

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

ԽՐԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈՆԳՐԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ԶԻՐԱՇԱՆ

Ե. Հ. ԱՌԱՅԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ՔԱԼԱՅԱՆ
Ռ. Վ. ՀԱՄԱՐԱԶՈՒՄՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱՂՅԱՆ
Գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու ֆաբրիկայի Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր օրիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները ծավալը, օրպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և աուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոնեզերը շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էլի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղափոխվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրություն ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված օրիջ թիվ շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ուղղման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում շրջագծել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։
Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղդասյանի պող., 24 ր. Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, օրիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. Б. АМБАРЦУМЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН
зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке) а кратких сообщений — не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. V. AMBARTZUMIAN
N. U. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN

A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKIĬ

executive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings *zvestia* of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitled at twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

УДК 517.59

А. М. ДЖРБАШЯН

О ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ
ОБОБЩЕННО-ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА

Статья посвящена изучению граничных свойств введенных ее автором классов мероморфных функций обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости [1, 2], а также произведений типа Бляшке—М. М. Джрбашяна [3] в круге. Основные результаты статьи, установленные в случае полуплоскости, являются своеобразными аналогами известного результата Фростмана [4] о граничных свойствах произведения Бляшке с «редкими» нулями, а также результатов М. М. Джрбашяна и В. С. Захаряна [5, 6] о граничных свойствах мероморфных функций обобщенно-ограниченного вида в круге. Основной результат, установленный в круг для произведений типа Бляшке—М. М. Джрбашяна, является усилением результата отмеченных выше работ [5, 6], относящегося к граничным свойствам этих функций, а также результата, установленного позднее Д. Т. Багдасаряном и И. В. Оганисяном [7].

1. В статье доказаны три теоремы. Прежде чем их сформулировать, необходимо привести ряд определений. Нижеприводимое определение классов функций обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости естественно ввиду результатов работ [1, 2, 8] автора.

Определение 1. При значениях параметра $-1 < \alpha < 0$ функциями обобщенно-ограниченного вида в нижней полуплоскости $G^{(-)} = \{w: \operatorname{Im} w < 0\}$, или, что то же самое, функциями класса $N_{\alpha} \{G^{(-)}\}$ ($-1 < \alpha < 0$), всюду ниже будем считать мероморфные в $G^{(-)}$ функции, допускающие там представление вида

$$F(w) = \frac{B_{\alpha}(w, \{a_n\})}{B_{\alpha}(w, \{b_m\})} \exp \left\{ c_0 + c_1 w \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}} + iC \right\}. \quad (1)$$

Здесь предполагается, что c_0 , c_1 и C — вещественные числа, а $\sigma(t)$ — функция, представляемая в виде разности $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ двух монотонно неубывающих функций, подчиненных условиям:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma_{1,2}(t)}{(1+|t|)^{1+\alpha}} < +\infty.$$

Далее, B_{α} — сходящиеся произведения типа Бляшке для полуплоскости [9], составленные по последовательностям $\{a_n\}$, $\{b_m\} \subset G^{(-)}$ нулей и полюсов F , которые подчинены условиям

$$\sum_n |\operatorname{Im} a_n|^{1+\alpha} < +\infty, \quad \sum_m |\operatorname{Im} b_m|^{1+\alpha} < +\infty.$$

Отметим, что если последовательность чисел $\{w_k\} = \{u_k + iv_k\} \subset G^{(-)}$ подчинена такому условию при каком-либо α ($-1 < \alpha < +\infty$), то произведение

$$B_\alpha(w, \{w_k\}) = \prod_k b_\alpha(w, w_k)|_{\alpha=0} = \prod_k \frac{w - w_k}{w - \bar{w}_k}, \quad (2)$$

$$b_\alpha(w, w_k) = \exp \left\{ - \int_{-|v_k|}^{|v_k|} \frac{(v_k - |t|)^\alpha dt}{[i(w - u_k) - t]^{1+\alpha}} \right\} \quad (3)$$

есть аналитическая в $G^{(-)}$ функция с нулями в точках $\{w_k\}$. Причем кратность нуля в каждой точке w_k равна кратности ее появлений в последовательности $\{w_k\}$ [9].

Необходимо также отметить, что функции рассматриваемых классов $N_\alpha \{G^{(-)}\}$ ($-1 < \alpha < 0$), после отщепления фактора $\exp \{c_1 w\}$ представления (1), лежат в неванлинновском классе функций ограниченного вида в $G^{(-)}$, т. е. в классе мероморфных в $G^{(-)}$ функций, допускающих представление в виде отношения двух аналитических и ограниченных в $G^{(-)}$ функций.

Определение 2. Пусть $E \subseteq (-\infty, +\infty)$ есть некоторое измеримое по Борелю множество (B —множество) и $0 < \gamma < 1$. Будем говорить, что E имеет положительную γ -емкость (или $C_\gamma(E) > 0$), если существует неотрицательная борелевская мера (B -мера) μ , сосредоточенная на E ($\mu \ll E$) такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{(1+|t|)^\gamma} = 1 \quad (4)$$

и

$$S_1 = \sup_{w \in G^{(-)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{w - t|t|^\gamma} < +\infty. \quad (5)$$

Если же нет такой меры, т. е. для любой неотрицательной B -меры $\mu \ll E$, подчиненной (4), имеем $S_1 = +\infty$, то будем говорить, что множество E имеет нулевую γ -емкость, или $C_\gamma(E) = 0$.

Определение 3. Пусть $-1 < \alpha < +\infty$ и последовательность $\{z_k\}$ ($z_k \neq 0, k > 1$) из единичного круга $D = \{z : |z| < 1\}$ подчинена условию

$$\sum_k (1 - |z_k|)^{1+\alpha} < +\infty. \quad (6)$$

Одним из вариантов произведения типа Бляшке—М. М. Джрбашяна является аналитическая в D функция

$$B_\alpha(z, \{z_k\}) = \prod_k A_\alpha(z, z_k)|_{\alpha=0} = \prod_k \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \frac{|z_k|}{z_k}, \quad (7)$$

$$A_\alpha(z, z_k) \equiv \exp \left\{ - \int_{|z_k|}^1 \left[\left(1 - \frac{zx}{z_k} \right)^{-1-\alpha} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(1 - \frac{\bar{z}\bar{z}_k}{x} \right)^{-1-\alpha} - 1 \right] \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx \right\} \quad (8)$$

с нулями $\{z_k\}$ [3, гл. IX].

Определение 4. Пусть $E \subseteq [-\pi, \pi]$ есть некоторое B -множество и $0 < \gamma < 1$. Говорят, что E имеет положительную γ -емкость, если существует неотрицательная B -мера $\mu \ll E$ такая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\mu(\theta) = 1 \quad (9)$$

и

$$S_2 \equiv \sup_{z \in D} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\mu(\theta)}{|z - e^{i\theta}|^\gamma} < +\infty. \quad (10)$$

Если же нет такой меры, т. е. для любой неотрицательной B -меры $\mu \ll E$, подчиненной (9) имеем $S_2 = +\infty$, то говорят, что множество E имеет нулевую γ -емкость.

Замечание. Последнее определение понятия γ -емкости на единичной окружности общеизвестно. Можно убедиться в том, что после конформного отображения круга на полуплоскость, на конечной оси оно эквивалентно вышеприведенному определению 2.

2. Основными результатами статьи являются следующие теоремы.

Теорема 1. Каждая функция $F \in N_\alpha \{G^{(-)}\}$ ($-1 < \alpha < 0$) обладает ненулевыми, конечными угловыми граничными значениями во всех точках $u \in (-\infty, +\infty)$, кроме, быть может, множества нулевой $1 + \alpha$ -емкости.

Замечание. Эта теорема является аналогом результата М. М. Джрбашяна и В. С. Захаряна [5, 6] для классов N_α ($1 < \alpha < 0$) в круге. Здесь, как и в случае круга, сужение неванлиновского класса приводит к очевидному уточнению граничных свойств рассматриваемых функций.

В следующей теореме получен более полный результат для специальных представителей классов функций обобщенно-ограниченного вида $G^{(-)}$ — произведений типа Бляшке в полуплоскости.

Теорема 2. 1°. Пусть γ ($0 < \gamma < 1$) и α ($\gamma - 1 < \alpha < \gamma + 1$) — любые числа, а последовательность $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ подчинена условию

$$\sum_k |\operatorname{Im} w_k|^\gamma < +\infty. \quad (11)$$

Тогда функция $B_\alpha(w, \{w_k\})$ обладает ненулевыми конечными угловыми граничными значениями во всех точках $u \in (-\infty, +\infty)$, кроме, быть может, множества нулей γ -емкости.

2°. Пусть α ($0 \leq \alpha \leq 2$) любое и последовательность $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ подчинена условию

$$\sum_k |\operatorname{Im} w_k| < +\infty. \quad (12)$$

Тогда функция $B_\alpha(w, \{w_k\})$ обладает ненулевыми конечными угловыми граничными значениями почти во всех точках $u \in (-\infty, +\infty)$.

Для случая круга установлена вполне аналогичная

Теорема 3. 1°. Пусть γ ($0 < \gamma < 1$) и α ($\gamma - 1 \leq \alpha \leq \gamma + 1$) — любые числа, а последовательность $\{z_k\} \subset D$ ($z_k \neq 0$, $k \geq 1$) подчинена условию

$$\sum_k (1 - |z_k|)^\gamma < +\infty. \quad (13)$$

Тогда функция $B_\alpha(z, \{z_k\})$ обладает ненулевыми конечными угловыми граничными значениями во всех точках единичной окружности, кроме, быть может, множества нулевой γ -емкости.

2°. Пусть α ($0 < \alpha \leq 2$) любое и последовательность $\{z_k\} \subset D$ ($z_k \neq 0$, $k \geq 1$) удовлетворяет условию Бляшке

$$\sum_k (1 - |z_k|) < +\infty. \quad (14)$$

Тогда функция $B_\alpha(z, \{z_k\})$ обладает ненулевыми конечными угловыми граничными значениями почти во всех точках единичной окружности.

Замечание. Утверждение 1° теоремы 3 в случае, когда $-1 < \alpha < 0$ и $\gamma = 1 + \alpha$ было установлено ранее М. М. Джрбашяном и В. С. Захаряном [5, 6]. В случае же когда $0 < \alpha < 1$ и $\gamma = \alpha$, это утверждение по сути было доказано Д. Т. Багдасаряном и И. В. Оганисяном [7]. В целом же, во всяком случае когда $-1 < \alpha \leq 1$, утверждения 1° теорем 2 и 3 можно рассматривать как полные обобщения для произведений типа Бляшке в полуплоскости и в круге известного результата Фростмана [4], который по существу совпадает со случаями $\alpha = 0$ этих утверждений. Утверждения 2° теорем 2 и 3 являются обобщениями общеизвестного свойства произведения Бляшке, заключающегося в них в качестве случая $\alpha = 0$.

В статье установлено также приводимое ниже неравенство, представляющее самостоятельный интерес. А именно, установлено, что если α_1, α_2 ($-1 < \alpha_1 < \alpha_2 \leq 0$) любые числа, а последовательность $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ подчинена условию (11) с $\gamma = 1 + \alpha_1$, то

$$|B_{\alpha_1}(w, \{w_k\})| \leq |B_{\alpha_2}(w, \{w_k\})|; \quad w \in G^{(-)}. \quad (15)$$

Отметим, что в случае $\alpha_2 = 0$ это неравенство было доказано в [10].

3. Приводимые ниже леммы нужны для доказательства теоремы 1.

Лемма 1. Если $E_1, E_2 \subset (-\infty, +\infty)$ — B -множества, такие, что $C_\gamma(E_1) = C_\gamma(E_2) = 0$ при некотором γ ($0 < \gamma < 1$), то $C_\gamma(E_1 \cup E_2) = 0$.

Доказательство. Пусть $\mu \ll E_1 \cup E_2$ есть неотрицательная B -мера, подчиненная условию (4). Тогда, очевидно, взятый по какому-либо из множеств E_1, E_2 , скажем по E_1 , интеграл (4) будет равняться некоторому числу $M \in (0, 1]$. Тем самым, мера $\mu_1 = M^{-1} \mu|_{E_1}$, со-

средоточенная на E_1 , опять будет удовлетворять условию (4). Однако, поскольку $C_\gamma(E_1) = 0$, то

$$\sup_{w \in G^{(-)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{|w-t|^\gamma} \geq M \sup_{w \in G^{(-)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{|w-t|^\gamma} = +\infty.$$

На основе леммы Фату, предельным переходом легко доказывается

Лемма 2. Пусть γ ($0 < \gamma < 1$) любое и $E \subseteq (-\infty, +\infty)$ есть B -множество такое, что $C_\gamma(E) > 0$, а $\mu \ll E$ есть мера из определения 2. Тогда при любом $u \in (-\infty, +\infty)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{|u-t|^\gamma} \leq S_\gamma \equiv \sup_{w \in G^{(-)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{|w-t|^\gamma} < +\infty. \quad (16)$$

Лемма 3. Пусть β ($-1 < \beta < 0$) любое число, $\alpha(t)$ — монотонно неубывающая функция, подчиненная условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha(t)}{(1+|t|)^{1+\beta}} < +\infty, \quad (17)$$

а $f(w)$ — аналитическая в $G^{(-)}$ функция, определенная по формуле

$$f(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha(t)}{[i(w-t)]^{1+\beta}}. \quad (18)$$

Тогда множество тех $u \in (-\infty, +\infty)$, для которых не существует конечного углового граничного значения $f(u)$, может иметь лишь нулевую $1 + \beta$ -емкость.

Доказательство. Из представления (17)–(18) следует, что функция $\exp\{-f(w)\}$ аналитична и ограничена в $G^{(-)}$. Поэтому, в силу теоремы Линделефа, существование в какой-либо точке $u \in (-\infty, +\infty)$ конечного углового граничного значения $f(u)$ эквивалентно существованию в той же точке конечного предела

$$\lim_{v \rightarrow 0} f(u + iv) (= f(u)). \quad (19)$$

Тем самым, для доказательства леммы достаточно исследовать лишь вопрос о существовании такого предела, чем мы и займемся ниже.

Очевидно, что при любых $u \in (-\infty, +\infty)$ и v, v_0 ($-\infty < v_0 < v < 0$)

$$f(u + iv) = f(u + iv_0) + i \int_{v_0}^v f'(u + iy) dy. \quad (20)$$

Далее, как легко проверить, при любых $w = u + iv \in G^{(-)}$, $t \in (-\infty, +\infty)$ и $x > 0$ имеют место неравенства

$$\frac{1}{|w-t|^x} \leq \frac{2^{1/x}}{(|u-t| + |v|)^x} < \frac{C_x(w)}{(1+|t|)^x}, \quad (21)$$

где $C_1(\omega) > 0$ — постоянная, зависящая лишь от x и ω . Поэтому, в силу представления (17)–(18)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^v |f'(u + iy)| dy &\leq (1 + \beta) 2^{1 + \beta/2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(t) \int_{|v|}^{+\infty} \frac{dx}{(|u - t| + x)^{2 + \beta}} = \\ &= 2^{1 + \beta/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{(|u - t| + |v|)^{2 + \beta}} \leq \sqrt{2} C_{1+\beta}(u + iv) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{(1 + |t|)^{2 + \beta}} < +\infty. \end{aligned}$$

Тем самым, предельный переход $v_0 \rightarrow -\infty$ в (20) приводит к равенству

$$f(u + iv) = f(u - i\infty) + i \int_{-\infty}^v f'(u + iy) dy \quad (-\infty < u < +\infty, v < 0), \quad (22)$$

где интеграл абсолютно сходится, а $f(u - i\infty)$ — конечный предел.

Обозначим теперь через E_0 множество тех $u \in (-\infty, +\infty)$, для которых

$$\int_{-\infty}^0 |f'(u + iv)| dv = +\infty,$$

а через E — множество тех $u \in (-\infty, +\infty)$, для которых не существует конечного предела (19). Тогда ввиду (22) очевидно, что $E \subseteq E_0$. Тем самым, если $C_{1+\beta}(E_0) = 0$, то и $C_{1+\beta}(E) = 0$. Действительно, если бы имели $C_{1+\beta}(E) > 0$, то существовала бы неотрацательная B -мера $\mu \ll E$, такая, что были бы верны соотношения (4)–(5) с $\gamma = 1 + \beta$. Но $E \subseteq E_0$, следовательно $\mu \ll E$, и по определению 2 имели бы $C_{1+\beta}(E_0) > 0$.

Итак, для доказательства леммы достаточно показать, что $C_{1+\beta}(E_0) = 0$. Будем исходить из противного — предположения $C_{1+\beta}(E_0) > 0$. Если это так, то должна существовать неотрицательная B -мера $\mu_0 \ll E_0$, удовлетворяющая условиям (4)–(5). В силу (4) можно зафиксировать достаточно большое $A > 0$, так, чтобы

$$\int_{-A}^A d\mu_0(t) = \int_{|t| < A, |u| \cap E_0} d\mu_0(t) > 0.$$

Тогда

$$\int_{-A}^A d\mu_0(u) \int_{-\infty}^0 |f'(u + iv)| dv = +\infty. \quad (23)$$

Если $|u| > 2A$ и $|t| < A$, то, как нетрудно проверить,

$$\frac{1}{|u - t|} < \frac{C_1(A)}{(1 + |u|)(1 + |t|)}, \quad C_1(A) = (1 + A^{-1})(1 + 2A).$$

Поэтому при $|u| > 2A$ имеем

$$\int_{-A}^A \frac{d\mu_0(t)}{|u-t|^{1+\beta}} \leq \frac{C_1^{1+\beta}(A)}{(1+|u|)^{1+\beta}} \int_{-A}^A \frac{d\mu_0(t)}{(1+|t|)^{1+\beta}} < \frac{(1+A^{-1})^{1+\beta}(1+2A)}{(1+|u|)^{1+\beta}}.$$

С другой стороны, если $|u| \leq 2A$, то по оценке (16) леммы 2

$$\int_{-A}^A \frac{d\mu_0(t)}{|u-t|^{1+\beta}} \leq S_1 \leq \frac{S_1(1+2A)^{1+\beta}}{(1+|u|)^{1+\beta}}.$$

Тем самым, при любом $u \in (-\infty, +\infty)$, во всяком случае

$$\int_{-A}^A \frac{d\mu_0(t)}{|u-t|^{1+\beta}} < \frac{[(1+A^{-1})^{1+\beta} + S_1](1+2A)^{1+\beta}}{(1+|u|)^{1+\beta}} = \frac{C_2(A)}{(1+|u|)^{1+\beta}}. \quad (42)$$

Теперь заметим, что при любом $u \in (-\infty, +\infty)$

$$\int_{-\infty}^0 |f'(u+iv)| dv \leq 2^{1+\beta/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{|u-t|^{1+\beta}},$$

независимо от того, конечны или нет эти интегралы. Поэтому с применением оценки (24) получаем

$$\int_{-A}^A d\mu_0(u) \int_{-\infty}^0 |f'(u+iv)| dv \leq 2^{1+\beta/2} C_2(A) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{(1+|t|)^{1+\beta}} < +\infty,$$

что противоречит (23).

4. Для доказательства теоремы 1 необходима также

Лемма 4. Пусть $\beta (-1 < \beta < 0)$ любое число и последовательность $\{w_k\} \equiv \{u_k + iv_k\} \subset G^{(-)}$ подчинена условию

$$\sum |v_k|^{1+\beta} < +\infty. \quad (25)$$

Тогда функция $B_\beta(w, \{w_k\})$ обладает ненулевыми конечными угловыми граничными значениями во всех точках $u \in (-\infty, +\infty)$, кроме, быть может, множества нулевой $1+\beta$ -емкости.

Доказательство. Как было установлено в работе [10], имеет место представление вида $B_\beta = B_2 \exp \{-f\}$, где f — функция вида (17) — (18). Экспоненциальный множитель этого представления обладает требуемым граничным свойством в силу леммы 3. Поэтому для доказательства нужного утверждения достаточно показать, что функция B_0 имеет ненулевые, конечные угловые граничные значения во всех точках $u \in (-\infty, +\infty)$, кроме, быть может, множества нулевой $1+\beta$ -емкости, а затем воспользоваться леммой 1. С этой целью заметим, что произведение B_0 отличается от общепринятого произведения Бляшке для полуплоскости лишь постоянным множителем. Поэтому, в силу результата Фростмана [4], после конформного отображения круга на полуплоскость можем утверждать лишь, что

$$\sup_{w \in G^{(-)}} \left\{ (1 + |w|)^{1+\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{|w - t|^{1+\beta}} \right\} = +\infty \quad (26)$$

для любой неотрицательной B -меры μ , подчиненной условию (4) с $\gamma = 1 + \beta$ и сосредоточенной на множестве тех $u \in (-\infty, +\infty)$, для которых не существует конечного углового граничного значения $B_0(u) \neq 0$. Выбрав $A > 0$ настолько большим, чтобы интеграл (4) (с $\gamma = 1 + \beta$), взятый по отрезку $[-A, A]$ равнялся числу $M > 0$, будем рассматривать меру $M_{u \in [-A, A]}^{-1} \mu^* \leq E$. Ясно, что она будет удовлетворять условию (4) с $\gamma = 1 + \beta$. С другой стороны, для μ^* очевидно справедливо соотношение (26).

Заметим теперь, что при $|w| \geq 2A$ и $|t| < A$

$$\frac{1}{|w - t|^{1+\beta}} \leq \frac{(2^{1+\beta} + A^{-1-\beta})(1 + A)^{1+\beta}}{(1 + |w|)^{1+\beta}(1 + |t|)^{1+\beta}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} +\infty &= M \sup_{w \in G^{(-)}} \left\{ (1 + |w|)^{1+\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu^*(t)}{|w - t|^{1+\beta}} \right\} = \\ &= \sup_{w \in G^{(-)}} \left\{ (1 + |w|)^{1+\beta} \int_{-A}^A \frac{d\mu(t)}{|w - t|^{1+\beta}} \right\} \leq \\ &\leq (2^{1+\beta} + A^{-1-\beta})(1 + A)^{1+\beta} + (1 + 2A)^{1+\beta} \sup_{|w| < 2A} \int_{-A}^A \frac{d\mu(t)}{|w - t|^{1+\beta}}. \end{aligned}$$

Тем самым $C_{1+\beta}(E) = 0$ в смысле определения 2, и лемма доказана.

Доказательство теоремы 1 теперь очевидно. В силу лемм 3 и 4 как экспоненциальный фактор, так и произведения типа Бляшке представления (1) функции $F \in N_{\alpha}[G^{(-)}]$ ($-1 < \alpha < 0$) обладают ненулевыми конечными угловыми граничными значениями вне множеств нулевой $1+\alpha$ -емкости. Поэтому по лемме 1 таковой является и функция F .

5. Приступим к установлению лемм, необходимых для доказательства теоремы 2.

Лемма 5. 1° Если α ($-1 < \alpha < +\infty$) любой и последовательность $\{w_k\} \equiv \{u_k + iv_k\} \subset G^{(-)}$ подчинена условию (25) с $\beta = \alpha$, то справедливо представление

$$B_{\alpha}(w, \{w_k\}) = G_{\alpha}(w, \{w_k\}) H_{\alpha}(w, \{w_k\}), \quad (27)$$

где

$$G_{\alpha}(w, \{w_k\}) \equiv \prod_k g_{\alpha}(w, w_k) \equiv \prod_k \exp \left\{ - \int_0^{|v_k|} \frac{(|v_k| - t)^{\alpha} dt}{[i(w - u_k) - t]^{1+\alpha}} \right\}, \quad (28)$$

$$H_{\alpha}(w, \{w_k\}) \equiv \prod_k h_{\alpha}(w, w_k) \equiv \prod_k \exp \left\{ - \int_0^{|v_k|} \frac{(|v_k| - t)^{\alpha} dt}{[i(w - u_k) + t]^{1+\alpha}} \right\}. \quad (28')$$

— аналитические в $G^{(-)}$ функции, причем $H_\alpha(w, \{w_k\}) \neq 0$, $w \in G^{(-)}$.

2°. Если $-1 < \beta < 0$ и $\beta \leq \alpha < 1 + \beta$, а последовательность $\{w_k\} \equiv \{u_k + iv_k\} \subset G^{(-)}$ подчинена условию (25), то функции $B_\alpha(w, \{w_k\})$, $G_\alpha(w, \{w_k\})$ и $H_\alpha(w, \{w_k\})$ принадлежат классу $N_\beta\{G^{(-)}\}$.

Доказательство. 1°. В абсолютной и равномерной сходимости произведений (27), (28), (28') внутри $G^{(-)}$ легко убедиться. Поэтому справедливость представления (27) вытекает из (2)–(3). Остается заметить, что интеграл в экспоненте представления каждого из факторов произведения H_α есть аналитическая в $G^{(-)}$ функция.

2°. Полагая, что $\zeta = \xi + i\eta \in G^{(-)}$ произвольная точка, воспользуемся формулой

$$\frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^{+\infty} \frac{\sigma^{\delta-1} d\sigma}{(i\omega + \sigma)^\lambda} = \frac{\Gamma(\lambda - \delta)}{\Gamma(\lambda)} \frac{1}{(i\omega)^{\lambda-\delta}} \quad (0 < \delta < \lambda < +\infty). \quad (29)$$

Тогда, ввиду принятого в работах автора определения оператора дробного дифференцирования Вейля при $\beta < 0$

$$\begin{aligned} W^{-\beta} \log g_\alpha(w, \zeta) &\equiv \frac{i}{\Gamma(1+\beta)} \int_0^{+\infty} \sigma^\beta [\log g_\alpha(w - i\sigma, \zeta)]' d\sigma = \\ &= - \frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{|\eta|} \frac{(|\eta| - t)^\alpha dt}{[i(w - \xi) - t]^{1+\alpha-\beta}}, \end{aligned}$$

и аналогично

$$W^{-\beta} \log h_\alpha(w, \zeta) = - \frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{|\eta|} \frac{(|\eta| - t)^\alpha dt}{[i(w - \xi) + t]^{1+\alpha-\beta}}.$$

Поэтому, те же самые представления справедливы и при $\beta = 0$, ибо W^0 по определению тождественный оператор.

Пусть сначала $\alpha = \beta$. Тогда, очевидно

$$\begin{aligned} \sup_{v < 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha} \log |H_\alpha(u + iv, \{w_k\})|| du &\leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_k \sup_{v < 0} \int_0^{|\eta_k|} (|\eta_k| - t)^\alpha dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t - v) dt}{(u - u_k)^2 + (t - v)^2} = \\ &= \frac{\pi}{\Gamma(2+\alpha)} \sum_k |\eta_k|^{1+\alpha} < +\infty. \end{aligned}$$

Легко удостовериться также в остальных условиях принадлежности функции H_α классу N_α^n типа В. И. Крылова, исследованного в работе [1]. Однако, из теоремы 4.2 той же работы следует, что $N_\alpha^n \subset \subset N_\alpha\{G^{(-)}\}$, и поскольку $B_\alpha \in N_\alpha\{G^{(-)}\}$, то одновременно $G_\alpha \in N_\alpha\{G^{(-)}\}$.

Пусть теперь $\beta < \alpha < 1 + \beta$. Тогда, в силу оценки (21), при любом $v < 0$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} |W|^{-\beta} \log g_{\alpha}(u + iv, \zeta) du \leq \\ & \leq \frac{\Gamma(1 + \alpha - \beta)}{\Gamma(1 + \alpha)} 2^{(3 + \alpha - \beta)/2} \int_0^{|\eta|} (|\eta| - t)^{\alpha} dt \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x + ||v| - t|)^{1 + \alpha - \beta}} = \\ & = C_{\alpha, \beta} \int_0^{|\eta|} \frac{(|\eta| - t)^{\alpha}}{||v| - t|^{1 + \alpha - \beta}} dt \equiv C_{\alpha, \beta} I, \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} |W|^{-\beta} \log h_{\alpha}(u + iv, \zeta) du \leq C_{\alpha, \beta} \int_0^{|\eta|} \frac{(|\eta| - t)^{\alpha}}{(|v| + t)^{1 + \alpha - \beta}} dt < \\ & < C_{\alpha, \beta} |\eta|^{1 + \beta} \int_0^1 (1 - x)^{\alpha} x^{\beta - \alpha} dx \equiv C'_{\alpha, \beta} |\eta|^{1 + \beta}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sup_{v < 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |W|^{-\beta} \log H_{\alpha}(u + iv, \{w_n\}) du \leq C'_{\alpha, \beta} \sum_n |v_n|^{1 + \beta} < +\infty,$$

и, как нетрудно проверить, $H_{\alpha} \in N_{\beta}^m \subset N_{\beta} \{G^{(-)}\}$.

Оценим теперь интеграл I , участвующий в оценке для g_{α} . Для этого сначала предположим, что $|v| \geq |\eta|$. Тогда

$$I = \int_0^{|\eta|} \frac{(|\eta| - t)^{\alpha}}{(|v| - t)^{1 + \alpha - \beta}} dt < \int_0^{|\eta|} (|\eta| - t)^{\beta} dt = \frac{|\eta|^{1 + \beta}}{1 + \beta}.$$

Если же $|v| < |\eta|$ и $\alpha \leq 0$, то

$$\begin{aligned} I & < \int_0^{|v|} (|v| - t)^{\beta} dt + \int_{|v|}^{(|v| + |\eta|)/2} (t - |v|)^{\beta} dt + \int_{(|v| + |\eta|)/2}^{|\eta|} (|\eta| - t)^{\beta} dt = \\ & = \frac{1}{1 + \beta} \left[|v|^{1 + \beta} + 2 \left(\frac{|\eta| - |v|}{2} \right)^{1 + \beta} \right] < \frac{3}{1 + \beta} |\eta|^{1 + \beta}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $|v| < |\eta|$ и $\alpha > 0$. Тогда интегрированием по частям получаем, что

$$\begin{aligned} I & = \frac{1}{1 + \beta - \alpha} \left\{ - \int_0^{|v|} (|\eta| - t)^{\alpha} d(|v| - t)^{1 + \beta - \alpha} + \int_{|v|}^{|\eta|} (|\eta| - t)^{\alpha} d(t - |v|)^{1 + \beta - \alpha} \right\} < \\ & < \frac{1}{1 + \beta - \alpha} \left[|\eta|^{1 + \beta} + \alpha \int_{|v|}^{(|v| + |\eta|)/2} (|\eta| - t)^{\beta} dt + \right. \end{aligned}$$

$$+ \alpha (|\eta| - |\nu|)^{1+\beta-\alpha} \int_{(|\nu|+|\eta|)^{1/2}}^{|\eta|} (|\zeta| - t)^{\alpha} dt \Big] < \frac{3+\beta}{(1+\beta)(1+\beta-\alpha)} \|\eta\|^{1+\beta}.$$

Из полученных оценок следует, что

$$\sup_{v < 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\beta} \log G_{\alpha}(u + iv, \{w_k\})| du < +\infty,$$

и, тем самым, как легко видеть, $G_{\alpha} \in N_{\beta}^m \subset N_{\beta}[G^{(-)}]$. Остается заметить, что $G_{\alpha} \in N_{\beta}[G^{(-)}]$ и $H_{\alpha} \in N_{\beta}[G^{(-)}]$ обеспечивают включение $B_{\alpha} \in N_{\beta}[G^{(-)}]$.

Лемма 6. Если $0 < \alpha < +\infty$ и последовательность $\{w_k\} \equiv \{u_k + iv_k\} \subset G^{(-)}$ подчинена условию

$$\sum_k |v_k|^{\alpha} < +\infty,$$

то справедливо представление

$$B_{\alpha}(w, \{w_k\}) = B_{\alpha-1}(w, \{w_k\}) [H_{\alpha-1}(w, \{w_k\})]^{-2}, \quad (30)$$

где H_{α} — аналитическая в $G^{(-)}$ функция вида (28'), ограниченная при $0 < \alpha < 1$. Если же $1 < \alpha < +\infty$ и последовательность $\{w_k\}$ подчинена условию

$$\sum_k |v_k|^{\alpha-1} < +\infty,$$

то справедливо представление

$$B_{\alpha}(w, \{w_k\}) = B_{\alpha-1}(w, \{w_k\}) [H_{\alpha-1}(w, \{w_k\})]^2 [R_{\alpha-1}(w, \{w_k\})]^2, \quad (31)$$

где $R_{\alpha-1}$ аналитическая в $G^{(-)}$ функция, при $1 < \alpha \leq 2$ ограниченная.

Доказательство легко следует из формул (27), (28'), (28') последовательным интегрированием по частям. При этом ясно, что $|H_{\alpha-1}| < 1$ в $G^{(-)}$, если $0 < \alpha \leq 1$. Кроме того, получаем, что

$$R_{\alpha-1}(w, \{w_k\}) = \exp \left\{ -\frac{1}{1+\alpha} \sum_k \frac{|v_k|^{\alpha-1}}{[i(w-u_k)]^{\alpha-1}} \right\},$$

откуда следует, что $|R_{\alpha-1}| \leq 1$ в $G^{(-)}$ при $1 < \alpha \leq 2$.

6. Доказательство теоремы 2. 1°. Пусть выполнено условие (11) с каким-либо γ ($0 < \gamma < 1$). Рассмотрим сначала случай, когда $\gamma - 1 \leq \alpha < \gamma$. В этом случае при обозначении $\beta = \gamma - 1$ будем иметь $-1 < \beta < 0$ и $\beta \leq \alpha < \beta + 1$. Поэтому, в силу леммы 5, $B_{\alpha} \in N_{\beta}[G^{(-)}] \equiv N_{\gamma-1}[G^{(-)}]$, и необходимое утверждение следует из теоремы 1. Пусть теперь $\gamma \leq \alpha < \gamma + 1$. Тогда справедливо представление (30) леммы 6, причем $\gamma - 1 \leq \alpha - 1 < \gamma$. Поэтому, по лемме 5, $B_{\alpha-1}, H_{\alpha-1} \in N_{\gamma-1}[G^{(-)}]$. Тем самым, тому же классу принадлежит функция B_{α} , и нужное утверждение опять следует из теоремы 1.

Рассмотрим наконец, случай $\alpha = \gamma + 1$. В этом случае в силу формул (30), (31) леммы 6

$$B_n \equiv B_{T+1} = B_T [H_T]^{-2}, \quad H_T = [H_{T-1} R_{T-1}]^{-1}. \quad (32)$$

Здесь, по уже доказанному, ненулевые конечные угловые граничные значения B_T существуют для всех $u \in (-\infty, +\infty)$, кроме, быть может, множества нулевой γ -емкости. Далее, в силу леммы 5 имеем, что $H_{T-1} \in N_{T-1}(G_{(-)})$. Поэтому, в силу теоремы 1, множество тех $u \in (-\infty, +\infty)$, в которых функция H_{T-1} не имеет ненулевых конечных угловых граничных значений, также имеет нулевую γ -емкость. Тем самым, если удастся показать, что предел

$$\lim_{v \rightarrow 0} H_T(u + iv, \{w_k\}) \neq 0 \quad (33)$$

также существует вне множества нулевой γ -емкости, то, в силу теоремы Линделёфа, вне такого же множества будут существовать ненулевые, конечные, угловые граничные значения R_{T-1} . В силу леммы 1 тем же граничным свойством будет обладать функция H_T , и, вернувшись к первому равенству (32), причем к нужному утверждению для функции B_{T+1} .

Итак, для завершения доказательства утверждения 1° теоремы достаточно лишь показать, что конечный предел (33) существует вне множества нулевой γ -емкости. Доказательство этого факта вполне аналогично доказательству леммы 3. Разница заключается лишь в следующих оценках:

$$\begin{aligned} |\log H_T(u + iv, \{w_k\})| &\leq (\tau + 1) \sum_k \left| \int_0^{|v_k|} \frac{(|v_k| - t)^\tau dt}{[i(w - u_k) + t]^{2+\tau}} \right| = \\ &= \sum_k \frac{|v_k|^{\tau+1}}{[i(u - u_k) + (|v| + |v_k|) \cdot i(u - u_k) + |v|]^{\tau+1}} < \\ &< 2^{(1+\tau)/2} \sum_k \frac{|v_k|^\tau}{(|u - u_k| + |v|)^{\tau+1}}, \\ &\int_{-A}^A d\mu_0(u) \int_{-\infty}^0 |[\log H_T(u + iv, \{w_k\})]|^\tau dv < \\ &< 2^{(1+\tau)/2} \tau^{-1} \sum_k |v_k|^\tau \int_{-A}^A \frac{d\mu_0(u)}{|u - u_k|^\tau} \leq 2^{(1+\tau)/2} \tau^{-1} S_1 \sum_k |v_k|^\tau < +\infty. \end{aligned}$$

2°. Пусть выполнено условие (12). Тогда второе утверждение теоремы при $\alpha=0$ общеизвестно. В случае, когда $0 < \alpha \leq 1$ из представления (30) следует, что E_α — функция ограниченного вида в $G^{(-)}$, и, тем самым, утверждение теоремы верно. Если же $1 < \alpha < 2$, то воспользуемся представлением (31). Здесь функции $H_{\alpha-2}$ и $R_{\alpha-1}$ аналитичны и ограничены в $G^{(-)}$. Функция же $B_{\alpha-1}$ ограниченного вида в $G^{(-)}$ в силу уже доказанного. Поэтому функция B_α опять оказывается ограниченного вида в $G^{(-)}$ и нужное утверждение справедливо.

Итак, теорема 2 доказана. Для произведений типа Бляшке в полуплоскости остается только доказать неравенство (15). С этой целью воспользуемся опять формулой (29). Тогда, ввиду (3) получим, что при любых α_1, α_2 ($-1 < \alpha_1 < \alpha_2 \leq 0$), $w \in G^{(-)}$ и $\zeta = \xi + i\eta \in G^{(-)}$

$$\begin{aligned} \varphi(w) &= W^{-\alpha_2} \log \left| \frac{b_{\alpha_2}(w + \xi, \zeta)}{b_{\alpha_1}(w + \xi, \zeta)} \right| = \\ &= \frac{\Gamma(1 + \alpha_1 - \alpha_2)}{\Gamma(1 + \alpha_1)} \operatorname{Re} \int_0^{|\eta|} (|\eta| - t)^{\alpha_1} \left[\frac{1}{(iw - t)^{1 + \alpha_1 - \alpha_2}} + \frac{1}{(iw + t)^{1 - \alpha_1 - \alpha_2}} \right] dt - \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha_2)} \operatorname{Re} \int_0^{|\eta|} (|\eta| - t)^{\alpha_2} \left[\frac{1}{iw - t} + \frac{1}{iw + t} \right] dt. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что φ — гармоническая в $G^{(-)}$ функция, непрерывная вплоть до вещественной оси. Однако, вычислением можно убедиться в том, что при $w = u \in (-\infty, +\infty)$ подынтегральная функция одного из интегралов представления φ положительна, а другого — равняется нулю. Тем самым, $\varphi(u) > 0$ ($-\infty < u < +\infty$). Далее $\varphi(w) > 0$ ($w \in G^{(-)}$) в силу принципа Фрагмена-Линделёфа и, с применением теоремы 4 работы [8] приходим к представлению

$$B_{\alpha_1}(w, \{w_k\}) = B_{\alpha_2}(w, \{w_k\}) \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{[i(w - t)]^{1 + \alpha_2}} \right\}; \quad w \in G^{(-)},$$

где $\sigma(t)$ — монотонно неубывающая функция, подчиненная условию (17) с $\beta = \alpha_2$. Из этого представления непосредственно следует неравенство (15).

7. Ступая на путь установления теоремы 3, сначала же отметим отсутствие приемлемого аналога формулы (29) в задаче для круга. Это приводит к определенным затруднениям, из-за которых, например, не ясно какой подход может привести к доказательству аналога неравенства (15) для произведений типа Бляшке — М. М. Джрбашяна. В достаточной для поставленных целей мере формулу (29) заменяет

Лемма 7. При любых α, β ($-1 < \beta < +\infty$, $\beta - 1 < \alpha < +\infty$)

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^\beta dt}{(1-tz)^{2+\alpha}} = \frac{J_{\alpha, \beta}(z)}{(1-z)^{1+\alpha-\beta}},$$

причем, каково бы ни было R_0 ($1 < R_0 < +\infty$),

$$M_{\alpha, \beta}(R_0) = \sup_{|z| < R_0} |J_{\alpha, \beta}(z)| < +\infty.$$

Доказательство. Замена переменной $t = 1 - (1-z)x/z$ приводит к нужному представлению, где

$$J_{\alpha, \beta}(z) = \frac{1}{z^{1+\beta}} \int_0^{z/(1-z)} \frac{x^\beta dx}{(1+x)^{2+\alpha}}$$

— аналитическая функция в плоскости z с разрезом $1 \leq z < +\infty$ ($\operatorname{Im} z = 0$). При этом, тут допустима известная произвольность в выборе контура интегрирования. Заметим, что $|z/(1-z) + 1| = 1/|1-z| > (1+R_0)^{-1} > 0$. Так что в любом случае возможен выбор контура интегрирования, удаленного от точки -1 не менее чем на $(1+R_0)^{-1}$. Выберем же контур интегрирования следующим образом. Если точка $w = z/(1-z)$ лежит вне области $\Delta_{R_0} = \{w : |\arg w| > \pi - \arcsin(1 + R_0)^{-1}, \operatorname{Re} w < -1 + (1+R_0)^2\}$, то в качестве контура интегрирования берем прямолинейный отрезок $[0, w]$. Если $w \in \Delta_{R_0}$ и $|w| \leq 2$, то прямолинейный отрезок $[0, |w| e^{i\varphi(w)}]$, где $\varphi(w) = [\pi - \arcsin(1+R_0)^{-1}] \times \times \operatorname{sign}(\arg w)$ и дугу $|w| e^{i\varphi(w)}, w]$ окружности радиуса $|w|$. Далее, если $w \in \Delta_{R_0}$ и $|w| > 2$, то прямолинейный отрезок $[0, 2e^{i\varphi(w)}]$, дугу $[2e^{i\varphi(w)}, 2e^{i\arg w}]$ окружности радиуса 2 и прямолинейный отрезок $[2e^{i\arg w}, w]$.

Пусть $|z| \leq 1/3$. Тогда очевидно $w \notin \Delta_{R_0}$ и $|w| = |z/(1-z)| \leq 3|z|/2$. Поэтому

$$\sup_{|z| \leq 1/3} |J_{\alpha, \beta}(z)| < \frac{(1+R_0)^{2+\alpha}}{|z|^{1+\beta}} \int_0^{|z|} x^\beta dx = \frac{(1+R_0)^{2+\alpha}}{1+\beta} \left(\frac{3}{2}\right)^{1+\beta} < +\infty. \quad (34)$$

Далее предположим, что $1/3 < |z| < R_0$, $w \in \Delta_{R_0}$, $|w| < 2$. Тогда

$$|J_{\alpha, \beta}(z)| \leq 3^{1+\beta} (1+R_0)^{2+\alpha} \int_0^2 x^\beta dx = \frac{6^{1+\beta}}{1+\beta} (1+R_0)^{2+\alpha}.$$

Если же $1/3 < |z| < R_0$, $w \in \Delta_{R_0}$, но $|w| > 2$, то ясно, что

$$|J_{\alpha, \beta}(z)| < 3^{1+\beta} (1+R_0)^{2+\alpha} \int_0^2 x^\beta dx + 3^{1+\beta} \int_2^{|w|} \frac{x^\beta dx}{(x-1)^{2+\alpha}} < +\infty.$$

Таким образом, если $z/(1-z)$ остается вне области Δ_{R_0} , то

$$\sup_{1/3 < |z| < R_0} |J_{\alpha, \beta}(z)| < +\infty. \quad (34')$$

Пусть теперь $1/3 < |z| < R_0$, $w \in \Delta_{R_0}$, $|w| \leq 2$. Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} |J_{\alpha, \beta}(z)| &< \frac{6^{1+\beta}}{1+\beta} (1+R_0)^{2+\alpha} + 3^{1+\beta} (1+R_0)^{2+\alpha} \left| i|w|^{1+\beta} \int_{\varphi(w)}^{\arg w} e^{i(2+\beta)\theta} d\theta \right| < \\ &< 6^{1+\beta} (1+R_0)^{2+\alpha} [(1+\beta)^{-1} + \pi] < +\infty. \end{aligned}$$

Далее, если $1/3 < |z| < R_0$, $w \in \Delta_{R_0}$, но $|w| > 2$, то

$$\begin{aligned} |J_{\alpha, \beta}(z)| &< 6^{1+\beta} (1+R_0)^{2+\alpha} \left[\frac{1}{1+\beta} + \pi \right] + 3 \left| \int_{2e^{i\arg w}}^w \frac{x^\beta dx}{(1+x)^{2+\alpha}} \right| < \\ &< 6^{1+\beta} (1+R_0)^{2+\alpha} \left[\frac{1}{1+\beta} + \pi \right] + 3^{1+\beta} \int_2^{|w|} \frac{x^\beta dx}{(x-1)^{2+\alpha}} < +\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (34) верно и в том случае, когда точка $w = z/(1-z)$ остается внутри области Δ_D , что вместе с (34) завершает доказательство леммы.

8. Для доказательства теоремы 3 будут необходимы также устанавливаемые ниже аналоги лемм 5 и 6.

Лемма 8. 1°. Если α ($-1 < \alpha < +\infty$) любое и последовательность $\{z_k\} \subset D$ ($z_k \neq 0$, $k \geq 1$) подчинена условию (б), то справедливо представление

$$B_d(z, \{z_k\}) = C, G_\alpha(z, \{z_k\}) H_\alpha(z, \{z_k\}), \quad (35)$$

где C_α — постоянная, зависящая от последовательности $\{z_k\}$, а

$$G_\alpha(z, \{z_k\}) = \prod_k g_k(z, z_k) = \prod_k \exp \left\{ - \int_{|z_k|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\left(1 - \frac{zx}{z_k}\right)^{1+\alpha}} \frac{dx}{x} \right\}, \quad (36)$$

$$H_\alpha(z, \{z_k\}) = \prod_k h_k(z, z_k) = \prod_k \exp \left\{ - \int_{|z_k|}^1 \frac{(1-x)^2}{\left(1 - \frac{zx}{z_k}\right)^{1+\alpha}} \frac{dx}{x} \right\} \quad (36')$$

— аналитические в D функции, причем $H_\alpha(z, \{z_k\}) \neq 0$, $z \in D$.

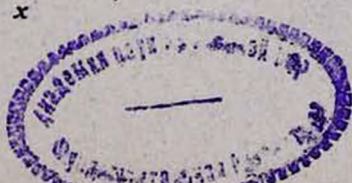
2°. Если $-1 < \beta \leq 0$ и $\beta \leq \alpha < 1 + \beta$, а последовательность $\{z_k\} \subset D$ ($z_k \neq 0$, $k \geq 1$) подчинена условию (13) с $\gamma = 1 + \beta$, то функции $B_\alpha(z, \{z_k\})$, $G_\alpha^\beta(z, \{z_k\})$ и $H_\alpha(z, \{z_k\})$ принадлежат классу N_β М. М. Джрбашяна.

Доказательство. 1°. В абсолютной и равномерной сходимости произведений (36), (36') внутри D легко убедиться. Поэтому справедливость представления (35) непосредственно вытекает из (7)—(8). Остается заметить, что интеграл в экспоненте представления каждого из факторов произведения H_α есть аналитическая в D функция.

2°. Заметим сначала, что при принятых условиях существует число ρ_0 ($0 < \rho_0 < 1$), такое, что $|z_k| \geq \rho_0$ ($k \geq 1$). Далее, полагая, что $\zeta = re^{i\varphi}$ ($\rho_0 \leq \rho < 1$), $z = re^{i\theta}$ ($0 < r < 1$), воспользуемся формулой (1.22), стр. 573 [3]. Тогда при любых β ($-1 < \beta \leq 0$) и α ($-1 < \alpha < +\infty$) получим

$$\begin{aligned} r^{-\beta} D^{-\beta} \log g_k(z, \zeta) &= r^{-\beta} D^{-(1+\beta)} \frac{d}{dr} \log g_k(z, \zeta) + \frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \log g_k(0, \zeta) = \\ &= - \frac{1+\alpha}{\Gamma(1+\beta)} \frac{r}{\rho} e^{i(\varphi-\theta)} \int_{\rho}^1 (1-x)^\alpha dx \int_0^1 \frac{(1-t)^\beta dt}{\left(1 - \frac{rx}{\rho} t e^{i(\varphi-\theta)}\right)^{2+\alpha}} - \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \int_{\rho}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx, \end{aligned}$$

и аналогично



$$r^{-\beta} D^{-\beta} \log h_{\alpha}(z, \zeta) = - \frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \int_{\rho}^1 \frac{(1+x)^{\alpha}}{x} dx - \\ - \frac{1+\alpha}{\Gamma(1+\beta)} r \rho e^{i(\varphi-\theta)} \int_{\rho}^1 \frac{(1-x)^{\alpha}}{x^2} dx \int_0^1 \frac{(1-t)^{\beta} dt}{\left(1 - \frac{r\rho}{x} t e^{i(\varphi-\theta)}\right)^{2+\alpha}}.$$

Пусть сначала $\alpha = \beta$. Тогда, как легко проверить

$$|r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log |h_{\alpha}(re^{i\theta}, \rho e^{i\varphi})|| \leq \frac{1+2\alpha}{\Gamma(2+\alpha)} \int_{\rho}^1 \frac{(1-x)^{\alpha}}{x} dx + \\ + \frac{1}{2\Gamma(2+\alpha)} \int_{\rho}^1 \frac{1 - \left(\frac{r\rho}{x}\right)^2}{\left|1 - \frac{r\rho}{x} e^{i(\theta-\varphi)}\right|^2} \frac{(1-x)^{\alpha}}{x} dx.$$

Поэтому получаем, что при любом r ($0 < r < 1$)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log |H_{\alpha}(re^{i\theta}, \{z_k\})|| d\theta \leq \frac{4}{\rho_0 \Gamma(2+\alpha)} \sum_k (1 - |z_k|)^{1+\alpha} < +\infty,$$

откуда следует включение $H_{\alpha} \in N_{\alpha}$. Ввиду того, что $B_{\alpha} \in N_{\alpha}$, отсюда следует также включение $G_{\alpha} \in N_{\alpha}$ [3, гл. IX].

Пусть теперь $\beta < \alpha < 1 + \beta$. Тогда, очевидно

$$|r^{-\beta} D^{-\beta} \log h_{\alpha}(re^{i\theta}, \rho e^{i\varphi})| \leq \frac{(1-\rho)^{1+\alpha}}{\rho_0 (1+\alpha) \Gamma(1+\beta)} + \\ + \frac{1+\alpha}{\Gamma(1+\beta)} \int_{\rho}^1 (1-x)^{\alpha} dx \int_0^1 \frac{(1-t)^{\beta} dt}{|x - t r \rho e^{i(\theta-\varphi)}|^{2+\alpha}},$$

и, в силу леммы 7,

$$|r^{-\beta} D^{-\beta} \log g_{\alpha}(re^{i\theta}, \rho e^{i\varphi})| \leq \frac{(1-\rho)^{1+\alpha}}{\rho_0 (1+\alpha) \Gamma(1+\beta)} + \\ + \frac{1+\alpha}{\Gamma(1+\beta)} M_{\alpha, \beta} \left(\frac{1}{\rho_0}\right) \int_{\rho}^1 \frac{(1-x)^{\alpha} dx}{|\rho - r x e^{i(\theta-\varphi)}|^{2+\alpha-\beta}}. \quad (37)$$

Заметим, что если $\theta - \varphi = \lambda$, $|\lambda| < \pi$, то $|x - r \rho t e^{i\lambda}|^2 = (x - r \rho t)^2 + 4 x r \rho t \sin^2(\lambda/2) \geq (x - r \rho t)^2 + 4 x r \rho t \lambda^2 / \pi^2$. Поэтому, очевидно,

$$|x - r \rho t e^{i\lambda}|^{-(2+\alpha)} \leq 2^{1+\alpha/2} [x - r \rho t + 2 \sqrt{x r \rho t} |\lambda| / \pi]^{-(2+\alpha)}.$$

Тем самым

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |r^{-\beta} D^{-\beta} \log h_{\alpha}(re^{i\theta}, \rho e^{i\varphi})| d\theta \leq \frac{(1-\rho)^{1+\alpha}}{\rho_0 (1+\alpha) \Gamma(1+\beta)} +$$

$$+ \frac{2^{2+\alpha/2}(1+\alpha)}{\pi\Gamma(1+\beta)} \int_p^1 (1-x)^\alpha dx \int_0^1 (1-t)^\beta dt \int_0^\pi \frac{d\lambda}{\left(x - r\rho t + \frac{2}{\pi} \sqrt{xr\rho t\lambda}\right)^{2+\alpha}} <$$

$$< \frac{(1-\rho)^{1+\alpha}}{\rho_0(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)} + \frac{2^{2+\alpha/2}}{\pi\Gamma(1+\beta)} \int_p^1 (1-x)^\alpha dx \int_0^1 \frac{(1-t)^\beta dt}{(x-\rho t)^{1+\alpha}}.$$

Однако, после замены переменной $t = 1 - (x/\rho - 1)\tau$ получаем

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^\beta dt}{(x-\rho t)^{1+\alpha}} < \frac{\rho_0^{-(1+\beta)}}{(x-\rho)^{\alpha-\beta}} \int_0^{+\infty} \frac{\tau^\beta d\tau}{(1+\tau)^{1+\alpha}} \equiv \frac{C_1}{(x-\rho)^{\alpha-\beta}}.$$

Следовательно, с новой заменой переменной $x = 1 - (1-\rho)y$ будем иметь

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |r^{-\beta} D^{-\beta} \log h_\alpha(re^{i\theta}, \rho e^{i\varphi})| d\theta < \frac{(1-\rho)^{1+\beta}}{\rho_0(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)} +$$

$$+ \frac{2^{2+\alpha/2} C_1}{\pi\Gamma(1+\beta)} \int_0^1 \frac{y^\alpha dy}{(1-y)^{\alpha-\beta}} (1-\rho)^{1+\beta}.$$

Отсюда следует, что при любом r ($0 \leq r < 1$)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |r^{-\beta} D^{-\beta} \log H_\alpha(re^{i\theta}, \{z_k\})| d\theta < \left[\frac{1}{\rho_0(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2^{2+\alpha/2} C_1}{\pi\Gamma(1+\beta)} \int_0^1 \frac{y^\alpha dy}{(1-y)^{\alpha-\beta}} \right] \sum_k (1-|z_k|)^{1+\beta} < +\infty,$$

и, тем самым, $H_\alpha(z, \{z_k\}) \in N_\rho$. Для доказательства принадлежности функции $G_\alpha(z, \{z_k\})$ тому же классу заметим, что в силу (37), с повторением предыдущих рассуждений получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |r^{-\beta} D^{-\beta} \log g_\alpha(re^{i\theta}, \rho e^{i\varphi})| d\theta < \frac{(1-\rho)^{1+\beta}}{\rho_0(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)} +$$

$$+ \frac{1+\alpha}{\pi\Gamma(1+\beta)} M_{\alpha,\beta} \left(\frac{1}{\rho_0} \right) 2^{2+\alpha/2} \int_p^1 \frac{(1-x)^\alpha dx}{|p-rx|^{\alpha-\beta}}. \quad (38)$$

Для оценки интеграла

$$I_{\alpha,\beta} = \int_p^1 \frac{(1-x)^\alpha dx}{|p-rx|^{\alpha-\beta}} \quad (39)$$

сначала предположим, что $r \leq \rho$. В этом случае

$$I_{\alpha, \beta} \leq \int_p^1 \frac{(1-x)^\alpha dx}{(\rho-rx)^{\alpha-\beta}} \leq \frac{(1-\rho)^{1+\beta}}{\rho_0^{\alpha-\beta} (1+\beta)} \quad (0 \leq r < \rho). \quad (40)$$

Пусть теперь $\rho < r < 1$ и $\alpha < 0$. Тогда разложим

$$I_{\alpha, \beta} = \int_p^{\rho/r} \frac{(1-x)^\alpha dx}{(\rho-rx)^{\alpha-\beta}} + \int_{\rho/r}^1 \frac{(1-x)^\alpha dx}{(rx-\rho)^{\alpha-\beta}} \equiv I_1 + I_2.$$

Здесь, как легко видеть,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{r^{\alpha-\beta}} \int_p^{\rho/r} \frac{(1-x)^\alpha dx}{(\rho/r-x)^{\alpha-\beta}} < \frac{1}{r^{\alpha-\beta}} \int_p^{\rho/r} \left(x - \frac{\rho}{r}\right)^\beta dx < \frac{(1-\rho)^{1+\beta}}{\rho_0^{\alpha-\beta} (1+\beta)}, \\ I_2 &< \frac{1}{r^{\alpha-\beta}} \int_{\rho/r}^{(1+\rho/r)/2} \left(x - \frac{\rho}{r}\right)^\beta dx + \frac{1}{r^{\alpha-\beta}} \int_{(1+\rho/r)/2}^1 (1-x)^\beta dx = \\ &= \frac{2^{-\beta} (r-\rho)^{1+\beta}}{r^{1+\alpha} (1+\beta)} < \frac{2 (1-\rho)^{1+\beta}}{\rho_0^{1+\alpha} (1+\beta)}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$I_{\alpha, \beta} \leq \left[\frac{1}{\rho_0^{\alpha-\beta}} + \frac{2}{\rho_0^{1+\alpha}} \right] \frac{(1-\rho)^{1+\beta}}{1+\beta} \quad (\rho < r < 1, \alpha < 0). \quad (41)$$

Предположим теперь, что $\rho < r < 1$ и $0 < \alpha < 1+\beta$. Тогда интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} I_{\alpha, \beta} &= \frac{r^{-(\alpha-\beta)}}{1+\beta-\alpha} \left\{ - \int_p^{\rho/r} (1-x)^\alpha d \left(\frac{\rho}{r} - x \right)^{1+\beta-\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\rho/r}^{(1+\rho/r)/2} (1-x)^\alpha d \left(x - \frac{\rho}{r} \right)^{1+\beta-\alpha} \right\} + \frac{1}{r^{\alpha-\beta}} \times \\ &\times \int_{(1+\rho/r)/2}^1 \frac{(1-x)^\alpha dx}{\left(x - \frac{\rho}{r} \right)^{\alpha-\beta}} < \frac{(1-\rho)^\alpha (1-r)^{1+\beta-\alpha}}{\rho_0^{\alpha-\beta} (1+\beta-\alpha)} + \frac{(r-\rho)^{1+\beta}}{2^{1+\beta} \rho_0^{1-\alpha} (1+\beta-\alpha)} + \\ &+ \frac{r^{-(\alpha-\beta)}}{1+\beta-\alpha} \int_{(1+\rho/r)/2}^1 (1-x)^\beta dx < \left[\frac{1}{\rho_0^{\alpha-\beta}} + \frac{1}{2^{1+\beta} \rho_0^{1+\alpha}} + \frac{1}{\rho_0^{1+\alpha} (1+\beta)} \right] \frac{(1-\rho)^{1+\alpha}}{1+\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (38)–(41) следует, что при любом r ($0 \leq r < 1$)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |r^{-3} D^{-3} \log G_\alpha(re^{i\theta}, \{z_k\})| d\theta \leq C_2 \sum_k (1 - |z_k|)^{1+\beta} < +\infty,$$

где $C_2 > 0$ — постоянная, зависящая лишь от α, β и ρ_0 . Таким образом $G_\alpha(z, \{z_k\}) \in N_\beta$, что ввиду уже доказанного включения $H_\alpha(z, \{z_k\}) \in N_\beta$ и представления (35) обеспечивает включение $B_\alpha(z, \{z_k\}) \in N_\beta$.

Лемма 9. 1°. Если $0 < \alpha < +\infty$ и последовательность $\{z_k\} \subset D$ ($z_k \neq 0$, $k \geq 1$) подчинена условию

$$\sum_k (1 - |z_k|)^\alpha < +\infty,$$

то справедливо представление

$$B_\alpha(z, \{z_k\}) = C_\alpha B_{\alpha-1}(z, \{z_k\}) [H_{\alpha-1}^*(z, \{z_k\})]^{-2}, \quad (42)$$

где $C_\alpha = \exp \{-\alpha^{-1} \sum (1 - |z_k|)^\alpha\}$ — постоянная, а

$$H_{\alpha-1}^*(z, \{z_k\}) \equiv \prod_k \exp \left\{ \int_{|z_k|}^1 \frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\left(1 - \frac{z \bar{z}_k}{x}\right)^\alpha} dx \right\} \neq 0 \quad (43)$$

— аналитическая в D функция, ограниченная при $0 < \alpha \leq 1$.

2°. Если $1 < \alpha < +\infty$ и последовательность $\{z_k\} \subset D$ ($z_k \neq 0$, $k \geq 1$) подчинена условию

$$\sum_k (1 - |z_k|)^{\alpha-1} < +\infty,$$

то справедливо представление

$$B_\alpha(z, \{z_k\}) = C_\alpha B_{\alpha-1}(z, \{z_k\}) [H_{\alpha-2}^{**}(z, \{z_k\})]^{-2} \times \\ \times [H_{\alpha-2}^{***}(z, \{z_k\})]^\alpha [R_{\alpha-1}(z, \{z_k\})]^{-2}, \quad (44)$$

где

$$H_{\alpha-2}^{***}(z, \{z_k\}) = \prod_k \exp \left\{ -\frac{1}{\alpha-1} \int_{|z_k|}^1 \frac{(1-x)^{\alpha-2}}{\left(1 - \frac{z \bar{z}_k}{x}\right)^{\alpha-1}} dx \right\}, \quad (45)$$

$$H_{\alpha-2}^{**}(z, \{z_k\}) = \prod_k \exp \left\{ -\int_{|z_k|}^1 \frac{(1-x)^{\alpha-2}}{\left(1 - \frac{z \bar{z}_k}{x}\right)^{\alpha-1}} x dx \right\}, \quad (45')$$

$$R_{\alpha-1}(z, \{z_k\}) = \exp \left\{ -\frac{1}{\alpha-1} \sum_k |z_k| \frac{(1 - |z_k|)^{\alpha-1}}{\left(1 - \frac{z \bar{z}_k}{|z_k|}\right)^{\alpha-1}} \right\} \quad (45'')$$

— аналитические в D функции без нулей. При этом они ограничены в D , если $1 < \alpha \leq 2$.

Доказательство. 1°. Справедливость представления (42)—(43) доказана в работе [7]. Нужные свойства функции $H_{\alpha-1}^*$ очевидны.

2°. Как показано в [7], при любых $z, \zeta \in D$

$$h_\alpha(z, \zeta) = h_{\alpha-1}(z, \zeta) \exp \left\{ 2 \int_{|z|}^1 \frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\left(1 - \frac{z \bar{\zeta}}{x}\right)^\alpha} dx - \frac{1}{\alpha} \frac{(1 - |\zeta|)^\alpha}{\left(1 - \frac{z \bar{\zeta}}{|\zeta|}\right)^\alpha} \right\}.$$

С другой стороны, если $h_{\alpha-1}(z, \zeta)$ — фактор произведения (43), то очевидно, что

$$\varphi_{\alpha-1}(z, \zeta) \equiv \frac{h_{\alpha-1}(z, \zeta)}{h_{\alpha-1}(z, \zeta)} = \int_{|x|=1}^1 \frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\left(1 - \frac{z\bar{\zeta}}{x}\right)^{\alpha-1}} \frac{dx}{x}.$$

Далее, способом, примененным в [7] легко убедиться в том, что

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{\alpha-1}(z, \zeta)}{\varphi_{\alpha-2}(z, \zeta)} &= \exp \left\{ \frac{1}{\alpha-1} \frac{(1-|\zeta|)^{\alpha-1}}{\left(1 - \frac{z\bar{\zeta}}{|\zeta|}\right)^{\alpha-1}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1+2(\alpha-1)}{\alpha-1} \int_{|x|=1}^1 \frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\left(1 - \frac{z\bar{\zeta}}{x}\right)^{\alpha-1}} dx \right\}. \end{aligned}$$

Из этих равенств следует представление (44). Ограниченность в D функций (45), (45'), (45''), при $1 < \alpha \leq 2$ очевидна.

9. Доказательство теоремы 3. 1°. Пусть выполнено условие (13) с каким-либо $\gamma (0 < \gamma < 1)$. Рассмотрим сначала случай, когда $\gamma - 1 < \alpha < \gamma$. В этом случае при обозначении $\beta = \gamma - 1$ будет иметь $-1 < \beta < 0$ и $\beta \leq \alpha < \beta + 1$. Следовательно, в силу леммы 8, $B_{\alpha} \in N_{\beta}$, и утверждение теоремы следует ввиду результата М. М. Джрбашяна и В. С. Захаряна [5, 6] о том, что любая ненулевая функция этого класса обладает ненулевыми конечными угловыми граничными значениями во всех точках единичной окружности, кроме, быть может, множества нулевой $1+\beta$ -емкости.

Пусть теперь $\leq \alpha < \gamma + 1$. Тогда справедливо представление (42) — (43) леммы 9, причем $\gamma - 1 < \alpha - 1 < \gamma$. Поэтому, в силу леммы 8, в этом представлении $B_{\alpha-1} \in N_{\beta}$, доказательство же включения $H_{\alpha-1}^{**} \in N_{\beta}$ по существу ничем не отличается от доказательства включения $H_{\alpha-1} \in N_{\beta}$. Утверждение теоремы следует из отмеченного выше граничного свойства функций класса N_{β} и аналога леммы 1, имеющегося в работах [5, 6].

Рассмотрим наконец случай, когда $\alpha = \gamma + 1$. В этом случае в силу формул (42), (44) леммы 9

$$B_{\alpha} \equiv B_{\gamma+1} = C_{\gamma+1}' B_{\gamma} [H_{\gamma}']^{-2}, \quad H_{\gamma} = H_{\gamma-1}^{**} [H_{\gamma-1}^{***}]^{-2} R_{\gamma}.$$

Здесь, как уже доказано, ненулевые, конечные угловые граничные значения B_{γ} существуют во всех точках единичной окружности, кроме, быть может, множества нулевой γ -емкости. Далее, как было сказано выше, $H_{\gamma-1}^{**} \in N_{\gamma-1}$, в принадлежности же $H_{\gamma-1}^{***} \in N_{\gamma-1}$ так же легко убедиться. Тем самым, в силу отмеченного выше граничного свойства функций класса $N_{\gamma-1}$, эти функции обладают нужным граничным свойством. Поэтому, если удастся доказать, что конечный предел

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} H_T^*(re^{i\theta}, \{z_k\}) \neq 0 \quad (46)$$

существует вне множества нулевой γ -емкости, то, в силу теоремы Лиделёфа, вне такого множества будут существовать ненулевые, конечные угловые граничные значения функции R_T , а за ней H_T^* и B_{T+1} .

Итак, для завершения доказательства утверждения 1° теоремы достаточно лишь показать, что конечный предел (46) существует вне множества нулевой γ -емкости. Доказательство этого факта вполне аналогично доказательству леммы 3, или случая $\omega(x) = (1-x)^{\gamma}/\Gamma(1+\gamma)$ теоремы 1 работы [6]. Разница заключается лишь в нижеприводимых оценках.

Пусть h_T^* — фактор произведения (43), $z = re^{i\theta}$ ($0 \leq r < 1$ и $\zeta = \rho e^{i\varphi}$ ($0 < \rho_0 \leq \rho < 1$). Тогда, как нетрудно убедиться,

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dr} \log h_T^*(re^{i\theta}, \zeta) \right| &< 2^{2+\gamma/2} \int_0^1 \frac{(1-x)^{\gamma} dx}{\left(x - r\rho + \frac{2}{\pi} \sqrt{r\rho} |\theta - \varphi| \right)^{\gamma+1}} = \\ &= \frac{2^{2+\gamma/2}}{1+\gamma} \frac{(1-\rho)^{\gamma+1}}{\left(1 - r\rho + \frac{2}{\pi} \sqrt{r\rho} |\theta - \varphi| \right) \left| \rho(1-r) + \frac{2}{\pi} \sqrt{r\rho} |\theta - \varphi| \right|^{\gamma+1}} < \\ &< 2^{2+\gamma/2} \frac{(1-\rho)^{\gamma}}{\left| \rho(1-r) + \frac{2}{\pi} r\rho |\theta - \varphi| \right|^{\gamma+1}}. \end{aligned}$$

Поэтому, если $z_k = |z_k| e^{i\varphi_k}$, $|z_k| \geq \rho_0 > \rho$, то

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left| \frac{d}{dr} \log H_T^*(re^{i\theta}, \{z_k\}) \right| dr \leq \\ &< 2^{2+\gamma/2} \sum_k (1-|z_k|)^{\gamma} \int_0^1 \frac{dr}{\left| |z_k|(1-r) + \frac{2}{\pi} r|z_k| |\theta - \varphi_k| \right|^{\gamma+1}} < \\ &< 2^{2+\gamma/2} \sum_k (1-|z_k|)^{\gamma} \left[\frac{2^{\gamma}}{\rho_0^{\gamma+1}} + \frac{1}{\rho_0^{\gamma+1}} \int_{1/2}^1 \frac{dr}{(1 + \pi^{-1} |\theta - \varphi_k| - r)^{\gamma+1}} \right] < \\ &< \frac{2^{2+\gamma/2}}{\rho_0^{\gamma+1}} \sum_k (1-|z_k|)^{\gamma} \left[2^{\gamma} + \frac{\pi^{\gamma}}{\gamma} \frac{1}{|\theta - \varphi_k|^{\gamma}} \right]. \end{aligned}$$

И наконец, если S_2 — число, определенное соотношением (10), то

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} d\mu_0(\theta) \int_0^1 \left| \frac{d}{dr} \log H_T^*(re^{i\theta}, \{z_k\}) \right| dr < \\ &< \frac{2^{2+\gamma/2}}{\rho_0^{\gamma+1}} \sum_k (1-|z_k|)^{\gamma} \left[2^{\gamma} + \frac{\pi^{\gamma}}{\gamma} S_2 \right] < +\infty, \end{aligned}$$

поскольку при любом φ_k

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\mu_0(\theta)}{|\theta - \varphi_k|^\gamma} \leq \sup_{z \in D} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\mu_0(\theta)}{|z - e^{i\theta}|^\gamma} = S_\gamma < +\infty.$$

2°. Пусть теперь выполнено условие (14). Тогда второе утверждение теоремы в случае $\alpha=0$ общеизвестно. В случае, когда $0 < \alpha \leq 1$ из представления (42) следует, что B_α — функция ограниченного вида в D , и, тем самым, нужно утверждение верно. Если же $1 < \alpha \leq 2$, то воспользуемся представлением (44). Здесь функции $H_{\alpha-2}^{**}$, $H_{\alpha-1}^{**}$ и $R_{\alpha-1}$ аналитичны и ограничены в D . Функция $B_{\alpha-1}$ ограниченного вида в D ввиду предыдущего случая. Поэтому функция B_α опять оказывается ограниченного вида в D , и теорема доказана.

Институт математики
АН Армении

Поступила 17.XII.1990

Ա. Մ. ԶՐԲԱՇԻԱՆ. Հեղինակացված սահմանափակ տեսի ֆունկցիաների եզրային հատկությունների մասին (ամփոփում)

Հոդվածը նվիրված է հեղինակի ներմուծած կիսահարթությունում ընդհանրացված սահմանափակ տեսի ֆունկցիաների դասերի ինչպես նաև Մ. Մ. Զրբաշյանի միավոր շրջանի B_α շրջանի տիպի արտադրյալների եզրային հատկությունների հետազոտմանը, կիսահարթության ղեկների համար ստացված հիմնական արդյունքները ղեկառ զրոներով B_α շրջանի արտադրյալների եզրային հատկությունների վերաբերյալ ֆրոստմանի հանրահայտ արդյունքի ինչպես նաև շրջանում ընդհանրացված սահմանափակ տեսի ֆունկցիաների եզրային հատկությունների համար Մ. Մ. Զրբաշյանի և Վ. Ս. Զաքարյանի ստացած մի արդյունքի յուրօրինակ համեմատներ են: Միաժամանակ, հոդվածի հիմնական արդյունքը միավոր շրջանում Մ. Մ. Զրբաշյանի և Վ. Ս. Զաքարյանի նշված արդյունքի, ինչպես նաև Դ. Տ. Բաղդասարյանի և Ի. Վ. Հովհաննիսյանի ավելի ուշ ստացված արդյունքի ուժեղացումն է:

A. M. JERBASHIAN (DJRBASHIAN). On boundary properties of functions of generalized bounded type (summary)

In the paper are investigated the boundary properties of the classes of functions of generalized bounded type in the half-plane, introduced by author, and also the boundary properties of M. M. Djrbashian's Blaschke type products in the unit circle. Particularly the full analog of Frostman's well-known result on Blaschke product with "sparse" zeros is obtained for the special representatives of the classes of functions of generalized bounded type in the half-plane and in the circle — the Blaschke type products of index $\alpha \in (-1, 1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Джрбашян. Соотношения равновесия и факторизационные теоремы для мероморфных в полуплоскости функций, Изв. АН АрмССР, «Математика», XXI, № 3, 1986, 213—279.
2. А. М. Джрбашян. О равномерной аппроксимации функций обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости и аналоге теоремы Ахтоянца, Изв. АН АрмССР, «Математика», XXV, № 3, 1990, 293—302.
3. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Наука, 1966.

4. O. Frostman. Sur les produits de Blaschke, Fysiogr. Sölsk Land, föhr., 12, № 15. 1939, 1—14.
5. М. М. Джрбашян, В. С. Захарян. Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН СССР, 34, № 6, 1970, 1262—1339.
6. М. М. Джрбашян, В. С. Захарян. Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН АрмССР, «Математика», VI, № 2—3, 1971, 182—194.
7. Д. Т. Багдасарян, И. В. Оганисян. Граничные свойства функций $B_n(z, z_k)$ М. М. Джрбашяна, ДАН АрмССР, 90, № 5, 1990, 199—205.
8. А. М. Джрбашян. Теоремы типа Горглотца-Рассса, Мат. заметки, 45, № 4, 1989, 19—26.
9. А. М. Джрбашян. Функции типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XVIII, № 6, 1983, 409—440.
10. А. М. Джрбашян. Об одном представлении произведения типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН АрмССР, «Математика», XXIV, № 5, 1989, 466—473.

УДК 517.53

А. А. АНДРЯН

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ
ПРОИЗВОДНЫХ В КЛАССАХ ЗЕМАНЯНАРассмотрим дифференциальное уравнение n -го порядка вида

$$\sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k u(x, y)}{\partial y^k} = 0, \quad (x, y) \in R \times R^+, \quad (1)$$

где $a_k(p)$ — полином с постоянными коэффициентами от $p = z + iv$.

Пусть $\pi_{a,b}$ — полоса $a < \operatorname{Re} p < b$, в которой $a_n(p) \neq 0$. В работе в основном рассматривается этот случай, за исключением § 2, где допускается нарушение этого условия. Корни характеристического многочлена

$$P_n(\lambda, p) = \sum_{k=0}^n a_k(p) \lambda^k = 0 \quad (2)$$

обозначим через $\lambda_1(p), \dots, \lambda_n(p)$ (каждый корень берется столько раз, какова его кратность). Как известно [1], для $|p| \gg 1$ функция $\lambda_j(p)$ аналитична и разлагается в ряд Пуизе

$$\lambda_j(p) = \sum_{k=-N_j}^{+\infty} a_{jk} \left(p^{-\frac{1}{r_j}} \right)^k, \quad r_j, N_j \in N. \quad (3)$$

На характеристические корни наложено следующее условие: $\operatorname{Re} \lambda_j(p) \leq 0 \quad \forall p \in \pi_{a,b}, j = 1, \dots, m$; если же $j > m$, то $\exists p_j \in \pi_{a,b}$ такая, что $\operatorname{Re} \lambda_j(p_j) > 0$. Предполагается, что расстояние между множествами $\{\lambda_1(p), \dots, \lambda_m(p)\}$ и $\{\lambda_{m+1}(p), \dots, \lambda_n(p)\}$ положительно. Введем многочлены по λ :

$$Q_m(\lambda, p) = \prod_{j=1}^m (\lambda - \lambda_j(p)) = \sum_{j=0}^m q_j(p) \lambda^j, \quad (4)$$

$$R_{n-m}(\lambda, p) = a_n(p) \prod_{j=m+1}^n (\lambda - \lambda_j(p)) = a_n(p) \sum_{j=0}^{n-m} r_j(p) \lambda^j.$$

Из представления (3) вытекают оценки

$$|\lambda_j(p)| \leq c_j (1 + |p|)^{m_j}, \quad |q_j^{(k)}(p)| + |r_j^{(k)}(p)| \leq c_{jk} (1 + |p|)^{m_j k}. \quad (5)$$

Введем следующие классы функций.

Определение 1. Через $A(\pi_{a,b})$ обозначим класс функций $f(p)$, аналитических в $\pi_{a,b}$ и удовлетворяющих условию: $\forall \pi_{a,b} \in \pi_{a,b} \exists$ многочлен $P_r(p)$ такой, что

$$|f(p)| \leq P_r(|p|) \quad \forall p \in \pi_{a,b}, \quad (6)$$

Определение 2. Через $A, (\pi_{a,b})$ обозначим класс функций $f(p, y)$ таких, что $f(p, y) \in A(\pi_{a,b}) \forall y \in R^+$ и

$$\left| \frac{d^k f(p, y)}{dy^k} \right| \leq (1+y)^r \cdot P_r(|p|) \forall p \in \pi_{a,b}, \quad (7)$$

где r зависит от $f(p, y)$, $k = 0, \dots, n-1$.

Пусть $L(a, b)$ и $L'(a, b)$, соответственно, — классы основных и обобщенных функций Земаяна [2]. Как известно [2] преобразование Лапласа

$$Lu(p) = \hat{u}(p) = \langle u(x), \exp(-px) \rangle$$

является изоморфизмом между $L'(a, b)$ и $A(\pi_{a,b})$.

Определение 3. $L_y(a, b)$ обозначает класс обобщенных функций $u(x, y)$, зависящих от параметра y таких, что $\forall (a, b) \exists c, q$, что

$$\left| \frac{d^k}{dy^k} \langle u(x, y), \varphi(x) \rangle \right| \leq c \cdot (1+y)^r |k|_q, \quad \forall \varphi \in L_{a,b}, \quad k=0, \dots, n-1, \quad (8)$$

где $|k|_q = \sup_x \gamma_{a,b}(x) \sum_{j \leq q} |D^j \varphi(x)|$ — q -ая полунорма в $L_{a,b}$, $\gamma_{a,b} = \theta_+(x) \exp(ax) + \theta_-(x) \exp(bx)$, $\theta_{\pm}(x)$ — функции Хевисайда, постоянная r зависит только от u .

Лемма 1. Преобразование Лапласа устанавливает изоморфизм между $L_y(a, b)$ и $A_y(\pi_{a,b})$.

Доказательство. Пусть $u(x, y) \in L_y(a, b)$. Заметим, что $\exp(-px) \in L_{a,b}$ при $a \leq \operatorname{Re} p \leq b$. Поэтому из (8), подставляя вместо $\varphi(x)$ функцию $\exp(-px)$, получим

$$\left| \frac{d^k \hat{u}(p, y)}{dy^k} \right| \leq c \cdot (1+y)^r P_q(|p|) \quad \forall p \in \pi_{a,b},$$

то есть имеет место (7). Аналитичность $\hat{u}(p, y)$ очевидна. Обратно, пусть $\hat{u}(p, y) \in A_y(\pi_{a,b})$. Возьмем две последовательности чисел $a, \downarrow a$ и $b, \uparrow b$. Пусть $Q_r(p)$ — полином, не имеющий нулей в $a \leq \operatorname{Re} p \leq b$ такой, что

$$\left| \hat{u}(p, y) / Q_r(p) \right| \leq (1+y)^r \cdot (1+p^2)^{-1}.$$

Имеем $u(x, y) = Q_r(D_x) g(x, y)$, где $|g(x, y)| \leq \operatorname{cte} \exp(ax) \cdot (1+y)^r \forall a_{r+1} \leq x \leq b_{r+1}$ и, в частности,

$$|g(x, y)| \leq \operatorname{cte} \gamma_{a_{r+1}, b_{r+1}}(x) \cdot (1+y)^r.$$

Отсюда имеем для $\forall \varphi \in L_{a,b}$,

$$\begin{aligned} |\langle u(x, y), \varphi(x) \rangle| &= |\langle g(x, y), Q_r(-D_x) \varphi(x) \rangle| \leq \\ &\leq \int |\gamma_{a_{r+1}, b_{r+1}}^{-1}(x) g(x, y)| |\gamma_{a,b}(x) Q_r(-D_x) \varphi(x)| dx \leq \\ &\leq |\gamma_{a_{r+1}, b_{r+1}}^{-1}(x) g(x, y)|_{L_{a,b}} \cdot |k|_q \leq \operatorname{cte} (1+y)^r |k|_q. \end{aligned}$$

Лемма 2. Пусть $\widehat{u}(p, y) \in A_y(\pi_{a, b})$ является решением уравнения

$$R_{n-m}(D_y, p) \widehat{u}(p, y) = 0, \quad (9)$$

тогда $\widehat{u}(p, y) \equiv 0$.

Доказательство. Перепишем уравнение (9) в виде

$$(D_y - \lambda_{n+1}(p)) v(p, y) = 0, \quad (10)$$

где $v(p, y) = (D_y - \lambda_{n+2}(p)) \cdots (D_y - \lambda_n(p)) \widehat{u}(p, y)$. Заметим, что $U(p, y)$ аналитична в $\pi_{a, b}$, за исключением конечного числа точек ветвления, в окрестности которых разлагается в ряд Пуизё. Из этого заключаем, что в любой конечной части полосы $\pi_{a, b}$ $v(p, y)$ может иметь не более чем конечное число нулей, либо тождественно равна нулю. Из (10) имеем

$$v(p, y) = c(p) \exp(i_{m+1}(p) \cdot y). \quad (11)$$

Из непрерывности $\lambda_{m+1}(p)$ вытекает существование окрестности $V_\delta(p_{m+1})$ точки p_{m+1} , что $\operatorname{Re} i_{m+1}(p) > 0 \forall p \in V_\delta(p_{m+1})$. Из (5), (7), (11) имеем

$$|c(p)| \leq \exp(-\operatorname{Re} i_{m+1}(p) \cdot y) \cdot c \cdot (1+y)^r \cdot P(|p|) \forall p \in V_\delta(p_{m+1}) \subset$$

$$\subset \pi_{a, b}.$$

Устремляя $y \rightarrow +\infty$ получим $c(p) = 0 \forall p \in V_\delta(p_{m+1})$, тем самым $V(p, y) \equiv 0$ в $\pi_{a, b}$. Продолжая этот процесс, получим $\widehat{u}(p, y) \equiv 0$. Лемма 2 доказана

§ 1. Задача типа Коши ($a_n(p) \neq 0$)

Задача А. Требуется найти решение $u(x, y) \in L_y(a, b)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$D_y^j u(x, 0) = f_j(x), \quad j = 0, \dots, m-1, \quad (1.1)$$

$f_j \in L^*(a, b)$ — заданные функционалы.

Переходя в (1) и (1.1) к образам Лапласа и используя лемму 2 задачу А сведем к эквивалентной:

$$Q_m(D_y, p) \widehat{u}(p, y) = 0, \quad (1.2)$$

$$D_y^j \widehat{u}(p, 0) = f_j(p), \quad j = 0, \dots, m-1. \quad (1.3)$$

Нетрудно проверить, что аналитические функции

$$E_j(p, y) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\lambda^{m-j-1} + q_1(p) \lambda^{m-j-2} + \dots + q_{m-j-2}(p)}{Q_m(\lambda, p)} \exp(iy) d\lambda, \quad j = 0, \dots, m-1, \quad (1.4)$$

где $\gamma(p)$ — замкнутый контур, содержащий корни $\lambda_1(p), \dots, \lambda_m(p)$ полинома $Q_m(\lambda, p)$, являются решениями уравнения (1.2) и удовлетворяют начальным условиям

$$D_y^k E_j(p, 0) = \delta_j^k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1.5)$$

где δ_j^k — символ Кронекера.

Вводя вектор $E(p, y) = \left(E_j(p, y), \frac{d}{dy} E_j(p, y), \dots, \frac{d^{m-1}}{dy^{m-1}} E_j(p, y) \right)$, уравнение (1.2) перепишем в матричной форме

$$\frac{dE}{dy}(p, y) = A(p) E(p, y), \quad (1.6)$$

где $A(p)$ — аналитическая матрица не выше полиномиального роста (см. (5)). Отсюда имеем

$$E(p, y) = \exp(A(p) \cdot y) E(p, 0), \quad E(p, 0) = (0, \dots, 1, \dots, 0). \quad (1.7)$$

Из (1.7) вытекают оценки [3]

$$\|E(p, y)\| \leq \text{cte} (1 + |p|)^{m_j^0} (1 + y)^{n_j^0}, \quad (1.8)$$

где $\|\cdot\|$ обозначает норму матрицы.

Дифференцируя (1.7) по y , аналогично получим

$$\left| \frac{d^k E(p, y)}{dy^k} \right| \leq \text{cte} (1 + |p|)^{m_j^k} (1 + y)^{n_j^k}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.9)$$

Так как $\left| \frac{d^k E_j(p, y)}{dy^k} \right| \leq \left| \frac{d^k E(p, y)}{dy^k} \right|$, то $E_j(p, y)$ удовлетворяет оценкам (1.9). Остается заметить, что функция

$$\hat{u}(p, y) = \sum_{j=0}^{m-1} E_j(p, y) \hat{f}_j(p) \quad (1.10)$$

принадлежит $A_y(\pi_{a,b})$ и является решением задачи (1.2), (1.3), обратное преобразование Лапласа которой будет единственным решением задачи А. Таким образом, доказана

Теорема 1. *Граничная задача А имеет единственное решение для всех $f_0, \dots, f_{m-1}$.*

§ 2. Задача типа Коши ($a_n(p_0) = 0$)

Пусть $a_n(p)$ обращается в нуль в точке $p_0 \in \pi_{a,b}$ и отлична от нуля в $\pi_{a,b} \setminus \{p_0\}$. Не ограничивая общности можно предположить, что хотя бы одна из функций $a_{n-1}, \dots, a_0(p)$ отлична от нуля в точке p_0 . Это вытекает из того, что в рассматриваемых классах ядро произвольного дифференциального оператора $L(D_x)$ нулевое.

Ряд Пуанкаре разложения функции $\lambda_j(p)$ в окрестности точки p_0 будет иметь вид [1]

$$\lambda_j(p) = \sum_{k=N_j}^{+\infty} c_{jk} \left[(p - p_0)^{\frac{1}{\nu_j}} \right]^k, \quad N_j \in \mathbb{Z}, \nu_j \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Функции $q_j(p)$ ($r_j(p)$ (см. (4)) в рассматриваемом случае аналитичны в полосе $\pi_{a,b}$ за исключением, быть может, точки p_0 , в которой имеют полюс. Это вытекает из того, что функции

$$\lambda_1^r(p) + \dots + \lambda_m^r(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(p)} \frac{\partial P_n(\lambda, p)}{\partial \lambda} \cdot \frac{\lambda^r}{P_n(\lambda, p)} d\lambda, \quad r \in N, \quad (2.2)$$

где $\gamma(p)$ — замкнутый контур, содержащий только корни $\lambda_1(p), \dots, \lambda_m(p)$, аналитичны в $\pi_{a,b} \setminus \{p_0\}$ и, на основании (2.1) стремятся к ∞ при $p \rightarrow p_0$.

Таким образом, вместо (5) имеем оценки

$$|q_j^{(k)}(p)| + |r_j^{(k)}(p)| < c_{jk} |p - p_0|^{-k-t_j} \cdot (1 + |p|)^{m/k}, \quad l_j \in N. \quad (2.3)$$

Заметим, что лемма 2 остается в силе, поскольку все рассуждения проходят для области $\pi_{a,b} \setminus \{p_0\}$. Что касается задачи А, то очевидно однородная задача имеет только нулевое решение. Оценка (1.9) для аналитических в $\pi_{a,b} \setminus \{p_0\}$ функций $E_j(p, y)$ принимает вид

$$\left| \frac{d^k E_j(p, y)}{dy^k} \right| \leq \text{cte} |p - p_0|^{-k-t_j} (1 + |p|)^{m/k} \cdot (1 + y)^{n_j^k}. \quad (2.4)$$

То есть p_0 является полюсом для $E_j(p, y)$. Обращаясь к формуле (1.16) легко заметить, что $\hat{u}(p; y) \in A_y(\pi_{a,b})$ тогда и только тогда, когда $\hat{f}_j(p)$ в точке p_0 имеют нуль определенного порядка t_j :

$$\langle f_j(x), x^k \exp(-p_0 x) \rangle = 0, \quad k = 0, \dots, t_j - 1. \quad (2.5)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. Однородная граничная задача А имеет только нулевое решение, а для разрешимости неоднородной задачи необходимо и достаточно выполнение конечного числа условий вида (2.5).

Замечание. Как показывает пример, условия (2.5) могут отсутствовать. Действительно, в $L_y(-1, 0)$ рассмотрим оператор

$$L(D_x, D_y) = (D_y - D_x) \left(\left(D_x + \frac{1}{2} \right) D_y - i D_x \right),$$

для которого $\lambda_1(p) = p$, $\lambda_2(p) = ip / \left(p + \frac{1}{2} \right)$ и поэтому он редуцируется к $L_1 = D_y - D_x \left(p_0 = -\frac{1}{2} \right)$.

§ 3. Задача Коши для уравнения типа Коши—Ковалевской

В этом параграфе операторы $a_k \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ в (1) предполагаются порядка не выше $n - k$, а характеристические корни главной части (1) различными и ненулевыми. Тогда для $|p| \gg 1$ корни $\lambda_j(p)$ характеристического уравнения (2) будут различными и разложение (3) примет вид

$$\lambda_j(p) = \lambda_j \cdot p + c_j + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{jk} \cdot p^{-k}. \quad (3.1)$$

Заметим, что для постановки задачи Коши для уравнения (1) необходимо предположить, что $\operatorname{Re} \lambda_j(p) < 0 \forall p \in \pi_{a,b}, j=1, \dots, n$ (см. § 1). А это, в свою очередь, означает, что $\lambda_j \in R$, то есть уравнение (1) гиперболического типа. Отсюда, существуют $\pi_{a,b}$ и $\delta > 0$ такие, что $\operatorname{Re} \lambda_j(p) < -\delta \forall p \in \pi_{a,b}$.

Определение 4. Через $M^n(a, b)$ обозначим банахово пространство функций с конечной нормой

$$\|u\|_{a,b}^n = \sup_{-b < \sigma < -a} \exp(\sigma x) \sum_{j=0}^n |D^j u(x)|. \quad (3.2)$$

Из оценки

$$\begin{aligned} |\langle u(x), \varphi(x) \rangle| &< \int |\gamma_{a,b}^{-1}(x) \cdot u(x)| \cdot |\gamma_{a,b}^{(x)}(x) \varphi(x)| dx < \\ &\leq c \cdot \|u\|_{a,b}^n \cdot \|\varphi\|_0, \quad \forall \varphi \in L_{a,b}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

вытекает включение $M^n(a, b) \subset L'(a, b)$.

Под решением уравнения (1) мы будем понимать функцию $u(x, y)$ такую, что

$$\sum_{k+m \leq n} \left| \frac{\partial^{k+m} u}{\partial y^k \partial x^m} \right|_{a,b} < \text{cte}. \quad (3.4)$$

Задача В. Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$D_j^l u(x, 0) = f_j(x), \quad j = 0, \dots, n-1, \quad f_j \in M^{n-j}(a, b). \quad (3.5)$$

Единственность решения задачи В вытекает из (3.3) и теоремы 1.

Покажем, что прообраз Лапласа функции $u(p, y)$ из (1.10) является искомым решением неоднородной задачи В. Для этого исследуем подробно прообраз $e_j(x, y)$ функции $E_j(p, y)$. Вычисляя $E_j(p, y)$ по теореме о вычетах, получим

$$E_j(p, y) = \sum_{l=1}^n a_l^j(p) \exp(\lambda_l(p) \cdot y), \quad (3.6)$$

где $a_l^j(p) = \lambda_l^{n-j-1}(p) / \prod_{k \neq l} (\lambda_l(p) - \lambda_k(p))$.

Имеет место

Лемма 3. Пусть $f \in M^l(a, b)$, $a > -a$. Тогда прообраз Лапласа

$$F(x) = L^{-1}(\hat{f}(p) \cdot (a+p)^{-1}) \in M^{l+1}(a, b).$$

Доказательство. Имеем $L^{-1}((p+a)^{-1}) = \exp(-ax) \cdot \theta_+(x)$, поэтому

$$\sup_{-b < \sigma < -a} \|\exp(\sigma - a)x \cdot \theta_+(x)\|_L < +\infty. \quad (3.7)$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 |\exp(\sigma x) D^l F(x)| &= |\exp(\sigma x) \cdot (\exp(-\sigma x) \cdot \theta_+(x) * f^{(l)}(x))| = \\
 &= |\exp(\sigma - 1)x \cdot \theta_+(x) * \exp(\sigma x) \cdot f^{(l)}(x)| \leq \text{cte} \sup_{\substack{-b < \sigma < -a \\ x \in \mathbb{R}}} |\exp(\sigma x) f^{(l)}(x)|, \\
 (l &= 1, \dots, j)
 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
 |\exp(\sigma x) D^{j+1} F(x)| &= |(\exp(\sigma - 1)x \cdot \theta_+(x))' * \exp(\sigma x) f^{(j)}(x)| \leq \\
 &\leq |\sigma - 1| |\exp(\sigma - 1)x \cdot \theta_+(x) * \exp(\sigma x) f^{(j)}(x)| + |\exp(\sigma x) f^{(j)}(x)| < \\
 &< \text{cte} \sup_{\substack{-b < \sigma < -a \\ x \in \mathbb{R}}} |\exp(\sigma x) f^{(j)}(x)|.
 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из (3.8), (3.9) получим

$$\|F(x)\|_{a,b}^{j+1} \leq \text{cte} \|f\|_{a,b}^j, \quad (3.10)$$

что и требовалось доказать.

Далее имеем

$$a_l'(p) \cdot \hat{f}_j(p) = [(a_l'(p) \cdot (p+a))' - c_l'] \hat{f}_j(p) \cdot (p+a)^{-l}, \quad (3.11)$$

где $c_l' = \lim_{p \rightarrow \infty} a_l'(p) \cdot (p+a)^l$.

Первое слагаемое $\hat{b}_l'(p)$ в квадратных скобках в (3.11) на бесконечности ведет себя как $\frac{1}{p}$, поэтому

$$\sup_{a < \sigma < b} \|\hat{b}_l'(\sigma + i\tau)\|_{L_1} < +\infty. \quad (3.12)$$

Его прообраз $b_l'(x)$, в силу равенства Парсеваля, удовлетворяет неравенству

$$\sup_{-b < \sigma < -a} \|\exp(\sigma x) b_l'(x)\|_{L_1} < +\infty. \quad (3.13)$$

Дифференцируя $\hat{b}_l'(p)$ легко убедиться, что

$$\sup_{-b < \sigma < -a} \|x b_l'(x) \exp(\sigma x)\|_{L_1} < +\infty. \quad (3.14)$$

Из (3.13), (3.14) и неравенства Гёльдера получим

$$\sup_{-b < \sigma < -a} \|\hat{b}_l'(x) \exp(\sigma x)\|_{L_1} < +\infty. \quad (3.15)$$

Из (3.11), (3.15) и леммы 3 вытекает, что

$$\|L^{-1}(a_l'(p) \cdot \hat{f}_j(p))\|_{a,b}^j \leq \text{cte} \|f_j(x)\|_{a,b}^{j-1}. \quad (3.16)$$

Теперь рассмотрим прообраз $k_l(x, y)$ функции $\exp(\lambda_l(p) \cdot y)$. Имеем для $\sigma \in [a, b]$

$$\begin{aligned}
 k_l(x, y) &= \int \exp(px + \lambda_l(p)y) dp = \int \exp(p(x + \lambda_l y) + \\
 &+ c_l y) [\exp(\lambda_l(p) - \lambda_l y - c_l) - 1] dp + i \exp(\sigma(x + \lambda_l y) + \\
 &+ c_l y) \delta(x + \lambda_l y),
 \end{aligned}$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака.

Первое слагаемое в последнем равенстве представим в виде

$$a_l(t, y) = i \int \exp(it\tau) A(p, y) d\tau, \quad A(p, y) = \exp((x + \lambda_l \cdot y)^\sigma + c_l \cdot y) \cdot \\ \cdot [\exp(\lambda_l(p) - \lambda_l \cdot p - c_l) y - 1], \quad t = x + \lambda_l \cdot y.$$

Имеет место неравенство

$$|A(p, y)| \leq y \cdot |\lambda_l(p) - \lambda_l \cdot p - c_l| \cdot \left| \frac{\exp(\lambda_l(p) - \lambda_l \cdot p - c_l) y - 1}{y(\lambda_l(p) - \lambda_l \cdot p - c_l)} \right| \cdot \\ \cdot |\exp((x + \lambda_l \cdot y)^\sigma + c_l \cdot y)| \leq y |\lambda_l(p) - \lambda_l \cdot p - c_l| \cdot (1 + |\exp(\lambda_l(p) - \lambda_l \cdot p - c_l) y|) \cdot \\ \cdot |\exp((x + \lambda_l \cdot y)^\sigma + c_l \cdot y)| \leq \text{cte} \cdot \frac{y}{1 + |p|} \exp(\sigma x - \delta_0 y), \quad \delta_0 > 0 \quad (3.17)$$

(из (3.1) и $\text{Re } \lambda_l(p) < -\delta \Rightarrow \sigma \lambda_l + \text{Re } c_l < -\delta_0$).

Из (3.17) имеем

$$\sup_{a < t < b} |\exp(-\sigma x) A(p, y)|_{L_1} \leq \text{cte } y \cdot \exp(-\delta_0 \cdot y) \quad (3.18)$$

и, в силу равенства Парсеваля,

$$\sup_{-b < x < -a} |\exp(\sigma x) a(x + \lambda_l \cdot y, y)|_{L_1} \leq \text{cte } y \cdot \exp(-\delta_0 \cdot y). \quad (3.19)$$

С другой стороны

$$A_l'(p, y) = \exp(\sigma x) \cdot \exp(\lambda_l(p) \cdot y - i \lambda_l \cdot y) \cdot (\lambda_l(p) - \lambda_l \cdot p - c_l) \cdot y,$$

поэтому

$$|A_l'(p, y)| \leq \text{cte} \cdot \exp(\sigma \cdot x) \cdot \frac{y \cdot \exp(-\delta \cdot y)}{1 + |p|^2}. \quad (3.20)$$

Отсюда, как и выше

$$\sup_{-b < x < -a} |\exp(\sigma \cdot x) \cdot t \cdot a_l(t, y)|_{L_1} \leq \text{cte} \cdot y \cdot \exp(-\tau \cdot y). \quad (3.21)$$

Из (3.19), (3.21) получим

$$\sup_{-b < x < -a} |\exp(\sigma \cdot x) a_l(x + \lambda_l \cdot y, y)|_{L_1} \leq \text{cte } y \exp(-\delta_0 \cdot y). \quad (3.22)$$

Лемма 4. Функции $v_{jl}(x, y) = L^{-1}(a_l'(p) \hat{f}_j(p) \exp(\lambda_l(p) \cdot y))$ удовлетворяют оценке

$$\left| \frac{\partial^{m+k} v_{jl}(x, y)}{\partial x^m \partial y^k} \right|_{a, b}^{n-(m+k)} \leq \text{cte } \|f_j\|_{a, b}^{n-j}. \quad (3.23)$$

Доказательство. Обозначим $A_l^j(x) = L^{-1}(a_l'(p) \hat{f}_j(p))$. Имеем

$$v_{jl}(x, y) = k_l(x, y) * A_l^j(x) = a_l(x + \lambda_l \cdot y, y) * A_l^j(x) + \\ + i \exp(c_l \cdot y) \cdot \delta(x + \lambda_l \cdot y) * A_l^j(x).$$

Из (3.16) и (3.22) вытекают оценки

$$\|a_l(x + i_l \cdot y, y) * A_l^j(x)\|_{a,b}^{n-j} \leq \text{cte} \cdot y \exp(-\delta_0 \cdot y) \|f_j(x)\|_{a,b}^{n-j}, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \|\exp(c_l \cdot y) \delta(x + i_l \cdot y) * A_l^j(x)\|_{a,b}^{n-j} &= \|\exp(c_l \cdot y) A_l^j(x + i_l \cdot y)\|_{a,b}^{n-j} < \\ &\leq \sup_{-b < y < -a} \exp(c_l - i_l \cdot y) \cdot \|f_j\|_{a,b}^{n-j}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

тем самым получим (3.23) при $m=k=0$. А теперь заметим, что дифференцирование по x или по y функции $v_{jl}(x, y)$ приводит, в силу разложения (3.1), к потере одной производной у $f_j(x)$, поэтому (см. также лемму 3 и (3.11))

$$\left\| \frac{\partial^{m+k} v_{jl}(x, y)}{\partial x^m \partial y^k} \right\|_{a,b}^{n-(m+k)} \leq \text{cte} \|f_j\|_{a,b}^{n-j}$$

и лемма 4 доказана.

Так как

$$u(x, y) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=1}^n v_{jl}(x, y),$$

то окончательно имеем

$$\sum_{m+k \leq n} \left\| \frac{\partial^{m+k} u(x, y)}{\partial x^m \partial y^k} \right\|_{a,b}^{n-(m+k)} \leq \text{cte} \sum_{j=0}^{n-1} \|f_j\|_{a,b}^{n-j}. \quad (3.26)$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Задача В имеет и притом единственное решение. Справедлива оценка (3.26).*

§ 4. Общая граничная задача

Задача С. Требуется найти решение $u \in L'_j(a, b)$ уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$\sum_{l=1}^{n-1} Q_{kl} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^l u(x, 0)}{\partial y^l} = f_k(x), \quad k = 0, \dots, m-1 \text{ в } L'(a, b), \quad (4.1)$$

где $Q_{kl}(p)$ — полиномы по p с постоянными коэффициентами, а $f_k \in L'(a, b)$ — заданные функционалы.

Введем многочлены

$$\begin{aligned} q_k(\lambda, p) &= \sum_{l=0}^n Q_{kl}(p) \lambda^l, \quad c_k(\lambda, p) = q_k(\lambda, p) \pmod{Q_m(\lambda, p)} = \\ &= \sum_{l=0}^{m-1} c_{kl}(p) \lambda^l \\ (k &= 0, \dots, m-1). \end{aligned}$$

Очевидно функции $c_{kl}(p)$ аналитичны в $\pi_{a,b}$ и растут на бесконечности не быстрее некоторого полинома. Через $C(p)$ обозначим матрицу $\|c_{kl}(p)\|$. Имеют место

Теорема 4. *Условие $\det C(p) \neq 0 \quad \forall p \in \pi_{a,b}$ является необходимым и достаточным для однозначной разрешимости задачи С.*

Теорема 5. Условие $\det C(p) \neq 0$ в $\pi_{a,b}$ является необходимым и достаточным для нетеровости задачи C , при этом однородная задача имеет только нулевое решение.

Доказательство теоремы 4. Заметим, что граничные условия (4.1) могут быть переписаны в эквивалентной форме

$$\sum_{i=0}^{m-1} c_{ki}(p) \frac{d^i \hat{u}(p, 0)}{dy^i} = \hat{f}_k(p), \quad k = 0, \dots, m-1. \quad (4.2)$$

Пусть $\det C(p) \neq 0 \forall p \in \pi_{a,b}$. Тогда условия (4.2) эквивалентны задаче A из § 1, откуда следует достаточность. Доказательство необходимости разобьем на два случая. Пусть вначале $\det C(p) \equiv 0$. Метод Гаусса приведения матриц к трапециoidalному виду позволяет утверждать, что существует матрица $M(p) \in A(\pi_{a,b})$ с $\det M(p) \neq 0$ такая, что матрица $M(p) \cdot C(p)$ имеет трапециoidalный вид. Так как $\text{Ker } M(p) = 0$ в $A(\pi_{a,b})$, то задача (4.2) эквивалентна следующей

$$M(p) C(p) v(p) = M(p) f(p), \quad (4.3)$$

где $v(p) = \left(\hat{u}(p, 0), \dots, \frac{d^{m-1} \hat{u}(p, 0)}{dy^{m-1}} \right)$, $f(p) = (\hat{f}_0(p), \dots, \hat{f}_{m-1}(p))$.

Очевидно, что однородная задача (4.3) ($f \equiv 0$) имеет бесконечно много линейно независимых решений в $A(\pi_{a,b})$. Возвращаясь к задаче A из § 1 мы получим, что однородная задача C имеет бесконечно много линейно независимых решений.

Теперь рассмотрим случай, когда $\det C(p) \neq 0$ в $\pi_{a,b}$. Имеет место

Лемма 5. Из $\det C(p) \neq 0$ вытекает, что функция $\det C(p)$ в полосе $\pi_{a,b}$ может иметь лишь конечное число нулей.

Доказательство. Для $|p| \gg 1$ имеем представление

$$\det C(p) = \sum_{j=-N_k}^{+\infty} \sum_{k=1}^{N_k} c_{jk} \left(p^{-\frac{1}{n_k}} \right)^j, \quad n_k, N_k \in N, \quad (4.4)$$

откуда вытекает, что либо $\det C(p) \neq 0$ для $|p| \gg 1$, либо $p = \infty$ является нулем конечного (возможно дробного) порядка, поскольку функция $\varphi(p) = \det C(p')$, где $r = \text{нок}(n_1, \dots, n_{N_k})$ аналитична в точке $p = \infty$. Отсюда и из аналитичности функции $\det C(p)$ в $\pi_{a,b}$ вытекает лемма 5.

Нули функции $\det C(p)$ обозначим через $p_1, \dots, p_\nu$, а их кратности — через $r_1, \dots, r_\nu$ ($p_j \neq \infty$). Матрица $C(p)$ допускает представление [4].

$$C(p) = R(p) D(p) C_0(p), \quad (4.5)$$

где $R(p)$ — полиномиальная матрица от $\frac{1}{p-p_0}$, $p_0 \in \pi_{a,b}$ с $\det R(p) = \text{cte} \neq 0$, $\det C_0(p) \neq 0$, $\forall p \in \pi_{a,b}$, а $D(p) = \left\{ \left(\frac{p-p_1}{p-p_0} \right)^{\mu_1^{(1)}} \left(\frac{p-p_\nu}{p-p_0} \right)^{\mu_\nu^{(\nu)}} \times \right.$

$\times \delta_j^k \Big\}_1^n$ — диагональная матрица; $\mu_1^{(1)} \geq \dots \geq \mu_\nu^{(\nu)} \in N + \{0\}$, $l = 1, \dots, \nu$

таким, что $\mu_1^{(1)} + \dots + \mu_n^{(1)} = r_1$. Теперь нетрудно проверить, что если в (4.2) взять правую часть в виде $R(p)g(p)$, где компоненты вектор-функции $g(p) \in A(\pi_{a,b})$ не обращаются в ноль в $\pi_{a,b}$, то задача С не будет иметь решения. Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Необходимость условия $\det C(p) \neq 0$ доказана выше. Достаточность же следует из того, что условия (4.2), в силу (4.5), эквивалентны следующим

$$D(p)w(p) = R^{-1}(p)f(p), \quad (4.6)$$

где $w(p) = C_0(p)v(p) \in A(\pi_{a,b})$.

Очевидно система (4.6) имеет решение в $A(\pi_{a,b})$ тогда и только тогда, когда $f(p)$ удовлетворяют конечному числу условий вида (2.5).

§ 5. Смешанная граничная задача

Через $L_{a,b}^{(k)}$ обозначим банахово пространство функций $\varphi(x)$ с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{a,b}^{(k)} = \sup_x \gamma_{a,b}^{(x)} \sum_{j < k} |\varphi_j^{(x)}|. \quad (5.1)$$

Очевидно $L_{a,b}^{(k)} \subset L_{c,d}^{(k)}$ вместе с топологией при $c < a$ и $d > b$. Через $L^{(k)}(a, b)$ обозначим $\bigcup L_{a,b}^{(k)}$, где a, b и a, b сопряженное — через $L'^{(k)}(a, b)$. Имеем также топологические вложения $L(a, b) \subset L^{(k)}(a, b)$, $L'(a, b) \supset L'^{(k)}(a, b)$.

Под решением уравнения (1) понимается функционал $u(x, y) \in L'^{(k)}(a, b)$ для некоторого k , удовлетворяющий уравнению (1) и условию $\forall(a, b) \exists c, t$, такие, что

$$\left| \frac{d^l}{dy^l} < u(x, y), \varphi(x) > \right| \leq c, (1+y)^{-t} \cdot \|\varphi\|_{a,b}^{(k)}, \quad \forall \varphi \in L_{a,b}^{(k)}. \quad (5.2)$$

$$(l = 0, \dots, n-1)$$

Задача Д. Требуется найти решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$< \sum_{i=0}^{n-1} q_{ji}^{(1)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^i u(x, 0)}{\partial y^i}, \varphi(x) > = < f_j(x), \varphi(x) > \quad \forall \varphi \in L^{(k)}(a, b), \quad (5.3)$$

$$(j = 0, 1, \dots, m-1, \text{supp } \varphi \subset R^+)$$

$$< \sum_{i=0}^{n-1} q_{ji}^{(2)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^i u(x, 0)}{\partial y^i}, \varphi(x) > = < g_j(x), \varphi(x) > \quad \forall \varphi \in L^{(k)}(a, b),$$

$$(j = 0, 1, \dots, m-1, \text{supp } \varphi \subset R^-), \quad (5.4)$$

где $f_j, g_j \in L'^{(k)}(a, b)$, $\text{supp } f_j \subset R^+$, $\text{supp } g_j \subset R^-$, $k_1 \leq k_0$.

Предположим, что строки матриц-функций $\|q_{ji}^{(1)}(p)\|, \|q_{ji}^{(2)}(p)\|$ линейно независимы по модулю полинома $Q_m(\lambda, p)$ (см. задачу С).

Обозначая разность функционалов в (5.3) и (5.4), соответственно, через $f_j^- \in L'^{(k)}(a, b)$, $g_j^+ \in L'^{(k)}(a, b)$ ($\text{supp } pf_j^- \subset \bar{R}^-$, $\text{supp } pg_j^+ \subset \bar{R}^+$), а

затем переходя к образам Лапласа, условия (5.3), (5.4) можно преобразовать к эквивалентному виду

$$\sum_{j=0}^{m-1} c_{ji}^{(1)}(p) \frac{\partial^j \hat{u}(p, 0)}{\partial y^j} = \hat{f}_i(p) + \hat{f}_i^+(p), \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5.5)$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} c_{ji}^{(2)}(p) \frac{\partial^j \hat{u}(p, 0)}{\partial y^j} = \hat{g}_i(p) + \hat{g}_i^+(p), \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5.6)$$

где $\det \|c_{ji}^{(i)}(p)\| \neq 0 \quad \forall p \in \pi_{a,b}, \quad i = 1, 2$.

Из (5.5), (5.6) имеем

$$C_1^{-1}(p) (\hat{f}(p) + \hat{f}^-(p)) = C_2^{-1}(p) (\hat{g}(p) + \hat{g}^+(p)), \quad (5.7)$$

где $C_i(p) = \|c_{ji}^{(i)}(p)\|$, $\hat{f} = (\hat{f}_0, \dots, \hat{f}_{m-1})$, $\hat{g}^+ = (\hat{g}_0^+, \dots, \hat{g}_{m-1}^+)$.

В свою очередь (5.7) перепишем в виде

$$\hat{g}^+(p) = K(p) \hat{f}^-(p) + F(p), \quad (5.8)$$

где $K(p) = C_2(p) \cdot C_1^{-1}(p)$, $F(p) = K(p) \cdot \hat{f}(p) - \hat{g}(p)$, $\det K(p) \neq 0 \quad \forall p \in \pi_{a,b}$.

Представляя матрицу $K(p)$ в виде $K(p) = (p - p_0)^{m_0} \cdot K_0(p)$ ($\operatorname{Re} p_0 < a$) мы можем считать элементы матрицы $K_0(p)$ ограниченными аналитическими функциями в $\pi_{a,b}$. Не ограничивая общность, пусть

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \det K_0(p) = 0. \quad (5.9)$$

Имеет место

Лемма 6. Матрица $K_0(p)$ представима в виде

$$K_0(p) = R(a(p) - 1) D_0(a(p) - 1) K^0(p), \quad (5.10)$$

где $R(\cdot)$ — рациональная, а $D(\cdot)$ — диагональная матрицы-функции от своих аргументов, причем $\det R = \text{cte} \neq 0$, $\det K^0(p) \neq 0 \quad \forall p \in \pi_{a,b}$ (включая точку ∞), элементы $K^0(p)$ аналитичны и ограничены в $\pi_{a,b}$, $a(p) = (p - p_r)/(p - p_l)$, $\operatorname{Re} p_0 > b$, $\operatorname{Re} p_l < a$.

Доказательство. Конформное отображение $t = a(p)$ переводит полосу $\pi_{a,b}$ в область, ограниченную окружностями C_0 и C_1 , касающимися в точке $t = 1$. Матрица-функция $A(t) = K_0\left(\frac{tp_1 - p_0}{t - 1}\right)$ на кривой $C_0 \cup C_1$ имеет невырожденный определитель, за исключением точки $t = 1$, в которой имеет нуль порядка $\frac{r_1}{r_2}$ ($r_l \in \mathbb{N}$). Матрица $a(\tau) = A((1 + \tau)^{r_1})$ аналитична по τ и $\det a(\tau)$ имеет в точке $\tau = 0$ единственный нуль порядка r_1 . Для такой матрицы имеет место представление [4]

$$a(\tau) = r(\tau) d(\tau) a_0(\tau), \quad (5.11)$$

где $r(\tau)$ — рациональная матрица-функция от τ с $\det r(\tau) = \text{cte} \neq 0$, $d(\tau) = [\tau^{m_j} \delta^j]$ — диагональная матрица-функция, $m_j \in N$, $m_1 + \dots + m_n = r_1$, а $\det a_0(\tau) \neq 0 \forall \tau \in \Gamma$ — образ кривой $C_0 \cup C_1$ при отображении $t = (1 + \tau)^{r_1}$. Возвращаясь к переменной p , получим представление (5.10). Справедлива следующая [5]

Лемма 7. Матрица $K^0(p)$ из (5.10) допускает следующую факторизацию

$$K^0(p) = K_+(p) D(p) K_-(p), \quad (5.12)$$

где $D(p) = [a(p)^{z_j} \delta^j]$ — диагональная матрица, $z_0 \geq \dots \geq z_{m-1}$ — целые числа, $K_+(p)$ аналитична при $\text{Re } p > a$, а $K_-(p)$ при $\text{Re } p < b$, элементы матриц $K_+(p)$ и $K_-(p)$ ограничены.

Задача сопряжения (5.8) на основании леммы 6 и 7 переписывается в виде

$$\hat{g}^+(p) = (p - p^0)^{m_0} R(a(p) - 1) D_0(z(p) - 1) K_+(p) K_-(p) \hat{f}(p) + F(p)$$

или

$$G^+(p) = D(p) G^-(p) + Q(p), \quad p \in \pi_{a,b}, \quad (5.13)$$

где $G^+(p) = (p - p^0)^{-m_0} K_+^{-1}(p) \cdot D_0^{-1}(a(p) - 1) R^{-1}(a(p) - 1) \hat{g}^+(p)$, $G^-(p) = K_-(p) \hat{f}^-(p)$, $Q(p) = (p - p^0)^{-m_0} K_+^{-1}(p) \cdot D_0^{-1}(a(p) - 1) R^{-1}(a(p) - 1) F(p)$.

Для исследования задачи (5.13) нам понадобится

Лемма 8. Пусть $f \in L^{(k)}(a, b)$ и $\text{supp } f \subset \bar{R}^+ \setminus \bar{R}^-$. Тогда $\hat{f}(p)$ аналитична при $\text{Re } p > a$ ($\text{Re } p < b$) и существует полином $P_r(p)$ (r не зависит от f) такой, что $\forall (a_-, b_+) \subset (a, b) \exists c$:

$$|\hat{f}(p)| \leq c \cdot P_r(|p|), \quad \text{Re } p \geq a, \quad (\text{Re } p \leq b). \quad (5.14)$$

Доказательство. Существует функция $\eta_r(x) \in C^\infty$ такая, что $\eta_r(x) = 1$, $x \in (\text{supp } f)^c$; $\eta_r(x) = 0$, $x \in (\text{supp } f)^s$; $0 < \eta_r(x) < 1$, $|D^s \eta_r(x)| \leq k_r e^{-s} (s > 0)$. Пусть $\lambda(x) \in C_0^\infty$ равна 1 в некоторой окрестности

точки 0, а $\Phi(x) = \varphi(0) + \frac{x}{1!} \varphi'(0) + \dots + \frac{x^k}{k!} \varphi^{(k)}(0)$. Имеем

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \eta_r(x) (\varphi(x) - \lambda(x) \Phi(x)) \rangle + \langle f, \lambda(x) \Phi(x) \rangle$$

$$\forall \varphi \in L^{(k)}(a, b).$$

Так как $\eta_r(x) \exp(-px) \in L^{(k)}(a, b) \forall p \in \{\text{Re } p \geq a\}$, то из этого равенства имеем аналитичность $\hat{f}(p)$ в области $\text{Re } p > a$. Далее, так как $f \in L^{(k)}(a, b)$ и $\text{supp } f \subset \bar{R}^+$, то

$$|\langle f, \varphi - \lambda \Phi \rangle| = |\langle f, \eta_r(x) (\varphi(x) - \lambda(x) \Phi(x)) \rangle| \leq c \cdot \sup_{x \geq 0} \exp(a \cdot x) \cdot$$

$$\sum_{j=0}^k |D^j (\varphi(x) - \lambda(x) \Phi(x))| + c_r \sup_{-3a < x < 0} \exp(b \cdot x) \times$$

$$\times \sum_{j=0}^k |D^j (\eta_r(x) (\varphi(x) - \Phi(x)))|, \quad \forall \varphi \in L_{a,b}^{(k)}.$$

В этом неравенстве левая часть не зависит от ε , а второе слагаемое в правой части стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Поэтому

$$|\langle f, \varphi - i\Phi \rangle| \leq c, \sup_{x>0} \exp(a_\varepsilon x) \sum_{j=0}^k |D^j (\varphi(x) - \lambda(x)\Phi(x))|.$$

Окончательно получаем

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq c, \left(\sup_{x>0} \exp(a_\varepsilon x) \sum_{j=0}^k |D^j (\varphi(x) - \lambda(x)\Phi(x))| + \right. \\ \left. + \sup_x \gamma_{a_\varepsilon, b_\varepsilon}(x) \sum_{j=0}^k |D^j (\lambda(x)\Phi(x))| \right).$$

Подставляя вместо $\varphi(x)$ функцию $\exp(-\rho x)$, получим утверждение леммы.

Из леммы 8 вытекает, что в полоской задаче сопряжения (5.13) функции $G^+(p)$, $G^-(p)$ аналитичны, соответственно, в полуплоскостях $\operatorname{Re} p > a$ и $\operatorname{Re} p < b$ и удовлетворяют неравенствам вида (5.14) с вполне конкретным полиномом $P_r(p)$. Вначале рассмотрим однородную ($Q(p) \equiv 0$) задачу сопряжения (5.13):

$$G_j^+(p) = \left(\frac{p - p_0}{p - p_1} \right)^{r_j} G_j^-(p), \quad j = 0, \dots, m-1. \quad (5.14)$$

Из (5.14), на основании теоремы Лиувилля, выводим, что однородная задача (5.13) имеет своим решением функции

$$G_j^+(p) = P_{r_j}(p)/(p - p_1)^{r_j}, \quad G_j^-(p) = P_{r_j}(p)/(p - p_0)^{r_j}, \quad j = 0, \dots, m-1,$$

где P_{r_j} — произвольный многочлен l -й степени $r_j \leq l$, l — некоторое число. Таким образом однородная задача сопряжения, а вместе с ней и однородная задача D имеет конечное число линейно независимых решений. Для исследования неоднородной задачи сопряжения (5.13) нам понадобится

Лемма 9. Пусть $f(p)$ аналитична в $\pi_{a,b}$ такая, что

$$|f(p)| \leq c \cdot P_m(|p|) \quad \forall p \in \pi_{a,b}. \quad (5.15)$$

Тогда $f(p) = f^+(p) + f^-(p)$, где $f^\pm(p)$ аналитичны, соответственно, в $\operatorname{Re} p > a$ и $\operatorname{Re} p < b$, удовлетворяющие неравенству вида (5.15).

Доказательство. Функция $\hat{g}(p) = f(p)/(p+d)^{m+1}$, $d \in \pi_{a,b}$ принадлежит L_2 и более того, в силу равенства Парсеваля имеем

$$\sup_{-b_{v+1} < \sigma < -a_{v+1}} \|\exp(\sigma x) g(x)\|_{L_2} = \sup_{a_{v+1} < \sigma < b_{v+1}} \|\hat{g}(\sigma + i\tau)\|_{L_2} \leq c, \quad (5.16)$$

где $g(x)$ — прообраз Лапласа $\hat{g}(p)$. Представляя $g(x) = \theta_+(x)g(x) + \theta_-(x)g(x)$, получим $f(p) = (p+d)^{m+1} \hat{\theta}_+ g + (p+d)^{m+1} \hat{\theta}_- g$, при этом из (5.16) и неравенства Гельдера имеем

$$|\widehat{\theta_+ g}(p)| \leq \int_0^{+\infty} \exp(-px) \exp(a_{\sigma+1} \cdot x) \exp(-a_{\sigma+1} \cdot x) g(x) dx \leq \\ \leq c_{\sigma} \cdot \sup_{-b_{\sigma+1} \leq x \leq -a_{\sigma+1}} |\exp(\sigma x) g(x)|_{L_1}, \quad \forall \sigma \geq a_{\sigma}.$$

Аналогично оценивается и $\widehat{\theta_-(x)g(x)}(p)$.

Используя лемму 9, представим функцию $Q(p)$ в виде $Q(p) = Q^+(p) + Q^-(p)$. Решение неоднородной задачи сопряжения (5.13) запишется в виде

$$G_j^+(p) = Q_j^+(p), \quad (p - p_0)^{x_j} G_j^-(p) = -(p - p_1)^{x_j} Q_j^-(p), \\ j = 0, 1, \dots, m-1. \quad (5.17)$$

Отсюда, для аналитичности функции $G_j^-(p)$ необходимо и достаточно выполнение конечного числа условий

$$((p - p_1)^{x_j} Q_j^-(p))^{(l)}(p_0) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, x_j - 1. \quad (5.18)$$

Определяя вектор-функцию $\widehat{g}^+(p)$ (или $\widehat{f}^-(p)$) и подставляя её в (5.6), мы сведем смешанную граничную задачу D к общей граничной задаче C , которая, в свою очередь, при сделанных предположениях эквивалентна задаче Коши A , образ Лапласа решения которой задается формулой

$$\widehat{u}(p, y) = \sum_{j=0}^{m-1} E_j(p, y) \widehat{F}_j(p), \quad (5.19)$$

где функции $\widehat{F}_j(p)$ аналитичны в $\kappa_{a,b}$ и удовлетворяют неравенствам: $\forall (a, b) \in (a, b) \exists c$ такая, что

$$|\widehat{F}_j(p)| \leq c, P_{\sigma}(|p|), \quad \forall p \in \kappa_{a,b}, \quad (5.20)$$

где c не зависит от (a, b) .

Пользуясь оценками (1.9) и (5.20), нетрудно доказать, что для некоторого k прообраз Лапласа $u(x, y)$ функции $\widehat{u}(p, y)$ из (5.19) принадлежит $L_{(a,b)}^{(k)}$ и удовлетворяет неравенствам (5.2).

Таким образом получена

Теорема 6. Однородная задача D может иметь лишь конечное число линейно независимых решений, а для разрешимости неоднородной задачи необходимо и достаточно выполнение конечного числа условий.

Замечание 1. Смешанная граничная задача D была рассмотрена в предположениях теоремы 4 из § 4. Это приводит к тому, что матрица $K(p)$ из (5.8) имеет точку $p = \infty$ единственной возможной особой точкой, что существенно использовалось при её факторизации. В предположениях же теоремы 5 из § 4 появятся и другие особые точки (точки, в которых $\det K(p)$ равен нулю или ∞). Следуя работе [4] матрицу $K(p)$ можно факторизовать и в этом случае. Что касается теоремы 6, то она остается в силе.

Замечание 2. Используя многомерные пространства $L'(a, b)$, где $a = (a_1, \dots, a_m)$, $b = (b_1, \dots, b_m)$, введенные в [2], и многомерное преобразование Лапласа в них, можно распространить полученные результаты на уравнение вида (1) в $R^m \times R^+$, в случае необходимости видоизменив соответствующую формулировку. Например, теорема 1 из § 1 остается в силе, а теорема 2 из § 2 будет справедлива, если дополнительно потребовать, чтобы $a_n(p_1, \dots, p_m)$ обращалась в нуль лишь в конечном числе точек.

§ 6. Примеры

Рассмотрим следующий оператор $L = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ и, в свете полученных результатов, поставим корректные граничные задачи в классе $L'(0, 1)$. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 2b\lambda p + cp^2 = 0.$$

Очевидно, что если $b^2 - c \geq 0$, $c > 0$, т. е. оператор L — гиперболический, то корректна задача Коши, если же $b^2 - c \geq 0$, $b < 0$, $c > 0$, то уравнение $Lu = 0$ в классе $L'(0, 1)$ имеет только нулевое решение и поэтому нет корректных граничных задач. В случае $b^2 - c > 0$, $c < 0$ корректной будет задача Дирихле. Наконец, если $b^2 - c < 0$, то опять уравнение $Lu = 0$ не имеет нетривиальных решений в $L'(0, 1)$ (оператор L — эллиптический).

В $L'(0, 1)$ рассмотрим оператор параболического типа вида $L = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - a \frac{\partial}{\partial x}$, $a \in R$. Корень характеристического уравнения имеет вид $\lambda(p) = p^2 + ap = \sigma^2 - \tau^2 + a\sigma + i\tau(2\sigma + a)$. Легко заметить, что задача Коши для уравнения $Lu = 0$ будет корректна тогда и только тогда, когда $a < -1$.

В заключение на примере оператора $L = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \mu_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} - \mu_2 \frac{\partial}{\partial x}\right)$, $\mu_1 > \mu_2 > 0$ проиллюстрируем результат § 3. Предварительно отметим, что классическая задача Коши в классе ограниченных функций некорректна. Рассмотрим задачу Коши (3.5) в классе $L^2(-2; -1)$. По формуле Даламбера имеем

$$u(x, y) = \frac{\mu_2 f_1(x + \mu_1 y) - \mu_1 f_1(x + \mu_2 y)}{\mu_2 - \mu_1} + \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \int_{x+\mu_2 y}^{x+\mu_1 y} f_2(\tau) d\tau, \quad f_1 \in L^2(-2; -1), \quad f_2 \in L^1(-2; -1).$$

Приведем оценки для $u(x, y)$ (производные оцениваются аналогично),

$$\begin{aligned} \sup_{1 < \sigma < 2} \exp(\sigma x) \cdot |f_1(x + \mu_2 y)| &= \sup_{1 < \sigma < 2} \exp(-\sigma \mu_2 y) \cdot \\ &\cdot \exp \sigma(x + \mu_2 y) |f_1(x + \mu_2 y)| \leq \|f_1\|_{(1, 2)} \\ \sup_{1 < \sigma < 2} \exp(\sigma x) \int_{x + \mu_2 y}^{x + \mu_1 y} |f_2(\tau)| d\tau &\leq \sup_{1 < \sigma < 2} \exp(\sigma \tau) |f_2(\tau)| \cdot \\ &\cdot \sup_{1 < \sigma < 2} \exp(\sigma x) \int_{x + \mu_2 y}^{x + \mu_1 y} \exp(-\sigma \tau) d\tau \leq \|f_2\|_{(1, 2)}. \end{aligned}$$

Отметим также, что задача типа Коши и общая граничная задача для уравнения вида (1) в других классах функций (Соболева, Шварца и др.) рассматривались, различными авторами [3], [6], [7], [8].

Ерсванский политехнический институт

Поступила 8.V.1980

Ա. Ա. ԱՆԴՐԻԱՆ. Եզրային խնդիրներ մասնական ապերիոդիկ հավասարումների համար. Զեմանյանի դասերում (ամփոփում)

Հետևյալ տեսքի

$$\sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^k u(x, y)}{\partial y^k} \right) = 0, (x, y) \in R \times R^+.$$

մի հավասարման համար, որտեղ $a_k(p)$ հաստատուն գործակիցներով բաղմանքով է, $L_y(a, b)$ Զեմանյանի դասերում ապերիոդիկ ձևավորության օգնությամբ դիտարկված են Կասուի տիպի ընդհանուր և խառը եզրային խնդիրները, խառը եզրային խնդիրը բերվում է շերտային համալուծման խնդրի Ստացված են լուծելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները:

A. A. ANDRIAN. *Boundary Value problems for partial differential equations in the class of Zemanian (summary)*

For equation of the form

$$\sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k u(x, y)}{\partial y^k} = 0, (x, y) \in R \times R^+,$$

where $a_k(p)$ — polynomial with constant coefficients of $p = \sigma + i\tau$, the problem of Cauchy type, general and mixed boundary Value problems in the class $L_y(a, b)$ of Zemanian are considered in the aid of Laplace transformation. The mixed problem reduces into strip conjugation problem. The criterions of solvability are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Хёрмандер. Аппалк линейных дифференциальных операторов с частными производными, т. 2, М., «Мир», 1986.
2. А. Земанян. Интегральные преобразования обобщенных функций, М., «Наука», 1974.
3. Г. Е. Шилов. Математический анализ. Второй спецкурс, М., «Наука», 1965.
4. Э. Прёсдорф. Некоторые классы сингулярных уравнений, М., «Мир», 1979.

5. А. А. Андриян. К теории граничных задач для систем составного типа с младшими членами, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем. XXV, № 1, 1991.
6. Г. В. Дикополов. О краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве. Мат. сб., 1962, 59 (101), № 2, 215—228.
7. Н. Е. Товмасын. Задача Коши для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве в классе обобщенных функций, Диф. уравнения, 1982, т. 18, № 1, 132—138.
8. А. Л. Павлов. Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве, Мат. сб., 1977, 103(145), № 3 (7), 367—391.

УДК 517.9

Ю. А. КУТОЯНЦ, Ф. ЛИЗЕ

МИНИМАКСНЫЕ ГРАНИЦЫ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНКИ
ИНТЕНСИВНОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПРОЦЕССА
ПУАССОНА

Введение

В настоящей работе рассматривается задача непараметрического оценивания интенсивности (меры) $\Lambda(\cdot)$ неоднородного пуассоновского процесса, заданного на пространстве R^d . Без существенных ограничений можно считать это множество кубом $[0, 1]^d$. Предполагается, что задана последовательность независимых реализаций этого процесса.

В теореме 1 приводится асимптотическое разложение риска в случае, когда в качестве оценки $\Lambda(\cdot)$ взято арифметическое среднее $\hat{\Lambda}_n(\cdot)$. При построении асимптотической минимаксной границы мы воспользуемся общей теорией построения асимптотически минимаксных границ, развитой в работах Л. Ле Кама [4], В. Миллара [7], Я. Гаека [8]. Для того, чтобы воспользоваться этой теорией в теореме 2 доказывается сходимость экспериментов, отвечающих исходной задаче, к гауссовскому эксперименту со сдвигом и далее непосредственно применяем теорему Ле-Кама-Миллара. Доказательство достижимости этой границы оценкой $\hat{\Lambda}_n$ опирается на соответствующую функциональную предельную теорему в пространстве непрерывных на $[0, 1]^d$ функций.

2. Обозначения и результаты

Пусть $[0, 1]^d$ будет d -мерный куб, Z_d — σ -алгебра борелевских множеств в $[0, 1]^d$ и M — множество всех мер $\varphi(\cdot)$, заданных на $([0, 1]^d, Z_d)$ со значениями на множестве $\{0, 1, 2, \dots\}$. Обозначим $\mathfrak{M}$ наименьшую σ -алгебру подмножеств M такую, что все отображения $\varphi \rightarrow \varphi(B)$, $B \in Z_d$ измеримы. Пусть задана конечная мера Λ на $([0, 1]^d, Z_d)$. Назовем Φ -пуассоновским процессом интенсивности Λ , если Φ является, случайной величиной, определенной на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P) принимающей значения в $(M, \mathfrak{M})$ и выполняющей условия:

А) Для любого $B \in Z_d$ случайная величина $X_B(\varphi) = \varphi(B)$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\Lambda(B)$.

Б) Для любых непересекающихся множеств $B_1, \dots, B_n$, $B_j \in Z_d$ случайные величины $X_{B_1}, \dots, X_{B_n}$ независимы.

Считаем заданной последовательность $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ независимых процессов Пуассона интенсивности Λ . Требуется по n наблюдениям $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ оценить меру Λ и описать свойства оценок при $n \rightarrow \infty$.

В качестве оценки возьмем среднее арифметическое

$$\hat{\Lambda}_n(B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi_i(B), \quad B \in Z_d.$$

Из закона больших чисел сразу получаем состоятельность при $n \rightarrow \infty$

$$\hat{\Lambda}_n(B) \rightarrow \Lambda(B)$$

для каждого фиксированного $B \in Z_d$. Положим

$$\hat{L}_n(t) = \hat{\Lambda}_n([0, t]),$$

$$L(t) = \Lambda([0, t]).$$

Пусть заданы конечная мера $\mu(\cdot)$ на $([0, 1]^d, Z_d)$ и неотрицательная функция $\rho(\cdot)$ на R . Определим оценку $\hat{L}_n$ по формуле

$$R_n = E \int \rho(\hat{L}_n(t) - L(t)) \mu(dt). \quad (1)$$

Если $\rho(x) = x^2$, тогда R_n может быть явно вычислен. Так как $\hat{L}_n(t)$ имеет пуассоновское распределение с параметром $L(t)$ непосредственно вычисляются

$$E \hat{L}_n(t) = L(t),$$

$$E (\hat{L}_n(t) - L(t))^2 = \frac{1}{n} L(t).$$

Откуда получаем

$$E \int (\hat{L}_n(t) - L(t))^2 \mu(dt) = \frac{1}{n} \int L(t) \mu(dt). \quad (2)$$

Для формулировки следующей теоремы введем обозначение

$$C_{l, q} = \frac{1}{q!} \sum_{\substack{l_1 + \dots + l_q = l \\ l_j \geq 1}} \frac{l!}{l_1! \dots l_q!}.$$

Теорема 1. Пусть ρ является $r+1$ раз непрерывно дифференцируемой функцией и

$$|\rho^{(r+1)}(x)| \leq C e^{\beta |x|}, \quad x \in R,$$

где C и β некоторые положительные постоянные. Тогда R_n в (1) допускает представление

$$R_n = \rho(0) + \sum_{i=1}^r \sum_{q=1}^{[i/2]} \left| \frac{\rho^{(i)}(0)}{i!} C_{i, q} \cdot \int L^i(t) \mu(dt) \right| \frac{1}{n^{i-q}} + o(n^{-r/2}).$$

Вывод минимаксной нижней границы на риск произвольной оценки опирается на минимаксную теорию принятия решений Гаека-Ле Кама-Миллара.

Обозначим D_d пространство Скорохода действительных функций на $[0, 1]^d$ непрерывных справа и имеющих пределы слева. Понятия «справа» и «слева» здесь связаны с полуупорядоченностью точек в кубе. Пусть $C_d \subseteq D_d$ обозначает подпространство всех непрерывных функций на $[0, 1]^d$ и D_d обозначает σ -алгебру борелевских множеств на D_d (см. [2]). Вместо оценки меры Λ мы будем оценивать ее функцию распределения L . В соответствии с общей теорией решений допускается также и стохастическое оценивание. Такая оценка задается стохастическим ядром

$$b: (M^n, \mathcal{X}^n) \rightarrow (D_d, D_d),$$

т. е. функцией на $M^n \times D_d$, которая является измеримой функцией на M^n по своей первой переменной и вероятностной мерой на D_d — по второй.

Для $X \in D_d$ положим

$$|x| = \sup_{t \in [0, 1]^d} |x(t)|.$$

Фиксируем Λ_0 -меру интенсивности наблюдаемого пуассоновского процесса и положим $L_0(t) = \Lambda_0([0, t])$. Введем еще $\Psi_n = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ и P_n^* , n -кратную произведение мер. Риск, отвечающий решающей функции b , определим по формуле

$$\int g(|V_n(x - L_0)|) b(\Psi_n, dx) P_n^*(d\Psi_n),$$

где $g(\cdot)$ — некоторая неотрицательная неубывающая функция на $[0, \infty]$.

Обозначим $L_2(\Lambda_0)$ — гильбертово пространство квадратично интегрируемых на $[0, 1]^d$ с мерой Λ_0 функций и положим для $h \in L_2(\Lambda_0)$.

$$(\tau h)(t_1, \dots, t_d) = \int_{[0, t]} h(s) \Lambda_0(ds),$$

где $(t_1, \dots, t_d) = t$.

Нижняя граница, которую мы собираемся ввести, должна быть равномерной по окрестности истинного значения, поэтому мы вводим окрестность

$$U = \{L_h : L_h = L_0 + (\tau h)n^{-1/2},$$

если $|h| < n^{1/2}$ и $L_h = L_0$, если $|h| \geq n^{1/2}\}$.

Положим также

$$\Lambda_h(B) = \begin{cases} \Lambda_0(B) + n^{-1/2} \int_B h d\Lambda_0, & \text{если } |h| < \sqrt{n} \\ \Lambda_0(B), & \text{если } |h| \geq \sqrt{n}. \end{cases}$$

Далее введем

$$H_m = \{h : h \in L_2(\Lambda_0), |h| < \sqrt{m}\}$$

$$H_\infty = \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m.$$

Заметим, что H_∞ плотно в $L_2(\Lambda_0)$.

Предположим теперь, что мера Λ_0 непрерывна, т. е. $\Lambda_0(\{t\}) = 0$ для любого $t \in [0, 1]^d$. Тогда существует непрерывное с вероятностью 1 гауссовское поле $W(t)$, $t \in [0, 1]^d$ такое, что $W(0) = 0$, $EW(t) = 0$, $EW(t)W(s) = L_0(S\Delta t)$, где $S\Delta t$ обозначает покомпонентный минимум векторов S и t . Доказательство существования такого поля имеется в [2].

Пусть $[S, t]$ — прямоугольник. Обозначим $\Delta_S^t W$ обычный разностный оператор.

Нетрудно проверить, что для любой совокупности непересекающихся прямоугольников $[S_1, t_1], \dots, [S_n, t_n]$ случайные величины $\Delta_{S_1}^{t_1} W, \dots, \Delta_{S_n}^{t_n} W$ независимы. Обозначим P_0 — распределение W . Эта мера определена на σ -алгебре борелевских множеств пространства C_d .

Теорема 2. Если Λ_0 — непрерывная конечная мера на $([0, 1]^d, D_d)$ и $g(\cdot)$ — неубывающая непрерывная функция на $[0, \infty]$, причем

$$\int g(|x|) P_0(dx) < \infty, \quad (4)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_b \sup_{h \in H_m} \int g(|V_n(x - L_h)|) \cdot b(\Psi_n, dx) P_{\Lambda_n}^n(d\Psi_n) \geq \int g(|x|) P_0(dx) < \infty.$$

Покажем также, что при некоторых дополнительных предположениях на $g(\cdot)$ оценка

$$\widehat{L}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi_i([0, t])$$

оказывается оптимальной в следующем смысле: её риск достигает нижней границы, приведенной в теореме 2. Такие оценки назовем локально асимптотически минимаксными (ЛАМ).

Предположим теперь, что неубывающая на $g(\cdot)$ функция удовлетворяет неравенству.

$$g(x) \leq c \cdot e^{-\varepsilon_0 x}, \quad (5)$$

с некоторыми постоянными $c > 0$ и $\varepsilon_0 \in (0, \frac{3}{104})$ при всех $x \in [0, \infty)$.

Теорема 3. Если Λ_0 — непрерывная конечная мера и выполнено (5), тогда оценка $\widehat{L}_n$ — ЛАМ:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \tilde{H}_m} \int g(|V_n(\hat{L}_k - L_k)|) dP_{\hat{L}_k}^* = \\ = \int g(|x|) P_0(dx) = E g(|W|).$$

Замечание. В частном случае ($d=1$) теоремы 2 и 3 доказаны в [1], где рассмотрен периодический процесс Пуассона на $[0, T]$ и $T \rightarrow \infty$. Так как приращения процесса Пуассона на непересекающихся периодах независимы, то рассмотренная там схема наблюдений практически совпадает с нашей.

Доказательство теоремы 1. Сначала напомним некоторые элементарные факты из теории вероятностей. Пусть случайная величина X имеет r моментов. Положим $\mu_r = MX^r$ и обозначим $K_{l,r}$ — l -тый кумулянт X . Тогда

$$\mu_r = \sum_{q=1}^r \frac{1}{q!} \sum_{i_1 + \dots + i_q = r} \frac{r!}{i_1! \dots i_q!} \prod_{p=1}^q K_{l,p}.$$

Если Y имеет пуассоновское распределение и $X=Y-EY$, тогда для $\mu_r = EX^r$ имеет место

$$\mu_r = \sum_{q=1}^r \frac{1}{q!} \sum_{i_1 + \dots + i_q = r} \frac{r!}{i_1! \dots i_q!} \lambda^q, \quad (6)$$

где $\lambda = EY$. Представление (6) следует из того, что первый куммулянт X равен $EX=0$, а все остальные куммулянты равны λ .

В сделанных предположениях

$$\rho(x) = \sum_{l=0}^r \frac{x^l}{l!} \rho^{(l)}(0) + \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} \rho^{(r+1)}(\theta x),$$

где $\theta \in (0, 1)$. С помощью (6) и того факта, что $n\hat{L}_n(t)$ имеет пуассоновское распределение с параметром $n\hat{L}(t)$ получаем

$$\sum_{l=1}^r \frac{\rho^{(l)}(0)}{l!} E \int (\hat{L}_n(t) - L(t))^l \mu(dt) = \\ = \sum_{l=1}^r \sum_{q=1}^{[l/2]} \left[\int L^q(t) \mu(dt) \right] \frac{\rho^{(l)}(0)}{l!} C_{l,q} \frac{1}{n^{l-q}}.$$

Положим $Z_n(t) = \hat{L}_n(t) - L(t)$, тогда

$$\left| E \int Z_n^{r+1}(t) \rho^{(r+1)}(\theta Z_n(t)) \mu(dt) \right| \leq \\ \leq \left(\int E Z_n^{r+1}(t) \mu(dt) \right)^{1/2} \left(\int E \left(\rho^{(r+1)}(\theta Z_n(t)) \right)^2 \mu(dt) \right)^{1/2}.$$

Из (6) следует, что первый сомножитель последнего выражения имеет порядок $O(n^{-r/2})$, для оценки второго воспользуемся неравенством

$$(\rho^{(r+1)}(\theta S))^2 \leq c^2 e^{2\theta |S|} \leq c^2 (e^{2\theta S} + e^{-2\theta S}).$$

Так как $n\bar{L}_n(t)$ — пуассоновская случайная величина, имеем равенство

$$E \exp(aZ_n(t)) = \exp \left\{ nL(t) \left(e^{a/n} - 1 - \frac{a}{n} \right) \right\}$$

и заметим, что найдется такая постоянная $C(a)$, что

$$\left| n \left(e^{a/n} - 1 - \frac{a}{n} \right) \right| < C(a).$$

Следовательно,

$$\sup_{n, t \in [0, 1]^d} E(p^{(r+1)}(\theta, z_t(t)))^2 \leq C^2 \sup_{t \in [0, 1]^d} (\exp[L(t)C(2\beta)] + \exp[L(t)C(-2\beta)]) \rightarrow \infty,$$

что завершает доказательство.

Доказательство теоремы 2. Ограниченный линейный оператор $\tau: L_2(\Lambda_0) \rightarrow C_d$ является компактным, т. е. образ ограниченного множества является относительно компактом в C_d . Если $\tilde{P}$ — стандартная цилиндрическая гауссовская мера на $L_2(\Lambda_0)$, то $f_0 = \tilde{P}_0^{-1}$ — аддитивная функция множеств на борелевской σ -алгебре C_d . При этом отображении P_0 является распределением винеревского поля $W(t)$ со свойствами.

$$W(0) = 0, EW(t)W(S) = L_0(t\Delta S).$$

Для произвольной системы непересекающихся прямоугольников $[a_i, b_i] \leq [0, 1]^d$ и действительных чисел α_i введем ступенчатую функцию

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i I_{[a_i, b_i]}(t), \quad (7)$$

где $I_A(t)$ индикатор события $\{t \in A\}$, и положим

$$\int f dW = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta_{a_i}^{b_i} W.$$

Ясно, что

$$E \int f dW = 0$$

и

$$E \int f dW \int g dW = \int f g d\Lambda_0,$$

для любых функций f, g вида (7).

Так как множество ступенчатых функций плотно в $L_2(\Lambda_0)$ мы можем оператор изометрии $U: f \rightarrow \int f dW$ продолжить на все $L_2(\Lambda_0)$ и определить для любой $f \in L_2(\Lambda_0)$ интервал

$$\int f dW = U(f).$$

Пусть $h \in L_2(\Lambda_0)$ и борелевское множество $B \subset C_d$. Положим

$$P_h(B) = P_0(B - \tau h).$$

Хорошо известно (см., например, [5]), что $P_h \ll P_0$ и

$$\frac{dP_h}{dP_0}(x) = \exp \left\{ Z_h(x) - \frac{1}{2} \int h^2(x)_0 n_0 \right\},$$

где $L_h(x)$ обозначает введенный выше стохастический интеграл $\int h dx$ относительно канонического винеровского поля $x(t)$, определенного на $(C_d, \mathcal{A}_d, P_0)$. Следовательно $E = (C_d, \mathcal{A}_d, P_h)$ является гауссовским экспериментом со сдвигом в смысле [7].

Рассмотрим последовательность экспериментов

$$E^n = (M^n, \mathfrak{M}^n, P_{\Lambda_h}^n).$$

Так как $P_h \ll P_0$, то при $n > m$ и $|h| \leq m$ можно записать [5]

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\Lambda_h}^n}{dP_{\Lambda_h}^m}(\Phi) &= \exp \left\{ \int \ln \left(1 + \frac{h}{\sqrt{n}} \right) d\Phi - \right. \\ &\quad \left. - \Lambda_h([0, 1]^d) + \Lambda_0([0, 1]^d) \right\} \end{aligned}$$

и следовательно

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\Lambda_h}^n}{dP_{\Lambda_h}^m}(\Phi_1, \dots, \Phi_n) &= \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \int \ln \left(1 + \frac{h}{\sqrt{n}} \right) d\Phi_i - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{n} \int h - d\Lambda_0 \right\} = \exp \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \int h (d\Phi_i - d\Lambda_0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int h^2 d\Phi_i + R_n(h) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$R_n(h) = \sum_{i=1}^n \int \left(\ln \left(1 + \frac{h}{\sqrt{n}} \right) - \frac{h}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \frac{h^2}{n} \right) d\Phi_i.$$

Положим $L_n(h) = \ln dP_{\Lambda_h}^n / dP_{\Lambda_0}^n$. Для доказательства сходимости конечномерных распределений процесса $(L_n(h))_{h \in H_\infty}$ к гауссовскому закону воспользуемся приемом Крамера—Волда и докажем асимптотическую нормальность суммы $\sum_{j=1}^r t_j L_n(h_j)$ для любых наборов $t_j \in R$, $h_j \in H_\infty$.

Имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r t_j L_n(h_j) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \int \left(\sum_{j=1}^r t_j h_j \right) (d\Phi_i - d\Lambda_0) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r t_j \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int h_j^2 d\Phi_i + \sum_{j=1}^r t_j R_n(h_j). \end{aligned}$$

Первый член асимптотически нормален со средним 0 и дисперсией

$$\int \left(\sum_{j=1}^r t_j h_j \right)^2 d\Lambda_0.$$

Второй член по усиленному закону больших чисел сходится с вероятностью 1 к

$$-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^r t_j \int h_j^2 d\Lambda_0.$$

Из формулы Тейлора следует существование такой $C(\varepsilon)$, $\varepsilon > -1$, что для $x > \varepsilon$

$$\left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq C(\varepsilon) |x|^3.$$

Выберем n_0 таким, что

$$\max_{1 \leq j \leq r} \left\| \frac{h_j}{\sqrt{n_0}} \right\| < 1$$

и положим $\varepsilon_n = -\max_{1 \leq j \leq r} n_0^{-1/2} |h_j|$. Тогда для $n > n_0$

$$\left| \ln \left(1 + \frac{h_j}{\sqrt{n}} \right) - \frac{h_j}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \frac{h_j^2}{n} \right| \leq C(\varepsilon_0) \frac{|h_j|^3}{n^{3/2}}$$

и при $n \rightarrow \infty$

$$E \left| \sum_{j=1}^r t_j R_n(h_j) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^r |t_j| C(\varepsilon_0) \int |h_j|^3 d\Lambda_0 \rightarrow 0.$$

Следовательно распределение $\sum_{j=1}^r t_j L_n(h_j)$ сходится к распределению

гауссовской случайной величины $\sum_{j=1}^r t_j \ln \frac{dP_{n1}}{dP_0}$ с параметрами

$$\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^r t_j \int h_j^2 d\Lambda_0, \int \left(\sum_{j=1}^r t_j h_j \right)^2 d\Lambda_0 \right).$$

Таким образом, мы доказали сходимость экспериментов $E_n = (M^n, \mathfrak{M}^n, P_{\Lambda_n}^n, h \in H_\infty)$ к эксперименту $E = (C_d, \alpha_d, P_h, h \in H_\infty)$ в смысле Ле Кама.

Введем отображение $T: D_d \rightarrow D_d$ по правилу $T(x) = \sqrt{n}(x - L_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \iint g(\|x' - \tau h\|) b(\Psi_n, dx) P_{\Lambda_n}^n(d\Psi_n) = \\ & = \iint g(\|x' - \tau h\|) \tilde{b}(\Psi_n, dx') P_{\Lambda_n}^n(d\Psi_n), \end{aligned}$$

где $\tilde{b}(\Psi_n, A) = b(\Psi_n, T^{-1}(A))$. Так как множество всех решений b и $\tilde{b}$ совпадают, получаем

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_b \sup_{h \in H_m} \int \int g(|V_n(x - L_h)|) b(\Psi_n, dx) P_{\Lambda_h}^n(d\Psi_n) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_b \sup_{h \in H_m} \int \int g(|x - \tau h|) b'(\Psi_n, dx) P_{\Lambda_h}^n(d\Psi_n) \geq \\ & \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_b \sup_{h \in H_m} \int \int g(|x - \tau h|) b'(\Psi_n, dx) P_{\Lambda_h}^n(d\Psi_n), \end{aligned}$$

где $b': (M^n, \mathfrak{M}^n) \rightarrow (C_d, \alpha_d)$ — решающая функция со значениями (C_d, α_d) .

К правой части последнего неравенства применим минимаксную теорему Л. Ле Кама (см. также [7], теорема 3.1.1) и получим, что она не превышает величины

$$\inf_a \sup_{h \in H_m} G(a, h),$$

где

$$\begin{aligned} a: (C_d, \alpha_d) &\rightarrow (C_d, \alpha_d) \text{ и } G(a, h) = \\ &= \int \int g(|x - \tau h|) a(y, dx) P_h(dy). \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_b \sup_{h \in H_m} \int \int g(|V_n(x - L_h)|), \\ & b(\Psi_n, dx) P_{\Lambda_h}^n(d\Psi_n) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \inf_a \sup_{h \in H_m} G(a, h) = \\ & = \sup_m \inf_a \sup_{h \in H_m} G(a, h). \end{aligned}$$

Для любых $\varepsilon > 0$ и a существует $m(a, \varepsilon)$ такое, что

$$\sup_{h \in H_\infty} G(a, h) \leq \sup_{h \in H_m(a, \varepsilon)} G(a, h) + \varepsilon.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \inf_a \sup_{h \in H_\infty} G(a, h) &\leq \inf_a \sup_{h \in H_m(a, \varepsilon)} G(a, h) + \varepsilon \leq \\ &\leq \sup_l \inf_a \sup_{h \in H_\varepsilon} G(a, h) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как это верно для любого $\varepsilon > 0$, то

$$\inf_a \sup_{h \in H_\infty} G(a, h) = \sup_n \inf_a \sup_{h \in H_m} G(a, h).$$

Пусть $h_n \in L_2(\Lambda_0)$ — произвольная последовательность такая, что

$$\int (h_n - h)^2 d\Lambda_0 \rightarrow 0.$$

Положим

$$\rho_n(x) = \frac{dP_{h_n}}{dP_h}(x).$$

Тогда $\rho_n \rightarrow 1$ по вероятности относительно P_h . Из непрерывности $g(\cdot)$ и леммы Фату получаем

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int \int g(|x - \tau h_n|) a(y, dx) P_{h_n}(dy) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \int g(|x - \tau h_n|) a(y, dx) \varphi_n(y) P_h(dy) \geq \\ & \geq \int \int g(|x - \tau h|) a(y, dx) f_h(dy). \end{aligned}$$

Следовательно

$$\inf_a \sup_{h \in H_n} G(a, h) = \inf_a \sup_{h \in L_1(\Lambda_0)} G(a, h).$$

Осталось заметить, что $(C_d, L_2(\Lambda_0), \tau)$ — абстрактное винеровское пространство $h(P_h)$, $h \in L_2(\Lambda_0)$ — гауссовское семейство со сдвигом, поэтому см. [7], теорема 2)

$$\inf_a \sup_{h \in L_1(\Lambda_0)} G(a, h) = \int g(|x|) P_0(dx),$$

что завершает доказательство теоремы 2.

Для доказательства теоремы 3 нам понадобятся три леммы, которые мы сейчас приведем.

Пусть $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ независимые гауссоновские процессы на $[0, 1]^d$ с мерой интенсивности Λ . Для прямоугольника $Q \subseteq [0, 1]^d$ обозначим R_Q систему всех прямоугольников $S \subseteq Q$. Доказательство следующей леммы следует из доказательства теоремы 1.1 работы Руймгарта и Велнера [9], (см. также доказательство теоремы 1.1 работы Айнмала и Руймгарта [3]).

Лемма 1. Для любого $x > 0$.

$$\begin{aligned} & P \left\{ \sup_{S \in R_Q} |\sqrt{n}(\hat{\Lambda}_h(S) - \Lambda(S))| > x \right\} \leq \\ & \leq 2^{2d+3} \exp \left\{ - \frac{3\lambda^2 n^{1/2}}{96 \Lambda(Q) n^{1/2} + 8\lambda} \right\}. \end{aligned}$$

Два прямоугольника $[a, b]$, $[c, d]$ назовем соседними, если $b_i = c_i$ хотя бы при одном i , где b_i и c_i — координаты векторов b и c соответственно. Обозначим B_0 множество тех функций из D_d , которые равны нулю на нижней границе, т. е.

$$\begin{aligned} B_0 = \{x : x \in D_d, x(S_1, \dots, S_{i-1}, 0, S_{i+1}, \dots, S_d) = 0 \\ 0 \leq S_i \leq 1, i = 1, \dots, d\}. \end{aligned}$$

Следующий критерий плотности семейства распределений на (D_d, D_d) принадлежит В. Бикелу и Вихуре [2].

Лемма 2. Пусть на (D_d, D_d) задано семейство распределений $(P_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ и

$$P_\gamma(B_0) = 1,$$

для любого $\gamma \in \Gamma$. Если на $([0, 1]^d, \mathcal{A}_d)$ существует конечная мера μ с $\mu(|S|) = 0$ для каждого $S \in [0, 1]^d$ и найдутся такие $\beta_1 > 0$ и $\beta_2 > 0$, что

$$P_{\pi}(\{x: |\Delta_a^b x| \wedge |\Delta_c^d x| \geq \lambda\}) \leq \lambda^{-1} \mu((a, b] \cup (c, d])^{p_1}, \quad (8)$$

для любых двух соседних прямоугольников $(a, b]$ и $(c, d]$ и любого $\lambda > 0$, то семейство мер $(P_{\gamma}, \gamma \in \Gamma)$ плотно.

Лемма 3. Пусть $Q, P_{n, \theta}, n = 1, 2, \dots, \theta \in \Theta$ распределения на (D_d, D_d) такие, что конечномерные распределения $P_{n, \theta}$ сходятся равномерно на $\theta \in \Theta$ к соответствующим распределениям Q в смысле [10]. Если семейство $(P_{n, \theta}, \theta \in \Theta), n = 1, 2, \dots$, плотно, то для каждой ограниченной Q -п. н. непрерывной функции f на D_d

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) P_{n, \theta}(dx) = \int f(x) Q(dx)$$

равномерно по $\theta \in \Theta$.

Доказательство. Если существует последовательность $\theta_n \in \Theta$ такая, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int f(x) P_{n, \theta_n}(dx) - \int f(x) Q(dx) \right| > 0,$$

тогда найдется последовательность $n(r), r = 1, 2, \dots$, такая, что $P_{n(r)}$, $\theta_n(r)$ слабо сходится к некоторой мере $\tilde{Q}$. Покажем, что $\tilde{Q} = Q$. Пусть $g(\cdot)$ — произвольная непрерывная ограниченная функция на R_t и положим $\tilde{g}(x) = (g(x(t_1)), x(t_1))$. Тогда из равномерной сходимости конечномерных распределений получаем

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left| \int \tilde{g} dP_{n(r), \theta} - \int \tilde{g} dQ \right| \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Следовательно

$$\int \tilde{g} dP_{n(r), \theta_{n(r)}} \rightarrow \int \tilde{g} dQ, \quad r \rightarrow \infty,$$

а из сходимости $P_{n(r), \theta_{n(r)}} \Rightarrow \tilde{Q}$ получаем

$$\int \tilde{g} dP_{n(r), \theta_{n(r)}} \rightarrow \int \tilde{g} d\tilde{Q}.$$

Таким образом, $Q = \tilde{Q}$ при всех $t_1, \dots, t_l, l = 1, 2, \dots$, следовательно $Q = \tilde{Q}$ в силу произвольности g .

Доказательство теоремы 3. Пусть $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ — процессы Пуассона интенсивности $\Lambda_h, h \in H_m^+$. Положим

$$\hat{L}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi_i([0, t]),$$

и обозначим $P_{n, h}$ распределение $\sqrt{n}(\hat{L}_h(t) - L_h(t))$. Обозначим P_h распределение винеровского поля $W(t)$ с $W(0) = 0, EW(t) = 0, EW(S)W(t) = \Lambda_h([0, S \wedge t])$ и докажем сходимость конечномерных распределений.

Пусть $t_1, \dots, t_l \in [0, 1]^d$. Тогда

$$P_{n,h} \left(\left| \left\{ x : \sum_{i=1}^l x(t_i)^2 > H \right\} \right| \right) \leq \sum_{i=1}^l P_{n,h} \left(\left| \left\{ x : x(t_i)^2 > \frac{H}{l} \right\} \right| \right) \leq \\ \leq \sum_{i=1}^l P \left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \Phi_j([0, t_i]) - L_h(t_i) \right)^2 > \frac{H}{l} \right) \leq \frac{l}{H^2} \sum_{i=1}^l L_h(t_i),$$

где мы воспользовались неравенством Чебышева. Следовательно первое из условий теоремы 7 (стр. 480) в [10] выполнено. Для проверки второго условия достаточно убедиться в равномерной сходимости характеристической функции случайной величины

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \int f(d\Phi_i - d\Lambda_h),$$

где f — произвольная ограниченная измеримая функция к $\exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \int f^2 d\Lambda_h \right\}$. Так как

$$E \left(\int f(d\Phi_i - d\Lambda_h) \right)^4 = \int f^4 d\Lambda_h + 3 \left(\int f^2 d\Lambda_h \right)^2 < \\ < \int f^4 (1 + \sqrt{m} d\Lambda_0 + 3(f^2(1 + \sqrt{m}) d\Lambda_0)^2).$$

Имеем

$$\sup_{h \in H_m} E \left(\int f(d\Phi_i - d\Lambda_h) \right)^4 < \infty.$$

Следовательно условие Линдеберга (см. (6) на стр. 484 в [10]) выполнено равномерно по $h \in H_m$. Это обеспечивает равномерную сходимость характеристических функций.

Докажем плотность семейства $(P_{n,h}, h \in H_m), n = 1, 2, \dots$. Для этого воспользуемся леммой 2. Положим $W_n(t) = \sqrt{n}(\hat{L}_h(t) - L_h(t))$. Для непересекающихся $(a_1, b_1]$ и $(a_2, b_2]$ случайные величины $\Delta_{a_1}^{b_1} W_n$ и $\Delta_{a_2}^{b_2} W_n$ независимы. Если прямоугольники $(a, b]$ и $(c, d]$ соседние, то

$$A = (a, b] \cap (c, d] \neq \emptyset,$$

и из непрерывности Λ_h имеем $\Lambda_h(A) = 0$, откуда следует $\Phi_i(A) = 0$ п. в. Это обеспечивает независимость также и для соседних прямоугольников. Следовательно

$$P(|\Delta_a^b W_n| \wedge |\Delta_c^d W_n| > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^2} E(\Delta_a^b W_n)^2 E(\Delta_c^d W_n)^2 = \\ = \frac{1}{\lambda^2} \Lambda_h^2((a, b]) \Lambda_h^2((c, d]) < \frac{1}{\lambda^2} \Lambda_h^4((a, b] \cup (c, d]) < \\ < \frac{(1 + \sqrt{m})^4}{\lambda^2} \Lambda_0^4((a, b] \cup (c, d]),$$

если $h \in H_m$. Принадлежность $W_n \in \mathbf{B}$ вытекает из того, что если хотя бы одно значение t_i и $t = \{t_1, \dots, t_d\}$ равно нулю, то $\Lambda_h((0, t]) = 0$ и следовательно $W_n(t) = 0$. Таким образом, плотность установлена.

Для завершения доказательства теоремы 3 нам согласно лемме 3 осталось показать

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n: h \in H_m} \int_{A_{n, h, N}} g(\|W_n\|) dP_{\Lambda_h}^n = 0, \quad (9)$$

где $A_{n, h, N} = \{g(\|W_n\|) > N\}$. По условию (5)

$$\int g(\|W_n\|) dP_{\Lambda_h}^n \leq C \int \exp\{\varepsilon_0 \|W_n\|\} dP_{\Lambda_h}^n \quad (10)$$

$$\left\{ \|W_n\| > \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\ln \frac{N}{c} \right) \right\}.$$

Заметим, что

$$\sup_{S \in R} |\sqrt{n}(\Lambda_h(S) - \Lambda_h(S))| \geq \|W_n\| \quad (11)$$

и

$$\frac{3\lambda^2 n^{1/2}}{96\lambda \Lambda_n([0, 1]^d) + 8\lambda} \geq \frac{3}{104} \lambda, \quad (12)$$

для $\lambda = (1 + \sqrt{m}) \Lambda_0([0, 1]^d)$. Обозначим $x = \exp\{\varepsilon_0 \|W_n\|\}$. Тогда

$$\int_{N, -1} x P_x(dx) = NP(x \geq N) + \int_N P_x([t, \infty)) dt.$$

Следовательно по лемме 1 и соотношениям (11), (12) в случае

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \ln \frac{N}{c} \geq (1 + \sqrt{m}) \Lambda_0([0, 1]^d) \text{ имеем}$$

$$\begin{aligned} & \int \exp\{\varepsilon_0 \|W_n\|\} dP_{\Lambda_h}^n \leq NP\left(\exp\{\varepsilon_0 \|W_n\|\} > \frac{N}{c}\right) + \\ & \left\{ \|W_n\| > \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\ln \frac{N}{c} \right) \right\} \\ & + \int_N P\left\{\exp\{\varepsilon_0 \|W_n\|\} > \frac{t}{c}\right\} dt \leq N \exp\left\{-\frac{3}{104\varepsilon_0} \cdot \right. \\ & \left. \cdot \ln \frac{N}{c}\right\} + \int_N \exp\left\{-\frac{3}{104\varepsilon_0} \ln \frac{t}{c}\right\} dt. \end{aligned}$$

В силу $\varepsilon_0 < \frac{3}{104}$ правая часть неравенства стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, что и доказывает (9).

3. Ա. Կուտոյանց, Ֆ. Լիզե. Մինիմալ սահմանները Պուասոնի տարածական պրոցեսի ինտենսիվության գնահատման խնդրում (ամփոփում)

Աշխատանքում դիտարկվում է R^d -ի սահմանափակ ենթաբազմության վրա տրված, ոչ համասեռ պուասոնյան պրոցեսի Λ ինտենսիվության չափի ոչ պարամետրիկ գնահատականը:

Yu. A. KUTOJANZ, F. LIESE. *Minimax bounds in the problem of estimation of the spatial Poisson process intensity (summary)*

The paper considers a nonparametric estimate of the intensity measure of a nonhomogeneous Poisson process on a bounded set in R^d .

ЛИТЕРАТУРА

1. Apoyan G. T., Kutoyants Yu. A. On compensator estimation of inhomogeneous Poisson process. Probl. Control and Inform. Theory. 1987, 16, 2, 135—142.
2. Bickel P. T., Wichura M. I. Convergence for multiparameter stochastic processes and some applications, Ann. Math. Stat., 1971, 42, 1656—1670.
3. Einmahl I. H. I., Rugmgaart F. H. J. The order of magnitude of the modulus of continuity of multiparameter Poisson and empirical process, Journal of Multiv. Analysis, 1987, 21, 263—273.
4. Le Cam L. Limits of experiments. Proc. sixth Berkeley Symp. Math. Statist. and Prob. Theory, 1972, v. 1, 245—261.
5. Liese F. Eine informations theoretische Bedingung für die Äquivalenz unbegrenzter teilbarer punktprozesse. Math. Nachr., 1975, 70, 183—196.
6. Liese F. Hellinger integrals of Gaussian processes with independent increments. Stochastics, 1982, 6, 81—96.
7. Millar W. P. The minimax principle in asymptotic statistical theory, Lecture notes in Mathem., № 976. Springer, Berlin, 1981, 76—262.
8. Hajek T. Local asymptotic minimax and admissibility in estimation, Proc. Sixth Berkeley Symp on Math. Statist. and Prob. Theory, 1972, v. 1, 175—194.
9. Rugmgaart G. R., Wellner T. A. Some properties of weighted multivariable empirical processes. Stat. Decisions, 1984, 2, 199—228.
10. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. Э. Асимптотическая теория оценивания, Наука, М., 1979.

УДК 517.95

Г. С. АКОПЯН, Р. А. ШАХБАГЯН

О ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ПОЛУГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ
НЕЛИНЕЙНЫМИ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ
ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

1°. Одной из важнейших проблем теории дифференциальных уравнений с частными производными вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(u), \quad t > 0, \quad (1)$$

для которого корректно поставлена задача с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad (2)$$

является изучение поведения их траекторий $u(t, x)$ при $t \rightarrow \infty$.

Оказалось, что эта задача связана с существованием многообразий, называемых аттракторами, обладающих следующими свойствами: притяжения траекторий $u(t, x)$ и инвариантности относительно полугруппы $\{S_t\}$, порожденной задачей (1), (2).

В работах [1], [2] установлено, что структура аттракторов полугрупп, обладающих глобальной функцией Ляпунова, можно явно описать с помощью неустойчивых инвариантных многообразий, проходящих через неподвижные точки полугрупп $\{S_t\}$.

В указанных выше работах [1], [2] А. В. Бабиным и М. И. Вишиком для некоторых модельных эволюционных уравнений второго порядка была конструктивно построена функция Ляпунова и описана структура аттракторов полугрупп, порожденных этими задачами.

Настоящая работа посвящена доказательству существования функции Ляпунова для некоторого класса нелинейных параболических уравнений высокого порядка и описанию с её помощью аттракторов полугрупп, порожденных рассматриваемым классом операторов.

2°. Введем необходимые для дальнейшего обозначения, определения и некоторые известные факты (см. [1]—[3]).

Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$.

Определение 1. Семейство операторов $\{S_t, t \geq 0\}$, действующих в пространстве X

$$S_t: X \rightarrow X, \quad \forall t \geq 0,$$

называется полугруппой, если композиция

$$S_t \circ S_\tau = S_{t+\tau}, \quad \forall t, \tau \geq 0,$$

$$S_0 = I.$$

где I — единичный оператор.

Определение 2. ([1]). Пусть $\{S_t, t \geq 0\}$ — полугруппа операторов S_t , действующих в X . Ограниченное, замкнутое в X , множество $\mathfrak{M}$ называется максимальным аттрактором полугруппы $\{S_t\}$, если

1) для любого ограниченного множества $B \subset X$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(S_t B, \mathfrak{M}) = 0 \quad (\text{условие притяжения}),$$

где $\text{dist}(F, G) = \sup_{f \in F} \inf_{g \in G} \|f - g\|$;

2) $S_t \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ для любого $t \geq 0$ (условие инвариантности).

Имеет место следующая

Теорема А. ([1]). Пусть полугруппа $\{S_t, t \geq 0\}$, $S_t: X \rightarrow X$ удовлетворяет следующим условиям—

а) полугруппа $\{S_t, t \geq 0\}$ равномерно ограничена, то есть для любого $R > 0$ существует постоянная $C(R)$ такая, что

$$\|S_t u\| \leq C(R), \quad \text{при } \|u\| \leq R \text{ и } \forall t \geq 0;$$

б) существует компактное в X поглощающее множество B_0 , то есть для любого ограниченного множества $B \subset X$ существует такое $T > 0$, что при $t \geq T$, $S_t B \subset B_0$

с) операторы $S_t: X \rightarrow X$ непрерывны при $t \geq 0$.

Тогда у полугруппы $\{S_t, t \geq 0\}$ имеется компактный максимальный аттрактор.

Для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ положим

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad \text{где } D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Пространство $L_p(0, T; W_p^m(\Omega))$, по определению,— банахово пространство функций $u(x, t): (0, T) \rightarrow W_p^m(\Omega)$ с нормой

$$\|u(x, t)\|_{m, p} = \left(\int_0^T \|u(x, t)\|_{m, p}^p dt \right)^{1/p},$$

где

$$\|u(x, t)\|_{m, p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}, \quad p \geq 2.$$

Круглыми скобками $(\cdot)$ будем обозначать скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Пространство $L_p^{loc}(0, \infty; W_p^m(\Omega)) = \{u(x, t); \text{ для любого } T > 0, u(x, t) \in L_p(0, T; W_p^m(\Omega))\}$.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$.

В цилиндре $Q = (0, \infty) \times \Omega$ рассмотрим следующую начальную-краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha(x, D^\gamma u)) = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (4)$$

$$D^{\alpha} u|_{\Sigma} = 0, |\omega| \leq m-1, \Sigma = (0, \infty) \times \Gamma, \quad (5)$$

где α, γ, ω — мультииндексы, функции $A_{\alpha}(x, \xi_{\gamma})$ нелинейны и зависят, вообще говоря, от всех ξ_{γ} с $|\gamma| \leq m$.

Предполагается, что

1) функции $A_{\alpha}(x, \xi_{\gamma})$ определены для $x \in \Omega$ и всех ξ_{γ} , непрерывны по x и ξ_{γ} и удовлетворяют неравенству

$$|A_{\alpha}(x, \xi_{\gamma})| \leq K_1 \left(1 + \sum_{|\gamma| \leq m} |\xi_{\gamma}|^{p-1}\right), \quad p > 2. \quad (6)$$

2) *Условие эллиптичности*: для любой функции $u(x, t) \in L_p^{loc}(0, \infty; \dot{W}_p^m(\Omega))$ справедливо неравенство

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (A_{\alpha}(x, D^{\alpha} u), D^{\alpha} u) \geq a_0 \|u(x, t)\|_{m,p}^p - k(t), \quad (7)$$

где $a_0 = \text{const} > 0$, $k(t)$ — непрерывная и ограниченная на $[0, \infty)$ функция.

3) *Условие сильной эллиптичности*: для любого $T > 0$ и любых $u(x, t) \in L_p^{loc}(0, \infty; \dot{W}_p^m(\Omega))$ и $v(x, t) \in L_p^{loc}(0, \infty; \dot{W}_p^m(\Omega))$ таких, что $u(x, t) - v(x, t) \in L_p^{loc}(0, \infty; \dot{W}_p^m(\Omega))$, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq m} \int_0^T \int_{\Omega} (A_{\alpha}(x, D^{\alpha} u) - A_{\alpha}(x, D^{\alpha} v)) D^{\alpha} (u - v) dx dt \geq \\ \geq a_1 \int_0^T \|u - v\|_{m,p}^p dt, \end{aligned} \quad (8)$$

где $a_1 = \text{const} > 0$.

4) для любых вещественных $\xi_{\alpha}, \xi_{\beta}, \eta_{\alpha}, \eta_{\beta}, x \in \Omega$

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} A_{\alpha\beta}(x, \xi_{\gamma}) \xi_{\alpha} \xi_{\beta} \eta_{\alpha} \eta_{\beta} \geq 0, \quad (9)$$

где

$$A_{\alpha\beta}(\tau, \xi_{\gamma}) = \frac{\partial A_{\alpha}(x, \xi_{\gamma})}{\partial \xi_{\beta}},$$

5) имеет место оценка

$$|D_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} A_{\alpha}(x, \xi_{\gamma})| \leq K \left(1 + \sum_{|\gamma| \leq m} |\xi_{\gamma}|^{p-1-|\beta|}\right), \quad (10)$$

для любых $\alpha, \beta, \delta, |\delta| \leq 2, |\alpha| \leq m, |\beta| \leq m, k = \text{const}$.

В работе [3] доказана следующая

Теорема Б. Пусть оператор L удовлетворяет условиям 1)–5), тогда полугруппа S_t , порожденная задачей (3)–(5), обладает аттрактором, компактным в $L_2(\Omega)$.

Определение 3. Пусть $\{S_t\}$ — полугруппа операторов $S_t: X \rightarrow X$. Точка $z \in X$ называется неподвижной точкой полугруппы $\{S_t, t \geq 0\}$, если $S_t z = z$ для любого $t \geq 0$.

Определение 4. Пусть $z \in X$ — неподвижная точка полугруппы $\{S_t, t \geq 0\}$. Неустойчивым инвариантным многообразием, выходящим из точки z , называется множество $M(z)$ точек $u \in X$, обладающих следующим свойством: существует в X такая непрерывная кривая $u(\tau)$, $-\infty < \tau < +\infty$, что

- 1) $u(0) = u$,
- 2) $S_t u(\tau) = u(t + \tau)$, $\forall \tau \in \mathbb{R}^1, \forall t \geq 0$,
- 3) $u(\tau) \rightarrow z$ при $\tau \rightarrow -\infty$.

Определение 5. Пусть $X \subset Y$ слабо инвариантное множество полугруппы $\{S_t\}$: $S_t X \subset X$, $\forall t \geq 0$. Непрерывный на X функционал $\Phi, \Phi: X \rightarrow \mathbb{R}^1$, называется функцией Ляпунова полугруппы $\{S_t\}$ на множестве X , если выполнены следующие условия:

- 1) для любого $u \in X$ функция $\Phi(S_t u)$ переменной t убывает по t при $t \geq 0$;
- 2) если $\Phi(S_t u) = \Phi(S_0 u)$ при некотором $t > 0$, то $S_0 u$ является неподвижной точкой полугруппы $\{S_t\}$.

Приведем, наконец, теорему о структуре аттракторов (см. [1], теоремы 10.1, 10.2), на которую будем существенно опираться при доказательстве основного результата настоящей работы.

Теорема В. Пусть полугруппа $\{S_t\}$ обладает компактным максимальным аттрактором $\mathfrak{M}$, и $\{S_t\}$ на множестве $\mathfrak{M}$ обладает функцией Ляпунова Φ . Предполагается, что множество A неподвижных точек $\{S_t\}$ конечно, и, кроме того, для любого $u \in \mathfrak{M}$ функция $\Phi(S_t u)$ непрерывно зависит от t в X . Тогда

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{z \in A} M(z),$$

где $M(z)$ — неустойчивое инвариантное многообразие, выходящее из точки z .

3°. Пусть оператор L , участвующий в уравнении (3), удовлетворяет 1)–5). Кроме того, предполагается, что выполнено.

- 6) Условие типа эллиптичности: для любого $u \in \dot{W}_2^{2(m+1)}(\Omega)$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{\Omega} \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}} (A_{ij}(x, D^1 u)) \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}} (D^m u) dx \geq 0. \quad (11)$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Если оператор L удовлетворяет условиям 1)–6), а решение задачи (3)–(5) $u(x, t) \in L_2^{100}(0, \infty; \dot{W}_2^{2(m+1)}(\Omega))$, то семейство операторов $\{S_t, t \geq 0\}$, порожденное задачей (3)–(5), отображает множества, ограниченные в $\dot{W}_2^m(\Omega)$, в ограниченные множества пространства $\dot{W}_2^{m+1}(\Omega)$ и, стало быть, компактные в $\dot{W}_2^m(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $T > 0$ фиксировано, а $U_0 = \{u \in \dot{W}_2^m(\Omega); \|u\|_{m,2} \leq M\}$ — произвольное ограниченное множество в $\dot{W}_2^m(\Omega)$.

Умножив уравнение (3) на $t^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^{2(m+1)} u}{\partial x_i^{2(m+1)}}$ и проинтегрировав по x , получим

$$\sum_{i=1}^n \int_Q t^2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^{2(m+1)} u}{\partial x_i^{2(m+1)}} dx + \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{|a| < m} (-1)^{|a|} \int_Q t^2 D^a (A_a(x, D^l u)) \frac{\partial^{2(m+1)} u}{\partial x_i^{2(m+1)}} dx = 0.$$

Интегрируя последнее тождество по частям, приходим к следующему соотношению:

$$\sum_{i=1}^n \int_Q t^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^{m+1} u}{\partial x_i^{m+1}} \right) \frac{\partial^{m+1} u}{\partial x_i^{m+1}} dx + \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{|a| < m} \int_Q t^2 \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}} (A_a(x, D^l u)) \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}} (D^a u) dx = 0. \quad (12)$$

Теперь производя в (12) интегрирование по $t \in [0, T]$ и проведя несложные выкладки, получим

$$\sum_{i=1}^n \int_0^T \int_Q t^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^{m+1} u}{\partial x_i^{m+1}} \right) \frac{\partial^{m+1} u}{\partial x_i^{m+1}} dx dt + \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{|a| < m} \int_0^T \int_Q t^2 \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}} (A_a(x, D^l u)) \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}} (D^a u) dx dt = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_Q \frac{\partial}{\partial t} \left(t \frac{\partial^{m+1} u}{\partial x_i^{m+1}} \right)^2 dx dt - \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_Q t \left(\frac{\partial^{m+1} u}{\partial x_i^{m+1}} \right)^2 dx dt + \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{|a| < m} \int_0^T \int_Q t \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}} (A_a(x, D^l u)) \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}} (D^a u) dx dt = 0,$$

следовательно

$$\sum_{i=1}^n \int_Q \left(T \frac{\partial^{m+1} u}{\partial x_i^{m+1}} \right)^2 dx = 2 \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_Q t \left(\frac{\partial^{m+1} u}{\partial x_i^{m+1}} \right)^2 dx dt - \\ - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{|a| < m} \int_0^T \int_Q t^2 \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}} (A_a(x, D^l u)) \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}} (D^a u) dx dt.$$

Имеем

$$T^2 \|u(x, T)\|_{m+1, 2}^2 \leq 2T \|u(x, t)\|_{m+1, 2}^2 - \\ - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{|a| < m} \int_0^T \int_Q t^2 \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}} (A_a(x, D^l u)) \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}} (D^a u) dx dt. \quad (13)$$

так как

$$\alpha_0 \| \| u(x, t) \|_{m+1,2}^2 \leq C \| u_0(x) \| \quad (14)$$

([3], неравенство (31)), то из условия (11), неравенств (13), (14) заключаем, что

$$\| u(x, T) \|_{m+1,2} \leq \bar{C}, \text{ т. е. } \| S_t u_0 \|_{m+1,2} \leq C.$$

Теорема 1 доказана.

Из теорем Б и 1 следует

Теорема 1*. Пусть оператор L удовлетворяет условиям 1)–6), тогда полугруппа $\{S_t\}$, порожденная задачей (3)–(5), обладает аттрактором компактным в $\dot{W}_2^m(\Omega)$.

4°. В пространстве $\dot{W}_2^m(\Omega)$ рассмотрим следующий функционал:

$$\Phi(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} A_{\alpha}(x, D^I u) D^{\alpha} u dx, \quad (15)$$

где функции $A_{\alpha}(x, \xi)$ удовлетворяют условиям 1)–6).

Проверим непрерывность функционала Φ на $\mathfrak{M}$.

Пусть $u_1(\tau), u_2(x) \in \mathfrak{M} \subset \dot{W}_2^m(\Omega)$. Тогда

$$\Phi(u_1) - \Phi(u_2) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} [A_{\alpha}(x, D^I u_1) D^{\alpha} u_1 - A_{\alpha}(x, D^I u_2) D^{\alpha} u_2] dx,$$

отсюда

$$\begin{aligned} |\Phi(u_1) - \Phi(u_2)| &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |A_{\alpha}(x, D^I u_1) D^{\alpha} u_1 - A_{\alpha}(x, D^I u_2) D^{\alpha} u_2| dx = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |A_{\alpha}(x, D^I u_1) D^{\alpha} u_1 - A_{\alpha}(x, D^I u_2) D^{\alpha} u_1 + A_{\alpha}(x, D^I u_2) D^{\alpha} u_1 - \\ &\quad - A_{\alpha}(x, D^I u_2) D^{\alpha} u_2| dx \leq \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |A_{\alpha}(x, D^I u_1) - A_{\alpha}(x, D^I u_2)| D^{\alpha} u_1| dx + \\ &\quad + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |A_{\alpha}(x, D^I u_2)| |D^{\alpha} u_1 - D^{\alpha} u_2| dx = \\ &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_{\Omega} |A_{\alpha\beta}(x, D^I \bar{u})| |D^{\alpha} u_1| |D^{\beta} u_1 - D^{\beta} u_2| dx + \\ &\quad + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |A_{\alpha}(x, D^I (u_2))| |D^{\alpha} u_1 - D^{\alpha} u_2| dx < \\ &< \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \left(\int_{\Omega} |A_{\alpha\beta}(x, D^I \bar{u})|^2 |D^{\alpha} u_1|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |D^{\beta} u_1 - D^{\beta} u_2|^2 dx \right)^{1/2} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{|\alpha| < m} \int_{\Omega} \left(|A_{\alpha}(x, D^{\Gamma} u_2)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |D^{\Gamma} u_1 - D^{\Gamma} u_2|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (16)$$

где $u = \theta u_1 + (1 - \theta) u_2$, $0 \leq \theta \leq 1$.

Используя условие 5) при $p=2$, $\beta=1$ для оценки первого слагаемого, а условие (6)—для второго слагаемого последнего неравенства, получим

$$|A_{\alpha}(x, D^{\Gamma} \bar{u})| \leq K \left(1 + \sum_{|\gamma| < m} |D^{\Gamma} \bar{u}|^{p-1} \right) = K$$

и

$$|A_{\alpha}(x, D^{\Gamma} u_2)| \leq K_1 \left(1 + \sum_{|\gamma| < m} |D^{\Gamma} \bar{u}_2|^{p-1} \right) \leq K_1 \left(1 + \sum_{|\gamma| < m} |D^{\Gamma} u_2| \right).$$

Следовательно

$$\begin{aligned} |\Phi(u_1) - \Phi(u_2)| &\leq C_1 |u_1|_{m,2} |u_1 - u_2|_{m,2} + \\ &+ \sum_{|\alpha| < m} \left(\int_{\Omega} |A_{\alpha}(x, D^{\Gamma} u_2)|^2 dx \right)^{1/2} |u_1 - u_2| \leq [C_1 |u_1|_{m,2} + C_2 |u_2|_{m,2}] |u_1 - u_2|_{m,2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Поскольку $u_1, u_2 \in \mathfrak{M}$ то в силу теоремы 1*, они ограничены в $\mathcal{W}_2^m(\Omega)$. Отсюда и из оценки (17) вытекает что,

$$|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)| \leq C_3 |u_1 - u_2|_{m,2}.$$

Доказанное неравенство и означает непрерывность функционала Φ на $\mathfrak{M}$.

Предположим теперь, что для любых вещественных $\xi_{\alpha}, \eta_{\beta}$

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| < m} A_{\alpha\beta}(x, \xi_1) \xi_{\alpha} \eta_{\beta} \leq 0. \quad (18)$$

Легко видеть, что функционал $\Phi(u)$ дифференцируем в смысле Фреше, дифференциал $\Phi'(u)$ действует на V по формуле

$$\begin{aligned} \langle \Phi'(u), v \rangle &= \sum_{|\alpha|, |\beta| < m} \int_{\Omega} A_{\alpha\beta}(x, D^{\Gamma} u) D^{\alpha} u D^{\beta} v dx + \\ &+ \sum_{|\alpha| < m} \int_{\Omega} [A_{\alpha}(x, D^{\Gamma} u) D^{\alpha} v] dx. \end{aligned} \quad (19)$$

В самом деле

$$\begin{aligned} \Phi(u+v) - \Phi(u) &= \sum_{|\alpha| < m} \int_{\Omega} [A_{\alpha}(x, D^{\Gamma} u + D^{\Gamma} v) (D^{\alpha} u + D^{\alpha} v) - \\ &- A_{\alpha}(x, D^{\Gamma} u) D^{\alpha} u] dx = \\ &= \sum_{|\alpha| < m} \int_{\Omega} [A_{\alpha}(x, D^{\Gamma} u + D^{\Gamma} v) - A_{\alpha}(x, D^{\Gamma} u)] D^{\alpha} u dx + \\ &+ \sum_{|\alpha| < m} \int_{\Omega} A_{\alpha}(x, D^{\Gamma} u + D^{\Gamma} v) D^{\alpha} v dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Выделяя линейную часть в (20), получим (19).

Следовательно

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi(u(t, x)) &= \langle \Phi'(u(t, x)), u_t(x, t) \rangle = \\ &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_{\Omega} A_{\alpha\beta}(x, D^\gamma u) D^\alpha u D^\beta u_t dx + \\ &+ \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} A_\alpha(x, D^\gamma u) D^\alpha u_t dx = \\ &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_{\Omega} A_{\alpha\beta}(x, D^\gamma u) D^\alpha u D^\beta u_t dx + \\ &+ \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha (A_\alpha(x, D^\beta u) u_t) dx = \\ &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_{\Omega} A_{\alpha\beta}(x, D^\gamma u) D^\alpha u D^\beta u_t dx - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Из (18) следует, что $\partial_t \Phi(u(x, t)) \leq 0$.

Таким образом, доказали, что для любого $u \in \mathfrak{M}$ функция $\Phi(S_t u)$ убывает на t при $t \geq 0$.

Предположим теперь, что при $t = t_0$, $\Phi(u(x, t_0)) = \Phi(u_0)$, тогда

$$\begin{aligned} 0 = \Phi(u(x, t_0)) - \Phi(u_0) &= \int_0^{t_0} \partial_t (\Phi(u(x, t))) dt = \\ &= \int_0^{t_0} \left[\sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_{\Omega} A_{\alpha\beta}(x, D^\gamma u) D^\alpha u D^\beta u_t dx \right] dt - \int_0^{t_0} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt. \quad (21) \end{aligned}$$

Из (18) и (21) заключаем, что

$$\int_0^{t_0} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt = 0.$$

Следовательно $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, при $t \in [0, t_0]$, т. е. $L(u) = 0$, при $t \in [0, t_0]$.

Обозначим через $z = u(0, x) = u_0(x)$. Так как $L(u_0) = L(u(0, x))$ и $\frac{\partial u_0}{\partial t} = 0$, то $z = u_0(x)$ является решением задачи (3) — (5) и $S_t z \equiv z$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Функционал $\Phi(u)$ является функцией Ляпунова полугруппы $\{S_t\}$, порожденной задачей (3) — (5).

Գ. Ս. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Ռ. Լ. ՇԱԽԲԱԳՅԱՆ. Բարձր կարգի ոչ գծային պարաբոլական եավառարումներով ծնված կիսախմբերի կապուցովի ֆունկցիայի մասին (ամփոփում)

Հաղվածում ուսումնասիրվում է բարձր կարգի, ոչ գծային պարաբոլական հավասարումների համար հետևյալ եզրային խնդրով

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha(x, D^\gamma u)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (*)$$

$$D^\alpha u|_Z = 0, \quad |\alpha| \leq m-1, \quad \Sigma = (0, \infty) \times \partial\Omega$$

ծնված $\{S_t\}$ կիսախմբերի կապուցովի ֆունկցիայի գոյության հարցը:

Ապացուցվում է, որ եթե L օպերատորը բավարարում է 1(6) պայմաններին, ապա (*) խնդրով ծնված $\{S_t\}$ կիսախմբերն ունեն $\tilde{W}_2^m$ -ում կոմպակտ առարակտոր, որի վրա որոշված

$$\Phi(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} A_\alpha(x, D^\gamma u) D^\alpha u dx.$$

ֆունկցիոնալը հանդիսանում է $\{S_t\}$ կիսախմբի կապուցովի ֆունկցիա:

G. S. HAKOBIAN, R. L. SHAHBAGIAN. *On the Lyapunov function of the semi-groups, generated by nonlinear parabolic equations of high order (summary)*

For the semi-groups, generated by the boundary problem for nonlinear parabolic equations of high order, the existence of the Lyapunov function is studied. It is proved that, if the equation satisfies to the certain conditions, then corresponding semi-groups have compact attractor and there exists the Lyapunov function.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Бабин, М. И. Вишик, Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности, УМН. 38, вып. 4(232), 1983, 133—187
2. А. В. Бабин, М. И. Вишик. Аттракторы эволюционных уравнений, М., «Наука», 1989.
3. Г. С. Акопян, Р. А. Шахбагян. Построение аттракторов нелинейных параболических операторов высокого порядка. Изв. АН РА, сер. матем., 25, № 6, 1990, 549—559.

УДК 517.51

Б. А. ГОЛИНСКИЙ

ОБ ОДНОМ ПРЕДЕЛЬНОМ СООТНОШЕНИИ ДЛЯ МОДУЛЕЙ КРУГОВЫХ ПАРАМЕТРОВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Обозначим через

$$\Phi_{\sigma, n}(z) = x_{\sigma, n} z^n + \dots; x_{\sigma, n} > 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

многочлены, ортонормированные на единичной окружности относительно распределения $d\sigma(\theta)$, т. е.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{\sigma, n}(e^{i\theta}) \overline{\varphi_{\sigma, m}(e^{i\theta})} d\sigma(\theta) = \delta_{mn},$$

где $\sigma(\theta)$: неубывающая, ограниченная функция с бесчисленным множеством точек роста на $[0, 2\pi]$, нормированная условием

$$\sigma(0) = 0, \sigma(\theta - 0) = \sigma(\theta).$$

Под круговыми параметрами $\{a_{\sigma, n}\}_0^\infty$ понимают комплексные числа

$$a_{\sigma, n} = - \frac{\overline{\varphi_{\sigma, n+1}(0)}}{x_{\sigma, n+1}}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Известно, что $|a_{\sigma, n}| < 1, n = 0, 1, 2, \dots$. Действительно, функция $\lambda_n(z) = \Phi_{\sigma, n+1}(z)/\Phi_{\sigma, n}(z)$, где $\Phi_{\sigma, n}(z) = \varphi_{\sigma, n}(z)/x_{\sigma, n}$; $\Phi_{\sigma, n}(z) = z^n \overline{\Phi_{\sigma, n}(1/z)}$ регулярна в $|z| < 1$, так как все нули $\Phi_{\sigma, n}(z)$ лежат в $|z| < 1$. Поскольку $|\lambda_n(e^{i\theta})| = 1$, то

$$|\lambda_n(0)| = |\Phi_{\sigma, n+1}(0)| = |a_{\sigma, n}| < 1.$$

Основная теорема настоящей статьи состоит в следующем: если $d\sigma(\theta) \equiv 0$ при $\theta \in [0, \alpha] \cup [2\pi - \alpha, 2\pi]$ и

$$J_\alpha = \int_0^{2\pi-\alpha} \lambda_n(\theta) \ln \sigma'(\theta) d\theta > -\infty, \lambda_\alpha(\theta) = \sin \frac{\alpha}{2} / \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}},$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{\sigma, n}| = \sin \frac{\alpha}{2},$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{\sigma, n}}{x_{\sigma, n+1}} = \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right)^{-n}.$$

1. Пусть C_0 — аналитическая замкнутая жорданова кривая длиной l , ограничивающая в z плоскости S односвязную область $G, |d\zeta| =$

ds —элемент кривой C_0 . Обозначим через $z=h(w)$ конформное отображение внешности кривой C_0 на внешность единичного круга $\Gamma_0 w$ плоскости, нормированное условием $h(\infty)=\infty$, $\left(\frac{dz}{dw}\right)_{z=\infty}>0$. Имеем

$$z=h(w)=cw+c_0+c_1w^{-1}+\dots; z\in G, c>0, \quad (1)$$

$$w=H(z)=bz+b_0+b_1z^{-1}+\dots; b>0, c=b^{-1}. \quad (1')$$

Если $z\in\partial G$, то будем считать $z=\zeta$, $w=v$. В соответствии с теоремой Осгуда-Каратеодори функция $z=h(w)$ осуществляет взаимнооднозначное и непрерывное соответствие между единичной окружностью $|w|=1$ и границей области $G:\partial G$. Постоянная c в (1) называется трансфинитным диаметром кривой C_0 .

На $\Gamma_0: |w|=|v|$, $v=e^{i\psi}$, $\psi\in[0, 2\pi]$.

После конформного отображения будем иметь

$$dz(s)=d\tau(\psi), |d\tau|=ds, \quad (2)$$

где $\tau(\psi)$ —некоторая ограниченная, неубывающая на отрезке $[0, 2\pi]$ функция; почти всюду (п. в.) на C_0 имеем

$$\sigma'(s)ds=\sigma'(\psi)d\zeta=\tau'(\psi)d\psi=\tau'(\psi)|H'(\zeta)||d\zeta|=\tau'(\psi)|H'(\zeta)|ds, \quad (3)$$

откуда п. в. на $[0, 2\pi]$

$$\tau'(\psi)=\frac{\sigma'(s)}{H'(\zeta)}, \quad \zeta=h(v), v=e^{i\psi}. \quad (4)$$

2. Известно (см. 1), что условие

$$\int_0^{2\pi} \ln \tau'(\psi) d\psi > -\infty \quad (5)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы можно было построить аналитическую фракцию $D(w)$, регулярную и не равную нулю в области $|w|>1$ так, чтобы п. в. в $[0, 2\pi]$

$$\tau'(\psi)=\lim_{R\rightarrow 1+0} |D(Re^{i\psi})|^{-2}. \quad (6)$$

Эта функция дается формулой

$$D(w)=\exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{w+e^{i\psi}}{w-e^{i\psi}}\ln\tau'(\psi)d\psi\right\}, |w|>1, \quad (7)$$

причем

$$D(\infty)=\exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\ln\tau'(\psi)d\psi\right\}. \quad (8)$$

Положим

$$\Delta(z)=D[H(z)], z\in\mathbb{C}, \quad (9)$$

$\Delta(z)$ —аналитическая функция, регулярная и не равная нулю в области G , причем в силу (4) и (6) п. в. на C_0 имеем

$$\sigma'(s) = |H'(\zeta)| |\Delta(\zeta)|^{-2}, \quad (10)$$

где

$$\Delta(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} \Delta(z), \quad \zeta \in C_0. \quad (11)$$

По (4), (8) и (9) получим

$$\Delta^{-1}(\infty) = D^{-1}(\infty) = \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{C_0} \ln \frac{\sigma'(s)}{|H'(\zeta)|} |d\zeta| \right\}. \quad (12)$$

Условие (5) эквивалентно условию

$$\int_{C_0} \ln \frac{\sigma'(s)}{|H'(\zeta)|} |d\zeta| = \int_{C_0} \ln \sigma'(s) |H'(\zeta)| |d\zeta| - \int_0^{2\pi} \ln |h'(e^{i\psi})| d\psi > -\infty.$$

последний интеграл существует, ибо $h'(w) \in H_1$, следовательно условие

$$\int_{C_0} \ln \sigma'(\zeta) |H'(\zeta)| |d\zeta| > -\infty \quad (13)$$

эквивалентно условию (5), которое необходимо и достаточно для возможности построения $\Delta(z)$, обладающей указанным свойством.

3. Следуя Сегё (см. [2], с. 45), введем многочлены Фабера $f_n(z)$ как полиномиальную часть разложения

$$g_n(z) = [H(z)]^n = f_n(z) + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad f_n(z) = \frac{z^n}{c^n} + \dots \quad (14)$$

Функция $g_n(z)$ регулярна во всех конечных точках замкнутой внешности кривой C_0 и имеет полюс порядка n в $z = \infty$. Лорановское разложение функции $g_n(z)$ для точки $z = \infty$ начинается с члена $C^{-n} z^n$ и далее идет по убывающим степеням z .

Сегё доказал (см. [2], с. 46, 47), что при принятых условиях на счет кривой C_0 , существуют две постоянные M и r , $M > 0$, $0 < r < 1$ такие, что равномерно на C_0 имеет место неравенство

$$|f_n(\zeta) - f_n(\zeta)| < M r^n. \quad (15)$$

Рассмотрим многочлены

$$R_n(z) = C^n \sum_{k=0}^m a_k f_{n-k}, \quad 0 < m < n, \quad a_0 = 1.$$

Коэффициенты $\{a_k\}_1^m$ и m — совершенно произвольны.

Применяя (14) и (15) получим для $|w| \neq 1$.

$$\begin{aligned} R_n[h(w)] &= c^n \sum_{k=0}^m a_k g_{n-k}[h(w)] + O(c^n r^n) = \\ &= (cw)^n \left\{ 1 + \sum_{k=1}^m a_k w^{-k} \right\} + O(c^n r^n). \end{aligned} \quad (16)$$

4. Пусть $P_n(\zeta) = \zeta^n + \dots$; $n = 0, 1, 2, \dots$ — многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля (в метрике $L^2(0, 2\pi)$) из всех многочленов степени $\leq n$ со старшим коэффициентом, равным единице, т. е.

$$\begin{aligned} \mu_n &= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{C_0} |P_n(\zeta)|^2 d\sigma(s) \right\}^{1/2} < \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{C_0} |R_n(\zeta)|^2 d\sigma(s) \right\}^{1/2} = \\ &= c^n \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| 1 + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\omega^k} \right|^2 d\tau(\psi) \right\}^{1/2} + O(c^n r^n). \end{aligned} \quad (17)$$

Если C — дуга C_0 , то будем считать, что на $C_0 \setminus C$ $d\sigma(s) \equiv 0$, а C будем представлять как разрез плоскости S с правым и левым берегами.

Обозначим через A_f класс функций $f(\omega)$, регулярных и не равных нулю в замкнутой области $|\omega| > 1$ и нормированные условием $f(\infty) = 1$: $f(\omega) = 1 + \beta_1 \omega^{-1} + \beta_2 \omega^{-2} + \dots$. Обозначим

$$\tau^2 = \inf_{f \in A_f} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\omega)|^2 d\tau(\psi) \right\},$$

а также

$$\begin{aligned} \tau_n^2 &= \inf_{\{d_k^{(v)}\}_{k=1}^n} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| 1 + \sum_{k=1}^n d_k^{(v)} \omega^{-k} \right|^2 d\tau(\psi) \right\} = \\ &= \inf_{\{\bar{d}_k^{(v)}\}_{k=1}^n} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| 1 + \sum_{k=1}^n \bar{d}_k^{(v)} \omega^k \right|^2 d\tau(\psi) \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

причем

$$1 + \sum_{k=1}^n \bar{d}_k^{(v)} \omega^k \neq 0, \quad v = 1, 2, \dots, \text{ при } |\omega| \leq 1. \quad (19)$$

Так как функция $f(\omega)$ содержит, как частный случай, функцию $1 + \sum_{k=1}^n d_k^{(v)} \omega^{-k}$, то имеем

$$\tau < \tau_v \leq \tau_{v-1}, \quad v = 1, 2, \dots, \lim_{v \rightarrow \infty} \tau_v = \tau_0 \geq 0, \quad \tau \leq \tau_0. \quad (20)$$

Полагая в (17) $a_k = \bar{d}_k^{(v)}$, $m = v$, получим в силу (20)

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{C^n} \leq \tau \leq \tau_0. \quad (21)$$

Известно (см. 1, с. 14), что многочлен $\Phi_n^*(\omega)$, минимизирующий интеграл (18) и нормированный условием $\Phi_n^*(0) = 1$, не обращается в нуль в области $|\omega| \leq 1$, кроме того, по [3], с. 25, 26 и [4] имеем

$$\tau_0^2 = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \tau'(\psi) d\psi \right\}, \quad (22)$$

(причем, если интеграл не существует, то правую часть полагаем равной нулю).

Поэтому в силу (21), (4) и (22) можно записать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{C^n} \leq \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{C_0} \ln \frac{\sigma'(s)}{|H'(\zeta)|} |H'(\zeta)| |d\zeta| \right\}. \quad (23)$$

Существование интеграла в (23), как было показано выше, эквивалентно существованию интеграла

$$\int_{C_0} \ln \sigma'(s) |H'(\zeta)| |d\zeta| \quad \text{или} \quad \int_0^{2\pi} \ln \sigma'(s) d\psi.$$

Докажем теперь неравенство, обратное (23).

Так как

$$\begin{aligned} \mu_n^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{C_0} |P_n(\zeta)|^2 d\sigma(s) > \frac{1}{2\pi} \int_{C_0} |P_n(\zeta)|^2 \sigma'(s) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P_n[h(e^{i\psi})]|^2 \tau'(\psi) d\psi, \end{aligned}$$

то, применяя (6), получим

$$\mu_n^2 \geq \lim_{R \rightarrow 1+0} \left\{ \frac{R^{n-1}}{2\pi} \int_{|w|=R} \left| \frac{P_n[h(w)]}{w^n D(w)} \right|^2 |dw| \right\}, \quad w = Re^{i\psi}. \quad (24)$$

Так как функция под знаком модуля в правой части (24) регулярна в области $|w| > 1$ и имеет при $w = \infty$ значение $C^n/\Delta(\infty)$, то из (24) следует, что

$$\frac{\mu_n}{C^n} \geq \Delta^{-1}(\infty).$$

В силу (12)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{C^n} \geq \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{C_0} \ln \frac{\sigma'(s)}{|H'(\zeta)|} |H'(\zeta)| |d\zeta| \right\}. \quad (25)$$

Сопоставляя (23) и (25), имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{C^n} = \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{C_0} \ln \frac{\sigma'(s)}{|H'(\zeta)|} |H'(\zeta)| |d\zeta| \right\} = \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln \sigma'(s) d\psi \right\}.$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. Пусть

$$\mu_n = \min_{\{P_n\}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{C_0} |P_n(\zeta)|^2 d\sigma(s) \right\}^{1/2},$$

где $\{P_n(\zeta)\}$ — совокупность многочленов n -ой степени со старшим коэффициентом, равным единице, $ds = |d\zeta|$ — элемент дуги аналитической замкнутой жордановой кривой C_0 , ограничивающей односвязную область, $\sigma(s)$ — функция распределения, $\zeta = h(w)$ ($w = e^{i\psi}$) — отображение кривой C_0 на единичную окружность $\Gamma_0 = |e^{i\psi}|_0^{2\pi}$, c — трансфинитный диаметр C_0 . Тогда можно записать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{C^n} = \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_0} \ln \sigma'(s) d\psi \right\}, \quad (26)$$

если интеграл в правой части (26) существует.

5. Частные случаи.

1) $C_0 = \Gamma_0$. Трансфинитный диаметр единичной окружности равен единице, а $\mu_n = \kappa_{\sigma, n}^{-1}$ (см. [3], с. 26, 14). Если

$$\int_0^{2\pi} \ln \sigma'(\psi) d\psi > -\infty,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{\sigma, n} = \exp \left\{ -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln \sigma'(\psi) d\psi \right\}. \quad (27)$$

Предельное соотношение (27) было впервые доказано С. Верблюнским (см. [4]) и независимо Я. Л. Геронимусом (см. [3], с. 19, 25), оно было впоследствии передоказано в [2], с. 62—67 с применением одной теоремы о монотонных функциях с равной нулю производной (см. [2], с. 16—18). В [5] (с. 118—122) доказательство (27) основано на идее Сеге из [2] и одной теоремы функционального анализа.

2) $C_0 = \Gamma_a = [e^{ia}, e^{i(2\pi-a)}]$ — разрез плоскости C вдоль дуги Γ_a . Пусть $B_a = C \setminus \Gamma_a$. Очевидно, $ds = d\theta$, $\mu_n = \kappa_{\sigma, n}^{-1}$. Этот случай можно толковать так, что $d\sigma(\theta) \equiv 0$ для $\theta \in [0, 2\pi] \setminus [a, 2\pi - a]$. Конформное отображение области B_a на внешность единичного круга $|w| > 1$ осуществляется функцией

$$z = h(w) = w \frac{cw - 1}{w - c}, \quad w = H(z) = \frac{z + 1 + \Phi(z)}{2c},$$

c — трансфинитный диаметр, Γ_a , причем выбрана та ветвь двузначной функции $\Phi(z) = \sqrt{(z - e^{ia})(z - e^{-ia})}$, для которой $\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi(z)/z = 1$. Полагая $z = e^{i\theta}$, $w = e^{i\psi}$, имеем на дуговом разрезе Γ_a :

$$e^{i\psi} = e^{i\frac{\theta}{2}} \frac{\cos \frac{\theta}{2} \pm i \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = e^{i\left(\frac{\theta}{2} \pm \lambda\right)}, \quad (27')$$

где

$$\cos \lambda = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \leq \theta < 2\pi - \alpha, \quad 0 < \lambda \leq \pi.$$

На рис. 1 (а) изображена плоскость z , разрезанная вдоль $\Gamma_\alpha = M_0 D N_0$ ($\alpha \leq \theta \leq 2\pi - \alpha$), $\alpha = \angle BOM_0$. Двигаясь в направлении $M_0 D N_0$, обозначим через P_1 и P_2 две совпадающие точки, лежащие соответственно на правом и левом берегах разреза Γ_α . На рис. 1 (б) изображена плоскость w , причем $O'C' = C'^{-1}$. Проведем из точки C'

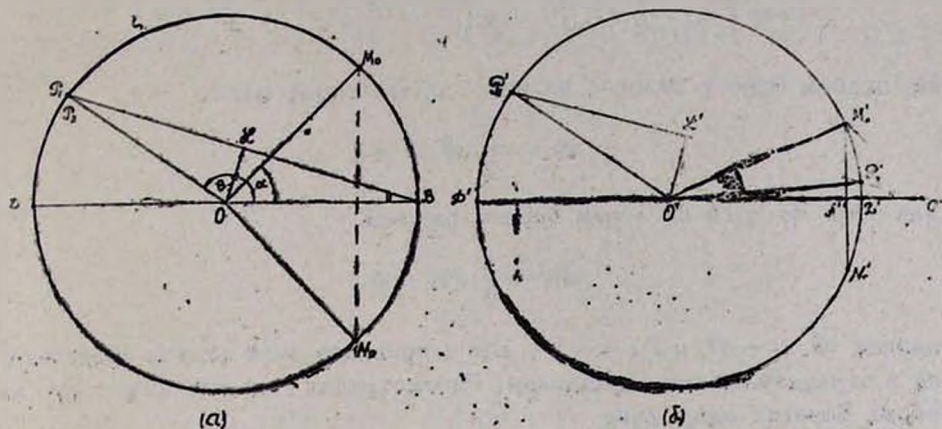


Рис. 1

касательную к окружности, получим точку M_0 , опустим перпендикуляр $M_0 A'$. Так как $O'M' = \sqrt{O'A'} \cdot \sqrt{O'C'} = 1$, то $O'A' = C = \cos \frac{\alpha}{2}$

и поэтому $\angle M_0 O' A' = \frac{\alpha}{2}$. Из точки C' проведем прямую $C' P_2 P_1 //$

BP_1 . Пусть $O'Z' \perp C' P_1$. Так как $O'Z' = \frac{1}{C} \cos \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\theta}{2} / \cos \frac{\alpha}{2}$,

то $\cos \angle Z' O' P_2 = \cos \lambda$, $\angle Z' O' P_2 = \angle Z' O' P_1 = \lambda$. Очевидно также, что $O'Z' // OZ$. При $\theta = \alpha \cos = 1$, $\lambda = 0$ и $M_0 \rightarrow M_0$. При $\theta = -\alpha$, $\lambda = \pi$ и

$N_0 \rightarrow w_0$, $w(P_1) = e^{i(\lambda + \frac{\theta}{2})}$, $w(P_2) = e^{i(\frac{\theta}{2} - \lambda)}$. Если точка P_1 движется по правому берегу разреза, пробегая дугу $M_0 D N_0$, то соответствующая ей точка P_1 пробегает дугу $M_0 D' N_0$, если после этого точка P_2 будет пробегать дугу $N_0 D M_0$, двигаясь по левому берегу разреза, то при этом точка P_2 будет пробегать дугу $N_0 B M_0$. Таким образом, когда точка P_1 опишет, двигаясь в положительном направлении, всю окружность $|z|=1$, соответствующая точка P дважды опишет разрез Γ_α , двигаясь сперва в положительном направлении по правому берегу, а затем в отрицательном направлении по левому берегу. Так как на окружности $|z|=1$ имеем в силу (3) $w = e^{i\psi} = \exp \left\{ i \left(\frac{\theta}{2} \pm \lambda \right) \right\}$, то найдем на правом берегу разреза

$$\psi_1 = \frac{\theta_1}{2} + \lambda_1, d\psi_1 = \frac{1}{2} d\theta_1 + d\lambda_1,$$

на левом берегу разреза

$$\psi_2 = \frac{\theta_2}{2} - \lambda_2, \quad d\psi_2 = \frac{1}{2} d\theta_2 - d\lambda_2,$$

причем $\theta_1 = \theta_2$ и в силу (27) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Рассмотрим дугу

$$\left\{ \exp \left| \theta_1 - \frac{1}{2} d\theta_1 \right|, \exp \left| \theta_1 + \frac{1}{2} d\theta_1 \right| \right\}, \quad d\theta_1 > 0.$$

На правом берегу разреза на ней сосредоточена масса

$$d\psi_1 = \frac{1}{2} d\theta_1 + d\lambda_1,$$

для этой же дуги на левом берегу разреза

$$d\psi_2 = \frac{1}{2} d\theta_2 + d\lambda_2,$$

причем $d\theta_2 = -d\theta_1$ и $d\lambda_2 = -d\lambda_1$, ибо теперь эта дуга должна пробегаться в отрицательном направлении. Рассматривая вместо двух дуг на обоих берегах одну дугу

$$\left\{ \exp \left| \theta_1 - \frac{1}{2} d\theta_1 \right|, \exp \left| \theta_1 + \frac{1}{2} d\theta_1 \right| \right\}, \quad d\theta - d\theta_1 = -d\theta_2 > 0,$$

пробегаемую лишь один раз и притом в положительном направлении, следует, что на ней надо сосредоточить массу

$$d\psi = d\psi_1 + d\psi_2 = \frac{1}{2} (d\theta_1 + d\theta_2) + d\lambda_1 - d\lambda_2 = 2 d\lambda, \quad (28)$$

$$d\lambda = d\lambda_1 = d \left\{ \arccos \left(\frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \right\} = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}}. \quad (29)$$

Поскольку $\mu_n = x_{\alpha, n}^{-1}$, а трансфинитный диаметр с дуги Γ_α равен $\cos \frac{\alpha}{2}$, то из (28), (29) и (26) вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\cos \frac{\alpha}{2} \right)^n}{x_{\alpha, n}} = \exp \left\{ -\frac{1}{4\pi} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln \sigma'(\theta) \omega_\alpha(\theta) d\theta \right\}, \quad (30)$$

где

$$\omega_\alpha(\theta) = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} = \lambda_\alpha(\theta).$$

Если применить (30) для $(n-1)$, разделить одно равенство на другое и воспользоваться известным соотношением (см. [3], с. 160).

$$x_{\sigma, n-1}/x_{\sigma, n} = \sqrt{1 - |a_{\sigma, n}|^2},$$

то получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{\sigma, n}| = \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 2. Если $d\sigma(\theta) \equiv 0$ для $\theta \in [0, \alpha] \cup [2\pi - \alpha]$, $\alpha > 0$ и

$$\int_{\pi}^{2\pi-\alpha} \ln \sigma'(\theta) \lambda_{\alpha}(\theta) d\theta > -\infty,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{\sigma, n}| = \sin \frac{\alpha}{2}$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{\sigma, n}}{x_{\sigma, n+m}} = \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right)^{-m}. \quad (31)$$

Следствие Пусть $\alpha = \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\sigma'(\theta) \geq m_0 > 0$ п. в. в $[\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon]$, $d\sigma(\theta) \equiv 0$: $\theta \in [0, \pi - \varepsilon] \cup [\pi + \varepsilon, 2\pi]$.

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{\sigma, n}| = \cos \frac{\varepsilon}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{\sigma, n}}{x_{\sigma, n+m}} = \left(\sin \frac{\varepsilon}{2} \right)^{-m} = a^{-m}. \quad (32)$$

Действительно, обозначим $\cos \frac{\sigma}{2} - \sin \frac{\varepsilon}{2} = a (< 1)$.

Очевидно

$$\begin{aligned} J_{\alpha} &= \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln \sigma'(\theta) \lambda_{\alpha}(\theta) d\theta > \ln m_0 \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \lambda_{\alpha}(\theta) d\theta = \\ &= -2 \ln m_0 \int_{\alpha}^b \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2 \ln m_0 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{b}{a} \right) > -\infty, \\ b &= 2(\pi - \arccos a). \end{aligned}$$

В силу теоремы 2 справедливо (32).

В связи со сказанным, сформулируем задачу, поставленную Я. Л. Геронимусом (см. [6], с. 88): Выяснить, каким условиям должна удовлетворять функция $\sigma(\theta)$, чтобы выполнялось условие $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_{\sigma, n}| = b_0 < 1$;

не достаточно ли для этого выполнения условия:

$$(\sigma) : (\theta_2) - \sigma(\theta_1) \geq m_0(\theta_2 - \theta_1), \quad \alpha < \theta_1 < \theta_2 \leq \beta?$$

Բ. Լ. ԳՈԼԻՆՍԿԻ. Օրթոգոնալ բազմանդամների առաջադրված գործակիցների բացարձակ արժեքներին վերաբերվող սահմանային անհավասարության մասին (ամփոփում)։

Դիցուք

$$\varphi_{\sigma, n}(z) = x_{\sigma, n} z^n + \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x_{\sigma, n} > 0.$$

միավոր շրջանագծի վրա $d\sigma(\theta)$ լատիով օրթոգոնալ բազմանդամների համակարգ է, այսինքն՝

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{\sigma, n}(e^{i\theta}) \overline{\varphi_{\sigma, m}(e^{i\theta})} d\sigma(\theta) = \delta_{nm}$$

և $a_{\sigma, n}$ — երբ այդ համակարգին համապատասխանող արտացոլման գործակիցներն են՝

$$a_{\sigma, n} = - \frac{\overline{\varphi_{\sigma, n+1}}}{x_{\sigma, n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

և թե $d\sigma(\theta) \equiv 0$, ըրե՛

$$J_\alpha = \int_\alpha^{2\pi-\alpha} \lambda_\alpha(\theta) \ln \sigma'(\theta) d\theta > -\infty, \quad \lambda_\alpha(\theta) = \sin \frac{\theta}{2} / \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

ապա

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{\sigma, n}| = \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{\sigma, n}}{x_{\sigma, n+m}} = \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right)^{-m}.$$

B. L. GOLINSKY *On a limit relation concerning the modulus of the reflection coefficients of the orthogonal polynomials (summary)*

Let

$$\varphi_{\sigma, n}(z) = x_{\sigma, n} z^n + \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x_{\sigma, n} > 0,$$

be the system of orthonormal polynomials on the unit circle, associated with measure $d\sigma(\theta)$, i. e.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{\sigma, n}(e^{i\theta}) \overline{\varphi_{\sigma, m}(e^{i\theta})} d\sigma(\theta) = \delta_{nm}$$

and $a_{\sigma, n}$ — reflection coefficients, corresponding to this systems:

$$a_{\sigma, n} = - \frac{\overline{\varphi_{\sigma, n+1}(0)}}{x_{\sigma, n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

If $d\sigma(\theta) = 0$ when $\theta \in [0, \alpha] \cup [2\pi - \alpha, 2\pi]$ and

$$J_\alpha = \int_\alpha^{2\pi-\alpha} \lambda_\alpha(\theta) \ln \sigma'(\theta) d\theta > -\infty, \quad \lambda_\alpha(\theta) = \sin \frac{\theta}{2} / \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{\sigma, n}| = \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{\sigma, n}}{x_{\sigma, n+m}} = \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right)^{-m}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Szegő. A problem concerning orthogonal polynomials. Trans. Amer. Math. Soc. t. 37, № 1, 1935, 196—206.
2. У. Гренандер и Г. Сеге. Теплицевы формы и их приложения.—М.: ИЛ, 1961.

3. Я. Л. Геронимус. Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке.—М.: Физматгиз, 1958.
4. S. Verblunsky. On positive harmonic functions. II, Proc. Lond. Math. Soc., t. 4, 1925, 290—320.
5. Е. М. Нижишин, В. Н. Сорокин. Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, 1988.
6. Я. Л. Геронимус. Об одном предположении В. А. Стеклова. Зал. механо-математ. ф-та ХГУ и Харьковского математ. об-ва. т. XXIX, с. 4, 1963, с. 79—88.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517. 5

С. А. АЙУНЦ

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ ДЛЯ СВЕРТОЧНЫХ
СОВЕРШЕННЫХ К-СПЛАЙНОВ И ОПТИМАЛЬНАЯ
К-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Пусть $\mathcal{W}$ — некоторый класс функций и для $x(\cdot) \in \mathcal{W}$ в фиксированных точках $t_1 < \dots < t_n$ задана информация $Ix = \{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$. Поставим задачу: наилучшим образом восстановить значение $x(\cdot)$ в фиксированной точке τ равномерно по всем $x(\cdot) \in \mathcal{W}$ или более точно, требуется вычислить величину

$$R(\tau) = \inf_{\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}} \sup_{x(\cdot) \in \mathcal{W}} |x(\tau) - \varphi(Ix)|.$$

где инфимум берется по всем n -мерным функциям $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Функции называются методами восстановления. $R(\tau)$ — оптимальная погрешность.

Если инфимум по $\varphi(\cdot)$ достигается на $\hat{\varphi}(\cdot)$, то $\hat{\varphi}(\cdot)$ называется оптимальным методом. Сформулированная задача называется задачей оптимальной интерполяции или оптимального восстановления. Впервые она рассматривалась С. А. Смоляком [1]. Результат данной статьи в основном мотивирован важными работами В. М. Тихомирова [2] и С. Миччелли, Т. Ривлин, С. Виноград [3], в которых эта задача решена в классе гладких функций. Здесь задача оптимальной интерполяции решается в классе функций

$$\mathcal{W}_\infty^K(\mathbb{R}) = \{x(\cdot) | x(t) = (K * u)(t) (t \in \mathbb{R}, \|u(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq 1)\},$$

где $K(\cdot)$ непрерывная и интегрируемая функция на вещественной оси такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(t) dt = 1 \text{ и } F(t, \xi) := K(t - \xi) \text{ строго вполне положительна,} \quad (1)$$

а $(K * u)(\cdot)$, как обычно, означает свертку функций $K(\cdot)$ и $u(\cdot)$. Напомним, что $F(t, \xi)$ называется строго вполне положительной, если

$$F \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_n \\ \xi_1, \dots, \xi_n \end{pmatrix} := \det (F(t_i, \xi_j))_{i,j=1}^n > 0,$$

для любых $t_1 < \dots < t_n, \xi_1 < \dots < \xi_n$ из $\mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ (см. [4]).

Важным результатом данной работы является также основная теорема алгебры для сверточных совершенных К-сплайнов. Для полино-

миальных совершенных сплайнов эту теорему доказал С. Карлин [5]. Перейдем к формулировке основных результатов.

Пусть $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t K(\xi) d\xi$ и $-\infty < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < +\infty$ фиксированных точек из $\mathbb{R}$.

Определение 1. Функция $x(\cdot)$ называется сверточным совершенным K -сплайном на $\mathbb{R}$ с узлами в точках $\{\theta_i\}_1^n$, если имеет место представление

$$\pm x(t) = (K * u_0)(t) = 1 + 2 \sum_{i=1}^n (-1)^i \Phi(t - \theta_i),$$

где $u_0(t) = (-1)^i$ при $\theta_{i-1} \leq t < \theta_i$, $1 \leq i \leq n+1$, $\theta_0 = -\infty$, $\theta_{n+1} = +\infty$.

Теорема 1 (о существовании чебышевских сверточных совершенных K -сплайнов). Если $n \geq 0$ — целое число, то существует единственный с точностью до знака сверточный совершенный K -сплайн. $X_n^K(\cdot) = (K * u_n)(\cdot)$, с n узлами, имеющий на отрезке $I = [0, 1]$ n -альтернанс.

Доказательство см. [6]. Напомним, что функция $x(\cdot)$ имеет на отрезке I n -альтернанс ($Alt(x(\cdot), I) = n$), если существуют точки $0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_{n+1} \leq 1$, в которых $|x(\tau_i)| = \|x(\cdot)\|_{C(I)}$ и при этом $x(\tau_i)x(\tau_{i+1}) < 0$ и нет систем из большего, чем $n+1$ элементов, обладающих описанным свойством.

Введем следующие обозначения: $\hat{t}_i$ и $\hat{\theta}_i$, $1 \leq i \leq n$ — соответственно нули и узлы $X_n^K(\cdot)$, $S(x)(\cdot)$, T и $Z(x(\cdot), T)$ — соответственно число перемен знака и число нулей функции $x(\cdot)$ на T . Для функции $x(\cdot) = (K * u)(\cdot)$, где $K(\cdot)$ удовлетворяет условию (1), имеет место (см. [4])

$$Z(x(\cdot), \mathbb{R}) \leq S(u(\cdot), \mathbb{R}). \quad (2)$$

Теорема 2 (основная теорема алгебры для сверточных совершенных K -сплайнов). Для любых n точек $t_1 < \dots < t_n$ существует единственный сверточный K -сплайн — $x(\cdot) = (K * u_0)(\cdot)$ с узлами в точках θ_i такой, что

$$x_0(t_i) = (K * u_0)(t_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (3)$$

Теорему докажем, используя следующую простую лемму (см., напр., [7]).

Лемма. Пусть $A_0 \subset A \subset \mathbb{R}^n$. Если A_0 непусто, открыто и замкнуто в A , а A связано, то $A_0 = A$.

Доказательство теоремы. Введем обозначения

$$A_0 = \{t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_1 < \dots < t_n\},$$

$$A_0 = \{t \in A \mid \exists \theta \in A : x(t_i) = (K * u_0)(t_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq n\}.$$

Множество A_0 непусто, так как по теореме 1 $\hat{t} = (\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_n) \in A_0$, где $\hat{t}_i$ — нули функции $X_n^K(\cdot) = (K * u_n)(\cdot)$. Покажем, что A_0 открыто.

в A . Пусть $t^{(0)} \in A_0$. Обозначим через $f_i(\theta, t_i) = 1 + 2 \sum_{j=1}^n (-1)^j \Phi(t_i - \theta_j)$ и рассмотрим уравнения $f_i(\theta, t_i) = 0$, $1 \leq i \leq n$. Поскольку $t^{(0)} \in A_0$, то по определению существует $\theta^{(0)} \in A$ такой, что $f_i(\theta^{(0)}, t_i^{(0)}) = 0$. Имеем также, что функции $f_i(\theta, t_i)$ непрерывно дифференцируемы и

$$\frac{\partial f_i(\theta^{(0)}, t_i^{(0)})}{\partial t_i} = 2 \sum_{j=1}^n (-1)^j K(t_i^{(0)} - \theta_j^{(0)}) \neq 0.$$

По теореме о неявной функции существуют функции $t_i = t_i(\theta)$, отображающие окрестности $u_{\theta_i}(\theta^{(0)})$ на интервалы $\Delta_i = (t_i^{(0)} - \varepsilon_i, t_i^{(0)} + \varepsilon_i)$ ($\delta_i > 0$, $\varepsilon_i > 0$) такие, что $f_i(\theta, t_i(\theta)) = 0$ для $\theta \in u_{\theta_i}(\theta^{(0)})$. Так как интервалы Δ_i можно выбрать непересекающимися, то обозначим через $\delta = \min_{1 \leq i \leq n} \delta_i$, $\varepsilon = \min_{0 < t < \pi} \varepsilon_i$, получим, что $u_{\theta_i}(t^{(0)}) \subset A_0$. Значит A_0 открыто в A . Замкнутость A_0 можно доказать с помощью несложных рассуждений. Следовательно по лемме $A_0 = A$, этим и доказано существование сплайна $x(\cdot) = (K * u_0)(\cdot)$, удовлетворяющего условию (3). Единственность следует из неравенства (2). Теорема доказана.

Прежде чем перейти к теореме об оптимальной K -интерполяции, т. е. оптимальной интерполяции в классе $W_{\infty}^K(R)$, введем некоторые обозначения. Для каждого $u(\cdot) \in L_{\infty}(R)$, $\|u(\cdot)\|_{L_{\infty}(R)} \leq 1$ обозначим через $S_0 u(t) = \sum_{i=1}^n a_i K(t - \theta_i)$, где θ_i узлы сплайна $x_0(\cdot) = K * u_0(\cdot)$, удовлетворяющего условию (3), а a выбраны так, чтобы $S_0 u(t_i) = (K * u)(t_i)$. Если для краткости обозначить

$$K * \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_n \\ \theta_1, \dots, \theta_n \end{pmatrix} := \det (K(t_i - \theta_j))_{i,j=1}^n,$$

то $S_0 u(\cdot)$ имеет следующий вид:

$$S_0 u(\cdot) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\begin{vmatrix} k(t_1 - \theta_1) \dots k(t_1 - \theta_n) & k(t_1 - \xi) \\ k(t_n - \theta_1) \dots k(t_n - \theta_n) & k(t_n - \xi) \\ k(t - \theta_1) \dots k(t - \theta_n) & 0 \end{vmatrix}}{K * \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_n \\ \theta_1, \dots, \theta_n \end{pmatrix}} u(\xi) d\xi. \quad (4)$$

Теорема 3. Для погрешности $R(\tau)$ оптимального восстановления $x(\cdot)$ из класса $W_{\infty}^K(R)$ в фиксированной точке τ по информации $Ix = [x(t_1), \dots, x(t_n)]$ справедлива формула

$$R(\tau) = |x_0(\tau)|,$$

где $x_0(\cdot) = (K * u_0)(\cdot)$ — сверточный совершенный K -сплайн, удовлетворяющий условию (3). Оптимальным методом восстановления является интерполяция обобщенными полиномами (4): $\varphi(Ix) = S_0 u(\cdot)$.

Доказательство. Оценка снизу $-R(\tau) \geq |x_0(\tau)|$, следует из соотношения двойственности (см. в [7], лемма Смоляка)

$$R(\tau) = \sup_{\{x(\cdot) \in W | x(t_i) = 0, 1 \leq i \leq n\}} |x(\tau)|.$$

Для доказательства оценки сверху достаточно доказать, что

$$\sup_{\|u(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} < 1} |(K \cdot u)(\tau) - S_0 u(\tau)| = |(K \cdot u_0)(\tau)|. \quad (5)$$

Используя соотношение (4), получим

$$(K \cdot u)(\tau) - S_0 u(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(\tau, \xi) u(\xi) d\xi,$$

где

$$L(\tau, \xi) = K \cdot \left(\begin{matrix} t_1, \dots, t_n, \tau \\ \theta_1, \dots, \theta_n, \xi \end{matrix} \right) / K \cdot \left(\begin{matrix} t_1, \dots, t_n \\ \theta_1, \dots, \theta_n \end{matrix} \right).$$

Нетрудно убедиться также, что $L(t, \xi)(-1)^{i+j} \geq 0$ при $t \in (t_i, t_{i+1})$, $\xi \in (\theta_j, \theta_{j+1})$ ($0 \leq i < n$, $0 < j \leq n$, $\theta_0 = t_0 = -\infty$, $\theta_{n+1} = t_{n+1} = +\infty$). Таким образом

$$\begin{aligned} \sup_{\|u(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} < 1} |(K \cdot u)(\tau) - S_0 u(\tau)| &= \sup_{\|u(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} < 1} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} L(\tau, \xi) u(\xi) d\xi \right| \leq \\ &< \int_{-\infty}^{+\infty} |L(\tau, \xi)| d\xi, \end{aligned}$$

причем равенство достигается при $u(\cdot) = u_0(\cdot)$. Далее, так как $(K \cdot u_0)(t_i) = 0$, $1 \leq i \leq n$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(\tau, \xi) u_0(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau - \xi) u_0(\xi) d\xi.$$

Отсюда следует требуемое равенство. Следовательно $R(\tau) = |x_0(\tau)|$. Теорема доказана.

Как естественное продолжение задачи оптимальной K -интерполяции возникает следующая экстремальная задача

$$\max_{\tau \in I} |R(\tau)| \rightarrow \inf; 0 < t_1 < \dots < t_n \leq 1, \quad (6)$$

где минимум ищется по всевозможным узлам интерполяции $t_i \in I$.

Следствие. Значение $\hat{R}$ задачи (6) достигается на единственной системе точек $\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_n$, где $\hat{t}_i$ — нули чебышевского сверточного совершенного K -сплайна — X_n^{*K} , причем $\hat{R} = \|X_n^{*K}(\cdot)\|_{C(I)}$

Доказательство этого факта простое следствие теоремы 2 и свойств функции $X_n^{*K}(\cdot)$.

Из следствия и из соотношения двойственности следует равенство

$$\inf_{0 < t_1 < \dots < t_n < 1} \sup_{\{x(\cdot) \in W_-^{*K}(I) \mid x(t_l) = 0, 1 \leq l \leq n\}} \|x(\cdot)\|_{C(I)} = \|X_n^{*K}(\cdot)\|_{C(I)},$$

где $W_-^{*K}(I)$ — класс функций являющихся ограничениями на отрезке $I = [0, 1]$ функций $x(\cdot)$ из класса $W_-^{*K}(R)$.

В задаче оптимальной интерполяции вместо информации $I_x = \{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$ можно рассмотреть более общую — $\{l_1(x), \dots, l_n(x)\}$, где l_i — линейные непрерывные функционалы. Это побуждает ввести следующее определение.

Определение 2. Величина

$$\begin{aligned} d^n(W, C(I)) &= \inf_{\{t_1, \dots, t_n\}} \sup_{\tau \in I} R(\tau) = \\ &= \inf_{\{t_1, \dots, t_n\}} \sup_{\{x(\cdot) \in W \mid l_i x(\cdot) = 0, 1 \leq i \leq n\}} \|x(\cdot)\|_{C(I)}. \end{aligned}$$

лов, называется n -поперечником по Гельфанду. Если инфимум достигается на некотором наборе $\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_n$, то назовем его оптимальным.

Теорема 4. $d^n(W_-^{*K}(I), C(I)) = \|X_n^{*K}(\cdot)\|_{C(I)}$, причем оптимальной будет система функционалов $\hat{l}_i(x(\cdot)) = x(\hat{t}_i)$, где $\hat{t}_i$ — нули $X_n^{*K}(\cdot)$.

Доказательство состоит из двух частей: оценка d^n сверху и снизу. Оценка сверху следует из (7):

$$d^n(W_-^{*K}(I), C(I)) \leq \sup_{\{x(\cdot) \in W_-^{*K}(I) \mid x(\hat{t}_l) = 0, 1 \leq l \leq n\}} \|x(\cdot)\|_{C(I)} = \|X_n^{*K}(\cdot)\|_{C(I)}.$$

Для доказательства оценки снизу рассматривается $n+1$ -мерное пространство

$$L_{n+1}^\Phi = \left\{ y(\cdot) \mid y(t) = y_0 + \sum_{i=1}^n y_i \Phi(t - \hat{\theta}_i), y_i \in R \right\}$$

сверточных совершенных K -сплайнов у которых узлы совпадают с узлами $X_n^{*K}(\cdot)$. Далее доказывается, что $\hat{\gamma} B_{n+1} \subset W_-^{*K}(I)$, где $\hat{\gamma} = \|X_n^{*K}(\cdot)\|_{C(I)}$, B_{n+1} — единичный шар пространства L_{n+1}^Φ . Отсюда, используя определение d^n и теорему о поперечнике шара (см., напр. [4]), имеем

$$d^n(W_-^{*K}(I), C(I)) \geq d^n(\hat{\gamma} B_{n+1}, C(I)) = \hat{\gamma} d^n(B_{n+1}, C(I)) = \hat{\gamma}.$$

Ереванский государственный
университет

Поступила 25. IV. 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Смоляк. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Автореферат канд. дис., М., 1966, 12 с.
2. В. М. Тихомиров. Наилучшие методы приближения и интерполирования гладких функций в пространстве $C([-1, 1])$. Мат. сб., 1969, 80, № 2, 272—304.

3. C. A. *Micchelli*, T. J. *Rivlin*, S. *Winograd*. The optimal recovery of smooth functions, *Numer. Math.*, v. 26, 1976. 191—200.
4. A. *Pinkus*. n -widths in Approximation theory, Berlin, Springer, 1985.
5. S. *Karlın*. Interpolation properties of generalized perfect splines and the solution of certain extremal problems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 206, 1975, 25—56.
6. С. А. Айуц. Чебышевские и золотаревские сверточные совершенные K -сплайны и оптимальная K -экстраполяция, Ереван, ЕГУ. 1989, 23 с., Деп. в АрмНИИТИ, 23.05.89., № 24—Ар. 89.
7. М. Н. Малоземов, А. Б. Певный. Полиномиальные сплайны, Учеб. пособие, Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1986, 120 с.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.64

Г. В. АГЕКЯН

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ
ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА-ХОПФА

Пусть задано интегральное уравнение Винера-Хопфа

$$y(x) = \int_0^x K(x-t)y(t)dt + f(x), \quad 1 \leq x < \infty \quad (1)$$

с гладким ядром $K(x) \in L_1(0, \infty)$ и гладкой функцией $|f| \leq \text{const}$.

Очевидно, что для численного решения данного уравнения необходимо, на каком-то этапе решения, перейти приближенно к конечно-мерному случаю, например, от бесконечного интервала интегрирования к конечному (к усеченному уравнению).

Если такая замена сделана на начальном этапе, то задача сводится к численному решению уравнения Фредгольма II рода с разностным ядром на конечном отрезке

$$\tilde{y}(x) = \int_0^N K(x-t)\tilde{y}(t)dt + f(x), \quad 0 \leq x \leq N < +\infty. \quad (2)$$

В предположении однозначной разрешимости уравнения (1), т. е. при $1 - \hat{K}(\xi) \neq 0$, $\xi \in R^1$, ($\hat{K}$ — преобразования Фурье ядра K) при достаточно большом N и уравнения (2) однозначно разрешимо (см. [1]).

Численное решение уравнение (2) можно осуществить разными способами. В работе реализован следующий способ решения уравнения (2). Путем дискретизации уравнение (2) приближенно приведено к алгебраическому уравнению с блочно-теплицевой матрицей, а для решения последнего применен метод блочно-ортонормального разложения, развитый в работе [2].

Поясним, что этот подход к решению теплицевых систем, требующий несколько большего количества операций, чем известный метод Левинсона-Тренча (см. [3]), не требует обязательного для последнего требования невырожденности ведущих (блочных) подматриц. Метод реализован на конкретном уравнении

$$y(x) = \lambda \int_0^x e^{-|x-t|} y(t) dt + 1 - 2\lambda + \lambda e^{-x}, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (3)$$

Точным решением данного уравнения является функция $y(x) \equiv 1$. При $\lambda < 1/2$ уравнение, как легко проверить, однозначно разрешимо. Заменим это уравнение урезанным:

$$\tilde{y}_N(x) = \lambda \int_0^N e^{-[x-t]} \tilde{y}_N(t) dt + 1 - 2\lambda + \lambda e^{-x}. \quad (4)$$

Для дискретизации в m точках ($m=50; 100; 150; 200$) применена формула Гаусса (см. [4]) с дискретизацией в точках $t_1 = \frac{2N}{m}v$,

$$t_j = \left(1 - \frac{2N}{m}\right)v, \quad t_j = t_{j-2} + \frac{2N}{m} \quad (j > 2), \quad \text{где } v = 1/2 - \sqrt{3/6}.$$

Точность данного алгоритма равна $O(h^4)$ ($h = \frac{2N}{m}$, $m \rightarrow \infty$), сложность — $43,5 m^2 + O(m)$. Точное решение уравнения (4) следующее ($\lambda < 1/2$):

$$\tilde{y}_N(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x} + 1,$$

где

$$C_1 = \frac{(\mu + 1)^2 (\mu - 1)}{(\mu + 1)^2 e^{\mu N} - (\mu - 1)^2 e^{-\mu N}},$$

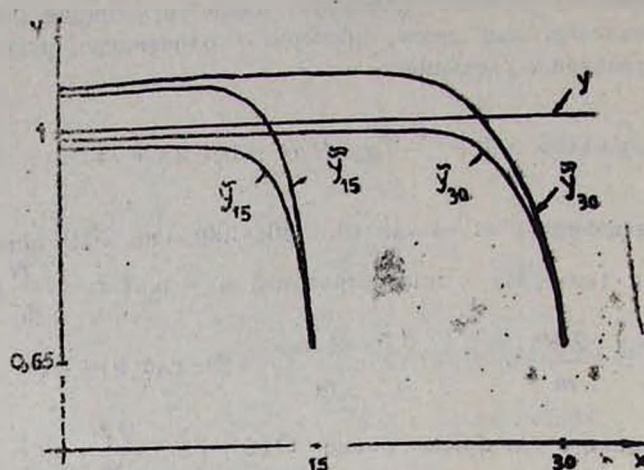
$$C_2 = \frac{(\mu - 1)^2 (\mu + 1)}{(\mu + 1)^2 e^{\mu N} - (\mu - 1)^2 e^{-\mu N}}, \quad \mu = \sqrt{1 - 2\lambda}.$$

Нетрудно видеть, что при $\lambda < 1/2$ $x \rightarrow N$ (в предположении $N \gg 1$) $\tilde{y}_N(x) \rightarrow \mu$. Как видим наибольшее отклонение от решения (1) $y_N(x) \equiv 1$ наблюдается в окрестности граничной точки $x = N$.

Ниже изображены графики функций $y(x) \equiv 1$ (точное решение уравнения (3)), $\tilde{y}_N(x)$ (решение уравнения (4)) и $\tilde{y}_N(x)$ (численное решение уравнения (4)) для $\lambda=0,3$ и $N=15; 30$. Шаг дискретизации равен 0,3. Заметим, что для наглядности показан лишь качественный характер графиков, масштаб по оси y растянут примерно в 75 раз по отношению к масштабу по оси x , расстояние между графиками несколько искажено (увеличено).

Как видим $\tilde{y}_N(x)$ является хорошим приближением $\tilde{y}_N(x)$ (средняя относительная погрешность в данном случае составляет для $N=15$ и $N=30$ соответственно $2,2614 \cdot 10^{-2}$ и $2,3474 \cdot 10^{-2}$). Но сдвиг от $y(x)$ и для $\tilde{y}_N(x)$ и для $\tilde{y}(x)$ начинает возрастать при приближении точки x к N и достигает примерно величины 0,35. Сравнение функций $y(x)$ и $\tilde{y}_N(x)$ уже дает среднюю относительную погрешность для $N=15$ и $N=30$, соответственно $8,0126 \cdot 10^{-2}$ и $5,9203 \cdot 10^{-2}$.

Отметим, что в данном случае увеличение значения N не уменьшает сдвига функции $\tilde{y}_N$ от функции $y(x)$ в точке $x=N$. Это ожидаемо,



так как такой результат верен для функции $\tilde{y}_N(x)$, к которой при $N \rightarrow \infty$ стремится $\tilde{y}(x)$.

Рассмотрим зависимость поведения функции $\tilde{y}_N(x)$ от числа точек дискретизации m как по отношению $y(x)$, так и по отношению $\tilde{y}_N(x)$. В нижеследующей таблице через δ_1 обозначена среднеквадратическая относительная величина разности $\tilde{y}_N - y_N$ на отрезке $[0, N]$, при $N=15; 30$, через δ_2 — разности $y - \tilde{y}_N$.

$N \backslash m$	15		30	
	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2
50	$9,5598 \cdot 10^{-2}$	$1,0488 \cdot 10^{-1}$	$5,2637 \cdot 10^{-1}$	$5,1431 \cdot 10^{-1}$
100	$2,2614 \cdot 10^{-2}$	$8,0126 \cdot 10^{-2}$	$9,9675 \cdot 10^{-2}$	$1,0423 \cdot 10^{-1}$
150	$9,9564 \cdot 10^{-3}$	$8,1766 \cdot 10^{-2}$	$4,2365 \cdot 10^{-2}$	$6,5251 \cdot 10^{-2}$
200	$5,5832 \cdot 10^{-3}$	$8,2773 \cdot 10^{-2}$	$2,3474 \cdot 10^{-2}$	$5,9203 \cdot 10^{-2}$

Таким образом, при применении квадратурных формул высокой точности (в данном случае формулы Гаусса точности $O(h^4)$, h — шаг дискретизации) нет нужды для решения уравнения Винера-Хопфа брать слишком малый шаг дискретизации, поскольку уже решение $\tilde{y}_N$ усеченного уравнения отличается от точного. Можно рекомендовать также при необходимости нахождения решения уравнения (1) на отрезке $[0, A]$ брать N несколько больше A . Строго говоря, наличие явления наибольшего отклонения в окрестности конечной точки $x=N$ будет проверено нами в дальнейшем на численных экспериментах с ядрами K различных типов (если не удастся доказать это теоретически).

В заключение заметим, что при $\|K\|_{L_1} < 1$ полученное численное решение y можно уточнить обычным итерационным методом, полагая $y(x) = f(x)$, $x > N$. Скажем, в рассмотренном численном примере можно было ожидать уменьшения ошибки при однократной итерации в 0,6 раз. Реально улучшение при численном обсчете соответствовало уменьшению ошибки примерно в 0,8 раз.

Институт математики АН

Армения

Поступила 6. VIII. 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, М., Наука, 1971.
2. Г. В. Азекян, А. Б. Нерсисян. Блочнo-ортогональное разложение матриц теплоцва типа и быстрое решение некоторых интегральных уравнений. Деп. в Арм.НИИИТИ № 64-Ар.89.1989.
3. В. В. Воеводин, Е. Е. Тиртышников. Вычисления с теплоццевыми матрицами, В кн.: Вычислительные процессы и системы, Вып. 1. М., Наука, 1983, 124—267.
4. И. П. Мысовских. Лекции по методам вычислений. М., Физматгиз, 1962.

Ա. Մ. Զրբաշյան. Հնդհանրացված սահմանափակ տեսքի ֆունկցիաների եզրային հասկությունների մասին	187
Ա. Ա. Անդրյան. Նդրային խնդիրներ մասնակի ածանցյալներով հավասարումների համար քննանյանի դասերով	210
Յ. Ա. Կոտոյանց, Ֆ. Իզե, Մինիմաքս սահմանները Պուասոնի տարածական պրոցեսի	228
Ի. Ս. Հակոբյան, Ռ. Լ. Շահբաղյան. Ուրձր կարգի ու զծային պարաբոլական հավասարումներով ծնված կոսմոսների կապուցմովի ֆունկցիայի մասին	242
Բ. Լ. Դոլինսկի. Օրթոգոնալ բաղմանդամների արտացոլման զործակիցների բացարձակ արծնքներին վերարերվող սահմանային առնությունների մասին	251

ՀԱՄԱՌՈՏ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

Ս. Ա. Այունց. Հանրահաղվի հիմնական թևերեմը փաթուրային կատարյալ K-սպլայների համար և օպտիմալ K-ինտերպոլացիա	262
Գ. Ո. Աղևյան. Վիներ-Հոպֆի ինտեգրալ հավասարման թվային լուծման մի մեթոդի մասին	268

СОДЕРЖАНИЕ

А. М. Զрбашян. О граничных свойствах функций обобщенно-ограниченного типа	187
А. А. Андрян. Граничные задачи для уравнений в частных производных в классе Земания	210
Ю. А. Кутоянц, Ф. Лизе. Минимаксные границы в задаче оценки интенсивности пространственного процесса Пуассона	228
Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян. О функции Ляпунова полугрупп, порожденных нелинейными параболическими уравнениями высокого порядка	242
Б. Л. Голинский. Об одном предельном соотношении для модулей круговых параметров ортогональных многочленов	251

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

С. А. Айунц. Основная теорема алгебры для сверточных совершенных K-сплайнов и оптимальная K-интерполяция	262
Г. В. Агекян. Об одном методе численного решения интегрального уравнения Винера-Хопфа	268

CONTENTS

A. M. Zrbashian (Djrbashian). On boundary properties of functions of generalized bounded type	187
A. A. Andrian. Boundary Value problems for partial differential equations in the class Zemanyan	210
Yu. A. Kutoyantz, F. Lisse. Minimax bounds in the problem of estimation of the spatial Poisson process intensity	228
G. S. Hakobian, R. L. Shahbagian. On the Lyapunov function of the semigroups, generated by nonlinear parabolic equations of high order	242
B. L. Golinsky. On a limit relation concerning the modulus of the reflection coefficients of the orthogonal polynomials	251

SHORT COMMUNICATIONS

S. A. Ayunts. The fundamental theorem of algebra for convolution perfect K-splines and optimal K-interpolation	262
G. V. Agekian. On some method of the numerical solving of the Wiener-Hopf integral equation	268