

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

ԽՐԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈՆԳՐԱՆ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ԶՐԱՍՇԱՆ

Ե. Հ. ԱՌԱՔԵԼՑԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՄԱՎՄԿԻ
Ա. Ա. ՔԱԼԱԼՅԱՆ
Ռ. Վ. ՀԱՄԱՐԱԶՈՒՄՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՑԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԱՐԱՉԱՆ
Գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու ֆարմազոր Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր տերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մասուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ:

Մեկ տպագրական մասուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Լուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով:

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում:

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինգլիզները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով:

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում:

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը:

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված ֆիշ քն շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում:

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոգածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մեթոման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չգրադվել մեթոման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը:

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր:

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ: Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, տերիա Մաթեմատիկա:

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. В. АМБАРЦУМЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН
зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке) а кратких сообщений — не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-6. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. V. AMBARTZUMIAN
N. U. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN

A. A. TALALIAN)
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKI

executive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings *izvestia* of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, double-space in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of book, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

УДК 517. 53

А. И. ПЕТРОСЯН

ОЦЕНКА В C^m -НОРМЕ МИНИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ $\bar{\partial}$ -УРАВНЕНИЯ В ПОЛИДИСКЕ

В работе Шарпантье [1] получено интегральное представление функций $u(z)$, гладких на замыкании полидиска (для упрощения записи рассматривается случай бидиска $D^2 = \{z = (z_1, z_2) : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$). Это представление имеет вид

$$u(z) = P_a(u)(z) + T_a(\bar{\partial}u)(z), \quad (1)$$

где $a = (a_1, a_2)$, $a_1 > -1$, $a_2 > -1$,

$$\begin{aligned} P_a(u)(z) &= \frac{(a_1+1)(a_2+1)}{(2\pi i)^2} \int_{D^2} u(\zeta_1, \zeta_2) \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{a_1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{a_1+2}} \times \\ &\times \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{a_2}}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{a_2+2}} d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2; \\ T_a(\bar{\partial}u)(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|<1} \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}_1}(\zeta_1, z_2) \left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1} \right)^{a_1+1} \frac{d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1}{z_1 - \zeta_1} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_2|<1} \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}_2}(z_1, \zeta_2) \left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2} \right)^{a_2+1} \frac{d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2}{z_2 - \zeta_2} + \\ &+ \frac{1}{4\pi^2} \int_{D^2} \bar{\partial}u \wedge \left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1} \right)^{a_1+1} \left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2} \right)^{a_2+1} \times \\ &\times \frac{(\bar{\zeta}_1 - z_1) d\bar{\zeta}_2 - (\bar{\zeta}_2 - z_2) d\bar{\zeta}_1}{|\zeta - z|^2} \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 + \frac{a_2+1}{4\pi^2} \int_{D^2} \bar{\partial}u \wedge \\ &\wedge \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{a_1+1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{a_1+2}} \cdot \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{a_2} |\zeta_2 - z_2|}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{a_2+2} |\zeta - z|^2} d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 - \\ &- \frac{a_1+1}{4\pi^2} \int_{D^2} \bar{\partial}u \wedge \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{a_2+1}}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{a_2+2} (z_2 - \zeta_2)} \times \\ &\times \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{2a_1} |\zeta_1 - z_1|}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{a_1+2} |\zeta - z|^2} d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2. \end{aligned}$$

Оператор P_a является оператором ортогонального проектирования в гильбертовом пространстве $L^2(d\sigma_a)$ на подпространство функций, голоморфных в бидиске. Здесь $d\sigma_a$ — мера в D^2 , задаваемая равенством

$$d\sigma_s = (1 - |z_1|^2)^{s-1} (1 - |z_2|^2)^{s-1} d\lambda(z_1, z_2),$$

где $d\lambda(z_1, z_2)$ — мера Лебега.

Интегральное представление (1) в круге впервые было получено в работах [2] и [3] М. М. Джрбашяна для голоморфных функций класса $H^p(\alpha)$ ($\alpha > -1$, $p \geq 1$), введенных в этих работах.

Формула (1) дает ортогональное разложение функции u в $L^2(d\sigma_s)$. Это позволяет выписать решение u уравнения

$$\bar{\partial}u = f, \quad (2)$$

имеющее минимальную взвешенную L^2 -норму, а именно, $u_s = T_s(f)$. Среди всех решений уравнения (2) u_s является в некотором смысле „каноническим“, и для приложений нужны оценки этого решения в различных нормах. В [1] даны оценки u_s в L^p -норме, т. е.

$$\|u_s\|_{L^p(D^2)} \leq \gamma (\|f_1\|_{L^p(D^1)} + \|f_2\|_{L^p(D^1)}), \quad (3)$$

где $p \in [1, +\infty]$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, константа γ зависит лишь от α и p . Несколько ранее в работе Ландуччи [4] была получена оценка (3) при $\alpha = (0, 0)$, $p = \infty$, а в [5] тем же автором дана оценка производных решения u_0 . Настоящая работа посвящена оценке u_s в норме пространства $C^m(\bar{D}^2)$.

Ниже используются следующие обозначения:

$C^m(\bar{D}^2)$ — пространство m раз непрерывно дифференцируемых на $\bar{D}^2$ функций h , $\|h\|_m$ — норма в $C^m(\bar{D}^2)$;

$C_{(0,1)}^m(\bar{D}^2)$ — пространство форм $f = f_1 d\bar{z}_1 + f_2 d\bar{z}_2$ типа $(0, 1)$, коэффициенты которых принадлежат $C^m(\bar{D}^2)$, $\|f\|_m = \|f_1\|_m + \|f_2\|_m$;

$C_{\pm s}^m(\bar{D}^2)$ — пространство тех функций из $C^m(\bar{D}^2)$, у которых все производные порядка m удовлетворяют на D^2 условию Гельдера с показателем s , $0 < s < 1$;

$$\bar{\partial}u = \frac{\partial u}{\partial z_1} g\bar{z}_1 + \frac{\partial u}{\partial z_2} g\bar{z}_2.$$

Всюду в дальнейшем предполагается условие $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$.

Лемма 1. Пусть $u \in C^m(\bar{D}^2)$, $r + s \leq m$, $r \geq 1$, $s \geq 0$. Тогда имеет место следующее тождество:

$$\begin{aligned} P_s \left(\zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \right) (z) &= P_s \left(\bar{\zeta}_1 \zeta_2^{r-1} \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \right) (z) - \\ &- (r-1) P_s \left(\zeta_1^{r-1} \zeta_2^s \frac{\partial^{r-1+s} u}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \right) (z) + z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} P_s \left(\zeta_1^{r-1} \zeta_2^s \frac{\partial^{r-1+s} u}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \right) (z). \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогичное тождество имеет место и относительно переменной z_2 при условии $r > 0$, $s \geq 1$.

Смысл соотношения (4) заключается в том, что проекция P_s производной от u выражается через проекции производных порядка на единицу меньше от функции u и $\frac{\partial u}{\partial z_1}$. Сомножители типа $\zeta_1^r \zeta_2^s$ появляются здесь по чисто техническим причинам.

Доказательство. Обозначив

$$C_a(\zeta, z) = \frac{(z_1+1)(z_2+1)}{(2\pi i)^2} \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{z_1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{z_1+2}} \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{z_2}}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{z_2+2}},$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} (\zeta_1^r \zeta_2^s C_a(\zeta, z)) &= r \zeta_1^{r-1} \zeta_2^s C_a(\zeta, z) - \alpha_1 \zeta_1 \bar{\zeta}_1 \zeta_2^s \frac{C_a(\zeta, z)}{1-|\zeta_1|^2}, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1} (\bar{\zeta}_1 \zeta_1^{r-1} \zeta_2^s C_a(\zeta, z)) &= \zeta_1^{r-1} \zeta_2^s C_a(\zeta, z) - \sigma_1 \zeta_1 \bar{\zeta}_1 \zeta_2^s \frac{C_a(\zeta, z)}{1-|\zeta_1|^2} + \\ &+ (\alpha_1 + 2) \zeta_1^{r-1} \bar{\zeta}_1 \zeta_2^s z_1 \frac{C_a(\zeta, z)}{1-\bar{\zeta}_1 z_1}, \\ \frac{\partial}{\partial z_1} C_a(\zeta, z) &= (\alpha_1 + 2) \bar{\zeta}_1 \frac{C_a(\zeta, z)}{1-\bar{\zeta}_1 z_1}. \end{aligned}$$

Из этих равенств следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} (\zeta_1^r \zeta_2^s C_a(\zeta, z)) &= \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1} (\bar{\zeta}_1 \zeta_1^{r-1} \zeta_2^s C_a(\zeta, z)) + \\ &+ (r-1) \zeta_1^{r-1} \zeta_2^s C_a(\zeta, z) - \zeta_1^{r-1} \zeta_2^s z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} C_a(\zeta, z). \end{aligned} \quad (5)$$

Далее

$$\begin{aligned} P_a \left(\zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \right) (z) &= \int_{D^2} \zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} C_a(\zeta, z) d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge d\bar{\zeta}_2 = \\ &= \int_{D^2} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{\partial^{r-1+s} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \zeta_1^r \zeta_2^s C_a(\zeta, z) \right) d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2 - \\ &- \int_{D^2} \frac{\partial^{r-1+s} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} (\zeta_1^r \zeta_2^s C_a(\zeta, z)) d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2. \end{aligned} \quad (6)$$

По формуле Стокса первое слагаемое в правой части (6) равно

$$\begin{aligned} \int_{D^2} d\zeta_1 \left(\frac{\partial^{r-1+s} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \zeta_1^r \zeta_2^s C_a(\zeta, z) d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_2 \wedge d\bar{\zeta}_2 \right) = \\ = \int_{\{|\zeta_1|=1\}} \frac{\partial^{r-1+s} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \zeta_1^r \zeta_2^s C_a(\zeta, z) d\bar{\zeta}_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 = 0, \end{aligned}$$

так как $C_a(\zeta, z) \equiv 0$ при $|\zeta_1|=1$. С учетом этого, а также равенства (5), из (6) имеем

$$\begin{aligned} P_a \left(\zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \right) (z) &= - \int_{D^2} \frac{\partial^{r-1+s} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1} (\bar{\zeta}_1 \zeta_1^{r-1} \zeta_2^s C_a(\zeta, z)) d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge \\ &\wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2 - (r-1) \int_{D^2} \frac{\partial^{r-1+s} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \zeta_1^{r-1} \zeta_2^s C_a(\zeta, z) d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \int_{\bar{D}^2} \frac{\partial^{r-1+s} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \zeta_1^{r-1} \zeta_2^s C_\alpha(\zeta, z) d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2 = \\
& = - \int_{\bar{D}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1} \left(\frac{\partial^{r-1+s} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \bar{\zeta}_1 \zeta_1^{r-1} \zeta_2^s C_\alpha(\zeta, z) \right) d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2 + \\
& + \int_{\bar{D}^2} \frac{\partial^{r+s} u(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \bar{\zeta}_1 \zeta_1^{r-1} \zeta_2^s C_\alpha(\zeta, z) d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2 - \\
& - (r-1) P_\alpha \left(\zeta_1^{r-1} \zeta_2^s \frac{\partial^{r-1+s} u}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \right) (z) + z_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} P_\alpha \left(\zeta_1^{r-1} \zeta_2^s \frac{\partial^{r-1+s} u}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \right) (z). \quad (7)
\end{aligned}$$

Равенство нулю первого слагаемого в правой части (7) доказывается с помощью формулы Стокса как выше. Таким образом, из (7) следует утверждение леммы.

Лемма 2. Пусть $u \in C^{m+\sigma}(\bar{D}^2)$, $0 < \sigma < 1$. Тогда

$$T_\alpha(\bar{\partial}u) \in C^{m+\sigma}(\bar{D}^2).$$

Доказательство. Согласно (1) имеем

$$T_\alpha(\bar{\partial}u)(z) = u(z) - P_\alpha(u)(z).$$

Тот факт, что $P_\alpha(u) \in C^{m+\sigma}(\bar{D}^2)$ при $m=0$, доказывается элементарно с привлечением леммы Харди—Литтлвуда. При $m>0$ следует использовать соотношение

$$z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} P_\alpha(u)(z) = P_\alpha \left(\zeta_1 \frac{\partial u}{\partial \zeta_1} \right) (z) - P_\alpha \left(\bar{\zeta} \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} \right) (z),$$

(а также аналогичное по z_2), которое является частным случаем (4) и следует из него при $r=1$, $s=0$.

Следствие. Если $u \in C^{m+1}(\bar{D}^2)$, то $T_\alpha(\bar{\partial}u) \in C^m(\bar{D}^2)$.

Всюду ниже через $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ обозначены константы, зависящие только от r, s и α .

Лемма 3. Пусть

а) $u \in C^m(\bar{D}^2)$, $\bar{\partial}u \in C_{0,1}^m(\bar{D}^2)$;

б) $P_\alpha(u)(z) = z \in D^1$.

Тогда для $r+s \leq m$ имеет место оценка

$$\left| \frac{\partial^{r+s} u}{\partial z_1^r \partial z_2^s} \right|_0 \leq \gamma_1 \|\bar{\partial}u\|_{r+s}. \quad (8)$$

Доказательство. Пусть, для определенности, $r \geq 1$. Применяя рекуррентную формулу (4) последовательно r раз, получим

$$\begin{aligned}
P_\alpha \left(\zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \right) (z) &= \sum_{k=1}^r \sum_{p=0}^{k-1} a_{kp} z_1^p \frac{\partial^p}{\partial z_1^p} P_\alpha \left(\bar{\zeta}_1 \zeta_1^{r-k} \zeta_2^s \frac{\partial^{r+1-k+s} u}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial \zeta_1^{r-k} \partial \zeta_2^s} \right) (z) + \\
&+ \sum_{p=0}^r c_p z_1^p \frac{\partial^p}{\partial z_1^p} P_\alpha \left(\zeta_2^s \frac{\partial^s u}{\partial \zeta_2^s} \right) (z).
\end{aligned}$$

Если $s = 0$, то второе слагаемое в правой части этого равенства равно нулю в силу условия б). Если же $s \geq 1$, то, применяя аналог (4) по переменной z_2 последовательно s раз и учитывая б), из последнего равенства получим

$$P_\alpha \left(\zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \right) (z) = \sum_{k=1}^r \sum_{p=0}^{k-1} a_{kp} z_1^p \frac{\partial^p}{\partial \zeta_1^p} P_\alpha \left(\bar{\zeta}_1 \zeta_1^{r-k} \zeta_2^s \frac{\partial^{r+1-k+s} u}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial \zeta_1^{r-k} \partial \zeta_2^s} \right) (z) + \\ + \sum_{k=1}^s \sum_{q=0}^{k-1} \sum_{p=0}^r b_{kpq} z_1^p z_2^q \frac{\partial^{p+q}}{\partial z_1^p \partial z_2^q} P_\alpha \left(\bar{\zeta}_2 \zeta_2^{s-k} \frac{\partial^{s-k+1} u}{\partial \bar{\zeta}_2 \partial \zeta_2^{s-k}} \right) (z). \quad (9)$$

Здесь коэффициенты a_{kp} , c_p и b_{kpq} зависят от r и s . Используя (1) и (9), получим

$$z_1^r z_2^s \frac{\partial^{r+s} u(z)}{\partial z_1^r \partial z_2^s} = P_\alpha \left(\zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \right) - T_\alpha \left(\bar{\partial} \left(\zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \right) \right) = \\ = \sum_{k=1}^r \sum_{p=0}^{k-1} a_{kp} z_1^p \frac{\partial^p}{\partial z_1^p} \left[\bar{z}_1 z_1^{r-k} z_2^s \frac{\partial^{r+1-k+s} u(z)}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1^{r-k} \partial z_2^s} - \right. \\ \left. - T_\alpha \left(\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_1 \zeta_1^{r-k} \zeta_2^s \frac{\partial^{r+1-k+s} u}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial \zeta_1^{r-k} \partial \zeta_2^s} \right) \right) \right] + \sum_{k=1}^s \sum_{q=0}^{k-1} \sum_{p=0}^r b_{kpq} z_1^p z_2^q \frac{\partial^{p+q}}{\partial z_1^p \partial z_2^q} \times \\ \times \left[\bar{z}_2 z_2^{s-k} \frac{\partial^{s+1-k} u(z)}{\partial \bar{z}_2 \partial z_2^{s-k}} - T_\alpha \left(\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_2 \zeta_2^{s-k} \frac{\partial^{s+1-k} u}{\partial \bar{\zeta}_2 \partial \zeta_2^{s-k}} \right) \right) \right] - \\ - T_\alpha \left(\bar{\partial} \left(\zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \right) \right). \quad (10)$$

Отметим при этом, что для справедливости формулы (1) достаточно, чтобы функция u и коэффициенты формы $\bar{\partial}u$ (понимаемые в обобщенном смысле), были бы непрерывны на $\bar{D}$. Доказывается это утверждение стандартным способом регуляризации, как это сделано, к примеру, в [6] в отношении формулы Коши—Грина. Из (10) имеем

$$\left\| z_1^r z_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial z_1^r \partial z_2^s} \right\|_0 \leq \gamma_2 \|\bar{\partial}u\|_{r+s-1} + \\ + \gamma_3 \sum_{k=1}^r \left\| \sum_{p=0}^{k-1} z_1^p \frac{\partial^p}{\partial z_1^p} T_\alpha \left(\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_1 \zeta_1^{r-k} \zeta_2^s \frac{\partial^{r+1-k+s} u}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial \zeta_1^{r-k} \partial \zeta_2^s} \right) \right) \right\|_0 + \\ + \gamma_4 \sum_{k=1}^s \sum_{q=0}^{k-1} \sum_{p=0}^r \left\| z_1^p z_2^q \frac{\partial^{p+q}}{\partial z_1^p \partial z_2^q} T_\alpha \left(\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_2 \zeta_2^{s-k} \frac{\partial^{s+1-k} u}{\partial \bar{\zeta}_2 \partial \zeta_2^{s-k}} \right) \right) \right\|_0 + \\ + \left\| T_\alpha \left(\bar{\partial} \left(\zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \right) \right) \right\|_0. \quad (11)$$

В полученном неравенстве справа участвуют производные $T_\alpha(\bar{\partial}(\dots))$ порядка не выше, чем $r+s-1$. Это позволяет проводить индуктивные рассуждения относительно порядка производной. Докажем неравенство

$$\left\| z_1^r z_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial z_1^r \partial z_2^s} \right\|_0 \leq \gamma_3 \|\bar{\partial}u\|_{r,s}. \quad (12)$$

Из (10) при $r=1, s=0$ имеем

$$\left\| z_1 \frac{\partial u}{\partial z_1} \right\|_0 \leq \gamma_2 \|\bar{\partial} u\|_0 + \gamma_3 \left\| T_* \left(\bar{\partial} \left(\bar{z}_1 \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_1} \right) \right) \right\|_0 + \left\| T_* \left(\bar{\partial} \left(z_1 \frac{\partial u}{\partial z_1} \right) \right) \right\|_0. \quad (13)$$

Заметим теперь, что из (3) при $p=\infty$ и для непрерывной на $\bar{D}_2$ формы f следует оценка

$$\|T_* f\|_0 \leq \gamma \|f\|_0. \quad (14)$$

согласно которой имеем

$$\left\| T_* \left(\bar{\partial} \left(\bar{z}_1 \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_1} \right) \right) \right\|_0 \leq \gamma \left\| \bar{\partial} \left(\bar{z}_1 \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_1} \right) \right\|_0 \leq \gamma_6 \|\bar{\partial} u\|_1, \quad (15)$$

$$\left\| T_* \left(\bar{\partial} \left(z_1 \frac{\partial u}{\partial z_1} \right) \right) \right\|_0 \leq \gamma \left\| \bar{\partial} \left(z_1 \frac{\partial u}{\partial z_1} \right) \right\|_0 \leq \gamma_7 \|\bar{\partial} u\|_1. \quad (16)$$

Из (13), (15) и (16) следует

$$\left\| z_1 \frac{\partial u}{\partial z_1} \right\|_0 \leq \gamma_8 \|\bar{\partial} u\|_1.$$

Аналогичное неравенство верно и для $z_2 \frac{\partial u}{\partial z_2}$. Итак, для производных первого порядка оценка (12) справедлива. Предположим, что (12) имеет место для всех производных порядка меньше, чем $r+s$. Применяя это индуктивное предположение к функциям $T_* \left(\bar{\partial} \left(\bar{z}_1 \bar{z}_1^{r-k} \bar{z}_2^s \frac{\partial^{r+1-k+s} u}{\partial \bar{z}_1^{r-k} \partial \bar{z}_2^s} \right) \right)$ и $T_* \left(\bar{\partial} \left(\bar{z}_1 \bar{z}_2^{s-k} \left(\frac{\partial^{s+1-k} u}{\partial z_2^{s-k}} \right) \right) \right)$ (при этом учитываем, что соответствующее условие гладкости а) обеспечивается в силу следствия леммы 2, а условие б) следует из того, что $P_* \circ T_* = 0$), будем иметь

$$\begin{aligned} & \left\| z_1^p \frac{\partial^p}{\partial z_1^p} T_* \left(\bar{\partial} \left(\bar{z}_1 \bar{z}_1^{r-k} \bar{z}_2^s \frac{\partial^{r+1-k+s} u}{\partial \bar{z}_1^{r-k} \partial \bar{z}_2^s} \right) \right) \right\|_0 \leq \\ & \leq \gamma_9 \left\| \bar{\partial} \left(\bar{z}_1 \bar{z}_1^{r-k} \bar{z}_2^s \frac{\partial^{r+1-k+s} u}{\partial \bar{z}_1^{r-k} \partial \bar{z}_2^s} \right) \right\|_p \leq \gamma_9 \|\bar{\partial} u\|_{p+r+1-k+s} \leq \gamma_9 \|\bar{\partial} u\|_{r+s}, \end{aligned} \quad (17)$$

так как $p+r+1-k+s \leq r+s$,

$$\left\| z_1^p \bar{z}_2^q \frac{\partial^{p+q}}{\partial z_1^p \partial z_2^q} T_* \left(\bar{\partial} \left(\bar{z}_1 \bar{z}_2^{s-k} \frac{\partial^{s+1-k} u}{\partial \bar{z}_2^{s-k}} \right) \right) \right\|_0 \leq \gamma_{10} \|\bar{\partial} u\|_{r+s}, \quad (18)$$

так как $p+q+s+1-k \leq r+s$. Из (14) следует

$$\left\| T_* \left(\bar{\partial} \left(\bar{z}_1 \bar{z}_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial \bar{z}_1^r \partial \bar{z}_2^s} \right) \right) \right\|_0 \leq \gamma_{11} \left\| \bar{\partial} \left(\bar{z}_1 \bar{z}_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial \bar{z}_1^r \partial \bar{z}_2^s} \right) \right\|_0 \leq \gamma_{11} \|\bar{\partial} u\|_{r+s}. \quad (19)$$

Подставляя (17)—(19) в (11), получаем оценку (12). Отметим, что множитель $z_1^p \bar{z}_2^q$ в левой части этой оценки не связан с существом дела и возник он из тождества (4) леммы I. Освободимся от этого множителя. Применяя при фиксированном z_2 формулу Коши—Грина к функции $\frac{\partial^{r+s} u(z)}{\partial z_1^r \partial z_2^s}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{r+s} u(z)}{\partial z_1^r \partial z_2^s} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=1} \frac{\partial^{r+s} u(\zeta_1, z_2)}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_2|<1} \frac{\partial^{r+s+1} u(\zeta_1, z_2)}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s \partial \zeta_2^s} \frac{d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_1}{\zeta_1 - z_1} = J_1(z) + J_2(z). \end{aligned} \quad (20)$$

Оценка

$$\|J_2\|_0 \leq \gamma_{12} \left\| \frac{\partial^{r+s+1} u}{\partial z_1^r \partial z_1^r \partial z_2^s} \right\|_0 \leq \gamma_{12} \|\bar{\partial} u\|_{r+s} \quad (21)$$

известна еще со времен Данжуа. Далее

$$\begin{aligned} J_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=1} \frac{\partial^{r+s} u(\zeta_1, z_2)}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=1} d\zeta_1 \left(\frac{\partial^{r+s-1} u(\zeta_1, z_2)}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \frac{1}{\zeta_1 - z_1} \right) - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=1} \frac{\partial^{r+s-1} u(\zeta_1, z_2)}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=1} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \frac{\partial^{r+s-1} u(\zeta_1, z_2)}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \frac{d\bar{\zeta}_1}{\zeta_1 - z_1} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=1} \frac{\partial^{r+s-1} u(\zeta_1, z_2)}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \frac{d\zeta_1}{(\zeta_1 - z_1)^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=1} \frac{\partial^{r+s} u(\zeta_1, z_2)}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \frac{d\bar{\zeta}_1}{\zeta_1 - z_1}, \end{aligned} \quad (22)$$

Оценку $J_1(z)$ будем проводить отдельно для $|z_1| < \frac{1}{2}$ и для $|z_1| > \frac{1}{2}$.

Из (22) имеем

$$\begin{aligned} \max_{|z_1| < \frac{1}{2}} |J_1(z)| &\leq \gamma_{13} \left\| \frac{\partial^{r+s-1} u}{\partial z_1^{r-1} \partial z_2^s} \right\|_0 + \gamma_{14} \left\| \frac{\partial^{r+s} u}{\partial z_1 \partial z_1^{r-1} \partial z_2^s} \right\|_0 < \\ &\leq \gamma_{13} \left\| \frac{\partial^{r+s-1} u}{\partial z_1^{r-1} \partial z_2^s} \right\|_0 + \gamma_{14} \|\bar{\partial} u\|_{r+s-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (20), (21) и (23) следует

$$\max_{|z_1| < \frac{1}{2}} \left| \frac{\partial^{r+s} u(z)}{\partial z_1^r \partial z_2^s} \right| < \gamma_{15} \left(\left\| \frac{\partial^{r+s-1} u}{\partial z_1^{r-1} \partial z_2^s} \right\|_0 + \|\bar{\partial} u\|_{r+s} \right). \quad (24)$$

Неравенство (24) позволяет доказать утверждение (8) леммы индукцией по $r+s$. При $r=s=0$ (8) следует из (12). Предположим, что (8) справедливо для всех производных порядка $r+s-1$. Далее различаем 2 случая:

1) Если $s=0$, то

$$\max_{|z_1| > \frac{1}{2}} \left| \frac{\partial^r u(z)}{\partial z_1^r} \right| \leq 2^r \left\| z_1^r \frac{\partial^r u}{\partial z_1^r} \right\|_0 \leq \gamma_{16} \|\bar{\partial} u\|_r$$

согласно (12). Вместе с (24) и индуктивным предположением отсюда получаем (8).

2) Если $s>0$, то имеем оценку

$$\max_{|z_2| < \frac{1}{2}} \left| \frac{\partial^{r+s} u(z)}{\partial z_1^r \partial z_2^s} \right| < \gamma_{17} \left(\left\| \frac{\partial^{r+s-1} u}{\partial z_1^r \partial z_2^{s-1}} \right\|_0 + \|\bar{\partial} u\|_{r+s} \right), \quad (25)$$

аналогичную (24). Далее

$$\max_{\substack{|z_1| > \frac{1}{2} \\ |z_2| > \frac{1}{2}}} \left| \frac{\partial^{r+s} u(z)}{\partial z_1^r \partial z_2^s} \right| \leq 2^{r+s} \left\| \frac{\partial^{r+s} u}{\partial z_1^r \partial z_2^s} \right\|_0 \leq \gamma_{18} \|\bar{\partial} u\|_{r+s} \quad (26)$$

согласно (12). Из (24)—(26) и индуктивного предположения следует (8). Лемма доказана.

Теорема. Пусть f — $\bar{\partial}$ -замкнутая форма типа $(0, 1)$, $f \in C_{(0,1)}^m(\bar{D}^2)$, u_α — решение уравнения (2), имеющее минимальную норму в $L^2(d\sigma_\alpha)$, т. е. $u_\alpha = T_\alpha(f)$, и $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$. Тогда

- 1) $u_\alpha \in C^m(\bar{D}^2)$;
- 2) $\|u_\alpha\|_m \leq \gamma \|f\|_m$.

Доказательство. Положим $f_n(z) = f\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)z\right)$. Формы f_n

$\bar{\partial}$ -замкнуты в некоторой окрестности $\bar{D}^1$ (каждая в своей). Пусть v_n — какое-либо решение уравнения $\bar{\partial} v = f_n$ в упомянутой окрестности. В силу эллиптичности оператора $\bar{\partial}$ v_n принадлежит $C^{m+\sigma}(\bar{D}^2)$ для любого σ , $0 < \sigma < 1$. Возьмем функцию $u_{2n} = v_n - P_\alpha(v_n)$. Очевидно

$$P_\alpha(u_{2n}) = 0. \quad (27)$$

Так как функция $P_\alpha(v_n)$ голоморфна в D^2 , то

$$\bar{\partial} u_{2n} = f_n. \quad (28)$$

По формуле (1) с учетом (27) $u_{2n} = T_\alpha(\bar{\partial} v_n)$ и, как следует из леммы 2, $u_{2n} \in C^{m+\sigma}(\bar{D}^2)$. (Для наших целей достаточно того, чтобы $u_{2n} \in C^m(\bar{D}^2)$). Из леммы 3 следует, что

$$\|u_{2n}\|_m \leq \gamma_{19} \|f_n\|_m, \quad (29)$$

$$\|u_{2n} - u_{4n}\|_m \leq \gamma_{20} \|f_n - f_{2n}\|_m. \quad (30)$$

Поскольку правая часть (30) стремится к нулю при k , $n \rightarrow \infty$, то последовательность u_{2n} имеет предел $u_* \in C^m(\bar{D}^2)$. Переходя к пределу в равенствах (27) и (28), будем иметь $P_\alpha(u_*) = 0$ и $\bar{\partial} u_* = f$ (при $m=0$ это равенство понимается в обобщенном смысле). Это означает, что u_* является минимальным решением (2) в $L^2(d\sigma_\alpha)$, т. е. $u_* = u_\alpha$. Предельный переход в (29) дает оценку 2). Теорема доказана.

Ереванский государственный университет

Поступила 17. I. 1990

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆԻ Բազմադրական $\bar{\partial}$ -հավասարման միեկիմալ լուծումների C^m -հարմար գնահատումը (ամփոփում)

Արդյունաբերում հետազոտում է բազմադրական $\bar{\partial} u = f$ հավասարման այն u_α լուծումը, որը $(1 - |z_1|^2), \dots, (1 - |z_n|^2)^2$ կշռով L_2 տարածության մեջ ունի միեկիմալ նորմ: Պարզության համար դիտարկվում է երկրորդանի դեպքը: Ապացուցվում է, որ եթե $f \in C_{(0,1)}^m(\bar{D}^2)$, ապա $u_\alpha \in C^m(\bar{D}^2)$, և տեղի ունի $\|u_\alpha\|_m \leq \gamma \|f\|_m$: Երկրորդ հավասարումը, որտեղ γ -ն միայն α -ից և m -ից կախված հաստատուն է:

A. I. PETROSIAN. *The estimate in C^m -norm of the minimal solutions of $\bar{\partial}$ -equation in polydisk (summary)*

The article is devoted to the investigation of the solution u_α of equation $\bar{\partial}u = f$ in polydisk, which has the minimal norm in the space L^2 with the weight $(1 - |z_1|^2)^{\alpha_1}, \dots, (1 - |z_n|^2)^{\alpha_n}$. For simplicity the case of bidisk D^2 is considered. It is proved that if $f \in C_{(0,1)}^m(\bar{D}^2)$, then $u_\alpha \in C^m(\bar{D}^2)$ and we have the estimate $\|u_\alpha\|_m < \gamma \|f\|_m$, where γ is a constant, which depends only on α and m .

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Charpentier. Formules explicites pour les solutions minimales de l'équation $\bar{\partial}u = f$ dans la boule et dans le polydisque de C^n , Ann. Inst. Fourier, 30, № 4, 1989, 121—154.
2. М. М. Джрбашян. О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН АрмССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
3. М. М. Джрбашян. К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. ин-та матем. и мех. АН АрмССР, вып. 2, 1948, 3—40.
4. M. Landucci. On the projection on $L^2(D)$ into $H(D)$, Duke Math. J., 42, 1975, 231—237.
5. M. Landucci. Uniform bounds on derivatives for the $\bar{\partial}$ -problem in the polydisk, Proc. Symp. Pure Math., 30, 1977, 177—180.
6. G. M. Henkin, J. Leiterer. Theory of functions on complex manifolds, Akademie-Verlag, Berlin, 1984.

УДК 517.53

Н. Е. ТОВМАСЯН

ПРИНЦИП АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ЧЕРЕЗ
ДУГУ ЭЛЛИПСА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

§ 1. Аналитическое продолжение через дугу эллипса

Пусть D —область, ограниченная эллипсом Γ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0), \quad (1)$$

а $\varphi(z)$ —аналитическая функция в области D , непрерывная в $D \cup \gamma$ и удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \varphi(z) = 0 \quad \text{при } z = x + iy \in \gamma. \quad (2)$$

где γ —открытая дуга на эллипсе Γ .

Цель данной работы—построить аналитическое продолжение функции $\varphi(z)$ через дугу эллипса γ и получить разложения функций, отображающих внутренности эллипса на единичный круг и полуплоскость, на простейшие дроби.

Как известно

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

является параметрическим уравнением эллипса (1), которое в комплексном виде записывается следующим образом:

$$z = \mu_0 \left(t + \frac{\mu}{t} \right), \quad t = e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (3)$$

$$\text{где } \mu_0 = \frac{a+b}{2}, \quad \mu = \frac{a-b}{a+b}.$$

Обозначим $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Точки $z = \pm c$ являются фокусами эллипса (1).

Известно, что функция Жуковского $z = \mu_0 \left(t + \frac{\mu}{t} \right)$ конформно отображает область $|t| > \sqrt{\mu}$ ($t = \xi + i\eta$) на всю комплексную плоскость без отрезка $[-c, c]$. В частности, эта функция конформно отображает кольцо $\sqrt{\mu} < |t| < 1$ на внутренность эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ без отрезка $[-c, c]$. Обратное отображение к отображению $z = \mu_0 \left(t + \frac{\mu}{t} \right)$ определяется формулой

$$t = \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a + b}, \quad (4)$$

где $\sqrt{z^2 - c^2} = \sqrt{z - c} \cdot \sqrt{z + c}$, а под $\sqrt{z - c}$ и $\sqrt{z + c}$ понимается главная ветвь этих корней.

Обозначим через

$$\psi(t) = \varphi\left(\mu_0\left(t + \frac{\mu}{t}\right)\right). \quad (5)$$

Так как $\varphi(z)$ аналитична в области D , то $\psi(t)$ аналитична в кольце $\sqrt{\mu} < |t| < 1$. Легко проверить, что

$$\psi(\sqrt{\mu}t) = \psi\left(\frac{\mu}{t}\right) \text{ при } |t| = 1. \quad (6)$$

Равенство (6) можно записать в виде

$$\psi(t) = \psi\left(\frac{\mu}{t}\right) \text{ при } |t| = \sqrt{\mu}. \quad (7)$$

Исходя из (7) определим функцию $\psi(t)$ в кольце $\mu < |t| < \sqrt{\mu}$ по формуле

$$\psi(t) = \psi\left(\frac{\mu}{t}\right), \quad \mu < |t| < \sqrt{\mu}. \quad (8)$$

Тогда из равенства (7) следует, что функция $\psi(t)$ аналитична в кольце $\mu < |t| < 1$.

Обозначим через δ_0 образ дуги γ при отображении

$$t = \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a + b} \quad (z \in \gamma, t \in \delta_0), \text{ а через } \tilde{\delta}_0 - \text{образ } \delta_0 \text{ при отображении}$$

$$\xi = \frac{\mu}{t} \quad (t \in \delta_0, \xi \in \tilde{\delta}_0). \text{ Ясно, что } \delta_0 \text{ и } \tilde{\delta}_0 - \text{дуги окружностей } |t| = 1 \text{ и } |\xi| = \mu \text{ соответственно.}$$

Из условия (2) и равенства (8) следует, что

$$\operatorname{Re} \varphi(t) = 0 \text{ при } t \in \delta_0 \cup \tilde{\delta}_0. \quad (9)$$

Пусть δ_k и $\tilde{\delta}_k$ ($k = 1, 2, \dots$) — образы δ_0 и $\tilde{\delta}_0$ при отображении $\zeta = t\mu^{-2k}$ ($t \in \delta_0, \zeta \in \delta_k$ и $t \in \tilde{\delta}_0, \zeta \in \tilde{\delta}_k$). Очевидно, что δ_k — дуга окружности $|\zeta| = \mu^{-2k}$, а $\tilde{\delta}_k$ — дуга окружности $|\zeta| = \mu^{-2k+1}$. Обозначим через G_0 кольцо $\sqrt{\mu} < |t| < 1$, а G_k — кольцо $\mu^{-k+1} < |t| < \mu^{-k}$ ($k = 1, 2, \dots$).

Известно [1], что если $\Phi(t)$ аналитична в кольце $\rho < |t| < R$ и на некоторой дуге Γ_0 окружности $|t| = R$ принимает чисто мнимые значения, то она аналитически продолжается через эту дугу в кольцо

$R < |t| < \frac{R^2}{\rho}$ по формуле

$$\Phi(t) = -\overline{\Phi\left(\frac{R^2}{t}\right)}, \quad R < |t| < \frac{R^2}{\rho}. \quad (10)$$

Черта над комплексным числом означает переход к комплексно сопряженным величинам.

Согласно условию (9) аналитическая в кольце $\mu < |t| < 1$ функция $\psi(t)$ аналитически продолжается через дугу δ_0 в область G_1 по формуле (10) при $R = 1$, причем продолженная функция $\psi(t)$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \psi(t) = 0 \text{ при } t \in \delta_0 \cup \tilde{\delta}_1. \quad (11)$$

Из условия (11) в свою очередь следует, что функция $\psi(t)$ аналитически продолжается через дугу δ_1 в область G_2 по формуле (10) при $R = \frac{1}{\mu}$, причем

$$\operatorname{Re} \psi(t) = 0, \quad t \in \tilde{\delta}_1 \cup \delta_1. \quad (12)$$

Рассуждая аналогично мы получим аналитическое продолжение функции $\psi(t)$ через δ_0 в область

$$\tilde{D}_0 = \bigcup_{k=0}^{\infty} G_k \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \delta_k \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{\delta}_k,$$

т. е. $\psi(t)$ аналитична вне круга $|t| < \sqrt{\mu}$, кроме счетного числа дуг окружностей.

Пусть D_0 — образ $\tilde{D}_0$ при отображении $z = \mu_0 \left(t + \frac{\mu}{t} \right)$ ($t \in \tilde{D}_0$, $z \in D_0$). Область D_0 является вся комплексная плоскость без счетного числа эллипсов и отрезка $[-c, c]$, причем дуга γ входит в область D_0 .

Теперь в функции $\psi(t)$, делая замену $t = \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a + b}$, мы получим функцию

$$\varphi(z) = \psi \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a + b} \right),$$

которая аналитична в области D_0 и совпадает с первоначальной аналитической функцией $\varphi(z)$ в области D .

Следовательно получена

Теорема 1. Если $\varphi(z)$ аналитична внутри эллипса D и на дуге эллипса γ принимает чисто мнимые значения, то она аналитически продолжается через эту дугу на всю комплексную плоскость, за исключением счетного числа дуг эллипсов.

Следующая теорема аналогична теореме 1.

Теорема 2. Если $\varphi(z)$ аналитична внутри эллипса, за исключением конечного числа точек и принимает на эллипсе чисто мнимые значения, также за исключением конечного числа точек, то она аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, за исключением счетного числа изолированных точек.

Пусть D^- — дополнение замкнутой области $D + \gamma$ до полной комплексной плоскости. Если область D — круг и аналитическая в области D функция $\varphi(z)$ принимает на дуге окружности $\gamma \in \Gamma$ чисто мнимые

значения, то, как известно, это функция аналитически продолжается через дугу γ в область D^- . Из метода доказательства теоремы 1 следует, что это утверждение для эллипса справедливо тогда и только тогда, когда аналитическая функция постоянна.

Если аналитическая в круге функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то она аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, за исключением конечного числа точек.

Это говорит о том, что аналитическое продолжение через дугу окружности и эллипса существенно отличаются друг от друга.

§. Разложения функций, конформно отображающих внутренность эллипса на полуплоскость и круг, на простейшие дроби

В работах [1] и [2] получены конформные отображения внутренности эллипса на плоскость и круг, а также обратные отображений с помощью элементарных преобразований через эллиптические интегралы. Здесь мы получаем конформные отображения эллипса на полуплоскость и круг в явном виде, через простейшие дроби, причем полученные ряды сходятся со скоростью убывающей геометрической прогрессии.

Пусть $t = \omega(z)$ и $\zeta = \eta(z)$ конформно отображают внутренность эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ на полуплоскость $\operatorname{Re} t > 0$ и круг $|\zeta| < 1$ соответственно и удовлетворяют условиям

$$\omega(-a) = 0, \lim_{z \rightarrow a} (a - z) \omega(z) = 1, \quad (13)$$

$$\eta(0) = 0, \eta(a) = 1. \quad (14)$$

Имеют место следующие две теоремы.

Теорема 3. Функция $\omega(z)$ разлагается на простейшие дроби

$$\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{b} \cdot \frac{1 - \mu^{2k+1}}{1 + \mu^{2k+1}} \cdot \frac{z}{z_k - z} + c_0, \quad (15)$$

где

$$\mu_0 = \frac{a+b}{2}, \mu = \frac{a-b}{a+b}, z_k = \mu_0 (\mu^{-k} + \mu^{k+1}),$$

$$c_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{b} \cdot \frac{1 - \mu^{2k+1}}{1 + \mu^{2k+1}} \cdot \frac{a}{a + z_k}.$$

Теорема 4. Функция $\eta(z)$ разлагается на простейшие дроби

$$\eta(z) = \frac{1}{c_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 + \mu^{4k+2}}{\mu^{2k+1}} \cdot \frac{z}{z^2 + \tau_k^2}, \quad (16)$$

где

$$\tau_k = \mu_0 \sqrt{\mu(\mu^{-2k+1} - \mu^{2k+1})},$$

$$c_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 + \mu^{4k+2}}{\mu^{2k+1}} \cdot \frac{a}{a^2 + \tau_k^2}.$$

Доказательство теоремы 3. Пусть $\omega(z)$ — функция, конформно отображающая внутренность эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ на полуплоскость $\operatorname{Re} t > 0$ и удовлетворяет условиям (13), а

$$\psi(t) = \omega\left(\mu_0\left(t + \frac{1}{t}\right)\right), \quad 1/\mu < |t| < 1. \quad (17)$$

Ясно, что

$$\operatorname{Re} \psi(t) = 0 \quad \text{при} \quad |t| = 1, \quad t \neq 1. \quad (18)$$

Из второго условия (13) следует, что

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ |t| < 1}} (1 - t) \psi(t) = b. \quad (19)$$

При доказательстве теоремы 1 мы показали, что функция $\psi(t)$ аналитически продолжается в область $|t| > \mu$, за исключением точек $t = \mu^{-k}$ ($k = 0, 1, \dots$), в которых имеет простые полюсы. Обозначим через $Q_k(z)$ главную часть разложения ряда Лорана функции $\psi(t)$ в окрестности точки $t = \mu^{-k}$ ($k = 0, 1, \dots$). Из (19) следует, что

$$Q_0(t) = \frac{1}{b(1-t)}. \quad (20)$$

Используя метод построения аналитического продолжения функции $\psi(t)$, указанный в доказательстве теоремы 1 и равенство (20), мы получим, что

$$Q_k(t) = \frac{(-1)^k}{b(1-\mu^k t)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Следовательно функция

$$\omega_1(z) = \psi\left(\frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a + b}\right) \quad (22)$$

аналитична во всей комплексной плоскости, за исключением отрезка $[-c, c]$ и точек

$$z_k = \mu_0(\mu^{-k} + \mu^{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (23)$$

причем главная часть $\bar{Q}_k(z)$ разложения ряда Лорана функции $\omega_1(z)$ в окрестности точки z_k определяется формулой

$$\bar{Q}_k(z) = \frac{(-1)^k (1 - \mu^{2k+1}) \mu_0}{b \mu^k} \cdot \frac{1}{z_k - z}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (24)$$

При получении формулы (24) мы использовали формулы (20) и (21).

Из равенства (17) и (22) следует, что

$$\omega_1(z) = \omega(z) \quad \text{при} \quad z \in D. \quad (25)$$

Следовательно функция $\omega(z)$ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, за исключением точек z_k ($z_k = 0, 1, \dots$), в окрестности которых главная часть разложения ряда Лорана определяется формулой (24). Это продолжение также будем обозначать через $\omega(z)$.

Пусть l_k — эллипс, который является образом круга $|t| = \mu^{-k} \sqrt{\mu}$ ($k = 0, 1, \dots$) при отображении $z = \mu_0 \left(t + \frac{\mu}{t} \right)$. Из построения аналитического продолжения функции $\omega(z)$ следует, что

$$\max_{z \in l_k} |\omega(z)| = \max_{t \in [-c, c]} |\omega(z)|. \quad (26)$$

Поэтому функция $\omega(z)$ равномерно ограничена на эллипсах l_k . Следовательно, согласно теореме Коши о разложении мероморфной функции (см. [1], стр. 426), мы имеем

$$\omega(z) = \omega(0) + \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{Q}_k(z) - \bar{Q}_k(0)). \quad (27)$$

Подставляя в (27) $z = -a$ и используя условие $\omega(-a) = 0$, получим

$$\omega(0) = \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{Q}_k(0) - \bar{Q}_k(-a)). \quad (28)$$

Подставляя $\bar{Q}_k(z)$ из (24) в (27) и (28), мы получим формулу разложения (15). Теорема 3 доказана.

Из определения функции $\omega(z)$ следует, что $\operatorname{Re} \omega(0) > 0$. Поэтому из (15) имеем $\omega(0) = c_0 > 0$.

Пусть теперь функция $t = \Omega(z)$ конформно отображает внутренность эллипса D на полуплоскость $\operatorname{Re} t > 0$, $\Omega(a) = \infty$, $\Omega(0) = t_0$. Тогда

$$\Omega(z) = \frac{\operatorname{Re} t_0}{c_0} \omega(z) + i \operatorname{Im} t_0, \quad (29)$$

где $\omega(z)$ определяется формулой (15).

Теперь приведем схему доказательства теоремы 4. Известно, что $\zeta = \frac{t-1}{t+1}$ конформно отображает полуплоскость $\operatorname{Re} t > 0$ на единичный круг $|\zeta| < 1$. Поэтому.

$$\eta(z) = \frac{\Omega(z) - 1}{\Omega(z) + 1}, \quad (30)$$

где $t = \Omega(z)$ конформно отображает внутренность эллипса D на полуплоскость $\operatorname{Re} t > 0$, $\Omega(0) = 1$, $\Omega(a) = \infty$.

Так как $\Omega(0) = 1$ и $\operatorname{Re} \Omega(z) > 0$ при $z \in D$, то из метода аналитического продолжения функции $\Omega(z)$, указанного при доказательстве теоремы 1, непосредственно следует, что

$$\Omega(z) = -1 \text{ при } z = \pm i\tau_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (31)$$

$$\Omega'(\pm i\tau_k) = c \frac{\mu^{2k+1}}{1 + \mu^{4k+2}}, \quad (32)$$

где c — некоторая постоянная, не зависящая от k , $c \neq 0$.

Используя формулы (30), (31) и (32), мы получим главную часть разложения ряда Лорана функции $\eta(z)$ в окрестности точек $z = \pm i\tau_k$

($k = 0, 1, \dots$). Дальше доказательство теоремы 4 не отличается от доказательства теоремы 3.

Аналогично можно получить разложение на простейшие дроби функции $\eta(z)$, когда условия (14) заменены условиями $\gamma_1(0) = z_0, \gamma_1(a) = z_1$, где $z_0 \in D, z_1 \in \Gamma$.

Теорема 5. Если функция $\varphi(z)$ аналитична внутри эллипса D , $|\varphi(z)| = 1$ при $z \in \Gamma$ и имеет конечное число нулей внутри D , то она аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, за исключением счетного числа дуг эллипсов и счетного числа изолированных особых точек.

Доказательство. Пусть $z_1, \dots, z_n$ — нули функции $\varphi(z)$ в области D , а $k_1, \dots, k_n$ — их кратности. Пусть, далее, $\xi = \omega_1(z)$ конформно отображает область D на единичный круг и $\omega_1(z_1) = 0$. Применяя теорему 1 для функции $\ln[\varphi(z)\omega_1^{-k_1}(z) \dots \omega_n^{-k_n}(z)]$ и имея в виду теорему 4, мы получим теорему 5.

Замечание. Если в теореме 5 $|\varphi(z)| = 1$ при $z \in \Gamma$, то $\varphi(z)$ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, за исключением счетного числа изолированных особых точек; если же $\varphi(z) = 1$ при $z \in \Gamma$ и $\varphi(z) \neq 0$ при $z \in D$, то она аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, за исключением счетного числа дуг эллипсов.

В заключение поставим следующую задачу:

Задача А. Найти область аналитического продолжения конформного отображения круга на внутренность эллипса и внутренность эллипса D на внутренность эллипса D_1 и построить эти отображения.

Инженерный
университет Армении

Поступила 10. IV. 1990

Ն. Ե. ԹՈՎՄԱՍՅԱՆ. Անալիտիկ շարունակության սկզբունքը էլիպսի ազդեցիկ և նրա կիրառությունները (ամփոփում)

Հոդվածում կառուցված է անալիտիկ ֆունկցիաների անալիտիկ շարունակությունը էլիպսի ազդեցիկ և ստացված է էլիպսով սահմանափակված տիրույթների կոնֆորմ արտապատկերումը շրջանի և կիսահարթության վրա պարզագույն կոտորակների միջոցով:

N. E. TOVMASIAN. *Principle of the analytical continuation of frougth ellipse arc its applications (summary)*

In this parer analytical cotination of analytical functions beyond an ellipse arc is built and the conform maffing of the inferior of the ellipse on a disc and a halfplane by means of simplest frouctions is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного, Изд. «Наука», Москва, 1973.
2. Б. Коппенфельд. Ф. Штальман. Практика конформных отображений, Изд. «Наука». М., 1963.

УДК 517.9

В. А. ДЕРКАЧ, М. М. МАЛАМУД

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ КЛАССА ФУНКЦИЙ КРЕЙНА-СТИЛТЬЕСА

Введение

В работе [1] М. Г. Крейн ввел класс функций Стильеса S . Впоследствии класс S изучался и использовался им в его исследованиях по проблеме Стильеса, теории спектральных функций струны и др., см. [1—6].

Авторами в [7] были введены более широкие классы оператор-функций $S_H^\pm$ (см. определение в § 1), которые в формуле Крейна для обобщенных резольвент (см. [1, 8]) соответствуют самосопряженным расширениям (с выходом из основного пространства) неотрицательного оператора $A \geq 0$, имеющим на полуоси $(-\infty, 0)$ в точности κ собственных чисел с учетом кратности (см. теоремы 5, 8 в [7]).

В настоящей работе дается описание оператор-функций $F(z) \in S_H^\pm$ в терминах их нулей и «полюсов». Наибольшую трудность представляет случай неограниченных оператор-функций, которые в отличие от функций того же класса, но со значениями в H , не обязательно конечно-мероморфны на $(-\infty, 0)$, могут не быть монотонными внутри интервала голоморфности и т. д. (см. примеры в § 4).

В работе авторов [9] дано применение полученных результатов к описанию обобщенных резольвент эрмитова оператора с лакунами, проблеме моментов и др.

Основные результаты статьи анонсированы в [10].

В работе используются следующие обозначения: H — гильбертово пространство; $[H]$ — совокупность ограниченных линейных операторов в H ; $\mathbf{G}(H)$ — совокупность замкнутых линейных операторов A в H с плотной областью определения $D(A)$; $\sigma(A)$ и $\rho(A)$ — спектр и резольвентное множество оператора A ; $\sigma_p(A)$ и $\sigma_c(A)$ — точечный и непрерывный спектры оператора A ; $E_A(\cdot) = E_A(\cdot - 0)$ и $E_E(a, b)$ — спектральная функция и спектральный проектор оператора $A = A^*$; $C_+(C_-)$ — открытая верхняя (нижняя) полуплоскость.

Мы признательны М. Г. Крейну за внимание к работе.

§ 1. Определение и простейшие свойства оператор-функций классов $S^\pm$

Определение 1. Оператор-функцию $F(z) = F^*(\bar{z})$ называют неванлиннсовой [4] или R -функцией [5, 6] и относят к классу R_H , если она голоморфна в $C_+ \cup C_-$ со значениями (при $z \in C_+$) во множестве максимальных диссипативных операторов из $\mathbf{G}(H)$.

Совокупность R_H , пополненную несобственными (см. [8, 11]) элементами, обозначим $\tilde{R}_H$. Таким образом, $\tilde{R}_H$ — совокупность функций $\theta(z) = \theta^*(\bar{z})$, голоморфных в $C_+ \cup C_-$, со значениями (при $z \in C_+$) во множестве максимальных диссипативных линейных отношений в H . Как известно (см. [11]) неопределенная часть отношения $\theta(z)$ не зависит от z и отношение $\theta(z)$ представляется в виде

$$\theta(z) = \{ \langle h_1, F_1(z) h_1 + h_2 \rangle : h_1 \in D(F_1(z)), h_2 \in H_2 \}, \quad (1)$$

где $H = H_1 \oplus H_2$, $F_1(z) \in R_H$.

Следующие хорошо известные свойства оператор-функций класса R_H мы сформулируем в виде предложения.

Предложение 1. Пусть $F(z) \in R_H$, $z_0 \in C_+$. Тогда:

- 1) $\alpha = \bar{\alpha} \in \rho(F(z_0)) \Rightarrow \alpha \in \rho(F(z)) \quad \forall z \in C_+$;
- 2) $\alpha = \bar{\alpha} \in \sigma_p(F(z_0)) \Rightarrow \alpha \in \sigma_p(F(z)) \quad \forall z \in C_+$. $\ker(F(z) - \alpha) = \ker(F(z_0) - \alpha)$;
- 3) $\alpha = \bar{\alpha} \in \sigma_c(F(z_0)) \Rightarrow \alpha \in \sigma_c(F(z)) \quad \forall z \in C_+$;
- 4) $F(z_0) \in [H] \Rightarrow F(z) \in [H] \quad \forall z \in C_+$;
- 5) $h_j \in \ker(F(z_0) - \alpha_j)$, ($j = 1, 2$) и $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1 \neq \alpha_2 = \bar{\alpha}_2 \Rightarrow h_1 \perp h_2$.

Определение 2 ([12]). Оператор-функцию $Q(z) = Q^*(z)$, голоморфную в $(C_+ \cup C_-) \setminus \sigma_1$, где σ_1 — конечное множество, и принимающую значения в $[H]$, относят классу $N_\kappa(H)$, если $\forall n \in Z_+$, $z_j \in C_+$, $h_j \in H$ ($1 \leq j \leq n$) квадратичная форма

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{(Q(z_j) h_j, h_k) - (h_j, Q(z_k) h_k)}{z_j - \bar{z}_k} \xi_j \bar{\xi}_k$$

имеет не более κ отрицательных квадратов и хотя бы для одного набора n , z_j , h_j ($1 \leq j \leq n$) точно κ отрицательных квадратов.

Определение 3. ([7]). Пусть $\kappa \in Z_+$. Оператор-функцию $F(z) \in R_H$ со значениями в $[H]$ будем относить к классу $S_H^{\kappa*}$ (соответственно S_H^{κ}), если $zF(z) \in N_\kappa$ (соответственно $z^{-1}F(z) \in N_\kappa$); произвольную оператор-функцию $F(z) \in R_H$ отнесем к классу $S_H^{\kappa*}$, если $\forall n \in Z_+$, $\forall z_j \in C_+$, $\forall h_j \in D(F(z_j))$ ($1 \leq j \leq n$) квадратичная форма

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{z_j^{\pm 1} (F(z_j) h_j, h_k) - \bar{z}_k^{\pm 1} (h_j, F(z_k) h_k)}{z_j - \bar{z}_k} \xi_j \bar{\xi}_k \quad (2)$$

имеет не более κ , и хотя бы для одного набора n , z_j , h_j точно κ отрицательных квадратов. Пополняя классы $S_H^{\kappa*}$ несобственными элементами

(1), получим классы $\tilde{S}_H^{\kappa*}$.

В случаях, не вызывающих недорозумения, будем писать $S^{\pm \kappa}$ вместо $S_H^{\kappa*}$, а при $\kappa = 0$ — $S^\pm$ вместо $S^{\pm 0}$.

Пример. Если $F_j(z) \in S_H^{\kappa*}$ ($j = 1, 2$), то $F_1(z) \oplus F_2(z) \in S_{H \oplus H}^{\kappa*}$.

Так

$$F(z) = \begin{pmatrix} z+3 & 0 \\ 0 & (z+3)^{-1} \end{pmatrix} \in S^1 \cap S^{-2}. \quad (3)$$

Определение 4. ([1, 4—6]). Функцию $F(z)$ относят к классу $(S)_H$, $((S)_H^+)$ Крейна—Стилтьеса, если $f(z) \in R_H$, голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и $F(x) \geq 0$ ($F(x) \leq 0$) при $x < 0$.

Замечание 1. Если $F(z) \in R_H$ принимает значения в $[I]$ и допускает голоморфное продолжение* в окрестность точки $x_0 = \bar{x}_0 \in \mathbb{R}$, то в условии (2) можно полагать $z_k = x_0$, заменяя соответствующие слагаемые в (2) на слагаемые вида (4) (или (5) для функции класса S_H^+ соответственно)

$$((x_0 F'(x_0) + F(x_0)) h_j, h_j) |\xi_j|^2, \quad (4)$$

$$x_0^{-1} (x_0 F'(x_0) - F(x_0)) h_j, h_j) |\xi_j|^2. \quad (5)$$

Отметим очевидные эквивалентности:

$$F(z) \in \tilde{S}_H^+ \Leftrightarrow -F^{-1}(z) \in \tilde{S}_H^+; \quad (6)$$

$$F(z) \in S_H^+ \Leftrightarrow -F(1/z) \in S_H^+; \quad (7)$$

$$F(z) \in \tilde{S}_H^+ \Leftrightarrow -F(1/z) \in \tilde{S}_H^+. \quad (8)$$

Предложение 2. Если $F(z^*) \in (S_H^+(F(z) \in S_H^+))$ и $s_0 \in \mathbb{C}_+$, то

$$1) \text{ cord } \{ \sigma_p(F(z_0)) \cap (-\infty, 0) \} \leq x \text{ (cord } \{ \sigma_p(F(z_0)) \cap (0, +\infty) \} \leq x), \quad (9)$$

$$2) \sigma_c(F(z_0)) \cap (-\infty, 0) = \emptyset \quad (\sigma_c(F(z_0)) \cap (0, +\infty) = \emptyset);$$

3) Если же $F(z)$ голоморфна в точке $x_0 = \bar{x}_0 < 0$, то

$$\dim E_{F(z_0)}(-\infty, 0) H \leq x \text{ (} \dim E_{F(z_0)}(0, +\infty) H \leq x \text{)}.$$

Доказательство. 1) Допустим, что $\alpha_k = -\alpha_k \in \sigma_p(F(z_0)) \cap (-\infty, 0)$, $h_k \in \ker(F(z_0) - \alpha_k)$, причем $k = 1, 2, \dots, x+1$; $\alpha_k \neq \alpha_j$, при $k \neq j$, $|h_k| = 1$. Тогда в силу предложения 1, $h_k \perp h_j$ ($k \neq j$). Полагая в (2) $n = x+1$, $z_j = z_0$ ($1 \leq j \leq x+1$), получим, что квадратичная форма

$$\sum_{1 \leq j, k \leq x+1} (\alpha_j z_0 - \alpha_k \bar{z}_0) (z_0 - \bar{z}_0)^{-1} (h_j, h_k) \xi_j \bar{\xi}_k = \sum_{1 \leq j \leq x+1} \alpha_j |\xi_j|^2 \leq 0$$

имеет $x+1$ отрицательный квадрат, что противоречит условию $F(z) \in S_H^+$.

2) Если $\alpha \in \sigma_c(F(z_0)) \cap (-\infty, 0)$, то в силу свойства 3) предложения 1, $\alpha \in \sigma_c(F(z)) \cap (-\infty, 0)$ ($\forall z \in \mathbb{C}_+$). Пусть h_j — ортонормированная квазисобственная последовательность оператора $F(i)$, соответствующая числу α , т. е. $F(i) h_j = \alpha h_j + g_j$ ($j = 1, 2, \dots$) $\lim_{j \rightarrow \infty} \|g_j\| = 0$.

Полагая в квадратичной форме (2) $n = x+1$, $z_1 = \dots = z_{x+1} = i$, получим для нее выражение

* Как следует из теорем 1, 2, 4, $F(z) \in S^{\pm x}$ голоморфна во всех, кроме конечного ($< x$) числа точек левой полуоси.

$$\sum_{1 \leq j, k \leq x+1} \left\{ \alpha \delta_{jk} + \frac{1}{2} g_{j+N}, h_{k+N} + \frac{1}{2} h_{j+N}, g_{k+N} \right\} \xi_j \bar{\xi}_k,$$

из которого видна ее отрицательная определенность при достаточно больших N . Противоречие.

3) Пусть вначале $F(z) \in S^{+x}$ и примем значения в $[H]$. Допустим, что $\alpha_k \in \sigma_p(F(x_0)) \cap (-\infty, 0)$ и $0 \neq h_k \in \ker(F(x_0) - \alpha_k)$ ($k=1, 2, \dots, x+1$). Полагая в (2) и (4) $n = x+1$, $z_j = x_0$ ($j=1, 2, \dots, x+1$) и учитывая, что $h_j \perp h_k$ ($j \neq k$) и $F'(x_0) > 0$ при $x_0 < 0$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq j, k \leq x+1} ((x_0 F'(x_0) + F(x_0)) h_j, h_k) \xi_j \bar{\xi}_k = \\ & = \sum_{1 \leq j, k \leq x+1} x_0 (F'(x_0) h_j, h_k) \xi_j \bar{\xi}_k + \sum_{1 \leq k \leq x+1} \alpha_k \|h_k\|^2 |\xi_k|^2 < 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство противоречит условию $F(z) \in S^{+x}$. Утверждение $\sigma_c F(x_0) \cap (-\infty, 0) = \emptyset$ доказывается аналогично.

Общий случай оператор-функции $F(z) \in S_H^{+x}$, для которой $F(z_0) \in [H]$, $z_0 \in \mathbb{C}_+$ легко свести к изученному. Рассмотрим для этого наряду с $F(z)$ оператор-функцию $\Phi_\varepsilon(z) = -(F(z) - \varepsilon/z)^{-1} \in S^{-x}$ при $\varepsilon > 0$ и уже принимающую значения в $[H]$. Утверждение 3) следует теперь из очевидной эквивалентности: $\lambda \in \sigma_l(F(x_0)) \Leftrightarrow \lambda = -(\lambda - \varepsilon/x_0)^{-1} \in \sigma_l(\Phi_\varepsilon(x_0))$, ($i=p, c$).

Замечание 2. Как видно из доказательства, вместо (9) получено более сильное неравенство

$$\sum_{\alpha < 0} \dim \ker(F(z) - \alpha) < x.$$

Предложение 3. Классы $S_H^{+0} = S_H^+$ и $S_H^{-0} = S_H^-$ совпадают с классами Крейна—Стилтьеса $(S)_H$ и $(S)_H^{-1}$ соответственно.

Доказательство. Докажем лишь совпадение классов S_H^+ и $(S)_H$. При $x=0$ формы (2) неотрицательны, что в силу неравенства Шварца—Пика эквивалентно включению $zF(z) \in R_H$. Если $F(z)$ принимает значения в $[H]$, то в силу критерия* М. Г. Крейна [6] $F(z) \in (S)_H \Leftrightarrow F(z) \in (R_H, zF(z) \in R_H)$. Установим указанную эквивалентность в общем случае.

Если $F(z) \in (S)_H$, то $F(x) \geq 0 \forall x < 0$ и, поэтому, $\forall x < 0 \in \rho(F(x) - \varepsilon/x)$, $\varepsilon > 0$. В силу критерия голоморфности неограниченной оператор-функции $F_\varepsilon(z) = F(z) - \varepsilon z^{-1}$ (см. [13, с. 461]) $0 \in \rho(F_\varepsilon(z))$ при достаточно малых $(z-x)$ и, следовательно, в силу предложения 1 $F_\varepsilon^{-1}(z) \in [H] \forall z \in \mathbb{C}_+ \setminus R_+$. В силу критерия М. Г. Крейна: $-F_\varepsilon(z)^{-1} \in (S)_H^{-1} \Rightarrow z^{-1} F_\varepsilon(z)^{-1} \in R_H \Rightarrow zF(z) \in R_H$, что, как легко видеть, эквивалентно условию $zF(z) \in R_H$.

Установим обратную импликацию: $F(z) \in S_H^+ \Rightarrow F(z) \in (S)_H$. В силу предложения 2 $\forall \varepsilon > 0 \ 0 \in \rho(F(z) + \varepsilon) \forall z \in \mathbb{C}_+$, т. е. $F(z) + \varepsilon)^{-1} \in$

* Этот критерий доказан в [3, 6] лишь в скалярном случае ($\dim H = 1$). Но его доказательство из [6] дословно переносится на оператор-функции $F(z)$ со значениями в $[H]$.

$\in [H]$. Но тогда из условия $zF(z) \in R_H$ следует, что $z(F(z) + \varepsilon) \in R_H \Rightarrow -z^{-1}(F(z) + \varepsilon)^{-1} \in R_H$ и в силу критерия М. Г. Крейна — $-(F(z) + \varepsilon)^{-1} \in (S)_H^{-1}$. Таким образом, $F(z) + \varepsilon \in (S)_H \forall \varepsilon > 0$, т. е. $F(z) \in (S)_H$. Предложение доказано.

§ 2. Описание ограниченно-голоморфных оператор-функций классов S_H^*

Займемся описанием множества ограничено-голоморфных в $\mathbb{C}$ оператор-функций класса S_H^* , т. е. оператор-функций $F(z) \in S_H^*$ таких, что $\exists z_0 \in \mathbb{C}_+$, $F(z_0) \in [H]$. В этом случае $F(z) \in [H] \forall z \in \mathbb{C}_+$ и справедливо представление

$$F(z) = A + Bz + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\Sigma(t), \quad (10)$$

в котором $A = A^*$, $B > 0$; $A, B \in [H]$, а $\Sigma(t)$ — неубывающая оператор-функция, сильно непрерывная слева, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2)^{-1} d\Sigma(t) \in [H]. \quad (11)$$

Пусть $F(z)$ голоморфна в интервале $(-\infty, t_0)$, $t_0 < 0$, т. е. носитель меры $d\Sigma(t)$ содержится в $[t_0, +\infty)$. Определим в этом случае конус $K_{-\infty}^-(F)$, полагая

$$K_{-\infty}^-(F) = \{h \in H: \lim_{x \downarrow -\infty} (F(x)h, h) < 0\} \quad (12)$$

и обозначим $\kappa_{-\infty}^-(F)$ — максимальную размерность подпространства $L \subset K_{-\infty}^-(F) \cup \{0\}$. Легко видеть, что

$$\kappa_{-\infty}^-(F) = \lim_{x \downarrow -\infty} \dim E_{F(x)}(-\infty, 0) \quad (13)$$

и, если $\kappa_{-\infty}^-(F) < \infty$, то при достаточно больших $|x|$

$$\kappa_{-\infty}^-(F) = \dim E_{F(x)}(-\infty, 0). \quad (14)$$

Пусть H_1 — такое подпространство в H , что $H_1 \cap K_{-\infty}^- = \emptyset$. Тогда, как следует из (10), $H_1 \subset \ker B$ и $\forall h \in H_1$ выполнены условия

$$\int_{t_0}^{\infty} (1+|t|)^{-1} d(\Sigma(t)h, h) < \infty, \quad (15)$$

$$\lim_{x \downarrow -\infty} (F(x)h, h) = (Ah, h) - \int_{t_0}^{\infty} \frac{t}{1+t^2} d(t)h, h = (A_1h, h) > 0 \quad (16)$$

и интегральное представление (10) принимает $\forall h \in H_1$ вид

$$(F(z)h, h) = (A_1h, h) + \int_{t_0}^{\infty} (t-z)^{-1} d(\Sigma(t)h, h). \quad (17)$$

Число $x_{-}^{-} (< \infty)$ имеет простой спектральный смысл. Так как $\forall x < t_0 \ F(x) < F(t_0)$, то при $\lambda > \|F(t_0)\|$ оператор-функция $(F(x) - \lambda)^{-1} < 0$ и является монотонно убывающей. Поэтому существует $s = \lim_{x \rightarrow -\infty} (F(x) - \lambda)^{-1} = R'(\lambda)$, являющийся псевдорезолюентной, нульпространство $H' = \ker R'(\lambda)$ и область значений $H'' = R'(\lambda) H$ которой не зависят от λ (см. [13]). Пусть $F(-\infty) = R'(\lambda)|_{H'}^{-1} + \lambda I_{H'}$. Тогда $x_{-}^{-} = \dim H' + \dim E_{F(-\infty)}(-\infty, 0)$.

Определение 5. (см. [14, 15]). Точка t_0 называется полюсом (нулем) первого порядка оператор-функции $F(z)$, голоморфной в проколлотой окрестности точки t_0 , если для всех вектор-функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$, голоморфных в окрестности точки t_0 и удовлетворяющих условиям

$$F(z)\varphi(z) = \psi(z) \ (F(\psi(z)) = \varphi(z)), \ \varphi(t_0) = 0, \ \psi(t_0) \neq 0,$$

точка t_0 является для $\varphi(z)$ нулем первого порядка. При этом ее полюсной кратностью x_0 (нулевой кратностью r_0) называется размерность линейного пространства $\{\chi(t_0) : \chi(z) = (t_0 - z)^{-1} \varphi(z)\}$. Если $F(z)$ голоморфна в точке t_0 , то $r_0 = \dim \ker F(t_0)$.

Подчеркнем, что $F(z)$ не определена, вообще говоря, в точке t_0 и может иметь в ней одновременно нуль и полюс. Так, в примере 3 § 1, $r_0(-3) = r_0(-3) = 1$.

Следующее предложение, используемое в теореме 1, получено в [12] в скалярном случае, но дословно обобщается на случай оператор-функций.

Предварительно напомним, что оператор-функция $Q(z) \in N_+(H)$ может иметь (см. [12]) в $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ не более конечного числа полюсов. Спектром $\sigma(Q(z))$ оператор-функции $Q(z) \in N_+$ называют множество, состоящее из ее полюсов и множества точек вещественной оси дополнительного к объединению интервалов, через которые $Q(z)$ голоморфно продолжается.

Предложение 4. ([12]). Если $Q_j(z) \in N_{x_j}(H)$, $j=1, 2$; $\sigma(Q_1(z)) \cap \sigma(Q_2(z)) = \emptyset$, то $Q_1(z) + Q_2(z) \in N_{x_1+x_2}(H)$.

Теорема 1. Пусть $F(z) \in R_H$ и принимает значения в $[H]$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $F(z) \in S_H^+$;
- 2) $F(z)$ голоморфна на левой полуоси за исключением конечного числа $p (< \infty)$ полюсов t_j ($t_1 < t_2 < \dots < t_p < 0$) первого порядка и конечной полюсной кратности $x_j = x_j(F)$, причем

$$x = \sum_{1 \leq j \leq p} x_j(F) + x_{-}^{-}(F). \quad (18)$$

Доказательство. 1°. Рассмотрим ядро квадратичной формы (2)

$$K(z, \zeta) = \frac{zF(z) - \bar{\zeta}F^*(\zeta)}{z - \bar{\zeta}}. \quad (19)$$

Форма (2) имеет x отрицательных квадратов в точности тогда, когда $\forall z_j \in \mathbb{C}_+ (1 \leq j \leq n+1)$ действующий в H^{n+1} блочный оператор $K = (K(z_j, z_k))_{j,k=1}^{n+1}$, где

$$K(z_j, z_k) = A + B(z_j + \bar{z}_k) + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{t}{(t - z_j)(t - \bar{z}_k)} - \frac{t}{1 + t^2} \right] d\Sigma(t) \quad (20)$$

имеет не более κ , а при некоторых $\{z_j\}_{j=1}^{n+1}$ — точно κ отрицательных собственных значений, или, когда то же самое справедливо для оператора $G = M^*KM$, где

$$M = \begin{pmatrix} I_H & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_H & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I_H & 0 \\ -I_H - I_H \dots - I_H & I_H \end{pmatrix}.$$

Оператор G , как следует из (20), имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} B(z_1 + z_{n+1}) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_1 - z_{n+1}}{t - z_1} \frac{td\Sigma(t)}{|t - z_{n+1}|^2} \\ \vdots \\ B(z_n + z_{n+1}) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_n - z_{n+1}}{t - z_n} \frac{td\Sigma(t)}{|t - z_{n+1}|^2} \\ \vdots \\ * \quad K(z_{n+1}, z_{n+1}) \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где

$$\tilde{G} = (G_{jk})_{j,k=1}^n = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_j - z_{n+1}}{t - z_j} \cdot \frac{\bar{z}_k - \bar{z}_{n+1}}{t - \bar{z}_k} \cdot \frac{td\Sigma(t)}{|t - z_{n+1}|^2} \right)_{j,k=1}^n. \quad (22)$$

2°. Пусть $F(z) \in S_H^*$. Покажем, что функция $\Sigma(t)$ из (10) имеет лишь конечное число p ($\leq \kappa$) точек роста на полуоси $(-\infty, 0)$. Действительно, допустим, что существуют точки $t_j \in (-\infty, 0)$ и векторы $h_j \in H$ ($1 \leq j \leq p$), для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_j)^{-2} d(\Sigma(t) h_j, h_j) = \infty. \quad (23)$$

Разобьем отрицательную полуось на непересекающиеся интервалы Δ_j ($\ni t_j$) и выберем константу $C > 0$ так, чтобы $\forall j \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$, $j \leq p$

$$\int_{R \setminus \Delta_j} \left| \frac{t_j - i}{t - t_j} \right|^2 d(\Sigma_1(t) h_j, h_j) \leq C, \quad d\Sigma_1(t) = \frac{|t| d\Sigma(t)}{1 + t^2}.$$

Тогда $\forall N \geq 2C$ можно выбрать точки $z_j = t_j + i\varepsilon_j$ ($0 < \varepsilon_j < 1$), $1 \leq j \leq p$ так, что

$$\int_{\Delta_j} |\varphi_j(t)|^2 d(\Sigma_1(t) h_j, h_j) = N \left(\varphi_j(t) = \frac{z_j - i}{t - z_j} \right).$$

Положив в (22) $z_{p+1} = i$, получим

$$(G_{jj}, h_j, h_j) = \int_R |\varphi_j(t)|^2 t (1+t^2)^{-1} d(\Sigma(t) h_j, h_j) \leq -(N-C) \leq -\frac{N}{2} \quad (24)$$

$$(G_{jk}, h_j, h_k) = \left| \int_R \varphi_j(t) \overline{\varphi_k(t)} d(\Sigma_1(t) h_j, h_k) \right|. \quad (25)$$

Разбивая интеграл в (25) на интегралы J_j, J_k, J_{jk} по множествам $\Delta_j, \Delta_k, R \setminus (\Delta_j \cup \Delta_k)$ и оценивая каждый, получим

$$J_j < \left(\int_{\Delta_j} |\varphi_j(t)|^2 d(\Sigma_1(t) h_j, h_j) \right)^{1/2} \left(\int_{\Delta_j} |\varphi_k(t)|^2 d(\Sigma_1(t) h_k, h_k) \right)^{1/2} \leq (NC)^{1/2}. \quad (26)$$

Аналогично

$$J_k \leq (NC)^{1/2}, \quad J_{jk} \leq C \leq (NC)^{1/2}.$$

Таким образом, при $j \neq k$

$$|(G_{jk} h_j, h_k)| \leq 3(NC)^{1/2} \quad (27)$$

и поэтому при $r < m$ и достаточно большом N главный минор $G_r = G \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, r \\ 1, 2, \dots, r \end{pmatrix}$ матрицы $((G_{jk}, h_j, h_k))_{j,k=1}^p$ имеет знак $(-1)^r$. В силу критерия Якоби матрица $((G_{jk}, h_j, h_k))_{j,k=1}^p$ отрицательно определена и оператор G имеет не менее p отрицательных собственных значений, что возможно лишь при условии $p \leq x$.

Так же, как и в [6], из формулы

$$\operatorname{Im} F(\tau + i\eta) = \eta \left(B + \int_R \frac{d\Sigma(t)}{(t-\tau)^2 + \eta^2} \right) \quad (28)$$

следует, что $\operatorname{Im} F(\tau + i\eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$ и $\tau < 0$, $\tau = t_k$, $1 \leq k \leq p$. Применяя формулу обращения

$$\Sigma(\tau_2) - \Sigma(\tau_1) = \frac{1}{\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \operatorname{Im} F(\tau + i\eta) d\tau, \quad (29)$$

получим, что $\Sigma(t)$ — постоянная на интервалах полуоси $(-\infty, 0)$, не содержащих точек t_k , $1 \leq k \leq m$. Следовательно, оператор-функция допускает представление

$$F(z) = A_0 + Bz + \sum_{j=1}^p \frac{A_j}{t_j - z} + \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\Sigma(t), \quad (30)$$

в котором $A_j = \Sigma(t_j + 0) - \Sigma(t_j) > 0$, $A_0 = A - \sum_{j=1}^p t_j A_j (1+t_j^2)^{-1}$.

3°. Установим неравенства $x_j(F) < x(j \leq p)$. Из представления (30) и принципа минимакса видно, что $\dim E_{F(x)}(-\infty, 0)H \geq \dim A_j H$ при $x > t_j$ и достаточно близких к t_j . Осталось применить предложе-

введем квазискалярное произведение, полагая

$$(h^{(1)}(t), h^{(2)}(t))_L = \sum_{1 \leq j, k \leq n+1} \int_0^{\infty} \varphi_j(t) \overline{\varphi_k(t)} d(\sum_1(t) h_j^{(1)}, h_k^{(2)}), \quad (33)$$

в котором $d \sum_1(t) = t \|t - z_{n+1}\|^{-2} d\Sigma(t)$. Интеграл $\int_0^{\infty} d(\sum_1(t) h_{n+1}^{(1)}, h_{n+1}^{(2)})$,

являющийся последним слагаемым в (33), сходится в силу неравенства (15), имеющего место $\forall h \in H_1$. Теперь с учетом включения $H_1 \subset \ker B$ и соотношений (22'), (33), ясно, что $\forall h_j \in H(1 \leq j \leq n)$ и $h_{n+1} \in H_1$ матрица $((G_{jk}^0 h_j, h_k))_{j,k=1}^{n+1}$ представляется в виде суммы двух матриц C_1 и C_2 . Здесь C_1 — матрица Грамма (относительно скалярного произведения (33)) системы вектор-функций $\varphi_j(t) h_j \in Z(1 \leq j \leq n+1)$, т. е. $C_1 = ((\varphi_j(t) h_j, \varphi_k(t) h_k)_Z)_{j,k=1}^{n+1}$, а матрица C_2 имеет вид

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & | & \cdots & | & 0 \\ \hline 0 & | & (A h_{n+1}, h_{n+1}) - \int_0^{\infty} \frac{t}{1+t^2} d(\sum_1(t) h_{n+1}, h_{n+1}) & | & \end{bmatrix} \geq 0$$

и неотрицательна, в силу (16) $\forall h_{n+1} \in H_1$.

Итак, неравенство $x_0 \leq x_{-}^-(F_0) x_{-}^-(F)$ установлено. Обратное неравенство $x_{-}^-(F) = x_{-}^-(F_0) \leq x_0$ вытекает из п. 3° и включения $F_0(z) \in S^*$. Таким образом, $x_0 = x_{-}^-(F_0) = x_{-}^-(F)$.

Для завершения доказательства остается заметить, что в силу (32) $\supp \Sigma(t) = \sigma(Q_0(z)) \subset [0, \infty)$ и применить предложение 4, из которого и вытекает равенство 18. Теорема доказана.

§ 3. Неограниченные оператор-функции классов S_H^*

Напомним, что неравенство $A > B (> c_0 I)$ для полуограниченных снизу самосопряженных операторов A и B означает, что $D(T_A) \subset D(T_B)$ и $T_A[f] > T_B[f] \forall f \in D(T_A)$. Здесь T_A — квадратичная форма, ассоциированная с оператором A , причем $D(T_A) = D((A - c_0 I)^{1/2})$. Аналогично, неравенство $A = A^* > B = B^*$ для операторов полуограниченных сверху означает, что $D(T_A) \supset D(T_B)$ и $T_A[f] \geq T_B[f]$.

Предложение 5. Для оператор-функции $F(z) \in S_H^*(E(z) \in S_H^{*x})$ справедливы утверждения:

- $F(z)$ допускает аналитическое продолжение на отрицательную полуось за исключением конечного числа точек $a_1 < a_2 < \dots < a_p < 0$;
- существуют точки $* b_1 < b_2 < \dots < b_m < 0$ такие, что в каждом из интервалов $(-\infty, b_1), (b_1, b_2), \dots, (b_m, 0)$ оператор-функция $F(z)$ не только аналитична, но и монотонно возрастает.

* Совокупность $\{b_j\}_1^m$ содержит совокупность $\{a_k\}_1^p$ но, как показывают примеры (см. § 4), вообще говоря, $m > p$, т. е. оператор-функция $F(z) \in S^{-x}$ может быть голоморфной внутри интервала, не будучи монотонной в нем.

Доказательство: а) Рассмотрим оператор-функцию $\Phi_\varepsilon(z) = -(F(z) + \varepsilon z)^{-1} \in S^{\times}$ и принимающую значения в $[H]$. На основании теоремы 1 $\Phi_\varepsilon(z)$ допускает голоморфное продолжение в $(-\infty, 0) \setminus \{t_j\}_{j=1}^n$, ($n \leq x$). В каждом из промежутков* $(-\infty, t_1], (t_1, t_2], \dots, (t_n, 0]$ оператор-функция $\Phi_\varepsilon(z)$ имеет конечное число ($\leq x$) нулей a_k ($k=1, 2, \dots, p$), что следует, например, из предложения 2 и результата из [13, с. 464]. Следовательно, $\forall x \in (-\infty, 0) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^p a_k\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^n t_j\right)$ существует $\Phi_\varepsilon^{-1}(x) \in G(H)$. Доопределим $F(z)$ в точках указанного множества, полагая

$$F(x) = -\Phi_\varepsilon^{-1}(x) - \varepsilon x. \quad (34)$$

Утверждение а) следует из (34) и критерия голоморфности неограниченной оператор-функции [13, с. 461], если заметить, что в точках t_j , не совпадающих с $a_k \forall k \leq n$, функцию $F(x)$ можно доопределить аналогично (34) при подходящем выборе $\varepsilon > 0$, а нули $\{a_k\}_1^p$ функции $\Phi_\varepsilon(z)$ не зависят от ε .

б). Рассмотрим скалярную функцию

$$d(x) = \dim E_{\Phi_\varepsilon(x)}(-\infty, 0), \quad (35)$$

определенную $\forall x < 0$, $x \neq t_j$ ($1 \leq j \leq n$). В силу предложения 2, $d(x)$ конечна, а в силу монотонности $\Phi_\varepsilon(x)$ на интервалах (t_j, t_{j+1}) , $1 \leq j \leq n$ функция $d(x)$ имеет внутри каждого из них лишь конечное число точек разрыва b_k ($1 \leq k \leq n_1$). Поясним, что возможные разрывы $d(x)$ внутри (t_j, t_{j+1}) обусловлены не только прохождением собственных значений $\lambda_k(x) \in \sigma(\Phi_\varepsilon(x)) \cap (-\infty, 0)$ через ноль, но и возможным поглощением их непрерывным спектром соответствующих операторов (см. § 4). Положим $m = n + n_1$, $\{b_j\}_1^m = \{b_k\}_1^{n_1} \cup \{t_j\}_1^n$ и покажем, что точки b_j — искомые. Пусть $[x_1, x_2] \subset (b_j, b_{j+1})$, ($1 \leq j \leq m$). Так как, согласно предложению 2 отрицательный спектр оператора $\Phi_\varepsilon(x)$ конечен (с учетом кратности) $\forall x \in [x_1, x_2]$, то собственные числа $\lambda_j(\Phi_\varepsilon(x)) < 0$, ($1 \leq j \leq r \leq x$) непрерывно (и даже аналитически (см. [13, с. 464])) зависят от x . Поэтому $\exists \delta > 0$, что $\lambda_j(\Phi_\varepsilon(x)) < -\delta$, ($\forall x \in [x_1, x_2]$, $\forall j \leq r$). Следовательно, $\exists C > 0$, что $C/H - F(x) > 0 \forall x \in [x_1, x_2]$. Значит $\exists (C - F(z))^{-1} \in R_H$ и принимает значения в $[H]$ и голоморфна в замкнутом интервале $[x_1, x_2]$ и стало быть, монотонно возрастает на нем. Но тогда: $(C - F(x_2))^{-1} > (C - F(x_1))^{-1} > 0 \Rightarrow F(x_1) > F(x_2)$, что и требовалось доказать.

Замечание 3. Множество $\{b_k\}_1^{n_1}$, как легко видеть, не зависит от ε , чего нельзя сказать о множестве $\{t_j\}_1^n$. Ясно, что множество $\{b_j\}_1^m$ можно уменьшить, удалив из него те t_j , которые не будут полюсами $\Phi_\varepsilon(z)$ при другом наборе $\varepsilon > 0$.

Монотонность $F(z) \in S_H^{\times}$ на интервалах $(-\infty, b_1)$ и $(b_m, 0)$ (см. предложение 5) и неравенства $\dim E_{F(x)}(0, +\infty)H \leq x$ (см. предложение 2) позволяют определить для $F(z) \in S_H^{\times}$ числа

* Отметим, что некоторые из a_k ($1 \leq k \leq p$) могут совпадать с t_j ($1 \leq j \leq n$).

$$x_{-\infty}^+(F) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{card} \{z(F(x)) \cap (0, +\infty)\} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \dim(E_{F(x)}(0, +\infty)H) \in \mathbb{Z}_+,$$

$$x_0^-(F) = \lim_{x \rightarrow 0} \text{card} \{z(F(x)) \cap (0, +\infty)\} = \lim_{x \rightarrow 0} \dim(E_{F(x)}(0, +\infty)H) \in \mathbb{Z}_+.$$
(36)

Теорема 2. Пусть $F(z) \in R_H$, голоморфна на отрицательной полуоси за исключением точек a_k ($1 \leq k \leq n < \infty$) и $\exists z_0 \in \mathbb{C}_+$, что $0 \in \sigma_c(F(z_0))$. Тогда $F(z) \in S_H^{-\infty}$ если и только если:

- а) $F(z)$ имеет конечно число нулей $t_1 < t_2 < \dots < t_p < 0$ первого порядка и конечной нулевой кратности $r_j = r_j(F)$, ($1 \leq j \leq p$);
 в) $F(z)$ монотонна в некотором интервале $(-\infty, t_0)$, $t_0 < 0$ и $x_{-\infty}^+(F) < \infty$;

с) справедливо равенство

$$x = x_{-\infty}^+ + \sum_{j=1}^p r_j(F).$$

Доказательство. Для $F(z) \in S^{-\infty}$ утверждения а) и в) доказаны в предложении 5. Для доказательства с) рассмотрим $\Phi(z) = -F(z)^{-1} \in \bar{S}^{\infty}$. Т.к. $0 \in \sigma_c(F(z_0))$, то $0 \in \sigma_c(F(z)) \forall z \in \mathbb{C}_+$ (предложение 1). Поэтому в силу (1) $H = H_1 \oplus H_2$, $\Phi(z) = \Phi_1(z) \oplus \Phi_-$, где $\Phi_- = \{<0, h>: h \in H_2\}$ неопределенная часть (не зависящая от $z \in \mathbb{C}_+$) отношения $\Phi(z)$. Применим к $\Phi_1(z) \in S_{H_1}^*$ и принимающей значения в $[H]$ теорему 1 и заметим, что нули t_j функции $F(z)$ и только они будут полюсами $\Phi_1(z)$ первого порядка, причем нулевая кратность $r_j(F)$ функции $F(z)$ в точке t_j совпадает с $x_j(\Phi_1)$ — полюсной кратностью $\Phi_1(z)$ в той же точке t_j . Кроме того, $x_{-\infty}^+(F) = x_{-\infty}^-(\Phi_1)$, что следует при достаточно больших $|x|$ из равенств

$$x_{-\infty}^+(F) = \dim E_{F(x)}(0, +\infty) = \dim F_{-\Phi_1(x)}(0, +\infty) = x_{-\infty}^-(\Phi_1).$$

Для доказательства теоремы 4 нам понадобится следующий результат, более общий вариант которого доказан авторами в [9, 16].

Теорема 3 [9, 16]. Пусть $\alpha \geq -\infty$, $\beta < \infty$, T_x — монотонно убывающее при $x \in [\alpha, \beta]$ семейство плотно определенных (в гильбертовом пространстве H) замкнутых симметричных форм, равномерно ограниченных снизу: $T_x \geq C$, $T(x) = T^*(x)$ — оператор, ассоциированный с T_x . Пусть к тому же T_x удовлетворяет условиям:

- а) $\forall x_1 < x_2 \in (\alpha, \beta) \exists C_{x_1, x_2}$ такая, что

$$T_{x_1}[f] - T_{x_2}[f] \geq C_{x_1, x_2} \|f\|^2 \quad \forall f \in D(T_{x_1}) \subset D(T_{x_2});$$

- б) оператор-функция $T(x)$ непрерывна в $[\alpha, \beta]$ в смысле равномерной резольвентной сходимости.

Тогда, если $\dim E_{T(\beta)}(-\infty, 0)H < \infty$, то

$$\dim E_{T(\beta)}(-\infty, 0)H - \dim E_{T(\alpha)}(-\infty, 0)H = \sum_{x \in (\alpha, \beta)} \dim \ker T(x).$$

Теорема 4. Пусть $F(z) \in S_H^{-\infty}$. Тогда:

- 1) $\exists b_1 < b_2 < \dots < b_m < 0$ такие, что $F(z)$ голоморфна и монотонна в интервалах $(-\infty, b_1)$, (b_1, b_2) , $\dots$, (b_{m-1}, b_m) , $(b_m, 0)$;

2) $\forall x \in (-\infty, 0)$, $x \neq b_j$, $(1 \leq j \leq m)$ $\text{card} \{ \sigma(F(x)) \cap (0, +\infty) \} \leq x_j$;
 3) если $x_j = x_j(F)$, $(1 \leq j \leq m)$ — число таких положительных собственных чисел операторов $F(x)$, $(x \in (b_{j-1}, b_j))$, занумерованных с учетом кратности в порядке убывания, для которых

$$\lim_{x \uparrow b_j} i_{kj}(F(x)) = +\infty \quad (k=1, 2, \dots, x_j), \quad (37)$$

а

$$x_{m+1} = x_{m+1}(F) = \lim \text{card} \{ \sigma(F(x)) \cap (0, +\infty) \}, \quad (37')$$

то справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^{m+1} x_j(F) = x. \quad (38)$$

Обратно, если $F(z) \in R_H$ и удовлетворяет условиям 1) — 3), то $F(z) \in S_H^*$.

Доказательство: а). Для $F(z) \in S^{-x}$ утверждения 1) и 2) доказаны в предложениях 4 и 2. Докажем 3). Заметим, что если $F(z) \in R_H$, то $\forall N > 0$ верна эквивалентность: $G_N(z) = F(z) + Nz \in S^{-x} \Leftrightarrow F(z) \in S^{-x}$. Добавлением Nz (N — достаточно большое) к $F(z)$ можно добиться того, чтобы для $G_N(z)$ все положительные собственные значения $i_{kj}(G_N(x))$ операторов $G_N(x)$ ($x < 0$) удовлетворяли условиям:

$$\lim_{x \uparrow b_j} i_{kj}(G_N(x)) = +\infty, \quad \lim_{x \uparrow b_{j-1}} i_{kj}(G_N(x)) < 0 \quad (1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq x_j). \quad (39)$$

Учитывая строгую монотонность оператор-функции $G_N(x)$, применим к ней в каждом из интервалов $(-\infty, b_1), (b_1, b_2), \dots, (b_{m-1}, b_m), b_m, 0$, теорему 3. При достаточно малом $\delta > 0$ с учетом (39) получим (считая $b_0 = -\infty$):

$$\sum_{x \in (b_{j-1}, b_j)} \dim \ker G_N(x) = \dim E_{G_N(b_{j-1} + \delta)}(0, +\infty) = x_j(G_N) = x_j(F), \quad (40)$$

ибо $\dim E_{G_N(b_{j-1} + \delta)}(0, +\infty) = 0 (\Leftrightarrow G_N(b_{j-1} + \delta) < 0)$ в силу (39). Так как, кроме того $\lim_{x \uparrow 0} i_k(G_N(x)) = \lim_{x \uparrow 0} i_k(F(x))$, то

$$\sum_{x \in (b_m, 0)} \dim \ker G_N(x) = \dim E_{G_N(0)}(0, +\infty) = x_{m+1}(G_N) = x_{m+1}(F). \quad (41)$$

Учитывая включение $G_N(z) \in S^{-x}$, равенства (40), (41), $x_{-\infty}^+(G_N) = 0$ и условие $0 \in \rho(G_N(z))$ при $z \in \mathbb{C}_+$, получим из теоремы 2 соотношение

$$x = \sum_{x < 0} \dim \ker G_N(x) + x_{-\infty}^+(G_N) = \sum_{j=1}^{m+1} x_j(G_N) = \sum_{j=1}^{m+1} x_j(F),$$

доказывающее (38).

б) Если $F(z)$ удовлетворяет условиям 1) — 3), то $G_N(z) = F(z) + Nz$ также им удовлетворяет $\forall N > 0$. Поэтому включение $F(z) \in S^{-x}$ следует из (39) — (41) и теоремы 2. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $F_1(z) \in R_H$, $F_2(z) \in S_H^-$ и удовлетворяет условиям: а) $F_2(x) \in [H] \quad \forall x < 0$, б) $F_2(0) = z - \lim_{x \rightarrow 0} F_2(x) = 0$. Тогда верна

эквивалентность $F_1(z) \in S_H^{+-} \Leftrightarrow F_1(z) + F_2(z) \in S_H^{+-}$.

Доказательство следует из теоремы 4 и очевидных соотношений:

$$x_j(F_1 + F_2) = x_j(F_1) \quad (1 \leq j \leq m), \quad x_0^+(F_1 + F_2) = x_0^+(F_1).$$

Замечание 4. Для оператор-функций $F(z) \in S_H^{+-}$ и принимающих значения в $[H]$, числа $x_j(F)$, определенные в теореме 3, очевидно совпадают с полюсными кратностями $x_j(F)$ (в смысле определения 5) оператор функции $F(z)$ в точках b_j ($1 \leq j \leq m$). Далее, $x_{m+1}(F)$ из теоремы 4 совпадает с числом $x_0^+(F)$ из (36), а также с минимальной размерностью подпространств, принадлежащих конусу

$$K_0^+ = K_0^+(F) = \{h: \lim_{x \rightarrow 0} (F(x)h, h) > 0\}. \quad (42)$$

Поэтому равенство (38) принимает вид

$$x = x_0^+(F) + \sum_{j=1}^p (x_j(F),$$

является полным аналогом равенства (18) из теоремы 1.

Для оператор-функций $F(z) \in S_H^{+-}$ также справедливы аналогии теорем 2 и 4. Приведем их (без доказательства), заметив вначале, что в силу предложений 2 и 5 для $F(z) \in S_H^{+-}$ корректно определены числа

$$x_{-\infty}^-(F) = \lim_{x \rightarrow 0} \text{card } \{z(F(x)) \cap (-\infty, 0)\} = \lim_{x \rightarrow 0} \dim E_{F(x)}(-\infty, 0)H,$$

$$x_0^-(F) = \lim_{x \rightarrow 0} \text{card } \{z(F(x)) \cap (-\infty, 0)\} = \lim_{x \rightarrow 0} \dim E_{F(x)}(-\infty, 0)H.$$

Теорема 5. Пусть $F(z) \in R_H$, голоморфна на отрицательной полуоси за исключением точек a_k ($1 \leq k \leq p < \infty$) и $0 \in \sigma_c(F(z_0))$ при некотором $z_0 \in \mathbb{C}_+$. Тогда $F(z) \in S_H^{+-}$ если и только если:

- $F(z)$ имеет конечно число нулей $t_1 < t_2 < \dots < t_p < 0$ первого порядка и конечной нулевой кратности $r_k(F)$, $1 \leq k \leq p$;
- $F(x)$ монотонна в некотором интервале $(t_0, 0)$ и $x_0^-(F) < \infty$;
- справедливо равенство

$$x = x_0^-(F) + \sum_{k=1}^p r_k(F).$$

Теорема 6. Пусть оператор-функция $F(z) \in S_H^{+-}$. Тогда:

- $\exists b_1 < b_2 < \dots < b_m < 0$ такие, что $F(z)$ голоморфна и монотонна в интервалах $(-\infty, b_1)$, (b_1, b_2) , $\dots$, (b_{m-1}, b_m) , $(b_m, 0) \equiv (b_m, b_{m+1})$;
- $\dim E_{F(x)}(-\infty, 0)H \leq x \quad \forall x \in (-\infty, 0)$, $x \neq b_j$, ($1 \leq j \leq m$);
- если $x_j(F)$ — число таких отрицательных собственных чисел оператора $F(x)$, ($x \in (b_{j-1}, b_j)$), занумерованных с учетом кратности в порядке возрастания, для которых

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lambda_{jk}(F(x)) = -\infty, \quad (1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq x_j),$$

то справедливо равенство

$$\kappa = \kappa_{-}^{-}(F) + \sum_{j=1}^m \kappa_j(F).$$

Обратно, если $F(z) \in R_H$ и удовлетворяет условиям 1) — 3), то $F(z) \in S_H^{+*}$.

§ 4. Некоторые дополнительные свойства и примеры

1. Неограниченные оператор-функции $F(z) \in S_H^{+*}$, как видно из приводимых ниже примеров, не обладают многими привычными свойствами функций тех же классов, но принимающих значения в $[H]$. Так, они не обязаны быть конечно-мероморфными на полуоси $(-\infty, 0)$, могут не быть монотонными внутри интервала аналитичности, не иметь на $(-\infty, 0)$ ни нулей, ни полюсов и т. д. Изучать их можно, например, аппроксимируя $F(z) \in S_H^{+*}$ функциями $F_\varepsilon(z) \in S_H^{+*}$ уже принимающими значения в $[H]$. Один из способов такой аппроксимации содержит

Предложение 6. Пусть $F(z) \in S_H^{+*}$, $\varepsilon > 0$,

$$F_\varepsilon(z) = \left((F(z) + \varepsilon z)^{-1} + \frac{\varepsilon}{z} \right)^{-1}. \quad (43)$$

Тогда:

- 1) $F_\varepsilon(z) \in S_H^{+*}$ и принимает значения в $[H]$;
- 2) если Ω — область аналитичности $F(z)$ и $z_0 \in \Omega$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(z_0)f = F(z_0)f \quad \forall f \in D(F(z_0)); \quad (44)$$

$$3) \quad R\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(z_0) = F(z_0) \quad \forall z_0 \in \Omega, \quad (45)$$

4) $F_\varepsilon(z)$ имеет ровно κ нулей и κ полюсов (с учетом кратности);

$$5) \quad \exists s - \lim_{x \rightarrow 0} F_\varepsilon(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (F_\varepsilon(x)h, h) = -\infty \quad \forall h \in H.$$

Доказательство. 1) Следует из очевидных импликаций:

$$F_\varepsilon(z) \in S^{+*}, \quad \varepsilon > 0 \Rightarrow F(z) + \varepsilon z \in S^{-*} \Rightarrow -(F(z) + \varepsilon z)^{-1} \in S^{+*},$$

$$(F(z_0) + \varepsilon z_0)^{-1} \in [H], \quad z_0 \in C_+ \Rightarrow -(F(z) + \varepsilon z)^{-1} - \frac{\varepsilon}{z} \in S^{+*} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_\varepsilon(z) \in S^{-*} F_\varepsilon(z_0) \in [H].$$

2) Пусть $z_0 \in C_+$

$$\Phi_{z_0}(\varepsilon) = \frac{z_0}{\varepsilon} \left(F(z_0) + z_0 \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^{-1}.$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_{z_0}^{-1}(\varepsilon)g = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{z_0} \left(F(z_0) + z_0 \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right)g = g \quad \forall g \in D(F(z_0)), \quad (46)$$

$$|\Phi_{z_0}(\varepsilon)| \leq |z_0| \cdot |\operatorname{Im} z_0|^{-1} (\varepsilon^2 + 1)^{-1} < |z_0| (\operatorname{Im} z_0)^{-1},$$

ибо $F(z_0)$ диссипативен. Теорема 1.5 из [13, с. 534] позволяет в силу (46) сделать заключение $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(z) F(z_0) f = f \forall f \in D(F(z_0))$, из кото-

рого с учетом равенства

$$F_\varepsilon(z) f = \Phi_\varepsilon(z) (F(z_0) + \varepsilon z_0) f = \Phi_\varepsilon(z) f + \varepsilon z_0 \Phi_\varepsilon(z) f$$

и следует (44) при $z_0 \in \mathbb{C}_+$. Доказательство для $z_0 \in \mathbb{C}_-$ аналогично. При $z_0 = \bar{z}_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ следует заметить, что $F_\varepsilon(x_0)$ определен в силу предложения 1 корректно для всех, кроме конечного числа, $\varepsilon > 0$ и воспользоваться спектральным разложением полуограниченного сверху оператора $F_\varepsilon(x_0)$.

Заметим, что из (44) следует $s - R - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(z) = F(z)$, что, однако, слабее утверждения 3).

3. Пусть $z_0 \in \mathbb{C}_+$, $\zeta \in \mathbb{C}_+$. Тогда

$$\begin{aligned} (F_\varepsilon(z_0) - \zeta)^{-1} - (F(z_0) - \zeta)^{-1} &= \left((F(z_0) + \varepsilon z_0)^{-1} + \frac{\varepsilon}{z_0} \right)^{-1} - \\ &- (F(z_0) - \zeta)^{-1} = \frac{\varepsilon}{z_0 - \varepsilon \zeta} [F(z_0)(F(z_0) + \varepsilon z_0 - z_0^2)(F(z_0) - \zeta)^{-1} \left[F(z_0) + \right. \\ &+ \left. \frac{\varepsilon z_0^2 - \varepsilon^2 \zeta z_0 - \zeta z_0}{z_0 - \varepsilon \zeta} \right]^{-1} = \frac{\varepsilon}{z_0 - \varepsilon \zeta} F(z_0) \left[F(z_0) + \frac{\varepsilon z_0^2 - \varepsilon^2 \zeta z_0 - \zeta z_0}{z_0 - \varepsilon \zeta} \right]^{-1} + \\ &+ \frac{\varepsilon(\varepsilon z_0 + \zeta)}{z_0 - \varepsilon \zeta} \left[F(z_0) - \frac{z_0}{\varepsilon z_0 + \zeta} \right] (F(z_0) - \zeta)^{-1} \left[F(z_0) + \frac{\varepsilon z_0^2 - \varepsilon^2 \zeta z_0 - \zeta z_0}{z_0 - \varepsilon \zeta} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Полагая здесь $\zeta = -z_0$, воспользуемся оценками, легко вытекающими из известной оценки диссипативного оператора $F(z_0)$:

$$\begin{aligned} \left\| \left(F(z_0) + \frac{z_0(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1)}{\varepsilon + 1} \right)^{-1} \right\| &\leq \frac{\varepsilon + 1}{(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) \operatorname{Im} z_0}, \\ \left\| F(z_0) \left(F(z_0) + \frac{z_0(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1)}{\varepsilon + 1} \right)^{-1} \right\| &\leq 1 + |z_0| \cdot (\operatorname{Im} z_0)^{-1}, \\ \left\| \left(F(z_0) - \frac{1}{\varepsilon - 1} \right) (F(z_0) + z_0)^{-1} \right\| &\leq 1 + [|z_0|(1 - \varepsilon) + 1][(1 - \varepsilon) \operatorname{Im} z_0]^{-1}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \left\| (F_\varepsilon(z_0) + z_0)^{-1} - (F(z_0) + z_0)^{-1} \right\| &\leq \frac{\varepsilon}{|z_0|(1 + \varepsilon)} \left(1 + \frac{|z_0|}{\operatorname{Im} z_0} \right) + \\ &+ \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon)}{1 + \varepsilon} \left[1 + \frac{|z_0|(1 - \varepsilon) + 1}{(1 - \varepsilon) \operatorname{Im} z_0} \right] \frac{\varepsilon + 1}{(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) \operatorname{Im} z_0} = \\ &= \varepsilon \left(\frac{\operatorname{Im} z_0 + |z_0|}{|z_0| \cdot \operatorname{Im} z_0} + \frac{\operatorname{Im} z_0 + |z_0| + 1}{(\operatorname{Im} z_0)^2} + o(\varepsilon) \right). \end{aligned} \quad (47)$$

Теперь при $z_0 \in \mathbb{C}_+$ (46) следует из (47). Доказательство при $z_0 \in \mathbb{C}_-$ и $z_0 = \bar{z}_0 = x_0 < 0$ аналогично.

4)–5). Согласно предложению 4, $\exists b_1 < 0$ такое, что в интервале $(-\infty, b_1)$ функция $F(z)$ аналитична и монотонна. Поэтому $\exists x_0 =$

$=x_0(\varepsilon) < b_1$ такое, что $F(x) + \varepsilon x < 0$ при $x \in (-\infty, x_0]$ и $\forall f \in D(T_{F(x_0)}) = D[F(x_0)]$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} T_{F(x)}[f] + \varepsilon x[f] = -\infty. \quad (48)$$

Из (48) легко следует, что $s - \lim_{x \rightarrow -\infty} (F(x) + \varepsilon x)^{-1} = 0$. Далее, для $G_\varepsilon(z) = -(F(z) + \varepsilon z)^{-1} - \frac{\varepsilon}{z}$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) < 0$, что $G_\varepsilon(x) > 0$ при $x \in (-\infty, 1/\delta) \cup (\delta, 0)$ и

$$\lim_{x \rightarrow 0} (G_\varepsilon(x)f, f) = +\infty \quad \forall f \in H \setminus \{0\}, \quad (49)$$

$$s - \lim_{x \rightarrow -\infty} G_\varepsilon(x) = 0.$$

Из (49) получим

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} T_{F_\varepsilon(x)}[f] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (F_\varepsilon(x)f, f) = -\infty \quad \forall f \in H \setminus \{0\}, \quad (50)$$

$$s - \lim_{x \rightarrow 0} F_\varepsilon(x) = s - \lim_{x \rightarrow 0} (-G_\varepsilon^{-1}(x)) = 0. \quad (51)$$

Из (50) $\Rightarrow K_0^+(F_\varepsilon) = \emptyset$, $x_0^+(F_\varepsilon) = 0$, а из (51) $-K_{-\infty}^-(F_\varepsilon) = \{0\} \Rightarrow x_{-\infty}^+ = 0$ здесь $K_0^+(F_\varepsilon)$, $K_{-\infty}^-(F_\varepsilon)$ соответствующие конусы функции $F_\varepsilon(z)$. Утверждение 5) следует из (50), (51), а 4) — из теорем 2 и 4, ибо $x_0^+(F_\varepsilon) = x_{-\infty}^+(F_\varepsilon) = 0$.

Замечание 5. С помощью оператор-функций $F_\varepsilon(z)$ вида (43) можно, не используя теорему 3, вывести теорему 4 из теоремы 1. Останемся лишь на выводе утверждения 3), т. е. равенства (38), считая утверждения 1) и 2) доказанными для $F(z) \in S_H^{-\infty}$. Рассмотрим для этого оператор-функцию $F_\varepsilon(z) \in S_H^{-\infty}$ и принимающую значения в $[H]$. В силу предложения 6 $F_\varepsilon(z)$ имеет в точности x полюсов на $(-\infty, 0)$ -и $x_0^+(F_\varepsilon) = x_{-\infty}^+(F_\varepsilon) = 0$. Покажем, что из этого следует наличие в точности x собственных значений $\lambda_{kj}(F(x)) \geq 0$, удовлетворяющих соотношениям (37)–(38).

Пусть $\lambda_{kj}(F(x)) \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, m+1$; $k = 1, 2, \dots, x_j$) те собственные значения оператора $F(x)$, для которых выполнены соотношения (37), (37'). Оператор $F_\varepsilon(x)$ имеет те же собственные функции что и $F(x)$, а его собственные значения $\lambda_{kj}(F_\varepsilon(x))$ связаны с $\lambda_{kj}(F(x))$, равенствами

$$\lambda_{kj}(F_\varepsilon(x)) = x[\lambda_{kj}(F(x) + \varepsilon x)[x(1 + \varepsilon^2) + \varepsilon(\lambda_{kj}(F(x)))]^{-1}. \quad (52)$$

При достаточно малом $\varepsilon > 0$ каждое из уравнений

$$f_{kj}(x) = x(1 + \varepsilon^2) + \varepsilon \lambda_{kj}(F(x)) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, x_j)$$

имеет одно решение $x_{kj} \in (b_{j-1}, b_j)$, ибо

$$\lim_{x \uparrow b_j} f_{kj}(x) = +\infty, \quad \lim_{x \downarrow b_{j-1}} f_{kj}(x) < 0.$$

Точки x_{kj} как раз будут полюсами оператор-функции $F_\varepsilon(z)$ с полюсной кратностью $x(G_\varepsilon(x_{kj})) = \dim \ker (F x_{kj} - \lambda_{kj}(F(x_{kj})))$. Поэтому

$$\sum_{x \in (b_{j-1}, b_j)} x(F_\varepsilon(x)) = x_j(F) = x_j, \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (53)$$

т. е. в каждом интервале (b_{j-1}, b_j) функция $F_*(x)$ имеет точно x_j полюсов. Аналогично в силу (37) каждое из уравнений

$$f_{k,0}(x) = x(1 + \varepsilon^2) + \varepsilon \lambda_{k,m+1}(F(x)) - 0 \quad (k = 1, 2, \dots, x_m + 1)$$

имеет в $(b_m, 0)$ единственное решение, если x достаточно мало, ибо $\lim_{x \uparrow 0} f_{k,0}(x) > 0$ и $\lim_{x \downarrow b_m} f_{k,0}(x) < 0$. Отсюда

$$\sum_{x \in (0_m, 0)} x(F_*(x)) = x_0^+(F) = x_{m+1}(F). \quad (54)$$

Из (52) видно, что других полюсов на полуоси $(-\infty, 0)$ оператор-функция $F_*(z)$ не имеет. А так как $x_0^+(F_*) = 0$ (предложение 6), то в силу теоремы 1

$$\sum_{x \in (-\infty, 0)} x(F_*(x)) = x.$$

Из этого равенства с учетом (53), (54) и следует (38).

2. В этом пункте мы рассмотрим некоторые примеры функций $F(z) \in S_H^+$, демонстрирующие некоторые их свойства.

Пример 1. Пусть $H = L_2[0, 1]$, $(Af)(t) = tf(t)$, $Bf = (f, g)$, $g(t) \in L_2[0, 1]$, $|g| = 1$, $g(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, 1]$. В силу теоремы 1 и замечания 4

$$F(z) = Az + B \in S_H^{-1},$$

ибо $x_0^+(F) = 1$ и $F(z)$ — ограниченно-голоморфна в $\mathbb{C}$. Покажем, что $F(z)$ не имеет нулей на $(-\infty, 0)$. Пусть $z = x < 0$, $0 \neq f \in \ker(F(x) - \lambda)$, $\lambda = \lambda(x) < 0$, т. е.

$$(F(x)f)(t) = xt f(t) + \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt g(x) = \lambda(x) f(x). \quad (55)$$

Из (55)

$$f(t) = Cg(t)(\lambda(x) - xt)^{-1}, \quad C = (f, g) \neq 0. \quad (56)$$

Так как $\lambda(x)/x > 0$ и $f(t) \in L_2[0, 1]$, то из (53) получаем: $\frac{\lambda(x)}{x} > 1$.

Умножив (56) скалярно на $g(t)$, получим

$$\int_0^1 |g(t)|^2 (\lambda(x) - xt)^{-1} dt = 1. \quad (57)$$

Но $\frac{\lambda(x)}{x} > 1 \Rightarrow \lambda(x) - xt < 0 \quad \forall t \in [0, 1]$, что противоречит (57). Итак,

$x < 0$, $\lambda(x) \leq 0 \Rightarrow \ker(F(x)) - \lambda(x) = 0$, т. е. $0 \in \sigma_p(F(x)) \quad \forall x < 0$.

Далее, $\sigma_c(F(x)) = [x, 0] \quad \forall x < 0$, $\text{card } \sigma_p = \text{card}(F(x)) = \{\sigma(F(x)) \cap (0, \infty)\} = 1$ и единственное положительное собственное число $\lambda(x) = \lambda(F(x))$ находится из уравнения

$$\int_0^1 |g(t)|^2 \left(1 - \frac{xt}{\lambda(x)}\right)^{-1} dt = \lambda(x). \quad (58)$$

Из (58) легко вывести, используя теорему Лебега, что

$$\lim_{x \uparrow 0} \lambda(x) = 1, \quad \lim_{x \downarrow -\infty} \lambda(x) = 0.$$

Этот пример интересен по следующим обстоятельствам:

а) хотя $0 \in \sigma_c F(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}_+$ заключения теоремы 2 выполнены: $\chi_{-\infty}^+(F) = 1$, а нулей на полуоси $(-\infty, 0)$ $F(x)$ не имеет:

б) если для $F(x) \in S^{-\infty}$ ($F(z) \in S^{+\infty}$) определить аналогично (12) конус $K_{-\infty}^+(F)$ ($K_0^-(F)$)

$$K_{-\infty}^+(F) = \{h \in H: \lim_{x \downarrow -\infty} (F(x)h, h) \geq 0\}, \quad (K_0^-(F) = \{h \in H: \\ : \lim_{x \uparrow 0} (F(x)h, h) \leq 0\}), \quad (59)$$

то в рассматриваемом примере $K_{-\infty}^+(F) = \{0\}$, хотя $\chi_{-\infty}^+(F) = 1$, т. е. аналогии равенств (13) и (14) в этом случае отсутствуют.

Аналогично для $F(z) = -\frac{1}{z} A - B \in S^{+1}$, $K_0^-(F) = \{0\}$, хотя $\chi_0^-(F) = 1$.

Пример 2. Пусть $H = L_2[0, 1]$, $\alpha = \bar{\alpha}$, $F_\alpha(z)$ — оператор $-d^2/dt^2$ с граничными условиями: $u(0) = 0$, $(z+1)u'(1) - u(1) = 0$. Легко видеть, что $F(z) \in R_H$ и, как показано в [13, с. 462], голоморфна всюду в расширенной плоскости $\mathbb{C}$. При $\alpha \leq 0$ $F_\alpha(z) \in S^{+0}$. Если $\alpha > 0$, $\sigma_c(F_\alpha(z)) = \emptyset$ и $\forall x \in (-\alpha, 1-\alpha)$ $\text{card } \sigma_p(F_\alpha(x)) \cap (-\infty, 0) = 1$ и $\sigma_p(F_\alpha(x)) \cap (-\infty, 0) = \emptyset \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus (\alpha, 1-\alpha)$. Единственное отрицательное собственное число $\lambda_\alpha(x) = \lambda(F_\alpha(x)) < 0$ оператора $F_\alpha(x)$ при $x \in (-\alpha, 1-\alpha)$ удовлетворяет условиям:

$$\lim_{x \uparrow 1-\alpha} \lambda_\alpha(x) = 0, \quad \lim_{x \downarrow -\alpha} \lambda_\alpha(x) = -\infty. \quad (60)$$

Далее, $\dim \ker F(1-\alpha) = 1$, а при $z \neq 1-\alpha \quad \exists F^{-1}(z) \in [H]$. Поэтому из (60) и теоремы 6 получаем $F_\alpha(z) \in S^{+1}$, ($\alpha > 0$), причем принадлежность S^{+1} достигается при $0 < \alpha \leq 1$ за счет равенства $\chi_0^-(F_\alpha) = 1$ вытекающего из (60), а при $\alpha > 1$ — из отсутствия однократного нуля функции $F_\alpha(z)$ в точке $\chi_0^- = 1-\alpha < 0$, ибо $\chi_0^-(F_\alpha(x)) = 0$ при $\alpha > 1$.

Этот пример интересен по ряду причин. Во-первых, $F_\alpha(z)$ голоморфна на всей оси, что невозможно для $(\text{const} \neq) F(z) \in S_H^{+1}$ и при нимающих значения в $[H]$. Во-вторых, $F_\alpha(z)$ теряет монотонность в точке $x = -\alpha$, оставаясь голоморфной в ней. Действительно, $D[F(-\alpha)] = D(T_{F_1(-\alpha)}) = W_2^1[0, 1] = \{f \in W_2^1: f(0) = f(1) = 0\}$, в то время, как при $x \neq -\alpha$ $D[F(x)] = D(T_{F_1(x)}) = W_{2,0}^1[0, 1] = \{f \in W_2^1: f(0) = 0\}$. В третьих, при $\alpha = 1 \quad \lim_{x \uparrow 0} T_{F_1(x)}[f] \geq 0$, причем $\lim_{x \uparrow 0} T_{F_1(x)}[f] = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$, т. е. $K_0^-(F) = \{0\}$ и $\dim K_0^-(F) = 1$. Далее, для $G(z) = -F_1^{-1}(z) \in S^{-1}$ и, как в примере 1, $0 \in \sigma_c(G(z)) \quad \forall z \in \mathbb{C}_+$ и заключение с) теоремы 6 для $G(z)$ не выполнено. Действительно, $G(z)$ не имеет нулей на $(-\infty, 0)$ и $\chi_{-\infty}^+(G) = 0$, ибо $\dim E_{F_1(x)}(0, +\infty) \cap H = 0$, $\forall x \in (-\infty, -1)$.

Пример 3. Пусть $H = L_2[0, 1]$ и оператор-функция $G(z)$ определена соотношениями $G(z) = KG_1(z)K^*$, где $(Kf)(x) = xf(x)$, $G_1(z)f = (1+z)Pf - (I-P)f$, $(Pf)(x) = \int_0^1 f(t) dt$. Тогда, в силу теоремы 4 $G_1(z)$ и вместе с ней и $G(z)$, принадлежит классу S_H^{-1} . При $x \in (-1, 0)$ имеет единственное положительное собственное значение $\lambda(x)$, которое находится из соотношения $\sqrt{\lambda(x)} \operatorname{arctg} \sqrt{\lambda(x)} = \frac{1+x}{2+x}$. Ясно также, что $\lambda(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -1$ и $G(x) \leq 0$, при $x \leq -1$; $\sigma_p(G(x)) = [-x^2, 0]$, $x < 0$. Заметим, однако, что $0 \notin \sigma_p(G(x))$, так как уравнение

$$(2+x) \int_0^1 xtf(t) dt - x^2f(x) = 0$$

не имеет решений $f(x)$, лежащих в $L_2[0, 1]$, что наряду с примером 2 показывает существенность условия $0 \notin \sigma_c(G(z_0))$ при $z_0 \in \mathbb{C}_+$.

Рассмотрим оператор-функцию $F(z) = -G^{-1}(z) \in S_H^{-1}$. Здесь $h \in D(F(z)) \Leftrightarrow \exists f(x) \in H$, такая, что $(2+x) \int_0^1 xtf(t) dt - x^2f(x) = -h(x)$.

Ясно, что $\int_0^1 |h(t)| t^{-1} dt < \infty \forall h \in D(F(z))$. Таким образом, при $z \neq -1$.

$$h \in D(F(z)) \Leftrightarrow F(z)h = \frac{h(x)}{x^2} - \frac{2+z}{1+z} \int_0^1 \frac{h(t)}{tx} dt \in L_2[0, 1];$$

$$h \in D[F(-1)] \Leftrightarrow F(-1)h = \frac{h(x)}{x^2} \in L_2[0, 1], \quad \int_0^1 \frac{h(t)}{t} dt = 0.$$

Из определения $F(z)$ следует, что она голоморфна при $x < 0$, но не является монотонной, так как $F(x) > 0$ при $x < -1$ и $\sigma_p(F(x)) = \{-\lambda^{-1}(x) \mid \forall x \in (-1, 0)\}$. Отметим еще, что $\forall x \neq -1 D[F(x)] = \{h: h(x), x^{-1}h(x) \in L_2\} = D$ и не зависит от x , а $D[F(-1)] = \left\{ h \in D: \int_0^1 t^{-1} h(t) dt = 0 \right\} \subset D$, $D[F(-1)] \neq D$.

3. В этом пункте мы приведем одно предложение, обобщающее хорошо известный результат для положительно определенных операторов. Его можно, например, использовать при доказательстве предложения 5 и теоремы 4.

Предложение* 7. Пусть $A = A^*$, $B = B^* \in C(H)$, $0 \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Если $\dim E_A(-\infty, 0)H = \dim E_B(-\infty, 0)H < \infty$ или $\dim E_A(0, +\infty)H = \dim E_B(0, +\infty)H < \infty$, то верна импликация $A \geq B \Rightarrow A^{-1} \leq B^{-1}$.

Доказательство. Пусть $A = J|A| = |A|^{1/2} J |A|^{1/2}$, $B = J_1|B| = |B|^{1/2} J_1 |B|^{1/2}$ — полярные представления операторов A и B . Так как $\dim E_A(-\infty, 0)H = \dim E_B(-\infty, 0)H$, то $J_1 = U^*JU$, где $U(\in [H])$ унитарен. Тогда $B = B_1^*JB_1$, где $B_1 = U|B|^{1/2}$ и условие $A \geq B$ эквивалентно такому: $(J|A|^{1/2}f, |A|^{1/2}f) \geq (JB_1f, B_1f) \forall f \in D(|A|^{1/2})$. Отсюда видно, что оператор $Q = B_1|A|^{-1/2}$ будет J -сжатием, т. е. $Q \in H$ и $Q^*JQ \leq J$, а значит таковым будет и Q^* (см. [17]), ибо $\dim E_J(-\infty, 0)H = n < \infty$. Но тогда $QJQ^* \leq J \Leftrightarrow Q^{-1}J(Q^*)^{-1} \geq J$, т. е. $(Jf, f) \leq (J(Q^*)^{-1}f, (Q^*)^{-1}f)$, откуда $(J|B|^{-1/2}|A|^{1/2}f, |B|^{-1/2}|A|^{1/2}f) \geq (Jf, f) \forall f \in H \Leftrightarrow (J|B|^{-1/2}g, |B|^{-1/2}g) \geq (J|A|^{-1/2}g, |A|^{-1/2}g) \forall g \in H \Leftrightarrow (B^{-1}g, g) \geq (A^{-1}g, g) \forall g \in H$. Предложение доказано.

Замечание 6. Импликация: $A \geq B \Rightarrow A^{-1} \leq B^{-1}$ в случае $\dim E_A(0)H = \dim E_B(0)H = \infty$, вообще говоря, неверна. Действительно, отправляясь от $A = |A|^{1/2}J|A|^{1/2}$, выберем J -сжатие Q так, чтобы Q^* не являлся J -сжатием (это возможно, ибо $\dim E_J(0)H = \infty$). Полагая $B = |A|^{1/2}Q^*JQ|A|^{1/2}$, получим искомым контрпример.

4. Напомним определение классов $S_H^{\pm\infty}(\alpha, \beta)$ оператор-функций, введенных авторами в [7] для описания некоторых классов обобщенных резольвент эрмитова оператора с лакунами.

Определение 6. Оператор-функцию $F(z) \in R_H$ будем относить к классу $S_H^{\pm\infty}(\alpha, \beta)$ ($S_H^{-\infty}(\alpha, \beta)$), если $\omega(z)F(z) \in R_H$ ($\omega^{-1}(z)F(z) \in R_H$), где $x \in \mathbb{Z}_+$, $\omega(z) = (z - \beta)(z - \alpha)^{-1}$, $-\infty < \alpha < \beta < \infty$.

Для классов $S_H^{\pm\infty}(\alpha, \beta)$ справедливы аналоги теорем 1, 2 и 4–6. Приведем формулировку лишь аналога теоремы 4.

Теорема 7. Пусть $F(z) \in S_H^{\pm\infty}(\alpha, \beta)$. Тогда:

- 1). $\exists \alpha = b_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_m < \beta$ такие, что $F(z)$ голоморфна и монотонна в интервалах (α, β_1) , (b_1, b_2) , ..., (b_{m-1}, b_m) , (b_m, β) ;
- 2). $\forall x \in (\alpha, \beta)$, $x \neq b_j$, $(1 \leq j \leq m)$ $\text{card } \{\sigma(F(x)) \cap (0, +\infty)\} \leq x$;
- 3). Если $x_j = x_j(F)$ ($1 \leq j \leq m$) — число таких положительных собственных значений оператора $F(x)$, $x \in (b_{j-1}, b_j)$, занумерованных с учетом кратности в порядке убывания, для которых

$$\lim_{x \uparrow b_j} \lambda_{x_j}(F(x)) = +\infty$$

и

$$x_{m+1} = x_{m+1}(F) = \lim_{x \uparrow \beta} \text{card } \{\sigma(F(x)) \cap (0, +\infty)\} = x_j^+$$

то справедливо равенство

* Ю. Л. Шмудьян сообщил авторам, что предложение 7 независимо получено им в работе, находящейся в печати.

$$x = \sum_{j=1}^{m+1} x_j(F) = \sum_{j=1}^m x_j(F) + x_{\beta}^+.$$

Обратно, если $F(z) \in R_H$ и удовлетворяет условиям 1)–3), то $F(z) \in S_H^{\pm}(\alpha, \beta)$.

Доказательство вытекает из теоремы 4 и очевидной эквивалентности:

$$F(z) \in S_H^{\pm} \approx S_H^{\pm}(-\infty, 0) \Leftrightarrow F\left(\frac{z-\beta}{z-\alpha}\right) \in S_H^{\pm}(\alpha, \beta).$$

Московский инженерно-строительный институт
Донецкий политехнический институт

Поступила 1. VIII. 1988

Վ. Ա. ԴԵՐԿԱՉ, Մ. Մ. ՄԱԼԱՄՈՒԴ. Կրեյն-Ստիլտիեսի ֆունկցիաների մի դասի բնութագրացման
մասին (ամփոփում)

Աշխատանքում ուսումնասիրվում են հեղինակների կողմից ավելի վաղ ներմուծված $S_H^{\pm\alpha}$ դասեր, որոնք հանդիսանում են C_+ -ում $F(z)$ անալիտիկ օպերատոր-ֆունկցիաներ ու բացասական կեղծ մասով և որոնք համար $x^{\pm 1} F(z) \in N_x$:

Այն դեպքում, երբ $x = 0$, $S_x^{\pm 0}$ դասերը համընկնում են հայտնի Կրեյն-Ստիլտիեսի դասերի հետ: $F(z) \in N$ օպերատոր-ֆունկցիաների զրոների և բևեռների տերմիններով ստացված են նրանց պատկանելության հայտանիշներ նշված դասերին:

V. A. DERKACH, M. M. MALAMUD. *On generalization of the Krein—Stieltjes class of functions (summary)*

The paper deals with introduced by the same authors (see Soviet Math. Dokl.—1987, vol. 35, № 2) classes $S_H^{\pm\alpha}$ of analytic in C_+ operator—valued functions $F(z)$ with nonnegative imaginary part characterised by the $x^{\pm 1} F(z) \in N_x$. If $x = 0$ the classes $S_H^{\pm 0}$ are identical to the Krein—Stieltjes classes. In terms of zeros and poles of operator-valued functions $F(z) \in N$ the criteria that they belong to the described classes are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн. О резольвентах эрмитова оператора с индексом дефекта (n, n) , ДАН СССР, 1946, 52, № 8, 657—660.
2. М. Г. Крейн. Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля, ДАН СССР, 1951, 76, № 1, 21—24.
3. М. Г. Крейн. Об одном обобщении исследований Стильтеса, ДАН СССР, 87, № 6, 1962, 881—884.
4. Н. И. Ахиезер. Классическая проблема моментов, М., Физматгиз, 1961.
5. Ф. Аткинсон. Дискретные и непрерывные граничные задачи, М., Мир, 1968.
6. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман. Проблема моментов Маркова и экспериментальные задачи, М., Наука, 1973.
7. В. А. Деркач, М. М. Маламуд. О функции Вейля и эрмитовых операторах с лакунами, ДАН СССР, 1987, 293, № 5, 1041—106.
8. Ш. Н. Саакян. К теории резольвент симметрического оператора с бесконечными дефектными числами, ДАН АрмССР, 1965, 41, № 4, 1269—1272.
9. В. А. Деркач, М. М. Маламуд. Обобщенные резольвенты и граничные задачи для эрмитовых операторов с лакунами, Киев, 1988, 64 с. Препринт института математики АН УССР, 88, 59.

10. В. А. Деркач, М. М. Маламуд. О некоторых классах аналитических оператор-функций с неотрицательной мнимой частью, ДАН УССР, серия А, 1989, № 3.
11. М. Г. Крейн, Г. Лангер. О дефектных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве Π_χ , Функцион. анализ, 1971, т. 5, № 3, 54—69.
12. M. G. Krein, H. Langer. Über einige Fortsetzungsprobleme die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren in Räume Π_χ zusammenhängen, Math. Nachr., 1977, 77, 187—236.
13. Т. Като. Теория возмущений линейных операторов. М., Мир, 1972.
14. С. Г. Крейн, В. П. Трофимов. О кратности характеристической точки голоморфной оператор-функции, Матем. исследования, 1970, т. 5, № 2, 105—114.
15. И. Ц. Гохберг, Е. И. Сигал. Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше, Матем. сб., 1971, т. 84, 607—630.
16. В. А. Деркач, М. М. Маламуд. Функция Вейля эрмитова оператора, Киев, 1988, 52 с. Деп. в Укр. НИИНТИ, № 779-УК-88.
17. Ю. П. Гинабург. О J-нерастягивающих оператор-функциях, ДАН СССР, 1957, 117, № 2, 171—173.

УДК 517.51

Ф. А. ТАЛАЛЯН

О СУЩЕСТВЕННО АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ
ФУНКЦИЯХ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Введение

В нашей совместной с А. А. Талаляном работе [1] было введено и изучено некоторое обобщение понятия абсолютной непрерывности функций многих переменных. Функции, обладающие указанным свойством абсолютной непрерывности, мы в дальнейшем будем называть существенно абсолютно непрерывными по Каратеодори*. Существенно абсолютная непрерывность по Каратеодори определяется с помощью понятия существенно абсолютной непрерывности по Витали в заданной области. Настоящая работа посвящена дальнейшему изучению указанных понятий. Доказываются две теоремы. Теорема 1 — о функциях, существенно абсолютно непрерывных по Витали, является обобщением теоремы 1 работы [1]. Теорема 2 устанавливает связь между существенно абсолютной непрерывностью по Каратеодори и наличием у рассматриваемой функции обобщенных производных.

Сначала приведем (с некоторыми изменениями) обозначения и определения, введенные в [1].

Через R^m обозначим m -мерное евклидово пространство. Если $x \in R^m$, то через $x_i (1 \leq i \leq m)$ обозначим i -ю координату x . Таким образом $x = (x_1, \dots, x_m)$. Аналогично $a = (a_1, \dots, a_m)$, $u = (u_1, \dots, u_m)$ и т. д.

Пусть $x \in R^n$, $1 \leq k \leq m-1$ и $i_1, \dots, i_k$ — произвольный набор попарно различных натуральных чисел, заключенных между 1 и m . Обозначим через $r^{i_1, \dots, i_k}(x)$ точку из R^{m-k} , полученную из x удалением координат $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ и через $t^{i_1, \dots, i_k}(x)$ — точку из R^k , полученную из x , сохранением указанных координат и удалением остальных.

Если $E \subset R^m$ и $w = (w_1, \dots, w_k) \in R^k$, то мы полагаем

$$r^{i_1, \dots, i_k}(E) = \{r^{i_1, \dots, i_k}(x) : x \in E\}$$

$$t^{i_1, \dots, i_k}(E) = \{t^{i_1, \dots, i_k}(x) : x \in E\}$$

и

$$E_w^{i_1, \dots, i_k} = \{t^{i_1, \dots, i_k}(x) : x \in E, t^{i_1, \dots, i_k}(x) = w\}.$$

* В [1] эти функции названы обобщенно абсолютно непрерывными.

Наконец, если F —функция m переменных, определенная на множестве E , то через $F_w^{i_1, \dots, i_k}$ мы обозначим функцию $m-k$ переменных, определенную на $E_w^{i_1, \dots, i_k}$ равенством

$$F_w^{i_1, \dots, i_k}(r^{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{x})) = F(\mathbf{x}).$$

Иногда вместо $E_w^{i_1, \dots, i_k}$ и $F_w^{i_1, \dots, i_k}$ мы будем писать соответственно $E_{w_1, \dots, w_k}^{i_1, \dots, i_k}$ и $F_{w_1, \dots, w_k}^{i_1, \dots, i_k}$.

Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ —две точки из R^m такие, что $a_i \neq b_i$ для всех $i=1, \dots, m$. Положим

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{x} \in R^m : \min(a_i, b_i) \leq x_i \leq \max(a_i, b_i); i=1, \dots, m\},$$

т. е. $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ —это замкнутый m -мерный сегмент с ребрами, параллельными координатным осям, определенный точками $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Всюду в дальнейшем, имея дело с сегментами, мы будем подразумевать сегменты указанного вида. Вершины сегмента $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ —это те точки $\mathbf{v} \in R^m$, для которых при любом $i=1, \dots, m$ либо $v_i = a_i$, либо $v_i = b_i$. Очевидно каждый m -мерный сегмент может быть задан любой парой своих вершин $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ таких, что $u_i \neq v_i$, $i=1, \dots, m$. В этом случае мы будем говорить, что пара вершин $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ является определяющей для данного сегмента.

Пусть J —некоторый m -мерный сегмент. Будем говорить, что сегмент J маркирован, если каждой его вершине приписан знак $+$ или $-$ так, что знаки, приписанные соседним вершинам (т. е. вершинам, у которых все координаты кроме одной совпадают) различны. Если $\mathbf{v}$ —вершина маркированного сегмента J , то приписанный ей знак будем обозначать через $s(\mathbf{v}; J)$.

Пусть $\mathbf{a}$ —некоторая фиксированная вершина сегмента J . Каждой вершине $\mathbf{v}$ припишем знак $(-1)^{q(\mathbf{v}, \mathbf{a})}$, где $q(\mathbf{v}, \mathbf{a})$ —число координат v_i вершины $\mathbf{v}$, совпадающих с соответствующими координатами a_i выбранной вершины $\mathbf{a}$. Таким образом, выбор одной вершины задает определенную маркировку на данном сегменте. Справедливо и обратное. Каждая маркировка определяется некоторой вершиной. Для любых двух фиксированных вершин $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ сегмента J разность $q(\mathbf{v}, \mathbf{a}) - q(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ имеет постоянную четность ([1], лемма 4). Поэтому на каждом сегменте возможны только две маркировки. Будем говорить, что m -мерный сегмент J маркирован положительно, если его маркировка совпадает с маркировкой, определяемой вершиной с минимальными координатами. В противном случае J называется отрицательно маркированной.

Если m -мерный сегмент J маркирован по вершине $\mathbf{a}$, $1 \leq k \leq m-1$ и $i_1, \dots, i_k$ —попарно различные натуральные числа, заключенные между 1 и m , то $(m-k)$ -мерный сегмент $r^{i_1, \dots, i_k}(J)$ всегда будем считать маркированным по вершине $r^{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{a})$. Аналогично понимается выражение $r^{i_1, \dots, i_k}(J)$. Маркированные сегменты $r^{i_1, \dots, i_k}(J)$ и

* Для данного понятия в [1] был использован термин ориентация.

$i_1, \dots, i_k(J)$ будем называть маркированными проекциями маркированного сегмента.

Пусть J — маркированный m -мерный сегмент и F — действительная функция m переменных, область определения которой содержит все вершины J . Положим

$$\Delta_m(F; J) = \sum s(v; J) F(v),$$

где сумма берется по всем вершинам v сегмента J . Величину $\Delta_m(F, J)$ принято называть разностью (или смешанной разностью) F на J . Очевидно при переходе к противоположной маркировке разность меняет знак.

Если F — функция m переменных, J — k -мерный маркированный сегмент, причем $k < m$, и если $i_1 < \dots < i_k$ — попарно различные натуральные числа, заключенные между 1 и m , то через $\Delta_{i_1, \dots, i_k}^{i_1, \dots, i_k}(F, J)$ мы обозначим разность F на J , взятую относительно переменных с номерами $i_1, \dots, i_k$. Таким образом, $\Delta_{i_1, \dots, i_k}^{i_1, \dots, i_k}(F; J)$ будет функцией остальных переменных.

Далее интеграл

$$\int f d\mu_m \quad (\mu_m — m\text{-мерная мера Лебега})$$

от измеримой функции f по маркированному сегменту J полагается, по определению, равным обычному интегралу Лебега, умноженному на коэффициент $+1$ или -1 в зависимости от того, положительно или отрицательно маркирован J .

Теперь мы можем перейти к понятию существенно абсолютной непрерывности по Каратеодори.

Пусть Ω — область в R^m и F — действительная функция, заданная на Ω .

Определение 1. Функция F называется существенно абсолютно непрерывной по Витали в Ω , если существует множество $E \subset \Omega$ с $\mu_m(\Omega \setminus E) = 0$, обладающее следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что каково бы ни было конечное семейство $\{J_k; k = 1, \dots, n\}$ попарно неперекрывающихся m -мерных сегментов $J_k \subset \Omega$ с вершинами из E и с суммой мер

$$\sum_{k=1}^n \mu_m(J_k) < \delta,$$

имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^n |\Delta_m(F, J_k)| < \varepsilon.$$

Определение 2. Функция F называется локально существенно абсолютно непрерывной по Витали в Ω , если существует множество $E \subset \Omega$ с $\mu_m(\Omega \setminus E) = 0$ такое, что для каждой ограниченной области Ω_0 с замыканием $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что каково бы ни было конечное семейство $\{J_k; k = 1, \dots, n\}$ попарно не-

перекрывающихся m -мерных сегментов $J_k \subset \Omega_0$ с вершинами из $\Omega_0 \cap E$ и с суммой мер

$$\sum_{k=1}^n \mu_m(J_k) < \delta,$$

имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^n |\Delta_m(F; J_k)| < \varepsilon.$$

Заметим, что локальная существенно абсолютная непрерывность по Витали в Ω эквивалентна существенно абсолютной непрерывности по Витали в каждой ограниченной области Ω_0 с замыканием $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$.

Определение 3. Функция F называется существенно абсолютно непрерывной по Каратеодори в Ω , если

1. F существенно абсолютно непрерывна по Витали в Ω .
2. Для каждого набора попарно различных натуральных чисел $i_1, \dots, i_k$ таких, что $1 \leq k \leq m-1$ и $1 \leq i_p \leq m$; $p=1, \dots, k$ для μ_k — почти всех $u \in t^{i_1, \dots, i_k}(\Omega)$ функция $F_u^{i_1, \dots, i_k}$ существенно абсолютно непрерывна по Витали в $\Omega_u^{i_1, \dots, i_k}$.

Определение 4. Функция F называется локально существенно абсолютно непрерывной по Каратеодори в Ω , если F существенно абсолютно непрерывна в каждой ограниченной области Ω , с замыканием $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$.

В настоящей работе доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть F -локально существенно абсолютно непрерывна по Витали в Ω . Тогда существует единственная локально интегрируемая в Ω функция f и множество $M \subset \Omega$ с $\mu(\Omega \setminus M) = 0$ такие, что для каждого замкнутого m -мерного сегмента $J \subset \Omega$, вершины которого принадлежат M , имеет место равенство

$$\Delta_m(F; J) = \int_J f d\mu_m. \quad (1)$$

Если область Ω ограничена и F существенно абсолютно непрерывна по Витали в Ω , то функция f из (1) будет интегрируемой в Ω .

Теорема 2. Следующие условия равносильны:

1. F локально существенно абсолютно непрерывна по Каратеодори в Ω .
2. Для каждого мультииндекса α с компонентами, равными 0 или 1, в Ω существует обобщенная производная $D^\alpha F$.

§ 2. Предварительные леммы

Лемма 1. Пусть J -маркированный m -мерный сегмент и $c \in \mathbb{R}^m$ — точка, не лежащая на $(m-1)$ -мерных гиперплоскостях, определенных $(m-1)$ -мерными гранями J . Тогда справедливы равенства

$$\Delta_m(F; J) = \sum_w s(w; J) \Delta_m(F; \{c, w\}) \quad (2)$$

и

$$\int f d\mu_m = \sum_w s(w; J) \int f d\mu_m. \quad (13)$$

где суммирование производится по всем вершинам w сегмента J и $[c, w]$ считается маркированным по вершине c .

Доказательство. Пусть $J = [a, b]$ маркирован по вершине a . По условию $c_i \neq a_i$ и $c_i \neq b_i$ для всех $i = 1, \dots, m$. Каждая вершина v сегмента J является вершиной только для одного сегмента $[c, w]$, при $w = v$. Следовательно $F(v)$ входит в правую часть (2) с коэффициентом $s(v; J)$. Пусть теперь v — вершина некоторого сегмента $[c, w]$, участвовавшего в (2), отличен от вершин J . Пусть $i_1, \dots, i_n$ — все те натуральные числа между 1 и m , для которых $v_{i_k} = c_{i_k}$; $i = 1, \dots, n$. В рассматриваемом случае $n \geq 1$. Очевидно v будет вершиной сегмента $[c, w]$ для всех 2^n вершин w сегмента J , для которых $w_{i_k} = a_{i_k}$ или $w_{i_k} = b_{i_k}$, $k = 1, \dots, n$ и в $\Delta_m(F; [c, w])$ $F(v)$ входит с одним и тем же коэффициентом $(-1)^n$. С другой стороны, суммируя по всем указанным w , будем иметь

$$\sum |s(w; J) : w_{i_k} = a_{i_k} \text{ или } w_{i_k} = b_{i_k}; k = 1, \dots, n| = 0.$$

Таким образом, для рассматриваемой вершины v коэффициент при $F(v)$ в правой части (2) равен нулю. Этим равенство (2) доказано.

Далее заметим, что для каждой вершины w сегмента J с координатами

$$w_i = \begin{cases} \min(a_i, b_i), & \text{если } \max(a_i, b_i) < c_i \\ \max(a_i, b_i), & \text{если } c_i < \min(a_i, b_i) \\ a_i \text{ или } b_i & \text{— для остальных } i \end{cases} \quad (4)$$

маркировка сегмента $[c, w]$ совпадает с маркировкой сегмента $[a, b]$ в зависимости от того положителен или нет знак $s(w; J)$.

Действительно, для данной вершины w , удовлетворяющей (4), рассмотрим следующие подмножества отрезка натурального ряда $\{1, \dots, m\}$.

$$A_1 = \{i : c_i < a_i < b_i\}, A_2 = \{i : a_i < c_i < b_i, w_i = a_i\},$$

$$A_3 = \{i : a_i < c_i < b_i, w_i = b_i\}, A_4 = \{i : a_i < b_i < c_i\},$$

$$A_5 = \{i : a_i > b_i > c_i\}, A_6 = \{i : a_i > c_i > b_i, w_i = a_i\}.$$

Пусть n_k — это число элементов A_k ; $k = 1, \dots, 6$. Тогда $p = n_1 + n_3 + n_5 + n_6$ есть число тех значений i , при которых $c_i < w_i$, $q = n_2 + n_4 + n_5 + n_6$ есть число тех значений i , при которых $w_i = a_i$ и $l = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ есть число тех значений i , при которых $a_i < b_i$. Имеем $p + q + l = 2n_3 + 2n_6$, откуда получаем, что p и l имеют одинаковую четность в том и только в том случае, когда q — четное число или, что то же самое, сегменты $[a, b]$ и $[c, w]$ одинаково маркированы тогда и только тогда, когда $s(w, J) = (-1)^q$ положителен.

Таким образом, для указанных вершин w выражение

$$s(w; J) \int_{[c, w]} f d\mu_m$$

представляет собой интеграл по сегменту, маркировка которого согласована с маркировкой J . Для остальных вершин имеем $\mu_m(J \cap [c, w]) = 0$. Отсюда

$$\sum s(w; J) \int_{[c, w] \cap J} f d\mu_m = \int_J f d\mu_m. \quad (5)$$

С другой стороны, легко видеть, что интегралы по множествам $[c, w] \setminus J$ под знаком суммы в (3) взаимно сокращаются, откуда получаем

$$\sum_w s(w; J) \int_{[c, w] \setminus J} f d\mu_m = 0. \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует (3). Лемма 1 доказана.

В следующей лемме и далее, через 1_m обозначен m -мерный мультииндекс, все компоненты которого равны 1.

Лемма 2. Пусть $\Omega \in R^m$ — некоторая область и F — действительная функция, обладающая в Ω обобщенной производной $D^{1_m} F = f$. Тогда F локально существенно абсолютно непрерывна по Витали в Ω .

Доказательство. Так как, по условию, F и f локально суммируемы в Ω , то имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon = F \text{ и } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon = f \text{ в } L^1_{loc}(\Omega), \quad (7)$$

где F_ε и f_ε — это ε -усреднения F и f соответственно.

Для каждого $x \in \Omega$ при $\varepsilon < \text{dis}(x, \partial\Omega)$ справедливо также равенство

$$D^{1_m} F_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x). \quad (8)$$

Исходя из (7), с помощью диагонального процесса можно построить последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и множество $E \subset \Omega$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\mu_m(\Omega \setminus E) = 0, \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\varepsilon_n}(x) = F(x), \quad x \in E \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\varepsilon_n}(x) = f(x), \quad x \in E. \quad (11)$$

Далее, для каждого m -мерного сегмента $J \subset \Omega$, вершины которого принадлежат E , справедливо равенство

$$\Delta_m(F; J) = \int_J f d\mu_m. \quad (12)$$

Действительно. Пусть a, b — определяющая пара вершин для J , причем a — это вершина с минимальными координатами. В силу (8), для достаточно больших n имеем

$$\begin{aligned}
\int f_{i_n} d\mu_m &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_{m-1}}^{b_{m-1}} dx_{m-1} \int_{a_m}^{b_m} \frac{\partial^m F_{i_n}}{\partial x_1 \cdots \partial x_{m-1} \partial x_m} (x_1, \dots, x_{m-1}, x_m) dx_m = \\
&= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_{m-1}}^{b_{m-1}} \Delta_1^m \left(\frac{\partial^m F_{i_n}}{\partial x_1 \cdots \partial x_{m-1}}; [a_m, b_m] \right) dx_{m-1} = \\
&= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_{m-2}}^{b_{m-2}} \Delta_2^{m-1, m} \left(\frac{\partial^{m-2} F_{i_n}}{\partial x_1 \cdots \partial x_{m-2}}; [a_{m-1}, b_{m-1}] \right. \\
&\quad \left. \times [a_m, b_m] \right) dx_{m-2} = \cdots = \Delta_m(F_{i_n}; J). \quad (13)
\end{aligned}$$

Так как вершины J принадлежат E , то в силу (10)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_m(F_{i_n}; J) = \Delta_m(F; J). \quad (14)$$

Равенство (12) следует из (11), (13) и (14), в силу теоремы Лебега об ограниченной сходимости.

Пусть теперь Ω_0 — произвольная ограниченная область с замыканием $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$. Тогда интеграл

$$\int_A f d\mu_m$$

является абсолютно непрерывной функцией на измеримых подмножествах $A \subset \Omega_0$. Отсюда, а также из равенств (9) и (12) следует, что F существенно абсолютно непрерывна по Витали в Ω_0 .

Лемма 3. Пусть Ω — область в R^m , F — действительная измеримая функция, заданная в Ω , $1 \leq k \leq m-1$ и $i_1, \dots, i_k$ — попарно различные натуральные числа, заключенные между 1 и m , занумерованные по возрастанию. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ — мультииндекс с компонентами

$$\alpha_j \equiv \begin{cases} 0, & \text{при } j = i_1, \dots, i_k \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (15)$$

Тогда, если в Ω существует обобщенная производная $D^\alpha F$, то для μ_k -почти всех $u = (u_1, \dots, u_k) \in I^{i_1, \dots, i_k}(\Omega)$ в $\Omega_u^{i_1, \dots, i_k}$ существует обобщенная производная

$$D^{1_{m-1}} F_u^{i_1, \dots, i_k} = (D^\alpha F)_u^{i_1, \dots, i_k}. \quad (16)$$

Доказательство. Надо доказать, что μ_k -почти все точки $u \in I^{i_1, \dots, i_k}(\Omega)$ обладают тем свойством, что для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_u^{i_1, \dots, i_k})$ выполняется равенство

$$\int_{\Omega_{u_1, \dots, u_k}^{t_1, \dots, t_k}} F_u^{t_1, \dots, t_k} D^{1-m-k} \varphi d\mu_{m-k} = (-1)^{m-k} \int_{\Omega_{u_1, \dots, u_k}^{t_1, \dots, t_k}} (D^s F)_u^{t_1, \dots, t_k} \varphi d\mu_{m-k}. \quad (17)$$

Сначала докажем, что если J есть m -мерный сегмент с замыканием $\overline{J} \subset \Omega$, то для почти всех $u \in t_1, \dots, t_k(J)$ равенство

$$\begin{aligned} \int_{t_1, \dots, t_k(J)} F_u^{t_1, \dots, t_k}(v) \frac{\partial^{m-k} \varphi(v)}{\partial v_1 \dots \partial v_{m-k}} d\mu_{m-k}(v) = \\ = (-1)^{m-k} \int_{t_1, \dots, t_k(J)} (D^s F)_u^{t_1, \dots, t_k}(v) \varphi(v) d\mu_{m-k}(v) \end{aligned} \quad (18)$$

выполняется для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(r^{t_1, \dots, t_k}(J))$. (Заметим, что $J_u^{t_1, \dots, t_k} = r^{t_1, \dots, t_k}(J)$ для каждого $u \in t_1, \dots, t_k(J)$).

Действительно, пусть $\varphi \in C_0^\infty(r^{t_1, \dots, t_k}(J))$ задано. Так как F и $D^s F$ суммируемы на J , то для произвольной функции $\psi \in C_0^\infty(t_1, \dots, t_k(J))$, в силу теоремы Фубини имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_1, \dots, t_k(J)} \left(\int_{r^{t_1, \dots, t_k}(J)} F_u^{t_1, \dots, t_k}(v) \frac{\partial^{m-k} \varphi(v)}{\partial v_1 \dots \partial v_{m-k}} d\mu_{m-k}(v) \right) \varphi(u) d\mu_k(u) = \\ = \int_{t_1, \dots, t_k(J)} \left(\int_{r^{t_1, \dots, t_k}(J)} F_u^{t_1, \dots, t_k}(v) \frac{\partial^{m-k} (\varphi(v) \psi(u))}{\partial v_1 \dots \partial v_{m-k}} d\mu_{m-k}(v) \right) d\mu_k(u) = \\ = \int_J F D^s (\varphi \psi) d\mu_m = (-1)^{m-k} \int_J D^s F \cdot \varphi \psi d\mu_m = \\ = (-1)^{m-k} \int_{t_1, \dots, t_k(J)} \left(\int_{r^{t_1, \dots, t_k}(J)} (D^s F)_u^{t_1, \dots, t_k}(v) \varphi(v) d\mu_{m-k}(v) \right) \psi(u) d\mu_k(u) = \\ = \int_{t_1, \dots, t_k(J)} \left((-1)^{m-k} \int_{r^{t_1, \dots, t_k}(J)} (D^s F)_u^{t_1, \dots, t_k}(v) \varphi(v) d\mu_{m-k}(v) \right) \psi(u) d\mu_k(u). \end{aligned}$$

Отсюда, в силу произвольности ψ получаем, что при заданном $\varphi \in C_0^\infty(r^{t_1, \dots, t_k}(J))$ равенство (18) выполняется μ_k -почти всюду на $t_1, \dots, t_k(J)$. Наконец, используя сепарабельность пространства $C_0^\infty(r^{t_1, \dots, t_k}(J))$ (2, § 27, 2 (5)) легко доказать, что для μ_k -почти всех $u \in t_1, \dots, t_k(J)$ равенство (18) выполняется для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(r^{t_1, \dots, t_k}(J))$.

Теперь приступим непосредственно к доказательству (17). Для этого заметим, что из (18) следует, что для μ_k -почти всех $u \in t_1, \dots, t_k(\Omega)$ имеет место следующее: для каждого m -мерного сегмента $J \subset \Omega$ с рациональными вершинами (точку из R^m назовем радио-

нальной, если все ее координаты рациональны) такого, что $u \in t^{i_1, \dots, i_k}(J)$ и для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(r^{i_1, \dots, i_k}(J))$ имеет место равенство (18).

Пусть u принадлежит указанному множеству полной меры в $t^{i_1, \dots, i_k}(\Omega)$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_u^{i_1, \dots, i_k})$. Построив разбиение единицы на $\text{supp}(\varphi)$ ($\text{supp}(\varphi)$ — это носитель φ), подчиненное покрытию конечным числом $(m-k)$ -мерных открытых сегментов с рациональными вершинами, замыкания которых содержатся в $\Omega_u^{i_1, \dots, i_k}$, мы можем представить φ в виде

$$\varphi = \sum_{l=1}^n \varphi_l; \quad \varphi_l \in C_0^\infty(\Omega_u^{i_1, \dots, i_k}), \quad (19)$$

где для каждого $l = 1, \dots, n$ существует m -мерный сегмент $J_l \subset \Omega$ с рациональными вершинами такой, что

$$u \in t^{i_1, \dots, i_k}(J_l) \text{ и } \text{supp}(\varphi_l) \subset r^{i_1, \dots, i_k}(J_l); \quad l = 1, \dots, n.$$

Тогда, в силу (17), для каждого $l = 1, \dots, n$ будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_u^{i_1, \dots, i_k}} F_u^{i_1, \dots, i_k} D^{m-1} \varphi_l d\mu_{m-k} &= \int_{r^{i_1, \dots, i_k}(J_l)} F_u^{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial^{m-k} \varphi_l(v)}{\partial v_1 \dots \partial v_{m-k}} d\mu_{m-k}(v) = \\ &= (-1)^{m-k} \int_{r^{i_1, \dots, i_k}(J_l)} (D^\alpha F_u^{i_1, \dots, i_k}(v) \varphi_l(v)) d\mu_{m-k}(v) = \\ &= (-1)^{m-k} \int_{\Omega_u^{i_1, \dots, i_k}} (D^\alpha F_u^{i_1, \dots, i_k} \varphi_l) d\mu_{m-k}. \end{aligned} \quad (20)$$

Суммируя по l от 1 до n обе части равенства (20) и учитывая (19), получим (17), что и требовалось.

§ 3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Сначала докажем, что каков бы ни был замкнутый m -мерный сегмент $I \subset \Omega$, существует функция $f_I \in L^1(I)$ и множество $M_I \subset I$ с $\mu_m(I \setminus M_I) = 0$ такие, что для каждого сегмента $J \subset I$ с вершинами из M_I , имеет место равенство

$$\Delta_m(F; (J)) = \int_J f_I d\mu_m, \quad (21)$$

Действительно. Согласно [1] (теорема 1) существует точка $c \in I$ и функция $f \in L^1(I)$ такие, что для почти всех $x \in I$

$$\Delta_m(F; [c, x]) = \int_{[c, x]} f d\mu_m. \quad (22)$$

Положим $f_I = f$ и в качестве M_I возьмем множество всех тех точек $x \in I$, для которых справедливо (22) и кроме того $x_i \neq c_i$ для всех $i = 1, \dots, m$.

Пусть теперь $J \subset I$ — произвольный сегмент с вершинами из M . Тогда применяя последовательно (2), (22) и (3), будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta_m(F; J) &= \sum_w s(w; J) \Delta_m(F; [c, w]) = \\ &= \sum_w s(w; J) \int_{[c, w]} f_I d\mu_m = \int_J f_I d\mu_m. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (21) доказано.

Далее представим Ω в виде

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k. \quad (23)$$

где каждое Q_k есть замкнутый m -мерный двоичный куб, причем различные Q_k не перекрываются и каждое компактное подмножество Ω покрывается объединением конечного числа кубов Q_k . Пусть для каждого $k = 1, 2, \dots$, f_{Q_k} и $M_{Q_k} \subset \text{int}(Q_k)$ построены согласно (21). Положим

$$f(x) = f_{Q_k}(x), \text{ если } x \in Q_k. \quad (24)$$

Перейдем к построению множества M . Пусть $E \subset \Omega$ — множество, удовлетворяющее условию локальной существенно абсолютной непрерывности по Витали F . Применяя теорему Фубини и удаляя из $E \cap (\bigcup Q_k)$ подходящее множество нулевой меры, можно построить множество M такое, что

$$M \subset E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_{Q_k} \right), \quad \mu_m(\Omega \setminus M) = 0 \quad (25)$$

и для каждого действительного i и $i = 1, \dots, m$

$$M_i^i = \emptyset \text{ или } \mu_{m-1}(\Omega_i^i \setminus M_i^i) = 0. \quad (26)$$

Очевидно $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ и $\mu_m(\Omega \setminus M) = 0$. Докажем, что f и M удовлетворяют (1).

Пусть $J \subset \Omega$ — замкнутый m -мерный сегмент с вершинами из M . Для каждого заданного $\delta > 0$, выбирая n настолько большим, чтобы

$$J \subset \bigcup_{k=1}^n Q_k$$

и воспользуясь условиями (25) и (26), сегмент J можно представить в виде конечного объединения попарно неперекрывающихся сегментов

$$J = \left(\bigcup_{i=1}^p J_i' \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^q J_i'' \right) \quad (27)$$

так, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) Каждый сегмент J_i' содержится в некотором кубе Q_k , $k \leq n$ и его вершины принадлежат соответствующему множеству M_{Q_k} .
- 2) Вершины каждого сегмента J_i'' принадлежат множеству E и

$$\sum_{i=1}^q \mu_m(J_i'') < \delta. \quad (28)$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы оно удовлетворяло условию локальной существенно абсолютной непрерывности по Витали функции F и, чтобы при $A \subset J$ и $\mu_m(A) < \delta$ выполнялось неравенство

$$\left| \int_A f d\mu_m \right| < \varepsilon. \quad (29)$$

Для выбранного δ построим разложение (27). Тогда, рассматривая на сегментах J'_i и J''_i маркировки, согласованные с маркировкой J , в силу (21), (24)–(29) и лемме 6 работы [1], будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \Delta_m(F; J) - \int_J f d\mu_m \right| &\leq \left| \sum_{i=1}^p \Delta_m(F; J'_i) - \sum_{i=1}^p \int_{J'_i} f d\mu_m \right| + \\ &+ \left| \sum_{i=1}^q \Delta_m(F; J''_i) \right| + \left| \int_{\bigcup_{i=1}^q J''_i} f d\mu_m \right| \leq 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (30)$$

В силу произвольности ε , из (30) получим (1). Единственность функции f следует из теоремы Фубини и теоремы о точках Лебега интегрируемой функции.

Наконец, рассмотрим случай, когда область Ω ограничена и функция F существенно абсолютно непрерывна по Витали в Ω . Представим Ω в виде объединения счетного числа попарно неперекрывающихся сегментов с вершинами из M : $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$. Положим

$$\Omega_n = \bigcup_{k=1}^n J_k; \quad n = 1, 2, \dots$$

Имеем

$$\left| \int_{\Omega_q} f d\mu_m - \int_{\Omega_p} f d\mu_m \right| = \left| \sum_{k=p+1}^q \int_{J_k} f d\mu_m \right| = \left| \sum_{k=p+1}^q \Delta_m(F; J_k) \right|. \quad (31)$$

Так как $\mu_m(\Omega_p) \rightarrow \mu_m(\Omega)$ при $p \rightarrow \infty$, то из (31) следует, что предел

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\Omega_p} f d\mu_m$$

существует и конечен для любой последовательности областей Ω_n указанного вида. Отсюда следует интегрируемость f в Ω .

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть выполняется 2) и Ω_0 есть ограниченная область в R^m с замыканием $\Omega_0 \subset \Omega$. Так как в Ω существует обобщенная производная $D^1 F$, то согласно лемме 2 функция F существенно абсолютно непрерывна по Витали в Ω_0 .

Далее, пусть заданы натуральные числа $i_1, \dots, i_k$ ($1 \leq k \leq m-1$, $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$). Определим мультииндекс α согласно (15). Так как

на Ω существует обобщенная производная $D^s F$, то по лемме 3 для μ_k -почти для всех $u \in I_{u_1, \dots, u_k}^{l_1, \dots, l_k}(\Omega)$ в $\Omega_{u_1, \dots, u_k}^{l_1, \dots, l_k}$ существует обобщенная производная $D^{s-m-k} F_{u_1, \dots, u_k}^{l_1, \dots, l_k}$. Применяя лемму 1 к $F_{u_1, \dots, u_k}^{l_1, \dots, l_k}$ и $\Omega_{u_1, \dots, u_k}^{l_1, \dots, l_k}$ мы получаем, что $F_{u_1, \dots, u_k}^{l_1, \dots, l_k}$ локально существенно абсолютно непрерывна по Витали в $\Omega_{u_1, \dots, u_k}^{l_1, \dots, l_k}$. Следовательно, для μ_k -почти всех $u \in I_{u_1, \dots, u_k}^{l_1, \dots, l_k}(\Omega)$ функция $F_{u_1, \dots, u_k}^{l_1, \dots, l_k}$ существенно абсолютно непрерывна по Витали в $(\Omega_0)_{u_1, \dots, u_k}^{l_1, \dots, l_k}$.

Доказательство импликации $1) \Rightarrow 2)$. Сначала докажем, что на каждом сегменте J с замыканием $\bar{J} \subset \Omega$ существует интегрируемая обобщенная производная $D^s F$.

Действительно, пусть $J = [a, b]$, где $a_i < b_i$; $i = 1, \dots, m$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, где

$$\alpha_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j = l_1, \dots, l_n \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases} \quad (32)$$

Как доказано в [1] существует постоянная C и функции $f \in L^1(J)$ и $f_{i_1, \dots, i_k} \in L^1(r^{i_1, \dots, i_k}(J))$ для всех наборов попарно различных натуральных чисел $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq m$, такие, что для почти всех $x \in J$ имеет место равенство

$$F(x) = \int_{[a, x]} f d\mu_m + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq m} \int_{r^{i_1, \dots, i_k}([a, x])} f_{i_1, \dots, i_k} d\mu_{m-k} + C. \quad (33)$$

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(J)$. В силу (33) имеем следующее равенство, в котором сумма берется по всем $\{i_1, \dots, i_k\}$ таким, что $\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{l_1, \dots, l_n\} = \emptyset$.

$$\begin{aligned} \int_J F D^s \varphi d\mu_m &= \int_J D^s \left(\int_{[a, x]} f d\mu_m + \sum_{r^{i_1, \dots, i_k}([a, x])} \int f_{i_1, \dots, i_k} d\mu_{m-k} \right) \varphi d\mu_m = \\ &= \int_J \left(\int_{r^{i_1, \dots, i_n}([a, x])} f_{x_{l_1}, \dots, x_{l_n}}^{l_1, \dots, l_n} d\mu_{m-n} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r^{i_1, \dots, i_k, l_1, \dots, l_n}([a, x])} (f_{i_1, \dots, i_k})_{x_{l_1}, \dots, x_{l_n}}^{l_1, \dots, l_n} d\mu_{m-k-n} \right) \varphi d\mu_m. \end{aligned} \quad (34)$$

В силу теоремы Фубини для каждого набора $\{i_1, \dots, i_k\}$ ($\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{l_1, \dots, l_n\} = \emptyset$) имеем

$$\begin{aligned} \int_J \left| \int_{r^{i_1, \dots, i_k, l_1, \dots, l_n}([a, x])} (f_{i_1, \dots, i_k})_{x_{l_1}, \dots, x_{l_n}}^{l_1, \dots, l_n} d\mu_{m-k-n} \right| d\mu_m &\leq \\ &\leq \int_{r^{i_1, \dots, i_k, l_n}(J)} d\mu_{m-n} \int_{r^{i_1, \dots, i_k}(J)} d\mu_k \int_{r^{i_1, \dots, i_k, l_1, \dots, l_n}([a, x])} \left| (f_{i_1, \dots, i_k})_{x_{l_1}, \dots, x_{l_n}}^{l_1, \dots, l_n} \right| d\mu_{m-k-n} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \int_{r^{i_1, \dots, i_n}(J)} d\mu_{m-n} \int_{r^{i_1, \dots, i_k}(J)} |f_{i_1, \dots, i_k}| d\mu_{m-k} = \mu_{m-n}(r^{i_1, \dots, i_n}(J)) \int_{r^{i_1, \dots, i_k}(J)} |f_{i_1, \dots, i_k}| d\mu_{m-k} \quad (35)$$

Аналогично

$$\int \left| \int_{r^{i_1, \dots, i_n}([a, x])} f_{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}}^{i_1, \dots, i_n} d\mu_{m-k} \right| d\mu_m \leq \mu_{m-n}(r^{i_1, \dots, i_n}(J)) \int |f| d\mu_m \quad (36)$$

Наконец, в силу (34), (35), (36), будем иметь

$$D^* F(x_1, \dots, x_m) = \\ = (-1)^k \left(\int_{r^{i_1, \dots, i_n}([a, x])} f_{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}}^{i_1, \dots, i_n} d\mu_{m-n} + \sum_{r^{i_1, \dots, i_k}, i_1, \dots, i_n \in ([a, x])} (f_{i_1, \dots, i_k})_{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}}^{i_1, \dots, i_n} d\mu_{m-k-n} \right)$$

и $D^* F \in L^1(J)$, что и требовалось доказать.

Общий случай легко следует из рассмотренного частного случая.

Институт прикладных проблем физики
АН Армянской ССР

Поступила 3. IV. 1990

Յ. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ. Բազմաթիվ փոփոխականների էական բացարձակ անընդհատ ֆունկցիաների մասին. (ամփոփում)

Աշխատանքը նվիրված է (1)-ում մտցված Վիտալիի իմաստով և Կարաթեոդորի իմաստով էական բացարձակ անընդհատության գաղափարների հետագա զարգացմանը, Թեորեմ 1-ը հանդիսանում է (1)-ում ապացուցված թեորեմ 1-ի ընդհանրացումը, Թեորեմ 2-ը բացահայտում է ըստ Կարաթեոդորի էական բացարձակ անընդհատության և դիտարկվող ֆունկցիայի ըստ որոշակի տեսքի α մոլտինդեքսների $D^* f$ ընդհանրացված ածանցյալների գոյության միջև եղած կապը:

F. A. TALALYAN. On the essentially absolutely continuous functions of several variables (summary)

This paper is devoted to further investigation of notion of the essentially absolutely continuity both in sense of Vitali and in sense of Caratheodory introduced in (1). The Theorem 1 is a generalization of the Theorem 1, in (1). The Theorem 2 concerned to the connection between the generalized absolute continuity of function f in the sense of Caratheodory and the existence of generalized derivatives $D^* f$ with some multi indices α .

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Талалян и Ф. А. Талалян. О представлениях абсолютно непрерывных функций многих переменных, Изв. АН АрмССР, Математика, 23, № 1, 1989, 3—21.
2. G. Kothe. Topological vector spaces, 1, Springer, 1983.

УДК 517.53

А. А. НЕРСЕСЯН

ОДНА ЗАДАЧА Л. А. РУБЕЛЯ И НЕКОТОРЫЕ РОДСТВЕННЫЕ ВОПРОСЫ

1°. Для плоского множества S пусть $A(S)$ —класс функций, непрерывных на S и аналитических на S° (S° —внутренность множества S).

В 1976 г. Л. А. Рубелем была поставлена задача описания относительно замкнутых подмножеств E области $D \subset \mathbb{C}$, обладающих свойством (R) : Для любой функции $f \in A(E)$ существует аналитическая в D функция g такая, что если последовательность $\{z_n\} \subset E$ и $\{z_n\}' \subset \partial D$, то $f(z_n) \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $g(z_n) \rightarrow \infty$ (см. [1], [2]).

Множества, обладающие свойством (R) будем называть рубелевыми в D . Согласно теореме Н. У. Аракеяна о приближении аналитическими функциями [3], достаточным условием рубелевости является связность и локальная связность множества $D^* \setminus E$, где $D^* = D \cap \{\infty\}$ —одноточечная компактификация области D . В работе [1] М. Гольдстейном построен пример рубелевого множества в $\mathbb{C}$ с локально несвязным дополнением в $\bar{\mathbb{C}}$, а также дано следующее необходимое условие рубелевости, полученное им совместно с П. М. Готье и В. Хентартнером.

(*) : Для любого компакта $K \subset \mathbb{C}$ существует такой компакт $\tilde{K} \subset \mathbb{C}$, что если ограниченная область V имеет границу $\partial V \subset E \cup K$, то $(V \setminus \tilde{K}) \cap \partial E = \emptyset$.

Далее в [1] высказано предположение, что условие (*) является также и достаточным. Следующий пример показывает, что это не так.

Пример 1. Пусть при $n > 1$ Γ_n — график функции

$$y = n + \frac{2n}{2nx - 1} \left| \sin \frac{1}{(2n-1)(2nx-1)} \right|, \quad \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n-1},$$

дополненный отрезком $\left\{ x = \frac{1}{2n-1}, 0 \leq y \leq n + 2n(2n-1) \sin 1 \right\}$ и

лучом $\left\{ x = \frac{1}{2n}, 0 \leq y < +\infty \right\}$, а множество E определено с помощью равенства

$$E = \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n \right) \cup \{x = 0, 0 \leq y < +\infty\},$$

$$\text{где } z_n = \frac{1}{2} \left(\frac{4n-1}{2n(2n-1)} + in \right).$$

Легко видеть, что E удовлетворяет условию (*). Рассмотрим функцию $f \in C(\bar{E})$, равную нулю на $\{x = 0, 0 \leq y < +\infty\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ и

$f(z_n) = n$, $n \geq 1$. Если предположить, что существует целая функция g , ассоциируемая с f по свойству (R) , то ясно, что $\sup_{E \setminus \{z_n\}} |g| = M < +\infty$.

Пусть V_n — плоская область с границей $\partial V_n = \Gamma_n \setminus \left\{ \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n-1}, y=0 \right\}$. Из соображений непрерывности при достаточно больших n имеем $|g(x)| < 2M$, $x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right]$. Так как $|g|$ линейно недостижима из V_n (см. ниже), то согласно обобщенному принципу максимума, установленному в [4], [5], будем иметь $|g| < 2M$ в V_n при достаточно больших n , что противоречит стремлению $g(z_n) \rightarrow \infty$.

В сообщении автора [2] приведена теорема, содержащая решение задачи Рубеля для множеств $E \subset \mathbb{C}$ (т. е. при $D = \mathbb{C}$) с пустой внутренностью. В настоящей заметке наряду с задачей Рубеля мы рассмотрим еще две родственные задачи. Требуется описать замкнутые подмножества $E \subset D$, обладающие одним из следующих свойств (S) или (T) :

(S) : Для любой функции $f \in A(E)$ существует функция $g \in A(D)$ такая, что если $\{z_n\} \subset E$, $\{z_n\}' \subset \partial D$, то $f(z_n) \rightarrow 0$ тогда и только тогда, когда $\bar{g}(z_n) \rightarrow 0$.

(T) : Для любой функции $f \in A(E)$ существует функция $g \in A(D)$ такая, что если $\{z_n\} \subset E$, $\{z_n\}' \subset \partial D$, то $f(z_n) \rightarrow 0$ или $f(z_n) \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $g(z_n)$ стремится, соответственно, к нулю или бесконечности.

Будем говорить, что множество F линейно достижимо из области $V (F, V \subset \bar{\mathbb{C}})$, если существует такой непрерывный путь $\gamma: [0, 1] \rightarrow V$, что для произвольного открытого U , содержащего F , $\gamma(t) \in U$ для значений параметра $t \in (0, 1)$, достаточно близких к 1.

Сформулируем топологическое условие, обобщающее $(*)$.

$(**)$: (i) Существует компакт $K \subset D$ такой, что для произвольной области $V \subset D$, из которой ∂D линейно недостижима и $\bar{\partial} V \subset E$ (где $\bar{\partial} V = D \cap \partial V$), имеет место $V \cap \partial E \subset K$. (ii) Для произвольного компакта $K \subset D$ существует компакт $\bar{K} \subset D$ такой, что если $V \subset D$ — область, $\bar{\partial} V \subset E \cup K$ и ∂D линейно недостижима из V , то $(V \setminus \bar{K}) \cap \partial E = \emptyset$.

Основным результатом заметки является следующая

Теорема 1. Свойства (R) , (S) (при $E^0 = \emptyset$) и (T) влекут $(**)$. В случае односвязности области D и $E^0 = \emptyset$ все четыре свойства эквивалентны.

Нам представляется, что условие $(**)$ достаточно также для свойств более общих, чем (T) , когда рассматриваются произвольная пара, или даже некоторое бесконечное множество значений вместо 0 и ∞ . Не останавливаясь на подробностях доказательства отметим однако, что в случае плоскости ($D = \mathbb{C}$), если для любой $f \in A(E)$ существует целая функция g такая, что для произвольного $A \in \mathbb{C}$, из $\{z_n\} \subset F$, $z_n \rightarrow \infty$, следует, что $f(z_n) \rightarrow A$ эквивалентно $g(z_n) \rightarrow A$, то для некоторого

круга $B \in E \setminus B$ имеет связанное и локально связанное дополнение в $\bar{C}$, что влечет касательную аппроксимацию на $E \setminus B$ с некоторой скоростью (см. [3]). Остается открытым также вопрос является ли условие (**) достаточным для рубеловости множества, когда область D бесконечносвязна, или E имеет непустую внутренность. Во всяком случае для $D = \{|z| < 1\}$ условие (**) недостаточно, чтобы замкнутое множество с непустой внутренностью $E \subset D$ обладало свойством (S).

Пример 2. Пусть $D = \{|z| < 1\}$ и $E = \{z \in D: \operatorname{Re} z \leq 0\} \cup X$, где

$$X = \left\{ z \in D: 0 < x < \frac{1}{2}, y = 1 - 2x \right\}.$$

Ясно, что E удовлетворяет (**). Пусть функция $f \in A(E)$ равна нулю на левом полукруге, входящем в E и стремится к ∞ при стремлении $|z| \rightarrow 1$ по множеству X .

Если предположить, что существует $g \in A(D)$, соответствующая f по свойству (S), то очевидно $g = 0$, что не может иметь места, так как g не должна стремиться к нулю, когда $|z| \rightarrow 1$ и $z \in X$.

Мы воспользуемся теоремой 1, чтобы доказать также следующее утверждение. Пусть $\hat{E}$ — объединение E и предкомпактных в D компонент открытого множества $D \setminus E$.

Теорема 2. Пусть D — односвязная область. Следующие утверждения эквивалентны.

1) Для произвольной функции $f \in A(E)$, $f \neq 0$ на ∂E и числа $c > 1$ существует функция $g \in A(D)$ такая, что

$$\frac{1}{c} |f| \leq |g| \leq c |f| \text{ на } E. \quad (1)$$

2) а) $\partial \hat{E} = \partial E$, б) $D^* \setminus \hat{E}$ локально связно, в) если $\{E_n\}$ — последовательность предкомпактных в D компонент множества $D \setminus E$, то для произвольного компакта $K \subset D$ существует компакт $\tilde{K} \subset D$ такой, что если при некотором n $E_n \cap K \neq \emptyset$, то $E_n \subset \tilde{K}$.

(Последнее условие в) в формулировке теоремы 2 означает, что множество $\cup E_n$ удовлетворяет условию (A) работ [6], [7]).

В свою очередь теорема 2 взаимосвязана с несколько другим кругом задач. Рассмотрим следующее обобщение одной теоремы из работы [8] (см. также [9]).

Теорема 3. Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$ и E — замкнутое подмножество D со связным и локально связным дополнением в D^* .

Тогда если $f \in A(E)$ и $f \neq 0$ на ∂E , то для произвольных $\psi \in A(E)$ и $\epsilon > 0$ существует функция $h \in A(D)$ такая, что $|\psi - h| \leq \epsilon |f|$ на E .

В упомянутом утверждении работы [8] функция f предполагается ограниченной и не имеющей нулей.

2°. Сформулируем в удобной для наших целей, несколько упрощенной форме теорему о гармонической аппроксимации из [2] (в форме, относящейся к общему случаю множеств с непустой внутренностью, см. [10]).

Теорема А. Пусть замкнутое в D подмножество $E \subset D$ ($E^\circ = \emptyset$) удовлетворяет условию (** ii) и следующему условию: если $V \subset D$ — область, $\bar{\partial}V \subset E$ и ∂D линейно недостижима из V , то $V \cap E = \emptyset$. Тогда существует положительная, непрерывная на E функция ψ , $\psi(\zeta) \rightarrow +\infty$, при $\rho(\zeta, \partial D) \rightarrow 0$ (где ρ — сферическое расстояние), такая, что любая функция $f \in C(E)$, $|f| < c_\psi \psi$ на E при некотором $c_\psi > 0$, допускает равномерную на E аппроксимацию с любой точностью гармоническими в D функциями.

Заметим, что согласно известным теоремам о гармонической аппроксимации, условия теоремы А, вообще говоря, не обеспечивают аппроксимируемости с любой точностью на E гармоническими в D функциями произвольной непрерывной на E функции.

Перейдем к доказательствам теорем.

Доказательство теоремы 1. $(R) \Rightarrow (** i)$. Предположим, что (** i) не выполнено и B_n , $n = 1, 2, \dots$ — некоторое компактное исчерпание области D . Существует последовательность областей $V_n \subset D$, $n = 1, 2, \dots$, такая, что $\bar{\partial}V_n \subset E$, ∂D линейно недостижима из V_n и $(V_n \setminus B_n) \cap \partial E \neq \emptyset$. Рассмотрим случай, когда $V_n \cap V_m = \emptyset$, при $n \neq m$. Если V_n один и тот же для некоторой последовательности индексов, то легко видеть, что не выполняется (** ii) (см. ниже). Пусть $z_n \in (V_n \setminus B_n) \cap \partial E$ является точкой пика алгебры $R(X_n)$, где $X_n = (\mathbb{C} \setminus V_n) \cup E$ (см. [11]). Существуют рациональные функции r_n с полюсами вне X_n , удовлетворяющие условиям

$$i) |r_n(z_n) - n| < \frac{1}{4}, \quad ii) |r_n| < \varepsilon_n \text{ на } X_n \setminus D(z_n, s_n),$$

где $D(z_n, s_n) = \{|z - z_n| < s_n\}$, причем $\bar{D}(z_n, s_n) \subset V_n$, $n = 1, 2, \dots$, а $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \frac{1}{4}$. Сумма f ряда $\sum r_n$ является мероморфной функцией в D с полюсами вне E и поэтому $f \in A(E)$, причем f ограничена на $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{\partial}V_n$. Если бы существовала функция $g \in A(D)$, ассоциируемая с f по свойству (R) , то g была бы ограничена на $\bigcup \bar{\partial}V_n$. Так как ∂D линейно недостижима из V_n , то согласно упомянутому обобщению принципа максимума работ [4], [5], g была бы ограничена в $\bigcup V_n$, что не согласуется с $g(z_n) \rightarrow \infty$.

$(R) \Rightarrow (** ii)$. По предположению существует последовательность (необязательно различных) областей $V_n \subset D$, $n = 1, 2, \dots$, таких, что $\bar{\partial}V_n \subset E \cup B_n$, $n \geq 1$, ∂D линейно недостижима из V_n и $(V_n \setminus B_{n+n}) \cap \partial E \neq \emptyset$, $n \geq 1$. Пусть $z_n \in (V_n \setminus B_{n+n}) \cap \partial E$ — точки пика алгебры $R(X_n)$, где $X_n = (\mathbb{C} \setminus V_n) \cup E \cup B_{n+n}$, $n \geq 1$, причем $z_n \neq z_m$, $n \neq m$. Для чисел $\varepsilon_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \frac{1}{4}$, существуют рациональные функции r_n с полюсами вне X_n , удовлетворяющие условиям

$$i) |r_n(z_n) - n| < \varepsilon_n, \text{ ii) } |r_n| < \varepsilon_n \text{ на } X_n \setminus D(z_n, s_n),$$

где $\bar{D}(z_n, s_n) \subset V_n \setminus B_{n_0+n}$, $n \geq 1$, и $\bar{D}(z_n, s_n) \cap \bar{D}(z_m, s_m) = \emptyset$, $n \neq m$. Теперь дословно повторяя рассуждения предыдущего абзаца убедемся в справедливости требуемой импликации.

$(S) \Rightarrow (**)$ ($E^\circ = \emptyset$). Предположим, что $(**)$ не имеет места.

Рассмотрим функции $\tilde{f}$, определенную на замкнутом в D подмножестве

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{\partial} V_n \cup \{z_n\}$, равной нулю на $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{\partial} V_n$ и 1 на $\{z_n\}$, где $\{V_n\}$ и $\{z_n\}$ — последовательности областей и точек, введенные выше при доказательстве $(R) \Rightarrow (**)$.

В качестве f возьмем произвольное непрерывное продолжение на E функции $\tilde{f}$. Если бы существовала функция $g \in A(D)$, соответствующая f по (S) , то легко видеть, что во первых $g \rightarrow 0$ равномерно по $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{\partial} V_n$, когда $\rho(z, \partial D) \rightarrow 0$ и далее, существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $|g(z_n)| > \varepsilon_0$, $n > n_1$ (n_1 — некоторое натуральное число). Повтому существует n_2 такое, что $|g| < \frac{\varepsilon_0}{4}$ на $\bigcup \bar{\partial} V_n \setminus B_{n_2}$. Так как ∂D линейно недостижима из $\bigcup V_n$, то согласно предельной форме принципа максимума (см. [5]) имели бы $\lim_{n \rightarrow \infty} |g(z_n)| < \frac{\varepsilon_0}{4}$ — противоречие.

$(T) \Rightarrow (**)$ следует из $(T) \Rightarrow (R)$.

$(**) \Rightarrow (T)$ (D — односвязная область и $E^\circ = \emptyset$). Очевидно, множество E будет обладать свойством (T) , если проверить, что этим свойством обладает множество $E \setminus K = E_1$, где K — компакт, фигурирующий в $(**i)$. Легко видеть, что множество E_1 удовлетворяет условиям теоремы А. Пусть γ — положительная непрерывная функция на E_1 , устанавливающая предельную скорость возрастания модуля аппроксимируемых на E_1 функций гармоническими в D функциями. Пусть φ — некоторая отрицательная непрерывная в D функция, монотонная по $\rho(z, \partial D)$ и $\varphi(z) \rightarrow -\infty$, при $\rho(z, \partial D) \rightarrow 0$. Рассмотрим функцию

$$\psi = \begin{cases} \log |f|, & \text{если } f \neq 0 \\ -\infty, & \text{если } f = 0 \end{cases} \text{ и } \chi = \max \{\varphi, \psi\}.$$

Существует функция λ , непрерывная и монотонно возрастающая на $(-\infty, \infty)$ такая, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \lambda(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda(x) = +\infty$$

и $\lambda \circ \chi \leq c\chi$ при некотором $c > 0$. Согласно теореме А существует гармоническая в D функция u такая, что $|\lambda - u| < 1$ на E_1 . В силу односвязности D существует однозначная в D сопряженная к u гармоническая функция v . Тогда аналитическая в D функция $g = \exp(u + iv)$ является ассоциируемой к f по свойству (T) .

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Если $\partial E \neq \partial \hat{E}$, то существует область V , с замыканием, содержащимся в D и такая, что $V \subset E$ и $V \cap \partial E \neq \emptyset$. Пусть $z_0 \in V \cap \partial E$ точка пика $R(X)$, где $X = (\bar{C} \setminus V) \cup E$; существует рациональная функция f с полюсами в X такая, что $|f(z_n) - 1| < \varepsilon_0 < 1$ и $|f| < \frac{1-\varepsilon_0}{c^2}$ на ∂V .

Если бы существовала функция $g \in A(D)$, удовлетворяющая (1), то по принципу максимума модуля

$$\frac{1-\varepsilon_0}{c} < \frac{1}{c} |f(z_0)| \leq |g(z_0)| < \frac{1-\varepsilon_0}{c},$$

— противоречие.

Далее, так как из (1) вытекает, что E является рубелевым, то согласно теореме 1 оно удовлетворяет условию (**). Тогда, если $D^* \setminus \hat{E}$ локально несвязна в идеальной точке, то существует компакт K такой, что $D \setminus (E \cup K)$ содержит последовательность компонент $\{V_n\}$. $\partial V_n \cap K \neq \emptyset$, $\partial V_n \subset K \cup \partial \hat{E} = K \cup \partial E$ (т. е. $V_n \subset D$) и $V_n \cap \partial \hat{E} = V_n \cap \partial E = \emptyset$, причем существует последовательность точек $z_n \in V_n$ с произвольным множеством на ∂D ($\{z_n\}' \subset \partial D$).

Пусть B_n , $n=1, 2, \dots$ — компактное исчерпание области D . Применив лемму о существовании сходящейся подпоследовательности последовательности подмножеств компактного множества (см. [12], стр. 334), из $\{V_n\}$ выделим подпоследовательность $\{V_{1n}\}$ такую, что $\{V_{1n} \cap B_1\}$ — сходящаяся. Из $\{V_{1n}\}$ выделим подпоследовательность $\{V_{2n}\}$ так, чтобы сходилась $\{V_{2n} \cap B_2\}$ и т. д. Диагональная последовательность $\{V_{nn}\}$ сходится в D к некоторому подмножеству $L: L = (\lim V_{nn}) \cap D$. Отметим следующие очевидные свойства множества L : а) L — замкнутое в D связное подмножество множества E , имеющее пустую внутренность и соединяющее K с ∂D , б) Какого бы ни было компактное подмножество $B \subset D$ и число $\varepsilon > 0$, ε -окрестность множества $L \cap B$ содержит все множества $V_{nn} \cap B$, начиная с некоторого номера n .

Лемма 1. $D^* \setminus L$ связно и локально связно.

Доказательство. Связность вытекает из определения L и свойства а). Если $D^* \setminus E$ локально несвязно в идеальной точке, то учитывая свойство б) легко выводим, что для E не выполняется условие (**?). Лемма доказана.

С помощью теоремы о двух константах покажем, как это сделано в [6], что для последовательности $\{V_{nn}\}$ существует скорость ε_0 (т. е. положительная непрерывная на E функция ε_0 , причем $\varepsilon_0(z) \rightarrow 0$, при $\rho(z, \partial D) \rightarrow 0$, $z \in E$) такая, что если для функции $\psi \in A(D)$, $|\psi| = O(\varepsilon_0)$ на $\cup \partial V_{nn}$, то $\psi = 0$ тождественно.

Согласно лемме 1 имеем, что L — карлеманово множество ([7]) и поэтому существует такая функция $\varphi \in A(D)$, что $|\varphi| < \varepsilon_0$ на L и φ отлична от тождественного нуля. Для этого нужно аппроксимировать

с касанием со скоростью e_0 на множестве $L \cup \{z_0\}$ функцию, равную нулю на L и 1 в произвольно фиксированной точке $z_0 \in D \setminus L$.

Функцию $f \in A(E)$ определим равной φ на $(\bar{E}^\circ)$ и непрерывно продолженной на $E \setminus (\bar{E}^\circ)$ так, чтобы на $\bigcup V_n$ выполнялось соотношение $|f(z)| = O(z_0(z))$, при $r(z, \partial D) \rightarrow 0$.

Если функция $g \in A(D)$ удовлетворяет (1), то из второго неравенства, согласно выбору e_0 имеем $g = 0$, что не согласуется с первым неравенством.

Доказательство необходимости условия в) вполне аналогично приведенному доказательству необходимости б) с той лишь разницей, что вместо областей V_n нужно рассматривать области $E_n \setminus K$.

Достаточность. Пусть $h \in A(D)$ — функция, имеющая одинаковые нули с f той же кратности. Тогда функция $\bar{f} = f/h \in A(E)$ не имеет нулей на E . Учитывая односвязность компонент внутренности E , рассмотрим функцию $\log \bar{f} \in A(E)$. Функция $\log |\bar{f}|$ непрерывна на E и гармоническая на E° . Доопределим $\log |\bar{f}|$ на $\bar{E}$, продолжив ее на $\bar{E} \setminus E$ решением задачи Дирихле с граничной функцией $\log |\bar{f}|$. В силу условия в), полученная таким образом функция f_* будет непрерывной на $\bar{E}$ и гармонической в $(\bar{E}^0)$. В силу условия б) множество $D^* \setminus \bar{E}$ связно и локально связно. Поэтому согласно теореме П. М. Готье, Р. М. Гольдштейна, М. Лабреш. У. Оу и В. Хенгартнера (см. работы [13] и [14]), существует гармоническая в D функция u такая, что $|f_* - u| < \log c$ на $\bar{E}$.

В силу односвязности D существует однозначная в D гармонически сопряженная к u функция v . Составим функцию $g = \exp(u + iv)$ и заметим, что функция $g = \bar{f}h$ обладает требуемыми свойствами.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\{z_n\} \subset E^\circ$ — нули функции f ($\{z_n\}' \subset \partial D$) и функция $\varphi \in A(D)$ в точках z_n интерполирует функцию ψ с кратностями, не ниже порядков соответствующих нулей функции f . Пусть $g \in A(D)$ — функция, удовлетворяющая (1). Ясно что в точках $\{z_n\}$ порядки нулей g и f совпадают. По построению, $(\psi - \varphi)/g \in A(E)$. Согласно теореме о равномерной аппроксимации аналитическими функциями [3], существует функция $\tilde{h} \in A(D)$ такая, что

$$\left| \frac{\psi - \varphi}{g} - \tilde{h} \right| < \frac{\varepsilon}{c} \text{ на } E.$$

Тогда, $|\psi - h| < \frac{\varepsilon}{c} |g| < \varepsilon$ на E , где $h = \varphi + g\tilde{h} \in A(D)$.

Замечания. Из беседы с Н. У. Аракеляном автору стало известно, что им ранее было получено доказательство возможности неравенства, аналогичного правому неравенству в (1) для односвязной области D и ее

относительно замкнутого подмножества со связным и локально связным дополнением в D^* (не опубликовано).

Из полученного недавно препринта нам также стало известно, что П. М. Готье, В. Хенгартнер и А. Страй независимо от нас получили описание рубелевых подмножеств плоскости, имеющих пустую внутренность.

Ереванский государственный
университет

Поступила 9. II. 1989

Ա. Հ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ. Լ. Ա. Ռուբելի մի խնդիր և որոշ հարակից հարցեր. (ամփոփում)

Հոգնվածում բերվում է Լ. Ա. Ռուբելի մի խնդրի լուծումը պարունակող թեորեմը հարթության դասարկ ներքով փակ ենթաբազմաբյուրեղների դեպքի համար, որը ձևակերպված էր (2) հաղորդման մեջ: Նշված թեորեմն այնուհետև կիրառված է որոշ հարակից հարցերի թեորեմների մեջ:

A. H. NERSESSIAN. *A problem of L. A. Rubel and related questions* (summary)

This note presents the proof of a theorem announced in [2], offering a solution of a certain problem of L. A. Rubel for the case of closed planar sets without interior. The theorem is then applied to some related questions.

1. M. Goldstein. An example of an Arakelian glove which is a weak Arakelian set. *Illin. Journ. Math.*, 1983, v. 27, № 1. 138—144.
2. A. A. Нерсисян. Гармоническая аппроксимация и решение одной задачи Л. А. Рубеля, *ДАН АрмССР*, 34, № 3, 1987, 104—106.
3. Н. У. Аракелян. Равномерное и касательное приближение аналитическими функциями, *Изв. АН АрмССР, «Математика»*, 3, № 4—5, 1968, 273—286.
4. Р. Ш. Саакян. Об одном обобщении принципа максимума, *Изв. АН АрмССР, «Математика»*, 22, № 1, 1987, 94—101.
5. P. M. Gauthier, R. Grothman, W. Hengartner. Asymptotic maximum principles for subharmonic and plurisubharmonic functions. *Univ. de Montreal Press* 1987, № 87—5.
6. P. M. Gauthier. Tangential approximation by entire functions and functions harmonic in a disc, *Изв. АН АрмССР, «Математика»*, № 5, 1969, 319—326.
7. A. A. Нерсисян. О множествах Карлемана, *Изв. АН АрмССР, «Математика»*, 6, № 6, 1971, 465—471.
8. N. U. Arakelian, P. M. Gauthier. On tangential approximation by holomorphic functions, *Изв. АН АрмССР, «Математика»*, 7, № 6, 1982, 419—441.
9. A. Sinclair. Strong Carleman and strong uniform approximation, *Pacific Journ. Math.*, 117, № 2, 1985, 417—428.
10. A. A. Нерсисян. Аппроксимация гармоническими функциями на замкнутых подмножествах плоских областей, *Изв. АН АрмССР, «Математика»*, 25, № 3, 1990, 274—283.
11. Т. Гамелин. Равномерные алгебры, М., Мир, 1973.
12. Л. Д. Иванов. Вариации множеств и функций, М., Наука, 1975.
13. P. M. Gauthier, M. Goldstein, W. H. O. Uniform approximation on unbounded sets by harmonic functions with logarithmic singularities, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 261, № 1, 1980, 169—183.
14. M. P. Labrèche. De l'approximation harmonique uniforme, Thèse, Univ. de Montreal, 1982.

УДК 517.51

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Г. А. КАРАГУЛЯН

О РАСХОДИМОСТИ СИЛЬНЫХ
Ф-СРЕДНИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Известная теорема Марцинкевича-Зигмунда ([1], [2]) утверждает, что ряды Фурье сильно p -суммируются п. в., т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |S_k(x, f) - f(x)|^p = 0 \text{ п. в.}$$

для любого $p > 0$, где $S_k(x, f)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x) \in L^1(0, 2\pi)$. В. Тотиком 1983 г. была поставлена задача: для каких непрерывно возрастающих $\Phi(t)$, $\Phi(0) = 0$, имеет место

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Phi(|S_k(x, f) - f(x)|) = 0 \text{ п. в.} \quad (1)$$

для любого $f \in L^1(0, 2\pi)$? Более того, он высказал гипотезу, что точным условием, для выполнения (1) является

$$\log \Phi(t) = o(t) \quad (t \rightarrow \infty). \quad (2)$$

Первый результат в этом направлении получен К. И. Осколковым ([5]). Им доказано, что (1) имеет место при $\Phi(t) = O(t/\log \log t)$. Л. Д. Гоголадзе и В. А. Родин ([3], [4]) независимо доказали, что условие (2) достаточно, чтобы выполнялось (1). В работе доказывается, что этот результат окончателен и, тем самым, утверждается точность гипотезы Тотика.

Теорема. Пусть $\Phi(t)$ — непрерывно возрастающая функция, с $\Phi(0) = 0$, для которой

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (\log \Phi(t))/t = \infty. \quad (3)$$

Тогда существует $f \in L^1(0, 2\pi)$ такая, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Phi(|S_k(x, f)|) = \infty \text{ п. в.} \quad (4)$$

Лемма. Для любого натурального $R > 1$ существует тригонометрический полином $f_R(x)$ порядка $M(R)$ и множество $E_R \subset (0, 2\pi)$ такие, что

$$f_R(x) \geq 0, \quad \int_0^{2\pi} f_R(x) dx = 1, \quad (5)$$

$$\mu(E_R) > 2\pi - \frac{c}{\sqrt{R}}, \quad (6)$$

$$|\{k \in N: R < k \leq l(x), S_1(x, f_R) > c \ln R\}| > c \frac{l(x)}{R} \quad (7)$$

при

$$x \in E_R, R < l(x) < M(R).$$

(Здесь и в дальнейшем, μ -мера Лебега, $|A|$ -количество элементов множества A , а через C обозначаются разные абсолютные постоянные).

Доказательство леммы. Найдем $f_R(x)$ вида

$$f_R(x) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R K_{m_i}(x - a_i), \quad (8)$$

$$a_i = \frac{4\pi i}{2R+1}, \quad m_i = 10^i m_0, \quad i = 1, 2, \dots, R, \quad (9)$$

где $K_n(x)$ -ядро Фейера, а m_0 выберем позже. Очевидно имеем (5). Обозначим для $j = 1, 2, \dots, R$

$$B_j^{(R)}(x) = \left\{ t \in N; 1 \leq t \leq \frac{m_j}{2R}, \sin t(2R+1)x/2 < -\frac{1}{2} \right\}, \quad (10)$$

$$A_j^{(R)}(x) = \left\{ t \in N; \frac{m_j}{10R} \leq t \leq \frac{m_j}{2R}, \sin t(2R+1)x/2 < -\frac{1}{2} \right\}, \quad (11)$$

$$E_j^{(R)} = \left\{ x \in (0, 2\pi); |A_j^{(R)}(x)| > \frac{m_j}{40R} \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, R. \quad (12)$$

Используя известный факт о том, что для любого иррационального $\frac{\theta}{2\pi} \in (0, 1)$ последовательность дробных частей $\{n\theta\}$, $n = 1, 2, \dots$, равномерно распределена на окружности, имеем, что для п. в. $x \in (0, 2\pi)$ при достаточно большом $m_0 = m_0(x)$, $|B_j^{(R)}(x)| > \frac{m_j}{8R}$, $j = 1, 2, \dots, R$, и следовательно (см. [10], [11])

$$|A_j^{(R)}(x)| \geq |B_j^{(R)}(x)| - \frac{m_j}{10R} > \frac{m_j}{8R} - \frac{m_j}{10R} = \frac{m_j}{40R}. \quad (13)$$

Отсюда для достаточно большого $m_0 > R$ имеем (см. [12]) $\mu(E_j^{(R)}(x)) > 2\pi - \frac{1}{R^{(2)}}$ и, следовательно, для множества

$$E_j^{(R)} = \bigcap_{i=1}^R E_j^{(R)} \setminus \left(\frac{4\pi(R - \sqrt{R})}{2R+1}, 2\pi \right)$$

имеет место [8]. Пусть теперь $x \in E_j^{(R)}$ и $m_j < p \leq 5m_j$, $2p+1 = -t(2R+1)$, $t \in A_j^{(R)}(x)$. Тогда имеем $x \in (a_{i-1}, a_i)$ при одном $1 \leq i \leq R - \sqrt{R}$. Отсюда имеем (см. [9], [11])

$$S_p(x, f_R) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^j K_{m_i}(x - a_i) + \frac{1}{R} \sum_{i=j+1}^R S_p(x - a_i, K_{m_i}) \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{1}{R} \sum_{i=j+1}^R \frac{p+1}{m_i+1} K_p(x-a_i) + \frac{1}{R} \sum_{i=j+1}^R \frac{m_i-p}{m_i+1} D_p(x-a_i) \geq \\ &\geq \frac{1}{R} \sum_{i=j+1}^R \frac{m-p}{m_i+1} \frac{\sin t(2R+1)x/2}{2 \sin \frac{x-a_i}{2}} > \frac{c}{R} \sum_{i=j+1}^R \frac{1}{|x-a_i|} > c \ln R, \end{aligned}$$

и, следовательно (см. (12), (13), (14))

$$|\{p \in N; R < p \leq 5m_j, S_p(x, f_R) > c \ln R\}| > \frac{m_j}{40R}, \quad x \in E^{(R)}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Нужную нам функцию ищем в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_{R_k}(x), \quad (14)$$

где R_k и $a_k > 0$ выберем такими, чтобы выполнялись следующие соотношения (см. обозначения леммы):

$$a_1 = 1, \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \frac{1}{M(R_n)}, \quad R_{n+1} > M(R_n), \quad (15)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{R_k}} < \infty, \quad (16)$$

$$\Phi(a_k \ln R_k) > e^{2 \ln R_k} = R_k^2, \quad (17)$$

$$a_k \ln R_k - 1 > \frac{1}{2} a_k \ln R_k. \quad (18)$$

Очевидно этого можно добиться, сделав выбор по очереди: $a_1 = 1, N_1, a_2, N_2, \dots$. При этом неравенство (17) получается из (3).

При $R_p < n < M(R_p)$ имеем (см. (14), (15))

$$\begin{aligned} S_n(x, f) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k S_n(x, f_{R_k}) = \sum_{k=1}^{p-1} a_k f_{R_k}(x) + a_p S_n(x, f_{R_p}) + \\ &+ S_n\left(x, \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k f_{R_k}\right) \geq S_n(x, f_{R_p}) - 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Очевидно множество $E = \bigcup_{k \geq n} \bigcap_{l \geq k} E^{(R_l)}$ имеет полную меру. Если $x \in E$,

то $x \in E^{(R_p)}$ при $p > p(x)$. Отсюда при $p > p(x)$, $n \in G_{l(x)}^{(R_p)}(x)$, $R_p < l(x) < M(R_p)$ (см. лемму). Имеем $R_p < n < M(R_p)$ и $S_n(x, f_{R_p}) > c \ln R_p$ и, следовательно в силу (18) и (19), имеем

$$S_n(x, f) > c a_p \ln R_p.$$

Отсюда, в силу леммы, получаем

$$\frac{1}{l(x)} \sum_{n=1}^{l(x)} \Phi(|S_n(x, f)|) = \frac{1}{l(x)} \sum_{n=1}^{l(x)} \Phi(c a_p \ln R_p) \geq$$

$$\geq \frac{1}{l(x)} \sum_{n \in O_l^{(R_p)}(x)} R_p^2 > c R_p.$$

Теорема доказана.

Институт математики
АН Армении

Поступила 13. IV. 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Marcinkiewicz. Sur la sommabilité forte des séries de Fourier, J. London Math. Soc., 14, 1939, 162—168.
2. A. Zygmund. On the convergence and summability of power series on the circle of convergence, Proc. London Math. Soc., 47, 1941, 326—350.
3. Л. Д. Гоголадзе. О сильной суммируемости почти всюду, Мат. сб., 135, № 2, 1988, 158—168.
4. В. А. Родик. ВМО-сильные средние рядов Фурье, Функционал. анализ и его приложения, 23, № 2, 1989, 73—74.
5. К. И. Осколков. О сильной суммируемости рядов Фурье, Тр. Мат. инст. АН СССР, 172, 1985, 280—290.

КРАТКОЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.95

А. О. ОГАНЕСЯН

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ АДАМАРА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА
ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе [1] рассматривается строго гиперболическое уравнение вида

$$u_{tt} - u_{xx} - \sum_{j=1}^n a^{(j)}(t-x) u_{y_j y_j} + c(t-x, y) u = 0 \quad (1)$$

$$(t, x, y) \in \Omega \subseteq R^{n+2},$$

где n -четное, а коэффициенты достаточно гладкие функции. Приводится алгоритм построения функций $c(t-x, y)$, для которых уравнение (1) удовлетворяет принципу Гюйгенса в «узком смысле» по терминологии Адамара [2]. Эти построения подробно рассматриваются на модельном уравнении

$$I_n(u) \equiv u_{tt} - u_{xx} - \sum_{l=1}^n a^l(t-x) u_{y_l y_l} + a^1(t-x) b(y_1) u = 0. \quad (2)$$

В предлагаемой работе доказывается, что описанными в [1] уравнениями исчерпываются все уравнения вида (2), удовлетворяющие принципу Гюйгенса. Тем самым решается проблема Адамара для уравнений вида (2).

Вкратце опишем основной результат работы [1]. Пусть $l_{1\mu} = \frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\mu'}{\mu}$, а $l_{1\mu}^* = -\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\mu'}{\mu}$, где функция $\mu = \mu(y_1)$ удовлетворяет уравнению

$$\mu'' - b(y_1) \mu = 0. \quad (3)$$

Тогда оператор L_n можно записать в виде

$$L_n = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sum_{l=2}^n a^l(t-x) \frac{\partial^2}{\partial y_l^2} + a^1(t-x) l_{1\mu}^* l_{1\mu}.$$

Рассмотрим оператор

$$\tilde{L}_n = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sum_{l=2}^n a^l(t-x) \frac{\partial^2}{\partial y_l^2} + a^1(t-x) l_{1\mu}^* l_{1\mu},$$

и назовем соответственно $L_n \rightarrow \tilde{L}_n$ l_μ -преобразованием.

В работе [1] доказывалось, что если оператор L_n удовлетворяет принципу Гюйгенса, то и оператор $\tilde{L}_{n+2}$ удовлетворяет принципу Гюйгенса. Ниже доказывалось, что любой оператор вида (2), удовлетворяющий принципу Гюйгенса, можно получить исходя из оператора

$$L_n^0 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sum_{i=1}^n \alpha^i(t-x) \frac{\partial^2}{\partial y_i^2},$$

применив достаточное число раз L_{μ_k} -преобразования, $k = 1, \dots, N$.

§ 1. Свойства коэффициентов фундаментального по Адамару решения уравнения (2) и принцип Гюйгенса

Пусть $(t_0, x_0, y_0) \in \Omega$ — произвольная фиксированная точка, а Γ — квадрат геодезического расстояния между точками (t, x, y) и (t_0, x_0, y_0) в псевдоримановом пространстве с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - \sum_{i=1}^n \frac{dy_i^2}{\alpha^i(t-x)}.$$

Известно [3], что

$$\Gamma = (t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - \sum_{i=1}^n A_i^{-1}(t - x; t_0 - x_0) (y_i - y_{0i})^2, \quad (4)$$

где

$$A_i(t - x, t_0 - x_0) = \frac{1}{(t - x) - (t_0 - x_0)} \int_{t_0 - x_0}^{t - x} \alpha^i(\tau) d\tau.$$

Фундаментальное по Адамару решение уравнения (2) имеет вид [2]

$$u(t, x, y; t_0, x_0, y_0) = v(t, x, y; t_0, x_0, y_0) \Gamma^{-\frac{n}{2}} + \\ + W(t, x, y; t_0, x_0, y_0) \ln \Gamma + R,$$

где

$$V = \sum_{\nu=0}^{\frac{n}{2}-1} U_\nu(t, x, y; t_0, x_0, y_0) \Gamma^\nu, \quad W = \sum_{\nu=\frac{n}{2}}^{\infty} U_\nu(t, x, y; t_0, x_0, y_0) \Gamma^{\nu-\frac{n}{2}},$$

а U_ν ($\nu = 0, 1, \dots$), R являются достаточно гладкими функциями и выбираются так, чтобы функция u была бы решением уравнения (2) вне характеристического конуса

$$\Gamma(t, x, y; t_0, x_0, y_0) = 0.$$

Известно [1], [2], что уравнение (2) удовлетворяет принципу Гюйгенса тогда и только тогда, когда для любой точки (t_0, x_0, y_0)

$$W|_{\Gamma=0} = U|_{\Gamma=0} = 0. \quad (5)$$

Функции U_v ($v = 0, 1, \dots$) определяются из дифференциальных уравнений

$$2 \left(U_{0t} \Gamma_t - U_{0x} \Gamma_x - \sum_{l=1}^n a^l(t-x) U_{0y_l} \Gamma_{y_l} \right) + (M - 2n - 4) U_0 = 0,$$

$$2 \left((U_{vt} \Gamma_t - U_{vx} \Gamma_x - \sum_{l=1}^n a^l(t-x) U_{vy_l} \Gamma_{y_l}) + \left[M + \left(v - \frac{n}{2} - 1 \right) 4 \right] U_v = \right.$$

$$\left. = - \frac{1}{\left(v - \frac{n}{2} \right) L_n(U_{v-1})}, \right.$$

$$v = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1, \dots, \quad (6)$$

$$2 \left(U_{\frac{n}{2}t} \Gamma_t - U_{\frac{n}{2}x} \Gamma_x - \sum_{l=1}^n a^l(t-x) U_{\frac{n}{2}y_l} \Gamma_{y_l} \right) +$$

$$+ (M - 4) U_{\frac{n}{2}} = -L_n \left(U_{\frac{n}{2}-1} \right),$$

где

$$M = \Gamma_{tt} - \Gamma_{xx} - \sum_{l=1}^n a^l(t-x) \Gamma_{y_l y_l} = 4 +$$

$$+ 2 \sum_{l=1}^n a^l(t-x) A_l(t-x; t_0 - x_0). \quad (7)$$

Решение этой системы можно записать в виде

$$U_0 = c_0 \exp \left[- \int_0^s \frac{1}{4r} (M - 2n - 4) dr \right], \quad (8)$$

$$U_v = - \frac{U_0}{4 \left(v - \frac{n}{2} \right) s^v} \int_0^s \frac{r^{v-1} L_n(U_{v-1})}{U_0} dr, \quad v = 1, \dots, v \neq \frac{n}{2}, \quad (9)$$

$$U_{\frac{n}{2}} = - \frac{U_0}{4 s^{\frac{n}{2}}} \int_0^s \frac{r^{\frac{n}{2}-1} L_n \left(U_{\frac{n}{2}-1} \right)}{U_0} dr. \quad (10)$$

Здесь интегрирование ведется вдоль геодезических кривых, соединяющих точки (t, x, y) и (t_0, x_0, y_0) . Эти кривые имеют вид [1]

$$t = t_0 + \tau_0 s + \frac{s}{2(\tau_0 + \xi_0)} \sum_{l=1}^n (A_l(t-x; t_0-x_0) - a^l(t_0-x_0)) \eta_{0l}^2,$$

$$x = x_0 - \xi_0 s + \frac{s}{2(\tau_0 + \xi_0)} \sum_{l=1}^n (A_l(t-x; t_0-x_0) - a^l(t_0-x_0)) \eta_{0l}^2,$$

$$y_j = y_{0j} - s A_j(t-x; t_0-x_0) \eta_{0j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (11)$$

где τ_0, ξ_0, η_{0l} ($l = 1, \dots, n$) — некоторые постоянные. Отсюда

$$t - x = t_0 - x_0 + (\tau_0 + \xi_0) s. \quad (12)$$

Из формул (8) — (12) следует, что $U_0 = U_0(t-x; t_0-x_0)$, $U_v = -U_v(t-x, y_1; t_0-x_0, y_{01})$. Поэтому систему (6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} 2[U_{0t}(\Gamma_t + \Gamma_x) - \alpha^1(t-x) U_{0y_1} \Gamma_{y_1}] + \left[M - \left(\frac{n}{2} + 1 \right) 4 \right] U_0 &= 0, \\ 2[U_{vt}(\Gamma_t + \Gamma_x) - \alpha^1(t-x) U_{vy_1} \Gamma_{y_1}] + \left[M + \left(v - \frac{n}{2} - 1 \right) 4 \right] U_v &= - \\ & - \frac{1}{\left(v - \frac{n}{2} \right)} L_1(U_{v-1}), \\ v &= 1, \dots, v \neq \frac{n}{2}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$2 \left[U_{\frac{n}{2}t}(\Gamma_t + \Gamma_x) - \alpha^1(t-x) U_{\frac{n}{2}y_1} \Gamma_{y_1} \right] + (M-4) U_{\frac{n}{2}} = -L_1 \left(U_{\frac{n}{2}-1} \right).$$

Пусть оператор L_n при некотором выборе функции $b(y_1)$ удовлетворяет принципу Гюйгенса, то есть выполнено условие (5). Так как $U_{\frac{n}{2}}$ зависит только от переменных $t-x, y_1$, то из условия (5) следует, что $U_{\frac{n}{2}} \equiv 0$, а в силу формулы (9) $U_v \equiv 0, v = \frac{n}{2} + 1, \dots$. Поэтому фундаментальное решение уравнения (2) имеет вид

$$u = \sum_{v=0}^{\frac{n}{2}-1} U_v \Gamma^{\frac{n}{2}-v}.$$

Рассмотрим уравнение

$$L_1(u) \equiv u_{tt} - u_{xx} - \alpha^1(t-x) u_{y_1 y_1} + \alpha^1(t-x) b(y_1) u = 0 \quad (14)$$

и обозначим Γ_1, U_{1v} ($v=0, 1, \dots$) соответственно, квадрат геодезического расстояния между точками (t, x, y) и (t_0, x_0, y_0) в псевдоримановом пространстве с метрикой, порожденной оператором L_1 , коэффициенты фундаментального решения, а

$$M_1 = \Gamma_{1tt} - \Gamma_{1xx} - \alpha^1(t-x) \Gamma_{1y_1 y_1} = 4 + 2\alpha^1(t-x) A_1(t-x; t_0-x_0).$$

Система уравнений для функций U_{1v} ($v=0, 1, \dots$) получается из системы (13) заменой M на M_1 и подстановкой $n=1$. Поэтому

$$\begin{aligned} U_{10} &= c_{10} \exp \left[- \int_0^s \frac{1}{4r} (M_1 - 6) dr \right] = \\ &= \frac{c_{10}}{c_0} c_0 \exp \left\{ - \int_0^s \frac{1}{4r} \left[M - \left(\frac{n}{2} + 1 \right) 4 \right] dr + \right. \\ &+ \left. \int_0^s \frac{1}{4r} \left[\sum_{i=2}^n \alpha^i(t-x) A_i(t-x; t_0-x_0) - (2n-2) \right] dr \right\} = U_0 g(t-x, n), \end{aligned}$$

где

$$g(t-x, n) = \frac{c_{10}}{c_0} \exp \int_0^s \frac{1}{4r} \left[\sum_{i=1}^n a^i(t-x) A_i(t-x; t_0-x_0) - (2n-2) \right] dr.$$

Для функции U_{11} имеем

$$\begin{aligned} U_{11} &= -\frac{U_{10}}{4\left(1-\frac{1}{2}\right)s} \int_0^s \frac{L_1(U_{10})}{U_{10}} dr = -\frac{g(U_0)}{4\left(1-\frac{1}{2}\right)s} \int_0^s \frac{gL_1(U_0)}{gU_0} dr = \\ &= -\frac{\left(1-\frac{n}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}} g \frac{U_0}{4\left(1-\frac{n}{2}\right)s} \int_0^s \frac{L_n(U_0)}{U_0} dr = \frac{\left(1-\frac{n}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} gU_1. \end{aligned}$$

Аналогичным образом нетрудно доказать, что

$$U_{1v} = a_v(n) g(t-x, n) U_v, \quad v = 2, \dots, \frac{n}{2} - 1,$$

где

$$a_v(n) = \frac{\left(1-\frac{n}{2}\right) \dots \left(v-\frac{n}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right) \dots \left(v-\frac{1}{2}\right)} \text{ и } U_{1v} = 0, \quad v = \frac{n}{2}, \dots$$

Поэтому фундаментальное решение уравнения (14) имеет вид

$$u_1 = \sum_{v=0}^{\infty} U_{1v} \Gamma_1^{v-\frac{1}{2}} = \sum_{v=0}^{\frac{n}{2}-1} a_v(n) g(t-x, n) U_v \Gamma_1^{v-\frac{1}{2}}.$$

Запишем уравнение (14) в виде

$$L_1(u) \equiv \frac{1}{a^1(t-x)} (u_{11} - u_{xx}) - u_{y_1 y_1} + b(y_1) u = 0 \quad (15)$$

и рассмотрим оператор L_1 с соответствующими функциями Γ_1 , M_1 , U_{1v} ($v=0, 1, \dots$).

Лемма. Имеет место соотношение

$$\Gamma_1' = A_1(t-x; t_0-x_0) \Gamma_1.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию Гамильтона

$$H_1(t, x, y, \tau, \xi, \eta) = \frac{1}{a^1(t-x)} (\tau^2 - \xi^2) - \eta^2.$$

Решив начальную задачу для канонической системы уравнений, соответствующей функции H_1 , получим для геодезических кривых

$$\int_{t_0-x_0}^{t-x} a^1(\sigma) d\sigma = (\tau_0 + \xi_0) r,$$

$$(t - t_0) + (x - x_0) = \frac{\tau_0 - \xi_0}{\alpha^1 (t_0 - x_0)} r, \quad y_1 = y_{01} - \eta_0 r. \quad (16)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Gamma'_1 &= H'_1(t_0, x_0, y_1; \tau_0 r, \xi_0 r, \eta_0 r) = \frac{1}{\alpha^1 (t_0 - x_0)} [(\tau_0 r)^2 - (\xi_0 r)^2] - (\eta_0 r)^2 = \\ &= A_1(t - x; t_0 - x_0)[(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2] - (y_1 - y_{01})^2 = A_1 \Gamma_1. \end{aligned}$$

Из единственности (с точностью до постоянного множителя) фундаментального решения уравнения (14) или (15) получаем

$$U'_{1\nu} = U_1 A_1^{\nu - \frac{1}{2}}, \quad \nu = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1,$$

$$U'_{1\nu} \equiv 0, \quad \nu = \frac{n}{2}, \dots$$

Для функции M'_1 имеем

$$M'_1 = \frac{1}{\alpha^1 (t - x)} (\Gamma'_{1tt} - \Gamma'_{1xx}) - \Gamma'_{1y_1 y_1} = 6.$$

Поэтому система уравнений, которой удовлетворяют функции $U'_{1\nu}$ имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\alpha^1 (t - x)} (U'_{10t} \Gamma'_{1t} - U'_{10x} \Gamma'_{1x}) - 2 U'_{10 y_1} \Gamma'_{1 y_1} = 0, \\ &\frac{2}{\alpha^1 (t - x)} (U'_{1\nu t} \Gamma'_{1t} - U'_{1\nu x} \Gamma'_{1x}) - 2 U'_{1\nu y_1} \Gamma'_{1 y_1} + 4 \nu U'_{1\nu} = \\ &= - \frac{1}{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)} L'_1(U'_{1\nu-1}), \quad \nu = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1 \end{aligned} \quad (17)$$

или вдоль геодезических кривых (16)

$$4 r \frac{dU'_{10}}{dr} = 0,$$

$$4 r \frac{dU'_{1\nu}}{dr} + 4 \nu U'_{1\nu} = - \frac{1}{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)} L'_1(U'_{1\nu-1}), \quad \nu = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1.$$

Отсюда $U'_{10} = 1$ и

$$U'_{1\nu} = - \frac{1}{4 \left(\nu - \frac{1}{2}\right) r^\nu} \int_0^r \sigma^{\nu-1} L'_1(U'_{1\nu-1}) d\sigma, \quad \nu = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1, \quad (18)$$

Из формулы (18) следует, что $U'_{1\nu} = U'_{1\nu}(y_1; y_{01})$. Следовательно, систему (17) можно записать в виде

$$\frac{dU'_{10}}{dy_1} = 0,$$

(19)

$$(y_1 - y_{01}) \frac{dU'_{1v}}{dy_1} + vU'_{1v} = -\frac{1}{4\left(v - \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{d^2}{dy_1^2} + b(y_1) \right) (U'_{1, v-1}),$$

$$v = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1.$$

Заметим, что, так как $U'_{1,0} = 0$, $v = \frac{n}{2}, \dots$, то $\left(\frac{d^2}{dy_1^2} + b(y_1) \right) U'_{1, \left(\frac{n}{2} - 1 \right)} = 0$.

Рассмотрим уравнение

$$L(u) = \left(\frac{d^2}{dy_1^2} + b(y_1) \right) u = 0$$

и его фундаментальное решение

$$u_2 = |y_1 - y_{01}| \sum_{v=0}^{\infty} U_v (y_1 - y_{01})^{2v},$$

где функции U_v удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dV_v}{dy_1} = 0, \quad (20)$$

$$(y_1 - y_{01}) \frac{dV_v}{dy_1} + vV_v = -\frac{1}{4\left(v + \frac{1}{2}\right)} L(V_{v-1}), \quad v = 1, 2, \dots$$

Сравнивая системы (19) и (20) получаем, что с точностью до постоянного множителя β_v , $V_v = \beta_v U'_{1v}$, $v = 0, \dots, \frac{n}{2} - 1$, $L(V_{\frac{n}{2}-1}) = 0$, а зна-

чит $V_v = 0$, $v = \frac{n}{2}, \dots$. Следовательно [4], оператор L может быть

получен из оператора $L^0 = \frac{d^2}{dy_1^2}$ с помощью $l_{1\mu k}$ преобразований, примененных не более, чем $\frac{n}{2} - 1$ раз. Отсюда и из вышеизложенного следует

Теорема. Пусть оператор L_n удовлетворяет принципу Гюйгенса. Тогда он может быть получен из оператора L_n^0 с помощью $l_{1\mu k}$ преобразований, примененных не более, чем $\left(\frac{n}{2} - 1 \right)$ раз.

Замечание. Аналогичные результаты можно непосредственно получить для уравнений

$$u_{tt} - u_{xx} - a^k(t-x)u_{y_k y_k} - \sum_{\substack{l,j=1 \\ l,j \neq k}}^n a^{lj}(t-x)u_{y_l y_j} + a^k(t-x)b_k(y_k)u = 0, \\ k = 1, \dots, n.$$

В общем случае уравнение (1) невырожденным линейным преобразованием, зависящем от $(t-x)$ можно привести к диагональному виду и получить подобные результаты. При этом на недиагональные элементы матрицы a_{ij} накладываются дополнительные условия, зависящие и от способа диагонализации.

Межвузовский научный центр по
прикладным проблемам математики ЕГУ

Поступила 11. V. 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. А. О. Оганесян. Обобщение метода Лагранжа—Штельмахера на один класс уравнений, удовлетворяющих принципу Гюйгенса, Изв. АН АрмССР, «Математика», 25, № 5, 1990.
2. Ж. Адамар. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа, М., 1978.
3. Н. Х. Ибрагимов. Группы преобразований в математической физике, М., 1983.
4. P. Günther. Huygens' principle and hyperbolic equations, Academ. Press, 1988.

КРАТКОЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.986.6

С. А. ГРИГОРЯН

О МЕРАХ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ К АЛГЕБРЕ
ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ
ПО АРЕНСУ-ЗИНГЕРУ ФУНКЦИЙ

Пусть Γ — некоторая подгруппа аддитивной группы вещественных чисел $\mathbb{R}$, наделенная дискретной топологией. Каждый элемент $a \in \Gamma$ порождает непрерывный характер χ^a группы G , определяемый соотношением $\chi^a(a) = a$, $a \in G$. В данной заметке описывается структура мер, ортогональных к алгебре A — равномерной алгебре на G , порожденной характерами χ^a , $a \in \Gamma_+ = \{a \in \Gamma; a \geq 0\}$.

1°. Напомним (см. [1], [2]), характеры χ^a , $a \in \Gamma$, образуют ортонормированный базис в $L^2(d\sigma)$, где σ — нормированная мера Хаара группы G . Для каждой функции $f \in L^2(d\sigma)$ существует формальный ряд $f \sim \sum_{a \in \Gamma} c(a) \chi^a$. Множество тех $a \in \Gamma$, для которых $c(a) \neq 0$, называется спектром функции f и обозначается через $S(f)$.

Пусть $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — система окрестностей единичного элемента группы G , и $\{\psi_{\delta, \lambda}\}_{\substack{\delta > 0 \\ \lambda \in \Lambda}}$ — такая система положительных непрерывных функций на G , что для любых $\delta > 0$, $\lambda \in \Lambda$

I) множество $S(\psi_{\delta, \lambda})$ конечно;

II) $\psi_{\delta, \lambda}(a) < \delta$, если $a \notin U_\lambda$;

III) $\int_G \psi_{\delta, \lambda} d\sigma = 1$.

С помощью этой системы функций определим операторы Бохнера-Фейера $\{K_{\delta, \lambda}\}_{\substack{\delta > 0 \\ \lambda \in \Lambda}}$ для $f \in C(G)$

$$K_{\delta, \lambda}(f)(a) = \int_G f(a\beta^{-1}) \psi_{\delta, \lambda}(\beta) d\sigma(\beta).$$

Очевидно

IV) $\|K_{\delta, \lambda}\| = 1$, $\inf_{\delta, \lambda} \sup_{a \in G} |K_{\delta, \lambda}(f)(a) - f(a)| = 0$ и $S(K_{\delta, \lambda}(f))$ конечен и содержится в $S(f)$.

Для каждой регулярной борелевской меры μ на G можно определить формальный ряд Фурье-Стилтьеса

$$\mu \sim \sum_{a \in \Gamma} c(a) \chi^a.$$

Как и для функций, множество тех a , $a \in \Gamma$, для которых $c(a) = 0$, называется спектром меры μ . Если $S(\mu)$ конечно, то μ абсолютно непрерывна относительно σ . И поскольку $M(G)$ —пространство всех регулярных борелевских мер на G —является дуальным к $C(G)$, то операторы $K_{\delta, \lambda}$, $\delta > 0$, $\lambda \in \Lambda$, порождают сопряженные операторы $K_{\delta, \lambda}^*$, $\delta > 0$, $\lambda \in \Lambda$, действующие на $M(G)$.

На семействе пар $\{(\delta, \lambda)\}_{\substack{\delta > 0 \\ \lambda \in \Lambda}}$ можно ввести порядок $(\delta_1, \lambda_1) < (\delta_2, \lambda_2)$, если $\delta_2 < \delta_1$ и $U_2 \subset U_1$. При таком упорядочении семейство операторов $\{K_{\delta, \lambda}\}_{\substack{\delta > 0 \\ \lambda \in \Lambda}}$ превращается в сеть.

Из условий I), II), III) непосредственно следует: для любого $\mu \in M(G)$

V) $S(K_{\delta, \lambda}^*(\mu))$ состоит из конечного числа элементов и содержится в $S(\mu)$;

VI) $\|K_{\delta, \lambda}^*(\mu)\| < \|\mu\|$, и сеть мер $K_{\delta, \lambda}^*(\mu)$, $\delta > 0$, $\lambda \in \Lambda$, слабо* сходится к мере μ .

Для каждого числа $x \in \mathbb{R}$ определим элемент $a_x \in G: \chi^a(x) = e^{iax}$, $a \in \Gamma$. Если Γ не изоморфна $\mathbb{Z}$, что и предполагается всюду в дальнейшем, отображение $x \rightarrow a_x$ осуществляет изоморфизм вещественной оси на некоторую плотную подгруппу группы G , которую также будем обозначать через R . Поскольку сужение конечного ряда $f = \sum_{n=1}^m c(a_n) \chi^{a_n}$, $a_n \geq 0$, на любой класс смежности aR группы G по R

имеет вид $f(a \cdot a_x) = \sum_{n=1}^m c(a_n) \chi^{a_n}(a) e^{i a_n x}$, то функцию f можно продолжить до аналитической почти периодической в верхней полуплоскости над aR функции.

Зафиксируем $a \in \Gamma_+$. Пусть $G_a = \{a \in G; a(a) = 1\}$. Рассмотрим гомоморфизм $h: G_a \times \mathbb{R} \rightarrow G$, $h(a, x) = a \cdot a_x$. Множество $F_k = G_a \times \left[-\frac{\pi}{a} + \frac{2\pi}{a}k, \frac{\pi}{a} + \frac{2\pi}{a}k\right)$, для любого $k \in \mathbb{Z}$, является фундаментальной областью для отображения h , т. е. h взаимно однозначно отображает F_k на G .

Пусть γ_a — мера Хаара группы G_a . Тогда мера σ на F_k , $\sigma = \sigma \circ h|_{F_k}$, равна

$$d\sigma = \frac{a}{2\pi} d\gamma_a \times dx. \quad (1.1)$$

На локально компактной группе $G_a \times \mathbb{R}$ рассмотрим меру $d\gamma = d\gamma_a \times \frac{dx}{1+x^2}$ и с её помощью определим меру γ на G , полагая $\gamma = \sigma \circ h^{-1}$. Так как сужение γ на F_k абсолютно непрерывно относительно меры σ , то мера γ абсолютно непрерывна относительно меры σ .

Для нахождения производной Радона-Никодима этих двух мер определим на $G_a \times \mathbb{R}$ функцию

$$K_a(z, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(x + \frac{2\pi n}{a}\right)^2}.$$

Так как $K_a(z, x)$ — периодическая по x функция с периодом $\frac{2\pi}{a}$, то $\tilde{K}_a + K_a \circ h^{-1}$ — непрерывная на G функция. Покажем, что

$$\gamma = \frac{2\pi}{a} \tilde{K}_a \cdot \gamma. \quad (1.2)$$

Действительно, из (1.1) имеем:

$$\begin{aligned} d(\gamma \circ h)|_{F_a} &= K_a(z, x) d\gamma_a \times dx = \frac{2\pi}{a} K_a(z, x) \left(\frac{a}{2\pi} d\gamma_a \times dx \right) = \\ &= \frac{2\pi}{a} K_a(z, x) d(\gamma \circ h)|_{F_a}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\gamma = \frac{2\pi}{a} \tilde{K}_a \cdot \gamma.$$

2°. На компакте $X = G_a \times T$, где T — единичная окружность, рассмотрим алгебру $A(X)$ всех непрерывных функций на X , которые при каждом фиксированном $a \in G_a$ продолжаются до аналитической в единичном круге функции, т. е. до функции из диск-алгебры. Зная свойства диск-алгебры, можно исследовать алгебру $A(X)$. Например:

а) поскольку для любого $g \in C(G_a)$ функция $f(a, e^{i\theta}) = g(a)$ принадлежит $A(X)$, каждое подмножество в X вида $\{a\} \times T$, $a \in G_a$ является максимальным множеством антисимметрии, т. е. каждая вещественная функция из $A(X)$ постоянна на множествах вида $\{a\} \times T$.

Следующее утверждение менее тривиально:

в) каждая мера $\nu \in A(X)^\perp$ имеет вид $d\nu = d\nu_a \times f(a, e^{i\theta}) d\theta$, где ν_a — некоторая положительная мера на G_a , $f(a, e^{i\theta})$ — функция на X , измеримая по мере ν и такая, что при каждом фиксированном $a \in G_a$, почти для всех α по мере ν_a , функция $f(\alpha, e^{i\theta})$ принадлежит H_0^1 — пространству тех функций из пространства Харди H^1 на T , аналитическое продолжение которых в единичный круг обращается в нуль в центре круга.

Для доказательства этого факта достаточно заметить, воспользовавшись а), что каждая крайняя мера из единичного шара мер, ортогональных к $A(X)$, сосредоточена на множествах вида $\{a\} \times T$, $a \in G_a$. А так как сужение $A(X)$ на $\{a\} \times T$ есть диск-алгебра, то по теореме М. и Ф. Риссов эти меры имеют вид $g d\theta$, где $g \in H_0^1$. Применив теперь теорему Крейна-Мильмана, получим требуемое утверждение.

с). Пусть $I = \{f \in A(X); f(a, e^{i\theta}) = g(a, e^{i\theta}) a^{i\theta}, g \in A(X), \text{ — гласал в } A(X)\}$. Тогда каждая мера $\nu \in I^\perp$ имеет вид $d\nu = d\nu_a \times f(a, e^{i\theta}) d\theta$,

где ν_a — некоторая положительная мера на G_a , а $f(z, e^{i\theta})$ — функция на X , измеримая по мере ν и такая, что при каждом фиксированном a , почти для всех a по мере ν_a , функция $f(a, e^{i\theta})$ принадлежит H^1 .

Утверждение с) непосредственно следует из в).

Для дальнейшего заметим, что конформное отображение $w = \Phi(z) = \frac{i-z}{i+z}$ верхней полуплоскости в единичный круг порождает отображение пространства Харди H^1 в $H^1\left(\frac{dx}{1+x^2}\right)$ тех функций на R , которые представимы в виде $g \circ \Phi$, где $g \in H^1$. В частности, это отображение переводит каждую меру $\nu \in I^1$, $d\nu = d\nu_a \times f(a, e^{i\theta}) d\theta$ в меру τ на $G_a \times R$, $d\tau = d\nu_a \times f(a, \Phi(x)) \frac{dx}{1+x^2}$. Пространство таких мер на $G_a \times R$ обозначим через M_a .

Теорема. Для каждой меры $\nu \in A^1$ найдется такая мера $\hat{\nu} \in M_a$, что $\hat{\nu} \circ h^{-1} = \frac{2\pi}{a} K_a \circ \nu$.

◀ Из построения алгебры A видно, что мера ν принадлежит A^1 тогда и только тогда, когда $S(\nu)$ — спектр меры ν — содержится в $\Gamma_a \setminus \{0\}$. Поэтому, если $\nu \in A^1$, в силу свойства V), мера $\nu_{\delta, \lambda} = K_{\delta, \lambda}(\nu)$ также принадлежит A^1 . Так как $S(\nu_{\delta, \lambda})$ состоит из конечного числа элементов (см. V), то мера $\nu_{\delta, \lambda}$ абсолютно непрерывна относительно меры σ . Более того, $\nu_{\delta, \lambda} = f\sigma$, где $f = \sum_{k=1}^m c(a_k) \chi^{a_k}$ — некоторая функция из A .

Функция $f \circ h(a, x) = \sum_{k=1}^m c(a_k) \chi^{a_k}(a) e^{i a_k x}$ на $G_a \times R$ при каждом фиксированном $a \in G_a$ продолжается до аналитической почти периодической функции в верхней полуплоскости. Поэтому $f \circ h(a, \cdot) \in H^1\left(\frac{dx}{1+x^2}\right)$.

Следовательно, мера $\hat{\nu}_{\delta, \lambda}$, $d\hat{\nu}_{\delta, \lambda} = f \circ h(a, x) d\tau_a \times \frac{dx}{1+x^2}$, принадлежит M_a , и в силу (1.2)

$$\frac{2\pi}{a} K_a \cdot \nu_{\delta, \lambda} = \hat{\nu}_{\delta, \lambda} \circ h^{-1}. \quad (2.1)$$

Покажем, что сеть мер $\{\hat{\nu}_{\delta, \lambda}\}_{\substack{\delta > 0 \\ \lambda \in \mathbb{Z}}}$ сходится к некоторой мере $\nu \in M_a$.

Действительно, так как $F_k = G_a \times \left[-\frac{\pi}{a} + \frac{2\pi}{a}k, \frac{\pi}{a} + \frac{2\pi}{a}k\right)$ фундаментальная область (при любом $k \in \mathbb{Z}$) для отображения h и $d(\sigma \circ h)|_{F_k} = \frac{a}{2\pi} d\tau_a \times dx$, то $d(\nu_{\delta, \lambda} \circ h)|_{F_k} = \frac{a}{2\pi} f \circ h(a, x) d\tau_a \times dx$, $(a, x) \in F_k$, и

$$\hat{\nu}_{\delta, \lambda}|_{F_k} = \frac{2\pi}{a(1+x^2)} \cdot \nu_{\delta, \lambda} \circ h|_{F_k}. \quad (2.2)$$

Следовательно, (см. VI)),

$$|\hat{\nu}_{k, \lambda}|_{F_k} \leq \frac{2\pi a}{a^2 + (|k| - 1)^2} |\nu_{k, \lambda}| \leq \frac{2\pi a}{a^2 + (|k| - 1)^2} \cdot M. \quad (2.3)$$

Поэтому из слабой сходимости сети мер $|\nu_{k, \lambda}|$ и (2.2) следует слабо* сходимость сети мер $|\hat{\nu}_{k, \lambda}|_{F_k}$, $k \in \mathbb{Z}$, в пространстве, дуальном к $\bar{C}(R) = \{f \circ \Phi(x), f \in C(T)\}$. Применяя теперь (2.3), получим, что сеть мер $|\hat{\nu}_{k, \lambda}|$ слабо* сходится в дуальном к $\bar{C}(R)$ пространстве к некоторой мере $\hat{\nu}$. Так как $\nu_{k, \lambda} \in M_a$, $\delta > 0$, $\lambda \in \Lambda$, то и $\hat{\nu} \in M_a$. Из (2.1) имеем $\frac{2\pi}{a} \bar{K}_a \hat{\nu} = \hat{\nu} \circ h^{-1}$. ►

Для каждого $E \subset G_a \times R$ и $x \in R$ под $E + x$ подразумеваем множество $\{(a, y) \in G_a \times R; (a, y - x) \in E\}$.

Следствие (теорема де Лю-Гликсберга [1]). Пусть $\nu \in A^\perp$ и E — такое борелевское подмножество в G , что для некоторого $x \in R$, $|\nu|(E \cdot a_x) = 0$. Тогда $|\nu|(E) = 0$.

◄ Пусть $\hat{\nu} \in M_a$ — такая мера, что $\frac{2\pi}{a} \tilde{K}_a \hat{\nu} = \hat{\nu} \circ h^{-1}$. Так как $|\hat{\nu}|_{F_k} = \frac{2\pi}{a(1+x^2)} \nu \circ h|_{F_k}$ (см. (2.2)), то из $|\nu|(E \cdot a_x) = 0$ следует $|\hat{\nu}|_{F_k} \cap h^{-1}(E \cdot a_x) = 0$. Поэтому $|\hat{\nu}|_{h^{-1}(E \cdot a_x)} = 0$. Поскольку $d\hat{\nu} = d\nu_a \times f(a, x) \times \frac{dx}{1+x^2}$, $f(a, \cdot) \in H^1\left(\frac{dx}{1+x^2}\right)$, то почти для всех $a \in \text{supp } \nu_a$, по мере ν_a , для которых $f(a, \cdot) \neq 0$, лебегова мера множества $(a, R) \cap h^{-1}(E \cdot a_x)$ равна нулю. А так как $h^{-1}(E \cdot a_x) = h^{-1}(E) + x$ и мера Лебега инвариантна относительно сдвигов, получим $|\hat{\nu}|(h^{-1}(E)) = 0$. Следовательно, $|\hat{\nu}|(h^{-1}(E) \cap F_k) = 0$. Таким образом $\hat{\nu}(E) = 0$. ►

Институт математики
АН Армении

Поступила 15. XII. 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Гамелин. Равномерные алгебры, М., Мир, 1973.
2. А. А. Пинков. Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений, Киев, Наукова Думка, 1985.

КРАТКОЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.986

М. А. АКОПЯН

О РАВНОМЕРНЫХ $B(H)$ -АЛГЕБРАХ

Понятие некоммутативной равномерной алгебры впервые было введено Д. Тейлором в работе [1]. В настоящей заметке, продолжая тематику работ [2, 3], изучаются некоммутативные равномерные алгебры с постоянным слоем, совпадающим с полной алгеброй линейных ограниченных операторов на некотором гильбертовом пространстве.

Пусть T — метризуемый компакт, A — C^* -алгебра с единицей, $C(T, A)$ — C^* -алгебра всех непрерывных отображений из T в A . Напомним (см. [1, 2]), что замкнутая подалгебра $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$ называется *равномерной алгеброй* операторных полей, если она содержит единицу A и разделяет точки (для любых $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$ и $a_1, a_2 \in A$, существует $\lambda \in \mathfrak{M}$ такое, что $\lambda(t_1) = a_1$, $\lambda(t_2) = a_2$). Равномерная алгебра $\mathfrak{M}$ называется A -алгеброй (см. [2]), если $A \subset \mathfrak{M}$ (отождествляя элементы A с постоянной функцией $a(t) \equiv a$). Множество всех гомоморфизмов из $\mathfrak{M}$ в A , которые продолжаются до условного ожидания из $C(T, A)$ на A обозначается через $\text{Sp}_A \mathfrak{M}$ и называется *относительным спектром* алгебры $\mathfrak{M}$ (см. [2]).

Простейшим примером равномерной A -алгебры является расщепимая алгебра, которая порождается линейными комбинациями функций из некоторой классической (коммутативной) равномерной алгебры $D \subset C(T)$ и элементов A . Иными словами, алгебра *расщепима*, если A — линейные комбинации вида $\sum_{i=1}^n f_i a_i$, где $f_i \in D$, $a_i \in A$, плотны в $\mathfrak{M}$. В подобных случаях мы будем использовать обозначение $\mathfrak{M} = [D, A]$. Заметим, что если дополнительно A — проста (или, более общо, имеет тривиальный центр), то $\text{Sp}_A \mathfrak{M}$ совпадает с пространством максимальных идеалов D (см. [2]).

Изучение расщепимой алгебры сводится, таким образом, к изучению порождающих ее алгебр D и A . Повтому имеет смысл сопоставлять, по мере возможности, произвольной равномерной A -алгебре некоторую расщепимую алгебру, наследующую ее свойства. В настоящей работе это делается в случае, когда слой совпадает с $B(H)$, алгеброй всех ограниченных линейных операторов на некотором гильбертовом пространстве H . Наиболее интересен случай, когда H — бесконечномерное гильбертово пространство, поскольку каждая равномерная A -алгебра $\mathfrak{M}$ при $A \neq M_n(C)$ (алгебра $n \times n$ комплексных матриц) расщепима (см. [2]).

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{M}$ — равномерная $B(H)$ -алгебра, $\mathfrak{M} \subset C(T, B(H))$. Тогда существует такая расщепимая алгебра $\mathfrak{M}_0$, что

1) $[\mathfrak{X}, K(H)] = [\mathfrak{X}_0, K(H)]$, где $K(H)$ — алгебра компактных операторов из $B(H)$.

2) $\text{Sp}_{B(H)} \mathfrak{X} = \text{Sp}_{B(H)} \mathfrak{X}_0$.

Доказательство. (1). Пусть $e_1, e_2, \dots$ — некоторый ортонормированный базис в H и P_n — проектор на конечномерное подпространство H_n , порожденное первыми n элементами базиса. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{X}_n = P_n \mathfrak{X} P_n$, являющуюся, очевидно, подалгеброй $C(T, B_n)$ где $B_n = P_n B(H) P_n$, при этом $C(T, B_n) = P_n C(T, B(H)) P_n$. Можно легко проверить, что $\mathfrak{X}_n$ — равномерная B_n -алгебра с единицей P_n . Будучи алгеброй с матричным слоем, $\mathfrak{X}_n$ расщепима, поэтому существует коммутативная равномерная алгебра D_n такая, что $\mathfrak{X}_n = [D_n, B_n]$. Покажем, что алгебры D_n не зависят от номера n . Ввиду того, что $\mathfrak{X}_n \subset \mathfrak{X}_{n+1}$, имеем $D_{n+1} P_n \subset \mathfrak{X}_n$. Откуда $D_{n+1} = D_n = D$. Пусть $\mathfrak{X}_0 = [D, B(H)]$, тогда, очевидно, $P_n \mathfrak{X}_0 P_n = P_n \mathfrak{X} P_n$. Поскольку $P_n x b P_n \in [D, B_n] \subset [\mathfrak{X}_0, K(H)]$ для $x \in \mathfrak{X}$, $b \in K(H)$ и $P_n x b P_n$ при $n \rightarrow \infty$ по норме сходится к $x b$, имеем $[\mathfrak{X}, K(H)] \subset [\mathfrak{X}_0, K(H)]$. Аналогично доказывается обратное включение.

Докажем (2). Ввиду того, что $B(H)$ — алгебра с тривиальным центром, то как было отмечено выше, $\text{Sp}_{B_n} \mathfrak{X}_n = \text{Sp}_{B(H)} \mathfrak{X}_0 = \text{Sp } D$. Повтору достаточно доказать, что $\text{Sp}_{B(H)} \mathfrak{X} = \text{Sp}_{B_n} \mathfrak{X}_n$. Пусть $p \in \text{Sp}_{B(H)} \mathfrak{X}$.

Тогда p продолжается до условного ожидания $\bar{p}: C(T, B(H)) \rightarrow B(H)$. Рассмотрим сужение $p_0 = \bar{p}|_{C(T, B_n)}$. Ввиду того, что для любого $x \in C(T, B_n)$ справедливо

$$p_0(x) = \bar{p}(x) = \bar{p}(P_n x P_n) = P_n \bar{p}(x) P_n \in B_n,$$

то p_0 является условным ожиданием из $C(T, B_n)$ на B_n . Поскольку $\bar{p}|_{\mathfrak{X}_n}$ является гомоморфизмом и совпадает с $p_0|_{\mathfrak{X}_n}$, то $\bar{p}|_{\mathfrak{X}_n} \in \text{Sp}_{B_n} \mathfrak{X}_n$.

Покажем, что между элементами из $\text{Sp}_{B(H)} \mathfrak{X}$ и $\text{Sp}_{B_n} \mathfrak{X}_n$ имеется взаимно однозначное соответствие. Пусть $p_1, p_2 \in \text{Sp}_{B(H)} \mathfrak{X}$, $p_1 \neq p_2$, тогда найдется такой проектор P_n , что $P_n p_1(x) P_n \neq P_n p_2(x) P_n$ для некоторого $x \in \mathfrak{X}$. Обозначим $q_1 = \bar{p}_1|_{\mathfrak{X}_n}$ и $q_2 = \bar{p}_2|_{\mathfrak{X}_n}$. Из вышесказанного следует, что $q_1, q_2 \in \text{Sp}_{B_n} \mathfrak{X}_n$ и $q_1 \neq q_2$, а поскольку $\text{Sp}_{B_n} \mathfrak{X}_n = \text{Sp } D$, то оператор сужения однозначно отображает $\text{Sp}_{B(H)} \mathfrak{X}$ в $\text{Sp}_{B_n} \mathfrak{X}_n$.

Пусть теперь $p \in \text{Sp}_{B_n} \mathfrak{X}_n$, тогда $p|_{D P_n}$ является мультипликативным функционалом. Обозначим через μ его представляющую меру и определим условное ожидание $\bar{p}$ формулой:

$$\bar{p}(x) = \int_T x d\mu, \quad x \in C(T, B(H)).$$

Очевидно, $\bar{p} = \bar{p}|_{\mathfrak{X}_n} \in \text{Sp}_{B_n} \mathfrak{X}_n$. Покажем, что $\bar{p}|_{\mathfrak{X}} \in \text{Sp}_{B(H)} \mathfrak{X}$. Действительно, из представления $\bar{p}$ видно, что для любых $x, y \in \mathfrak{X}$

$$\tilde{p}(xy) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{p}(P_n x P_n y P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{p}(P_n x P_n) \tilde{p}(P_n y P_n) = \tilde{p}(x) \tilde{p}(y),$$

где предел понимается в сильной операторной топологии. Теорема доказана.

Заметим, что $\mathfrak{M}_0$ — единственная расщепимая алгебра, удовлетворяющая условиям теоремы.

Пусть $\mathfrak{M}$ — равномерная A -алгебра, $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$. Напомним (см. [3]), что точка t_0 называется 1) точкой слабого пика для алгебры $\mathfrak{M}$ ($t_0 \in \Pi_w(\mathfrak{M})$), если для любых $d > 1$ и окрестности U точки t_0 существует $x \in \mathfrak{M}$ такое, что $|x| < d$, $x(t_0) \geq 0$, $|x(t_0)| = 1$ и $|x(t)| < \frac{1}{2d}$ при $t \in U$; 2) точкой норм пика для алгебры $\mathfrak{M}$ ($t_0 \in \Pi_n(\mathfrak{M})$), если существует $x \in \mathfrak{M}$ такое, что $x(t_0) > 0$, $|x(t_0)| = 1$ и $|x(t)| < 1$ при $t \neq t_0$; 3) точкой пика для алгебры $\mathfrak{M}$ ($t_0 \in \Pi(\mathfrak{M})$), если существует $x \in \mathfrak{M}$ такое, что $x(t_0) = e$, где e — единица алгебры A , $|x(t)| < 1$ при $t \neq t_0$.

Замечание. Нетрудно убедиться, что при $t_0 \in \Pi_w(\mathfrak{M})$ для любой окрестности U точки t_0 и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\varphi \in S(A)$ (пространство состояний алгебры A) и $x \in \mathfrak{M}$ такие, что

$$\varphi(x(t_0)) = |x(t_0)| = 1, \sup_{t \in T} |\varphi(x(t))| \leq 1 + \varepsilon \text{ и}$$

$$\sup_{t \in T \setminus U} |\varphi(x(t))| < 1.$$

Очевидно, $\Pi_w \supseteq \Pi_n \supseteq \Pi$. Вообще говоря, существуют равномерные A -алгебры, для которых эти включения строгие. Для обычных равномерных алгебр все вышеуказанные множества совпадают. Легко показать, что эти множества совпадают также для всякой расщепимой алгебры $\mathfrak{M} = [D, A]$. Действительно, для любых $\varphi \in S(A)$ и элемента $x \in \mathfrak{M}$ вида $x = \sum_{i=1}^n f_i a_i$, где $f_i \in D \subset C(T)$, $a_i \in A$, имеем

$$\varphi(x(t)) = \varphi\left(\left(\sum_{i=1}^n f_i a_i\right)(t)\right) = \sum_{i=1}^n \varphi(a_i) f_i(t).$$

Отсюда $\varphi \circ x \in D \subset \mathfrak{M}$ и следовательно, если $t_0 \in \Pi_w(\mathfrak{M})$, то, в силу вышесказанного замечания, t_0 — точка пика алгебры D .

Теперь обратимся к рассмотрению связи между вышеуказанными множествами точек пика равномерных $B(H)$ -алгебр.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{M}$ — равномерная $B(H)$ -алгебра, $\mathfrak{M} \subset C(T, B(H))$. Тогда $\Pi_n(\mathfrak{M}) = \Pi_w(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_0 = [D, B(H)]$ — расщепимая алгебра, согласованная с алгеброй $\mathfrak{M}$ (см. теорему 1). Для каждой меры μ , ортогональной к D ($\mu \in D^\perp$), определим оператор Φ_μ из $C(T, B(H))$ на $B(H)$, полагая

$$\Phi_\mu(f) = \int_T f(t) d\mu(t).$$

Очевидно, $\Phi_\mu(x) = 0$ для $x \in \mathfrak{M}_0$. Покажем, что это имеет место для любого $x \in \mathfrak{M}$. В самом деле, поскольку для $x \in \mathfrak{M}$, $P_n x P_n \in \mathfrak{M}_0$, то $\Phi_\mu(P_n x P_n) = 0$. Однако $\Phi_\mu(P_n x P_n) = P_n \Phi_\mu(x) P_n$, откуда для любого n имеем $P_n \Phi_\mu(x) P_n = 0$. Следовательно, $\Phi_\mu(x) = 0$ для любого $x \in \mathfrak{M}$. Поэтому для $\varphi \in S(B(H))$ и $x \in \mathfrak{M}$ имеет место

$$0 = \varphi(\Phi_\mu(x)) = \varphi\left(\int_T x d\mu\right) = \int_T \varphi(x) d\mu,$$

т. е. $\varphi(x(t))$ ортогонально к $D^\perp$ и поэтому $\varphi \circ x \in D$.

Пусть теперь $t_0 \in \Pi_\infty(\mathfrak{M})$. Поскольку $\varphi \circ x \in D$ для любого $\varphi \in S(B(H))$, то t_0 является точкой пика для алгебры D , откуда $t_0 \in \Pi(\mathfrak{M}_0)$. Следовательно, $t_0 \in \Pi(P_n \mathfrak{M}_0 P_n) = \Pi(P_n \mathfrak{M} P_n)$. Поскольку $P_n \mathfrak{M} P_n \subset \mathfrak{M}$, то $t_0 \in \Pi_n(\mathfrak{M})$, откуда следует утверждение теоремы.

Следующий пример показывает, что, вообще говоря, существуют равномерные $B(H)$ -алгебры $\mathfrak{M}$, у которых $\Pi(\mathfrak{M})$ существенно уже $\Pi_n(\mathfrak{M})$. Действительно, пусть D_1 и D_2 — две коммутативные равномерные алгебры и пусть $D_1 \supset D_2$. Рассмотрим алгебру

$$\mathfrak{M} = [D_1, K(H)] + [D_2, B(H)].$$

Очевидно, точки норм пика и слабого пика алгебры $\mathfrak{M}$ совпадают с точками пика алгебры D_1 , а точки пика алгебры $\mathfrak{M}$ совпадают с точками пика алгебры D_2 .

Следующая теорема устанавливает связь между гомоморфизмами алгебры $\mathfrak{M}$ в $B(H)$ и элементами из $\text{Spr}_{B(H)} \mathfrak{M}$.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{M}$ — равномерная $B(H)$ -алгебра и Φ — гомоморфизм из $\mathfrak{M}$ в $B(H)$ такой, что $\Phi|_{B(H)}$ является автоморфизмом на $B(H)$. Тогда найдутся $p \in \text{Spr}_{B(H)} \mathfrak{M}$ и автоморфизм τ алгебры $B(H)$ такие, что $\Phi = \tau \circ p$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $p = \tau^{-1} \circ \Phi$, где τ^{-1} — автоморфизм $B(H)$, обратный к автоморфизму $\tau = \Phi|_{B(H)}$. Покажем, что p является билинейным гомоморфизмом на $\mathfrak{M}$. Пусть $x, y \in \mathfrak{M}$. Тогда, поскольку Φ — гомоморфизм, имеем

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \tau^{-1}(\Phi(xy)) = \tau^{-1}(\Phi(x)\Phi(y)) = \tau^{-1}(\Phi(x))\tau^{-1}(\Phi(y)) = \\ &= p(x)p(y). \end{aligned}$$

Теперь покажем $B(H)$ -билинейность. В самом деле, для $a, b \in B(H)$ и $x \in \mathfrak{M}$ справедливо

$$\begin{aligned} p(axb) &= (\tau^{-1}\Phi)(axb) = \tau^{-1}(\Phi(a)\Phi(x)\Phi(b)) = a\tau^{-1}(\Phi(x))b = \\ &= ap(x)b. \end{aligned}$$

Рассмотрим сужение $p|_{\mathfrak{M}_n}$. Это сужение является B_n -билинейным гомоморфизмом. Поскольку B_n является алгеброй с тривиальным центром и, кроме того, $B_n \subset \mathfrak{M}_n$, $DP_n \subset \mathfrak{M}_n$ и $p(fP_n) \subset Z(\mathfrak{M}_n)$ (где $f \in D$, $Z(\mathfrak{M}_n)$ — центр алгебры $\mathfrak{M}_n$), то сужение $p|_{DP_n}$ является мультипликативным функционалом. Пусть μ — ее представляющая ме-

ра, тогда можно определить условное ожидание $\tilde{p}$ на $C(T, B_d)$ по формуле:

$$\tilde{p}(x) = \int_T x d\mu, \quad x \in C(T, B(H)).$$

Поскольку сужение $p = p|_{\mathfrak{M}}$ является гомоморфизмом (см. конец доказательства теоремы 1), то $p \in \text{Sp}_{B(H)} \mathfrak{M}$. Таким образом, имеем гомоморфизм $p = \tau^{-1} \circ \Phi$, определенный на $\mathfrak{M}$, причем $\Phi = \tau \circ p$.

В заключение автор выражает благодарность Арзуманяну В. А. и Григоряну С. А. за полезные советы и внимание к работе.

Вычислительный центр
Госплана Армении

Поступила 14. II. 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. D. C. Taylor. Interpolation in algebras of operator fields. J. Funct., v. 10, № 2 1972, 159—190.
2. В. А. Арзуманян, С. А. Григорян. Спектр равномерных алгебр операторных полей. Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1986, XXI, № 1, 63—79.
3. V. Arzumantian, S. Grigorian. The boundaries of uniform algebras of operator fields, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1988, XXIII, № 4, 362—378.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Ա. Ի. Պետրոսյան. Բազմադրժանում ∂ -հավասարման միջնամալ լուծումների C^m -նորմով գնահատումը	99
Ն. Ե. Թովմասյան. Անալիտիկ շարունակության սկզբունքը էլիպսի աղեղով և նրա կիրառությունները	108
Վ. Ա. Դեռկաչ, Մ. Մ. Մալամուդ. Կրեյն-Ստիլտեսի ֆունկցիաների մի դասի ընդհանրացման մասին	115
Յ. Ա. Թալալյան. Բազմաթիվ փոփոխականների էական բացարձակ անընդհատ ֆունկցիաների մասին	138
Ա. Հ. Լեւոնյան և Ա. Ռուբելի մի խնդիր և որոշ հարակից հարցեր	151

ՀԱՄԱՌՈՏ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

Գ. Ա. Կառազույան. Ֆուրյեի շարքերի ուժեղ Φ -միջինների տարամիտության մասին	159
Ա. Օ. Հովհաննիսյան. Աղամարի պրոբլեմի լուծումը փոփոխական կոեֆիցիենտներով, մի դասի հիպերբոլիկ հավասարումների համար	163
Ս. Ա. Գրիգորյան. Ընդհանրացված, անալիտիկ հանրահաշվին օրթոգոնալ լափերի մասին՝ ըստ Արենսի-Ջինզերի ֆունկցիաների	171
Մ. Ա. Հակոբյան. Հավասարաչափ $B(H)$ -հանրահաշիվների մասին	176

СОДЕРЖАНИЕ

А. И. Петросян. Оценка в C^m -норме минимальных решений ∂ -уравнения в полидиске	99
Н. Е. Товмасьян. Принцип аналитического продолжения через дугу эллипса и его применения	108
В. А. Деркач, М. М. Маламуд. Об одном обобщении класса функций Крейна-Стильтеса	108
Ф. А. Талалян. О существенно абсолютно непрерывных функциях многих переменных	138
А. А. Нерсисян. Одна задача Л. А. Рубеля и некоторые родственные вопросы	151

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Г. А. Карагулян. О сходимости сильных Φ -средних рядов Фурье	159
А. О. Оганесян. Решение проблемы Адамара для одного класса гиперболических уравнений с переменными коэффициентами	163
С. А. Григорян. О мерах, ортогональных к алгебре обобщенных аналитических по Аренсу-Зингеру функций	171
М. А. Акопян. О равномерных $B(H)$ алгебрах	176

CONTENTS

A. I. Petrosian. The estimate in C^m -norm of the minimal solutions of ∂ -equation in polydisk	99
N. E. Tovmasyan. Principle of the analytical continuation of fronght ellipse are its applications	108
V. A. Derkach, M. M. Malamyd. On generalization of the Krein—Stilties class of functions	115
F. A. Talalyan. On the absolute continuons functions of several variables	138
A. N. Nersesyan. A problem of L. A. Rybel and relatitet quertons	151