ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке) а кратких сообщений—не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленым на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствущем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

1990, h. 25, N

1 ր. 20 կ.
Р. К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contribttors who desire to have their articles published in the proceedings zvestia of the Academy of Sciences of the Armenien S.S.R., series "Matomatika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initals and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date muse be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to indicated by a numeral in square brackets properey inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article shoule contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitied ot twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

Математика, 1990, т. XXV, № 3, стр. 215—311.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXV, № 3, 1990 Математика

УДК 517.5

А. М. АВАКЯН

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННОЙ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ В ОДНОМЕРНОМ И ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЯХ

1°. Введение. Обозначим через $L_p = L_p(0,1)$ и $L_p(I)$ пространство измеримых по Лебегу соответственно на $[0,1]$ и $I=[0,1]\times[0,1]$ функций $f(x)$ с обычной нормой, а через W_p и $W_p(I)$ — единичные замкнутые шары в этих пространствах. Пусть, далее, $L_p^r(0,1)$ ($r=0, 1, 2, \cdots, 1\leqslant p\leqslant\infty$) — множество r раз дифференцируемых функций f, у которых $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на $[0,1]$ и $f^{(r)}\in L_p(0,1)$, а $L_p^{r,k}$ ($r, k=0,1,2,\cdots$) — множество всех функций $f(x, y)$, определенных на I таких, что $f^{(\nu,\mu)}(x, y)$ ($0\leqslant\nu< r-1$, $0\leqslant\mu\leqslant k-1$) непрерывны на I, $f^{(r,\mu)}(x, y)\in L_p(0,1)$ ($0\leqslant\mu<k$) для всех фиксированных y, $f^{(r,\mu)}(x,y)$ абсолютно непрерывна по y для всех фиксированных x, $f^{(\nu,k)}(x,y)\in L_p(0,1)$ ($0\leqslant\nu\leqslant r-1$) для всех фиксированных x, $f^{(\nu,k)}(x, y)$ абсолютно непрерывна по x для всех фиксированных y и $f^{(r,k)}(x, y)\in L_p(I)$ ($1<p\leqslant\infty$), где

$$f^{(\nu,\mu)}(x, y)=\frac{\partial^{\nu+\mu}}{\partial x^\nu\, \partial y^\mu}f(x,y).$$

причем смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования.

В множествах L_p^k и $L_p^{r,k}$ выделим классы

$$W_p^r=\{f: f\in L_p^r,\ f^{(r)}\in W_p\},$$

$$W_p^{r,k}=\{f: f\in L_p^{r,k},\ f^{(r,k)}\in W_p(I),\ \|f^{(\nu,k)}(1,\ \cdot)\|_p\leqslant$$
$$\leqslant 1\ (0\leqslant\nu\leqslant r-1),\ \|f^{(r,\mu)}(\cdot,\ 1)\|_p\leqslant 1\ (0\leqslant\mu\leqslant k-1)\},$$

где

$$\|f^{(\nu,k)}(1,\ \cdot)\|_p=\left(\int\limits_0^1|f^{(\nu,k)}(1,\ y)|^p dy\right)^{1/p}.$$

Наилучшие приближения классов W_p^r и $W_p^{r,k}$ ($1<p\leqslant\infty$, $r, k=0, 1, 2, \cdots$; $W_p^0=W_p$, $W_p^{0,0}=W_p(I)$) подпространствами $\mathrm{N}\subset L_q$ и $\mathfrak{M}\subset L_q(I)$ ($1\leqslant q<\infty$) соответственно, определяются следующим образом:

$$E(W_p^r,\ \mathrm{N})_q=\sup_{f\in W_p^r}\ \inf_{g\in \mathrm{N}}\|f-g\|_q,$$

$$E(W_p^{r,k}, \mathfrak{M})_q = \sup_{f \in W_p^{r,k}} \inf_{g \in \mathfrak{M}} \|f - g\|_q.$$

Рассмотрим задачу наилучшего приближения в метриках различных пространств функций на $[0, 1]$ и I. Речь будет идти о нахождении наилучшего приближения введенных выше классов подпространствами кусочно-постоянных. Метод исследования основан на использовании соотношений двойственности и специфики пространств кусочно-постоянных.

2°. Одномерный случай. Прежде, чем перейти к основной теореме этого раздела, докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть q', γ, l — произвольные положительные числа, причем $1 < q' < \infty$.*

Положим

$$A(q', \gamma) = \left\{ g : g \in L^1_{q'}(0, l), \int_0^l |g'(u)|^{q'}\, du \leqslant \gamma, \right.$$

$$\left. g(0) = g(l) = 0 \right\} \quad (1 < q' < \infty)$$

и пусть $A^0(q', \gamma)$ $(1 < q' < \infty)$ состоит из всех функций $g \in A(q', \gamma)$, которые в начале сегмента $[0, l]$ строго монотонно возрастают, потом могут принимать постоянное значение, а в конце сегмента $[0, l]$ строго монотонно убывают. Тогда

а) *Для любого $p' \in [1, \infty]$*

$$\sup_{g \in A(q', \gamma)} \|g\|_{p'} = \sup_{g \in A^0(q', \gamma)} \|g\|_{p'} \quad (1 < q' < \infty).$$

в) *Если q — число, сопряженное с q' $(1/q + 1/q' = 1)$, то*

$$\sup\{\|g\|_\infty : g \in A(q', \gamma)\} = \frac{1}{2} l^{1/q} \gamma^{1/q'},$$

с) *Если $p' \in [1, \infty]$ и $p' \leqslant q'$, то*

$$\sup\{\|g\|_{p'} : g \in A(q', \gamma)\} \leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{q}{p' + q} \right)^{1/p'} \gamma^{1/p'} l^{1/p' + 1/q},$$

если $p' > q'$, то

$$\sup\{\|g\|_{p'} : g \in A(q', \gamma)\} < \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{q-1}} \frac{p'}{p' + q} \right)^{1/p'} \gamma^{1/q'} l^{1/p' + 1/q},$$

где q, как и прежде, число, сопряженное с q'.

Доказательство. Часть а) будет доказана, если для любой функции $g \in A(q', \gamma)$ мы сможем указать функцию $\bar{g} \in A^0(q', \gamma)$, такую, что

$$\|g\|_{p'} \leqslant \|\bar{g}\|_{p'} \quad (1 \leqslant p' \leqslant \infty).$$

Поскольку $g \in L^1_{q'}(0, l) \subset L^1_1(0, l)$, то ([1], гл. 8) $|g|$ — функция ограниченной вариации. Обозначим через $v(x)$ и $w(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ соответственно полные вариации функций $|g(t)|$ и $|g(l - t)|$ на отрезке $[0, x]$ и определим функции $p(x)$ и $q(x)$ равенствами

$$p(x) = \frac{v(x) + |g(x)|}{2}, \quad q(x) = \frac{w(x) + |g(l - x)|}{2}.$$

Ясно, что $p(0)=q(0)=0$. Из курса математического анализа известно ([2], гл. 6), что p и q монотонно возрастают на $[0, l]$

$$|g(x)| \leqslant p(x),\ |g(l-x)| \leqslant q(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l), \tag{1}$$

причем $p(x)=\mathrm{const}$ в тех промежутках, где $|g|$ монотонно убывает, $p(x)=|g(x)|+\mathrm{const}$ — на остальном множестве, $q(x)=\mathrm{const}$ там, где $|g|$ монотонно возрастает и $q(x)=|g(l-x)|+\mathrm{const}$ — на остальном множестве. Поскольку число интервалов постоянства функций p и q не более, чем счетно, мы можем пронумеровать их. Пусть $\{(a_i, b_i)\}_i$ — все интервалы постоянства функции p, а $\{(c_j, d_j)\}_j$ — все интервалы постоянства функции q. Из вышесказанного заключаем, что

$$p'(x)=h^+(x),\ q'(l-x)=-h^-(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l), \tag{2}$$

где

$$h^+(x)=\frac{1}{2}(||g|'(x)|+|g|'(x)),\ h^-(x)=\frac{1}{2}(||g|'(x)|-|g|'(x))$$

соответственно положительная и отрицательная части производной функции $|g|$.

Положим $E=[0, l]\setminus(\bigcup_i (a_i, b_i))$, $F=[0, l]\setminus(\bigcup_j (c_j, d_j))$ и определим функции $\bar{p}$ и $\bar{q}$ равенствами

$$\bar{p}\Big(x-\sum_{b_i<x}(b_i-a_i)\Big)=p(x),\ x\in E$$

$$\bar{q}\Big(x-\sum_{d_j<x}(d_j-c_j)\Big)=q(x),\ x\in F.$$

Допуская некоторую вольность речи, можем сказать, что графики функций $\bar{p}$ и $\bar{q}$ получаются сжатием к оси ординат графиков p и q, причем полученные таким образом графики строго монотонно возрастают.

Нетрудно убедиться в том, что $\bar{p}$ и $\bar{q}$ определены соответственно на $[0, \alpha]$ и $[0, \beta]$, где

$$\alpha=l-\sum_i(b_i-a_i),\ \beta=\sum_j(d_j-c_j)$$

и $\alpha+\beta\leqslant l$. Теперь можем определить $\bar{g}$:

$$\bar{g}(x)=\begin{cases}\bar{p}(x), & \text{если } 0\leqslant x<\alpha\\ \bar{p}(\alpha), & \text{если } \alpha\leqslant x\leqslant l-\beta\\ \bar{q}(l-x), & \text{если } l-\beta<x\leqslant l.\end{cases}$$

Наши предположения о функции g показывают, что $\bar{g}$ — абсолютно непрерывная функция, $\bar{g}(0)=\bar{g}(l)=0$, а из (1) получаем

$$|g(x)|\leqslant\bar{g}(x),\ 0\leqslant x\leqslant l.$$

Поэтому $\|g\|_{p'}\leqslant\|\bar{g}\|_{p'}$ и доказательство части а) будет завершено, если покажем, что $\|\bar{g}\|_{q'}^{q'}\leqslant\gamma$.

Но в силу (2)

$$\|\tilde{g}\|_{q'}^{q'} = \int_0^{\varepsilon} |p'(x)|^{q'} dx + \int_{l-\varepsilon}^{l} |\bar{q}'(l-x)|^{q'} dx =$$

$$= \int_E (h^+(x))^{q'} dx + \int_F (h^-(x))^{q'} dx = \int_E (h^+(x) + h^-(x))^{q'} dx +$$

$$+ \int_F (h^+(x) + h^-(x))^{q'} dx = \int_0^l (h^+(x) + h^-(x))^{q'} dx =$$

$$= \|g_1'\|_{q'}^{q'} = \|g\|_{q'}^{q'} < \gamma.$$

в) Пусть функция $g \in A(q', \gamma)$ фиксирована, $h(u) = g'(u)$ $(0 \leqslant \leqslant u \leqslant l)$, а $h^+(u)$ и $h^-(u)$ — положительная и отрицательная части функции $g'(u)$, т. е.

$$h^+(u) = \frac{|g'(u)| + g'(u)}{2}, \quad h^-(u) = \frac{|g'(u)| - g'(u)}{2}.$$

Ясно, что $|g'(u)| = h^+(u) + h^-(u)$, $g'(u) = h^+(u) - h^-(u)$, а из условия $g(0) = g(l) = 0$ следуют равенства

$$\int_0^l h^+(u)\,du = \int_0^l h^-(u)\,du = \frac{1}{2}\int_0^l |g'(u)|\,du.$$

Поскольку для любой функции $g(x)$ из $A(q', \gamma)$ имеет место представление

$$g(x) = \int_0^x g'(u)\,du, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

то с помощью неравенства Гельдера мы можем сверху оценить величину $\|g\|_\infty$:

$$\|g\|_\infty = \max_{0 \leqslant x \leqslant l} |g(x)| = \max_{0 \leqslant x \leqslant l} \left| \int_0^x g'(u)\,du \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0 \leqslant x \leqslant l} \int_0^x h^+(u)\,du \leqslant \int_0^l h^+(u)\,du = \frac{1}{2}\int_0^l |g'(u)|\,du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\int_0^l |g'(u)|^{q'} du\right)^{1/q'} \left(\int_0^l du\right)^{1/q} \leqslant \frac{1}{2}\gamma^{1/q'} l^{1/q}.$$

Таким образом

$$\|g\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\gamma^{1/q'} l^{1/q} \tag{3}$$

и чтобы завершить в) нам необходимо построить экстремальную функцию $g_0 \in A(q', \gamma)$, для которой неравенство (3) превращается в равенство.

Легко проверить, что функция

$$g_0(x) = \begin{cases} \gamma^{1/q'} x l^{-1/q'}, & 0 \leqslant x \leqslant l/2 \\ \gamma^{1/q'} (l-x) l^{-1/q'}, & l/2 \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

принадлежит классу $A(q', \gamma)$ и, кроме того

$$g_0\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{2} l^{1/q} \gamma^{1/q'},$$

т. е. является экстремальной.

с) В силу части а), часть с) будет доказана, если в требуемых доказательства неравенствах множество $A(q', \gamma)$ заменить множеством $A^\circ(q', \gamma)$. Сначала докажем 2-е неравенство, т. е. случай, когда $p' \leqslant q'$. Пусть $g \in A^\circ(q', \gamma)$ фиксирована и точка $c \in (0, l)$ выбрана таким образом, что g монотонно возрастает на $(0, c)$ и монотонно убывает на (c, l). Не нарушая общности считаем, что $c < l/2$, так как в противном случае рассмотрим функцию $g(l-x)$.

Определим числа γ_+ и γ_- равенствами

$$\gamma_+ = \int_0^c ((h^+(u))^{q'} du, \quad \gamma_- = \int_c^l (h^-(u))^{q'} du$$

и положим

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} \gamma_+^{1/q'} x^{1/q}, & 0 \leqslant x \leqslant l/2 \\ \gamma_-^{1/q'} (l-x)^{1/q}, & l/2 < x \leqslant l. \end{cases}$$

Заметим, что $\bar{g}$ не обязана быть непрерывной. Применяя неравенство Гельдера мы можем поточечно оценить $g(x)$ на сегменте $[0, c]$:

$$g(x) = \int_0^x h^+(u)\, du \leqslant \left(\int_0^x (h^+(u))^{q'} du\right)^{1/q'} \left(\int_0^x du\right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_+^{1/q'} x^{1/q} = \bar{g}(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant c).$$

Ввиду условия $g(x) \in A^\circ(q', \gamma)$, для любого $x \in [0, l/2]$ имеем

$$g(x) \leqslant g(c) \leqslant \gamma_+^{1/q'} c^{1/q} \leqslant \gamma_+^{1/q'} x^{1/q}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l/2.$$

А это означает, что $g(x) \leqslant \bar{g}(x)$ для любого $x \in [0, l/2]$.

Аналогично, рассматривая функцию $g(l-x)$ и учитывая равенство $g'(l-x) = h^-(l-x)$, $0 \leqslant x \leqslant l/2$, получаем

$$g(l-x) = \int_0^{l-x} h^-(l-u)\, du = \int_{l-x}^{l} h^-(u)\, du \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{l-u}^{l} (h^-(u))^{q'} du\right)^{1/q'} \left(\int_{l-x}^{l} du\right)^{1/q} \leqslant \gamma_-^{1/q'} (l-x)^{1/q}.$$

Поэтому

$$g(x) \leqslant \gamma_-^{1/q'}(l-x)^{1/q} \leqslant \tilde{g}(x),\ l/2 \leqslant x \leqslant l.$$

Итак, $g(x) \leqslant \tilde{g}(x)$ для любого $x \in [0, l]$ и мы можем сверху оценить $\|g\|_{p'}$:

$$\|g\|_{p'}^{p'} = \int_0^l (g(x))^{p'} dx \leqslant \int_0^l (\tilde{g}(x))^{p'} dx = \int_0^{l/2} \gamma_+^{p'/q'} x^{p'/q} dx +$$

$$+ \int_{l/2}^{l} \gamma_-^{p'/q'} (l-x)^{p'/q'} dx = \frac{q}{p+q'} (\gamma_+^{p'/q'} + \gamma_-^{p'/q'}) \left(\frac{l}{2}\right)^{p'/q} + 1.$$

Но сумма $\gamma_+^{p'/q'} + \gamma_-^{p'/q'}$ $(p' < q')$ при условии $\gamma_+ + \gamma_- = \gamma$ принимает свое максимальное значение тогда, когда $\gamma_+ = \gamma_- = \gamma/2$.

В самом деле, если

$$L(\gamma_+, \gamma_-) = \gamma_+^{p'/q'} + \gamma_-^{p'/q'} - \lambda\gamma_+ - \lambda\gamma_- - \lambda\gamma$$

— функция Лагранжа, то из необходимых условий экстремума

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_+} = \frac{p'}{q'} \gamma_+^{p'/q'-1} - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_-} = \frac{p'}{q'} \gamma_-^{p'/q'-1} - \lambda = 0$$

заключаем, что $\gamma_+ = \gamma_- = \gamma/2$. Нетрудно проверить, что точка $(\gamma/2, \gamma/2)$, при условии $p' \leqslant q'$, является точкой максимума для суммы $\gamma_+^{p'/q'} + \gamma_-^{p'/q'}$. Следовательно

$$\|g\|_{p'}^{p'} \leqslant \frac{q}{p'+q} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{p'/q'} 2\left(\frac{1}{2}\right)^{p'/q'+1} l^{p'/q+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{p'/q} \times$$

$$\times \frac{q}{p'+q} \left(\frac{1}{2}\right)^{p'/q'} \gamma^{p'/q'} l^{p'/q'+1} = \frac{q}{p'+q} \left(\frac{1}{2}\right)^{p'} \gamma^{p'/q'} l^{p'/q+1},$$

$$\|g\|_{p'} \leqslant \frac{1}{2} \gamma^{1/q'} \left(\frac{q}{p'+q}\right)^{1/p'} l^{1/q+1/p'}.$$

Для того, чтобы доказать второе неравенство части c) (случай, когда $p' > q'$), рассмотрим функцию

$$g^*(x) = \begin{cases} \gamma^{1/q'} x^{1/q}, & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant l/2^q \\ \dfrac{1}{2} \gamma^{1/q} l^{1/q}, & \text{при } l/2^q < x \leqslant l - l/2^q \\ \gamma^{1/q'} (l-x)^{1/q}, & \text{при } l - l/2^q < x \leqslant l. \end{cases}$$

Если $g \in A^\circ(q', \gamma)$, то для любого $x \in [0, l/2^q]$

$$g(x) = \int_0^x g'(u)\, du \leqslant \left(\int_0^x |g'(u)|^{q'} du\right)^{1/q'} \left(\int_0^x u du\right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^l |g'(u)|^{q'} du \right)^{1/q'} x^{1/q} \leqslant \gamma^{1/q'} x^{1/q} = g^*(x),$$

т. е.

$$g(x) \leqslant g^*(x), \ 0 \leqslant x \leqslant l/2^q.$$

Аналогичным образом, для любого $x \in [0, l/2^q]$

$$g(l-x) = \int_0^x g'(l-u)\,du \leqslant \left(\int_0^x |g'(l-u)|^{q'} du \right)^{1/q'} \left(\int_0^x udu \right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^l |g'(l-u)|^{q'} du \right)^{1/q'} x^{1/q} \leqslant \gamma^{1/q'} x^{1/q},$$

т. е.

$$|g(x)| \leqslant \gamma^{1/q'} (l-x)^{1/q} = g^*(x), \ x \in \left(l\left(1-\frac{1}{2^q}\right), l \right].$$

В силу части в)

$$g(x) \leqslant \frac{1}{2} \gamma^{1/q'} l^{1/q} = g^*(x), \ l/2^q \leqslant x \leqslant l \Big/ \left(1-\frac{1}{2^q}\right).$$

Таким образом, $g(x) \leqslant g^*(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ и мы можем оценить $\|g\|_{p'}$ через норму функции g^*_l:

$$\|g\|_{p'}^{p'} \leqslant \|g^*\|_{p'}^{p'} = 2\left[\int_0^{l/2^q} \gamma^{p'/q'} x^{p'/q} dx + \int_{l/2^q}^{l/2} \gamma^{p'/q'} l^{p'/q} dx = \right.$$

$$= 2\left| \frac{q}{p'+q} \gamma^{p'/q} \left(\frac{l}{2^q}\right)^{\frac{p'+q}{q}} + \frac{1}{2} \gamma^{p'/q'} l^{\frac{p'+q}{q}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^q}\right) \right| =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{p'} \gamma^{p'/q'} l^{p'/q+1} \left[\frac{q}{p'+q} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{q-1} \right] =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{p'} \left(1 - \frac{p'}{2^{q-1}(p'+q)}\right) \gamma^{p'/q'} l^{p'/q+1}.$$

Значит

$$\|g\|_{p'} \leqslant \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{q-1}} \frac{p'}{p'+q}\right) \gamma^{1/q'} l^{1/q+1/p'}.$$

Этим доказательство леммы завершено, поскольку последнее неравенство верно для любого $g \in A^\circ(q', \gamma)$. В заключение отметим, что функции, построенные в части с) не являются экстремальными в том смысле, что они не принадлежат классу $A(q', \gamma)$.

Легко заметить, что лемма 1 остается в силе и в том случае, когда рассматриваемые в ней функции определены не на $[0, l]$, а на произвольном сегменте $[a, b]$. Поэтому мы можем сформулировать утверждение с) леммы в следующем виде.

Следствие 2. *Пусть $\gamma > 0$ — произвольное число, $1 < q' < \infty$, q — число, сопряженное с q' и*

$$A(q', \gamma, a, b) = \left\{ g : g \in L^1_{q'}(a, b), \int_a^b |g'(u)|^{q'} du \leqslant \gamma, \ g(a) = g(b) = 0 \right\}.$$

Тогда

$$\sup_{g \in A(q', \gamma, a, b)} \int_a^b |g(x)|^{p'} dx \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{p'} \frac{q}{p'+q} \gamma^{p'/q'} (b-a)^{p'/q+1} \tag{4}$$

для любого $1 \leqslant p' \leqslant q'$ и

$$\sup_{g \in A(q', \gamma, a, b)} \int_a^b |g(x)|^{p'} dx \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{p'} \left(1 - \frac{1}{2^{q-1}} \frac{p'}{p'+q}\right) \gamma^{p'/q'} (b-a)^{p'/q+1} \tag{5}$$

для любого $q' < p' < \infty$.

Перейдем к оценке, а в некоторых случаях нахождению наилучшего приближения классов $W^1_p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ подпространством кусочно постоянных. Пусть $\Delta: 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$ — произвольное разбиение отрезка $[0, 1]$, $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$, $\bar{\Delta} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} \Delta_i$, а $S^0 = S^0(\Delta)$ — пространство кусочно-постоянных относительно этого разбиения:

$$S^0 = \{s(x) : s(x) = \text{const на } (x_{i-1}, x_i) \ i = 1, 2, \cdots, N\}.$$

Известно (см., например, [3], § 3.5), что для любых $p, q \in [1, \infty]$

$$E(W^1_p, S^0)_q = \sup \{ \|g\|_{p'} : g \in W^1_{q'}(S^0)_0 \}, \tag{6}$$

где $1/p + 1/p' = 1$, $1/q + 1/q' = 1$, а

$$W^1_{q'}(S^0)_0 = \{ g : g \in W^1_{q'}, \ g(x_i) = 0, \ i = 0, 1, \cdots, N \}.$$

Теорема 3. *Допустим, что $p, q \in [1, \infty)$, а p' и q' числа, сопряженные с p и q соответственно. Тогда*

а) *Для любого $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $q = \infty$*

$$E(W^1_p, S^0)_\infty = \frac{1}{2} \bar{\Delta}^{1/p'}.$$

в) *Если $p = 1$, $1 < q < \infty$, то*

$$E(W^1_1, S^0)_q = \frac{1}{2} \bar{\Delta}^{1/q}.$$

с) *Если $q = 1$, $1 < p \leqslant \infty$, то*

$$E(W^1_p, S^0)_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p'+1}\right)^{1/p'} \left(\sum_{i=1}^N \Delta_i^{p'+1}\right)^{1/p'} \leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p'+1}\right)^{1/p'} \bar{\Delta}.$$

В частности, если Δ^* — равномерное разбиение, т. е. узлы разбиения Δ^* определяются формулой $x^*_i = i/N$, $i = 0, 1, \cdots, N$, то

$$E(W_p^1, S_N^0)_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+p'}\right)^{1/p'}\frac{1}{N},$$

где S_N — пространство кусочно-постоянных относительно этого разбиения.

d) *Если $1<q<\infty$, а $p\leqslant q$, то*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p'+1}\right)^{1/p'}\overline{\Delta}^{1/p'+1/q}\leqslant E(W_p^1, S^0)_q\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{q-1}}\,\frac{p'}{p'+q}\right)^{1/p'}\overline{\Delta}^{-1/p'+1/q}.$$

e) *Если $1<q<\infty$ и $p>q$, то*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p'+1}\right)^{1/p'}\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_i^{p'+1}\right)^{1/p'}\leqslant E(W_p^1, S^0)_q\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p'+q}\right)^{1/p'}\overline{\Delta},$$

а в случае равномерного разбиения

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p'+1}\right)^{1/p'}\frac{1}{N}\leqslant E(W_p^1, S^0)_q\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p'+q}\right)^{1/p'}\frac{1}{N}.$$

f) *Если $p=\infty$, $1<q<\infty$, то*

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N}\Delta_i^2\leqslant E(W_\infty^1, S^0)_q\leqslant\frac{1}{2}\,\frac{q}{q+1}\overline{\Delta}.$$

В частности, когда $\Delta=\Delta^*$ — равномерное разбиение, то

$$\frac{1}{4N}\leqslant E(W_\infty^1, S_N^0)_q\leqslant\frac{q}{1+q}\,\frac{1}{2N}.$$

Замечание. Разумеется, что в случае равномерного разбиения пункты a), b), c) не перестают быть верными, если в этих пунктах $\overline{\Delta}$ заменить числом $1/N$. Если $E(W_p^1, S^0)_q$ рассматривать как функцию от переменных p и q, то результаты, приведенные в теореме, удобно написать в виде квадратной таблицы с вершинами $(1, 1)$, $(1, \infty)$, (∞, ∞), $(\infty, 1)$, по горизонтали которого меняется p, а по вертикали — q. Например, в случае равномерного разбиения Δ^* таблица принимает вид:

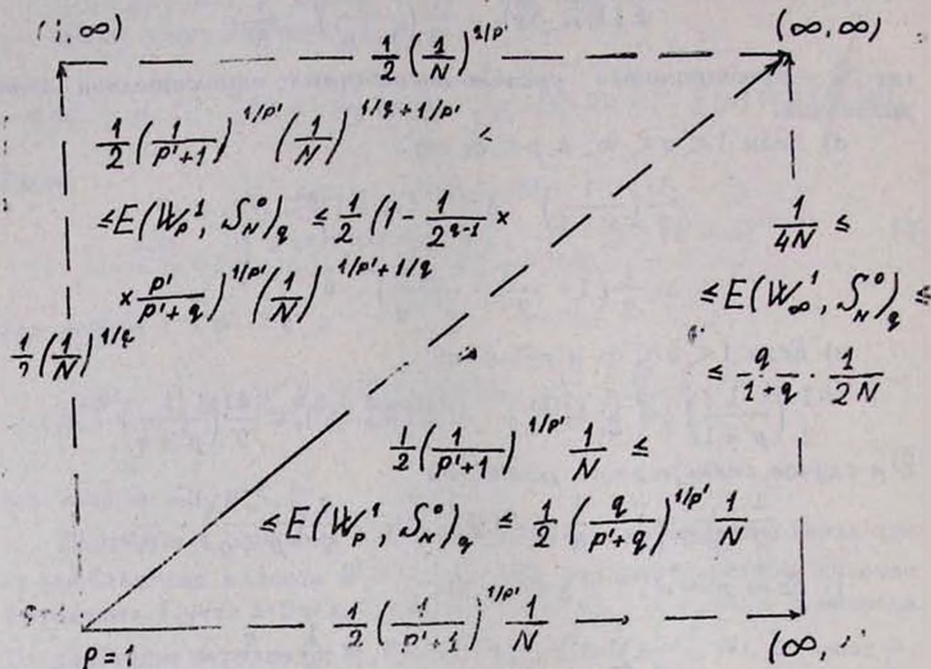
В монографии [4] (гл. 6) показано, что в треугольнике с вершинами $(1, 1)$, $(1, \infty)$, (∞, ∞) (случай, когда $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$) для произвольного разбиения Δ имеет место оценка

$$E(W_p^1, S^0)_q\leqslant\frac{1}{2}\overline{\Delta}^{-1/p'+1/q},$$

причем точность установлена лишь в случае $p=\infty$, $q=\infty$. Когда $\Delta=\Delta^*$ — разбиение равномерное, $N=2n$ — число четное, в [5] через нормы сплайнов Эйлера сверху оценены величины $E(W_1^1, S_{2n}^0)_q$ и $E(W_p^1, S_{2n}^0)_\infty$. В частности доказано, что

$$E(W_\infty^1, S_{2n}^0)_\infty\leqslant\frac{1}{4n}=\frac{1}{2N},\quad E(W_\infty^1, S_{2n}^0)_1\leqslant\frac{1}{8n}=\frac{1}{4N},$$

$$E(W_1^1, S_{2n}^0)_1\leqslant\frac{1}{4n}=\frac{1}{2N}.$$



$$E(W_1^1, S_{2n}^0)_1 \leqslant \frac{1}{4n} = \frac{1}{2N}.$$

Из теоремы видно, что приведенные выше оценки сверху на самом деле являются точными.

Доказательство теоремы 3. а) Сначала предположим, что $p = 1$, $q = \infty$ ($p' = \infty$, $q' = 1$). В силу (6)

$$E(W_1^1, S^0)_\infty = \sup \{\|g\|_\infty : g \in W_1^1,\ g(x_i) = 0,\ i = 0, 1, \cdots, N\}.$$

Зафиксируем функцию $g \in W_1^1(S^0)_0$ и положим

$$M = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |g(x)| = \|g\|_\infty.$$

Существует точка $c \in [0, 1]$ (предположим из интервала (x_{l-1}, x_l)) такая, что $M = |g_0(c)|$. Ввиду того, что $g(x_{l-1}) = g(x_l) = 0$ заключаем

$$M = \left|\int_{x_{l-1}}^{c} g'(u)\,du\right| = \left|\int_{c}^{x_l} g'(u)\,du\right|.$$

Поэтому

$$2M = \left|\int_{x_{l-1}}^{c} g'(u)\,du\right| + \left|\int_{c}^{x_l} g'(u)\,du\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{x_{l-1}}^{c} |g'(u)|\,du + \int_{c}^{x_l} |g'(u)|\,du = \int_{x_{l-1}}^{x_l} |g'(u)|\,du \leqslant 1$$

а, значит, $\|g\|_\infty \leqslant 1/2$ $(g \in W_1^1(S^0))_0)$.

Функция

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} (1/x_1)\,x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant x_1/2 \\ (1/x_1)(1-x), & \text{если } x_1/2 \leqslant x \leqslant x_1 \\ 0, & \text{если } x_1 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

принадлежит множеству $W_1^1(S^0)_0$, и кроме того

$$\|\bar{g}\|_\infty = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $E(W_1^1, S^0)_\infty = 1/2$.

Пусть теперь $1 < p \leqslant \infty$, $q = \infty$ $(1 \leqslant p' < \infty,\ q' = 1)$ и $g \in W_1^1(S^0)_0$. Определим числа γ_i равенствами

$$\gamma_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |g'(u)|\,du,\ i = 1, 2, \cdots, N.$$

Тогда из условия $\|g'\|_1 \leqslant 1$ имеем $\sum\limits_{i=1}^{N} \gamma_i \leqslant 1$, а из ортогональности функции g' к подпространству S^0 следует, что

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} h_i^+(u)\,du = \frac{1}{2}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |g'(u)|\,du = \frac{\gamma_i}{2},\ i = 1, 2, \cdots, N,$$

где h_i^+ — положительная часть сужения функции g' на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Поскольку на каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$

$$g(x) = \int\limits_{x_{i-1}}^{x} g'(u)\,du,\ x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,$$

то

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x)|^{p'}\,dx = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left|\int\limits_{x_{i-1}}^{x} g'(u)\,du\right|^{p'} dx \leqslant \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} h_i^+(u)\,du\right)^{p'} dx =$$

$$= \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{2}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |g'(u)|\,du\right) dx \leqslant \frac{1}{2^{p'}}\gamma_i^{p'}\Delta_i.$$

Поэтому

$$\|g\|_{p'}^{p'} = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{x_{i-1}}^{x} |g(x)|^{p'}\,dx \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{p'} \bar{\Delta}_i \sum_{i=1}^{N} \gamma_i^{p'}.$$

Но $\gamma_1^{p'} + \gamma_2^{p'} + \cdots + \gamma_N^{p'} \leqslant 1$, ибо $\sum\limits_{i=1}^{N} \gamma_i \leqslant 1$ и $p' > 1$. Следовательно

$$E(W_p^1, S^0)_\infty = \sup_{g \in W_1^1(S^0)_0} \|g\|_{p'} \leqslant \frac{1}{2}\bar{\Delta}^{1/p'}\ (1 < p \leqslant \infty).$$

Чтобы построить экстремальную функцию, для которой последнее неравенство превращается в равенство, выберем индекс j, при котором $\overline{\Delta} = x_j - x_{j-1}$ и для достаточно малых $\varepsilon > 0$ положим

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} (1/2\varepsilon)(x - x_{j-1}), & \text{если } x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_{j-1} + \varepsilon \\ 1/2, & \text{если } x_{j-1} + \varepsilon \leqslant x \leqslant x_j - \varepsilon \\ (1/2\varepsilon)(x_j - x), & \text{если } x_j - \varepsilon \leqslant x \leqslant x_j \\ 0, & \text{если } x \overline{\in} [x_{j-1}, x_j]. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что $g_\varepsilon(x) \in W_1^1(S^0)_0$ для любого $\varepsilon > 0$ и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|g_\varepsilon\|_{p'} = \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\frac{1}{2}\right)^{p'} dx \right)^{1/p'} = \frac{1}{2} \overline{\Delta}^{1/p'}.$$

Этим часть а) теоремы 3 доказана.

в) Если $p = 1$, $1 < q < \infty$ и $g \in W_{q'}^1(S^0)_0$ $(1/q' + 1/q = 1)$, то определим числа γ_i следующим образом:

$$\gamma_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g'(u)|^{q'} du, \quad i = 1, 2, \cdots, N.$$

Ясно, что $\sum \gamma_i \leqslant 1$. Чтобы сверху оценить $\max |g(x)|$ на каждом промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ применим неравенство Гельдера:

$$\max_{x_{i-1} < x < x_i} |g(x)| = \max_{x_{i-1} < x < x_i} \left| \int_{x_{i-1}}^{x} g'(u)\, du \right| \leqslant \max_{x_{i-1} < x < x_i} \int_{x_{i-1}}^{x} h^+(u)\, du \leqslant \int_{x_{i-1}}^{x_i} h_i^+(u)\, du = \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g'(u)|\, du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} |g'(u)|^{q'} du \right)^{1/q'} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} du \right)^{1/q} \leqslant \frac{1}{2} \gamma_i^{1/q'} \Delta_i^{1/q}.$$

Таким образом

$$\max_{x_{i-1} < x < x_i} |g(x)| \leqslant \frac{1}{2} \gamma_i^{1/q'} \Delta_i^{1/q},$$

а значит, $\|g\|_\infty \leqslant (1/2)\, \overline{\Delta}^{1/q}$, ибо $\gamma_i \leqslant 1$ для любого i.

Функция

$$g_0(x) = \begin{cases} \overline{\Delta}^{-1/q'} (x - x_{j-1})\; x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_{j-1} \frac{\overline{\Delta}}{2} \\ \overline{\Delta}^{-1/q'} (x_j - x),\; x_{j-1} + \frac{\overline{\Delta}}{2} \leqslant x \leqslant x_j \\ 0, \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

(j — индекс, при котором $x_j - x_{j-1} = \bar{\Delta}$) принадлежит классу $W^1_{q'}(S^0)_0$ и, кроме того

$$\|g\|_\infty = g\left(x_{j-1} + \frac{\bar{\Delta}}{2}\right) = \frac{1}{2}\bar{\Delta}^{-1/q}.$$

Следовательно

$$E(W^1_1, S^0)_q = \frac{1}{2}\bar{\Delta}^{-1/q} \quad (1 < q < \infty),$$

и часть в) доказана.

c) Пусть теперь $q = 1$ $(q' = \infty)$, $1 < p \leqslant \infty$ и $g \in W^1_\infty(S^0)_0$, т. е. $\|g\|_\infty \leqslant 1$ и $g(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \cdots, N$.

Рассмотрим функцию

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} x - x_{i-1}, & \text{если } x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_{i-1} + \Delta_i/2 \\ x_i - x, & \text{если } x_{i-1} + \Delta_i/2 \leqslant x < x_i \end{cases}$$

и покажем, что $|g(x)| \leqslant \bar{g}(x)$ на любом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 0, 1, \cdots, N$. В самом деле, если $x \in [x_{i-1}, x_{i-1} + \Delta_i/2]$, то

$$|g(x)| = \left| \int_{x_{i-1}}^{x} g'(u)\, du \right| \leqslant \|g\|_\infty \int_{x_{i-1}}^{x} du < x - x_{i-1} = \bar{g}(x).$$

Если же $x_{i-1} \leqslant t < \Delta_i/2 + x_{i-1}$, то

$$|g(x_{i-1} + x_i - t)| = \left| \int_{x_{i-1}}^{t} -g'(u)\, du \right| \leqslant t - x_{i-1}.$$

Положив $x = x_{i-1} + x_i - t$ будем иметь $x \in [x_{i-1} + \Delta_i/2, x_i]$ и

$$g(x) \leqslant x_i - x = \bar{g}(x), \quad x_{i-1} + \Delta_i/2 \leqslant x \leqslant x_i.$$

Таким обрааом, $|g(x)| \leqslant \bar{g}(x)$ $(0 \leqslant x < 1)$, а значит, $\|g\|_{p'} \leqslant \|\bar{g}\|_{p'}$ для любого $p' \in [1, \infty]$. Поскольку $\bar{g} \in W^1_\infty(S^0)_0$, то на основании (6) можем утверждать

$$E(W^1_p, S^0)_1 = \|\bar{g}\|_{p'}.$$

Но

$$\|\bar{g}\|^{p'}_{p'} = \int_0^1 (\bar{g}(x))^{p'}\, dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\bar{g}(x))^{p'}\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} 2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i-1}+\Delta_i/2} (x - x_{i-1})^{p'}\, dx = \sum_{i=1}^{N} 2 \int_0^{\Delta_i/2} t^{p'}\, dt =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{p'+1} \frac{1}{p'+1} \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^{p'+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{p'} \frac{1}{p'+1} \bar{\Delta}^{p'} \sum_{i=1}^{N} \Delta_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{p'} \frac{1}{p'+1} \bar{\Delta}^{p'}.$$

Поэтому

$$E(W_p^1, S^0)_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p'+1}\right)^{1/p'} \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta_i^{p'+1}\right)^{1/p'} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p'+1}\right)^{1/p'} \bar{\Delta}.$$

Когда же разбиение $\Delta = \Delta^*$ равномерное, то $\Delta_i = 1/N$ для любого $i = 1, 2, \cdots, N$ и

$$E(W_p^1, S_N^0)_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p'+1}\right)^{1/p'} \frac{1}{N}.$$

Часть с) доказана.

Пусть теперь $1 < p,\ q < \infty$ и $g \in W_{q'}^1(S^0)_0$. Определим числа γ_i равенствами

$$\gamma_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |g'(u)|^{q'}\, du,\ i = 1, 2, \cdots, N.$$

Ясно, что $\sum \gamma_i \leqslant 1$. Так как $g \in W_{q'}^1(S^0)_0$, то сужение функции g на сегмент $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$ является функцией из класса $A(q', \gamma_i, x_{i-1}, x_i)$ (см. следствие 2) и мы можем воспользоваться неравенствами (4) и (5).

d) Если $p < q$ $(p' > q')$, то в силу (5)

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x)|^{p'} dx \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{p'} \left(1 - \frac{1}{2^{q-1}}\, \frac{p'}{p'+q}\right) \Delta_i^{p'/q+1},\ i = 1, 2, \cdots, N.$$

Просуммировав последнее неравенство по i, получаем

$$\|g\|_{p'}^{p'} = \int\limits_0^1 |g(x)|^{p'} dx = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x)|^{p'} dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{p'} \left(1 - \frac{1}{2^{q-1}}\, \frac{p'}{p'+q}\right) \sum_{i=1}^{N} \gamma_i^{p'/q'} \Delta_i^{p'/q+1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{p'} \left(1 - \frac{1}{2^{q-1}}\, \frac{p'}{p'+q}\right) \bar{\Delta}^{p'/q+1} \sum_{i=1}^{N} \gamma_i^{p'/q'}.$$

Но $\sum \gamma_i^{p'/q'} \leqslant 1$, поскольку $\sum \gamma_i \leqslant 1$ и $p' > q'$. Поэтому, в силу (6)

$$E(W_p^1, S^0)_q = \sup_{g \in W_{q'}^1(S^0)_0} \|g\|_{p'} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{q-1}}\, \frac{p'}{p'+q}\right)^{1/p'} \bar{\Delta}^{1/p'+1/q}\ (1 < p < q < \infty).$$

Чтобы получить оценку снизу, положим

$$g_0(x) = \begin{cases} \bar{\Delta}^{-1/q}(x - x_{j-1}), & \text{если } x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_{j-1} + \bar{\Delta}/2 \\ \bar{\Delta}^{-1/q}(x_j - x), & \text{если } x_{j-1} + \bar{\Delta}/2 \leqslant x < x_j \\ 0, & \text{если } x \,\overline{\in}\, [x_{j-1}, x_j], \end{cases}$$

где индекс j выбран из условия $x_j - x_{j-1} = \bar{\Delta}$. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что $g_0(x) \in W^1_{q'}(S^0)_0$. С другой стороны

$$\|g_0\|_{p'} = \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} (g(x))^{p'} dx \right)^{1/p'} = \left(2 \int_{x_{j-1}}^{x_j + \bar{\Delta}/2} \bar{\Delta}^{-p'/q'} (x - x_{j-1})^{p'} dx \right)^{1/p'} =$$

$$= 2^{1/p'} \bar{\Delta}^{-1/q'} \left(\int_0^{\bar{\Delta}/2} t^{p'} dt \right)^{1/p'} = 2^{1/p'} \bar{\Delta}^{-1/q'} \left(\frac{1}{p'+1} \right)^{1/p'} \left(\frac{\bar{\Delta}}{2} \right)^{1+1/p'} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p'+1} \right)^{1/p'} \bar{\Delta}^{1/p'+1/q},$$

а значит

$$E(W^1_p, S^0)_q \geqslant \|g_0\|_{p'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+p'} \right)^{1/p'} \bar{\Delta}^{1/p'+1/q}.$$

е) Если $p \geqslant q$ $(p' \leqslant q')$, то на каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \cdots, N$ мы можем воспользоваться оценкой (4), которая при указанных выше обозначениях запишется в следующем виде:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x)|^{p'} dx \leqslant \left(\frac{1}{2} \right)^{p'} \frac{q}{p'+q} \gamma_i^{p'/q'} \Delta_i^{1+p'/q}, \quad i = 1, 2, \cdots, N,$$

Суммируя по i, получаем

$$\|g\|_{p'}^{p'} = \int_0^1 |g(x)|^{p'} dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x)|^{p'} dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2} \right)^{p'} \frac{q}{p'+q} \sum_{i=1}^N \gamma_i^{p'/q'} \Delta_i^{1+p'/q'}.$$

Поскольку $0 < p'/q' \leqslant 1$, то в силу неравенства Иенсена (см. [1], с. 62)

$$\sum_{i=1}^N \gamma_i^{p'/q'} \Delta_i^{1+p'/q'} = \sum_{i=1}^N \gamma_i^{p'/q'} \frac{\Delta_i^{p'/q'} \Delta_i^{1+p'/q'}}{\Delta_i^{p'/q'}} =$$

$$= \sum_{i=1}^N \gamma_i^{p'/q'} \Delta_i^{p'} \Delta_i^{1-p'/q'} \leqslant \bar{\Delta}^{p'} \sum_{i=1}^N \gamma_i^{p'/q'} \Delta_i^{1-p'/q'} \leqslant$$

$$\leqslant \bar{\Delta}^{p'} \sum_{i=1}^N \left(\frac{p'}{q'} \gamma_i + \left(1 - \frac{p'}{q'} \right) \Delta_i \right) \leqslant \bar{\Delta}^{p'} \left(\frac{p'}{q'} + 1 - \frac{p'}{q'} \right) = \bar{\Delta}^{p'}.$$

Следовательно

$$E(W^1_p, S^0)_q = \sup_{g \in W^1_{q'}(S^0)_0} \|g\|_{p'} \leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{q}{p'+q} \right)^{1/p'} \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_i \gamma_i^{p'/q'} \Delta_i^{1+p'/q} \right)^{1/p'} \leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{q}{p'+q} \right)^{1/p'} \bar{\Delta}$$

Этим правые части неравенств пункта е) доказаны, ибо в случае равномерного разбиения $\overline{\Delta}=1/N$.

Чтобы получить оценки снизу, рассмотрим функцию g, определенную в е). Тогда

$$\|\overline{g}\|_{q'}^{q'} = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\overline{g}'(x)|^{q'}\, dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = \sum_{i=1}^{N} \Delta_i = 1,$$

т. е. $\overline{g} \in W_{q'}^1 (S^0)_0$. С другой стороны

$$\|\overline{g}\|_{p'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p'+1}\right)^{1/p'} \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta_i^{p'+1}\right)^{1/p'},$$

откуда видно, что

$$E(W_p^1, S^0)_q \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p'+1}\right)^{1/p'} \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta_i^{p'+1}\right)^{1/p'}.$$

Когда Δ — равномерное разбиение, то $\Delta_i = 1/N$, $i=1, 2, \cdots, N$ и сумма, стоящая в последнем неравенстве, равна $1/N$.

f) Допустим, что $p=\infty$ $(p'=1)$ и $1<q<\infty$. Тогда для любой функции $g \in W_{q'}^1 (S^0)_0$, в силу е)

$$\|g\|_1 = \lim_{p' \to 1} \|g\|_{p'} \leqslant \frac{1}{2N} \lim_{p' \to 1} \left(\frac{q}{p'+q}\right)^{1/p'} = \frac{1}{2N}\, \frac{q}{1+q},$$

т. е.

$$E(W_\infty^1, S^0)_q = \sup_{g \in W_{q'}^1 (S^0)_0} \|g\|_1 \leqslant \frac{1}{2N}\, \frac{q}{1+q}.$$

С другой стороны, для функции $\overline{g}$ (которая принадлежит классам $W_{q'}^1 (S^0)_0$ при любом q'), рассмотренной в пункте с) теоремы 3, имеем, что

$$E(W_\infty^1, S^0)_q \geqslant \|\overline{g}\|_1 = \lim_{p' \to 1} \|\overline{g}\|_{p'} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{p' \to 1} \left(\frac{1}{p'+1}\right)^{1/p'} \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta_i^{p'+1}\right)^{1/p'} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2.$$

В частности, при равномерном разбиении $\Delta = \Delta^*$

$$E(W_\infty^1, S_\Delta^0)_q \geqslant \|\overline{g}\|_1 = \frac{1}{4N}.$$

Итак, оба неравенства пункта f) установлены. В наших расжуждениях мы существенно воспользовались тем, что $\|g\|_{p'} \to \|g\|_1$ при $p' \to 1$ для произвольной непрерывной функции g. Докажам этот факт.

Пусть p_n' — произвольная сходящаяся к 1 последовательность и

$$g_n(x) = |g(x)|^{p_n'},\ n=1, 2, 3, \cdots.$$

Тогда $g_n(x) \to |g(x)|$ для любого x и по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\int_0^1 g_n(x)\,dx = \int_0^1 |g(x)|^{p_n'}\,dx \to \int_0^1 |g(x)|\,dx.$$

Следовательно

$$\|g\|_{p_n'} = \left(\int_0^1 |g(x)|^{p_n'}\,dx\right)^{1/p_n'} = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 |g(x)|\,dx\right)^{1/p_n'} = \|g\|_1.$$

Таким образом, $\|g\|_{p_n'} \to \|g\|_1$ для любой последовательности p_n', которая сходится к единице, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 3 завершено.

3°. Двумерный случай. Пусть m, n—натуральные числа,

$$\Delta_1 = \left\{\frac{i}{n} : i = 0, 1, \cdots, n\right\},\ \Delta_2 = \left\{\frac{j}{m} : j = 0, 1, \cdots, m\right\}$$

— одномерные равномерные разбиения, $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$, $\Delta_{i,j} = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right]$ $(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, m)$ и S_0 — пространство кусочно-постоянных относительно разбиения Δ квадрата I, т. е.

$$S_0 = \{s(x, y) : s(x, y) = \text{const на } \Delta_{ij}\}.$$

Через S_0^x и S_0^y обозначим пространства кусочно-постоянных функций одной переменной относительно Δ_1 и Δ_2 соответственно.

Рассмотрим класс $W_p^{1,1}$, определенный во введении и найдем наилучшее приближение этого класса пространством кусочно-постоянных в метрике L_∞. Как в одномерном случае, здесь мы тоже воспользуемся общими соотношениями двойственности для двух переменных, приведенными в [6]. В нашем частном случае там (с. 41) установлено, что

$$E(W_p^{1,1}, S_0)_\infty = \sup_{g\in W_{p'}^{1,1}(S_0)_0} \{\|g\|_{p'} + \|g(\cdot, 1)\|_{p'} + \|g(1, \cdot)\|_{p'}\}, \tag{7}$$

где

$$W_1^{1,1}(S_0)_0 = \{g \in L_1^{1,1} : \|g^{(1,1)}\|_1 \leqslant 1,\ g^{(1,1)} \perp S_0,\ g(x, 0) =$$
$$= g(0, y) = 0,\ g(x, 1) \in W_1^1(S_0^x)_0,\ g(1, y) \in W_1^1(S_0^y)_0\},$$
$$W_1^1(S_0^x)_0 = \{g \in L_1^1(0, 1) : \|g'\|_1 \leqslant 1,\ g(i/n) = 0,\ 0 \leqslant i \leqslant n\},$$
$$W_1^1(S_0^y)_0 = \{g \in L_1^1(0, 1) : \|g'\|_1 \leqslant 1,\ g(j/m) = 0,\ 0 \leqslant j \leqslant m\},$$

а $g^{(1,1)} \perp S_0$ означает, что $\displaystyle\iint_{\Delta_{ij}} g^{(1,1)}(u, v)\,du\,dv = 0,$

$$i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, m.$$

Отметим, что из определения множества $L_1^{1,1}$ и из условий $g(0, y) = g(x, 0) = 0$ следует, что каждая функция $g \in W_1^{1,1}(S_0)_0$ допускает представление

$$g(x, y) = \int_0^x\int_0^y g^{(1,1)}(u, v)\,du\,dv,\ (x, y) \in I.$$

Теорема 4. *Для любого* $p\in[1,\infty]$

$$E(W_p^{1,1},\ S_0)_\infty=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/p'}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\right)^{1/p'}+\frac{1}{2}\left(\frac{m+n-1}{mn}\right)^{1/p'},\tag{8}$$

где p' — *число, сопряженное с* p.

Доказательство. Пусть функция $g\in W_1^{1,1}(S_0)_0$ фиксирована. Поскольку $g(x,1)\in W_1^1(S_0^x)_0$, а $g(1,y)\in W_1^1(S_0^y)_0$, то в силу пункта а) теоремы 3

$$\|g(\cdot,1)\|_{p'}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/p'},\ \|g(1,\cdot)\|_{p'}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\right)^{1/p'}.\tag{9}$$

Докажем, что

$$\|g\|_{p'}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{m+n-1}{mn}\right)^{1/p'}.$$

Определим функции $h_{ij}(u,v)$ и числа γ_{ij} $(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,\cdots,m)$ следующим образом:

$$h_{i,j}(u,v)=\begin{cases}g^{(1,1)}(u,v), & \text{если } (u,v)\in\Delta_{ij}\\ 0, & \text{если } (u,v)\overline{\in}\Delta_{ij},\end{cases}$$

$$\gamma_{ij}=\iint\limits_{\Delta_{ij}}|g^{(1,1)}(u,v)|\,dudv=\iint\limits_{\Delta_{ij}}|h_{ij}(u,v)|\,dudv.$$

Очевидно, что $\sum\limits_{ij}\gamma_{ij}\leqslant 1$ (здесь и в дальнейшем вместо суммы $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}$ напишем $\sum\limits_{ij}$) и

$$g^{(1,1)}(u,v)=\sum_{ij}h_{ij}(u,v),\ (u,v)\in I.$$

Если

$$h_{ij}^{+}=\frac{1}{2}(|h_{ij}|+h_{ij}),\ h_{ij}^{-}(u,v)=\frac{1}{2}(|h_{ij}|-h_{ij})$$

соответственно положительная и отрицательная части функции $h_{ij}(u,v)$, то

$$\iint\limits_{\Delta_{ij}}h_{ij}(u,v)\,dudv-\iint\limits_{\Delta_{ij}}h_{ij}^{-}(u,v)\,dudv=\iint\limits_{\Delta_{ij}}h_{ij}(u,v)\,dudv=0,$$

$$\iint\limits_{\Delta_{ij}}h_{ij}^{+}(u,v)\,dudv+\iint\limits_{\Delta_{ij}}h_{ij}^{-}(u,v)\,dudv=\iint\limits_{\Delta_{ij}}|h_{ij}(u,v)|\,dudv=\gamma_{ij}.$$

Из последних равенств имеем, что

$$\iint\limits_{\Delta_{ij}}h_{ij}(u,v)\,dudv=\iint\limits_{\Delta_{ij}}h_{ij}^{-}(u,v)\,dudv=\frac{\gamma_{ij}}{2}$$

для любых $i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m$.

Положим

$$E_{ij}=\left|\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right|\times\left|\frac{j-1}{m},\ 1\right|\cup\left|\frac{i}{n},\ 1\right|\times\left|\frac{j-1}{m},\ \frac{j}{m}\right|,$$

$$H_{ij}(x, y)=\int\limits_0^x\int\limits_0^y h_{ij}(u, v)\,dudv\ (1\leqslant i\leqslant n;\ 1\leqslant j\leqslant m).$$

Нетрудно видеть, что $H_{ij}(x, y)\equiv 0$ вне множества E, а во всех точках (x, y) множестаа E

$$H_{ij}(x, y)\leqslant\int\limits_0^x\int\limits_0^y h_{ij}^{+}(u, v)\,dudv=\frac{\gamma_{ij}}{2},\ (x, y)\in E.$$

Теперь можем оценить $\|g\|_{p'}$:

$$\|g(x, y)\|_{p'}=\left\|\int\limits_0^x\int\limits_0^y g^{(1,1)}(u, v)\,dudv\right\|_{p'}=$$

$$=\left\|\sum_{ij}\int\limits_0^x\int\limits_0^y h_{ij}(u, v)\,dudv\right\|_{p'}=\left\|\sum_{ij}H_{ij}(x, y)\right\|_{p'}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{ij}\|H_{ij}(x, y)\|_{p'}\leqslant\sum_{ij}\left(\iint\limits_{E_{ij}}\left(\frac{\gamma_{ij}}{2}\right)^{p'}dxdy\right)^{1/p'}=$$

$$=\sum_{ij}\frac{\gamma_{ij}}{2}\left(\frac{m+n-i-j+1}{mn}\right)^{1/p'}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{m+n-1}{mn}\right)^{1/p'}\sum_{ij}\gamma_{ij}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{m+n-1}{mn}\right)^{1/p'}.$$

Таким образом

$$\|g\|_{p'}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{m+n-1}{mn}\right)^{1/p'},$$

а из (7) и (9) следует, что

$$E(W_p^{1,1},\ S_0)_\infty\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/p'}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\right)^{1/p'}+\frac{1}{2}\left(\frac{m+n-1}{mn}\right)^{1/p'},\quad(10)$$

т. е. левая часть (8) не больше его правой части.

Чтобы доказать обратное неравенство для достаточно малых $\varepsilon>0$ рассмотрим функцию

$$h_\varepsilon(u, v)=\begin{cases}1/2\varepsilon^2, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant\varepsilon,\ 0\leqslant y\leqslant\varepsilon\\ -1/2\varepsilon^2, & \text{если } 1/n-\varepsilon\leqslant x\leqslant 1/n,\\ & \qquad 1/m-\varepsilon\leqslant y\leqslant 1/m,\\ 0, & \text{в остальных случаях}\end{cases}$$

и положим

$$g_\varepsilon(x, y) = \int_0^x \int_0^y h_\varepsilon(u, v)\, du dv.$$

Ясно, что $g_\varepsilon \in W_1^{1,1}(S_0)_0$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Так как

$$g_\varepsilon(x, 1) = \begin{cases} x/2\varepsilon, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon \\ 1/2, \quad \text{если } \varepsilon \leqslant x \leqslant 1/n - \varepsilon \\ (1/2\varepsilon)(1/n - x), \text{ если } 1/n - \varepsilon \leqslant x \leqslant 1/n \\ 0, \qquad \text{если } 1/n \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

то легко проверить, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|g_\varepsilon(\cdot, 1)\|_{p'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/p'}.$$

Аналогично

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|g_\varepsilon(1, \cdot)\|_{p'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\right)^{1/p'}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|g_\varepsilon\|_{p'} = \frac{1}{2}\left(\frac{m + n - 1}{mn}\right)^{1/p'}.$$

Таким образом, для любого $\delta > 0$ можно указать $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\|g_\varepsilon\|_{p'} + \|g_\varepsilon(\cdot, 1)\|_{p'} + \|g_\varepsilon(1, \cdot)\|_{p'} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/p'} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\right)^{1/p'} + \frac{1}{2}\left(\frac{m + n - 1}{mn}\right)^{1/p'} - \delta.$$

Но $g_\varepsilon(x, y) \in W_1^{1,1}(S_0)_0$, поэтому

$$E(W_p^{1,1}, S_0)_\infty \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/p'} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\right)^{1/p'} + \frac{1}{2}\left(\frac{m + n - 1}{mn}\right)^{1/p'}.$$

Комбинируя последнее неравенство с (10), получаем (8). Теорема 4 доказана.

В заключение отметим, что утверждение теоремы 4 в случае $p = \infty$ $(p' = 1)$ ранее было получено автором в работе [6].

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 5.II. 1987

Ա. Մ. ԱՎԱԳՅԱՆ. Առաջին կարգի սահմանափակ ածանցյալ ունեցող մեկ և երկու փոփոխականի ֆունկցիաների դասերի լավագույն մոտարկումը կտոր առ կտոր հաստատուններով *(ամփոփում)*

Հոդվածում ճշգրիտ գնահատականներ են ստացվել Սոբոլևյան դասերը կամայական L_q տարածության մեջ կտոր առ կտոր հաստատուններով մոտարկելու դեպքում։ Որոշ ճշգրիտ գնահատականներ ընդհանրացվել են երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար։

A. M. AVAKIAN. *On the best approximation of functions witsh bounded first derivative by piecewise constants in one and two dimensions* (summary)

In the paper exact error bounds are obtained in arbitrary L_q spaces, when Sobolev classes are approximated by piecewise constants. Some exact estimates are generalized for functions of two variables.

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. Rudin.* Real and complex analysis, New York, Mc. GRAW—HILL.
2. *У. Рудин.* Основы математического анализа, М., Мир, 1976, 319 с.
3. *Н. П. Корнейчук.* Сплайны в теории приближения, М., Наука, 1984, 352 с.
4. *L. L. Schumaker.* Spline functioos: Basic theory, New York, J. Wieley &Sons., 1981
5. *Н. П. Корнейчук.* О наилучшем приближении на отрезке классов функций с ограниченной r-й производной конечномерными подпространствами, Укр. матем. журн., 31, № 1, 1979, 23—31.
6. *А. М. Авакян.* Двойственные соотношения для некоторых классов функций двух переменных, Киев, Ин-т математики АН УССР, препринт 83. 41. 1983, 44 с.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXV, № 3, 1990 Математика

УДК 517.5.517.9

В. Б. ДЫБИН

КРАТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В ВЕСОВЫХ КЛАССАХ ХАРДИ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РАСХОДЯЩИХСЯ ИНТЕГРАЛОВ

К настоящему времени достаточно хорошо известно, что вопросы построения базисов и задачи комплексной интерполяции в модельных подпространствах классов Харди, порождаемых внутренними в смысле Бьёрлинга функциями [1], имеют содержательные приложения в теории сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши. Для примера укажем лишь на недавние применения результатов Б. Я. Левина [2], а также М .М. Джрбашяна и его учеников [3—5] при описании решений краевой задачи Римана с бесконечным индексом в пространстве L_p (Γ, ρ) [6—11].

В данной работе мы касаемся еще одного подобного приложения — проблемы регуляризации интегралов, расходящихся на счетных множествах. Ниже эта задача (см. § 3) решается для множеств $X = \{x_j, j \in Z\} \subset R$, которые в дальнейшем будем называть вещественными карлесоновскими множествами. Именно, точки такого множества либо удовлетворяют условию

$$\inf_{k \in Z} \prod_{\substack{m \in Z \\ m \neq k}} \left| \frac{x_k - x_m}{x_k x_m + ih} \right| \geqslant \delta > 0, \ h > 0, \tag{1}$$

либо найдется такое дробно-линейное преобразование φ, оставляющее инвариантной вещественную прямую R, что условию (1) удовлетворяют точки множества $\varphi(X)$. На множестве X регуляризуемые интегралы имеют особенности степенного вида целых ограниченных кратностей. Предлагаемый здесь способ регуляризации отличается от регуляризации И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [12], гл. 1, § 3. Вместо бесконечного разбиения единицы он использует процедуру интерполяции и предназначен в первую очередь для описания обобщенных решений сингулярных интегральных уравнений с коэффициентами, вырождающимися на множестве X, и растущих на ∞ решений одномерных уравнений в свертках с вырождающимися на X символами [13—15]. Процедура интерполяции опирается на работу М. М. Джрбашяна [16], в которой исследованы вопросы кратной интерполяции в классах Харди H_p $(1 < p < \infty)$ на множествах $\{z_k\} \subset \Pi_+$, $\Pi_+ = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, подчиненных δ-условию Карлесона [17]

$$\inf_{k \in Z} \prod_{\substack{m \in Z \\ m \neq k}} \left| \frac{z_m - z_k}{z_m - \bar{z}_k} \right| \geqslant \delta > 0. \tag{2}$$

Ряд основных результатов этой работы сформулирован ниже в виде теоремы 2.

В § 1 интерполяционные результаты статьи [16] в целях обеспечения указанных выше приложений к краевой задаче Римана в случае кратного вырождения ее коэффициента на множестве X (см. [27]) распространены (теорема 3) на классы $H_{p,\rho}$, где ρ — общий вес Ханта-Макенхоупта-Видена, т. е. вес, удовлетворяющий условию

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I \rho\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I \rho^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leqslant c < \infty, \tag{3}$$

где I — произвольный интервал на R. Обозначать это будем так: $\in A_p$. При этом предполагается, что множество нулей $\{z_k\}$ лежит в полосе $0 < h_1 < \operatorname{Im} z_j < h_2 < \infty$. В этом случае элементы модельного подпространства K_B, порождаемого функцией Бляшке

$$B(z) = \prod_{k \in Z}\left(\frac{\bar{z}_k}{z_k}\,\frac{z_k - z}{\bar{z}_k - z}\right)^{n_k},\ n_k \in Z,\ n = \sup_k n_k < \infty, \tag{4}$$

аналитически продолжимы в полосу $-h_1 < \operatorname{Im} z \leqslant 0$, и поэтому в качестве интерполяционных множеств в K_B вместо множества $\{z_k\}$ можно брать надлежащие карлесоновские множества, лежащие в этой полосе, в частности, множества X, удовлетворяющие условию (1). Соответствующая интерполяционная теорема (теорема 5) доказана в § 2. Метод ее доказательства, возможно, представляет самостоятельный интерес и может быть использован в других аналогичных ситуациях.

В случае степенных весов специального вида кратная интерполяционная задача в $H_{p,\rho}$ рассмотрена В. М. Мартиросяном [28, 29].

Ниже символами ◀ и ▶ обозначаются соответственно начало и конец доаказательства.

§ 1 Интерполяция в Π_+

Пусть $\rho \in A_p$. Через $L_p(R, \rho)$, $1 < p < \infty$, обозначим лебегово пространство измеримых на R функций $g(x)$, суммируемых в степени p с весом ρ,

$$\|g\| = \left(\int_R |g(x)|^p \rho(x)\, dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Введем стандартное субгармоническое продолжение $|\rho_\pm(x+iy)|$ веса $\rho(x)$ в полуплоскость Π_-, где $\Pi_- = \{z|\operatorname{Im} z < 0\}$,

$$|\rho_\pm(x+iy)| = |x+(y\pm 1)i|^{p-2}\cdot$$
$$\cdot\exp\left\{\pm\frac{1}{\pi}\int_R \ln\left(|\tau+i|^{2-p}\rho(\tau)\right)\frac{y\,d\tau}{(x-\tau)^2+y^2}\right\}. \tag{5}$$

Известно, что $|\rho_\pm(x)| = \rho(x)$ почти всюду на R [19, 20]. Определим $H_{p,\rho}(\Pi_\pm)$ как пространство аналитических функций в полуплоскости $\Pi_\pm$, для которых

$$\sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |g(x+iy)|^p \rho_{\pm}(x+iy)|\,dx < \infty.$$

Отождествляя функции $g(x)$ из $H_{p,\rho}(\Pi_{\pm})$ с их угловыми предельными значениями при $y \to 0$, будем в дальнейшем рассматривать $H_{p,\rho}(\Pi_{\pm})$ как подпространство в $L_p(\mathbf{R}, \rho)$ [19]. Через $P^{\pm}$ обозначим проекторы в $L_p(\mathbf{R}, \rho)$ на $H_{p,\rho}(\Pi_{\pm})$ соответственно. Известно, что $P^{+} + P^{-} = I$, $P^{+} - P^{-} = S$, где S — преобразование Гильберта.

Пусть $a^{\pm} \in H_{\infty}(\Pi_{\pm})$. Введем модельные подпространства $K_{a^{\pm}} = P^{\pm} a^{\pm} I(H_{p,\rho}(\Pi_{\mp}))$ и отметим ряд их свойств.

Предложение 1. *Пусть $a^{\pm} \in H_{\infty}(\Pi_{\pm})$, $(a^{\pm})^{-1} \in H_{\infty}(\Pi_{\mp})$. Тогда*

1) $K_{a^{\pm}} = \ker\left(P^{\pm} \dfrac{1}{a^{\pm}} I\right)$ *в пространстве* $H_{p,\rho}(\Pi_{\pm})$;

2) $g^{\pm}(t) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \dfrac{a^{\pm}(\tau) - a^{\pm}(t)}{\tau - t} h^{\mp}(\tau)\,d\tau \Leftrightarrow g^{\pm} \in K_{a^{\pm}}$,

где $h^{\mp} \in H_{p,\rho}(\Pi_{\mp})$ и удовлетворяет условию $a^{\pm} h^{\mp} = g^{\pm}$;

3) $H_{p,\rho}(\Pi_{\pm}) = K_{a^{\pm}} \dotplus a^{\pm} I(H_{p,\rho}(\Pi_{\pm}))$.

Эти свойства подпространств $K_{a^{\pm}}$ известны при менее общих предположениях относительно функции $a^{\pm}$ и веса ρ (см., например, [9, 16, 21, 22]). Однако использованные при этом методы доказательства предложения 1 годны и для данного случая. В дальнейшем функцию $a^{\pm}$, удовлетворяющую условиям предложения 1, будем называть модельной.

Рассмотрим один из важнейших примеров модельных функций, так называемую функцию Бляшке. Пусть $\{z_k\}_1^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел из Π_{+}, удовлетворяющая условию (2), в котором множество $\mathbf{Z}$ необходимо заменить на $\mathbf{N}$. Через $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$ обозначим последовательность, в которой число z_k повторно n_k раз, $k \in \mathbf{N}$, причем выполнено условие $\alpha = \sup\limits_{k \in \mathbf{N}} n_k < \infty$. Следуя М. М. Джрбашяну [16], введем числа s_k, равные кратностям появления чисел λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^k$ этой последовательности, а класс всех последовательностей $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$, удовлетворяющих двум отмеченным выше условиям, обозначим через $\Delta(n)$. С последовательностью $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$ ассоциируется функция Бляшке

$$\mathbf{B}(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{|1+\lambda_j^2|}{1+\lambda_j^2} \cdot \frac{z-\lambda_j}{z-\overline{\lambda}_j}, \tag{6}$$

удовлетворяющая условиям $\mathbf{B} \in H_{\infty}(\Pi_{+})$, $\mathbf{B}^{-1} \in H_{\infty}(\Pi_{-})$ и порождающая модельное подпространство $K_{\mathbf{B}} = P^{+} \mathbf{B} I(H_{p,\rho}(\Pi_{-}))$ в пространстве $H_{p,\,\rho}(\Pi_+)$. В работе [16] в предположении $\rho\equiv 1$ рассмотрены эквивалентные определения подпространства K_B и изучен ряд его свойств, на которые в дальнейшем мы будем опираться. Приступая к описанию этих свойств, рассмотрим функцию

$$\omega_j(z)=\frac{(z-\lambda_j)^{n_j}}{B(z)}$$

и ее разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $z=\lambda_j$

$$\omega_j(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\omega_j^{(k)}(\lambda_j)}{k!}(z-\lambda_j)^k.$$

Выделим систему полиномов

$$q_j(z)=\sum_{k=0}^{n_j-s_j}\frac{\omega_j^{(k)}(\lambda_j)}{k!}(z-\lambda_j)^k$$

и связанную с ними систему функций

$$\Omega_j(z)=\frac{B(z)\,q_j(z)}{(s_j-1)!\,(z-\lambda_j)^{n_j-s_j+1}},\ j\in Z, \qquad (7)$$

которая обладает следующими интерполяционными свойствами:

$$\Omega_j^{(m)}(\lambda_k)=\begin{cases}0, & \lambda_j\neq\lambda_k,\ 0\leqslant m\leqslant n_k-1,\\ 1, & \lambda_j=\lambda_k,\ m=s_j-1,\\ 0, & \lambda_j=\lambda_k,\ m\neq s_j-1,\ 0\leqslant m\leqslant n_j-1=n_k-1.\end{cases}$$

Приводимая ниже теорема 2 является переформулировкой ряда результатов работы [16].

Теорема 2. *Пусть* $\{\lambda_j\}_1^{\infty}\in\Delta(n)$ *и* $f\in K_B$ *в* $H_p(\Pi_+)$, $1<p<\infty$, *где функция* $B(z)$ *имеет вид* (6). *Тогда*

а)
$$\sum_{j=1}^{\infty}|f^{(s_j-1)}(\lambda_j)|^p(\operatorname{Im}\lambda_j)^{p(s_j-1)+1}\leqslant$$
$$\leqslant A_p(\delta,\ n)\,\|f\|^p,$$

где постоянная $A_p(\delta,\ n)$ *зависит лишь от* p, δ *и* n,

б)
$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}f^{(s_j-1)}(\lambda_j)\,\Omega_j(x),$$

где ряд сходится в метрике $L_p(R)$, *функция* Ω_j *имеет вид* (7), *а*

$$\|f\|^p\leqslant C_p(\delta,\ n)\sum_{j=1}^{\infty}|f^{(s_j-1)}(\lambda_j)|^p(\operatorname{Im}\lambda_j)^{p(s_j-1)+1},$$

где постоянная $C_p(\delta,\ n)$ *зависит лишь от* p, δ *и* n,

в) *система функций* $\{\Omega_j\}_1^{\infty}$ *образует в подпространстве* K_B *базис.*

Пусть теперь $\{z_k\}_{-\infty}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, лежащих в полосе $\{z\,|\,0<h_1<\operatorname{Im}z<h_2<\infty\}$ и удовлетворяющих условию (2). Через $\{\lambda_j\}_{-\infty}^{\infty}$ обозначим последовательность, в которой число z_k повторено n_k раз, $k \in \mathbf{N}$. Потребуем выполнения условия $n = \sup\limits_{k \in Z} n_k < \infty$. Оставляя за числом s_k обозначение кратности появления λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_{-\infty}^{k}$, класс всех последовательностей $\{\lambda_j\}_{-\infty}^{\infty}$, удовлетворяющих двум отмеченным здесь условиям, обозначим через $\tilde{\Delta}(n)$. Введем функцию Бляшке

$$B(z) = \prod_{j \in Z} \frac{\bar{\lambda}_j}{\lambda_j} \cdot \frac{\lambda_j - z}{\bar{\lambda}_j - z}, \tag{8}$$

множество нулей которой $\{\lambda_j\}_{-\infty}^{\infty}$ принадлежит классу $\tilde{\Delta}(n)$. Бесконечное произведение в правой части равенства (8) сходится в Π_-, поскольку этим свойством обладает функция

$$B\left(-\frac{1}{z}\right) = \prod_{j \in Z} \frac{z + \lambda_j^{-1}}{z + \bar{\lambda}_j^{-1}},$$

множество нулей которой лежит в ограниченной части Π_+ ([1], с. 62). Таким образом, функция $B(z)$ удовлетворяет условиям предложения 1 и порождает модельное подпространство $K_B = P^+ BI(H_{p,\rho}(\Pi_-))$ в пространстве $H_{p,\rho}(\Pi_+)$.

Через $l_{p,\gamma}(\mathbf{Z})$ обозначим пространство последовательностей $f = \{f_j\}$, $j \in \mathbf{Z}$, суммируемых в степени p с весом $\gamma = \{\delta_j\}$, где $\delta_j \in \mathbf{R}$, $\delta_j > 0$

$$\|f\| = \left(\sum_{j \in Z} |f_j|^p \delta_j\right)^{1/p} < \infty.$$

Нашей ближайшей целью является следующее обобщение теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть* $\{\lambda_j\}_{-\infty}^{\infty} \in \tilde{\Delta}(n)$ *и* $f \in K_B$ *в* $H_{p,\rho}(\Pi_+)$, $1 < p < \infty$, *где функция* B *имеет вид* (8). *Тогда*

а) $\{f^{(s_j-1)}(\lambda_j)\} \in l_{p,\gamma}(\mathbf{Z})$, *где* $\delta_j = |\rho_+(\lambda_j)|$, *а функция* $|\rho_+(z)|$ *имеет вид* (5),

б) $$f(x) = \sum_{j \in Z} f^{(s_j-1)}(\lambda_j)\,\Omega_j(x),$$

где ряд сходится в метрике $L_p(\mathbf{R}, \rho)$, *а функция* Ω_j *имеет вид* (7), *где функцию* B *следует заменить на* B,

в) *отображение, определенное в пунктах* а) *и* б), *есть изоморфизм* $K_B \simeq l_{p,\gamma}(\mathbf{Z})$.

Как обычно, доказательство этой теоремы опирается на соответствующий результат типа теоремы Шапиро-Шилдса [23].

Предложение 4. *Пусть множество* $\{\lambda_j\}$ *удовлетворяет условиям теоремы* 3. *Тогда для любой функции* $f \in H_{p,\rho}(\Pi_+)$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{j \in Z} |f^{(s_j-1)}(\lambda_j)|^p\, |\rho_+(\lambda_j)| \leqslant c\|f\|^p,$$

где постоянная c *не зависит от* f.

▶ Вначале покажем, что справедливы неравенства вида

$$\sum_{j\in Z} |f^{(m)}(z_j)|^p |\rho_+(z_j)| \leqslant c(m)\|f\|^p, \ m=0,\ 1,\cdots,$$

где постоянные $c(m)$ не зависят от f.

Заметив, что ввиду условий предложения $|z_j - z_k| \geqslant d > 0$, $j \neq k$ (см. [1], стр. 285), рассмотрим систему непересекающихся кружков $k_j = \left\{|z - z_j| < \frac{\mu}{3}\right\}$, где $\mu = \min\{h_1, d\}$. Воспользовавшись оценкой для $|f^{(m)}(z_j)|$, заимствованной из работы [4], и применяя неравенство Гельдера, получаем что

$$|f^{(m)}(z_j)| \leqslant a_m \iint\limits_{k_j} |f(z)|\, d\sigma(z) \leqslant$$

$$\leqslant a_m \left\{\iint\limits_{k_j} |f(z)|^p |\rho_+(z)|\, d\sigma(z)\right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{\iint\limits_{k_j} |\rho_+(z)|^{-\frac{q}{p}} d\sigma(z)\right\}^{\frac{1}{q}},$$

где a_m не зависит от f, а $d\sigma(z)$ — плоская мера Лебега.

Точку z, $z \in \Pi_+$, и отрезок I, $I \subset R$, следуя Е. М. Дынькину [24], будем называть связанными, если

$$c_1 \rho(z,\ R) \leqslant \rho(z,\ I),\ |I| \leqslant c_2 \rho(z,\ R),$$

где $c_{1,2}$ — фиксированные постоянные. Полагая $\tilde{z}_j = z_j + re^{i\theta}$, где

$$0 \leqslant r \leqslant \frac{\mu}{3},\ x_j = \operatorname{Re} z_j,\ 0 < \varepsilon < \frac{\mu}{3},\ I_j = [x_j - \varepsilon,\ x_j + \varepsilon],\ \theta \in R,$$

получаем, что точка $\tilde{z}_j$ и отрезок I_j связаны одновременно для всех $j \in Z$, $\theta \in R$, $r \in \left[0,\ \frac{\mu}{3}\right]$, так как для указанных значений j, θ, r и ε

$$h_1 - \frac{\mu}{3} \leqslant \rho(\tilde{z}_j,\ R) < \rho(\tilde{z}_j,\ I_j) \leqslant h_2 + \frac{\mu}{3}.$$

Отсюда, учитывая, что $\tilde{\rho} = \rho^{-\frac{q}{p}} \in A_q$, $q = \frac{p}{p-1}$ ([25], с. 45), где $|\tilde{\rho}_+(z)| = |\rho_+(z)|^{-\frac{q}{p}}$ — стандартное субгармоническое продолжение веса $\tilde{\rho}$ в Π_+, видим, что

$$|\rho_+(\tilde{z}_j)| \leqslant \frac{c}{h_1 - \frac{\mu}{3}} \int\limits_{I_j} \rho\, dt,\ |\rho_+(\tilde{z}_j)|^{-\frac{q}{p}} \leqslant \frac{c}{h_1 - \frac{\mu}{3}} \int\limits_{I_j} \rho^{-\frac{q}{p}} dt,$$

где c не зависит от j ([24], с. 82).

По принципу максимума найдется точка $z_j' = z_j + \frac{\eta}{3} e^{i\theta'}$, $\theta' \in \mathbb{R}$ такая, что справедлива оценка

$$\iint\limits_{K_j} |\rho_+(z)|^{-\frac{q}{p}} d\sigma(z) \leqslant \frac{\pi\eta^2}{9} |\rho_+(z_j')|.$$

Учитывая эту оценку и неравенство (3), имеем

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |f^{(m)}(z_j)|^p |\rho_+(z_j)| \leqslant$$

$$\leqslant c_1(m) \sum_j |\rho_+(z_j)| |\tilde{\rho}_+(z_j')|^{p/q} \iint\limits_{K_j} |f(z)|^p \rho_+(z) d\sigma(z) \leqslant$$

$$\leqslant c_2(m) \sum_j \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{I_j} \rho\, dt\right)\left(\frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{I_j} \tilde{\rho}\, dt\right)^{p/q} \iint\limits_{K_j} |f(z)|^p |\rho_+(z)| d\sigma(z) \leqslant$$

$$\leqslant c_3(m) \int\limits_0^{h_1} \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^p \rho_+(x+iy)\, dxdy \leqslant c(m) \|f\|^p,$$

где $c(m)$ не зависит от f.

Для того, чтобы получить утверждение рассматриваемого предложения, остается повторить доказательство теоремы 3.1 из [16]. ▶

◀ Перейдем к доказательству теоремы 3. Утверждение а) является следствием предложения 4 ввиду того, что $K_B \subset H_{p,\rho}(\Pi_+)$.

Пусть $\{f_j\} \in l_{p,\gamma}(\mathbb{Z})$. Покажем, что ряд $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} f_j \Omega_j$ сходится в $H_{p,\rho}(\Pi_+)$, а его сумма $S(x) \in K_B$. Заметив, что $H^*_{p,\rho}(\Pi_+) = H_{q,\tilde{\rho}}(\Pi_+)$, рассмотрим отрезок ряда

$$S_{m,r}(x) = \sum_{j=m}^{r} f_j \Omega_j(x).$$

Учитывая, что

$$\Omega_j(x) = B(x) \sum_{k=0}^{n_j - s_j} a_{kj} (x - \lambda_j)^{-n_j + s_j + k - 1},$$

где коэффициенты a_{kj}, $0 \leqslant k \leqslant n_j - 1$, $j \in \mathbb{Z}$, равномерно ограничены ([16], с. 1373), получаем

$$\|S_{m,r}\| = \sup_{\substack{g\in H_{q,\tilde{\rho}}(\Pi_+) \\ \|g\|\leqslant 1}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} S_{m,r}(x) \overline{g(x)}\, dx \right| = \sup_g \left| \sum_{j=m}^{r} f_j \int\limits_{\mathbb{R}} \Omega_j(x) \overline{g(x)}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_g \sum_{j=m}^{r} |f_j| \sum_{k=0}^{n_j - s_j} |a_{kj}| \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{B(x) \overline{g(x)}\, dx}{(x-\lambda_j)^{n_j - s_j - k + 1}} \right| \leqslant$$

$$< c \sup_{x} \sum_{j=m}^{r} |f_j| \sum_{k=0}^{n_j-s_j} \frac{|\tilde{g}^{(n_j-s_j-k)}(\lambda_j)|}{(n_j-s_j-k)!},$$

где

$$\tilde{g}(z) = \int_{R} \frac{B(x)\overline{g(x)}}{x-z}\,dx \in H_{q,\bar{\rho}}(\Pi_-).$$

Последнее утверждение является следствием ограниченности преобразования Гильберта в пространстве $L_p(\mathbf{R}, \rho)$ [25] и рассуждений из [26], с. 54—55, приведенных там для степенных весов и справедливых в общем случае для весов $\rho \in A_p$. Поэтому, продолжая оценку и используя вновь предложение 4, получаем

$$\|S_{m,r}\| \leqslant c\left\{\sum_{j=m}^{r} |f_j|^p |\rho_+(\lambda_j)|\right\}^{1/p} \cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{j\in Z} |\rho_+(\lambda_j)|^{-\frac{q}{p}}\left[\sum_{k=0}^{n_j-s_j} |\tilde{g}^{(n_j-s_j-k)}(\lambda_j)|\right]^q\right\}^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant c\left\{\sum_{j=m}^{r} |f_j|^p (\rho_+(\lambda_j)|\right\}^{1/p},$$

где постоянная c не зависит от m и r. Отсюда следует сходимость рассматриваемого ряда к функции $S(x)$ из $H_{p,\rho}(\Pi_+)$ и оценка $\|S(x)\| \leqslant$ $\leqslant c\,\|\{f_j\}\|$. Но $\Omega_j(z)[B(z)]^{-1} \in H_{p,\rho}(\Pi_-)$, $j \in \mathbf{Z}$, $\Rightarrow \Omega_j \in K_B$, $j \in \mathbf{Z} \Rightarrow S(x) \in K_B$.

Остается показать, что функция $f \in K_B$ разлагается в ряд

$$f(x) = \sum_{j\in Z} f^{(s_j-1)}(\lambda_j)\,\Omega_j(x).$$

Так как $K_B \subset H_{p,\rho}(\Pi_+)$, то в силу предложения 4 $\{f^{(s_j-1)}(\lambda_j)\} \in l_{p,\gamma}(\mathbf{Z})$ и, следовательно, ряд в правой части сходится в $H_{p,\rho}(\Pi_+)$, а его сумма $S(x) \in K_B$. Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - S(x) \in K_B$. С одной стороны, $\frac{h(z)}{B(z)} \in H_{p,\rho}(\Pi_-)$ по определению класса K_B. С другой — по теореме Ф. Рисса ([1], с. 62) с учетом предложения 2.4 из [19] $\frac{h(z)}{B(z)} \in H_{p,\rho}(\Pi_+) \Rightarrow h\overline{B} = 0$ почти всюду на $\mathbf{R} \Rightarrow h \equiv 0$. ▶

§ 2. Интерполяция на R

Пусть $h > 0$, $z_k = x_k + 2ih$, где $\{x_k\}_{-\infty}^{\infty} \subset \mathbf{R}$ и удовлетворяет условию

$$|x_j - x_k| \geqslant d > 0, \quad k \neq j. \tag{9}$$

Тогда ([1], с. 285) множество $\{z_k\}$ подчинено условию (2) и, следовательно, существует произведение Бляшке вида (8). При этом $\lambda_k = \xi_k + 2ih$, где вещественные последовательности $\{\xi_k\}$ и $\{x_k\}$ связаны тем же соответствием, что и последовательности $\{\lambda_k\}$ и $\{z_k\}$.

Введем еще одну функцию Бляшке

$$A(z)=\prod_{k\in Z}\frac{\bar u_k}{u_k}\,\frac{u_k-z}{\bar u_k-z},\quad u_k=\xi_k+ih, \tag{10}$$

аналитическую в Π_+ и ограниченную в $\bar\Pi_+$, $|A(z)|\leqslant 1$, и рассмотрим функцию

$$a(z)=A(z+ih)=\prod_{k\in Z}\frac{\bar u_k}{u_k}\,\frac{\xi_k-z}{\bar \xi_k-z}, \tag{11}$$

аналитическую в полуплоскости $\operatorname{Im} z>-h$ и ограниченную в полуплоскости $\operatorname{Im} z\geqslant -h$. $|a(z)|\leqslant 1$. Очевидно

$$a(z)=\prod_{k\in Z}\left(\frac{x_k-ih}{x_k+ih}\,\frac{x_k-z}{x_k-2ih-z}\right)^{n_k}$$

и, следовательно, множество $X=\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет условию (1) и является множеством нулей функции $a(z)$ соответственно кратностей $\{n_k\}_{-\infty}^{\infty}$. Следуя § 1, рассмотрим функции

$$w_j(z)=\frac{(z-\xi_j)^{n_j}}{a(z)},\quad j\in Z,$$

систему полиномов

$$v_j(z)=\sum_{k=0}^{n_j-s_j}\frac{w_j^{(k)}(\xi_j)}{k!}(z-\xi_j)^k,\ j\in Z$$

и связанную с ними систему функций

$$a_j(z)=\frac{a(z)\,v_j(z)}{(s_j-1)!\,(z-\xi_j)^{n_j-s_j+1}},\ j\in Z. \tag{12}$$

Основной целью § 2 является доказательство следующей интерполяционной теоремы.

Теорема 5. *Пусть функция Бляшке $B(z)$ имеет вид* (4), *множество ее нулей $\{z_k\}=\{x_k+2ih\}$ удовлетворяет условию* (9) *и $f\in K_B$ в $H_{p,\rho}(\Pi_+)$. Тогда*

а) $\{f^{(s_j-1)}(\xi_j)\}\in l_{p,\gamma}(Z)$, *где* $\delta_j=|\rho_+(\xi_j+ih)|$, *а* $|\rho_+(z)|$ *имеет вид* (5),

б) $$f(x)=\sum_{j\in Z}f^{(s_j-1)}(\xi_j)\,a_j(x),$$

где ряд сходится в метрике $L_p(\mathbf{R},\rho)$, а функция a_j имеет вид(12),

в) *отображение, определенное в пунктах* а) *и* б), *есть изоморфизм $K_B\simeq l_{p,\gamma}(\mathbf{Z})$.*

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы приведем несколько вспомогательных результатов.

Предложение 6. *Пусть $B(z)$ имеет вид* (4), *а множество ее нулей $\{z_k\}$ удовлетворяет условию* (2) *и лежит в полосе* $0<h_1<$

$< \operatorname{Im} z_k < h_2 < \infty$. *Тогда функции* $\frac{d^m}{dz^m} B(z)$, $m = 0, 1, \cdots$, *ограничены в полуплоскостях* $\Pi_1 = \{z \mid \operatorname{Im} z \geqslant -h_1 + \varepsilon_1\}$, $\Pi_2 = \{z \mid \operatorname{Im} z - h_2 - \varepsilon_2\}$, *где* $\varepsilon_{1,2} > 0$.

◀ Ввиду ограниченности последовательности $\{n_k\}_{-\infty}^{\infty}$ можно рассмотреть лишь случай $n_k = 1$, $k \in \mathbf{Z}$. Пусть $z_k = x_k + iy_k$, где $h_1 < y_k < h_2$. Сходимость бесконечного произведения (4) в полосе $\Pi_0 = \{z \mid 0 \geqslant \operatorname{Im} z \geqslant -h_1 + \varepsilon_1\}$ доказывается стандартным образом ([1], с. 61—62). Для того, чтобы доказать ограниченность функции $B(z)$ в Π_0 воспользуемся оценкой ([1], с. 286)

$$\ln |B(z)| \leqslant \sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{2|y|\, y_k}{(x - x_k)^2 + (y + y_k)^2}, \quad z = x + iy.$$

Из условия (2) ввиду [1], с. 285, следует, что $|z_j - z_k| \geqslant d > 0$, $j \neq k$. Поэтому существует такое натуральное число $N = N(d)$, что в окрестности $|x - \tilde{x}| < d$ любой точки $\tilde{x} \in \mathbf{R}$ лежит не более N проекций x точек z_j. Проведем следующее разбиение вещественной прямой $\mathbf{R}$, $\mathbf{R} = \bigcup_{k \in Z} O_k$, где $O_k = [kd, (k+1)d)$. Пусть $x \in O_{k_0}$, тогда $\rho(x, O_j) \geqslant (|k_0 - j| - 1)\, d$ для всех $j \in \mathbf{Z}_0$, где $\mathbf{Z}_0 = \{k \in \mathbf{Z} \mid |k_0 - k| > 1\}$. Поэтому

$$\ln |B(z)| \leqslant 2 h_1 h_2 \Big(\sum_{q \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{Z}_0} \sum_{x_j \in O_k} (y + y_j)^{-2} +$$

$$+ \sum_{k \in \mathbf{Z}_0} \sum_{x_j \in O_k} (x - x_j)^{-2} \Big) \leqslant 2 h_1 h_2 N \left(\frac{3}{h_1^2} + \frac{1}{d^2} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \right) < \infty$$

равномерно по всем $k_0 \in \mathbf{Z}$. Отсюда следует ограниченность функции $B(z)$ в Π_0.

Равномерная сходимость бесконечного произведения (4) в окрестности точки z, где $z \in \Pi_1 \setminus \{z_k\}_{-\infty}^{\infty}$, равносильна равномерной сходимости в этой окрестности ряда

$$\ln B(z) = \sum_{k \in \mathbf{Z}}' \ln \left(\frac{\bar{z}_k}{z_k} \frac{z - z_k}{z - \bar{z}_k} \right)$$

при соответствующем выборе ветви функции $\ln z$. Дифференцируя это равенство, получаем

$$(\ln B(z))' = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{2 y_k}{(z - z_k)(z - \bar{z}_k)}.$$

Но тогда в окрестности указанной точки z функция $B'(z)$ разлагается в следующий равномерно сходящийся функциональный ряд:

$$B'(z) = B(z)\, (\ln B(z))' = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{2 y_k B_k(z)}{(z - \bar{z}_k)^2},$$

где $B_k(z) = B(z) \dfrac{z - \bar{z}_k}{z - z_k}$. Покажем, что на самом деле этот ряд сходится в любой точке $z \in \Pi_1$, а его сумма ограничена в Π_1. Отсюда будет следовать ограниченность функции $B'(z)$ в Π_1.

Действительно, при всех $k \in Z$ $|B_k(z)| \leqslant 1$ для $z \in \Pi_1$ и $|B_k(z)| \leqslant |B(z)|$ для $z \in \Pi_0$. Поэтому

$$\left| \sum_{k \in Z} \frac{2 y_k B_k(z)}{(z - \bar{z}_k)^2} \right| \leqslant c \sum_{k \in Z} \frac{1}{|z - \bar{z}_k|^2},$$

где постоянная c не зависит от $z \in \Pi_1$. Повторяя рассуждения, проведенные при оценке $|\ln B(z)|$, получаем, что $|B(z)| \leqslant c_1 < \infty$ в Π_1.

Если $m > 1$, то

$$\frac{d^m}{dz^m} B(z) = B^m(z) \frac{d^m}{dz^m} \ln B(z) - Q(B, B', \cdots, B^{(m-1)}) =$$

$$= (-1)^m (m-1)! B^m(z) \sum_{k \in Z} [(z - \bar{z}_k)^{-m} - (z - z_k)^{-m}] -$$

$$- Q(B, B', \cdots, B^{(m-1)}),$$

где Q — многочлен от n переменных с вполне определенными коэффициентами. Соответствующие индукционные рассуждения приводят к справедливости предложения в общем случае. Случай полуплоскости Π_2 рассматривается аналогично. ▶

Предложение 7. *Пусть $B(z)$ — произведение Бляшке вида (4), корни которого лежат в полосе $0 < h_1 < \operatorname{Im} z < h_2 < \infty$. Тогда для любого α, $|\alpha| < h_1$, отображение $f(x) \to f(x - i\alpha)$ является изоморфизмом подпространства $K_B = P^+ B(x) I(H_{p,\rho}(\Pi_-))$ на подпространство $K_1 = P^+ B(x - i\alpha) I(H_{p,\rho}(\Pi_-))$.*

◀ Пусть $\alpha > 0$, $f \in K_B$. Тогда $f(z) \in H_{p,\rho}(\Pi_+)$ и допускает интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} \frac{B(t) - B(z)}{t - z} g^-(t)\, dt, \quad z \in \overline{\Pi}_+, \quad g^- = \bar{B} f,$$

определяемое предложением 1. Аналитическая продолжимость функции $f(z)$ через вещественную ось доказывается так же как и в предложении 1.4 из работы [9]. Поэтому для любого y, $-\alpha \leqslant y < \infty$

$$f(x + iy) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} \frac{B(t) - B(x + iy)}{t - x - iy} g^-(t)\, dt, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{13}$$

Так как ядро $k(t, x) = (t - x + i\alpha)^{-1}$ является ядром Кальдерона—Зигмунда ([25], с. 82—85), то с учетом предложения 6 получаем, что

$$\|f(x - i\alpha)\| \leqslant \frac{1}{2} \left\| \int_{\mathbf{R}} k(t, x) B(t) g^-(t)\, dt \right\| +$$

$$+ \frac{1}{2} \left\| B(x - i\alpha) \int_{\mathbf{R}} k(t, x) g^-(t)\, dt \right\| \leqslant c (\|B g^-\| + \|g^-\|) \leqslant c \|f\|.$$

Отсюда следует, что $f(x - i\alpha) \in L_p(\mathbf{R}, \rho)$. Далее покажем, что $f(z - i\alpha) \in H_{p,\rho}(\Pi_+)$. Полагая в равенстве (13) $y = -\alpha$ и действуя после этого на него преобразованием Гильберта S, видим, что

$$(S[f(t-i\alpha)])(x)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{R}\frac{dt}{t-x}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{R}\frac{B(\tau)-B(t-i\alpha)}{\tau-t+i\alpha}\,g^{-}(\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{R}g^{-}(\tau)\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_{R}\frac{B(t-i\alpha)-B(\tau)}{t-\tau-i\alpha}\,\frac{dt}{t-x}\,d\tau=f(x-i\alpha),$$

так как при всех $\tau\in R$ $\frac{B(t-i\alpha)-B(\tau)}{t-\tau-i\alpha}\in H_{p,\rho}(\Pi_{+})$ ввиду оценки

$$\int\limits_{R}\left|\frac{B(t+iy-i\alpha)-B(\tau)}{t+iy-\tau-i\alpha}\right|^{p}|\rho_{+}(t+iy)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{t\in R}\left|\frac{B(t+iy-i\alpha)-B(\tau)}{t+iy-\tau-i\alpha}\,(t+i(y+1))\right|^{p}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{R}\frac{|\rho_{+}(x+iy)|}{|x+i(y+1)|^{p}}\,dx<c<\infty,$$

где $y>0$, а постоянная c от y не зависит. Справедливость этой оценки является следствием предложения 6 и того факта, что $\rho_{+}(z)(z+i)^{-p}\in H_{1}(\Pi_{+})$ ([30], с. 15). Далее

$$\frac{f(x-i\alpha)}{B(x-i\alpha)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{R}\frac{B(\tau)-B(x-i\alpha)}{B(x-i\alpha)\,(\tau-x+i\alpha)}\,g^{-}(\tau)\,d\tau.$$

Действуя на это равенство оператором S и учитывая при этом, что для всех $\tau\in R$ $\frac{[B(t-i\alpha)]^{-1}-[B(\tau)]^{-1}}{\tau-t+i\alpha}\in H_{p,\rho}(\Pi_{-})$, имеем

$$\left(S\left[\frac{f(t-i\alpha)}{B(t-i\alpha)}\right]\right)(x)=-\frac{f(x-i\alpha)}{B(x-i\alpha)}\Rightarrow\frac{f(x-i\alpha)}{B(x-i\alpha)}\in H_{p,\rho}(\Pi_{-})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x-i\alpha)\in K_{1}.$$

Обратно $f_{1}(x)\in K_{1}\Rightarrow f_{1}(z)\in H_{p,\rho}(\Pi_{+})$, $\|f_{1}(x+i\alpha)\|\leqslant c_{1}\|f_{1}\|$ и

$$f_{1}(x+i\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{R}\frac{B(\tau-i\alpha)-B(x)}{\tau-x-i\alpha}\,g_{1}^{-}(\tau)\,d\tau,$$

где $g_{1}^{-}(\tau)=[B(\tau-i\alpha)]^{-1}f_{1}(\tau)$. Полученное отсюда тем же, что и выше, способом соотношение

$$\left(S\left[\frac{f_{1}(t+i\alpha)}{B(t)}\right]\right)(x)=-\frac{f_{1}(x+i\alpha)}{B(x)}$$

показывает, что $f_{1}(x+i\alpha)\in K_{B}$. Остается положить $f_{1}(x)=f(x-i\alpha)$. Случай $\alpha<0$ рассматривается аналогично. ▶

Следующее предложение показывает, что при построении модельных подпространств с помощью мероморфных функций полюса последних играют определяющую роль.

Предложение 8. *Пусть* $\alpha = \beta - h$, *где* $\beta \in (0, 2h)$

$$A(z - i\alpha) = \prod_{j\in Z} \frac{\bar{u}_j}{u_j} \frac{u_j + i\alpha - z}{\bar{u}_j + i\alpha - z}, \quad B(z - i\beta) = \prod_{j\in Z} \frac{\bar{\lambda}_j}{\lambda_j} \frac{\lambda_j + i\beta - z}{\bar{\lambda}_j + i\beta - z},$$

$$K_1 = P^+ A(x - i\alpha) H_{p,\rho}(\Pi_-), \; K_2 = P^+ B(x - i\beta)) H_{p,\rho}(\Pi_-).$$

Тогда $K_1 = K_2$.

◀ Прежде всего заметим, что множество нулей $\{u_j + i\alpha\}$ функции $A(z - i\alpha)$ лежит на прямой $y = \beta\ (> 0)$, а множество нулей $\{\lambda_j + i\beta\}$ функции $B(z - i\beta)$ — на прямой $y = \beta + h\ (> 0)$. Кроме того, эти функции имеют одинаковое множество полюсов $\{x_j + i(\beta - 2h)\} \subset \Pi_-$ с учетом их кратностей. В силу предложения 6 функции $A(z - i\alpha)$ и $B(z - i\beta)$ аналитичны и ограничены всюду вне полосы $\{z \,|\, |y - \beta + 2h| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, в частности в Π_+.

Введем функцию $C(z) = A(z - i\alpha)[B(z - i\beta)]^{-1}$ и покажем, что $C^{\pm 1}(z) \in H_\infty(\Pi_-)$ и

$$C(z) = \prod_{j\in Z} \zeta_j \eta_j \frac{u_j + i\alpha - z}{\lambda_j + i\beta - z}, \quad \zeta_j = \frac{\bar{u}_j}{u_j}, \quad \eta_j = \frac{\lambda_j}{\bar{\lambda}_j}. \tag{14}$$

Для этого рассмотрим бесконечное произведение

$$C(i(\beta + h) + \zeta) + \prod_{j\in Z} \zeta_j \eta_j \frac{\bar{u}_j - \zeta}{u_j - \zeta}.$$

Так как

$$\left|1 - \zeta_j \eta_j \frac{\bar{u}_j - \zeta}{u_j - \zeta}\right| = \left|1 - \zeta_j^2 \eta_j \frac{1 - \frac{\zeta}{\bar{u}_j}}{1 - \frac{\zeta}{u_j}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant |1 - \zeta_j^2 \eta_j| + \frac{2h|\zeta|}{|u_j \bar{u}_j| \cdot \left|1 - \frac{\zeta}{u_j}\right|} \leqslant \frac{2h}{|u_j|^2}\left(h + \frac{|\zeta|}{\left|1 - \frac{\zeta}{u_j}\right|}\right),$$

то последнее бесконечное произведение сходится равномерно и абсолютно на любом компакте, лежащем в полуплоскости $y < \frac{h}{2}$. То же самое верно для бесконечного произведения (14) в полуплоскости $y < \delta < \beta + \frac{3h}{2}$ и поэтому оно представляет собой функцию, аналитическую на любом компакте, лежащем в полуплоскости $y < \delta$, а на любом компакте, лежащем в полосе $0 < y < \delta$

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=-n}^{n} \zeta_j \eta_j \frac{u_j + i\alpha - z}{\lambda_j + i\beta - z} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\prod_{j=-n}^{n} \zeta_j \frac{u_j + i\alpha - z}{\bar{u}_j + i\alpha - z} \cdot \prod_{j=-n}^{n} \eta_j \frac{\bar{\lambda}_j + i\beta - z}{\lambda_j + i\beta - z}\right) = C(z).$$

По принципу аналитического продолжения равенство (14) выполняется всюду в полуплоскости $y < \delta$.

Повторяя фрагмент доказательства предложения 6, получаем, что при $y \leqslant 0$

$$-\ln|C(z)| \leqslant C(c_1 - y).$$

В силу принципа Фрагмена—Линделефа $-\ln|C(z)| \leqslant C < \infty$ в полуплоскости $\overline{\Pi}_- \Rightarrow |C(z)|^{-1} \leqslant c < \infty$ в $\overline{\Pi}_-$. Кроме того, $|C(z)| < 1$ в $\overline{\Pi}_-$, т. к. $\left|\dfrac{a_j + i\alpha - z}{\lambda_j + i\beta - z}\right| < 1$ в $\overline{\Pi}_-$, $j \in Z$.

Пусть $f \in K_1 \subset H_{p,\rho}(\Pi_+)$, тогда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_R \frac{A(t-i\alpha) - A(x-i\alpha)}{t-x} g^-(t)\,dt, \quad g^- \in H_{p,\rho}(\Pi_-).$$

Используя прием, неоднократно примененный при доказательстве предложения 7, получаем, что

$$\left(S\left|\frac{f(t)}{B(t-i\beta)}\right|\right)(x) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_R \frac{dt}{t-x}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_R C(t)K(t,\tau)A(\tau-i\alpha)g^-(\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_R A(\tau-i\alpha)g^-(\tau)\frac{d\tau}{\pi i}\int\limits_R C(t)K(t,\tau)\frac{dt}{t-x} = -\frac{f(x)}{B(x-i\beta)},$$

так как

$$C(t)K(t,\tau) = C(t)\left([A(t-i\alpha)]^{-1} - [A(\tau-i\alpha)]^{-1}\right)(\tau-t)^{-1} \in H_{p,\rho}(\Pi_-)$$

при любом $\tau \in R$. Таким образом, $f \in K_2$. Аналогично доказывается, что $f \in K_2 \Rightarrow f \in K_1$. Поэтому $K_1 = K_2$. ▶

◀ Приступая к доказательству теоремы 5, в качестве функции $B(z)$ в предложении 7 возьмем функцию $A(z)$ вида (10), для которой $h_1 = h_2 = h$. Положим $\alpha = \beta - h$, где $\beta \in (0, 2h)$. Тогда

$$A(z-i\alpha) = \prod_j(-\zeta_j)\,\frac{\xi_j + i\beta - z}{\xi_j + i(\beta - 2h) - z} = a(z - i\beta),$$

где $a(z)$ имеет вид (11). Пусть $f \in K_A = P^+A(x)H_{p,\rho}(\Pi_-)$. По теореме 3

$$f(x) = \sum_{j\in Z} f^{(s_j-1)}(\lambda_j)\,\Omega_j(x),$$

$$\|f\| \asymp \Big(\sum_j |f^{(s_j-1)}(\lambda_j)|^p\,|\rho_+(\lambda_j)|\Big)^{1/p}.$$

В силу предложения 7 $f \in K_A \Rightarrow f_1(x) = f(x - i\alpha) \in K_1 \Rightarrow$

$$f_1(x) = \sum_j f^{(s_j-1)}(\lambda_j)\,\Omega_j(x - i\alpha) = \sum_j f_1^{(s_j-1)}(\lambda_j + i\alpha)\,\Omega_j(x - i\alpha),$$

$$\|f_1\| \asymp \|f\| \asymp \Big(\sum_j |f_1^{(s_j-1)}(\xi_j + i\beta)|^p\,|\rho_+(\lambda_j)|\Big)^{1/p}.$$

Пусть теперь $f \in K_B$, где функция Бляшке $B(z)$ определена условием теоремы 5. В силу предложения 7 $f(x - i\beta) \in K_2$, а значит ввиду предложения 8 $f(x - i\beta) \in K_1$. Поэтому

$$f(x-i\beta)=\sum_j f^{(s_j-1)}(\xi_j)\,\Omega_j(x-i\alpha), \tag{14'}$$

$$\|f\|\asymp\|f(x-i\beta)\|\asymp\Big(\sum_j |f^{(s_j-1)}(\xi_j)|^p\,|\rho_+(\lambda_j)|\Big)^{1/p}.$$

При этом ряд в (14′) сходится в $L_p(\mathbf{R},\rho)$, а следовательно и в $H_{p,\rho}(\Pi_+)$. Осуществляя в равенстве (14′) замену $x\to x+i\beta$, учитывая при этом, что в $H_{p,\rho}(\Pi_+)\;\|g(z+i\beta)\|\leqslant\|g(z)\|$, получаем

$$f(x)=\sum_j f^{(s_j-1)}(\xi_j)\,\Omega_j(x+i(\beta-\alpha)).$$

Остается заметить, что

$$\Omega_j(x+i(\beta-\alpha))=\frac{A(x+ih)\,q_j(x+ih)}{(s_{j-1})!\,(x-x_j)^{n_j-s_j+1}}=a_j(x),\quad j\in Z. \blacktriangleright$$

§ 3. Регуляризация интегралов

Пусть $\mathbf{L}_2^\infty=\mathbf{L}_2^\infty(\mathbf{R})$ — пространство, состоящее из бесконечно-дифференцируемых функций, квадратично суммируемых на $\mathbf{R}$ вместе со всеми своими производными. Сходимость в $\mathbf{L}_2^\infty$ определяется счетным набором норм

$$\|f\|_k=\max_{0\le j\le k}\left(\int_{\mathbf{R}}\left|\frac{d^j}{dx^j}f(x)\right|^2dx\right)^{1/2},\quad k=0,1,\cdots.$$

Пусть далее $\mathbf{L}_2^{-\infty}=(\mathbf{L}_2^\infty)^*$ — пространство обобщенных функций над $\mathbf{L}_2^\infty$. Функция $a(x)$ вида (11), в силу предложения 6, является мультипликатором в пространстве $\mathbf{L}_2^\infty$. Поэтому в пространстве $\mathbf{L}_2^{-\infty}$ определен оператор T умножения обобщенных функций на фунцию a

$$\langle Tg,f\rangle=\langle g,af\rangle,\quad g\in\mathbf{L}_2^{-\infty},\ f\in\mathbf{L}_2^\infty.$$

Задача обращения оператора T в $\mathbf{L}_2^{-\infty}$ эквивалентна задаче регуляризации интеграла от функции $\dfrac{f(x)}{a(x)}$, где $f\in\mathbf{L}_2^\infty$, имеющей степенные особенности вида $(x-x_j)^{-n_j}$ в точках множества X. Ниже дается решение этой задачи, опирающееся на интерполяционную теорему 5.

Оператор T не является двухсторонне обратимым в $\mathbf{L}_2^{-\infty}$, так как имеет бесконечномерное ядро, которому принадлежат, например, все функции $\delta(x-x_j)$, $j\in Z$. Однако оператор T в $\mathbf{L}_2^{-\infty}$ непрерывно обратим справа, а один из его правых обратных операторов T^{-1} имеет вид

$$\langle T^{-1}g,f\rangle=\left\langle g,\frac{f(x)-(\mathrm{I}f)(x)}{a(x)}\right\rangle, \tag{15}$$

где

$$(\mathrm{I}f)(x)=\sum_{j\in Z}f^{(s_j-1)}(\xi_j)\,a_j(x), \tag{16}$$

$a_j(x)$ имеет вид (12). В самом деле, если равенства (15) и (16) корректны, то

$$<TT^{-1}g, f> = <T^{-1}g, af> = <g, \frac{af - \mathrm{I}(af)}{a}> =$$

$$= <g, f>, g \in \mathrm{L}_2^{-\infty}, f \in \mathrm{L}_2^{\infty}, \text{ так как } [\mathrm{I}(af)](x) \equiv 0.$$

Таким образом, вопрос упирается в доказательство непрерывности в пространстве L_2^{∞} оператора I вида (16) и оператора

$$(Nf)(x) = \frac{f(x) - (\mathrm{I}f)(x)}{a(x)}. \tag{17}$$

Предложение 9. *Пусть выполнено условие* (9) *и* $f \in \mathrm{L}_2^{\infty}$. *Тогда*

$$\Big(\sum_{j \in Z} |f^{(s_j-1)}(\xi_j)|^2\Big)^{1/2} \leqslant c\|f\|_n,$$

где $n = \sup\limits_{j \in Z} n_j$, *а постоянная* c *не зависит от* f.

◀ Покажем, что в условиях предложения для любого $k = 0, 1, \cdots$, выполняется неравенство

$$\Big(\sum_{j \in Z} |f^{(k)}(x_j)|^2\Big)^{1/2} \leqslant c\,(\|f^{(k)}\|_0 + \|f^{(k+1)}\|_0).$$

Для этого зафиксируем малое число ε, $0 < \varepsilon < \frac{d}{2}$. Функцию f можно считать вещественной. По теореме о среднем для любого $j \in Z$ найдется такая точка $\eta_j \in [x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon]$, что

$$f^{(k)}(\eta_j) = \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{x_j - \varepsilon}^{x_j + \varepsilon} f^{(k)}(t)\,dt.$$

Откуда

$$\Big(\sum_j |f^{(k)}(x_j)|^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\sum_j |f^{(k)}(x_j) - f^{(k)}(\eta_j)|^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_j |f^{(k)}(\eta_j)|^2\Big)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_j \left|\int\limits_{x_j}^{\eta_j} f^{(k+1)}(t)\,dt\right|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_j \left|\frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{x_j - \varepsilon}^{x_j + \varepsilon} f^{(k)}(t)\,dt\right|^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \left[\left(\sum_j \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} |f^{(k+1)}(t)|^2\,dt\right)^{1/2} + \left(\sum_j \int\limits_{x_j - \varepsilon}^{x_j + \varepsilon} |f^{(k)}(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\right] \leqslant$$

$$\leqslant c_2\,(\|f^{(k)}\|_0 + \|f^{(k+1)}\|_0).$$

Поскольку для любого $j \in \mathrm{Z}$ $1 \leqslant s_j \leqslant n$, то

$$\left(\sum_j |f^{(s_j-1)}(\xi_j)|^2\right)^{1/2} \leqslant c_3 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_j |f^{(k)}(x_j)|^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c_4 \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_0 \leqslant c\|f\|_n. \ \blacktriangleright$$

Предложение 10. *Пусть $f \in L_2^\infty$. Тогда*

$$\|\mathrm{I} f\|_k \leqslant c(k)\|f\|_n, \quad k=0,\ 1, \cdots.$$

◀ Пусть $f \in L_2^\infty$ и $h = \mathrm{I} f$. Тогда в силу теоремы 5 и предложения 9 $\|h\|_0 = \|\mathrm{I} f\|_0 \leqslant c\|f\|_n$. Для оценки старших норм воспользуемся другим представлением функции $h \in K_B$) Из работы [16] следует, что

$$h(x)=\sum_{j\in Z}\frac{c_j}{(x-\overline{\lambda}_j)^{s_j}},$$

где

$$c_j=-\frac{(s_j-1)!}{2\pi i}\int h(t)\,\overline{\Omega_j(t)}\,dt\ \Big(\sum_j|c_j|^2\Big)^{1/2}\leqslant a\|h\|_0,$$

а ряд сходится в метрике $L_2(\mathbb{R})$. Далее

$$h(x)=\sum_{\substack{j\in Z\\ s_j=1}}\frac{c_j}{z_0-\overline{\lambda}_j}+\sum_{\substack{j\in Z\\ s_j>1}}\frac{c_j}{(z_0-\overline{\lambda}_j)(x-\overline{\lambda}_j)^{(s_j-1)}}-$$

$$-(x-z_0)\sum_{\substack{j\in Z\\ s_j>1}}\frac{c_j}{(z_0-\overline{\lambda}_j)(x-\overline{\lambda}_j)^{s_j}},$$

где коэффициенты всех рядов в правой части принадлежат пространству $l_1(Z)$, поскольку

$$\sum_j\left|\frac{c_j}{z_0-\overline{\lambda}_j}\right|\leqslant\Big(\sum_j|c_j|^2\Big)^{1/2}\cdot\Big(\sum_j|z_0-\overline{\lambda}_j|^{-2}\Big)^{1/2}<\infty.$$

Поэтому эти ряды допускают почленное дифференцирование любое число раз и

$$\frac{d^m}{dx^m}h(x)=(-1)^m\sum_{\substack{j\in Z\\ s_j>1}}\frac{c_j\cdot(s_j-1)s_j\cdots(s_j+m-2)}{(z_0-\overline{\lambda}_j)(x-\overline{\lambda}_j)^{s_j+m-1}}-$$

$$-(-1)^m(x-z_0)\sum_{j\in Z}\frac{c_j\cdot s_j\cdots(s_j+m-1)}{(z_0-\overline{\lambda}_j)(x-\overline{\lambda}_j)^{s_j+m}}+$$

$$+(-1)^m m\sum_{j\in Z}\frac{c_j\cdot s_j\cdots(s_j+m-2)}{(z_0-\overline{\lambda}_j)(x-\overline{\lambda}_j)^{s_j+m-1}}=$$

$$=(-1)^m\sum_{\substack{j\in Z\\ s_j>1}}c_j\frac{s_j\cdots s_j(s_j+m-1)}{(x-\overline{\lambda}_j)^{s_j+m}}+(-1)^m\sum_{\substack{j\in Z\\ s_j=1}}c_j\frac{m!}{(x-\overline{\lambda}_j)^{m+1}}=$$

$$=(-1)^m\sum_{j\in Z}\frac{(s_j+m-1)!}{(s_j-1)!}\,\frac{c_j}{(x-\overline{\lambda}_j)^{s_j+m}}.$$

Наконец

$$\left\| \frac{d^m}{dx^m} h \right\|_0 = \sup_{\substack{\psi \in H_s(\Pi_+) \\ \|\psi\|=1}} \left| \int_R \sum_j \frac{\bar{c}_j \cdot (s_j + m - 1)!}{(s_j - 1)!} \cdot \frac{\psi(x)\, dx}{(x - \lambda_j)^{s_j + m}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant a(n, m) \sup_{\psi} \sum_j |c_j|\, |\psi^{(s_j + m - 1)}(\lambda_j)| \leqslant$$

$$\leqslant a(n, m) \sup_{\psi} \left[\left(\sum_j |c_j|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_j |\psi^{(s_j + m - 1)}(\lambda_j)|^2 \right)^{1/2} \leqslant a_m \|h\|_0,\right.$$

ввиду теоремы Ш. Григорян [18]. Откуда следует, что

$$\|I f\|_k \leqslant a_k \|I f\|_0 \leqslant c(k) \|f\|_n, \quad k = 0, 1, \cdots. \ \blacktriangleright$$

Предложение 11. *Пусть $f \in L_2^\infty$, $x_0 \in R$. Тогда*

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \left| \frac{d^m}{dx^m} \frac{f(x) - (T_j f)(x)}{(x - x_0)^{j+1}} \right|^2 dx \leqslant a_{mj} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |f(x)^{(m+j+1)}|^2\, dx,$$

где

$$(T_j f)(x) = \sum_{k=0}^{j} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

а постоянные a_{mj} не зависят от f, m, $j = 0, 1, \cdots$.

◀ Введем операторы $\mathbf{A}_{m,j}$,

$$(\mathbf{A}_{m,j} f)(x) = \frac{d^m}{dx^m} \frac{f(x) - (T_j f)(x)}{(x - x_0)^{j+1}}, \quad m = 0, 1, \cdots, j = -1, 0, 1, \cdots,$$

$$T_{-1} f \equiv 0.$$

Справедлива следующая элементарная формула

$$\mathbf{A}_{m+1,j} f = \mathbf{A}_{m,j} f' - (j+1) A_{m,j+1} f. \tag{18}$$

Кроме того, в силу неравенства Харди

$$\|\mathbf{A}_{0,j+1} f\|^2 \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \left| \frac{1}{(x - x_0)^{j+1}} \int_{x_0}^{x} \frac{(t - x)^j}{j!} \cdot f^{(j+1)}(t)\, dt \right|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(j!)^2} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} |f^{(j+1)}(t)|\, dt \right|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(j!)^2} \|\mathbf{A}_{j+1,-1} f\|. \tag{19}$$

Формулы (18), (19) и принцип индукции приводят к справедливости доказываемого утверждения. ▶

Предложение 12. *Пусть выполнено условие (9), функция $a(z)$ имеет вид (11) и V_ε — комплексная ε-окрестность множества $X = \{x_j\}_{-\infty}^{\infty}$. Тогда для любых $m = 0, 1, \cdots$ и ε, $0 < \varepsilon < \dfrac{d}{2}$,*

$$\left|\frac{d^m}{dz^m}\frac{1}{a(z)}\right| \leqslant c_m(\varepsilon), \quad z \in \Pi_\varepsilon \setminus V_\varepsilon,$$

где $\Pi_\varepsilon = \{z \mid x \in \mathrm{R}, |y| \leqslant \varepsilon\}$, *а постоянные* $c_m(\varepsilon)$ *от* z *не зависят.*

◀ По лемме (1.2 ([1], с. 286) для всех $z \in \Pi_\varepsilon \setminus V_\varepsilon$

$$\frac{1}{|a(z)|} = \frac{1}{|A(z+ih)|} \leqslant c(\varepsilon)\exp \sum_{j\in Z} \frac{2(y+h)h}{(x-x_j)^2+(y+h)^2}.$$

Оценку

$$|a(z)|^{-1} \leqslant c_0(\varepsilon) < \infty, \quad z \in \Pi_\varepsilon \setminus V_\varepsilon, \tag{20}$$

получаем так же как и при доказательстве предложения 6. Если же $m \geqslant 1$, то

$$\frac{d^m}{dx^m}\frac{1}{a(x)} = [a(x)]^{-m-1} \cdot q(a, a', \cdots, a^{(m)}),$$

где q — многочлен от $m+1$ переменной с вполне определенными коэффициентами, зависящими от m. Используя предложение 6 и неравенство (20), получаем справедливость доказываемого утверждения в общем случае. ▶

Предложение. 13. *Пусть выполнены условия* (9). *Тогда оператор* N *вида* (17) *непрерывен в пространстве* L_2^∞ *и*

$$\|Nf\|_k \leqslant B(k)\|f\|_{k+n}, \quad k = 0, 1, \cdots,$$

где $f \in \mathrm{L}_2^\infty$, *а постоянные* $B(k)$ *от* f *не зависят.*

◀ Пусть по-прежнему V_ε — ε-окрестность множества X, $0 < \varepsilon < \frac{d}{2}$.

Тогда

$$\|Nf\|_0 = \left(\int_{\mathrm{R}}\left|\frac{f(x)-(\mathrm{I}f)(x)}{a(x)}\right|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{j\in Z}\int_{x_j-\varepsilon}^{x_j+\varepsilon}\left|\frac{(x-x_j)^{n_j}}{a(x)}\right|^2\left|\frac{f(x)-(T_jf)(x)}{(x-x_j)^{n_j}}\right|^2 dx\right)^{1/2} +$$

$$+\left(\sum_{j\in Z}\int_{x_j-\varepsilon}^{x_j+\varepsilon}\left|\frac{(x-x_j)^{n_j}}{a(x)}\right|^2\left|\frac{(\mathrm{I}f)(x)-(T_jf)(x)}{(x-x_j)^{n_j}}\right|^2 dx\right)^{1/2} +$$

$$+\left(\int_{\mathrm{R}\setminus V_\varepsilon}|(Nf)(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Здесь

$$(T_jf)(x) = \sum_{l=0}^{n_j-1}\frac{f^{(l)}(x_j)}{l!}(x-x_j)^l = (T_j\mathrm{I}f)(x).$$

Используя предложения 10 и 12, получаем, что

$$\left(\int\limits_{R\setminus V_\varepsilon} |Nf|^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant c(\varepsilon)\left(\|f\|_0 + \|\mathrm{I}f\|_0\right) \leqslant a_1(\varepsilon)\|f\|_n,$$

где постоянная $a_1(\varepsilon)$ от f не зависит.

Функция $\dfrac{(z-x_j)^{n_j}}{a(z)}$ аналитична в круге $K_j = \{z \mid |z - x_j| \leqslant \varepsilon\}$. По принципу максимума с последующим применением предложения 12 получаем, что

$$\max_{z\in K_j}\left|\frac{(z-x_j)^{n_j}}{a(z)}\right| \leqslant \varepsilon^{n_j}\cdot c_0(\varepsilon),$$

откуда следует, что для $x \in [x_j - \varepsilon,\ x_j + \varepsilon]$

$$\left|\frac{(x-x_j)^{n_j}}{a(x)}\right| \leqslant c_0(\varepsilon)\cdot\max\left\{1,\left(\frac{d}{2}\right)^n\right\}$$

равномерно по $j \in \mathbf{Z}$. Поэтому применяя предложения 10—12, видим, что

$$\|Nf\|_0 \leqslant a_2(\varepsilon)\left[\left(\sum_j \int\limits_{x_j-\varepsilon}^{x_j+\varepsilon} |\mathrm{A}_{0,\,n_j-1} f|^2\,dx\right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_j \int\limits_{x_j-\varepsilon}^{x_j+\varepsilon} |\mathrm{A}_{0,\,n_j-1}\,\mathrm{I}f|^2\,dx\right)^{1/2} + \|f\|_n\right] \leqslant$$

$$\leqslant a_3(\varepsilon)\left[\left(\int\limits_{x_j-\varepsilon}^{x_j+\varepsilon} |f^{(n_j)}|^2\,dx\right)^{1/2} + \left(\sum_j \int\limits_{x_j-\varepsilon}^{x_j+\varepsilon} |(\mathrm{I}f)^{(n_j)}|^2\,dx\right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \|f\|_n\right] \leqslant a_3(\varepsilon)\left[\left(\sum_{l=1}^{n}\sum_j \int\limits_{x_j-\varepsilon}^{x_j+\varepsilon} |f^{(l)}|^2\,dx\right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{l=1}^{n}\sum_j \int\limits_{x_j-\varepsilon}^{x_j+\varepsilon} |(\mathrm{I}f)^{(l)}|^2\,dx\right)^{1/2} + \|f\|_n\right] \leqslant$$

$$\leqslant a_4(\varepsilon)\left(\|f\|_n + \|\mathrm{I}f\|_n\right) \leqslant b(0)\|f\|_n.$$

Аналогично для $s > 1$

$$\left\|\frac{d^s}{dx^s}Nf\right\|_0 \leqslant \leqslant \left(\sum_j \int\limits_{x_j-\varepsilon}^{x_j+\varepsilon} \left|\frac{d^s}{dx^s}\left[\frac{(x-x_j)^{n_j}}{a(x)}(\mathrm{A}^{0,\,n_j-1})f(x)\right]\right|^2 dx\right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\sum_j \int\limits_{x_j-\varepsilon}^{x_j+\varepsilon} \left|\frac{d^s}{dx^s}\left[\frac{(x-x_j)^{n_j}}{a(x)}(\mathrm{A}_{0,\,n_j-1}\mathrm{I}f)(x)\right]\right|^2 dx\right)^{1/2} +$$

$$+\int\limits_{R\setminus V_\varepsilon}\left|\frac{d^s}{dx^s}Nf\right|^2dx\Big)^{2/2}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{l=0}^{s}b_{ls}\left|\Big(\sum_j\int\limits_{x_j-\varepsilon}^{x_j+\varepsilon}\left|\frac{d^l}{dx^l}\frac{(x-x_j)^{n_j}}{a(x)}\right|^2|A_{s-l,\,n_j-1}f|^2dx\Big)^{1/2}+\right.$$

$$+\Big(\sum_j\int\limits_{n_j-\varepsilon}^{x_j+\varepsilon}\left|\frac{d^l}{dx^l}\frac{(x-x_j)^{n_j}}{a(x)}\right|^2|A_{s-l,\,n_j-1}\mathrm{I}f|^2dx\Big)^{1/2}+$$

$$+\Big(\int\limits_{R\setminus V_\varepsilon}\left|\frac{d^l}{dx^l}\frac{1}{a(x)}\right|^2f^{(s-l)}(x)-(\mathrm{I}f)^{(s-l)}(x)|^2dx\Big)^{1/2}\Big],$$

где постоянные $b_{l,s}$ зависят только от i и s. Используя предложения 10—12, так же как и в случае $s=0$ получаем, что

$$\|Nf\|_k=\max_{0\leqslant s\leqslant k}\left\|\frac{d^s}{dx^s}Nf\right\|_0\leqslant b(k)\|f\|_{k+n}. \blacktriangleright$$

В заключение рассмотрим регуляризацию расходящихся интегралов в случае, когда точка $\tilde{x}$ сгущения особенностей лежит на конечном расстоянии. Пусть $x=\lambda(t)=(\tilde{x}-t)^{-1}$, $t=\lambda^{-1}(x)=\tilde{x}-x^{-1}$, где $\tilde{x}\in R$. Введем операторы $(\mathrm{D}f)(t)=(\tilde{x}-t)^{-1}f(\lambda(t))$, $(\mathrm{D}^{-1}g)(x)=x^{-1}g(\lambda^{-1}(x))$, осуществляющие изоморфизм пространства $L_2(R)$ на себя. Через $\tilde{\mathrm{L}}_2^{\infty}$ обозначим пространство $\mathrm{D}(\mathrm{L}_2^{\infty})$, а через $\tilde{\mathrm{L}}_2^{-\infty}$, пространство $(\mathrm{D}(\mathrm{L}_2^{\infty}))^*$. Сходимость в $\tilde{\mathrm{L}}_2^{\infty}$ определяется с помощью набора норм

$$\|g\|_k=\max_{0\leqslant s\leqslant k}\Big(\int\limits_R\left|\frac{d^s}{dx^s}(\mathrm{D}^{-1}g)(x)\right|^2dx\Big)^{1/2},\quad k=0,1,\cdots.$$

Пусть функция $a(x)$ имеет вид (11), $\tilde{a}(t)=a(\lambda(t))$. Оператор $\tilde{T}$ умножения на функцию $\tilde{a}$ является непрерывным в пространстве $\tilde{\mathrm{L}}_2^{-\infty}$, а задача его обращения эквивалентна задаче регуляризации интеграла, множество особенностей которого имеет вид $\{(t-t_k)^{-n_k}\}$, где последовательность $t_k=\tilde{x}-x_k^{-1}$, $k\in\mathbf{Z}$, сгущается к точке $\tilde{x}$.

Переходя к обращению оператора $\tilde{T}$, построим вначале оператор $\tilde{\mathrm{I}}$, интерполирующий на множестве $\{t_k\}$. Заметив, что

$$a(t)=\prod_{k\in Z}\eta_k\frac{(\tilde{x}-\tau_k)^{-1}-(\tilde{x}-t)^{-1}}{(\tilde{x}-\tilde{\mu}_k)^{-1}-(\tilde{x}-t)^{-1}}=\prod_{k\in Z}\zeta_k\frac{\tau_k-t}{\mu_k-t},$$

где

$$\tau_k = \bar{x} - \xi_k^{-1},\ \mu_k = \bar{x} - \lambda_k^{-1},\ \eta_k = \frac{\bar{u}_k}{u_k},\ \zeta_k = \eta_k(\bar{x} - \mu_k)(x - \tau_k)^{-1}),$$

введем функции

$$\bar{w}_j(t) = \frac{(t-\tau_j)^{n_j}}{\tilde{a}(t)},\ \tilde{v}_j(t) = \sum_{k=0}^{n_j - s_j} \frac{\bar{w}_j^{(k)}(\tau_j)}{k!}(t-\tau_j)^k.$$

Оператор $\tilde{\mathrm{I}}$ имеет вид

$$(\tilde{\mathrm{I}}g)(t) = \sum_{j\in Z} g^{(s_j - 1)}(\tau_j)\,\bar{a}_j(t),$$

где

$$\bar{a}_j(t) = \frac{\tilde{a}(t)\,\tilde{v}_j(t)}{(s_j - 1)!\,(t-\tau_j)^{n_j - s_j + 1}}.$$

Как и в предыдущем случае задача обращения оператора $\tilde{T}$ сводится к доказательству непрерывности операторов $\tilde{\mathrm{I}}$ и $\tilde{N}$, где $(\tilde{N}g)(t) = \frac{g(t) - (\tilde{\mathrm{I}}g)(t)}{\tilde{a}(t)}$, в пространстве $\tilde{\mathrm{L}}_2^-$. Последнее утверждение очевидным образом вытекает из следующего предложения.

Предложение 14. *На пространстве* $\tilde{\mathrm{L}}_2^-$ *справедливы следующие соотношения*:

$$\tilde{\mathrm{I}} = \mathrm{DID}^{-1},\ \tilde{N} = \mathrm{D}N\mathrm{D}^{-1}.$$

◀ Докажем первое соотношение, являющееся здесь основным. Предварительно заметим, что

$$\frac{d^k}{dt^k}((\bar{x}-t)^{-1} f(\lambda(t)) = \sum_{l=0}^{k} \frac{d_{lk} f^{(l)}(\lambda(t))}{(\tilde{x}-t)^{k+l+1}}, \tag{21}$$

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^{-1} g(\lambda^{-1}(x))) = \sum_{m=0}^{k} \frac{d_{mk}(-1)^{k+m} g^{(m)}(\lambda^{-1}(x))}{x^{k+m+1}}. \tag{22}$$

Здесь d_{ik}, $0 \leqslant i < k$, $k = 0, 1, \cdots$ — вполне определенные целочисленные коэффициенты. Пусть далее $g \in \tilde{\mathrm{L}}_2^-$. В разложениях $\tilde{\mathrm{I}}g$ и $\mathrm{DID}^{-1} g$ выделим группы членов, отвечающих какой-нибудь фиксированной точке $t_r = \bar{x} - x_r^{-1}$.

$$\tilde{\mathrm{I}}_r(t) = \sum_{s_j=1}^{n_r} g^{(s_j - 1)}(t_r)\,\bar{a}_j(t),$$

$$\mathrm{I}_r(t) = \sum_{s_j=1}^{n_r} (\mathrm{D}^{-1} g)^{(s_j - 1)}(x_r)(\mathrm{D}a_j)(t).$$

Ясно, что

$$\tilde{\mathrm{I}}g = \mathrm{DID}^{-1} g \Leftrightarrow \tilde{\mathrm{I}}_r \equiv \mathrm{I}_r,\ r \in \mathrm{Z}, \Leftrightarrow g^{(k)}(t_r) = \left(\frac{d^k}{dt^k} \tilde{\mathrm{I}}_r\right)(t_r) =$$

$$= \left(\frac{d^k}{dt^k} \mathrm{I}_r\right)(t_r) = \left(\frac{d^k}{dt^k} \mathrm{DID}^{-1} g\right)(t_r),\quad k = 0, 1, \cdots, n_r - 1.$$

Воспользовавшись формулами (21) и (22) получаем, что

$$\left(\frac{d^k}{dt^k} \mathrm{DID}^{-1} g\right)(t_r) = \sum_{l=0}^{k} x_r^{k+l+1} d_{lk} \left(\frac{d^l}{dx^l} \mathrm{ID}^{-1} g\right)(x_r) =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} \frac{\varphi^{(m)}(t_r)}{x^{m-k}} \sum_{l=m}^{k} (-1)^{m+l} d_{ml} d_{lk} = g^{(k)}(x_r),$$

т. к.

$$\sum_{l=m}^{k} (-1)^{m+l} d_{ml} d_{lk} = \begin{cases} 1, & m = k, \\ 0, & 0 \leq m < k. \end{cases}$$

Последние равенства являются следствием тождества

$$g^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k} [(\mathrm{DD}^{-1} g)(t)] = \sum_{l=0}^{k} \frac{d_{lk}}{(\bar{x} - t)^{l+k+1}} \left(\frac{d^l}{dx^l} (\mathrm{D}^{-1} g)\right)(\lambda(t)) =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} \frac{g^{(m)}(t)}{(\bar{x} - t)^{k-m}} \sum_{l=m}^{k} (-1)^{m+l} d_{ml} d_{lk},$$

справедливого для всех $k = 0, 1, \cdots$. ▶

Ростовский-на-Дону
государственный университет

Поступила 15. VII. 1986

Վ. Բ. ԴԻԲԻՆ. Պատիկություններով ինտերպոլյացիա Հարդիի կշռային դասերում և տարամետ ինտեգրալների ռեգուլյարիզացիան *(ամփոփում)*

Աշխատանքում պարունակվում են կիսահարթությունում պատիկություններով ինտերպոլյացիայի վերաբերյալ Մ. Մ. Ջրբաշյանի որոշ արդյունքների ընդհանրացումը A_p-կշիռներով ($1<p<\infty$) Հարդիի տարածությունների դեպքի համար։

Ապացուցվում է ինտերպոլյացիոն թեորեմը H_2-ում այն դեպքում, երբ ինտերպոլյացիան իրականացվում է կառլեսոնյան իրական բազմության վրա։ Այդ արդյունքը օգտագործվում է հաշվելի բազմությունների վրա տարամիտող ինտեգրալների ռեգուլյարիզացիայի համար։

V. B. DYBIN. *Multiple interpolation in weighted Hardy spaces and regularization of divergent integrals* (summary)

The paper contains a generalization of certain resnlts of M. M. Djrbashian concerning multiple intepolation in a half-plane (Rz. Mat., 1979, 3 B 90) to Hardy spaces with Ap — weights, $1 < p < \infty$. An interpolation theorem in H_2 is proved in the case, where the interpolation is done on the real Carleson set. The later result is used for regularization of integrals divergent at countable sets.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дж. Гарнетт.* Ограниченные аналитические функции, Мир, М., 1984, 469 с.
2. *Б. Я. Левин.* Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа, в кн.: «Матем. физика, функц. анализ», ФТИИНТ АН УССР, Харьков, 1, 1969, 136—146.
3. *М. М. Джрбашян, С. Г. Рафаелян.* О целых функциях экспоненциального типа из весовых классов L_p, ДАН Арм.ССР, 73, 1, 1981, 29—36.
4. *С. Г. Рафаелян.* Интерполяция и базисность в весовых классах целых функций экспоненциального типа, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVIII, № 3, 1983, 167—186.
5. *Г. М. Айрапетян.* Кратная интерполяция и базисность некоторых биортогональных систем рациональных функций в классах Харди, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XII, № 4, 1977, 262—277.
6. *С. М. Грудский.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом в классах суммируемых функций, Кандидат диссерт., Ростов н/Д, 1981, 131 с.
7. *В. Б. Дыбин, Г. В. Долохова.* Корректная постановка краевой задачи Римана на прямой с почти-периодическим разрывом коэффициента, в кн.: «Матем. анализ и его прилож.», изд. РГУ, Ростов н/Д, 1982, 12—22.
8. *В. Б. Дыбин, Г. В. Додохова.* Корректная постановка краевой задачи Римана на замкнутом контуре в случае почти-периодических разрывов у ее коэффициента, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVIII, № 5, 1983, 380—393.
9. *В. Б. Дыбин.* Корректные постановки краевой задачи Римана при стандартных почти-периодических разрывах у ее коэффициента, Math. Nachr., 122, 1985, 301—338.
10. *В. Б. Дыбин.* Корректная постановка краевой задачи Римана в случае бесконечного числа нулей у ее коэффициента, ДАН СССР, 280, № 4, 1985, 785—788.
11. *В. Б. Дыбин.* Сингулярные интегральные уравнения с коэффициентами аннулирующимися на счетных множествах, Math. Nachr., 124, 1985, 65—84.
12. *И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов.* Обобщенные функции и действия над ними, «Физматгиз», М., 1959, 470 с.
13. *В. Б. Дыбин, Н. К. Карапетянц.* Об интегральных уравнениях типа свертки в классах обобщенных функций, Сиб. мат. ж., 7:3, 1966, 531—545.
14. *В. Б. Дыбин.* Иинтегральный оператор Винера-Хопфа в классах функций со степенным аарактером поведения на бесконечности, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 2, № 4, 1967, 250—269.
15. *В. Б. Дыбин, С. Б. Джиргалова.* Об интегрально-разностном уравнении Винера-Хопфа в исключительном случае. Изв. вузов, Математика, 5, 1, 1985, 64—67.
16. *М. М. Джрбашян.* Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H^p в полуплоскости, Изв. АН СССР. сер. матем., 42, № 6, 1978, 1322—1384.
17. *L. Carleson.* An interpolation problem for bounded analitic Functions, Amer J. Math., 80, 1958, 921—930.
18. *Ш. А. Григорян.* Об одном свойстве функций из H_p $(0<p<\infty)$ в полуплоскости. Изв. АН Арм. ССР, Математика, XII, 5, 1977, 335—339.
19. *R. Rochberg*, Toeplitz Operators on weighter H^p spaces, Indiana Univers. Math. J., 26, № 2, 1977, 291—298.
20. *И. Б. Симоненко.* Устойчивость весовых относительно сингулярного интеграла Коши свойств функций, Матем, заметки, 33, № 3, 1983, 409—416.
21. *Н. К. Никольский, Б. С. Павлов, С. В. Хрущев.* Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер, Препринты/ЛОМИ: Р-8-80—Р-11-80, Л., 1980, 140 с.
22. *С. М. Грудский.* Сингулярные интегральные уравнения и краевая задача Римана с бесконечным индексом в пространстве $L_p(\Gamma, \omega)$, Изв. АН СССР, сер. матем., 49, № 1, 1985, 55—80.
23. *H. S. Shapiro. A. L. Shields.* Interpolation in Hilbert shaces of analytic functions Studia math. Ser. spec., Proc. conf. funct. anal, .(1960), 1963, 109—110.

24. *Е. М. Дынькин.* Оценки аналитических функций в жордановых областях. Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР, 73, 1977, 70—90.
25. *Е. М. Дынькин, Б. П. Осиленкер.* Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения. Итоги науки и техники. Мат. анализ, 21, 1983, 42—129.
26. *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов, «Штиинца», Кишинев, 1973, 426 с.
27. *В. Б. Дыбин.* Одномерные сингулярные интегральные уравнения с аннулирующимися коэффициентами, Доклады расширенных заседаний ин-та прикладной математики им.И. Н. Векуа, т. 1, № 1, Тбилиси, изд. ТГУ, 1985, 75—78.
28. *В. М. Мартиросян.* Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях. Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIII, №№ 5—6, 1978, 490—531.
29. *В. М. Мартиросян.* Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в H_p $[\alpha, \omega]$. ДАН СССР, 245, 1979, № 1, 24—27.
30. *В. Б. Дыбин.* Корректные задачи для сингулярных интегральных уравнений. Ростов н/Д, Изд. РГУ, 1988, 160 с.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXV, № 3, 1990 Математика

УДК 517.444

С. С. КАЗАРЯН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА В ВЕСОВЫХ РЕФЛЕКСИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА ДЛЯ СОПРЯЖЕННОЙ ФУНКЦИИ

Введение

В 1948 г. К. И. Бабенко [1] для $\omega(x)=|x|^{\alpha}\ (-1<\alpha<p-1)$ показал справедливость интегрального неравенства

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{f}(x)|^{p}\,\omega(x)\,dx\leqslant C\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^{p}\,\omega(x)\,dx,\quad p>1, \tag{1.1}$$

где $C>0$ не зависит от f и

$$\tilde{f}(x)=-\,v.p.\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\operatorname{ctg}\frac{(t-x)}{2}\,dt.$$

Затем В. Ф. Гапошкин [2] нашел достаточные условия на весовую функцию $\omega(x)$, чтобы интегральное неравенство (1.1) было справедливым для функций $f(x)\in L^{2}_{\omega}(-\pi,\pi)$.

В 1960 г. Х. Хельсон и Г. Сегё [3] получили полную характеризацию конечных положительных мер μ на $[-\pi,\pi)$, для которых неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{T}(x)|^{2}\,d\mu(x)\leqslant C\int_{-\pi}^{\pi}|T(x)|^{2}\,d\mu(x)$$

справедливо для всех тригонометрических полиномов T, где $\tilde{T}$ гармонически сопряженная функция для полинома T.

В 1972 г. Б. Макенхаупт [4] описал все те весовые функции $\omega(x)$, для которых имеет место неравенство

$$\int_{R^{n}}[M(f,x)]^{p}\,\omega(x)\,dx\leqslant C\int_{R^{n}}|f(x)|^{p}\,\omega(x)\,dx,\quad 1<p<\infty, \tag{1.2}$$

где $C>0$ не зависит от $f(x)$ и $M(f,x)$ — максимальная функция Харди—Литтльвуда. Используя эту работу Р. Хант, Б. Макенхаупт и Р. Уиден [5] доказали следующую теорему.

Теорема А. *Пусть $\omega(x)$ — неотрицательная, 2π-периодическая измеримая функция. Неравенство* (1.1) *имеет место тогда и* *только тогда, когда весовая функция* $\omega(x)$ *принадлежит классу* $A_p(R^1)$: *существует константа* $D_p > 0$ *такая, что*

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1} \leqslant D_p \tag{1.3}$$

для произвольного интервала $I \subset T = [-\pi, \pi)$.

Неравенства (1.1), (1.2) играют важную роль для исследования вопросов сходимости и суммируемости системы $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ в весовых пространствах $L^p_\omega(-\pi, \pi)$, $p > 1$. Следует отметить, что если рассматривать задачи сходимости и суммируемости системы $\{w(x)\,e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ в пространствах $L^p(-\pi, \pi)$, то эти задачи эквивалентны их аналогам для системы $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ в весовом пространстве $L^p_\omega(-\pi, \pi)$ с весом $\omega(x) = |w(x)|^p$. Однако в пространствах Орлича, где классы Орлича определяются через функцию Юнга $\Phi(t)$, подобные вопросы не эквивалентны, так как равенство $\Phi(xy) = \Phi(x)\,\Phi(y)$ в общем случае не выполняется. В связи с этим вопросы сходимости и суммируемости систем $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ и $\{w(x)\,e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ в пространствах Орлича существенно отличаются от аналогичных задач в пространствах L^p.

Так как все необходимые определения и обозначения были даны в работе [6], то мы их не приводим. Отметим только, что пространство Орлича L^Φ_ω будет рефлексивным пространством, если функция Юнга $\Phi(t)$ вместе с сопряженной по Юнгу функцией $\Psi(t)$ удовлетворяет Δ_2 условию.

Сформулируем теорему Р. Кермана и А. Торчинского [7].

Теорема Б. *В рефлексивных пространствах Орлича следующие условия эквивалентны:*

(a)
$$\int_{R^1} \Phi(M(f, x))\,\omega(x)\,dx \leqslant C \int_{R^n} \Phi(f(x))\,\omega(x)\,dx, \tag{1.4}$$

где константа $C > 0$ *не зависит от функции* $f(x)$.

(б) *Локально интегрируемая, неотрицательная функция* $\omega(x)$ *принадлежит классу* $A_\Phi(R^n)$:

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \varepsilon\,\omega(x)\,dx\right)\varphi\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon\,\omega(x)}\right)dx\right) \leqslant D_\Phi, \tag{1.5}$$

для всех кубов $Q \subset R^n$, *стороны которых параллельны координатным осям n-мерного эвклидова пространства* R^n, *и произвольных чисел* $\varepsilon > 0$.

(в) $\omega(x)$ *принадлежит классу* $A_{p_0^*}(R^n)$, *где интегрирование проводится в* R^n *и* p_0^* *нижний индекс функции Юнга* $\Phi(t)$.

Если оператор $H_w(f, x)$ определить следующим образом

$$H_w(f, x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|}\,|w(x)| \int_Q \left|\frac{f(t)}{w(t)}\right| dt, \tag{1.6}$$

где $Q \subset R^n$ — произвольный куб, стороны которого параллельны координатным осям R^n, то тогда справедлива [6]

Теорема В. *Пусть p_0^*, p_1^*, соответственно, нижний и верхний индексы $\Phi(t)$ и аналогично q_0^*, q_1^* — нижний и верхний индексы функции $\Psi(t)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

($а_0$) *Локально интегрируемая функция $w(x)$ принадлежит классу $B_\Phi(R^n)$, т. е. для произвольных кубов $Q \subset R^n$ и произвольных чисел $\varepsilon > 0$*

$$\frac{1}{|Q|}\|\chi_Q w\|_{L_\varepsilon^\Phi} \left\|\frac{\chi_Q}{\varepsilon w}\right\|_{L_\varepsilon^\Psi} \leqslant D_\Phi, \tag{1.7}$$

где χ_Q — характеристическая функция куба Q и $D_\Phi > 0$ не зависит от Q и ε.

($б_0$) *$w(x)$ принадлежит классам $B_{p_0^*}(R^n)$ и $B_{p_1^*}(R^n)$, т. е. для всех кубов $Q \subset R^n$, соответственно, справедливы неравенства*

$$\begin{gathered}\frac{1}{|Q|}\|\chi_Q w\|_{L^{p_0^*}} \left\|\frac{\chi_Q}{w}\right\|_{L^{q_1^*}} \leqslant D_{p_0^*},\\ \frac{1}{|Q|}\|\chi_Q w\|_{L^{p_1^*}} \left\|\frac{\chi_Q}{w}\right\|_{L^{q_0^*}} \leqslant D_{p_1^*},\end{gathered} \tag{1.8}$$

где $D_{p_0^*} > 0$, $D_{p_1^*} > 0$ не зависят от Q.

($в_0$) *Существует некоторая константа $C_\Phi > 0$ такая, что для произвольного $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство*

$$\|H_w(f)\|_{L_\varepsilon^\Phi} \leqslant C_\Phi \|f\|_{L_\varepsilon^\Phi}. \tag{1.9}$$

($г_0$) *Существует некоторая константа $C'_\Phi > 0$ такая, что для произвольной функции $f \in L^\Phi$*

$$\int\limits_{R^n} \Phi(H_w(f, x))\,dx \leqslant C'_\Phi \int\limits_{R^n} \Phi(f(x))\,dx. \tag{1.10}$$

($д_0$) *Существует некоторая константа $D'_\Phi > 0$ такая, что для всех кубов $Q \subset R^n$ и произвольных чисел $\varepsilon > 0$*

$$\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q S_\Phi(\varepsilon|w(x)|)\,dx\,\varphi\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q \Psi\left(\frac{1}{\varepsilon|w(x)|}\right)dx\right) \leqslant D'_\Phi. \tag{1.11}$$

($е_0$) *Справедливы неравенства*

$$\|H_w(f)\|_{L^{p_0^*}} \leqslant C_{p_0^*}\|f\|_{L^{p_0^*}}, \quad \|H_w(f)\|_{L^{p_1^*}} \leqslant C_{p_1^*}\|f\|_{L^{p_1^*}}, \tag{1.12}$$

где $C_{p_0^*} > 0$, $C_{p_1^*} > 0$ не зависят от $f(x)$.

Используя теоремы Б, В в настоящей работе мы докажем интегральные неравенства для сопряженной функции $\tilde{f}(x)$ и функции

$$\tilde{f}_w(x) = -v.\ p.\ \frac{1}{2\pi} w(x) \int_T \frac{f(t)}{w(t)} \operatorname{ctg} \frac{(t-x)}{2}\, dt$$

при некоторых необходимых и достаточных условиях, налагаемых соответственно на весовую функцию $\omega(x)$ и функцию $w(x)$. Эти неравенства дают возможность исследовать сходимость систем $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ и $w(x)\, e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ в рефлексивных пространствах Орлича.

§ 2. Предварительные результаты

Сформулируем те основные утверждения, которые мы будем использовать для доказательства теорем.

Для функции Юнга $\Phi(t)$ имеют место следующие свойства (см. [8], стр. 25, 37, 98)

$$C^{-1}\, t\, \varphi(t) \leqslant \Phi(t) \leqslant C\, t\, \varphi(t), \tag{2.1}$$

$$t < \Phi^{-1}(t)\, \Psi^{-1}(t) \leqslant 2t. \tag{2.2}$$

Для функции

$$\overline{S}_\Phi(\lambda) = \sup_{t>0} \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)}$$

справедлива следующая (см. [9], стр. 35)

Лемма А. *Функция $\overline{S}_\Phi(\lambda)$ ограничена на каждом компактном множестве и существуют числа p_0 и p_1 $(p_0 \leqslant p_1)$*

$$\overline{S}_\Phi(\lambda) = O(\max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1})), \tag{2.3}$$

при $\lambda \to 0$, или $\lambda \to \infty$.

Для нижнего и верхнего индексов функции Юнга $\Phi(t)$ имеем $p_0^* = \sup p_0$, $p_1^* = \inf p_1$. Из леммы А вытекает, что при $p_0 < p_0^*$ и $p_1 > p_1^*$

$$S_\Phi(\lambda) = o(\max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1})). \tag{2.4}$$

Из определения функции $\overline{S}_\Phi(\lambda)$ следует, что существует такая константа $C > 0$, что

$$\Phi(\lambda t) \leqslant C \max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1})\, \Phi(t),\quad p_0 \leqslant p_1. \tag{2.5}$$

В этом случае, следуя работе [9], будем писать $\Phi \in \Lambda(p_0, p_1)$ или, чтобы фиксировать константу, запишем $\Phi \in \Lambda(p_0, p_1, C)$. Если справедливо условие (2.4), то Φ имеет p_0^+ нижний тип и p_1^- верхний тип, что запишем в следующем виде: $\Phi \in \Lambda(p_0^+, p_1^-)$.

Определение 1. Положительная функция ρ называется псевдовогнутой, если существует эквивалентная ей вогнутая функция $\varphi(t)$.

Справедливы следующие утверждения (см. [9]).

Лемма Б. *Функция $\rho(t)$ псевдовогнута тогда и только тогда, когда $\rho \in \Lambda(0, 1)$, т. е.*

$$\rho(\lambda t) \leqslant C \max(1, \lambda)\,\rho(t). \tag{2.6}$$

Множество тех функций ρ, для которых выполняется неравенство (2.6) обозначается через $\gamma(C)$. Множество функций ρ, для которых выполняется условие (2.4) при $p_0=0$ и $p_1=1$, обозначим через $\gamma^{+-}(C)$.

Лемма В. *Если $\Phi \in \Lambda(p_0, p_1, C)$, то существует такая функция $\psi(t)$, эквивалентная $\Phi(t)$, что $\psi \in \Lambda(p_0, p_1, 1)$.*

Лемма Г. *Если $\Phi \in \Lambda(p_0, p_1)$ и $p_0>0$, то $\Phi^{-1} \in \Lambda(p_1^{-1}, p_0^{-1})$.*

Лемма Д. *Пусть $\Phi(t) = t^{p_0}\sigma(t^{p_1-p_0})$. Тогда $\Phi \in \Lambda(p_0, p_1, C)$ в том и только в том случае, когда $\sigma \in \gamma(C)$.*

Лемма Е. *Пусть $\Phi(t) = t^{p_0}\sigma(t^{p_1-p_0})$ и $\Phi^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p_1}}\rho(t^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}})$. Тогда для того чтобы $\sigma(t) \in \gamma(C)$ необходимо и достаточно, чтобы $\rho(t) \in \gamma(C)$.*

Заметим, что вышеприведенные леммы справедливы также для положительной, непрерывной, строго возрастающей функции $\psi(t)$, определенной на положительной полупрямой и удовлетворяющей Δ_2 условию. Если

$$\overline{S}_\psi(\lambda) = O(\max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1})),$$

то мы будем говорить, что ψ имеет нижний тип p_0 и верхний тип p_1. Для таких функций ψ справедливы следующие леммы (см. [6]).

Лемма Ж. *Пусть $\psi(t) = t^{p_0}\sigma(t^{p_1-p_0})$ и $\psi^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p_1}}\rho(t^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}})$. Тогда $\sigma(t) \in \gamma^{+-}(1)$ в том и только в том случае, когда $\rho(t) \in \gamma^{+-}(1)$.*

Лемма З. *Пусть $\psi(t) = t^{p_0}\sigma(t^{p_1-p_0})$. Тогда $\psi \in \Lambda(p_0^+, p_1^-, 1)$ в том и только в том случае, когда $\sigma \in \gamma^{+-}(1)$.*

Пусть $L_\mu^\psi(G)$ — пространство измеримых функций $u(x)$, для которых

$$\int\limits_G \psi\left(\frac{|u(x)|}{a}\right) d\mu < \infty, \quad a>0.$$

Для $L_\mu^\psi(G)$ справедливо следующее утверждение (см. [9]).

Лемма И. *Если положительная, непрерывная, строго возрастающая функция $\psi(t)$ имеет конечный верхний тип и положительный нижний тип, то пространство $L_\mu^\psi(G)$ является квазибанаховым пространством с квазинормой*

$$\|u\|_{L_\mu^\psi(G)} = \inf\left\{a>0: \int\limits_G \psi\left(\frac{|u(x)|}{a}\right) d\mu \leqslant 1\right\}.$$

Определение 2. Оператор F называется сублинейным, если

$$F(f_1+f_2) \leqslant Ff_1 + Ff_2.$$

При доказательстве основного результата нам необходима следующая теорема (см. [9]).

Теорема Г. *Пусть $\psi_0(t)$ и $\psi_1(t)$ — положительные, непрерывные, строго возрастающие функции, имеющие конечный верхний тип и положительный нижний тип. Пусть F—линейный непрерывный оператор, или сублинейный непрерывный оператор, для которого выполняются следующие неравенства :*

$$\|Ff\|_{L_\mu^{\psi_0}} \leqslant C_{\psi_0}\|f\|_{L_\mu^{\psi_0}}, \quad \|Ff\|_{L_\mu^{\psi_1}} \leqslant C_{\psi_1}\|f\|_{L_\mu^{\psi_1}},$$

где $C_{\psi_0} > 0$, $C_{\psi_1} > 0$ не зевисят от f.

Тогда если $\psi^{-1} = \psi_0^{-1}\rho(\psi_1^{-1}/\psi_0^{-1})$, где $\rho \in \gamma^{+-}(1)$, то существует такая константа $C_\psi > 0$, что

$$\|Ff\|_{L_\mu^{\psi}} \leqslant C_\psi\|f\|_{L_\mu^{\psi}}.$$

Для дальнейших рассуждений нам нужны также следующие утверждения (см. [7], [10]).

Лемма К. *Если $\omega(x) \in A_\Phi(R^n)$, то $\omega(x) \in A_r(R^n)$, $r > p_0^*$.*

Лемма Л. *Пусть $\omega(x) \in A_p(R^n)$. Тогда существует такое число $\delta > 0$, что $\omega(x)$ принадлежит классу $A_{p-\delta}(R^n)$.*

§ 3. Доказательство теорем 1 и 2

Теорема 1. *Пусть $\omega(x)$ — 2π-периодическая измеримая функция. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(а$_1$) *Функция $\omega(x)$ принадлежит классу $B_\Phi(R^1)$, т. е. для всех интервалов $I \subset T$ и произвольных чисел $\varepsilon > 0$*

$$\frac{1}{|I|}\|\chi_I\,\omega\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)} \cdot \left\|\frac{\chi_I}{\varepsilon\,\omega}\right\|_{L_\varepsilon^{\Psi}(T)} \leqslant D_\Phi,$$

где χ_I — характеристическая функция интервала I.

(б$_1$) *Для произвольного $\varepsilon > 0$ функция $\tilde{f}_\omega(x)$ удовлетворяет условию*

$$\|\tilde{f}_\omega\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)} \leqslant C_\Phi\|f\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)},$$

где $C_\Phi > 0$ не зависит от функции $f(x)$.

(в$_1$) *Существует некоторая константа $C_\Phi' > 0$, не зависящая от $f(x)$ такая, что*

$$\int_T \Phi(\tilde{f}_\omega(x))\,dx \leqslant C_\Phi' \int_T \Phi(f(x))\,dx.$$

Доказательство. Докажем импликацию (а$_1$)$\Rightarrow$(б$_1$). Согласно теореме В из условия (а$_1$) следует, что существуют числа $D_{p_0^*} > 0$, $D_{p_1^*} > 0$ такие, что для любого интервала $I \subset T$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{|I|}\|\gamma_I w\|_{L^{p_0^*}}\left\|\frac{\gamma_I}{w}\right\|_{L^{q_1^*}}\leqslant D_{p_0^*},\tag{3.1}$$

$$\frac{1}{|I|}\|\gamma_I w\|_{L^{p_1^*}}\left\|\frac{\gamma_I}{w}\right\|_{L^{q_0^*}}\leqslant D_{p_1^*},\tag{3.2}$$

где p_0^*, p_1^*, соответственно, нижний и верхний индексы функции Юнга $\Phi(t)$, а q_0^*, q_1^* — нижний и верхний индексы дополнительной к $\Phi(t)$ функции $\Psi(t)$.

Из теоремы А и условий (3.1), (3.2) следует, что существуют числа $C_{p_0^*}>0$, $C_{p_1^*}>0$, для которых выполняются неравенства

$$\|\tilde{f}_w\|_{L^{p_0^*}(T)}\leqslant C_{p_0^*}\|f\|_{L^{p_0^*}(T)},\tag{3.3}$$

$$\|\tilde{f}_w\|_{L^{p_1^*}(T)}\leqslant C_{p_1^*}\|f\|_{L^{p_1^*}(T)}.\tag{3.4}$$

И наоборот, из теоремы А и условий (3.3), (3.4) следуют неравенства (3.1), (3.2) для любых интервалов $I\subset T$.

Отсюда и из лемм К и Л следует существование таких чисел $p_0<p_0^*$ и $p_1>p_1^*$, что

$$\|\tilde{f}_w\|_{L^{p_0}(T)}\leqslant C_{p_0}\|f\|_{L^{p_0}(T)},\tag{3.5}$$

$$\|\tilde{f}_w\|_{L^{p_1}(T)}\leqslant C_{p_1}\|f\|_{L^{p_1}(T)}.\tag{3.6}$$

Так как p_0^* и p_1^*, соответственно, являются нижним и верхним индексами для Φ, то согласно лемме А для выбранных p_0 и p_1 получаем $\Phi\in\Lambda(p_0^+, p_1^-, C)$. Отсюда в силу леммы В существует такая непрерывная, строго возрастающая функция $\psi(t)$, эквивалентная $\Phi(t)$, что $\psi\in\Lambda(p_0^+, p_1^-, 1)$. Из лемм Ж и З вытекает, что если $\psi^{-1}(t)$ представить в виде $\psi^{-1}(t)=t^{\frac{1}{p_1}}\rho\left(t^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}\right)$, то $\rho\in\gamma^{+-}(1)$. Таким образом, $\psi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы Г. На основании этой теоремы и из (3.5), (3.6) получаем, что для произвольного $\varepsilon>0$ справедливо неравенство

$$\|\tilde{f}_w\|_{L_\varepsilon^{\psi}(T)}\leqslant C_\psi\|f\|_{L_\varepsilon^{\psi}(T)},$$

где $C_\psi>0$ не зависит от $f(x)$.

Согласно неравенству Иенсена для функции Юнга (см. [8], стр. 18) и из эквивалентности функций Φ и ψ находим, что для некоторого $C>1$

$$\Phi\left(\frac{1}{C}t\right)\leqslant\psi(t)\leqslant\Phi(Ct).\tag{3.7}$$

Так как

$$\|u\|_{L_\varepsilon^\Psi(T)} = \inf\left\{K > 0: \int_T \Psi\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)\varepsilon\, dx \leqslant 1\right\}$$

и

$$\frac{1}{C}\|u\|_{L_{(T)}^\Phi} = \inf\left\{K > 0: \int_T \Phi\left(\frac{1}{C}\,\frac{|u(x)|}{K}\right)\varepsilon\, dx \leqslant 1\right\},$$

то согласно (3.7) получаем

$$\frac{1}{C}\|u\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)} \leqslant \|u\|_{L_\varepsilon^\Psi(T)}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\|u\|_{L_\varepsilon^\Psi(T)} \leqslant C\|u\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}.$$

Таким образом, отсюда получаем

$$\|\tilde{f}_w\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)} \leqslant C_\Phi\|f\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}.$$

Импликация $(а_1) \Rightarrow (б_1)$ доказана. Докажем импликацию $(б_1) \Rightarrow (а_1)$. При $|t-x| < 1$ существует такая постоянная $C' > 0$, что

$$\frac{1}{C'}(t-x) < 2\,\mathrm{tg}\,\frac{(t-x)}{2} < C'(t-x). \tag{3.8}$$

Пусть $I_0 \subset T$ — произвольный интервал такой, что $|I_0| < 1$. Допустим, что I_1 и I_2 половины интервала I_0. Пусть функция f равна нулю вне I_1 и $f(x)\,w(x) \geqslant 0$. Тогда

$$|\tilde{f}_w(x)| \geqslant C\left(\frac{1}{|I_1|}|w(x)|\int_{I_1}\frac{f(t)}{w(t)}\,dt\right)\chi_{I_2}(x). \tag{3.9}$$

Поэтому из условия $(б_1)$ получаем

$$\left(\frac{1}{|I_1|}\int_{I_1}\frac{f(t)}{w(t)}\,dt\right)\|\chi_{I_2} w\|_{L_\varepsilon^\Phi} < C\|f\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}. \tag{3.10}$$

Подставляя в (3.10) $f(t) = \chi_{I_1}(t)\,w(t)$ находим

$$\|\chi_{I_2} w\|_{L_\varepsilon^\Phi} \leqslant C\|\chi_{I_1} w\|_{L_\varepsilon^\Phi}. \tag{3.11}$$

Анналогично получаем, что

$$\|\chi_{I_1} w\|_{L_\varepsilon^\Phi} \leqslant C\|\chi_{I_2} w\|_{L_\varepsilon^\Phi}. \tag{3.12}$$

Из (3.10)—(3.12) имеем

$$\frac{1}{|I_1|}\|\chi_{I_1} w\|_{L_\varepsilon^\Phi}\int_{I_1}\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{f(t)}{w(t)}\,\varepsilon dt \leqslant C\|f\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}.$$

Следовательно

$$\frac{1}{|I_1|}\|\chi_{I_1} w\|_{L_2^{\Phi}} \sup_{\|f\|_{L_2^{\Phi}}=1} \int_{I_1} \frac{1}{\varepsilon w(t)} f(t)\,\varepsilon\, dt \leqslant C$$

и, тем самым, импликация $(б_1) \Rightarrow (а_1)$ доказана.

Докажем импликацию $(а_1) \Rightarrow (в_1)$. Положим

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{при } |f(x)| > \lambda \\ 0, & \text{при } |f(x)| \leqslant \lambda, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), & \text{при } |f(x)| \leqslant \lambda \\ 0, & \text{при } |f(x)| > \lambda. \end{cases}$$

Из соотношений (3.1)—(3,2) и лемм К, Л вытекает, что существуют такие числа $r_1 < p_0^*$ и $r_2 > p_1^*$, что $|w(x)|^{r_1}$ принадлежит каллссу $A_{r_1}(R^1)$ и $|w(x)|^{r_2}$ принадлежит классу $A_{r_2}(R^1)$. Поэтому в силу теоремы А имеем

$$\int_T |\widetilde{f}_{1w}(x)|^{r_1}\,dx \leqslant C_{r_1} \int_T |f_1(x)|^{r_1}\,dx,$$

$$\int_T |\widetilde{f}_{2w}(x)|^{r_2}\,dx \leqslant C_{r_2} \int_T |f_2(x)|^{r_2}\,dx.$$

Следовательно

$$|\{|\widetilde{f}_{1w}(x)| > \lambda\}| \leqslant C_{r_1} \frac{1}{\lambda^{r_1}} \int_T |f_1(x)|^{r_1}\,dx, \tag{3.13}$$

$$|\{|\widetilde{f}_{2w}(x)| > \lambda\}| \leqslant C_{r_2} \frac{1}{\lambda^{r_2}} \int_T |f_2(x)|^{r_2}\,dx. \tag{3.14}$$

Для функции $\widetilde{f}_w$ используя свойство (2.1) функции Юнга получаем

$$\int_T \Phi(|\widetilde{f}_w(x)|)\,dx \leqslant C \int_0^{\infty} |\{|\widetilde{f}_w(x)| > \lambda\}| \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda}\,d\lambda. \tag{3.15}$$

Так как

$$\{|\widetilde{f}_w(x)| > \lambda\} \subset \left\{|\widetilde{f}_{1w}(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{|\widetilde{f}_{2w}(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\},$$

то из (3.13)—(3.15) находим

$$\int_0^{\infty} |\{|\widetilde{f}_w(x)| > \lambda\}| \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda}\,d\lambda \leqslant 2^{r_1} C_{r_1} \int_T |f(x)|^{r_1} \times$$
$$\times \left(\int_0^{|f(x)|} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^{r_1+1}}\,d\lambda\right) dx + 2^{r_2} C_{r_2} \int_T |f(x)|^{r_2} \left(\int_{|f(x)|}^{\infty} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^{r_2+1}}\,d\lambda\right) dx. \tag{3.16}$$

Пусть $r = \dfrac{r_1 + p_0^*}{2}$ и $r' = \dfrac{r_2 + p_1^*}{2}$, тогда из (3.16) и (2.5) следует

$$\int\limits_T |f(x)|^{r_1} \Big(\int\limits_0^{|f(x)|} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^{r_1+1}} d\lambda \Big) dx \leqslant C \int\limits_T |f(x)|^{r_1 - r} \times$$

$$\times \Big(\int\limits_0^{|f(x)|} \lambda^{r - r_1 - 1} d\lambda \Big) \Phi(|f(x)|)\, dx \leqslant C_r \int\limits_T \Phi(f(x))\, dx.$$

Подобным образом получаем

$$\int\limits_T |f(x)|^{r_2} \Big(\int\limits_{|f(x)|}^{\infty} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^{r_2+1}} d\lambda \Big) dx \leqslant C_{r'} \int\limits_T \Phi(f(x))\, dx.$$

Отсюда и из (3.15), (3.16) вытекает справедливость импликации $(\text{а}_1) \Rightarrow (\text{в}_1)$.

Докажем импликацию $(\text{в}_1) \Rightarrow (\text{б}_1)$. В силу неравенства Иенсена для выпуклой функции, условие (в_1) можно записать в следующем виде:

$$\int\limits_T \Phi\Big(\frac{\tilde{f}_w(x)}{C\|f\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}} \Big) \varepsilon\, dx \leqslant \int\limits_T \Phi\Big(\frac{C f(x)}{C\|f\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}} \Big) \varepsilon\, dx.$$

Следовательно

$$\int\limits_T \Phi\Big(\frac{\tilde{f}_w(x)}{C\|f\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}} \Big) \varepsilon\, dx \leqslant 1. \tag{3.17}$$

Используя определение нормы в пространстве Орлича из (3.17) получаем

$$\|\tilde{f}_w(x)\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)} \leqslant C'_\Phi \|f\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}.$$

Доказательство теоремы 1 завершено.

Теорема 2. *Пусть $\omega(x)$—2π-периодическая, неотрицательная, измеримая функция. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(а_2) *Весовая функция $\omega(x)$ принадлежит классу $A_\Phi(R^1)$, т. е. для всех интервалов $I \subset T$ и произвольных чисел $\varepsilon > 0$*

$$\Big(\frac{1}{|I|} \int\limits_I \varepsilon\omega(x)\, dx \Big) \varphi \Big(\frac{1}{|I|} \int\limits_I \varphi^{-1} \Big(\frac{1}{\varepsilon\omega(x)} \Big) dx \Big) \leqslant D_\Phi.$$

(б_2) *Существует некоторая константа $C_\Phi > 0$; не зависящая от $f(x)$ такая, что для произвольного $\varepsilon > 0$ сопряженная функция $\bar{f}(x)$ удовлетворяет условию*

$$\|\bar{f}\|_{L_{\varepsilon\omega}^\Phi(T)} \leqslant C_\Phi \|f\|_{L_{\varepsilon\omega}^\Phi(T)}.$$

(в$_2$) *Существует некоторая константа $C'_\Phi > 0$, не зависящая от $f(x)$ такая, что*

$$\int_T \Phi(\tilde{f}(x))\,\omega(x)\,dx \leqslant C'_\Phi \int_T \Phi(f(x))\,\omega(x)\,dx.$$

Доказательство. Справедливость импликации (а$_2$)$\Rightarrow$(б$_2$) следует из теоремы Б и лемм К, Л по той же схеме рассуждений, что и при доказательстве импликации (а$_1$)$\Rightarrow$(б$_1$) теоремы 1.

Докажем импликацию (б$_2$)$\Rightarrow$(а$_2$). Возьмем произвольный интервал $I_0 \subset T$ и пусть $|I_0| < 1$. Обозначим через I_1 и I_2 половины интервала I_0. Пусть неотрицательная функция $f(x)$ равна нулю вне I_1. Тогда используя неравенство (3.8) получаем

$$|\tilde{f}(x)| \geqslant C\left(\frac{1}{|I_1|}\int_{I_1} f(t)\,dt\right)\chi_{I_2}(x),$$

где $\chi_{I_2}(x)$ — характеристическая функция интервала I_2. При $f(t) = \chi_{I_1}(t)$ имеем

$$\|\chi_{I_2}\|_{L^\Phi_{\varepsilon\omega}} \leqslant C\|\chi_{I_1}\|_{L^\Phi_{\varepsilon\omega}}.$$

Поменяв местами интервалы I_1 и I_2 таким же способом получаем

$$\|\chi_{I_1}\|_{L^\Phi_{\varepsilon\omega}} \leqslant C\|\chi_{I_2}\|_{L^\Phi_{\varepsilon\omega}}.$$

Следовательно

$$\frac{1}{|I_1|}\|\chi_{I_1}\|_{L^\Phi_{\varepsilon\omega}}\int_{I_1} f(t)\,dt \leqslant C\|f\|_{L^\Phi_{\varepsilon\omega}(I_1)}. \tag{3.18}$$

Выберем функцию $f(x)$, определенную на I_1 так, чтобы $\|f\|_{L^\Phi_{\varepsilon\omega}(I_1)} = 1$ и

$$\int_{I_1} f(t)\,dt = \left\|\frac{\chi_{I_1}}{\varepsilon\omega}\right\|_{L^\Psi_{\varepsilon\omega}}.$$

Тогда из соотношения (3.18) находим

$$\frac{1}{|I_1|}\|\chi_{I_1}\|_{L^\Phi_{\varepsilon\omega}}\left\|\frac{\chi_{I_1}}{\varepsilon\omega}\right\|_{L^\Psi_{\varepsilon\omega}} \leqslant C. \tag{3.19}$$

Проводя аналогичные выкладки, что и при доказательстве теоремы Б, из соотношения (3.19) получаем, что $\omega(x) \in A_\Phi(R^1)$.

Справедливость импликаций (а$_2$)$\Rightarrow$(в$_2$) и (в$_2$)$\Rightarrow$(б$_2$) доказываются точно так же, как и соответствующие импликации из теоремы 1.

Теорема 2 доказана.

В заметке [11] сформулирована также следующая теорема, которая является следствием теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть $w(x)$—2π-периодическая измеримая функция и*

$$S_{w,n}(f,x)=\frac{1}{\pi}\,w(x)\int\limits_{T}\frac{f(t)}{w(t)}\cdot\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\sin\frac{(t-x)}{2}}\,dt.$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

(a_1) $w(x)$ *принадлежит классу* $B_\Phi(R^1)$.

(б_3) *Существует некоторая константа* $C_\Phi>0$ *такая, что*

$$\|S_{w,n}(f)\|_{L_2^\Phi(T)}\leqslant C_\Phi\|f\|_{L_2^\Phi(T)}\quad(n=1,2,\cdots).$$

(в_3) *Существует некоторая константа* $C'_\Phi>0$ *такая, что*

$$\int\limits_T\Phi(S_{w,n}(f,x))\,dx\leqslant C'_\Phi\int\limits_T\Phi(f(x))\,dx\quad(n=1,2,\cdots).$$

(г_3) *Имеет место соотношение*

$$\int\limits_T\Phi(|f(x)-S_{w,n}(f,x)|)\,dx\to0,\ \text{при}\ n\to\infty.$$

Из теоремы 2 следует справедливость следующего результата.

Теорема 4. *Пусть* $\omega(x)$—неотрицательная, 2π-*периодическая измеримая функция и*

$$S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_T f(t)\,\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\sin\frac{(t-x)}{2}}\,dt.$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

(a_2) $\omega(x)$ *принадлежит классу* $A_\Phi(R^1)$.

(б_4) *Существует некорая константа* $C_\Phi>0$ *такая, что*

$$\|S_n(f)\|_{L_{2,\omega}^\Phi(T)}\leqslant C_\Phi\|f\|_{L_{2,\omega}^\Phi(T)}\quad(n=1,2,\cdots).$$

(в_4) *Существует некоторая константа* $C'_\Phi>0$ *такая, что*

$$\int\limits_T\Phi(S_n(f,x))\,\omega(x)\,dx\leqslant C'_\Phi\int\limits_T\Phi(f(x))\,\omega(x)\,dx\quad(n=1,2,\cdots).$$

(г_4) *Имеет место соотношение*

$$\int\limits_T\Phi(|f(x)-S_n(f,x)|)\,\omega(x)\,dx\to0,\ \text{при}\ n\to\infty.$$

Институт геофизики и инженерной
сейсмологии АН Армянской ССР

Поступила 13. XI. 1987

Ս. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ. Ինտեգրալային անհավասարություններ համալուծ ֆունկցիայի համար Օռլիչի կշռային ռեֆլեքսիվ տարածություններում *(ամփոփում)*

Հոդվածում կշռային ֆունկցիայի համար որոշվում են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում համալուծ $\tilde{f}(x)$ *և* $\tilde{f}_w(x)$ *ֆունկցիաների համար տեղի ունեն հետևյալ ինտեգրալային անհավասարությունները։*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\tilde{f}(x))\, \omega(x)\, dx \leqslant C_\Phi \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(f(x))\, \omega(x)\, dx;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\tilde{f}_w(x))\, dx \leqslant C_\Phi \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(f(x))\, dx:$$

S. S. KAZARIAN. *Integral inequalities in Orlicz reflexive weighted spaces for the conjugate function* (summary)

The paper suggests necessary and sufficient conditions on weight functions under which the following integral inequalities for the conjugate functions $\tilde{f}(x)$ and $\tilde{f}_w(x)$ hold:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\tilde{f}(x))\, \omega(x)\, dx \leqslant C_\Phi \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(f(x))\omega(x)\, dx;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\tilde{f}_w(x))\, dx \leqslant C_\Phi \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(f(x))\, dx.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *К. И. Бабенко.* О сопряженной функции. ДАН СССР, 62, 1948, 157—160.
2. *В. Ф. Гапошкин.* Одно обобщение теоремы М. Рисса о сопряженных функциях, Мат. сб., 46, 1958, 359—372.
3. *H. Helson, G. Jsego.* A problem in prediction theory, Annali di Math. Pura ed Applicate, 4, 51, 1960, 107—138.
4. *B. Muckenhoupt.* Weighted norm inequalites for the Hardy maximal function, TAMS, 165, 1972, 207—226.
5. *R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden.* Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform, TAMS, 176, 1973, 227—251.
6. *С. С. Казарян.* Неравенства в пространствах Орлича для одной максимальной функции, Изв. АН АрмССР, «Математика», 22, № 4, 1987, 358—377.
7. *R. Kerman, A. Torchinsky.* Integral inequalites withs weights for the Hardy maximal functions, Studia Math, 71, 1982, 277—284.
8. *М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий.* Выпуклые функции и пространства Орлича, М., Физматгиз, 1958.
9. *I. Gustavson, I. Peetre.* Interpolation of Orlicz spaces, Studia Nath., 60, 1977, 33—59,
10. *R. Coifman, C. Fefferman.* Weighted rorm inequalities for the maximal functions and singular integrals, Studia Math., 54, 1974, 221—237.
11. *С. С. Казарян.* Некоторые вопросы сходимости и суммируемости в рефлексивных пространствах Орлича, ДАН АрмССР, 85, № 1, 1987.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXV, № 3, 1990 Математика

УДК 517.53

А. А. НЕРСЕСЯН

АППРОКСИМАЦИЯ ГАРМОНИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ НА ЗАМКНУТЫХ ПОДМНОЖЕСТВАХ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ

Пусть D — область в конечной комплексной плоскости с непустой границей в расширенной плоскости ($\partial D \neq \varnothing$); $D^* = D \cup \{\partial D\}$ — ее одноточечная компактификация и E — замкнутое в D подмножество ($E \subset D$). Из результатов работ [1], [2], [3] следуют необходимые, а также достаточные условия на E, при которых функции класса $H(E)$ (функции, непрерывные на E и гармонические на его внутренности E^0) можно аппроксимировать с любой точностью равномерно на E гармоническими в D функциями. В частности, множество $D^* \setminus \widehat{E}$ должно быть локально связным в идеальной точке $\{\partial D\}$, где $\widehat{E}$ — объединение E с предкомпактными в D компонентами $D \setminus E$. В настоящей работе мы будем рассматривать равномерную аппроксимацию на множествах, вообще говоря, неудовлетворяющих упомянутому необходимому условию. Полученный результат находит применение в решении задачи, поставленной Л. А. Рубелем (см. [4]). Теоремы 1 и 2 анонсированы в [4] и [5] в случае $E^0 = \varnothing$.

Будем говорить, что множество F линейно достижимо из области V (F, $V \subset \mathbb{C}$), если существует такой непрерывный путь $\gamma: [0, 1) \to V$, что для произвольного открытого U, $F \subset U$, $\gamma(t) \in U$, для значений параметра $t \in [0, 1)$, достаточно близких к 1.

Через $C_\infty(\widetilde{\partial E})$ будем обозначать класс ограниченных непрерывных функций на $\widetilde{\partial E} = \partial E \cap D$ и для положительной на $\widetilde{\partial E}$ непрерывной функции ν обозначим через $C_\nu(\widetilde{\partial E})$ класс непрерывных на $\widetilde{\partial E}$ функций, растущих при $z \to \partial D$ не быстрее функции ν ($f \in C_\nu(\widetilde{\partial E})$, если $|f| \leqslant c_f \nu$ на $\widetilde{\partial E}$, при некоторой постоянной $c_f > 0$). Через $H_D(E)$ обозначим класс функций, равномерно на E аппроксимируемых с любой точностью гармоническими в D функциями.

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

a) $C_\infty(\widetilde{\partial E}) \cap H(E) \subset H_D(E)$.

b) $C_\nu(\widetilde{\partial E}) \cap H(E) \subset H_D(E)$, *при некоторой положительной непрерывной на* $\widetilde{\partial E}$ *функции* ν *такой, что* $\nu(z) \to +\infty$, *при* $z \to \partial D$.

с) (i) *Если V — область, $\partial V \subset E \cup \partial D$ и ∂D линейно недостижима из V, то $V \cap \partial E = \varnothing$.* (ii) *Для произвольного компакта $K \subset D$ существует такой компакт $\tilde{K} \subset D$, что если V — область, $\partial V \subset \subset E \cup K \cup \partial D$ и ∂D линейно недостижима из V, то $(V \setminus \tilde{K}) \cap \partial E = \varnothing$.*

Для множеств, удовлетворяющих условию с), допустимую скорость возрастания аппроксимируемых функций (т. е. функцию v) можно описать с помощью метрических характеристик множества E, в частности, гармонической мерой определенных порций его границы в надлежащих открытых множествах. Такое описание содержится в следующем утверждении, характеризующем класс $H_D(E)$ для множеств, удовлетворяющих условию с).

Пусть B_n, $n = 1, 2, \cdots$ — компактное исчерпание области D. G_n — объединение тех компонент множества $D \setminus (E \cup B_n)$, из которых ∂D линейно недостижима, но которые линейно связаны с ∂D вне $E \cup B_{n-1}$; $n = 2, 3, \cdots$ $(B_1 = \varnothing)$.

Теорема 2. *Пусть E удовлетворяет условию с) теоремы 1. Для того, чтобы функция $f \in H(E)$ принадлежала $H_D(E)$, необходимо и достаточно, чтобы при любом $n \geq 1$ и компактном $K \subset D$ выполнялось неравенство*

$$\sup \left\{ \left| \int_{\tilde{\partial} G_n \setminus B_m} f \, d\mu_z \right| : z \in K \cap G_n \right\} < +\infty, \tag{1}$$

где $d\mu_z$ — гармоническая мера на границе открытого множества $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$; $z \in \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, а $m \geq n$ — произвольное натуральное число.

Легко видеть, что условие (1) не зависит от выбора конкретного исчерпания.

Докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. ***Если подмножество $F \subset \partial \Omega$ линейно недостижимо из открытого множества Ω, то его гармоническая мера в Ω равна нулю.***

Доказательство опирается на следующие замечания.

I) Если гармоническая мера μ_E подмножества $E \subset \partial \Omega$ положительна в (некоторой компоненте) Ω, то

$$\sup_{\Omega} \mu_E = 1$$

(см. [6], стр.264).

II) Если гармоническая мера μ_E замкнутого подмножества $E \subset \subset \partial \Omega$ тождественно не равна единице ни в одной компоненте Ω, то в каждой точке $x_0 \in \partial \Omega \setminus E$ выполнено условие

$$\varlimsup_{z \to x_0;\, z \in \Omega} \mu_E(z) < 1.$$

В самом деле. Выберем $\delta > 0$ такое, что $D(x_0, \delta) \cap E = \varnothing$ и обозначим μ_E^* гармоническую меру E относительно множества $\Omega^* = \Omega \cup$

$\cup D(x_0, \delta)$ $(D(x_0, \delta) = \{z \in \mathbf{C} : |z - x_0| < \delta\})$. Согласно принципу расширения имеем $\mu_E^* \geqslant \mu_E$ в Ω и, в частности, в $\Omega \cap D(x_0, \delta)$, причем μ_E^* тождественно не равна единице. Так как $x_0 \in (\Omega^*)^n$, то $\sup\limits_{D(x_0, \delta/2)} \mu_E^* = \alpha < 1$. Поэтому в $\Omega \cap D(x_0, \delta/2)$ имеет место неравенство $\mu_E < \alpha$, из чего следует требуемое соотношение.

Благодаря регулярности гармонической меры как борелевой меры на компакте $\partial\Omega \subset \overline{\mathbf{C}}$ достаточно доказать, что $\mu_F(z) = 0$; $z \in \Omega$, в случае замкнутого линейно недостижимого $F \subset \partial\Omega$. Предположим, что $\mu_F > 0$ в некоторой компоненте $\tilde{\Omega} \subset \Omega$. В силу замкнутости и линейной недостижимости F имеем $0 < \mu < 1$ в $\tilde{\Omega}$. Согласно замечанию I), $\mathbf{A}_1 = \{z \in \tilde{\Omega};\ \mu_F(z) > 1/2\}$ является открытым не пустым подмножеством $\tilde{\Omega}$. Обозначим A_1 некоторую компоненту $\mathbf{A}_1$. Имеем $\mu_F = 1/2$ на $\partial A_1 \cap \Omega$. Ясно, что $\partial A_1 \cap \partial\tilde{\Omega}$ может состоять только из иррегулярных точек Ω и поэтому имеет гармоническую меру нуль в A_1 (см. [6], теорема VIII на стр. 253 и замечание на стр. 265). Если бы гармоническая мера $\partial A_1 \cap F$ была бы равна нулю в A_1, то мы имели бы $\mu_F = 1/2$ на A_1. Поэтому $\sup\limits_{A_1} \mu_F = 1$, так как $\mu_F(z, \Omega) > \mu_F(z, A_1)$; $z \in A_1$, а $\sup\limits_{A_1} \mu_F(z, A_1) = 1$.

Фиксируем произвольную точку $z_1 \in A_1$ и обозначим A_2 некоторую компоненту непустого открытого подмножества A_1, на котором $\mu_F > 2/3$. Фиксируем точку $z_2 \in A_2$. Продолжив этот процесс получим последовательность вложенных областей $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ и точек $z_i \in A_i$ таких, что

$$\mu_F(z) > 1 - \frac{1}{i+1};\ z \in A_i,\ i = 1, 2, \cdots.$$

Из замечания II) легко следует, что какова бы ни была открытая окрестность V множества F, начиная с некоторого номера все $A_i \subset V$. Соединим ломаной $\gamma_i \subset A_i$ точку z_i с z_{i+1} при всех $i \geqslant 1$. Рассматривая путь $\gamma = \cup_{i=1}^{\infty} \gamma_i$ легко видеть, что его предельное множество принадлежит F, что противоречит его линейной недостижимости. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть Ω — открытое множество, регулярное в смысле задачи Дирихле, $F \subset \partial\Omega$ — линейно недостижимо из Ω и $f \in C(\partial\Omega \setminus F)$. Если существует гармоническая в Ω функция U такая, что $U = f$ на $\partial\Omega \setminus F$, то U является решением обобщенной задачи Дирихле в Ω для произвольно продолженной на $\partial\Omega$ функции f. В частности*

$$U(z) = \int\limits_{\partial\Omega \setminus F} f\, d\mu_z;\ z \in \Omega, \tag{2}$$

причем интеграл сходится в каждой точке $z \in \Omega$.

Доказательство. Рассмотрим случай неотрицательной функции f. Сначала заметим, что интеграл (2) конечен в Ω. В самом деле, согласно обобщенному принципу максимума, доказанному в [7], имеем $U \geqslant 0$ в Ω и

$$\int\limits_{\partial\Omega\setminus F} f_n\, d\mu_z < U(z),\ z \in \Omega,\ n \geqslant 1,$$

где $f_n = \inf(n, f)$. Согласно лемме 1, для произвольно продолженной на $\partial\Omega$ функции f имеем

$$W(z) = \int\limits_{\partial\Omega} f\, d\mu_z = \sup_n \int\limits_{\partial\Omega\setminus F} f_n\, d\mu_z \leqslant U(z);\ z \in \Omega.$$

Так как, учитывая регулярность множества Ω, функция W является гармонической в Ω, совпадающей на $\partial\Omega\setminus F$ с f (теорема М. Брело, [8], стр. 110), согласно упомянутому обобщенному принципу максимума имеем $U = W$ в Ω.

Доказательство теоремы 1. а)$\Rightarrow$с). Предположим, что E не удовлетворяет условию с i). Тогда существует область V, из которой ∂D линейно недостижима, $\partial V \subset E \cup \partial D$ и $V \cap \partial E \neq \varnothing$. Пусть $z_0 \in V \cap \partial E$ является точкой пика алгебры $R(X)$, где $X = (\overline{\mathbb{C}}\setminus V) \cup E$ (см. [9]). Существует рациональная функция r с полюсами вне X, удовлетворяющая условиям

$$\text{i) } |r(z_0) - 1| < \frac{1}{4},$$

$$\text{ii) } \|r\|_X < \frac{5}{4}, \qquad \text{iii) } \|r\|_{X\setminus D(z_0,\ s)} < \frac{1}{4}, \tag{3}$$

где $s > 0$ такое, что $\overline{D}(z_0,\ s) \subset V$. Функция $\operatorname{Re} r$ — гармоническая на X и удовлетворяет тем же оценкам (3). В частности, $\operatorname{Re} r \in C_{\infty}(\widetilde{\partial E})$. Если бы $\operatorname{Re} r \in H_D(E)$, то существовала бы $u \in H(D)$ такая, что

$$\|\operatorname{Re} r - u\|_E < \frac{1}{4}.$$

Согласно ($3i$) имеем

$$|u(z_0)| > \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Далее, с учетом ($3iii$) имеем

$$\|u\|_{\widetilde{\partial V}} < \frac{1}{2},$$

откуда, согласно обобщенному принципу максимума работы [7],

$$\|u\|_V < \frac{1}{2},$$

что противоречит (4).

Предположим теперь, что E не удовлетворяет условию c ii) и пусть B_n, $n=1, 2, \cdots$ — произвольное компактное исчерпание области D. По предположению существует последовательность (необязательно различных) областей $V_n \subset D$, $n=1, 2, \cdots$ таких что $\partial V_n \subset E \cup B_{n_0}$ $(n_0 \geqslant 1)$, ∂D линейно недостижима из V_n и $(V_n \setminus B_{n_0+n}) \cap \partial E \neq \varnothing$, $n \geqslant 1$. Пусть $z_n \in V_n \setminus B_{n_0+n}) \cap \partial E$ — точка пика алгебры $R(X_n)$, где $X_n = (\overline{\mathbb{C}} \setminus V_n) \cup E \cup B_{n_0+n}$, $n \geqslant 1$, причем $z_n \neq z_m$, если $n \neq m$. Для чисел $\varepsilon_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < 1/4$, существуют рациональные функции r_n с полюсами вне X_n, удовлетворяющие условиям:

$$\text{i) } |r_n(z_n) - 1| < \varepsilon_n,$$

$$\text{ii) } \|r_n\|_{X_n} < 1 + \varepsilon_n, \quad \text{iii) } \|r_n\|_{X_n \setminus D(z_n, s_n)} < \varepsilon_n,$$

где $\overline{D}(z_n, s_n) \subset V_n \setminus B_{n_0+n}$, $n \geqslant 1$, и $\overline{D}(z_n, s_n) \cap \overline{D}(z_m, s_m) = \varnothing$, при $n \neq m$.

Сумма f ряда $\sum r_n$ является мероморфной в D функцией, ограниченной на E, причем

$$\text{i) } \|f\|_{D \setminus \cup V_n} < \frac{1}{4} \text{ и ii) } |f(z_n) - 1| < \frac{1}{4}, \quad n \geqslant 1. \tag{5}$$

Функция $\operatorname{Re} f$ будет гармонической на E, также удовлетворяющей оценкам (5). Если бы существовала гармоническая в D функция u такая, что

$$\|f - u\|_E < \frac{1}{4},$$

то мы имели бы согласно (5*i*)

$$\|u\|_{\cup \widetilde{\partial} V_n \setminus B_{n_0}} < \frac{1}{2} \tag{6}$$

и согласно (5*ii*)

$$|u(z_n) - 1| < \frac{1}{2}, \quad n \geqslant 1. \tag{7}$$

На основании предложения 2.1 работы [10] можем утверждать, что из оценки (6) вытекает

$$\varlimsup_{z \to \partial D;\ z \in \cup V_n} |u(z)| < \frac{1}{2},$$

что, очевидно противоречит (7) по меньшей мере для достаточно больших n.

c) $\Rightarrow$ b). Пусть $\{B_n\}$ — некоторое компактное исчерпание области D, а множества G_n и гармоническая мера μ_z, $z \in \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, определены как в теореме 2. Так как множество $F = \partial G_n \cap \partial D$ линейно недостижимо из $G_n = \Omega$, в силу леммы 1 и теоремы Дини, при произвольном $n \geqslant 1$ имеем

$$\mu(z, \partial G_n \setminus B_m) \to 0, \quad \text{при } m \to +\infty,$$

равномерно по $z \in K \cap G_n$, для произвольного компакта $K \subset D$. Следовательно, существуют положительные функции $\nu_n \in C((0, 1))$ такие, что $\nu_1(t) \nearrow +\infty$, при $t \searrow 0$, и для любого компакта $K \subset D$

$$\sup \left\{ \int\limits_{\tilde{\partial} G_n \setminus B_n} \nu_n(\rho(\zeta, \partial D))\, d\mu_z(\zeta) : z \in K \cap G_n \right\} < +\infty, \ n \geqslant 1^*.$$

Выберем функцию $\nu \in C((0, 1))$ такую, что

$$\frac{n}{2} \leqslant \nu(t) < n, \text{ при } k_n \geqslant t > k_{n+1}, \ n = 1, 2, \cdots,$$

где k_n находится из условия

$$\min(\nu_1, \cdots, \nu_n) \geqslant n \text{ при } t \leqslant k_n; \ n = 1, 2, \cdots$$

($k_n \searrow 0$). Будем иметь $\nu(t) \nearrow +\infty$, при $t \searrow 0$ и $0 < \nu < \nu_n$, при $t < k_n$. Поэтому

$$\sup \left\{ \int\limits_{\tilde{\partial} G_n \setminus B_n} \nu\, d\mu_z : z \in K \cap G_n \right\} < +\infty,$$

при любом $n \geqslant 1$ и компактном $K \subset D$, т. е. для ν выполнено условие (1) теоремы 2. Таким образом, для завершения доказательства теоремы 1 нам остается фактически доказать достаточность в теореме 2.

Доказательство теоремы 2. Достаточность. Здесь мы воспользуемся следующим утверждением, вытекающим из результатов работ [2], [3].

Теорема 3. (Готье, Гольдстейн, Оу, Хенгартнер, Лабреш). *Пусть F — замкнутое подмножество области D. Тогда, если $F^c = D^* \setminus F$ связно и локально связно, то $H(F) \subset H_D(F)$.*

Мы покажем, что для множества E и функции f, удовлетворяющих условиям теоремы 2, существуют: а) множество $\tilde{E}$ со связным и локально связным дополнением в D^*, $E \subset \tilde{E}$ и б) функция $\tilde{f} \in H(\tilde{E})$, с сужением $\tilde{f}|_E = f$.

При построении множества E мы будем часто опираться на следующее замечание.

(*). Если $\{\partial D\}$ линейно недостижима из попарно непересекающихся областей V_j, $\tilde{\partial} V_j \subset E \cup K$, $1 \leqslant j \leqslant N$ $(1 \leqslant N < +\infty)$, где K — компактное подмножество E (возможно $K = \varnothing$) и для некоторой точки $z_0 \in \bigcap_{j=1}^{N} \overline{V}_j$ существует окрестность U_{z_0} такая, что $U_{z_0} \subset E \cup \bigcup_{j=1}^{N} V_j$, то существует область V, из которой ∂D линейно недостижима, $\tilde{\partial} V \subset E \cup K$ и $\bigcup_{j=1}^{N} V_j \subset V$. Легко видеть, что требуемыми свойствами обладает область $V = U_{z_0} \cup \bigcup_{j=1}^{N} V_j$.

---

* $\rho(\zeta, \partial D)$ — сферическое растояние точки ζ до множесства ∂D.

Будем считать, что $\{B_n\}$ является исчерпанием области D компактными областями, $B_1 = \varnothing$. Множество $\tilde{E}$ определим как объединение некоторых замкнутых подмножеств $E_n \subset D$, построение которых проведем по индукции.

Обозначим $E_1 = E \cup G_1$. Справедлива

Лемма 2. i) *Дополнение к* E_1 *линейно связно в* D^*. ii) $\tilde{\partial} E \subset \subset \tilde{\partial} E_1$.

Доказательство. i) следует из определения множества G_1. Если ii) не выполнено, то существует точка $z_0 \in \tilde{\partial} E \cup E_1^0$, т. е. существует окрестность U_{z_0} точки z_0 такая, что $U_{z_0} \subset E \cup G_1$. Тогда, согласно замечанию (*) существует область V, $\tilde{\partial} V \subset E$, ∂D линейно недостижима из V и $z_0 \in V$. Но это, очевидно, противоречит ci).

Пусть при некотором $n \geqslant 1$ построено замкнутое подмножество $E_n = E \cup \bigcup_{k=1}^{n} \overline{G_k^*}$ (G_k^* -- некоторые подмножества множеств G_k), обладающее свойствами:

d) $\tilde{\partial} E \subset \tilde{\partial} E_n$.

c) $D^* \setminus E_n$ линейно связно, причем для некоторых натуральных чисел $m_1 = 1 < m_2 < \cdots < m_n$, точки $z \in (E_n \cup B_{m_n})^c$ могут быть соединены с ∂D непрерывными путями вне $E_n \cup B_n$, а точки $z \in E_n^c \cap (B_{m_k} \setminus B_{m_{k-1}})$ — непрерывными путями, лежащими вне $E_n \cup B_{k-1}$, $k = 2, 3, \cdots, n$.

Обозначим $M_1^{(n)}$ подмножество точек $(E_n^0)^c$, обладающих окрестностью, лежащей в $E \cup G_{n+1}$. Согласно cii) и замечанию (*), найдем число $s_1 > m_n$ такое, что $M_1^{(n)} \cap E \subset B_{s_1}^0$, и пусть $M_2^{(n)} = M_1^{(n)} \setminus B_{s_1}$. Существует число $s_2 \geqslant s_1$ такое, что замыкание объединения предкомпактных в D компонент дополнения $\overline{M_2^{(n)}} \cup B_{s_1}$ содержится в $B_{s_2}^0$. В противном случае, с помощью замечания (*) можно было бы построить области V, $\tilde{\partial} V \subset E \cup B_{s_1}$, из которых ∂D линейно недостижима, содержащие точки ∂E, как угодно близкие к ∂D (в сферической метрике). Рассмотрим множество $M_3^{(n)} = M_2^{(n)} \setminus B_{s_2}$. Имеем $M_3^{(n)} \cap E = \varnothing$, так как $M_3^{(n)} = M_1^{(n)} \setminus B_{s_2}$ и $B_{s_1} \subset B_{s_2}$. Обозначим $M_4^{(n)}$ объединение компонент $M_2^{(n)} \setminus M_3^{(n)}$, охватываемых $E \cup \overline{M_3^{(n)}}$ (т. е. предкомпактных в D подмножеств множества $M_2^{(n)}$, граница которых содержится в $E \cup \overline{M_3^{(n)}}$). При этом заметим, что согласно выбору s_2, связности B_n и замечанию (*), можно утверждать, что $\overline{M_4^{(n)}} \cap B_{s_1} = \varnothing$, что влечёт $M_4^{(n)} \cap E = \varnothing$. Возьмем теперь

$$E_{n+1} = E_n \cup G_{n+1}^*, \text{ где } G_{n+1}^* = M_3^{(n)} \cup M_4^{(n)} \text{ и } m_{n+1} = s_2.$$

Для замкнутого в D подмножества $E_{n+1} \subset D$ имеет место

Лемма 3. *Условия* d) *и* e) *(с заменой n на $n+1$) выполнены для множества E_{n+1} и числа m_{n+1}.*

Доказательство. Если не выполнено d), то учитывая, что E_{n+1} получается прибавлением к E некоторых подмножеств $\bigcup_{k=1}^{n+1} G_k$, согласно замечанию (*) можно построить область V, $\tilde{\partial} V \subset E \cup B_{n+1}$, из которой ∂D линейно недостижимо, имеющую непустое пересечение с ∂E, что противоречит выбору m_{n+1}.

Множество $(E_n \cup G_{n+1})^c$ линейно связно согласно определению G_{n+1} и линейной связности $(E_n)^c$. Так как точки $z \in G_{n+1} \setminus \overline{G^*_{n+1}}$ могут быть соединены с ∂D путями, лежащими вне $E \subset B_n$, то линейно связно и $(E_{n+1})^c = (E_n \cup G_{n+1})^c \cup (G_{n+1} \setminus \overline{G^*_{n+1}})$. Точки $z \in (E_{n+1} \cup B_{m_{n+1}})^c$ могут быть соединены с ∂D путями вне $E_{n+1} \cup B_{n+1}$, так как они могут принадлежать G_k только при $k > n+1$. Далее, $(E_{n+1})^c \cup (B_{m_{n+1}} \setminus B_{m_n}) \subset (E_n \cup B_{m_n})^c \setminus M_1^{(n)}$, которое означает, что точки этого множества могут быть соединены с ∂D путями вне $E_{n+1} \cup B_n$. Наконец, так как $(E_{n+1})^c \cap (B_{m_k} \setminus B_{m_{k-1}}) = (E_n)^c \cap (B_{m_k} \setminus B_{m_{k-1}})$; $2 \leqslant k \leqslant n$, то точки k-го множества могут быть соединены с ∂D вне $E_{n+1} \cup B_{k-1}$.

Для построенной по индукции последовательности множеств E_n возьмем

$$\tilde{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{G^*_n} \quad (G^*_1 = G_1).$$

Отметим, что при каждом $k > n+1$ пути, по которым осуществляются указанные соединения, согласно определению множеств G_k можно взять лежащими вне $E_{n+1} \cup G_n$. Поэтому, так как порции множеств E_n на компактных подмножествах D совпадают для всех достаточно больших n, условия d) и e) означают, что $\tilde{E}$ замкнуто в D и $D^* \setminus \tilde{E}$ связно и локально связно.

Доопределим теперь функцию f до функции класса $H(\tilde{E})$ следующим образом: продолжив сначала f по напрерывности с $\tilde{\partial} E$ до функции $\tilde{f}$, определенной на $\tilde{\partial} \tilde{E}$, обозначим через φ решение задачи Дирихле на открытом множестве $\tilde{E}^c \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ для граничной функции $\tilde{f}$. Это решение существует согласно теореме М. Брело (см. выше), лемме 1 и условию (1), совпадающему с условием упомянутой теоремы в нашем случае. При этом, решение задается интегралом

$$\varphi(z) = \int\limits_{\cup \tilde{\partial} G^*_n} \tilde{f} \, d\mu_z; \quad z \in G^*_n$$

$(\tilde{\partial} G^*_n \subset \partial G_n \cup B_{m_n})$.

Согласно лемме 2 работы [11], условие (1) обеспечивает, чтобы

$$\lim_{z\to\zeta;\ z\in(\widetilde{E})^0\setminus E} \varphi(z)=\widetilde{f}(\zeta)$$

в любой точке $\zeta\in\partial((\widetilde{E})^0\setminus E)$. В частности, функция

$$u=\begin{cases} f, \text{ на } E\\ \varphi, \text{ на } \widetilde{E}\setminus E\end{cases}$$

принадлежит классу $H(\widetilde{E})$. Согласно теореме 3, $\varphi\in H_D(\widetilde{E})$, что, очевидно, влечет $f=\varphi|_E\in H_D(E)$.

Необходимость. Предположим, что функция $f\in H_D(E)$ и $\{B_n\}$ — произвольное исчерпание области D компактными областями. Не нарушая общности можем считать, что функция f непрерывно продолжена на $\partial G_n\cap B_n$; $n\geqslant 1$ и неотрицательна. Для произвольного компакта $K\subset D$ возьмем компакт $\widetilde{K}\subset D$ такой, что $K\subset(\widetilde{K})^0$. Обозначим $Q_n=G_n\cup(M_1^{(n-1)}\cap\widetilde{K})$ и заметим, что все точки $\zeta\in\partial Q_n\cap K$ являются регулярными в Q_n, так как принадлежат невырожденным граничным континуумам ($n\geqslant 1$ — произвольно фиксировано).

По условию существует гармоническая в D функция U такая, что

$$\|f-U\|_E<1.$$

Для некоторого (ограниченного) продолжения на ∂Q_n ограниченной на $\widetilde{\partial}Q_n$ функции $f-U$ существует решение задачи Дирихле в Q_n. Обозначив это решение V_n, заметим, что функция $W_n=U+V_n$ — гармоническая в Q_n и совпадает с f в регулярных точках ∂Q_n. Для $m>n$ таких, что $\widetilde{K}\subset B_m^0$, имеем $\partial Q_n\setminus B_m=\partial G_n\setminus B_m$, причем согласно условию с), для достаточно больших m все точки $\zeta\in\partial Q_n\setminus B_m$ — регулярные. На основании леммы 2 можем утверждать, что

$$W_n(z)=\int\limits_{\widetilde{\partial}Q} f\,d\mu_z'=\int\limits_{\widetilde{\partial}Q_n\cap B_m}+\int\limits_{\partial Q_n\setminus B_m}, \tag{10}$$

где $d\mu_z'$ — гармоническая мера на ∂Q_n в Q_n. В каждой точке $\zeta\in\partial Q_n\cap$ $\cap K$ имеем

$$\lim_{z\to\zeta;\ z\in Q_n} W_n(z)=\widetilde{f}(\zeta). \tag{11}$$

В силу упомянутой леммы 2 работы [11], согласно (11) имеем, что W_n ограничена в некоторой окрестности каждой точки $\zeta\in\partial Q_n\cap K$. Из-за компактности K отсюда следует, что W_n ограничена на $K\cap Q_n$. Из равномерной на $K\cap Q_n$ ограниченности W_n и первого слагаемого правой части в (10), следует равномерная ограниченность второго на $K\cap Q_n$, и тем более на $K\cap G_n$. Это замечание завершает доказательство необходимости, так как по принципу расширения $d\mu_z'\geqslant d\mu_z$ на ∂G_n и учитывая, что f неотрицательна, получаем оценку (1).

Недавно П. М. Готье любезно прислал нам рукопись, посвященную решению упомянутой задачи Л. А. Рубеля, в которой приводится доказательство пункта c) $\Rightarrow$ b) теоремы 1, без явной формулировки этого утверждения, в случае, когда $E^{0} = \varnothing$.

Ереванский государственный
университет

Поступила 14. I. 1988

Ա. Հ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ. Մոտարկություն հարմոնիկ ֆունկցիաներով հարթ տիրույթների փակ ենթաբազմությունների վրա *(ամփոփում)*

Նկարագրված են հարթ տիրույթի ոչ-կոմպակտ փակ ենթաբազմությունները, որոնց վրա տիրույթում հարմոնիկ ֆունկցիաներով հավասարաչափ մոտարկվում են բազմության վրա անընդհատ, ներսում հարմոնիկ, իսկ եզրի վրա սահմանափակ ֆունկցիաները։ Ապացուցվում է, որ այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի արագություն, որ եթե բազմության վրա անընդհատ, ներսում հարմոնիկ ֆունկցիան բազմության եզրի վրա աճում է ոչ ավելի արագ, քան նշված արագությունը, ապա այն նույնպես մոտարկելի է։ Նկարագրված բազմությունների համար տրվում է նրանց եզրի հարմոնիկ չափի տերմիններով ինտեգրալային հայտանիշ, որը բնութագրում է բազմության վրա հավասարաչափ մոտարկվող ֆունկցիաների դասը։

A. H. NERSESYAN. *Approximation by harmonic functions on closed subsets of planar domains* (summary)

The paper describes non-compact closed subsets of planar domains where the functions which are continuous on a subset, harmonic in its interior and bounded on its boundary can be uniformly approximated by functions harmonic in the domain. It is proved that for such sets a speed can be pointed out such that the functions continuous on a set harmonic in its interior and increasing no faster then the noted speed on the boundary are also approximable. In terms of harmonic measure on the boundary an inttgral criecrion is proposed, characterizing the class of approximable functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Л. Шагинян.* О равномерной и касательной гармонической аппроксимации непрерывных функций на произвольных совокупностях. Матем. заметки 9, № 2, 1971, 131—142.
2. *P. M. Gauthier, M. Goldstein, W. H. Ow.* Uniform approximation on unbounded sets by harmonic functions with logarithmic singularities, Trans. Amer. Math. Soc., 261, 1. 1980, 169—183.
3. *M. Labreche.* De l'approximation harmonic uniforme, These. Univ. de Montreal 1982.
4. *А. А. Нерсесян.* Гармоническая аппроксимация и решение одной задачи Л. А. Рубеля, ДАН Арм.ССР, 84, № 3, 1987, 104—106.
5. *А. А. Нерсесян.* О функциях, аппроксимируемых гармоническими функциями на некомпактных подмножествах плоскости, Тезисы докладов. Всесоюзный симпозиум по теории приближения функций, Уфа, 1987.
6. *М. В. Келдыш.* Избранные труды, Математика, «Наука», М., 1985.
7. *Р. Ш. Саакян.* Об одном обобщении принципа максимума, Изв. АН Арм.ССР, серия матем., 22, № 1, 1987, 94—101.
8. *М. Брело.* Основы классической теории потенциала, «Мир», М., 1964.
9. *Т. Гамелин.* Равномерные алгебры, «Мир», М., 1973.
10. *A. Stray.* Approximation by analytic functions which are uniformly continuous on a subset of their domain of definition, Amer. Journ. Math., 99, 4, 1977, 788—800.
11. *N. A. Arakelian, P. M. Gautier.* On tangential approximation by holomorphic functions, Изв. АН АрмССР, сер. матем., 17, № 6, 1982, 419—441.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXV, № 3, 1990 Математика

УДК 517.98

В. В. ВОСКАНЯН

ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА: КРАЙНИЕ ОПЕРАТОРЫ И РАССТОЯНИЕ БАНАХА-МАЗУРА

§ 1. Введение

Определение 1. Конечномерное вещественное нормированное пространство X называется полиэдральным, если его единичный шар $S(X) = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ является многогранником, т. е. выпуклой оболочкой конечного числа точек.

Такие пространства просты в том смысле, что полностью описываются множеством вершин, т. е. крайних точек, своего единичного шара, которое мы будем обозначать $\operatorname{Ext} S(X)$. С другой стороны, из возможности аппроксимировать выпуклые компакты в R^n выпуклыми многогранниками (см., например, [1], т. 20.4.) следует возможность аппроксимации конечномерных вещественных нормированных пространств полиэдральными пространствами, а именно: если $\|\cdot\|$ — некоторая норма в арифметическом пространстве R^n, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется полиэдральная норма $\|\cdot\|'$, т. е. норма, являющаяся функционалом Минковского некоторого многогранника, такая, что $\forall x \in R^n \; \|x\|' \leqslant \|x\| \leqslant (1+\varepsilon) \|x\|'$. Поэтому полиэдральные пространства могут быть использованы и для построения примеров конечномерных нормированных пространств с теми или иными метрическими свойствами. Напомним следующие определения.

Определение 2. Крайним оператором из банахова пространства X в банахово пространство Y (соответственно, крайним функционалом в X) называется крайняя точка единичного шара $S(L(X, Y))$ пространства $L(X, Y)$ непрерывных линейных операторов из X в Y (соответственно, единичного шара $S(X')$ сопряженного к X пространства X').

Определение 3. Расстоянием Банаха-Мазура между изоморфными банаховыми пространствами X и Y называется число $d(X, Y) = \inf \{\|T\| \|T^{-1}\|\}$, где inf берется по всем изоморфизмам $T: X \to Y$.

В настоящей работе описываются крайние операторы и расстояние Банаха-Мазура для полиэдральных пространств X и Y через крайние точки шаров $S(X)$ и $S(Y)$.

§ 2. Крайние операторы

2.1. Описание крайних функционалов. Пусть X — полиэдральное пространство размерности n. Впредь всякое такое пространство, как линейное, мы будем отождествлять с арифметическим пространством R^n. Тогда единичный шар $S(X)$ представит собой некоторый симметричный относительно нуля выпуклый n-мерный многогранник со множеством крайних точек $\mathrm{Ext}\, S(X) = \{\pm e_1, \cdots, \pm e_r\}$, где $r \geq n$.

Геометрически очевидно и легко доказуемо, что крайние функционалы на X определяются $(n-1)$-мерными гранями многогранника $S(X)$, т. е. для всякого $e' \in S(X')$ гиперплоскость $\{x \in X : e'(x) = 1\}$ проходит через $(n-1)$-мерную грань шара $S(X)$. Так как каждая такая грань содержит как минимум n линейно независимых крайних точек шара $S(X)$, то отсюда вытекает следующее

Предложение 1. *Пусть X — полиэдральное пространство размерности n и пусть $\mathrm{Ext}\, S(X) = \{\pm e_1, \cdots, \pm e_r\}$. Для того, чтобы функционал $e' \in X'$ был крайним, необходимо и достаточно, чтобы*

а) *Существовал базис в X, состоящий из точек $e_{i_1}, \cdots, e_{i_n} \in \mathrm{Ext}\, S(X)$ такой, что*

$$e'(e_{i_p}) = 1 \text{ для } p = 1, \cdots, n \text{ и}$$

б) $|e'(e_i)| \leq 1$ *для* $i = 1, \cdots, r$.

Если координаты крайних точек e_i явно выписаны, то легко дать алгоритм нахождения всех крайних функционалов в явном виде.

Теорема 1. (*Описание крайних функционалов в терминах матриц*). *Пусть X—полиэдральное пространство размерности n, и пусть $\mathrm{Ext}\, S(X) = \{\pm e_1, \cdots, \pm e_r\}$, где $e_i = (\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_n})$ для $i = 1, \cdots, r$. Обозначим через $A = \{\alpha_{ij}\}_{i=1,\cdots,r}^{j=1,\cdots,n}$ матрицу, строки которой составлены из координат крайних точек e_i.*

Для того, чтобы функционал e' был крайним, необходимо и достаточно, чтобы нашлись обратимая $n \times n$ подматрица $\tilde{A}$ матрицы A и вектор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ с координатами $\varepsilon_i = 1$ или -1, такие, что

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \det \tilde{A}_j \right| \leq |\det \tilde{A}|, \quad i = 1, \cdots, r \tag{1}$$

и

$$e' = \frac{1}{\det \tilde{A}} (\det \tilde{A}_1, \cdots, \det \tilde{A}_n), \tag{2}$$

где $\tilde{A}_j$ — матрица, получающаяся из $\tilde{A}$ заменой j-го столбца на вектор ε.

Доказательство. Пусть $e' = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$ — крайний функционал. В силу предложения 1 имеем: а) существует базис в X из элементов $e_{i_1}, \cdots, e_{i_n} \in \mathrm{Ext}\, S(X)$ такой, что $e'(e_{i_p}) = 1$, $p = 1, \cdots, n$, откуда $e'(e_{i_p}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i_p k} \gamma_k = 1$ или -1, $p = 1, \cdots, n$, что запишется в матричной форме $\tilde{A} e' = \varepsilon$, где $\tilde{A} = \{\alpha_{i_p j}\}_{p=1,\cdots,n}^{j=1,\cdots,n}$ и $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_i = 1$ или -1 для $i = 1, \cdots, n$. Так как матрица $\tilde{A}$ обратима, то отсюда следует (2).

Вдобавок, из условия б) предложения 1 имеем

$$1 > |e'(e_i)| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \gamma_j \right| \quad \text{для всех } i = 1, \cdots, r.$$

Подставляя сюда значения γ_j из (2) получим (1).

Таким образом, в силу предложения 1, если для некоторой матрицы $\bar{A}$ и вектора ε с упомянутыми свойствами выполнено (1), то формула (2) определит некоторый крайний функционал e' и обратно, каждый крайний функционал порождается таким образом, ч. т. д.

2.2. Описание крайних операторов. Для дальнейшего нам впредь будет удобно представлять линейные операторы как элементы тензорного произведения. Напомним, что всякий оператор $T \in L(X, Y)$, будучи конечномерным, отождествляется с конечной суммой $\sum_i x'_i \otimes y_i$ такой, что $\forall x \in X$ $Tx = \sum_i x'_i(x) y_i$, где $x'_i \in X$, а $y_i \in Y$. Таким образом, как линейное пространство $L(X, Y) = X' \otimes Y$. Обычная операторная норма $\|T\|$ на $L(X, Y)$ совпадает с инъективной $\vee$-нормой соответствующего элемента тензорного произведения, т. е. если $T = \sum x'_i \otimes y_i$, то

$$\|T\| = \|\sum_i x'_i \otimes y_i\|_\vee = \sup \{ |\sum_i x'_i(x) y'(y_i)| : x \in S(X), \ y' \in S(Y') \}. \tag{3}$$

Этот факт записывается равенством нормированных пространств: $L(X, Y) = X' \overset{\vee}{\otimes} Y$. Заметим теперь, что тензорные произведения $X' \otimes Y$ и $X \otimes Y'$ двойственны как линейные пространства. Более того, рассмотрим на $X \otimes Y'$ проективную $\wedge$-норму (ядерную норму соответствующего оператора), определенную по формуле

$$\forall u \in X \otimes Y' \ \|u\|_\wedge = \inf \{ \sum \|x_i\| \|y'_i\| \},$$

где inf берется по всевозможным представлениям $\sum_i x_i \otimes y'_i$ элемента u. Как известно (см., например, [2]), нормы $\vee$ и $\wedge$ двойственны. Для нашего случая это даст

$$L(X, Y) = X' \overset{\vee}{\otimes} Y = (X \overset{\wedge}{\otimes} Y')'. \tag{4}$$

Перейдем теперь к рассмотрению крайних точек.

Теорема 2. *Пусть X и Y — полиэдральные пространства размерности n и m соответственно, и пусть* $\mathrm{Ext}\, S(X) = \{\pm e_1, \cdots, \pm e_r\}$ $\mathrm{Ext}\, S(Y') = \{\pm k'_1, \cdots, \pm k'_s\}$. *Для того, чтобы линейный оператор $T: X \to Y$ был крайним, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий.*

а) *В пространстве $X \otimes Y'$ существует базис вида $\{e_{i_p} \otimes k'_{j_p}\}_{p=1}^{nm}$ такой, что $(e_{i_p} \otimes k'_{j_p})(T) = 1$ или -1, и*

б) $\forall e \in \mathrm{Ext}\, S(X)$, $\forall k' \in \mathrm{Ext}\, S(Y')$ $|k'(Te)| \leqslant 1$.

Для доказательства теоремы мы используем нижеследующее предложение 2, которое известно ([3]), но для полиэдрального случая мы предпочитаем привести наше доказательство этого предложения, разбив его на самостоятельные этапы.

Предложение 2.

$$\mathrm{Ext}\, S(X \widehat{\otimes} Y') = \{e \otimes k' : e \in \mathrm{Ext}\, S(X),\ k' \in \mathrm{Ext}\, S(Y')\}.$$

Доказательство предложения 2. Этап 1. Покажем, что все элементы из $L(X, Y)$ вида $e' \otimes k$, где $e' \in \mathrm{Ext}\, S(X')$ и $k \in \mathrm{Ext}\, S(Y)$, являются крайними операторами.

Если $e' \in \mathrm{Ext}\, S(X')$, то в силу предложения 1 существует в X базис вида $e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}$ такой, что $e'(e_{i_p}) = 1$ для $p = 1, \cdots, n$. Отсюда $(e' \otimes k)(e_{i_p}) = k$ для $p = 1, \cdots, n$. Поэтому, если $e' \otimes k = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$, где $T_1, T_2 \in S(L(X, Y))$, то $k = \frac{1}{2}(T_1 e_{i_p} + T_2 e_{i_p})\ \forall p = 1, \cdots, n$. Так как $k \in \mathrm{Ext}\, S(Y)$, а $T_1 e_{i_p}, T_2 e_{i_p} \in S(Y)$, то $k = T_1 e_{i_p} = T_2 e_{i_p}$ для $p = 1, \cdots, n$. Отсюда $T_1 = T_2 = e' \otimes k$ и точка $e' \otimes k$ — крайняя для $S(L(X, Y))$.

Этап 2. Покажем, что если $e \in \mathrm{Ext}\, S(X)$, а $k' \in \mathrm{Ext}\, S(Y')$, то $e \otimes k' \in \mathrm{Ext}\, S(X \widehat{\otimes} Y')$.

В силу предложения 1 найдется базис в X' из крайних точек $e_1', \cdots, e_n'$ шара $S(X')$ такой, что $e_p'(e) = 1$ для $p = 1, \cdots, n$. Аналогично, найдется базис в Y из крайних точек $k_1, \cdots, k_m$ шара $S(Y)$ такой, что $k'(k_i) = 1$ для $i = 1, \cdots, m$. Тогда $\{e_p' \otimes k_i : p = 1, \cdots, n,\ i = 1, \cdots, m\}$ будет базисом в $X' \otimes Y$ таким, что

$$(e_p' \otimes k_i)(e \otimes k') = 1 \text{ для } p = 1, \cdots, n,\ i = 1, \cdots, m. \tag{5}$$

Кроме того

$$\|e \otimes k'\|_\wedge = \|e\|\,\|k'\| = 1, \tag{6}$$

в силу свойства кросс-нормы $\wedge$ (см. [2]).

Из соотношений (4), (5) и (6), в силу предложения 1 вытекает, что $e \otimes k' \in \mathrm{Ext}\, S(X \widehat{\otimes} Y')$.

Этап 3. Используем сейчас следующее утверждение, названное в работе [4] „теоремой о наилучшем представлении“.

Пусть X и Y — полиэдральные пространства, $\mathrm{Ext}\, S(X) = \{\pm e_1, \cdots, \pm e_r\}$ и $\mathrm{Ext}\, S(Y) = \{\pm k_1, \cdots, \pm k_l\}$, и пусть $u \in X \otimes Y$. Тогда существует матрица $\{c_{ij}\}_{i=1,\cdots,r}^{j=1,\cdots,l}$ такая, что

$$u = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{l} c_{ij}\, e_i \otimes k_j \text{ и } \|u\|_\wedge = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{l} |c_{ij}|.$$

Эта теорема показывает, что в нашем доказываемом случае всякий элемент из шара $S(X \widehat{\otimes} Y')$ является абсолютно выпуклой комбинацией элементов вида $e_i \otimes k_j'$, которые, согласно утверждению этапа 2, являются крайними. Следовательно, элементы вида $e \otimes k'$, где

$e \in \operatorname{Ext} S(X)$, $k' \in \operatorname{Ext} S(Y')$ исчерпывают все крайние точки шара $S(X \hat{\otimes} Y')$ и предложение 2 доказано.

Так как $L(X, Y) = (X \hat{\otimes} Y')'$ в силу (4), то остается применить предложения 1 и 2. Теорема 2 доказана.

Приведем теперь алгоритм нахождения всех крайних операторов в случае, когда крайние точки единичных шаров пространств X и Y' заданы в явном виде. Заметим, что если задано $\operatorname{Ext} S(Y)$ вместо $\operatorname{Ext} S(Y')$, то последнее может быть получено с помощью теоремы 1. С другой стороны, для построения примеров с требуемыми метрическими свойствами можно сразу же строить Y', задавая набор крайних точек его единичного шара.

Теорема 3. (*Описание крайних операторов в терминах матриц*).

Пусть X и Y — полиэдральные пространства размерности n и m соответственно, и пусть

$$\operatorname{Ext} S(X) = \{\pm e_1, \cdots, \pm e_r\}, \text{ где } e_i = (\alpha_{ij})_{j=1}^{n}, \; i = 1, \cdots, r,$$

$$\operatorname{Ext} S(Y') = \{\pm k'_1, \cdots, \pm k'_\nu\}, \text{ где } k'_i = (\gamma_{ij})_{j=1}^{m}, \; i = 1, \cdots, \nu.$$

Тогда все крайние операторы $X \to Y$ находятся следующим образом. Возьмем некоторую обратимую матрицу Λ размерности $nm \times nm$ вида

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11}^1 \lambda_{12}^1 \cdots \lambda_{1m}^1 \lambda_{21}^1 \cdots \lambda_{2m}^1 \cdots \lambda_{nm}^1 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \lambda_{11}^l \lambda_{12}^l \cdots \lambda_{1m}^l \lambda_{21}^l \cdots \lambda_{2m}^l \cdots \lambda_{nm}^l \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \lambda_{11}^{nm} \lambda_{12}^{nm} \cdots \lambda_{1m}^{nm} \lambda_{21}^{nm} \cdots \lambda_{2m}^{nm} \cdots \lambda_{nm}^{nm} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где

$$\lambda_{ij}^l = \alpha_{p_l i} \gamma_{q_l j}, \; 1 \leqslant l \leqslant nm, \; 1 \leqslant p_l \leqslant r, \; 1 \leqslant q_l \leqslant \nu,$$

т. е. полученную с помощью некоторых строк (которые могут повторяться) матриц $A = \{\alpha_{pi}\}_{p=1,\cdots,r}^{i=1,\cdots,n}$ и $\Gamma = \{\gamma_{qj}\}_{q=1,\cdots,\nu}^{j=1,\cdots,m}$ крайних точек шаров $S(X)$ и $S(Y')$ соответственно. Возьмем, далее, некоторый nm-мерный вектор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{nm})$ такой, что $\varepsilon_i = 1$ или -1, $i = 1, \cdots, nm$. Обозначим через Λ_k матрицу, полученную из Λ подстановкой вектора ε в ее k-й столбец. Если

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{\tau i} \gamma_{\sigma j} \det \Lambda_{(i-1)m+j} \right| \leqslant |\det \Lambda| \tag{8}$$

для любых $\tau = 1, \cdots, r$ и $\sigma = 1, \cdots, \nu$, то пара (Λ, ε) определит крайний оператор T из X в Y, чье матричное представление $[T]$ в канонических базисах будет иметь вид

$$[T] = \{c_{ij}\} = \left\{ \frac{\det \Lambda_{(i-1)m+j}}{\det \Lambda} \right\}^T. \tag{9}$$

Доказательство. Через b_i (соответственно $\bar{b}_i$) будем обозначать i-й элемент канонического базиса в арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$ (соответственно в $\mathbf{R}^m$). Каждый оператор $T: X \to Y$ допускает единственное тензорное представление $T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} b_i \otimes \bar{b}_j$, и легко видеть, что $[T] = \{c_{ij}\}^T$. По теореме 2 оператор T — крайний тогда и только тогда, когда выполнены два условия. а) Существует базис $\{e_{p_t} \otimes k'_{q_t} : t = 1, \cdots, nm\}$ в $X \otimes Y'$ такой, что $(e_{p_t} \otimes k'_{q_t})(T) = 1$ или -1, $i = 1, \cdots, nm$, откуда $(e_{p_t} \otimes k'_{q_t})\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} b_i \otimes \bar{b}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \cdot \alpha_{p_t i} \gamma_{q_t j} = 1$ или -1, $t = 1, \cdots, nm$. Обозначив $\lambda^t_{ij} = \alpha_{p_t i} \gamma_{q_t j}$, получим $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \lambda^t_{ij} = 1$ или -1, $t = 1, \cdots, nm$, или в матричной форме $\Lambda c = \varepsilon$, где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{nm})$ и $\varepsilon_i = 1$ или -1, $i = 1, \cdots, nm$, $c = (c_{11}, \cdots, c_{nm})$, а матрица Λ имеет вид (7). Так как матрица Λ обратима ввиду базисности ее строк, то по формулам Крамера получим выражение (9) для $\{c_{ij}\}$. По условию б) теоремы 2 $\forall e \in \operatorname{Ext} S(X)$ и $\forall k' \in \operatorname{Ext} S(Y')$ $|k'(Te)| \leq 1$, откуда

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} e_s(b_i) k'_\sigma(b_j)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \alpha_{si} \gamma_{\sigma j}\right| \leq 1, \; s = 1, \cdots, r, \; \sigma = 1, \cdots, \nu$$

что равносильно (8), в силу (9). Теорема 3 доказана.

В качестве тривиального следствия теоремы 3 отметим случай, когда $X = l_1^n$ (n-мерный аналог пространства l_1), а $Y = l_\infty^m$ (m-мерный аналог пространства l_∞). В этом случае легко получить, что крайние операторы это те и только те, чье матричное представление в канонических базисах состоит лишь из элементов, равных 1 или -1. Этот факт очевиден, если учесть, что $l_1^n \check{\otimes} l_\infty^m = l_\infty^{nm}$.

§ 3. Расстояние Банаха—Мазура

Для того, чтобы выразить расстояние Банаха - Мазура $d(X, Y) = \inf \|T\| \|T^{-1}\|$ через крайние точки шаров $S(X)$ и $S(Y)$ можно было бы, учитывая выпуклость, использовать равенство

$$\|T\| = \sup \{|y'(Tx)| : x \in S(X), y' \in S(Y')\} =$$
$$= \sup \{|k'(Te)| : e \in \operatorname{Ext} S(X), \; k' \in \operatorname{Ext} S(y')\}.$$

Однако, тогда в формуле расстояния участвовали бы одновременно крайние точки единичных шаров самих пространств и их сопряженных, что сделало бы ее малопригодной для практических целей.

Следующая теорема выражает норму элемента в полиэдральном пространстве через крайние точки единичного шара.

Теорема 4. *Пусть X—полиэдральное пространство размерности n. Каждому элементу $x \in X$ поставим в соответствие множество*

$$M(x) = \left\{\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n : \exists \{e_1, \cdots, e_n\} - \textit{базис в } X \textit{ такой, что } e_i \in \operatorname{Ext} S(X), \; i = 1, \cdots, n, \textit{ и } x = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i\right\}.$$

Тогда $\|x\| = \min \{\|\gamma\|_1 : \gamma \in M(x)\}$, *где* $\|\gamma\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i|$.

Доказательство. Для случая $x=0$ теорема верна. Пусть $x\in X\setminus\{0\}$. По предположению, для любого $\gamma\in M(x)$ существует базис $\{e_1,\cdots,e_n\}\subset \operatorname{Ext} S(X)$ пространства X такой, что $x=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i e_i$, откуда $\|x\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i|=\|\gamma\|_1$ $\forall\gamma\in M(x)$.

С другой стороны, нормированный элемент $\frac{x}{\|x\|}$ принадлежит некоторой $(n-1)$-мерной грани S_1 шара $S(X)$ и, по теореме Каратеодори (см., например, [5]), является выпуклой комбинацией $m\,(m\leqslant n)$ аффинно независимых точек $e_1,\cdots,e_m\in\operatorname{Ext} S(X)$, лежащих на S_1.

$$\frac{x}{\|x\|}=\sum_{i=1}^{m}\xi_i e_i,\ \text{где}\ \xi_i>0,\ i=1,\cdots,m,\ \sum_{i=1}^{m}\xi_i=1. \tag{10}$$

Точки $e_1,\cdots,e_m$ также и линейно независимы. Действительно, пусть $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i=0$. Обозначим через e' крайний функционал на X, соответствующий грани $S_1: e'|_{S_1}=1$. Тогда $0=e'\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i$, откуда $\alpha_1=\cdots=\alpha_m=0$, в силу аффинной независимости точек $e_1,\cdots,e_m$. Дополнив множество $\{e_1,\cdots,e_m\}$ точками $e_{m+1},\cdots,e_n\in\operatorname{Ext} S(X)$ до базиса в X, получим из (10)

$$x=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^0 e_i,\ \text{где}\ \gamma_i^0=\begin{cases}\|x\|\,\xi_i, & \text{для}\ i=1,\cdots,m,\\ 0, & \text{для}\ i=m+1,\cdots,n.\end{cases} \tag{11}$$

Из (11), (10) следует

$$\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i^0|=\sum_{i=1}^{n}\|x\|\,\xi_i=\|x\|.$$

Итак, существует вектор $\gamma^0=(\gamma_1^0,\cdots,\gamma_n^0)$ такой, что $\|x\|=\|\gamma^0\|_1$, и теорема доказана.

Она поясняет связь между многогранником и порождаемой им нормой. Так, если многогранник есть октаэдр (натянутый на элементы канонического базиса), то из теоремы 4 сразу следует, что он порождает l_1-норму.

Теорема 5. *Пусть X и Y — полиэдральные пространства размерности n,*

$$\operatorname{Ext} S(X)=\{\pm e_1,\cdots,\pm e_r\},\ \operatorname{Ext} S(Y)=\{\pm k_1,\cdots,\pm k_s\},$$

где

$$e_i=(\alpha_{ij})_{j=1}^{n},\ i=1,\cdots,r,\ k_i=(\beta_{ij})_{j=1}^{n},\ i=1,\cdots,s. \tag{12}$$

Обозначим соответствующие матрицы:

$$A=\{\alpha_{ij}\}_{i=1,\cdots,r}^{j=1,\cdots,n},\ B=\{\beta_{ij}\}_{i=1,\cdots,s}^{j=1,\cdots,n}. \tag{13}$$

Тогда для любого оператора $T: X\to Y$

$$\|T\|=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\min_{\tilde{B}}\|A_i[T]^T(\tilde{B})^{-1}\|_1, \tag{14}$$

где $[T]$ — матричное представление оператора T в канонических базисах, $\widetilde{B}$ пробегает множество обратимых $n\times n$ подматриц B, A_i обозначает i-ую вектор-строку матрицы A, $\|\cdot\|_1$ — l_1-норму вектора.

Доказательство. Функция $\|Tx\|$ выпукла на $S(x)$ и поэтому

$$\|T\| = \sup\{\|Te\| : e\in \operatorname{Ext} S(X)\} = \max_{1<i<r}\|Te_i\|. \tag{15}$$

Зафиксируем i, $1\leqslant i\leqslant r$, и вектор $\gamma=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)\in M(Te_i)$. По определению существует базис $\{k_{p_1},\cdots,k_{p_n}\}\subset \operatorname{Ext} S(Y)$ пространства Y такой, что $Te_i=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j k_{p_j}$. Отсюда, используя (12) и (13) и обозначив через $\widetilde{B}$ матрицу, составленную из строк матрицы B с номерами $p_1\cdots, p_n$, получим $Te_i=\gamma\widetilde{B}$. С другой стороны, $Te_i=A_i[T]^T$ и поэтому $\gamma=A_i[T]^T(\widetilde{B})^{-1}$. Теперь из теоремы 4 и равенства (15) следует формула (14), и т. д.

Из доказанной теоремы немедленно вытекает формула для расстояния Банаха-Мазура между полиэдральными пространствами X и Y.

Теорема 6. *В условиях теоремы 5 при аналогичных обозначениях*

$$d(X, Y)=\inf_{\Delta}\left\{\left(\max_{1<i<r}\ \min_{\widetilde{B}}\|A_i\Delta(\widetilde{B})^{-1}\|_1\right)\cdot\left(\max_{1<i<s}\ \min_{\widetilde{A}}\|B_i\Delta^{-1}(\widetilde{A})^{-1}\|_1\right)\right\}, \tag{16}$$

где Δ пробегает множество обратимых $n\times n$ матриц.

Отметим, что нахождение расстояния Банаха-Мазура вообще, поэтому и использование формулы (16) в частности, даже в простых случаях— довольно трудоемкая задача. В совместной с Р. Халди работе автора, которую предполагается опубликовать, с целью выявления общих закономерностей, разбирается случай, когда $X=l_1^2$, а Y — двумерное шестиугольное пространство, т. е. пространство, чей единичный шар $S(Y)$ есть выпуклый симметричный шестиугольник (его можно описать, с точностью до изометрии пространств, двумя числовыми параметрами). Вычисленная там с помощью (16) довольно громоздкая формула для искомого расстояния показывает, что $d(l_1^2, Y)$ пробегает весь полуинтервал $]1, 3/2]$, когда Y пробегает множество шестиугольных пространств. В частности, получается результат Асплунда (см. [6]): $d(l_1^2, Y)=3/2$, если $S(Y)=P_6$ — правильный шестиугольник. Отметим также, что в работе [7] Строшвист показал, что диаметр двумерного компакта Минковского $d(\mathfrak{M}_2)=\sup\{d(X, Y): \dim X=\dim Y=2\}$ равен $3/2$ и достигается лишь (с точностью до изометрических образов) для пары $X=l_1^2$ и Y с шаром $S(Y)=P_6$.

Ереванский государственный университета

Поступила 22. VI. 1988

Վ. Վ. ՈՍԿԱՆՅԱՆ. Պոլիէդրալ տարածություններ. ծայրային օպերատորներ և Բանախ-Մազուրի հեռավորությունը *(ամփոփում)*

X և Y վերջավոր չափանի պոլիէդրալ տարածությունների զույգի համար մատրիցային տերմիններով նկարագրվում են X-ից Y գործող ծայրային օպերատորները, ապա նաև d (X, Y) Բանախ-Մազուրի հեռավորությունը այն դեպքում, երբ S (X) և S (Y) միավոր գնդերի ծայրային կետերը գրված են բացահայտ ձևով:

V. V. VOSKANIAN. *Polyhedral spaces: extremal operators and Banach—Mazur distance* (summary)

For a pair of finite-dimensional polyhedral spaces X and Y the paper describes the extremal operators from X to Y and the Banach—Mazur distance $d(X, Y)$ when the extremal points of unit balls $S(X)$ and $S(Y)$ are written in explicit form.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Рокафеллар.* Выпуклый анализ, М., «Мир», 1973.
2. *R. Shatten.* A theory of cross-spaces, Princeton, 1950.
3. *И. И. Цейтлин.* Об экстремальных точках единичного шара некоторых операторных пространств, Мат. заметки, 20, вып. 4, 1976, 521—527.
4. *В. В. Восканян.* Об одной константе, связанной с парой конечномерных банаховых пространств, Изв. АН АрмССР, «Математика», 22, № 5, 1987, 419—426.
5. *В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин.* Оптимальное управление, М., «Наука», 1979.
6. *E. Asplund.* Comparison between plane symmetric convex bodies and parallelograms, Math. Scand., 8, 1960, 171—180.
7. *W. Stromquist.* The maximum distance between two-dimensional Banach spaces, Math. Scand., 48, 1981, 205—225.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXV, № 3, 1990 Математика

УДК 517.53

А. М. ДЖРБАШЯН

О РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННО-ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА В ПОЛУПЛОСКОСТИ И АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ АКУТОВИЧА

Введение

Статья посвящена установлению двух теорем о равномерной аппроксимации с произвольной точностью в классах мероморфных функций обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости [1], [2], [3] посредством произведений типа Бляшке [4], [5], а также установлению аналога в указанных классах хорошо известной теоремы Акутовича [6] (см. также [7], стр. 191, [8], стр. 198).

1. Прежде чем сформулировать установленные в статье теоремы, необходимо привести ряд определений и результатов, лежащих в их основе.

Классом $N_\alpha\{G^{(-)}\}$ $(-1<\alpha<+\infty)$ функций обобщенно-ограниченного вида в нижней полуплоскости $G^{(-)}=\{w:\operatorname{Im} w<0\}$ впредь будем называть множество мероморфных в $G^{(-)}$ функций, допускающих представление вида

$$F(w)=\frac{B_\alpha(w,\{a_m\})}{B_\alpha(w,\{b_n\})}\exp\left\{\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}}+iC\right\};\ w\in G^{(-)}, \tag{1}$$

где C — вещественное число, $\mu(t)$ — функция ограниченной вариации на любом конечном отрезке из $(-\infty,+\infty)$, подчиненная условию

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|d\mu(t)|}{1+|t|^{1+\alpha-p}}<+\infty\ (p\text{ — целое, } p-1<\alpha\leqslant p). \tag{2}$$

Далее, в представлении (1)

$$B_\alpha(w,\{a_m\})\equiv\prod_m b_\alpha(w,a_m),\ B_\alpha(w,\{b_n\})\equiv\prod_n b_\alpha(w,b_n)$$

— аналитические в $G^{(-)}$ функции, суть произведения типа Бляшке для полуплоскости $G^{(-)}$, составленные по нулям $\{a_m\}\subset G^{(-)}$ и полюсам $\{b_n\}\subset G^{(-)}$ функции $F(w)$. При этом, произведение $B_\alpha(w,\{b_n\})$ сходящееся ($\not\equiv 0$), ибо впредь для последовательности $\{b_n\}$ предполагается выполненным условие сходимости этого произведения

$$\sum_n|\operatorname{Im} b_n|^{1+\alpha}<+\infty. \tag{3}$$

При любых $\alpha\,(-1<\alpha<+\infty)$ и $\zeta=\xi+i\eta\in G^{(-)}$ элементарный фактор $b_\alpha(w,\zeta)$ произведения B_α — аналитическая в $G^{(-)}$ функция с единственным и простым нулем в точке ζ, представимая в виде

$$b_\alpha(w,\zeta)=\exp\{-\Omega_\alpha(w,\zeta)\}, \tag{4}$$

где

$$\Omega_\alpha(w,\zeta)=\int\limits_{-|\eta|}^{|\eta|}\frac{(|\eta|-|t|)^\alpha\,dt}{[i(w-\xi)-t]^{1+\alpha}}\equiv-\log b_\alpha(w,\zeta). \tag{5}$$

Классы функций обобщенно-ограниченного вида в $G^{(-)}$ ассоциированы с оператором дробного интегродифференцирования Вейля. На множестве допустимых функций этот оператор определяется следующим образом:

$$W^{-\alpha}U(w)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{+\infty}\sigma^{\alpha-1}U(w-i\sigma)\,d\sigma,\ 0<\alpha<+\infty,$$

$$W^0U(w)=U(w),$$

$$W^\alpha U(w)=W^{-(p-\alpha)}\left\{\frac{\partial^p}{\partial(\operatorname{Im}w)^p}U(w)\right\};\ 0<\alpha<+\infty$$

(p — целое число такое, что $p-1<\alpha\leqslant p$).

2. Основными результатами статьи являются нижеприведенные три теоремы. Первые две из них относятся к равномерной аппроксимации функций классов $N_\alpha\{G^{(-)}\}$ $(-1<\alpha<+\infty)$ и являются своеобразными аналогами результатов М. М. Джрбашяна и Н. У. Аракеляна (см. [9], стр. 524 и теоремы 5.12, 5.13) о равномерной аппроксимации функций обобщенно-ограниченного вида в круге. Третья — напоминает вышеупомянутую теорему Акутовича для аналитических и ограниченных в полуплоскости функций, однако установлена для значительно более общих классов $N_\alpha\{G^{(-)}\}$ $(-1<\alpha<+\infty)$.

Теорема I. *Класс $N_\alpha\{G^{(-)}\}$ $(-1<\alpha<+\infty)$ совпадает с множеством функций, допускающих в $G^{(-)}$ представление вида*

$$F(w)=\frac{B_\alpha(w,\{a_m\})}{B_\alpha(w,\{b_n\})}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\Gamma(2+\alpha)}{2\pi}\lim_{\eta\to-0}|\eta|^{-1-\alpha}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\log b_\alpha(w,t+i\eta)\,d\mu(t)+iC\right\}, \tag{6}$$

где предельный переход равномерен внутри $G^{(-)}$, $\{b_n\}\subset G^{(-)}$ — последовательность, подчиненная условию (3), *$\mu(t)$ — функция ограниченной вариации на любом конечном отрезке из $(-\infty,+\infty)$, подчиненная условию* (2), *а C — вещественное число.*

Теорема II. *Пусть функция $F(w)\in N_\alpha\{G^{(-)}\}$ $(-1<\alpha<+\infty)$ имеет вид*

$$F(w)=B_\alpha(w,\{a_m\})\exp\left\{-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}}\right\};\ w\in G^{(-)}, \qquad (7)$$

где $\mu(t)$ — монотонно неубывающая функция, подчиненная условию (2).

Тогда при любых натуральных $\varkappa$ и N существует треугольная таблица отличных друг от друга комплексных чисел $\{w_l^{(k)}(\varkappa, N)\}\subset G^{(-)}$ $(k=1,2,\cdots;\ l=1,2,\cdots,k)$, такая, что

1°. *Для любого $k\geqslant 1$*

$$\operatorname{Im} w_l^{(l)}(\varkappa, N)=\eta_k(\varkappa, N)\ (l=1,2,\cdots,k),$$

причем

$$\sup_{k\geqslant 1,\varkappa\geqslant 1}|k|\eta_k(\varkappa, N)|^{1+\alpha}|<\frac{\Gamma(2+\alpha)}{2\pi}\left|\bigvee_{-N}^{N}\mu+1\right|.$$

2°. *Из ассоциированных с этой таблицей конечных произведений*

$$B_\alpha(w,\{w_l^{(k)}(\varkappa, N)\}_1^k)=\prod_{l=1}^{k}b_\alpha(w,w_l^{(k)}(\varkappa, N))$$

можно извлечь последовательность $\{B_\alpha(w,\{w_l^{(k_j)}(\varkappa_j, N_j)\}_1^{k_j})\}_{j=1}^{\infty}$ — такую, что равномерно внутри $G^{(-)}$

$$F(w)=B_\alpha(w,\{a_m\})\lim_{j\to\infty}B_\alpha(w,\{w_l^{(k_j)}(\varkappa_j, N_j)\}_1^{k_j}).$$

Замечание. 1. Эта теорема является аналогом теоремы Шура [10] о том, что любую аналитическую и ограниченную в единичном круге (либо в полуплоскости) функцию можно равномерно аппроксимировать последовательностью произведений Бляшке. Однако, в случае $\alpha=0$ ее утверждение по существу отлично от указанной теоремы Шура.

Замечание 2. Факторизационную формулу (1) можно представить в виде отношения двух функций вида (7), умноженного на число с модулем, равным единице. Поэтому из теоремы II непосредственно вытекает аналогичная теорема о равномерной аппроксимации произвольных мероморфных функций класса $N_\alpha\{G^{(-)}\}$ $(-1<\alpha<+\infty)$ посредством дробей от двух конечных произведений типа Бляшке.

Теорема III. *Пусть $F(w)\in N_\alpha\{G^{(-)}\}$ $(-1<\alpha<+\infty)$ и $F(w)\not\equiv 0$. Тогда*

1°. Если

$$\lim_{v\to -0}\int_{-\infty}^{+\infty}|W^{-\alpha}\log|F(u+iv)||\frac{du}{1+u^2}=0, \qquad (8)$$

то $F(w)$ имеет вид

$$F(w)=e^{iC}\frac{B_\alpha(w,\{a_n\})}{B_\alpha(w,\{b_n\})},\ w\in G^{(-)}, \qquad (9)$$

где C — вещественное число, а B_α — сходящиеся произведения типа Бляшке с нулями $\{a_m\}\subset C^{(-)}$ и $\{b_n\}\subset G^{(-)}$, подчиненными условиям вида (3).

2°. *Обратно, если $F(w)$ имеет вид* (9), *то*

$$\lim_{v\to -0}\int_{-\infty}^{+\infty}|W^{-\alpha}\log|F(u+iv)||\,du=0. \qquad (10)$$

Замечание. Как и в случае с теоремой II, теорема III, являясь аналогом теоремы Акутовича для классов $N_\alpha\{G^{(-)}\}$, в случае $\alpha=0$ переходит в утверждение, по существу отличающееся от нее.

§ 1. Доказательство теорем I и III

1.1. Доказатлеьству теоремы I предпошлем следующую лемму.

Лемма 1.1. *При любых α $(-1<\alpha<+\infty)$ и $t+i\eta\in G^{(-)}$ справедливо представление*

$$\Omega_\alpha(w,t+i\eta)=\frac{2|\eta|^{1+\alpha}}{(1+\alpha)[i(w-t)]^{1+\alpha}}+R_\alpha(w,t+i\eta),\quad w\in G^{(-)}, \qquad (1.1)$$

где величина R_α такова, что для любого компакта $\mathbf{K}\in G^{(-)}$, любых $w\in\mathbf{K}$ и $t\in(-\infty,+\infty)$ имеет место оценка

$$|R_\alpha(w,t+i\eta)|\leqslant\frac{C_\alpha(\mathbf{K})|\eta|^{2+\alpha}}{1+|t|^{2+\alpha}};\quad |\eta|<\frac{1}{2}\min_{w\in\mathbf{K}}|\mathrm{Im}\,w|, \qquad (1.2)$$

в которой $C_\alpha(\mathbf{K})$ — постоянная, зависящая лишь от α и компакта $\mathbf{K}$.

Доказательство в силу леммы 1.2 из работы [5] сводится к установлению оценки (1.2) для функции

$$R_\alpha(w,t+i\eta)=$$

$$=\int_0^{|\eta|}\left\{\frac{1}{[i(w-t)-\sigma]^{2+\alpha}}-\frac{1}{[i(w-t)+\sigma]^{2+\alpha}}\right\}(|\eta|-\sigma)^{1+\alpha}d\sigma.$$

Это, в свою очередь, следует из легко проверяемых неравенств

$$2|i(w-t)\pm\sigma|\geqslant\begin{cases}|t|, & \text{при } |t|\geqslant 2\varkappa+\rho\\ \rho, & \text{при } |t|\leqslant 2\varkappa+\rho\end{cases}\quad (0<\sigma<|\eta|),$$

где $\varkappa=\max\limits_{w\in K}|\mathrm{Re}\,w|$, а $\rho=\min\limits_{w\in K}|\mathrm{Im}\,w|$.

Доказательство теоремы I. Покажем сначала, что если функция $F(w)\in N_\alpha\{G^{(-)}\}$ $(-1<\alpha<+\infty)$, то она допускает также представление вида (6). Для этого заметим, что в силу (5) и (1.1) при любом $\eta<0$

$$\frac{1}{[i(w-t)]^{1+\alpha}}=-\frac{1+\alpha}{2}\,\frac{\log b_\alpha(w,t+i\eta)}{|\eta|^{1+\alpha}}-\frac{1+\alpha}{2}\,\frac{R_\alpha(w,t+i\eta)}{|\eta|^{1+\alpha}}.$$

Подставим это равенство в (1) и приведем экспоненциальный множитель факторизации функции $F(w)$ к следующему виду:

$$\exp\left\{-\frac{\Gamma(2+\alpha)}{2\pi}|\eta|^{-1-\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\log b_\nu(w, t+i\eta)\,d\mu(t) - \right.$$

$$\left. -\frac{\Gamma(2+\alpha)}{2\pi}|\eta|^{-1-\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}R_\alpha(w, t+i\eta)\,d\mu(t) + iC\right\}. \tag{1.3}$$

Заметим теперь, что в силу оценки (1.2)и условия (2) для любого компакта $K\subset G^{(-)}$, равномерно по $w\in K$ выполнено соотношение

$$\lim_{\eta\to-0}|\eta|^{-1-\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}R_\alpha(w, t+i\eta)\,d\mu(t)=0 \tag{1.4}$$

и, тем самым, справедливо представление (6), где предел равномерен относительно w внутри $G^{(-)}$.

Из представления (6), ввиду (1.3) и (1.4) следует, что $F(w)\in N_\alpha\{G^{(-)}\}$.

1.2. Доказательство теоремы III. Утверждение 2° теоремы доказано в работе автора [5] (соотношение (3.11)). Для доказательства утверждения 1° отметим, что из формулы (1) (как нетрудно убедиться воспользовавшись равенством (2.6) работы [5]) следует представление

$$W^{-\alpha}\log|F(w)| = W^{-\alpha}\log\left|\frac{B_\alpha(w, \{a_m\})}{B_\alpha(w, \{b_n\})}\right| +$$

$$+\frac{|v|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{(u-t)^2+v^2};\quad w=u+iv\in G^{(-)}. \tag{1.5}$$

При этом функцию $\mu(t)$ можно представить в виде разности $\mu(t)=$ $=\mu_1(t)-\mu_2(t)$, где $\mu_{1,2}(t)$ — монотонно неубывающие функции, подчиненные условию вида (2).

Пользуясь представлением (1.5) и соотношениями (8), (10) получаем, что обозначая

$$\Phi(w)=\frac{|v|}{\pi}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{(u-t)^2+v^2}\right|,\quad w=u+iv\in G^{(-)}, \tag{1.6}$$

будем иметь

$$\lim_{v\to-0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi(u+iv)}{1+u^2}\,du=0.$$

Заметим, что при любых $x\in(-\infty, +\infty)$ и $y\in(0, +\infty)$ имеет место оценка

$$\frac{y}{\pi}\,\frac{C(x, y)}{(x-u)^2+y^2}\leqslant\frac{1}{1+u^2}\ (-\infty<u<\infty),$$

где $C(x, y)>0$ — постоянная, зависящая лишь от x и y. Поэтому

$$\lim_{v\to -0}\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi(u+iv)}{(x-u)^2+y^2}\,du=0. \qquad (1.7)$$

Введем теперь обозначения

$$\varphi_{1,2}(w)=\frac{|v|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu_{1,2}(t)}{(u-t)^2+v^2},\quad w=u+iv\in G^{(-)}, \qquad (1.8)$$

$$I_{1,2}=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi_{1,2}(u+iv)}{(x-u)^2+y^2}\,du,\quad v<0. \qquad (1.9)$$

Тогда, в силу формулы

$$\frac{y|v|}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{[(x-u)^2+y^2][(u-t)^2+v^2]}=\frac{1}{\pi}\frac{y+|v|}{(x-t)^2+(y+|v|)^2},$$

будем иметь

$$I_{1,2}=\frac{y+|v|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu_{1,2}(t)}{(x-t)^2+(y+|v|)^2}.$$

Заметим теперь, что при любом $v<0$ справедлива оценка

$$\frac{y+|v|}{\pi}\,\frac{C'(x,y)}{(x-t)^2+(y+|v|)^2}\leqslant\frac{1}{1+t^2}\,(-\infty<t<+\infty),$$

где $C'(x,y)>0$ — постоянная, зависящая лишь от $x\in(-\infty,+\infty)$ и $y\in(0,+\infty)$. Следовательно, в силу теоремы Лебега

$$\lim_{v\to -0}I_{1,2}=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu_{1,2}(t)}{(x-t)^2+y^2}. \qquad (1.10)$$

Однако, ввиду (1.6), (1.8) и (1.9)

$$\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi(u+iv)}{(x-u)^2+y^2}\,du\geqslant|I_1-I_2|,$$

что вместе с (1.7) и (1.10) приводит к равенству нулю величины

$$\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{(x-t)^2+y^2}=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu_1(t)}{(x-t)^2+y^2}-\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu_2(t)}{(x-t)^2+y^2}.$$

Отсюда, в силу произвольности $x\in(-\infty,+\infty)$ и $y\in(0,+\infty)$ следует, что $\mu(t)=\mathrm{const}$, и, тем самым, формула (1) сводится к виду (9).

§ 2. Доказательство теоремы II

2.1. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть* $\alpha\,(-1<\alpha<+\infty)$ *и* $N\geqslant 1$ — *любые, а*

$$f_0(w,\ N)=\exp\left\{-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi}\int_{-N}^{N}\frac{d\mu(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}}\right\},\quad w\in G^{(-)},$$

где $\mu(t)$ — *непрерывная, монотонно возрастающая функция на* $[-N,\ N]$.

Тогда существует треугольная таблица отличных друг от друга комплексных чисел $\{w_l^{(k)}(\mu,\ N)\}_{l=1}^{k}\subset G^{(-)}$ $(k=1,2,\cdots)$, *такая, что*

1° *Для любого* $k\geqslant 1$

$$\operatorname{Im} w_l^{(k)}(\mu,\ N)=\eta_k(\mu,\ N)\ (l=1,2,\cdots,k),\tag{2.1}$$

причем

$$|\eta_k(\mu,\ N)|^{1+\alpha}=\frac{1}{k}\ \frac{\Gamma(2+\alpha)}{2\pi}\ \mathop{V}_{-N}^{N}\mu.\tag{2.2}$$

2°. *Внутри* $G(-)$ *равномерно выполняется соотношение*

$$f_0(w,\ N)=\lim_{k\to\infty}E_\alpha(w,\ \{w_l^{(k)}(\mu,\ N)\}_1^k).\tag{2.3}$$

Доказательство. Для любого $k\geqslant 1$ произведем разбиение отрезка $[-N,\ N]$ точками $-N=t_1^{(k)}<t_2^{(k)}<\cdots<t_k^{(k)}<t_{k+1}^{(k)}=N$ таким образом, чтобы

$$\mu(t_{l+1}^{(k)})-\mu(t_l^{(k)})=\frac{1}{k}\mathop{V}_{-N}^{N}\mu\ (l=1,2,\cdots,k).$$

Будем полагать

$$\eta_k\equiv\eta_k(\mu,\ N)=-\left|\frac{\Gamma(2+\alpha)}{2\pi}\mathop{V}_{N}^{N}\mu\right|^{\frac{1}{1+\alpha}},$$

$$w_l^{(k)}(\mu,\ N)=t_l^{(k)}+i\eta_k(k=1,2,\cdots;\ l=1,2,\cdots,\ k).$$

Тогда, очевидно, утверждения 1° выполнены.

Заметим теперь, что в силу (5) и (1.1)

$$\log B_\alpha(w,\ \{w_l^{(k)}(\mu,\ N)\}_1^k)=\sum_{l=1}^{k}\log b_\alpha(w,\ w_l^{(k)}(\mu,\ N))=$$

$$=-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi}\sum_{l=1}^{k}\frac{\mu(t_{l+1}^{(k)})-\mu(t_l^{(k)})}{[i(w-t_l^{(k)})]^{1+\alpha}}-\sum_{l=1}^{k}R_\alpha(w,\ t_l^{(k)}+i\eta_k).$$

Однако, если $\mathbf{K}\subset G^{(-)}$ — произвольный компакт, то, в силу (1.2), равномерно по $w\in\mathbf{K}$ выполняется оценка

$$\left|\sum_{l=1}^{k}R_\alpha(w,\ t_l^{(k)}+i\eta_k)\right|\leqslant C_\alpha(\mathbf{K})\,k\,|\eta_k|^{2+\alpha}=o(1).$$

Далее, очевидно, что равномерно по $w\in\mathbf{K}$

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{\mu(t_{i+1}^{(k)})-\mu(t_i^{(k)})}{[i(w-t_i^{(k)})]^{1+\alpha}}=\int_{-N}^{N}\frac{d\mu(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}}$$

и, тем самым, справедливо соотношение (2.3).

2.2. Доказательство теоремы II. Пусть $\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$ — любое, и

$$f(w)\equiv\exp\left\{-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}}\right\},$$

$$f(w,\ N)=\exp\left\{-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi}\int_{-N}^{N}\frac{d\mu(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}}\right\},$$

где $\mu(t)$ — монотонно неубывающая функция, подчиненная условию (2).

Предположим, что $\{K_j\}_1^\infty$ — исчерпывающее $G^{(-)}$ семейство компактов, то есть, что

$$K_j\subseteq K_{j+1}\ (j=1,\ 2,\cdots)\ \text{и}\ \bigcup_{j=1}^{\infty}K_j=G^{(-)}.$$

Далее, для любого $j\geqslant 1$ выберем $N_j\ (N_{j+1}>N_j)$ настолько большим, чтобы при $w\in K_j$ имели

$$|f(w)-f(w,\ N_j)|<\frac{1}{3j}. \tag{2.5}$$

Введем теперь в рассмотрение последовательность непрерывных, монотонно возрастающих на $[-N,\ N]$ $(N\geqslant 1)$ функций

$$\mu_\varkappa(t)=\varkappa\int_{t}^{t+\frac{1}{\varkappa}}\varphi_\varkappa(x)\,dx+\frac{t}{2\varkappa N},\quad \varkappa=1,2,\cdots,$$

где

$$\varphi_\varkappa(t)=\begin{cases}\mu(N), & \text{при } t\geqslant N\\ \mu(t), & \text{при } -N+\frac{1}{\varkappa}<t<N\\ \mu(-N), & \text{при } -N\leqslant t\leqslant -N+\frac{1}{\varkappa}.\end{cases}$$

Как нетрудно убедиться, при любом $t\in[-N,\ N]$

$$\lim_{\varkappa\to\infty}\mu_\varkappa(t)=\mu(t)$$

и, одновременно, при любом $\varkappa\geqslant 1$

$$|\mu_\varkappa(t)|<|\mu(-N)|+\bigvee_{-N}^{N}\mu+1,\quad \bigvee_{-N}^{N}\mu_\varkappa\leqslant\bigvee_{-N}^{N}\mu+1.$$

Поэтому, в силу теоремы Хелли о предельном переходе в интеграле Стильтьеса

$$\lim_{\varkappa\to\infty} \int\limits_{-N}^{N} \frac{d\mu_\varkappa(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}} = \int\limits_{-N}^{N} \frac{d\mu(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}}, \quad w \in G^{(-)}. \tag{2.6}$$

При этом, легко проверить, что это соотношение равномерно по w внутри $G^{(-)}$.

При любых $\varkappa \geqslant 1$ и $j \geqslant 1$ положим

$$f_\varkappa(w, N_j) = \exp\left\{ -\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi} \int\limits_{-N_j}^{N_j} \frac{d\mu_\varkappa(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}} \right\}, \quad w \in G^{(-)}.$$

Тогда, в силу (2.6), можно подобрать последовательность натуральных чисел $\{\varkappa_j\}_1^\infty$ так, чтобы при любом $j \geqslant 1$

$$|f(w, N_j) - f_{\varkappa_j}(w, N_j)| < \frac{1}{3j}, \quad w \in K_j. \tag{2.7}$$

В силу леммы 2.1, при любом $j \geqslant 1$ существует треугольная таблица отличных друг от друга комплексных чисел $\{w_l^{(k)}(\varkappa_j, N_j)\}$ ($k = 1, 2, \cdots$, $l = 1, 2, \cdots, k$), подчиненная условиям (2.1) и (2.2), такая, что равномерно по w внутри $G^{(-)}$ выполнено соотношение (2.3). Следовательно, можно выделить последовательность натуральных чисел $\{k_j\}_1^\infty$ такую, что при любом $j \geqslant 1$

$$|B_\alpha(w, \{w^{(k_j)}(\varkappa_j, N_j)\}_1^{(k_j)}) - f_{\varkappa_j}(w, N_j)| < \frac{1}{3j}, \quad w \in K_j.$$

Отсюда и из неравенств (2.5), (2.7) следует утверждение теоремы.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 26. I. 1988

Ա. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Կիսահարթության մեջ ընդհանրացված սահմանափակ տեսքի ֆունկցիաների հավասարաչափ մոտարկման և Ակուտովիչի թեորեմի նմանակի մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում ապացուցված է երկու թեորեմ հավասարաչափ մոտարկման մասին կիսահարթության մեջ ընդհանրացված սահմանափակ տեսքի ֆունկցիաների դասերում Բլյաշկեյի տիպի արտադրյալների միջոցով։ Այդ թեորեմներից մեկը Շուրի հայտնի թեորեմի յուրօրինակ համանմանն է։ Ապացուցված է նաև Ակուտովիչի հայտնի թեորեմի համանմանը մերոմորֆ ֆունկցիաների նշված դասերի համար։

A. M. DJRBASHIAN (JERBASHYAN). *On uniform approximation of functions of generalized bounded type in the half-plane and the analogue of Akutowicz's theorem* (summary)

In the paper two theorems on uniform approximation by Blaschke type products are established in the classes of functions of generalized bounded type in the half-plane. One of these theorems is an original analogue of Schur's well known theorem. There is also proofed an analogue of Akutowicz's well known theorem for the pointed classes of meromorphic functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. М. Джрбашян.* Факторизация некоторых общих классов мероорфных в полуплоскости функций, ДАН СССР, 1981, 257, № 1, 21—25.

2. *А. М. Джрбашян.* Факторизация, параметрические представления и граничные свойства некоторых общих классов мероморфных в полуплоскости функций, автореферат дис. на соискание уч. степ. кандидата физ.-мат. наук, Харьков, 1983.

3. *А. М. Джрбашян.* Соотношения равновесия и факторизационные теоремы для мероморфных в полуплоскости функций, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1986, XXI, № 3, 213—279.

4. *А. М. Джрбашян.* Функции типа Бляшке для полуплоскости, ДАН СССР, 1979, 246, № 6, 1295—1298.

5. *А. М. Джрбашян.* Функции типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1983, XVIII, № 6, 410—440.

6. *E. J. Akutowicz.* A qualitative characterization of Blaschke product in a half-plane, Amer. J. Math., 1956, v. 78, 677—684.

7. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, М., 1975.

8. *P.L. Duren.* Theory of H^p Spaces, Ac. Press, New York and London. 1970.

9. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Мат. сборник, 1969, 79 (121), № 4 (8), 517—615.

10. *J. Schur.* Über Potenzreihen, die im Inneren des Einheitskreises beschräukt sind, J. reine und angew. Math., 1916, v. 147. 205—232, 1918, v. 148, 122—145.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXV, № 3, 1990 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.53

Р. Аб. АВЕТИСЯН

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ПРОСТЫХ ДРОБЕЙ

Вопрос о представлении функций рядами вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k/(\zeta_k - z)$ с определенными ограничениями на последовательность полюсов ζ_k и коэффициентов A_k изучался в ряде работ (см. [1]—[12]). Д. Вольф [1] доказал следующую теорему.

Теорема [1]. *Пусть G — ограниченная жорданова область, и пусть f аналитична в замкнутой области $\bar{G}$. Тогда f допускает представление*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{\zeta_k - z},\quad \sum_{k=1}^{\infty}|A_k|<+\infty,\ \zeta_k\in\overline{CG},\ z\in G. \tag{1}$$

В работе [8] (см. также [9]—[12]) получено обобщение теоремы Вольфа для случая единичного круга. Чтобы сформулировать его введем некоторые определения. Пусть $D=\{z: |z|<1\}$. Через E обозначим множество функций, аналитических в D и допускающих в D представление (1). Введем в E норму по формуле

$$\|f\|_E = \inf \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|, \tag{2}$$

где inf берется всем представлениям f вида (1).

Через F обозначим множество аналитических в D функций таких, что

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta,\quad g\in L^1(\partial D). \tag{3}$$

Норму в D введем по формуле

$$\|f\|_F = \inf \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}|g(\zeta)|\,|d\zeta|, \tag{4}$$

где inf берется по всем представлениям f вида (3).

В работе [8] доказана следующая теорема.

Теорема А. *Пространства E и F с нормами* (2) *и* (4) *идентичны.* С другой стороны, в работах [2]—[7] изучался вопрос не только о представимости определенных классов функций в виде (1), но и об оценке коэффициентов A_k в представлении (1). В настоящей заметке мы обобщим теорему A на случай жордановых областей со спрямляемой границей так, чтобы получить также некоторые оценки коэффициентов A_k в представлении (1). Отметим, что эти оценки будут несколько иного вида, чем в работах [2]—[7].

Введем некоторые определения. Пусть G — ограниченная жорданова область со спрямляемой границей ∂G. Положим $G_- = \overline{C}/\overline{G}$. Пусть ω — функция, непрерывная в $\overline{G}$. Через $B_\omega(G)$ обозначим множество функций f, голоморфных в G и допускающих в G представление вида

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\zeta_k - z}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|A_k|}{|\omega(\zeta_k)|} < +\infty, \quad \zeta_k \in \overline{G}, \; z \in G \tag{5}$$

(если $\omega(\zeta_k) = 0$, то считается тогда, что и $A_k = 0$ и соответствующий член в (5) опущен).

Норму в пространстве $B_\omega(G)$ введем по формуле

$$\|f\|_{B_\omega(G)} = \inf \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|A_k|}{|\omega(\zeta_k)|}, \tag{6}$$

где inf берется по всем представлениям f вида (5).

Через $F_\omega(G)$ обозначим множество голоморфных в D функций таких, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \qquad \int\limits_{\partial G} \frac{|g(\zeta)|}{|\omega(\zeta)|} |d\zeta| < +\infty. \tag{7}$$

Норму в $F_\omega(G)$ введем по формуле

$$\|f\|_{F_\omega(G)} = \inf \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial G} \frac{|g(\zeta)|}{|\omega(\zeta)|} |d\zeta|, \tag{8}$$

где inf берется по всем представлениям f вида (7).

Введем теперь подходящий класс функций ω. Для этого обозначим через $\Phi(\zeta)$ функцию, конформно и однолистно отображающую область G_- на дополнение к кругу $\overline{D}$, и пусть $\zeta = \psi(w)$ — функция, обратная к Φ. Отметим, что Φ не предполагается нормированной условием $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$. Через A_G обозначим множество функций ω, непрерывных в $\overline{G}_-$, таких, что ω допускают представление

$$\omega(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |\Phi(\zeta)|^{-n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < +\infty, \; \zeta \in G_-. \tag{9}$$

Отметим, что в частности, $\omega \in A_G$, если ω — голоморфна в G_- и $\omega' \in E(G_-)$, где E_1 — известный класс В. И. Смирнова.

Теорема 1. *Пусть G — ограниченная жорданова область со спрямляемой границей. Если $\omega \in A_G$, то пространства $B_\omega(G)$ и $F_\omega(G)$ с нормами* (6) *и* (8) *идентичны.*

Доказательство. Мы будем использовать метод обобщенных преобразований Фабера (см. [13], стр. 126). Пусть $\omega \in A_G$ и $\Phi(\zeta)$ — отображающая функция, участвующая в определении (9) функции ω. Положим

$$\varphi_z(t) = (\psi(t^{-1}) - z)^{-1} \text{ для } t \in D,\ z \in G.$$

Так как область G имеет спрямляемую жорданову границу, то согласно известной теореме о соответствии границ (см. [14], стр. 46, т. 4) функция Ψ допускает непрерывное продолжение на ∂D такое, что Ψ взаимно-однозначно отображает ∂D на ∂G. Отсюда следует, что $\varphi_z(t)$ также допускает непрерывное продолжение на ∂D такое, что $\varphi_z(t)$ имеет ограниченную вариацию на ∂D. Следовательно (см. [15], стр. 105), функция $\varphi_z(t)$ абсолютно непрерывна на ∂D и имеет абсолютно сходящийся ряд коэффициентов Тейлора. Последнее означает, что

$$\frac{1}{\psi(t) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(z)}{t^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_n(z)| < +\infty, \quad z \in G,\ t \in \overline{D},$$

где $b_n(z)$ — полиномы степени n. Отсюда, учитывая (9), получаем

$$\frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(z)}{[\Phi(\zeta)]^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |B_n(z)| < +\infty, \quad \zeta \in \overline{G}_-,\ z \in G, \tag{10}$$

где $B_n(z)$ — полиномы степени n, зависящие только от ω и Φ.

В силу абсолютной непрерывности $\varphi_z(t)$, функция $\psi(t)$ также абсолютно непрерывна на ∂D. Поэтому мы можем отобразить пространство $F_\omega(G)$ на F оператором T_ω, определенным по формуле

$$T_\omega(f)(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{t \cdot g(\psi(t))}{t - w} \frac{\psi'(t)}{\omega(\psi(t))} dt, \quad f \in F_\omega(G),\ w \in D.$$

Очевидно, функцию g в представлении (7) можно выбрать так, чтобы $\|T_\omega(f)\|_F < \|f\|_{F_\omega(G)} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Следовательно, по теореме A функция $T_\omega(f)$ допускает в D представление вида (1) такое, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \leqslant \|f\|_{F_\omega(G)} + 2\varepsilon. \tag{11}$$

Обозначим через a_n коэффициенты Тейлора функции $T_\omega(f)$. Очевидно

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{w_k^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{g(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{d\zeta}{[\Phi(\zeta)]^n},$$

где w_k—полюсы в представлении (1) функции $T_\omega(f)$. Учитывая (10) и полагая $\zeta_k = \psi(w_k)$ для $f \in F_\omega(G)$ имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{g(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{d\zeta}{[\Phi(\zeta)]^n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(z) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{w_k^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{\zeta_k - z},$$

где $B_k = A_k \cdot \omega(\zeta_k) / w_k$. Учитывая (11), имеем

$$\|f\|_{B_\omega(G)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|B_k|}{|\omega(\zeta_k)|} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < \|f\|_{F_\omega(G)} + 2\varepsilon.$$

Следовательно, если $f \in F_\omega(G)$, то $f \in B_\omega(G)$ и $\|f\|_{B_\omega(G)} \leq \|f\|_{F_\omega(G)}$. Докажем теперь обратное утверждение. Будем считать при $a = \infty$ функцию $\frac{a}{a-z} \equiv 1$. Отобразим пространство $B_\omega(f)$ на F оператором K_ω, определенным по формуле

$$K_\omega(f)(w) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k \Phi(\zeta_k)}{\omega(\zeta_k)(\Phi(\zeta_k) - w)}, \quad f \in B_\omega(G), \ w \in D.$$

Так как при $|a| > 1$, $\left\|\frac{a}{a-w}\right\|_F = 1$ и F есть банахово пространство, то можно выбрать такое представление (5) функции f, чтобы $\|K_\omega(f)\|_F \leq \leq \|f\|_{B_\omega(G)} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Следовательно, $K_\omega(f)$ допускает в D представление вида (3) такое, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} |g(t)|\,|dt| \leq \|f\|_{B_\omega(G)} + 2\varepsilon. \tag{12}$$

Обозначим через $\tilde{a}_n$ коэффициенты Тейлора функции $K_\omega(f)$

$$\tilde{a}_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\omega(\zeta_k)[\Phi(\zeta_k)]^n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{g(\Phi(\zeta))}{[\Phi(\zeta)]^{n+1}} \Phi'(\zeta)\, d\zeta.$$

Вновь учитывая (10), для $f \in B_\omega(G)$, имеем

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\zeta_k - z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\omega(\zeta_k)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(z)}{[\Phi(\zeta_k)]^n} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} B_n(z) \cdot \int_{\partial G} \frac{g(\Phi(\zeta))}{[\Phi(\zeta)]^{n+1}} \Phi'(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{g_1(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

где $g_1(\zeta) = g(\Phi(\zeta)) \cdot \Phi(\zeta) \cdot \Phi'(\zeta) \cdot \omega(\zeta)$. Учитывая (12), получаем

$$\|f\|_{F_\omega(G)} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \frac{|g_1(\zeta)|}{|\omega(\zeta)|}\, |d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} |g(t)|\,|dt| \leq \|f\|_{B_\omega(G)} + 2\varepsilon.$$

Теорема 1 доказана.

Задачу о представлении функций в виде (1) очевидно можно считать задачей о нахождении «дискретного» аналога интегральной формулы Коши. Естественным продолжением этой задачи является нахождение «дискретных» аналогов формул Шварца и Герглотца. С помощью метода Вольфа [1] может быть получена следующая теорема («дискретный» аналог формулы (Герглотца).

Теорема 2. *Голоморфная в круге D функция f такая, что* $\mathrm{Re} f(z) > 0$, $f(0) > 0$, *допускает в D представление вида*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{z_k + z}{z_k - z}, \quad c_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k < +\infty, \quad z_k \in \overline{D}, \ z \in D \tag{13}$$

тогда и только тогда, когда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, u(e^{it})\, dt, \tag{14}$$

где u — положительная полунепрерывная снизу на ∂D функция из класса $L^1(\partial D)$.

Доказательство. Если f допускает представление вида (13), то в качестве $u(e^{it})$ в (14) можно взять функцию

$$u(e^{it}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{Re}\frac{z_k + e^{it}}{z_k - e^{it}}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

которая, очевидно, положительна, полунепрерывна снизу на ∂D и из $L^1(\partial D)$. Обратно, пусть теперь f представляется в D в виде (14). Положим $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$. Так как u — полунепрерывна снизу на ∂D, то существует последовательность непрерывных функций $\{u_n(e^{it})\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $0 < u_n(e^{it}) \leqslant u_{n+1}(e^{it}) < u(e^{it})$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(e^{it}) = u(e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$. Обозначим через $u_n(z)$ решение задачи Дирихле для функций $u_n(e^{it})$. Возьмем последовательность $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$. Существует n_1 такое, что $u(z) - u_{n_1}(z) > 0$ при $z \in D$ и $u(z) - u_{n_1}(z) < \varepsilon_1$ при $|z| \leqslant \frac{1}{2}\cdot$ Так как $u_{n_1}(z) > 0$, то найдется $\delta > 0$ такое, что $2\delta < u_{n_1}(z)$ при $z \in \overline{D}$ и $4\delta < \varepsilon_1$. Далее, найдется $r_1 > 0$ такое, что $|u_{n_1}(z) - u_{n_1}(r_1 z)| < \delta$ при $z \in \overline{D}$. Отсюда получаем $\delta < u_{n_1}(z) - (u_{n_1}(r_1 z) - 2\delta) < 3\delta$ при $z \in \overline{D}$. Функция $u_{n_1}(r_1 z) - 2\delta$ гармонична и положительна в круге D_{1/r_1}. Поэтому из формулы Пуассона получаем, что функцию $u_{n_1}(z)$ можно приблизить в $\overline{D}$ следующим образом:

$$0 < u_{n_1}(z) - \sum_{k=1}^{m_1} c_k^1 \operatorname{Re}\frac{z_k^1 + z}{z_k^1 - z} < 4\delta \quad \text{при} \quad z \in \overline{D},$$

где $c_k^1 > 0$, $|z_k^1| > 1$. Положим

$$v_1(z) = u(z) - \sum_{k=1}^{m_1} c_k^1 \operatorname{Re}\frac{z_k^1 + z}{z_k^1 - z} \quad \text{при} \quad z \in D.$$

Из предыдущих неравенств получаем, что $v_1(z) > 0$ при $z \in D$ и $v_1(z) < 2\varepsilon_1$ при $|z| \leqslant \frac{1}{2}\cdot$ Заметим теперь, что граничные значения функции $v_1(z)$ вновь образуют положительную и полунепрерывную снизу функцию $v_1(e^{it})$ на ∂D. Следовательно, предыдущие рассуждения можно повторить для функции $v_1(e^{it})$ и числа $\varepsilon_2 > 0$. Повторяя таким образом эти рассуждения n раз можно получить, что

$$0 < u(z) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} c_k^j \operatorname{Re}\frac{z_k^j + z}{z_k^j - z} < 2\varepsilon_n \text{ при } |z| \leqslant \frac{1}{2},$$

где $c_k^j > 0$, $|z_k^j| > 1$. Устремляя здесь $n \to \infty$, получаем нужное нам утверждение. Теорема 2 доказана.

Замечание. Из теоремы 2 нетрудно получить также «дискретный» аналог формулы Шварца. Отметим также, что с помощью теоремы 2 можно получить еще одно доказательство теоремы А из работы [8].

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 3. I. 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Wolff*. Sur les series $\sum_{k=1}^{\infty} A_k/(z_k - z)$, C. r. Acad. Sci., 173, 1921, 1327–1328.
2. *A. Denjoy*. Sur les series de fractions rationalles, Bull. soc. mat. France, 52, 1924, 418—434.
3. *А. А. Гончар*. О квазианалитическом продолжении аналитических функций через жорданову дугу, ДАН СССР, 166, № 5, 1966, 1028—1031.
4. *Т. А. Леонтьева*. Представление функций, аналитических в замкнутой области, рядами рациональных функций, Мат. заметки, 4, № 3, 1968, 191—200.
5. *Т. А. Леонтьева*. О представлении функций в единичном круге рядами простых дробей, Мат. сб., 84 (126), № 2, 1971, 313—326.
6. *Р. Аб. Аветисян*. О представлении аналитических функций рядами простых дробей в замкнутом круге, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XVI, № 1, 1981, 31—43.
7. *Ю. Ф. Коробейник*. К вопросу о разложении аналитических функций в ряды по рациональным функциям, Мат. заметки, 31, № 5, 1982, 723—737.
8. *L. Brown, A. Shields, K. Zeller*. On absolutely convergent exponential sums, Trans. Amer. Math. Soc., 1960, 96, № 1, 162—183.
9. *L. Rubel, A. Shields*. The space of bounded analytic functions on a region, Ann. Inst. Fourier, 16, № 1, 1966, 235—277.
10. *K. Hoffman, H. Rossi*. Extensions of positive weak *-continuous functions, Duke Math. J., 34, № 3, 1967, 453—466.
11. *В. П. Хавин*. Пространства H^∞ и L^1/H^1_0. Записки научн. семин. ЛОМИ, т. 39, 1974, 120—148.
12. *Н. К. Никольский*. Современное состояние проблемы спектрального анализа-синтеза. Сб. Теория операторов в функциональных пространствах, «Наука», 1977, 240—282.
13. *П. К. Суетин*. Ряды по многочленам Фабера, «Наука», 1984.
14. *Г. М. Голузин*. Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», 1966.
15. *К. Гофман*. Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, 1965.

УДК 517.5

О наилучшем приближении классов функций с ограниченной первой производной кусочно-постоянными в одномерном и двумерном случаях. Авакян А. М. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 3, 215—235.

В статье получены точные оценки погрешности приближения соболевских классов кусочно-постоянными в произвольном пространстве L_q. Некоторые оценки обобщены для функций двух переменных. Библиографий 6.

УДК 517.5,517.9

Кратная интерполяция в весовых классах Харди и регуляризация расходящихся интегралов. Дыбин В. Б. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 3, 236—260.

Работа содержит обобщение некоторых результатов М. М. Джрбашяна, относящихся к кратной интерполяции в полуплоскости (Р. Ж. Мат., 1979, 3690) на пространства Харди с A_p весом $1<p<\infty$. Доказывается интерполяционная теорема в H_2 в случае, когда интерполяция реализуется на действительном множестве Карлесона. Этот результат используется для регуляризации интегралов, расходящихся на счетных множествах. Библиографий 30.

УДК 517.444

Интегральные неравенства в весовых рефлексивных пространствах Орлича для сопряженной функции. Казарян С. С. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 3, 261—273.

В настоящей статье найдены необходимые и достаточные условия на весовые функции, чтобы для сопряженной функции $\tilde{f}(x)$ имели место, следующие интегральные неравенства:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\tilde{f}(x))\, w(x)\, dx \leqslant C_\Phi \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(f(x))\, w(x)\, dx;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(w(x)\, \tilde{f}(x))\, dx \leqslant C'_\Phi \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(w(x)\, f(x))\, dx.$$

Библиографий 11.

УДК 517.53

Аппроксимация гармоническими функциями на замкнутых подмножествах плоских областей. Нерсесян А. А. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 3, 274—283.

Описаны некомпактные замкнутые подмножества плоской области, на которых равномерно аппроксимируемы гармоническими в области функциями функции, непрерывные на подмножестве, гармонические внутри и ограниченные на границе подмножества. Доказывается, что для этих подмножеств существует скорость такая, что функции, непрерывные на подмножестве, гармонические внутри и на его границе возрастающие не быстрее данной скорости (при стремлении точки к границе области), также аппроксимируемы. В терминах гармонической меры границы этих множеств указан интегральный критерий, характеризующий класс аппроксимируемых функций. Библиографий 11.

УДК 517.98

Полиэдральные пространства: крайние операторы и расстояние Банаха—Мазура. Восканян В. В. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 3, 284—292.

Для пары конечномерных полиэдральных пространств X и Y описываются в матричных терминах крайние операторы из X в Y, а также расстояние Банаха—Мазура $d(X, Y)$ в случае, когда крайние точки единичных шаров $S(X)$ и $S(Y)$ явно выписаны. Библиографий 7.

УДК 517.53

О равномерной аппроксимации функций обобщенно-ограниченного вида и полуплоскости и аналоге теоремы Акутовича. Джрбашян А. М. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 3, 293—302.

В статье установлены две теоремы о равномерной аппроксимации с произвольной точностью в классах мероморфных функций обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости посредством произведений типа Бляшке. Одна из этих теорем является своеобразным аналогом известной теоремы Шура. Установлен также аналог хорошо известной теоремы Акутовича для указанных классов мероморфных функций. Библиографий 10.

УДК 517.53

О представлении аналитических функций рядами простых дробей. Аветисян Р. Аб. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 3, 303—308.

В настоящей статье рассматривается вопрос о представлении аналитических функций рядами простых дробей в областях G со спрямляемой жордановой границей. Показывается, что если функция $f(z)$ есть интеграл Коши функции g интегрируемой по определенному весу ω на ∂G, то f можно представить G в виде ряда $\sum_{1}^{\infty} A_k/(\zeta_k - z)$ и оценить коэффициенты A_k. Библиографий 15.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՀԱՄԱՌՈՏ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

СОДЕРЖАНИЕ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

CONTENTS

SHORT COMMUNICATIONS