ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված թիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке) а кратких сообщений—не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленым на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствущем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

1 р. 20 к. Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contribttors who desire to have their articles published in the proceedings zvestia of the Academy of Sciences of the Armenien S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initals and name, the title of the book, the place of publication, the publisher tbe date muse be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to indicated by a numeral in square brackets properey inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article shoule contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitied ot twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

Математика, 1990, т. XXV, № 6, стр. 508—607.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 6, 1990 Математика

УДК 517.547

М. М. ДЖРБАШЯН, А. О. КАРАПЕТЯН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ОБОБЩЕННОЙ ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

§ 0. Введение

0.1. В двух работах 40-х годов [1, 2] одним из авторов данной статьи впервые были введены и изучены классы голоморфных в единичном круге $D=\{z:|z|<1\}$ функций f, подчиненных условию вида

$$\iint\limits_D |f(\zeta)|^p\cdot(1-|\zeta|^2)^\alpha d\xi d\eta<+\infty\ (\zeta=\xi+i\eta), \tag{0.1}$$

где $1\leqslant p<+\infty$, $\alpha>-1$. В работе [2] для этих классов было использовано довольно естественное обозначение $H^p(\alpha)$*, навеянное тем фактом, что при $1\leqslant p<+\infty$ классы $H^p(\alpha)$ $(\alpha>-1)$ являются существенными расширениями известных пространств Харди H^p в круге. Как оказалось, классы $H^p(\alpha)$ обладают рядом важных свойств, среди которых прежде всего следует отметить их интегральные представления—аналоги интегральной формулы Коши для пространств H^p $(1\leqslant p<+\infty)$. Более точно, в заметке [1] была анонсирована, а в работе [2] приведена с полным доказательством следующая

Теорема I. *Любая функция $f(z)\in H^p(\alpha)$ $(1\leqslant p<+\infty$, $\alpha>-1)$ допускает интегральное представление*

$$f(z)=\frac{1+\alpha}{\pi}\iint\limits_D\frac{f(\zeta)\cdot(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-z\cdot\bar\zeta)^{2+\alpha}}d\xi d\eta,\ z\in D. \tag{0.2}$$

Этот важный результат нашел существенные применения как уже в самой работе [2], так и в работах других авторов при решении ряда тонких задач комплексного анализа (см. обзорные работы [3, 4] и монографию [5]).

0.2. В дальнейшем в работах ряда авторов были установлены аналоги интегрального представления (0.2) для функций многих комплексных переменных. Прежде, чем ознакомить с соответствующими результатами, введем некоторые обозначения.

При $m\geqslant1$, $n\geqslant1$ обозначим через $M_{m,n}$ множество всех комплексных матриц из m строк и n столбцов и заметим, что $M_{1,n}$ суть обыч-

* Подробные замечания относительно искажения истории вопроса о введении классов $H^p(\alpha)$ приведены, в частности, в обзорных работах [3] и [4], а также в монографии [5].

ное n-мерное комплексное координатное пространство $\mathbf{C}^n$. Обобщенным единичным кругом (в пространстве $M_{m,n}$) называется область $R_{m,n}$, состоящая из тех матриц $\zeta \in M_{m,n}$, для которых матрица $I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*$ положительно определена. Здесь $I^{(m)} \in M_{m,m}$ суть квадратная единичная матрица порядка m, а $\zeta^* \in M_{n,m}$ обозначает эрмитово сопряженную к ζ матрицу. Нетрудно проверить, что $R_{1,n}$ совпадает с единичным шаром $\mathbf{B}_n = \{\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbf{C}^n : |\zeta|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\zeta_k|^2 < 1\}$ в пространстве $\mathbf{C}^n = M_{1,n}$. В частности, $R_{1,1}$ представляет собой единичный круг $D \subset \mathbf{C}$. Далее, при $m, n \geqslant 1$ через $\mu_{m,n}$ обозначим лебегову меру в пространстве $M_{m,n} \cong \mathbf{C}^{mn}$. Кроме того, для произвольного комплексного числа β такого, что $\operatorname{Re}\beta > -1$, положим

$$c_{m,n}(\beta) = \frac{\prod_{l=1}^{m+n} \Gamma(\beta + l)}{\prod_{k=1}^{m} \Gamma(\beta + k) \cdot \prod_{j=1}^{n} \Gamma(\beta + j)} \cdot \frac{1}{\pi^{mn}}. \tag{0.3}$$

Справедлива следующая

Теорема II. *Пусть* $m, n \geqslant 1$ *и* $1 \leqslant p < +\infty$, $\alpha > -1$. *Тогда каждая голоморфная в области* $R_{m,n}$ *функция* f, *подчиненная условию*

$$\int_{R_{m,n}} |f(\zeta)|^p \cdot [\det(I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^\alpha \, d\mu_{m,n}(\zeta) < +\infty, \tag{0.4}$$

допускает интегральное представление вида

$$f(Z) = c_{m,n}(\beta) \cdot \int_{R_{m,n}} \frac{f(\zeta) \cdot [\det(I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^\beta \, d\mu_{m,n}(\zeta)}{[\det(I^{(m)} - Z \cdot \zeta^*)]^{m+n+\beta}}, \quad Z \in R_{m,n}, \tag{0.5}$$

где комплексное число β *выбрано следующим образом:*

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\beta > (\alpha + 1)/p - 1, \quad 1 < p < +\infty, \\ &\operatorname{Re}\beta \geqslant \alpha, \qquad\qquad\quad p = 1. \end{aligned} \tag{0.6}$$

При $m = n = 1$, то есть для единичного круга $R_{1,1} = D \subset \mathbf{C}$, данная теорема была установлена в работе [2], когда $\beta = \alpha$. Однако развитый в указанной работе метод позволял установить этот же результат и при любом β, удовлетворяющем условию (0.6). В общем случае $m, n \geqslant 1$, однако для $p = 2$ и $\alpha = \beta = 0$ теорема II впервые была доказана в монографии Хуа Ло-кена [6]. В работе Форелли и Рудина [7] этот результат был установлен при $m = 1$, $n \geqslant 1$, то есть для единичного шара $\mathbf{B}_n \subset \mathbf{C}^n$, в предположении $1 \leqslant p < +\infty$ и $\alpha = 0$. В обзорной работе [4] одного из авторов на основе методов, развитых в исследованиях [1, 2], теорема II была доказана опять же при $m = 1$, $n > 1$, но уже в предположении $1 \leqslant p < +\infty$, $\alpha > -1$, то есть без ограничительного условия $\alpha = 0$. Далее, в общем случае $m, n \geqslant 1$, но при

$1 \leqslant p < +\infty$, $\alpha = 0$ и вещественном $\beta > 0$ интегральное представление (0.5) вытекает из работы Штолля [8], в которой рассматривались произвольные ограниченные симметрические области, каковой, в частности, является область $R_{m,n}$ $(m, n \geqslant 1)$. Наконец, в сформулированном выше наиболее общем виде теорема II анонсирована в работе [9], где приводится также краткая схема доказательства. Подробное доказательство этого результата изложено в работе [10].

0.3. Наряду с указанными работами велись исследования с целью получения аналогов интегрального представления (0.2) для определенных классов голоморфных функций в неограниченных областях. В этой связи в первую очередь следует отметить известную работу С. Г. Гиндикина [11], посвященную анализу в областях Зигеля. Эти области определяются следующим образом:

$$D = \{\eta = (z, u) \in \mathbf{C}^{n+m},\ z = x + iy \in \mathbf{C}^n,\ u \in \mathbf{C}^m: \\ y - F(u, u) \in V\}, \tag{0.7}$$

где $V \subset \mathbf{R}^n$ суть острый открытый выпуклый конус, а отображение $F: \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$ обладает некоторыми естественными свойствами, в силу которых F обычно называют V-эрмитовой формой, заданной на пространстве $\mathbf{C}^m$. Отметим по ходу, что при $m = 0$, когда форма F попросту отсутствует, D является трубчатой областью в $\mathbf{C}^n$ с основанием $V \subset \mathbf{R}^n$. В указанной работе С. Г. Гиндикина [11] наряду с многочисленными глубокими результатами были построены воспроизводящие ядра для голоморфных в областях Зигеля функций из пространств L^1, но без веса. Причем методы построения проходили и в случае L^p-пространств, но только при $1 \leqslant p < 2$, поскольку доказательство существенно опиралось на технику преобразований Фурье-Планшереля.

В работе Койфмана и Рохберга [12] было приведено почти без доказательства утверждение о том, что на основе методов работы С. Г. Гиндикина [11] можно построить воспроизводящие ядра для некоторых весовых L^2-пространств функций, голоморфных в специальных областях Зигеля.

Но так или иначе, вопрос о существовании интегральных представлений для голоморфных в неограниченных областях функций из весовых L^p —пространств, где уже $1 \leqslant p < +\infty$, оставался открытым, т. е. оставалась нерешенной задача получения наиболее полного аналога интегрального представления (0.2) для неограниченных областей (пусть даже самых простейших).

Однако сравнительно недавно М. М. Джрбашян и А. Э. Джрбашян [13], основываясь на интегральном представлении (0.2), тонким предельным переходом впервые строго доказали следующую теорему.

Теорема III. *Пусть* $1 \leqslant p < +\infty$, $\alpha > -1$, *тогда каждая голоморфная в верхней полуплоскости* $\Pi_+ = \{\omega \in \mathbf{C} : \operatorname{Im}\omega > 0\}$ *функция* $f(\omega)$, $\omega \in \Pi_+$, *удовлетворяющая условию вида*

$$\int\limits_{\Pi^+} |f(\omega)|^p \cdot (\operatorname{Im}\omega)^\alpha \, du dv < +\infty \quad (\omega = u + iv), \tag{0.8}$$

допускает интегральное представление

$$f(w) = \frac{2^{\alpha}\cdot(\alpha+1)}{\pi}\cdot\int\limits_{\Pi_+}\frac{f(\omega)\cdot(\operatorname{Im}\omega)^{\alpha}\,du\,dv}{[\,i\,(\bar{\omega}-w)]^{2+\alpha}},\quad w\in\Pi_+. \qquad (0.9)$$

Наконец, в нашей недавней работе [14] получен многомерный аналог теоремы III для области Зигеля вида

$$\Omega_n = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \mathbf{C}^n : \operatorname{Im}\omega_1 > \sum_{j=2}^{n}|\omega_j|^2\}\ (n\geqslant 1), \qquad (0.10)$$

совпадающей при $n=1$ с верхней полуплоскостью $\Pi_+\subset\mathbf{C}$. Более точно, на основе уже имеющегося соответствующего интегрального представления в единичном шаре $\mathbf{B}_n\subset\mathbf{C}^n$ (теорема II при $m=1$, $n\geqslant 1$; за доказательством отсылаем к работам [3, 4]) методами работы [13] была установлена следующая

Теорема IV. *Пусть* $1<p<+\infty$, $\alpha>-1$ *и комплексное число* β *выбрано так:*

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\beta > (1+\alpha)/p-1,\ 1<p<+\infty,\\ \operatorname{Re}\beta\geqslant\alpha,\ p=1.\end{gathered} \qquad (0.11)$$

Тогда каждая голоморфная в области Ω_n *функция* $f(\omega)$, $\omega\in\Omega_n$, *подчиненная условию вида*

$$\int\limits_{\Omega_n}|f(\omega)|^p\cdot[\operatorname{Im}\omega_1-\sum_{j=2}^{n}|\omega_j|^2]^{\alpha}\,d\mu_{1,n}(\omega)<+\infty, \qquad (0.12)$$

допускает интегральное представление

$$f(w)=2^{n-1+\beta}\cdot c_{1,n}(\beta)\cdot\int\limits_{\Omega_n}\frac{f(\omega)\cdot\left[\operatorname{Im}\omega_1-\sum\limits_{j=2}^{n}|\omega_j|^2\right]^{\beta}d\mu_{1,n}(\omega)}{\left[i(\bar{\omega}_1-w_1)-2\cdot\sum\limits_{j=2}^{n}w_j\cdot\bar{\omega}_j\right]^{1+n+\beta}},\ w\in\Omega_n. \qquad (0.13)$$

0.4. В настоящей работе мы, основываясь на интегральном представлении (0.5) и используя примененный в работах [13], [14] метод предельного перехода, обобщаем теорему III на случай областей, являющихся совершенно иными по сравнению с Ω_n многомерными аналогами верхней полуплоскости $\Pi_+\subset\mathbf{C}$. Доказывается также, что интегральные операторы, естественным образом возникающие из установленных представлений, при определенных условиях являются ограниченными проекторами в соответствующих весовых пространствах функций.

В § 1 работы приводятся предварительные сведения, значительно облегчающие последующее чтение статьи. В частности, излагаются некоторые многократно используемые в дальнейшем свойства лебеговой меры $\mu_{n,n}$ на пространстве всех $n\times n$-матриц $M_{n,n}$ $(n\geqslant 1)$ и лебеговой меры μ_n на пространстве всех эрмитовых $n\times n$-матриц $\mathbf{H}_n$.

Далее, § 2 в основном посвящен выяснению сходимости и вычислению некоторых важных интегралов; особое значение имеет исследование следующего интеграла:

$$\int\limits_{\pi_n} \frac{[\det\ (\operatorname{Im} \omega)]^{\alpha}}{|\det(\omega^* - w)|^{\gamma}} d\mu_{n,n}(\omega),\ \alpha,\ \gamma \in \mathbf{R}, \tag{0.14}$$

где область π_n состоит из тех $\omega \in M_{n,n}$, для которых матрица $\operatorname{Im} \omega = (\omega - \omega^*)/2i$ положительно определена (предложения 2.3 и 2.4).

В § 3 при $n \geqslant 1$ и $0 < p < +\infty$, $-\infty < \alpha < +\infty$ изучаются весовые пространства

$$L^p_\alpha(\pi_n) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f : \|f\|^p_{p,\alpha} \equiv \int\limits_{\pi_n} |f(\omega)|^p \cdot [\det(\operatorname{Im}\omega)]^{\alpha}\, d\mu_{n,n}(\omega) < +\infty \right\} \tag{0.15}$$

и их подпространства $H^p_\alpha(\pi_n)$ голоморфных функций. Устанавливается следующий основной результат (теорема 3.1):

Если $n \geqslant 1$, $1 \leqslant p < +\infty$ и $\alpha > \max\{-1;\ p(n-1)-(3n-1)\}$, то любая функция $f \in H^p_\alpha(\pi_n)$ допускает интегральное представление

$$f(w) \equiv 2^{n\beta} \cdot c_{n,n}(\beta) \cdot \int\limits_{\pi_n} \frac{f(\omega) \cdot [\det(\operatorname{Im}\omega)]^{\beta} d\mu_{n,n}(\omega)}{[\det\ (i\,(\omega^* - w))\,]^{2n+\beta}},\ w \in \pi_n, \tag{0.16}$$

где $\operatorname{Re} \beta > (\alpha+1)/p - 1$, $1 < p < +\infty$, $\operatorname{Re} \beta \geqslant \alpha$, $p = 1$,

а константа $c_{n,n}(\beta)$ определяется из (0.3) при $m = n \geqslant 1$.

Наконец, в § 4 доказывается, что интегральный оператор, порожденный правой частью формулы (0.16), является ограниченным проектором из $L^p_\alpha(\pi_n)$ в $H^p_\alpha(\pi_n)$, $n \geqslant 1$, если выполнены условия: $1 \leqslant p < +\infty$, $\alpha > p(n-1) - n$, $\operatorname{Re} \beta > (\alpha + n)/p - 1$ (теорема 4.1).

§ 1. Предварительные сведения

Всюду дальше мы будем работать с матрицами и при этом постоянно использовать относящиеся к ним различные понятия и факты, большинство из которых хорошо известны. Поэтому мы подробно останавливаемся лишь на некоторых узловых моментах. За более детальным изложением основных свойств матриц отсылаем к стандартным курсам линейной алгебры. Кроме того, в нашей работе [10] в сжатом виде также приведены сведения по этому вопросу.

1.1. (а). Прежде всего напомним (см. § 0), что для произвольных $m, n \geqslant 1$, $M_{m,n}$ обозначает множество всех комплексных матриц из m строк и n столбцов. С точки зрения результатов настоящей работы для нас представляет интерес случай $m = n$, и, таким образом, мы будем иметь дело с пространством $M_{n,n}$ $(n \geqslant 1)$, состоящим из всех комплексных $n \times n$-матриц. Лебегова мера $\mu_{n,n}$ на пространстве $M_{n,n}$ $(n \geqslant 1)$ задается следующим образом:

$$d\mu_{n,n}(\zeta) = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} dx_{ij}\, dy_{ij}, \tag{1.1}$$

где $\zeta = (\zeta_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} \in M_{n,n}$ и $\zeta_{ij} = x_{ij} + i \cdot y_{ij}$.

Из (1.1) непосредственно следуют соотношения:

$$d\mu_{n,n}(\alpha\cdot\zeta) = |\alpha|^{2n^2}\cdot d\mu_{n,n}(\zeta),\ \forall\alpha\in\mathbf{C}\setminus\{0\}, \tag{1.2}$$
$$d\mu_{n,n}(\zeta+\zeta_0)=d\mu_{n,n}(\zeta),\ \forall\zeta_0\in M_{n,n}.$$

Далее, если X, $Y\in M_{n,n}$—произвольные фиксированные матрицы, то имеет место соотношение:

$$d\mu_{n,n}(X\cdot\zeta\cdot Y)=|\det(X)|^{2n}\cdot|\det(Y)|^{2n}\cdot d\mu_{n,n}(\zeta), \tag{1.3}$$

на доказательстве которого мы останавливаться не будем.

В частности, если $X\in M_{n,n}$, а $X^*\in M_{n,n}$ суть эрмитово сопряженная к X матрица, то

$$d\mu_{n,n}(X\cdot\zeta\cdot X^*)=|\det(X)|^{4n}\cdot d\mu_{n,n}(\zeta). \tag{1.4}$$

(б) При произвольном $n\geqslant1$ через H_n обозначим множество всех эрмитовых $n\times n$—матриц, то есть таких матриц $\zeta\in M_{n,n}$, для которых $\zeta^*=\zeta$. Иначе говоря, матрица $\zeta=(\zeta_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in M_{n,n}$ принадлежит H_n лишь при выполнении условий

$$\zeta_{ji}=\bar\zeta_{ij},\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n. \tag{1.5}$$

При $n\geqslant1$ лебегова мера μ_n на пространстве H_n задается так:

$$d\mu_n(H)=2^{n(n-1)/2}\cdot\prod_{l=1}^{n}dh_{ll}\times\prod_{1\leqslant j<l\leqslant n}dx_{lj}\,dy_{lj}, \tag{1.6}$$

где $H=(h_{lj})_{1\leqslant l,j\leqslant n}\in\mathrm{H}_n$ и $h_{lj}=x_{lj}+i\cdot y_{lj}\ (1\leqslant j<l\leqslant n)$.

Из (1.6) легко получаются следующие соотношения:

$$d\mu_n(\alpha\cdot H)=|\alpha|^{n^2}\cdot d\mu_n(H),\ \forall\alpha\in\mathrm{R}\setminus\{0\}, \tag{1.7}$$
$$d\mu_n(H+H_0)=d\mu_n(H),\ \forall\ H_0\in\mathrm{H}_n.$$

Кроме того, для произвольной фиксированной матрицы $X\in M_{n,n}$ соответствие $H\to X\cdot H\cdot X^*$ отображает H_n в себя, и справедлива формула

$$d\mu_n(X\cdot H\cdot X^*)=|\det(X)|^{2n}\cdot d\mu_n(H), \tag{1.8}$$

доказательство которой также опускаем.

(в) Наконец, укажем полезную формулу, сводящую интегрирование по мере $\mu_{n,n}$ к вычислению интегралов по мере μ_n ($n\geqslant1$). А именно: для произвольной измеримой функции $f\colon M_{n,n}\to[0,+\infty]$ справедливо равенство

$$\int\limits_{M_{n,n}} f(\zeta)\,d\mu_{n,n}(\zeta)=\int\limits_{\mathrm{H}_n\times\mathrm{H}_n} f(X+i\cdot Y)\,d\mu_n(X)\times d\mu_n(Y). \tag{1.9}$$

1.2. При произвольном $n\geqslant1$ через $M^*_{n,n}$ обозначим множество матриц $\zeta\in M_{n,n}$, для которых $\det(\zeta)\neq0$. Иначе говоря, $M^*_{n,n}$ суть множество всех обратимых $n\times n$—матриц. Для каждого $\zeta\in M^*_{n,n}$ через ζ^{-1} будем обозначать обратную к ζ матрицу, так что

$$\zeta\cdot\zeta^{-1}=\zeta^{-1}\cdot\zeta=I^{(n)}, \tag{1.10}$$

где $I^{(n)}$— единичная матрица порядка n.

Переходя к дифференциалам в равенстве (1.10), получим

$$d(\zeta^{-1}\cdot\zeta) \equiv d(I^{(n)}) = 0$$

или же

$$d(\zeta^{-1})\cdot\zeta + \zeta^{-1}\cdot d\zeta \equiv 0,$$

откуда вытекает, что

$$d(\zeta^{-1}) \equiv -\zeta^{-1}\cdot d\zeta\cdot\zeta^{-1}. \tag{1.11}$$

Таким образом, мы приходим к следующей важной формуле:

$$d\mu_{n,n}(\zeta^{-1}) \equiv \frac{1}{|\det(\zeta)|^{4n}} d\mu_{n,n}(\zeta),\ \zeta \in M^*_{n,n}. \tag{1.12}$$

1.3. (а) Пусть $A \in M_{n,n}$ $(n \geqslant 1)$—произвольная матрица. Договоримся употреблять запись $A > 0$ $(A \geqslant 0)$, если, во-первых, $A \in \mathbf{H}_n$, и, во-вторых, матрица A положительно определена (неотрицательно определена). И вообще, если $A_1, A_2 \in M_{n,n}$, то будем писать $A_1 > A_2$ $(A_1 \geqslant A_2)$, если $A_1 - A_2 > 0$ $(A_1 - A_2 \geqslant 0)$. Далее, хорошо известно (см., например, [10], § I, п. I. 3 (б)), что любая матрица $A \in M_{n,n}$ может быть единственным образом представлена в виде

$$A = B + i\cdot C,\quad B, C \in \mathbf{H}_n, \tag{1.13}$$

при этом используются обозначения

$$B = \operatorname{Re} A,\ C = \operatorname{Im} A. \tag{1.14}$$

В работе [10] была рассмотрена матричная область

$$\tilde{M}_{n,n} = \{A \in M_{n,n} : \operatorname{Re} A > 0\} \cup \{A \in M_{n,n} : \operatorname{Im} A > 0\} \cup$$
$$\cup \{A \in M_{n,n} : -\operatorname{Im} A > 0\} \tag{1.15}$$

и установлены следующие утверждения:

— если $A \in M_{n,n}$, то $A \in \tilde{M}_{n,n} <=> A^* \in \tilde{M}_{n,n}$;

— если $A \in \tilde{M}_{n,n}$ и $a \in (0, +\infty)$, то $a\cdot A \in \tilde{M}_{n,n}$;

— множество $\overset{+}{\mathbf{H}}_n$ всех положительно определенных эрмитовых матриц содержится в $\tilde{M}_{n,n}$;

— область $\tilde{M}_{n,n}$ звездна относительно единичной матрицы $I^{(n)}$, то есть из $A \in \tilde{M}_{n,n}$ и $t \in [0,1]$ следует, что $t\cdot A + (1-t)\cdot I^{(n)} \in \tilde{M}_{n,n}$;

— $\tilde{M}_{n,n} \subset M^*_{n,n}$, то есть для любой матрицы $A \in \tilde{M}_{n,n}$, $\det(A) \neq 0$.

(б) В указанной работе [10] было установлено также существование и единственность голоморфной в области $\tilde{M}_{n,n}$ функции $g(A)$, $A \in \tilde{M}_{n,n}$, удовлетворяющей условиям

$$\exp\{g(A)\} \equiv \det(A),\ A \in \tilde{M}_{n,n},\ g(I^{(n)}) = 0, \tag{1.16}$$

Эта функция g обозначается через Indet и обладает следующими свойствами:

$$\operatorname{Indet}(A^*) = \overline{\operatorname{Indet}(A)},\ A \in \widetilde{M}_{n,n},$$

$$\operatorname{Indet}(a\cdot A) = n\cdot \ln a + \operatorname{Indet}(A),\ A \in \widetilde{M}_{n,n},\ a \in (0, +\infty);$$

$$\operatorname{Indet}(A) = \ln[\det(A)],\ A \in \mathrm{H}_n^+ \subset \widetilde{M}_{n,n}.$$

Имея в нашем распоряжении функцию Indet, можем определить степенные функции, полагая для произвольного $\beta \in \mathrm{C}$

$$[\det(A)]^\beta \equiv \exp\{\beta\cdot\operatorname{Indet}(A)\},\ A \in \widetilde{M}_{n,n}. \tag{1.17}$$

При этом нетрудно проверить, что

$$[\det(a\cdot A)]^\beta = a^{n\beta}\cdot[\det(A)]^\beta,\ A \in \widetilde{M}_{n,n},$$
$$a \in (0, +\infty). \tag{1.18}$$

(в) Как видим, хотя голоморфная в области $\widetilde{M}_{n,n}$ функция Indet определена однозначно, она не задается конструктивно. Поэтому желательно иметь как можно больше относящейся к ней информации. Так, например, из (1.16) легко следует, что

$$\operatorname{Re}[\operatorname{Indet}(A)] = \ln|\det(A)|,\ A \in \widetilde{M}_{n,n}. \tag{1.19}$$

Что же касается поведения мнимой части функции Indet, то этот вопрос подлежит более тщательному рассмотрению, к которому мы и приступаем. Прежде всего, справедлива

Лемма 1.1. *Пусть $P(z)$, $z \in \mathrm{C}$—такой многочлен степени $n \geqslant 0$, что $P(t) \neq 0$ при $t \in [0, 1]$, причем $P(0) = 1$. Обозначим через $\ln[P(t)]$, $t \in [0,1]$, непрерывную на $[0,1]$ функцию, однозначно определяемую условиями*

$$\exp\{\ln[P(t)]\} \equiv P(t),\ t \in [0,1],$$
$$\ln[P(t)]\big|_{t=0} = 0. \tag{1.20}$$

Тогда справедливо неравенство

$$|\operatorname{Im}\{\ln[P(t)]\}| \leqslant \pi\cdot n,\ t \in [0,1]. \tag{1.21}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что справедливо тождество

$$\ln[P(t)] \equiv \int_0^t \frac{P'(\tau)}{P(\tau)}\,d\tau,\ t \in [0,1]. \tag{1.22}$$

Затем исходный многочлен $P(z)$ запишем в виде

$$P(z) = A\cdot\prod_{k=1}^{n}(z - a_k),\ z \in \mathrm{C}, \tag{1.23}$$

где $A \in \mathrm{C}\setminus\{0\}$, $\{a_k\}_1^n \subset \mathrm{C}\setminus[0,1]$. Тогда легко проверяется равенство

$$\frac{P'(\tau)}{P(\tau)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tau - a_k}, \quad \tau \in [0,1]. \tag{1.24}$$

Полагая далее для произвольного $a \in \mathbf{C} \setminus [0,1]$

$$\Psi_a(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\tau - a}, \quad t \in [0,1], \tag{1.25}$$

из (1.22), (1.24) и (1.25) будем иметь

$$\ln[P(t)] = \sum_{k=1}^{n} \Psi_{a_k}(t), \quad t \in [0,1]. \tag{1.26}$$

Следовательно, для доказательства основного неравенства (1.21) достаточно установить, что при любом фиксированном $a \in \mathbf{C} \setminus [0,1]$

$$|\operatorname{Im} \Psi_a(t)| \leqslant \pi, \quad t \in [0,1]. \tag{1.27}$$

Если к тому же $a \in \mathbf{R}$, то $\operatorname{Im} \Psi_a(t) \equiv 0$, $t \in [0,1]$, и тогда (1.27) очевидно. Поэтому пусть теперь $a = \alpha \pm i \cdot \beta$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta > 0$. Тогда имеем

$$\Psi_a(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\tau - \alpha \mp i \cdot \beta} = \int_{-\alpha}^{t-\alpha} \frac{ds}{s \mp i \cdot \beta} = \int_{-\alpha}^{t-\alpha} \frac{s \pm i \cdot \beta}{s^2 + \beta^2} ds,$$

и потому

$$\operatorname{Im} \Psi_a(t) = \pm \beta \cdot \int_{-\alpha}^{t-\alpha} \frac{ds}{s^2 + \beta^2} = \pm \int_{-\frac{\alpha}{\beta}}^{\frac{t-\alpha}{\beta}} \frac{du}{u^2 + 1}. \tag{1.28}$$

Наконец, из (1.28) следует неравенство (1.27):

$$\left| \operatorname{Im} \Psi_a(t) \right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = \pi, \quad t \in [0,1],$$

и тем самым лемма доказана.

Лемма 1.2. *Для произвольной матрицы $A \in \widetilde{M}_{n,n}$ справедливо неравенство*

$$\left| \operatorname{Im} \left[\operatorname{lndet}(A) \right] \right| < \pi \cdot n. \tag{1.29}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $A \in \widetilde{M}_{n,n}$ и положим

$$A(z) = z \cdot A + (1 - z) \cdot I^{(n)} \in M_{n,n}, \quad z \in \mathbf{C}, \tag{1.30}$$

$$P(z) = \det(A(z)),\ z \in \mathbf{C}. \tag{1.31}$$

Легко проверить, что $P(z)$ суть многочлен некоторой степени k, где $k \leqslant n$. Кроме того, поскольку область $\overline{M}_{n,n}$ звездна относительно единичной матрицы $\mathrm{I}^{(n)}$ (см. 1.3 (a)), то $A(t) \in \overline{M}_{n,n}$ при $t \in [0,1]$, и потому $P(t) \neq 0$, $t \in [0,1]$. Очевидно также, что $A(0) = \mathrm{I}^{(n)}$, $A(1) = A$ и $P(0) = 1$. Таким образом, многочлен $P(z)$, $z \in \mathbf{C}$, удовлетворяет всем условиям леммы 1.1. Следовательно, если через $\ln[P(t)]$ обозначить непрерывную на $[0,1]$ функцию, однозначно определяемую из соотношений (1.20), то будем иметь

$$\left| \operatorname{Im}\{\ln[P(t)]\} \right| \leqslant \pi \cdot k \leqslant \pi \cdot n,\ t \in [0,1]. \tag{1.32}$$

Далее, легко убедиться в справедливости следующего тождества:

$$\ln[P(t)] = \ln\det(A(t)),\ t \in [0,1]. \tag{1.33}$$

Комбинируя (1.32) с (1.33) и полагая $t = 1$, с учетом того, что $A = A(1)$, мы получим (1.29), и лемма доказана.

§ 2. Вычисление некоторых интегралов и другие вспомогательные результаты

2.1. (a) При произвольном $n \geqslant 1$ обозначим через U_n множество всех унитарных $n \times n$-матриц, то есть тех матриц $U \in M_{n,n}$ для которых

$$U \cdot U^* = U^* \cdot U = \mathrm{I}^{(n)}. \tag{2.1}$$

Напомним также, что H_n и H_n^+ обозначают соответственно пространства эрмитовых и положительно определенных эрмитовых матриц. Далее, для произвольных комплексных чисел $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ договоримся обозначать через $\Lambda = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$ квадратную $n \times n$ — матрицу, на диагонали которой стоят числа $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, а все остальные элементы равны нулю.

Хорошо известна следующая

Теорема 2.1. *Пусть эрмитовы матрицы $A^{(1)}, A^{(2)} \in \mathrm{H}_n$ коммутируют, то есть $A^{(1)} \cdot A^{(2)} = A^{(2)} \cdot A^{(1)}$. Тогда существует унитарная матрица $U \in \mathrm{U}_n$, такая, что справедливы представления*

$$A^{(i)} = U \cdot \Lambda^{(i)} \cdot U^* \quad (i = 1,2), \tag{2.2}$$

где

$$\Lambda^{(i)} = \left[\lambda_1^{(i)}, \cdots, \lambda_n^{(i)}\right].$$

Следствие. Пусть эрмитовы матрицы $A^{(1)}, A^{(2)} \in \mathrm{H}_n$ коммутируют, причем $A^{(1)} \geqslant A^{(2)} \geqslant 0$, тогда

$$\det(A^{(1)}) \geqslant \det(A^{(2)}) \geqslant 0. \tag{2.3}$$

Иногда оказывается полезным следующий частный случай теоремы 2.1, Теорема 2.1'. *Для любой эрмитовой матрицы $A \in \mathrm{H}_n$ справедливо представление*

$$A = U \cdot \Lambda \cdot U^*, \tag{2.4}$$

где $U \in \mathrm{U}_n$, $\Lambda = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$, $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$, *причем* $A \geqslant 0 \Leftrightarrow \lambda_n \geqslant 0$ и $A > 0 \Leftrightarrow \lambda_n > 0$.

Следствие. Пусть $A \geqslant 0$, тогда существует единственная матрица $B \geqslant 0$ такая, что

$$A = B^2 = B \cdot B. \tag{2.5}$$

Для нее используется обозначение $B = \sqrt{A}$. Заметим, что $\det(\sqrt{A}) = \sqrt{\det(A)}$, причем $\sqrt{A} > 0 \Leftrightarrow A > 0$.

(б) Сформулированные результаты в дальнейшем будут многократно использованы. Так, например, основываясь на них, мы сейчас установим некоторые полезные неравенства.

Для произвольного $n \geqslant 1$ положим

$$\pi_n = \{\omega \in M_{n,n} : \mathrm{Im}\, \omega > 0\} = \mathrm{H}_n + i \cdot \mathrm{H}_n^+. \tag{2.6}$$

Область π_n называется обобщенной верхней полуплоскостью и будет главным объектом нашего рассмотрения.

Лемма 2.1. *Для любой матрицы $\omega \in \pi_n$ справедливы неравенства*

$$|\det(\omega + i \cdot \mathrm{I}^{(n)})| \geqslant 1, \tag{2.7}$$

$$|\det(\omega + i \cdot \mathrm{I}^{(n)})| \geqslant \det(\mathrm{Im}\, \omega). \tag{2.8}$$

Доказательство. Для произвольной матрицы $\omega \in M_{n,n}$ имеем

$$|\det(\omega + i \cdot \mathrm{I}^{(n)})|^2 = \det(\omega + i \cdot \mathrm{I}^{(n)}) \cdot \det(\omega^* - i \cdot \mathrm{I}^{(n)}) =$$
$$= \det[(\omega + i \cdot \mathrm{I}^{(n)}) \cdot (\omega^* - i \cdot \mathrm{I}^{(n)})] =$$
$$= \det[\omega \cdot \omega^* + 2 \cdot \mathrm{Im}\, \omega + \mathrm{I}^{(n)}]. \tag{2.9}$$

Если к тому же $\omega \in \pi_n$, то

$$\omega \cdot \omega^* + 2 \cdot \mathrm{Im}\, \omega + \mathrm{I}^{(n)} \geqslant \mathrm{I}^{(n)}. \tag{2.10}$$

Поэтому в силу следствия из теоремы 2.1

$$\det[\omega \cdot \omega^* + 2 \cdot \mathrm{Im}\, \omega + \mathrm{I}^{(n)}] \geqslant \det[\mathrm{I}^{(n)}] = 1. \tag{2.11}$$

Комбинируя (2.9) и (2.11), мы получим (2.7).

Необходимо отметить, что неравенство (2.7) допускает следующее обобщение:

Если $\omega \in \pi_n$ и $A > 0$, то

$$|\det(\omega + i \cdot A)| \geqslant \det(A). \tag{2.12}$$

Действительно, пусть $T = \sqrt{A} > 0$, тогда $T^{-1} \cdot \omega \cdot T^{-1} \in \pi_n$, так что в силу (2.7) имеем

$$|\det(T^{-1} \cdot \omega \cdot T^{-1} + i \cdot \mathrm{I}^{(n)})| \geqslant 1. \tag{2.13}$$

Следовательно, справедлива цепочка соотношений

$$|\det(\omega + i\cdot A)| = |\det[T\cdot(T^{-1}\cdot\omega\cdot T^{-1} + i\cdot \mathrm{I}^{(n)})\cdot T]| =$$
$$= [\det(T)]^2\cdot|\det(T^{-1}\cdot\omega\cdot T^{-1} + i\cdot\mathrm{I}^{(n)})| \geqslant$$
$$\geqslant [\det(T)]^2 = \det(A)$$

и, тем самым, (2.12) установлено. Наконец, (2.8) вытекает из (2.12) следующим образом: если $\omega \in \pi_n$, то

$$|\det(\omega + i\cdot \mathrm{I}^{(n)})| = |\det[(\mathrm{Re}\,\omega + i\cdot\mathrm{I}^{(n)}) + i\cdot\mathrm{Im}\,\omega]| \geqslant \det(\mathrm{Im}\,\omega).$$

Итак, лемма 2.1 полностью доказана.

2.2. (а) При вычислении некоторых интегралов мы будем существенно опираться на следующее индуктивное описание множества всех положительно определенных эрмитовых $n\times n$-матриц H_n^+ $(n\geqslant 1)$, приведенное в монографии [6, гл. II, § 2.1]:

$$\mathrm{H}_1^+ = (0, +\infty)\subset \mathrm{R},$$
$$\mathrm{H}_n^+ = \left\{H = \begin{pmatrix} A & p^* \\ p & l\end{pmatrix}: A\in \mathrm{H}_{n-1}^+,\ p\in \mathrm{C}^{n-1},\ l\in \mathrm{R},\right.$$
$$\left. l - p\cdot A^{-1}\cdot p^* > 0\right\} \quad (n>1), \tag{2.14}$$

причем справедливо равенство

$$\det(H) = \det(A)\cdot(l - p\cdot A^{-1}\cdot p^*),\quad H\in \mathrm{H}_n\ (n>1). \tag{2.15}$$

Кроме того, лебегова мера μ_n на пространстве H_n допускает следующее разложение:

$$d\mu_n(H) = 2^{n-1}\cdot d\mu_{n-1}(A)\times d\mu_{1,n-1}(p)\times d\mu_1(l),$$
$$H\in \mathrm{H}_n^+\ (n>1). \tag{2.16}$$

(б) При произвольном $n\geqslant 1$ введем в рассмотрение интегралы, зависящие от соответствующих параметров:

$$H_n(\alpha) = \int\limits_{\mathrm{H}_n} \frac{d\mu_n(H)}{[\det(H^2 + \mathrm{I}^{(n)})]^\alpha},\quad \alpha\in\mathrm{R}; \tag{2.17}$$

$$\mathrm{I}_n(\alpha,\beta) = \int\limits_{\mathrm{H}_n^+} \frac{[\det(H)]^\alpha}{[\det(H + \mathrm{I}^{(n)})]^\beta}\, d\mu_n(H),$$
$$\alpha,\beta\in\mathrm{R}; \tag{2.18}$$

$$J_n(\alpha,\gamma) = \int\limits_{\pi_n} \frac{[\det(\mathrm{Im}\,\omega)]^\alpha}{|\det(\omega^* - i\cdot \mathrm{I}^{(n)})|^\gamma}\, d\mu_{n,n}(\omega),$$
$$\alpha,\gamma\in\mathrm{R}. \tag{2.19}$$

Затем приступим к изучению вопросов сходимости введенных интегралов.

Предложение 2.1. *Пусть $n \geqslant 1$, тогда*

$$0 < H_n(\alpha) < +\infty, \text{ если } \alpha > n - \frac{1}{2}, \tag{2.20}$$

$$H_n(\alpha) = +\infty, \quad \text{если} \quad \alpha \leqslant n - \frac{1}{2}.$$

За доказательством мы отсылаем к монографии [6] (см. теорему 2.1.5).

Предложение 2.2. *Пусть $n \geqslant 1$, тогда*

$$0 < I_n(\alpha, \beta) < +\infty \text{ при } \alpha > -1,\ \beta - \alpha > 2n - 1, \tag{2.21}$$

$$I_n(\alpha, \beta) = +\infty, \text{ если хотя бы одно из этих неравенств нарушается.}$$

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по размерности n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Допустив справедливость (2.21) при $n-1$, перейдем к доказательству для случая $n > 1$:

$$I_n(\alpha, \beta) = 2^{n-1} \cdot \int\limits_{H^+_{n-1}} \frac{[\det(A)]^\alpha \, d\mu_{n-1}(A)}{[\det(A + I^{(n-1)})]^\beta} \int\limits_{C^{n-1}} d\mu_{1,n-1}(p) \times$$

$$\times \int\limits_{p \cdot A^{-1} \cdot p^*}^{+\infty} \frac{(l - p \cdot A^{-1} \cdot p^*)^\alpha}{[l + 1 - p \cdot (A + I^{(n-1)})^{-1} \cdot p^*]^\beta} \, d\mu_1(l). \tag{2.22}$$

Введем следующее обозначение:

$$\lambda = 1 + p \cdot A^{-1} \cdot p^* - p \cdot (A + I^{(n-1)})^{-1} \cdot p^* = $$
$$= 1 + p \cdot X \cdot p^* > 0, \tag{2.23}$$

где

$$X = A^{-1} - (A + I^{(n-1)})^{-1} > 0. \tag{2.24}$$

Тогда внутренний интеграл в (2.22) по переменной l равен

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{l^\alpha}{(l+\lambda)^\beta} dl = \frac{1}{\lambda^{\beta-\alpha-1}} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t)^\beta} dt = \frac{I_1(\alpha, \beta)}{\lambda^{\beta-\alpha-1}}. \tag{2.25}$$

Сопоставляя (2.22) и (2.25), получим

$$I_n(\alpha, \beta) = 2^{n-1} \cdot I_1(\alpha, \beta) \cdot \int\limits_{H^+_{n-1}} \frac{[\det(A)]^\alpha \, d\mu_{n-1}(A)}{[\det(A + I^{(n-1)})]^\beta} \times$$

$$\times \int\limits_{C^{n-1}} \frac{d\mu_{1,n-1}(p)}{(1 + p \cdot X \cdot p^*)^{\beta-\alpha-1}}. \tag{2.26}$$

Далее, поскольку $X > 0$, то $T = \sqrt{X} > 0$, и во внутреннем интеграле (2.26) произведем замену переменной: $p = u \cdot T^{-1}$, $u \in C^{n-1}$. Тогда

$$d\mu_{1,n-1}(u \cdot T^{-1}) = |\det(T^{-1})|^2 \, d\mu_{1,n-1}(u) = \frac{d\mu_{1,n-1}(u)}{\det(X)}, \tag{2.27}$$

поэтому в (2.26) интеграл по переменной ρ равен

$$\frac{1}{\det(X)}\cdot\int\limits_{C^{n-1}}\frac{d\mu_{1,n-1}(u)}{(1+u\cdot u^*)^{\beta-\alpha-1}}=\frac{\text{const}}{\det(X)}\times$$

$$\times\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{r^{2n-3}\,dr}{(1+r^2)^{\beta-\alpha-1}}=\frac{\text{const}}{\det(X)}\cdot I_1(n-2,\ \beta-\alpha-1). \tag{2.28}$$

Затем, принимая во внимание (2.24), получим

$$(A+I^{(n-1)})\cdot X\cdot A=I^{(n-1)}, \tag{2.29}$$

и, следовательно

$$\det(A+I^{(n-1)})\cdot\det(X)\cdot\det(A)=1. \tag{2.30}$$

Комбинируя (2.26), (2.28) и (2.30), окончательно получаем

$$I_n(\alpha,\beta)=\text{const}\cdot I_1(\alpha,\beta)\cdot I_1(n-2,\ \beta-\alpha-1)\times$$

$$\times\int\limits_{H^+_{n-1}}\frac{[\det(A)]^{\alpha+1}\,d\mu_{n-1}(A)}{[\det(A+I^{(n-1)})]^{\beta-1}}=$$

$$=\text{const}\cdot I_1(\alpha,\beta)\cdot I_1(n-2,\ \beta-\alpha-1)\cdot I_{n-1}(\alpha+1,\ \beta-1). \tag{2.31}$$

Учитывая (2.31), а также индуктивное предположение, мы приходим к следующим (необходимым и достаточным!) условиям сходимости интеграла $I_n(\alpha,\beta)$:

$$\alpha>-1,\ \beta-\alpha>1,\ n-2>-1,\ \beta-\alpha-1-(n-2)>1,$$

$$\alpha+1>-1,\ (\beta-1)-(\alpha+1)>2(n-1)-1,$$

которые равносильны соотношениям $\alpha>-1$, $\beta-\alpha>2n-1$ и, таким образом, предложение 2.2 доказано.

(в) На основе предложений 2.1 и 2.2 устанавливается

Предложение 2.3. *Пусть $n\geqslant 1$, тогда*

$0<J_n(\alpha,\gamma)<+\infty$ *при* $\alpha>-1,\ \gamma>2n-1,\ \gamma-\alpha>3n-1$; $J_n(\alpha,\gamma)=+\infty$ *если хотя бы одно из этих неравенств нарушается.*

Доказательство. Согласно формуле интегрирования (1.9) имеем

$$J_n(\alpha,\gamma)=\int\limits_{H_n\times H_n^+}\frac{[\det(H)]^{\alpha}\,d\mu_n(S)\times d\mu_n(H)}{|\det(S-i\cdot(H+I^{(n)}))|^{\gamma}}=$$

$$=\int\limits_{H_n^+}[\det(H)]^{\alpha}d\mu_n(H)\int\limits_{H_n}\frac{d\mu_n(S)}{|\det(S-i\cdot(H+I^{(n)}))|^{\gamma}}. \tag{2.32}$$

Во внутреннем интеграле (2.32) произведем замену переменной

$$S=\sqrt{H+I^{(n)}}\cdot Q\cdot\sqrt{H+I^{(n)}},\quad Q\in H_n. \tag{2.33}$$

Тогда в силу формулы (1.8)

$$d\mu_n(S) = [\det(H + I^{(n)})]^n \, d\mu_n(Q), \tag{2.34}$$

и потому в (2.32) интеграл по S равен

$$\frac{1}{[\det(H + I^{(n)})]^{\gamma-n}} \cdot \int\limits_{H_n} \frac{d\mu_n(Q)}{|\det(Q - i \cdot I^{(n)})|^{\gamma}} =$$

$$= \frac{1}{[\det(H + I^{(n)})]^{\gamma-n}} \cdot \int\limits_{H_n} \frac{d\mu_n(Q)}{[\det(Q^2 + I^{(n)})]^{\gamma/2}} =$$

$$= \frac{H_n(\gamma/2)}{[\det(H + I^{(n)})]^{\gamma-n}}. \tag{2.35}$$

Комбинируя (2.32) и (2.35), приходим к равенству

$$J_n(\alpha, \gamma) = H_n(\gamma/2) \int\limits_{H_n^+} \frac{[\det(H)]^{\alpha}}{[\det(H + I^{(n)})]^{\gamma-n}} \, d\mu_n(H) =$$

$$= H_n(\gamma/2) \cdot I_n(\alpha, \gamma - n), \tag{2.36}$$

откуда на основании предложений 2.1 и 2.2 получаем требуемый результат.

Доказанное предложение полезно сопоставить со следующей формулой.

Предложение 2.4. *Пусть $n \geqslant 1$ и $\alpha, \gamma \in \mathbf{R}$, тогда при любом $w \in \pi_n$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{\pi_n} \frac{[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{\alpha}}{|\det(\omega^* - w)|^{\gamma}} \, d\mu_{n,n}(\omega) = \frac{J_n(\alpha, \gamma)}{[\det(\operatorname{Im} w)]^{\gamma-\alpha-2n}}. \tag{2.37}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу (1.2) интеграл в (2.37) может быть записан в виде

$$\int\limits_{\pi_n} \frac{[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{\alpha}}{|\det(\omega^* - i \cdot \operatorname{Im} w)|^{\gamma}} \, d\mu_{n,n}(\omega). \tag{2.38}$$

Затем в этом интеграле произведем замену переменной

$$\omega = \sqrt{\operatorname{Im} w} \cdot \tau \cdot \sqrt{\operatorname{Im} w}, \quad \tau \in \pi_n \tag{2.39}$$

и при этом заметим, что справедливы следующие соотношения:

$$d\mu_{n,n}(\omega) = [\det(\operatorname{Im} w)]^{2n} \cdot d\mu_{n,n}(\tau),$$

$$\det(\operatorname{Im}\omega) = \det(\operatorname{Im} w) \cdot \det(\operatorname{Im}\tau),$$

$$\det(\omega^* - i \cdot \operatorname{Im} w) = \det(\operatorname{Im} w) \cdot \det(\tau^* - i \cdot I^{(n)}), \tag{2.40}$$

с помощью которых уже легко устанавливается формула (2.37).

§ 3. Основные интегральные представления в обобщенной верхней полуплоскости π_n $(n \geqslant 1)$

3.1. (а) Напомним, что в § 0 обобщенным единичным кругом в пространстве $M_{m,n}$ $(m, n \geqslant 1)$ всех комплексных $m \times n$-матриц мы называли область

$$R_{m,n} = \{ \zeta \in M_{m,n} : I^m - \zeta \cdot \zeta^* > 0 \}. \tag{3.1}$$

В частности, при $m = n \geqslant 1$ будем иметь

$$R_{n,n} = \{ \zeta \in M_{n,n} : I^{(n)} - \zeta \cdot \zeta^* > 0 \}. \tag{3.2}$$

Можно показать (см., например, [15, стр. 61—62]), что при произвольном $n \geqslant 1$ между обобщенным единичным кругом $R_{n,n}$ и обобщенной верхней полуплоскостью π_n существует биголоморфный изоморфизм, осуществляемый посредством матричных преобразований Кэли:

$$\Phi(\zeta) = i \cdot (I^{(n)} + \zeta) \cdot (I^{(n)} - \zeta)^{-1}, \ \zeta \in R_{n,n}; \tag{3.3}$$
$$\Phi^{-1}(\omega) = (\omega - i \cdot I^{(n)}) \cdot (\omega + i \cdot I^{(n)})^{-1}, \ \omega \in \pi_n.$$

Заметим, что поскольку $\operatorname{Re}(I^{(n)} - \zeta) > 0$, $\operatorname{Im}(\omega + i \cdot I^{(n)}) > 0$, то обратные матрицы в (3.3) существуют.

При произвольном $\rho \in (0,1)$ будем полагать:

$$\rho \cdot R_{n,n} = \{ \rho \cdot \zeta, \ \zeta \in R_{n,n} \},$$
$$\pi_{n,\rho} = \Phi(\rho \cdot R_{n,n}).$$

Перед тем, как перейти к изучению свойств преобразований Кэли, ради упрощения записи, договоримся обозначать впредь единичную матрицу $I^{(n)} \in M_{n,n}$ просто через I.

Лемма 3.1. 1. *Имеют место следующие формулы замены переменных:*

$$d\mu_{n,n}\Big(\Phi(\zeta)\Big) = \frac{4^{n^2}}{|\det(I - \zeta)|^{4n}} d\mu_{n,n}(\zeta),$$
$$\zeta \in R_{n,n}; \tag{3.4}$$

$$d\mu_{n,n}\Big(\Phi^{-1}(\omega)\Big) = \frac{4^{n^2}}{|\det(\omega + i \cdot I)|^{4n}} d\mu_{n,n}(\omega),$$
$$\omega \in \pi_n. \tag{3.5}$$

2. *При любых* $w, \omega \in \pi_n$ *справедливы равенства*

$$\det[I - \Phi^{-1}(w) \cdot \Phi^{-1}(\omega)^*] = \frac{\det[2i \cdot (\omega^* - w)]}{\det[w + i \cdot I] \cdot \det[\omega^* - i \cdot I]}, \tag{3.6}$$

$$\det[I - \Phi^{-1}(\omega) \cdot \Phi^{-1}(\omega)^*] = \frac{\det[4 \cdot \operatorname{Im} \omega]}{\det[\omega + i \cdot I] \cdot \det[\omega^* - i \cdot I]}. \tag{3.7}$$

3. *Для любых* $w, \omega \in \pi_n$ *выполняется равенство*

$$\operatorname{lndet}[I - \Phi^{-1}(w) \cdot \Phi^{-1}(\omega)^*] = \operatorname{lndet}[2i \cdot (\omega^* - w)] -$$
$$- \operatorname{lndet}[w + i \cdot I] - \operatorname{lndet}[\omega^* - i \cdot I]. \tag{3.8}$$

Доказательство. Утверждение 1 легко вытекает из соотношений (1.2) и (1.12), 2. проверяется непосредственно при помощи формул (3.3), а 3. следует из 2. и соответствующих свойств функции Indet.

(б) Пусть $n \geqslant 1$ и $p \in (0, +\infty)$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$. Для произвольной измеримой по Лебегу (вообще говоря, комплекснозначной) функции f, определенной в области τ_n, положим

$$\| f \|^p_{p,\alpha} = \int\limits_{\tau_n} |f(\omega)|^p \cdot [\det (\operatorname{Im} \omega)]^\alpha \, d\mu_{n,n}(\omega) \tag{3.9}$$

и затем введем соответствующее пространство:

$$L^p_\alpha(\tau_n) = \left\{ f: \| f \|_{p,\alpha} < +\infty \right\}. \tag{3.10}$$

А через $H^p_\alpha(\tau_n)$ обозначим множество всех голоморфных в области τ_n функций, принадлежащих классу $L^p_\alpha(\tau_n)$.

Следует отметить, что аналогичные классы для обобщенного единичного круга $R_{m,n}$ $(m, n \geqslant 1)$ рассматривались нами ранее в работе [10]. Представляется целесообразным напомнить определение этих классов хотя бы в важном для нас случае $m = n \geqslant 1$.

Пусть $p \in (0, +\infty)$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, для измеримой функции $g(\zeta)$, $\zeta \in \mathrm{R}_{n,n}$, полагается

$$\| g \|^p_{p,\alpha} = \int\limits_{\mathrm{R}_{n,n}} |g(\zeta)|^p \cdot [\det (I - \zeta \cdot \zeta^*)]^\alpha \, d\mu_{n,n}(\zeta), \tag{3.11}$$

затем

$$L^p_\alpha(\mathrm{R}_{n,n}) = \left\{ g: \| g \|_{p,\alpha} < +\infty \right\}, \tag{3.12}$$

а $H^p_\alpha(\mathrm{R}_{n,n})$ обозначает пространство голоморфных в $\mathrm{R}_{n,n}$ функций из класса $L^p_\alpha(\mathrm{R}_{n,n})$. Из предложения 2.4 работы [10] вытекает следующий факт: пусть $n \geqslant 1$; если $0 < p + \infty$ и $-\infty < \alpha \leqslant -1$, то пространство $H^p_\alpha(\mathrm{R}_{n,n}) = \{0\}$, то есть состоит лишь из тождественного нуля.

(в) Путем несложных вычислений устанавливается следующая

Лемма 3. 2. *Пусть* $n \geqslant 1$ *и* $0 < p < +\infty$, $-\infty < \alpha < +\infty$.

1. *Если* $f \in H^p_\alpha(\tau_n)$, *то функция*

$$g(\zeta) = \frac{f(\Phi(\zeta))}{[\det (I - \zeta)]^{2(2n+\alpha)/p}} \in H^p_\alpha(\mathrm{R}_{n,n}). \tag{3.13}$$

2. *Если* $g \in H^p_\alpha(\mathrm{R}_{n,n})$, *то функция*

$$f(\omega) = \frac{g(\Phi^{-1}(\omega))}{[\det (\omega + i \cdot I)]^{2(2n+\alpha)/p}} \in H^p_\alpha(\tau_n). \tag{3.14}$$

Следствие. Пусть $n\geqslant 1$; если $0<p<+\infty$ и $-\infty<\alpha\leqslant -1$, то $H^p_\alpha(\pi_n)=\{0\}$.

Таким образом, изучение пространств $H^p_\alpha(\pi_n)$ $(n\geqslant 1)$ представляет интерес только в случае $0<p<+\infty$, $\alpha>-1$.

3.2. (а) Пусть $1\leqslant p<+\infty$, $\alpha>-1$; для комплексного числа β договоримся писать $\beta\vdash(p,\alpha)$, как только будут выполнены условия:

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\beta>(\alpha+1)/p-1, \text{ если } 1<p<+\infty,\\ &\operatorname{Re}\beta\geqslant\alpha, \text{ если } p=1.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Справедлива важная

Лемма 3.3 *Пусть* $1\leqslant p<+\infty$, $\alpha>\max\{-1;\ p(n-1)-(3n-1)\}$ и $f\in L^p_\alpha(\pi_n)$. *Если* $\beta\vdash(p,\alpha)$, *то функция*

$$F_\beta(\omega)\equiv\frac{f(\omega)\cdot[\det(\operatorname{Im}\omega)]^\beta}{[\det(\omega^*-i\cdot I)]^{2n+\beta}}\in L^1(\pi_n).\tag{3.16}$$

Доказательство. Пусть $\omega\in\pi_n$, тогда на основании леммы 1.2 имеем

$$\begin{aligned}|F_\beta(\omega)|&=\frac{|f(\omega)|\cdot[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{\operatorname{Re}\beta}}{|\det(\omega^*-i\cdot I)|^{2n+\operatorname{Re}\beta}}\times\\ &\times\exp\{\operatorname{Im}\beta\cdot\operatorname{Im}[\ln\det(\omega^*-i\cdot I)]\}\leqslant\\ &\leqslant\tilde F_\beta(\omega)\cdot\exp\{\pi\cdot n\cdot|\operatorname{Im}\beta|\},\end{aligned}\tag{3.17}$$

где

$$\tilde F_\beta(\omega)=\frac{|f(\omega)|\cdot[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{\operatorname{Re}\beta}}{|\det(\omega^*-i\cdot I)|^{2n+\operatorname{Re}\beta}},\ \omega\in\pi_n.\tag{3.18}$$

Нам достаточно установить, что $\tilde F_\beta\in L^1(\pi_n)$. Если $p=1$, то в силу исходных предположений будем иметь: $\alpha>-1$, $\operatorname{Re}\beta\geqslant\alpha$. Поэтому с учетом леммы 2.1 получим

$$\begin{aligned}\tilde F_\beta(\omega)&=|f(\omega)|\cdot[\det(\operatorname{Im}\omega)]^\alpha\times\\ &\times\frac{[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{\operatorname{Re}\beta-\alpha}}{|\det(\omega^*-i\cdot I)|^{\operatorname{Re}\beta-\alpha}}\cdot\frac{1}{|\det(\omega^*-i\cdot I)|^{2n+\alpha}}\leqslant\\ &\leqslant|f(\omega)|\cdot[\det(\operatorname{Im}\omega)]^\alpha\in L^1(\pi_n),\end{aligned}\tag{3.19}$$

и, таким образом, при $p=1$ лемма доказана.

Если же $1<p<+\infty$, то перепишем (3.18) в виде

$$\begin{aligned}\tilde F_\beta(\omega)&=|f(\omega)|\cdot[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{\alpha/p}\times\\ &\times\frac{[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{\operatorname{Re}\beta-\alpha/p}}{|\det(\omega^*-i\cdot I)|^{2n+\operatorname{Re}\beta}},\quad\omega\in\pi_n,\end{aligned}\tag{3.20}$$

и затем применим интегральное неравенство Гёльдера с сопряженными показателями p и $q=p/(p-1)$:

$$\int_{\pi_n} \bar{F}_\beta(\omega)\, d\mu_{n,n}(\omega) \leqslant \|f\|_{p,\alpha} \cdot J^{1/q}, \tag{3.21}$$

$$J = \int_{\pi_n} \frac{[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{q(\operatorname{Re}\beta - \alpha/p)}}{|\det(\omega^* - i \cdot I)|^{q(2n+\operatorname{Re}\beta)}}\, d\mu_{n,n}(\omega). \tag{3.22}$$

Очевидно, сходимость интеграла J влечет включение $\bar{F}_\beta \in L^1(\pi_n)$. А для сходимости J, как это следует из предложения 2.3, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:

$$q(\operatorname{Re}\beta - \alpha/p) > -1,$$
$$q(2n + \operatorname{Re}\beta) > 2n - 1,$$
$$q(2n + \operatorname{Re}\beta) - q(\operatorname{Re}\beta - \alpha/p) > 3n - 1, \tag{3.23}$$

которые действительно имеют место в силу исходных условий, наложенных на параметры. Итак, лемма полностью доказана.

(б) При произвольных $n \geqslant 1$ и $\beta \in \mathbf{C}$ $(\operatorname{Re}\beta > -1)$ на функциях $f(w)$, заданных в области π_n, рассмотрим интегральный оператор

$$T_{n,\beta} f(w) = 2^{n\beta} \cdot c_{n,n}(\beta) \cdot \int_{\pi_n} \frac{f(\omega) \cdot [\det(\operatorname{Im}\omega)]^\beta\, d\mu_{n,n}(\omega)}{[\det(i(\omega^* - w))]^{2n+\beta}} =$$

$$= \frac{4^{n^2+n\beta} \cdot c_{n,n}(\beta)}{[\det(w + i \cdot I)]^{2n+\beta}} \cdot \int_{\pi_n} G_n(w, \omega; \beta, f)\, d\mu_{n,n}(\omega), \quad w \in \pi_n, \tag{3.24}$$

где
$$G_n(w, \omega; \beta, f) = \frac{f(\omega) \cdot [\det(\operatorname{Im}\omega)]^\beta}{[\det(I - \Phi^{-1}(w) \cdot \Phi^{-1}(\omega)^*)]^{2n+\beta}} \times$$

$$\times \frac{1}{[\det(\omega^* - i \cdot I)]^{2n+\beta}}, \quad w, \omega \in \pi_n, \tag{3.25}$$

а константа $c_{n,n}(\beta)$ определяется из соотношения (0.3) при $m = n$.

Лемма 3.4. *Положим* $1 \leqslant p < +\infty$, $\alpha > \max\{-1;\ p(n-1) - (3n-1)\}$ *и* $f \in L^p_\alpha(\pi_n)$.

1. *Пусть* $p = 1$, *компакт* $K \subset \pi_n$, $0 < A < +\infty$ *и* $\alpha < a < +\infty$. *Тогда существует функция* $\Psi(\omega) \equiv \Psi_1(\omega) \in L^1(\pi_n)$ *такая, что оценка*

$$|G_n(w, \omega; \beta, f)| \leqslant \Psi(\omega), \quad \omega \in \pi_n, \tag{3.26}$$

справедлива равномерно по $w \in K$ *и* $\beta \in \mathbf{C}$ *при* $|\operatorname{Im}\beta| \leqslant A$ *и* $\alpha \leqslant \operatorname{Re}\beta \leqslant a$.

2. *Пусть* $1 < p < +\infty$, *компакт* $K \subset \pi_n$, $0 < A < +\infty$ *и* $(\alpha + 1)/p - 1 < a_1 < a_2 < +\infty$. *Тогда существует функция* $\Psi(\omega) \equiv \Psi_2(\omega) \in L^1(\pi_n)$ *такая, что оценка* (3.26) *имеет место равномерно по* $w \in K$ *и* $\beta \in \mathbf{C}$ *при* $|\operatorname{Im}\beta| \leqslant A$, $a_1 \leqslant \operatorname{Re}\beta \leqslant a_2$.

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$\eta\ (Z,\ \zeta,\beta)=[\det\ (I-Z\cdot\zeta^*)\,]^{2n+\beta}\equiv$$

$$\equiv\exp\ \{\ (2n+\beta)\ \ln\det\ (I-Z\cdot\zeta^*)\,\},\ Z\in\mathbf{R}_{n,n},\ \zeta\in\overline{\mathbf{R}}_{n,n},\ \beta\in\mathbf{C}\ (\mathrm{Re}\beta>-1).\quad (3.27)$$

Из предоложения 2.2 (в) работы [10] следует, что если $Z\in\mathbf{R}_{n,n}$ и $\zeta\in\overline{\mathbf{R}}_{n,n}$, то $\mathrm{Re}\ (I-Z\cdot\zeta^*)>0$, и потому $I-Z\cdot\zeta^*\in\overline{M}_{n,n}$. Следовательно, функция η посредством формулы (3.27) определяется корректно; к тому же очевидно, что эта функция непрерывна по совокупности переменных Z, ζ, β и не обращается в нуль во всей области своего определения. Поэтому существует число $\delta\in(0,\ +\infty)$, такое, что в обоих рассматриваемых в лемме 3.4 случаях 1 и 2 справедлива оценка снизу

$$|\,[\det\ (I-\Phi^{-1}\ (w)\cdot\Phi^{-1}\ (\omega)^*)\,]^{2n+\beta}|\geqslant\delta>0,\quad (3.28)$$

которая с учетом леммы 1.2 дает неравенство

$$|G_n\ (w,\ \omega;\beta,\ f)|\leqslant\frac{|f(\omega)|\cdot[\det\ (\mathrm{Im}\,\omega)\,]^{\mathrm{Re}\beta}}{|\det(\omega^*-i\cdot I)\,|^{2n+\mathrm{Re}\beta}}\cdot\frac{\exp\ \{\pi\cdot n\cdot A\}}{\delta}.\quad (3.29)$$

Наконец, комбинируя (3.29) и леммы 2.1, 3.3, при $p=1$ приходим к неравенству

$$|\ G_n\ (w,\ \omega;\ \beta,\ f)\ |\leqslant\mathrm{const}\cdot\frac{|\ f\ (\omega)\ |\cdot[\det\ (\mathrm{Im}\ \omega)\ ]^{\alpha}}{|\det\ (\omega^*-i\cdot I)\ |^{2n+\alpha}}\equiv$$

$$\equiv\Psi_1\ (\omega)\in L^1\ (\pi_n),\quad (3.30)$$

а при $1<p<+\infty$ -- к неравенству

$$|G_n\ (w,\ \omega;\ \beta,\ f\ )\ |\leqslant\mathrm{const}\cdot\frac{|\ f(\omega)\ |\cdot[\det\ (\mathrm{Im}\ \omega)\ ]^{\alpha_1}}{|\ \det\ (\omega^*-i\cdot I)\ |^{2n+\alpha_1}}\equiv$$

$$\equiv\Psi_2\ (\omega)\in L^1\ (\pi_n),\quad (3.31)$$

что и завершает доказательство леммы.

Следствие (а). *Пусть* $1\leqslant p<+\infty$, $\alpha>\max\ \{-1;\ p\ (n-1)-(3n-1)\,\}$, $f\ (\omega)\in L^p_\alpha\ (\pi_n)$ *и* $\beta\succ(p,\ \alpha)$. *Тогда* $T_{n,\beta}\,f\ (w)$, *как функция от* $w\in\pi_n$, *голоморфна в* π_n.

Следствие (б). *В тех же предположениях* $1\leqslant p<+\infty$ $\alpha>\max\ \{-1;\ p\ (n-1)-(3\,n-1)\ \}$, $f\ (\omega)\in L^p_\alpha\ (\pi_n)$, при $w\in\pi_n$:

—если $p=1$, то $T_{n,\beta}\ f\ (w)$, как функция от β, голоморфна внутри и непрерывна в замкнутой области $\mathrm{Re}\,\beta\geqslant\alpha$;

—если же $1<p<+\infty$, то $T_{n,\beta}\,f\ (w)$, как функция от β, голоморфна в области $\mathrm{Re}\,\beta>(\alpha+1)/p-1$.

3.3. Перейдем к установлению основного результата данной работы.

Теорема 3.1. *Пусть* $1\leqslant p<+\infty$, $\alpha>\max\ \{-1;\ p\ (n-1)-(3n-1)\,\}$ *и* $\beta\succ(p,\ \alpha)$. *Тогда любая функция* $f\in H^p_\alpha\ (\pi_n)$ *допускает интегральное представление*

$$f\ (w)\equiv T_{n,\beta}\ f\ (w),\ w\in\pi_n,\quad (3.32)$$

Доказательство. Допустим, что $f\in H^p_\alpha(\pi_n)$ и зафиксируем произвольное $w_0\in\pi_n$. Мы должны показать, что

$$f(w_0)=T_{n,\beta}f(w_0) \tag{3.33}$$

при любом $\beta\in\mathbf{C}$, удовлетворяющем условию $\beta\vdash(p,\alpha)$. Но поскольку $T_{n,\beta}f(w_0)$ голоморфно зависит от β (см. следствие (б) из леммы 3.4), то нам достаточно установить (3.33) лишь при вещественных $\beta>\beta_0=\max\{0;(\alpha+1)/p-1\}$. Для этого введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$g(\zeta)=\frac{f(\Phi(\zeta))}{[\det(I-\zeta)]^{2n+\beta}},\quad \zeta\in\mathbf{R}_{n,n}, \tag{3.34}$$

которая, очевидно, голоморфна в области $\mathbf{R}_{n,n}$. Следовательно, при любом $\rho\in(0,1)$ функция $g(\rho\cdot\zeta)$, $\zeta\in\mathbf{R}_{n,n}$, ограничена в области $\mathbf{R}_{n,n}$ и потому принадлежит классу $H^p_\beta(\mathbf{R}_{n,n})$. Применяя теорему II (§ 0) при $m=n$, для любого $\rho\in(0,1)$ будем иметь:

$$g(\rho\cdot Z)=c_{n,n}(\beta)\cdot\int\limits_{\mathbf{R}_{n,n}}\frac{g(\rho\cdot\zeta)\cdot[\det(I-\zeta\cdot\zeta^*)]^\beta}{[\det(I-Z\cdot\zeta^*)]^{2n+\beta}}\,d\mu_{n,n}(\zeta),\quad Z\in\mathbf{R}_{n,n}. \tag{3.35}$$

Далее, полагая $Z_0=\Phi^{-1}(w_0)\in\mathbf{R}_{n,n}$, подберем $\rho_0\in(0,1)$ таким образом, чтобы при $\rho_0\leqslant\rho<1$:

$$Z_0/\rho\in\mathbf{R}_{n,n}\Longleftrightarrow w_0\in\Phi(\rho\cdot\mathbf{R}_{n,n})=\pi_{n,\rho}. \tag{3.36}$$

Затем при $\rho_0<\rho<1$ в (3.35) произведя замену переменной $\zeta\to\zeta/\rho$ и полагая $Z=Z_0/\rho$, приходим к равенству:

$$g(Z_0)=c_{n,n}(\beta)\cdot\rho^{2n^2}\cdot\int\limits_{\rho\cdot\mathbf{R}_{n,n}}\frac{g(\zeta)\cdot[\det(\rho^2\cdot I-\zeta\cdot\zeta^*)]^\beta\,d\mu_{n,n}(\zeta)}{[\det(\rho^2\cdot I-Z_0\cdot\zeta^*)]^{2n+\beta}},\quad \rho_0\leqslant\rho<1. \tag{3.37}$$

После этого при фиксированном ρ, $\rho_0\leqslant\rho<1$, в (3.37) подставим явное выражение (3.34) для функции $g(\zeta)$, в интеграле справа произведем замену переменной $\zeta=\Phi^{-1}(\omega)$, $\omega\in\pi_n$, притом не забудем положить $Z_0=\Phi^{-1}(w_0)$. В результате после несложных преобразований получим следующую формулу:

$$f(w_0)\cdot[\det(w_0+i\cdot I)]^{2n+\beta}=c_{n,n}(\beta)\cdot\rho^{2n^2}\cdot\int\limits_{\pi_n}F_\rho(\omega)\,d\mu_{n,n}(\Phi^{-1}(\omega)),\quad \rho_0\leqslant\rho<1, \tag{3.38}$$

где ради сокращения записи положено

$$F_\rho(\omega)=\frac{[\det(\rho^2\cdot I-\Phi^{-1}(\omega)\cdot\Phi^{-1}(\omega)^*)]^\beta}{[\det(\rho^2\cdot I-\Phi^{-1}(w_0)\cdot\Phi^{-1}(\omega)^*)]^{2n+\beta}}\times$$
$$\times f(\omega)\cdot[\det(\omega+i\cdot I)]^{2n+\beta}\cdot\chi_{n,\rho}(\omega),\quad \omega\in\pi_n \tag{3.39}$$

и $\chi_{n,\rho}(\omega)$, $\omega\in\pi_n$, суть характеристическая функция области $\pi_{n,\rho}$, Далее, легко видеть, что существует такое $\delta \in (0, +\infty)$, при котором

$$|\det(\rho^2 \cdot I - Z_0 \cdot \zeta^*)| > \delta > 0 \tag{3.40}$$

равномерно по $\rho \in [\rho_0, 1]$ и $\zeta \in \rho \cdot \overline{R}_{n,n}$.

Таким образом, имеет место следующая оценка:

$$|F_\rho(\omega)| \leqslant \frac{[\det(\rho^2 \cdot I - \Phi^{-1}(\omega) \cdot \Phi^{-1}(\omega)^*)]^\beta}{\delta^{2n+\beta}} \times$$

$$\times |f(\omega)| \cdot |\det(\omega + i \cdot I)|^{2n+\beta},$$

$$\rho_0 \leqslant \rho < 1, \ \omega \in \pi_{n,\rho}. \tag{3.41}$$

Кроме того, в силу следствия из теоремы 2.1, при $\rho_0 < \rho < 1$ и $\omega \in \pi_{n,\rho}$ имеем также

$$0 < [\det(\rho^2 \cdot I - \Phi^{-1}(\omega) \cdot \Phi^{-1}(\omega)^*)] < [\det(I - \Phi^{-1}(\omega) \Phi^{-1}(\omega)^*)]. \tag{3.42}$$

И поскольку $\beta > 0$, то на основании (3.41) и (3.42) приходим к неравенству

$$|F_\rho(\omega)| \leqslant \frac{[\det(I - \Phi^{-1}(\omega) \cdot \Phi^{-1}(\omega)^*)]^\beta}{\delta^{2n+\beta}} \times$$

$$\times |f(\omega)| \cdot |\det(\omega + i \cdot I)|^{2n+\beta}, \ \omega \in \pi_n, \tag{3.43}$$

для всех $\rho \in [\rho_0, 1)$.

Из формул (3.5) и (3.7), в силу леммы 3.3, заключаем, что правая часть (3.43) из класса $L^1(\pi_n; d\mu_{n,n}(\Phi^{-1}(\omega)))$, и, тем самым, для семейства функций $|F_\rho(\omega)|$ $(\rho_0 \leqslant \rho < 1)$ она является мажорантой, интегрируемой по области π_n относительно меры $d\mu_{n,n}(\Phi^{-1}(\omega))$. Поэтому переходя в правой части формулы (3.38) к пределу при $\rho \uparrow 1$, мы на основе теоремы Лебега об ограниченной сходимости будем иметь:

$$f(w_0) \cdot [\det(w_0 + i \cdot I)]^{2n+\beta} = c_{n,n}(\beta) \cdot \int_{\pi_n} f(\omega) \cdot [\det(\omega + i \cdot I)]^{2n+\beta} \times$$

$$\times \frac{[\det(I - \Phi^{-1}(\omega) \cdot \Phi^{-1}(\omega)^*)]^\beta}{[\det(I - \Phi^{-1}(w_0) \cdot \Phi^{-1}(\omega)^*)]^{2n+\beta}} d\mu_{n,n}(\Phi^{-1}(\omega)). \tag{3.44}$$

Остается заметить, что в силу формул (3.5)—(3.8) (см. лемму 3.1) равенство (3.44) в точности совпадает с (3.33), и, таким образом, теорема 3.1 установлена.

§ 4. Ограниченные проекторы

Оказывается, что введенные выше интегральные операторы $T_{n,\beta}$ являются ограниченными проекторами в весовых пространствах $L^p_\alpha(\pi_n)$ при определенных условиях, наложенных на параметры α и β. Точнее, справедлива следующая

Теорема 4.1. *Пусть $n\geqslant 1$, $1<p<+\infty$, $\alpha>p(n-1)-n$ и комплексное число β выбрано так:*

$$\operatorname{Re}\beta>(\alpha+n)/p-1. \tag{4.1}$$

Тогда оператор $T_{n,\beta}$ является ограниченным проектором из $L^p_\alpha(\pi_n)$ в $H^p_\alpha(\pi_n)$.

Доказательство. Прежде всего отметим два обстоятельства $(1\leqslant p<+\infty)$:

—если $\alpha>p(n-1)-n$, то тем более

$\alpha>\max\{-1;\ p(n-1)-(3n-1)\}$;

—если $\operatorname{Re}\beta>(\alpha+n)/p-1$, то $\beta\vdash(p,\alpha)$.

Допустим далее, что параметры p, α и β выбраны именно так, как это оговорено в формулировке теоремы 4.1. Тогда для произвольной функции $f\in L^p_\alpha(\pi_n)$ в силу следствия (а) леммы 3.4 функция $T_{n,\beta}f(w)$, $w\in\pi_n$, голоморфна в области матриц π_n. Поэтому, установив оценку вида

$$\|T_{n,\beta}f\|_{p,\alpha}\leqslant\text{const}\cdot\|f\|_{p,\alpha},\quad\forall f\in L^p_\alpha(\pi_n), \tag{4.2}$$

мы тем самым докажем ограниченность $T_{n,\beta}$, как линейного оператора из $L^p_\alpha(\pi_n)$ в $H^p_\alpha(\pi_n)$. Учитывая затем, что согласно теореме 3.1

$$f(w)\equiv T_{n,\beta}f(w),\ \forall f\in H^p_\alpha(\pi_n), \tag{4.3}$$

мы получим, что $T_{n,\beta}$ является ограниченным проектором из $L^p_\alpha(\pi_n)$ в $H^p_\alpha(\pi_n)$, то есть утверждение теоремы 4.1. Таким образом, дело сводится к установлению оценки (4.2).

С этой целью заметим, что для произвольной функции $f(\omega)\in L^p_\alpha(\pi_n)$ справедливо неравенство:

$$|T_{n,\beta}f(w)|\leqslant A_{n,\beta}\cdot\int_{\pi_n}\frac{|f(\omega)|\cdot[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{\operatorname{Re}\beta}}{|\det(\omega^*-w)|^{2n+\operatorname{Re}\beta}}d\mu_{n,n}(\omega),\quad w\in\pi_n, \tag{4.4}$$

где

$$A_{n,\beta}=|2^{n\cdot\beta}\cdot c_{n,n}(\beta)|\cdot\exp\{\pi\cdot n\cdot|\operatorname{Im}\beta|\}. \tag{4.5}$$

При $p=1$, на основании (4.4), теоремы Фубини и предложения 2.4, получаем следующую цепочку соотношений:

$$\|T_{n,\beta}f\|_{1,\alpha}=\int_{\pi_n}|T_{n,\beta}f(w)|\cdot[\det(\operatorname{Im}w)]^\alpha\,d\mu_{n,n}(w)\leqslant$$

$$\leqslant A_{n,\beta}\cdot\int_{\pi_n}[\det(\operatorname{Im}w)]^\alpha\,d\mu_{n,n}(w)\int_{\pi_n}\frac{|f(\omega)|\cdot[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{\operatorname{Re}\beta}}{|\det(\omega^*-w)|^{2n+\operatorname{Re}\beta}}d\mu_{n,n}(\omega)=$$

$$=A_{n,\beta}\cdot\int_{\pi_n}|f(\omega)|\cdot[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{\operatorname{Re}\beta}\times$$

$$\times \int\limits_{\pi_n} \frac{[\det(\operatorname{Im} w)]^\alpha}{|\det(w^* - \omega)|^{2n+Re\beta}} d\mu_{n,n}(w)\, d\mu_{n,n}(\omega) =$$

$$= A_{n,\beta} \cdot \int\limits_{\pi_n} |f(\omega)| \cdot [\det(\operatorname{Im}\omega)]^{Re\beta} \cdot \frac{J_n(\alpha, 2n + \operatorname{Re}\beta)}{[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{Re\beta-\alpha}} d\mu_{n,n}(\omega) =$$

$$= A_{n,\beta} \cdot J_n(\alpha, 2n + \operatorname{Re}\beta) \cdot \|f\|_{1,\alpha}. \qquad (4.6)$$

Остается проверить, что $J_n(\alpha, 2n + \operatorname{Re}\beta) < +\infty$, а это согласно предложению 2.3 равносильно выполнению условий:

$$\alpha > -1,\ 2n + \operatorname{Re}\beta > 2n-1,\ 2n + \operatorname{Re}\beta - \alpha > 3n-1, \qquad (4.7)$$

которые действительно имеют место в силу исходных предположений. Итак, при $p = 1$ теорема доказана.

Если же $1 < p < +\infty$, то положив $q = p/(p-1)$, введем обозначения

$$d\nu(\omega) = [\det(\operatorname{Im}\omega)]^\alpha\, d\mu_{n,n}(\omega),\quad \omega \in \pi_n; \qquad (4.8)$$

$$Q(w, \omega) = \frac{[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{Re\beta-\alpha}}{|\det(\omega^* - w)|^{2n+Re\beta}},\quad w, \omega \in \pi_n. \qquad (4.9)$$

С учетом введенных обозначений неравенство (4.4) принимает вид

$$|T_{n,\beta} f(w)| \leqslant A_{n,\beta} \cdot \int\limits_{\pi_n} Q(w, \omega) \cdot |f(\omega)|\, d\nu(\omega),\quad w \in \pi_n,$$

$$\forall f \in L^p_\alpha(\pi_n). \qquad (4.10)$$

Следовательно, если воспользоваться леммой Форелли-Рудина (см. [7]), то для установления оценки (4.2) достаточно указать заданную в области π_n положительную измеримую функцию g такую, что

$$\int\limits_{\pi_n} Q(w, \omega) \cdot [g(\omega)]^q\, d\nu(\omega) \leqslant \text{const} \cdot [g(w)]^q,\quad w \in \pi_n;$$

$$\int\limits_{\pi_n} Q(w, \omega) \cdot [g(w)]^p\, d\nu(w) \leqslant \text{const} \cdot [g(\omega)]^p,\quad \omega \in \pi_n.$$

В более подробной записи последние соотношения соответственно могут быть записаны в виде

$$\int\limits_{\pi_n} \frac{[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{Re\beta}}{|\det(\omega^* - w)|^{2n+Re\beta}} [g(\omega)]^q\, d\mu_{n,n}(\omega) \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \cdot [g(w)]^q,\quad w \in \pi_n; \qquad (4.11)$$

$$\int\limits_{\pi_n} \frac{[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{Re\beta-\alpha} \cdot [\det(\operatorname{Im} w)]^\alpha}{|\det(\omega^* - w)|^{2n+Re\beta}} [g(w)]^p\, d\mu_{n,n}(w) \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \cdot [g(\omega)]^p,\quad \omega \in \pi_n. \qquad (4{,}12)$$

Эту функцию мы будем искать в виде

$$g(\omega)=[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{-\left\{\frac{n-1}{q}+\varepsilon\right\}},\quad \omega\in T_n, \tag{4.13}$$

где $0<\varepsilon<+\infty$.

Из предложений 2.3 и 2.4 следует, что функция $g(\omega)$ вида (4.13) будет искомой, если одновременно имеют место следующие две совокупности условий:

$$\operatorname{Re}\beta-(n-1)-q\cdot\varepsilon>-1,\ 2n+\operatorname{Re}\beta>2n-1, \tag{4.14}$$
$$2n+\operatorname{Re}\beta-\{\operatorname{Re}\beta-(n-1)-q\cdot\varepsilon\}>3n-1;$$

$$\alpha-p\cdot\left(\frac{n-1}{q}+\varepsilon\right)>-1,\ 2n+\operatorname{Re}\beta>2n-1, \tag{4.15}$$
$$2n+\operatorname{Re}\beta-\left\{\alpha-p\cdot\left(\frac{n-1}{q}+\varepsilon\right)\right\}>3n-1.$$

После небольших упрощений эти же условия в своей совокупности принимают вид

$$\operatorname{Re}\beta>-1,\ \frac{\operatorname{Re}\beta-(n-2)}{q}>\varepsilon,\ \frac{\alpha+1}{p}-\frac{n-1}{q}>\varepsilon,$$
$$\varepsilon>\frac{n-1-\operatorname{Re}\beta+\alpha}{p}-\frac{n-1}{q}. \tag{4.16}$$

Поскольку условие $\operatorname{Re}\beta>-1$ выполнено в силу (4.1), то нам остается выбрать положительное число ε так, чтобы имели место и остальные неравенства (4.16). Для этого заметим, что в силу условий теоремы 4.1 справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\operatorname{Re}\beta-(n-2)}{q}>0,\ \frac{\alpha+1}{p}-\frac{n-1}{q}>0,$$
$$\frac{\operatorname{Re}\beta-(n-2)}{q}>\frac{n-1-\operatorname{Re}\beta+\alpha}{p}-\frac{n-1}{q}, \tag{4.17}$$
$$\frac{\alpha+1}{p}-\frac{n-1}{q}>\frac{n-1-\operatorname{Re}\beta+\alpha}{p}-\frac{n-1}{q}.$$

А из (4.17) уже следует возможность выбора $\varepsilon>0$, удовлетворяющего (4.16), следовательно, установлено существование функции g, удовлетворяющей интегральным неравенствам (4.11) и (4.12). Тем самым, теорема 4.1 доказана и при $1<p<+\infty$.

В заключение отметим, что для авторов остался открытым вопрос о возможности ослабления условий, налагаемых на параметры α и β в формулировках обеих основных теорем 3.1 и 4.1.

Поступила 21.VII.1989

Институт математики АН Армении

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ, Ա. Հ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ. Ինտեգրալ ներկայացումներ ընդհանրացված վերին կիսահարթությունում *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտարկված է ընդհանրացված վերին կիսահարթություն կոչվող τ_n $(n\geq 1)$ մատրիցային տիրույթը, բաղկացած այն $n\times n$ չափսի ω մատրիցներից, որոնց $Im\,\omega \overset{def}{=} (\omega-\omega^*)/2i$ կեղծ մասը դրականորեն որոշված է։ Ներմուծված են τ_n տիրույթում հոլոմորֆ և $L^p(\tau_n; [\det(Im\,\omega)]^\alpha\, d\mu_{n,n}(\omega))$ կշռային տարածություններին պատկանող f ֆունկցիաների $H^p_\alpha(\tau_n)$ դասերը $(0<p<+\infty, -\infty<\alpha<+\infty)$։ Ապացուցված է, որ եթե $1\leq p<+\infty$, $\alpha>\max\{-1; p(n-1)-(3n-1)\}$, ապա $H^p_\alpha(\tau_n)$ դասի ֆունկցիաները թույլ են տալիս ինտեգրալ ներկայացումներ հետևյալ վերարտադրող կորիզով.

$$\mathrm{const}\cdot\frac{[\det(\mathrm{Im}\,\omega)]^\beta}{[\det(i(\omega^*-w))]^{2n+\beta}},\quad \mathrm{Re}\,\beta>\frac{\alpha+1}{p}-1\ (1<p<+\infty),$$
$$\mathrm{Re}\,\beta\geq\alpha\ (p=1).$$

Ցույց է տրված նաև, որ համապատասխան ինտեգրալ օպերատորը որոշակի պայմանների դեպքում հանդիսանում է սահմանափակ պրոյեկտոր։

M. M. DJRBASHIAN, A. H. KARAPETIAN. *Integral representatons in a generalized upper half-plane* (summary)

In the paper a matrix domain τ_n $(n\geq 1)$ consisting of all $n\times n$—matrices ω with positively determined imaginary part $\mathrm{Im}\,\omega=(\omega-\omega^*)/2i$ (the so-called generalized upper half-plane) is considered. The classes $H^p_\alpha(\tau_n)$ $(0<p<+\infty, -\infty<\alpha<+\infty)$ of holomorphic functions $f(\omega)$, $\omega\in\tau_n$, from the weighted spaces $L^p(\tau_n; [\det(\mathrm{Im}\,\omega)]^\alpha\, d\mu_{n,n}(\omega))$ are introduced, where $\mu_{n,n}$ $(n\geq 1)$ denotes the Lebesgue measure on the set of all complex $n\times n$—matrices. It is proved that for $p\in[1,+\infty)$ and $\alpha>\max\{-1; p(n-1)-(3n-1)\}$ the functions in the class $H^p_\alpha(\tau_n)$ admit an integral representations with the reproducing kernel

$$\mathrm{const}\cdot\frac{[\det(\mathrm{Im}\,\omega)]^\beta}{[\det(i(\omega^*-w))]^{2n+\beta}},\quad \mathrm{Re}\,\beta>\frac{\alpha+1}{p}-1\quad (1<p<+\infty),$$
$$\mathrm{Re}\,\beta\geq\alpha\ (p=1).$$

It is established also, that under certain conditions the corresponding integra eperator is a bounded projection.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян*. О представимости некоторых классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН АрмССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
2. *М. М. Джрбашян*. К проблеме представимости аналитических функций. Сообщ. Ин-та матем. и механики АН АрмССР, вып. 2, 1948, 3—40.
3. *M. M. Džarbašjan*. Survey of some achievements of Armenian mathematicians in the theory of integral representations and factorization of analytic functions, Матемагички Весник (Югославия), 39. 1987, 263—282.
4. *М. М. Джрбашян*. Краткий обзор результатов исследований математиков Армении в области теории факторизации мероморфных функций и ее приложений. Изв. АН АрмССР, «Математика», 23, № 6, 1988, 517—545.
5. *A. E. Djrbashian F. A. Shamoian*. Topics in the theory of A^p_α spaces, TEUBNER-TEXTE zur Mathematik, 105. Leipzig, 1988.
6. *Хуа Ло-кен*. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях, М., ИЛ, 1959.
7. *F. Forelli, W. Rudin*. Projections on spaces of holomorphic functions in balls, Ind. Univ. Math. J., 24, № 6, 1974, 593—602.
8. *M. Stoll*. Mean value theorems for harmonic and holomorphic functions on bounded symmetric domains, J. reine und angew. Math., 290, 1977, 191—198.

9. *М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян.* Интегральные представления в обобщенном единичном круге, ДАН СССР, 312, № 1, 1990, 24—27.
10. *М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян.* Интегральные представления в обобщенном единичном круге, Изв. АН АрмССР, «Математика», 24, № 6, 1989, 523—546.
11. *С. Г. Гиндикин.* Анализ в однородных областях, УМН, 19, № 4, 1964, 3—92.
12. *R. R. Coifman, R. Rochberg.* Representations theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p, Astérisque, 77, 1980, 11—66.
13. *М. М. Джрбашян, А. Э. Джрбашян.* Интегральные представления для некоторых классов аналитических функций в полуплоскости, ДАН СССР, 285, № 3, 1985, 547—550.
14. *М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян.* Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области Зигеля, Изв. АН АрмССР, «Математика», 22, № 4, 1987, 399—405.
15. *Б. В. Шабат.* Введение в комплексный анализ, ч. II, М., Наука, 1985.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 6, 1990 Математика

УДК 517.53

Р. А. АВЕТИСЯН, Н. У. АРАКЕЛЯН

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ МЕРОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Настоящая работа содержит полные доказательства анонсированных в заметке [1] результатов о равномерном приближении на вещественной оси $\mathbf{R}$ мероморфными функциями с оценкой их роста. Некоторые из них доказываются в уточненной и более сильной формулировке, кроме того, в отличие от [1], здесь рассматриваются также *касательные* приближения мероморфными функциями.

Вопросы наилучших приближений мероморфными функциями стали разрабатываться лишь два десятилетия тому назад. Вопрос о равномерном приближении голоморфных в угловых областях функций мероморфными с оценкой их роста был исследован в работе Л. А. Тер-Исраеляна [2] и в недавней работе авторов [3]. Указанный вопрос представляет интерес не только для теории приближений, но и с точки зрения возможных приложений в теорию распределения значений мероморфных функций. Что касается наилучших мероморфных приближений на $\mathbf{R}$, то насколько нам известно, в [1] были приведены первые результаты в этом направлении.

В данной работе в качестве аппроксимируемых рассматриваются произвольные непрерывные либо непрерывно дифференцируемые функции. Рост аппроксимирующих мероморфных функций измеряется ростом их неванлинновских характеристик. Указанный рост определяется, грубо говоря, ростом производной аппроксимируемых функций, так что приближение даже ограниченных функций может требовать использования мероморфных функций сколь угодно высокого роста.

Мероморфные приближения на $\mathbf{R}$ имеют естественные области пересечения с конструктивной теорией функций. Одной из целей данной работы является выделение и описание некоторых классов непрерывных на $\mathbf{R}$ и ограниченных функций, которые конструктивно вполне характеризуются с помощью своих наилучших приближений мероморфными функциями заданного роста (см. теорему 3 и следствие 2). Толчком к рассмотрению этого вопроса послужило решение аналогичной задачи в случае приближений целыми функциями (см. теорему 3 работы [4]). Привлечение более гибких мероморфных функций позволяет получить конструктивное описание новых классов, не различимых с помощью приближений целыми функциями.

Работа состоит из двух параграфов. Первый из них содержит формулировку основных результатов работы, а второй—их доказательства вместе со всеми вспомогательными утверждениями.

§ 1. Формулировка результатов

1. Известная теорема Карлемана [5] утверждает, что если f и ω—непрерывные на $\mathbf{R}$ функции, причем $\omega>0$, то тогда для произвольного числа $\varepsilon>0$ можно найти целую (и тем более мероморфную) функцию g такую, что

$$|f(x)-g(x)|<\varepsilon\omega(x) \text{ для } x\in\mathbf{R}.$$

Если $\omega(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$, то налицо не только *равномерное*, но и *касательное* (или асимптотическое) приближение со *скоростью касания* ω в бесконечности.

Основная наша задача состоит в конструировании мероморфных функций g, осуществляющих приближения на $\mathbf{R}$ указанных типов и имеющих возможно медленный рост на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ (естественно измеряемый ростом неванлинновской характеристики $T(r, g)$ функции g). Эта задача не сводится прямо к аналогичной задаче приближения целыми функциями (см. [4]), однако некоторые заготовки для решения последней будут нами существенно использованы.

Для формулировки первого нашего основного результата нам необходимы следующие

Обозначения (определения). 1) Пусть C и C^1—классы непрерывных и соответственно непрерывно дифференцируемых комплексных функций на $\mathbf{R}$. Положим

$$M(\tau, f)=\sup_{|x|\leqslant\tau}|f(x)| \text{ для } f\in C,$$

$$\lambda(\tau, f)=\sup_{|x|\leqslant\tau}(|x|+1)|f'(x)| \text{ для } f\in C^1.$$

2) Отнесем функцию $q\in C^1(\mathbf{R}^+)$ к классу $\mathbf{B}$, если $q(0)\geqslant 0$, b строго возрастает на $\mathbf{R}^+$ и существует конечный предел

$$\lim_{r\to\infty} r\frac{q'(r)}{q(r)}=\rho_q\left(=\text{порядку } \varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log q(r)}{\log r} \text{ функции } q\right).$$

Из условия $q\in\mathbf{B}$ следует, что в представлении $q(r)=r^{\rho(r)}$, $r\in\mathbf{R}^+$, функция $\rho(r)$ *является уточненным порядком* в смысле Валирона (см. [6], стр. 69). Обратно, если в этом представлении ρ— уточненный порядок, то требуемый предел ρ_q существует и при $\rho_q>0$ функция q возрастает, начиная с некоторого места.

Нам понадобится следующее свойство функций $q\in\mathbf{B}$ (см. [6] стр. 73, теорему 2.2): для любого $s>0$ существует конечный и положительный предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{q(sr)}{q(r)}=s^{\rho_q}. \tag{1.0}$$

3) Угловой окрестностью мнимой оси назовем множества вида

$$\Omega_\alpha=\left\{z\in\mathbf{C}: z\neq 0, \left|\arg z\pm\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\alpha\right\},$$

где предполагается, что $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$, так что $\Omega_\alpha\cap\mathbf{R}=\varnothing$.

Поскольку в общем случае скорость касания ω оказывает существенное влияние на рост характеристики аппроксимирующих мероморфных функций (ср. [4], § 1, пункт 4, стр. 19—20), то желая охватить наиболее интересный для нас случай равномерно-касательного приближения на R мероморфными функциями конечного порядка, мы ниже ограничиваемся скоростями касания вида $\omega(x) = \dfrac{1}{q(|x|)}$, $q \in \mathrm{B}$.

Теорема 1. *Для функций $f \in C^1$, $q \in \mathrm{B}$, $q \geqslant 1$ и чисел $0 < \varepsilon \leqslant 1$ и $p > 1$ существует мероморфная функция g с полюсами в некоторой угловой окрестности мнимой оси такая, что*

$$|f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{q(|x|)} \quad \text{для } x \in R, \tag{1.1}$$

$$T(r, \varepsilon^{-1} g) < k \int_1^{pr} \int_1^t \left[\frac{\lambda(\tau, f)}{\varepsilon} q(\tau) + \frac{\log^+ M(\tau, f)}{\varepsilon} \right] \frac{d\tau dt}{\tau \cdot t} +$$
$$+ k[1 + \log q(r)] \log^2(pr), \quad r \geqslant 1, \tag{1.2}$$

где константа $k > 0$ зависит только от p и выбора функции q.

Замечание 1. а) Теорему 1 можно усилить требованием, что полюсы аппроксимирующей функции g лежат в точности на мнимой оси, однако для этого потребовалось бы заметно осложнить доказательство.

б) Асимптотическую точность оценки (1.2) можно показать, как и в случае приближений целыми функциями (см. [4], стр. 19—20) на примере функций $f \in C^1$ вида

$$f(x) = \frac{1}{q(|x|)} \cdot \cos \nu(|x|),$$

где $\nu(r) \uparrow +\infty$ при $r \uparrow +\infty$. См. в связи с этим также теорему 3.

в) В оценке (1.2) второе слагаемое под интегралом можно оценить через первое. Учитывая, что

$$M(\tau, f) \leqslant |f(0)| + \lambda(\tau, f) \log(\tau + 1),$$

имеем оценку

$$\log \frac{M(\tau, f)}{\varepsilon} \leqslant \frac{\lambda(\tau, f)}{\varepsilon} + \log^+ \log(\tau + 1) + \frac{\log |f(0)|}{\varepsilon} + \log 2,$$

с учетом которой из (1.2) получим

$$T(r, \varepsilon^{-1} g) < k \int_1^{pr} \int_1^t \frac{\lambda(\tau, f)}{\varepsilon} q(\tau) \frac{d\tau dt}{\tau \cdot t} + k \left[1 + \frac{\log^+ |f(0)|}{\varepsilon} + \right.$$
$$\left. + \log(q(r) + \log r) \right] \log^2 r, \quad r \geqslant 3.$$

Второе слагаемое в правой части этой оценки имеет порядок $O(\log^3 r)$ при $r \to \infty$, так что рост аппроксимирующей мероморфной функции g определяется в основном величинами $\lambda(\tau, f)$ и $q(\tau)$.

Из теоремы 1 можно вывести соответствующий результат также для функций f из класса C. Необходимо лишь подходящим образом видоизменить определение величины $\varepsilon^{-1}\lambda(\tau, f)$ в (1.2), которая на этот раз будет зависеть не только от τ, ε и f, но и от функции q. Указанный вывод аналогичен выводу в работе [4] теоремы 4 из теоремы 1а.

Положим

$$\Lambda(\delta, \tau, f) = \sup(|x|+1)|f(x+y)-f(x-y)|,$$

где верхняя грань рассматривается при $|x| \leqslant \tau$ и $|y| < \frac{\delta}{2}\cdot$ Уравнение

$$\Lambda(\delta, \tau, f)+\delta=\frac{\varepsilon}{2q(\tau)}$$

относительно неизвестной δ имеет, очевидно, единственное решение $\delta=\delta(\tau, \varepsilon, f, q)$, положительное, непрерывное и монотонно убывающее по τ.

Следствие 1. Теорема 1 сохраняет силу для функций $f \in C$, если в (1.2) величину $\lambda(\tau, f)/\varepsilon$ заменить на $1/\delta(\tau, \varepsilon, f, q)$.

2. В этом пункте мы изложим результаты о наилучшем равномерном приближении (когда $q \equiv 1$) мероморфными функциями функций $f \in C$ в отличных от следствия 1 терминах (ср. [4], § 1, пункт 2).

Сформулируем сначала одну общую теорему. Напомним, что для функции $\varphi \in C$ *модуль непрерывности* φ на $\mathbf{R}$ — это величина

$$\omega(\delta, \varphi)=\sup_{|x-y|<\delta}|f(x)-f(y)|.$$

Теорема 2. *Пусть функция $\nu \in C^1(\mathbf{R}^+)$ строго возрастает к $+\infty$, $\nu(0)=0$, и пусть μ — нечетное продолжение на $\mathbf{R}$ обратной к ν функции $\nu^{-1} \in C$. Предположим, что для функции $f \in C$, $f \not\equiv \mathrm{const}$ композиция $f \circ \mu$ удовлетворяет условию*

$$\omega(\delta) \equiv \omega(\delta, f\circ\mu) \leqslant 1 \text{ при } \delta \in (0, \delta_0). \tag{1.3}$$

Тогда для любых чисел $\delta \in (0, \delta_0)$ и $p > 1$ существует мероморфная функция g с полюсами в некоторой угловой окрестности мнимой оси такая, что

$$|f(x)-g(x)| < 2\omega(\delta) \text{ для } x \in \mathbf{R}, \tag{1.4}$$

$$T\left(r, \frac{g}{\omega(\delta)}\right) < c\int_1^{pr}\int_1^{t}\left[\frac{\lambda(\tau, \nu)}{\delta}+\log^+\frac{\nu(\tau)}{\delta}\right]\frac{d\tau dt}{\tau\cdot t}+$$

$$+c\left[1+\frac{\log^+|f(0)|}{\omega(\delta)}\right]\log^2(pr),\ r \geqslant 1, \tag{1.5}$$

где константа $c > 0$ зависит лишь от p.

Таким образом, если композиция $f\circ\mu$ равномерно непрерывна (т. е. $\omega(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$), то тогда рост аппроксимирующих мероморфных функций g почти полностью определяется в терминах функции ν.

Замечание 2. Кроме (1.5) имеет место также оценка

$$T\left(r, \frac{g}{\omega(\delta)}\right) < k \int_1^{pr} \int_1^t \left[\frac{\lambda(\tau, \nu)}{\delta} + \log^+ \frac{M(\tau, f)}{\omega(\delta)}\right] \frac{d\tau dt}{\tau \cdot t} + k \log^2 (pr), \ r \geqslant 1. \tag{1.5'}$$

Как и следствие 1 теорема 2 в принципе позволяет равномерно приблизить мероморфными функциями произвольную функцию $f \in C$ и оценить рост аппроксимирующих функций. Действительно, для $f \in C$ всегда найдется удовлетворяющая условиям теоремы 2 функция ν, для которой $f \circ \mu$ равномерно непрерывна. Однако в общем случае связь между функциями f и ν имеет неконструктивный характер. Тем не менее при некоторых ограничениях на функцию ν с помощью теоремы 2 можно получить конструктивное описание некоторых новых классов непрерывных на R функций. Чтобы сформулировать этот результат, нам нужны следующие

Определения (обозначения) 2. Пусть функция $\nu: R^+ \to R^+$ не убывает и $\lim\limits_{r \to \infty} \nu(r) = +\infty$.

1) Мероморфную функцию g отнесем к классу $\mathfrak{M}^\nu$, если

$$T(r, g) = O(\nu(r)) \text{ при } r \to \infty$$

и полюсы g лежат в некоторой окрестности Ω_α $(\alpha = \alpha_g)$ мнимой оси.

2) Для функции $g \in \mathfrak{M}^\nu$ число

$$\sigma_g = \sigma_g(\nu) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{T(r, g)}{\nu(r)}$$

назовем ν-степенью или ν-типом функции g.

3) Для числа $\sigma \geqslant 0$ обозначим через $\mathfrak{M}^\nu_\sigma$ класс мероморфных функций $g \in \mathfrak{M}^\nu$, у которых $\sigma_g(\nu) \leqslant \sigma$.

4) Мероморфную функцию g, ограниченную на R, отнесем к классу M^ν (соответственно M^ν_σ), если $g \in \mathfrak{M}^\nu$ $(g \in \mathfrak{M}^\nu_\sigma)$.

5) Для функции $f: R \to C$ обозначим через $a^\nu_\sigma(f)$ наилучшее равномерное приближение f на R функциями класса $\mathfrak{M}^\nu_\sigma$:

$$a^\nu_\sigma(f) = \inf_{g \in \mathfrak{M}^\nu_\sigma} \sup_{x \in R} |f(x) - g(x)|.$$

Отметим, что введенные классы мероморфных функций содержат трансцендентные функции лишь при условии

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\nu(r)}{\log r} = +\infty. \tag{1.6}$$

Классы M^ν_σ являются аналогом и обобщением известных классов B_σ целых функций экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, ограниченных на R. Как известно, классы B_σ, введенные С. Н. Бернштейном [7], нашли важные применения в конструктивной теории функций на R и представляют также интерес как самостоятельный объект исследования. Классы M^ν_σ обобщают также введенные в [4] классы целых функций B^ν_σ, при этом в отличие от последних, содержащих непостоянные функции лишь при условии, когда порядок $\rho_\nu \geqslant 1$, рассмотрение классов M^ν_σ вполне разумно при выполнении условия (1.6). Однако ниже мы ограничиваемся изучением наилучших приближений на $\mathbf{R}$ функциями из классов M^ν и M^ν_σ при условии $\rho_\nu > 0$.

Теорема 3. *Пусть $\nu \in \mathbf{B}$, $\nu(0) = 0$, $\rho_\nu > 0$ и μ — нечетное продолжение на $\mathbf{R}$ обратной к ν функции ν^{-1}. Если функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ такова, что композиция $f \circ \mu$ равномерно непрерывна на $\mathbf{R}$, то тогда*

$$a^\nu_\sigma(f) \leqslant k_\nu\, \omega\left(\frac{1}{\sigma}, f\circ\mu\right) \quad \text{при } \sigma \geqslant \sigma_0,$$

где константа $k_\nu > 0$ зависит лишь от выбора функции ν. Обратно, если функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ ограничена и $a^\nu_\sigma(f) \to 0$ при $\sigma \to \infty$, то тогда композиция $f\circ\mu$ равномерно непрерывна на $\mathbf{R}$.

Непосредственно из теоремы 3 получим

Следствие 2. Пусть $\nu \in \mathbf{B}$, $\nu(0) = 0$, $\rho_\nu > 0$ и μ — нечетное продолжение на $\mathbf{R}$ обратной к ν функции ν^{-1}. Для того, чтобы ограниченная функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ равномерно приближалась (на $\mathbf{R}$) функциями из класса M^ν, необходимо и достаточно, чтобы композиция $f\circ\mu$ была равномерно непрерывна на $\mathbf{R}$.

§ 2. Доказательство теорем 1—3

Пункт 1 этого параграфа посвящен доказательству теоремы 1. Из нее в начале пункта 2 выводится теорема 2, затем с помощью последней доказывается теорема 3. При этом используется некоторый грубый аналог неравенства С. Н. Бернштейна [7] на случай классом M^ν (см. лемму 5).

1. Для доказательства теоремы 1 нам потребуется основная лемма работы [4]. Для ее применения нам нужны некоторые

Обозначения 3. 1) Для множества $E \subset \mathbf{C}$ обозначим через $H(E)$ совокупность функций, каждая из которых голоморфна в некоторой окрестности E. Для $f \in H(E)$ полагаем

$$M(r, f) = \sup |f, (E \cap \overline{D}_r)|.$$

Здесь и в дальнейшем D_r означает круг $|z| < r$.

2) Для $h > 0$ и $u \in \mathbf{R}$ положим

$$\sigma(u, h) = \{\zeta = \xi + i\eta \in \mathbf{C} : |\xi - u| \leqslant 3h,\ |\eta| \leqslant h\},$$

$$S_h = \{w \in \mathbf{C} : |\operatorname{Im} w| < h\}.$$

3) Для функций $F \in C^1$ и $\Phi \in H(\overline{S}_h)$ введем обозначения ($\zeta = \xi + i\eta$):

$$\mu_h(u, F) = \max_{\zeta \in \sigma(u, h)} |F'(\xi + \eta) - F'(\xi - \eta)|,$$

$$m_h(u, F) = \max_{\zeta \in \sigma(u, h)} |F(\xi + \eta)|, \quad m_h(u, \Phi) = \max_{\zeta \in \sigma(u, h)} |\Phi(\zeta)|,$$

$$a_h(u) = 1 + \frac{1}{\varepsilon}\mu_h(u, F)\cdot m_h(u, \Phi),$$

где $\varepsilon > 0$ — фиксированное число.

Лемма А ([4]). *Пусть* $F \in C^1$, $\Phi \in H(\overline{S}_h)$, $\varepsilon > 0$. *Существует функция* $\Psi \in H(S_h)$ *такая, что*

$$|F(u)\Phi(u) - \Psi(u)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для } u \in \mathbf{R}, \tag{2.1}$$

$$\log \frac{|\Psi(w)|}{\varepsilon} < c_1 \left[a_h(u) + \log^+ \frac{m_h(u, F)\, m_h(u, \Phi)}{\varepsilon} \right], \quad w = u + iv \in S_h, \tag{2.2}$$

где $c_1 > 0$ *зависит только от* h.

Из леммы А можно вывести аналогичную аппроксимационную лемму, когда полосы заменяются областями вида

$$\Delta_\alpha^\sigma = (\mathbf{C} \setminus \Omega_\alpha) \cup S_h,$$

где Ω_α — угловая α-окрестность мнимой оси.

Лемма 1. *Для любого* $l > 1$ *можно указать числа*

$$0 < \sigma < l^{-1}, \quad 0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad c_2 > 0$$

такие, что: для произвольных функций $f \in C^1$ *и* $\varphi \in H(\Delta_\beta^1)$ *существует функция* $\psi \in H(\Delta_\alpha^\sigma)$, *удовлетворяющая неравенствам*

$$|f(x)\varphi(x) - \psi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для } x \in \mathbf{R}, \tag{2.3}$$

$$\log^+ \frac{M(r, \psi)}{\varepsilon} < c_2 \left[1 + \frac{\lambda(\tau, f)}{\varepsilon} M(\tau, \varphi) + \log^+ \left(\frac{M(\tau, f)}{\varepsilon} \cdot M(\tau, \varphi) \right) \right], \tag{2.4}$$

где $\tau = lr + l - 1$.

Доказательство. Рассмотрим конформное и однолистное отображение G полосы $S_{\pi/2}$ на область Δ_0^1:

$$z = G(w) = \frac{1}{2}(e^w - e^{-w}).$$

Легко убедиться, что

$$|G'(w)| \leqslant |G(w)| + 1 \quad \text{для } w \in S_{\pi/2}, \tag{2.5}$$

$$G(|\operatorname{Re} w|) \leqslant |G(w)| \leqslant G(|\operatorname{Re} w|) + h \quad \text{для } w \in S_h, \ h \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{2.6}$$

Полагая $x + iy = G(u + iv)$, из соотношений

$$x = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) \cos v, \quad y = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) \sin v$$

выводим, что $G(S_h) \supset \Delta_\alpha^\sigma$ при $\sigma = \sin h$ и $\alpha = \frac{\pi}{2} - h$ для $h \leqslant \frac{\pi}{2}$. При этом граница угловой области Ω_α является асимптотой для границы области $G(S_h)$. Фигурирующие в лемме 1 числа σ и α мы получим, фиксируя в них

$$h = h(l) = \min\left\{ l^{-1}, \frac{1}{8}\log l \right\}, \tag{2.7}$$

в число $\beta \in (0, \alpha)$ выберем так, что $G(S_h) \subset \Delta^1_\beta$ для $h = h(l)$.

Определим теперь функции $F \in C^1$ и $\Phi \in H(\overline{S}_h)$ формулами

$$F(u) = f(G(u)),\ u \in \mathbf{R},\ \Phi(w) = \varphi(G(w)),\ w \in \overline{S}_h.$$

Применяя к функциям F и Φ лемму А, мы найдем функцию $\Psi \in H(S_h)$' удовлетворяющую неравенствам (2.1) и (2.2). Искомую функцию $\psi \in H(\Delta^\circ_\alpha)$ мы получим, полагая

$$\psi(z) = \Psi(G^{-1}(z)) \text{ для } z \in \Delta^\circ_\alpha \subset G(S_h).$$

Оценка (2.3) теперь следует из (2.1), а из (2.2) имеем

$$\log\frac{|\psi(z)|}{\varepsilon} < c_1\left[a_h(u) + \log^+ \frac{m_h(u, F)\, m_h(u, \Phi)}{\varepsilon} \right],$$

$$u = \operatorname{Re} G^{-1}(z),\ z \in \Delta^\circ_\alpha. \tag{2.8}$$

Оценим фигурирующие здесь величины непосредственно в терминах функций f и φ. Учитывая принятые в этом пункте обозначения, а также оценку (2.5), очевидно имеем

$$\mu_h(u, F) \leqslant 2\max(|G(x)| + 1)\,|f'(x)|,$$

где $x \in \mathbf{R}$ удовлетворяет условию $|x| \leqslant |u| + 4h$. Учитывая, что $G(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$, отсюда получим

$$\mu_h(u, F) \leqslant 2\sup\{(|t| + 1)\,|f'(t)| : t \in \mathbf{R},\ |G^{-1}(t)| \leqslant |u| + 4h\}.$$

Аналогично имеем

$$m_h(u, F) \leqslant \sup\{|f(t)| : t \in \mathbf{R}, |G^{-1}(t)| \leqslant |u| + 4h\},$$

$$m_h(u, \Phi) \leqslant \sup\{|\varphi(\zeta)| : \zeta \in G(S_h),\ |G^{-1}(\zeta)| \leqslant |u| + 4h\}.$$

Если в этих оценках подставить $u = \operatorname{Re} G^{-1}(z)$, где $z \in \Delta^\circ_\alpha$, то во всех трех случаях возникает вопрос об оценке размеров множества точек $\in G(S_h)$, удовлетворяющих условию

$$|G^{-1}(\zeta)| \leqslant |\operatorname{Re} G^{-1}(z)| + 4h. \tag{2.9}$$

Для ответа на этот вопрос подставим в (2.6) последовательно $G(w) = z$ и $G(w) = \zeta$. Мы получим оценки

$$G(|\operatorname{Re} G^{-1}(z)|) \leqslant |z|,\ |\zeta| < G(|\operatorname{Re} G^{-1}(\zeta)|) + h.$$

В силу монотонности функций G и G^{-1} на $\mathbf{R}$, из первой оценки следует, что $|\operatorname{Re} G^{-1}(z)| \leqslant G^{-1}(|z|)$, и тогда с учетом (2.9) из второй оценки следует, что

$$|\zeta| \leqslant G(G^{-1}(|z|) + 4h) + h.$$

Отсюда с учетом (2.7) и неравенства

$$G(a + b) \leqslant G(a)\,e^b + G(b),\ a, b > 0$$

окончательно заключаем, что

$$|\zeta| \leqslant e^{4h}|z| + G(4h) + h < \tau = l|z| + l - 1.$$

Теперь из установленных выше оценок для величин $\mu_h(u, F)$, $m_h(u, F)$ и $m_h(u, \Phi)$ следует, что

$$\mu_h(u, F) \leqslant 2\lambda(\tau, f), \quad m_h(u, F) \leqslant M(\tau, f), \quad m_h(u, \Phi) \leqslant M(\tau, \varphi),$$

и оценка (2.4) вытекает из (2.8), если учесть также определение величины $a_h(u)$. Лемма 1 доказана.

Для доказательства теоремы нам понадобится также теорема 1 с замечанием 2 из работы авторов [3], являющейся усилением основного результата работы [2]. Мы приведем удобную для нас частную формулировку этого результата.

Теорема А ([3]). *Для функции $\psi \in H(\Delta_\delta^h)$ и чисел $\varepsilon \in (0, 1]$ $l > 1$, $\delta < \gamma < \min\left\{\delta + 1, \frac{\pi}{2}\right\}$ существует мероморфная функция G такая что*

$$|\psi(z) - G(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для} \quad z \in \Delta_\gamma^{h \cdot l^{-1}}, \tag{2.10}$$

$$T(r, \varepsilon^{-1} G) < k_1 \int_h^{lr}\int_h^{\eta} \frac{\log^+ M(\xi, \psi)}{\varepsilon} \frac{d\xi d\eta}{\xi \cdot \eta} +$$
$$+ k_1 \log^2(r+1) \text{ при } r \geqslant l(\gamma - \delta), \tag{2.11}$$

где константа $k_1 > 0$ зависит только от δ, h, γ и l.

Лемма 2. *Для функции $q \in \mathrm{B}$ и числа $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ существует такая мероморфная функция φ, что*

$$q(|z|) < |\varphi(z)| < c_3 q(|z|) \quad \text{для} \quad z \in \Delta_\beta^1, \tag{2.12}$$

$$T(r, \varphi) < c_4[1 + \log q(r)] \log^2(r+1), \quad r \geqslant 1, \tag{2.13}$$

где константы c_3 и c_4 зависят лишь от β и выбора функции q.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\beta \leqslant 1$. По теореме 5.1 монографии [6], для функции $q \in \mathrm{B}$ и числа β можно найти такую функцию $\Psi \in H(\Delta_{\beta/2}^2)$, что

$$2q(|z|) < |\psi(z)| < c_5 q(|z|) \quad \text{для} \quad z \in \Delta_{\beta/2}^2. \tag{2.14}$$

Применим к функции ψ теорему А при $\delta = \beta/2$, $h = 2$, $\varepsilon = 1$ и $l = 2$, $\gamma = \beta$, так что $l(\gamma - \delta) = \beta \leqslant 1$, и положим $\varphi = G$. Оценка (2.12) теперь следует из (2.10) и (2.14) при $c_3 = c_5 + 1$, а оценка (2.13) — из (2.11), если учесть, что согласно (2.14) и (1.0)

$$M(\tau, \varphi) < c_3 q(\tau) \leqslant c_3 q(2r) \leqslant c_6 q(r), \quad \tau \leqslant 2r.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Выберем число $l = l(p) > 1$ так, что

$$p > l^2 + l - 1$$

Сопоставим числу l числа σ, β, α и c_2 в соответствии с леммой 1, и пусть φ — мероморфная функция, построенная в лемме 2 для $q \in B$ и числа β. Применение к произведению $f \cdot \varphi$ леммы 1 гарантирует наличие функции $\psi \in H(\Delta_\sigma^\circ)$, удовлетворяющей (2.3), рост которой, согласно (2.4) и (2.12), ограничивается неравенством

$$\log^+ \frac{M(\xi, \psi)}{\varepsilon} < c_7 \left[1 + \frac{\lambda(\tau, f)}{\varepsilon} q(\tau) + \log^+ \frac{M(\tau, f)\, q(\tau)}{\varepsilon} \right], \tag{2.15}$$

где $\tau = l\xi + l - 1$.

Применим теперь к функции ψ теорему A, полагая там $h = \sigma$, $\delta = \alpha$ и $l(\gamma - \alpha) = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} < 1$. Аппроксимирующая мероморфная функция будет удовлетворять, согласно (2.10) и (2.3), неравенству

$$|f(x)\varphi(x) - G(x)| < \varepsilon \text{ для } x \in \mathbf{R}. \tag{2.16}$$

Рост функции G оценивается согласно (2.11), где, в свою очередь, рост функции ψ ограничивается неравенством (2.15). Обозначим через $A(\tau)$ выражение в квадратных скобках этого неравенства. Из (2.11), осуществив в двойном интеграле замену переменных

$$\tau = l\xi + l - 1, \quad t = l\eta + l - 1,$$

где

$$l\sigma < \tau \leqslant t \leqslant l^2 r + l - 1 < pr \text{ при } r \geqslant 1,$$

и учитывая, что $(\xi\eta)^{-1} d\xi d\eta < k_2 (\tau t)^{-1} d\tau dt$, приходим к оценке

$$T(r, \varepsilon^{-1} G) < k_3 \int_{l\sigma}^{pr} \int_{l\sigma}^{t} A(\tau) \frac{d\tau dt}{\tau \cdot t} \text{ при } r \geqslant 1.$$

Докажем, что в этой оценке нижние пределы $l\sigma$ в двойном интеграле можно заменить на 1. В самом деле, с учетом монотонности функции $A(\tau)$ имеем

$$\int_{l\sigma}^{pr} \int_{l\sigma}^{t} A(\tau) \frac{d\tau dt}{\tau \cdot t} < k_4 A(1) \log(pr) + \int_{1}^{pr} \int_{1}^{t} A(\tau) \frac{d\tau dt}{\tau \cdot t} <$$

$$< k_5 \int_{1}^{pr} \int_{1}^{t} A(\tau) \frac{d\tau dt}{\tau \cdot t}.$$

Таким образом, мы приходим к оценке

$$T(r, \varepsilon^{-1} G) < k_6 \int_{1}^{pr} \int_{1}^{t} A(\tau) \frac{d\tau dt}{\tau \cdot t} < k_7 [1 + \log q(r)] \log^2 (pr) +$$

$$+ \int_{1}^{pr} \int_{1}^{t} \left[\frac{\lambda(\tau, f)}{\varepsilon} q(\tau) + \log^+ \frac{M(\tau, f)}{\varepsilon} \right] \frac{d\tau dt}{\tau \cdot t}, \quad r \geqslant 1. \tag{2.17}$$

Искомую мероморфную функцию g мы получим, полагая $g = G/\varphi$. Из (2.10) и (2.12) следует, что возможные полюсы функции g должны лежать в Ω_{γ}. Неравенство (1.1) следует из (2.16), если учесть левую часть оценки (2.12). Из этой же оценки следует, что $|\varphi(0)| > |q(0)| > 1$, поэтому

$$T(r, \varepsilon^{-1}g) \leqslant T(r, \varepsilon^{-1}G) + T\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) =$$

$$= T(r, \varepsilon^{-1}G) + T(r, \varphi) + \log\frac{1}{|\varphi(0)|} < T(r, \varepsilon^{-1}G) + T(r, \varphi).$$

Отсюда с учетом оценок (2.17) и (2.13) приходим к неравенству (1.2). Теорема 1 доказана.

2. Доказательство теоремы 2 (ср. [4], § 1, пункт 2). Определим функцию $\varphi \in C^1$ формулой

$$\varphi(y) = \frac{1}{\delta}\int\limits_{y}^{y+\delta}(f\circ\mu)(t)\,dt, \quad y \in \mathbf{R}.$$

Очевидно, что для $y \in \mathbf{R}$

$$|(f\circ\mu)(y) - \varphi(y)| \leqslant \omega(\delta), \quad |\varphi'(y)| \leqslant \frac{\omega(\delta)}{\delta}.$$

Отсюда, считая функцию ν продолженной на $\mathbf{R}$ нечетным образом, для функции $F = \varphi_0\nu \in C^1$ получим оценки

$$|f(x) - F(x)| \leqslant \omega(\delta), \quad x \in \mathbf{R}, \tag{2.18}$$

$$|F'(x)| \leqslant \frac{\omega(\delta)}{\delta}\cdot\nu'(x), \quad x \in \mathbf{R}. \tag{2.19}$$

Из (2.19) следует, что

$$\frac{\lambda(\tau, F)}{\omega(\delta)} \leqslant \frac{\lambda(\tau, \nu)}{\delta} \quad \text{для } \tau \geqslant 0. \tag{2.20}$$

Кроме того, интегрируя (2.19), получим оценку

$$|F(x) - F(0)| \leqslant \frac{\omega(\delta)}{\delta}\cdot\nu(|x|), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Отсюда и из (2.18) выводим, что

$$M(\tau, F) \leqslant \frac{\omega(\delta)}{\delta}\cdot\nu(\tau) + \omega(\delta) + |f(0)|, \quad \tau \geqslant 0,$$

$$M(\tau, F) \leqslant M(\tau, f) + \omega(\delta), \quad \tau \geqslant 0.$$

Отсюда приходим к оценкам

$$\log^+\frac{M(\tau, F)}{\omega(\delta)} \leqslant \log^+\frac{\nu(\tau)}{\delta} + \log^+\frac{|f(0)|}{\delta} + \log 3, \quad \tau > 0, \tag{2.21}$$

$$\log^+\frac{M(\tau, F)}{\omega(\delta)} \leqslant \log^+\frac{M(\tau, f)}{\delta} + \log 2, \quad \tau > 0. \tag{2.21'}$$

Применим теперь к функции F теорему 1, когда $q \equiv 1$ и $\varepsilon = \omega(\delta)$ при $\delta \in (0, \delta_0)$ (см. условие (1.3)). Полученная мероморфная функция удовлетворяет всем условиям теоремы 2: неравенство (1.4) следует из (1.1) и (2.18), а оценка (1.5)—из оценки (1.2) с учетом (2.20) и (2.21). Оценка (1.5′) следует из (1.2) с учетом (2.20) и (2.21′).

Доказательство 1-й части теоремы 3. Оценку (1.7) можно легко вывести из теоремы 2. В самом деле, считая, что $f \not\equiv \mathrm{const}$, фиксируем число $\delta_0 \in (0, 1]$ так, что

$$|f(0)|\,\delta^2 \leqslant \omega(\delta) < 1 \text{ для } \delta \in (0, \delta_0]. \tag{2.22}$$

Поскольку все условия теоремы 2 соблюдены, применим к функции f эту теорему, фиксируя $p = 2$, и оценим ν-тип аппроксимирующей функции g.

С этой целью заметим сначала, что из условий $\nu \in \mathbf{B}$ и $\rho_\nu > 0$ следует существование таких констант $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$, зависящих лишь от выбора функции ν, что

$$\frac{\tau\lambda(\tau, \nu)}{\lambda_1} < \nu(\tau) < \lambda_2(1 + \tau\lambda'(\tau)) \text{ при } \tau \geqslant 1. \tag{2.23}$$

Из (1.5) с учетом (2.23) и (2.22) получим

$$T(r, g) \leqslant T\left(r, \frac{g}{\omega(\delta)}\right) < c\,\frac{(\lambda_1 + 1)}{\delta}\int_1^{2r} [\log t + \nu(t)]\,\frac{dt}{t} +$$

$$+ \frac{3c}{\delta}\log^2(2r) < \frac{\lambda_3}{\delta}\,[\nu(2r) + \log^2(2r)] \text{ для } r \geqslant 1.$$

Отсюда с учетом (1.0) и условия $\rho_\nu > 0$ окончательно получим

$$T(r, g) < \frac{\lambda_4}{\delta}\cdot\nu(r) \text{ для } r \geqslant 1,$$

где $\lambda_4 > 0$ зависит только от выбора ν. Полагая $\sigma_0 = \lambda_4/\delta_0$ и для произвольного $\sigma \geqslant \sigma_0$ определяя δ из соотношения $\delta = \lambda_4/\sigma$, получаем, что $g \in \mathfrak{M}^{\nu}_{\sigma}$. Поэтому из (1.4) следует, что

$$a^{\nu}_{\sigma}(f) < 2\,\omega\left(\frac{\lambda_4}{\delta}\right) < 2(\lambda_4 + 1)\,\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right) \text{ для } \sigma \geqslant \sigma_0.$$

Оценка (1.7) доказана.

Доказательство 2-й части теоремы 3. Оно основано на трех леммах, возможно представляющих самостоятельный интерес. Для дальнейшего изложения положим для $\alpha \in (0, 2\pi)$ и $\theta \in \mathbf{R}$

$$\Delta_\alpha(\theta) = \left\{ z \in \mathbf{C} : |\arg z - \theta| < \frac{\alpha}{2} \right\}.$$

Лемма 3. *Пусть мероморфная (в* C*) функция* g *не имеет полюсов в* $\Delta_\alpha(\theta)$. *Тогда для произвольных чисел* $p > 1$ *и* $\beta \in (0, \alpha)$ *имеем оценку*

$$\log|g(z)| \leqslant c\,T(p|z|, g) \text{ для } z \in \Delta_{\alpha-\beta}(\theta), \tag{2,24}$$

где константа $c > 0$ *зависит лишь от* β *и* p, Доказательство. Ввиду непрерывности по z участвующих в (2.17) величин, достаточно установить эту оценку для положительных значений параметра $r=|z|$ таких, что на окружности $|\zeta|=\rho$ при $\rho=\sqrt{pr}$ функция g не имеет полюсов.

Рассмотрим голоморфную на $\bar{D}_\rho$ функцию $\varphi=g\cdot B$, где

$$B(z)=\prod_{k=1}^{m}\frac{\rho(z-b_k)}{\rho^2-\bar{b}_k z},$$

если функция g имеет в D_ρ полюсы $b_1, b_2, \cdots, b_m$ (перечисленные с учетом их кратности) и $B(z)\equiv 1$ — в противном случае. Поскольку $T(\rho, B)=0$, то имеем, что $T(\rho, \varphi)\leqslant T(\rho, g)$ Отсюда с учетом известной оценки голоморфной функции через ее характеристику (см. [8] стр. 222) получим

$$\log|\varphi(z)|\leqslant\frac{\rho+r}{\rho-r}\cdot T(\rho, g)=c_1(p)\,T(\rho, g). \qquad (2.25)$$

Для оценки функции $\log|B|^{-1}$ заметим, что если $z\in\Delta_{\alpha-\beta}(\theta)$, то поскольку $(b_k)_1^m\subset\mathbb{C}\diagdown\Delta_\alpha(\theta)$, очевидно существует такая зависящая лишь от β константа $c_2=c_2(\beta)>0$, что $|z-b_k|\geqslant c_2 r$. Поэтому

$$\log\left|\frac{\rho^2-\bar{b}_k z}{\rho(z-b_k)}\right|\leqslant\log\frac{2\sqrt{p}}{c_2}=c_3.$$

Полагая также $c_4=(\log\sqrt{p})^{-1}$, имеем

$$\log|B(z)|^{-1}\leqslant c_3 m=c_3 n(\rho, g)\leqslant(c_3c_4)\,N(pr, g)\leqslant(c_3c_4)\,T(pr, g). \qquad (2.26)$$

Оценка (2.24) следует теперь из (2.25) и (2.26) с константой $c=c_1+$ $+c_3c_4$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $g\in H(D_R)$, $|g(\zeta)|<M$ *для* $\zeta\in D_R$ *и* $|g(t)|\leqslant 1$ *при* $-R<t<R$. *Тогда*

$$|g'(0)|<\frac{6}{R}(1+\log^+ M). \qquad (2.27)$$

Доказательство. По теореме о двух константах имеем оценку

$$\log M(\rho, g)\leqslant(\log^+ M)\sup_{|\zeta|=\rho}\omega_R(\zeta),\quad \rho<R,$$

где ω_R — гармоническая мера полуокружности $\partial D_R\cap\Delta_\pi(\pi/2)$ относительно полукруга $D_R\cap\Delta_\pi(\pi/2)$. Указанный супремум, очевидно, достигается в точке $\zeta=i\rho$, поэтому

$$\sup_{|\zeta|=\rho}\omega_R(\zeta)=\frac{4}{\pi}\arcsin\frac{\rho}{\sqrt{R^2+\rho^2}}\leqslant\frac{2\rho}{R}.$$

По неравенству Коши

$$|g'(0)|\leqslant\rho^{-1}M(\rho, g)\leqslant\rho^{-1}\exp\left(\frac{2\rho}{R}\log^+ M\right).$$

Полагая здесь $\rho=2^{-1}R(1+\log^+ M)^{-1}$, получим (2.27). Лемма доказана.

Леммы 3 и 4 позволяют доказать следующий грубый аналог известного неравенства С. Н. Бернштейна [7]для функций $M^{\cdot}$.

Лемма 5. *Пусть* $g\in M^{\cdot}$, $\nu\in$ B, $\rho_{\nu}>0$. *Тогда*

$$\overline{\lim_{|x|\to\infty}}\ \frac{|g'(x)|}{\nu'(|x|)}<+\infty, \tag{2.28}$$

Доказательство. Так как $g\in M^{\cdot}$, то g не имеет полюсов в некоторой области вида $\Delta_{\alpha}^{\bullet}$. Применим к функции g и к углам $\Delta_{2\beta}(0)$ и $\Delta_{2\beta}(\pi)$ лемму 3 при $\beta=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$ и $p=2$. Из оценки (2.24) с учетом того, что $g\in M^{\cdot}$, получим

$$\log|g(z)|<c_1\nu(|z|)\ \text{для}\ z\in\Delta_{\beta}(0)\cup\Delta_{\beta}(\pi), \tag{29}$$

где c_1 не зависит от z. Можно также считать, что $\sup|g|(R)=1$.

Выберем произвольную точку $x\in$ R, $x\neq 0$ и рассмотрим голоморфную функцию $g_x: g_x(\zeta)=g(x+\zeta)$ для $\zeta\in D_R$, где $R=|x|\sin\beta$. Из (2.29) следует, что

$$|g_x(\zeta)|<M=\exp(c_1\nu(2|x|))\ \text{для}\ \zeta\in D_R.$$

Применяя к g_x лемму 4, из оценки (2.27), с учетом (1.0) и условия $\rho^{\nu}>\theta$, получим

$$|g'(x)|<\frac{6}{|x|\sin\beta}\,(1+c_1\nu(2|x|))<c_2\frac{\nu(|x|)}{|x|}<c_3\nu'(|x|),\ |x|\geqslant r_0,$$

что доказывает (2.28) и лемму.

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 4. Пусть $\in C$ ограничена на R и $a_{\sigma}^{\cdot}(f)\to 0$ при $\sigma\to\infty$. Тогда существует последовательность функций $\{g_n\}_1^{\infty}$, $g_n\in M^{\cdot}$ такая, что $g_n\to f$ равномерно на R. Очевидно тогда $g_n\circ\mu\to f\circ\mu$ также равномерно на R. Для доказательства условия $\omega(\delta, f\circ\mu)\to 0$ при $\delta\to 0$ достаточно теперь убедиться, что $\omega(\delta, g\circ\mu)\to 0$ при $\delta\to 0$ для произвольной функции $g\in M^{\cdot}$ Последнее утверждение гарантируется ограниченностью производной композиции $g\circ\mu$ вне некоторого интервала, что, в свою очередь, следует из оценки (2.28) леммы 5:

$$\overline{\lim_{|x|\to\infty}}\ |(g\circ\mu)'(x)|=\overline{\lim_{|x|\to\infty}}\ |\mu'(x)\,g'(\mu(x))|=\overline{\lim_{|x|\to\infty}}\ \frac{|g'(\mu(x))|}{\nu'(\mu(x))}<+\infty.$$

Теорема 3 доказана.

Институт математики АН Армении

Поступила 22. IX. 1989

Ռ. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ, Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ. Լավագույն մոտավորությունները մերոմորֆ ֆունկցիաներով իրական առանցքի վրա (*ամփոփում*)

Սույն աշխատանքում ստացված են արդյունքներ իրական առանցքի վրա կամայական անընդհատ կամ անընդհատորեն դիֆերենցելի ֆունկցիաներին մերոմորֆ ֆունկցիաներով լավագույն և շոշափումային մոտավորության մասին, վերջիններիս աճի հզորի գնահատականներով։ Ներմուծվում են իրական առանցքի վրա անընդհատ ֆունկցիաների այնպիսի դասեր, որոնք լիովին նկարագրվում են դրական կարգի մերոմորֆ ֆունկցիաների լավագույն մոտավորությունների տերմիններով։

R. A. AVETISYAN, N. U. ARAKELYAN. *Best approximations by meromorphic functions on real axis* (summary)

This paper establishes some results on uniform and tangential approximation of continuous or continuously differentiable on real axis functions, by meromorphic functions with exact estimates of their growth. Classes of continuous functions on real axis are introduced, which are completely described in terms of the best approximations by meromorphic functions of the given positive order.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. У. Аракелян, Р. А. Аветисян.* О наилучшем равномерном приближении мероморфными функциями на вещественной оси, ДАН СССР, 1981, 257, № 6, 1289—1293.
2. *Л. А. Тер-Исраелян.* Равномерные и касательные приближения голоморфных в угле функций мероморфными с оценкой их роста, Изв. АН АрмССР, сер. матем., 1971, 6, № 1, 67—80.
3. *Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян.* Наилучшие приближения мероморфными функциями в угловых областях, Изв. АН АрмССР, «Математика», XXIII № 6, 1988, 547—556.
4. *Н. У. Аракелян.* О равномерном и касательном приближени на вещественной оси целыми функциями с оценкой их роста, Мат. сб., 1980, вып. 113 (155), № 1 (9), 3—40.
5 *T. Carleman.* Sur un theoreme de Weierstrass, Arkiv Math., Astr. Och. Fisik, 20 № 4, 1927, 1—5.
6. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский.* Распределение значений мероморфных функций, М., Наука, 1970.
7. *С. Н. Бернштейн.* Об одном свойстве целых функций, Собрание сочинений, изд. АН СССР, т. 1, 1952, 261—270.
8. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции. М.—Л., Гостехиздат, 1941.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 6, 1990 Математика

УДК 517.95

Г. С. АКОПЯН, Р. Л. ШАХБАГЯН

ПОСТРОЕНИЕ АТТРАКТОРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

1°. Рассмотрим эволюционное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}=A(u),\ \ t>0, \tag{1}$$

для которого корректно поставлена задача с начальным условием

$$u|_{t=0}=u_0. \tag{2}$$

Одной из центральных проблем теории дифференциальных уравнений с частными производными вида (1) является изучение поведения их траекторий $u(t, x)$ при $t\to\infty$. Как оказалось эта задача тесно связана с существованием многообразий, называемых аттракторами, обладающих свойством притяжения траекторий.

Важной проблемой является описание структуры аттракторов, оценки сверху и снизу их хаусдорфовой размерности.

Этому кругу вопросов посвящено довольно много работ (см., например, [1]—[5] и приведенную в них библиографию).

В настоящее время достаточно полно исследованы эволюционные дифференциальные уравнения (и системы) с частными производными второго порядка.

Статья посвящена доказательству существования аттракторов полугрупп, порождаемых нелинейными параболическими уравнениями высокого порядка.

2°. Пусть X—банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$.

Определение 1. Семейство операторов $\{S_t,\ t\geqslant 0\}$, действующих в пространстве X:

$$S_t: X\to X,\ \forall t\geqslant 0 \tag{3}$$

называется полугруппой, если композиция

$$S_t\circ S_\tau=S_{t+\tau},\ \forall\ t,\ \tau\geqslant 0,$$

$S_0=I$, где I—единичный оператор.

Заметим, что если задача (1), (2) однозначно разрешима, то она порождает семейство операторов S_t:

$$S_t\ u_0=u(t). \tag{4}$$

Легко проверяется, что $\{S_t\}$—полугруппа.

Следуя А. В. Бабину и М. И. Вишику [1], [5], дадим

Определение 2. Пусть $\{S_t,\ t\geqslant 0\}$—полугруппа операторов S_t, действующих в X. Ограниченное, замкнутое в X, множество $\mathfrak{M}(\mathfrak{M}\subset X)$ называется максимальным аттрактором полугруппы $\{S_t\}$, если

1) для любого ограниченного множества $B\subset X$

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(S_t B, \mathfrak{M})=0 \tag{5}$$

(условие притяжения), где $\operatorname{dist}(F, G)=\sup_{f\in F}\inf_{g\in G}\|f-g\|$;

2) $S_t\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}$ для любого $t\geqslant 0$ (условие инвариантности).

Ниже мы будем существенно опираться на одну общую теорему о существовании аттрактора, доказанную в [1]. Приведем её формулировку.

Теорема I. *Пусть полугруппа $\{S_t\}$, $S_t: X\to X$, удовлетворяет следующим условиям:*

а) полугруппа $\{S_t\}$ равномерно ограничена, то есть для любого $R>0$ существует постоянная $C(R)>0$ такая, что

$$\|S_t u\|<C(R), \text{ при } \|u\|\leqslant R \text{ и } \forall t>0;$$

в) существует компактное в X поглощающее множество B_0, то есть для любого ограниченного множества $B\subset X$ существует такое число $T>0$, что при $t\geqslant T$ $S_t B\subset B_0$;

с) операторы $S_t: X\to X$ непрерывны при $t>0$. Тогда у полугруппы $\{S_t\}$ имеется компактный максимальный аттрактор.

Введем необходимые нам для дальнейшего обозначения. Для любого мультииндекса $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ положим $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$, где $D_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$.

Пространство $L_p(0, T; W_p^m(\Omega))$ по определению — банахово пространство функций $u(x, t):(0, T)\to W_p^m(\Omega)$ с нормой

$$\|u(x, t)\|_{m,p}=\left(\int_0^T\|u(x,t)\|_{m,p}^p\,dt\right)^{1/p},$$

где
$$\|u(x, t)\|_{m,p}=\left(\sum_{|\alpha|<m}\int_\Omega|D^\alpha u|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Круглыми скобками (,) будем обозначать скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

3°. Пусть Ω—ограниченная область в R^n с достаточно гладкой границей $\Gamma=\partial\Omega$. В цилиндре $Q=(0, \infty)\times\Omega$ рассматривается следующая начально-краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t}+L(u)=\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{|\alpha|<m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(A_\alpha(x, t, D^\gamma u))=0,\ (x, t)\in Q, \tag{6}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega, \tag{7}$$

$$D^\omega u|_\Sigma=0,\ |\omega|\leqslant m-1,\ \Sigma=(0, \infty)\times\Gamma. \tag{8}$$

где α, γ, ω—мультииндексы, функции $A_\alpha(x, t, \xi_\gamma)$ нелинейны и зависят, вообще говоря, от всех ξ_γ с $|\gamma|\leqslant m$.

Предполагается также, что

1) Функции $A_\alpha(x, t, \xi_\gamma)$ определены для $(t, x) \in Q$ и всех ξ_γ, непрерывны по t и ξ_γ и удовлетворяют неравенству

$$|A_\alpha(x, t, \xi_\gamma)| \leqslant K_1 \left(\sum_{|\alpha| < m} |\xi_\gamma|^{p-1} + 1 \right), \quad p \geqslant 2; \tag{9}$$

2) Условие эллиптичности: для любой функции $u(x, t) \in L_p^{loc}(0, \infty; \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))$ (т. е. для любого $T > 0$, $u(x, t) \in L_p(0, T; W_p^m(\Omega))$) справедливо неравенство

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} (A_\alpha(x, t, D^\gamma u), D^\alpha u) \geqslant a_0 \|u(x, t)\|_{m, p}^p - k(t), \tag{10}$$

где $a_0 = \mathrm{const} > 0$, $k(t)$ — непрерывная на $[0, \infty)$ функция;

3) Условие сильной эллиптичности: для любого $T > 0$ и любых функций $u(x, t) \in L_p^{loc}(0, \infty; W_p^m(\Omega))$ и $v(x, t) \in L_p^{loc}(0, \infty; W_p^m(\Omega))$ таких, что $u - v \in L_p^{loc}(0, \infty; \overset{0}{W}{}_p^m(\Omega))$, имеет место неравенство

$$\sum_{|\alpha| < m} \int_0^T \int_\Omega (A_\alpha(x, t, D^\gamma u) - A_\alpha(x, t, D^\gamma v)) D^\alpha (u - v)\, dx dt \geqslant$$

$$\geqslant a_1 \int_0^T \|u - v\|_{m, p}^p \, dt, \tag{11}$$

где $a_1 = \mathrm{const} > 0$.

Обозначим через $\overset{0}{H}(T)$ банахово пространство функций, получаемое при замыкании линейного многообразия гладких функций $z(x, t)$ таких, что

$$z(x, 0) = 0, \quad D^\omega z|_{\Sigma_T} = 0, \quad |\omega| \leqslant m - 1,$$

по норме

$$\|z(x, t)\|' = \left(\int_0^T \|z(x, t)\|_{m, p}^p \, dt \right)^{1/p} + \left(\int_0^T \left\| \frac{\partial z}{\partial t} \right\|_{-m, q}^q dt \right)^{1/q}, \tag{12}$$

где

$$\Sigma_T = (0, T) \times \Gamma; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

а через $H_T(u_0)$ — множество функций вида

$$u(x, t) = u_0(x) + z(x, t),$$

где $z(x, t) \in \overset{0}{H}(T)$.

Определение. Функция $u(x, t) \in L_p^{loc}(0, \infty; W_p^m(\Omega))$ называется обобщенным решением задачи (6) — (8), если для любого $T > 0$, $u(x, t) \in H_T(u_0)$ и для любой функции $v(x, t) \in L_p^{loc}(0, \infty; \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))$ имеет место интегральное тождество

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v(x, t)\, dx dt + \sum_{|\alpha| < m} \int_0^T \int_\Omega A_\alpha(x, t, D^\gamma u) D^\alpha v(x, t)\, dx dt = 0. \tag{13}$$

Справедлива следующая теорема (ср. [6], теорема 9).

Теорема II. *Пусть выполнены условия* 1)—3), *тогда для любого* $u_0(x) \in \overset{0}{W}{}_p^m(\Omega)$ задача (6)—(8) имеет, притом единственное, обобщенное решение.

Сформулированная теорема по существу содержится в [6] (теорема 9) и поэтому её доказательство мы опускаем. Однако, для полноты изложения, приведем основные этапы её доказательства в том виде, в каком нам понадобится в дальнейшем.

Выберем систему гладких функций $v_1(x), v_2(x), v_3(x), \cdots$, полную в $\overset{0}{W}{}_p^m(\Omega)$ и применим модифицированный метод Галеркина. Зададим галеркинские приближения в виде

$$u_r(x, t) = u_0(x) + \sum_{k=1}^{r} c_{kr}(t)\, v_k(x),$$

где неизвестные функции $c_{kr}(t)$ определяются из следующей системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left(u_r'(x, t),\ v_k(x)\right) + \sum_{|\alpha| \le m}\left(A_\alpha(x, t, D^\gamma u_r),\ D^\alpha v_k\right) = 0,\ (k = 1, 2, \cdots, r),$$
$$c_{kr}(0) = 0\ (k = 1, 2, \cdots, r). \tag{14}$$

Задача (14) имеет хотя бы одно решение (лемма 3, [6]). Для приближенных решений $u_r(x, t)$ справедлива априорная оценка

$$\|u_r(x, t)\|_{m, p} = \left(\int_0^T \|u_r(x, t)\|_{m, p}^p\, dt\right)^{1/p} < K_2. \tag{15}$$

Оценка (15) равносильна неравенству

$$\|z_r(x, t)\|_{m, p} = \left(\int_0^T \|z_r(x, t)\|_{m, p}^p\, dt\right)^{1/p} \le K_3,$$

где
$$z_r(x, t) = \sum_{k=1}^{n} c_{kr}(t)\, v_k(x),$$

из которой, в силу слабой компактности шара в L_p, следует, что существует функция $z(x, t) \in L_p(0, T; \overset{0}{W}{}_p^m(\Omega))$ и такая подпоследовательность $z_{r_j}(x, t)$, что $z_{r_j}(x, t) \to z(x, t)$ слабо в $L_p\left(0, T; \overset{0}{W}{}_p^m(\Omega)\right)$.

Отсюда

$$u_{r_j}(x, t) \equiv u_0(x) + z_{r_j}(x, t) \to u_0(x) + z(x, t) \text{ слабо в } L_p(0, T; W_p^m(\Omega)).$$

Заметим, что в силу условия 1) функции $A_\alpha(x, t, D^\gamma u_r)$ суммируемы со степенью $q = \dfrac{p}{p-1}$ и образуют в силу (15) ограниченное множество в $L_q\left(0, T; W_q^{(-m)}(\Omega)\right)$. Следовательно, подпоследовательность $u_{r_j}(x, t)$ можно считать выбранной так, что $A_\alpha(x, t, D^\gamma u_{r_j}) \to a_{\alpha T}(x, t)$ слабо в L_q. Доказывается, что имеет место соотношение

$$-\int_0^T\int_\Omega z(x, t)\frac{\partial v(x, t)}{\partial t}\,dxdt + \sum_{|\alpha|<m}\int_0^T\int_\Omega a_\alpha(x, t)\,D^\alpha v(x, t)\,dxdt = 0 \quad (16)$$

для любого $v(x, t) \in \dot{W}_{p,q}^{(m,1)}$, где через $\dot{W}_{p,q}^{(m,1)}$ обозначено пространство функций $v(x, t)$ таких, что $v(x, t) \in W_{p,q}^{(m,1)}$ и обращающихся в нуль при $t = T$. Полагая в (16) $v(x, t) = \psi(x)\ \varphi(t)$, где $\psi(x) \in \in \dot{W}_p^m(\Omega)$, а $\varphi(t) \in C_0^\infty(0, T)$, нетрудно убедиться, что функция $z(x, t)$, рассматриваемая как функция от t со значениями в $\dot{W}_p^m(\Omega)$, имеет обобщенную производную $z'(x, t) \in L_q(0, T; W_q^{(-m)}(\Omega))$. Следовательно, $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L_q(0, T; W_q^{(-m)}(\Omega))$. Теперь, выбирая в равенстве (16) в качестве $v(x, t)$ гладкую, финитную в Q функцию и интегрируя по частям в первом слагаемом по t, получим, что

$$\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial z(x, t)}{\partial t}\, v(x, t)\,dxdt = -\int_0^T\int_\Omega z(x, t)\frac{\partial v(x, t)}{\partial t}\,dxdt$$

для $\forall\, v(x, t) \in W_{p,q}^{(m,1)}$. Это и означает, что $z(x, 0) = 0$ или $u(x, 0) = u_0(x)$.

Наконец, доказывается, что для любого $v(x, t) \in L_p(0, T; \dot{W}_p^m(\Omega))$ имеет место равенство

$$\sum_{|\alpha|<m}\int_0^T\int_\Omega a_\alpha(x, t)\,D^\alpha v(x, t)\,dxdt = \sum_{|\alpha|<m}\int_0^T\int_\Omega A_\alpha(x, t, D^\gamma u)\,D^\alpha v(x, t)\,dxdt.$$

Последнее соотношение вместе с (16) доказывает теорему.

4°. В этом пункте будет доказан основной результат работы—существование компактных аттракторов полугрупп, порожденных задачей (6)—(8).

Предварительно установим следующие вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Пусть $u_{10}(x)$ и $u_{20}(x)$—произвольные элементы из $\dot{W}_p^m(\Omega)$, а $u_1(x, t) \in L_p^{loc}(0, \infty; \dot{W}_p^m(\Omega))$ и $u_2(x, t) \in L_p^{loc}(0, \infty; \dot{W}_p^m(\Omega))$—соответствующие им обобщенные решения задачи* (6) — (8), *тогда*

$$\|u_1(x, t) - u_2(x, t)\| \leqslant \|u_{10}(x) - u_{20}(x)\|, \quad (17)$$

где $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Из определения обобщенного решения следует, что

$$\int_0^t\int_\Omega \frac{\partial (u_1-u_2)}{\partial t} v\ (x, t)\ dxdt +$$

$$+\sum_{|\alpha|\leq m} \int_0^t\int_\Omega (A_\alpha\ (x, t, D^\gamma u_1) - A_\alpha\ (x, t, D^\gamma u_2))\ D^\alpha v\, dxdt = 0 \tag{18}$$

для любого $v \in L_p^{loc}\ (0, \infty;\ \overset{\circ}{W}{}_p^m\ (\Omega))$. Полагая в (18)

$v\ (x, t) \equiv u_1\ (x, t) - u_2\ (x, t)$ и интегрируя в первом слагаемом по частям, получим

$$0 = \int_0^t\int_\Omega \frac{\partial (u_1-u_2)}{\partial t} (u_1 - u_2)\ dxdt +$$

$$+\sum_{|\alpha|\leq m} \int_0^t\int_\Omega (A_\alpha\ (x, t, D^\gamma u_1) - A_\alpha\ (x, t, D^\gamma u_2))\ D^\alpha\ (u_1-u_2)\ dxdt,$$

$$0 = \int_\Omega [[u_1\ (x, t)-u_2\ (x, t)]^2 - [u_1\ (x, 0) - u_2\ (x, 0)]^2]\, dx +$$

$$+\sum_{|\alpha|\leq m} \int_0^t\int_\Omega (A_\alpha\ (x, t, D^\gamma u_1) - A_\alpha\ (x, t, D^\gamma u_2))\ D^\alpha\ (u_1-u_2)\, dxdt -$$

$$-\int_0^t\int_\Omega \frac{\partial (u_1-u_2)}{\partial t} (u_1-u_2)\ dxdt.$$

Таким образом

$$\|u_1-u_2\|^2 = \|u_{10}-u_{20}\|^2 - 2\sum_{|\alpha|\leq m} \int_0^t\int_\Omega (A_\alpha\ (x, t, D^\gamma u_1) -$$

$$- A_\alpha\ (x, t, D^\gamma u_2))\ D^\alpha\ (u_1-u_2)\ dxdt. \tag{19}$$

Так как второе слагаемое правой части положительно (условие 3), то из (19) немедленно следует требуемое неравенство. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Обобщенное решение задачи* (6)—(8) *удовлетворяет следующему неравенству:*

$$\|u\|^2 \leq e^{-2a_0 t}\ (\|u_0\|^2 + 2\int_0^t e^{-2a_0\tau} k\ (\tau)\ d\tau). \tag{20}$$

Доказательство. Умножая к-е уравнение (14) на $c_{kr}(t)$ и суммируя по k от 1 до r, получим

$$(u_r'\ (x, t), z_r\ (x, t)) + \sum_{|\alpha|\leq m} (A_\alpha\ (x, t, D^\gamma u_r)\ (D^\alpha z_r) = 0. \tag{21}$$

Так как функция $u_r(x, t) \in L_p^{loc}(0, \infty; \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))$, то в силу условия 2)

$$a_0 \| u_r \|_{m,p}^p - k(t) \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant m} (A_\alpha(x, t, D^\gamma u_r), D^\alpha u_r) =$$

$$= \sum_{|\alpha|<m} (A_\alpha(x, t, D^\gamma u_r), D^\alpha u_0) + \sum_{|\alpha| \leqslant m} (A_\alpha(x, t, D^\gamma u_r), D^\alpha z_r) =$$

$$= \sum_{|\alpha|<m} (A_\alpha(x, t, D^\gamma u_r), D^\alpha u_0) - \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}, z_r\right) =$$

$$= \sum_{|\alpha|<m} (A_\alpha(x, t, D^\gamma u_r), D^\alpha u_0) - \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}, u_r\right) + \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}, u_0\right). \quad (22)$$

Не ограничивая общности можем считать, что $v_1(x) = u_0(x)$, тогда из неравенств (14) и (22) заключаем, что

$$a_0 \| u_r \|_{m,p}^p - k(t) \leqslant -\left(\frac{\partial u_r}{\partial t}, u_r\right). \quad (23)$$

Так как $p \geqslant 2$, то, тем более

$$a_0 \| u_r \|_{m,p}^p - k(t) \leqslant -\left(\frac{\partial u_r}{\partial t}, u_r\right).$$

Следовательно

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\| u_r \|^2) + a_0 \| u_r \|^2 \leqslant k(t). \quad (23)$$

Применяя неравенство Гронуола к (23), получим

$$\| u_r \|^2 \leqslant e^{-2a_0 t} \left(\| u_0 \|^2 + 2 \int_0^t e^{2a_0 \tau} k(\tau)\, d\tau\right). \quad (24)$$

Пусть $T > 0$ — произвольное фиксированное число, а $w(x) \in L_2(\Omega)$, $\varphi(t) \in C_0^\infty(0, T)$—произвольные элементы, тогда из слабой сходимости $u_r(x, t)$ к $u(x, t)$ в пространстве $L_p(0, T; \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))$ и из того, что $L_2(\Omega) \subset W_q^{(-m)}(\Omega)$, следует

$$\int_0^T \int_\Omega u_r(x)\, w(x)\, \varphi(t)\, dxdt \xrightarrow[r\to\infty]{} \int_0^T \int_\Omega u(x, t)\, w(x)\, \varphi(t)\, dxdt. \quad (25)$$

Из слабой компактности $L_2(\Omega)$ и из оценки (24) следует, что последовательность $u_r(x, t)$ имеет слабый предел $\tilde{u}(x, t)$ в $L_2(\Omega)$, т. е.

$$\int_\Omega u_r(x, t)\, w(x)\, dx \xrightarrow[r\to\infty]{} \int_\Omega \tilde{u}(x, t)\, w(x)\, dx. \quad (26)$$

Из (26) имеем, что для любой $\varphi \in C_0^\infty(0, T)$

$$\varphi(t) \int_\Omega u_r(x, t)\, w(x)\, dx \xrightarrow[r\to\infty]{} \varphi(t) \int_\Omega \tilde{u}(x, t)\, w(x)\, dx$$

и отсюда, в свою очередь, вытекают, что последовательность $\{u_r\}_1^\infty$ слабо сходится к $\bar{u}$ в пространстве $L_p(0, T; \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))$. В силу единственности слабого предела $\tilde{u}(x, t) = u(x, t)$, отсюда и из оценки (24) следует ее справедливость и для обобщенного решения $u(x, t)$. Лемма 2 доказана.

Приведем достаточные условия, обеспечивающие компактность полугруппы $\{S_t\}$ $(t>0)$.

Предложение. *Пусть оператор L, участвующий в уравнении* (6), *удовлетворяет условиям* 1)—3). *Предположим также выполненными следующие условия:*

4) *для любых вещественных* $\xi_\alpha, \xi_\beta, \eta_i, \eta_j$; $x\in\Omega$, $t\in[0, \infty)$

$$\sum_{\substack{|\alpha|<m\\|\beta|<m}}\sum_{i,j=1}^{n} A_{\alpha\beta}(x, t, \xi_\gamma)\,\xi_\alpha\,\xi_\beta\,\eta_i\,\eta_j \geqslant 0,$$

где

$$A_{\alpha\beta}(x, t, \xi_\gamma)=\frac{\partial A_\alpha(x, t, \xi_\gamma)}{\partial\xi_\beta};$$

5) имеет место оценка

$$|D_x^\delta\,\partial_\xi^\beta\,A_\alpha(x, t, \xi_\gamma)|\leqslant K\,(1+\sum_{|\gamma|<m}|\xi_\gamma|^{p-1-|\beta|})$$

для любых α, β, δ, $|\delta|\leqslant 2$, $|\alpha|\leqslant m$, $|\beta|<1$, *а постоянная* $K>0$ *не зависит от* $x\in\Omega$, $t\in[0, \infty)$.

Тогда, если решение $u\in L_p^{loc}(0, \infty, \overset{\circ}{W}{}_p^{m+1}(\Omega))$, *то семейство операторов* S_t $(t>0)$, *порожденное задачей* (6)—(8), *отображает множества, ограниченные в* $L_2(\Omega)$, *в ограниченные множества пространства* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ *и, стало быть, компактные в* $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $T>0$ фиксировано, а $U_0=\{u_0\in L_2(\Omega); \|u_0\|<M\}$ — произвольное ограниченное множество в $L_2(\Omega)$. Подставляя решение $u(x, t)$ задачи (6)—(8) в уравнение (6), умножая обе части полученного тождества на $t^2\Delta u$ (Δ—оператор Лапласа по переменным x) и интегрируя по области Ω, получим

$$\int_\Omega t^2\frac{\partial u}{\partial t}\Delta u\,dx+\sum_{|\alpha|<m}(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega t^2 D^\alpha(A_\alpha(x, t, D^\gamma u))\,\Delta u\,dx=0. \qquad (27)$$

Интегрируя последнее тождество по частям придем к следующему соотношению:

$$-\int_\Omega t^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx-$$

$$-\sum_{|\alpha|<m} t^2\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}A^\alpha(x, t, D^\gamma u)\frac{\partial}{\partial x_i}D^\alpha u\,dx=0. \qquad (28)$$

Теперь произведя в (28) интегрирование по $t \in [0, T]$ и проведя несложные выкладки, получим

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(t\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dxdt + 2\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega t\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dxdt =$$

$$= 2\sum_{|\alpha|<m}\int_0^T\int_\Omega t^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(A_\alpha(x, t, D^\gamma u))\frac{\partial}{\partial x_i}D^\alpha u\, dxdt.$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left(T\frac{\partial u(x, T)}{\partial x_i}\right)^2 dx - 2\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega t\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dxdt =$$

$$= -2\sum_{|\alpha|<m}\int_0^T\int_\Omega t^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(A_\alpha(x, t, D^\gamma u))\frac{\partial}{\partial x_i}D^\alpha u\, dxdt$$

или

$$T^2\|u(x, T)\|_{1,2}^2 = 2\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega t\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dxdt -$$

$$-2\sum_{|\alpha|<m}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega t^2\frac{\partial}{\partial x_i}(A_\alpha(x, t, D^\gamma u))\frac{\partial}{\partial x_i}D^\alpha u\, dxdt.$$

Из последнего соотношения и условия 4) вытекает

$$T^2\|u(x, T)\|_{1,2}^2 < 2T\|u(x, t)\|_{1,2}^2 - 2\sum_{|\alpha|<m}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega t^2\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}D^\alpha u\, dxdt,$$

и следовательно

$$T^2\|u(x, T)\|_{1,2}^2 \leqslant 2T\|u(x, T)\|_{m,p}^p -$$

$$-2\sum_{|\alpha|<m}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega t^2\frac{\partial A_\alpha(x, t, D^\gamma u)}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}D^\alpha u\, dxdt.$$

Производя интегрирование по частям в последнем слагаеме правой части этого неравенства, получим

$$T^2\|u(x, T)\|_{1,2}^2 \leqslant 2T\|u(x, T)\|_{m,p}^p +$$

$$+2\sum_{|\alpha|<m}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega t^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial A_\alpha(x, t, D^\gamma u)}{\partial x_i}\right)D^\alpha u\, dxdt. \tag{29}$$

В силу условия 5) после несложных преобразований в неравенстве (29), получим следующую оценку:

$$\| u(x, T) \|^{p}_{1,2} \leqslant C \| u(x, t) \|^{p}_{m,p}, \tag{30}$$

где $C > 0$ — постоянная, зависящая от T.

И, наконец, интегрируя (23) по t от 0 до T, получим

$$a_0 \| u_r(x, t) \|^{p}_{m,p} - \int_0^T k(t)\, dt \leqslant - \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u_r}{\partial t} u_r \, dx dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_\Omega | u_r(x, t) |^2 dx + \frac{1}{2} \int_\Omega | u_r(x, 0) |^2 dx \leqslant \frac{1}{2} \| u_0(x) \|^2. \tag{31}$$

Из неравенств (30) и (31) следует, что

$$\| S_T u_0 \|_{1,2} = \| u(x, T) \|_{1,2} \leqslant C_1 \| u_0(x) \| < M \cdot C_1, \quad u_0 \in U_0,$$

отсюда, в силу компактности оператора вложения из $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{2}(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, следует утверждение предложения.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям 1)—5), а функция $k(t)$, участвующая в условии 2), ограничена на $[0, \infty)$. Тогда полугруппа S_t, порожденная задачей (6)—(8), обладает максимальным аттрактором, компактным в $L_2(\Omega)$.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы I, лемм 1, 2, предложения и оценки (20).

Межвузовский научный центр по прикладным проблемам математики ЕГУ

Поступила 5. VI. 1989

Գ. Ս. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ. Բարձր կարգի ոչ գծային պարաբոլական օպերատորների ատրակտորների կառուցումը *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է Հետևյալ խնդրով

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} (A_{\alpha}(x, t, D^{\gamma} u)) = 0,$$

$$x \in \Omega \subset R^n, \ t > 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

$$D^{\omega} u|_{\Sigma} = 0, \ \Sigma = (0, \infty) \times \partial\Omega, \ |\omega| \leqslant m-1.$$

ծնված $\{S_t\}$ *կիսախմբի ատրակտորի գոյության Հարցը։ Ապացուցվում է, որ եթե* L *օպերատորը բավարարում է 1 (-5) պայմաններին, ապա կիսախումբը ունի կոմպակտ ատրակտոր։*

G. S. HAKOBIAN, R. L. SHAKHBAGIAN. *On the construction of attractors for the high order nonlinear parabolic equations* (summary)

In the paper the existence of attractors for the $\{S_t\}$ semigroup, generated by the initial-boudary problem

$$\frac{\partial u}{\partial t}+L(u)=\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{|\alpha|<m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}(A_{\alpha}(x,t,D^{\gamma}u))=$$
$$=0,\ x\in\Omega\subset R^{n},\ t>0,$$
$$u(x,0)=u_0(x),$$
$$D^{\omega}u|_{\Sigma}=0\ |\omega|\leqslant m-1,\ \Sigma=(0,\infty)\times\partial\Omega$$

for high order quasilinear parabolic equation is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В Бабин, М. И. Вишик.* Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности, УМН, 38, вып. 4 (232), 1983, 133—187.
2. *О. А. Ладыженская.* О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье-Стокса, Зап. науч .сем. ЛОМИ, 27, 1972, 91—115.
3. *О. А. Ладыженская.* О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье-Стокса и других уравнений с частными производными, УМН, 42, вып. 6 (258), 1987, 25—80.
4. *А. В. Бабин, М. И. Вишик.* Спектральное и стабилизированное асимптотическое поведение решений нелинейных эволюционных уравнений, УМН, 43, вып. 5 (263), 1988, 99—132.
5. *А. В. Бабин, М. И. Вишик.* Аттракторы эволюционных уравнений, М., «Наука», 1989.
6. *Ю. А. Дубинский.* Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка, УМН, 23, вып. 1 (139), 1968, 45—90.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 6, 1990 Математика

УДК 517.98

Г. В. ВИРАБЯН

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ЗАДАЧЕЙ ПУАНКАРЕ

В настоящей работе изучается спектральная взаимосвязь операторов, порожденных третьей краевой задачей (задача Пуанкаре) и первой краевой задачей (задача Дирихле) для линейных и квадратичных операторных пучков с индефинитной квадратичной формой.

§ 1. Постановка задач и определения

Пусть Ω—ограниченная область двумерного пространства x, y с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, и пусть M, N и L—однородные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами второго порядка

$$Mu = c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{1}$$

$$Nu = b_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{2}$$

$$Lu = a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{3}$$

Относительно оператора L предполагается, что он является строго эллиптическим, т. е. существуют положительные постоянные γ и δ такие, что для произвольных ξ и η выполняется условие

$$\gamma(\xi^2+\eta^2) \leqslant a_1\xi^2 + a_2\xi\eta + a_3\eta^2 \leqslant \delta(\xi^2+\eta^2). \tag{4}$$

Мы будем рассматривать следующие однородные краевые задачи (Пуанкаре) на собственные значения, соответственно, для линейного и квадратичного дифференциального операторного пучка с индефинитными формами:

$$Mu + \lambda Lu = 0, \tag{I$_1$}$$

$$Gu|_{\partial\Omega} = 0. \tag{II$_1$}$$

$$Mu + \lambda Nu + \lambda^2 Lu = 0, \tag{I$_2$}$$

$$Gu|_{\partial\Omega} = 0. \tag{II$_2$}$$

Граничный оператор G имеет вид

$$Gu = \gamma(x, y)\,u + \alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{5}$$

где относительно $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, $\gamma(x, y)$ предполагается, что они достаточно гладкие функции в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. λ — спектральный параметр. В связи с исследованием вышепоставленных задач мы будем одновременно рассматривать и однородные краевые задачи (Дирихле) на собственные значения для тех же дифференциальных пучков

$$Mu + \lambda Lu = 0, \tag{I$_1$}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{II$_0$}$$

$$Mu + \lambda Nu + \lambda^2 Lu = 0, \tag{I$_2$}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{II$_0$}$$

Определение. Отличная от тождественного нуля функция $u_\lambda(x, y) \in W_2^2(\Omega)$ называется обобщенной собственной функцией (ОСФ) задачи (I_1), (II_1), $((I_2)$, (II_2), соответствующей собственному значению λ, если она удовлетворяет уравнению (I_1) $((I_2))$ в обобщенном смысле (производные, входящие в уравнение (I_1) $((I_2)$ понимаются в обобщенном смысле) и $Gu_\lambda \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

$W_2^l(\Omega)$ $(l = 1, 2)$—пространства С. Л. Соболева. $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$— множество функций из $W_2^1(\Omega)$, исчезающих на границе $\partial\Omega$ области в смысле теорем вложения С. Л. Соболева.

§ 2. Формула Грина и некоторые общие свойства для граничного оператора G

Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — непрерывно дифференцируемые функции в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Рассмотрим тождества

$$\alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}v = v\frac{\partial}{\partial x}(\alpha u) - \frac{\partial \alpha}{\partial x}uv = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha vu) - u\frac{\partial}{\partial x}(\alpha v), \tag{6}$$

$$\beta(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}v = v\frac{\partial}{\partial y}(\beta u) - \frac{\partial \beta}{\partial y}uv = \frac{\partial}{\partial y}(\beta vu) - u\frac{\partial}{\partial y}(\beta v). \tag{7}$$

Суммируя тождества (6), (7) и интегрируя по области Ω, перейдя от двойного интеграла к интегралу по границе, согласно известной формуле Грина, получим

$$\iint_\Omega v(x, y)\left\{\alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}\right\}dxdy =$$

$$= \int_{\partial\Omega} uv(\alpha(x, y)dy - \beta(x, y)\,dx) - \iint_\Omega\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\right)uvdxdy -$$

$$-\iint_\Omega\left\{\alpha(x, y)\frac{\partial v}{\partial x} + \beta(x, y)\frac{\partial v}{\partial y}\right\}udxdy. \tag{8}$$

Таким образом, для произвольных функций u и v из $C^1(\overline{\Omega})$ имеем

$$\iint_{\Omega} G_0 u\cdot v\,dx\,dy=\int_{\partial\Omega} uv\,(\alpha\cos(s,\widehat{y})-\beta\cos(s,\widehat{x}))\,ds-$$

$$-\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)uv\,dx\,dy-\iint_{\Omega} G_0 v\,u\,dx\,dy, \tag{9}$$

где

$$G_0 u=\alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+\beta(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}\cdot \tag{10}$$

С помощью предельного перехода окончательно получаем так называемую формулу Грина для граничного оператора G

$$\iint_{\Omega} Gu\,v\,dx\,dy=\int_{\partial\Omega} uv\sigma(\alpha, \beta)\,ds-\iint_{\Omega} uGv\,dx\,dy+$$

$$+\iint_{\Omega}\left(2\gamma-\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)uv\,dx\,dy, \tag{11}$$

где

$$\sigma(\alpha, \beta)=\alpha(x, y)\cos(s,\widehat{y})-\beta(x, y)\cos(s,\widehat{x}). \tag{12}$$

Формула (11) справедлива уже для произвольных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ из соболевского пространства $W_2^1(\Omega)$. Для функций $u, v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ она принимает вид

$$\iint_{\Omega} Gu\,v\,dx\,dy=\iint_{\Omega}\left(2\gamma-\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)uv\,dx\,dy-\iint_{\Omega} uGv\,dx\,dy. \tag{11_0}$$

Замечание 1.2. Производные, входящие в формулы (11), (11_0), понимаются как обобщенные производные в пространстве $W_2^1(\Omega)$.

Замечание 2.2. В частном случае, когда $\alpha(x, y)\equiv\omega x$, $\beta(x, y)\equiv\equiv\omega y$, в контурном интеграле в (8), делая замену переменных $x=r(\alpha)\cos\alpha$, $y=r(\alpha)\sin\alpha$ $(0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi)$, можно представить его в виде

$$\int_{\partial\Omega} uv\,(x\,dy-y\,dx)=\int_{\partial\Omega} uvx^2 d\left(\frac{y}{x}\right)=\int_0^{2\pi} uvr^2(\alpha)\cdot$$

$$\cdot\cos^2\alpha\,d\,\mathrm{tg}\,\alpha=\int_0^{2\pi} uvr^2(\alpha)\,d\alpha. \tag{13}$$

Формула Грина (11) в этом случае принимает вид

$$\iint_{\Omega} Gu\cdot v\,dx\,dy=\omega\int_0^{2\pi} uvr^2(\alpha)\,d\alpha+2\iint_{\Omega}(\gamma-\omega)\,uv\,dx\,dy-\iint_{\Omega} u\,Gv\,dx\,dy. \tag{11'}$$

Из формулы Грина (11) легко усмотреть некоторые общие свойства для граничного оператора G, отображающего соболевское пространство $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Лемма 1.2. *При выполнении условий*

$$\delta = \min_{\substack{\max \\ (x,y)\in\overline{\Omega}}} \left[-\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y} + 2\gamma(x, y) \right] \underset{(<)}{\geqslant} 0, \tag{14}$$

$$\sigma(\alpha, \beta) \underset{(\leqslant)}{\geqslant} 0 \ \forall (x, y) \in \partial\Omega \tag{15}$$

оператор G является положительно определенным (отрицательно определенным) оператором, отображающим $D_G = W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Лемма 2.2. *При*

$$2\gamma(x, y) = \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} \ \forall (x, y) \in \overline{\Omega} \tag{16}$$

оператор G является антисимметричным оператором, отображающим $\overset{\circ}{D}_G = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Справедливость этих утверждений вытекает из следующих соотношений:

$$(Gu, u)_{L_2(\Omega)} \geqslant \frac{\delta}{2} \|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \ \forall u \in W_2^1(\Omega), \tag{17}$$

$$(Gu, v)_{L_2(\Omega)} = -(u, Gv)_{L_2(\Omega)}, \ \forall u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \tag{18}$$

которые являются непосредственными следствиями формул Грина (11), (11_0) при условиях (14), (15), (16). Области значений оператора G, действующего, соответственно, на пространствах $W_2^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, обозначим через $R_G(\Omega) = G\,W_2^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{R}_G(\Omega) = G\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Очевидно включение

$$\overset{\circ}{R}_G(\Omega) \subset R_G(\Omega) \subseteq L_2(\Omega).$$

Замечание 3.2. При выполнении условий (14) и (15) оператор G имеет обратный G^{-1}, отображающий область значений $R_G(\Omega)$ оператора G на функциональное пространство $W_2^1(\Omega)$.

Обозначим через $h_G(\Omega)$ ($\overset{\circ}{h}_G(\Omega)$) множество тех функций $u(x, y) \in W_2^1(\Omega)$ ($\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$), для которых $Gu \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Относительно коэффициентов, входящих в граничный оператор G предположим, что $\alpha(x, y) \equiv \alpha(x)$, $\beta(x, y) \equiv \beta(y)$, $\gamma(x, y) \equiv \gamma = \text{const}$, причем $\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} \geqslant 0$, $\dfrac{\partial\beta}{\partial y} \geqslant 0$. Тогда для произвольной функции $u(x, y) \in h_G(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)$ имеем

$$(Gu, u)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} = \left(\frac{\partial}{\partial x} Gu, \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{\partial}{\partial y} Gu, \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \left(G\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{L_2(\Omega)} + \left(G\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{L_2(\Omega)} +$$

$$+ \left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{L_2(\Omega)} \geqslant \frac{\delta}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{\delta}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|^2_{L_2(\Omega)} = \frac{\delta}{2}\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}. \tag{19}$$

Здесь мы пользовались леммой 2.2. Таким образом, справедлива следующая

Лемма 3.2. *При выполнении следующих условий:*

$$\gamma(x, y) \equiv \gamma = \text{const}, \ \alpha(x, y) \equiv \alpha(x), \ \beta(x, y) \equiv \beta(y), \ \frac{\partial \alpha}{\partial x} \geqslant 0, \ \frac{\partial \beta}{\partial y} \geqslant 0,$$

$$\delta = \min_{(x, y) \in \overline{\Omega}} \left[-\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} + 2\gamma \right] > 0, \tag{20}$$

$$\sigma(\alpha, \beta) = \alpha(x) \cos(s, \widehat{y}) - \beta(y) \cos(s, \widehat{x}) \geqslant 0$$

граничный оператор G удовлетворяет неравенству

$$(Gu, u)_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)} > \frac{\delta}{2} \|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)}, \ \forall u \in h_G(\Omega) \cap W^2_2(\Omega). \tag{21}$$

Следствие. Из доказанной леммы следует, что оператор G^{-1}, обратный к оператору G, отображающий $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega) \cap R_G(\Omega)$ в $W^1_2(\Omega)$, является ограниченным в метрике пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$.

В дальнейших параграфах будем предполагать, что

$$\alpha(x, y) = \omega x, \ \beta(x, y) = \omega y, \ \gamma(x, y) = \gamma, \tag{22}$$

где ω и γ—действительные постоянные такие, что

$$\gamma > \omega \geqslant 0 \text{ или } \gamma < \omega < 0. \tag{23}$$

§ 3. Случай линейного пучка

Однородная спектральная задача Дирихле (I_1), (II_0) порождает известный оператор Соболева-Александряна A, который является линейным ограниченным самосопряженным оператором, действующим на гладких функциях в соболевском гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ согласно формуле

$$A = -L^{-1} M, \tag{24}$$

где L^{-1}—обратный к эллиптическому оператору L при граничных условиях (II_0). Известно [1], что отличные от нуля решения краевой задачи (I_1), (II_0) из $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ являются собственными элементами оператора A в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ и наоборот.

Предположим, что область значений оператора A содержится в $R_G(\Omega)$.

Рассмотрим оператор

$$A_G = G^{-1} A G, \tag{25}$$

который отображает $h_G(\Omega)$ в себя.

Лемма 1.3. *Между линейными дифференциальными операторами M, L и граничным оператором G имеют место следующие соотношения:*

$$MGu - GMu = 2\omega Mu, \tag{26}$$

$$LGu - GLu = 2\omega Lu \tag{27}$$

для произвольной гладкой функции $u(x, y)$.

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ имеет частные производные до третьего порядка. Тогда имеем

$$\frac{\partial^2 Gu}{\partial x^2} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega x \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \omega y \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2 Gu}{\partial x \partial y} = \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} + 2\omega \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \omega x \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \omega y \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2 Gu}{\partial y^2} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\omega \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \omega x \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \omega y \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}. \tag{30}$$

Умножая равенства (28), (29), (30), соответственно, на c_1, c_2, c_3 и суммируя, получим

$$MGu = \gamma Mu + 2\omega Mu + \omega x \frac{\partial Mu}{\partial x} + \omega y \frac{\partial Mu}{\partial y} = GMu + 2\omega Mu. \tag{31}$$

Аналогично доказывается тождество (27).

Теорема 1.3. *Гладкие собственные функции задачи Пуанкаре* (I_1), (II_1) *являются собственными элементами оператора* A_G *в* $h_G(\Omega)$ *и наоборот.*

Доказательство. Пусть $u(x, y)$—гладкое отличное от нуля решение краевой задачи (I_1), (II_1), тогда согласно лемме 1.3 оно удовлетворяет соотношению

$$(M + \lambda L) Gu = (G + 2\omega I)(M + \lambda L) u = 0. \tag{32}$$

С другой стороны, в силу существования обратных операторов L^{-1} и G^{-1}, имеем

$$(A_G - \lambda I) u = G^{-1}(-L^{-1}M - \lambda I) Gu = 0, \quad u \in h_G(\Omega). \tag{33}$$

Обратно, пусть $u(x, y)$—гладкая собственная функция оператора A_G в $h_G(\Omega)$, т. е.

$$A_G u = G^{-1} A\, Gu = \lambda u. \tag{34}$$

Применяя с обеих сторон равенства (34) последовательно операторы G и L, получим

$$(M + \lambda L) Gu = 0. \tag{35}$$

В силу леммы 1.3 имеем

$$(G + 2\omega I)(M + \lambda L) u = (M + \lambda L) Gu = 0. \tag{36}$$

Но согласно лемме 1.3 оператор $G + 2\omega I$ имеет обратный. Поэтому

$$Mu + \lambda Lu = 0, \quad Gu \in \mathring{W}_2^1(\Omega). \tag{37}$$

Теорема доказана.

Таким образом, краевая спектральная задача Пуанкаре (I_1), (II_1) вполне характеризуется оператором A_G, который по построению G-подобен оператору С. Л. Соболева A, порожденному однородной задачей Дирихле (I_1), (II_0).

Теорема 2.3. *Пусть* $\gamma > \omega \geq 0$ ($\gamma < \omega \leq 0$), *тогда если у оператора* A *из* $\mathring{W}_2^1(\Omega) \cap R_G(\Omega)$ *имеется полная система собственных* *функций в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, то у оператора A_a имеется полная система собственных функций в $h_a(\Omega)$ в метрике пространства $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ и обратно, если у оператора A_a в $h_a(\Omega)$ имеется полная система собственных функций в метрике пространства $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, то у оператора A в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ также имеется полная в метрике пространства $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ система собственных функций.*

Доказательство. Пусть $\{u_{\lambda_n}(x, y)\}_1^\infty \subset \mathring{W}_2^1(\Omega) \cap R_a(\Omega)$ — полная в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ система собственных функций с соответствующими собственными значениями λ_n оператора A. Тогда очевидно, что система $\{v_n(x, y) = G^{-1} u_{\lambda_n}(x, y) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)\}_{n=1}^\infty$ будет системой собственных функций для оператора A_a в $h_a(\Omega)$. Покажем, что эта система полна в $h_a(\Omega)$ в метрике $\mathring{W}_2^1(\Omega)$. Пусть $u(x, y)$ — произвольная функция из $h_a(\Omega)$, тогда $Gu \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ и существует последовательность линейных комбинаций из $\{u_{\lambda_n}(x, y)\}_{n=1}^\infty$, так что

$$\sum_{k=1}^{N} C_k^{(N)} u_{\lambda_k}(x, y) \xrightarrow{\mathring{W}_2^1(\Omega)} Gu(x, y) \text{ при } N \to \infty. \tag{38}$$

В силу непрерывности обратного оператора G^{-1} (лемма 3.2) имеем

$$\sum_{k=1}^{N} C_k^{(N)} v_{\lambda_k}(x, y) \xrightarrow{\mathring{W}_2^1(\Omega)} u(x, y) \text{ при } N \to \infty. \tag{39}$$

Обратно, пусть $\{v_{\lambda_n}(x, y)\}_{n=1}^\infty$ — полная система собственных функций оператора A_a в $h_a(\Omega)$. Тогда $\{u_{\lambda_n}(x, y) = Gv_{\lambda_n}(x, y) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)\}_{n=1}^\infty$ будет системой собственных функций для оперятора A в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$. Покажем, что эта система полна в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$. Пусть $u(x, y)$ — произвольная функция из $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ такая, что $v(x, y) = G^{-1} u(x, y) \in h_a(\Omega)$. Тогда существует последовательность линейных комбинаций из $h_a(\Omega)$, так что

$$\sum_{k=1}^{N} d_k^{(N)} v_{\lambda_k}(x, y) \xrightarrow{\mathring{W}_2^1(\Omega)} G^{-1} u(x, y) \text{ при } N \to \infty. \tag{40}$$

Применяя с двух сторон оператор G, получим

$$\sum_{k=1}^{N} d_k^{(N)} u_{\lambda_k}(x, y) \xrightarrow{\mathring{W}_2^1(\Omega)} u(x, y) \text{ при } N \to \infty. \tag{41}$$

Теорема полностью доказана.

Замечание 1.3. Вторую часть доказанной теоремы можно заменить следующим утверждением. Если у оператора A_a в $h_a(\Omega)$ имеется полная в метрике $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ система собственных функций, то у оператора A в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ имеется полная в метрике $L_2(\Omega)$ система собственных функций.

Теорема 3.3. *В случае, когда область Ω — круг, при выполнении условия $\gamma > \omega \geqslant 0$ ($\gamma < \omega < 0$) оператор A_0 имеет полную совокупность полиномиальных собственных функций в $h_0(\Omega)$.*

Доказательство этой теоремы следует из вышедоказанной теоремы и из установленного ранее [1] результата, согласно которому в случае круга у оператора С. Л. Соболева имеется полная в $\mathring{W}_1(\Omega)$ система полиномиальных собственных функций.

Замечание 2.3. Теорему 3.3 можно доказать независимо от теоремы 2.3.

Следствие 1.3. Из теорем 1.3 и 3.3 следует, что при условии $\gamma > \omega \geqslant 0$ ($\gamma < \omega \leqslant 0$) в случае круга краевая задача Пуанкаре имеет полную систему полиноминальных собственных функций в $h_0(\Omega)$.

§ 4. Случай квадратичного пучка

В этом параграфе изучается спектральная взаимосвязь однородной задачи Пуанкаре (I_2), (II_2) и соответствующей задачи Дирихле (I_2), (II_0) для квадратичного дифференциального пучка

$$\mathbf{L}(\lambda)u = Mu + \lambda Nu + \lambda^2 Lu.$$

Задача Дирихле (I_2), (II_0) в операторной форме эквивалентна изучению следующего квадратичного операторного пучка:

$$L(\lambda)u = Cu + \lambda Bu + \lambda^2 Iu, \tag{42}$$

где $B = -L^{-1}N$, $C = -L^{-1}M$ — самосопряженные ограниченные операторы типа С. Л. Соболева, действующие в соболевском пространстве $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, I — единичный оператор.

Предполагается, что области значений операторов B и C принадлежат $R_0(\Omega)$. Пучок $L(\lambda)$ при линеаризации, в свою очередь, порождает матричный оператор

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} O & I \\ C & B \end{pmatrix}, \tag{43}$$

действующий в ортогональной сумме гильбертовых пространств $H(\Omega) = \mathring{W}_2^1(\Omega) \oplus \mathring{W}_2^1(\Omega)$. Полнота системы собственных векторов матричного оператора $\widehat{\mathbf{A}}$ в H означает двукратную полноту системы собственных элементов для квадратичного пучка $L(\lambda)$ и следовательно для краевой задачи (I_2), (II_0). Предположим, что выполняется условие $\gamma > \omega \geqslant 0$ $\gamma < \omega \leqslant 0$) существования обратного оператора G^{-1}.

Рассмотрим квадратичный операторный пучок

$$L_0(\lambda) = C_0 + \lambda B_0 - \lambda^2 I, \tag{44}$$

где C_0 и B_0 — линейные операторы, действующие в пространстве $h_0(\Omega)$, согласно формулам

$$C_0 u = G^{-1}CGu, \quad B_0 u = G^{-1}BGu, \quad u \in h_0(\Omega), \tag{45}$$

I — единичный оператор в $h_0(\Omega)$. Ассоциированный с этим пучком матричный оператор

$$\hat{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ C_0 & B_0 \end{pmatrix} \tag{45'}$$

действует в ортогональной сумме пространств $\hat{H}_0^{(\Omega)} = h_0(\Omega) \oplus h_0(\Omega)$.

Оператор $\hat{A}_0$ можно представить в виде

$$\hat{A}_0 = \hat{G}^{-1} \hat{A} \hat{G}, \tag{46}$$

где матричный оператор

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \tag{47}$$

отображает $\mathring{W}_2^1(\Omega) \oplus \mathring{W}_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega) + L_2(\Omega)$, а его обратный

$$\hat{G}^{-1} = \begin{pmatrix} G^{-1} & 0 \\ 0 & G^{-1} \end{pmatrix} \tag{48}$$

отображает $R_0(\Omega) \oplus R_0(\Omega)$ на $\mathring{W}_2^1(\Omega) \oplus \mathring{W}_2^1(\Omega)$.

Теорема 1.4. *Гладкие собственные функции краевой задачи* (I_2), (II_2) *являются собственными элементами для квадратичного пучка* $L_0(\lambda)$ *и наоборот.*

Доказательство. Пусть $u_\lambda(x, y)$ — гладкая собственная функция краевой задачи (I_2), (II_2) с собственным значением λ. Тогда в силу леммы 1.3 имеем

$$\mathrm{L}(\lambda)\, G u_\lambda = (G + 2\beta I)\, \mathrm{L}(\lambda)\, u_\lambda = 0. \tag{49}$$

Отсюда, в силу существования обратных операторов L^{-1} и G^{-1}, заключаем

$$L_0 u_\lambda = G^{-1} L^{-1}\, \mathrm{L}(\lambda)\, G u_\lambda = 0, \quad u_\lambda(x, y) \in h_0(\Omega). \tag{50}$$

Обратно, пусть $u_\lambda(x, y) \in h_0(\Omega)$ — гладкий собственный элемент квадратичного пучка $L_0(\lambda)$, соответствующий собственному значению λ, тогда применяя последовательно операторы G и L, из равенства

$$L_0(\lambda)\, u_\lambda = G^{-1} C G u_\lambda + \lambda G^{-1} B G u_\lambda - \lambda^2 u_\lambda = 0 \tag{51}$$

получаем

$$\mathrm{L}(\lambda)\, G u_\lambda(x, y) = 0. \tag{52}$$

Отсюда в силу леммы 1.3

$$(G + 2\beta I)\, \mathrm{L}(\lambda)\, u_\lambda(x, y) = 0. \tag{53}$$

Но поскольку существует обратный оператор $(G + 2\beta I)^{-1}$, то окончательно имеем

$$\mathrm{L}_\lambda u_\lambda(x, y) = 0, \quad G u_\lambda(x, y) \in \mathring{W}_2^1(\Omega). \tag{54}$$

Теорема доказана.

Вышедоказанная теорема показывает, что краевая задача (I_2), (II_2) вполне характеризуется квадратичным операторным пучком $L_0(\lambda)$, который по построению подобен квадратичному пучку $L(\lambda)$, порожденному (I_2), (II_0).

Теорема 2.4. *Пусть $\gamma > \omega \geqslant 0$ ($\gamma < \omega < 0$), тогда через двукратно полную в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ систему собственных функций из $\mathring{W}_2^1(\Omega) \cap R_0(\Omega)$ квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$ можно построить двукратно полную систему собственных функций для квадратичного пучка $L_0(\lambda)$ в $h_0(\Omega)$ и обратно, через двукратно полную в метрике $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ систему собственных функций пучка $L_0(\lambda)$ в $h_0(\Omega)$ можно построить двукратно полную систему собственных функций квадратичного пучка $L(\lambda)$ в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$.*

Доказательство. Легко проверить, что если $u_{\lambda_n}(x, y)$ — собственная функция для пучка $L(\lambda)$, то

$$G L_0(\lambda_n) G^{-1} u_{\lambda_n} = L(\lambda_n) u_{\lambda_n} = 0, \tag{55}$$

т. е. $v_{\lambda_n}(x, y) = G^{-1} u_{\lambda_n}(x, y) \in h_0(\Omega)$ является собственной функцией для пучка $L_0(\lambda)$. Двукратная полнота системы $\{u_{\lambda_n}(x, y)\}_1^\infty$ в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ означает полноту системы вектор-функций $\left\{\hat{u}_{\lambda_n} = \begin{pmatrix} u_{\lambda_n} \\ \lambda_n u_{\lambda_n} \end{pmatrix}\right\}$ матричного оператора $\mathbf{A}$ в

$$\hat{H}(\Omega) = \mathring{W}_2^1(\Omega) \oplus \mathring{W}_2^1(\Omega).$$

Покажем, что вектор-функция

$$\hat{v}_{\lambda_n}(x, y) = \begin{pmatrix} v_{\lambda_n} \\ \lambda_n v_{\lambda_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^{-1} u_{\lambda_n} \\ \lambda_n G^{-1} u_{\lambda_n} \end{pmatrix} = \hat{G}^{-1} \hat{u}_{\lambda_n} \tag{56}$$

является собственным вектором для оператора $\hat{\mathbf{A}}_0$.

В самом деле, имеем

$$\hat{\mathbf{A}}_0 \hat{v}_{\lambda_n} = \hat{G}^{-1} \hat{\mathbf{A}} \hat{G} \hat{v}_{\lambda_n} = \hat{G}^{-1} \hat{\mathbf{A}} \hat{u}_{\lambda_n} = \lambda_n \hat{v}_{\lambda_n}. \tag{57}$$

Пусть $\hat{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ — произвольный вектор из $\hat{H}_0(\Omega) = h_0(\Omega) \oplus h_0(\Omega)$

Рассмотрим вектор

$$\hat{G} \hat{v} = \hat{w} \in \hat{H}(\Omega). \tag{58}$$

Существует последовательность линейных комбинаций из собственных вектор-функций оператора $\hat{\mathbf{A}}$, так что

$$\sum_{k=1}^{N} d_k^{(N)} \hat{u}_{\lambda_k} \xrightarrow{\hat{H}(\Omega)} \hat{w} \text{ при } n \to \infty. \tag{59}$$

Отсюда в силу непрерывности оператора $\hat{G}^{-1}$ (лемма 3.2)

$$\sum_{k=1}^{N} d_k^{(N)} \hat{G}^{-1} \hat{u}_{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{N} d_k^{(N)} \hat{v}_{\lambda_k} \xrightarrow{\hat{H}_0(\Omega)} \hat{G}^{-1} \hat{w} = \hat{v}. \tag{60}$$

Таким образом, для матричного оператора $\hat{A}_G$ система $\{\hat{v}_{\lambda_k} = \hat{G}^{-1}\hat{u}_{\lambda_k}\}_1^\infty$ собственных вектор-функций полна в ортогональной сумме $\hat{H}_G(\Omega) = h_G(\Omega) \oplus h_G(\Omega)$. А это означает, что система собственных функций квадратичного пучка $L_G(\lambda)$ двукратно полна в $h_G(\Omega)$. Обратно, пусть система собственных функций $\{v_{\lambda_k}(x, y)\}_1^\infty$ пучка $L_G(\lambda)$ двукратно полна в $h_G(\Omega)$ в метрике пространства $\mathring{W}_2^1(\Omega)$. Это означает полноту в метрике $\mathring{W}_2^1(\Omega) \oplus \mathring{W}_2^1(\Omega)$ системы собственных векторов $\left\{\hat{v}_{\lambda_k} = \begin{pmatrix} v_{\lambda_k} \\ \lambda_k v_{\lambda_k} \end{pmatrix}\right\}_1^\infty$ матричного оператора $\hat{A}_G$ в $\hat{H}_G(\Omega)$.

Пусть $\hat{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ — произвольный элемент из $\hat{H}(\Omega)$. Тогда вектор $\hat{v} = \hat{G}^{-1}\hat{u} = \begin{pmatrix} G^{-1}u_1 \\ G^{-1}u_2 \end{pmatrix} \in \hat{H}_G(\Omega)$ и поэтому может быть аппроксимирован линейными комбинациями собственных векторов оператора $\hat{A}_G$

$$\sum_{k=1}^{N} l_k^{(N)} \hat{v}_{\lambda_k} \xrightarrow{\mathring{W}_2^1(\Omega) \oplus \mathring{W}_2^1(\Omega)} \hat{v} \text{ при } N \to \infty. \tag{61}$$

В силу непрерывности оператора $\hat{G}$ имеем

$$\sum_{k=1}^{N} l_k^{(N)} \hat{G}\hat{v}_{\lambda_k} \xrightarrow{\mathring{W}_2^1(\Omega) \oplus \mathring{W}_2^1(\Omega)} \hat{G}\hat{v} = \hat{u} \text{ при } N \to \infty.$$

Легко усмотреть, что система $\hat{G}\hat{v}_{\lambda_k} \in \hat{H}(\Omega)$ является системой собственных векторов для оператора $\hat{A}$. Теорема полностью доказана.

Предположим, что дифференциальные операторы M и L удовлетворяют следующим условиям;

$$\iint_{\Omega} Mpp\,d\Omega > 0, \quad \iint_{\Omega} Lpp\,d\Omega < 0 \tag{*}$$

для всех отличных от нуля полиномов от x и y. В работе [2] при выполнении условия (*) для квадратичного пучка $L(\lambda)$ установлено существование двукратно полной системы полиномиальных собственных функций в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ в случае, когда область Ω — единичный круг. Сопоставление этого результата с вышедоказанной теоремой позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.4. *В случае, когда область Ω—круг, при выполнении условий* (*) *и* $\gamma > \omega \geqslant 0$ ($\gamma < \omega \leqslant 0$), *у квадратичного операторного пучка* $L_G(\lambda)$, *порожденного задачей Пуанкаре, имеется двукратно полная система полиномиальных собственных функций в* $h_G(\Omega)$.

Следствие 1.4. Из доказанных теорем 1.4 и 3.4 следует, что в случае круга, при выполнении условия (*), краевая задача Пуанкаре имеет двукратно полную систему собственных функций в $h_G(\Omega)$.

Замечание 1.4. Аналогичные вышеприведенным результаты можно установить в случае многомерных областей, а также для дифференциальных операторных пучков более высокого порядка.

В заключение выражаю глубокую благодарность скоропостижно скончавшемуся моему учителю академику АН Армении Р. А. Александряну за внимание и ценные критические замечания.

Ереванский государственный университет Поступила 3. I. 1989

Գ. Վ. ՎԻՐԱԲՅԱՆ. Պուանկարեի խնդրից ծնված օպերատորային փնջերի մասին. *(ամփոփում)*

Ներկա աշխատանքում հետազոտվում է անորոշ ձև ունեցող դիֆերենցիալ հավասարումների համար Դիրիխլեի և Պուանկարեի խնդիրներից ծնված օպերատորների սպեկտրալ փոխկապակցությունը։

G. V. VIRABYAN. *On the operator pencil ganerated by Poincare problem* (summary)

The spectral interconnection of operator pencil generated by Dirichlet and Poincare problems for partial differential equations in indefinite form is investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. А. Александрян.* Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С. Л. Соболева, Труды ММО, т. 9, 1960.
2. *Г. В. Вирабян.* О полноте системы собственных функций для одного класса краевых задач с индефинитной формой, ДАН АрмССР, XLIII, № 1, 1966.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 6, 1990 Математика

УДК 517.51

В. Г. ВЕРДИЕВ

МАКСИМАЛЬНОЕ И МИНИМАЛЬНОЕ РАСХОЖДЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ НУЛЕЙ ОДНОГО КЛАССА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

1°. Пусть $T_n(t)$—тригонометрический многочлен порядка n, имеющий $2n$ вещественных нулей в промежутке $[-\pi, \pi)$.

В данной статье будем обозначать через $x_1^t < x_2^t < \cdots < x_{2n}^t$ и $y_1^t < y_2^t < \cdots < y_{2n}^t$ соответственно нули)* тригонометрического многочлена $T_n(t)$ и его производной $T'_n(t)$, расположенные в промежутке $[-\pi, \pi)$.

Обозначим через $W_n(h)$ класс всех тригонометрических многочленов порядка n, которые удовлетворяют следующим трем условиям: любой тригонометрический многочлен $T_n(t) \in W_n(h)$ 1) имеет $2n$ простих нулей $x_1^t < x_2^t < \cdots < x_{2n}^t$ в промежутке $[-\pi, \pi)$ и удовлетворяет неравенствам

2) $$\max_{-\pi \leq t \leq \pi} |T_n(t)| \leq 1,$$

3) $$\min_{1 \leq i \leq 2n} \max_{x_i^t \leq t \leq x_{i+1}^t} |T_n(t)| \geq h,$$

где $$x_{2n+1}^t = x_1^t + 2\pi \text{ и } h \in (0,1].$$

Расхождение последовательных нулей $x_1^t < x_2^t < \cdots < x_{2n}^t$ тригонометрических многочленов $T_n(t)$ класса $W_n(h)$ будем характеризовать следующими величинами:

$$d_n[h] = \inf_{T_n(t) \in W_n(h)} \min_{1 \leq i \leq 2n} |x_i^t - x_{i+1}^t|$$

и

$$D_n[h] = \sup_{T_n(t) \in W_n(h)} \max_{1 \leq i \leq 2n} |x_i^t - x_{i+1}^t|,$$

где $$x_{2n+1}^t = x_1^t + 2\pi.$$

---

* В дальнейшем через x_i^t и y_j^t обозначены, соответственно, i-ый нуль и j-ый нуль тригонометрического многочлена и его производной, расположенные в порядке их возрастания в промежутке $[-\pi, \pi)$. Верхний индекс t при x_i^t и y_j^t означает, что x_i^t есть нуль тригонометрического многочлена $T_n(t)$ и y_j^t есть нуль его производной $T'_n(t)$.

Рассмотрим следующие вопросы: 1) достигаются ли $d_n[h]$ и $D_n[h]$ на тригонометрических многочленах из класса $W_n(h)$; 2) на каких тригонометрических многочленах из класа $W_n(h)$ они достигаются; 3) определить чему равны $d_n[h]$ и $D_n[h]$.

Многочлен $T_n(t) \in W_n(h)$, для которого достигается величина $d_n[h]$ или $D_n[h]$, будем называть экстремальным многочленом.

Ответы на вопросы 1)—3) для $D_n[h]$ даны в [1], для $d_n[h]$ получены в настоящей статье.

2°. Пусть длина отрезка $[a, b]$ равна l. Будем говорить, что совокупность периодических с периодом l непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{2n}$ образуют $\tilde{T}_{2n}$-систему на отрезке $]a, b]$ длиной l, если любой многочлен $P_n(t) = \sum_{k=0}^{2n} a_k \varphi_k(t)$ при $\sum_{k=0}^{2n} a_k^2 > 0$ и его производная $P'_n(t) = \sum_{k=0}^{2n} a_k \varphi'_k(t)$ могут иметь не более $2n$ нулей в промежутке $[a, b)$.

Тригонометрические функции $\{1, \sin t, \cos t, \cdots, \sin nt, \cos nt\}$ образуют $\tilde{T}_{2n}$-систему на отрезке $[-\pi, \pi]$ длиной 2π.

При доказательстве леммы 2 и теоремы 1 мы будем опираться на теорему A [2], [3] о существовании и единственности многочлена по $\tilde{T}_{2n}$-системе функций с данной последовательностью значений экстремумов и на теорему B [1] о движении нулей и точек экстремумов тригонометрического многочлена.

Теорема A ([2], [3]). *Пусть* $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{2n}$ *образуют* $\tilde{T}_{2n}$ *-систему на* $[a, b]$, *и пусть даны положительные числа* $v_1, v_2, \cdots, v_{2n}$. *Тогда существуют на* $[a, b)$ *такая единственная система точек* $a \leqslant y_1^p < y_2^p < \cdots < y_{2n}^p < b$ *и такой многочлен* $P_n(t)$, *что* $P_n(y_k^p) = (-1)^k v_k$ *и* $P'_n(y_k^p) = 0$ *при* $k = 1, 2, \cdots, 2n$.

Теорема B ([1]). *Пусть* $P_n(t)$ *и* $Q_n(t)$ — *два тригонометрических многочлена порядка* n, *имеющие по* $2n$ *нулей в промежутке* $[-\pi, \pi)$.

Если $1 < j < 2n$, $y_1^p = y_1^q$ и

$$P_n(y_i^p) = Q_n(y_i^q)$$

при $i = 1, 2, \cdots j-1, j+1, \cdots, 2n$,

$$P_n(y_j^p) > Q_n(y_j^q) \text{ при } Q_n(y_j^q) > 0 \tag{1}$$

и

$$P_n(y_j^p) < Q_n(y_j^q) \text{ при } Q_n(y_j^q) < 0,$$

то

$$y_2^p < y_2^q,\ y_3^p < y_3^q,\ \cdots,\ y_{j-1}^p < y_{j-1}^q,$$

$$y_{j+1}^q < y_{j+1}^p,\ y_{j+2}^q < y_{j+2}^p,\ \cdots,\ y_{2n}^q < y_{2n}^p,$$

$$x_1^p < x_1^q,\ x_2^p < x_2^q, \cdots,\ x_{j-1}^p \leqslant x_{j-1}^q \tag{2}$$

$$x_j^q < x_j^p,\ x_{j+1}^q < x_{j+1}^p, \cdots, x_{2n}^q < x_{2n}^p,$$
$$y_2^q - y_2^p < y_3^q - y_3^p < \cdots < y_{j-1}^q - y_{j-1}^p,$$
$$y_{j+1}^p - y_{j+1}^q > y_{j+2}^p - y_{j+2}^q > \cdots > y_{2n}^p - y_{2n}^q,$$
$$x_1^q - x_1^p < x_2^q - x_2^p < \cdots < x_{j-1}^q - x_{j-1}^p,$$
$$x_j^p - x_j^q > x_{j+1}^p - x_{j+1}^q > \cdots > x_{2n}^p - x_{2n}^q. \tag{3}$$

3° Лемма 1. *В классе $W_n(h)$ существует экстремальный тригонометрический многочлен $P_n(t)$, для которого нижняя грань $d_n[h]$ в классе $W_n(h)$ достигается, то есть*

$$d_n[h] = \inf_{T_n(t)\in W_n(h)} \min_{1\leq l\leq 2n} |x_l^l - x_{l+1}^l| =$$
$$= \min_{T_n(t)\in W_n(h)} \min_{1\leq l\leq 2n} |x_l^l - x_{l+1}^l| =$$
$$= \min_{1\leq l\leq 2n} |x_l^p - x_{l+1}^p|,$$

где $\qquad x_{2n+1}^p = x_1^p + 2\pi$ *и* $x_{2n+1}^l = x_1^l + 2\pi.$

Доказательство. Нули $x_1^l < x_2^l < \cdots < x_{2n}^l$ тригонометрического многочлена $T_n(t) \in W_n(h)$ являются непрерывными функциями его коэффициентов. Коэффициенты тригонометрических многочленов из класса $W_n(h)$ ограничены в совокупности. Поэтому величина $d_n[h]$ достигается на некотором многочлене $P_n(t)$ из $W_n(h)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Существуют в классе $W_n(h)$ единственный тригонометрический многочлен $P_n(t)$ и в промежутке $[-\pi, \pi)$ единственная система чисел $-\pi = y_1^p < y_2^p < \cdots < y_{2n}^p < \pi$, для которых выполнены равенства*

$$P_n(y_i^p) = (-1)^{i-n+1} \text{ при } i=1,2,\cdots, n, n+2,\cdots, 2n,$$
$$P_n(y_{n+1}^p) = h \text{ и } P'_n(y_j^p) = 0 \text{ при } j=1, 2,\cdots, 2n, \tag{4}$$

и многочлен $P_n(t)$ имеет вид

$$P_n(t) = \cos n \arccos\frac{\cos t - \cos^2\alpha_n}{1+\cos^2\alpha_n}, \tag{5}$$

где

$$\alpha_n = \arccos \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2n} \arccos h\right) \text{ и } 0 < h \leqslant 1.$$

Доказательство. Согласно теореме A существуют в промежутке $[-\pi, \pi)$ единственная система чисел $-\pi = y_1^p < y_2^p < \cdots < y_{2n}^p < \pi$ и единственный тригонометрический многочлен $P_n(t)$ порядка n, определяемые равенствами (4). Поэтому многочлен $P_n(t)$ принадлежит классу $W_n(h)$.

Покажем, что многочлен $P_n(t) \in W_n(h)$, который удовлетворяет условиям леммы 2, имеет вид (5). Из структуры выражения

$$\cos n \arccos \frac{\cos t - \cos^2 \alpha_n}{1+\cos^2 \alpha_n} \tag{6}$$

видно, что (6) есть тригонометрический многочлен порядка n относительно t и числа $\{t_k\}_{k=1}^{2n}$, определяемые равенствами

$$t_k = \begin{cases} -\arccos\left(\cos^2 \alpha_n + (1+\cos^2 \alpha_n) \cos \frac{(n-k+1)\pi}{n}\right), \\ \text{при } k=1, 2, \cdots, n; \\ 0, \text{ при } k=n+1; \\ \arccos\left(\cos^2 \alpha_n + (1+\cos^2 \alpha_n) \cos \frac{(k-n-1)\pi}{n}\right), \\ \text{при } k=n+2, \cdots, 2n \end{cases}$$

во-первых, удовлетворяют неравенствам

$$-\pi = t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} < t_{n+2} < \cdots < t_{2n} < \pi$$

и, во-вторых, служат нулями производной по t тригонометрического многочлена (6), так как

$$\cos n \arccos \frac{\cos t_k - \cos^2 \alpha_n}{1+\cos^2 \alpha_n} = \begin{cases} (-1)^{n-k+1}, & \text{при } k=1, 2, \cdots, n, \\ h, & \text{при } k=n+1, \\ (-1)^{k-n-1}, & \text{при } k=n+2, \cdots, 2n. \end{cases}$$

Следовательно, числа $\{t_k\}_{k=1}^{2n}$ из промежутка $[-\pi, \pi)$ и тригонометрический многочлен (6) порядка n удовлетворяют условию леммы 2 и в силу единственности такого тригонометрического многочлена согласно теореме A имеем

$$y_k^p = t_k, \text{ при } k=1, 2, \cdots, 2n$$

и

$$P_n(t) = \cos n \arccos \frac{\cos t - \cos^2 \alpha_n}{1+\cos^2 \alpha_n}.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Числа* $x_1^p < x_2^p < \cdots < x_n^p < x_{n+1}^p < \cdots < x_{2n}^p$ *из промежутка* $[-\pi, \pi)$, *определяемые равенствами*

$$x_i^p = \begin{cases} -\arccos\left(\cos^2 \alpha_n + (1+\cos^2 \alpha_n) \cos \frac{(2n-2i+1)\pi}{2n}\right), \\ \text{при } i=1, 2, \cdots, n, \\ \arccos\left(\cos^2 \alpha_n + (1+\cos^2 \alpha_n) \cos \frac{(2i-2n-1)\pi}{2n}\right), \\ \text{при } i=n+1, n+2, \cdots, 2n, \end{cases} \tag{7}$$

являются простыми нулями тригонометрического многочлена

$$P_n\ (t) = \cos n \arccos \frac{\cos t - \cos^2 \alpha_n}{1 + \cos^2 \alpha_n},$$

где $\alpha_n = \arccos \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2n} \arccos h \right)$ *и* $0 < h \leqslant 1.$

Доказательство. Тригонометрический многочлен $P_n(t)$—четный, поэтому нули его $x_1^p < x_2^p < \cdots < x_n^p < x_{n+1}^p < \cdots < x_{2n}^p$ расположены в интервале $(-\pi, \pi)$ симметрично относительно нуля, то есть

$$-x_1^p = x_{2n}^p, -x_2^p = x_{2n-1}^p, \cdots, -x_n^p = x_{n+1}^p. \qquad (8)$$

Следовательно, достаточно найти значения $x_{n+1}^p,\ x_{n+2}^p, \cdots,\ x_{2n}^p$. Приравниваем тригонометрический многочлен $P_n\ (t)$ к нулю и решаем полученное уравнение

$$\cos n \arccos \frac{\cos t - \cos^2 \alpha_n}{1 + \cos^2 \alpha_n} = 0.$$

Отсюда имеем

$$n \arccos \frac{\cos x_i^p - \cos^2 \alpha_n}{1 + \cos^2 \alpha_n} = \frac{(2i - 2n - 1)\pi}{2},$$

где $i = n+1,\ n+2, \cdots. 2n,$ или

$$\frac{\cos x_i^p - \cos^2 \alpha_n}{1 + \cos^2 \alpha_n} = \cos \frac{(2i - 2n - 1)\pi}{2n}.$$

Следовательно

$$x_i^p = \arccos \left((\cos^2 \alpha_n + (1 + \cos^2 \alpha_n) \cos \frac{(2i - 2n - 1)\pi}{2n} \right),$$

где $i = n+1,\ n+2, \cdots,\ 2n$. Лемма 3 доказана.

Определение 1. *Будем говорить, что тригонометрический многочлен* $M(t)$ *эквивалентен тригонометрическому многочлену* $N(t)$, *если существуют два вещественных числа* a *и* b *такие, что* $-\pi \leqslant b \leqslant \pi$ *и* $M(t) \equiv a N(t + b)$. *В противном случае будем говорить, что тригонометрический многочлен* $M(t)$ *не эквивалентен тригонометрическому многочлену* $N(t)$. *Заметим, что если* $M(t)$ *эквивалентен* $N(t)$, *то*

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant 2n} |x_i^m - x_{i+1}^m| = \max_{1 \leqslant i \leqslant 2n} |x_i^n - x_{i+1}^n|$$

и

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant 2n} |x_i^m - x_{i+1}^m| = \min_{1 \leqslant i \leqslant 2n} |x_i^n - x_{i+1}^n|,$$

где $x_{2n+1}^m = x_1^m + 2\pi$ и $x_{2n+1}^n = x_1^n + 2\pi.$

Теорема. *Величины* $d_n\ [h]$, $D_n\ [h]$ *в классе* $W_n\ [h]$ *достигаются соответственно на тригонометрических многочленах*

$$P_n(t)=\cos n \arccos\frac{\cos t-\cos^2 \alpha_n}{1+\cos^2 \alpha_n},$$

$$Q_n(t)=h \cos n \arccos\frac{\cos t-\cos^2 \beta_n}{\sin^2 \beta_n},$$

а также на эквивалентных им тригонометрических многочленах из класса $W_n(h)$ и равны

$$d_n[h]=2 \arccos\left(\cos^2 \alpha_n+(1+\cos^2 \alpha_n)\cos\frac{\pi}{2n}\right), \tag{9}$$

$$D_n[h]=2\left(\pi-\arccos\left(\cos^2 \beta_n+\sin^2 \beta_n \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)\right), \tag{10}$$

где $\alpha_n=\arccos \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2n}\arccos h\right)$, $\beta_n=2 \operatorname{arctg}\sqrt[2n]{\frac{1}{h}-\sqrt{\frac{1}{h^2}-1}}$

и $0<h\leqslant 1$.

Доказательство. Согласно лемме 1 величина $d_n[h]$ в классе $W_n(h)$ достигается, покажем, что она достигается на многочлене $P_n(t)$ и на многочленах из класса $W_n(h)$, эквивалентных многочлену $P_n(t)$.

В зависимости от величины экстремальных значений многочлены из класса $W_n(h)$ разобьем на три подкласса W_1, W_2 и W_3 следующим образом. Тригонометрический многочлен $T_n(t)$ из класса $W_n(h)$ с экстремальными значениями $T_n(y_1^t)$, $T_n(y_2^t), \cdots, T_n(y_{2n}^t)$ в точках $-\pi\leqslant y_1^t<y_2^t<\cdots<y_{2n}^t<\pi$ отнесем к подклассу W_1, если

$|T_n(y_i^t)|=h$, $|T_n(y_j^t)|=1$, при $j=1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, 2n$ и $1\leqslant i\leqslant 2n$; отнесем к подклассу W_2, если $h<|T_n(y_j^t)|<1$ при $j=1, 2, \cdots, 2n$; отнесем к подклассу W_3 все те тригонометрические многочлены из класса $W_n(h)$, которые не вошли в подклассы W_1 и W_2. Из определения подклассов W_1, W_2 и W_3 следует, что подклассы W_1, W_2, W_3 попарно не пересекаются и $W_1\cup W_2\cup W_3=W_n(h)$.

В подклассе W_2 величина $d_n[h]$ не может достигаться. Предполагая противное, допустим, что $d_n[h]$ достигается на некотором многочлене $R_n(t)\in W_2$, что есть

$$d_n[h]=\min_{1<j<2n}|x_j^r-x_{j+1}^r|=x_{i+1}^r-x_i^r,$$

где $x_{2n+1}^r=x_1^r+2\pi$ и x_i^r и $x_{i\pm1}^r$—последовательные нули тригонометрического многочлена $R_n(t)$, принадлежащие интервалу $(-\pi, \pi)$. Между двумя последовательными нулями x_i^r и x_{i+1}^r многочлена $R_n(t)\in W_2$ находится одна точка его экстремума y_{i+1}^r с экстремальным значением $R_n(y_{i+1}^r)$ таким, что

$$-1<R_n(y_{i+1}^r)<-h \text{ или } h<R_n(y_{i+1}^r)<1.$$

Для определенности будем считать, что $h < R_n(y^r_{i+1}) < 1$ в точке y^r_{i+1}. В классе $W_n(h)$ рассмотрим многочлен $S_n(t)$, экстремальные значения $S_n(y^s_1), S_n(y^s_2), \cdots, S_n(y^s_{2n})$, в точках экстремумов $-\pi \leqslant y^s_1 < y^s_2 < \cdots < y^s_{2n} < \pi$ которого связаны с экстремальными значениями $R_n(y^r_1), R_n(y^r_2), \cdots, R_n(y^r_{2n})$ в точках экстремумов $-\pi \leqslant y^r_1 < y^r_2 < \cdots < y^r_{2n} < \pi$ многочлена $R_n(t) \in W_2$ соотношениями

$$S_n(y^s_j) = R_n(y^r_j)$$

при $j=1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, 2n$, $S_n(y^s_i) = h < R_n(y^r_i)$, $S'_n(y^s_j) = 0$ при $j=1, 2, \cdots, 2n$ и $y^s_1 = y^r_1$. Согласно теореме А в классе $W_n(h)$ существует такой многочлен $S_n(t)$ и он единственный. Многочлены $R_n(t)$ и $S_n(t)$ удовлетворяют условиям (1) теоремы B. Поэтому, если x^s_i и x^s_{i+1} являются последовательными i-ым и $(i+1)$-ым нулями многочлена $S_n(t)$, принадлежащими интервалу $(-\pi, \pi)$, то согласно неравенствам (2) из теорамы B имеем $x^r_i < x^s_i$ и $x^s_{i+1} < x^r_{i+1}$;

отсюда следует

$$x^s_{i+1} - x^s_i < x^r_{i+1} - x^r_i = d_n[h],$$

а это противоречит допущению. Значит $d_n[h]$ на подклассе W_2 класса $W_n(h)$ не может достигаться.

Покажем, что $d_n[h]$ не может достигаться также на многочлнах из подкласса W_3 класса $W_n(h)$. Пусть, наоборот, величина $d_n[h]$ достигается на тригонометрическом многочлене $M_n(t) \in W_3$, то есть

$$d_n[h] = \min_{1 \leqslant j \leqslant 2n} |x^m_j - x^m_{j+1}| = x^m_{k+1} - x^m_k,$$

где $x^m_{2n+1} = x^m_1 + 2\pi$ и x^m_k и x^m_{k+1} — последовательные k-ый и $(k+1)$-ый нули многочлена $M_n(t)$, принадлежащие интервалу $(-\pi, \pi)$. Пусть $y^m_1 < y^m_2 < \cdots < y^m_{2n}$ — точки экстремума из промежутка $[-\pi, \pi)$ и $M_n(y^m_1), M_n(y^m_2), \cdots, M_n(y^m_{2n})$ — экстремальные значения многочлена $M_n(t) \in W_3$. Тогда хотя бы в одной точке экстремума y^m_l, $1 < l < 2n$, его экстремальное значение $M_n(y^m_l)$ должно удовлетворять наравенству

$$-1 < M_n(y^m_l) < -h \text{ или } h < M_n(y^m_l) < 1 \tag{11}$$

согласно определению подкласса W_3, которому принадлежит $M_n(t)$.

Ход дальнейших рассуждений зависит от взаимного расположения экстремальной точки y^m_l и последовательных нулей x^m_k, x^m_{k+1} многочлена $M_n(t)$. В промежутке $[-\pi, \pi)$ возможны следующие взаимные расположения y^m_l и $x^m_k < x^m_{k+1}$:

$$x^m_k < y^m_k < x^m_{k+1}, \text{ при } l=k \text{ и } l=1, 2, \cdots, 2n;$$

$$y^m_l < x^m_k < x^m_{k+1}, \text{ при } 1 \leqslant l < k < 2n;$$

$$x_k^m < x_{k+1}^m < y_l^m, \text{ при } 2 < k+1 \leqslant l \leqslant 2n.$$

В случае, когда $\quad x_k^m < y_k^m < x_{k+1}^m$ при $l = k$,

повторяя для многочлена $M_n(t)$ рассуждения, проведенные выше относительно многочлена $K_n(t)$, получим, что величина $d_n[h]$ не может достигаться на многочлене $M_n(t) \in W_3$. Случаи $y_l^m < x_k^m < x_{k-1}^m$, при

$$1 \leqslant l \leqslant k < 2n \text{ и } x_k^m < x_{k+1}^m < y_l^m, \text{ при } 1 \leqslant k < l < 2n$$

с учетом неравенств (11) разбираются единообразно, поэтому мы ограничимся разбором случая, когда $y_l^m < x_k^m < x_{k+1}^m$, при $1 \leqslant l \leqslant k < 2n$ и $h < M_n(y_l^m) < 1$. По теореме A в классе $W_n(h)$ существует единственный тригонометрический многочлен $T_n(t)$, экстремальные значения $T_n(y_1^t)$, $T_n(y_2^t), \cdots$, $T_n(y_{2n}^t)$ в точках экстремумов $-\pi < y_1^t < y_2^t < < \cdots < y_{2n}^t < \pi$ которого связаны с экстремальными значениями $M_n(y_1^m)$, $M_n(y_2^m), \cdots$, $M_n(y_{2n}^m)$ многочлена $M_n(t) \in W_3$ следующим образом: $T_n(y_j^t) = M_n(y_j^m)$, при $j=1, 2, \cdots, l-1, \ l+1, \cdots, 2n$, $T_n(y_l^t) = h < M_n(y_l^m)$ и $y_1^t = y_1^m$. Многочлены $T_n(t) \in W_n(h)$ и $M_n(t) \in W_3$ удовлетворяют условиям (1) теоремы B. Следовательно, по теореме B в силу (3), нули x_k^m, x_{k+1}^m многочлена $M_n(t) \in W_3$ и нули x_k^t, x_{k+1}^t многочлена $T_n(t) \in W_n(h)$ удовлетворяют неравенствам

$$x_k^t - x_k^m > x_{k+1}^t - x_{k+1}^m \quad \text{или} \quad x_{k+1}^t - x_k^t < x_{k+1}^m - x_k^m;$$

отсюда следует, что

$$d_n[h] = x_{k+1}^m - x_k^m > x_{k+1}^t - x_k^t,$$

поэтому допущение неверно, то есть $d_n[h]$ не может достигаться на подклассе W_3. Таким образом, мы показали, что $d_n[h]$ на многочленах из подклассов W_2 и W_3 класса $W_n(h)$ не может достигаться. Поэтому, если учесть лемму 1, то величина $d_n[h]$ достигается на подклассе W_1. Из проведенных выше рассуждений усматривается, что $d_n[h]$ достигается на многочлене $S_n(t)$ из класса $W_n(h)$ для нулей x_l^s и x_{l+1}^s из промежутка $[-\pi, \pi)$, у которого экстремальные значения $S_n(y_1^s)$, $S_n(y_2^s), \cdots$, $S_n(y_{2n}^s)$ в точках его экстремумов $-\pi \leqslant y_1^s < y_2^s < < \cdots < y_{2n}^s < \pi$ таковы, что

$$\begin{aligned} &S_n(y_i^s) = \pm(-1)^i, \text{ при } i = 1, 2, \cdots l-1, \ l+1, \cdots, 2n, \\ &S_n(y_l^s) = \pm(-1)^l \ h, \text{ при } i = l, \text{ где } 1 \leqslant l < 2n, \end{aligned} \tag{12}$$

кроме того, ввиду замечания к определению 1, $d_n[h]$ достигается также на многочленах из класса $W_n(h)$, эквивалентных многочлену $S_n(t)$. Многочлен $P_n(t)$ из класса $W_n(h)$ принадлежит подклассу W_1 и из определения подкласса W_1 класса $W_n(h)$ и определения 1 вытекает, что подкласс W_1 состоит только из многочленов класса $W_n(h)$, которые эквивалентны многочлену $P_n(t)$. Поэтому многочлен $S_n(t) \in W_1$, для которого выполнены равенства (12), эквивалентен многочлену $P_n(t) \in W_1$ и $d_n[h]$ достигается на тригонометрическом многочлене $P_n(t)$ для нулей x_n^p и x_{n+1}^p, другими словами, $d_n[h] = x_{n+1}^p - x_n^p$. Принимая во внимание равенства (7) и четность тригонометрического многочлена $P_n(t)$, для $d_n[h]$ получим

$$d_n[h] = 2\, x_{n+1}^p = 2 \arccos \left(\cos^2 \alpha_n + (1 + \cos^2 \alpha_n) \cos \frac{\pi}{2n} \right).$$

Тем самым мы показали, что в классе $W_n(h)$ величина $d_n[h]$ достигается на многочлене $P_n(t)$ и на всех многочленах из класса $W_n(h)$, эквивалентных многочлену $P_n(t)$, и значение величины $d_n[h]$ определяется равенством (9).

В [1] доказано, что величина $D_n[h]$ в классе $W_n(h)$ достигается на тригонометрическом многочлене $Q_n(t)$, на всех тригонометрических многочленах из класса $W_n(h)$, эквивалентных тригонометрическому многочлену $Q_n(t)$, и равна (10). Теорема доказана.

Следствие 1. *При любом $i = 1, 2, \cdots, 2n-1$ разность $x_{i+1}^t - x_i^t$ между последовательными i-ым и $(i+1)$-ым нулями x_i^t и x_{i+1}^t любого тригонометрического многочлена $T_n(t) \in W_n(h)$ удовлетворяет следующим неравенствам:*

$$2 \arccos \left(\cos^2 \alpha_n + (1 + \cos^2 \alpha_n) \cos \frac{\pi}{2n} \right) \leqslant x_{i+1}^t - x_i^t \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left(\pi - \arccos \left(\cos^2 \beta_n + \sin^2 \beta_n \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n} \right) \right),$$

где $\alpha_n = \arccos \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2n} \arccos h \right)$, $\beta_n = 2 \operatorname{arctg} \sqrt[2n]{\frac{1}{h} - \sqrt{\frac{1}{h^2} - 1}}$,

$$0 < h \leqslant 1 \text{ и } i = 1, 2, \cdots, 2n-1.$$

Дагестанский государственный университет им. Ленина

Поступила 16. VI. 1987

Վ. Գ. ՎԵՐԴԻԵՎ. Եռանկյունաչափական բազմանդամների մի դասի հաջորդական զրոների մաքսիմալ և մինիմալ շեղումները *(ամփոփում)*

Հոդվածում լուծված են էքստրեմալ խնդիրներ, որոնք կապված են որոշ եռանկյունաչափական բազմանդամների հաջորդական զրոների մաքսիմալ և մինիմալ շեղումների հետ։

V. G. VERDIEV. *On maximal and minimal divergence of sequential zeros of trigonometrical polynomials* (summary)

In this article extremal problems connected with maximal and minimal divergence of sequential zeros of certain trigonometrical polynomials are solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Г. Вердиев*. О плотности множества точек максимального отклонения при наилучшем приближении непрерывных периодических функций, Изв. АН АрмССР, сер. матем., 10, № 5, 1975, 445—454.
2. *В. С. Виденский*. Существование и единственность решения одной интерполяционной задачи. Исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций, Сб. научных трудов Ленинградского механического института, № 50, 1966, 29—41.
3. *В. С. Виденский*. О построении многочлена по данной последовательности его экстремумов, Современные проблемы теории аналитических функций, М., Наука, 1966, 62—64.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 6, 1990 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.53

Г. В. МИКАЕЛЯН

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ФУНКЦИЙ ТИПА БЛЯШКЕ-ДЖРБАШЯНА

1°. В [1] (см. также [2]) М. М. Джрбашян установил широкий класс формул типа Иенсена-Неванлинны, зависящих от непрерывного параметра $\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ и совпадающих с классической формулой Иенсена-Неванлинны в случае $\alpha=0$. Эти формулы порождали семейство бесконечных произведений типа Бляшке для единичного круга $D=\{z:|z|<1\}$.

В [1] при любых $\zeta\in D$ $(\zeta\neq0)$ и $\alpha\in(-1,+\infty)$ введена следующая аналитическая в D функция

$$b_{\alpha}^{(1)}(z,\zeta)\equiv\exp\left\{-\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha}}{(1-z\zeta^{-1}t)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right\}, \tag{1}$$

и доказано, что если последовательность комплексных чисел $\{z_n\}_1^{\infty}\subset D$ удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)^{1+\alpha}<+\infty,$$

то бесконечное произведение

$$B_{\alpha}^{(1)}(z,\{z_n\})=\prod_{n=1}^{\infty}b_{\alpha}^{(1)}(z,z_n)$$

абсолютно и равномерно сходится внутри D и представляет аналитическую функцию с нулями $\{z_n\}_1^{\infty}$.

Отметим также, что

$$B_0^{(1)}(z,\{z_n\})\equiv\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z_n-z}{1-\bar{z}_n z}\bar{z}_n.$$

С помощью произведений $B_{\alpha}^{(1)}(z,\{z_n\})$ М. М. Джрбашян установил канонические факторизации новых широких классов мероморфных круге D функций.

2°. В [3] (см. также [4]) А. М. Джрбашяном было введено семейство бесконечных произведений типа Бляшке-Неванлинны для полуплоскости, которые затем были использованы [5] при установлении формул типа Иенсена-Неванлинны, Карлемана, Б. Я. Левина и канонической факторизации новых общих классов мероморфных в полуплоскости функций.

В [6] введено другое, более простое по конструкции, семейство бесконечных произведений для полуплоскости, которые также были использованы в [7] при установлении других формул типа Б. Я. Левина и канонической факторизации классов мероморфных в полуплоскости функций с неограниченной характеристикой Цудзи.

При любых $\zeta=\xi+i\eta\in G=\{z:\operatorname{Im} z<0\}$, $\alpha\in(-1,+\infty)$ в [3] и [6] введены в рассмотрение следующие аналитические в G функции

$$b_\alpha^{(2)}(z,\zeta)=\exp\left\{-\int\limits_0^{|\eta|}\left(\left[\tau+i(z-\zeta)\right]^{-1-\alpha}+\left[i(z-\bar\zeta)-\tau\right]^{-1-\alpha}\right)\tau^\alpha d\tau\right\}, \tag{2}$$

$$b_\alpha^{(3)}(z,\zeta)=\exp\left\{-\int\limits_0^{2|\eta|}\left[\tau+i(z-\zeta)\right]^{-1-\alpha}\tau^\alpha d\tau\right\}. \tag{3}$$

Как показано в этих работах, если последовательность комплексных чисел $\{z_n\}_1^\infty\subset G$ при некотором $\alpha\in(-1,+\infty)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^\infty|\operatorname{Im} z_n|^{1+\alpha}<+\infty,$$

то бесконечные произведения

$$B_\alpha^{(k)}(z,\{z_n\})=\prod_{n=1}^\infty b_\alpha^{(k)}(z,z_n)\quad(k=2,3)$$

абсолютно и равномерно сходятся внутри полуплоскости G и представляют аналитические функции с нулями $\{z_n\}_1^\infty$.

В частном случае $\alpha=0$

$$b_0^{(2)}(z,\zeta)=b_0^{(3)}(z,\zeta)=\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}.$$

3°. В настоящей заметке устанавливается, что приведенные выше функции $b_\alpha^{(k)}(z,\zeta)$ ($k=1,2,3$) допускают интегральные представления одинаковой структуры:

Теорема. *Для любого $\alpha\in(-1,+\infty)$ справедливы следующие интегральные представления:*

$$b_\alpha^{(1)}(z,\zeta)=\exp\left\{\int\limits_1^{b_0^{(1)}}(1-t)^\alpha\frac{dt}{t}\right\},\quad z,\zeta\in D, \tag{4}$$

$$b_\alpha^{(2)}(z,\zeta)=\exp\left\{\int\limits_1^{b_0^{(2)}}\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^\alpha\frac{dt}{t}\right\},\quad z,\zeta\in G, \tag{5}$$

$$b_\alpha^{(3)}(z,\zeta)=\exp\left\{\int\limits_1^{b_0^{(3)}}(1-t)^\alpha\frac{dt}{t}\right\},\quad z,\zeta\in G, \tag{6}$$

где интегралы берутся по любым контурам, лежащим в круге D, соединяющими точки 1 *и* $b_0^{(k)} = b_0^{(k)}(z, \zeta)$ $(k=1, 2, 3)$, *и не проходящим через начало координат при* $z \neq \zeta$.

Доказательство. Сначала докажем теорему в случае $\operatorname{Im} b_0^{(k)} \neq 0$ $(k=1, 2, 3)$. Общий случай будет следовать из теоремы единственности аналитических функций. В силу независимости экспонент в (4)—(6) от контура интегрирования, после интегрирования в (4) и (6) по контурам

$$\left\{ t : t = \frac{b_0^{(k)}}{x(1-b_0^{(k)})+b_0^{(k)}},\ 0 \leqslant x < 1 \right\} \quad (k=1, 3).$$

будем иметь

$$\exp\left\{ \int_1^{b_0^{(k)}} (1-t)^{\alpha} \frac{dt}{t} \right\} = \exp\left\{ -\int_0^1 \left(x + \frac{b_0^{(k)}}{1-b_0^{(k)}} \right)^{-1-\alpha} x^{\alpha}\, dx \right\}. \quad (7)$$

Далее, заметив, что

$$\frac{b_0^{(1)}}{1-b_0^{(1)}} = \frac{(\zeta - z)\bar{\zeta}}{1-|\zeta|^2}, \quad \frac{b_0^{(3)}}{1-b_0^{(3)}} = i\, \frac{z-\zeta}{2\,|\operatorname{Im} \zeta|},$$

из (7), с заменами переменной

$$x = \frac{|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2}\, \frac{1-\tau}{\tau} \quad (k=1), \quad x = \frac{\tau}{2\,|\operatorname{Im} \zeta|} \quad (k=3),$$

и ввиду формул (1) и (3), получаем формулы (4) и (6) теоремы.

Перейдя к доказательству формулы (5) заметим, что

$$\int_1^{b_0^{(2)}} \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^{\alpha} \frac{dt}{t} = \int_1^{b_0^{(2)}} \frac{(1-t)^{\alpha}}{(1+t)^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} + \int_1^{b_0^{(2)}} \frac{(1-t)^{\alpha}}{(1+t)^{1+\alpha}}\, dt.$$

Если интегрирования в правой части этой формулы будут произведены, соответственно, по контурам

$$\left\{ t : t = \frac{b_0^{(2)}}{x(1-b_0^{(2)})+b_0^{(2)}},\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \right\}, \quad \{ t : t = 1 - x(1-b_0^{(2)}),\ 0 < x \leqslant 1 \},$$

то будем иметь

$$\exp\left\{ \int_1^{b_0^{(2)}} \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^{\alpha} \frac{dt}{t} \right\} = \exp\left\{ -\int_0^1 \left(x + \frac{2\, b_0^{(2)}}{1-b_0^{(2)}} \right)^{-1-\alpha} x^{\alpha}\, dx - \right.$$

$$\left. -\int_0^1 \left(\frac{2}{1-b_0^{(2)}} - x \right)^{-1-\alpha} x^{\alpha}\, dx \right\}.$$

Теперь, заменой переменной $x = \tau |\ln \varsigma|$ в обоих последних интегралах, ввиду (2), получаем формулу (5) теоремы.

Из доказанной теоремы следует способ построения новых функций типа Бляшке-Джрбашяна.

Обозначим через Φ класс функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $\varphi(t)$ аналитична в единичном круге D.

2. $\varphi(0)=1$ и при $0<|z|<1$ сходятся интегралы

$$\int_1^z \frac{\varphi(t)}{t}\, dt,$$

взятые по контурам, лежащим в D, соединяющим точки 1, z и не проходящим через нуль.

При $\varphi(t)\in\Phi$ введем функции

$$b_\varphi^{(k)}(z, \varsigma)=\exp\left\{\int_1^{b_0^{(k)}} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt\right\} \quad (k=1, 2), \tag{8}$$

где $z, \varsigma\in D$ при $k=1$, $z, \varsigma\in G$ при $k=2$, а интегралы берутся по контурам, лежащим в D, соединяющим точки 1, $b_0^{(k)} \equiv b_0^{(k)}(z, \varsigma)$ и не проходящим через нуль при $z\neq\varsigma$.

Заметим, что функции $b_\varphi^{(k)}(z, \varsigma)$ можно представить также в виде

$$b_\varphi^{(k)}(z, \varsigma)=b_0^{(k)}(z, \varsigma)\exp\left\{\int_1^{b_0^{(k)}} \frac{\varphi(t)-1}{t}\, dt\right\}.$$

Так как $\varphi(0)=1$, то здесь контур интегрирования уже может проходить через точку нуль.

Очевидно, что функции $b_\varphi^{(k)}(z, \varsigma)$ при фиксированном ς аналитичны в D $(k=1)$ или G $(k=2)$ и имеют нуль только в точке $z=\varsigma$, притом первого порядка.

В заключение отметим, что в (8) вместо функции $b_0^{(k)}(z, \varsigma)$ могут фигурировать другие аналитические в D или G функции по модулю меньше единицы, обращающиеся в нуль в точке $z=\varsigma$.

Ереванский государственный
университет

Поступила 23. X. 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН Арм.ССР, 3, № 1, 1945, 3—9.

2. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. ин-та матем. и мех. АН Арм.ССР, вып. 2, 1948, 3—55.

3. *А. М. Джрбашян*. Функции типа Бляшке для полуплоскости, ДАН СССР, 246, № 6, 1979, 1295—1298.
4. *А. М. Джрбашян*. Функции типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVIII, № 6, 1983, 409—440.
5. *А. М. Джрбашян*. Соотношения равновесия и факторизационные теоремы для мероморфных в полуплоскости функций, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XXI, № 3, 1986, 214—279.
6. *А .М. Джрбашян, Г .В. Микаелян*. Построение и основные свойства одного семейства функций типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XV, № 6, 1980, 461—474.
7. *А. М. Джрбашян*. Параметрические представления классов мероморфных функций с неограниченной характеристикой Цудзи, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XXII, № 5, 1987, 451—477.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 6, 1990 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.53

Л. Р. СТЕПАНЯН

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

В настоящей работе рассматривается вопрос об аналитическом продолжении через интервал на прямой сходимости рядов Дирихле вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda(n) z}, \tag{1.1}$$

где λ—голоморфная функция в правой полуплоскости с определенными свойствами. Аналогичный вопрос для степенных рядов рассматривался в работе [1], где в терминах «функции коэффициентов» (функция, интерполирующая коэффициенты степенного ряда в натуральных точках) был найден новый критерий регулярности замкнутой дуги, лежащей на границе круга сходимости исходного степенного ряда.

В данной работе, в таких же терминах, установлены достаточные условия аналитического продолжения рядов Дирихле вида (1.1).

1°. Формулировка результатов. Пусть D—область из конечной комплексной плоскости $\mathbf{C}$, $H(D)$—множество функций, голоморфных в D. Положим

$$\Pi_a = \{\zeta \in \mathbf{C} : \operatorname{Re}\zeta > a\},$$

$$\Delta_\beta = \left\{\zeta \in \mathbf{C} : |\arg \zeta| < \beta\right\} \text{ для } 0 < \beta < \frac{\pi}{2},$$

$$K_\rho(a) = \{\zeta \in \mathbf{C} : |\zeta - a| < \rho\} \text{ для } a \in \mathbf{C},\ \rho > 0.$$

Рассмотрим класс H^+ функций $\lambda \in H(\Pi_0)$ таких, что $\operatorname{Re}\lambda(\zeta) > 0$ для $\zeta \in \Pi_0$. Для $\lambda \in H^+$ положим

$$c_\lambda = \inf_{0<\xi<\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda(\xi + i\eta)}{\xi}. \tag{1.2}$$

Известно (см. [2], стр. 60—61), что $0 \leqslant c_\lambda < +\infty$, причем для любого $\beta < \frac{\pi}{2}$

$$c_\lambda = \lim_{\substack{\zeta \to \infty \\ \zeta \in \Delta_\beta}} \frac{\lambda(\zeta)}{\zeta}. \tag{1.2$'$}$$

Определение 1. Для функций $\varphi \in H(\Delta_\beta)$, $\lambda \in H^+$, величину

$$\sigma = \sigma_\lambda(\varphi) = \varlimsup_{\substack{\zeta \to \infty \\ \zeta \in \Delta_\beta}} \frac{\log|\varphi(\zeta)|}{\operatorname{Re}\lambda(\zeta)} \tag{1.3}$$

назовем типом функции φ в Δ_β относительно λ.

Рассмотрим, далее, класс Λ функций $\lambda \in H^+$, для которых $\operatorname{Im} \lambda(\zeta) \operatorname{Im} \zeta > 0$ при $\zeta \in \Pi_0$, $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$ и удовлетворяется условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(n)}{\log n} = +\infty. \tag{1.4}$$

Примером функции класса Λ является функция

$$\lambda(\zeta) = \zeta^\alpha, \ \alpha \in (0, 1].$$

Для $\lambda \in \Lambda$ будем полагать

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\operatorname{Im} \lambda(re^{i\theta})}{\operatorname{Re} \lambda(re^{i\theta})} = \delta_\lambda(\theta), \ \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \tag{1.5}$$

понятно, что $\theta \cdot \delta_\lambda(\theta) > 0$ для $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\theta \neq 0$.

Известно (см. [3], стр. 115), что при условии (1.4) абсциссы простой, абсолютной и равномерной сходимости ряда Дирихле (1.1) совпадают и определяются формулой

$$u = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log |a_n|}{\lambda(n)}. \tag{1.6}$$

Сопоставление (1.3) и (1.6) показывает, что $u < \sigma_\lambda(\varphi)$.

Определение 2. Интервал I на прямой сходимости ряда (1.1) назовем интервалом голоморфности этого ряда, если сумма ряда аналитически продолжается через I.

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть $\varphi \in H(\Delta_\beta)$, $\beta < \pi/2$ имеет конечный тип $\sigma = \sigma_\lambda(\varphi)$ относительно функции $\lambda \in \Lambda$. Рассмотрим ряд Дирихле*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) e^{-\lambda(n)z} \tag{1.7}$$

с абсциссой сходимости u, и пусть

$$\sigma < u + \frac{2\pi\delta_\lambda(\beta)}{c_\lambda} \frac{\operatorname{tg}\beta}{\delta_\lambda(\beta) + \operatorname{tg}\beta}.$$

Тогда интервал

$$I = \left(u + i\left(\frac{\sigma - u}{\operatorname{tg}\beta} - \frac{2\pi}{c_\lambda}\right), \ u + i\frac{u - \sigma}{\delta_\lambda(\beta)}\right)$$

является интервалом голоморфности ряда (1.7).

Заметим, что если $c_\lambda = 0$, то интервал I принимает вид $\left(u - i\infty, \ u + i\frac{u-\sigma}{\delta_\lambda(\beta)}\right)$, а при $c_\lambda \neq 0$ (поскольку тогда $\delta_\lambda(\theta) = \operatorname{tg}\theta$)

—вид $\left(u + i\left(\frac{\sigma - u}{\operatorname{tg}\beta} - \frac{2\pi}{c_\lambda}\right), \ u + i\frac{u - \sigma}{\operatorname{tg}\beta}\right)$.

2°. Вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Если функция* $\lambda \in H$ *удовлетворяет условию* $\log n = o\,(\mathrm{Re}\,\lambda(n))$, *при* $n \to \infty$, то

$$\lim_{\substack{\zeta \to \infty \\ \zeta \in \Delta_\beta}} \frac{\mathrm{Re}\,\lambda(\zeta)}{\log|\zeta|} = +\infty. \tag{2.1}$$

Доказательство. Покажем сперва, что выполняется условие

$$\lim_{\substack{r \to \infty \\ r>0}} \frac{\mathrm{Re}\,\lambda(r)}{\log r} = +\infty.$$

Для $r \geqslant 3$ выберем натуральное число n так, что $n \leqslant r < n+1$, и к функции $\mathrm{Re}\,\lambda$ и кругу $K_n\,(n)$ применим неравенство Гарнака.

Мы получим

$$\mathrm{Re}\,\lambda(r) \geqslant \frac{n-|r-n|}{n+|r-n|}\,\mathrm{Re}\,\lambda(n) \geqslant \frac{n-1}{n+1}\,\mathrm{Re}\,\lambda(n),$$

$$\frac{\mathrm{Re}\,\lambda(r)}{\log r} \geqslant \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Re}\,\lambda(n)}{\log(n+1)} \to \infty \text{ при } r \to \infty.$$

Пусть теперь $\zeta = \xi + i\eta \in \Delta_\beta$. Применяя опять неравенство Гарнака к функции $\mathrm{Re}\,\lambda$ и кругу $K_r(r)$, где $r = \frac{|\zeta|^2}{\xi}$ получим

$$\mathrm{Re}\,\lambda(\zeta) \geqslant \frac{r-|\zeta-r|}{r+|\zeta-r|}\,\mathrm{Re}\,\lambda(r), \zeta \in \Delta_\beta.$$

Отсюда, поскольку $|\zeta - r| = \frac{|\zeta|\,|\eta|}{\xi}$, $r \geqslant |\zeta|$, получим оценку

$$\frac{\mathrm{Re}\,\lambda(\zeta)}{\log|\zeta|} \geqslant \frac{|\zeta|-|\eta|}{|\zeta|+|\eta|}\,\frac{\mathrm{Re}\,\lambda(r)}{\log|\zeta|} \geqslant \frac{1-\sin(\beta/2)}{1+\sin(\beta/2)}\cdot\frac{\mathrm{Re}\,\lambda(r)}{\log r},$$

гарантирующую выполнение (2.1). Лемма 1 доказана.

Для $\rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ будем обозначать через $L_{\beta,\rho}$ положительно ориентированную границу области $\Delta_\beta \setminus K_\rho\,(0)$.

Лемма 2. *Если функции* φ, λ *удовлетворяют условиям теоремы, то интеграл*

$$J\,(z) = \int_{L_{\beta,\rho}} \frac{\varphi(\zeta)\, e^{-\lambda(\zeta)z}}{e^{2\pi i\zeta}-1}\,d\zeta \tag{2.2}$$

представляет голоморфную по z *функцию в области*

$$D = \left\{ z = x + iy \in \mathbf{C} : x > u,\ \frac{\sigma-u}{\mathrm{tg}\beta} - \frac{2\pi}{c_\lambda} < y < -\frac{\sigma-u}{\mathrm{tg}(\beta)} \right\}.$$

допускающую аналитическое продолжение через граничный интервал I.

Доказательство. Лемма будет доказана, если показать, что для произвольных чисел a и b, где

$$\frac{\sigma-u}{\operatorname{tg}\beta}-\frac{2\pi}{c_\lambda}<a<b<-\frac{\sigma-u}{\delta_\lambda(\beta)}.$$

существует такое число $\varepsilon>0$, что интеграл $J(z)$ сходится равномерно на замкнутой области

$$\Omega_{a,b}=\{z=x+iy\in\mathbf{C}: x\geqslant u-\varepsilon,\ a\leqslant y\leqslant b\}.$$

Зафиксируем ε, удовлетворяющим условию $0<\varepsilon<d$, где

$$d=\min\left\{u-\sigma-b\delta_\lambda(\beta),\ u-\sigma+\left(\frac{2\pi}{c_\lambda}+a\right)\operatorname{tg}\beta\right\}. \tag{2.3}$$

Оценим в (2.2) подынтегральное выражение

$$\Phi(z,\zeta)=\frac{\varphi(\zeta)\,e^{-\lambda(\zeta)z}}{e^{2\pi i\zeta}-1}.$$

Из (1.3) при любом $\varepsilon_0>0$ имеем

$$|\varphi(\zeta)|<e^{(\sigma+\varepsilon_0)\,Re\lambda(\zeta)},\ \zeta\in\Delta_\beta,\ |\zeta|\geqslant r_{\varepsilon_0}. \tag{2.4}$$

Зафиксируем $\rho\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ так, что $K_\rho(m)\subset\Delta_\beta$

при $m=1,2,\cdots$ Найдется число $k>0$ такое, что для $\zeta\in\mathbf{C}\setminus\bigcup\limits_{m=-\infty}^{\infty}K_\rho(m)$ выполняется неравенство

$$|e^{2\pi i\zeta}-1|>ke^{\pi(|\eta|-\eta)}. \tag{2.5}$$

Поскольку для $z=x+iy$

$$|e^{-\lambda(\zeta)z}|=e^{-Re\lambda(\zeta)x+Im\lambda(\zeta)y},$$

то в силу (2.4), (2.5) получим оценку для $\zeta\in\Delta_\beta\setminus\bigcup\limits_{m=0}^{\infty}K_\rho(m)$, $z\in\mathbf{C}$:

$$\Phi(z,\zeta)<\frac{p}{k}\exp\{(\sigma+\varepsilon_0)\,Re\lambda(\zeta)-Re\lambda(\zeta)\,(u-\varepsilon)+$$

$$+Im\,\lambda(\zeta)\,y-\pi|\eta|+\pi\eta\},$$ где p—константа, не зависящая от z, ζ.

Перейдем к оценке $\Phi(z,\zeta)$, когда $z\in\Omega_{a,b}$.

Пусть сперва $\eta>0$. Тогда, учитывая (1.5) и условие $Im\,\lambda(\zeta)>0$, вытекающее из определения класса Λ, имеем

$$\Phi(z,\zeta)<\frac{p}{k}\exp\{[\sigma-u+\varepsilon_0+\varepsilon+(\delta_\lambda(\beta)-\varepsilon_0)\,b]\cdot Re\,\lambda(\zeta)\},$$

Следовательно, в силу выбора ε по (2.3) при достаточно малом ε_0 получим

$$|\Phi(z,\zeta)|<\frac{p}{k}\,e^{-\gamma_1 Re\,\lambda(\zeta)},\quad \zeta\in\Delta_\beta, \tag{2.6}$$

где $\gamma_1>0$ — константа, не зависящая от z, ζ.

Пусть теперь $\eta<0$. Тогда из (1.5) и условия $Im\ \lambda(\zeta)<0$

имеем для $\zeta\in\Delta_\beta\setminus\bigcup_{m=0}^{\infty}K_\rho(m)$, $z\in C$

$$|\Phi(z,\zeta)|<\frac{p}{k}\exp\{(\sigma-u+\varepsilon+\varepsilon_0)\ Re\,\lambda(\zeta)-$$

$$-|Im\,\lambda(\zeta)|\ a-2\pi|\eta|\}.$$

Следовательно, учитывая (1.2), (1.2′) и выбор ε по (2.3), при достаточно малом ε_0 получим

$$|\Phi(z,\zeta)|<\frac{p}{k}e^{-\gamma_2\xi},\quad \zeta\in\Delta_\beta, \tag{2.7}$$

где $\gamma_2>0$ — константа, не зависящая от z, ζ.

Заметим теперь, что к функции $\lambda\in\Lambda$ применима лемма 1, так что по этой лемме она будет удовлетворять (2.1). Поэтому из оценок (2.6), (2.7) следует, что интеграл (2.2) сходится равномерно по $z\in\Omega_{a,b}$ и, таким образом, представляет голоморфную функцию внутри $\Omega_{a,b}$ Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *В условиях теоремы интеграл (2.2) имеет представление*

$$J(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)\,e^{-\lambda(n)z},\quad z\in D. \tag{2.8}$$

Доказательство: Рассмотрим область

$$E_m=\left(\Delta_\beta\setminus K_\rho(0)\right)\cap K_{m+\frac{1}{2}}(0),\quad \rho\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

и пусть S_m означает положительно ориентированную границу E_m.

Контур S_m охватывает точки $n=1,\cdots,m$ и состоит из границы $L_{\beta,\rho}$ области $\Delta_\beta\setminus K_\rho(0)$ и дуги $\Gamma_m=S_m\setminus L_{\beta,\rho}$.

По теореме Коши о вычетах при $z\in D$ имеем

$$\int_{S_m}\frac{\varphi(\zeta)e^{-\lambda(\zeta)z}}{e^{2\pi i\zeta}-1}\,d\zeta=\sum_{n=1}^{m}\varphi(n)e^{-\lambda(n)z}. \tag{2.9}$$

При $m\to\infty$ из формулы (2.9) будет следовать формула (2.8), если доказать, что для $z\in D$

$$\int_{\Gamma_m}\Phi(z,\zeta)\,d\zeta\to0 \text{ при } m\to\infty, \tag{2.10}$$

где $\Phi(z,\zeta)$ — подынтегральное выражение в интеграле (2.2).

Рассмотрим область $E_{n,m} = E_m \setminus E_n$, $m > n$, и пусть $S_{n,m} = \partial E_{n,m}$ положительно ориентирована. Ясно, что контур $S_{n,m}$ охватывает точки

$$k = n+1, \cdots, m \text{ и } S_{n,m} = L_\beta^{(n,m)} \cup \Gamma_m \cup \Gamma_n,$$

где $L_\beta^{(n,m)}$ означает отрезки $L_{\beta,\rho}$, образованные пересечением $L_{\beta,\rho} \cap \cap (K_m(0) \setminus K_n(0))$. По теореме Коши о вычетах при $z \in D$ имеем

$$\int_{S_{n,m}} \Phi(z,\zeta)\, d\zeta = \sum_{k=n+1}^{m} \varphi(k)\, e^{-\lambda(k)z},$$

то есть

$$\int_{\Gamma_m} \Phi(z,\zeta)\, d\zeta - \int_{\Gamma_n} \Phi(z,\zeta)\, d\zeta + \int_{L_\beta^{(n,m)}} \Phi(z,\zeta)\, d\zeta = \sum_{k=n+1}^{m} \varphi(k)\, e^{-\lambda(k)z}.$$

Отсюда следует, что для $z \in D$

$$\left| \int_{\Gamma_m} \Phi(z,\zeta)\, d\zeta - \int_{\Gamma_n} \Phi(z,\zeta)\, d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{L_\beta^{(n,m)}} \Phi(z,\zeta)\, d\zeta \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{m} \varphi(k) e^{-\lambda(k)z} \right|.$$

Поскольку ряд (1.7) и интеграл (2.2) равномерно сходятся внутри области D, то последнее неравенство обеспечивает равномерную внутри D сходимость интегралов из (2.10). По теореме Вейерштрасса интегралы (2.10) будут сходиться к некоторой голоморфной в области D функции ψ. Таким образом, для вывода (2.10) и, тем самым, завершения доказательства леммы 3, остается показать, что $\psi(z) \equiv 0$ при $z \in D$.

В силу теоремы единственности достаточно доказать, что $\psi(z) = 0$ при $x > \sigma$, $y = 0$ $(z = x + iy)$. С этой целью возьмем $\omega > 0$ и заметим, что для $x \geqslant \sigma$, $y = 0$ и для $\zeta = \xi + i\eta \in \Gamma_m$ из (2.4), (2.5) следует оценка

$$|\Phi(z,\zeta)| < \frac{p}{k} \exp\left(\operatorname{Re}\lambda(\zeta)\,(\varepsilon_0 - \omega) + \pi\,(\eta - |\eta|)\right),$$

где $\varepsilon_0 > 0$ — произвольное фиксированное число. Отсюда при $\eta > 0$, выбрав достаточно малое ε_0, получим оценку

$$|\Phi(z,\zeta)| < \frac{p}{k} e^{-\frac{1}{2}\omega \operatorname{Re}\lambda(\zeta)}, \quad \zeta \in \Gamma_m. \tag{2.11}$$

Оттуда же, для $\eta < 0$ имеем

$$|\Phi(z,\zeta)| < \frac{p}{k} \exp\left\{(\varepsilon_0 - \omega)\operatorname{Re}\lambda(\zeta) - 2\pi\,\xi\,\operatorname{tg}\theta\right\}$$

так, что при достаточно малом δ_0 получим: при $\zeta \in \Gamma_m$

$$|\Phi(z, \zeta)| < \frac{p}{k} e^{-\frac{1}{2}\omega \operatorname{Re}\lambda(\zeta) - 2\pi|\zeta|\operatorname{tg}\theta},$$

откуда

$$|\Phi(z, \zeta)| < \frac{p}{k} e^{-\left(\frac{\omega}{2} + \frac{2\pi \operatorname{tg}\theta}{c\lambda}\right)\operatorname{Re}\lambda(\zeta)}, \quad \zeta \in \Gamma_m. \tag{2.12}$$

Если теперь, используя лемму 1, в оценках (2.11), (2.12) устремить к бесконечности $\zeta \in \Gamma_m$, то получим, что интегралы из (2.10) стремятся к нулю при $m \to \infty$, то есть при $x > \sigma + \omega$, $y = 0: \psi(z) = 0$. Итак, ввиду произвольности $\omega > 0$ $\psi(z) = 0$ при $x > \sigma$, $y = 0$.
Доказательство леммы 3 завершено.

3°. Доказательство теоремы. Рассмотрим интеграл (2.2). По лемме 3 интеграл (2.2) при $z \in D$ представляется рядом Дирихле (1.7). С другой стороны, по лемме 2, интеграл (2.2) представляет голоморфную функцию в области D, допускающую аналитическое продолжение на интервал I. Следовательно, сумма ряда Дирихле (1.7) посредством интеграла (2.2) аналитически продолжается на интервал I. Теорема доказана.

В заключение выражаю искреннюю благодарность академику АН Армении Н. У. Аракеляну за постановку задачи и руководство.

Институт математики
АН Армении

Поступила 17. VII. 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян.* Локализация особенностей степенных рядов на границе круга сходимости, Изв. АН Армении, «Математика», 22, № 1, 1987, 3—21.
2. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М.—Л., 1941.
3. *А. Ф. Леонтьев.* Ряды экспонент, М., «Наука», 1976.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մաթեմատիկա XXV, № 6, 1990 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.95

П. С. АВЕТИСЯН

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО РЕЗОЛЬВЕНТНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассматривается вопрос о разрешимости уравнения

$$\lambda u(x)+P(x, D)\,u(x)=f(x) \tag{1}$$

во всем эвклидовом пространстве R_n. Здесь $P(x, D)$—равномерно семиэллиптический оператор с коэффициентами, удовлетворяющими анизотропному условию Гельдера, λ—комплексный параметр, f принадлежит определенному анизотропному пространству Гельдера.

В работе [6] была построена функция Грина (фундаментальное решение) уравнения (I) и получены оценки этой функции и ее производных по пространственной переменной $x\in R_n$. Эти оценки позволяют нам установить коэрцитивную разрешимость уравнения (I) и ограниченность резольвенты семиэллиптического оператора в анизотропных пространствах Гельдера.

Определим необходимые понятия и сформулируем основной результат настоящей заметки.

Пусть R_n—n-мерное евклидово пространство точек $x=(x_1,\cdots, x_n)$, Z_n^+—пространство мультииндексов, т. е. векторов $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ с целыми неотрицательными координатами; $m=(m_1,\cdots,m_n)$ — вектор с натуральными компонентами, $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_n)$, где $\mu_k={}^1/m_k$ $(k=1,\cdots,n)$

Если $\xi\in R_n$, $\alpha\in Z_n^+$, то положим $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$, $|\xi|_\mu=\sum\limits_{k=1}^n|\xi_k|^{1/\mu_k}$,

$$(\mu,\alpha)=\sum_{k=1}^n\mu_k\alpha_k,\quad D^\alpha=D_x^\alpha=D_{x_1}^{\alpha_1}\cdots D_{x_n}^{\alpha_n},\ \text{где}\ D_{x_k}=\frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Обозначим через $C^m(R_n)$ пространство функций v на R_n, имеющих непрерывные ограниченные производные $D^\alpha v$, $(\mu,\alpha)\leqslant 1$, с нормой

$$\|v\|_{C^m}=\sum_{(\mu,\alpha)<1}\sup_{x\in R_n}|D^\alpha v(x)|. \tag{2}$$

Пусть $0<\varepsilon\cdot\max\limits_{1<k<n}m_k<1$.

Определим $C^{\varepsilon m}(R_n)$ как пространство всех непрерывных ограниченных функций v на R_n, для которых

$$\|v\|_{C^{\varepsilon m}}=\sup_{x\in R_n}|v(x)|+\sup_{\substack{x\neq y\\ x,y\in R_n}}\frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|_\mu^\varepsilon}<\infty. \tag{3}$$

Наконец, определим $C^{(\varepsilon+1)m}(R_n)$ как пространство всех таких функций $v\in C^m(R_n)$, что

$$\|v\|_{C^{(\eta+1)m}} = \|v\|_{C^m} + \sum_{(\mu,\alpha)=1} \sup_{\substack{x\neq y\\ x,y\in R_n}} \frac{|D^\alpha v(x)-D^\alpha v(y)|}{|x-y|_\mu^\eta} < \infty. \tag{4}$$

Пусть $P(x, D) = \sum_{(\mu,\alpha)=1} a_\alpha(x) D^\alpha + \sum_{(\mu,\beta)<1} b_\beta(x) D^\beta$ — линейный дифференциальный оператор с действительными коэффициентами

$a_\alpha \in C^{\varepsilon m}(R_n)$ $((\mu,\alpha)=1)$, $b_\beta \in C^{\varepsilon m}(R_n)$ $(1-(\mu, p_\beta)\geqslant\varepsilon)$ и

$P(x,\xi) = \sum_{(\mu,\alpha)=1} a_\alpha(x) \xi^\alpha + \sum_{(\mu,\beta)<1} b_\beta(x) \xi^\beta$ — отвечающий ему характеристический многочлен, относительно которого предполагаем, что он является равномерно семиэллиптическим (квазиэллиптическим) (см., например, [1]), т. е. существует число $\delta>0$ такое, что при всех $\xi\in R_n$, $x\in R_n$

$$\delta|\xi|_\mu \leqslant \sum_{(\mu,\alpha)=1} a_\alpha(x)\xi^\alpha \leqslant \delta^{-1}|\xi|_\mu. \tag{5}$$

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть $\varphi_0\in(0,\pi)$, λ_0 — достаточно большое положительное число, $\lambda=|\lambda|\exp(i\arg\lambda)$, $|\arg\lambda|\leqslant\pi-\varphi_0$, $|\lambda|\geqslant\lambda_0>0$, $\eta\in(0,\varepsilon)$.*

Тогда для любой функции $f\in C^{\eta m}(R_n)$ уравнение (1) *имеет единственное решение $u\in C^{(\eta+1)m}(R_n)$, задаваемое формулой*

$$u(x;\lambda) = \int K(x,y;\lambda)\, f(y)dy, \tag{6}$$

где $K(x,y;\lambda)$ — функция Грина (фундаментальное решение) уравнения (1) (см. [6]), *причем справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\|u\|_{C^{(\eta+1)m}} \leqslant M\|f\|_{C^{\eta m}} \tag{7}$$

с постоянной $M>0$, не зависящей от f и λ.

Следствие. Резольвента $[\lambda I + P(x, D)]^{-1}$, действующая в пространстве $C^{\eta m}(R_n)$, является ограниченным оператором и верна оценка

$$\|[\lambda I+P(x,D)]^{-1}\|_{C^{\eta m}\to C^{\eta m}} \leqslant M\lambda^{-1}. \tag{8}$$

Отметим, что изучению свойств резольвенты эллиптического оператора произвольного порядка в различных пространствах посвящено много работ (см., например, [2]—[5], [7]).

Ниже приводится схема доказательства указанной теоремы.

Конструкция функции Грина (фундаментального решения) уравнения (1) методом Леви приводит к формуле для решения этого уравнения

$$u(x;\lambda) = \int E(x-z;\ z;\ \lambda)\, f(z)dz +$$

$$+\int\int E(x-y,\ y;\lambda)\ \Gamma(y,z;\lambda)\, dy f(z)\, dz. \tag{9}$$

Здесь $E(x-z, z; \lambda)$ — фундаментальное решение уравнения, которое получается из (1) отбрасыванием младших членов и „замораживанием" коэффициентов в точке $z \in R_n$, а $\Gamma(y, z; \lambda)$ определяется из некоторого интегрального уравнения (см. [6], [7]). Получение оценки (7) опирается на неравенство (10) и формулы дифференцирования (11), (12) (см. ниже).

Пусть $x_1, x_2 \in R_n$, $\theta \in (0, \varepsilon)$. Тогда

$$|\Gamma(x_1, z; \lambda) - \Gamma(x_2, z; \lambda)| <$$

$$\leqslant M \left| \frac{\sum_{k=1}^{2} e^{-d|\lambda|^{\frac{1}{\max m_k}} |x_k - z|}}{|x_1 - z|_\mu^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{m_k} - \varepsilon + \theta}} + \frac{\sum_{k=1}^{2} e^{-d|\lambda|^{\frac{1}{\max m_k}} |x_k - z|}}{|x_1 - z_\mu|^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{m_k} - \varepsilon + \theta}} \right| |x_1 - x_2|_\mu^\theta \tag{10}$$

с постоянными $M > 0$, $d > 0$, не зависящими от x_1, x_2, z и λ.

Из оценок работы [6] и представления (9) следует существование и непрерывность производных $D^\alpha u(x; \lambda)$ $((\mu, \alpha) \leqslant 1)$, причем

$$D^\alpha u(x; \lambda) = \int D_x^\alpha E(x-z, z; \lambda) f(z)\, dz +$$

$$+ \int \int D_x^\alpha E(x-y, y; \lambda)\, \Gamma(y, z; \lambda)\, dy f(z)\, dz \quad ((\mu, \alpha) < 1), \tag{11}$$

$$D^\alpha u(x; \lambda) = \int D_x^\alpha E(x-z, z; \lambda) [f(z) - f(x)]\, dz +$$

$$+ \int [D_x^\alpha E(x-z, z; \lambda) - (-1)^{|\alpha|} D_z^\alpha E(x-z, x; \lambda)]\, dz f(x) +$$

$$+ \int \int D_x^\alpha E(x-y, y; \lambda) [\Gamma(y, z; \lambda) - \Gamma(x, z; \lambda)]\, dy f(z) dz +$$

$$+ \int \int [D_x^\alpha E(x-y, y; \lambda) - (-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha E(x-y, x; \lambda)] \cdot$$

$$\cdot dy\, \Gamma(x, z; \lambda) f(z)\, dz \quad ((\mu, \alpha) = 1). \tag{12}$$

Неравенство (8) вытекает из (7), если последней придать операторную форму.

Ереванский государственный
университет

Поступила 13. I. 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. *Хермандер* Линейные дифференциальные операторы с частичными производными. М., Мир, 1965.
2. С. *Агмон*, А. *Дуглис*, Л. *Ниренберг*. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, М., ИЛ, 1962.
3. М. А. *Шубин*. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., Наука, 1978.

4. *П. Е. Соболевский.* Эллиптические и параболические операторы в С. ДАН СССР. 1988. 298. № 4. 815—819.
5. *Г. В. Розенблюм, М. Э. Соломяк, М. А. Шубин.* Спектральная теория дифференциальных операторов. Итоги науки и тех. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Фунд. направления, т. 64, 1989.
6. *П. С. Аветисян.* Об оценках функции Грина одного резольвентного уравнения. ДАН Арм.ССР, 1989, т. 89, № 3, 109—111.
7. *П. Е. Соболевский.* Коэрцитивная разрешимость в пространстве Гельдера резольвентного уравнения и оценки коммутанта, рукопись деп. в ВИНИТИ 20.05.1985 г., № 3384-85 Деп., 73 с.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՀԱՄԱՌՈՏ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

СОДЕРЖАНИЕ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

CONTENTS

SHORT COMMUNICATIONS

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Հայաստանի Գիտությունների Ակադեմիայի Տեղեկագիր «Մաթեմատիկա» ամսագրի 1990 թ., XXV, №№ 1—6

ՀԱՄԱՌՈՏ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армении, серия «Математика», за 1990 г., XXV, №№ 1—6

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

CONTENTS

of the Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian, seria "Matematika", 1990, vol. XXV, №№ 1—6

SHORT COMMUNICATIONS