

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Կլիավոր խմբագիր Մ. Մ. ԶՐԱՄԵՅԱՆ

2. ԱՌԱՔՆԵԼՈՒՆ
Ի. Կ. ՉԱՍԼԱՎՈՒԻ
Ա. Ա. ԽԱՍԼԱՅԱՆ
Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐԱԶՈՒՄՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱՂՅԱՆ
զլիավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու փաբալիտ Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԴԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել, Հայկական ՈՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլ (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Որեւի տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով, մեկը (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել անսպասարկության լեզվով։

3. Սեփական լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոնեզեր շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշվում նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Կրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Սցենարներում գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Որբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխություններ (օրգինայի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոգածի սուսցման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չղբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է, ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Սրբան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 ք. Գիտությունների ակադեմիա, Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. В. АМБАРЦУМЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН
зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке) и кратких сообщений — не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях по особому решению Редакколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название места издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. V. AMBARTZUMIAN
N. U. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN

A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKI

executive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings zvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, double-space in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Drafts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

УДК 517.51

Р. И. ОВСЕПЯН

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ХААРА И ЦЕНТРИРОВАННЫХ СИСТЕМ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Сначала условимся относительно некоторых обозначений и определений, при этом будем исходить из того, что читатель знаком с системой Хаара $\{\chi_n\}$ (см., например, [1]).

Каждой функции χ_n естественным образом соотносятся двоичные интервалы Δ_n^+ и Δ_n^- , на каждом из которых функция χ_n является постоянной соответствующего знака. В тех случаях, когда это не вызовет недоразумений, значки $\pm$ мы будем опускать.

Определение 1. Вложенную последовательность двоичных интервалов постоянства Δ_{n_i} функций χ_{n_i} , $2 \cdot |\Delta_{n_i+1}| = |\Delta_{n_i}|$ назовем цепочкой.

Определение 2. Будем говорить, что ряд

$$\sum a_n \cdot \chi_n \quad (1)$$

удовлетворяет L^p -условию, $1 < p \leq \infty$, если на каждой цепочке выполняется соотношение

$$\lim |a_{n_i} \cdot \chi_{n_i}|_{L^p(\Delta_{n_i})} = 0, \quad 1 < p < \infty^*, \quad (2)$$

$$\lim |a_{n_i} \cdot \chi_{n_i}|_{L^\infty(\Delta_{n_i})} < \infty, \quad p = \infty. \quad (3)$$

Определение 3. Последовательность функций f_n , $n \geq 1$, принадлежащих пространству $L^1[0; 1]$ называется центрированной системой, если для любого n и произвольного элемента e σ -алгебры σ_n , порожденной функциями $f_1, f_2, \dots, f_n$, выполняется равенство, $\int f_{n+1} dx = 0$. Последовательность $S_n = \sum_1^n f_i$ называется мартингалом.

Очевидно, что соотношение, определяющее мартингал, можно записать и так

$$\int S_n dx = \int S_{n+1} dx \quad \forall e \in \sigma_n, \forall n.$$

Если $f_n \in L^2$, то система $(f_n)_{n=1}^\infty$ будет ортогональной (см. [3] стр. 208).

* L^1 -условие равносильно известному условию А. А. Талаальяна—Ф. Г. Арутюняна (см. [2]).

Будем предполагать еще, что f_n непрерывны на $[0; 1]$ и $\|f_n\|_2 = 1$. Класс этих систем в определенном смысле довольно широк (см. [4], [5]). Этот класс будем обозначать через F .

Через Φ обозначим класс центрированных систем $(\varphi_n)_1^\infty$, $\|\varphi_n\|_2 = 1$, состоящих из таких ступенчатых функций φ_n (на $[0; 1]$), что для произвольного l на каждом из интервалов постоянства Δ_l функции φ_n математическое ожидание функции φ_{n+1} равно нулю. Определения 1 и 2 для таких систем понимаются естественным образом. Очевидно, что система Хаара принадлежит классу Φ .

Пусть T — вполне регулярный теплицевский метод суммирования с конечнострочной матрицей. В частном случае, когда элементы матрицы неотрицательны, метод называют положительным.

Результаты данной работы относятся к вопросам единственности для систем класса F и системы Хаара. Для последней этот круг вопросов подробно исследовался рядом зарубежных и советских авторов. Центральной здесь является теорема В. А. Скворцова (см. [6]): если ряд Хаара (1) удовлетворяет L^1 -условию и его T -средние t_n для какого-нибудь положительного метода удовлетворяют неравенству

$$\liminf t_n(x) \leq f(x) \leq \limsup t_n(x) \quad \forall x \text{ и. с. м.} \quad (4)$$

(т. е. всюду на $[0; 1]$, за исключением, быть может, некоторого подмножества, не более чем счетного), где f — конечная функция, интегрируемая в смысле узкого интеграла Данжуа ($f \in D^*$), то (1) является рядом Фурье-Данжуа функции f .

Что же касается переставленных рядов Хаара с L^1 -условием, то здесь известны такие результаты.

Г. М. Мушегян (см. [7]): Даже при наличии сходимости переставленного ряда всюду к конечной функции f класса $L^p \forall p < 2$, он не обязан быть рядом Фурье; если же $f \in L^2$, то результат оказывается положительным и при более слабой сходимости: достаточно, чтобы некоторая подпоследовательность $S_{n_k}^*$ частичных сумм σ -переставленного ряда сходилась к $f(x)$ всюду и. с. м.

Ранее нами было отмечено (см. [8], стр. 79), что условие

$$\forall x \in [0; 1] \text{ и. с. м. } S_n(x) \neq \infty \quad (5)$$

гарантирует положительный результат даже в классе D^* , лишь бы переставленный ряд T -суммировался по мере к $f \in D^*$ (причем последнее требование нельзя заменить на условие (6) хотя бы f и $(S_n)_1^\infty$ были равномерно ограниченными).

Первые три результата настоящей работы относятся к системе Хаара.

Теорема 1. Если T -средние t_n^* σ -переставленного ряда Хаара с L^1 -условием всюду на $[0; 1]$ и. с. м. сходятся к ограниченной функции f , то это ряд Фурье функции f .

В случае положительности метода T это утверждение было установлено В. А. Скворцовым (см. [6]).

Из третьей теоремы следует, что приведенный выше результат теряет силу, если сходимость средних t_n^* заменить на условие (6), даже если при

этом для ряда (1) выполнено L^p -условие при всех $p < \infty$.

Однако справедлива

Теорема 2. Если ряд Хаара (1) удовлетворяет L^∞ -условию (3) и для T -средних σ -переставленного ряда выполнено требование

$$\liminf t_n^*(x) \leq f(x) \leq \overline{\lim} t_n^*(x) \quad \forall x \text{ и. с. м.}, \quad (6)$$

где f — ограниченная и непрерывная почти всюду функция (или $f \in D$ и непрерывна всюду и. с. м.), то (1) — ряд Фурье этой функции.

Отметим, что без требования непрерывности почти всюду (или всюду и. с. м.) теорема не верна.

Теорема 2 справедлива для любой системы класса Φ ; теорема 1 также, если в ней условие (2) чуть усилить:

$$\lim \|S_n\|_{L^1(\Delta_n)} = 0 \text{ на каждой цепочке } (\Delta_n) \quad (7)$$

(или же предположить некоторую «равномерность» разбиений в конструкции системы Φ_n).

Следующий результат показывает, что в теореме 2 L^∞ -условие нельзя ослабить даже для $f \equiv 0$.

Теорема 3. Существует ряд Хаара (1), не являющийся рядом Фурье, несмотря на выполнение следующих условий:

$$\sum_1^{\infty} \|a_n \cdot \chi_n\|_p^{p+1} < \infty \quad \forall p < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (8)$$

и существует перестановка σ ряда (1) такая, что

$$\forall x \in [0; 1] \quad \exists n_i \equiv n_i(x): S_{n_i}^\sigma(x) \rightarrow 0. \quad (9)$$

Что же касается систем $(f_n)_1^\infty$ класса F , то оказывается, что условия типа (9) уже достаточно для положительного утверждения. Более того, справедлива

Теорема 4. Если для T -средних t_n^σ ряда

$$\sum_1^{\infty} a_n \cdot f_n(x) \quad (10)$$

переставленного в порядке σ , выполнено соотношение

$$\liminf t_n^\sigma(x) < 0 \leq \overline{\lim} t_n^\sigma(x) \quad \forall x \text{ и. с. м.}, \quad (11)$$

то все a_n равны нулю.

Из доказательства легко усматриваются более сильные формулировки.

Отметим, что теорема 4 может иметь место и для полной ортонормированной ограниченной системы (тригонометрических полиномов). Кроме того, практически любая ортонормированная система содержит подсистему, для которой справедливо это утверждение (см. [9]).

Аналогом теоремы 1 для систем (f_n) является

Теорема 5. Если T -средние t_n^σ σ -переставленного ряда (10) всюду на $[0; 1]$ и. с. м. сходятся к ограниченной функции f , то (10) — ряд Фурье этой функции.

Что касается класса конечных суммируемых функций f , то ситуация здесь более деликатная: для одних систем класса F из сходимости переставленного ряда всюду к f следует восстановление коэффициентов, для других это не так.

Доказательство первых двух теорем изложим сразу для систем (φ_n) класса Φ , причем, с целью упрощения индексации, будем считать (без ограничения общности), что на всех интервалах постоянства Δ_n функции φ_n следующая функция φ_{n+1} отлична от тождественного нуля.

Доказательство теоремы 1. Прежде всего заметим, что если бы частные суммы S_n ряда

$$\sum_1 a_k \cdot \varphi_k \quad (12)$$

были равномерно ограниченными, то утверждение теоремы 1 было бы выполнено. В самом деле: ведь ряд (12) в таком случае сходил бы в метрике L^2 и после перестановки σ , следовательно, средние I_n^σ тоже сходились бы в L^2 , а потому и по мере, причем к самой функции f .

Таким образом, если теорема 1 не верна, то это значит, что для произвольного $A > 0$ существуют номер n_0 и интервал постоянства Δ_{n_0} функции φ_{n_0} , такие, что

$$S_{n_0}(\Delta_{n_0}) > A \quad (13)$$

(случай « $< -A$ » рассматривается аналогично).

Как и в работе [6] выберем цепочку $\Delta_k \supset \Delta_{k+1} \supset \dots$, $k = n_0$, на которой выполняются соотношения

$$a_n \cdot \varphi_n(\Delta_n) \geq 0, \quad \forall n > n_0. \quad (14)$$

Из (13) и (14) следует

$$S_n(\Delta_n) \geq S_{n_0}(\Delta_{n_0}), \quad \forall n \geq n_0. \quad (15)$$

Покажем, что найдутся номер $m > n_0$ и интервал постоянства $\delta_m \subset \Delta_{n_0}$ функции φ_m такие, что

$$\delta_m \cap \Delta_m = \emptyset; \quad S_m(\delta_m) > A. \quad (16)$$

Обратное предположение означало бы

$$S_m(x) \leq A \quad \forall x \in \Delta_{n_0} \setminus \Delta_m, \quad \forall m > n_0. \quad (17)$$

а это, с учетом (15) и центрированности системы φ_n , привело бы к соотношению

$$\int_{\Delta_m} S_m = \int_{\Delta_{n_0}} S_m - \int_{\Delta_{n_0} \setminus \Delta_m} S_m \geq (S_{n_0}(\Delta_{n_0}) - A) \cdot |\Delta_{n_0}|, \quad \forall m > n_0, \quad (18)$$

которое, в силу (13), противоречило бы условию (7) или L^1 -условию, если система φ_n такова: для любого интервала постоянства Δ_l существует $\alpha \in (0; 1)$ такое, что для интервалов постоянства $\Delta_l \supset \Delta_{l+1}$, лежащих на Δ_l , выполнено соотношение

$$|\Delta_{l+1}| : |\Delta_l| \leq \alpha, \quad \forall l \geq l, \quad (19)$$

Таким образом, из (13) следует существование интервалов постоянства δ_{m_k} , Δ_{m_k} лежащих на Δ_n , и удовлетворяющих условиям

$$\delta_{m_k} \cap \Delta_{m_k} = \emptyset; S_{m_k}(\delta_{m_k}) > A, S_{m_k}(\Delta_{m_k}) > A. \quad (20)$$

Теперь, отправляясь от интервалов δ_{m_k} и Δ_{m_k} , построим новые цепочки $\delta_k \supset \delta_{k+1} \supset \dots$; $\Delta_k \supset \Delta_{k+1} \supset \dots$ как выше (см. 14)). Ясно, что каждый из следующих рядов

$$\sum a_k \cdot \varphi_k(\delta_k), \sum a_k \cdot \varphi_k(\Delta_k) \quad (21)$$

при любом порядке членов будет сходиться к конечному или бесконечному пределу, а так как наш T -метод является вполне регулярным, то средние t_n^σ σ -переставленных рядов (21) будут сходиться к тем же пределам, которые в силу (20) должны превосходить число A .

Теперь уже ясно, что найдутся номера N_1 , n_1 и интервалы постоянства (функции φ_{n_1}) $\delta_{n_1} \subset \Delta_{n_1}$, $\Delta_{n_1} \subset \Delta_{n_0}$, удовлетворяющие условиям

$$\delta_{n_1} \cap \Delta_{n_1} = \emptyset; t_{N_1}^\sigma(\delta_{n_1}) > A, t_{N_1}^\sigma(\Delta_{n_1}) > A; S_{n_1}(\delta_{n_1}) > A, S_{n_1}(\Delta_{n_1}) > A. \quad (22)$$

Последние два неравенства (как раньше (13)) обеспечивают возможность повторения изложенных рассуждений для каждого из интервалов δ_{n_1} и Δ_{n_1} , в результате чего получаются четыре новых интервала постоянства, удовлетворяющих условиям типа (22) с еще большим числом A .

Очевидно, что повторяя эту процедуру бесконечное число раз, мы получим некоторое множество континуальной мощности, в точках которого выполняется соотношение

$$\lim_N t_N^\sigma(x) = \infty,$$

противоречащее условию теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Пусть f — ограниченная и непрерывная почти всюду функция. Допустим сначала, что частные суммы S_n ряда (12) равномерно ограничены. Тогда (12) является рядом Фурье некоторой функции $\psi(x)$ и сходится к ней почти всюду (см., например, [4]). Теперь убедимся в том, что если на каком-либо интервале постоянства Δ_n выполнено неравенство (13), то на Δ_n найдется множество континуальной мощности, в точках которого ряд (12) сходится абсолютно и его сумма превосходит A .

Выберем цепочку (Δ_n) с условием (14). Это условие вместе с предположением о равномерной ограниченности частных сумм ряда (12) гарантирует сходимость ряда

$$\sum a_k \cdot \varphi_k(\Delta_k). \quad (23)$$

Может случиться, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$, начиная с некоторого $m_0 > n_0$, на каждом интервале постоянства $\delta_m \subset \Delta_{m-1} \setminus \Delta_m$, $m \geq n$, выполняется неравенство

$$a_m \cdot \varphi_m(\delta_m) < -\varepsilon_0. \quad (24)$$

Предположим, что m_0 велико настолько, что

$$\sum_{k=m_0}^{\infty} a_k \cdot \varphi_k(\Delta_k) < \frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (25)$$

Учитывая центрированность системы (φ_n) , получим

$$0 \leq \int_{\Delta_{m_0}} a_{m_0} \cdot \varphi_{m_0} = \int_{\Delta_{m_0}} \sum_{m_1}^m a_k \cdot \varphi_k = \int_{\Delta_{m_0} \setminus \Delta_m} + \int_{\Delta_m} < \frac{\varepsilon_0}{2} |\Delta_{m_0}| - \frac{\varepsilon_0}{2} |\Delta_{m_0} \setminus \Delta_m|,$$

откуда следует неравенство

$$|\Delta_m| \geq |\Delta_{m_0} \setminus \Delta_m| \quad \forall m \geq m_0. \quad (26)$$

Следовательно, $|\Delta_{m_0}| \neq 0$ и $\left| \bigcap_{n_0}^{\infty} \Delta_m \right| > 0$. Ясно, что ряд (12) сходится на множестве $\bigcap_{n_0}^{\infty} \Delta_m$ и сумма его превосходит A .

Остается рассмотреть случай, когда не существует числа ε_0 с условием (24), т. е. когда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\Delta_{m_0} \subset \Delta_{m_0-1} \setminus \Delta_{n_0}$, $m_0 > n_0$, на котором

$$|a_{m_0} \cdot \varphi_{m_0}(\delta_{m_0})| < \varepsilon. \quad (27)$$

Если ε достаточно мало, то в силу (13), (14) и (27) получим

$$S_m(\Delta_{m_0}) > A, \quad S_m(\delta_{m_0}) > A \quad \forall m \in [n_0; m_0]; \quad \delta_{m_0} \cap \Delta_{m_0} = \emptyset. \quad (28)$$

Теперь надо повторить всю процедуру для каждого из интервалов Δ_{m_0} , δ_{m_0} . Если для одного из этих интервалов процесс оборвется, то утверждение об абсолютной сходимости будет установлено. В противном случае, мы получим для нового произвольно малого ε четыре интервала постоянства, удовлетворяющих соотношениям типа (28).

Ясно, что продолжая этот процесс, мы или на каком-нибудь конечном шаге или через счетное количество таких процедур получим некоторое континуальное множество, в точках которого ряд (12) сходится абсолютно и сумма его больше, чем A .

Пусть E обозначает множество тех точек, в которых ряд (12) сходится абсолютно. На основании вышеизложенного и условия (6) получим, что ряд (12) сходится к функции f всюду на E и с. м. Если допустить, что сумма $\psi(x)$ ряда (12) отлична от $f(x)$ на каком-либо множестве положительной меры, то найдется точка x_0 , в которой f непрерывна и отлична от ψ (пусть для определенности $\psi(x_0) > f(x_0)$).

Нетрудно убедиться в том, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется интервал постоянства $\Delta_{n_0} \ni x_0$, на котором колебание функции f не превосходит ε и еще

$$S_{n_0}(\Delta_{n_0}) > \psi(x_0) - \varepsilon. \quad (29)$$

Но так как на множестве $E \cap \Delta_{n_0}$ существует подмножество континуальной мощности, в точках которого в силу (29) сумма ряда не меньше, чем $\psi(x_0) - \varepsilon$, то ясно, что при достаточно малом ε все это приводит к противоречию. Следовательно, в рассматриваемом случае $(\sup |S_n| < \infty)$ $\psi(x) = f(x)$ п. в. и теорема доказана.

Если же предположить, что $\lim |S_n| = \infty$, то для произвольного $A > \sup |f(x)|$ найдется интервал постоянства Δ_{n_0} с условием (13). Теперь надо выбрать цепочку (Δ_k) с условием (14). Ясно, что для ряда (23) есть две возможности: сходиться к конечному пределу или к бесконечности. В первом случае, рассуждая как выше и учитывая ус-

ловие (6) и предположение $A > \sup |f(x)|$, получим: для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется интервал постоянства δ_m , функции φ_m , такой, что

$$m_0 > n_0, \delta_m \cap \Delta_m = \emptyset; |a_m \cdot \varphi_m(\delta_m)| < \varepsilon. \quad (30)$$

Отсюда следует, что при достаточно малом ε будут выполняться соотношения (20).

Теперь, отправляясь от интервалов δ_m и Δ_m , построим цепочки (δ_i) , (Δ_i) , удовлетворяющие условиям

$$a_i \cdot \varphi_i(\Delta_i) > 0, a_i \cdot \varphi_i(\delta_i) \geq 0 \quad \forall i > m_0. \quad (31)$$

Из (20) и (31) следует

$$S_i(\Delta_i) \geq S_{m_0}(\Delta_{m_0}) > A; S_i(\delta_i) \geq S_{m_0}(\delta_{m_0}) > A \quad \forall i > m_0. \quad (32)$$

Пусть для каждого фиксированного i число $j(i)$ обозначает максимальный индекс слагаемых $a_j \cdot \varphi_j$, входящих в i -ую частную сумму S_i σ -переставленного ряда.

Очевидно, что из условий (13), (14), (30)–(32) следует существование чисел $i_0 = i_0(n_0)$, $l_0 = l_0(m_0)$ таких, что

$$S_i^2(\Delta_{j(i)}) > A \quad \forall i \geq i_0, S_i^2(\delta_{j(i)}) > A \quad \forall i \geq l_0; \delta_{j(i)} \subset \Delta_{j(i-1)}. \quad (33)$$

Допустим, что множества $\bigcap_{k=j(l_0)} \Delta_k$, $\bigcap_{k=j(l_0)} \delta_k$ непустые. Тогда в силу соотношений (33) σ -переставленный ряд будет сходиться на этих множествах к сумме, превосходящей число A .

Теперь заметим, что случай, когда ряд (23) сходится к бесконечности, рассматривается аналогично, только вместо неравенства (30) надо пользоваться L_∞ -условием, в результате чего опять будут выполнены соотношения типа (31)–(33) и еще

$$S_i^2(\Delta_{j(i)}) > 2 \cdot A, S_i^2(\delta_{j(i)}) > 2 \cdot A. \quad (34)$$

Следующий этап рассуждений таков: вышеизложенную процедуру повторяем для интервалов $\Delta_{j(i_0)}$, $\delta_{j(i_0)}$, в результате чего появятся четыре интервала с соотношениями типа (33), (34).

Нетрудно убедиться в том, что повторив эту процедуру счетное число раз (аккуратно манипулируя числами ε из (30) и A из (33), (34)), мы получим некоторое множество континуальной мощности, в точках которого σ -переставленный ряд сходится и сумма его превосходит число $\sup |f(x)|$, а это, в силу полной регулярности рассматриваемых методов, противоречит условию (6).

Таким образом, теорема 2 доказана для того случая, когда f — ограниченная и непрерывная почти всюду функция.

Теперь заметим, что требование непрерывности почти всюду является существенным. В самом деле, как показал А. М. Олевский (см. [10]), существует непрерывная функция φ , ряд Фурье-Хаара которой после подбора переставки неограниченно расходится почти всюду (точнее, в каждой точке, для которой прямой ряд не является абсолютно сходящимся), причем некоторая подпоследовательность S_{n_k} равномерно сходится к функции φ . Остается заметить, что между нижним и верхним предела-

ни последовательности S_n° существуют ограниченные измеримые функции, существенно отличные от f .

Теперь дадим схему доказательства теоремы 2 для случая, когда f интегрируема в смысле широкого интеграла Данжуа ($f \in D$) и непрерывна всюду и.с.м. Сразу же заметим, что непрерывности почти всюду недостаточно даже для суммируемых функций, как это явствует из упомянутого ранее примера Г. М. Мушегяна (см. [7]).

Пусть x_0 — точка непрерывности функции f . Тогда в некоторой окрестности γ точки x_0 f будет ограниченной. Допустим, что интервал постоянства Δ_n функции φ_n лежит в γ . По уже доказанной части теоремы 2 на каждом интервале постоянства $\Delta_m \subset \Delta_n$ будет выполняться равенство

$$\int_{\Delta_m} S_k = \int_{\Delta_m} f. \quad (35)$$

Пусть $\gamma(x_0)$ максимально раздутый интервал, содержащий точку x_0 , наделенный свойством: для каждого Δ_m , лежащего строго внутри $\gamma(x_0)$, выполнено равенство (35). Если $\gamma(x_0)$ совпадает с отрезком $[0; 1]$, то, пользуясь центрированностью и L^1 -условием, можно убедиться, что равенство (35) выполнено на всех интервалах постоянства, то есть ряд (12) является рядом Фурье—Данжуа функции f .

Если же $\gamma(x_0)$ не совпадает с отрезком $[0; 1]$, то поступаем следующим образом. Для каждой точки непрерывности x функции f строим свой интервал $\gamma(x)$. Затем показываем, что интервалы $\gamma(x_1)$ и $\gamma(x_2)$ либо совпадают, либо не пересекаются и даже не имеют общих концов. Но в таком случае система интервалов $\gamma(x)$ сводится к счетному количеству попарно непересекающихся и не имеющих общих концов интервалов такого же типа. Дополнение до $[0; 1]$ — нигде не плотное совершенное множество (непустое) и потому содержит точку t непрерывности функции f . Ясно, что интервал $\gamma(t)$ будет содержать некоторые из составляющих интервалов $\gamma(x)$, а это противоречит тому, что $\gamma(x)$ было максимальным.

Теорема 2 полностью доказана.

Заметим, что при доказательстве этих теорем мы на самом деле пользовались свойством более слабым, чем непрерывность в точке.

Доказательство теоремы 3. Если $\delta = (a; b)$ — какой-нибудь двоичный интервал отрезка $[0; 1]$ и $\delta = \text{Supp } \chi_\delta$, то обозначим $r(\delta) = \chi_\delta / \|\chi_\delta\|_\infty$. Пусть $\delta_1 (= \delta)$, δ_2 , $\delta_3, \dots$ — цепочка, стягивающаяся к точке a , т. е. a является левым концом интервалов δ_i . Сумма

$$R(\delta; n) \equiv \sum_{m=0}^{n-1} r(\delta_{n-m}) - (n+1) \cdot r(\delta_{n+1}) \quad (36)$$

представляет собой переставленный полином Хаара, сосредоточенный на δ .

Ясно, что на каждом из интервалов δ_i^- , $1 \leq i \leq n$, δ_{n+1}^+ , одна из частных сумм выражения $A + A \cdot R(\delta; n)$ равна нулю, а на δ_{n+1}^- вся сумма равна $2 \cdot (n+1) \cdot A$. Пусть d — левый конец интервала δ_{n+1}^- . Ясно что функция

$$B_i = A + A \cdot R(\delta; n) + 2 \cdot (n+1) \cdot r(\delta_{n+2}^-) \quad (37)$$

равна нулю в точке d и на интервалах δ_1^- (примыкает к точке b слева), и δ_{n+2}^+ (примыкает к точке a справа).

Интервал δ естественным образом „разбивается“ на конечное количество двоичных интервалов постоянства $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ функции B_i .

Пусть γ_1 и γ_2 примыкают к точке d слева и справа соответственно.

Следующий этап рассуждений таков. Если на каком-нибудь γ ($i > 2$) функции B_i равна нулю, то на этом интервале процесс останавливаем, в противном случае γ_i разбиваем на достаточно большое количество равных двоичных интервалов (это нужно для обеспечения условия (8)) и на каждом из них повторяем описанный выше процесс, приспособив его к значению функции B_i на γ_i (вместо A). При этом количество слагаемых нового полинома (см. n в (36)) можно брать произвольно большим (нужно для условия (8)). В результате этой процедуры опять будут возникать точки такого типа как d . Для самой точки d рассуждения таковы. На интервале γ_2 (который нельзя подвергать предварительному дроблению) выбираем цепочку $\Delta_1 (= \gamma_2), \Delta_2, \dots$, стягивающуюся к левому концу d , и строим полином

$$B_i(\gamma_2) \cdot \sum_{m=0}^{N-1} r(\Delta_{N-m}).$$

Аналогичный полином строим на γ_1 так, чтобы их сумма в точке d равнялась нулю. Теперь к функции B_i надо прибавить все полиномы, построенные на втором этапе. Дальнейший ход рассуждений сводится к последовательному повторению описанного цикла. Подробные выкладки провести трудно, и мы их опустим.

Доказательство теоремы 4. Если допустить, что теорема не верна, то найдется такой ряд (10), для которого выполнено условие (11), хотя не все частные суммы S_n равны нулю. Отсюда следует, что существуют число A (для определенности положительное) и номер n такие, что открытое множество $A_n^* \equiv S_n^{-1}(A; \infty)$ не пустое и на каждой компоненте этого множества $S_n \neq \text{const}$ (для этого достаточно избежать того случая, когда компонента совпадает с отрезком $[0, 1]$). Для краткости введем обозначение $\varphi_n \equiv a_n \cdot f_n$. Без ограничения общности можно предположить, что множество $B_{n+1} \equiv A_n \cap \varphi_{n+1}^{-1}(0; \infty)$ не пустое. Противоположное допущение означало бы, что φ_{n+1} равна нулю на всем A_n (вследствие центрированности системы f_n) и мы рассмотрели бы функцию φ_{n+2} и т. д. Одна из них наверняка отлична от тождественного нуля на A_n (см. (11)). Итак, B_{n+1} — непустое открытое множество, причем на каждой его компоненте или $S_n \neq \text{const}$, или $\varphi_{n+1} \neq \text{const}$ (38).

В самом деле, если компонента α множества B_{n+1} совпадает с одной из компонент β множества A_n , то выполнено первое условие из (38), в противном случае — второе.

Рассмотрим случай, когда φ_{n+1} постоянна на каждой компоненте B_{n+1} . Пусть α — одна из них. По условию на α $S_n \neq \text{const}$. Выберем

для произвольных непустых интервала I_1, I_2 с непересекающимися замыканиями, лежащими на множестве $(\inf S_n, \sup S_n)$. Ясно, что замыкания открытых множеств $B_{n+1} \cap S_n^{-1}(I_1), B_{n+1} \cap S_n^{-1}(I_2)$ также не пересекаются и, кроме того, на любой компоненте этих множеств $S_n \neq \text{const}$, т. е., фигурально выражаясь, происходит „расщепление“ множества B_{n+1} .

Теперь рассмотрим случай, когда $\varphi_{n+1} \neq \text{const}$ на одной из компонент α множества B_{n+1} . Опять выбираем интервалы I_1, I_2 с условиями $\bar{I}_1 \cap \bar{I}_2 = \emptyset, \bar{I}_j \subset (\inf \varphi_{n+1}, \sup \varphi_{n+1})$ и производим „расщепление“ на B_{n+1} множествами

$$B_{n+1} \cap \varphi_{n+1}^{-1}(I_1), B_{n+1} \cap \varphi_{n+1}^{-1}(I_2).$$

Нетрудно убедиться в том, что на каждой компоненте этих множеств выполнено условие (38). Таким образом, в любом случае мы получаем два открытых множества $B_{n+1,1}$ и $B_{n+1,2}$ из $\mathcal{A}$ -алгебры $\mathcal{A}_{n+1}$, порожденной функциями $f_1, \dots, f_{n+1}$. Замыкания этих множеств не пересекаются. На любой компоненте этих множеств хотя бы одна из функций $S_1, \dots, S_{n+1}, \varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$ отлична от постоянной. Функция S_{n+1} на этих множествах превосходит A . Последнее обстоятельство вместе с условием (11) гарантирует существование функции $\varphi_k, k > n+1$, которая на одном из множеств $B_{n+1,1}, B_{n+1,2}$ отлична от тождественного нуля. Берем из этих функций ту, у которой минимальный номер. Пусть это функция φ_{n+2} . Если $B_{n+1,1} \cap \varphi_{n+2}^{-1}(0; \infty) \neq \emptyset$, то описанным выше способом производим „расщеплением“ множества $B_{n+1,1}$. Если φ_{n+2} отлична от тождественного нуля и на $B_{n+1,2}$, то здесь тоже производим „расщепление“. В результате мы получим три или четыре открытых множества $B_{n+2,m} \in \mathcal{A}_{n+2}$ с непересекающимися замыканиями. На каждой компоненте этих множеств хотя бы одна из функций $S_p, \varphi_p, 1 \leq p \leq n+2$ отлична от постоянной. Сумма S_{n+2} превосходит A на всех этих множествах. Теперь опять берем ближайшую функцию $\varphi_k, k > n+2$, которая отлична от тождественного нуля хотя бы на одном из множеств $B_{n+2,m}$ и повторяем процесс. Ясно, что на этом пути каждое из множеств, полученных ранее, в конце концов будет расщеплено. Следовательно, мы получим некоторое множество мощности континуум, в точках которого $S_n > A$ и все $\varphi_k, k > n$ неотрицательны. Но в таком случае ряд (10) после любой перестановки сходится к конечной или бесконечной сумме, превосходящей положительное число A , а это противоречит условию (11).

Таким образом, мы установили, что в условиях теоремы $|S_n(x)| \leq A$ для всех n и x , а так как A — произвольно, то $S_1(x) = 0 \forall n$ т. е. теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Из предыдущих рассуждений следует, что в условиях теоремы 5 должно выполняться неравенство

$$\sup_{n; x} |S_n(x)| \leq \sup_x |f(x)| < \infty.$$

Следовательно, ряд (10) сходится в L^2 и после σ -перестановки, а в силу регулярности метода, средние t_n^* сходятся в L^2 , а значит и по мере, причем к функции f (это вытекает из условия (11)). Теорема 5 доказана.

В заключение заметим, что при доказательстве последних двух теорем мы пользовались свойством более слабым, чем центрированность достаточно было, чтобы на каждом фиксированном открытом множестве σ -алгебры $\sigma(f_1, f_2, \dots, f_k)$, $\forall k$ любая из функций f_n , $n > k$, или тождественный нуль, или принимает значения обоих знаков.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 1.VIII.1989

Ռ. Ի. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ. Միակերպ ընկալի քառաձևերի համարի սրտանի և անընդհատ ֆունկցիաներից բաղկացած կենտրոնացված սրտանների համար (սամմարի)

Աշխատանքում ապացուցվում է միակերպ ընկալի կենտրոնացված սրտանների քառաձևերի համար:

R. I. HOVSEPIAN. *Some uniqueness theorems for Haar and continuous martingal differences systems (summary)*

In this paper we prove uniqueness theorems for some classes of martingal differences systems.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. С. Кашин, А. А. Саакян. Ортогональные ряды, изд. «Наука», М., 1984.
2. Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян. О единственности рядов по системам Хаара и Уолша, Изв. АН СССР, сер. матем., 28:61, 1964, 1391—1408.
3. Ж. Невё. Математические основы теории вероятностей, Изд. «Мир», М., 1969.
4. Р. И. Овсепян. О некоторых теоремах единственности для системы Хаара и центрированных систем непрерывных функций, Изв. АН Армянской ССР, «Математика», XXIV, № 1, 1989, 43—59.
5. А. В. Бахшеуян. О центрированных системах в $C[0; 1]$, Acta Sci. Mat., 47, № 1—2, 1984, 223—231.
6. В. А. Скворцов. Теоремы единственности рядов Хаара для методов суммирования. Матем. заметки, 9, № 4, 1971, 449—458.
7. Г. М. Мушеgian. О восстановлении коэффициентов переставленного ряда Хаара, Матем. сборник, 130 (172), № 1 (5), 1986, 35—61.
8. Р. И. Овсепян. О теоремах единственности для некоторых ортогональных систем, Всесоюзная школа по теории функций, Тезисы докладов, Ереван, 1987.
9. Р. И. Овсепян. Об извлечении из общих систем лакунарных подсистем со свойством абсолютной сходимости. Матем. сборник, 111 (153), № 4, 1980, 522—531.
10. А. М. Олевский. Расходящиеся ряды Фурье непрерывных функций, ДАН СССР, 141, № 1, 1961, 28—31.

УДК 519.214:519.248

С. К. ПОГОСЯН

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ
ДЛЯ ГИББСОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

0°. В этой работе для гиббсовского случайного поля доказывается локальная предельная теорема для вероятностей больших уклонений числа частиц в конечном объеме V . Полученное при этом асимптотическое соотношение по форме подобно известной асимптотике для вероятности больших уклонений сумм независимых случайных величин [1, 2]. Однако, коэффициенты в этом соотношении не в точности равны константам как в упомянутом случае независимых слагаемых, а зависят от формы области V , точнее имеют вид констант с малыми (при больших V) поправками.

Рассматривается случай решетчатых гиббсовских случайных полей с общим парным взаимодействием при малых значениях активности. Аналогичный результат получен и для частиц большого гиббсовского ансамбля в конечном объеме при свободных граничных условиях. Доказательство идейно связано с известным методом Крамера исследования вероятностей больших уклонений, а технически основано на сильных кластерных оценках усеченных корреляционных функций [3, 4].

1°. Пусть Z' — γ -мерная целочисленная решетка. Для любого множества G из Z' обозначим через $C(G)$ множество всех подмножеств G , а через $C_0(G)$ — множество конечных подмножеств G .

Рассмотрим случайное поле $\xi(t)$, $t \in Z'$ со значениями в множестве $X = \{0, 1\}$. Пусть $X^{Z'}$ — пространство всевозможных функций $x(t)$, $t \in Z'$ со значениями в X . Интерпретируя функцию $x(t)$ как конфигурацию частиц, при которой точка t занята частицей, если только $x(t) = 1$, пространство $X^{Z'}$ можно отождествить с множеством $C(Z')$. Обозначим через $A(Z')$ σ -алгебру подмножеств (конфигураций) из $C(Z')$, порожденную цилиндрическими множествами (подробности см. в [5]).

Распределением случайного поля $\xi(t)$, $t \in Z'$ называется вероятностная мера P на $(C(Z'), A(Z'))$ такая, что

$$\Pr \{(\xi(t), t \in Z') \in B\} = P(B), \quad B \in A(Z').$$

Согласно известной теореме Колмогорова задание P эквивалентно заданию согласованной системы конечномерных распределений $(P)_V$, $V \in C_0(Z')$. При этом

$$\Pr \{(\xi(t), t \in V) \in B\} = (P)_V(B), \quad B \in A(V),$$

где $A(V)$ — множество всех подмножеств из $C_0(V)$.

Предположим, что частицы поля взаимодействуют с помощью парного потенциала Φ , где $\Phi: (0 + \infty) \rightarrow R$. Мы пока полагаем, что функция Φ такова, что

$$|\Phi| = \sum_{t \in Z' \setminus \{0\}} |\Phi(|t|)| < \infty.$$

Ниже нам придется наложить более сильное условие убывания на Φ . Класс потенциалов, рассматриваемых в настоящей статье, описан в пункте 2.

Распределение Гиббса в конечном объеме $V \subset Z'$ с потенциалом Φ и граничным условием $\bar{c} \in C(Z' \setminus V)$ задается формулой (см. [5])

$$q_V(c/\bar{c}) = \frac{z^{|c|} \exp(-\beta U(c/\bar{c}))}{\Xi(V, \beta, z/\bar{c})}, \quad c \in C(V), \quad (1.1)$$

где $|\cdot|$ — число точек в конечном множестве

$$U(c/\bar{c}) = \sum_{\substack{\{x, y\} \subset c \\ x \neq y}} \Phi(|x - y|) + \sum_{x \in c, y \in \bar{c}} \Phi(|x - y|),$$

нормирующий множитель (статистическая сумма)

$$\Xi(V, \beta, z/\bar{c}) = \sum_{c \in C(V)} z^{|c|} \exp(-\beta U(c/\bar{c})),$$

а β (обратная температура) и z (активность) — положительные параметры. Заметим, что если в качестве граничного условия взять пустую конфигурацию $\bar{c} = \emptyset$, то формула (1.1) задаст обычное распределение Гиббса $P_{V, \beta, z}$ в конечном объеме V (конечное гиббсовское поле) с параметрами β и z :

$$P_{V, \beta, z}(c) = q_V(c/\emptyset) = \frac{z^{|c|} \exp(-\beta U(c))}{\Xi(V, \beta, z)}, \quad c \in C(V), \quad (1.2)$$

где $U(c) = U(c/\emptyset)$, $\Xi(V, \beta, z) = \Xi(V, \beta, z/\emptyset)$.

Распределение Гиббса $P_{V, \beta, z}$ в конечном объеме V можно трактовать как распределение случайного поля $\xi(t)$, $t \in Z'$ такого, что с вероятностью 1 $\xi(t) = 0$ при $t \in Z' \setminus V$, а совместное распределение случайных величин $\{\xi(t), t \in V\}$ задается как $P_{V, \beta, z}$.

Случайное поле $\xi(t)$, $t \in Z'$ называется гиббсовским, если его условные вероятности задаются формулой (1.1). В настоящей статье мы рассматриваем только гиббсовские поля с малой активностью z $0 < z < z_0$, где $z_0 > 0$ достаточно мало. Известно (см. [6]), что когда $|\Phi| < \infty$ и активность z достаточно мала, существует единственное гиббсовское распределение $P_{\beta, z}$ с заданным потенциалом Φ и параметрами β и z , которое допускает следующее описание: для любых $V \in C_0(Z')$ и $W_k \in C_0(Z')$, $W_k \uparrow Z'$ при $k \rightarrow \infty$, имеет место соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (P_{W_k, \beta, z})_V(B) = (P_{\beta, z})_V(B), \quad B \in \mathcal{A}(V),$$

где $(P)_V$ означает распределение вероятностей на $(C(V), \mathcal{A}(V))$, индуцированное распределением P на $(C(Z'), \mathcal{A}(Z'))$. При этом сходимость в (1.3) равномерна по z при $z < z_0$.

$$T_i(p) \sum_{t \in Z^+} (1 + |t|)^p \exp\left(-\frac{1}{2} \delta(0, t)\right) < \infty, \quad p \in Z_+.$$

В качестве метрики δ можно взять, например $\delta(0, t) = \gamma |t|$, $\gamma > 0$ или $\delta(0, t) = \varepsilon \ln(1 + \gamma |t|)$, $\gamma > 0$, $\varepsilon > 2p + 2v$.

Обозначим через $B_i(p)$ класс потенциалов Φ , удовлетворяющих условию

$$D_i(\Phi) = \sum_{t \in Z^+ \setminus \{0\}} |\Phi(|t|)| e^{\delta(0, t)} < \infty.$$

Положим также

$$M_i(\Phi) = 2 \exp(D_i(\Phi) + \exp D_i(\Phi) - 1).$$

Теорема 1. Пусть $z < [M_i(\Phi) (2e T_i(p) + 1)]^{-1}$, $\Phi \in B_i(p)$, $p > v$ и пусть $\alpha = \alpha(N, V, \beta, z) = N - \langle |c \cap V| \rangle_{\beta, z}$, $N \in Z_+$. Тогда если $\frac{|a|}{V|V|} \geq 1$ и $\alpha = o(|V|)$ при $V \uparrow Z^+$, $V \in H_d$, то имеет место соотношение:

$$P_{\beta, z}(c \in C(Z^+): |c \cap V| = N) = \sqrt{\frac{1}{2\pi|V|} \frac{d^2}{dx^2} \Lambda_{\beta, z}^V(0)} \times \quad (2.1)$$

$$\times \exp\left(-\frac{a^2}{2|V|} \frac{d^2}{dx^2} \Lambda_{\beta, z}^V(0)\right) \exp\left(-|V| \Omega_{\beta, z}^V\left(\frac{a}{|V|}\right)\right) \left\{1 + O\left(\frac{a}{|V|}\right)\right\},$$

где $\Lambda_{\beta, z}^V$ — т. н. функция отклонений (см. [18]), а через $\Omega_{\beta, z}^V$ обозначен степенной ряд

$$\Omega_{\beta, z}^V(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \Lambda_{\beta, z}^V(0),$$

сходящийся в некоторой (не зависящей от V) окрестности нуля. При этом

$$|V|^{-1} \frac{d^2}{dx^2} \Lambda_{\beta, z}^V(0) = \left\{ \sum_{k=0}^v a_k(\beta, z) |V|_{v-k} + R(V, \beta, z) \right\}^{-1}, \quad (2.2)$$

$$|V|^{-2} \frac{d^3}{dx^3} \Lambda_{\beta, z}^V(0) = - \left\{ \sum_{k=0}^v a_k(\beta, z) |V|_{v-k} + R(V, \beta, z) \right\}^{-3} \times \quad (2.3)$$

$$\times \left\{ \sum_{k=0}^v \frac{da_k(\beta, z)}{d(\ln z)} |V|_{v-k} + \frac{dR(V, \beta, z)}{d(\ln z)} \right\},$$

где коэффициенты a_k , $k = 0, 1, \dots, v$ зависят только от потенциа-

ла Φ и параметров β, z , а величина $\frac{d^j R(V, \beta, z)}{d(\ln z)^j}$ зависит от V при $V \uparrow Z^+$, $j = 1, 2$.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 1 и при этом

$\alpha = o\left(|V|^{\frac{v+1}{2v}}\right)$. Тогда

$$P_{\beta, z}(c \in C(Z^+): |c \cap V| = N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|V| a_0(\beta, z)}} \exp\left(-\frac{a^2}{2|V| a_0(\beta, z)}\right) \times \times \exp\left(-|V| \Omega_{\beta, z}^V\left(\frac{a}{|V|}\right)\right) \left\{1 + O\left(\frac{a}{|V|^{\frac{v+1}{2v}}}\right)\right\} V \uparrow Z^+.$$



Рассмотрим теперь случай распределения Гиббса $P_{V, \beta, z}$ в конечном объеме $V \subset Z'$, задаваемого формулой (1.2). Пусть $\langle |c| \rangle_{V, \beta, z}$ — математическое ожидание числа частиц в объеме V относительно распределения $P_{V, \beta, z}$, т. е.

$$\langle |c| \rangle_{V, \beta, z} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_{V, \beta, z}(c \in V : |c| = N).$$

Теорема 2. Пусть $z < [M_1(\Phi) 2e T_0(p) + 1]^{-1}$, $\Phi \in B_1(p)$, $p > \nu$ и пусть $\alpha = \alpha(N, V, \beta, z) = N - \langle |c| \rangle_{V, \beta, z}$, $N \in Z_+$. Тогда, если $\frac{|z|}{V|V|} \geq 1$ и $\alpha = o(|V|)$, при $V \uparrow Z'$, $V \in H_d$, то имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned} P_{V, \beta, z}(c \in C(V) : |c| = N) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi|V|} \frac{d^2}{dx^2} \Lambda_{V, \beta, z}(0)} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2|V|} \frac{d^2}{dx^2} \Lambda_{V, \beta, z}(0)\right) \exp\left(-|V| \Omega_{V, \beta, z}\left(\frac{\alpha}{|V|}\right)\right) \times \\ &\times \left\{1 + O\left(\frac{\alpha}{|V|}\right)\right\}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\Lambda_{V, \beta, z}$ — функция уклонений, а

$$\Omega_{V, \beta, z}(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \Lambda_{V, \beta, z}(0)$$

(ряд справа сходится в некоторой, не зависящей от V , окрестности нуля). При этом

$$\begin{aligned} |V|^{-1} \frac{d^2}{dx^2} \Lambda_{V, \beta, z}(0) &= \left\{ \sum_{k=0}^{\nu} \bar{a}_k(\beta, z) |V|_{\nu-k} + \bar{R}(V, \beta, z) \right\}^{-1}, \\ |V|^{-2} \frac{d^3}{dx^3} \Lambda_{V, \beta, z}(0) &= - \left\{ \sum_{k=0}^{\nu} \bar{a}_k(\beta, z) |V|_{\nu-k} + \bar{R}(V, \beta, z) \right\}^{-3} \times \\ &\times \left\{ \sum_{k=0}^{\nu} \frac{d\bar{a}_k(\beta, z)}{d(\ln z)} |V|_{\nu-k} + \frac{d\bar{R}(V, \beta, z)}{d(\ln z)} \right\}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где коэффициенты $\bar{a}_k$, $k=0, 1, \dots, \nu$ зависят только от потенциала Φ и параметров β и z , а величина $\frac{d^j \bar{R}(V, \beta, z)}{d(\ln z)} = o(1)$ при $V \uparrow Z'$, $j=1, 2$. При этом $\bar{a}_0 = a_0$ (см. ниже формулу (2.6)).

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 2 и при этом $\alpha = o\left(|V|^{\frac{\nu+1}{2\nu}}\right)$. Тогда

$$\begin{aligned} P_{V, \beta, z}(c \in C(V) : |c| = N) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi|V|a_0(\beta, z)}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2|V|a_0(\beta, z)}\right) \times \\ &\times \exp\left(-|V| \Omega_{V, \beta, z}\left(\frac{\alpha}{|V|}\right)\right) \left\{1 + O\left(\frac{\alpha}{|V|^{\frac{\nu+1}{2\nu}}}\right)\right\}, \quad V \uparrow Z'. \end{aligned}$$

Отметим, что метод доказательства теорем 1 и 2 позволяет получить разложения и для следующих производных функции уклонений, аналогичные разложениям (2.2) и (2.3). Явные выражения для коэффициентов a_k и $\bar{a}_k$, $k = 0, 1, \dots, \nu$ через функцию Урселла легко получить с помощью формул (4.10), (3.15) и (3.3), приводимых ниже. Например, приведем выражение для a_0 :

$$a_0(\beta, z) = \bar{a}_0(\beta, z) = \sum_{X \in E: 0 \in \tilde{X}} \frac{z^{|X|} |X|^2}{|\tilde{X}| \cdot |X|} \psi_\beta(X), \quad (2.6)$$

где ψ_β — функция Урселла.

Заметим также, что появляющийся в теоремах 1 и 2 ряд $\Omega_{\beta, z}^\nu$, соответственно $\Omega_{\nu, \beta, z}$, является обобщением известного ряда Крамера (см. [9]) на случай гиббсовских случайных полей.

Аналогичные результаты справедливы в случае классических спинных решетчатых систем с вакуумом и общим n -частичным взаимодействием, а также в случае непрерывных систем с парным взаимодействием. В обоих случаях взаимодействие предполагается достаточно быстро убывающим на бесконечности.

3°. Рассмотрим конечное гиббсовское поле в объеме $W \in C_0(Z^*)$, заданное распределением $P_{W, \beta, \lambda}$ на $C(W)$, где $\lambda = \ln z$. Введем обозначения

$$P_{W, \lambda}^V(N) = P_{W, \beta, \lambda}(c \in C(W) : |c \cap V| = N)^*,$$

$$\langle |c \cap V| \rangle_{W, \lambda} = \sum_{N=0}^{\infty} N P_{W, \lambda}^V(N); \quad \langle |c \cap V|^2 \rangle_{W, \lambda} = \sum_{N=0}^{\infty} N^2 P_{W, \lambda}^V(N);$$

$$D_{W, \lambda} |c \cap V| = \langle |c \cap V|^2 \rangle_{W, \lambda} - \langle |c \cap V| \rangle_{W, \lambda}^2;$$

$$\Phi_{W, \lambda}^V(s) = \sum_{N=0}^{\infty} e^{sN} P_{W, \lambda}^V(N).$$

Аналогичные объекты для бесконечного гиббсовского поля $P_{\beta, \lambda}$ будем обозначать, соответственно, через $P_\lambda^V(N)$, $\langle |c \cap V| \rangle_\lambda$, $D_\lambda |c \cap V|$ и Φ_λ^V . В случае гиббсовского поля с переменной активностью, принимающей одно значение в объеме V и другое — вне V , для соответствующих величин мы сохраним те же обозначения, с той лишь разницей, что вместо параметра λ будем писать упорядоченную пару λ_1, λ_2 ; при этом первый из этих параметров всегда будет соответствовать значению активности в объеме V , а второй — вне V . Например, $P_{W, \lambda_1, \lambda_2}^V(N)$, $D_{\lambda_1, \lambda_2} |c \cap V|$ и т. д.

Пусть G — группа автоморфизмов группы Z^* , функция f на E назовем G -инвариантной, если $f(g(X)) = f(X)$ для любых $X \in E$ и $g \in G$. G -инвариантная функция на E называется трансляционно-инвариантной (соответственно, эвклидово-инвариантной), если G — группа сдвигов решетки Z^* (соответственно, группа всех автоморфизмов Z^*).

* Для упрощения записи и т. д. β в дальнейшем, как правило, будем опускать.

Обозначим через Q_p пространство действительных функций q на Z^* таких, что

$$|q| = \sum_{t \in Z^*} |q(t)| (1 + |t|)^p < \infty, \quad p > \nu.$$

Пусть Q_p^+ — совокупность положительных функций из Q_p , обладающих свойством $q(t_1) = q(t_2)$, как только $|t_1| = |t_2|$.

Трансляционно-инвариантную функцию f на E назовем кластерной, если существует константа $d \geq 0$ и оценочная функция q такие, что для всех $X \in E$

$$|f(X)| \leq d \sum_{\Gamma \in \Gamma_0(X)} \prod_{(x, y) \in \Gamma} q(x - y), \quad (3.1)$$

где $\Gamma_0(X)$ — совокупность всех цепей, построенных на точках множества X . Напомним, что цепью называется связный неориентированный граф, каждая вершина которого инцидентна не более, чем двум ребрам. Обозначим через K_q семейство всех кластерных функций, удовлетворяющих оценке (3.1) с заданной оценочной функцией q . Примерами кластерных функций являются функция $z^{|X|} \psi_z(X)$, $X \in E$, где ψ_z — функция Урселла, а также определяемая ниже формулой (3.6) усеченная корреляционная функция ω_x при условии, что потенциал Φ принадлежит классу $B_\nu(p)$, $p > \nu$ и $z < (M_\nu(\Phi))^{-1}$ (см. работы [3, 10]).

Для любой кластерной функции $f \in K_q$ с $|q| < 1$ определим величину $\chi_V(f)$, $V \in C_0(Z^*)$, формулой

$$\chi_V(f) = \sum_{X \in E_V} \frac{f(X)}{|X|}. \quad (3.2)$$

С помощью оценки (3.1) легко убедиться, что ряд в правой части (3.2) сходится.

Следующая теорема описывает асимптотическое поведение величины $\chi_V(f)$ при $V \uparrow Z^*$. Прежде, чем сформулировать ее, введем необходимые обозначения.

Для любого параллелепипеда $V \subset Z^*$, не уменьшая общности, можно считать, что начало координат является одной из вершин V . Как и в пункте 2, пусть V^m — множество всех его m -мерных граней. Каждая ν — m -мерная грань $v \in V^{m-\nu}$, $m \neq 0$, единственным образом определяет m -гранный угол S_v , содержащий V . Заметим, что любой m -гранный угол S_v является пересечением m соответствующих полупространств. Через S_v^- обозначим вертикальный к S_v m -гранный угол, лежащий во внешности V . Любая грань $v \in V^{m-\nu}$, $m \neq 0$, однозначно определяет m -мерную перпендикулярную к v грань $v^\perp$, содержащую начало координат, при этом $V = v \times v^\perp$. Пусть $v^\perp$ — пересечение S_v и m -мерного подпространства Z^* , содержащего $v^\perp$. Пусть $\Delta(S_v^-)$ — совокупность всех компактных подмножеств объединения m соответствующих S_v^- подпространств, не лежащих в объединении никакой подсистемы из $m - 1$ подпространств.

Далее, пусть f — кластерная функция; определим вспомогательную функцию F на $C_0(Z')$ формулой:

$$F(c) = \sum_{c_1 \in C_0(Z' \setminus c)} \frac{(-1)^{|c_1|}}{|c \cup c_1|} \sum_{X \in E: X \supset c \cup c_1} \frac{f(X)}{|X|}.$$

Теорема 3 ([11], см. также [10]). Пусть евклидово-инвариантная функция $f \in K_q$, где $q \in Q_p^+$, $|q| < \frac{1}{2}$ и $p > 2v$. Тогда для любого параллелепипеда $V \in H_d$ имеет место разложение

$$\chi_V(f) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(f) |V|^{v-m} + R(V),$$

где коэффициенты $b_k(f)$ определяются следующими равенствами: $b_0(f) = F(\{0\})$,

$$b_1(f) = b_1(f, v) = \sum_{k \in v^{\perp}} \sum_{c \in C_0(S_v^-)} F(|x| \cup c), \quad v \in V^{(v-1)}, \quad (3.3)$$

$$b_m(f) = b_m(f, v) = \sum_{x \in v^{\perp}} \left\{ (-1)^{m-1} \sum_{c \in C_0(S_v^-)} F(|x| \cup c) + \sum_{c \in \Delta(S_v)} F(|x| \cup c) \right\}, \quad v \in V^{(v-m)}, \quad m = 2, \dots, v,$$

а остаточный член $R(V)$ удовлетворяет соотношению: $R(V) = o(1)$ при $V \uparrow Z'$. (В силу евклидовой инвариантности функции F коэффициенты $b_m(f, v)$, на самом деле, не зависят от выбора $v \in V^{(v-m)}$).

Заметим, что полагая в формуле (3.2) $f(X) = e^{\lambda|X|} \psi_{\beta}(X)$, получим $\chi_V(f) = \ln \Xi(V, \beta, \lambda)$ (см., например, [7] или [10]). Таким образом, теорема 3 описывает, в частности, асимптотическое поведение логарифма статистической суммы.

Пусть $\xi: Z' \rightarrow \mathbb{C}$ — комплекснозначная функция на решетке такая, что $|\xi(u)| \leq 1$, $t \in Z'$. Рассмотрим величину

$$\Xi(V, \xi, \beta, \lambda) = \sum_{c \in C(V)} e^{\lambda|c|} \prod_{t \in c} \xi(t) e^{-\beta|U(c)|}. \quad (3.4)$$

Заметим, что при $\xi \equiv 1$ формула (3.4) задает обычную статистическую сумму. Известно (см. лемму 1 работы [12]), что при $\lambda < -\ln M_{\beta}(\Phi)$, где $\Phi \in B_{\beta}(p)$, $p > v$, имеет место соотношение

$$\ln \Xi(V, \xi, \lambda) = \sum_{x \in E_V} e^{\lambda|x|} \prod_{t \in \tilde{x}} (\xi(t))^{x(t)} \frac{\psi_{\beta}(X)}{|X|}. \quad (3.5)$$

Пусть функция $\eta: Z' \rightarrow \mathbb{C}$ такова, что $|\eta(t)| \leq 1$ для всех $t \in Z'$, а параметр λ удовлетворяет условию $\lambda < -\ln M_{\beta}(\Phi)$, $\Phi \in B_{\beta}(p)$, $p > v$. Для $V \subset Z'$ положим

$$\omega_{V, \eta, \lambda}(Y) = \sum_{x \in E_V} \frac{e^{\lambda|x|}}{|X|} \prod_{t \in \tilde{x}} (\eta(t))^{x(t)} \psi_{\beta}(X + Y). \quad (3.6)$$

Отметим, что при $\eta \equiv 1$ функция $\omega_{V, 1, \lambda} \equiv \omega_{V, \lambda}$ представляет собой групповую или урезанную корреляционную функцию (см. [7, 13]) и, как это показано в [3], является кластерной функцией.

Лемма 1. Пусть ξ и η — комплекснозначные функции на Z^v такие, что $|\xi(t)| \leq 1$, $|\eta(t)| \leq 1$, $t \in Z^v$. Тогда при $\lambda < -\ln M_\lambda(\Phi)$, $\Phi \in B_\lambda(p)$, $p > v$, имеет место разложение

$$\ln \Xi(V, \xi, \lambda) - \ln \Xi(V, \eta, \lambda) = \sum_{Y \in E_V: Y \neq \emptyset} \frac{e^{\lambda |Y|}}{|Y|} \omega_{V, \eta, \lambda}(Y) \prod_{t \in \tilde{Y}} (\xi(t) - \eta(t))^{\gamma(t)}. \quad (3.7)$$

Доказательство. В силу (3.5), имеем

$$\begin{aligned} \ln \Xi(V, \xi, \lambda) &= \sum_{X \in E_V} e^{\lambda |X|} \prod_{t \in \tilde{X}} (\xi(t) - \eta(t) + \eta(t))^{X(t)} \frac{\psi_\lambda(X)}{|X|} = \\ &= \sum_{X \in E_V} \frac{e^{\lambda |X|} \psi_\lambda(X)}{|X|} \sum_{Y \in E_V: Y \subset X} \prod_{t \in \tilde{Y}} (\xi(t) - \eta(t))^{\gamma(t)} \prod_{t \in \tilde{X}} (\eta(t))^{X(t) - \gamma(t)} = \\ &= \sum_{Y \in E_V} \frac{e^{\lambda |Y|}}{|Y|} \prod_{t \in \tilde{Y}} (\xi(t) - \eta(t))^{\gamma(t)} \sum_{X \in E_V} \frac{e^{\lambda |X|}}{|X|} \prod_{t \in \tilde{X}} (\eta(t))^{X(t)} \psi_\lambda(X + Y), \end{aligned}$$

откуда следует утверждение леммы 1.

Следующая лемма дает полезное представление характеристической функции φ_λ^V числа частиц гиббсовского случайного поля, попавших в объем V , и описывает ее важные свойства, используемые при доказательстве теоремы 1.

Лемма 2. Пусть $\lambda < -\ln M_\lambda(\Phi)$ и $\Phi \in B_\lambda(p)$, $p > v$. Тогда

$$1) \quad \ln \varphi_\lambda^V(s) = \sum_{X \in E_V: X \neq \emptyset} \frac{e^{\lambda |X|}}{|X|} (e^{ts} - 1)^{|X|} \omega_\lambda(X),$$

где $\omega_\lambda \equiv \omega_{Z^v, \lambda}$;

$$2) \quad \frac{d}{ds} \ln \varphi_\lambda^V(s) = i \langle |c \cap V| \rangle_{\lambda+ts, \lambda};$$

$$3) \quad \frac{d^2}{ds^2} \ln \varphi_\lambda^V(s) = i^2 D_{\lambda+ts, \lambda} |c \cap V|.$$

Прежде, чем перейти к доказательству леммы 2, заметим, что из 1) вытекает вещественная аналитичность характеристической функции $\varphi_\lambda^V(s)$ по s при условии $\lambda < -\ln M_\lambda(\Phi)$. Кроме того, для любого τ , $\tau < -\ln M_\lambda(\Phi) - \lambda$, в силу утверждения 3) леммы

$$D_{\lambda+\tau, \lambda} |c \cap V| = \frac{d}{d\tau} \langle |c \cap V| \rangle_{\lambda+\tau, \lambda}. \quad (3.8)$$

Доказательство леммы 2. Как легко видеть

$$\rho_{W, \lambda}^V(N) = \frac{e^{\lambda N}}{\Xi(W, \lambda)} \sum_{c_1 \subset V: |c_1| = N} \sum_{c_2 \subset W \setminus V} \exp(\lambda |c_2| - \beta U(c_1 \cup c_2)),$$

откуда, пользуясь формулой (3.4), для характеристической функции $\varphi_{W, \lambda}^V$ получаем

$$\varphi_{W, \lambda}^V(s) = \frac{\Xi(W, e^{is/V}, \lambda)}{\Xi(W, \lambda)}, \quad (3.9)$$

где I_V — индикатор множества V . Поэтому

$$\ln \varphi_{W, \lambda}^V(s) = \ln \Xi(W, e^{is/V}, \lambda) - \ln \Xi(W, \lambda).$$

Теперь, применяя лемму 1, получаем

$$\ln \varphi_{W, \lambda}^V(s) = \sum_{X \in E_V: X \neq 0} \frac{e^{\lambda|X|}}{|X|} (e^{is} - 1)^{|X|} \omega_{W, \lambda}(X). \quad (3.10)$$

В условиях леммы 2 усеченная корреляционная функция является кластерной, в силу чего ряд в правой части (3.10) сходится равномерно относительно $W \subset Z'$. Отсюда, с учетом того, что $\lim_{W \uparrow Z'} \omega_{W, \lambda} = \omega$, получаем

первое утверждение леммы.

Далее, как легко видеть

$$\frac{d}{ds} \ln \varphi_{W, \lambda}^V(s) = \frac{d}{ds} \ln \Xi(W, e^{is/V}, \lambda) = i \langle |c \cap V| \rangle_{W, \lambda + is, \lambda}, \quad (3.11)$$

$$\frac{d^2}{ds^2} \ln \varphi_{W, \lambda}^V(s) = i \frac{d}{ds} \langle |c \cap V| \rangle_{W, \lambda + is, \lambda}.$$

Отсюда, так как $P_{W, \lambda}$ слабо сходится к P_λ при $W \uparrow Z'$, то согласно теореме непрерывности Леви—Крамера [14] с учетом аналитичности $\varphi_{W, \lambda}^V$ при $\lambda < -\ln M_b(\Phi)$ получаем, что

$$\lim_{W \uparrow Z'} \ln \varphi_{W, \lambda}^V(s) = \ln \varphi_\lambda^V(s); \quad \lim_{W \uparrow Z'} \langle |c \cap V| \rangle_{W, \lambda + is, \lambda} = \langle |c \cap V| \rangle_{\lambda + is, \lambda}; \quad (3.12)$$

$$\lim_{W \uparrow Z'} D_{W, \lambda + is, \lambda} |c \cap V| = D_{\lambda + is, \lambda} |c \cap V|$$

равномерно по s на любом ограниченном интервале вещественной оси. Следовательно, дифференцирование и предельный переход можно переставить, т. е.

$$\frac{d^k}{ds^k} \ln \varphi_\lambda^V(s) = \lim_{W \uparrow Z'} \frac{d^k}{ds^k} \ln \varphi_{W, \lambda}^V(s), \quad k = 1, 2. \quad (3.13)$$

Комбинируя (3.11)—(3.13) с очевидным равенством

$$\frac{d}{ds} \langle |c \cap V| \rangle_{W, \lambda + is, \lambda} = i D_{W, \lambda + is, \lambda} |c \cap V|,$$

получаем утверждения 2) и 3). Таким образом, леммы 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $V \in H_d$, $\Phi \in B_2'(p)$, $p > \nu$ и $\lambda < \bar{\lambda}_b(p) = -\ln[M_b(\Phi)(2eT_b(p) + 1)]$. Тогда для логарифма характеристической функции справедливо разложение:

$$\ln \varphi_\lambda^V(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{b}_k(\lambda, s) |V|_{\cdot k} + R(V, \lambda, s), \quad (3.14)$$

где величины $\ln \varphi_k^V(s)$, $\bar{b}_k(\lambda, s)$, $k=0, 1, \dots, \nu$ и $R(V, \lambda, s)$ аналитичны по s в некоторой достаточно малой окрестности нуля, а $R(V, \lambda, s) = o(1)$ при $V \uparrow Z^+$.

Доказательство. Согласно формуле (3.2) и утверждению 1) леммы 2 имеем

$$\ln \varphi_k^V(s) = \chi_V(f_{\lambda, s}),$$

где функция $f_{\lambda, s}(X)$, $X \in E$, определяется формулой $f_{\lambda, s}(X) = e^{\lambda |X|} \times (e^{i\omega} - 1)^{|X|} \omega_\lambda(X)$ при $X \neq 0$ и $f_{\lambda, s}(0) = 0$. В условиях леммы, как известно, ω_λ является кластерной функцией (см. [3]), что влечет кластерность функции $f_{\lambda, s}$. Отсюда полагая

$$\bar{b}_k(\lambda, s) = b_k(f_{\lambda, s}), \quad k=0, 1, \dots, \nu, \quad (3.15)$$

с помощью теоремы 3 получаем разложение (3.14). Аналитичность величин $\ln \varphi_k^V(s)$ и $\bar{b}_k(\lambda, s)$ при достаточно малых значениях $|s|$ вытекает из их явных выражений, приведенных в утверждении 1) леммы 2 и формулах (3.3) соответственно.

Лемма 3 доказана.

В заключение этого пункта приведем результат об асимптотическом разложении в локальной предельной теореме для числа частиц тиббсовского поля.

Теорема 4 [15]. Пусть $\lambda < \bar{\lambda}_s(p)$, потенциал Φ принадлежит классу $B_1(p)$, $p > \nu$ и последовательность параллелепипедов $V_n \in H_d$ такова, что $V_n \uparrow Z^+$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для любого фиксированного числа $a > 0$ и всех натуральных N таких, что $|N - \langle c \cap V_n \rangle_\lambda| < a \sqrt{|V_n|}$ имеет место асимптотика:

$$P_\lambda(|c \cap V_n| = N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \gamma_2(V_n, \lambda) |V_n|} \exp \left\{ -\frac{(N - \langle c \cap V_n \rangle_\lambda)^2}{2 \gamma_2(V_n, \lambda) |V_n|} \right\} \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{\gamma_3(V_n, \lambda)}{6 \sqrt{\gamma_2^3(V_n, \lambda) |V_n|}} \left[3 \frac{N - \langle c \cap V_n \rangle_\lambda}{\sqrt{\gamma_2(V_n, \lambda) |V_n|}} - \frac{N - \langle c \cap V_n \rangle_\lambda}{\sqrt{\gamma_2(V_n, \lambda) |V_n|}} \right] + \right. \\ \left. + O\left(\frac{1}{|V_n|}\right) \right\}$$

равномерно относительно N в указанном промежутке. При этом

$$|V_n| \gamma_m(V_n, \lambda) = \frac{1}{i^m} \frac{d^m}{ds^m} \ln \varphi_n^V(0) = \frac{1}{i^m} \sum_{k=0}^m \frac{d^k}{ds^k} \bar{b}_k(\lambda, 0) |V_n| \gamma_{m-k}(\lambda, 0)$$

$$|N - \langle c \cap V_n \rangle_\lambda| \leq \frac{1}{i^m} \frac{d^m}{ds^m} R(V_n, \lambda, 0), \quad m=2, 3, > \frac{b}{2b}$$

$$\text{где } \frac{d^m}{ds^m} R(V_n, \lambda, 0) = \varphi(1) \text{ и } \gamma_2(V_n, \lambda) = \frac{1}{|V_n|} \frac{d^2}{ds^2} \ln \varphi_n^V(0) \\ = \frac{1}{|V_n|} \frac{d^2}{ds^2} \ln \varphi_n^V(0) = \frac{1}{|V_n|} \frac{d^2}{ds^2} \ln \varphi_n^V(0) = \frac{1}{|V_n|} \frac{d^2}{ds^2} \ln \varphi_n^V(0)$$

Доказательство теоремы [15] по формуле обращения

$$P_{\lambda, \lambda}^V(N) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{\lambda, \lambda}^V(s) e^{-iNs} ds. \quad (4.1)$$

Далее, из определения статистической суммы следует, что $\Xi(W, \lambda)$ аналитична по λ на всей комплексной плоскости и отлична от нуля для вещественных λ . Следовательно, в силу (3.9), функция $\varphi_{W, \lambda}^V(s)$ аналитична по s на всей комплексной плоскости при условии $\text{Im } \lambda = 0$, которое всюду ниже предполагается выполненным. Отсюда для любого вещественного τ следует равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{W, \lambda}^V(s) e^{-iNs} ds = \int_{-\infty - i\tau}^{\infty - i\tau} \varphi_{W, \lambda}^V(s) e^{-iNs} ds. \quad (4.2)$$

После замены переменной $s = u - i\tau$ в правой части (4.2), в силу (4.1) получаем

$$P_{W, \lambda}^V(N) = e^{-\tau N} \varphi_{W, \lambda}^V(-i\tau) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{W, \lambda}^V(u - i\tau)}{\varphi_{W, \lambda}^V(-i\tau)} e^{-iNu} du. \quad (4.3)$$

С другой стороны, поскольку с учетом (3.9)

$$\lim_{W \uparrow Z} \frac{\varphi_{W, \lambda}^V(u - i\tau)}{\varphi_{W, \lambda}^V(-i\tau)} = \lim_{W \uparrow Z} \frac{\Xi(W, e^{i(u+\tau)V}, \lambda)}{\Xi(W, e^{i\tau V}, \lambda)} = \lim_{W \uparrow Z} \varphi_{W, \lambda+\tau, \lambda}^V(u) = \varphi_{\lambda+\tau, \lambda}^V(u),$$

то совершив в (4.3) предельный переход при $W \uparrow Z$, получим

$$\begin{aligned} P_{\lambda}^V(N) &= e^{-\tau N} \varphi_{\lambda}^V(-i\tau) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\lambda+\tau, \lambda}^V(u) e^{-iNu} du = \\ &= e^{-\tau N} \varphi_{\lambda}^V(-i\tau) P_{\lambda+\tau, \lambda}^V(N). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Определим функцию $h_{\lambda}^V(\tau)$, $-\infty < \tau < +\infty$, по формуле

$$h_{\lambda}^V(\tau) = \frac{1}{|V|} (\langle |c \cap V| \rangle_{\lambda+\tau, \lambda} - \langle |c \cap V| \rangle_{\lambda}). \quad (4.5)$$

В силу (3.8), функция $h_{\lambda}^V(\tau)$ вещественно аналитична по τ при условии $\max(\lambda, \lambda + \tau) < -\ln M_2(\Phi)$.

Далее, из леммы 2 работы [16] следует оценка

$$\frac{1}{|V|} D_{\lambda+\tau, \lambda} |c \cap V| \geq C(\Phi) > 0 \quad (4.6)$$

для всех достаточно больших V и τ из промежутка $|\tau| < -\ln M_2(\Phi) - \lambda$.

Замечание. Некоторые известные результаты, используемые нами в настоящей работе (в том числе и лемма 2 из [16]), доказаны для гиббсовских полей с постоянной активностью. Однако, как легко видеть, соответствующие доказательства, распространяются без изменений и на тот случай, когда активность поля принимает два значения.

Согласно (3.8) и (4.6), $\frac{d}{d\tau} h_{\lambda}^V(\tau) \geq C(\tau) > 0$ при $\max(\lambda, \lambda + \tau) < -\ln M_2(\Phi)$, откуда следует, что для всех достаточно больших V , в некоторой окрестности нуля: $|x| < x_+$, существует вещественно аналитическая функция $g_{\lambda}^V(x)$, обратная к $h_{\lambda}^V(\tau)$. Как это следует из фор-

мулы (46), в качестве величины x_+ , не зависящей от V , можно взять величину $-C(\Phi)(\ln M_s(\Phi) + \lambda)$.

Теперь положим

$$\Lambda_\lambda^V(x) = g_\lambda^V(x) \left(\frac{\langle |c \cap V| \rangle_\lambda}{|V|} + x \right) - \frac{1}{|V|} \ln \varphi_\lambda^V(-ig_\lambda^V(x)), \quad |x| < x_+. \quad (4.7)$$

Следуя [8], назовем функцию Λ_λ^V функцией уклонений. В силу 2) леммы 2 и формулы (4.5) получаем, что $\frac{d}{dx} \Lambda_\lambda^V(x) = g_\lambda^V(x)$, откуда следует вещественная аналитичность функции уклонений при $|x| < x_+$, а также соотношения:

$$\begin{aligned} \Lambda_\lambda^V(0) &= \frac{d}{dx} \Lambda_\lambda^V(0) = 0, \quad \frac{d^2}{dx^2} \Lambda_\lambda^V(x) = \left(\frac{d}{d\tau} h_\lambda^V(\tau) \Big|_{\tau=g_\lambda^V(x)} \right)^{-1} = \\ &= \left(\frac{1}{|V|} \frac{d}{d\tau} \langle |c \cap V| \rangle_{\lambda+\tau, \lambda} \Big|_{\tau=g_\lambda^V(x)} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{|V|} D_{\lambda+g_\lambda^V(x), \lambda} |c \cap V| \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Предположим, что $\langle |c \cap V| \rangle_{\lambda+\tau, \lambda} = N$, где $N \in \mathbb{Z}_+$, тогда согласно теореме 4 имеем

$$P_{\lambda+\tau, \lambda}^V(N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\lambda+\tau, \lambda} |c \cap V|}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{|V|}}\right) \right) \quad (4.9)$$

при $\max(\lambda + \tau, \lambda) < -\ln M_s(\Phi)$ и $V \uparrow \mathbb{Z}'$.

С другой стороны, полагая $\tau = g_\lambda^V(x)$, из (4.5) и (4.7) получим

$$\varphi_\lambda^V(-ix) \exp(-\tau < |c \cap V| \rangle_{\lambda+\tau, \lambda}) = \exp(-V |\Lambda_\lambda^V(x)|).$$

Пусть теперь $\tau_a = g_\lambda^V\left(\frac{a}{|V|}\right)$, где величина a та же, что и в теореме 1, тогда согласно (4.5) для достаточно больших V имеем

$$\frac{N}{|V|} - \frac{\langle |c \cap V| \rangle_\lambda}{|V|} = h_\lambda^V\left(g_\lambda^V\left(\frac{a}{|V|}\right)\right) = \frac{\langle |c \cap V| \rangle_{\lambda+\tau_a, \lambda}}{|V|} - \frac{\langle |c \cap V| \rangle_\lambda}{|V|},$$

откуда $\langle |c \cap V| \rangle_{\lambda+\tau_a, \lambda} = N$. Таким образом, в силу (4.4), (4.8) и (4.9) получаем, что

$$P_\lambda^V(N) = \sqrt{\frac{1}{2\pi |V|} \frac{d^2}{dx^2} \Lambda_\lambda^V\left(\frac{a}{|V|}\right)} \exp\left(-|V| \Lambda_\lambda^V\left(\frac{a}{|V|}\right)\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{|V|}}\right)\right).$$

Отсюда, имея, в виду, что $\Lambda_\lambda^V\left(\frac{a}{|V|}\right) = \frac{a^2}{|V|} \frac{d^2}{dx^2} \Lambda_\lambda^V(0) + \Omega_\lambda^V\left(\frac{a}{|V|}\right)$,

$$\frac{d^2}{dx^2} \Lambda_\lambda^V\left(\frac{a}{|V|}\right) = \frac{d^2}{dx^2} \Lambda_\lambda^V(0) + O\left(\frac{a}{|V|}\right) \text{ при } V \uparrow \mathbb{Z}',$$

получаем соотношение (2.1).

Перейдем теперь к выводу асимптотического разложения (2.2). Согласно (4.8) имеем

$$\frac{d^2}{dx^2} \Lambda_\lambda^V(0) = - \left(\frac{1}{|V|} \frac{d^2}{ds^2} \ln \varphi_\lambda^V(s) \Big|_{s=0} \right)^{-1}.$$

С другой стороны, в силу леммы 3

$$\frac{d^2}{ds^2} \ln \varphi_\lambda^V(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^2}{ds^2} \bar{b}_k(i, 0) |V|_{i-k} + \frac{d^2}{ds^2} R(V, \lambda, 0).$$

Отсюда, полагая

$$a_k(z) = \frac{d^2}{ds^2} \bar{b}_k(\ln z, 0), \quad (4.10)$$

получаем соотношение (2.2).

Формула (2.3) доказывается аналогично. Таким образом, теорема 1 доказана.

5°. Доказательство теоремы 2. Поскольку доказательства теорем 1 и 2 следуют одной и той же схеме, в этом пункте мы приводим лишь набросок доказательства теоремы 2.

Пусть $P_{V,\lambda}(N) = P_{V,\lambda}(c \in V: |c| = N)$. Согласно формуле обращения имеем

$$P_{V,\lambda}(N) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{V,\lambda}(t) e^{-iNt} dt,$$

где характеристическая функция числа частиц в объеме V имеет вид

$$\varphi_{V,\lambda}(t) = \frac{\Xi(V, \lambda + it)}{\Xi(V, \lambda)}.$$

В условиях теоремы статсумма $\Xi(V, \lambda)$ аналитична по λ на всей плоскости (см. [7]) и отлична от нуля при вещественных λ . Поэтому функция $\varphi_{V,\lambda}(t)$ аналитична по t на всей комплексной плоскости. Кроме того, очевидно

$$\frac{\varphi_{V,\lambda}(u - i\tau)}{\varphi_{V,\lambda}(-i\tau)} \varphi_{V,\lambda+\tau}(u).$$

Таким образом, по аналогии с (4.4) получаем

$$P_{V,\lambda}(N) = \varphi_{V,\lambda}(-i\tau) e^{-\tau N} P_{N,\lambda+\tau}(N).$$

Определим функцию $h_{V,\lambda}(\tau)$, $-\infty < \tau < +\infty$, формулой

$$h_{V,\lambda}(\tau) = \frac{1}{|V|} (<|c|>_{V,\lambda+\tau} - <|c|>_{V,\lambda}).$$

Имеют место следующие легко проверяемые соотношения:

$$<|c|>_{V,\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \ln \Xi(V, \lambda), \quad (5.1)$$

$$\frac{d}{d\lambda} <|c|>_{V,\lambda} = D_{V,\lambda}|c|,$$

где $D_{V,\lambda}|c|$ — дисперсия числа частиц в объеме V , вычисленная относительно распределения $P_{V,\lambda}$. В силу (5.1) функция $h_{V,\lambda}(\tau)$ аналитична по τ на вещественной оси. С другой стороны, согласно лемме 2 работы [17] для достаточно больших объемов V и для любого конечного замкнутого интервала значений λ имеет место оценка

$$\frac{1}{|V|} D_{V,\lambda}|c| \geq \bar{C}(\Phi) > 0.$$

Отсюда для больших V в некоторой окрестности нуля, не зависящей от V , следует существование аналитической функции $g_{V,\lambda}$ обратной к $h_{V,\lambda}$.

Определим функцию отклонений

$$\Lambda_{V,\lambda}(x) = g_{V,\lambda}(x) \left(\frac{(|c| >_{V,\lambda}}{|V|} + x \right) - \frac{1}{|V|} \ln \varphi_{V,\lambda}(-ig_{V,\lambda}(x)).$$

Далее, повторяя рассуждения, использованные нами в предыдущем пункте при выводе формулы (2.1), легко получить соотношение (2.4) теоремы 2.

Для доказательства (2.5) заметим, что

$$\frac{d^2}{dx^2} \Lambda_{V,\lambda}(0) = |V| \left(\frac{d^2}{d\lambda^2} \ln \Xi(V, \lambda) \right)^{-1}$$

Остается воспользоваться асимптотическим разложением логарифма статсуммы (см. выше теорему 3). Таким образом теорема 2 доказана.

В заключение отметим, что теорема о больших отклонениях для гиббсовских случайных полей может быть доказана также с использованием результатов В. Статулявичуса и его школы, полученных применением метода семинвариантов (см. [18]).

Институт математики
АН Армении

Поступила 3.XI.1989

Ս. Կ. ՊՈԳՈՍՅԱՆ. Մեծ շեղումների հավանականությունները Գիբբսի պատահական դաշտերի համար (ամփոփում)

Գիբբսի պատահական դաշտերի համար ստացված է լոկալ սահմանային թեորեմ զերջավոր V ծավալում մասնիկների թվի մեծ շեղումների հավանականությունների զերբարբյալ, երբ $V \rightarrow \infty$: Նման արդյունք ստացված է նաև զերջավոր ծավալում Գիբբսի մեծ տեմպերի մասնիկների թվի համար ազատ սահմանային պայմանների դեպքում:

S. K. POGOSIAN. *Probabilities of large deviations for Gibbs random fields (summary)*

For the Gibbs random fields a local limit theorem is obtained for the probabilities of large deviations of the number of particles in a finite volume V , $V \rightarrow \infty$. An analogous result is obtained for the number of particles of the grand canonical ensemble in a finite volume with free boundary conditions.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник. Независимые и стационарно связанные величины, М., Наука, 1965.
2. В. В. Петров. Суммы независимых случайных величин, М., Наука, 1972.
3. M. Duneau, B. Souillard. Cluster properties of lattice and continuous systems, Comm. Math. Phys., 47, 1976, 155—166.
4. M. Duneau, D. Iagolnitzer, B. Souillard. Decay of correlations for infinite-range interactions, J. Math. Phys., 16, 1975, 1662—1666.
5. Р. Л. Добрушин. Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием, Функт. анализ, 2, вып. 4, 1968, 31—43.
6. Р. Л. Добрушин. Задача единственности гиббсовского случайного поля и проблема фазовых переходов, Функт. анализ, 2, вып. 4, 1968, 44—57.
7. Д. Рюэль. Статистическая механика. Строгие результаты, М., Мир, 1971.
8. А. А. Боровков. Теория вероятностей, М., Наука, 1986.
9. H. Cramer. Sur un nouveau theoreme limite de la theorie des probabilités, Actuar. sci. et ind., 736, Paris, 1938 (УМН 10, 1944, 166—178).
10. S. Pogostan. Asymptotic expansion of the logarithm of the partition function, Comm. Math. Phys., 95, 1984, 227—245.
11. В. А. Арзуманян, Б. С. Нахапетян, С. К. Погосян. Асимптотическое разложение логарифма статсуммы в спиновых решетчатых системах с вакуумом, Теорет. и математ. физика, 81, № 2, 1989, 175—184.
12. G. Del Grosso. On the local central limit theorem for Gibbs processes, Comm. Math. Phys., 37, 1974, 141—160.
13. G. Gallavotti, S. Miracle-Sole. Correlation functions of a lattice system, Comm. Math. Phys., 7, 1968, 274—288.
14. К. Партасарати. Введение в теорию вероятностей и теорию меры, М., Мир, 1983.
15. S. Pogostan. Asymptotic expansion in the local limit theorem for the particle number in the grand canonical ensemble, Random fields, Estergom (Hungary), 1979.
16. Р. Л. Добрушин, Б. С. Нахапетян. Сильная выпуклость давления для решетчатых систем классической статистической физики, Теорет. и математ. физика, 20, № 2, 1974, 223—234.
17. Р. Л. Добрушин, Р. А. Минлос. Существование и непрерывность давления в классической статистической физике. Теория вероят. и ее приложения, XII, № 4, 1964, 595—618.
18. А. Сяулис, В. Статулявичус. Предельные теоремы о больших уклонах, Вильнюс, Мокслас, 1989.

УДК 517.956

Г. Р. ОГАНЕСЯН

ВЕСОВАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Формулировка результата

Рассмотрим сингулярное при $t = 0$ эллиптическое дифференциальное уравнение второго порядка

$$(\partial_t^2 - A(t, x, D_x))y(t, x) = 0, \quad (t, x) \in]0, T[\times R^n, \quad (1.1)$$

здесь символ $a(t, x, \xi)$ дифференциального оператора второго порядка A предполагается положительным и стремящимся к бесконечности при $t \rightarrow +0$ (например, $A = d(t, x) - \Delta$, $d(+0, x) = \Delta = \Delta_x$ — оператор Лапласа).

Хорошо известно, что для сингулярных эллиптических уравнений задачи Дирихле надо ставить с весом (см., например, [1]—[6]).

Введем обозначения

$$\gamma(t, x, \xi) = a^{\frac{1}{2}}\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)_{tt}, \quad a_0(t, x) = a(t, x, \xi)|_{\xi=0}, \quad (1.1')$$

$$\mu(t, x) = \sqrt[4]{a_0(t, x)} \exp\left(\int_t^T \sqrt{a_0(s, x)} ds\right), \quad \langle \xi \rangle = \sqrt{1 + |\xi|^2}.$$

$H^s = H^s(R_x^n)$ — пространство Соболева (s — вещественное число).

Настоящая работа посвящена конструктивному доказательству теоремы существования решения в пространствах Соболева весовой задачи Дирихле

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mu(t, x) y(t, x) = \Phi_1(x), \quad y(T, x) = \Phi_2(x), \quad x \in R^n \quad (1.2)$$

для уравнения (1.1). Мы рассматриваем случай сильной (нефуксовой) сингулярности и допускаем неограниченные при $t \rightarrow 0$ решения.

Пусть

$$i). \quad a(t, x, \xi) \in C^1([0, T], C^\infty(R^{2n})), \quad \int_0^T \sqrt{a(s, \cdot)} ds = \infty,$$

$$ii). \quad 0 < c_1 < \frac{a(t, x, \xi)}{\langle \xi \rangle^2} < c_2 a_0(t, x), \quad \frac{a}{a_0} > c_3 > 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a_0}{a} = 1 \text{ при фиксированных } (x, \xi) \in R^{2n},$$

iii). существует функция $p(t) \in C^1([0, T])$ и постоянные $\delta, \rho, C_{\alpha\beta}$ такие, что для всех мультииндексов $\alpha, \beta \in Z_+^n, |\alpha| \leq 2$ и $(t, x, \xi) \in]0, T[\times R^{2n}$ справедливы оценки

$$\frac{1}{a} \left| \frac{p}{p_t} \right|^k \left| \partial_t^k \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} a(t, \cdot) \right| + \int_0^t (|\partial_{\xi}^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} \partial_x^{\gamma} a(s, \cdot)| + \\ + t^{-\delta} |\partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} \gamma(s, \cdot)|) \frac{ds}{\sqrt{a(s, \cdot)}} \leq C_{\alpha\beta} t^{\delta} |\xi| < \xi >^{-\rho |\alpha|}, \quad k=0, 1, \delta > 0, 0 < \rho \leq 1,$$

iv). T — достаточно малое число (меньше единицы), $|p_t p^{-1} a^{-\frac{1}{2}}| < c < \infty$.

Теорема. В условиях i) — iv) весовая задача Дирихле (1.1),

(1.2) при $\Phi_1 \in H^{s+2}, \Phi_2 \in H^{s+\frac{5}{2}}$ имеет решение $y \in C^2([0, T], H^s)$, удовлетворяющее оценкам

$$\|a_0^{-\frac{k}{2}} \partial_t^k y(t, \cdot)\|_{s-k} \leq c \left(\|\Phi_1\|_s + \|\Phi_2\|_{s+\frac{1}{2}} \right), \quad k=0, 1, 2, \quad (1.3)$$

с постоянной c , зависящей только от постоянных, фигурирующих в ii) — iv).

Замечание 1.1. Однозначная разрешимость задачи (1.1), (1.2) в случае, когда a не зависит от x , доказана в [6].

Замечание 1.2. Вводя пространство B^s как пополнение пространства дважды непрерывно дифференцируемых отображений $[0, T]$, в $H^s, s \geq 2$ по норме

$$\|y\| = \sup_{t \in [0, T]} \sum_{k=0}^2 \|a(t, \cdot) a^{-\frac{k}{2}}(t, \cdot) \partial_t^k y(t, \cdot)\|_{s-k}$$

получим, что в условиях теоремы существует решение задачи (1.1).

(1.2), принадлежащее B^s , если $\Phi_1 \in H^s, \Phi_2 \in H^{s+\frac{1}{2}}$.

Пример 1.3. Пусть $A = d(t, x) - \Delta, d = p(t)[2 + xt^{\delta} x(xt^{\delta})],$

$$p(t) = t^{-\sigma}, \quad \sigma > 2, \quad x(y) \in C_0^{\infty}(R), \quad 0 \leq x(y) \leq 1,$$

$$x(y) \equiv 1, \quad |y| < \frac{1}{2}, \quad x(y) \equiv 0, \quad |y| > 1.$$

Легко проверить, что справедливы неравенства

$$a(t, x, \xi) = \xi^2 + d \geq \xi^2 + p(t), \quad \frac{a}{a_0} = \frac{\xi^2}{d} + 1 \leq \xi^2 + 1,$$

$$\left| \frac{a_t}{a} \right| \leq c \left| \frac{p_t}{p} \right|, \quad |a^{-1} \partial_x^{\beta} a| \leq |ct|^{\delta |\beta|}.$$

Проверяя остальные условия теоремы убеждаемся, что для этого примера они выполнены.

§ 2. Построение решения

Решение уравнения (1.1) будем искать в виде

$$y(t, x) = U(t) C_1(x) = \int e^{ix\xi} u(t, x, \xi) \bar{C}_1(\xi) d\xi.$$

Подставляя это выражение в (1.1) и пользуясь формулой композиции ПДО получим

$$(\partial_t^2 - A)y = \int e^{ix\xi} (u_{tt} - au - \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a (D_x^\alpha u) \bar{C}_1(\xi) d\xi = 0,$$

откуда, полагая

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(t, x, \xi), \quad \gamma \equiv (a^{-\frac{1}{2}})_{tt} a^{-\frac{1}{2}} = \frac{5a_t^2}{16a^3} - \frac{a_{tt}}{4a},$$

получаем следующие рекуррентные соотношения для функций b_j :

$$(\partial_t^2 - a(t, x, \xi) - \gamma(t, x, \xi)) b_0(t, x, \xi) = 0. \quad (2.1)$$

$$(\partial_t^2 - a - \gamma) b_j(t, x, \xi) = -\gamma b_{j-1} + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq j} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a (D_x^\alpha b_{j-|\alpha|}), \quad (2.2)$$

$j = 1, 2, \dots$

Итак, общее решение уравнения (1.1) имеет вид

$$y(t, x) = U(t) C_1(x) + V(t) C_2(x), \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} U(t) C_1(x) &= \int e^{ix\xi} u(t, x, \xi) \bar{C}_1(\xi) d\xi, \quad V(t) C_2(x) = \\ &= \int e^{ix\xi} v(t, x, \xi) \bar{C}_2(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} u(t, x, \xi) &= b_0(t, x, \xi) \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{b_0} \right), \quad v(t, x, \xi) = \\ &= k_0(t, x, \xi) \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j}{k_0} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Точные решения уравнения (2.1) имеют вид

$$b_0(t, x, \xi) = a^{-\frac{1}{2}}(t, x, \xi) \exp \int_t^T \sqrt{a(s, x, \xi)} ds, \quad (2.6)$$

$$k_0(t, x, \xi) = a^{-\frac{1}{2}}(t, x, \xi) \exp \int_t^T \sqrt{a(s, x, \xi)} ds. \quad (2.7)$$

Составленный из этих решений вронскиан равен

$$W(p_0, b_0) = p_0 b_{0t} - p_{0t} b_0 = 2. \quad (2.8)$$

Решение p_0 неудобно тем, что при $\xi \rightarrow \infty$ оно имеет экспоненциальный рост. Поэтому введем еще одно решение уравнения (2.1):

$$k_0(t, x, \xi) = \sigma(x, \xi) \rho_0(t, x, \xi), \quad \sigma = \exp \int_0^T (\sqrt{a_0(s, \cdot)} - \sqrt{a(s, \cdot)}) ds, \quad (2.9)$$

ограниченное при $\xi \rightarrow \infty$ и фиксированных $(t, x) \in]0, T] \times R^n$.

Решение неоднородного уравнения

$$(\partial_t^2 - a - \gamma) w(t, \cdot) = f(t) \quad (2.10)$$

запишем в виде

$$w(t) = \int_0^t \frac{b_0(\tau, \cdot) \rho_0(t, \cdot)}{W(b_0, \rho_0)} f(\tau) d\tau + \int_t^T \frac{b_0(t, \cdot) \rho_0(\tau, \cdot)}{W(b_0, \rho_0)} f(\tau) d\tau,$$

или

$$\frac{w}{b_0}(t, \cdot) = \int_0^t K(\tau, t, \cdot) \frac{f(\tau)}{b_0(\tau, \cdot)} d\tau + \int_t^T K(\tau, \tau) \frac{f(\tau)}{b_0(\tau, \cdot)} d\tau, \quad (2.11)$$

$$\frac{w}{\rho_0}(t, \cdot) = \int_0^t K(\tau, \tau) \frac{f(\tau)}{\rho_0(\tau, \cdot)} d\tau + \int_t^T K_1(\tau, t) \frac{f(\tau)}{\rho_0(\tau, \cdot)} d\tau, \quad (2.12)$$

где при $\tau < t$

$$K(\tau, t) = \frac{\rho_0(t, \cdot) b_0^2(\tau, \cdot)}{b_0(t, \cdot) W(b_0, \rho_0)} = -\frac{1}{2\sqrt{a(\tau, \cdot)}} \exp\left(2 \int_t^T \sqrt{a(s, \cdot)} ds\right), \quad (2.13)$$

и при $\tau > t$

$$K_1(\tau, t) = \frac{b_0(t, \cdot) \rho_0^2(\tau, \cdot)}{\rho_0(t, \cdot) W(b_0, \rho_0)} = -\frac{1}{2\sqrt{a(\tau, \cdot)}} \exp\left(2 \int_t^T \sqrt{a(s, \cdot)} ds\right). \quad (2.14)$$

Из i), ii) следует, что при фиксированных $\xi \in R^n$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mu b_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \sqrt{\frac{a_0}{a}} \exp \int_t^T (\sqrt{a(s, \cdot)} + \sqrt{a_0(s, \cdot)}) ds \right\} = 0, \quad (2.15)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mu k_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \sqrt{\frac{a_0}{a}} \exp \int_0^t (\sqrt{a_0(s, \cdot)} - \sqrt{a(s, \cdot)}) ds \right\} = 1,$$

откуда (применением теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла) следует, что решение краевой задачи (1.1), (1.4) имеет вид

$$y(t, x) = V(t) Q^{-1} \Phi_1(x) + U(t) U^{-1}(T) (\Phi_2(x) - V(T) Q^{-1} \Phi_1(x)), \quad (2.16)$$

где Q — ПДО с символом $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{k_j}{k_0}(0, x, \xi)$, т. е.

$$Q\Phi(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \mu V(t) \Phi(x) = \int e^{ix\xi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k_j}{k_0}(0, x, \xi) \tilde{\Phi}(\xi) d\xi. \quad (2.17)$$

§ 3. Вспомогательные оценки

Обозначим через Ψ_p^m множество всех собственных ПДО с символами класса $S_{p,0}^m$ (см. [7], [8]).

Наша ближайшая цель показать, что операторы $U(t)$, $V(t)$, определяемые формулами (2.4), (2.5), являются ПДО класса Ψ_p^m . Введем удобное обозначение

$$\gamma_\beta^{(\alpha)}(t, x, \xi) = \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \gamma(t, x, \xi).$$

Лемма 3.1. *Справедливы формулы*

$$\partial_\xi^\beta \ln g(\xi) = \sum r_j \frac{g^{(j_1)}(\xi)}{g(\xi)} \frac{g^{(j_2)}(\xi)}{g(\xi)} \dots \frac{g^{(j_s)}(\xi)}{g(\xi)}, \quad |\beta| \geq 1, \quad (3.1)$$

$$(\exp(-f(\xi))) \partial_\xi^\beta \exp f(\xi) = \sum p_j f^{(j_1)}(\xi) \dots f^{(j_s)}(\xi), \quad (3.2)$$

где β — мультииндекс, а суммирования ведутся по всем мультииндексам $j_1, j_2, \dots, j_s$ таким, что $|j_1| + \dots + |j_s| = |\beta|$, r_j, p_j — постоянные.

Доказательство проведем индукцией по β . При $(\beta) = 1$ формула (3.1) очевидна. Полагая (3.1) верным (предположением индукции) имеем

$$\begin{aligned} \partial_{\xi_k} \partial_\xi^\beta \ln g &= \partial_{\xi_k} \sum r_j \frac{g^{(j_1)}}{g} \dots \frac{g^{(j_s)}}{g} = - \sum r_j \frac{g_{\xi_k}}{g} \frac{g^{(j_1)}}{g} \dots \frac{g^{(j_s)}}{g} + \\ &+ \sum r_j \frac{\partial_{\xi_k} g^{(j_1)}}{g} \dots \frac{g^{(j_s)}}{g} + \dots = \sum r_k \frac{g^{(k_1)}}{g} \dots \frac{g^{(k_p)}}{g}, \end{aligned}$$

где $|k_1| + |k_2| + |k_p| = 1 + |\beta|$. Формула (3.1) доказана.

Докажем одномерный вариант ($\xi \in R$) формулы (3.2):

$$\exp(-f(\xi)) \partial_\xi^n \exp f(\xi) = \sum p_j f^{(j_1)} f^{(j_2)} \dots f^{(j_s)}, \quad j_1 + \dots + j_s = n \quad (3.2')$$

индукцией по n . При $n=1$ формула (3.2') очевидна: $(\exp(-f)) \partial_\xi \exp f = f'(\xi)$. Далее, полагая (3.2') верным, получаем

$$\begin{aligned} (\exp(-f)) \partial_\xi^{n+1} \exp f &= (\exp(-f)) \partial_\xi [(\exp f) \sum p_j f^{(j_1)} \dots f^{(j_s)}] = \\ &= f'(\xi) \sum p_j f^{(j_1)} \dots f^{(j_s)} + \sum f^{(k_1)} \dots f^{(k_s)} = \sum p_s f^{(k_1)} \dots f^{(k_s)}, \end{aligned}$$

где $|k_1| + \dots + |k_s| = 1, j_1 + \dots + j_s = n$.

Многомерная формула (3.2) доказывается аналогично.

Лемма 3.2. *Для того, чтобы выполнялись оценки*

$$a^{-1}(t, x, \xi) |a_{(\beta)}^{(\alpha)}(t, x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} T^{|\alpha|} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \quad (3.3)$$

для всех мультииндексов $\alpha, \beta \in Z_+^n$ и $(t, x, \xi) \in]0, T] \times R^{2n}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta (\ln a)| \leq C_{\alpha\beta} T^{|\alpha|} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \quad (3.4)$$

для всех $\alpha, \beta, |\alpha| + |\beta| > 0$ и $(t, x, \xi) \in]0, T] \times R^{2n}$.

Достаточность. Из (3.2) и (3.4) имеем

$$a^{-1} |a_{(\beta)}^{(\alpha)}| = \left| \sum p_{\alpha\beta} (\ln a)_{(\beta_1)}^{(\alpha_1)} \dots (\ln a)_{(\beta_s)}^{(\alpha_s)} \right| \leq C_{\alpha\beta} T^{|\alpha|} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|},$$

т. е. (3.3).

Необходимость доказываем индукцией по α, β . При $|\alpha| + |\beta| = 1$

(3.4) очевидно. Далее, полагая (3.4) верным (предположение индукции) из (3.1) имеем

$$\partial_{\varepsilon_k} (\ln a)_{(\beta)}^{(\alpha)} = \sum_{\gamma} r_{\gamma} \frac{a_{(\beta_1)}^{(\gamma_1)}}{a} \dots \frac{a_{(\beta_s)}^{(\gamma_s)}}{a} \leq C_{\alpha\beta} T^{\delta|\beta|} \langle \xi \rangle^{-p(|\alpha|+1)},$$

так как здесь суммирование идет по всем γ и β таким, что

$$|\gamma_1| + \dots + |\gamma_s| = 1 + |\alpha|, \quad \beta_1 + \dots + \beta_s = |\beta|.$$

Лемма 3.3. Пусть существуют положительные постоянные $\rho, \delta, C_{\alpha\beta}$ такие, что для всех $\alpha, \beta \in Z_+^n, (t, x, \xi) \in]0, T] \times R^{2n}$ выполнены неравенства

$$\frac{a_{(\beta)}^{(\alpha)}}{a} + \int_0^T \frac{\partial_{\varepsilon_k} a_{(\beta)}^{(\alpha)} + T^{-\delta} |\gamma_{(\beta)}^{(\alpha)}|}{\sqrt{a}}(\tau, \cdot) d\tau \leq C'_{\alpha\beta} T^{\delta|\beta|} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|}. \quad (3.5)$$

Тогда имеют место следующие неравенства:

$$\frac{|(b_0)_{(\beta)}^{(\alpha)}|}{b_0}, \frac{|(\rho_0)_{(\beta)}^{(\alpha)}|}{\rho_0}, \frac{|(k_0)_{(\beta)}^{(\alpha)}|}{k_0} \leq C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{-p(1-|\alpha|)} T^{\delta|\beta|}, \quad (3.6)$$

$$|K_{(\beta)}^{(\alpha)}(\tau, t)| \leq C_{\alpha\beta} a^{-\frac{1}{2}}(\tau) T^{\delta|\beta|} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|}, \quad \tau \leq t, \quad (3.7)$$

$$|K_{(\beta)}^{(\alpha)}(\tau, t)| \leq C_{\alpha\beta} a^{-\frac{1}{2}}(\tau) T^{\delta|\beta|} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|}, \quad \tau \geq t,$$

$$\left| \frac{(b_f)_{(\beta)}^{(\alpha)}}{b_0} \right|, \left| \frac{(\rho_f)_{(\beta)}^{(\alpha)}}{\rho_0} \right|, \left| \frac{(k_f)_{(\beta)}^{(\alpha)}}{k_0} \right| \leq C_{\alpha\beta} T^{\delta(|\beta|+1)} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|}. \quad (3.8)$$

Докажем вначале первую лемму (3.6). Так как при $|\alpha| \geq 1$ ввиду (3.5)

$$\begin{aligned} \int_0^T (V \overline{a}(\tau, \cdot))_{(\beta)}^{(\alpha)} d\tau &= \int_0^T \left(\frac{a_{\varepsilon_k}}{V \overline{a}} \right)_{(\beta)}^{(\alpha-1)} d\tau = \text{формула Лейбница} \\ &= - \int_0^T \sum C_{\varepsilon, s} \frac{(a_{\varepsilon_k})_{(\beta)}^{(\alpha)}}{2 V \overline{a}} \cdot V \overline{a} (a^{-\frac{1}{2}})_{(\beta-s)}^{(\alpha-1-s)} d\tau \\ &\leq C'_{\alpha\beta} \sum T^{\delta/s'} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|} T^{\delta|\beta-s'|} \langle \xi \rangle^{-p(|\alpha|-1)} \leq \\ &\leq C_{\alpha\beta} T^{\delta|\beta|} \langle \xi \rangle^{-p(|\alpha|-1)}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

то (так как $\ln b_0 = \int_0^1 V \overline{a} d\tau - \frac{\ln a}{4}$) получаем

$$\begin{aligned} b_0^{-1} b_0^{(\alpha)} &= \sum p_{\alpha\beta} \left(\int_0^1 V \overline{a} d\tau - \frac{\ln a}{4} \right)_{(\beta_1)}^{(\alpha_1)} \dots \left(\int_0^1 V \overline{a} d\tau - \frac{\ln a}{4} \right)_{(\beta_s)}^{(\alpha_s)} \leq \\ &\leq C'_{\alpha\beta} T^{\delta|\beta|} (\langle \xi \rangle^{p(1-|\alpha|)} + \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|}) \leq C_{\alpha\beta} T^{\delta|\beta|} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|}. \end{aligned}$$

Остальные оценки (3.6) доказываются аналогично. Заметим только, что ввиду (3.2), (3.9) имеем

$$\frac{\sigma_{(\beta)}^{(\alpha)}}{c} = \sum p_{\alpha\beta} \left(\int_0^T (V\bar{a}_0 - V\bar{a}) d\tau \right)_{(\beta_1)}^{(\alpha_1)} \dots \\ \dots \left(\int_0^T (V\bar{a}_0 - V\bar{a}) d\tau \right)_{(\beta_s)}^{(\alpha_s)} \leq C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle$$

а из формулы Лейбница

$$\frac{k_{0(\beta)}^{(\alpha)}}{k_0} = \frac{(\sigma\rho_0)_{(\beta)}^{(\alpha)}}{\sigma\rho_0} = \sum C_{\gamma s} \frac{\rho_0^{(\gamma)}(s)}{\rho_0} \frac{\sigma_{(\beta-s)}^{(\alpha-\gamma)}}{\sigma}$$

Для доказательства первого из неравенства (3.7) заметим, что

$$K(\tau, t) = \exp \left\{ 2 \int_t^\tau V\bar{a}(s) ds - \frac{1}{2} \ln a(\tau) \right\}, \\ K_{(\beta)}^{(\alpha)}(\tau, t) = K(\tau, t) \sum p_{\alpha\beta} \left(2 \int_t^\tau V\bar{a} ds - \frac{\ln a}{2} \right)_{(\beta_1)}^{(\alpha_1)} \dots \\ \dots \left(2 \int_t^\tau V\bar{a} ds - \frac{\ln a}{2} \right)_{(\beta_s)}^{(\alpha_s)} \leq C_{\alpha\beta} a^{-\frac{1}{2}}(\tau) T^{|\beta|} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|} \times \\ \times \left(\int_t^\tau V\bar{a} ds \right)^{|\alpha|+|\beta|} \exp \left(2 \int_t^\tau V\bar{a} ds \right) \leq \frac{C_{\alpha\beta}}{V\bar{a}(\tau)} T^{|\beta|} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что для всех k и $\tau \leq t \leq T$

$$\left(\int_t^\tau V\bar{a}(s) ds \right)^k \exp \left(2 \int_t^\tau V\bar{a}(s) ds \right) \leq \text{const.} \quad (3.10)$$

Аналогично доказывается второе неравенство (3.7).

Далее из (2.2), (2.11)

$$\left(\frac{b_1}{b_0} \right)_{(\beta)}^{(\alpha)} = \left[\left(\int_0^t K(\tau, t) + \int_t^T K(\tau, \tau) \right) \left(\frac{1}{b_0} \sum_{p=1}^{\alpha^{(p)}} D_x^p b_0 - \gamma \right)_{(\beta)}^{(\alpha)} \right] \leq \\ \leq \sum C_{\alpha, s} \int_0^T \left| K_{(\beta)}^{(\alpha)}(\tau, t) \left(\sum_{p=1}^{\alpha^{(p)}} \frac{\alpha^p}{b_0} D_x^p b_0 - \gamma \right)_{(\beta-s)}^{(\alpha-\alpha_1)} \right| d\tau \leq \\ \leq C_{\alpha\beta} T^{|\beta|+1} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|}. \quad (3.11)$$

Оценки

$$\left| \left(\frac{b_j}{b_0} \right)_{(\beta)}^{(\alpha)} \right| \leq C_{\alpha\beta} T^{\delta(j+|\beta|)} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|} \quad (3.12)$$

докажем индукцией по j . При $j = 1$ это уже доказанная оценка (3.11). Полагая (3.12) верным (предположение индукции) из (2.2), (2.11), (3.5) имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{b_{j+1}}{b_0} \right)_{(\beta)}^{(\alpha)} = & \left[\left(\int_0^t K(\tau, t) + \int_t^T K(\tau, \tau) \right) \left(\sum_{1 \leq |\rho| \leq j+1} \frac{a^\rho}{p! b_0} D_x^\rho b_{j+1-|\rho|} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{b_j}{b_0} \gamma \right) d\tau \right]_{(\beta)}^{(\alpha)} \leq C'_{\alpha\beta} T^{\delta(j+1+|\beta|)} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Остальные оценки (3.8) доказываются аналогично.

З а м е ч а н и е 3.1. Из неравенств (3.8) следует, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{b_0}(t, x, \xi), \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k_j}{k_0}(t, x, \xi) \in S_{p,0}^0. \quad (3.13)$$

Действительно, при $T < 1$ имеем

$$\begin{aligned} \left(\sum_0^{\infty} \frac{b_j}{b_0} \right)_{(\beta)}^{(\alpha)}, \left(\sum_0^{\infty} \frac{k_j}{k_0} \right)_{(\beta)}^{(\alpha)} & \leq C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|} \sum_{j=0}^{\infty} T^{\delta(j+|\beta|)} \leq \\ & \leq C'_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|} T^{\delta|\beta|} (1 - T^\delta)^{-1} \leq C_{\alpha\beta} T^{\delta|\beta|} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|}. \end{aligned}$$

Далее из (3.5) нетрудно вывести оценки

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{2}} (a^{-\frac{1}{2}})_{(\beta)}^{(\alpha)}, a^{-\frac{1}{2}} (a^{\frac{1}{2}})_{(\beta)}^{(\alpha)}, \left(\left(\frac{a_0}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \right)_{(\beta)}^{(\alpha)}, \\ \left(\exp \int_T^t (V\bar{a} + V\bar{a}_0) d\tau \right)_{(\beta)}^{(\alpha)}, \left(\exp \int_0^t (V\bar{a}_0 - V\bar{a}) d\tau \right)_{(\beta)}^{(\alpha)} \leq \\ \leq C_{\alpha\beta} T^{\delta|\beta|} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Лемма 3.5. В условиях леммы 3.3 операторы $\mu U(t)$ и $\mu V(t)$ принадлежат классам Ψ_p^0 и имеют место оценки

$$\|\mu(t, \cdot) U(t) \Phi(\cdot)\|_s, \|\mu(t, \cdot) V(t) \Phi(\cdot)\|_s \leq c \|\Phi\|_s. \quad (3.15)$$

Для доказательства этой леммы достаточно показать, что

$$\mu(t, x) u(t, x, \xi), \mu(t, x) v(t, x, \xi) \in S_{p,0}^0. \quad (3.16)$$

Первое из этих утверждений следует, с помощью (3.14), (3.13), из оценок

$$(\mu u)_{(\beta)}^{(\alpha)} = \left[\left(\frac{a_0}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\exp \int_T^t (V\bar{a} + V\bar{a}_0) d\tau \right) \sum_0^{\infty} \frac{b_j}{a_0} \right]_{(\beta)}^{(\alpha)} =$$

$$= \sum C_{msp} \left(\left(\frac{a_0}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \right)_{(s)}^{(\sigma)} \left(\exp \int_T^t (V\alpha + V\alpha_0) dz \right)_{(p)}^{(m)} \left(\sum_0^{\infty} \frac{b_j}{b_0} \right)_{(\beta-s-p)}^{(\alpha-\sigma-m)} \leq \\ \leq C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|},$$

а второе доказывается аналогично.

Оценки (3.15) следуют из теоремы об L^2 -ограниченности операторов класса Ψ_r^0 (см. теорему 3.1 из [8]).

Замечание 3.6. Легко убедиться, что операторы $U(t)$, $V(T)$ являются ПДО класса $\Psi_r^{-\frac{1}{2}}$.

Так как ПДО класса Ψ_r^m является ограниченным оператором из H^{s+m} в H^s , то для придания смысла выражению (2.16) осталось показать обратимость операторов $U(T)$, Q с символами

$$u(T, x, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j(T, x, \xi), \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k_j}{k_0}(0, x, \xi).$$

Для этого воспользуемся следующим утверждением из [8] (теорема 3.5):

Предложение 3.7. Для любых $C > 0$, $\delta_1 > 0$ и $s > 0$ можно указать такие $N > 0$ и $\varepsilon > 0$, что если

$$|p(x, \xi)| \geq \delta_1 \langle \xi \rangle^m, \quad (3.17)$$

$$|p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq \begin{cases} c \langle \xi \rangle^{m-p|\alpha|}, & |\beta| = 0, \\ \varepsilon \langle \xi \rangle^{m-p|\alpha|}, & |\beta| \neq 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

для всех $|\alpha| + |\beta| \leq N$, то оператор $p(x, D)$ осуществляет изоморфизм между H^{s+m} и H^s .

Нетрудно проверить, что условия предложения 3.7 для $u(T, x, \xi)$ с $m = -\frac{1}{2}$ и $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{k_j}{k_0}(0, x, \xi)$ с $m = 0$ выполнены.

Действительно, из условий ii), iii) имеем при

$$T^s \leq \min \left\{ 1, \frac{1-\delta_1}{c} \right\} c_1 \langle \xi \rangle^s, \quad a(T, x, \xi) \leq c_2 \langle \xi \rangle^s, \\ c_3 \langle \xi \rangle^{-\frac{1}{2}} \leq b_0(T, x, \xi) \leq c_4 \langle \xi \rangle^{-\frac{1}{2}},$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{k_j}{k_0}(t, x, \xi) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j}{k_0} \geq 1 - cT^s \geq \delta_1 > 0.$$

Отсюда и из замечания 3.6 получаем (3.17). Далее из (3.5), (3.13) при $|\beta| > 0$ имеем при малом T

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j(T, x, \xi) \right)_{(\beta)}^{(\alpha)} = \sum C_{T^s} \left(a^{-\frac{1}{2}}(T, \cdot) \right)_{(\sigma)}^{(\gamma)} \left(\sum \frac{b_j}{b_0}(T, \cdot) \right)_{(\beta-\sigma)}^{(\alpha-\gamma)} \leq \\ \leq C_{\alpha\beta} a^{-\frac{1}{2}}(T, \cdot) T^{s|\beta|} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|} \leq \varepsilon \langle \xi \rangle^{-\frac{1}{2}-p|\alpha|}, \quad (3.19)$$

т. е. (3.18) тоже выполнено.

Итак, из предложения 3.7 вытекает обратимость операторов $U(T)$, Q и справедливость неравенств

$$c_1 \|\Phi\|_s \leq \|U(T)\Phi\|_{s+\frac{1}{2}} \leq c_2 \|\Phi\|_s, \quad (3.20)$$

$$c_3 \|\Phi\|_s \leq \|Q\Phi\|_s \leq c_4 \|\Phi\|_s.$$

Замечание 3.8. Из локальной обратимости эллиптических операторов (см., например, [7], предложение 1.4 главы 2) следует, что обратимость операторов $U(T)$, Q имеет место и в том случае, когда область $]0, T] \times R^n$, в которой рассматривается уравнение (1.1), заменить на $]0, T] \times \Omega$, где Ω — достаточно малая область из R^n , а начальные функции $\Phi_{1,2}$ брать из класса $C_c^\infty(\Omega)$.

Замечание 3.9. Из представления (2.16), неравенств (3.20) и $V(T) \in \Psi_{-\frac{1}{2}}$ вытекает неравенство (1.5) при $k=0$. Действительно

$$\begin{aligned} \|\mu y\|_s &= \|\mu V(t) Q^{-1} \Phi_1 + \mu U(t) U^{-1}(T) (\Phi_2 - V(T) Q^{-1} \Phi_1)\|_s \leq \\ &\leq c (\|\Phi_1\|_{s+\frac{1}{2}} + \|\Phi_2\|_{s+\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

§ 4. Вывод оценок (1.5) при $k=1, 2$

Имеет место

Лемма 4.1. В условиях 1) — 4) для любых $\alpha, \beta \in Z_+^n$ и $(t, x, \xi) \in]0, T] \times R^{2n}$ справедливы неравенства

$$|\partial_t K_{(\beta)}^{(\alpha)}(\tau, t)|, |\partial_t K_1^{(\alpha)}(\beta)(\tau, t)| \leq C_{\alpha\beta} \sqrt{\frac{a(t)}{a(\tau)}} T^{\delta|\beta|} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|}, \quad (4.1)$$

$$|\partial_t (\ln b_0)_{(\beta)}^{(\alpha)}|, |\partial_t (\ln k_0)_{(\beta)}^{(\alpha)}| \leq C_{\alpha\beta} \sqrt{a(t)} T^{\delta|\beta|} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|}, \quad (4.2)$$

$$\left| \left(\frac{\mu b_0}{V a_0} \right)_{(\beta)}^{(\alpha)} \right|, \left| \left(\frac{\mu k_0}{V a_0} \right)_{(\beta)}^{(\alpha)} \right| \leq C_{\alpha\beta} \frac{T^{\delta|\beta|} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|}}{\sqrt{a(t) a_0(t)}}, \quad (4.3)$$

$$\left| \partial_t \left(\frac{b_j}{b_0} \right)_{(\beta)}^{(\alpha)} \right|, \left| \partial_t \left(\frac{k_j}{k_0} \right)_{(\beta)}^{(\alpha)} \right| \leq C_{\alpha\beta} \sqrt{a(t)} T^{\delta(j+|\beta|)} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|}, \quad (4.4)$$

$j = 1, 2, \dots,$

$$\left| \left(\frac{\mu}{V a_0} \partial_t \sum_0^{\infty} b_j \right)_{(\beta)}^{(\alpha)} \right|, \left| \left(\frac{\mu}{V a_0} \partial_t \sum_0^{\infty} k_j \right)_{(\beta)}^{(\alpha)} \right| \leq C_{\alpha\beta} T^{\delta|\beta|} \langle \xi \rangle^{1-p|\alpha|}, \quad (4.5)$$

$$\left| \left(\frac{a}{a_0}(i, \cdot) \right)_{(\beta)}^{(\alpha)} \right| \leq C_{\alpha\beta} T^{\delta|\beta|} \langle \xi \rangle^{2-p|\alpha|}. \quad (4.6)$$

Доказательство. Первая из оценок (4.1) доказывается с помощью формулы (2.13) и неравенств (3.14):

$$\begin{aligned} \partial_t K(\tau, t)_{(\beta)}^{(\alpha)} &= \left(\sqrt{\frac{a(t)}{a(\tau)}} \exp 2 \int_t^\tau \sqrt{a(s)} ds \right)_{(\beta)}^{(\alpha)} \leq \\ &\leq C_{\alpha\beta} \sqrt{\frac{a(t)}{a(\tau)}} T^{\delta|\beta|} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|}. \end{aligned}$$

Вторая — из оценок (4.1) доказывается аналогично с помощью формулы (2.14). Оценки (4.2) вытекают из iii), iv) и (3.14):

$$(\partial_t \ln b_0)_{(\beta)}^{(\alpha)}, (\partial_t \ln k_0)_{(\beta)}^{(\alpha)} \leq \left| \left(\pm \sqrt{a} - \frac{a_t}{4a} \right)_{(\beta)}^{(\alpha)} \right| \leq \\ \leq C_{\alpha\beta} \left(\frac{|p_t|}{p} + \sqrt{a} \right) T^{\delta|\beta|} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|} \leq C_{\alpha\beta} \sqrt{a(t)} T^{\delta|\beta|} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|}.$$

Неравенства (4.3) доказываются с помощью формул

$$\frac{\mu b_0}{\sqrt{a_0}} = \frac{\exp \int_0^t (\sqrt{a} + \sqrt{a_0}) d\tau}{\sqrt{aa_0(t)}}, \quad \frac{\mu k_0}{\sqrt{a_0}} = \frac{\exp \int_0^t (\sqrt{a_0} - \sqrt{a}) d\tau}{\sqrt{aa_0(t)}}$$

и неравенств (3.15).

Первое из неравенств (4.4) докажем индукцией по j . При $j=1$ применением формулы Лейбница и оценок (4.1) имеем

$$\partial_t \left(\frac{b_1}{b_0} \right)_{(\beta)}^{(\alpha)} = \sum C_{\alpha\beta} \int_0^t \partial_t K_{(\beta)}^{(\alpha)} \left(\frac{1}{b_0} \sum_{|p|=1} a^{(p)} D_x^p b_0 - \gamma \right)_{(\beta-s)}^{(\alpha-s)} d\tau \leq \\ \leq C'_{\alpha\beta} \sum \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|} T^{\delta|\beta|} \sqrt{a(t)} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{a(\tau)}} \left| \left(\sum_{|p|=1} \frac{a^{(p)}}{b_0} D_x^p b_0 - \gamma \right)_{(\beta-s)}^{(\alpha-s)} \right| \leq \\ \leq C_{\alpha\beta} \sqrt{a(t)} T^{\delta(|\beta|+1)} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|}.$$

Полагая (4.4)₁ верным при $j=1, \dots, m$ (предположение индукции) имеем из (2.2), (2.11) и формулы Лейбница

$$\partial_t \left(\frac{b_{m+1}}{b_0} \right)_{(\beta)}^{(\alpha)} = \sum C_{\alpha\beta} \int_0^t K_{(\beta)}^{(\alpha)} \left(\sum_{1 \leq |p| \leq m+1} \left(\frac{a^{(p)}}{p! b_0} D_x^p b_{m+1-|p|} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{b_m}{b_0} \gamma \right)_{(\beta-s)}^{(\alpha-s)} d\tau \leq C_{\alpha\beta} \sqrt{a(t)} \sum \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|} T^{\delta|\beta|} \times \right. \\ \times \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{a(\tau)}} \left| \left(\sum \frac{a^{(p)}}{p! b_0} D_x^p b_{m+1-|p|} - \frac{b_m}{b_0} \gamma \right)_{(\beta-s)}^{(\alpha-s)} \right| \leq C_{\alpha\beta} \sqrt{a(t)} \times \\ \times T^{\delta(m+1+|\beta|)} \langle \xi \rangle^{-p|\alpha|}.$$

Оценки (4.4)₂ доказываются аналогично.

Из оценок (4.5) мы, как обычно, докажем только первую, используя неравенства (4.3), (4.4):

$$\left(\frac{\mu}{\sqrt{a_0}} \partial_t \sum_0^{\infty} b_j \right)_{(\beta)}^{(\alpha)} = \left(\frac{\mu b_0}{\sqrt{a_0}} \partial_t \sum_0^{\infty} \frac{b_j}{b_0} + \frac{\mu b_{0t}}{b_0 \sqrt{a_0}} \sum_0^{\infty} b_j \right)_{(\beta)}^{(\alpha)} =$$

$$= \sum C_{\alpha\beta} \left\{ \left(\frac{\mu b_0}{V a_0} \right)_{(\beta-\alpha)}^{(\alpha-\alpha)} \left(\partial_t \sum_0^\infty \frac{b_f}{b_0} \right)_{(\alpha)}^{(\alpha)} + \left(\frac{b_{0t}}{b_0} \right)_{(\alpha)}^{(\alpha)} \left(\frac{\mu b_0}{V a_0} \sum_0^\infty \frac{b_f}{b_0} \right)_{(\beta-\alpha)}^{(\alpha-\alpha)} \right\} \leq \\ \leq C_{\alpha\beta} T^{\beta|\beta|} \langle \xi \rangle^{-\beta|\alpha|} \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{a_0}} \leq C_{\alpha\beta} T^{\beta|\beta|} \langle \xi \rangle^{\frac{1}{2}-\beta|\alpha|}.$$

Наконец, неравенства (4.6) выводятся с помощью (3.2)

$$\left(\frac{a}{a_0} \right)_{(\beta)}^{(\alpha)} = \frac{a}{a_0} \sum p_{\alpha\beta} (\ln a - \ln a_0)_{(\beta_1)}^{(\alpha_1)} \cdots (\ln a - \ln a_0)_{(\beta_s)}^{(\alpha_s)} \leq C_{\alpha\beta} T^{\beta|\beta|} \times \\ \times \langle \xi \rangle^{2-\beta|\alpha|}.$$

Из неравенств (4.6), определения класса Ψ_p^m и теоремы об ограниченности ПДО класса Ψ_p^m в пространствах Соболева (см., например, [8], теорема 3.1) вытекает

Следствие 4.2. В условиях i)–iV) ПД операторы

$$\frac{\mu}{V a_0} U_t(t), \quad \frac{\mu}{V a_0} V_t(t)$$

принадлежат классу $\Psi_{\frac{1}{2}}$ и имеют место оценки

$$\left\| \frac{\mu}{V a_0} U_t(t) \Phi \right\|, \left\| \frac{\mu}{V a_0} V_t(t) \Phi \right\| \leq c \left\| \Phi \right\|_{s+\frac{1}{2}}. \quad (4.8)$$

Перейдем к доказательству оценок (1.5) при $k=1, 2$.

Дифференцируя соотношение (2.16) по t получим

$$y_t = V_t(t) Q^{-1} \Phi_1 + U_t(t) U^{-1}(T) (\Phi_2 - V(T) Q^{-1} \Phi_1),$$

откуда, применяя оценки (4.8) и (3.20) получаем неравенство (1.5) при $k=1$:

$$\left\| \frac{\mu}{V a_0} y_t \right\|_s \leq c \left(\left\| \Phi_1 \right\|_{s-\frac{1}{2}} + \left\| \Phi_2 \right\|_{s+1} \right).$$

Оценку (1.5) при $k=2$ выводим с помощью уравнения (1.1) и неравенств (4.6):

$$\left\| \frac{\mu}{a_0} y_{tt} \right\|_s = \left\| \frac{\mu}{a_0} A y \right\|_s \leq \left\| \frac{\mu}{a_0} A \mu^{-1} \right\|_{-2} \cdot \left\| \mu y \right\|_{s+2} \leq \\ \leq c \left\| \mu y \right\|_{s+2} \leq c \left(\left\| \Phi_1 \right\|_{s+2} + \left\| \Phi_2 \right\|_{s+\frac{5}{2}} \right).$$

Итак, оценки (1.5), а с ними и теорема, доказаны.

Чтобы проиллюстрировать появление весовой функции μ в задаче Дирихле (1.2) решим сингулярную модельную задачу Дирихле в круге

$$D = \{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 < R\}, \quad r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}, \\ u_{xx} + u_{yy} = q(r) u(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad q(R-0) = \infty, \quad (4.9)$$

$$\lim_{r \rightarrow R-0} (\mu_0(r) u) = f(\varphi) \in C^2[0, 2\pi], \quad (4.10)$$

где

$$u_0(r) = \sqrt[4]{q_0(r)} \exp \int_r^0 \sqrt[4]{V q_0(s)} ds, \quad q_0 \equiv q(r) - \frac{1}{4r^2}. \quad (4.11)$$

Переходя к полярным координатам r, φ ($x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$) уравнение (4.9) запишем в виде

$$u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2} = q(r) u. \quad (4.12)$$

Подставляя решения вида

$$u(r, \varphi) = M(r) B(\varphi)$$

в (4.12) (метод разделения переменных) получаем

$$\frac{r^2 M''(r)}{M(r)} + \frac{r M'(r)}{M(r)} - r^2 q(r) = - \frac{B''(\varphi)}{B(\varphi)} = \lambda = \text{const.} \quad (4.13)$$

Уравнение $B''(\varphi) = \lambda B(\varphi)$ имеет общее решение

$$B(\varphi) = a_n \sin \varphi \sqrt{\lambda} + b_n \cos \varphi \sqrt{\lambda},$$

где из периодичности $B(\varphi)$ с периодом 2π следует, что $\lambda = n^2, n \in \mathbb{Z}_+$.

Уравнение

$$M'''(r) + \frac{M'(r)}{r} = q_n(r) M(r), \quad q_n \equiv n^2 + q(r) - \frac{1}{4r^2} \quad (4.14)$$

заменой $M(r) = r^{-\frac{1}{2}} v(r)$ сводится к

$$v''(r) = q_n(r) v(r). \quad (4.15)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$v(r) = C_1 v_1(r) + C_2 v_2(r), \quad (4.16)$$

где в условиях ВКБ-леммы (см. [9])

$$\begin{aligned} 1). \quad q(r) &> \frac{1}{4R^2}, & 2). \quad \int_0^R \sqrt[4]{V q(p)} dp &= \infty, \\ 3). \quad q(r) &\in C^2[0, R], & 4). \quad \frac{q_n'(r)}{8q_n^{3/2}} - \frac{5(q_n')^2}{32q_n^{5/2}} &\in L_1[\varepsilon, R], \quad \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

имеем

$$v_1(r) = (1 + \varepsilon_1(r)) q_n^{-\frac{1}{4}}(r) \exp \left\{ \int_0^r \sqrt[4]{V q_n} ds + \int_0^R (V q_0 - V q_n) ds \right\}, \quad (4.17)$$

$$v_2(r) = (1 + \varepsilon_2(r)) q_n^{-\frac{1}{4}}(r) \exp \left(- \int_0^r \sqrt[4]{V q_n(s)} ds \right),$$

$$\lim_{r \rightarrow R-0} \varepsilon_{1,2}(r) = 0,$$

причем $v_1(r)$ стремится к бесконечности, а $v_2(r)$ стремится к нулю при $r \rightarrow R-0$.

Итак

$$\lim_{r \rightarrow R-0} u_0 v = C_1 \lim_{r \rightarrow R-0} \left\{ \left(\frac{q_0}{q} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \int_R^r (V\bar{q} - V\bar{q}_0) ds \right\} = C_1. \quad (4.18)$$

Решение $v_1(r)$ можно гладко продолжить вплоть до $r=0$ так, чтобы $v_1(0)=0$. Продолжая $v_2(r)$ до $r=0$ получим, что $r^{-\frac{1}{2}} v_2(r) \sim \ln r$ стремится к бесконечности при $r \rightarrow 0$, т. е. $M(r)$ неограниченно при $r=0$. Выбрасывая это сингулярное при $r=0$ решение получим

$$u(t, x) = \frac{a_0 v_{10}}{2\sqrt{r}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_{1k}(r)}{\sqrt{r}} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \quad (4.19)$$

Из краевого условия (4.10) и (4.18) получаем

$$\lim_{r \rightarrow R-0} u = R^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \right) = f(\varphi). \quad (4.20)$$

откуда коэффициенты Фурье a_k, b_k находятся обычным способом.

Институт математики

АН Армении

Поступила 5. II. 1988

Գ. Ռ. ՂՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Կշռային Դիրիլեի խնդրի մասին երկրորդ կարգի սինգուլյար էլիպտիկական հավասարումների համար (ամփոփում)

Վերնագրում նշված խնդիրների համար ապացուցվում է լուծման գոյությունը Սորելի տարածություններում: Որպես կշռային ֆունկցիա օգտագործվում է ՎԿԲ-ի ասիմպտոտիկայի առաջին մոտարկումը:

G. R. OGANE SIAN. *Weighted Dirichlet problems for the second order singular elliptic equations* (summary)

In the paper the solvability in the Sobolev space of the weighted Dirichlet problem for a singular on the boundary elliptic second order equation is proved.

As the weight function the first approximation of the JWKB-asymptotic (Green—Liouville function) is used.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Келдыш. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области, ДАН СССР, 77, № 2, 181—183.
2. А. В. Бицадзе. Уравнения смешанного типа, М., ВИНТИ, 1959.
3. И. А. Киприянов. О краевых задачах для уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя, ДАН СССР, 158, № 2, 1964, 275—278.
4. С. А. Терсенов. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе, Новосибирск, НГУ, 1973.
5. С. Руткаускас. Задача типа Дирихле для эллиптического уравнения с сингулярностью во внутренней точке области, Сообщения АН ГССР, 121, № 1, 1986, 21—23.
6. Г. Р. Оганесян. О весовых задачах Коши и Дирихле для некоторых сингулярных на границе уравнений в частных производных, Изв. АН Армении, сер. матем., 23, № 1, 1988, 3—21.
7. Ф. Трев. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье, М., Мир, 1984, т. I.
8. В. В. Грушин. Псевдодифференциальные операторы в R^n с ограниченными символами, Функци. анализ и его прилож., 1970, 4, № 3, 37—50.
9. Ф. Хартман. Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Мир, 1970.

УДК 517.95

А. О. ОГАНЕСЯН

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ЛАГНЕЗА—ШТЕЛЬМАХЕРА
НА ОДИН КЛАСС УРАВНЕНИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ
ПРИНЦИПУ ГЮЙГЕНСА

Рассмотрим строго гиперболическое уравнение вида

$$L_n(u) \equiv u_{tt} - u_{xx} - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(t-x) u_{y_i y_j} + c(t, x, y) u = 0 \quad (1)$$

$$(t, x, y) \in D \subseteq R^{n+2},$$

где $a^{ij}(t-x)$, $c(t, x, y)$ — достаточно гладкие функции.

Известно [1], [2], что при $c \equiv 0$ и n четном уравнение (1) удовлетворяет принципу Гюйгенса, что означает существование заднего фронта волны, вызванной локализованным в пространстве и во времени источником (принцип Гюйгенса в «узком смысле» [3]). В предлагаемой работе приводится алгоритм построения уравнений вида (1) со специально подобранными функциями $a^{ij}(t, x, y)$ и n четном, которые удовлетворяют принципу Гюйгенса. Случай постоянных коэффициентов $a^{ij}(t, j=1, \dots, n)$ рассмотрен в [4].

§ 1. Фундаментальное решение по Адамару и принцип Гюйгенса

Пусть $(t_0, x_0, y_0) \in D$ — произвольная фиксированная точка, а Γ — квадрат геодезического расстояния между точками (t, x, y) и (t_0, x_0, y_0) в римановом пространстве с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t-x) dy_i dy_j,$$

где матрица $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ является обратной к матрице $A = \|a^{ij}\|_{i,j=1}^n$. Фундаментальное решение для уравнения (1) имеет вид [3]

$$u(t, x, y; t_0, x_0, y_0) = V(t, x, y; t_0, x_0, y_0) \Gamma^{-\frac{n}{2}} + \\ + W(t, x, y; t_0, x_0, y_0) \ln \Gamma + R, \quad (2)$$

где

$$V = \sum_{\nu=0}^{\frac{n}{2}-1} U_{\nu}(t, x, y; t_0, x_0, y_0) \Gamma^{\nu},$$

$$W = \sum_{\nu=\frac{n}{2}}^{\infty} U_{\nu}(t, x, y; t_0, x_0, y_0) \Gamma^{\nu-\frac{n}{2}};$$

$U, (\nu=0, 1, \dots), R$ — достаточно гладкие функции. При этом функция W является решением задачи Гурса для уравнения (1) с данными на обратном характеристическом коноиде

$$\Gamma(t, x, y; t_0, x_0, y_0) = 0 \quad (3)$$

с вершиной в точке (t_0, x_0, y_0) .

Известно [3], что уравнение (1) удовлетворяет принципу Гюйгенса тогда и только тогда, когда для любой точки $(t_0, x_0, y_0) \in D$

$$W(t, x, y; t_0, x_0, y_0) \equiv 0$$

внутри коноида (3). Это условие, в силу того, что W является решением задачи Гурса для однородного уравнения (1), эквивалентно условию

$$\left. W \right|_{\Gamma=0} = \left. U \right|_{\frac{n}{2}\Gamma=0} = 0. \quad (4)$$

Квадрат геодезического расстояния Γ считается по формуле [5]

$$\Gamma = (t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(t-x, t_0-x_0)(y_i - y_{0i})(y_j - y_{0j}),$$

где матрица $\|A_{ij}\|_{i,j=1}^n$ является обратной к матрице $\|A^{ij}\|_{i,j=1}^n$, а

$$A^{ij}(t-x, t_0-x_0) = \frac{1}{(t-x) - (t_0-x_0)} \int_{t_0-x_0}^{t-x} a^{ij}(\sigma) d\sigma.$$

Для определения функций $U, (\nu=0, 1, \dots)$ найдем сначала геодезические кривые. Пусть

$$H(t, x, y; \tau, \xi, \eta) = \tau^2 - \xi^2 - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(t-x) \eta_i \eta_j.$$

Задача Коши, из которой определяются геодезические кривые, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \tau, \quad \frac{dx}{ds} = -\xi, \\ \frac{dy_i}{ds} &= -\sum_{j=1}^n a^{ij}(t-x) \eta_j, \quad i=1, \dots, n, \\ \frac{d\tau}{ds} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a^{ij'}(t-x) \eta_i \eta_j, \\ \frac{d\xi}{ds} &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a^{ij'}(t-x) \eta_i \eta_j, \\ \frac{d\eta_i}{ds} &= 0, \quad i=1, \dots, n, \end{aligned} \quad (5)$$

$$t|_{s=0} = t_0, \quad x|_{s=0} = x_0, \quad y_i|_{s=0} = y_{0i}, \quad i=1, \dots, n,$$

$$\tau|_{s=0} = \tau_0, \quad \xi|_{s=0} = \xi_0, \quad \eta_i|_{s=0} = \eta_{0i}, \quad i=1, \dots, n,$$

где τ_0, ξ_0, η_{0i} — заданные числа. Отсюда

$$t - x = t_0 - x_0 + (\tau_0 + \xi_0) s, \quad (6)$$

$$y_i = y_{0i} - s \sum_{j=1}^n A^{ij} (t - x, t_0 - x_0) \eta_{0j}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Подставив функцию u в уравнение (1) и приравняв к нулю коэффициенты при отрицательных степенях Γ и $\ln \Gamma$, получим

$$2 \left(\frac{\partial U_0}{\partial t} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \frac{\partial U_0}{\partial x} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} - \sum_{i,j=1}^n a^{ij} (t-x) \frac{\partial U_0}{\partial y_i} \frac{\partial \Gamma}{\partial y_j} \right) + \\ + \left[M - \left(\frac{n}{2} + 1 \right) 4 \right] U_0 = 0, \quad (8)$$

$$2 \left(\nu - \frac{n}{2} \right) \left[\frac{\partial U_\nu}{\partial t} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \frac{\partial U_\nu}{\partial x} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} - \sum_{i,j=1}^n a^{ij} (t-x) \frac{\partial U_\nu}{\partial y_i} \frac{\partial \Gamma}{\partial y_j} \right] - \\ + \left(\nu - \frac{n}{2} \right) \left[M + \left(\nu - \frac{n}{2} - 1 \right) 4 \right] U_\nu = -L_n(U_{\nu-1}), \quad \nu = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1, \quad (9)$$

$$L_n(W) = 0, \quad (10)$$

$$2 \left[\frac{\partial W}{\partial t} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} - \sum_{i,j=1}^n a^{ij} (t-x) \frac{\partial W}{\partial y_i} \frac{\partial \Gamma}{\partial y_j} \right] + \\ + (M - 4) W = -L_n(U_{\frac{n}{2}-1}), \quad (11)$$

где $M = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} - \sum a^{ij} (t-x) \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y_i \partial y_j}$. Легко видеть, что M зависит только от $(t-x)$.

Пусть $U_{\frac{n}{2}}$ — решение уравнения (11), а $N > \frac{n}{2}$ — произвольное целое число. Рассмотрим функцию

$$W_N = \sum_{\nu=\frac{n}{2}}^N U_\nu \Gamma^{\nu-\frac{n}{2}},$$

где U_ν — являются решениями тех же уравнений (9) для $\nu = \frac{n}{2} + 1, \dots, N$. Тогда в результате действия оператора L_n на функцию

$$u_N = \sum_{\nu=0}^{\frac{n}{2}-1} U_\nu \Gamma^{\nu-\frac{n}{2}} + \sum_{\nu=\frac{n}{2}}^N U_\nu \Gamma^{\nu-\frac{n}{2}} \ln \Gamma$$

получается функция $f_N(t, x, y)$, гладкость которой растет с увеличением N . Поэтому решение уравнения (1), имеющее особенности на поверхности коноида (3), можно записать в виде

$$u = \sum_{\nu=0}^{\frac{n}{2}-1} U_\nu \Gamma^{\nu-\frac{n}{2}} + \sum_{\nu=\frac{n}{2}}^N U_\nu \Gamma^{\nu-\frac{n}{2}} \ln \Gamma + R_N,$$

где R_N — достаточно гладкое решение уравнения

$$L_n(R_N) = -f_N.$$

В силу произвольности N функцию U символически можно записать в виде

$$u = \sum_{\nu=0}^{\frac{n}{2}-1} U_\nu \Gamma^{\nu-\frac{n}{2}} + \sum_{\nu=\frac{n}{2}}^{\infty} U_\nu \Gamma^{\nu-\frac{n}{2}} \ln \Gamma + R$$

и называть параметризмом (асимптотическим по гладкости решением) по Адамару уравнения (1). В случае сходимости ряда функция u является фундаментальным решением по Адамару.

Преобразуем уравнения (8), (9), (11). Известно [3], что

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = 2s\tau, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial x} = 2s\xi, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial y_i} = 2s\eta_i, \quad i=1, \dots, n$$

или с учетом уравнений (5)

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = 2s \frac{dt}{ds}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial x} = -2s \frac{dx}{ds}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial y_i} = -2s \sum_{l,j=1}^n a_{lj} (t-x) \frac{dy_l}{ds}.$$

Поэтому уравнения (8), (9), (11) можно записать в виде

$$\begin{aligned} 4s \frac{dU_0}{ds} + \left[M - \left(\frac{n}{2} + 1 \right) 4 \right] U_0 &= 0, \\ 4s \frac{dU_\nu}{ds} + \left[M + \left(\nu - \frac{n}{2} - 1 \right) 4 \right] U_\nu &= - \frac{1}{\left(\nu - \frac{n}{2} \right)} L_n(U_{\nu-1}), \\ \nu &= 1, \dots, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1, \dots, N, \\ 4s \frac{dU_{\frac{n}{2}}}{ds} + [M - 4] U_{\frac{n}{2}} &= - L_n(U_{\frac{n}{2}-1}). \end{aligned}$$

Отсюда

$$U_0 = c_0 \exp \left[- \int_0^s \frac{1}{4\sigma} \left[M - \left(\frac{n}{2} + 1 \right) 4 \right] d\sigma \right], \quad (12)$$

$$U_\nu = - \frac{U_0}{4 \left(\nu - \frac{n}{2} \right) s^\nu} \int_0^s \frac{\sigma^{\nu-1} L_n(U_{\nu-1})}{U_0} d\sigma, \quad (13)$$

$$\nu = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1, \dots, N,$$

$$U_{\frac{n}{2}} = - \frac{U_0}{4s^{\frac{n}{2}}} \int_0^s \frac{\sigma^{\frac{n}{2}-1} L_n(U_{\frac{n}{2}-1})}{U_0} d\sigma. \quad (14)$$

Так как $M = M(t-x)$, то из (6) и (12) следует, что $U_0 = U_0(t-x, t_0-x_0)$.

§ 2. Преобразование Лагнеза—Штельмахера

Процесс построения последовательности операторов, удовлетворяющих принципу Гюйгенса, опишем на модельном уравнении

$$L_{1n}(u) \equiv u_{tt} - u_{xx} - \sum_{i=1}^n a^i(t-x) u_{y_i y_i} + c(t-x) b(y_1) u = 0. \quad (15)$$

Коэффициенты фундаментального решения и функции M , W для уравнения (15) обозначим соответственно U_{1v} ($v = 0, 1, \dots$), M_1 , W_1 . Из формул (6), (7), (13), (14), записанных для оператора L_{1n} следует, что $U_{1v} = U_{1v}(t-x, y_1; t_0-x_0, y_{01})$ ($v = 1, 2, \dots$).

Рассмотрим оператор $L_{1(n+2)}$ с соответствующими функциями M'_1 , U'_{1v} ($v = 0, 1, \dots$). Имеем

$$\begin{aligned} U'_{10} &= c'_0 \exp \left[- \int_0^s \frac{1}{4\sigma} \left[M'_1 - \left(\frac{n+2}{2} + 1 \right) 4 \right] d\sigma \right] = \\ &= c'_0 \exp \left[- \int_0^s \frac{1}{4\sigma} \left[M_1 - \left(\frac{n}{2} + 1 \right) 4 \right] d\sigma - \int_0^s \frac{1}{4\sigma} \left(2 \sum_{i=n+1}^{n+2} a^i A_i - 4 \right) d\sigma \right] = \\ &= U_{10}(t-x, t_0-x_0) g(t-x, t_0-x_0), \end{aligned}$$

где

$$g(t-x, t_0-x_0) = \frac{c'_0}{c_0} \exp \left[- \int_0^s \frac{1}{2\sigma} \left(\sum_{i=n+1}^{n+2} a^i A_i - 2 \right) d\sigma \right]. \quad (16)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} L_{1(n+2)}[g(t-x, t_0-x_0) \Phi(t-x, y_1; t_0-x_0, y_{01})] &= \\ = g(t-x, t_0-x_0) L_{1(n+2)}[\Phi(t-x, y_1; t_0-x_0, y_{01})] &= g L_n[\Phi]. \end{aligned}$$

Поэтому, например, для функции U'_{11} получаем

$$\begin{aligned} U'_{11} &= - \frac{U'_{10}}{4 \left(1 - \frac{n+2}{2} \right) s} \int_0^s \frac{L_{1(n+2)}(U'_{10})}{U'_{10}} d\sigma = \\ &= - \frac{g U_{10}}{4 \left(1 - \frac{n+2}{2} \right) s} \int_0^s \frac{g(L_{1n}(U'_{10}))}{g U_{10}} d\sigma = \frac{\left(1 - \frac{n}{2} \right)}{\left(1 - \frac{n+2}{2} \right)} g U_{11}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом легко доказать, что

$$U'_{1\nu} = \alpha_\nu g U_{1\nu}, \quad \alpha_\nu = \frac{\left(1 - \frac{n}{2}\right) \cdots \left(\nu - \frac{n}{2}\right)}{\left(1 - \frac{n+2}{2}\right) \cdots \left(\nu - \frac{n+2}{2}\right)}, \quad \nu = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1,$$

и вообще из формул (12)–(14) следует

Лемма 1. Пусть операторы L_{1n} и $L_{1(n+2)}$ имеют вид (15).

Тогда

$$U'_{1\nu} = \alpha_\nu g U_{1\nu}, \quad \nu = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1, \quad (\alpha_0 \equiv 1),$$

$$U'_{1\frac{n}{2}} = \frac{\alpha_{\frac{n}{2}-1}}{\left(\frac{n}{2} - \frac{n+2}{2}\right)} U_{1\frac{n}{2}}, \quad U'_{1\frac{n+2}{2}} = \alpha_{\frac{n}{2}-1} g U_{1\frac{n+2}{2}},$$

$$U'_{1\nu} = \beta_\nu g U_{1\nu}, \quad \beta_\nu = \alpha_{\frac{n}{2}-1} \frac{\left(\frac{n+4}{2} - \frac{n}{2}\right) \cdots \left(\nu - \frac{n}{2}\right)}{\left(\frac{n+4}{2} - \frac{n+2}{2}\right) \cdots \left(\nu - \frac{n+2}{2}\right)},$$

$$\nu = \frac{n+4}{2}, \dots,$$

где функция $g = g(t-x, t_0-x_0)$ определяется по формуле (16).

Пусть в уравнении (15) $c(t-x) = a^1(t-x)$. Рассмотрим оператор $l_{y_1} = \frac{\partial}{\partial y_1} + d(y_1)$ и выберем функцию $d(y_1)$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$L_{11} = P_{n-1} + a^1(t-x) l_{y_1}^* l_{y_1}, \quad (18)$$

где

$$P_{n-1} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sum_{i=1}^n a^i(t-x) \frac{\partial^2}{\partial y_i^2},$$

$$l_{y_1}^* = -\frac{\partial}{\partial y_1} + d(y_1).$$

Для этого достаточно, чтобы функция $d(y_1)$ удовлетворяла бы уравнению

$$d' - d^2 = -b.$$

Если $d(y_1)$ искать в виде $d = -\frac{\mu'}{\mu}$, то для функции μ получим

$$\mu'' - b\mu = 0. \quad (19)$$

Рассмотрим оператор

$$\tilde{L}_{1n} = P_{n-1} + a^1 l_{y_1} l_{y_1}^*, \quad (20)$$

Соответствие $L_{1n} \rightarrow \tilde{L}_{1n}$ называется преобразованием Лагнеза—Штельмахера.

Пусть фундаментальное решение для оператора $\tilde{L}_{1n}$ имеет вид

$$\tilde{u} = \tilde{V} \Gamma^{-\frac{n}{2}} + \tilde{W} \ln \Gamma + \tilde{R}.$$

Лемма 2. Пусть $l_{yn} = \frac{\partial}{\partial y_0} + d(y_0)$. Имеет место соотношение

$$l_{yn} W_1(t-x, y_1; t_0-x_0, y_0, \Gamma) = l_{y_1} \tilde{W}(t-x, y_1; t_0-x_0, y_0, \Gamma), \quad (21)$$

где $(t_0, x_0, y_0) \in D$, $(t, x, y) \in D$ и лежит в коноиде (3).

Доказательство. Пусть Ω — область, ограниченная коноидом (3) и гиперплоскостью $t=t^*$, а $f \in C_0^\infty(\Omega)$ — произвольная функция. Тогда решение задачи

$$\begin{aligned} L_{1n} u &= f, \\ u|_{t=t^*} &= 0, \\ u_t|_{t=t^*} &= 0 \end{aligned}$$

записывается в виде [3]

$$u(t_0, x_0, y_0) = \tilde{\alpha}_n \int_{\Omega} W_1 f dt dx dy,$$

$$\text{где } \tilde{\alpha}_n = \frac{\left(\frac{n+2}{2} - 2\right)! (-1)^{\frac{n+2}{2}}}{2\pi \left(\frac{n+2}{2} - 1\right)}. \quad \text{Отсюда}$$

$$l_{yn} u(t_0, x_0, y_0) = \tilde{\alpha}_n \int_{\Omega} l_{y_1} \tilde{W} f dt dx dy. \quad (22)$$

Из определения оператора $\tilde{L}_{1n}$ легко получить равенство

$$l_{y_1} L_{1n} = \tilde{L}_{1n} l_{y_1}.$$

Повтому функция $l_{y_1} u$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{1n} v &= l_{y_1} f, \\ v|_{t=t^*} &= 0, \\ v_t|_{t=t^*} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$l_{y_1} u(t_0, x_0, y_0) = \tilde{\alpha}_n \int_{\Omega} \tilde{W} l_{y_1} f dt dx dy = \tilde{\alpha}_n \int_{\Omega} \tilde{W} f dt dx dy. \quad (23)$$

Сравнивая (22) и (23) получаем утверждение леммы.

Сформулируем и докажем основной результат работы для уравнений типа (15).

Теорема 1. Пусть оператор $\bar{L}_{1n}$ определяется по формуле (20). Тогда, если L_{1n} удовлетворяет принципу Гюйгенса, то $\bar{L}_{1(n+2)}$ тоже удовлетворяет принципу Гюйгенса.

Доказательство. Так как оператор $\bar{L}_{1n}$ удовлетворяет принципу Гюйгенса, то согласно (4) $U_{\frac{n}{2}}|_{\Gamma=0} = 0$. Учитывая, что $U_{\frac{n}{2}}$ зависит только от переменных $t-x$, y_1 , получаем, что $U_{\frac{n}{2}} \equiv 0$. Отсюда

и из (13) следует, что $U_{1v} \equiv 0$, $v = \frac{n}{2} + 1, \dots$. Следовательно $W \equiv 0$.

Из леммы 2 получаем

$$l_{y_1}^* \tilde{W} = 0. \quad (24)$$

Функция $\tilde{W}$ является решением уравнения

$$\bar{L}_{1n} \tilde{W} = 0. \quad (25)$$

Из (20), (24), (25) следует, что $\tilde{W}$ удовлетворяет уравнению

$$P_{n-1} \tilde{W} = 0.$$

С другой стороны

$$\tilde{W} = \sum_{v=-\frac{n}{2}}^{\infty} \tilde{U}_{1v}(t-x, y_1; t_0-x_0, y_{01}) \Gamma^{v-\frac{n}{2}},$$

где $\tilde{U}_{1v}$ ($v = \frac{n}{2}, \dots$) определяются по формулам, аналогичным (13).

(14) для оператора $\bar{\Gamma}_{1n}$. Запишем функцию $\tilde{W}$ в виде

$$\tilde{W} = \sum_{v=0}^{\infty} V_v(t-x, y_1; t_0-x_0, y_{01}) \bar{\Gamma}^v,$$

где $\bar{\Gamma} = \Gamma + a^1(t-x)(y_1-y_{01})^2$, а V_v ($v=0, 1, \dots$) достаточно гладкие функции. Заметим, что $P_{n-1}(V_v) \equiv 0$ ($v=0, 1, \dots$). Подставляя

$\tilde{W}$ в уравнение (26) и приравнявая к нулю коэффициенты при различных степенях $\bar{\Gamma}$, получим

$$2 \left[\frac{\partial V_v}{\partial t} \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial t} - \frac{\partial V_v}{\partial x} \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x} - \sum_{i=2}^n a^i(t-x) \frac{\partial V_v}{\partial y_i} \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial y_i} \right] + \\ + [\bar{M} + 4(v-1)] V_v = 0, \quad v = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\tilde{M} = \frac{\partial^2 \tilde{\Gamma}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\Gamma}}{\partial x^2} - \sum_{i=1}^n a^i(t-x) \frac{\partial^2 \tilde{\Gamma}}{\partial y_i^2}$. Это уравнение можно записать в виде

$$4s \frac{dV_s}{ds} + [\tilde{M} + 4(\nu - 1)] V_s = 0,$$

где s —параметр на геодезических кривых, определяемых оператором P_{n-1} . Так как $\tilde{M} \rightarrow 2(n+1)$ при $s \rightarrow 0$, то единственным гладким решением этого уравнения является $V_s \equiv 0$, $\nu = 1, \dots$. Таким образом $\tilde{W} = V_0(t-x, y_1; t_0-x_0, y_{01})$ и не зависит от $\tilde{\Gamma}$. Поэтому из (27) следует, что $\tilde{W} = U_{\frac{n}{2}}(t-x, y_1; t_0-x_0, y_{01})$ и $\tilde{U}_\nu \equiv 0$, $\nu = \frac{n+2}{2}, \dots$

Из соотношений (17), записанных для операторов $\tilde{L}_{1n}$ и $\tilde{L}_{1(n+1)}$ получаем

$$\tilde{U}_{1\nu} \equiv_g \tilde{U}_{1\nu} \equiv 0, \quad \nu = \frac{n+2}{2}, \dots,$$

что означает, согласно (4), выполнение принципа Гюйгенса для оператора $\tilde{L}_{1(n+2)}$. Теорема доказана.

§ 3. О некоторых обобщениях теоремы 1 и примеры

Методом, изложенным в § 2, можно строить преобразования Лагнеза—Штельмахера относительно любой из переменных $y_1, \dots, y_n$ с помощью операторов $l_{y_k} = \frac{\partial}{\partial y_k} + d_k(y_k)$ ($k = 1, \dots, n$) и получать уравнения вида

$$L_{kn}(u) \equiv u_{tt} - u_{xx} - \sum_{i=1}^n a^i(t-x) u_{y_i y_i} + c_k(t-x) b_k(y_k) u = 0,$$

удовлетворяющие принципу Гюйгенса. Так как операторы l_{y_k} и l_{y_m} ($k, m = 1, \dots, n$) коммутируют, то применяя преобразования Лагнеза—Штельмахера p_1 раз с помощью операторов типа l_{y_1} , p_2 раза с помощью операторов типа l_{y_2} и т. д., можно строить уравнения типа

$$L_{pn}(u) \equiv u_{tt} - u_{xx} - \sum_{i=1}^n a^i(t-x) u_{y_i y_i} + \sum_{i=1}^p c_i(t-x) b_i(y_i) u = 0,$$

удовлетворяющие принципу Гюйгенса.

В общем случае для построения преобразования Лагнеза—Штельмахера, надо уравнение (1) невырожденным преобразованием

$$z_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t-x) y_j, \quad i = 1, \dots, n$$

привести к виду

$$L_n(u) \equiv u_{tt} - u_{xx} - \sum_{i=1}^n \alpha^i (t-x) u_{x_i x_i} + c(t, x, z) u = 0,$$

где $\alpha^i > 0$. Это возможно в силу строгой гиперболичности уравнения (1). Пусть при этом

$$c(t, x, z) = \sum_{k=1}^n \alpha^k (t-x) b_k(z_k).$$

Рассмотрим операторы $l_{z_k} = \frac{\partial}{\partial z_k} + d_k(z_k)$ ($k=1, \dots, n$), где функции $d_k(z_k)$ удовлетворяют уравнению

$$d_k' - d_k^2 = -b_k.$$

Допустим, что для некоторого оператора l_{z_k} ($1 \leq k \leq n$) выполняется соотношение

$$\left[l_{z_k}, \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] = \beta_k (t-x) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) l_{z_k}.$$

Тогда для оператора

$$L_{kn} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sum_{i=1}^n \alpha^i (t-x) \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} + \alpha^k (t-x) b_k(z_k)$$

оператор $\bar{L}_{kn}$ строится по формуле

$$\begin{aligned} \bar{L}_{kn} = & \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sum_{i=1}^n \alpha^i (t-x) \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} + \beta_k (t-x) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) + \\ & + \alpha^k (t-x) l_{z_k} l_{z_k}^*. \end{aligned}$$

Методом, изложенным в § 2, доказывается, что, если L_{kn} удовлетворяет принципу Гюйгенса, то $\bar{L}_{k(n+2)}$ тоже удовлетворяет принципу Гюйгенса. От членов первого порядка в уравнении

$$\bar{L}_{kn}(u) = 0$$

можно избавиться заменой неизвестной функции

$$u = v \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^{t-x} \beta_k(\sigma) d\sigma \right],$$

относительно которой принцип Гюйгенса инвариантен.

Рассмотрим несколько примеров. Оператор

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sum_{i=1}^2 \alpha^i (t-x) \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}$$

удовлетворяет принципу Гюйгенса. Здесь $b=0$ и из уравнения (19)

$$\text{получаем, что } \mu = \alpha y_1 + \beta. \text{ Следовательно } d = -\frac{\alpha}{\alpha y_1 + \beta} = -\frac{1}{y_1 + \frac{\beta}{\alpha}}.$$

Пусть $\beta=0$, тогда $l_{y_1} = \frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{1}{y_1}$ и по формуле (20)

$$\bar{L}_2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - a^2(t-x) \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + a^1(t-x) \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{1}{y_1} \right) \times \\ \times \left(-\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{1}{y_1} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sum_{i=1}^2 a^i(t-x) \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{2a^1(t-x)}{y_1^2}.$$

Согласно теореме 1 оператор

$$\tilde{L}_4 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sum_{i=1}^4 a^i(t-x) \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{2a^1(t-x)}{y_1^2}$$

удовлетворяет принципу Гюйгенса. Обозначим $L_4 = \tilde{L}_4$ и построим оператор $\tilde{L}_0$. Имеем $b = \frac{2}{y_1^2}$ и

$$\mu'' - \frac{2}{y_1^2} \mu = 0.$$

Отсюда $\mu = \alpha y_1^2 + \beta y_1^{-1}$. Если взять $\alpha = 1$, $\beta = 0$, то

$$\tilde{L}_0 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sum_{i=1}^6 a^i(t-x) \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{6a^1(t-x)}{y_1^2}.$$

При $\alpha = 0$, $\beta = 1$ получаем

$$\tilde{L}_0 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sum_{i=1}^6 a^i(t-x) \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}.$$

Если $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, то

$$d = -\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{2y_1^3 - \gamma}{(y_1^3 + \gamma)y_1}, \quad \gamma = \frac{\beta}{\alpha}$$

и

$$\tilde{L}_0 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sum_{i=1}^6 a^i(t-x) \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + a^1(t-x) \frac{6y_1(y_1^3 - 2\gamma)}{(y_1^3 + \gamma)^2}.$$

Если преобразовать оператор $L_4 = \tilde{L}_4$ с помощью $l_y = \frac{\partial}{\partial y_2} + d_2(y_2)$, то получим

$$\tilde{L}_0 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sum_{i=1}^6 a^i(t-x) \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{2a^1(t-x)}{y_1^2} + \frac{2a^2(t-x)}{y_2^2}.$$

В заключение автор выражает благодарность профессору Н. Х. Ибрагимову за постановку задачи и внимание к работе.

Межвузовский научный центр

по прикладным проблемам

математики ЕГУ

Поступила 3. II. 1989

Ա. Շ. Հովհաննիսյան. Լազնեկ-Շանյանի եղանակի ընդհանրացումը մեկ դասի Հյուգենսի սկզբունքին բավարարող հավասարումների համար (ամփոփում)

Հոդվածում ուսումնասիրվում է ըստ Հադամարի հիմնարար լուծումը երկրորդ կարգի մեկ դասի խիստ հիպերբոլական հավասարումների համար, Հադամարի հայտանիշի միջոցով հետազոտվում է Հյուգենսի սկզբունքը այդ հավասարումների համար, Բերվում է Հյուգենսի սկզբունքին բավարարող հավասարումների հաջորդականության կառուցման ալգորիթմը:

A. H. HOVHANESIAN. *Generalization of the Lagnese-Stellmacher method for the one class equations, satisfying Huygens' principle (summary)*

In the paper the Hadamard fundamental solution for a class of strong hyperbolic equations of the second order is studied. Using the Hadamard criterion the Huygens' principle for these equations is investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Х. Ибрагимов. Группы преобразований в математической физике, М., 1983.
2. Н. Х. Ибрагимов, Е. В. Мамонтов. О задаче Коши для уравнения $\square_{tt} - \square_{xx} -$

$$- \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t-x) \square_{y_i y_j} = 0$$
, Мат. сб., 102, № 3, 1977, 391—409.
3. Ж. Адамар. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа, М., 1978.
4. J. E. Lagnese, K. L. Stellmacher. A method of generating classes of Huygens' operators, J. Math. Mech., 17, № 5, 1967, 461—472.
5. F. G. Friedlander. The wave equation on a curved space-time, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1975.

УДК 517.53

Г. А. БАРСЕГЯН, В. Г. ПЕТРОСЯН

СООТНОШЕНИЯ ТИПА ТОЖДЕСТВА КАРТАНА ДЛЯ
ВЕЛИЧИН, АССОЦИИРОВАННЫХ С ЛОГАРИФИЧЕСКИМИ
ПРОИЗВОДНЫМИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Основные результаты, следствия, обсуждения

Мы полагаем известными основные определения и результаты теории распределения значений (см. [1]).

В теории распределения значений мероморфных функций в качестве меры близости мероморфной функции $w(z)$ к заданному значению $a \in \mathbb{C}$ рассматривается обычно неванлинновская функция приближения ($z = re^{i\varphi}$)

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|w(z) - a|} d\varphi.$$

С конца шестидесятых годов активно изучается более тонкая характеристика близости $w(z)$ к a , величина

$$L(r, a) = \max_{|z|=r} \ln^+ \frac{1}{|w(z) - a|}.$$

Установлены многочисленные аналоги в поведении функций $L(r, a)$ и $m(r, a)$, составляющие сегодня предмет теории роста В. П. Петренко (см. [2]), в которой, между тем, до сих пор отсутствовал аналог известного тождества Картана, эквивалентного следующему соотношению (см. [3]):

$$\int_0^{2\pi} m(r, e^{i\varphi}) d\varphi = o[T(r)], \quad r \rightarrow \infty,$$

где $T(r)$ — характеристическая функция Р. Неванлинны.

В работах по теории мероморфных функций получение окончательных результатов зачастую упирается в оценки логарифмических производных функций $w(z)$, которые, однако, рассматривались как вспомогательные, технические средства (см. [1], [2], [4]—[6]). Между тем в [7] было установлено, что следующие интегралы от логарифмических производных

$$P(r, a) \stackrel{\text{def}}{=} r \int_{\Delta(r, a)} \left| \frac{w'(re^{i\varphi})}{w(re^{i\varphi}) - a} \right| d\varphi, \quad \Delta(r, a) = \{z : |z| = r; |w(z) - a| \leq 1\},$$

обнаруживают свойства, аналогичные свойствам функций $m(r, a)$, т. е. для них выполняется аналог второй основной теоремы Р. Неванлинны и, соответственно, аналог соотношения дефектов. Как следствия, получаются

обобщения некоторых известных результатов В. П. Петренко и В. Фукса из [2] и [4].

Тем самым указанные интегралы становятся объектом самостоятельного изучения. На актуальность изучения таких объектов указывает, кроме всего, следующее простое предложение: если мероморфная в $|z| < \infty$ функция $w(z)$ имеет по крайней мере два исключительных в смысле Петренко значения, т. е. существуют значения a_1 и a_2 , для которых $\beta(a_1) > 0$, $\beta(a_2) > 0$, где

$$\beta(a) = \beta(a, w) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\max_{|z|=r} \ln^+ \frac{1}{|w(z) - a|} / T(r) \right),$$

то для любого $a \in \mathbb{C}$ и r справедливы неравенства ($z = re^{i\varphi}$)

$$\begin{aligned} m(r, a) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta(r, a)} \ln \frac{1}{|w(z) - a|} d\varphi \leq \max_{|z|=r} \ln^+ \frac{1}{|w(z) - a|} < \\ &< \int_{\Delta(r, a)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln \frac{1}{|w(z) - a|} \right| d\varphi + O(1), \quad r \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\int_{\Delta(r, a)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln \frac{1}{|w(z) - a|} \right| d\varphi \leq r \int_{\Delta(r, a)} \left| \frac{w'(z)}{w(z) - a} \right| d\varphi. \quad (2)$$

В настоящей работе устанавливаются соотношения типа тождества Картана для величин $P(r, a)$ и, как следствие, аналогичное соотношение в теории роста В. П. Петренко.

В дальнейшем через $K(\beta)$ обозначим постоянные, зависящие от β .

Теорема 1. Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < \infty$ функция; $\varphi(r)$ — монотонная функция, стремящаяся к $+\infty$ при $r \rightarrow \infty$ ($\varphi^{35}(r) < A(r)$), где $A(z)$ — сферическая характеристика $\mathcal{L}$. Альфорса: $\beta = \text{const} > 1$. Тогда на некоторой неограниченной последовательности значений r выполняется неравенство

$$\int_0^{2\pi} P(r, e^{i\psi}) d\psi \leq K(\beta) \varphi^8(\beta r) A^{2/3}(\beta r) \ln r + o[A(\beta r)], \quad r \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Следствие 1. Если $|A(r)/\ln^{10} r| \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$ (в частности, если нижний порядок λ функции $w(z)$ больше нуля), то на некоторой неограниченной последовательности значений r выполняется соотношение

$$\int_0^{2\pi} P(r, e^{i\psi}) d\psi = o[A(\beta r)], \quad r \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Теорема 2. Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < \infty$ функция, существуют значения a_1 и a_2 такие, что $\beta(a_1) > 0$, $\beta(a_2) > 0$; $\varphi(r) \uparrow +\infty$ при $r \rightarrow \infty$ ($\varphi^{35}(r) < A(r)$): $\beta = \text{const} > 1$. Тогда неравенство (3) можно заменить следующим неравенством:

$$\int_0^{2\pi} L(r, e^{i\psi}) d\psi \leq K(\beta) \varphi^3(\beta r) A^{2/3}(\beta r) \ln 2 + o[A(\beta r)], \quad r \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Следствие 2. Если $\{A(r)/\ln^{10} r\} \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$ (в частности, если нижний порядок λ функции $w(z)$ больше нуля), то (5) можно заменить следующим соотношением:

$$\int_0^{2\pi} L(r, e^{i\psi}) d\psi = o[A(\beta r)], \quad r \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Далее устанавливается одна модификация теоремы 1, в которой фигурируют площади множеств, в которых $w(z)$ близко к a .

Такого рода множества встречаются в различных ситуациях, в частности при установлении оценок величин $\sum_{(a)} \delta^a(a)$, $\sum_{(a)} \beta^a(a)$.

Теорема 3. Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < \infty$ функция, $\beta = \text{const} > 1$, $\varepsilon > 0$. Тогда неравенство (3) теоремы 1 можно заменить следующим неравенством:

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(r, e^{i\psi}) d\psi}{[S_\beta(r, e^{i\psi})]^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leq K(\varepsilon, \beta) r^{\frac{1}{2-\varepsilon}} + o[A(\beta r)], \quad r \rightarrow \infty, \quad (7)$$

где

$$S_\beta(r, e^{i\psi}) = \int_{r/\beta \leq |z| \leq r} \int_{\psi \in (i, e^{i\psi})} d\sigma, \quad d\sigma — \text{элемент площади,} \quad K(\varepsilon, \beta) — \text{постоянная, зависящая от } \varepsilon \text{ и } \beta.$$

§ 1. Вспомогательные результаты

Для доказательства теорем 1, 2 и 3 воспользуемся вспомогательными леммами, доказательства двух из которых базируются на следующем результате (см. [8], теорема 1.2).

Теорема А. Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < \infty$ функция; $\varphi(r) \uparrow + \infty$ при $r \rightarrow \infty$ ($\varphi^{35}(r) < A(r)$). Тогда в круге $|z| \leq r$ можно указать $\Phi(r)$ попарно непересекающихся областей $\bar{E}_i(r)$, $i = 1, 2, \dots, \Phi(r)$, для которых справедливы следующие утверждения:

$$\text{I.} \quad |\Phi(r) - A(r)| = o[A(r)], \quad r \rightarrow \infty, \quad r \notin E, \quad (1.1)$$

где E — некоторое множество конечной логарифмической меры.

II. В каждой области $\bar{E}_i(r)$ функция $w(z)$ одноместна; для каждой точки, принадлежащей $\partial E_i(r)$, существует некоторая ее окрестность, в которой $w(z)$ одноместна; замыкание множества $w(E_i(r))$, стереографически отображенное на риманову сферу, совпадает со сферой с некоторым числом $\bar{k}_i$, исключенных из сферы односвязных областей $\bar{\Delta}_j$, $j = 1, 2, \dots, \bar{k}_i$.

$$\text{III.} \quad \rho(\tilde{\Delta}_j^i) \leq 1/\varphi(z), \quad i=1, 2, \dots, \Phi(r), j=1, 2, \dots, \tilde{k}_i, \quad (1.2)$$

где $\rho(\tilde{\Delta}_j^i)$ — диаметр области $\tilde{\Delta}_j^i$ в сферической метрике $r \in E$.

$$\text{IV.} \quad \sum_{i=1}^{\Phi(r)} \tilde{k}_i < 4A(r) + o[A(r)], \quad r \rightarrow \infty, \quad r \in E. \quad (1.3')$$

$$\text{V.} \quad d(\tilde{E}_i(r)) \leq K\varphi^8(r)/A^{1/2}(r), \quad i=1, 2, \dots, \Phi(r), \quad (1.4)$$

где K — постоянная, не зависящая от $w(z)$, $d(\tilde{E}_i(r))$ — диаметр области $\tilde{E}_i(r)$.

Теорема А представляет собой обобщенную формулировку свойства близости a -точек мероморфной функции $w(z)$, устанавливающую, что для «хороших» значений a и b a -точки и b -точки функции $w(z)$ близко располагаются друг от друга (поскольку они лежат в малых областях $E_i(r)$). Тем самым теорема А включает в себя ряд основных результатов теории распределения значений, устанавливающих, что близки количества таких a -точек и b -точек. В [9] приводилась схема применения этого свойства, одной из реализаций которой являются результаты данной работы.

Обозначим, соответственно, через $n(r, a)$ и $n(r, b)$ — количество a -точек и b -точек функции $w(z)$ в круге $|z| < r$, через $n^*(r, a)$ и $n^*(r, b)$ — количество a -точек и b -точек в области $\bigcup_{i=1}^{\Phi(r)} \tilde{E}_i(r)$, через $n^{**}(r, a)$ и $n^{**}(r, b)$ — количество a -точек и b -точек в области $\{|z| < r\} \setminus \left\{ \bigcup_{i=1}^{\Phi(r)} \tilde{E}_i(r) \right\}$, а через $n^*(r, a, b)$ — количество тех a -точек $z_k(a) \in \tilde{E}_k(r) \subset \bigcup_{i=1}^{\Phi(r)} \tilde{E}_i(r)$, для каждой из которых находится b -точка $z_k(b)$ из $\tilde{E}_k(r)$.

Очевидно, что

$$n(r, a) = n^*(r, a, b) + [n^*(r, a) - n^*(r, a, b)] + n^{**}(r, a), \quad (1.5)$$

$$n(r, b) = n^*(r, a, b) + [n^*(r, b) - n^*(r, a, b)] + n^{**}(r, b). \quad (1.6)$$

Обозначим

$$\Delta^*(r, \rho) = \int_0^{2\pi} n^*(r, \rho e^{i\theta}) d\theta, \quad \rho > 0,$$

$$\Delta^*(r, \rho_1, \rho_2) = \int_0^{2\pi} n^*(r, \rho_1 e^{i\theta}, \rho_2 e^{i\theta}) d\theta, \quad \rho_1 > 0, \rho_2 > 0.$$

Лемма 1. Справедливы следующие неравенства:

$$2\pi\Phi(r) - o[A(r)] < \Delta^*(r, \rho) < 2\pi\Phi(r), \quad r \rightarrow \infty, \quad r \in E, \quad (1.7)$$

$$2\pi\Phi(r) - o[A(r)] \leq \Delta^*(r, \rho_1, \rho_2) \leq 2\pi\Phi(r), \quad r \rightarrow \infty, \quad r \in E. \quad (1.8)$$

где E — некоторое множество конечной логарифмической меры.

Доказательство. Величина $\int_0^{2\pi} n^*(r, \rho e^{i\theta}) \rho d\theta$ показывает суммарную длину всех линий, лежащих на поверхностях $w(\tilde{E}_j(r))$, $j = 1, 2, \dots$, $\Phi(r)$, проекции которых лежат над $\{w : |w| = \rho\}$. Определим величину $n_j^*(r, \rho e^{i\theta})$ равной нулю, если ни одна $\rho e^{i\theta}$ -точка не принадлежит $\tilde{E}_j(r)$, и равной единице, если существует $\rho e^{i\theta}$ -точка принадлежащая $\tilde{E}_j(r)$.

Поскольку $w(z)$ однолистка в каждой из областей $\tilde{E}_j(r)$, то выполняется

$$n^*(r, \rho e^{i\theta}) = \sum_{j=1}^{\Phi(r)} n_j^*(r, \rho e^{i\theta}) \quad (1.9)$$

и, следовательно,

$$\Delta^*(r, \rho) = \sum_{j=1}^{\Phi(r)} \int_0^{2\pi} n_j^*(r, \rho e^{i\theta}) d\theta < 2\pi\Phi(r),$$

т. е. правую часть неравенства (1.7).

По теореме А стереографическая проекция множества $w(\tilde{E}_j(r))$ на риманову сферу совпадает со сферой за исключением $\tilde{k}_j$ штук односвязных областей $\tilde{\Delta}_l^j$ ($l = 1, 2, \dots, \tilde{k}_j$), сферические диаметры которых меньше $1/\varphi(r)$. Обозначим $\tilde{\Delta}_{l,\rho}^j$ проекции на плоскость тех областей $\tilde{\Delta}_l^j$, которые пересекаются с $\{w : |w| = \rho\}$; $\bar{k}_{j,\rho}$ — их количество.

Тогда ясно, что

$$\int_0^{2\pi} n_j^*(r, \rho e^{i\theta}) d\theta \geq 2\pi - \frac{1}{\rho} \sum_{l=1}^{\bar{k}_{j,\rho}} d(\tilde{\Delta}_{l,\rho}^j). \quad (1.10)$$

Из геометрических рассуждений ясно, что при $r > r_0$ (т. е. достаточно большом $\varphi(r)$).

$$d(\tilde{\Delta}_{l,\rho}^j) < (\rho + 2)^2 / \varphi(r), \quad l = 1, 2, \dots, \bar{k}_{j,\rho} \quad (1.11)$$

(используется формула $[w, a] = \frac{|w - a|}{\sqrt{1 + |w|^2} \sqrt{1 + |a|^2}}$, показывающая сферическое расстояние между w и a).

Из неравенств (1.10) и (1.11) получаем

$$\int_0^{2\pi} n_j^*(r, \rho e^{i\theta}) d\theta \geq 2\pi - \frac{\bar{k}_{j,\rho}(\rho + 2)^2}{\rho\varphi(r)} \geq 2\pi - \frac{\bar{k}_j(\rho + 2)^2}{\rho\varphi(r)}.$$

Следовательно, согласно (1.9) имеем

$$\int_0^{2\pi} n^*(r, \rho e^{i\vartheta}) d\vartheta \geq 2\pi(r) - \frac{(p+2)^2}{\rho\varphi(r)} \sum_{j=1}^p k_j.$$

Отсюда, используя неравенство (1.3), получаем

$$\int_0^{2\pi} n^*(r, \rho e^{i\vartheta}) d\vartheta \geq 2\pi\Phi(r) - o[A(r)], \quad r \rightarrow \infty, \quad r \notin E,$$

т. е. левую часть неравенства (1.7).

Доказательство неравенства (1.8) следует из геометрического смысла $\Delta^*(r, \rho_1, \rho_2)$ и теоремы А.

Обозначим

$$\Delta^{**}(r, \rho) = \int_0^{2\pi} n^{**}(r, \rho e^{i\vartheta}) d\vartheta.$$

Лемма 2. Справедливо следующее соотношение:

$$\Delta^{**}(r, \rho) = o[A(r)], \quad r \rightarrow \infty, \quad r \notin E, \quad (1.12)$$

где E — некоторое множество конечной логарифмической меры.

Доказательство. Согласно определениям имеем

$$\Delta^{**}(r, \rho) = \int_0^{2\pi} n(r, \rho e^{i\vartheta}) d\vartheta - \int_0^{2\pi} n^*(r, \rho e^{i\vartheta}) d\vartheta = \int_0^{2\pi} n(r, \rho e^{i\vartheta}) d\vartheta - \Delta^*(r, \rho). \quad (1.13)$$

Для заданного $\rho > 0$ обозначим через ρ_0 расстояние от стереографического образа на сфере Римана числа ρ до оси сферы Римана, соединяющей точки 0 и ∞ . Тогда величина

$$\frac{1}{2\pi\rho_0} \int_0^{2\pi} n(r, \rho e^{i\vartheta}) \rho_0 d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n(r, \rho e^{i\vartheta}) d\vartheta \quad (1.14)$$

показывает среднее число накрытия над кривой, являющейся стереографическим образом окружности $|\omega| = \rho$. Следовательно, согласно теории поверхностей наложения (см. [1], гл. XIII, стр. 338 вторая теорема о покрытиях) из (1.14) получим

$$\int_0^{2\pi} n(r, \rho e^{i\vartheta}) d\vartheta = 2\pi A(r) + o[A(r)], \quad r \rightarrow \infty, \quad r \notin E. *$$

Отсюда и из (1.1), (1.7), (1.13) следует утверждение леммы 2.

Лемма 3. Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < \infty$ функция; $a, b \in \mathbb{C}$ — комплексные числа такие, что $|a - b| > 2$. Тогда выполняется неравенство ($z = re^{i\vartheta}$)

* Здесь E — то же самое, что и в теореме А.

$$\int_0^R \int_{\Delta(r, a)} \left| \frac{w'(z)}{w(z) - b} \right| r d\varphi dr \leq K R A^{\frac{1}{2}}(R), \quad (1.15)$$

где $K = K(a) \text{ const} < \infty$.

Доказательство. Очевидно, что $|w(z) - b| > 1$, когда $z \in \Delta(r, a)$.

Следовательно

$$\begin{aligned} \int_0^R \int_{\Delta(r, a)} \left| \frac{w'(z)}{w(z) - b} \right| r d\varphi dr &\leq \int_0^R \int_{\Delta(r, a)} |w'(z)| r d\varphi dr = \\ &= \int_0^R \int_{\Delta(r, a)} \frac{|w'(z)| (1 + |w(z)|^2)}{(1 + |w(z)|^2)^2} r d\varphi dr \end{aligned}$$

и, так как $z \in \Delta(r, a)$, $|w(z)| \leq K(a)$, то

$$\int_0^R \int_{\Delta(r, a)} \left| \frac{w'(z)}{w(z) - b} \right| r d\varphi dr \leq K(a) \int_0^R \int_{\Delta(r, a)} \frac{|w'(z)|}{1 + |w(z)|^2} r d\varphi dr. \quad (1.16)$$

Оценим интеграл в правой части неравенства (1.16), используя неравенство Коши—Буняковского

$$\begin{aligned} \int_0^R \int_{\Delta(r, a)} \frac{|w(z)|}{1 + |w(z)|^2} r d\varphi dr &\leq \left(\int_0^R \int_{\Delta(r, a)} \frac{|w(z)|^2 r}{(1 + |w(z)|^2)^2} d\varphi dr \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left(\int_0^R \int_{\Delta(r, a)} r d\varphi dr \right)^{\frac{1}{2}} \leq \pi R A^{\frac{1}{2}}(R). \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (1.16) получаем утверждение леммы 3.

Лемма 4. Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < \infty$ функция; $a, b \in \mathbb{C}$ такие, что $|a - b| > 2$, z_1, z_2 — постоянные $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$, $\epsilon > 0$. Тогда выполняется следующее соотношение;

$$\int_{\alpha_1 R}^{\alpha_2 R} \int_{\Delta(r, a)} \left| \frac{w'(z)}{w(z) - b} \right| r d\varphi dr \leq \left[K_1 R^{\frac{1}{2-\epsilon}} + K_2 A^{\frac{\epsilon}{2-\epsilon}}(R) \right] \left[S(R, a) \right]^{\frac{1-\epsilon}{2-\epsilon}}, \quad (1.17)$$

где

$$S(R, a) = \int_{\alpha_1 R}^{\alpha_2 R} \int_{\Delta(r, a)} d\sigma, \quad d\sigma — \text{элемент площади},$$

K_1, K_2 — постоянные.*

* В дальнейшем обозначаем через K_i , $i = 1, 2, \dots$, постоянные, не обязательно одинаковые даже на протяжении одной цепочки неравенств.

Доказательство. Пользуясь неравенством Гельдера при $p=2-\varepsilon$, $q=(2-\varepsilon)/(1-\varepsilon)$ и тем, что при $z \in \Delta(r, a) |w(z) - b| > 1$, получим

$$\int_{a_1 R}^{a_2 R} \int_{\Delta(r, a)} \left| \frac{w'(z)}{w(z) - b} \right| d\sigma < \left(\int_{a_1 R}^{a_2 R} \int_{\Delta(r, a)} |w'(z)|^{2-\varepsilon} d\sigma \right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}} [S(R, a)]^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}. \quad (1.18)$$

Если $|w'(z)| < 1$, то

$$\left(\int_{a_1 R}^{a_2 R} \int_{\Delta(r, a)} |w'(z)|^{2-\varepsilon} d\sigma \right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}} \leq K_1 R^{\frac{2}{2-\varepsilon}}. \quad (1.19)$$

При $|w'(z)| < 1$, имея в виду, что $|w(z)| < K_2$, когда $z \in \Delta(r, a)$, имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_{a_1 R}^{a_2 R} \int_{\Delta(r, a)} |w'(z)|^{2-\varepsilon} d\sigma \right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}} &= \left(\int_{a_1 R}^{a_2 R} \int_{\Delta(r, a)} |w'(z)|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}} \leq \\ &\leq K_2 \left(\int_{a_1 R}^{a_2 R} \int_{\Delta(r, a)} \frac{|w'(z)|^2 d\sigma}{(1 + |w(z)|^2)^2} \right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}} \leq K_2 [A(R)]^{\frac{1}{2-\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Из неравенств (1.18)–(1.20) получаем утверждение леммы 4.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Пусть a_1, a_2 — постоянные, $0 < a_1 < a_2 < 1$; $a, b \in \mathbb{C}$ — комплексные числа такие, что $\arg a = \arg b = \psi$, $|a| = 1$, $|a - b| > 2$; $R_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначим, соответственно, через $z_i(a)$ и $z_i(b)$ a -точки и b -точки функции $w(z)$, лежащие в круге $|z| < R_n$.

Используя формулу Неванлинны и равенства (1.5), (1.6), получим ($z = re^{i\varphi}$)

$$\begin{aligned} &\int_{a_1 R_n}^{a_2 R_n} \int_{\Delta(r, a)} \left| \frac{w'(z)}{w(z) - a} \right| r d\varphi dr \leq \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \log \left| \frac{w(R_n e^{i\theta}) - a}{w(R_n e^{i\theta}) - b} \right| \right| d\theta \times \right. \\ &\times \int_{a_1 R_n}^{a_2 R_n} \int_{\Delta(r, a)} \frac{2 R_n r d\varphi dr}{(R_n - r)^2} + \sum_{i=1}^{n^*(R_n, a, b)} \int_{a_1 R_n}^{a_2 R_n} r \int_{\Delta(r, a)} \left| \frac{1}{z - z_i(a)} - \frac{1}{z - z_i(b)} \right| d\varphi dr + \\ &+ \sum_{i=1}^{n^*(R_n, a, b)} \int_{a_1 R_n}^{a_2 R_n} r \int_{\Delta(r, a)} \frac{R_n^2 |z_i(a) - z_i(b)| d\varphi dr}{R_n^2 - \overline{z_i(a)} |z| |R_n^2 - \overline{z_i(b)} z|} + \\ &+ \sum_{j=1}^{n^*(R_n, a) - n^*(R_n, a, b)} \int_{a_1 R_n}^{a_2 R_n} r \int_{\Delta(r, a)} \frac{d\varphi dr}{|z - z_j(a)|} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{n^*(R_n, a) - n^*(R_n, a, b)} \int_{a_1 R_n}^{a_2 R_n} r \int_{\Delta(r, a)} \frac{|\bar{z}_j(a)| d\bar{r} dr}{|R_n^2 - \bar{z}_j(a) z|} + \\
& + \sum_{k=1}^{n^{**}(R_n, a)} \int_{a_1 R_n}^{a_2 R_n} r \int_{\Delta(r, a)} \frac{d\varphi dr}{|z - z_k(a)|} + \sum_{k=1}^{n^{**}(R_n, a)} \int_{a_1 R_n}^{a_2 R_n} r \int_{\Delta(r, a)} \frac{|\bar{z}_k(a)| d\varphi dr}{|R_n^2 - \bar{z}_k(a) z|} + \\
& + \sum_{l=1}^{n^*(R_n, b) - n^*(R_n, a, b)} \int_{a_1 R_n}^{a_2 R_n} r \int_{\Delta(r, a)} \frac{d\varphi dr}{|z - z_l(b)|} + \\
& + \sum_{l=1}^{n^*(R_n, b) - n^*(R_n, a, b)} \int_{a_1 R_n}^{a_2 R_n} r \int_{\Delta(r, a)} \frac{|\bar{z}_l(b)| d\varphi dr}{|R_n^2 - \bar{z}_l(b) z|} + \\
& + \sum_{p=1}^{n^{**}(R_n, b)} \int_{a_1 R_n}^{a_2 R_n} r \int_{\Delta(r, a)} \frac{d\varphi dr}{|z - z_p(b)|} + \sum_{p=1}^{n^{**}(R_n, b)} \int_{a_1 R_n}^{a_2 R_n} r \int_{\Delta(r, a)} \frac{|\bar{z}_p(b)| d\varphi dr}{|R_n^2 - \bar{z}_p(b) z|} + \\
& + \int_{a_1 R_n}^{a_2 R_n} \int_{\Delta(r, a)} \left| \frac{w'(z)}{w(z) - b} \right| r d\varphi dr = J_1(R_n, \psi) + \dots + J_2(R_n, \psi), \quad R_n \in E.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Оценим эти интегралы. Обозначим

$$J(R_n, a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \log \left| \frac{w(R_n e^{i\theta}) - a}{w(R_n e^{i\theta}) - b} \right| \right| d\theta. \tag{2.2}$$

Если $|w(R_n e^{i\theta})| > \max\{|a|, |b|\} + 1$, то вклад таких величин в (2.2) есть величина $O(1)$. Если $|w(R_n e^{i\theta})| \leq \max\{|a|, |b|\} + 1$, то

$$\begin{aligned}
J(R_n, a, b) & \leq m\left(R_n, \frac{w-a}{w-b}\right) + m\left(R_n, \frac{w-b}{w-a}\right) + O(1) \leq \\
& \leq m(R_n, a) + m(R_n, b) + O(1).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Следовательно

$$J_1(R_n, \psi) \leq K_1 [m(R_n, a) + m(R_n, b) + O(1)] R_n$$

и так как (см. [3], стр. 28)

$$\int_0^{2\pi} m(R_n, \rho e^{i\psi}) d\psi = O(1), \quad \rho > 0, \quad R_n \rightarrow \infty, \tag{2.4}$$

то получим

$$\int_0^{2\pi} J_1(R_n, \psi) d\psi \leq K_1 R_n. \tag{2.5}$$

Обозначим через $D_n(r) = \{z: |z - z_0| \leq r\}$, $\rho_i = |z_i(a) - z_i(b)|$, $i = 1, 2, \dots, n^*(R_n, a, b)$.

Имеем

$$J_2(R_n, \psi) \leq \sum_{i=1}^{n^*(R_n, a, b)} \left\{ \iint_{D_{z_i(a)}(\rho_i)} \frac{d\sigma}{|z - z_i(a)|} + \iint_{D_{z_i(b)}(\rho_i)} \frac{d\sigma}{|z - z_i(b)|} + K_2 \rho_i \iint_{D_{z_i(a)}(2R_n) \setminus D_{z_i(a)}(\rho_i/2)} \frac{d\sigma}{|z - z_i(a)|^2} \right\}.$$

Отсюда исходя из геометрических соображений нетрудно видеть, что

$$J_2(R_n, \psi) \leq K_2 \ln R_n \sum_{i=1}^{n^*(R_n, a, b)} \rho_i + K_2 \sum_{i=1}^{n^*(R_n, a, b)} \rho_i \ln \frac{1}{\rho_i}. \quad (2.6)$$

Так как $\rho_i < d(\tilde{E}_i(r))$, $i = 1, 2, \dots, n^*(R_n, a, b)$, то из неравенств, (1.4) и (2.6) получим

$$J_2(R_n, \psi) \leq K_2 \frac{\varphi^8(R_n) R_n \ln R_n}{A^{1/8}(R_n)} \cdot n^*(R_n, a, b), \quad R_n > R_0.$$

Отсюда и из неравенства (1.8) леммы 1 следует, что

$$\int_0^{2\pi} J_2(R_n, \psi) d\psi \leq K_2 \frac{\varphi^8(R_n) R_n \ln R_n}{A^{1/8}(R_n)} \cdot \Phi(R_n). \quad (2.7)$$

Используя неравенства $\rho_i < K\varphi^8(R_n)/A^{1/8}(R_n)$, $i = 1, 2, \dots, n^*(R_n, a, b)$ имеем

$$\begin{aligned} J_2(R_n, \psi) &\leq K_3 \frac{\varphi^8(R_n) R_n^3}{A^{1/8}(R_n)} \int_{a_1 R_n}^{a_2 R_n} \int_{\Delta(r, a)} \frac{rd\varphi dr}{|R_n^2 - \overline{z_i(a)}z| |R_n^2 - \overline{z_i(b)}z|} < \\ &\leq K_3 \frac{\varphi^8(R_n) R_n}{A^{1/8}(R_n)} n^*(R_n, a, b). \end{aligned}$$

Следовательно

$$\int_0^{2\pi} J_2(R_n, \psi) d\psi \leq K_3 \frac{\varphi^8(R_n) R_n}{A^{1/8}(R_n)} \Phi(R_n). \quad (2.8)$$

Имеем

$$\begin{aligned} J_1(R_n, \psi) &= \sum_{j=1}^{n^*(R_n, a) - n^*(R_n, a, b)} \int_{a_1 R_n}^{a_2 R_n} \int_{\Delta(r, a)} \frac{rd\varphi dr}{|z - z_j(a)|} \leq \\ &\leq K_4 |n^*(R_n, a) - n^*(R_n, a, b)| R_n. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая лемму 1, получим

$$\int_0^{2\pi} J_1(R_n, \psi) d\psi \leq K_4 R_n \{o[A(R_n)]\}, \quad R_n \rightarrow \infty, \quad R_n \in E. \quad (2.9)$$

Аналогично получаем, что

$$\int_0^{2\pi} J_5(R_n, \psi) d\psi \leq K_5 R_n |o[A(R_n)]|, \quad R_n \rightarrow \infty, \quad R_n \notin E. \quad (2.10)$$

Используя лемму 2 имеем

$$\int_0^{2\pi} J_6(R_n, \psi) d\psi \leq K_6 R_n |o[A(R_n)]|, \quad R_n \rightarrow \infty, \quad R_n \notin E. \quad (2.11)$$

И аналогично приведенным выше случаям получим

$$\int_0^{2\pi} J_i(R_n, \psi) d\psi \leq K_i R_n |o[A(R_n)]|, \quad R_n \rightarrow \infty, \quad R_n \notin E, \quad i=7, 8, \dots, 11. \quad (2.12)$$

По лемме 3 имеем

$$\int_0^{2\pi} J_{12}(R_n, \psi) d\psi \leq K_{12} R_n A^{1/2}(R_n). \quad (2.13)$$

Из неравенства (2.1) и из неравенств (2.5), (2.7)—(2.13) получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1 R_n}^{\alpha_2 R_n} \int_0^{2\pi} P(r, e^{i\psi}) d\psi dr &\leq K_1 \frac{\varphi^8(R_n) \Phi(R_n) R_n \ln R_n}{A^{1/2}(R_n)} + \\ &+ K_2 R_n |o[A(R_n)]| \leq K_1 \varphi^8(R_n) A^{1/2}(R_n) R_n \ln R_n + \\ &+ K_2 R_n |o[R_n]|, \quad R_n \rightarrow \infty, \quad R_n \notin E \end{aligned} \quad (2.14)$$

(здесь мы использовали соотношение (1.1) теоремы А).

Отсюда выберем для заданного $\beta > 1$ число $\alpha_1 = 1/\beta$, а $\alpha_2 \in (\alpha_1, 1)$ получаем неравенство (3) теоремы 1.

Доказательство следствия 1 вытекает из неравенства (2.14) и из соотношения (1.1) теоремы А.

Доказательство теоремы 2 следует из неравенств (1), (2) и теоремы 1.

§ 3. Доказательство теоремы 3

Рассмотрим интегралы, приведенные в (2.1), проводя их оценку с учетом площадей, фигурирующих в теореме 3.

С учетом оценки (2.3) имеем

$$J_1(R_n, \psi) \leq K_1 R_n |m(R_n, a) + m(R_n, b) + O(1)| \int_{\alpha_1 R_n \Delta(r, a)}^{\alpha_2 R_n} \int \frac{r d\varphi dr}{(R_n - r)^2}.$$

Используя неравенство Гельдера при $p = 2 - \varepsilon$, $q = (2 - \varepsilon)/(1 - \varepsilon)$ имеем

$$J_1(R_n, \psi) \leq K_1 R_n^{\frac{1}{2-\varepsilon}} \{m(R_n, a) + m(R_n, b) + O(1)\} \times \\ \times \left(\int_{a_1 R_n}^{a_2 R_n} \int_{\Delta(r, a)} r d\varphi dr \right)^{\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon}} = K_1 R_n^{\frac{1}{2-\varepsilon}} \{m(R_n, a) + m(R_n, b) + \\ + O(1)\} [S(R_n, a)]^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}, \quad (3.1)$$

где

$$S(R_n, a) = \int_{a_1 R_n}^{a_2 R_n} \int_{\Delta(r, a)} d\sigma, \quad d\sigma — \text{элемент площади.}$$

По неравенству Гельдера получаем

$$J_2(R_n, \psi) \leq [S(R_n, a)]^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}} n^*(R_n, a, b) \sum_{i=1}^{n^*} \rho_i A_i^*(R_n, \psi), \quad (3.2)$$

где

$$A_i^*(R_n, \psi) = \left(\int_{a_1 R_n}^{a_2 R_n} \int_{\Delta(r, a)} \frac{d\sigma}{|z - z_i(a)|^{2-\varepsilon} |z - z_i(b)|^{2-\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}, \\ i = 1, \dots, n^*(R_n, a, b).$$

Обозначим через $D_{z_1, z_2}(r) = \left\{ z : \left| z - \frac{z_1 + z_2}{2} \right| \leq r \right\}$,

$$\bar{D}_{z_1, z_2}(r) = D_{z_1, z_2}(r) \setminus \{D_{z_1}(r/2) \cup D_{z_2}(r/2)\}.$$

Используя неравенство $(\sum c_v)^a \leq \sum c_v^a$, $0 < a < 1$, $c_v > 0$, имеем

$$A_i^*(R_n, \psi) \leq \left(\iint_{D_{z_i(a)}(r_i/2)} \frac{d\sigma}{|z - z_i(a)|^{2-\varepsilon} |z - z_i(b)|^{2-\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}} + \\ + \left(\iint_{D_{z_i(b)}(r_i/2)} \frac{d\sigma}{|z - z_i(a)|^{2-\varepsilon} |z - z_i(b)|^{2-\varepsilon}} \right)^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} + \\ + \left(\iint_{\bar{D}_{z_i(a), z_i(b)}(r_i)} \frac{d\sigma}{|z - z_i(a)|^{2-\varepsilon} |z - z_i(b)|^{2-\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}} +$$

$$+ \left(\iint_{D_{z_l(a), z_l(b)}(2R_n) \setminus D_{z_l(a), z_l(b)}(\rho_l)} \frac{d\sigma}{|z - z_l(a)|^{2-s} |z - z_l(b)|^{2-s}} \right)^{\frac{1}{2-s}} =$$

$$= I_{l,1}^s(R_n, \psi) + \dots + I_{l,4}^s(R_n, \psi).$$

Оценим эти интегралы.

Так как при $z \in D_{z_l(a)}(\rho_l/2)$ выполняется неравенство $|z - z_l(b)| \geq \rho_l/2$, то нетрудно видеть, что $I_{l,1}^s(R_n, \psi) \leq K_1 \rho_l^{-\frac{2-2s}{2-s}}$. Точно так же $I_{l,2}^s(R_n, \psi) \leq K_2 \rho_l^{-\frac{2-2s}{2-s}}$.

Исходя из геометрических соображений получаем, что

$$I_{l,3}^s(R_n, \psi) \leq K_3 \rho_l^{-\frac{2-2s}{2-s}}, \quad I_{l,4}^s(R_n, \psi) \leq K_4 \rho_l^{-\frac{2-2s}{2-s}}.$$

Суммируя полученные неравенства имеем

$$A_i^s(R_n, \psi) \leq K_2 \rho_l^{-\frac{2-2s}{2-s}}, \quad i = 1, 2, \dots, n^*(R_n, a, b).$$

Отсюда и из неравенства (3.2) получим

$$J_1(R_n, \psi) \leq K_2 [S(R_n, a)]^{\frac{1-s}{2-s}} n^*(R_n, a, b) \sum_{i=1}^s \rho_l^{\frac{s}{2-s}}.$$

Так как $\rho_l \leq K \varphi^s(R_n) R_n / A^{\frac{1}{2}}(R_n)$, $i = 1, \dots, n^*(R_n, a, b)$, то

$$J_1(R_n, \psi) \leq K_2 [S(R_n, a)]^{\frac{1-s}{2-s}} \frac{[\varphi(R_n)]^{\frac{8s}{2-s}} R_n^{\frac{s}{2-s}}}{[A(R_n)]^{\frac{s}{2(2-s)}}} n^*(R_n, a, b). \quad (3.3)$$

Применяя неравенство Гельдера, аналогично получаем

$$J_3(R_n, \psi) \leq K_3 [S(R_n, a)]^{\frac{1-s}{2-s}} \frac{\varphi^s(R_n) R_n^{\frac{s}{2-s}}}{A^{\frac{1}{2}}(R_n)} n^*(R_n, a, b), \quad (3.4)$$

$$J_4(R_n, \psi) \leq K_4 [S(R_n, a)]^{\frac{1-s}{2-s}} R_n^{\frac{s}{2-s}} \{n^*(R_n, a) - n^*(R_n, a, b)\}, \quad (3.5)$$

$$J_5(R_n, \psi) \leq K_5 [S(R_n, a)]^{\frac{1-s}{2-s}} R_n^{\frac{s}{2-s}} \{n^*(R_n, a) - n^*(R_n, a, b)\}, \quad (3.6)$$

$$J_6(R_n, \psi) \leq K_6 [S(R_n, a)]^{\frac{1-s}{2-s}} R_n^{\frac{s}{2-s}} n^{**}(R_n, a), \quad (3.7)$$

$$J_7(R_n, \psi) \leq K_7 [S(R_n, a)]^{\frac{1-s}{2-s}} R_n^{\frac{s}{2-s}} n^{**}(R_n, a), \quad (3.8)$$

$$J_8(R_n, \psi) \leq K_8 [S(R_n, a)]^{\frac{1-s}{2-s}} R_n^{\frac{s}{2-s}} \{n^*(R_n, b) - n^*(R_n, a, b)\}, \quad (3.9)$$

$$J_9(R_n, \psi) \leq K_9 [S(R_n, a)]^{\frac{1-s}{2-s}} R_n^{\frac{s}{2-s}} |n^*(R_n, b) - n^*(R_n, a, b)|, \quad (3.10)$$

$$J_{10}(R_n, \psi) \leq K_{10} [S(R_n, a)]^{\frac{1-s}{2-s}} R_n^{\frac{s}{2-s}} n^{**}(R_n, b), \quad (3.11)$$

$$J_{11}(R_n, \psi) \leq K_{11} [S(R_n, a)]^{\frac{1-s}{2-s}} R_n^{\frac{s}{2-s}} n^{**}(R_n, b). \quad (3.12)$$

Учитывая неравенства (2.1), (3.1), (3.3)—(3.12) и неравенство (1.17), лемма 4, получим

$$\begin{aligned} \int_{a_1 R_n}^{a_2 R_n} \int_0^{2\pi} \frac{P(r, a) d\psi dr}{[S(R_n, a)]^{\frac{1-s}{2-s}}} &\leq K_1 R_n^{\frac{s}{2-s}} \int_0^{2\pi} |m(R_n, a) + m(R_n, b)| d\psi + \\ &+ \left\{ K_2 \frac{[\varphi(R_n)]^{\frac{8s}{2-s}}}{[A(R_n)]^{\frac{s}{2(2-s)}}} + K_3 \frac{\varphi^8(R_n)}{A^{\frac{1}{2}}(R_n)} \right\} R_n^{\frac{s}{2-s}} \int_0^{2\pi} n^*(R_n, a, b) d\psi + \\ &+ K_4 R_n^{\frac{s}{2-s}} \int_0^{2\pi} |n^*(R_n, a) + n^*(R_n, b) - 2n^*(R_n, a, b)| d\psi + \\ &+ K_5 R_n^{\frac{s}{2-s}} \int_0^{2\pi} n^{**}(R_n, a) d\psi + K_6 R_n^{\frac{s}{2-s}} \int_0^{2\pi} n^{**}(R_n, b) d\psi + \\ &+ K_7 R_n^{\frac{2}{2-s}} + K_8 [A(R_n)]^{\frac{1}{2-s}}, \quad R_n > R_0. \end{aligned}$$

Используя леммы 1, 2 и соотношения (1.1), (2.4), из неравенства (3.13) получим ($R_n \rightarrow \infty$, $R_n \notin E$)

$$\int_{a_1 R_n}^{a_2 R_n} \int_0^{2\pi} \frac{P(r, a) d\psi dr}{[S(R_n, a)]^{\frac{1-s}{2-s}}} \leq K_1 R_n^{\frac{2}{2-s}} + K_2 R_n^{\frac{s}{2-s}} \{o[A(R_n)]\}.$$

Отсюда выбрав для заданного $\beta > 1$ число $\alpha_1 = 1/\beta$, а $\alpha_2 \in (\alpha_1, 1)$, получим неравенство (7) теоремы 3.

Институт математики
АН Армении

Поступила 24. X. 1989

Գ. Ա. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ, Վ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ. Մերումորֆ ֆունկցիաների լոգարիթմական ածանցյալների հետ առաջիայված մեծությունների համար Կարտանի նույնությամբ տիպի առաջությունների (ամփոփում)

Մերումորֆ ֆունկցիաների տեսության բազմաթիվ վերջնական արդյունքների ապացույցները հանգում են լոգարիթմական ածանցյալների գնահատականներին, որոնք ուղիորաբար հանդես են գալիս որպես օժանդակ տեխնիկական միջոցներ: Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ հետևյալ ինտեգրալների համար

$$r \int_{\Delta(r, a)} \left| \frac{w'(z)}{w(z) - a} \right| d\varphi,$$

որտեղ $\Delta(r, a) = \{z: |z| = r; |w(z) - a| < 1\}$, $w(z)$ -ը մերոմորֆ է վերջավոր հարթության վրա, ածի ունի Կարտանի նույնության տիպի առնչություններ: Որպես հետևանք ստացվում է այդ առնչության անալոգը Վ. Պետրենկոյի ածի տեսության:

G. A. BARSEGHIAN, V. G. PETROSIAN. *Cartan identity type relations for the quantities associated with the logarithmic derivatives of meromorphic functions* (summary)

In the paper it is shown that for the integrals of the form

$$r \int_{\Delta(r, a)} \left| \frac{w'(z)}{w(z) - a} \right| d\varphi$$

where $\Delta(r, a) = \{z: |z| = r; |w(z) - a| \leq 1\}$, $w(z)$ is meromorphic in the finite plane, the Cartan identity type relations take place. An analogous relation in the V. Petrenko theory of growth is also obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Неванlinna. Однозначные аналитические функции, ОГИЗ, 1941.
2. В. П. Петренко. Рост мероморфных функций, Харьков, Вища Школа, 1978.
3. В. К. Хейман. Мероморфные функции, М., Мир, 1966.
4. W. H. J. Fuchs. A theorem on the Nevanlinna deficiencies of meromorphic functions of finite order, Ann. Math., 1958, 68, № 2, 203—209.
5. W. H. J. Fuchs. Proof of a conjecture of G. Polya concerning gap series, III, J. Math., 1963, 7, № 4, 661—667.
6. E. Mues. Über eine Vermutung von Hayman, Math. Z., 1971, 119, № 1, 11—20.
7. Г. А. Барсегян. Исключительные значения, ассоциированные с логарифмическими производными мероморфных функций, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 16, № 5, 1981, 408—423.
8. Г. А. Барсегян. Свойство близости a -точек мероморфных функций и структура одноместных областей римановых поверхностей, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XX, № 5, 1985, 375—400, XX, № 6, 1985, 407—425.
9. Г. А. Барсегян. Свойство близости a -точек мероморфных функций, Матем. сб., 120 (162), № 1, 1983, 42—67.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.5

Х. МАЛОНЕК

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ В ГИПЕРКОМПЛЕКСНОМ АНАЛИЗЕ

Как известно, в классической теории функций одного комплексного переменного, существуют разные подходы к понятию голоморфности. Пространственные обобщения этой теории на основе одного гиперкомплексного переменного (включая кватернионы) осуществлялись до сих пор только рассмотрением некоторой обобщенной системы Коши—Римана (ср. [1], [2]). Результаты разных авторов ([3], [4]) подтвердили мнение, что этот подход Римана является единственным, чтобы определить достаточно широкий класс алгебраических функций, аналогичных голоморфным функциям (подробные сведения об этом можно найти в [2]).

Настоящая работа показывает, что такие функции можно в определенном смысле представить в степенной ряд, зависящий только от одного гиперкомплексного переменного. Тем самым получается возможность подхода в смысле Вейерштрасса, который, однако, здесь не будет изложен полностью.

§ 1. Определение моногенных гиперкомплексных функций

В основе наших исследований лежит пространство R^{n+1} , элементы которого обозначаются через $x = (x_0, x) = (x_0, x_1, \dots, x_n)$. Одновременно рассматривается система образующих $e_1, e_2, \dots, e_n$, $n > m$ клиффордовой алгебры A над R со следующими свойствами:

$$e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij} e_0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

$$e_j (e_l e_k) = (e_j e_l) e_k, \quad j, l, k = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

где $e_0 = 1$ — единичный элемент. A обладает 2^n базисными элементами, вида

$$e_0, e_1, e_2, \dots, e_n, e_1 e_2, \dots, e_{n-1} e_n, e_1 e_2 e_3, \dots, e_1 e_2 \dots e_n$$

и каждый элемент $\lambda \in A$ представляется в виде $\lambda = \sum_A \lambda_A e_A$

$$e^{\lambda_A} \in R, \quad e_A = e_{h_1} e_{h_2} \dots e_{h_r}, \quad A = (h_1, \dots, h_r) \in P(1, \dots, n),$$

$$1 \leq h_1 < \dots < h_r \leq n, \quad e_\emptyset = e_0.$$

Тем самым можно характеризовать A как линейную, ассоциативную, дистрибутивную и некоммутативную алгебру над R с единичным элементом. Очевидно, A -значные функции имеют вид

$$f(x) = \sum_A f_A(x) e_A, \quad (3)$$

где $f_A(x) \in R$.

Такие функции называются моногенными функциями (см [2]), если они вещественно дифференцируемы и удовлетворяют обобщенной системе Коши—Римана в гиперкомплексном виде:

$$Df(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_0} e_0 + \frac{\partial}{\partial x_1} e_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} e_m \right) f(x) = 0, \quad (4)$$

причем различают моногенность слева или справа, смотря на то, с какой стороны действует оператор D .

Мы в дальнейшем ограничиваемся случаем моногенных справа функций. Моногенные слева функции рассматриваются совершенно аналогично.

Очевидно, что (4) в случае $m = 1$, $e_0 = 1$, $e_1 = -i$ действительно является системой Коши—Римана в комплексном виде ($z = x + i \cdot y$)

$$2 \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f(z) = 0. \quad (5)$$

Следуя этому подходу, пространство R^{m+1} отождествляется с множеством $\tilde{A} \subset A$, элементы которого имеют вид гиперкомплексного переменного

$$z = x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_m e_m$$

и тем самым рассматривается $f(x) = f(z)$ как отображение из $\tilde{A}$ в A . Важно заметить, что z (и тем более z^n , n —натуральное число) не обладает свойством моногенности и тем самым не может служить в обычном виде для образования степенного ряда. Выход из этого положения дает определение n -местного произведения, которое мы сейчас введем в рассмотрение.

§ 2. Определение n -местного произведения

Оказывается целесообразным следующее определение: Пусть V_+ —произвольное, быть может некоммутативное кольцо, $a_k \in V_+$ ($k=1, 2, \dots, n$) n -местная операция „ $\times$ “

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n = \frac{1}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_n}, \quad (6)$$

где суммирование совершается по всем перестановкам $i_1, i_2, \dots, i_n$, называется « $\times$ »-произведением.

Какие свойства дают право рассматривать такую операцию как произведение?

1. В случае $V = R$ или C (6) переходит как для каждого коммутативного кольца в обычное произведение из n множителей.

2. Операция (6) обладает перестановочным свойством. Это сравнимо с обобщением свойства коммутативности на случай n -местной операции.

3. Операция (6) дистрибутивна относительно сложения в силу дистрибутивности кольца V_+ .

4. Выигрыш перестановочного свойства в случае некоммутативного V_+ в общем влечет за собой потерю ассоциативности, как показывает пример

$$a_1 / (a_2 \times a_3) = \frac{a_1 a_2 a_3 + a_1 a_3 a_2 + a_2 a_3 a_1 + a_3 a_2 a_1}{4},$$

$$(a_1 \times a_2) \times a_3 = \frac{a_1 a_2 a_3 + a_2 a_1 a_3 + a_3 a_1 a_2 + a_3 a_2 a_1}{4},$$

когда a_k ($k = 1, 2, 3$) попарно различны.

Взамен имеем некоторую рекуррентную формулу, которая позволяет n -местное произведение свести к $(n-1)$ -местному произведению.

Теорема 1. Для произведения (6) имеют место следующие соотношения:

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n = \frac{1}{n} a_1 \cdot (a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n) + \dots + a_n \times (a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{n-1}) \quad (7)$$

и соответственно

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n = \frac{1}{n} [(a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n) \cdot a_1 + \dots + (a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{n-1}) \cdot a_n] \quad (8)$$

для всех $n \geq 1$.

Доказательство. Выражение

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n = \frac{1}{n!} \sum_{\pi(i_1, \dots, i_n)} a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_n}$$

содержит ровно $(n-1)!$ членов под суммой, в которых $a_1, a_2, \dots, a_n$ соответственно стоят на первом месте. Если выведем из этих n частичных сумм $a_1, a_2, \dots, a_n$, то остается в каждой частичной сумме $(n-1)!$ — раз «х»-произведение остальных множителей

и т. д., т. е.

$$\begin{aligned} & a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \frac{1}{n!} [a_1 (n-1)! a_2 \times \dots \times a_n + \\ & + a_2 ((n-1)! a_1 \times a_3 \times \dots \times a_n) + \dots + a_n ((n-1)! a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{n-1})] = \\ & = \frac{1}{n} [a_1 (a_2 \times \dots \times a_n) + a_2 (a_1 \times a_3 \times \dots \times a_n) + \dots + a_n (a_1 \times a_2 \times \dots \times \\ & \times a_{n-1})]. \end{aligned}$$

Тем самым (7) доказано. (8) устанавливается аналогично.

В случае, когда множитель a_i участвует v_i раз в произведении (6) мы условимся писать

$$\underbrace{a_1 \times \dots \times a_1}_{v_1 \text{ раз}} \times \underbrace{a_2 \times \dots \times a_2}_{v_2 \text{ раз}} \times \dots \times \underbrace{a_n \times \dots \times a_n}_{v_n \text{ раз}} = a_1^{v_1} \times a_2^{v_2} \times \dots \times a_n^{v_n}, \quad (9)$$

причем надо поставить скобки, если степени не понимаются в смысле $\times$ -произведения.

Например,

$$a_1^2 \times a_2 = a_1 \times a_1 \times a_2 = a_1 \times a_2 \times a_1 = a_2 \times a_1 \times a_1,$$

но

$$(a_1)^2 \times a_2 = (a_1 \times a_1) \times a_2 = (a_1 \times a_1) \times a_2.$$

Легко следует отсюда обобщение теоремы 1 в виде формулы

$$a_1^{v_1} \times \dots \times a_n^{v_n} = \frac{1}{|v|} [v_1 \cdot a_1 \cdot (a_1^{v_1-1} \times a_2^{v_2} \times \dots \times a_n^{v_n}) + \dots + v_n a_n (a_1^{v_1} \times \dots \times a_n^{v_n-1})] \quad (10)$$

и соответственно

$$a_1^{v_1} \times \dots \times a_n^{v_n} = \frac{1}{|v|} [v_1 (a_1^{v_1-1} \times a_2^{v_2} \times \dots \times a_n^{v_n}) a_1 + \dots + v_n \times (a_1^{v_1} \times \dots \times a_n^{v_n-1}) a_n], \quad (11)$$

где $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ рассматривается как мультииндекс и $|v| = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

С другой стороны, объединяя равные перестановки в (9), при помощи (6) получим

$$a_1^{v_1} \times \dots \times a_n^{v_n} = \frac{v_1! v_2! \dots v_n!}{|v|!} \sum_{\pi(i_1, \dots, i_n)} a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_n}, \quad (12)$$

где суммирование производится только по различным перестановкам $i_1, i_2, \dots, i_n$.

Это рассуждение ведет к следующему предложению.

Теорема 2. Степени суммы из n различных слагаемых $a_1, a_2, \dots, a_n$ произвольного кольца V (быть может некоммутативного) разлагаются при помощи $\times$ -произведения в обычном виде, т. е.

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^k = \sum_{|v|=k} \binom{k}{v} a^v, \quad (13)$$

где v — мультииндекс, $\binom{k}{v} = \frac{k!}{v!} = \frac{k!}{v_1! v_2! \dots v_n!}$ и

$$a^v = a_1^{v_1} \times a_2^{v_2} \times \dots \times a_n^{v_n}.$$

Пример.

$$(a_1 + a_2)^3 = a_1^3 + (a_1 a_1 a_2 + a_1 a_2 a_1 + a_2 a_1 a_1) + (a_1 a_2 a_2 + a_2 a_1 a_2 + a_2 a_2 a_1) + a_2^3 = a_1^3 + 3 a_1^2 \times a_2 + 3 a_1 \times a_2^2 + a_2^3 = \sum_{|v|=3} \binom{3}{v} a_1^{v_1} \times a_2^{v_2}.$$

Это следует и прямо в силу свойств $\times$ -произведения

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2)^3 &= (a_1 + a_2) \times (a_1 + a_2) \times (a_1 + a_2) = a_1 \times a_1 \times a_1 + \\ &+ (a_1 \times a_1 \times a_2 + a_1 \times a_2 \times a_1 + a_2 \times a_1 \times a_1) + (a_1 \times a_2 \times a_2 + a_2 \times a_1 \times a_2 + \\ &+ a_2 \times a_2 \times a_1) + a_2 \times a_2 \times a_2 = a_1^3 + 3 a_1^2 \times a_2 + 3 a_1 \times a_2^2 + a_2^3. \end{aligned}$$

§ 3. Разложение моногенной функции в виде степенного ряда

Чтобы найти разложение моногенной функции $f(z)$ в виде степенного ряда по $z = x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_m e_m$ введем оператор $\bar{D}$, сопряженный к D из формулы (4). Как принято определяется (см. [2])

$$\bar{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0} e_0 - \frac{\partial}{\partial x_1} e_1 - \dots - \frac{\partial}{\partial x_m} e_m \right).$$

Так как имеет место

$$D\bar{D} = \bar{D}D = \Delta_{m+1},$$

где Δ_{m+1} — лапласиан в $(m+1)$ -мерном пространстве, мы найдем, что $f(z)$ гармоническая функция и все ее компоненты $f_A(z)$ гармоничны. Следовательно, если допустим для простоты изложения, что область определения $f(z)$ содержит нулевую точку, то $f_A(z)$ в окрестности нуля разлагается в ряд Тейлора формально в виде

$$f_A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + x_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^k f_A(0). \quad (14)$$

Умножением на e_A и сложением всех выражений получается для $f(z)$ ряд в аналогичном виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + x_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^k f(0). \quad (15)$$

Учитывая

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} e_0 = - \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 - \dots - \frac{\partial f}{\partial x_m} e_m,$$

в силу моногенности справа, из (15) получим

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 e_0 - x_0 e_1) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} (x_m e_0 - x_0 e_m) \right)^k f(0). \quad (16)$$

Но поскольку

$$ze_k = x_0 e_k + x_1 e_1 e_k + \dots - x_k e_0 + \dots + x_m e_m e_k,$$

$$e_k z = x_0 e_k + x_1 e_k e_1 + \dots - x_k e_0 + \dots + x_m e_k e_m,$$

мы получим из (1)

$$- \frac{(ze_k + e_k z)}{2} = -(z \times e_k) = x_k e_0 - x_0 e_k$$

и (16) переходит в

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (z \times e_1) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} (z \times e_m) \right)^k f(0).$$

Отсюда следует в силу теоремы 2

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left\{ \sum_{|\nu|=k} \binom{k}{\nu} \frac{\partial^k f(0)}{\partial x^\nu} (z \times e_1)^{\nu_1} \times \dots \times (z \times e_m)^{\nu_m} \right\}, \quad (17)$$

где как обычно

$$\frac{\partial^k}{\partial \vec{x}^k} = \frac{\partial^k}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}}, \quad k = |\nu|.$$

Если рассматривается ряд Тейлора без упорядочения по однородным многочленам, то (17) имеет вид

$$f(z) = \sum_{|\nu|=0}^{\infty} \frac{1}{|\nu|!} \frac{\partial^{|\nu|} f(0)}{\partial \vec{x}^{|\nu|}} Z^{\nu}, \quad (18)$$

где под Z^{ν} понимается

$$Z^{\nu} = (-1)^{|\nu|} (z \times e_1)^{\nu_1} \times \dots \times (z \times e_m)^{\nu_m}.$$

Аналогично получается разложение для моногенной слева функции, в котором производные стоят справа от Z^{ν} .

Тем самым доказана

Теорема 3. Каждая моногенная в области $G \subset \mathbb{R}^{m+1}$ справа функция $f(z)$ в окрестности точки $a \in G$ разлагается единственным образом в степенной ряд относительно z вида

$$f(z) = \sum_{|\nu|=0}^{\infty} \frac{1}{|\nu|!} \frac{\partial^{|\nu|} f(a)}{\partial \vec{x}^{|\nu|}} [-(z-a) \times e_1]^{\nu_1} \times [-(z-a) \times e_2]^{\nu_2} \times \dots \times [-(z-a) \times e_m]^{\nu_m}. \quad (19)$$

Замечание. Формула (18) дает повод к заключению, что целесообразно рассматривать вместо гиперкомплексного переменного $z = x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_m e_m$ некоторый вектор $Z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$, $z_k = x_k e_0 - x_0 e_k$, $k = 1, 2, \dots, m$ гиперкомплексных переменных и на основе этого создать теорию моногенных Λ -значных функций в отличие от существующего до сих пор метода. Этому приему и естественным образом следующему из этого подходу Вейерштрасса посвящается отдельная работа.

Добавим еще, что для $m=1$ получается из (19) обычный ряд по $z = x + iy$, так как, в силу голоморфности, тогда

$$\frac{\partial}{\partial z} = -i \frac{\partial}{\partial y} = -e_1 \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Относительно этого случая в [2] находится замечание, как будто бы было необходимо вместо $z = x + iy$ рассмотреть $z = y - ix = x_1 e_0 - x_0 e_1$, но как мы видели, этого не надо.

Секция математики и физики
педагогического вуза им. Н. К. Крупской
г. Галле, ФРГ

Поступила 30.XII. 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Fueter. Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta \Delta u = 0$, mit vier reellen Variablen, Comment. Math. Helv., 7, 1934, 307—330.
2. F. Brackx, R. Delanghe and F. Sommen. Clifford analysis, Pitman Boston—London—Melbourne, 1982.
3. A. Sudbery. Quaternionic analysis. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 85, 1979, 199—225.
4. А. С. Мейлихаон. По поводу моногенности кватернионов, ДАН СССР, 59, № 3, 1948, 431—434.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.984.54

Т. Н. АРУТЮНЯН

ФУНКЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ТЕОРЕМА
ЕДИНСТВЕННОСТИ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ
ОПЕРАТОРА ДИРАКА С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ

Рассмотрим каноническую систему уравнений Дирака на полуоси

$$ly \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ B \frac{d}{dx} + Q(x) \right\} y = \lambda y, \quad 0 < x < \infty, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

а p и q — действительные, локально суммируемые функции, т. е.

$$p, q \in L^1_{\text{loc}}(0, \infty; \mathbb{R}). \quad (2)$$

Через $D(Q, \alpha)$ будем обозначать самосопряженное расширение оператора, порожденного дифференциальным выражением l на множестве гладких, финитных (справа) вектор-функций, удовлетворяющих краевому условию

$$y_1(0) \cos \alpha + y_2(0) \sin \alpha = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Будем предполагать, что спектры операторов $D(Q, \alpha)$ (чисто) дискретные, т. е. состоят только из собственных значений (с. з.) $\lambda_n(\alpha)$ (по поводу достаточных условий см. [1]—[3]). Заметим, что если при некотором $\alpha = \alpha_0$ спектр оператора $D(Q, \alpha_0)$ дискретен, то дискретны спектры операторов $D(Q, \alpha)$ при всех действительных α .

Известно [1], что при условии (2) существует единственное (среди линейно независимых) решение $u(x, \lambda)$ системы (1), принадлежащее $L^2(0, \infty; \mathbb{C}^2)$ при $\text{Im} \lambda \neq 0$ (решение Г. Вейля). При условии чистой дискретности спектра решение Г. Вейля можно выбрать таким (среди линейно зависимых), чтобы его компоненты $u_1(x, \lambda)$ и $u_2(x, \lambda)$ были целыми функциями параметра λ (при любом фиксированном $x \in [0, \infty)$) и для любого с. з. $\lambda_n(\alpha)$, $u(\cdot, \lambda_n(\alpha)) \in L^2(0, \infty; \mathbb{C}^2)$ (см. [1], [4]).

В дальнейшем важную роль играет следующая нумерация собственных значений. Сначала пронумеруем с. з. $\lambda_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ оператора $D(Q, \frac{\pi}{2})$ в порядке возрастания, причем через $\lambda_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ обозначим наименее удаленное от нуля неположительное с. з., т. е.

$$\dots \lambda_{-n}\left(\frac{\pi}{2}\right) < \lambda_{-n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) < \dots < \lambda_0\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq 0 < \lambda_1\left(\frac{\pi}{2}\right) < \dots, n=1,2,\dots \quad (4)$$

(известно, что все с. з. простые [1] и оператор Дирака неполуограничен [1], [2], [5]). Далее, дадим нумерацию $\lambda_n(\alpha)$ для $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Для этого рассмотрим функцию

$$m_{\frac{\pi}{2}}(\lambda) = \frac{u_1(0, \lambda) \cos \alpha + u_2(0, \lambda) \sin \alpha}{u_3(0, \lambda)}, \quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (5)$$

где $u(x, \lambda)$ — решение Г. Вейля. Легко видеть, что нули числителя есть с. з. $\lambda_n(\alpha)$, а нули знаменателя — с. з. $\lambda_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Поскольку и числитель и знаменатель в (5) есть целые функции и (см. [6])

$$\operatorname{Im}[m_{\frac{\pi}{2}}(\lambda)] = \frac{\int_0^{\pi} |u(x, \lambda)|^2 dx \cos \alpha}{|u_3(0, \lambda)|^2} \operatorname{Im} \lambda,$$

то $m_{\frac{\pi}{2}}(\lambda)$ есть вещественная (т. е. $\operatorname{Im}[m_{\frac{\pi}{2}}(\alpha)] = 0$ при $\operatorname{Im} \lambda = 0$) мероморфная функция, переводящая верхнюю полуплоскость в верхнюю. Известна (см. [7])

Теорема 0. Чтобы некоторая вещественная мероморфная функция переводила верхнюю полуплоскость в верхнюю, необходимо и достаточно, чтобы эта функция представлялась в виде

$$m_{\frac{\pi}{2}}(\lambda) = c \frac{\lambda - a_0}{\lambda - b_0} \prod' \left(1 - \frac{\lambda}{a_k}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{b_k}\right)^{-1}, \quad (6)$$

где

$$b_k < a_k < b_{k+1}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad a_{-1} < 0 < b_1, \quad (7)$$

и $c > 0$. Штрих при знаке бесконечного произведения означает, что индекс k принимает все целые значения, кроме нуля.

Из этой теоремы следует, что в формулах (6) и (7) мы можем при-

нять $a_k = \lambda_k(\alpha)$ и $b_k = \lambda_k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и что при $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\lambda_n\left(\frac{\pi}{2}\right) < \lambda_n(\alpha) < \lambda_{n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (8)$$

т. е. то единственное с. з. оператора $D(Q, \alpha)$, которое лежит между $\lambda_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $\lambda_{n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, мы пронумеровали номером n . Для всех остальных действительных чисел γ (которые, очевидно, можно представить в виде $\gamma = \alpha - \pi m$, где $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $m \in \mathbb{Z}$) мы примем следующую нумерацию:

$$\lambda_n(\gamma) = \lambda_n(\alpha - \pi m) = \lambda_{n+m}(\alpha), \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

где $\lambda_k(\alpha)$ для $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ уже пронумерованы через (4) и (8).

Из периодичности (с периодом π) краевого условия (3) очевидно следует, что нумерация (4), (8), (9) непротиворечива. Таким образом, каждое собственное значение λ_n мы рассматриваем как функцию (от параметра α , входящего в краевое условие (3)), определенную на всей действительной оси.

Определение. Функция $\lambda(\gamma)$ действительной переменной γ называется функцией собственных значений семейства операторов $\{D(Q, \alpha)$,

$$\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \} \quad (\text{коротко ФСЗ}), \text{ если для любого } \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

и любого $m \in \mathbb{Z}$

$$\lambda(\alpha - \pi m) = \lambda_m(\alpha), \quad (10)$$

где $\lambda_m(\alpha)$ пронумерованы согласно (4) и (8).

Из (9) легко видеть, что свойством (10) обладает $\lambda_0(\gamma)$, т. е. существование ФСЗ очевидно.

Обозначим еще через $\varphi(x, \lambda, \alpha)$ решение задачи Коши

$$I\varphi = \lambda\varphi, \quad \varphi(0, \lambda, \alpha) = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Если спектр оператора $D(Q, \alpha)$ дискретный, то из единственности решения задачи Коши следует, что $\varphi(x, \lambda_n(\alpha), \alpha)$ есть собственные функции оператора $D(Q, \alpha)$. Числа

$$\alpha_n(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \|\varphi(\cdot, \lambda_n(\alpha), \alpha)\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\pi} \{ |\varphi_1(x, \lambda_n(\alpha), \alpha)|^2 + |\varphi_2(x, \lambda_n(\alpha), \alpha)|^2 \} dx$$

называются нормировочными постоянными.

Теорема 1. Функция собственных значений $\lambda(\gamma)$ есть вещественная аналитическая функция. Ее производная обладает свойством

$$\left. \frac{\partial \lambda(\gamma)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma = \alpha - \pi m} = -\frac{1}{\alpha_m(\alpha)}, \quad \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (12)$$

Существует $\alpha_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ такое, что $\lambda(\alpha_0) = 0$.

Для доказательства рассмотрим функцию

$$F(\lambda, \gamma) = u_1(0, \lambda) \cos \gamma + u_2(0, \lambda) \sin \gamma.$$

Очевидно, что $F(\lambda, \gamma)$ есть целая функция двух комплексных переменных

λ и γ . Пусть $\alpha_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\gamma_0 = \alpha_0 - \pi m$, где m — произвольное це-

лое число, а λ_0 есть значение ФСЗ в точке γ_0 , т. е. $\lambda_0 = \lambda(\alpha_0 - \pi m) = \lambda_m(\alpha_0)$. Тогда из леммы:

Лемма 1 (о предельной точке). При условии (2) для любого комплексного λ существует не более одного линейно независимого решения системы (1), принадлежащего $L^2(0, \infty; \mathbb{C}^1)$,

доказательство которой мы опускаем и из того факта, что $\varphi(\cdot, \lambda_0, \alpha_0) = \varphi(\cdot, \lambda_m(\alpha_0), \alpha_0) \in L^2$, следует, что $u(\cdot, \lambda_0)$ линейно зависимо с $\varphi(\cdot, \lambda_m(\alpha_0), \alpha_0)$ и, в частности

$$u(0, \lambda_0) = c \varphi(0, \lambda_m(\alpha_0), \alpha_0) = c \begin{pmatrix} \sin \alpha_0 \\ -\cos \alpha_0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \sin \gamma_0 \\ -\cos \gamma_0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где $c_1 = \pm c \neq 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F(\lambda, \gamma_0)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda = \lambda_0} &= \frac{\partial u_1(0, \lambda_0)}{\partial \lambda} \cos \gamma_0 + \frac{\partial u_2(0, \lambda_0)}{\partial \lambda} \sin \gamma_0 = \\ &= -\frac{1}{c_1} \left(\frac{\partial u_1(0, \lambda_0)}{\partial \lambda} u_2(0, \lambda_0) - \frac{\partial u_2(0, \lambda_0)}{\partial \lambda} u_1(0, \lambda_0) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Лемма 2. Имеет место равенство

$$\frac{\partial u_1(0, \lambda_0)}{\partial \lambda} u_2(0, \lambda_0) - \frac{\partial u_2(0, \lambda_0)}{\partial \lambda} u_1(0, \lambda_0) = \int_0^\infty |u(x, \lambda_0)|^2 dx. \quad (15)$$

В процессе доказательства леммы 2 мы используем непрерывность ФСЗ $\lambda(\gamma)$, которая доказывается на основе строгой убываемости функции $\lambda(\gamma)$. Строгое убывание $\lambda(\gamma)$ доказывается так же, как и неравенства (8) (перемежаемость) на основе теоремы О, где вместо $m \frac{\pi}{2}(\lambda)$ рассматривается функция

$$m_\beta(\lambda) = \frac{u_1(0, \lambda) \cos \alpha + u_2(0, \lambda) \sin \alpha}{u_1(0, \lambda) \cos \beta + u_2(0, \lambda) \sin \beta}, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Из (13), (14) и (15) следует, что $F(\alpha_0, \gamma_0) = 0$ и $\frac{\partial F(0, \gamma_0)}{\partial \lambda} \neq 0$.

Отсюда, согласно теореме о неявной функции (см., например, [8], стр. 166), следует, что для любой точки $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ существует некоторая ее окрестность $V_1 \subset \mathbb{C}$, в которой единственным образом определена аналитическая функция $\lambda = \lambda(\gamma)$, которая для действительных γ совпадает с ФСЗ $\lambda = \lambda(\gamma)$. Так как на пересечении любых двух пересекающихся таких окрестностей V_1 и V_2 эти однозначные аналитические функции совпадают, то, в силу единственности аналитического продолжения, существует единственная аналитическая функция в некоторой комплексной окрестности действительной оси $\mathbb{R}$, которая совпадает с ФСЗ $\lambda(\gamma)$ $\mathbb{R}$. Таким образом, доказано первое предложение теоремы 1.

Для доказательства (12) заметим, что из определения $\varphi(\chi, \lambda, \alpha)$ как решения задачи Коши (11) легко получается тождество $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$[\lambda_n(\alpha) - \lambda_n(\beta)] (\varphi(\cdot, \lambda_n(\alpha), \alpha), \varphi(\cdot, \lambda_n(\beta), \beta)) = \sin(\beta - \alpha), \quad (16)$$

где (f, g) — скалярное произведение в $L^2(0, \infty; \mathbb{C}^2)$. Можно доказать также, что $(\varphi(\cdot, \lambda_n(\alpha), \alpha), \varphi(\cdot, \lambda_n(\beta), \beta)) \rightarrow (\varphi(\cdot, \lambda_n(\alpha), \alpha), \varphi(\cdot, \lambda_n(\alpha), \alpha))$ при $\beta \rightarrow \alpha$. Учитывая, что $\lambda_n(\alpha) - \lambda_n(\beta) = \lambda(\alpha - \pi n) - \lambda(\beta - \pi n)$, разделим обе стороны (16) на $\alpha - \beta$ и устремим $\beta \rightarrow \alpha$.

Так из (16) получим

$$\frac{\partial \lambda(\gamma)}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma = \alpha - \pi n} = - \frac{1}{\|\varphi(\cdot, \lambda_n(\alpha), \alpha)\|^2} = - \frac{1}{a_n(\alpha)}.$$

Из аналитичности (достаточно здесь непрерывности) ФСЗ $\lambda(\gamma)$ следует,

что, при изменении γ на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, она принимает все значения от

$\lambda_0\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \lambda_1\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ до $\lambda_0\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq 0$. Следовательно, существует

точка $\alpha_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ такая, что $\lambda(\alpha_0) = 0$. Теорема 1 доказана.

Из неполюограниченности множества с. з. следует, что значения ФСЗ заполняют всю действительную ось, из чего, в свою очередь, следует, что $u(\cdot, \lambda) \in L^2(0, \infty; \mathbb{C}^2)$ при любом действительном λ .

В дальнейшем будем использовать обозначения $\lambda(\gamma) = \lambda(Q, \gamma)$, чтобы подчеркнуть зависимость ФСЗ от «потенциальной» матрицы Q . Аналитичность ФСЗ подсказывает следующую теорему единственности в обратной задаче:

Теорема 2. Пусть спектры операторов $D(Q_1, \alpha)$ и $D(Q_2, \alpha)$ чисто дискретны и пусть $\lambda(Q_1, \gamma_k) = \lambda(Q_2, \gamma_k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$, где $\{\gamma_k\}$ — сходящаяся последовательность. Тогда $Q_1(x) = Q_2(x)$ почти всюду.

Для доказательства этой теоремы мы используем теорему единственности «по двум спектрам»:

Теорема 3. Пусть $\lambda_n(Q_1, \alpha_0) = \lambda_n(Q_2, \alpha_0)$ и $\lambda_n(Q_1, \beta_0) = \lambda_n(Q_2, \beta_0)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_0 \neq \beta_0$, $\alpha_0, \beta_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $Q_1(x) = Q_2(x)$ почти

всюду, доказательство которой можно провести почти дословно так же, как доказательство аналогичной теоремы для операторов Штурма-Лиувилля [9], и которое, в свою очередь, опирается на теорему единственности по спектральной функции, формулировка (в терминах ФСЗ удобная форму-

лировка такова: из $\lambda(Q_1, \alpha_0 - \pi n) = \lambda(Q_2, \alpha_0 - \pi n)$ и $\frac{\partial \lambda(Q_1, \gamma)}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma = \alpha_0 - \pi n} =$

$= c \frac{\partial \lambda(Q_2, \gamma)}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma = \alpha_0 - \pi n}$ для всех $n \in \mathbb{Z}$ следует, что $c = 1$ и $Q_1(x) = Q_2(x)$

почти всюду) и доказательство которой также совершенно аналогичны случаю оператора Штурма-Лиувилля [9].

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2. Пусть $u(x, \lambda)$ есть решение Г. Вейля системы $Bu' + Q_1(x)u = \lambda u$, а $v(x, \lambda)$ — аналогичное решение системы $Bv' + Q_2(x)v = \lambda v$. Рассмотрим целую функцию

$$f(\lambda) = u_1(0, \lambda) v_2(0, \lambda) - u_2(0, \lambda) v_1(0, \lambda).$$

Согласно условию теоремы 2 функция $f(\lambda)$ обращается в нуль при $\lambda = \lambda_k = \lambda(Q_1, \gamma_k) = \lambda(Q_2, \gamma_k)$, ибо при этих значениях λ обе функции (u и v) удовлетворяют одному и тому же краевому условию (3) с $\alpha = \gamma_k$ (см. (13)). Поскольку последовательность $\{\gamma_k\}$ сходится, то сходится и последовательность $\{\lambda_k\}$. Следовательно, целая функция $f(\lambda)$ тождественно равна нулю. Поэтому она равна нулю, в частности, на спектрах $\{\lambda_n(Q_1, 0), n \in \mathbb{Z}\}$ и $\{\lambda_n(Q_1, \frac{\pi}{2}), n \in \mathbb{Z}\}$. Но согласно (13),

$$u(0, \lambda_n(Q_1, 0)) = \begin{pmatrix} 0 \\ c_n \end{pmatrix}, \quad u(0, \lambda_n(Q_1, \frac{\pi}{2})) = \begin{pmatrix} d_n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } c_n \neq 0, d_n \neq 0.$$

Из этого и из $f(\lambda) \equiv 0$ теперь следует, что $v_1(0, \lambda_n(Q_1, 0)) = 0$ и $v_2(0, \lambda_n(Q_1, \frac{\pi}{2})) = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, а это значит (поскольку $v(\cdot, \lambda) \in L^2$ при всех действительных λ), что спектр $\{\lambda_n(Q_1, 0), n \in \mathbb{Z}\}$ оператора $D(Q_1, 0)$ содержится в спектре $\{\lambda_n(Q_2, 0), n \in \mathbb{Z}\}$ оператора $D(Q_2, 0)$. Аналогично в случае $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Но поменяв местами $D(Q_1, 0)$ и $D(Q_2, 0)$

мы получим обратное включение. Аналогично для операторов

$$D(Q_1, \frac{\pi}{2}) \text{ и } D(Q_2, \frac{\pi}{2}).$$

Таким образом получили, что $\lambda_n(Q_1, 0) = \lambda_n(Q_2, 0)$ и $\lambda_n(Q_1, \frac{\pi}{2}) = \lambda_n(Q_2, \frac{\pi}{2})$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Согласно теореме 3 отсюда следует, что $Q_1(x) = Q_2(x)$ почти всюду. Теорема 2 доказана. Отметим, что аналогичная теорема единственности для обратной задачи Штурма-Лиувилля на $[0, 1]$ доказана впервые в [10]. Заметим также, что теоремы типа 1 и 2 можно доказать совершенно аналогично и для регулярного оператора Дирака на конечном интервале.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Левитан, И. С. Сарисян. Введение в спектральную теорию, «Наука», М., 1970.
2. В. В. Мартынов. Прямые методы качественного спектрального анализа несамосопряженной системы дифференциальных уравнений первого порядка, дифф. уравнения, 4, № 8, № 12, 1960, 1494—1508, 2243—2257.
3. D. B. Hinton, J. K. Shaw. Dirac systems with discrete spectra, Canad. J. Math., XXXIX, 1, 1937, 100—122.
4. D. B. Hinton, J. K. Shaw. On the spectrum of singular Hamiltonian system Quaestiones Math., 5, 1982, 29—81.
5. В. А. Яворян. Об асимптотике спектральной матрицы-функции канонической системы дифференциальных уравнений, ДАН Арм. ССР, 56, № 3, 1973, 129—134.
6. Т. Н. Арутюнян. Обратная задача для канонической системы Дирака с дискретным спектром, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XX, № 4, 1985, 245—268.
7. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, «Гостехиздат», 1956.
8. Ю. Н. Бибигов. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений, изд-во ЛГУ, 1981.
9. В. А. Марченко. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, 1, Труды ММО, 1, 1952, 327—420.
10. J. R. McLaughlin, W. Rundell. A uniqueness theorem for an inverse Sturm-Liouville problem, J. Math. Phys., 28, 7, 1987, 1471—72.

Ռ. Ի. Հովսեփյան. Միակության ընդհանուր պնդումներ Հաարի սխեմի և անընդհատ ֆունկցիաներից բաղկացած կենտրոնավորված սխեմաների համար	421
Ա. Կ. Պողոսյան. Մեծ շեղումների հավանականությունները Գիբբսի պատահական դաշտերի համար	432
Ի. Ռ. Հովհաննիսյան. Կշռային Դիրիխլեի խնդրի մասին երկրորդ կարգի սինգուլյար կյլպական հավասարումների համար	448
Ա. Հ. Հովհաննիսյան. Լագենգ-Շտեյմաների եղանակի ընդհանրացումը մեկ դասի Հյուլենսի սկզբունքին բավարարող հավասարումների համար	462
Կ. Ա. Բաբսեյան, Վ. Գ. Պետրոսյան. Կարտանի նույնության տիպի առնչությունների մերմորֆ ֆունկցիաների լոգարիթմական ածանցյալների հետ ասոցիացված մեծությունների համար	474

ՀԱՄԱՌՈՏ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

Հ. Մալոնեկ. Աստիճանային շարքերը հիպերկոմպլեքս անալիզում	491
Տ. Ն. Հարությունյան. Դիսկրետ սպեկտրով Դիրակի օպերատորի սեփական արժեքների ֆունկցիան և միակության թեորեմ հակադարձ խնդրում	495

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Р. И. Овсеян. О некоторых теоремах единственности для системы Хаара и центрированных систем непрерывных функций	421
С. К. Полюсян. Вероятности больших отклонений для гиббсовских случайных полей	432
Г. Р. Оганесян. Весовая задача Дирихле для сингулярного эллиптического уравнения второго порядка	448
А. О. Оганесян. Обобщение метода Лагнеза-Штельмахера на один класс уравнений, удовлетворяющих принципу Гюйгенса	462
Г. А. Барсегян, В. Г. Петросян. Соотношения типа тождества Картана для величин, ассоциированных с логарифмическими производными мероморфных функций	474

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Х. Малонек. Степенные ряды в гиперкомплексном анализе	491
Т. Н. Арутюнян. Функция собственных значений в теореме единственности в обратной задаче для оператора Дирака с дискретным спектром	495

CONTENTS

R. I. Hovsepian. Some uniqueness theorems for Haar and continuous martingale differences systems	421
S. K. Poghosyan. Probabilities of large deviations for Gibbs random fields	432
G. R. Oganessian. Weighted Dirichlet problems for the second order singular elliptic equations	448
A. H. Hovhannessian. Generalization of the Lagnese-Stellmacher method for the one class equations, satisfying Huygens' principle	462
G. A. Barsagian, V. G. Petrosian. Cartan identity type relations for the quantities associated with the logarithmic derivatives of meromorphic functions	474

SHORT COMMUNICATIONS

H. Malonek. Power series in hypercomplex analysis	491
T. N. Harutunian. The eigenvalues function for Dirac operator with discrete spectra and the uniqueness theorem in inverse problem	495