является карлесоновской кривой (т. е. для любого круга Δ радиуса r длина $\Gamma\cap\Delta$ не превосходит $A\cdot r$, где $A\ (>0)$ — постоянная, не зависящая от r [14]), то система $\{M_n^{(1/2)}(z)\}_0^\infty$ является базисом в замыкании своей линейной оболочки в метрике $L_2(\Gamma)$ $(f(t)\in L_2(\Gamma)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\int_\Gamma |f(t)|^2\,|dt|<\infty)$. В частности, при условии (0.4) эта система является базисом в $E_2(G^+)$.

Для конечных односвязных жордановых областей G^+, ограниченных ляпуновскими кривыми, в работе Г. М. Айрапетяна [15] было установлено, что для неполных в $E_p(G^+)$ систем рациональных функций $\{(z-\omega_k)^{-1}\}_1^\infty$ с отличными друг от друга полюсами $\{\omega_k\}_1^\infty\subset G^-/\{\infty\}$, при специальных условиях на $\{\omega_k(z)\}_1^\infty$ эти системы образуют базисы в замыканаях своих линейных оболочек в метрике $L_p(\Gamma)$, $1<p<\infty$. Особо отметим, что указанные замыкания являются строгими подпространствами из $E_p(G^+)$ (т. е. не совпадают с $E_p(G^+)$).

0.4. Естественно возникает вопрос изучения базисных свойств систем Фабера—Джрбашяна при аппроксимации в топологии пространства $L_p(\Gamma)$ в общем случае $1<p<\infty$. В данной работе этот вопрос исследован для конечных односвязанных жордановых областей G^+, ограниченных карлесоновскими кривыми Г. Установлено, что при условии (0.4) система $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ является базисом (при $p=2$ — базисом Рисса) пространства В. И. Смирнова $E_p(G^+)$, и разложение функции $f(z)\in E_p(G^+)$ в ряд по системе $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ сходится к $f(z)$ (при $p=2$ — безусловно) как по метрике пространства $L_p(\Gamma)$, так и равномерно на компактах $K\subset G^+$. Если же выполнено условие (0.6), то система $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ является базисом (при $p=2$ — базисом Рисса) пространства

$$E_p(G^+;\ \{z_n\}_0^\infty)\subset E_p(G^+)$$

(определение и свойства этого пространства см. в § 4), и разложение функции $f(z)\in E_p(G^+\{z_n\}_0^\infty)$ в ряд по системе $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ сходится к $f(z)$ (при $p=2$ — безусловно) как по метрике пространства $L_p(\Gamma)$, так и равномерно на компактах $K \subset \overline{C}/\Lambda$, где Λ — замыкание множества точек последовательности $\{z_n\}_0^\infty$. Таким образом, система $\{M_n^{1/p}(z)\}_0^\infty$ всегда является базисом замыкания в метрике $L_p(\Gamma)$ своей линейной оболочки, если только Γ — карлесоновская кривая и $1<p<\infty$.

Из результатов данной работы и известных свойств смирновских кривых* (см. [16—18]), в частности, вытекает, что карлесоновская кривая является смирновской кривой.

§ 1. Предварительные сведения о классах E_p

1.1. Сначала введем некоторые обозначения. На протяжении всей данной работы через G^+ будем обозначать односвязную ограниченную областъ конечной комплексной плоскости C, граница Γ которой есть спрямляемая жорданова кривая (пробегаемая в направлении положительного обхода области $\overline{G}^+=G^-$ $(\infty \in G^-)$ — это дополнение замкнутой области $\overline{G}^+=G^+\cup\Gamma$ до расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$. Через $w=\chi(z)$ будем обозначать функцию, конформно отображающую область G^+ на круг $|w|<1$, а через $z=\omega(w)$ — обратную функцию. Наконец, пусть $w=\Phi(z)$ — функция, конформно отображающую область G^- на область $|w|>1$, нормированная условиями $\Phi(\infty)=\infty$, $\Phi'(\infty)>0$, а $z=\psi(w)$ — обратная функция.

1.2. Напомним теперь определение и приведем нужные нам свойства классов E_p В. И. Смирнова (см., напр., [19, 20]). Для любого значения параметра $p\in(0,\infty)$ классы $E_p(G^+)$ и $E_p(G^-)$ определяются следующим образом:

$$f(z)\in E_p(G^+ \Leftrightarrow f(\omega(w))(\omega'(w))^{1/p}\in H_p^+, \tag{1.1}$$

$$f(z)\in E_p(G^- \Leftrightarrow f(\psi(w))(\psi'(w))^{1/p}\in H_p^-, \tag{1.2}$$

где H_p^+ — класс Харди функций $g(w)$, голоморфных в круге $|w|<1$ и удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<r<1}\left\{\int_0^{2\pi}|g(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right\}<\infty,$$

а H_p^- — соответственно класс функций $g(w)$, голоморфных в области $|w|>1$ и таких, что

$$\sup_{1<r<\infty}\left\{\int_0^{2\pi}|g(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right\}<\infty.$$

В следующей теореме содержится эквивалентное определение классов $E_p(G^+)$ и $E_p(G^-)$ (см. [21], с. 47).

Теорема А. *Для всех классов $E_p(G^\pm)$ $(0<p<\infty)$ в области $G^\pm$ существует универсальная (т. е. общая для всех $f(z)\in E_p(G^\pm)$*

* Замкнутая спрямляемая жорданова кривая Γ, ограничивающая область G^+, называется смирновской кривой, если для $z=\omega(w)$—конформного отображения области $|w|<1$ на G^+, функция $\ln|\omega'(w)|$ представляется в $|w|<1$ интегралом Пуассона—Лебега.

последовательность областей $\{G_j^{\pm}\}_1^{\infty} \subset G^{\pm}$ *с аналитическими границами* $\partial G_j^{\pm}$, *сходящаяся к* G, *удовлетворяющая условию*

$$\sup_{j>1} \{ \text{длина } G_j^{\pm} \} < \infty, \tag{1.3}$$

и такая, что для любой голоморфной в $G^{\pm}$ *функции* $f(z)$ *имеет место*

$$f(z) \in E_p(G^{\pm}) \Leftrightarrow \sup_{j>1} \left\{ \int_{\partial G_j^{\pm}} |f(z)|^p |dz| \right\} < \infty. \tag{1.4}$$

Применив неравенство Гельдера, отсюда получаем

$$E_p(G^+) \subset E_1(G^+), \; E_p(G^-) \subset E_1(G^-), \; 1 \leqslant p < \infty. \tag{1.5}$$

Известно, что если функция $f(z) \in E_p(G^+)$ (соответственно $f(z) \in E_p(G^-)$), то она почти всюду на Γ имеет граничные значеная $f(t)$ при стремлении z к t изнутри G^+ (соответственно изнутри G^-) и что $|f(t)|^p$ суммируем на Γ (см., напр., [21], с. 73). Приведем также следующие важные результаты (см., напр., [21], с. 61—62, и [20], с, 423).

Теорема Б. *Если* $f^+(z) \in E_1(G^+)$ (*или* $f^-(z) \in E_1(G^-)$ *и* $f^-(\infty) = 0$), *то справедлива формула Коши*

$$\pm \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f^{\pm}(t)}{t-z} dt = \begin{cases} f^{\pm}(z), \; z \in G^{\pm}, \\ 0, \; z \in G^{\mp}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Теорема В. *Если* $f(z) \in E_1(G^+)$, *то имеет место теорема Коши*:

$$\int_{\Gamma} f(t)\, dt = 0. \tag{1.7}$$

Следствие 1.1. *Если* $f(z) \in E_p(G^+)$ *и* $g(z) \in E_q(G^+)$, *где* $1 < p < \infty$ *и* $1/p + 1/q = 1$, *то*

$$\int_{\Gamma} f(t)\, g(t)\, dt = 0. \tag{1.8}$$

Доказательство. Достаточно заметить, что в силу теоремы А и неравенства Гельдера $f(z)\, g(z) E_1 \in G^+)$ и воспользоваться теоремой В.

Убедимся также в справедливости следующего утверждения, которым воспользуемся в дальнейшем.

Лемма 1.1. *Пусть функция* $f(z) \in E_1(G^-)$ $f(\infty) = 0$ *и*

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_j}{z^j}, \; |z| > \max\{|t| : t \in \Gamma\}, \tag{1.9}$$

— *ее тейлоровское разложение в окрестности точки* $z = \infty$. *Тогда для любого целого* $n \geqslant 0$ *будем иметь*:

$$\int_\Gamma f(t)\, t^k\, dt = 0 \ (k = 0, \cdots, n-1) \Leftrightarrow c_k = 0 \ (k = 1, \cdots, n). \qquad (1.10)$$

Доказательство. Убедимся, что если $R_0 > \max\{|t|,\ t \in \Gamma\}$, то справедливы равенства

$$\int_\Gamma f(t)\, t^k\, dt = \int_{|t|=R_0} f(t)\, t^k\, dt \ (k = 0, 1, 2, \cdots). \qquad (1.11)$$

С этой целью обозначим через C_{R_0} образ окружности $|z| = R_0$ при отображении $w = \Phi(z)$ и предположим, что числа $R > 1$ таковы, что окружность $|w| = R$ лежит в области, ограниченной кривой C_{R_0} и единичной окружностью $|w| = 1$. Тогда, поскольку функция $z = \psi(w)$ голоморфна при $|w| > 1$ и непрерывна при $|w| \geq 1$, а ввиду (1.2)

$$F(w) = f(\psi(w))\, \psi'(w) \in H_1^-, \qquad (1.12)$$

то по теореме Коши будем иметь

$$\int_{C_{R_0}} F(w)\, [\psi(w)]^k dw = \int_{|w|=R} F(w)\, [\psi(w)]^k\, dw \ (k = 0, 1, 2, \cdots). \qquad (1.13)$$

С другой стороны, $F(w) \in H_1^-$, так что в силу теоремы Ф. Рисса (см., напр., [20], с. 390)

$$\lim_{R \to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |F(Re^{i\vartheta}) - F(e^{i\vartheta})|\, d\vartheta = 0.$$

Отсюда с учетом непрерывности функции $z = \psi(w)$ получаем

$$\lim_{R \to 1} \int_{-\pi}^{\pi} F(Re^{i\vartheta})\, [\psi(Re^{i\vartheta})]^k\, Re^{i\vartheta}\, d\vartheta = \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{i\vartheta})\, [\psi(e^{i\vartheta})]^k\, e^{i\vartheta}\, d\vartheta$$

или, что то же самое

$$\lim_{R \to 1} \int_{|w|=R} F(w)\, [\psi(w)]^k\, dw = \int_{|w|=1} F(w)\, [\psi(w)]^k\, dw \ (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

Следовательно, в силу (1.13) справедливы равенства

$$\int_{C_{R_0}} F(w)\, [\psi(w)]^k\, dw = \int_{|w|=1} F(w) [\psi(w)]^k\, dw \ (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

Переходя в этих равенствах к переменной $t = \psi(w)$ и учитывая (1.12), получим (1.11).

Теперь заметим, что ряд (1.9) равномерно сходится на окружности $|z| = R_0$, и поэтому

$$\int_{|t|=R_0} f(t)\, t^k dt = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \int_{|t|=R_0} t^{k-j} dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} ic_j R_0^{k-j+1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j+1)\theta} d\theta = 2\pi i c_{k+1} \ (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

Учитывая также (1.11), отсюда получаем требуемое утверждение (1.10).

Следствие 1.2. *Если* $f(z) \in E_p(G^-)$, $f(\infty) = 0$ *и* $g(z) \in E_q(G^-)$, $g(\infty) = 0$, *где* $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, *то*

$$\int_{\Gamma} f(t)\, g(t)\, dt = 0.$$

Доказательство. Из теоремы А и неравенства Гельдера следует, что $f(z)\, g(z) \in E_1(G^-)$, а в силу равенств $f(\infty) = 0$, $g(\infty) = 0$ в окрестности точки $z = \infty$ будем иметь разложение

$$f(z)\, g(z) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{c_j}{z^j}.$$

Отсюда на основании леммы 1.1 получаем (1.14).

1.3. (а). Пусть $\{\lambda_k^+\}_1^{\varkappa} \subset G^+ (\varkappa = \infty$, либо $\varkappa = 1, 2, \cdots)$ — произвольная последовательность, причем если $\varkappa = \infty$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\chi(\lambda_k^+)|) < \infty. \tag{1.15}$$

Пусть

$$B^+(z; \varkappa) = \prod_{k=1}^{\varkappa} \frac{\chi(\lambda_k^+) - \chi(z)}{1 - \overline{\chi(\lambda_k^+)}\chi(z)} \frac{|\chi(\lambda_k^+)|}{\chi(\lambda_k^+)} \tag{1.16}$$

(полагаем $|\chi(\lambda_k^+)|/\chi(\lambda_k^+) = -1$ при $\chi(\lambda_k^+) = 0$). Поскольку функция $\chi(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{G^+}$ и отображает ее взаимно-однозначно на круг $|w| \leqslant 1$, причем $|\chi(t)| = 1$ при $t \in \Gamma$ (см., напр., [20], с. 46), то в силу известных свойств произведения Бляшке

$$B(w) = \prod_{k=1}^{\varkappa} \frac{a_k - w}{1 - \bar{a}_k w} \frac{|a_k|}{a_k} \quad (w = \chi(z),\ a_k = \chi(\lambda_k^+))$$

(см., напр., [22], с. 81) можем утверждать следующее. Если $\partial\{\lambda_k^+\}_1^{\varkappa}$ — совокупность предельных точек последовательности $\{\lambda_k^+\}_1^{\varkappa}$, то функция $B^+(z; \varkappa)$ голоморфна в G^+, непрерывна в $\overline{G^+}/\partial\{\lambda_k^+\}_1^{\varkappa}$, последовательность ее нулей в $\overline{G^+}/\partial\{\lambda_k^+\}_1^{\varkappa}$ совпадает с последовательностью $\{\lambda_k^+\}_1^{\varkappa}$ и

$$|B^+(z, \varkappa)| \leqslant 1 \ (z \in G^+),\ |B^+(z, \varkappa)| = 1 \ (z \in \Gamma \text{ п. в.}). \tag{1.17}$$

Функцию $B^+(z, \varkappa)$ будем называть произведением Бляшке для области G^+ с нулями $\{\lambda_k^+\}_1^{\varkappa}$.

Теперь для любой функции $f(z) \in E_p(G^+)$, $f(z) \not\equiv 0$, обозначим через $B_f^+(z)$ произведение Бляшке для области G^+, нули которого совпадают с нулями $f(z)$ в G^+ (если $f(z) \neq 0$ в G^+, то полагаем $B_f^+(z) \equiv 1$). Тогда из известных свойств единственности и факторизации пространств Харди H_p^+ (см., напр., [22], гл. II) и из (1.1) вытекает следующая

Теорема Γ_1. *Для всех $p \in (0, \infty)$ справедливы следующие утверждения*;

1°. *Если $\{\lambda_k^+\}_1^\varkappa \subset G^+$ ($\varkappa = \infty$, либо $\varkappa = 1, 2, \cdots$), то для существования нетривиальной функции $f(z) \in E_p(G^+)$, обращающейся в нуль на последовательности $\{\lambda_k^+\}_1^\varkappa$, необходимо и достаточно, чтобы было $\varkappa < \infty$, либо $\varkappa = \infty$ и выполнено условие* (1.15).

2°. *Если $f(z) \in E_p(G^+)$, $f(z) \not\equiv 0$, то функция $g(z) = f(z)/B_f^+(z)$ принадлежит $E_p(G^+)$ и*

$$\int_\Gamma |f(t)|^p |dt| = \int_\Gamma |g(t)|^p |dt|. \tag{1.18}$$

(б) Пусть теперь $\{\lambda_k^-\}_1^\varkappa \subset G^-$ ($\varkappa = \infty$, либо $\varkappa = 1, 2, \cdots$) — произвольная последовательность, для которой при $\varkappa = \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\Phi(\lambda_k^-)|^{-1}) < \infty. \tag{1.19}$$

Пусть

$$B^-(z; \varkappa) = \prod_{k=1}^{\varkappa} \frac{\Phi(\lambda_k^-) - \Phi(z)}{1 - \overline{\Phi(\lambda_k^-)}\,\Phi(z)} \, \frac{|\Phi(\lambda_k^-)|}{\Phi(\lambda_k^-)} \tag{1.20}$$

(при $\lambda_k^- = \infty$, тогда $\Phi(\lambda_k^-) = \infty$, полагаем

$$\frac{\Phi(\lambda_k^-) - \Phi(z)}{(1 - \overline{\Phi(\lambda_k)}\,\Phi(z)} \, \frac{|\Phi(\lambda_k^-)|}{\Phi(\lambda_k^-)} = \frac{1}{\Phi(z)}\Bigg). \tag{1.21}$$

Рассуждая как в предыдущем пункте, можем утверждать следующее. Если $\partial\{\lambda_k^-\}_1^\varkappa$ — совокупность предельных точек последовательности $\{\lambda_k^-\}_1^\varkappa$, то функция $B^-(z; \varkappa)$ голоморфна в G^-, непрерывна в $\overline{G^-}/\partial\{\lambda_k^-\}_1^\varkappa$, последовательность ее нулей в $\overline{G^-}/\partial\{\lambda_k^-\}_1^\varkappa$ совпадает с последовательностью $\{\lambda_k^-\}_1^\varkappa$ и

$$|B^-(z; \varkappa)| \leqslant 1 \ (z \in G^-), \ |B^-(z; \varkappa)| = 1 \ (z \in \Gamma \text{ п. в.}). \tag{1.22}$$

Функцию $B^-(z; \varkappa)$ будем называть произведением Бляшке для области G^- с нулями $\{\lambda_k^-\}_1^\varkappa$.

Если $f(z) \in E_p(G^-)$, $f(z) \not\equiv 0$, то через $B_f^-(z)$ будем обозначать произведение Бляшке для области G^-, нули которого совпадают с нулями $f(z)$ в G^- (если $f(z) \neq 0$ в G^-, то будем полагать $B_f^-(z) \equiv 1$). Тогда вновь из свойств пространств Харди и (1.2) сразу вытекает следующий аналог теоремы Γ_1.

Теорема Γ_2. *Для всех $p \in (0, \infty)$ справедливы следующие утверждения:*

1°. *Если $\{\lambda_k\}_1^{\varkappa} \subset G^-$ ($\varkappa = \infty$, либо $\varkappa = 1, 2, \cdots$), то для существования нетривиальной функции $f(z) \in E_p(G^-)$, обращающейся в нуль на последовательности $\{\lambda_k\}_1^{\varkappa}$, необходимо и достаточно, чтобы было $\varkappa < \infty$, либо $\varkappa = \infty$ и выполнено условие* (1.19).

2°. *Если $f(z) \in E_p(G^-)$, $f(z) \neq 0$, то функция $g(z) = f(z)/B_f^-(z)$ принадлежит $E_p(G^-)$ и*

$$\int_\Gamma |f(t)|^p \, |dt| = \int_\Gamma |g(t)|^p \, |dt|. \tag{1.23}$$

§ 2. Дальнейшие свойства классов E_p

2.1. (а) Известно, что функции классов $E_p(G^{\pm})$ однозначно определяются по своим граничным функциям (см., напр., [20]. с. 413). Учитывая этот факт, в пространствах $E_p(G^+)$ и $E_p(G^-)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ введем норму по формуле

$$\|f;\ \Gamma\|_p = \left(\int_\Gamma |f(t)|^p \, |dt| \right)^{1/p}. \tag{2.1}$$

Тогда из известного результата о полноте пространств Харди (см., напр., [22], гл. II) и из определений (1.1) и (1.2) пространств $E_p(G^{\pm})$ непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.1. *При всех p $(1 \leqslant p < \infty)$ классы $E_p(G^+)$ и $E_p(G^-)$ с нормой* (2.1) *являются банаховыми пространствами.*

Отсюда ясно, что классы $E_2(G^+)$ и $E_2(G^-)$ являются гильбертовыми пространствами со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_\Gamma f(t) \overline{g(t)} \, |dt|. \tag{2.2}$$

(б). Теперь обозначим через $\rho(z;\ \Gamma)$ расстояние от точки $z \in \overline{C}$ до Γ:

$$\rho(z;\ \Gamma) = \min \{|z - t| : t \in \Gamma\}. \tag{2.3}$$

Лемма 2.2. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$. Тогда:*

1°. *Если $f(z) \in E_p(G^+)$, то*

$$|f(z)| \leqslant \|f;\ \Gamma\|_p \{2\pi\rho(z;\ \Gamma)\}^{-1/p}, \quad z \in G^+. \tag{2.4}$$

2°. *Если $f(z) \in E_p(G^-)$, то*

$$|f(z)| \leqslant \|f;\ \Gamma\|_p \{2\pi\rho(z;\ \Gamma)/|\Phi(z)|\}^{-1/p}, \quad z \in G^-. \tag{2.5}$$

Доказательство. 1°. Если $f(z) \in E_p(G^+)$ и $f(z) \not\equiv 0$ (случай $f(z) \equiv 0$ тривиален), то в силу теоремы Γ_1 функция $g(z) = f(z)/B_f^+(z)$ принадлежит классу $E_p(G^+)$, не имеет нулей в области G^+ и $\|g;\ \Gamma\|_p =$

$=\|f;\Gamma\|_p$. Поэтому в силу теоремы А функция $F(z)=[g(z)]^p$ принадлежит классу $E_1(G^+)$, причем $\|F;\Gamma\|_1=\|g;\Gamma\|_p^p$. Значит в силу теоремы Б

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{F(t)}{t-z}\,dt,\ z\in G^+,$$

и переходя к модулям будем иметь

$$|F(z)|\,\|F;\Gamma\|_1\,|2\pi\rho(z;\Gamma)|^{-1},\ z\in G^+.$$

Возвращаясь к функции $f(z)$, отсюда получим (2.4).

2°. Предположим теперь, что $f(z)\in E_p(G^-)$ и $f(z)\not\equiv 0$. Тогда в силу теоремы Γ_2 функция $g(z)=f(z)/B_f(z)$ принадлежит классу $E_p(G^-)$, не имеет нулей в области G^- и $\|g;\Gamma\|_p=\|f;\Gamma\|_p$. Значит в силу теоремы А $[g(z)]^p\in E_1(G^-)$. С другой стороны, функция $\Phi(z)$ имеет в точке $z=\infty$ простой полюс и удовлетворяет следующим условиям:

$$|\Phi(z)|>1\ (z\in G^-),\ |\Phi(t)|=1\ (t\in\Gamma). \tag{2.6}$$

Поэтому вновь в силу теоремы А $[g(z)]^p/\Phi(z)\in E_1(G^-)$, причем в точке $z=\infty$ эта функция обращается в нуль. Следовательно, в силу теоремы Б

$$\frac{[g(z)]^p}{\Phi(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{[g(t)]^p/\Phi(t)}{t-z}\,dt,\ z\in G^-,$$

и поэтому

$$|g(z)|^p/|\Phi(z)|<\|g;\Gamma\|_p^p\,\{2\pi\rho(z;\Gamma)\}^{-1},\ z\in G^-.$$

Отсюда, переходя к функции $f(z)$, после простых вычислений получим (2.5).

Следствие 2.1. *Пусть $1<p<\infty$ и $\{f_k(z)\}_1^\infty\subset E_p(G^+)$ соответственно $\{f_k(z)\}_1^\infty\subset E_p(G^-)$. Если эта последовательность сходится по норме $\|\cdot;\Gamma\|_p$ к функции $f(t)$, то $f(t)$ является граничной функцией представителя $f(z)\in E_p(G^+)$ (соответственно $f(z)\in E_p(G^-)$), и эта последовательность сходится к $f(z)$ равномерно внутри G^+ (соответственно внутри G^-).*

Это утверждение вытекает непосредственно из леммы 2.1 и оценок (2.4) и (2.5), примененных к разности $f_k(z)-f(z)$.

2.2. (а). Пусть $f(t)\in L_1(\Gamma)$. Рассмотрим интегралы типа Коши

$$K^{\pm}(z;f)=\pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)}{t-z}\,dt,\ z\in G^+. \tag{2.7}$$

Известно, что почти всюду на Γ существуют некасательные граничные значения $K^+(t;f)$ и $K^-(t;f)$ соответственно изнутри G^+ и G^- (см. [23]). Отсюда в силу известных результатов И. И. Привалова (см., напр., [19], с. 183—194) вытекает существование сингулярного интеграла Коши

$$(S_\Gamma f)(t) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\zeta\in\Gamma,\ |t-\zeta|>\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta, \quad t\in\Gamma \text{ п. в.}, \tag{2.8}$$

и справедливость формул Сохоцкого—Племеля п. в. на Γ:

$$K^{\pm}(t;\ f) = (P_\Gamma^{\pm} f)(t), \text{ где } P_\Gamma^{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm S_\Gamma), \tag{2.9}$$

а I — единичный оператор. Имеет место также следующий важный результат (см. [14]).

Теорема Д. *Если* $1<p<\infty$, *то оценка*

$$\int\limits_\Gamma |(S_\Gamma f)(t)|^p\, |dt| \leqslant C \int\limits_\Gamma |f(t)|^p\, |dt| \tag{2.10}$$

с константой $C\,(>0)$, *не зависящей от* $f(t)$, *имеет место тогда и только тогда, когда* Γ — *карлесоновская кривая.*

(б) Докажем две леммы, которыми воспользуемся в дальнейшем.

Лемма 2.3. *Пусть* $1<p<\infty$, Γ — *карлесоновская кривая и* $f(t)\in L_p(\Gamma)$. *Тогда* $K^{\pm}(z;\ f)\in E_p(G^{\pm})$ *и*

$$f(t) = K^{+}(t;\ f) + K^{-}(t;\ f),\ t\in\Gamma \text{ п. в.} \tag{2.11}$$

Доказательство. Сначала заметим, что если $g(t)\in L_q(\Gamma)$, где $1/p+1/q=1$, то из тождества

$$\int\limits_\Gamma \frac{g(t)}{t-\zeta}\, dt = 0 \quad (\zeta\in G^{+}\cup G^{-},\ \zeta\neq\infty)$$

в силу (2.9) вытекает $g(t)=0$, $t\in\Gamma$ п. в. Следовательно, в силу теоремы Хана—Банаха система функций

$$\{Q_\zeta(t) = (t-\zeta)^{-1} : \zeta\in G^{+}\cup G^{-},\ \zeta\neq\infty\} \tag{2.12}$$

полна в пространстве $L_p(\Gamma)$. С другой стороны, опираясь на теорему А, можем утверждать, что

$$\{Q_\zeta(z) : \zeta\in G^{-}/\{\infty\}\}\subset E_p(G^{+})\quad \{Q_\zeta(z) : \zeta\in G^{+}\}\subset E_p(G^{-}), \tag{2.13}$$

и поскольку $Q_\zeta(\infty)=0$, то в силу (1.5) и теоремы Б будем иметь

$$\zeta\in G^{-}/\{\infty\} \Rightarrow \begin{cases} K^{+}(z;\ Q_\zeta) = Q_\zeta(z),\ z\in G^{+}, \\ K^{-}(z;\ Q_\zeta) = 0,\ z\in G^{-}; \end{cases} \tag{2.14}$$

$$\zeta\in G^{+} \Rightarrow \begin{cases} K^{+}(z;\ Q_\zeta) = 0,\ z\in G^{+}, \\ K^{-}(z;\ Q_\zeta) = Q_\zeta(z),\ z\in G^{-}. \end{cases} \tag{2.15}$$

Теперь заметим, что поскольку система (2.12) полна в $L_p(\Gamma)$, то для некоторой последовательности $\{F_k(t)\}_1^\infty$ линейных комбинаций функций системы (2.12) выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Gamma |f(t) - F_n(t)|^p\, |dt| = 0.$$

Отсюда с учетом ограниченности операторов P_Γ^+ и P_Γ^- в $L_p(\Gamma)$ (это вытекает из теоремы Д и определения (2.9) указанных операторов) получаем

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Gamma |K^\pm(t;f)-K^\pm(t;F_k)|^p\,|dt|=0. \qquad (2.16)$$

Но поскольку из (2.13), (2.14) и (2.15) следует, что $K^\pm(t, F_k)$ — суть граничные функции представителей из $E_p(G^\pm)$, то из (2.16) и следствия 2.1 вытекают включения $K^\pm(z;f)\in E_p(G^\pm)$. Равенство (2.11) непосредственно следует из формул Сохоцкого—Племеля (2.9).

Лемма 2.4. *Пусть $1<p<\infty$, Γ — карлесоновская кривая и $f(t)\in L_p(\Gamma)$. Тогда $f(t)$ является граничной функцией представителя из $E_p(G^+)$ (соответственно представителя из $E_p(G^-)$, обращающегося в нуль при $z=\infty$) тогда и только тогда, когда*

$$\int_\Gamma \frac{f(t)}{t-z}\,dt=0,\ z\in G^-\ (\textit{соответственно } z\in G^+). \qquad (2.17)$$

Доказательство. Если $f(t)$—граничная функция представителя класса $E_p(G^+)$ (соответственно представителя класса $E_p(G^-)$, обращающегося в нуль при $z=\infty$), то из (1.5) и теоремы Б следует (2.17). Обратно, предположим, что выполнены условия (2.17). Тогда $K^\mp(z;f)=0$, $z\in G^\mp$, а в силу леммы 2.3 $K^\pm(z;f)\in E_p(G^+)$, причем ясно, что $K^-(\infty, f)=0$. Поэтому $K^\pm(t;f)=f(t)$ почти всюду на Γ (см. 2.11).

(в) В заключение этого параграфа установим вид линейного функционала из пространства $(E_p(G^+))^*$, сопряженного к $E_p(G^+)$.

Лемма 2.5. *Пусть $1<p<\infty$, Γ — карлесоновская кривая. Тогда для любого функционала $F^*\in(E_p(G^+))^*$ существует единственная функция $g^-(z)\in E_q(G^-)$, $g^-(\infty)=0$ $(1/p+1/q=1)$ такая, что*

$$F^*(f)=\int_\Gamma f(t)\,g^-(t)\,dt,\ f(z)\in E_p(G^+). \qquad (2.18)$$

При этом справедливы оценки

$$\|F^*\|_{(E_p(G^+))^*}\leqslant\|g^-;\Gamma\|_q\leqslant B\|F\|_{(E_p(G^+))^*} \qquad (2.19)$$

с константой $B(>0)$, не зависящей от F^*. Обратно, если $g^-\in E_q(G^-)$, $g^-(\infty)=0$, то формулой (2.18) задается функционал $F^*\in(E_p(G^+))^*$.

Доказательство. Пусть $E^*\in(F_p(G^+))^*$. Продолжим этот функционал с сохранением нормы на все пространство $L_p(\Gamma)$. Тогда из общего вида ограниченного линейного функционала над $L_p(\Gamma)$ следует существование функции $g(t)$:

$$g(t) \in L_q(\Gamma),\ \|F^*\|_{(E_p(G^+))^*} = \|g;\Gamma\|_q, \tag{2.20}$$

для которой

$$F^*(f) = \int_\Gamma f(t)\,g(t)\,dt,\ f(z) \in E_p(G^+) \tag{2.21}$$

(см., напр., [24], с. 310). Положив

$$g^\pm(z) = K^\pm(z;\ g),\ z \in G^\pm),$$

в силу леммы 2.3 будем иметь: $g^\pm(z) \in E_p(G^\pm)$,

$$g(t) = g^+(t) + g^-(t),\ t \in \Gamma \text{ п. в.}, \tag{2.22}$$

причем $g^-(\infty) = 0$. Кроме того, в силу формул Сохоцкого—Племеля (2.9) и теоремы Д верна оценка

$$\|g^-;\Gamma\|_q \leqslant B\|g;\Gamma\|_q = B\|F^*\|_{(E_p(G^+))} \tag{2.23}$$

с константой $B(>0)$, не зависящей от $g(t)$, а значит, и от F^*. Таким образом, из (2.22) и (2.21) в силу следствия 1.1 вытекает представление (2.18), а из (2.23) — правая из оценок (2.19). Левая из этих оценок — следствие неравенства Гельдера. Заметим также, что опять же в силу неравенства Гельдера справедлива обратная часть леммы.

Нам осталось доказать, что по заданному функционалу $F^* \in \in (E_p(G^+))^*$ соответствующая функция $g^-(z) \in E_q(G^-)$, удовлетворяющая условию $g^-(\infty) = 0$, определяется однозначно.

Предположим, что $g_0^-(z) \in E_q(G^-)$, $g_0^-(\infty) = 0$ и

$$\int_\Gamma f(t)\,g_0^-(t)\,dt = 0,\ \forall f(z) \in E_p(G^+). \tag{2.24}$$

Тогда, поскольку при фиксированном $\zeta \in G^-/\{\infty\}$ функция $Q_\zeta(z) = = (\zeta - z)^{-1}$ принадлежит классу $E_p(G^+)$ (см. (2.13)), то из (2.24), в частности, следует тождество

$$\int_\Gamma \frac{g_0^-(t)}{t-\zeta}\,dt = 0,\ \zeta \in G^-.$$

Отсюда на основании (1.5) и теоремы Б заключаем, что $g_0^-(\zeta) = 0$ $\zeta \in G^-$, а это доказывает единственность представления (2.18).

§ 3. Некоторые свойства функции Фабера—Джрбашяна

3.1. (а) Пусть вновь G^+ — конечная область, ограниченная замкнутой спрямляемой жордановой кривой Γ. Пусть $\{z_n\}_0^\infty \subset G^-$ — произвольная последовательность, $\{M_n^{1/p}(z)\}_0^\infty$ $(1 < p < \infty)$ — система функций Фабера—Джрбашяна, порожденная континуумом Γ и последовательностью $\{z_n\}_0^\infty$. Заметим, что функции $M_n^{(1/p)}(z)$ непрерывны в замкнутой области $\bar{G}^+$, и поэтому в силу теоремы А

$$\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty \subset E_p(G^+),\ 1 < p < \infty. \tag{3.1}$$

Докажем следующее предложение.

Лемма 3.1. *Для функции системы* $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ $(1 < p < \infty)$ *имеют место следующие формулы представления*

а) *при* $z \in G^+$

$$M_n^{(1/p)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi_n[\Phi(t)][\Phi'(t)]^{1/p}}{t-z}\,dt \quad (n = 0, 1, 2, \cdots); \tag{3.2}$$

б) *при* $z \in G^-$

$$M_n^{(1/p)}(z) - \varphi_n[\Gamma(z)][\Phi'(z)]^{1/p} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi_n[\Phi(t)][\Phi'(t)]^{1/p}}{t-z}\,dt$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{3.3}$$

Доказательство. Сначала заметим, что поскольку $w \equiv \Phi(\psi(w))$, $|w| > 1$, то

$$\Phi'(\psi(w))\,\psi'(w) \equiv 1,\ |w| > 1,$$

и поэтому

$$\Phi'(\psi(w))\,\psi(w) \in H_1^-.$$

Значит согласно (1.2) $\Phi'(z) \in E_1(G^-)$, так что согласно теореме А

$$\sup_{j>1}\left\{\int\limits_{\partial G_j^-} |\Phi'(z)|\,|dz|\right\} < \infty. \tag{3.4}$$

Теперь обозначим через j_0 первый из номеров j, для которых в области G^-/G_j^- не содержится точек $z = \lambda_k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Тогда функция $\varphi_n[\Phi(z)]$ будет непрерывна в замкнутой области $\overline{G^-/G_{j_0}^-}$ и в силу (3.4) будет выполнена оценка

$$\sup_{j>j_0}\left\{\int\limits_{\partial G_j^-} |\varphi_n[\Phi(z)][\Phi'(z)]^{1/p}|^p\,|dz|\right\} < \infty. \tag{3.5}$$

Что касается функции $M_n^{(1/p)}(z)$, то она голоморфна в области $\overline{G^-/G_{j_0}^-}$, так что

$$\sup_{j>j_0}\left\{\int\limits_{\partial G_j^-} |M_n^{(1/p)}(z)|^p\,|dz|\right\} < \infty. \tag{3.6}$$

С другой стороны, функция

$$F_n^{(1/p)}(z) = \varphi_n[\Phi(z)][\Phi'(z)]^{1/p} - M_n^{(1/p)}(z) \tag{3.7}$$

голоморфна в области G^-, и поэтому ввиду (1.3)

$$\sup_{1<j<j_0-1}\left\{\int\limits_{\partial G_j^-} |F_n^{(1/p)}(z)|^p\,|dz|\right\} < \infty.$$

Сопоставив эту оценку с (3.5) и (3.6), будем иметь

$$\sup_{j>1}\left\{\int\limits_{\partial Q_j^-} |F_n^{(1/p)}(z)|^p |dz|\right\}<\infty.$$

Следовательно, в силу теоремы А

$$\{F_n^{(1/p)}(z)=\varphi_n[\Phi(z)][\Phi'(z)]^{1/p}-M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty\subset E_p(G^-), \tag{3.8}$$

причем нетрудно убедиться, что

$$F_n^{(1/p)}(\infty)=0\ (n=0,1,2,\cdots). \tag{3.9}$$

Отсюда на основании (1.5) и теоремы Б получаем при $z\in G^-$

$$M_n^{(1/p)}(z)-\varphi_n[\Phi(z)][\Phi'(z)]^{1/p}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\varphi_n[\Phi(t)][\Phi'(t)]^{1/p}-M_n^{(1/p)}(t)}{t-z}dt\ (n=0,1,2,\cdots), \tag{3.10}$$

а при $z\in G^+$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{M_n^{(1/p)}(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\varphi_n[\Phi(t)][\Phi'(t)]^{1/p}}{t-z}dt\ (n=0,1,2,\cdots). \tag{3.11}$$

Кроме того, ввиду (3.1) из теоремы Б вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{M_n^{(1/p)}(t)}{t-z}dt=\begin{cases}M_n^{(1/p)}(z), & z\in G^+,\\ 0, & z\in G^-,\end{cases}\quad(n=0,1,2,\cdots). \tag{3.12}$$

Наконец, сопоставив (3.11) и (3.12), приходим к представлению (3.2), а из (3.10) и (3.12) следует представление (3.3). Лемма доказана.

Отметим, что в работе М. М. Джрбашяна [3] другим способом были установлены представления вида (3.2) и (3.3) для функций системы $\{M_n^{(s)}(z)\}_0^\infty$ $(0<s\leqslant 1)$ при следующем условии:

$$\int\limits_\Gamma|\Phi'(z)|^s|dz|<\infty. \tag{3.13}$$

(б) Перейдем к вопросу разложения функций системы $\{M_n^{(s)}(z)\}_0^\infty$ $(0\leqslant s\leqslant 1)$ в сумму простых дробей. С этой целью введем необходимые обозначения.

Пусть $\zeta_0, \zeta_1,\cdots,\zeta_{k(n)}$ — отличные друг от друга числа из которых составлена последовательность $\{z_k\}_0^\infty$. При этом, если последовательность $\{z_k\}_0^n$ содержит ∞, то условимся полагать $\zeta_0=\infty$. Обозначим через $k_j(n)$ $(1\leqslant k_j(n)<n+1)$—кратность появления числа ζ_j в последовательности $\{z_k\}_0^n$.

Теперь заметим, что при $\zeta_j\neq\infty$ функция

$$G_n^{(s)}(z)=\varphi_n[\Phi(z)][\Phi'(z)]^s \tag{3.14}$$

имеет в точке $z=\zeta_j$ полюс кратности $k_j(n)$, а при $\zeta_0=\infty$ эта функция имеет в бесконечно удаленной точке полюс кратности $k_0(n)-1$. Поэтому можем утверждать следующее:

1) если $\zeta_j\neq\infty$, то в некоторой окрестности $|z-\zeta_j|<\eta_j$ $(0<\eta_j<<\infty)$ точки $z=\zeta_j$ справедливо представление

$$G_n^{(s)}(z)=\sum_{r=1}^{k_j(n)}\frac{C_r^{(s)}(n;j)}{(z-\zeta_j)^r}+g_{n,j,s}(z), \tag{3.15}$$

где функция $g_{n,j,s}(z)$ голоморфна при $|z-\zeta_j|<\eta_j$, а $C_r^{(s)}(n,j)$—комплексные числа, определяемые из равенств

$$C_r^{(s)}(n,j)=\frac{1}{(k_j(n)-r)!}\,\frac{d^{k_j(n)-r}}{dz^{k_j(n)-r}}\left\{(z-\zeta_j)^{k_j(n)}\,G_n^{(s)}(z)\right\}_{z=\zeta_j}, \tag{3.16}$$

причем

$$C_n^{(s)}(n;j)\neq 0 \text{ при } r=k_j(n); \tag{3.17}$$

2) если $\zeta_0=\infty$, то в некоторой окрестности $|z|>\eta$ $(0<\eta<\infty)$ бесконечно удаленной точки справедливо представление

$$G_n^{(s)}(z)=\sum_{r=0}^{k_0(n)-1}d_r^{(s)}(n)+g_{n,s}(z), \tag{3.18}$$

где функция $g_{n,s}(z)$ голоморфна при $|z|>\eta$, $g_{n,s}(\infty)=0$, а $d_r^{(s)}(n)$ — комплексные числа, определяемые из равенств

$$d_r^{(s)}(n)=\frac{1}{(k_0(n)-r-1)!}\,\frac{d^{k_0(n)-r-1}}{dw^{k_0(n)-r-1}}\left\{w^{k_0(n)-1}\,G_n^{(s)}\left(\frac{1}{w}\right)\right\}_{w=0}, \tag{3.19}$$

причем

$$d_r^{(s)}(n)\neq 0 \text{ при } r=k_0(n)-1. \tag{3.20}$$

Из сказанного на основании определения функции $M_n^{(s)}(z)$ получаем следующее предложение.

Лемма 3.2. *При всех значениях параметра s $(0\leqslant s\leqslant 1)$ справедливы следующие утверждения:*

1°. *Если все z_k $(0<k\leqslant n)$ конечны, то*

$$M_n^{(s)}(z)=\sum_{j=0}^{k(n)}\sum_{r=1}^{k_j(n)}\frac{C_r^{(s)}(n;j)}{(z-\zeta_j)^r}. \tag{3.21}$$

2°. *Если среди членов последовательности $\{z_k\}_0^n$ есть бесконечно удаленная точка, то*

$$M_n^{(s)}(z)=\sum_{r=0}^{k_0(n)-1}d_r^{(s)}(n)\,z^r+\sum_{j=1}^{k(n)}\sum_{r=1}^{k_j(n)}\frac{C_r^{(s)}(n;j)}{(z-\zeta_j)^r}, \tag{3.22}$$

При этом участвующие в представлениях (3.21) и (3.22) коэффициенты определяются из равенств (3.16) и (3.19) и справедливы соотношения (3.17) и (3.20).

Опираясь на представления (3.21), (3.22) и рассуждения по индукции, приходим к следующему утверждению, которое нам понадобится в дальнейшем.

Следствие 3.1. *Пусть* $0 \leqslant s \leqslant 1$ *и* $g(t) \in L_1(\Gamma)$, *а* m_n — *кратность появления числа* z_n *в последовательности* $\{z_n\}_0^\infty$. *Тогда для выполнения равенств*

$$\int_\Gamma g(t) M_n^{(s)}(t)\, dt = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{3.23}$$

необходимо и достаточно, чтобы одновременно имели место равенства

$$\int_\Gamma \frac{g(t)}{(t-z_n)^r}\, dt = 0 \quad (\text{при } z_n \neq \infty;\ r = 1, \cdots, m_n), \tag{3.24}$$

$$\int_\Gamma g(t)\, t^r\, dt = 0 \quad (r = 0, \cdots, m_{n_0} - 1), \tag{3.25}$$

если ∞ *входит в* $\{z_n\}_0^\infty$ *и кратностью* $m_{n_0} \geqslant 1$.

3.2. Теперь рассмотрим вопрос о минимальности системы $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ в $E_p(G^+)$. Но сначала напомним, что если X — банахово пространство, а X^* — его сопряженное пространство, то системы $\{x_n\}_0^\infty \subset X$ и $\{x_n^*\}_0^\infty \subset X^*$ называются биортонормированными, если

$$x_n^*(x_m) = \delta_{nm} \quad (n, m = 0, 1, 2, \cdots).$$

При этом система $\{x_n^*\}_0^\infty$ называется биортогональным дополнением системы $\{x_n\}_0^\infty$. Система $\{x_n\}_0^\infty$ называется минимальной в X, если ни один элемент x_n нельзя аппроксимировать в топологии X линейными комбинациями остальных элементов системы. Как известно, система $\{x_n\}_0^\infty$ имеет хотя бы одно биортогональное дополнение тогда и только тогда, когда она минимальна (см., напр., [25]).

Теперь рассмотрим систему функции $\{\chi_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$, $1 < p < \infty$, где

$$\chi_n^{(1/p)}(z) = \overline{\varphi}_n([\Phi(z)]^{-1})\,[\Phi(z)]^{-1}\,[\Phi'(z)]^{1/q}, \quad z \in G^- \tag{3.26}$$

(полагаем $1/p + 1/q = 1$, $\overline{\varphi}_n(w) = \overline{\varphi_n(\overline{w})}$) и докажем следующую лемму.

Лемма 3.3. *При всех* $p\,(1 < p < \infty)$

$$\{\chi_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty \in E_p(G^-), \quad \chi_n^{(1/p)}(\infty) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{3.27}$$

и системы функций $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ *и* $\{\chi_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ *биортогональны на* Γ *в следующем смысле:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma M_n^{(1/p)}(t)\, \chi_m^{(1/p)}(t)\, dt = \delta_{nm} \quad (n, m = 0, 1, 2, \cdots). \tag{3.28}$$

Доказательство. В процессе доказательства леммы 3.1 мы убедились в принадлежности $\Phi'(z)$ классу $E_1(G^-)$, откуда следует включение $[\Phi'(z)]^{1/q} \in E_q(G^-)$. Отсюда и из того, что функция

$$\overline{\varphi}_n([\Phi(z)]^{-1})\,[\Phi(z)]^{-1}$$

голоморфна и ограничена в G^- и в точке $z=\infty$ обращается в нуль вытекает (3.27).

Далее, из (3.8), (3.9) и (3.27) с учетом теоремы А получаем, что функция $F_n^{(1/p)}(z)\,\chi_m^{(1/p)}(z)$ принадлежит классу $E_1(G^-)$ и имеет в точке $z=\infty$ нуль, по крайней мере, второго порядка. Поэтому в силу леммы 1.1 справедливы равенства

$$\int\limits_{\Gamma} F_n^{(1/p)}(t)\,\chi_m(t)\,dt=0 \quad (n, m=0, 1, 2, \cdots)$$

или, что то же самое

$$\int\limits_{\Gamma}\left\{M_n^{(1/p)}(t)-\varphi_n[\Phi][\Phi'(t)]^{1/p}\right\}\chi_m^{(1/p)}(t)\,dt=0 \; (n, m=0, 1, 2, \cdots). \tag{3.29}$$

С другой стороны, имеем: $\Phi(t)=e^{i\theta}$ и $[\Phi(t)]^{-1}=\overline{\Phi(t)}$ на Γ, и поэтому в силу (0.2)

$$\int\limits_{\Gamma}\varphi_n[\Phi(t)]\,[\Phi'(t)]^{1/p}\chi_m^{(1/p)}(t)\,dt=$$

$$=\int\limits_{\Gamma}\varphi_n[\Phi(t)]\,\overline{\varphi_m[\Phi(t)]}\,[\Phi'(t)/\Phi(t)]\,dt=$$

$$=\int\limits_{|w|=1}\varphi_n(w)\,\overline{\varphi_m(w)}\,|dw|=2\pi i\,\delta_{nm}\;(n, m=0, 1, 2, \cdots).$$

Отсюда и из (3.29) вытекает (3.28). Лемма доказана.

Учитывая (3.1), на основании леммы 3.3 и леммы 2.5 можем утверждать следующее:

При всех значениях $p\ (1<p<\infty)$ система функций $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ минимальна в пространстве $E_p(G^+)$.

§ 4. О замыкании системы функций Фабера—Джрбашяна

1.1. (а) Пусть, как и раньше, $\{z_n\}_0^\infty\subset G^-$ — произвольная последовательность. При условии

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-|\Phi(z_n)|^{-1})<\infty \tag{4.1}$$

обозначим через $B^-(z)$ — произведение Бляшке для области G^- с нулями $\{z_n\}_0^\infty$ (см. п. 1.3 (б)):

$$B^-(z)=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\Phi(z_n)-\Phi(z)}{1-\Phi(z_n)\Phi(z)}\,\frac{|\Phi(z_n)|}{\Phi(z_n)} \tag{4.2}$$

(при $z_n=\infty$), тогда $\Phi(z_n)=\infty$, полагаем

$$\left.\frac{\Phi(z_n)-\Phi(z)}{1-\overline{\Phi(z_n)}\Phi(z)}\,\frac{|\Phi(z_n)|}{\Phi(z_n)}=\frac{1}{\Phi(z)}\right). \tag{4.3}$$

Рассмотрим один подкласс класса $E_p(G^+)$.

Если выполнено условие (4.1) и $1 < p < \infty$, то через $E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$ обозначим класс функций $f(z)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$1)\ f(z) \in E_p(G^+);\ 2) \int\limits_\Gamma \frac{f(t)\,B^-(t)}{t-z}\,dt = 0,\ z \in G^+. \tag{4.4}$$

Нетрудно убедиться, что в силу леммы 2.1 и равенства $|B^-(t)| = 1$, $t \in \Gamma$ п. в., $E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$ является замкнутым подпространством пространства $E_p(G^+)$. Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено условие* (4.1). *Тогда класс $E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$ с нормой $\|\cdot; \Gamma\|_p$ является банаховым пространством, а при $p = 2$ класс $E_2(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$ со скалярным произведением* (2.2) *является гильбертовым пространством.*

б) С последовательностью $\{z_n\}_0^\infty$ ассоциируем систему функций Фабера—Джрбашяна $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ и убедимся в справедливости следующего утверждения.

Лемма 4.2. *Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено условие* (4.1). *Тогда*

$$\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty \subset E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty). \tag{4.5}$$

Доказательство. Если число $z = z_n$ ($z_n \neq \infty$) входит в последовательность $\{z_n\}_0^\infty$ с кратностью m_n, то в этой точке функция $B^-(z)$ имеет нуль кратности m_n, а функция $M_n^{(1/p)}(z)$ — полюс кратности $\leqslant m_n$. С другой стороны, если ∞ входит в последовательность $\{z_n\}_0^\infty$ с кратностью $m_{n_0} \geqslant 1$ (в силу (4.1) $m_{n_0} < \infty$), то функция $B^-(z)$ имеет в точке $z = \infty$ нуль кратности m_{n_0} (см. 4.4)), а функция $M_n^{(1/p)}(z)$ — полюс кратности $(k_0(n) - 1 < m_{n_0}$ (см. лемму 3.2). Следовательно, функция $M_n^{(1/p)}(z)\,B^-(z)$ голоморфна в области G^- и обращается в нуль в точке $z = \infty$. Кроме того, в силу леммы 3.2 и оценки $|B^-(z)| \leqslant 1$, $z \in G^-$, функция $M_n^{(1/p)}(z)\,B^-(z)$ ограничена в области G^-. Значит в силу теоремы А будем иметь

$$\{M_n^{(1/p)}(z)\,B^-(z)\}_0^\infty \subset E_p(G^-),\ M_n^{(1/p)}(\infty)\,B^-(\infty) = 0\ (n \geqslant 0).$$

Отсюда на основании (1.5) и теоремы Б заключаем, что при любом n ($n = 0, 1, 2, \cdots$) справедливо тождество

$$\int\limits_\Gamma \frac{M_n^{(1/p)}(t)\,B^-(t)}{t-z}\,dt = 0,\ z \in G^+.$$

Учитывая также включение (3.1), получаем требуемое утверждение (4.5).

4.2. Напомним, что

$$\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty \subset E_p(G^+),\ 1 < p < \infty \tag{4.6}$$

(см. (3.1)), и перейдем к вопросу описания замыкания линейной оболочки (кратко: замыкания) системы $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ при аппроксимации в топологии пространства $E_p(G^+)$.

Теорема 4.1. *Пусть $1 < p < \infty$, Γ — карлесоновская кривая и $\{z_n\}_0^\infty \subset G^-$ — произвольная последовательность. Тогда*

1°. *Для полноты системы $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ в пространстве $E_p(G^+)$ необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\Phi(z_n)|^{-1}) = \infty. \tag{4.7}$$

2°. *Если система $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ не полна в пространстве $E_p(G^+)$, т. е.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\Phi(z_n)|^{-1}) < \infty, \tag{4.1}$$

то ее замыкание в $E_p(G^+)$ совпадает с пространством $E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$.

Доказательство. Сначала предположим, что выполнено условие (4.1). Вспомним включение (4.5) и докажем, что тогда система $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ полна в пространстве $E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$. В силу теоремы Хана—Банаха для этого достаточно доказать, что если F^* — ограниченный линейный функционал, заданный на пространстве $E_p(G^+)$ и обращающийся в нуль на системе $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$, то F^* обращается в нуль на всех функциях пространства $E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$.

Пусть $1/p + 1/q = 1$ и $g^-(z) \in E_q(G^-)$, $g^-(\infty) = 0$ — функция, порождающая функционал F^* (см. лемму 2.5). Тогда равенства

$$F^*(M_n^{(1/p)}(z)) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{4.8}$$

можно переписать следующим образом:

$$\int_\Gamma M_n^{(1/p)}(t)\, g^-(t)\, dt = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{4.9}$$

С учетом (1.5) отсюда на основании следствия 3.1 теоремы Б и леммы 1.1 заключаем, что функциия $g^-(z)$ обращаются в нуль на последовательности $\{z_n\}_0^\infty$. При этом, если ∞ входит в последовательность $\{z_n\}_0^\infty$ с кратностью m_{n_0}, то функция $g^-(z)$ имеет в точке $z = \infty$ нуль кратности $\geqslant m_{n_0} - 1$. Поэтому в силу теоремы Γ_2 функция $g^-(z)/B^-(z)$ принадлежит классу $E_q(G^-)$ и обращается в нуль в точке $z = \infty$. С другой стороны, если $f(z) \in E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$, то в силу леммы 2.4 $f(t)\, B^-(t)$ является граничной функцией представителя класса $E_p(G^-)$, обращающегося в нуль в точке $z = \infty$. Следовательно, произведение

$$f(t)\, g^-(t) = [f(t)\, B^-(t)]\, [g^-(t)/B^-(t)], \quad t \in \Gamma \text{ п. в.},$$

является граничной функцией представителя класса $E_1(G^-)$, имеющего в точке $z=\infty$ нуль, по крайней мере, второго порядка. Поэтому в силу леммы 2.4 будем иметь

$$F^*(f)=\int_\Gamma f(t)\,g^-(t)\,dt=0,\ \forall f(z)\in E_p(G^+;\ \{z_n\}_0^\infty),$$

так что при условии (4.1) система $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ полна в пространстве $E_p(G^+;\ \{z_n\}_0^\infty)$.

Далее, заметим, что при условии (4.1) функция $f_0(z)=(z-\zeta_0)^{-1}$, $\zeta_0\in G^-/\{z_n\}_0^\infty$, принадлежит пространству $E_p(G^+)$ но не принадлежит $E_p(G^+;\ \{z_n\}_0^\infty)$. Следовательно, условие (4.7) необходимо для полноты системы $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ в пространстве $E_p(G^+)$.

Наконец, предположим, что выполнено условие (4.7). Пусть функционал $F^*\in(E_p(G^+))^*$ обращается в нуль на функциях системы $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$, а $g^-(z)\in E_1(G^-)$, $g^-(\infty)=0$ — функция, порождающая функционал F^* согласно лемме 2.5. Тогда в силу следствия 3.1, теоремы Б и леммы 1.1 функция $g^-(z)$ обращается в нуль на последовательности $\{z_n\}_0^\infty$. Отсюда на основании теоремы Γ_3 заключаем, что $g^-(z)\equiv 0$, $z\in G^-$, и поэтому F^* — тривиальный функционал. Следовательно, в силу теоремы Хана—Банаха при условии (4.7) система $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ полна в пространстве $E_p(G^+)$.

4.3. Предположим теперь, что $1<p<\infty$ и последовательность $\{z_n\}_0^\infty$ удовлетворяет условию (4.1). Пусть $f(z)\in E_p(G^+;\ \{z_n\}_0^\infty)$. Тогда функция $f(z)$ принадлежит пространству $E_p(G^+)$, поэтому она голоморфна в области G^+. Кроме того, $f(z)$ имеет некасательные граничные значения (изнутри G^+) $f(t)$ почти всюду на Γ; это будем записывать так:

$$G^+\ni z\overset{\lim}{\underset{<}{\to}} t\ f(z)=f(t),\quad t\in\Gamma \text{ п. в.}$$

С другой стороны, в силу второго из условий (4.4) и леммы 2.4 $g(t)=f(t)\,B^-(t)$, $t\in\Gamma$ п. в. — это граничная функция представителя $g(z)$ класса $E_p(G^-)$, причем $g(\infty)=0$. Поэтому

$$G^-\ni z\overset{\lim}{\underset{<}{\to}} t\ g(z)=f(t)\,B^-(t),\quad t\in\Gamma \text{ п. в.},$$

и поскольку $|B^-(t)|=1$, $t\in\Gamma$ п. в., то

$$G^-\ni z\overset{\lim}{\underset{<}{\to}} t\{g(z)/B^-(z)\}=f(t),\ t\in\Gamma \text{ п. в.},$$

причем очевидно, что функция $g(z)/B^-(z)$ голоморфна в G^-. Таким образом, каждая функция $f(z)\in E_p(G^+;\ \{z_n\}_0^\infty)$ принадлджит классу $E_p(G^+)$, допускает мероморфное псевдопродолжение $f(z)$ в область G^- в том смысле, что

$$G^+ \ni z \xrightarrow[<]{\lim} t\ f(z) = f(t) = G^- \ni z \xrightarrow[<]{\lim} t\ f(z),\ t \in \Gamma \text{ п. в.,} \qquad (4.10)$$

причем функция $f(z)\,B^-(z)$, $z \in G^-$, принадлежит классу $E_p(G^-)$ и обращается в нуль при $z = \infty$. Легко видеть, что, обратно, если функция $f(z)$ удовлетворяет указанным условиям, то она принадлежит классу $E_p(G^+;\ \{z_n\}_0^\infty)$ (см. (1.5) и теорему Б). Следовательно, можно дать следующее эквивалентное определение класса $E_p(G^+;\ \{z_n\}_0^\infty)$.

Определение 4.1. *Пусть $1 < p < \infty$ и Γ — карлесоновская кривая, последовательность $\{z_n\}_0^\infty \subset G^-$ удовлетворяет условию (4.1). Тогда $E_p(G^+;\ \{z_n\}_0^\infty)$ — это класс функций $f(z)$, определенных на множестве $\overline{C}/A(f)$, где $A(f) \subset \Gamma$ — зависящее от $f(z)$ множество нулевой лебеговой меры, и удовлетворяющих следующим условиям:*

а) $f(z) \in E_p(G^+)$; б) $f(z)\,B^-(z) \in E_p(G^-)$ *и* $f(\infty)\,B^-(\infty) = 0$;

в) *выполняются соотношения* (4.10).

Отметим, что такие классы функций рассматривались впервые в работах [1—4].

Лемма 4.3. *Пусть $1 < p < \infty$, Γ — карлесоновская кривая и последовательность $\{z_n\}_0^\infty \subset G^-$ удовлетворяет условию* (4.1). *Пусть $\Lambda \subset \overline{G^-}$ — замыкание множества точек последовательности $\{z_n\}_0^\infty$. Тогда*

1°. *Каждая функция $f(z) \in E_p(G^+;\ \{z_n\}_0^\infty)$ допускает аналитическое продолжение в область $\overline{C}/\Lambda$.*

2°. *Если последовательность $\{f_k(z)\}_1^\infty \subset E_p(G^+;\ \{z_n\}_0^\infty)$ сходится по норме $\|\cdot;\ \Gamma\|_p$, то она сходится равномерно на любом компакте $K \subset \overline{C}/\Lambda$.*

Доказательство этого предложения опускаем, так как оно аналогично доказательству теоремы 3.4 из работы [26].

§ 5. Базисные разложения в ряды по системам Фабера—Джрбашяна

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 5.1. *Пусть $1 < p < \infty$, Γ — карлесоновская кривая и $\{z_n\}_0^\infty \subset G^-$ — произвольная последовательность. Тогда:*

1°. *При условии*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\Phi(z_n)|^{-1}) = \infty \qquad (5.1)$$

система функций $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ является базисом (при $p = 2$ — базисом Рисса) пространства $E_p(G^+)$, и любая функция $f(z) \in E_p(G^+)$ разлагается в ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)\, M_n^{(1/p)}(z)$$
$$\left(c_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(t)\, \chi_n^{(1/p)}(t)\, dt \right), \qquad (5.2)$$

сходящийся (при $p=2$ безусловно) к $f(z)$ по норме $\|\cdot;\ \Gamma\|_p$ и равномерно на любом компакте $K\subset G^+$.

2°. *При условии*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-|\Phi(z_n)|^{-1})<\infty \tag{5.3}$$

система функций $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^{\infty}$ является базисом (при $p=2$ — базисом Рисса) пространства $E_p(G^+;\ \{z_n\}_0^{\infty})$, и любая функция $f(z)\in E_p(G^+;\ \{z_n\}_0^{\infty})$ разлагается в ряд (5.2), сходящийся (при $p=2$ безусловно) к $f(z)$ по норме $\|\cdot;\ \Gamma\|_p$ и равномерно на любом компакте $K\subset\overline{C}/\Lambda$, где Λ — замыкание множества точек последовательности $\{z_n\}_0^{\infty}$.

Доказательство. С каждой функцией $g(t)\in L_p(\Gamma)$ ассоциируем ряд

$$g(t)\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_n(f)\,M_n^{(1/p)}(t)\ \left(c_n(g)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(t)\,\chi_n^{(1/p)}(t)\,dt\right) \tag{5.4}$$

и определим последовательности линейных операторов $\{S_k(z;\ g)\}_0^{\infty}$, положив

$$S_k(z;\ g)=\sum_{n=0}^{k}c_n(g)\,M_n^{(1/p)}(z). \tag{5.5}$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 5.1. *Пусть $1<p<\infty$ и Γ — карлесоновская кривая. Тогда для любой функции $g(t)\in L_p(\Gamma)$ справедливы оценки*

$$\|S_k(t;\ g);\ \Gamma\|_p<B\|g;\ \Gamma\|_p\ (k=0,\ 1,\ 2,\cdots), \tag{5.6}$$

где константа $B(>0)$ не зависит от k и $g(t)$.

Доказательство. Положим

$$F(w)=g[\psi(w)]\,[\psi'(w)]^{1/p},\ |w|=1, \tag{5.7}$$

и заметим, что

$$\int_{|w|=1}|F(w)|^p\,|dw|=\|g;\ \Gamma\|_p^p. \tag{5.8}$$

Далее имеем

$$c_n(g)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(t)\,\overline{\varphi_n([\Phi(t)])}\,[\Phi'(t)]^{-1/p}\,[\Phi(t)])^{-1}\,\Phi'(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}F(w)\,\overline{\varphi_n(w)}\,w^{-1}\,dw=\frac{1}{2\pi}\int_{|w|=1}F(w)\,\overline{\varphi_n(w)}\,|dw|,$$

то есть

$$c_n(g)=c_n^*(F),\ \text{где}\ c_n^*(F)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma F(w)\,\overline{\varphi_n(w)}\,|dw|. \tag{5.9}$$

Таким образом, в силу леммы 3.1

$$S_k(z; g) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left\{\sum_{n=0}^{k} c_n^*(F)\varphi_n[\Phi(t)][\Phi'(t)]^{1/p}\right\}\frac{dt}{t-z},\ z\in G^+. \quad (5.10)$$

Отсюда на основании леммы 2.3 и теоремы Д заключаем, что

$$\left\|S_k(t; g):\ \Gamma\right\|_p < A\left\|\sum_{n=0}^{k} c_n^*(F)\varphi_n[\Phi(t)][\Phi'(t)]^{1/p};\ \Gamma\right\|_p, \quad (5.11)$$

где константа $A\,(>0)$ не зависит от k и $g(t)$. Однако

$$\left\|\sum_{n=0}^{k} c_n^*(F)\varphi_n[\Phi(t)][\Phi'(t)]^{1/p};\ \Gamma\right\|_p^p =$$

$$= \int\limits_{|w|=1}\left|\sum_{n=0}^{k} c_n^*(F)\varphi_n(w)\right|^p|dw|,$$

поэтому (5.11) можно переписать в виде

$$\|S_k(t; g);\ \Gamma\|_p < A\left\{\int\limits_{|w|=1}|S_k^*(w; F)|^p|dw|\right\}^{1/p}, \quad (5.12)$$

где

$$S_k^*(w; F) = \sum_{n=0}^{k} c_n^*(F)\varphi_n(w). \quad (5.13)$$

Теперь воспользуемся следующей формулой М. М. Джрбашяна [3] для представления ядра Коши: для любых значений w и z

$$\frac{1}{1-\overline{w}z} = \sum_{n=0}^{k}\overline{\varphi_n(w)}\varphi_n(z) + \frac{\overline{B_{k+1}(w)}B_{k+1}(z)}{1-\overline{w}z}\ (k\geqslant 0), \quad (5.14)$$

где

$$B_{k+1}(z) = \prod_{n=0}^{k}\frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha}_n z}\,\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}. \quad (5.15)$$

Положив $\alpha_n = 1/\overline{\Phi(z_n)}$, из (5.14) получим при $|z|<1$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|w|=1}\frac{F(w)}{1-\overline{w}z}|dw| = S_k^*(z; F) + \frac{B_{k+1}(z)}{2\pi}\int\limits_{|w|=1}\frac{F(w)\overline{B_{k+1}(w)}}{1-\overline{w}z}|dw|.$$

Отсюда в силу известного результата М. Рисса о проектировании из $L_p(|w|=1)$ в H_p^+ (см., напр., [22], с. 117) приходим к оценке

$$\int\limits_{|w|=1}|S_k^*(w; F)|^p|dw| \leqslant c\int\limits_{|w|=1}|F(w)|^p|dw|, \quad (5.16)$$

где константа $c\,(>0)$ не зависит от k и $F(w)$. Наконец, из (5.8), (5.12) и (5.16) вытекает (5.6).

Нам понадобится еще одна лемма.

Лемма 5.2. *Пусть Γ — карлесоновская кривая. Если $\mu_0,\cdots,\mu_k$ $(k\geqslant 0)$ — произвольные комплексные числа и*

$$Q_k(z)=\sum_{n=0}^{k}\mu_n M_n^{(1/2)}(z), \tag{5.17}$$

то имеют место оценки

$$2\pi\sum_{n=0}^{k}|\mu_n|^2<\|Q_k;\ \Gamma\|_2^2<B\sum_{n=0}^{k}|\mu_n|^2, \tag{5.18}$$

где константа $B(>0)$ *не зависит от* $\mu_0,\cdots,\mu_k$.

Доказательство. Положим

$$P_k(w)=Q_k[\psi(w)]\,[\psi'(w)]^{1/2},\ |w|=1, \tag{5.19}$$

и заметим, что в силу (5.7)—(5.9) будем иметь

$$\int\limits_{|w|=1}|P_k(w)|^2\,|dw|=\|Q_k;\ \Gamma\|_2^2, \tag{5.20}$$

$$\mu_n=c_n^*(P_k)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|w|=1}P_k(w)\overline{\varphi_n(w)}\,|dw|\ (n=0,\cdots,k). \tag{5.21}$$

Однако из ортонормированности системы $\{\varphi_n(w)\}_0^\infty$ (см. (0.2)) и неравенства Бесселя следует, что

$$\sum_{n=0}^{k}|c_n^*(P_k)|^2\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|w|=1}|P_k(w)|^2\,|dw|,$$

откуда на основании (5.20) и (5.21) получаем первую из оценок (5.18). Далее заметим, что ввиду (5.5), (5.13), (5.21) и леммы 3.3

$$S_k(z;\ Q_k)=Q_k(z),\ S_k^*(w;\ P_k)=\sum_{n=0}^{k}\mu_n\varphi_n(w), \tag{5.22}$$

а поскольку в силу равенства Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|w|=1}|P_k(w)|^2\,|dw|=\sum_{n=0}^{k}|\mu_n|^2,$$

то в рассматриваемом случае из (5.12) и (5.16) получаем

$$\|S_k(t;\ Q_k);\ \Gamma\|_2^2\leqslant B\sum_{n=0}^{k}|\mu_n|^2.$$

Отсюда и из (5.22) вытекает вторая из оценок (5.18). Лемма доказана.

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 5.1. Имеем: а) в силу теоремы 4.1 и леммы 3.3 при условии (5,1) система $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ полна и минимальна в пространстве $E_p(G^+)$, а при условии (5.3) эта система полна и минимальна в пространстве $E_p(G^+;\ \{z_n\}_0^\infty)$; б) в силу леммы 5.1 как при условии (5.1), так и при условии (5.3) выполняются оценки (5.6). Отсюда на основании известного результата о базисах и банаховых пространствах (см., напр., [25], с. 19) заключаем, что при условии (5.1) система $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ является базисом пространства $E_p(G^+)$, а при условии (5.3) эта система является базисом пространства $E_p(G^+;\ \{z_n\}_0^\infty)$.

С другой стороны, при $p=2$ имеем следующее: а) при условии (5.1) система $\{M_n^{(1/2)}(z)\}_0^\infty$ полна в гильбертовом пространстве $E_2(G^+)$, а при условии (5.3) эта система полна в гильбертовом пространстве $E_2(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$; б) в силу леммы 5.2 как при условии (5.1), так и при условии (5.3) имеют место оценки (5.18). Отсюда на основании другого известного результата — о базисах Рисса в гильбертовых пространствах (см., напр., [27], с. 374) — получаем соответствующие утверждения о базисных свойствах системы $\{M_n^{(1/2)}(z)\}_0^\infty$.

Из вышедоказанного и леммы 3.3 следует, что при условии (5.1) любая функция $f(z)\in E_p(G^+)$, а при условии (5.3) — любая функция $f(z)\in E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$ разлагается в ряд (5.2), сходящийся (при $p=2$ безусловно) к $f(z)$ по норме $\|\cdot; \Gamma\|_p$. Наконец, отсюда и из следствия (2.1) и леммы 4.3 вытекают утверждения о природе сходимости ряда (5.2) соответственно на компактах $K\subset G^+$ (при условии (5.1)) и на компактах $K\subset \overline{C}/\Lambda$ (при условии (5.3)).

Институт математики
АН Армении

Поступила 12.XII.1991

Կ. Հ. Ղազարյան, Վ. Մ. Մարտիրոսյան. Ֆաբեր—Ջրբաշյանի ռացիոնալ ֆունկցիաների համակարգերի բազիսության հարցերը Վ. Ի. Սմիրնովի տարածություններում և դրանց ենթատարածություններում *(ամփոփում)*

Հիմնական արդյունքը կայանում է նրանում, որ եթե Γ-ն ժորդանյան կարլեսոնյան կոր է $1<p<\infty$, *ապա Ֆաբեր—Ջրբաշյանի* $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ *ռացիոնալ ֆունկցիաների համակարգը հանդիսանում է բազիս (p=2 դեպքում Ռիսի բազիս) իր փակույթում* Lp(Γ) *մետրիկայում*

K. H. KAZARIAN, V. M. MARTIROSIAN. *The problems of basisity of the Faber—Djrbashian's rational functions systems in the V. I. Smirnov spaces and their subspaces* (summary)

The main result is that if Γ is the jordan's and carleson's curve and if $1<p<\infty$, the Faber—Djrbashian's system of rational fanctions $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ is the basis (when $p=2$ the Riesz basis) in his closure in $L_p(\Gamma)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* О разложимости аналитических функций в ряд по рациональным функциям с заданным множеством полюсов, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 1957, 10, 21—29.
2. *М. М. Джрбашян.* Разложение по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, ДАН СССР, 1962, 143, 17—20.
3. *М. М. Джрбашян.* Разложения по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН АрмССР. Математика, 1967, 2, 3—51.
4. *Г. Ц. Тумаркин.* Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов. Изв. АН АрмССР, серия физ-мат. наук, 1961, 14, 9—31.
5. *Г. Ц. Тумаркин.* Приближение аналитических в односвязной области функций, представимых интегралом типа Коши, последовательностями рациональных дробей с полюсами заданными таблицей, Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 1989, 170, вып. 17, 254—273.

6. *Г. С. Кочарян*. Об одном обобщении рядов Лорана и Фурье, Изв. АН Арм.ССР, серия физ-мат. наук, 1958, 11, 3—14.

7. *Г. С. Кочарян*. О приближении рациональными функциями в комплексной области, Изв. АН Арм.ССР, серия физ-мат. наук, 958, 11, 53—77

8. *А. М. Лукацкий*. О разложении в ряды по системе рациональных функций, М. М. Джрбашяна, Изв. АН Арм.ССР, Математика, 1973, 8, 102—122.

9. *А. М. Лукацкий*. О системе рациональных функций М. М. Джрбашяна для произвольного континуумма, Сиб. матем. ж., 1974, 15, 208—221.

10. *П. К. Суетин*. Ряды по многочленам Фабера, М., Наука, 1984

11. *T. Takenaka*. Ou the orthogonal funetions and a new formula of interpolation, Japanese Journal of Math, 1925, 2, 129—145.

12. *E. Malmquist*. Sur la de'termination d'une classe de fontons analytiue par leuo—valeurs dans un ensemble danné de points, Comptes rendus du sixieme congres des mathèmaticiens Scandinaves, Kopnhagen, 1925, 253—259.

13. *Дж. Уолш*. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области М., ИИЛ, 1961.

14. *G. David*. L'integrale de Cauchy sur le courbes rectifiables, Prepuplications Univ Paris—Sud., Dept. Math., 1982, 82105, 21 pp.

15. *Г. М. Айрапетян*. О базисе рациональных функций в подпространствах классов E_p $(1 < p < \infty)$, Изв. АН АрмССР, Математика, 1974, 9, № 2, 171—184.

16. *V. Smirnov*. Sur la théorie des polynomes orthogonaux á une variable complexe, Journal de la Société Phys—Math. de Lèningrade, 1928, 2, 155—179.

17. *V. Smirnov*. Sur les formules de Caushy et de Green et guelques problèmes gui sy rattachent, Изв. АН СССР, 1932, 7, 337—372.

18. *М. В. Келдыш*. Об одном классе экстремальных полиномов, ДАН СССР, 1936, 4, 163—166.

9. *И. И. Привалов*. Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., Гостехиздат, 1950.

20. *Г. М. Голузин*. Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., Наука, 1966.

21. *С. Я Хавинсон*. Факторизация аналитических функций в конечносвязных областях. М., Изд. МИСИ, 1981.

22. *Дж. Гарнетт*. Ограниченные аналитические функции, М., Мир, 1984.

23. *A. P. Calderòn, S. P. Calderòn, E Fabes, M. Jadett, N. M. Riviete*. Applications of integrals Cauchy on Lipschitz curves, Bull. Amer. Math. Sec., 1978, 84, 281—290.

24. *Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц*. Линейные операторы (общая теория), М., ИИЛ, 1962.

25. *Б. С. Кашин, А. А. Саакян*. Ортогональные ряды, М., Наука, 1984.

26. *В. М. Мартиросян*. О замыкании и базисности некоторых систем рациональных функций, Изв. АН АрмССР, Математика, 1987, 22, № 6, 585—606.

27. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., Наука, 1965.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 6, 1991 Математика

УДК 515.168

А. В. КАРАБЕГОВ

ОБ ОДНОМ ОПЕРАТОРЕ НА ОДНОПОЛОСТНОМ ГИПЕРБОЛОИДЕ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

Под однополостным гиперболоидом над полем k мы понимаем подмножество X трехмерного пространства k^3, заданное уравнением $x^2+y^2-z^2=1$ (в случае, когда $k=R$, X — обычный однополостный гиперболоид). Гиперболоид X является орбитой линейного действия в пространстве k^3 группы $PGL(2, k)$ проективных преобразований проективной прямой над полем k.

В настоящей работе мы описываем структуру некоторого оператора в пространстве комплекснозначных функций на гиперболоиде над конечным полем $\mathbf{F}_q$ нечетной характеристики, инвариантного относительно сдвигов на элементы группы $PGL(2, \mathbf{F}_q)$. Этот оператор построен по аналогии с оператором, возникающим в задаче квантования на однополостном гиперболоиде над вещественным полем (см. [1]), структура которого описана в [2]. Спектр данного оператора описывается на языке Г-функций локальных полей (см. [3]).

1. Действие группы $PGL(2, k)$ на гиперболоиде X

Пусть $M=Mat(2, k)$ — пространство матриц второго порядка с элементами из поля k, $GL(2, k)$ — группа обратимых матриц из M, Z — ее центр, состоящий из скалярных матриц. Определим группу $PGL(2, k)=GL(2, k)/Z$. Элемент $PGL(2, k)$, представителем которого в группе $GL(2, k)$ является матрица

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(выбираемая неоднозначно), мы будем обозначать

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Зададим правое (контравариантное) действие $GL(2, k)$ на M сопряжением: для $g\in GL(2, k)$, $m\in M$ $g: m\to g^{-1}mg$. Поскольку центр Z действует на M тривиально, то фактически на M действует группа $G=PGL(2, k)$. Поскольку сопряжение сохраняет след, группа G действует в подпространстве $M_0\subset M$ матриц с нулевым следом. Это — трехмерное пространство над k. Зададим в нем систему координат: тройке $(x, y, z)\in k^3$ поставим в соответствие матрицу

$$\begin{pmatrix} x, & y+z \\ y-z & -x \end{pmatrix}\in M_0. \qquad (1)$$

Поскольку сопряжение сохраняет определитель, а определитель матрицы (1) равен $-(x^2+y^2-z^2)$, действие группы G в M_0 сохраняет квадратичную форму $x^2+y^2-z^2$.

Точки однополостного гиперболоида X — решения уравнения $x^2+y^2-z^2=1$ — суть матрицы с нулевым следом и определителем, равным -1. Любая такая матрица приводится сопряжением к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Таким образом, X является орбитой точки (2) под действием группы G. Стабилизатором этой точки является подгруппа $A \subset G$, состоящая из элементов G, представителями которых в $GL(2, k)$ являются диагональные матрицы. Как правое однородное пространство группы G, X изоморфен пространству левых смежных классов G по A: $X \simeq A \setminus G$. Далее мы отождествляем X и $A \setminus G$.

2. Проективные координаты на гиперболоиде X

Проективная прямая P^1 над полем k — это совокупность одномерных подпространств плоскости k^2. Точка P^1, отвечающая подпространству, натянутому на вектор $(\alpha, \beta) \in k^2$, задается проективной координатой $(\alpha : \beta)$. Проективные координаты $(\alpha : \beta)$ и $(\gamma : \delta)$ задают одну и ту же точку P^1, если $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$.

Пусть группа $GL(2, k)$ действует справа на k^2:

$$GL(2, k) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : (\alpha, \beta) \to (\alpha, \beta) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\alpha a + \beta c, \alpha b + \beta d).$$

Это действие определяет проективное действие G на P^1:

$$G \ni \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : (\alpha : b) \to (\alpha a + \beta c : \alpha b + \beta d).$$

Таким образом, $G = PGL(2, k)$ — это группа проективных преобразований проективной прямой над полем k.

Зададим эквивариантное вложение $X = A \setminus G$ в декартов квадрат проективной прямой P^1:

$$X = A \setminus G \ni A \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \to ((\alpha : \beta), (\gamma : \delta)) \in P^1 \times P^1. \tag{3}$$

Поскольку представители элементов G — невырожденные матрицы, имеем $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, откуда следует, что $(\alpha : \beta) \neq (\gamma : \delta)$, то есть образом X является дополнение до диагонали декартова квадрата $P^1 \times P^1$. Соответствие (3) задает проективные координаты на X.

Как известно, на P^1 имеется проективный инвариант — двойное отношение четвертки точек. Пользуясь проективными координатами на X, определим с помощью двойного отношения функцию от двух переменных на X, инвариантую относительно сдвигов на элементы G: для $x_i = ((\alpha_i : \beta_i), (\gamma_i : \delta_i)) \in X$, $i = 1, 2$, положим

$$\xi(x_1, x_2) = \frac{(\alpha_1\delta_2 - \beta_1\gamma_2)(\alpha_2\delta_1 - \beta_2\gamma_1)}{(\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1)(\alpha_2\delta_2 - \beta_2\gamma_2)}.$$

3. Определение оператора I_π

Пусть $k = \mathbf{F}_0$ — конечное поле нечетного порядка q, π — мультипликативный характер поля $\mathbf{F}_q$ (т. е. гомоморфизм мультипликативной группы $\mathbf{F}_q^*$ поля $\mathbf{F}_q$ в группу по умножению комплексных чисел, по модулю равных единице), такой, что $\pi^2 \neq 1$. Раз и навсегда условимся продолжать нетривиальный мультипликативный характер ρ нулем в нуль поля $\mathbf{F}_q$, т. е. полагаем $\rho(0) = 0$. Определим оператор I_π в пространстве комплекснозначных функций на гиперболоиде X над полем F_q следующей формулой:

$$I_\pi f(x) = \frac{1}{q} \sum_{y \in X} \pi(\xi(x, y)) f(x).$$

Поскольку $\xi(x, y)$ — инвариантная функция на $X \times X$, оператор I_π также инвариантен, т. е. перестановочен со сдвигами на элементы группы $G = PGL(2, \mathbf{F}_q)$.

Нашей задачей является описание структуры и спектра оператора I_π. Поскольку I_π инвариантен, он сплетает с самим собой квазирегулярное представление R группы G на X (представление в функциях на X сдвигами), поэтому изотропные компоненты представления R являются инвариантными подпространствами оператора I_π (см. [4]).

В следующем пункте мы приведем список и конструкции неприводимых унитарных представлений группы G. Эти результаты получаются незначительной модификацией результатов из [5] о представлениях группы $SL(2, \mathbf{F}_q)$.

4. Неприводимые унитарные представления группы $G = PGL(2, \mathbf{F}_q)$

Порядок группы G равен $q(q^2 - 1)$, а число ее классов сопряженности — $q + 2$.

По каждому характеру β мультипликативной группы $\mathbf{F}_q^*$ строится представление основной серии T_ρ в комплекснозначных функциях $f(\alpha, \beta)$ от двух переменных на $\mathbf{F}_q^2 \setminus \{0\}$, однородных степени $\bar{\rho}^2$: для $t \in \mathbf{F}_q^*$ $f(t\alpha, t\beta) = \bar{\rho}^2(t) f(\alpha, \beta)$. Действие группы G задается следующей формулой:

$$T_\rho\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right) f(\alpha, \beta) = f(\alpha a + \beta c,\ \alpha b + \beta d)\, \rho\,(ad - bc).$$

Инвариантное эрмитово скалярное произведение таково:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{(\alpha:\beta) \in P^1} f_1(\alpha, \beta)\, \overline{f_2(\alpha, \beta)}$$

(суммирование производится по системе представителей точек P^1). Если характер ρ^2 нетривиален, представление T_ρ неприводимо. При этом два представления T_ρ и $T_{\rho'}$ эквивалентны, если $\rho' = \rho$, либо если $\rho' = \bar{\rho}$. Таким образом, получаются $(q-3)/2$ попарно неэквивалентных неприводимых представлений основной серии, размерность которых равна $q + 1$.

Если же на F_q^* $\rho^2 \equiv 1$, то либо $\rho \equiv 1$, либо $\rho = \varkappa_0$ — нетривиальный характер второго порядка. В обоих случаях T_ρ разлагается в сумму одномерного представления T'_ρ в константах и неприводимого q-мерного представления $\tilde{T}_\rho$ в функциях с нулевым средним по $F_q^* \setminus \setminus \{0\}$: $T_1 \simeq T'_1 \oplus \tilde{T}_1$, $T_{\varkappa_0} \simeq T'_{\varkappa_0} \oplus \tilde{T}_{\varkappa_0}$. Представление T'_1 — единичное; представления $\tilde{T}_1$ и $\tilde{T}_{\varkappa_0}$ неэквивалентны.

Помимо представлений основной серии, у группы G есть так называемая „аналитическая" серия неприводимых представлений, которая строится с использованием квадратичного расширения поля F_q.

Пусть ε — элемент поля F_q, не являющийся квадратом. Квадратичное расширение поля F_q, обозначаемое $F_q(\sqrt{\varepsilon})$, — это совокупность формальных сумм $z = x + \sqrt{\varepsilon} y$, где $x, y \in F_q$, с очевидными операциями. Элемент $\bar{z} = x - \sqrt{\varepsilon} y$ называется сопряженным к $y = x + \sqrt{\varepsilon} y$. Группа по умножению U, образованная элементами $z \in F_q(\sqrt{\varepsilon})$ такими, что $z\bar{z} = 1$, имеет порядок $q+1$.

Зафиксируем нетривиальный аддитивный характер χ поля F_q. По каждому характеру τ группы U, такому, что $\tau^2 \neq 1$, и некоторым образом продолженному до мультипликативного характера поля $F_q(\sqrt{\varepsilon})$, строится предтавление S_τ аналитической серии, реализуемое в функциях на F_q^*: для $b \neq 0$ и $D = ad - bc$

$$S_\tau\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) f(u) = -\frac{1}{q} \sum_{v \in F_q^*} \sum_{t\bar{t} = \frac{v}{uD}} \chi\left(\frac{(d - tD)u + (a - 1/t)v}{b}\right) \tau(t^2 D) f(v).$$

Здесь t принимает значения из $F_n(\sqrt{\varepsilon})$. При $b = 0$

$$S_\tau\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}\right) f(u) = \tau(d/a)\, \chi(cu/a)\, f(du/a).$$

Инвариантное скалярное произведение задается формулой

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{u \in F_q^*} f_1(u) \overline{f_2(u)}.$$

Представления S_τ и $S_{\tau'}$ эквивалентны, если $\tau' = \tau$, либо если $\tau' = \bar{\tau}$. Таким образом, получаются $(q-1)/2$ попарно неэквивалентных неприводимых представлений аналитической серии размерности $q-1$.

Полный список неприводимых представлений группы G состоит из представлений

$$T'_1,\ T'_{\varkappa_0},\ \tilde{T}_1,\ \tilde{T}_{\varkappa_0},\ T_\rho\ (\rho^2 \not\equiv 1),\ S_\tau.$$

5. Разложение квазирегулярного представления G на X

Поскольку квазирегулярное представление R индуцировано с единичного представления подгруппы A, по теореме Фробениуса (см. [4]) кратность вхождения неприводимого представления T группы G

в представление R равна числу линейно-независимых A-инвариантных векторов в представлении T. Непосредственно проверяется, что представление $T'_{\varkappa}$ не содержит A-инвариантных векторов, представления T'_1 (единичное), $\bar{T}_{\varkappa_0}$, T_ρ ($\rho^2 \not\equiv 1$) и S_τ содержат по одному, а $\bar{T}_1$ — два A-инвариантных вектора.

Укажем сразу же подпредставления R, изоморфные T'_1 и $\bar{T}_1$. Единичное представление реализуется в константах, а представление $\bar{T}_1$ можно реализовать двумя различными способами; в функциях на X, зависящих только от первой или второй проективной координаты и имеющих нулевое среднее по всему X.

6. Описание структуры оператора $I_{\varkappa}$

Изотропные компоненты представления R являются инвариантными подпространствами оператора $I_{\varkappa}$. Поскольку при этом представление T_ρ ($\rho^2 \not\equiv 1$) и S_τ входят в разложение R однократно, из леммы Шура следует, что оператор $I_{\varkappa}$ на этих подпредставлениях скалярен. Спектр оператора $I_{\varkappa}$ на них будет в дальнейшем вычислен явно, а сейчас покажем, что на подпредставлениях R, изоморфных T'_1 и $\bar{T}_1$, оператор $I_{\varkappa}$ действует тождественно (т. е. как единичный оператор).

Лемма 1. *Пусть ρ — нетривиальный мультипликативный характер поля $\mathbf{F}_q$, причем $\rho(0)=0$. Тогда*

$$\sum_{x \in \mathbf{F}_q} \rho(x) = 0.$$

Доказательство леммы очевидно. Отметим также, что формула $\rho(xy) +$ $+\rho'(x)\rho(y)$ остается справедливой, когда аргументы обращаются в ноль.

Предложение 1. *Функция $f(x)$ на X, зависящая только от одной проективной координаты (скажем от первой), является собственным вектором оператора $I_{\varkappa}$ с собственным значением, равным 1.*

Доказательство. Запишем действие оператора $I_{\varkappa}$ па функцию f в проективных координатах:

$$I_{\varkappa} f((\alpha_1:\beta_1),\, \gamma_1:\delta_1)) = \frac{1}{q} \sum_{(\alpha_2:\beta_2)\neq\gamma_2:\delta_2)} \pi\left(\frac{(\alpha_1\delta_2-\beta_1\gamma_2)(\alpha_2\delta_1-\beta_2\gamma_1)}{(\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma))(\alpha_2\delta_2-\beta_2\gamma_2)}\right) f((\alpha_2:\beta_2)). \quad (4)$$

Мы считаем, что конкретные пары (α_l, β_l) и (γ_l, δ_l) являются представителями соответствующих точек $(\alpha_l:\beta_l)$ и $(\gamma_l:\delta_l)$ проективной прямой. Условимся также для одной точки P^1 выбирать ровно один представитель. Тогда мы можем представить сумму в (4) в следующем виде:

$$\frac{1}{q} \sum_{(\alpha_2:\beta_2)} \left(\sum_{(\gamma_2:\delta_2)\neq(\alpha_2:\beta_2)} \pi\left(\frac{\alpha_1\delta_2-\beta_1\gamma_2}{\alpha_2\delta_2-\beta_2\gamma_2}\right)\right) \pi\left(\frac{\alpha_2\delta_1-\beta_2\gamma_1}{\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1}\right) f((\alpha_2:\beta_2)).$$

При $(\alpha_2:\beta_2)\neq(\alpha_1:\beta_1)$ дробь $(\alpha_2\delta_1-\beta_2\gamma_1)/(\alpha_2\delta_2-\beta_2\gamma_2)$ принимает по одному разу все значения из $\mathbf{F}_q$, поэтому, по лемме 1, сумма в скобках равна нулю. Вклад во внешнюю сумму дает лишь слагаемое с $(\alpha_2:\beta_2)=$ $=(\alpha_1:\beta_1)$, равное $f((\alpha_1:\beta_1))$.

Поскольку подпредставления R, изоморфные единичному и $\bar{T}_1$, реализуются в функциях, зависящих только от одной проективной координаты, оператор $I_\varkappa$ действует на них тождественно.

7. Метод вычисления спектра оператора $I_\varkappa$

Подпредставления R, изоморфные $\tilde{T}_{\varkappa_0}$, T_ρ $(\rho^2\neq 1)$ и S_ε, однократны, так что оператор $I_\varkappa$ на этих подпредставлениях скалярен, и достаточно вычислить действие $I_\varkappa$ хотя бы на одном векторе в каждом из них.

Пусть T — неприводимое унитарное представление G в пространстве V с эрмитовым скалярным произведением $<\cdot,\ \cdot>$, и $w\in V$ — A-инвариантный вектор. Эквивариантное вложение V в пространство функций на X задается формулой

$$V\ni v\to f_v(x)=<T(g)v,\ w>. \tag{5}$$

Здесь g — произвольный представитель смежного класса $x\in X=A\diagdown G$.

В каждом из представлений $\tilde{T}_{\varkappa_0}$, T_ρ $(\rho^2\neq 1$ и S_ε ровно один A-инвариантный вектор. Пусть T — любое из этих представлений, и w — соответствующий A-инвариантный вектор. Рассмотрим действие оператора $I_\varkappa$ на образе вектора w относительно вложения (5), $f_w(x)=$ $=<T(g)w,\ w>$. Поскольку $I_\varkappa f_w=\theta f_w$, для собственного значения θ оператора $I_\varkappa$ на подпредставлении R, изоморфном T, то для определения θ достаточно вычислить обе части равенства в точке $x_0=((1:0),$ $(0:1))\in X$, отвечающей смежному классу единицы в $A\diagdown G$ (в этой точке $f_w(x_0)=<w,\ w>$ отлично от нуля).

Из G-инвариантности $\xi(x,\ y)$ следует, что функция $\psi(x)=\xi(x_0,\ x)$ A-инвариантна, поскольку A — стабилизатор точки $x_0\in X$. В силу A-инвариантности вектора w, функция $f(x)$ A-инвариинтна и потому в формуле

$$I_\varkappa f_w(x_0)=\frac{1}{q}\sum_{x\in X}\pi(\psi(x))f_w(x) \tag{6}$$

под знаком суммы также стоит A-инвариантная функция. Поэтому суммирование в формуле (6) сводится к суммированию по пространству орбит действия группы A на X, с учетом соответствующих кратностей. Приведем без доказательств список A-орбит на X.

Для каждого $c\neq 0, 1$ из $\mathbf{F}_q$ линия уровня $\psi(x)=c$ (т. е. полный прообраз $\psi^{-1}(c)\subset X$) является A-орбитой из $q-1$ элемента с представителем $x_c=((c:c-1),\ (1:1))$. Для $c=1$ линия уровня $\psi(x)=1$ разбивается на три орбиты — орбиту точки x_0 из одного элемента и две из $q-1$ элемента каждая, с представителями $x'=((1:0),\ (1:1))$ и $x'=(1:1),\ (0:1))$. Случай $c=0$ аналогичен случаю $c=1$, поскольку $\pi(0)=0$, суммирование в формуле (6) по линии уровня $c=0$ отсутствует. Окончательно, мы приходим к следующей формуле:

$$J_\pi f_w(x_0) = \frac{q-1}{q}\Big(f_w(x') + f_w(x'') + \sum_{c \neq 0,1} \pi(c) f_w(x_c) \Big) + \frac{1}{q} f_w(x_0). \tag{7}$$

8. Г-функции конечных полей

Явные формулы для собственных значений оператора J_π содержат так называемые Г-функции поля $\mathbf{F}_q$ и его квадратичного расширения $\mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$.

Пусть χ — нетривиальный аддитивный характер поля $\mathbf{F}_q$. Г-функция поля $\mathbf{F}_q$ — это функция на множестве мультипликативных характеров поля $\mathbf{F}_q$, заданная формулой

$$\Gamma(\pi) = \sum_{x \in \mathbf{F}_q^*} \chi(x)\pi(x).$$

Продолжим единичный мультипликативный характер нулем в нуль поля $\mathbf{F}_q$ и обозначим это продолжение через π_1:

$$\pi_1(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Тогда для любого мультипликативного характера π, продолженного на все $\mathbf{F}_q$, справедливо соотношение $\pi\bar{\pi} = \pi_1$. Поскольку

$$\sum_{x \in \mathbf{F}_q} \chi(x) = 0$$

и $\chi(0) = 1$, имеем $\Gamma(\pi_1) = -1$.

Для мультипликативных характеров ρ и π поля $\mathbf{F}_q$ определим B-функцию*:

$$B(\pi, \rho) = \sum_{x \neq 0,1} \pi(x)\rho(1-x).$$

Очевидно, что B-функция симметрична, т. е. $B(\pi, \rho) = B(\rho, \pi)$.

Лемма 2. *Пусть π — мультипликативный характер поля $\mathbf{F}_q$, тогда*

$$B(\pi, \bar{\pi}) = \begin{cases} -\pi(-1), & \pi \neq \pi_1 \\ q-2, & \pi = \pi_1. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\pi \neq \pi_1$.

$$B(\bar{\pi}, \pi) = \sum_{x \neq 0,1} \bar{\pi}(x)\pi(1-x) = \sum_{x \neq 0,1} \pi\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

Поскольку $1/x - 1$ принимает по одному разу все значения, кроме 0 и -1, из леммы 1 следует что $B(\bar{\pi}, \pi) = -\pi(-1)$. Случай $\pi = \pi_1$ очевиден.

Предложение 2. *Пусть π, ρ — мультипликативные характеры поля $\mathbf{F}_q$. Имеет место формула*

$$\Gamma(\pi)\Gamma(\rho) = \Gamma(\pi\rho)B(\pi, \rho) + (q-1)\pi(-1)\,\delta_{\pi, \bar{\rho}},$$

где $\delta_{\pi, \bar{\rho}}$ — символ Кронекера.

* В теории чисел функции Г и B над конечным полем называются соответственно суммами Гаусса и Якоби.

Доказательство.

$$\Gamma(\pi)\Gamma(\rho)=\sum_{x\neq 0}\chi(x)\pi(x)\sum_{y\neq 0}\chi(y)\rho(y)=\sum_{x,\,y\neq 0}\chi(x+y)\pi(x)\rho(y).$$

Сделав замену переменных $y\to xy$, получаем

$$\sum_{x,\,y\neq 0}\chi(x(1+y))\pi(x)\rho(xy)=\sum_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0,1}}\chi(x(1+y))\pi(x)\rho(xy)+$$

$$+\sum_{x\neq 0}\pi(x)\rho(-x).$$

В первом слагаемом сделаем замену $x\to x/(1+y)$ и введем обозначение $\lambda=1/(x+y)$, а второе слагаемое вычислим с помощью леммы 1. Получим

$$\sum_{x\neq 0}\chi(x)\pi(x)\rho(x)\cdot\sum_{\lambda\neq 0,\,1}\pi(\lambda)\rho(1-\lambda)+(q-1)\pi(-1)\delta_{\pi,\,\bar\rho}.$$

Предложение доказано.

Из выражения для Γ-функции легко усмотреть, что $\overline{\Gamma(\pi)}=$ $=\pi(-1)\Gamma(\bar\pi)$. Сформулируем несколько следствий из предложения 2.

Следствие 1. *Пусть* $\pi\neq\bar\rho$, *тогда*

$$B(\pi,\,\rho)=\frac{\Gamma(\pi)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\pi\rho)}.$$

Следствие 2. *Пусть* $\pi\neq\pi_1$, *тогда* $|\Gamma(\pi)|^2=q$.

Докажем следствие 2. Поскольку

$$|\Gamma(\pi)|^2=\Gamma(\pi)\,\overline{\Gamma(\pi)}=\pi(-1)\Gamma(\pi)\Gamma(\bar\pi),$$

из предложения 2 получим $|\Gamma(\pi)|^2=q-1-\pi(-1)B(\pi,\,\bar\pi)$. Остается применить лемму 2.

Поскольку квадратичное расширение поля F_q — конечное поле, изоморфное F_{q^2}, Γ-функция поля $F_q(\sqrt{\varepsilon})$ определяется аналогичным образом. Однако аддитивный харатер $\tilde\chi$ поля $F_q(\sqrt{\varepsilon})$ удобно выбрать согласованным с характером $\chi:\tilde\chi(z)=\chi(z+\bar z)$. Обозначим Γ-функцию поля $F_q(\sqrt{\varepsilon})$ через Γ_ε. Таким образом, для мультипликативного характера σ поля $F_q(\sqrt{\varepsilon})$

$$\Gamma_\varepsilon(\sigma)=\sum_{z\in F_q(\sqrt{\varepsilon})^*}\chi(z+\bar z)\sigma(z).$$

Отметим, что если σ нетривиален, то $|\Gamma_\varepsilon(\sigma)|=q$.

Предложение 3. *Пусть* σ — *мультипликативный характер поля* $F_q(\sqrt{\varepsilon})$, ρ — *его ограничение на* F_q^*, *причем* $\rho\neq 1$, *тогда*

$$\Gamma_\varepsilon(\sigma)=\Gamma(\rho)\cdot\sum_{y\in F_q}\sigma\left(\frac{1+\sqrt{\varepsilon}y}{2}\right).$$

Доказательство. Для $z\in F_q(\sqrt{\varepsilon})^*$ либо $z=y\sqrt{\varepsilon}$, где $y\in F_q^*$, либо $z=x(1+y\sqrt{\varepsilon})$, где $x\in F_q^*$, $y\in F_q$.

$$\Gamma_{\varepsilon}(\sigma) = \sum_{z \in F_q(\sqrt{\varepsilon})^*} \chi(z+\bar{z})\sigma(z) = \sum_{y \in F_q^*} \sigma(\sqrt{\varepsilon})\rho(y) = \sum_{\substack{x \in F_q^* \\ y \in F_q}} \chi(2x)\rho(x)\sigma(1+y\sqrt{\varepsilon}).$$

Первое слагаемое обращается в ноль, в силу леммы 1. Остается произвести во второй сумме замену переменных $x \to x/2$.

9. Спектр оператора $I_\varkappa$ на представлениях основной серии

Пусть ρ — нетривиальный мультипликативный характер поля F_q. В реализации представления T_ρ в $\overline{\rho^2}$-однородных функциях на $F_q^2 \setminus \{0\}$ A-инвариантный вектор равен $\overline{\rho}(\alpha\beta)$, причем если $\rho = \pi_0$, то этот вектор лежит в пространстве представления $\overline{T}_{\pi_0}$. Его образ в функциях на X, обозначаемый f_ρ, таков:

$$f_\rho((\alpha:\beta), (\gamma:\delta)) = \sum_{(x:y)\in P^1} \overline{\rho}((x\alpha + y\gamma)(x\beta + y\delta))\rho((\alpha\delta - \beta\gamma)xy). \tag{8}$$

Суммирование в (8) производится по семейству представителей точек P^1. Пользуясь тем, что $\rho(0) = 0$, выражение для f_ρ можно преобразовать к виду

$$f_\rho((\alpha:\beta), (\gamma:\delta)) = \sum_{\substack{(x:y)\in P^1 \\ xy \neq 0}} \overline{\rho}\left(\frac{(x\alpha + y\gamma)(x\beta + y\delta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)xy}\right). \tag{9}$$

Делая в (9) замену переменных $t = x/y$, получим окончательно

$$f_\rho((\alpha:\beta), (\gamma:\delta)) = \sum_{t \in F_q^*} \overline{\rho}\left(\frac{-\alpha\beta t^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)t - \gamma\delta}{(\alpha\delta - \beta\gamma)t}\right).$$

Вычислим значения функции f_ρ на представителях A-орбит на X, входящих в формулу (7). В точке $x_c = ((c:c-1), 1:1))$

$$f_\rho(x_0) = \sum_{t\in F_q^*} \overline{\sigma}((2-1-1/t)c - (1-1/t)).$$

В точке $x_0 = ((1:0, (0:1))$ $f_\rho(x_0) = q-1$. В точке $x' = ((1:0), (1:1))$ имеем

$$f_\rho(x') = \sum_{t\in F_q^*} \overline{\rho}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = -1.$$

Точно так же для $x'' = ((1:1), (0:1))$ получаем $f_\rho(x'') = -1$.

Пользуясь формулой (7), выпишем выражение для собственного значения θ_ρ оператора $I_\varkappa$ в представлении R оператора T_ρ при $\rho \neq \pi_0$, и $\overline{T}_{\pi_0}$ при $\rho = \pi_0$:

$$\theta_\rho = \frac{1}{q}\left(-1 + \sum_{c \neq 0,1} \pi(c) \sum_{t \neq 0} \overline{\rho}((2-t-1/t)c - (1-1/t))\right). \tag{10}$$

Поскольку при $c = 1$ сумма по t в (10) обращается в -1, слагаемое -1 в (10) можно включить в общую сумму:

$$\theta_\rho = \frac{1}{q} \sum_{c \neq 0} \pi(c) \sum_{t \neq 0} \bar{\rho}\,((2 - t - 1/t)\,c - (1 - 1/t)).$$

Учитывая, что при $t = 1$ слагаемое в сумме по t обращается в нуль, отбросим его и сделаем замену переменной $c \to c\,(1 - 1/t)/(2 - t - 1/t)$:

$$\theta_\rho = \frac{1}{q} \sum_{c \neq 0} \pi(c)\,\bar{\rho}\,(1 - c) \sum_{t \neq 0} \bar{\pi}\bar{\rho}\,(1 - t)\,\rho\,(t).$$

Пользуясь предложением 2, получим, что при $\pi \neq \rho, \bar{\rho}$

$$\theta_\rho = \frac{1}{q}\,\frac{\Gamma(\pi)\,\Gamma(\bar{\rho})}{\Gamma(\pi\bar{\rho})}\,\frac{\Gamma(\bar{\pi}\bar{\rho})\,\Gamma(\rho)}{\Gamma(\bar{\pi})}.$$

Применяя формулы преобразования для Γ-функции поля $\mathbf{F}_q$, получаем окончательно

$$\theta_\rho = \frac{\Gamma(\pi)^2}{\Gamma(\pi\rho)\,\Gamma(\pi\bar{\rho})}.$$

Отметим, что в этом случае $|\theta_\rho| = 1$. Для $\pi = \rho$ или $\pi = \bar{\rho}$

$$\theta_\pi = \theta_{\bar{\pi}} = -\frac{1}{q}\,\frac{\Gamma(\pi)^2}{\Gamma(\pi^2)}.$$

При этом $|\theta_\pi|^2 = 1/q$. Поскольку представления T_ρ и $T_{\bar{\rho}}$ изоморфны, им отвечает одно и то же подпредставление R, так что для всех ρ имеет место $\theta_\rho = \rho_{\bar{\rho}}$.

10. Спектр оператора $I_\varkappa$ на представлениях аналитической серии

Пусть τ — характер группы U такой, что $\tau^2 \not\equiv 1$, и продолженный некоторым образом до мультипликативного характера поля $\mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$. В реализации представления S_τ на $\mathbf{F}_q^* A$-инвариантный вектор равен $\bar{\tau}(u)$. Его образ в функциях на X, обозначаемый f_τ, имеет в точке $x = ((\alpha:0),\ (\gamma:\delta)) \in X$ следующий вид:

$$f_\tau(x) = \sum_{u \in \mathbf{F}_q^*} \tau\left(\frac{\delta}{\alpha}\right) \chi\left(\frac{\gamma u}{\alpha}\right) \bar{\tau}\left(\frac{\delta u}{\alpha}\right) \tau(u) = \sum_{u \in \mathbf{F}_q^*} \chi\left(\frac{\gamma u}{\alpha}\right),$$

откуда при $\gamma \neq 0$ $f_\tau((\alpha:0),\ (\gamma:\delta)) = -1$ и $f_\tau((\alpha:0),\ (0:\delta)) = q - 1$. При $\beta \neq 0$ положим $D = \alpha\delta - \beta\gamma$. Тогда

$$f_\tau((\alpha:\beta),(\gamma:\delta)) = -\frac{1}{q} \sum_{u,\,v \in \mathbf{F}_q^*} \sum_{t\bar{t} = \frac{v}{uD}} \chi\left(\frac{(\delta - tD)\,u + (\alpha - 1/t)\,v}{\beta}\right) \tau\left(t^2 D\,\frac{u}{v}\right) =$$

$$= -\frac{1}{q} \sum_{u \in \mathbf{F}_q^*} \sum_{t \in \mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})^*} \chi\,(uD\,(\alpha t\bar{t} - t - \bar{t} + \delta/D))\,\tau\,(t/\bar{t}) =$$

$$= -\sum_{\alpha t\bar{t} - t - \bar{t} + \delta/D = 0,\ t \neq 0} \tau\,(t/\bar{t}).$$

Вычислим значения функции f_τ на представителях A-орбит на X, входящих в формулу (7). В точке $x_c = ((c:c-1),\ (1:1))$ при $c \neq 0,1$, получим

$$f_\tau(x_c) = -\sum_{(t-1)(\bar t-1)=1-c,\ t\neq 0} \tau(t/\bar t).$$

Наконец, $f_\tau(x_0) = q-1$, $f_\tau(x') = f_\tau(x'') = -1$.

Пользуясь формулой (7), выпишем выражение для собственного значения θ_τ оператора I_π в подпредставлении R, изоморфном S_τ:

$$\theta_\tau = -\frac{1}{q}\Big(1 + \sum_{c\neq 0,1}\pi(c)\sum_{(t-1)(\bar t-1)=1-c,\ t\neq 0}\tau(t/\bar t)\Big) =$$

$$= -\frac{1}{q}\sum_{c\neq 0}\pi(c)\sum_{(t-1)(\bar t-1)=1-c,\ t\neq 0}\tau(t/\bar t) =$$

$$= -\frac{1}{q}\sum_{t\in \mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})^*}\pi(t+\bar t-t\bar t)\,\tau(t/\bar t).$$

Представим $t \in \mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})^*$ в виде $t = 2\lambda/(1-y\sqrt{\varepsilon})$, $\lambda\in \mathbf{F}_q^*$, $y \in \mathbf{F}_q$. Пользуясь формулой

$$t+\bar t-\bar t t = \lambda(1-\lambda)\,\frac{2}{1+y\sqrt{\varepsilon}}\cdot\frac{2}{1-y\sqrt{\varepsilon}},$$

получим

$$\theta_\tau = -\frac{1}{q}\sum_{\lambda\in \mathbf{F}_q^*}\pi(\lambda)\pi(1-\lambda)\sum_{y\in \mathbf{F}_q}\bar\pi\Big(\frac{1+y\sqrt{\varepsilon}}{2}\cdot\frac{1-y\sqrt{\varepsilon}}{2}\Big)\times$$

$$\times\,\tau\left(\frac{(1+y\sqrt{\varepsilon})/2}{(1-y\sqrt{\varepsilon})/2}\right). \qquad (11)$$

Определим мультипликативный характер σ поля $\mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$ формулой $\sigma(t) = \pi(t\bar t)\,\tau(\bar t/t)$ и перепишем (11) в следующем виде:

$$\theta_\tau = -\frac{1}{q}\,B(\pi,\pi)\sum_{y\in \mathbf{F}_q}\bar\sigma\Big(\frac{1+y\sqrt{\varepsilon}}{2}\Big).$$

Поскольку ограничение σ на $\mathbf{F}_q$ равно π^2, из предложения 3 получаем

$$\theta_\tau = -\frac{1}{q}\,\frac{\Gamma(\pi)^2}{\Gamma(\pi^2)}\cdot\frac{\Gamma_\varepsilon(\bar\sigma)}{\Gamma(\bar\pi^2)} = -\frac{\Gamma(\pi)^2}{\Gamma_\varepsilon(\sigma)}.$$

Отметим, что $|\theta_\tau| = 1$. Таким образом, оператор I_π „почти" унитарен — унитарность нарушается лишь на подпредставлении R, изоморфном T_π. Сформулируем окончательный результат.

Теорема. *Оператор I_π на гиперболоиде над конечным полем $\mathbf{F}_q$ нечетной характеристики скалярен на каждой изотропной компоненте квазирегулярного представления R. На подпредставлении R, изоморфном единичному, и на изотропной компоненте, отвечающей $\tilde T_1$, I_π действует тождественно. Собственные значения* θ_ρ

оператора I_τ *на подпредставлениях* R, *изоморфных* T_ρ *при* $\rho \neq \pi_0$ *и* $\tilde{T}_{\pi_0}$ *при* $\rho = \pi_0$, *задаются формулами*

$$\theta_\rho = \frac{\Gamma(\pi)^2}{\Gamma(\pi\rho)\,\Gamma(\pi\bar{\rho})} \text{ при } \rho \neq \pi, \bar{\pi} \text{ и } \theta_\pi = \theta_{\bar{\pi}} = -\frac{1}{q}\,\frac{\Gamma(\pi)^2}{\Gamma(\pi^2)}.$$

Наконец, на подпредставлениях R, *изоморфных* S_τ, *его собственные значения* θ_τ *выражаются формулой*

$$\theta_\tau = -\frac{\Gamma(\pi)^2}{\Gamma_2(\sigma)},$$

где $\sigma(t) = \pi(t\bar{t})\,\tau(\bar{t}/t)$.

Межвузовский научный центр
по прикладным проблемам
математики ЕГУ

Поступила 12.VI.1991

Ա. Վ. ԿԱՐԱԲԵԳՈՎ. Վերջավոր դաշտի վրա սահմանված միախոռոչ հիպերբոլոիդի վրա մի օպերատորի մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում նկարագրված են վերջավոր դաշտի վրա սահմանված միախոռոչ հիպերբոլոիդի վրա մի ինվարիանտ օպերատորի կառուցվածքը և սպեկտրը։ Այդ օպերատորը նմանատիպ է pq և qp-սիմվոլները կապող սովորական միախոռոչ հիպերբոլոիդի վրա որոշված օպերատորին։

Օպերատորի սպեկտրը նկարագրված է վերջավոր դաշտերի Γ-ֆունկցիաների լեզվով։

A. V. KARABEGOV. *On some operator on a hyperboloid of one sheet over finite field* (summary)

The structure and spectrum of an invariant operator on a hyperboloid of one sheet over finite field is described. This operator is analogous to the one connecting pq- and qp-symbols on an ordinary hyperboloid of one sheet.

The spectrum of the operator is described in terms of Γ-functions of finite fields.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Ф. Молчанов*. Квантование на мнимой плоскости Лобачевского, Функц. анализ и его прилож., 1980, 14, № 2 73—74.
2. *А. В. Карабегов*. Об операторе, связывающем pq- и qp-символы на однополостном гиперболоиде, УМН, 42, вып. 2 (24), 189, 229—230.
3. *И. М. Гельфанд, М. И. Граев, И. И. Пятецкий-Шапиро*. Теория представлений и автоморфные функции, М., Наука, 1966.
4. *Ж.—П. Серр*. Линейные представления конечных групп, М., Мир, 1970.
5. *М. А. Наймарк*. Теория представлений групп. М., Наука, 1976.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
XXVI, № 6, 1991

УДК 517.53

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Р. А. АВЕТИСЯН

О МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЯХ, ПРЕДСТАВИМЫХ РЯДАМИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

1. В настоящей заметки изучаются мероморфные функции вида

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A}{(z_k-z)^n},\ z_k\to\infty,\ n\geqslant 1, \tag{1}$$

где ряд (1) предполагается абсолютно сходящимся, что как легко видеть эквивалентно условию

$$\sum_{|z_k|<1}\frac{|A_k|}{|z_k|^n}<+\infty. \tag{2}$$

Впервые ряды вида (1) при $n=1$ изучались в работе М. В. Келдыша [1], который, исходя из свойств рациональных функций вида

$$R_n(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{z_k-z},$$

получил их аналоги для для мероморфных функций вида (1). Приведем точные формулировки этих результатов, используя известные определения неванлинновской теории распределения значений мероморфных функций.

Теорема А [1]. *Пусть f — мероморфная функция вида* (1)) $n=1$. *Тогда*

$$m(r,f)=O(1),\ \text{при}\ r\to\infty. \tag{3}$$

Теорема В [1]. *Пусть f — мероморфная функция вида* (1), *$n=1$ конечного нижнего порядка. Тогда при всех $a\neq 0$ справедливо $\delta(a,f)=0$ и порядок $N(r,a)$ равен порядку $T(r,a)$. Если дополнительно*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|A_k|<+\infty,\ \sum_{k=1}^{\infty}A_k\neq 0, \tag{4}$$

то эти утверждения верны и при $a=0$.

И. В. Островский уточнил оценку (3) (см. монографию [2], стр. 326), показав, что для мероморфных функций вида (1) при $n=1$ и $0<p<1$ имеют место оценки

$$\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta<\frac{8\pi}{\cos\frac{p\pi}{2}}\left[\left(\frac{1}{r}\sum_{|z_k|<r}|A_k|\right)^p+\left(\sum_{|z_k|>r}\frac{A_k}{|z_k|}\right)^p\right],\ \text{при}\ r\to\infty, \tag{5}$$

$$m(r, f) = o(1), \text{ при } r \to \infty. \tag{6}$$

Отметим, что эти оценки позволили упростить доказательство теоремы Б.

Основной целью настоящей заметки также является изучение величины $m(r, f)$ для мероморфных функций вида (1). Рассмотрим сначала случай, когда $n = 1$. Очевидно, что неравенство (6) является следствием неравенства (5). Ясно также, что (5) при $p = 1$ не имеет места. Однако, с помощью метода М. В. Келдыша [1] можно показать, что для функций f вида (1), $n = 1$ имеет место

Теорема 1. *Пусть f — мероморфная функция вида* (1), $n = 1$. *Тогда*

$$m(r, f) < c\left(\frac{1}{r}\sum_{|z_k|<r}|A_k| + \sum_{|z_k|>r}\frac{|A_k|}{|z_k|}\right), \text{ при } r \to \infty, \tag{7}$$

где c — абсолютная постоянная.

Переходя к случаю $n \geqslant 2$ отметим, что для выполнения условия (6) минимального условия (2) абсолютной сходимости ряда (1) оказывается недостаточно. Точнее имеет место

Теорема 2. *Для любого $n \geqslant 2$ существует мероморфная функция f вида* (1) *такая, что при всех $p > \frac{1}{n}$ выполнены условия*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|A_k|^p}{|z_k|^{pn}} < +\infty, \tag{8}$$

но

$$\varlimsup_{r\to\infty} m(r, f) > 0. \tag{9}$$

С другой стороны, нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Если f — мероморфная функция вида* (1), $n \geqslant 2$ *такая, что для некоторого $p < \frac{1}{n}$ сходится* (8), *то для f выполнено условие* (6).

Теоремы 2 и 3 приводят к вопросу о выполнении оценки (6) при условии сходимости ряда (8) при $p = \frac{1}{n}$. В общем случае ответ на этот вопрос не ясен. Однако при некоторых ограничениях на аргументы коэффициентов A_k и полюсов z_k можно получить оценку (6) и в этом случае. Чтобы сформулировать наше утверждение введем некоторые обозначения, рассматривая для простоты случай $n = 2$.

а). Для монотонно возрастающей последовательности целых чисел n_k положим $\sigma = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$.

б). Для мероморфной функции f вида (1), $n = 2$ при некотором выборе чисел $A_k^{\frac{1}{2}}$ положим

$$b_m(\sigma) = \sup_k\left\{\left|\sum_{\substack{l < n_k \\ l \neq m}}\frac{A_l^{\frac{1}{2}}}{z_l - z_m}\right|, \text{ при } n_k \geqslant m\right\}.$$

Теорема 4. *Пусть f — мероморфная функция вида* (1), $n=2$ *Если для некоторых* $\sigma=\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и чисел* $A_k^{\frac{1}{2}}$ *сходится ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left|A_m^{\frac{1}{2}}\right|}{|z_m|}(1+b_m(\sigma))<+\infty, \tag{10}$$

то для f выполнено условие (6.)

2. В этом пунткe мы докажем теоремы 1—4.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\theta_k=\arg z_k$, $A_k=\alpha_k+$ $+i\beta_k$. Следуя М. В. Келдышу представим функцию f в виде

$$f(z)=\sum_{|z_k|>r}{}'\frac{e^{i\theta_k}\operatorname{Re}(A_k e^{-i\theta_k})}{z_k-z}+\sum_{|z_k|>r}{}''+i\sum_{|z_k|>r}{}'\frac{e^{i\theta_k}\operatorname{Im}(Ae^{-i\theta_k})}{z_k-z}+$$

$$+\sum_{|z_k|>r}{}''+\sum_{|z_k|<r}{}'\frac{\alpha_k}{z_k-z}+\sum_{|z_k|<r}{}''+i\sum_{|z_k|<r}{}'\frac{\beta_k}{z_k-z}+\sum_{|z_k|<r}{}''=$$

$$=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_8(z), \tag{11}$$

где $r=|z|$, а суммы Σ' распространяются на слагаемые с положительными значениями соответственно $\operatorname{Re}(A_k e^{-i\theta_k})$, $\operatorname{Im}(A_k e^{-i\theta_k})$, α_k, β_k, а суммы Σ'' — на остальные. Далее для измеримой на окружности $|z|=r$ функции $g(z)$ при $\lambda>0$ положим

$$E_\lambda=\{\theta\in[0,\ 2\pi]:|g(re^{i\theta})|>\lambda\},$$

$$\mu(\lambda,\ g)=mE_\lambda.$$

Учитывая представление (11) получаем

$$\mu(\lambda,\ f)\leqslant\sum_{k=1}^{8}\mu(\lambda|8,\ f_k).$$

Так как при $|z_k|>r$, $|\zeta|\leqslant r$ функция $\operatorname{Re}f_k(\zeta)$, $k=1, 2, 3, 4$ непрерывны и выполняются условия

$$\operatorname{Re}f_k(\zeta)\geqslant0,\ \operatorname{Im}f_k(0)=0,$$

то по известному неравенству для сопряженных функций получаем

$$\mu(\lambda,\ f_k)\leqslant\frac{C_1}{\lambda}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}f_k(re^{i\theta})\,d\theta\leqslant\frac{C_1}{\lambda}\sum_{|z_j|>r}\frac{|A_j|}{|z_j|},\ k=1, 2, 3, 4.$$

Далее так как при $|\zeta|=r$

$$\left|\sum_{|z_k|<r}\frac{\alpha_k}{z_k-\zeta}\right|=\left|\sum_{|z_k|<r}\frac{r\alpha_k}{r^2-\bar z_k\zeta}\right|,$$

а при $|\zeta|\leqslant r$

$$\operatorname{Re}\frac{r\alpha_k}{r^2-\bar z_k\zeta}\geqslant0,\ |z_k|\leqslant r,$$

то рассматривая функцию

$$f_5^1(z)=\sum_{|z_k|<r}\frac{r\alpha_k}{r^2-\bar z_k z},\ |z|\leqslant r,$$

вновь получаем

$$\mu(\lambda, f_5) = \mu(\lambda, f_5^1) \leqslant \frac{c_1}{\lambda}\int\limits_0^{2\pi} \operatorname{Re} f_5^1(re^{i\theta})\, d\theta \leqslant \frac{c_1}{r\lambda}\sum_{|z_k|<r} |A_k|.$$

Учитывая, что те же неравенства имеют место и при f_6, f_7, f_8, получаем

$$\mu(\lambda, f) \leqslant \frac{32 c_1}{\lambda}\left(\frac{1}{r}\sum_{|z_k|<r} |A_k| + \sum_{|z_k|>r}\frac{|A_k|}{|z_k|}\right).$$

Из последнего неравенства следует оценка

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_1^{\infty} \ln\lambda\, d\mu(\lambda, f) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_1^{\infty}\frac{\mu(\lambda, f)}{\lambda}\, d\lambda \leqslant \frac{16 c_1}{\pi}\left(\frac{1}{r}\sum_{|z_k|<r} |A_k| + \sum_{|z_k|>r}\frac{|A_k|}{|z_k|}\right).$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Для простоты рассмотрим случай $n = 2$. Будем исходить из формулы

$$\frac{z^{n-1}}{z^n - R^n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}\frac{1}{z - z_k}, \quad z_k = Re^{\frac{2\pi ik}{n}}, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

Дифференцируя эту формулу получаем

$$\frac{nz^{2(n-1)} - (n-1)z^{n-2}(z^n - R^n)}{(z^n - R^n)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(z - z_k)^2}.$$

Следовательно на окружности $|z| = R$ будем иметь

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(z - z_k)^2}\right| \geqslant \frac{(n-1)|z|^{n-2}R^n - |z|^{2(n-1)}}{|z^n - R^n|^2} > \frac{n-2}{4R^2}. \tag{12}$$

С другой стороны, при $|z| \neq R$ имеем

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(z - z_k)^2}\right| \leqslant \frac{(n-1)|z|^{n-2}R^n + |z|^{2(n-1)}}{||z|^n - R^n|^2}. \tag{13}$$

Возьмем последовательности $R_n = 2^n$ и $m_n = 8 \cdot 2^{2n}$, $n = 0, 1, 2$. Положим

$$\varphi_j(z) = \frac{1}{m_j}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{1}{(z - z_k^j)^2}, \quad z_k^j = R_j e^{\frac{2\pi ik}{m_j}}, \quad k = 1, 2, \cdots, m_j.$$

Учитывая (12), имеем при $|z| = R_m$

$$|\varphi_n(z)| \geqslant (m_n - 2)\, 14\, R^2 > 1, 5. \tag{14}$$

А при $|z| = R_n$, $j < n$ из (13) следует оценка

$$|\varphi_j(z)| \leqslant 4[(m_j - 1)2^{n(m_j-2)} \cdot 2^{jm_j} + 2^{2n(m_n-1)}]2^{-2n\cdot m_n} \leqslant 8\cdot 2^{-2n}. \quad (15)$$

Также при $|z| = R_n$, $j > n$ получаем из (13)

$$|\varphi_j(z)| \leqslant 4[(m_j - 1)2^{n(m_j-\ )} \cdot 2^{jm_j} + 2^{2n(m_j-1)}] \cdot 2^{-2jm_j} \leqslant 8 \cdot (m_j - 1) \cdot$$

$$\cdot 2^{-2n} \cdot 2^{-m_j}. \quad (16)$$

Искомую функцию f определим по фоумуле

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(z).$$

Покажем, что определенная таким образом функция f будет удовлетворять условиям (8), (9) теоремы 2. Определим коэффициенты A_n и полюсы z_n функции f следующим образом: при $8(4^j-1) < n \leqslant 8(4^{j+1}-1)13$, $j = 0, 1, 2, \cdots$, положим

$$A_n = m_j^{-1}, \quad z_n = z^j_{n-8(4^j-1)13}.$$

Проверим условие (8). Пусть $p > 1/2$, тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|A_n|^p}{|z_n|^{2p}} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_k} (m_k R_k^2)^{-p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k^{1-p}}{R_k^{2p}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8^{1-p}}{2^{k(4p-2)}} < +\infty.$$

Проверим, что выполняется (9). Пусть $|z| = R_n$, учитывая (14) — (16), имеем

$$|f(z)| > |\varphi_n(z)| - \sum_{j=0}^{n-1} |\varphi_j(z)| - \sum_{j=n+1}^{\infty} |\varphi_j(z)| \geqslant$$

$$\geqslant 1.5 - \sum_{j=1}^{n-1} 8\cdot 2^{-2n} \sum_{j=n+1}^{\infty} 8m_j 2^{-(2n+m_j)} = 1.5 + o(1), \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 2 видно, что если зафиксировать число $p > 1/2$ и взять в теореме 2 последовательность $m_n = [2^{2\alpha n}]$, где $\alpha > 1$, $\alpha(1-p) - p < 0$, то может быть построена функция $f = f_p$ вида (1), такая, что сходится ряд (8), но

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, m(r, f_p) = +\infty.$$

Доказательство теоремы 3. Для доказательства теоремы 3 достаточно заметить, что при выполнении условия $pn < 1$ теоремы 3 имеем

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi p}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi p}\left(\sum_{|z_k|<r} |A_k|^p \int_p^{2\pi} \frac{d\theta}{|z_k - re^{i\theta}|^{pn}} + \sum_{|z_k|>r} |A_k|^p \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|z_k - re^{i\theta}|^{pn}} \leqslant\right.$$

$$\left.\leqslant \frac{c_2}{2\pi p}\left(\frac{1}{r^{np}} \sum_{|z_k|<r} |A_k|^p + \sum_{|z_k|>r} \frac{|A_k|^p}{|z_k|^{pn}}\right) = o(1), \text{ при } r \to \infty.\right.$$

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Положим

$$R_k(z)=\sum_{j=1}^{n_k}\frac{A_j}{(z_j-z)^2}.$$

Очевидно, что имеет место равенство

$$R_k(z)=\left(\sum_{j=1}^{n_k}\frac{A_j^{\frac{1}{2}}}{(z_j-z)}\right)^2-\sum_{\substack{l\neq j\\ l,\,j<n_k}}\frac{A_l^{\frac{1}{2}}A_j^{\frac{1}{2}}}{(z_l-z)(z_j-z)}=R_k^1(z)+R_k^2(z).$$

Возьмем число $p<1/2$. Из равенства (5) имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|R_k^1(re^{i\theta})|^{2p}\,d\theta\leqslant\frac{4}{\cos p\pi}\left[\left(\frac{1}{r}\sum_{\substack{|z_j|\leqslant r\\ j<n_k}}\left|A_j^{\frac{1}{2}}\right|\right)^{2p}+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{\substack{|z_j|>r\\ j<n_k}}\frac{\left|A_j^{\frac{1}{2}}\right|}{|z_j|}\right)^{2p}\right]. \tag{17}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{(z_l-z)(z_j-z)}=\frac{1}{(z_l-z_j)}\left(\frac{1}{z_l-z}-\frac{1}{z_j-z}\right),$$

получаем

$$R_k^2(z)=-2\sum_{j=1}^{n_j}\frac{A_j^{\frac{1}{2}}}{z_j-z}\sum_{l\neq j}\frac{A_j^{\frac{1}{2}}}{z_l-z_j}.$$

Вновь из неравенства (5) получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|R_k^2(re^{i\theta})|^{p}\,d\theta\leqslant\frac{4}{\cos\frac{p\pi}{2}}\left[\left(\frac{1}{r}\sum_{\substack{|z_j|<r\\ j<n_k}}\left|A_j^{\frac{1}{2}}\right|b_j(\sigma)\right)^{p}+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{\substack{|z_j|>r\\ j<n_k}}\frac{\left|A_j^{\frac{1}{2}}\right|b_j(\sigma)}{|z_j|}\right)^{p}\right]. \tag{18}$$

Устремляя в (17) и (18) $k\to+\infty$ получаем

$$m(r,f)\leqslant\frac{1}{2\pi p}\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}|R_k(re^{i\theta})|^p d\theta\leqslant c_2\left[\left(\frac{1}{r}\sum_{|z_j|<r}\left|A_j^{\frac{1}{2}}\right|\right)^{2p}+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{|z_j|>r}\frac{\left|A_j^{\frac{1}{2}}\right|}{|z_j|}\right)^{2p}+\left(\frac{1}{r}\sum_{|z_j|<r}\left|A_j^{\frac{1}{2}}\right|b_j(\sigma)\right)^{p}+\left(\sum_{|z_j|>r}\frac{\left|A_j^{\frac{1}{2}}\right|b_j(\sigma)}{|z_j|}\right)^{p}\right]=$$

$$=o(1),\ \text{при}\ r\to\infty,$$

Теорема 4 доказана.

Замечание 2. Нетрудно проверить, что для функции f, построенной в теореме 2, при $n_k = 8(4^k - 1)/3$ имеют место неравенства

$$b_m(\sigma) < M, \quad m = 1, 2, 3,$$

где M — постоянная, не зависящая от m. Следовательно, учитывая (8), (9) мы получаем пример мероморфной функции f вида (1), $n = 2$ такой, что при любом $p > 1/2$ сходится ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|A_m|^p}{|z_m|^{2p}} (1 + b_m(\sigma)) < +\infty,$$

но для f условие (6) не выполняется.

Рассмотрим теперь случай мероморфных функций f вида (1), заданных в единичном круге. В этом случае для абсолютной сходимости ряда (1) при $|z| < 1$, $z \neq z_k$ очевидно достаточно условия (5). Условие (6) в этом случае естественно заменяется на условия (3). Легко видеть, что теоремы 1, 3, 4 имеют место и в этом случае с заменой оценки (6) на (3) и условий (2), (8), (10), соответственно, на условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|^{pn} < +\infty, \quad pn < 1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k^{\frac{1}{2}}| (1 + b_k(\sigma)) < +\infty.$$

Теорема 2 также имеет место и принимает следующий вид.

Теорема 5. *Для любого фиксированного числа $p > 1/2$ существует мероморфная в единичном круге функции f_p вида* (1), *$n = 2$ такая, что для произвольного $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|^p < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{1+\varepsilon} < +\infty,$$

но

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} m(r, f_p) = +\infty.$$

В заключение автор благодарит Н. У. Аракеляна за полезные обсуждения настоящей работы.

Институт математики
АН Армении

Поступила 15.III.1991

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. В. Келдыш.* О рядах по рациональным дробям, ДАН СССР, 94, № 3, 1954, 377—380.
2. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский.* Распределение значений мероморфных функций, Изд. «Наука», 1970.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Հայաստանի Գիտությունների Ակադեմիայի Տեղեկագիր
«Մաթեմատիկա» 1991 թ., XXVI, №№ 1—6

ՀԱՄԱՌՈՏ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армении, серия „Математика“ за 1991 г., XXVI, №№ 1—6

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

CONTENTS

of the Izvestia of the Academy of Sciences of Armenia
seria "Matematika", 1991, Vol. XXVI, №№ 1—6

SHORT COMMUNICATIONS

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՀԱՄԱՌՈՏ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

СОДЕРЖАНИЕ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

CONTENTS

SHORT COMMUNICATIONS