ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

# ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

# ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

## ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

## МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

# ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ
Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԿԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու քարտուղար Մ. Ա. Հովհաննիսյան

## Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

*Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝*

*1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ ապագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։*

*Մեկ ապագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։*

*2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն պրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ուսուներեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ուսուներեն լեզուներով։*

*Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։*

*3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։*

*Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։*

*4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։*

*5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։*

*Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։*

*6. Որքազրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։*

*7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։*

*8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չպրաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։*

*9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է ամբող աշխատանքը։*

*10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։*

*11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։*

*Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։*

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. Б. АМБАРЦУМЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН
А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН
зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

## К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке) а кратких сообщений—не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

ПМ,411
1991,26,5

2 р. 40 к. Индекс 77735

## EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. V. AMBARTZUMIAN
N. U. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKIĬ

executive secretary M. A. Hovhannesian

## TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contribttors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matomatika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespaced in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initals and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date muse be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to indicated by a numeral in square brackets properey inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article shoule contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitled ot twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

Математика, 1991, т. XXVI, № 4, стр. 276—364.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, №5, 1991 Математика

УДК 517.956.22

В. В. АСАТРЯН

# ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

## § 1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим эллиптическое уравнение высшего порядка с комплексными постоянными коэффициентами в односвязной конечной области $D$, содержащей начало координат, с гладкой границей $\Gamma$ в комплексной плоскости $z = x + iy$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\partial^n u(x, y)}{\partial y^{n-k} \partial x^k} = 0. \tag{1}$$

Краевые задачи для уравнения (1) исследованы многими авторами. В работах [1]–[3] доказано, в частности, что задачи Дирихле и Неймана являются фредгольмовыми в конечных и бесконечных областях, если уравнение (1) правильно эллиптическое. Однако там же показано, что в случае неправильной эллиптичности уравнения (1) указанные задачи не являются даже нетеровыми. Цель данной работы — указать аналог задачи Дирихле для неправильно эллиптического уравнения (1).

Пусть корни характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^{n-k} = 0 \tag{2}$$

простые, причем $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ имеют положительные, а $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \cdots, \lambda_n$ — отрицательные мнимые части. Не ограничивая общности можно считать, что $p \geqslant q$, где $q = n - p$. Для определенности предположим, что $q \geqslant 1$.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим краевые условия ($u = u_1 + iu_2$):

$$\left.\frac{\partial^\nu u(t)}{\partial \vec{n}^\nu}\right|_\Gamma = f_\nu(t), \ \nu = 0, 1, \cdots, q-1, \tag{3}$$

$$\left.\left[\alpha_\nu(t) \frac{\partial^\nu u_1(t)}{\partial n^\nu} + \beta_\nu(t) \frac{\partial^\nu u_2(t)}{\partial \vec{n}^\nu}\right]\right|_\Gamma = f_\nu(t), \ \nu = q, q+1, \cdots, p-1, \tag{4}$$

где $f_\nu(t) \in H^{(n-1-\nu)}(\Gamma)$, $\nu = 0, 1, \cdots, p-1$ ($f_0, f_1, \cdots, f_{q-1}$ — комплекснозначные, а $f_q, f_{q+1}, \cdots, f_{p-1}$ — действительные функции), $\alpha_\nu(t)$, $\beta_\nu(t)$, $\nu = q, q+1, \cdots, p-1$ — действительные функции из класса $H^{(n-1-\nu)}(\Gamma)$, причем $\alpha_\nu(t) + i\beta_\nu(t) \neq 0$, $\vec{n}$ — внутренняя нормаль к $\Gamma$.

Решение краевой задачи (1), (3), (4) отыскивается в классе комплекснозначных функций $u(x, y) \in H^{n-1}(D+\Gamma)$.

Основные результаты статьи можно оформить в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Если корни характеристического уравнения* (2) *простые, то краевая задача* (1), (3), (4) *нетерова в классе функций* $H^{(n-1)}(D+\Gamma)$. *Индекс краевой задачи вычисляется по формуле*

$$\varkappa = (p-q)^2 - 2l,$$

*где*

$$l = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=q}^{p-1} \Delta_\Gamma \arg\left(a_j(t) - i\beta_j(t)\right),$$

*а* $\Delta_\Gamma \arg(a_j(t) - i\beta_j(t))$ — *приращение аргумента* $a_j(t) - i\beta_j(t)$, *когда переменная* $t$ *один раз обходит контур* $\Gamma$ *по положительному направлению.*

## § 2. Доказательство теоремы 1

Обозначим через $D_j$, $\Gamma_j$ соответственно образы $D$ и $\Gamma$ при отображении $z_j = x + \lambda_j y$, $j = 1, 2, \cdots, n$, $t$, $t_0$ и $t_j$, $t_{j0}$ являются соответственно аффиксами точек на $\Gamma$ и $\Gamma_j$, а $s$, $s_0$ — соответственно дуговые абсциссы точек $t$, $t_0$ на $\Gamma$.

Известно [1], что общее решение уравнения (1) в случае простых корней характеристического уравнения (2) имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(z_j) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x + \lambda_j y), \tag{5}$$

где $\varphi_j(z)$, $j = 1, 2, \cdots, n$ — произвольные аналитические в $D_j$ функции. Легко показать, что производные $\varphi_j^{(n-1)}(z)$ выражаются линейно через производные $u(x, y)$ $(n-1)$-го порядка. Поэтому $\varphi_j(z)$ также принадлежит классу $H^{(n-1)}(D_j + \Gamma_j)$, $j = 1, 2, \cdots, n$.

Представим $\varphi_j(z)$ в виде

$$\varphi_j(z) = \sum_{k=0}^{n-2} c_{jk} z^k + z^{n-1}\psi_j(z), \quad j = 1, 2, \cdots, n, \tag{6}$$

где $\psi_j(z)$ — аналитическая в $D_j$ функция. Поскольку

$$\varphi_j(z) \in H^{(n-1)}(D_j + \Gamma_j), \text{ то } \psi_j(z) \in H^{(n-1)}(D_j + \Gamma_j).$$

Подставляя значения $\varphi_j(z)$ из (6) в (5), получим

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{n} z_j^{n-1}\psi_j(z_j) + P_{n-2}(x, y). \tag{7}$$

где $P_{n-2}(x, y)$ — полином порядка не выше $n-2$.

Очевидно, что $u(x, y)$, определенная формулой (7), является решением уравнения (1) при произвольном $P_{n-2}(x, y)$. Следовательно, общее решение уравнения (1) можно представить в виде (7). Имеет места следующая

Лемма 1. *В представлении* (7) *функции* $\psi_j(z_j)$, $j=1, 2, \cdots, n$ *и* $P_{n-2}(x, y)$ *единственным образом определяются через* $u(x, y)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что из $u(x, y)\equiv 0$ следует, что $\psi_j(z_j)=0$, $j=1, 2, \cdots, n$ и $P_{n-2}(x, y)\equiv 0$.

Пусть $u(x, y)\equiv 0$. Беря всевозможные $(n-1)$-ые производные функции $u(x, y)$ и (7), получим

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k \Phi_j^{(n-1)}(x+\lambda_j y)\equiv 0,\ (x, y)\in D,\ k=0, 1, \cdots, n-1, \tag{8}$$

где $\Phi_j(z)=z^{n-1}\psi_j(z)$. Так как определитель системы (8) отличен от нуля, то будем иметь:

$$\Phi_j^{(n-1)}(x+\lambda_j y)\equiv 0,\ j=1, 2, \cdots, n,$$

т. е.

$$z^{n-1}\psi_j(z)=R_j(z),\ j=1, 2, \cdots, n,\ z\in D_j, \tag{9}$$

где $R_j(z)$ — многочлен порядка не выше $n-2$.

Из (9) видно, что многочлен $R_j(z)$ имеет в точке $z=0$ ноль порядка $n-1$, что возможно только при $R_j(z)\equiv 0$. Но тогда из (9) следует, что $\psi_j(z)\equiv 0$, $j=1, 2, \cdots, n$. Подставляя $\psi_j(z)$, $j=1, 2, \cdots, n$ в (7) и имея в виду, что $u(x, y)\equiv 0$, получим $P_{n-2}(x, y)\equiv 0$.

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Поскольку $\psi_j(z)\in H^{(n-1)}(D_j+\Gamma_j)$, то можно пользоваться представлением И. Н. Векуа [4] аналитической функции с граничными значениями из класса $H^{(n-1)}(\Gamma_j)$:

$$\psi_j(z_j)=\int_\Gamma \mu_j(t)\left[\left(1-\frac{z_j}{t_j}\right)^{n-2}\ln\left(1-\frac{z_j}{t_j}\right)+1\right]ds+ic_j,\ j=1, 2, \cdots, n, \tag{10}$$

где $\mu_j(t)$ — действительная функция из класса $H(\Gamma)$, $c_j$ — действительная постоянная. Здесь берется та непрерывная ветвь логарифмической функции, которая обращается в 0 при $z_j=0$, $\mu_j(t)$ и $c_j$ однозначно определяются через $\psi_j(z_j)$.

Подставляя $\psi_j(z_j)$ из (10) в (7), получим следующее выражение для общего решения уравнения (1)

$$u(x, y)=\sum_{j=1}^{n} z_j^{n-1}\int_\Gamma \mu_j(t)\left[\left(1-\frac{z_j}{t_j}\right)^{n-2}\ln\left(1-\frac{z_j}{t_j}\right)+1\right]ds+P_{n-1}(x, y), \tag{11}$$

где

$$P_{n-1}(x, y)=P_{n-2}(x, y)+i\sum_{j=1}^{n} c_j z_j^{n-1}.$$

Пусть $t_0=\xi_0+i\eta_0$ — некоторая точка на $\Gamma$, а $\theta$ есть угол между внутренней нормалью $\vec{n}$ в точке $t_0$ и положительным направлением оси $0x$. Для произвольной точки $z\in D$ на нормали $\vec{n}$ будем иметь $z-t_0=\rho e^{i\theta}$, где $\rho=|z-t_0|$, т. е. $x=\xi_0+\rho\cos\theta$, $y=\eta_0+\rho\sin\theta$. Из (7) получим

$$u(x, y) = u(\xi_0 + \rho\cos\theta,\ \eta_0 + \rho\sin\theta) = P_{n-2}(\xi_0 + \rho\cos\theta,\ \eta_0 + \rho\sin\theta) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} [\xi_0 + \lambda_j\eta_0 + \rho(\cos\theta + \lambda_j\sin\theta)]^{n-1} \cdot \psi_j(\xi_0 + \lambda_j\eta_0 + \rho(\cos\theta + \lambda_j\sin\theta)).$$

Для нормальной производной $u(x, y)$ в точках нормали $\vec{n}$ будем иметь:

$$\frac{\partial^\nu u(x, y)}{\partial\vec{n}^\nu} = \frac{\partial^\nu u(\xi_0 + \rho\cos\theta,\ \eta_0 + \rho\sin\theta)}{\partial\rho^\nu} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{\nu} c_\nu^k (n-1)\cdots(n-k)(\cos\theta + \lambda_j\sin\theta)^\nu [\xi_0 + \lambda_j\eta_0 + \rho(\cos\theta +$$

$$+ \lambda_j\sin\theta)]^{n-1-\nu} \times \psi_j^{(\nu-k)}(\xi_0 + \lambda_j\eta_0 + \rho(\cos\theta + \lambda_j\sin\theta)) +$$

$$+ \frac{\partial^\nu}{\partial\rho^\nu}[P_{n-2}(\xi_0 + \rho\cos\theta,\ \eta_0 + \rho\sin\theta)].$$

Потребовав, чтобы $u(x, y)$ из (7) удовлетворяла краевым условиям (3), (4), получим следующую систему интегральных уравнений относительно $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\cdots$, $\mu_n(t)$:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\varkappa=0}^{\nu} c_\nu^k (n-1)\cdots(n-k)\,(\cos\theta + \lambda_j\sin\theta)^\nu\, t_{j0}^{n-1-k} \cdot \psi_j^{(\nu-k)}(t_{j0}) +$$

$$+ P_{n-2}^{(\nu)}(\xi_0,\ \eta_0) = f_\nu(t_0),\ \nu = 0,\ 1, \cdots,\ q-1, \tag{12}$$

$$\operatorname{Re}\left\{\zeta_\nu(t_0)\left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{\varkappa=0}^{\nu} c_\nu^k (n-1)\cdots(n-k)(\cos\theta + \lambda_j\sin\theta)^\nu\, t_{j0}^{n-1-k}\, \psi_j^{(\nu-k)} t_{j0}) +\right.\right.$$

$$\left.\left. + P_{n-2}^{(\nu)}(\xi_0, \eta_0)\right]\right\} = f_\nu(t_0),\ \nu = q,\ q+1, \cdots,\ p-1, \tag{13}$$

где

$$t_{j0} = \xi_0 + \lambda_j\eta_0,\ \zeta_\nu(t_0) = \alpha_\nu(t_0) - i\beta_\nu(t_0),$$

$$\psi_j^{(l)}(z) = (-1)^l (n-2)\cdots(n-1-l) \times$$

$$\times \int_\Gamma \frac{\mu_j(t)\left(1 - \dfrac{z}{t_j}\right)^{n-2-l}\left[\ln\left(1 - \dfrac{z}{t_j}\right) + \dfrac{1}{n-2} + \cdots + \dfrac{1}{n-1-l}\right]}{t_j^l} ds,$$

$$z \in D_j,$$

$$\psi_j^{(l)}(t_{j0}) = \lim_{\substack{z \to t_{j0} \\ z \in D_j}} \psi_j^{(l)}(z),\ l = 0,\ 1, \cdots,\ n-2,$$

$$P_{n-2}^{(\nu)}(\xi_0, \eta_0) = \frac{\partial^\nu}{\partial\rho^\nu}[P_{n-2}(\xi_0 + \rho\cos\theta,\ \eta_0 + \rho\sin\theta)]|_{\rho=0}.$$

Из вышеприведенных рассуждений следует, что система интегральных уравнений (12), (13) эквивалентна краевой задаче (1), (3), (4).

Пусть

$$\omega(x, y) = \int_\Gamma \ln\left(1 - \frac{x + \lambda_j y}{t_j}\right) \mu(t)\, dt,\ (\xi_0, \eta_0) \in \Gamma,\ t_{j0} = \xi_0 + \lambda_j \eta_0.$$

Известно [4], что если $\mu \in H(\Gamma)$, то

$$\frac{d\omega(\xi_0, \eta_0)}{ds_0} = \lim_{(x, y) \to (\xi_0, \eta_0)} \left[ \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x} \cos(s_0, x) + \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y} \cos(s_0, y) \right],$$
$$(x, y) \in D. \qquad (14)$$

Дифференцируя $\nu$-ое уравнение системы (12), (13) $n-1-\nu$ раз по $s_0$ по формуле (14) ($\nu = 0, 1, \cdots, p-1$) и учитывая, что при $j = p+1, \cdots, n$ ориентация кривой $\Gamma_j$ меняется на обратную, получим систему сингулярных интегральных уравнений относительно $\mu_1(t)$, $\mu_2(t), \cdots, \mu_n(t)$:

$$i\left[\sum_{j=1}^{p} \gamma_{\nu j} \delta_j t_{j0} \mu_j(t_0) - \sum_{j=p+1}^{n} \gamma_{\nu j} \delta_j t_{j0} \mu_j(t_0)\right] +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_\Gamma \mu_j(t) \frac{\gamma_{\nu j} (\sin\theta - \lambda_j \cos\theta)^{n-1} t_{j0}}{t_j^{n-2}(t_j - t_{j0})} ds + \sum_{j=1}^{n} \int_\Gamma \mu_j(t) L_{\nu j}(t_0, t)\, ds = \qquad (15)$$
$$= g_\nu(t_0),\ \nu = 0, 1, \cdots, q-1,$$

$$\operatorname{Re}\left\{ \zeta_\nu(t_0)\, i\left[\sum_{j=1}^{p} \gamma_{\nu j} \delta_j t_{j0} \mu_j(t_0) - \sum_{j=p+1}^{n} \gamma_{\nu j} \delta_j t_{j0} \mu_j(t_0)\right] + \right.$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_\Gamma \frac{\mu_j(t)\ \gamma_{\nu j} (\sin\theta - \lambda_j \cos\theta)^{n-1} \zeta_\nu(t_0)\, t_{j0}}{t_j^{n-2}(t_j - t_{j0})} ds +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_j(t)\, \gamma_{\nu j} (\sin\theta - \gamma_j \cos\theta)^{n-1}(t)\, t_{j0}}{t_j^{n-2}(j - t_{j0}} ds +$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{n} \int_\Gamma \mu_j(t) L_{\nu j}(t_0, t)\, ds \right\} g_\nu(t_0),\ \nu = q, q+1, \cdots, p-1, \qquad (16)$$

где

$$\gamma_{\nu j}(t_0) = \left(\frac{\cos\theta + \lambda_j \sin\theta}{\sin\theta - \lambda_j \cos\theta}\right)^\nu;\ \delta_j = (\sin\theta - \lambda_j \cos\theta)^{n-2},\ \nu = 0, 1, \cdots, p-1,$$
$$j = 1, 2, \cdots, n,$$

$$g_\nu(t_0) =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\pi(n-2)!} f_\nu^{(n-1-\nu)}(t_0),\ \nu = 0, 1, \cdots, q-1, \\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{\pi(n-2)!} \left[f_\nu(t_0) - \operatorname{Re}\left(\zeta_\nu(t_0) \cdot P_{n-2}^{(\nu)}(t_0)\right)\right]^{(n-1-\nu)}(s_0),\ \nu = q, \cdots, p-1, \end{cases}$$

операторы с ядрами $L_{\nu j}(t_0, t)$ вполне непрерывны.

Замечание 1. Если функции $f(t)$ и $g(t)$ определены на $\Gamma$ и $f(t)$, $g(t) \in C^{(\nu)}(\Gamma)$, то равенство

$$f(t) = g(t),\ t \in \Gamma$$

эквивалентно равенству

$$\frac{d^\nu f(t)}{ds^\nu} = \frac{d^\nu g(t)}{ds^\nu},\ t \in \Gamma$$

с дополнительным условием $f(\tilde{t}_0) = g(\tilde{t}_0)$, где $\tilde{t}_0$ — фиксированная точка на Г.

Из замечания 1 следует, что система интегральных уравнений (12), (13) и система сингулярных интегральных уравнений (15), (16) будут эквивалентными, если равенства (12), (13) выполняются в некоторой фиксированной точке $\tilde{t}_0 \in \Gamma$.

Выделяя во всех уравнениях (15) действительные и мнимые части, получим действительную систему сингулярных интегральных уравнений. После выделения характеристических частей, с учетом того, что характеристическая часть интеграла с ядром $\operatorname{Re}\frac{h(t_0, t)}{t - t_0}$ складывается только из слагаемого $\frac{1}{t - t_0}\operatorname{Re}\frac{h(t_0, t)}{t_s}$, систему (15), (16) приведем к виду:

$$\sum_{j=1}^{n} A_{\nu j}(t_0)\mu_j(t_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{B_{\nu j}(t_0)}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\mu_j(t)\,dt}{t - t_0} + \tag{17}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\int_{\Gamma} \mu_j(t) L_{\nu j}(t_0, t)\,dt = \operatorname{Re} g_\nu(t_0),\ \nu = 0, 1, \cdots, q-1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{A}_{\nu j}(t_0)\mu_j(t_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{B}_{\nu j}(t_0)}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\mu_j(t)\,dt}{t - t_0} + \tag{18}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\int_{\Gamma} \mu_j(t) \tilde{L}_{\nu j}(t_0, t)\,dt = \operatorname{Im} g_\nu(t_0),\ \nu = 0, 1, \cdots, q-1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_{\nu j}(t_0)\mu_j(t_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{B_{\nu j}(t_0)}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\mu_j(t)\,dt}{t - t_0} + \tag{19}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\int_{\Gamma} \mu_j(t) L_{\nu j}(t_0, t)\,dt = g_\nu(t_0),\ \nu = q, q+1, \cdots, p-1,$$

где

$$A_{\nu j}(t_0) + B_{\nu j}(t_0) = i\gamma_{\nu j}\delta_j \cdot t_{j0},\ \nu = 0, 1, \cdots, q-1;\ j = 1, 2, \cdots, p,$$

$$A_{\nu j}(t_0) + B_{\nu j}(t_0) = i\bar{\gamma}_{\nu 0}\bar{\delta}_j \bar{t}_{j0},\ \nu = 0, 1, \cdots, q-1;\ q = p+1, \cdots, n,$$

$$\tilde{A}_{\nu j}(t_0) + \tilde{B}_{\nu j}(t_0) = \gamma_\nu\,\delta_j\,t_{j0},\ \nu = 0, 1, \cdots, q-1;\ j = 1, 2, \cdots, p,$$

$$\tilde{A}_{\nu j}(t_0) + \tilde{B}_{\nu j}(t_0) = -\bar{\gamma}_{\nu j}\cdot\bar{\delta}_j\cdot\bar{t}_{j0},\ \nu = 0, 1, \cdots, q-1;\ j = p+1, \cdots, n,$$

$$A_{\nu j}(t_0) + B_{\nu j}(t_0) = i\gamma_{\nu j}\delta_j\, t_{j0}\zeta_\nu(t_0),\ \nu = q, \cdots, p-1;\ j = 1, 2, \cdots, p,$$

$$A_{\nu j}(t_0) + B_{\nu j}(t_0) = i\bar{\gamma}_{\nu j}\bar{\delta}_j\bar{t}_{j0}\bar{\zeta}_\nu(t_0),\ \nu = q, \cdots, p-1;\ j = p+1, \cdots, n.$$

Вычислим определитель матрицы $A(t_0)+B(t_0)$:

$$\Delta=\det(A(t_0)+B(t_0))=i^p\prod_{j=1}^{p}\delta_j t_{j0}\prod_{j=p+1}^{n}\overline{\delta}_j\overline{t}_{j0}\times$$

$$\times\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1\\
\gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1p} & \overline{\gamma}_{1p+1} & \cdots & \overline{\gamma}_{1n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\gamma_{q-1\,1} & \gamma_{q-1\,2} & \cdots & \gamma_{q-1\,p} & \overline{\gamma}_{q-1\,p+1} & \cdots & \overline{\gamma}_{q-1\,n}\\
1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & -1\\
\gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1p} & -\overline{\gamma}_{1\,p+1} & \cdots & -\overline{\gamma}_{1n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\gamma_{q-11} & \gamma_{q-12} & \cdots & \gamma_{q-1\,p} & -\overline{\gamma}_{q-1\,p+1} & \cdots & -\overline{\gamma}_{q-1\,n}\\
\gamma_{q1}\zeta_q & \gamma_{q2}\zeta_q & \cdots & \gamma_{qp}\zeta_q & \overline{\gamma}_{qp+1}\overline{\zeta}_q & \cdots & \overline{\gamma}_{qn}\overline{\zeta}_q\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\gamma_{p-11}\zeta_{p-1} & \gamma_{p-12}\zeta_{p-1} & \cdots & \gamma_{p-1\,p}\zeta_{p-1} & \overline{\gamma}_{p-1\,p+1}\overline{\zeta}_{p-1} & \cdots & \overline{\gamma}_{p-1\,n}\overline{\zeta}_{p-1}
\end{vmatrix}.$$

Вычитая из 1-го, 2-го, $\cdots$, $q$-го уравнения соответственно $(q+1)$-ое, $(q+2)$-ое, $\cdots$, $2q$-ое уравнение и разлагая определитель по первым $q$ строкам, получим

$$\Delta=2^q i^p\prod_{j=1}^{p}\delta_j t_{j0}\prod_{j=p+1}^{n}\overline{\delta}_j\overline{t}_{j0}\prod_{p+1\le l<j\le n}(\overline{\gamma}_{1j}-\overline{\gamma}_{1l})\cdot\prod_{1\le l<j\le p}(\gamma_{1j}-\gamma_{1l})\prod_{j=q}^{p-1}\zeta_j(t_0).$$

Учитывая, что

$$\gamma_{1j}-\gamma_{1l}=\frac{\lambda_j-\lambda_l}{(\sin\theta-\lambda_j\cos\theta)(\sin\theta-\lambda_l\cos\theta)},$$

получим

$$\Delta=2^q\cdot i^p\cdot\prod_{j=1}^{p}\delta_j t_{j0}\cdot\prod_{j=p+1}^{n}\overline{\delta}_j\cdot\overline{t}_{j0}\cdot\prod_{p+1\le l<j\le n}\frac{\overline{\lambda}_j-\overline{\lambda}_l}{(\sin\theta-\lambda_j\cos\theta)(\sin\theta-\lambda_j\cos\theta)}\times$$

$$\times\prod_{1\le l<j\le p}\frac{\lambda_j-\lambda_l}{(\sin\theta-\lambda_j\cos\theta)(\sin\theta-\lambda_l\cos\theta)}\cdot\prod_{j=2}^{p-1}(\alpha_j(t_0)-i\beta_j(t_0)).$$

Поскольку корни характеристического уравнения (2) простые, $\delta_j\neq 0$, $j=1,2,\cdots,n$, $t_{j0}\neq 0$, $\zeta_\nu(t_0)\neq 0$, то $\det(A(t_0)+B(t_0))\neq 0$.

Нетрудно убедиться, что $\det(A(t_0)-B(t_0))=\det\overline{(A(t_0)+B(t_0))}$. Отсюда следует, что система сингулярных интегральных уравнений (17)—(19) нормального типа, т. е. нетерова.

Индекс $\varkappa_1$ системы сингулярных интегральных уравнений (17)—(19) вычисляется по формуле

$$\varkappa_1=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma\arg\left[\frac{\det(A(t)-B(t))}{\det(A(t)+B(t))}\right]=-\frac{1}{\pi}\Delta_\Gamma\arg\det[A(t)+B(t)]=-2[(n-1)p+(n-1)q-q((q-1)-p(p-1)+l]=-2(2pq+l), \tag{19}$$

где

$$l = \sum_{j=q}^{p-1} l_j,$$

$$l_j = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg [\alpha_j(t) - i\beta_j(t)], \; j = q, \; q+1, \cdots, \; p-1.$$

Для вычисления индекса $\varkappa$ краевой задачи (1), (3), (4) заметим, что формула общего решения (11) содержит $n^2$ произвольных действительных постоянных. С другой стороны, равенства (12), (13) выполняются в фиксированной точке $\tilde{t}_0$, откуда получим $n$ действительных условий. Кроме того, мы должны учитывать, что функции $g_\nu(t)$, $\nu = 0, 1, \cdots, p-1$ не произвольные, а автоматически удовлетворяют условиям

$$\int_\Gamma g_\nu(s)\, ds = 0, \; \nu = 0, \; 1, \cdots, \; p-1.$$

Нетрудно убедиться, что эти условия необходимы и достаточны. Будем иметь всего $n$ таких действительных условий.

Имея в виду, что произвольные постоянные увеличивают, а условия уменьшают индекс краевой задачи соответствующим количеством (автоматически выполняемые условия увеличивают), получим следующую формулу для индекса краевой задачи (1), (3), (4):

$$\varkappa = \varkappa_1 + n^2 - n + n = (p-q)^2 - 2l.$$

Теорема 1 доказана.

В случае кратных корней характеристического уравнения (2) указанный метод доказательства не проходит. Однако на примере можно убедиться, что полученные результаты останутся в силе в частном случае (§ 3). Этот факт позволяет нам предположить, что и в общем случае результаты работы справедливы.

## § 3. Пример

Пусть задано уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial z^2} = 0, \; z = re^{i\theta} \tag{20}$$

в круге $|z| < 1$. Характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = i$, $p = n = 2$, $q = 0$. Краевые условия имеют вид:

$$\mathrm{Re}\,[\alpha_0(t) - i\beta_0(t)]\, u(t) = f_0(t), \; |t| = 1, \tag{21}$$

$$\mathrm{Re}\,[\alpha_1(t) - i\beta_1(t)] \frac{\partial u(t)}{\partial n} = f_1(t), \; |t| = 1, \tag{22}$$

где

$$f_0(t) \in H^2(\Gamma), \; f_1(t) \in H^1(\Gamma), \; \alpha_0(t), \; \beta_0(t) \in H^1(\Gamma), \; \alpha_1(t), \; \beta_1(t) \in H(\Gamma),$$

$$\alpha_0(t) + \beta_0(t) \neq 0, \; \alpha_1(t) + i\beta_1(t) \neq 0 \; (\Gamma \text{ — окружность } |z| = 1).$$

Предположим, что

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg [\alpha_0(t) - i\beta_0(t)] = l_0 + 1; \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg [\alpha_1(t) - i\beta_1(t)] = l_1 + 1.$$

Решение краевой задачи (20)—(22) отыскиваем в классе функций

$$u(x, y) \in H^1(D + \Gamma) \quad (D \text{ — круг } |z| \leqslant 1).$$

Общее решение уравнения (20) имеет вид

$$u(x, y) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z), \tag{23}$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ произвольные аналитические в $D$ функции, которые однозначно определяются через $u(x, y)$. Подставляя $u(x, y)$ из (23) в краевые условия (21), (22) и учитывая, что $t\bar{t} = 1$ на $\Gamma$, будем иметь:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\dfrac{\alpha_0(t) - i\beta_0(t)}{t}[t\varphi(t) + \psi(t)] = f_1(t), \\ \operatorname{Re}\dfrac{\alpha_1(t) - i\beta_1(t)}{t}[t^2\varphi'(t) + t\psi'(t) + \psi(t)] = -f_1(t). \end{cases}$$

По задаче Римана Гильберта [4] отсюда получим:

$$\begin{cases} z\cdot\varphi(z) + \psi(z) = F_0(z), & |z| \leqslant 1, \\ z^2\varphi'(z) + z\cdot\psi'(z) + \psi(z) = F_1(z), \end{cases} \tag{24, 25}$$

где $F_0(z)$, $F_1(z)$ — вполне определенные аналитические в $D$ функции (об условиях разрешимости говорим ниже).

Из (24) будем иметь:

$$\begin{aligned} \psi(z) &= F_0(z) - z\varphi(z), \\ \psi'(z) &= F_0'(z) - \varphi(z) - z\varphi'(z). \end{aligned} \tag{26}$$

Подставляя значения $\psi(z)$ и $\psi'(z)$ в (25), получим

$$z^2\varphi'(z) + zF_0'(z) - z\varphi(z) - z^2\varphi'(z) + F_0(z) - z\varphi(z) = F_1(z),$$

откуда

$$\varphi(z) = \frac{F_1(z) - F_0(z) - zF_0'(z)}{2z} = F_3(z). \tag{27}$$

Чтобы $\varphi(z)$ была аналитична, необходимо и достаточно выполнения условия $F_0(0) = F_1(0)$, которое равносильно двум действительным условиям:

$$\operatorname{Re} F_0(0) = \operatorname{Re} F_1(0), \tag{28}$$

$$\operatorname{Im} F_0(0) = \operatorname{Im} F_1(0). \tag{29}$$

Подставляя найденное значение $\varphi(z)$ из (27) в (26), получим $\psi(z)$:

$$\psi(z) = \frac{F_1(z) + (F_0(z) - zF_0'(z)}{2} = F_4(z).$$

Решение краевой задачи (20)—(22) получим по формуле (23)

$$u(x, y) = F_3(z) + \bar{z}F_4(z).$$

Рассмотрим теперь возможные случаи:

а) $l_0 \geqslant 1$, $l_1 \geqslant 1$. Однородная краевая задача (20)—(22) не имеет ненулевых решений, а для разрешимостн неоднородной краевой задачи необходимо и достаточно выполнение $2l_0 - 1 + 2l_1 - 1 + 2 = 2(l_0 + l_1)$ условий (с учетом (28), (29)). Индекс $\varkappa$ будет равен:

$$\varkappa = 0 - 2(l_0 + l_1) = -2(l_0 + l_1).$$

б) $l_0 \geqslant 1$, $l_1 \leqslant 0$. В этом случае однородная задача имеет $-2l_1 + 1$ линейно независимых решений, а количество условий разрешимости неоднородной задачи $2l_0 - 1 + 2 = 2l_0 + 1$,

$$\varkappa = -2l_1 + 1 - 2l_0 - 1 = -2(l_0 + l_1).$$

в) $l_0 \leqslant 0$, $l_1 \geqslant 1$. Аналогично случаю б) получим

$$\varkappa = -2l_0 + 1 - (2l_1 + 1) = -2(l_0 + l_1).$$

г) $l_0 \leqslant 0$, $l_1 \leqslant 0$. Однородная задача имеет $-2l_0 + 1 - 2l_1 + 1 = -2(l_0 + l_1) + 2$ линейно независимых решений, всего 2 условия, $\varkappa = -2(l_0 + l_1)$.

Вычислим теперь $\varkappa$ по формуле $\varkappa = (p - q)^2 - 2l$:

$$\varkappa = 4 - 2(l_0 + 1 + l_1 + 1) = -2(l_0 + l_1).$$

Налицо полное совпадение результатов.

Дифференцируя (24) по $\theta$ будем иметь:

$$iz\varphi(z) + iz^2\varphi'(z) + iz\psi'(z) = izF_0'(z). \tag{30}$$

Из (25) и (30) видно, что если ограничиваться только главными сингулярными частями (как при доказательстве теоремы 1), то однородная краевая задача (20)—(22) может оказаться не нетеровой. Следовательно, в случае кратких корней следует рассматривать еще слагаемые с логарифмическими особенностями.

Пользуясь случаем, автор благодарит проф. Н. Е. Товмасяна за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Кироваканский филиал ЕрПИ Поступила 3.IV 1991

**Վ. Վ. ԱՍԱՏՐՅԱՆ.** Բարձր կարգի ոչ ճշգրիտ էլիպտիկ հավասարման համար մի եզրային խնդրի մասին *(ամփոփում)*

*Դիրիխլեի խնդիրը կոմպլեքս հաստատուն գործակիցներով*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\partial^n u(x, y)}{\partial y^{n-k} \partial x^k} = 0 \tag{1}$$

*բարձր կարգի ոչ ճշգրիտ էլիպտիկ հավասարման համար Նետերի խնդիր չէ։ Հոդվածում դրվում է նոր եզրային խնդիր (1) հավասարման համար (Դիրիխլեի խնդրի անալոգը)։ Բնութագրիչ հավասարման պարզ արմատների դեպքում ապացուցվում է այդ խնդրի նետերությունը։ Ստացված է նաև բանաձև խնդրքը հաշվելու համար։*

V. V. ASATRIAN. *About a boundary-value problem for high-order inaccuracy elliptic equation* (summary)

The Dirichlet's problem for elliptic equation

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\partial^n u(x, y)}{\partial y^{n-k} \partial x^k} = 0 \qquad (1)$$

with no Neterov's constant complex coefficients.

The paper considers the new boundary-value problem for equation (1) (analogue of Dirichlet's problem). In case of simple roots of characteristic equations the neterovity of this problem is constructed, as well as the formula for index computation is obtained.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Бицадзе.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М., «Наука», 1966, 109—117.
2. *Н. Е. Тоомасян.* Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами. Дифференциальные уравнения, 1966, № 1, 3—23, № 2, 163—171.
3. *Р. А. Алиханян.* Внешняя задача Дирихле для эллиптических уравнений высшего порядка. 7Б418. ДЕП., № 3, Ар—85.
4. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, М., «Наука», 1968, 47—50, 140—156, 224—232.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 5, 1991 Математика

УДК 517.95

Г. Р. ОГАНЕСЯН

# О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ВЕСОВОЙ ЗАДАЧИ КОШИ И НОВАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ЭНЕРГИЙ

В работах [1], [2] было предложено для сингулярных на границе уравнений в частных производных (УЧП) вместо данных Коши задавать вронскианы от Фурье-образа решения и некоторых весовых функций. Продолжая изучение этой постановки начальной задачи, в настоящей статье мы приводим обобщение известной теоремы И. Г. Петровского (см. [5], [6]) о необходимых и достаточных условиях корректности задачи Коши для системы УЧП первого порядка с коэффициентами, зависящими только от временной переменной, на случай сингулярных систем. Так как условия корректности, фигурирующие в теореме И. Г. Петровского, даны в терминах фундаментальной системы решений (ФСР) и являются труднопроверяемыми, то мы изучаем также достаточные условия единственности решения начальной задачи с заданными вронскианами, накладываемые непосредственно на коэффициенты уравнения второго порядка.

Эти условия получаются при доказательстве теоремы единственности энергетическим методом, который отличается от обычного тем, что в качестве плотности энергии мы используем сумму квадратов модулей вронскианов. Применяя полученные условия единственности к вырождающимся сингулярным уравнениям получаем условия, существенно отличающиеся от известных условий корректности вырождающихся гиперболических уравнений (см. [3], [4]). Это объясняется тем, что допускаемые нами сингулярности позволяют избавиться от точек поворота, которые возникают в регулярных слабо гиперболических уравнениях ([4]).

## § 1. Условия корректности вронскианной начальной задачи

Рассмотрим систему

$$u_t = A(t, D_x)\, u(t, x),\ t \in ]0,\ T[,\ x \in R^n, \tag{1}$$

где $u = colon\,(u_1, \cdots, u_m)$ — вектор-столбец, $A$ — $m \times m$ матрица, элементами которой являются дифференциальные операторы с бесконечно дифференцируемыми на $]0, T]$ коэффициентами, зависящими только от $t$. Допускается неограниченность этих коэффициентов при $t \to 0$.

Обозначим через $v_j(t, \xi)$ ФСР системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с параметром $\xi$ (получаемые из (1) применением $x$-преобразования Фурье):

$$\partial_t v_j = A(t, \xi)\, v_j(t, \xi),\ t \in ]0,\ T[, \tag{2}$$

$$v_j(T, \xi) = e_j,\ j = \overline{1,\ m}. \tag{2'}$$

Здесь $e_j = colon\,(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$, где единица стоит на $j$-том месте. Пусть $\Phi(t, \xi)$ — матрицант уравнений (2), т. е. матрица, составленная из $v_j(t, \xi)$ и являющаяся решением матричной задачи Коши

$$\partial_t \Phi(t, \xi) = A(t, \xi)\, \Phi(t, \xi),\ t \in ]0,\ T[, \tag{3}$$

$$\Phi(T, \xi) = I \text{ — единичная матрица.}$$

Полагая $\Phi$ обратимой матрицей на $]0,\ T] \times R^n$ (если след матрицы $A(t, \xi)$ равен нулю, то, в силу формулы Лиувилля, матрицу $\Phi$ можно выбрать так, чтобы ее определитель равнялся бы единице, откуда автоматически следует обратимость $\Phi$) начальные условия для системы (1) ставим в виде

$$\lim_{t \to 0} |\Phi^{-1}(t, \xi)\, \hat{u}(t, \xi)| = \hat{\psi}(\xi), \tag{4}$$

где

$$\hat{u}(t, \xi) = \int e^{ix\xi} u(t, x)\, dx,\ x \in R^n. \tag{5}$$

Отметим, что в (4) вместо $\Phi$ можно (при некоторых условиях) использовать приближенные или асимптотические решения уравнения (3) (см. [1], [2]). Обозначим через $H^s = H^s(R^n_x)$ — пространство Соболева, $H^\infty = \cap H^s$. Пусть $(H^\infty)^m$ — пространство вектор-функций $g(x)$, каждая компонента которой принадлежит пространству Соболева $H^\infty$.

Начальную задачу (1), (4) назовем корректной (хорошо поставленной), если для каждого вектора $\psi(x) \in (H^\infty)^m$ существует единственное решение $u \in C^2(]0,\ T],\ (H^\infty)^m)$ этой задачи, которое непрерывно зависит от $\psi(x)$. Последнее означает, что для каждых $\varepsilon > 0$, $l \in N$ ($N$ — множество натуральных чисел) существуют такие числа $\delta > 0$ и $p \in N$, что если $\|\psi\|_p \leqslant \delta$, то

$$\max_{[0,\ \tau]} \|\Phi^{-1}(t, \cdot)\, \hat{u}(t, \cdot)\|_l \leqslant \varepsilon.$$

Здесь $\|\cdot\|_p$ — норма пространства Соболева $(H^p)^m$.

Теорема Петровского об условиях корректности задачи Коши для регулярной системы (1) непосредственно обобщается на случай вронскианной начальной задачи (4) для сингулярной системы (1).

Теорема 1. *Пусть $v_j(t, \xi)$ — решение задачи Коши* (2), (2'). *Тогда для корректности начальной задачи* (1), (4) *необходимо и достаточно, чтобы для любого фиксированного $t \in ]0,\ T]$ существовали постоянные $C$ и $p$ (не зависящие от $\xi \in R^n$) такие, что*

$$|v_j(t, \xi)| \leqslant C(t)(1 + |\xi|)^p\ ,\ j = 1,\ m,\ t \in ]0,\ T[,\ \xi \in R^n, \tag{6}$$

*здесь*

$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}.$$

Академия наук Армянской ССР

Доказательство этой теоремы почти не отличается от доказательства теоремы Петровского, поэтому оно опускается.

Если $A(t, \xi)$ — регулярная матрица (т. е. бесконечно дифференцируема на $[0, T]$ по $t$), то единичная матрица является приближенным решением уравнения (3) (теорема Н. Левинсона) и, выбирая $\Phi \equiv I$, из (4) мы получаем обычные данные Коши. При этом теорема 1 превращается в обычную теорему Петровского.

Отметим, что единственность решения задачи (1), (4) имеет место очевидным образом и без предположений (6).

## § 2. Условия единственности вронскианной начальной задачи

Рассмотрим эволюционное уравнение

$$u_{tt} + Q(t, D_x)\, u(t, x) = 0,\ x \in R^n,\ t \in ]0, T[, \tag{7}$$

где $Q$ — дифференциальный оператор порядка $m$ с символом $\tilde{q}(t, \xi)$ не зависящим от $x$ и неограниченным при $t \to 0$.

Обозначим через $(\psi_1, \psi_2)$ ФСР уравнения

$$\hat{u}_{tt} + \tilde{q}(t, \xi)\, \hat{u}(t, \xi) = 0, \tag{8}$$

получаемого из (7) применением $x$-преобразования Фурье.

Начальные данные для уравнения (7) будем ставить в виде

$$\lim_{t \to 0} \frac{W(u, \psi_j)}{W(\psi_1, \psi_2)} = f_j(\xi),\ j = 1, 2. \tag{9}$$

Пусть $\tilde{q}(t, \xi)$ является комплекснозначной функцией, представимой в виде

$$\tilde{q}(t, \xi) = q(t, \xi) + q_0(t, \xi) \tag{8'}$$

(в качестве $q_0$ можно, например, взять $i \operatorname{Im} \tilde{q}$) и удовлетворяющей условиям:

1) $q(t, \xi) \neq 0$ при $t \in ]0, T]$,

2) существует ветвь корня $\sqrt{q(t, \cdot)}$ класса $C^2(]0, T])$ такая, что

$$\operatorname{Re} \sqrt{q(t, \xi)} \geqslant 0,\ t \in ]0, T]),\ \xi \in R^n,$$

3) $q_0 q^{-\frac{1}{2}} + B(t, \cdot) \in L_1([0, T])$, разномерно по $\xi \in R^n$,

$$B \equiv q^{-\frac{1}{2}} \left(q^{-\frac{1}{2}}\right)_{tt},$$

4) $(\operatorname{Im} q)/\sqrt{|q| + \operatorname{Re} q} \in L_1([0, T])$, равномерно по $\xi \in R^n$,

5) для некоторого положительного числа $\varepsilon$ справедливо неравенство $|1 - S^2| \geqslant \varepsilon$ для всех $t \in ]0, T]$, $\xi \in R^n$, здесь $S = -\frac{1}{2}\left(q^{-\frac{1}{2}}\right)_t$.

6) $q_0 q^{-\frac{1}{2}}$, $S_t$, $\operatorname{Im} \sqrt{q(1 - S^2)} \in L_1([0, T])$ равномерно по $\xi \in R^n$.

Отметим, что выражение $-2\sqrt{q}\, B$ совпадает с шварциа он $[\sqrt{q}, t]$ от

$$\rho = \int_T^t \sqrt{q(s)}\,ds; \quad -2\sqrt{q}\,B = -2\sqrt{\rho_t}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho_t}}\right)_{tt} = \frac{\rho_{ttt}}{\rho_t} - \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\rho_{tt}}{\rho_t}\right)^2 = \{\rho, t\}.$$

Из формул Кейли

$$\{\rho,\ t) = \tau_t^2\{\rho, \tau\} + \{\tau, t), \quad \{\rho, t\} = -\rho_t^2\{t, \rho\}$$

получаем формулу

$$2\int_0^T |B(t,\ \cdot)|\,dt = \int_0^T \left|\frac{\{\rho,\ t\}}{\rho_t}\right| dt = \int_{-\infty}^{0} \{t,\ \rho\}\,d\rho,$$

так как $\rho(0) = -\infty$.

Если выполнены условия 1), 2), то приближенными решениями уравнения (8) являются функции Грина—Лиувилля:

$$\varphi_j(t, \xi) = q^{-\frac{1}{4}}(t, \xi)\exp\left\{\pm i\int_T^t G(s, \xi)\,ds\right\},\ j = 1, 2, \qquad (10)$$

где $G = \sqrt{q(t, \xi)}$, если выполнены условия 3), 4) и $G = \sqrt{q - \frac{q_t^2}{16\,q^2}}$ если выполнены условия 5), 6).

Начальные условия (9) неэффективны, так как ФСР $\{\psi_j(t, \xi)\}_{j=1,2}$ уравнения (8) известна лишь в некоторых специальных случаях. Поэтому вместо (9) рассмотрим начальные условия

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{W(u,\ \varphi_j)}{W(\varphi_1,\ \varphi_2)} = f_j(\xi),\ j = 1, 2, \qquad (11)$$

где $\varphi_j(t, \xi)$ задаются явными формулами (10).

Теорема 2. *Если выполнены условия* 1) — 4) *и существует решение задачи* (7), (11) ($G = \sqrt{q}$) *класса* $C^2(]0, T], H^2)$, *то оно единственно.*

Условия теоремы 2 упрощаются, если $q$ — вещественный символ.

Следствие 1. Если $q(t, \cdot)$ — положительная функция класса $C^2(]0, T])$ и

$$\int_0^T \left|\frac{2\,{}_0 + \{\rho,\ t\}}{\sqrt{q}}\right| dt < \infty,\ \xi \in R^n,\ \rho = \int_T^t \sqrt{q(s, \cdot)}\,ds,, \qquad (A)$$

то утверждение теоремы 2 остается справедливым.

Теорема 3. *Если выполнены условия* 1), 2), 5), 6) *и существует решение* $u \in C^2(]0, T], H^2)$ *задачи* (7), (11) $\left(G = \sqrt{q - \frac{q_t^2}{16\,q^2}}\right)$, *то оно единственно.*

Замечание 1. В отличие от условий теоремы 1, в которой накладывается условие (*) на ФСР уравнения (3), условия 1) - 6) теорем 2, 3 легко проверить, так как они накладываются на символ $q$.

Замечание 2. Если при $t \in ]0, T]$, $\xi \in R^n$,

$S(t, \cdot)$ — монотонна, $q$ — вещественная функция и $|S(t, \xi)| < 1$, (12)

то условия, 5), 6), 2) теоремы 3, очевидно, выполнены.

Замечание 3. Заменой

$$\omega(\tau) = \sqrt{\tau_t}\,\widehat{u}(t, \cdot);\ t'(\tau), \tau'(t) \neq 0,\ t \in ]0, T];\ t = 0 \to \tau = \tau_0,$$

задача (8), (11) преобразуется в задачу

$$\omega_{\tau\tau} + t_\tau^2\left(\widetilde{q} + \frac{|\tau, t|}{2}\right)\omega(\tau) = 0,$$

$$\lim_{\tau \to \tau_0} \frac{W(\tau;\ \omega,\ \sqrt{t_\tau}\,\varphi_j)}{W(\tau;\ \sqrt{t_\tau}\,\varphi_1,\ \sqrt{t_\tau}\,\varphi_2)} = \lim_{t \to 0} \frac{W(t,\ \widehat{u},\ \varphi_j)}{W(t,\ \varphi_1,\ \varphi_2)}.$$

При этом условия следствия 1 принимают вид

$$t_\tau^2\left(q + \frac{\{\tau, t\}}{2}\right\} > 0,\ \int_0^T \left|\frac{2q_0 + \tau_t^2\,\{\sigma, \tau\}}{\sqrt{\sigma_t}}\right| dt < \infty,\ \sigma = \int_T^t \sqrt{q(s) + \frac{\{\tau, s\}}{2}}\,ds. \tag{A'}$$

Теорема 4. *Если $q(t, \cdot)$ — вещественная функция класса $\underline{C^2}(]0, T])$, удовлетворяющая условиям* (А) *и*

$$q \geqslant r(t) > 0,\ t \in [0, T];\ \lim_{t \to 0} \{q_t q^{-\frac{3}{2}}\} = 0, \tag{Б}$$

*то задача* (7), (11) ($G = \sqrt{q}$) *корректна.*

В качестве приложения рассмотрим некоторые уравнения, к которым применимы теоремы 2—4.

Пример 1. Рассмотрим вырождающееся и сингулярное при $t = 0$ гиперболическое уравнение

$$u_{tt} - \lambda_1^2(t)\,u_{xx} - \lambda_2^2(t)\,u_{yy} - i\sigma_1(t)\,u_x - i\sigma_2(t)\,u_y + r(t)\,u = 0, \tag{13}$$

при $t \in ]0, T[$, $(x, y) \in R^2$, $\lambda_j$, $\sigma_j$, $r(t) \in C^2([0, T])$, $j = 1, 2$.

Здесь $\sigma_1 = \rho_1(t) + i\tau_1(t)$, $\sigma_2 = \rho_2(t) + i\tau_2(t)$, $r(t)$, $\lambda_j(t)$, $\rho_j(t)$, $\tau_j(t)$ — — вещественные функции.

Применяя к уравнению (13) $(x, y)$-преобразование Фурье, получим уравнение (8), где

$$\widetilde{q} = q + q_0,\ q = \xi^2\lambda_1^2 + \eta^2\lambda_2^2 + \xi\rho_1 + \eta\rho_2 + r, \tag{14}$$

$$q_0 = i\xi\tau_1 + i\eta\tau_2.$$

Пусть выполнены следующие условия:

$$r \geqslant \frac{\rho_1^2}{2\lambda_1^2} + \frac{\rho_2^2}{2\lambda_2^2}, \tag{15}$$

$$\frac{\tau_j}{\lambda_j},\ \sqrt{\frac{\lambda_j}{r}}\left(\lambda_j^{-\frac{1}{2}}\right)_{tt},\ \frac{18\lambda_1\lambda_2\lambda_{1t}\lambda_{2t} - (\lambda_1^2\lambda_2^2)_{tt}}{\lambda_1^2\lambda_2^2\sqrt{r}},$$

$$\frac{9\lambda_j\lambda_{jt}r_t-(r\lambda_j^2)_{tt}+5\rho_{jt}^2-4\rho_j\rho_{jtt}}{r\sqrt{r}\,\lambda_j^2},\quad \frac{9\rho_{1t}\rho_{2t}-2(\rho_1\rho_2)_{tt}}{\lambda_1\lambda_2 r\sqrt{r}},$$

$$\frac{9\lambda_k\lambda_{kt}\rho_{jt}-(\rho_j\lambda_k^2)_{tt}}{r\lambda_1^{6-2k-j}\lambda_2^{2k+j-3}},\quad \frac{9\rho_{jt}r_t-2(r\rho_j)_{tt}}{r^2\lambda_j},$$

$$r^{-\frac{1}{4}}(r^{-\frac{1}{4}})_{tt}\in L_1([0,\ T]), \tag{16}$$

где $k,\ j=1,\ 2$.

Следствие 2. Пусть выполнены условия (15), (16). Тогда если существует решение $u(t.\ x)\in C^1([0,\ T],\ H^2)$ задачи (13), (11) (с весовыми функциями (10), $G=\sqrt{q}$), то оно единственно.

Следствие 3. Пусть выполнены условия (15), (16) и

$$\lim_{t\to 0}\frac{r_t}{r\sqrt{r}}=\lim_{t\to 0}\frac{\lambda_{jt}}{\lambda_j\sqrt{r}}=\lim_{t\to 0}\frac{\rho_{jt}}{r\lambda_j}=0,\ j=1,2. \tag{17}$$

Тогда задача (13), (11) (с весовыми функциями (10), $G\sqrt{q}$ корректна.

Замечание 4. Если $\lambda_j(t)$, $\sigma_j(t)$, $r(t)$ являются степенными функциями от $t$, т. е. имеют вид $t^{\gamma}$, $\gamma\in R$, то условия корректности (15), (16), (17) упрощаются и принимают вид

$$r(t)\geqslant\max\left\{t^{-2-\varepsilon},\ \frac{\rho_1^2}{2\lambda_1^2}+\frac{\rho_2^2}{2\lambda_2^4}\right\},\ \varepsilon>0, \tag{15}$$

$$\frac{\tau_j}{\lambda_j}(t)\in L_1([0)\ T]),\ j=1,2. \tag{16}$$

Пример 2. Для уравнения

$$u_{tt}+\mu^2(t)\,u_{xx}+\lambda^4 u_{xxxx}+r(t)\,u=O,\ t\in]0,\ T[,\ x\in R, \tag{18}$$

имеем

$$\bar{q}=q=\xi^4\lambda^4(t)-\xi^2\mu^2(t)+r(t). \tag{19}$$

Вводя вспомогательные функции $\alpha_j(t)$ по формуле

$$5q_t^2-4qq_{tt}=\sum_{j=1}^{8}\alpha_j(t)\xi^j, \tag{20}$$

нетрудно убедиться, что из условий

$$\mu,\ \lambda,\ r(t)\in C^2([0,\ T]),\ r(t)\geqslant\frac{\mu^4(t)}{8\lambda^4(t)}, \tag{21}$$

$$\alpha_j(t)\lambda^{-j}(t)r^{\frac{j}{4}-\frac{5}{2}}(t)\in L_1([0,\ T]),\ j=\overline{1,\ 8}, \tag{22}$$

следуют все предположения следствия 1.

Пример 3. Для уравнения

$$u_{tt}+(-1)^m\partial_x^{2m}u+\frac{\alpha}{t^2}u=0,\ t\in]0,\ T[,\ x\in R,\ m=1,\ 2,\cdots \tag{23}$$

при $\alpha > \frac{1}{4}$ справедлива теорема 3, так как выполнены все условия замечания 2.

Пример 4. Классическая задача Коши с начальными условиями при $t = 0$ для слабо гиперболического уравнения

$$u_{tt} - \lambda^2(t)\, u_{xx} = \lambda_t(t)\, u_x, \quad t \in ]0,\ T[,\ x \in R, \tag{24}$$

по теореме Петровского (см. теорему 1) корректна для любой функции $\lambda(t) \in G(]0,\ T])$, например, для

$$\lambda(t) = t^2 \sin \ln t, \tag{25}$$

так как для (24) явно вычисляются решения двойственного уравнения:

$$\psi_1(t, \xi) = \exp\left(i\xi \int_0^t \lambda(s)\, ds\right),\ \psi_2 = \psi_1(t) \int_T^t \frac{ds}{\psi^2(s)}.$$

Однако условия следствия 1 для функции (25) не выполнены.

## § 3. Доказательство теорем

Доказательство теорем 2, 3 проведем энергетическим методом, причем в качестве плотности энергии будем использовать, вместо классической формулы, выражение

$$E(t, \xi) = |u_1|^2 + |u_2|^2,\ u_j \equiv W(\widehat{u},\ \varphi_j),\ j = 1,\ 2. \tag{26}$$

Выбор этой формулы объясняется тем, что если $\{\varphi_j(t, \xi)\}$ является ФСР уравнения (8), то вронскианы $W(\widehat{u},\ \varphi_j)$ не зависят от времени и поэтому справедлив закон сохранения энергии:

$$\partial_t E(t, \xi) = 0,\ t \in ]0,\ T[,\ \xi \in R^n \setminus 0. \tag{27}$$

Отметим, что просто вронскианы в качестве энергии брать нельзя, так как тогда не будет выполнено условие положительности энергии.

Если же $\varphi_{1,2}$ — приближенные решения уравнения (8), например, решение Грина—Лиувилля (10), то закон сохранения (27) уже не выполняется. Тем не менее, мы покажем, что приближенный закон сохранения, справедливый в этом случае, все же позволяет доказать, при некоторых условиях на $q$ единственность решения задачи (7), (11).

Замечание 5. Для волнового уравнения $u_{tt} = \Delta u$, где $\Delta$ — оператор Лапласа по пространственным переменным $x \in R^n$, имеем

$$\varphi_1 = \frac{i}{\sqrt{2|\xi|}} \exp(it|\xi|),\ \varphi_2 = \frac{i}{\sqrt{2|\xi|}} \exp(-t|\xi|),\ \xi \in R^n \setminus 0,$$

$$W(\varphi_1,\ \varphi_2) = 1,\ W(\varphi_{1,\ 2},\ \widehat{u}) = \varphi_{1,2}(\widehat{u_t} \mp i|\xi|\,\widehat{u}),$$

и наше определение (26) плотности энергии

$$E = |W(\varphi_1, \widehat{u})|^2 + |W(\varphi_2, \widehat{u})|^2 = \frac{1}{|\xi|}(|\widehat{u}_t|^2 + |\xi\widehat{u}|^2)$$

совпадает с классическим.

Доказательство теоремы 2. Из обозначений (26) имеем

$$\widehat{u} = \frac{\varphi_1 u_2 - \varphi_2 u_1}{W(\varphi_1, \varphi_2)}, \quad \widehat{u}_t = \frac{\varphi_{1t} u_2 - \varphi_{2t} u_1}{W(\varphi_1, \varphi_2)}, \tag{28}$$

поэтому функции $u_{1,2}$ удовлетворяют системе уравнений

$$u_{1t} = \left(\frac{\varphi_{1tt}}{\varphi_1} + \bar{q}\right)\frac{\varphi_1\varphi_2}{W(\varphi_1, \varphi_2)}\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}u_2 - u_1\right), \tag{29}$$

$$u_{2t} = \left(\frac{\varphi_{2tt}}{\varphi_2} + \bar{q}\right)\frac{\varphi_1\varphi_2}{W(\varphi_2, \varphi_1)}\left(u_2 - \frac{\varphi_2}{\varphi_1}u_1\right).$$

Если в качестве $\varphi_{1,2}$ выбрать функции (10), то

$$\frac{\partial_t^2\varphi_{1,2}}{\varphi_{1t\,2}} = -G^2 \pm \frac{iq}{2G}\left(\frac{G^2}{q}\right)_t - \frac{\sqrt{q}}{4}\left(\frac{q_t}{q^{3/2}}\right)_t - \frac{q_t^2}{16q^2}. \tag{30}$$

Выбрав, далее, $G = \sqrt{q}$, получим из (29) ($W(\varphi_1, \varphi_2) = 2i$) систему

$$u_{1t} = \frac{B}{2i}\left(u_2\frac{\varphi_1}{\varphi_2} - u_1\right), \quad u_{2t} = \frac{B}{2i}\left(u_2 - \frac{\varphi_2}{\varphi_1}u_1\right). \tag{31}$$

Из условия 4) теоремы 2:

$$\operatorname{Im}\sqrt{q} = \frac{\operatorname{Im} q}{\sqrt{2(|q| + \operatorname{Re} q)}} \in L_1[0, T]$$

следует, что

$$\left|\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right|, \left|\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right| < \operatorname{cons} t, \ t \in ]0, T], \ \xi \in R^n, \tag{32}$$

поэтому умножая уравнения (31) на $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$, соответственно, и прибавляя к ним комплексно сопряженные выражения, получаем некоторые соотношения, оценивая которые, получаем оценку

$$\partial_t E(t, \xi) \leqslant c|B(t, \xi)| \cdot E(t, \xi). \tag{33}$$

Применяя к этому неравенству лемму Гронуолла получаем основную энергетическую оценку

$$E(t, \xi) \leqslant cE(0, \xi), \ t \in ]0, T], \ \xi \in R^n, \tag{34}$$

из которой и следует теорема 2.

Доказательство теоремы 3. Выбрав в формуле (10)

$$G = \sqrt{q(1 - S^2)}, \ S = \frac{q_t}{4q\sqrt{q}}, \tag{35}$$

из (30) получаем

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{2iG}{\sqrt{q}} = 2i\sqrt{1 - S^2},$$

$$\left(\frac{1}{\varphi_{1,2}}\partial_t^2\varphi_{1,2}+\overline{q}\right)\varphi_1\varphi_2=\frac{q_0}{\sqrt{q}}-S_t\left(1\pm\frac{iS}{\sqrt{1-S^2}}\right).$$

Отсюда и из системы (29) получаем систему уравнений

$$u_{1t}=K_1(t,\cdot)\left(u_1-\frac{\varphi_1}{\varphi_2}u_2\right),\quad u_{2t}=K_2(t,\cdot)\left(u_1\frac{\varphi_1}{\varphi_2}-u_2\right),$$

$$K_{1,2}=\frac{1}{2i\sqrt{1-S^2}}\left[\frac{q_0}{\sqrt{q}}-S_t\left(1\pm\frac{iS}{\sqrt{1-S^2}}\right)\right]. \tag{36}$$

Отметим, что из условия 5) теоремы 3 следует, что

$$\left|\frac{S}{\sqrt{1-S^2}}\right|\text{const},\ t\in]0,\ T],\ \xi\in R^n. \tag{37'}$$

Далее из условия 6) теоремы 3

$$\operatorname{Im}\sqrt{q-\frac{q_t^2}{16q^2}}\in L_1[0,\ T],\ \xi\in R^n,$$

следуют (ввиду (10)) неравенства (32).

Как и при доказательстве теоремы 2 из системы (36) получаем оценку

$$\partial_t E\leqslant K(t,\cdot)E(t,\cdot),\ K(t,\cdot)=|K_1(t)|+|K_2(t)|. \tag{38}$$

Из условия теоремы 3 и (37) следует, что $K(t)\in L_1[0,\ T]$, поэтому применяя к (38) лемму Гронуолла, получаем оценку (34) и вместе с ней утверждение теоремы 3.

Доказательство теоремы 4. Для доказательства теоремы достаточно, в силу теоремы 1, проверить выполнение условий (6) для ФСР $\{\psi_j\}_{j=1,2}$ уравнения (8) и эквивалентность начальных условий (9) и (11).

Из условий (А), (Б) по теореме о ВКБ оценках (см. [7]) следует существование таких линейно независимых решений $\psi_{1,2}(t,\xi)$ уравнения (8), что

$$\partial_t^k\psi_j(t,\xi)=(1+\varepsilon_{kj}(t))\,\partial_t^k\varphi_j(t,\xi), \tag{39}$$

$$\lim_{t\to 0}\varepsilon_{kj}(t)=0,\ k=0,\ 1,\ j=1,\ 2, \tag{39'}$$

где $\varphi_{1,2}(t,\xi)$ — функции (10) с $G=\sqrt{q}$.

Отсюда следует, что условия Петровского (6) для $\psi_{1,2}$ выполнены, так как они выполнены для функций (10).

Из (39) и легко проверяемых неравенств

$$|\varphi_k\varphi_j^{(k)}(t)|<\text{const},\ k,\ j=1,\ 2, \tag{40}$$

непосредственным вычислением доказывается соотношение

$$\lim_{t\to 0}\frac{W(\widehat{u},\ \varphi_j)}{W(\varphi_1,\ \varphi_2)}=\frac{W(\widehat{u},\ \psi_j)}{W(\psi_1,\ \psi_2)},$$

из которого следует эквивалентность начальных условий (6) и (9).

Доказательство следствия 2. Пусть выполнено неравенство (15), тогда выделением полных квадратов доказывается оценка

$$q \geqslant \max\left\{\frac{r(t)}{2},\ \frac{\xi^2\lambda_1^2+\eta^2\lambda_2^2}{2}\right\}, \tag{41}$$

откуда следует выполнение условий положительности $q$ следствия 1.

Если

$$\frac{\tau_j(t)}{\lambda_j(t)} \in L_1([0,\ T]), \tag{42}$$

то

$$\left|\frac{q_0}{\sqrt{q}}\right| \leqslant \frac{|\xi\tau_1+\eta\tau_2|}{\sqrt{\xi^2\lambda_1^2+\eta^2\lambda_2^2}} \leqslant \sqrt{2}\left(\left|\frac{\tau_1}{\lambda_1}\right|+\left|\frac{\tau_2}{\lambda_2}\right|\right) \in L_1([0.\ T]). \tag{43}$$

Так как $q(t,\ \xi,\ \eta)$ — многочлен второго порядка по $\xi$ и $\eta$, то можно ввести вспомогательные функции $\alpha_{ij}(t)$ по формуле:

$$5q_t^2-4qq_{tt}=\sum \alpha_{ij}\xi^i\eta^j,\ 0\leqslant i+j\leqslant 4. \tag{44}$$

Если эти функции удовлетворяют условиям

$$\lambda_1^{-i}\lambda_2^{-j}r^{\frac{i+j-5}{2}}\alpha_{ij}(t)\in L_1(0,\ T],\ 0\leqslant i,\ j\leqslant 4, \tag{45}$$

то

$$\frac{\{\rho,\ t\}}{\sqrt{q}}=\frac{5q_t^2-4qq_{tt}}{16q^{5/2}}\in L_1([0,\ T]), \tag{46}$$

т. е. условие (А) следствия 1 также выполнено. Действительно, условие (46) следует из оценки

$$\left|\frac{5q_t^2-4qq_{tt}}{16q^{5/2}}\right| \leqslant c\sum \frac{\alpha_{ij}}{|\xi\lambda_1|^i\cdot|\eta\lambda_2|^j r^{\frac{5-i-j}{2}}}.$$

Из тождества (44) для функции $\alpha_{ij}$ получаем следующие выражения

$$\alpha_{40}=4\lambda_1^2(5\lambda_{1t}^2-(\lambda_1^2)_{tt})=16\lambda_1^{9/2}(\lambda_1^{-\frac{1}{2}})_{tt},$$

$$\alpha_{22}=4\left[18\lambda_1\lambda_{1t}\lambda_2\lambda_{2t}-(\lambda_1^2\lambda_2^2)_{tt}\right],$$

$$\alpha_{04}=16\lambda_2^{9/2}(\lambda_2^{-\frac{1}{2}})_{tt},\ \alpha_{30}=4\left[9\lambda_1\lambda_{1t}\rho_{1t}-(\rho_1\lambda_1^2)_{tt}\right],$$

$$\alpha_{03}=4\left[9\lambda_2\lambda_{2t}\rho_{2t}-(\rho_2\lambda_2^2)_{tt}\right],$$

$$\alpha_{21}=4\left(9\lambda_1\lambda_{1t}\rho_{2t}-(\rho_2\lambda_1^2)_{tt}\right],\ \alpha_{12}=4\left[9\lambda_2\lambda_{2t}\rho_{1t}-\rho_1\lambda_2^2)_{tt}\right],$$

$$\alpha_{20}=4\left[9\lambda_1\lambda_{1t}r_t-(r\lambda_1^2)_{tt}\right]+16\rho_1^{\frac{9}{4}}(\rho_1^{-\frac{1}{4}})_{tt},$$

$$\alpha_{11}=2\left[9\rho_{1t}\rho_{2t}-(2\rho_1\rho_2)_{tt}\right],$$

$$\alpha_{02}=4\left[9\lambda_2\lambda_{2t}r_t-(r\lambda_2^2)_{tt}\right]+16\rho_2^{\frac{9}{4}}(\rho_1^{-\frac{1}{4}})_{tt},$$

$$a_{10} = 2[9\rho_{1t} r_t - 2(r\rho_1)_{tt}],$$

$$a_{01} = 2[9\rho_{2t} r_t - 2(r\rho_2)_{tt}],$$

$$a_0 = 5r_t^2 - 4r\,r_{tt} = 16\,r^{\frac{9}{4}}\,(r^{-\frac{1}{4}})_{tt}, \qquad (47)$$

а остальные $a_{ij}(t)$ равны нулю.

Из формул (47) следует, что из условий (15), (16) следствия 2 вытекают предположения (41), (42), (45). Выше мы уже доказали, что из предположений (41), (42), (45) вытекают все условия следствия 1.

Таким образом, следствие 2 доказано.

Գ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Կոշու կշռային խնդրի լուծման միակության մասին և նոր բանաձև էներգիայի համար *(ամփոփում)*

*Սինգուլյար մասնակի ածանցյալներով հավասարումների համար գտնված են նոր պայմաններ, որոնք ապահովում են Կոշու կշռային խնդրի միակությունը Սորոլևի տարածություններում։ Ընդլում է նաև Պետրովսկու թեորեմի (Կոշու խնդրի կոռեկտության անհրաժեշտ և բավարար պայմանների մասին) ընդհանրացումը սինգուլյար համակարգերի համար։*

G. R. OGANESIAN. *Uniqueness for weighted Cauchy problem and new formula for energy* (summary)

In the paper is announced generalization of Petrovsky theorem about necessary and sufficient conditions of Cauchy problem for the case of singular systems.

There are found the new conditions of uniqueness for the singular second order partial differential equations with given Wronskians. The uniqueness is proved by energy method. By energy is used the sum of modules of wronskians of Fourier transformation of solution and certain weighted functions.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Р. Оганесян.* О начальной и смешанной задачах с заданными вронскианами для сингулярных гиперболических уравнений второго порядка, Изв. АН Армении, «Математика», 1987, 22, № 4, 337—357.
2. *Г. Р. Оганесян.* Начальная задача для некоторых сингулярных гиперболических уравнений и ВКБ-оценки ее решений, Диф. уравнения, 1989, 25, № 6, 1062—1064.
3. *А. Б. Нерсесян, Г. Р. Оганесян.* О задаче Коши для слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Армении, «Математика», 1974, 9, № 2, 149—165.
4. *К. А. Ягджян.* Необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши с кратными характеристиками, Изв. АН Армении, «Математика», 1985, 20. 20, № 1, 3—25.
5. *И. Г. Петровский.* Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия, М., Наука, 1986, 500 с.
6. *С. Мизохата.* Теория уравнений с частными производными, М., Мир, 1977, 504 с.
7. *М. В. Федорюк.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Наука, 1983, 352 с.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

XXVI № 5, 1991

УДК 517. 53

Р. А. АВЕТИСЯН

# О ПРЕДСТАВЛЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ПРОСТЫХ ДРОБЕЙ В ОБЛАСТЯХ С ЛИПШИЦЕВОЙ ГРАНИЦЕЙ

## Введение

Вопрос о разложении аналитических функций в ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\zeta_k - z}$$

с определенными ограничениями на последовательность полюсов $\zeta_k$ и коэффициентов $A_k$ изучался в ряде работ. Д. Вольф [1] доказал следующую теорему.

Теорема. *Пусть $G$ — ограниченная жорданова область, и пусть $f$ аналитична в замкнутой области. Тогда $f$ может быть разложена в $G$ в ряд вида*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\zeta_k - z}, \quad \zeta_k \overline{\in} \overline{G}, \tag{1}$$

*где* $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < +\infty$.

В дальнейшем в работах [2]—[14] получены различные обобщения и уточнения теоремы Д. Вольфа (подробный обзор этих работ см. [7], [14]). В настоящей статье рассматривается вопрос о представлении аналитических внутри и непрерывных в замыкании липшицевой области $G$ функций $f$ рядами вида (1) с оценкой скорости сходимости ряда (1) к функции $f$ в равномерной норме в $\overline{G}$. В качестве следствия полученных оценок разности между $f$ и некоторой последовательностью частичных сумм ряда (1) функции $f$ мы покажем (следствие 2), что величина наилучшего разномерного приближения функции $f$ рациональными функциями степени не выше $n$ имеет порядок $O\left(\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)\right)$, где $\omega(\delta, f)$ — модуль непрерывности $f$ в $G$. Как известно в случае равномерного приближения полиномами эта оценка не имеет места ([15], [16], стр. 478). Отметим также связанные с теоремами 1, 3 результаты работ [17], [18] о наилучших приближениях рациональными функциями в комплексной области.

Чтобы сформулировать результаты настоящей статьи введем некоторые обозначения. Как обычно под липшицевой областью мы будем понимать ограниченную жорданову область $G$ с липшицевой границей $\gamma$, то есть $\gamma$ удовлетворяет следующему условию: если $z_1, z_2 \in \gamma$,

то длина $s(z_1, z_2)$ кратчайшей из дуг, соединяющих точки $z_1, z_2$ на $\gamma$, удовлетворяет следующему условию

$$s(z_1, z_2) \leqslant A|z_1 - z_2|, \tag{2}$$

где $A \geqslant 1$ — не зависит от $z_1$ и $z_2$.

Если $G$ — область в $\mathbf{C}$, то через $A(\overline{G})$ мы будем обозначать множество функций, аналитических в $G$ и непрерывных в $\overline{G}$. Напомним, что для $f \in A(\overline{G})$ модуль непрерывности $f$ в $\overline{G}$ это величина

$$\omega(\delta, f) = \max_{|z_1 - z_2| < \delta} |f(z_1) - f(z_2)|, \quad z_1, z_2 \in \overline{G}, \quad \delta > 0.$$

Для ряда вида (1) положим

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{\zeta_k - z}.$$

Теорема 1. *Пусть $G$ — липшицевая область и $f \in A(\overline{G})$. Тогда $f$ можно сопоставить ряд вида* (1), *выбор полюсов которого не зависит от $f$ такой, что*

$$|f(z) - S_n(z)| \leqslant c_1 \log n\, \omega\left(\frac{1}{n}, f\right), \text{ при } z \in \overline{G}, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{3}$$

$$|A_k| \leqslant c_2\, \omega\left(\frac{1}{k}, f\right)/k, \quad k = 1, 2, \cdots \tag{4}$$

$$|f(z) - S_{n_k}(z)| \leqslant c_3\, \omega(10^{-k}, f), \text{ при } z \in \overline{G}, \quad k = 1, 2 \cdots, \tag{5}$$

*где $n_k \leqslant q(10^k - 1)$, $q = q(G)$ — зависит только от $G$, $c_i$, $i = 1, 2, 3$ постоянные, не зависящие от $n$, $k$ и $z$.*

Непосредственно из теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Пусть $G$ — липшицевая область и $f \in A(\overline{G})$. Если*

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta, f) \cdot \log \frac{1}{\delta} = 0, \tag{6}$$

*то $f$ представляется в $\overline{G}$ в виде ряда* (1) *и имеют место неравенства* (3)—(5).

Если наложить на $\omega(\delta, f)$ более сильное чем (6) условие

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta, f)}{\delta}\, d\delta < +\infty \tag{7}$$

и не требовать выполнения условий (3)—(5), то может быть доказана

Теорема 2. *Пусть $G$ — липшицевая область, $f \in A(\overline{G})$ и $f$ удовлетворяет* (7). *Тогда $f$ можно представить в $\overline{G}$ в виде ряда* (1), *сходящегося абсолютно-равномерно в $\overline{G}$.*

Очевидно, что следствие 1 и теорема 2 являются обобщением теоремы Д. Вольфа в случае липшицевых областей. В определенном смысле точность условий (6)—(7) показана в [7].

Из теоремы 1 получаем также оценку наилучшего равномерного приближения рациональными функциями функций $f \in A(\overline{G})$ для липшицевых областей $G$.

Следствие 2. *Пусть $G$ — липшицевая область и $f \in A(\overline{G})$. Существуют рациональные функции $r_n(z)$ вида*

$$r_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^n}{\zeta_k^n - z}, \quad \zeta_k^n \in \overline{G}$$

*такие, что*

$$|f(z) - r_n(z)| \leqslant c_4\, \omega\left(\frac{1}{n}, f\right), \text{ при } z \in \overline{G},\ n = 1, 2\cdots,$$

$$|A_k^n| \leqslant c_5\, \omega\left(\frac{1}{k}, f\right)/k,\ k = 1, 2\cdots n,$$

*где $c_4$ и $c_5$ не зависят от $n$, $k$ и $z$.*

Для некоторых классов функций из $A(\overline{G})$ можно получить обращение теоремы 1. Для этого введем рациональные функции

$$R_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^n}{\zeta_k - z}, \tag{7'}$$

где $\{\zeta_k\}_{k=1}^{n}$ — последовательность точек, построенная в теореме 1. Обозначим через $\mathrm{Lip}_\alpha(\overline{G})$, $0 < \alpha \leqslant 1$ множество функций из $A(\overline{G})$, таких, что

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant K |z_1 - z_2|^\alpha,\ z_1, z_2 \in \overline{G}.$$

Теорема 3. *Пусть $G$ — липшицевая область. Функция $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\overline{G})$ $0 < \alpha < 1$ тогда и только тогда, когда существуют $R_n$ вида (7') такие, что*

$$|f(z) - R_n(z)| \leqslant c_6 n^{-\alpha},\ n = 1, 2\cdots \text{ при } z \in \overline{G},$$

$$|A_k^n| \leqslant c_7 k^{-(1+\alpha)},\ k = 1, 2\cdots n,$$

*где $c_6$ и $c_7$ не зависят от $n$ и $z$.*

Результаты настоящей статьи доложены на Международной конференции по теории приближений (Киев, 1983) и анонсированы в тезисах этой конференции [21].

## § 1. Основные леммы

Доказательство теоремы 1 основывается на нескольких леммах. Для того чтобы сформулировать их нам понадобятся некоторые дополнительные обозначения (определения).

1. Если $z_1, z_2 \in \gamma = \partial G$, то через $(z_1, z_2)$ будем обозначать кратчайшую из дуг, соединяющих $z_1$ и $z_2$ на $\gamma$, а ее длину будем обозначать через $s(z_1, z_2)$.

2. Если $E$, $F \subset \mathbf{C}$, то положим

$$\rho(E, F) = \inf_{z \in E} \inf_{\zeta \in F} |\zeta - z|,$$

$$E_\delta = \{z \in \mathbf{C} : \rho(z, E) \leqslant \delta\}.$$

3. Нам понадобятся специальные жордановые кривые $\gamma_\varepsilon$ и $\tau_\varepsilon$, аппроксимирующие кривую $\gamma = \partial G$. Для простоты изложения всюду в дальнейшем будем считать, что $L = \text{дл. } \gamma \geqslant 1$. Обозначим через $z(s)$ натуральное уравнение кривой $\gamma$, $s \in [0, L]$. Возьмем $\varepsilon \in (0, 1]$ и числа $s_k \in [0, L]$ такие, что $0 = s_1 \leqslant s_2 < \cdots < s_n = L$, $\varepsilon/2 \leqslant s_{k+1} - s_k \leqslant \varepsilon$, $k = 1, 2, \cdots, n-1$, где $n \leqslant 2L/\varepsilon$. Положим $z_k = z(s_k)$ и вокруг каждой точки $z_k$ возьмем круг $D(z_k, 2\varepsilon) = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_k| \leqslant 2\varepsilon\}$. Ясно, что из множества $\partial\left(\bigcup_{k=1}^{n} D(z_k, 2\varepsilon)\right)$ можно выделить жордановые кривые $\gamma_\varepsilon$ и $\tau_\varepsilon$ такие, что $G$ лежит внутри $\gamma_\varepsilon$, $\tau_\varepsilon \subset G$ и верны неравенства

$$\varepsilon/2 \leqslant \rho(\gamma_\varepsilon, \gamma) \leqslant 2\varepsilon, \quad \varepsilon/2 \leqslant \rho(\tau_\varepsilon, \gamma) \leqslant 2\varepsilon, \tag{8}$$

$$s(\gamma_\varepsilon),\ s(\tau_\varepsilon) \leqslant 8\pi L. \tag{9}$$

4. *Для непрерывной в* $\mathbf{C}$ функции $\varphi$ положим

$$g_\varepsilon(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{10}$$

5. Определим теперь рациональные функции, участвующие в формулировке леммы 1. Для этого возьмем на кривой $\gamma_\varepsilon$ точки $\zeta_1, \cdots, \zeta_{m+1}$, расположенные на $\gamma_\varepsilon$ в порядке возрастания индекса при заданном направлении обхода такие, что $s(\zeta_k, \zeta_{k+1}) \leqslant 8\pi L/m$, $k = 1, 2, \cdots, m$, где $m \geqslant 64\pi L/\varepsilon$, $\zeta_1 = \zeta_{m+1}$. Положим для $g_\varepsilon$ определенной по формуле (9)

$$r_m(g_\varepsilon, z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{\zeta_k - z}, \quad A_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\zeta_k, \zeta_{k+1})} \varphi(\zeta)\, d\zeta. \tag{11}$$

Докажем теперь лемму 1, являющуюся обобщением леммы 1 из [3] (см. также [7]).

Лемма 1. *Пусть* $G$ *— липшицевая область,* $\varepsilon \in (0, 1]$ *и функции* $g_\varepsilon$ *и* $r_m$ *определены по формулам* (10), (11). *Тогда*

$$|g_\varepsilon(z) - r_m(g_\varepsilon, z)| \leqslant \frac{a_1}{m \cdot \varepsilon} \cdot \max_{\zeta \in \gamma_\varepsilon} |\varphi(\zeta)|, \text{ при } z \in G_{\varepsilon/4}, \tag{12}$$

*где* $a_1$ *зависит только от* $G$.

Доказательство. Заметим, что при $\zeta \in (\zeta_k, \zeta_{k+1})$ имеет место неравенство

$$|\zeta_k - z| \geqslant |\zeta - z| - |\zeta_k - \zeta| \geqslant 2^{-1}|\zeta - z|.$$

Следовательно по определению $g_\varepsilon$ и $r_m$ имеем при $z \in G_{\varepsilon/4}$

$$|g_\varepsilon(z) - r_m(g_\varepsilon, z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}\int_{(\zeta_k, \zeta_{k+1})} \frac{|\varphi(\zeta)|\,|\zeta_k - \zeta|}{|\zeta_k - z|\,|\zeta - z|}\,|d\zeta| \leqslant$$

$$< \frac{4L}{m} \cdot \max_{\zeta \in \gamma_\varepsilon} |\varphi(\zeta)| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^2}.$$

Оценим последний интеграл. Обозначим через $z_l$, $l=l(z)$ одну из ближайших к точке $z$ точек множества $\{z_k\}_{k=1}^n$, участвовавших в построении кривой $\gamma_\varepsilon$. Пусть $z_j$, $j=j(z)$ та из точек $z_k$, что $s(z_l, z_j)\leqslant L/2$, $s(z_l, z_j+1)\leqslant(2)$ (при $j=n$ полагаем $z_{n+1}=z_1$). Представим $\gamma_\varepsilon$ в виде $\gamma_\varepsilon=\gamma_\varepsilon^1\cup\gamma_\varepsilon^2$, где

$$\gamma_\varepsilon^1=\gamma_\varepsilon\cap\Big(\bigcup_{z_k\in(z_l,\,z_j)}\partial D(z_k,2\varepsilon)\Big),\quad \gamma_\varepsilon^2=\gamma_\varepsilon\cap\Big(\bigcup_{z_k\in(z_l,\,z_{j+1})}\partial D(z_k,2\varepsilon)\Big).$$

Оценим сначала интеграл по $\gamma_\varepsilon^1$. Для этого перенумеруем в направлении от $z_l$ к $z_j$ точки $z_k$, лежащие на дуге $(z_k, z_j)$, полагая $z_1'=z_l\cdots\cdots z_r'=z_j$, $r=r(z)$. Разобьем точки $z_k'$ на две группы: $T_1=\{z_k'\}_{k=1}^{[10A]}$ и $T_2=\{z_k'\}_{k=[10A]+1}^{r}$, где $A$ — число из неравенства (2), а знак $[\alpha]$ — обозначает целую часть положительного числа $\alpha$. Кривую $\gamma_\varepsilon^1$ также разобьем на две части

$$\Gamma_1=\gamma_\varepsilon^1\cap\Big(\bigcup_{z_k'\in T_1}\partial D(z_k',2\varepsilon)\Big),\ \Gamma_2=\gamma_\varepsilon^1\cap\Big(\bigcup_{z_k'\in T_2}\partial D(z_k',2\varepsilon)\Big).$$

Заметим, что имеют место неравенства

$$s(\Gamma_1)\leqslant 40\pi\varepsilon A,\ |\zeta-z|\geqslant\varepsilon/4,\ \text{при}\ \zeta\in\Gamma_1,\ z\in G_{\varepsilon/4},$$

$$|\zeta-z_k'|\geqslant\varepsilon(k-8A)/2A,\ \text{при}\ \zeta\in\partial D(z_k',2\varepsilon),\ z_k'\in T_2,\ z\in G_{\varepsilon/4}.$$

Из этих неравенств получаем

$$\int\limits_{\gamma_\varepsilon^1}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z^2|}=\int\limits_{\Gamma_1}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^2}+\int\limits_{\Gamma_2}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^2}\leqslant\frac{640\pi A}{\varepsilon}+\sum_{k=[10A]+1}^{r}\times$$

$$\times\int\limits_{\partial D(z_{k_i}',2\varepsilon)}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^2}\leqslant\frac{640\pi A}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=[10A]+1}^{r}\frac{16\pi A^2}{(k-8A)^2}\leqslant\frac{700\pi A}{\varepsilon}.$$

Легко видеть, что интеграл по $\gamma_\varepsilon^2$ оценивается аналогичным образом. Поэтому лемма 1 доказана.

Для доказательства леммы 2 нам понадобится частный случай леммы 1 работы [19].

Лемма A ([19]). Пусть $G$ — липшицевая область. Тогда для любых $z\in\partial G$ и $\delta>0$ существует точка $\zeta=\zeta(z)$ такая, что

$$|\zeta-z|\leqslant C\delta,\ \rho(\zeta,\ G>\delta,$$

где $C>1$ зависит только от $G$.

С помощью леммы A определим теперь рациональную функцию, участвующую в формулировке леммы 2. Для этого положим

$$\psi_\varepsilon(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_\varepsilon}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\xi d\eta,\ \zeta=\xi+i\eta,\qquad(13)$$

где $\varphi$ — непрерывная в $\mathbf{C}$ функция, $D_\varepsilon$ — кольцевая область, образованная кривыми $\gamma_\varepsilon$ и $\tau_\varepsilon$, аппроксимирующими кривую $\gamma$. Далее поло-

жим при $k=1$, $\sigma_1 = D(z_1, 2\varepsilon) \cap D_\varepsilon$, при $k=2, \cdots, n$ положим $\sigma_k = (D(z_k, 2\varepsilon) \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} \sigma_l) \cap D_\varepsilon$, где $z_k$ — точки, участвовавшие в построении кривых $\gamma_\varepsilon$, $\tau_\varepsilon$. Очевидно, что $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $D_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{n} \sigma_k$. По лемме А для любой точки $z_k \in \gamma$ существует точка $W_k \in \mathbb{C} \setminus G$ такая, что

$$|W_k - z_k| \leqslant 3C\varepsilon, \quad \rho(W_k, G) \geqslant 3\varepsilon, \quad k=1, 2, \cdots, n, \quad n \leqslant 2L/\varepsilon. \tag{14}$$

Определим теперь рациональную функцию $t_n(\psi_\varepsilon, z)$ по формуле

$$t_n(\psi_\varepsilon, z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{W_k - z}, \quad \text{где } B_k = \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma_k} \varphi(\zeta)\, d\xi\, d\eta. \tag{15}$$

Лемма 2. *Пусть $G$ — липшицевая область, $\varepsilon \in (0, 1]$ и функции $t_n$ и $\psi_\varepsilon$ определены по формулам* (13), (15), *тогда*

$$|\psi_\varepsilon(z) - t_n(\psi_\varepsilon, z)| \leqslant a_2 \cdot \varepsilon \max_{\zeta \in \overline{D}_\varepsilon} |\varphi(\zeta)|, \text{ при } z \in \overline{D}_\varepsilon, \tag{16}$$

*где $a_2$ зависит только от $G$.*

Доказательство. Возьмем точку $z \in \overline{D}_\varepsilon$ и зафиксируем ее. Введем те же обозначения, что и в лемме 1, т. е. пусть $z_l$, $l = l(z)$ точка из $\{z\}_{k=1}^{n}$, ближайшая к $z$, а точки $z_j$ и $z_{j+1}$, $j = j(z)$ таковы, что $s(z_l, z_j) \leqslant L/2$, и $s(z_l, z_{j+1}) < L/2$) (при $j = n$ полагаем $z_{n+1} = z_2$). Вновь перенумеруем в направлении от $z_l$ к $z_j$ точки $z_k$, лежащие на $(z_l, z_j)$ и обозначим их через $\{z_k'\}_{k=1}^{r_1}$, $r_1 = r_1(z)$. Перенумеруем также в направлении от $z_l$ к $z_{j+1}$ точки $z_k$, лежащие на $(z_l, z_{j+1})$ причем на этот раз не включая в их число точку $z_k$, и обозначим их через $\{z_k''\}_{k=1}^{r_2}$, $r_2 = r_2(z)$. Соответствующие точкам $z_k'$ и $z_k''$ полюсы и множества из $\{W_k\}_{k=1}^{n}$ и $\{\sigma_k\}_{k=1}^{n}$ обозначим соответственно через $\sigma_k'$, $\sigma_k''$ и $W_k'$, $W_k''$. Заметим, что из определения кривой $\gamma$ и условий (14) при всех $k$ имеют место неравенства

$$|\zeta - z| \geqslant \varepsilon(k - 8A)/2A \text{ при } \zeta \in \sigma_k', \sigma_k'', \tag{17}$$

$$\min(|W_k' - z|, |W_k'' - z|) \geqslant \varepsilon(k - 10AC)/2A. \tag{18}$$

Учитывая наши обозначения и (18), (17) получаем

$$|\psi_\varepsilon(z) - t_n(\psi_\varepsilon, z)| \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{[12AC]} \iint_{\sigma_k} \left( \frac{1}{|\zeta - z|} + \frac{1}{|W_k' - z|} \right) |\varphi(\zeta)|\, d\xi\, d\eta +$$

$$\sum_{k=[12AC]+1}^{r_1} \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma_k'} \frac{|\zeta - W_k'|\,|\varphi(\zeta)|}{|\zeta - z|\,|W_k' - z|}\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{[12AC]} \iint_{\sigma_k''} (\quad)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=[12AC]+1}^{r_2} \iint_{\sigma_k''} (\quad)\, d\xi\, d\eta,$$

где в интегралах по множествам $\sigma_k''$ стоят те же величины, что и в интегралах по $\sigma_k'$. Оценим интегралы по $\sigma_k'$, учитывая (17), (18), (14)

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{[12AC]}\iint_{\sigma_k'}\left(\frac{1}{|\zeta-z|}+\frac{1}{|W_k'-z|}\right)|\varphi(\zeta)|\,d\xi\,d\eta \leqslant 48\,AC\cdot\varepsilon\max_{\zeta\in\overline{D}_k}|\varphi(\zeta)|,$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=[12AC]+1}^{r_1}\iint_{\sigma_k'}\frac{|W_k'-\zeta|\,|\varphi(\zeta)|}{|\zeta-z|\,|W_k'-z|}\,d\xi\,d\eta \leqslant \max_{\zeta\in\overline{D}_k}|\varphi(\zeta)|\sum_{k=[12AC]+1}^{r_1}\times$$

$$\times\frac{80\,A^2C\cdot\varepsilon}{(k-8A)(k-10AC)} \leqslant 8\,A\cdot\varepsilon\cdot\max_{\zeta\in\overline{D}_k}|\varphi(\zeta)|.$$

Легко заметить, что суммы, содержащие интегралы по $\sigma_k''$, оцениваются аналогичным образом, поэтому лемму 2 можно считать доказанной.

## § 2. Доказательство теорем 1—3

Доказательство теоремы 1 основывается на методах Д. Вольфа [1] и С. Н. Мергеляна [15]. В силу (2) функцию $f$ можно считать продолженной на всю плоскость $\mathbf{C}$ так, чтобы модуль непрерывности продолженной функции $\tilde{f}$ удовлетворял бы условию $\omega(\delta, \tilde{f}) \leqslant c\,\omega(\delta, f)$ (см. [20], стр. 206). Продолжим $f$ таким образом и сохраним за ее продолжением обозначение $f$. Положим для краткости $\omega(\delta, f)=\omega(\delta)$ и заметим, что $\omega(\delta)$ будет удовлетворять условию:

$$\omega(k\cdot\delta) \leqslant k\,\omega(\delta),\quad k=1,\,2\cdots. \tag{19}$$

Усредним теперь функцию $f$ по известной формуле

$$f_\delta(z)=\frac{1}{\pi\delta^2}\iint_{|\zeta-z|<\delta} f(\zeta)\,d\xi\,d\eta.$$

Напомним свойства $f_\delta(z)$ (см. [16], стр. 341)

1.

$$|f(z)-f_\delta(z)| \leqslant \omega(\delta) \text{ при } z\in\mathbf{C}, \tag{20}$$

$$\sup_{z\in\mathbf{C}}|f_\delta(z)| \leqslant \sup_{z\in\mathbf{C}}|f(z)|. \tag{21}$$

2. Функция $f_\delta(z)$ является непрерывно-дифференцируемой в $\mathbf{C}$ и выполнены условия

$$\frac{\partial f_\delta(z)}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2\pi i\delta}\int_{|\zeta-z|=\delta} f(\zeta)\,d\zeta \text{ при } z\in\mathbf{C},$$

$$\left|\frac{\partial f_\delta(z)}{\partial z}\right| \leqslant \frac{\omega(\delta)}{\delta} \qquad \text{при } z\in\mathbf{C}. \tag{22}$$

3. Если $f$ — аналитична в $\delta$-окрестности $D(z, \delta)=\{z\in\mathbf{C}: |\zeta-z|<\delta\}$ точки $z$, то

$$f_\delta(z)=f(z). \tag{23}$$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1. Положим $\varepsilon_k = 10^{-k}$, $k = 0, 1, 2\cdots$ и предположим сначала, что

$$|f(z)| \leqslant \omega(\varepsilon_1) \text{ при } z \in \mathbf{C}. \tag{24}$$

По формуле Коши

$$f_{\varepsilon_1}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\varepsilon_1}} \frac{f_{\varepsilon_1}(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_{\varepsilon_1}} \frac{\partial f_{\varepsilon_1}}{\partial \bar{\zeta}}\,\frac{d\xi\,d\eta}{\zeta - z} = g_{\varepsilon_1}(z) + \psi_{\varepsilon_1}(z) \text{ при } z \in D_{\varepsilon_1}.$$

Учитывая (24), по лемме 1, беря $m = m_1 = \varepsilon_2^{-1} \times [3a_1 + 64\pi L]$, будем иметь, что существует рациональная функция $r_{m_1}$ вида (11) такая, что

$$|g_{\varepsilon_1}(z) - r_{m_1}(g_{\varepsilon_1}, z)| \leqslant \frac{a_1}{m_1 \cdot \varepsilon_1} \max_{z \in \gamma_{\varepsilon_1}} |\varphi(\zeta)| \leqslant \omega(\varepsilon_2) \text{ при } z \in G_{\varepsilon_1/4}.$$

По лемме 2 имеем, что существует рациональная функция $t_{n_1}(\psi_{\varepsilon_1}, z)$ $n_1 \leqslant 2L/\varepsilon_1$ такая, что

$$|\psi_{\varepsilon_1}(z) - t_{n_1}(\psi_{\varepsilon_1}, z)| \leqslant 10\,a_2\omega(\varepsilon_2) \text{ при } z \in D_{\varepsilon_1}.$$

Из последних двух неравенств получаем

$$|f_{\varepsilon_1}(z) - (r_{m_1}(g_{\varepsilon_1}, z) + t_{n_1}(\psi_{\varepsilon_1}, z)| \leqslant (1 + 10\,a_2)\,\omega(\varepsilon_2) \text{ при } z \in D_{\varepsilon_1}. \tag{25}$$

Предположим, что построены рациональные функции $r_{m_j}$ и $t_{n_j}$ типа (11) и (15) $j = 1, 2, \cdots, k-1$, $k \geqslant 2$ такие, что

$$\left| f_{\varepsilon_{j+1}}(z) - \sum_{l=1}^{j} (r_{m_l}(g_{\varepsilon_l}, z) + t_{n_l}(\psi_{\varepsilon_l}, z)) \right| \leqslant (1 + 10\,a_2)\,\omega(\varepsilon_{j+1})$$

$$\text{при } z \in D_{\varepsilon_{j+1}}, \tag{26}$$

$$n_j + m_j \leqslant \varepsilon_{j+1}^{-1} \cdot 15\,a_2(3\,a_1 + 66\,\pi L) \tag{27}$$

и покажем как построить функции $r_{m_k}$, $t_{n_k}$ типа (11), (15) такие, что неравенства (26), (27) верны и при $j = k$. Положим

$$f^1(z) = f_{\varepsilon_1}(z),$$

$$f^j(z) = f_{\varepsilon_{j+1}}(z) - \sum_{l=1}^{j-1} (r_{m_l}(g_{\varepsilon_l}, z) + t_{n_l}(\psi_{\varepsilon_l}, z)),\ j = 2, 3, \cdots, k.$$

Учитывая (26) имеем

$$|f^k(z)| \leqslant 3 + 10\,a_2)\,\omega(\varepsilon_k) \text{ при } z \in D_{\varepsilon_k}. \tag{28}$$

По формуле Коши

$$f^k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\varepsilon_k}} \frac{f^k(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_{\varepsilon_k}} \frac{\partial f_{\varepsilon_{k+1}}(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}\,\frac{d\xi\,d\eta}{\zeta - z} =$$

$$= g_{\varepsilon_k}(z) + \psi_{\varepsilon_k}(z) \text{ при } z \in D_{\varepsilon_k}.$$

Применим лемму 1 к функции $g_{\varepsilon_k}$, беря

$$m = m_k = \varepsilon_{k+1}^{-1} \cdot [15\,a_2] \cdot [3\,a_1 + 64\,\pi L]. \tag{29}$$

Учитывая выбор $m_k$, (28) и (19) мы получаем, что существует рациональная функция $r_{m_k}(g_{\varepsilon_k}, z)$ вида (11) такая, что

$$|g_{\varepsilon_k}(z) - r_{m_k}(g_{\varepsilon_k}, z)| < \frac{a_1}{m_k \cdot \varepsilon_k} \max_{\zeta \in \tau_k} |f^k(\zeta)| \leqslant \omega(\varepsilon_{k+1}) \text{ при } z \in G_{\varepsilon_k(4)}. \quad (30)$$

По лемме 2 существует $t_{n_k}$ вида (15) такая что

$$|\psi_{\varepsilon_k}(z) - t_{n_k}(\psi_{\varepsilon_k}, z)| \leqslant 10\, a_2 \omega(\varepsilon_{k+1}),\ n_k \leqslant 2L/\varepsilon_k \text{ при } z \in D_{\varepsilon_k}. \quad (31)$$

Учитывая (29)—(31) мы получаем, что утверждения (26), (27) верны и при $j = k$. Следовательно, учитывая, что они верны и при $j = 1$ (неравенство 25) мы получаем, что при всех $k \geqslant 1$ существуют рациональные функции $r_{m_k}$ и $t_{n_k}$, такие, что

$$\left| f(z) - \sum_{j=1}^{k} (r_{m_j}(g_{\varepsilon_j}, z) + t_{n_j}(\psi_{\varepsilon_j}, z)) \right| \leqslant (4 + 10\, a_2)\, \omega(\varepsilon_{k+1}) \text{ при } z \in \overline{G}. \quad (32)$$

Проверим, что полученный таким образом для функции $f$ ряд вида (1) удовлетворяет условиям (3)—(5). Условие (5) очевидно следует из (27) и (32). Проверим (3) и (4). Пусть $\zeta_i^k$ и $W_i^k$ — полюсы, а $A_i^k$ и $B_i^k$ — коэффициенты соответственно функций $r_{m_k}$ и $t_{n_k}$. Пусть $l_0 = 0$, $l_k = \sum_{i=1}^{k} (m_i + n_i)$, $k \geqslant 1$. Положим $\zeta_j = \zeta_{j-l_{k-1}}^k$ при $l_{k-1} < j \leqslant l_k - n_k$, где $k \geqslant 1$, а при $l_k - n_k < j \leqslant l_k$ положим $\zeta_j = W_{j-l_k+n_k}^k$. Точно также перенумеруем и коэффициенты $A_i^k$ и $B_i^k$. Пусть $l_{k-1} < j \leqslant l_k - n_k$ тогда из (28)

$$|A_j| - |A_{j-l_{k-1}}^k| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_{j-l_{k-1}}^k} |f^k(\zeta)|\, |d\zeta| < c_2\, \omega\left(\frac{1}{j}\right)/j,$$

где $\Delta_i^k = (\zeta_i^k, \zeta_{i+1}^k)$, $c_2$ не зависит от $j$. При $l_k - n_k < j \leqslant l_k$ имеем

$$|A_j| = |B_{j-l_k+n_k}| < \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma_{j-l_k+n_k}^k} |\bar{\partial} f_{\varepsilon_{k+1}}(\zeta)|\, d\xi d\eta \leqslant c_2 \omega\left(\frac{1}{j}\right)/j.$$

Из последних двух неравенств получаем условие (4). Проверим условие (1). Пусть $l_{k-1} < n \leqslant l_k$, учитывая (31) и последние неравенства имеем

$$|f(z) - S_n(z)| < (4 + 10\, a_2)\, \omega(\varepsilon_{k+1}) + \sum_{j=l_{k-1}+1}^{l_k} \frac{|A_j|}{|\zeta_j - z|} <$$

$$< c_1 \log n \cdot \omega\left(\frac{1}{n}\right), \text{ при } z \in \overline{G},$$

где последняя сумма оценивается так же как аналогичные суммы в леммах 1, 2, а $c_1$ не зависит от $n$ и $z$.

Итак, мы доказали теорему 1 при условии (24). В общем случае достаточно рассмотреть функцию $f_1(z)=\omega(\varepsilon_1)f(z)/2M$, где $M=\max_{z\in C}|f(z)|$.

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Очевидно, что теорема 1 верна и для конечносвязанных областей, ограниченных жордановыми липшицевыми кривыми и для множеств, состоящих из конечного числа липшицевых кривых, имеющих конечное число точек пересечения с ненулевыми углами.

Доказательство теоремы 2 повторяет доказательство теоремы 1 с той лишь разницей, что вместо последовательности $\varepsilon_k=10^{-k}$ нужно взять последовательность $\varepsilon_k'=10^{-10^k}$.

Доказательство теоремы 3—из теоремы 1 и рассуждениями, аналогичным доказательству теоремы 2 работы [7].

В заключение автор благодарит Н. У. Аракеляна за ценные обсуждения настоящей работы.

Институт математики
АН Республики Армении

Поступила 10.I.1991

Ռ. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ. Անալիտիկ ֆունկցիաները լիպշիցյան տիրույթներում պարզ կոտորակների շարքով ներկայացնելու մասին *(ամփոփում)*

*Հոդվածում ապացուցվում է, որ լիպշիցյան տիրույթում անալիտիկ ֆունկցիաներին կարելի է համապատասխանեցնել որոշակի պարզ կոտորակների շարք և գնահատել այդ շարքի զուգամիտության արագությունը համապատասխան ֆունկցիային։*

R. *A.* AVETISIAN. *On representation of analytical finctions in Lipshits domain asa series of simple fractions* (summary)

The paper proves that a series of simple fractions can be corresponded to analytical function in Liphits domain and the speed of convergence of the series to corresponding function can be estimated.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Wolff.* Sur les series $\sum_1^{\infty} A_k/(z-a_k)$, C. R. Acad. Sci., 173, 1921, 1327—1328.
2. *A. Denjoy.* Sur les series de fractions rationelles, Bull. Soc. Math., France, 52. 1924, 418—434.
3. *А. А. Гончар,* О примерах неединственности аналитических функций. Вестн. Моск. ун-та, Матем., механ., 1964, № 1, 37—43.
4. *А. А. Гончар.* О квазианалитическом продолжении аналитических функций через жорданову дугу, ДАН СССР, 166, № 5, 1966, 1028—1031.
5. *Т. А. Леонтьева.* Представление функций, аналитических в замкнутой области, рядами рациональных функций, Мат. заметки, 4, № 3, 1968, 191—200.
6. *Т. А. Леонтьева,* О представлении функций в единичном круге рядами простых дробей, Мат. сб., 84 (16), № 2, 1971, 313—326.
7. *Р. Аб. Аветисян.* О представлении аналитических функций рядами простых дробей в замкнутом круге, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XVI, № 1, 1981, 31—43.

8. *Ю. Ф. Коробейник.* К вопросу о разложении аналитических функций в ряды по рациональным функциям, Мат. заметки, 31, № 5, 1982, 723—737.

9. *L. Rubel, A. Shields.* The space of bounded analytic functions on a region, Ann. Inst. Fourier, 16, № 1, 1966, 235—277.

10. *L. Brown, A. Shields, K. Zeller.* On absolutely convergent exponential sums. Trans. Amer. Math. Soc., 1960, 96, № 1, 162—183.

11. *K. Hoffman, H. Rossi.* Extensions of positive weak *—continuous functions, Duke Math. J., 34, № 3, 1967, 453—466.

12. *В. П. Хавин.* Пространства $H^-$ и $L^1_0/H^1_0$. Записки научн. семин. ЛОМИ. т. 39, 1974. 120—143.

13. *Н. К. Никольский.* Современное состояние проблемы спектрального анализа—синтеза, Сб. Теория операторов в функциональных пространствах, изд. «Наука», 1977, 240—282.

14. *Р. А. Аветисян.* О представлении аналитических функций рядами простых дробей. Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XXVI, № 1, 1991.

15. *С. Н. Мергелян.* Равномерное приближение функций комплексного переменного, УМН. 7. № 2, 1952. 31—122.

16. *В. К. Дзядык.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. Изд. «Наука», 1977.

17. *В. В. Пеллер.* Рациональная аппроксимация и гладкость функций. Зап. науч. семин. ЛОМИ. т. 107. 1982, 150—159.

18. *А. А. Пекарский.* Наилучшие рациональные приближения в комплексной области. Труды Матем. инст. АН СССР, т. 190, 1989, 222—233.

19. *В. В. Андриевский.* Апроксимационная характеристика классов функций на континуумах комплексной плоскости, Мат. сб., 1984, № 1, 125, 70—87.

20. *Н. Стейн.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, Изд. «Мир», 1973.

21. *Р. А. Аветисян.* О представлении функций рядами простых дробей, Международная конф. по теории приближения функций. Тезисы докладов, Киев, 1983.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 5, 1991 Математика

УДК 517.956

С. Г. ДАЛАЛЯН

# О ЕДИНСТВЕННОСТИ НЕСОКРАТИМОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ОБЪЕКТА В ОБЪЕДИНЕНИЕ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА НЕПРИВОДИМЫХ ПОДОБЪЕКТОВ

Главный результат — основная теорема § 6 о единственности несократимого разложения объекта в объединение конечного числа неприводимых подобъектов в категории с нулевыми морфизмами при некоторых дополнительных условиях и следствие из нее, охватывающие не только случай прямой суммы подобъектов и изоморфизма соответствующих неприводимых компонент (§ 7), но и изогению объекта произведению простых подобъектов как в случае абелевых многообразий ([5], теорема Пуанкаре о полной приводимости и следствия из нее).

## § 1. Решетка подобъектов

Морфизм из объекта $X$ в объект $Y$ будем обозначать $X\varphi Y$, а композицию морфизмов $X\varphi Y$ и $Y\psi Z$ — $\varphi\psi$. Если $\chi=\varphi\psi$, то $\chi$ делится на $\varphi$ слева и на $\psi$ справа.

Под подобъектом $K\times X$ подразумевается класс эквивалентности мономорфизма $K\times X$, под факторобъектом $\varkappa$ — класс эквивалентности эпиморфизма $X\times K$. Классы всех подобъектов $\mathbf{P}(X)$ и факторобъектов $\mathbf{Q}(X)$ объекта $X$ частично упорядочены с отношением порядка:

$$\varkappa\leqslant\nu\Leftrightarrow\varkappa \text{ делится на } \nu.$$

В частично упорядоченных классах $\mathbf{P}(X)$ и $\mathbf{Q}(X)$ существует наибольший элемент — тотальный подобъект и, соответственно, факторобъект, задаваемые тождественным морфизмом $1_X$.

Если $X$ — объект с конечными объединениями и (или) пересечениями подобъектов, соответственно, факторобъектов, то $\mathbf{P}(X)$, соответственно, $\mathbf{Q}(X)$ — решетка по объединениям и (или) пересечениям. Сквозной морфизм коамальгамы (т. е. расслоенного произведения) семейства подобъектов $(K_i\times X,\ i\in I)$ задает их пересечение. Поэтому в категории с конечными (соотв., произвольными) коамальгамами любой объект $X$ является объектом с конечными (соотв., произвольными) пересечениями. Более того, в категории с коамальгамами для всякого объекта $X$ $\mathbf{P}(X)$ — полная решетка (это — простое следствие, напр. теоремы 6 на с. 20 [2]).

Образ подобъекта $K\times X$ относительно морфизма $X\varphi Y$, то есть наименьший делящий $\varkappa\varphi$ подобъект $N\vee Y$, будем обозначать $\varkappa\varphi_{\mathrm{P}}$. Если он существует для произвольного подобъекта $K\times X$ (в частности, в ка-

тегории с коамальгамами), определены изотонное отображение образа $\mathbf{P}(X)\varphi_{\mathbf{P}}\mathbf{P}(Y)$ и функтор образа $\mathbf{P}_*$, сопоставляющий объекту $X$ его класс подобъектов $\mathbf{P}(X)$, а морфизму $\varphi$ — отображение образа $\varphi_{\mathbf{P}}$.

Образ тотального подобъекта $1_X$ называется образом морфизма $\varphi$. Морфизм с тотальным образом называется простым. Эквивалентно, простым называется морфизм, любой правый мономорфный делитель которого — изоморфизм. Очевидно, правый делитель простого морфизма — простой морфизм.

Морфизм $\beta$ называется дополнительным к образу $\nu$ подобъекта $\varkappa$ относительно морфизма $\varphi$, если $\beta\nu = \varkappa\varphi$. Дополнительный морфизм к образу определяется однозначно и всегда — простой. Более того, в категории с конечными коамальгамами:

(а) дополнительный морфизм делится на любой простой морфизм, делящий $\varkappa\varphi$ слева;

(б) если $\varkappa\varphi = \beta\nu$, где $\beta$ — простой морфизм, а $\nu$ — мономорфизм, то подобъект $\nu$ является образом подобъекта $\varkappa$ относительно морфизма $\varphi$.

Прообраз подобъекта $N\nu Y$ относительно морфизма $X\varphi Y$, то есть наибольший из подобъектов $K\varkappa X$, удовлетворяющих равенству $\varkappa\varphi = \beta\nu$ при некотором морфизме $K\beta N$, обозначается $\nu\varphi^{\mathbf{P}}$. Если $(\varkappa, \beta)$ — коамальгама пары $(\varphi, \nu)$, то, как нетрудно проверить, $\varkappa$ будет прообразом подобъекта $\nu$ относительно морфизма $\varphi$. Если прообразы подобъектов относительно морфизма $X\varphi Y$ существуют (в частности, в категории с конечными коамальгамами), определено изотонное отображение прообраза $\mathbf{P}(Y)\varphi^{\mathbf{P}}\mathbf{P}(X)$. При этом сопоставления $X \to \mathbf{P}(X)$ $\varphi \to \varphi^{\mathbf{P}}$ определяют функтор прообраза $\mathbf{P}^*$.

Простой морфизм $N\nu Y$ называется универсально простым, если при любом морфизме $X\varphi Y$ морфизм $K\varkappa X$ из пары $(\varkappa, \beta)$, задающей коамальгаму пары $(\varphi, \nu)$, является простым. При этом и $\varkappa$ — универсально простой морфизм.

Предложение 1. (а). *Для произвольных морфизма $X\varphi Y$ и подобъектов $\varkappa \in \mathbf{P}(X)$ и $\nu \in \mathbf{P}(Y)$ справедливы соотношения*

$$\varkappa\varphi_{\mathbf{P}}\varphi^{\mathbf{P}} \geqslant \varkappa, \quad \nu \geqslant \nu\varphi^{\mathbf{P}}\varphi_{\mathbf{P}}.$$

(б). *В категории с конечными коамальгамами:*

$\varkappa\varphi_{\mathbf{P}}\varphi^{\mathbf{P}} = \varkappa$, *если* $\varphi$ — *мономорфизм;*

$\nu\varphi_{\mathbf{P}}\varphi^{\mathbf{P}} = \nu$, *если* $\varphi$ — *универсально простой морфизм.*

Предложение 2. *Пусть $(K_i\varkappa_i X,\ i \in I)$ — произвольное семейство подобъектов, $X\varphi Y$ — морфизм, для которого определено отображение прообраза $\varphi^{\mathbf{P}}$, $N_i\nu_i Y$ — образ подобъекта $\varkappa_i$ относительно $\varphi$, $K\varkappa X$ — объединение семейства подобъектов $(\varkappa_i, i \in I)$. Тогда образ подобъекта $\varkappa$ относительно морфизма $\varphi$ существует, если и только если существует объединение семейства подобъектов $(\nu_i,\ i \in I)$; при этом они совпадают.* (Ср. [7], с. 72).

Доказательство. Пусть $N\nu Y$ — образ подобъекта $\varkappa$ относительно $\varphi$. Из соотношений $\varkappa_i \leqslant \varkappa$ следует, что $\nu_i \leqslant \nu$. Рассмотрим под-

объект $N'\nu'Y$, содержащий все $\nu_i$, $i \in I$. Возьмем его прообраз $x'$ относительно $\varphi$. Тогда в силу предложения 1 и изотонности отображения прообраза $x_i \leqslant x'$ при всех $i \in I$. Поэтому $x \leqslant x'$ и, следовательно, согласно предложению 1 и изотонности отображения образа $\nu \leqslant \nu'$. Таким образом, $\nu = \bigcup\limits_{i \in I} \nu_i$.

Обратно, предположим, что $\nu$ — объединение семейства подобъектов $\nu_i$, $i \in I$ и $x' = \nu\varphi^P$. Тогда, как и выше $x \leqslant x'$, поэтому $x\varphi$ делится на $\nu$. Пусть $N'\nu'Y$ — произвольный мономорфизм, делящий $x\varphi$. Тогда все $x_i\varphi$, $i \in I$ делятся на $\nu'$, значит $\nu_i \leqslant \nu'$ при всех $i \in I$, следовательно, и $\nu \leqslant \nu'$, то есть $\nu = x\varphi_P$.

Следствие. В категории с конечными коамальгамами образ объединения семейства подобъектов и объединение образов этих подобъектов существуют одновременно и совпадают.

Упорядоченная пара морфизмов $(\sigma, \varphi)$ называется диагонализуемой (см. [6] или [7]), если

$$x\varphi = \sigma\nu \Rightarrow \exists \mu \mid \sigma\mu = x,\ \mu\varphi = \nu.$$

Предложение 3. В категории с конечными коамальгамами любая пара $(\sigma, \varphi)$, состоящая из простого морфизма $\sigma$ и мономорфизма $\varphi$, диагонализуема.

Доказательство. Пусть $x\varphi = \sigma\nu$ и $(\tilde{\nu}, \tilde{\varphi})$ — коамальгама пары $(\varphi, \nu)$. Отметим, что $\tilde{\varphi}$ — мономорфизм. Существует морфизм $\rho$ такой, что $\rho\tilde{\nu} = x$, $\rho\tilde{\varphi} = \sigma$. Так как $\sigma$ — простой морфизм, из мономорфности $\tilde{\varphi}$ следует его изоморфность. Взяв $\mu = \tilde{\varphi}^{-1}\tilde{\nu}$, будем иметь $\sigma\mu = \rho\tilde{\nu} = x$, $\mu\varphi = \tilde{\varphi}^{-1}\tilde{\nu}\tilde{\varphi} = \nu$.

## § 2. Несократимое разложение объекта в объединение конечного числа неприводимых подобъектов

Подобъект $\xi$ называется неприводимым, если

$$\xi = \zeta \cup \eta \Rightarrow \xi = \zeta \text{ или } \xi = \eta.$$

Объект $X$ называется неприводимым, если его тотальный подобъект неприводим.

Объект $X$ называется объектом конечной (ко) глубины или (ко) артиновым, если в решетке $\mathbf{P}(X)$ (соотв., $\mathbf{Q}(X)$) не существует бесконечной убывающей цепи подобъектов (соотв., факторобъектов) $\xi_1 > \xi_2 > \xi_3 \cdots$. Объект $X$ называется объектом конечной (ко) высоты или (ко) нетеровым, если в $\mathbf{P}(X)$ (соотв., $\mathbf{Q}(X)$) нет бесконечной возрастающей цепи подобъектов (соотв., факторобъектов) $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \cdots$.

Разложение $\xi = \bigcup\limits_{i \in I} \xi_i$ подобъекта $\xi$ в объединение подобъектов $\xi_i$ называется несократимым, если для любого $j \in I$ $\xi \neq \bigcup\limits_{i \neq j} \xi_i$.

Предложение 4. Всякий артинов объект $X$ обладает несократимым разложением в объединение конечного числа неприводимых подобъектов.

Доказательство. Если бы в каждом разложении $X = \bigcup_{i=1}^{n} \xi_i$ объекта $X$ в объединение конечного числа своих подобъектов $\xi_i$ существовал приводимый подобъект, то как нетрудно убедиться, объект $X$ обладал бы бесконечной убывающей цепью подобъектов.

Всякое разложение в объединение подобъектов можно превратить в несократимое, если отбросить все „лишние" подобъекты, манкирование которых не меняет результата объединения.

Предложение 5. Если $X$ — объект с дистрибутивной решеткой подобъектов и $X = \bigcup_{i \in I} \xi_i = \bigcup_{j \in J} \eta_j$ — несократимые разложения объекта $X$ в обединение неприводимых подобъектов, то существует биекция $I \sigma J$ такая, что подобъекты $\xi_i$ и $\eta_{\sigma(i)}$ совпадают при всех $i \in I$.

Доказательство. В силу дистрибутивности решетки $\mathbf{P}(X)$ $\xi_i = \xi_i \cap (\bigcup_{j \in J} \eta_j) = \bigcup (\xi_i \cap \eta_j)$ для произвольного $i \in I$. Из неприводимости подобъекта $\xi_i$ следует, что $\xi_i = \xi_i \cap \eta_j$ для некоторого $j = \sigma(i)$ из $J$, поэтому $\xi_i \leqslant \eta_{\sigma(i)}$. Аналогично найдется $i' \in I$ такое, что $\eta_{\sigma(i)} \leqslant \xi_{i'}$. По транзитивности $\xi_i < \xi_{i'}$, откуда вследствие несократимости разложения $\bigcup \xi_i$ должно быть $i = i'$ и $\xi_i = \eta_{\sigma(i)}$. Полученное сопоставление $i \to \sigma(i)$ определяет нужную биекцию.

## § 3. Равномерные морфизмы

В категории с нулевыми морфизмами $X 0_{XY} Y$ для любого объекта $X$ классы подобъектов $\mathbf{P}(X)$ и факторобъектов $\mathbf{Q}(X)$ имеют наименьшие элементы: нулевой подобъект $0_{OX}$, и нулевой факторобъект, $0_{XO}$, где $O$ в индексе означает нулевой объект.

Под ядром $\ker \varphi$ морфизма $X \varphi Y$ понимается как мономорфизм $K \times X$, обнуливающий $\varphi$ слева и делящий всякий морфизм, обнуливающий $\varphi$ слева, так и класс эквивалентности этого мономорфизма, т. е. подобъект объекта $X$. Ядро морфизма $X \varphi Y$ — наибольший подобъект объекта $X$, имеющий нулевой образ относительно $\varphi$. Ядро произвольного мономорфизма $X \varphi Y$ существует и тривиально (то есть равно нулевому подобъекту $0_{OX}$). В категории с конечными коамальгамами существует ядро любого морфизма $X \varphi Y$; им является прообраз нулевого подобъекта $0_{OY}$ относительно морфизма $\varphi$. Двойственно, под коядром $\operatorname{coke} r\varphi$ морфизма $X \varphi Y$ понимается и факторобъект объекта $Y$ и любой представляющий его эпиморфизм. Корректно определяется также коядро произвольного подобъекта, любой представитель которого называется факторизацией по этому подобъекту. В категории с конечными амальгамами существуют факторизации по всем подобъектам.

Предложение 6. Любой представитель $Y \psi Z$ коядра произвольного морфизма $X \varphi Y$ является простым эпиморфизмом.

Доказательство. Эпиморфность $\psi$ требуется по определению коядра. Если $\psi = \psi' \eta$, где $\eta$ — мономорфизм, то $\varphi \psi' = 0$, поэтому существует морфизм $\eta'$ такой, что $\psi' = \psi \eta'$. После подстановки и сокращения на эпиморфизм $\psi$ справа получаем $\eta' \eta = 1$, откуда в силу

мономорфности $\eta$ и $\eta\eta' = 1$. Таким образом, $\eta$ — изоморфизм и, следовательно, $\psi$ — простой морфизм.

Отображения ядра и коядра антиизотонны в следующем смысле:

$$\chi = \varphi\psi \Rightarrow \ker\varphi \leqslant \ker\chi, \quad \operatorname{coker}\psi \leqslant \operatorname{coker}\chi.$$

Предложение 7. Для произвольного морфизма $X\varphi Y$.

(а). ker coker $\varphi$ делит $\varphi$ справа, coker ker $\varphi$ делит $\varphi$ слева;

(б). coker ker coker $\varphi$ = coker $\varphi$, ker coker ker $\varphi$ = ker $\varphi$.

Мономорфизм и подобъект $K\kappa X$ называются нормальными, если коядро $\kappa$ существует и $\kappa = \ker\operatorname{coker}\kappa$. Двойственно определяются конормальные эпиморфизм и факторобъект. Согласно предложению 7 (ко) ядро любого морфизма является (ко) нормальным подобъектом (соотв., факторобъектом) при условии существования его коядра (соотв., ядра).

Отображения ядра и коядра задают взаимно обратные биекции между классами $\mathbf{P}_0(X)$ нормальных подобъектов и $\mathbf{Q}_0(X)$ конормальных факторобъектов объекта $X$. На биекции между $P_0(X$, и $\mathbf{Q}_0(X)$ основан, так называемый, второй принцип двойственности (см. [3] для случая абелевых категорий). При действии второго принципа двойственности совпадают понятия коартиновости с нетеровостью и конетеровости с артиновостью.

Прообраз нормального подобъекта относительно произвольного морфизма является нормальным подобъектом. Аналогичное утверждение для образа нормального подобъекта относительно произвольного морфизма неверно, однако, как мы увидим в следующем параграфе, справедливо для являющихся равномерными морфизмами факторизаций при некоторых дополнительных условиях.

Морфизм $X\varphi Y$ называется (решеточно) равномерным по данному семейству подобъектов объекта $X$, если для любого подобъекта $K\kappa X$ из этого семейства прообраз образа относительно морфизма $\varphi$ существует и равен объединению этого подобъекта с ядром морфизма $\varphi$.

Морфизм $X\varphi Y$ называется равномерным, если он равномерен по семейству всех подобъектов объекта $X$.

Любой мономорфизм $X\varphi Y$ равномерен относительно произвольного семейства подобъектов объекта $X$ в силу предложения 1 (б) и тривиальности ядра мономорфизма.

Предложение 8. (а). Если композиция $\chi$ морфизма $X\varphi Y$ и мономорфизма $\psi$ равномерна по некоторому семейству подобъектов объекта $X$, то и $\varphi$ равномерен по этому семейству подобъектов.

(б). Композиция $\chi$ мономорфизма $X\varphi Y$ и равномерного по семейству подобъектов $\mathbf{M}$ объека $Y$ морфизма $\psi$ равномерна по семейству подобъектов $\mathbf{N}$ объекта $X$, образы которых относительно $\varphi$ принадлежат семейству $\mathbf{M}$, если решетка $\mathbf{P}(Y)$ модулярна (см. [4]).

Доказательство. (а). Согласно предложению 1 (б), примененному к мономорфизму $\varphi$, и функториальности $\mathbf{P}_*$ и $\mathbf{P}^*$ для произвольного подобъекта $\kappa$ из заданного семейства подобъекта объекта $X$ получаем

$$\varkappa\varphi_P\,\varphi^P = \varkappa\varphi_P\,\psi_P\,\psi^P\,\varphi^P = \varkappa\chi_P\,\chi^P = \varkappa \cup \ker\chi = \varkappa \cup \ker\varphi.$$

(6). Опять в силу функториальности отображений образа и прообраза, а также условия равномерности морфизма $\psi$ по $M$ для произвольного подобъекта $\varkappa$ из $N$ имеем

$$\varkappa\chi_P\,\chi^P = \varkappa\varphi_P\,\psi_P\,\psi^P\,\varphi^P = (\varkappa\varphi_P \cup \ker\psi)\,\varphi^P.$$

Поскольку $\varphi$ — мономорфизм, последнее выражение равно $((\varkappa\varphi_P \cup \ker\psi) \cap \varphi)\,\varphi^P$, которое с использованием свойства модулярности решетки $P(Y)$ преобразуется к виду $(\varkappa\varphi_P \cup (\ker\psi \cap \varphi))\,\varphi^P$. Опять из-за мономорфности $\varphi$ в силу предложений 1 и 2, получаем

$$(\varkappa\varphi_P \cup (\ker\varkappa)\,\varphi_P)\,\varphi^P = (\varkappa \cup \ker\varkappa)\,\varphi_P\,\varphi^P = \varkappa \cup \ker\chi.$$

Прежде, чем перейти к следующему предложению, сделаем два замечания. Во-первых, для мономорфизма $\varphi$ отображение прообраза определено в силу того, что $P(Y)$ — решетка (в частности, по пересечениям). Во-вторых, если $M = P(Y)$, то, очевидно, $N = P(X)$.

Предложение 9. В категории с конечными коамальгамами образ $N\nu Y$ неприводимого подобъекта $K\varkappa X$ относительно равномерного морфизма $X\varphi Y$ неприводим, если решетка $P(X)$ модулярна, а дополнительный морфизм $\tau$, подчиняющийся равенству $\tau\nu = \varkappa\varphi$, универсально прост.

Доказательство. Предположим, что $\nu = \alpha \cup \beta$ для некоторых подобъектов $\alpha$ и $\beta$ объекта $Y$. Тогда $\alpha' \cup \beta' = 1_N$, где $\alpha' = \alpha\nu^P$, $\beta' = \beta\nu^P$. Взяв $\tilde{\alpha} = \alpha'\tau^P$ и $\tilde{\beta} = \beta'\tau^P$, согласно предложениям 1 и 2 и условию универсальной простоты $\tau$ будем иметь

$$(\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta})\,\tau_P = \alpha'\tau^P\,\tau_P \cup \beta'\tau^P\,\tau_P = \alpha' \cup \beta' = 1_N.$$

Так как $X\varphi Y$ — равномерный морфизм, а $X$ — объект с модулярной решеткой подобъектов, согласно предложению 8 морфизмы $\varkappa\varphi = \tau\nu$ и, следовательно, $\tau$ равномерны. Последний морфизм к тому же простой, поэтому

$$1_K = 1_N\tau^P = (\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta})\,\tau_P\,\tau^P = \tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta} \cup \ker\tau.$$

Подобъекты $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, являясь прообразами подобъектов относительно $\tau$, содержат ядро этого морфизма. Следовательно, получаем $\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta} = 1_K$. Ввиду неприводимости подобъекта $K\varkappa X$ либо $\tilde{\alpha} = 1$, либо $\tilde{\beta} = 1$, откуда вытекает, что по крайней мере один из морфизмов $\alpha'$ и $\beta'$ делит простой морфизм $\tau$, поэтому является изоморфизмом.

Предложение 10. Пусть $X = \bigcup_{i \in I} \xi_i$ — несократимое разложение объекта $X$ в объединение подобъектов $\xi_i$, $X\varphi Y$ — равномерный относительно семейства всевозможных объединений подобъектов $\xi_i$ морфизм с ядром $\ker\varphi = \bigcup_{i \in K} \xi_i$, для которого определено отображение обратного образа $\varphi^P$, а $\eta_i$, $i \in I$ — образы подобъектов $\xi_i$ относительно

$\varphi$. Тогда образ $\eta$ морфизма $\varphi$ представляется в виде несократимого объединения подобъектов $\eta_i$, $i \in I \setminus K$.

Доказательство. Так как определено $\varphi^P$, согласно предложению 2 $\eta = 1_X \varphi_P = (\bigcup_{i \in J} \xi_i) \varphi_P = \bigcup_{i \in J} \eta_i$. Здесь все $\eta_i = 0$ при $i \in K$, потому что являются образами относительно $\varphi$ таких подобъектов, которые лежат в ядре этого морфизма.

Предположим, что $\eta = \bigcup_{i \in J} \eta_i$, где $J \subset I \setminus K$. Тогда $\eta_i = (\bigcup_{i \in J} \xi_i) \varphi_P$ и в силу равномерности морфизма $\varphi$ $1_X = \eta \varphi^P = (\bigcup_{i \in J} \xi_i) \cup \ker \varphi = \bigcup_{i \in J \cup K} \xi_i$. Так как исходное разложение — несократимое, $J \cup K = I$. Таким образом, несократимо и разложение $\eta = \bigcup_{i \in I \setminus K} \eta_i$.

## § 4. Наследуемость свойств

Пусть $X$ — произвольный объект, $\mathbf{N}$ — семейство подобъектов объекта $X$, $X \overset{\varphi}{\to} Y$ — некоторый морфизм, $\mathbf{N}_\varphi$ — семейство образов всех подобъектов из $\mathbf{N}$ относительно морфизма $\varphi$. Будем говорить, что свойство, которому удовлетворяет семейство подобъектов $\mathbf{N}$, наследуется при морфизме $\varphi$, если семейство подобъектов $\mathbf{N}_\varphi$ также обладает этим свойством.

Предложение 11. В категории с конечными коамальгамами следующая совокупность свойства семейства подобъектов $\mathbf{N}$ объекта $X$ наследуется при всех факторизациях объекта $X$ по подобъектам из семейства $\mathbf{N}$.

(1). $\mathbf{N}$ — замкнутое относительно объединений семейство нормальных подобъектов объекта $X$.

(2). Факторизация объекта $X$ по каждому подобъекту из семейства $\mathbf{N}$ существует и является универсально простым морфизмом, равномерным по семейству подобъектов $\mathbf{N}$.

(3). Морфизм, дополнительный к образу любого подобъекта из $\mathbf{N}$ относительно факторизации по произвольному подобъекту из семейства $\mathbf{N}$, является эпиморфизмом.

Доказательство. Пусть $R \rho X$ — произвольный подобъект семейства $\mathbf{N}$, $X \overset{\varphi_\rho}{\to} X_\rho$ — факторизация по нему, $\mathbf{N}_\rho$ — семейство образов подобъектов из $\mathbf{N}$ относительно $\varphi_\rho$. Их существование гарантируется условием (2). Проверим, что семейство подобъектов $\mathbf{N}_\rho$ объекта $X_\rho$ удовлетворяет условиям (1)—(3).

В силу условия (2) и определения равномерного морфизма образы подобъектов из $\mathbf{N}$ относительно $\tau_\rho$ существуют. Так как $\mathbf{N}$ замкнуто относительно объединений, согласно следствию из предложения 2 $\mathbf{N}_\rho$ также будет замкнутым относительно объединений. Чтобы доказать нормальность образа $K_\rho \varkappa_\rho X_\rho$ подобъекта $K \varkappa X$ из семейства $\mathbf{N}$ относительно $\tau_\rho$, надо убедиться в существовании факторизации по подобъекту $\varkappa_\rho$.

Для факторизаций $\varphi_\rho$, $\varphi_\varkappa$, $\varphi_{\varkappa U_\rho}$ по подобъектам, соответствующим индексам, существуют морфизмы $\varphi^\rho_{\varkappa U_\rho}$ и $\varphi^\varkappa_{\varkappa U_\rho}$, однозначно определяе-

мые равенствами $\varphi_{x\cup\rho} = \varphi_x \varphi^x_{x\cup\rho} = \varphi_\rho \varphi^\rho_{x\cup\rho}$. При этом $\varphi^\rho_{x\cup\rho}$ — факторизация по подобъекту $x_\rho$.

Действительно, дополнительный морфизм $\delta^x_\rho$ к образу $x_\rho$ подобъекта $x$ относительно факторизации $\varphi_\rho$, подчиняющийся равенству $\delta^x_\rho x_\rho = x\varphi_\rho$, эпиморфен согласно условию (3). Поэтому из равенств $\delta^x_\rho x_\rho \varphi^\rho_{x\cup\rho} = x\varphi_x \varphi^x_{x\cup\rho} = 0$ следует, что $x_\rho \varphi^\rho_{x\cup\rho} = 0$.

В силу равномерности морфизма $\varphi_\rho$ по $\mathbf{N}$ $x(\varphi_\rho)_\rho (\varphi^\rho)^\rho = x_\rho (\varphi_\rho)^\rho = x \cup \rho$, поэтому существует морфизм $\gamma$, который в паре с $x\cup\rho$ дает коамальгаму пары $(\varphi_\rho, x_\rho)$.

Предположим, что $\varphi_\rho \eta = 0$. Тогда $(x\cup\rho)\varphi_\rho \eta = \gamma x_\rho \eta = 0$. Следовательно $\varphi_\rho \gamma = \varphi_{x\cup\rho} \zeta$ для подходящего морфизма $\zeta$. Подставляя $\psi_{x\cup\rho} = \varphi_\rho \varphi^\rho_{x\cup\rho}$ и сокращая на эпиморфизм $\varphi_\rho$, получаем $\gamma = \varphi^\rho_{x\cup\rho} \zeta$. Таким образом, $\varphi^\rho_{x\cup\rho}$ — факторизация по подобъекту $x_\rho$.

Заметим, что $\varphi^\rho_{x\cup\rho}$, являясь правым делителем универсально простого морфизма $\varphi_{x\cup\rho}$, сам универсально прост. Так что для полного доказательства наследовательности свойства (2) осталось проверить равномерность факторизации $\varphi^\rho_{x\cup\rho}$ по семейству подобъектов $\mathbf{N}_\rho$.

Чтобы закончить доказательство наследуемости свойства (1), осталось проверить нормальность подобъекта $x_\rho$, то есть равенство $x_\rho = \ker \varphi^\rho_{x\cup\rho}$.

Предположим, что $\nu' \varphi^\rho_{x\cup\rho} = 0$ и рассмотрим коамальгаму $(x', \varphi')$ пары морфизмов $(\varphi_\rho, \nu')$. Поскольку $x' \varphi_{x\cup\rho} = \varphi' \nu' \varphi^\rho_{x\cup\rho} = 0$ и $\varphi_{x\cup\rho}$ — факторизация по нормальному подобъекту $x\cup\rho$ (который, следовательно, является его ядром), существует морфизм $\gamma'$ такой, что, $x' = \gamma'(x\cup\rho)$.

Так как $\varphi'\nu' = \gamma'(x\cup\rho)\varphi_\rho = \gamma'\gamma x_\rho$, где $\varphi'$ — простой морфизм (в силу универсальной простоты факторизации $\varphi_\rho$), а $x_\rho$ — мономорфизм, ввиду свойства диагонализуемости пары $(\varphi', x_\rho)$ существует морфизм $\sigma$ такой, что $\sigma x_\rho = \nu'$. Тем самым $x_\rho = \ker \varphi^\rho_{x\cup\rho}$ и наследственность свойства (1) доказана.

Проверим наследственность условия (3). Пусть $N \nu X$ — произвольный подобъект семейства $\mathbf{N}$, $\nu_\rho$ и $\nu_{\rho\cup x}$ — его образы относительно факторизаций $\varphi_\rho$ и $\varphi_{\rho\cup x}$, соответственно, а $\delta^\nu_\rho$ и $\delta^\nu_{\rho\cup x}$ — соответствующие дополнительные простые эпиморфизмы. Так как $\delta^\nu_{\rho\cup x} \nu_{\rho\cup x} = \nu \varphi_{\rho\cup x} = \delta^\nu_\rho \nu_\rho \varphi^\rho_{\rho\cup x}$, в силу свойства минимальности дополнительного простого морфизма $\delta^\nu_{\rho\cup x}$ к образу в категории с конечными коамальгамами имеем $\delta^\nu_{\rho\cup x} = \delta^\nu_\rho \delta'$ для некоторого морфизма $\delta'$, который, будучи правым делителем простого эпиморфизма $\delta^\nu_{\rho\cup x}$, сам прост и эпиморфен. Подставляя последнее равенство в предыдущее и сокращая на эпиморфизм $\delta^\nu_\rho$ справа, получаем равенство $\delta' \nu_{\rho\cup x} = \nu_\rho \varphi^\rho_{\rho\cup x}$, где $\delta'$ — простой морфизм, а $\nu_{\rho\cup x}$ — мономорфизм. Значит $\nu_{\rho\cup x}$ — образ $\nu_\rho$ относительно морфизма $\varphi^\rho_{\rho\cup x}$ с дополнительным простым эпиморфизмом $\delta'$.

Осталось завершить доказательство равномерности морфизма $\varphi^\rho_{x\cup\rho}$ относительно семейства подобъектов $\mathbf{N}_\rho$. Для произвольного подобъекта $\nu_\rho$ из $\mathbf{N}_\rho$ имеем

$$\nu_\rho(\varphi^\rho_{\tau U\rho})_P(\tau^\rho_{\tau U\rho})^P = \nu(\tau_\rho)_P(\varphi^\rho_{\tau U\rho})_P(\varphi^\rho_{\tau U\rho})^P(\tau_\rho)^P(\varphi_\rho)_P,$$

потому что $(\varphi_\rho)^P(\varphi_\rho)_P = 1$ в силу универсальной простоты морфизма $\varphi_\rho$. Используя функториальность отображений образа и прообраза и равномерность морфизма $\varphi_{\tau U\rho}$, последнее выражение преобразуем к виду $(\nu U\times U\rho)(\varphi_\rho)_P$, которое согласно предложению 2 равно $\nu_\rho U\times_\rho$. Предложение 11 доказано.

## § 5. Комбинаторное утверждение

**Предложение 12.** Пусть $A$ — квадратная матрица порядка $n$. $T$ — подмножество множества значений элементов $a_{ij}$ матрицы $A$, удовлетворяющие следующим условиям:

(а) для любых попарно различных строк $i_1, i_2, \cdots, i_{n-1}$ найдутся попарно различные столбцы $j_1, j_2, \cdots, j_{n-1}$ так, что $a_{i_k j_k} \in T$ при всех $k \in \overline{1; n-1}$;

(б) в каждом столбце матрицы $A$ есть элемент со значением из $T$. Тогда

(в) существует подстановка $\sigma$ степени $n$ такая, что $a_{k\,\sigma(k)} \in T$ при всех $k \in \overline{1; n}$;

Доказательство. Прежде всего отметим, что условия (а)—(в) инвариантны относительно любых перестановок строк и столбцов, поэтому справедливость предложения 12 достаточно проверить для некоторой матрицы $C$, получаемой из $A$ такой перестановкой.

Так как матрица $A$ удовлетворяет условию (а), найдутся элементы $a_{ij_r} \in T$ при всех $r \in \overline{1; n-1}$ с $j_r \neq j_s$ при $r \neq s$. Согласно (б) существует элемент $a_{ij_n} \in T$, где $j_n \neq j_r$ при всех $r \in \overline{1; n-1}$. Если $i = n$, подстановка $\sigma(r) = j_r$, $r \in \overline{1; n}$ будет удовлетворять условию (в). Далее будем предполагать, что $i < n$.

Из условия (а) следует, что найдется элемент $a_{nj} \in T$, причем согласно предыдущему можно считать, что $j \neq j_n$. В этом предположении $j$-тый столбец содержит два элемента из $T$: кроме $a_{nj}$ еще $a_{rj_r}$ при $r \leqslant n-1$ $j_r = j$. Если $j = j_i$, подстановка $\sigma$, определяемая равенствами $\sigma(r) = j_r$ при $r \in \overline{1; n-1}$, $r \neq i$, $\sigma(i) = j_n$ и $\sigma(n) = j_i$, будет удовлетворять условию (в). В дальнейшем предполагается, что $j \neq j_i$.

Переставим $j$-тый столбец на первое место, а $j_i$-тый и $j_n$-тый столбцы, содержащие $T$-значные элементы в $i$-той строке, на $(n-1)$-ое и $n$-ое места, а затем перестановкой строк полученную матрицу приведем к виду $C = (c_{rs})$ с $T$-значными элементами $c_{11}$, $c_{nn}$ и $c_{r+1\,r}$ при $r \in \overline{1; n-1}$.

Обозначим через $B_m$ подматрицу матрицы $C$, составленную из элементов, стоящих на пересечениях первых $m+1$ строк и первых $m$ столбцов. Матрица $B = B_1$ удовлетворяет следующему условию:

(г) присоединением произвольного столбца, содержащего хотя бы один $T$-значный элемент, к $B$ получается квадратная матрица, удовлетворяющая условию (в).

Предположим, что и матрица $B = B_m$ удовлетворяет условию (г). Матрица $C$, полученная из матрицы $A$ перестановкой строк и столбцов, удовлетворяет условию (а). Поэтому для строк $1, 2, \cdots, n-1$ можно найти соответствующие попарно различные столбцы $j_1, j_2, \cdots, j_{n-1}$ так, что $c_{kj_k}$ $T$-значны при всех $k \in \overline{1; n-1}$. В частности, найдется $T$-значный элемент $c_{rs}$ с $r < m+1$ и $s \geqslant m+1$.

Случай 1: $s \leqslant n-2$. Переставив $s$-тый столбец с $(m+1)$-ым столбцом, затем $(m+2)$-ую строку, с $s+1$-ой строкой, получим матрицу вида $C$, у которой уже под матрица $B_{m+1}$ будет удовлетворять условию (г). Проверим.

Присоединим к матрице $B_{m+1}$ $(m+2)$-й столбец с $T$-значным элементом $b_{t\,m+2}$. Если $t = m+2$, так как матрица $B_m$ удовлетворяет условию (г), найдется подстановка $\sigma$ порядка $m+1$ с $T$-значными элементами $c_{i\sigma(i)}$ при всех $i \in \overline{1; m+1}$. Определим подстановку $\tau$ порядка $m+2$, положив $\tau(i) = \sigma(i)$ при $i \in \overline{1; m+1}$ и $\tau(m+2) = m+2$.

Если $t \in \overline{1; m+1}$, опять воспользовавшись тем, что матрица $B_m$ удовлетворяет условию (г), найдем подстановку $\sigma$ порядка $m+1$ такую, что $c_{i\sigma(i)}$ $T$-значны при $i \in \overline{1; m+1}$, $i \neq t$ и $\sigma(t) = m+2$. В этом случае подстановку $\tau$ порядка $m+2$ определим условиями: $\tau(i) = \sigma(i)$ при $i \in \overline{1; m+1}$ и $\tau(m+2) = m+1$. В обоих случаях по построению $c_{i\tau(i)}$ $T$-значны при всех $i \in \overline{1; m+2}$. Таким образом, матрица $B_{m+1}$ удовлетворяет условию (г).

Указанным способом увеличивая размеры матрицы $B$ пока имеем дело со случаем 1, придем к случаю 2.

Случай 2: $s \geqslant n-1$. Так как матрица $B_m$ удовлетворяет условию (г), найдется подстановка $\tau$ порядка $m+1$ такая, что $c_{i\tau(i)}$ $T$-значны при всех $i \in \overline{1; m+1}$, $i \neq r$ и $\sigma(r) = s$. Определим подстановку $\sigma$ порядка $n$ условиями: $\sigma(i) = \tau(i)$ при $i \in \overline{1; m+1}$ и $\sigma(i) = i-1$ при $i \in \overline{m+2; n-1}$. Подстановка $\sigma$ будет удовлетворять условию (в).

## § 6. Основная теорема

**Теорема.** *Пусть объект $X$ категории с нулевыми морфизмами и конечными коамальгамами допускает несократимые разложения $\bigcup_{i=}^{m} \xi_i$ и $\bigcup_{j=1}^{n} \eta_j$ в объединения непреводимых подобъектов $\xi_i$ и $\eta_j$. Предположим, что всевозможные объединения подобъектов $\xi_i$ и $\eta_j$ существуют и семейство* **N** *этих объединений удовлетворяет условиям* (1)—(3) *предложения* 11 *и, кроме того, ненулевые образы неприводимых подобъектов $\xi_i$ и $\eta_j$ относительно факторизаций по подобъектам семейства* **N** *неприводимы. Тогда $m = n$ и при некоторой биекции индексов $\sigma$ образы подобъектов $\xi_i$ и $\eta_{\sigma(i)}$ относительно факторизаций $\overline{\varphi}_i$ по подобъекту $\bigcup_{k \neq i} \xi_k$ совпадают.*

**Доказательство** проводится индукцией по числу подобъектов в несократимом разложении.

Если $m=1$, то из равенства $\xi_1 = \bigcup_{j=1}^{n} \eta_j$ в силу неприводимости $\xi_1$ следует, что $\xi_1 = \eta_j$ для некоторого $j$, поэтому ввиду несократимости разложения $\bigcup_{j=1}^{n} \eta_j$ имеем $n=1$.

Пусть $i_1, i_2, \cdots, i_m$ — произвольная перестановка чисел $1, 2, \cdots, m$. Рассмотрим факторизацию $X\varphi_{i_m} U$ по подобъекту $\xi_{i_m}$, образы $u_l$, $v_j$ подобъектов $\xi_l$, $\eta_j$ относительно морфизма $\varphi_{i_m}$ (они существуют согласно условию (2)). Так как факторизация $\varphi_{i_m}$ — простой морфизм, в силу предложения 2 $U = \bigcup_{l=1}^{m} u_l = \bigcup_{j=1}^{n} v_j$. Из последнего разложения можно выделить несократимое разложение $U = \bigcup_{j\in J} v_j$, отбросив все лишние подобъекты, не влияющие на результат объединения. Разложение $U = \bigcup_{k=1}^{m-1} u_{i_k}$ будет несократимым согласно предложению 10. Из предположений теоремы следует, что подобъекты $u_l$ и $v_j$ последних разложений неприводимы.

Всевозможные объединения подобъектов $u_l$ и $v_j$ существуют на основании условия (1) и предложения 2. Семейство $\mathbf{N}'$ всех таких объединений удовлетворяет условиям (1)—(3) согласно свойству наследуемости этих условий (предложение 11). Из доказательства этого же предложения известно, что факторизация $\psi$ по любому подобъекту семейства $\mathbf{N}'$ в композиции с $\varphi_{i_m}$ является факторизацией по некоторому подобъекту семейства $\mathbf{N}$. В силу функториальности отображения образа ненулевые образы неприводимых подобъектов $u_l$ и $v_j$ относительно факторизаций по подобъектам класса $\mathbf{N}'$ неприводимы, потому что совпадают с образами неприводимых подобъектов $\xi_l$ и $\eta_j$ относительно факторизации по подобъекту из семейства $\mathbf{N}$.

По предположению индукции $J$ состоит из $m-1$ элемента и образы подобъектов $u_{i_k}$ и $v_{j_k}$, где $j_k \in J$ и $j_k \neq j_l$ при $k \neq l$, относительно факторизации $\bar{\psi}_{i_k}$ по нормальному подобъекту $\bigcup_{i\neq i_k} u_i$ совпадают при всех $k \in \overline{1; m-1}$. Воспользовавшись равенством $\bar{\varphi}_k = \varphi_n \bar{\psi}_{i_k}$ и функториальностью отображения образа, получим, что

(а) для произвольных попарно различных $i_1, i_2, \cdots, i_{m-1} \in \overline{1; m}$ существуют такие попарно различные $j_1, j_2, \cdots, j_{m-1} \in J$, что образы $\xi_{i_k}$ и $\eta_{j_k}$ относительно факторизаций $\bar{\varphi}_{i_k}$ совпадают при всех $k \in \overline{1; m-1}$.

Взяв прообраз равенства $U = \bigcup_{j\in J} v_j = (\bigcup_{j\in J} \eta_j)(\varphi_{i_n})_p$ относительно равномерного морфизма $\varphi_{i_n}$ с ядром $\xi_{i_n}$, получим

$$X = (\bigcup_{j\in J} \eta_j) \cup \xi_{i_n}. \qquad (*)$$

Поэтому образ объекта $X$ относительно факторизации по нормальному подобъекту $\eta_J = \bigcup\limits_{j\in J} \eta_j$ с одной стороны равен образу $\xi'_{i_n}$ подобъекта $\xi_{i_n}$, а с другой стороны, объединению $\bigcup\limits_{l\in J} \eta'_l$ образов $\eta'_l$ подобъектов $\eta_e$.

Предположим, что $\xi'_{i_n} = 0$. Тогда $\eta'_e = 0$ и, следовательно, $\eta_e \leqslant \eta_J$ при всех $l \in J$, потому что $\eta_J$ в силу нормальности является ядром своей факторизации. Но тогда вследствие несократимости разложения $X = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \eta_j$ имеем $J = \overline{1; n}$, откуда согласно индуктивному предположению на $J$ получаем $n = m - 1$.

Если подобъект $\xi'_{i_n}$ — ненулевой, то он согласно предположениям теоремы неприводим, поэтому $\xi'_{i_n} = \eta'_r$ при некотором $r \in J$ и, следовательно, $\eta'_{i_e} \leqslant \eta'_r$ при всех $l \in J$. Перейдя к прообразам относительно факторизации по подобъекту $\eta_J$, в силу равномерности этого морфизма и изотонности отображения прообраза получим, что $\eta_J \cup \eta_e \leqslant \eta_J \cup \eta_r$ при всех $l \in J$. Из этих соотношений следует, что $X = \eta_J \cup \eta_r$ и в силу несократимости разложения $X = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \eta_j$ получаем $J \cup \{r\} = \overline{1, n}$. Вместе с индуктивным предположением это дает $m = n$. Таким образом, в любом случае $n \leqslant m$. По соображениям симметрии аналогично $m \leqslant n$. Итого $m = n$.

Заметим, что теперь равенство (*) можно переписать в виде $X = (\bigcup\limits_{j\neq r} \eta^j) \cup \xi_{i_n}$. Опять воспользовавшись соображениями симметрии между разложениями $X = \bigcup\limits_{l=1}^{n} \xi_l = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \eta_j$, получаем:

(б) для произвольного $s \in \overline{1; n}$ найдется $r \in \overline{1; n}$, удовлетворяющее условию $X = (\bigcup\limits_{l\neq r} \xi_l) \cup \eta_s$; при этом образы подобъектов $\xi_r$ и $\eta_s$ относительно факторизации $\overline{\varphi}_r$ по подобъекту $\bigcup\limits_{l\neq r} \xi_l$ совпадают.

Построим квадратную матрицу $A = (a_{ij})$ инциденции разложения $X = \bigcup\limits_{l=1}^{n} \xi_l$ относительно разложения $X = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \eta_j$, положив $a_{ij} = 1$, если образы подобъектов $\xi_l$ и $\eta_j$ относительно факторизации $\overline{\varphi}_l$ совпадают, и $a_{ij} = 0$, в противном случае. Доказанные выше свойства (а) и (б) влекут выполнение условий (а) и (б) предложения 12. Поэтому согласно свойству (в) этого предложения $\xi_l(\overline{\varphi}_l)_p = \eta_{\sigma(l)}(\overline{\varphi}_l)_p$ при всех $l \in \overline{1; n}$ для некоторой подстановки $\sigma$.

Следствие. Если в категории с нулевыми морфизмами, конечными коамальгамами все подобъекты объекта $X$ нормальны, образуют модулярную решетку и существуют факторизации по ним, являющиеся универсально простыми равномерными морфизмами с универсально простыми дополнительными эпиморфизмами к образам

подобъектов относительно этих факторизаций, то при любом несократимом разложении $X = \bigcup_{i=1}^{m} \xi_i = \bigcup_{j=1}^{n} \eta_j$ в объединения конечного числа неприводимых подобъектов $m = n$ и $\xi_i(\bar{\varphi}_i)_p = \eta_{\sigma(i)}(\bar{\varphi}_j)_p$ для некоторой подстановки $\sigma$.

Достаточно к теореме применить предложение 9.

## § 7. Прямая сумма подобъектов

Объединение $X_i \xi_i X$ семейства подобъектов $(X_i \xi_i X,\ i \in I)$ будем называть суммой этого семейства, если

$$x_i^I \alpha = x_i^I \beta \ \forall i \in I \Rightarrow \alpha = \beta,$$

где $(X_I x_i^I X_I)$ — семейство морфизмов, однозначно определяемых равенствами $x_i^I \xi_I = \xi_i$. Прямая сумма $\xi_I = \bigoplus_{i \in I} \xi_i$ определяется дополнительным условием

$$\forall (X_i \eta_i Y,\ i \in I)\ \exists (X_I \eta Y,\ x_i \eta = \eta_i\ \forall i \in I.$$

Таким образом, если $\xi_I = \bigoplus_{i \in I} \xi_i$, то $(X_i x_i^I X_I)\ i \in I)$ — копроизведение (сумма) семейства объектов $(X_i,\ i \in I)$. Обратно, если в категории с нулевыми морфизмами $(X_i \xi_i X,\ i \in I)$ — копроизведение семейства объектов $(X_i,\ i \in I)$, то все $\xi_i$ — мономорфизмы и $X$ является объединением семейства подобъектов $(\xi_i,\ i \in I)$.

Объект $X$ называется кохопфовым, если любой простой эпиморфизм $X \xi X$ является изоморфизмом. Очевидно, любой кодартинов объект кохопфов. В категории со вторым принципом двойственности всякий нетеров объект кохопфов.

Предложение 13. Если в условиях теоремы § 6 $X$ — кохопфов объект и $X = \bigoplus_{i=1}^{m} \xi_i = \bigoplus_{j=1}^{n} \eta_j$, причем всевозможные объединения подобъектов $\xi_i$ являются суммами, то $m = n$ и для подходящей подстановки $\sigma$ подобъекты $X_i \xi_i X$ и $Y_{\sigma(i)} \eta_{\sigma(i)} X$ изоморфны, т. е. существуют изоморфизмы $Y_{\sigma(i)} \tau_i X_i$ при всех $i \in \overline{1 \cdot n}$.

Доказательство. Согласно теореме § 6 $m = n$ и найдется подстановка $\sigma$ такая, что образы $\xi_i$ и $\eta_{\sigma(i)}$ относительно факторизации $\bar{\varphi}_i$ по подобъекту $\bigoplus_{k \neq i} \xi_k$ совпадают. Поменяв индексы подобъектов $\eta_j$, можно считать, что $\sigma$ — тождественная подстановка. В качестве факторизации $\bar{\varphi}_i$ можно взять морфизм $X \bar{\varphi}_i X_i$, однозначно определяемый условиями $\xi_i \bar{\varphi}_i = 1$ и $\xi_j \bar{\varphi}_i = 0$ при $j \neq i$. Действительно, если $\bar{\xi}_i = \bigcup_{j \neq} \xi_j$ есть сумма объединяемых подобъектов и $x_j$ — удовлетворяющие равенствам $x_j \xi_i = \xi_j$ морфизмы, то $\bar{\xi}_i \bar{\varphi}_i = 0$, потому что $x_j 0 = \xi_j \bar{\varphi}_i = x_j \bar{\xi}_i \bar{\varphi}_i$ для всех $j \neq i$. Более того, если $\bar{\xi}_i \psi = 0$, то $\xi_j \psi = x_j \bar{\xi}_i \psi = 0$ при всех $j \neq i$. Поэтому для композиции $\bar{\varphi}_i \xi_i \psi$ имеем $\xi_j \bar{\varphi}_i \xi_i \psi = 0 = \xi_j \psi$

при всех $j \neq i$ и $\xi_i \bar{\varphi}_i \xi_i \psi = \xi_i \psi$. Поскольку $X$ — сумма подобъектов $\xi_j$, $j \in \overline{1\,n}$, получаем $\psi = \bar{\varphi}_i \xi_i \psi$.

Так как $\xi_i \bar{\varphi}_i = 1$, образ подобъекта $\xi_i$ относительно рассмотренной факторизации $\bar{\varphi}_i$ тотален. Поскольку образы подобъектов $\xi_i$ и $\eta_i$ относительно $\bar{\varphi}_i$ совпадают, существует дополнительный простой эпиморфизм $Y_i \tau_i X_i$, удовлетворяющий равенству $\tau_i = \eta_i \bar{\varphi}_i$.

По определению прямой суммы $X = \bigoplus_{i=1}^{n} \eta_i$ для семейства морфизмов $(Y_i \tau_i \xi_i X,\ i \in \overline{1\,n})$ существует единственный морфизм $X \xi X$ такой, что $\eta_i \xi = \tau_i \xi_i$.

Проверим, что $\xi$ — простой морфизм. Предположим, что $\xi = \alpha\beta$ с мономорфным $\beta$ и $(\beta_i, \gamma_i)$ — козамальгама пары $(\xi_i, \beta)$. Так как $\tau_i \xi_i = \eta_i \alpha\beta$ для любого $i \in \overline{1\,n}$, существует единственный морфизм $\zeta_i$, удовлетворяющий равенствам $\zeta_i \beta_i = \tau_i$, $\zeta_i \gamma_i = \eta_i \alpha$. Из первого равенства в силу простоты морфизма $\tau_i$ и мономорфности $\beta_i$ следует, что $\beta_i$ — изоморфизм. Тогда $\xi_i = \beta_i^{-1} \tau_i \beta$, т. е. $\xi_i \leqslant \beta$. Поскольку эти соотношения выполняются для всех $i \in \overline{1\,n}$ и $X = \bigcup_{i=1}^{n} \xi_i$, получаем, что $\beta$ — изоморфизм.

Теперь покажем, что $\xi$ — эпиморфизм. Если $\xi u = \xi v$, то для любого $i \in \overline{1\,n}$ $\eta_i \xi u = \eta_i \xi v$, следовательно, $\tau_i \xi_i u = \tau_i \xi_i v$. Из эпиморфности морфизмов $\tau_i$ вытекает, что $\xi_i u = \xi_i v$. Точно так же, как и выше, получаем $u = v = \xi_i v$. Так как эти равенства выполняются для всех $i \in \overline{1\,n}$ и $X = \bigoplus_{i=1}^{n} \xi_i$, получаем, что $u = v$.

В силу кохопфовости объекта $X$ простой эпиморфизм $X \xi X$ будет изоморфизмом. Поэтому из равенства $\tau_i \xi_i = \eta_i \xi$ следует, что $\tau_i$ — монорфизм. Поскольку к тому же $\tau_i$ — простой морфизм, он будет изоморфизмом, что и требовалось доказать.

Предложение 13 является аналогом теоремы Крулля—Ремака—Шмидта ([3]) о единственности разложения в прямую сумму неразложимых подобъектов инъективных объектов в абелевых категориях, распространенную Атьей ([1] или [3]) на произвольные объекты абелевой категории с некоторым условием конечности.

Ереванский государственный университет

Поступила 5.VI.1991

**Ս. Հ. ԴԱՎԱՆՅԱՆ.** Օրյեկտի վերջավոր թվով չբերվող ենթաօրյեկտների միավորման անկրճատելի վերլուծության միակության մասին *(ամփոփում)*

*Գլխավոր արդյունքը՝ որոշակի լրացուցիչ պայմաններ բավարարող զրոյական մորֆիզմներով կատեգորիայում օրյեկտի՝ վերջավոր թվով չբերվող ենթաօրյեկտների անկրճատելի վերլուծության միակության մասին թեորեմն է, որը ընդգրկում է ինչպես ենթաօրյեկտների ուղիղ գումարին իզոմորֆության, այնպես նաև իզոգենության դեպքերը։*

S. H. DALALYAN. *On unequeness of minimal decomposion of object to the union of finite number of irreducible subobjects* (summary)

Main result is theorem about uniqueness of minimal decomposition of object to the union of finite number of irreducible subobjects in the category with zero morphisms with some complementary conditions which embrace both cases: the case of isomorphism of direct sum of subobjects and the case of isogenie.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Atiyah M. F.* On the Krull—Schmidt theorem with application to sheaves, Bull Soc. Math. France, 84 (1956), 307—317.
2. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М., Наука, 1984.
3. *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов, М., Мир, 1972.
4. *Гретцер Г.* Общая теория решеток, М., Мир, 1982.
5. *Lang S.* Abelian Varieties, Interscience Pub., New York, 1959.
6. *Ringel C.* Diagonalisierungspaare I u II, Math. Z., 117, № 1—4 (1970), 249—266 и 122, № 1 (1971), 10—32.
7. *Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г.* Основы теории категорий. М., Наука, 1974.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 5, 1991 Математика

УДК 517.53

Г. А. БАРСЕГЯН, В. И. БЕЛЫЙ

# О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ФУНКЦИЙ, ОБРАТНЫХ К МЕРОМОРФНЫМ, НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

При рассмотрении приближений возможно простыми агрегатами функций $z = F(w)$, аналитических на римановой поверхности $R$, интуитивно напрашивается следующий подход.

Риманова поверхность $R$ разбивается на листы, и на каждом из листов функция $F(w)$ приближается, например, обычными полиномами. Мы не знаем результатов, относящихся к такой постановке (хотя она близка к классической) и, видимо, дело здесь в том, что вообще говоря, разбиение наперед заданной римановой поверхности на листы задача необозримая, требующая детального знания этой поверхности. Заметим, что если на $R$ имеется особенность $w_0$, алгебраическая или трансцендентная, то $\overline{\lim}_{w \to w_0} |F'(w)| = \infty$, так что приближение полиномом невозможно на всем листе, имеющем в качестве граничного элемента эту особенность $w_0$. Поэтому, если хотим приблизить $F(w)$ полиномами, придется из $R$ выбросить некоторые окрестности ее особенностей.

Учитывая эти особенности, поставим задачу следующим образом: выделить из $R$ по возможности малое число однолистных областей (листов) так, чтобы суммарная площадь этих листов была бы близка к площади всей поверхности $R$, и на каждом из листов приблизить $F(w)$ полиномом $p_N(w)$ степени $N$, где $N$ по возможности мало. При этом малость $N$ указывает на то, что функция $F(w)$ относительно просто устроена на листе, на котором осуществляется приближение полиномом $p_N(w)$.

Рассмотрим эту задачу для функций $F(w)$, обратных к мероморфным в $\mathbf{C}$ функциям $w(z)$, для которых имеем достаточно информации о проведении указанных выше листов (см. [1]). Напомним, что характеристика Л. Альфорса

$$A(r) = \frac{1}{\pi} \int\int_{|z|<r} \frac{|w'|^2 \, d\sigma}{(1+|w|^2)^2}$$

указывает среднее число листов римановой поверхности $F_r = \{w(z) : |z| \leqslant r\}$, являющейся $w$-образом круга $|z| \leqslant r$, и что $\pi A(r)$ — сферическая площадь поверхности $F_r$.

Следующие два результата, описывающие наиболее интересные крайние случаи, являются непосредственными следствиями общей теоремы 3.

Теорема 1. *Пусть* $w(z)$ — *мероморфная в* $\mathbf{C}$ *функция,* $\varepsilon > 0$. *Тогда из римановой поверхности* $F_n$ *для каждого* $r$ *можно выделить* $A(r)$ *таких однолистных областей* $D_i(r)$, $i = 1, 2, \cdots, [A(r)]$, *что*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{[A(r)]} S(D_i(r)) / \varepsilon A(r) \right\} \to 1, \quad r \to \infty, \quad r \overline{\in} E, \tag{1}$$

*где* $S(X)$ — *сферическая площадь* $X$, $E$ — *некоторое множество конечной логарифмической меры; и*

$$|F(w) - p_N^{(i)}(w)| < \varepsilon, \quad w \in D_i(r), \quad i = 1, 2, \cdots, [A(r)], \tag{2}$$

*где* $p_N^{(i)}(w)$ — *полиномы степени* $N$, *где* $N = N(r) = o(r^2)$.

Теорема 2. *Если нижний порядок функции* $w(z)$ *в теореме* 1 *больше двух, то теорема* 1 *справедлива, если в ней неравенство* (2) *заменить следующим:*

$$|F(w) - p^{(i)}| < \varepsilon, \quad w \in D_i(r), \quad i = 1, 2, \cdots, [A(r)], \tag{3}$$

*где* $p^{(i)}$ — *постоянные,* $i = 1, 2, \cdots, A(r)$.

Теоремы 1 и 2 показывают, что на $F_r$ можно выделить $[A(r)]$ „листов", сумма сферических площадей которых „почти" совпадают со сферической площадью всей поверхности $F_r$ и на каждом листе $F(w)$ приближается полиномом степени $N = o(r^2)$ (приближается постоянной) Отметим, что число выделяемых листов ($= [A(r)]$) — оптимальное, в силу определения $A(r)$ — „среднего числа листов". В общем случае имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть* $\psi(r)$ — *произвольная монотонная функция, стремящаяся к* $+\infty$ *при* $r \to \infty$. *Тогда в теореме* 1 *в качестве* $N = N(r)$ *можно взять*: 1) *либо целое число не меньшее*

$$\max\left\{ \psi(r), \frac{\psi(r) r^2}{\varepsilon^2 A(r)} \right\},$$

*либо* 0 — *в зависимости от* $i$; 2) *либо целое число, определяемое из условия*

$$\frac{N+1}{\ln(N+2)} > \frac{\psi^2(r) r^2}{\varepsilon A(r)}$$

*либо* 0 — *в зависимости от* $i$.

Отметим, что первая часть теоремы 3 дает лучшую оценку $N$ при $A(r)$, имеющих „медленный" рост; из нее с учетом того, что $\psi(r)$ может иметь произвольно медленный рост, следует теорема 1. Вторая часть теоремы 3 дает лучшую оценку, когда $A(r)$ имеет „быстрый рост"; из нее следует теорема 2.

Перейдем к доказательству теоремы 3. Мы существенно опираемся на результаты и конструкцию доказательства следующего утверждения ([1], теоремы 1, 2); мы приводим менее точный вариант, являющийся непосредственным следствием этого утверждения.

Теорема А. *Пусть* $w(z)$ — *мероморфная в* $\mathbf{C}$ *функция,* $\varphi(r)$ — *монотонная функция, стремящаяся к* $+\infty$ *при* $r \to \infty$. *Тогда для*

*любого $r$ в круге $|z| \leqslant r$ можно выделить $\Phi(r)$ областей $E_i(r)$, $i = 1, 2, \cdots, \Phi(r)$ таких, что*

I. *$w(z)$ — однолистна в $\overline{E_i(r)}$, $i = 1, 2, \cdots, \Phi(r)$; $C \setminus |w(E_i(r))|$ состоит из некоторого числа $k_i = k_i(r)$ односвязных областей $\Delta_j^i$, $j = 1, 2, \cdots, k_i(r)$, сферический диаметр каждого из которых стремится к нулю при $r \to \infty$;*

II. $$\Phi(r) = A(r) + o[A(r)], \quad r \to \infty, \quad r \in E,$$

*где $E$ — некоторое множество конечной логарифмической меры;*

III. $$\sum_{i=1}^{\Phi(r)} k_i(r) \leqslant 4A(r) + o[A(r)], \quad r \to \infty, \quad r \overline{\in} E;$$

IV. $$\operatorname{diam}(E_i(r)) \leqslant \varphi(r)\, r / A^{\frac{1}{4}}(r), \quad i = 1, 2, \cdots, \Phi(r).$$

Кстати, теорема 2 может быть легко выведена непосредственно из теоремы А. Нам понадобятся конструкции областей $w(E_i(r))$, которые уже приведены в [1], и некоторые их метрические соотношения. Сохраняя за описываемыми конструкциями те же обозначения, что и в [1], будем указывать лишь те свойства, которые нам понадобятся. Области у нас конструируются на римановой сфере $S$, и мы пользуемся полярными координатами в трехмерном пространстве — $(\varphi, \theta, \rho)$, где $\varphi$ — угол в горизонтальной плоскости, $\theta$ — угол в вертикальной плоскости, $\rho$ — модуль точки.

В дальнейшем у нас $n$ — четное число ($n > 100$). Определим $\Gamma(k) = \Gamma(k, t) = \{\varphi(t), \theta(t), \rho(t)\}$ как кривые (на сфере) со следующими параметрическими представлениями:

$$\varphi(t) = \varphi(k, t) = 2\pi t + \frac{\pi k}{n^5 - 1}; \quad \theta(t) = \theta(k, t) = \frac{\pi t}{2n};$$

$$\rho(t) = \frac{1}{2}; \quad t \in [-(n-5), n+5], \quad k = 0, 1, \cdots, n^5 - 1;$$

$D(r, a)$ — множество точек сферы, отстоящих от точки $a$ (на сфере на сферическом расстоянии $r$.

Пусть $$\Gamma^*(k) = \Gamma(k) \setminus \left\{ D\left(\frac{9}{n}, \infty\right) \cup D\left(\frac{9}{n}, 0\right) \right\}, \quad k = 0, 1, \cdots, n^5 - 1.$$ Среди этих кривых в [1] выделяются две кривые $\Gamma^*(2m_0 - 2)$ и $\Gamma^*(2m_0 - 1)$, удовлетворяющие определенным соотношениям. Через $\Gamma'$ и $\Gamma''$ обозначаются соответственно кривые $\Gamma^*\left(2m_0 - 2 + \frac{1}{3}\right)$ и $\Gamma^*\left(2m_0 - 2 + \frac{2}{3}\right)$. Кривые $\Gamma^*(2m_0 - 2)$, $\Gamma^*(2m_0 - 1)$, $\partial D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$, $\partial D\left(\frac{9}{n}, 0\right)$ разбивают сферу $S$ на четыре области. Обозначим $B_0(n, 1)$ ту из них, которая содержит кривые $\Gamma'$ и $\Gamma''$. Область $B_0(n, 1)$, разбивается кривыми $\Gamma'$ и $\Gamma''$ на три „подобные“ области, среднюю из которых, т. е. ту из них, граничными дугами которой являются кривые $\Gamma'$ и $\Gamma''$, обозначим через $B_0(n, 1)$.

Очевидно, выполняется следующее свойство: 1) сферическое расстояние между кривыми $\Gamma'$ и $\Gamma''$ не меньше величины $\frac{\pi}{6n^6}$.

Обозначим $C = A \sqcup B$ множество внутренних точек замыкания множества $A \cup B$; $B_0^*(n) = S \setminus \{B_0(n, 1) \sqcup D\left(\frac{9}{n}, \infty\right) \sqcup D\left(\frac{9}{n}, 0\right)$. Из области $B_0^*(n)$ выделяются области $\tilde{B}_m(n)$, ограничиваемые дугами больших окружностей сферы (проходящих через точку $\infty$ на сфере) и дугами кривых $\Gamma'$ и $\Gamma''$. Число $m$ меняется от $-\tau^{**}$ до $\tau^*$, о величинах которых будет сказано дальше. Нам понадобятся следующие свойства. Свойство 2): длины каждой дуги $\partial\tilde{B}_m(n) \cap \Gamma''$ равна $\frac{1}{3n^6}$. Свойство 3): часть $d_m$ кривой $\Gamma''$, заключенная между $\partial\tilde{B}_m(n) \cap \Gamma''$ и $\partial\tilde{B}_{m+1} \cap \Gamma''$, имеет длину не больше $3/n$ и не меньше $1/n$. Свойство 4): сферическое расстояние от точки $\infty$ (0) на сфере до $\tilde{B}_{\tau^*}(n)$ ($\tilde{B}_{-\tau^{**}}(n)$) не больше $\frac{10}{n}$ *. Обозначим через $\bar{B}_m(n)$, $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^* - 1$ среднею из трех областей, составляющих множество $B_0^*(n) \setminus \{\bar{B}_m(n) \cup \bar{B}_{m+1}(n)\}$, т. е. область, соседнюю как с $\bar{B}(n)$ так и $\tilde{B}_{m+1}(n)$. Пусть $M_{\tau^*}$—та из двух дуг большой окружности сферы, являющихся граничными для области $\bar{B}_{\tau^*}(n)$, которая не является граничной для области $D_{\tau^*-1}(n)$. Проведя сечение области $B_0(n, 1)$ линией, являющейся продолжением $M_{\tau^*}$ (в сторону точки $\infty$ на сфере) от точки на $\partial\bar{B}_{\tau^*} \cap \Gamma''$ до кривой $\Gamma''$, рассечем область $B_0(n, 1)$ на две области. Обозначим $B(n, 2$ ту из этих двух областей, граница которой не имеет общих точек с границей области $D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$. Проделаем ту же процедуру с заменой $\tau^*$ на $-\tau^{**}$ и заменой $\infty$ на 0. В качестве аналога области $B_0(n, 2)$ получим некоторую область $B_0(n, 3)$. Обозначим $B_0(n) = B_0(n, 2) \cap B_0(n, 3)$; $D(\infty)$, $D(0)$ — ту из двух „улиткообразных" областей, составляющих множество $S \setminus \{B_0(n) \sqcup \tilde{B}_{\tau^*}(n) \sqcup D_{-\tau^{**}}(n) \sqcup \cdots \sqcup D_{\tau^*-1}\}$, которая содержит точку $\infty$ (точку 0).

Заметим, что (свойство 5)) площадь каждого из множеств $D_m$, $D(0)$, $D_m$, $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^* - 1$ не больше чем $\pi\left(\frac{11}{n}\right)^2$, (здесь не учли свойство 3)).

Пусть $\varphi(r)$ та же, что в теореме А. Выберем в качестве $n = n(r)$ ближайшее к $\varphi(r)$ четное число $n > \varphi(r)$. При $r > r_0$ очевидно выполняется наше предположение $n > 100$.

---

* Мы не определили значений чисел $-\tau^{**}$ и $\tau^*$ (см. их определение в [1]), однако нам важно в их определении лишь выполнение свойства 4) и того, что описанное ниже продолжение $M_{\tau^*}$ достигает линии $\Gamma'$.

Из доказательства теоремы A ([1], теорема 1) следует, что $\overline{w(E_l(r))}$ содержит в себе множество $D_l^{\cdot}(r) = [S \setminus \partial B_0(n(r)) \cap \Gamma']] \setminus K$, где $K$ — совокупность $k_l(r)$ областей $\Delta_j^l$ типа $D(\infty)$, $D(0)$, $D_m$, $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^* - 1$, где все линии и области зависят от $n(r)$, а $k_l(r)$ то же, что в теореме A.

Пусть $D_l^{\cdot\cdot}(r) = D_l^{\cdot}(r) \setminus D'(\infty)$, где $D'(\infty)$ — соединение $D(\infty)$ с непосредственно примыкающей к $D(\infty)$ частью области $B_0(n)$ (это часть, отсекаемая от $B_0(n)$ продолжением $M_{\tau^*}$ в сторону, противоположную к $\infty$ на сфере). Отобразим эту область $D_l^{\cdot\cdot}(r)$ стереографически на плоскость. Сохраняя для плоскости те же обозначения, что и на сфере, заметим, что наименьшая „толщина" области $B_0(n)$ (на плоскости) достигается у точки 0. Из свойства 1), пользуясь формулой сферического расстояния между двумя точками, находим, что расстояние (на плоскости) между двумя линиями $\Gamma'$ и $\Gamma''$ больше, чем $c_1/\varphi^6(r)$, $c_1 = \text{const} > 0$. Из тех же соображений получаем, что минимальная длина $\partial \bar{B}_m(n) \cap \Gamma''$ достигается при $m = -\tau^{**}$ и оценивается снизу через $c_2/\varphi^6(r)$ (см. свойство 2)). Заметим, что в силу свойства 2) область $D_l^{\cdot\cdot}(r)$ лежит в $\{w: |w| \leqslant c_3 \varphi(r)\}$, $c_3 = \text{const} < \infty$.

Очертим внутри области $D_l^{\cdot\cdot}(r)$, около ее границы, полоски ширины $c_4/\varphi^7(r)$, $c_4 = \min(c_1, c_2)$. Если отнять от $D_l^{\cdot\cdot}(r)$ эту полоску, получим область $D_l^{\cdot}(r)$. Проделав ту же процедуру с $D_l^{\cdot}(r)$, то есть, отняв от нее полоску ширины $c_4/\varphi^7(r)$, примыкающую к границе $D_l^{\cdot}(r)$, получим искомую область $D_l(r) \subset D_l^{\cdot}(r)$.

Нам понадобятся следующие очевидные из построений свойства этих областей. Для каждого $l$: I. $D_l(r)$, $D_l^{\cdot}(r)$ — односвязны. II. Расстояние $\delta$ от $D_l(r)$ до $D_l^{\cdot}(r)$ не меньше $c_4/\varphi^7(r)$. III. $D^{\cdot}(r)$ лежит в круге радиуса $d = c_3\varphi^3(r)$. Функция $F(w)$ аналитична в области $D_l^{\cdot}(r)$.

Заметим, что сферическая площадь $S(D_l(r))$ есть $[\pi$ (т. е. площадь всей сферы) отнять [сферические площади описанных выше двух полосок, плюс сферическая площадь $D(\infty)$, плюс суммарная сферическая площадь $k$ ($\nu$) штук областей типа $D(\infty)$, $D(0)$, $D_m$; $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^* - 1\}]$. „Ширина" полосок не больше $2c_4/\varphi^7(r)$; „длина", складывающаяся из длин частей граничных кривых областей $B_0(n)$, $\bar{B}_m(n)$, $D(\infty)$, $D(0)$, легко видеть, не превосходит $c_5\varphi^3(r)$, $c_5 = \text{const} < \infty$. Таким образом, площадь полосок не больше $4c_4c_5/\varphi^5(r)$. Учитывая еще свойство 5), получим

$$0 \leqslant \Phi(r)\pi - \sum_{l=1}^{\Phi(r)} S(D_l(r)) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4c_4c_5}{\varphi^5(r)}\Phi(r) + \frac{\sum_{l=1}^{\Phi(r)} (k_l(r)+1)\pi(11)^2}{\varphi^3(r)}. \qquad (5)$$

Перейдем к оценкам степеней полиномов, приближающих на $D_l(r)$ функцию $f(w)$.

Пусть $G$ — односвязная область; $\Phi(z)$ — конформное отображение $\Omega = C\overline{G} = C \setminus \overline{G}$ на $\Omega' = \{w : |w| > 1\}$ с нормировкой $\Phi(\infty) = \infty$, $\lim\limits_{z\to\infty} \Phi(z)/z = \frac{1}{c} > 0$, где $c = \operatorname{cap} \overline{G}$ — конформная емкость $\overline{G}$; $L_{1+\tilde{u}}$ — прообраз окружности $|w| = 1 + \tilde{u}$, $\tilde{u} > 0$, в $z$-плоскости; $G_{1+\tilde{u}}$ — область, ограничиваемая кривой $L_{1+\tilde{u}}$. Мы будем пользоваться следующими теоремами B и C (см. [2], стр. 139, теорема 2, соотношение 2), стр. 142, теорема 3, соотношение 1)).

Теорема B. *Пусть $G$ — замкнутая односвязная область со связным дополнением, $f(z)$ — функция, регулярная в $G_{1+\tilde{u}}$, причем*

$$|f(z)| \leqslant M \text{ при } z \in L_{1+\tilde{u}}.$$

*Тогда существует полином $p_N(z)$ такой, что*

$$|f(z) - p_N(z)| \leqslant M\left[2\sqrt{e}\,\frac{1+\tilde{u}}{\tilde{u}} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{(N+1)(1+\tilde{u})^2}{(1+\tilde{u})^2 - 1} + \frac{(1+\tilde{u})^2}{(1+\tilde{u})^2 - 1}\ln(N+2)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1+\tilde{u}}\right)^{N+1}\right], \qquad (6)$$

*при $z \in \overline{G}$, $N+1 > (\sqrt{1+\tilde{u}} - 1)^{-1}$.*

Теорема C. *В условиях теоремы* B *выполняется неравенство*

$$|f(z) - p_N(z)| \leqslant M\,\frac{1+\tilde{u}}{\tilde{u}}\left[\sqrt{N+1}\,(\ln(N+2) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\ln\frac{(1+\tilde{u})^2}{(1+\tilde{u})^2 - 1}} + \sqrt{e}\right]\left(\frac{1}{1+\tilde{u}}\right)^{N+1} \text{ при } z \in \overline{G}. \qquad (7)$$

Теоремы B и C изложены после пересчета порядка линий уровня в соответствии с замечанием 1 на стр. 128 книги [2].

В нашей ситуации мы знаем лишь область $G$, и чтобы воспользоваться этими теоремами, нам нужно найти некоторое $\tilde{u} > 0$, при котором $f(z)$ окажется регулярной в области $G_{1+\tilde{u}}$.

Пусть $f(z)$ регулярна в области $G(\delta)$ с жордановой границей, которая содержит $\overline{G}$ и такая, что расстояние $\rho(\partial G(\delta), \partial G) > \delta > 0$. Кривая $\tilde{L} = \partial G(\delta)$ перейдет в $\tilde{L}'$ во внешности единичного круга.

Пусть кратчайшее расстояние между $|w|=1$ и $\bar{L}'$ реализуется на радиальном отрезке $\overline{w_1 w_2}$, $|w_1|=1$, $|w_2|=1+u$. Тогда прообраз окружности $|w|=1+u$ в плоскости $z$ есть линия уровня $L_{1+u}$ порядка $1+u$ для $\bar{G}$, полностью принадлежащая $G(\delta)\setminus G$, причем максимальная (по $u$).

Если мы оценим снизу величину $u$ по метрическим данным $\delta$ и $d=\operatorname{diam}\bar{G}$, то в области $G_{\widetilde{1+u}}$, $0<\bar{u}=\bar{u}(\delta, d)<u$, функция $f(z)$ окажется регулярной.

Пусть $z_1=\Phi^{-1}(w_1)$; $z_2=\Phi^{-1}(w_2)$; $D_R$ — круг с центром в точке $z_1\in L$, содержащий $\bar{G}$; $m(z_1, z_2, \partial D_R)$ — модуль семейства кривых, отделяющих в $D_R\setminus G$ точки $z_1$ и $z_2$ от $\partial D_R$;

$$\mu_{-}(z_1, z_2, \Omega)\overset{\text{def}}{=}\lim_{R\to\infty}\left[m(z_1, z_2, \partial D_R)-\frac{1}{2\pi}\ln R\right] \tag{8}$$

— приведенный относительно $\infty$ модуль семейства кривых, отделяющих в $\Omega$ точки $z_1$ и $z_2$ от $\infty$ (см. [3]).

Как установлено в [4], см. также [5], справедливо точное соотношение

$$\frac{u}{1+u}=2\sqrt{\frac{1}{c}}\,e^{-\mu_{-}(z_1, z_2, \Omega)}. \tag{9}$$

Для того, чтобы выбрать $u$, оценим сверху величину $\mu_{-}(z_1, z_2, \Omega)$, основываясь на том, что всякая, отделяющая точки $z_1$ и $z_2$ от $\infty$ кривая, замыкающаяся на границу $L=\partial G$, должна иметь длину $\geqslant 2\delta$.

Воспользуемся тем, что (см. [3])

$$m(z_1, z_2, \partial D_R)=\inf_{\rho\in P_L}A(\rho)\leqslant A(\rho^*)=\iint_C[\rho^*(z)]\,dx\,dy$$

согласно $L$-определению модуля, где $\rho^*$ — любая допустимая в $L$-определении модуля функции. Возьмем в качестве $\rho^*$ функцию

$$\rho^*(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\delta}, & z\in\{|z:|z-z_1|\leqslant d+2\delta<R\}\setminus\bar{G}|;\\[2ex] \dfrac{1}{2\pi|z-z_1|}, & z\in\{|z:d+2\delta\leqslant|z-z_1|\leqslant R\}\setminus\bar{G}|;\\[2ex] 0 \text{ вне } D_R \text{ и в области } \bar{G}.\end{cases}$$

Эта функция допустима в $L$-определении модуля, так как для каждой отделяющей кривой $\gamma$ легко проверить, что выполняется

$$\int_\gamma\rho^*(z)\,|dz|\geqslant 1.$$

Тогда

$$m(x_1,\ x_2,\ \partial D_R) \leqslant A(p^*) \leqslant \iint\limits_{|z-z_1|<d+2\delta} \frac{1}{4\delta^2}\,dxdy + \iint\limits_{d+2\delta<|z-z_1|<R} \frac{1}{4\pi^2|z-z_1|^2}\,dxdy = \frac{\pi(d+2\delta)^2}{4\delta^2} + \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{d+2\delta}^{R} \frac{dt}{t} = \frac{\pi(d+2\delta)^2}{4\delta^2} + \frac{1}{4\pi}\ln\frac{R}{d+2\delta} < \frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 + \frac{1}{2\pi}\ln R.$$

Отсюда, учитывая (8), имеем

$$\mu_0(z_1,\ z_2,\ \Omega) < \frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2. \tag{10}$$

Для конформной емкости $c$ известна оценка $\frac{d}{4} \leqslant c \leqslant d$, так что из (9) и (10) получим

$$u > 2\sqrt{\frac{1}{c}}\,e^{-\frac{1}{2}\mu_0(z_1,\ z_2,\ \Omega)} > 2\sqrt{d^{-1}}\,e^{-\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2}. \tag{11}$$

Итак, $\tilde{u}$ можно взять равным величине $2\sqrt{d^{-1}}\,e^{-\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2}$. Применим теперь теорему Б к нашей функции $F(w)$ в $D_l(r)$ (которая выполняет роль области $G$ в теореме В). Роль области $G_{1+\tilde{u}}$ выполняет некоторая область $D_{l,\,1+\tilde{u}}(r)$, которая определяется через $D_l(r)$ и $D_l'(r)$ точно так же, как определяется $G_{1+\tilde{u}}$ через $G$ и $G(\delta)$.

Учитывая свойства II и III областей $D_l(r)$, $D_l'(r)$ для величины $\tilde{u}$, имеем в нашем случае

$$\tilde{u} = 2\sqrt{d^{-1}}\,e^{-\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2} = \sqrt{c_3}\,\varphi(r)\,e^{-\frac{\pi^2}{2}\varphi^{18}(r)\left(\frac{c_3}{c_4}\right)^2} = c_6\varphi(r)\,e^{-c_7\varphi(r)},\quad c_6,\ c_7 = \text{const} > 0. \tag{12}$$

Пусть $w_i$ — произвольная точка из $D_l(r)$, $i = 1, 2, \cdots, \Phi(r)$. Запишем теорему В для функции $F(w) - F(w_i)$, регулярной в области $D_{l,\,1+\tilde{u}}(r)$, взяв при этом

$$N+1 > \frac{3}{\tilde{u}} > \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{u}}-1}. \tag{13}$$

После некоторых упрощений, учитывая, что $\tilde{u}$ мало и $(1+\tilde{u})^{N+1} > 1+(N+1)\bar{u}$, имеем при $w \in \overline{D_i(r)}$

$$|F(w)-F(w_i)-p_N^i(w)| < M_i\left[2\sqrt{e}\left(1+\frac{1}{\bar{u}}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{N+1}{\left(1-\frac{1}{1+\bar{u}}\right)^2}+\frac{(1+\tilde{u})^2}{\left|\left[(1+\tilde{u})^2-1\right]^2\right.}\ln(N+2)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1+\bar{u}}\right)^{N+1}\right. <$$

$$< \frac{2M_i}{\bar{u}}\left((\sqrt{e}+\sqrt{N+1+\ln(N+2)}\right)\left(\frac{1}{1+\tilde{u}}\right)^{N+1} < \tag{14}$$

$$\leqslant \frac{4eM_i\sqrt{N+1}}{\bar{u}\left(1+(N+1)\tilde{u}\right)} \leqslant \frac{4eM_i}{\bar{u}^2\sqrt{N+1}}.$$

Из теоремы А, учитывая что $D_i(r) \subset w(\overline{E_i(r)})$, имеем оценку

$$M_i = \sup_{w\in D_i(r)}|F(w)-F \quad {}_i| \leqslant \frac{\varphi(r)\,r}{A^{1/2}(r)},$$

так что из (12) и (14) получаем

$$|F(w)-F(w_i)-p_N^i(w)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4e}{c_6^2}\,\frac{e^{2c_7\varphi^{18}(r)}}{\varphi(r)}\cdot\frac{r}{\sqrt{A(r)}\sqrt{N+1}}. \tag{15}$$

Для функции $\psi(r)$ из теоремы 1, выберем $\varphi(r)$ (в теореме А) так, чтобы последнее соотношение равнялось бы $\frac{\sqrt{\psi(r)}\,r}{\sqrt{A(r)}\sqrt{N}}$; условие (13) в этом случае будет заведомо выполняться при

$$N = N(r) > \psi(r),\ r > r_0.$$

Отсюда и из (15) для заданного $\varepsilon > 0$ получим, что для любого целого $N > \max\left\{\psi(r),\ \frac{\psi(r)\,r^2}{\varepsilon^2 A(r)}\right\}$ можно указать такой полином $P_N^{(i)}(w)$, чтобы выполнялись неравенства

$$|F(w)-F(w_i)-p_N^{(i)}(w)| = |F(w)-P_N^{(i)}(w)| < \varepsilon,$$

$$w \in D_i(r),\ i = 1, 2, \cdots, \Phi(r), \tag{16}$$

где $P_N^{(i)} = p_N^{(i)} + F(w_i)$ — полином степени $N$.

В случае, если ожидается, что степень $N$ полинома может быть меньше указанного числа, вместо теоремы В воспользуемся теоремой С, в которой $N$ уже не ограничивается снизу.

Используя схему вывода неравенства (14) в теореме В, из теоремы С получим (очень грубо) следующую оценку:

$$|F(w)-F(w_i)-P_N^{(i)}(w)| < \frac{6eM_i\sqrt{n\ (2/(\bar{u})}}{\bar{u}^2}\cdot\frac{\sqrt{\ln(N+2)}}{\sqrt{N+1}} <$$

$$< \frac{\sqrt{\psi(r)}}{\sqrt{A(r)}}\cdot\frac{\sqrt{\ln(N+2)}}{\sqrt{N+1}}.$$

Здесь мы учли определение $\psi(r)$. Теперь ясно, что при $N$, определяющемся из условия

$$\frac{N+1}{\ln(N+2)} < \frac{\psi(r)\,r^2}{\varepsilon^2 A(r)},$$

имеем оценку (16). В этом варианте при быстром росте $A(r)$ величина $N$ может быть уже малой или даже равной нулю.

Таким образом, мы выделяли из $F_r$ $\Phi(r)$ штук областей $D_i(r)$, $i=1,\cdots,\Phi(r)$, в каждой из которых $F(w)$ равномерно приближается полиномом с указанной в теореме 3 степенью. Теперь, если $\Phi(r)\geqslant [A(r)]$, выбросим из областей $D_i(r)$, $i=1, 2,\cdots,\Phi(r)$ области с номерами $i\geqslant[A(r)]+1$. Для оставшихся областей $D_i(r)$, $i=1, 2,\cdots,[A(r)]$, учитывая оценки велинин $\Phi(r)$, $\sum_{i=1}^{\Phi(r)} k_i(r)$, приведенные в теореме А, из неравенства (5) легко выведем соотношение (1) теоремы 1. Тем самым теорема 3 доказана при $\Phi(r)\geqslant[A(r)]$. Если же $\Phi(r)<[A(r)]$, то добавим к областям $D_i(r)$, $i=1, 2,\cdots,\Phi(r))$, $[A(r)]-\Phi(r)$ штук областей из $F_r\setminus\sum_{i=1}^{\Phi(r)} D_i(r)\,(\neq\varnothing)$, сумма площадей которых меньше 1 и таких, что в каждой из этих областей функция $F(w)$ равномерно приближается постоянной. Ясно, что (1) выполняется и для этой новой совокупности областей $D_i(r)$, где $i$ уже изменяется от 1 до $[A(r)]$ и что для $w\in D_i(r)$ степень $N$ определяется согласно теореме 3.

Институт математики
АН Армении

Поступила 10.VII.1989

Գ. Ա. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ, Վ. Ի. ԲԵԼԻՅ. Մերոմորֆ ֆունկցիաներին հակադարձ ֆունկցիաների բազմանդամային մոտարկումների մասին Ռիմանի մակերևույթի վրա: *(ամփոփում)*

*Ներկա հոդվածում հետազոտվում են մերոմորֆ ֆունկցիաներին հակադարձ* R *Ռիմանյան մակերևույթի վրա դիտարկվող* F(w) *ֆունկցիաների բազմանդամային մոտավորությունները։* R*-ից անջատվում է փոքր թվով միաթերթ տիրույթներ, որոնց գումարային մակերեսը լինի մոտիկ* R*-ի ամբողջ մակերեսին։ Ամեն մի* R*-ի թերթի վրա իրագործվում է* F(w) *ֆունկցիայի մոտարկումը* $p_N(w)$ N *աստիճանի բազմանդամով ընդ որում* N*-ի փոքրությունը վկայում է* F(w) *ֆունկցիայի համեմատական կառուցվածքի մասին։*

G. A. BARSEGIAN, V. I. BELIY. *On polynomial approximation of functions which are inverse to the meromorphic functions on the Rimann surface* (summary)

In this paper the problem of approximation of functions $F(w)$ on the Riemann surfaces $R$ which are inverse to the meromorphic functions is solved. We extract from $R$ the possible small number of univalent domains such that their total area

is "close" to the area of the whole surface $R$. On each sheet of Riemann surfaces we appoximate $F(w)$ by polinomials $p_N(w)$ of $N$ degree with the smallest $N$. The smallness of $N$ shows that $F(w)$ has rather simple construction on each sheet where the approximation is carried out.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Г. А. Барсегян.* Свойство близости $a$-точек мероморфных функций и структура однолистных областей римановых поверхностей. Изв. АН АрмССР, сер. матем.; часть I: 1985, т. 20, № 5, 375—400; часть II: 1985, т. 20, № 6, 407—425.
2. *В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.—Л., 1964, «Наука», 438 с.
3. *В. И. Белый.* Конформные отображения и приближение функций в областях с квазиконформной границей. Матем. сб., 1977, т. 102 (144), № 3, 331—361.
4. *В. И. Белый.* Метод конформных инвариантов в теории приближения функций комплексного переменного. Автореф. докт. диссерт., Киев, 1978, 22 с.
5. *V. I. Belly* Development of the method of conformal invariants and quasiconformal quasi-invariants from the viewpoint of application to problems of polynomial approximation. Approximation and functional spaces, Proc. of Intern. Conf. held in Gdansk, Aug. 27—31, 1979, 1981, North—Holland Publ. Comp., Amsterdam, N. Y., Oxford, PWN—Polish Sc. Publishers, 102—121.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 5, 1991 Математика

УДК 517.956

М. А. ЗИРОЯН

# ЛИНЕЙНЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА С ОСОБЕННОСТЬЮ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Пусть $D$ — единичный круг $|z|<1$ на комплексной плоскости $z=x+iy$, $\Gamma$ — единичная окружность. Обозначим через $B(D)$ класс функций, аналитических в области $D$ и непрерывных в замкнутом круге $D+\Gamma$. Введем в классе $B(D)$ норму: если $\varphi(z)\in D$, то $\|\varphi\|=\max\limits_{z\in\Gamma}|\varphi(z)|$. Этим класс $B(D)$ становится банаховым пространством.

Обозначим через $B'(D)$ подпространство пространства $B(x)$, элементы которого удовлетворяют условию $\varphi(0)=0$.

В пространстве $B(D)$ рассмотрим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение высшего порядка вида:

$$z^n\varphi^{(k)}(z)+a(z)\varphi(\alpha(z))=f(z),\ z\in D, \tag{1}$$

где $\varphi(z)$ — искомое решение, $a(z)$ и $f(z)$ — заданные функции из $B(D)$ а $\alpha(z)$ — из $B'(D)$. Предполагается также, что $|\alpha(z)|\leqslant 1$, $n$ и $k$ — произвольные целые, положительные числа, $a(0)\neq 0$.

Уравнение (1) при $f\equiv 0$ будем называть однородным. Уравнение (1) при $n=k=1$ и $a(z)=\text{const}$ рассмотрено в работе [1]. Уравнение (1) используется для эффективного решения задач для эллиптических уравнений в классических областях (окружность, эллипс, полуплоскость). В конце приведем один пример применения уравнения (1).

## § 1. Исследование уравнения (1)

1. Рассмотрим случай, когда в уравнении (1) $n\leqslant k$ и функция $\alpha(z)$ в точке $z=0$ имеет нуль порядка $l$, $l\geqslant 1$, т. е. функцию $\alpha(z)$ можно представить в виде

$$\alpha(z)=z^l\alpha_1(z),\ l\geqslant 1, \tag{2}$$

где $\alpha_1(z)$ — некоторая аналитическая функция в $D$, причем $\alpha_1(z)\neq 0$.

В этом параграфе линейная зависимость или независимость решений однородного уравнения (1) понимается в поле комплексных чисел.

Теорема 1. *Если $n<k$ или $n=k$ и $l>2$, то однородное уравнение* (1) *имеет $\varkappa_1$ линейно-независимых решений, а для разрешимости соответствующего неоднородного уравнения необходимо и достаточно выполнения $\varkappa_1'$ линейно-независимых условий ортогональности вида*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \tilde{C}_{ij} f^{(j)} = 0,\ j = 1, 2, \cdots, \varkappa_1', \tag{3}$$

где $\tilde{C}_{ij}$ — вполне определенные комплексные постоянные, не зависящие от $f(z)$, и $\varkappa_1$ и $\varkappa_1'$ выражаются формулами

$$\varkappa_j = \left[\frac{lk-n}{l}\right] \text{ и } \varkappa_1' \equiv \left[\frac{n(l-1)}{l}\right], \tag{4}$$

где выражение $\left[\frac{lk-n}{l}\right]$ означает целую часть $\frac{lk-n}{l}$.

Доказательство. Пусть $n < k$, $l \geqslant 1$. Представим решение $\varphi(z)$ следующем виде

$$\varphi(z) = \Psi(z) + P_{k-1}(z), \tag{5}$$

где $\Psi(z)$ — некоторая аналитическая функция в $|z| < 1$, удовлетворяющая условиям

$$\Psi^{(j)}(0) = 0,\ j = 0,\ 1, \cdots,\ k-1, \tag{6}$$

а $P_{k-1}(z)$ — полином вида

$$P_{k-1}(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{k-1} z^{k-1}, \tag{7}$$

$c_0, c_1 \cdots, c_{k-1}$ — комплексные постоянные.

Учитывая представление $\varphi(z)$ в (5), уравнение (1) примет следующий вид

$$z^n \Psi^{(k)}(z) + a(z) \Psi(\alpha(z)) = f(z) - a(z) P_{k-1}(\alpha(z)). \tag{8}$$

Рассмотрим сначала однородное уравнение, т. е. $f(z) = 0$,

$$z^n \Psi^{(k)}(z) + a(z) \Psi(\alpha(z)) = -a(z) P_{k-1}(\alpha(z)). \tag{9}$$

Так как левая часть уравнения (9) в точке $z = 0$ имеет нуль порядка $n$, то его правая часть в этой точке также должна иметь ноль порядка не менее $n$, т. е.

$$-a(z) P_{k-1}(\alpha(z)) = z^n Q(z), \tag{10}$$

где $Q(z)$ — некоторая функция из $B(D)$. С учетом (2), выражение (10) запишем в виде

$$-c_0 a(z) - c_1 a(z) z^l a_1(z) - c_2 a(z) z^{2l} a_1^2(z) - \cdots - \tag{11}$$

$$-c_{k-1} a(z) z^{l(k-1)} a_1^{k-1}(z) = z^n Q(z). \tag{11}$$

Так как $a(0) \neq 0$, то левая часть равенства (11) имеет ноль порядка не меньше $n$, тогда и только тогда, когда $c_j = 0$ для всех индексов $j$, удовлетворяющих условиям $jl < n$. Последний будет тот номер, который удовлетворяет условию

$$j_0 l < n \text{ и } (j_0 + 1) l > n. \tag{12}$$

Остальные $\varkappa_1 = k - j_0 - 1$ значения $c_{j_0+1}, c_{j_0+2}, \cdots, c_{k-1}$ выбираются произвольным образом. В силу неравенств (12) число $\varkappa_1$ определяется формулой

$$\varkappa_1 = \left[ \frac{lk - n}{l} \right].$$

Пусть полином $P_{k-1}(z)$ выбирается таким образом. Тогда функция $a(z) P_{k-1}(\alpha(z))$ представляется в виде (10). Подставляя (10) в (9) и разделив обе части на $z^n$, получим

$$\Psi^{(k)}(z) + a(z) z^{-n} \Psi(\alpha(z)) = \Omega(z). \tag{13}$$

Обозначим

$$\Psi^{(k)}(z) = \omega(z), \tag{14}$$

где $\omega(z)$ — некоторая аналитическая функция в $D$, тогда

$$\Phi(z) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^z (z - \xi)^{k-1} \omega(\xi)\, d\xi. \tag{15}$$

Подставляя значения функций $\Psi^{(k)}(z)$ и $\Psi(z)$ (14) и (15) в (13), после некоторой перегруппировки членов, уравнение (13) приведем к виду

$$\omega(z) = \Omega(z) + K(\omega(z)), \tag{16}$$

где

$$K(\omega(z)) = a(z) z^{-n} \int_0^{\varkappa(z)} (\alpha(z) - \xi)^{k-1} \omega(\xi)\, d\xi.$$

Покажем, что уравнение (16) можно решить методом последовательных приближений, т. е. ряд Неймана

$$\omega(z) = \Omega(z) + K(\Omega(z)) + K^2(\Omega(z)) + \cdots + K^j(\Omega(z)) + \cdots \tag{17}$$

сходится равномерно в области $D(K^j(\Omega(z)))$ — применение оператора $K$ на $\Omega(z)$ в $j$-раз). Оценим значения $K^j(\Omega(z))$. Если для некоторой аналитической функции $\omega(z)$ имеет место неравенство $|\omega(z)| < c|z|^{r_0}$, то легко показать, что

$$|K(\omega(z))| < c|b| \frac{|z|^{r_0+1}}{(r_0+1)}. \tag{18}$$

В силу того, что $|\Omega(z)| < |\Omega|$, из неравенства (18) имеем

$$|K(\Omega(z))| < |\Omega|\,|b| \cdot |z|, \quad b(z) = a(z) z^{-n}. \tag{19}$$

Для $K^2(\Omega(z))$ имеем

$$|K^2(\Omega(z))| = |K(K(\Omega(z)))| < |\Omega|\,|b_1|^2 \frac{|z|^2}{2!}.$$

Продолжая аналогично, получим

$$|K^j(\Omega(z))| < |\Omega|\,|b|^j \frac{|z|^j}{j!}. \tag{20}$$

Согласно теореме Вейерштраса ряд (17) равномерно сходится в $D+\Gamma$. Следовательно функция $\omega(z)$, определяемая формулой (17), является решением уравнения (16). Причем это решение единственное, т. е.

однородное уравнение имеет ($Q(z) \equiv 0$) только нулевое решение. Следовательно общее решение однородного уравнения (1) определяется формулой (5), где в полиноме (7) входит $\varkappa_1$ произвольных постоянных, а $\Psi(z)$ определяется формулами (15) и (17). (Ясно, что $\Psi(z)$ удовлетворяет условиям (6)). Из вида общего решения однородного уравнения (1) непосредственно следует, что однородное уравнение (1) имеет ровно $\varkappa_1$ линейно-независимых решений.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (8). Аналогично (9) можно сказать, что для разрешимости уравнения (8) необходимо выполнения следующих условий:

$$(f(z) - a(z) P_{k-1}(\alpha(z)))^{(j)}|_{z=0} = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{21}$$

Подставляя значение $P_{k-1}(\alpha(z))$ из (6) в (21), получим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов $c_j (j = 0, 1, \cdots, k-1)$, для разрешимости которой необходимо и достаточно выполнения $\varkappa_1'$ линейно-независимых условий ортогональности вида (3). Пусть выполнены эти условия. Тогда из системы алгебраических уравнений определим полином $P_{k-1}(z)$, а функцию $f(z) - a(z) P_{k-1}(\alpha(z))$ представим в виде

$$f(z) - a(z) P_{k-1}(\alpha(z)) = z^n Q(z).$$

Аналогично однородному уравнению можно показать, что уравнение (8) относительно $\Psi(z)$ всегда разрешимо. Часть теоремы доказана, при $n < k$. Случай, когда $n < k$ и $l \geqslant 2$ доказывается аналогично.

2. Пусть в уравнении (1) $n = k$. Тогда справедлива следующая

Теорема 2. *Если в уравнении* (1) $n = k$ и $a_0'(0) \neq 0$, *то для его однозначной разрешимости, при произвольной аналитической функции* $f(z)$, *необходимо и достаточно выполнения следующих условий*:

$$\gamma_j \neq 0, \quad j = k, \ k+1, \ k+2, \cdots, \tag{22}$$

*где*

$$\gamma_j = \begin{cases} a(0)(\alpha'(0))^j, \text{ при } j = 0, 1, \cdots, k-1, \\ 1 + a(0) \dfrac{(\alpha'(0))^j (j-k)!}{j!}, \quad j = k, \ k+1, \cdots, \ 0! = 1. \end{cases} \tag{23}$$

Доказательство. Обозначим

$$\varphi^{(k)}(z) = \Psi(z), \tag{24}$$

тогда

$$\varphi(z) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^z (z-\xi)^{k-1} \Psi(\xi)\, d\xi + P_{k-1}(z),$$

$P_{k-1}(z)$ — некоторый полином, имеющий вид (7). С учетом этих обозначений уравнение (1) примет следующий вид

$$z^k \Psi(z) + \frac{a(z)}{(k-1)!} \int_0^{a(z)} (a(z) - \xi)^{k-1} \Psi(\xi)\, d\xi + a(z) P_{k-1}(z(z)) = f(z). \quad (25)$$

Представим аналитическую функцию $\Psi(z)$ в виде

$$\Psi(z) = q_m(z) + z^{m+1} \omega(z), \quad (26)$$

$q_m(z)$ — некоторый полином вида

$$q_m(z) = c_k + c_{k+1} z + \cdots + c_{k+m} z^m, \quad (27)$$

$c_j$ — неизвестные комплексные постоянные $(j = k, k+1, \cdots, k+m)$, $\omega(z)$ — некоторая аналитическая функция, $z \in D$, $m$ — достаточно большое целое неотрицательное число.

Подставляя значение (26) в (25), после небольшой перегруппировки уравнение приведем к виду

$$z^{m+k+1} \omega(z) + \frac{a(z)}{(k-1)!} \int_0^{a(z)} (a(z) - \xi)^{k-1} \xi^{m+1} \omega(\xi)\, d\xi = \Omega(z), \quad (28)$$

где

$$\Omega(z) = f(z) - a(z) P_{k-1}(a(z)) - z^k q_m(z) -$$

$$- \frac{a(z)}{(k-1)!} \int_0^{a(z)} (a(z) - \xi)^{k-1} q_m(\xi)\, d\xi.$$

В силу того, что $a(0) = 0$, точка $z = 0$ является нулем кратности не ниже $k + m + 1$ для левой части (28), следовательно она также является нулем той же кратности и для правой части уравнения (28), т. е.

$$\frac{\Omega^{(j)}(0)}{j!} = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, k+m. \quad (29)$$

После элементарных выкладок, из этих условий получим следующую систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов $c^j$ полиномов $P_{k-1}(z)$ и $q_m(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k+m)$,

$$\gamma_j c_j = \frac{f^{(j)}(0)}{j!} + \Phi_j(c_0, c_1, \cdots, c_{j-1}), \quad j = 0, 1, \cdots, k+m), \quad (30)$$

где коэффициенты $\gamma_j$ определяются формулами (23), а $\Phi_j(c_0, c_1, \cdots, c_{j-1})$ известные линейные комбинации из $c_k (k = 0, 1, \cdots, j-1)$. $\Phi_0 = 0$. При выполнении условий $\gamma_j \neq 0$, $j = \overline{0, k+m}$, система (30) имеет единственное решение. В силу произвольности числа $m$, условия (22) являются необходимыми для однозначной разрешимости уравнения (1) при произвольной функции $f(z)$. Покажем, что эти условия также достаточны. Пусть выполнены (22). Тогда из системы (30) единственным образом определим полиномы $P_{k-1}(z)$ и $q_m(z)$. Учитывая условия (29), функцию $\Omega(z)$ представим в виде

$$\Omega(z) = z^{m+k+1}\Omega_0(z),$$

где $\Omega_0(z)$ — вполне определенная функция из $B(D)$. Подставляя это значение $\Omega(z)$ в (28) и разделив обе части (28) на $z^{m+k+1}$, уравнение (28) приведем к следующему виду:

$$\omega(z) = \Omega_0(z) + K(\omega(z)), \tag{31}$$

где

$$K(\omega(z)) = -\frac{a(z)}{(k-1)!}z^{-k-m-1}\int_0^{\alpha(z)}(\alpha(z)-\xi)^{k-1}\xi^{m+1}\omega(\xi)\,d\xi,\ K(\omega(z))\in B(D). \tag{32}$$

Покажем, что при достаточно больших значения $m$ имеет место следующее неравенство:

$$|K(\omega(z))| \leqslant q\max_{\xi\in D+\Gamma}|\omega(\xi)|,\ 0<q<1. \tag{33}$$

Действительно

$$|K(\omega(z))| = \left|\frac{a(z)}{(k-1)!}z^{-m-k-1}\int_0^{\alpha(z)}(\alpha(z)-\xi)^{k-1}\xi^{m+1}\omega(\xi)\,d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant |a|\,|A(z)|^{m+k+1}\frac{\max\limits_{\xi\in D+\Gamma}|\omega(\xi)|}{(k-1)!\,(m+2)},\ A(z)=\alpha(z)/z.$$

Ясно, что при достаточно больших значениях $m$ имеет место неравенство (33). Согласно принципу сжатых отображений уравнение (31) имеет единственное решение. Следовательно, условия (22) являются также достаточными для однозначной разрешимости уравнения (1) при произвольной $f(z)$ и $n=k$. Теорема доказана.

Пусть для некоторого целого неотрицательного значения $j=j_0$ условие (22) нарушается, т. е. имеет место

$$\gamma_{j_0} = 0. \tag{34}$$

В этом случае имеет место следующая

Теорема 3. *Если* $\alpha'(0)\neq 0$, $a(0)\neq 0$ *и условие* (22) *нарушается для некоторого* $j=j_0$, *то однородное уравнение* (1) *при* $n=k$ *имеет одно линейно-независимое решение, а для разрешимости соответствующего неоднородного уравнения необходимо и достаточно выполнения одного условия вида*

$$\tilde{c}_0 f(0)+\tilde{c}_1 f'(0)+\cdots+c_{j_0-1}f^{(j_0-1)}(0)+f^{(j_0)}(0)=0, \tag{35}$$

*где* $\tilde{c}_j\ (j=\overline{0,\ j_0-1})$ *вполне определенные постоянные, не зависящие от* $f(z)$.

Доказательство. Пусть $\gamma_{j_0}=0$, то есть

$$1+a_0\frac{[(\alpha'(0)]^{j_0}(j_0-k)!}{j_0!}=0.$$

Согласно лемме Шварца $|\alpha'(0)| \leqslant 1$, поэтому для остальных значений $j \neq j_0$ имеет место условие (22). В этом случае уравнение (1) приводится к виду (25) и решается аналогичным образом. В системе уравнений (30) первые $j_0$ уравнений решаются однозначно относительно $c_0, c_1, \cdots, c_{j_0-1}$. Подставляя эти значения в $(j_0+1)$-ое уравнение, получим условие разрешимости для неоднородного уравнения (1) вида (35). Значение $c_{j_0}$ выбирается произвольным образом. Остальные значения $c_{j_0+1}, c_{j_0+2}, \cdots, c_{k+m}$ определяются однозначным образом из системы (30). Следовательно полином $q_m(z)$ содержит одну произвольную постоянную $c_{j_0}$ (причем коэффициент при $z^{j_0-k}$ равен $c_{j_0}$). Далее уравнение (1) приводится к виду (31) и аналогично доказывается его однозначная разрешимость относительно $\omega(z)$.

3. Рассмотрим случай, когда в уравнении (1) $n > k$ и $a(0) \neq 0$, $\alpha'(0) \neq 0$. Тогда для уравнения (1) справедлива следующая

Теорема 4. *Если $n > k$, $a(0) \neq 0$, $\alpha'(0) \neq 0$, то однородное уравнение* (1) *не имеет нетривиальных решений, а для разрешимости неоднородного уравнения* (1) *необходимы и достаточны выполнения $n-k$ условий разрешимости вида*

$$\int_{|\zeta|=1} f(t)\,\Psi_j(\zeta)\,d\zeta = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n-k, \tag{36}$$

*где $\Psi_j(z)$ — некоторые линейно-независимые аналитические функции вне единичного круга и $\Psi_j(\infty) = 0$.*

Доказательство. Допустим однородное уравнение (1) имеет нетривиальное решение $\varphi(z)$ и точка $z = 0$ является $m$-кратным нулем этого решения.

Из уравнения (1) имеем

$$a(z)\,\varphi(\alpha(z)) = -z^n \varphi^{(k)}(z). \tag{37}$$

Так как $a(0) \neq 0$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) \neq 0$, то точка $z = 0$ является $m$-кратным нулем левой части (37) и $N$-кратным нулем левой части (37), где $N \geqslant n + m - k$. Из равенства (37) следует, что $m = N$. Поэтому $m \geqslant n + m - k$ или $k \geqslant n$, которое противоречит условию теоремы. Следовательно однородное уравнение (1) имеет только тривиальное решение, т. е. $\varkappa_1 = 0$. В работе [2] доказано, что $\varkappa_1 - \varkappa_1' = k - n$. Так как $\varkappa_1 = 0$, то отсюда получим $\varkappa_1' = n - k$. В той же работе доказано, что эти условия разрешимости имеют вид (36).

## § 2. Краевые задачи со сдвигом для уравнения Лапласа в единичном круге

Пусть $D$ — единичный круг $|z| < 1$, $\Gamma$ — его граница. Рассмотрим следующую задачу:

Задача А. Найти в области $D$ вещественное решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{38}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$\frac{\partial^n u}{\partial \nu^n} + au(\alpha(z)) = \mu(z), \quad z \in \Gamma, \tag{39}$$

где $z = x + iy$, $a$ — действительная постоянная $a \neq 0$, $\mu(z)$ — заданная вещественная функция на $\Gamma$, $\alpha(z)$ — аналитична в области $D$, $\alpha(z) \not\equiv 0$, $\alpha(0) = 0$ и $|\alpha(z)| \leqslant 1$ при $z \in D + \Gamma$, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ — производная по внешней нормали к $\Gamma$ в точке $z \in \Gamma$. Если $\mu \equiv 0$. то задача $A$ будет называться однородной.

Известно, что решение $u(z)$ уравнения (38) представляется в виде

$$u(z) = \operatorname{Re} \varphi(z), \tag{40}$$

где $\varphi(z)$ — аналитична в $D$ и

$$\operatorname{Im} \varphi(0) = 0. \tag{41}$$

Причем представление (40) осуществляется единственным образом. Подставляя $u(z)$ из (40) в (39), получим

$$\operatorname{Re}[z^n \varphi^n(z) + a\varphi(\alpha(z))] = \mu(z), \quad z \in \Gamma. \tag{42}$$

Следовательно задача A эквивалентна нахождению аналитической функции с краевым условием (41)—(42). Пусаь $k_0$ число линейно-независимых решений однородной задачи A, а $k_0'$ — число условий разрешимости неоднородной задачи A. Обозначим $m_0$ и $m_0'$ соответственно эти числа для задачи (41), (42).

Отметим, что здесь мы линейную независимость понимаем в поле действительных чисел, а условие разрешимости берется в виде

$$\int_\Gamma \mu(t) \Psi_l(t)\, ds = 0 \quad (l = 1, 2, \cdots, k_0'),$$

где $\Psi_1(t), \cdots, \Psi_{k_0'}(t)$ — линейно-независимые вещественные функции на $\Gamma$.

В работе [3] доказано, что индекс задачи (41), (42) равен нулю, $m_0 = m_0'$. Следовательно из эквивалентности задач A и (41), (42) следует, что

$$k_0 = k_0' = m_0. \tag{43}$$

Так как $z^n \varphi^n(z) + a\varphi(z(\alpha))$ аналитична в области $D$, то из граничного условия (42) эта функция определяется по формуле Шварца

$$z^n \varphi^n(z) + a\varphi(\alpha(z)) = \Phi(z) + ic, \tag{44}$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(t) \frac{t+z}{t-z}\, d\theta, \quad t = e^{i\theta},$$

$c$ — произвольная действительная постоянная.

Подставляя в (43) $z=0$ и приравнивая мнимые части, получим $c=0$. Здесь мы использовали условия (41). Поэтому равенство (44) примет вид

$$z^n\varphi^n(z)+a\varphi(\alpha(z))=\Phi(z),\ |z|<1. \tag{45}$$

Подставляя в (45) $z=0$, получим,

$$\varphi(0)=\frac{1}{a}\Phi(0). \tag{46}$$

Так как $\Phi(0)$ — вещественное число, то из (46) следует, что любое решение уравнения (45) удовлетворяют условию (41). Следовательно задача (38)--(39) эквивалентна уравнению (45) и в классе аналитических функций, которая исследована в § 1.

Пусть $\varphi_1(z),\ \varphi_2(z),\cdots,\ \varphi_{x_1}(z)$ — полная система линейно-независимых решений однородного уравнения (45) в поле комплексных чисел Тогда $\varphi_1(z),\cdots,\ \varphi_{x_1}(z),\ i\varphi_1(z),\cdots,\ i\varphi_{x_1}(z)$ будет полная система линейно-независимых решений в поле действительных чисел. То есть $m_0=2x_1$. Из (42) имеем

$$m_0=m_0'=2x_1. \tag{47}$$

Обозначим через $l$ кратность нуля и фуикции $\alpha(z)$, т. е. $\alpha^{(j)}(0)=0$ при $j=0,\ 1,\cdots,\ l-1,\ \alpha^{(l)}(0)\neq 0$. По предположению $l\geqslant 1$, применяя теоремы 1 и 2 к уравпенню (45) и имея в виду равенство(47), вполучим

Следствие 1. Если $l>2$, то

$$k_0=k_0'=2\left[\frac{nl-n}{l}\right].$$

Следствие 2. Если $l=1$ и

$$1+a(0)\frac{(\alpha'(0))^j(j-n)!}{j!}\neq 0,\ j=n,\ n+1,\cdots,$$

то $k_0=k_0'=0$. Если же $l=1$ и для некоторого натурального $j_0\geqslant n$ имеет место равенство

$$1+a(0)\frac{(\alpha(0))^{j_0}(j_0-n)!}{j_0!}=0,$$

то $k_0=k_0'=1$.

Пусть теперь в (39) $a\neq 0$ и $\alpha(z)\equiv 0$. Рассмотрим однородное уравнение (45)

$$z^n\varphi^n(z)+a\varphi(0)=0. \tag{48}$$

Подставляя в (47) $z=0$, получим

$$\varphi(0)=0. \tag{49}$$

Следовательно, уравнение (48) примет вид

$$z^n\varphi^n(z)=0.$$

Отсюда, имея в виду (49), получим

$$\varphi(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_{n-1} z^{n-1}, \tag{50}$$

где $c_1, \cdots, c_{n-1}$ — произвольные постоянные,

$$\varkappa_1 = n - 1, \quad m_0 = m_0' = 2(n-1). \tag{51}$$

Теперь рассмотрим неоднородное уравнение (45) при $a(z) \equiv 0$. Подставляя $z = 0$, получим $\varphi(0) = \dfrac{\Phi(0)}{a}$. Следовательно, уравнение (45) примет вид

$$z^n \varphi^{(n)}(z) \Phi = (z) - \Phi(0).$$

Отсюда имеем

$$\Phi^{(j)}(0) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n-1). \tag{52}$$

Если эти условия выполнены, то

$$\varphi^{(n)}(z) = \frac{\Phi(z) - \Phi(0)}{z^n}. \tag{53}$$

Интегрируя (51) $n$ раз и имея в виду, что $\varphi(0) = \dfrac{\Phi(0)}{a}$, получим

$$\varphi(z) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^z (z-\xi)^{n-1} \frac{\Phi(z) - \Phi(0)}{\xi^n} d\xi + \frac{\Phi(0)}{a} + \sum_{l=1}^{n-1} c_l z^l, \tag{54}$$

где $c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}$ — произвольные постоянные.

Пусть теперь $a = 0$, тогда уравнение (43) примет вид

$$z^n \varphi^{(n)}(z) = \Phi(z) + ic.$$

Отсюда, имея в виду условия $\operatorname{Im} \Phi(0) = 0$, получим $c = 0$,

$$m_0 = 2n + 1, \quad k_0 = k_0' = 2n + 1. \tag{55}$$

Получили

Следствие 3. Если $a = 0$, то $k_0 = k_0' = 2n + 1$, если же $a \neq 0$, $a(z) = 0$, то

$$k_0 = k_0' = 2n - 2.$$

Таким образом, мы установили, что число линейно-независимых решений существенно зависит от сдвига $a(z)$, входящего в граничное условие (39).

**Մ. Ա. ՋԻՐՈՅԱՆ.** Եզակիություններով բարձր կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումները անալիտիկ ֆունկցիաների դասերում և նրանց կիրառությունը *(ամփոփում)*։

*Ներկայացվող հոդվածում ուսումնասիրվում է գծային սովորական դիֆերենցիալ հավասարումները անալիտիկ ֆունկցիաների դասերում եզակիություններով և շեղումներով։ Հոդվածում տրվում է այդպիսի հավասարումների լուծման արդյունավետ մեթոդներ։ Ստացված արդյունքները կիրառվում են կապլասի հավասարման համար շեղումներով եզրային խնդիրների լուծման համար։*

M. A. ZIROIAN. *High order linear ordinary differential equations with singularity in a class of analytic functions and their applications* (summary)

In the present paper there are studied ordinary differential equations with a shift and a singularity in a class of analytic functions. The effective method of solution such equations is given. The obtained results are used for solving a boundary problem with a shift for the Laplace equation.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Ирицян.* Некоторые функциональные уравнения и их применение при решении задачи типа Бицадзе-Самарского. Арм. НИИТИ, № 13, Ар-86, Деп.
2. *Н. Е. Товмасян.* Некоторые уравнения в Банаховых пространствах и их применение. Известия АН Арм. ССР, серия «Математика», VIII, № 3, 1972.
3. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения Физматгиз, М., 1962.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 5, 1991 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.53

А. М. ДЖРБАШЯН, Г. В. МИКАЕЛЯН

# О ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ТИПА БЛЯШКЕ

В статье для произведений типа Бляшке в полуплоскости, введенных авторами [1], а также для произведений типа Бляшке М. М. Джрбашяна [2, 3] в единичном круге, образца 1945 года, установлены полные аналоги известного результата Фростмана [4] о граничных свойствах произведения Бляшке с „редкими" нулями. Результаты статьи в основном аналогичны результатам работы [5] одного из авторов, где в частности исследуются иные, родственные произведения типа Бляшке для полуплоскости и для круга. Однако, структурные особенности исследуемых здесь произведений приводят к более полным результатам.

1. Пусть последовательность чисел $\{w_k\} = \{u_k + iv_k\}$ из нижней полуплоскости $G^{(-)} = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$ подчинена условию

$$\sum_k |v_k|^{1+\alpha} < +\infty, \tag{1}$$

при заданном $\alpha\ (-1 < \alpha < +\infty)$. Тогда произведение типа Бляшке для полуплоскости

$$B_\alpha(w, \{w_k\}) \equiv \prod_k b_\alpha(w, w_k)|_{\alpha=0} = \prod_k \frac{w - w_k}{w - \overline{w}_k}, \tag{2}$$

$$b_\alpha(w, w_k) \equiv \exp\left\{-\int_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha d\tau}{[\tau + i(w - w_k)]^{1+\alpha}}\right\} \tag{3}$$

есть аналитическая в $G^{(-)}$ функция с нулями $\{w_k\}$ [1].

Если $\{z_k\}$ $(z_k \neq 0,\ k \geqslant 1)$ — последовательность чисел из единичного круга $|z| < 1$, подчиненная условию

$$\sum_k (1 - |z_k|)^{1+\alpha} < +\infty \tag{4}$$

при заданном $\alpha\ (-1 < \alpha < +\infty)$, то произведение типа Бляшке для круга

$$\pi_\alpha(z, \{z_k\}) \equiv \prod_k a_\alpha(z, z_k)|_{\alpha=0} \equiv \prod_k \frac{z_k - z}{1 - \overline{z}_k z} \cdot \frac{\overline{z}_k}{z_k}, \tag{5}$$

$$a_\alpha(z, z_k) \equiv \exp\left\{-\int_{|z_k|^2}^1 \frac{(1-\tau)^\alpha}{(1 - z\tau/z_k)^{1+\alpha}} \frac{d\tau}{\tau}\right\} \tag{6}$$

есть аналитическая в $|z| < 1$ функция с нулями $\{z_k\}$ [2, 3].

Замечание. Примененная запись (5)—(6) произведения типа Бляшке для круга отличается от введенной М. М. Джрбашяном [2, 3] тем, что $\alpha$ заменено здесь в целях удобства наложения на $\alpha - 1$. Кроме того, при $-1 < \alpha < 0$ приведенное произведение для круга является специальным случаем более общего произведения, введенного Р. С. Галояном [6] по аналогии с произведениями М. М. Джрбашяна, введенными в [2, 3], а также в более поздних работах. Отметим также, что при выполнении условия (4) произведение $\pi_\alpha$ принадлежит классу $N_+$ М. М. Джрбашяна [7, гл. IX] функций обобщенно-ограниченного вида в круге, каково бы ни было $\alpha$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ [6].

Что же касается произведения $B_\alpha$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ для полуплоскости, то при выполнении условия его сходимости (1) оказывается, что оно принадлежит классу $N_\alpha\{G^{(-)}\}$ $(-1 < \alpha < 0)$ [5], а также другим классам функций обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости, исследованным в работе [8].

2. Основными результатами статьи являются приводимые ниже две теоремы и лемма. Прежде чем их сформулировать, отметим, что как здесь, так и всюду ниже емкость множества на конечной оси $(-\infty, +\infty)$ будем понимать в смысле, рассмотренном в работе [8].

Теорема 1. 1°. *Пусть* $\gamma$ $(0 < \gamma < 1)$ *и* $\alpha$ $(\gamma - 1 \leqslant \alpha < +\infty)$ — *любые числа, а последовательность* $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ *подчинена условию*

$$\sum_k |\operatorname{Im} w_k|^\gamma < +\infty. \tag{7}$$

*Тогда функция* $B_\alpha(w, \{w_k\})$ *обладает ненулевыми, конечными угловыми граничными значениями во всех точках* $u \in (-\infty, +\infty)$, *кроме, быть может, множества нулевой* $\gamma$*-емкости.*

2°. *Пусть* $\alpha$ $(0 \leqslant \alpha < +\infty)$ *любое и последовательность* $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ *подчинена условию*

$$\sum_k |\operatorname{Im} w_k| < +\infty. \tag{8}$$

*Тогда функция* $B_\alpha(w, \{w_k\})$, *обладает ненулевыми, конечными угловыми граничными значениями почти во всех точках* $u \in (-\infty, +\infty)$.

Теорема 2. 1°. *Пусть* $\gamma$ $(0 < \gamma < 1)$ *и* $\alpha$ $(\gamma - 1 \leqslant \alpha < +\infty)$ — *любые числа, а последозательность из единичного круга* $\{z_k\}$ $(z_k \neq 0, k > 1)$ *подчинена условию*

$$\sum (1 - |z_k|)^\gamma < +\infty. \tag{9}$$

*Тогда функция* $\pi_\alpha(z, \{z_k\})$ *(обладает ненулевыми, конечными угловыми граничными значениями во всех точках единичной окружности* $|z| = 1$, *кроме, быть может, множества нулевой* $\gamma$*-емкости в смысле Фростмана* [4].

2°. *Пусть* $\alpha$ $(0 \leqslant \alpha < +\infty)$ *любое и последовательность из единичного круга* $\{z_k\}$ $(z_k \neq 0, k \geqslant 1)$ *подчинена условию Бляшке*

$$\sum_k (1 - |z_k|) < +\infty. \tag{10}$$

*Тогда функция* $\pi_\alpha(z, \{z_k\})$ *обладает ненулевыми, конечными угловыми граничными значениями почти во всех точках окружности* $|z| = 1$.

Замечание. В случае $\alpha = 0$ утверждения 1° теорем 1 и 2 по существу совпадают с отмеченным выше хорошо известным результатом Фростмана [4]. Утверждения же 2° этих теорем в случае $\alpha = 0$ переходят в общеизвестное граничное свойство произведения Бляшке.

В статье установлена также нижеприводимая лемма, неравенства которой представляют самостоятельный интерес.

Лемма. *Если* $\alpha_1$, $\alpha_2$ $(-1 < \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant 0)$ *любые числа. Тогда*:

1°. *Если последовательность* $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ *подчинена условию* (7) *с* $\gamma = 1 + \alpha_1$, *то*

$$|B_{\alpha_1}(w, \{w_k\})| \leqslant |B_{\alpha_2}(w, \{w_k\})| \quad w \in G^{(-)}. \tag{11}$$

*Если же эта последовательность подчинена условию* (8), *то при любом* $\alpha \in [0, 1]$

$$|B_\alpha(w, \{w_k\})| \geqslant |B_0(w, \{w_k\})|, \quad w \in G^{(-)}. \tag{12}$$

2°. *Если последовательность* $\{z_k\}$ *из* $|z| < 1$ *подчинена условию* (9) *с* $\gamma = 1 + \alpha_1$, *то*

$$|\pi_{\alpha_1}(z, \{z_k\})| \leqslant |\pi_{\alpha_2}(z, \{z_k\})|, \quad |z| < 1. \tag{13}$$

*Если же эта последовательность подчинена условию* (10), *то при любом* $\alpha \in [0, 1]$

$$|\pi_\alpha(z, \{z_k\})| \geqslant |\pi_0(z, \{z_k\})|, \quad |z| < 1. \tag{14}$$

Замечание. Для частного случая, когда $\alpha_2 = 0$, в работе [6] содержится оценка, более тонкая, чем (13).

3. Доказательство теоремы 1. 1°. Пусть выполнено условие (7) с каким-либо $\gamma$ $(0 < \gamma < 1)$ и пусть сначала $\gamma - 1 \leqslant \alpha < \gamma$. В этом случае вполне аналогично лемме 5 из [5] можно показать, что

$$B_\alpha(w, \{w_k\}) \in N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}, \tag{15}$$

где $N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$ — класс функций, исследованный в [5].

Покажем, что включение (15) верно и в случае произвольного $\alpha \geqslant \gamma$. С этой целью выберем натуральное $m > 1$ так, чтобы $\gamma - 1 \leqslant \alpha - m < \gamma$ и воспользуемся рекуррентной формулой из [1]:

$$B_\alpha(w, \{w_k\}) = B_{\alpha-m}(w, \{w_k\})\, K_\alpha(w), \quad w \in G^{(-)}, \tag{16}$$

$$K_\alpha(w) \equiv \exp\left\{ \sum_k \sum_{n=0}^{m-1} \frac{2^{\alpha-n}}{\alpha - n} \frac{|w_k|^{\alpha-n}}{[i(w - \overline{w}_k)]^{\alpha-n}} \right\}. \tag{17}$$

Здесь, очевидно, $B_{\alpha-m} \in N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$, а $K_\alpha$ — аналитическая в $G^{(-)}$ функция без нулей. Поэтому, ввиду мультипликативности класса $N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$ достаточно показать, что $K_\alpha \in N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$. Для этого представим $K_\alpha$ в виде

$$K_\alpha(w) = \prod_{n=0}^{m-1} K_\alpha^n(w), \tag{18}$$

где

$$K_\alpha^n(w) \equiv \exp\left\{\frac{2^{\gamma-n}}{\alpha-n}\sum_k \frac{|v_k|^{\alpha-n}}{[i(w-\overline{w}_k)]^{\gamma-n}}\right\} (0 \leqslant n \leqslant m-1) \tag{19}$$

— аналитическая в $G^{(-)}$ функция без нулей.

Если $\alpha-\gamma$ есть число не целое, то ясно, что $m-1<\alpha-\gamma$. Поэтому, ввиду используемого авторами [1, 8] определения оператора Вейля и в силу формулы (29) из [5], получим, что при любом $n\,(0 \leqslant n \leqslant m-1)$

$$W^{-(\gamma-1)} \log K_\alpha^n(w) = 2^{\alpha-n}\frac{\Gamma(1+\alpha-n-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-n)}\sum_k \frac{|v_k|^{\alpha-n}}{[i(w-\overline{w}_k)]^{1+\alpha-n-\gamma}}.$$

Далее, воспользовавшись оценкой (21) из [5], получим, что при любых $n\,(0 \leqslant n \leqslant m-1)$ и $v<0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-(\gamma-1)} \log K_\alpha^n(u+iv)|\,du \leqslant$$

$$\leqslant 2^{|3(1+\alpha-n)-\gamma|/2}\frac{\Gamma(\alpha-n-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-n)}\sum_k |v_k|^\gamma < +\infty.$$

Опираясь на лемму 1.5 работы [8] легко проверить наличие остальных условий принадлежности $K_\alpha^n\,(0 \leqslant n \leqslant m-1)$ классу $\mathbf{N}_{\gamma-1}^m$ типа В. И. Крылова, введенному в той же работе. Однако, как следует из определения класса $N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$ [5] и теоремы 4.3 работы [8], $\mathbf{N}_{\gamma-1}^m \subset N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$. Поэтому $K_\alpha^n \in N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$ $(0 \leqslant n \leqslant m-1)$, и, ввиду (18), $K_\alpha \in N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$.

Пусть теперь $\alpha-\gamma$ — целое число. Тогда будем полагать, что в представлениях (16)—(19) $m=\alpha-\gamma+1$. При этом легко проверить, так как это сделано выше, что для всех $n \leqslant m-2$ имеем $K_\alpha^n \subset \mathbf{N}_{\gamma-1}^m$. Если же $n=m-1=\alpha-\gamma$, то ясно, что

$$W^{-(\gamma-1)} \log K_\alpha^n(w) = \frac{2^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)}\sum_k \frac{|v_k|^\gamma}{i(w-\overline{w}_k)},$$

причем, это аналитическая в $G^{(-)}$ функция со значениями в правой полуплоскости. Поэтому с применением результатов работы [9] приходим к представлению

$$K_\alpha^{\alpha-\gamma}(w) = \exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma(t)}{[i(w-t)]^\gamma}\right\},$$

где $\sigma(t)$ — функция, подчиненная условиям, поставленным в определении класса $N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$ [5]. Тем самым, $K_\alpha^n \in N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$ при всех $n\,(0 \leqslant n \leqslant m-1=\alpha-\gamma)$, и $K_\alpha \in N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$ уже при всех $\alpha \geqslant \gamma-1$.

Нужное утверждение вытекает из включения (15) и теоремы 1 из [5].

2°. Докажем, что при выполнении условия (8) функция $B_\alpha(w, \{w_k\})$ принадлежит классу $N^m$ В. И. Крылова [10], каково бы не было $\alpha > 0$. Тогда нужное утверждение будет следовать из общеизвестных граничных свойств функций ограниченного вида, поскольку таковы функции класса $N^m$.

Пользуясь представлением (2)—(3) функции $B_\alpha$ и оценкой (21) из [5] легко получить, что при любых $\alpha > 0$ и $v < 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\log B_\alpha(u+iv, \{w_k\})|\,du \leqslant \frac{2^{(3+\alpha,\ 1),2}}{\alpha} \sum_k \int_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha\,d\tau}{(|v|+|v_k|+\tau)^\alpha} <$$

$$< 2^{(5+\alpha)/2}[\alpha(1+\alpha)]^{-1} \sum_k |v_k| < +\infty.$$

Замечание. Методами, аналогичными примененным, можно показать, что при выполнении условия (7) с каких-либо $\gamma > 0$ функция $B_\alpha(w, \{w_k\})$ $(\alpha \leqslant \gamma - 1)$ принадлежит классу $N^m_{\gamma-1}$ типа В. И. Крылова из [8].

4. Доказательство теорема 2. 1°. Пусть выполнено условие (9) с каким-либо $\gamma$ $(0 < \gamma < 1)$. Тогда, вполне аналогично лемме 8 из [5], можно показать, что при $\gamma - 1 < \alpha \leqslant \gamma$ имеем

$$\pi_\alpha(z, \{z_k\}) \in N_{\gamma-1}, \tag{20}$$

где $N_{\gamma-1}$ — класс функций обобщенно-ограниченного вида в круге [7, гл. IX]. С целью доказать, что включение (20) верно при любом $\alpha \geqslant \gamma$, выберем натуральное $m \geqslant 1$ так, чтобы $\gamma - 1 \leqslant \alpha - m < \gamma$ и воспользуемся рекуррентной формулой из [3]:

$$\pi_\alpha(z, \{z_k\}) = \pi_{\alpha-m}(z, \{z_k\}) L_\alpha(z), \tag{21}$$

$$L_\alpha(z) \equiv \exp\left\{ \sum_k \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{\alpha - n} \left( \frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z} \right)^{\alpha-n} \right\}. \tag{22}$$

Здесь, очевидно, $\pi_{\alpha-m} \in N_{\gamma-1}$, а $L_\alpha$ — аналитическая в $|z| < 1$ функция без нулей. Ввиду мультипликативности класса $N_{\gamma-1}$, для доказательства включения (20) с любым $\alpha \geqslant \gamma$ достаточно показать, что $L_\alpha \in N_{\gamma-1}$ $(\alpha \geqslant \gamma)$. Для этого представим $L_\alpha$ в виде

$$L_\alpha(z) = \prod_{n=0}^{m-1} L_\alpha^n(z), \tag{23}$$

$$L_\alpha^n(z) \equiv \exp\left\{ \frac{1}{\alpha - n} \sum_k \left( \frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z} \right)^{\alpha-n} \right\} (0 \leqslant n \leqslant m-1), \tag{24}$$

где $L_\alpha^n$ — аналитические в $|z| < 1$ функции без нулей. В силу формулы (1.22) из гл. IX [7] при $z = re^{i\varphi}$ $(0 \leqslant r < 1)$ и любом $(0 < n \leqslant m-1)$

$$r^{1-\gamma} D^{-(\gamma-1)}(1-\bar{z}_k re^{i\varphi})^{-(\alpha-n)} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} + r^{1-\gamma} D^{-\gamma} \frac{d}{dr}(1-\bar{z}_k re^{i\varphi})^{-(\alpha-n)} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\left[1-(\alpha-n)\,\bar{z}_k\,re^{i\varphi}\int_0^1 \frac{(1-t)^{\gamma-1}\,dt}{(1-\bar{z}_k re^{i\varphi}t)^{\alpha-n+1}}\right]. \tag{25}$$

Поэтому, ввиду оценки, установленной в лемме 7 в [5], получим, что при любых $re^{i\varphi}$ $(0\leqslant r<1)$ и $n$ $(0\leqslant n\leqslant m-1)$

$$|r^{1-\gamma}D^{-(\gamma-1)}(1-z_k re^{i\varphi})^{-(\alpha-n)}|\leqslant M|1-z_k re^{i\varphi}|^{-(1+\alpha-n-\gamma)}, \tag{26}$$

где $M>0$ — постоянная, зависящая лишь от $\alpha$, $\gamma$ и $n$.

Предположив теперь, что $\alpha-\gamma$ число не целое, будем иметь, что $\alpha-n-\gamma>0$ при $0\leqslant n\leqslant m-1$. Поэтому, ввиду (25), обозначив $\min\limits_k|z_k|=\rho_0(\rho_0>0)$, при любых $r\in(1/2,\ 1)$ и $n$ $(0\leqslant n\leqslant m-1)$ получим

$$\int_{-\pi}^{\pi}|r^{1-\gamma}D^{-(\gamma-1)}\log L_\alpha^n(re^{i\varphi})|\,d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{\alpha-n}\sum_k(1-|z_k|^2)^{\alpha-n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{|1-|z_k|re^{i\varphi}|^{1+\alpha-n-\gamma}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{\alpha-n}\,2^{(5+\alpha-n-\gamma)/2}\sum_k(1-|z_k|^2)^{\alpha-n}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\left(1-|z_k|r+\frac{4}{\pi}\sqrt{|z_k|}\,r\theta\right)^{1+\alpha-n-\gamma}}<$$

$$<M\frac{2^{3(\alpha-n)/2+1-\gamma/2}}{(\alpha-n)(\alpha-n-\gamma)}\frac{\pi}{\sqrt{\rho_0}}\sum_k(1-|z_k|)^\gamma<+\infty.$$

Тем самым, функции $L_\alpha^n$ $(0<n\leqslant m-1)$, а в виду (23)—(24) и функции $L_\alpha$, принадлежат классу $N_{\gamma-1}$.

Пусть теперь $\alpha-\gamma$—целое число. Тогда включения $L_\alpha^n\in N_{\gamma-1}$ $(0\leqslant n\leqslant m-2)$ доказываются так, как выше. Для доказательства же включения $L_\alpha^{m-1}\equiv L_\alpha^{\alpha-\gamma}\in N_{\gamma-1}$ заметим, что в силу (24) и (25)

$$r^{1-\gamma}D^{-(\gamma-1)}\log L_\alpha^{\alpha-\gamma}(re^{i\varphi})=\frac{1}{\Gamma(1+\gamma)}\sum_k(1-|z_k|^2)\left[2-\frac{1}{1-\bar{z}_k re^{i\varphi}}\right],$$

$$r^{1-\gamma}D^{-(\gamma-1)}\log|L_\alpha^{\alpha-\gamma}(re^{i\varphi})|<\frac{2^{1+\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)}\sum_k(1-|z_k|)^\gamma.$$

Последнее неравенство обеспечивает нужное включение. Поэтому $L_\alpha\in N_{\gamma-1}$ при всех $\alpha\geqslant\gamma$, и включение (20) справедливо при любом $\alpha\geqslant\gamma-1$. Теперь требуемое утверждение теоремы непосредственно следует из результата М. М. Джрбашяна и В. С. Захаряна [11, 12] о том, что любая ненулевая функция класса $N_{\gamma-1}$ $(0<\gamma<1)$ обладает ненулевыми, конечными угловыми граничными значениями во всех точках единичной окружности, кроме, быть может, множества нулевой $\gamma$-емкости.

2°. Пусть выполнено условие Бляшке (10). Покажем, что функция $\pi_\alpha(z,\ |z_k|)$ $(\alpha>0)$ в этом случае ограниченного вида в $|z|<1$.

Тогда нужное утверждение будет очевидно. Намеченной цели можно добиться путем применения рекуррентной формулы (20)—(21) и соответствующих оценок. Однако, проще воспользоваться имеющим место при любых $z\,(|z|<1)$ и $\alpha>-1$ представлением

$$\pi_\alpha(z,\ |z_k|)=$$

$$=\prod_k a_0(z,\ z_k)\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(1+\alpha)}{n\Gamma(1+n)\Gamma(1+\alpha-n)}([a_0(z,\ z_k)]^n-1)\right\},\qquad(27)$$

являющимся очевидным следствием формулы (1) работы [13]. Запишем правую часть этого представления в виде дроби с числителем, состоящим из $\pi_0(z,\ |z_k|)$ и произведения экспоненциальных факторов, включающим в себя только слагаемые суммы с положительными коэффициентами. К знаменателю дроби отнесем произведение экспоненциальных факторов со слагаемыми суммы с отрицательными коэффициентами. Тогда числитель и знаменатель дроби — аналитические и ограниченные в $|z|<1$ функции.

Замечание. Методом, аналогичным примененным, можно показать, что при выполнении условия (9) с каким-либо $\gamma>0$ функция $\pi_\alpha(z,\ |z_k|)$ принадлежит классу $N_{\gamma-1}$ М. М. Джрбашяна. Отметим еще, что способ доказательства утверждения 2° последней теоремы без существенных изменений мог быть применен также для утверждения 2° теоремы 1.

5. Перейдем наконец к доказательству леммы. С этой целью мы опять воспользуемся результатами работы [13], применение которых, в отличие от пути доказательства неравенства (15) работы [5], приводит здесь к более полным результатам.

Отметим сначала же, что из формулы (3) работы [13] вытекает точно таксе же, как (27), представление для произведения $B$, в полуплоскости. Притом, если $-1<\alpha_1<\alpha_2<0$, то очевидно, что

$$(-1)^n\left[\frac{\Gamma(1+\alpha_1)}{\Gamma(1+\alpha_1-n)}-\frac{\Gamma(1+\alpha_2)}{\Gamma(1+\alpha_2-n)}\right]=$$

$$=(-1)^n[\alpha_1(\alpha_1-1)\cdots(\alpha_1-n+1)-\alpha_2(\alpha_2-1)\cdots(\alpha_2-n+1)]>0$$

для любого $n\geqslant 1$. Однако, при любых $n\geqslant 1$, $w,\ \zeta\in G^{(-)}$, и $z,\ s\in\{z:\ |z|<1\}$ имеем также $\mathrm{Re}\,[b_0(w,\zeta)]^n-1<0$, $\mathrm{Re}\,[a_0(z,\ s)]^n-1\leqslant 0$. Отсюда следуют неравенства (11) и (13) леммы. Неравенства (12) и (14) доказываются аналогично.

Институт математики АН Армении,
Ереванский государственный университет

## ЛИТЕРАТУРА

1. *А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян.* Построение и основные свойства одного семейства функций типа Бляшке для полуплоскости, Изв АН АрмССР Математика, XV. № 6, 1980, 461—474.

2. *М. М. Джрбашян.* О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций. ДАН АрмССР, т. 3, № 1. 1945, 3—9.

3. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций. Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН АрмССР, вып. 2, 1948, 3—55.

4. *O. Frostman.* Sur les produits de Blaschke, Fysiogr. Sällsk Lund, förh., 12, № 15, 1939, 1—14.

5. *А. М. Джрбашян.* О граничных свойствах функций обобщенно-ограниченного вида, Изв АН Армении, Математика, XXVI, № 3, 1991, 87—209.

6. *Р. С. Галоян.* Предельные и асимптотические свойства некоторых классов функций, аналитических в круге. Дисс. на соискание уч. степ. к. ф.-м. н., Ереван, 1975.

7. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Наука, 1966.

8. *А. М. Джрбашян.* Соотношения равновесия и факторизационные теоремы для мероморфных в полуплоскости функций, Изв. АН АрмССР, Математика, XXI, № 5, 1986, 213—279.

9. *А. М. Джрбашян.* Теоремы типа Герглотца-Рисса, Мат. заметки, т. 45, вып. 4, 1989, 19—26.

10. *В. И. Крылов.* О функциях, регулярных в полуплоскости, Мат. сб., т. 6(48), № 1, 1939, 95—138.

11. *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян.* Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН СССР, т. 34, № 6, 1970, 1262—1339.

12. *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян.* Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН АрмССР, Математика, т. VI, № 2—3, 1971, 162—194.

13. *Г. В. Микаелян.* Об одном семействе произведений типа Бляшке-Джрбашяна, Изв. АН Армении, Математика, (в печати).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 5, 1991 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.218.5

Г. С. СУКИАСЯН

# О СГУЩАЕМЫХ ПРОЦЕССАХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Операция сгущения точечных процессов является обращением известной операции их независимого прореживания с постоянной вероятностью $p$ выбрасывания каждой точки (см. [1], [2]). Операция сгущения зависит от параметра $c \geqslant 1$ (коэффициента сгущения). В отличие от операции прореживания, которая определена для всех $0 \leqslant p \leqslant 1$ и для всех точечных процессов, операция сгущения возможна не всегда. Представляет интерес задача о нахождении наибольшего коэффициента сгущения для данного точечного процесса. На эту тему имеется мало публикаций. В [2], [3] рассматривался вопрос бесконечной сгущаемости процессов восстановления. В [4] дан общий критерий 2-сгущаемости в терминах распределения Пальма, получены условия 2-сгущаемости гиббсовских процессов с парным потенциалом.

В [4], в качестве примера, рассматривалось одно семейство $P_\alpha$ гиббсовских процессов восстановления на прямой. В замечании Г. С. Сукиасяна к [4] приведено независимое доказательство 2-сгущаемости процессов из $P_\alpha$, основанное на свойствах знакочередующихся рядов. Настоящая заметка является развитием этого замечания. Здесь найдено наибольшее значение $c(\alpha)$ коэффициента сгущения для процессов из $P_\alpha$.

Определение (см. [4]). Случайный точечный процесс $P^*$ в $R_n$ называется $c$-сгущаемым, $c > 1$, если $P^*$ можно получить из какого-нибудь точечного процесса $P$ операцией независимого $1/c$-прореживания.

Под независимым $q$-прореживанием, $0 < q \leqslant 1$ понимаем такое случайное преобразование

$$\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}^*$$

реализаций точечного процесса, для которого $\mathfrak{M}^* \subseteq \mathfrak{M}$ и для разных точек $x$, $y$ из $\mathfrak{M}$ события $x \in \mathfrak{M}^*$ и $y \in \mathfrak{M}^*$ независимы и их вероятности равны $q$.

Пусть $P$ — стационарный точечный процесс восстановления на прямой, и пусть у $P$ существует плотность распределения $r(u)$ расстояния между соседними точками, называемая в дальнейшем определяющей плотностью. При независимом $q$-прореживании процесса $P$ получается (см. [4]) вновь стационарный процесс восстановления $P^*$ со следующей определяющей плотностью:

$$r^*(u) = q\sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} r^{(k)}(u),$$

где $p = 1 - q$, $r^{(k)}$ — $k$-тая свертка плотности $r(u)$.

Перейдя к преобразованиям Лапласа

$$L(w) = \int e^{-wu} r(u)\,du,\quad L^*(w) = \int e^{-wu} r^*(u)\,du,$$

получим

$$L^* = q\sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} L^k = \frac{qL}{1-pL}.$$

Отсюда

$$L(w) = \frac{L^*(w)}{q + pL^*(w)} = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{\infty} (L^*)^k \left(-\frac{p}{q}\right)^{k-1}, \tag{1}$$

то соответствует следующему соотношению между плотностями:

$$r(u) = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{p}{q}\right)^{k-1} r^{*(k)}(u). \tag{2}$$

Итак, если процесс восстановления $P^*$ является $1/q$-сгущаемым, то знакочередующийся ряд (2) обязательно имеет свойства плотности распределения:

а) $r(u) \geqslant 0$,

б) $\int r(u)\,du = 1$.

Теперь пусть дан процесс восстановления $P^*$ с определяющей плотностью $r^*(u)$ и пусть ряд (2) имеет свойства а) и б). В силу единственности преобразования Лапласа нетрудно убедиться, что после $q$-прореживания процесса восстановления с определяющей плотностью $r(u)$ получается процесс $P^*$. Отсюда следует

Утверждение 1. Для того, чтобы процесс восстановления $P^*$ с определяющей плотностью $r^*(u)$ был $1/q$-сгущаемым, необходимо и достаточно, чтобы ряд (2) имел свойства а) и б).

Рассмотрим теперь на прямой т. н. процесс непересекающихся невзаимодействующих интервалов единичной длины (см. [5]). Его можно эквивалентно определить, как процесс восстановления $P^*$ с определяющей плотностью, равной

$$r^*(u) = \begin{cases} 0, & u \leqslant 1 \\ \alpha e^{-\alpha(u-1)} & u > 1, \end{cases} \tag{3}$$

где $\alpha$ — положительный параметр.

Соответствующая свертка имеет вид

$$r^{*(k)}(u) = (u-k)_+^{k-1}\frac{\alpha^k}{(k-1)!} e^{-\alpha(u-k)},\quad k = 2, 3, \cdots,$$

здесь

$$(x)_+ = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Наша цель — выяснить для каких $\alpha$ и $q$ процесс $P^*$ является $1/q$-сгущаемым, Из (2) и (3) имеем

$$r(u)=\frac{\alpha}{q}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{p}{q}\alpha\right)^{k-1}(u-k)_+^{k-1}\frac{e^{-\alpha(u-k)}}{(k-1)!}=$$

$$=\frac{1}{q}\alpha e^{\alpha}e^{-\alpha u}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{p}{q}\alpha e^{\alpha}\right)^{k}(u-k-1)_+^{k}(k!)^{-1},\ u>1. \tag{4}$$

Оказывается, что ряды, фигурирующие в (4), возникают при решении дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (см. [4]). Непосредственной подстановкой легко убедиться, что решением уравнения

$$\frac{dF(t)}{dt}=-bF(t-1),\ t>1,$$
$$F(t)=1,\quad 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{5}$$

является знакочередующийся ряд

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-b)^n}{n!}(t-n)_+^n.$$

В силу (4) отсюда следует

$$r(u)=\frac{1}{p}e^{-\alpha u}f\left(u,\ \frac{p}{q}\alpha e^{\alpha}\right), \tag{6}$$

где

$$f(t,\ b)=-\frac{dF(t)}{dt}=\begin{cases}b^t(t-1), & t>1\\ 0, & t<1.\end{cases}$$

Лемма 1. (см. [6]). *Уравнение* (5) *имеет неотрицательное решение тогда и только тогда, когда* $b<e^{-1}$.

Из леммы 1 и равенства (6) заключаем

Утверждение 2. *Ряд* (2), *составленный для плотности* (3), *неотрицателен тогда и только тогда, когда выполнено неравенство*

$$p\alpha e^{\alpha}<qe^{-1}. \tag{7}$$

Отметим, что если $b<e^{-1}$, то $f(t,\ b)$ как функция от $t$ является плотностью распределения. Точечный процесс восстановления с определяющей плотностью равной $f$ рассматривался в [4] и [7].

Рассмотрим теперь условие б). Так как $r^*(u)$ является плотностью распределения, то $L^*(0)=1$. В силу (1), для выполнения условия б) достаточно, чтобы область аналитичности функции $L(w)$ включала бы мнимую ось (т. е. чтобы можно было в (1) подставить $w=0$). Для этого достаточно, чтобы знаменатель $q+pL^*(w)$ имел нули только в левой полуплоскости.

В нашем случае, когда $r^*(u)$ задается по (3), имеем

$$L^*(w)=\frac{\alpha e^{-w}}{\alpha+w}.$$

С помощью (1) находим

$$L(w) = \frac{\alpha e^{-w}}{q(w+\alpha) + pe^{-w}\alpha}.$$

Приравнивая знаменатель нулю и обозначая $w = x + iy$, получаем

$$\begin{cases} q(x+\alpha) + \alpha p e^{-x}\cos y = 0, \\ qy - \alpha p e^{-x}\sin y = 0. \end{cases}$$

Найдем при каких $\alpha$ все решения этой системы удовлетворяют условию $x < 0$. Если $y = 0$, то из первого уравнения для всех $\alpha > 0$ имеем

$$x = -\alpha - \alpha\frac{p}{q}e^{-x} < 0.$$

Пусть $y \neq 0$. Из второго уравнения системы получаем $x = \ln\left(\frac{p\alpha}{q}\frac{\sin y}{y}\right)$.

Условие $x < 0$ выполнено, если

$$\frac{p\alpha}{q}\frac{\sin y}{y} < 1.$$

Но для всех $y \neq 0$ имеет место $y^{-1}\sin y < 1$. Следовательно, для выполнения условия б) достаточно, чтобы $\alpha p q^{-1} < 1$. Но если справедливо (7), то

$$\alpha p q^{-1} < e^{-\alpha - 1} < 1,$$

т. е. (7) является достаточным условием как для неотрицательности $r(u)$, так и для равенства единице интеграла $\int r(u)\,du$. Итак, мы получили

Утверждение 3. *Пусть $P$ -процесс восстановления с определяющей плотностью, задаваемой по формуле* (3). *Точечный процесс $P^*$ является $1/q$-сгущаемым тогда и только тогда, когда выполнено неравенство* (7).

Институт математики АН Армении

Поступило 7 II.1991

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Р. В. Амбарцумян, В. Мекке, Д. Штойян*, Введение в стохастическую геометрию, М., Наука, 1989.
2. *P. J. Daley, D. Vere-Jones*. An Introduction to the Theory of Point Processes. Springer Verlag, 1988.
3. *D. J. Daley*. On a class of renewal functions, Proc. Cambridge Philos. Soc., 61, 1965, 519—525.
4. *R. V. Ambartzumian*. On condensable point processes (in press).
5. *Р. В. Амбарцумян, Г. С. Сукиасян*. О взаимном описании процессов нерекрывающихся невзаимодействующих шаров, Изв. АН Арм.ССР, Математика, 18, № 3, 1983, 206—215.
6. *А. Д. Мышкис*. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, М., Наука, 1972.
7. *R. V. Ambartzumian, H. S. Suktasian*. Inclusion-exclusion and point processes, Acta Applic. Math., 22, 1991, 15—31.

## СОДЕРЖАНИЕ

*В. В. Агатрян.* Об одной краевой задаче для неправильно эллиптического уравнения высокого порядка . . . . . 365
*Г. Р. Оганесян.* О единственности решения весовой задачи Коши и новая формула для энергии . . . . . 375
*Р. Л. Авотиня.* О представлении аналитических функций рядами простых дробей в областях с липшицевой границей . . . . . 387
*С. Г. Даллакян.* О единственности несократимого разложения объекта в объединение конечного числа неприводимых подобъектов . . . . . 398
*Г. А. Барсегян, В. И. Белый.* О полиномиальных приближениях функций, обратных к мероморфным, на римановой поверхности . . . . . 413
*М. Л. Зирохян.* Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения высшего порядка с особенностью в классе аналитических функций и их применение . . . . . 424

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

*А. М. Джрбашян, Г. А. Микаелян.* О граничных свойствах произведений типа Бляшке . . . . . 438
*Г. С. Сукиасян.* О сглаженных процессах восстановления . . . . . 443

## ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

*Վ. Վ. Ասատրյան.* *Բարձր կարգի ոչ ճշգրիտ էլիպտիկ հավասարման համար մի եզրային խնդրի մասին* . . . . . 365
*Գ. Ռ. Հովհաննիսյան.* *Կոշու կշռային խնդրի լուծման միակության մասին և նոր բանաձև էներգիայի համար* . . . . . 376
*Ի. Ա. Ավետիսյան.* *Անալիտիկ ֆունկցիաները լիպշիցյան տիրույթներում պարզ կոտորակների շարքերով ներկայացնելու մասին* . . . . . 387
*Ս. Հ. Պալալյան.* *Օբյեկտի վերջավոր քվով չբերվող ենթաօբյեկտների միավորման անկրճատելի վերլուծության միակության մասին* . . . . . 393
*Գ. Ա. Բարսեղյան, Վ. Ի. Բելիյ.* *Մերոմորֆ ֆունկցիաներին հակադարձ ֆունկցիաների բազմանդամային մոտարկումների մասին Ռիմանի մակերևույթի վրա* . . 413
*Մ. Ա. Զիրոյան.* *Սղակիություններով բարձր կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումները անալիտիկ ֆունկցիաների դասերում և նրանց կիրառությունը* . . 424

## ՀԱՄԱՌՈՏ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

*Ս. Մ. Ջրբաշյան, Գ. Վ. Միքայելյան.* *Ալյաշկեի տիպի արտադրյալների եզրային հատկությունների մասին* . . . . . 438
*Հ. Ս. Սուքիասյան.* *Ետացվող վերականգման պրոցեսների մասին* . . . . . 443

CONTENTS

*V. V. Asatrian*. About a boundary-value problem for high-order inaccuracy elliptic equation . . . . . 365
*G. R. Oganesian*. Uniqueness for weighted Cauchy problem and new formula for energy . . . . . 376
*R. A. Avetisian*. On representation of analytical functions in Lipshits domain as a series of simple fractions . . . . . 387
*S. H. Dalalyan*. On unequeness minimal decomposion of object to the union of finite number of irseducible subobjects . . . . . 398
*G. A. Barsegian, V. I. Belty*. On polynomial approximation of functions which are inverse to the meromorhic functions of the Riman surface . . . . 413
*M. A. Zirotan*. High order linear ordinary differential equations with sigularity in a class of analytic functions and their applications . . . . 424

CHROT COMMUNICATIONS

*A. M. Jerbashian (Djrbashian), G. V. Mikaelian*. O boundary properties of Blyshkes type products . . . . . 438
*H. S. Suklasian*. On condensable renowal processes . . . . . 443

АЙАСТАНИ ГИТУТЮННЕРИ АКАДЕМИАИ ТЕХЕКАГИР. МАТЕМАТИКА

В журнале публикуются оригинальные исследования в следующих основных направлениях: комплексный и вещественный анализ, теория операторов, теория дифференциальных уравнений в частных производных, теория вероятностей.

Сдано в набор 22.12.92 г. Подписано к печати 8.06.93 г.
Учет.-изд. 6, 52. Тиржа 370. Заказ 162. Формат 70×108 1/16.
Бумага № 1, глубокой печати. Печ. лист. 5,5. Усл. кр. отт. 7,7.
Усл. печ. л. 6,71. Цена 100 р.
Адрес редакции: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 26 б, т. 27-93-18

Издательство АН Армении, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.