ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке) а кратких сообщений—не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленым на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствущем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

1 Ռ. 20 կ. Р. К. Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contribttors who desire to have their articles published in the proceedings zvestia of the Academy of Sciences of the Armenien S.S.R., series "Matomatika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initals and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date muse be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to indicated by a numeral in square brackets properey inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article shoule contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitied ot twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

Математика, 1990, т. XXV, № 4, стр. 315—416

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 4, 1990 Математика

УДК 517.547

А. О. КАРАПЕТЯН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В ТРУБЧАТЫХ ОБЛАСТЯХ

§ 0. Введение

0.1. Известный результат Винера и Пэли [1] (см. также [2]) гласит, что класс Харди H^2 в правой полуплоскости, состоящий из тех голоморфных функций $f(z)$, $\operatorname{Re} z > 0$, для которых

$$\sup_{x>0}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+iy)|^2\,dy\right\}<+\infty, \tag{0.1}$$

допускает параметрическое интегральное представление вида

$$f(z)=\int_0^{+\infty}F(t)\cdot e^{-zt}\,dt,\ \operatorname{Re} z>0, \tag{0.2}$$

где функция $F(t)\in L^2(0, +\infty)$ произвольна.

В дальнейшем в работах ряда авторов (см., например, [3], [4]) были приведены различные обобщения этого результата, не выходящие, однако, за рамки идей и методов монографии [1]. В то же время в исследованиях М. М. Джрбашяна, подытоженных в его монографии [5], была развита теория гармонического анализа и интегральных преобразований в комплексной области. На ее основе в работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна [6] и в монографии [5] были получены существенно новые интегральные представления типа Винера—Пэли посредством ядер типа Миттаг—Леффлера

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+k/\rho)}. \tag{0.3}$$

Речь идет об интегральных представлениях (см. [5], теоремы 7.7, 7.7′, 7.8), установленных для классов $H_2[\alpha;\omega]$ $(1/2<\alpha<+\infty,\ -1<\omega<1)$. Эти классы состоят из функций $f(z)$, голоморфных в области угла

$$\Delta_\alpha=\{z\in\mathbb{C}: 0<|z|<+\infty,\ |\arg z|<\pi/2\alpha\} \tag{0.4}$$

и подчиненных условию вида

$$\sup_{|\varphi|<\pi/2\alpha}\left\{\int_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^2\cdot r^{\omega}\,dr\right\}<+\infty. \tag{0.5}$$

0.2. Одновременно с указанными работами велись исследования с целью обобщения теоремы Винера—Пэли на случай многих комплексных переменных. Для ознакомления с результатами, полученными в этом направлении, необходимо ввести ряд обозначений и понятий.

Пусть $\mathbf{C}^n$ и $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ обозначают n-мерные координатные пространства, соответственно, комплексных и действительных чисел, причем $\mathbf{R}^n$ будет рассматриваться как вполне вещественное подпространство в $\mathbf{C}^n$. Каждое $z=(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ можно записать в виде

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = x + iy, \tag{0.6}$$

где $\operatorname{Re} z = x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\operatorname{Im} z = y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, причем $z_k = x_k + iy_k (1 \leqslant k \leqslant n)$. Для произвольного $z=(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ положим $\bar{z} = (\bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_n) \in \mathbf{C}^n$, и тогда легко видеть, что если $z = x + iy$, то $\bar{z} = x - iy$. Скалярное произведение в $\mathbf{C}^n$ вводится обычным образом:

$$< z, w > = \sum_{k=1}^{n} z_k \cdot \bar{w}_k, \tag{0.7}$$

где $z=(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ и $w=(w_1, \cdots, w_n) \in \mathbf{C}^n$.

Если $z = x + iy \in \mathbf{C}^n$ $(x, y \in \mathbf{R}^n)$, то через $dm(z) = dxdy$ будет обозначаться $2n$-мерная мера Лебега в пространстве $\mathbf{C}^n \cong \mathbf{R}^{2n}$, где dx, dy — элементы объема в $\mathbf{R}^n$.

Далее, для произвольного множества $E \subset \mathbf{R}^n$ положим

$$T_E = \{z = x + iy \in \mathbf{C}^n : x \in \mathbf{R}^n, \ y \in E\}. \tag{0.8}$$

Трубчатой областью в $\mathbf{C}^n$ с основанием $B \subset \mathbf{R}^n$ (где B — открытое связное множество) называется область вида $T_B \subset \mathbf{C}^n$.

Множество $V \subset \mathbf{R}^n$ называется открытым выпуклым конусом (ОВК), если оно открыто в эвклидовой топологии пространства $\mathbf{R}^n$, выпукло и к тому же является конусом, то есть из $x=(x_1, \cdots, x_n) \in V$ и $\lambda \in (0, +\infty)$ следует, что $\lambda \cdot x = (\lambda \cdot x_1, \cdots, \lambda \cdot x_n) \in V$. Конус $V \in \mathbf{R}^n$ называется острым, если в нем не содержится целиком ни одной прямой пространства $\mathbf{R}^n$. Наконец, отметим, что для произвольного ОВК $V \subset \mathbf{R}^n$ сопряженным конусом называется множество

$$V^* = \{y \in \mathbf{R}^n : < y, v > \geqslant 0 \text{ при всех } v \in V\}. \tag{0.9}$$

В работе [7] С. Бохнер установил многомерный аналог параметрического интегрального представления (0.2) для класса функций, голоморфных в трубчатой области $T_V \subset \mathbf{C}^n$ и подчиненных условию вида

$$\sup_{y \in V} \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} |f(x+iy)|^2 \, dx \right\} < +\infty, \tag{0.10}$$

где V — произвольный острый ОВК в $\mathbf{R}^n$.

В дальнейшем оказалось, что теорема Винера-Пэли может быть перенесена на случай многомерных областей, более общих по сравнению с трубчатыми. Речь идет об областях Зигеля, имеющих вид

$$D = \{\eta = (z, u) \in \mathbf{C}^{n+m} : z \in \mathbf{C}^n, \ u \in \mathbf{C}^m, \ \operatorname{Im} z - F(u, u) \in V\}, \qquad (0.11)$$

где V — острый ОВК в $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 1)$, а отображение $F: \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$ $(m \geqslant 0)$ обладает рядом естественных свойств, в силу которых обычно называется V-эрмитовой формой на $\mathbf{C}^m$. Если $n \geqslant 1$, но $m = 0$ (т. е отображения F попросту нет), D называется областью Зигеля первого рода и, как легко видеть, представляет собой трубчатую область в $\mathbf{C}^n$, в основании которой лежит острый ОВК из $\mathbf{R}^n$.

В работе С. Г. Гиндикина [8] наряду с многочисленными глубокими результатами было получено дальнейшее обобщение теоремы Винера-Пэли, а именно: результат С. Бохнера был распространен на случай областей Зигеля второго рода, т. е. областей вида (0,11) при $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$. В этой же работе на основе уже установленных интегральных представлений были построены ядра Коши-Сегё для соответствующих классов функций.

0.3. Упомянутые выше исследования, обобщая классический результат Винера-Пэли в различных направлениях, тем не менее касались только пространств голоморфных функций типа Харди. А между тем в уже цитированной работе С. Г. Гиндикина [8] впервые была поставлена и решена задача получения параметрических интегральных представлений типа Винера-Пэли для классов голоморфных в областях Зигеля $D \subset \mathbf{C}^{n+m}$ $(n \geqslant 1, \ m \geqslant 0)$ функций, квадратично интегрируемых *по всей области D*. Там же на основе полученных представлений были построены воспроизводящие ядра для рассматриваемых классов функций. Следует отметить, что в частном случае, когда $n \geqslant 1$, но $m = 0$, результат С. Г. Гиндикина устанавливает интегральные представления типа Винера—Пэли для классов квадратично интегрируемых голоморфных функций в трубчатых областях $T_V \subset \mathbf{C}^n$, где V — острый ОВК в $\mathbf{R}^n$.

Указанные результаты работы [8] в дальнейшем были продолжены и обобщены в исследованиях ряда авторов. Прежде, чем дать обзор соответствующих работ, введем новые обозначения.

Пусть $p, \ s \in (0, +\infty)$, B — область в $\mathbf{R}^n$ и $\gamma(y)$, $y \in B$ — произвольная непрерывная положительная (т. е. $\gamma(y) > 0$ при $y \in B$) функция. Через $H^p_{s,\gamma}(T_B)$ обозначим пространство всех голоморфных в трубчатой области $T_B \subset \mathbf{C}^n$ функций $f(z) \equiv f(x+iy)$, для которых

$$M^p_{s,\gamma}(f) = \int_B \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} |f(x+iy)|^p \, dx \right\}^s \cdot \gamma(y) \, dy < +\infty. \qquad (0.12)$$

При $\gamma(y) \equiv 1$ $(y \in B)$ пространства $H^p_{s,\gamma}(T_B)$ нам удобнее будет обозначать просто через $H^p_s(T_B)$.

В работе Генчева [9] были получены интегральные представления типа Винера—Пэли для классов $H^p_s(T_B)$ в случае $n=1$, $B = (0, +\infty) \subset \mathbf{R}$

и при условиях $1 \leqslant p < 2$, $s=1$ или же $1 < p < 2$, $s=1/(p-1)$. Необходимо отметить, что в наиболее важном случае $p=2$, когда соответствующие интегральные представления являются параметрическими, статья [9] повторяет результат работы [8] С. Г. Гиндикина, да и то для весьма частного случая $n=1$, $m=0$.

Затем в работах М. М. Джрбашяна и В. М. Мартиросяна [10, 11] иными по сравнению с [8] и [9] методами* были получены интегральные представления опять же типа Винера-Пэли для весьма широких классов голоморфных функций одного комплексного переменного, включающих в качестве специального случая пространства $H^p_s(T_B)$ при $n=1$, $B=(a, b) \subset \mathbf{R}\,(-\infty < a < b < +\infty)$ и $1 < p < +\infty$, $0 < s < +\infty$.

Далее, в своих работах [12, 13] Генчев опубликовал аналогичные интегральные представления классов $H^p_s(T_B)$ уже для $n > 1$ и вновь при условиях $1 \leqslant p < 2$, $s=1$ или же $1 < p < 2$, $s=1/(p-1)$. Однако и они в важном случае $p=2$ явились фактически повторением результатов работы [8] при $n>1$, $m=0$.

0.4. Как видим, в работах [9]—[13] при установлении интегральных представлений классов $H^p_{s,\gamma}(T_B)$ предполагалось, что $\gamma(y)\equiv 1$, $y \in \bar{B}$. В работах [14, 15] аналогичные результаты были получены в случае произвольной весовой функции $\gamma(y) > 0\,(y \in B)$. В интересах дальнейшего изложения мы приведем точные формулировки некоторых основных результатов (см. [14], а также главу II диссертации [15], в которой приводятся и подробные доказательства). Но прежде введем некоторые обозначения.

Всюду дальше, если не оговорено противное, B будет обозначать некоторую область в пространстве $\mathbf{R}^n\,(n \geqslant 1$, а $\gamma(y)$, $y \in B$ — произвольную непрерывную положительную функцию. При этом используется обозначение:

$$\check{\gamma}_B(t) \equiv \int_B e^{-\langle y,\, t\rangle}\cdot\gamma(y)\,dy,\quad t \in \mathbf{R}^n. \tag{0.13}$$

Для функции $f(z)\equiv f(x+iy)$, заданной в трубчатой области $T_B \subset \mathbf{C}^n$, полагаем $(\forall y \in B)$:

$$f_y(x) \equiv f(x+iy),\quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{0.14}$$

Далее, если $g(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$ — некоторая функция, то договоримся обозначать через $\hat{g}$ ее преобразование Фурье (при условии, конечно, что оно определено).

В работах [14, 15] на основе методов, развитых в [10, 11], были установлены следующие основные результаты.

Теорема I. *Пусть* $2 \leqslant p < +\infty$, $q=p/(p-1)$, $0 < s < +\infty$ *и измеримая функция* $F(t)$, $t \in \mathbf{R}^n$ *удовлетворяет условию вида*

$$\int_B \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} |F(t)|^q \cdot e^{-q\langle y,\, t\rangle}\,dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \gamma(y)\,dy < +\infty. \tag{0.15}$$

---

* В своем реферате (Zentralblatt für Math., Vol. 609, 1987, 30039) Генчев необъективно осветил суть метода работы [11].

Тогда функция

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(t) \cdot e^{i<z,\, t>}\, dt, \quad z \in T_B, \tag{0.16}$$

принадлежит пространству $H^p_{s,\gamma}(T_B)$ и при этом

$$M^p_{s,\gamma}(f) \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2 \cdot s \cdot (p-2)}} \cdot \int\limits_B \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} |F(t)|^q \cdot e^{-q<y,\, t>}\, dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \gamma(y)\, dy < +\infty \cdot \tag{0.17}$$

Теорема II. *Пусть $1 < p \leqslant 2$ и $0 < s < +\infty$, тогда каждая функция $f \in H^p_{s,\gamma}(T_B)$ допускает интегральное представление вида*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(t) \cdot e^{i<z,\, t>}\, dt, \quad z \in T_B, \tag{0.18}$$

где:

1. *При $p=1$ функция $F(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$, непрерывна и удовлетворяет условию*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^n} \left[|F(t)|^s \cdot \gamma^*_B(s \cdot t) \right] \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2\, s}} \cdot M^1_{s,\gamma}(f) < +\infty. \tag{0.19}$$

2. *При $1 < p \leqslant 2$ функция $F(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$, измерима и удовлетворяет условию ($q = p/(p-1)$):*

$$\int\limits_B \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} |F(t)|^q \cdot e^{-q<y,\, t>}\, dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \gamma(y)\, dy \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2 \cdot s(2-p)}} \cdot M^p_{s,\gamma}(f) < +\infty. \tag{0.20}$$

При этом для п. в. $y \in B$ справедливо равенство

$$\hat{f}_y(t) = F(t) \cdot e^{-<y,\, t>}, \quad t \in \mathbb{R}^n. \tag{0.21}$$

Кроме того, при $p=2$ интегральное представление (0.18) *класса $H^p_{s,\gamma}(T_B)$ является к тому же параметрическим, т. е. $H^2_{s,\gamma}(T_B)$ совпадает с множеством функций $f(z)$, задаваемых формулой* (0.18), *и при этом выполняется равенство Парсеваля*

$$M^2_{s,\gamma}(f) = \int\limits_B \left\{ \int\limits_{n} |F(t)|^2 \cdot e^{-2<y,\, t>}\, dt \right\}^s \cdot \gamma(y)\, dy. \tag{0.22}$$

На основании теоремы II и методов работы [8] в [14, 15] были построены воспроизводящие ядра для некоторых весовых классов функций, голоморфных в трубчатых областях $T_B \subset \mathbb{C}^n$ с основанием вида

$$B = \left\{ y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_1 > \sum_{k=2}^{n} y_k^2 \right\}. \tag{0.23}$$

0.5. В настоящей работе устанавливаются интегральные представления типа Винера-Пэли и строятся воспроизводящие ядра для классов $H^p_{s,\gamma}(T_V)$, где V — острый ОВК в $\mathbb{R}^n$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, а параметр s и непрерывная положительная функция $\gamma(y)$, $y \in V$, подчинены определенным условиям.

В § 1 устанавливаются некоторые вспомогательные факты. В частности, исследуются свойства функции

$$\gamma_V^*(t)=\int\limits_V e^{-<t,\,y>}\gamma(y)\,dy,\ t\in R^n, \tag{0.24}$$

в зависимости от свойств функции $\gamma(y)$, заданной в конусе V (предложение 1.2).

В § 2 приводится важное уточнение теоремы II в случае, когда основание B рассматриваемой трубчатой области суть острый ОВК в $\mathbf{R}^n$. Тогда оказывается (теорема 2.1), что участвующая в интегральном представлении (0.18) функция $F(t)$ обращается в нуль вне сопряженного конуса V^*, если весовая функция $\gamma(y)$, $y\in V$, удовлетворяет условию

$$\varliminf_{|y|\to+\infty}\frac{\ln\gamma(y)}{|y|}>0\ (y\in V). \tag{0.25}$$

В § 3, исходя из острого ОВК $V\subset\mathbf{R}^n$ и функции $\gamma(y)$, $y\in V$, удовлетворяющей, помимо (0.25), некоторым дополнительным условиям, строится интегральное ядро по формуле

$$\Phi(z,\ w)=\int\limits_{V^*}\frac{e^{i<z-\bar{w},\,t>}}{\gamma_V^*(2\cdot t)}\,dt,\ z,\ w\in T_V. \tag{0.26}$$

Затем устанавливается основная теорема 3.1, утверждающая, что построенное ядро $\Phi(z,w)$ является воспроизводящим для функций класса $H^p_{s,\gamma}(T_V)$, где $1\leqslant p<2$, а параметр s пробегает определенный промежуток.

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность академику АН Армении М. М. Джрбашяну за постановку задач и полезные обсуждения входевыполнения данной работы.

§ 1. Вспомогательные результаты

1.1. Пусть E суть произвольное множество в $\mathbf{R}^n$ $(n\geqslant 1)$, договоримся обозначать через $\overline{E}$ и $\operatorname{Int}E$, соответственно, замыкание и внутренность E. Далее, напомним, что множество $E\subset\mathbf{R}^n$ называется конусом, если из $y\in E$ и $\lambda\in(0,+\infty)$ следует, что $\lambda\cdot y\in E$. Легко проверяется, что если $E\subset\mathbf{R}^n$ есть конус, то и множества $\overline{E}$, $\operatorname{Int}E$ являются конусами.

Единичной сферой в пространстве $\mathbf{R}^n$ $(n\geqslant 1)$ называется множество

$$S_n=\left\{y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n:|y|^2=\sum_{k=1}^n y_k^2=1\right\}. \tag{1.1}$$

Поверхностную меру Лебега на сфере S_n будем обозначать через σ_n.

Пусть E — произвольный конус в $\mathbf{R}^n$, тогда обозначим через E_S проекцию множества E на единичную сферу S_n при радиальном проектировании $y \to y/|y|$. Очевидно, что для любого конуса $E \subset \mathbf{R}^n$: $E_S = E \cap S_n$. Поэтому легко проверяются следующие соотношения:

$$\overline{(E_S)} = (\overline{E})_S, \quad \operatorname{Int}(E_S) = (\operatorname{Int} E)_S, \tag{1.2}$$

в которых операции замыкания и взятия внутренности справа понимаются относительно эвклидовой топологии $\mathbf{R}^n$, а слева — относительно топологии, индуцированной в S_n из пространства $\mathbf{R}^n$. Из (1.2) следует, что если конус E — открытое (замкнутое) множество в $\mathbf{R}^n$, то E_S является открытым (замкнутым) множеством сферы S_n.

Наконец, для произвольного множества $E \subset \mathbf{R}^n$ при $0 < R < +\infty$ положим

$$E_R = \{y \in E : |y| < R\}. \tag{1.3}$$

1.2. Всюду дальше V будет обозначать открытый выпуклый конус (ОВК) в пространстве $\mathbf{R}^n$. Выше мы ввели понятие сопряженного конуса V^* (см. § 0, (0.9)), причем легко видеть, что V^* в любом случае является замкнутым выпуклым конусом в $\mathbf{R}^n$. Внутренность конуса V^* обычно будем обозначать через $\operatorname{Int} V^*$, хотя более точным (но не удобным!) было бы обозначение $\operatorname{Int}(V^*)$. Нетрудно проверить, что для произвольного ОВК $V \subset \mathbf{R}^n$ множество $\operatorname{Int} V^*$ либо пусто, либо является ОВК в пространстве $\mathbf{R}^n$.

Справедливо следующее

Предложение 1.1. (а) *Каждое открытое выпуклое множество $E \subset \mathbf{R}^n$ канонически открыто, то есть $\operatorname{Int}(\overline{E}) = E$. Каждое замкнутое выпуклое множество $E \subset \mathbf{R}^n$ с непустой внутренностью канонически замкнуто, то есть $\overline{(\operatorname{Int} E)} = E$.*

б) *Если V — ОВК в $\mathbf{R}^n$, то $\overline{V} + V = V$.*

в) *Если V — ОВК в $\mathbf{R}^n$, то*

$$\operatorname{Int} V^* = \{y \in \mathbf{R}^n : \langle y, v \rangle > 0 \text{ при всех } v \in \overline{V} \setminus \{0\}\}. \tag{1.4}$$

(г) *Открытый выпуклый конус $V \subset \mathbf{R}^n$ является острым лишь при условии $\operatorname{Int} V^* \neq \varnothing$.*

(д) *Если V — острый ОВК в $\mathbf{R}^n$, то и $\operatorname{Int} V^*$ является острым ОВК в пространстве $\mathbf{R}^n$.*

(е) *Если V — острый ОВК в $\mathbf{R}^n$, то*

$$V = \operatorname{Int}(\operatorname{Int} V^*)^*. \tag{1.5}$$

Чтобы не отклоняться от основной линии изложения, мы опускаем доказательство, хотя оно не представляет труда. Отметим лишь, что содержание предложения 1.1, по-видимому, хорошо известно.

1.3. Всюду дальше V обозначает острый ОВК в пространстве $\mathbf{R}^n$, а $\gamma(y)$, $y \in V$ — произвольная непрерывная положительная функция. Сформулируем ряд свойств, которыми может обладать или не обладать функция γ.

(А) $$\lim_{|y|\to+\infty} \frac{\ln\gamma(y)}{|y|} = 0 \ (y\in V).$$

(Б) $$\overline{\lim_{|y|\to+\infty}} \frac{\ln\gamma(y)}{|y|} \leqslant 0 \ (y\in V).$$

(В) $$\underline{\lim_{|y|\to+\infty}} \frac{\ln\gamma(y)}{|y|} > 0 \ (y\in V).$$

(Г) $$\gamma\in L^1(V).$$

(Д) $\gamma\in L^1(V_R)$ для каждого $R\in(0, +\infty)$.

(Е) Существует константа $C\in(0, +\infty)$, такая, что
$$\gamma(2\cdot y)\leqslant C\cdot\gamma(y),\ y\in V.$$

Далее положим
$$\gamma_V^*(t)\equiv\int_V e^{-<y,\,t>}\cdot\gamma(y)\,dy,\ t\in\mathbb{R}^n, \tag{1.6}$$
и при этом заметим, что (1.6) хорошо согласуется с ранее введенным более общим обозначением (0.13).

Имеет место

Предложение 1.2. (а) *Если* γ *удовлетворяет условию* (*В*), *то* $\gamma_V^*(t)\equiv+\infty$ *при* $t\in\mathbb{R}^n\setminus V^*$.

(б) *Если* γ *удовлетворяет условиям* (*Б*) *и* (*Д*), *то* $0<\gamma_V^*(t)<+\infty$ *при* $t\in\operatorname{Int}V^*$ *и функция* $\gamma_V^*(t)$ *непрерывна в конусе* $\operatorname{Int}V^*$.

(в) *Если* γ *удовлетворяет условию* (*Д*), *то для любого* $\varepsilon>0$ *существует константа* $C=C(\gamma,\varepsilon)\in(0,+\infty)$, *такая, что*
$$\gamma_V^*(t)\geqslant C\cdot e^{-\varepsilon\cdot|t|},\ t\in\mathbb{R}^n. \tag{1.7}$$

(г) *Если* $\delta\in[1,+\infty)$, *то*
$$\gamma_V^*(\delta\cdot t)\leqslant\gamma_V^*(t),\ t\in V^*. \tag{1.8}$$

(д) *Если* γ *удовлетворяет условию* (*Е*), *то для любого* $\delta\in(0,1)$ *существует константа* $C=C(\gamma,\delta)\in(0,+\infty)$, *такая, что*
$$\gamma_V^*(\delta\cdot t)\leqslant C\cdot\gamma_V^*(t),\ t\in V^*. \tag{1.9}$$

(е) *Если* γ *удовлетворяет условию* (*Г*), *то* $0<\gamma_V^*(t)<+\infty$ *при* $t\in V^*$ *и функция* $\gamma_V^*(t)$ *непрерывна в конусе* V^*.

Доказательство. Пусть γ подчинена условию (В) и $t\in\mathbb{R}^n\setminus V^*$. В силу (0.13) найдется $\zeta_0\in V_S\subset S_n$, для которого $<t,\zeta_0><0$. Следовательно, существуют открытая (относительно S_n!) окрестность $\Omega\subset V_S$ точки ζ_0 и положительное число ε такие, что
$$<t,\zeta>\leqslant-\varepsilon,\ \zeta\in\Omega. \tag{1.10}$$

Далее, так как γ обладает свойством (В), то
$$\gamma(y)\geqslant e^{-\varepsilon/2\cdot|y|},\ |y|\geqslant R=R(\varepsilon)>0\ (y\in V). \tag{1.11}$$

С учетом (1.10) и (1.11) приходим к следующей цепочке неравенств:

$$\gamma_V^*(t) \geqslant \int\limits_{V \setminus V_R} e^{-<y,t>} \cdot \gamma(y)\,dy \geqslant \int\limits_{V \setminus V_R} e^{-<y,t>} \cdot e^{-\varepsilon/2 \cdot |y|}\,dy =$$

$$= \int\limits_R^{+\infty} e^{-\varepsilon/2 \cdot r} \cdot r^{n-1} \int\limits_{V_S} e^{-r<\zeta,t>}\,d\sigma_n(\zeta)\,dr \geqslant \int\limits_R^{+\infty} e^{-\varepsilon/2 \cdot r} \times$$

$$\times r^{n-1} \int\limits_{\Omega} e^{\varepsilon \cdot r}\,d\sigma_n(\zeta)\,dr = \sigma_n(\Omega) \cdot \int\limits_R^{+\infty} e^{\varepsilon/2 \cdot r} \cdot r^{n-1}\,dr = +\infty, \tag{1.12}$$

и тем самым утверждение (а) доказано.

Пусть теперь функция γ обладает свойствами (Б) и (Д). Покажем, что для произвольного компакта $K \subset \operatorname{Int} V^*$ существует функция $\Psi \in L^1(V)$ такая, что независимо от $t \in K$ выполняется неравенство

$$e^{-<y,t>} \cdot \gamma(y) \leqslant \Psi(y),\ y \in V, \tag{1.13}$$

после чего утверждение (б) становится очевидным. Заметим прежде всего, что в силу соотношений (1.4) и (1.2) для каждого $t \in K$ имеем: $<t, \zeta> > 0,\ \zeta \in \overline{(V_S)}$. Из соображений компактности следует существование некоторого положительного числа ε такого, что

$$<t, \zeta> \geqslant \varepsilon,\ \zeta \in V_S,\ t \in K, \tag{1.14}$$

или же

$$<t, y> \geqslant \varepsilon \cdot |y|,\ y \in V,\ t \in K. \tag{1.15}$$

Следовательно, при $t \in K$ имеем

$$e^{-<y,t>} \cdot \gamma(y) \leqslant e^{-\varepsilon \cdot |y|} \cdot \gamma(y) \equiv \Psi(y),\ y \in V, \tag{1.16}$$

и остается только показать, что $\Psi \in L^1(V)$. Поскольку γ обладает свойством (Б), то

$$\gamma(y) \leqslant e^{\varepsilon/2 \cdot |y|},\ |y| \geqslant R = R(\varepsilon) > 0\ (y \in V). \tag{1.17}$$

Учитывая (1.17) и тот факт, что γ удовлетворяет условию (Д), получаем

$$\int\limits_V \Psi(y)\,dy = \int\limits_{V_R} e^{-\varepsilon \cdot |y|} \cdot \gamma(y)\,dy + \int\limits_{V \setminus V_R} e^{-\varepsilon \cdot |y|} \cdot \gamma(y)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{V_R} \gamma(y)\,dy + \int\limits_{V \setminus V_R} e^{-\varepsilon/2 \cdot |y|}\,dy < +\infty. \tag{1.18}$$

Далее, пусть функция γ обладает только свойством (Д) и положительное число ε произвольно. Полагая в соответствии с (1.3) $V_\varepsilon = \{y \in V : |y| < \varepsilon\}$, при любом $t \in \mathbf{R}^n$ имеем

$$<t, y> \leqslant \varepsilon \cdot |t|,\ y \in V_\varepsilon. \tag{1.19}$$

Следовательно, при $t \in \mathbf{R}^n$ справедливы неравенства

$$\gamma_V^*(t) \geqslant \int\limits_{V_\varepsilon} e^{-<t,y>} \cdot \gamma(y)\,dy \geqslant e^{-\varepsilon \cdot |t|} \cdot \int\limits_{V_\varepsilon} \gamma(y)\,dy =$$

$$= C(\gamma, \varepsilon)\cdot e^{-\varepsilon\cdot|t|},\quad C(\gamma, \varepsilon) = \int\limits_{V_\varepsilon} \gamma(y)\,dy. \tag{1.20}$$

И поскольку γ удовлетворяет условию (Д), то $C(\gamma, \varepsilon)\in(0, +\infty)$, что и доказывает (в).

Если $\delta\in[1, +\infty)$, то в силу (0.13) имеем

$$<\delta\cdot t, y> \geqslant <t, y>,\quad y\in V,\ t\in V^*. \tag{1.21}$$

Поэтому для $t\in V^*$ получим

$$\gamma_V^*(\delta\cdot t) = \int\limits_V e^{-<\delta\cdot t, y>}\cdot\gamma(y)\,dy \leqslant \int\limits_V e^{-<t, y>}\cdot\gamma(y)\,dy = \gamma_V^*(t),$$

и утверждение (г) также доказано.

Если γ обладает свойством (Е) с некоторой константой $C\in(0, +\infty)$, то нетрудно убедиться в справедливости следующих неравенств:

$$\gamma(y)\leqslant C^k\cdot\gamma(y/2^k),\quad y\in V\ (k=1, 2, \cdots). \tag{1.22}$$

Далее, если задано $\delta\in(0, 1)$, можно подобрать натуральное число N таким образом, чтобы $1\leqslant\delta\cdot 2^N < +\infty$. Тогда с учетом (1.22) имеем

$$\gamma_V^*(\delta\cdot t)\leqslant C^N\int\limits_V e^{-<\delta\cdot t, y>}\cdot\gamma(y/2^N)\,dy,\quad t\in\mathbb{R}^n, \tag{1.23}$$

или же, после замены переменной интегрирования: $y=2^N\cdot v$, $v\in V$, и на основании (1.8)

$$\gamma_V^*(\delta\cdot t)\leqslant C^N\cdot 2^{Nn}\cdot\int\limits_V e^{-<\delta\cdot t, 2^N\cdot v>}\cdot\gamma(v)\,dv =$$

$$= C^N\cdot 2^{Nn}\cdot\gamma_V^*(2^N\cdot\delta\cdot t)\leqslant C^N\cdot 2^{Nn}\cdot\gamma_V^*(t),\quad t\in V^*. \tag{1.24}$$

Таким образом, (1.9) выполняется с константой $C(\gamma, \delta) = C^N\cdot 2^{Nn}$.

Наконец, если функция γ удовлетворяет условию (Г), то независимо от $t\in V^*$ справедливо неравенство ($y\in V$):

$$e^{-<y, t>}\cdot\gamma(y)\leqslant\gamma(y)\in L^1(V), \tag{1.25}$$

которое и влечет (е). Таким образом, предложение 1.2 полностью доказано.

§ 2. Интегральные представления типа Винера—Пэли

Всюду в данном параграфе V обозначает острый открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$.

2.1. Справедлива следующая

Лемма 2.1. *Пусть* $1<p\leqslant 2$, $q=p/(p-1)$, $0<s<+\infty$ *и* $\gamma(y)$, $y\in V$ — *непрерывная положительная функция, обладающая свойством (В). Если измеримая функция* $F(t)$, $t\in\mathbb{R}^n$, *удовлетворяет условию вида*

$$\int\limits_V \left\{ \int\limits_{\mathbf{R}^n} |F(t)|^q e^{-q<y,\, t>} dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \gamma(y)\, dy < +\infty, \tag{2.1}$$

то $F(t)=0$ *для почти всех* $t \in \mathbf{R}^n \setminus V^*$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $t_0 \in \mathbf{R}^n \setminus V^*$. Тогда имеем неравенчтво $< t_0, \zeta_0 > < 0$ для некоторого $\zeta_0 \in V_S$. Следовательно, существуют открытая окрестность $W \subset \mathbf{R}^n \setminus V^*$ точки t_0 и открытая (относительно сферы S_n)окрестность $\Omega \subset V_S$ точки ζ_0 такие, что

$$< t, \zeta > < -\varepsilon \ (t \in W,\ \zeta \in \Omega) \tag{2.2}$$

для некоторого положительного числа ε.

Далее, поскольку γ обладает свойством (B), то

$$\gamma(y) \geqslant e^{-ps\varepsilon/2 \cdot |y|},\ |y| \geqslant R = R(\varepsilon) > 0\ (y \in V). \tag{2.3}$$

Комбинируя (2.1)—(2.3), приходим к следующей цепочке неравенств:

$$+\infty > \int\limits_V \left\{ \int\limits_{\mathbf{R}^n} |F(t)|^q \cdot e^{-q<y,\, t>} dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \gamma(y)\, dy \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{V \setminus V_R} \left\{ \int\limits_W |F(t)|^q \cdot e^{-q<y,\, t>} dt \right\}^{s(p-1)} \cdot e^{-ps\varepsilon/2 \cdot |y|}\, dy \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_R^{+\infty} e^{-ps\varepsilon/2 \cdot r} \cdot r^{n-1} \int\limits_\Omega \left\{ \int\limits_W |F(t)|^q \cdot e^{-qr<\zeta,\, t>} dt \right\}^{s(p-1)} d\sigma_n(\zeta)\, dr \geqslant$$

$$\geqslant \sigma_n(\Omega) \cdot \left\{ \int\limits_W |F(t)|^q dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \int\limits_R^{+\infty} e^{-ps\varepsilon/2 \cdot r} \cdot r^{n-1} \cdot e^{qr\varepsilon \cdot s(p-1)} dr.$$

Таким образом, окончательно получилось

$$\sigma_n(\Omega) \cdot \left\{ \int\limits_W |F(t)|^q dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \int\limits_R^{+\infty} e^{ps\varepsilon/2 \cdot r} \cdot r^{n-1} dr < +\infty. \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует, что $F(t)=0$ п. в. в W. Итак, $F(t)=0$ (п. в.) в окрестности каждой точки $t_0 \in \mathbf{R}^n \setminus V^*$, а потому $F(t)=0$ для почти веех $t \in \mathbf{R}^n \setminus V^*$. Лемма доказана.

2.2. Комбинируя теорему II (см. § 0) с предложением 1.2 (а) и леммой I.I, получаем следующий основной результат.

Теорема 2.1. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant 2$, $0 < s < +\infty$ *и* $\gamma(y)$, $y \in V$ — *непрерывная положительная функция, обладающая свойством* (B). *Тогда каждая функция* $f \in H^p_{s,\gamma}(T_V)$ *допускает интегральное представление вида*

$$f(z) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int\limits_{V^*} F(t) \cdot e^{i<z,\, t>} dt,\ z \in T_V, \tag{2.5}$$

где

1. *При $p=1$ функция $F(t)$, $t\in\mathbb{R}^n$ непрерывна и удовлетворяет условиям*

$$F(t)\equiv 0,\ t\in\mathbb{R}^n\setminus V^*; \tag{2.6}$$

$$\sup_{t\in V^*}\left|\|F(t)\|^s\cdot\gamma_V^*(s\cdot t)\right|<\frac{1}{(2\pi)^{n/2\cdot s}}M^1_{s,\gamma}(f)<+\infty. \tag{2.7}$$

2. *При $1<p<2$ функция $F(t)$, $t\in V^*$ измерима и удовлетворяет условию $(q=p/(p-1))$:*

$$\int_V\left\{\int_{V^*}|F(t)|^q\cdot e^{-q<y,t>}\,dt\right\}^{s(p-1)}\cdot\gamma(y)\,dy\leqslant$$

$$<\frac{1}{(2\pi)^{n/2\cdot s(2-p)}}\cdot M^p_{s,\gamma}(f)<+\infty. \tag{2.8}$$

При этом справедливо равенство (для п. в. $y\in V$):

$$\hat{f}_y(t)=\begin{cases}F(t)\cdot e^{-<y,t>} & t\in V^*,\\ 0, & t\in\mathbb{R}^n\setminus V^*.\end{cases} \tag{2.9}$$

Кроме того, при $p=2$ интегральное представление (2.5) *класса $H^p_{s,\gamma}(T_V)$ является к тому же параметрическим, то есть $H^2_{s,\gamma}(T_V)$ совпадает с множеством функций $f(z)$, задаваемых формулой* (2.5), *где $F(t)$, $t\in V^*$ — произвольная измеримая функция, удовлетворяющая условию*

$$\int_V\left\{\int_{V^*}|F(t)|^2\cdot e^{-2<y,t>}\,dt\right\}^s\cdot\gamma(y)\,dy<+\infty, \tag{2.10}$$

причем выполняется равенство Парсеваля

$$M^2_{s,\gamma}(f)=\int_V\left\{\int_{V^*}|F(t)|^2\cdot e^{-2<y,t>}\,dt\right\}^s\cdot\gamma(y)\,dy. \tag{2.11}$$

§ 3. Построение воспроизводящих ядер

3.1. Прежде всего установим некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 3.1. *Пусть V — открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$ и компакт K лежит в V. Тогда существует такое $a\in V$, при котором $K\subset a+V$.*

Доказательство этого факта простое и потому опускается.

Лемма 3.2. *Пусть V — острый ОВК в $\mathbb{R}^n$ и $\gamma(y)$, $y\in V$ — непрерывная положительная функция, обладающая свойством (Д). Если $a\in V$ и $\delta\in(0,+\infty)$, $\alpha\in[0,+\infty)$, то*

$$\eta(t)\equiv\frac{e^{-<a,t>}}{[\gamma_V^*(\delta\cdot t)]^{\alpha}}\in L^p(V^*) \tag{3.1}$$

при всех $0<p<\infty$.

Доказательство. Поскольку $a \in V$, то в силу предложения 1.1 имеем

$$\langle a, t \rangle > 0, \ t \in V^* \setminus \{0\}, \tag{3.2}$$

откуда следует существование некоторого положительного числа ε такого, что

$$\langle a, t \rangle > \varepsilon \cdot |t|, \ t \in V^*. \tag{3.3}$$

Далее, так как γ обладает свойством (Д), то согласно предложению 1.2 (в)

$$\overset{*}{\gamma}_V(t) \geqslant C \cdot e^{-\varepsilon/2\delta\varepsilon\cdot|t|}, \ t \in \mathbf{R}^n, \tag{3.4}$$

где $C \in (0, +\infty)$. Учитывая явный вид функции $\eta(t)$ (см. (3.1)) и неравенства (3.3), (3.4), получаем

$$\eta(t) \leqslant \frac{1}{C^s} \cdot e^{-\varepsilon/2\cdot|t|}, \ t \in V^*, \tag{3.5}$$

после чего утверждение леммы уже очевидно.

3.2. Всюду дальше предполагается, что V — острый ОВК в $\mathbf{R}^n$, а $\gamma(y)$, $y \in V$ — непрерывная положительная функция, обладающая свойствами (А) и (Д).

Для произведения $z \in T_V$ и $v \in V$ положим

$$R_{z,v}(t) = \begin{cases} 0, \ t \in \mathbf{R}^n \setminus V^*, \\ (2\pi)^{n/2} \dfrac{e^{i\langle z+iv, t\rangle}}{\overset{*}{\gamma}_V(2\cdot t)}, \ t \in \operatorname{Int} V^*. \end{cases} \tag{3.6}$$

Кроме того, рассмотрим также функцию

$$\Phi(z, w) = \int_{V^*} \frac{e^{i\langle z-\overline{w}, t\rangle}}{\overset{*}{\gamma}_V(2\cdot t)}\, dt, \ z, \ w \in T_V. \tag{3.7}$$

Основные свойства введенных функций устанавливает

Лемма 3.3. (а) *Функция $\Phi(z, w)$, задаваемая формулой* (3.7), *определена при всех $z, w \in T_V$ и является голоморфной относительно z и антиголоморфной относительно w.*

(б) *При любых $z \in T_V$ и $v \in V$ $R_{z,v}(t) \in L^p(\mathbf{R}^n)$ для всех $0 < p \leqslant \infty$ и при этом $\Phi(z, u+iv)$, как функция от $u \in \mathbf{R}^n$, является преобразованием Фурье функции $R_{z,v}(t)$.*

Доказательство. Утверждение (а) следует из лемм 3.1 и 3.2, а утверждение (б) устанавливается сопоставлением формул (3.6) и (3.7) на основании леммы 3.2.

Перейдем теперь к установлению основного результата.

Теорема 3.1. *Пусть V — острый ОВК в $\mathbf{R}^n$, $\gamma(y)$, $y \in V$ — непрерывная положительная функция, обладающая свойствами* (A) *и* (Д), *и ядро $\Phi(z, w)$ определено по формуле* (3.7). *Допустим также, что $1 \leqslant p \leqslant 2$ и положительное число s удовлетворяет одному из следующих условий:*

(а) $1/p \leqslant s \leqslant 2/p$;

(б) $1/p \leqslant s \leqslant 1/(p-1)$, *но при этом* γ *обладает дополнительным свойством* (E);

(в) $1/p \leqslant s < +\infty$, *но при этом* γ *обладает дополнительным свойством* (Γ).

Тогда любая функция $f \in H^p_{s,\gamma}(T_V)$ *допускает представление вида*

$$f(z) \equiv \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_{T_V} f(w) \cdot \Phi(z, w) \cdot \gamma(v)\, du\, dv, \quad z \in T_V, \quad (w = u + iv) \tag{3.8}$$

причем интеграл справа сходится абсолютно при всех $z \in T_V$.

Доказательство. Пусть функция $f \in H^p_{s,\gamma}(T_V)$, тогда к ней применима теорема 2.1, согласно которой имеет место интегральное представление вида

$$f(z) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{V^*} F(t) \cdot e^{i<z,t>} dt, \quad z \in T_V, \tag{3.9}$$

где при $p=1$ функция $F(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$, непрерывна и удовлетворяет условиям (2.6) и (2.7), а при $1 < p \leqslant 2$ F измерима на V^* и удовлетворяет условию (2.8). При этом выполняется равенство

$$\hat{f}_v(t) = \begin{cases} F(t) \cdot e^{-<v,t>}, & t \in V^*, \\ 0, & t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*. \end{cases} \tag{3.10}$$

Затем зафиксируем произвольную точку $z = x + iy \in T_V$, положим

$$I(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_{T_V} f(w) \cdot \Phi(z, w) \cdot \gamma(v)\, du\, dv \quad (w = u + iv) \tag{3.11}$$

и в предположении абсолютной сходимости интеграла (3.11) установим равенство $I(z) = f(z)$ следующим образом:

$$I(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_V \gamma(v) \int_{\mathbb{R}^n} f_v(u) \cdot \Phi(z, u + iv)\, du\, dv =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_V \gamma(v) \int_{\mathbb{R}^n} f_v(u) \cdot \hat{R}_{z,v}(u)\, du\, dv =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_V \gamma(v) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_v(t) \cdot R_{z,v}(t)\, dt\, dv =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_V \gamma(v) \int_{V^*} F(t) \cdot e^{-<v,t>} \cdot \frac{e^{i<z+iv,t>}}{\tilde{\gamma}_V(2 \cdot t)}\, dt\, dv =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{V^*} F(t) \cdot \frac{e^{i<z,t>}}{\tilde{\gamma}_V(2 \cdot t)} \int_V \gamma(v) \cdot e^{-2<v,t>}\, dv\, dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{V^*} F(t) \cdot e^{i<z,t>}\, dt = f(z). \tag{3.12}$$

Итак, нам осталось убедиться в абсолютной сходимости интеграла (3.11), то есть показать, что

$$\tilde{I}(z) = \int\limits_{V} \gamma(v) \int\limits_{\mathbf{R}^n} |f_v(u)| \cdot |\Phi(z, u+iv)| \, du \, dv < +\infty. \tag{3.13}$$

Применяя интегральное неравенство Гёльдера, лемму 3.3 (б) и теорему Хаусдорфа-Юнга, приходим к оценке

$$\tilde{I}(z) \leqslant \text{const} \cdot J, \tag{3.14}$$

где

$$J = \int\limits_{V} \tilde{f}(v) \cdot \tilde{R}(v) \cdot \gamma(v) \, dv, \tag{3.15}$$

$$\tilde{\ }(v) = \Big(\int\limits_{\mathbf{R}^n} |f_v(u)|^p du \Big)^{1/p}, \ v \in V, \tag{3.16}$$

$$\tilde{R}(v) = \Big(\int\limits_{\mathbf{R}^n} |R_{z,v}(t)|^p \, dt \Big)^{1/p} = (2\pi)^{n/2} \cdot \Big(\int\limits_{V^*} \frac{e^{-p<y+v,t>}}{[\gamma_V^*(2\cdot t)]^p} \, dt \Big)^{1/p}, \ v \in V. \tag{3.17}$$

Нам необходимо показать, что $J < +\infty$. При этом в силу предположения $f \in H^p_{s,\gamma}(T_V)$ имеем неравенство

$$\int\limits_{V} [\tilde{f}(v)]^{ps} \cdot \gamma(v) \, dv < +\infty. \tag{3.18}$$

Прежде всего введем меру

$$d\nu(t) = \frac{e^{-p<y,t>}}{[\gamma_V^*(2\cdot t)]^p} \, dt, \ t \in V^*, \tag{3.19}$$

которая в силу леммы 3.2 имеет конечную массу $\nu_0 < +\infty$. Сопоставляя (3.17) с (3.19), получим

$$[\tilde{R}(v)]^p \leqslant (2\pi)^{pn/2} \cdot \int\limits_{V^*} e^{-p<v,t>} \, d\nu(t), \ v \in V, \tag{3.20}$$

откуда, кстати, следует, что

$$\sup_{v \in V} [\tilde{R}(v)] < +\infty. \tag{3.21}$$

Перейдем теперь непосредственно к разбору случаев (а), (б) и (в) (см. формулировку доказываемой теоремы). Но сначала заметим, что при $s = 1/p$, когда неравенство (3.18) принимает вид

$$\int\limits_{V} \tilde{f}(v) \cdot \gamma(v) \, dv < +\infty, \tag{3.22}$$

сразу же получаем необходимую оценку:

$$J \leqslant \sup_{v \in V} [\tilde{R}(v)] \cdot \int\limits_{V} \tilde{f}(v) \cdot \gamma(v) \, dv < +\infty. \tag{3.23}$$

Поэтому дальше будем действовать в предположении $s > 1/p$. В случае (в), когда $1/p < s < +\infty$ и γ обладает свойством (Г), введем меру

$$d\mu(v) = \tilde{R}(v) \cdot \gamma(v)\, dv, \quad v \in V, \tag{3.24}$$

с конечной массой $\mu_0 < +\infty$, и тогда (3.15) запишется в виде

$$J = \int_V \tilde{f}(v)\, d\mu(v). \tag{3.25}$$

Поскольку $1 < p \cdot s < +\infty$, то применив к (3.25) интегральное неравенство Йенсена, с учетом (3.18) и (3.21) получим

$$J^{ps} \leqslant \mu_0^{ps-1} \cdot \int_V [\tilde{f}(v)]^{ps}\, d\mu(v) \leqslant \mu_0^{ps-1} \cdot \sup_{v \in V} [\tilde{R}(v)] \times$$

$$\times \int_V [\tilde{f}(v)]^{ps} \cdot \gamma(v)\, dv < +\infty. \tag{3.26}$$

Разберем теперь случаи (а) и (б). Так как $1 < p \cdot s$, то полагая $r = ps/(ps-1) \in (1, +\infty)$, применим к (3.15) интегральное неравенство Гёльдера

$$J \leqslant \left(\int_V [\tilde{f}(v)]^{ps} \cdot \gamma(v)\, dv \right)^{1/ps} \cdot \left(\int_V [\tilde{R}(v)]^r \cdot \gamma(v)\, dv \right)^{1/r}. \tag{3.27}$$

Следовательно, в силу (3.18) нам достаточно установить конечность интеграла

$$J_1 = \int_V [\tilde{R}(v)]^r \cdot \gamma(v)\, dv. \tag{3.28}$$

Поскольку в любом случае $r/p \geqslant 1$, то (3.20) дает

$$[\tilde{R}(v)]^r \leqslant (2\pi)^{rn/2} \cdot \nu_0^{r/p-1} \cdot \int_{V^*} e^{-r<v,\, t>}\, d\nu(t), \quad v \in V. \tag{3.29}$$

Поэтому

$$J_1 \leqslant \text{const} \cdot \int_V \gamma(v) \int_{V^*} e^{-r<v,\, t>}\, d\nu(t) = \text{const} \times$$

$$\times \int_{V^*} \gamma_V^*(r \cdot t)\, d\nu(t) = \text{const} \cdot \int_{V^*} \frac{\gamma_V^*(r \cdot t)}{[\gamma_V^*(2 \cdot t)]^p} \cdot e^{-p<y,\, t>}\, dt. \tag{3.30}$$

Далее, в случае (а) $1 < p \cdot s \leqslant 2$, поэтому $2 \leqslant r < +\infty$, и в силу предложения 1.2 (г) имеем

$$\gamma_V^*(r \cdot t) \leqslant \gamma_V^*(2 \cdot t), \quad t \in V^*. \tag{3.31}$$

В случае же (б) мы можем лишь утверждать, что

$$\gamma_V^*(r \cdot t) \leqslant \text{const} \cdot \gamma_V^*(2 \cdot t), \quad t \in V^*, \tag{3.32}$$

как это следует из предложения 1.2 (д).

Но так или иначе, из (3.30)—(3.32) вытекает оценка

$$J_1 \leqslant \text{const} \cdot \int \frac{e^{-p<y,\, t>}}{[\gamma_V^*(2 \cdot t)]^{p-1}}\, dt,$$

которая на основании леммы 3.2 дает $J_1 < +\infty$. Таким образом, теорема полностью доказана.

3.3. Как видно из теоремы 3.1, если весовая функция $\gamma(y)$, $y \in V$, обладает лишь самыми необходимыми свойствами (А) и (Д), то интегральное представление (3.8) с воспроизводящим ядром $\Phi(z, w)$, ассоциированным с γ по формуле (3.7), справедливо для функций из классов $H^p_{s,\gamma}(T_V)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, лишь для значений параметра s из промежутка $[1/p, 2/p]$. Попытка же расширить этот промежуток (см. формулировку теоремы 3.1) привела нас к необходимости наложить на γ дополнительные условия типа (Е) и (Г). Тем не менее оказывается, что даже в том случае, ко да γ обладает лишь свойствами (А) и (Д), для функций из классов $H^p_{s,\gamma}(T_V)$ при $1 \leqslant p \leqslant 2$ и произвольном $s \in [1/p, +\infty)$ справедливы интегральные представления типа (3.8), но с некоторой другой весовой функцией $\gamma_1(y)$, $y \in V$, и соответственно другим воспроизводящим ядром $\Phi_1(z, w)$. Этот факт легко вытекает из теоремы 3.1 и следующего простого предложения.

Предложение 3.1. *Пусть V — острый ОВК в $\mathbb{R}^n$, $\gamma(y)$, $y \in V$ — непрерывная положительная функция со свойствами (А) и (Д) и $p \in (0, +\infty)$, $s \in (0, +\infty)$. Рассмотрим функцию*

$$\gamma_1(y) = \min\{\gamma(y);\ 1/|y|^N\},\quad y \in V\ (N \geqslant N_0). \tag{3.34}$$

Тогда

1. *$\gamma_1(y)$, $y \in V$ — непрерывная положительная функция, обладающая как свойствами (А) и (Д), так и свойством (Г).*
2. *$\gamma_1(y) \leqslant \gamma(y)$ при $y \in V$.*
3. *$H^p_{s,\gamma}(T_V) \subset H^p_{s,\gamma_1}(T_V)$.*

Институт математики
АН Армении

Поступила 11. IX. 1989

Ա. Հ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ. Խողովակաձև տիրույթներում կշռային տարածությունների պատկանող հոլոմորֆ ֆունկցիաների ինտեգրալ ներկայացումները *(ամփոփում)*.

Դիցուք V-ն սուր բաց ուռուցիկ C կոն է $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ տարածությունում և $T_V = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n : x \in \mathbb{R}^n,\ y \in V\}$: Ենթադրենք, որ $0 < p < +\infty$, $0 < s < +\infty$, իսկ $\gamma(y)$-ը, $y \in V$, անընդհատ դրական ֆունկցիա է, նշանակենք $H^p_{s,\gamma}(T_V)$-ով T_V խողովակաձև տիրույթում հոլոմորֆ այն $f(z) = f(x + iy)$ ֆունկցիաների դասը, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմանին.

$$\int_V \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+iy)|^p\, dx \right\}^s \cdot \gamma(y)\, dy < +\infty:$$

Երբ $1 \leqslant p \leqslant 2$, իսկ γ կշռային ֆունկցիան և s պարամետրը բավարարում են որոշակի պայմանների, $H^p_{s,\gamma}(T_V)$ դասի համար բերված է Պելի-Վիների տիպի ինտեգրալ ներկայացում, ինչպես նաև կառուցված է $\Phi(z, w)$, $z, w \in T_V$, վերարտադրող կորիզ:

A. H. KARAPETIAN. *Integral representations for weighted spaces of functions holomorphic in tube domains* (summary)

Let V be a sharp open convex cone is $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ and $T_V = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n, x \in \mathbb{R}^n, y \in V\}$. Suppose that $0 < p < +\infty$, $0 < s < +\infty$ and $\gamma(y)$, $y \in V$, is a continuous positive (i. e. $\gamma(y) > 0$, $y \in V$) function. Let $H^p_{s,\gamma}(T_V)$ be the space of all fun-

ctions $f(z) = f(x+iy)$ holpmorphic in the tube domain $T_V \subset C^n$ and satisfying the condition

$$\int_V \left\{ \int_{R^n} |f(x+iy)|^p \, dx \right\}^s \cdot \gamma(y) \, dy < +\infty.$$

For $1 \leqslant p \leqslant 2$ and under certain conditions imposed on the function γ and the parameter s, the Paley—Wiener type integral representations are established and the reproducing kernels $\Phi(z, w)$, $z, w \in T_V$ are constructed for the classes $H^p_{s,\gamma}(T_V)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. E. A. C. Paley, N. Wiener.* Fourier Transforms in the Complex Domain. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 19, Amer. Math. Soc., New York, 1934.
2. *Н. Винер, Р. Пэли.* Преобразование Фурье в комплексной области, М., Наука, 1964.
3. *E. Hille, J. D. Tamarkin.* On the absolute integrability of Fourier transforms, Fund. Math., 25, 1935, 329—352.
4. *G. J. Mikusinski.* On the Paley—Wiener theorem, Studia Math., 13, 1953, 287—295.
5. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Наука, 1966.
6. *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян.* Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460.
7. *S. Bochner.* Group invariance of Causby's formula in several variables, Ann. Math., 45, № 4, 1944, 686—707.
8. *С. Г. Гиндикин.* Анализ в однородных областях, УМН, 19, № 4, 1964, 3—92.
9. *T. G. Genchev.* Paley—Wiener type theorems for functions holomorphic in a half—plane, Докл. Болг. АН, 37, № 2, 1983, 141—144.
10. *М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян.* Интегральные представления некоторых классов функций, голоморфных в полосе или в полуплоскости, ДАН СССР, 283, № 5, 1985, 1054—1057.
11. *M. M. Dzhrbashyan, V. M. Martirosyan.* Integral representations for some classes of functions holomorphic in a strip or in a half—plane. Anal. Math., 12, № 3, 1985, 191 - 212.
12. *T. G. Genchev.* Integral representations for functions holomorphic in tube domains, Докл. Болг. АН, 37, 1984, 717—720.
13. *T. G. Genchev.* Paley—Wiener type theorems for functions in Bergman spaces over tube domains, J. Math. Anal. Appl., 118, № 2, 1986, 495—501.
14. *А. О. Карапетян.* Интегральные представления в трубчатых областях, Изв. АН АрмССР, сер. матем., XXIII, № 1, 1988, 91—96.
15. *А. О. Карапетян.* Некоторые вопросы интегральных представлений в многомерном комплексном анализе. Кандидатская диссертация, Ереван, 1987.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 4, 1990 Математика

UDK 517.986

V. ARZUMANIAN, S. GRIGORIAN

INVARIANT ALGEBRAS OF OPERATOR FIELDS ON COMPACT ABELIAN GROUPS

0. Introduction. Let T be a compact Hausdorff space (everywhere assumed metrizable), let A be a unital C^*-algebra, and let $C(T, A)$ be the algebra of all continuous A-valled functions on T. By a *uniform algebra* we mean a closed subalgebra M of $C(T, A)$ which separates the points of T and contains all constants (definition in a more general case see in [5], [6], and [13]—[15]). Some properties of such noncommutative algebras were investigated in [2]—[4]. The present paper, which is an immediate continuation of the just quoted papers, is devoted to the iniform algebras on compact Abelian groups invariant with respect to all group shifts. The rich structure of such algebras permits to revise some early obtained results. The main restrictions as usually are the following: the algebra M is an *A-algebra* (i. e. supposed that M is a submodule of the A-module $C(T, A)$; the algebra A (the fibre) is *weakly*-transitive* (i. e. it obtains a pure state which is weakly total in the state space of A, see [4]).

Preliminary results of general nature are collected in Sections 1 and 2: we consider the Gelfand—Naimark—Segal (GNS) construction for conditional expectations which uses the notion of Hilbert C^*-module, a realization for the case of Abelian groups, and a property of the ideal set of weakly*-transitive algebras. The structure and properties of invariant uniform algabras on Abelian groups are investigated in Sections 3—5 (in the centre of attention are orthogonal decompositions, the notion of spectrum, peak points, and maximality).

A small part of the results were announced in [2]. All general concepts and facts, used without mentioning the source can be found in the monographs [5], [7], [12].

Notations (for details see [3], [4].

The algebras A and $C(T)$ we identify with their isomorphic images in $C(T, A)$: thus, an element $a \in A$ denotes also the function $a(t) = a$ for all $t \in T$, and analogously, an element $f \in C(T)$ denotes also the function $f(t) = f(t)1$, where $t \in T$, and 1 is the identity of A (and of $C(T, A)$ too).

The set of all conditional expectations of the aigebra $C(T, A)$ onto the subalgebra A we denote by $P(T, A)$.

Let S be the dual group of a compact Abelian group T and let γ^s be a natural representation of S in $C(T)$, then obviously $\gamma^{s+t} = \gamma^s\gamma^t$ (we use on T multiplicative, and on S additive notations of group operations).

Denote by $Sp_A\mathbf{M}$ the compact set of all continuous A-linear homomorphisms from an A-algebra $\mathbf{M}$ to the weakly*-transitive fibre A (see Definition 3.1 of [3] and Corollary 4.4 of [4]).

Denote by $S(A)$ and $P(A)$ the state space and the set of pure states of a C^*-algebra A.

1. Preliminaries. In this Section we consider general questions connected with the notion of Hilbert C^*-module; the definition (see e. g. [10] [11]) we adduce in a convenient form.

Let A be a C^*-algebra with identity 1, and let L be a linear space which is a right A-module and on which one determine a map $L \times L \to A$ (A-product) with the following properties:

1. $(x+y,\ z) = (x,\ z) + (y,\ z)$
2. $(xa,\ y) = (x,\ y)\, a$
3. $(x,\ y) = (y,\ x)$
4. $(x,\ x) \geqslant 0$
5. If $(x,\ x) = 0$, then $x = 0$.

Here $x,\ y,\ z$ are from L, $a \in A$.

The space L with the norm

$$\|x\| = \|(x,\ x)\|^{1/2}$$

is a normed space, which is called *Hilbert A-module* if L is complet in this norm.

A standard example of Hilbert A-module is a $l_S^2(A)$-completion of $\sum\limits_{s\in S}^{\oplus} A$ in the norm determined by the product

$$(x,\ y) = \sum_{s\in S} y_s^* x_s,$$

where S is a set, $x,\ y \in L$, $x = (x_s)$, $x_s \in A$.

Another important example of Hilbert A-module, which is a generalization of GNS-construction arises in the following way.

Let $A,\ B$ be C^*-algebras with common identity, $A \subset B$.

Lemma 1.1. *Let p be a conditional expectation, $p:\ B \to A$, then the formula*

$$(x,\ y) = p(y^*x) \tag{1.1}$$

determines an A-product on B satisfying the conditions 1—4, and

6. $(1,\ 1) = 1$
7. $(xz,\ y) = (z,\ x^*y)$.

Conversely, every A-product on B satisfying the conditions 1—4, 6, 7 is generated by a unique conditional expectation. The condition 5 is equivalent to the exactness of the corresponding conditional expectation.

Proof. The first part of Lemma is an immediate consequence of the properties of conditional expectations (see e. g. S. 2, [3]). Conversely, let there exists on B an A-product satisfying the conditions 1—4, 6, 7. It is easy to check that the map $p: B \to A$, $p(b) = (b, 1)$ is a conditional expectation (a unique one) which generates the given A-product by the formula (1.1). The last part of the statement is evident.

Thus, let p be a conditional expectation, $p: B \to A$; then the set $N_p = \{x \in B.\ p(x^*x) = 0\}$ is a left ideal in B, and simultaneously, an A-bimodule (a consequence of the inequality $\|p(y^*x)\|^2 \leqslant \|y\|^2 \|p(x^*x)\|$ see (iii), Proposition 2,2, [3]. The linear space B/N_p is a right A-module with an A-product determined by p (Lemma 1.1); its completion $L^2(B, A, p)$ is, evidently a Hilbert A-module.

By analogy with usual GNS-construction one can indicate a standard (left) A-representation of the algebra B in $L^2(B, A, p)$ related with the starting conditional expectation and another facts which are, however, out of bounds of purposes of our paper.

Let T be a compact space, and let $C(T, A)$ be the A-bimodule of all continuous functions on T with values in a C^*-algebra A. For a conditional expectation $p \in P(T, A)$ the Hilbert A-module $L^2(C(T, A), A, p)$ will be denoted by $L^2(T, A, p)$.

Let T be a compact Abelian group, and let the map k_r, where $r \in T$, $k_r: T \to C(T, A)$, is defined by the formula

$$(k_r x)(t) = x(rt). \tag{1.2}$$

We call a conditional expectation $p_0 \in P(T, A)$ *T-invariant* iff $p_0 \cdot k_r = p_0$ for every $r \in T$.

Proposition 1.2. *There exists and is unique on $C(T, A)$ an exac invariant conditional expectation (i. c. e.).*

Proof. Let σ be the probability Haar measure on T, and let φ_σ be the corresponding functional on $C(T)$. Then (see the proof of Proposition 1.4, [4]) there exists a conditional expectation p_0 on $C(T, A)$ such that the restriction of p_0 on $C(T)$ coincides with φ_σ. Obviously, p_0 is an i. c. e.

Let p be an i. c. e. from $P(T, A)$, and let s be a character on T. Then, for every $t \in T$ we have.

$$p(\gamma^s) = p(k_t \gamma^s) = \gamma^s(t)\, p(\gamma^s) \tag{1.3}$$

from which we obtain that if s is not a neutral character, then $p(\gamma^s) = 0$. Consequently, the restriction of p on $C(T)$ is a T-invariant state, hence, by the uniqueness of the Haar measure we obtain the uniqueness of p_0 (we use again Proposition 1.4, [4]). Verify now the exactness of p_0. Let $x \in C(T, A)$, $p_0(x^*x) = 0$, and let φ be any pure state on A. Then $\Phi = \varphi \circ p_0$ is a state on $C(T, A)$ the restriction of which on A coincides with φ. We have for some probability measure μ on T

$$\Phi(x) = \int \varphi(x(t))\, d\mu(t)$$

(by Theorem 1.5, [3]). It is evident that the functional Φ is invariant with respect to group shifts, hence μ coincides with the Haar measure σ. Further, as

$$\int \varphi(x^*x(t))\, d\sigma(t) - \Phi(x^*x) = \varphi(p_0(x^*x)) = 0$$

we obtain that $\varphi(x^*x(t)) = 0$ for each t. Since φ is arbitrary then, finally, $x = 0$.

Thus, $L^2(T, A, p_0)$ is a completion of $C(T, A)$ in the norm of the Hilbert A-module, corresponding to p_0. The i. c. e. just obtained can be defined, with necessary justifications, as $\int x d\sigma$ for $x \in C(T, A)$, see Remark 1.3, [4].

The following result clarifies the structure of the Hilbert A-module $L^2(T, A, p_0)$.

Proposition 1.3. *Let S be the group of characters of a group T let p_0 be an i. c. e. Then the Hilbert modules $L^2(T, A, p_0)$ and $l^2_S(A)$, are isomorphic.*

Proof. By an isomorphism we mean an A-linear bijection which preserves the A-product.

Evidently, it sufficient to indicate an "A-basis" in $L^2(T, A, p_0)$ corresponding to the standard basis in $l^2_S(A)$. The set $\gamma^s = \{\gamma^s, s \in S\}$ is the required one. More precisely, every element x from $L^2(T, A, p_0)$ have a unique orthogonal expansion of the form

$$x = \sum a_s \gamma^s, \tag{1.4}$$

where $s \in S$, $a_s \in A$, and the convergence of the series is understood in the norm of $L^2(T, A, p_0)$.

Remark 1.4. Let $x \in C(T, A)$, then the "coeficients" a_s in the expansion (1.4) are determined by the formula

$$a_s = p_0(x\gamma^{-s}). \tag{1.5}$$

Remark 1.5. Roughly speaking, $L^2(T, A, p_0)$ is a "tensor product" of $L^2(T, \sigma)$ and A, just as $l^2_S(A) = l^2 \otimes A$, therefore Proposition 2.2 is just a reformulation of the classical result concerning an isomorphism of Hilbert spaces of the same dimension.

2. Ideals in weakly*-transitive algebras. We represent here an important property of the ideal set in weakly*-transitive algebras, necessary in the sequel.

Lemma 2.1. *Every two closed two-sided non-zero ideals in a weakly*-transitive algebra have a non-zero intersection.*

Proof. Note, at first, that if I_1 and I_2 are closed two-sided non-zero ideals with zero intersection in a C^*-algebra A, then each pure state on A annuls one of these ideals. Indeed, let H_φ be a Hilbert space corresponding to φ by GNS-construction, and let H_1, H_2 be invariant and, obviously, mutually orthogonal subspaces of H, generated by the ideals I_1, I_2. Since the GNS-representation is irreducible, one of the subspaces H_1 or H_2 must be zero, which means that φ annuls the corresponding ideal.

Now, let A be weakly*-transitive, and let φ be a total state. Then φ does not annul any non-zero ideal: otherwise, a state which is non-zero on this ideal can not be approximated by convex combinations of the unitary shifts of φ, see [4].

3. Structure of invariant uniform algebras. Let T be a compact Abelian group, let M be an invariant (with respect to group shifts) A-algebra, $M \subset C(T, A)$, and let p_0 be the i. c. e., defined by Proposition 1.2.

Lemma 3.1. *Let A be a C^*-algebra with trivial centre, and let $x \in C(T, A)$. Then $x \in M$ iff $a_s \gamma^s \in M$ for all $s \in S$ in the expansion (1.4)*

Proof. We use the following easily checking general fact ("Fubini theorem").

F) Let T_1, T_2 be compact spaces, let ω be a state on $C(T, A)$ and let $p \in P(T_2, A)$. Define on $C(T_1 \times T_2, A)$ the operators

$$\hat{\omega}: C(T_1 \times T_2, A) \to C(T_2) \subset C(T_2, A),$$

$$\hat{p}: C(T_1 \times T_2, A) \to C(T_1, A)$$

by the formulas:

$$(\hat{\omega} y)(t_2) = \omega(y(\cdot, t_2)), \tag{2.1}$$

$$(\hat{p} y)(t_1) = p(y(t_1, \cdot)), \tag{2.2}$$

where $y \in C(T_1 \times T_2, A)$, Then

$$p \cdot \hat{\omega} = \omega \cdot \hat{p} \tag{2.3}$$

(i. e. $p \circ \hat{\omega}(y) = (\omega \circ p(y)) 1$).

Now, let $x \in M$, $x \sim \sum a_s \gamma^s$, where the convergence of the series is understood in the norm of $L^2(T, A, p_0)$. Check that $a_s \gamma^s$ belongs to M for each $s \in S$. It is sufficient to show that for every functional ψ on $C(T, A)$ which annuls M, one have $\psi(a_s \gamma^s) = 0$. Evidently, for each $s \in S$, the function y, defined by the formula.

$$y(t, r) = \gamma^{-s}(r)\, x(tr) \tag{2.4}$$

belongs to $C(T \times T, A)$, moreover

$$p_0(y) = a^s \gamma^s.$$

Indeed, by the formulas (2.2), (1.1) and (1.5) we have

$$p_0(y)(t) = p_0(\gamma^{-s} k_t x) = \gamma^s(t)\, p_0(\gamma^{-s} x) = a_s \gamma^s(t).$$

Therefore, by (2.3) and (2.4),

$$\psi(a_s \gamma^s) = \psi \cdot p_0(y) = p_0 \cdot \hat{\psi}(y) = 0$$

since $\hat{\psi}(y)(r) = \gamma^{-s}(r)\, \psi(k_r x) = 0$ (note, that by invariantness of M, we have $k_r x \in M$ for all r.

Conversely, let $x \in C(T, A)$ and let $a_s \gamma^s \in M$ for all s in the expansion $x \sim \sum a_s \gamma^s$. Show, that $x \in M$. Let a functional ψ be annuling M , but $\psi(x) \neq 0$. Then, the non-zero function $f(t) = \psi(k_t x)$ belongs to $C(T)$, therefore there exists a character $s \in S$ such that $p_0(\gamma^{-s} f) \neq 0$.

If y is a function from $C(T \times T, A)$, defined by the formula (2.4), then $\psi \cdot \hat{p}_0(y) = \psi(a_s \gamma^s) = 0$, i. e. $a_s \gamma^s \in M$. On the other hand,

$p_0 \cdot \hat{\psi}(y) = p_0(\gamma^{-s} f) \neq 0$, which is a contradiction with (2.3), and thus the proof is complete.

Denote for all $s \in S$

$$A_s(\mathbf{M}) = A_s = \{a \in A,\ a_s \gamma^s \in \mathbf{M}\}.$$

Obviously, A_s is a closed two-sided (consequently selfadjoint) ideal in A. Let S_M be the set of those $s \in S$, for which $A_s \neq 0$. By Lemma 3.1, $s \in S_M$ iff there exists $x \in \mathbf{M}$, such that $(x, \gamma^s) \neq 0$. In general, $\gamma^{S_M} = \{\gamma^s, s \in S_M\}$ is not a subset of $\mathbf{M}$. However, if $\gamma^{S_M} \subset \mathbf{M}$, then $\mathbf{M}$ is decomposable, i. e. it is generated by the algebra A and by a uniform subalgebra of $C(T)$ (see Propositions 1.8 and 3.7 of [3]). Chow, that the same is true for the case of an algebra with simple fibre.

Lemma 3.2. *Let A be simple C^*-algebra, and let $\mathbf{M}$ be a uniform invariant A-algebra on a compact Abelian group T. Then $\mathbf{M}$ is decomposable.*

Proof. By simlicity of A, for every $s \in S_M$ the ideal A_s coincides with A, therefore γ^s belongs to $\mathbf{M}$. Let M be a minimal closed subalgebra of $C(T)$ generated by γ^{S_M}. By Lemma 3.1 and by the expansion (1.4), this algebra is separating, and consequently is uniform. Evidently, the algebras $\mathbf{M}$ and A together generate the algebra $\mathbf{M}$.

Corollary 3.3. *In conditions of the Lemma, the algebra $\mathbf{M}$ coincides with $C(T, A)$ iff $Sp_A\mathbf{M}$ coincides with T.*

Note, that in contradistinction to the commutative theory, S_M is not a subsemigroup of S; however, this property is satisfied for a large class of algebras. The following statement contains in particular, an extension of one of the results of Arens and Singer, [1].

Theorem 3.4. *Let A be a weakly*-transitive algebra with identity, and let $\mathbf{M}$ be a uniform T-invariant A-algebra or a compact Abelian group T with the dual group S. Then*

(i) *S_M is a subsemigroup of S;*

(ii) *there exists a natural homeomorphism of $Sp_A\mathbf{M}$ with the compact space (in the standard topology) of all homomorphisms of S_M to the unit circle.*

Proof. (i) Let $s, u \in S_M$ then $A_s\gamma^s, A_u\gamma^u \subset \mathbf{M}$, therefore $A_sA_u\gamma^{s+u} \subset \mathbf{M}$. Evidently, $A_sA_u \subset A_{s+u}$. On the other hand, $A_sA_u = A_s \cap A_u$ (see [5], 1.9 12) is a non-zero ideal, by Lemma 2.1. Consequently, $s + u \in S_M$.

(ii) Let M be a uniform algebra in $C(T)$, generated by γ^{S_M}, and let $\mathbf{M}$ be a uniform A-algebra in $C(T, A)$, generated by M and A (decomposable, by definition). Then, by Proposition 3.7, [3] (which was proved for a simple fibre; however, it is true in weakly*-transitive case by Corollary 4.4. [4]), the maximal ideal space of M coincides with $Sp_A\mathbf{M}'$, and, by Arens—Singer theorem, it is homeomorphic to the compact set of all homomorphisms of the semigroup S_M to the unit circle. It remains to check only that $Sp_A\mathbf{M}'$ coincides with $Sp_A\mathbf{M}$. Clearly, that each $p \in Sp_A\mathbf{M}$ determines some $p' \in Sp_A\mathbf{M}$ (the restriction: $p' = p\,|\,M$). Show that the map $'$ is a monomorphism. Let

$\in Sp^{A'} M'$, $p_1 \neq p_2$, then there exists $s \in S_M$ for which $p_1(\gamma^s) = p_2(\gamma^s)$, therefore, for some $a \in A$, we obtain

$$p_1'(a\gamma^s) = p_1(a\gamma^s) = ap_1(\gamma^s) = ap_2(\gamma^s) = p_2'(a\gamma^s).$$

Finally, show that every homomorphism $q \in Sp_A M$ has an extension on M'. Let q' be a conditional expectation from $P(T, A)$, such that $q' \mid M = q$ (see Corollary 4.4, [4]). For every $s \in S_M$ and $a \in A_s$ we have

$$q(a\gamma^s) = q'(a\gamma^s) = aq'(\gamma^s),$$

and moreover, it is clear, that the value $q'(\gamma^s)$, which is scalar, does not depend on the choice of extension (see Propositions 1.1, and 4.2 (i) [4]). Thus, q' is well defined on γ^{S_M}, and consequently on M' too. It remains to verify that the restriction of q' on γ^{S_M} is a character. Let, $u, s \in S_{M'} = S_M$, $a \in A_u \cap A_s$, $a > 0$, then $a\gamma^u a\gamma^s = a^2\gamma^{s+u} \neq 0$ and so $a^2q'(\gamma^u)\, q'(\gamma^s) = a^2q'(\gamma^{u+s})$ therefore, as above, $q'(\gamma^{u+s}) = q'(\gamma^s)$.

4. **Maximality.** Let T be a compact space, let M be a uniform algebra from $C(T, A)$, where A is a unital C^*-algebra. A uniform algebra M is called *maximal*, if $C(T, A)$ is the only uniform algebra containing M.

Let M be an invariant uniform algebra on a compact Abelian group T. Denote by $S_M(I)$ for each closed two-sided ideal $I \subset A$ the following set

$$S_M(I) = \{s \in S_M,\ A_s = I\}.$$

Even in the case when S_M is a semigroup (see e. g. Theorem 3.4) $S_M(I)$ could not be a subsemigroup of S_M. However, $S_M(A)$ is always a semigroup.

Lemma 4.1. *Let I be a two-sided closed ideal in weakly*-transitive algebra A, and let M_1 be a uniform T-invariant A-algebra, generated by $(A_s(M) + I)\gamma^s$, where $s \in S_M$. Then*

$$A_s(M_1) = A_s + I.$$

Proof. Note first, that $A_s(M) + I$ is also a two-sided closed ideal (see [5]). Further, we have $M_1 = \overline{M + M'}$, where M' denotes a closed subalgebra generated by $I\gamma^s$, when s runs over all S_M. Indeed, $M + M'$ forms a dense subalgebra in M_1, since M' is an ideal in M. Introduce for every $s \in S_{M_1} = S_M$ a linear operator $p_s : M \to A$ by the formula: $p_s(x) = p_0(x\gamma^{-s})$, where p_0 is the i. c. e. (see Proposition 1.2). Using Lemma 3.1 and Remark 1.4 we obtain at last

$$A_s(M_1) = p_s(M_1) = A_s(M) + I.$$

The following results are evident.

Corollary 4.2. *Let I be a two-sided clcsed ideal in A, such that for some $s \in S_M$, $A_s \subset I$, and let M_1 be a uniform T-invariant A-algebra generated by M and $I\gamma^s$. Then $A_s(M_1) = I$.*

Corollary 4.3. *Let $s_1, s_2 \in S_M$. s_2, and $A_{s_1} \neq A_{s_2} \neq A$. Then, if M it a uniform T-invariant A-algebra generated by M and $(A_{s_1} + A_{s_2})\gamma^{s_1}$, one have $A_{s_1}(M_1) = A_{s_2}(M)$.*

The following result presents a description of maximal invariant uniform algebras and, in particular, it extends one of the results of the Hoffman and Singer, [9].

Theorem 4.4. *Let* **M** *be a uniform T-invariant maximal A-algebra with weakly*-transsitive fibre. Then* **M** *is a Dirichlet algebra (i. e* $\overline{Re\,\mathbf{M}} = Re\,C(T, A)$*), and the semigroup* $S_{\mathbf{M}}(A)$ *defines on* S *an Archimedian order. In addition:*

i) *If* $S_{\mathbf{M}} \neq S$, *then* $S_{\mathbf{M}} = S_{\mathbf{M}}(A)$ *(hence* **M** *is decomposable). In this case the algebra* A *is simple and*

$$Sp_A(\mathbf{M}) = T \times [0, 1]/T \times \{0\}.$$

(ii) *If* $S_{\mathbf{M}} = S$, *then there exists a maximal two-sided ideal* I *of* A, *such that* $S_{\mathbf{M}}(I) \cup \{0\} = -S_{\mathbf{M}}(A)$. *In this case* $Sp_A(\mathbf{M}) = T$.

Proof. (i) If $S_{\mathbf{M}} \neq S_{\mathbf{M}}(A)$, then using Lemma 4.1 and the fact that $S_{\mathbf{M}}$ is a semigroup we can construct an algebra $\mathbf{M}_1$, for which $\mathbf{M} \underset{\neq}{\subset} \mathbf{M}_1$ and so we obtain a contradiction with the maximality of **M**. Thus, $S_{\mathbf{M}} = S_{\mathbf{M}}(A)$. The algebra A has an identity, hence the algebra **M** is generated by the algebras A and M, where M is a uniform subalgebra of $C(T)$ generated by $\gamma^{S_{\mathbf{M}}}$ (i. e. **M** is decomposable). Since **M** is maximal in $C(T, A)$, M is maximal in $C(T)$. By the Hoffman—Singer theorem (see [9]), $S_{\mathbf{M}}$ defines on S an Archimedian order.

It remains to prove the simplicity of A. Let I be a non-trivial two-sided closed ideal of A. Put $A_s(\mathbf{M}_2) = I$, for $s \in S - S_{\mathbf{M}}$ and $A_s(\mathbf{M}_2) = A$, for $s \in S_{\mathbf{M}}$; using Lemma 4.1, construct a new algebra $\mathbf{M}_2$, for which $\mathbf{M} \underset{\neq}{\subset} \mathbf{M}_2$ and obtain a contradiction with the maximality of **M**.

The last statement of (i) can be obtained from Proposition 3.7 of [3] ($Sp_A\,\mathbf{M} = Sp\,M$) and the corresponding result for commutative uniform algebras, [7], [9].

(ii) Let $S_{\mathbf{M}} = S$. Note, that $S_{\mathbf{M}}(A) \neq S$, because otherwise we obtain $\mathbf{M} = C(T, A)$. By Corollaries 4.2 and 4.3 and by the maximality of the algebra **M**, we have an existence of a two-sided closed ideal I, such that for every $s \in S_{\mathbf{M}} - S_{\mathbf{M}}(A)$, $A_s = I$.

Note, that $S_{\mathbf{M}}(A)$ is a maximal subsemigroup of S (if S' is such that $S_{\mathbf{M}}(A) \underset{\neq}{\subset} S'$; then putting $A_s(\mathbf{M}') = A$ for all $s \in S'$, we can obtain, by Lemma 4.1, a new algebra $\mathbf{M}'$, $\mathbf{M} \underset{\neq}{\subset} \mathbf{M}'$; this contradicts with the maximality of M).

Further, $S_{\mathbf{M}}(A)$ does not contain any subgroup of S. Indeed, let S' be a maximal subgroup of S, which is contained in $S_{\mathbf{M}}(A)$. Consider a subgroup T_0 of T, $T_0 = \{t \in T,\ \gamma^s(t) = 1,\ s \in S'\}$. Let M denotes a uniform subalgebra of $C(T)$ generated by $S_{\mathbf{M}}(A)$. Then, as it follows from Theorem 2.2 of [7], the restriction of M on T_0 does not coincide with $C(T_0)$. Therefore, there exists a charcter s_0 of the group T_0, which impossible to approximate on T_0 by linear combinations of characters from $S_M(A)$. Show, that the restrictions of M on T_0 is not dense in $C(T_0, A)$. It is sufficient to verify, that γ^{s_0} can not be approximated on T_0 by the finite lihear combinations of the elements of M of t e form $\sum a_s\gamma^s$. Let φ be a state on A, which annuls I, then

$$\|\gamma^{s_0} - \sum a_s \gamma^s\|_{(T_0, A)} \geqslant$$

$$\max_{t\in T_0} |\varphi(\gamma^{s_0}(t)1 - \varphi(\sum_{s\in S_M(A)} a_s\gamma^s(t) + \sum_{s\in S-S_M(A)} a_s\gamma^s(t))| =$$

$$= \max_{t\in T_0} |\gamma^{s_0}(t) - \sum_{s\in S_M(A)} \varphi(a_s)\gamma^s(t)| =$$

$$= \|\gamma^{s_0} - \sum_{s\in S_M(A)} \varphi(a_s)\gamma^s\|_{C(T_0)} > 1.$$

Therefore $\overline{M | T_0} \neq C(T_0, A)$, and consequently, for each $t\in T$, $M | T_0t \neq C(T_0t, A)$.

Let t be such that $T_0t \neq T_0$, then there exists a function $x \in C(T, A)$ for which $x | T_0 = \gamma^{s_0}$ and $x | T_0t = 0$. Denote by M′ a uniform algebra generated by M and x. It is easy to check, that $M \underset{\neq}{\subset} M' \underset{\neq}{\subset} C(T, A)$ which is a contradiction with the maximality of M.

Thus, $S_M(A)$ does not contain any subgroup of S. Then by maximality of M we obtain that $S_M(A)$ defines on S an Archimedian order (see e. g. [8]). By the way, we have $\{0\} \cup S_M(I) = -S_M(A)$.

The statement concerning the spectrum of the algebra M is a trivial consequence of Theorem 3.4 (ii).

Since $S_M(A)$ defines an Archimedian order on S, in both cases (i) and (ii), the algebra M_1 generated by $S_M(A)$ and A is, obviously, a Dirichlet algebra ($M_1 + M_1^*$ is dense in $C(T, A)$, however $Re(M_1 + M_1^*) = Re\,M_1 \subset Re\,M$).

5. Peak points. In [4] we consider different concepts of peak point. They coincide in the case of invariant uniform algebras. This fact is an immediate consequence of the following result.

Theorem 5.1. *Let* M *be an invariant A-algebra on a compact Abelian group t. Then every point of T is a peak point for* M.

Proof. By invariantness of M, it is sufficient to verify that there exists $x\in M$, such that $x(1) = 1$, $\|x(t)\| < 1$, when $t \neq 1$, 1 being a neutral element of T.

By Lemma 3.1, the linear combinations of elements of the form $a\gamma^s$, where $a\in A_s$, $s\in S_M$ are dense in M. Since A_s is a two-sided closed ideal of A (and, consequently a C^*-algebra), then, clearly, the linear combinations of the same form with $a\in A_+$ are dense in M too.

Let $t_0\in T$, $t\neq 1$. Show, that for each state φ on the algebra A, there exist $a\in A_+$, and $s\in S_M$, such that $\varphi(a)\neq 0$, $\gamma^s(t_0)\neq 1$. Indeed, et q_φ be a corresponding conditional expectation of the algebra $C(T, A)$, onto $C(T)$, $q_\varphi\in Q(T, A)$, see Proposition 2.6, [3],

$$(q_\varphi x)(t) = \varphi(x(t)).$$

By Corollary 2.7 of the 'same paper, there exists $z \in M$, such that $(q_\varphi z)(1) = 1$, and $(q_\varphi z)(t_0) = 0$. Therefore, there exists $a\gamma^s$ in M, for which $\varphi(a)\gamma^s(t_0) \neq \varphi(a)\gamma^s(1) = \varphi(a)$, and so $\varphi(a) \neq 0$, $\gamma^s(t_0) \neq 1$.

Further, by the weak compactness of the state space $S(A)$, there exist $a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$, and $s_1, s_2, \cdots, s_n \in S_M$, such that for each $\varphi \in S(A)$, we have $\varphi(a_k) \neq 0$, $\gamma^{s_k}(t_0) \neq 1$ for some couple (a_k, s_k).

We denote by y the element from M defined by the formula

$$y = 1 + \left(\sum \|a_k\|\right)^{-1} \sum a_k (\gamma^{s_k} - 1).$$

Obviously, $y(1) = 1$. Since y is a normal element of $C(T, A)$. and taking into account the relations

$$|\gamma^{s_k}(t) - 1|^2 = 2(1 - Re\,\gamma^{s_k}(t)) < 4, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

we have, for each $t \in T$,

$$\begin{aligned} \|y(t)\|^2 = \sup_{\varphi \in S(A)} |\varphi(y(t))|^2 < \\ 1 + 2\left(\sum \|a_k\|\right)^{-1} \sum \varphi(a_k)\,(Re\,\gamma^{s_k}(t) - 1) + \\ \left(\sum \|a_k\|\right)^{-2} \left(\sum \varphi(a_k) |Re\,\gamma^{s_k}(t) - 1|\right)^2 \leqslant \\ 1 + 2\left(\sum \|a_k\|\right)^{-1} \sum \varphi(a_k)\,(Re\,\gamma^{s_k}(t) - 1) + \\ \left(\sum \|a_k\|\right)^{-2} \sum \varphi(a_k) \sum \varphi(a_k) |Re\,\gamma^{s_k}(t) - 1|^2 = \\ 1 + 2\left(\sum \|a_k\|\right)^{-1} \sum \varphi(a_k)\,(Re\,\gamma^{s_k}(t) - 1) + \\ 2\left(\sum \|a_k\|\right)^{-1} \sum \varphi(a_k)\,(1 - Re\,\gamma^{s_k}(t)) = 1. \end{aligned}$$

Besides, it is easy to check that when $t = t_0$, we have a strong inequality: $\|y(t_0)\| < 1$. Indeed, the equality is possible only when $\gamma^{s_k}(t_0) = \gamma^{s_m}(t_0)$ for those $k, m = 1, 2, \cdots, n$, for which $\varphi(a_k)$, and $\varphi(a_m) \neq 0$; then we have $\gamma^{s_k}(t_0) = 1$ for all k, what contradicts to the choice of $a_1, \cdots, a_n$; $s_1, \cdots, s_n$.

Now, let U_n be a countable system of neighbourhoods of the neutral element, $\cap U_n = \{1\}$. Then, by compactness of the sets $F_n = T - U_n$, there exists a system of elements x_n of M with the properties: $x_n(1) = 1$, $\|x_n\| = 1$, $\|x_n(t)\| < 1$, when $t \in F_n$. Therefore, the element

$$x = \sum_1^\infty 2^{-n} x_n$$

realizes the peak at identity.

Institute of Mathematics
Armenian Academy of Ciences

Recieved 20.IX.1988

Վ. Ա. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ, Ս. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Օպերատորային դաշտերի ինվարիանտ հանրահաշիվներ կոմպակտ աբելյան խմբերի վրա *(ամփոփում)*.

Աշխատանքը նվիրված է կոմպակտ աբելյան խմբերի վրա որոշված C-արժեքային անընդհատ ֆունկցիաների ոչ կոմուտատիվ համասարաչափ հանրահաշիվներին, որոնք ինվարիանտ են տեղաշարժերի նկատմամբ։ Բնական պայմաններին բավարարող հանրահաշիվների համար ստացված են Արենսի, Զինգերի, Հոֆմանի հայտնի թեորեմների անալոգներ*

(մասնավորապես նվիրված հարաբերական սպեկտրին, մաքսիմալության հարցերին, պիկի կետերի գոյությանը)։

В. А. АРЗУМАНЯН, С. А. ГРИГОРЯН. *Инвариантные алгебры аоператорных полей на компактных абелевых группах (резюме).*

Работа посвящена некоммутативным равномерным алгебрам C^*-значных непрерывных функций на компактной абелевой группе, инвариантным относительно сдвигов. При естественных условиях на алгебру получены аналоги некоторых известных результатов Аренса, Зингера, Гоффмана из теории равномерных алгебр (в частности, описание относительного спектра, вопросы максимальности, существование точек пика).

REFERENCES

1. *R. Arens, I. Singer.* Generalized analytic functions, Trans. of A. M. S., v. 81, 1956, pp. 379—393.
2. *V. Arzumanian, S. Grigorian.* Uniform algebras of operator fields (Russian). Zap. Nauchn. Sem. LOMI, v. 123, 1983, 185—189.
3. *V. Arzumanian, S. Grigorian.* Spectrum of uniform algebras of operator fields (Russian). Proc. Arm. Acad. "Mathematics", v. 21, no. 1, 1986, pp. 63—79 (see English trans. in "Soviet J. of Contemp. Math. Anal., the same output data, pp, 64—81).
4. *V. Arzumanian, S. Grigorian.* The boundaries of uniform algebras of operator fields, Proc. Arm. Acad. "Mathematics", v. 23, no. 5, 1988, pp. 422—438.
5. *J. Dixmier.* Les C^*-algébres et leurs représentations, Gautier—Villar, Paris, 1969.
6. *J. Fell.* The structure of algebras of operator fields, Acta Math., v. 106, no. 3–4, 1961, 233—280.
7. *T. M. Gamelin.* Uniform algebras, Prentice—Hall, New—York, 1969.
8. *S. Grigorian.* On algebras of finite type on a compact group, Proc. Arm. Acad. "Mathematics", v. 14, no. 3, 1979, 168—183.
9. *K. Hoffman, I. Singer.* Maximal subalgebras of $C(\Gamma)$, Amer. J. Math., v. 79, 1957, 285—305.
10. *G. G. Kasparov.* Hilbert C^*-modules: theorems of Stinespring and Voiculescu J. Operator Theory, v. 4, no. 1, 1980, 133—150.
11. *W. L. Paschke.* Inner product modules over B^*-algebras, Trans. of A. M. S. v. 182, 1973, pp. 443—468.
12. *S. Sakai.* C^*-algebras and W^*-algebras, Springer—Verlag, New—York, 1975.
13. *A. Sallas.* Une extension d'un theorem de K. Hoffman et J. Wermer aux algebres de champs continues d'operateurs, C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A, Math. v. 284, no. 17, 1977, pp. 1049—1051.
14. *D. C. Taylor.* Interpolation in algebras of operator fields, J. Funct. Anal., v. 10,, no. 2. 1972, pp. 159—190.
15. *D. C. Taylor.* A general Hoffman—Wermer theorem for algebras of operator, fields, Proc. of A. M. S., v. 52, 1975, pp. 212—216.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 4, 1990 Математика

УДК 519.212.3

В. Р. ФАТАЛОВ

ИНТЕНСИВНОСТИ ПРОРЕЖЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ТРЕУГОЛЬНИКОВ, ПОРОЖДЕННЫХ ПУАССОНОВСКИМ ТОЧЕЧНЫМ ПРОЦЕССОМ НА ПЛОСКОСТИ

В последнее время большой интерес проявляется к изучению статистических свойств конечных подмножеств реализаций стохастических процессов геометрических элементов в R^n. Предполагается, что процесс подмножеств можно описать как трансляционно-инвариантный т. н. маркированный точечный процесс конечной интенсивности (см., например, [1, 2]). Первые результаты в этом направлении были получены недавно Р. В. Амбарцумяном, [3, 4] и его учениками, [5, 6].

Перейдем к постановке задачи, рассматриваемой в этой статье.

Обозначим через M_2 группу евклидовых движений плоскости. Пусть на плоскости заданы независимые M_2-инвариантный пуассоновский точечный процесс Φ_1 интенсивности λ и M_2-инвариантный пуассоновский процесс прямых Φ_2 интенсивности μ (необходимые определения можно найти в [1]). Пусть Φ — суперпозиция процессов Φ_1 и Φ_2 и, следовательно, также M_2-инвариантный процесс. Нас интересует процесс $T_{k,l}$ треугольников $P_iP_jP_s$, порожденный процессом Φ и определяемый следующим образом:

(а) каждая вершина P_q принадлежит реализации процесса Φ_1;

(б) внутри треугольника $P_iP_jP_s$ находится ровно $k > 0$ точек из процесса Φ_1;

(в) треугольник $P_iP_jP_s$ пересекают ровно $l > 0$ прямых из процесса Φ_2.

Важной задачей является вычисление распределения типичного треугольника процесса $T_{k,l}$. Нам однако удалось найти только интенсивность процесса $T_{k,l}$. Для ее нахождения будем придерживаться следующей схемы. Будем задавать треугольники Δ на плоскости следующим образом: $\Delta = (M, S, \sigma)$, где $M \in M_2$ задает положение треуголоника, S — его площадь, σ — его форма. Периметр треугольника Δ обозначим через H.

Рассмотрим множество всех треугольников, «натянутых» на Φ_1:

$$\{P_iP_jP_s\} = \{M_\alpha, S_\alpha, \sigma_\alpha\}, \quad (1)$$

где индекс α соответствует тройке $\{i, j, s\}$. Произведем прореживание множества (1) согласно требованиям (б), (в). Именно, выбросим все те тройки $\Delta_\alpha = (M_\alpha, S_\alpha, \sigma_\alpha)$, для которых нарушено хотя бы одно из условий (б), (в). Множество оставшихся треугольников обозначим через

$$\{M_\kappa,\ S_\kappa,\ \sigma_\kappa\}_{k,\ l}. \tag{2}$$

Это есть маркированный точечный процесс на группе M_2. Согласно общей теореме факторизации (см. [4]) первая моментная мера процесса (2) имеет вид

$$dM\ \nu_\sigma(dS)\ m(d\sigma),$$

где dM — кинематическая мера на плоскости,

$$\nu_\sigma(dS) = (\lambda S)^k (k!)^{-1} e^{-\lambda S} (\mu H)^l (l!)^{-1} e^{-\mu H}\, 2\, SdS$$

— мера в пространстве размеров, множитель $2\, SdS$ возникает в результате факторизации „по площади", см. (1.1) из [4], оставшийся множитель — следствие условий (б) и (в), индекс σ у ν_σ указывает на зависимость H от σ, $H = H(S,\ \sigma)$; $m(d\sigma)$ — мера в пространстве $\Sigma = (0,\ \pi) \times (0,\ \pi)$ треугольных форм на плоскости, которая в данном случае имеет вид (вновь отсылаем читателя к формуле (1.1) из [4]):

$$m(d\sigma) = (\sin\psi_1 \sin\psi_2 \sin(\psi_1 + \psi_2))^{-1}\, d\psi_1 d\psi_2,\quad \sigma = (\psi_1,\ \psi_2),$$

ψ_1, ψ_2 — внутренние углы треугольника.

Следовательно, после интегрирования по dM интенсивность точечного процесса центров тяжести треугольников из прореженного процесса (2) имеет вид

$$J_{k,\ l} = J_{k,\ l}(\lambda,\ \mu) = 2\pi \int_0^\infty \int_\Sigma \nu_\sigma(dS)\, m(d\sigma).$$

Численные значения интенсивностей $J_{k,\ l}(\lambda,\ \mu)$ при разных k, l, λ, μ могут быть полезны для статистических целей при проверке гипотезы о пуассоновости точечного множества на плоскости. В настоящей работе получено более удобное для расчетов представление интеграла $J_{k,\ l}$ в виде одномерного интеграла от специальных функций, приводится также таблица значений $J_{k,\ l}$, вычисленных на основе этого представления. Сформулируем наш основной результат.

Для любых λ, $\mu > 0$, k, $l = 0, 1, \cdots$ имеет место следующее тождество

$$J_{k,\ l} = 2^{l/2-k+2} 3^{3l/4-3/2} \pi (2k + l + 3)!\, (k!\, l!)^{-1} \lambda^{-(l/2+2)}\ \cdot$$

$$\cdot\, \mu^l \int_0^\pi \sin\frac{\alpha}{2} \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{-l/2} \exp\left\{\frac{\mu^2 h^2(\alpha)}{8\lambda}\right\} D_{-(2k+l+4)}\left(\frac{\mu h(\alpha)}{\sqrt{2\lambda}}\right) \cdot \tag{3}$$

$$\cdot\, ((a - c)\, b)^{-1/2} \left(\left(\frac{3}{c} - \frac{3}{a}\right) E(q) + \left(\frac{3}{a} - 1\right) K(q)\right) d\alpha,$$

где $h(\alpha) = 2(27)^{1/4} \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{-1/2}$,

$$D_{-n}(x) = ((n-1)!)^{-1} \exp\{-x^2/4\} \int_0^\infty \exp\{-xt - t^2/2\}\, t^{n-1}\, dt,\quad n = 1, 2, \cdots$$

— функция параболического цилиндра,

$$a=a(\alpha)=\frac{2}{3}\left(\cos\frac{\alpha}{3}+1\right),\quad b=b(\alpha)=\frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)+1\right),$$

$$c=c(\alpha)=\frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)+1\right),\quad q=q(\alpha)=\sqrt{(b-c)\,a\,((a-c)\,b)^{-1}},$$

$$K(q)=\int_0^{\pi/2}(1-q^2\sin^2 x)^{-1/2}\,dx,\quad E(q)=\int_0^{\pi/2}(1-q^2\sin^2 x)^{1/2}\,dx$$

— полные эллиптические интегралы первого и второго родов.

Теоретические сведения о специальных функциях $D_{-n}(x)$, $K(q)$, $E(q)$ и подробные численные таблицы их значений имеются в обстоятельном справочнике [7]. Формула (3) хотя и имеет громоздкий вид, однако проводить по ней численные расчеты довольно просто. Для вычислительных целей укажем следующее асимптотическое равенство. Обозначив произведение коэффициента перед интегралом в (3) на подынтегральную функцию в (3) через $f_{k,l}(\lambda,\ \mu;\ \alpha)$, находим с помощью формулы 19.8.1 из [7, с. 498]:

$$\lim_{\alpha\uparrow\pi} f_{k,\,l}(\lambda,\ \mu;\ \alpha)=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi(l+1)(l+2)(l+3)\mu^{-4}\delta_{k,\,0}, \tag{4}$$

где $\delta_{0,\,0}=1$, $\delta_{k,\,0}=0$, $k\neq 0$.

В прилагаемых таблицах интенсивности $J_{k,l}$ вычислены на основании тождества (3) с использованием формулы Симпсона с шагом $\frac{\pi}{8}$ и с учетом равенства (4); приведены значения $J_{k,\,l}\lambda^2$.

k \ l	0	1	2	3	4	5	6
0	35,863	104,83	193,49	291,90	399,87	523,70	671,14
1	19.297	68,937	142,10	222.78	291,77	—	—
2	11.697	49,783	117,78	—	—	—	—
3	7.332	—	—	—	—	—	—

1) Случай $\mu/\sqrt{\lambda}=1/2$.

k \ l	0	1	2	3	4	5	6
0	3,938	13,499	29,613	48,422	70.877	94,756	119,07
1	1,145	5,145	13,773	27,724	46,619	—	—
2	0,3675	2,117	6,754	—	—	—	—
3	0,1372	—	—	—	—	—	—

2) Случай $\mu/\sqrt{\lambda}=1$.

k \ l	0	1	2	3	4	5	6
0	0,3165	1,202	2,830	5,291	8,605	12.710	17,509
1	0,03197	0,1750	0,5537	1,321	2,637	—	—
2	0,004198	0,02959	0,1162	—	—	—	—
3	0,0006631	—	—	—	—	—	—

3) Случай $\mu/\sqrt{\lambda}=2$.

Доказательство тождества (3). Основная идея вычисления интеграла $J_{k,l}$ заключается в использовании связи между площадью S треугольника Δ, периметром H и его внутренними углами ψ_1, ψ_2. Именно, введем величину

$$h = h(\psi_1, \psi_2) = \frac{H}{\sqrt{S}} = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{\psi_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\psi_2}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)^{1/2} =$$
$$= \sqrt{2}(\sin\psi_1 + \sin\psi_2 + \sin(\psi_1+\psi_2))(\sin\psi_1 \sin\psi_2 \sin(\psi_1+\psi_2))^{-1/2}. \tag{5}$$

Тогда по теореме Фубини будем иметь

$$J_{k,l} = 8\pi\frac{\lambda^k\mu^l}{k!\,l!}\int_D (\sin\psi_1 \sin\psi_2 \sin(\psi_1+\psi_2))^{-1} h^l(\psi_1,\psi_2)\times$$
$$\times\,\theta_{k,l}(h(\psi_1,\psi_2))\,d\psi_1 d\psi_2, \tag{6}$$

где обозначено $D = \{(\psi_1, \psi_2): 0 < \psi_1 \leqslant \pi,\ 0 < \psi_2 \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \psi_1+\psi_2 \leqslant \pi\}$,

$$\theta_{k,l}(h) = \int_0^\infty S^{k+l/2+1}\exp\{-\lambda S - \mu h\sqrt{S}\}\,dS. \tag{7}$$

Интеграл $\theta_{k,l}$ легко выражается через функцию параболического цилиндра (см № 2.3.15 из книги [8, с. 343]):

$$\theta_{k,l}(h) = 2(2k+l+3)!\,(2\lambda)^{-(k+l/2+2)}\exp\left\{\frac{\mu^2h^2}{8\lambda}\right\}D_{-(2k+l+4)}\left(\frac{\mu h}{\sqrt{2\lambda}}\right). \tag{8}$$

Дальнейшее доказательство основано на использовании в качестве независимой переменной интегрирования величины $h=h(\psi_1, \psi_2)$. Эта замена переменных осуществляется в несколько этапов. Сначала естественно в интеграле (6) перейти к новым переменным интегрирования $u = \operatorname{tg}\frac{\psi_1}{2}$, $v = \operatorname{tg}\frac{\psi_2}{2}$. Обозначив для краткости $I_{k,l} = k!\,l!\,(8\pi\lambda^k\mu^l)^{-1} J_{k,l}$ в силу (5) тогда будем иметь $h(u, v) = 2\,((u+v)(uv(1-uv))^{-1})^{1/2}$,

$$I_{k,l} = \iint\limits_{\{(u,v):0<uv<1\}} (1/8 + 2u^{-2}v^{-2}h^{-4}(u,v))\,h^{l+2}(u,v)\,\theta_{k,l}(h(u,v))\,du\,dv. \tag{9}$$

В этом интеграле сделаем следующую замену переменных:

$$z = u + v,\quad t = uv. \tag{10}$$

Якобиан перехода равен $\frac{1}{2}(z^2/4 - t)^{-1/2}$. Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим ($z \geqslant 2\sqrt{t}$), симметричность по u и v подынтегральной функции и области интегрирования в (9) в результате замены (10), имеем

$$I_{k,l}=2\int\limits_0^1 dt\int\limits_{2\sqrt{t}}^{\infty}dz\,(1/16+t^{-2}h^{-4}(z,t))\,\frac{h^{l+2}(z,t)\,\theta_{k,l}(h(z,t))}{(z^2/4-t)^{1/2}}. \tag{11}$$

где $h(z,t)=2\,(z\,(t\,(1-t))^{-1})^{1/2}$.

Наконец, перейдем во внутреннем интеграле в (11) от z к новой переменной $h=h(z,t)$. Получим $y(t)=(8\,(\sqrt{t}\,(1-t))^{-1})^{1/2}$:

$$I_{k,l}=\int\limits_0^1 dt\int\limits_{y(t)}^{\infty}dh\left\{(1/16+t^{-2}h^{-4})\,\frac{h^{l+3}\sqrt{t}\,(1-t)\,\theta_{k,l}(h)}{(h^4t\,(1-t)^2/64-1)^{1/2}}\right\}. \tag{12}$$

Обозначим выражение в фигурных скобках в (12) через $\varphi(t,h)$. Сейчас наша цель — поменять порядок интегрирования в (12) и затем провести интегрирование по t. Чтобы выполнить первое нужно найти обратную функцию для $h=y(t)$, т. е. выразить t через h, $0\leqslant t\leqslant 1$. Имеем кубичное уравнение в области $t\in[0,1]$:

$$t^3-2t^2+t-\frac{64}{h^4}=0. \tag{13}$$

Так как для этого уравнения дискриминант $Q=64\,h^{-4}(16\,h^{-4}-1/27)<0$, то имеем т. н. неприводимый случай, для которого используется тригонометрическое решение (см. § 1.8 из [9, с. 44]):

$$\begin{gathered}
a=a(h)=\frac{2}{3}\left(1+\cos\frac{\alpha}{3}\right)\in\left[1,\frac{4}{3}\right],\\
b=b(h)=\frac{2}{3}\left(1+\cos\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)\right)\in\left[\frac{1}{3},1\right],\\
c=c(h)=\frac{2}{3}\left(1+\cos\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)\right)\in\left[0,\frac{1}{3}\right],
\end{gathered} \tag{14}$$

где $\alpha=\alpha(h)=\arccos(864\,h^{-4}-1)$.

По теореме Виета имеют место следующие соотношения:

$$a+b+c=2,\quad ab+ac+bc=1,\quad abc=64\,h^{-4}. \tag{15}$$

Из трех решений (14) первое $a(h)$ не входит в область допустимых значений $0\leqslant t\leqslant 1$. Учитывая, что функция $y(t)$ при $0<t\leqslant\frac{1}{3}$ монотонно убывает от $+\infty$ до $2\sqrt[4]{27}$, а при $\frac{1}{3}<t<1$ монотонно возрастает от $2\sqrt[4]{27}$ до $+\infty$, заключаем, что на каждом из этих отрезков обратная к $y(t)$ функция состоит из однозначных ветвей — $c(h)$ и $b(h)$ соответственно. Следовательно, имеем для интеграла (12)

$$I_{k,l}=\int\limits_0^{1/3}dt\int\limits_{y(t)}^{\infty}\varphi(t,h)\,dh+\int\limits_{1/3}^{1}dt\int\limits_{y(t)}^{\infty}\varphi(t,h)\,dh=\int\limits_{2\sqrt[4]{27}}^{\infty}dh\int\limits_{c(h)}^{1/3}\varphi(t,h)\,dt+$$

$$+\int\limits_{2\sqrt[4]{27}}^{\infty} dh \int\limits_{1/3}^{b(h)} \varphi(t, h)\, dt = \int\limits_{2\sqrt[4]{27}}^{\infty} dt \int\limits_{c(h)}^{b(h)} \varphi(t, h)\, dt. \tag{16}$$

Вспоминая вид функции $\varphi(t, h)$ с учетом найденных корней (14) уравнения (13) последнее выражение в (16) можем записать в виде

$$I_{k,l} = \int\limits_{2\sqrt[4]{27}}^{\infty} dh\, h^{l+1}\theta_{k,l}(h) \int\limits_{c(h)}^{b(h)} \frac{1}{2}(1+16\,t^{-2}h^{-4}) \frac{(t^{1/2}-t^{3/2})\,dt}{((t-c)(b-t)(a-t))^{1/2}}. \tag{17}$$

Займемся теперь вычислением внутреннего интеграла в (17), который мы обозначим через B:

$$B = B(h) = \frac{1}{2}\int\limits_{c}^{b} (1+16\,t^{-2}h^{-4}) \frac{t^{1/2}-t^{3/2}}{((t-c)(b-t)(a-t))^{1/2}}\, dt.$$

Выражение B можно представить в виде линейной комбинации нормальных эллиптических интегралов. Введем следующие обозначения:

$$B_n = B_n(h) = \int\limits_{c}^{b} t^n (t(t-c)(t-b)(t-a))^{-1/2}\, dt, \quad n = -1, 0, 1, 2.$$

Тогда легко проверить, что

$$B = \frac{1}{2}(B_1 - B_2) + 8\,h^{-4}(B_{-1} - B_0).$$

Используя формулу (21.6—22) из справочника [9, с. 751], получаем равенство

$$B_2 = B_1 - 32\,h^{-4} B_{-1}.$$

Следовательно

$$B = 8\,h^{-4}(3\,B_{-1} - B_0)$$

и, подставляя это значение B в (17), имеем

$$I_{k,l} = 8 \int\limits_{2\sqrt[4]{27}}^{\infty} h^{l-3}\theta_{k,l}(h)(3\,B_{-1}(h) - B_0(h))\, dh. \tag{18}$$

Интегралы B_{-1}, B_0 легко выражаются через нормальные эллиптические интегралы. Проведя соответствующие вычисления по формулам 1.2.36.1 и 1.2.36.3 из справочника [8, с. 78], учитывая (15) и тождество (см. формулу 17.7.24 из [7, с. 415])

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, q^2, q\right) = (1-q^2)^{-1} E(q)$$

(здесь $\prod\left(\frac{\pi}{2}, p, q\right) = \int\limits_0^{\pi/2} (1 - p\sin^2 x)^{-1} (1 - q^2 \sin^2 x)^{-1/2}\, dx$ — полный эллиптический интеграл третьего рода, получаем

$$3B_{-1}(h) - B_0(h) = 2((a-c)\,b)^{-1/2}\left(\left(\frac{3}{c} - \frac{3}{a}\right)E(q) + \left(\frac{3}{a} - 1\right)K(q)\right),$$

где $q = ((b-c)\,a\,((a-c)\,b)^{-1})^{1/2}$.

Подставляя найденное значение в (18) и произведя затем замену переменной $\alpha = \arccos(864\,h^{-1} - 1)$, получим с учетом (8) формулу (3).

Относительно интенсивностей $J_{k,l}(\lambda, \mu)$ справедливо следующее утверждение, выявляющее в некоторой степени роль условий (б) и (в) прореживания

Утверждение. *При любых* $\lambda, \mu > 0$, $l = 0, 1, 2, \cdots$ *имеет место равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty} J_{k,l} = \frac{2}{21}\pi^2 (l+1)(l+2)(l+3)\mu^{-4}; \tag{19}$$

при любых $\lambda, \mu > 0$, $k = 0, 1, 2, \cdots$ справедливо

$$\sum_{l=0}^{\infty} J_{k,l} = +\infty. \tag{20}$$

Доказательство. Для доказательства (19) изменим порядок интегрирования в формуле (18), как это было сделано в аналогичной ситуации при доказательстве тождества (3), в результате получим

$$J_{k,l} = \frac{8\pi\lambda^k\mu^l}{k!\,l!}\int\limits_0^1 dt\,\frac{3-t}{t\sqrt{t}}\int\limits_{y(t)}^{\infty} h^{l-1}\,\theta_{k,l}(h)\,(t(1-t)^2 h^4/64 - 1)^{-1/2}\,dh. \tag{21}$$

Все члены выписанных ниже рядов неотрицательны, поэтому теорема Лебега о монотонной сходимости позволяет менять порядок суммирования и интегрирования. Учитывая это и пользуясь интегральным представлением $\theta_{k,l}(h)$ в (7) легко найти сумму ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mu^l (k!\,l!)^{-1}\,\theta_{k,l}(h) = 2(l+1)(l+2)(l+3)\,\mu^{-4} h^{-(l+4)}.$$

Следовательно, в силу (21) для установления справедливости (19) осталось вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^1 dt\,\frac{3-t}{t\sqrt{t}}\int\limits_{y(t)}^{\infty} (t(1-t)^2 h^4/64 - 1)^{-1/2} h^{-5}\,dh.$$

Сделаем это. Во внутреннем интеграле произведем замену переменной $x = p(t)\,h^4$, где обозначено $p(t) = t(1-t)^2/64$. Тогда I будет равен произведению двух интегралов:

$$I = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 (3-t)\,t^{-3/2} p(t)\,dt \int\limits_1^{\infty} x^{-2}(x-1)^{-1/2}\,dx.$$

Несложный подсчет дает (формулы 855.31, 855.41 из [10, с. 182, 183]):

$$\frac{1}{4}\int_0^1 (3-t)\,t^{-3/2}\,p(t)\,dt=\frac{1}{84},\quad \int_1^\infty x^{-2}(x-1)^{-1/2}dx=\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, $I=\pi/168$ и формула (19) доказана.

Для проверки (20) используем непосредственно выражение для интенсивностей, приведенное перед тождеством (3); по теореме Лебега о монотонной сходимости имеем, $D=\{(\psi_1,\psi_2):0\leqslant\psi_i\leqslant\pi,\ i=1,\ 2,\ 0\leqslant\psi_1+\psi_2\leqslant\pi\}$:

$$\sum_{l=0}^{\infty} J_{k,l}=8\pi\lambda^{-2}(k+1)\int_D(\sin\psi_1\sin\psi_2\sin(\psi_1+\psi_2))^{-1}d\psi_1 d\psi_2=+\infty,$$

расходимость последнего интеграла и связанные с ним вопросы подробно исследованы в работе [6]. Утверждение доказано.

Отметим, что равенство (19) можно получить другим способом. Использование выражений (6), (7) дает нам

$$\sum_{k=0}^{\infty} J_{k,l}=4\pi(l+1)(l+2)(l+3)\mu^{-4}\int_D\sin\psi_1\sin\psi_2\sin(\psi_1+\psi_2)\cdot$$

$$\cdot(\sin\psi_1+\sin\psi_2+\sin(\psi_1+\psi_2))^{-4}d\psi_1 d\psi_2=\frac{2}{21}\pi^2(l+1)(l+2)(l+3)\mu^{-4},$$

значение последнего интеграла разными способами найдено в [5, 11], где обсуждаются также иные ситуации его появления (в содержательной работе [11] — в рамках общей теории шейпов в евклидовых пространствах, построенной Д. Кендаллом).

В заключение обсудим возможность применения метода Монте-Карло для вычисления интенсивностей $J_{k,l}(\lambda,\mu)$. Автором совместно с Шекян Э. составлена и апробирована на микро-ЭВМ типа «Электроника» программа на языке «ФОРТРАН-4» для статистического моделирования реализаций составного процесса Ф. По заданным параметрам λ, μ моделировалось ([1]) K точек и L прямых в круге радиуса R_1 и подсчитывалось число N треугольников, удовлетворяющих условиям (а)—(в) (при заданных k, l), центры тяжести которых попали в круг меньшего радиуса $R_2<R_1$. Число $N/(\pi R_2^2)$ дает значение искомой интенсивности. Однако, перебор всех возможных треугольников (а их число — C^{3k}), подсчет числа точек, попавших в фиксированный треугольник и числа прямых его пересекающих требует при достаточно больших (репрезентативных) K, U для единичной реализации программы на микро-ЭВМ машинного времени около часа. Соответственно, проведение большого числа испытаний, порядка нескольких десятчов (как того требует метод Монте-Карло) затруднено — это, помимо всего прочего, повышает значение тождества (3) для вычислительных целей. Результаты статистического моделирования будут опубликованы в другом месте.

Автор выражает благодарность Р. В. Амбарцумяну за постановку задачи и внимание к работе, а также Г. Сукиасяну, В. Оганяну и рецензенту за полезные обсуждения.

Ереванский государственный
университет

Поступила 24. XII. 1987

Վ. Ռ. ՖԱՏԱԼՈՎ. Հարթության վրա կետային պուասոնյան պրոցեսով ծնված եռանկյունների նոսրացված պրոցեսների ինտենսիվությունները *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է M_2 ինվարիանտ պուասոնյան Φ_1 կետային և Φ_2 ուղիղների պրոցեսների համադրությունը, որտեղ M_2-ը էվկլիդյան շարժումների խումբն է հարթության վրա։ Սահմանենք եռանկյունների $T_{k,l} = \{P_i P_j P_s\}$ պրոցեսը հետևյալ կերպ.

ա) յուրաքանչյուր P_q գագաթ պատկանում է Φ_1 պրոցեսի իրագործման,

բ) Φ_1 պրոցեսի k հատ կետեր, $k > 0$, գտնվում են $P_i P_j P_s$ եռանկյան ներսում,

գ) Φ_2 պրոցեսի l հատ ուղիղներ, $l > 0$, հատում են $P_i P_j P_s$ եռանկյունը։

$T_{k,l}$ պրոցեսի ինտենսիվությունը հաշվելու համար ստացված է երեք հատուկ ֆունկցիաներից բաղկացած, մի չափանի ինտեգրալի տեսքով բանաձև։

Ստացված բանաձևի հիման վրա բերված են նաև թվային աղյուսակներ։

V. R. FATALOV. *The intensities of thinned triangle processes generated by the Poisson points process on the plane* (summary)

The superposition of M_2 — invariant Poisson point process Φ_1 and M_2 invarian Poisson line process Φ_2 on the plane is considered, where M_2 is the group of eucli- dean motions of the plane. Define the triangle process $T_{k,l} = \{P_i P_j P_s\}$ as follows:

(a) every vertex P_q belongs to realization of Φ_1;

(b) exactly $k > 0$ points from Φ_1 lie inside the triangle $P_i P_j P_s$;

(c) exactly $l > 0$ lines from Φ_2 intersect the triangle $P_i P_j P_s$.

The $T_{k,l}$ process intensity is expressed as one-dimensional integral of specia- functions. A numerical table based of this formula is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *D. Stoyan, W. S. Kendall, J. Mecke*, Stochastic geometry and its application- Akademie—Verlag, Berlin and Wiley, N. Y., 1986.
2. *P. Franken, D. Konig, U. Arndt, V. Schmidt*. Queues and Point Processes, Aka- demie—Verlag, Berlin and Wiley, Chichester, 1982,
3. *R. V. Ambartzumian*. Random shapes by factorization, Statistics in theory and practice, Essays in honour of B. Matern, Umea, Sweden, 1982. 35—41.
4. *R. V. Ambartzumian*. Factorization on integral and stochastic geometry, Teub- ner—texte zur mathematik, 1984, Band 65, Leipzig, 14—33.
5. *В. К. Оганян*. О формах треугольников, образованных точками пуассоновского процесса на плоскости, ДАН АрмССР, т. 81, № 2, 1985, 59—63.
6. *H. S. Sukiasian*. Two results on triangle shapes, Teubner—texte zur mathematikt 1984, Band 65, Leipzig, 210—222.
7. Справочник по специальным функциям (под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган), М., Наука, 1979.
8. *А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев*. Интегралы и ряды. Элементарные функции, М., Наука, 1981.
9. *Г. Корн, Т. Корн*. Справочник по математике, М., Наука, 1977.
10. *Г. Б. Двайт*. Таблицы интегралов, М., Наука, 1978.
11. *D. G. Kendall*. Shape manifolds, Procrustean metrics and complex projective spaces, Bull. London Math. Soc., 1984, v. 16, 81—121.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 4, 1990 Математика

УДК 517.98

М. И. КАРАХАНЯН

ОБ ОПЕРАТОРНОМ УРАВНЕНИИ $HY-YK=C$

Пусть X—слабо полное (в частности рефлексивное) банахово пространство, а H, K — вообще говоря, неограниченные спектральные операторы скалярного типа (подробнее см. [1]), для которых спектры $\sigma(H)$, $\sigma(K)\subset R^1$.

В данной работе нас интересует вопрос о разрешимости операторного уравнения

$$HYu-YKu=Cu, \tag{A}$$

где $u\in D(K)$, $C\in B(X)$ — спектральный оператор скалярного типа, при условии, что $Y\in B(X)$. Здесь $B(X)$ — алгебра ограниченных линейных опереторов, отображающих пространство X в себя. Полученные в этой работе результаты усиливают результаты из [2], [3].

Хорошо известно (см. [4]), что для операторов iH, iK вышесказанное равносильно тому, что существуют строго непрерывные однопараметрические группы $\mathbf{H}(t)$, $\mathbf{K}(s)$ $(t, s\in(R^1))$ спектральных операторов скалярного типа, у которых спектры лежат на единичной окружности, соответствующие разложения единицы E_H, E_K равномерно ограничены по норме и инфинитезимальные производящие операторы, соответственно, являются iH и iK.

Так как

$$<\mathbf{H}(t)u, \varphi> = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} <E_H(d\lambda)u, \varphi>,$$

$$<\mathbf{K}(s)u, \varphi> = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{is\lambda} <E_K(d\lambda)u, \varphi>,$$

$u\in X$, $\varphi\in X^*$, то ясно, что $\sup_t\|\mathbf{H}(t)\|<\infty$, $\sup_s\|\mathbf{K}(s)\|<\infty$.

Поэтому в силу теории Хилле-Иосиды (см. [5], [6], [7]) H и K-замкнутые, плотно определенные операторы, для которых нормы резольвент имеют оценки

$$\|R_H(z)\|\leqslant\frac{M_H}{|\mathrm{Im}\, z|},\quad \|R_K(z)\|\leqslant\frac{M_K}{|\mathrm{Im}\, z|},$$

где M_H, M_K — константы. С другой стороны, ввиду того, что

$$Hu=\lim_{t\to 0^+} S_t^{<H>}u \text{ и } Kv=\lim_{t\to 0^+} S_t^{<K>}v,$$

где $u\in D(H)$, $v\in D(K)$, $t>0$, а $S_t^{<H>}=-it\sin H_t$,

$S_t^{<K>} = -it \sin K_t$ — спектральные операторы скалярного типа, у которых спектры $\sigma(S_t^{<H>}) \subset \mathbf{J}$, $\sigma(S_t^{<K>}) \subset \mathbf{J}$, где $\mathbf{J} = \{it : t \in \mathbf{R}^1\}$ и соответствующие разложения единицы равномерно ограничены по норме, то в силу результатов (см. [1]), гл. XVII) следует, что операторы H^* и K^* — спектральные операторы скалярного типа класса X. Отметим, что вышеуказанные свойства и оценки резольвент операторов H и K будут выполняться и для операторов H^* и K^*.

Хорошо известно (см. [8]), что когда $H, K, C \in B(X)$ и $\sigma(H) \cap \cap \sigma(K) = \varnothing$, то операторное уравнение $HY - YK = C$ имеет единственное решение в алгебре $B(X)$, которое получается по формуле

$$Y = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_H} \int_{\Gamma_K} \frac{R_H(\lambda)\, C R_K(\mu)}{\lambda - \mu}\, d\lambda\, d\mu,$$

где Γ_H, Γ_K — контуры, охватывающие спектры, соответствено, операторов H и K, а $R_H(\lambda)$, $R_K(\mu)$ — соответствующие резольвенты. Применяя методику работы [2] и вышеуказанное соображение в случае непересекающих спектров мы покажем, что операторное уравнение

$$(H + iyI)\, Yu - Y\,(K - iy\,I)\, u = Cu, \tag{1}$$

где $u \in D(K)$, $y > 0$ имеет единственное решение $T_y \in B(X)$, которое позволит получить критерий разрешимости операторного уравнеиия (A).

Очевидно, что оператор $Y \in B(X)$ будет решением задачи (A) тогда и только тогда, когда является решением одной из задач

$$< HYu, \varphi > - < YKu, \varphi > = < Cu, \varphi >, \tag{A$_1$}$$

где $u \in D(K)$, $\varphi \in D(H^*)$ или

$$YR_K(z) - R_H(\bar{z})\, Y = R_H(\bar{z})\, CR_K(z) + 2\, iy\, R_H(\bar{z})\, YR_K(z), \tag{A$_2$}$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $y \neq 0$.

Используя вышеуказанные оценки на нормы резольвент операторов H и K, легко получить, что

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{\pi i} \int_{-r}^{r} < R_H(z)\, u, \varphi > dx = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{\pi i} \int_{-r}^{r} < R_K(z)\, u, \varphi > dx =$$

$$= \operatorname{sgn} y < u, \varphi >. \tag{2}$$

В силу слабой полноты пространства X при $y > 0$ существует оператор $T_y = T(H, K, C, y)$ как слабый интеграл

$$T_y = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^{r} R_H(\bar{z})\, CR_K(z)\, dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} R_H(\bar{z})\, CR_K(z)\, dx, \tag{3}$$

Лемма 1. *Пусть $y > 0$. Тогда оператор $T_y \in B(X)$, $\|T_y\| \leqslant \dfrac{M}{y}$ и T_y — единственное ограниченное решение операторного уравнения $(H + iy\,I)\, Yu - Y(K - iy\,I)\, u = Cu$, где $u \in D(K)$.*

Доказательство. Пусть $u \in X$, $\|u\| = 1$, $\varphi \in X^*$, $\|\varphi\| = 1$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |< R_H(\bar{z})\, CR_K(z)\, u, \varphi >|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |< CR_K(z)\, u,\ R_{H^*}(\bar{z})\varphi >|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \|C\| \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|R_K(z)\|^2\, dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|R_{H^*}(\bar{z})\|^2\, dx \right)^{1/2}.$$

Но так как

$$\|R_{H^*}(\bar{z})\|^2 \leqslant \int_{\sigma(H^*)} \frac{\|E_{H^*}(dt)\|}{|t-\bar{z}|^2},\quad \|R_K(z)\|^2 \leqslant \int_{\sigma(K)} \frac{\|E_K(dt)\|}{|t-z|^2},$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|R_K(z)\|^2\, dx \leqslant \frac{M_1}{\sqrt{y}},\quad \int_{-\infty}^{\infty} \|R_{H^*}(\bar{z})\|^2\, dx \leqslant \frac{M_2}{\sqrt{y}},$$

ткуда следует, что $\|T_y\| \leqslant \dfrac{M}{y}$.

Убедимся в том, что оператор T_y — решение уравнения (1). В самом деле, если $u \in D(K)$, $\varphi \in D(H^*)$, то

$$< (H + iy\, I)\, T_y u, \varphi > - < T_y (K - iy, I)\, u, \varphi > =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^{r} [< CR_K(z)\, u, \varphi > - < R_H(z)\, Cu, \varphi >]\, dx = < Cu, \varphi >.$$

Пусть теперь уравнение (1) имеет ограниченное решение Y. Тогда при $y > 0$, $u \in D(K)$, $\varphi \in D(H^*)$ имеем

$$< YR_K(z)\, u, \varphi > - < R_H(z)\, Yu, \varphi > = < R_H(\bar{z})\, CR_K(z)\, u, \varphi >,$$

откуда

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^{r} < YR_K(z)\, u, \varphi > dx - \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^{r} < R_H(z)\, Yu, \varphi > dx =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^{r} < R_H(\bar{z})\, CR_K(z)\, u, \varphi > dx.$$

Но тогда в силу соотношения (2) имеем, что $< Yu, \varphi > = < T_y u, \varphi >$ т. е. $Y = T_y$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Задача* (А) *имеет ограниченное решение тогда, и только тогда, когда семейство* $\{\|T_y\| : y > 0\}$ *ограничено. Если семейство* $\{\|T_y\| : y > 0\}$ *ограничено, то существует слабо сходящаяся при* $y_n \to 0$ *последовательность* T_{y_n}, *и всякая слабо сходящаяся последовательность слабо сходится к ограниченному решению задачи* (А).

Доказательство. Предположим, что задача (А) имеет ограниченное решение Y. Тогда при $u \in D(K)$, $\varphi \in D(H^*)$, $y > 0$ из (A_2) имеем

$$<Yu,\ \varphi> = <T(H, K, C, y)\,u,\ \varphi> + 2iy < T(H, K, Y, y)\,u,\ \varphi>.$$

В силу леммы 1 семейсмво $\{y\|T(H, K, Y, y)\| : y>0\}$ ограничено и, следователяно, ограничено семейство $\{\|T_y\|\} : y>0\}$, где $T_y = T(H, K, C, y)$. Обратно, если семейство операторов $\{\|T_y\| : y>0\}$ ограничено, то существует последовательность $\{T_{y_n}\}$ с $y_n \to 0$, которая слабо сходится к ограниченному оператору Y. В силу леммы 1 имеем, что $<HYu, \varphi> - <YKu, \varphi> = <Cu, \varphi>$, т. е. Y — решение задачи (A). Теорема 1 доказана.

Замечание. а) Доказанную теорему 1 можно обобщить, если вместо пространства X рассмотреть пару слабо полных банаховых пространств X_1, X_2, где H действует в X_1, K действует в X_2, а оператор $C \in B(X_2, X_1)$.

б) Нетрудно видеть, что вышеуказанные результаты работают и в том случае, если $\sigma(H)$, $\sigma(K) \subset \mathrm{R}^1$ и нормы резольвент имеют оценки $\|R_H(z)\| \leqslant \frac{M_H}{|z|}$, $\|R_K(z)\| \leqslant \frac{M_K}{|z|}$.

Отметим, что две операторные матрицы $L = \begin{bmatrix} L_{11}, & L_{12} \\ L_{21}, & L_{22} \end{bmatrix}$ и $S = \begin{bmatrix} S_{11}, & S_{12} \\ S_{21}, & S_{22} \end{bmatrix}$ как операторы из $B(X \oplus X)$, у которых компоненты есть спектральные операторы скалярного типа, называются подобными друг другу, если существует обратимая операторная матрица $U \in B(X \oplus X)$ такого же типа, для которых $UL = SU$. В случае, когда операторы $H, K \in B(X)$, имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть H, K — ограниченные эрмитовые спектральные операторы скалярного типа, действующие в слабо полном банаховом пространстве X. Тогда уравнение $HY - YK = C$, где $C \in B(X)$ — спектральный оператор скалярного типа имеет ограниченное решение тогда и только тогда, когда операторные матрицы $\begin{bmatrix} H, & 0 \\ 0, & K \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} H, & C \\ 0, & K \end{bmatrix}$ подобны друг другу.*

Доказательство. Если уравнение $HY - YK = C$ имеет ограниченное решение Y, то подобие вышеуказанных операторных матриц следует из тождества

$$\begin{bmatrix} I, & -Y \\ 0, & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H, & 0 \\ 0, & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I, & Y \\ 0, & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I, & HY - YK \\ 0, & I \end{bmatrix}.$$

Обратно, предположим, что эти операторные матрицы подобны, т. е. существует такой обратимый оператор U на $X \oplus X$, что

$$\begin{bmatrix} H, & C \\ 0, & K \end{bmatrix} = U^{-1} \begin{bmatrix} H, & 0 \\ 0, & K \end{bmatrix} U.$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} R_H(z), & -R_H(\bar z)\, C R_K(z) \\ 0 & R_K(z) \end{bmatrix} = U^{-1} \begin{bmatrix} R_H(z), & 0 \\ 0, & R_K(z) \end{bmatrix} U,$$

откуда получаем, что

$$\begin{bmatrix} R_H(\bar z), & -R_H(\bar z)\,CR_K(z) \\ 0 & R_K(z) \end{bmatrix} = U^{-1}\begin{bmatrix} R_H(z), & 0 \\ 0, & R_K(z) \end{bmatrix} U - \tag{4}$$

$$-2iy\begin{bmatrix} R_H(\bar z), & 0 \\ 0, & I \end{bmatrix} U^{-1}\begin{bmatrix} R_H(z), & 0 \\ 0, & R_K(z) \end{bmatrix} U,$$

где $z = x + iy$, $y > 0$.

Применим к обеим частям тождества (4) операцию интегрирования $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-r}^{r}\cdots dx$. Тогда в левой части получим операторную матрицу $\begin{bmatrix} -\frac{I}{2}, & -T_y \\ 0, & \frac{I}{2} \end{bmatrix}$, а правая часть в силу леммы 1 будет равномерно ограничена при $y > 0$. Таким образом, семейство $\{\|T_y\| : y > 0\}$ ограничено, и в силу теоремы 1 уравнение $HY - YK = C$ имеет решение в алгебре $B(X)$. Теорема 2 доказана.

Пусть $\mathrm{R}_H[t]$, $\mathrm{R}_K[t]$ — кольца полиномов, порожденные, соответственно, операторами $H, K \in B(X)$ над полем R^1. Тогда имеет место

Следствие. *Пусть X — слабо полное банахово пространство, $C \in B(X)$ есть спектральный оператор скалярного типа, а для операторов $H, K \in B(X)$ имеют место условия* $\sup\{\|e^{ip(H)}\| : p \in \mathrm{R}_H[t]\} < \infty$, $\sup\{\|e^{ip(K)}\| : p \in \mathrm{R}_K[t]\} < \infty$. *Тогда уравнение $HY - YK = C$ разрешимо в алгебре $B(X)$ тогда и только тогда, когда операторные матрицы $\begin{bmatrix} H, & 0 \\ 0, & K \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} H, & C \\ 0, & K \end{bmatrix}$ подобны друг другу.*

Доказательство. Из условия следствия (см. [9]) получаем, что операторы H, K — спектральные операторы скалярного типа, у которых $\sigma(H)$, $\sigma(K) \subset \mathrm{R}^1$. Остается применить теорему 2.

Пусть оператор $T \in B(X)$ — разложимый оператор, т. е. $T = H + iK$, где $H, K \in B(X)$ — эрмитовы операторы и $[\cdot, \cdot]$ — полускалярное произведение в X, которое совместно с исходной нормой на X (см. [10]). тогда в прямой сумме $X \oplus X$ можно задать полускалярное произведение $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = [x_1, x_2] + [y_1, y_2]$, которое совместимо с нормой в $X \oplus X$. Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма 2. *Пусть операторы $T_{pq} \in B(X)$ есть разложимые операторы, т. е. $T_{pq} = H_{pq} + iK_{pq}$ и H_{pq}^l, K_{pq}^l, где $l = 1, 2$; $p, q = 1, 2$ — эрмитовы операторы. Если операторная матрица*

$$T = \begin{bmatrix} T_{11}, & T_{12} \\ T_{21}, & T_{22} \end{bmatrix} \in B^{-1}(X \oplus X), \text{ то } T_{21}T_{21}^{+} + T_{22}T_{22}^{+} \in B^{-1}(X).$$

Доказательство. Рассмотрим операторную матрицу

$$W=\begin{bmatrix} T_{11}, T_{12} \\ T_{21}, T_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_{11}, T_{12} \\ T_{21}, T_{22} \end{bmatrix}^{+}=\begin{bmatrix} T_{11}, T_{12} \\ T_{21}, T_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_{11}^{+}, T_{21}^{+} \\ T_{12}^{+}, T_{22}^{+} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} T_{11}T_{11}^{+}+T_{12}T_{12}^{+}, & T_{11}T_{21}^{+}+T_{12}T_{22}^{+} \\ T_{21}T_{11}^{+}+T_{22}T_{12}^{+}, & T_{21}T_{21}^{+}+T_{22}T_{22}^{+} \end{bmatrix},$$

которая обратима в алгебре $B(X\oplus X)$. Так как

$$T_{21}T_{21}^{+}+T_{22}T_{22}^{+}=H_{21}^{2}+K_{21}^{2}+K_{22}^{2}+H_{22}^{2}+i[K_{21}, H_{21}]+i[K_{22}, H_{22}]$$

и операторы H_{pq}^{2}, K_{pq}^{2}, $i[K_{pq}, H_{pq}]$ — эрмитовы операторы, то оператор $T_{21}T_{21}^{+}+T_{22}T_{22}^{+}$ — эрмитов оператор. Поэтому спектр оператора $T_{21}T_{21}^{+}+T_{22}T_{22}^{+}$ совпадает с его аппроксимативным спектром. Для доказательства обратимости оператора $T_{21}T_{21}^{+}+T_{22}T_{22}^{+}$ достаточно показать, что $0\overline{\in}\sigma(T_{21}T_{21}^{+}+T_{22}T_{22}^{+})$. Пусть наоборот, тогда существует последовательность $\{x_n\}\subset X$ с $\|x_n\|=1$ такая, что $\|(T_{21}T_{21}^{+}+T_{22}T_{22}^{+})x_n\|\to 0$ при $n\to\infty$. Но с другой стороны

$$W\begin{pmatrix} 0 \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} (T_{11}T_{21}^{+}+T_{12}T_{12}^{+})x_n \\ (T_{21}T_{21}^{+}+T_{22}T_{22}^{+})x_n \end{bmatrix},$$

откуда

$$\left[W\begin{pmatrix} 0 \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_n \end{pmatrix}\right]=[(T_{21}T_{21}^{+}+T_{22}T_{22}^{+})x_n, x_n].$$

Но так как $|[(T_{21}T_{21}^{+}+T_{22}T_{22}^{+})x_n, x_n]|\leqslant\|(T_{21}T_{21}^{+}+T_{22}T_{22}^{+})x_n\|$ и при $n\to\infty$, $\|(T_{21}T_{21}^{+}+T_{22}T_{22}^{+})x_n\|\to 0$, то это противоречит обратимости оператора W. Таким образом, оператор $T_{21}T_{21}^{+}+T_{22}T_{22}^{+}$ полуограничен снизу и эрмитов, поэтому обратим в алгебре $B(X)$. Лемма 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть B, D, C — ограниченные линейные спектральные операторы скалярного типа, действующие в слабо полном (в частности, рефлексивном) банаховом пространстве X. Тогда уравнение $BY-YD=C$ имеет решение $X\in B(X)$ тогда и только тогда, когда операторные матрицы $\begin{bmatrix} B, 0 \\ 0, D \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} B, C \\ 0, D \end{bmatrix}$ подобны друг другу.*

Доказательство. Как и выше необходимость следует из тождества

$$\begin{bmatrix} I, -Y \\ 0, I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B, 0 \\ 0, D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I, Y \\ 0, I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B, & BY-YD \\ 0, & D \end{bmatrix}.$$

Обратно, пусть операторные матрицы $\begin{bmatrix} B, 0 \\ 0, D \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} B, C \\ 0, D \end{bmatrix}$ подобны друг другу, т. е. существует обратимая операторная матрица $\begin{bmatrix} Q, K \\ S, I \end{bmatrix}$ у которых компоненты суть спектральные операторы скалярного типа, как в лемме 2, для которой

$$\begin{vmatrix} Q, & R \\ S, & T \end{vmatrix} \begin{bmatrix} B, & 0 \\ 0, & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B, & C \\ 0, & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q, & R \\ S, & T \end{bmatrix}.$$

Тогда $QB-BQ=CS$, $RD-BR=CT$, $SB=DS$, $TD=DT$. Используя теорему Фуганда—Путнама (см. [11]) имеем, что $SB^+=D^+S$, $TD^+=D^+T$, откуда $BS^+=S^+D$ и $DT^+=T^+D$. Кроме того, так как $DSS^+=SBS^+=SS^+D$ и $DTT^+=TDT^+=TT^+D$, то $(SS^++TT^+)D=D(SS^++TT^+)$. Отсюда получаем, что

$$C(SS^+ + TT^+) = (QB-BQ)S^+ + (RD-AR)T^+ =$$
$$= (QBS^+ + RDT^+) - (BQS^+ + BRT^+) =$$
$$= (QS^+ + RT^+)D - B(QS^+ + RT^+).$$

Отсюда

$$C = B\{-(QS^+ + RT^+)(SS^+ + TT^+)^{-1}\} -$$
$$- \{-(QS^+ + RT^+)(SS^+ + TT^+)^{-1}\} D.$$

Теорема 3 доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступила 7.IX. 1988

Մ. Ի. ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ. $HY-YK=C$ օպերատորային հավասարման մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում $HY-YK=C$ օպերատորային հավասարման համար, որտեղ H, K, C սկալյար տիպի սպեկտրալ օպերատորներ են գործող X թույլ լրիվ (մասնավորապես ռեֆլեքսիվ) բանախյան տարածությունում, ապացուցված են լուծելիության որոշ չափանիշներ։ Մասնավորապես ապացուցված է, որ $HY-YK=C$ օպերատորային հավասարման լուծելիությունը համարժեք է $\begin{bmatrix} H, & 0 \\ 0, & K \end{bmatrix}$ և $\begin{bmatrix} H, & C \\ 0, & K \end{bmatrix}$ օպերատորային մատրիցների նմանությանը։

M. I. KARAHANIAN. *On the $HY-YK=C$ operator equation* (summary)

For the operator equation $HY-YK=C$, where H, K, C are scalar type spectral operators defined on weakly full (in particular reflexive) Banach space X, some sal ubulity criterions are proved. In particular it is provet that $HY-YK=C$ operator equalion salubulity is equivalent to $\begin{bmatrix} H, & 0 \\ 0, & K \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} H, & C \\ 0, & K \end{bmatrix}$ operator mafrix similarity.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ш. Данфорд, Дж. Т. Шварц.* Линейные операторы, Спектральные операторы, т. 3, М., Мир, 1974.
2. *M. Rosenblum.* The operator equation $BX-X1=Q$ with selfadjoint A and B, Proc. Amer. Math. Soc., 1969, 20, № 1, 115—120.
3. *A. Shweinsberg.* The operator equation $AX-XB=C$ with normal A and B' Pacif, J. Math., 1982, 102, № 2, 447—453.
4. *E. Berkson.* Semi-groups of Scalar type operators and a theerem of Stone, Illinois Jour. of Math., 1966, 10, № 2.

5. *К. Иосида.* Функциональный анализ, М., Мир, 1967.
6. *С. Г. Крейн.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., «Наука», 1967.
7. *В. Э. Кацнельсон.* в сб. Математические исследования, Кишинев, 1970, т. 5, в. 3, 186—189.
8. *Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., Наука, 1970.
9. *Sh. A. Kantorovitz.* Jordan decomposition for operators in Banach space, Bull. Amer. Math. Soc., 1965, № 71, 891—893.
10. *G. Lumer.* Semi-inner product Spaces, Trans, Amer. Math Soc., 1966, 100, 29—43.
11. *Е. А. Горин, М. И. Караханян.* Асимптотический вариант теоремы Фуглида-Путнама о коммутаторах для элементов банаховых алгебр, Мат. заметки, 1977, 22, № 2, 179—188.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 4, 1990 Математика

УДК 519.5

А. А. ГОЛЬДБЕРГ

ИНТЕГРАЛ ПО НЕЧЕТКОЙ МЕРЕ

В теории нечетких множеств [1, 2] вводились различные понятия интеграла. Первое определение интеграла было дано Сугено [3], а равносильное ему — Ралеску и Адамсом [4] (см. также [2], гл. 4). Определение Сугено обобщалось в различных направлениях (см., например, [5]). Другое понятие интеграла было введено Ван Цисяо [6]. У определения Сугено имеется существенный недостаток: в случае, когда все рассматриваемые множества четкие, а мера аддитивна (или даже счетно-аддитивна), его интеграл не переходит в классический и даже при интегрировании линейной функции по отрезку относительно лебеговой меры числовой результат не совпадает с тем, который дает интегрирование по Риману. От этого недостатка свободно определение интеграла, данное Бутнариу [7—8]. Однако очень жесткие ограничения, накладываемые им на меру, определенную на алгебре нечетких множеств, приводят к тому, что его интеграл сводится к классическому в очень широком классе случаев (остается открытым вопрос, не будет ли это иметь место всегда) [8], § 5.

В нашем определении интеграла используются некоторые идеи Бутнариу, однако основным пунктом является определение интеграла, которое было введено автором ([9], ч. 1, § 1, ч. III, § 4) еще до возникновения теории нечетких множеств. Основным моментом в нашем определении является то обстоятельство, что за меру множества (четкого или нечеткого) принимается не число из R_+, а некоторый отрезок, принадлежащий R_+. Во многих задачах такой подход является естественным. Например, в ситуации, когда мы не можем указать вероятность события, а можем лишь оценить ее («вероятность не меньше 0,7»), естественно связать с ним не число, а отрезок (в приведенном примере [0,7; 1]). В условиях реального эксперимента из-за ошибок измерений (наблюдений) опять-таки в качестве меры получаем не число, а отрезок. Надо подчеркнуть, что использование меры-отрезка не обязательно связано с неполнотой информации, «нечеткостью», «размытостью» объекта. В теории целых функций во многих задачах оказалось полезным в качестве меры брать не предел некоторой вспомогательной функции (он может не существовать), а отрезок между нижним и верхним пределом или между нулем и верхним пределом. То, что этот подход является эффективным, свидетельствуют его применения в теории целых функций [9—11] и функций, аналитических в полуплоскости [12]. Заметим еще, что интеграл, введенный в [9] (но только в первоначальной версии из § 1), изучался в ряде работ [13—16] вне связи с приложениями. Вводимое в настоящей статье понятие интеграла является непосредственным обобщением понятия из § 4 статьи [9].

Если $x \in R$, то через x^- будем обозначать $\min\{1, x\}$, $x^+ = (|x| + x)/2$, $x^- = (|x| - x)/2$. Непустое множество U будем называть пространством. Нечетким множеством A называется $\{(x, \varphi(x, A)) : x \in U\}$, где $\varphi(\cdot, A): U \to [0, 1]$, а $\varphi(\cdot, A)$ называется функцией принадлежности для A. Через $F(U)$ будем обозначать класс нечетких множеств (т. е. нечетких подмножеств U). Если $\varphi(\cdot, A): U \to \{0, 1\}$, то A называется четким множеством. Класс четких множеств будем обозначать через $\mathrm{Cr}(U)$, $\mathrm{Cr}(U) \subset F(U)$. Если $\varphi(x, A) \equiv 1$ ($\varphi(x, A) \equiv 0$), то $A \in \mathrm{Cr}(U)$ обозначается через U (через $\varnothing$). Если $A, B \in F(U)$, то сумма этих множеств (объединение II по терминологии [2]) $A + B$ определяется равенством $\varphi(x, A + B) = (\varphi(x, A) + \varphi(x, B))^-$, разность $A - B$ — равенством $\varphi(x, A - B) = (\varphi(x, A) - \varphi(x, B))^+$, произведение AB (пересечение III по [2]) — равенством $\varphi(x, AB) = A(x) B(x)$, дополнение cA — равенством $cA = U - A$, включение $A \subset B$ — неравенством $\varphi(x, A) \leqslant \varphi(x, B)$. Система $T = \{A_1, \cdots, A_n\}$ называется разбиением, если $\varphi(x, A_1) + \cdots + \varphi(x, A_n) \equiv 1$. Система S множеств из $F(U)$ называется алгеброй множеств, если сумма, разность, произведение любых двух множеств из S принадлежит S и $U \in S$. Если все элементы разбиения T принадлежат алгебре S, то T называется S-разбиением. Обозначим через T класс всех S-разбиений.

Через S обозначим множество всех сегментов из R_+. Пусть $\mu: S \to S$, где S — некоторая алгебра множеств, $\mu(\varnothing) = 0$. Для некоторого S-разбиения $T = \{A_1, \cdots, A_n\}$ определим множество $P(T, \mu) := \{(t_1, \cdots, t_n) \in R_+^n : t_{i_1} + t_{i_2} + \cdots + t_{i_p} \in \mu(A_{i_1} + A_{i_2} + \cdots + A_{i_p}),\ 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n,\ p = 1, \cdots, n\}$. Таким образом, множество $P(T, \mu)$ определяется $2^n - 1$ включением. Если $P(T, \mu) \neq \varnothing$ для всех $T \in$ T (это условие будем называть условием совместности), то μ называется нечеткой S-мерой. Будем обозначать $\mu(A) = [\mu_1(A), \mu_2(A)]$, $0 \leqslant \mu_1(A) \leqslant \mu_2(A) < \infty$. Если $\mu_1(A) = \mu_2(A)$, то $\mu(A)$ можно рассматривать как число из R_+. Если для всех $A \in S$ выполняется $\mu_1(A) = \mu_2(A)$, то мера μ называется четкой. Условие совместности в этом случае сводится к условию аддитивности, т. е. из $A_1, A_2 \in (U)$, $\varphi(x, A_1) + \varphi(x, A_2) \leqslant 1$ следует, что $\mu(A_1 + A_2) + \mu(A_1) + \mu(A_2)$. Действительно, возьмем S-разбиение $T_1 = \{A_1, A_2, c(A_1 + A_2)\}$. Пусть $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbf{P}(T_1, \mu)$. Тогда $t_1 = \mu(A_1)$, $t_2 = \mu(A_2)$, $\mu(A_1) + \mu(A_2) = t_1 + t_2 = \mu(A_1 + A_2)$.

Наоборот, если выполняется условие аддитивности (в этом случае, конечно, $\mu_1(A) \equiv \mu_2(A)$), то условие совместности можно не предполагать выполненным а приори, поскольку в этом случае $\mathbf{P}(T, \mu)$ состоит из одной точки $(\mu(A_1), \cdots, \mu(A_n))$.

Пусть f — действительная ограниченная функция на U, $s(f) = \sup\{f(x) : x \in U\}$. Обозначим через L линейное пространство ограниченных функций на U. В дальнейшем будем рассматривать только $f \in L$ и это оговаривать не будем. Пусть $T = \{A_1, \cdots, A_n\}$ — S-разбиение. Обозначим $K(T, f) = \left\{(c_1, \cdots, c_n) \in R^n : (\forall x \in U) \middle| \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi(x, A_j) \geqslant \right.$

$\geqslant f(x)\Big\}\Big\}$. Нетрудно видеть, что $(s(f),\cdots, s(f))\in K(T, f)$. Таким образом, $K(T, f)\neq\varnothing$. Очевидно, $K(T, f)$ — замкнутое множество. Пусть $c'=(c_1',\cdots, c_n')\in K(T, f)$, $c''=(c_1'',\cdots, c_n'')$, $c_j'\leqslant c_j''$, $1<j<n$. Тогда $c''\in K(T, f)$.

Для $c\in \mathrm{R}^n$ обозначим

$$S(T, \mu, c)=\max\left\{\sum_{l=1}^{n} c_l t_l : t\in P(T, \mu\right\}.$$

Ясно, что $S(T, \mu, c)=(c_1^2+\cdots+c_n^2)^{1/2}H(\tau_1,\cdots, \tau_n)$, $\tau_j=c_j(c_1^2+\cdots+c_n^2)^{-1/2}$, $c\neq 0$, где $H(\tau_1,\cdots, \tau_n)$ — опорная функция многогранника $P(T, \mu)$ с направляющим единичным вектором $(\tau_1,\cdots, \tau_n)$. Поэтому $S(T, \mu, c)$ — непрерывная функция от $c\in\mathrm{R}^n$. Пусть

$$S_0(T, \mu, f)=\inf\{S(T, \mu, c): c\in K(T, f)\},$$

$$I_2(f)=I_2(f;\mu)=\inf\{S_0(T, \mu, f): T\in \mathrm{T}\},$$

$$I_1(f)=-I_2(-f).$$

Если $T=\{A_1,\cdots, A_n\}$, где A_j — непустые четкие множества, то $K(T, f)=[M_1, \infty)\times\cdots\times[M_n, \infty)$, где $M_j=\sup\{f(x): x\in A_j\}$. В этом случае $S_0(T, \mu, f)=S(T, \mu, c)$, где $c=(M_1,\cdots, M_n)$, а $I_2(f)$ — интеграл по неаддитивной мере в смысле § 4 из [9], а именно (в обозначениях из [9])

$$I_2(f)=(\mathrm{S})\int\limits_U f(x)\,d\{\mu_1(x), \mu_2(x)\}.$$

Если к тому же мера μ такова, что $\mu_1(A_j)=\mu_2(A_j)=\mu(A_j)$, $1\leqslant j\leqslant n$, то $S_0(T, \mu, f)=\sum_{j=1}^{n} M_j\mu(A_j)$, т. е. $S_0(T, \mu, f)$ — классическая верхняя интегральная сумма Дарбу для функции f при разбиении T. Если S — некоторая алгебра четких множеств, то $I_2(f)$ $I_1(f)$ — верхний и нижний интегралы Дарбу для функции f. Отметим еще, что (без предположения $A_j\in\mathrm{Cr}(U)$) если $\mu_1(A_j)=\mu_2(A_j)$, $1\leqslant j\leqslant n$, то $S(T\ \mu, c)=\sum_{k=1}^{n} c_k\mu(A_k)$. Такого рода (и несколько более общие) суммы при $f\geqslant 0$ использованы в [7—8]

Из определения $\mathrm{P}(T, \mu)$ следует, что $\mu_1(U)\leqslant t_1+\cdots+t_n\leqslant\mu_2(U)$ для всех $T\in\mathrm{T}$. Поэтому $S_0(T, \mu, f)\leqslant s^+(f)\mu_2(U)$, $I_2(f)\leqslant s^+(f)\mu_2(U)$.

Определение. Если $I_2(-1, \mu)>-\infty$, то S-мера μ называется правильной.

Нам не известен ни один пример неправильной S-меры. Более того, представляется справедливой

Гипотеза. *Каждая S-мера является правильной.*

В настоящее время мы можем лишь указать ряд довольно широких классов правильных S-мер. Приведем примеры.

Пример 1. Если $\mathbf{S} \subset Cr(U)$, то каждая $\mathbf{S}$-мера μ является правильной. Действительно, в этом случае $S_0(T, \mu, -1) = S(T, \mu, (-1, \cdots, -1)) \geqslant -\mu_2(U)$, $I_2(-1, \mu) \geqslant -\mu_2(U) > -\infty$.

Пример 2. Пусть для всех $A \in \mathbf{S}$ выполняется $\mu_1(A) = 0$. Пусть $c \in K(T, f)$. Если $c = (c_1, \cdots, c_n)$, то $c^+ = (c_1^+, \cdots, c_n^+) \in K(T, f^+) \subset K(T, f)$. Очевидно, что $S(T, \mu, c^+) \geqslant S(T, \mu, c)$. Пусть $S(T, \mu, c^+) = \sum_{k=1}^{n} c_k^+ t_k^0$, $t^0 \in \mathbf{P}(T, \mu)$.

Положим $t' = (t_1', \cdots, t_n')$, где $t_j' = t_j^0$, если $c_j > 0$, $t_j' = 0$, если $c_j \leqslant 0$. Ясно, что $t' \in \mathbf{P}(T, \mu)$. Но

$$S(T, \mu, c^+) = \sum_{k=1}^{n} c^+ t_k' = \sum_{k=1}^{n} c_k^+ t_k' \leqslant S(T, \mu, c).$$

Таким образом, $S(T, \mu, c^+) = S(T, \mu, c)$. Отсюда получаем

$$S_0(T, \mu, f) = S_0(T, \mu, f^+), \quad I_2(f, \mu) = I_2(f^+, \mu).$$

Так как $S(T, \mu, c^+) \geqslant 0$, то $I_2(f, \mu) \geqslant 0$. В частности, $I_2(-1, \mu) \geqslant 0$, т. е. мера μ является правильной. Отметим еще, что в рассматриваемом случае $I_1(f, \mu) = -I_2(f^-, \mu)$.

В дальнейшем, не оговаривая особо, считаем все встречающиеся $\mathbf{S}$-меры правильными.

Теорема 1. *Если $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in U$, то*

$$I_2(f) \leqslant I_2(g), \quad I_1(f) \leqslant I_1(g).$$

Это выводится из $K(T, f) \supset K(T, g)$, $K(T, -f) \subset K(T, -g)$.

Теорема 2. *Пусть $0 \leqslant \lambda < \infty$. Тогда $I_2(\lambda f) = \lambda I_2(f)$, $I_1(\lambda f) = \lambda I_1(f)$.*

Пусть сначала $0 < \lambda < \infty$. Так как $c \in K(T, \lambda f) \Leftrightarrow \lambda^{-1} c \in K(T, f)$ и $S(T, \mu, c) = \lambda S(T, \mu, \lambda^{-1} c)$, то $S_0(T, \mu, \lambda f) = \lambda S_0(T, \mu, f)$, $I_2(\lambda f) = \lambda I_2(f)$. Очевидно, $I_2(0) \leqslant 0$. Из теоремы 1 следует, что $I_2(0) \geqslant I_2(-\lambda) = \lambda I_2(-1)$, $\lambda > 0$. Устремив λ к 0, получим $I_2(0) \geqslant 0$, откуда $I_2(0) = 0$. Равенство для I_1 следует из равенства для I_2.

Следствие. *Если $f(x) \geqslant 0$, то $I_2(f) \geqslant 0$, $I_1(f) \geqslant 0$. Если $f(x) \leqslant 0$, то $I_2(f) \leqslant 0$, $I_1(f) \leqslant 0$.*

Определение. Произведением TT_1 двух $\mathbf{S}$-разбиений $T = \{A_1, \cdots, A_n\}$ и $T_1 = \{B_1, \cdots, B_m\}$ называется разбиение $\{A_i B_j : 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m\}$.

Лемма. *Пусть T и T_1 — $\mathbf{S}$-разбиения. Тогда $S_0(T, \mu, f) \geqslant S_0(TT_1, \mu, f)$.*

Доказательство. Пусть $T = \{A_1, \cdots, A_n\}$, $T_1 = \{B_1, \cdots, B_m\}$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $c \in K(T, f)$ такое, что $(T, \mu, c) < S_0(T, f)\mu + \varepsilon$. Пусть $S(T, \mu, c) = \sum_{i=1}^{n} c_i t_i$, $t \in P(T, \mu)$. Если $c' = (c_{11}, \cdots, c_{km})$, где $c_{ij} = c_i$ при $1 \leqslant j \leqslant m$, то $c' \in K(TT_1, f)$. Действительно, $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \varphi(x, A_i B_j) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i \varphi(x, A_j) . \varphi(x, B_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi(x, A_j) \times$

$\times \sum_{j=1}^{m} \varphi(x, B_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi(x, A_i) \geqslant f(x)$. Пусть $(t_{ij}) \in P(TT_1, \mu)$. Обозначим через $\tilde{P}(TT_1, \mu)$ многогранник в R_+^{nm}, который отличается от $P(TT_1, \mu)$ тем, что из включений, которыми определяется $P(TT_1, \mu)$, оставлены лишь обладающие следующим свойством: если в них входит t_{ij_0}, то входят и все t_{ij}, $1 \leqslant j \leqslant m$. Ясно, что $\tilde{P}(TT_1, \mu) \supset P(TT_1, \mu)$. Но

$$S(T, \mu, c) = \sum_{i=1}^{n} c_i t_i = \max \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{m} t_{ij} : \right.$$

$$\left. : \left(\sum_{j=1}^{m} t_{1j}, \ldots, \sum_{j=1}^{m} t_{nj} \right) \in P(T, \mu) \right\} =$$

$$= \max \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{m} t_{ij} : (t_{ij}) \in \tilde{P}(TT_1, \mu) \right\} \geqslant$$

$$\geqslant \max \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{m} t_{ij} : (t_{ij}) \in P(TT_1, \mu) \right\} =$$

$$= \max \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} t_{ij} : (t_{ij}) \in P(TT_1, \mu) \right\} =$$

$$= S(TT_1, \mu, c') \geqslant S_0(TT_1, \mu, f).$$

Отсюда $S_0(TT_1, \mu, f) \leqslant S(T, \mu, c) < S_0(T, \mu, f) + \varepsilon$ и, в силу произвольности ε, получаем требуемое.

Теорема 3. *Справедливы неравенства* $I_2(f_1 + f_2) \leqslant I_2(f_1) + I_2(f_2)$, $I_1(f_1 + f_2) \geqslant I_1(f_1) + I_1(f_2)$.

Доказательство. Если $c' \in K(T, f_1)$, $c'' \in K(T, f_2)$, то $c' + c'' \in K(T, f_1 + f_2)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $c' \in K(T, f_1)$ и $c'' \in K(T, f_2)$ так, чтобы

$$S(T, \mu, c') < S_0(T, \mu, f_1) + \varepsilon, \ S(T, \mu, c'') <$$

$$< S_0(T, \mu, f_2) + \varepsilon. \text{ Но } S(T, \mu, c') + S(T, \mu, c'') \geqslant$$

$$\geqslant S(T, \mu, c' + c'') \geqslant S_0(T, \mu, f_1 + f_2).$$

Учитывая произвольность выбора ε, получаем

$$S_0(T, \mu, f_1) + S_0(T, \mu, f_2) \geqslant S_0(T, \mu, f_1 + f_2). \tag{1}$$

Для $\varepsilon > 0$ найдем T_1, T_2 такие, что $S_0(T_j, \mu, f_j) < I_2(f_j) + \varepsilon$, $j = 1, 2$. Учитывая лемму и (1), получим

$$2\varepsilon + \sum_{j=1}^{1} I_2(f_j) > \sum_{j=1}^{2} S_0(T_j, \mu, f_j) \geqslant \sum_{j=1}^{2} S_0(T_1 T_2, \mu, f_j) \geqslant$$

$$\geqslant S_0(T_1 T_2, \mu, f_1 + f_2) \geqslant I_2(f_1 + f_2).$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Из теорем 2 и 3 вытекает

Следствие 1. *Функционал* $I_2(f)$ *на* L *является полуаддитивным и положительно-однородным.*

Следствие 2. $I_2(f) \geqslant I_1(f)$.

Действительно, $I_2(f) - I_1(f) = I_2(f) + I_2(-f) \geqslant I_2(0) = 0$.

Определение. Интегралом от функции f относительно S-меры μ называется сегмент $I(f) = I(f, \mu) = [I_1(f), I_2(f)]$ и обозначается

$$I(f) = (\mathrm{S}) \int\limits_U f(x)\, d\mu(x).$$

Интегралом функции f по множеству $A \in F(U)$ называется $I_A(f) = I(f\varphi(\cdot, A))$ и обозначается

$$I_A(f) = (\mathrm{S}) \int\limits_A f(x)\, d\mu(x) = (\mathrm{S}) \int\limits_U f(x)\, \varphi(x, A)\, d\mu(x).$$

Теорема 4. *Если $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$ — две S-меры и для всякого $A \in \mathrm{S}$ выполняется $\mu^{(1)}(A) \supset \mu^{(2)}(A)$, то $I(f, \mu^{(1)}) \supset I(f, \mu^{(2)})$.*

Это следует из $P(T, \mu^{(2)}) \subset P(T, \mu^{(1)})$,

$$S(T, \mu^{(2)}, c) \leqslant S(T, \mu^{(1)}, c),\ c \in K(T, f),$$

и, далее, $I_2(f, \mu^{(2)}) \leqslant I_2(f, \mu^{(1)})$.

Теорема 5. *Если $A \in \mathrm{S}$, то $I_A(1) \subset \mu(A)$.*

Действительно, пусть $T = \{A, cA\}$. Тогда $c' = (1, 0) \in K(T, \varphi(\cdot, \cdot, A))$, $c'' = (-1, 0) \in K(T, -\varphi(\cdot, A))$. Поэтому $S_0(T, \mu, \varphi(\cdot, A)) \leqslant S(T, \mu, c') \leqslant \mu_2(A)$, $S_0(T, \mu, -\varphi(\cdot, A)) \leqslant S(T, \mu, c'') \leqslant -\mu_1(A)$, $I_2(\varphi(\cdot, A)) \leqslant \mu_2(A)$, $I_2(-\varphi(\cdot, A)) \leqslant -\mu_1(A)$.

Теорема 6. *Если $\mathrm{S}_1 \subset \mathrm{S}_2$, μ — некоторая S_2-мера (так же обозначается ее сужение на S_1), то*

$$(\mathrm{S}_2) \int\limits_U f(x)\, d\mu(x) \subset (\mathrm{S}_1) \int\limits_U f(x)\, d\mu(x).$$

Справедливость теоремы следует из того обстоятельства, что класс S_2-разбиений шире класса S_1-разбиений.

Следующая теорема, которая устанавливает связь между интегралом относительно нечеткой меры (или, что то же, по нечеткокй мере) и интегралами по аддитивной мере (в смысле Радона), является вариантом теоремы Б. Я. Левина, В. И. Мацаева и И. В. Островского, опубликованной в [9], § 1.

Теорема 7а. *Пусть $\mathrm{S}_1 = \mathrm{S} \cap \mathrm{Cr}(U)$, μ — S-мера, $\mathrm{N}(\mathrm{N}_1)$ — класс четких S--мер (S_1-мер) ν таких, что $\nu(A) \in \mu(A)$ для всех $A \in \mathrm{S}$ ($A \in \mathrm{S}_1$). Предположим, что класс L_1 ограниченных S_1-измеримых функций является линейным пространством. Тогда $\mathrm{N}_1 \neq \varnothing$, для $f \in L_1$ выполняется*

$$\left.\begin{aligned} I_2(f, \mu, \mathrm{S}_1) &= \max\left\{(\mathrm{S}_1)\int\limits_U f(x)\, d\nu(x) : \nu \in \mathrm{N}_1\right\}, \\ I_1(f, \mu, \mathrm{S}_1) &= \min\left\{(\mathrm{S}_1)\int\limits_U f(x)\, d\nu(x) : \nu \in \mathrm{N}_1\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

и существуют меры $\nu_1, \nu_2 \in N_1$ *такие, что*

$$(S_1) \int_U f(x)\, d\nu_1(x) = I_2(f, \mu, S), \tag{3}$$

$$(S_1) \int_U f(x)\, d\nu_2(x) = I_1(f, \mu, S). \tag{4}$$

Если $f \in L_1$ *и для всех* $A \in S$ *функции* $\varphi(\cdot, A) \in L_1$, *то* $N \neq \varnothing$ *и*

$$I_2(f, \mu, S) = \max\{I_2(f, \nu, S) : \nu \in N\}, \tag{5}$$

$$I_1(f, \mu, S) = \min\{I_1(f, \nu, S) : \nu \in N\}. \tag{6}$$

Отметим, что предположение относительно класса L_1 является дополнительным требованием, так как, вообще говоря, сумма двух ограниченных S_1-измеримых функций может не быть S_1-измеримой в случае, когда S_1 не является σ-алгеброй множеств.

Доказательство теоремы 7а. Утверждение $N_1 \neq \varnothing$ и соотношения (2) доказаны в [9], § 4, без предположений о L_1. Обозначим через G подпространство L_1, $G = \{\lambda f : -\infty < \lambda < \infty\}$. Определим на L_1 функционал $p(y) = I_2(y, \mu, S)$, а на G линейный функционал $q(\lambda f) = \lambda p(f)$. Так как функционал $p(y)$ является полуаддитивным и положительно-однородным (см. следствие 1), то по теореме Хана—Банаха [17], с. 141, существует линейный функционал $Q(y)$ на L_1 такой, что $Q(y) \leqslant p(y)$, $y \in L_1$, и $Q(y) = q(y)$, $v \in G$. Согласно следствию из теоремы 2, если $y(x) \geqslant 0$ на U, то $-Q(y) = Q(-y) \leqslant \leqslant p(-y) \leqslant 0$, т. е. $Q(y) \geqslant 0$, $y \in L_1$. По теореме Г. М. Фихтенгольца — Л. В. Канторовича [17], с. 222, существует аддитивная ограниченной вариации функция множества ν_1 на S_1 такая, что

$$Q(y) = (S_1) \int_U y(x)\, d\nu_1(x),$$

где интеграл понимается в смысле Радона. Используя известное свойство интеграла Радона [17], с. 217, 2°, и теорему 5, получим для $A \in S_1$

$$0 < Q(\varphi(\cdot, A)) = \nu_1(A) \leqslant p(\varphi(\cdot, A)) = I_2(\varphi(\cdot, A)) \leqslant \mu_2(A).$$

Таким образом, $\nu_1(A) > 0$ при $A \in S_1$, следовательно, ν_1 — аддитивная S_1-мера, или, что то же, ν_1 — четкая S_1-мера. Кроме того, $-\nu_1(A) = = Q(-\varphi(\cdot, A)) \leqslant p(-\varphi(\cdot, A)) = I_1(-\varphi(\cdot, A)) \leqslant -\mu_1(A)$, т. е. $\nu_1(A) \geqslant \mu_1(A)$. Следовательно, $\nu_1(A) \in \mu(A)$ для всех $A \in S$, $\nu_1 \in N$. Но $(S) \int_U f(x)\, d\nu_1(x) = Q(f(x)) = q(f(x)) = p(f(x)) = I_2(f, \mu, S)$, т. е. доказано (3). Отметим, что ν_1 зависит от f. Применим доказанное равенство (3) к $-f$ и учтем, что для интеграла ν_1 можно выносить за знак интеграла множитель -1. Тогда получим (4).

Пусть теперь для всех $A \in S$ выполняется $\varphi(\cdot, A) \in L_1$. Обозначим $\nu_0(A) = Q(\varphi(\cdot, A))$. Очевидно, ν_0 является аддитивной S-мерой. Точно так, как выше для $A \in S_1$, для $A \in S$ получим $\mu_1(A) \leqslant \nu_0(A) = = Q(\varphi(\cdot, A)) \leqslant \mu_2(A)$, т. е. $\nu_0(A) \in \mu(A)$. Таким образом, $N \neq \varnothing$.

Пусть $c\in K(T,f)$. Тогда $S(T,\nu_0,c)=\sum\limits_{j=1}^{n}c_j\nu_0(A_j)=Q\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}c_j\varphi(x,A_j)\Big)=$
$$=Q(f(x))+Q\Big(\sum_{j=1}^{n}c_j\varphi(x,A_j)-f(x)\Big)>Q(f(x))=I_2(f,\mu,S).$$

Отсюда получаем $I_2(f,\nu_0,S)\geqslant I_2(f,\mu,S)$. Но из теоремы 4 следует, что для всех $\nu\in N$ выполняется $I_2(f,\mu,S)\geqslant I_2(f,\nu,S)$, откуда получаем (5). Записав (5) с $-f$ вместо f, приходим к (6). Теорема 7а доказана.

Заметным недостатком теоремы 7а является требование S_1-измеримости для различных функций. Дело в том, что при достаточно широком классе S класс S_1 может быть очень бедным. Пусть, например, $U=[a,b]$, S — алгебра множеств $A\in F(U)$, для которых функция $\varphi(\cdot,A)$ непрерывна на U. Тогда $S_1=\{U,\varnothing\}$. Поэтому может представлять интерес вариант теоремы 7а, в котором наложены дополнительные требования на алгебру множеств S и S-меру μ, но зато не упоминается S_1-измеримость.

Скажем, что алгебра множеств S обладает свойством D, если выполняется следующее. Пусть $T=\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$ — произвольное $F(U)$-разбиение U. Дзя любых $1\leqslant j_1<\cdots<j_p\leqslant n$, $1<p<n$, обозначим через $\xi(j_1,\cdots,j_p)$ сумму $\xi_{j_1}+\cdots+\xi_{j_p}$. Пусть $\{A_s(j_1,\cdots,j_p)\}$ — конечная система множеств из S, для всех из них $\xi(j_1,\cdots,j_p)\subset A_s(j_1,\cdots$ $\cdots,j_p)$. Тогда существуют $B_1,\cdots,B_n\in S$ такие, что $\xi_j\subset B_j$ при $1\leqslant j\leqslant n$ и $B_{j_1}+\cdots+B_{j_p}\subset A_s(j_1,\cdots,j_p)$ для любых $1\leqslant j_1<\cdots<j_p<n$.

Пример 3. Пусть $S\subset Cr(U)$. Тогда S обладает свойством D. В самом деле, достаточно взять $B_j=\cap\{A_s(j_1,\cdots,j_p):j\in\{j_1,\cdots,j_p\}\}$. Если $j\in\{j_1,\cdots,j_p\}$, то $\xi_j\subset\xi(j_1,\cdots,j_p)\subset A_s(j_1,\cdots,j_p)$; поэтому из $\varphi(x,\xi_j)>0$ следует $\varphi(x,A_s(j_1,\cdots,j_p))=1$, а значит, и $\varphi(x,B_j)=1$. Включение $\xi_j\subset B_j\subset A_s(j_1,\cdots,j_p)$ очевидно, откуда $B_{j_1}+\cdots+B_{j_p}=$ $=B_{j_1}\cup\cdots\cup B_{j_p}\subset A(j_1,\cdots,j_p)$.

Пример 4. Алгебра множеств $F(U)$ обладает свойством D. Действительно, в этом случае можно взять $B_j=\xi_j$, $1\leqslant j\leqslant n$.

Пример 5. Пусть $U=[0,1]$, S — алгебра множеств $A\subset F(U)$ таких, что $\varphi(\cdot,A)$ — кусочно-постоянна на U. Пусть $T=\{\xi_1,\cdots,\xi_4\}$, $\varphi(x,\xi_1)=\varphi(x,\xi_2)=x/2$, $\varphi(x,\xi_3)=\varphi(x,\xi_4)=(1-x)/2$, $\varphi(x,A(1,3))\equiv$ $\equiv1/2$, для $\{j_1,\cdots,j_p\}\neq\{1,3\}$ выполняется $A(j_1,\cdots,j_p)=U$. Очевидно, $\xi(1,3)=A(1,3)$, однако при любом выборе $B_1,B_3\in S$, $\xi_1\subset B_1$, $\xi_3\subset B_3$, $B_1+B_3\supset A(1,3)$, $B_1+B_3\neq A(1,3)$. Система S не обладает свойством D.

S-мера μ называется монотонной, если для любых $A,B\in S$ включение $A\subset B$ влечет $\mu_j(A)\leqslant\mu_j(B)$, $j=1,2$. Легко видеть, что всякая четкая мера является монотонной. Нечеткая S-мера μ, $S\cup Cr(U)$, уже может не быть монотонной. Пусть, например, $U=\{1,2\}$, $\mu(\{1\})=$ $=[1,2]$, $\mu(\{2\})=[0,1]$, $\mu(U)=[0,1]$, $S=Cr(U)$, $T=\{\{1\},\{2\}\}$. Тогда $P(T,\mu)=\{(1,0)\}\neq\varnothing$. Но хотя $\{1\}\subset U$, имеем $\mu_1(\{1\})=1>$ $>\mu_1(U)=0$, $\mu_2(\{1\})=2>\mu_2(U)=1$. Тем не менее, если $S\subset Cr(U)$ нечеткую S-меру μ можно заменить монотонной S-мерой μ' такой, что интеграл от любой функции по μ' совпадает с интегралом по μ [9], § 4, теорема 9, лемма 3.

Справедлива

Теорема 76. *Пусть* S — *алгебра множеств, обладающая свойством* D, $S^* = F(U)$, μ — *монотонная* S-*мера*, $N(M^*)$ — *класс четких* S-*мер* (S^*-*мер*) ν *таких, что* $\nu(A) \in \mu(A)$ *для всех* $A \in S$ ($A \in S^*$). *Тогда* $N \neq \varnothing$, $N^* \neq \varnothing$ *и*

$$I_2(f, \mu, S) = \max\{I_2(f, \nu, S) : \nu \in N\} = \max\{I_2(\nu, S^*) : \nu \in N\}, \tag{7}$$

$$I_1(f, \mu, S) = \min\{I_1(f, \nu, S) : \nu \in N\} = \min\{I_1(f, \nu, S^*) : \nu \in N^*\}. \tag{8}$$

Из теоремы 76 можно вывести в качестве следствия утверждение, доказанное в [9], § 4, теорема 12.

Следствие. *Пусть* $S_1 \subset \mathrm{Cr}(U)$, $S_1^* = \mathrm{Cr}(U)$, μ — S-*мера*, $(N_1(N_1^*)$ — *класс четких* S_1-*мер* (S^*-*мер*) ν *таких, что* $\nu(A) \in \mu A)$ *для всех* $A \in S_1 (A \in S_1^*)$. *Тогда* $N_1^* \neq \varnothing$, $N_1 \neq \varnothing$ *и*

$$I_2(f, \mu, S_1) = \max\{I_2(f, \nu, S_1) : \nu \in N_1\} = \max\{I_2(f, \nu, S_1^*) : \nu \in N_1^*\},$$

$$I_1(f, \mu, S_1) = \min\{I_1(f, \nu, S_1) : \nu \in N_1\} = \min\{I_1(f, \nu, S_1) : \nu \in N_1^*\}.$$

При доказательстве следствия следует использовать пример 3, а при выводе соотношений с N_1^* слегка видоизменить некоторые моменты в следующих ниже доказательствах теорем 8 и 76. Заметим, что, вообще говоря, интеграл по S не равен интегралу по $S_1 = S \cap \mathrm{Cr}(U)$. Действительно, пусть $S = S^*$, $S_1 = S_1^*$, $\mu_1(A) \equiv 0$, $\mu_2(A) = [s(\cdot, A))]$, $f(x) \equiv 1$. Тогда $I_1(f, \mu, S^*) = 0$, $I_2(f, \mu, S_1^*) = 1$.

Доказательство теоремы 76 будет приведено несколько позже, так как нам понадобятся некоторые определения и факты.

Пусть μ — некоторая S-мера. Для $A \in S^*$ определим

$$\mu_2^*(A) = \inf\{\mu_2(B) : B \in S,\ A \subset B\},$$

$$\mu_1^*(A) = \sup\{\mu_1(B) : B \in S,\ B \subset A\}.$$

Теорема 8. *Пусть* S — *алгебра множеств, обладающая свойством* D, μ — *монотонная* S-*мера*. *Для* $A \in S^*$ *выполняется* $\mu_1^*(A) \leqslant \mu_2^*(A)$, $\mu^*(A) = [\mu_1^*(A), \mu_2^*(A)]$ *является* S^*-*мерой и для любой функции* f

$$(S^*)\int\limits_U f(x)\,d\mu^*(x) = (S)\int\limits_U f(x)\,d\mu(x).$$

Доказательство. Пусть $T = \{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$ — некоторое S^*-разбиение. Если $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_p \leqslant n$, $1 \leqslant p \leqslant n$, то обозначаем $\xi(j_1, \cdots, j_p) = \xi_{j_1} + \cdots + \xi_{j_p}$, $\{j_1', \cdots, j_{n-p}'\} = \{1, \cdots, n\} \setminus \{j_1, \cdots, j_p\}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдем $A(j_1, \cdots, j_p) \subset \xi(j_1, \cdots, j_p)$, $B(j_1, \cdots, j_p) \supset \xi(j_1, \cdots, j_p)$, $A(j_1, \cdots, j_p) \in S$, $B(j_1, \cdots, j_p) \in S$ такие, что

$$\mu_1(A(j_1, \cdots, j_p)) \geqslant (\mu_1^*(\xi(j_1, \cdots, j_p)) - \varepsilon)^+,$$

$$\mu_2(B(j_1, \cdots, j_p)) < \mu_2^*(\xi(j_1, \cdots, j_p)) + \varepsilon.$$

Заметим, что из $A(j'_1,\cdots,j'_{n-p})\subset\xi(j'_1,\cdots,j'_{n-p})$ следует, что $\xi(j_1,\cdots,j_p)\subset cA(j'_1,\cdots,j'_{n-p})$. Так как S-мера μ обладает свойством D, то существуют $D_1,\cdots,D_n\in S$ такие, что для всякого j, $1\leqslant j\leqslant n$, $\xi_j\subset D_j$ и всякого $(j_1,\cdots,j_p)$ выполняется

$$D_{j_1}+\cdots+D_{j_p}\subset B_{j_1}(j_1,\cdots,j_p), \tag{9}$$

$$D_{j_1}+\cdots+D_{j_p}\subset cA(j'_1,\cdots,j'_{n-p}). \tag{10}$$

Возьмем произвольную функцию f. Пусть $c\in K(T,f)$. Можно считать, что $\xi_1,\cdots,\xi_n$ пронумерованы так, что $c_1\geqslant c_2\geqslant\cdots\geqslant c_n$. Положим $C_1=D_1$, $C_j=D_1+\cdots+D_j)-(D_1+\cdots+D_{j-1})$ при $2\leqslant j\leqslant n$. Так как $U\supset D_1+\cdots+D_n\supset\xi_1+\cdots+\xi_n=U$, то

$$\begin{aligned}\varphi(x,C_1)+\cdots+\varphi(x,C_n)&=\varphi(x,D_1)+(\varphi(x,D_1)+\\&+\varphi(x,D_2))^\wedge-\varphi(x,D_1)+\cdots+(\varphi(x,D_1)+\\&+\varphi(x,D_n))^\wedge-(\varphi(x,D_1)+\cdots+\varphi(x,D_{n-1}))^\wedge=\\&=\varphi(x,D_1)+\cdots+\varphi(x,D_n))^\wedge\equiv 1.\end{aligned}$$

Поэтому $T'=\{C_1,\cdots,C_n\}$ является S-разбиением. Заметим, что оно зависит от ε. Пусть $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_p\leqslant n$.

Тогда $\varphi(x,C_{j_1})+\cdots+\varphi(x,C_{j_p})=\{(\varphi(x,D_1)+\cdots+\varphi(x,D_{j_1}))^\wedge-(\varphi(x,D_1)+\cdots+\varphi(x,D_{j_1-1})))^\wedge\}+\cdots+\{\varphi(x,D_1)+\cdots+\varphi(x,D_{j_p}))^\wedge-(\varphi(x,D_1)+\cdots+\varphi(x,D_{j_{p-1}}))^\wedge\}$.

Если $\varphi(x,D_1)+\cdots+\varphi(x,D_{j_1-1})\geqslant 1$, то

а) $\varphi(x,C_{j_1})+\cdots+\varphi(x,C_{j_p})=0$. В остальных случаях существует наименьшее k, $1\leqslant k<p$ такое, что или

б) $\varphi(x,C_{j_1})+\cdots+\varphi(x,C_{j_p})=\varphi(x,D_{j_1})+\cdots+\varphi(x,D_{j_k})$, или

в) $\varphi(x,C_{j_1})+\cdots+\varphi(x,C_{j_p})=\varphi(x,D_{j_1})+\cdots+\varphi(x,D_{j_{k-1}})+1-(\varphi(x,D_1)+\cdots+\varphi(x,D_{j_k-1}))$.

В последнем случая $\varphi(x,D_1)+\cdots+\varphi(x,D_{j_k})\geqslant 1$, поэтому $\varphi(x,C_{j_1})+\cdots+\varphi(x,C_{j_p})\leqslant\varphi(x,D_{j_1})+\cdots+\varphi(x,D_{j_k})$. Таким образом, в любом случае в силу (9) $C_{j_1}+\cdots+C_{j_p}\subset D_{j_1}+\cdots+D_{j_p}\subset B(j_1,\cdots,j_p)$ и в силу монотонности S-меры μ

$$\mu_2(C_{j_1}+\cdots+C_{j_p})\leqslant\mu_2(B(j_1,\cdots,j_p))<\mu_2^*(\xi(j_1\cdots,j_p))+\varepsilon. \tag{11}$$

Равенство б) имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(x,D_1)+\cdots+\varphi(x,D_{j_k})<1$, но $\varphi(x,D_1)+\cdots+\varphi(x,D_{j_{k+1}-1})\geqslant 1$. Тем более, $\varphi(x,D_{j_1})+\cdots+\varphi(x,D_{j_k})+\varphi(x,D_{j'_1})+\cdots+\varphi(x,D_{j'_{n-p}})\geqslant 1$. Следовательно

$$\varphi(x,C_{j_1})+\cdots+\varphi(x,C_{j_p})\geqslant 1-(\varphi(x,D_{j'_1})+\cdots+\varphi(x,D_{j'_{n-p}})). \tag{12}$$

Равенство в) имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(x,D_1)+\cdots+\varphi(x,D_{j_k-1})<1$, но $\varphi(x,D_1)+\cdots+\varphi(x,D_{j_k})\geqslant 1$. Тогда $\varphi(x,C_{j_1})+\cdots+\varphi(x,C_{j_p})\geqslant\varphi(x,D_{j_1})+\cdots+\varphi(x,D_{j_{k-1}})$, и рассуждая как выше, снова получаем (12). В случае а) неравенство (12) очевидно, так как правая часть его отрицательна. Из (10) следует, что $\{1-(\varphi(x, D_{j_1})+\cdots+\varphi(x, D_{j_{n-p}}))\}^+\geqslant\varphi(x, A(j_1,\cdots, j_p))$. Учитывая (12), получаем, что $A(j_1,\cdots, j_p)\subset C_{j_1}+\cdots+C_{j_p}$. В силу монотонности S-меры μ выполняется

$$\mu_1(C_{j_1}+\cdots+C_{j_p})\geqslant\mu_1(A(j_1,\cdots, j_p))\geqslant(\mu_1^*(\xi(j_1,\cdots, j_p))-\varepsilon)^+. \tag{13}$$

Для $A\subset F(U)$ обозначим $\mu_\varepsilon^*(A)=[(\mu_1^*(A)-\varepsilon)^+, \mu_2^*(A)+\varepsilon]$. Тогда из (11) и (13) следует, что $P(T', \mu)\subset P(T, \mu_\varepsilon^*)$. Следовательно

$$P(T, \mu^*)=\bigcap_{\varepsilon>0}P(T, \mu_\varepsilon^*)\neq\varnothing. \tag{14}$$

и μ^* является S^*-мерой.

Так как для всех j, $1\leqslant j\leqslant n$, выполняется $\xi_j\subset D_j$ и $C_1+\cdots+C_j=D_1+\cdots+D_j$, то

$$\xi_1+\cdots+\xi_j\subset C_1+\cdots+C_j. \tag{15}$$

Из (15) следует $c_1\varphi(x, \xi_1)+\cdots+c_n\varphi(x, \xi_n)=(c_1-c_2)\varphi(x, \xi_1)+$

$$+(c_2-c_3)\varphi(x, \xi_1+\xi_2)+\cdots+(c_{n-1}-c_n)\varphi(x, \xi_1+\cdots+\xi_{n-1})+$$
$$+c_n\varphi(x, \xi_1+\cdots+\xi_n)\leqslant(c_1-c_2)\varphi(x, C_1)+(c_2-c_3)\varphi(x, C_1+C_2)+\cdots+$$
$$+(c_{n-1}-c_n)\varphi(x, C_1+\cdots+C_{n-1})+c_n\varphi(x, C_1+\cdots+C_n)=$$
$$=c_1\varphi(x, C_1)+\cdots c_n\varphi(x, C_n),$$

поэтому $c\in K(T', f)$, т. е. $K(T, f)\subset K(T', f)$. Из монотонности S-меры μ следует, что для $A\in S$ выполняется $\mu^*(A)=\mu(A)$. По теореме 6

$$(S^*)\int_U f(x)\,d\mu^*(x)\subset(S)\int_U f(x)\,d\mu(x). \tag{16}$$

Отсюда следует правильность S^*-меры μ^*.

Докажем включение в противоположную сторону по сравнению с (16). Возьмем произвольное $\eta>0$. Найдем S^*-разбиение T и $c\in K(T, f)$ такие, что $I_2(f, \mu^*, S^*)+\eta>S(T, \mu^*, c)$. Затем найдем столь малое $\varepsilon>0$, что $S(T, \mu^*, c)>S(T, \mu_\varepsilon^*, c)-\eta$. Возможность такого выбора ε следует из равенства $\lim\limits_{\varepsilon\to0}S(T, \mu_\varepsilon^*, c)=S(T, \mu^*, c)$, которое очевидно, если учесть связь $S(T, \mu^*, c)$ с опорной функцией $P(T, \mu^*)$, о которой говорилось после определения $S(T, \mu^*, c)$. По данному T и ε построим, как выше, S-разбиение T'. Так как $P(T', \mu)\subset P(T, \mu_\varepsilon^*)$ и $K(T, f)\subset K(T', f)$, то при $c\in K(T, f)$ выполняется $S(T', \mu, c)\leqslant S(T, \mu_\varepsilon^*, c)$ и $S_0(T, \mu_\varepsilon^*, f)\geqslant S_0(T', \mu, f)\geqslant I_2(f, \mu, S)$. Таким образом, $I_2(f, \mu^*, S^*)+2\eta\geqslant I_2(f, \mu, S)$, откуда в силу произвольности η получаем $I_2(f, \mu^*, S^*)\geqslant I_2(f, \mu, S)$. Применив это неравенство к $-f$, получим $I_1(f, \mu^*, S^*)\leqslant I_1(f, \mu, S)$. Таким образом

$$(S^*)\int_U f(x)\,d\mu^*(x)\supset(S)\int_U f(x)\,d\mu(x),$$

что вместе с (16) доказывает теорему 8.

Теперь приведем

Доказательство теоремы 7б. Построим S-меру μ^* и используем теорему 8. Считая в теореме 7а $S=S^*$, видим, что все ограниченные функциии являются S_1^*-измеримыми и класс L_1 необходимо является линейным пространством. По теореме 7а $N^* \neq \varnothing$. Так как $N^* \subset N$, то и $N \neq \varnothing$. Из (2), (5) и теоремы 6 следует $I_2(f, \mu, S) = I_2(f, \mu^*, S^*) = \max\{I_2(f, \nu, S^*): \nu \in N^*\} < \max\{I_2(f, \nu, S): \nu \in N\} = I_2(f, \mu, S)$. Таким образом, доказано (7). Соотношение (8) получается из (7), где вместо f взято $-f$.

Замечание 1. Можно было бы определять S-меру μ как $\mu: S \to S'$, где S' множество компактных подмножеств R_+, $\mu_1(A) = \min \mu(A)$, $\mu_2(A) = \max \mu(A)$. Это потребовало бы лишь незначительных изменений в формулировках теорем.

Замечание 2. При следующем варианте построения интеграла по нечеткой мере вопрос о правильности S-меры не возникает. Будем предполагать, что $f(x) \geqslant 0$ при $x \in U$, а от $c \in K(T, f)$ будем требовать дополнительно, чтобы $c \in R_+^n$. После этого, как раньше $I_2(f, \mu)$, определяем $I_2'(f, \mu)$. Наряду с $S(T, \mu, c)$ определим $s(T, \mu, c) = \min\left\{\sum_{k=1}^{n} c_k t_k : t \in P(T, \mu)\right\}$, далее $s_0(T, \mu, f) = \inf\{s(T, \mu, c): c \in K(T, f)\}$, $I_1'(f, \mu) = \inf\{s_0(T, \mu, f): T \in \mathrm{T}\}$. Очевидно, если μ-четкая, то $S(T, \mu, c) = s(T, \mu, c)$, $S_0(T, \mu, f) = s_0(T, \mu, f)$ $I_1'(f, \mu), = I_2', f, \mu)$. В общем же случае $I_1'(f, \mu) \leqslant I_2'(f, \mu)$. Если теперь не будем требовать, чтобы $f > 0$, то определим $I_2(f, \mu) = I_2'(f^+, \mu) - I_1'(f^-, \mu)$, $I_1(f, \mu) = I_1'(f_\mu^+) - I_2'(f^-, \mu)$. Как раньше, определим

$$I(f, \mu) = (S) \int_U f(x)\, d\mu(x) = [I_1(f, \mu), I_2(f, \mu)].$$

В частности, если $\mu_1 \equiv 0$, то $I_1' = 0$, и получаем обобщение определения интеграла из [9], § 1. При новом определении интеграла $I_2(f)$, вообще говоря, не является полуаддитивным функционалом и аналоги теорем 7а и 7б формулируются громоздко.

Львовский государственный
университет имени И. Франко

Поступила 2. XII. 1987

Ա. Ա. ԳՈԼԴԲԵՐԳ. Ոչ հստակ չափով ինտեգրալ *(ամփոփում)*

Ներմուծվում է ոչ հստակ բազմությունների մի հանրահաշվի վրա սահմանված ոչ հըստակ չափով ինտեգրալի նոր գաղափար։ Հստակ բազմությունների և հստակ չափի դեպքում այն համընկնում է դասականի հետ, իսկ հստակ բազմությունների և ոչ հստակ չափի դեպքում՝ 1964 թ. հեղինակի կողմից ներմուծված ոչ ադիտիվ ինտեգրալի հասկացության հետ։

A. A. GOLDBERG. *An integral with respect to a fuzzy measure* (summary)

A new notion of integral with respect to a fuzzy measure defined on som algebra of fuzzy sets is introduced. For the case of crisp sets and a crisp measure

coincides with the classical notion of an integral while for the case of crisp set and a fuzzy measure it coincides with the notion of an integral by a non-additive measure, which was introduced by the author in 1964.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Кофман.* Введение в теорию нечетких множеств, М., Радио и связь, 1982, 432 с.
2. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта (под ред. Д. А. Поспелова), М., Наука, 1986, 312 с.
3. *M. Sugeno.* Theory of fuzzy integrals and its applications, Ph. D. dissertation, Tokyo, Inst, Technology. 1974.
4. *D. Ralescu, G Adams.* The fuzzy integral, J. Math. Anal. and Appl., 1980, 75 № 2, 562—570.
5. *F. Suarez Garcia. P. Gil Alvares.* Integrales normadas y conormadas (generalizacion de la integral de Sugeno), Trabajos estadist. y invest. oper., 1985, 3 № 1, 107—121.
6. *Wang Zi—Xiao.* Fuzzy measures and measures of fuzziness, J, Math. Anal. and Appl., 1984, 104. № 2, 589—601.
7. *D. Butnariu.* Additive fuzzy measures and integrals. I, J. Math. Anal. and Appl. 1983, 93, № 2, 436—452.
8. *D. Butnariu.* Fuzzy measurability and integrability, J. Math. Anal. and Appl. 1986, 117, № 2. 385—410.
1. *А. Кофман.* Введение в теорию нечетких множеств, М., Радио и связь, 1982, 433 с. целых функций, I—IV, Матем. сб., 1962, 58, № 3, 289—334; 1963, 61, № 3, 334—349; 1964, 65 ,№ 3, 414—453; 1965, 66, № 3, 411—457.
10. *Г. Л. Лунц.* Об оценках роста канонического произведения, Изв. АН АрмССР, «Математика», 1968, 3, № 2, 126—136.
11. *Е Д. Файнберг.* Об интеграле по неаддитивной мере и оценках индикатора целой функции, Сибирск. мат. ж., 1983, 24, № 1, 175—186.
12. *Е. Д. Файнберг.* Оценки индикаторов функций, аналитических и нецелого конечного порядка в полуплоскости. I, В кн.: Теория функций, функц. анализ и их приложения. Изд-во Харьковск. ун-та, 1974, вып. 21, 13—30.
13. *Г. Я. Арешкин, В. А. Попов.* Δ-функционалы и интеграл по непрерывной внешней мере, Известия вузов, Математика, 1976, № 8, 3—8.
14. *В. А. Попов.* Аддитивные и полуаддитивные функции на булевых алгебрах, Сибирск мат. ж., 1976, 17, № 2, 331—339.
15. *М. Н. Лубышев.* Об абсолютной непрерывности интеграла Гольдберга, В кн.: Функции множеств, Сыктывкар, Изд-во Коми пед. ин-та, 1977, 64—67.
16. *И. Калас, (J. Kalas).* Предельные теоремы, касающиеся интеграла по полуаддитивной мере, Acta math. univ. comenianae, 1980, 37, 135—145.
17. *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов.* Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., Физматгиз, 1959, 684 с.

Примечание. Через два года после поступления данной статьи в редакцию появилась статья Д. А. Молодцова, К вопросу об определении интервальной меры, в кн.: Новые результаты в теории исследования операций, М.: ВЦ АН СССР, 1989.— С. 3—51, в которой на некоторой алгебре четких множеств также вводится мера, принимающая значения из множества сегментов. В некоторых отношениях введенная Д. А. Молодцовым мера, названная им интервальной, более общая, чем наша (сегменты принадлежат [— ∞, ∞], а не [0, ∞]; множеству соответствует, вообще говоря, не один сегмент и т. д.). С другой стороны, на нее накладываются некоторые ограничения, которые у нас необязательны. В указанной статье Д. А. Молодцова теория интеграла по интервальной мере не строится.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 4, 1990 Математика

УДК 517.98

Л. Г. АРАБАДЖЯН, А. Г. АРАБАДЖЯН

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО КОНСЕРВАТИВНОГО УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА-ХОПФА

В настоящей работе изучается асимптотическое поведение нетривиального решения S следующего однородного уравнения

$$S(x)=\int_0^\infty K(x-t)\,S(t)\,dt, \tag{1}$$

$$0\leqslant K\in L_1(\mathrm{R}),\qquad \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\,dt=1 \tag{2}$$

и его векторного аналога.

Вопросам разрешимости этого уравнения и асимптотики его решения были посвящены работы [1—5, 9, 10], где разными методами были проведены исследования (1), (2). В указанных работах доказано, в частности, что в случае симметричных (четных) ядер K имеют место соотношения

$$S(x)\sim\frac{x}{\sqrt{\nu}},\quad \text{при } x\to\infty,$$

если $\nu\overset{\text{def}}{=}\int_0^\infty t^2K(t)\,dt<+\infty$ и

$$S(x)=o(x),\ x\to\infty, \tag{3}$$

в случае $\nu=+\infty$.

Здесь будет уточнено равенство (3) в зависимости от скорости убывания ядра K на бесконечности. С этой целью к уравнению (1), (2) будет применен метод работ [3—6, 8], а именно, будет использована факторизация (скалярного и матричного) оператора Винера-Хопфа и нелинейные функциональные уравнения.

1°. Уравнение (1) запишем в операторной форме

$$(\mathrm{J}-\mathrm{K})\,S=0,$$

где J-единичный, а K-консервативный (т. е. удовлетворяющий условиям (2)) оператор Винера-Хопфа. В работах [3—5] доказано существование вольтерровской факторизации

$$\mathrm{J}-\mathrm{K}=(\mathrm{J}-\mathrm{V}_-)(\mathrm{J}-\mathrm{V}_+), \tag{4}$$

где $\mathbf{V}_\pm$-операторы вида

$$(\mathbf{V}_+\varphi)(x)=\int\limits_0^x V_+(x-t)\varphi(t)\,dt,\quad (\mathbf{V}_-\varphi)(x)=\int\limits_x^\infty V_-(t-x)\varphi(t)\,dt,\quad (5)$$

а функции $V_\pm$ являются решением нелинейных уравнений

$$V_\pm(x)=K(\pm x)+\int\limits_0^\infty V_\mp(t)\,V_\pm(x+t)\,dt,\ x>0.$$

Для симметричных ядер $K: K(-x)=K(x),\ x>0$ эта система заменяется уравнением

$$V(x)=K(x)+\int\limits_0^\infty V(t)\,V(x+t)\,dt,\ x>0, \quad (6)$$

$(V_\pm=V)$. $\Bigl($Дальнейшие рассуждения этого пункта относятся к симметричным ядрам K в случае (2) и $\nu\overset{\mathrm{def}}{=}\int\limits_0^\infty t^2K(t)\,dt=+\infty\Bigr)$.

В указанных работах доказана, в частности, разрешимость уравнения (6) в случае (2), причем $V\geqslant 0$ и $\gamma\overset{\mathrm{def}}{=}\int\limits_0^\infty V(t)\,dt=1$. Там же показано, что решение V рассматриваемого уравнения можно представить в виде

$$V(x)=K(x)+\int\limits_0^\infty \Phi(t)\,K(x+t)\,dt,\ x>0, \quad (7)$$

где Φ определяется из уравнения

$$\Phi(x)=V(x)+\int\limits_0^x V(x-t)\,\Phi(t)\,dt. \quad (8)$$

При $0\leqslant V\in L_1(\mathrm{R})$ и $\gamma=1$ решение последнего уравнения неотрицательно и несуммируемо на $[0,\infty)$.

Факторизация (4) сводит уравнение (1), (2) к следующей системе:

$$\begin{aligned}(\mathbf{J}-\mathbf{V}_-)F&=0,\\ (\mathbf{J}-\mathbf{V}_+)S&=F.\end{aligned} \quad (9)$$

(Заметим, что ядра операторов $\mathbf{V}_\pm$ имеют вид $V(x-t),\ x\geqslant t$ и $V(t-x),\ x\leqslant t$, V — решение уравнения (4)). Так как $\gamma=1$, то первому из уравнений (9) удовлетворяет функция $F(x)\equiv 1$.

Таким образом уравнение (1), (2) сводится к уравнению восстановления (см. [3—5, 7])

$$S(x)=1+\int_0^x V(x-t)\,S(t)\,dt,\quad x>0,$$
$$0\leqslant V\in L_1(\mathrm{R}^+),\quad \gamma=1. \tag{10}$$

Решение последнего уравнения можно представить в виде

$$S(x)=1+\int_0^x \Phi(t)\,dt, \tag{11}$$

где Φ определяется из (8). Поскольку $\Phi\geqslant 0$ при $V\geqslant 0$, то из (11) следует монотонное и неограниченное возрастание функции S на $[0,\infty)$.

2°. Рассмотрим уравнение (10). Из этого соотношения следует

$$S(x)\leqslant 1+S(x)\int_0^x V(t)\,dt,$$

откуда, учитывая $\gamma=1$, получаем

$$S(x)\int_x^\infty V(t)\,dt\leqslant 1. \tag{12}$$

Оценим $\int_x^\infty V(t)\,dt$. Интегрирование равенства (7) в пределах от x до ∞ $(x\geqslant 0)$ дает

$$\int_x^\infty V(t)\,dt=\int_x^\infty K(t)\,dt+\int_x^\infty K(t)\,dt\int_0^{t-x}\Phi(\tau)\,d\tau,$$

откуда, с учетом равенства (11) и монотонности функции S, следует

$$\int_x^\infty V(t)\,dt=\int_x^\infty K(t)\,S(t-x)\,dt\geqslant S(x)\int_{2x}^\infty K(t)\,dt. \tag{13}$$

Из неравенств (12) и (13) получаем оценку для решения S уравнения (1), (2) в симметрическом случае:

$$S(x)\leqslant\left(\int_{2x}^\infty K(t)\,dt\right)^{-\frac{1}{2}},\quad x>0. \tag{14}$$

Замечание 1. Мы получили оценку (14) в предположении $\nu_2 = +\infty$, а это, с учетом $K \in L_1(\mathrm{R})$, означает, что функция K не финитна на R^+. Поэтому $\int\limits_{2x}^{\infty} K(t)\,dt \neq 0$ для $\forall\, x > 0$.

Замечание 2. Оценка (14) достаточно точно характеризует поведение решения S для медленно убывающих ядер K. Так, например, при $K(x) \sim \frac{a}{x^{\alpha}}$, $x \to \infty$, где $\alpha < 3$ мы получ.ем $S(x) = O(x^{\frac{\alpha-1}{2}})$, $x \to \infty$ вместо (3).

Замечание 3. Вопросы асимптотического поведения решения уравнения (1), (2) в связи с астрофизическими задачами изучены в монографии [10]. Для ядер вида $K(x) = \int\limits_{a}^{b} e^{-|x|\tau} G(\tau)\, d\tau$ там получена формула

$$S(x) \sim C\left(\int\limits_{x}^{\infty} K(t)\,dt\right)^{-\frac{1}{2}}, \text{ при } x \to \infty.$$

Изложение этих вопросов в [10] ведется на „физическом уровне" строгости.

3°. Рассмотрим векторное однородное уравнение Винера-Хопфа

$$S(x) = \int\limits_{0}^{\infty} K(x-t)\, S(t)\,dt,\ x > 0 \tag{15}$$

с консервативным ядром $K: K(x) = (K_{ij}(x))_{i,j=1}^{n}$,

$$0 \leqslant K \in L_1^{n\times n}(\mathrm{R}),\ C = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t)\,dt \in k_p,\ r(C) = 1 \tag{16}$$

(k_p — класс примитивных (неразложимых) матриц, т. е. для $G \in k_p$ существует $m_0 \in N$ такое, что $G^{m_0} > 0$; $r(G)$—спектральный радиус матрицы G.)

Здесь будут получены оценки для координат S_j вектор-функции S — решения уравнения (15), (16).

Пусть $E(\mathrm{R}^+)$ одно из банаховых пространств $L_p(\mathrm{R}^+)$, $p \geqslant 1$, $M(\mathrm{R})$. Через $E^n(\mathrm{R}^+)$ обозначим пространство n-мерных вектор-функций с элементами из $E(\mathrm{R}^+)$. Пространство $E^n(\mathrm{R}^+)$ снабжается нормой $\|f\|_{E^n(\mathrm{R}^+)} \overset{\mathrm{def}}{=} \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \|f_j\|_{E(\mathrm{R}^+)}$ или другой эквивалентной нормой, порожденной числами $\|f_j\|_{E(\mathrm{R}^+)}$. Пусть $\mathbf{K}$ — матричный интегральный оператор Винера-Хопфа, действующий в $E^n(\mathrm{R}^+)$.

В работах [5—6] доказано, что в консервативном случае (16) для вышеуказанного оператора K существует разложение вида (4), где $V_{\pm}$ — матричные интегральные операторы Вольтерра вида (5). Существование факторизации (4) для консервативных операторов K следует из разрешимости при условиях (16) следующей матричной системы:

$$V_+(x)=K(x)+\int_0^{\infty} V_-(t)\, V_+(x+t)\, dt,$$

$$V_-(x)=K(-x)+\int_0^{\infty} V_-(x+t)\, V_+(t)\, dt,\quad x>0, \tag{17}$$

относительно ядер $V_{\pm}$ операторов $\mathrm{V}_{\pm}$. При условиях (16) из [5] имеем

$$0\leqslant V_{\pm}\in L_1^{n\times n}(\mathrm{R}^+),\ r(A),\ r(B)\leqslant 1,$$

где

$$A\overset{\mathrm{def}}{=}\int_0^{\infty} V_+(t)\,dt\in k_p,\ B\overset{\mathrm{def}}{=}\int_0^{\infty} V_-(t)\,dt\in k_p,$$

причем хотя бы одно из чисел $r(A)$ и $r(B)$ равно 1. Пусть, например, $r(A)=1$. Поскольку $A\in k_p$, то из теоремы Перрона-Фробениуса (см. [11]) следует существование n-мерного положительного неподвижного вектора ζ матрицы A, т. е. $A\zeta=\zeta$. Аналогично для матрицы B в случае $r(B)=1$.

Здесь будем рассматривать уравнение (15), (16) с симметричным ядром K. Для матричных ядер K возможны случаи

а) $K(-x)=K^{\mathrm{T}}(x),\ x>0;$

б) $K(-x)=K^{\perp}(x),\ x>0.$

(Для произвольной матрицы $G=(g_{ij})_{ij=1}^n$ через G^{T} обозначается транспозиция матрицы G относительно диагонали $(g_{11}, g_{22},\cdots, g_{nn})$, а через $G^{\perp}$ — транспозиция относительно второй диагонали $(g_{n1}, g_{n-1\,2},\cdots, g_{1n})$).

4°. Рассмотрим случай а). В [6] показано, что в этом случае решением системы (17) является пара $(V,\ V^{\mathrm{T}})$, где V—решение уравнения

$$V(x)=K(x)+\int_0^{\infty} V^{\mathrm{T}}(t)\, V(x+t)\, dt,\quad x>0. \tag{18}$$

В рассматриваемом случае $B=A^{\mathrm{T}}$. Так что $r(B)=r(A^{\mathrm{T}})=r(A)=1$.

Решение V уравнения (18) можно представить в виде

$$V(x) = K(x) + \int_0^\infty \Phi^{\mathsf{T}}(t)\, K(x+t)\, dt, \quad x > 0, \tag{19}$$

где матрица-функция Φ определяется из уравнения

$$\Phi(x) = V(x) + \int_0^x V(x-t)\, \Phi(t)\, dt, \quad x > 0 \tag{20}$$

(матричный аналог уравнения (8)). Из результатов работ [6 — 7] следует также, что при $0 \leqslant V \in L_1^{n\times n}(\mathrm{R}^+)$, $A = \int_0^\infty V(t)\, dt$ и $r(A) = 1$ решение уравнения (20) существует, неотрицательно и неинтегрируемо на $[0, \infty)$.

Факторизация (4) матричного оператора $\mathbf{K}$ сводит уравнение (15) к двум векторным уравнениям типа Вольтерра ($\mathbf{J}$ — единичный оператор в $E^n(\mathrm{R}^+)$)

$$\begin{aligned} (\mathbf{J} - \mathbf{V}_-)\, F &= 0, \\ (\mathbf{J} - \mathbf{V}_+)\, S &= F. \end{aligned} \tag{21}$$

Ядра операторов $\mathbf{V}_\pm$ равны $V(x-t)$, $x \geqslant t$ и $V^{\mathsf{T}}(t-x)$, $t \geqslant x$ соответственно.

Пусть η — положительный неподвижный вектор матрицы A^{T}: $A^{\mathsf{T}}\eta = \eta$. Его существование следует из $r(A^{\mathsf{T}}) = 1$ и вышеуказанной теоремы Перрона-Фробениуса. Тогда вектор-функция $F(x) \equiv \eta$ удовлетворяет первому из уравнений (21). Поэтому уравнение (15), (16) сводится к векторному уравнению восстановления

$$\begin{gathered} S(x) = \eta + \int_0^x V(x-t)\, S(t)\, dt, \quad x > 0, \\ 0 \leqslant V \in L_1^{n\times n}(\mathrm{R}^+), \quad A = \int_0^\infty V(t)\, dt \in k_p, \quad r(A) = 1. \end{gathered} \tag{22}$$

В [7] показано, что решение $S = (S_1, \cdots, S_n)$ последнего уравнения имеет асимптотику

$$S(x) = O(x), \quad x \to \infty \text{ (и, следовательно, } S_j(x) = O(x), \quad x \to \infty, \ j = 1, \cdots, n). \tag{23}$$

Указанное решение представляется в виде

$$S(x) = \Omega(x) \cdot \eta, \tag{24}$$

где Ω определяется из уравнения (I — единичная $n \times n$ матрица)

$$\Omega(x) = I + \int_0^x V(x-t)\, \Omega(t)\, dt, \quad x > 0. \tag{25}$$

Имеется очевидная связь между матриц-функциями Ω и Φ:

$$\Omega(x) = I + \int_0^x \Phi(t)\, dt. \tag{26}$$

Поскольку $\Phi \geqslant 0$ при $V \geqslant 0$, то $\Omega(x) \uparrow$ на $[0, \infty)$ покомпонентно. Очевидно также равенство

$$\Omega^{\tau}(x) = I + \int_0^x \Phi^{\tau}(t)\, dt.$$

Обозначим $\eta_0 = \max\limits_{1 < j < n} \eta_j$. Из (24) имеем

$$S_j(x) \leqslant \eta_0 \sigma_j(x), \ x > 0, \ j = 1, 2, \cdots, n, \tag{27}$$

где $S = (S_1, \cdots, S_n)$, $\Omega(x) = (\omega_{ij}(x))_{i, j=1}^n$, $\sigma_j(x) = \sum\limits_{p=1}^n \omega_{jp}(x)$. Поэтому для оценки функций S_j (и, следовательно, вектор-функции S) достаточно оценить σ_j, $1 \leqslant j \leqslant n$.

С учетом монотонности матриц-функции Ω из (25) получим

$$\Omega(x) \leqslant I + \int_0^x V(t)\, dt \cdot \Omega(x),$$

откуда следует

$$(I - A)\, \Omega(x) + \int_x^{\infty} V(t)\, dt \cdot \Omega(x) \leqslant I. \tag{28}$$

Пусть ζ — положительная вектор-строка, удовлетворяющая условию $\zeta = \zeta A$. Очевидно, что $\zeta = \eta^{\tau}$, где $\eta = A^{\tau}\eta$. Умножая неравенство (28) слева на ζ, получаем

$$\zeta \cdot \int_x^{\infty} V(t)\, dt \cdot \Omega(x) \leqslant \zeta. \tag{29}$$

Оценим интеграл в последнем неравенстве. С учетом монотонности Ω^{τ} из равенства (19) получаем (ср. с (13))

$$\int_x^{\infty} V(t)\, dt = \int_x^{\infty} \Omega^{\tau}(t - x)\, K(t)\, dt \geqslant \Omega^{\tau}(x) \int_{2x}^{\infty} K(t)\, dt,$$

что совместно с (29) дает

$$\zeta \Omega^{\tau}(x) \cdot \int_{2x}^{\infty} K(t)\, dt \cdot \Omega(x) \leqslant \zeta.$$

Запишем последнее неравенство в координатной форме

$$\sum_{l=1}^{n}\zeta_l\sum_{p,q=1}^{n}\omega_{pl}(x)\int_{2x}^{\infty}K_{pq}(t)\,dt\cdot\omega_{qj}(x)\leqslant\zeta_j,\ j=1,\cdots,n. \tag{30}$$

В неравенствах (30) все слагаемые суммы неотрицательны. Поэтому, обозначив $\zeta_0=\min\limits_{1<j<n}\zeta_j>0$ и $H=\frac{1}{\zeta_0}\sum\limits_{l=1}^{n}\zeta_l$ и просуммировав (30) по j получаем

$$\sum_{p,q=1}^{n}\sigma_p(x)\int_{2x}^{\infty}K_{pq}(t)\,dt\cdot\sigma_q(x)<H. \tag{31}$$

Пусть функция K_{jj} для некоторого j не финитна на $[0,\infty)$. $\left(\text{Например, в случае } \nu_{jj}\overset{\text{def}}{=}\int_0^{\infty}t^2K_{jj}(t)\,dt=+\infty.\right)$. Тогда для указанного j из (31) следует

$$\sigma_j(x)\leqslant H\left(\int_{2\tau}^{\infty}K_{jj}(t)\,dt\right)^{-\frac{1}{2}},\ x>0,\ 1<j<n. \tag{32}$$

Это неравенство совместно с (27) дает оценку для j-ой компоненты решения S уравнения (15), (16).

Таким образом, в случае не финитной на $[0,\infty)$ функции K_{jj} вместо общей оценки (23) для соответствующей координаты S_j получили более точную оценку (32).

5°. Случай б). Решение системы (17) и в этом случае существенно упрощается (см. [8]). А именно, при условии б) система (17) сводится к матричному уравнению

$$V(x)=K(x)+\int_0^{\infty}V^{\perp}(t)\,V(x+t)\,dt,\ x>0 \tag{33}$$

(т. е. функции $V_+=V$ и $V_-=V^{\perp}$ удовлетворяют системе (17)). В указанной работе [8] показано, что для решения V уравнения (31) справедлива формула

$$V(x)=K(x)+\int_0^{\infty}\Phi^{\perp}(t)\,K(x+t)\,dt, \tag{34}$$

где Φ определяется из (20). (Далее под V понимается решение уравнения (33)).

В рассматриваемом случае б) (как и в случае а)) уравнение (15), (16) сводится (с учетом $r(A)=r(A^{\top})=1$) к (22), решение которого представимо в виде (24).

Учитывая равенство (26) и соотношение

$$\Omega^{\perp}(x)=I+\int_0^{x}\Phi^{\perp}(t)\,dt,$$

из (25) и (34) получаем

$$\zeta\Omega^{\perp}(x)\int_{2x}^{\infty}K(t)\,dt\cdot\Omega(x)\leqslant\zeta, \tag{35}$$

где $\zeta=\zeta A$.

Пусть $\Omega(x)=(\omega_{ij}(x))_{i,j=1}^{n}$. Тогда $\Omega^{\perp}(x)=(\omega_{n+1-j,\,n+1-i}(x))$. Неравенство (35) запишем в координатной форме

$$\sum_{i=1}^{n}\zeta_i\sum_{p,q=1}^{n}\omega_{n+1-p,\,n+1-i}(x)\int_{2x}^{\infty}K_{pq}(t)\,dt\cdot\omega_{qj}(x)\leqslant\zeta_j,\ j=1,\cdots,n. \tag{36}$$

Из последних соотношений, аналогично (31), получаем

$$\sum_{p,q=1}^{n}\sigma_{n+1-p}(x)\int_{2x}^{\infty}K_{pq}(t)\,dt\cdot\sigma_q(x)\leqslant h. \tag{37}$$

Учитывая, что все слагаемые суммы в (37) положительны, из(37) следует

$$\sigma_j^2(x)\int_{2x}^{\infty}K_{n+1-j,\,j}(t)\,dt\leqslant h,$$

откуда получаем

$$\sigma_j(x)\leqslant h\left(\int_{2x}^{\infty}K_{n+1-j,\,j}(t)\,dt\right)^{-\frac{1}{2}},\quad x>0,\ 1<j\leqslant n, \tag{38}$$

если только функция $K_{n+1-j,\,j}$ не финитна на $\mathbb{R}^+$.

Нами получена

Теорема. i) *При* $\nu=+\infty$ *решение* S *скалярного консервативного уравнения* (1), (2) *с симметричным ядром* $K: K(-x)=K(x)$, $x>0$ *мажорируется на* $\mathbb{R}^+$ *функцией* $\left(\int_{2x}^{\infty}K(t)\,dt\right)^{-\frac{1}{2}}$.

ii) *Пусть* $S=(S_1, S_2,\cdots, S_n)$ — *решение векторного консервативного уравнения* (15), (16):

а) *если выполняются условия* $K(-x)=K^{\perp}(x)$, $x>0$ и $\nu_{jj}\overset{\text{def}}{=}\int_{0}^{\infty}t^2K_{jj}(t)\,dt=+\infty$, $1\leqslant j\leqslant n$, *то для координаты* S_j *справедливо неравенство*

$$S_j(x)\leqslant\chi\left(\int_{2x}^{\infty}K_{jj}(t)\,dt\right)^{-\frac{1}{2}},\quad x>0,\ \chi=\eta_0 h; \tag{39}$$

б) *если* $K(-x)=K^{\perp}(x)$, $x>0$ *и* $\nu_{n+1-j,\,j}=+\infty$, $1<j\leqslant n$, *то для* S_j *имеет место оценка*

$$S_j(x)\leqslant\chi\left(\int\limits_{2x}^{\infty}K_{n+1-j,\,j}(t)\,dt\right)^{-\frac{1}{2}},\quad x>0. \blacktriangleright \tag{40}$$

Следствие. Пусть $Q=\int\limits_0^{\infty}t^2K(t)\,dt=(\nu_{ij})_{i,\,j=1}^{n}$. Если $K(-x)=$ $=K^{\mathrm{T}}(x)$, $x>0$ и на главной диагонали матрицы Q все элементы бесконечны ($\nu_{jj}=+\infty$, $j=1,2,\cdots,n$), то для всех S_j, $j=1,2,\cdots n$, справедливы оценки (39).

Если же $K(-x)=K^{\perp}(x)$, $x>0$ и бесконечны все элементы второй диагонали ($\nu_{n+1-j,\,j}=+\infty$, $j=1,2,\cdots,n$), то S_j, $j=1,2,\cdots,n$, оцениваются согласно (40).

В заключение авторы выражают благодарность профессору Н. Б. Енгибаряну за обсуждения.

ИППФ АН Армении
Ленинаканский МИУУ Поступила 25.III.1988

Լ. Գ. Արաբաջյան, Ա. Գ. Արաբաջյան. Վիներ-Հոպֆի համասեռ կոնսերվատիվ հավասարման լուծման ասիմպտոտիկայի մասին *(ամփոփում)*.

Հոդվածում ուսումնասիրված է սիմետրիկ (K(−x)=K(x)) *կորիզով*

$$S(x)=\int\limits_0^{\infty}K(x-t)\,S(t)\,dt,$$
$$0<K\in L_1(-\infty,\infty),\quad\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(t)\,dt=1, \tag{1}$$

Վիներ-Հոպֆի կոնսերվատիվ հավասարման լուծման ասիմպտոտիկան։ Երբ $\nu\overset{\mathrm{def}}{=}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2K(x)\,dx<+\infty$ *նախկինում ստացվել է* $S(x)\sim x(\nu)^{-\frac{1}{2}}$, $x\to\infty$ *առնչությունը։*

Դանդաղ նվազող K *կորիզների համար* ($\nu=+\infty$) *հոդվածում ստացվել է (1) հավասարման* S *լուծման ասիմպտոտիկ գնահատական։ Նման գնահատականներ են ստացվել նաև (1) հավասարման վեկտորական անալոգի* $S(x)=(S_1(x),\cdots,S_n(x))$ *լուծման* $S_j(x)$ *կոմպոնենտների համար։*

L. G. ARABADJIAN, A. G. ARABADJIAN. *On asymptotics of the solution of Wiener-Hopf homogeneous conservative equation* (summary)

The present paper deals with the problem of the asymptotic behaviour of the conservative equation solution

$$S(x)=\int_0^{\infty} K(x-t)\,S(t)\,dt,$$
$$0<K\in L_1(-\infty,\ \infty),\qquad \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\,dt=1, \tag{1}$$

under symmetry condition $K(-x)=K(x),\ x>0$

Earlier assuming $\nu \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 K(x)\,dx<+\infty$ the estimate $S(x)\sim x(\nu)^{-\frac{1}{2}},\quad x\to\infty$ has been obtained.

The paper presents an asymptotic estimate of the solution obtained for the slowly decreasing nuclei K (i. e. for $\nu=+\infty$). Similar estimates are obtained for the components $S_j(x)$ of a vector function $S(x)=(S_1(x),\cdots,S_n(x))$ which is the solution of vector analogue of equation (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *E. Hopf.* Mathematical problem of radiative equilibrium, Cambridge № 31, 1934.
2. *F. Spitzer.* The Wiener-Hopf equation whose kernel is a probability density, Duke. Math. J., 1957, 24, № 3, 1960, 17, № 3.
3. *Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян.* Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения, Мат. сборник, 1975, т. 97 (139), № 5, 35—58.
4. *Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян.* О нелинейных уравнениях факторизации операторов Винера-Хопфа. Препринт НИИ ФКС. 79—1, Ереван, ЕрГУ, 1979.
5. *Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян.* Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения, Мат. анализ, т. 22 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР), М., 1984, 175—244.
6. *Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян.* Системы интегральных уравнений Винера-Хопфа и нелинейные уравнения факторизации, Мат. сборник, 124 (166), № 2 (6), 1984, 189—216.
7. *Л. Г. Арабаджян.* О системах интегральных уравнений восстановления, Дифф. уравнения, 1984, т. 20, № 6, 1050—1055.
8. *Р. С. Варданян, Н. Б. Енгибарян.* Перенос излучения в стохастической среде, Изв. АН АрмССР, сер. «Физика», 23, вып. 1, 1988, 9—16.
9. *В. В. Соболев.* Курс теоретической астрофизики, М., Наука, 1985, 502 с.
10. *В. В. Иванов.* Перенос излучения и спектры небесных тел, М., Наука, 1969, 472 с.
11. *П. Ланкастер.* Теория матриц, М., Наука, 1978.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 4, 1990 Математика

УДК 517.547.22

Н. М. ЧЕРНЫХ

ПОЛНАЯ РЕГУЛЯРНОСТЬ РОСТА РЯДОВ НЬЮТОНА

Рассмотрим ряд Ньютона

$$\tilde{F}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{\Phi}(n)}{n!}z(z+1)\cdots(z+n-1)\stackrel{\text{df}}{=}\tilde{\Phi}(0)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde{\Phi}(n)}{n!}z(z+1)\cdots(z+n-1), \tag{1}$$

где $\tilde{\Phi}(z)$ — целая функция экспоненциального типа (ц.ф.э.т.), представленная в виде интеграла Меллина

$$\tilde{\Phi}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L[\tilde{a},\tilde{b}]}\tilde{\Psi}(t)\,t^z\,dt, \tag{2}$$

здесь $L[\tilde{a},\tilde{b}]$ — спрямляемый контур с началом в точке $\tilde{a}$ и концом в точке $\tilde{b}$, принадлежащий области $\{|z|<1\}\setminus[-1, 0]$, а $\tilde{\Psi}(t)$—непрерывная на этом контуре функция.

В настоящей работе получены признаки полной регулярности роста (п. р. р.) ряда Ньютона (1), аналогичные некоторым из полученных в [1] признаков п. р. р. степенных рядов. Предполагается, что читатель знаком с основными результатами теории целых функций вполне регулярного роста (в. р. р.) в объеме глав I—III монографии [2].

Покажем, что функция $\tilde{F}(z)$ есть ц. ф. э. т. С учетом (2) преобразуем равенство (1):

$$\tilde{F}(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n-1)}{n!}\int\limits_{L[\tilde{a},\tilde{b}]}t^n\,\tilde{\Psi}(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L[\tilde{a},\tilde{b}]}\tilde{\Psi}(t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n-1)}{n!}t^n\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L[\tilde{a},\tilde{b}]}\frac{\tilde{\Psi}(t)}{(1-t)^z}\,dt. \tag{3}$$

Возможность перестановки суммирования и интегрирования в (3) обоснована ввиду оценки

$$\left| \int\limits_{L[\tilde{a}, \tilde{b}]} \tilde{\Psi}(t) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+k-1)}{k!} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{L[\tilde{a}, \tilde{b}]} |\tilde{\Psi}(t)| \sum_{k=n}^{\infty} |t|^k \frac{\Gamma(z+k)}{|\Gamma(z)|\cdot|\Gamma(k+1)|} |dt| < Kq^n, \ 0<q<1,$$

справедливой при $n > N_0$, полученной с помощью асимптотической формулы [3, с .272]

$$\ln\Gamma(\tau) = \left(\tau - \frac{1}{2}\right)\ln\tau - \tau + \frac{1}{2}\ln 2\pi + O\left(\frac{1}{\tau}\right), \ |\arg\tau| \leqslant \pi - \delta, \ \delta > 0.$$

Из формулы (3) непосредственно следует, что $\tilde{F}(z)$ — ц. ф. э. т. Обозначим через $S(z)$ функцию

$$S(z) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{F}(z)\, e^{-z} = \frac{e^{-z}}{2\pi i} \int\limits_{L[\tilde{a}, \tilde{b}]} \tilde{\Psi}(t) \frac{dt}{(1-t)^z}. \tag{4}$$

Под знаком интеграла в (4) перейдем к новой переменной $\tau = 1 + \ln(1-t)$, где $\ln(1-t) > 0$ при $t < 0$, после чего имеем

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L[a, b]} \tilde{\Psi}(1 - e^{\tau-1}) \cdot (e^{-\tau(z-1)-1} d\tau,$$

где $b = 1 + \ln(1-\tilde{a})$, $a = 1 + \ln(1-\tilde{b})$.
Обозначим теперь

$$\hat{\varphi}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\tau-1}\,\tilde{\Psi}(1 - e^{\tau-1}). \tag{5}$$

Таким образом, получим

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L[a, b]} \hat{\varphi}(\tau)\, e^{-z\tau} d\tau,$$

где $\hat{\varphi}(\tau)$ — непрерывная на контуре $L[a, b]$ функция.

Далее нам потребуется следующий результат Дюфренуа и Пизо.

Лемма 1. [4, с. 15] *Пусть функция $\alpha(t)$ непрерывна на спрямляемой кривой* Г. *Тогда* $A(z) = \int\limits_{\Gamma} \alpha(t)\, e^{zt} dt$ — *ц. ф. э. т. Ее преобразование Бореля имеет вид* $a(z) = \int\limits_{\Gamma} \frac{\alpha(t)}{z-t} dt$.

Через $\Phi(z)$ обозначим функцию $S(-z)$, т. е.

$$\Phi(z) \stackrel{\text{df}}{=} S(-z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L[a, b]} \hat{\varphi}(\tau)\, e^{z\tau} d\tau. \tag{6}$$

Из равенств (4) и (6) следует, что п. р. р. функции $\Phi(z)$ эквивалентна п. р. р. функции $\tilde{F}(z)$. Согласно лемме 1 индикаторная диаграмма функции $\Phi(z)$ принадлежит выпуклой области C, ограниченной кривой $z=1+\ln(1-t)$, $t=e^{i\varphi}$, $|\varphi|<\pi$ и отрезком $[1, 1+\ln 2]$, причем ее преобразование Бореля имеет вид

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L[a,b]}\frac{\hat{\varphi}(\tau)}{z-\tau}\,d\tau.$$

Рассмотрим теперь степенной ряд

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Phi(n)}{n!}z^n. \tag{7}$$

Из соотношений (6) и (7), как и в лемме 4 [1, с. 1159], получим, что ц. ф. э. т. $F(z)$ представима в виде интеграла

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L[a,b]}\hat{\varphi}(\tau)\,e^{e^{\tau}z}\,d\tau. \tag{8}$$

Определим функцию $F^*(z)$ равенством

$$F^*(z)\overset{\text{df}}{=}F(-z)\,e^{ez}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n. \tag{9}$$

Согласно определению 2 из работы [1, с. 1158] будем называть интерполирующей функцией коэффициентов ряда (8) такую ц. ф. э. т. $\Phi^*(z)$, что $\Phi^*(n)=a_n$. Покажем, что интерполирующая функция коэффициентов ряда (8) представлена в виде

$$\Phi^*(z)=\frac{e^z}{2\pi i}\int\limits_{L[a,b]}\hat{\varphi}(\tau)\,(1-e^{\tau-1})^z\,d\tau. \tag{10}$$

Действительно, имеем

$$F^*(-z)=F(z)\,e^{-ez}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L[a,b]}\hat{\varphi}(\tau)\,e^{(e^{\tau}-e)z}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L[a,b]}\hat{\varphi}(\tau)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n(e^{\tau}-e)^n}{n!}\,d\tau=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L[a,b]}\hat{\varphi}(\tau)\,(e^{\tau}-e)^n\,d\tau.$$

Отсюда следует равенство (10).

Производя в интеграле из (10) замену переменной $t=1-e^{\tau-1}$, получим представление

$$a_n\equiv\Phi^*(n)=\frac{e^n}{2\pi i}\int\limits_{L[\tilde{a},\tilde{b}]}\frac{-\hat{\varphi}(1+\ln(1-t))}{t-1}\,t^n\,dt, \tag{11}$$

$$\tilde{a} = 1 - e^{a-1}, \quad \tilde{b} = 1 - e^{b-1}.$$

Обозначим

$$\tilde{\varphi}^*(t) = \frac{\hat{\varphi}(1 + \ln(1-t))}{(1-t)}.$$

Теперь равенство (11) принимает вид

$$\Phi^*(n) = \frac{e^n}{2\pi i} \int\limits_{L[\tilde{a}, \tilde{b}]} \tilde{\varphi}^*(t)\, t^n\, dt.$$

Таким образом, ц. ф. э. т. $\Phi^*(z)$, определенная формулой

$$\Phi^*(z) = \frac{e^z}{2\pi i} \int\limits_{L[\tilde{a}, \tilde{b}]} \tilde{\varphi}^*(t)\, t^z\, dt,$$

является интерполирующей функцией коэффициентов ряда (9).

Поскольку из формулы (2) следует равенство

$$\tilde{\Phi}(z) = \Phi^*(z) \cdot e^{-z}, \tag{12}$$

то п. р. р. функций $\tilde{\Phi}(z)$ и $\Phi^*(z)$ эквивалентна.

Следуя терминологии, принятой нами для степенных рядов, назовем функцию $\tilde{\Phi}(z)$, определенную формулой (2), интерполирующей функцией коэффициентов ряда Ньютона (1).

Из равенств (3), (4), (6) и (7) вытекает, что интерполирующая функция коэффициентов ряда (7) имеет вид

$$\Phi(z) = \tilde{F}(-z)\, e^z. \tag{13}$$

Из формул (10) и (12) следует, что функция

$$\Phi^*(z) = \tilde{\Phi}(z) \cdot e^z \tag{14}$$

интерполирует коэффициенты ряда (9), т. е.

$$F^*(z) \stackrel{\text{def}}{=} F(-z)\, e^{ez} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}(n)\, e^n z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi^*(n)}{n!} z^n. \tag{15}$$

Заметим, что если в формуле (2) произвести замену переменной $t = e^\tau$, то получим

$$\tilde{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L[\ln\tilde{a}, \ln\tilde{b}]} \tilde{\Psi}(e^\tau)\, e^{\tau(z+1)}\, d\tau. \tag{16}$$

Учитывая лемму 1 заключаем, что индикаторная диаграмма функции $\tilde{\Phi}(z)$ лежит в полуполосе $\tilde{C} = \{z \mid \operatorname{Re} z < 0,\ |\operatorname{Im} z| < \pi\}$, а ее преобразование Бореля имеет вид

$$\tilde{\varphi}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L[\ln\tilde{a},\ \ln\tilde{b}]}\frac{\tilde{\Psi}(e^{\tau})\cdot e^{\tau}}{z-\tau}\,d\tau.$$

Обращаясь к равенству (16) и свойству 1 [2, с. 111], заключаем, что индикаторная диаграмма функции $\Phi^{*}(z)$ лежит в полуполосе $\{z|\operatorname{Re}z<1,\ |\operatorname{Im}z|<\pi\}$.

Из формулы (15) и леммы 2 [1, с. 1159] вытекает, что индикаторная диаграмма функции $F^{*}(z)$ принадлежит кругу $|z|<e$ с разрезом по отрезку $[-e,\ 0)$, а из равенства (9) следует, что индикаторная диаграмма функции $F(z)$ лежит в области

$$D=\{z|\ |z-e|<e,\ z\overline{\in}[e,\ 2e)\}.$$

Функция $f(z)$, ассоциированная с ц. ф. э. т. $F(z)$ по Борелю, имеет вид (ср. [2, с. 393], [1, с. 1161])

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L[a,\ b]}\frac{\varphi(w)}{z-e^{w}}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma[e^{a},\ e^{b}]}\frac{\varphi(\ln\tau)}{\tau(z-\tau)}\,d\tau,$$

где $\Gamma[e^{a},\ e^{b}]$ — образ контура $L[a,\ b]$ при отображении $\tau=e^{w}$.

И, наконец, индикаторная диаграмма функции $\tilde{F}(z)$ лежит в области, ограниченной кривой

$$z=-\ln(1-t),\quad t=e^{i\varphi},\ |\varphi|<\pi, \tag{17}$$

и отрезком $[-\ln 2[$. Обозначим эту область через $\tilde{D}$. Из равенства (13) следует, что для в. р. р. функции $\Phi(z)$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\tilde{F}(z)$ имела в. р. р.

Ряды (1) и (7) будем называть двойственными, если они подчинены условию (13).

Учитывая установленные выше зависимости между двойственными рядами, установим несколько признаков п. р. р. рядов Ньютона.

Теорема 1. *Пусть $\tilde{\varphi}(w)$ — функция, ассоциированная по Борелю с интерполирующей функцией коэффициентов ряда Ньютона $\tilde{\Phi}(w)$.*

Тогда, если функция $\tilde{\varphi}(w)$ имеет конечное число особых точек однозначного характера $\tilde{w}_1,\ \tilde{w}_2,\ \cdots,\ \tilde{w}_k$ в полуполосе $\tilde{C}=\{w|\operatorname{Re}w<0,\ |\operatorname{Im}w|<\pi\}$, и не имеет никаких других особенностей, то ц. ф. э. т. $\tilde{F}(z)$, представленная рядом Ньютона (1), *имеет в. р. р.*

Доказательство. Введем в рассмотрение вспомогательные функции

$$\tilde{f}_a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{\Phi}(n)}{z^{n+1}} \tag{18}$$

и

$$\tilde{f}_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{z^{n+1}}. \tag{19}$$

Через $\tilde{f}_a(z)$ и $\tilde{f}_b(z)$ буем обозначать также и аналитические продолжения элементов, представленных рядами (18) и (19).

Из леммы 5 [1, с. 1161] вытекает, что функция $\tilde{f}_a(z)$ имеет k особых точек однозначного характера: $z_j = e^{\tilde{w}_j}$, $(j = 1, 2, \cdots, k)$, и не имеет никаких других особенностей, а функция $\tilde{f}_b(z)$ имеет единственную особую точку $z_0 = e$.

Обратимся к функции $F^*(z)$. Из формулы (15) следует, что функция $f^*(z)$, ассоциированная с функцией $F^*(z)$ по Борелю, имеет вид (см. [4, с. 10])

$$f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n \tilde{q}(n)}{z^{n+1}}. \tag{20}$$

Функция $f^*(z)$ представляет собой квазиадамаровскую композицию функций (18) и (19). (Это понятие введено в работе [7]).

По теореме 1 из [7], которая является простым следствием результата, полученного в [8], заключаем, что функции (20) имеет в комплексной плоскости k особых точек однозначного характера вида $z_j = e^{\tilde{w}_j+1}$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ и не имеет никаких других особенностей.

Из формулы (15), применяя свойство 1 из [2, с. 111] и теорему о выделении особенностей аналитических функций [9], нетрудно вывести, что функция $f(z)$, ассоциированная с ц. ф. э. т. $F(z)$ по Борелю, имеет k особых точек однозначного характера вида $z_j = e - e^{\tilde{w}_j+1}$ $(j=1, 2, \cdots, k)$ и не имеет никаких других особенностей.

Из теоремы 3 [1, с. 1160] вытекает, что функция $\varphi(z)$, ассоциированная по Борелю с функцией $\Phi(z)$, имеет k особых точек однозначного характера вида $z_j = 1 + \ln(1 - e^{\tilde{w}_j})$, $(j = 1, 2, \cdots, k)$, а из (13), как и выше, выводим, что функция $\tilde{f}(z)$ имеет k особых точек однозначного характера: $z_j = -\ln(1 - e^{\tilde{w}_j})$, $(j = 1, 2, \cdots, k)$, причем функции $\varphi(z)$ и $\tilde{f}(z)$ не имеют никаких других особенностей.

Рассуждения завершаются применением следствия 1 из теоремы, доказанной в [5]. Приведем его формулировку: *ц. ф. э. т. $A(z)$ имеет в. р. р., если функция $a(z)$, ассоциированная с $A(z)$ по Борелю, имеет конечное число особых точек однозначного характера и не имеет никаких других особенностей.*

Теорема доказана.

Учитывая теорему из [6, с. 106], установленные выше связи между рядами Ньютона и степенными рядами и формулы (18) из работы [1, с. 1159], легко убедиться и в справедливости обратной теоремы.

Теорема 2. *Пусть $\tilde{f}(z)$ — функция, ассоциированная по Борелю с ц. ф. э. т. $\tilde{F}(z)$, имеющая конечное число особых точек однозначного характера $z_1, z_2, \cdots, z_k$, лежащих в области $\tilde{D}$, и не имеющая никаких других особенностей.*

Тогда функция $\tilde{F}(z)$ представима в виде ряда Ньютона (1), *интерполирующая функция коэффициентов которого $\tilde{\Phi}(w)$ имеет в. р. р. Функция $\tilde{F}(z)$, ассоциированная по Борелю с ц. ф. э. т. $\tilde{\Phi}(w)$, имеет k особых точек однозначного характера вида*

$$w_j = \ln(1 - e^{-z_j}),\ j = 1, 2, \cdots, k, \tag{22}$$

и не имеет никаких других особенностей.

Из теорем 1, 2 и теоремы 3 [1, с. 1160] получаем

Следствие. *Если $\tilde{f}(z)$, $\tilde{\varphi}(w)$, $f(z)$, $\varphi(w)$ — функции, ассоциированные по Борелю с ц. ф. э. т. $\tilde{F}(z)$, $\tilde{\Phi}(w)$, $F(z)$, $\Phi(w)$ соответственно, и какая-либо из них имеет конечное число особых точек однозначного характера, лежащих соответственно в областях $\tilde{D}$, $\tilde{C}$, D, C и не имеет никаких других особенностей, то ц. ф. э. т. $\tilde{F}(z)$, $\tilde{\Phi}(w)$, $F(z)$, $\Phi(w)$ имеют в. р. р.*

Теорема 3. *Пусть $\tilde{\varphi}(w)$ — функция, ассоциированная по Борелю с интерполирующей функцией коэффициентов ряда Ньютона.*

Если $\tilde{\varphi}(w)$ — алгебраическая функция и ее особые точки лежат в полуполосе $\tilde{C} = \{w | \mathrm{Re}\, w < 0,\ |\mathrm{Im}\, w| < \pi\}$, то ц. ф. э. т. $\tilde{F}(z)$, представленная рядом Ньютона (1), *имеет в. р. р.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. При этом вместо теоремы 1 из [7] приходится опираться на теорему 6 из [7], а вместо ссылки на следствие 1 из теоремы, доказанной в [5], следует сослаться на следствие 2: *ц. ф. э. т. $A(z)$ имеет в. р. р., если ассоциированная с ней по Борелю функция $\alpha(z)$ является алгебраической функцией.* (Можно сослаться и на более общий результат — теорему 6 из [1]).

Из установленных связей между двойственными рядами и леммы 1 вытекает следующая

Лемма 2. *Если функция $\varphi(w)$ регулярна во внешности простой кривой L, лежащей в полуполосе*

$$\tilde{C} = \{w | \mathrm{Re}\, w < 0,\ |\mathrm{Im}\, w| < \pi\},$$

то функция $f(z)$ регулярна во внешности простой кривой Γ, полученной из L преобразованием (ср. (18))

$$\Gamma = \{z | z = -\ln(1 - e^{w}),\ w \in L\}.$$

Из теорем 6, 7 статьи [1] и замечания к ним, леммы 2 и зависимостей между двойственными рядами вытекают еще две теоремы.

Теорема 4. *Пусть ц. ф. э. т.* $\tilde{F}(z)$ *представлена в виде ряда Ньютона* (1), *где* $\tilde{\Phi}(z)$ — *ц. ф. э. т.* (2).

Пусть сопряженная диаграмма функции $\tilde{F}(z)$ *есть отрезок вещественной оси* $[a, b]$, $0 < a < b$, *и функция* $\tilde{f}(z)$, *ассоциированная с* $\tilde{F}(z)$ *по Борелю, аналитически продолжима через каждую точку интервала* (a, b).

Тогда функции $\tilde{\Phi}(z)$, $\tilde{F}(z)$ *имеют в. р. р.*

Теорема 5. *Пусть сопряженная диаграмма интерполирующей функции коэффициентов ряда Ньютона* (1) — $\tilde{\Phi}(z)$ *есть отрезок вещественной оси* $[c, d]$, $c < d < 0$, *и функция* $\tilde{\varphi}(z)$, *ассоциированная с* $\tilde{\Phi}(z)$ *по Борелю, аналитически продолжима через каждую точку интервала* (c, d). *Тогда функции* $\tilde{\Phi}(z)$ *и* $\tilde{f}(z)$ *имеют в. р. р.*

Автор признателен профессору Говорову Н. В. за постановку задачи и полезные советы.

Кубанский государственный
университет

Поступила 2. III. 1987

Ն. Մ. ՉԵՐՆԻԽ. Նյուտոնի շարքերի աճման լրիվ կանոնավորությունը (*ամփոփում*)

Նյուտոնի շարքով ներկայացվող էքսպոնենցիալ տիպի ամբողջ ֆունկցիաների աճի լրիվ կանոնավորության վերաբերյալ: Նույնատիպ հայտանիշներ նախկինում ստացվել էին հեղինակի և Ն. Վ. Գովորովի կողմից աստիճանային շարքերի վերաբերյալ:

N. M. ČERNYH. *The complete regularity of growth of Newton series* (summary)

Sufficient criterions of complete regularity of growth (c. r. g.) of entire functions of exponential type represented by Newton series is proved. The same criterions (c. r. g.) have been obtained earlier by the author and N. V. Govorov for power series.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. В. Говоров, Н. М. Черных.* Полная регулярность роста некоторых классов целых функций экспоненциального типа, представленных интегралами Бореля и степенными рядами, Изв. АН СССР, сер. матем., 1985, 49, № 6, 1155—1176.
2. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, М., ГИТТЛ, 1956.
3. *М. А. Евграфов.* Аналитические функции, М., Наука, 1968.
4. *Л. Бибербах.* Аналитическое продолжение, М., Наука, 1967.
5. *Н. В. Говоров, Н. М. Черных.* О полной регулярности роста преобразования Бореля с конечным числом особых точек аналитического продолжения ассоциированной функции, Изв. АН СССР, сер. матем., 1978, 42, № 5, 965—971.
6. *А. И. Маркушевич.* Избранные главы теории аналитических функций, М., Наука, 1976.

7. *А. В. Давыдова, Н. М. Черных*. Полная регулярность роста некоторых степенных рядов, Краснодар, 1983. Рукопись представлена Кубан. ун-том. Деп. в ВИНИТИ, 15 февр. 1983, № 813—83.
8. *Н. Н. Мавроди, Н. Б. Мальцева*. Некоторые свойства композиций Адамара и Гурвица. Краснодар, 1982. Рукопись представлена Кубан. ун-том. Деп. в ВИНИТИ, 31 мая 1982, № 2659—82.
9. *В. П. Хавин*. О выделении особенностей аналитических функций, ДАН СССР, 1958, 121. № 2, 239—242.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 4, 1990 Математика

УДК 517.53

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Г. М. АЙРАПЕТЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ СО СДВИГОМ В КЛАССАХ L^p

Пусть T — единичная окружность, D^+ — единичный круг, а D^- — множество $|z| > 1$. Обозначим через $H(\Omega)$ класс функций, определенных на Ω и удовлетворяющих условию Гельдера, а через $H_0(T; t_1, \cdots, t_n)$ — класс функций, имеющих разрыв первого рода в точках $t_k \in T$ $(k = 1, \cdots, n)$ и удовлетворяющих условию Гельдера на каждой замкнутой части T, находящейся между такими соседними точками.

Рассмотрим задачу сопряжения в следующей постановке:

Найти голоморфную в $D^+ \cup D^-$ функнию $\Phi(z)$, обращающуюся в нуль на бесконечности, по граничному условию

$$\lim_{r \to 1-0} \|\Phi^+(r\alpha(t)) - D(t)\,\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)\|_p = 0, \tag{1}$$

где $D(t) \in H_0(T; t_1, t_2, \cdots, t_n)$, $D(t) \neq 0$, $f(t) \in L^p(T)$ $(p \geqslant 1)$, $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ — сужения функции $\Phi(z)$ соответственно на D^+ и D^-, а $\alpha(t)$ — гомеморфизм, сохраняющий ориентацию на T.

Задача сопряжения в классах L^p, когда $\Phi(z)$ ищется в классе функций, представимых интегралом типа Коши, изучена многими авторами. Полученные результаты и их приложения подробно изложены в работах [1]—[6] и др.

В постановке (1), при $p = 1$, задача сопряжения исследована в работе [7]. В настоящей работе мы проводим исследование задачи (1), когда $p > 1$.

Положим $\alpha_k + i\beta_k = (2\pi i)^{-1}(\ln D(t_k - 0) - \ln D(t_k + 0))$, где под $\ln D(t)$ подразумевается любое определенное значение, непрерывно изменяющееся на каждой дуге $t_k t_{k+1}$. Для произвольного числа $p > 1$ через $T(p)$ обозначим подмножество множества $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$, состоящее из точек t_k, где имеет равенство $(1 - \{\alpha_k\})\,p = 1$ ($\{\alpha_k\}$ — дробная часть числа α_k), а через $T'(p)$ и $T''(p)$ — подмножества, где выполняются соответственно неравенства $(1 - \{\alpha_k\})\,p < 1$ и $(1 - \{\alpha_k\})\,p > 1$.

Везде предпологается, что $\alpha'(t) \in L_p(1)$.

В пункте 1 рассматривается случай, когда $T(p) = \varnothing$. Устанавливается, что решения задачи (1) принадлежат классу H^p (см. [8]) и результаты совпадают с результатами работ [1], [2]. В пункте 2 изучается однородная задача (1), когда $T(p) \neq \varnothing$. В пункте 3 вводится пространство $L^{p,\epsilon}(T)\subset L^p(T)$ и исследуется задача (1), когда $f(t)\in L^{p,\epsilon}(T)$ и $T(p)\neq\varnothing$.

1. Паре функций $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, определенных на D^+ и D^-, сопоставим функцию $\Phi(z)$ равенством

$$\Phi(z)=\begin{cases}\Phi^+(z), & z\in D^+,\\ \Phi^-(z), & z\in D^-.\end{cases}$$

Обратно, если $\Phi(z)$ определена на $D^+\cup D^-$, то через $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, соответственно, обозначим сужения функции $\Phi(z)$ на D^+ и D^-.

По теореме о конформном склеивании (см. [4]) существует такое решение $\lambda(z)$ граничной задачи

$$\Phi^+(\alpha(t))-\Phi^-(t)=0,\ t\in T,$$

что $\lambda^+(z)$ и $\lambda^-(z)$ $(\lambda^-(z)=z+\bar{\lambda}^-(z),\ \bar{\lambda}^-(\infty)=0)$ конформно отображают области D^+ и D^- на некоторые области Δ_+ и Δ_- с общей границей и удовлетворяют условию Липшица в $D^+\cup T$ и $D^-\cup T$, соответственно. Положим

$$\Pi_p^+(z)=\prod_{k=1}^{n}(\lambda^+(z)-\lambda^+(\alpha(t_k)))^{\lambda_k},\ z\in D^+,$$

$$\Pi_p^-(z)=\prod_{k=1}^{n}(\lambda^-(z)-\lambda^-(t_k))^{\lambda_k},\ z\in D^-,$$

где $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ — целые числа, выбранные таким образом, чтобы имело место $-1<\alpha_k+\lambda_k\leqslant 0$, если $t_k\in T(p)\cup T'(p)$ и $0<\alpha_k+\lambda_k<1$, если $t_k\in T''(p)$.

Далее положим

$$S^+(z)=e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T\frac{\varphi(\beta(\tau))}{\tau-z}d\tau},\ z\in D^+,$$

$$S^-(z)=e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau},\ z\in D^-,$$

где $\beta(t)$ — функция, обратная к $\alpha(t)$, а $\varphi(t)$ — решение уравнения

$$K\varphi\equiv\varphi(t)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T\left(\frac{1}{\tau-t}-\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\right)\varphi(\tau)\,d\tau=\ln D(t).$$

Введем в рассмотрение функцию

$$S_p(z)=S(z)\cdot\Pi_p(z),\ z\in D^+\cup D^-.$$

Теорема 1. *Пусть* $f(t)\in L^p(T)$. *Если* $\Phi(z)$ *есть решение граничной задачи*

$$\lim_{r\to 1-0}\|\Phi^+(r\alpha(t))-D(t)\Phi^{-1}(r^{-1}t)-f(t)\|_p=0, \tag{2}$$

имеющее конечный порядок на бесконечности, то ее можно представить в виде

$$\Phi^{+}(z)=\frac{S_p(z)}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\varphi(\beta(\tau))}{\tau-z}\,d\tau,\quad z\in D^{+},$$

$$\Phi^{-}(z)=\frac{S_p^{-}(z)}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+S_p^{-}(z)\,Q(z),\quad z\in D^{-}, \tag{3}$$

где $Q(z)$ — *некоторый полином, а* $\varphi(t)$ — *решение уравнения* $K\varphi=$ $=Q(t)+f(t)\,(S_p^{+}(\alpha(t)))^{-1}$.

Доказательство. Пусть $f_r(t)\in H(T)$ и $f_r(t)\to f(t)$, при $r\to$ $\to 1-0$ по метрике $L^p(T)$. Так как $S_p^{+}(\alpha(t))-D(t)\,S_p^{-}(t)\equiv 0$ и $(S_p^{+}(\alpha(t)))^{-1}\in L^q(T)$, $q=p(p-1)^{-1}$, то условие (2) можем записать в виде

$$\lim_{r\to 1-0}\left\|\frac{\Phi^{+}(r\alpha(t))}{S_p^{+}(\alpha(t))}-\frac{\Phi^{-}(r^{-1}t)}{S_p^{-}(t)}-\frac{f_r(t)}{S_p^{+}(\alpha(t))}\right\|_1=0.$$

Обозначив

$$\Psi_r(t)=\frac{\Phi^{+}(r\alpha(t))}{S_p^{+}(\alpha(t))}-\frac{\Phi^{-}(r^{-1}t)}{S_p^{-}(t)}-\frac{f_r(t)}{S_p^{+}(\alpha(t))},$$

$$F_r^{+}(z)=\frac{\Phi^{+}(rz)}{S_p^{+}(z)}\ (z\in D^{+}),\quad F_r^{-}(z)=\frac{\Phi^{-}(r^{-1}z)}{S_p^{-}(z)}\ (z\in D^{-}), \tag{4}$$

будем иметь

$$F_r^{+}(\alpha(t))-F_r^{-}(t)=\Psi_r(t)+f_r(t)\,(S_p^{+}(\alpha(t)))^{-1},\ t\in T.$$

Так как функции $F_r^{+}(z)$ и $F_r^{-}(z)$ представимы в виде интеграла типа Коши с плотностью из класса $L^q(T)$, то (см. [1], [2])

$$F_r^{+}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\varphi_r(\beta(\tau))}{\tau-z}\,d\tau,\quad z\in D^{+},$$

$$F_r^{-}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\varphi_r(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+Q_r(z),\quad z\in D^{-}, \tag{5}$$

где $Q_r(z)$ — главная часть функции $F_r^{-}(z)$ на бесконечности, а $\varphi_r(t)$ — решение уравнения $K\varphi=\Psi_r(t)+Q_r(t)+f_r(t)\,(S_p^{+}(\alpha(t)))^{-1}$. Совершая предельный переход в (5) с учетом (4) получим доказательство теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $p>1$, $T(p)=\varnothing$. *Тогда общее решение задачи* (2), *имеющее кочечный порядок на бесконечности, определяется формулой* (3).

Доказательство. Так как при $T(p)=\varnothing$ функции $\Phi^{+}(t)$, $\Phi^{-}(t)\in L^p(T)$ (см. [1]), то функции $\Phi^{+}(r\alpha(t)$ и $\Phi^{-}(r^{-1}t)$ сходятся по метрике $L^p(T)$, когда $r\to 1-0$ (см. [8]). Теорема доказана.

2. Пусть $\tau \in T$. Для любого $\delta > 0$, $r < 1$ через $\Delta(\delta, \tau, r)$ обозначим множество точек $t \in T$, удовлетворяющих неравенству $|t - \tau| < \delta(1 - r)$.

Лемма 1. *Пусть $t_k \in T(p)$. Тогда существуют числа $\delta_0 > 0$ и $C_0 > 0$, не зависящие от r такие, что, если $t \in \Delta(\delta_0, t_k, r)$, то*

$$|S_p^+(r\alpha(t)) - D(t)\, S_p^-(r^{-1} t)| > C_0\, |S_p^+(r\alpha(t))|, \quad t \neq t_k.$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$J(r, t) = \ln |\Pi_p^-(r^{-1} t)(\Pi_p^+(r\alpha(t)))^{-1}| + i \arg \Pi_p^-(r^{-1}t)(\Pi_p^+(r\alpha(t)))^{-1} -$$
$$-\left(\frac{1}{2\pi i}\int_T (h_r(\tau, t) + k(\tau, t))\, \varphi(\tau)\, d\tau - \varphi(t)\right),$$

где $K\varphi = \ln D(t)$, а

$$h_r(\tau, t) = \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - r\alpha(t)} - \frac{1}{\tau - r^{-1}t},$$

$$k(\tau, t) = \frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}.$$

В достаточно малой окрестности T_k ($t_l \overline{\in} T_k$, $l \neq k$) точки t_k имеем

$$\varphi(t) = -\pi(i\alpha_k - \beta_k)\,\chi(t) + \varphi'(t), \quad \varphi'(t) \in H(T_k), \tag{6}$$

где $\chi(t) = 1$, при $t \in (t_k, t_{k+1})$, $\chi(t) = -1$, при $t \in T \setminus (t_k, t_{k+1})$. Так как при $t \in \Delta(\delta, t_k, r)$ $(\delta > 0)$

$$|\arg \Pi_p^-(r^{-1} t)\,(\Pi_p^+(r\alpha(t)))^{-1} + \pi\,\chi(t)| < C\cdot\delta$$

где C — постоянная, не зависящая от δ, то при $t \in \Delta(\delta, t_k, r)$, учитывая (6), получим

$$\operatorname{Im} I(r, t) = O(\delta) + \pi(\alpha_k + \lambda_k)\,\chi(t).$$

Поскольку $|\alpha_k + \lambda_k| = p^{-1}$, то $\delta_0 > 0$ можно выбрать таким образом, чтобы при $t \in \Delta(\delta_0, t_k, r)$ имело место

$$0 < \frac{\pi}{p} - \delta_0 < |\operatorname{Im} I(r, t)| < 2\pi - \delta_0.$$

В силу этого

$$|e^{I(r, t)} - 1| > \mathrm{const}\, |\operatorname{Im} I(r, t)| > C_0 > 0.$$

Для завершения доказательства леммы остается учесть, что

$$|S_p^+(r\alpha(t)) - D(t)\, S_p^-(r^{-1} t)| = |S_p^+(r\alpha(t))|\, |e^{I(r, t)} - 1|.$$

Из леммы 1 и теоремы 1 следует

Теорема 3. *Общее решение однородной задачи*

$$\lim_{r \to 1-0} \|\Phi^+(r\alpha(t)) - D(t)\, \Phi^-(r^{-1} t)\|_p = 0, \tag{7}$$

имеющее конечный порядок на бесконечности, можно представить в виде

$$\Phi^+(z)=\frac{S_p^+(z)}{2\pi i}\int\limits_T\frac{\tilde{\varphi}(\beta(\tau))}{\tau-z}\,d\tau,\ z\in D^+,$$

$$\Phi^-(z)=\frac{S_p^-(z)}{2\pi i}\int\limits_T\frac{\tilde{\varphi}(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+S_p^-(z)\,Q(z),\ z\in D^-,$$

где функция $\tilde{\varphi}(t)$ *и полином* $Q(z)$ *связаны равенствами*

$$K\tilde{\varphi}=Q(t).$$

$$\frac{1}{2}\tilde{\varphi}(t_k)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t_k)}\tilde{\varphi}(\tau)\,d\tau=0,\ t_k\in T(p).$$

Пусть $\varphi_k(t)$ — решение уравнения $K\varphi=t^k\ (k=1,\ 2,\cdots,\ n)$. Положим

$$\Phi_k^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T\frac{\varphi_k(\beta(\tau))}{\tau-z}\,d\tau,\ z\in D^+,$$

$$\Phi_k^-(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T\frac{\varphi_k(\tau)}{\tau-z}\,d\tau,\ z\in D^-.$$

Из равенства $K\varphi_k=t^k$ и из формул Сохоцкого-Племеля следует

$$\Phi_k^+(\alpha(t))-\Phi_k^-(t)=t^k.$$

Применяя теорему о конформном склеивании будем иметь

$$\Phi_k^+(z)=(\lambda^+(z))^k+b_1(\lambda^+(z))^{k-1}+\cdots+b_k,$$

где $b_1,\ b_2,\cdots,\ b_k$ — некоторые комплексные числа. Из этого представления для функций $\Phi_k^+(z)$ непосредственно следует

Лемма 2. Пусть $\tau_1,\ \tau_2,\cdots,\ \tau_n$ — произвольные точки единичной окружности. Тогда

$$\operatorname{def}\begin{pmatrix}\Phi_0^+(\tau_1)\cdots\Phi_{k-1}^+(\tau_1)\\ \vdots\qquad\qquad\vdots\\ \Phi_0^+(\tau_k)\cdots\Phi_{k-1}^+(\tau_k)\end{pmatrix}\neq 0.$$

Определим числа $\varkappa(p)$ и $\varkappa'(p)$ следующим образом: пусть $\varkappa(p)=-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)$, а $\varkappa'(p)$ есть количество точек множеетва $T(p)$.

Из теоремы 3 и леммы 2 следует

Теорема 4. *Если* $\varkappa(p)>\varkappa'(p)$, *то однородная задача* (7) *имеет* $\varkappa(p)-\varkappa'(p)$ *линейно независимых решений, ровных нулю на бесконечности: Если* $\varkappa(p)\leqslant\varkappa'(p)$, *то задача* (7) *не имеет решений, обращающихся в нуль на бесконечности.*

3. Отнесем функцию $f(t)$ к классу $L^{p,\varepsilon}(T)$, $\varepsilon>0$, если

$$\|f\|_{p,\varepsilon}=\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T|f(t)|^p\prod_{t_k\in T(p)}\|\ln|t_k-t\|\|^{\frac{p}{q}(1+\varepsilon)}|dt|\right)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

Выберем $p' > p$ таким образом, чтобы имело место $T(p') = \varnothing$ и

$$S_{p'}^{+}(z) = S_{p}^{+}(z) \prod_{t_k \in T(p)} (\lambda^{+}(z) - \lambda^{+}(\alpha(t_k)), \quad z \in D^{+},$$

$$S_{p'}^{-}(z) = S_{p}^{-}(z) \prod_{t_k \in T(p)} (\lambda^{-}(z) - \lambda^{-}(t_k)), \quad z \in D^{-}.$$

Далее, для любого $f(t) \in L^{p,\,\bullet}(T)$ обозначим

$$(K_r f)(t) = \frac{S_{p'}^{+}(r\alpha(t))}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)}{S_{p'}^{+}(\alpha(t))} (h_r(\tau, t) + k(\tau, t))\, d\tau,$$

$$(H_r f)(t) = \frac{S_{p'}^{+}(r\alpha(t)) - D(t)\, S_{p'}^{-}(r^{-1}t)}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)}{S_{p'}^{+}(\alpha(\tau))} \frac{d\tau}{\tau - r^{-1}t}.$$

Лемма 3. *Существует число C, не зависящее от r и f такое, что*

$$\|K_r f\|_p \leqslant c\, \|f\|_{p,\,\bullet}, \quad \|H_r f\|_p \leqslant c\, \|f\|_{p,\,\bullet}.$$

Доказательство первого неравенства следует из оценки

$$|h_r(\tau, t) + k(\tau, t)| < \text{const}\, P_r(\tau, t),$$

где $P_r(\tau, t) = (1 - r^2)\, |\tau - rt|^{-2}$ — ядро Пуассона. Для доказательства второго неравенства можно воспользоваться неравенством (см. [7])

$$|S_p^{+}(r\alpha(t)) - D(t)\, S_p^{-}(r^{-1}t)| \leqslant C_1\, |S_p^{+}(r\alpha(t))| \left(\frac{1 - r}{|t_k - rt|} + O((1 - r)^{\delta})\right),$$

$$t \in T_k, \quad \delta > 0,$$

где T_k — некоторая окрестность точки t_k такая, что $t_i \overline{\in} T_k\, (i \neq k)$.

Положим

$$\Psi^{+}(z) = \frac{S_{p'}^{+}(z)}{2\pi i} \int_T \frac{\varphi(\beta(\tau))}{\tau - z}\, d\tau, \quad z \in D^{+},$$

$$\Psi^{-}(z) = \frac{S_{p'}^{-}(z)}{2\pi i} \int_T \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau, \quad z \in D^{-},$$

где $\varphi(t)$ определяется из уравнения $K\varphi = f(t)\, (S_{p'}^{+}(\alpha(t)))^{-1}$.

Из леммы 3 следует

Лемма 4. *Пусть* $f(t) \in L^{p,\,\bullet}(T)$. Тогда

$$\lim_{r \to 1-0} \|\Psi^{+}(r\alpha(t)) - D(t)\, \Psi(r^{-1}t) - f(t)\|_p = 0.$$

Так как порядок функции $S_{p'}^{-}(z)$ на бесконечности равен $-\varkappa(p) + \varkappa'(p)$, то из леммы 4 и теоремы 3 следует

Теорема 5. *Пусть* $f(t) \in L^{p,\,\bullet}(T)$. *Тогда общее решение задачи сопряжения* (1) *можно представить в виде:*

а) *если* $\varkappa(p) - \varkappa'(p) \geqslant 0$, *то*

$$\Phi^{+}(z)=S_{p}^{+}(z)\sum_{\kappa=0}^{\varkappa(p)-1}C_{k}\Phi_{k}^{+}(z)+\frac{S_{p'}^{+}(z)}{2\pi i}\int_{T}\frac{\varphi(\beta(\tau))}{\tau-z}\,d\tau,$$

$$\Phi^{-}(z)=S_{p}^{-}(z)\sum_{\kappa=0}^{\varkappa(p)-1}C_{k}(\Phi_{k}^{-}(z)+z^{k})+\frac{S_{p'}^{-}(z)}{2\pi i}\int_{T}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau,$$

где C_0, $C_1,\cdots, C_{\varkappa(p)-1}$ *произвольные комплексные числа, удовлетворяющие системе уравнений*

$$C_0\Phi_0^{+}(t_k)+\cdots+C_{\varkappa(p)-1}\Phi_{\varkappa(p)-1}^{+}(t_k)=0,\ t_k\in T(p),$$

при $\varkappa(p)\geqslant 1$ *и* $C_0=C_1=\cdots=C_{\varkappa(p)-1}=0$, при $\varkappa(p)=0$.

б) *если* $\varkappa(p)-\varkappa'(p)<0$, *то задача имеет решение тогда и только тогда, когда*

$$\int_{T}\varphi(t)\,t^{k}\,dt=0,\ k=0,\ 1,\cdots,\ -(\varkappa(p)-\varkappa'(p)+1),$$

при этом решение определяется по формуле (8), *если положить* $C_0=C_1=\cdots C_{\varkappa(p)-1}=0$.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 23. V. 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. В. Хведелидзе.* Метод интегралов типа Коши в разрывных задачах теории голоморфных функций, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 7, 1975.
2. *И. Б. Симоненко.* Краевые задачи Римана для n-пар функций с измеримыми коэффициентами и ее применение к исследованию сингулярных интегралов в пространствах L^p с весом. Изв. АН СССР, сер. мат., 1964, 28, № 2, 277—306.
3. *И. И. Данилюк.* Нерегулярные граничные задачи на плоскости, М., Наука, 1975.
4. *Г. С. Литвинчук.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, М., Наука, 1977.
5. *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов, Кишинев, «Штиица», 1973.
6. *В. М. Кокилашвили, В. А. Пааташвили.* О разрывной задаче линейного сопряжения и сингулярных интегральных уравнений, Диф. ур., 1980, XVI, № 9, 1650—1659.
7. *Г. М. Айрапетян.* Разрывная задача Римана-Привалова со смещением в классе L^1, Изв. АН АрмССР, сер. матем., XXV, № 1, 1990, 3—22.
8. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., 1975.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մաթեմատիկա XXV, № 4, 1990 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.53

Д. Т. БАГДАСАРЯН

О ПОРЯДКЕ РОСТА ПРОИЗВЕДЕНИЙ $B_\alpha(z, z_k)$ М. М. ДЖРБАШЯНА

1. Пусть мероморфная в круге $D = \{z, |z| < 1\}$ функция $W = W(z)$ имеет счетное множество нулей $\{z_k\}_1^\infty$, занумерованных в порядке возрастания их модулей и $T(r, W)$ — её характеристическая функция Неванлинны.

В работе М. Цудзи [1] было установлено, что если

$$\rho = \limsup_{r\to 1-0} \frac{T(r, W)}{\log\dfrac{1}{1-r}} \quad \text{и} \quad \mu = \inf\{\lambda\}, \ \sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{\lambda+1} < +\infty \tag{1}$$

суть соответственно порядок роста функции $W(z)$ и показатель сходимости для последовательности $\{|z_k|\}_1^\infty$, то справедливы неравенства

$$0 \leqslant \mu \leqslant \rho. \tag{2}$$

На пути построения общей теории факторизации мероморфных в круге D функций М. М. Джрбашян [2] конструктивно построил произведения $B_\alpha(z, z_k)$, зависящие от непрерывного параметра $\alpha \in (-1, +\infty)$, сходимость которых в круге D имеет место только при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{\alpha+1} < +\infty. \tag{3}$$

Эти произведения, переходящие в классические функции Бляшке $B(z, z_k)$ лишь при $\alpha = 0$, строились таким образом:

Во-первых, вводится в рассмотрение две функции

$$\omega_\alpha^{(1)}(z, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1+k)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1+k)} (\bar\zeta z)^k \int_{|\zeta|}^{1} (1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx, \tag{4}$$

$$\omega_\alpha^{(2)}(z, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1+k)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1+k)} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \int_0^{|\zeta|} (1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx. \tag{5}$$

Во-вторых, для любых $\zeta\,(0 < |\zeta| < 1)$ и $z \in D$ определяется функция

$$A_\alpha(z, \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp\{\omega_\alpha^{(2)}(z, \zeta) - \omega_\alpha^{(1)}(z, \zeta)\}. \tag{6}$$

Указанные произведения определяются следующим образом:

$$B_\alpha(z, z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} (A_\alpha(z, z_k)). \tag{7}$$

Наша цель доказать следующее предложение.

Теорема 1°. *Если*

$$\mu < \alpha \leqslant \mu + 1, \tag{8}$$

то для функции $B_\alpha(z, z_k)$ имеет место равенство

$$\rho = \limsup_{r \to 1-0} \frac{m(r, B_\alpha)}{\log \frac{1}{1-r}} = \mu. \tag{9}$$

2°. *Если $\alpha \in [\mu, \mu+1]$ и показатель μ таков, что*

$$\sum_1^{\infty} (1 - |z_k|)^{\mu+1} < +\infty, \tag{10}$$

то всегда $\rho = \mu$.

2. Сначала докажем следующие леммы.

Лемма 1. *Если $-1 < \alpha < 0$, то справедливо неравенство*

$$\mathrm{Re}\left\{\int_{|\zeta|}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \log \frac{1-\bar{\zeta} z}{|\zeta|^2} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1+k)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1+k)} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \int_0^{|\zeta|^2} (1-x)^\alpha x^{k-1} dx \right\} \geqslant 0, \quad (|z| < 1). \tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\frac{a_0(\rho)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\rho)(\bar{\zeta} z)^n, \quad 0 \leqslant \rho = |\zeta| < 1, \tag{12}$$

где

$$a_0(\rho) = 2\int_{\rho^2}^{1} [(1-x)^\alpha - 1] \frac{dx}{x}, \tag{13}$$

$$a_n(\rho) = \frac{1}{n} - \frac{\Gamma(\alpha+1+n)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1+n)} \frac{1}{\rho^{2n}} \int_0^{\rho^2} (1-x)^\alpha x^{n-1} dx \quad (n \geqslant 1)$$

или

$$a_n(\rho) = \frac{\Gamma(\alpha+1+n)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1+n)} \int^{1} [(1-x)^\alpha - (1-\rho^2 x)^\alpha] x^{n-1} dx \quad (n \geqslant 1). \tag{14}$$

Из (13) и (14) видно, что $a_n(\rho) \geqslant 0$ $(n = 0, 1, \cdots)$.

Далее убедимся, что

$$a_{n+1}(\rho) \leqslant a_n(\rho), \quad n = 0, 1, \cdots, \tag{15}$$

$$\varphi_n(\rho) = \Delta^2 a_n(\rho) = a_n(\rho) - 2a_{n+1}(\rho) + a_{n+2}(\rho) \geqslant 0, \quad n = 0, 1, \cdots. \tag{16}$$

Для значений $n \geqslant 1$ имеем

$$a_{n+1}(\rho) - a_n(\rho) = \frac{\Gamma(\alpha+1+n)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1+n)} \int_0^1 [(1-x)^\alpha - (1-\rho^2)^\alpha] \times$$

$$\times \left(\frac{\alpha+1+n}{n+1} x - 1\right) x^{n-1}\, dx \leqslant 0.$$

Для значения же $n=0$

$$a_0(\rho) - a_1(\rho) \geqslant 2 \int_{\rho^2}^1 \frac{(1-x)^\alpha - 1}{x}\, dx - 2(\alpha+1) \times$$

$$\times \int_0^1 [(1-x)^\alpha - (1-\rho^2 x)^\alpha]\, dx = b(\rho).$$

Но $b(1) = 0$ и при $\rho < 1$

$$b'(\rho) = -\frac{4}{\rho} \int_0^1 [1-(\alpha+1)x]\, d(1-\rho^2 x)^\alpha \leqslant 0.$$

Таким образом, $b(\rho) \geqslant b(1) = 0$ и, тем самым, одновременно будем иметь

$$a_1(\rho) < a_0(\rho), \quad \Delta^2 a_0(\rho) \geqslant 0.$$

Нам остается установить неравенства (16). С этой целью заметим, что

$$\Delta^2 a_n(\rho) = \frac{\Gamma(\alpha+1+n)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1+n)} \int_0^1 [(1-x)^\alpha - (1-\rho^2 x)^\alpha] \times$$

$$\times \left[\frac{(\alpha+1+n)(\alpha+2+n)}{(n+1)(n+2)} x^2 - 2\frac{\alpha+1+n}{1+n} x + 1\right] x^{n-1}\, dx \quad (n=1, 2, \cdots).$$

Но легко видеть, что при $x \in [0, 1]$

$$\frac{(\alpha+1+n)(\alpha+2+n)}{(n+1)(n+2)} x^2 - 2\frac{\alpha+1+n}{n+1} x + 1 \geqslant \frac{(\alpha+1+n)(n+2)}{(n+1)(\alpha+2+n)} -$$

$$-2\frac{(\alpha+1+n)(n+2)}{(n+1)(\alpha+2+n)} + 1 > 0 \; (n \geqslant 1),$$

т. е. $\Delta^2 a_n(\rho) \geqslant 0$ $(n \geqslant 1)$. Отсюда по известной теореме о положительности сумм тригонометрических рядов (см. [3]) следует доказательство леммы 1.

Лемма 2. *Пусть* $-1 < \alpha < +\infty$, $0 < \varepsilon < 1$ *и* $\alpha + \varepsilon > 0$. *Тогда имеют место следующее неравенства*

$$|A_\alpha(z, \zeta)| \leqslant \exp\left\{\frac{\text{const}}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}}\right|^{\alpha+\varepsilon}\right\}, \tag{17}$$

$$|A_\alpha(z,\zeta)| \leqslant \exp\left\{\mathrm{const}\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}}\right|^{\alpha+1}\right\}. \tag{18}$$

Доказательство. Оценим $|\omega_\alpha^{(1)}(z,\zeta)|$. Из (4) имеем

$$\omega_\alpha^{(1)}(z,\zeta)=\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{\left(1-\frac{\bar\zeta z}{x}\right)^{\alpha+1}}\frac{dx}{x}.$$

Отсюда получаем

$$|\omega_\alpha^{(1)}(z,\zeta)|\leqslant\frac{1}{|\zeta|}\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}}\right|^{\alpha+\varepsilon}\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\left(\frac{1-x}{1-|\zeta|}\right)^{\alpha+\varepsilon}}{(1-x)^\varepsilon}\left|\frac{1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}}{1-\frac{\bar\zeta z}{x}}\right|^{\alpha+\varepsilon}\frac{dx}{\left|1-\frac{\bar\zeta z}{x}\right|^{1-\varepsilon}}.$$

Но так как

$$\left|\frac{1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}}{1-\frac{\bar\zeta z}{x}}\right|=\left|1+\frac{\bar\zeta z|\zeta|-x}{|\zeta|x-\bar\zeta z}\right|\leqslant 2,$$

то получаем

$$|\omega_\alpha^{(1)}(z,\zeta)|\leqslant\mathrm{const}\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}}\right|^{\alpha+\varepsilon}\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{dx}{(1-x)^\varepsilon(x-|\zeta|)^{1-\varepsilon}}=$$

$$=\mathrm{const}\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}}\right|^{\alpha+\varepsilon}\left\{\int\limits_{|\zeta|}^{\frac{1+|\zeta|}{2}}+\int\limits_{\frac{1+|\zeta|}{2}}^{1}\right\}\frac{dx}{(1-x)^\varepsilon(x-|\zeta|)^{1-\varepsilon}}\leqslant$$

$$\leqslant\mathrm{const}\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{\bar\xi z}{|\zeta|}}\right|^{\alpha+\varepsilon}\left\{\frac{2^\varepsilon}{(1-|\zeta|)^\varepsilon}\int\limits_{|\zeta|}^{\frac{1+|\zeta|}{2}}\frac{dx}{(x-|\zeta|)^{1-\varepsilon}}+\frac{2^{1-\varepsilon}}{(1-|\zeta|)^{1-\varepsilon}}\int\limits_{\frac{1+|\zeta|}{2}}^{1}\frac{dx}{(1-x)^\varepsilon}\right\}=$$

$$=\frac{\mathrm{const}}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}}\right|^{\alpha+\varepsilon}. \tag{19}$$

Чтобы получить неравенство вида (18) выберем $0\leqslant\varepsilon_1<1$ такое, что $\alpha+\varepsilon_1>0$.

Имеем

$$\omega_\alpha^{(1)}(z,\zeta) < \left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}}\right|^{\alpha+1} \frac{1}{|\zeta|(1-|\zeta|)^{1-\varepsilon_1}} \int\limits_{|\zeta|}^{1} \left(\frac{1-x}{1-|\zeta|}\right)^{\alpha+\varepsilon_1} \times$$

$$\times \frac{1}{(1-x)^{\varepsilon_1}} \left|\frac{1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}}{1-\frac{\bar\zeta z}{x}}\right|^{\alpha+1} dx < \mathrm{const} \left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}}\right|^{\alpha+1}. \tag{20}$$

Для оценки $|\omega_\alpha^{(2)}(z,\zeta)|$ заметим, что при $0 \leqslant |z| < |\zeta| < 1$ имеет место (см. [2], стр. 624)

$$\left(1-\frac{z}{\zeta}\right) e^{\omega_\alpha^{(2)}(z,\zeta)} = \exp \int\limits_{|\zeta|}^{1} \left\{ \frac{1}{\left(1-\frac{xz}{\zeta}\right)^{\alpha+1}} - 1 \right\} \frac{(1-x)^\alpha}{x}\, dx. \tag{21}$$

Но последнее равенство справедливо в $|z| < 1$ всюду, кроме точек множества $e(\zeta) = \{z/|\zeta| \leqslant |z|,\ \arg z = \arg \xi\}$.

Рассмотрим отдельно два случая

1) $$\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}}\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

В этом случае имея в виду, что

$$\left|1-\frac{xz}{\zeta}\right| = \frac{1}{|\zeta|}\left|x\left(1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}\right)-(x-|\zeta|)\right| \geqslant \left|1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}\right| \left|1-\frac{x-|\zeta|}{x\left|1-\frac{z}{|\zeta|}\bar\zeta\right|}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left|1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}\right|,$$

получаем

$$\left|\int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{\left(1-\frac{xz}{\zeta}\right)^{\alpha+1}} \cdot \frac{dx}{x}\right| \leqslant \frac{2^{\alpha+1}}{|\zeta|} \frac{1}{\left|1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}\right|^{\alpha+1}} \int\limits_{|\zeta|}^{1} (1-x)^\alpha\, dx \leqslant \mathrm{const} \times$$

$$\times \left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}}\right|^{\alpha+1}. \tag{22}$$

2) $$\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{|\zeta|}{\zeta} z}\right| > \frac{1}{2}.$$

Легко видеть, что если $z \in e(\zeta)$, то условие 2) удовлетворяется.

Если $\alpha > 0$, то интегрированием по частям получаем

$$\omega_{\alpha}^{(2)}(z,\zeta)-\omega_{\alpha-1}^{(2)}(z,\zeta)=\frac{(1-|\zeta|)^{\alpha}}{\alpha}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z\right)^{\alpha}}-1\right]. \tag{23}$$

Пусть $\alpha=[\alpha]+\{\alpha\}$, при $\{\alpha\}=\beta\neq 0$ по (23) получаем:

$$\omega_{\alpha}^{(2)}(z,\zeta)=\frac{(1-|\zeta|)^{\alpha}}{\alpha}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z\right)^{\alpha}}-1\right]+\cdots \tag{24}$$

$$+\frac{(1-|\zeta|)^{\beta}}{\beta}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z\right)^{\beta}}-1\right]+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1+k)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k}\int_{0}^{|\zeta|}\times$$

$$\times(1-x)^{\beta-1}x^{k-1}\,dx.$$

Последнее слагаемое представим в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1+k)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k}\int_{0}^{|\zeta|}(1-x)^{\beta-1}x^{k-1}\,dx=$$

$$=-\left\{\int_{|\zeta|^{2}}^{1}\frac{(1-x)^{\beta-1}}{x}\,dx-\log\frac{1-\bar{\zeta}z}{|\zeta|^{2}}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1+k)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k}\int_{0}^{|\zeta|^{2}}(1-x)^{\beta-1}x^{k-1}\,dx\right\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1+k)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k}\int_{|\zeta|^{2}}^{|\zeta|}(1-x)^{\beta-1}x^{k-1}\,dx+$$

$$+\int_{|\zeta|^{2}}^{1}\frac{(1-x)^{\beta-1}}{x}\,dx-\log\frac{1-\bar{\zeta}z}{|\zeta|^{2}}.$$

Легко видеть, что

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1+k)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k}\int_{|\zeta|^{2}}^{|\zeta|}(1-x)^{\beta-1}x^{k-1}\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{|\zeta|^{2}}^{|\zeta|}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{xz}{\zeta}\right)^{\beta}}-1\right\}\frac{(1-x)^{\beta-1}}{x}\,dx\right|\leqslant\frac{1}{|\zeta|}\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-t|\zeta|)^{\beta-1}}{\left|1-\frac{t|\zeta|z}{\zeta}\right|^{\beta}}\,dt+$$

$$+\int_{|\zeta|^{2}}^{1}\frac{(1-x)^{\beta-1}}{x}\,dx\leqslant\frac{(1-|\zeta|)^{\beta-1}}{|\zeta|}\int_{|\zeta|}^{1}\frac{dt}{(1-t)^{\beta}}+\frac{(1-|\zeta|^{2})^{\beta}}{\beta|\zeta|^{2}}\leqslant\mathrm{Const}.$$

Далее имеем

$$\left|\frac{(1-|\zeta|)^{\alpha}}{\alpha}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z\right)^{\alpha}}-1\right]+\cdots+\frac{(1-|\zeta|)^{\beta}}{\beta}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z\right)^{\beta}}-1\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{1-|\zeta|z}{1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z}\right|^{|\alpha|}\left|\frac{1}{\alpha}\left[1-\left(1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}\right)^{\alpha}\right]+\cdots+\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{1}{\beta}\frac{1}{\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z}\right|^{|\alpha|}}\left[1-\left(1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z\right)^{\beta}\right]\right|\leqslant\mathrm{Const}\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z}\right|^{\alpha},\tag{26}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)-\log\frac{1-\bar\zeta z}{|\zeta|^{2}}\right\}=\log\left|\frac{z-\zeta}{1-\bar\zeta z}\right||\zeta|<0.\tag{27}$$

Из (19)—(27) и по лемме (1) получаем доказательство леммы 2 при $\{\alpha\}=\beta\neq 0$ и $-1<\alpha<0$. Если $\{\alpha\}=0$, то вместо (24) получаем

$$\omega_0^{(2)}(z,\zeta)=-\log\left(1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}\right),$$

$$\omega_n^{(2)}(z,\zeta)=\frac{(1-|\zeta|)^{n}}{n}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z\right)^{n}}-1\right]+\cdots+$$

$$+\cdots+\frac{|\zeta|z}{\zeta}\,\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z}-\log\left(1-\frac{|\zeta|z}{\zeta}\right),$$

$$\mathrm{Re}\left\{\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)-\log\left(1-\frac{|\zeta|z}{\zeta}\right)\right\}=$$

$$=\mathrm{Re}\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\,\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z}\right)\leqslant\frac{1}{|\zeta|}\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z}\right|,$$

отсюда вытекает справедливость леммы и в случае $\{\alpha\}=0$.

Доказательство теоремы. В силу определения показателя сходимости μ для любого $\varepsilon>0$ имеет место

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|z_k|)^{\mu+1+\varepsilon}<+\infty.\tag{28}$$

Пусть $\mu<\alpha\leqslant\mu+1$. Тогда для любого ε, $0<\varepsilon<1$ такого, что $\alpha+\varepsilon>\mu+1$, из (28) по лемме 2 получаем

$$\log^{+}|B_{\alpha}(z,z_k)|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1-|z_k|}{1-\frac{\bar z_k}{|z_k|}z}\right|^{\alpha+\varepsilon}.$$

Следовательно

$$m_r(B_{\alpha})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^{+}|B_{\alpha}(re^{i\theta},z_k)|\,d\theta+O(1)\leqslant\frac{\mathrm{const}}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\,\frac{1}{(1-r)^{\alpha+\varepsilon-1}}.\tag{29}$$

Отсюда получаем

$$\rho = \lim_{r \to 1-0} \sup \frac{\log m_r(B_\alpha)}{-\log(1-r)} \leqslant \mu + \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1 > 0$ удовлетворяет условию $\alpha + \varepsilon = \mu + 1 + \varepsilon_1$. Из (29) ввиду произвольности ε, $\alpha + \varepsilon > \mu + 1$ получаем $\rho \leqslant \mu$. Если последовательность сходящегося типа, т. е. $\sum (1 - |z_k|)^{\mu+1} < +\infty$, то из (18) по аналогии с (29) получаем

$$m_r(B_\mu) \leqslant \frac{\text{const}}{(1-r)^\mu} \text{ и } \rho \leqslant \mu. \tag{30}$$

Следовательно, в обоих случаях получаем

$$\rho \leqslant \mu. \tag{31}$$

Из (31) и (2) получаем утверждение теоремы.

В заключение автор благодарит академика АН Армении М. М. Джрбашяна и профессора В. С. Захаряна за постановку задачи и обсуждение результатов.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 3. XII. 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Tsuji*. Potential theory in modern theory. Maruzenco, L, T. D., Tokyo. 1959.
2. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, „Наука", М., 1966.
3. *Н. К. Бари*. Тригонометрические ряды, Физматгиз, 1961.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մաթեմատիկա XXV, № 4, 1990 Математика

УДК 517.5

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

К. С. КАЗАРЯН

УСИЛЕНИЕ ТЕОРЕМЫ Р. БОАСА И Г. ПОЛЛАРДА О МУЛЬТИПЛИКАТИВНОМ ДОПОЛНЕНИИ

В 1948 г. была опубликована следующая теорема Р. П. Боаса и Г. Полларда [1].

Теорема А. *Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система (ПОНС) определенных на отрезке $[a, b]$ функций. Тогда для любого натурального числа N существует ограниченная функция m такая, что система $\{mf_n\}_{n=N+1}^{\infty}$ является полной в $L^2_{[a,b]}$.*

В 1965 г. дав ответ на вопрос, поставленный в работе [1], Дж. Прайс и Р. Зинк [2] описали системы функций, обладающих таким свойством. В 1973 г. Бен—Ами Браун [3]* усилил теорему А. показав, что при выполнении условий этой теоремы можно найти такую ограниченную функцию m, чтобы для любой функции $f \in L^2_{[a,b]}$ нашелся ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k m f_k$, который в метрике L^2 сходился бы к заданной функции f^*. В работах автора [4]—[7] был исследован вопрос о возможности мультипликативного дополнения до базиса. Выяснилось, что для некоторых ПОНС $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, для любого $N = 1, 2, \cdots$, подсистемы $\{f_n\}_{n=N+1}^{\infty}$ невозможно мультипликативно дополнить до базиса в $L^2_{[a,b]}$ ([5], [7]). С другой стороны, любую подсистему системы Хаара, полученную удалением из нее конечного числа функций, можно мультипликативно дополнить до базиса и, более того, до безусловного базиса в $L^2_{[0,1]}$ (см. [5], [6]), Отметим также, что в общем случае ответ на этот вопрос зависит также от удаленного из заданной ПОНС набора функций (см. [5], [7]). В основе подхода, примененного для решения вопроса о возможности мультипликативного дополнения до базиса, лежала следующая (см. [4], [5])

Лемма А. *Пусть задана некоторая ПОНС $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, определенных на измеримом множестве E, $|E| > 0$, функций. Пусть, далее, N — произвольное натуральное число и m — некоторая ограниченная измеримая функция. Тогда для того, чтобы система $\{mf_n\}_{n=N+1}^{\infty}$ была полной и минимальной в L^2_E необходимо и достаточно, чтобы, соответственно, выполнялись нижеследующие условия* 1) *и* 2).

* В настоящей заметке мы рассматриваем только случай $p=2$. В общем случае, когда $p > 1$ схема приведенного доказательства проходит, но для получения окончательной формулировки, кроме технических моментов, возникает ряд дополнительных вопросов, к которым автор надеется обратиться в другой публикации.

1) *Функция* $[m(x)]^{-1}\sum_{k=1}^{N} a_k f_k(x)$, *где* a_k $(1\leqslant k\leqslant N$ — *действительные числа, принадлежат пространству* L_E^2 *тогда и только тогда, когда* $a_k=0$ $(1\leqslant k\leqslant N)$.

2) *Для каждого* n $(n=N+1, N+2,\cdots$, *существуют единственные числа* $a_k^{(n)}$ $(1\leqslant k\leqslant N$ *такие, что функции*

$$g_n(x)=[m(x)]^{-1}\sum_{k=1}^{N} a_k^{(n)} f_k(x)+f_n(x)]$$

принадлежат пространству L_E^2.

В работах автора [8], [9] для таких классических ПОНС как системы Хаара и Уолша, тригонометрическая система, в частности, был исследован вопрос о существовании функций m, чтобы одновременно выполнялись условия 1) и 2). Более того, для заданной ПОНС и натурального числа N был описан класс всех таких функций. Но в общем случае этот вопрос оставался открытым. Справедлива следующая

Теорема M. G. *Пусть* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *ПОНС функций, определенных на измеримом множестве* E, $|E|>0$. *Тогда для произвольного натурального числа* N *существует ограниченная измеримая функция* m *такая, что* $\{mf_n\}_{n=N+1}^{\infty}$ *является полной и минимальной в* L_E^2.

Доказательство. Обозначим через F измеримое множество точек, являющихся точками аппроксимативной непрерывности для всех функций f_n, $n=1,2,\cdots$. Согласно теореме Данжуа очевидно имеем, что $|F|=|E|$. Возьмем произвольный набор N точек $\{x_j\}_{j=1}^{N}=X\subset F$ таких, что функции $\{f_j\}_{j=1}^{N}$ линейно независимы на X. Отсюда очевидно имеем, что для любого $n=N+1$, $N+2,\cdots$, существуют действительные числа $a_k^{(n)}$ $(1\leqslant k< N)$ такие, что

$$\varphi_n(x)=f_n(x)+\sum_{k=1}^{N} a_k^{(n)} f_n(x)=0 \text{ при } x\in X. \tag{1}$$

Обозначим

$$m_n(x)=\max_{N+1<k<N+n}|\varphi_k(x)|,\ n=1,2,\cdots. \tag{2}$$

Очевидно, что точки x_j $(1<j<N)$ являются точками аппроксимативной непрерывности для функций m_n $(n=1, 2,\cdots)$ и

$$m_n(x)=0 \text{ при } x\in X,\ n=1,2,\cdots. \tag{3}$$

Построим измеримую ограниченную функцию m_0 по следующей схеме. Пусть

$$E_1=\{x\in E:|m_1(x)|>\lambda_1=1\},\ E_1^{*}=(E\setminus E_1)\cap\{x:m_1(x)\neq 0\}. \tag{4}$$

Если $|E_1^{*}|>0$, то существует число λ_2, $0<\lambda_2<\frac{1}{2}\lambda_1$ такое, что

$$F_1=\{x\in E_1^{*}:m_2(x)>\lambda_2\},\ |F_1|>\frac{1}{2}|E_1^{*}|. \tag{5}$$

Если $|E_1^*| = 0$, то $\lambda_2 = \lambda_1/2$ и $F_1 = \varnothing$. Для $n \geqslant 2$ определяем

$$E_n = E_{n-1} \cup F_{n-1}, \quad E_n^* = (E \setminus E_n) \cap \{x : m_{n+1}(x) \neq 0\}. \tag{6}$$

Когда $|E_n^*| > 0$, находится число λ_{n+1}, $0 < \lambda_{n+1} < \frac{1}{2}\lambda_n$ такое, что

$$F_n = \{x \in E_n^* : m_{n-1}(x) > \lambda_{n+1}\}, \quad |F_n| > \frac{1}{2}|E_n^*|. \tag{7}$$

Если $|E_n^*| = 0$, то $\lambda_{n+1} = \frac{1}{2}\lambda_n$ и $F_n = \varnothing$. Учитывая, что последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно стремится к нулю, из полноты системы $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ в L_E^2 и из условий (1), (2), (6), (7) сразу получаем

$$\left| E_1 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right| = |E|.$$

Следовательно, полагая

$$m_0(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ при } x \in E_1 \\ \min(\lambda_n, m_{n+1}(x)), & \text{при } x \in F_n, \end{cases} \tag{8}$$

определим функцию m_0 почти всюду на множестве E. Из (6)—(8) очевидно имеем, что

$$m_0(x) > m_n(x) \text{ при } x \in F_n.$$

Следовательно, из (4)—(6) имеем, что

$$\frac{m_n(x)}{m_0(x)} \leqslant 1 \text{ при } x \in E \setminus E_n, \ n = 1, 2, \cdots. \tag{9}$$

Так как точки $X = \{x_j\}_{j=1}^{s}$ являются точками аппроксимативной непрерывности для функций $m_n (n = 1, 2, \cdots)$ и выполняется условие (3), то из (4)—(7) очевидно имеем, что для произвольных $n (n = 1, 2 \cdots)$ и $j (1 \leqslant j \leqslant s)$

$$\lim_{h \to 0+} \frac{|(x_j - h, x_j + h) \cap (E / E_n)|}{2h} = 1. \tag{10}$$

Из этих соображений имеем также, что в любой окрестности точки $x_j (1 \leqslant j \leqslant s)$ функция m_0 не ограничена и

$$X \subset E \setminus E_n \ (n = 1, 2, \cdots).$$

Отсюда легко видеть, что для любого $j (1 \leqslant j \leqslant s)$ существует некоторая функция g_j, удовлетворяющая следующим условиям:

а) $g_j(x) \geqslant 1$, при $x \in E$; $g_j \in L_E^2$,

б) функция g_j ограничена вне любой окрестности точки x_j,

в) $g_j(x) \cdot [m_0(x)]^{-1} \in L_E^2$.

Теперь, если определим искомую функцию m равенством

$$m(x) = m_0(x) \prod_{1 \leqslant j \leqslant s} [g_j(x)]^{-1},$$

то эта функция будет удовлетворять условиям теоремы М. G. Действительно, ввиду того, что функции $\{f_k\}_{k=1}^{N}$ линейно независимы на множестве X, из условий а) — в) и (11) очевидно следует, что условие 1) леммы А имеет место. С другой стороны, из условий (1), (2), (9)—(11) и а) — в) легко заметить, что условие 2) леммы А также выполняется. Теорема доказана.

Институт математики
АН Армении

Поступила 10. II. 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. P. Boas, H. Pollard*. The multiplicative completion of sets of functions, Bull Amer. Math. Soc., 1948, v. 54, 518—522.
2. *J. J. Price, R. E. Zink*. On sets of functions that can be multiplicatively completed, Ann. Math., 1965, v. 82, 139—145.
3. *Braun Ben—Ami*. On the multiplicative completion of certain basic sequences in L^p, $1 < p < \infty$, Trans. Amer. Math. Soc., 1975, v. 176, 499—508.
4. *К. С. Казарян*. О мультипликативном дополнении базисных последовательностей до базисов в L^p, $1 < p < \infty$. ДАН Арм.ССР, 1976, т. 62, 203—209.
5. *К. С. Казарян*. О мультипликативном дополнении некоторых неполных ортонормированных систем до базисов в L^p, $1 \leq p < \infty$, Analysis Math., 1978, v. 4, 37—52.
6. *K. S. Kazarian*. On bases and unconditional bases in the spaces $L^p(d\mu)$, $1 \leq p < \infty$ Stud. Math., 1981, v. 71, 227—249.
7. *К. С. Казарян*. Мультипликативное дополнение до базисов в L^p, $1 < p < \infty$ равномерно ограниченных ортонормированных систем, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1985, 18, 344—361.
8. *К. С. Казарян*. О мультипликативном дополнении некоторых систем, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1978, 13, 315—351.
9. *K. S. Kazarian*. Summability of generalized Fourier series and Dirichlet's problem in $L^p(d\mu)$ and weighted H^p-spaces, Analysis Math., 1987 13, 173—197.

УДК 517.547

Интегральные представления весовых пространств функций, голоморфных в трубчатых областях. Карапетян А. О. Известия АН Армении, серия «Математика», 1990, XXV, № 4, 315—332.

Пусть V — острый открытый конус в R^n $(n \geqslant 1)$ и $T_V = \{z = x + iy \in C^n : x \in R^n, y \in V\}$. В настоящей статье установлены интегральные представления типа Винера-Пэли для классов $H^p_{s,\gamma}(T_V)$, состоящих из голоморфных в трубчатой области $T_V \subset C^n$ функций $f(z) \equiv f(x + iy)$, подчиненных условию вида:

$$\int_V \left\{ \int_{R^n} |f(x + iy)|^p \, dx \right\}^s \cdot \gamma(y) \, dy < +\infty,$$

где $1 \leqslant p \leqslant 2$, $0 < s < +\infty$ и непрерывная положительная функция $\gamma(y)$, $y \in V$, удовлетворяет условию

$$\varliminf_{|y| \to +\infty} \frac{\ln \gamma(y)}{|y|} \geqslant 0 \; (y \in V). \qquad (2)$$

Затем, исходя из конуса V и функции γ, удовлетворяющей, помимо (2), некоторым дополнительным условиям, строится ядро $\Phi(z, w)$, z, $w \in T_V$, голоморфное по z, антиголоморфное по w и воспроизводящее функции класса $H^p_{s,\gamma}(T_V)$, где $1 \leqslant p \leqslant 2$, а параметр s пробегает определенный промежуток. Библиографий 18.

УДК 517.986

Инвариантные алгебры операторных полей на компактных абелевых группах. Арзуманян В. А., Григорян С. А. Известия АН Армении, серия «Математика», 1990, XXV, № 4, 333—343.

Работа посвящена некоммутативным равномерным алгебрам C^*-значных непрерывных функций на компактной абелевой группе, инвариантным относительно сдвигов. При естественных условиях на алгебру получены аналоги некоторых известных результатов Аренса, Зингера, Гоффмана из теории равномерных алгебр (в частности, описание относительного спектра, вопросы максимальности, существование точек пика). Библиографий 15.

УДК 519.212.3

Интенсивности прореженных процессов треугольников, порожденных пуассоновским точечным процессом на плоскости. Фаталов В. Р. Известия АН Армении, серия «Математика», 1990, XXV, № 4, 334—352.

На плоскости рассматривается суперпозиция M_2-инвариантного пуассоновского точечного процесса Φ_1 и M_2-инвариантного пуассоновского процесса прямых Φ_2, где M_2 — группа евклидовых движений плоскости. Определим процесс треугольников $T_{k,l} = \{P_i P_j P_s\}$ следующим образом:

(а) каждая вершина P_q принадлежит реализации процесса Φ_1;

(б) внутри треугольника $P_i P_j P_s$ находится ровно $k \geqslant 0$ точек из процесса Φ_1;

(в) треугольник $P_i P_j P_s$ пересекают ровно $l \geqslant 0$ прямых из процесса Φ_2.

Для вычисления интенсивности процесса $T_{k,l}$ найдена формула в виде одномерного интеграла от трех специальных функций. Приведены также численные таблицы на основе этой формулы. Библиографий 11.

УДК 517.98

Об операторном уравнении $HY-YK=C$. Караханян М. И. Известия АН Армении, серия «Математика», 1990, XXV, № 4, 353—360.

В статье для операторного уравнения $HY-YK=C$, где H, K, C есть спектральные операторы скалярного типа, действующие в слабо полном (в частности рефлексифном) банаховом пространстве, доказывающих некоторые критерии разрешимости. В частности, доказывается, что разрешимость операторного уравнения $HY-YK=C$. эквивалентна подобно операторных матриц $\begin{bmatrix} H, & O \\ O, & K \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} H, & C \\ O, & K \end{bmatrix}$. Библиографий 11.

УДК 519.5

Интеграл по нечеткой мере. Гольдберг А. А. Известия АН Армении, серия «Математика», 1990, XXV, № 4, 361—373.

Вводится новое понятие интеграла по нечеткой мере, заданной на некоторой алгебре нечетких множеств. В случае четких множеств и четкой меры оно совпадает с классическим, а в случае четких множеств и нечеткой меры совпадает с понятием интеграла по неаддитивной мере, введенным автором в 1964 году. Библиографий 17.

УДК 517.9

Об асимптотике решения однородного консервативного уравнения Винера-Хопфа. Арабаджян Л. Г., Арабаджян А. Г. Известия АН Армении, серия «Математика» ,1990, XXV, № 4, 374—384.

В статье рассматриваются вопросы асимптотического поведения решения консервативного уравнения

$$S(x)=\int_0^\infty K(x-t)\,S(t)\,dt,$$

$$0\leqslant K\in L_1(-\infty,\ \infty),\qquad \int_{-\infty}^{\infty}K(t)\,dt=1, \tag{1}$$

при дополнительном условии $K(-x)=K(x)$, $x>0$.

При $\nu_2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 K(x)\,dx<+\infty$ ранее получена оценка $S(x)\sim$ $\sim\dfrac{x}{\sqrt{\nu_2}}$ при $x\to\infty$.

Для медленно убывающих ядер K (т. е. $\nu^2=+\infty$) в настоящей статье получена асимптотическая оценка для решения S. Аналогичные оценки получены для компонент $S_j(x)$ вектор-функция $S(x)=(S_1(x)$ $\cdots, S_n(x))$ являющейся решениэм векторного аналога уравнения (1). Библиографий 13 .

УДК 517.547.22

Полная регулярность роста рядов Ньютона. Черных Н. М. Известия АН Армении, серия «Математика», 1990, XXV, № 4, 385—393.

Получены достаточн признаки полной регулярности роста (п. р. р.) целых функций экспоненциального типа, представленных в виде ряда Ньютона, аналогичные полученным ранее автором и Н. В. Говоровым признакам п. р. р степенных рядов. Библиографий 9.

УДК 517.53

Об одной постановке задачи сопряжения в классах L^p. Айрапетян Г. М. Известия АН Армении, серия «Математика», 1990, XXV, № 4. 394—399.

Пусть T—единичная окружность, D^+—единичный круг, а D^-—множество $|z|>1$. В работе исследуется задача сопряжения в следующей постановке: найти голоморфную в D^+ и D^- функцию $\Phi(z)$ по граничному условию

$$\lim_{r\to 1-0}\int_T |\Phi^+(r\alpha(t))-D(t)\Phi^-(r^{-1}t)-f(t)|^p\,|dt|=0,$$

где $f(t)\in L^{p,\varepsilon}(T)$ — определенный подкласс функций из $L^p(T)$, $D(t)$ — кусочно непрерывная функция, $\alpha(t)$ —гомеоморфизм, сохраняющий ориентацию на T, а $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ сужения функции $\Phi(z)$ на D^+ и D^- соответственно. Библиографий 8.

УДК 517.53

О порядке произведения М. М. Джрбашяна $B_\alpha(z, z_k)$. Багдасарян Д. Т. Известия АН Армении, серия «Математика», 1990, XXV, № 4, 400—407.

В работе доказано, что если ρ и μ, соответственно, порядок роста и показатель сходимости последовательности $\{|z_k|\}_1^\infty$, то для произведения Джрбашяна $B_\alpha(z, z_k)$ имеет место равенство $\rho=\mu$, если $\mu<\alpha\leqslant\mu+1$. Библиографий 3.

УДК 517.5

Усиление теоремы Р. Боаса и Г. Полларда о мультипликативном дополнении. Казарян К. С. Известия АН Армении, серия «Математика», 1990, XXV, № 4, 408—411.

В статье доказывается следующая

Теорема 1. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — ПОНС функций определенных на измеримом множестве E, $|E|>0$. Тогда для произвольного натурального числа N существует ограниченная измеримая функция m такая, что $\{mf_n\}_{n=N+1}^\infty$ является полной и минимальной в L^2_E.

Эта теорема показывает, что в теореме Р. Боаса и Г. Полларда кроме полноты можно добиться и минимальности системы $\{mf_n\}_{n=N+1}^\infty$. Библиографий 9.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՀԱՄԱՌՈՏ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

СОДЕРЖАНИЕ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

CONTENTS

SHORT COMMUICATIONS