ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке) а кратких сообщений—не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленым на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствущем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

2 р. 40 к.

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contribttors who desire to have their articles published in the proceedings zvestia of the Academy of Sciences of the Armenien S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initals and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date muse be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to indicated by a numeral in square brackets properey inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article shoule contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitied ot twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Acacemy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

Математика, 1991, т. XXVI, № 1, стр. 3—96.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 1, 1991 Математика

УДК 517.547

М. М. ДЖРБАШЯН, А. О. КАРАПЕТЯН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 0. Введение

В работах [1, 2] одного из авторов впервые были введены классы $M_2(\sigma, \rho)$ $(\sigma, \rho > 0)$ целых функций $f(z)$, $z \in \mathbf{C}$, с конечной нормой

$$\|f\|_{\sigma, \rho} \overset{\text{def}}{=} \left(\iint_{\mathbf{C}} |f(z)|^2 \cdot e^{-\sigma|z|^\rho} \cdot |z|^{\rho-2} \, dxdy \right)^{1/2} < +\infty \tag{0.1}$$

$$(z = x + iy).$$

При этом была установлена основная

Теорема А. 1°. *Каждая функция $f \in M_2(\sigma, \rho)$ допускает интегральное представление вида*

$$f(z) = \frac{\rho \cdot \sigma}{2\pi} \cdot \iint_{\mathbf{C}} f(w) \cdot e^{-\sigma \cdot |w|^\rho} \cdot |w|^{\rho-2} \cdot E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} \cdot z \cdot \bar{w};\ 1) \, dudv \tag{0.2}$$

$$(w = u + iv),$$

где

$$E_{\rho/2}(\omega;\ 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^k}{\Gamma(1 + 2k/\rho)}, \quad \omega \in \mathbf{C}, \tag{0.3}$$

суть целая функция типа Миттаг-Леффлера.

2°. *Интегральный оператор, порождаемый правой частью формулы* (0.2), *действует в гильбертовом пространстве измеримых функций f с конечной нормой $\|f\|_{\sigma, \rho} < +\infty$ как оператор ортогонального проектирования на подпространство $M_2(\sigma, \rho)$.*

При $\rho = 2$ пространства $M_2(\sigma, \rho)$ рассматривались также в работе [3]. Кроме того, в специальном случае, когда $\sigma = 1/2$ и $\rho = 2$, эти пространства, начиная с 1961 г., рассматривались в работах многих авторов; обстоятельная библиография содержится во введении статьи [4], авторы которой, по всей вероятности, не были знакомы с работами [1—3].

В тех же работах [1—3] теорема А нашла ряд применений. Так, были построены некоторые весьма общие ортонормированные системы целых функций и найдены критерии их полноты в определенных пространствах целых функций. Кроме того, для некоторых классов целых функций были найдены условия, при которых данная последовательность $\{a_k\}_1^\infty \subset \mathbf{C}$ является для них последовательностью единственности (т. е. выполнение равенств $f(a_k) = 0$, $k \geqslant 1$, для произвольной функции f из рассматриваемых классов влечет тождество $f(z) \equiv 0$, $z \in \mathbf{C}$).

Настоящая работа посвящена установлению многомерных аналогов некоторых из результатов работ [1, 2]. Вместе с тем необходимо отметить, что установленные нами результаты отчасти являются новыми даже для целых функций одного комплексного переменого.

§ 1. Основные интегральные представления

1.1. Пусть $f(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\cdot\omega^k, \omega\in C$ — произвольная целая функция, так что $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=0$. Порядком функции f называется число

$$\rho(f)=\inf\{\rho>0: |f(\omega)|<\exp(|\omega|^{\rho}), |\omega|>R(f,\rho)>0\}.$$

Очевидно, $0\leqslant\rho(f)\leqslant+\infty$. При условии $0<\rho(f)<+\infty$ типом функции f называется число

$$\sigma(f)=\inf\{\sigma>0: |f(\omega)|<\exp(\sigma\cdot|\omega|^{\rho(f)}), |\omega|>R(f,\sigma)>0\}.$$

Очевидно, $0\leqslant\sigma(f)\leqslant+\infty$. Хорошо известны формулы:

$$\rho(f)=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln k}{\ln\dfrac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}},\quad \sigma(f)=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k\cdot\sqrt[k]{|a_k|^{\rho(f)}}}{e\cdot\rho(f)}. \tag{1.1}$$

Далее, если $f(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\cdot\omega^k$, $\omega\in C$ — некоторая целая функция и $\beta\in C$, то полагаем

$$J_{\beta}f(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\beta)}\cdot a_k\cdot\omega^k,\ \omega\in C, \tag{1.2}$$

$$J^{\beta}f(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1+\beta)}{\Gamma(k+1)}\cdot a_k\cdot\omega^k,\ \omega\in C. \tag{1.3}$$

В дальнейшем изложении существенную роль будет играть функция типа Миттаг—Леффлера ($\rho>0$, $\mu\in C$):

$$E_{\rho}(\omega;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\omega^k/\Gamma(\mu+k/\rho),\ \omega\in C. \tag{1.4}$$

Основываясь на асимптотической формуле Стирлинга (для Г-функции Эйлера), не трудно установить

Предложение 1. (а) *Если f—целая функция и $\beta\in C$, то и функции $J_{\beta}f$, $J^{\beta}f$ целые, причем того же порядка и типа, что и функция f.* (б) *Если $0<\rho$, $\sigma<+\infty$ и $\mu\in C$, то функция $E_{\rho}(\sigma\cdot\omega;\ \mu),\omega\in C$, целая и имеет порядок ρ, тип σ^{ρ}.*

1.2. Введем некоторые новые обозначения. Для произвольных $z=(z_1,\cdots,z_n)\in C^n$, $w=(w_1,\cdots,w_n)\in C^n$ положим

$$\langle z, w\rangle=\sum_{k=1}^{n} z_k\cdot\overline{w_k},\quad |z|=\sqrt{\langle z, z\rangle}. \tag{1.5}$$

Если $z=(z_1,\cdots,z_n)\in C^n$, то полагая $z'=(z_1,\cdots,z_{n-1})\in C^{n-1}$, будем иметь $z=(z', z_n)$.

Через m_n будем обозначать $2n$-мерную меру Лебега в пространстве $\mathbf{C}^n \cong \mathbf{R}^{2n}$, а через ν_n — поверхностную меру Лебега на единичной сфере $S_n = \{\zeta \in \mathbf{C}^n : |\zeta| = 1\}$. При этом формула интегрирования в полярных координатах записывается как

$$\int_{\mathbf{C}^n} \varphi(w)\, dm_n(w) = \int_0^{+\infty} r^{2n-1} \int_{S_n} \varphi(r\cdot\zeta)\, d\nu_n(\zeta)\, dr. \tag{1.6}$$

Кроме того, иногда удобно бывает рассматривать на сфере S_n меру ν_n^*, кратную мере ν_n и нормированную условием $\nu_n^*(S_n) = 1$.

Мультииндексом длины n называется набор $j = (j_1, \ldots, j_n)$ целых неотрицательных чисел. При этом обычно полагается:

$$j! = j_1! \cdot \cdots \cdot j_n!,\ |j| = j_1 + \cdots + j_n. \tag{1.7}$$

Если $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \in \mathbf{C}^n$, то полагаем также

$$\omega^j = \omega_1^{j_1} \cdot \cdots \cdot \omega_n^{j_n}. \tag{1.8}$$

Если $i = (i_1, \cdots, i_n)$ и $j = (j_1, \cdots, j_n)$ — мультииндексы длины n, то справедлива формула (см., например, [5], гл. I, 1.4):

$$\int_{S_n} \zeta^j \cdot \overline{\zeta^i}\, d\nu_n(\zeta) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \dfrac{2\pi^n \cdot j!}{\Gamma(n + |j|)}, & i = j. \end{cases} \tag{1.9}$$

Отсюда вытекает полезная формула:

$$\int_{S_n} \zeta^j \cdot \langle z, \zeta \rangle^k\, d\nu_n(\zeta) = \begin{cases} 0, & |j| \neq k, \\ 2\pi^n \cdot z^j \dfrac{\Gamma(|j|+1)}{\Gamma(|j|+n)}, & |j| = k, \end{cases} \tag{1.10}$$

где $z \in \mathbf{C}^n$, $j = (j_1, \cdots, j_n)$ — мультииндекс длины n и $k = 0, 1, 2, \cdots$.

Далее, если $f(w)$, $w \in \mathbf{C}^n$ — некоторая целая функция, то она, как известно, допускает разложение вида

$$f(w) = \sum_{|j| \geq 0} a_j \cdot w^j,\ w \in \mathbf{C}^n, \tag{1.11}$$

причем для произвольного компакта $K \subset \mathbf{C}^n$ существует сходящийся ряд $\sum_{|j| \geq 0} b_j$ с положительными членами такой, что для любого мультииндекса j

$$|a_j \cdot w^j| \leq b_j$$

независимо от $w \in K$. Заметим также, что после соответствующей группировки разложение (1.11) может быть записано как

$$f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(w),\ w \in \mathbf{C}^n, \tag{1.12}$$

где P_k суть однородный полином порядка k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Наконец отметим, что если $f(w)$, $w\in\mathbb{C}^n$ — произвольная целая функция вида (1.11), то в силу (1.9) при $0\leqslant r<+\infty$ имеем

$$\int\limits_{S_n}|f(r\cdot\zeta)|^2 d\nu_n(\zeta)=2\pi^n\cdot\sum_{|j|\geqslant 0} r^{2|j|}\cdot\frac{|a_j|^2\cdot j!}{\Gamma(n+|j|)}. \tag{1.13}$$

1.3. Пусть, как и выше, $n\geqslant 1$ и $0<p<+\infty$, $0<\rho$, $\sigma<+\infty$, $\alpha>-2n$. Для произвольной (вообще говоря, комплекснозначной) измеримой функции $f(w)$, $w\in\mathbb{C}^n$, положим

$$\|f\|_{p,\rho,\sigma,\alpha}\stackrel{\mathrm{def}}{\equiv}\left(\int\limits_{\mathbb{C}^n}|f(w)|^p\cdot e^{-\sigma\cdot|w|^\rho}\cdot|w|^\alpha\,dm_n(w)\right)^{1/p}. \tag{1.14}$$

Затем введем пространство $L^p_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbb{C}^n)=\{f:\|f\|_{p,\rho,\sigma,\alpha}<+\infty\}$, а $H^p_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbb{C}^n)$ будет обозначать пространство целых функций из $L^p_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbb{C}^n)$.

Из (1.13) немедленно получаем

Предложение 2. *Пусть* $f(w)$, $w\in\mathbb{C}^n$ — *произвольная целая функция вида* (1.11), *тогда*

$$\|f\|^2_{2,\rho,\sigma,\alpha}=\frac{2\pi^n}{\rho\cdot\sigma^\mu}\cdot\sum_{|j|\geqslant 0}\frac{|a_j|^2\cdot j!}{\sigma^{2|j|/\rho}}\cdot\frac{\Gamma(\mu+2|j|/\rho)}{\Gamma(n+|j|)}, \tag{1.15}$$

где $\mu=(2n+\alpha)/\rho$.

Далее, привлекая соображения субгармоничности, стандартными рассуждениями устанавливается

Предложение 3. *Пусть* $f(z)$, $z\in\mathbb{C}^n$ — *целая функция, тогда для произвольного компакта* $K\subset\mathbb{C}^n$

$$|f(z)|\leqslant\mathrm{const}\cdot\|f\|_{p,\rho,\sigma,\alpha},\quad z\in K, \tag{1.16}$$

где константа зависит от p, ρ, σ, α *и* K, *но не зависит от функции* f.

Следствие. $H^p_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbb{C}^n)$ является замкнутым подпространством в $L^p_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbb{C}^n)$.

1.4. Всюду дальше будем предполагать, что $n\geqslant 1$, $1<p<+\infty$, $0<\rho$, $\sigma<+\infty$, $\alpha>-2n$. При этом полагаем

$$\mu=(2n+\alpha)/\rho,\quad c=\rho\cdot\sigma^\mu/2\pi^n. \tag{1.17}$$

Введем в рассмотрение интегральный оператор

$$T_{\rho,\sigma,\alpha}(f)(z)\equiv c\cdot\int\limits_{\mathbb{C}^n}f(w)\cdot J^{n-1}E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}\cdot\langle z,w\rangle;\mu)\cdot e^{-\sigma\cdot|w|^\rho}\cdot$$

$$\cdot|w|^\alpha\,dm_n(w),\quad z\in\mathbb{C}^n, \tag{1.18}$$

свойства которого устанавливает

Теорема 1. *Пусть* $f\in L^p_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbb{C}^n)$ *и при этом* $F(z)\equiv T_{\rho,\sigma,\alpha}(f)(z)$, $z\in\mathbb{C}^n$. *Тогда*:

(а) *функция F целая, причем*

$$F(z) = \sum_{|j|\geq 0} a_j \cdot z^j = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z), \quad z \in \mathbf{C}^n, \tag{1.19}$$

$$a_j = c\,\frac{\Gamma(n+|j|)}{j!}\cdot\frac{\sigma^{2|j|/\rho}}{\Gamma(\mu+2|j|/\rho)}\cdot\int_{\mathbf{C}^n} f(w)\cdot \overline{w}^j\cdot e^{-\sigma\cdot|w|^\rho}\cdot|w|^\alpha\, dm_n(w),$$

$$(|j|\geq 0), \tag{1.20}$$

$$P_k(z) \equiv c\cdot\frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(k+1)}\cdot\frac{\sigma^{2k/\rho}}{\Gamma(\mu+2k/\rho)}\cdot\int_{\mathbf{C}^n} f(w)\cdot\langle z, w\rangle^k\cdot$$

$$\cdot e^{-\sigma\cdot|w|^\rho}\cdot|w|^\alpha\, dm_n(w), \quad z\in\mathbf{C}^n \ (k\geq 0). \tag{1.21}$$

(б) *Для* $\forall\,\varepsilon>0$ *справедлива оценка*

$$|F(z)| \leq \exp\left\{\frac{q}{4}(1+\varepsilon)^2\cdot\sigma\cdot|z|^\rho\right\}\cdot\|f\|_{p,\rho,\sigma,\alpha}, \quad |z|\geq R(\varepsilon)>0 \ (1/p+1/q=1). \tag{1.22}$$

Доказательство. Из предложения 1 следует, что функция $J^{n-1}E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}\cdot\omega;\ \mu)$, $\omega\in\mathbf{C}$, целая и имеет порядок $\rho/2$ и тип σ. Следовательно, при $\forall\varepsilon>0$ имеем

$$|J^{n-1}E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}\cdot\omega;\ \mu)| < e^{(\sigma+\varepsilon)\cdot|\omega|^{\rho/2}}, \quad |\omega|\geq R(\varepsilon)>0. \tag{1.23}$$

А значит, существует $A>0$, при котором

$$|J^{n-1}E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}\cdot\omega;\ \mu)| < e^{A(1+|\omega|)^{\rho/2}}, \quad \omega\in\mathbf{C}. \tag{1.24}$$

Если теперь $z\in\mathbf{C}^n$, $|z|\leq M<+\infty$, то при $w\in\mathbf{C}^n$ имеем

$$|f(w)\cdot J^{n-1}E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}\cdot\langle z, w\rangle;\ \mu)|\cdot e^{-\sigma\cdot|w|^\rho}\cdot|w|^\alpha <$$

$$< |f(w)|\cdot e^{A(1+M\cdot|w|)^{\rho/2}}\cdot e^{-\sigma\cdot|w|^\rho}\cdot|w|^\alpha \equiv \Psi(w).$$

И поскольку $f\in L^p_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbf{C}^n)$, то в силу интегрального неравенства Гельдера получаем, что функция $\Psi\in L^1(\mathbf{C}^n;\ dm_n)$.

Таким образом, функция $F(z)$ действительно целая. Соотношения (1.20), (1.21) являются следствием (1.18) и формулы (1.4). Переходя к доказательству (б), зафиксируем $\varepsilon>0$; тогда в силу (1.23) имеем

$$|J^{n-1}E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}\cdot\omega;\ \mu)| < e^{\sigma(1+\varepsilon/2)\cdot|\omega|^{\rho/2}}, \quad |\omega|>R(\varepsilon)>0. \tag{1.25}$$

Пусть $|z|>R(\varepsilon)$, тогда из (1.18) на основании интегрального неравенства Гельдера, а также неравенства $|\langle z, w\rangle|<|z|\cdot|w|$ получаем

$$|F(z)| < \|f\|_{p,\rho,\sigma,\alpha}\cdot I^{1/q}, \tag{1.26}$$

где

$$I = c^q\cdot\int_{\mathbf{C}^n}|J^{n-1}E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}\cdot|z|\cdot|w|;\ \mu)|^q\cdot e^{-\sigma\cdot|w|^\rho}\cdot|w|^\alpha\, dm_n(w) =$$

$$= c^q\cdot\left\{\int_{|w|<1} + \int_{|w|>1}\right\} = I_1 + I_2. \tag{1.27}$$

Затем приходим к оценкам:

$$I_1 \leqslant \mathrm{const}\cdot |J^{n-1} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}\cdot|z|;\ \mu)|^q \leqslant$$

$$< \mathrm{const}\cdot e^{q\sigma(1+\varepsilon/2)\cdot|z|^{\rho/2}},\ |z| \geqslant R(\varepsilon); \tag{1.28}$$

$$I_2 < c^q \cdot \int\limits_{|w|>1} e^{-\sigma\cdot|w|^\rho}\cdot|w|^\alpha\cdot e^{q\sigma(1+\varepsilon/2)\cdot|z|^{\rho/2}\cdot|w|^{\rho/2}}\, dm_n(w) =$$

$$= \mathrm{const}\cdot\int\limits_1^{+\infty} r^{\mu\rho-1}\cdot\exp\{-\sigma\cdot r^\rho + \sigma q(1+\varepsilon/2)|z|^{\rho/2}\cdot r^{\rho/2}\}\, dr =$$

$$= \mathrm{const}\cdot\int\limits_1^{+\infty} x^{2\mu-1}\cdot\exp\{-\sigma\cdot[x^2 - q(1+\varepsilon/2)|z|^{\rho/2}\cdot x]\}\, dx =$$

$$= \mathrm{const}\cdot\exp\{\sigma\cdot q^2/4\cdot(1+\varepsilon/2)^2\cdot|z|^\rho\}\cdot\bar{I}_2,\ |z| \geqslant R(\varepsilon), \tag{1.29}$$

где

$$\bar{I}_2 = \int\limits_1^{+\infty} x^{2\mu-1}\cdot\exp\{-\sigma\cdot[x - q/2\cdot(1+\varepsilon/2)\,|z|^{\rho/2}]^2\}\, dx,\ |z| \geqslant R(\varepsilon). \tag{1.30}$$

Комбинируя (1.28)—(1.30), мы получим

$$I = I_1 + I_2 < e^{q^2/4\cdot\sigma(1+\varepsilon)^2\cdot|z|^\rho},\ |z| \geqslant R_1^*(\varepsilon) > R(\varepsilon). \tag{1.31}$$

Наконец, (1.26) и (1.31) дают оценку (1.22), и теорема 1 полностью доказана.

Замечание 1.1. Используя точные асимптотические оценки функции типа Миттаг-Леффлера, установленные в монографии [6] (гл. 3, § 2), оценку (1.22) можно улучшить, если наложить определенные условия на параметры ρ и α; на этом, однако, мы останавливаться не будем.

Замечание 1.2. Для некоторых специальных значений параметров ρ и α оператор $T_{\rho,\sigma,\alpha}$ принимает весьма простой вид, а именно:

при $n > 1$ и $\rho = 2$, $\alpha = 0$

$$T_{\rho,\sigma,\alpha}(f)(z) = \frac{\sigma^n}{\pi^n}\cdot\int\limits_{\mathbf{C}^n} f(w)\cdot e^{-\sigma\cdot|w|^2}\cdot e^{\sigma\cdot\langle z,w\rangle}\, dm_n(w),\ z\in\mathbf{C}^n;$$

при $n = 1$ и $\rho = 1$, $\alpha = -1$

$$T_{\rho,\sigma,\alpha}(f)(z) = \frac{\sigma}{2\pi}\cdot\int\limits_{\mathbf{C}} f(w)\cdot e^{-\sigma\cdot|w|}\cdot|w|^{-1}\cdot\mathrm{ch}\,(\sigma\cdot\langle z, w\rangle^{1/2})\, dm_1(w),\ z\in\mathbf{C};$$

при $n = 1$ и $\rho = 1$, $\alpha = 0$

$$T_{\rho,\sigma,\alpha}(f)(z) = \frac{\sigma}{2\pi}\cdot\int\limits_{\mathbf{C}} f(w)\cdot e^{-\sigma\cdot|w|}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,(\sigma\cdot\langle z, w\rangle^{1/2})}{\langle z, w\rangle^{1/2}}\, dm_1(w),\ z\in\mathbf{C}.$$

Справедлива основная

Теорема 2. *Пусть* $f\in H^p_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbf{C}^n)$, *тогда*

$$T_{\rho,\sigma,\alpha}(f)(z)=f(z),\quad T_{\rho,\sigma,\alpha}(\overline{f})(z)\equiv\overline{f(0)},\quad z\in\mathbf{C}^n. \tag{1.32}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $z\in\mathbf{C}^n$ и установим первое из соотношений (1.32) (второе устанавливается аналогично). Для этого введем обозначения:

$$I(z)=c\cdot\int\limits_{\mathbf{C}^n} f(w)\cdot J^{n-1}E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}\cdot\langle z,w\rangle;\mu)\cdot e^{-\sigma|w|^\rho}\cdot|w|^\alpha dm_n(w), \tag{1.33}$$

$$I_R(z)=c\cdot\int\limits_{|w|<R} f(w)\cdot J^{n-1}E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}\cdot\langle z,w\rangle;\mu)\cdot e^{-\sigma|w|^\rho}\cdot|w|^\alpha dm_n(w),$$
$$0<R<+\infty. \tag{1.34}$$

Очевидно, $I_R(z)\to I(z)$ при $R\to+\infty$. Далее, положим

$$h(r)=\int\limits_{S_n} f(r\cdot\zeta)\cdot J^{n-1}E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}\cdot r\langle z,\zeta\rangle;\mu)\,d\nu_n(\zeta),\ 0<r<+\infty. \tag{1.35}$$

Тогда с учетом (1.6) соотношения (1.33), (1.34) принимают вид

$$I(z)=c\cdot\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sigma r^\rho}\cdot r^{2n+\alpha-1}\cdot h(r)\,dr, \tag{1.36}$$

$$I_R(z)=c\cdot\int\limits_0^{R} e^{-\sigma r^\rho}\cdot r^{2n+\alpha-1}\cdot h(r)\,dr,\ 0<R<+\infty. \tag{1.37}$$

Заметим также, что если $f(z)\equiv\sum\limits_{|j|\geq0}a_j\cdot z^j$, $z\in\mathbf{C}^n$, то

$$f(r\cdot\zeta)=\sum_{|j|\geq0}a_j\cdot r^{|j|}\cdot\zeta^j,\ 0<r<+\infty,\ \zeta\in S_n; \tag{1.38}$$

кроме того,

$$J^{n-1}E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}\cdot r\langle z,\zeta\rangle;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(k+1)}\cdot\frac{\sigma^{2k/\rho}\cdot r^k\cdot\langle z,\zeta\rangle^k}{\Gamma(\mu+2k/\rho)}, \tag{1.39}$$
$$0\leq r<+\infty,\ \zeta\in S_n.$$

Поэтому на основании формулы (1.10) получаем

$$h(r)\equiv2\pi^n\cdot\sum_{|j|\geq0}a_j\cdot z^j\cdot\frac{r^{2|j|}\cdot\sigma^{2|j|/\rho}}{\Gamma(\mu+2|j|/\rho)},\ 0\leq r<+\infty, \tag{1.40}$$

причем для $\forall R>0$ существует сходящийся ряд $\sum\limits_{|j|\geq0}b_j$ с $b_j>0$, мажорирующий ряд (1.40) равномерно по $r\in[0,R]$. Следовательно

$$I_R(z)=c\cdot2\pi^n\cdot\sum_{|j|\geq0}a_j\cdot z^j\cdot\frac{\sigma^{2|j|/\rho}}{\Gamma(\mu+2|j|/\rho)}\cdot\int\limits_0^R e^{-\sigma\cdot r^\rho}\cdot r^{2n+2|j|+\alpha-1}dr,$$
$$0<R<+\infty. \tag{1.41}$$

Нетрудно заметить также, что ряд (1.41) мажорируется (равномерно по $R\in(0,+\infty)$) сходящимся рядом const$\cdot\sum\limits_{|j|\geq0}|a_j\cdot z^j|$. А значит, в правой части (1.41) можно перейти к пределу при $R \to +\infty$ почленно, и тогда имеем

$$I(z)=\lim_{R\to+\infty} I_R(z)=c\cdot 2\pi^n\cdot\sum_{|j|\geq 0} a_j\cdot z^j\cdot\frac{\sigma^{2|j|/\rho}}{\Gamma(\mu+2|j|/\rho)}\cdot$$

$$\cdot\int_0^{+\infty} e^{-\sigma\cdot r^\rho}\cdot r^{2n+2|j|+\alpha-1}\,dr=c\cdot 2\pi^n\cdot\sum_{|j|\geq 0} a_j\cdot z^j\cdot$$

$$\cdot\frac{\sigma^{2|j|/\rho}}{\Gamma(\mu+2|j|/\rho)}\cdot\frac{\Gamma(\mu+2|j|/\rho)}{\rho\cdot\sigma^\mu\cdot\sigma^{2|j|/\rho}}=\sum_{|j|\geq 0} a_j\cdot z^j=f(z),$$

что и требовалось установить.

Следствие. Пусть $f=u+iv\in H^p_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbf{C}^n)$, тогда

$$f(z)\equiv 2\cdot T_{\rho,\sigma,\alpha}(u)(z)-\overline{f(0)},\quad z\in\mathbf{C}^n. \tag{1.32'}$$

1.5. Рассмотрим подробнее случай $p=2$. Тогда оказывается возможным снабдить скалярным произведением пространство $L_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbf{C}^n)$, для произвольных $f,\ g\in L^2_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbf{C}^n)$ положив

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbf{C}^n} f(w)\cdot\overline{g(w)}\cdot e^{-\sigma\cdot|w|^\rho}\cdot|w|^\alpha\,dm_n(w). \tag{1.42}$$

Легко видеть, что $\|f\|_{2,\rho,\sigma,\alpha}=\sqrt{\langle f,f\rangle}$, $\forall f\in L^2_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbf{C}^n)$.

Теорема 3. *Интегральный оператор $T_{\rho,\sigma,\alpha}$ действует из $L^2_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbf{C}^n)$ в $L^2_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbf{C}^n)$; более того, $T_{\rho,\sigma,\alpha}$ является оператором ортогонального проектирования на замкнутое подпространство $H^2_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbf{C}^n)$ гильбертова пространства $L^2_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbf{C}^n)$.*

Доказательство. Пусть $f\in L^2_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbf{C}^n)$, тогда $f=f_1+f_2$, где f_1 из $H^2_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbf{C}^n)$, а f_2 — из ортогонального дополнения к $H^2_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbf{C}^n)$ (т. е. $\langle f_2,\varphi\rangle=0$ для $\forall\varphi\in H^2_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbf{C}^n)$). Следовательно, с учетом теоремы 2 имеем

$$T_{\rho,\sigma,\alpha}(f)(z)\equiv T_{\rho,\sigma,\alpha}(f_1)(z)+T_{\rho,\sigma,\alpha}(f_2)(z)\equiv f_1(z)+T_{\rho,\sigma,\alpha}(f_2)(z). \tag{1.43}$$

Теорема будет доказана, если мы установим тождество

$$T_{\rho,\sigma,\alpha}(f_2)(z)\equiv 0,\quad z\in\mathbf{C}^n. \tag{1.44}$$

Для этого заметим, что при произвольном $z\in\mathbf{C}^n$

$$T_{\rho,\sigma,\alpha}(f_2)(z)=c\cdot\langle f_2(w),\ J^{n-1}E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}\cdot\langle w,z\rangle;\ \mu)\rangle \tag{1.45}$$

и при этом функция $J^{n-1}E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}\cdot\langle w,z\rangle;\ \mu)$, $w\in\mathbf{C}^n$, принадлежит $H^2_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbf{C}^n)$. Тем самым, (1.44) установлено, что и завершает доказательство теоремы.

Комбинируя теорему 3 с формулой (1.32′), получаем

Следствие. Для произвольной функции $f=u+iv\in H^2_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbf{C}^n)$ такой, что $f(0)=0$, справедлива оценка

$$\|f\|_{2,\rho,\sigma,\alpha}\leq 2\cdot\|u\|_{2,\rho,\sigma,\alpha}. \tag{1.46}$$

§ 2. Теоремы единственности и полноты

2.1. Пусть $f(z)$, $z\in\mathbf{C}^n$, суть произвольная целая функция. При фиксированном $\zeta\in S_n$ можно определить (см. [5], гл. 1, 1.2) срез-функцию

$$f_\zeta(\lambda)\equiv f(\lambda\cdot\zeta),\ \lambda\in\mathbf{C},\tag{2.1}$$

которая, очевидно, является целой функцией уже одного комплексного переменного. Всюду дальше мы будем предполагать, что $f(0)\neq0$; следовательно, при произвольном $\zeta\in S_n: f_\zeta(0)\neq0$. Далее, при $t\in(0,+\infty)$ через $n_f(\zeta;\ t)$ обозначим число нулей (с учетом кратностей) функции $f_\zeta(\lambda)$, $\lambda\in\mathbf{C}$, в круге $\{\lambda\in\mathbf{C}:|\lambda|<t\}$. Затем положим

$$N_f(\zeta;\ r)=\int\limits_0^r\frac{n_f(\zeta;\ t)}{t}\,dt,\ \zeta\in S_n,\ r\in(0,+\infty).\tag{2.2}$$

Для установления одного важного свойства функции $N_f(\zeta;\ r)$ нам необходима теорема Гурвица в следующей формулировке:

Пусть $0<\rho<+\infty$, функции $\{f_k\}_1^\infty$ голоморфны в круге $\{\lambda\in\mathbf{C}: |\lambda|<\rho\}$, непрерывны в замыкании $\{\lambda\in\mathbf{C}:|\lambda|\leqslant\rho\}$ и при $k\to\infty: f_k(\lambda)\to f(\lambda)$ равномерно по всем $\lambda\in\mathbf{C}$, $|\lambda|\leqslant\rho$. Если функция $f(\lambda)$ не обращается в нуль при $|\lambda|=\rho$, то при достаточно больших k функции f_k имеют в круге $\{\lambda\in\mathbf{C}:|\lambda|<\rho\}$ столько же нулей (с учетом кратностей), сколько и функция f.

Предложение 4. *Пусть $f(z)$, $z\in\mathbf{C}^n$, суть целая функция и $f(0)\neq0$. Тогда $N_f(\zeta;\ r)$ непрерывна по совокупности переменных $\zeta\in S_n$, $r\in(0,+\infty)$.*

Доказательство. Зафиксируем $\zeta\in S_n$ и $r\in(0,+\infty)$, и пусть $\zeta_k\in S_n$, $r_k\in(0,+\infty)$ $(k=1,2,\cdots)$, причем при $k\to\infty$: $\zeta_k\to\zeta$, $r_k\to r$. Выберем затем положительные числа δ и A так, чтобы

$$0<\delta<r<A<+\infty,\tag{2.3}$$

и при этом функция $f_\zeta(\lambda)$, $\lambda\in\mathbf{C}$, не обращается в нуль при $|\lambda|\leqslant\delta$ и $|\lambda|=A$. Не ограничивая общности, можем предположить также, что

$$0<\delta<r_k<A<+\infty\ (k=1,2,\cdots).\tag{2.4}$$

Далее, поскольку $\zeta_k\to\zeta$ при $k\to\infty$, то

$$\lim_{k\to\infty}f_{\zeta_k}(\lambda)=f_\zeta(\lambda),\ \lambda\in\mathbf{C},\tag{2.5}$$

причем сходимость равномерная на компактах из $\mathbf{C}$. Следовательно, в силу теоремы Гурвица функции $f_{\zeta_k}(\lambda)$, $\lambda\in\mathbf{C}$, не обращаются в нуль при $|\lambda|<\delta$, а в круге $|\lambda|<A$ имеют столько же нулей, сколько и функция $f_\zeta(\lambda)$, $\lambda\in\mathbf{C}$ (и это, без ограничения общности, при $k=1,2,\cdots$). После всего этого имеем

$$N_f(\zeta; r) = \int_0^r \frac{n_f(\zeta;\ t)}{t}\,dt = \int_\delta^r \frac{n_f(\zeta;\ t)}{t}\,dt =$$

$$= \int_\delta^A \frac{n_f(\zeta;\ t)}{t}\cdot\chi_{\delta,\,r}\,(t)\,dt, \tag{2.6}$$

$$N_f(\zeta_k;\ r_k) = \int_0^{r_k} \frac{n_f(\zeta_k;\ t)}{t}\,dt = \int_\delta^{r_k} \frac{n_f(\zeta_k;\ t)}{t}\,dt =$$

$$= \int_\delta^A \frac{n_f(\zeta_k;\ t)}{t}\cdot\chi_{[\delta,\ r_k]}(t)\,dt. \tag{2.7}$$

Остается заметить, что при $k\to\infty$: $N_f(\zeta_k;\ r_k)\to N_f(\zeta;\ r)$ в силу теоремы Лебега об ограниченной сходимости. Итак, непрерывность функции $N_f(\zeta;\ r)$ по совокупности переменных $\zeta\in S_n$, $r\in(0,+\infty)$ установлена.

Введем в рассмотрение функцию

$$N_f(r) \overset{\text{def}}{=} \int_{S_n} N_f(\zeta;\ r)\,d\nu_n^*(\zeta),\quad r\in(0,\ +\infty). \tag{2.8}$$

Очевидно, $N_f(r)$, $r\in(0,\ +\infty)$, является неотрицательной неубывающей функцией (к тому же непрерывной в силу предложения 4).

При $\zeta\in S_n$ одномерная формула Йенсена, примененная к функции $f_\zeta(\lambda)$, $\lambda\in\mathbf{C}$, дает

$$N_f(\zeta;\ r) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} \ln|f_\zeta(re^{i\theta})|\,d\theta - \ln|f_\zeta(0)| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta}\cdot\zeta)|\,d\theta - \ln|f(0)|,\quad r\in(0,\ +\infty). \tag{2.9}$$

Интегрируя равенство (2.9) по сфере S_n относительно меры ν_n^*, получим

$$N_f(r) = \int_{S_n} \ln|f(r\cdot\zeta)|\,d\nu_n^*(\zeta) - \ln|f(0)|,\ r\in(0,\ +\infty). \tag{2.10}$$

Итак, мы установили один из хорошо известных многомерных аналогов формулы Йенсена (см. [5], гл. 1). Иную запись многомерной формулы Йенсена можно найти в монографии [7], гл. 3, 16.4.

Замечание 2. Функция $N_f(\zeta;\ r)$ уже рассматривалась другими авторами (см., например, монографию [5], гл. 7, 7.3). Факт непрерывности функции $N_f(\zeta;\ r)$, $\zeta\in S_n$, $r\in(0,\ +\infty)$, возможно, известен, хотя мы не смогли его обнаружить в доступной нам литературе. Отметим также, что при $n=1$ $N_f(r)$, $r\in(0,+\infty)$, совпадает с хорошо известной в теории функций одного комплексного переменного проинтегрированной считающей функцией нулей.

2.2. Формула Йенсена (2.10) позволяет установить теоремы единственности для определенных классов целых функций. В первую очередь, справедлива

Теорема 4. *Пусть* $n\geqslant 1$, $0<p<+\infty$, $0<\rho$, $\sigma<+\infty$ *и* $\alpha>-2n$. *Тогда*

(а) *Если* $f(z)$, $z\in\mathbf{C}^n$, *суть произвольная целая функция такая, что* $f(0)\neq 0$, *то*

$$\int_0^{+\infty} e^{p\cdot N_f(r)}\cdot e^{-\sigma\cdot r^{\rho}}\cdot r^{2n+\alpha-1}\,dr<\frac{\|f\|^p_{p,\rho,\sigma,\alpha}}{\nu_n(S_n)\cdot|f(0)|^p}.\tag{2.11}$$

(б) *Если* $f\in H^p_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbf{C}^n)$ *и* $f(0)\neq 0$, *то*

$$\int_0^{+\infty} e^{p\cdot N_f(r)}\cdot e^{-\sigma\cdot r^{\rho}}\cdot r^{2n+\alpha-1}\,dr<+\infty.\tag{2.12}$$

Доказательство. Используя формулу Йенсена (2.10) и интегральное неравенство Йенсена, получим

$$e^{p\cdot N_f(r)}\leqslant\frac{1}{|f(0)|^p}\cdot\int_{S_n}|f(r\cdot\zeta)|^p\,d\nu_n^*(\zeta),\ \ r\in(0,+\infty),\tag{2.13}$$

откуда легко вытекает (2.11), так что (а) установлено; (б) является очевидным следствием (а).

2.3. Пусть числа $a>0$ и $b>0$ фиксированы; точку z комплексной плоскости $\mathbf{C}$ назовем (a,b)-целой, если $z=k\cdot a+il\cdot b$, где k и l—некоторые целые числа. При $t\in(0,+\infty)$ обозначим через $n_{a,b}(t)$ числа (a,b)-целых точек в круге $\{z\in\mathbf{C}:|z|<t\}$. На пути выяснения асимптотического поведения функции $n_{a,b}(t)$ при $t\to+\infty$ устанавливается

Лемма 1. *Число (a,b)-целых точек в секторе $\{z\in\mathbf{C}:0<|z|<t,$ $0<\arg z<\pi/2\}$ меньше $\pi t^2/4ab$, а число (a,b)-целых точек в секторе $\{z\in\mathbf{C}:0\leqslant|z|<t,\ 0\leqslant\arg z\leqslant\pi/2\}$ больше $\pi t^2/4ab$.*

Доказательство этого утверждения основано на рассмотрении соответствующих площадей и, вообще говоря, не представляет особого труда.

Непосредственным следствием леммы 1 является

Лемма 2. *При $t\in(0,+\infty)$ справедливы оценки*

$$\frac{\pi t^2}{ab}-\frac{2t}{a}-\frac{2t}{b}-3<n_{a,b}(t)<\frac{\pi t^2}{ab}+\frac{2t}{a}+\frac{2t}{b}+1.\tag{2.14}$$

Теорема 5 (теорема единственности). *Пусть* $0<p<+\infty$, $0<\rho$, $\sigma<+\infty$, $\alpha>-2$ *и* $f\in H^p_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbf{C})$. *Допустим также, что* a, $b>0$ *и*

$$f(k\cdot a+il\cdot b)=0,\ \ k,\ l=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots.\tag{2.15}$$

Тогда

1°. *Если* $0<\rho<2$, *то* $f(z)\equiv 0$, $z\in\mathbb{C}$.

2°. *Если* $\rho=2$, *но при этом*

$$a\cdot b< p\pi/2\sigma, \tag{2.16}$$

то вновь $f(z)\equiv 0$, $z\in\mathbb{C}$.

Доказательство. Случаи 1° и 2° будем рассматривать параллельно. Допустим, что $f\not\equiv 0$ и придем к противоречию. Если m—кратность нуля функции f в точке $z=0$ $(m\geq 1)$, то положим

$$\varphi(z)\equiv f(z)/z^m, \quad z\in\mathbb{C}. \tag{2.17}$$

Тогда очевидно, что функция φ целая; более того, $\varphi\in H^p_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbb{C})$ и

$$\varphi(k\cdot a+il\cdot b)=0 \tag{2.18}$$

при всех целых k и l, не равных одновременно нулю. Далее, на основании (2.14) для считающей функции $n_\varphi(t)$ имеем

$$n_\varphi(t)>\frac{\pi t^2}{ab}-\frac{2t}{a}-\frac{2t}{b}-4,\quad t\in(0,+\infty). \tag{2.19}$$

Следовательно, если $r\geqslant 1$, то

$$N_\varphi(r)=\int_0^r\frac{n_\varphi(t)}{t}\,dt\geqslant\int_1^r\frac{n_\varphi(t)}{t}\,dt\geqslant$$

$$\geqslant\int_1^r\left[\frac{\pi t}{ab}-\frac{2}{a}-\frac{2}{b}-\frac{4}{t}\right]dt\geqslant\int_1^r\frac{\pi t}{ab}\,dt-\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+4\right)(r-1)=$$

$$=\frac{\pi r^2}{2ab}-\frac{\pi}{2ab}-\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+4\right)(r-1)=\frac{\pi r^2}{2ab}+c_1\cdot r+c_2, \tag{2.20}$$

где $c_1=-(2/a+2/b+4)$, $c_2=2/a+2/b+4-\pi/2ab$.

Поскольку $\varphi\in H^p_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbb{C})$, то комбинируя (2.12) и (2.20), получаем

$$+\infty>\int_0^{+\infty}e^{p\cdot N_\varphi(r)}\cdot e^{-\sigma\cdot r^\rho}\cdot r^{\alpha+1}dr\geqslant\int_1^{+\infty}e^{p\cdot N_\varphi(r)}\cdot e^{-\sigma\cdot r^\rho}\cdot r^{\alpha+1}\,dr\geqslant$$

$$\geqslant\int_1^{+\infty}e^{p\pi/2ab\cdot r^2-\sigma\cdot r^\rho}\cdot e^{p\cdot c_1\cdot r+p\cdot c_2}\cdot r^{\alpha+1}\,dr. \tag{2.21}$$

Остается заметить, что (2.21) не может иметь места ни в случае 1°, ни в случае 2°. Итак, мы пришли к противоречию, и это из-за нашего допущения $f\not\equiv 0$. Следовательно, $f(z)\equiv 0$, $z\in\mathbb{C}$, и теорема доказана.

2.4. Напомним, что выше мы ввели и изучали пространства $L^p_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbb{C}^n)$ и $H^p_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbb{C}^n)$ при $n\geq 1$, $0<p<+\infty$, $0<\rho,\sigma<+\infty$, $\alpha>-2n$. Теперь же мы собираемся отдельно рассмотреть специальный случай $\rho=2$, $\alpha=0$; при этом для соответствующих пространств будем использовать более простые обозначения $L^p_\sigma(\mathbb{C}^n)$ и $H^p_\sigma(\mathbb{C}^n)$. То ее точно, пусть $n \geqslant 1$, $0 < p < +\infty$, $0 < \sigma < +\infty$: для произвольной измеримой (вообще говоря, комплекснозначной) функции $f(z)$, $z \in \mathbf{C}^n$, положим

$$\|f\|_{p,\sigma} \stackrel{\text{def}}{\equiv} \left(\int_{\mathbf{C}^n} |f(z)|^p \cdot e^{-\sigma \cdot |z|^2} dm_n(z) \right)^{1/p}. \tag{2.22}$$

Затем определим пространство $L^p_\sigma(\mathbf{C}^n) = \{f : \|f\|_{p,\sigma} < +\infty\}$, а $H^p_\sigma(\mathbf{C}^n)$ будет обозначать множество целых функций из $L^p_\sigma(\mathbf{C}^n)$, образующее замкнутое подпространство в $L^p_\sigma(\mathbf{C}^n)$.

Предложение 5. *Пусть* $n_1 \geqslant 1$, $n_2 \geqslant 1$ *и* $0 < p < +\infty$, $0 < \sigma < +\infty$. *Если функция* $f(z, w)$, $z \in \mathbf{C}^{n_1}$, $w \in \mathbf{C}^{n_2}$, *принадлежит классу* $H^p_\sigma(\mathbf{C}^{n_1+n_2})$, *то*

(а) *при произвольном* $w_0 \in \mathbf{C}^{n_2}$ функция $f(z, w_0)$, $z \in \mathbf{C}^{n_1}$, *принадлежит классу* $H^p_\sigma(\mathbf{C}^{n_1})$.

(б) *при произвольном* $z_0 \in \mathbf{C}^{n_1}$ *функция* $f(z_0, w)$, $w \in \mathbf{C}^{n_2}$, *принадлежит классу* $H^p_\sigma(\mathbf{C}^{n_2})$.

Доказательство. Идею доказательства мы позаимствовали из монографии [8], гл. 1, § 4. Установим, например, (а) ((б) устанавливается аналогично). Для этого зафиксируем $w_0 \in \mathbf{C}^{(n_2)}$ и пусть $z \in \mathbf{C}^{(n_1)}$. Поскольку функция $f(z, w)$, $w \in \mathbf{C}^{n_2}$, целая, то $|f(z, w)|^p$, $w \in \mathbf{C}^{n_2}$ — субгармоническая функция. Следовательно

$$|f(z, w_0)|^p \leqslant \frac{\Gamma(n_2+1)}{\pi^{n_2}} \cdot \int_{|w-w_0|<1} |f(z, w)|^p dm_{n_2}(w) \tag{2.23}$$

$$(z \in \mathbf{C}^{n_1}).$$

Полагая затем

$$\delta = \min_{|w-w_0|} \{e^{-\sigma|w|^2}\}, \tag{2.24}$$

из (2.23) получаем

$$|f(z, w_0)|^p \leqslant \frac{\Gamma(n_2+1)}{\delta \cdot \pi^{n_2}} \cdot \int_{|w-w_0|<1} \delta \cdot |f(z, w)|^p dm_{n_2}(w) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\Gamma(n_2+1)}{\delta \cdot \pi^{n_2}} \cdot \int_{|w-w_0|<1} e^{-\sigma \cdot |w|^2} \cdot |f(z, w)|^p dm_{n_2}(w) \tag{2.25}$$

$$(z \in \mathbf{C}^{n_1}).$$

Поэтому при произвольном $z \in \mathbf{C}^{n_1}$ имеем

$$|f(z, w_0)|^p \leqslant \frac{\Gamma(n_2+1)}{\delta \cdot \pi^{n_2}} \cdot \int_{\mathbf{C}^{n_2}} e^{-\sigma \cdot |w|^2} \cdot |f(z, w)|^p dm_{n_2}(w). \tag{2.26}$$

Умножая обе части неравенства (2.26) на $e^{-\sigma \cdot |z|^2}$ и интегрируя по $z \in \mathbf{C}^{n_1}$, мы приходим к оценке

$$\int\limits_{C^{n_1}} |f(z, w_0)|^p \cdot e^{-\sigma\cdot|z|^2} dm_{n_1}(z) \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\cdot \int\limits_{C^{n_1+n_2}} |f(z, w)|^p \cdot e^{-\sigma\cdot(|z|^2+|w|^2)} dm_{n_1}(z) \times dm_{n_2}(w) < +\infty, \tag{2.27}$$

которая и устанавливает утверждение (а).

В пункте 1.4 мы ввели интегральный оператор $T_{\rho, \sigma, \alpha}$, действующий на функциях $f(w)$, $w \in C^n$, $n \geqslant 1$ (см. (1.18)). Оказывается, что при $\rho = 2$, $\alpha = 0$ вид этого оператора значительно упрощается. В самом деле, тогда $\mu = n$ и нужно воспользоваться только простым соотношением

$$J^{n-1} E_1(\omega; n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1+n-1)}{\Gamma(k+1)} \cdot \frac{\omega^k}{\Gamma(n+k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^k}{\Gamma(k+1)} = \exp\omega, \quad \omega \in C. \tag{2.28}$$

В результате, как следствие теорем 2 и 3, получается

Теорема 6. *Пусть $n \geqslant 1$, $1 < p < +\infty$ и $0 < \sigma < +\infty$. Тогда для произвольной функции $f \in H_\sigma^p(C^n)$ справедливы формулы*

$$f(z) \equiv \frac{\sigma^n}{\pi^n} \cdot \int\limits_{C^n} f(w) \cdot e^{\sigma\cdot\langle z, w\rangle} \cdot e^{-\sigma\cdot|w|^2} dm_n(w), \quad z \in C^n, \tag{2.29}$$

$$\overline{f(0)} \equiv \frac{\sigma^n}{\pi^n} \cdot \int\limits_{C^n} \overline{f(w)} \cdot e^{\sigma\cdot\langle z, w\rangle} \cdot e^{-\sigma\cdot|w|^2} dm_n(w), \quad z \in C^n. \tag{2.30}$$

Более того, интегральный оператор, естественным образом порожденный правой частью формулы (2.29), действует из $L_\sigma^2(C^n)$ в $L_\sigma^2(C^n)$ и является оператором ортогонального проектирования на подпространство $H_\sigma^2(C^n)$.

Комбинируя теоремы 5 и 6 и предложение 5, получаем следующую важную теорему.

Теорема 7. *Пусть $n \geqslant 1$, $0 < p < +\infty$, $0 < \sigma < +\infty$, а числа a_m, $b_m > 0$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$ таковы, что $a_m \cdot b_m < p\pi/2\sigma$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$. Тогда*

1°. *Если $f \in H_\sigma^p(C^n)$ и*

$$f(k_1 \cdot a_1 + il_1 \cdot b_1, k_2 \cdot a_2 + il_2 \cdot b_2, \cdots, k_n \cdot a_n + il_n \cdot b_n) = 0 \tag{2.31}$$

при всех целых k_m и l_m $(1 \leqslant m \leqslant n)$, то $f(z) \equiv 0$, $z \in C^n$.

2°. *При $1 < p < +\infty$ система функций*

$$\{\Psi_{k_1,\dots,k_n, l_1,\dots, l_n}(z_1, \cdots, z_n)\}_{k_1,\dots,k_n, l_1,\dots, l_n=-\infty}^{+\infty} \equiv$$

$$\equiv \left\{ \prod_{m=1}^{n} e^{\sigma\cdot(k_m\cdot a_m + il_m\cdot b_m)\cdot z_m} \right\}_{k_1,\dots,k_n, l_1,\dots, l_n=-\infty}^{+\infty} \tag{2.32}$$

полна в $H^p_\sigma(\mathbf{C}^n)$, *т. е. если* $f \in H^p_\sigma(\mathbf{C}^n)$ *и*

$$\int_{\mathbf{C}^n} f(w)\cdot \overline{\Psi_{k_1,\ldots,k_n,\,l_1,\ldots,l_n}(w)}\cdot e^{-\sigma\cdot|w|^2}\,dm_n(w)=0 \qquad (2.33)$$

при всех целых k_m *и* l_m $(1\leqslant m\leqslant n)$, *то* $f(z)\equiv 0$, $z\in\mathbf{C}^n$.

Доказательство. Утверждение 1° мы будем доказывать индукцией по n (размерности пространства $\mathbf{C}^n$). При $n=1$ оно является следствием теоремы 5(2°). Допустим теперь, что утверждение 1° справедливо при $n-1$ и докажем его для n. Зафиксируем произвольные целые числа k_n и l_n. Тогда согласно предложению 5 функция

$$g(z')=f(z',\ k_n\cdot a_n+il_n\cdot b_n),\quad z'\in\mathbf{C}^{n-1}, \qquad (2.34)$$

принадлежит $H^p_\sigma(\mathbf{C}^{n-1})$. Кроме того, в силу условия (2.31)

$$g(k_1\cdot a_1+il_1\cdot b_1,\cdots,\ k_{n-1}\cdot a_{n-1}+il_{n-1}\cdot b_{n-1})=0 \qquad (2.35)$$

при всех целых k_m и l_m $(1\leqslant m\leqslant n-1)$. И поскольку имеем $a_m\cdot b_m<$ $< p\pi/2\sigma$ $(1\leqslant m\leqslant n-1)$, то из индуктивного предположения следует: $g(z')\equiv 0$, $z'\in\mathbf{C}^{n-1}$, или же

$$f(z',\ k_n\cdot a_n+il_n\cdot b_n)\equiv 0,\quad z'\in\mathbf{C}^{n-1}, \qquad (2.36)$$

и это для произвольных целых чисел k_n и l_n. Теперь зафиксируем произвольное $z'\in\mathbf{C}^{n-1}$. Тогда вновь в силу предложения 5 функция

$$\eta(\omega)=f(z',\ \omega),\quad \omega\in\mathbf{C}, \qquad (2.37)$$

принадлежит $H^p_\sigma(\mathbf{C})$ и при этом

$$\eta(k_n\cdot a_n+il_n\cdot b_n)=0 \qquad (2.38)$$

для всех целых чисел k_n и l_n. И так как $a_n\cdot b_n<p\pi/2\sigma$, то $\eta(\omega)\equiv$ $\equiv 0$, $\omega\in\mathbf{C}$ (ведь при $n=1$ утверждение 1° уже доказано!). Таким образом

$$f(z',\ \omega)\equiv 0,\quad \omega\in\mathbf{C}, \qquad (2.39)$$

и это при произвольном $z'\in\mathbf{C}^{n-1}$. Следовательно, $f(z)\equiv 0$, $z\in\mathbf{C}^n$, и 1° установлено.

Пусть далее $1\leqslant p<+\infty$ и $f\in H^p_\sigma(\mathbf{C}^n)$. В силу формулы (2.29) теоремы 6 при всех целых k_m и l_m $(1\leqslant m\leqslant n)$ имеет место соотношение

$$\frac{\sigma^n}{\pi^n}\cdot\int_{\mathbf{C}^n} f(w)\cdot\overline{\Psi_{k_1,\ldots,k_n,\,l_1,\ldots,l_n}(w)}\cdot e^{-\sigma\cdot|w|^2}\,dm_n(w)=$$

$$=\frac{\sigma^n}{\pi^n}\cdot\int_{\mathbf{C}^n} f(w)\cdot\prod_{m=1}^{n} e^{\sigma\cdot(k_m\cdot a_m-il_m\cdot b_m)\cdot\overline{w}_m}\cdot e^{-\sigma\cdot|w|^2}\,dm_n(w)=$$

$$=\frac{\sigma^n}{\pi^n}\cdot\int_{\mathbf{C}^n} f(w)\cdot e^{\sigma\cdot\sum_{m=1}^{n}(k_m\cdot a_m-il_m\cdot b_m)\cdot\overline{w}_m}\cdot e^{-\sigma\cdot|w|^2}\,dm_n(w)=$$

$$=f(k_1\cdot a_1-il_1\cdot b_1,\ k_2\cdot a_2-il_2\cdot b_2,\ \ldots,\ k_n\cdot a_n-il_n\cdot b_n). \qquad (2.40)$$

Если теперь для функции f выполняются соотношения (2.33) при всех целых k_m и $l_m (1 < m < n)$, то в силу (2.40) и уже доказанного утверждения 1°, мы имеем: $f(z) \equiv 0$, $z \in \mathbb{C}^n$, и 2° также установлено.

При $n=1$ и $p=2$ теорема 7 была известна и ранее (за обстоятельными ссылками мы отсылаем к работе [4]).

Институт математики
АН Армении

Поступила 17. I. 1991

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ, Ա. Հ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ. Ինտեգրալ ներկայացումներ և միակության թեորեմներ մի քանի փոփոխականների ամբողջ ֆունկցիաների համար (ամփոփում)

Դիցուք $n \geq 1$, $0 < p < +\infty$, $0 < \rho, \sigma < +\infty$ և $\alpha > -2n$: Նշանակենք $H^p_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbb{C}^n)$-ով ամբողջ ֆունկցիաների տարածությունը, որոնց համար վերջավոր է

$$\|f\|_{p,\rho,\sigma,\alpha} \equiv \left(\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^p \cdot e^{-\sigma \cdot |z|^\rho} \cdot |z|^\alpha \, dm_n(z) \right)^{1/p} \tag{1}$$

նորմը: Այստեղ $|z|$-ը $z \in \mathbb{C}^n$ վեկտորի երկարությունն է, իսկ m_n-ը $2n$-չափանի Լեբեգի չափն է $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$-ում:

Հոդվածի հիմնական պնդումներից մեկը կայանում է նրանում, որ երբ $1 < p < +\infty$, ապա կամայական $f \in H^p_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbb{C}^n)$ ֆունկցիա թույլ է տալիս հետևյալ ինտեգրալ ներկայացումը.

$$f(z) = \frac{\rho \cdot \sigma^\mu}{2\pi^n} \cdot \int_{\mathbb{C}^n} f(w) \cdot J^{n-1} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} \cdot \langle z, w \rangle; \mu) \cdot e^{-\sigma \cdot |w|^\rho} \cdot |w|^\alpha \, dm_n(w),$$
$$z \in \mathbb{C}^n, \tag{2}$$

որտեղ $\langle \cdot, \cdot \rangle$-ը սկալյար արտադրյալն է $\mathbb{C}^n$-ում, $\mu = (2n+\alpha)/\rho$ և

$$J^{n-1} E_{\rho/2}(\omega; \mu) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(k+1)} \cdot \frac{\omega^k}{\Gamma(\mu + 2k/\rho)}, \quad \omega \in \mathbb{C}.$$

Բացի այդ, հոդվածում հաստատվում են զանազան միակության թեորեմներ նշված $H^p_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbb{C}^n)$ դասերի համար: Դրանց հիման վրա կառուցվում են ամբողջ ֆունկցիաների համակարգեր, որոնք լրիվ են $H^p_{2,\sigma,0}(\mathbb{C}^n)$ դասերում $(1 < p < +\infty,\ 0 < \sigma < +\infty)$:

M. M. DJRBASHIAN, A. H. KARAPETYAN. *Integral representations and uniqueness theorems for entire functions of several variables* (summary)

Let $n \geq 1$, $0 < p < +\infty$, $0 < \rho, \sigma < +\infty$, and $\alpha > -2n$. Denote by $H^p_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbb{C}^n)$ the space of entire functions $f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, with finite "norm"

$$\|f\|_{p,\rho,\sigma,\alpha} = \left(\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^p \cdot e^{-\sigma|z|^\rho} \cdot |z|^\alpha \, dm_n(z) \right)^{1/p} < +\infty. \tag{1}$$

Here $|z|$ is the length of the vector $z \in \mathbb{C}^n$ and m_n is $2n$-dimensional Lebesgue measure in $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. One of the main results of the paper asserts that if $1 < p < +\infty$, then any $f \in H^p_{\rho,\sigma,\alpha}(\mathbb{C}^n)$ admits an integral representation of the form

$$f(z) = \frac{\rho \cdot \sigma^\mu}{2\pi^n} \cdot \int_{\mathbb{C}^n} f(w) \cdot J^{n-1} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} \cdot \langle z, w \rangle; \mu) \cdot e^{-\sigma|w|^\rho} \cdot |w|^\alpha \, dm_n(w),$$
$$z \in \mathbb{C}^n. \tag{2}$$

Here $< \cdot , \cdot >$ is the inner product in C^n, $\mu = (2n + \alpha)/\rho$ and

$$J^{n-1} E_{\rho/2}(\omega; \mu) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(k+1)} \cdot \frac{\omega^k}{\Gamma(\mu + 2k/\rho)}, \quad \omega \in C.$$

The paper also establishes various uniqueness theorems for the classes $H^p_{\rho, \sigma, \alpha}(C^n)$ as well as constructs total systems of entire functions in the spaces $H^p_{2, \sigma, 0}(C^n)$, $1 < p < +\infty$, $0 < \sigma < +\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* О представимости некоторых классов целых функций, ДАН Арм.ССР, т. 7, № 5, 1947, 193—197.
2. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. Инст. матем. и мех. АН Арм.ССР, вып. 2, 1948, 3—40.
3. *М. М. Джрбашян.* О полноте одной ортогональной системы целых периодических функций, ДАН СССР, т. LXXI, №3, 1950, 429—432.
4. *I. Daubechies, A. Grossmann.* Frames in the Bargman space of entire functions, Communic. on Pure and Appl. Math., vol. XLI, № 2, 1988, 151—164.
5. *У. Рудин.* Теория функций в единичном шаре из C^n, М., Мир, 1984.
6. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., Наука, 1966.
7. *Е. М. Чирка.* Комплексные аналитические множества, М., Наука, 1985.
8. *Б. А. Фукс.* Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М., Физматгиз, 1963.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 1, 1991 Математика

УДК 517.955

Г. Р. ОГАНЕСЯН

О ТЕОРЕМЕ КОШИ-КОВАЛЕВСКОЙ В ВРОНСКИАННОЙ ПОСТАНОВКЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ

Хорошо известно, что в классической теореме Коши-Ковалевской для нехарактеристической задачи Коши требование аналитичности по временной переменной коэффициентов уравнения можно ослабить до требования непрерывности вплоть до границы (см., например, [4], [8]). Для характеристической задачи Коши теорема Коши-Ковалевской остается справедливой, если в качестве начальных условий задавать неполные данные Коши (см. [1]).

Тотально характеристическую задачу Коши можно трактовать также как начальную задачу для уравнений с неограниченными коэффициентами, т. е. как ослабление условия непрерывности (аналитичности) коэффициентов уравнения в частных производных вплоть до границы.

В настоящей работе мы рассматриваем именно такие уравнения, сингулярные при приближении к начальной гиперплоскости $t=0$, причем в отличие от работ [1], [3], допускаются нефуксовы особенности. Расширяя класс допустимых решений функциями неограниченными при $t\to 0$ мы доказываем, следуя методике Розенблюма-Лере-Хёрмандера, новый вариант теоремы Коши-Ковалевской, задавая вместо неполных данных Коши весовые данные Коши (как предложено в [2]) в виде вронскианов от решения и весовых функций (см. [5]). При этом мы допускаем в качестве весовых функций формальные асимптотические решения (ФАР) вспомогательного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Это позволяет находить весовые функции для широкого класса уравнений в явном виде, пользуясь теорией асимптотического интегрирования ОДУ (см. [9], [11]). Например, для некоторых уравнений можно в качестве весовых функций использовать функции Грина-Лиувилля (ВКБ-приближения) (см. § 1, пример 1).

§ 1. Формулировка основного результата. Примеры

Обозначим через $x=(x_1,\cdots, x_{n-1})$ точки комплексного пространства $\mathbf{C}^{n-1}$, а через $\Omega_R=\{x, |x_j|<R, j=1,\cdots, n-1\}$ — полидиск радиуса R с центром в точке нуль. Пусть $G_R=]0, R[\times\Omega_R$. Через $A(G)$ мы обозначим класс аналитических в G функций.

Рассмотрим в G_1 уравнение

$$(L+\beta(t, x))u(t, x)=\sum a_\alpha(t, x)D^\alpha u(t, x)+f(t, x), \ |\alpha|\leqslant\gamma, \qquad (1)$$

где

$$L=\partial_t^m+\sum_{k=0}^{m-1} l_k(t, x)\,\partial_t^k, \ \alpha \text{ — мультииндекс из } N^n, \qquad (2)$$

и выполнены условия

i) $a_\alpha(t, x), f(t, x) \in A(\overline{G}_1), l_k(t, x) \in A(G_1)$,

$K(t, \tau, x)\,\beta(\tau, x) \in L_1([0, 1], C(\overline{\Omega}_1))$, при фиксированном t (см. (4)). Уравнение (1) мы полагаем сингулярным при $t = 0$, точнее коэффициенты l_k предполагаются неограниченными при $t \to 0$, т. е.

$$\lim_{t \to 0} l_k(t, x) = \infty, \quad k = 0, 1, \cdots, m-2.$$

Пусть известна фундаментальная система решений ФСР $\{\psi_j(t, x)\}_1^m$ ОДУ с параметром x:

$$L\psi = \left(\partial_t^m + \sum_{k=0}^{m-2} l_k(t, x)\,\partial_t^k\right)\psi(t, x) = 0. \tag{2'}$$

Отметим, что при некоторых предположениях функции ψ_j являются ФАР уравнения $(L + \beta(t, x))\varphi(t, x) = 0$ (см. теорему Левинсона в [9]).

В силу вида (2) оператора L функции $\{\psi_j\}$ можно выбрать таким образом, чтобы вронскиан

$$W(\tau, \psi) = W(\tau, \psi_1, \cdots, \psi_m) = \det \|\partial_\tau^{p-1}\psi_j(\tau, x)\|_{p, j=1}^m = 1. \tag{3}$$

Введем функцию Грина (или функцию Коши)

$$K(t, \tau, x) = \sum_{j=1}^m \frac{W_j(\tau, \psi)}{W(\tau, \psi)}\,\psi_j(t, x), \tag{4}$$

здесь $W_j(\tau, \psi)$ — определитель, полученный из вронскиана $W(\tau, \psi)$ в результате замены j-того столбца на $(0, \cdots, 1)$.

Общее решение уравнения

$$(L + \beta)v(t, x) = f(t, x) \tag{5}$$

представимо в виде

$$v(t, x) = \sum_{j=1}^m R_j(x)\,\psi_j(t, x) + \int_0^t K(t, \tau, \cdot))\,(f - \beta v)(\tau, x)\,d\tau, \tag{6}$$

где $R_j(x)$—произвольные функции.

Пусть

(ii). $W_j(t, \psi) f(t, x), W_j(t, \psi)\,\beta(t, x) \in L_1([0, 1], C(\overline{\Omega}_1)), j = 1, \cdots, m$,

iii). для любых $a \geqslant 1$ и $t \in]0, 1]$ существуют постоянные c_0 и $k \in [1, m]$ такие, что

$$h_a(t) = (1 - t)^a \int_0^t |K(t, \tau, x)|\,(1 - \tau)^{-a}\,d\tau \leqslant c_0/a^k.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* i) — iii) *и*

$$\gamma \leqslant k, \tag{7}$$

$$A = (2^n e)^\gamma c_0 c_2 \sup_{G_1} \sum_{|\alpha| \leqslant \gamma} |a_\alpha(t, x)| < 1, \tag{:)}$$

где

$$c_2=\exp\left\{\int_0^1 \sup_{t,\,x\in G_1}|K(t,\ s,\ x)\,\beta(s,\ x)|\,ds\right\}. \qquad (8')$$

Тогда начальная задача

$$\left[\partial_t^m+\sum_{k=0}^{m-2} l_k(t,\ x)\,\partial_t^k+\beta(t,\ x)\right]u=\sum_{|\alpha|\leqslant\gamma} a_\alpha(t,\ x)\,D^\alpha u+f(t,x), \qquad (1)$$

$$\lim_{t\to\infty} W(t,\ \psi_1,\cdots,\ \psi_{j-1},\ u,\ \psi_{j+1},\cdots,\ \psi_m)=0,\ j=1,\cdots,\ m, \qquad (9)$$

имеет единственное аналитическое в $G^{m}_{1/2}$ *решение. При этом справедливо неравенство*

$$\sup_{G_{1/2}}|u(t,\ x)|\leqslant\frac{c_0c_2}{2(1-A)}\sup|f(t,\ x)|. \qquad (10)$$

Отметим, что при $t=0$ решение u теряет свойство аналитичности.

Переходя к обсуждению теоремы 1 приведем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Если выполнены условия* (3) *и*

$$|K(t,\ \tau)|\leqslant\text{const},\ 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant 1, \qquad (11)$$

то условие iii) *автоматически выполнено с* $k=m$.

Доказательство. Из (11) и (3) имеем

$$|K(t,\ \tau)|\leqslant\frac{c\,(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!}. \qquad (12)$$

Действительно, при $|t-\tau|<\delta$ эта оценка слелует из соотношения

$$\lim_{\tau\to t}\frac{K(t,\ \tau)}{(t-\tau)^{m-1}}=\lim_{\tau\to t}\frac{\partial_t^{m-1}K(t,\ \tau)}{(m-1)!}=\frac{1}{(m-1)!},$$

а при $|t-\tau|\geqslant\delta$ — из ограниченности K.

Далее из неравенства (12) и

$$(1-t)^a\int_0^t(1-\tau)^{-a}d\tau\leqslant\frac{1}{a} \qquad (13)$$

(см. [10], с. 405) непосредственно выводится неравенство iii) с $k=m$.

Замечание 1. Если $l_k\in A(\overline{G}_1)$, $k=1,\cdots,\ m$, то мы получаем классическую теорему Коши—Ковалевской (см. [10], теорема 9.4.2).

Действительно, перенося слагаемые с l_k в правую часть (1), мы получаем

$$L=\partial_t^m,\ \psi_j=\frac{1}{(j-1)!}t^{j-1},\ j=1,\cdots,\ m.$$

Нетрудно проверить, что начальные условия (9) при этом эквивалентны обычным данным Коши:

$$\lim W(\psi_1, \dots, \psi_{j-1}, u, \psi_{j+1}, \dots, \psi_m) = \lim \partial_t^{j-1} u,$$

а из леммы 1 следует выполнение условия iii).

Пример 1. Пусть $m=2$, $l_0 = q(t, x) - \beta(t, x)$. Тогда уравнение (1) принимает вид:

$$(\partial_t^2 + q(t, x))u(t, x) = \sum_{|\alpha|<\gamma} a_\alpha(t, x) D^\alpha u + f(t, x). \tag{14}$$

Пусть

$$q \in A(G_1),\ q(t, x) \geqslant q_0 = \mathrm{const} > 0,$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{q_t}{q^{3/2}} = 0,\ \beta = q^{-\frac{1}{4}} (q^{-\frac{1}{4}})_{tt} \in L_1([0, 1], C(G_1)). \tag{15}$$

Тогда функции

$$\psi_{1,2} = (-4q)^{-\frac{1}{4}} \exp\left\{ \pm i \int_T^t \sqrt{q(s)}\, ds \right\} \tag{16}$$

являются ФАР уравнения $\varphi_{tt} + q\varphi = 0$ или ФСР уравнения

$$[\partial_t^2 + q(t, x) - \beta(t, x)]\psi(t, x) = 0.$$

Непосредственным вычислением получаем (3) и

$$K(t, \tau) = \frac{\psi_1(\tau)\psi_2(t) - \psi_1(t)\psi_2(\tau)}{W(\psi_1, \psi_2)} = \frac{\sin \int_t^\tau \sqrt{q(s)}\, ds}{\sqrt[4]{q(t)\, q(\tau)}}. \tag{16'}$$

Из леммы 2 следует, что условия iii) теоремы 1 и в этом случае выполнены с $k = 2$.

Следствие 1. *В условиях* (15), *i для начальной задачи* (14) *и*

$$\lim_{t\to 0} W(u, \psi_j) = 0,\ j = 1, 2, \tag{17}$$

где $\psi_{1,2}$ *определяются по формулам* (16), $k = 2$, *справедливо утверждение теоремы 1.*

Пример 2. Рассмотрим уравнение в частных производных

$$\left(\partial_t^2 + \frac{\rho}{t^2}\right) u = \sum_{|\alpha|<\gamma} a_\alpha(t, x) D^\alpha u + f(t, x), \tag{18}$$

для которого вспомогательным ОДУ (см. (2')) является уравнение Эйлера:

$$\left(\partial_t^2 + \frac{\rho}{t^2}\right)\psi = 0,\ \rho = \frac{1}{4} - \nu^2.$$

ФСР этого уравнения хорошо известна:

$$\psi_1 = t^{\nu + \frac{1}{2}},\ \psi_2 = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\nu} t^{\frac{1}{2} - \nu}, & \nu \neq 0, \\ \sqrt{t} \ln t, & \nu = 0, \end{cases} \quad W(\psi_1, \psi_2) = 1. \tag{19}$$

Вычисляя функцию Грина, имеем

$$K(t,\tau)=\begin{cases}\sqrt{t\tau}\ln\dfrac{t}{\tau}, & \nu=0,\\[2mm] \dfrac{1}{2\nu}\left(\tau^{\frac12-\nu}t^{\frac12+\nu}-\tau^{\frac12+\nu}t^{\frac12-\nu}\right), & \nu\neq 0.\end{cases} \tag{20}$$

Из формулы квадратного корня из комплексного числа

$$\sqrt{a+ib}=\pm\left\{(\operatorname{sign} b)\sqrt{\frac{r+a}{2}}+i\sqrt{\frac{r-a}{2}}\right\},\quad r=\sqrt{a^2+b^2}, \tag{21}$$

получаем

$$\nu=\sqrt{\frac14-\rho}=\frac{1}{2\sqrt2}\{\sqrt{|1-4\rho|+1-4\operatorname{Re}\rho}+$$

$$+i\operatorname{sign}(\operatorname{Im}\rho)\sqrt{|1-4\rho|+4\operatorname{Re}\rho-1}\}. \tag{22}$$

Если

$$|\operatorname{Re}\nu|\leqslant\frac12\quad\text{или}\quad(\operatorname{Im}\rho)^2\leqslant\operatorname{Re}\rho, \tag{23}$$

то функция Грина (20) ограничена и в силу леммы 1 условие iii) теоремы 1 автоматически выполнено с $k=2$.

Следствие 2. *В условиях (23) и*

$$a_\alpha(t,x),\ f(t,x)\in A(\overline{G}_1),$$
$$A_1=(2^n e)^2 c_0\sup\Big|\sum_{|\alpha|\leqslant 2}a_\alpha(t,x)\Big|<1, \tag{24}$$

уравнение (18) с начальными условиями (17), где $\psi_{1,2}$ определяются по формулам (19), имеет единственное решение $u\in A(G_{1/2})$, причем выполнена оценка (10).

Отметим, в частности, что если $\rho=1-i$, то условие (23) выполнено и следствие 2 применимо к уравнению (18) с таким ρ. При этом ФСР уравнения $\psi_{tt}+\dfrac{1-i}{t^2}\psi=0$ является осциллирующие при $t=0$ функции:

$$\psi_1=t^{-i},\quad\psi_2=t^{1+i}/(1+2i).$$

Рассмотрим случай, когда функция Грина (20) является неограниченной, но интегрируемой.

Лемма 2. *Если*

$$\frac12\leqslant\operatorname{Re}\nu<\frac32\quad\text{или}\quad\left(\frac{\operatorname{Im}\rho}{3}\right)^2-2<\operatorname{Re}\rho<(\operatorname{Im}\rho)^2, \tag{25}$$

то функция Грина (20) удовлетворяет неравенству

$$|K(t,\tau)|\leqslant c(t-\tau)\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\operatorname{Re}\nu-\frac12},\quad 0<\tau\leqslant t\leqslant 1. \tag{26}$$

Доказательство. Эквивалентность неравенств (25) следует из формулы (22). Оценка (26) при $|t-\tau|\leqslant\delta$ для некоторого малого $\delta>0$ следует из

$$\lim_{\tau\to t}\left\{\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\nu-1}\frac{K(t,\tau)}{t-\tau}\right\}=\lim_{\tau\to t}\frac{K(t,\tau)}{t-\tau}=1,$$

а при $|t-\tau|\geqslant\delta$ из оценки $|K(t,\tau)|\leqslant c\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\mathrm{Re}\,\nu-\frac{1}{2}}$.

Лемма 3. *При условии* (25) *для любых* $a\geqslant 1$ *имеют место оценки*

$$h_a(t)=(1-t)^a\int\limits_0^t|K(t,\tau)|(1-\tau)^{-a}d\tau<\frac{2}{|3-2\,\mathrm{Re}\,\nu|\cdot a}, \tag{27}$$

где K—*функция Грина* (20).

Доказательство этой леммы следует из оценок (26), (13).

Из леммы 3 следует, что условия *iii*) с $k=1$ для (18) выполнены в области (25).

Следствие 3. В условиях (24), (25) задача (18), (17) (функции $\psi_{1,2}$ определяются по формулам (19)) при $\gamma=1$ имеет единственное решение $u\in A(G_{\frac{1}{2}})$.

Следствия 2, 3 остаются справедливыми и в том случае, когда ν зависит от x. Если коэфициенты вспомогательного ОДУ (2) являются функциями со степенными особенностями при $t=0$, то ФСР таких ОДУ могут быть найдены известным методом асимптотических разложений (см. [11]).

Операторы L, рассмотренные в примере 1, являются операторами с нерегулярной особенностью, а в примере 2—с регулярной (фуксовой) особенностью.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Приведем вначале вариант известной леммы Гронуолла-Беллмана:

Лемма 3. *Пусть* $\rho(s)$, $\sigma(s)$, $K(t)$ — *неотрицательные функции на* $[0, T]$, *причем* $K_0(s)\in L_1[0, T]$, *а* $\rho(s)$ *ограничена на* $[0, T]$.

Тогда неравенство

$$\rho(t)\leqslant\sigma(t)+\int\limits_0^t K_0(s)\rho(s)\,ds \tag{32}$$

влечет за собой

$$\rho(t)\leqslant\sigma(t)+\int\limits_0^t\left\{K_0(s)\sigma(s)\exp\left(\int\limits_s^t K_0(y)\,dy\right)\right\}ds. \tag{33}$$

Замечание 2. *Полагая* σ *ограниченной на* $[0, T]$, *из* (33) *получаем*

$$\rho(t) \leqslant |\sup_{s\in[0,\,T[} \sigma(s)| \exp\left(\int_0^t K_0(y)\,dy\right). \tag{34}$$

Перейдем к оценке решений задачи (1), (9).

Лема 4. *Пусть выполнены условия* i)—iii) *и для функций* v, *удовлетворяющих начальным условиям*

$$\lim_{t\to 0} W(t,\ \psi_1,\cdots,\ \psi_{j-1},\ v,\ \psi_{j+1},\cdots,\ \psi_m)=0,\ j=1,\cdots,\ m, \tag{37}$$

при любых $a \geqslant 1$, $R<1$ *справедливы неравенства*

$$|(L+\beta)\,v(t,\ \cdot)| \leqslant c_1(1-t)^{-a},\ t\in\,]0,\ R]. \tag{38}$$

Тогда при $t\in[0,\ R]$

$$|v(t)| < c_0 c_1 c_2 a^{-k}(1-t)^{-a}, \tag{39}$$

где c_0, c_2 *вычисляются по формулам* iii) (8′).

Доказательство. Общее решение уравнения

$$(L+\beta)\,v(t,\ x)=f(t,\ x) \tag{40}$$

представимо в виде

$$v(t,\ x)=\sum_{j=1}^{m} R_j(x)\,\psi_j(t,\ x)+\int_0^t K(t,\ \tau)(f-\beta v)(\tau,\ x)\,d\tau, \tag{41}$$

где $R_j(x)$ — произвольные функции, а $\psi_j \in \operatorname{Ker} L$. Ввиду формул

$$W(t,\ \psi_1,\cdots,\ \psi_{k-1},\ \psi_j,\ \psi_{k+1},\cdots,\ \psi_m)=\delta_{kj}\,W(t,\ \psi),$$

$$W(t,\ \psi_1,\cdots,\ \psi_{j-1},\ K(t,\ \cdot),\ \psi_{j+1},\cdots,\ \psi_m)=W_j(\tau,\ \psi), \tag{42}$$

из (40) получаем при $j=1,\ldots,\ m$ соотношения

$$W(t,\ \psi_1,\cdots,\ \psi_{j-1},\ v,\ \psi_{j+1},\cdots,\ \psi_m)=R_j(x)+$$

$$+\int_0^t W_j(\tau,\ \psi)(f-\beta v)(\tau,\ x)\,d\tau,$$

из которых, учитывая условия i), ii) и начальные условия (37), получаем

$$R_j(x)=0,\ j=1,\cdots,\ m$$

и представление (41) упрощается:

$$v(t,\ x)=\int_0^t K(t,\ \tau,\ x)(f-\beta v)(\tau,\ x)\,d\tau. \tag{43}$$

Далее из (43) получаем оценку

$$|v(t,\ x)| < \int_0^t |K(t,\ \tau)\,f(\tau)|\,d\tau+\int_0^t |K(t,\ \tau)\,\beta v(\tau)|\,d\tau, \tag{44}$$

которая в обозначениях

$$\rho(t) = |v(t, x)|, \quad \sigma(t) = \int_0^t |K(t, \tau) f(\tau)| \, d\tau,$$

принимает вид (32). Применяя лемму 3 получаем неравенство (34), т. е.

$$|v(t, x| \leqslant c_2 \left\{ \sup_{s \in [0, t]} \int_0^s |K(s, \tau) f(\tau)| \, d\tau. \right. \tag{45}$$

Далее из (38): $|f(t)| < c_1 c_2 (1 - t)^{-a}$, iii) и (45) получаем (39):

$$(1 - t)^a |v(t, x)| \leqslant c_1 c_2 (1 - t)^a \sup_s \int_0^s |K(s, \tau)| (1 - \tau)^a d\tau \leqslant \frac{c_0 c_1 c_2}{a^k}.$$

Приведем формулировку теоремы Каратеодори, которая понадобится нам для доказательства следующей леммы.

Рассмотрим функцию $g(t, y)$, определенную в полосе

$$S = \{(t, y), \ t \in]-T, T[, \ y \in]-\infty, \infty[\}.$$

Пусть

(А) $g(t, y)$ при фиксированном y является измеримой функцией от $t \in]-T, T[$, а при фиксированном $t \in]-T, T[$ является непрерывной функцией от y.

(Б) Существуют неотрицательные функции $M(t)$, $N(t)$, суммируемые на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset]-T, T[$ и такие, что

$$|g(t, y))| < M(t),$$

$$|g(t, y_1) - g(t, y_2)| < N(t) |y_1 - y_2|,$$

для любых $(t, y_j) \in S$, $j = 1, 2$.

Теорема 2. (Каратеодори, [7]) *В условиях* (*А*) и (*Б*) *существует единственное абсолютно непрерывное на* $]-\tau, \tau[\subset]-T, T[$ *решение задачи Коши*

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y), \quad y(0) = C.$$

Лемма 5. *В условиях леммы 4 существует единственное решение* $v \in A(G_1)$ *начальной задачи* (40), (37), *причем при* $R < 1$ *справедлива оценка*

$$\sup_{G_R} v(t, x)| \leqslant \frac{c_0 c_2}{1 - R} \cdot \sup_{G_1} |f(t, x)|. \tag{46}$$

Доказательство. Существование решения уравнения (40) следует из теоремы Каратеодори, а единственность—из оценки (45). Докажем оценку (46). Из (45) имеем

$$|v(t, \cdot)| \leqslant c_2 \sup_{s \in [0, t]} \int_0^s |K(s, \tau) f(\tau)| \, d\tau \leqslant c_2 (1 - t)^{-a}.$$

$$\cdot\{\sup|f(\tau)(1-\tau)^a|\}\cdot(1-t)^a\sup_{s\in[0,t]}\left\{\int_0^s K(s,\tau)(1-\tau)^{-a}\,d\tau\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c_0c_2}{(1-t)^a a^k}\sup_{s\in[0,t]}|(1-s)^{-a}f(s)|,$$

или при $a=1$:

$$|v(t,\cdot)|\leqslant\frac{c_0c_2}{1-t}\sup_{G_1}|f(\tau,\cdot)|.$$

Лемма 6. *Если функция* $v(x)$ *аналитична при* $|x|<1$, $x\in C$ *и*

$$|v|(x)|\leqslant c(1-|x|^{-a},\ |x|<1, \tag{47}$$

то с той же постоянной $c>0$

$$|v'(x)|\leqslant ce(1+a)(1-|x|)^{-a-1},\ |x|<1. \tag{48}$$

Доказательство леммы 6 см. в [10], лемма 9.4.4.

Переходя к доказательству теоремы 1 рассмотрим начальную задачу (1), (9).

Сведем уравнение (1) к (40), последовательно решая с помощью леммы 4 уравнения

$$(L+\beta)u_{\nu+1}=\sum a_\alpha D^\alpha u_\nu+f(t,x),\ |\alpha|\leqslant\gamma, \tag{49}$$

начиная с $u\equiv 0$. По лемме 5

$$M\equiv\sup_{G_R}|u_1|\leqslant\frac{c_0c_2}{1-R}\sup_{G_1}|f(\tau,x)|. \tag{50}$$

Вычитая два последовательных уравнения (49) и обозначив

$$v_\nu=u_{\nu+1}-u_\nu,$$

получим

$$v_0=u_1,$$

$$(L+\beta)v_{\nu+1}=\sum_{|\alpha|<\gamma}a_\alpha D^\alpha v_\nu,\ \nu=0,1,\cdots. \tag{51}$$

Из (50)

$$|v_0|<M=\frac{c_0c_2}{1-R}\sup_{G_1}|f|. \tag{52}$$

Многократно используя лемму 6, начиная с $a=1$, имеем

$$|D^\alpha v_0|\leqslant Me^\gamma\gamma!(1-|x'|)^{-\gamma} \tag{53}$$

для всех мультииндексов $\alpha\in N^n$, $|\alpha|\leqslant\gamma$. Обозначив

$$A_2=\sup_{G_1}|\sum_{|\alpha|<\gamma}a_\alpha(t,x)|, \tag{54}$$

докажем индукцией по $\nu=0,1,\ldots$ оценки

$$|v_\nu|<M\cdot(c_0c_2e^\gamma A_2)^\nu\prod_{j=1}^n(1-|x_j|)^{-\gamma\nu}. \tag{55}$$

При $\nu=0$ это определение M (см. (52)). Полагая (55) верным из леммы 6 имеем

$$|D^{\alpha} v_{\nu}| \leqslant \frac{M(e\gamma(1+\nu))^{\gamma}}{\prod\limits_{1}^{n}(1-|x_j|)^{\gamma(\nu+1)}}(c_0c_2A_2e^{\gamma})^{\nu}. \tag{56}$$

Далее

$$|(L+\beta)v_{\nu+1}| = |\sum a_{\alpha} D^{\alpha} v_{\nu}| < A_2 \cdot \sup |D^{\alpha} v_{\nu}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{MA_2(e\gamma(\nu+1))^{\gamma}}{\prod\limits_{1}^{n}(1-|x_j|)^{\gamma(\nu+1)}}(c_0c_2A_2e^{\gamma})^{\nu},$$

и, наконец, из леммы 5 получаем искомые оценки:

$$|v_{\nu+1}| \leqslant \frac{c_0c_2}{(\gamma(\nu+1))^{k}} \cdot \frac{MA_2(e\gamma(1+\nu))^{\gamma}}{\prod\limits_{1}^{n}(1-|x_j|)^{\gamma(\nu+1)}} (c_0c_2A_2e^{\gamma})^{\nu} \leqslant$$

$$\leqslant M(c_0c_2A_2e^{\gamma})^{\nu+1} \cdot \prod_{j=1}^{n}(1-|x_j|)^{-\gamma(\nu+1)},$$

так как $\gamma! \leqslant \gamma^{\gamma} \leqslant \gamma^{k}$, при $1 \leqslant \gamma \leqslant k$.

При $x'=(t, x) \in G_{1/2}$ из (50), ввиду $1-|x_j| \geqslant \frac{1}{2}$ получаем оценки

$$|v_{\nu}| \leqslant MA^{\nu}, \; \nu=1, 2, \cdots, \tag{57}$$

где, ввиду условия (8)

$$A=(2^{n}e)^{\gamma} c_0c_2A_2 < 1. \tag{58}$$

Из оценок (57), (58) следует существование предела

$$u = \lim_{\nu\to\infty} u_{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_{\nu} \leqslant M \sum_{\nu=0}^{\infty} A^{\nu} \leqslant \frac{M}{1-A},$$

аналитического в $G_{1/2}$, причем

$$|u| \leqslant \frac{M}{1-A} = \frac{c_0c_2}{(1-R)(1-A)} \cdot \sup_{Q_1} |f|,$$

откуда и следует оценка (10).

Для доказательства единственности решения задачи (1), (9) заметим, что если u—решение уравнения (1) с $f\equiv 0$, то $v_{\nu}=u$ удовлетворяет уравнениям (44). Как уже было доказано $v_{\nu}\to 0$ в окрестности нуля и, значит, $u\equiv 0$ в $G_{1/2}$. Теорема 1 доказана.

Институт математики
АН Армении

Поступила 21. IX. 1988

Գ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Վրոնսկիանային դրվածքով Կոշի-Կովալևսկայայի թեորեմը եզակիություններով հավասարումների համար (*ամփոփում*)

Հոդվածում ապացուցվում է կշռային դրվածքով Կոշի-Կովալևսկայայի թեորեմը սկզբնական հիպերհարթության վրա եզակիություններ ունեցող հավասարումների համար։ Առաջարկվում է սկզբնական հիպերհարթության վրա Կոշու տվյալների փոխարեն տալ վրոնսկիաններ լուծումից և որոշակի կշռային ֆունկցիաներից։

G. R. OGANESIAN. *On the Cauchy–Kovalevska theorem with given wronskians for the singular differential equations* (summary)

In the paper a weighted Cauchy—Kovalevska type thecrem for singular differential equations is proved, where the initial Cauchy data is replaced by the wronskians of the solution and weight functions. The fundamental asymptotic solutions of auxiliary ordinary differential equation are used as weight functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. S. Baouendi, G. Goulaouic.* Cauchy problems with characteristic initial hypersurface, Comm. Pure Appl. Math., 26, 4, 1973. 455—475.
2. *А. В. Бицадзе.* Уравнения смешанного типа, «Итоги науки», М., ВИНИТИ, 1959.
3. *Л. А. Иванов, Г. М. Каган.* Теорема Коши-Ковалевской для систем с особенностями, «Методы решения операторных уравнений», Воронеж, 1978, 50—54.
4. *А. В. Овсянников.* Сингулярный оператор в шкале банаховых пространств, ДАН СССР, 163, № 4, 1965, 819—822.
5. *Г. Р. Оганесян.* О начальной задаче с заданными вронскианами, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 15, № 4, 1980, 292—309.
6. *А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев.* Интегралы и ряды, М., Наука, 1981.
7. *Дж.Сансоне.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 1, М., ИЛ, 1953.
8. *F. Treves.* Ovsyannikov theorem and hyperdifferential operators, Notas de Matematica, № 46, Rio de Janeiro, 1968.
9. *М. М. Федорюк.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Наука, 1983.
10. *Л. Хёрмандер.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, т. 1, М., Мир, 1986.
11. *В. Вазов.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Мир, 1968.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մաթեմատիկա XXVI, № 1, 1991 Математика

УДК 517.51

Г. Г. ГЕВОРКЯН

ТЕОРЕМЫ О МОДИФИЦИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ ФРАНКЛИНА, ПОСТРОННОЙ СТРОМБЕРГОМ. II

В работе [17] исследовалась система Стромберга на R. Здесь исследуется периодическая система Стромберга на периодическом отрезке $[0, 1)$. Настоящая статья является продолжением работы [17] и все обозначения, ссылки и нумерации формул согласованы с [17].

Кроме обозначений, сделанных во вводной части [17], сделаем еще несколько обозначений.

Через T обозначается периодический интервал $[0, 1)$, т. е. точки 0 и 1 отождествляются, другим словами, T—окружность длины 1.

Интервал в T — это множество вида $[a, b]$ или $[0, b]\cup[a, 1]$, $d(x, y)$ — расстояние между точками x и y по окружности, т. е. длина меньшей дуги, соединяющей точки x и y по окружности T.

$d(x, E)$ — расстояние между точкой x и подмножеством окружности T, т. е.

$$d(x, E)=\inf_{y\in E} d(x, y).$$

$L_0(E)$—метрическое пространство почти всюду конечных измеримых на E функций с метрикой

$$\rho(f, g)=\int\limits_E \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}dx,$$

сходимость по которой эквивалентна сходимости по мере.

§ 3. Вспомогательные леммы для периодической системы Стромберга

Пусть $(j, k)\in Z^2$ и $j>0$. Положим

$$F_{j,k}(x)=\sum_{l\in Z} f_{j,k}(x-l). \tag{1}$$

Легко видеть, что (см. (1) и [13])

$$F_{j,k}(x)=F_{j,k}(x+1),$$
$$F_{j,k}(x)=F_{j,k+2^j}(x). \tag{2}$$

При фиксированном $j\geqslant 0$ существует только 2^j различных функций $F_{j,k}(x)$, $k=0, 1,\cdots, 2^j-1$ (см. (2)). Для $n=2^j+k$, $j\geqslant 0$, $k=0,1,\cdots, 2^j-1$ обозначим

$$F_n(x)=F_{j,k}(x),\ n=2^j+k,\ k=0, 2,\cdots, 2^j-1, \tag{3}$$

и

$$F_0(x) = 1.$$

Система $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система в $L_2(T)$ (см. [13]). Функции $F_n(x)$ имеют период 1 и их можно рассматривать на окружности единичной длины.

Приведем некоторые свойства системы $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, прямо вытекающие из (1) и свойств системы $\{f_{j,k}(x)\}_{j,k\in Z}$. Пусть $n = 2^j + k$. Тогда (см. [13])

$$|F_n(x)| \leqslant C 2^{\frac{j}{2}} q^{2^j d(x, t_n)},$$

$$|F_n'(x)| \leqslant C 2^{\frac{3j}{2}} q^{2^j d(x, t_n)}, \tag{4}$$

$$F_n(x) = F_{2^j}(x - 2^{-j}k), \tag{5}$$

где $t_n = t_{j,k}$.

В дальнейшем через $\{n\}$ обозначим отрезок $[2^{-j}k,\ 2^{-j}(k+1)]$, а через $[n]$ — целую часть от $\log_2 n$, т. е. если $n = 2^j + k$, $k = 0, 1, \cdots, 2^j - 1$, то $[n] = j$.

Отметим также, что функция $F_n(x)$, $n = 2^j + k$, является линейной на каждом отрезке $[2^{-j-1}(i-1),\ 2^{-j-1}i]$, $i = 1, 2, \cdots, 2^{j-1}$.

Докажем аналог леммы 1.1 для системы $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Лемма 3.1. *Пусть $I = [2^{-\mu}\nu_1,\ 2^{-\nu}\nu_2] \subset T$ и a_n — любые действительные числа. Тогда для любого $j \geqslant \mu$ имеет место*

$$\Big|\sum_{\substack{\{n\}\subset I\\ [n]=j}} a_n F_n(x)\Big| \leqslant C q^{2^j d(x, I)} \max_{t\in I_1} \Big|\sum_{\substack{\{n\}\subset I\\ [n]=j}} a_n F_n(x)\Big|, \text{ когда } x \overline{\in} I, \tag{6}$$

где $I_1 = [2^{-\mu}\nu_1 - 2^{-j-1},\ 2^{-\mu}\nu_1] \cup [2^{-\mu}\nu_2,\ 2^{-\mu}\nu_2 + 2^{-j-1}]$.

Доказательство. Учитывая (5), можно предположить, что $\nu_1 = 0$. Тогда $\{k : \{2^j + k\} \subset I\} = \{0, 1, \cdots, 2^{-\mu}\nu_2 - 1\}$, $d(x, I) = \min(1 - x,\ x - 2^{-\mu}\nu_2)$ и $I_1 = [2^{-\mu}\nu_2,\ 2^{-\mu}\nu_2 + 2^{-j-1}] \cup [1 - 2^{-j-1}]$ (напомним, что рассматривается периодический отрезок $[0, 1) = T$.

С учетом (1) и (3) можно записать

$$\sum_{\substack{\{n\}\cup I\\ [n]=j}} a_n F_n(x) = \sum_{k=0}^{2^{j-\mu}\nu_2 - 1} a_{2^j+k} F_{j,k}(x) = \sum_{k=0}^{2^{j-\mu}\nu_2-1} a_{2^j+k} \cdot \sum_{l\in Z} f_{j,k}(x - l) =$$

$$= \sum_{k=0}^{2^{j-\mu}\nu_2-1} a_{2^j+k} \sum_{l=1}^{\infty} f_{j,k}(x-l) + \sum_{k=0}^{2^{j-\mu}\nu_2-1} a_{2^j+k} \sum_{l=-\infty}^{0} f_{j,k}(x-l) =$$

$$= \Phi_1(x) + \Phi_2(x). \tag{7}$$

Из (1.3) имеем

$$\Phi_1(x) = 2^{\frac{j}{2}} \sum_{k=0}^{2^{j-\mu}\nu_2-1} a_{2^j+k} \sum_{l=1}^{\infty} \tau(2^j x - 2^j l - k). \tag{8}$$

Если $x \in [2^{-\mu}\nu_2, 1]$, $l \geqslant 1$ и $0 < k < 2^{j-\mu}\nu_2 - 1$, то $2^j x - 2^j l - k \leqslant 0$ и функция $\tau(2^j x - 2^j l - k)$ линейная на отрезках $[2^{-j-1} i, 2^{-j-1}(i+1)]$, $i = 2^{j-\mu}\nu_2, \cdots, 2^{j+1} - 1$, (см. определение функции $\tau(x)$). Следовательно функция $\Phi_1(x)$ также линейна на каждом отрезке $[2^{-j-1} i, 2^{-j-1}(i+1)]$, $i = 2^{j-\mu}\nu_2, \cdots, 2^{j+1} - 1$. Пусть $x = 1 - 2^{-j-1} i$, $i = 0, 1, \cdots 2^{j+1} - 2^{j+1-\mu}\nu_2$. Тогда из (8) и (1.9) получим

$$\Phi_1(1 - 2^{-j-1} i) = 2^{\frac{j}{2}} \sum_{k=1}^{2^{j-\mu}\nu_2} a_{2^j+k} \sum_{l=1}^{\infty} \tau(2^j - 2^j l - k - 2^{-1} i) =$$

$$= (\sqrt{3} - 2)^i \Phi_1(1), \; i = 0, 1, \cdots, 2^{j+1} - 2^{j+1-\mu}\nu_2. \tag{9}$$

Аналогичными рассуждениями получим, что функция $\Phi_2(x)$ линейна на отрезках $[2^{-j} m, 2^{-j}(m+1)]$, $m = 2^{j-\mu}\nu_2, \cdots, 2^j - 1$ и

$$\Phi_2(2^{-\mu}\nu_2 + 2^{-j} m) = (\sqrt{3} - 2)^m \Phi_2(2^{-\mu}\nu_2), \; m = 0, \cdots, 2^j - 2^{j-\mu}\nu_2. \tag{10}$$

На отрезках $[2^{-\mu}\nu_2, 2^{-\mu}\nu_2 + 2^{-j}]$ функция $\Phi_2(x)$ линейна и как видно из (10)

$$\Phi_2(2^{-\mu}\nu_2 + 2^{-j}) = (\sqrt{3} - 2)\Phi_2(2^{-\mu}\nu_2). \tag{11}$$

Из (11) следует, что $\Phi_2(x)$ на J_1 не меняет знак и

$$\min_{x \in J_1} |\Phi_2(x)| = |\Phi_2(2^{-\mu}\nu_2 + 2^{-j-l})| = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} |\Phi_2(2^{-\mu}\nu_2)| =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \max_{x \in J_1} |\Phi_2(x)|, \tag{12}$$

где $J_1 = [2^{-\mu}\nu_2, 2^{-\mu}\nu_2 + 2^{-j-1}]$.

Аналогично получается, что $\Phi_2(x)$ на J_2 не меняет знак и

$$\min_{x \in J_2} |\Phi_2(x)| = |\Phi_2(1)| = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} |\Phi_2(1 - 2^{-j-1})| = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \max_{x \in J_2} |\Phi_2(x)|,$$

где $J_2 = [1 - 2^{-j-1}, 1]$.

Из (9) следует

$$\min_{x \in J_1} |\Phi_1(x)| = |\Phi_1(2^{-\mu}\nu_2)| = (2 - \sqrt{3}) |\Phi_1(2^{-\mu}\nu_2 + 2^{-j-1})| =$$

$$= (2 - \sqrt{3}) \max_{x \in J_1} |\Phi_1(x)|,$$

$$\min_{x \in J_2} |\Phi_1(x)| = |\Phi_1(1 - 2^{-j-1})| = (2 - \sqrt{3}) |\Phi_1(1)| = \tag{13}$$

$$= (2 - \sqrt{3}) \max_{x \in J_2} |\Phi_1(x)|.$$

Сделаем следующие обозначения:

$$\alpha_1 = \max_{x \in J_1} |\Phi_1(x) + \Phi_2(x)|, \; \alpha_2 = \max_{x \in J_2} |\Phi_1(x) + \Phi_2(x)|, \; \alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2).$$

Пусть β_1 — та из точек $2^{-\mu}\nu_2$ и $2^{-\mu}\nu_2+2^{-j-1}$, где $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ принимают значения одного знака, а β_2 — та точка среди 1 и $1-2^{-j-1}$, где $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ принимают значения одного знака. Следовательно

$$|\Phi_1(\beta_1)|+|\Phi_2(\beta_1)|=|\Phi_1(\beta_1)+\Phi_2(\beta_1)|\leqslant\alpha_1<\alpha, \tag{14}$$

$$|\Phi_1(\alpha_2)|+|\Phi_2(\beta_2)|=|\Phi_1(\beta_2)+\Phi_2(\beta_2)|\leqslant\alpha_2<\alpha. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует

$$|\Phi_2(\beta_1)|\leqslant\alpha \text{ и } |\Phi_1(\beta_2)|\leqslant\alpha. \tag{16}$$

Учитывая (12) и (13), из (16) получим

$$|\Phi_1(1)|<C\alpha \text{ и } |\Phi_2(2^{-\mu}\nu)|<C\alpha. \tag{17}$$

Поскольку функция $\Phi_1(x)$ линейная на отрезках $[2^{-j-1}i,\ 2^{-j-1}(i+1)]$, $i=2^{j-\mu},\dots,2^{-j+1}-1$, а функция $\Phi_2(x)$ линейная на $[2^{-j}m, i, 2^{-j}(m+1)]$, $m=2^{j-\mu}\nu_2,\dots,2^j 1$, то из (9), (10) и (17) следует

$$|\Phi_1(x)|\leqslant C\alpha q^{2^j|x-1|}, \text{ когда } x\in[2^{-\mu}\nu_2,\ 1], \tag{18}$$

$$|\Phi_2(x)|\leqslant C\alpha q^{2^j|x-2^{-\mu}\nu_2|}, \text{ когда } x\in[2^{-\mu}\nu_2,\ 1]. \tag{19}$$

Суммируя (18) и (19), с учетом (7), получим (6). Лемма доказана.

Еще раз просмотрев доказательство леммы 3.1 читатель легко заметит, что можно вместо

$$I_1=[2^{-\mu}\nu_1-2^{-j-1},\ 2^{-\mu}\nu_1]\cup[2^{-\mu}\nu_2,\ 2^{-\mu}\nu_2+2^{-j-1}] \tag{20}$$

рассмотреть

$$I_1=[2^{-\mu}\nu_1-2^{-j},\ 2^{-\mu}\nu_1-2^{-j-1}]\cup[2^{-\mu}\nu_2,\ 2^{-\mu}\nu_2+2^{-j-1}], \tag{21}$$

$$I_1=[2^{-\mu}\nu_1-2^{-j-1},\ 2^{-\mu}\nu_1]\cup[2^{-\mu}\nu_2+2^{-j-1},\ 2^{-\mu}\nu_2+2^{-j}], \tag{22}$$

$$I_1=[2^{-\mu}\nu_1-2^{-j},\ 2^{-\mu}\nu_1-2^{-j-1}]\cup[2^{-\mu}\nu_2+2^{-j-1},\ 2^{-\mu}\nu_2+2^{-j}], \tag{23}$$

т. е. верна следующая

Лемма 3.2. *Пусть $I=[2^{-\mu}\nu_1,\ 2^{-\mu}\nu_2]\subset T$ и a_n — любые действительные числа. Тогда для любого $j>\mu$ имеет место*

$$\left|\sum_{\substack{\{n\}\subset I\\ |n|=j}} a_nF_n(x)\right|\leqslant Cq^{2^j d(x,I)}\max_{t\in I_1}\left|\sum_{\substack{\{n\}\subset I\\ |n|=j}} a_nF_n(t)\right|, \text{ когда } x\,\overline{\in}\,I, \tag{24}$$

где I_1—любое из множеств (20)—(23).

Аналогично доказывается следующая

Лемма 3.3. *Пусть $I=[2^{-\mu}\nu_1,\ 2^{-\mu}\nu_2]\subset T$ и a_n — любые действительные числа. Тогда для любого $j\geqslant\mu$ имеет место*

$$\sum_{\substack{\{n\}\subset I\\ |n|=j}} a_n^2F_n^2(x)\leqslant C\,q^{2^j d(x,I)}\max_{t\in I_1}\sum_{\substack{\{n\}\subset I\\ |n|=j}} a_n^2F_n^2(t). \text{ когда } x\,\overline{\in}\,I,$$

где I_1— любое из множеств (20)—(23).

Лемма 3.4. *Существует абсолютная положительная постоянная C такая, что*

$$\int\limits_{\Delta_n^i} F_n^2(x)\,dx > C,\ i=1,2;\ n=1,2,\cdots, \tag{25}$$

где Δ_n^1 *и* Δ_n^2, *соответственно, левая и правая половины интервала* $\{n\}$.

Доказательство. При $n=0,1$ лемма очевидна. Учитывая (5) достаточно доказать (25) для $n=2^j$, $j=1,2,\ldots$.Тогда $\{n\}=[0,2^{-j}]$ и функция $F_2^j(x)$, линейна на $[0,2^{-j-1}]$ и $[2^{-j-1},2^{-j}]$. Вычислим $F_2^j(0)$. Из формул (3), (1), (1.3), (1.8)–(1.11) следует

$$F_2^j(0)=F_{j,0}(0)=\sum_{l\in Z} f_{j,0}(-l)=2^{\frac{j}{2}}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\tau(2^j l)+\sum_{l=-\infty}^{0}\tau(2^j l)\right)=$$

$$=2^{\frac{j}{2}}\left(\tau(1)\sum_{l=1}^{\infty}(\sqrt{3}-2)^{2^j l-1}+\tau(0)\sum_{l=0}^{\infty}(\sqrt{3}-2)^{2^{j+1}l}\right)= \tag{26}$$

$$=\frac{-2^{\frac{j}{2}}\tau\left(\frac{1}{2}\right)}{11}\left[-(8+6\sqrt{3})\frac{(\sqrt{3}-2)^{2^j}}{1-(\sqrt{3}-2)^{2^j}}+\frac{28-12\sqrt{3}}{1-(\sqrt{3}-2)^{2^j}}\right].$$

Выражение в квадратных скобках больше некоторого положительного числа (достаточно проверить, что оно положительно при $j=1$). Поэтому

$$F_2^j(0)\leqslant -C2^{\frac{j}{2}}\tau\left(\frac{1}{2}\right). \tag{27}$$

Легко проверить, что если $y(x)$—линейная функция, то

$$\int\limits_a^b y^2(x)\,dx \geqslant (b-a)\frac{y^2(a)}{4}. \tag{28}$$

Из (27), (28) и из того, что $\tau\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$, следует

$$\int\limits_{\Delta_{2^j}^1} F_{2^j+1}^2(x)\,dx=\int\limits_0^{2^{-j-1}} F_{2^j+1}^2(x)\,dx \geqslant C.$$

При $i=2$ неравенство (25) доказывается аналогично. Лемма доказана

Исходя из формул (см. (1) и (3))

$$F_{j,0}(x)=\sum_{l\in Z} f_{j,0}(x-l)=2^{\frac{j}{2}}\sum_{l\in Z}\tau(2^j x-2^j l),$$

легко вывести (аналогично выкладкам (26)), что

$$\max_{0<i<2^{j+1}} |F_{j,0}(2^{-j-1}i)|=|F_{j,0}(2^{-j-1})|. \tag{29}$$

Учитывая, что $F_{2^j}(x)$—линейная функция на отрезках $[2^{-j-1}(i-1), 2^{-j-1}i]$, $i=1,\cdots,2^{j+1}$, из (29) получим

$$\max_{x\in[0,1]}|F_{j,0}(x)|=|F_{j,0}(2^{-j-1})|. \tag{30}$$

Из (30) и (5) имеем

$$\max_{x\in[0,1]}|F_n(x)|=|F_n(t_n)|. \tag{31}$$

В работе [13] доказано (см. [13], теорема 3.10), что ядро Дирихле по системе $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$

$$K_N(x, y)=\sum_{n=0}^{N}F_n(x)F_n(y)$$

удовлетворяет неравенству

$$|K_N(x, y)|\leqslant CNq^{Nd(x,y)}. \tag{32}$$

Из (32) следует, что если $f(x)\in L_1(0, 1)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nF_n(x)$ её ряд Фурье, то

$$\sup_N\left|\sum_{n=0}^{N}a_nF_n(x)\right|\leqslant CM(f, x), \tag{33}$$

где $M(f, x)$—максимальная функция Харди-Литтльвуда. Из (33) следует, что если $f(x)\in L_p(0, 1)$, $p>1$, то

$$\left\|\sup_N\left|\sum_{n=0}^{N}a_nF_n(x)\right|\right\|_p<C(p)\|f\|_p. \tag{34}$$

§ 4. Теоремы о безусловной сходимости и единственности рядов по периодической системе Стромберга

Теорема 4.1. *Для любого $p>0$ следующие условия эквивалентны:*

A) *ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nF_n(x)$ безусловно сходится в L_p;*

(B) $\left\{\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^2F_n^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\in L_p$;

(C) $\sup\limits_N\left|\sum\limits_{n=0}^{N}a_nF_n(x)\right|\in L_p$.

Для доказательства теоремы 4.1 нам нужны некоторые вспомогательные факты.

Лемма 4.1. *Пусть $I=[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$, $j\in Z_+$, $k=0, 1,\cdots, 2^j-1$. При любом p и любых $\varepsilon_n=\pm1$ верны следующие неравенства*

$$\int_0^1\sup_N\left|\sum_{\substack{\{n\}\subset I\\ n<N}}a_nF_n(x)\right|^p dx\leqslant C(p)|I|^{1-\frac{p}{2}}\left(\sum_{\{n\}\subset I}a_n^2\right)^{\frac{p}{2}},$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{\{n\} \subset I} \varepsilon_n a_n F_n(x) \right|^p dx \leqslant C(p) |I|^{1-\frac{p}{2}} \left(\sum_{\{n\} \subset I} a_n^2 \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Лемма 4.1 доказывается аналогично лемме 2.1 с использованием свойств системы $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ вместо соответствующих свойств системы $\{f_{j,k}x\}_{j,k\in Z}$.

Для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x)$ обозначим

$$E_\lambda = \left\{ x \in T : \sup_N \left| \sum_{n=0}^{N} a_n F_n(x) \right| > \lambda \right\}, \ \lambda \in R_+. \tag{1}$$

Построим множество B_λ^δ, $0 < \delta < 1$, следующим образом. Отрезок $[0, 1]$ обозначим через $I_{0,0}^{(\lambda,\delta)}$, если $|E_\lambda| > \delta$, а в противном случае считаем, что нет отрезка $I_{0,0}^{(\lambda,\delta)}$. Это у нас был нулевой шаг. На j-ом шаге отрезок $[0, 1]$ разделим на отрезки $[2^{-j}(i-1), 2^{-j}]$, $i = 1, \cdots, 2^j$ и из этих отрезков обозначим через $I_{j,k}^{(\lambda,\delta)}$ те, которые не пересекаются с $\bigcup\limits_{q<j} (\bigcup\limits_k I_{q,k}^{(\lambda,\delta)})$ и удовлетворяют соотношению

$$\frac{|I_{j,k}^{(\lambda,\delta)} \cap E_\lambda|}{|I_{j,k}^{(\lambda,\delta)}|} > \delta. \tag{2}$$

Обозначим

$$B_\lambda^\delta = \bigcup_{j,k} I_{j,k}^{(\lambda,\delta)}. \tag{3}$$

При этих обозначениях справедливы следующие леммы.

Лемма 4.2. *Существует постоянная* $C(\delta)$, *зависящая только от* δ *такая, что*

$$\int_0^1 \sup_N \left| \sum_{\substack{n \in \Lambda_\lambda^\delta \\ m < N}} a_n F_n(x) \right| dx \leqslant C(\delta) \lambda |E_\lambda|, \tag{4}$$

где

$$\Lambda_\lambda^\delta = \{n : \{n\} \subset B_\lambda^\delta \ \text{и} \ \{n\} \overline{\in} B_{2\lambda}^\delta\}. \tag{5}$$

Лемма 4.3. *Пусть*

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} a_n F_n(x) = 0 \ \text{п.в. на} \ T.$$

Тогда ряд $\sum\limits_{\{n\} \overline{\subset} B_{2\lambda}^\delta} a_n F_n(x)$ *п.в. сходится и*

$$\int_0^1 \left| \lim_{N \to \infty} \sum_{\substack{\{n\} \overline{\subset} B_{2\lambda}^\delta \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| dx \leqslant C(\delta) \lambda |E_\lambda|, \tag{6}$$

где $C(\delta)$ зависит только от δ.

Доказательства этих лемм имеют много общего и мы их проведем параллельно.

Доказательства лемм 4.2. и 4.3. Сразу же отметим, что из (1)—(3) следует

$$E^{\delta}_{4\lambda} \subset E^{\delta}_{2\lambda} \subset B^{\delta}_{2\lambda} \subset B^{\delta}_{\lambda}, \ |B^{\delta}_{\lambda}| < \frac{1}{\delta}|E_{\lambda}|. \tag{7}$$

Убедимся, что если $\{n\} \overline{\in} B^{\delta}_{2\lambda}$, то

$$\|a_n F_n(x)\|_{\infty} \leqslant C(\delta)\lambda. \tag{8}$$

Действительно, пусть Δ_1—левая, а Δ_2—правая половины интервала $\{n\}$. Тогда, хотя бы для одного из них выполняется

$$\frac{|\Delta_l \cap E_{\lambda}|}{|\Delta_l|} < \delta. \tag{9}$$

В противном случае $\{n\} = \Delta_1 \cup \Delta_2 \subset B^{\delta}_{2\lambda}$. Поскольку $a_n F_n(x)$ (линейнана Δ_l, то из (9), (1) и леммы 1.3 следует

$$\|a_n F_n(x)\|_{L_{\infty}(\Delta_l)} < C(\delta)\lambda. \tag{10}$$

Учитывая, что при любом i выполняется $t_n \in \Delta_i$, из (10) и (3.31) получим (8).

Легко видеть, что если $x \in I^{(2\lambda,\delta)}_{j_0,k}$ и $j \geqslant j_0 - 1$, то (см. (8), (3.4) (3.31))

$$\sum_{\substack{|n| = j \\ \{n\} \overline{\in} B^{\delta}_{2\lambda}}} |a_n F_n(x)| \leqslant C(\delta)\lambda \sum_{\substack{|n| = j \\ \{n\} \overline{\in} B^{\delta}_{2\lambda}}} q^{2^j d(x, t_n)} \leqslant C(\delta)\lambda q^{2^j d\left(x, \left(I^{(2\lambda,\delta)}_{j_0,k}\right)^c\right)}. \tag{11}$$

Суммируя (11) для $j = j_0 - 1, j_0, \cdots$ и интегрируя на $I^{(2\lambda,\delta)}_{j_0,k}$, получим

$$\int\limits_{I^{(2\lambda,\delta)}_{j_0,k}} \sum_{j=j_0-1}^{\infty} \sum_{\substack{|n| = j \\ \{n\} \overline{\in} B^{\delta}_{2\lambda}}} |a_n F_n(x)|\, dx \leqslant C(\delta)\lambda \sum_{j=j_0-1}^{\infty} \int\limits_{I^{(2\lambda,\delta)}_{j_0,k}} q^{2^j d\left(x, \left(I^{(\lambda,\delta)}_{j_0,k}\right)^c\right)} dx \leqslant$$

$$\leqslant C(\delta)\lambda \sum_{j=j_0-1}^{\infty} 2^{-j} \int\limits_0^{\infty} q^t\, dt < C(\delta)\lambda |I^{(2\lambda,\delta)}_{j_0,k}|. \tag{12}$$

Обозначим

$$\varphi_{2\lambda,1}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \overline{\in} B^{\delta}_{2\lambda}, \\ \sum\limits_{j=j_0-1}^{\infty} \sum\limits_{\substack{|n| = j \\ \{n\} \overline{\in} B^{\delta}_{2\lambda}}} |a_n F_n(x)|, \text{ если } x \in I^{(2\lambda,\delta)}_{j_0,k}. \end{cases} \tag{13}$$

Из (12) имеем

$$\int\limits_0^1 \varphi_{2\lambda,1}(x)\, dx < C(\delta)\lambda |B^{\delta}_{2\lambda}|. \tag{14}$$

Множества $B_{2\lambda}^{\delta}$ с точностью до множества меры нуль можно представить в виде

$$B_{2\lambda}^{\delta} = \bigcup_q I_q^{(2\lambda, \delta)}, \tag{15}$$

где интервалы $I_q^{(2\lambda, \delta)}$ не имеют общих концов и $I_q^{(2\lambda, \delta)} \cap I_{q'}^{(2\lambda, \delta)} = \varnothing$, при $q \neq q'$. Пусть для фиксированного $I_q^{(2\lambda, \delta)}$ интервал $I_{j_0, k_0}^{(2\lambda, \delta)}$ самый длинный составляющий интервала $I_q^{(2\lambda, \delta)}$. Для $j > j_0$ обозначим через $J_j^{(2\lambda, \delta)}$ самый большой интервал вида $(2^{-j}k_1, 2^{-j}k_2)$, который содержит $I_{j_0, k_0}^{(2\lambda, \delta)}$ и содержится в $I_q^{(2\lambda, \delta)}$ (при $j = j_0$ $J_j^{(2\lambda, \delta)} = I_{j_0, k_0}^{(2\lambda, \delta)}$).

Рассмотрим суммы

$$S_{j, m}^{(2\lambda, \delta)}(x) = \sum_{\substack{\{n\} \subset J_j^{(2\lambda, \delta)} \\ |n| = j \\ n < m}} a_n F_n(x). \tag{16}$$

Если $J_j^{(2\lambda, \delta)}$ внутри себя не содержит точки нуль, то $S_{j, m}^{(2\lambda, \delta)}(x)$ — разность двух частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x)$, а если содержит, то $S_{j, m}^{(2\lambda, \delta)}(x)$ — сумма двух разностей частичных сумм (это связано с тем, что рассматривается переодический интервал T). Во всяком случае имеет место

$$|S_{j, m}^{(2\lambda, \delta)}(x)| < 8\lambda, \text{ когда } x \,\overline{\in}\, E_\lambda. \tag{17}$$

Интервалы $\Delta_1 = (2^{-j}(k_1 - 1), 2^{-j}k_1)$ и $\Delta_2 = (2^{-j}k_2, 2^{-j}(k_2 + 1))$ не содержатся в $B_{2\lambda}^{\delta}$ (это следует из представления (15) и выбора интервала $J_j^{(2\lambda, \delta)}$). Следовательно

$$\frac{|\Delta_i \cap E_\lambda|}{|\Delta_i|} < \delta, \quad i = 1, 2. \tag{18}$$

Пусть Δ_1^1 —левая, а Δ_1^2 —правая половина интервала Δ_1. Тогда хотя бы для одного из них выполняется (см. (18))

$$\frac{|\Delta_1^j \cap E_\lambda|}{|\Delta_1^j|} < \delta, \quad j = 1 \text{ или } 2. \tag{19}$$

Учитывая, что $S_{j, m}^{(2\lambda, \delta)}$ линейна на Δ_1^j, из (19), (17) и леммы 1.3 следует

$$|S_{j, m}^{(2\lambda, \delta)}(x)| < C(\delta)\lambda, \quad x \in \Delta_1^j, \text{ где } j = 1 \text{ или } 2. \tag{20}$$

Аналогично получится, что

$$|S_{j, m}^{(2\lambda, \delta)}(x)| < C(\delta)\lambda, \quad x \in \Delta_2^j, \text{ где } j = 1 \text{ или } 2, \tag{21}$$

а Δ_2^1 и Δ_2^2 —левая и правая половины интервала Δ_2.

Применяя лемму 3.2, из (20) и (21) получим

$$|S_{j, m}^{(2\lambda, \delta)}(x)| < C(\delta)\lambda q^{2/d\left(x, J_j^{(2\lambda, \delta)}\right)}, \text{ когда } x \,\overline{\in}\, J_j^{(2\lambda, \delta)}. \tag{22}$$

Обозначим

$$\varphi_q^{(2\lambda)}(x)=\begin{cases}0, & x\in I_{j_0,k_0}^{(2\lambda,\delta)}\\ \sum\limits_{j=j_0}^{h-1}\max\limits_m|S_{j,m}^{(2\lambda,\delta)}(x)|, & x\in J_h^{(2\lambda,\delta)}\setminus J_{h-1}^{(2\lambda,\delta)},\ \text{при } h>j_0\\ \sum\limits_{j=j_0}^{\bar{j}}\max\limits_m|S_{j,m}^{(2\lambda,\delta)}(x)|, & x\bar{\in}\bigcup\limits_{j=j_0}^{\bar{j}}J_j^{(2\lambda,\delta)}=I_q^{(2\lambda,\delta)}.\end{cases}\tag{23}$$

Из (22) и (23) следует

$$\int_0^1\varphi_q^{(\lambda)}(x)\,dx\leqslant\sum_{j=j_0}^{\bar{j}}\int_{(J_j^{(2\lambda,\delta)})^c}\max_m|S_{j,m}^{(2\lambda,\delta)}(x)|\,dx\leqslant C(\delta)\,\lambda\,\times$$

$$\times\sum_{j=j_0}^{\bar{j}}\int_{(J_j^{(2\lambda,\delta)})^c}q^{2^j d\left(x,\,J_j^{(2\lambda,\delta)}\right)}\,dx\leqslant C(\delta)\,\lambda\sum_{j=j_0}^{\bar{j}}2^{-j}\times\tag{24}$$

$$\times\int_0^{\bar{\infty}}q^t\,dt\leqslant C(\delta)\,\lambda\,2^{-j_0}<C(\delta)\,\lambda\,|I_q^{(2\lambda,\delta)}|.$$

Полагая (см. (13))

$$\varphi^{(2\lambda)}(x)=\varphi_{2\lambda,1}(x)+\sum_q\varphi_q^{(2\lambda)}(x),$$

получим (см. (24), (15), (14))

$$\int_0^1\varphi^{(2\lambda)}(x)\,dx\leqslant C(\delta)\,\lambda\,|B_{2\lambda}^\delta|.\tag{25}$$

Легко видеть, что (см. (23), (16))

$$\sup_N\Big|\sum_{\substack{\{n\}\subset B_{2\lambda}^\delta\\ n<N}}a_nF_n(x)\Big|\leqslant\sum_q\varphi_q^{(2\lambda)}(x)\leqslant\varphi^{(2\lambda)}(x),\ \text{когда}\ x\bar{\in}B_{2\lambda}^\delta\tag{26}$$

и (см. (26), (8) и (1))

$$\sup_N\Big|\sum_{\substack{\{n\}\bar{\subset}B_{2\lambda}^\delta\\ n<N}}a_nF_n(x)\Big|\leqslant2\lambda+\varphi^{(2\lambda)}(x),\ \text{когда}\ x\bar{\in}B_{2\lambda}^\delta,\tag{27}$$

Оценим $\sup\limits_N\Big|\sum\limits_{\substack{\{n\}\bar{\subset}B_{2\lambda}^\delta\\ n<N}}a_nF_n(x)\Big|$ на $B_{2\lambda}^\delta$. Пусть $x\in I_{j,k}^{(2\lambda,\delta)}$ при некоторых j и k. Тогда для $N<2^{j-1}$ имеем

$$\Big|\sum_{\substack{\{n\}\bar{\subset}B_{2\lambda}^\delta\\ n<N}}a_nF_n(x)\Big|\leqslant\Big|\sum_{n=1}^{N}a_nF_n(x)\Big|+\Big|\sum_{\substack{\{n\}\subset B_{2\lambda}^\delta\\ n<N}}a_nF_n(x)\Big|.\tag{28}$$

Первое слагаемое в (28) является линейной функцией на некотором двоичном отрезке, содержащем $I_{j,k}^{(2\lambda,\delta)}$, и поскольку этот интервал не может содержаться в $B_{2\lambda}^{\delta}$, то на нем

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n F_n(x)\right| < C(\delta)\lambda. \tag{29}$$

Когда $\{n\}\subset B_{2\lambda}^{\delta}$ и $n \leqslant N \leqslant 2^{j-1}$, то $\{n\} \overline{\subset} I_{j,k}^{(2\lambda,\delta)}$. Поэтому

$$\left|\sum_{\substack{\{n\}\subset B_{2\lambda}^{\delta}\\ n<N}} a_n F_n(x)\right| \leqslant \sum_q \varphi_q^{(2\lambda)}(x). \tag{30}$$

Из (29) и (30) следует

$$\left|\sum_{\substack{\{n\}\subset B_{2\lambda}^{\delta}\\ n<N}} a_n F_n(x)\right| \leqslant C(\delta)\lambda + \sum_q \varphi_q^{(2\lambda)}(x),\ N < 2^{j-1}. \tag{31}$$

Если $N > 2^{j-1}$, то (см. (31) и (13))

$$\left|\sum_{\substack{\{n\}\overline{\subset} B_{2\lambda}^{\delta}\\ n<N}} a_n F_n(x)\right| \leqslant \left|\sum_{\substack{\{n\}\overline{\subset} B_{2\lambda}^{\delta}\\ n<2^{j-1}}} a_n F_n(x)\right| + \left|\sum_{\substack{\{n\}\subset B_{2\lambda}^{\delta}\\ 2^{j-1}<n<N}} a_n F_n(x)\right| <$$

$$\leqslant C(\delta)\lambda + \sum_q \varphi_q^{(2\lambda)}(x) + \varphi_{2\lambda,1}(x) = C(\delta)\lambda + \varphi^{(2\lambda)}(x).$$

Таким образом на $B_{2\lambda}^{\delta}$ имеем

$$\operatorname{Sup}_N \left|\sum_{\substack{\{n\}\subset B_{2\lambda}^{\delta}\\ n<N}} a_n F_n(x)\right| \leqslant C(\delta)\lambda + \varphi^{(2\lambda)}(x),\ x\in B_{2\lambda}^{\delta}. \tag{32}$$

Из (26) и (32) следуют (см. также (5))

$$\operatorname{Sup}_N \left|\sum_{\substack{n\in\Lambda_\lambda^{\delta}\\ n<N}} a_n F_n(x)\right| < \varphi^{(\lambda)}(x) + \varphi^{(2\lambda)}(x), \text{ когда } x \overline{\in} B_\lambda^{\delta}, \tag{33}$$

$$\operatorname{Sup}_N \left|\sum_{\substack{n\in\Lambda_\lambda^{\delta}\\ n<N}} a_n F_n(x)\right| < C(\delta)\lambda + \varphi^{(\lambda)}(x) + \varphi^{(2\lambda)}(x), \text{ когда } x\in B_{2\lambda}^{\delta}. \tag{34}$$

Из очевидного неравенства

$$\operatorname{Sup}_N \left|\sum_{\substack{n\in\Lambda_\lambda^{\delta}\\ n<N}} a_n F_n(x)\right| \leqslant \left|\sum_{\substack{\{n\}\overline{\subset} B_\lambda^{\delta}\\ n<N}} a_n F_n(x)\right| + \left|\sum_{\substack{\{n\}\overline{\subset} B_{2\lambda}^{\delta}\\ n<N}} a_n F_n(x)\right|$$

следует также, что (см. (32) и (27))

$$\operatorname{Sup}_N \left|\sum_{\substack{n\in\Lambda_\lambda^{\delta}\\ n<N}} a_n F_n(x)\right| \leqslant C(\delta)\lambda + \varphi^{(\lambda)}(x) + \varphi^{(2\lambda)}(x), \text{ когда } x\in B_\lambda^{\delta}\setminus B_{2\lambda}^{\delta}. \tag{35}$$

Из (33), (34), (35) вытекает

$$\int_0^1 \operatorname{Sup}_N \left|\sum_{\substack{n\in\Lambda_\lambda^{\delta}\\ n<N}} a_n F_n(x)\right| dx \leqslant C(\delta)\lambda|B_\lambda| + \int_0^1 \varphi^{(\lambda)}(x)\,dx + \int_0^1 \varphi^{(2\lambda)}(x)\,dx. \tag{36}$$

Из (36), (25) и (7) следует (4).

Из (27) и (32) имеем

$$\operatorname{Sup}_N \Big| \sum_{\substack{\{n\} \overline{\subset} B_{2\lambda}^\delta \\ n<N}} a_n F_n(x) \Big| < C(\delta)\lambda + \varphi^{(2\lambda)}(x),\ x \in T. \qquad (3$$

Из (37) и (25) следует, что $\sum_{\{n\} \overline{\subset} B_{2\lambda}^\delta} a_n F_n(x)$ является рядом Фур

некоторой интегрируемой функции. Следовательно этот ряд п. в. схо

дится (см. 3.33). Тогда, если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x) = 0$ п. в., то ряд $\sum_{\{n\} \subset B_{2\lambda}^\delta} a_n F_n($

тоже п. в. сходится и

$$\sum_{\{n\} \subset B_{2\lambda}^\delta} a_n F_n(x) = - \sum_{\{n\} \overline{\subset} B_{2\lambda}^\delta} a_n F_n(x) \text{ п. в. на } T.$$

Поэтому (см. также (32), (26), (25) и (7))

$$\int_0^1 \Big| \lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{\{n\} \subset B_{2\lambda}^\delta \\ n<N}} a_n F_n(x) \Big| dx = \int_{B_{2\lambda}^\delta} \Big| \lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{\{n\} \overline{\subset} B_{2\lambda}^\delta \\ n<N}} a_n F_n(x) \Big| dx +$$

$$+ \int_{(B_{2\lambda}^\delta)^c} \Big| \lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{\{n\} \subset B_{2\lambda}^\delta \\ n<N}} a_n F_n(x) \Big| dx < C(\delta)\lambda |B_\lambda| \leqslant C(\delta)\lambda |E_\lambda|.$$

Леммы 4.2 и 4.3 доказаны.

Из (27), (32) и (25) следует, что

$$\int_0^1 \operatorname{Sup}_N \Big| \sum_{\substack{\{n\} \overline{\subset} B_{2\lambda}^\delta \\ n<N}} a_n F_n(x) \Big| dx < C(\delta)\lambda. \qquad (38)$$

Легко видеть, что при доказательстве (38) (а также лемм 4.2 и 4.3) мы пользовались не тем, что на E_λ выполняется $\operatorname{Sup}_N \Big| \sum_{n=1}^N a_n F_n(x) \Big| > \lambda$, а тем, что на дополнении E_λ, т. е. на $T \setminus E_\lambda$, выполняется $\operatorname{Sup}_N \Big| \sum_{n=1}^N a_n F_n(x) \Big| \leqslant \lambda$. Поэтому верна следующая

Лемма 4.4. *Допустим на E^λ выполняется $\operatorname{Sup}_N \Big| \sum_{n=1}^N a_n F_n(x) \Big| < \lambda$, $E_\lambda = T \setminus E^\lambda$ и пусть B_λ^δ построено по правилам (2), (3). Тогда*

$$\int_0^1 \operatorname{Sup}_N \Big| \sum_{\substack{\{n\} \overline{\subset} B_{2\lambda}^\delta \\ n<N}} a_n F_n(x) \Big| dx \leqslant C(\delta)\lambda.$$

Для каждого $j > 1$ и $k = 1, 2, \ldots, 2^j$ определим функции (рассматривается периодический отрезок [0, 1])

$$\Phi_{j,k}(x)=\begin{cases}1, & x=2^{-j}k\\ 0, & x\overline{\in}(2^{-j}(k-1),\ 2^{-j}(k+1))\\ \text{линейна на } [2^{-j}(k-1),\ 2^{-j}k] \text{ и } [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)].\end{cases}$$

Тогда, если $n\geqslant 2^{\mu}$, то

$$\int_0^1 \Phi_{\mu,\nu}(x)F_n(x)\,dx=0,\quad \nu=1,2,\cdots,2^{\mu}. \tag{39}$$

Действительно, если $n=2^j+k$, $j\geqslant\mu$, то из (3.3), (3.1), (1.3) получим

$$\int_0^1 \Phi_{\mu,\nu}(x)F_n(x)\,dx=\sum_{l\in Z}\int_R \Phi_{\mu,\nu}(x)f_{j,k}(x-l)\,dx=$$
$$=2^{-\frac{j}{2}}\sum_{l\in Z}\int_R \Phi_{\mu,\nu}(2^{-j}x+2^{-j}k+l)\tau(x)\,dx. \tag{40}$$

Легко заметить, что $\Phi_{\mu,\nu}(2^{-j}x+2^{-j}k+l)\in S_0$, при $l\in Z$ и $j\geqslant\mu$. Поэтому из (40) и (1.1) следует (39).

Теорема 4.2. *Если*

$$\int_0^1 \sup_N\left|\sum_{n=0}^N a_nF_n(x)\right|dx=1,$$

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_nF_n(x)$ *является рядом Фурье некоторой функции* $f(x)\in H_1(T)$ *и*

$$\int_0^1\left\{\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2F_n^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}dx\leqslant C.$$

Эта теорема доказывается аналогично теореме 2.2, только вместо функций $N_{j,k}(x)$ (см. (1.16)) нужно использовать функции $\Phi_{j,k}(x)$.

Доказательство теоремы 4.1 аналогично доказательству теоремы 2.1. При доказательстве импликаций $(B)\Rightarrow(A)$, $(B)\Rightarrow(C)$ используется лемма 4.1. Импликация $(A)\Rightarrow(B)$ доказывается в точности, как $(A)\Rightarrow(B)$ в теореме 2.1.

Для доказательства $(C)\Rightarrow(B)$ можно применить лемму 4.2 при $\delta=\frac{1}{2}$. Кратко изложим доказательство импликации $(C)\Rightarrow(B)$.

Итак, пусть

$$\int_0^1 \sup_N\left|\sum_{n=0}^N a_nF_n(x)\right|^p dx=1. \tag{41}$$

Обозначим $E^{(r)} = E_{2^r}$, $r \in Z$, где E_λ определяется формулой (4.4). Множества $B^{\frac{1}{2}}_{2^r}$ обозначим через $B^{(r)}$ (см. (2), (3)). Тогда по лемме 4.2 имеем

$$\int_0^1 \operatorname{Sup}_N \left| \sum_{\substack{n \in \Lambda_r \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| dx < C\, 2^r\, |E^{(r)}|, \tag{42}$$

где $\Lambda_r = \{n : \{n\} \subset B^{(r)}$ и $\{n\} \overline{\in} B^{(r+1)}\}$. Из (42), применяя теорему 4.2, получим

$$\int_0^1 \left\{ \sum_{n \in \Lambda_r} a_n^2 F_n^2(x) \right\}^{\frac{1}{2}} dx \leqslant C\, 2^r\, |E^{(r)}|. \tag{43}$$

Из (43) следует (см. также (7))

$$\int_{B^{(r)}} \left\{ \sum_{n \in \Lambda_r} a_n^2 F_n^2(x) \right\}^{\frac{p}{2}} dx \leqslant C(p)\, 2^{rp}\, |E^{(r)}|. \tag{44}$$

Из лемм 3.3 легко выводится

$$\int_{B^{(r)}} \left\{ \sum_{n \in \Lambda_r} a_n^2 F_n^2(x) \right\}^{\frac{p}{2}} dx \geqslant C(p) \int_0^1 \left\{ \sum_{n \in \Lambda_r} a_n^2 F_n^2(x) \right\}^{\frac{p}{2}} dx. \tag{45}$$

Поэтому (см. (45), (44), (1) и (41))

$$\int_0^1 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 F_n^2(x) \right\}^{\frac{p}{2}} dx < \sum_{r \in Z} \int_0^1 \left(\sum_{n \in \Lambda_r} a_n^2 F_n^2(x) \right)^{\frac{p}{2}} dx \leqslant C(p) \sum_{r \in Z} 2^{pr}\, |E^{(r)}| \leqslant$$

$$\leqslant C(p) \sum_{n \in Z} 2^{rp}\, |E^{(r)} \setminus E^{(r+1)}| < C(p).$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 4.3. *Для того, чтобы ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x) \tag{46}$$

был рядом Фурье некоторой интегрируемой функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x) = f(x) \text{ п. в на } T \tag{47}$$

и

$$\lim_{\lambda \to \infty} \inf \lambda \left| \left\{ x \in T : \operatorname{Sup}_N \left| \sum_{n=0}^{N} a_n F_n(x) \right| > \lambda \right\} \right| = 0. \tag{48}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства необходимости нужно только доказать, что если ряд (46) является рядом Фурье функции $f(x) \in L_1$, то выполняется (48). Из (3.33) следует, что

$$\left|\left\{x : \operatorname{Sup}_N \left|\sum_{n=0}^{N} a_n F_n(x)\right| > \lambda\right\}\right| \leqslant \left|\left\{x : M(f, x) > \frac{\lambda}{C}\right\}\right|.$$

Значит для доказательства (48) достаточно показать, что для любой интегрируемой функции

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \left|\{x : M(f, x) > \lambda\}\right| = 0. \qquad (49)$$

Известно, что для любого $F(x) \in L_1$ имеет место

$$\left|\{x : M(F, x) > \lambda\}\right| \leqslant \frac{5}{\lambda} \|F\|_1. \qquad (50)$$

Пусть

$$\varphi_\lambda(x) = \begin{cases} f(x), \text{ когда } |f(x)| < \dfrac{\lambda}{2} \\ 0, \text{ когда } |f(x)| > \dfrac{\lambda}{2} \end{cases}$$

и

$$\psi_\lambda(x) = \begin{cases} f(x), \text{ когда } |f(x)| > \dfrac{\lambda}{2} \\ 0, \quad \text{когда } |f(x)| \leqslant \dfrac{\lambda}{2}. \end{cases} \qquad (51)$$

Тогда

$$M(f, x) < M(\varphi_\lambda, x) + M(\psi_\lambda, x), \; M(\varphi_\lambda, x) \leqslant \frac{\lambda}{2}$$

и поэтому (см. (50), (51))

$$\left|\{x : M(f, x) > \lambda\}\right| \leqslant \left|\left\{x : M(\psi_\lambda, x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leqslant \frac{10}{\lambda} \int_0^1 |\psi_\lambda(x)|\, dx. \qquad (52)$$

Учитывая, что $\int_0^1 |\psi_\lambda(x)|\, dx \to 0$ при $\lambda \to +\infty$, из (52) получим (49).

Докажем достаточность условий (47), (48). Сначала рассмотрим случай $f(x) = 0$.

Пусть E_λ и B_λ—множества, определяемые формулами (1)—(3) при $\delta = \frac{1}{2}$. Тогда (см. леммы 4.4 и 4.3)

$$\int_0^1 \operatorname{Sup}_N \left|\sum_{\substack{\{n\} \subset B_\lambda \\ n < N}} a_n F_n(x)\right| dx < C\lambda \qquad (53)$$

и

$$\int_0^1 \left|\lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{\{n\} \subset B_\lambda \\ n < N}} a_n F_n(x)\right| dx \leqslant C\lambda |E_\lambda|. \qquad (54)$$

Для любого k при достаточно больших λ имеет место $\{k\} \not\subset B_\lambda$, так как $|B_\lambda| \to 0$. Поэтому (см. (53), (54))

$$|a_k| = \left| \lim_{N \to \infty} \sum_{\substack{\{n\} \subseteq B_\lambda \\ n < N}} \int_0^1 a_n F_n(x) F_k(x)\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 F_k(x) \lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{\{n\} \subseteq B_\lambda \\ n < N}} a_n F_n(x)\, dx \right| \leqslant C \|F_k\|_\infty \lambda |E_\lambda|. \qquad (55)$$

Из (48) и (55) следует, что $a_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$.

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная интегрируемая функция и $\sum_{n=0}^\infty b_n F_n(x)$ ее ряд Фурье. Как мы уже убедились в этом случае выполняется

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \left| \left\{ x \in T : \sup_N \left| \sum_{n=0}^N b_n F_n(x) \right| > \lambda \right\} \right| = 0. \qquad (56)$$

Поэтому ряд $\sum_{n=0}^\infty (b_n - a_n) F_n(x)$ удовлетворяет условиям (см. (47), (48) 56))

$$\sum_{n=0}^\infty (b_n - a_n) F_n(x) = 0 \text{ п. в. на } T \qquad (57)$$

и

$$\liminf_{\lambda \to \infty} \lambda \left| \left\{ x \in T : \sup_T \left| \sum_{n=0}^N (b_n - a_n) F_n(x) \right| > \lambda \right\} \right| = 0. \qquad (58)$$

Из (57), (58) следует, что $a_n = b_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Теорема доказана.

В работе [18] доказан аналог теоремы 4.3 для системы Франклина.

Теорема 4.1. справедлива и в случае $p = 0$. Более того, она допускает локализацию на множества положительной меры. А именно, верна следующая

Теорема 4.4. *Для ряда*

$$\sum_{n=0}^\infty a_n F_n(x) \qquad (59)$$

следующие условия эквивалентны:

(A) *ряд* (59) *по мере безусловно сходится на* $G \subset T$;

(B) $\sum_{n=0}^\infty a_n^2 F_n^2(x) < +\infty$ *п. в. на* G;

(C) $\sup_N \left| \sum_{n=0}^N a_n F_n(x) \right| < +\infty$ *п. в. на* G;

(D) *ряд* (59) *почти всюду на* G *сходится.*

Доказательство. Импликация $(D) \Rightarrow (C)$ тривиальна, а $(A) \Rightarrow (B)$ является следствием теоремы Орлича (см. [16], гл. II т. 4). Мы докажем, что $(C) \Rightarrow (B)$, $(B) \Rightarrow (D)$, $(B) \Rightarrow (A)$.

Доказательство импликации $(C)\Rightarrow(B)$. Для произвольного $\varepsilon>0$ существует $\lambda>0$ и $E_\varepsilon^\lambda=E^\lambda\subset G$ такие, что

$$\operatorname{Sup}_N\left|\sum_{n=0}^{N}a_nF_n(x)\right|<\lambda,\ \text{когда}\ x\in E^\lambda,$$
$$|E^\lambda|>|G|-\varepsilon. \tag{60}$$

Обозначим $E_\lambda=T\setminus E^\lambda$. Возьмем произвольное $\delta\in(0,1)$ и по правилам (2), (3) построим множество B_λ^δ. В силу леммы 4.4

$$\int\limits_0^1\operatorname{Sup}_N\left|\sum_{\substack{\{n\}\subset B_\lambda^\delta\\ n<N}}a_nF_n(x)\right|dx\leqslant C(\delta)\lambda, \tag{61}$$

применяя к (61) теорему 4.2 получим

$$\sum_{\{n\}\subset B_\lambda^\delta}a_n^2F_n^2(x)<+\infty\ \text{п. в. на}\ T. \tag{62}$$

Докажем, что

$$\sum_{\{n\}\subset B_\lambda^\delta}a_n^2F_n^2(x)<+\infty\ \text{п. в. вне}\ B_\lambda^\delta. \tag{63}$$

Множество B_λ^δ с точностью до множества меры нуль представим в виде

$$B_\lambda^\delta=\bigcup_q I_q^{(\lambda,\delta)}, \tag{64}$$

где $I_q^{(\lambda,\delta)}$ — непересекающиеся интервалы, не имеющие общих концов.

Пусть $\{n\}\subset I_q^{(\lambda,\delta)}$. Очевидно, что тогда $2^{-[n]}\leqslant|I_q^{(\lambda,\delta)}|$, и если Δ_1 и Δ_2 — двоичные интервалы ранга $[n]+1$, которые не лежат в $I_q^{(\lambda,\delta)}$, но замыкание которых пересекаются с замыканием интервала $I_q^{(\lambda,\delta)}$, то

$$\Delta_i\,\overline{\subset}\,B_\lambda^\delta,\quad i=1,2. \tag{65}$$

Поскольку $F_n(x)$ линейна на интервалах Δ_i, $i=1,2$, то из (65) следует (см. лемму (1.3).

$$|a_nF_n(x)|\leqslant C(\delta)\lambda,\quad x\in\Delta_1\cup\Delta_2. \tag{66}$$

Применяя лемму 3.1 из (66) получим

$$|a_nF_n(x)|\leqslant C(\delta)\lambda\,q^{2^{[n]}d\left(x,\,I_q^{(\lambda,\delta)}\right)},\quad x\,\overline{\in}\,I_q^{(\lambda,\delta)}. \tag{67}$$

Пусть $\gamma>0$ и $I_{q,\gamma}^{(\lambda,\delta)}$ — интервал концентрический с $I_q^{(\lambda,\delta)}$ и длины $(1+2\gamma)|I_q^{(\lambda,\delta)}|$. Из (67) следует

$$\int\limits_{\left(I_{q,\gamma}^{(\lambda,\delta)}\right)^c}\sum_{\{n\}\subset I_q^{(\lambda,\delta)}}a_n^2F_n^2(x)\,dx<$$

$$< C(\delta)\lambda^2 \sum_{2^{-j} < |I_q^{(\lambda,\delta)}|} \sum_{\substack{[n]=j \\ \{n\}\subset I_q^{(\lambda,\delta)}}} \int_{(I_{q\gamma}^{(\lambda,\delta)})^c} q^{2^{j+1}d\left(x,\, I_q^{(\lambda,\delta)}\right)} dx \leqslant$$

$$\leqslant C(\delta)\lambda^2 \sum_{2^{-j} < |I_q^{(\lambda,\delta)}|} \sum_{\substack{[n]=j \\ \{n\}\subset I_q^{(\lambda,\delta)}}} \int_{\gamma\cdot |I_q^{(\lambda,\delta)}|} q^{2^{j+1}t} dt. \tag{68}$$

Учитывая, что card $\{n : \{n\}\subset I_q^{(\lambda,\delta)}$ и $[n]=j\} \leqslant 2^{j+1}|I_q^{(\lambda,\delta)}|$, из (68) получим

$$\int_{(I_{q,\gamma}^{(\lambda,\delta)})^c} \sum_{\{n\}\subset I_q^{(\lambda,\delta)}} a_n^2 F_n^2(x) \leqslant C(\delta)\lambda^2 \sum_{2^{-j} < |I_q^{(\lambda,\delta)}|} |I_q^{(\lambda,\delta)}|\, q^{\gamma 2^j |I_q^{(\lambda,\delta)}|} \leqslant$$

$$< C(\delta,\gamma)\lambda^2 |I_q^{(\lambda,\delta)}|. \tag{69}$$

Обозначая $Q_\gamma = \bigcap_q (I_{q,\gamma}^{(\lambda,\delta)})^c$, из (69) имеем

$$\int_{Q_\gamma} \sum_{\{n\}\subset B_\lambda^\delta} a_n^2 F_n^2(x)\,dx < +\infty. \tag{70}$$

Из (70) следует

$$\sum_{\{n\}\subseteq B_\lambda^\delta} a_n^2 F_n^2(x) < +\infty \text{ п. в. на } Q_\gamma. \tag{71}$$

Легко видеть, что $(B_\lambda^\delta)^c = \bigcup_{\gamma>0} Q_\gamma$, из (71) получим (63), а из (63) и (62) следует

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 F_n^2(x) < +\infty \text{ п. в. вне } B_\lambda^\delta. \tag{72}$$

Учитывая, что $\bigcap_{\delta<1} B_\lambda^\delta = E_\lambda$ (см. (71)) и $E_\lambda = T\setminus E^\lambda$, из (72) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 F_n^2(x) < +\infty \text{ п. в. на } E^\lambda. \tag{73}$$

Устремляя ε к нулю, из (73) и (60) следует (B).

Доказательство импликации $(B)\Rightarrow(D)$. Пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 F_n^2(x) < +\infty \text{ п. в. на } G.$$

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют $\lambda > 0$ и $E^\lambda \subset G$ такие, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 F_n^2(x) \leqslant \lambda, \text{ когда } x \in E^\lambda \tag{74}$$

и

$$|E^\lambda| > |G| - \varepsilon.$$

Обозначим $E_\lambda = T \setminus E'$ и для $\delta \in (0, 1)$ по формулам (2), (3) построим множество B_λ^δ. Тогда если $\{n\} \,\overline{\in}\, B_\lambda^\delta$ и Δ_n^i, $i = 1, 2$, левая и правая половины интервала, то хотя бы для одного Δ_n^i выполняется

$$\frac{|\Delta_n^i \cap E_\lambda|}{|\Delta_n^i|} < \delta. \tag{75}$$

Учитывая, что на Δ_n^i функция $F_n(x)$ линейна, из (75), лемм 3.3 и 1.4 получим

$$\int\limits_{(E_\lambda)^c} F_n^2(x)\, dx \geqslant C(\delta), \text{ когда } \{n\} \,\overline{\subset}\, B_\lambda^\delta. \tag{76}$$

Из (76) и (74) следует

$$\sum_{\{n\} \overline{\subset} B_\lambda^\delta} a_n^2 \leqslant C(\delta) \int\limits_{E^\lambda} \sum_{\{n\} \overline{\subset} B_\lambda^\delta} a_n^2 F_n^2(x)\, dx \leqslant C(\delta)\lambda.$$

Следовательно ряд

$$\sum_{\{n\} \overline{\subset} B_\lambda^\delta} a_n F_n(x) \text{ почти всюду на } T \text{ сходится.} \tag{77}$$

Докажем, что

$$\sum_{\{n\} \subseteq B_\lambda^\delta} |a_n F_n(x)| < +\infty \text{ п. н. вне } B_\lambda^\delta. \tag{78}$$

Пусть B_λ^δ представлено в виде (64) и $\{n\} \,\overline{\subset}\, I_q^{(\lambda, \delta)}$. Тогда $2^{-[n]} < |I_q^{(\lambda, \delta)}|$ и если Δ_1 и Δ_2 — двоичные интервалы ранга $[n]+1$, которые не лежат в $I_q^{(\lambda, \delta)}$, но замыкание которых пересекается с замыканием интервала $I_q^{(\lambda, \delta)}$, то

$$\Delta_i \,\overline{\subset}\, B_\lambda^\delta, \; i = 1, 2. \tag{79}$$

Поскольку $a_n^2 F_n^2(x)$ — полином второй степени на Δ_i, $i = 1, 2$, то из (79) следует (см. лемму 1.3)

$$a_n^2 F_n^2(x) \leqslant C(\delta)\lambda, \; x \in \Delta_1 \cup \Delta_2. \tag{80}$$

Применяя лемму 3.1 из (80) получим

$$|a_n F_n(x)| \leqslant C(\delta)\lambda^2 q^{2^{[n]-1} d(x,\, I_q^{(\lambda, \delta)})}, \; x \,\overline{\in}\, I_q^{(\lambda, \delta)}. \tag{81}$$

Пусть $I_{q, \gamma}^{(\lambda, \delta)}$ — интервал, концентрический с $I_q^{(\lambda, \delta)}$ и длины $(1+2\gamma) \times |I_q^{(\lambda, \delta)}|$, $\gamma > 0$. Тогда из (81) получим (проводятся выкладки, аналогичные (68), (69))

$$\int\limits_{(I_{q,\gamma}^{(\lambda, \delta)})^c} \sum_{\{n\} \subset I_q^{(\lambda, \delta)}} |a_n F_n(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C(\delta)\lambda^{\frac{1}{2}} \sum_{2^{-j} \sim |I_q^{(\lambda,\delta)}|} \sum_{\substack{|n|=j \\ \{n\}\subset I_q^{(\lambda,\delta)}}} \int_{(I_{q,\gamma}^{(\lambda,\delta)})^c} q^{2^{j-1} d(x, I_q^{(\lambda,\delta)})} dx \leqslant \tag{82}$$

$$\leqslant C(\delta)\lambda^{\frac{1}{2}} |I_q^{(\lambda,\delta)}|.$$

Из (82) вытекает

$$\int_{Q_\gamma} \sum_{\{n\}\subset B_\lambda^\delta} |a_n F_n(x)|\, dx \leqslant C(\delta)\lambda^{\frac{1}{2}}, \tag{83}$$

где $Q_\gamma = \bigcap_q (I_{q,\gamma}^{(\lambda,\delta)})^c$. Поскольку $(B_\lambda^\delta)^c = \bigcup_{\gamma>0} Q_\gamma$, то из (83) следует (78). Устремляя δ к 1 из (78) получим

$$\sum_{\{n\}\subset B_\lambda^\delta} |a_n F_n(x)| < +\infty \text{ п. в. на } E'. \tag{84}$$

Итак, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x)$ п. в. на E' сходится (см. (84) и (77)). Устремляя λ к $+\infty$ получим ($Д$)

Доказательство импликации $(B) \Rightarrow (A)$. Из (B) следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2 a_n^2 F_n^2(x) < +\infty \text{ п. в. на } G,$$

где $\varepsilon_n = \pm 1$. Следовательно ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_n F_n(x) \tag{85}$$

п. в. на G сходятся. Поэтому ряды (85) сходятся по мере на E. А из сходимости на G рядов (85) при любых $\varepsilon_n = \pm 1$ следует безусловная сходимость по мере ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x)$ на G (см. [16], гл. 1, теорема 1).

Аналог теоремы 4.4 был доказан для мартингалов [18], для систем Хаара [19] и Франклина [11].

Теорема 4.4. доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступила 23. I. 1989

Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ. Թեորեմներ Ստրոմբերգի կողմից կառուցված Ֆրանկլինի մոդիֆիկացված համակարգի վերաբերյալ. II. (*ամփոփում*)

Աշխատանքում դիտարկվում է Ստրոմբերգի պարբերական $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *համակարգը։ Մասնավորապես, ապացուցված է, որ* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x)$ *շարքի համար հետևյալ պայմանները համարժեք են.*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x)$ *շարքը ոչ պայմանական զուգամիտում է* $L_p(0, 1)$*-ում,* $p \geqslant 0$;

2. $\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 F_n^2(x)(x)\right\}^{\frac{1}{2}} \in L_p(0, 1),\ p \geqslant 0;$

3. $\operatorname{Sup}_N \left|\sum_{n=0}^{N} a_n F_n(x)\right| \in L_p(0, 1),\ p \geqslant 0:$

G. G. GEVORKIAN. *Theorems on modified Franklin system, constructed by Stromberg. II* (summary)

The paper consideres periodic Stromberg system $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ and proves that the folloning conditions on a series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x)$ are equevalent

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x)$ unconditionally converges in $L_p(0, 1)$, $p \geqslant 0$;

2. $\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 F_n^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}} \in L_p(0, 1,\ p \geqslant 0;$

3. $\operatorname{Sup}_N \left|\sum_{n=0}^{N} a_n F_n(x)\right| \in L_p(0, 1),\ p \geqslant 0.$

ЛИТЕРАТУРА

17. *Г. Г. Геворкян.* Теоремы о модифицированной системе Франклина, построенной Стромбергом. Изв. АН АрмССР, сер. матем., XXIV, № 1, 1989, 69—92.
18. *R. Gundy.* Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series, Trans. Amer. Math. Soc., 124, № 2, 228—248.
19. *Ф. Г. Арутюнян.* О рядах по системе Хаара, ДАН Арм. ССР, 42, № 3, 1966, 134—140.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մաթեմատիկա XXVI, № 1, 1991 Математика

УДК 517.53

Г. А. БАРСЕГЯН

СВОЙСТВО СРАВНИМОСТИ ПРОИЗВОДНЫХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ a-ТОЧКАМИ

Основной вывод теории распределения значений Р. Неванлинны и теории поверхностей наложения Л. Альфорса (см. [1]), образно выражаясь, можно сформулировать следующим образом: если значения a и $b \in \mathbf{C}$ являются «хорошими», не дефектными, для мероморфной в $\mathbf{C}$ функции $w(z)$, то количества a-точек и b-точек функции $w(z)$ в кругах $|z| \leqslant r$ примерно равны, близки друг к другу. Как оказалось (см. [2], [3], [4]) этот вывод является частью более общей законвомерности—свойства близости a-точек мероморфных функций описывающих уже не только количество a-точек и b-точек, но и их взаимное расположение. Именно, согласно свойству близости a-точек близки не только количества a-точек и b-точек в кругах $|z| \leqslant r$ (как это следует из теорий Неванлинны и Альфорса), но одновременно близки модули этих a-точек и b-точек и их аргументы.

В настоящей работе устанавливается новая закономерность, согласно которой схожесть поведения «хороших» a-точек и b-точек (обозначим их $z_k(a)$ и $z_k(b)$) распространяется на поведение производной функции $w(z)$, рассмотренной на множестве этих a-точек и b-точек. Именно, величины

$$|w'(z_k(a))|, \ |w'(z_k(b))|, \tag{*}$$

образно выражаясь, сравнимы друг с другом—«свойство сравнимости производных».

Далее оказывается, что сравнимы друг с другом также величины

$$|z_k(a) - z_k(b)|, \ |z_k(b) - z_k(c)|, \tag{**}$$

если значения a, b, c «хорошие».
Отметим, что в терминах характеристики $A(r)$ можно дать для произвольной функции $w(z)$ оценки величин (*) снизу или оценки величин (**) сверху («свойство близости a-точек»).

Однако, для заданного ρ (даже при $\rho = 0$) можно указать примеры функций $w(z)$ порядка ρ, для которых величины (*) могут расти сколь угодно быстро. Это показывает, что классические характеристики ($T(r)$, $A(r)$, $\ln M(r)$) не в состоянии контролировать рост $|w'(z)|$ или описывать расстояния между a-точками и b-точками (так как все они имеют порядок ρ).

Мы введем «контрольные» или «характеристические» наборы для функции $w(z)$, в терминах которых дадим точные количественные описания величин (*) и (**). Тем самым, эти наборы позволят судить о величинах производных функции $w(z)$ и расстояниях между различными a и b-точками заданных наперед $w(z)$.

§ 1. Результаты. Следствия. Обсуждения

Условимся насчет обозначений: $A(r)$—характеристика Л. Альфорса*; $d(X)$—диаметр множества; E—множество конечной логарифмической меры; $\varphi(r)$—произвольная монотонная функция, $\varphi(r) \to \infty$, $r \to \infty$; $\bar{X}$ — замыкание; ∂X — граница X; через $A \overset{\varphi}{\asymp} B$ обозначается соотношение $\frac{1}{\varphi} A \leqslant B \leqslant \varphi A$.

Следующая теорема содержит в себе «свойство близости a-точек» «свойство сравнимости производных», «свойство сравнимости расстояний между a-точками.

Теорема 1. *Пусть $w(z)$—мероморфная в* $\mathbf{C}$ *функция;* $\varphi(r)>0$, $\varphi \uparrow \infty$, $a_1, a_2, \cdots, a_q \in \mathbf{C}$, *попарно различны. Тогда в круге $|z| \leqslant r$ можно указать $\Phi(r)$ областей $E_k(r)$, $k=1, 2, \cdots, \Phi(r)$ таких, что*

I a) $|\Phi(r) - A(r)| = o[A(r)]$, $r \to \infty$, $r \overline{\in} E$, (1.1)

b) *$w(z)$ однолистна в $E_k(r)$, $k=1, 2, \cdots, \Phi(r)$,*

c) $d(E_k(r)) \leqslant \varphi(r)\, r/(A(r))^{1/2}$, $k=1, 2, \cdots, \Phi(r)$, (1.2)

d) $\sum_{l=1}^{q} n_0^*(r, a_l) \geqslant (q-4)\, A(r) - o[A(r)]$, $r \to \infty$, $r \overline{\in} E$, (1.3)

где $n_0^*(r, a_l)$ — количество (простых) a_l-точек в $\bigcup_{k=1}^{\Phi(r)} E_k(r)$.

II e) *для любых z' и $z'' \in E_k$ выполняется*

$$|w'(z')| \overset{\varphi(r)}{\asymp} |w(z'')| \overset{\varphi(r)}{\asymp} \frac{1}{d(E_k)}. \tag{1.4}$$

III f) *Для любых $w_1, w_2, w_3, w_4 \in w(E_k)$ $(w_1 \neq w_2,\ w_3 \neq w_4)$ выполняется*

$$\frac{|z_k(w_1) - z_k(w_2)|}{|w_1 - w_2|} \overset{\varphi(r)}{\asymp} \frac{|z_k(w_3) - z_k(w_4)|}{|w_3 - w_4|} \overset{\varphi(r)}{\asymp} d(E_k(r)), \tag{1.5}$$

где $z_k(a)$ — принадлежащая области $E_k(r)$, a-точка функции $w(z)$, (в силу в) такие a-точки простые).

Образно выражаясь, согласно первой части этой теоремы в каждой из областей $E_k(r)$ (число которых $\sim A(r)$) лежит, в среднем, от q—4 до q различных a_i-точек.

Поскольку диаметры $E_k(r)$ малы (согласно (1,2)), то эти a_l-точки из $E_k(r)$ близки друг к другу

---

* Предполагаем известными основные определения и результаты теории распределения значений (см. [1]).

$$|z_k(a_\nu) - z_k(a_\mu)| \leqslant \frac{\varphi(r)\, r}{A^{1/2}(r)}. \qquad (1.6)$$

Это и есть отражение свойства близости a-точек в том из вариантов, в котором рассматриваются только простые a-точки. Отметим, что все пункты этой части (и вообще все пункты теоремы) точные, с точностью до фигурирующих в них произвольных величин $\varphi(r)$. В частности неравенство (1.3) совпадает с основным выводом теории распределения значений, относящимся к простым a-точкам. Отметим также, что в [3] и [4] приводятся общие варианты свойства близости (учитывающие наличие кратных a-точек), которые уже содержат в себе основные выводы теории распределения значений; в этих работах приводится также более подробный анализ свойства близости a-точек.

Части II и III теоремы 1 имеют очень простой смысл: они отражают «свойство сравнимости производных» функций $w(z)$ на множестве a-точек и свойство сравнимости расстояний между a-точками. Здесь заметим, что в (1.4) вместо z' и z'' можно взять значения $z_k(a_\nu)$ и $z_k(a_\mu)$, а в (1.5) значения w_1, w_2, w_3, w_4 можем взять из $\{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ и тогда в (1.4) и (1.5) будут фигурировать наши $a_1, a_2 \dots, a_q$-точки.

Отметим одно непосредственное следствие из теоремы 1 (см. [5]).

Следствие 1. В условиях теоремы 1, в круге $|z| \leqslant r$ можно указать некоторое число $n_0(r, a_i)$ простых a_i-точек $z_k(a_i)$, $k = 1, 2, \cdots, n_0(r, a_i)$, для которых выполняются неравенства

$$\sum_{i=1}^{q} n_0(r, a_i) \geqslant (q - \,\cdot\,) A(r)\, o[A(r)], \; r \to \infty, \; r \overline{\in} E, \qquad 1.7)$$

$$|w'(z_i(a_1))| \geqslant \frac{A^{1/2}(r)}{\varphi(r)\, r}, \; i = 1, 2, \cdots, q, \; k = 1, 2, \cdots, n_0(r, a_i). \qquad (1.8)$$

Т. е. для произвольной мероморфной функций $w(z)$ дается оценка величины $|w'|$ на множестве простых a_i-точек, притом обе эти оценки точные.

В теории Р. Неванлинны значение a является «хорошим», если a-точек много $(N(r, a) \sim T(r))$ и они в основном простые. В теории поверхностей наложения Л. Альфорса роль значений a играют области D (положим кружки с центрами в a) и рассматривается вопрос о том, сколько простых островов D_j, $j = 1, 2, \cdots, n_0(r, D)$, над D имеет поверхность $F_r = \{w(z) : |z| \leqslant r\}$ — образ круга $|z| \leqslant r$ при отображении функцией $w(z)$. Напомним, что простой остров поверхности F_r над D — однолистная область поверхности F_r, проекция которой на плоскость совпадает с D.

Соответственно с этим набором хороших a-точек будем называть множество $\{z_j(a)\}_{j=1}^{n_0(r, D)}$, где $w(z_j(a)) \in D_j$.

Оказывается, что значение набора $\{w'(z_j(a))\}_{j=1}^{n_0(r, D)}$ дает много информации о распределении значений (описываются величины модулей производных, дистанции между a-точками, множества, в которых накапливаются a-точки), а предположение о том, что $n_0(r, D) \sim A(r)$ приводит к тому, что такое описание является полным.

Теорема 2. *Пусть при условиях теоремы 1 задан набор хороших a-точек — $\{z_j(a)\}_{j=1}^{n_0(r,D)}$. Тогда из областей $E_k(r)$, $k = 1, 2, \cdots, \Phi(r)$, можно выделить такие $\Phi^{(a)}(r)$ штук областей $E_\mu^{(a)}(r)$, $\mu = 1, 2 \cdots, \Phi^{(a)}(r)$, что для любого μ найдется такой номер $j(\mu)$ (соответствие между μ и $j(\mu)$ взаимно-однозначное), что*

a) *для любого $z \in E_\mu^{(a)}(r)$ выполняется*

$$|w'(z)| \overset{c(r)}{\asymp} |w'(z_{j(\mu)}(a))|; \tag{1.9}$$

b) *для любых b и $c \in w(E_\mu^{(a)}(r))$ выполняется*

$$\frac{|z_\mu(b) - z_\mu(c)|}{|b-c|} \overset{c(r)}{\asymp} \frac{1}{|w'(z_{j(\mu)}(a))|}; \tag{1.10}$$

c) *при этом для $\Phi^{(a)}(r)$ выполняется*

$$|\Phi^{(a)}(r) - n_0(r, D)| = o\,[A(r)], \quad r \to \infty, \ r \overline{\in} E. \tag{1.11}$$

Замечание к теореме 2. В связи с теоремой 1 наиболее интересными являются случаи, когда в a) вместо z рассматриваются $z_\mu(a_i)$, $i = 1, 2, \cdots, q$, а в b) вместо b и c — a_i и a_t, i, $t \in (1, 2, \cdots, q)$.

Конечно эта теорема тем интереснее, чем ближе $n_0(r, D)$ к величине $A(r)$. Если $n_0(r, D)$ очень близко к $A(r)$, то теорема 2 описывает поведение производных и дистанций между a-точками для большинства областей $E_k(r)$, соответственно для большинства $a_1, a_2, \ldots, a_q$-точек.

В связи с этим будем брать области $D = D_r$ зависящими от r, что позволит прийти к желаемому результату, т. е. охватить в описании почти все области $E_k(r)$.

Набор $\{w'(z_j(a_r))\}_{j=1}^{n_0(r,D)}$ назовем контрольным (или характеристическим) набором, если диаметр D_r (с центром в a_r) не меньше чем $1/\ln\ln\varphi(r)$, и $\dfrac{n_0(r, D_r)}{A(r)} \to 1$, $r \to \infty$, $r \overline{\in} E$.

Из теории поверхностей наложения Л. Альфорса следует, что для любой мероморфной в $\mathbf{C}$ функции контрольные наборы существуют. Достаточно взять $[\varphi(r)]$ штук кружков D_r с диаметрами $1/\varphi(r)$ и центрами в целых точках $0, 1, \ldots, [\varphi(r)]$ и применить к ним первую и вторую основные теоремы Л. Альфорса.

Теорема 3. *Пусть при условиях теоремы 1 задан контрольный набор. Тогда теорема 2 имеет место, если в ней соотношение (III) заменить следующим:*

$$\frac{\Phi^{(a_r)}(r)}{A(r)} \to 1, \quad r \to \infty, \quad r \overline{\in} E. \tag{1.12}$$

Итак, почти для всякой области $E_k(r)$ можно указать число $|w(z_{j(k)}(a_r))|$ из контрольного набора, которое характеризует величины $w'(z)$ в a_i-точках из $E_k(r)$ и контролирует расстояния между a_i и a_t-точками из $E_k(r)$. Из теоремы 1 следует, что в этом описании фигурирует такое же количество простых $a_1, a_2, \cdots, a_q$-точек, какое гарантируется теорией распределения значений.

Свойство сравнимости производных можно записать в форме второй основной теоремы или же соотношения дефектов.

Пусть

$$X = \{x_i\}_{i=1}^{M}, \quad Y = \{y_j\}_{j=1}^{N}, \quad x_i \geqslant 0, \; y_j \geqslant 0, \; \varphi \geqslant 1.$$

Составим всевозможные пары $(x_i, y_{j(i)})$, где соответствие между i и (j) взаимно-однозначное, и обозначим через $\mathbf{N}(X, Y)$ максимальное число пар, для которых $x_i \overset{\varphi}{\asymp} y_{j(i)}$.

При $\varphi = \varphi(r)$ обозначим через $\mathbf{N}(r, b, X)$ величину $\mathbf{N}(X, Y)$ где X — контрольный набор, $Y = Y(r, b) = \{|w'(z_\tau(b))|\}_{\tau=1}^{n(r, b)}$ где, $\{z_\tau(b)\}$ — b-точки функции $w(z)$ в круге $|z| \leqslant r$.

Из теоремы 1.3 вытекает

Теорема 4. *Справедливо следующее неравенство:*

$$\sum_{(b)} \Delta(b) \overset{\text{def}}{=} \sum_{(b)} \left(1 - \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\mathbf{N}(r, b, X)}{A(r)}\right) < 4, \tag{1.13}$$

где суммирование распространено на все b из $\mathbf{C}$.

Из (1.13) следует, что для любого $b \in \mathbf{C} \setminus P$, где P—не более чем счетное множество, выполняется $\Delta(b) = 0$. Это означает, что для большинства значений b величины $|w'(z)|$, взятые на множествах b-точек, сравнимы с величинами из контрольного набора. Величина $\Delta(b)$ показывает какая часть чисел из $Y(r, b)$ не сравнима с числами из контрольного набора, а (1.13) показывает сумму всех этих отклонений. Число 4 в (1.13) точное-пример функции Вейерштрасса.

Все приведенные выше теоремы справедливы также, если в них вместо функций, мероморфных в $\mathbf{C}$, рассматривать функции $w(z)$, мероморфные в $|z| < R < \infty$, удовлетворяющие условию $\varlimsup_{R-r} A(r)(R-r) = \infty$, а вместо $r \to \infty$, $r \bar{\in} E$ рассматривать некоторые последовательности $r_n \to R$.

§ 2. Обобщенная теорема 1

Пусть $w(z)$ мероморфна в $\overline{K}$, где K—односвязная область с гладкой границей; $a_i \in \mathbf{C}$ $i = 1, 2, \ldots, q$, попарно различны; L—длина границы w-образа области K в сферической метрике; $\pi S(K)$—площадь w-образа области K в сферической метрике; n—целое число $(n \geqslant 100)$ K^{μ} $(\mu = 1, 2, \ldots)$—постоянные, зависящие от $a_1\ a_2, \ldots, a_q$ и не зависящие от n и K.

Тогда из K можно выделить $\tilde{\Phi}$ штук односвязных областей $\overline{E}_k$, $k = 1, 2, \cdots, \tilde{\Phi}$, таких, что

a)
$$|\tilde{\Phi} - S(K)| \leqslant \frac{8}{n+2} S(K) + K_1 n^2 L; \tag{2.1}$$

b) $w(z)$ однолистна в $\overline{\overline{E}}_k$, $k = 1, 2, \cdots, \tilde{\Phi}$;

c)
$$\sum_{i=1}^{q} n^*(K, a_i) > (q-4) S(K) - \left\{\frac{8q}{n} S(K) + K_2 n^2 L\right\}, \tag{2.2}$$

где $n^*(K, a_i)$ — количество a_i-точек, лежащих в $\bigcup_{k=1}^{\Phi} \widetilde{E}_k$ в силу в) эти a_i-точки являются простыми);

d)
$$\sum_{k=1}^{\Phi} d(\widetilde{E}_k) \leqslant \frac{2n}{K_3} \iint\limits_K \frac{|w'|}{1+|w|^2} dx\,dy + 2d(K) \leqslant$$

$$< \frac{2n}{K_3} \sqrt{\text{площадь } K} \cdot \sqrt{S(K)} + 2d(K); \qquad (2.3)$$

e) существуют поствянные K_4, K_4' такие, что для любых z_1 и z_2 из $\widetilde{E}_k$ выполняются соотношения

$$|w'(z_1)| \overset{\varphi_1}{\asymp} |w'(z_2)|, \quad \varphi_1 = 12^{K_4 n}, \qquad (2.4)$$

$$|w'(z_1)| \overset{\varphi_2}{\asymp} \frac{1}{d(\widetilde{E}_k)}, \quad \varphi_2 = 12^{K_4' n}; \qquad (2.4')$$

f) существуют постоянные K_5, K_5', такие, что для любых $a_1 \neq a_2$, $a_3 \neq a_4$ из $w(\widetilde{E}_k)$ выполняются соотношения

$$\frac{|z_k(a_1) - z_k(a_2)|}{|a_1 - a_2|} \overset{\varphi_3}{\asymp} \frac{|z_k(a_3) - z_k(a_4)|}{|a_3 - a_4|}, \quad \varphi_3 = 12^{K_5 n}, \qquad (2.5)$$

$$\frac{|z_k(a_1) - z_k(a_2)|}{|a_1 - a_2|} \overset{\varphi_4}{\asymp} d(\widetilde{E}_k), \quad \varphi_4 = 12^{K_5' n}. \qquad (2.5')$$

В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваем комплексные значения, линии и области на римановой сфере. При этом под отрезком будем понимать дугу большой окружности сферы, или дугу параллели, под четырехугольником понимаем область, ограниченную четырьмя такими отревками под прямоугольником—область, ограниченную двумя дугами меридианов сферы и двумя дугами параллелей.

Пусть $a_i \in \mathrm{C}$, $(i = 1, 2, \ldots, q)$,—конечный набор попарно различных комплексных значений. Далее мы полагаем, что $a_i \neq 0, \infty$. Это, понятно, не ограничивает общность теорем, так как в противном случае мы придем к результатам посредством рассмотрения функции $W(w)$, где W— преобразование вращения сферы.

Пусть C_i $(i=1, 2, \cdots, q)$ — такие непересекающиеся прямоугольники, что $a_i \in C_i$ $(i=1, 2, \cdots, q)$ и $0, \infty \overline{\in} C_i$, $i=1, 2, \cdots, q$. Обозначим через c_i $(i=1, 2, \cdots, q)$ ближайшую к нулю сторону прямоугольника. Соединим c_i и c_{i+1} $(i=1, 2, \cdots, q-1)$ ломаными, состоящими из некоторой цепочки отрезков $c_{i,j}$ $(j = 1, 2, \cdots, k_i)$, такими, что выполняются следующие условия: каждому отрезку $c_1, c_{1,1}, \cdots, c_{1,k_1}, c_2, c_{2,1}, c_{2,k_2}, \cdots, c_q$ можно сопоставить такой отрезок c_1', $c_{1,1}', \cdots, c_{1,k_1}', c_2', c_{2,1}', \cdots, c_{2,k_2}', c_q'$, что а) отрезки $c_i' \subset \overline{C}_i$, $(i = 1, 2, \cdots, q)$ и отсекают от прямоугольников C_i прямоугольники C_i^*, одной из сторон которых являются отрезки c_i, притом $a_i \in C_i \setminus C_i^*$;

б) при всех i и j отрезки $c_{i,j}$ $(c'_{i,j})$ не имеют общих точек с множеством $\bigcup\limits_{i=1}^{q} \overline{C}_i$, за исключением, быть может, одного из концов, лежащего на границе одного из прямоугольников C_i или двух концов, принадлежащих в этом случае границам, соответственно, двух соседних прямоугольников C_i;

в) система отрезков $c_1', c_{1,1}', \cdots, c_{1,k_1}', c_2', c_{2,1}', \cdots, c_{2,k_2}', \cdots, c^q$ составляет такую ломанную, что эта ломанная не имеет общих точек с ломанной $c_1, c_{1,1}, \cdots, c_{1,k_1}, c_2, c_{2,1}, \cdots, c_{2,k_2}, \cdots, c_q$;

г) соединив отрезками начала отрезков c_1 и c_1', $c_{1,1}$ и $c'_{1,1}, \cdots, c^q$ и c_q' и концы отрезков c_q и c_q' (обозначим эти отрезки $c_1^*, c_{1,1}^*, \cdots, c_1^*$ и c_q^{**}) получим систему четырехугольников, примыкающих один к другому только по отрезкам $c_{i,j}^*$ и составляющих вместе односвязную область G^*.

Следующий рисунок поясняет построения, проводимые в этом пункте (Будем помнить, что построения проводятся на сфере Римана)

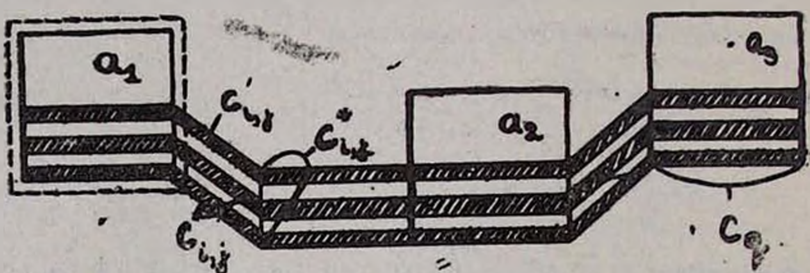

Рис. 1.

(Пунктирной линией обведен прямоугольник C_1, жирной линией обведена область G^*, заштрихованные области—области G_m^{**}.

Разделим каждый из отрезков $c_1^*, c_{1,1}^*, \cdots, c_q^*, c_q^{**}$ на $n+1$ равных частей при некотором четном n. Пусть $\gamma_{1,\nu}^*$ $(\gamma_{1,1,\nu}^*, \cdots, \gamma_{q,\nu}^*$, $\gamma_{q,\nu}^{**}$, $\nu = 0, 1, \cdots, n+1$ — соответствующие точки разбиения c_1^*, $(c_{1,1}^*, \cdots, c_q^*, c_q^{**})$, притом $\gamma_{1,0}^*$ лежит на c_1, а $\gamma_{1,n+1}^*$ лежит на c_1' (так же нумеруем остальные деления). Соединим точки $\gamma_{1,\nu}^*, \gamma_{1,1,\nu}^*, \cdots, \gamma_{1,k_1,\nu}^*, \cdots, \gamma_{q,\nu}^*, \gamma_{q,\nu}^{**}$, $\nu = 0, 1, \cdots, n+1$ отрезками. Получим новые системы ломаных $c_1^\nu, c_{1,1}^\nu, \cdots, c_{1,k_1}^\nu, \cdots, c_q^\nu$, $\nu = 0, 1, \cdots, n+1$ (здесь при $\nu = 0$ и $\nu = n+1$ обозначены соответственно системы ломаных $c_1, c_{1,1}, \cdots, c_{1,k_1}, \cdots, c_q$ и $c_1', c_{1,1}', \cdots, c_{1,k_1}', \cdots, c_q'$, относительно которых в дальнейшем будем помнить, что они зафиксированы — не зависят от числа n). Область G^* при этом окажется разбитой на $n+1$ „подобных" областей G_N^*.

Пусть G_m^{**} $\left(m = 1, 2, \cdots, \frac{n}{2}+1\right)$ — чередующиеся через одну области G_N^*, граничными кривыми которых являются: ломаные

$$c_1^{2m-2},\ c_{1,1}^{2m-2},\ldots,\ c_{1,k_1}^{2m-2},\ldots,\ c_q^{2m-2},$$

$$c_1^{2m-1},\ c_{1,1}^{2m-1},\ldots,\ c_{1,k_1}^{2m-1},\ldots,\ c_q^{2m-1};$$

часть отрезка c_1^*, лежащая между точками $\gamma_{1,2m-2}^*$, $\gamma_{1,2m-1}^*$; часть отрезка c_q^{**}, лежащая между точками $\gamma_{q,2m-2}^*$, $\gamma_{q,2m-1}^*$.

Пусть $F = w(K)$ — риманова поверхность, являющаяся w-образом области K. Ее мы будем рассматривать на римановой сфере. Обозначим через $n_0(D)$ число простых (с кратностью единица) островов поверхности F над областью D; через $G(n)$ обозначим ту из областей G_m^{**}, для которой достигается минимум выражения $S(K) - n_0(G_m^{**})$ (если таких областей несколько, то обозначим $G(n)$ произвольную из них). В [3] доказано, что

$$-\frac{8}{n+2}S(K) - K_1 n^2 L \leqslant n_0(G(n)) - S(K) < \frac{8}{n+2}S(K) + K_1 n^2 L^*. \quad (2.6)$$

Проведем разбиения, рассмотренные выше, и выбор области $G(n)$ для поверхности F. Пусть, например, частями граничной кривой области $G(n)$ являются ломаные

$$c_1^{2m_0-2},\ c_{1,1}^{2m_0-2},\ldots,\ c_{1,k_1}^{2m_0-2},\ldots,\ c_q^{2m_0-2}$$

$$c_1^{2m_0-1},\ c_{1,1}^{2m_0-1},\ldots,\ c_{1,k_1}^{2m_0-1},\ldots,\ c_q^{2m_0-1},$$

D_l—тот из двух прямоугольников, образованных сечением прямоугольника C_l отрезком $C_l^{2m_0-1}$, который содержит точку a_l.

Нам далее удобно пользоваться следующим символом $\sqcup$. Соединением $C = A \sqcup B$ двух открытых множеств A и B назовем множество $C = \operatorname{int}\overline{(A \sqcup B)}$, где черта обозначает замыкание, а int внутренность множества (термин и символ встречаются в одной работе А. А. Гольдберга и А. Э. Еременко).

Пусть $M_k(K, \cup D_l)$ — односвязная область, являющаяся соединением простого острова $G_k(n)$ над $G(n)$ и примыкающих к нему простых островов над D_l, $i = 1, 2, \cdots, q$ (k — номер области). Построим по заданной области $M_k(K, \cup D_l)$ область $\tilde{M}_k(K, \cup D_l)$. Для этого нам придется предварительно построить области $\tilde{D}_l$, D_l', $i=1, 2, \cdots, q$ и $\tilde{G}(n)$.

Пусть C_l' — такой прямоугольник, что 1) $C_l' \subset C_l$, 2) стороны прямоугольника C_l, являющиеся дугами меридианов; 3) сторона прямоугольника C_l, являющаяся ближайшей к нулю дугой параллели, лежит на ближайшей к нулю стороне прямоугольника C_l; 4) оставшаяся сторона прямоугольника C_l' не имеет общих точек с ∂C_l.

---

* Правая и левая части неравенства (2, 6), соответственно, неравенства (4*) и (2, 3) из [3]. Обозначим $n_0(G(n))$ через Φ, получим (2,1). В дальнейшем тексте мы сохраняем обозначение $n_0(G(n))$ как отражающее сущность рассматриваемого объекта.

Обозначим $\widetilde{D}_l = C'_l \cup D_l$. Очевидно $a_l \in \widetilde{D}_l$. Разделим каждый из отрезков $c_1^* \cup G(n)$, $c_{1,1}^* \cap G(n), \cdots, c_{1,k_1}^* \cap G(n), \cdots, c_q^* \cup G(n)$, $c_q^{**} \cup G(n)$ на три равные части (см. рис. 2).

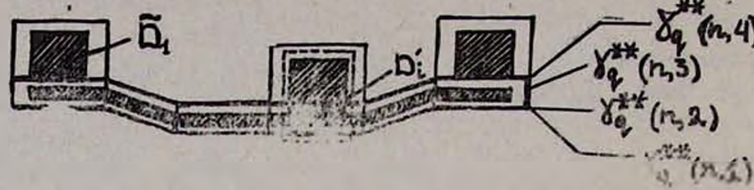

Рис. 2.

(Жирной линией обведена область $G(n)$; пунктирной линией—прямоугольник $\widetilde{C}'_2$; заштрихованная область внутри $G(n)$—область $\widetilde{G}(n)$.

Пусть $\gamma_l^*(n, \tau)$, $(\tau = 1, 2, 3, 4)$ — соответствующие точки разбиения отрезка $c_l^* \cap \overline{G(n)}$, причем $\gamma_l^*(n, 1)$ и $\gamma_l^*(n, 4)$ являются концами отрезка $c_l^* \cap \overline{G(n)}$ (аналогично, точки разбиения отрезка $c_q^{**} \cap \overline{G(n)}$ обозначим $\gamma_q^{**}(n, \tau)$ $(\tau = 1, 2, 3, 4)$). Точно также $\gamma_{l,j}^{**}(n, \tau)$ $(\tau = 1, 2, 3, 4)$— точки разбиения отрезка $c_{l,j}^* \cap \overline{G(n)}$, причем точки $\gamma_{l,j}^*(n, 1)$ и $\gamma_{l,j}^*(n, 4)$ — концы отрезка $c_{l,j}^* \cap \overline{G(n)}$. Соединим при $\tau = 2$ точки $\gamma_1^*(n, 2)$ и $\gamma_{1,1}^*(n, 2)$, $\gamma_{1,1}^*(n, 2)$ и $\gamma_{1,2}^*(n, 2), \cdots, \gamma_q^*(n, 2)$ и $\gamma_q^{**}(n, 2)$ отрезками (отрезки, лежащие в прямоугольниках C_l, полагаем дугами параллелей). Ту же процедуру проделаем при $\tau = 3$. Область $G(n)$ разобъется при этом на три „подобные" области $G_1(n)$, $G_2(n)$, $G_3(n)$ (здесь $G_2(n)$ ограничена отрезками, соединяющими точками $\gamma_1^*(n, 2)$, $\gamma_1^*(n, 3)$ и точки $\gamma_q^{**}(n, 2)$, $\gamma_q^{**}(n, 3)$ и двумя ломаными, состоящими из отрезков, соединяющих точки

$$\gamma_1^*(n, 2),\ \gamma_{1,1}^*(n, 2), \cdots,\ \gamma_q^*(n, 2),\ \gamma_q^{**}(n, 2)$$

и

$$\gamma_1^*(n, 3),\ \gamma_{1,2}^*(n, 3), \cdots,\ \gamma_q^*(n, 3),\ \gamma_q^{**}(n, 3).$$

Пусть T_1^*, (T_q^{**}) — та из двух дуг меридианов, являющихся граничными сторонами прямоугольника C'_1, (C'_q), которая встречается первой с отрезком, соединяющим точки $\gamma_{1,1}^*(n, 2)$, $(\gamma_q^{**}(n, 2), \gamma_q^*(n, 2))$ при движении по этим отрезкам в направлении от точки $\gamma_1^*(n, 2)$ к $(\gamma_{1,1}^*(n, 2)$ (в направлении от точки $\gamma_q^{**}(n, 2)$ к $\gamma_q^*(n, 2))$; точки $\gamma'_1(n, 2)$, $(\gamma'_1(n, 3)$, $(\gamma_q^*(n, 2)$, $\gamma_q^*) n, 3))$ — точки пересечения указанных отрезков с дугами $T'_1, (T_q^{**})$. Обозначим $G'_2(n)$ прямоугольник с вершинами $\gamma_1(n, 2)$, $\gamma_1^*(n, 2)$, $\gamma'_1(n, 3)$, $\gamma_1^*(n, 3)$; $G''_2(n)$— прямоугольник с вершинами $\gamma''_q(n, 2)$, $\gamma_q^{**}(n, 1)$, $\gamma_q^*(n, 3)$, $\gamma_q^{**}(n)$; $\widetilde{G}(n) = G_2(n) \diagup [G'_2(n) \cup G''_2(n)]$; $\overline{D}_l$, $(l=1, 2, \cdots, q)$ — тот из двух прямоугольников, из которых состоит множество $C'_l \diagdown [\widetilde{D}_l \cup \widetilde{G}(n)]$, который граничет, одновременно, и с прямоугольником $\widetilde{D}_l$ и с областью $\widetilde{G}(n)$.

Положим, что $M_k(K, \bigcup D_i)$ является соединением простого острова над $G(n)$ и примыкающих к нему простых островов над D_{i_k} (в частности, для заданного простого острова над $G(n)$ может не найтись примыкающих к нему простых островов над D_i, $i=1, 2, \cdots, q$)

Область $\tilde{M}_k(K, \bigcap D_i)$ определим как часть области $M_k(K, \bigcup D_i)$, проектирующуюся в области

$$\bar{G}(n) \sqcup \{\bigsqcup_{(i_k)} (\tilde{D}_{i_k} \sqcup D'_{i_k})\}.$$

Очевидно, 1) $a_{i_k} \in \tilde{M}_k(D, \bigcup D_i)$; 2) $\tilde{M}_k(K, \bigcap D_i) \subset M_k(K, \bigcup D_i)$; 3) существует такое число K_0, что сферическое расстояние $\rho(\tilde{M}_k, M_k)$ между граничными кривыми областей $\tilde{M}_k(K, \bigcap D_i)$ и $M_k(K, \bigcup D_i)$ не меньше, чем K_{00}; 4) любые две точки из $\tilde{M}_k(K, \bigcup D_i)$ можно соединить кривой $l \in \tilde{M}_k(K, \bigcup D_i)$ (на сфере), которую можно покрыть $[K_7 n]$ кружками (на сфере) со сферическими диаметрами K_0/n, притом так, что центры двух таких кружков, имеющих общие точки, находятся на расстоянии, не большем K_6/n.

Обозначим E'_k, $\tilde{E}_k$, соответственно, прообразы в плоскости z областей $M_k(K, \bigcup D_i)$, $\tilde{M}_k(K, \bigcup D_i)$. Поскольку последние области представляют собой однолистные области римановой поверхности F (рассмотреной на римановой сфере), то 5) функция $F(w)$, обратная к $w(z)$, однолистна в области $w(E'_k)$, являющейся стереографической проекцией области $M_k(K, \bigcup L_i)$.

Из 2), 3), 5) и того, что метрические характеристики областей

$$M_k(K, \bigcup D_i),\ \tilde{M}_k(K, \bigcup D_i)$$

и их стереографических проекций $w(E'_k)$, $w(\tilde{E}_k)$ сравнимы друг с другом (так как по построению область $M_k(K, \bigcup D_i)$ ограничена), получаем следующее

Предложение 1. *Любые две точки b' и b'' области $w(\tilde{E}_k)$ могут быть соединены жордановой гладкой кривой ($\subset w(\tilde{E}_k)$) с концами в точках b' и b'' так, что эта кривая может быть покрыта $[K_4 n]$ кружками радиуса K_8/n таким образом, что центры двух кружков, имеющих общие точки, находятся на расстоянии не большем $K_8/(2n)$, причем функция $F(w)$ однолистна в каждом таком кружке.*

Согласно теореме Кебе (см. [6], гл. II) для регулярной и однолистной в $|w|<1$ функции $F(w)=w+a_1w^2+\cdots$ выполняется ($w=\rho e^{i\theta}$)

$$\frac{1-\rho}{(1+\rho)^3} \leqslant |F'(w)| \leqslant \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3},$$

откуда для регулярной и однолистной в $|w-w_0|<R$ функции $F(w)=a_0+a_1w+a_2w^2+\cdots$ получаем

$$\frac{R^2(R-\rho)}{(R+\rho)^3} \leqslant \left|\frac{F'(w)}{F'(w_0)}\right| \leqslant \frac{R^2(R+\rho)}{(R-\rho)^3}. \tag{2.7}$$

В силу последнего предложения и однолистности $F(w)$ применяя (2.7) в каждом из описанных кружков, получаем

$$|F'(b'')| \overset{\varphi_b}{\asymp} |F'(b')|, \ \varphi_b = 12^{K_1 n+2}, \tag{2.8}$$

откуда, учитывая, что $w'(z) = 1/F'(w)$, получаем (2.4).

Докажем неравенство (2.5). Предположим сначала, что $|a_1 - a_2| \leqslant \leqslant \frac{K_8}{10n}$. По предложению 1, если a_1 или $a_2 \in w(\tilde{E}_k)$, то $w(\tilde{E}_k)$ принадлежит кружок $|w - a_1| \leqslant \frac{K_8}{n}$ и $F(w)$ однолистна в этом кружке. По теореме Кебе об $\frac{1}{4}$ выполняется

$$|a_1 - a_2| |F'(a_1)| \leqslant 4 |z_k(a_1) - z_k(a_2)|. \tag{2.9}$$

Из (2.7) следует, что для значений w (из этого кружка), принадлежащих отрезку γ, соединяющему точки a_1 и a_2, выполняется

$$|F'(w)| < |F'(a_1)| \frac{\left(1 + \frac{1}{10}\right)}{\left(1 - \frac{1}{10}\right)^3}.$$

Проинтегрировав это соотношение получим

$$|z_k(a_1) - z_k(a_2)| \leqslant \int_\gamma |F'(w)|\, ds \leqslant |a_1 - a_2| \cdot |F'(a_1)| \cdot \frac{1100}{729}. \tag{2.10}$$

Пусть теперь для a_1 и a_2 из $w(\tilde{E}_k)$ выполняется $|a_1 - a_2| > \frac{K_8}{10n}$. Ясно, что любые две точки области $w(\tilde{E}_k)$ можно соединить кривой длины не более чем K_9 (где K_9 не зависит от выбора области $G(n)$). Из (2.8), обозначив через γ кратчайшую кривую ($\subset w(\tilde{E}_k)$), соединяющую точки a_1 и a_2, получим

$$|z_k(a_1) - z_k(a_2)| \leqslant \int_\gamma |F'(w)|\, dS \leqslant K_9\, 12^{K_1 n+2} \cdot$$

$$\cdot |F'(a_1)| \leqslant |a_1 - a_2| \frac{K_9}{K_8} \cdot 10 \cdot n \cdot 12^{K_1 n+2} |F'(a_1)|. \tag{2.11}$$

Опять же по теореме Кебе

$$|z_k(a_1) - z_k(a_2)| \geqslant |F'(a_1)| \cdot \frac{K_8}{40n} \geqslant |F'(a_1)|\, |a_1 - a_2| \frac{K_8}{K_g\, 40n}. \tag{2.12}$$

Теперь из (2.9)—(2.12) имеем: для любых a_1 и $a_2 \in w(\tilde{E}_k)$ выполняется

$$\frac{|z_k(a_1)-z_k(a_2)|}{|a_1-a_2|} \overset{\varphi_6}{\asymp} |F'(a_1)|, \quad \varphi_6 = K_{10} n \cdot 12^{K_1 n+2}, \tag{2.13}$$

откуда, учитывая также (2.8), получим неравенство (2.5).

Выбрав теперь в соотношениях (2.11) и (2.12) $z_k(a_1)$ и $z_k(a_2)$ такими, чтобы, $|z_k(a_1)-z_k(a_2)| \geqslant \frac{d(\tilde{E}_k)}{2}$, получим

$$\frac{K_8}{40n} |F'(a_1)| < d(\tilde{E}_k) \leqslant K_9 12^{K_1 n+2} |F'(a_1)|.$$

Учитывая равенство $w'(z) = 1/F'(w)$, применим последнее соотношение к (2.12) и (2.13), получим, соответственно, неравенства (2.4′) и (2.5)′), чем и заканчивается доказательство пунктов e) и f) обобщенной теоремы 1.

Соотношения (2.1), (2.2), (2.3) установлены в работе [3]. Здесь надо учитывать следующее: результаты в [3] излагаются для случая когда функция $w(z)$ мероморфна в круге $|z|<R\leqslant\infty$, однако все приведенные построения верны для случая, когда $w(z)$ мероморфна в области K; соответственно, $\tilde{\Phi}$ в [3] записывается как $\tilde{\Phi}(r)$, $S(K)$—как $A(r)$, неравенство (2.1)—неравенства (4*), (2.3) из [3]; неравенство (2.2)—неравенство (6*) из [3], неравенство (2.3) получается дословным повторением доказательства неравенства (3.10) из [3], если там вместо круга $|z|<r$ рассматривать область K. Доказательство обобщенной теоремы 1 завершено.

§ 3. Обобщенная теорема 2

В условиях обобщенной теоремы 1 пусть задан набор хороших a-точек $\{z_j(a)\}_{j=1}^{n_1(D)}$ (где в определении этого набора вместо F_r берется F). Тогда из областей $\tilde{E}_k$, $k=1, 2, \cdots, \tilde{\Phi}$ можно выделить некоторое число Φ_1 областей $\tilde{E}_\mu$, $\mu=1, 2, \cdots, \Phi_1$ таких, что для любого μ найдется такой номер $j(\mu)$, притом соответствие между μ и $j(\mu)$ взаимно-однозначное, что

а) для любого $z \in \tilde{E}_\mu$ выполняется

$$|w'(z)| \overset{\varphi}{\asymp} |w'(z_{j(\mu)}(a))|, \quad \varphi = 12^{K_1 c n^*}; \tag{3.1}$$

б) для любых значений b и $c \in w(\tilde{E}_\mu)$ выполняется

$$\frac{|z_\mu(b)-z_\mu(c)|}{|b-c|} \overset{\varphi}{\asymp} \frac{1}{|w'(z_{j(\mu)}(a))|}, \quad \varphi = 12^{K_1 c n^*}; \tag{3.2}$$

в)

$$|\Phi_1 - n_0(D)| \leqslant c\frac{S(K)}{n} + cn^{14} L. \tag{3.3}$$

---

* Здесь и в дальнейшем c—абсолютные постоянные, не обязательно одинаковые даже на протяжении одной цепочки соотношений.

Пусть $D = D(n)$—некоторый кружок на сфере радиуса $2\pi/n$. Мы всегда можем выбрать кружок D таким, чтобы для него выполнялось бы соотношение

$$|S(K) - n_0(D)| \leqslant \frac{c}{n} S(K) + cn^2 L, \quad n > n_0, \tag{3.4}$$

где $n_0(X)$ (напоминаем)—количество простых островов поверхности F над областью X.

Это следует из первой основной теоремы Л. Альфорса (см. [1], гл. XIII), согласно которой

$$n_0(D) \leqslant S(K) + \frac{c}{(\text{площадь } D)} L = S(K) + cn^2 L \tag{3.5}$$

и того, что D можно выбрать таковым, чтобы выполнялось неравенство

$$n_0(D) \geqslant S(K) - \frac{c}{n} S(K) - cn^2 L.$$

В последнем можно убедиться так. Если бы диаметр D был бы равен не $\frac{2\pi}{n}$, а $\frac{c}{n}$, то последнее неравенство выполнялось бы, если бы мы взяли $D \subset G(n)$ (тогда $n_0(D) \geqslant n_0(G(n))$ и применили неравенство (2.6). То, что 2π не обязательно равно c отражается, очевидно, лишь на постоянных перед $S(K)$ и L.

Нам понадобятся описания областей $\widetilde{G}'(n)$, $G'(n)$, для чего будем пользоваться полярными координатами в трехмерном пространстве — (φ, θ, ρ), где φ показывает угол в горизонтальной плоскости, θ — угол в вертикальной плоскости, ρ — модуль точки. В дальнейшем у нас n — четное число ($n \geqslant 100$).

Определим $\Gamma(k)$ как кривые со следующими параметрическими представлениями

$$\Gamma(k) = \{\varphi(t), \theta(t), \rho(t)\},$$

где

$$\varphi(t) = 2\pi t + \frac{\pi k}{n^5 - 1}, \quad \theta(t) = \frac{\pi}{2n} t, \quad \rho(t) = \frac{1}{2},$$

$$t \in [-(n-5)\; n-5], \quad k = 0, 1, \cdots, n^5 - 1.$$

Пусть $D(\tau, 0)$ и $D(\tau, \infty)$ — τ-окрестности точек 0 и ∞ на сфере:

$$\Gamma^*(k) = \Gamma(k) \setminus \left\{ D\left(\frac{9}{n}, 0\right) \cup D\left(\frac{9}{n}, \infty\right) \right\}, \quad k = 0, 1, \cdots, n^5 - 1;$$

G—та из двух односвязных областей на сфере, ограниченных кривыми $\Gamma^*(0)$, $\Gamma^*(n^5-1)$ и частями границы $D\left(\frac{9}{n}, 0\right)$, $\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$, соединяющими концы кривых $\Gamma^*(0)$ и $\Gamma^*(n^5-1)$, которая содержит кривые $\Gamma(k)$, $k = 1, 2, \cdots, n^5-2$. Обозначим через $\widetilde{G}'_m$,

$m=1, 2, \cdots, n^5/2$ области, принадлежащие G и ограниченные кривыми $\Gamma^*(2m-2)$, $\Gamma^*(2m-1)$ и частями границы $D\left(\frac{9}{n}, 0\right)$, $D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$, соединяющими концы кривых $\Gamma^*(2m-2)$, $\Gamma^*(2m-1)$; через G'_m обозначим подобласть $\tilde{G}'_m$, ограничиваемую кривыми $\Gamma^*\left(2m-2+\frac{1}{3}\right)$, $\Gamma^*\left(2m-2+\frac{2}{3}\right)$ и частями кривых $\partial D\left(\frac{9}{n}, 0\right)$, $\partial D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$, соединяющими концы кривых $\Gamma^*\left(2m-2+\frac{1}{3}\right)$, $\Gamma^*\left(2m-2+\frac{2}{3}\right)$.
В [4] показано, что существует такое число $m_0 \in (1, 2, \cdots, n^5/2)$, что для области $\tilde{G}'_{m_0}$ (обозначим ее $\tilde{G}'(n)$, соответственно G'_{m_0} обозначим через $G'(n)$) выполняется

$$S(K)-n_0(\tilde{G}'(n)) \leqslant \frac{8S(K)}{n^5}+cn^{13}L \tag{3.6}$$

(см. [4], неравенство (2.2)).

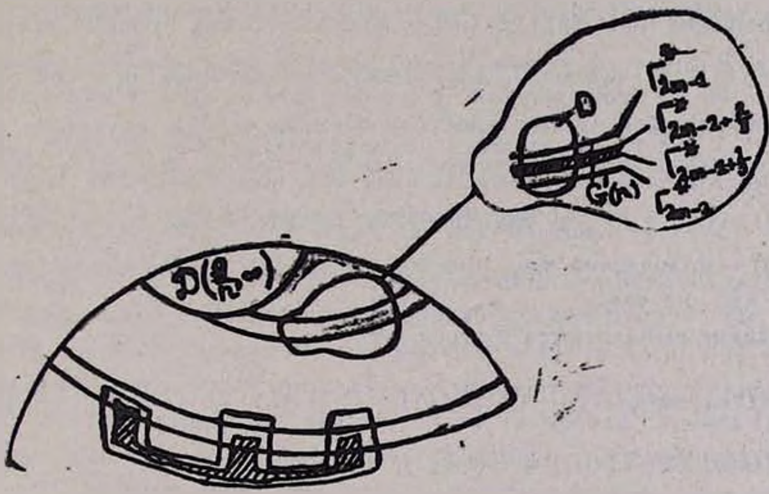

Рис. 1. Заштрихованная область — область $\bar{w}(E_k(r))$.

Пусть $D^*=D^*(n)$ — некоторый кружок на сфере такой, что 1) диаметр его $1/n^7$; 2) $\overline{D^*} \subset G'(n)$; 3) $\overline{D^*}$ принадлежит некоторому кругу, концентрическому D и с вчетверо меньшим радиусом, чем радиус D.
Такие кружки существуют по построению, так как «ширина» области $G'(n)$ порядка $1/n^6$.

Обозначим $D_j(n)$ ($j=1, 2, \cdots, \Phi(G'(n), D, D^*)$) — те простые острова над $G'(n)$, каждый из которых является частью простого острова над $\tilde{G}'(n)$ и для каждого из которых простой остров над D^*, входящий в $G_j(n)$, является, одновременно, частью простого острова D_j над D; $\Phi(G'(n), D, D^*)$ — их количество.

Из геометрических рассмотрений следует выполнение следующих неравенств:

$$\Phi(G'(n),\ D,\ D^*) \leqslant n_0(D) \tag{3.7}$$

и

$$n_0(\widetilde{G}'(n)) - \Phi(G'(n),\ D,\ D^*) \leqslant n_0(D^*) - n_0(D), \tag{3.8}$$

так что получаем

$$n_0(G'(n)) - n_0(D^*) \leqslant \Phi(G'(n),\ D,\ D^*) - n_0(D) \leqslant 0. \tag{3.9}$$

Для величины $n_0(D^*)$ согласно формуле (3.5) имеем

$$n_0(D^*) \leqslant S(K) + c\,n^{14} L,$$

Так что, учитывая ещё (3.4) и (3.6), из (3.9) получим

$$|\Phi(G'(n),\ D,\ D^*) - S(K)| \leqslant c\,\frac{S(K)}{n} + cn^{14} L. \tag{3.10}$$

Пусть $Q = Q(n)$ — некоторый кружок на сфере радиуса c/n^7. Положим, что $Q \subset \{\widetilde{G}(n) \cap G'(n)\}$, ($Q$ можно выбрать таковым, так как „ширина" областей $\widetilde{G}(n)$ и $G'(n)$) соответственно порядков $1/n$ и $1/n^6$)

Обозначим $\Phi_1(\widetilde{G}(n),\ Q,\ G'(n)$ количество тех простых островов $w(\widetilde{E}_\mu)$, $\widetilde{E}_\mu \in \{\widetilde{E}_k\}$* над $\widetilde{G}(n)$, для каждого из которых, простой остров над Q, являющийся частью простого острова $w(\widetilde{E}_\mu)$ является, одновременно, частью некоторого простого острова $G'_{j(\mu)}(n)$ над $G'(n)$ (внимание! $G'_{j(\mu)}(n)$, а не вообще простого острова над $G'(n)$; $\Phi^1(\widetilde{G}(n),$ $Q,\ G'(n))$ — количество тех простых островов $\widetilde{G}_k(n)$ над $\widetilde{G}(n)$, для которых это не так.

Очевидно выполняются соотношения

$$n_0(G(n)) = \Phi_1(\widetilde{G}(n),\ Q,\ G'(n)) + \Phi_1^{\bullet}(\widetilde{G}(n),\ Q,\ G'(n)), \tag{3.11}$$

$$\Phi_1(\widetilde{G}(n),\ Q,\ G'(n)) < \Phi(G'(n),\ D,\ D^*), \tag{3.12}$$

$$\Phi_1^{\bullet}(\widetilde{G}(n),\ Q,\ G'(n)) + \Phi(G'(n),\ D,\ D^*) \leqslant n_0(Q). \tag{3.13}$$

Следовательно, имеем

$$n_0(G(n)) - n_0(Q) + \Phi(G'(n),\ D,\ D^*) \leqslant$$

$$\leqslant \Phi_1(\widetilde{G}(n),\ Q,\ G'(n)) \leqslant \Phi(G'(n),\ D,\ D^*), \tag{3.14}$$

откуда, учитывая еще неравенства: (2.6), (3.10) и $n_0(Q) \leqslant S(K) + Cn^{14} L$, получим

$$|\Phi_1(\widetilde{G}(n),\ Q,\ G'(n)) - n_0(D)| \leqslant c\,\frac{S(K)}{n} + cn^{14} L, \tag{3.15}$$

---

* Определение $\widetilde{E}_k$ см. в § 1.

и, учитывая еще (3.4), получим

$$|\Phi_1(\bar{G}(n),\ Q,\ G'(n)-S(K)| \leqslant c\,\frac{S(K)}{n}+cn^{14}L. \tag{3.16}$$

Замечание 1. Соотношение (3.15) справедливо, если радиус кружка D предполагать не равным $2\pi/n$, а не меньшим чем $2\pi/n$ (это следует из того, что неравенство (3.9) верно также для таких D).

Таким образом, обозначив $\Phi_1=\Phi_1(\bar{G}(n),\ Q,\ G'(n))$,получаем (3.3).

Докажем теперь соотношение 3.1. Идея доказательства состоит в следующем. Для любой области $\approx{E}_\mu$ мы должны указать такую кривую на римановой поверхности, что 1) она начинается в области $w(\approx{E}_\mu)$ и оканчивается в точке $w(z_{j(\mu)}(a))$ и 2) для каждой точки этой кривой существует достаточно большая окрестность этой точки, целиком лежащая на некотором простом листе. Второе условие означает, что в любой такой окрестности применимо неравенство (2.7). Применяя неравенство (2.7) на цепочке кружков с центрами на этой кривойамы докажем, что величины $|z'(w)|$ сравнимы для $w\in w(\approx{E}_\mu)$ и $w=w(z_{j(\mu)}(a))$. Последнее, очевидно, означает сравнимость величин $|w'(z)|$ для $z\in\approx{E}_\mu$ и $z=z_{j(\mu)}(a)$.

Вспомним теперь, какие области фигурируют в определении $\Phi_1=\Phi_1(\tilde{G}(n),\ Q,\ G'(n))$. Это простые острова $w(\approx{E}_\mu)$ над $\tilde{G}(n)$, для каждого из которых а) простой остров над Q, принадлежащий этому простому острову над $\tilde{G}(n)$, является в) частью простого острова $G'_{j(\mu)}(n)$ над $G'(n)$, являющемуся с) частью простого острова над $\tilde{G}'(n)$ d) принадлежащий последнему острову простой остров над D^* является е) в свою очередь частью простого острова $D_{j(\mu)}$ над D, притом вспомним, что f) $\overline{D^*}$ принадлежит некоторому кругу, концентрическому с D и с радиусом, равным одной четвертой радиуса D. Здесь разграничения а),$\cdots$,f) приводятся для удобства дальнейших ссылок.

Теперь пройдем описанный путь в обратном направлении, используя неравенство (2.7).

Пусть a—стереографическая проекция на плоскость центра кружка D; $F(a(j(\mu)))$ — значение $F(w)$ в точке a из проекции простого острова $D_{j(\mu)}$ на плоскость.

Проекция D^* в силу f) лежит в некотором круге, который будучи увеличен вдвое (по радиусу), будет принадлежать проекции D.

Следовательно, в силу (2.7), для любой точки w_1 из проекции простого острова над D^*, принадлежащей простому острову $D_{j(\mu)}$ (см. e)) выполняется

$$\frac{1}{12^2}|F'(a(j(\mu)))| \leqslant |F'(w_1)| \leqslant F'(a(j(\mu)))|\cdot 12^2. \tag{3.17}$$

Любые две точки области $G'(n)$ можно, в силу b) и c), соединить некоторой кривой $\gamma\subset G'(n)$ так, что γ можно покрыть cn^8 штук кружками радиуса c/n^7 (здесь учитываем, что «длина» $\tilde{G}'(n)$ порядка cn), каждый из которых принадлежит области $\tilde{G}'(n)$, притом так, что центры двух кружков, имеющих общие точки, отдалены друг от друга на расстояние не более чем $c/(4n^7)$ (в данном случае c то же, что и при определении радиуса c/n^7 кружков).

Спроектируем стереографически все эти объекты на плоскость, предполагая, что и кружки и γ лежат на нашем простом острове над $\tilde{G}'(n)$ (содержащем простой остров $G_{j(\mu)}(n)$). Тогда получим, что проекцию γ можно покрыть cn^8 штук кружками на плоскости (c—новое), так, что кружки принадлежат проекции простого острова над $\tilde{G}'(n)$ (следовательно $F(w)$ в них однолистна) и центры кружков, имеющих общие точки, находятся на расстоянии меньшем, чем половина радиуса меньшего из кружков.

Теперь, применив неравенство (2.7) к любым двум точкам w_2 и w_2', принадлежащим нашему простому острову $G_{j(\mu)}$ над $G'(n)$, получим

$$\frac{1}{12^{cn^8+1}}|F'(w_2')| \leqslant |F'(w_2)| \leqslant F'(w_2')|12^{cn^8+1},$$

а взяв вместо w_2' значение w_1, с учетом (3.17) получим

$$\frac{1}{12^{cn^8}}|F'(a(j(\mu)))| = \frac{1}{12^{cn^8+2}}|F'(a(j(\mu)))| \leqslant |F'(w_2)| \leqslant$$
$$\leqslant |F'(a(j(\mu)))|\cdot 12^{cn^8+2} = |F'(a(j(\mu)))|\, 12^{cn^8} \tag{3.18}$$

(c—уже различны в различных частях равенств).

Выберем теперь w_2, принадлежащими простому острову над Q, являющемуся частью простого острова $G_{j(\mu)}(n)$ и, одновременно, частью простого острова $w(\tilde{E}_\mu)$ над $G(n)$. Тогда в силу (3.18) и (2.8) получим, что для любого $w \in w(\tilde{\tilde{E}}_\mu)$ выполняются неравенства

$$|F'(w)| \leqslant |F'(w_2)|\cdot 12^{K_1 n+2} \leqslant$$
$$\leqslant |F'(a(j(\mu)))|\cdot 12^{cn^8+K_1 n+2} = F'(a(j(\mu)))|\cdot 12^{K_1 cn^8}, \tag{3.19}$$

$$|F'(w)| \geqslant \frac{1}{12^{K_1 n+2}}|F'(w_2)| \geqslant$$
$$\geqslant |F'(a(j(\mu)))|\cdot\frac{1}{12^{cn^8+K_1 n+2}} = |F'(a(j(\mu)))|\cdot\frac{1}{12^{K_1 cn^8}}. \tag{3.20}$$

Из последних неравенств, учитывая, что $w'(z) = 1/F'(w)$ и $F(a(j(\mu))) = z_{j(\mu)}$, получим (3.1).

Возьмем теперь в соотношении (2.13), записанном для области $w(\tilde{E}_\mu)$, значение a_1 равным b, а значение a_2, равным c. К полученному соотношению применим неравенства (3.19) и (3.20) с w, равным b. Получим соотношение (3.2), чем и завершается доказательство обобщенной теоремы 2.

§ 4. Доказательство теорем 1—4

Выведем теорему 1 из обобщенной теоремы 1. Вместо области K теперь у нас фигурируют круги $|z| \leqslant r$, $S(K) = A(r)$,

$$L = L(r),\ \bar{\Phi} = \bar{\Phi}(r),\ \tilde{E}_k = \tilde{E}_k(r).$$

Пусть $\varphi(r) < A^{1/3}(r)$. Выберем для таких $\varphi(r)$ число $n = n(r)$, удовлетворяющим условию

$$12^{\max\{K_1, K_4', K_6, K_5'\}\, n(r)} \leqslant \varphi(r) < 12^{\max\{K4, K_4', K_6, K_5'\}\cdot(n(r)+1)}. \tag{4.1}$$

Вспомним известную оценку (см. [1], гл. XIII)

$$L(r) \leqslant [A(r)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon},\ r \to \infty,\ r \overline{\in} E, \tag{4.2}$$

где $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$.

Выберем еще здесь $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$ и применим (4.2) к обобщенной теореме 1. С учетом (4.1) получим, что пункты a), b), c), e), f) теоремы 1 справедливы для областей $\bar{E}_k$ и их числа $\tilde{\Phi}(r)$ (вместо $E_k(r)$ и $\Phi(r)$), а вместо пункта d) выполняется

$$\sum_{k=1}^{\bar{\Phi}(r)} d(\tilde{E}_k(r)) \leqslant K_{11} \ln \varphi(r)\, r A^{1/2}(r).$$

Из того, что для величины $\tilde{\Phi}(r)$ выполняется a) следует, что количество областей $E_k(r)$, для которых выполняется неравенство

$$d(\tilde{E}_k(r)) \geqslant \frac{K_{11} \ln^2 \varphi(r) r}{A^{1/2}(\varepsilon)},$$

не больше, чем $A(r)/[K_{11} \ln^2 \varphi(r))]$, т. е. является величиной $o[A(r)]$. Так что если обозначим через $\Phi(r)$ количество тех областей $E_k(r) \in \in \{\tilde{E}_k(r)\}_{k=1}^{\Phi(r)}$, для которых выполняется

$$d(E_k(r)) < \frac{K_{11} \ln^2 \varphi(r) r}{A^{1/2}(r)} \left(\leqslant \frac{\varphi(r) r}{A^{1/2}(r)},\ r > r_0\right),$$

т. е. выполняется пункт d) теоремы 1, то будем иметь для таких $\Phi(r)$ и $E_k(r)$ пункты a), b), d), e), f) теоремы 1. Пункт c) вытекает из пункта c) для областей $\bar{E}_k(r)$ и того, что в силу $|\Phi(r) - \bar{\Phi}(r)| = = o[A(r)]$ и b) величины $\sum\limits_{i=1}^{b} \dot{n}_0(r, a_i)$ взятые для $\bigcup\limits_{k=1}^{\bar{\Phi}(r)} \tilde{E}_k(r)$ и для $\bigcup\limits_{k=1}^{\Phi(r)} E_k(r)$ отличаются на величину порядка $o[A(r)]$. Тем самым, теорема 1 доказана при условии $\varphi(r) < A^{1/3}(r)$, $r > r_0$. Остается заметить, что все пункты теоремы 1 верны также при нарушении условия $\varphi(r) < A^{1/3}(r)$.

Доказательство теоремы 2 вытекает из обобщенной теоремы 2, если в ней к величине $L = L(r)$ применить оценку (4.2), а для заданной функции $\varphi(r)$ число $n = n(r)$ определить из условия

$$12^{K_4 c n^8(r)} \leqslant \varphi(r) < 12^{K_4 c([n]+1)^8} \tag{4.3}$$

(тем самым устанавливаются соотношения (1.9) и (1.10)) и далее оценку $\Phi^{(a)}(r)$ проводить теми же рассуждениями, какие приводятся при выводе оценки (1.1) теоремы 1.

Доказательство теоремы 3. Из условия (4.3) следует, что $\dfrac{1}{\ln\ln\varphi(r)} > \dfrac{2\pi}{n(r)}$, при $r > r_0$, так что вместо областей $D = D(r)$ с диаметрами $\dfrac{2\pi}{n}$ мы можем взять области D_r. Для них выполняется (в силу определения контрольного набора)

$$|n_0(r,\ D_{r_i}) - A(r)| = o(A(r)),\quad r \to \infty,\quad r \overline{\in} E.$$

Из (3.15) и последнего соотношения следует теперь, с учетом связи между $\varphi(r)$ и $n(r)$, соотношение (1.12), чем и завершается доказательство теоремы 3.

Институт математики
АН Армении

Поступила 10. VII. 1989

Գ. Ա. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ. Մերոմորֆ ֆունկցիաների ածանցյալների համեմատելիության և a-կետերի միջև հեռավորությունների համեմատելիության հատկությունները (ամփոփում)

Հոդվածում բացահայտվում է մի նոր օրինաչափություն w(z) մերոմորֆ ֆունկցիաների ածանցյալների համեմատելիության հատկությունը, որը ցույց է տալիս, որ |w'(z)| մեծությունը համեմատելի է ֆունկցիայի «լավ» a-կետերի և b-կետերի բազմության վրա։

G. A. BARSEGIAN. *The property of comparability of derivatiyes of meromorphis fuactions. and of the Distence Bitweeu a-Points* (summary)

In the paper new regularity which we call the property of comparability of the derivatives of meromerhphic in C functions $w(z)$ is established. Thos we apply to show that the values of $|w'(z)|$ on the set of "good" a-points and b-points are comparable.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, «ОГИЗ», 1941.
2. *Г. А. Барсегян.* О геометрии мероморфных функций, Матем. сб., 1981, 114(156), № 2, 179—225.
3. *Г. А .Барсегян.* Свойство близости a-точек мероморфных функций, Матем. сб., 1983, 120(162), № 1, 42—67.
4. *Г. А. Барсегян.* Свойство близости a-точек мероморфных функций и структура однолистных областей римановых поверхностей, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1985, 20, № 5, 375—400; 1985, 20, № 6, 407—426.
5. *G. A. Barsegian.* Estimates of derivatives of meromorphic function on sets of a-poiats, J. London Math. Soc. (2) 34, 1986, 534—540.
6. *Г. М. Голузин.* Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», 1966.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 1, 1991 Математика

УДК 517.51

М. Г. ГРИГОРЯН

О СХОДИМОСТИ В МЕТРИКЕ L^1 И ПОЧТИ ВСЮДУ РЯДОВ ФУРЬЕ И О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Введение

Широко известна следующая

Теорема А. (Н. Н. Лузин [1]). Для любой почти всюду конечной на $[0, 1]$ измеримой функции $f(x)$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существуют измеримое множество E с мерой $|E| > 1-\varepsilon$ и непрерывная на $[0, 1]$ функция, $g(x)$, совпадающая с $f(x)$ на E.

Эта идея Лузина об исправлении функций с целью улучшения ее свойств получила в дальнейшем большое развитие. Здесь фундаментальные результаты были получены Д. Е. Меньшовым (см. [2], [3]).

Теорема В (Д. Е. Меньшов). Пусть $f(x)$—измеримая функция, конечная почти всюду на $[0, 2\pi]$. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$ можно определить непрерывную функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на некотором множестве E, $|E| > 2\pi-\varepsilon$ и такую, что ее ряд Фурье сходится равномерно на $[0, 2\pi]$.

Теорема С (Д. Е. Меньшов). Пусть P —любое совершенное нигде не плотное множество на $[0, 2\pi]$. Тогда для любой $f(x) \in L[0, 2\pi]$ можно найти такую функцию $g(x) \in L[0, 2\pi]$, что $g(x) = f(x)$ на P и ее ряд Фурье сходится почти всюду.

В связи с этим в 1964 г. П. Л. Ульянов [4] поставил вопрос: нельзя ли исправленную функцию $g(x)$ выбрать так, чтобы последовательность коэффициентов Фурье по тригонометрической системе

$$\{a_k(g),\ b_k(g)\} \in l_p \text{ при некотором } p > 0?$$

Он высказал предположение, что случай $p = 1$ невозможен. Решение гипотезы П. Л. Ульянова было получено И. Кацнельсоном [5] в 1976 г., а в 1977 г. А. М. Олевский [6] установил, что существует функция $g_0(x) \in C[0, 2\pi]$ такая, что для любой функции $f(x) \in L[0, 2\pi]$ с мерой $|\{x \in [0, 2\pi],\ f(x) = g_0(x)\}| > 0$ последовательность коэффициентов

$$\{a_k(f),\ b_k(f)\} \overline{\in} l_p \text{ при всех } p \in (0,2).$$

В настоящей работе доказывается

Теорема 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \in [0, 2\pi]$, с $|E| > 2\pi - \varepsilon$ такое, что для любой функции $f(x) \in L[0, 2\pi]$ можно найти функцию $g(x) \in L[0, 2\pi]$, $g(x) = f(x)$ на E и такую, что последовательность коэффициентов Фурье функции $g(x)$*

$$\{c_k(g)\} \in l_p \text{ для всех } p > 2.$$

Спрашивается, можно ли в теореме 1 обеспечить также сходимость почти всюду или сходимость в метрике L^1. Оказывается, что поставленный вопрос имеет положительный ответ. Более того, справедлива

Теорема 2. *Для каждого $\varepsilon>0$ существует измеримое множество $E\subset[0, 2\pi$ с $|E|>2\pi-\varepsilon$ такое, что для любой функции $f(x)\in\in L[0, 2\pi]$ можно найти функцию $g(x)\in L[0, 2\pi]$, $g(x)=f(x)$ на E,*

$$\int_0^{2\pi}|g(x)-f(x)|\,dx<\varepsilon$$

и такую, что ее ряд Фурье сходится в метрике L^1 и почти всюду на $[0, 2\pi]$ и последовательность коэффициентов Фурье

$$\{c_k(g)\}_{k=-\infty}^{\infty}\in l_p \text{ для всех } p>2.$$

Отметим, что этой теоремой дается положительный ответ на следующий вопрос 3. Чисельского: можно ли для любого $\varepsilon>0$ исправленную функцию $g(x)$ выбрать так, чтобы

$$\int_0^{2\pi}|g(x)-f(x)|\,dx<\varepsilon?$$

Введем некоторые обозначения. Характеристическую функцию множества E будем обозначать через $\chi_E(t)$. Разобъем сегмент $[0, 2\pi]$ на 2^ν равных частей и обозночим эти отрезки через

$$\Delta_\nu^{(m)},\quad 0\leqslant m\leqslant 2^\nu.$$

[n-ую частичную сумму ряда Фурье функции $f(x)$ будем обозначать через $S_n(x, f)$:

$$S_n(x, f)=\sum_{0<|k|<n}a_k(f)\,e^{ikx}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt \tag{1}$$

$$\left(a_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,e^{-ikt}\,dt\right).$$

§ 2. Доказательства основных лемм

Лемма 1. *Для любых чисел $\gamma\neq0$; $0<\varepsilon_0<1$; $0<\delta_0<1$; M_0 и для любого интервала $[a, b]\equiv\Delta\subset[0, 2\pi]$ вида Δ_ν^k существуют функция $g(x)$, измеримы множества G, $E\subset[0, 2\pi]$ и полином $P(x)$ вида*

$$P(x)=\sum_{M_0<|k|<M}a_k e^{ikx},$$

удовлетворяющие условиям

1) $$g(x)=\begin{cases}\gamma, & x\in E\cap\Delta\\ 0, & x\overline{\in}\Delta\end{cases},\quad |E|>2\pi-\varepsilon_0,$$

2) $$\int_0^{2\pi}|P(x)-g(x)|\,dx<\varepsilon_0,$$

3) $$\int_0^{2\pi}|g(x)|\,dx\leqslant 4\,|\gamma|\cdot|\Delta|,$$

4) $$\sum_{M_0<|k|\leqslant M}|a_k^{2+\varepsilon_0}|<\varepsilon_0,\quad |G|>2\pi-\delta_0\,|\Delta|,$$

5) $$\Big|\sum_{M_0<|k|<m}a_k\,e^{ikx}\Big|\leqslant\begin{cases}\dfrac{c_0\,|\gamma|}{\delta_0}, & x\in G\cap\Delta\\ \varepsilon_0, & x\in G\setminus\Delta\end{cases},\quad M_0\leqslant m\leqslant M,$$

$$c_0=\mathrm{const}$$

6) $$\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{M_0<|k|<m}a_k\,e^{ikx}\Big|\,dx\leqslant 14\,|\gamma|\,|\Delta|,\quad M_0\leqslant m\leqslant M.$$

Доказательство. Положим

$$I_m(x)=\begin{cases}-m^{\frac{1}{2}}, & x\in\left[0,\ \dfrac{2\pi}{m+1}\right)\\ m^{-\frac{1}{2}}, & x\in\left[\dfrac{2\pi}{m+1},\ 2\pi\right],\\ I_m(x+2\pi),\end{cases}$$

$$\varepsilon=\min\left\{\frac{\varepsilon_0^2}{12}\ \frac{\delta\cdot|\Delta|}{2};\ \frac{1}{2}\,|\gamma|\,|\Delta|\right\}, \tag{2}$$

Очевидно, что

$$\int_0^{2\pi}I_m(x)\,dx=0,\quad \int_0^{2\pi}I_m^2(x)\,dx=2\pi.$$

Нетрудно видеть, что существует натуральное число s_1 такое, что

$$\Big|\int_\Delta\gamma\cdot I_1(2^{s_1}\cdot x)\,e^{inx}\,dx\Big|<\frac{\varepsilon^2}{18\,N},\quad |n|\leqslant M. \tag{3}$$

Возьмем натуральное число $N_1>M_0$ настолько большим, чтобы

$$\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{|k|\leqslant N_1}a_k^{(1)}e^{ikx}-g_1(x)\Big|\,dx<\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2,$$

где

$$g_1(x)=\gamma\cdot\chi_\Delta(x)\,I_1(2^{s_1}\cdot x),$$

$$a_k^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(x)\, e^{-ikx}\, dx.$$

Отсюда в силу (3) имеем

$$\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{N<|k|<N_1} a_k^{(1)} e^{ikx} - g_1(x)\Big|\, dx < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2,$$

Следовательно

$$\left|\left\{x\in[0, 2\pi],\ \Big|\sum_{N<|k|<N_1} a_k^{(1)} e^{ikx} - g_1(x)\Big| < \frac{\varepsilon}{4}\right\}\right| > 2\pi - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Продолжая это рассуждение, мы можем по индукции определить последовательности чисел $S_1 < S_2 < \cdots$, $M_0 < N_1 < \cdots$, функций $\{g_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$, множеств A_m и полиномов

$$P_m(x) = \sum_{N_{m-1}<|k|<N_m} a_k^{(m)} e^{ikx},$$

удовлетворяющих условиям:

$$\int_0^{2\pi} |P_m(x) - g_m(x)|\, dx < \left(\frac{\varepsilon}{4^m}\right)^2, \tag{4}$$

$$|P_m|(x) - g_m(x)| < \frac{\varepsilon}{4^m}, \text{ при } x\in A_m, \tag{5}$$

$$|A_m| > 2\pi - \frac{\varepsilon}{4^m},\ |a_k^{(m)}| < \frac{\varepsilon}{4N_{m-1}},\ |k| < N_{m-1}, \tag{6}$$

где

$$g_m(x) = \gamma\cdot\chi_\Delta^{(x)} I_m(2^{s_m}\cdot x),\ a_k^{(m)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_m(x)\, e^{-ikx}\, dx. \tag{7}$$

Выберем натуральные числа q_0, q_1 так, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$q_0 > \left(\frac{|\gamma|\,|\Delta|^2}{\delta_0}\right)^2 + (10\delta_0)^{-1}, \tag{8}$$

$$\sum_{m=q_0}^{q} \frac{1}{m} < \varepsilon\,(4|\gamma|\sqrt{|\Delta|} + 22)^{-(2+\varepsilon)}, \tag{9}$$

$$0 < 1 - \sum_{m=q^0}^{q} m^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2+\varepsilon}} < \varepsilon\,(2 + 2|\gamma|\,|\Delta|)^{-1}. \tag{10}$$

Положим

$$E_m = \{x\in[0, 2\pi];\ I_m(2^{s_m} x) = -\sqrt{m}\}, \tag{11}$$

$$\varphi_m(x) = \chi^{(x)}_{E_m\cap\Delta}, \tag{12}$$

Согласно лемме Д. Е. Меньшова (см. [7], стр. 440), в формулировке которой берется

$$q=2^m;\ \nu=\left[\frac{m^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2+\varepsilon}}}{\delta_0}\right],\ [c,\ d]=\Delta=[a,\ b],\ \delta=\frac{|\Delta|}{2^m\, m},$$

можно определить измеримое множество G_m такое, что

$$G_m\subset\Delta,\ |G_m|>\left(1-5\frac{\delta_0}{m^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2+\varepsilon}}}\right), \tag{13}$$

$$\left|\int_0^{2\pi}\varphi_m(x)\,\frac{\sin n\,(t-x)}{t-x}\,dx\right|\leqslant\frac{c_1}{\delta_0\, m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2+\varepsilon}}},\ x\in G_m, \tag{14}$$

$$n=1,\ 2,\ \cdots\ (c_1=\text{const}).$$

Отсюда и из того, что

$$g_m(x)=\frac{\gamma}{\sqrt{m}}\,\chi_\Delta(x)-\gamma\sqrt{m}\,\varphi_m(x)\ (\text{см. }(1),(7),(12)),$$

при $x\in G_m$ будем иметь

$$|S_n(x,\ g_m)|<\frac{c_2\, m^{\frac{1}{2+\varepsilon}}\,|\gamma|}{\delta_0}\ (c_2=\text{const}).$$

Следовательно

$$\sup_{N_{m-1}<n<N_m} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}}\left|\sum_{N_{m-1}<|k|<n}a_k^{(m)}e^{ikx}\right|<\frac{c_2|\gamma|}{\delta_0},\ x\in G_m. \tag{15}$$

Определим множества E, G, функцию $g(x)$ и полином $P(x)$ следующим образом:

$$\begin{gathered}E=[0,\ 2\pi]\diagdown\left(\bigcup_{m=q_0}^{q}E_m\right),\\ G=E\cap\left\{\bigcap_{m=q_0}^{q}A_m\cap\left(G_m\cup\left([0,2\pi]\diagdown\left[a-\frac{\delta_0}{2}|\Delta|;\ b+\frac{\delta_0}{2}|\Delta|\right]\right)\right)\right\},\end{gathered} \tag{16}$$

$$g(x)=\begin{cases}\gamma\chi_\Delta(x), & x\in E\\ \bar g(x), & x\in\bigcup\limits_{m=q_0}^{q}E_m,\end{cases} \tag{17}$$

где

$$\bar g(x)=\sum_{m=q_0}^{q}m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}}g_m(x),$$

$$P(x)=\sum_{m=q_0}^{q}m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}}P_m(x)=\sum_{M_0<|k|<M}a_k e^{ikx}, \tag{18}$$

а

$$a_k=m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}}a_k^{(m)},\ N_{m-1}<|k|\leqslant N_m. \tag{18°}$$

$$M_0 < M_0 = N_{q_0 - 1}, \quad M = N_q.$$

Очевидно, что (см. (1), (7), (9), (11), (17), (16))

$$|E| > 2\pi - \frac{\varepsilon}{2}, \quad g(x) = 0 \text{ вне } \Delta.$$

В силу (1), (4), (7), (10), (18), (17), имеем

$$\int_0^{2\pi} |P(x) - g(x)|\, dx \leqslant \int_0^{2\pi} |g(x) - \bar{g}(x)|\, dx +$$

$$+ \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} \int_0^{2\pi} |P_m(x) - g_m(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon_0}{2} + \int_{\Delta \cap E} |\gamma| \sum_{m=q_0}^{q} \left| m^{-\frac{1}{2+\varepsilon} - \frac{1}{2}} - 1 \right| dx < \varepsilon.$$

Из (1), (2), (7), (9), (10), (17), (16) следует

$$\int_\Delta |g(x)|\, dx = \int_{\Delta \cap E} |g(x)|\, dx + \int_{\Delta \cap \left(\bigcup_{m=q_0}^{q} E_m\right)} \left| \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} g_m \right| dx <$$

$$\leqslant |\gamma| \cdot |\Delta \cap E| + |\gamma| \sum_{k=q_0}^{q} \int_{E_k} \left| \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} I_m (2^{s_m} \cdot x) \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant [illegible] \sum_{k=q_0}^{q} \int_{\Delta \cap E_k} \left| k^{\frac{1}{2}} \cdot k^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} + \sum_{\substack{m=q_0 \\ m \neq k}}^{q} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon} - \frac{1}{2}} \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant |\gamma|\, |\Delta| + |\gamma| \cdot \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon} - \frac{1}{2}} \sum_{k=q_0}^{q} \int_{\Delta \cap E_k} dx +$$

$$+ |\gamma| \cdot \sum_{m=q_0}^{q} \int_{\Delta \cap E_k} k^{\frac{1}{2}} \cdot k^{-\frac{1}{2+\varepsilon}}\, dx \leqslant |\gamma|\, |\Delta| \left(1 + \frac{1+\varepsilon}{2} \cdot \varepsilon\right) +$$

$$+ |\gamma| \cdot \sum_{k=q_0}^{q} k^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} \cdot k^{\frac{1}{2}} \cdot |\Delta| \cdot |E_k| \leqslant$$

$$\leqslant |\gamma|\, |\Delta|\, [2 + (2+\varepsilon) \cdot \varepsilon] \leqslant |\gamma| \cdot |\Delta|.$$

Ввиду того, что (см. (1), (7), (18))

$$\int_\Delta g_m^2(x)\, dx = \gamma^2 \int_\Delta I_m^2 (2^{s_m} \cdot x)\, dx = \gamma^2 \int_{\Delta \cap E_m} m\, dx +$$

$$+\gamma^2 \int\limits_{\Delta\setminus E_m} \frac{1}{m}\,dx = \gamma_m^2 |\Delta||E_m| +$$ (1

$$+\gamma^2 \frac{1}{m} |\Delta\setminus E_m| \leqslant 3\pi\gamma^2 |\Delta|,$$

из (7) для всех $m \geqslant 1$ получим

$$\left(\sum_{N_{m-1}<|k|<N_m} |a_k^{(m)}|^{2+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2+\varepsilon}} < \left(\sum_{N_m-1<|k|<N_m} |a_k^{(m)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} <$$

$$< 2\left(\int\limits_{\Delta} g_m^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2\pi|\gamma|\sqrt{|\Delta|},$$

отсюда и из (9), (18°) имеем

$$\sum_{M_0<|k|<M} \left| a_k \right|^{2+\varepsilon} = \sum_{m=q_0}^{q} \left(\sum_{N_{m-1}<|k|<N_m} \left[m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} \cdot \left| a_k^{(m)} \right| \right]^{2+\varepsilon} \right) =$$

$$= \sum_{m=q_0}^{q} \frac{1}{m} \sum_{N_{m-1}<|k|<N_m} \left| a_k^{(m)} \right|^{2+\varepsilon} < (2\pi|\gamma|\sqrt{|\Delta|}+2)^{2+\varepsilon} \sum_{m=q_0}^{q} \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Ввиду того, что

$$g_m(x) = 0 \text{ вне } \Delta \text{ (см. (7))}$$

при $x \in [0, 2\pi] \setminus \left[a - \frac{\delta_0}{2}|\Delta|;\ b + \frac{\delta_0}{2}|\Delta|\right]$, $q_0 \leqslant m \leqslant q$

будем иметь

$$|S_n(x, g_m)| \leqslant \frac{1}{\frac{\delta_0}{2}|\Delta|} |g_m(x)|\,dx < \frac{|\gamma|}{\sqrt{m}\,\delta_0} < \frac{\varepsilon_0}{4} \text{ (см. (8))},$$

следовательно

$$\left| \sum_{N_{m-1}<|k|<n} a_k^{(m)} e^{ikx} \right| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \text{ при } x \overline{\in} \left[a - \frac{\delta_0|\Delta|}{2};\ b + \frac{\delta_0|\Delta|}{2} \right], \tag{20}$$

$$n = N_{m-1}+1, \cdots, N_m.$$

Из (1), (2), (6), (10), (11), (13) и (16) следует

$$|G| > 2\pi - \delta_0|\Delta|.$$

Теперь проверим выполнение условий 5) и 6) леммы 1. Пусть $n \in [M_0, M]$, тогда для некоторого натурального $m_0 \in [q_0, q]$ имеем

$$\sum_{M_0<|k|<n} a_k e^{ikx} = \sum_{m=q_0}^{m_0-1} \frac{P_m(x)}{m^{\frac{1}{2+\varepsilon}}} + \sum_{N_{m_0-1}<|k|<n} a_k e^{ikx}. \tag{21}$$

Отсюда и из (1), (2), (5), (7), (10), (13), (15), (16), (20), при $x\in G$ получим

$$\left|\sum_{M_0<|k|<n} a_k e^{ikx}\right| \leqslant \sum_{m=q_0}^{m_0-1} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} |P_m(x)-g_m(x)| +$$

$$+\sum_{m=q_0}^{m_0-1} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} |g_m(x)| + \left|\sum_{N_{m_0-1}<|k|<n} a_k e^{ikx}\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} + |\gamma| \left[\sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}-\frac{1}{2}} + \frac{c_2|\gamma|}{\delta_0}\right] \chi_\Delta(x) <$$

$$\leqslant \begin{cases} \dfrac{c_0|\gamma|}{\delta_0}, & x\in G\cap\Delta \\ \varepsilon_0, & x\in G\setminus\Delta \end{cases}; \quad c_0=\mathrm{const}.$$

Учитывая соотношения (1), (2), (4), (7), (10), (19), (21) имеем

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{M_0<|k|<n} a_k e^{ikx}\right| dx < \sum_{m=q_0}^{m_0-1} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} \int_0^{2\pi} |P_m(x)-g_m(x)|\,dx +$$

$$+ m_0^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} \cdot \left(\sum_{N_{m_0-1}<|k|<N_{m_0}} [a_k^{(m_0)}]^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon_1}} \int_0^{2\pi} |g_m(x)|\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 4 m_0^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} |\gamma| \sqrt{|\Delta|} +$$

$$+\sum_{m=q_0}^{q} |\gamma|\, m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} \left[\int_{E_m\cap\Delta} \sqrt{m}\,dx + \int_{\Delta\setminus E_m} \frac{dx}{\sqrt{m}}\right] <$$

$$\leqslant \varepsilon + |\gamma| \sum_{m=q_0}^{q} \left(\sqrt{m}\,|\Delta|\,|E_m| + \frac{|\Delta|}{\sqrt{m}}\right) m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} \leqslant 13|\gamma|\,|\Delta|.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любой функции $f(x)\in L[0, 2\pi]$, $\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx<1$ и для любых чисел $0<\varepsilon<1$, $N_0>2$ существуют функция $g(x)\in L[0, 2\pi]$, множества G, $E\in[0, 2\pi]$ и полином $P(x)$ вида*

$$P(x)=\sum_{N_0<|k|<N} c_k e^{ikx},$$

удовлетворяющие условиям

$$f(x)=g(x);\quad x\in E,\ |E|>2\pi-\varepsilon,$$

$$\int_0^{2\pi}|g(x)|\,dx\leqslant 4\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx,\quad \int_0^{2\pi}|P(x)-g(x)|\,dx<\varepsilon,\quad \sum_{N_0<|k|<N}|c_k|^{2+\varepsilon}<\varepsilon,$$

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{N_0<|k|<n}c_k e^{ikx}\right|dx\leqslant 14\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx,\quad N_0<n\leqslant N,$$

$$\max_{N_0<n<N}\left|\sum_{N<|k|<n}c_k e^{ikx}\right|\leqslant\frac{B\,|f(x)|}{\sqrt{\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx}}+\varepsilon,\quad x\in G,$$

$$|G|>2\pi-\sqrt{\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx}\,,\quad B=\text{const}.$$

Доказательство. Возьмем ступенчатую функцию

$$\varphi(x)=\sum_{\nu=1}^{\nu_0}\gamma_\nu\chi_{\Delta_\nu}\ (\Delta_\nu\ \text{имеет вид}\ \Delta_n^{(k)})$$

такую, что

$$\int_0^{2\pi}|f(x)-\varphi(x)|\,dx<\frac{\varepsilon_0^2}{4^2}\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx,\quad \int_0^{2\pi}|\varphi(x)|\,dx<1,\tag{24}$$

где

$$\varepsilon_0=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2};\ \frac{\delta}{2}\right\},\quad \delta=\frac{1}{2}\sqrt{\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx}.\tag{25}$$

Пусть

$$B_0=\left\{x\in[0,\,2\pi];\ |f(x)-\varphi(x)|<\frac{\delta\varepsilon_0}{2}\right\}.\tag{26}$$

Очевидно, что

$$|B_0|>2\pi-\frac{\delta\varepsilon_0}{2}.\tag{27}$$

Последовательным применением леммы 1 можно определить функции $g_\nu(x)$, множества E_ν, G_ν; $1\leqslant\nu\leqslant\varepsilon_0$ и полиномы $P_\nu(x)$

$$P_\nu(x)=\sum_{N_{\nu-1}<|k|<N_\nu}a_k^{(\nu)}e^{ikx},\quad N_0<N_1<\cdots<N_{\nu_0},$$

которые удовлетворяют условиям

$$g_\nu(x)=\begin{cases}\gamma_\nu, & x\in E_\nu\cap\Delta_\nu\\ 0, & x\,\overline{\in}\,\Delta_\nu,\end{cases}\quad |E_\nu|>2\pi-\frac{\varepsilon_0}{2^{\nu+1}},\tag{28}$$

$$\int_0^{2\pi}|P_\nu(x)-g_\nu(x)|\,dx<\frac{\varepsilon_0^2}{4^{\nu+1}}.\tag{29}$$

$$\int_0^{2\pi} |g_\nu(x)|\, dx < 4\, |\gamma_\nu|\, |\Delta_\nu|, \tag{30}$$

$$\max_{N_{\nu-1} < n < N_\nu} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{N_{\nu-1} < |k| < n} c_k^{(\nu)} e^{ikx} \right| dx \leqslant 13\, |\gamma_\nu|\, |\Delta_\nu|, \tag{31}$$

$$\max_{N_{\nu-1} < n \leqslant N_\nu} \left| \sum_{N_{\nu-1} < |k| < n} c_k^{(\nu)} e^{ikx} \right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{c_0\, |\gamma_\nu|}{\delta}, & x \in G_\nu \cap \Delta_\nu \\ \dfrac{\varepsilon}{2^{\nu+1}}, & x \in G_\nu \setminus \Delta_\nu, \end{cases} \tag{32}$$

$$|G_\nu| > 2\pi - \delta \cdot |\Delta_\nu|, \tag{33}$$

$$\sum_{N_{\nu-1} < |k| \leqslant N_\nu} |c_k^{(\nu)}|^{2+\varepsilon_0} < \frac{\varepsilon_0}{2^{\nu+1}}. \tag{34}$$

Положим

$$B_\nu = \left\{ x \in [0, 2\pi],\ |P_\nu(x) - g_\nu(x)| < \frac{\varepsilon_0}{2^\nu} \right\}, \tag{35}$$

$$E = \bigcap_{\nu=1}^{\nu_0} E_\nu,\quad G = \bigcap_{\nu=1}^{\nu_0} (G_\nu \cap B_\nu) \cap E \cap B_0, \tag{36}$$

$$g(x) = f(x) - [\bar g(x) - \varphi(x)],\quad \bar g(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} g_\nu(x), \tag{37}$$

$$P(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} P_\nu(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \left(\sum_{N_{\nu-1} < |k| < N_\nu} c_k^{(\nu)} e^{ikx} \right) = \tag{38}$$

$$= \sum_{N_0 < |k| < N} c_k e^{ikx},$$

где

$$c_k = c_k^{(\nu)},\ \text{при}\ N_{\nu-1} < |k| \leqslant N_\nu,\ N = N_{\nu_0}. \tag{39}$$

В силу (29) и (35) имеем

$$|B_\nu^{(c)}| \frac{\varepsilon_0}{2^\nu} < \int_{B_\nu^{(c)}} |P_\nu(x) - g_\nu(x)|\, dx < \frac{1}{4} \frac{\varepsilon_0^2}{4^{\nu+1}}.$$

Отсюда вытекает, что

$$|B_\nu| > 2\pi - \frac{1}{4} \frac{\varepsilon_0}{2^\nu}\ (B_\nu^{(c)} = [0, 2\pi] \setminus B_\nu).$$

Очевидно, что (см. (27), (33), (35), (36))

$$|E| > 2\pi - \varepsilon,\ |G| > 2\pi - \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx}.$$

Из (24) — (30), (34), (37), (39) вытекает, что $(x\ g\, x) = f(x)$, $\in E$,

$$\int_0^{2\pi} |g(x)|\,dx \leqslant 4 \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx,$$

$$\int_0^{2\pi} |P(x) - g(x)|\,dx < \varepsilon, \quad \sum_{N_0 < |k| < N} |c_k|^{2+\varepsilon} < \varepsilon.$$

Пусть $n \in [N_0, N]$, тогда для некоторого $\nu_1 < \nu_0$ $N_{\nu_1 - 1} < n \leqslant N_{\nu_1}$ из (38) имеем

$$\sum_{N_0 < |k| < n} c_k e^{ikx} = \sum_{\nu=1}^{\nu_1 - 1} P_\nu(x) + \sum_{N_{\nu_1} - 1 < |k| < n} c_k^{(\nu_1)} e^{ikx}. \tag{38}$$

Отсюда и из (28), (30), (34), при $x \in G$ будем иметь

$$\left| \sum_{N_0 < |k| < n} c_k e^{ikx} \right| < \sum_{\nu=1}^{\nu_1 - 1} |P_\nu(x) - g_\nu(x)| +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\nu_0} |g_\nu(x)| + \left| \sum_{N_{\nu_1} - 1 < |k| \leqslant n} c_k^{(\nu_1)} e^{ikx} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon_0}{2} + |\varphi(x)| + \frac{\varepsilon_0}{2^{\nu_1}} + \frac{c_0 |\gamma_{\nu_1}|}{\delta} \chi_{\Delta_1}(x) < \frac{B|f(x)|}{\sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx}} + \varepsilon.$$

Учитывая соотношения (24)—(31), (38) получим

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{N_0 < |k| \leqslant n} c_k e^{ikx} \right| dx \leqslant \sum_{\nu=1}^{\nu_1 - 1} \int_0^{2\pi} |P_\nu(x) - g_\nu(x)|\,dx +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \int_0^{2\pi} |g_\nu(x)|\,dx + \int_0^{2\pi} \left| \sum_{N_{\nu_1} - 1 < |k| < n} c_k^{(\nu_1)} e^{ikx} \right| dx \leqslant 10 \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\varepsilon > 0$, если обозначим через

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots. \tag{39}$$

последовательность тригонометрических полиномов с рациональными коэффициентами и последовательно применим лемму 2 можно найти последовательности функций $\{\overline{g}_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, множеств $\{\overline{E}_k\}$, $\{\overline{G}_k\}$ и полиномов $\overline{P}_k(x)$ вида

$$\overline{P}_s(x) = \sum_{N_{s-1} < |k| < N_s} c_k^{(s)} e^{ikx}, \quad 1 < N_0 < N_1 < \cdots < N_s,$$

которые удовлетворяют условиям

$$\overline{g}_s(x) = f_s(x), \; x \in \overline{E}_s, \; |\overline{E}_s| > 2\pi - \frac{\varepsilon}{2^{s+1}}, \tag{40}$$

$$\int_0^{2\pi} |\overline{g}_s(x)|\,dx \leqslant 4\int_0^{2\pi} |f_s(x)|\,dx, \tag{41}$$

$$\int_0^{2\pi} |\overline{P}_s(x)-\overline{g}_s(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{4^{s+1}}, \tag{42}$$

$$\sum_{N_{s-1}<|k|<N_s} |c_k^{(s)}|^{2+\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2^{s+1}}, \tag{43}$$

$$\max_{N_{s-1}<n\leqslant N_s} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{N_{s-1}<|k|<n} c_k^{(s)} e^{ikx} \right| dx < 24 \int_0^{\pi} |f_s(x)|\,dx, \tag{44}$$

$$\max_{N_{s-1}<n<N_s} \left| \sum_{N_{s-1}<|k|<n} c_k^{(s)} e^{ikx} \right| \leqslant \frac{B|f_s(x)|}{\sqrt{\int_0^{2\pi} |f_s(x)|\,dx}} + \frac{\varepsilon}{2^s};\ x\in \overline{G}_s, \tag{45}$$

$$|\overline{G}_s| < 2\pi - \sqrt{\int_0^{2\pi} |f_s(x)|\,dx}\,. \tag{46}$$

Положим

$$E = \bigcap_{s=1}^{\infty} \overline{E}_s. \tag{47}$$

Очевидно, что (см. (40)) $|E|>2\pi-\varepsilon$. Покажем, что множество E удовлетворяет требованиям теоремы 2. Пусть $f(x)\in L[0, 2\pi]$. Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{k_s}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ из последовательности (39) такую, что

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{s=1}^{N} f_{k_s}(x) - f(x) \right| dx = 0,\ f_{k_1}(x) = \sum_{|k|<N_1} b_k e^{ikx}, \tag{48}$$

$$\frac{\varepsilon}{2^{4(s+1)}} < \int_0^{2\pi} |f_{k_s}(x)|\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{4s}},\ s\geqslant 2, \tag{49}$$

Предположим, что уже определены числа $k_1<\nu_1<\cdots<\nu_{q-1}$, функции $g_j(x)$, f_{ν_j}, $j<q$, множества E_j, G_j и полиномы

$$P_j(x) = \sum_{M_{j-1}<|k|<\overline{M}_j} a_k^{(j)} e^{ikx},\ M_{j+1} = N_{\nu_{j+1}} > \overline{M}_j = N_{\nu_j+1}, \tag{50}$$

удовлетворяющие условиям

$$g_j(x) = f_{k_j}(x),\ x\in E_j = \overline{E}_{k_j}, \tag{51}$$

$$\int_0^{2\pi} |g_j(x)|\,dx < 2^{-2j},\ j<q, \tag{52}$$

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{j=2}^{q_0}[P_j(x)-g_j(x)]\right|dx<2^{-2q_0},\ q_0<q, \tag{53}$$

$$\sum_{M_{j-1}<|k|<\overline{M}_j}|a_k^{(j)}|^{2+\varepsilon/2j}<\frac{\varepsilon}{2^j}. \tag{54}$$

$$\max_{M_{j-1}<n<\overline{M}_j}\left|\sum_{M_{j-1}<|k|<n}a_k^{(j)}e^{ikx}\right|<2^{-j},\ x\in G_j, \tag{55}$$

$$\max_{M_{j-1}<n<\overline{M}_j}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{M_{j-1}<|k|<n}a_k^{(j)}e^{ikx}\right|dx<2^{-j}, \tag{56}$$

$$|G_j|>2\pi-2^{-j+1}. \tag{57}$$

Возьмем функцию $\varphi(x)=f_{\nu_q}(x)$ из последовательности (39) такую, что $\nu_q>q+10$

$$\int_0^{2\pi}\left|\varphi(x)-\left\{f_{k_q}(x)-\sum_{j=2}^{q-1}[P_j(x)-g_j(x)]\right\}\right|dx<\frac{\varepsilon}{B2^{16(q+1)}}. \tag{58}$$

Ввиду того, что (см. (49), (53))

$$\int_0^{2\pi}\left|f_{k_q}(x)-\sum_{j=2}^{q-1}[P_j(x)g_j(x)]\right|dx<\frac{\varepsilon}{2^{3q}}, \tag{59}$$

из (58) вытекает

$$\int_0^{2\pi}|f_{\nu_q}(x)|\,dx=\int_0^{2\pi}|\varphi(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2^{2q}}, \tag{60}$$

Положим

$$P_q(x)=\overline{P}_{\nu_q}(x)=\sum_{N_{\nu_q-1}<|k|<N_{\nu_q}}c_k^{(\nu_q)}e^{ikx}=\sum_{M_q<|k|<\overline{M}_q}a_k^{(q)}e^{ikx}, \tag{61}$$

где

$$a_k^{(q)}=c_k^{(\nu_q)}.\ M_q=N_{\nu_q-1}<|k|<N_{\nu_q}=\overline{M}_q, \tag{62}$$

$$g_q(x)=f_{k_q}(x)+[\overline{g}_{\nu_q}(x)-f_{\nu_q}(x)], \tag{63}$$

$$F_s=\left\{x\in[0,2\pi],\ |f_{k_s}(x)|<\frac{\varepsilon}{2^{3s}}\right\}\cdot\ s\geqslant 2, \tag{64}$$

где

$$G_q=\overline{G}_{\nu_q}\cap F_q,\ E_q=\overline{E}_{\nu_q}.$$

Ввиду того, что (см. (49))

$$\frac{\varepsilon}{2^{3s}}|F_s^{(c)}|<\int_{F_s^{(c)}}|f_{k_s}(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2^{4s}}\ (F_s^{(c)}=[0,2\pi]\setminus F_s)\ (s\geqslant 2)$$

будем иметь

$$|F_s| > 2\pi - 2^{-s}, \quad s \geqslant 2. \tag{65}$$

Учитывая соотношения (40)—(51), (53), (58)—(65), получим

$$g_q(x) = f_{k_q}(x), \text{ при } x \in E_q, \tag{66}$$

$$\int_0^{2\pi} |g_q(x)|\,dx \leqslant \int_0^{2\pi} \left| \varphi(x) - \left\{ f_{k_q}(x) - \sum_{j=2}^{q-1} [P_j(x) - g_j(x)\right\} \right| dx +$$

$$+ \int_0^{2\pi} |\bar{g}_{\nu_q}(x)|\,dx + \int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=2}^{q-1} [P_l(x) - q_j(x)] \right| dx < \frac{\varepsilon}{2^q}, \tag{67}$$

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=2}^{q} \right| [P_j(x) - g_j(x)] \left| dx < \int_0^{2\pi} |\bar{g}_{\nu_q}(x) - P_{\nu_q}(x)| dx + \right.$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left| \varphi(x) - \left\{ f_{k_q}(x) - \sum_{j=2}^{q-1} [P_j(x) - g_j(x)] \right\} \right| dx < \frac{\varepsilon}{2^{2q}}, \tag{68}$$

$$\max_{M_q < n \leqslant \overline{M}_q} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{M_q < |k| \leqslant n} a_k^{(q)} e^{ikx} \right| dx < 2^{-q}, \tag{69}$$

при $x \in G_q$,

$$\max_{M_q < n \leqslant \overline{M}_q} \left| \sum_{M_q < |k| \leqslant n} a_k^{(q)} e^{ikx} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2^{2q}} + B |f_{\nu_q}^{(x)}| \cdot \left(\int_0^{2\pi} |f_{\nu_q}(x)|\,dx \right)^{-1/2} \leqslant 2^{-q}, \tag{70}$$

$$|G_q| > 2\pi - \sqrt{\int_0^{2\pi} |f_{\nu_q}(x)|\,dx}, \tag{71}$$

$$\sum_{M_q < |k| \leqslant \overline{M}_q} \left| a_k^{(q)} \right|^{2 + \frac{\varepsilon}{2q}} < \frac{\varepsilon}{2^q}. \tag{72}$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций $\{g_q(x)\}$, множеств $\{E_q\}$, $\{G_q\}$ и полиномов $\{P_q(x)\}$, удовлетворяющих условиям (66)—(72) для всех $q \geqslant 2$. Из (67) вытекает

$$\sum_{q=2}^{\infty} \int_0^{2\pi} |g_q(x)|\,dx < \infty. \tag{73}$$

Определим функцию $g(x)$ и ряд $\sum_{|k| \geqslant 0} c_k e^{ikx}$ следующим образом:

$$g(x)=\sum_{q=2}^{\infty} g_q(x)+f_{k_1}(x)\; \left(f_{k_1}(x)=\sum_{|k|<M_1} b_k e^{ikx}\right), \tag{74}$$

$$\sum c_k e^{ikx} \sum_{|k|\leqslant M_1} b_k e^{ikx}+\sum_{q=2}^{\infty}\left(\sum_{M_q<|k|<\overline{M}_q} a_k^{(q)} e^{ikx}\right), \tag{75}$$

где

$$c_k=\begin{cases} b_k, & \text{при } |k|\leqslant M_1 \\ a_k^{(q)}, & \text{при } M_q<|k|\leqslant \overline{M}_q,\ q\geqslant 2 \\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases} \tag{76}$$

Из (48), (66), (73), (74) вытекает $g(x)\in L_{[0,2\pi]}$, $g(x)=f(x)$ на $E=\bigcap=\overline{E}_q$. Пусть n—произвольное натуральное число. Тогда для некоторого натурального числа q, $M_q<n\leqslant M_{q+1}$, из усолвий (62), (67), (69), (70), (74)—(76) следует

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{|k|<n} c_k e^{ikx}-g(x)\right| dx\leqslant \int_0^{2\pi}\left|\sum_{j=2}^{q-1}[P_j(x)-g_j(x)]\right| dx+$$

$$+\int_0^{2\pi}\left|\sum_{M_q<|k|<n} a_k^{(q)} e^{ikx}\right| dx+\sum_{j=q}^{\infty}\int_0^{2\pi}|g_j(x)|\,dx<2^{-q+2},$$

т. е. ряд (75) является рядом Фурье функции $g(x)$ и сходится к ней в метрике L^1. Теперь докажем, что ряд (75) сходится также почти всюду на $[0,2\pi]$. Положим

$$A_q=\left\{x\in[0,2\pi],\ \left|\sum_{j=2}^{q}[P_j(x)-g_j(x)]\right|<2^{-q}\right\}, \tag{77}$$

$$B_q=\left\{x\in[0,2\pi],\ \left|\sum_{j=q}^{\infty} g_j(x)\right|<2^{-q}\right\}, \tag{78}$$

$$B=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{q=m}^{\infty}(A_q\cap B_q\cap G_q). \tag{79}$$

В силу (67), (68), (77), (78), имеем

$$|A_q|>2\pi-2^{-q},\quad |B_q|>2\pi-2^{-q}.$$

Отсюда и из (71)—(79) следует, что $|B|=2\pi$.

Пусть $x\in B$, тогда существует натуральное число q_0 такое, что $x\in A_q\cap B_q\cap G_q$, при $q\geqslant q_0$.

Пусть, далее, $M_q<n\leqslant M_{q+1}$, $q\geqslant q_0$. Учитывая соотношения (70), (74), (75), получим

$$\left|\sum_{|k|<n} c_k e^{ikx}-g(x)\right|\leqslant\left|\sum_{j=2}^{q-1}[P_j(x)-g_j(x)]\right|+$$

$$\left|\sum_{M_q<|k|<n} a_k^{(q)} e^{ikx}\right|+\left|\sum_{j=q}^{\infty} g_j(x)\right|<3\cdot 2^{-q}\to 0.$$

Из (48), (54), (67), (74) вытекает

$$\int_0^{2\pi} |g(x)-f(x)|\,dx < \varepsilon, \quad \sum_{|k|>0} |c_k|^{2+\varepsilon} < \infty.$$

Теорема 2 доказана.

Ереванский государственный университет

Поступила 22. III. 1989

Մ. Գ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Ինտեգրելի ֆունկցիաների Ֆուրիեի շարքերի համարյա ամենուրեք և L^1 մետրիկայով զուգամիտության և Ֆուրիեի գործակիցների մասին *(ամփոփում)*

Ցանկացած ε թվի համար կառուցվում է չափելի $E\subset[0, 2\pi]$ բազմություն $|E|>2\pi-\varepsilon$ այնպիսին, որ յուրաքանչյուր $f(x)\in L_{[0, 2\pi]}$ ֆունկցիայի համար հնարավոր լինի գտնել E-ի վրա f(x)-ին հավասար արժեքներ ընդունող $g(x)\in L_{[0, 2\pi]}$ ֆունկցիա, որի Ֆուրիեի շարքը համարյա ամենուրեք և L^1 մետրիկայով զուգամիտում է և Ֆուրիեի գործակիցների հաջորդականությունը $\{c_k(g)\}\subset l_p$ բոլոր $p>2$ համար:

M. G. GRIGORJAN. *On the conwergence in L^1 metric and almost everywhere of the Fourier series and on the Fourier coefficients of integrable functions* (summary)

The following theorem in proved. Theorem. For every $\varepsilon>0$ there exists a measurable set $E\subset[0, 2\pi]$, $|E|>2\pi-\varepsilon$ such that for every function $f(x)\in L$ exists an integrable function $g(x)$, $(g)x)=f(x)$ for $x\in E$ such that the trigonometric Fourier series of $g(x)$ converges almost everywhere and in L^1 metric and

$$\{c_k(g)\}\in l_p, \text{ for all } p>2,$$

$$c_k(g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-ikt}\,dt.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Н. Лузин.* К основной теореме интегрального исчисления, Мат. сб., т. 28, № 2, 1912, 266—294.
2. *Д. Е. Меньшов.* Sur la representation des fonctiors nos. par series trigonometrikes, М. с. 9, (51), 1941, 667—692.
3. *Д. Е. Меньшов.* О рядах Фурье от суммируемых функций, Труды ММО, 1, 1932, 5—38.
4. *П. Л. Ульянов.* Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, УМН, 19, вып. I, 1964, 3—68.
5. *Y. Katznelson.* On a theorem of Menchoff, А. М. с., 1975, 53, № 2, 396—398.
6. *А. М. Олевский.* Существование функций с неустранимыми особенностями Карлемана, ДАН СССР, 238, № 4, 1978, 796—799.
7. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, Физматгиз, М., 1961.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 1, 1991 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.95.

А. А. АНДРЯН

К ТЕОРИИ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ СОСТАВНОГО ТИПА С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

Рассмотрим систему первого порядка вида

$$\frac{\partial u}{\partial y} = A\frac{\partial u}{\partial x} + Bu, \tag{1}$$

где A и B—действительные постоянные матрицы порядка n, $u=(u_1, \ldots, u_n)$—искомая вектор-функция. Предположим, что собственные значения $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ матрицы A различны и $\lambda_j = \bar{\lambda}_{j+m}$ ($\operatorname{Im}\lambda_j < 0$, $j \leqslant m$), $\lambda_{2m+1}, \cdots, \lambda_n \in R$.

Характеристическое уравнение, соответствующее системе (1), имеет вид

$$\det(\lambda J - Ap - B) = 0, \tag{2}$$

где $p=\sigma+i\tau$—комплексный параметр, а I—единичная матрица. Для корня $\lambda_j(p)$ уравнения (2) имеем представление [1]

$$\lambda_j(p) = p\left(\lambda_j + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{jk} p^{-k}\right), \quad |p| \gg 1, \tag{3}$$

Из (3) вытекает, что существуют полуплоскости $\operatorname{Re}p<a$ и $\operatorname{Re}p>b$, вне которых корни $\lambda_1(p), \ldots, \lambda_n(p)$ различны и следовательно аналитичны.

В работе при помощи двустороннего преобразования Фурье-Лапласа [2] в полуплоскости $\pi_+ = \{(x, y) \mid x \in R,\ y > 0\}$ и полосе $D = \{x, y) \mid x \in R,\ 0 < y < 1\}$ для системы (1) изучаются различные граничные задачи.

§ 1. Граничная задача в полуплоскости

Пусть α, β, $a \in R$. Введем классы функций

$$H^m_{\alpha,\beta}(\pi_+) = \left\{ u(x, y) \,\middle|\, \sup_{\substack{y>0 \\ \sigma\in[\alpha,\beta]}} \exp(-ay) \sum_{j=0}^{m} \|\exp(-\sigma x) D^j u\|_{xL_2} < \infty \right\},$$

$$H^m_{\alpha,\beta}(R) = \left\{ u(x) \,\middle|\, \sup_{\sigma\in[\alpha,\beta]} \sum_{j=0}^{m} \|\exp(-\sigma x) D^j_x u\|_{L_2} < \infty \right\},$$

$$A^a_m(\Omega) = \left\{ F(p, y) \,\middle|\, \sup_{\substack{y>0 \\ \sigma\in[\alpha,\beta]}} \exp(-ay) \|(1+|p|)^m F(p, y)\|_{L_2} < \infty \right\},$$

где $F(p, y)$ аналитична в полосе $\Delta: \alpha < \mathrm{Re}\, p < \beta$, $p = \sigma + i\tau$, если же $F(p, y)$ не зависит от y, то соответствующее пространство обозначим через $A_m(\Omega)$.

Через $l_j(p)$ обозначим собственный вектор матрицы $Ap+B$, соответствующий собственному значению $\lambda_j(p)$. Из (3) вытекает, что аналитическая вектор-функция $l_j(p)$ представляется в виде

$$l_j(p) = p\left(\alpha_j + \sum_{k=1}^{+\infty} d_{jk} p^{-k}\right), \ |p| \gg 1,$$

где α_j—собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ_j. Пусть $u \in H^{m,a}_{\alpha,\beta}$ — решение системы (1), а $\hat{u}(p, y) = \langle u(x, y), \exp(-px) \rangle$—его образ Лапласа [2]. Из (1) имеем следующее представление:

$$\hat{u}(p, y) = \sum_{j=1}^{n} g_j(p) (\exp(\lambda_j(p) \cdot y)\, l_j(p), \ \alpha < \mathrm{Re}\, p < \beta, \tag{1.1}$$

где $g_j(p)$—произвольные аналитические функции.

Имеет место

Лемма 1. *В представлении* (1.1) *функции* $g_1(p), \ldots, g_{2m}(p)$ *равны тождественно нулю.*

Доказательство. В силу равенства Парсеваля преобразование Лапласа устанавливает изоморфизм между пространствами $H^{m,a}_{\alpha,\beta}$ и A^a_m. Отсюда и из линейной независимости векторов $l_1(p), \cdots, l_n(p)$ вытекает, что $g_j(p) \exp(\lambda_j(p) \cdot y) \in A^a_{m+1}$, поэтому

$$\|(1 + |p|)^{m+1} g_j(p) \exp(\lambda_j(p)\, y)\|_{L_2} < \mathrm{cte} \exp(a \cdot y) \ \forall y > 0.$$

Согласно лемме Фату, устремляя $y \to 0^+$, получим $\|(1 + |p|)^{m+1} g_j(p)\|_{L_2} < \mathrm{cte}$, т. е. $g_j(p) \in A_{m+1}$. Из представления (3) вытекает существование чисел $\gamma > 0$ и $\delta > 0$ таких, что для $j \leqslant m$

$$\int_{\tau > \gamma} (1 + |p|)^{2(m+1)} |g_j(p)|^2 d\tau \leqslant \mathrm{cte} \exp(-\delta \cdot y),$$

что приводит, ввиду аналитичности $g_j(p)$, к $g_j(p) \equiv 0$, $j = 1, \cdots, m$. Точно также устанавливается, что $g_{m+1}(p), \cdots, g_{2m}(p) \equiv 0$. Лемма доказана.

Пусть $a \in R$ такое, что $Re\, \lambda_j(p) \leqslant a$, $j \geqslant 2m+1$, а $N = \|\alpha_{2m+1}, \cdots, \alpha_n\|$.

Граничная задача А. Требуется найти решение $u \in H^{0,a}_{\alpha,\beta}$ системы (1), удовлетворяющее граничному условию

$$Mu(x, 0) = f(x) \text{ в } H^0_{\alpha,\beta}(R), \tag{1.2}$$

где M — постоянная матрица размерности $(n-2m, n)$, а $f = (f_1, \cdots, f_{n-2m}) \in H^0_{\alpha,\beta}(R)$. Справедлива следущая

Теорема 1. *Существуют числа α и β $(\alpha<\beta)$ такие, что для корректности задачи А необходимо и достаточно, чтобы* $\det MN\neq 0$. *имеет место оценка*

$$\|u\|_{H^0_{*,\alpha,\beta}}\leqslant \mathrm{cte}\|f\|_{H^0_{*,\beta}}. \tag{1.3}$$

Доказательство. Подставим $\hat{u}(p, y)$ из (1.1) в (1.2). Так как $|\exp(\lambda_j(p)\cdot y)|\leqslant \mathrm{cte}$, $y\in[0, 1]$, то в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и равенства Парсеваля, получим

$$M(p)\,g(p)=\hat{f}(p),\quad \alpha<Re p<\beta, \tag{1.4}$$

где $\hat{f}(p)=\langle f(x), \exp(-px)\rangle$, $g(p)=(g_{2m+1}(p),\cdots, g_n(p))$, $M(p)=$ $=p\cdot MN+D+o(1)$, $|p|\gg 1$, D — вполне определенная постоянная матрица. Пусть $\det MN\neq 0$. Тогда $\det M(p)=c\cdot p^{n-2m}+o(p^{n-2m})$, где $c=\det MN$. Выбирая α и β мы добьемся того, что $\det M(p)\neq 0$, $p\in\Omega$. Отсюда для элементов $M^{ij}(p)$ обратной матрицы $M^{-1}(p)$ имеем оценку $|M_{ij}(p|<\mathrm{cte}\,|p|$. Из (1.4) имеем $g(p)=M^{-1}(p)\hat{f}(p)\in A_1(\Omega)$. Очевидно соответствующее решение $\hat{u}\in A_0^*(\Omega)$ и справедлива оценка (1.3).

Пусть теперь $\det MN=0$. Тогда, приводя матрицу MN к трапецоидальному виду нетрудно заметить, что либо система (1.4) не имеет решения, либо некоторые из компонент $g(p)$ принадлежат $A_0(\Omega)$, но не принадлежат $A_1(\Omega)$. А это приводит к тому, что $\hat{u}\,\overline{\in}\,(\Omega)$.

Замечание. Из вышеизложенного вытекает, что для корректности задачи Коши в классах $H^{m,\alpha}_{*,\beta}$ необходимо, чтобы собственные значения матрицы A были вещественны. Обратное не всегда верно. Действительно, легко проверить, что для оператора $L_1=\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\right)^2-$ $-k^2$ корректна задача Коши, а для оператора $L_2=\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\right)^2-$ $-\frac{\partial}{\partial x}$ — задача Дирихле.

§ 2. Смешанная граничная задача

Введем классы функций

$$H^m_{\alpha,\beta}(R_\pm)=\{f|\,f\in H^m_{*,\beta}(R),\ \mathrm{supp}^* f\subset\overline{R}_\pm\}.$$

Пусть M_1, M_2 — матрицы размерности $(n-2m, n)$ такие, что $\det M_1N\neq 0$, $\det M_2N\neq 0$.

Граничная задача В. Требуется найти решение $u(x, y)$ системы (1), принадлежащее классу $H^{0,\alpha}_{*,\beta}$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$M_1 u(x,\ 0) = h_+(x) \quad \text{в} \quad H^0_{\alpha,\beta}(R_+),$$
$$M_2 u(x,\ 0) = h_-(x) \quad \text{в} \quad H^0_{\alpha,\beta}(R_-), \tag{2.1}$$

где $h_\pm \in H^0_{\alpha,\beta}(R_\pm)$ — заданные вектор-функции.

Перепишем (2.1) в следующем виде:

$$M_1 u = h_+ + f_-,\ M_2 u = h_- + f_+, \tag{2.2}$$

где $f_\pm \in H^0_{\alpha,\beta}(R_\pm)$ — неизвестные вектор-функции. Переходя в (2.2) к образам Лапласа и подставляя $\hat{u}(p,\ g)$ из (1.1) ($g_1 = \cdots = g_{2m} = 0$), получим

$$M_1(p)\, g(p) = \hat{h}_+(p) + \hat{f}_-(p),\ M_2(p)\, g(p) = \hat{h}_-(p) + \hat{f}_+(p), \tag{2.3}$$

где $M_1(p) = pM_1 N + D_1 + o(1)$, $M_2(p) = p\, M_2 N + D_2 + o(1)$, $g(p) = (g_{2m+1}(p), \cdots, g_n(p))$.

Выберем α и β так, чтобы $\det M_1(p) \neq 0$, $\det M_2(p) \neq 0\ \forall\ p \in \Omega$.

Исключая $g(p)$ из (2.3), получим следующую задачу сопряжения:

$$\hat{f}_-(p) = K(p)\hat{f}_+(p) + F(p),\ \ p \in \Omega, \tag{2.4}$$

где $K(p) = M_1(p) \cdot M_2^{-1}(p)$, $F(p) = M_1(p)\ M_2^{-1}(p)\ \hat{h}_-(p) - \hat{h}_+(p) \in H^0_{\alpha,\beta}(R)$, $|K(p)| \leqslant \text{cte}$.

Пусть $A(p)$ — некоторая невырожденная в полосе $\alpha < \text{Re}\, p < \beta$ матрица с элементами $A_{ij}(p)$, непрерывными в ней, включая точку $p = \infty$.

Определение. Правой канонической факторизацией матрицы $A(p)$ называется представление её в виде

$$A(p) = A_-(p)\, D(p)\, A_+(p) \tag{2.5}$$

с диагональной матрицей $D(p) = \left\{ [(p - p_0)/(p - p_1)]^{\varkappa_j} \right\}_{jk}$, $\text{Re}\ \ p_0 > \beta$, $\text{Re}\ p_1 < \alpha$, где $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \cdots \geqslant \varkappa_n$ — целые числа, а $A_\pm(p)$ — квадратные матрицы порядка n, допускающее аналитические продолжения, соответственно, в области $Re\ p > \alpha$ и $Re\ p < \beta$, причем $\det A_+(p) \neq 0 (\text{Re}\ p > \alpha)$, $\det A_-(p) \neq 0\ (\text{Re}\, p < \beta)$, $\sup |A^{ij}_\pm(p)| \leqslant \text{cte}$. Имеет место

Лемма 2. *Матрица $K(p)$ в (2.4) допускает правую каноническую факторизацию.*

Доказательство. Дробно-линейное преобразование $t = \dfrac{p - p^1}{p - p_1}$ отображает полуплоскость $\text{Re}\, p > \alpha$ в круг $C_1 \ni 0$. При этом полуплоскость $\text{Re}\, p > \beta$ отображается в круг C_2, касающийся окружности ∂C^1 и содержащий точку 0. Очевидно функции $\det M_1(p)$ и $\det M_2(p)$ в области $\text{Re}\, p > \alpha$ имеют конечное число нулей, которые обозначим соответственно, через $p_{11}, \cdots, p_{1k_1}$ и $p_{21}, \cdots, p_{2k_2}$. Тем самым функция $\det K(p)$ имеет в точках $p_{11}, \cdots, p_{1k_1}$ полюсы, а в точках $p_{21}, \cdots, p_{2k_2}$ — нули. Их кратности обозначим, соответственно, через $m_1, \cdots, m_{k_1}$ и $r_1, \cdots, r_{k_2}$. Образы точек $p_{11}, \cdots, p_{2k_2}$ обозначим через $t_{11}, \cdots, t_{2k_2}$. Рассмотрим матрицу $N(t) = (t - t_{11})^{q_1} \cdots (t - t_{1k_1})^{q_{k_1}} K(\alpha(t))$, где $\alpha(t)=\frac{t p_1-p_0}{t-1}$, $q_1,\cdots,q_{k_1}$ такие, что в точках $t_{11},\cdots,t_{1k_1}$ элементы $N(t)$ аналитичны. Таким образом, функция $\det N(t)$ в области C_1 аналитична и имеет нули $t_{11},\cdots,t_{1k_1},t_{21},\cdots,t_{2k_2}$ с кратностями $nq_1-m_1,\cdots,nq_{k_1}-m_{k_1}$, $r_1,\cdots,r_{k_2}$. Согласно работе [3] матрица $N(t)$ допускает факторизацию вида

$$N(t)=N_-(t)\,D_0(t)\,N_+(t), \tag{2.6}$$

где $N_\pm(t)$ аналитичны и ограничены, соответственно, внутри и вне круга C_1, $\det N_\pm(t)\neq 0$, а $D_0(t)=\left\| t^{\varkappa_j^0}\delta_{jk}\right\|_1^n$ — диагональная матрица, при этом $\sum_{j=1}^{n}\varkappa_j^0=\sum_{j=1}^{k_1}(nq_j-m_j)+\sum_{j=1}^{k_2}r_j$. Заметим, что из процедуры построения факторизации (2.6) вытекает, что матрица $N_-(t)$ в действительности аналитична вне круга C_2. Таким образом, для матрицы $K(\alpha(t))$ будем иметь

$$K(\alpha(t))=K_-(t)\,D_1(t)\,K_+(t),$$

где

$$K_-(t)=\left(\frac{t}{t-t_{11}}\right)^{q_1}\cdots\left(\frac{t}{t-t_{1k_1}}\right)^{q_{k_1}}N_-(t),\ K_+(t)=N_+(t),\ D_1(t)=$$

$$=\left\| t^{\varkappa_j}\delta_{jk}\right\|_1^n,\ \varkappa_j=\varkappa_j^0-\sum_{j=1}^{k_1}q_j,\ \sum_{j=1}^{n}\varkappa_j=\sum_{j=1}^{k_2}r_j-\sum_{j=1}^{k_1}m_j.$$

Возвращаясь к переменной p, мы получим утверждение леммы.

Пользуясь леммой нетрудно доказать, что

Теорема 2. *Задача сопряжения* (2.4) *является нетеровой, её индекс равен*

$$\varkappa=\sum_{j=1}^{n}\varkappa_j=\frac{1}{2\pi}[\arg\det K(p)]_{\mathrm{Re}\,p=\alpha}.$$

Далее, подставляя решение $\hat f_+(p)$ или $\hat f_-(p)$ задачи сопряжения (2.4) в (2.3), мы найдем вектор-функцию $g(p)=(g_{2m+1},\cdots,g_n)$, а затем и $u(x,y)$.

Тем самым получена

Теорема 3. *Граничная задача B является нетеровой.*

§ 3. Граничная задача в полосе

Введем классы функций

$$H^m_{\alpha,\beta}(D)=\left\{ u(x,y)\,\Big|\, \sup_{\substack{\sigma\in[\alpha,\beta]\\ 0<y<1}}\sum_{j=0}^{m}\|\exp(-\sigma x)\,D_x^j u\|_{L_2}<\infty\right\}.$$

Пусть $f_1,\cdots,f_n$ — номера строк, реализующих базисный минор матрицы $\|\alpha_1,\cdots,\alpha_m\|$, а $j_{m+1},\cdots,j_n$ — матрицы $\|\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n\|$.

Граничная задача C. Требуется найти решение $u\in H^0_{\alpha,\beta}(D)$ системы (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u_{j_k}(x,\ 0) = f_{j_k}(x),\ k = m+1, \cdots, n,$$

$$u_{j_k}(x,\ 1) = f_{j_k}(x),\ k = 1, \cdots, m,$$

где $f_{j_k} \in H^0_{\alpha,\beta}(R),\ k = 1, \cdots, n.$

Поступая так же как и в § 1 относительно неизвестных функций $g_1(p), \cdots, g_n(p)$, получим систему

$$\sum_{j=1}^{n} g_j(p)\, l_j^{j_k}(p) = \hat{f}_{j_k}(p), \quad \sum_{j=1}^{n} g_j(p)\, l_j^{j_k}(p) \exp(\lambda_j(p)) = \hat{f}_{j_k}(p),$$

$$(k = m+1, \cdots, n) \qquad\qquad (k = 1, \cdots, m)$$

матрицу которой обозначим через $L(p)$.

Используя теорему Лапласа об определителях нетрудно показать, что существуют числа α и β такие, что функция $\det L(p)$ в полосе $\alpha < \mathrm{Re}\, p < \beta$ не обращается в нуль, а элементы $L^{ij}(p)$ матрицы $L^{-1}(p)$, обратной к $L(p)$, удовлетворяют оценкам

$$|L^{ij}(p)| < \mathrm{cte}/|p|, \quad |L^{ij}(p)| \leqslant \frac{\mathrm{cte}}{|p|}(1 + |\exp \lambda_j(p)|)^{-1}.$$

$$(j = 2m+1, \cdots, n) \qquad\qquad (j = 1, \cdots, 2m)$$

Теперь нетрудно доказать, что справедлива

Теорема 4. *Существуют числа α и β такие, что граничная задача C имеет решение и притом единственное, при этом*

$$\|u\|_{H^0_{\alpha,\beta}(D)} \leqslant \mathrm{cte}\, \|f\|_{H^0_{\alpha,\beta}(R)}.$$

Ереванский политехнический институт

Поступила 16. VI. 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Хермандер.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, т. 2, М., «Мир», 1986.
2. *А. Г. Земанян.* Интегральные преобразования обобщенных функций, М., «Наука», 1974.
3. *З. Прёсдорф.* Некоторые классы сингулярных уравнений, М., «Мир», 1979.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՀԱՄԱՌՈՏ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

СОДЕРЖАНИЕ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

CONTENTS

CHORT COMMUNICATIONS