ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ՋԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ
Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ
Ս. Ն. ՄՍԵՐԴԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀՐԱԳՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու քարտուղար Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԴԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» պարբերականում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպիտք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ուսուցչին (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Սնձատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով. ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Որբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզրաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. Б. АМБАРЦУМЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН
А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН
зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке) а кратких сообщений—не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленым на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

2 р. 40 к. Индекс 77735

АЖ 411
1991, Т.26
№ 4

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. V. AMBARTZUMIAN
N. U. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKIĬ

executive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contribttors who desire to have their articles published in the proceedings zvestia of the Academy of Sciences of the Armenien S.S.R., series "Matomatika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initals and name, the title of the book, the place of publication, the publisher tbe date muse be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of thc publication should be marked. Reference to a quoted source is to indicated by a numeral in square brackets properey inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article shoulo contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitied ot twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

Математика, 1991, т. XXVI, № 4, стр. 276—364.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 4, 1991 Математика

УДК 517.956

Р. Г. АЙРАПЕТЯН

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С НЕСТРОГО ВОГНУТОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО БИХАРАКТЕРИСТИК ГРАНИЦЕЙ

В работе [1] Ф. Фридлендером описано фундаментальное решение смешанной задачи в четверти пространства $[t>0,\ x>0,\ y\in R^{n-1}]$ для модельного строго гиперболического оператора $(1+x)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}$. Важность этой работы обусловлена тем, что найдено фундаментальное решение смешанной задачи в ситуации, когда часть бихарактеристик уравнения касается границы $\{x=0\}$. Это фундаментальное решение выражено через функцию Эйри, что дало возможность исследовать распространение особенностей решения этой смешанной задачи, используя асимптотические свойства функции Эйри. Работа [1] породила цикл работ (см., например, [2—8]), в которых на языке операторов Фурье—Эйри построены параметриксы для широкого класса смешанных задач, допускающих касание границы области бихарактеристиками. В основе соответствующих построений лежит анализ асимптотических свойств функции Эйри. Во всех этих работах накладывается очень существенное требование либо строгой вогнутости, либо строгой выпуклости границы области, что, в конечном счете, дает возможность в диффрактивной зоне свести каноническими преобразованиями исходную задачу к уравнению Эйри.

В предлагаемой работе рассмотрена модельная смешанная задача с нестрого вогнутой границей. Для этой задачи найдено фундаментальное решение, выраженное с помощью вырожденной гипергеометрической функции Уиттекера $W_{k,\,1/4}(z)$. Ситуация здесь представляется значительно более сложной. Дело в том, что известные асимптотические свойства функции Уиттекера (см., например, [9]) получены либо при фиксированном k при $z\to\infty$, либо при фиксированном z при $k\to\infty$. В то же время, для целей данной работы требуются асимпотические свойства функции $W_{k,\,1/4}(z)$ при независимом стремлении переменных k и z к бесконечности, т. е., другими словами, требуются „равномерные асимптотические оценки. Оценки такого типа получены в §§ 2, 3 настоящей работы. В § 4 с их помощью доказана теорема, описывающая фундаментальное решение задачи.

§ 1. Постановка задачи и основные результаты

Рассматривается следующая задача:

$$(1+x^2)u_{tt} - u_{xx} - \sum_{j=1}^{n-1} u_{y_j y_j} = 0 \tag{1.1}$$

при $t>0$, $x>0$, $y\in R^{n-1}$,

$$u = g, \text{ при } x=0,\ t>0,\ y\in R^{n-1}, \tag{1.2}$$

$$u = 0, \text{ при } t<0,\ x>0,\ y\in R^{n-1}. \tag{1.3}$$

Пусть ξ, η_0, η' — переменные, двойственные к x, t, y и $\eta=(\eta_0, \eta')$. Главный символ уравнения (1.1) записывается следующим образом:

$$q(x, \xi, \eta) = -\xi^2 + \mu(x, \eta), \tag{1.4}$$

где

$$\mu(x, \eta) = (1+x^2)\eta_0^2 - |\eta'|^2.$$

Для задачи (1.1)—(1.3) нарушено условие строгой вогнутости границы*. Напомним, что граница $\{x=0\}$ для уравнения, главный символ которого есть $-\xi^2+\mu(x, t, y, \eta)$, называется строго вогнутой, если

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}(0, t, y, \eta) > 0 \text{ на } N_0 = \{(t, y, \eta)\in R^1\times R^{n-1}\times(R^{n-1}\setminus 0);$$

$$\mu(0, t, y, \eta) = 0\}.$$

Соответственно, назовем границу нестрого вогнутой, если для некоторого натурального числа $m\geqslant 2$ имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\partial^j\mu}{\partial x^j}(0, t, y, \eta) = 0 \text{ на } N_0 \text{ при } j = 0, 1, \cdots, m-1,$$

$$\frac{\partial^m\mu}{\partial x^m}(0, t, y, \eta) > 0 \text{ на } N_0.$$

Заметим, что в рассматриваемой нами ситуации $m=2$.

Напомним определения некоторых классов распределениезначных функций, данные в работе [2]. Будем говорить, что распределение $u\in D'(R^{n+1})$ принадлежит классу $K(R\times R^n)$, если существует функция $u_x\in C^\infty(R, D'(R^n))$ такая, что для $\forall\varphi(x)\in C_0^\infty(R)$ и $\forall\psi(y)\in C_0^\infty(R^n)$ имеет место равенство

$$\langle u, \varphi(x)\otimes\psi(y)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\langle u_x, \psi\rangle\varphi(x)\,dx. \tag{1.5}$$

При этом, как показано в [2], отображение $\tau: u\to u_x$ есть биекция $\tau: K(R\times R^n)\to C^\infty(R, D'(R^n))$.

Согласно используемой Л. Хёрмандером терминологии (см. [13]), точки $(0, t, y, 0, \pm|\eta'|, \eta')$ принадлежат множеству G^∞.

Аналогично определяются класс $K(R_+ \times R^n)$ и биекция

$$\tau : K(R^+ \times R^n) \to C^\infty(R^+, D'(R^n)),$$

с той лишь разницей, что $\varphi(x)$ берется из $C_0^\infty(R^+)$.

Класс $\overline{K}(\overline{R}^+ \times R^n) \subset K(R^+ \times R^n)$ определяется как $\tau^{-1} C^\infty(\overline{R}^+, D'(R^n))$, где $C^\infty(\overline{R}^+, D'(R^n))$ состоит из распределениезначных функций из $C^\infty(R^+, D'(R^n))$, являющихся ограничениями на R^+ функций из $C^\infty(R, D'(R^n))$. И, наконец, классы $K^+(R, D'(R^n))$, $K^+(R^+, D'(R^n))$ и $K^+(\overline{R}^+, D'(R^n))$ определяются как подклассы классов $K(R, D'(R^n))$, $K(R^+, D'(R^n))$ и $K(\overline{R}^+, D'(R^n))$, состоящие из элементов, обращающихся в нуль при $y_0 < 0$, для $y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Фундаментальным решением задачи (1.1)—(1.3) назовем распределение $E \in K^+(\overline{R}^+, D'(R^n))$, удовлетворяющее условиям

$$(1 + x^2)\frac{\partial^2 E}{\partial y_0^2} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 E}{\partial y_j^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0, \tag{1.6}$$

$$\tau E|_{x=0} = \delta(y). \tag{1.7}$$

Пусть $E_x = \tau E \in C^\infty(\overline{R}^+, S'(R^n))$. Применим к (1.6) и (1.7) преобразование Фурье по y и обозначим через $\widetilde{E}_x(\eta)$ образ E_x при этом преобразовании. Так как E_x обращается в ноль при $y_0 < 0$, функция $\widetilde{E}_x(\eta)$ может быть продолжена до функции, определенной на $\{(x, \eta); x \in \overline{R}^+ \eta_0 \in C, \operatorname{Im} \eta_0 < 0, \eta' \in R^{n-1}\}$ и аналитичной по η_0. Получим следующую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения, зависящего от параметра η,

$$\frac{d^2 \widetilde{E}_x(\eta)}{dx^2} + \mu(x, \eta)\widetilde{E}_x(\eta) = 0, \text{ при } x > 0, \tag{1.8}$$

$$\widetilde{E}_0(\eta) = 1. \tag{1.9}$$

Как известно (см. [10]), подстановкой $\widetilde{E}_x(\eta) = x^{-1/2} v(i\eta_0 x^2, \eta)$ и заменой переменной $z = i\eta_0 x^2$ это уравнение сводится к уравнению Уиттекера:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{1/4 - m^2}{z^2}\right) v = 0, \tag{1.10}$$

с $m = 1/4$ и $k = -i\dfrac{\eta_0^2 - |\eta'|^2}{4\eta_0}$.

Уравнение Уиттекера (см. [9]) имеет две пары линейно независимых решений, являющихся вырожденными гипергеометрическими функциями Уиттекера:

$$\{M_{k,m}(z);\ M_{k,-m}(z)\} \text{ и } \{W_{k,m}(z);\ W_{-k,m}(-z)\}.$$

В случае, когда $2m$ не есть целое число и $|\arg z| < \dfrac{3\pi}{2}$, эти функции связаны следующими соотношениями (см. [9]):

$$W_{k,m}(z)=\frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(1/2-m-k)}M_{k,m}(z)+\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)}M_{k,-m}(z). \quad (1.11)$$

Общее решение уравнения (1.8) может быть записано двояко, с использованием обеих пар линейно независимых решений:

$$\tilde{E}_x(\eta)=x^{-1/2}[A_1(\eta)\,W_{k,1/4}(i\eta_0 x^2)+A_2(\eta)\,W_{-k,1/4}(i\eta_0 x^2)] \quad (1.12)$$

и

$$\tilde{E}_x(\eta)=x^{-1/2}[B_1(\eta)\,M_{k,1/4}(i\eta_0 x^2)+B_2(\eta)\,M_{k,-\frac{1}{4}}(i\eta_0 x^2)]. \quad (1.13)$$

Значения коэффициентов $A_1(\eta)$ и $A_2(\eta)$ устанавливает сформулированная ниже теорема. Воспользовавшись соотношением (1.11) получаем также и значения коэффициентов $B_1(\eta)$ и $B_2(\eta)$.

Теорема. *Единственное решение граничной задачи* (1.6)—(1.7) *есть обратное преобразование Фурье—Лапласа от функции*

$$\tilde{E}_x(\eta)=x^{-1/2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)}{\sqrt{\pi}\,(i\eta_0)^{1/4}}W_{k,1/4}(i\eta_0 x^2), \quad (1.14)$$

определенной на множестве

$$\{(x,\ \eta);\ x>0.\ \eta_0\in C,\ \operatorname{Im}\eta_0<0,\ \eta'\in R^{n-1}\},$$

где

$$k=-\frac{\eta_0^2-|\eta'|^2}{4i\eta_0}.$$

§ 2. Равномерные оценки функции Уиттекера

Целью этого параграфа является вывод оценок функции Уиттекера $W_{k,m}(z)$, использованных в доказательстве теоремы (§ 4). Вообще говоря, оценки для функций Уиттекера известны (см., например, [9]), однако они получены либо при фиксированных значениях параметров k и m, либо при фиксированных значениях параметра m и аргумента z. Другими словами, постоянные, фигурирующие в этих оценках, зависят либо от k и m, либо от m и z. Однако для целей настоящей работы таких оценок недостаточно. При доказательстве теоремы (§ 4) требуется оценивать функции $W_{k,m}(z)$ при независимом возрастании модулей параметра k и переменной z. Ясно, что требование „равномерности" оценок существенно усложняет их вывод. Далее, несмотря на то, что функция Уиттекера используется при $m=\frac{1}{4}$, в этом параграфе мы не ограничиваемся только этим значением m, что, впрочем, не приводит к сколько-нибудь серьезному усложнению вывода оценок. Естественно, что оценки получены при определенных ограничениях на m, k и z. Мы начнем с самой „грубой" из оценок, но полученной при более слабых ограничениях.

Лемма 1. *Пусть* $\operatorname{Re} m > 0$, $\operatorname{Re}\left(k + m - \frac{1}{2}\right) \leqslant 0$, $z \neq 0$ *и* $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. *Тогда имеет место оценка*

$$|W_{k,m}(z)| \leqslant \frac{\Gamma(2\operatorname{Re} m)}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + m - k\right)\right|} |z|^{\frac{1}{2} - \operatorname{Re} m} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} k \cdot \arg z - \frac{\pi}{2}\operatorname{Im}(k+m)\right. \tag{2.1}$$

$$\left. \cdot \operatorname{sgn}\operatorname{Im} z \cdot \theta(-\operatorname{Im}(k+m)\operatorname{sgn}\operatorname{Im} z)\right\}.$$

Примечание. $\theta(t)$ — функция Хевисайда, т. е. $\theta(t) = 1$ при $t \geqslant 0$ и $\theta(t) = 0$ при $t < 0$.

Доказательство леммы 1. Поскольку из условий леммы следует, что $\operatorname{Re}\left(k - \frac{1}{2} - m\right) < 0$ и $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, можно воспользоваться следующим интегральным представлением функции Уиттекера (см. [9]):

$$W_{k,m}(z) = \frac{e^{-\frac{z}{2}} z^k}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - k + m\right)} \int_0^\infty t^{-k-\frac{1}{2}+m} \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m} e^{-t}\, dt.$$

Отсюда

$$|W_{k,m}(z)| \leqslant \frac{e^{-\frac{1}{2}\operatorname{Re} z} |z|^{\operatorname{Re} k} e^{-\operatorname{Im} k \cdot \arg z}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} - k + m\right)\right|} I, \tag{2.2}$$

где

$$I = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2} - \operatorname{Re} k + \operatorname{Re} m} \left|1 + \frac{t}{z}\right|^{\operatorname{Re}(k+m) - \frac{1}{2}} dt. \tag{2.3}$$

Так как $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, имеют место оценки

$$\left|1 + \frac{t}{z}\right| > \frac{t}{|z|}$$

и

$$0 \leqslant \operatorname{sgn}\operatorname{Im} z \cdot \arg\left(1 + \frac{t}{z}\right) < \frac{\pi}{2}. \tag{2.4}$$

Отсюда, используя условие $\operatorname{Re}\left(k - \frac{1}{2} + m\right) \leqslant 0$, получаем

$$I \leqslant \int_0^\infty t^{2\operatorname{Re} m - 1} |z|^{\frac{1}{2} - \operatorname{Re}(k+m)} \exp\left\{-\operatorname{Im}(k+m) \cdot \arg\left(1 + \frac{t}{z}\right) - t\right\} dt. \tag{2.5}$$

Из (2.4) следуют неравенства:

$$-\operatorname{Im}(k+m)\cdot\arg\left(1+\frac{t}{z}\right)\leqslant 0 \text{ при } \operatorname{Im}(k+m)\cdot\operatorname{sgn}\operatorname{Im} z\geqslant 0,$$

и

$$-\operatorname{Im}(k+m)\cdot\arg\left(1+\frac{t}{z}\right)\leqslant -\frac{\pi}{2}\operatorname{Im}(k+m)\operatorname{sng}\operatorname{Im} z \text{ при}$$

$$\operatorname{Im}(k+m)\operatorname{sgn}\operatorname{Im} z<0.$$

Воспользовавшись последними неравенствами и оценкой (2.5) получаем, что

$$I\leqslant |z|^{\frac{1}{2}-\operatorname{Re}(k+m)}\exp\left\{-\frac{\pi}{2}\operatorname{Im}(k+m)\cdot\operatorname{sgn}\operatorname{Im} z\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\theta(-\operatorname{Im}(k+m)\cdot\operatorname{sgn}\operatorname{Im} z)\cdot\int_0^{\infty}t^{2\operatorname{Re} m-1}e^{-t}\,dt.\right.$$

Отсюда и из (2.2) следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть* $\operatorname{Re} z=0$, $\operatorname{Re} k=0$, $\operatorname{Im} k\cdot\operatorname{Im} z<0$, $\operatorname{Im} m=0$, $0<|m|<1/2$ *и* $\dfrac{|z|}{|k|}\geqslant 2$.

Тогда имеет место оценка

$$|W_{k,m}(z)|\leqslant C(m)\left|\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-m\right)\right|\cdot|z|^{\frac{1}{2}+m}\cdot$$

$$\cdot\left(e^{\pi|k|}+|k|^{-2m}e^{\frac{\pi|k|}{2}}\right). \tag{2.6}$$

Доказательство. В силу условий леммы имеет место следующее интегральное представление функции Уиттекера (см. [9]):

$$W_{k,m}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-m\right)e^{-\frac{z}{2}}z^{k}\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{(0+)}(-t)^{-k-\frac{1}{2}+m}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m}e^{-t}\,dt, \tag{2.7}$$

где интегрирование ведется по контуру, который идет из бесконечности по вещественной оси, обходит начало координат в положительном направлении и затем уходит на бесконечность по вещественной оси, причем точка $t=-z$ лежит вне контура. Предполагается, что $\arg z$ имеет свое главное значение $|\arg(-t)|\leqslant\pi$ и $\arg\left(1+\dfrac{t}{z}\right)\to 0$ при $t\to 0$ по пути, лежащему внутри контура. Совершив в (2.7) замену переменной $t\to|z|t$, получаем

$$W_{k,m}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-m\right)e^{-\frac{z}{2}}z^{k}|z|^{\frac{1}{2}+m-k}I, \tag{2.8}$$

где

$$I = \int_{\infty}^{(0+)} (-t)^{-k-\frac{1}{2}+m} (1 - it \operatorname{sign} \operatorname{Im} z)^{k-\frac{1}{2}+m} e^{-|z|t}\, dt.$$

Обозначим

$$f(t) = (-t)^{-\frac{1}{2}+m} (1 - it \operatorname{sign} \operatorname{Im} z)^{-\frac{1}{2}+m}, \tag{2.9}$$

$$S(t) = -\frac{k}{|k|} \ln(-t) + \frac{k}{|k|} \ln(1 - it \operatorname{sign} \operatorname{Im} z) - \frac{|z|}{|k|} t, \tag{2.10}$$

приходим к следующему представлению

$$I = \int_{\infty}^{(0+)} f(t) \exp(|k| S(t))\, dt. \tag{2.11}$$

Особыми точками функций $S(t)$ и $f(t)$ являются точки 0, $-i \operatorname{sign} \operatorname{Im} z$, ∞.

Ограничимся рассмотрением случая $\operatorname{Im} z > 0$, поскольку оценка (2.6) для $\operatorname{Im} z < 0$ получается переходом к сопряженному в (2.11).

Интегрирование будем вести по контуру

$$l = l_1 \cup l_2 \cup l_3,$$

где

$$l_1 = \{t \in C;\ \operatorname{Re} t \geqslant 0,\ \operatorname{Im} t = r\},$$
$$l_2 = \{t \in C;\ |t| = r,\ \operatorname{Re} t \leqslant 0\},$$
$$l_3 = \{t \in C;\ \operatorname{Re} t \geqslant 0,\ \operatorname{Im} t = -r\},$$

где

$$r = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4\frac{|k|}{|z|} + 1} - 1\right). \tag{2.12}$$

Из условия $\dfrac{|z|}{|k|} > 2$ следует неравенство $r \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Имеем неравенство

$$|I| \leqslant \sum_{j=1}^{3} |I_j|,$$

где

$$I_j = \left| \int_{l_j} f(t) \exp[|k| S(t)]\, dt \right|.$$

Оценим вначале I_1. На C_1 $t = s + ir$ и, следовательно,

$$|f(t)| = |s + ir|^{m-\frac{1}{2}} |1 + r - is|^{m-\frac{1}{2}}.$$

Из условия $m - \dfrac{1}{2} < 0$ и последнего равенства следуют оценки

$$|f(t)| \leqslant s^{m-\frac{1}{2}} (1 + r)^{m-\frac{1}{2}} \leqslant s^{m-\frac{1}{2}}, \tag{2.13}$$

$$|f(t)| \leqslant s^{2m-1}. \tag{2.14}$$

Далее

$$\operatorname{Re} S(t) = -\arg(-s-ir) + \arg(1+r-is) - \frac{|z|}{|k|}s.$$

В соответствии с правилом выбора ветви подынтегральной функции в (2.7) имеем

$$\operatorname{Re} S(t) = \pi - \operatorname{arctg}\frac{r}{s} - \operatorname{arctg}\frac{s}{1+r} - \frac{|z|}{|k|}s \leqslant \tag{2.15}$$

$$\leqslant \pi - \frac{|z|}{|k|}s \leqslant \pi - 2s < -s,$$

при $s > \pi$.

С другой стороны

$$\frac{d(\operatorname{Re} S)}{ds}(s+ir) = -\frac{|z|\cdot|k|^{-1}s^2(s^2+|z|\cdot|k|^{-1}(r^2+r+1)+1)}{(r^2+s^2)[(1+r)^2+s^2]} < C.$$

Следовательно

$$\operatorname{Re} S(s+ir) < \operatorname{Re} S(ir) = \frac{\pi}{2}. \tag{2.16}$$

Из оценок (2.13) и (2.16) получаем

$$\int_0^\pi |f(s+ir)|\, e^{|k|\operatorname{Re} S(s+ir)}\, ds \leqslant e^{\frac{\pi|k|}{2}} \frac{\pi^{m+1/2}}{m+1/2}, \tag{2.17}$$

а из оценок (2.14) и (2.15)

$$\int_\pi^\infty |f(s+ir)|\, e^{|k|\operatorname{Re} S(s+ir)}\, ds < \int_\pi^\infty s^{2m-1} e^{-|k|s}\, ds \leqslant |k|^{-2m}\Gamma(2m). \tag{2.18}$$

Объединяя (2.17) и (2.18), получаем

$$I_1 \leqslant \frac{\pi^{m+1/2}}{m+1/2} e^{\frac{\pi|k|}{2}} + \Gamma(2m)|k|^{-2m}. \tag{2.19}$$

Для того, чтобы оценить I_3 заметим, что на l_3 $t = s - ir$ и

$$|f(t)| = |s-ir|^{m-1/2}|1-r-is|^{m-1/2} < s^{2m-1}.$$

Далее

$$\operatorname{Re} S(s-ir) = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{r}{s} - \operatorname{arctg}\frac{s}{1-r} -$$

$$-\frac{|z|}{|k|}s \leqslant -\frac{\pi}{2} - \frac{|z|}{|k|}s < -\frac{\pi}{2} - 2s.$$

Отсюда

$$I_3 \leqslant \int_0^\infty s^{2m-1} e^{-2|k|s}\, ds = (2|k|)^{-2m}\Gamma(2m). \tag{2.20}$$

Нам осталось оценить I_2. На l_2 $t = re^{i\varphi}$, $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Отсюда

$$|f(t)| = r^{m-1/2}|1 - ire^{i\varphi}|^{m-1/2} \leqslant 2^{1/2-m} r^{m-1/2}. \tag{2.21}$$

В соответствии с правилом выбора ветви $\arg(-t) = \varphi - \pi$ и

$$\arg(1 - it) = \arg\left(1 + re^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}\right) = \operatorname{arctg} \frac{r \sin(\varphi - \pi/2)}{1 + r\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Поэтому на l_2

$$\operatorname{Re} S(t) = \pi - \varphi - \operatorname{arctg} \frac{r\cos\varphi}{1 + r\sin\varphi} - \frac{|z|}{|k|} r\cos\varphi. \tag{2.22}$$

Продифференцировав последнее равенство по φ, получаем

$$\frac{d}{d\varphi} \operatorname{Re} S(re^{i\varphi}) = -1 + \frac{r\sin\varphi + r^2}{1 + 2r\sin\varphi + r^2} + \frac{|z|}{|k|} r\sin\varphi. \tag{2.23}$$

Из (2.12) следует, что

$$\frac{|k|}{|z|} = r^2 + r.$$

Из этого равенства и (2.22) получаем

$$\frac{d}{d\varphi} \operatorname{Re} S(re^{i\varphi}) = \frac{2r(\sin\varphi - 1)\left(\sin\varphi + \frac{1+r}{2r}\right)}{(1+r)(1+2r\sin\varphi + r^2)},$$

откуда следует, что для $r \in (0, 1)$ и $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ имеет место неравенство

$$\frac{d}{d\varphi} \operatorname{Re} S(re^{i\varphi}) \leqslant 0.$$

Следовательно

$$\operatorname{Re} S(re^{i\varphi}) \leqslant \operatorname{Re} S\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда, воспользовавшись оценкой (2.21), получаем

$$I_2 \leqslant 2^{\frac{1}{2}-m} \pi r^{m+\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi|k|}{2}} \leqslant 2^{-2m} \pi e^{\frac{\pi|k|}{2}}. \tag{2.24}$$

Объединяя неравенства (2.19), (2.20), (2.24), получаем

$$I \leqslant \left(\frac{\pi}{m + \frac{1}{2}} + \frac{\pi}{2^{m+\frac{1}{2}}}\right) e^{\frac{\pi|k|}{2}} + (1 + 2^{-2m})\Gamma(2m)|k|^{-2m}.$$

Отсюда

$$|W_{k,m}(z)| \leqslant \frac{1}{2^{\frac{1}{2}+m}} \left|\Gamma\left(k + \frac{1}{2} - m\right)\right| \cdot |z^k| \cdot |z|^{\frac{1}{2}+m}.$$

$$\cdot\left[\left(\frac{\pi^{m+\frac{1}{2}}}{m+\frac{1}{2}}+\frac{\pi}{2^{m+\frac{1}{2}}}\right)e^{\frac{\pi|k|}{2}}+(1+2^{-2m})\Gamma(2m)|k|^{-2m}\right.$$

Заметив, что

$$|z^k|=|e^{k\ln z}|=e^{-\frac{\pi|t|}{2}}, \tag{2.25}$$

приходим к оценке (2.6).

Лемма 3. *Пусть* $\operatorname{Re} z=0$, $\operatorname{Re} k=0$, $\operatorname{Im} k\cdot\operatorname{Im} z<0$,

$$\operatorname{Im} m=0,\ 0<|m|<\frac{1}{2},\ |k|\geqslant S|z|.$$

Тогда имеет место оценка

$$|W_{k,m}(z)\leqslant C(m)\left|\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-m\right)\right|e^{\pi|k|}|z|^{\frac{1}{2}-m}(1+|k^{2m}). \tag{2.26}$$

Поскольку доказательство этой леммы во многом сходно с доказательством леммы 2, ограничимся кратким изложением. Как и в предыдущем случае докажем оценку в случае, когда $\operatorname{Im} z\geqslant 0$.

Воспользуемся интегральным представлением (2.8). Интегрирование будем вести по контуру

$$l=l_1\cup l_2\cup l_3\cup l_4,$$

где

$$l_1=\{t\in C;\ \operatorname{Re} t\geqslant 0,\ \operatorname{Im} t=r\},$$

$$l_2=\left\{t\in C;\ \operatorname{Re} t=0,\ \operatorname{Im} t\in\left[\frac{1}{2},\ r\right]\right\},$$

$$l_3=\left\{t\in C;\ |t|=\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\ t\leqslant 0\right\},$$

$$l_4=\left\{t\in C;\ \operatorname{Re} t\geqslant 0,\ \operatorname{Im} t=-\frac{1}{2}\right\},$$

где r определено формулой (2.12).

Заметим, что

$$|W_{k,m}(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\left|\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-m\right)\right|e^{\frac{\pi|k|}{2}}|z|^{\frac{1}{2}+m}|I|,$$

$$|I|\leqslant\sum_{j=1}^{4}I_j,$$

где

$$I_j=\int_{l_j}|f(t)|e^{|k|S(t)}dt.$$

На l_1 имеет место неравенство

$$\operatorname{Re} S(t)=\pi-\operatorname{arctg}\frac{r}{s}-\operatorname{arctg}\frac{s}{1+r}-\frac{|z|}{|k|}s\leqslant$$

$$\leqslant \pi - \frac{|z|}{|k|}\, s \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{|z|}{2|k|}\, s,$$

при $s \geqslant \pi \dfrac{|z|}{|k|}$.

Отсюда и из неравенства (2.16) получаем

$$I_1 \leqslant \int_0^{\pi \frac{|k|}{|z|}} s^{2m-1} e^{\frac{\pi |k|}{2}}\, ds + \int_{\pi \frac{|k|}{|z|}}^{\infty} s^{2m-1} e^{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{|z|}{2|k|} s\right)|k|}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant e^{\frac{\pi |k|}{2}} \left(\frac{1}{2m} \left(\pi \frac{|k|}{|z|} \right)^{2m} + \Gamma(2m)\, 2^{2m} |z|^{-2m} \right) \leqslant$$

$$\leqslant C(m)\, e^{\frac{\pi |k|}{2}} |z|^{-2m} (1 + |k|^{-2m}).$$

На I_2 $t = is$, $s > 0$. Следовательно

$$\operatorname{Re} S(t) = \frac{\pi}{2},$$

$$|f(t)| = s^{m-1/2} (1+s)^{m-1/2} \leqslant s^{2m-1}.$$

Поэтому

$$I_2 \leqslant e^{\frac{\pi |z|}{2}} \int_{1/2}^{r} s^{2m-1}\, ds < \frac{1}{2m} e^{\frac{\pi |k|}{2}} r^{2m}.$$

Заметив, что из (2.12) следует оценка $r \leqslant |k|^{1/2} |z|^{-1/2}$, получаем

$$I_2 \leqslant \frac{1}{2m} e^{\pi |k|} |z|^{-m} |k|^{m}.$$

Из условия $|k| \geqslant 3|z|$, воспользовавшись соотношением (2.23), получаем

$$\frac{d}{d\varphi} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} e^{i\varphi} \right) \leqslant 0 \text{ на } \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right].$$

Следовательно, на l_3

$$\operatorname{Re} S\left(\frac{1}{2} e^{i\varphi} \right) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, имеет место оценка

$$I_3 \leqslant 2^{-2m} \pi e^{\frac{\pi |k|}{2}}.$$

Наконец на l_1 $t = s - i/2$

$$|f(s - i/2)| \leqslant s^{2m-1},$$

$$\operatorname{Re} S(s - i/2) < -\frac{|z|}{|k|}\, s.$$

Поэтому

$$I_4 \leqslant \int_0^{\infty} s^{2m-1} e^{-|z|s}\, ds = \Gamma(2m)\,|z|^{-2m}.$$

Окончательно получаем

$$I \leqslant C(m)\, e^{\frac{\pi|k|}{2}}\, |z|^{-2m}(1+|k|^{2m}),$$

откуда следует оценка (2.26).

§ 3. Равномерное асимптотическое разложение функции Уиттекера

Целью этого параграфа, как и предыдущего, является доказательство равномерных оценок функции Уиттекера. При этом используется равномерное асимптотическое разложение функции Уиттекера, к выводу которого мы теперь переходим.

Лемма 4. *Пусть* $\operatorname{Re} k = 0$, $\operatorname{Re} z = 0$,

$$\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} k < 0,\ \operatorname{Im} m = 0,\ 0 < |m| < \frac{1}{2}$$

и

$0 < c_1 \leqslant \dfrac{|z|}{|k|} \leqslant c_2$, *где* c_1, c_2 — *постоянные. Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$W_{k,m}(z) = \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-m\right)}{\sqrt{2\pi}} \frac{k^m z^{1/4}}{(z-4k)^{1/4}} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{ i\pi k - k \ln\left(1 - \frac{z}{2k} - \sqrt{\frac{z^2}{4k^2} - \frac{z}{k}}\right) - \right.$$

$$\left. - i\sqrt{kz - \frac{z^2}{4}} \right\} (1 + O(k^{-1})),\ |k| \to \infty, \qquad (3.1)$$

равномерная относительно z.

Прежде чем перейти к доказательству, заметим, что из этой леммы сразу вытекает

Следствие. В предположениях леммы 4 имеет место оценка

$$|W_{k,m}(z)| \leqslant \text{const} \left|\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-m\right)\right| e^{\pi|k|} \frac{|z|^{1/4}|k|^m}{(|z|+4|k|)^{1/4}}. \qquad (3.2)$$

Доказательство леммы. Будем исходить из интегрального представления (2.7) функции Уиттекера. Совершая замену переменной $t \to |z|\,t$ и обозначая $\dfrac{|z|}{|k|}$ через β, а $|k|$ через λ, получаем

$$W_{k,m}(z) = -\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-m\right)}{2\pi i} e^{-\frac{z}{2}} z^k |z|^{-k+\frac{1}{2}+m} I(\lambda, \beta), \qquad (3.3)$$

где

$$I(\lambda, \beta) = \int_{\Gamma}^{(0+)} f(t)\, e^{\lambda S(t)}\, dt,$$

$$f(t) = (-t)^{m-1/2}(1 - it \operatorname{sign} \operatorname{Im} z)^{m-1/2},$$

$$S(t) = -i \operatorname{sign} \operatorname{Im} k \ln(-t) + i \operatorname{sing} \operatorname{Im} k \cdot$$

$$\cdot \ln(1 - it \operatorname{sign} \operatorname{Im} z) - \beta t.$$

Как и в предыдущем параграфе ограничимся рассмотрением случая $\operatorname{Im} z > 0$, переходя к сопряженному при $\operatorname{Im} z < 0$.

Зафиксируем $\beta \in [c_1, c_2]$. Особыми точками функций $S(t)$ и $f(t)$ являются точки $0, \infty, -i$. Найдем точки перевала функции $S(t)$. С этой целью рассмотрим следующее уравнение:

$$S'(t) = it^{-1} - (1 - it)^{-1} - \beta = 0. \tag{3.4}$$

Оно имеет корни

$$t_1 = \frac{i}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{4}{\beta}} - 1\right),$$

$$t_2 = -\frac{i}{2}\left(\sqrt{1 + 4/\beta} + 1\right),$$

причем $\arg(-t_1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arg(-t_2) = \frac{\pi}{2}$. Заметим, что

$$\operatorname{Re} S(t) = -\arg(-t) + \arg(1 - it) - \beta \operatorname{Re} t.$$

Отсюда

$$\operatorname{Re} S(t_1) = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Re} S(t_2) = -\frac{\pi}{2},$$

т. е. $\operatorname{Re} S(t_1) > \operatorname{Re} S(t_2)$.

Покажем, что существует перевальный контур, проходящий через точку t_1 и для этого контура точка t_1 является простой точкой перевала. Воспользуемся следующими леммой и следствием.

Лемма ([11]). Пусть z_0 — простая точка перевала функции $S(z)$, т. е. $S'(z_0) = 0$, $S''(z_0) \neq 0$.

Тогда в малой окрестности U точки z_0 линия уровня $\operatorname{Re} S(z) = \operatorname{Re} S(z_0)$ состоит из двух гладких кривых l_1 и l_2, которые ортогональны в точке z_0 и разбивают U на 4 сектора. Знаки функции $\operatorname{Re}(S(z) - S(z_0))$ в соседних секторах различны.

Следствие ([11]). Через секторы, в которых $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$, проходит гладкая кривая l такая, что $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_0)$ при $z \in l$. Функция $\operatorname{Re} S(z)$ строго монотонно убывает вдоль l при удалении z от точки z_0.

Нетрудно убедиться, что в рассматриваемой ситуации

$$S''(t_1) = -\frac{i}{t_1^2} - \frac{i}{(1 - it_1)^2} = i\beta^2\sqrt{1 + \frac{4}{\beta}} \neq 0. \tag{3.5}$$

Поэтому существует гладкая кривая l, проходящая через точку t_1 такая, что

$$\operatorname{Im} S(t) = \operatorname{Im} S(t_1), \text{ при } t \in l$$

и

$$\operatorname{Re} S(t) < \operatorname{Re} S(t_1), \text{ при } t \in l,\ t \neq t_1.$$

Естественно можно считать, что эта кривая содержится в круге радиуса δ с центром в точке t_1, где δ — положительное число, которое будет выбрано ниже. Пусть концами кривой l являются точки $\hat{t}_1$ и $\hat{t}_2$. Покажем, что при достаточно малых δ точки $\hat{t}_1$ и $\hat{t}_2$ располагаются следующим образом:

$$\operatorname{Re} \hat{t}_1 < 0,\ \operatorname{Re} t_2 > 0. \tag{3.6}$$

Действительно

$$S(t) - S(t_1) = (t - t_1)^2 h(t),$$

где

$$h(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - s)\, S''(t_1 + s(t - t_1))\, ds.$$

Из соотношения

$$S''(t_1) = i\beta^2 \sqrt{1 + \frac{4}{\beta}} \neq 0 \tag{3.7}$$

следует, что $h(t_1) \neq 0$.

Введем новую переменную

$$S(t) - S(t_1) = -z^2.$$

Тогда

$$z(t) = (t - t_1)\sqrt{-h(t)},$$

$$z'(t_1) = \sqrt{-h(t_1)} \neq 0$$

и

$$\sqrt{-h(t_1)} = \frac{1}{2}\beta \left(1 + \frac{4}{\beta}\right)^{1/4} \sqrt{-i}.$$

Выбор ветви под корнем осуществим следующим образом: $\sqrt{-i} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Отсюда $\arg z'(t_1) = -\frac{\pi}{4}$. Заметим, что функция $z = z(t)$ в окрестности точки t_1 осуществляет конформное отображение. Линией наибыстрейшего спуска является отрезок прямой $\operatorname{Im} z = 0$. Таким образом, касательная к кривой l в точке t_1 параллельна биссектрисе первого квадранта, откуда и следуют соотношения (3.6). Дополним l следующими кривыми:

$$l_1 = \{t \in C;\ \operatorname{Im} t = \operatorname{Im} \hat{t}_2,\ \operatorname{Re} t \geqslant \operatorname{Re} \hat{t}_2\},$$

$$l_2 = \{t \in C;\ \operatorname{Re} t = \operatorname{Re} \hat{t}_1,\ \operatorname{Im} t \in [0, \operatorname{Im} t_1]\},$$

$$l_3 = \{t = re^{i\varphi};\ r = |\operatorname{Re} \hat{t}_1|,\ \varphi \in [\pi, 2\pi]\},$$

$$l_4 = \{t \in C;\ \operatorname{Im} t = 0,\ \operatorname{Re} t \geqslant |\operatorname{Re} \hat{t}_1|\}.$$

Покажем, что полученный контур является перевальным.

а) Пусть $t \in l_1$, тогда $t = s + i \operatorname{Im} \hat{t}_2$, $s \geqslant \operatorname{Re} \hat{t}_2 > 0$. Обозначим

$$\Phi(s) = \operatorname{Re} S(s + i \operatorname{Im} \hat{t}_2) = \pi - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \hat{t}_2}{s} - \operatorname{arctg} \frac{s}{1 + \operatorname{Im} \hat{t}_2} - \beta s.$$

Тогда

$$\Phi'(s) = -\frac{\operatorname{Im} \hat{t}_2}{s^2 + (\operatorname{Im} \hat{t}_2)^2} - \frac{1 + \operatorname{Im} \hat{t}_2}{s^2 + (1 + \operatorname{Im} \hat{t}_2)^2} - \beta =$$

$$= \frac{\operatorname{Im} \hat{t}_2 (1 + \operatorname{Im} \hat{t}_2)(1 - \beta \operatorname{Im} \hat{t}_2 (1 + \operatorname{Im} \hat{t}_2))}{(s^2 + (\operatorname{Im} \hat{t}_2)^2 (s^2 + (1 + \operatorname{Im} \hat{t}_2)^2)}.$$

Как было показано выше $\operatorname{Im} \hat{t}_2 > \operatorname{Im} \hat{t}_1 = 1/2(\sqrt{1 + 4\beta^{-1}} - 1)$. Следовательно, $\Phi'(s) < 0$, т. е. функция $\Phi(s)$ убывает с ростом s. Поэтому на l_1

$$\operatorname{Re} S(t) \leqslant \operatorname{Re} S(\hat{t}_2) < \operatorname{Re} S(t_1).$$

b) Пусть $t \in l_2$, т. е. $t = \mu + is$, $\mu = -\operatorname{Re} \hat{t}_1$, $s \in [0, \operatorname{Im} \hat{t}_1]$. Обозначим

$$\Phi(s) = \operatorname{Re} S(-\mu + is) = \operatorname{arctg} \frac{t}{\mu} + \operatorname{arctg} \frac{\mu}{1 + t} + \beta\mu.$$

Имеет место неравенство

$$\Phi'(s) = -\frac{\mu}{s^2 + \mu^2} - \frac{\mu}{(1 + s)^2 + \mu^2} > 0$$

и, следовательно, на l_2

$$\operatorname{Re} S(t) \leqslant \operatorname{Re} S(\hat{t}_1) < \operatorname{Re} S(t_1).$$

c) Пусть $t \in l_3$ т. е. $t = re^{i\varphi}$, $r = |\operatorname{Re} \hat{t}_1| < \delta$, $\varphi \in [\pi, 2\pi]$. Обозначим

$$\Phi(\varphi) = \operatorname{Re} S(re^{i\varphi}) = \pi - \varphi - \operatorname{arctg} \frac{r \cos \varphi}{1 - r \sin \varphi} - \beta r \cos \varphi.$$

Отсюда

$$\Phi'(\varphi) = \beta r \sin \varphi - \frac{1 + r \sin \varphi}{1 + 2r \sin \varphi + r^2} \leqslant 0$$

для $\varphi \in [\pi, 2\pi]$, $r \leqslant 1$.

Следовательно

$$\operatorname{Re} S(re^{i\varphi}) \leqslant \operatorname{Re} S(-r) < \operatorname{Re} S(\hat{t}_1) < \operatorname{Re} S(t_1).$$

d) Наконец, пусть $t \in l_4$, тогда

$$\operatorname{Re} S(t) = -\pi - \operatorname{arctg} t - \beta t < -\pi < \operatorname{Re} S(t_1).$$

Таким образом, доказано, что контур $l_1 \cup l \cup l_2 \cup l_3 \cup l_4$ — перевальный, а точка t_1 является для него простой точкой перевала. Совершенно аналогично показываем, что при $\operatorname{Im} z < 0$ перевальным является контур, симметричный построенному относительно прямой $\operatorname{Im} t = 0$.

Теперь остается воспользоваться известным асимптотическим разложением (см., например, [11]), согласно которому

$$I(\lambda, \beta) \sim \exp[\lambda S(t_1)] \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^{-n-1/2}, \quad \lambda \to \infty. \tag{3.8}$$

Главный член асимптотики имеет следующий вид:

$$I(\lambda, \beta) = \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(t_1)}} \exp[\lambda S(t_1)] (f(t_1) + O(\lambda^{-1})). \tag{3.9}$$

Из (3.7), в соответствии с правилом выбора ветви для корня (см. [11]), получаем

$$\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(t_1)}} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda^{1/2} \beta^{3/4} (\beta + 4)^{1/4}} e^{i\frac{\pi}{4}}. \tag{3.10}$$

С другой стороны

$$S(t_1) = i \ln(-t_1) - i \ln(1 - i t_1) - \beta t_1 = \frac{\pi}{2} +$$

$$+ i \ln \frac{\sqrt{1 + 4/\beta} - 1}{\sqrt{1 + 4/\beta} + 1} - i \frac{\beta}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\beta}} - 1 \right), \tag{3.11}$$

$$f(t_1) = \beta^{1/2 - m} \exp\left| i \frac{\pi}{4} (1 - 2m) \right|. \tag{3.12}$$

Наконец, из (3.9)—(3.12) для фиксированного $\beta \in [c_1, c_2]$ получаем

$$I(\lambda, \beta) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda^{1/2} \beta^{3/4} (\beta + 4)^{1/4}} \exp\left\{ i \frac{\pi}{4} + \lambda \left| \frac{\pi}{2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + i \ln \left(\frac{\beta}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\beta}} - 1 \right)^2 \right) - \frac{i\beta}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\beta}} - 1 \right) \right] \right\} \cdot$$

$$\cdot \left(\beta^{\frac{1}{2} - m} \exp\left| i \frac{\pi}{4} (1 - 2m) \right| + O(\lambda^{-1}) \right), \quad \lambda \to \infty. \tag{3.13}$$

Заметим, что хотя асимптотика функции $I(\lambda, \beta)$ получена при фиксированном значении параметра β, она имеет место равномерно по β в некоторой окрестности точки β. Достаточно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема ([12]). *Пусть* 1°. *функции* $f(z, \alpha)$ *и* $S(z, \alpha)$ *голоморфны по* $(z, \alpha) \in \Omega_z \times \Omega_\alpha$, *где* Ω_z, Ω_α — *области в комплексных плоскостях* z, α *соответственно*; 2°. γ — *конечный контур*, $\gamma \subset \Omega_z$; 3°. *функция* $S(z, \alpha_0)$, $\alpha_0 \in \Omega_\alpha$ *имеет простую точку перевала* $z_0 \in \Omega_z$, z_0 *является внутренней точкой контура* γ *и также* $\operatorname{Re} S(z, \alpha_0)$ *достигается только в точке* z_0. *Тогда* $\exists \delta > 0$ *такое, что при* $\lambda \to \infty$, $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ *асимптотика интеграла*

$$F(\lambda, \alpha) = \int_\Gamma f(z, \alpha) \exp[\lambda S(z, \alpha)]\, dz$$

равна вкладу от точки перевала $z_0(\alpha)$:

$$F(\lambda, \alpha) \sim \exp[\lambda S(z_0(\alpha), \alpha)] \sum_{m=0}^{\infty} a_m(\alpha) \lambda^{-m-1/2},$$

а главный член асимптотики имеет вид

$$\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(z_0(\alpha), \alpha)}} [f(z_0(\alpha), \alpha) + O(\lambda^{-1})] \exp[\lambda S(z_0(\alpha), \alpha)].$$

Покрывая отрезок $[c_1, c_2]$ такими окрестностями и выбирая конечное подпокрытие, показываем, что разложение (3.13) равномерно по β на $[c_1, c_2]$.

Для завершения доказательства леммы остается воспользоваться соотношениями $|z| = -iz$, $|k| = ik$ и формулой (3.3).

Заметим, что оценка (3.2) сразу следует из асимптотической формулы (3.1).

§ 4. Доказательство теоремы

Рассмотрим функцию $\tilde{E}_x(\eta)$, определенную формулой (1.14). При фиксированном $x > 0$ эта функция бесконечно дифференцируема по η на множестве $\Omega = \{\eta \in C \times R^{n-1},\ \operatorname{Im} \eta_0 < 0\}$.

Из свойств функции Уиттекера $W_{k,\,1/4}(z)$ (см. [9]) следует, что при фиксированном $\eta' \in R^{n-1}$ она регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im} \eta_0 < 0$ и на лучах $\{\operatorname{Im} \eta_0 = 0,\ \operatorname{Re} \eta_0 \gtrless 0\}$, $\{\operatorname{Im} \eta_0 < 0,\ \operatorname{Re} \eta_0 = 0\}$.

Начнем с „грубой" оценки для функции $\tilde{E}_x(\eta)$ в области Ω. Заметим, что при $\operatorname{Im} \eta_0 < 0$

$$\operatorname{Re}(i\eta_0 x^2) > 0, \tag{4.1}$$

$$\operatorname{Re}\left(k - \frac{1}{4}\right) = \frac{\operatorname{Im} \eta_0}{4} \frac{|\eta_0|^2 + |\eta'|^2}{|\eta_0|^2} - 1 < 0. \tag{4.2}$$

Следовательно, можно воспользоваться леммой 1. Из (1.14) и оценки (2.1) получаем следующее неравенство:

$$|\tilde{E}_x(\eta)| \leqslant \exp\left\{-\operatorname{Im} k \cdot \arg z - \frac{\pi}{2} \operatorname{Im} k \cdot \operatorname{sgn} \operatorname{Im} z \cdot \theta(-\operatorname{Im} k \cdot \operatorname{sgn} \operatorname{Im} z)\right\},$$

где

$$\operatorname{Im} k = -\frac{1}{4} \operatorname{Re} \eta_0 \frac{|\eta_0|^2 - |\eta'|^2}{|\eta_0|^2},\ \operatorname{sgn} \operatorname{Im} z = \operatorname{sgn} \operatorname{Re} \eta_0.$$

Отсюда

$$\operatorname{Im} k \cdot \operatorname{sgn} \operatorname{Im} z = -\frac{1}{4} |\operatorname{Re} \eta_0| \frac{|\eta_0|^2 - |\eta'|^2}{|\eta_0|^2},$$

и

$$|\tilde{E}_x(\eta)| \leqslant \exp\left\{\frac{1}{4}|\mathrm{Re}\,\eta_0|\frac{|\eta_0|^2-|\eta'|^2}{|\eta_0|^2}|\arg\eta_0| + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{2}|\mathrm{Re}\,\eta_0|\frac{|\eta_0|^2-|\eta'|^2}{4|\eta_0|^2}\theta(|\eta_0|^2-|\eta'|^2)\right\} \leqslant e^{\frac{\pi}{4}|\eta_0|}. \tag{4.3}$$

Перейдем к выводу оценок на лучах. Пусть $\mathrm{Im}\,\eta_0=0$, введем следующее разбиение:

$$\overline{\Omega} \cap \{\mathrm{Im}\,\eta_0=0,\ \mathrm{Re}\,\eta_0\neq 0\} = \bigcup_{j=0}^{4}\Omega_j,$$

где

$$\Omega_0 = \{\eta\in(R\setminus 0)\times R^{n-1};\ |\eta|\leqslant r_0\},\ r_0>0,$$

$$\Omega_1 = \{\eta\in(R\setminus 0)\times R^{n-1};\ |\eta|\geqslant r_0,\ \eta_0^2-|\eta'|^2\leqslant 2\pi^{-1}|\eta_0|\ln|\eta|\},$$

$$\Omega_2 = \{\eta\in(R\setminus 0)\times R^{n-1};\ |\eta|\geqslant r_0,\ 2\pi^{-1}|\eta_0|\ln|\eta|\leqslant\eta_0^2-|\eta'|^2\leqslant 2\eta_0^2x^2\},$$

$$\Omega_3 = \{\eta\times(R\setminus 0)\times R^{n-1};\ |\eta|\geqslant r_0,\ \eta_0^2-|\eta'|^2\geqslant 2\pi^{-1}|\eta_0|\ln|\eta|,$$

$$\eta_0^2-|\eta'|^2\geqslant|2\eta_0^2x^2|\},$$

$$\Omega_4 = \{\eta\in(R\setminus 0)\times R^{n-1};\ |\eta|\geqslant r_0,\ \eta_0^2-|\eta'|^2\geqslant 2\pi^{-1}|\eta_0|\ln|\eta|,$$

$$2\eta_0^2x^2\leqslant\eta_0^2-|\eta'|^2\leqslant|2\eta_0^2x^2|\}.$$

Из оценки (1.17) сразу следует, что для $\eta\in\Omega_0$

$$|\tilde{E}_x(\eta)|\leqslant \mathrm{const}. \tag{4.4}$$

1) Пусть $\eta\in\Omega_1$. Из (1.14) получаем

$$|\tilde{E}_x(\eta)| = \frac{|\Gamma(3/4-k)|}{\sqrt{\pi}\,|\eta_0x^2|^{1/4}}|W_{k,\frac{1}{4}}(i\eta_0x^2)|.$$

Заметим, что из соотношений (4.1) и (4.2) следует выполнение условий леммы 1. Поэтому из оценки (2.1) получаем следующую:

$$|\tilde{E}_x(\eta)|\leqslant\exp\left\{-\mathrm{Im}\,k\cdot\arg z-\frac{\pi}{2}\mathrm{Im}\,k\cdot\mathrm{sgn}\,\mathrm{Im}\,z\cdot\theta(-\mathrm{Im}\,k\cdot\mathrm{sgn}\,\mathrm{Im}\,z)\right\}=$$

$$=\exp\left\{\frac{\pi}{8}\frac{\eta_0^2-|\eta'|^2}{|\eta_0|}+\frac{\pi}{8}\frac{\eta_0^2-|\eta'|^2}{|\eta_0|}\theta(\eta_0^2-|\eta'|^2)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\max\left(\exp\frac{\pi}{4}\frac{\eta_0^2-|\eta'|^2}{|\eta_0|},\ 1\right).$$

Но поскольку $\eta\in\Omega_1$, отсюда следует оценка

$$|\tilde{E}_x(\eta)|\leqslant|\eta|^{1/2}. \tag{4.5}$$

2) Рассмотрим теперь область Ω_2. Из (1.14) и леммы 2 получаем оценку

$$|\tilde{E}_x(\eta)|\leqslant\mathrm{const}\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}+k\right)\right|\cdot|z|^{1/2}\cdot$$

$$\cdot\left(e^{\pi|k|}+|k|^{-2m}e^{\frac{\pi|k|}{2}}\right).$$

Как известно

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}+k\right)=\frac{\pi}{\sin\pi\left(k+\frac{1}{4}\right)}=\frac{2\pi i}{e^{i\pi\left(k+\frac{1}{4}\right)}-e^{-i\pi\left(k+\frac{1}{4}\right)}}.$$

Отсюда

$$\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}+k\right)\right|\leqslant 2\pi e^{-\pi|k|}. \tag{4.6}$$

Получаем оценку

$$|\tilde{E}_x(\eta_1)|\leqslant \text{const}\,|\eta_0 x^2|^{\frac{1}{2}}\left(1+|k|^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi|k|}{2}}\right).$$

Для $\eta_1\in\Omega_2$

$$|k|\geqslant\frac{1}{2\pi}\ln|\eta_1|\geqslant\frac{1}{2\pi}\ln r_0.$$

Следовательно

$$|\tilde{E}_x(\eta)|\leqslant \text{const}\cdot x\cdot|\eta_0|^{1/2}. \tag{4.7}$$

3) Рассмотрим область Ω_3. В этой области выполнены условия леммы 3, из которой следует оценка

$$|\tilde{E}_x(\eta_1)|\leqslant\text{const}\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+k\right)\right|e^{\pi|k|}(1+|k|^{1/2}).$$

Для $\eta\in\Omega_3$, $\eta_0^2-|\eta'|^2>0$, поэтому

$$|k|=\frac{\eta_0^2-|\eta'_1|^2}{4|\eta_0|}\leqslant\frac{1}{4}|\eta_0|.$$

Отсюда, воспользовавшись (4.6), получаем

$$|\tilde{E}_x(\eta_1)|\leqslant\text{const}\,|\eta_0|^{1/2}. \tag{4.8}$$

4) И, наконец, рассмотрим область Ω_4. В этой области выполнены условия леммы 4. В силу следствия из этой леммы и оценки (4.16), имеем

$$|\tilde{E}_x(\eta_1)|\leqslant\text{const}\,\frac{|k|^{1/4}}{(4|k|+|z|)^{1/4}}\leqslant\text{const}. \tag{4.9}$$

Объединяя оценки (4.4), (4.5), (4.7), (4.8) и (4.9), получаем

$$|\tilde{E}_x(\eta)|\leqslant\text{const}\,(1+x)(1+|\eta|^{1/2}). \tag{4.10}$$

Наша следующая цель — оценить производные функции $\tilde{E}_x(\eta)$ по x. Найдем вначале $\frac{d\tilde{E}_x}{dx}(\eta)|_{x=0}$. Из (1.14) и (1.11) имеем

$$\tilde{E}_x(\eta)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)}{\sqrt{\pi}z^{1/4}}\left(\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-k\right)}M_{k,\frac{1}{4}}(z)+\right.$$

$$+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)}M_{k,-\frac{1}{4}}(z)\Bigg).$$

Известны (см. [9]) следующие асимптотики:

$$M_{k,\frac{1}{4}}(z)=z^{\frac{3}{4}}e^{-\frac{z}{2}}(1+O(z)),\ z\to 0,$$

$$M_{k,-\frac{1}{4}}(z)=z^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{z}{2}}(1+O(z)),\ z\to 0,$$

из которых следует асимптотическая формула

$$\tilde{E}_x(\eta)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}-k\right)}(i\eta_0)^{1/2}e^{-i\frac{\eta_0 x^2}{2}}x(1+O(\eta_0 x^2))+$$

$$+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}e^{-i\frac{\eta_0 x^2}{2}}(1+O(\eta_0 x^2)).$$

Отсюда

$$\left.\frac{d\tilde{E}_x(\eta)}{dx}\right|_{x=0}=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}-k\right)}(i\eta_0)^{1/2}=$$

$$=-2(i\eta_0)^{1/2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-k\right)}. \tag{4.11}$$

Воспользуемся теперь асимптотической оценкой (см. [9]):

$$\lg\Gamma(z+a)=\left(z+a-\frac{1}{2}\right)\lg z-z+\frac{1}{2}\ln 2\pi+$$

$$+O(z^{-\frac{1}{2}}),\ |z|\to\infty,$$

имеющей место при условии $|\arg z|\leqslant\pi-\delta$. Из этой оценки следует, что

$$\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-k\right)}=\exp\left[\lg\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)-\lg\Gamma\left(\frac{1}{4}-k\right)\right]=$$

$$=\exp\left[\frac{1}{2}\lg(-k)+O(k^{-\frac{1}{2}})\right],\ |k|\to\infty.$$

Поэтому верно неравенство

$$\left|\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-k\right)}\right| \leqslant \text{const}\,|k|^{1/2}. \tag{4.12}$$

Из (4.11) и (4.12) получаем оценку

$$\left|\frac{d\tilde{E}_x(\tau_1)}{dx}\Big|_{x=0}\right| \leqslant \text{const}\,|\tau_0|^{1/2}|k|^{1/2} \leqslant \text{const}\,|\tau_0^2 - |\eta'|^2|^{1/2} \leqslant \text{const}\,|\eta|.$$

С другой стороны

$$\frac{d\tilde{E}_x(\tau_1)}{dx} = \frac{d\tilde{E}_x(\tau_1)}{dx}\Big|_{x=0} + \int_0^x \frac{d^2E_x(\eta)}{dx^2}\,dx =$$

$$= \frac{d\tilde{E}_x(\tau_1)}{dx}\Big|_{x=0} - \int_0^x [(1+x^2)\tau_0^2 - |\eta'|^2]\,\tilde{E}_x(\eta)\,dx.$$

Следовательно

$$\left|\frac{d\tilde{E}_x(\eta)}{dx}\right| \leqslant \text{const}\,|\eta| + C(x)\,|\eta|^2\,|\tilde{E}_x(\eta)| \leqslant C(x)\,(1+|\eta|^{5/2}). \tag{4.13}$$

Воспользовавшись уравнением (1.8) и оценками (4.10), (4.13), получаем оценки полиномиального роста по η для $\dfrac{d^j\tilde{E}_x(\eta)}{dx^j}$, $j \geqslant 2$. Из этих оценок следует, что для фиксированного x и для любого $j \geqslant 0$

$$\frac{d^j\tilde{E}_x(\eta)}{dx^j} \in S'(R^n).$$

Поэтому существует распределениезначная функция $E_x \in C^\infty(\overline{R^+}, S'(R^n))$, преобразование Фурье которой есть $\tilde{E}_x(\eta)$.

Далее из (1.8) и (1.9) следует, что E удовлетворяет уравнению (1.6) и граничному условию (1.7).

Осталось показать, что E_x обращается в ноль при $y_0 < 0$. При фиксированных x и η' функция $\tau_0 \to \tilde{E}_x(\tau)$ аналитична в $\{\tau_0 \in C;\ \operatorname{Im}\tau_0 \leqslant 0,\ \tau_0 \neq 0\}$. Рассмотрим квадранты $\{\tau_0 \in C;\ \operatorname{Im}\tau_0 < 0,\ \operatorname{Re}\tau_0 \gtrless 0\}$. Как было показано выше, на лучах $\{\tau_0 \in C;\ \operatorname{Im}\tau_0 = 0,\ \operatorname{Re}\tau_0 \gtrless 0\}$ верна оценка (4.10). Заметим, что из леммы 1 следует оценка

$$|\tilde{E}_x(\eta)| \leqslant 1 \tag{4,14}$$

на отрицательной мнимой τ_0—оси. Из (4.3) и этих оценок, применяя теорему Фрагмена—Линделёфа, показываем, что в полуплоскости $\operatorname{Im}\tau_0 \leqslant 0$ верна оценка

$$|\tilde{E}_x(\eta)| \leqslant \text{const}\,(1+|\eta|^{1/2}). \tag{4.15}$$

Для завершения доказательства остается применить теорему Пэли—Винера—Шварца.

Межвузовский научный центр
по прикладным проблемам математики ЕГУ

Поступила 1.III.1991

Ռ. Գ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. Ոչ խիստ գոգավոր եզրով մոդելային խառը խնդրի ֆունդամենտալ լուծումը *(ամփոփում)*.

Հոգվածում ստացված է $\{t>0,\ x>0,\ y\in R^{n-1}\}$ *տարածության քառորդում*

$$(1+x^2)\,u_{tt}-u_{xx}-\sum_{j=1}^{n-1}u_{y_jy_j}=0$$

*մոդելային հավասարման համար Դիրիխլեի եզրային պայմանով խառը խնդրի ֆունդամենտալ լուծումը։ Այն գրվում է Ուիտտեկերի վերասերված հիպեր-երկրաչափական ֆունկցիայի միջոցով։ Ապացույցումը հիմնված է Ուիտտեկերի ֆունկցիայի համար հավասարաչափ ասիմպտոտիկ գնահատականների դուրս բերման վրա։

R. G. AIRAPETYAN. *Fundamental solution of the model mixed problem with non strictly concave by bicharacteristics boundary* (summary)

In the paper the fundamental solution of the mixed problem with Dirichlet boundary condition in quarter space $\{t>0,\ x>0,\ y\in R^{n-1}\}$ for the equation

$$(1+x^2)\,u_{tt}-u_{xx}-\sum_{j=1}^{n-1}u_{y_jy_j}=0$$

is obtained. It is written by means of Whittaker confluent hypergeometric function. The proof is based on the conclusion of the uniform asymptotic estimates for the Whittaker function.

ЛИТЕРАТУРА

1. *F. G. Friedlander.* The wave front set of the solution of a simple initial-boundary value problem with glancing rays, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 79, № 1, 1976, 145—159.
2. *F. G. Friedlander, R. B. Melrose.* The wave front set of the solution of a simple initial-boundary value problem with glancing rays. II, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 81, № 1, 1977, 97—120.
3. *R. B. Melrose.* Microlocal parametrices for diffractive boundary value problems, Duke Math. J., 42, 1975, 605—635.
4. *R. B. Melrose.* Local Fourier—Airy integral operators, Duke Math. J., 42, 1975, 583—604.
5. *R. B. Melrose.* Airy operators, Comm. Part. Diff. Eq., 3, № 1, 1978, 1—76.
6. *G. Eskin.* Parametrix and propagation of singularities for the interior mixed problem, J. Analyse Math., 32, 1977, 17—62.
7. *G. Eskin.* Initial boundary value problem for second order hyperbolic equations with general boundary conditions, J. Analyse Math., 40, 1981, 43—89.
8. *K. Kubota.* Microlocal parametrices and propagation of singularities near gliding points for hyperbolic mixed problems, I. Hokk. Math. J., 15, № 2, 1986, 243—303.
9. *Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон.* Курс современного анализа, т. 2, Трансцендентные функции, М., «Физ-мат. изд.», 1963.

10. *Э. Камке.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1976.
11. *Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин.* Лекции по теории функций комплексного переменного, М., «Наука», 1982.
12. *М. В. Федорюк.* Метод перевала, М., «Наука», 1977.
13. *Л. Хермандер.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3, Псевдодифференциальные операторы, М., «Наука», 1987.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 4, 1991 Математика

А. А. ВАГАРШАКЯН

О ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА

Из хорошо известного принципа максимума следует, что если $u(z)$ — субгармоническая в ограниченном открытом множестве Ω функция и

$$\overline{\lim_{z\in\Omega,\ z\to\zeta}} u(z) \leqslant 0 \tag{1}$$

для любой граничной точки $\zeta \in \partial\Omega$, то $u(z) \leqslant 0$ всюду в Ω.

В данной статье обсуждается следующий вопрос: можно ли, при дополнительных ограничениях на рост функции $u(z)$ вблизи границы Ω, ослабить условие (1) во всех граничных точках так, чтобы принцип максимума оставался верным?

Теорема 1. *Пусть $u(z)$ — гармоническая в единичном круге функция, удовлетворяющая условию*

$$u(z) \leqslant \exp\left\{\exp\left\{\frac{A}{(1-|z|)^{\alpha}}\right\}\right\},\ |z|<1, \tag{2}$$

где α, $0<\alpha<1$ — некоторое число. Если существует число $\varepsilon>0$ такое, что для любой граничной точки ζ, $|\zeta|=1$, имеет место неравенство

$$\lim_{r\to 1-0} \max\{u(r\xi);\ |\xi|=1,\ |\xi-\zeta|\leqslant\varepsilon\} \leqslant 0,$$

то всюду в единичном круге $u(z)\leqslant 0$.

Доказательство. Пусть $r=re^{i\chi}$ — некоторая точка единичного круга и $r<\rho<1$. Тогда имеет место представление

$$u(z)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-r^2}{|re^{i\chi}-\rho e^{it}|^2}u^-(\rho e^{it})\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-r^2}{|\rho e^{it}-re^{i\chi}|^2}u^+(\rho e^{it})\,dt.$$

Следовательно

$$0\leqslant u(z)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-r^2}{|\rho e^{it}-re^{i\chi}|^2}u^-(\rho e^{it})\,dt\leqslant u(z)+\frac{\rho+r}{\rho-r}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u^-(\rho e^{it})\,dt=$$

$$=u(z)+\frac{\rho+r}{\rho-r}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u^+(\rho e^{it})\,dt-u(0)\right)\leqslant u(z)+$$

$$+\frac{\rho+r}{\rho-r}\left(\exp\left\{\exp\left\{\frac{A}{(1-\rho)^{\alpha}}\right\}\right\}-u(0)\right).$$

Выбирая $\rho=\dfrac{1+r}{2}$ получаем оценку типа (2) снизу для $u(z)$. Окончательно приходим к выводу, что имеет место неравенство

$$|u(z)| \leqslant \exp\left\{\exp\left\{\frac{A_1}{(1-|z|)^{\alpha}}\right\}\right\}, \quad |z| < 1.$$

Гармоническую функцию $u(z)$ можно представить в виде ряда

$$u(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{inx}, \quad z = re^{ix},$$

где коэффициенты a_n допускают оценку

$$|a_n| \leqslant r^{-|n|} \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |u(re^{ix})|, \quad 0 < r < 1.$$

Следовательно

$$\log |a_n| < |n|(1-r) + \exp\left\{\frac{A_1}{(1-r)^{\alpha}}\right\}.$$

Выбирая число r равным

$$1 - \left(\frac{1}{A_1} \log \frac{|n|}{\log^{1/\alpha}|n|}\right)^{-\frac{1}{\alpha}},$$

получаем оценку

$$\log |a_n| \leqslant B \frac{|n|}{\log^{1/\alpha}|n|}, \quad |n| > 2.$$

Фиксируем некоторое число $\delta > 0$. Пусть $\varphi_\delta(x)$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ — неотрицательная, бесконечно дифференцируемая функция с носителем в интеграле $[-\delta, \delta]$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_\delta(x)\, dx = 1$$

и ее коэффициенты Фурье $\hat{\varphi}_{\delta, n}$ допускают оценку

$$|\hat{\varphi}_{\delta, n}| \leqslant C \exp\left\{-2B \frac{|n|}{\log^{1/\alpha}|n|}\right\}, \quad |n| > 1.$$

Такая функция существует, так как $0 < \alpha < 1$, см. [1]. Заметим, что для любого $\delta > 0$ сходится ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| |\hat{\varphi}_{\delta, n}| < \infty.$$

Введем функцию

$$g_\delta(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(ze^{-ix}) \varphi_\delta(x)\, dx.$$

Эта функция гармоническая в единичном круге и допускает непрерывное продолжение вплоть до границы единичного круга. Из условия теоремы и в силу принципа максимума, при достаточно малом $\delta > 0$ имеет место неравенство $g_\delta(z) \leqslant 0$, $z \in D$. Устремляя δ к нулю, получаем $u(z) \leqslant 0$, при $z \in D$.

Естественно возникает вопрос: можно ли ослабить условие (2) в теореме 1? Ответ на этот вопрос содержится в теореме 2.

Теорема 2. *Пусть $\varepsilon > 0$ — некоторое число. Существует аналитическая в правой полуплоскости функция $f(z)$, которая допускает оценку*

$$|f(z)| \leqslant \exp\left\{\exp\left\{\frac{A}{(\operatorname{Re} z)^{1+\varepsilon}}\right\}\right\}, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

и для любого y, $-\infty < y < \infty$, имеет место неравенство

$$\lim_{x \to +0} \max_{|t| < \frac{1}{4}} |f(x + i(t + y))| \leqslant 1,$$

однако $f(z)$ — неограниченная функция.

Доказательство. Обозначим через Ω область

$$\Omega = \left\{z;\ 0 < \operatorname{Re} z < 1,\ \left|\operatorname{Im} z - \sin\frac{1}{(\operatorname{Re} z)^{\sigma}}\right| < \delta\right\},$$

где $0 < \sigma$, $0 < \delta < \frac{1}{4}$. Пусть $\varphi(z)$ конформно и однолистно отображает область Ω на полуполосу

$$\left\{z;\ 1 < \operatorname{Re} z,\ |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}\right\},$$

причем часть границы $\partial\Omega \cap \{z;\ \operatorname{Re} z = 1\}$ области Ω переходит в отрезок $\left\{1 + iy,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant y < \frac{\pi}{2}\right\}$.

В силу теоремы Варшавского, см. [2], стр. 233, имеем

$$\operatorname{Re}\varphi(x + iy) = C + \frac{\pi}{2\delta}\int_x^1 \left(1 + \sigma^2 \frac{\cos^2(x^{-\sigma})}{x^{2+2\sigma}}\right) dx + o(1), \quad x \to +0.$$

Следовательно

$$\frac{C_1}{x^{1+2\sigma}} \leqslant \operatorname{Re}\varphi(x + iy) < \frac{C_2}{x^{1+2\sigma}}, \quad x \to +0.$$

Введем функцию

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega \cap \{z;\ \operatorname{Re} z > 0\}} \frac{e^{e^{\varphi(\zeta)}}}{(\zeta - z)\,\varphi^2(\zeta)}\, d\zeta,$$

где $z \overline{\in} \overline{\Omega}$ и $\operatorname{Re} z > 0$. Заметим, что для любого $0 < x_0 < 1$ функцию $f(z)$ вне области $\overline{\Omega}$ можно представить в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_{x_0} \cap \{z;\ \operatorname{Re} z > 0\}} \frac{e^{e^{\varphi(\zeta)}}}{(\zeta - z)\,\varphi^2(\zeta)}\, d\zeta, \tag{3}$$

где $\Omega_{x_0} = \{z;\ z \in \Omega,\ 0 < \operatorname{Re} z < x_0\}$. Следовательно, $f(z)$ — аналитическая функция в правой полуплоскости. Выбирая $2x_0 = \operatorname{Re} z$ в формуле (3), получим

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial\Omega_{x_0}\cap\{z;\ 0<\operatorname{Re} z<x_0\}} \frac{|e^{e^{\varphi(\zeta)}}|}{|\zeta - z|\,|\varphi(\zeta)|^2}\,d\zeta| + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial\Omega_{x_0}\cap\{z;\ \operatorname{Re} z=x_0\}} \frac{e^{e^{\operatorname{Re}\varphi(\zeta)}}}{|\zeta - z|\,|\varphi(\zeta)|^2}\,|d\zeta| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi \operatorname{Re} z} \int\limits_{\partial\Omega_{x_0}\cap\{z;\ 0<\operatorname{Re} z<x_0\}} \frac{|d\zeta|}{|\varphi(\zeta)|^2} + \frac{2\delta}{c_1\pi}(\operatorname{Re} z)^{1+\sigma} e^{\frac{c}{(\operatorname{Re} z)^{1+2\sigma}}} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\exp\left\{\frac{A}{(\operatorname{Re} z)^{1+2\sigma}}\right\}\right\},$$

где $0 < \operatorname{Re} z < 1$. Теперь оценим $f(z)$ на множестве

$$\Omega_0 = \left\{z;\ \operatorname{Re} z > 0,\ \left|\operatorname{Im} z - \sin\frac{1}{(\operatorname{Re} z)^\sigma}\right| \geqslant 2\delta\right\}.$$

Имеем, при $\operatorname{Im} z > 0$, неравенство

$$|f(z)| \leqslant \frac{27}{2\pi} \int\limits_{\partial\Omega\cap\{z;\ \operatorname{Re} z>0\}} \frac{1}{|\zeta - z|\,|\varphi(\zeta)|^3}\,|d\zeta| \leqslant$$

$$\leqslant A \int\limits_0^\infty \frac{x^{1+\sigma}\,dx}{[(\operatorname{Re} z - x)^2 + (\operatorname{Im} z - \delta - \sin(x^{-\sigma}))^2]^{1/2}} \leqslant$$

$$\leqslant A \int\limits_0^1 \frac{x^{1+\sigma}}{|\operatorname{Re} z - x| + (\operatorname{Re} z)^{1+\sigma}}\,dx \leqslant M < \infty,\quad 0 < \operatorname{Re} z < 1.$$

Пусть Δ — некоторая дуга, лежащая на единичной окружности ∂D. Обозначим через Δ^* новую дугу, которая получается из Δ в результате присоединения к ней с обеих сторон дуг, длины которых равны длине дуги Δ.

Лемма. *Пусть Δ_k, $k = 1, 2, \cdots$ — дуги, покрывающие единичную окружность ∂D, причем кратность покрытия не превосходит 2. Тогда существуют функции $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z), \cdots$, удовлетворяющие условиям*

1. *для любого $z \in \partial D$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z) \equiv 1;$$

2. *$\varphi_k(z)$ — неотрицательные, кусочно гладкие, непрерывные функции;*

3. *для всех $z \in \partial D$, кроме конечного числа точек, имеет место оценка*

$$|\varphi_k'(z)| < \frac{65}{|\Delta_k|},$$

где $|\Delta_k|$ — длина дуги Δ_k;

4. $\operatorname{supp} \varphi_k \subseteq \Delta_k^*$.

Доказательство. Не теряя общности можно предположить, что

$$|\Delta_1| \geqslant |\Delta_2| \geqslant \cdots.$$

в качестве $\gamma_1(e^{ix})$ выбираем функцию, которая непрерывна на ∂D, равна единице на Δ_1, вне интервала Δ_1^* тождественно обращается в нуль, а в двух смежных с Δ_1 интервалах, лежащих в Δ_1^*, она линейная по x.

Предположим, что уже построены функции $\varphi_1(z), \cdots, \varphi_{n-1}(z)$, удовлетворяющие условиям:

1. для любого $z \in \bigcup_{k=1}^{n-1} \Delta_k$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varphi_k(z) = 1;$$

2. $\varphi_k(z)$ — неотрицательная, кусочно гладкая, непрерывная функция и

$$\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(z) \leqslant 1,$$

при $z \in \partial D$.

3. для всех $z \in \partial D$, кроме конечного числа точек, имеет место оценка

$$|\varphi_k'(z)| \leqslant \frac{65}{|\Delta_k|};$$

4. $\operatorname{supp} \varphi_k \subseteq \Delta_k^*$, $k = 1, 2, \cdots, n-1$.

Пусть $z \in \partial D \setminus \Delta_n$. Обозначим через $\Delta_n(z)$ дугу ∂D, которая лежит между точкой z и интервалом Δ_n, причем имеет наименьшую длину. Сначала определим вспомогательную функцию $\psi_n(z)$. На дуге Δ_n положим

$$\psi_n(z) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_k(z), \quad z \in \Delta_n.$$

Вне интервала Δ_n она определяется формулой

$$\psi_n(z) = \max\left\{c;\ c + \frac{|z-\zeta|}{|\Delta_n|} \leqslant 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_k(\zeta),\ \text{при } \zeta \in \Delta_n(z)\right\},$$

где $z \in \partial D \setminus \Delta_n$. Наконец, положим

$$\varphi_n(z) = \max\{0,\ \psi_n(z)\}.$$

Заметим, что семейство функций $\varphi_1(z), \cdots, \varphi_{n-1}(z)$ удовлетворяет условиям 1—4, с заменой $n-1$ на n. Действительно, первый и второй пункты этих условий непосредственно следует из определения функции $\varphi_n(z)$. Четвертый пункт следует из того, что производные функций $\psi_n(e^{ix})$ на каждом из смежных с Δ_n интервалах сохраняют знак и по модулю не меньше, чем $\frac{1}{|\Delta_n|}$.

Теперь перейдем к оценке производной функции $\varphi_n(e^{ix})$. Из вышеприведенной конструкции следует, что в каждой точке $z \in \partial D$ функция $\varphi_n(z)$ или равна

$$1 - \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_k(z)$$

или ее производная по модулю равна $\frac{1}{|\Delta_n|}$ или 0. Пусть $z \in \Delta_n^*$. Для любого $\delta > 0$ количество тех интервалов Δ_j, длины которых удовлетворяют неравенствам $\delta \leqslant |\Delta_j| \leqslant 2\delta$ и $z \in \Delta_j^*$, не превосходит 16, так как кратность покрытия ∂D семейством $|\Delta_k|_{k=1}^{\infty}$ не превосходит 2. Обозначим через $|\Delta_n| \leqslant |\Delta_{n_1}| \leqslant \cdots \leqslant |\Delta_{n_m}|$ те интервалы, для которых $z \in \Delta_{n_k}^*$. Тогда имеем

$$\left|\frac{d\varphi_n(e^{ix})}{dx}\right| \leqslant \frac{1}{|\Delta_n|} + \sum_{k=1}^{n-1} \left|\frac{d\varphi_k(e^{ix})}{dx}\right| \leqslant \frac{1}{|\Delta_n|} + \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{|\Delta_{n_k}|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\Delta_n|} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{2^j|\Delta_n| < |\Delta_{n_k}| < 2^{j+1}|\Delta_n|} \frac{k}{|\Delta_{n_k}|} \right) \leqslant \frac{1}{|\Delta_n|} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{16j}{2^j|\Delta_n|} \leqslant \frac{65}{|\Delta_n|}.$$

Теорема 3. *Пусть $u(z)$ — гармоническая в единичном круге функция и сходится интеграл*

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} |u(re^{ix})| (1-r)^{-\alpha}\, dr\, dx < \infty,$$

где $0 < \alpha < 1$. Предположим, что $C(r)$, $0 \leqslant r < 1$ — положительна и монотонно возрастая, стремится к бесконечности при $r \to 1-0$.

Если для любой граничной точки $\zeta \in \partial D$ имеет место неравенство

$$\overline{\lim_{r \to 1-0}} \max \{u(re^{ix}); |e^{ix} - \zeta| \leqslant C(r)(1-r)^{\alpha/2}\} \leqslant 0,$$

то $u(z) \leqslant 0$ всюду в D.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $0 < r_0 < 1$ — некоторые числа. Для любой граничной точки $\zeta \in \partial D$ существует число $r = r(\zeta, \varepsilon)$ $r_0 < r < 1$ такое, что $u(re^{ix}) \leqslant \varepsilon$, при $e^{ix} \in \Delta_\zeta$, где

$$\Delta_\zeta = \left\{ e^{ix};\ |e^{ix} - \zeta| \leqslant \frac{C(r)}{3} (1-r)^{\alpha/2} \right\}.$$

В силу леммы Л. Альфорса, см. [3], можно выделить интервалы

$$\Delta_{\zeta_1},\ \Delta_{\zeta_2}, \cdots \tag{4}$$

которые покрывают ∂D, причем кратность покрытия не превосходит двух. Пусть

$$\varphi_1(z),\ \varphi_2(z), \cdots$$

— функции, соответствующие свойству (4), существование которых установлено в лемме.

Пусть z_0 — некоторая фиксированная точка в единичном круге. Введем функции

$$\psi_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{ix}-z|^2}\left(\frac{1-|z_0|^2}{|e^{ix}-z_0|^2}\varphi_n(e^{ix})\right)dx, \quad |z|<1.$$

Тогда имеем

$$u(z_0) = \lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z_0|^2}{|e^{it}-z_0|^2}u(re^{it})\,dt =$$

$$= \lim_{r\to 1-0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(re^{it})-u(rr_k e^{it})]\frac{1-|z_0|^2}{|e^{it}-z_0|^2}\varphi_k(e^{it})\,dt +$$

$$+\lim_{r\to 1-0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(rr_k e^{it})\varphi_k(e^{it})\frac{1-|z_0|^2}{|e^{it}-z_0|^2}\,dt =$$

$$= \lim_{r\to 1-0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(re^{it})-u(rr_k e^{it})]\frac{1-|z_0|^2}{|e^{it}-z_0|^2}\varphi_k(e^{it})\,dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r_k e^{it})\varphi_k(e^{it})\frac{1-|z_0|^2}{|e^{it}-z_0|^2}\,dt,$$

где $r_k = r(\zeta_k, \varepsilon)$. Мы знаем, что $u(r_k e^{ix}) < \varepsilon$, при $e^{ix}\in \Delta^{\bullet}_{\zeta_k}$ и $\operatorname{supp}\varphi_k \leqslant \Delta^{\bullet}_{\zeta_k}$, поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r_k e^{ix})\varphi_k(e^{ix})\frac{1-|z_0|^2}{|e^{ix}-z_0|^2}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z_0|^2}{|e^{ix}-z_0|^2}\varphi_k(e^{ix})\,dx \leqslant \varepsilon.$$

Теперь оценим интеграл

$$J_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(re^{it})-u(rr_k e^{it})]\frac{1-|z_0|^2}{|e^{it}-z_0|^2}\varphi_k(e^{it})\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{it})\frac{1-|z_0|^2}{|e^{it}-z_0|^2}\varphi_k(e^{it})\,dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r_k^2}{|e^{ix}-r_k e^{it}|^2}u(re^{ix})\,dx\right)\frac{1-|z_0|^2}{|e^{it}-z_0|^2}\varphi_k(e^{it}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z_0|^2}{|e^{ix}-z_0|^2}u(re^{ix})\varphi_k(e^{ix})\,dx -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{ix})\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r_k^2)(1-|z_0|^2)}{|e^{ix}-r_k e^{it}|^2|e^{it}-z_0|^2}\,\varphi_k(e^{it})\,dt\right)dx =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{ix})\,[\psi_k(e^{ix})-\psi_k(r_k e^{ix})]\,dx.$$

Мы знаем, что $\operatorname{supp}\varphi_k \subseteq \Delta_k^* = \Delta_{z_k}^*$ и $|\varphi_k'(z)| \leqslant 65\,|\Delta_k|^{-1} = \dfrac{65}{|\Delta_{z_k}|}$. Поэтому

$$|\operatorname{grad}\psi_k(z)| \leqslant \frac{c}{|\Delta_k|},\quad |z| < 1.$$

Отсюда получаем

$$|\psi_k(e^{ix})-\psi_k(r_k e^{ix})| \leqslant c\,\frac{1-r_k}{|\Delta_k|}.$$

Тогда функция $g_k(x)=\psi_k(e^{ix})-\psi_k(r_k e^{ix})$ допускает оценки

$$|g_k(x)-g_k(|y|)| \leqslant |\psi_k(e^{ix})-\psi_k(r_k e^{ix})|+|\psi_k(e^{iy})-\psi(r_k e^{iy})| \leqslant 2c\,\frac{1-r_k}{|\Delta_k|}.$$

С другой стороны, имеем

$$|g_k(x)-g_k(y)| \leqslant |\psi_k(e^{ix})-\psi_k(e^{iy})|+|\psi_k(r_k e^{ix})-\psi_k(r_k e^{iy})| \leqslant 2c\,\frac{|x-y|}{|\Delta_k|}.$$

Следовательно

$$|g_k(x)-g_k(y)| \leqslant 2c\,\min\left\{\frac{1-r_k}{|\Delta_k|},\ \frac{|x-y|}{|\Delta_k|}\right\} \leqslant 2c\,\frac{(1-r_k)^\alpha}{|\Delta_k|}\,|x-y|^{1-\alpha}.$$

Окончательно получаем

$$u(z_0) \leqslant \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{ix})\,g_k(e^{ix})\,dx.$$

Из условия теоремы следует, что число r, $0<r<1$, можно выбрать настолько близким к единице, что

$$\sup_x |g_k(x)| + \sup_{x,y}\frac{|g_k(x)-g_k(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}} \leqslant \varepsilon\,|\Delta_k|.$$

Поэтому для функции $g(x)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ имеем

$$\sup|g(x)| + \sup\frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}} \leqslant 4\pi\varepsilon.$$

Введем обозначения

$$u(re^{ix}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n r^{|n|} e^{inx},\quad g(re^{ix}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_k r^{|n|} e^{inx},$$

где g_k — коэффициенты Фурье функции $g(x)$. Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{ix})\,\frac{\partial g(\rho e^{ix})}{\partial\rho}\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|\,u_n\,g_{-n}\,\rho^{2|n|-1},$$

Откуда следует

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{ix})\frac{\partial g(\rho e^{ix})}{\partial \rho}\,d\rho dx = \sum_{n\neq 0} v_n g_{-n} r^{|n|} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{ix})\, g(e^{ix})\,dx - u(0)\,g_0.$$

Следовательно

$$u(z_0) \leqslant \varepsilon + 4\pi\varepsilon + 4\pi|u(0)|\varepsilon + 4\pi\varepsilon\int_0^1\int_0^{2\pi}|u(re^{ix})|(1-r)^{-\alpha}\,drdx.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $u(z_0) \leqslant 0$.

Институт математики АН
Республики Армении

Поступила 12.XII.1990

Ա. Ա. ՎԱՂԱՐՇԱԿՅԱՆ. Մաքսիմումի սկզբունքի մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում ապացուցվում են նոր տիպի թեորեմներ, որոնցում ընդհանրացվում է մաքսիմումի սկզբունքը։

A. A. VAGARSHAKIAN. *On the principle of maximum* (summary)

New theorems generalizing the principle of maximum are prooved in the paper.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Мандельбройт.* Примыкающие ряды, регуляризация последовательностей, применения, ИИЛ, М., 1955.
2. *М. А. Евграфов.* Аналитические функции, Изд. „Наука", М., 1968.
3. *Н. С. Ландкоф.* Основы современной теории потенциала, Изд. „Наука", М., 1966.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 4. 1991 Математика

УДК 517.956

Г. М. АЙРАПЕТЯН

КОРРЕКТНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССЕ L^1

Пусть G — произвольная односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченная кривой Γ типа Ляпунова. Рассмотрим уравнение

$$A_0 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} + A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad z \in G, \tag{1}$$

где A_0, A_1, A_2 — комплексные постоянные, $u(z)$, $z \in G$ — искомая функция, а

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Будем предполагать, что уравнение (1) неправильно-эллиптическое, то есть корни μ_1 и μ_2 характеристического уравнения

$$A_0 + 2A_1\mu = A_2\mu^2 = 0$$

удовлетворяют условиям $|\mu_1| < 1$, $|\mu_2| < 1$, при этом будем предполагать также, что $\mu_1 \neq \mu_2$.

Задачи Дирихле и Неймана, а также общие граничные задачи для правильно-эллиптических уравнений и систем подробно исследованы в работах И. Н. Векуа [1], А. Б. Бицадзе [2], Н. Е. Товмасяна [3], Я. Б. Лопатинского [4], А. И. Волперта [5] и других.

Краевые задачи для равномерно-эллиптических уравнений второго порядка в случае, когда граничные условия следует понимать в среднем квадратичном смысле, рассмотрена в работе В. П. Михайлова [6]. Аналогичные задачи для правильно-эллиптических уравнений и систем, когда граничные условия понимаются в смысле L^1 и C рассмотрены в работах Э. П. Меликсетяна [7], Р. А. Алиханяна [8], Т. Ш. Мадатяна [9] и автора [10].

Краевые задачи для неправильно-эллиптических уравнений и системы своим характером и методом решения существенно отличаются от краевых задач для правильно-эллиптических уравнений и систем. Например, однородные задачи Дирихле и Неймана для неправильно-эллиптических уравнений (1) в полуплоскости имеют бесконечно много линейно независимых решений (см. [2], [11]).

В работе И. А. Бикчантаева [12] установлено, что если для неправильно-эллиптического уравнения n-ого порядка граничные условия в определенном смысле будут соответствовать корням характеристического уравнения, то такая задача в полуплоскости в классе ограни-

ченных функций будет корректна. Аналогичные задачи в классе функций полиномиального роста исследованы в работе В. В. Асатряна [13].

В работах М. А. Зироян [14], А. А. Закаряна [15], [16] исследованы краевые задачи типа Римана—Гильберта для неправильно-эллиптического уравнения второго и высшего порядков в классах Гельдера в ограниченных областях.

В данной статье исследуется следующая граничная задача типа Римана—Гильберта:

Найти решение уравнения (1) такое, чтобы выполнялись граничные условия

$$\lim_{r\to 1-0}\int_T \left|\operatorname{Re} a_1(t)\frac{\partial u(\omega(rt))}{\partial s} - f_1(\omega(t))\right||dt| = 0,$$
$$\lim_{r\to 1-0}\int_T \left|\operatorname{Re} a_2(t)\frac{\partial u(\omega(rt))}{\partial n} - f_2(\omega(t))\right||dt| = 0, \tag{2}$$

где T — единичная окружность, $\partial/\partial s$ — производная по касательному направлению на T, $\partial/\partial n$ — производная по внешней нормали окружности T, $\omega(z)$ — функция, конформно отображающая единичный круг D^+ на G, $a_1(t)$, $a_2(t)$ — функции из класса Гельдера, $f_1(t)$, $f_2(t)$ — действительные функции из класса $L^1(T)$.

В работе доказывается нетеровость задачи (1)—(2), вычисляется ее индекс.

§ 1. Предварительные леммы и теоремы

1. Образы области G, при отображениях $z+\mu_1\bar{z}$ и $z+\mu_2\bar{z}$ обозначим через Δ_1 и Δ_2 соответственно.

Хорошо известно (см. [2]), что если $u(z)$ — произвольное решение уравнения (1), то его можно представить в виде

$$u(z) = \varphi_1(z+\mu_1 z) + \varphi_2(z+\mu_2 z),\ \varphi_1(0) = 0, \tag{3}$$

где φ_1 и φ_2 — голоморфные функции в областях Δ_1 и Δ_2 соответственно и определяются через функцию $u(z)$ единственным образом.

Положив $\lambda_1(z) = \omega(z) + \mu_1\overline{\omega(z)}$, $\lambda_2(z) = \omega(z) + \mu_2\overline{\omega(z)}$, для любого r, $0 < r < 1$, будем иметь

$$u(\omega(rt)) = \varphi_1(\lambda_1(rt)) + \varphi_2(\lambda_2(rt)),$$
$$\frac{\partial\lambda_j(rt)}{\partial s} = ir(\omega'(rt)t - \mu_j\overline{\omega'(rt)}\,\bar{t})\ (j=1,2),$$
$$\frac{\partial\lambda_j(rt)}{\partial n} = \omega'(rt)t + \mu_j\overline{\omega'(rt)}\,\bar{t}\ (j=1,2),$$
$$\frac{\partial u(\omega(rt))}{\partial s} = \frac{\partial\lambda_1(rt)}{\partial s}\varphi_1'(\lambda_1(rt)) + \frac{\partial\lambda_2(rt)}{\partial s}\varphi_2'(\lambda_2(rt)), \tag{4}$$
$$\frac{\partial u(\omega(rt))}{\partial n} = \frac{\partial\lambda_1(rt)}{\partial n}\varphi_1'(\lambda_1(rt)) + \frac{\partial\lambda_2(rt)}{\partial n}\varphi_2'(\lambda_2(rt)).$$

Далее, обозначив

$$a_{1j}(r,t)=a_1(t)\frac{\partial\lambda_j(rt)}{\partial s},\quad a_{2j}(r,t)=a_2(t)\frac{\partial\lambda_j(rt)}{\partial n},\quad j=1,2, \tag{5}$$

условия (2) можно представить в виде

$$\lim_{r\to 1-0}\left\|\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}(r,t)\,\overline{\varphi}_j(\lambda_j(rt))-g_i(t)\right\|_1=0\quad(i=1,2), \tag{6}$$

где $\overline{\varphi}_j(z)=\varphi_j'(z)$ $(j=1,2)$, $g_i(t)=f_i(\omega(t))$ $(i=1,2)$.

Через $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$ обозначим функции, конформно отображающие единичный круг D^+ на области Δ_1 и Δ_2 соответственно. Далее положив $\widetilde{\varphi}_1(z)=\varphi_1(\omega_1(z))$, $\widetilde{\varphi}_2(z)=\varphi_2(\omega_2(z))$, $\alpha_1(z)=\omega_1^{-1}(\lambda_1(z))$, $\alpha_2(z)=\omega_2^{-1}(\lambda_2(z))$, условия (6) представим в виде

$$\lim_{r\to 1-0}\left\|\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}(r,t)\,\widetilde{\varphi}_j(\alpha_j(rt))-g_i(t)\right\|_1=0,\quad(i=1,2). \tag{7}$$

Лемма 1. *Функция $\alpha_i(z)$ $(i=1,2)$ обладает следующими свойствами:*

а) *взаимно однозначно отображает $\overline{D}^+$ на себя, сохраняя направление на T;*

б) *якобиан отображения отличен от нуля;*

г) *$\alpha_i'(t)$ $(t\in T)$ принадлежит классу Гельдера, $H(\cdot)$;*

д) *для любого $\varepsilon>0$ можно указать $r_0<1$ такое, что, если $r_0<r<1$, то*

$$\|\alpha_i'(rt)-\alpha_i'(t)\|_{H(\lambda)}<\varepsilon$$

для некоторого $\lambda>0$ ($\|\cdot\|_{H(\lambda)}$ — норма в пространстве $H(\lambda)$).

Доказательство. Утверждение а) непосредственно следует из свойств функций $\omega_i(z)$ $(i=1,2)$ и их определения функции $\alpha_i(z)$. Якобиан отображения $z+\mu_i\bar{z}$ равен $1-|\mu_i|^2$, поэтому отличен от нуля. Учитывая, что функции $\omega'(z)$, $\omega_1'(z)$ и $\omega_2'(z)$ непрерывны на $\overline{D}^+$ и не обращаются в нуль, получаем доказательство утверждения б). Утверждения г) и д) также следуют из свойств отображающих функций $\omega(z)$, $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$ (см. [17]).

2. Для произвольного $t\in T$ и $z\in D^+$ положим

$$\overline{K}_i(t,z)=\frac{\alpha_i'(t)}{\alpha_i(t)-\alpha_i(z)}-\frac{1}{t-z}\quad(i=1,2). \tag{8}$$

Имеет место

Лемма 2. *Пусть $t\in T$, $z\in D^+$. Существуют постоянные $C_i(i=1,2)$ такие, что*

$$|\overline{K}_i(t,z)|<C_i\left(\frac{1-|z|^2}{|t-z|^2}+\frac{1}{|t-z|^{\delta}}\right)(i=1,2), \tag{9}$$

где $\delta<1$.

Доказательство. Из (8) имеем

$$\overline{K}_l(t, z) = \frac{\alpha_l'(t)(t-z) - \alpha_l(t) + \alpha(z)}{(\alpha_l(t) - \alpha_l(z))(t-z)}.$$

Полагая $z = \tau r$, где $|\tau| = 1$, числитель этого выражения представим в следующем виде:

$$\alpha_l'(t)(t-\tau) + \alpha_l'(t)(\tau - r\tau) + \alpha_l(\tau) - \alpha_l(t) + \alpha_l(r\tau) - \alpha_l(\tau).$$

Так как

$$\alpha_l'(t)(t-\tau) = -\int_\tau^t \alpha_l'(t)\,du, \quad \alpha_l(\tau) - \alpha_l(t) = \int_t^\tau \alpha_l'(u)\,du,$$

то

$$\alpha_l'(t)(t-z) - \alpha_l(t) + \alpha_l(z) = \alpha_l'(t)(\tau - r\tau) + \alpha_l(r\tau) - \alpha_l(\tau) + \int_t^\tau (\alpha_l'(u) - \alpha_l'(t))\,du. \tag{10}$$

В силу леммы 1 для некоторого $\delta_1 > 0$ имеет место

$$|\alpha_l'(u) - \alpha_l'(t)| < C_1 |u-t|^{\delta_1} \quad (C_1 = \text{const}),$$

поэтому

$$\left|\int_\tau^t (\alpha_l'(u) - \alpha_l'(t))\,du\right| \leqslant \int_t^\tau |\alpha_l'(u) - \alpha_l'(t)|\,|du| < C_2 \int_t^\tau |u-t|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant C_3 |\tau - t|^{1+\delta_1} \leqslant C_4 (1-r)^{1+\delta_1} + |t - r\tau|^{1+\delta_1}),$$

где C_i $(i = 2, 3, 4)$ — некоторые постоянные. Учитывая, что

$$|\alpha_l'(t)(\tau - r\tau)| < \text{const}\,(1-r), \quad |\alpha_l(r\tau) - \alpha_l(\tau)| < \text{const}\,(1-r),$$

из (10) получим

$$|\alpha_l'(t)(t-z) - \alpha_l(t) + \alpha_l(z)| < \text{const}\,(1 - |z| + |t-z|^{1+\delta_1}). \tag{11}$$

Так как согласно лемме 1 якобиан отображения $\alpha(z)$ отличен от нуля, то

$$|\alpha_l(t) - \alpha_l(z)| > \text{const}\,|t-z|. \tag{12}$$

Теперь из (11) и (12) следует оценка (9). Лемма доказана.

3. Введем в рассмотрение операторы

$$(T_l g)(z) = \frac{1}{\pi i} \int_T \overline{K}_l(\tau, z)\, g(\tau)\, d\tau \quad (l = 1, 2), \quad g(\tau) \in L^1(T).$$

Имеет место

Лемма 3. *Для любого $g \in L^1(T)$ функция $(T_l g)(z)$ удовлетворяет условиям:*

а) $$\|(T_l g)(rt)\|_1 \leqslant C \|g\|_1 \quad (0 < r \leqslant 1),$$

где C — постоянная, не зависящая от g и r;

б) *если $(T_l^n g)(t) = (T_l (T_l^{n-1} g))(t)$, $t \in T$, то для некоторого целого n функция $(T^n g)(t)$ принадлежит классу Гельдера.*

г) $\lim\limits_{r\to 1-0} \|(T_l g)(rt) - (T_l g)(t)\|_1 = 0.$

Доказательство. Утверждение а) леммы следует из оценки (9). Так как $\alpha(t)$ принадлежит классу Гельдера, то (см. [18])

$$\left| \frac{\alpha_l'(\tau)}{\alpha_l(\tau) - \alpha_l(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right| \leqslant \frac{C}{|\tau - t|^{\beta}} \quad (\beta < 1),$$

где C не зависит от t и τ. Из этой оценки следует доказательство утверждения б). Для доказательства утверждения г) рассмотрим последовательность функций $g_n(t)$ из класса Гельдера такую, что $\|g_n - g\|_1 \to 0$, при $n \to \infty$. Из определения функции $(T_l g)(z)$ будем иметь

$$\|(T_l g)(rt) - (T_l g)(t)\|_1 \leqslant \|(T_l(g_n - g))(rt)\|_1 + \|(T_l g_n)(rt) - (T_l g_n)(t)\|_1.$$

Из утверждения а) этой леммы следует, что

$$\|(T_l(g_n - g))(rt)\|_1 \leqslant \text{const}\, \|g_n - g\|.$$

Так как фукции $g_n(t)$ из класса Гельдера, то функции $(T_l g_n)(z)$ также из класса Гельдера на $\overline{D^+}$. Поэтому, применяя формулы Сохоцкого—Племеля легко убедиться, что

$$\lim_{r\to 1-0} \|(T_l g_n)(rt) - (T_l g_n)(t)\|_1 = 0.$$

Утверждение д) леммы доказано.

4. Пусть $A(r, t)$, $0 < r \leqslant 1$, $t \in T$, матрица с элементами $a_{ij}(r, t)$ $(i = 1, 2,\ j = 1, 2)$. Так как $\det A(r, t) = 2ir(\mu_2 - \mu_1)\,|\omega'(rt)|^2$, то $\det A(r, t) \neq 0$, для любого r $(0 < r \leqslant 1)$. Положим $\Delta = \det A(1, t)$, $b_{ij}(t) = A_{ij}(t)\,\Delta^{-1}$, где $A_{ij}(t)$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{ij}(1, t)$ в матрице $A(1, t)$. Далее обозначим

$$\psi_j(z) = \psi_j(g_1, g_2, z) = \frac{1}{\pi i}\int_T \frac{b_{1j}(\beta_j(\tau))\, g_1(\beta_j(\tau))}{\tau - z}\, d\tau + \tag{14}$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int_T \frac{b_{2j}(\beta_j(\tau))\, g_2(\beta_j(\tau))}{\tau - z}\, d\tau, \quad j = 1, 2,$$

где $\beta_j(t)$ — функция, обратная к $\alpha_j(t)$ $(j = 1, 2)$.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть* $g_1(t)$, $g_2(t) \in L^1(T)$. *Тогда функции* $\psi_j(z)$ $(j = 1, 2)$ *из* (14) *удовлетворяют граничным условиям*

$$\lim_{r\to 1-0} \left\| \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} a_{lj}(r, t)\, \psi_j(\alpha_j(rt)) - (g_l(t) - g_l^{(1)}(t)) \right\|_1 = 0 \quad (l = 1, 2); \tag{15}$$

где функция $g_l^{(1)}(t)$ $(l = 1, 2)$ *определяется формулой*

$$g_l^{(1)}(t) = G_l(g_1, g_2, t) \equiv \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\pi i}\int_T \frac{a_{lj}(1, \tau) - a_{lj}(1, t)}{\alpha_j(\tau) - \alpha_j(t)}\, b_{kj}(\tau)\, g_k(\tau)\, d\tau + \tag{16}$$

$$+ \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\pi i}\int_T k_j(t, \tau)\, g_l(\tau)\, d\tau - \frac{1}{2\pi}\int_T \frac{g_l(\tau)}{\tau}\, d\tau.$$

Доказательство. Из свойств функции $\omega'(z)$ (см. [17]) следует, что для некоторого $\delta_0 > 0$ имеет место оценка

$$|a_{ij}(r, t) - a_{ij}(1, t)| < \text{const}\,(1 - r)^{\delta_0}.$$

Так как

$$\|\psi_j(\alpha_j(rt))\|_1 \leqslant \text{const}\,\ln(1 - r)^{-1},$$

то

$$\lim_{r \to 1-0} \|(a_{ij}(r, t) - a_{ij}(1, t))\,\psi_j(\alpha_j(rt))\|_1 = 0.$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить, что

$$\lim_{r \to 1-0} \left\| \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} a_{ij}(1, t)\,\psi_j(\alpha_j(rt)) - (g_i(t) - g_i^{(1)}(t)) \right\|_1 = 0.$$

Из определения функции $\psi_j(z)$ имеем

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} a_{ij}(1, t)\,\psi_j(\alpha_j(rt)) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} a_{ij}(1, t) \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\pi i} \int_T \frac{b_{kj}(\tau)\,g_k(\tau)\,\alpha_j'(\tau)}{\alpha_j(\tau) - \alpha_j(rt)}\,d\tau =$$

$$= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\pi i} \int_T \frac{a_{ij}(1, t) - a_{ij}(1, \tau)}{\alpha_j(\tau) - \alpha_j(rt)}\,b_{kj}(\tau)\,g_k(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\pi i} \int_T \frac{a_{ij}(1, \tau)\,b_{kj}(\tau)\,g_k(\tau)\,\alpha_j'(\tau)}{\alpha_j(\tau) - \alpha_j(rt)}\,d\tau. \tag{17}$$

Так как

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij}(1, \tau)\,b_{kj}(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{при } l = k, \\ 0, & \text{при } l \neq k, \end{cases}$$

то из (17) следует

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} a_{ij}(1, t)\,\widetilde{\psi}_j(\alpha_j(rt)) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\pi i} \int_T \frac{a_{ij}(1, t) - a_{ij}(1, \tau)}{\alpha_j(\tau) - \alpha_j(rt)} \times$$

$$\times\, b_{kj}(\tau)\,g_k(\tau)\,d\tau - \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\pi i} \int_T k_j(\tau, rt)\,g_i(\tau) + \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_T \frac{g_i(\tau)}{\tau - rt}\,d\tau =$$

$$= J_1(r, t) - J_2(r, t) + \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_T \frac{g_i(\tau)}{\tau - rt}\,d\tau.$$

Учитывая оценку

$$|a_{ij}(1, \tau) - a_{ij}(1, t)| < \text{const}\,|\tau - t|^{\delta_0} \quad (\delta_0 > 0),$$

для любого r, $0 < r < 1$ будем иметь

$$\left| \frac{a_{i,j}(1, t) - a_{ij}(1, \tau)}{\alpha_j(\tau) - \alpha_j(t)} \right| \leqslant \text{const}\,\frac{1}{|\tau - rt|^{1 - \delta_0}}.$$

Используя формулы Сохоцкого—Племеля и учитывая, что функции $J_1(r, t)$ $(t \in T,\ 0 < r \leqslant 1)$ равномерно ограничено в $L^p(T)$ для некоторого $p > 1$, получим

$$\lim_{r\to 1-0}\left\| J_1(r,t) - \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{\pi i}\int_T \frac{a_{1j}(1,t)-a_{1j}(1,\tau)}{a_j(\tau)-a_j(t)}\, b_{kj}(\tau)\, g_k(\tau)\, d\tau \right\|_1 = 0.$$

Из леммы 3 также имеем

$$\lim_{r\to 1-0}\left\| J_2(r,t) - \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\pi i}\int_T k_j(\tau,t)\, g_j(\tau)\, d\tau \right\|_1 = 0.$$

Теперь, учитывая, что

$$\lim_{r\to 1-0}\left\| \operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_T \frac{g_l(\tau)}{\tau - rt}\, d\tau - g_l(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{g_l(\tau)}{\tau}\, d\tau \right\|_1 = 0,$$

завершаем доказательство теоремы.

5. Пусть $g_1(t), g_2(t) \in L^1(T)$ и функции $g_1^{(1)}(t), g_2^{(1)}(t)$ определяются формулой (16) $g_l^{(1)} = G_l(g_1, g_2, t)$ $(l = 1, 2)$. Аналогично можно определить функции $g_l^{(2)}(t) = G_l(g_1^{(1)}, g_2^{(1)}(t)$ $(l = 1, 2)$ и т. д. Через $g_l^{(n)}(t)$ $(l = 1, 2)$ обозначим функции, полученные на n-ом шагу. Положим $\psi_j^{(k+1)}(z) = \psi_j(g_1^{(k)}, g_2^{(k)}, z)$. Согласно теореме 1

$$\lim_{r\to 1-}\left\| \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2} a_{lj}(r,t)\,\psi_j^{(k)}(\alpha_j(rt)) - (g_l^{(k)}(t) - g_l^{(k+1)}(t)) \right\|_1 = 0\ (l = 1, 2). \tag{19}$$

Применяя оценку (18) и лемму 3 легко установить, что для некоторого целого числа n_0 функции $g_l^{(n_0+1)}(t)$ $(l = 1, 2)$ принадлежат классу Гельдера. Обозначим

$$\tilde{\Psi}_j(z) = \frac{1}{\pi i}\int_T \frac{b_{1j}(\beta_j(\tau))\,\overline{g}_1(\beta_j(\tau))}{\tau - z}\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int_T \frac{b_{2j}(\beta_j(\tau))\,\overline{g}_2(\beta_j(\tau))\, d\tau}{\tau - z}\ (l = 1, 2), \tag{20}$$

где

$$\tilde{g}_l(t) = g_l(t) + g_l^{(1)}(t) + \cdots + g_l^{(n_0)}(t)\ (l = 1, 2). \tag{21}$$

Из теоремы 1 и из (20) непосредственно следует

Теорема 2. *Функция* $\tilde{\psi}_j(z)$ $(j = 1, 2)$ *из* (20) *удовлетворяют граничному условию*

$$\lim_{r\to 1-0}\left\| \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2} a_{lj}(r,t)\,\psi_j(\alpha_j(rt)) - (g_l(t) - g_l^{(n_0+1)}(t)) \right\|_1 = 0\ (l = 1, 2),$$

где $g_l^{(n_0+1)}(t) = G_l(g_1^{(n_0)}, g_2^{(n_0)}, t)$ $(l = 1, 2)$ *принадлежат классу Гельдера.*

§ 2. Задача (1)—(2) с граничными функциями из класса Гельдера

1. Для произвольного $r\ (0<r\leqslant 1)$ через Γ_{kr} обозначим замкнутую кривую в единичном круге D^+, определяемую параметрическим соотношением $z=a_k(rt)$, где t — комплексный параметр, $t\in T$. Функцию, конформно отображающую внутренность кривой $\Gamma_{kr}\ (k=1,2)$ на единичный круг, обозначим через $\omega_{kr}(z)$, $\omega_{kr}(0)=0$, $\omega'_{kr}(0)>0$. Положим

$$\left.\begin{aligned}&\overset{-}{a}_k(r,t)=\omega_{kr}(a(rt))\quad (k=1,2),\\ &\overset{\sim}{\beta}_k(r,t)=\overset{-}{a}_k^{-1}(r,t)\quad (k=1,2),\\ &h_k(r,t,\tau)=\frac{\tilde{a}_k(r,\tau)}{\tilde{a}_k(r,\tau)-\overset{-}{a}_k(r,t)}-\frac{1}{\tau-t},\quad t\in T,\ \tau\in T.\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

Учитывая лемму 1 будем иметь (см. [19])

$$|h_k(r,t,\tau)|<C_1|t-\tau|^{-\mu}\quad(\mu<1),$$

$$h_k(r,t,\tau)-h_k(1,t,\tau)=\tilde{h}_k(r,t,\tau)\,|t-\tau|^{1-\mu}\ (\mu<1),\tag{23}$$

где

$$\lim_{r\to 1-0}\|\tilde{h}_k(r,t,\tau)\|_{H(\mu_1)}=0$$

по обеими переменным $t,\ \tau\in T$ для некоторого $\mu_1>0$.

2. Докажем теорему.

Теорема 3. *Пусть функции $\Phi_j(z)\ (j=1,2)$ удовлетворяют граничному условию* (7). *Если функции $g_k(t)\ (k=1,2)$ из класса Гельдера на T, то функции $\Phi_j(z)$ — из класса Гельдера на $D^+\cup T$.*

Доказательство. В предположении, что функции $\Phi_j(z)\ (j=1,2$ удовлетворяют условию $|\Phi_j(rt)|\ (1-r)|\to 0$, $t\in T$ равномерно при $r\to 1-0$ (эта теорема доказана в работе [9]), положив $\Phi_{jr}(z)=\Phi_j(\omega_{jr}^{-1}(z))$, условия (7) представим в виде

$$\lim_{r\to 1-0}\left|\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}a_{kj}(r,t)\,\Phi_{jr}(\overset{-}{a}_j(r,t))-g_k(t)\right|_1=0\quad(k=1,2),\tag{24}$$

где $\tilde{a}_j(r,t)\ (j=1,2)$ определяются по формуле (22). Обозначив

$$R_k(r,t)=\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}a_{kj}(r,t)\,\Phi_{jr}(\overset{-}{a}_j(r,t))-g_k(t)\ (k=1,2),$$

получим

$$\lim_{r\to 1-0}\|R_k(r,t)\|_1=0\ (k=1,2),\tag{25}$$

$$\sum_{j=1}^{2}a_{kj}(r,t)\,\Phi_{rj}(\overset{-}{a}_j(r,t))+\sum_{j=1}^{2}\overline{a_{kj}(r,t)}\,\overline{\Phi_{jr}(\overset{-}{a}_j(r,t))}=$$

$$=2g_k(t)+2R_k(r,t)\ (k=1,2).$$

Далее пусть $\Phi_{jr}^{+}(z)=\Phi_{jr}(z)$, $z\in D^{+}$ и $\Phi_{jr}^{-}(z)=\overline{\Phi}_{jr}(z^{-1})$, $|z|>1$. Тогда предыдущие равенства примут вид

$$\Phi_{kr}^{+}(\tilde{\alpha}_k(r,t))=\sum_{j=1}^{2} m_{kj}^{(0)}(r,t)\,\Phi_{jr}^{-}(\tilde{\alpha}(r,t))+g_k^{(1)}(r,t)+R_k^{(1)}(r,t))\ (k=1,2), \tag{26}$$

где $m_{kj}^{(0)}(r,t)$ — элементы матрицы $M(r,t)=-(A(r,t))^{-1}\,\overline{A(r,t)}$, а

$$g^{(1)}(r,t)=2\sum_{j=1}^{2} a_{kj}^{*}(r,t)\,g_j(t),\quad R_k^{(1)}(r,t)=2\sum_{j=1}^{2} a_{kj}^{*}(r,t)\,R_j(r,t), \tag{27}$$

причем $a_{kj}^{*}(r,t)$ — элементы матрицы $(A(r,t))^{-1}$.

В дальнейшем, если $\varphi^{+}(z)$ и $\varphi^{-}(z)$ — некоторые функции на D^{+} и D^{-} ($D^{-}=\{z;\ |z|>1\}$), то под $\varphi(z)$ будем понимать функцию

$$\varphi(z)=\begin{cases}\varphi^{+}(z), & z\in D^{+},\\ \varphi^{-}(z), & z\in D^{-}.\end{cases}$$

Если же $\varphi(z)$ определена на $D^{+}\cup D^{-}$, то через $\varphi^{+}(z)$ и $\varphi^{-}(z)$ будем понимать сужения этой функции на D^{+} и D^{-} соответственно.

Пусть теперь

$$\psi_k^{+}(\tilde{\alpha}_k(r,t))=\sum_{j=1}^{2}\tilde{m}_{kj}^{(0)}(r,t)\,\psi_j^{-}(\bar{\alpha}_j(r,t))\ (k=1,2,0<r\leqslant 1), \tag{28}$$

где $\bar{m}_{kj}^{(0)}(r,t)$ — элементы матрицы $(M(r,t))^{-1}$, сопутствующей однородной задаче (26). Наряду с задачей (28) для любого целого $n>0$ будем рассматривать также задачи

$$\psi_k^{+}(\tilde{\alpha}_k(r,t))=\sum_{j=1}^{2}\bar{m}_{kj}^{(n)}(r,t)\,\psi_j^{-}(\tilde{\alpha}_j(r,t))\ (k=1,2), \tag{29}$$

где $\tilde{m}_{kj}^{(n)}(r,t)=\bar{m}_{kj}^{(0)}(r,t)\,(\tilde{\alpha}_j(r,t))^{-n}$ $(0<r\leqslant 1)$ — элементы матрицы $\tilde{M}^{(n)}(r,t)$ $(n\geqslant 1)$.

Докажем, что если $r=1$, то для некоторого целого $n_0\geqslant 0$ задача (29) нетривиальных решений в классе функций обращающихся в нуль на бесконечности не имеет. Задача (28) при $r=1$ в указанном классе имеет конечное число линейно независимых решений (см. [20]). Пусть $\Phi^{(k)}(z)=(\Phi_1^{(k)}(z),\ \Phi_2^{(k)}(z))$ $(k=1,2,\cdots,m)$ — эти решения. Через n_k $(k=1,2,\cdots,m)$ обозначим порядок нуля вектор-функции $\Phi^{(k)}(z)$ на бесконечности. Возьмем целое число n_0 так, чтобы имело место $n_0>\max\{n_k,\ k=1,2,\cdots,m\}$. Теперь, если задача (29) при $r=1$ имеет отличное от нуля решение $\tilde{\Phi}(z)$ $(\tilde{\Phi}(\infty)=0)$, то вектор-функция

$$\Phi(z)=\begin{cases}\tilde{\Phi}(z), & z\in D^{+},\\ z^{-n_0}\bar{\Phi}(z), & z\in D^{-},\end{cases}$$

будет решением задачи (28) при $r=1$, что противоречит выбору числа n_0.

Далее положим

$$\Phi_{n_0 jr}(z)=\begin{cases} z^{-n}\Phi_{jr}^{+}(z)-P_{n_0 jr}\left(\dfrac{1}{z}\right), & z\in D^{+},\\ \Phi_{jr}^{-}(z), & z\in D^{-}, \end{cases}$$

где $P_{njr}(z^{-1})$ — главная часть функции $z^{-n}\Phi_{jr}^{+}(z)$ в точке $z=0$. Ясно, что функции $\Phi_{n_0 jr}(z)$ $(j=1, 2)$ удовлетворяют граничным условиям

$$\Phi_{n_0 kr}^{+}(\tilde{\alpha}_k(r, t))=\sum_{j=1}^{2} m_{kj}^{(n_0)}(r, t)\,\Phi_{n_0 jr}^{-}(\tilde{\alpha}_j(r, t))+g_k^{(2)}(r, t)+$$

$$+R_k^{(2)}(r, t)\ (k=1, 2), \tag{30}$$

где $m_{kj}^{(n_0)}(r, t)$ — элементы матрицы $M^{(n_0)}(r, t)=(\tilde{M}^{(n_0)}(r, t))^{-1}$:

$$M^{(n_0)}(r, t)=\begin{pmatrix} (\bar{\alpha}_1(r, t))^{n_0} & 0\\ 0 & (\tilde{\alpha}_2(r, t))^{n_0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{11}^{(0)}(r, t) & m_{12}^{(0)}(r, t)\\ m_{21}^{(0)}(r, t) & m_{22}^{(0)}(r, t)\end{pmatrix},$$

$$g_k^{(2)}(r, t)=g_k^{(1)}(r, t)\,(\tilde{\alpha}_k(r, t))^{-n_0}+P_{r_0 kr}\,(\tilde{\alpha}_k^{-1}(r, t)),$$

$$R_k^{(2)}(r, t)=R_k^{(1)}(r, t)\,(\bar{\alpha}_k(r, t))^{-n_0}. \tag{31}$$

Так как функция $\Phi_{n_0 jr}^{-}(z)$ $(j=1, 2)$ ограничена на бесконечности и $\Phi_{n_0 jr}^{-}(\infty)=\Phi_j(0)$, то обозначив

$$\rho_k(r, t)=\Phi_{n_0 kr}^{-}(t)-\Phi_k(0)\ (k=1, 2), \tag{32}$$

из (30) получим

$$\Phi_{n_0 jr}^{+}(z)=\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{m_{kj}^{(n_0)}(r, \tilde{\beta}_k(r, \tau))\,\rho_j(r, \gamma_{jk}(r, \tau))}{\tau-z}\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g_k^{(2)}(r, \tilde{\beta}_k(r, \tau))}{\tau-z}\,d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{R_k^{(2)}(r, \tilde{\beta}_2(r, \tau))\,d\tau}{\tau-z},$$

$$\Phi_{n_0 jr}^{-}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\rho_k(r, \tau)}{\tau-z}\,d\tau+\Phi_k(0)\ (k=1, 2), \tag{33}$$

где $\gamma_{jk}(r, \tau)=\tilde{\alpha}_j(r, \tilde{\beta}_k(r, \tau))$. Применяя формулы Сохоцкого—Племеля можно установить (см. [20]), что функции $\rho_k(r, t)$ $(k=1, 2)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{A_{kj}(r, t, \tau)\,\rho_j(r, \tilde{\alpha}_j(r, \tau))\,d\tau}{\tau-t}=g_k^{(3)}(r, t)+R_k^{(3)}(r, t)\ (k=1, 2), \tag{34}$$

где

$$A_{kj}(r, t, \tau)=(\tau-t)\left(\frac{m_{kj}^{(n_0)}(r, \tau)\,\bar{\alpha}_k'(r, \tau)}{\tilde{\alpha}_k(r, \tau)-\bar{\alpha}_k(r, t)}+\frac{m_{kj}^{(n_0)}(r, t)\,\tilde{\alpha}_j'(r, \tau)}{\bar{\alpha}_j(r, \tau)-\bar{\alpha}_j(r, t)}\right),$$

$$g_k^{(3)}(r, t) = \sum_{j=1}^{2} \Phi_j(0)\, m_{kj}^{(n_0)}(r, t) + g_k^{(2)}(r, t) -$$

$$- \frac{1}{\pi i} \int_{\tilde{T}}^{} \frac{g_k^{(2)}(r, \tau)\, \tilde{\alpha}_k'(r, t)}{\tilde{\alpha}_k(r, \tau) - \bar{\alpha}_k(r, t)}\, d\tau, \tag{35}$$

$$R_k^{(3)}(r, t) = R_k^{(2)}(r, t) - \frac{1}{\pi i} \int_{\tilde{T}}^{} \frac{R_k^{(2)}(r, \tau)\, \tilde{\alpha}_k'(r, \tau)}{\tilde{\alpha}_k(r, \tau) - \tilde{\alpha}_k(r, t)}\, d\tau.$$

Обозначим

$$M_{kj}^{(4)}(r, t, \tau) = m_{kj}^{(n_0)}(r, \tau)\left(\frac{1}{\tau - t} - \frac{\tilde{\alpha}_k'(r, \tau)}{\tilde{\alpha}_k(r, \tau) - \bar{\alpha}_k(r, t)}\right) +$$

$$+ m_{kj}^{(n_0)}(r, t)\left(\frac{1}{\tau - t} - \frac{\tilde{\alpha}_j'(r, \tau)}{\tilde{\alpha}_j(r, \tau) - \bar{\alpha}_j(r, t)}\right) + \frac{m_{kj}^{(n_0)}(r, t) - m_{kj}^{(n_0)}(r, \tau)}{\tau - t}.$$

Систему (34) представим в виде

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{m_{kj}^{(n_0)}(r, t)}{\pi i} \int_{\tilde{T}}^{} \frac{\rho_j(r, \bar{\alpha}_j(r, \tau))}{\tau - t}\, d\tau - \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{T}}^{} M_{kj}^{(1)}(r, t, \tau)\, \rho_j(r, \tilde{\alpha}_j(r, \tau))\, d\tau =$$

$$= g_k^{(3)}(r, t) + R_k^{(3)}(r, t) \quad (k = 1, 2).$$

Умножим последнюю систему на матрицу $\bar{M}^{n_0}(r, t)$. Получим

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\tilde{T}}^{} \frac{\rho_k(\tau, \tilde{\alpha}_k(r, \tau))}{\tau - t}\, d\tau - \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{T}}^{} M_{kj}^{(n_0)}(r, t, \tau)\, \rho_j(r, \bar{\alpha}(r, \tau))\, d\tau =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \bar{m}_{kj}^{(n_0)}(r, t)\, g_j^{(3)}(r, t) + \sum_{j=1}^{2} \tilde{m}_{kj}^{(n_0)}(r, t)\, R_j^{(3)}(r, t) \quad (k = 1, 2), \tag{36}$$

где $M_{kj}^{(2)}(r, t, \tau)$ и $\tilde{m}_{kj}^{(n_0)}(r, t)$ — элементы матриц $\tilde{M}^{(n_0)}(r, t) \cdot M^{(1)}(r, t, \tau)$ и $\tilde{M}^{(n_0)}(r, t)$ соответственно.

Умножив теперь (36) на $(\pi i (t - u))^{-1}$ и интегрируя в смысле главного значения Коши, будем иметь

$$\rho_k(r, \tilde{\alpha}_k(r, u)) - \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{T}}^{} M_{kj}^{(3)}(r, u, \tau)\, \rho_j(r, \tilde{\alpha}_j(r, \tau))\, d\tau = g_k^{(4)}(r, u) +$$

$$+ R_k^{(4)}(r, u), \tag{37}$$

где

$$M_{kj}^{(3)}(r, u, \tau) = \frac{1}{\pi i} \int_{\tilde{T}}^{} \frac{M_{kj}^{(2)}(r, t, \tau)}{t - u}\, dt,$$

$$g_k^{(4)}(r, u) = \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\pi i} \int_T \frac{\overline{m}_{kj}^{(n_0)}(r, t)\, g_j^{(3)}(r, t)}{r - u}\, dt,$$

$$R_k^{(4)}(r, u) = \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\pi i} \int_T \frac{\overline{m}_{kj}^{(n_0)}(r, t)\, R_j^{(3)}(r, t)}{t - u}\, dt. \tag{38}$$

После применения интегрального преобразования с ядром $M^{(3)}(r, t, \tau)$ к системе (37) конечное число раз получим

$$\rho_k(r, \overline{\alpha}_k(r, t)) - \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2\pi i} \int M_{kj}^{(4)}(r\, t, \tau)\, \rho_j(r, \widetilde{\alpha}_j(r, \tau))\, d\tau =$$

$$= g_k^{(4)}(r, t) + R_k^{(4)}(r, t) + \widetilde{f}(r, t) \quad (k = 1, 2), \tag{39}$$

где функции $M_{kj}^{(4)}(r, t, \tau)$ принадлежат классу Гельдера по обеим переменным и

$$\lim_{r \to 1-0} \|\widetilde{f}(r, t)\|_p = 0 \tag{40}$$

для некоторого $p > 1$. Далее, из (39) имеем

$$\rho_k(r, \overline{\alpha}_k(r, t)) - \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2\pi i} \int_T M_{kj}^{(4)}(1, t, \tau)\, \rho_j(r, \widetilde{\alpha}_j(r, \tau))\, d\tau =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2\pi i} \int_T (M_{kj}^{(4)}(r, t, \tau) - M_{kj}^{(4)}(1, t, \tau))\, \rho_j(r, \overline{\alpha}_j(r, \tau))\, d\tau +$$

$$+ g_k^{(4)}(r, t) + R_k^{(4)}(r, t) + \overline{f}_k(r, t) \quad (k = 1, 2). \tag{41}$$

Пусть теперь $\varphi_k(t)$ $(k = 1, 2, \cdots)$, $\varphi_k(t) \in H(\alpha)$, $t \in T$ — полная ортонормированная система. Для любого $\varepsilon > 0$ матрицу $M^{(4)}(1, t, \tau)$ можно представить в виде

$$M^{(4)}(1, t, \tau) = \sum_{p=1}^{N} \varphi_p(t)\, G_p(\tau) + \widetilde{M}^{(4)}(1, t, \tau), \tag{42}$$

где $G_p(\tau)$ $(p = 1, 2, \cdots N)$ — матрицы второго порядка с элементами из класса Гельдера на T, а матрица $\widetilde{M}^{(4)}(1, t, \tau)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k,\, j=1}^{2} |M_{kj}^{(4)}(1, t, \tau)| < \varepsilon. \tag{43}$$

Учитывая (42), систему (41) можно представить в виде

$$\rho_k(r, \widetilde{\alpha}_k(r, t)) - \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2\pi i} \int_T \widetilde{M}_{kj}^{(4)}(1, t, \tau)\, \rho_j(r, \overline{\alpha}_j(r, \tau))\, d\tau =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} c_{p_j}(r) \varphi_{p_j}(\,) + \sum \frac{1}{} \int (M_{kj}^{(4)}(r, t, \tau) -$$

$$-M_{kj}^{(4)}(1, t, \tau))\rho_j(r, \tilde{\alpha}(r, \tau))\,d\tau + g_k^{(4)}(r, t) + R_k^{(4)}(r, t) + \tilde{f}_k(r, t)\ (k = 1, 2), \quad (44)$$

где вектор $c_p(r) = (c_{p1}(r),\ c_{p2}(r))$ определяется по формуле

$$c_p(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_T G_p(r)\rho(r, \tilde{\alpha}(r, \tau))\,d\tau,\ p = 1, 2, \cdots, N, 0 < r < 1 \quad (45)$$

$(\rho(r, \tilde{\alpha}(r, \tau)) = (\rho_1(r, \tilde{\alpha}_1(r, \tau)),\ \rho_2(r, \tilde{\alpha}_2(r, \tau))$ Пусть $\Omega(t, \tau) = \{\Omega_{kj}(t\ \tau),$ $k = 1, 2,\ j = 1, 2\}$ — матрица резольвенты уравнения (44). Если $\varepsilon > 0$ достаточно малая величина, то из (43) следует что (44) можно представить в виде

$$\rho_k(r, \tilde{\alpha}_k(r, t)) - \sum_{j=1}^{2}\frac{1}{2\pi i}\int_T M_{kj}^{(5)}(r, t, \tau)\rho_j(r, \tilde{\alpha}_j(r, \tau))\,d\tau =$$

$$= \sum_{p=1}^{N} c_{pk}(r)\varphi_{pk}(t) + g_k^{(5)}(r, t) + R_k^{(5)}(r, t) + \tilde{f}_k^{(1)}(r, t)\ (k = 1, 2). \quad (46)$$

где

$$\varphi_{pk}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_T (\Omega_{k1}(t, \tau) + \Omega_{k2}(t, \tau))\varphi_p(\tau)\,d\tau + \varphi_p(t)\ (k = 1, 2),$$

$$M^{(5)}(r, t, \tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \Omega(t, u)\,(M^{(4)}(r, u, \tau) - M^{(4)}(1, u, \tau))\,du,$$

$$g^{(5)}(r, t) = g^{(4)}(r, t) + \frac{1}{2\pi i}\int_T \Omega(t, u)\,g^{(4)}(r, u)\,du,\ \tilde{f}^{(1)}(r, t) = \tilde{f}(r, t) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_T \Omega(t, u)\tilde{f}(r, u)\,du,\ R^{(5)}(r, t) = R^{(4)}(r, t) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_T \Omega(t, u)\,R^{(4)}(r, u)\,du. \quad (47)$$

При этом функции $\varphi_{pk}(t)$ $(p = 1, 2, \cdots, N)$ линейно независимы при фиксированном $k\,(k = 1, 2)$. Наконец, если $\Omega(r, t, \tau) = \{\Omega_{kj}(r, t,),$ $k = 1, 2,\ j = 1, 2\}$ — матрица резольвенты системы (44), то справедливо равенство

$$\rho_k(r, \tilde{\alpha}_k(r, t)) = \sum_{p=1}^{N} c_{pk}\varphi_{pk}(r, t) + g_k^{(6)}(r, t) + R_k^{(6)}(r, t) +$$

$$+ \tilde{f}^{(2)}(r, t)\ (k = 1, 2), \quad (48)$$

где

$$\varphi_{pk}(r, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \Omega_{k1}(r, t, \tau)\varphi_{p1}(\tau) + \Omega_{k2}(r, t, \tau)\varphi_{p2}(\tau)\,d\tau + \varphi_{pk}(t),$$

$$g^{(6)}(r, t) = g^{(5)}(r, t) + \frac{1}{2\pi i}\int_T \Omega(r, t, u)\,g^{(5)}(r, u)\,du,$$

$$\tilde{f}^{(2)}(r, t) = \tilde{f}^{(1)}(r, t) + \frac{1}{2\pi i}\int_T \Omega(r, t, u)\tilde{f}^{(1)}(r, u)\,du,$$

$$R^{(6)}(r, t) = R^{(5)}(r, t) + \frac{1}{2\pi i}\int_T \Omega(r, t, u)\, R^{(5)}(r, u)\,du. \tag{49}$$

Для $\varphi_{pk}(r, t)$ равномерно на T

$$\lim_{r\to 1-0} \varphi_{pk}(r, t) = \varphi_{pk}(t). \tag{50}$$

Из (48) получим

$$\rho_k(r, t) = \sum_{p=1}^{N} c_{pk}(r)\varphi_{pk}(r, \tilde{\beta}_k(r, t)) + g_k^{(6)}(r, \tilde{\beta}_k(r, t)) +$$

$$+ R_k^{(6)}(r, \tilde{\beta}_k(r, t)) + \tilde{f}_k^{(2)}(r, \tilde{\beta}_k(r, t)) \ (k=1, 2). \tag{51}$$

Так как согласно (22)

$$\left|\frac{\tilde{\beta}_k'(r, \tau)}{\tilde{\beta}_k(r, \tau) - \tilde{\beta}_k(r, t)} - \frac{1}{\tau - t}\right| < \frac{\text{const}}{|\tau - t|^{\lambda}} \ (\lambda < 1,\ k = 1, 2,\ 0 < r \leqslant 1),$$

то учитывая свойства матриц $\Omega(t, u)$, $\Omega(r, t, u)$, функцию $R_k^{(6)}(r, t)$ можно представить в виде

$$R_k^{(6)}(r, \tilde{\beta}_k(r, t)) = R_k^{(7)}(r, t) + \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{R_k^{(7)}(r, \tau)}{\tau - t}\,d\tau + R_k^{(8)}(r, t) \ (k = 1, 2), \tag{52}$$

где функции $R_k^{(7)}(r, t)$ и $R_k^{(8)}(r, t)$ можно явно выписать и

$$\lim_{r\to 1-0} \|R_k^{(7)}(r, t)\|_1 = 0, \quad \lim_{r\to 1-0} \|R_k^{(8)}(r, t)\|_p = 0 \tag{53}$$

для некоторого $p > 1$. Что касается вектор-функций $g^{(6)}(r, \tilde{\beta}(r, t))$, то учитывая соотношение (23), легко установить, что существует вектор-функция $g^{(6)}(t)$ из класса Гельдера на T такая, что

$$\lim_{r\to 1-0} \|g^{(6)}(r, \tilde{\beta}(r, t)) - g^{(6)}(t)\|_{H(\lambda)} = 0 \ (\lambda > 0). \tag{54}$$

Из (40) и (49) для некоторого $p > 1$ также имеем

$$\lim_{r\to 1-0} \|\tilde{f}(r, \tilde{\beta}(r, t))\|_p = 0. \tag{55}$$

Докажем, что множество чисел $c_{pk}(r)$ $(p = 1, 2, \cdots, N,\ k = 1, 2,\ 0 < r \leqslant 1)$ (определенных формулами (45)) ограничено. Действительно, предполагая что эти числа не ограничены, обозначим

$$\lambda(r) = \max|c_{pk}(r)| \ (p = 1, 2, \cdots N;\ k = 1, 2).$$

Подставляя $\rho(r, t)$ из (51) в выражение (53) для функции $\Phi_{\lambda_0 r}(z)$ и разделив полученное равенство на [illegible] с учетом (52) получим

$$\frac{1}{\lambda(r)}\Phi^{-}_{n_0 r}(z)=-\sum_{p=1}^{N}\frac{c_{pk}(r)}{\lambda(r)}\int_{T}\frac{\varphi_{pk}(r,\bar{\beta}_k(r,\tau))}{\tau-z}\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{\lambda(r)}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{T}\frac{g_k^{(6)}(r,\tilde{\beta}_k(r,\tau))d\tau}{\tau-z}+\frac{1}{\pi i}\int_{T}\frac{R_k^{(7)}(r,\tau)}{\tau-z}\,d\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int_{T}\frac{R_k^{(8)}(r,\tau)}{\tau-z}\,d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_{T}\frac{\tilde{f}_k^{(9)}(r,\bar{\varphi}_k(r,\tau))}{\tau-z}\,d\tau+\Phi_k(0)\right). \quad (56)$$

Выберем последовательность r_k, $r_k\to 1$ так, чтобы имели

$$\lim_{k\to\infty}\lambda(r_k)=\infty.$$

Не теряя общности, можно предполагать, что сходятся также последовательности $c_{pk}(r_k(\lambda(r_k))^{-1}$ $(p=1,2,\cdots,N,\ k=1,2)$ и

$$\lim_{r_k\to 1}\frac{c_{pk}(r_k)}{\lambda(r_k)}=\lambda_{pk}.$$

Переходя к пределу в (56) при $r_k\to 1$ и учитывая (53), (54), (55), получим

$$\int_{T}\sum_{p=1}^{N}\lambda_{pk}\varphi_{pk}(\bar{\beta}_k(t,\tau))\frac{d\tau}{\tau-z}=0,\quad z\in D^{-},\ k=1,2. \quad (57)$$

Обозначим

$$\varphi_k^{+}(t)=\sum_{p=1}^{N}\lambda_{pk}\varphi_{pk}(\tilde{\beta}_k(1,\tau))\ (k=1,2). \quad (58)$$

Из (57) следует, что функции $\varphi_k^{+}(t)$ $(k=1,2)$ аналитичны в D^{+}. Так как среди чисел λ_{pk} есть числа, равные по модулю единице и финкции $\varphi_{pk}(t)$ $(p=1,2,\cdots N)$, для любого k $(k=1,2)$ линейно независимы, то вектор-функция $\varphi^{+}(t)=(\varphi_1^{+}(t),\ \varphi_2^{+}(t))$ отлична от нуля.

Подставляя теперь функцию $\rho_k(r,t)$ $(k=1,2)$ из (51) в выражение (33) для функции $\Phi^{+}_{n_0 r}(z)$ и учитывая, что равномерно при $r\to 1-0$ $m_k^{(n_0)}(r,\bar{\beta}_k(r,\tau))-m_k^{(n_0)}(1,\tilde{\beta}_k(1,\tau)$, аналогично получим

$$\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{T}m_k^{(n_0)}(1,\tilde{\beta}_k(1,\tau))\varphi_j^{+}(\gamma_{jk}(1,\tau))\frac{d\tau}{\tau-z}=0,\quad z\in D^{+}. \quad (59)$$

Из равенства (58) следует, что функции

$$\psi_k^{-}(\tau)=\sum_{j=1}^{2}m_k^{(n_0)}(1,\tilde{\beta}_k(1,\tau))\varphi_j^{+}(\gamma_{jk}(1,\tau))\ (k=1,2) \quad (60)$$

аналитичны в D^{-} и $\psi_k^{-}(\infty)=0$. Из (59) также следует, что

$$\varphi_j^{+}(\tilde{\alpha}_k(1,t))=\sum_{j}\tilde{m}_j^{(n_0)}(1,t)\psi_j^{-}(\tilde{\alpha}_j(1,t)),\ k=1,2.$$

Тем самым задача (29) при $n=n_0$, $r=1$ имеет отличное от нуля решение, равное нулю на бесконечности. Это противоречие доказывает наше предположение о коэффициентах $c_{pk}(r)$ $(p=1, 2, \cdots N,\ k=1, 2,$ $0<r<1)$.

Теперь выберем последовательность $r_l (l=1, 2, \cdots)$, $r_l<1$, так, чтобы последовательности $c_{pk}(r_l)$ имели пределы для любого $p=1, 2, \cdots N$ и $k=1, 2$ при $r_l \to 1$. Пусть

$$\lim_{r_l \to 1} c_{pk}(r_l) = c_{pk} \quad (p=1, 2, \cdots, N,\ k=1, 2).$$

Подставляя функцию $\rho_k(r, t)$ из (51) в формулу (33), получим

$$\Phi^+_{n_0 k r_l}(z) = \sum_{j=1}^{2} \sum_{p=1}^{N} \frac{c_{pk}(r_l)}{2\pi i} \int_T m_{kj}^{(n_0)}(r_l, \widetilde{\beta}_k(r_l, \tau))\, \varphi_{pj}(r_l, \gamma_{jk}(r_l, \tau))\, \frac{d\tau}{\tau - z} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{m_{kj}^{(n_0)}(r_l, \widetilde{\beta}_k(r_l, \tau))\, g_j^{(6)}(r_l, \widetilde{\beta}_k(r_l, \tau))}{\tau - z}\, d\tau +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{m_{kj}^{(n_0)}(r_l, \widetilde{\beta}_k(r_l, \tau))\, R_j^{(6)}(r_l, \widetilde{\beta}_k(r_l, \tau))}{\tau - z}\, d\tau +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{m_{kj}^{(n_0)}(r_l, \widetilde{\beta}_k(r_j, \tau))\, \widetilde{f}_j^{(2)}(r_l, \widetilde{\beta}_k(r_l, \tau))}{\tau - z}\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{g_k^{(n_0)}(r_l, \widetilde{\beta}_k(r, \tau))}{\tau - z}\, d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{R_k^{(2)}(r_l, \widetilde{\beta}_k(r, \tau))}{\tau - z}\, d\tau. \qquad (61)$$

Так как равномерно при $z \in D^+$

$$\lim_{r \to 1-0} \omega_{jr}(z) = z,$$

то

$$\lim_{r \to 1-0} \Phi_{n_0 k r}(z) = z^{-n_0} \Phi_k(z) - P_{n_0 k}\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in D^+,$$

где $P_{nk}(z^{-1})$ — главная часть функции $z^{-n}\Phi_k(z)$ в точке $z=0$. Теперь, учитывая соотношения (52)—(55) и переходя к пределу в (61), при $r_k \to 1$, получим

$$z^{-n_0}\Phi_k(z) - P_{n_0 k}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{j=1}^{2} \sum_{p=1}^{N} \frac{c_{pk}}{2\pi i} \int_T \frac{m_{kj}^{(n_0)}(1, \widetilde{\beta}_k(1, \tau))\, \varphi_{pj}(1, \gamma_{jk}(1, \tau))}{\tau - z}\, d\tau +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{m_{kj}^{(n_0)}(1, \widetilde{\beta}_k(1, \tau))\, g_j^{(6)}(\widetilde{\beta}_j(1, \tau))}{\tau - z}\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{g_k^{(2)}(1, \widetilde{\beta}_k(1, \tau))}{\tau - z}\, d\tau, \quad z \in D^+.$$

Так как все функции $\varphi_{pj}(t)$, $g_j^{(6)}(t)$, $g_j^{(2)}(1, t)$ $(p=1, 2, \cdots N)$, $k=1, 2)$ принадлежат классу Гельдера в T, то функции $\Phi_k(z)$ $(k=1, 2)$ принадлежат классу Гельдера в $D^+ \cup T$. Теорема доказана.

§ 3. Исследование задачи (1)—(2)

1. Пусть $\overset{m}{\psi}_j(z)$ $(j=1, 2)$ — функции из (20). Делая замену $\psi_j(z)=\overset{m}{\psi}_j(z)+\Phi_j(z)$ в (7) относительно новых искомых функций $\Phi_j(z)$ $(j=1, 2)$ получим

$$\lim_{r\to 1-0}\left|\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2} a_{kj}(r, t)\,\Phi_j(a_j(rt)) - g_k^{(n_0+1)}(t)\right|_1 = 0\,(k=1, 2), \qquad (62)$$

где $g_k^{(n_0+1)}=G_k(g_1^{(n_0)}, g_2^{(n_0)}, t)$ $(k=1, 2)$ принадлежат классу Гельдера. Из теоремы 3 следует, что функции $\Phi_j(z)$ $(j=1, 2)$, удовлетворяющие условиям (62), также принадлежат классу Гельдера на $D^+ \cup \Gamma$. Поэтому условия (62) можно понимать в обычном смысле

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2} a_{kj}(1, t)\,\Phi_j(a_j(t)) = g_k^{(n_0+1)}(t)\ (k=1, 2), \qquad (63)$$

где $a_{kj}(1, t)$ определяются по формулам (5) при $r=1$. Применяя представление Товмасяна (см. [21]), можем утверждать, что существует единственная голоморфная в D^+ функция $\widetilde{\Phi}_j(z)$; принадлежащая классу Гельдера в $D^+ \cup T$ такая, что

$$\Phi_j(a_j(t)) = \overline{\Phi}_j(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_T \lambda_j(t, \tau)\,\widetilde{\Phi}_j(\tau)\,d\tau \ (j=1, 2),$$

где

$$\lambda_j(t, \tau) = \frac{a_j'(\tau)}{a_j(\tau)-a_j(t)} - \frac{1}{\tau - t}.$$

Тогда условия (63) можно представить в виде

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}\left[a_{kj}(1, t)\,\widetilde{\Phi}_j(t) + \int_T h_{kj}(t, \tau)\,\overline{\Phi}_j(\tau)\,d\tau\right] = g_k^{(n_0+1)}(t)\ (k=1, 2), \qquad (64)$$

где $h_{kj}(t, \tau)=a_{kj}(1, t)\lambda_j(t, \tau)$.

Граничная задача (63) исследована в монографии [20]. Индекс задачи (64) определяется формулой

$$\varkappa = 2 - \frac{1}{\pi}\Delta_\Gamma \arg\det A(1, t). \qquad (65)$$

Пусть теперь $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — индексы функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$ соответственно. Легко проверить что

$$\frac{1}{\pi}\Delta_\Gamma \arg\det(A(1, t) = 2(\varkappa_1 + \varkappa_2).$$

Тем самым индекс задачи (64) равен $2-2(\varkappa_1+\varkappa_2)$. Здесь доказано

(см. [20]), что необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной задачи (64) в классе Гельдера имеют вид.

$$\int_T g^{(n_0+1)}(t)\,\nu_k(t)\,ds = 0,\ k=1,\ 2,\cdots,N, \tag{66}$$

где $\nu_1(t)$, $\nu_2(t),\cdots\nu_N(t)$ — некоторые действительные 2-мерные вектор-функции из класса Гельдера, являющиеся решениями некоторых систем интегральных уравнений: $g^{(n_0+1)}(t)\,\nu_k(t)$ — скалярное произведение векторов $g^{(n_0+1)}(t)$ и $\nu_k(t)$. Подставляя в (66) выражение для функции $g^{(n_0+1)}_{(t)}$, получим следующие условия разрешимости неоднородной задачи (7):

$$\int_T g(t)\,G_k(t)\,ds = 0,\ k=1,\ 2,\cdots,N, \tag{67}$$

где $G_k(t)$ $(k=1,\ 2,\cdots,N)$ — вполне определенные вектор-функции из класса Гельдера. Ясно, что условия (7) необходимы и достаточны для разрешимости задачи (7).

Докажем, что условия (67) эквивалентны условиям

$$\int_T g(t)\,\nu_k(t)\,ds = 0,\ k=1,\ 2,\cdots,N. \tag{68}$$

Действительно, пусть $g(t)=(g_1(t),\ g_2(t))\in L^1(T)$ и удовлетворяет условиям (68). Тогда существует последовательность вектор-функций $g_n(t)$ из класса Гельдера, сходящаяся к вектор-функции $g(t)$ в смысле $L^1(T)$ и удовлетворяющая условиям (68). Следовательно для $g_n(t)$ задача (7) имеет решение. Поэтому вектор-функции $g_n(t)$ удовлетворяют условиям

$$\int_T g_n(t)\,G_k(t)\,ds = 0,\ k=1,\ 2,\cdots,N.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим условия (67). Пусть теперь $g(t)=(g_1(t),\ g_2(t))\in L^1(T)$ удовтетворяет условиям (67). Выберем опять последовательность вектор-функций $f_n(t)=f^{(1)}_n(t),\ f^{(1)}_n(t)$ из класса Гельдера, сходящуюся к вектор-функции $g(t)$ по метрике $L^1(T)$ и удовлетворяющую условиям (67). Тогда задача (7) с граничными функциями $f^{(1)}_n(t),\ f^{(3)}_n(t)$ будет разрешима. Из теоремы 3 следует, что решения этой задачи также будут принадлежать классу Гельдера в $D^+\cup T$. Поэтому

$$\int_T f_n(t)\,\nu_n(t)\,ds = 0,\ k=1,\ 2,\cdots,N.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим условия (68).

Тем самым установлена следующая

Теорема 4. *Задача* (7) *нетерова. Индекс этой задачи равен* $2-2(\varkappa_1+\varkappa_2)$, *где* $\varkappa_1$ *и* $\varkappa_2$ *— индексы функций* $a_1(t)$ *и* $a_2(t)$ *соответственно. Неоднородная задача* (7) *разрешима тогда и только тогда, когда вектор-функция* $(g_1(t), g_1(t))$ *удовлетворяет условиям* (67).

2. *Общее решение задачи* (67) *можно представить в виде*

$$\dot{\psi}(z)=\sum_{k=1}^{N_1} d_k\dot{\psi}_k(z)+\dot{\psi}_0(z),$$

где числа d_k *— произвольные действительные постоянные,* $\dot{\psi}_k(z)=(\psi_{k1}(z), \psi_{k2}(z))$ $(k=1, 2, \cdots, N_1)$ *— решения однородной задачи* (7), *а* $\dot{\psi}_0(z)=(\psi_{01}(z), \psi_{02}(z))$ *— некоторое частное решение задачи* (7). *Положив*

$$\varphi_{kj}(z)=\int_0^z \psi_{kj}(\omega_j^{-1}(z))\,dz, \varphi_{0j}(z)=\int_0^z \psi_{0j}(\omega_j^{-1}(z))\,dz \quad (j=1, 2),$$

функцию $u(z)$ из (3) можно предстивить в виде

$$u(z)=\sum_{k=1}^{N_1} d_k\varphi_{k1}(z+\mu_1\overline{z})=\sum_{k=1}^{N_1} d_k\varphi_{k2}(z+\mu_2\overline{z})+$$

$$+\varphi_{01}(z+\mu_1\overline{z})+\varphi_{02}(z+\mu_2\overline{z})+d_0, \qquad (69)$$

где d_0 — произвольное комплексное число. Из (69) и из теоремы 4 следует

Теорема 5. *Задача* (1)—(2) *нетерова. Индекс этой задачи равен* $4-2(\varkappa_1+\varkappa_2)$, *где* $\varkappa_1$ *и* $\varkappa_2$*)) — индексы функций* $a_1(t)$ *и* $a_2(t)$ *соответственно. Неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда вектор-функция* $(f_1(\omega(t)), f_2(\omega(t))$ *удовлетворяет условиям* (68).

Ереванский политехнический институт Поступила 27.IV.1990

Հ. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. Կառեկտ եզրային խնդիրներ ոչ ճշգրիտ էլիպտական հավասարումների համար L^1 դասերում *(ամփոփում)*

Հոդվածում հետազոտվում է Ռիման-Հիլբերտի տիպի եզրային խնդիր հաստատուն կոմպլեքս գործակիցներով երկրորդ կարգի ոչ ճշգրիտ էլիպտիկ հավասարումների համար։ Եզրային պայմանները հասկացվում է L^1 իմաստով։ Ապացուցվում է այդ խնդրի նյութերությունը, հաշվվում է ինդեքսը։

H. M. HAIRAPETIAN. *Correct boundary value problems for nonregyliar-elliptic equations in a class* L^1 (summary)

In the paper the Riman—Hilbert type problem for nonregyliar-elliptic equations whith constant complexcoeff icients is considered. Boundary conditions are introduced by L^1 means. It is shown fhat the problem is noctherian and the index is caleulated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Н. Векуа.* Новые методы решения эллиптических уравнений. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
2. *А. Б. Бицадзе.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М., Наука, 1966.
3. *Н. Е. Товмасян.* Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений, не удовлетворяющих условию Я. Б. Лопатинского, Сиб. мат. жур. 1961, 7, № 4, 920—938.
4. *Я. Б. Лопатинский.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям, Укр. мат. жур., 1953, 5, № 2, 123—151.
5. *А. И. Вольперт.* Общее представление решений эллиптических систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, Сб. науч. трудов, Львов, Мат. ин-т, 1954, т. 5, № 2, 111—122.
6. *В. П. Михайлов.* О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка, Диф. уравн., 1976, т. 12, № 10, 1877—1891.
7. *Э. П. Меликсетян.* Задача Дирихле для слабо связанных эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка в ограниченных областях, Изв. АН АрмССР, 1981, 16, № 4, 253—273.
8. *Р. А. Алиханян.* Внешняя задача Дирихле с данными из L^1 для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка в ограниченных областях, Изв. № 11, 39—48.
9. *Т. Ш. Мадатян.* Граничная задача Римана—Гильберта со смещением в классах L^1, C и ее применения к исследованию краевых задач для эллиптических уравнений, Арм. НИИНТИ, № 22, Ар-88, Деп. 1988.
10. *Г. М. Айрапетян.* Разрывная задача Римана—Привалова со смещением в классе Изв. АН Арм. ССР, сер. матем. XXV, № 1, 1990.
11. *Н. Е. Товмасян.* Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами, Диф. уравн., 1966, 2, № 1, 3—23; № 2, 163—171.
12. *А. В. Бикчантаев.* Краевые задачи для однородного эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами, Изв. высш. уч. зав., мат., № 6 (157), 1975, 3—13.
13. *В. В. Асстрян.* Краевые задачи для эллиптических уравнений высшего порядка в полупространстве, Арм. НИИНТИ, № 36, Ар-87, Деп., 1987.
14. *М. А. Зироян.* Эффективные методы решения краевых задач типа Римана для уравнений Бицадзе, Арм. НИИНТИ, № 83, Ар.-88, Деп. 1988.
15. *А. А. Закарян.* Корректные граничные задачи для уравнения Бицадзе, Арм. НИИНТИ, № 66, Ар.-88, Деп. 1988.
16. *А. А. Закарян.* Задача Римана для неправильно-эллиптического уравнения n-ого порядка в круге, Арм. НИИНТИ, № 83, Ар-88, 1988.
17. *Г. М. Голузин.* Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., Наука, 1966.
18. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, М., Наука, 1968.
19. *Г. М. Айрапетян.* Об ограниченности некоторых интегральных операторов, ДАН РА, 91, № 2, 1990.
20. *Н. П. Векуа.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, М., Наука, 1970.
21. *N. E. Tovmasjan.* Integral representations of holomorhic functions by densities and applications, Letuere Notes in illathematics, 796, Analitic Functions, Korubnik, 1979.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 4, 1991 Математика

УДК 517.5

Р. А. БАГИЯН

ОБОБЩЕННАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ Ф. ХАУСДОРФА

Введение

Пусть *неубывающая* последовательность $\{t_n\}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$0 = t_0 < t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} t_n = \infty, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t_n} = +\infty. \tag{2}$$

Для любого $k \geqslant 0$ обозначим через s_k кратность появления t_k на отрезке $\{t_0, t_1, \cdots, t_k\}$, причем $s_0 = 1$, а $p_k(n)$ — кратность появления t_k на отрезке $\{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$.

В данной статье рассматривается обобщенная проблема моментов вида:

$$\int_0^{\infty} e^{-t_n x} x^{s_n - 1}\, d\alpha(x) = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$\operatorname{Var}_0^{\infty}[\alpha(x)] < \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \alpha(x) = \alpha(+\infty) = 0, \tag{3}$$

которая может быть приведена к отрезку $[0, 1]$ заменой переменного $e^{-x} = u$, $0 \leqslant u \leqslant 1$ и, приняв $\chi(u) = -\alpha(-\ln u)$, т. е.

$$\int_0^1 u^{t_n} \left[\ln \frac{1}{u}\right]^{s_n - 1} d\chi(u) = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$\chi(+0) = \chi(0) = 0.$$

В случае, когда последовательность $\{t_n\}$ *строго возрастающая*, т. е. $s_n = 1$, $n = 1, 2, \cdots$ она сводится к классической проблеме моментов Ф. Хаусдорфа, решенной им как при $t_n = n$ ($n \geqslant 0$) (см. [1] с. 74—109 и [2], с. 439—443), так и в случае произвольной строго возрастающей последовательности $\{t_n\}$ (см. [1], с. 280—299 и [3], с. 104—105).

Так же как и в случае строгой возрастаемости последовательности $\{t_n\}$, введение параметров s_k и $p_k(n)$ в нашей работе позволяют *точно сформулировать и показать признаки обобщенной вполне монотонности и моментности* для случая, когда последовательность $\{t_n\}$, вообще говоря, *неубывающая* (теоремы 3 и 4).

§ 1. Предварительные сведения

1. Известно следующее тождество, лежащее в основе теории интерполяции:

$$\frac{1}{\zeta+\mu_1}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\prod_{j=k+1}^{m}(\mu_j-\mu_1)}{\prod_{j=k}^{m}(\zeta+\mu_j)},$$

где $\{\mu_j\}_1^m$ $(m\geqslant 2)$ — произвольные комплексные числа, а ζ изменяется во всей комплексной плоскости.

Отсюда простой заменой индексов можно получить справедливость следующих тождеств для любой последовательности комплексных чисел $\{t_n\}$ и t:

$$\frac{1}{\zeta+t_0}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{j=k+1}^{n}(t_j-t_0)}{\prod_{j=k}^{n}(\zeta+t_j)}, \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{\zeta+t}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{j=k+1}^{n}(t_j-t)}{\prod_{j=k}^{n}(\zeta+t_j)}+\rho_n(\zeta,\ t), \tag{1.2}$$

где

$$\rho_n(\zeta,\ t)=\frac{\prod_{j=0}^{n}(t_j-t)}{(\zeta+t)\prod_{j=0}^{n}(\zeta+t_j)}.$$

Для любого $\varepsilon>0$ и β $(0<\beta<\pi)$ обозначим через $\gamma(\varepsilon,\ \beta)$ бесконечный контур в плоскости ζ, пробегаемый в направлении неубывания $\arg\zeta$ и состоящий из лучей $\arg\zeta=\pm\beta$ $(\varepsilon\leqslant|\zeta|<\infty)$ и дуги $l(\varepsilon,\ \beta)$ $(-\beta\leqslant\arg\zeta\leqslant\beta)$ окружности $|\zeta|=\varepsilon$, соединяющей концы $\varepsilon\exp(\pm i\beta)$ этих лучей.

Если тождество (1.2) умножить на $\frac{1}{2\pi i}e^{x\zeta}d\zeta$ и проинтегрировать по контуру $\gamma(\varepsilon,\ \beta)$, то придем к следующему важному соотношению при $t\geqslant 0$ и $t_n\geqslant 0$:

$$e^{-tx}=\sum_{k=0}^{n}\left\{\prod_{j=k+1}^{n}\left(1-\frac{t}{t_j}\right)\right\}\omega_{n,\,k}(x)+r_n(x,\ t), \tag{1.3}$$

где

$$r_n(x,\ t)=\left\{\prod_{j=0}^{n}(t_j-t)\right\}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma\left(\varepsilon,\ \frac{\pi}{2}\right)}\frac{e^{x\zeta}\,d\zeta}{(\zeta+t)\prod_{j=0}^{n}(\zeta+t_j)}, \tag{1.4}$$

$$r_n(x,\ t_j)=0,\ j=0,\ 1,\cdots,\ n.$$

$$\omega_{n,k}(x)=\frac{\prod_{j=k+1}^{n} t_j}{2\pi i}\int_{\gamma\left(s,\frac{\pi}{2}\right)}\frac{e^{x\zeta}\,d\zeta}{\prod_{j=k}^{n}(\zeta+t_j)}. \tag{1.5}$$

Пусть s_{kj} — кратность появления t_j на отрезке $[t_k, t_{k+1}, \cdots, t_j]$, а $p^{(n)}_{k,j}$ — кратность появления t_j на отрезке $[t_k, t_{k+1}, \cdots, t_n]$. Легко видеть непосредственным подсчетом вычетов, что функции $\{\omega_{n,k}(x)\}$ допускают также следующее представление:

$$\omega_{n,k}(x)\prod_{j=k+1}^{n} t_j \sum_{j=k}^{n} c^{(n)}_{kj}\, e^{-t_j x} x^{s_{k,j}-1}, \tag{1.5}$$

$$c^{(n)}_{kj}=\frac{1}{\Gamma(s_{k,j})\,\Gamma(p^{(n)}_{k,j}-s_{kj}+1)}\,\frac{d^{\,p^{(n)}_{k,j}-s_{k,j}}}{d\zeta^{\,p^{(n)}_{k,j}-s_{k,j}}}\left\{\prod_{\substack{\nu=k\\ t_\nu\neq t_j}}^{n}(\zeta+t_\nu)^{-1}\right\}_{\zeta=-t_j}. \tag{1.6}$$

Из определения (1.5) функций $\{\omega_{n,k}(x)\}$, а также (1.3) и (1.4) при $t=0$ вытекают следующие важные свойства:

1. *Функции* $\{\omega_{n,k}(x)\}$ *непрерывны и неотрицательны на замкнутой полуоси* $[0, +\infty]$;

2. $\sum_{k=0}^{n}\omega_{n,k}(x)=1$, причем $0\leqslant\omega_{n,k}(x)\leqslant 1$.

Положив

$$P_n(t)=-t\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{t}{t_j}\right),$$

и

$$Q_n(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma\left(s,\frac{\pi}{2}\right)}\frac{e^{x\zeta}\,d\zeta}{\zeta(\zeta+t)\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{\zeta}{t_j}\right)},$$

докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Если* $\lim_{n\to\infty} t_n=+\infty$ *и* $0<r<R<\infty$, *то имеют место оценки:*

а) $$\max_{r\leqslant t\leqslant R}|P_n^{(p)}(t)|\leqslant C_p(r,R)\exp\left\{-\frac{r}{4}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{t_j}\right\}\cdot\quad p=0,1,2,\cdots$$

и при $\delta>0$

б) $$\max_{0<x<\infty}|Q_n^{(p)}(x,t)|\leqslant C_p^{*}(\delta,r,R)\exp\left\{\delta\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{t_j}\right\}+\frac{1}{t^{p+1}}, \tag{1.7}$$

где $C_p(r,R)$ *и* $C_p^{*}(\delta,r,R)$ *— постоянные, не зависящие от* n.

Доказательство. а) Для любого $t\in[r,R]$ в комплексной плоскости ζ рассмотрим окружность $\zeta=t+\rho e^{i\varphi}$ $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$ с центром в точке t и радиуса $\rho=\frac{r}{2}$. Заметим, что для $\zeta=t+\rho e^{i\varphi}$

$$\left|1-\frac{\zeta}{t_j}\right| = \sqrt{1-\frac{2(t+\rho\cos\varphi)}{t_j}+\frac{(t+\rho\cos\varphi)^2}{t_j^2}+\frac{\rho^2\sin^2\varphi}{t_j^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{1-\frac{2(t-\rho)}{t_j}\left[1-\frac{(t+\rho)^2}{2(t-\rho)t_j}-\frac{\rho^2}{2(t-\rho)t_j}\right]}.$$

В силу условия $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$ выберем номер j_0 настолько большим, чтобы, начиная с этого номера, выполнялись бы следующие неравенства:

$$t_j > R,\ \frac{1}{2} \leqslant \left[1-\frac{t+\rho}{2(t-\rho)t_j}-\frac{\rho^2}{2(t-\rho)t_j}\right] \leqslant \frac{3}{2},\ j \geqslant j_0+1.$$

Отсюда, ввиду того, что $1-x \leqslant e^{-x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ будем иметь

$$\left|1-\frac{\zeta}{t_j}\right| \leqslant \sqrt{1-\frac{t-\rho}{t_j}} < e^{-\frac{t-\rho}{2}\cdot\frac{1}{t_j}},\ j \geqslant j_0+1, \tag{1.8}$$

т. к. если $t_j > R$, то и $t_j > R-\rho > t-\rho$.

Но при $n \geqslant j_0+1$

$$P_n(\zeta) = -\zeta \prod_{j=1}^{j_0}\left(1-\frac{\zeta}{t_j}\right)\prod_{j=j_0+1}^{n}\left(1-\frac{\zeta}{t_j}\right). \tag{1.9}$$

Поскольку $t-\rho = t-\frac{r}{2} \geqslant \frac{r}{2}$, то из (1.8) имеем

$$\prod_{j=j_0+1}^{n}\left|1-\frac{\zeta}{t_j}\right| \leqslant \exp\left\{-\frac{t-\rho}{2}\sum_{j=j_0+1}^{n}\frac{1}{t_j}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\frac{r}{4}\sum_{j=j_0+1}^{n}\frac{1}{t_j}\right\} = A(r, R)\exp\left\{-\frac{r}{4}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{t_j}\right\},$$

где $A(r, R)$ — постоянные, не зависящие от n.

Отсюда и из (1.9) получим

$$\max_{|\zeta-t|=\rho}|P_n(\zeta)| \leqslant B(r, R)\exp\left\{-\frac{r}{4}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{t_j}\right\}.$$

Далее по формуле Коши

$$P_n^{(p)}(t) = \frac{p!}{2\pi i}\int_{|\zeta-t|=\rho}\frac{P_n(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-t)^{p+1}},\ p = 0, 1, 2, \cdots,$$

откуда следует оценка леммы

$$|P_n^{(p)}(t)| \leqslant \frac{p!}{\rho^p}\max_{|\zeta-t|=\rho}|P_n(\zeta)| < C_p(r, R)\,e^{-\frac{r}{4}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{t_j}},\ p = 0, 1, 2, \cdots,$$

для всех $t \in [r, R]$.

б) Из (1.7) видно, что если для сколь угодно малых δ выполнено это неравенство, то для больших тем более будет выполняться. Поэтому предположим, что $\delta < \min\left\{\frac{1}{2}t,\ 2\varkappa r\right\}$, где $0 < \varkappa < 1$.

Из определения функции $Q_n(x, t)$ имеем

$$Q_n^{(p)}(x, t) = \frac{(-1)^p}{2\pi i} \int_{\gamma\left(\delta, \frac{\pi}{2}\right)} \frac{e^{x\zeta}\, d\zeta}{\zeta(\zeta + t)^{p+1} \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{\zeta}{t_j}\right)}.$$

В области, ограниченной контуром $\gamma\left(\delta, \frac{\pi}{2}\right)$ и прямой $\operatorname{Re}\zeta = -\delta_1 = -\frac{\delta}{2}$ функция, стоящая под интегралом, имеет лишь один простой полюс в точке $\zeta = 0$, а при $|\zeta| \to +\infty$ она имеет порядок $O\left(\frac{1}{|\zeta|^{n+2+p}}\right)$.

Поэтому по теореме Коши

$$Q_n^{(p)}(x, t) = \frac{(-1)^p}{t^{p+1}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\delta_1 - i\infty}^{-\delta_1 + i\infty} \frac{e^{x\zeta}\, d\zeta}{\zeta(\zeta + t)^{p+1} \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{\zeta}{t_j}\right)} =$$

$$= \frac{(-1)^p}{t^{p+1}} + I_n^{(p)}(x, t). \tag{1.10}$$

Далее имеем

$$|I_n^{(p)}(x, t)| \leqslant \frac{1}{2\pi} e^{-\delta_1 x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{|-\delta_1 + i\lambda|\, |t - \delta_1 + i\lambda| \prod_{j=1}^{n} \left|1 - \frac{\delta_1}{t_j} + i\frac{\lambda}{t_j}\right|}.$$

С другой стороны

$$|-\delta_1 i\lambda| = \sqrt{\delta_1^2 + \lambda^2},$$

$$|t - \delta_1 + i\lambda| = \sqrt{(t - \delta_1)^2 + \lambda^2} > \sqrt{(r - x_r)^2 + \lambda^2},\ 0 < x < 1,$$

$$\left|1 - \frac{\delta_1}{t_j} + i\frac{\lambda}{t_j}\right| = \sqrt{\left(1 - \frac{\delta_1}{t_j}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{t_j^2}} > 1 - \frac{\delta_1}{t_j}.$$

Итак

$$|I_n^{(p)}(x, t)| < C_p^*(\delta, r, R) \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{\delta_1}{t_j}\right)^{-1},\ x \in [0, \infty], \tag{1.11}$$

где постоянные

$$C_p^*(\delta, r, R) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{\delta_1^2 + \lambda^2}\left[(t - \delta_1)^2 + \lambda^2\right]^{p + \frac{1}{2}}} < +\infty\ (p = 0, 1, 2, \cdots)$$

не зависят от n.

Заметив теперь, что при $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, $(1-x)^{-1} \leqslant e^{2x}$, из (1.11) при $\delta < \min\left\{\frac{1}{2}\, t,\ 2\pi r\right\}$ будем иметь

$$|l_n^{(p)}(x,\ t)| \leqslant C_p^*(\delta,\ r,\ R) \exp\left\{\delta \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{t_j}\right\} \begin{matrix} 1 \leqslant n < \infty \\ 0 \leqslant p < \infty. \end{matrix}$$

Отсюда, ввиду (1.10), следуют оценки (б) леммы.

Точно так же как и лемма 1 устанавливается

Лемма 2. *Пусть* $\sigma_{n,\,k} = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{t_j}$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$; $\sigma_{n,\,n} = 0$ *и*

$$A_{p,\,n,\,k}(t) = \frac{d^p}{dt^p}\left[e^{-t\sigma_{n,\,k}} - \prod_{j=k+1}^{n}\left(1 - \frac{t}{t_j}\right)\right],\ 0 < t < \infty,$$

причем

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{t}{t_j}\right) = 1.$$

Тогда для любых $0 < r < R < \infty$ *имеют место оценки:*

$$|A_{p,\,n,\,k}(t)| \leqslant K_p(r,\ R) \exp\left(-\frac{\theta r}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{t_j}\right), \tag{1.12}$$

$$r \leqslant t \leqslant R,\ 0 < \theta < 1,\ k = 0,\ 1,\ 2, \cdots, n,$$

где $K_p(r,\ R)$ *— постоянные, не зависящие от* n.

1.2. Если функция $f(x)$ непрерывна на полуоси $0 \leqslant x \leqslant \infty$, то под нормой будем понимать следующее число:

$$\|f\|_\infty = \sup_{0 < x < \infty} |f(x)|.$$

Теперь, существенно опираясь на лемму 1, приведем доказательство одной теоремы, которая позволяет дать полное решение обобщенной проблемы моментов (3). Частный случай этой теоремы позволяет также попутно получить новое доказательство теоремы А. О. Гельфонда о приближении обобщенными полиномами С. Н. Бернштейна (см. [6]).

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{t_n\}$ *удовлетворяет условиям* (1) *и* (2). *Тогда для всех* t $(0 < t < \infty)$, *притом равномерно в любом промежутке* $r \leqslant t \leqslant R$ $(0 < r < R < \infty)$ *будем иметь*

$$\lim_{n \to \infty} \left\| e^{-tx} x^p - \sum_{k=0}^{n} a_{k,\,n}^{(p)}(t)\, \omega_{n,\,k}(x) \right\|_\infty = 0,\ p = 0, 1, 2, \cdots, \tag{1.13}$$

где

$$a_{k,\,n}^{p}(t) = (-1)^p \frac{d^p}{dt^p}\left\{\prod_{j=k+1}^{n}\left(1 - \frac{t}{t_j}\right)\right\}. \tag{1.4}$$

Доказательство. Из (1.4) и определения функций $P_n(t)$, $Q_n(x,\ t)$ следует, что

$$r_n(x,\ t) = P_n(t) \cdot Q_n(x,\ t). \tag{1.14}$$

Если продифференцировать по t (1.3) p-раз, то получим

$$e^{-tx}x^p - \sum_{k=0}^{n} a_{k,n}^{(p)}(t)\,\omega_{n,k}(x) = \frac{d^p}{dt^p}\,[r_n(x,t)] =$$

$$= \sum_{m=0}^{p} C_p^m \frac{d^m}{dt^m}\,[P_n(t)]\,\frac{d^{p-m}}{dt^{p-m}}\,[Q_n(x,t)]. \qquad (1.15)$$

Отсюда, подчиняя в лемме 1 δ условию

$$\delta < \min\left\{\frac{1}{2}t_1,\ 2\varkappa r,\ \frac{r}{4}\right\},\quad 0 < \varkappa < 1,$$

из оценок этой леммы будет следовать справедливость неравенств вида

$$\left\| e^{-tx}x^p - \sum_{k=0}^{n} a_{k,n}^{(p)}(t)\,\omega_{n,k}(x)\right\|_{-} \leqslant$$

$$\leqslant D_p(\delta, r, R)\exp\left\{-\left(\frac{r}{4}-\delta\right)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{t_j}\right\}\ (p=0,1,2,\cdots;\ n=1,2,\cdots),$$

где $D_p(\delta, r, R)$ не зависит от $n \geqslant 1$.

Ввиду условия (2) из этих неравенств получим утверждение (1.13)—(1.14) теоремы.

Следствие. *При* $p=0$ *и* $t \in [0, \infty)$ *имеет место*

$$\lim_{n\to\infty}\left\| e^{-tx} - \sum_{k=0}^{n}\left\{\prod_{j=k+1}^{n}\left(1-\frac{t}{t_j}\right)\right\}\omega_{n,k}(x)\right\|_{-} = 0,\ x \in [0, \infty]. \qquad (1.16)$$

Действительно, при $t \in (0, \infty)$ это следует из теоремы 1. Остается убедиться, что (1.13) имеет место и при $t = 0$. Для этого заметим, что в этом случае получим утверждение 2 относительно свойств системы функций $\{\omega_{n,k}(x)\}$, т. е.

$$\sum_{k=0}^{n}\omega_{n,k}(x) \equiv 1. \qquad (1.17)$$

Введем в рассмотрение последовательности функций

$$\widetilde{B}_n(t, x) \equiv \widetilde{B}_n[e^{-tx}] = \sum_{k=0}^{n}\left\{\prod_{j=k+1}^{n}\left(1-\frac{t}{t_j}\right)\right\}\omega_{n,k}(x) \qquad (1.18)$$

и

$$B_n(t, x) \equiv B_n[e^{-tx}] = \sum_{k=0}^{n} e^{-t\sigma_{n,k}}\omega_{n,k}(x),\ n=0,1,2,\cdots, \qquad (1.19)$$

в которых

$$\sigma_{n,k} = \sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{t_j},\ k=0,1,2,\cdots,n-1;\ \sigma_{n,n}=0.$$

Из оценок (1.12) при $p=0$ и условия (2) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\left[e^{-t\sigma_{n,k}} - \prod_{j=k+1}^{n}\left(1-\frac{t}{t_j}\right)\right] = 0,\ k=0,1,2,\cdots,n.$$

Следовательно, при $t \in [0, \infty)$ и $x \in [0, \infty]$ в силу (1.16) получим

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n[e^{-ix}] - \bar{B}_n[e^{-ix}]\|_- = 0. \tag{1.19}$$

Следующая теорема, к доказательству которой приступим, является обобщением теоремы Ф. Хаусдорфа, рассмотревшего случай строго возрастающей последовательности $\{t_n\}$ (см. [1], а также [4] и [5]). В случае неубывающей последовательности, но с другими узлами интерполяции, эта теорема была установлена существенно иным методом в работе [6].

Теорема 2. *Пусть неубывающая последовательность $\{t_n\}$ удовлетворяет условиям* (1) и (2). *Тогда для произвольной непрерывной на* $[0, \infty]$ *функции* $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \|f(x) - B_n[f(x)]\|_- = 0,$$

где

$$B_n[f(x)] = \sum_{k=0}^{n} f(\sigma_{n,k})\,\omega_{n,k}(x), \quad \sigma_{n,k} = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{t_j}$$

есть квазиполином типа Бернштейна—Хаусдорфа.

Доказательство. Так как $\lim_{x\to\infty} f(x) < \infty$, то по теореме Вейерштрасса любую непрерывную на $[0, +\infty]$ функцию $f(x)$ можно равномерно аппроксимировать линейным агрегатом от системы функций $\{e^{-jx}\}_{j=0}^{\infty}$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой полином

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j e^{-jx}, \quad x \in [0, \infty],$$

что

$$\left\| f(x) - \sum_{j=0}^{m} a_j e^{-jx} \right\|_- < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда, в силу свойства (1.16) системы функций $\{\omega_{n,k}(x)\}$, будем иметь

$$\|B_n[f(x)] - B_n[P_m(x)]\|_- < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Но на следствия к теореме 1 и (1.19) следует, что

$$\|B_n[P_m(x)] - P_m(x)\|_- < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n > N(\varepsilon)$$

и следовательно

$$\|B_n[f(x)] - f(x)\|_- < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если в теореме 2 положить $f(x) = e^{-ix}x^p$, $p = 0, 1, 2, \cdots$, то получим

$$\lim_{n\to\infty} \|e^{-ix}x^p - B_n[e^{-ix}x^p]\|_- = 0, \quad x \in [0, \infty],$$

где

$$B_n[e^{-ix}x^p] = \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_{n,k}} \sigma_{n,k}^p\, \omega_{n,k}(x). \tag{1.20}$$

С другой стороны, если ввести в рассмотрение последовательность квазиполиномов

$$\widetilde{B}_n[e^{-tx}x^p] = \sum_{k=0}^{n}(-1)^p\frac{d^p}{dt^p}\left\{\prod_{j=k+1}^{n}\left(1-\frac{t}{t_j}\right)\right\}\omega_{n,k}(x), \qquad (1.21)$$

то из теоремы 1 вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty}\|e^{-tx}x^p - \widetilde{B}_n[e^{-tx}x^p]\|_\infty = 0.$$

Следовательно

$$\lim_{n\to\infty}\|B_n[e^{-tx}x^p] - \widetilde{B}_n[e^{-tx}x^p]\|_\infty = 0.$$

1.3. Если продифференцировать по t соотношение (1.3) s_m-1-раз, то получим

$$e^{-tx}x^{s_m-1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{s_m-1}\frac{d^{s_m-1}}{dt^{s_m-1}}\left\{\prod_{j=k+1}^{n}\left(1-\frac{t}{t_j}\right)\right\}\omega_{n,k}(x) +$$

$$+(-1)^{s_m-1}\frac{d^{s_m-1}}{ds^{s_m-1}}\left\{r_n(x,t)\right\}\ (m=0,1,2,\cdots,n).$$

Но так как t является нулем кратности s_m для остаточного члена $r_n(x,t)$, то нетрудно убедиться непосредственным подсчетом, что

$$\frac{d^{s_m-1}}{dt^{s_m-1}}\{r_n(x,t)\}_{t=t_m}=0$$

и поэтому справедливо следующее тождество:

$$e^{-t_mx}x^{s_m-1} \equiv \sum_{k=m}^{n}(-1)^{s_m-1}\frac{d^{s_m-1}}{dt^{s_m-1}}\left\{\prod_{j=k+1}^{n}\left(1-\frac{t}{t_j}\right)\right\}_{t=t_m}\omega_{n,k}(x). \qquad (1.22)$$

Введем в рассмотрение следующий моментный оператор M:

$$M[e^{-t_mx}x^{s_m-1}] = \mu_m,\ m=0,1,2,\cdots,\ 0\leqslant x<\infty$$

и величины

$$\omega_{n,k} = \prod_{j=k+1}^{n}t_j\sum_{j=k}^{n}c_{kj}^{(n)}\mu_j,$$

где $c_{kj}^{(n)}$ определяются из формул (1.6). Легко видеть, что

$$\omega_{n,k} = M\{|\omega_{n,k}(x)|\},\ x\in[0,+\infty]. \qquad (1.23)$$

Лемма 3. *Если*

$$\sum_{k=0}^{n}|\omega_{n,k}|<C,\ n=0,1,2,\cdots, \qquad (1.24)$$

где C — не зависящая от n постоянная, то

$$\mu_m = \lim_{n\to\infty}M\{|B_n[e^{-t_mx}x^{s_m-1}]|\},\ m=0,1,2,\cdots. \qquad (1.25)$$

Доказательство. Подействовав моментным оператором на тождество (1.22) и (1.21) при $p=s_m-1$, будем иметь

$$\mu_m = M[e^{-t_m x} x^{s_m-1}] = \sum_{k=m}^{n} (-1)^{s_m-1} \frac{d^{s_m-1}}{dt^{s_m-1}} \left\{ \prod_{j=k+1}^{n} \left(1 - \frac{t}{t_j}\right) \right\}_{t=t_m} \omega_{n,k}$$

и

$$M\left\{\bar{B}_n [e^{-tm} x^{s_m-1}]\right\} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{s_m-1} \frac{d^{s_m-1}}{dt^{s_m-1}} \left\{ \prod_{j=k+1}^{n} \left(1 - \frac{t}{t_j}\right) \right\}_{t=t_m} \omega_{n,k}.$$

Далее для данного $m\ (0 \leqslant m < \infty)$ отсюда получим

$$|\mu_m - M[\bar{B}_n [e^{-t_m x} x^{s_m-1}]]| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{s_m-1} \frac{d^{s_m-1}}{dt^{s_m-1}} \left\{ \prod_{j=k+1}^{n} \left(1 - \frac{t}{t_j}\right) \right\}_{t=t_m} \omega_{n,k}. \qquad (1.26)$$

Применяя утверждение а) леммы 1 к полиномам

$$P_{n,k}(t) = \prod_{j=k+1}^{n} \left(1 - \frac{t}{t_j}\right),$$

можем утверждать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon, m) \geqslant 1$, что

$$\left|(-1)^{s_m-1} \frac{d^{s_m-1}}{dt^{s_m-1}} \left\{ \prod_{j=k+1}^{n} \left(1 - \frac{t}{t_j}\right) \right\}_{t=t_m}\right| < \varepsilon,\ 0 \leqslant k \leqslant m-1;\ n > N.$$

Но из условия (1.24) следует, что

$$\sum_{k=0}^{m-1} |\omega_{n,k}| < C,\ 0 \leqslant n < +\infty.$$

Отсюда и из (1.26) получим

$$\mu_m = \lim_{n\to\infty} M[\bar{B}_n [e^{-t_m x} x^{s_m-1}]],\ m = 0, 1, 2, \cdots.$$

Чтобы закончить доказательство, заметим, что из оценок (1.12) леммы 2 при $p = s_m$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \left[e^{-t_{n,k}} \tau_{n,k}^{s_m-1} - (-1)^{s_m-1} \frac{d^{s_m-1}}{dt^{s_m-1}} \left\{ \prod_{j=k+1}^{n} \left(1 - \frac{t}{t_j}\right) \right\} \right] = 0.$$

Отсюда и из условия (1.24) леммы получим требуемое.

Замечание. Если в лемме 3 положить $m = 0$, то поскольку $t_0 = 0$ и $s_0 = 1$, будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} M[B_n [e^{-t_0 x} x^{t_0-1}]] = \mu_0 = M[1] =$$

$$= M\left\{\sum_{k=0}^{n} \omega_{n,k}(x)\right\} = \sum_{k=0}^{n} \omega_{n,k}.$$

§ 3. Основные результаты

Теорема 3. *Для того, чтобы последовательность* $\{\mu_n\}$ *была моментной относительно функции* $\alpha(x)$, $x \in [0, \infty]$ *с конечным изменением на* $[0, +\infty]$, *т. е.*

$$\mu_n = \int_0^\infty e^{-t_n x} x^{s_n - 1}\, d\alpha(x),\ n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{2.1}$$

необходимо и достаточно выполнение условий

$$\sum_{k=0}^{n} |\omega_{n,k}| = \sum_{k=0}^{n} \left| \prod_{j=k+1}^{n} t_j \sum_{j=k}^{n} c_{k,j}^{(n)} \mu_j \right| < C, \tag{2.2}$$

где $c_{k,j}^{(n)}$ *определяются формулами* (1.6), *а* C *— не зависящая от* n *постоянная.*

Доказательство. Необходимость. Пусть последовательность μ_n — моментная. В силу (2.1) и (1.16) справедливы равенства

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \prod_{j=k+1}^{n} t_j \sum_{j=k}^{n} c_{k,j}^{(n)} \mu_j \right| = \int_0^\infty \left[\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k^{(n)} \omega_{n,k}(x) \right] d\alpha(x),$$

$$\varepsilon_k^{(n)} = \operatorname{sign} \omega_{n,k}.$$

Но, так как

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k^{(n)} \omega_{n,k}(x) \right| \leqslant 1,\ n = 0, 1, 2, \cdots,$$

то

$$\sum_{k=0}^{n} |\omega_{n,k}| \leqslant \bigvee_0^\infty [\alpha(x)] < +\infty,$$

поскольку $\alpha(x)$ — функция с конечным изменением на $[0, \infty]$.

Достаточность. Введем в рассмотрение ступенчатую функцию $\alpha_n(x)$, задав ее на $[0, +\infty]$ следующим образом:

$$\alpha_n(x) = \begin{cases} -\sum_{j=0}^{n} \omega_{n,j} = -\mu_0, & \text{при } x = 0 \\ -\sum_{j=0}^{k} \omega_{n,j}, & \text{при } \sigma_{n,k+1} < x \leqslant \sigma_{n,k} = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{t_j} \\ & (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1) \\ 0, & \text{при } \sigma_{n,0} < x \leqslant +\infty. \end{cases}$$

Из определения функции $\alpha_n(x)$ следует

$$\alpha_n(\sigma_{n,k}+) - \alpha_n(\sigma_{n,k}-) = \omega_{n,k},\ k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

и в силу условий (2.2)

$$|\alpha_n(x)| \leqslant C,\ n = 0, 1, 2, \cdots;\ x \in [0, \infty],$$

$$\operatorname{Var}[\alpha_n(x)] = |\alpha_n(+\infty) - \alpha_n|(\sigma_{n,0})| + \sum_{k=0}^{n} |\alpha_n(\sigma_{n,k}+) -$$

$$- \alpha_n|\sigma_{n,k}-)| = \sum_{k=0}^{n} |\omega_{n,k}| < C,$$

где C — не зависящая от n постоянная.

Отсюда по первой теореме Хелли можно указать такую последовательность номеров $\{n_k\} \uparrow +\infty$, что последовательность $\{\alpha_{n_k}(x)\}$ в

каждой точке $x \in [0, +\infty]$ сходится к некоторой функции ограниченной вариации $\alpha(x)$.

Поскольку условия второй теоремы Хелли также выполнены, то применяя ее, получим

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-t_m x} x^{s_m-1} d\alpha_{n_k}(x) = \int_0^{\infty} e^{-t_m x} x^{s_m-1} d\alpha(x), \quad m = 0, 1.$$

С другой стороны, так как $\alpha_n(x)$ — ступенчатая функция со скачками $\omega_{n,k}\,(0 \leqslant k \leqslant n)$ в узлах $\sigma_{n,k}$, то

$$\int_0^{\infty} e^{-t_m x} x^{s_m-1}\, d\alpha_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{-t_m \sigma_{n,k}} \sigma_{n,k}^{s_m-1} \omega_{n,k}.$$

Но из (1.20) при $p = s_m - 1$ и (1.23) будем иметь

$$\sum_{k=0}^{n} e^{-t_m \sigma_{nk}} c_{n,k}^{s_m-1} \omega_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} e^{-t_m \sigma_{nk}} \sigma_{n,k}^{s_m-1} M\{\omega_{n,k}(x)\} =$$

$$= M\left\{\sum_{k=0}^{n} e^{-t_m \sigma_{n,k}} \sigma_{n,k}^{s_m-1} \omega_{n,k}(x)\right\} = M\{B_n[e^{-t_m x} x^{s_m-1}]\}.$$

Таким образом, имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-t_m x} x^{s_m-1}\, d\alpha_n(x) = M\{B_n[e^{-t_m x} x^{s_m-1}]\}, \quad 0 \leqslant m < \infty.$$

Применяя лемму 3 к правой части этого равенства и используя (1.25), получим утверждение (2.1) теоремы.

Для того, чтобы получить второй признак моментности для последовательности $\{\mu_n\}$, дадим одно

Определение. Будем говорить, что последовательность $\{\mu_n\}_0^{\infty}$ является обобщенно-монотонной, если

$$\Delta^n \mu_k = \prod_{\nu=0}^{k} t_{k+\nu} \sum_{j=0}^{n} c_{k+j}^{(n)} \mu_{k+j} \geqslant 0, \quad \begin{matrix} 0 \leqslant k \leqslant n \\ n = 0, 1, 2, \cdots, \end{matrix} \tag{2.3}$$

где

$$c_{k+j}^{(n)} = \frac{1}{\Gamma(s_{k+j})\,\Gamma(p_{k+j}^{(n)} - s_{k+j} + 1)} \frac{d^{\,p_{k+j}^{(n)} - s_{k+j}}}{d\zeta^{\,p_{k+j}^{(n)} - s_{k+j}}} \left\{ \prod_{l=0}^{n} (\zeta + t_{k+l})^{-1} \right\}_{\substack{t_{k+l} \neq t_{k+j} \\ \zeta = -t_{k+j}}}. \tag{2.4}$$

Если последовательность $\{t_n\}$ строго возрастающая, то в силу того что

$$c_{k+j}^{(n)} = \frac{1}{\prod_{\nu=0}^{n} (t_{k+\nu} - t_{j+\nu})}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

будем иметь

$$\Delta^n \mu_k = \prod_{\nu=1}^{n} t_{k+\nu} \sum_{j=0}^{n} \frac{\mu_{k+j}}{\prod_{\nu=0}^{n} (t_{k+\nu} - t_{k+j})} \quad (0 \leqslant k \leqslant n,\ n = 0, 1, 2, \cdots),$$

что совпадает с известным определением вполне монотонности для возрастающей последовательности $\{t_n\}$, данным Хаусдорфом.

Теорема 4. *Для того, чтобы последовательность $\{\mu_n\}$ была моментной относительно неубывающей и ограниченной на $[0, +\infty]$ функции $\rho(x)$, т. е.*

$$\mu_n = \int_0^{\infty} e^{-tnx} x^{s_n - 1}\, d\rho(x),\ n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{2.5}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta^n \mu_k \geqslant 0,\ (0 \leqslant k \leqslant n,\ n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{2.6}$$

Доказательство. Необходимость. Из определения (1.23) величин $\{\omega_{n,k}\}$ следует что

$$\omega_{n+k,k} = \prod_{\nu=k+1}^{n+k} t_\nu \sum_{j=k}^{n+k} c_{k+j}^{(n+k)} \mu_j = \prod_{\nu=1}^{n} t_{k+\nu} \sum_{j=0}^{n} c_{k+j}^{(n)} \mu_{k+j}.$$

Отсюда и из (2.6) имеем

$$\Delta^n \mu_k = M\{\omega_{n+k,k}(x)\} = \omega_{n+k,0} = \prod_{\nu=1}^{n} t_{k+\nu} \sum_{j=0}^{n} c_{k+j}^{(n)} \mu_{k+j}. \tag{2.7}$$

Но так как последовательность $\{\mu_n\}$ моментная, то ввиду (2.5) и (2.7) получим

$$\Delta^n \mu_k = \prod_{\nu=1}^{n} t_{k+\nu} \sum_{j=0}^{n} c_{k+j}^{(n)} \mu_{k+j} = \prod_{\nu=1}^{n} t_{k+\nu} \sum_{j=0}^{n} c_{k+j}^{(n)} \int_0^{\infty} e^{-t_{k+j}x} x^{s_{k+j}-1}\, d\rho =$$

$$= \int_0^{\infty} \omega_{n+k,k}(x)\, d\rho(x),\ 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Поскольку $\omega_{n+k,k}(x) \geqslant 0$, а $\rho(x)$ — неубывающая функция, то необходимость теоремы доказана.

Достаточность. В силу (2.7) и (2.6) получим

$$\Delta^{n-k} \mu_k = M\{\omega_{n,k}(x)\} = \omega_{n,k} > 0\ (0 \leqslant k \leqslant n,\ n = 0, 1, 2),$$

$$\sum_{k=0}^{n} \Delta^{n-k} \mu_k = \sum_{k=0}^{n} \omega_{n,k},\ n = 0, 1, 2 \cdots.$$

С другой стороны, ввиду замечания к лемме 3 имеем

$$\sum_{k=0}^{n} \omega_{n,k} = M\left\{\sum_{k=0}^{n} \omega_{n,k}(x)\right\} = M\{1\} < +\infty.$$

Таким образом, условия теоремы 3 выполнены. Применяя ее, пост-

роим возрастающую и ограниченную на $[0, +\infty]$ функцию $\rho(x)$, удовлетворяющую условиям

$$\mu_n = \int_0^\infty e^{-t_n x} x^{s_n - 1} d\rho(x), \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Теорема 4 доказана.

Замечание. Если в теоремах 3 и 4 положить $s_n = 1$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, то получим классические теоремы Ф. Хаусдорфа.

В заключение автор выражает глубокую благодарность академику АН Армении М. М. Джрбашяну за постановку задач и внимание к работе.

Ереванский политехнический
институт

Поступила 7.XII.1990

Ռ. Ա. ԲԱՂԻՑԱՆ. Ֆ. Հաուսդորֆի մոմենտների ընդհանրացված պրոբլեմը *(ամփոփում)*

Ներկա հոդվածը նվիրված է Հաուսդորֆի դասական մոմենտների պրոբլեմի ընդհանրացմանը։ Բերվում են այդ կապակցությամբ երկու հայտանիշներ։

R. A. BAGHIAN. *The general moment problem of F. Hausdorff* (summary)

In the present paper is studiod a feneralizations of classical moment problems of F. Hausdorff. We prove two general theorems concerning this problems.

ЛИТЕРАТУРА

1. *F. Hausdorf.* Summations methoden und momentfolgen, Math. Zeitschrift, 9, 1921 I, 74—109, II, 280—299.
2. *И. П Натансон.* Конструктивная теория функций, М., ГИТЛ, 1949.
3. *I. A, Shohat and Tamarkin.* The problem of moments, Publ. Amer. Math. Soc. New York, 1943.
4. *I. I. Hirschman and D. V. Widder.* Duke Math. I., 16, № 3, 1949, 433—437.
5. *И. И. Хиршман и Д. В. Уиддер.* Преобразования типа свертки, М., ИЛ, 1958.
6. *А. О. Гельфонд.* Об обобщенных полиномах С. Н. Бернштейна, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, № 5, 1950.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 4, 1991 Математика

УДК 517.55

А. О. КАРАПЕТЯН

О ВЫЧИСЛЕНИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ТИПА КОШИ

1. Пусть $n \geqslant 1$ и $|a_{ij}|_{i,j=1}^{n}$ — произвольная совокупность комплексных чисел, упорядоченная двойной нумерацией при помощи индексов $i, j = 1, \cdots, n$. Договоримся обозначать через

$$\det |a_{ij}|_{i,j=1}^{n} \tag{1}$$

определитель той матрицы A размеров $n \times n$, у которой на пересечении i-ой строки и j-ого столбца находится число a_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$. Напомним далее, что определителем Коши называется определитель

$$(\det (l_i + m_j)^{-1})_{i,j=1}^{n}, \tag{2}$$

где $l_1, \cdots, l_n$ и $m_1, \cdots, m_n$ — независимые комплексные переменные (таким образом, здесь $a_{ij} = (l_i + m_j)^{-1}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$). Известны различные способы вычисления этого определителя (см. [1, отд. VII, задача 3] или [2, теорема 1.1.3]). Окончательный же результат, известный как лемма Коши, гласит:

$$\det \left| (l_i + m_j)^{-1} \right|_{i,j=1}^{n} = \prod_{1 \leqslant r < s \leqslant n} (l_r - l_s) \cdot \prod_{1 \leqslant r < s \leqslant n} (m_r - m_s) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (l_i + m_j)^{-1}. \tag{3}$$

Полагая в (3) $m_j = j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, мы получаем

$$\det |(l_i + j)^{-1}|_{i,j=1}^{n} = (-1)^{n(n-1)/2} \cdot 1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot (n-1)! \times$$

$$\times \prod_{1 \leqslant r < s \leqslant n} (l_r - l_s) \cdot \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (l_i + j)^{-1}. \tag{4}$$

Нашей целью является обобщение формулы (4), а точнее — вычисление определителя

$$\det |B(l_i + j,\ t+1)|_{i,j=1}^{n}, \tag{5}$$

где l_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и t — независимые комплексные переменные, а B — функция Эйлера. Заметим, что при $t = 0$

$$B(l_i + j,\ t+1) = \frac{\Gamma(l_i + j) \cdot \Gamma(t+1)}{\Gamma(l_i + j + t + 1)} = \frac{\Gamma(l_i + j)}{\Gamma(l_i + j + 1)} = \frac{1}{l_i + j}$$

$$(1 \leqslant i, j \leqslant n), \tag{6}$$

так что вычисление определителя (5) в действительности будет существенным обобщением соотношения (4). Отметим также, что опре-

делитель (5) возник весьма естественным образом при решении автором одной задачи многомерного комплексного анализа.

2. Прежде всего введем некоторые обозначения. Пусть $\mathbf{D}=\{\zeta\in\mathbf{C}: |\zeta|<1\}$ суть единичный круг в комплексной плоскости. Далее, при произвольном $n\geqslant 1$ положим (см. монографию [2, стр. 19]):

$$D(z_1,\cdots,z_n)\overset{\text{def}}{=}\prod_{1\leqslant r<s\leqslant n}(z_r-z_s),\ z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n. \tag{7}$$

Кроме того

$$\Delta_n\overset{\text{def}}{=}\{z\in\mathbf{C}^n:\ D(z)=0\}. \tag{8}$$

Очевидно Δ_n нигде не плотно в $\mathbf{C}^n$; более того, для произвольного открытого множества $U\subset\mathbf{C}^n$ множество $U\cap\Delta_n$ нигде не плотно в U.

Далее, пусть множество $\Omega\subset\mathbf{C}$ открыто и функции $\{f_j(\omega)\}_{j=1}^n$, $\omega\in\Omega$, голоморфны. Тогда очевидно, что функция

$$F(z)\equiv F(z_1,\cdots,z_n)=\det\|f_j(z_i)\|_{i,j=1}^n \tag{9}$$

являются голоморфной функцией n комплексных переменных $z_1,\cdots,z_n$ в $\Omega\times\cdots\times\Omega=\Omega^n\subset\mathbf{C}^n$. Изучение свойств этой функции мы расчленим на ряд последовательных шагов.

Лемма 1. *Пусть множество $\Omega\subset\mathbf{C}$ открыто и функция φ голоморфна в Ω. Тогда существует голоморфная функция $\psi(z,w)$, $(z,w)\in\Omega\times\Omega\subset\mathbf{C}^2$, такая, что*

$$\varphi(z)-\varphi(w)\equiv(z-w)\cdot\psi(z,w),\ z,w\in\Omega. \tag{10}$$

Доказательство. Утверждение леммы очевидно, ибо искомая функция ψ задается формулой

$$\psi(z,w)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(z)-\varphi(w)}{z-w}, & z,w\in\Omega,\ z\neq w,\\ \varphi'(z), & z=w\in\Omega.\end{cases} \tag{11}$$

Лемма 2. *Пусть функция $H(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ голоморфна в единичном поликруге $\mathbf{D}^n\subset\mathbf{C}^n$ и при произвольном фиксированном $(z_2,\cdots,z_n)\in\mathbf{D}^{n-1}$ таком, что $z_i\neq z_j$ при $2\leqslant i<j\leqslant n$, имеем*

$$H(\omega,z_2,\cdots,z_n)=0,\ \omega=z_k\ (2\leqslant k\leqslant n). \tag{12}$$

Тогда существует голоморфная в $\mathbf{D}^n$ функция G, для которой справедливо равенство

$$H(z_1,z_2,\cdots,z_n)\equiv\prod_{k=2}^{n}(z_1-z_k)\cdot G(z_1,z_2,\cdots,z_n),$$

$$(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\mathbf{D}^n. \tag{13}$$

Доказательство. При $\rho\in(0,1)$ положим

$$\mathbf{D}_\rho^n=\{z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n:|z_k|<\rho\ (1\leqslant k\leqslant n)\}. \tag{14}$$

Очевидно, если $0<\rho_1<\rho_2<1$, то $\mathbf{D}^n_{\rho_1}\subset\mathbf{D}^n_{\rho_2}$, причем области $\mathbf{D}^n_\rho$ $(0<\rho<1)$ в объединении дают $\mathbf{D}^n$. Теперь зафиксируем $\rho\in(0,1)$ и определим в $\mathbf{D}^n_\rho$ функцию

$$G_\rho(z_1, z_2, \cdots, z_n) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}\frac{H(\zeta, z_2, \cdots, z_n)}{(\zeta-z_1)\cdot(\zeta-z_2)\cdot\ldots\cdot(\zeta-z_n)}\,d\zeta,$$

$$(z_1, z_2, \cdots, z_n)\in\mathbf{D}^n_\rho, \tag{15}$$

которая, очевидно, голоморфна. Пусть далее $(z_2, \cdots, z_n)\in\mathbf{D}^{n-1}_\rho$ и $z_i\neq z_j$ при $2\leqslant i<j\leqslant n$. Тогда в силу условия (12) функция

$$\frac{H(\zeta, z_2, \cdots, z_n)}{(\zeta-z_2)\cdot\ldots\cdot(\zeta-z_n)},\quad \zeta\in\mathbf{D}, \tag{16}$$

голоморфна в $\mathbf{D}$. Следовательно, по интегральной формуле Коши из (15) получаем

$$G_\rho(z_1, z_2, \cdots, z_n) = \frac{H(z_1, z_2, \cdots, z_n)}{(z_1-z_2)\cdot\ldots\cdot(z_1-z_n)},$$

$$|z_1|<\rho,\ z_1\neq z_k\ (2\leqslant k\leqslant n). \tag{17}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$H(z_1, z_2, \cdots, z_n) = \prod_{k=2}^{n}(z_1-z_k)\cdot G_\rho(z_1, z_2, \cdots, z_n), \tag{18}$$

если $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)\in\mathbf{D}^n_\rho$ и $z_i\neq z_j$ $(1\leqslant i<j\leqslant n)$.

Учитывая непрерывность соответствующих функций, заключаем, что равенство (18) справедливо при всех $z\in\mathbf{D}^n_\rho$. И, наконец, существование голоморфной функции $G(z)$, $z\in\mathbf{D}^n$, удовлетворяющей (13), вытекает из того факта, что при $0<\rho_1<\rho_2<1$ функция $G_{\rho_2}(z)$, $z\in\mathbf{D}^n_{\rho_2}$, является голоморфным продолжением функции $G_{\rho_1}(z)$, $z\in\mathbf{D}^n_{\rho_1}$.

Лемма 3. *Пусть $\Omega\subset\mathbf{C}$ — некоторая область, биголоморфно эквивалентная единичному кругу $\mathbf{D}$, и функции $\{f_j(\omega)\}_{j=1}^n$, $\omega\in\Omega$, голоморфны. Тогда существует голоморфная в $\Omega^n\subset\mathbf{C}^n$ функция G такая, что*

$$F(z)\overset{\text{def}}{=}\det|f_j(z_i)|_{i,j=1}^n \equiv D(z)\cdot G(z),\quad z=(z_1, \cdots, z_n)\in\Omega^n, \tag{19}$$

где $D(z)$ определено по формуле (7).

Доказательство. Прежде всего отметим, что голоморфная функция G, удовлетворяющая (19), единственна, поскольку множество $\Omega^n\cap\Delta_n$ нигде не плотно в Ω^n. Поэтому сосредоточимся на вопросе существования такой функции. Легко видеть, что на основании леммы 1 нам достаточно ограничиться рассмотрением случая $\Omega=\mathbf{D}$, и тогда мы будем иметь голоморфные в единичном круге $\mathbf{D}$ функции $\{f_j(\omega)\}_{j=1}^n$, $\omega\in\mathbf{D}$.

Доказательство проведем индукцией по $n\geqslant 1$. При $n=1$ утверждение леммы тривиально. Допустив его справедливость при

$n-1$, рассмотрим случай произвольного n. Положив при $z=(z_1,\cdots, z_n)\in \mathbf{D}^n$

$$F(z)\equiv \det |f_j(z_i)|_{i,j=1}^n \begin{vmatrix} f_1(z_1) & f_2(z_1)\cdots f_n(z_1) \\ f_1(z_2) & f_2(z_2)\cdots f_n(z_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_1(z_n) & f_2(z_n)\cdots f_n(z_n) \end{vmatrix}, \tag{20}$$

обозначим через $F_k\,(1\leqslant k\leqslant n)$ алгебраическое дополнение элемента $f_k(z_1)$ в определителе (20). Тогда по теореме Лапласа имеем

$$F(z)\equiv \sum_{k=1}^{n} f_k(z_1)\cdot F_k,\quad z=(z_1,\cdots, z_n)\in \mathbf{D}^n. \tag{21}$$

Заметим далее, что функции $F_k\,(1\leqslant k\leqslant n)$ голоморфны и зависят лишь от $(z_2,\cdots, z_n)\in \mathbf{D}^{n-1}$; более того, в силу индуктивного предположения справедливы равенства $(1\leqslant k\leqslant n)$:

$$F_k(z_2,\cdots, z_n)\equiv \prod_{2\leqslant r<s\leqslant n}(z_r-z_s)\cdot G_k(z_2,\cdots z_n),$$

$$(z_2,\cdots, z_n)\in \mathbf{D}^{n-1}, \tag{22}$$

где функции $G_k\,(1\leqslant k\leqslant n)$ голоморфны в $\mathbf{D}^{n-1}$.

Комбинируя (21) и (22), приходим к соотношению

$$F(z_1,\cdots, z_n)\equiv \prod_{2\leqslant r<s\leqslant n}(z_r-z_s)\cdot H(z_1,\cdots, z_n) \tag{23}$$

с некоторой голоморфной в $\mathbf{D}^n$ функцией H, которую даже можно выписать в явном виде. Из (20), (23) следует, что если $(z_2,\cdots, z_n)\in \mathbf{D}^{n-1}$ и $z_r\neq z_s$ при $2\leqslant r<s\leqslant n$, то

$$H(z_1, z_2,\cdots, z_n)=0,\ z_1=z_k\,(2\leqslant k\leqslant n). \tag{24}$$

Следовательно, в силу леммы 2 справедливо представление

$$H(z_1, z_2,\cdots, z_n)\equiv \prod_{k=2}^{n}(z_1-z)\cdot G(z_1, z_2,\cdots, z_n), \tag{25}$$

где функция G голоморфна в $\mathbf{D}^n$ и, что важнее всего, является искомой, как это следует из (23) и (25). Итак, лемма полностью доказана.

Замечание 1. Очевидно утверждение леммы 3 справедливо для более широкого класса областей $\Omega\subset \mathbf{C}$. Например, для таких Ω, которые представимы в виде объединения возрастающей последовательности областей $\{\Omega_m\}_{m=1}^{\infty}$, каждая из которых биголоморфно эквивалентна единичному кругу D (в частности, для $\Omega=\mathbf{C}$).

Замечание 2. Утверждение леммы 3 интересно сопоставить с теоремой 1.2.4 монографии Хуа Ло-кена [2], которая дает точное значение предела

$$\lim \frac{\det |f_j(z_i)|_{i,j=1}^n}{D(z_1, z_2,\cdots, z_n)} \tag{26}$$

при $z_1\to z,\ z_2\to z,\cdots, z_n\to z$.

Лемма 4. *Пусть* $\{Q_j(\omega)\}_{j=1}^n$ — *произвольные полиномы от* $\omega \in \mathbf{C}$. *Тогда существует полином* $Q = Q(z_1, \cdots, z_n)$ *от переменных* $z_1, \cdots, z_n \in \mathbf{C}$, *такой, что*

$$\det Q_j(z_l)_{l,j=1}^n \equiv D(z) \cdot Q(z), \quad z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n, \tag{27}$$

где $D(z)$ *определено по формуле* (7). *Если к тому же* $\deg Q_j \leqslant n-1$ $(1 \leqslant j < n)$, *то* $Q(z) \equiv \text{const}$, $z \in \mathbf{C}^n$, *то есть*

$$\det |Q_j(z_l)|_{l,j=1}^n \equiv \text{const} \cdot D(z), \quad z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n. \tag{28}$$

Доказательство. Прежде всего, положим $N = \max\{n-1; \deg Q_j (1 \leqslant j \leqslant n)\}$. Далее, в силу замечания 1 к лемме 3 существует целая функция $Q(z)$, $z \in \mathbf{C}^n$ такая, что

$$\det |Q_j(z_l)|_{l,j=1}^n \equiv \prod_{1 \leqslant r < s \leqslant n} (z_r - z_s)\, Q(z_1, \cdots, z_n),$$
$$z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n. \tag{29}$$

Зафиксируем произвольное $(z_2, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^{n-1}$ такое, что $z_r \neq z_s$ при $2 \leqslant r < s \leqslant n$. Тогда в левой части тождества (29) стоит полином от $z_1 \in \mathbf{C}$ степени $\leqslant N$, а в правой части — произведение полинома от $z_1 \in \mathbf{C}$ степени $n-1$ и целой функции $Q(z_1, z_2, \cdots, z_n)$, $z_1 \in \mathbf{C}$. Следовательно, имеем

$$\frac{\partial^{N+1-(n-1)}}{\partial z_1^{N+1-(n-1)}} Q(z_1, z_2, \cdots, z_n) \equiv 0, \quad z_1 \in \mathbf{C}. \tag{30}$$

Из соображений непрерывности равенство (30) остается в силе для произвольного $(z_2, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^{n-1}$ (без ограничения: $z_r \neq z_s$ при $2 \leqslant r < s \leqslant n$). Поскольку вместо координаты z_1 мы могли бы взять любую другую, то окончательно получаем $(1 \leqslant k \leqslant n)$

$$\frac{\partial^{N+1-(n-1)}}{\partial z_k^{N+1-(n-1)}} Q(z_1, \cdots, z_n) \equiv 0, \quad (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n. \tag{31}$$

Из (31) следует, что $Q(z_1, \cdots, z_n)$ суть полином от переменных $z_1, \cdots, z_n \in \mathbf{C}$ степени не выше, чем, например, $n \cdot (N - (n-1))$. Если к тому же $\deg Q_j \leqslant n-1$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, то $N = n-1$ и тогда $Q \equiv \text{const}$. Тем самым лемма полностью доказана.

Замечание 3. Из доказательства этой леммы видно, что при условии $\deg Q_j \leqslant n-2$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ $Q \equiv 0$, т. е. $\det |Q_j(z_l)|_{l,j=1}^n \equiv 0$, $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n$. Однако этот факт нам в дальнейшем не понадобится.

3. Введем в рассмотрение следующие специальные полиномы:

$$P_1(\omega; t) = (\omega + t + 2) \cdot (\omega + t + 3) \cdot \cdots \cdot (\omega + t + n),$$
$$P_2(\omega; t) = (\omega + 1) \cdot (\omega + t + 3) \cdot \cdots \cdot (\omega + t + n),$$
$$P_3(\omega; t) = (\omega + 1) \cdot (\omega + 2) \cdot (\omega + t + 4) \cdot \cdots \cdot (\omega + t + n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_{n-1}(\omega; t) = (\omega + 1) \cdot (\omega + 2) \cdot \cdots \cdot (\omega + n - 2) \cdot (\omega + t + n)$$
$$P_n(\omega; t) = (\omega + 1) \cdot (\omega + 2) \cdot \cdots \cdot (\omega + n - 2) \cdot (\omega + n - 1),$$
$$\omega, t \in \mathbf{C}.$$

Поскольку при любом фиксированном $t \in \mathbf{C}$ полиномы $P_j(\omega; t)$, $\omega \in \mathbf{C}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ имеют степень $n-1$, то в силу леммы 4 (см. (28)) получаем

$$\det |P_j(\omega_l;\ t)|_{l,\,j=1}^{n} \equiv D(\omega_1, \cdots, \omega_n) \cdot \mathbf{P}_n(t),$$
$$(\omega_1, \cdots, \omega_n) \in \mathbf{C}^n,\ t \in \mathbf{C}. \tag{32}$$

Очевидно, что функция $\mathbf{P}_n(t)$, $t \in \mathbf{C}$, в соотношении (32) определена однозначно. Более того, фиксируя произвольное $(\omega_1, \cdots, \omega_n) \in \mathbf{C}^n$ такое, что $\omega_r \neq \omega_s$ при $1 \leqslant r < s \leqslant n$, мы будем иметь

$$\mathbf{P}_n(t) \equiv [D(\omega_1, \cdots, \omega_n)]^{-1} \cdot \det |P_j(\omega_l;\ t)|_{l,\,j=1}^{n},\ t \in \mathbf{C}. \tag{33}$$

Следовательно, $P_n(t)$ — некоторый полином от $t \in \mathbf{C}$ степени $\leqslant n(n-1)/2$. Полагая в (33), например, $\omega_l = n - i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, получим

$$\mathbf{P}_n(t) \equiv [1! \cdot 2! \cdot \cdots \cdot (n-1)!]^{-1} \times$$
$$\times \det |(n-i+1) \cdot (n-i+2) \cdot \cdots \cdot (n-i+j-1) \cdot (n-i+t+$$
$$+ j+1) \cdot \cdots \cdot (n-i+t+n)|_{l,\,j=1}^{n},\ t \in \mathbf{C}. \tag{34}$$

4. Всюду дальше Γ и B будут обозначать известные функции Эйлера. Далее, для произвольных (изменяющихся) величин a и b запись $a \sim b$ означает, что отношение $|a|/|b|$ ограничено сверху и снизу некоторыми положительными константами. Так, например, мы будем существенно опираться на следующую асимптотическую формулу для Γ-функции:

$$|\Gamma(\mu + R \cdot e^{i\varphi})| \sim R^{\mu_1 + R\cos\varphi - 1/2} \cdot e^{-R(\cos\varphi + \varphi \sin\varphi)} \tag{35}$$

при $R \to +\infty$ равномерно по $|\varphi| \leqslant \pi/2$ (здесь $\mu = \mu_1 + i\mu_2 \in \mathbf{C}$).

Введем затем в рассмотрение функцию

$$\varphi(l_1, \cdots, l_n, t) \overset{\text{def}}{=} \det |B(l_l + j,\ t+1)|_{l,\,j=1}^{n},$$
$$\operatorname{Re} t > -1,\ \operatorname{Re} l_k > -1\ (1 \leqslant k \leqslant n), \tag{36}$$

Тогда оказывается справедливой

Теорема 1. *При* $\operatorname{Re} t > -1, \operatorname{Re} l_k > -1\ (1 \leqslant k \leqslant n)$ *выполняется тождество*

$$\varphi(l_1, \cdots, l_n, t) \equiv \prod_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(t+1) \cdot \Gamma(l_k+1)}{\Gamma(l_k+n+1+t)} \cdot \prod_{1 \leqslant r < s \leqslant n} (l_r - l_s) \cdot \mathbf{P}_n(t), \tag{37}$$

где полином $\mathbf{P}_n$ *определяется из* (33) *или* (34).

Доказательство. Будем рассматривать правую часть (37) как некоторую функцию ψ при $\operatorname{Re} t > -1$, $\operatorname{Re} l_k > -1$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Обе функции $\varphi(l_1, \cdots, l_n, t)$ и $\psi(l_1, \cdots, l_n, t)$ при фиксированных l_k с $\operatorname{Re} l_k > -1$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ голоморфны в полуплоскости $\operatorname{Re} t > -1$ и в силу (35) ограничены в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} t \geqslant 0$. Следовательно, согласно хорошо известной теореме единственности для аналитических функций одного комплексного переменного нам достаточно установить равенства

$$\varphi(l_1,\cdots,l_n,N)=\psi(l_1,\cdots,l_n,N),$$
$$\operatorname{Re} l_k>-1\ (1\leqslant k\leqslant n),\ N=0,1,2,\cdots. \tag{38}$$

Привлекая известные правила вычисления определителей, при $\operatorname{Re} l_k>-1$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ и $N=0,1,2,\cdots$, будем иметь

$$\varphi(l_1,\cdots,l_n,N)=\det|B(l_l+j,N+1)|_{l,j=1}^{n}=$$
$$=\det\left|\frac{\Gamma(l_l+j)\cdot\Gamma(N+1)}{\Gamma(l_l+j+N+1)}\right|_{l,j=1}^{n}=$$
$$=[\Gamma(N+1)]^n\cdot\det\left|\frac{1}{(l_l+j)\cdot(l_l+j+1)\cdot\cdots\cdot(l_l+j+N)}\right|_{l,j=1}^{n}=$$
$$=[\Gamma(N+1)]^n\cdot\prod_{l=1}^{n}\frac{1}{(l_l+1)\cdot(l_l+2)\cdot\cdots\cdot(l_l+n+N)}\times$$
$$\times\det|(l_l+1)\cdot(l_l+2)\cdot\cdots\cdot(l_l+j-1)\cdot(l_l+j+1+N)\cdot\cdots\cdot(l_l+n+N)|_{l,j=1}^{n}=$$
$$=\prod_{l=1}^{n}\frac{\Gamma(N+1)\cdot\Gamma(l_l+1)}{\Gamma(l_l+n+1+N)}\cdot\det|P_j(l_l;N)|_{l,j=1}^{n}=$$
$$=\prod_{l=1}^{n}\frac{\Gamma(N+1)\cdot\Gamma(l_l+1)}{\Gamma(l_l+n+1+N)}\times D(l_1,\cdots,l_n)\cdot\mathbb{P}_n(N)=\psi(l_1,\cdots,l_n,N).$$

Тем самым соотношения (38) установлены, а это, как отмечалось, доказывает теорему.

Замечание 4. Легко видеть, что при $t=0$ соотношение (37) в точности совпадает с отмеченным выше специальным случаем (4) формулы Коши.

В заключение считаю своим приятным долгом поблагодарить академика АН Армении М. М. Джрбашяна за ценные замечания и полезные обсуждения в ходе выполнения работы.

Институт математики
АН Армении

Поступила 20.VI.1991

Ա. Հ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ. Կոշիի տիպի որոշիչների հաշվման մասին *(ամփոփում)*.

Կոշիի որոշիչ է կոչվում $\det|(l_l+m_j)^{-1}|_{l,j=1}^{n}$ տեսքի որոշիչը, որտեղ l_l-ները $(1\leqslant l\leqslant n)$ և m_j-ները $(1\leqslant j\leqslant n)$ կամայական կոմպլեքս փոփոխականներ են։ Հայտնի է, այդ որոշիչը հեշտությամբ հաշվել (նկատի ունենք այսպես կոչված Կոշիի բանաձևը)։ Ներկայացված աշխատանքում բացահայտորեն հաշվվում է $\det|B(l_l+m_j,t+1)|_{l,j=1}^{n}$ որոշիչը, որտեղ $\operatorname{Re} l_l>-1\ (1\leqslant l\leqslant n)$, $\operatorname{Re} t>-1$, իսկ B-ն՝ էյլերի ֆունկցիան է։ Երբ $t=0$, այդ որոշիչը իրենից ներկայացնում է Կոշիի որոշիչը $m_j=j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ դեպքում։

A. H. KARAPETYAN. *On computation of Cauchy type determinants* (summary)

A determinant $\det|(l_l+m_j)^{-1}|_{l,j=1}^{n}$, where l_j $(1\leqslant j\leqslant n)$ and m_j $(1\leqslant j\leqslant n)$ are arbitrary complex variables, is usually called a Cauchy determinant. As it is well known, it can be computed explicitly (so called Cauchy's formula). In present paper

we explicitly compute the determinant $\det \left|B\left(l_i+j,\ t+1\right)\right|_{i,j=1}^{n}$, where $\operatorname{Re} l_i > -1$, $\operatorname{Re} t > -1$ and B is the Euler function. In the case $t=0$ this determinant coincides with Cauchy determinant provided if $m_j = j\ (1 < j < n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Полиа, Г. Сегё.* Задачи и теоремы из анализа, Ч. 2, М., Наука, 1978.
2. Хуа Ло-кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях, М., ИЛ, 1959.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 4, 1991 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.64

С. Г. КАРАДЖЯН

ВЕКТОРИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение

Как известно [1, 2], наиболее распространенным методом решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$y(x)=\int_0^T K(x,\ t)\ y(t)\ dt+f(x);\ 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{1}$$

в случае гладкого ядра является способ приближенного сведения этого уравнения с помощью квадратурных формул к алгебраической системе с $N\times N$-матрицей (N — число точек дискретизации). При этом численная реализация этой схемы требует, по меньшей мере, памяти объемом $O(N^2)$ и числа операций порядка $O(N^3)$ $(N\to\infty)$.

В случае разностного ядра $K=K(x-t)$ эти показатели существенно снижаются: требуется память объемом $O(N)$ при числе операций порядка $O(N^2)$ (см. [3]). Этих же показателей можно достичь и в случае „почти разностных" ядер или ядер разностно-суммарных ([4, 5]).

В работе [6] был обнаружен более общий класс ядер, удовлетворяющих уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)K(x,\ t)=0, \tag{2}$$

допускающий, в принципе, такие же показатели численной реализации решения уравнения [1]. На основе подхода, разработанного в [7], аналогичные показатели могут быть получены и для ядер K, удовлетворяющих уравнению четвертого порядка (см. [8]).

В настоящее время большое внимание уделяется (см. [3]) реализации алгоритмов на многопроцессорных системах. Для алгебраических систем с матрицей $N\times N$ метод Гаусса—Жордана позволяет реализовать параллельный счет на N^2 процессорах за N тактов. В теплицевом случае (т. е. при $K=K(x-t)$) могут быть задействованы уже $O(N)$ процессоров при тех же N тактах ([3]), при этом оказывается необходимым кардинально преобразовать алгоритмы.

Ниже аналогичные показатели получены, в принципе, для ядра [2]. Отметим, что здесь не затрагиваются вопросы максимальной эко-

номичности построенных для случая ядра (2) алгоритмов или (в случае нарушения устойчивости) способы повышения устойчивости.

1°. Будем исходить из формул, полученных в [6]. На плоскости (τ, x) введем сетку

$$\tau_j = jh;\ x_i = ih;\ 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant N;\ N = [T/h].$$

В узлах сетки будут рекуррентно вычисляться функции

$$r_1^0(x_i;\ \tau_j) \overset{\text{def}}{=} r_2^0(i,\ j);\ r_1^0(x_i,\ \tau_j) = r_1^0(i,\ j),$$

$$r_1^1(x_i,\ \tau_j) = r_1^1(i,\ j);\ r_1^2(x_i,\ \tau_j) = r_1^2(i,\ j);\ y(x_i,\ \tau_j) = y(i,\ j).$$

Приведем схему реализации алгоритма А, приближенно решающего уравнение (1) с ядром (2).

Начальный этап: $0 \leqslant j \leqslant 7$. Для всех $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant 7$, в узлах (i, j) вычисляются значения функций $r_2^0(i,\ j)$, $r_1^0(i,\ j)$, $y(i, j)$; $p = 0, 1, 2$ как решения систем уравнений, полученных посредством дискретизации соответствующих интегральных уравнений (см. [6]). На этом этапе структура ядра не учитывается.

Рекуррентный шаг: Для $i = j-3,\ j-2,\ j-1,\ j$;

$$r_2^0(i,\ j) = 2r_2^0(i-1,\ j-1) + 10r_2^0(i-3,\ i-3) + r_2^0(-4,\ j-4) +$$
$$+12r_2^0(i-2, j-1) + 6r_2^0(i-3, j-2) - 18r_2^0(t-3, j-1) + 6r_2^0(i-4, j-1) +$$
$$+12r_2^0(i-4, j-2) - 6r_2^0(i-5, j-2) - 18r_2^0(i-4, j-3) + 6r_2^0(i-5, j-3) -$$
$$-12r_2^0(i-2, j-2) + 6hr_2^0(i-2, j-2)[r_2^0(j-3, j-3) + r_2^0(j-2, j-1) + \qquad (3)$$
$$+2r_2^0(j-3, j-2) - 3r_2^0(j-4, j-2) - 2r_2^0(j-2, j-2) + r_2^0(j-5, j-2)] +$$
$$+3/2\,h[r_2^0(i-1,\ j-1) - r_2^0(i-3, j-3) - 3r_2^0(i-2,\ j-2) +$$
$$+4r_2^0(i-3,\ j-2) - r_2^0(i-4,\ j-2) - 2hr_2^0(i-2, j-2)r_2^0(j-2, j-2)] \times$$
$$\times[r_2^0(j-1, j-1) - r_2^0(j-3, j-3)] + 2hr_1^0(i-2, j-2)[2r_2^0(0, j-2) -$$
$$-5r_2^0(1, j-2) + 4r_2^0(2, j-2) - r_2^0(3, j-2)] + h^2 r_1^1(i-2, j-2) \times$$
$$\times(3r_2^0(0, j-2) - 4r_2^0(1, j-2) + r_2^0(2, j-2)] + 2h^3 r_1^2(i-2, j-2)r_2^0(0, j-2).$$

Для $i = 2, 3, \cdots, j-4$ функция $r_2^0(i, j)$ и для $i = 0, 1, \cdots, j-2$ функции r_1^0, r_1^1, r_1^2, y вычисляются по формулам, приведенным в работе [6]. Не выписывая их здесь, обозначим их соответственно номерами (4) и (5). Для $i = 0, 1$ вычисление функции $r_2^0(i, j)$ производится следующим способом: вычисляются числа

$$D_l^j = [1 + h/2\,r_2^0(j, j)]K(l, j) + h\sum_{s=2}^{j-1} K(l, s)\cdot r_2^0(s, j);\ l = 0, 1, \qquad (4)$$

$$g_{2,0}^j = 1 - h/2\cdot K(0, 0) - hK(1, 1) + h^2/2\cdot K(0, 0)K(1, 1) - \qquad (5)$$
$$- h^2/2\,K(0, 1)K(1, 0).$$

После чего

$$r_2^0(0, j) = [D_0^j\cdot(1 - hK(1, 1)) + D_1^j h\cdot K(0, 1)]/g_{2,0}^j,$$
$$r_2^0(1, j) = [D_1^j(1 - h/2\cdot K(0, 0)) + D_0^j\cdot h/2\cdot K(1, 0)]/g_{2,0}^j. \qquad (6)$$

Для функций r_1^p, y в точках с $i=j-1$, j, для $p=0, 1, 2$ имеют место следующие формулы:

$$T^j_{l,p} = r_1^p(l, j) - h/2\,K(l, 0)\cdot r_1^p(0, j) - h\sum_{s=1}^{j-2} K(l, t)\,r_1^p(s, j) +$$

$$+ \frac{\partial^p K(l, t)}{\partial t^p}\Big/_{t=0}, \quad l = 0, 1,$$

$$g^j_{1,p} = h[K(0, j-1)\cdot K(1, j) - K(1, j-1)\cdot K(0, j)],$$

$$m^j_{1,p} = h/2\cdot[K(0, j)\cdot K(1, j-1) - K(1, j)\cdot K(0, j-1)], \qquad (7)$$

$$r_1^p(j-1, j) = [t^j_{0,p}\,K(1, j) - t^j_{1,p}\,K(0, j)]\cdot/g^j_{1,p},$$

$$r_1^p(j, j) = [t^j_{0,p}\,K(1, j-1) - t^j_{1,p}\,K(0, j-1)]/m^j_{1,p}.$$

Аналогичные формулы имеют место для $y(j-1, j)$ и $y(j, j)$, с той лишь разницей, что в формулах для $T^j_{l,p}$ вместо $\dfrac{\partial^p K(l, t)}{\partial t^p}\Big/_{t=0}$ нужно подставить $f(0)$ и $f(1)$.

Последний шаг: При $j=N-1$ закончить вычисления и выдать на печать значения $y(i, N-1)$, $i=0, 1, \cdots, N-1$.

Нетрудно подсчитать число операций (умножений и сложений) для алгоритма А. Оно составит величину $\Omega(N) = \dfrac{1}{2}\cdot(77N^2 + 429N - 6086)$.

2°. Сначала укажем на естественный параллелизм, позволяющий реализовать алгоритм А на 16 процессорах. Поясним это утверждение.

Движение алгоритма А по j — это „сугубо" последовательная часть алгоритма. Параллелизм наблюдается при реализации каждого j-ого шага

На первом этапе шага j вычисляется формула (3) и те части из формул (4) и (5), которые не зависят от i, т. е. те, которые на данном j-ом шаге вычисляются всего одии раз и помещаются в оперативиую память. Таких частей и формул 10. Для их вычислений задействуем все 16 процессоров, организовав их рациональное использование. Так как время, затрачиваемое на первом этапе, не будет зависеть от N, обозначим его через t_1.

На втором этапе j-ого шага для вычислений по формуле (4) предоставим 12 процессоров, а для вычислений по формуле (5) — 4 процессора. К следующему этапу перейдем тогда, когда будет вычислена самая длинная по времени формула, т. е. формула (4). Действительно, по формуле (4) время составит $t_2 = 5(j-5)t$, а по формуле (5) — $2(j-1)t$. Здесь t — время выполнения одной операции.

На третьем этапе организуем выполнения по формулам (6) и (7). Главной составляющей времени при вычислении по формулам (6) и (7) является время, затраченное на вычисление сумм типа D^j_l. Таких сумм 10. Для их вычислений воспользуемся схемой „сдваивания", а для

оценки времени воспользуемся теоремой Мунро—Патерсона (см. [8]). В итоге для всех сумм время составит $t_3 = \frac{5}{4}(j+25)t$.

Весь алгоритм займет время $T_{16} = \frac{25}{8} N^2 t$ (главная часть). Теперь нетрудно подсчитать к. п. б (коэффициент повышения быстродействия)

$$K_{16} = \frac{\Omega_-(N)\cdot t}{16\cdot T_{16}} = 0{,}77.$$

Как видим, эта характеристика достаточно благоприятна: при наличии 16-процессорной системы счет ускоряется более чем в 12 раз.

3°. Применение большого числа процессоров (количество $p = p(N)$ которых стремилось бы к бесконечности при $N \to \infty$ непосредственно к алгоритму А привело бы к очень малому к. п. б. ($K_p \to \infty$, $N \to \infty$) Причиной этого (см. [9]) являются выражения, содержащие скалярные произведения и обозначенные выше заглавными буквами.

Теперь осуществим абстрактное распараллеливание на $O(N)$ ($N \to \infty$ процессорах. В основе построения лежит понятие T и T'-алгоритмов (см. [3]), допускающих полную векторизацию. Основной идеей этих построений является замена скалярных произведений, т. е. N-членных сумм типа D_1^j, препятствующих непосредственному распараллеливанию,—k- членными суммами, где k не зависит от N.

Можно доказать, что алгоритм А является и T, и T'-алгоритмами (последний отличается экономичностью). Здесь приведем один из основных эпизодов доказательства этих утверждений.

Пусть $D^j = \sum_{s=2}^{j-1} K(0, s)\cdot r_1^0(s, j)$. Покажем, как векторизуется вычисление данной суммы.

Введем следующие обозначения: K_0 — циркулянтная $N \times N$-матрица с первой строкой $[K(0,0)\ K(0,1), \cdots, K(0, N-1)]$; $\gamma_{s,j}$, $\beta_{s,j}$ — скалярные коэффициенты, вычисление которых осуществляется на каждом j-ом шаге за время, не зависящее от N. Через P_s, Q_s обозначим один из $N \times N$ матриц перестановок, умножение на вектор-столбец которого может быть осуществлено за время, не зависящее от N. Тогда векторизуя алгоритм А, получим следующее представление для N-мерных вектор-столбцов

$$[00\, r_2^0(2, j), \cdots, r_2^0(-j-4, j)\, 0 \cdots 0]^T = \gamma_{1j} P_1 [00\, r_2^0(2, j-1) \cdots r_2^0(j-5, j-1)\, 0 \cdots 0]^T + \gamma_{2j} P_2 [00\, r_2^0(2, j-2) \cdots r_2^0(j-6, j-2)\, 0 \cdots 0]^T +$$

$$+ \gamma_{3j} P_3 [00\, r_2^0(2, j-3) \cdots r_2^0(j-7, j-3)\, 0 \cdots 0]^T + \gamma_{4j} P_4 [00\, r_2^0(2, j-4) \cdots$$

$$\cdots r_2^0(j-8, j-4)\, 0 \cdots 0]^T + \gamma_{5j} P_5 [00\, r_1^0(2, j-2) \cdots r_1^0(j-6, j-2) 0 \cdots 0]^T +$$

$$+ \gamma_{6j} P_6 [00\, r_1^1(2, j-2) \cdots r_1^1(j-6, j-2)\, 0 \cdots 0]^T + \gamma_{7j} P_7 [00\, r_1^2(2, j-2) \cdots$$

$$\cdots r_1^2(j-6, j-2)\, 0 \cdots 0] + \gamma_{8j} P_8 \cdot [1\ 00 \cdots 0]^T;$$

Также для $p = 0, 1, 2$

$$[00\, r_2^p(2,j)\cdots r_1^p(j-4,j)\,0\cdots 0]^T = \beta_{1j}\,Q_1[00\, r_1^p(2,j-1)\cdots r_1^p(j-5),$$
$$j-1)\,0\cdots 0]^T + \beta_{2j}\,Q_2[00\, r_1^p(2,j-2)\cdots r_1^p(j-6,j-2)\,0\cdots 0]^T +$$
$$+\beta_{3j}\,Q_3\cdot[1\,00\cdots 0]^T.$$

Введем векторы

$$\varphi^j \overset{\text{def}}{=} [\varphi_0^j \varphi_1^j \cdots \varphi_{N-1}^j]^T = K_0\cdot[00\, r_2^0(2,j)\cdots r_2^0(j-4,j)\,0\cdots 0]^T,$$
$$\psi^{j,p} \overset{\text{def}}{=} K_0\cdot[00\, r_1^p(2,j)\cdots r_1^p(j-4,j)\,0\cdots 0]^T;\ p=0,\ 1,\ 2.$$

Так как циркулянтная матрица перестановочна с любой из матриц перестановок, то легко прийти к следующим рекуррентным соотношениям для $j=8,\ 9,\cdots,\ N-1$:

$$\varphi^j = \sum_{k=1}^{4}\gamma_{kj}\cdot P_k\cdot\varphi^{j-k} + \sum_{k=6}^{7}\gamma_{kj}\cdot P_k\cdot\psi^{j-2,\,7-k} + \gamma_{8j}\,P_8\cdot$$
$$\cdot[K(0,0)\,K(0,\ N-1)\,K(0,N)\cdots K(0,\ 1)]^T,$$

$$\psi^{j,p} = \beta_{1j}\,Q_1\,\psi^{j-1,p} + \beta_{2j}\,Q_2\,\psi^{j-2,p} + \beta_{3j}\,Q_3\cdot[K(0,0)\,K(0,N-1)\,K(0,N-2)\cdots$$
$$\cdots K(0,\ 1)]^T,\ p=0,\ 1,\ 2.$$

Легко видеть, что искомая сумма $D_N^j = \varphi_0^j$. В некотором смысле „потерей“ в процессе векторизации можно принять увеличение размера оперативной памяти, т. к. нам пришлось ввести и запомнить $4N$-мерных вектора (это ψ^j, $\psi^{j,p}$, $p=0,\ 1,\ 2$). Соответственно несколько увеличивается общее число операций, что вполне естественно (см. [3]). В итоге оказывается, что при наличии $56N$ процессоров векторизованная форма алгоритма А позволяет вести параллельный счет с линейным ускорением (с к. п. б., равным 0,22), что сопоставимо, например, с параллельной формой алгоритмов типа Левинсона—Тренча (см. [3]).

Кировоканский филиал
Ереванского политехнического
института

Поступила 17.IX 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие, Киев. «Наукова Думка», 1986.
2. *L. M. Delves. J. L. Mohamed.* Compatational methods for integral equations, Cambridge Univ. Press. 1985.
3. *В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников.* Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами, М., Наука, 1987.
4. *T. Kailath, L. Ljung, M. Morf.* Generalized Krein—Levinson equations for efficient calculation of Fredholm Resolvents of nondisplacement kernels, Topics in Funct. Anal, Adv. M. Suppl. St. 3, 1978.
5. *А. Б. Нерсесян, А. А. Папоян.* Построение матрицы, обратной сумме Тёплица и Ганкеля, Изв. АН АрмССР, Математика, XVIII, № 2, 1983, 950—960.

6. *С. Г. Караджян, А. Б. Нерсесян.* Быстрое решение некоторых интегральных уравнений, Деп. рук. Арм. ВНИИТИ, 1988.
7. *А. Б. Нерсесян.* О структуре резольвент некоторых интегральных операторов с ядрами, определяемыми дифференциальными уравнениями, ДАН СССР, Математика, 279, № 4, 1984, 805—809.
8. *С. Г. Караджян.* Экономичный алгоритм обращения интегрального оператора с разностно-суммарно-гармоническим ядром, Изв. АН Арм.ССР, Математика, XXIV, № 3, 1989, 300—305.
9. *Е. Валях.* Последовательно-параллельные вычисления, Мир, 1985.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 4, 1991 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.53

Д. Т. БАГДАСАРЯН

О РОСТЕ ФУНКЦИЙ B_α М. М. ДЖРБАШЯНА

1. На пути развития общей теории факторизации мероморфных в круге $D=\{z:|z|<1\}$ функций М. М. Джрбашян [1] ввел в рассмотрение произведения типа Бляшке $B_\alpha(z, z_n)$, зависящие от непрерывного параметра $\alpha\in(-1, +\infty)$, сходимость которых в круге D имеет место при условии

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)^{\alpha+1}<+\infty, \tag{1}$$

наложенном на последовательность нулей $\{z_n\}_1^\infty\subset D$. Эти произведения, совпадающие при $\alpha=0$ с классическим произведением Бляшке, определяются следующим образом:

$$B_\alpha(z, z_n)=\prod_{n=1}^{\infty}A_\alpha(z, z_n), \tag{2}$$

где

$$A_\alpha(z,\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\{-W_\alpha(z,\zeta)\}, \tag{3}$$

$$W_\alpha(z,\zeta)=\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}(1-x)^{\alpha-1}x^{k-1}dx-\zeta^{-k}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx\right\}z^k.$$

Пусть $\{z_n\}_1^\infty$ — последовательность чисел из круга D, пронумерованных в порядке возрастания их модулей: $0<|z_n|\leqslant|z_{n+1}|$ $(n\geqslant 1)$. Как известно, показатель сходимости μ последовательности $\{|z_n|\}_1^\infty$ определяется следующим образом:

1. Если $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)<+\infty$, то полагают, что $\mu=0$.

2. Если $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)=+\infty$ и существует число $\mu>0$ такое, что при любом $\varepsilon>0$ имеем $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)^{\mu+1-\varepsilon}=+\infty$, но также

$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)^{\mu+1+\varepsilon}<+\infty$, то показатель сходимости последовательности $\{|z_n|\}_1^\infty$ полагают равным μ.

2. В работе [2] была установлена следующая

Теорема 1. *Если $\mu>0$ — показатель сходимости последовательности модулей нулей $\{z_n\}_1^\infty$ функции $B_\alpha(z, z_n)$ и $\mu<\alpha\leqslant\mu+1$, то*

$$\rho\equiv\varlimsup_{r\to1-}\frac{\log m(r, B_\alpha)}{-\log(1-r)}=\mu. \tag{4}$$

Целью же настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть $\mu>0$ — показатель сходимости последовательности $\{|z_n|\}_1^\infty$, $\exp\{g(z)\}$ — аналитическая в круге D функция порядка меньше, чем ρ, $\alpha\in(\mu, \mu+1)$, и*

$$f(z)=B_\alpha(z, z_n)\exp\{g(z)\}.$$

Тогда:

1°. *Порядки роста функций $f(z)$ и $N(z, B_\alpha^{-1})$ совпадают.*

2°. *Существует постоянная $C>0$, зависящая от ρ и произведения $B_\alpha(z, z_n)$, такая, что*

$$\varlimsup_{r\to1-}\frac{N(r, f^{-1})}{T(r, f)}\geqslant C.$$

Для доказательства теоремы 2 будут использованы следующие две леммы. Первая из них установлена в [2], а доказательство второй дано в [3].

Лемма 1. *Пусть $-1<\alpha<+\infty$, $0<\varepsilon\leqslant1$ и $\alpha+\varepsilon>0$. Тогда имеет место оценка*

$$|A_\alpha^\varepsilon(z, \zeta)|\leqslant\exp\left\{\text{const}\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}}\right|^{\alpha+\varepsilon}\right\},\quad |z|,\ |\zeta|<1. \tag{5}$$

Лемма 2. *Пусть функции $\Phi(t)\geqslant0$, $\Psi(t)\geqslant0$ определены и непрерывны на отрезке $[t_0, 1)$ $(0<t_0<1)$, причем функция $\Psi(t)$ неубывающая. Далее, пусть*

$$\lim_{r\to1-}\Phi(r)=+\infty, \tag{6}$$

$$\lim_{t\to1-}\frac{\Phi(t)}{\Psi(t)}=0. \tag{7}$$

Тогда существует $r\in(t_0, 1)$, достаточно близкое к 1 такое, что одновременно имеют место неравенства

$$\Phi(t)\leqslant\Phi(r)\ (t_0\leqslant t<r), \tag{8}$$

$$\frac{\Phi(t)}{\Psi(t)}\leqslant\frac{\Phi(r)}{\Psi(r)}\ (r\leqslant t<1). \tag{9}$$

3. Доказательство теоремы 2. Заметим сначала, что для любой функции требуемого вида $T(r, f) = T(r, B_z)(1 + O(1))$. Поэтому очевидно теорему достаточно доказать лишь для случая $f(z) = B_a(z, z_n)$.

1°. По аналогии с [3] обозначим

$$S_1 = \{n/|z_n| \leqslant r\},\ S_2 = \{n/|z_n| > r\}.$$

Тогда

$$T(r, B_a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |B_a(re^{i\theta}, z_n)|\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{n\in S_1} + \sum_{n\in S_2}\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |A_a(re^{i\theta}, z_n)|\, d\theta \equiv J_1 + J_2. \tag{10}$$

Для оценки J_1 выберем $\varepsilon_1 > 0$ так, чтобы $1 < \alpha + \varepsilon_1 < \mu + 1$. Тогда, в силу (5)

$$J_1 \leqslant \frac{\text{const}}{2\pi}\sum_{|z_n|<r}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-|z_n|}{|1-re^{i\theta}|}\right)^{\alpha+\varepsilon_1} d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\text{const}}{(1-r)^{\alpha+\varepsilon_1-1}}\sum_{|z_n|<r}(1-|z_n|)^{\alpha+\varepsilon_1}. \tag{11}$$

При этом мы будем иметь

$$\sum_{|z_n|<r}(1-|z_n|)^{\alpha+\varepsilon_1} = \int_0^r (1-t)^{\alpha+\varepsilon_1}\, dn(t) = (1-r)^{\alpha+\varepsilon_1} n(r) +$$

$$+ (\alpha+\varepsilon_1)\int_0^r (1-t)^{\alpha+\varepsilon_1-1} t\, dN(t) = (1-r)^{\alpha+\varepsilon_1} n(r) + (\alpha+\varepsilon_1)(1-r)^{\alpha+\varepsilon_1-1} \times$$

$$\times rN(r) + (\alpha+\varepsilon_1)^2\int_0^r (1-t)^{\alpha+\varepsilon_1-2} N(t)\left(t - \frac{1}{\alpha+\varepsilon_1}\right) dt. \tag{12}$$

Теперь заметим, что

$$n(r)\frac{1-r}{2} \leqslant \int_r^{(1+r)/2} \frac{n(t)}{t}\, dt \leqslant N\left(\frac{1+r}{2}\right).$$

Тем самым, $n(r)(1-r) \leqslant 2N\left(\frac{1+r}{2}\right)$, и из (11) и (12) получим

$$J_1 \leqslant \frac{\text{const}}{(1-r)^{\alpha+\varepsilon_1-1}}\left\{(1-r)^{\alpha+\varepsilon_1-1} 2N\left(\frac{1+r}{2}\right) +\right.$$

$$\left. + (\alpha+\varepsilon_1)(1-r)^{\alpha+\varepsilon_1-1} rN(r) + (\alpha+\varepsilon)_1^2\int_0^r (1-t)^{\alpha+\varepsilon_1-2} N(t)\left(t - \frac{1}{\alpha+\varepsilon_1}\right) dt. \right. \tag{13}$$

Чтобы оценить J_2, выберем $\varepsilon_2 > 0$ так, чтобы $\alpha + \varepsilon_2 > \mu + 1$. Тогда в силу (5) очевидно

$$J_2 \leqslant \frac{\text{const}}{(1-r)^{\alpha+\varepsilon_2-1}} \sum_{|z_n|>r} (1-|z_n|)^{\alpha+\varepsilon_2}. \tag{14}$$

При этом

$$\sum_{|z_n|>r} (1-|z_n|)^{\alpha+\varepsilon_2} = \int_r^1 (1-t)^{\alpha+\varepsilon_2}\, dn(t) =$$

$$= (1-t)^{\alpha+\varepsilon_2} n(t)\Big|_r^1 + (\alpha+\varepsilon_2)(1-t)^{\alpha+\varepsilon_2-1} tN(t)\Big|_r^1 +$$

$$+ (\alpha+\varepsilon_2)^2 \int_r^1 (1-t)^{\alpha+\varepsilon_2-2} N(t)\left(t - \frac{1}{\alpha+\varepsilon_2}\right) dt. \tag{15}$$

Так как $\alpha + \varepsilon_2 > \mu + 1$, то ясно, что $n(t)(1-t)^{\alpha+\varepsilon_2} \to 0$ и $N(t)(1-t)^{\alpha+\varepsilon_2-1} \to 0$ при $t \to 1^-$. Поэтому

$$\sum_{|z_n|>r} (1-|z_n|)^{\alpha+\varepsilon_2} \leqslant (\alpha+\varepsilon_2)^2 \int_r^1 (1-t)^{\alpha+\varepsilon_2-2} N(t)\left(t - \frac{1}{\alpha+\varepsilon_2}\right) dt,$$

и следовательно

$$J_2 \leqslant \frac{\text{const}}{(1-r)^{\alpha+\varepsilon_2-1}} (\alpha+\varepsilon_2)^2 \int_r^1 (1-t)^{\alpha+\varepsilon_2-2} N(t)\left(t - \frac{1}{\alpha+\varepsilon_2}\right) dt. \tag{16}$$

Предположим теперь, что

$$\limsup_{r\to 1^-} \frac{\log N(r)}{-\log(1-r)} = \lambda < \mu.$$

Тогда очевидно, что при любом $\varepsilon_3 > 0$ таком, что $\lambda + \varepsilon_3 < \mu$ и при t и r достаточно близких к 1 имеют место неравенства $N(t) < (1-t)^{-(\lambda+\varepsilon_3)}$, $N\left(1+\frac{r}{2}\right) < 2^{\lambda+\varepsilon_3}(1-r)^{-(\lambda+\varepsilon_3)}$. Поэтому из (13) и (16) получим

$$J_1 \leqslant \frac{\text{const}}{(1-r)^{\alpha+\varepsilon_1-1}} \left\{ (1-r)^{\alpha+\varepsilon_1-1} \frac{\text{const}}{(1-r)^{\lambda+\varepsilon_3}} + \right.$$

$$\left. + \text{const} \int_0^r (1-t)^{\alpha+\varepsilon_1-2-\lambda-\varepsilon_3}\, dt \right\}, \tag{17}$$

$$J_2 \leqslant \frac{\text{const}}{(1-r)^{\lambda+\varepsilon_3}}. \tag{18}$$

Из (17) и (18), поскольку $\alpha - 1 + \varepsilon_3 < \mu$, получаем $\rho < \mu$, что противоречит утверждению $\rho = \mu$ теоремы 1. Следовательно, $\lambda = \rho$.

2°. Пусть в лемме 2 $\Phi(t) = N(t)(1-t)^{\mu-\varepsilon'}$ и $\Psi(t) = (1-t)^{-2\varepsilon'}$, где полагаем, что $0 < \varepsilon' < \alpha + \varepsilon_2 - \mu - 1$, $0 < \varepsilon' < \mu + 1 - \alpha$, $\alpha \in (\mu, \mu+1)$, $t \in [r_0, 1)$. Тогда одновременно имеют место неравенства

$$N(t)(1-t)^{\mu-\varepsilon'} \leqslant N(r)(1-r)^{\mu-\varepsilon'} \ (r_0 \leqslant t < r),$$
$$N(t)(1-t)^{\mu+\varepsilon'} \leqslant N(r)(1-r)^{\mu+\varepsilon'} \ (r \leqslant t < 1). \qquad (19)$$

Отсюда при $t = r + \frac{1-r}{2}$ будем иметь

$$N\left(r + \frac{1-r}{2}\right) \leqslant N(r)\, 2^{\mu+\varepsilon'} \ (r_0 < r < 1). \qquad (20)$$

Применив это неравенство, из (13) и (16) получим

$$J_1 \leqslant \text{const}\left\{N\left(\frac{1+r}{2}\right) + (\alpha+\varepsilon_1)\, N(r)\right\} +$$

$$+ \frac{\text{const}}{(1-r)^{\alpha+\varepsilon_1-1}} \int_0^r (1-t)^{\alpha+\varepsilon_1-2-\mu+\varepsilon'} (1-t)^{\mu-\varepsilon'} N(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\, N(r)\,[2^{\mu+\varepsilon'} + \alpha + \varepsilon_1] + \frac{\text{const}}{\mu+1-\alpha-\varepsilon_1-\varepsilon'} N(r) \leqslant A_1 N(r), \qquad (21)$$

$$J_2 \leqslant \frac{\text{const}}{(1-r)^{\alpha+\varepsilon_2-1}} \int_r^1 (1-t)^{\alpha+\varepsilon_2-2-\mu-\varepsilon'} (1-t)^{\mu+\varepsilon'} N(t)\, dt \leqslant$$

$$< \frac{\text{const}}{(1-r)^{\alpha+\varepsilon_2-1}} N(r)(1-r)^{\mu+\varepsilon'} \int_r^1 (1-t)^{\alpha+\varepsilon_2-2-\mu-\varepsilon'} dt =$$

$$= \frac{\text{const}}{\alpha+\varepsilon_2-\mu-1-\varepsilon'} N(r) = A_2 N(r), \qquad (22)$$

где постоянные $A_{1,2} > 0$ не зависят от $r \in (r_0, 1)$.

Из (21) и (22) следует, что

$$\limsup_{r\to 1-} \frac{N(r, B_\alpha^{-1})}{T(r, B_\alpha)} \geqslant \frac{1}{A_1 + A_2} > 0,$$

что и требовалось доказать.

В заключение отметим, что, как можно проверить с применением методов работы [3], результаты, аналогичные вышеприведенным теоремам 1 и 2, справедливы также для произведений $\tau_\alpha(z, z_n)$ М. М. Джрбашана [4] при $\alpha > \mu > 0$.

Ереванский политехнический
институт

Поступила 14.II.1991

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, „Наука", М., 1966.
2. *Д. Т. Багдасарян.* О порядке роста произведения М. М. Джрбашяна, Изв. АН Арм.ССР, „Математика", XXV, № 4, 1990, 401—403.
3. *L. R. Sons.* Value distribution of canonical products in the unit disc, Mathematica Japonica, 22, № 1, 1977.
4. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН Арм.ССР, вып. 2, 1948, 3—55.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ռ. Գ. Հայրապետյան. Ոչ խիստ գոգավոր եզրով մոդելային խառը խնդրի ֆունդամենտալ լուծումը 279
Ա. Ա. Վաղարշակյան. Մաքսիմումի սկզբունքի մասին 300
Հ. Մ. Հայրապետյան. Կոռեկտ եզրային խնդիրներ ոչ ճշգրիտ էլիպտական հավասարումների համար L^1 դասերում 310
Ռ. Ա. Բաղյան. Ֆ. Հաուսդորֆի մոմենտների ընդհանրացված պրոբլեմը . . . 329
Ա. Հ. Կարապետյան. Կոշու տիպի որոշիչների հաշվման մասին 343

ՀԱՄԱՌՈՏ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

Ս. Գ. Քարաջյան. Որոշ ինտեգրալ հավասարումների լուծումը ալգորիթմների վիկտորիզացիայով 351
Դ. Տ. Բաղդասարյան. Մ. Մ. Ջրբաշյանի B_α ֆունկցիաների աճման մասին . 375

СОДЕРЖАНИЕ

Р. Г. Айрапетян. Фундаментальное решение одной модельной смешанной задачи с нестрого вогнутой относительно бихарактеристик границей . 279
А. А. Вагаршакян. О принципе максимума 300
Г. М. Айрапетян. Корректные граничные задачи для неправильно-эллиптических уравнений в классе L^1 310
Р. А. Багиян. Обобщенная проблема моментов Ф. Хаусдорфа . . . 329
А. О. Карапетян. О вычислении определителей типа Коши 343

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

С. Г. Карапжян. Векторизация алгоритмов решения некоторых интегральных уравнений 351
Д. Т. Багдасарян. О росте функций B_α М. М. Джрбашяна . . 357

CONTENTS

R. G. Airapetyan. Fundamental solution of the model mixed problem with non stricily concave by bicharacteristics boundary 279
A. A. Vagarshakian. On the principle of maximum 300
H. M. Hairapetian. Correct boundary valup problems for nonregyliar-elliptic equations of a class L^1 310
R. A. Baghian. The general moment problem of F. Housdorf 329
A. H. Karapetyan. On calculation of Cauchy type determinants 343

CHORT COMMUNICATIONS

S. G. Garadian. Vectorisation of solution algorithms of integral equations . . 351
D. T. Bagdasarjan. Value distribution of products B_α M M Dzrbašjans . . 357