

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.

Выходит 6 раз в год

на русском и английском языках.

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Դիսավոր խմբագիր Մ. Մ. ԶՐԱՍԵՅԱՆ

Ն. Շ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Գ. ԶԱՍԻԱՎՈՒԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ
Ռ. Վ. ՀԱՄԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԻՐՍԵՍՅԱՆ
Ի. Լ. ՇԱՀՐԱՂՅԱՆ
Գլխավոր խմբագիր տեղակալ

Պատասխանատու ֆարտուղար Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հստակ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով՝ լուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինգլիզները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ լրացիլ փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չգրադվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնաթիվներ։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղդասյանի պող., 24 ք. Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. В. АМБАРЦУМЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. А. ШАХБАГЯН
зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке) а кратких сообщений — не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. V. AMBARTZUMIAN
N. U. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN

A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKI

executive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings zvestia of the Academy of Sciences of the Armenien S.S.R., series "Matomatika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

УДК 517.53

А. А. ВАГАРШАКЯН

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ Н. ВИНЕРА И Р. ПЭЛИ

Введение

В настоящей работе обобщается следующая теорема Н. Винера и Р. Пэли [1].

Теорема 1. Класс целых функций экспоненциального типа $\leq a$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 dx < \infty,$$

совпадает с множеством целых функций, допускающих представление

$$F(z) = \int_{-a}^a e^{izt} f(t) dt,$$

где $f(t) \in L_2(-a, a)$.

Эта теорема послужила основой для многочисленных обобщений.

В исследованиях М. М. Джрбашяна, подытоженных в его монографии [2], была построена теория гармонического анализа в комплексной области. На ее основе им были установлены теоремы о параметрических представлениях широких классов целых функций произвольного конечного порядка $\rho \geq \frac{1}{2}$ и нормального типа.

Приведем частный случай одной теоремы М. М. Джрбашяна, в котором как специальный случай содержится теорема Н. Винера и Р. Пэли.

Теорема 2. Класс целых функций экспоненциального типа $\leq a$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|^2 |\tau|^\omega d\tau < \infty,$$

где $-1 < \omega < 1$, совпадает с множеством функций, допускающих представление

$$f(z) = \int_0^a E_1\left(iz\tau, 1 + \frac{\omega}{2}\right) \tau^{\omega/2} \varphi_1(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^a E_1 \left(-ix\tau, 1 + \frac{\omega}{2} \right) \tau^{\omega/2} \varphi_2(\tau) d\tau,$$

где $\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau) \in L_2(0, a)$.

Здесь

$$E_1(z, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n + \mu)}.$$

С любезного разрешения В. М. Мартиросяна отметим, что, как он недавно показал, теория гармонического анализа М. М. Джрбашяна позволяет получить результаты, содержащие в себе ранее известные обобщения теоремы 1, предложенные С. Бохнером, Н. Ахизером, В. Гуარიном для некоторых весовых пространств, в том числе для пространств целых функций экспоненциального типа $\leq a$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 (1 + |x|)^{-2n+\omega} dx < \infty,$$

где $n \geq 0$ — целое число, $-1 < \omega < 1$. Среди сообщений теоремы Винера—Пэли следует отметить результаты Л. Шварца [8] и Р. Боаса [9].

В настоящей работе предлагается новое обобщение теоремы Винера—Пэли. Получены приложения этих результатов в вопросах полноты системы экспоненциальных функций.

1. Введем некоторые обозначения. Пусть $B_2^s(-a, a)$, $0 < s < \infty$ — пространство Бесова, состоящее из тех функции $f(x)$, $-a < x < a$, для которых сходится интеграл

$$\|f\|_{B_2^s(-a, a)}^2 = \sum_{n=0}^{\lfloor s \rfloor} \int_{-a}^a |f^{(n)}(x)|^2 dx + \int_{-a}^a \int_{-a}^a \{s\} \frac{|f^{(\lfloor s \rfloor)}(x) - f^{(\lfloor s \rfloor)}(y)|^2}{|x - y|^{1+2\{s\}}} dx dy,$$

где $\lfloor s \rfloor$ — целая, а $\{s\}$ — дробная часть числа s .

Обозначим через D пространство бесконечно дифференцируемых функций с финитным носителем с общепринятой топологией. Пусть D^* — пространство, сопряженное к D .

Пусть s — вещественное число. Следуя [4], обозначим через $H_{(s)}$ пространство всех тех $u \in D^*$, для которых преобразование Фурье $\hat{u}(t)$ является обычной функцией, удовлетворяющей условию

$$\|u\|_{H_{(s)}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(t)|^2 (1 + t^2)^s dt < \infty. \quad (1)$$

Заметим, что при $0 < s < \infty$ каждая обобщенная функция $u \in H_{(s)}$ порождается обычной функцией из $L_2(-\infty, \infty)$. Хорошо известно, см. [4], что при $0 < s < \infty$ следующие две величины эквивалентны

$$\|u\|_{H_{(s)}} \asymp \|u\|_{B_{2,2}^s(-\infty, \infty)}. \quad (2)$$

Некоторые частные случаи приведенной ниже теоремы 3, ранее были опубликованы в работе автора [5].

Теорема 3. Пусть $0 \leq \sigma < \infty$ и $0 < a < \infty$. Пространство целых функций $F(z)$ экспоненциального типа $\leq a$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 (1+x^2)^{\sigma} dx < \infty \quad (3)$$

совпадает с классом функций, допускающих представление

$$F(z) = \int_{-a}^a e^{izt} f(t) dt, \quad (4)$$

где: 1. если $0 \leq \sigma < \frac{1}{2}$, то $f(t) \in B_2^{\sigma}(-a, a)$;

2. если $\frac{1}{2} < \sigma$ и $\sigma - \frac{1}{2}$ — не является целым числом, то $f(t) \in B_2^{\sigma}(-a, a)$ и

$$f^{(k)}(-a+0) = f^{(k)}(a-0) = 0, \quad 0 \leq k < \sigma - \frac{1}{2}; \quad (5)$$

3. если $\frac{1}{2} \leq \sigma$ и $\sigma - \frac{1}{2}$ — целое число, то $f(t) \in B_2^{\sigma}(-a, a)$, сходится интеграл

$$\int_{-a}^a \frac{|f^{(\sigma-\frac{1}{2})}(x)|^2}{a^2 - x^2} dx < \infty \quad (6)$$

и при $\frac{1}{2} < \sigma$ выполнены условия (5).

Доказательство. Пусть целая функция $F(z)$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда она допускает представление (4), где $f(t) \in L_2(-a, a)$ (см. теорему 1). Более того из (2) и (3) следует, что $f(t)$, продолженная нулем вне интервала $(-a, a)$, принадлежит пространству $B_2^{\sigma}(-\infty, \infty)$. Поскольку сужение на $(-a, a)$ любой функции из $B_2^{\sigma}(-\infty, \infty)$ принадлежит $B_2^{\sigma}(-a, a)$, то $f(t) \in B_2^{\sigma}(-a, a)$ при всех $0 \leq \sigma < \infty$. Далее, в силу включения

$$B_2^{\sigma}(-\infty, +\infty) \subset C^{(k)}(-\infty, +\infty),$$

где $0 \leq k < \sigma - \frac{1}{2}$, при $\frac{1}{2} < \sigma$ выполнены условия (5). Наконец заметим, что

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_2^\sigma(-a, a)}^2 &= \sum_{k=0}^{[\sigma]} \int_{-a}^a |f^{(k)}(x)|^2 dx + \int_{-a}^a \int_{-a}^a |\sigma| \frac{|f^{([\sigma])}(x) - f^{([\sigma])}(y)|^2}{|x-y|^{1+2\{\sigma\}}} dx dy + \\ &+ \int_{-a}^a |\sigma| \frac{|f^{([\sigma])}(x)|^2}{(a^2-x^2)^{2\{\sigma\}}} dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Поэтому выполняется условие (6), когда $\sigma = \frac{1}{2}$ — целое число, так как $[\sigma] = \sigma - \frac{1}{2}$ и $2\{\sigma\} = 1$.

Обратно, предположим, что $f(t)$ удовлетворяет перечисленным условиям. Ясно, что формулой (4) определяется целая функция экспоненциального типа $\leq a$. Докажем, что для $F(z)$ выполнено (3).

Так как $f(t) \in B_2^\sigma(-a, a)$, то при $\sigma = \frac{1}{2}$ из (6) и (7) следует, что $f(t)$, продолженная нулем вне $(-a, a)$, принадлежит $B_2^\sigma(-\infty, \infty)$. Отсюда, на основании (2), получаем (3).

Теперь рассмотрим случай $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. В этом случае $f(t)$ — непрерывная функция и $f(-a) = f(a) = 0$. Введем четную функцию

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x-a), & 0 < x < 2a, \\ f(-x-a), & -2a < x < 0. \end{cases}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} &\int_{-2a}^{2a} \int_{-2a}^{2a} \frac{|f_0(x) - f_0(y)|^2}{|x-y|^{1+2\sigma}} dx dy = \\ &= \left(\int_{-2a}^0 \int_{-2a}^0 + \int_0^{2a} \int_{-2a}^0 + \int_{-2a}^0 \int_0^{2a} + \int_0^{2a} \int_0^{2a} \right) \frac{|f_0(x) - f_0(y)|^2}{|x-y|^{1+2\sigma}} dx dy = \\ &= 2 \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^{1+2\sigma}} dx dy + 2 \int_0^{2a} \int_0^{2a} \frac{|f_0(x) - f_0(y)|^2}{|x+y|^{1+2\sigma}} dx dy \leq \\ &\leq 4 \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^{1+2\sigma}} dx dy < \infty, \end{aligned}$$

то $f_0(x) \in B_2^\sigma(-2a, 2a)$. Далее, пусть $f_1(x) = f_0(x) \Psi(x)$, где $\Psi(x)$ — четная функция из D , в окрестности нуля $\Psi(x) \equiv 1$ и $\text{supp } \Psi \subseteq [-b, b]$, где $0 < b < \min\{2a, \pi\}$. Поскольку $f_1(x) \in B_2^\sigma(-\pi, \pi)$, $\text{supp } f_1 \subset (-\pi, \pi)$ и $f_1(x)$ — четная функция, то

$$f_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}, \quad -\pi < x < \pi,$$

где $a_n = a_{-n}$, $n = 0, 1, \dots$. Ясно, что можно $f_1(x)$ считать периодической с периодом 2π , продолженной на всю вещественную ось, поэтому

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f_1(x) - f_1(y)|^2}{|x - y|^{1+2\sigma}} dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f_1(x) - f_1(x+t)|^2}{|t|^{1+2\sigma}} dx dt$$

и в силу равенства Парсеваля имеем

$$\begin{aligned} I &\geq \int_0^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f_1(x) - f_1(x+t)|^2}{t^{1+2\sigma}} dx \right) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{t^{1+2\sigma}} dt \geq \\ &\geq C \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 (1 + n^2)^{\sigma}. \end{aligned}$$

Значит

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 |n|^{2\sigma} < \infty.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 \frac{|f(x)|^2}{(a^2 - x^2)^{2\sigma}} dx &< A + B \int_0^1 \frac{|f_1(x)|^2}{x^{2\sigma}} dx < A + B \int_0^1 \frac{|f_1(x) - f_1(0)|^2}{x^{2\sigma}} dx = \\ &= A + B_1 \int_0^1 x^{-2\sigma} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 - \cos nx) \right|^2 dx < \\ &< A + B_1 \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} |a_n| n^2 x^{2-\sigma} + x^{-\sigma} \sum_{n=\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}^{\infty} |a_n| \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Введем функцию $C(x) = |a_{[x]}|$, $x \geq 0$. В силу неравенства Харди, см. [6], имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{4-2\sigma} \left(\int_1^{1/x} C(t) t^2 dt \right)^2 dx &\leq \int_1^{\infty} \left(\int_0^y C(t) t^2 dt \right)^2 y^{2\sigma-6} dy \leq \\ &\leq M \int_0^{\infty} C^2(y) y^{2\sigma} dy. \end{aligned}$$

Учитывая, что $2\sigma - 1 > 0$ и воспользовавшись неравенством Харди имеем

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x^2} \int_{1/x}^{\infty} C_1(t) dt \right)^2 dx = \int_1^{\infty} \left(\int_y^{\infty} C(t) dt \right)^2 y^{2\sigma-2} dy \leq M \int_0^{\infty} C^2(y) y^{2\sigma} dy.$$

Таким образом, мы получаем

$$\int_{-a}^0 \frac{|f(x)|^2}{(a^2 - x^2)^{2\sigma}} dx < \infty.$$

Аналитичным образом доказывается сходимость интеграла

$$\int_0^a \frac{|f(x)|^2}{(a^2 - x^2)^{2\sigma}} dx < \infty.$$

Следовательно, в силу (7) $f(t)$, продолженная нулём вне $(-a, a)$, принадлежит $B_2^{\sigma}(-\infty, +\infty)$. Откуда, на основании (2), $F(z)$ удовлетворяет условию (3).

Теперь рассмотрим случай $0 < \sigma < \frac{1}{2}$. В этом случае мы опять строим функцию $f_1(x)$ и продолжаем её нулем вне $[-\pi, \pi]$. Полученная функция принадлежит $B_2^{\sigma}(-\infty, +\infty)$ и её преобразование Фурье $\widehat{f}_1(x)$, в силу (2), принадлежит $H_{(\sigma)}$. Так как $(1+x^2)^{\sigma}$, при $0 < \sigma < \frac{1}{2}$ является весом Макенхоупта, то преобразование Гильберта $(S\widehat{f}_1)(x)$ функции $\widehat{f}_1(x)$ опять принадлежит $H_{(\sigma)}$. Однако обратное преобразование Фурье функции $(S\widehat{f}_1)(x)$ совпадает с нечётным продолжением $f_1(x)$, $x > 0$ на отрицательную полуось и в силу (2) принадлежит $B_2^{\sigma}(-\infty, +\infty)$. Значит $f_1(x)$, $x > 0$, продолженная нулём на отрицательную полуось, также принадлежит $B_2^{\sigma}(-\infty, +\infty)$, так как чётное продолжение указанной функции также лежит в $B_2^{\sigma}(-\infty, +\infty)$.

Так как для некоторого $0 < \delta < \pi$, $f_1(x) = f(x-a)$, то в силу (7) сходится интеграл

$$\int_{-a}^{-a+\delta} \frac{|f(x)|^2}{(a^2 - x^2)^{\sigma}} dx < \infty.$$

Аналогичными рассуждениями можно доказать сходимость интеграла

$$\int_{a-\delta}^a \frac{|f(x)|^2}{(a^2 - x^2)^{\sigma}} dx < \infty.$$

Отсюда вновь, в силу (7) и (2), получаем (3).

Наконец, пусть $1 \leq \sigma < 2$. В этом случае, произведя в (4) интегрирование по частям, с учетом (5) получаем

$$F(z) = \frac{i}{z} F_1(z) = \frac{i}{z} \int_{-a}^a e^{izt} f'(t) dt.$$

Легко заметить, что $f'(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3 с заменой σ на $\sigma-1$. Следовательно, так как $0 \leq \sigma-1 < 1$, то в силу вышедоказанного

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_1(x)|^2 (1+x^2)^{\sigma-1} dx < \infty.$$

Поэтому выполняется условие (3).

Аналогично можно убедиться в справедливости (3) при $2 \leq \sigma < 3$, $3 \leq \sigma < 4$ и т. д.

Лемма. Если $f(t) \in B_2^{1/2}(-\infty, +\infty)$, то в каждой точке x для функции $f(t)$ выполняется условие непрерывности в среднем:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} f(t) dt - \frac{1}{\delta} \int_{x-\delta}^x f(t) dt \right) = 0. \quad (8)$$

Доказательство. Не теряя общности можно предположить, что $x = 0$. Умножая, при необходимости, $f(t)$ на гладкую функцию с носителем в $(-\pi, \pi)$, можно получить функцию $f_0(x)$, которая в окрестности нуля равна $f(x)$, $\text{supp } f_0 \subset (-\pi, \pi)$ и $f_0(x) \in B_2^{1/2}(-\infty, \infty)$. Функцию $f_0(x)$, $-\pi < x < \pi$ представим в виде

$$f_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx},$$

причем $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 |n| < \infty$. Положим

$$I(\delta) = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta f_0(t) dt - \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^0 f_0(t) dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |I(\delta)| &\leq \left| \frac{1}{\delta} \left(\int_0^\delta - \int_{-\delta}^0 \right) \left(\sum_{|n| < m} a_n e^{inx} \right) dx \right| + \\ &+ \left| \sum_{|n| > m} \frac{a_n}{\delta} \left(\int_0^\delta - \int_{-\delta}^0 \right) e^{inx} dx \right| \leq \left| \frac{1}{\delta} \left(\int_0^\delta - \int_{-\delta}^0 \right) \left(\sum_{|n| < m} a_n e^{inx} \right) dx \right| + \\ &+ 4 \sum_{|n| > m} \frac{|a_n|}{|n| \delta} \sin^2 \frac{n\delta}{2}. \end{aligned}$$

Значит

$$\begin{aligned} |I(\delta)| &\leq 4 \left(\sum_{|n| > m} |a_n|^2 |n| \right)^{1/2} \left(\sum_{|n| > m} \delta^{-2} |n|^{-3} \sin^4 \frac{n\delta}{2} \right)^{1/2} + o(\delta) \leq \\ &\leq 4 \left(\sum_{|n| > m} |a_n|^2 |n| \right)^{1/2} \left(2 \sum_{n=1}^{\left[\frac{1}{\delta} \right]} \frac{n \delta^2}{16} + 2 \sum_{n=\left[\frac{1}{\delta} \right]}^{\infty} \frac{1}{n^3 \delta^2} \right)^{1/2} + o(\delta) \leq \\ &\leq M \left(\sum_{|n| > m} |a_n|^2 |n| \right)^{1/2} + o(\delta), \end{aligned}$$

где M не зависит от δ и m . Отсюда следует, что $I(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Замечание. При $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ в теореме 3 на функцию $f(x)$ были наложены условия $f(-a+0) = f(a-0) = 0$, которые обусловлены

непрерывностью функции из $B_2^{\sigma}(-\infty, \infty)$. В случае, когда $\sigma = \frac{1}{2}$, согласно (8), функции из $B_2^{1/2}(-\infty, \infty)$ обладают свойством непрерывности в среднем, поэтому на концах интервала $[-a, a]$ в теореме 3 $f(t)$ должна в среднем стремиться к нулю. Но видимо это не может заменить условия (6) при $\sigma = \frac{1}{2}$.

Теорема 4. Пусть $\sigma < 0$. Пространство целых функции $F(z)$ экспоненциального типа $\leq a$, удовлетворяющих условию

$$\int |F(x)|^2 (1+x^2)^{\sigma} dx < \infty,$$

совпадает с классом функций, допускающих представление

$$F(z) = \varphi(e^{iz}),$$

где $\varphi(\cdot)$ — распределение из пространства $(B_2^{-\sigma}(-a, a))^*$.

Доказательство. Пусть $F(z)$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда преобразование Фурье функции $F(x)$, $-\infty < x < \infty$, принадлежит пространству $(B_2^{-\sigma}(-\infty, \infty))^*$ и её носитель содержится в интервале $[-a, a]$. Докажем, что существует распределение $\varphi \in (B_2^{-\sigma}(-a, a))^*$, которое на функциях вида $f(x) \gamma_{[-a, a]}(t)$, где $f(t) \in D$, совпадает с $\hat{F}(\cdot)$.

Обозначим через $P(t)$ многочлен порядка $2 \left\lceil -\sigma - \frac{1}{2} \right\rceil + 2$ такой, что

$$F^{(k)}(-a) = f^{(k)}(-a), \quad F^{(k)}(a) = f^{(k)}(a),$$

при $0 \leq k < -\sigma - \frac{1}{2}$. Введем функцию

$$f^*(t) = \begin{cases} f(-2a-t) - P(-2a-t), & -2a < t < -a, \\ f(t) - P(t), & -a < t < a, \\ f(2a-t) - P(2a-t), & a < t < 2a. \end{cases}$$

Пусть $\Phi(t)$ — некоторая функция из $C_0^{\sigma}(-\infty, \infty)$ с носителем в интервале $(-2a, 2a)$ и такая, что в некоторой окрестности интервала $[-a, a]$ равна единице.

Наконец, введем оператор

$$S: B_2^{-\sigma}(-a, a) \rightarrow B_2^{-\sigma}(-\infty, \infty)$$

следующим образом:

$$(Sf)(t) = \Phi(t) (f^*(t) + P(t)).$$

Определим распределение $\varphi(\cdot)$ следующей формулой:

$$\varphi(f) = \hat{F}(Sf),$$

где $f \in B_2^{-\sigma}(-a, a)$. Легко проверить, что $\varphi(\cdot) \in (B_2^{-\sigma}(-a, a))^*$ и удовлетворяет нужным нам условиям.

Теперь пусть $\varphi(\cdot) \in (B_2^{-\sigma}(-a, a))^*$. Так как сужение любой функции $f(t) \in B_2^{-\sigma}(-\infty, \infty)$ на интервал $[-a, a]$ является сжимающим оператором из $B_2^{-\sigma}(-\infty, \infty)$ в $B_2^{-\sigma}(-a, a)$, то $\varphi(\cdot)$ можно рассматривать как элемент из $(B_2^{-\sigma}(-\infty, \infty))^*$. Теорема доказана.

2°. В этом пункте рассматриваются вопросы полноты системы из экспоненциальных функций в пространстве $B_2^{-\sigma}(-a, a)$, $-\frac{1}{2} < \sigma < \infty$.

Пусть λ_n , $n = 1, 2, \dots$ — последовательность комплексных чисел, среди которых некоторые могут равняться друг другу. Следуя М. М. Джрбашяну, обозначим через s_k количество чисел, равных λ_k в семействе $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Выражение " $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ — нули целой функции $\varphi(\lambda)$ " означает, что в последовательности $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ каждый корень функции $\varphi(\lambda)$ встречается ровно столько раз, какова его кратность.

Аналог приведенной ниже теоремы для пространств $L_2[-a, a]$ хорошо известен, см. [7].

Теорема 5. Пусть $\varphi(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $h_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) + h_\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) \geq 2a$, где $h_\varphi(\theta)$ — индикатор функции $\varphi(\lambda)$.

2. сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log^+ |\varphi(x)| \frac{dx}{1+x^2} < \infty,$$

3. расходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 (1+x^2)^{-\sigma} dx = \infty,$$

где $-\frac{1}{2} < \sigma < \infty$.

Тогда система $\{x^{s_k-1} e^{i\lambda_k x}\}_{k=1}^\infty$, где $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — нули целой функции $\varphi(\lambda)$, полна в пространстве $B_2^{-\sigma}(-a, a)$.

Доказательство. Предположим, что теорема не верна. Это означает, что существует нетривиальный функционал $\Psi \in (B_2^{-\sigma}(-a, a))^*$ такой, что

$$\Psi(x^{s_n-1} e^{i\lambda_n x}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Введем следующие функции:

$$f(\lambda) = \Psi(e^{i\lambda x}) \quad \text{и} \quad g(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)}.$$

В силу теорем 3 и 4 сходится интеграл

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 (1+x^2)^{-1} dx < \infty.$$

Следовательно, $(1+x^2)^{-1} \log^+ |f(x)| \in L_1(-\infty, \infty)$.

Далее, из условий теоремы следует, что для некоторого $C > 0$ функция $\varphi(\lambda) e^{iC}$ является аналитической в верхней полуплоскости и там принадлежит пространству Неванлинны. В силу первой основной теоремы Неванлинны $(1+x^2)^{-1} \log^+ |\varphi(x)| \in L_1(-\infty, \infty)$. Следовательно

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \log^+ |g(x)| \frac{dx}{1+x^2} &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \log^+ |f(x)| \frac{dx}{1+x^2} + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \log^+ |\varphi(x)| \frac{dx}{1+x^2} < \infty. \end{aligned} \quad (9)$$

В силу теоремы М. Картрайт, см. [7], индикатор функции $g(\lambda)$ имеет вид

$$h_g(\theta) = k |\sin \theta|.$$

Так как $g(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ — целые функции вполне регулярного роста, то в силу условия 1 теоремы, с учетом того, что $f(\lambda)$ — экспоненциального типа a , следует, что $k = 0$. Следовательно, $g(\lambda)$ — целая функция нулевой степени. Из сходимости интеграла (9), в силу принципа Фрагмена-Линделёфа, вытекает, что $g(\lambda) \equiv \text{const}$. Тогда имеем

$$f(i) = C \varphi(i).$$

Если $c \neq 0$, то приходим к противоречию с условием 3 теоремы.

Для формулировки следующей теоремы нам придется ввести некоторые обозначения.

Пусть задана некоторая последовательность положительных чисел M_n , $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющих условиям:

1. $M_0 = 1$, $M_n \leq M_{n+1}$, $n = 0, 1, \dots$;
2. Для любого $x > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{M_n} = 0$;
3. $M_n^2 < M_{n+1} M_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$;
4. сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{n M_{n+1}} < \infty.$$

В дальнейшем, для краткости, последовательности M_n , $n = 0, 1, \dots$, которые удовлетворяют перечисленным выше условиям, будут называться допустимыми.

Обозначим через $C_q \{M_n\}$ нормированное пространство бесконечно дифференцируемых функций, определенных на действительной оси, для которых

$$\|f\|_q = \sup_{-a < x < a} \sup_{n \geq 0} \frac{|f^{(n)}(x)|}{q^n n! M_n} < \infty,$$

где $q \geq 1$. Пространство $C\{M_n\}$ является индуктивным пределом топологических пространств $C_q\{M_n\}$.

Пространство распределений, порождающее непрерывные линейные функционалы на $C\{M_n\}$, обозначим через $C^*\{M_n\}$.

Теорема 6. Пусть $M_n, n = 0, 1, \dots$ — некоторая допустимая последовательность, и $f \in C^*\{M_n\}$. Для того, чтобы система $\{x^{k_{n-1}} e^{i\lambda_n x}\}_{n=1}^\infty$, где $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ — нули целой функции $f(e^{i\lambda x})$, была полна в пространстве $B_2^2(-a, a)$, $-\frac{1}{2} < \sigma < \infty$, необходимо и достаточно

выполнение следующих условий:

1. $\text{supp } f \subseteq [-a, a]$, причем концы интервала a и $-a$ принадлежат носителю f ;

2. $f \notin (B_2^2(-a, a))^*$.

Доказательство. Достаточность непосредственно следует из того, что целая функция $f(e^{i\lambda x})$ удовлетворяет условиям теоремы 5. Действительно, из допустимости последовательности $M_n, n = 0, 1, \dots$ следует сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log^+ |f(e^{i\lambda x})| (1 + \lambda^2)^{-1} d\lambda < \infty.$$

Из условия $\text{supp } f \subseteq [-a, a]$ следует, что $f(e^{i\lambda x})$ — целая функция не более чем экспоненциального типа a . Условие на индикатор для функции $f(e^{i\lambda x})$ следует из того, что концы интервала $[-a, a]$ принадлежат носителю f .

Необходимость условия 2 теоремы очевидна.

Предположим, что $\text{supp } f \subseteq [-a, a]$ и один из концов интервала $[-a, a]$ не принадлежит носителю f . Тогда с помощью сдвига $x \rightarrow x + \delta$ можно добиться того, чтобы оба конца интервала $[-a, a]$ не принадлежали носителю f . Пусть $\varphi(x) \in C\{M_n\}$ и $\text{supp } \varphi \subseteq [-\delta, \delta]$, где $\delta > 0$. Введем функцию

$$g(x) = f(\varphi(x + i)), \quad -\infty < x < \infty.$$

Число δ можно выбрать настолько малым, чтобы $\text{supp } g \subseteq [-a, a]$. Выбором φ можно добиться включения $g \in (B_2^2(-a, a))^*$. Осталось заметить, что нули функции $f(e^{i\lambda x})$ являются нулями также и функции

$$\int_{-a}^a e^{i\lambda x} g(x) dx.$$

Ա. Ա. ՎԱՂԱՐՇԱԿՅԱՆ. Ն. Վիենր և Ռ. Պեյլի թեորեմի ընդհանրացումը (ամփոփում)

Տվյալ աշխատանքում ընդհանրացվում է Ն. Վիենրի և Ռ. Պեյլի թեորեմը կշռային սահմանափակումների համար: Ստացված արդյունքները կիրառվում են էքսպոնենցիալ ֆունկցիաների սխեմների լրիվության հարցերը ստանալիս:

A. A. VAGARSHAKIAN. *The extension of N. Wiener and R. Paley theorem* (summary)

In this paper the N. Wiener and R. Paley theorem is extended for weighted classes. The results are applied in the study of completeness of exponential systems.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Винер, Р. Пэли. Преобразование Фурье в комплексной области, Изд. «Наука», М., 1964.
2. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Изд. «Наука», М., 1966.
3. В. П. Гуракий, Преобразование Фурье в $L_2(-\infty, \infty)$ с весом, Матем. сб., 58 (100), № 4, 1962, 439—452.
4. Л. Хёрмандер. Теория распределений и анализ Фурье, Изд. «Мир», М., 1986.
5. А. А. Вагаршакян. Об одном новом методе решения усеченных уравнений Винера—Хопфа, Изв. АН Арм.ССР, XXII, № 3, 1987, 215—237.
6. И. Стейн. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, Изд. «Мир», М., 1973.
7. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, «Гостехиздат», М., 1956.
8. L. Schwartz. *Stude des sommes d'exponentielles* — 1-ere ed Paris: Hermann, 1943, 2-eme ed. Strasburg, 1959.
9. R. Boas. Representations for entire functions of exponential type, Ann. of Math., 1938, 39, 269—286.

УДК 517.946

Г. Р. ОГАНЕСЯН

ВКБ-ОЦЕНКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть $Q(t, x, D_x)$ — эллиптический, классический, псевдодифференциальный оператор (ПДО) порядка $\frac{1}{2}$, определенный при $t \in]0, T]$, $x \in R^n$ (например, $Q = \sqrt{d(t, x) - \Delta}$, $d > 0$, Δ — оператор Лапласа) с неограниченным при $t \rightarrow 0$ символом $q(t, x, \xi)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} q(t, x, \xi) = \infty, \text{ равномерно по } (x, \xi) \in R^n \times R^n.$$

Хорошо известно (см. [1]—[7]), что сингулярную при $t = 0$ задачу Коши для гиперболического уравнения

$$L_y := (d_t^2 + Q^4(t, x, D_x)) y(t, x) = 0, (t, x) \in]0, T[\times R^n \quad (1.1)$$

надо ставить в весовой постановке. Это объясняется тем, что уравнение (1.1) может иметь решения стремящиеся к нулю либо не имеющие предела при приближении к начальной гиперплоскости $t = +0$, что приводит к тому, что данные Коши для таких уравнений теряют смысл.

Например, общее решение сингулярного уравнения

$$(d_t + \lambda'(t) \partial_x) u = a'(t) u(t, x), a = t^{-10}, \lambda = t^{-20}, \quad (1.2)$$

имеет вид $C(x)$ — произвольная функция):

$$u(t, x) = C(x - \lambda(t)) \exp \{a(t)\} = \Phi(t) C(x),$$

здесь, если $\lambda(t)$ — вещественная функция, оператор $\Phi(t) = \exp \{a(t) - \lambda(t) \partial_x\}$ является интегральным оператором Фурье. Из вида общего решения мы получаем формальное соотношение

$$C(x) = \Phi^{-1}(t) u(t, x) = \lim_{t \rightarrow 0} \Phi^{-1} u = \{\exp (\lambda \partial_x - a)\} u(t, x),$$

которое мы будем трактовать как обобщение начального условия Коши, имеющего смысл при всех t , в частности, и при $t = 0$. Отметим, что оператор $\Phi(t)$ можно найти, решая задачу Коши для (1.2) с данными при $t = T > 0$, где уже нет особенностей.

В настоящей работе предлагается весовая постановка задачи Коши для уравнения (1.1), в которой начальные данные при $t = 0$ задаются с помощью весовых интегральных операторов Фурье. Идея этой постановки та же, что и для уравнения (1.2). Именно, из теории интегральных опе-

раторов Фурье ([10], [11]) известно, что общее решение уравнения (1.1) записывается в виде

$y = \tilde{\Phi}_1(t) C_1(x) + \tilde{\Phi}_2(t) C_2(x)$, где $\tilde{\Phi}_{1,2}$ — некоторые интегральные операторы Фурье (ИОФ). Дифференцируя это соотношение по t получаем систему

$$y = \tilde{\Phi}_1 C_1 + \tilde{\Phi}_2 C_2, \quad y_t = \tilde{\Phi}_{1t} C_1 + \tilde{\Phi}_{2t} C_2, \quad (1.3)$$

разрешая которую относительно функций $C_{1,2}(x)$ мы получаем формальные соотношения (см. § 3):

$$C_j(x) = O'_{\tilde{\Phi}} y \equiv ((\tilde{\Phi}_{3-j}^{-1} \tilde{\Phi}_j)_t)^{-1} (\tilde{\Phi}_{3-j}^{-1} y)_t, \quad j = 1, 2, \quad (1.4)$$

которые трактуем как начальные условия

$$\lim_{t \rightarrow 0} O'_{\tilde{\Phi}}(y) = C(x), \quad C(x) = (C_1, C_2), \quad O'_{\tilde{\Phi}}(y) = (O_{\tilde{\Phi}}^1(y), O_{\tilde{\Phi}}^2(y)) \quad (1.5)$$

для уравнения (1.1).

Замечание 1.1. В случае регулярного уравнения (1.1) эта постановка начальной задачи эквивалентна (см. замечание 3.2 ниже) обычной задаче Коши, а в случае, когда оператор Q не зависит от x совпадает с вронскианной постановкой начальной задачи, предложенной в [5], [6].

Доказательство основного результата статьи об однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.5) (см. теорему 3 ниже) основано на применении ВКБ-оценок для уравнения в частных производных (теоремы 1, 2). Ранее ВКБ-оценки были известны, по-видимому, лишь для обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [9]), поэтому теоремы 1, 2, как нам кажется, представляют самостоятельный интерес.

Для каждого вещественного числа m через $S_{p,1}^m$ мы обозначим класс символов Хёрмандера, а через S_c^m — класс классических (полиоднородных символов (см. [10], [11]). Обозначим, далее, через $\Psi_{p,1}^m$ (Ψ_c^m) множество всех собственных ПДО с символами класса $S_{p,1}^m$ (S_c^m).

Пусть $H^s = H^s(R^n)$ — пространство Соболева с нормой $\|u\|_s = \left(\int |E_s u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$, где E_s — ПДО с символом $(1 + |\xi|^2)^{s/2}$. Пусть

$C([0, T], H^s)$ — пространство непрерывных отображений $[0, T]$ в H^s , а $L_1([0, T], H^s)$ — пространство интегрируемых отображений $[0, T]$ в H^s .

Обозначим через P множество вещественных, положительных непрерывно дифференцируемых на $[0, T]$ функций $p(t)$, удовлетворяющих условиям

$$p'(t) > 0, \quad p'(t) p^{-\frac{5}{4}}(t) \in L_1[0, T], \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p'(t)}{p^{3/2}(t)} = 0. \quad (1.6)$$

Пример 1.2. Функции $p(t) = t^{-1}$, $\exp\left(\frac{1}{t}\right)$, $t^{-2}(-\ln t)^{\gamma}$, $t \in]0, 1[$ принадлежат классу P при $\gamma > 2$.

Если ПДО Q обратим, то имеют смысл следующие вспомогательные ПДО первого порядка:

$$\Lambda_{1,2}(t, x, D_x) = \pm iQ^2 - Q^{-1}Q_t. \quad (1.7)$$

Обозначим через $\Phi_j(t, T)$, $j=1, 2$ разрешающие операторы следующих гиперболических псевдодифференциальных уравнений первого порядка:

$$\partial_t \omega_j(t, x) = \Lambda_j(t, x, D_x) \omega_j(t, x), \quad j=1, 2, \quad (1.8)$$

переводящие $\omega_j(T, \cdot)$ в $\omega_j(t, \cdot)$, т. е.

$$\omega_j(t, \cdot) = \Phi_j(t, T) \omega_j(T, \cdot). \quad (1.9)$$

Отметим также, что Φ_j являются точными решениями операторных задач Коши

$$\partial_t \Phi_j(t, T) = \Lambda_j(t, x, D_x) \Phi_j(t, T), \quad \Phi_j(T, T) = I. \quad (1.10)$$

Для краткости мы будем иногда писать Φ вместо $\Phi_1(t, T)$.

Замечание 1.3. Для существования операторов Φ_j , Φ_j^{-1} при $t > 0$ достаточно предположить (см. лемму 2.1 в следующем параграфе или [10], [11]), что Q обратим

$$q(t, \cdot, \cdot) \in C^1([0, T], C^\infty(R^{2n})), \quad (1.11)$$

$\Lambda_j \in \Psi_c^1$ и главный символ $i\Lambda_j$ является вещественной функцией. (1.12)

Для наших целей нужны еще равномерные по $t \in [0, T]$ оценки нормы оператора $F = \Phi^{-1} \Phi_2$ (см. лемму 2.2 в следующем параграфе), поэтому мы накладываем более жёсткие ограничения на Q (см. условие iii) ниже).

Пусть

i). Оператор Q однозначно обратим в $H^{-\infty} = \bigcup_j H^j$,

ii). $t \rightarrow q(t, \cdot, \cdot)$ является дважды непрерывно дифференцируемым отображением $[0, T]$ в $C^\infty(R^{2n})$, причём существует функция $p(t) \in P$ такая, что

$$p^{-\frac{1}{4}} Q \in \Psi^{\frac{1}{2}}, \quad p^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{p(t)}{p'(t)} \right)^j \partial_t^j Q \in \Psi^0, \quad j=1, 2, \quad (1.13)$$

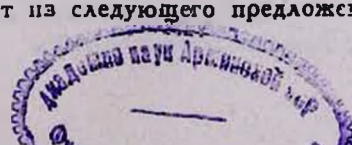
$$p^{\frac{1}{4}} Q^{-1} \in \Psi^0, \quad (1.14)$$

$$\frac{1}{p'(t)} p^{\frac{3}{4}}(t) [Q, Q] \in \Psi^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.15)$$

где через $[,]$ обозначен коммутатор

iii). $Q^2 - (Q^2)^* \in \Psi^0$, $[\Phi(T, t) Q^2 \Phi(t, T), E_s] \in \Psi^s$ равномерно по $t \in [0, T]$.

Отметим, что условию i) удовлетворяет эллиптический ПДО Q , зависящий от параметра t . Это вытекает из следующего предложения (см. [3]):



Предложение 1.4. Для любых $C > 0$, $\delta > 0$ и $s > 0$ можно указать такие $N > 0$ и $\varepsilon > 0$, что если

$$\delta (1 + |\xi|)^m \leq p(x, \xi), \quad (1.16)$$

$$|p_{(\alpha)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq \begin{cases} C(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|}, & |\beta| = 0, \\ \varepsilon(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|}, & |\beta| \neq 0, \end{cases} \quad (1.17)$$

для всех мультииндексов α, β таких, что $|\alpha + \beta| \leq N$, то оператор $P(x, D)$ осуществляет изоморфизм между H^{s+m} и H^s .

Сформулируем основные результаты настоящей работы.

Теорема 1. Пусть выполнены условия i), iii), (1.11), (1.12) и существуют положительные функции $\beta_{1,2} \in L_1[0, T]$ такие, что для всех $t \in [0, T]$

$$\frac{1}{\beta_1(t)} Q^{-2} (Q^{-1})_{tt} Q, \frac{1}{\beta_2(t)} Q^{-3} [Q_t, Q] Q \in \Psi^0. \quad (1.18)$$

Тогда для произвольных $C_j(x) \in H^s$ уравнение (1.1) имеет решения $u_{1,2}$, представимые в виде

$$u_{1,2}(t, x) = \Phi_j(t, T) \{C_j(x) + \varepsilon_j(t, x)\}, \quad j = 1, 2, \quad (1.19)$$

где

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\varepsilon_j(t, \cdot)\|_s = 0, \quad j = 1, 2. \quad (1.19')$$

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1 и существует положительная функция $\gamma(t)$ такая, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = 0, \quad \frac{1}{\gamma(t)} Q^{-3} Q_t \in \Psi^0, \quad t \in [0, T], \quad (1.20)$$

то существуют линейно независимые решения $u_{1,2}$ уравнения (1.1), удовлетворяющие соотношениям (1.19), (1.19'), причем эту асимптотику можно дифференцировать по t , т. е.

$$\partial_t u_j = \Phi_j(t, T) \{C_j(x) + \varepsilon_{j+2}(t, x)\}, \quad j = 1, 2, \quad (1.21)$$

или

$$\partial_t u_j = i^{2j-1} Q^2 \Phi_j(t, T) \{C_j(x) + \varepsilon_{j+4}(t, x)\}, \quad j = 1, 2, \quad (1.22)$$

где

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\varepsilon_j(t, \cdot)\|_s = 0, \quad j = 1, \dots, 6. \quad (1.23)$$

Замечание. Теоремы 1, 2 остаются справедливыми, если интервал $]0, T[$ заменить на $[T, \infty[$, а в соотношениях (1.19'), (1.23) заменить $t \rightarrow 0$ на $t \rightarrow \infty$.

Теорема 3. В условиях i) — iii) уравнение (1.1) с начальными условиями

$$\lim_{t \rightarrow 0} \{\Phi_j(T, t) (Q^{-2} \partial_t + i^{2j-1}) u\} = C_j(x), \quad j = 1, 2, \quad (1.24)$$

при $C_j(x) \in H^{s+1}$ имеет единственное решение $u \in C^3([0, T], H^s)$, причём имеют место оценки

$$|\partial_t^k y|_r < c p^{\frac{2k-1}{4}}(t) \{ \|C_1\|_{s+2} + \|C_2\|_{s+2} \}, \quad k = 0, 1, 2. \quad (1.25)$$

Здесь постоянная c зависит только от постоянных, фигурирующих в (1), а

$$\alpha = \begin{cases} 1/2, & k = 0, \\ 1, & k = 1, \\ 2, & k = 2, \end{cases} \quad (1.25')$$

§ 2. ВКБ-оценки для уравнения (1.1)

Уравнение (1.1) заменой

$$u_1 = \frac{1}{2i} Q^{-2} (\partial_t - \Lambda_2) y, \quad u_2 = \frac{i}{2} Q^{-2} (\partial_t - \Lambda_1) y \quad (2.1)$$

сводится к системе

$$(\partial_t - \Lambda_1) u_1 = S(u_1 + u_2) + R(u_1 - u_2), \quad (2.2)$$

$$(\partial_t - \Lambda_2) u_2 = -S(u_1 + u_2) - R(u_1 - u_2),$$

где

$$S = \frac{i}{2} Q^{-2} (Q^{-1})_{tt} Q, \quad R \equiv \frac{1}{2} Q^{-3} [Q_t, Q] Q. \quad (2.3)$$

Отметим, что т. к. операторы S и R имеют нулевой порядок, а $\Lambda_{1,2}$ — ПДО первого порядка, то смысл преобразования (2.1) в том, что преобразованная система (2.2) является почти диагональной.

Обозначим через $\Phi_j^{-1} = \Phi_j(T, t)$ операторы, обратные к $\Phi_j = \Phi_j(t, T)$, которые будут существовать благодаря эллиптичности ИОФ Φ_j .

Преобразованием

$$u_j(t, \cdot) = \Phi(t, T) z_j(t, \cdot), \quad \Phi \equiv \Phi_1, \quad j = 1, 2, \quad (2.4)$$

из системы (2.2) получаем

$$z_{1t} = S_\Phi(z_1 + z_2) + R_\Phi(z_1 - z_2), \quad (2.5)$$

$$z_{2t} + (\Lambda_1 - \Lambda_2)_\Phi z_2 = -S_\Phi(z_1 + z_2) - R_\Phi(z_1 - z_2),$$

где

$$S_\Phi = \Phi(T, t) S \Phi(t, T). \quad (2.6)$$

Далее заменой $z_2 = F(t, T) z_3$, где $F = F(t, T)$ — точное решение операторной задачи Коши

$$\partial_t F + (\Lambda_1 - \Lambda_2)_\Phi F(t, T) = 0, \quad F|_{t=T} = I, \quad (2.7)$$

второе уравнение системы (2.2) примет вид

$$z_{3t} = -F(T, t) [S_\Phi(z_1 + z_2) + R_\Phi(z_1 - z_2)].$$

Интегрируя по t $[0, T]$ полученное уравнение и первое уравнение системы (2.5) получим систему интегродифференциальных уравнений

$$z_1(t) = C_1(x) + \int_0^t [S_\Phi(z_1 + z_2) + R_\Phi(z_1 - z_2)](\tau, x) d\tau, \quad (2.8)$$

$$z_2(t) = F(t, T) C_2(x) + \int_0^t F(t, T) F(T, \tau) \{R_\Phi(z_2 - z_1) - S_\Phi(z_1 + z_2)\} d\tau.$$

Из (2.7), обозначив

$$\rho(t) = F(t, T) \rho(T), \quad (2.9)$$

получим задачу Коши

$$\rho_t + 2i \Phi(T, t) Q^2 \Phi(t, T) \rho(t) = 0, \quad \rho|_{t=T} = 1. \quad (2.10)$$

Рассмотрим вспомогательное ПД уравнение первого порядка

$$\sigma_\tau + a(\tau, x, D_x) \sigma(\tau, x) = 0, \quad \tau \in [\tau_1, \tau_2]. \quad (2.11)$$

Будем предполагать, что

а). Символ $a(\tau, x, \xi)$ принадлежит ограниченному множеству в $S^1(R^{2n})$ при $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$.

б) $\tau \rightarrow a(\tau, x, \xi)$ является непрерывным отображением $[\tau_1, \tau_2]$ в $C^\infty(R^{2n})$,

в) $a \in S_c^1$ и главный символ a чисто мнимый.

Хорошо известна следующая (см. [11], теорема 23. 1.2)

Лемма 2.1. В условиях а), б), в) для любого вещественного s и $\sigma(\tau_j, \cdot) \in H^s$, $j = 1, 2$ существует единственное решение $\sigma \in C([\tau_1, \tau_2], H^s)$ уравнения (2.11) с начальными условиями

$$\sigma(\tau, \cdot)|_{\tau=\tau_j} = \sigma(\tau_j, \cdot), \quad j = 1, 2,$$

причём любое решение σ удовлетворяет оценкам

$$\|\sigma(\tau_2) e^{-\lambda \tau_2}\|_s \leq \|\sigma(\tau) e^{-\lambda \tau}\|_s \leq \|\sigma(\tau_1) e^{-\lambda \tau_1}\|_s, \quad (2.12)$$

$$\|\sigma(\tau_1) e^{\lambda \tau_1}\|_s \leq \|\sigma(\tau) e^{\lambda \tau}\|_s \leq \|\sigma(\tau_2) e^{\lambda \tau_2}\|_s,$$

где λ — достаточно большая постоянная, зависящая от символа $a(\tau, x, \xi)$ и s и не зависящая от $\sigma(\tau)$, τ_1 , τ_2 .

Замечание. Из леммы 2.1 следует существование ИОФ Φ_j , Φ_j^{-1} при $t > 0$. Уравнение (1.8) преобразованием

$$\tau = \int_0^t \sqrt{p(s)} ds, \quad a = \pm i p^{-\frac{1}{2}} \Delta_j(t, x, D_x) \circ t(\tau), \quad \sigma(\tau) = \omega(t) \circ t(\tau), \quad (2.13)$$

сводится к (2.11) с $\tau_2 = \infty$. Применение оценок (2.12) к (2.11) приводит к экспоненциально растущей при $t \rightarrow 0$ норме оператора $F(T, t)$. Это делает невозможным обращение интегродифференциальных уравнений (2.8). Ужесточив требования леммы 2.1 в следующей лемме 2.2 мы добьёмся ограниченности нормы оператора F , что позволит получить утверждение теоремы 1.

Лемма 2.2. Если равномерно по $t \in [0, T]$ выполнены условия

$$Q^2 - (Q^2)^* \in \Psi^0, \quad (2.14)$$

$$E_{-s}[(Q^2)_\Phi, E_s] \in \Psi^0, \quad (2.15)$$

то для любой функции $v(T, \cdot) \in H^s$, непрерывно зависящей от параметра $T > 0$, справедливы оценки

$$\frac{1}{c} \|v(T, \cdot)\|_s \leq \|F(t, T) v(T, \cdot)\|_s \leq c \|v(T, \cdot)\|_s, \quad (2.16)$$

где постоянная c зависит только от символа оператора Q и s .

Доказательство. Из (2.14) и теоремы Егорова (см. [12]) следует, что

$$\Phi(T, t)((Q^2)^* - Q^2)\Phi(t, T) \in \Psi^0.$$

Отметим, что здесь теорема Егорова применима, т. к. из условия

$$p^{-\frac{1}{4}} Q \in \Psi^{\frac{1}{2}} \text{ следует, что операторное уравнение } \Phi_t = \Lambda \Phi \text{ с особенностью при } t=0 \text{ сводится к уравнению без особенностей } \tilde{\Phi}_t = p^{-\frac{1}{2}} \Lambda \tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}(\tau) = \Phi(t) \circ t(\tau).$$

Далее, из уравнения (2.10) и равенства

$$-\partial_t(\rho, \bar{\rho}) = -(\rho_t, \bar{\rho}) - (\rho, \bar{\rho}_t) = 2i(((Q^2)_\Phi - (Q^2)_\Phi^*)\rho, \bar{\rho})$$

получаем оценку $\partial_t \|\rho\|^2 \leq c \|\rho\|^2$. Из этой оценки заменой $\rho \rightarrow E_s \rho$, $(Q^2)_\Phi \rightarrow E_s (Q^2)_\Phi E_{-s}$ ввиду (2.15), получаем оценки $-c \leq \frac{1}{\|\rho\|_s} \partial_t \|\rho\|_s \leq c$.

Интегрируя последние оценки по $[t, T]$ получим неравенства

$$e^{-cT} \|\rho(T, \cdot)\|_s \leq \|\rho(t, \cdot)\|_s \leq e^{cT} \|\rho(T, \cdot)\|_s, \quad (2.17)$$

из которых и вытекают (2.16).

Перейдем к оценке решений $z_{1,2}$ системы (2.8).

Из условий (1.18) и теоремы Егорова следует, что $\frac{1}{\beta_1} S_\Phi, \frac{1}{\beta_2} R_\Phi \in \Psi^0$,

т. к. функция, зависящая только от t , очевидно, коммутирует с оператором $\Phi(t, T)$. Отсюда, в силу теоремы о непрерывности ПДО класса Ψ^0 в пространствах Соболева ([10] — [12]), получаем для любых $u \in H^s$ оценки

$$\frac{1}{\beta_1(t)} \|S_\Phi u\|_s, \frac{1}{\beta_2(t)} \|R_\Phi u\|_s \leq c \|u\|_s.$$

Применяя эти оценки и лемму 2.2 к системе (2.8) и обозначив $\beta = \beta_1 + \beta_2(\tau)$, получим

$$\|z_j(t, \cdot)\|_s \leq \|C_j\|_s + c \int_0^t \beta(\tau) (\|z_1\|_s + \|z_2\|_s)(\tau, \cdot) d\tau, \quad j=1, 2. \quad (2.24)$$

Сложив оценки (2.24) и применяя лемму Гронуолла ($\beta(\tau) \in L_1[0, 7]$), получим

$$\|z_1(t, \cdot)\|_s + \|z_2(t, \cdot)\|_s \leq (\|C_1\|_s + \|C_2\|_s) \exp\left(2c \int_0^t \beta(s) ds\right).$$

Применив эти оценки ещё раз к (2.8) получим, что величины

$$\|z_1(t, \cdot) - C_1\|_s, \quad \|z_2(t, \cdot) - F(t, T) C_2\|_s$$

мажорируются сверху выражением

$$\frac{1}{2} \left(-1 + \exp\left(2c \int_0^t \beta(s) ds\right) \right) (\|C_1\|_s + \|C_2\|_s).$$

Возвращаясь к обозначениям $z_j = \Phi^{-1} u_j$, получим

$$\|\Phi(T, t) u_1 - C_1\|_s, \quad \|\Phi(T, t) u_2 - F(t, T) C_2\|_s \leq \frac{-1 + \exp\left(2c \int_0^t \beta(s) ds\right)}{2} \quad (2.25)$$

Доказательство теоремы 1. Обозначив через $y_{1,2}(t, x)$ решения уравнения (1.1), которые получаются из (2.8) при $C_2 \equiv 0$ и $C_1 \equiv 0$, соответственно, из (2.1) имеем

$$y = u_1 + u_2, \quad y_t = \Lambda_1 u_1 + \Lambda_2 u_2, \quad (2.26)$$

поэтому при $C_2 \equiv 0$, ввиду (2.25), получаем

$$\begin{aligned} \|\Phi(T, t) y_1 - C_1\|_s &\leq \|\Phi^{-1} u_1 - C_1\|_s + \|\Phi^{-1} u_2\|_s \leq \\ &\leq \left\{ -1 + \exp\left(2c \int_0^t \beta(s) ds\right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Аналогично при $C_1 \equiv 0$ получаем

$$\begin{aligned} \|\Phi(T, t) y_2 - F C_2\|_s &\leq \|\Phi^{-1} u_1\|_s + \|\Phi^{-1} u_2 - F C_2\|_s \leq \\ &\leq \left\{ -1 + \exp\left(2c \int_0^t \beta(s) ds\right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Из этих оценок, обозначив $v_2 = F^{-1}(\Phi^{-1} y_2 - F C_2)$, $v_1 = \Phi(T, t) y_1(t, \cdot) - C_1$, получим (1.19), (1.19') и утверждение теоремы 1, учитывая, что

$$\Phi_2(t, T) = \Phi_1(t, T) F(t, T). \quad (2.29)$$

Последнее соотношение следует из того, что операторы $\Phi_2(t, T)$ и $\Phi_1 F$ являются решениями задачи Коши (1.10) при $j = 2$, которая, в силу леммы 2.1 имеет единственное решение.

Доказательство теоремы 2. Из предположения (1.20), оценок (2.25) и соотношения (2.29) имеем при $C_2 \equiv 0$:

$$\begin{aligned} \|\Phi^{-1} Q^{-2} y_{1t} - iC_1\|_s &\leq \|(Q^{-2} \Lambda_2)_\Phi \Phi^{-1} u_1\|_s + \|(Q^{-2} \Lambda_1)_\Phi C_1 - iC_1\|_s + \\ &+ \|(Q^{-2} \Lambda_1)_\Phi (\Phi^{-1} u_1 - C_1)\|_s \leq c \left(\gamma(t) - 1 + \exp \left(2c \int_0^t \beta ds \right) \right), \end{aligned} \quad (2.30)$$

т. к. из (1.7), (1.20) следует, что $\Phi^{-1} Q^{-2} \Lambda_j \Phi \in \Psi^s$, $j = 1, 2$.

Аналогично, при $C_1 \equiv 0$ получаем

$$\begin{aligned} \|\Phi^{-1} Q^{-2} y_{2t} + iF C_2\|_s &\leq \|(Q^{-2} \Lambda_2)_\Phi (\Phi^{-1} u_2 - F C_2)\|_s + \|(Q^{-2} \Lambda_1)_\Phi \Phi^{-1} u_1\|_s + \\ &+ \|(Q^{-2} \Lambda_2)_\Phi + i\} F C_2\|_s \leq c \left(\gamma(t) - 1 + \exp \left(2c \int_0^t \beta ds \right) \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Представление (1.22) получается из (2.30), (2.31), если ввести обозначения

$$\varepsilon_5 = -i\Phi^{-1} Q^{-2} y_{1t} - C_1, \quad \varepsilon_6 = iF^{-1} \{\Phi^{-1} Q^{-2} y_{2t} + iF C_2\}.$$

Формула (1.21) следует из (1.22).

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось показать линейную независимость решений y_1 и y_2 , для чего достаточно показать, что из

$$y_1 + y_2 = \Phi_1 C_1 (1 + \varepsilon_1) + \Phi_2 C_2 (1 + \varepsilon_2), \quad (2.32)$$

для всех $(t, x) \in]0, T] \times R^n$ следует $C_1(x) = C_2(x) = 0$.

Ввиду (1.21) имеем также

$$y_{1t} + y_{2t} = \Lambda_2 \Phi_1 (1 + \varepsilon_3) + \Lambda_2 \Phi_2 C_2 (1 + \varepsilon_4) = 0. \quad (2.33)$$

Поддействовав на (2.32) оператором Λ_1 слева и вычитая (2.33), получим

$$\begin{aligned} C_2 (1 + \varepsilon_1) &= \Phi_2(T, t) (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} \{\Lambda_1 \Phi_1 C_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) + \\ &+ \Lambda_2 \Phi_2 C_2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_4)\} = o(1), \quad t \rightarrow 0, \quad x \in R^n, \end{aligned}$$

откуда следует, что $C_2(x) \equiv 0$. Аналогично, из (2.32), (2.33) следует $C_1(x) \equiv 0$.

§ 3. Упрощение начальных условий и энергетические оценки элементарных гиперболических уравнений

Из формулы (1.5) следуют формулы преобразования оператора $O_\Phi(y)$ относительно

а) обратимого преобразования $B: y = Bv$, $\Phi_j = B^{-1} \bar{\Phi}_j$,

$$O_{\Phi}(y) = O_{\Phi^*}(y),$$

б) преобразования подобия $v = A^{-1} y A$, $\Phi_j = A^{-1} \bar{\Phi}_j A^{-1}$, где A — обратимый оператор, не зависящий от t :

$$O_{\Phi}(v) = A^{-1} O_{\Phi}(y) A,$$

в) преобразования $f: \tau \rightarrow t$, $x \rightarrow x^*$:

$$O_{\Phi}(y) = O_{\Phi^*}(y^*),$$

здесь

$$\Phi^* = \bar{\Phi}(t) \circ t(\tau), \quad y^* = y(t) \circ t(\tau).$$

Отметим, что при $t = 0$ преобразования а), в) могут быть вырожденными или сингулярными.

Определение 3.1. Начальные данные мы будем называть эквивалентными, если они отличаются преобразованиями, указанными в а), б), в) или же отличаются от $O_{\Phi}(y)$ на величину, стремящуюся к нулю при $t \rightarrow 0$.

Замечание 3.2. Если уравнение (1.1) регулярное, т. е. $q^i(t, \cdot) \in L_1[0, T]$, то нетрудно показать, что $\bar{\Phi}_1 \sim 1$, $\bar{\Phi}_2 \sim t$, $t \rightarrow 0$, и (1.5) эквивалентно обычной задаче Коши.

Отметим также, что если операторы $\bar{\Phi}_j$ и $\bar{\Phi}_{j,t}$ коммутируют (а это имеет место, если, например, коэффициенты уравнения (1.1) не зависят от пространственных переменных x), то постановка задачи (1.5) совпадает с вронскианной постановкой начальной задачи, предложенной в [5], [6].

Покажем, что пользуясь представлениями (1.19), (1.22) формулу (1.4) можно упростить. Действительно, действуя оператором $-iQ^{-2}$ на представление

$$y_t = iQ^2 [\Phi_1(C_1 + \varepsilon_1) - \Phi_2(C_2 + \varepsilon_2)]$$

и сложив с равенствами

$$\pm y = \pm \Phi(C_1 + \varepsilon_1) \pm \Phi_2(C_2 + \varepsilon_2)$$

получим, учтя (2.29), после несложных преобразований, соотношения

$$\Phi^{-1}(y - iQ^{-2} y_t) = 2C_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + F(\varepsilon_2 - \varepsilon_1),$$

$$\Phi_2^{-1}(y + iQ^{-2} y_t) = 2C_2 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 + F(\varepsilon_1 - \varepsilon_2),$$

из которых следуют начальные условия (1.24).

Перейдем к получению энергетических оценок для ПД уравнений (1.8). Заменой

$$v = Q \omega_j, \quad (3.1)$$

получаем из (1.8) уравнение

$$v_t = \pm i Q^2 v. \quad (3.2)$$

Т. к. уравнение (3.2) получается из (2.10) заменой $2(Q^2)_\Phi \rightarrow \pm Q^2$, то из леммы 2.2 получаем оценку

$$\|v(t, \cdot)\|_s \leq c \|v(T, \cdot)\|_s, \quad t \in [0, T]. \quad (3.3)$$

Далее т.к. $p^{-\frac{1}{4}} Q \in \Psi^{\frac{1}{2}}$, то

$$\|Q \omega_j(t)\|_s \leq c \|v(T, \cdot)\|_s \leq \|\omega_j(T, \cdot)\|_{s+\frac{1}{2}}, \quad (3.4)$$

или, т.к. $\omega_j(t, \cdot) = \Phi_j \omega_j(T, \cdot)$, то эту оценку можно переписать в виде

$$\|Q \Phi_j(t, T) \omega_j(T, \cdot)\|_s \leq c \|\omega_j(T, \cdot)\|_{s+\frac{1}{2}}. \quad (3.5)$$

Лемма 3.3. В условиях i) — iii) любое решение уравнения (1.8) удовлетворяет оценкам

$$\|\partial_t^k \omega_j(t, \cdot)\|_s \leq c p^{\frac{2k-1}{4}}(t) \|\omega_j(T, \cdot)\|_{s+1}, \quad k=0, 1, j=1, 2, \quad (3.6)$$

где α определяется по формуле (1.25'), или

$$\|\partial_t^k \Phi_j \omega_j(T, \cdot)\|_s \leq c p^{\frac{2k-1}{4}}(t) \|\omega_j(T, \cdot)\|_s, \quad k=0, 1, j=1, 2. \quad (3.6')$$

Оценка (3.6) при $k=0$ следует из (3.4) и $p^{\frac{1}{4}} Q^{-1} \in \Psi^0$. Далее левая часть (3.6) при $k=1$ оценивается сверху через

$$p^{\frac{1}{4}} (\|\partial_t Q \omega_j\|_{s+\frac{1}{4}} + \|Q^{-2} Q_t \omega_j\|_{s+\frac{1}{4}}) \leq p^{\frac{1}{4}} (\|\omega_j(T, \cdot)\|_{s+1} + \|Q^{-3} Q_t \omega_j(T, \cdot)\|_{s+1}),$$

откуда и следует (3.6) при $k=1$.

Перейдем к получению оценок (1.25) для начальной задачи (1.1), (1.24). Оценки (1.25) при $k=0$ получаются из $y=y_1+y_2$, (1.19) и (3.6). Остальные случаи доказываются аналогично. Для завершения доказательства теоремы 3 остается показать, что из ii) следуют условия (1.18), (1.20). Это вытекает из теоремы о композиции ПДО (см. [10]—[12]) при выборе

$$\beta_1(t) = p_t^2 p^{-\frac{5}{2}}(t), \quad \beta_2(t) = p_t p^{-\frac{5}{4}}, \quad \gamma(t) = p_t p^{-\frac{3}{2}}.$$

Пример. Рассмотрим гиперболическое уравнение вида

$$y_{tt} - \mu(t, x) y_{xx} + \sigma(t, x) y_x + d(t, x) y(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times R,$$

где μ и d — вещественные функции, $\mu(t, x) \geq c > 0$, $\mu, \sigma \in C^\infty([0, T] \times R)$. Пусть существует функция $p(t) \in P$ такая, что для всех $(t, x) \in [0, T] \times R$.

$$d(t, x) \geq cp(t), |\partial_x^\alpha d| \leq cp(t), |\partial_x^\alpha \partial_t^\beta d| \leq c p^{1/2}/p(t), \alpha \geq 0,$$

$$p^{-\frac{1}{2}} \partial_x^\alpha d \leq c, |\partial_x^\alpha z|, |\partial_x^\alpha \mu| \leq \varepsilon, |z| > 0,$$

для достаточно малого ε .

Тогда нетрудно убедиться, что все условия теоремы 3 выполнены, полагая

$$Q = \mu D_x^2 + i z D_x + d(t, x)$$

и представив символы операторов Q и $B = Q^2$ в виде асимптотических сумм, включая d в главный символ $q(q_1 = \sqrt{\mu \xi^2 + d}$ и т. д.).

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 16. II. 1987

Գ. Ռ. ՉՈՎԱՆՆԻՍՅԱՆ. Վեր-գնահատականներ և Կշռա խնդիր եղբարդ կարգի օրհրդիլ-յաղ երկրորդական հավասարումների համար (ամփոփում)

Հորիզոնական ապացուցվում են Վեր-գնահատականների մասնակի աֆանցյալներով հիպերբոլական հավասարումների համար:

Սրեղուլյար սկզբական հարթության վրա հիպերբոլական հավասարումների համար առաջարկվում է Կշռա կշռալին խնդիր և ապացուցվում է նրա կոռեկտությունը: Կշռա կշռալին տվյալները արվում են Յուրյի ինտեգրալ օպերատորների օգնությամբ:

G. R. OGANESIAN. JWKB - estimates for the partial differential equations and the Cauchy problem for the second order singular hyperbolic equations (summary)

In the paper JWKB - estimates for the hyperbolic partial differential equations are proved. It is proposed to consider the weighted Cauchy problem by means of the Fourier integral operators on the singular initial hyperplane. The unique solvability of this problem in the Sobolev spaces is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Бицадзе. Уравнения смешанного типа, М., ВИНТИ АН СССР. Итоги науки, 1959.
2. С. А. Терсенов. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе, НГУ, 1973.
3. А. Б. Нерсисян. Задача Коши для симметрической гиперболической системы, вырождающейся на начальной гиперплоскости, ДАН СССР, 196, 2, 1971, 289—292.
4. Н. А. Киприянов, А. А. Иванов. Задача Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу в симметрическом пространстве, Матем. сб., 124, № 1, 1984, 44—55.
5. Г. Р. Оганесян. О начальной задаче с заданными вронскими, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», 15, № 4, 1980, 292—309.
6. Г. Р. Оганесян. О начальной и смешанной задачах с заданными вронскими для сингулярных гиперболических уравнений второго порядка, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», 22, № 4, 1987, 337—357.
7. А. О. Оганесян. Построение параметрикса задачи Коши с весом для гиперболических уравнений второго порядка с неограниченными коэффициентами, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», 21, № 1, 1986, 33—50.
8. В. В. Грешин. Псевдодифференциальные операторы в R^n с ограниченными символами, Функт. анализ и его прилож., 4, № 3, 1970, 37—50.
9. М. В. Федорук. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Наука, 1983.
10. Ф. Трев. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье, М., Мир, 1984, т. 1, 2.
11. Л. Хёрмандер. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, М., Мир, 1987/88, т. 3, 4.
12. М. Тэйлор. Псевдодифференциальные операторы, М., Мир, 1985.

УДК 517.98

Ա. Գ. ԱՐԱԲԱԴՋՅԱՆ, Ն. Բ. ԵՆԿԻԲԱՐՅԱՆ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА-ХОПФА СО ВПОЛНЕ МОНОТОННЫМИ ЯДРАМИ

Настоящая работа посвящена следующему хорошо известному классу интегральных уравнений Винера-Хопфа второго рода

$$f(x) = g(x) + \int_0^{\infty} K(x-t)f(t) dt, \quad (1)$$

$$K \in L_1(-\infty, \infty), K \geq 0, \mu = \mu_+ + \mu_- = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx \leq 1. \quad (2)$$

Здесь $\mu_{\pm} = \int_0^{\infty} K_{\pm}(x) dx$, $K_{\pm}(x) = K(\pm x)$, $x > 0$.

Основное внимание будет уделено случаю, когда функции $K_{\pm}$ (или хотя бы одна из них) представлены в виде

$$K_{\pm}(x) = \int_a^b e^{-xs} d\sigma_{\pm}(s). \quad (3)$$

Здесь $\sigma_{\pm}$ — неубывающие непрерывные слева функции на $[a, b] \subset [0, \infty)$ такие, что выполнено условие $\mu \leq 1$, причем $\mu_{\pm} = \int_a^b \frac{1}{s} d\sigma_{\pm}(s)$.

Представление (3) означает, что функции $K_{\pm}$ вполне монотонны.

В случае $\mu < 1$ уравнение (1), (2) называется диссипативным (ДС), а в случае $\mu = 1$ — консервативным (КС). Случай $K_+ = K_- = K$ симметричный. Тогда в представлении (3) имеем $\sigma_{\pm} = \sigma$.

Уравнения (1)–(3) принадлежат к числу наиболее изученных интегральных уравнений математической физики. Особое внимание было уделено симметрическому случаю, в связи с их приложениями в теории переноса излучения (см. [1–14]) и др.

С уравнениями (1)–(3) сопряжены известные нелинейные уравнения В. А. Амбарцумяна (УА) (см. [3–11, 15]). В случае симметрического ядра УА имеют вид

$$\varphi(s) = 1 + \varphi(s) \int_a^b \frac{\varphi(p) d\sigma(p)}{s+p}. \quad (4)$$

В несимметрическом случае УА является системой из двух уравнений

$$\varphi_{\pm}(s) = 1 + \varphi_{\pm}(s) \cdot \int_{\pm}^s \frac{\varphi_{\pm}(p) d\varphi_{\pm}(p)}{s + p}. \quad (5)$$

УА (4) и (5) играют важную роль в вопросах изучения и эффективного решения уравнений Винера-Хопфа (1)–(3), а также — соответствующих уравнений на конечном промежутке $[0, r]$ (см. [17]). УА легко решаются численно, развита их содержательная аналитическая теория, относящаяся в основном к случаю $\mu \leq 1$. В работах М. Г. Крейна и Ю. Л. Шмulyяна [13, 14] найдены новые доказательства (методами комплексного анализа) ряда результатов [9, 10] по уравнениям (1)–(3) в КС, а также — новые факты по указанным уравнениям в «закритическом» случае $\mu > 1$.

В настоящей работе изложен ряд основных положений теории уравнений (1)–(3). Наряду с новыми в работу включена часть результатов препринта авторов [10].

§ 1. Нелинейные уравнения факторизации

1°. Пусть K — интегральный оператор Винера-Хопфа

$$(Kf)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x K(x-t)f(t) dt, \quad \mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |K(x)| dx < +\infty.$$

Пусть E^+ — одно из пространств $L_p(0, \infty)$, $p \geq 1$, $M[0, \infty)$ и $C_0[0, \infty)$, K действует в E^+ (см. [22]), причем $\|K\|_{E^+} \leq \mu$. Если $K \geq 0$, то

$$\|K\|_{E^+} = \mu. \quad (6)$$

По необходимости мы будем рассматривать оператор K в специальных классах локально интегрируемых на $[0, \infty)$ функций, неограниченно растущих в ∞ .

Перепишем (1) в операторной форме (I — единичный оператор):

$$(I - K)f = g. \quad (7)$$

Если $K \geq 0$, то $I - K$ обратим в каждом из пространств E^+ тогда и только тогда, когда $\mu < 1$.

Теория уравнений (7) тесно связана с факторизацией

$$I - K = (I - V_-)(I - V_+). \quad (8)$$

Здесь $V_{\pm}$ — искомые вольтеровские операторы:

$$(V_+ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x V_+(x-t)f(t) dt, \quad (V_- f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x^*}^{\infty} V_-(t-x)f(t) dt,$$

где $V_{\pm} \in L_1^+$. (8) понимается как равенство операторов, действующих в E^+ .

Равенство (8) эквивалентно следующей нелинейной системе относительно $V_{\pm}$ (см. [9, 11]), которую мы назовем нелинейным уравнением факторизации (НУФ):

$$V_{\pm}(x) = K_{\pm}(x) + \int_0^{\infty} V_{\mp}(t) V_{\pm}(x+t) dt, \quad (9)$$

$$K_{\pm}(x) \stackrel{\text{def}}{=} K(\pm x), \quad x > 0.$$

При $\mu < 1$ НУФ (9) обладает так называемым каноническим (или основным) решением (КР) (V_+, V_-) представляющим собой предел в $(L_1^+)^2$ следующего итерационного процесса (см. [9])

$$V_{n+1}(x) = K_{\pm}(x) + \int_0^{\infty} V_n^{\mp}(t) V_n^{\pm}(x+t) dt, \quad (10)$$

$$V_0^{\pm}(x) \equiv 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x > 0.$$

КР обладает свойствами

$$\gamma_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} \|V_{\pm}\|_{L_1^+} < \mu, \quad (1 - \mu_{\mp})^{-1}, \quad (\leq \mu), \quad \text{где } \mu_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} |K_{\pm}(x)| dx. \quad (11)$$

Если $K > 0$, то $V_{\pm} > 0$ и

$$(1 - \gamma_-)(1 - \gamma_+) = 1 - \mu. \quad (12)$$

В симметрическом случае $K_+ = K_- = K$ имеем $V_{\pm} = V$.

2°. Рассмотрим факторизацию (8) в КС $K > 0$ и $\mu = 1$. Из (11) и (12) видно, что тогда $\gamma_{\pm} \leq 1$ и выполняется хотя бы одно из равенств: $\gamma_+ = 1$ или $\gamma_- = 1$. Каждое из этих равенств означает, что соответствующий фактор $I - V_+$ или $I - V_-$ в факторизации (8) необратим. Если же $\gamma_+ < 1$ (или $\gamma_- < 1$), то $\|V_+\|_{E^+} = \gamma_+ < 1$ (или $\|V_-\|_{E^+} = \gamma_+ < 1$) и соответствующий из операторов $I - V_{\pm}$ обладает положительным обратным в E^+ .

Одним из важных вопросов, связанных с факторизацией (8) в КС и ее применений, является следующий: какое из чисел $\gamma_{\pm}$ равно 1, а какое меньше 1? Этот вопрос будет изучен в § 3. Ясно пока только одно, что в симметрическом консервативном случае, в силу $\gamma_+ = \gamma_-$ имеем $\gamma_{\pm} = 1$.

3°. Введем функции $\varphi_{\pm}$, играющие важную роль в дальнейших исследованиях:

$$\varphi_{\pm}(s) \stackrel{\text{def}}{=} [1 - \hat{V}_{\mp}(s)]^{-1}. \quad (13)$$

Здесь $\hat{V}_{\pm}$ — суть преобразования Лапласа от $V_{\pm}$:

$$\hat{V}_{\pm}(s) = \int_0^{\infty} e^{-xs} V_{\pm}(x) dx.$$

Оценка (11) показывает, что если $\mu \leq 1$, то функции $\widehat{V}_{\pm}$ голоморфны в правой полуплоскости $C^+ = \{Re s > 0\}$ комплексной плоскости C , непрерывны на мнимой оси, $|\widehat{V}_{\pm}(s)| \leq \gamma_{\pm}$ при $Re s \geq 0$ и принимают вещественные значения на полуоси $R^+ \{s > 0\}$. Поэтому функции $\varphi_{\pm}$ голоморфны в C^+ и принимают положительные значения на R^+ .

Пусть $K \geq 0$ и $\mu \leq 1$, что представляет для нас основной интерес. Тогда $V_{\pm} \geq 0$, а функции $\varphi_{\pm}$ будут обладать свойствами: они на $[0, \infty)$ положительны, непрерывны и монотонно убывают, причем $\lim_{s \rightarrow +\infty} \varphi_{\pm}(s) = 1$. Если $\gamma_+ < 1$, то $\varphi_- \in C[0, \infty)$, причем $\varphi_-(0) = (1 - \gamma_+)^{-1}$. Если же $\gamma_+ = 1$, то $\lim_{s \rightarrow 0} \varphi_-(s) = +\infty$. Аналогичные факты справедливы для φ_+ .

Функции $\varphi_{\pm}$ являются естественным обобщением функций Амбарцумяна (КР уравнения (5)), для случая, когда не предполагается выполнение условий (3) (см. §2). Поэтому мы их назовем также функциями Амбарцумяна.

Пусть теперь хотя бы одна из функций $K_{\pm}$ представлена в виде (3).

Лемма 1. Пусть K_+ (или K_-) представлен в виде (3). Тогда для V_n^+ и V_+ (или V_n^- и V_-) справедливы формулы

$$V_n^+(x) = \int_a^b e^{-xs} \varphi_n^{\pm}(s) d\sigma_{\pm}(s), \quad x > 0, \quad (14)$$

$$V_{\pm}(x) = \int_a^b e^{-xs} \varphi_{\pm}(s) d\sigma_{\pm}(s), \quad x > 0, \quad (15)$$

где $\varphi_{\pm}$ определены из (13), а $\varphi_n^{\pm}$ — из рекуррентных соотношений

$$\varphi_{n+1}^{\pm}(s) = 1 + \varphi_n^{\pm}(s) \cdot \int_0^{\infty} V_n^{\mp}(t) e^{-ts} dt, \quad (16)$$

$$\varphi_0^{\pm} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

«Достаточно рассмотреть случай, когда представление (3) имеет место для K_+ . Заметим прежде всего, что (16) определяет монотонно возрастающую по n последовательность $\{\varphi_n^+\}$ непрерывных на $[0, \infty)$ функций. С учетом $V_n^- \leq V_-$ и (16) легко проверить индукцией по n , что $\varphi_n^+(s) \leq \varphi_+(s)$, которое влечет за собой поточечную сходимость последовательности φ_n^+ . Из (16) следует, что $\varphi_n^+ \rightarrow \varphi_+$. Из непрерывности φ_n^+ на $[0, \infty)$ и φ_+ на $(0, \infty)$, на основании теоремы Дини заключаем, что $\varphi_n^+ \rightarrow \varphi_+$ равномерно на каждом компакте из $(0, \infty)$. Если же $\gamma_+ < 1$, то $\varphi_n^+ \rightarrow \varphi_+$ равномерно на сомкнутой полуоси $[0, \infty]$.

Докажем формулу (14) индукцией по n . Пусть V_n^+ представлено в виде (14). Из (10) имеем

$$\begin{aligned} V_{n+1}^+(x) &= \int_a^b e^{-xs} d\sigma_+(s) + \int_0^{\infty} V_n^-(t) dt \int_a^b e^{-(x+t)s} \varphi_n^+(s) d\sigma_+(s) = \\ &= \int_a^b e^{-xs} d\sigma_+(s) \left| 1 + \varphi_n^+(s) \int_0^{\infty} V_n^-(t) e^{-ts} dt \right| = \\ &= \int_a^b e^{-xs} \varphi_{n+1}^+(s) d\sigma_+(s). \end{aligned}$$

Остается совершить предельный переход в (14). Из (13) и $V_n^{\pm} \leq V_{\pm}^*$ имеем

$$\left| \int_a^b e^{-xs} \varphi_n^+(s) d\sigma_+(s) \right| \leq V_+(x),$$

откуда согласно теореме Б. Леви [21] следует сходимость интеграла в правой части (15) и неравенство

$$\int_a^b e^{-xs} \varphi_+(s) d\sigma_+(s) \leq V_+(x). \quad (17)$$

С другой стороны, из (14) имеем

$$V_{n+1}^+(x) \leq \int_a^b e^{-xs} \varphi_+(s) d\sigma_+(s),$$

откуда следует противоположное к (17) неравенство.

Одним из важных качественных выводов из формулы (15) является тот, что полная монотонность функции K_+ или K_- влечет за собой аналогичное свойство функций V_+ и V_- соответственно.

Введем новые меры $d\rho_{\pm}$ посредством $\rho_{\pm}(s) = \int_0^s \varphi_{\pm}(\tau) d\sigma_{\pm}(\tau)$. Име-

ем $\int_a^b \frac{1}{s} d\rho_{\pm}(s) = \gamma_{\pm}$. $d\rho_+$ и $d\rho_-$ — положительные меры, носители которых совпадают с носителями мер $d\sigma_+$ и $d\sigma_-$ соответственно. Из (15) имеем

$$V_{\pm}(x) = \int_a^b e^{-xs} d\rho_{\pm}(s). \quad (18)$$

Формулы (18) для V_+ или V_- справедливы, как только соответствующая из функций $K_{\pm}$ допускает представление (3).

Теорема 1. *Функция V_+ (или V_-) является вполне монотонной тогда и только тогда, когда таковой является K_+ (или K_-).*

◀ Нам остается доказать, что из полной монотонности V_+ следует полная монотонность K_+ . Пусть V_+ представлена в виде (18). Используя первое из уравнений (9) имеем

$$\begin{aligned} K_+(x) &= V'_+(x) - \int_0^{\infty} V_-(t) V_+(x+t) dt = \\ &= \int_a^b e^{-xs} [1 - \widehat{V}_-(s)] d\rho_+(s). \end{aligned}$$

С учетом неотрицательности $1 - \widehat{V}_-(s)$ на $[a, b]$ мы приходим к формуле (3) для K_+ , причем $\sigma_+(s) = \int_a^s [1 - \widehat{V}_-(\tau)] d\rho_+(\tau)$. ▶

§ 2. Уравнение Амбарцумяна

1°. Пусть обе функции $K_{\pm}$ представлены в форме (3). Ниже будет показано, что тогда НУФ (9) сводится к уравнениям Амбарцумяна (УА) (5).

Пусть L^+ и L^- — банаховы пространства измеримых на $[a, b]$ функций, порождаемых мерами $d\sigma_{\pm}$ (классов смежностей функций, спадающих на носителях мер $d\sigma_+$ и $d\sigma_-$ соответственно), с конечными нормами

$$\|\varphi_{\pm}\|_{L^{\pm}} = \int_a^b |\varphi_{\pm}(s)| \frac{1}{s} d\sigma_{\pm}(s).$$

Проверим (см. [9]), что если пара $(\varphi_+, \varphi_-) \in L^+ \times L^-$ удовлетворяет (5), то НУФ (9) обладает решением $V_{\pm}$ вида (15).

Перепишем (5) в виде

$$\varphi_{\pm}(s) = 1 + \varphi_{\pm}(s) \int_a^b \varphi_{\mp}(p) d\sigma_{\mp}(p) \int_0^{\infty} e^{-(s+p)t} dt,$$

откуда

$$\varphi_{\pm}(s) = 1 + \varphi_{\pm}(s) \int_0^{\infty} e^{-st} V_{\mp}(t) dt. \quad (19)$$

Умножая первое из уравнений (19) на e^{-xs} ($x > 0$) и интегрируя по мерам $d\sigma_+$ и $d\sigma_-$ соответственно, получаем (9), где $V_{\pm}$ заданы посредством (15).

Заметим, что условие $\varphi_{\pm} \in L^{\pm}$ согласуется с условием $V_{\pm} \in L_1^{+}$.

Нетрудно проверить, что если уравнение (9) обладает решением вида (15), то на носителях мер $d\sigma_{\pm}$ функции $\varphi_{\pm}$ удовлетворяют УА (5). Действительно, подставляя выражения (15) для $V_{\pm}$ в (9) получаем

$$\int_a^b e^{-xs} \varphi_{\pm}(s) d\sigma_{\pm}(s) = \int_a^b e^{-xs} d\sigma_{\pm}(s) + \\ + \int_a^b e^{-xs} \varphi_{\pm}(s) d\sigma_{\pm}'(s) \int_0^{\infty} e^{-ts} V_{\mp}(t) dt$$

или

$$\int_a^b e^{-xs} \left[\varphi_{\pm}(s) - 1 - \varphi_{\pm}(s) \int_a^b \frac{\varphi_{\mp}(\tau) d\sigma_{\mp}(\tau)}{\tau + s} \right] d\sigma_{\pm}(s) = 0.$$

откуда следует наше утверждение.

Из доказанного вытекает важный факт: функции $\varphi_{\pm}$, определенные согласно (13), в силу равенств (19), удовлетворяют УА (5).

Интегрируя (15) по x от 0 до ∞ получаем

$$\|\varphi_{\pm}\|_{L^{\pm}} = \gamma_{\pm} \leq 1, \text{ то есть } \varphi_{\pm} \in L^{\pm}.$$

Нами доказана разрешимость УА (5) и способ построения его решения с помощью функций $V_{\pm}$. Однако на деле мы развиваем противоположный подход: построить функции $\varphi_{\pm}$ путем прямого решения УА (5) (или (4) — в симметрическом случае) после чего функции $V_{\pm}$ определяются из (15).

2°. Приведем результаты [9] по сходимости к решению уравнения (5) итераций

$$\varphi_{n+1}^{\pm}(s) = 1 + \varphi_n^{\pm}(s) \int_a^b \frac{\varphi_n^{\mp}(p) d\sigma_{\mp}(p)}{s + p}, \quad (20)$$

$$\varphi_0^{\pm} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Их предел в $L^{+} \times L^{+}$ назовем КР уравнения (5). Хотя функции $\varphi_n^{\pm}(s)$ (как и $\varphi_{\pm}(s)$) достаточно знать только на носителях мер $d\sigma_{\pm}$, однако удобнее их рассматривать на всем интервале $[a, b]$. Итерации (20) определяют монотонно возрастающие последовательности $\{\varphi_n^{\pm}\}$ непрерывных на $[a, b]$ функций.

Умножая (20) на $\frac{1}{s} d\sigma_{\pm}$ и интегрируя от a до b получаем

$$\left(\text{где } \gamma_n^{\pm} = \int_a^b \varphi_n^{\pm}(s) \frac{1}{s} d\sigma_{\pm}(s) \right)$$

$$\gamma_{n+1}^+ = \mu_+ + \int_a^b \int_a^b \frac{\varphi_n^-(s) \varphi_n^+(p)}{s(s+p)} d\sigma_+(s) d\sigma_-(p),$$

$$\gamma_{n+1}^- = \mu_- - \int_a^b \int_a^b \frac{\varphi_n^+(s) \varphi_n^-(p)}{p(s+p)} d\sigma_+(s) d\sigma_-(p) + \gamma_n^+ \cdot \gamma_n^-,$$

складывая которые приходим к основному соотношению

$$\gamma_{n+1}^+ + \gamma_{n+1}^- = \mu + \gamma_n^+ \cdot \gamma_n^-. \quad (21)$$

Из (21) и монотонности последовательности (20) легко следуют оценки

$$\gamma_{n+1} \equiv \frac{1}{2} (\gamma_n^+ + \gamma_n^-) \leq 1 - \sqrt{1 - \mu}.$$

Скорость сходимости итераций $\{V_n^{\pm}\}$ и $V_{\pm}$ оценивается посредством

$$\sum_{\pm} \|\varphi_{\pm} - \varphi_n^{\pm}\|_{L^{\pm}} \leq 2q^n (1 - \sqrt{1 - \mu}) \text{ при } \mu < 1, \quad (22)$$

где $q = \max(\gamma_+, \gamma_-) \leq \max\left(\frac{\mu_+}{1 - \mu_-}, \frac{\mu_-}{1 - \mu_+}\right) \leq \mu$.

В симметрическом случае справедливы оценки

$$\|\varphi - \varphi_n\| \leq \begin{cases} (1 - \sqrt{1 - \mu})^{n+1}, & \text{при } \mu < 1, \\ \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}, & \text{при } \mu = 1. \end{cases} \quad (23)$$

Для уравнений (4), (5) получаются также результаты, аналогичные результатам § 1, относящиеся к случаю $\mu < 1$:

а) Каноническое решение является единственным его решением, удовлетворяющим условию

$$\|\varphi_+\|_{L^+} + \|\varphi_-\|_{L^-} < 2(1 + \sqrt{1 - \mu}).$$

б) Если в (21) в качестве исходных итераций взять произвольный элемент $(\varphi_0^+, \varphi_0^-)$ такой, что $\|\varphi_0^+\|_{L^+} + \|\varphi_0^-\|_{L^-} \leq 2r$, где $\mu \leq r < 1$, то соответствующие итерации будут сходиться со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем r . Заметим, что последовательности $\{\varphi_n\}$, определяемые согласно (16) и (20), совпадают. Что касается оценок (22) и (23), то можно было их получить из соответствующих оценок для $V_n^{\pm}$, исходя из связи (14) между $V_n^{\pm}$ и $\varphi_n^{\pm}$. Однако мы предпочитаем изложить самостоятельный способ изучения уравнения (5).

Отметим также, что в симметрическом случае $d\sigma_{\pm} = d\sigma$ функции $\varphi_n^+ = \varphi_n^- = \varphi_n$, где φ_n определяется посредством

$$\varphi_{n+1}(s) = 1 + \varphi_n(s) \int_a^b \frac{\varphi_n(p) d\sigma(p)}{s + p}, \quad (24)$$

$$\varphi_0 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Их предел φ является каноническим решением уравнения (4).

Рассмотрим другой итерационный процесс к решению (5), несколько отличный от (24).

Пусть $(\psi_n^\pm, \varphi_n^\pm)$ определяется из рекуррентных соотношений

$$\psi_{n+1}^\pm(s) = \left| 1 - \int_a^b \frac{\psi_n^\mp(p) d\sigma(p)}{s + p} \right|^{-1}, \quad \psi_0^\pm = 0. \quad (25)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Легко проверить индукцией по n , что (25) определяет возрастающие последовательности $\{\psi_n^\pm\}$ непрерывных на $[a, b]$ функций, причем

$$\varphi_n^\pm < \psi_n^\pm \leq \varphi_{n+1}^\pm,$$

где $\{\varphi_n^\pm\}$ определяется из (24), а $\varphi_\pm$ — КР уравнения (5). Из отмеченных свойств $\psi_n^\pm$ следует, что они сходятся к $\varphi_\pm$ быстрее $\varphi_n^\pm$. Однако для построения $\psi_n^\pm$ на каждом шагу итераций (25) следует выполнить дополнительную операцию деления. Поэтому трудно отдать предпочтение какому-либо из указанных итерационных процессов.

Отметим, что итерации вида (25) для симметрического случая $d\sigma(s) = G(s) ds$ применялись рядом авторов ([15, 16]). Была установлена равномерная сходимость ψ_n при $\mu < 1$. Однако оценки скорости сходимости не были получены.

§ 3. Моменты функций $\varphi_\pm$, классификация в консервативном случае

1°. В ряде вопросов теории уравнений (1) и связанных с ними уравнений факторизации (9) важное значение имеет вопрос существования моментов функций $V_\pm$:

$$\alpha_k^\pm \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty t^k V_\pm(t) dt, \quad k \geq 0$$

и получение соотношений между этими моментами.

В работах [10, 25] получена богатая информация в указанном направлении.

Для уравнений (1)–(3) аналогичную роль играют моменты отрицательного порядка функций $\varphi_\pm$:

$$\beta_k^\pm = \int_a^b \frac{1}{s^{k+1}} \varphi_\pm(s) d\sigma_\pm(s) = \int_a^b \frac{1}{s^{k+1}} d\rho_\pm(s), \quad k \geq 0, \quad (26)$$

где $\rho_\pm(s) = \int_a^s \varphi_\pm(\tau) d\sigma_\pm(\tau)$.

Существует следующая очевидная связь между $\alpha_k^\pm$ и $\beta_k^\pm$:

$$\beta_k^\pm = \frac{1}{k!} \alpha_k^\pm. \quad (27)$$

Она позволяет перефразировать результаты [11] по моментам $\alpha_k^\pm$ в терминах $\beta_k^\pm$. При этом можно сформулировать соответствующие свойства ядра K с помощью мер $d\sigma_\pm$.

2°. В § 1 было указано на важность вопроса о значениях $\gamma_\pm = \alpha_0^\pm$ в КС. Ответ на этот вопрос тесно связан с существованием и зна-

ком момента $v \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x K(x) dx$ ядра K . Использование величины v в

вопросе существования решения однородного консервативного уравнения (1), (3), по-видимому, исходит из работы Линдлея [18] (см. § 5).

Пуст функции $K_\pm$ представлены в виде (3). Тогда $\mu = \sum_{\pm} \times \int_a^b \frac{d\sigma_\pm(s)}{s} (\leq 1)$. Обозначим $v_\pm \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty x K_\pm(x) dx = \int_a^b \frac{d\sigma_\pm(s)}{s^2} \leq +\infty$.

Имеем $\vartheta = \vartheta_+ - \vartheta_-$. Число ϑ определено, как только конечна хотя бы одна из величин $\vartheta_\pm$. Ему мы будем приписывать значение $+\infty$, если $\vartheta_+ = +\infty$, $\vartheta_- < +\infty$ и значение $-\infty$, если $\vartheta_+ < +\infty$, $\vartheta_- = +\infty$.

Пусть, как и прежде, $\gamma_\pm = \int_0^\infty V_\pm(t) dt = \int_a^b \frac{dp_\pm(s)}{s}$. В § 1 было

отмечено, что $\gamma_\pm \leq 1$ и в КС ($\mu=1$) хотя бы одно из этих чисел равно 1.

1. Вопрос о том, какое из этих чисел равно 1 решается с помощью знака ϑ . Соответствующие результаты, полученные в [10, 25], сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема А. Пусть $\exists \vartheta \in [-\infty, \infty]$. Тогда

а) $0 < \vartheta \leq +\infty \Leftrightarrow \gamma_+ = 1, \gamma_- < 1;$

б) $-\infty \leq \vartheta < 0 \Leftrightarrow \gamma_+ < 1, \gamma_- = 1;$

в) $\vartheta = 0 \Leftrightarrow \gamma_\pm = 1. \blacktriangleright$

Результат этой теоремы позволяет классифицировать факторизацию (8) в КС.

В [26] рассмотрен вопрос о величинах $\gamma_\pm$ для КУ (9) в случае $\vartheta_\pm = +\infty$. Учитывая, что если $\exists \delta, C_- > 0$ такие, что $d\sigma_+(s) \leq C_- d\sigma_+(s)$ на $[0, \delta]$, то $K_+(x) < C_- K_-$ на $[\tau, \infty)$ ($\tau > 0$), а также, что из $(\Delta(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_+(s) - \sigma_-(s))$

$$\int_a^b \frac{|d\Delta(s)|}{s^2} < +\infty \Rightarrow \text{в. п. } \int_{-\infty}^{\infty} x K(x) dx,$$

то из теорем 2 и 3 работы [26] следует

Теорема Б. Пусть в КУ (9) функции $K_{\pm}$ представлены в виде (3). $\bar{v}_{\pm} = \int_a^b \frac{d\sigma_{\pm}(s)}{s^3} = +\infty$, причем меры $d\sigma_{\pm}(s)$ удовлетворяют одному из условий а) или б)

$$\text{а) } d\sigma_{+}(s) \leq d\sigma_{-}(s) \text{ на } [a, b]; \quad (28)$$

$$\text{а) } \int_a^b \frac{|d(\sigma_{+}(s) - \sigma_{-}(s))|}{s^3} < +\infty \text{ и } \exists \delta > 0 \text{ такое, что}$$

$$d\sigma_{+}(s) \leq C_{-} d\sigma_{-}(s), \quad s \in [0, \delta) \subset [a, b] \quad (29)$$

(здесь $C_{-} = \text{const} > 0$).

Тогда $\gamma_{-} = 1$.

Если выполняются неравенства, обратные к (28) или (29), то $\gamma_{+} = 1$. ►

3°. Существование (конечность) моментов $\beta_k^{\pm}$ функций $\varphi_{\pm}$ зависит от существования соответствующих моментов функций $K_{\pm}$. Из результатов работ [10, 11] следует

а) В случае $\gamma_{-} < 1$ (например, если $\mu < 1$ или $\mu = 1, \theta > 0$)

$$\text{из } \int_a^b \frac{d\sigma_{+}(s)}{s^k} < +\infty \Rightarrow \int_a^b \frac{d\rho_{+}(s)}{s^k} < +\infty, \quad k \geq 0.$$

б) В случае $\gamma_{-} = 1$ (например, при $\mu = 1, \theta \leq 0$)

$$\text{из } \int_a^b \frac{d\sigma_{+}(s)}{s^k} < +\infty \Rightarrow \int_a^b \frac{d\rho_{+}(s)}{s^{k-1}} < +\infty, \quad k \geq 1.$$

Аналогичные соотношения имеются между $\int_a^b \frac{d\sigma_{-}(s)}{s^k}$ и $\int_a^b \frac{d\rho_{-}(s)}{s^p}$,

$p = k, k - 1$.

В добавление к сказанному отметим, что для приложений важно также получение соотношений между моментами разных порядков функций $K_{\pm}$ и $\varphi_{\pm}$.

Если $d\sigma_{+} = d\sigma_{-}$, то $K_{+} = K_{-}$, $\varphi_{+} = \varphi_{-}$, следовательно $\rho_{+} = \rho_{-} = \rho$. В этом случае лемме 3.4 из [10] можно придать следующую форму:

$$\text{а) Если } \int_a^b \frac{d\sigma(s)}{s^3} = +\infty, \text{ то } \int_a^b \frac{d\rho(s)}{s^3} = +\infty.$$

$$\text{б) Если } \int_a^b \frac{d\sigma(s)}{s^3} < +\infty, \text{ то справедливо равенство}$$

$$\int_a^b \frac{d\rho(s)}{s^2} = \left(\frac{1}{2} \int_a^b \frac{d\sigma(s)}{s^3} \right)^{1/2}. \quad (30)$$

Учитывая связь (26) между α_n^+ и β_n^+ , можно написать соотношение между моментами β_k^+ и $\theta_k^+ \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \frac{d\sigma(s)}{s^{k+1}}$, аналогичные соотношениям (4.6—4.8) из [10].

Имеем

$$\beta_{2k}^+ + \beta_{2k}^- = \theta_{2k} + \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j C_{2k}^j \beta_{2k-j}^+ \beta_j^-, \quad (31)$$

где $\theta_{2k} \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{2k}^+ + \theta_{2k}^-$.

В симметрическом случае $d\sigma_+ = d\sigma_-$, $\beta_j^+ = \beta_j^- = \beta$ из (31) получаем

$$\beta_{2k} = \frac{1}{2} \theta_{2k} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j C_{2k}^j \beta_{2k-j} \beta_j.$$

§ 4. Применение факторизации к уравнениям Винера—Хопфа

1°. Применение факторизации (8) к уравнениям (1) и ряд других вопросов теории уравнений (1) связаны с изучением следующего уравнения восстановления:

$$\Phi(x) = V(x) + \int_0^x V(x-t) \Phi(t) dt, \quad (32)$$

$$V \geq 0, \quad \gamma = \int_0^\infty V(t) dt \leq 1.$$

Такие уравнения представляют самостоятельный интерес в ряде вопросов теории вероятностей и др. Их изучению посвящено большое количество работ.

Уравнение (32) обладает единственным локально интегрируемым решением Φ на $[0, \infty)$, при этом $V \geq 0$. Если $\gamma < 1$, то $\Phi \in L_1(0, \infty)$, причем $\|\Phi\|_{L_1^+} = \gamma(1-\gamma)^{-1}$. Если же $\gamma = 1$, то $\Phi \notin L_1^+$. Справедлива следующая лемма (см. [24]).

Лемма 2. При $\gamma = 1$ справедлива асимптотика

$$\int_0^x \Phi(t) dt = O(x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Если $a_1 = \int_0^{\infty} t V(t) dt < +\infty$, то $\int_0^x \Phi(t) dt \sim \frac{x}{a_1}$ при $x \rightarrow \infty$.

Если же $a_1 = +\infty$, то $\int_0^x \Phi(t) dt = o(x)$, $x \rightarrow \infty$. ►

В [24] было установлено одно важное свойство решения Φ уравнения (32). Оказывается, что если функция V вполне монотонна, то таковой является также функция Φ . Соответствующие результаты работы [24] по уравнению (32) можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема В. Пусть в уравнении (32) функция V вполне монотонна, т. е. представляется в виде

$$V(x) = \int_a^b e^{-xs} d\rho(s), \quad (34)$$

ρ — непрерывная слева, неубывающая функция на $[a, b]$, причем

$$\rho(a) = 0, \quad a \int_a^b \frac{d\rho(s)}{s} = \gamma \leq 1.$$

Тогда Φ допускает представление

$$\Phi(x) = \int_a^b e^{-xp} d\omega(p),$$

где ω — неубывающая функция на $[0, b]$, $\omega(0) = 0$.

Если характеристическое уравнение

$$\int_a^b \frac{d\rho(s)}{s-p} = 1 \quad (35)$$

обладает решением $p = p_1 \in [0, a]$, то Φ имеет вид

$$\Phi(x) = \frac{1}{m_1} e^{-p_1 x} + \int_{a+}^b e^{-xp} d\omega(p), \quad (36)$$

$$\text{где } m_1 = \int_a^b \frac{d\rho(s)}{(s-p_1)^2} < +\infty.$$

Если же уравнение (35) не обладает решением $p \in [0, a]$, то

$$\Phi(x) = \int_a^b e^{-xp} d\omega(p). \quad (37)$$

В консервативном случае $\gamma = 1$ решением характеристического уравнения (35) служит $p_1 = 0$. Тогда $m_1 = \int_a^b \frac{dp(s)}{s^2} \cdot \blacktriangleright$

2°. Рассмотрим теперь уравнение (1). Приведем сначала некоторые общие построения работ [9—11].

Используя факторизацию (8), уравнение (1) можно переписать в виде

$$(I - V_-)(I - V_+)f = g, \quad (38)$$

(38) сводится к следующим двум уравнениям

$$(I - V_-)F = g. \quad (39)$$

$$(I - V_+)f = F. \quad (40)$$

Введем резольвентные функции Φ_- и Φ_+ уравнений (39) и (40) соответственно. Они определяются из следующих уравнений восстановления:

$$\Phi_{\pm}(x) = V_{\pm}(x) + \int_0^x V_{\pm}(x-t) \Phi_{\pm}(t) dt. \quad (41)$$

Если $\gamma_- < 1$, то решение уравнения (39) записывается в виде

$$F(x) = g(x) + \int_x^{\infty} \Phi_-(t-x) g(t) dt. \quad (42)$$

Если $\gamma_- = 1$, то при некоторых дополнительных ограничениях на функцию

g (обеспечивающих сходимость интегралов в правой части (42)) из (42) определяется одно из решений уравнения (39) (которое в [11] названо основным решением (39)).

В [11] доказано, что если $\gamma_- = 1$, $g \in L_1^+$, то равенством (42) определяется решение F уравнения (39), причем

$$\int_0^x F(t) dt = o(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Если $\int_0^{\infty} t |g(t)| dt < +\infty$, то $F \in L_1^+$.

Что касается уравнения (40), то $\forall F \in L_1^{\text{loc}}$ оно имеет единственное решение $f \in L_1^{\text{loc}}$, причем

$$f(x) = F(x) + \int_0^x \Phi_+(x-t) F(t) dt. \quad (43)$$

Специально рассмотрим случай уравнения (1) при $g(x) \equiv C e^{-sx}$ (где $s > 0$ — параметр)

$$P(x, s) = C e^{-xs} + \int_0^x K(x-t) P(t, s) dt. \quad (44)$$

Из (42) имеем

$$F_s(x) \equiv F(x, s) = C e^{-xs} [1 + \hat{\Phi}_-(s)] = C e^{-xs} \frac{1}{1 - \hat{V}_-(s)}.$$

С учетом (13) получаем

$$F_s(x) = C \varphi_+(s) e^{-xs}. \quad (45)$$

Функция $f(x) = P(x, s)$ определяется согласно (43) и имеет вид

$$P(x, s) = C e^{-xs} \varphi_+(s) \left| 1 + \int_0^x \Phi_+(t) e^{-ts} dt \right|. \quad (46)$$

В частном случае для уравнения (44) с симметрическим ядром специального вида формула (46) была получена в теории переноса (см. [5, 7]).

Полагая в (46) $x = 0$, получаем

$$P(0, s) = C \varphi_+(s).$$

Эта формула имеет интересную физическую интерпретацию (см. [7]).

Если $\gamma_+ < 1$, то формула (46) справедлива также при $s = 0$.

Рассмотрим тот частный случай уравнения (44), когда $\mu < 1$,

$C = \sqrt{1 - \mu}$ и $s = 0$:

$$P_\mu(x) = \sqrt{1 - \mu} + \int_0^x K(x-t) P_\mu(t) dt. \quad (47)$$

Имеем

$$P_\mu(x) = 1 + \int_0^x \Phi_\mu^+(t) dt. \quad (48)$$

Если $\mu \rightarrow 1$, то $\Phi_\mu^+ \rightarrow \Phi$ по топологии L_1^{loc} . В выражении (48) совершив предельный переход при $\mu \rightarrow 1$ получаем

$$\lim_{\mu \rightarrow 1} P_\mu(x, 0) = 1 + \int_0^x \Phi_+(t) dt, \quad (49)$$

где Φ_+ соответствует консервативному уравнению $\mu = 1$. Сходимость является равномерной по x на компактах из $[0, \infty]$. В конце параграфа будет получена одна новая формула для функций $\varphi_\pm$. Из (18) и теоремы В следует, что $\Phi_\pm$ допускают представления

$$\Phi_\pm(x) = \int_0^b e^{-xs} d\omega_\pm(s). \quad (50)$$

Свойства функций $\omega_{\pm}$ аналогичны свойствам ω . Применяя к (50) преобразование Лапласа с учетом (41) получаем

$$(1 - V_{\pm}(s))^{-1} = 1 + \int_0^{\infty} \frac{d\omega_{\pm}(s)}{s + p}.$$

Используя (13) приходим к искомым формулам

$$v_{\pm}(s) = 1 + \int_0^{\infty} \frac{d\omega_{\pm}(p)}{s + p}. \quad (51)$$

§ 5. Однородное уравнение

1°. Одним из центральных вопросов теории уравнений (1), (2) является проблема построения положительных решений однородного уравнения

$$S(x) = \int_0^x K(x-t) S(t) dt, \quad (52)$$

$$S(0) = 1, \quad x = 1$$

и изучение асимптотики решения S при $x \rightarrow \infty$. Частным случаем этой задачи посвящены сотни работ как чисто математического, так и прикладного характера.

Уравнение (52) представляет большой интерес в связи с известной проблемой Милна в теории переноса. Оно имеет важные приложения также в теории вероятностей.

Факторизация (8) сводит уравнение (52) к системе

$$(I - V_{-}) F = 0, \quad (53)$$

$$(I - V_{+}) S = F. \quad (54)$$

Пусть выполнено равенство $\gamma_{-} = 1$. (Например, если функция K четная или выполнены условия теорем А или В). Тогда уравнение (53) кроме тривиального (основного) решения $E \equiv 0$ обладает также очевидным нетривиальным решением $F \equiv 1$ (или $F \equiv C$). Подставляя в (43) $F = 1$ получаем

$$S(x) = 1 + \int_0^x \Phi_{+}(t) dt.$$

Первые математические результаты по существованию положительных решений консервативного уравнения (52) для тех случаев, когда не конкретизируется вид ядра K , получены в работах Линдлея [18] и Спитцера [19]. Работа [19] посвящена доказательству того, что уравнение (52) с симметрическим ядром K обладает положительным решением S , и изучению асимптотики этого решения.

В работах [9—11] были получены обобщения и уточнения результатов [18, 19] по ряду направлений.

Если $\gamma_+ < 1$, то функция S , определенная согласно (54), ограничена, стало быть $S \in M^+$ и удовлетворяет уравнению (52). Если же $\gamma_{\pm} = 1$, то S неограничена. В [11] доказано, что и тогда S из (54) удовлетворяет уравнению (52).

Сопоставление (54) и (49) приводит к интересному равенству

$$S(x) = \lim_{\mu \rightarrow 1} P_{\mu}(1; 0)$$

(сходимость равномерная на компактах). Этот факт для частного случая ядра вида $K(x) = \frac{1}{2} E_1(|x|)$ на „физическом уровне строгости“ был получен в исследованиях по теории переноса (см. [7]).

2°. До сих пор в этом параграфе мы не использовали представления (3). Рассмотрим теперь тот случай, когда функция K имеет представление вида (3). В этом случае функция V_+ допускает представление (18), а функция Φ_+ — представление (59). Поэтому для решения S однородного уравнения (52) в случае симметричного ядра или в случае $\exists \vartheta, \vartheta = 0$ из (54) и (37) имеем (в этих случаях $p_1 = 0$, т. к. $\gamma_+ = 1$)

$$S(x) = 1 + \frac{x}{x_1} + \int_a^b \frac{1 - e^{-xp}}{p} d\omega(p). \quad (55)$$

В случае $\vartheta < 0$ из (54) и (37) получаем

$$S(x) = 1 + \int_0^b \frac{1 - e^{-xp}}{p} d\omega(p). \quad (56)$$

Формула (55) впервые была получена в работе М. Г. Крейна [12] для случая симметричного ядра K , обладающего моментами до четвертого порядка включительно.

В работе М. Г. Крейна и Ю. Л. Шмудьяна [13] были получены (55) и (56) при предположении о конечности v . В [14] формула (56) получена в случае (уже разобранный в [11]), когда $\vartheta_+ < +\infty$, $\vartheta_- = +\infty$.

Приведенное нами доказательство содержит обобщение в следующем плане:

а) в случае симметричного ядра не требуется существования первого момента v .

б) В несимметричном случае требуется полная монотонность только функции K_+ (а не K_-). Кроме того, требуется выполнение любого условия, при котором имеет место равенство $\gamma_- = 1$ (например, если

$\vartheta_{\pm} = \int_0^{\infty} x K_{\pm}(x) dx < +\infty$, то должно выполняться условие $\vartheta = \vartheta_+ = -\vartheta_- \leq 0$ или если выполнены условия $\vartheta_- = +\infty$, $\vartheta_+ < +\infty$, или если выполняется одно из условий теоремы Б или теоремы 1).

Таким образом, метод нелинейных уравнений факторизации дает общий и простой путь изучения консервативного однородного уравнения (52) как в общем случае, так и в случае вполне монотонных функций K_+ и K_- .

Из (55) имеем

$$S(x) = 1 + \frac{x}{a_1} + r(0) - r(x), \quad (57)$$

где $r(x)$ — вполне монотонная функция, а $a_1 = \int_0^{\infty} x V(x) dx$.

Обозначим $q(x) = S(x) - \frac{x}{a_1}$. Легко показать, что q удовлетворяет равенству

$$q(x) = q_0(x) + \int_0^x V(x-t) q(t) dt, \quad (58)$$

где $q_0(x) = \frac{1}{a_1} \int_x^{\infty} (t-x) V(t) dt \geq 0$. Поэтому $q(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^+$. Если

$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k K(t) dt < +\infty$, то $a_k = \int_0^{\infty} t^k V(t) dt < +\infty$, $k=1, 2, 3$, т. е.

$$\int_a^b \frac{dp(s)}{s^{k+1}} < +\infty.$$

Имеем

$$\widehat{q}_0(p) = \frac{1}{a_1} \int_a^b \frac{dp(\tau)}{\tau^2(\tau+p)}$$

($\widehat{q}_0$ — преобразование Лапласа функции q_0).

$$\text{С учетом } \int_a^b \frac{dp(\tau)}{\tau} = 1 \text{ имеем } 1 - \widehat{V}(p) = p \int_a^b \frac{dp(\tau)}{\tau(\tau+p)}.$$

Из (58) получаем

$$\widehat{q}(p) = \int_a^b \frac{dp(\tau)}{\tau^2(\tau+p)} / a_1 p \int_a^b \frac{dp(\tau)}{\tau(\tau+p)},$$

откуда, с учетом (37), получаем

$$\widehat{r}(p) = - \left[\widehat{q}(p) - \frac{a_2}{a_1^2 p} \right] =$$

$$= \left[\alpha_1 \int_a^b \frac{dp(\tau)}{\tau^3(\tau+p)} + \alpha_2 \int_a^b \frac{dp(\tau)}{\tau^3(\tau+p)} \right] / \alpha_1^2 \int_a^b \frac{dp(\tau)}{\tau(\tau+p)}.$$

Из последней формулы следует, что

$$|r|_{L_1} = r(0) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1^2}{\alpha_1^2} < +\infty, \quad (59)$$

$$r(0) = \frac{\alpha_2 - \alpha_1^2}{\alpha_1^2}. \quad (60)$$

Формулы (59) и (60) были получены в [10] исходя из представления (57). Отметим, что указанное представление является свойством решения уравнения восстановления типа (32). Поэтому оно справедливо как в симметрическом, так и в несимметрическом случаях (см. [11]). Формулы (59) и (60) в несимметрическом случае были выведены в [14].

3°. В конце работы отметим, что в [23] развит редукционный метод решения уравнений (1)–(3), основанный на замене K конечными линейными комбинациями экспонент. Этот метод является уточнением и обобщением метода дискретных ординат Чандрасекара [4] в теории переноса излучения. Его применение означает замену $\sigma_{\pm}$ ступенчатыми функциями. Тогда УА (5) превращается в нелинейную алгебраическую систему. Существенно упрощается также УВ (40).

Институт прикладных проблем
физики АН Армянской ССР

Поступила 3. X. 1986

Լ. Գ. ԱՐԱՐԱՋՅԱՆ, Ն. Բ. ՆՆԳԻՐԱՆՅԱՆ. Լիովին մոնոտոն կորիզներով վիճակ-Հոպֆի
ինտեգրով հավասարումներ (ամփոփում)

Հոդվածը նվիրված է

$$f(x) = g(x) + \int_0^{\infty} K(x-t)f(t) dt,$$

$$K \geq 0, \mu = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx \leq 1.$$

Վիճակ-Հոպֆի ինտեգրով հավասարման ուսումնասիրմանը:

Արդյունքների հիմնական մասը վերաբերվում է այն դեպքին, երբ

$$K(\pm x) \equiv \int_a^b e^{-|x|s} d\sigma_{\pm}(s), \quad x > 0, \quad \sigma_{\pm}(s) \uparrow \text{ըստ } s\text{-ի:}$$

Ֆակտորիզացիայի ու գծային և Համբարձումյանի հավասարումների միջոցով ստացվել են համասեռ և անհամասեռ (1) հավասարման լուծելիության պայմանները: Ստացվել են նաև (1) հավասարման լուծման ուղղակի մեթոդի և լուծման հատկությունների վերաբերյալ արդյունքներ:

L. G. ARABADZHIAN, N. B. ENGIBARIAN. *Wiener-Hopf integral equation with complete monotone kernels* (summary)

The Wiener-Hopf integral equations are studied in this paper:

$$f(x) = g(x) + \int_0^{\infty} K(x-t) f(t) dt$$

where $K \geq 0$, $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx \leq 1$.

The larger part of the results correspond to the case

$$K(\pm x) = \int_a^b e^{-|x|s} d\sigma_{\pm}(s), \quad x > 0, \quad \sigma_{\pm} \uparrow \text{by } s.$$

Using the nonlinear equation of the factorization and generalized Ambartsumyan equation results on the solution existence of nonhomogeneous and homogeneous equation (1), and about reduction method of solution are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Wiener., E. Hopf. Über eine Klasse singular Integral-gleichungen, Sitzung. Press. Akad. Wiss, 1931, 696—706.
2. E. Hopf. Mathematical problem of radiative equilibrium, Cambridge Tract, 1934, № 31, 135.
3. В. А. Амбарцумян. Научные труды, Ереван, 1960, 430 с.
4. С. Чандрасекар. Перенос лучистой энергии, М., ИЛ, 1953, 432 с.
5. В. В. Соболев. Перенос лучистой энергии, М., Гостехиздат, 1956, 391 с.
6. I. W. Busbridge. The mathematics of the radiative transfer, Oxford, 1960, 214p.
7. В. В. Иванов. Перенос излучения и спектры небесных тел, М., Наука, 1969, 472 с.
8. Н. Б. Егибарян. Об интегральных уравнениях на полупрямой с разностными ядрами, ДАН Арм.ССР, 1972, 54, № 3, 129—133.
9. Н. Б. Егибарян, А. А. Арутюнян. Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения, Мат. сб., 1975, № 1, 35—58.
10. Н. Б. Егибарян, А. Г. Арабаджян. О нелинейных уравнениях факторизации операторов Винера-Хопфа, Ереван, ун-т. Препринт, 1979, № 1, 27 с.
11. А. Г. Арабаджян, Н. Б. Егибарян. Уравнения в светках и нелинейные функциональные уравнения, Мат. анализ, т. 22 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР), М., 1984, 175—244.
12. М. Г. Крейн. О линейных интегральных уравнениях, играющих роль в теории уравнений Винера-Хопфа, Мат. исследования, Кшиппев, «ШТИНИЦА», 1976, вып. 42, 47—90, 1977, вып. 45, 67—92.
13. М. Г. Крейн, Ю. А. Шмудль. Уравнения Винера-Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты, Изв. АН Арм.ССР, Математика, 1982, 17, № 4, 307—327, 17, № 5, 335—375.
14. М. Г. Крейн, Ю. А. Шмудль. Об одном дополнении к статье «Уравнение Винера-Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты». Изв. АН Арм.ССР, Математика, 1986, 21, № 3, 301—305.
15. R. L. Bowden., P. F. Zweifel. A Banach space analysis of the Chandrasekhar H-equation, Astroph. J., 1976, 210p.

16. D. Masson. Moment problem approximants to the Chandrasekhar H-equation, J. Math. Phys., 1981, 22, № 3, 562—564.
17. Н. Б. Енибарян, М. А. Мнацаканян. Об одном интегральном уравнении с разностным ядром, Мат. заметки, 1976, 19, № 6, 927—932.
18. V. Lindley. The theory of queue with a singl sever., Proc. Cambridge Phil. Soc., 1952, № 48, 277—289.
19. F. Spitzer. The Wiener-Hopf equation whose kernel is a probability density, Duke Math. J., 1957, 24, № 3, 1960, 27, № 3.
20. М. Г. Крайн. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН, 1958, 13, № 5, 3—120.
21. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, М., 1968, 496 с.
22. И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, М., Наука, 1971, 352 с.
23. Н. Б. Енибарян, Э. А. Мелконян. О методе дискретных ординат, ДАН СССР, 1987, 292, № 2, 322—326.
24. Н. Б. Енибарян, А. А. Позасян. Об одном классе интегральных уравнений восстановления, Мат. заметки, т. 47, вып. 5, 1990.
25. А. Г. Арабаджян. Уравнения Винера-Хопфа в консервативном случае и нелинейные уравнения факторизации, Канд. диссерт., Ереван, 1981.
26. А. Г. Арабаджян. О факторизации консервативных интегральных операторов Винера-Хопфа. Мат. заметки, 1989, т. 46, вып. 1, 3—10.

УДК 517.53

Г. В. МИКАЕЛЯН

О РОСТЕ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННО-ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

1. Пусть $f(z)$ ($f(0) \neq \infty$) — мероморфная в $\mathbb{C}$ функция. В добавление к общеизвестным характеристическим функциям Р. Неванлинны

$$T(r, f) \equiv m(r, f) + N(r, f) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta + \\ + \int_0^r \frac{n(t, f)}{t} dt \quad (0 < r < +\infty),$$

где $n(t, f)$ — считающая функция полюсов, введем в рассмотрение также функцию

$$m_2(r, f) \equiv \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log |f(re^{i\theta})||^2 d\theta \right\}^{1/2}.$$

Майлс и Шиа [1] для целой мероморфной функции f порядка λ получили точную оценку следующего вида:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, f) + N(r, 1/f)}{m_2(r, f)} \geq c(\lambda), \quad (1)$$

где $c(\lambda) > 0$ зависит только от λ .

Используя оценку (1) они уточнили установленную в работе [2] Эдreja и Фукса оценку снизу для величины

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, f) + N(r, 1/f)}{T(r, f)}.$$

Сонс [3], [4] получил аналогичные результаты в случае круга для семейства произведений $\pi_\alpha(z)$ ($-1 < \alpha < +\infty$) М. М. Джрбашяна [5], [6] при натуральных значениях параметра α (оценка вида (1) была получена лишь в случае $\alpha = 1$). При этом эти произведения, по-видимому, ввиду отсутствия надлежащей изученной информации, приписывались Цудзи [7].

Настоящая статья посвящена установлению оценки типа (1) для одного семейства классов мероморфных в полуплоскости функций обобщенно-ограниченного вида, введенных А. М. Джрбашяном в [8]. При этом, в основе результатов статьи лежат характеристические функции, восходящие к Цудзи (см., например, [9]).

2. Прежде чем сформулировать основные результаты статьи приведем ряд результатов, лежащих в их основе и введем некоторые обозначения.

Пусть последовательность комплексных чисел $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty$ лежит в нижней полуплоскости $G^{(-)} = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$, и такова, что при некотором α ($-1 < \alpha < +\infty$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^{1+\alpha} < +\infty. \quad (2)$$

Тогда бесконечное произведение типа Бляшке А. М. Джрбашяна [10], [11]

$$B_\alpha(w) \equiv \prod_{k=1}^{\infty} b_\alpha(w; w_k), \quad (3)$$

где

$$b_\alpha(w; w_k) \equiv \exp \left\{ - \int_0^{|v_k|} \left[(\tau + i(w - w_k))^{-1-\alpha} + \right. \right. \\ \left. \left. + [i(w - \overline{w_k}) - \tau]^{-1-\alpha} \right] \tau d\tau \right\}, \quad (4)$$

сходится в полуплоскости $G^{(-)}$, определяя там аналитическую функцию с нулями $\{w_k\}_1^\infty$.

В частном случае $\alpha = 0$ функция $B_\alpha(w)$ принимает вид

$$B_0(w) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{w - w_k}{w - \overline{w_k}}.$$

Ряд существенных свойств функции $B_\alpha(w)$ описывается посредством применения оператора интегрирования $W^{-\alpha}$ Вейля.

Пусть $f(w) \equiv f(u + iv)$ — произвольная функция, определенная почти всюду в $G^{(-)}$. Оператор $W^{-\alpha}$ формально определяется следующим образом:

$$W^{-\alpha} f(u + iv) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-v}^v (v - t)^{\alpha-1} f(u + it) dt \quad (0 < \alpha < +\infty),$$

$$W^0 f(u + iv) \equiv f(u + iv),$$

$$W^{-\alpha} f(u + iv) \equiv W^{(1+\alpha)} \frac{\partial}{\partial v} f(u + iv) \quad (-1 < \alpha < 0),$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера.

Следуя [8] обозначим через N_α^m ($0 < \alpha < +\infty$) множество аналитических в нижней полуплоскости $G^{(-)}$ функций $f(w)$, подчиненных следующим условиям:

(а) Для любого $\rho < 0$ в полуплоскости $G_\rho^{(-)} = \{w : \operatorname{Im} w < \rho\}$ лежит не более чем конечное число нулей функции $f(w)$.

(б) Существует угловой сектор вида $\Lambda(\delta_0, R_0) = \left\{ w : \left| \frac{\pi}{2} + \arg w \right| \leq \delta_0, |w| \geq R_0 \right\}$ (где $0 < \delta_0 < \frac{\pi}{2}$, $0 < R_0 < +\infty$), такой, что для любого компакта $K \subset \Lambda(\delta_0, R_0)$

$$\sup_{w \in K} \left\{ \int_1^\infty \sigma^{p-1} |\log |f(w - i\sigma)| | d\sigma \right\} < +\infty,$$

где $p > 0$ — целое число такое что $p - 1 < \alpha \leq p$.

(в)

$$\sup_{v=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha} \log |f(u + iv)|| du < +\infty.$$

В работе [8] установлено параметрическое представление классов N_α^m . Классы N_α^m совпадают с множествами аналитических в полуплоскости $G^{(-)}$ функций, допускающих факторизации

$$f(w) = B_+(w) \exp \left\{ \Gamma(1+\alpha) \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1+\alpha)}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{(w-t)^{1+\alpha}} + ic \right\}, \quad (5)$$

где $B_+(w)$ — сходящиеся произведения типа Бляшке (3), (4), с нулями, подчиненными условию (2), c — вещественная постоянная, а функция $\mu(t)$ ограниченной вариации на оси $-\infty < t < +\infty$.

Пусть $f(w)$ — мероморфная в $G^{(-)}$ функция с нулями $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty$ и полюсами $\{z_k\}_1^\infty = \{t_k + i\rho_k\}_1^\infty$ ($\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = 0$). Для любого v ($-\infty < v < 0$) введем в рассмотрение следующие величины:

$$E(v, f) \equiv \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} [W^{-\alpha} \log |f(u + iv)|]^2 du \right\}^{1/2},$$

$$n(v, f) \equiv \sum_{v_k < v} 1,$$

$$N(v, f) \equiv \int_{-\infty}^v n(t, f) dt \equiv \sum_{v_k < v} (v - v_k) + \sum_{\rho_k < v} (v - \rho_k).$$

Будем говорить, что функция $N(v, f)$ имеет порядок λ , если

$$\lim_{v \rightarrow -\infty} \frac{\log N(v, f)}{|\log |v||} = \lambda.$$

3. Приведем теперь основные результаты статьи. Они относятся к произведениям типа Бляшке $B_+(w)$ и классам аналитических функций N_α^m обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости. Однако следует особо отметить, что аналогичные примененным в статье ме-

тоды в круге приводят к подобным результатам для произведений типа Бляшке $\pi_a(z)$ и классов мероморфных функций N_a обобщенно-ограниченного вида М. М. Джрбашяна [5], [6], [12] (гл. IX).

Теорема 1. Пусть последовательности комплексных чисел $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty$ и $\{z_k\}_1^\infty \equiv \{t_k + ip_k\}_1^\infty$ лежат в полуплоскости $G^{(-)}$, для фиксированного значения параметра α ($0 < \alpha < +\infty$) удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^{1+\alpha} < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |p_k|^{1+\alpha} < +\infty, \quad (6)$$

и для какой-либо из функций

$$f_a^{(1)}(w) \equiv B_a(w; \{w_k\}) \equiv \prod_{k=1}^{\infty} b_a(w; w_k), \quad f_a^{(2)}(w) \equiv \frac{B_a(w; \{w_k\})}{B_a(w; \{z_k\})},$$

$N(v, f_a^{(1,2)})$ имеет порядок λ . Тогда при $\alpha - 1 < \lambda < \alpha$:

1°. Справедлива оценка

$$\lim_{v \rightarrow -0} \frac{|v|^{a-1/2} N(v, f_a^{(1,2)})}{E(v, f_a^{(1,2)})} \geq c_1(\alpha, \lambda), \quad (7)$$

где $c_1(\alpha, \lambda) > 0$ — постоянная, зависящая лишь от α и λ .

2°. Если для некоторой последовательности $v_n \rightarrow -0$.

$$E(v_n, f_a^{(1,2)}) \geq |v_n|^{-\beta}, \quad \text{то } \beta \leq \lambda - \alpha + \frac{1}{2}.$$

Теорема 2. 1°. Если функция $f(w) \in N_a^\pi$ и $\{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ ее нули, то для функции $g_a(w) \equiv f(w)/B_a(w; \{w_k\}) \in N_a^\pi$ справедлива формула

$$[E(v, g_a)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix \cdot v} |\hat{\mu}(x)|^2 dx, \quad (8)$$

где $\hat{\mu}(x)$ — преобразование Фурье меры $\mu(x)$ из представления (5)

$$\hat{\mu}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix \cdot t} d\mu(t).$$

2°. Пусть последовательность комплексных чисел $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ удовлетворяет условию (2) при некотором α ($0 < \alpha < +\infty$), и функция $N(v, B_a(w; \{w_k\}))$ имеет порядок λ ($\alpha - 1 < \lambda < \alpha$). Тогда существуют функции $f(w) \equiv B_a(w; \{w_k\}) \times g_a(w) \in N_a^\pi$, для которых

$$\lim_{v \rightarrow -0} \frac{|v|^{a-1/2} N(v, f)}{E(v, f)} = 0. \quad (9)$$

Теорема 3. Если нули B_α лежат на конечном числе вертикальных полупрямых из $G^{(-)}$ и выполняется одно из следующих двух условий

$$\begin{aligned} \text{а) } \alpha > 1, \text{ б) } \lim_{v \rightarrow -0} \frac{|v|^\alpha N(v, B_\alpha)}{N(v, B_\alpha)} = \lambda, \quad 0 < \lambda < \alpha, \text{ то} \\ \lim_{v \rightarrow -0} \frac{|v|^{\alpha-1/2} N(v, B_\alpha)}{E(v, B_\alpha)} \leq c_2(\alpha, \lambda). \end{aligned} \quad (10)$$

Замечание 1. В теореме 3 по существу доказана точность выбора степени $\alpha - \frac{1}{2}$ величины $|v|$ в оценке (7). Вопрос об уточнении констант $c_{1,2}(\alpha, \lambda)$ в оценках (7) и (10) остается открытым, что, впрочем, имеет место в работах Сонса [5], [6] (оценки типа (10) у Сонса не имеет).

Замечание 2. Если при $-1 < \alpha \leq 0$ выполняются условия (6), то как нетрудно проверить

$$\lim_{v \rightarrow -0} N(v, f_\alpha^{(1,2)}) = N(0, f_\alpha^{(1,2)}) < +\infty,$$

поэтому, мы рассматриваем только положительные значения α .

4. Доказательства теорем 1—3 основаны на леммах этого и следующего пунктов.

Для мероморфной в полуплоскости $G^{(-)}$ функции $f(w) \equiv f(u + iv)$ формально обозначим

$$\begin{aligned} \Omega(x, v, f) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} W^{-x} \log |f(u + iv)| du \\ (-\infty < x < +\infty, -\infty < v < 0, -1 < \alpha < +\infty). \end{aligned}$$

Следующие две леммы доказаны в работе автора [13], где исследован вопрос об ограниченности величины $E(v, B_\alpha)$ при $v \rightarrow -0$.

Лемма 1. Пусть последовательность комплексных чисел $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ удовлетворяет условию (2). Тогда для любых v ($-\infty < v < 0$) и α ($-1 < \alpha < +\infty$) преобразование Фурье $\Omega(x, v, B_\alpha(w; \{w_k\}))$ существует и определяется по формуле

$$\begin{aligned} \Omega(x, v, B_\alpha(w; \{w_k\})) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-ixu_k} \int_{-v_k}^{|v_k|} (|v_k| - |\tau|)^\alpha e^{-|x(\tau+v)|} \cdot \\ &\cdot \operatorname{sgn}(\tau+v) d\tau \quad (-\infty < x < +\infty). \end{aligned} \quad (11)$$

Лемма 2. В условиях леммы 1, если $-\frac{1}{2} < \alpha < +\infty$, то для всех v ($-\infty < v < 0$)

$$W^{-x} \log |B_\alpha(u + iv; \{w_k\})| \in L_2(-\infty, +\infty),$$

и справедливо равенство Парсеваля

$$[E(v, B_*)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Omega(x, v, B_*)|^2 dx.$$

Отметим, что функция $W^{-\alpha} \log |b_*(u + iv_k; w_k)|$ при $-1 < \alpha \leq -\frac{1}{2}$

в класс $L_2(-\infty, +\infty)$ не входит (см. [13]).

Пусть последовательность $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ при некотором α ($-1 < \alpha < +\infty$) удовлетворяет условию (2). При $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < v < 0$ введем следующие обозначения:

$$K(x, v, B_*) \equiv - \sum_{v_k > v} e^{-ixu_k} \int_{-|v_k|}^{|v_k|} (|v_k| - |\tau|)^\alpha e^{-|x(\tau+v)|} \operatorname{sgn}(\tau+v) d\tau, \quad (12)$$

$$L(x, v, B_*) \equiv e^{|x|u} \sum_{v_k > v} e^{-ixu_k} \int_{-|v_k|}^{|v_k|} (|v_k| - |\tau|)^\alpha e^{|x|\tau} d\tau. \quad (13)$$

В силу формулы (11) имеем

$$\Omega(x, v, B_*) \equiv - \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)} [K(x, v, B_*) + L(x, v, B_*)]. \quad (14)$$

Лемма 3. Пусть последовательности $\{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ и $\{z_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ при некотором α ($-\frac{1}{2} < \alpha < +\infty$) удовлетворяют условиям (6)

Тогда если $f_*^{(2)}$ — функция из теоремы 1, а функция F_* имеет вид.

$$F_*(w) \equiv B_*(w; \{i \operatorname{Im} w_k\}) B_*(w; \{i \operatorname{Im} z_k\}),$$

то при любом v ($-\infty < v < 0$)

$$E(v, f_*^{(2)}) \leq E(v, F_*). \quad (15)$$

Доказательство. Отметим сначала (см. [13]), что при $v_k \leq v$

$$\int_{-|v_k|}^{|v_k|} (|v_k| - |\tau|)^\alpha e^{-|x(\tau+v)|} \operatorname{sgn}(\tau+v) d\tau \leq 0.$$

Поэтому в силу формул (12)—(14)

$$\begin{aligned} |\Omega(x, v, f_*^{(2)})| &= |\Omega(x, v, B_*(w; \{w_k\})) - \\ &- \Omega(x, v, B_*(w; \{z_k\}))| \leq |\Omega(x, v, B_*(w; \{i \operatorname{Im} w_k\}))| + \\ &+ |\Omega(x, v, B_*(w; \{i \operatorname{Im} z_k\}))| = -\Omega(x, v, F_*) = |\Omega(x, v, F_*)|. \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 2 следует (15).

5. Для удобства изложения условимся обозначать

$$K_*(x, v) \equiv K(x, v, B_*(w; \{i \operatorname{Im} w_k\})) + K(x, v, B_*(w; \{i \operatorname{Im} z_k\})).$$

$$L_*(x, v) = L(x, v, B_*(w; \{i \lim w_k\})) + L(x, v, B_*(w; \{i \lim z_k\})),$$

и всюду писать $\mathcal{Q}_*(x, v)$, $N(t)$, $n(t)$, соответственно, вместо $\mathcal{Q}(x, v$, $f_*^{(1,2)})$, $N(t, f_*^{(1,2)})$, $n(t, f_*^{(1,2)})$.

Лемма 4. При выполнении условий (6)

$$\lim_{t \rightarrow -0} |t|^{1+\alpha} n(t) = 0 \quad (-1 < \alpha < +\infty), \quad (16)$$

$$\lim_{t \rightarrow -0} |t|^\alpha N(t) = 0 \quad (0 < \alpha < +\infty). \quad (17)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\int_{-\infty}^0 (-t)^{1+\alpha} dn(t) < +\infty, \quad (18)$$

$$\lim_{v \rightarrow -0} \int_v^0 (-t)^{1+\alpha} dn(t) = 0. \quad (19)$$

Для любого $\varepsilon < 0$, в силу (18)

$$\begin{aligned} +\infty &> \int_{-\infty}^0 (-t)^{1+\alpha} dn(t) = (-\varepsilon)^{1+\alpha} n(\varepsilon) + \\ &+ (1+\alpha) \int_{-\infty}^0 (-t)^\alpha n(t) dt \geq (1+\alpha) \int_{-\infty}^0 (-t)^\alpha n(t) dt, \end{aligned}$$

тем самым

$$\int_{-\infty}^0 (-t)^\alpha n(t) dt < +\infty.$$

Ввиду (19)

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow -0} \{ \lim_{t \rightarrow -0} (-t)^{1+\alpha} n(t) - (-v)^\alpha n(v) + \\ + (1+\alpha) \int_v^0 (-t)^\alpha n(t) dt \} = 0, \end{aligned}$$

и поскольку

$$(1+\alpha) \int_v^0 (-t)^\alpha n(t) dt > (-v)^{1+\alpha} n(v),$$

то справедливо соотношение (16).

Применяя правило Лопиталя из (16) при $0 < \alpha < +\infty$ получим

$$\lim_{t \rightarrow -0} |t|^\alpha N(t) = \lim_{t \rightarrow -0} \frac{1}{\alpha} |t|^{1+\alpha} n(t) = 0.$$

Замечание. В силу леммы 4, если при $x > 0$ выполнены условия (6) и $N(t)$ имеет порядок λ , то $\lambda \leq x$.

Для оценивания $N(t)$ мы воспользуемся нижеприведенной леммой роста Поля (см., напр., [14], лемма 4.7).

Лемма 5. Предположим, что $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные положительные функции от t при $t \geq t_0$, $\psi(t)$ — неубывающая функция и далее, что

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = 0.$$

Тогда существуют сколь угодно большие значения r такие, что одновременно выполняются неравенства

$$\varphi(t) \leq \varphi(r) \quad (t_0 \leq t < r)$$

$$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \leq \frac{\varphi(r)}{\psi(r)} \quad (r < t).$$

Пусть функция $N(t)$ имеет порядок λ . Полагая $\varphi(t) = N\left(-\frac{1}{t}\right)/t^{\lambda-1}$, $\psi(t) = t^{2\epsilon}$, где ϵ — малое положительное число, применим лемму 5. Это дает

$$N\left(-\frac{1}{t}\right)/t^{\lambda-1} \leq N\left(-\frac{1}{r}\right)/r^{\lambda-1} \quad (t < r),$$

$$N\left(-\frac{1}{t}\right)/t^{\lambda+1} \leq N\left(-\frac{1}{r}\right)/r^{\lambda+1} \quad (t \geq r).$$

Отсюда получаем, что для любого $\epsilon > 0$ существует последовательность $t_n \rightarrow -0$ такая, что

$$N(t) \leq \left| \frac{t_n}{t} \right|^{\lambda-\epsilon} N(t_n) \quad (-\infty < t \leq t_n), \quad (20)$$

$$N(t) \leq \left| \frac{t_n}{t} \right|^{\lambda+\epsilon} N(t_n) \quad (t_n \leq t < 0). \quad (21)$$

6. Доказательство теоремы 1. Введем следующие обозначения:

$$\varphi_\alpha(t, v) = - \int_{-v}^{-t} (-t - |\tau|)^\alpha e^{-|x(\tau+v)|} \operatorname{sgn}(\tau+v) d\tau \quad (-\infty < t \leq v < 0),$$

$$\psi_\alpha(t, v) = e^{|x|v} \int_{-v}^{-t} (-t - |\tau|)^\alpha e^{|x|\tau} d\tau \quad (v \leq t < 0).$$

Нетрудно проверить (см. [13]), что при $\alpha \geq 0$

$$0 \leq \varphi_\alpha(t, v) \leq \frac{1 - e^{2|x|v}}{|x|} (-t)^\alpha, \quad (22)$$

$$\psi_n(t, v) \leq e^{|x|v} \frac{e^{-|x|t} - e^{|x|t}}{|x|} (-t)^n. \quad (23)$$

Это следует из очевидных равенств

$$\begin{aligned} \varphi_n(t, v) &= e^{|x|(v-t)} \int_{v-t}^{-t} \tau^n e^{-|x|\tau} d\tau + \\ &+ e^{|x|(v+t)} \int_0^{-t} \tau^n e^{|x|\tau} d\tau - e^{|x|(t-v)} \int_0^{v-t} \tau^n e^{|x|\tau} d\tau, \\ \psi_n(t, v) &= e^{|x|v} \left\{ e^{-|x|t} \int_0^{-t} \tau^n e^{-|x|\tau} d\tau + e^{|x|t} \int_0^{-t} \tau^n e^{|x|\tau} d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Далее, в силу формул (12), (13) и оценок (22), (23) имеем

$$K_n(x, v) = \int_{-\infty}^v \varphi_n(t, v) dn(t) \leq \frac{1 - e^{2|x|v}}{|x|} \int_{-\infty}^v (-t)^n dn(t), \quad (24)$$

$$L_n(x, v) \leq \int_v^0 \psi_n(t, v) dn(t) \leq \frac{e^{|x|v}}{2|x|} \int_v^0 (-t)^n (e^{-|x|t} - e^{|x|t}) dn(t). \quad (25)$$

Так как дробь $\frac{e^{-|x|t} - e^{|x|t}}{-t}$ ($v \leq t < 0$) — невозрастающая функция от t , то из (25) следует также оценка

$$L_n(x, v) \leq \frac{1 - e^{2|x|v}}{|x||v|} \int_v^0 (-t)^{n+1} dn(t). \quad (26)$$

Произведя в интегралах (24) и (26) дважды интегрирование по частям, ввиду соотношений (16) и (17) получим

$$\begin{aligned} K_n(x, v) &\leq \frac{1 - e^{2|x|v}}{|x|} \left\{ |v|^n n(v) + \alpha |v|^{n-1} N(v) + \right. \\ &\quad \left. + \alpha(\alpha-1) \int_{-\infty}^v (-t)^{n-2} N(t) dt \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} L_n(x, v) &\leq \frac{1 - e^{2|x|v}}{|x|} \left\{ -|v|^n n(v) - (1+\alpha) |v|^{n-1} N(v) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha(1+\alpha)}{|v|} \int_v^0 (-t)^{n-1} N(t) dt \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Для оценки интегралов в (27) и (28) воспользуемся неравенствами (20), (21). Это дает

$$\int_{-\infty}^x (-t)^{n-2} N(t) dt \leq \frac{N(t_n) |t_n|^{n-1}}{\lambda - \alpha + 1 - \varepsilon}, \quad \text{при } \lambda > \alpha - 1,$$

$$\int_{t_n}^0 (-t)^{\alpha-1} N(t) dt \leq \frac{N(t_n) |t_n|^\alpha}{\alpha - \lambda - \varepsilon}, \text{ при } \lambda < \alpha.$$

Остается заметить, что последние оценки ввиду лемм 2, 3, формул (14) и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1 - e^{2|x|/t_n}}{|x|} \right)^2 dx = 2 |t_n| \int_0^{+\infty} \left(\frac{1 - e^{-2x}}{x} \right)^2 dx,$$

приводят к утверждению 1° теоремы.

Доказательство 2° также получается из оценок (27) и (28). Так как $N(t)$ имеет порядок λ , то существует постоянная $c_0 > 0$ такая, что для любого малого $\varepsilon > 0$ при $v \rightarrow -0$

$$\int_{-\infty}^v (-t)^{\alpha-2} N(t) dt < c_0 + \frac{|v|^{\alpha-\lambda-1-\varepsilon}}{\lambda-\alpha+1+\varepsilon} (\lambda \geq \alpha-1),$$

$$\int_v^0 (-t)^{\alpha-1} N(t) dt \leq \frac{|v|^{\alpha-\lambda-\varepsilon}}{\alpha-\lambda-\varepsilon} (\lambda < \alpha).$$

Следовательно существует постоянная $c(\alpha, \lambda) > 0$ такая, что для любого малого $\varepsilon > 0$ при $v \rightarrow -0$

$$E(v, f_n^{(1,2)}) \leq c(\alpha, \lambda) |v|^{\alpha-\lambda-1/2-\varepsilon}.$$

Отсюда очевидным образом следует утверждение 2°.

Доказательство теоремы 2. 1°. Воспользуемся следующим представлением (см. [8]):

$$W^{-\alpha} \log |g_n(w)| = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{w-t} \right\}.$$

Отсюда в силу формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixu}}{u^2 + a^2} du = \frac{\pi}{|a|} e^{-|a|x} (a \neq 0)$$

(см. [15], стр. 323) и теоремы Фубини следует, что

$$\begin{aligned} Q(x, v, g_n) &= -\frac{v}{\pi \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixu}}{(u-t)^2 + v^2} du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} d\mu(t) = \hat{\mu}(x). \end{aligned}$$

Однако $W^{-\alpha} \log |g_n(w)| \in L_1(-\infty, +\infty) \cap L_2(-\infty, +\infty)$ и поэтому справедлива формула (8).

2°. Для любого β ($0 < \beta < 1$) положим

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0 \\ -t^{1-\beta}, & \text{при } 0 < t < 1 \\ 0, & \text{при } t \geq 1. \end{cases}$$

Тогда при $x > 0$

$$\mu(x) = (\beta - 1) \int_0^1 \frac{e^{-tx}}{t^\beta} dt = (\beta - 1) x^{\beta-1} \int_0^x \frac{e^{-u}}{t^\beta} dt.$$

Поскольку

$$\int_0^x \frac{e^{-u}}{t^\beta} dt = \Gamma(1-\beta) e^{-x} x^{\beta-1} \quad (1-\beta)$$

(см. [15], стр. 322), то при $x > x_0$ 0

$$|\mu(x)| > \frac{\Gamma(2-\beta)}{2} x^{\beta-1}.$$

Из последнего неравенства получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{|x|v} |\widehat{\mu}(x)|^2 dx &> \frac{[\Gamma(2-\beta)]^2}{4} \int_{x_0}^{+\infty} e^{xv} x^{2\beta-2} dx = \\ &= \frac{[\Gamma(2-\beta)]^2}{4} |v|^{1-2\beta} \int_{x_0/|v|}^{+\infty} e^{-x} x^{2\beta-2} dx > c(\beta) |v|^{1-2\beta}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $c(\beta) > 0$ постоянная.

Так как при $\alpha \geq 0$ $W^{-\alpha} \log |B_\alpha(w)| \leq 0$ (см. [10], [11]) и $W^{-\alpha} \log |g_\alpha(w)| \leq 0$ по выбору $\mu(t)$, то для функции (5) в силу оценки (29) и представления (8) имеем

$$E(v, f) \geq E(v, g_\alpha) > \sqrt{c(\beta)} |v|^{1/2-\beta}.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $v_0 < 0$ такое, что при $v > v_0$

$$\frac{|v|^{n-1/2} N(v, f)}{E(v, f)} < [c(\beta)]^{-1/2} |v|^{\alpha+\beta-1} N(v, f) \leq [c(\beta)]^{-1/2} |v|^{\alpha+\beta-1-\lambda-\varepsilon}.$$

Выбрав $\beta > \lambda - \alpha + 1$, получаем (9).

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим сначала случай, когда нули B_α лежат на одной полупрямой, т. е. $\{w_k\}_1^\infty \subset \{w = u_0 + ih : -\infty < h < 0\}$ ($-\infty < u_0 < +\infty$). Тогда в силу формул (12)–(14) справедливо неравенство

$$|\varphi(x, v, B_\alpha)| \geq \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)} \left\{ \int_{-\infty}^v \varphi_\alpha(t, v) dn(t) + \int_v^0 \psi_\alpha(t, v) dn(t) \right\}. \quad (30)$$

Применив дважды интегрирование по частям в последних интегралах, получим

$$\int_{-\infty}^v \varphi_n(t, v) dn(t) = n(v) \psi_n(v, v) - N(v) \frac{\partial \varphi_n(v, v)}{\partial t} + \\ + \int_{-\infty}^v N(t) \frac{\partial^2 \varphi_n(t, v)}{\partial t^2} dt, \quad (31)$$

$$\int_v^0 \psi_n(t, v) dn(t) = \lim_{t \rightarrow -0} n(t) \psi_n(t, v) - \lim_{t \rightarrow -0} N(t) \frac{\partial \psi_n(t, v)}{\partial t} - \\ - n(v) \psi_n(v, v) + N(v) \frac{\partial \psi_n(v, v)}{\partial t} + \int_v^0 N(t) \frac{\partial^2 \psi_n(t, v)}{\partial t^2} dt. \quad (32)$$

Легко можно проверить, что

$$\varphi_n(v, v) = \psi_n(v, v) = \int_0^{-v} \tau^\alpha e^{-|x|\tau} d\tau + e^{2|x|v} \int_0^{-v} \tau^\alpha e^{|x|\tau} d\tau, \\ \frac{\partial \varphi_n(v, v)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_n(v, v)}{\partial t} = -|x| \int_0^{-v} \tau^\alpha e^{-|x|\tau} d\tau + \\ + |x| e^{2|x|v} \int_0^{-v} \tau^\alpha e^{|x|\tau} d\tau - 2(-v)^\alpha e^{|x|v}.$$

Замечая теперь, что в силу леммы 4

$$\lim_{t \rightarrow -0} n(t) \psi_n(t, v) = \lim_{t \rightarrow -0} N(t) \frac{\partial \psi_n(t, v)}{\partial t} = 0,$$

из (30)–(32) получаем

$$|\Omega(x, v, B_n)| > \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)} \left\{ \int_{-\infty}^v N(t) \frac{\partial^2 \varphi_n(t, v)}{\partial t^2} dt + \right. \\ \left. + \int_v^0 N(t) \frac{\partial^2 \psi_n(t, v)}{\partial t^2} dt \right\}. \quad (33)$$

Далее, нетрудно проверить, что при $\alpha > 1$

$$\frac{\partial^2 \varphi_n(t, v)}{\partial t^2} = |x|^2 \varphi_n(t, v) + 2\alpha(-t)^{\alpha-1} e^{|x|v} - 2\alpha(v-t)^{\alpha-1}, \\ \frac{\partial^2 \psi_n(t, v)}{\partial t^2} = |x|^2 \psi_n(t, v) + 2\alpha(-t)^{\alpha-1} e^{|x|v}, \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_n(t, v)}{\partial t^2} = \alpha(\alpha-1) \varphi_{n-2}(t, v) > 0. \quad (35)$$

Из формул (33), (34) и неравенства (35) вытекают следующие оценки:

$$\begin{aligned} |\Omega(x, v, B_\alpha)| &\geq \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\alpha)} \int_v^0 (-t)^{\alpha-1} N(t) dt > \\ &\geq \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1+\alpha)} e^{|x|v^{-1}|v|^\alpha} N(v) \quad (\alpha > 1). \end{aligned}$$

Отсюда, в силу леммы 2 при $\alpha > 1$

$$E(v, B_\alpha) \geq \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1+\alpha)} |v|^{\alpha-1/2} N(v).$$

Предположим теперь, что выполнено условие 6). В силу очевидных оценок

$$\begin{aligned} |\Omega(x, v, B_\alpha)| &> \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_v^0 \psi_\alpha(t, v) dn(t), \\ \psi_\alpha(t, v) &> \frac{(-t)^{1+\alpha}}{1+\alpha} e^{|x|v}, \end{aligned}$$

по лемме 2 будем иметь

$$E(v, B_\alpha) > \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(2+\alpha)} |v|^{-1/2} \int_v^0 (-t)^{1+\alpha} dn(t).$$

Далее, применяя дважды интегрирование по частям в последнем интеграле, приходим к оценке

$$\begin{aligned} &\frac{|v|^{-1/2} N(v)}{E(v, B_\alpha)} \leq \\ &< \frac{2\Gamma(2+\alpha) |v|^\alpha N(v)}{\sqrt{2\pi} \left\{ -|v|^{1+\alpha} n(v) - (1+\alpha) |v|^\alpha N(v) + \alpha(1+\alpha) \int_v^0 (-t)^{\alpha-1} N(t) dt \right\}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} &\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\int_v^0 (-t)^{\alpha-1} N(t) dt}{|v|^\alpha N(v)} = \\ &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{-(-v)^{\alpha-1} N(v)}{-\alpha(-v)^{\alpha-1} N(v) + (-v)^\alpha n(v)} = \frac{1}{\alpha - \lambda}. \end{aligned}$$

Следовательно (36) переходит в неравенство

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{|v|^{\alpha-1/2} N(v)}{E(v, B_\alpha)} \leq \frac{2\Gamma(2+\alpha)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha - \lambda}{\lambda(\lambda + 1)}.$$

Доказательство утверждений теоремы в общем случае, когда

$\{w_k\} \subset \bigcup_{m=1}^N \{w = z_0^m + ih; -\infty < h < 0\} (-\infty < z_0^m < +\infty, m=1, 2, \dots, N)$,
 что приводится к рассмотренному посредством оценок

$$[E(v, B_0)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{m=1}^N \sum_{u=u_0^m} W^{-\alpha} \log |b_m(u + iv; w_k)| \right|^2 du \geq \\
\geq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{u=u_0^m} W^{-\alpha} \log |b_m(u + iv; w_k)| \right|^2 du; m = 1, 2, \dots, N,$$

которые вытекают из неравенства

$$W^{-\alpha} \log |b_m(w; \zeta)| \leq 0 \quad (w; \zeta \in G^{(-)}, z \geq 0).$$

Ереванский государственный
 университет

Поступила 16. II. 1988

Գ. Վ. ՄԻԿԱԵԼԻԱՆ. Կիսահարթությունում բնդանդացված-սահմանափակ տեսքի ֆունկցիաների աճի մասին (ամփոփում)

Կիսահարթությունում անալիտիկ $f(w) \equiv f(u + iv)$ ֆունկցիաների Ա. Մ. Զորբաշյանի-
 մոտերած $N_\alpha^m (0 < \alpha < +\infty)$ դասի համար սահմանափակվում է

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [W^{-\alpha} \log |f(u + iv)|]^2 du$$

մեծության աճի կապը զրոների հաշվման $N(v, f)$ ֆունկցիայի աճի հետ (երբ $v \rightarrow -0$),
 որտեղ $W^{-\alpha}$ -ն Վեյլի ինտեգրալ օպերատորն է:

G. V. MIKHAELIAN. On the growth of generalized bounded type functions
 in the half-plane (summary)

The interplay between

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [W^{-\alpha} \log |f(u + iv)|]^2 du$$

and functions which count the number of zeros of $f(w) \equiv f(u + iv)$ as $v \rightarrow -0$ is
 investigated, where $W^{-\alpha}$ is the Weyl integral operator for the A. M. Djorbashian
 classes of analytic functions in the half-plane.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Miles, D. F. Shea. An extremal problem in value-distribution theory, Quart. J. Math., Oxford, 1973, v. 24, № 95, 377—393.
2. A. Edrei, W. H. J. Fuchs. On the growth of meromorphic functions with several deficient values, Trans. Amer. Math. Soc., 1959, v. 93, № 2, 252—318.
3. L. R. Soss. Value distribution of canonical products in the unit disc, Math. Japonica, 1977, v. 22, № 1, 27—38.

4. L. R. Sols. Zeros of functions with slow growth in the unit disc, *Math. Japonica* 1979, v. 24, № 3, 271—282.
5. М. М. Джрбашян. О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, *ДАН Арм.ССР*, 1945, 3, № 1, 3—9.
6. М. М. Джрбашян. К проблеме представимости аналитических функций, *Сообщ. Инст. мат. и мех. АН Арм.ССР*, 1948, вып. 2, 3—40.
7. M. Tsuji. *Potential Theory in Modern Function Theory*. Tokyo, Maruzen, 1959.
8. А. М. Джрбашян. Соотношения равновесия и факторизационные теоремы для мероморфных в полуплоскости функций, *Изв. АН Арм.ССР, сер. матем.*, 1986, XXI, № 3, 213—279.
9. А. А. Гольдберг, И. В. Островский. *Распределение значений мероморфных функций*, М.: Наука, 1970.
10. А. М. Джрбашян. Функции типа Бляшке для полуплоскости, *ДАН СССР*, 1979, 246, № 6, 1295—1298.
11. А. М. Джрбашян. Функции типа Бляшке для полуплоскости, *Изв. АН Арм.ССР, сер. матем.*, 1983, XVIII, № 6, 409—440.
12. М. М. Джрбашян. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, М.: Наука, 1966.
13. Г. В. Микаелян. Исследование роста произведений типа Бляшке-Невыминых методом преобразований Фурье, *Изв. АН Арм.ССР, сер. матем.*, 1983, XVIII, № 3, 216—229.
14. У. К. Хейман. *Мероморфные функции*, М., Мир, 1966.
15. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. *Интегралы и ряды*, М., Наука, 1981.

УДК 517.547

Л. А. ГАЛСТЯН, В. К. ДУБОВОЙ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ПРОБЛЕМЫ ШУРА

Введение

1°. При применении методов теории аналитических J -растягивающих матриц-функций (J -теории) [1, 2] в решении различных интерполяционных задач типа проблемы моментов [3, 4] в качестве центральных объектов выступают те или иные элементарные J -растягивающие матрицы-функции. Они же появляются (в несколько иной форме) в схеме, предложенной в [5] для решения других, родственных задач.

Связь этих элементарных матриц-функций с интерполяционными проблемами настолько тесна, что всякий раз удается решить в известном смысле обратную задачу: задачу о восстановлении исходных данных интерполяционной проблемы по заданному конкретному элементарному множителю. В таких случаях принято говорить, что проблема адекватна заданному соответствующего J -элементарного множителя.

В работах [6—10] авторов настоящей статьи методами J -теории решается интерполяционная проблема Шура в следующей постановке:

Пусть $S_{p,q}$ — класс голоморфных в круге $|\zeta| < 1$ сжимающих матриц-функций $\theta(\zeta)$ размерности $p \times q$.

Даны постоянные матрицы порядка $p \times q$: $c_0, c_1, \dots, c_n$.

Требуется: 1) найти необходимые и достаточные условия, при которых существует матрица-функция $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$, имеющая заданный отрезок ряда Тейлора:

$$\theta(\zeta) = c_0 + c_1 \zeta + \dots + c_n \zeta^n + \dots;$$

2) при условии разрешимости проблемы описать ее общее решение.
 Условие

$$I - C_n C_n^* \geq 0, \quad (0.1)$$

где через C_n всюду здесь обозначается матрица первых $n+1$ тейловых коэффициентов матрицы-функции $\theta(\zeta)$:

$$C_n = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & c_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n-1} & \dots & c_0 \end{bmatrix},$$

является критерием разрешимости проблемы Шура. Если в (0.1) выполняется строгое неравенство, задача называется невырожденной. В противном случае — вырожденной.

Вопрос об адекватности невырожденной проблемы Шура заданию растягивающего кратного множителя полного ранга решен в [6].

Иная возникает ситуация при рассмотрении вырожденной задачи.

В работе [8] по исходным данным C_n строится элементарный кратный множитель неполного ранга

$$B(\zeta) = \begin{vmatrix} a(\zeta) & b(\zeta) \\ c(\zeta) & d(\zeta) \end{vmatrix}, \quad \tilde{j} = \begin{vmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{vmatrix},$$

посредством которого общее решение $\theta(\zeta)$ вырожденной проблемы Шура представляется в виде дробно-линейного преобразования

$$\theta(\zeta) = [a(\zeta) \omega(\zeta) + b(\zeta)] [c(\zeta) \omega(\zeta) + d(\zeta)]^{-1} \quad (0.2)$$

произвольного параметра $\omega(\zeta) \in S_{p,q}$, равного на конкретном, определяемом данными задачи, подпространстве унитарной константе.

В другой работе [7] того же автора доказывается (теорема о параметризации), что произвольный j -элементарный кратный множитель $B(\zeta)$ (не обязательно полного ранга) представляется в виде

$$B(\zeta) = I + (1 - \tilde{\varepsilon}) \begin{vmatrix} \Lambda_p(\zeta) & 0 \\ 0 & \Lambda_q(\zeta) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P \\ C^* \end{vmatrix} (P - C C^*)^{j-1} [P, C] \times \\ \times \begin{vmatrix} \Lambda_p^*(1) & 0 \\ 0 & \Lambda_q^*(1) \end{vmatrix} \tilde{j}, \quad (0.3)$$

где $\Lambda_r(\zeta) = \Lambda_{r,n}(\zeta) = [I_r, \zeta I_r, \dots, \zeta^n I_r]$, ($r = p, q$), P — ортопроектор*, действующий в пространстве

$$E_p^{(n)} = E_p \oplus \underbrace{E_p \oplus \dots \oplus E_p}_{n+1},$$

C — сжатие, переводящее пространство

$$E_q^{(n)} = E_q \oplus E_q \oplus \dots \oplus E_q$$

в $E_p^{(n)}$ (E_r — r -мерное линейное пространство).

При этом параметры P и C , которые по матрице-функции $B(\zeta)$ определяются однозначно, удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} 1) & V_{p,n} P = P V_{p,n}^* P, \\ 2) & C V_{q,n} = P V_{p,n} C, \\ 3) & P - C C^* > 0, \text{ rang } (P - C C^*) = \text{rang } P, \end{aligned} \quad (0.4)$$

в которых

$$V = V_{r,n} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ I_r & & & \\ & & & \\ & & & I_r & 0 \end{bmatrix} \quad (r = p, q).$$

* Мы часто переходим от матричной терминологии к операторной, имея в виду стандартный ортонормированный базис.

Анализ, проведенный в [8—10], показывает с одной стороны, что при ортогонализации по исходным данным S_n матриц P и C существует определенный произвол. С другой стороны, произвольно заданному кратному множителю неполного ранга либо не отвечает никакая проблема Шура, либо она восстанавливается не однозначно.

Таким образом, становится очевидным, что сама проблема Шура не является задачей, структурно связанной с j -элементарным кратным множителем. Тем самым возникает необходимость в составлении новой интерполяционной задачи, находящейся, в упомянутом выше смысле, во взаимнооднозначном соответствии с j -растягивающим кратным множителем произвольного ранга.

Именно этой цели и посвящена настоящая статья.

2°. Мы исходим из конкретно заданного элементарного кратного множителя (0.3), не задаваясь вопросом, связан ли он с какой-либо задачей Шура, или нет.

Составляя дробно-линейное преобразование (0.2), с произвольным также параметром $\psi(\zeta) \in S_{p,q}$, после несложных, но утомительных вычислений* убеждаемся, что результатом преобразования (0.2) является матрица-функция $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$, т.е. $\theta(\zeta) = \frac{a(\zeta)}{b(\zeta)}$, где $a(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + \dots + c_n\zeta^n + \dots$, $b(\zeta) = d_0 + d_1\zeta + \dots + d_m\zeta^m + \dots$, с которой удовлетворяют уравнению

$$PC_n = C.$$

Отсюда и из соображений, связанных с соотношениями (0.4), заключаем, что искомая задача, названная здесь *-касательной проблемой Шура, должна быть сформулирована так:

Заданы: 1) ортогональный проектор P , действующий в пространстве $E_p^{(n)}$, удовлетворяющий условию

$$P V_{p,n} = P V_{p,n} P; \quad (0.5)$$

2) оператор C , переводящий $E_q^{(n)}$ в $E_p^{(n)}$;

Требуется: 1) найти необходимые и достаточные условия, при которых в классе $S_{p,q}$ существует матрица-функция

$$\theta(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + \dots + c_n\zeta^n + \dots,$$

у которой первые $n+1$ тейлоровых коэффициентов удовлетворяют соотношению

$$PC_n = C; \quad (0.6)$$

2) при условиях разрешимости описать множество решений задачи.

Нетрудно заметить, что неравенство $P - CC^* \geq 0$ является необходимым условием для разрешимости *-касательной проблемы Шура.

В том случае, когда $\text{rang}(P - CC^*) = \text{rang} P$ проблему естественно называть невырожденной. В противном случае она вырождена.

Очевидно некоторое сходство нашей задачи с рассмотренной в [12] касательной проблемой Неванлинны-Пика. Она в некотором смысле явля-

* Эти вычисления подробно изложены в [10].

ется сопряженной к этой проблеме (чем и обусловлено придуманное нами название задачи). Но благодаря введенной здесь нормировке (напомним, в касательной задаче Неванлинны-Пика вместо ортопроектора P фигурирует относительно произвольная матрица A) мы имеем дело с задачей, на наш взгляд более естественной с точки зрения L -теории. Последнее мотивируется хотя бы тем, что именно *-касательная проблема Шура является задачей, адекватной заданию элементарного кратного множителя произвольного ранга.

Этот факт, являющийся в этой статье основным, устанавливается в конце § 2.

А § 1 посвящен критерию разрешимости *-касательной проблемы Шура. Примечательно, что этот критерий, одна сторона которого естественным образом получается в рамках L -теории, является прямым следствием теоремы Б. Сёкефальви-Надя и Ч. Фояша о дилатации коммутантов [13].

В § 2, помимо упомянутой уже теоремы об адекватности, выводится также традиционное в подходе В. П. Потапова основное матричное неравенство, позволяющее представить общее решение *-касательной задачи в форме (0.2).

§ 1

1°. Теорема 1. Для разрешимости *-касательной проблемы Шура необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- 1) $P - CC^* \geq 0$,
- 2) $P V_{p,n} C = C V_{q,n}$.

(1.1)

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица-функция $\theta(\zeta)$ является решением нашей задачи. Тогда соответствующая ее матрица C_n будет сжатием, удовлетворяющим уравнению (0.6).

Отсюда сразу находим

$$1) P - CC^* = P - P C_n C_n^* P = P(I - C_n C_n^*) P \geq 0.$$

Так же легко проверяется выполнение условия 2), если иметь в виду перестановочность матрицы C_n с оператором $V(C_n V_{q,n} = V_{p,n} C_n)$ и свойство (0.5) ортопроектора P .

Достаточность. Воспользуемся теоремой 11.2.3 из [13] (стр. 81).

Выберем в ней

$$T = P V_{p,n} \Delta P, H = \Delta P \subset E_p^{(c)}, T' = V_{q,n}, H' = E_q^{(n)},$$

$$X = \hat{C} : E_q^{(n)} \rightarrow \Delta P.$$

В связи с последним обозначением заметим, что хотя в задаче матрица C задана как отображение $E_q^{(n)}$ в $E_p^{(n)}$, из условия 1) $P - CC^* \geq 0$ следует однако, что $\Delta C \subset \Delta P$, и следовательно C можно рассматривать как оператор $\hat{C}$ из H' в $H = \Delta P$.

Требуемое в используемой теореме соотношение $TX = XT'$ эквивалентно условию 2) $P V_{p, n} C = C V_{q, n}$.

Далее, чтобы придать необходимую форму утверждению упомянутой теоремы, нужно построить минимальные изометрические дилатации U_+ и U'_+ сжатий T и T' соответственно.

Обозначим

$$\widehat{E}_p = \text{пр}_{E_p^{(n)}} \Delta P (E_p^{(0)} = E_p)$$

и составим бесконечную ортогональную сумму

$$K_+ = \widehat{E}_p^{(-)} = \widehat{E}_p \oplus \widehat{E}_p \oplus \dots$$

Сформулируем теперь лемму, доказательство которой будет дано в конце этого параграфа.

Лемма. Пространство K_+ является пространством минимальной изометрической дилатации U_+ сжатия $T = P V_{p, n} | \Delta P$.

Сам оператор U_+ совпадает с односторонним сдвигом $\widehat{V}_p$, с блуждающим порождающим подпространством, совпадающим с $\widehat{E}_p$.

Проще строится минимальная изометрическая дилатация U'_+ сжатия $T' = V_{q, n}$.

Непосредственно проверяется, что

$$K'_+ = E_q^{(-)} = E_q \oplus E_q \oplus \dots$$

а U'_+ совпадает с односторонним сдвигом $V_{q, n}$ с блуждающим порождающим подпространством E_q .

Согласно указанной здесь теореме существует сжатие Y , отображающее K'_+ в K_+ , удовлетворяющее соотношению

$$U_+ Y = Y U'_+ \quad (1.2)$$

и такое, что

$$X = P_+ Y | H', \quad (1.3)$$

где P_+ — ортопроектор из K_+ на $H = \Delta P$.

Имея в виду матричную структуру односторонних сдвигов V_+ и V'_+ , соответствующую разложениям пространств K_+ и K'_+ , сжатие Y , обладающее свойством (1.2), можно отождествить с бесконечной матрицей всех тейлоровых коэффициентов некоторой сжимающей голоморфной матрицы-функции $\widehat{\theta}(\zeta)^*$ размерности $\delta_T \times q$, где δ_T — кратность одностороннего сдвига U_+ .

Далее обозначим

$$\widehat{P} = P_+ | \widehat{E}_p^{(n)} (\widehat{E}_p^{(n)} = \widehat{E}_p \oplus \widehat{E}_p \oplus \dots \oplus \widehat{E}_p)$$

* См. [6], замечание на стр. 206.

и пусть $\hat{C}_n$ — матрица первых $n + 1$ тейлоровых коэффициентов матрицы-функции $\hat{\theta}(\zeta)$. Из рассуждений, проводимых ниже, при доказательстве леммы, следует включение $\Delta P \subset \hat{E}_p^{(n)}$.

Тогда из (1.3) легко находим

$$\hat{P} \hat{C}_n = \hat{C}. \quad (1.4)$$

Нам остаётся дополнить нулями матрицу $\hat{P}$ до ортопроектора P и матрицу $\hat{C}_n$ до матрицы коэффициентов C_n , соответствующей некоторой матрице-функции $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$. В итоге из (1.4) получим требуемое соотношение (0.6).

Теорема доказана.

2°. Перейдем теперь к доказательству использованной в теореме 1 леммы.

Чтобы убедиться, что оператор $U_+ = \hat{V}_{p,-}$ является минимальной изометрической дилатацией сжатия $T = P V_{p,n} | \Delta P$, достаточно проверить выполнение следующих трёх условий:

- 1) $\Delta P \subset \hat{E}_p^{(-)}$;
- 2) $T^n = P_- \hat{V}_{p,-}^n | \Delta P (\Delta P_- = \Delta P)$;
- 3) $\bar{V} (\hat{V}_{p,-}^s | \Delta P) = \hat{E}_p^{(-)} = K_+$.

1) Заметим сначала, что подпространство ΔP , как это следует из свойства (0.5) ортопроектора P , инвариантно относительно оператора $V_{p,n}$. Выберем произвольный вектор $f = (f_0, f_1, \dots, f_n) \in \Delta P \subset E_p^{(n)}$.

По определению пространства $\hat{E}_p$ имеем: $f_0 \in \hat{E}_p$.

Но $V_{p,n}^k f = (f_k, \dots, f_n, 0, \dots, 0) \in \Delta P$, следовательно $f_k \in \hat{E}_n$ ($k = 0, 1, \dots, n$).

Отсюда следует: $f = (f_0, f_1, \dots, f_n) \in \hat{E}_p \oplus \hat{E}_p \oplus \dots \oplus E_p = \hat{E}_p^{(n)}$, так что $\Delta P \subset \hat{E}_p^{(n)} \subset \hat{E}_p^{(-)}$.

Рассмотрим пространство $E_p^{(-)} = E_p \oplus E_p \oplus \dots$, и в нем односторонний сдвиг $V_{p,-}$ с блуждающим порождающим подпространством E_p . Ясно, что $\hat{E}_p^{(-)}$ является подпространством в $E_p^{(\infty)}$. Так же легко усматривается, что оно приводит оператор $V_{p,-}$ к интересующему нас одностороннему сдвигу $\hat{V}_{p,-} : \hat{V}_{p,-} = V_{p,-} | \hat{E}_p^{(-)}$.

Из этого и из того, что $\Delta P \subset \hat{E}_p^{(-)}$ следует:

$$\hat{P}_- \hat{V}_{p,-}^n | \Delta P = P_- V_{p,-}^n | \Delta P, \quad (1.5)$$

где

$$P_- = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (E_p^{(-)} = E_p^{(n)} \oplus E_p^{(n)+}, \Delta P_- = \Delta P).$$

Заметив ещё, что $P_{-} V_{p, n} | \Delta P = P V_{p, n} | \Delta P = T$, из (1.5) находим

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{-} \widehat{V}_{p, n}^s | \Delta P &= P_{-} V_{p, n} \cdot P_{-} V_{p, n} \cdot \dots \cdot P_{-} V_{p, n} | \Delta P = \\ &= P V_{p, n} \cdot P V_{p, n} \cdot \dots \cdot P V_{p, n} | \Delta P = T^n. \end{aligned}$$

Остается проверить выполнение третьего условия.

3) Так как $\Delta P \subset \widehat{E}_p^{(\infty)}$, то

$$\bigvee_{s=0} \left(\widehat{V}_{p, n}^s \Delta P \right) \subset \widehat{E}_p^{(\infty)}.$$

Чтобы доказать обратное включение, достаточно убедиться, что

$$\widehat{E}_p \subset \bigvee_{s=0} \left(\widehat{V}_{p, n}^s \Delta P \right).$$

Пусть $f_0 \in \widehat{E}_p$. Из определения пространства $\widehat{E}_p$ и из того, что $\Delta P \subset \widehat{E}_p^{(n)}$, следует существование векторов $f_1, \dots, f_n$ из $\widehat{E}_p$ таких, что $f = (f_0, f_1, \dots, f_n) \in \Delta P$.

Но тогда, ввиду инвариантности ΔP относительно $V_{p, n}^*$, имеем

$$g = (f_1, \dots, f_n, 0) = V_{p, n}^*(f_0, f_1, \dots, f_n) \in \Delta P.$$

Представляя f_0 в виде $f_0 = (f_0, 0, \dots, 0) = (f_0, f_1, \dots, f_n) - (0, f_1, \dots, f_n) = f - \widehat{V}_{p, n} g$, $f \in \Delta P$, $g \in \Delta P$, находим

$$f_0 \in (\Delta P) \vee \left(\widehat{V}_{p, n} \Delta P \right) \subset \bigvee_{s=0} \left(\widehat{V}_{p, n}^s \Delta P \right),$$

или, что то же самое, $\widehat{E}_p \subset \bigvee_{s=0} \left(\widehat{V}_{p, n}^s \Delta P \right)$.

Лемма доказана.

§ 2

Займемся теперь вопросом об описании множества решений нашей задачи.

1°. Теорема 2. Для того, чтобы голоморфная матрица-функция $\theta(\zeta)$ порядка $p \times q$ была решением *-касательной проблемы Шура, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла неравенству

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} A & B \\ B^* & C \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} P - CC^* \cdot \frac{1}{\zeta} \left\{ P \begin{bmatrix} \theta(\zeta) & & \\ & \dots & \theta(\zeta) \end{bmatrix} - C \right\} \Lambda_{q, n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) \\ \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & \frac{I - \theta^*(\zeta) \theta(\zeta)}{1 - |\zeta|^2} \end{vmatrix} \geq 0. \quad (2.1) \end{aligned}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица-функция

$$\theta(\zeta) = c_0 + c_1 \zeta + \dots + c_n \zeta^n + \dots$$

является решением задачи.

Составим интерполяционную задачу Шура с исходными данными, совпадающими с коэффициентами $c_0, c_1, \dots, c_n$ матрицы-функции $\theta(\zeta)$.

Записав основное матричное неравенство проблемы Шура [8] и умножив его слева и справа на эрмитовую матрицу

$$T = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

с учетом (0.6) получим неравенство (2.1).

Остается заметить, что матрица-функция $\theta(\zeta)$, заведомо являющаяся решением составленной нами задачи Шура, удовлетворяет упомянутому матричному неравенству, а вместе с ним и неравенству (2.1).

Достаточность. Пусть теперь голоморфная матрица-функция $\theta(\zeta)$ удовлетворяет неравенству (2.1).

Из неотрицательности блока C следует принадлежность $\theta(\zeta)$ классу $S_{p,q}$.

Далее, при стремлении ζ к нулю, блоки A и C остаются ограниченными. Отсюда следует, что для выполнения неравенства (2.1) должен быть ограниченным также блок B .

Преобразуем блок B :

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\zeta} \left\{ F \begin{bmatrix} \theta(\zeta) \\ \vdots \\ \theta(\zeta) \end{bmatrix} - C \right\} \Lambda_{q,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) = \\ &= \frac{1}{\zeta} P \begin{bmatrix} \theta(\zeta) \\ \vdots \\ \theta(\zeta) \end{bmatrix} \Lambda_{q,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) - \frac{1}{\zeta} C \Lambda_{q,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) = \\ &= \frac{1}{\zeta} P \begin{bmatrix} \theta(\zeta) \\ \vdots \\ \theta(\zeta) \\ \frac{\theta(\zeta)}{\zeta^n} \end{bmatrix} - \frac{1}{\zeta} C \Lambda_{q,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) = \\ &= \frac{1}{\zeta} \cdot P \left[\frac{c_0 + \varphi_0(\zeta)}{c_n + \frac{c_{n-1}}{\zeta} + \dots + \frac{c_0}{\zeta^n} + \varphi_n(\zeta)} \right] - \frac{1}{\zeta} C \Lambda_{q,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) = \\ &= \frac{1}{\zeta} P C_n \Lambda_{q,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) + \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta} - \frac{1}{\zeta} C \Lambda_{q,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) = \\ &= \frac{1}{\zeta} (P C_n - C) \Lambda_{q,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) + \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta}. \end{aligned}$$

В последнем выражении матрица-функция

$$\Phi(\zeta) = \begin{bmatrix} \varphi_n(\zeta) \\ \vdots \\ \varphi_m(\zeta) \end{bmatrix}$$

голоморфна и удовлетворяет условию $\Phi(0) = 0$. Из этого легко следует, что для ограниченности блока B при сколь угодно малых ζ необходимо выполнение условия

$$P C_n - C = 0.$$

Это означает, что $\theta(\zeta)$ является решением *-касательной задачи Шура.

Теорема доказана.

Неравенство (2.1) по традиции назовем основным матричным неравенством задачи.

Параллельно с основным в схеме В. П. Потапова рассматривается также дуальное матричное неравенство. В случае нашей задачи оно приобретает такой вид:

$$\left[\begin{array}{c|c} P - CC^* & \left\{ P - C \begin{bmatrix} \theta^*(\zeta) \\ \vdots \\ \theta^*(\zeta) \end{bmatrix} \right\} \Delta_{p,n}(\zeta) \\ \hline * & \frac{I - \theta(\zeta) \theta^*(\zeta)}{1 - |\zeta|^2} \end{array} \right] \geq 0.$$

Решая каждое из них мы получим исчерпывающее описание совокупности решений *-касательной проблемы.

2°. Ввиду полной аналогичности рассуждений ограничимся лишь рассмотрением неравенства (2.1).

Ниже решается это неравенство при предположении

$$\text{rang}(P - CC^*) = \text{rang } P, \quad (2.3)$$

то есть при условии невырожденности задачи*.

При решении неравенства (2.1) используются рассуждения, проводимые в [8].

Разложению пространства $E_p^{(n)}$ на ортогональную сумму

$$E_p^{(n)} = \Delta P \oplus \Delta P^\perp$$

соответствуют матричные представления

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P - CC^* = \begin{bmatrix} I - \hat{C}\hat{C}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

(в связи с представлением C вспомним включение $\Delta C \subset \Delta P$).

Отметим, что из (2.3) следует невырожденность блока $I - \hat{C}\hat{C}^*$.

В соответствии с представлениями (2.4) неравенство (2.1) принимает вид

* Вырожденной задаче будет посвящена отдельная работа.

$$\left[\begin{array}{c|c} \left| \begin{array}{cc} I - \widehat{C}\widehat{C}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right| & \frac{1}{\zeta} \left| \begin{array}{c} I \ 0 \\ 0 \ 0 \end{array} \right| \left\{ \Lambda_{p,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) \theta(\zeta) - \left| \begin{array}{c} \widehat{C} \\ 0 \end{array} \right| \Lambda_{q,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right\} \\ \hline * & \frac{I - \theta^*(\zeta) \theta(\zeta)}{1 - |\zeta|^2} \end{array} \right] \geq 0.$$

Последнее равносильно неравенству

$$\left| \begin{array}{cc} A & B \\ B^* & C \end{array} \right| =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} I - \widehat{C}\widehat{C}^* & \frac{1}{\zeta} [I, 0] \left\{ \Lambda_{p,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) \theta(\zeta) - \left| \begin{array}{c} \widehat{C} \\ 0 \end{array} \right| \Lambda_{q,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right\} \\ \hline * & \frac{I - \theta^*(\zeta) \theta(\zeta)}{1 - |\zeta|^2} \end{array} \right] \geq 0,$$

из которого, применением леммы о неотрицательной блок-матрице [2], получаем неравенство

$$\frac{I - \theta^*(\zeta) \theta(\zeta)}{1 - |\zeta|^2} - B^* (I - \widehat{C}\widehat{C}^*)^{-1} B \geq 0,$$

совпадающее, как это легко заметить, с неравенством (10.22) работы [8]. Используя теперь лемму 10.2 из той же работы и принимая во внимание также теорему 2 настоящей статьи, получаем:

Теорема 3. *Общее решение $\theta(\zeta)$ невырожденной *-касательной проблемы Шура представляется в виде дробно-линейного преобразования (0.2) произвольного параметра $\omega(\zeta) \in S_{p,q}$, матрица коэффициентов которого является j -растягивающим элементарным кратным множителем, совпадающим с (0.3).*

3°. Сопоставляя эту теорему упомянутой во введении теореме о параметризации [7], приходим к основному результату данной статьи:

Теорема 4 (об адекватности). *Невырожденная *-касательная проблема Шура является задачей, адекватной заданию j -растягивающего элементарного кратного множителя произвольного ранга.*

Ереванский государственный
университет

Поступила 15. IX. 1987

Լ. Հ. ԳԱԼՏՅԱՆ, Վ. Կ. ԴՈՒԲՈՎՈՅ. Շուրի ինտերպոլյացիոն խնդրի մի ընդհանրացման մասին (ամփոփում)

Ինչպես ցույց է տրված հեղինակների այլ աշխատանքներում, Շուրի դասական ինտերպոլյացիոն խնդիրը, որը լուծվում է j -տեսակի կարևորագույն օբյեկտներից մեկի՝ տարրական բազմապատիկ արտադրիչի օգնությամբ, այնուհանդերձ իր կառուցվածքով լիովին չի համապատասխանում վերջինիս:

Հոգնվածով առաջարկված է մի նոր խնդիր՝ Շուրի *-շաղկապ խնդիրը, որը հանդիսանում է Շուրի խնդրի ընդհանրացումը և որը որոշակի իմաստով տարրական բազմապատիկ արտադրիչի հետ զտնվում է անմիջական փոխմիարժեք կապի մեջ:

L. A. GALSTIAN, V. C. DUBOVOL. *On a generalization of interpolation problem of Shur (summary)*

In the article a new problem, which is called by the authors the Shur *-tangential problem, is suggested.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Потапов. Мультипликативная структура J -нерастягивающих матриц-функций, Труды ММО, 4, 1955, 125—236.
2. А. В. Ефимов, В. П. Потапов. J -растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей, УМН, XXVII, вып. 1 (169), 1973.
3. И. В. Ковалишина, В. П. Потапов. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны-Пика, ДАН Арм.ССР, LIX, № 1, 1974, 17—22.
4. И. В. Ковалишина. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 47, 1983, 455—457.
5. В. М. Адамян, Д. Э. Аров, М. Г. Крейн. Бесконечные блочно-ганкелевы матрицы и связанные с ними проблемы продолжения, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VI, №№ 2—3, 1971, 87—112.
6. Л. А. Галстян. Аналитические j -растягивающие матрицы-функции и проблема Шура, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XII, № 3, 1977, 205—228.
7. В. К. Дубовой. Параметризация элементарного кратного множителя неполного ранга, Сб. науч. тр. Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов, Киев: Наукова думка, 1983, 54—68.
8. В. К. Дубовой. Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций, Теория функций, функц. анализ и их прил., вып. 42, 1984, 46—57.
9. Л. А. Галстян, В. К. Дубовой. О пошаговом процессе в вырожденной проблеме Шура, Рукопись деп. Арм.НИИНТИ, № 27, АР-85, 1985, 42 с.
10. Л. А. Галстян. Аналитические j -растягивающие матрицы-функции и проблема Шура, Кандидатская диссертация, Ереван, 1985.
11. И. Шур. (Schur J.) Über Potenzreihen, die im Innern der Einheitskreise beschränkt sind I, II, Journ. f. Math., 147, 1916, 205—232; 148, 122—145.
12. И. П. Федчина. Касательная проблема Неванлинны-Пика с кратными точками, ДАН Арм.ССР, LXI, № 4, 1975, 214—218.
13. Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, Мвр, 1970.

УДК 517.5

О. В. ГЕВОРГЯН

ОЦЕНКИ МОНОМОВ ЧЕРЕЗ КВАЗИПОЛИНОМЫ И КОЭРЦИТИВНОСТЬ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В работе приняты следующие обозначения. Пусть R^n — n -мерное евклидово пространство $\hat{R}^n = \{\xi \in R^n; \xi_1 \cdots \xi_n \neq 0\}$. Для $\alpha \in R^n$, $\xi \in \hat{R}^n$ и некоторого числа $\rho > 0$ положим

$$\rho^\alpha = (\rho^{\alpha_1}, \dots, \rho^{\alpha_n}), \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n},$$

где

$$\xi_j^{\alpha_j} = |\xi_j|^{\alpha_j} \exp \left\{ \frac{i\pi}{2} \alpha_j (1 - \operatorname{sgn} \xi_j) \right\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Через $(\cdot, \cdot)$ обозначается скалярное произведение в R^n .

Равенства и неравенства между векторами $a, b \in R^n$ понимаются по-координатно, т. е. $a \leq b$ означает, что $a_i \leq b_i$, $i = 1, \dots, n$, а $r_1 \leq a \leq r_2$, где $r_1, r_2 \in R$, $a \in R^n$ и $r_1 \leq r_2$ означает, что $r_1 \leq a_i \leq r_2$, $i = 1, \dots, n$. Записи $=:$ и $=:$ означают равенства по обозначению, где двоеточие стоит со стороны обозначаемой величины. Через C_i обозначены положительные абсолютные константы.

В § 1 рассматривается вопрос оценки мономов через модуль данного квазиполинома (определения приведены ниже). В § 2, используя результаты предыдущего параграфа, доказывается теорема типа Литтльвуда-Пэли, с помощью которой решается задача о коэрцитивности системы квазидифференциальных операторов. Отметим, что эти вопросы для обычных полиномов и дифференциальных операторов рассмотрены в работах ряда авторов и некоторые из них будут указаны в тексте.

§ 1. Оценка мономов через квазиполиномы

Пусть (P) — конечное множество точек из R^n . Сумму $P(\xi) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$, где $\xi \in \hat{R}^n$, γ_α — комплексные числа, назовем квазиполиномом. Пусть

$$P_k(\xi) = \sum_{\alpha \in (P_k)} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \quad k = 1, \dots, M,$$

некоторая система квазиполиномов. Выпуклую оболочку множества $\bigcup_{k=1}^M (P_k)$ назовем многогранником Ньютона (м. Н.) системы квазиполиномов $P_1, \dots, P_M$ и обозначим его через N .

Пусть λ — произвольный единичный вектор из R^n . Тогда множество $\{z; (z, \lambda) = \max_{\beta \in N} (\beta, \lambda)\}$ определяется корректно и называется гранью многогранника N , а вектор λ называется внешней нормалью (или N -нормалью) этой грани. Множество всех внешних нормалей грани Γ обозначим через Λ_Γ . Если $(z, \lambda) = d$ для всех $z \in (P)$, то квазиполином P называется λ -однородным порядка d . Обозначим также через

$$P_{k, \Gamma}(\xi) = \sum_{\alpha \in (P_k) \cap \Gamma} \gamma_{k, \alpha} \xi^\alpha.$$

Очевидно, что $P_{k, \Gamma}(\xi)$ является λ -однородным квазиполиномом для любого вектора $\lambda \in \Lambda_\Gamma$.

Определение 1. Систему квазиполиномов $P_1, \dots, P_M$ назовем регулярной, если:

- а) квазиполиномы $P_1, \dots, P_M$ не имеют общего нуля в $\bar{R}^n$;
- б) для любой грани Γ м. Н. N квазиполиномов $P_{k, \Gamma}$, $k = 1, \dots, M$

не имеют общего нуля в $\bar{R}^n$.

В работе рассматривается следующее неравенство:

$$|\xi^v| \leq C \sum_{k=1}^M |P_k(\xi)|, \quad \xi \in \bar{R}^n, \quad (1)$$

где $C = C(v, P_k)$ положительная постоянная.

Легко видеть, что максимальное множество точек $v \in R^n$, для которых возможна оценка (1), является м. Н. N . Поэтому возникает вопрос описания систем квазиполиномов $P_1, \dots, P_M$, для которых неравенство (1) верно для всех точек $v \in N$. Для обычных полиномов, когда $M = 2$ и $P_1(\xi) = 1$ при некоторых ограничениях полноты (когда N имеет отличные от нуля вершины на каждой координатной оси), вопрос решен В. П. Михайловым [1]. Затем С. Г. Гиндикин [2] доказал неравенство (1) для полиномов при $M = 1$, без требования полноты N . Для квазиполиномов при $M = 2$ и $P_1(\xi) = 1$ задача решена автором в [3]. Отметим, что для нерегулярных полиномов и квазиполиномов задача исследовалась соответственно Г. Г. Казаряном [4] и автором [5]. Для квазиполиномов при произвольном M решение задачи дается следующим предложением:

Теорема 1. Для того, чтобы неравенство (1) имело место для всех $v \in N$, необходимо и достаточно, чтобы система квазиполиномов $P_1, \dots, P_M$ была регулярна.

Доказательство достаточности проведем от обратного предположения. Пусть система квазиполиномов $P_1, \dots, P_M$ регулярна и для некоторой точки $v \in N$ неравенство (1) не выполняется. Это означает, что существует последовательность $\bar{\xi}^s \in \bar{R}^n$, $s \in N$ такая, что

$$\sup \left(|\bar{\xi}^s|^v / \sum_{k=1}^M |P_k(\bar{\xi}^s)| \right) = \infty. \quad (2)$$

Обозначим через $\xi^s = (|\xi_1^s|, \dots, |\xi_n^s|)$, $s \in N$. Тогда $\xi^s \in R^n$ и $\bar{\xi}^s = \xi^s \operatorname{sgn} \bar{\xi}^s$, где $\operatorname{sgn} \bar{\xi}^s = (\operatorname{sgn} \bar{\xi}_1^s, \dots, \operatorname{sgn} \bar{\xi}_n^s)$. Положим $\rho_s = \exp \|\ln \xi^s\|$, $\lambda^s = \ln \xi^s / \|\ln \xi^s\|$, $s \in N$. Здесь $\|\ln \xi^s\|$ означает евклидову норму в R^n вектора $(\ln \xi_1^s, \dots, \ln \xi_n^s)$. Очевидно, что $\xi^s = \rho_s \lambda^s$, $s \in N$, где λ^s — единичный вектор в R^n , и что $\rho_s \rightarrow \infty$, если некоторая координата ξ_j^s ($1 \leq j \leq n$) стремится к нулю или к бесконечности при $s \rightarrow \infty$. Тогда, ввиду (2), переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\rho_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, так как квазиполиномы $P_1, \dots, P_M$ не имеют общего нуля в R^n . Поскольку векторы λ^s , $s \in N$ единичны, то у последовательности λ^s , $s \in N$, есть предельный вектор $\hat{\lambda} \in S^{n-1}$ (S^{n-1} — единичная сфера пространства R^n). За счет перехода к подпоследовательности можно считать, что $\lambda^s \rightarrow \hat{\lambda}$. Из выпуклости многогранника N следует, что $\hat{\lambda}$ является N -нормалью к некоторой грани m . Н. Н. Возьмем в R^n какой-нибудь ортонормированный базис $(e^{11}, \dots, e^{1n})$, где $e^{11} = \hat{\lambda}$, а остальные векторы произвольные. Пусть λ^s в этом базисе имеет следующее разложение:

$$\lambda^s = \sum_{i=1}^n x_{1i}^s e^{1i},$$

причем, так как $\lambda^s \rightarrow \hat{\lambda} = e^{11}$ при $s \rightarrow \infty$, то $x_{11}^s \rightarrow 1$ и $x_{1i}^s = o(x_{11}^s)$, $i = 2, \dots, n$. Обозначим через B_1 подпространство R^n с базисом $(e^{12}, \dots, e^{1n})$, а через V_1^s — ортогональную проекцию вектора λ^s ($s \in N$) на B_1 . Если за счет возможного выбора подпоследовательности $V_1^s = 0$ для всех достаточно больших s , то базис $(e^{11}, \dots, e^{1n})$ обозначим через $(e^1, \dots, e^n)$. В противном случае, за счет перехода к подпоследовательности, можно считать, что $V_1^s \neq 0$ для всех $s \in N$. Положим $\lambda_1^s = V_1^s / \|V_1^s\|$, $s \in N$. Опять же, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\lambda_1^s \rightarrow \hat{\lambda}_1 \in S^{n-2}$ — единичной сфере в R^{n-1} . Перейдем в подпространстве B_1 к какому-нибудь новому ортонормированному базису $(e^{22}, \dots, e^{2n})$, где $e^{22} = \hat{\lambda}_1$, а остальные векторы произвольные. Тогда $\lambda_1^s = \sum_{i=2}^n \tau_{2i}^s e^{2i}$, где $\tau_{22}^s \rightarrow 1$ при $s \rightarrow \infty$ и $\tau_{2i}^s = o(\tau_{22}^s)$, $i = 3, \dots, n$. Пусть вектор λ^s ($s \in N$) в базисе $(e^{11}, e^{22}, \dots, e^{2n})$ имеет разложение

$$\lambda^s = x_{11}^s e^{11} + \sum_{i=2}^n x_{2i}^s e^{2i}.$$

Так как $V_1^s = \lambda_1^s \|V_1^s\|$, то $x_{2i}^s = \|V_1^s\| \tau_{2i}^s$, $i = 2, \dots, n$. Откуда, учитывая, что $\|V_1^s\| \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, будем иметь $x_{21}^s = o(x_{11}^s)$ и $x_{2i}^s = o(x_{22}^s)$, $i = 3, \dots, n$. Поступая аналогично в подпространстве с базисом $(e^{23}, \dots, e^{2n})$ и т. д. получим в итоге (после переобозначений), что

$$\lambda^s = \sum_{i=1}^n x_i^s e^i,$$

где $(e^1, \dots, e^n)$ — ортонормированный базис в R^n . При этом существуют числа m и s_0 такие, что для всех $s \geq s_0$, $x_i^s \neq 0$, $i = 1, \dots, m$; $x_i^s = 0$, $i = m+1, \dots, n$. Очевидно, что $x_i^s \rightarrow 1$ и $x_{i+1}^s = o(x_i^s)$, $i = 1, \dots, m$ при $s \rightarrow \infty$. Без ограничения общности можно считать, что $s_0 = 1$ и $x_i^s > 0$, $i = 1, \dots, m$; $s \in N$. Действительно, можно считать $s_0 = 1$, перенумировав последовательность, откуда отброшены члены с номерами, меньшими чем s_0 . Если существует бесконечное множество индексов s , для которых $x_i^s > 0$, то переходя к подпоследовательности, достигнем цели, а в противном случае заменяем вектор e^i на $-e^i$.

Рассмотрим грани $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ м. Н. Н. выбранные следующим образом:

$$\Gamma_1 = \{a \in N; (a, e^1) = \max_{\beta \in N} (\beta, e^1)\},$$

$$\Gamma_2 = \{a \in \Gamma_1; (a, e^2) = \max_{\beta \in \Gamma_1} (\beta, e^2)\},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Gamma_m = \{a \in \Gamma_{m-1}; (a, e^m) = \max_{\beta \in \Gamma_{m-1}} (\beta, e^m)\}.$$

Очевидно, что $\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \dots \supset \Gamma_m \neq \emptyset$, и из выпуклости многогранника N и его граней следует, что построенные таким образом грани $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ единственные.

Сравним при $\rho_s \rightarrow \infty$ поведение монома $(\bar{\xi}^s)'$ и $P(\bar{\xi}^s) := \sum_{i=1}^M |\rho_i(\bar{\xi}^s)|$. При этом, за счет возможного выбора подпоследовательности можно считать, что при некотором r ($1 \leq r \leq m$), $\rho_s \rightarrow \infty$ и $\rho_s^{x_{r+1}^s} \rightarrow 0 > 1$ (при $r = m = n$ положим по определению $x_{n+1}^s = 0$). Тогда вектор $\bar{\xi}^s$ можно записать в виде

$$\bar{\xi}^s = \rho_s \sum_{i=1}^{n+1} x_i^s e^i \quad (s \in N),$$

где e^{n+1} — произвольный единичный вектор. Пусть $a \in \Gamma_m$, т. е. a — произвольная точка, принадлежащая всем граням $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$. Для удобства изложения введем обозначение: $\Gamma_0 := N$. Очевидно, что $P_{k, \Gamma_0} = P_k$ ($k = 1, \dots, M$). Теперь квазиполином P_{k, Γ_j} ($k = 1, \dots, M$; $j = 0, \dots, r-1$) представим в виде

$$P_{k, \Gamma_j}(\xi) = P_{k, \Gamma_{j+1}}(\xi) + Q_{k, j+1}(\xi), \quad (3)$$

где

$$Q_{k, j+1}(\xi) = \sum_{a \in (Q_{k, j+1}) := (P_k) \cap (\Gamma_j \setminus \Gamma_{j+1})} \gamma_{k, a} \xi^a.$$

Докажем, что при $s \rightarrow \infty$ и $j = 1, \dots, r$

$$Q_{k,j} := Q_{k,j}(\rho_s) \quad \text{sgn } \bar{\xi}^j = \rho_s \quad \left(\alpha, \sum_{i=1}^r x_i^s e^i \right) \cdot o(1), \quad (4)$$

Действительно

$$\begin{aligned} Q_{k,j} &= \rho_s \sum_{\beta \in (Q_{k,j})} \gamma_{k\beta} (\text{sgn } \bar{\xi}^j)^3 \times \\ &\times \rho_s \left(\beta - \alpha, \sum_{i=1}^r x_i^s e^i \right) + \left(\beta, \sum_{i=r+1}^{n+1} x_i^s e^i \right) \left(\alpha, \sum_{i=1}^r x_i^s e^i \right) =: \rho_s R_{k,j}(\rho_s). \end{aligned}$$

Так как $(\alpha, e^j) > \max_{\beta \in (Q_{k,j})} (\beta, e^j)$ по определению грани Γ_j , и $x_i^s = o(x_j^s)$, $i = j+1, \dots, n+1$, то для некоторого положительного числа τ и для достаточно больших s имеем

$$\left(\alpha, \sum_{i=1}^r x_i^s e^i \right) - \max_{\beta \in (Q_{k,j})} \left(\beta, \sum_{i=1}^{n+1} x_i^s e^i \right) \geq \tau.$$

Отсюда немедленно следует, что $R_{k,j}(\rho_s) = o(1)$ при $s \rightarrow \infty$, т. е. соотношение (4) верно. Из определения квазиполинома P_{α, Γ_j} ($j=1, \dots, r$) следует

$$P_{k, \Gamma_j}(\rho_s) \sum_{i=1}^{n+1} x_i^s e^i \quad \text{sgn } \bar{\xi}^j = \rho_s \quad \left(\alpha, \sum_{i=1}^r x_i^s e^i \right) \quad P_{k, \Gamma_j}(\rho_s) \sum_{i=r+1}^{n+1} x_i^s e^i \quad \text{sgn } \bar{\xi}^j. \quad (5)$$

Теперь, по рекуррентной формуле (3), используя соотношения (4) и (5), легко получить

$$\begin{aligned} P(\bar{\xi}^s) &= \sum_{k=1}^M |P_{k, \Gamma_1}(\rho_s) \sum_{i=1}^{n+1} x_i^s e^i \quad \text{sgn } \bar{\xi}^s + Q_{k,1}(\rho_s) \sum_{i=1}^{n+1} x_i^s e^i \quad \text{sgn } \bar{\xi}^s| = \\ &= \sum_{k=1}^M \rho_s \quad \left(\alpha, \sum_{i=1}^r x_i^s e^i \right) |P_{k, \Gamma_1}(\rho_s) \sum_{i=2}^{n+1} x_i^s e^i \quad \text{sgn } \bar{\xi}^s + \rho_s \quad \left(\alpha, \sum_{i=2}^r x_i^s e^i \right)| = \\ &= \dots = \sum_{k=1}^M \rho_s \quad \left(\alpha, \sum_{i=1}^r x_i^s e^i \right) |P_{k, \Gamma_r}(\rho_s) \sum_{i=r+1}^{n+1} x_i^s e^i \quad \text{sgn } \bar{\xi}^s + o(1)|, \quad (6) \end{aligned}$$

Для монома $(\bar{\xi}^s)^r$ имеем

$$(\bar{\xi}^s)^r = \rho_s \quad \left(\alpha, \sum_{i=1}^r x_i^s e^i \right) \quad \rho_s \quad \left(\alpha, \sum_{i=r+1}^{n+1} x_i^s e^i \right) \quad (\text{sgn } \bar{\xi}^s)^r. \quad (7)$$

Положим $|h_1^s| := \sum_{l=1}^r x_l^s e^l$ и $h_2^s := \sum_{l=r+1}^{n+1} x_l^s e^l$, $s \in N$. Так как

$\rho_s \cdot \rho_s^{s_{r+1}} \rightarrow b \geq 1$, то $\rho_s \cdot \text{sgn } \bar{\xi}^s \rightarrow b^{s_{r+1}} =: \bar{\eta}$. Очевидно, что $0 < \bar{\eta} < \infty$, т. е.

$\bar{\eta} \in \mathbb{R}_+^n$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно счи-

тать, что $\rho_s \cdot \text{sgn } \bar{\xi}^s \rightarrow \bar{\eta}$, и так как $\bar{\eta} \in \mathbb{R}_+^n$, то $\bar{\eta} \in \mathbb{R}_+^n$. Поэтому $A_2 :=$

$= |\bar{\eta}| > 0$. Поскольку система квазиполиномов $P_1, \dots, P_M$ регулярна,

то $A_1 := \sum_{k=1}^M |P_k(\bar{\eta})| > 0$ и из (6) и (7) получаем:

$$P(\bar{\xi}^s) = A_1 \rho_s^{(z, h_1^s)} (1 + o(1)), \quad (8)$$

$$|(\bar{\xi}^s)| = A_2 \rho_s^{(v, h_1^s)} (1 + o(1)). \quad (9)$$

Теперь докажем, что для всех $s \in N$

$$(v, h_1^s) \leq (z, h_1^s). \quad (10)$$

Так как $v \in N$, то $(v, e^1) \leq (z, e^1)$. Если $(v, e^1) < (z, e^1)$, то требуемое неравенство очевидно. Рассмотрим случай, когда $(v, e^1) = (z, e^1)$. Последнее означает, что точки v и z принадлежат одной и той же грани Γ_1 , но тогда по определению грани Γ_2 имеем $(v, e^2) \leq (z, e^2)$. Если $(v, e^2) < (z, e^2)$, то требуемое неравенство очевидно, так как $x_j^s > 0$, $j = 1, \dots, r$; $s \in N$. Рассмотрим случай $(v, e^2) = (z, e^2)$, что означает принадлежность v и z одной и той же грани Γ_2 , тогда $(v, e^3) \leq (z, e^3)$ и т. д. Очевидно, что после конечного числа шагов получаем $(v, e^j) = (z, e^j)$, $j = 1, \dots, q-1$ и $(v, e^q) < (z, e^q)$, $1 \leq q \leq r$, откуда и следует неравенство (10). Теперь соотношения (8) — (10) противоречат (2) и завершают доказательство достаточности теоремы 1.

Необходимость. Пусть неравенство (1) выполняется для всех $v \in N$, но система квазиполиномов $P_1, \dots, P_M$ нерегулярна. Очевидно, что $P_1, \dots, P_M$ не имеют общего нуля в $\mathbb{R}_+^n$. Следовательно, в определении 1 не выполнено условие б), т. е. для некоторой грани Γ м. н. N квазиполиномы P_k, Γ , $k = 1, \dots, M$ обращаются в нуль в некоторой точке $\eta \in \mathbb{R}_+^n$. По произвольному вектору $\lambda \in \Lambda_\Gamma$ квазиполином P_k ($k = 1, \dots, M$) представим в виде

$$P_k(\xi) = P_{k,\Gamma}(\xi) + Q_k(\xi) = \sum_{(a, \lambda) = d_\Gamma} \gamma_{ka} \xi^a + \sum_{(a, \lambda) < d_\Gamma} \gamma_{ka} \xi^a.$$

При $\xi = t^\lambda \eta$, где $t > 0$, получаем $|\xi^v| = C t^{d_\Gamma}$, где $C > 0$ постоянная величина и

$$\sum_{k=1}^M |P_k(\xi)| = \sum_{k=1}^M |Q_k(\xi)| = o(t^{d_\Gamma}).$$

Отсюда следует, что при $t \rightarrow +\infty$ неравенство (1) не выполняется. Теорема 1 доказана.

§ 2. Теорема типа Литтльвуда—Пэли и коэрцитивность квазидифференциальных операторов

В этом пункте существенную роль во всем изложении играют исследования П. И. Лизоркина, относящиеся к дробному ливиллевскому дифференцированию и мультипликаторам в пространствах со смешанной нормой (см., например, [6]). Приведем нужные нам определения и факты. Пусть S —пространство Шварца бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности быстрее любой степени $|x|$, а $\Phi \subset S$ —совокупность таких функций φ , что

$$\int_R x_j^k \varphi(x) dx = 0, \quad j = 1, \dots, n; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Φ —замкнутое подпространство S , рассматриваемое в индуцированной топологии. Обозначим через Ψ образ Φ при преобразовании Фурье $F(\Psi \subset S$, так как F —автоморфизм S), а через Φ' и Ψ' —сопряженные пространства (пространства обобщенных функций) к Φ и Ψ соответственно. Преобразование Фурье функции $f \in \Phi'$ определяется по формуле

$$(Ff, \varphi) = (f, \varphi'),$$

где $\varphi \in \Phi$, $F\varphi \in \Psi$, $Ff \in \Psi'$. Важнейшим свойством пространства Ψ является то, что для любых $\alpha \in R^n$ и $\psi \in \Psi$ функция $\xi^\alpha \psi(\xi)$ также принадлежит Ψ . Это дает возможность определить оператор дробного дифференцирования порядка $\alpha \in R^n$ для обобщенных функций из Φ' следующим образом:

$$D^\alpha f = F^{-1}(\xi^\alpha Ff).$$

Пусть $p \in (1, \infty)^n$. Измеримая на R^n функция $\varphi(\xi)$ называется мультипликатором в L_p (определение пространства L_p см. в [7], стр. 9), если $F^{-1}(\varphi Ff)$ является ограниченным оператором из L_p в L_p .

Для $s \in Z^n$ (Z —множество целых чисел) положим:

$$\Delta_s = \{\xi \in R^n; 2^{s_i} \leq |\xi_i| < 2^{s_i+1}, \quad i = 1, \dots, n\}$$

и введем оператор взятия частной суммы формулой

$$S_s f = F^{-1}(\chi_s Ff), \quad f \in \Phi',$$

где χ_s —характеристическая функция множества Δ_s . Нам понадобятся следующие две теоремы, доказанные П. И. Лизоркиным в [8].

Теорема А. Пусть $\varphi(\xi)$ в любом множестве Δ_s , $s \in Z^n$ представляется в виде

$$\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi_1} \dots \int_{-\infty}^{\xi_n} d\mu_s,$$

где μ_s —конечные меры, для которых $\sup_s \text{Var } \mu_s \leq K$. Тогда φ является мультипликатором в L_p , $1 < p < \infty$, причем:

$$\|F^{-1}(\varphi F f)\|_p \leq c K \|f\|_p,$$

где c не зависит от f и φ .

Теорема Б. При $p \in (1, \infty)^n$ существуют постоянные $A_p, B_p \in (0, \infty)$ такие, что для всех $f \in L_p$

$$A_p \|f\|_p \leq \|(\sum_s |S_s f|^2)^{1/2}\|_p \leq B_p \|f\|_p.$$

Обозначим через $\Pi W_p^{P_k} := \prod_{k=1}^M W_p^{P_k}$ пространство функций $f \in$

Φ' с конечной полунормой $\sum_{k=1}^M \|P_k(D) f\|_p$. Положим также $\alpha_s = \sum_{k=1}^M |P_k(2^s)|$, $s \in \mathbb{Z}^n$. Имеет место следующая

Теорема 2. Пусть $p \in (1, \infty)^n$ и система квазиполиномов $P_1, \dots, P_M$ регулярна. Тогда существуют постоянные $A_p, B_p \in (0, \infty)$ такие, что для всех $f \in \Pi W_p^{P_k}$

$$A_p \sum_{k=1}^M \|P_k(D) f\|_p \leq \|(\sum_s |\alpha_s S_s f|^2)^{1/2}\|_p \leq B_p \sum_{k=1}^M \|P_k(D) f\|_p. \quad (11)$$

Замечание. Эта теорема при $n = 1, M = 1$ и $P_1(\xi) = 1$ совпадает с классической теоремой Литтльвуда-Пэли (см. [9], гл. 15), поэтому мы называем ее теоремой типа Литтльвуда-Пэли. При $n > 1$ для смешанной нормы и для функций периодических по некоторым переменным теорема Литтльвуда-Пэли доказана О. В. Бесовым (см. [10], там же ссылки на другие работы). Отметим, что при $M = 1, P_1(\xi) = 1$ теорема 2 совпадает с теоремой Б, а при $M = 1, P_1(\xi) = \xi^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}^n$ она доказана Г. Г. Магарил-Ильяевым [11].

Доказательство. Так как $F(P_k(D) f) = P_k(\xi) F f$, то легко установить соотношения

$$P_k(D) f = F^{-1}(\varphi_k F(\sum_s \alpha_s S_s f)), \quad k = 1, \dots, M, \quad (12)$$

$$\sum_s \alpha_s S_s f = \sum_{k=1}^M F^{-1}(\psi_k F(P_k(D) f)), \quad (13)$$

где $\varphi_k := \sum_s \varphi_{sk}$, $\psi_k := \sum_s \psi_{sk}$, $\varphi_{sk} := \alpha_s(\xi) \frac{P_k(\xi)}{\alpha_s}$,

$$\psi_{sk} := \alpha_s(\xi) \frac{\sigma_s(\overline{P_k(\xi)})}{\sum_{j=1}^M |P_j(\xi)|^2}.$$

Покажем, что φ_k, ψ_k ($k = 1, \dots, M$) удовлетворяют условиям теоремы А и, следовательно, являются мультипликаторами в L_p . Обозначим через μ_{sk}, ν_{sk} меры, для которых

$$d\mu_{sk} = \frac{\partial^n \varphi_{sk}}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_n} d\xi_1 \dots d\xi_n, \quad d\nu_{sk} = \frac{\partial^n \psi_{sk}}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_n} d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

Полные вариации таких мер складываются из их вариаций по всем граням Δ_s , включая сам «параллелепипед» и его вершины. Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, где $\beta_i = 0$ или 1, $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$\begin{aligned}
\sup_s \text{Var } \mu_{xh} &\leq \sup_s \int \left| \frac{\partial^{\sum_{l=1}^n \beta_l} \varphi_{xh}}{\partial \xi_1^{\beta_1} \dots \partial \xi_n^{\beta_n}} \right| d\xi_1^{\beta_1} \dots d\xi_n^{\beta_n} < \\
&\leq \sup_s \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left| \xi_1^{\beta_1} \dots \xi_n^{\beta_n} \frac{\partial^{\sum_{l=1}^n \beta_l} \varphi_{xh}}{\partial \xi_1^{\beta_1} \dots \partial \xi_n^{\beta_n}} \right| \int \frac{d\xi_1^{\beta_1} \dots d\xi_n^{\beta_n}}{|\xi_1^{\beta_1} \dots \xi_n^{\beta_n}|} = \\
&= (\ln 2) \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left| \xi_1^{\beta_1} \dots \xi_n^{\beta_n} \frac{\partial^{\sum_{l=1}^n \beta_l} \varphi_h}{\partial \xi_1^{\beta_1} \dots \partial \xi_n^{\beta_n}} \right|.
\end{aligned}$$

Ограниченность последнего выражения вытекает из неравенства (1) путем несложных преобразований. Полная вариация меры ν_{xh} оценивается совершенно аналогично. Теперь, с помощью теоремы А, из соотношений (12) и (13) получаем неравенства

$$C_1 \sum_{k=1}^M \|P_k(D) f\|_p \leq \|\sum_s \alpha_s S_s f\|_p \leq C_2 \sum_{k=1}^M \|P_k(D) f\|_p. \quad (14)$$

Тогда неравенства (11) следуют из (14), если заметим, что функция $\sum_s \alpha_s S_s f$ удовлетворяет теореме Б. Этим доказательство теоремы 2 завершено.

Используя теорему 2 можно решить задачу о коэрцитивности системы квазидифференциальных операторов в пространстве ΠW_p^k .

Определение 2. Система квазидифференциальных операторов $P_1, \dots, P_M$ называется коэрцитивной в ΠW_p^k , если для всех $\nu \in \mathbb{N}$ и $f \in \Pi W_p^k$ выполняется неравенство

$$\|D^\nu f\|_p \leq C \sum_{k=1}^M \|P_k(D) f\|_p \quad (15)$$

с постоянной C , не зависящей от f .

Теорема 3. Пусть $p \in (1, \infty)^n$. Для коэрцитивности системы $P_1, \dots, P_M$ в ΠW_p^k необходимо и достаточно, чтобы она была регулярна.

Доказательство. Для доказательства необходимости заметим, что при произвольном $p \in (1, \infty)^n$ условие (1) является необходимым для справедливости (15). Этот факт для квазиполиномов доказывается совершенно аналогично.

Для этого достаточно применить обе части (15) к функции $u(x) = g(\varepsilon x) e^{i(x, \xi)}$, где g достаточно гладкая финитная функция, равная единице в окрестности нуля, а $\varepsilon > 0$ достаточно малое число.

Достаточность также доказывается просто. Пусть система квазиполиномов $P_1, \dots, P_M$ регулярна и $v \in N$ — произвольная точка. Тогда с помощью теорем 1 и 2 получаем неравенство (15) следующим образом:

$$\begin{aligned} |D^v f| &\leq C_3 \left(\sum_s |2^{(s, v)} S_s f| \right)^{1/2}_p \leq \\ &\leq C_4 \left(\sum_s \left| \sum_{k=1}^M |P_k(2^s)| |S_s f|^2 \right| \right)^{1/2}_p \leq C_5 \sum_{k=1}^M |P_k(D) f|_p. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

В заключение выражаю свою благодарность инициатору написания данной работы профессору О. В. Бесову.

Ереванский государственный
университет

Поступила 8. XI. 1987

2. Վ. Կեպուհեան. Մոնոմների գնահատականները բնականորեն լիարժեք և բնականորեն լիարժեք օպերատորների կոտրեքտիվությունը (ամփոփում)

Աշխատանքում քննարկվում է բնականորեն լիարժեք օպերատորների համակարգի միջոցով մոնոմների գնահատման հարցը, նկարագրվում է մոնոմների այն մեծագույն բազմությունը, որի վրա բնականորեն լիարժեք օպերատորների համակարգի միջոցով այն դասը, որոնց համար ալգորիթի գնահատականը ճիշտ է Օգտագործելով ստացված գնահատականները, ապացուցվում է կիբլիցի-Պլեյսի թեորեմ, որի օգնությամբ լուծվում է բնականորեն լիարժեք օպերատորների տրված համակարգի կոտրեքտիվության հարցը:

H. V. GEVORGIAN. Estimates of monomes by quasipolynomials and coercitiveness of quasidifferential operators (summary)

We consider the problem of estimation of monomes by the given system of quasipolynomials. We describe the maximal set of monomes and the class of collections of quasipolynomials for which the resulting estimate holds. Using such estimates we prove a theorem of Littlewood—Paley type. As a corollary the coercitivity of the given collection of quasidifferential operators is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Михалюс. О поведении на бесконечности одного класса многочленов, Тр. МИАН СССР, 1967, т. 91, 59—81.
2. С. Г. Гиндикии. Энергетические оценки, связанные с многогранником Ньютона, Труды ММО, 1974, т. 31, 189—236.
3. О. В. Геворгиан. Оценка мономов через обобщенные полиномы и ее приложения к теорем приближения гладких функций, Вестник МГУ, серия матем. мех., 1984, № 3, 3—8.
4. Г. Г. Каварян. Оценки дифференциальных операторов и гипocoаллитические операторы, Тр. МИАН СССР, 1976, т. 140, 130—161.
5. О. В. Геворгиан. Об оценке мономов через нерегулярные обобщенные полиномы, Математика, Межвузовский сборник научных трудов, Ереван, 1984, вып. 2, 42—48.

6. П. И. Ливоркин. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций, Тр. МИАН СССР, 1969, т. 105, 89—166.
7. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., Наука, 1975, 480 с.
8. П. И. Ливоркин. Мультипликаторы интегралов Фурье и оценки сверток в пространствах со смешанной нормой, Приложения, Изв. АН СССР, серия матем., 1970, т. 34, 218—247.
9. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, М., Мир, 1965, т. 2, 538 с.
10. О. В. Бесов. Теорема Литтльвуда-Пэли для смешанной нормы, Тр. МИАН СССР, 1984, т. 170, 31—36.
11. Г. Г. Мазарил-Ильяев. Задача о промежуточной производной, Мат. заметки, 1979, т. 25, № 1, 81—96.
12. J. Boman. Supremum norm estimates for partial derivatives of several variables, Illinois J. of Math., 1972. v. 16, 2, 202—216.

УДК 517.95

Г. А. КАРАПЕТЯН

РЕГУЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

В работе [1] М. С. Аграновича и М. И. Вишика достаточно подробно изучены эллиптические задачи с параметром и на этой основе параболические задачи общего вида. В дальнейшем в работе [2] (см. также [3]) изучены полуэллиптические уравнения с параметром в R^n и R_+^n . В настоящей заметке доказываются теоремы существования и единственности, а также теоремы о гладкости решений для одного общего класса дифференциальных уравнений, зависящих от комплексного параметра.

§ 1. Регулярные уравнения с параметром в R^n

Обозначим через R^m m -мерное евклидово пространство, N_+^m — множество мультииндексов, т. е. m -мерных векторов с целыми неотрицательными компонентами. Если $\xi \in R^m$, $\alpha \in N_+^m$, то положим $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_m^{\alpha_m}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_m^{\alpha_m}$, где $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, m$. Пусть $A = \{\alpha^1, \dots, \alpha^N\}$ набор мультииндексов.

Характеристическим многогранником или многогранником Ньютона набора A назовем наименьший выпуклый многогранник $N = N(A)$, содержащий все точки набора A .

Многогранник $N \subset R^m$ с вершинами из N_+^m назовем вполне правильным, если а) N является полным многогранником, т. е. имеет вершину в начале координат R^m и отличные от начала координат вершины на каждой координатной оси R^m ; б) координаты внешних нормалей всех $(m-1)$ -мерных некоординатных граней N положительны.

Обозначим через $N^{(0)}$ внутренние точки многогранника N из N_+^m и положим $\partial' N = (N \setminus N^{(0)}) \cap N_+^m$.

Пусть $n \geq 2$ целое число. Рассмотрим в R^n линейный дифференциальный оператор $P(\lambda, D)$ с постоянными действительными коэффициентами, зависящими от комплексного параметра λ

$$P(\lambda, D) = \sum a_{\alpha, \lambda} \lambda^\alpha D^\alpha. \quad (1.1)$$

Здесь сумма распространяется по некоторому конечному набору (P) $(n+1)$ -мерных мультииндексов $(P) = \{(\alpha_0, \alpha) \in N_+^{n+1}, a_{\alpha, \lambda} \neq 0\}$, $\lambda \in Q = \{\mu \in \mathbb{C}, \sigma_1 \leq \arg \mu \leq \sigma_2\}$, где σ_1, σ_2 заданные числа: $-\infty \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \infty$.

С каждым оператором $P(\lambda, D)$ вида (1.1) свяжем два многогранника: $(n+1)$ -мерный характеристический многогранник $M = M(P) \subset R^{n+1}$ набора (P) и n -мерный характеристический многогранник

$N = N(P) \subset R^n$ набора мультииндексов $|\alpha|$ таких, что $(\sigma_0, \alpha) \in (P)$ для хотя бы одного σ_0 .

Предположим, что оператор $P(\lambda, D)$, определенный формулой (1.1), является регулярным в следующем смысле: если в символе оператора $P(\lambda, D)$ заменить λ на $\xi^0 \in R^1$, то существует постоянная $\kappa > 0$ такая, что для всех $\eta = (\xi_0, \xi) \in R^{n+1}$.

$$|P(\eta)| \geq \kappa \rho_M(\eta), \quad (1.2)$$

где

$$\rho_M(\eta) = \sum_{i=1}^N |\eta^{i'}|,$$

а e^i ($i = 1, \dots, N$) вершины х. м. $M(P)$.

Из результатов работы [4] следует, что вершины многогранника M имеют лишь четные координаты. Обозначим через M_i проекцию многогранника M на гиперплоскость $\alpha_i = 0$ ($i = 0, 1, \dots, n$), тогда очевидно, $M_0 = N$.

Пусть $N \subset R^n$ — произвольный в. п. многогранник и $t > 0$. Положим (см. [5]), $N^t = \{t\alpha, \alpha \in N\}$. Очевидно, что для произвольных натуральных чисел t_1 и t_2 и для любого мультииндекса $\beta \in N^{t_1+t_2}$ существуют мультииндексы $\beta^i \in N^{t_i}$ ($i = 1, 2$) такие, что $\beta = \beta^1 + \beta^2$. Наконец, обозначим через $H(M, t) \equiv H(M, t, R^{n+1})$ множество измеримых функций $|u|$ с конечной нормой

$$\|u, \lambda\|_{M^t}^2 = \sum_{(\sigma_0, \alpha) \in \partial^+ M^t} |\lambda|^{2\sigma_0} \|D^\alpha u\|_{L_2(R^n)}^2. \quad (1.3)$$

Лемма 1.1. Пусть $l \geq 1$ — натуральное число и $\lambda_0 > 0$. Оператор $P(\lambda, D)$ действует ограниченным образом из $H(M, l)$ в $H(M, l-1)$. При этом существует постоянная $C > 0$ такая, что для любого $\lambda \in Q$: $|\lambda| \geq |\lambda_0|$ и для всех $u \in H(M, l)$ справедливо неравенство

$$\|P(\lambda, D)u, \lambda\|_{M^{l-1}} \leq C \|u, \lambda\|_{M^l}. \quad (1.4)$$

Доказательство. Из равенства Парсеваля и эквивалентности ($t \in N$)

$$\rho_{M^t}(\lambda, \xi) = \sum_{(\sigma_0, \alpha) \in \partial^+ M^t} |\lambda|^{2\sigma_0} |\xi|^{2\alpha} \sim \left(\sum_{(\sigma_0, \alpha) \in M^t} |\lambda|^{2\sigma_0} |\xi|^{2\alpha} \right)' = \rho_M^t(\lambda, \xi)$$

следует, что норма (1.3) эквивалентна следующей норме:

$$\|u, \lambda\|_{M^t}^2 \sim \|\rho_M^t(\lambda, \xi) u(\xi)\|_{L_2(R^n)}^2.$$

Отсюда, из (1.1) и из очевидных соображений имеем

$$\begin{aligned} \|P(\lambda, D)u, \lambda\|_{M^{l-1}}^2 &= \|\rho_M^{l-1}(\lambda, \xi) P(\lambda, D)u(\xi)\|_{L_2(R^n)}^2 \leq \\ &\leq C \|\rho_M^l(\lambda, \xi) u(\xi)\|_{L_2(R^n)}^2 \leq C \|u, \lambda\|_{M^l}^2. \end{aligned}$$

Лемма 1.1 доказана.

Теорема 1.1. Пусть оператор $P(\lambda, D)$ удовлетворяет неравенству (1.2), l — натуральное число, $\lambda_0 \neq 0$ и $f \in H(M, l-1)$. Тогда при $0 \neq \lambda \in Q$ существует одно и только одно решение $u \in H(M, l)$ уравнения $P(\lambda, D)u = f$, при этом существует постоянная $C > 0$ такая, что при $|\lambda| \gg |\lambda_0|$

$$\|u, \lambda\|_{Ml} \leq C \|f, \lambda\|_{Ml-1}. \quad (1.5)$$

Доказательство. Очевидно, единственность решения следует из неравенства (1.5). Допуская, что функция $u \in H(M, l)$ является решением уравнения $P(\lambda, D)u = f$, докажем неравенство (1.5). Применяя преобразование Фурье по x , получим

$$P(\lambda, \xi) \bar{u}(\xi) = \bar{f}(\xi).$$

Если $0 \neq \lambda \in Q$, то отсюда и из регулярности оператора $P(\lambda, D)$ имеем

$$\bar{u}(\xi) = P^{-1}(\lambda, \xi) \bar{f}(\xi).$$

Применив неравенство (1.2) в последнем равенстве, получим

$$|\bar{u}(\xi)| \leq C (\rho_M(\lambda, \xi))^{-1} |\bar{f}(\xi)|, \quad \forall \xi \in R^n.$$

Умножая обе части полученного неравенства на $\rho_M^{2l}(\lambda, \xi)$ и интегрируя его, получим

$$\begin{aligned} \|u, \lambda\|_{Ml}^2 &= \int_{R^n} \rho_M^{2l}(\lambda, \xi) |\bar{u}(\lambda, \xi)|^2 d\xi \leq \\ &\leq C \int_{R^n} \rho_M^{2(l-1)}(\lambda, \xi) |\bar{f}(\lambda, \xi)|^2 d\xi = C \|f, \lambda\|_{Ml-1}^2 < \infty, \end{aligned}$$

что и доказывает неравенство (1.5).

Докажем теперь существование решения $u \in H(M, l)$. Пусть $f \in H(M, l-1)$. Тогда, так как $\lambda \neq 0$, то из вышесказанного следует, что функция $u(x) = F^{-1}(P^{-1}(\lambda, \xi) F f)$ принадлежит классу $H(M, l)$ и является решением $P(\lambda, D)u = f$.

§ 2. Регулярные уравнения в R_+^n , зависящие от параметра

Пусть K — вполне правильный характеристический многогранник R_+^n . В $R_+^n = \{x \in R^n; x_n > 0\}$ рассмотрим линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, зависящий от компактного параметра $\lambda \in Q$

$$P(\lambda, D) = D_n^{2m} + \sum_{(\alpha_0, \alpha') \in K} a_{\alpha_0, \alpha'} \lambda^{\alpha_0} D^{\alpha'}, \quad (2.1)$$

где

$$\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in N_+^{n-1}.$$

Обозначим через M многогранник, соответствующий оператору $P(\lambda, D)$. Пусть оператор (2.1) регулярен в смысле § 1, т. е. удовлетворяет неравенству (1.2). Из неравенства (1.2) следует, что при

$n > 1$ для любых фиксированных $\lambda \in R$, $\xi \in R^{n-1}$, $|\lambda| + |\xi| \neq 0$ многочлен (по τ) $P(\lambda, \xi', \tau)$ не имеет действительных корней, при этом число корней с положительными (отрацательными) мнимыми частями $\tau^{\pm}(\lambda, \xi')$ равно m . Положим

$$P^{\pm}(\lambda, \xi', \tau) = \prod_{k=1}^m (\tau - \tau_k^{\pm}(\lambda, \xi')) = \sum_{p=0}^m a_p^{\pm}(\lambda, \xi') \tau^{m-p},$$

$$P_j^{\pm}(\lambda, \xi', \tau) = \sum_{p=0}^j a_p^{\pm}(\lambda, \xi') \tau^{j-p}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Каждому оператору (2.1) сопоставим m граничных операторов. Пусть $t_j \in R^1$, $j = 1, \dots, m$, положим

$$B_j(\lambda, D) = D_n^{r_j} + \sum_{(\alpha, \alpha') \in K^j} b_{\alpha, \alpha'}^{(j)} \lambda^{\alpha} D^{\alpha'},$$

где $r_j = \begin{cases} 2mt_j, & \text{если оно целое число} \\ 0, & \text{если } 2mt_j \text{ нецелое число.} \end{cases}$

Рассмотрим следующую граничную задачу

$$P(\lambda, D) u(\lambda, x) = f(\lambda, x), \quad x_n > 0, \quad (2.2)$$

$$B_j(\lambda, D) u(\lambda, x)|_{x_n=0} = \varphi_j(\lambda, x'), \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.3)$$

где $x' \in R^{n-1}$, f, φ_j ($j = 1, \dots, m$) — заданные функции, а принадлежность их некоторым классам объясняется ниже.

Для разрешимости задачи (2.2), (2.3) на операторы $P(\lambda, D)$, $B_j(\lambda, D)$ ($j = 1, \dots, m$) наложим условия типа условий Шапиро—Лопатинского (Ш—Л), именно будем считать, что для любых фиксированных $\lambda, \xi', |\lambda| + |\xi'| \neq 0$ полиномы (по τ) $B_1(\lambda, \xi', \tau), \dots, B_m(\lambda, \xi', \tau)$ линейно независимы по модулю полинома $P^+(\lambda, \xi', \tau)$, т. е. если обозначить

$$B_j(\lambda, \xi', \tau) \equiv \sum_{k=1}^m b_{jk}(\xi', \lambda) \tau^{k-1} \equiv B_j(\lambda, \xi', \tau) \pmod{P^+},$$

то для любых $\lambda, \xi', |\lambda| + |\xi'| \neq 0$

$$d(\lambda, \xi') = \det [b_{jk}(\lambda, \xi')] \neq 0.$$

Лемма 2.1 (см. [6]). *Существуют многочлены по τ $N_k(\lambda, \xi', \tau)$ ($k = 1, \dots, m$) такие, что*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{N_k(\lambda, \xi', \tau) B_j(\lambda, \xi', \tau)}{P^+(\lambda, \xi', \tau)} d\tau = \delta_{kj}, \quad j, k = 1, \dots, m.$$

Пусть t — произвольное натуральное число. Будем говорить, что $f \in H(M, t, R_+^n)$, если конечна следующая норма:

$$\|f\|_{M,t}^2 = \sum_{(\alpha, \alpha') \in M^t} |\tau^{\alpha} D^{\alpha'} f|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Для любого вещественного s обозначим через $H(K, s, R^{n-1})$ множество обобщенных функций $u \in S'(K^{n-1})$, преобразование Фурье каждой из которых является измеримой функцией с конечной нормой

$$\|u\|_{(K, j)}^2 = \int_{R^{n-1}} |\bar{u}(\lambda, \xi')|^2 \rho_K^{2j}(\lambda, \xi') d\xi',$$

А тогда

$$\rho_K^2(\lambda, \xi') = \sum_{(x_n, \alpha) \in K} |\lambda f^{2\alpha}(\xi')|^2.$$

Лемма 2.2. Для любого $j; 0 \leq j \leq 2m-1$ отображение $u \rightarrow D_n^j(u_0, (x', x_n), u) \in C_0^\infty(\bar{R}_+^n)$ ограниченным образом распространяется по непрерывности из $H(M, 1, R_+^n)$ в $H(K, 1 - \frac{1}{2m} - \frac{1}{4m}, R_+^{n-1})$, где через $C_0^\infty(\bar{R}_+^n)$ обозначено множество бесконечно дифференцируемых в $\bar{R}_+^n$ функций, равных нулю вне некоторого компакта из $\bar{R}_+^n$.

Доказательство получается из доказательства леммы 2.2 работы [7] для случая $\delta=0$, $\rho_N(\xi) = \rho_M(\lambda, \xi')$.

С задачей (2.2), (2.3) свяжем оператор

$$Au = \{P(\lambda, D)u, B_1(\lambda, D)u|_{x_n=t}, \dots, B_m(\lambda, D)u|_{x_n=0}\}.$$

Тогда справедлива следующая

Лемма 2.3. Пусть $l \geq l_0 = \max\left(1, t_j + \frac{1}{4m}\right)$ целое число. Тогда оператор A действует ограниченным образом из $H(M, l, R_+^n)$ в $H(M, l-1, R_+^n) \times \prod_{j=1}^m H(K, l-t_j - \frac{1}{4m}, R_+^{n-1})$ и имеет место неравенство

$$\|u\|_{H(M, l-1, R_+^n)} + \sum_{j=1}^m \|v_j\|_{H(K, l-t_j - \frac{1}{4m}, R_+^{n-1})} \leq C \|u\|_{H(M, l, R_+^n)}, \quad (2.4)$$

где C — не зависящее от u, f, v_j, λ постоянное число.

Доказательство. Сперва покажем, что

$$A: H(M, l, R_+^n) \rightarrow H(M, l-1, R_+^n) \times \prod_{j=1}^m H(K, l-t_j - \frac{1}{4m}, R_+^{n-1}).$$

Если $u \in H(M, l, R_+^n)$, то продолжим u по Хестенсу на все пространство R^n так, чтобы продолженная функция $u_0 \in H(M, l, R^n)$ и

$$\|u, u_0\|_{H(M, l, R^n)} \leq C \|u\|_{H(M, l, R_+^n)}.$$

Тогда из результатов § 1 имеем

$$\begin{aligned} \|P(\lambda, D)u_0\|_{H(M, l-1, R^n)} &\leq C \|u\|_{H(M, l-1, R^n)} \leq \\ &\leq C \|u, u_0\|_{H(M, l, R^n)} \leq C \|u\|_{H(M, l, R_+^n)}. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\|P(\lambda, D)u\|_{H(M, l-1, R_+^n)} \leq C \|u\|_{H(M, l, R_+^n)}. \quad (2.5)$$

Покажем, что для любого $t_j \in R^+$

$$B_j(\lambda, D) u|_{x_n=0} \in H\left(K, l-t_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1}\right),$$

если $u \in H(M, l, R_+^n)$.

Если $u \in H(M, l, R_+^n)$, то из леммы 2.3 следует, что $D_n^{2l} u|_{x_n=0} \in H\left(K, l - \frac{\alpha_n}{2m} - \frac{1}{4m}, R^{n-1}\right)$. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} & \|B_j(\lambda, D) u|_{x_n=0}\|_{H\left(K, l-t_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1}\right)} \\ & \leq C \left(\|D_n^{2l} u|_{x_n=0}\|_{H\left(K, l-t_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1}\right)} + \right. \\ & \left. + \sum_{(\alpha_0, \alpha) \in K} |\lambda|^{\alpha_0} \|D^{s'} u|_{x_n=0}\|_{H\left(K, l-t_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1}\right)} \right). \end{aligned}$$

Оценим слагаемые по отдельности. Из леммы 2.2 имеем

$$\begin{aligned} & \|D_n^{2l} u|_{x_n=0}\|_{H\left(K, l-t_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1}\right)} = \\ & \int_{R^{n-1}} |D_n^{2l} \tilde{u}(\lambda, \xi', 0)|^2_{\rho_K} \lambda^{2(l-t_j - \frac{1}{4m})}(\lambda, \xi') d\xi' < \infty. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для второго слагаемого получим

$$\begin{aligned} & \sum_{(\alpha_0, \alpha) \in K} |\lambda|^{\alpha_0} \|D^{s'} u|_{x_n=0}\|_{H\left(K, l-t_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1}\right)} = \\ & = \sum_{(\alpha_0, \alpha) \in K} |\lambda|^{\alpha_0} \left(\int_{R^{n-1}} \tilde{\xi}'^{2\alpha'} |\tilde{u}(\lambda, \xi', 0)|^2_{\rho_K} \lambda^{2(l-t_j - \frac{1}{4m})}(\lambda, \xi') d\xi' \right)^{1/2} < \\ & \leq \sum_{(\alpha_0, \alpha) \in K} \left(\int_{R^{n-1}} \lambda^{2(l-t_j - \frac{1}{4m})}(\lambda, \xi') |\tilde{u}(\lambda, \xi', 0)|^2 \frac{(|\lambda|^{2\alpha_0} \tilde{\xi}'^{2\alpha'})^{t_j}}{\rho_K^{2l}(\lambda, \xi')} d\xi' \right)^{1/2} < \\ & \leq \left(\int_{R^{n-1}} |\tilde{u}(\lambda, \xi', 0)|^2_{\rho_K} \lambda^{2(l-t_j - \frac{1}{4m})}(\lambda, \xi') d\xi' \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Докажем неравенство (2.4). Из неравенств (2.5)–(2.7) следует, что лемма 2.3 будет доказана, если покажем, что при $t \geq 0$

$$\begin{aligned} & \lambda^{2(l-t_j - \frac{1}{4m})}(\lambda, \xi') |D^{2lm} \tilde{u}(\lambda, \xi', 0)|^2 \leq C \left(\int_0^1 \rho_K^{2l}(\lambda, \xi') |\tilde{u}(\lambda, \xi', x_n)|^2 dx_n + \right. \\ & \left. + \int_0^1 |D^{2lm} \tilde{u}(\lambda, \xi', x_n)|^2 dx_n \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Неравенство (2.8) при $\lambda = 1$ доказано в работе [7], лемма 2.2. Для произвольного λ доказывается аналогичными соображениями. Лемма 2.3 доказана.

Наша дальнейшая цель доказать неравенство, обратное неравенству (2.4). Отсюда в частности будет следовать существование и единственность решения задачи (2.2), (2.3).

Для этого сперва решим задачу (2.2), (2.3) с $f \equiv 0$,

где

$$\varphi_j \in H\left(K, l - t_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1}\right), j = 1, \dots, m.$$

После преобразования Фурье по переменной x' , задача (2.2), (2.3) (при $f \equiv 0$) примет вид

$$P(\lambda, \xi', D_n) \bar{u}(\lambda, \xi', x_n) = 0, x_n > 0, \quad (2.9)$$

$$B_j(\lambda, \xi', D_n) \bar{u}(\lambda, \xi', x_n)|_{x_n=0} = \bar{\varphi}_j, j = 1, \dots, m. \quad (2.10)$$

Вместе с задачей (2.9), (2.10) рассмотрим следующие задачи:

$$P\left(\lambda, \xi', \frac{1}{i} \frac{d}{dx_n}\right) \bar{u}_k(\lambda, \xi', x_n) = 0, x_n > 0, \quad (2.11)_k$$

$$B_j\left(\lambda, \xi', \frac{1}{i} \frac{d}{dx_n}\right) \bar{u}_k(\lambda, \xi', x_n)|_{x_n=0} = \delta_{j,k}, j, k = 1, \dots, m. \quad (2.12)_k$$

Из леммы 2.1 следует, что ограниченными решениями задач (2.11)_k, (2.12)_k ($k = 1, \dots, m$) являются функции

$$\bar{u}_k(\lambda, \xi', x_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{e^{ix_n \tau} N_k(\lambda, \xi', \tau)}{P^+(\lambda, \xi', \tau)} d\tau, k = 1, \dots, m, \quad (2.13)_k$$

где γ^+ — контур в верхней полуплоскости, охватывающий все корни многочлена $P^+(\lambda, \xi', \tau)$.

Тогда очевидно решение задачи (2.9), (2.10) задается формулой

$$\bar{u}(\lambda, \xi', x_n) = \sum_{j=1}^m \bar{\varphi}_j \bar{u}_j(\lambda, \xi', x_n), \quad (2.14)$$

т. е. решения $\bar{u}_1(\lambda, \xi', x_n), \dots, \bar{u}_m(\lambda, \xi', x_n)$ образуют базис в множестве ограниченных решений задачи (2.9), (2.10).

Теорема 2.1. Пусть выполняются условия (1.2) и (Ш-Л). Тогда при ненулевых $\lambda \in Q$ и для любых функций $f \in H(M, l-1, R_+^n)$, $\varphi_j \in H\left(K, l - t_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1}\right)$, $j = 1, \dots, m$, существует одно и только одно решение и задачи (2.2), (2.3), принадлежащее классу $H(M, l, R_+^n)$. При этом для $|\lambda| \geq |\lambda_0|$ ($\lambda_0 \neq 0$ произвольное число) существует постоянная $C > 0$, не зависящая от λ, u, f, φ_j , $j = 1, \dots, m$, для которой имеет место неравенство

$$\| \lambda, u \|_{H(M, l, R_+^n)} \leq C \left(\| \lambda, f \|_{H(M, l-1, R_+^n)} + \sum_{j=1}^m \| \lambda, \varphi_j \|_{H(K, l-l_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1})} R^{n-1} \right). \quad (2.15)$$

Доказательство. Сперва покажем, что общий случай сводится к случаю $f \equiv 0$.

Продолжим функции u, f на R^n по Хестенсу. Тогда решение уравнения:

$$P(\lambda, D) u_0 = f_0$$

(где u_0, f_0 продолжения функций u, f) в R^n по результатам § 1 будет:

$$u_0 = F^{-1} P^{-1}(\lambda, \xi) F f_0, \lambda \in Q, \lambda \neq 0.$$

Так как $u_0 \in H(M, l, R^n)$, то его сужение на $R_+^n: u \in H(M, l, R_+^n)$ и: при $|\lambda| \geq |\lambda_0|$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \| \lambda, u \|_{H(M, l, R_+^n)} &\leq \| \lambda, u_0 \|_{H(M, l, R^n)} \leq \\ &\leq C \| \lambda, f_0 \|_{H(M, l-1, R^n)} \leq C \| \lambda, f \|_{H(M, l-1, R_+^n)}. \end{aligned}$$

Положим $u = u_0 + u_1$, где u_1 решение задачи

$$P(\lambda, D) u_1 = 0, x_n > 0,$$

$$B_j(\lambda, D) u_1|_{x_n=0} = \varphi_j - B_j(\lambda, D) u_0|_{x_n=0}.$$

Пусть $\varphi_{0j} \equiv B_j(\lambda, D) u_0|_{x_n=0}$.

Если допустим, что уже доказана оценка

$$\| \lambda, u_1 \|_{H(M, l, R_+^n)} \leq C \sum_{j=1}^m \| \lambda, \varphi_j - \varphi_{0j} \|_{H(K, l-l_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1})},$$

то отсюда для решения u имеем

$$\begin{aligned} \| \lambda, u \|_{H(M, l, R_+^n)} &\leq \| \lambda, u_0 \|_{H(M, l, R_+^n)} + \| \lambda, u_1 \|_{H(M, l, R_+^n)} \leq \\ &\leq C \| \lambda, f \|_{H(M, l-1, R_+^n)} + C \sum_{j=1}^m \| \lambda, \varphi_j \|_{H(K, l-l_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1})} + \\ &+ C \sum_{j=1}^m \| \lambda, \varphi_{0j} \|_{H(K, l-l_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1})}. \end{aligned}$$

Но так как по лемме 2.3

$$\| \lambda, \varphi_{0j} \|_{H(K, l-l_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1})} \leq \| \lambda, u_0 \|_{H(M, l, R^n)} \leq C \| \lambda, f \|_{H(M, l-1, R_+^n)}$$

то теорема 2.1 доказана. Следовательно общий случай сводится к случаю $f \equiv 0$.

Так как решение задачи (2.9), (2.10) задается формулой (2.14), то решение задачи (2.2), (2.3) будет иметь вид (при $f \equiv 0$)

$$u(\lambda, x) = F_{\xi'}^{-1} \left| \sum_{j=1}^m \tilde{\varphi}_j(\lambda, \xi') \tilde{u}_j(\lambda, \xi', x_n) \right|. \quad (2.16)$$

Оценим слагаемые в равенстве (2.16) по отдельности. Так как

$$|\tilde{\varphi}_j^+(\lambda, \xi')| \sim \rho_K^{1/2m}(\lambda, \xi'), j = 1, \dots, m, \quad (2.17)$$

то из представления (2.13), следует, что для любого k : $k=1, \dots, 2m$

$$|D_n^k \tilde{u}_j(\lambda, \xi', t)| \leq C(\rho_K(\lambda, \xi'))^{\frac{k}{2m} - t_j} \times \exp \left\{ -C_0 t (\rho_K(\lambda, \xi'))^{\frac{1}{2m}} \right\}.$$

Отсюда, интегрируя по t , получим

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{\infty} |D_n^k \tilde{u}_j(\lambda, \xi', t)|^2 dt \right)^{1/2} &\leq C \rho_K^{\frac{k}{2m} - t_j}(\lambda, \xi') \left(\int_0^{\infty} \exp \left\{ -C_0 t \rho_K^{\frac{1}{2m}}(\lambda, \xi') \right\} dt \right)^{1/2} \leq \\ &\leq C(\rho_K(\lambda, \xi'))^{\frac{k}{2m} - t_j - \frac{1}{4m}}. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{(\lambda, \xi') \in \sigma^+(M)} \lambda^{2\alpha} \xi'^{2\alpha'} \int_0^{\infty} |\tilde{u}_j(\lambda, \xi', t)|^2 dt \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\int_0^{\infty} |D_n^{2m} \tilde{u}_j(\lambda, \xi', t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq C(\rho_K(\lambda, \xi'))^{t_j - \frac{1}{2m}}. \end{aligned}$$

Умножая полученное неравенство на $|F\varphi_j|^2$ и интегрируя по ξ' , получим

$$\| \tilde{u}_j(\lambda, \xi', t) \|_{H(M, l, R_+^n)} \leq C \| \varphi_j \|_{H(K, l - t_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1})},$$

что и доказывает неравенство (2.15).

Для доказательства существования решения задачи (2.2), (2.3) надо положить

$$u = R_0 f + \sum_{j=1}^m R_j (\varphi_j - B_j(\lambda, D) R_0 f|_{x_n=0}),$$

где $R_0 f = F^{-1} P^{-1}(\lambda, \xi) F f$, $R_j \varphi = F^{-1} \{F \varphi_j \tilde{u}_j\}$.

Легко доказать, что $u \in H(M, l, R_+^n)$. Теорема 2.1 доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступила 1. X. 1987

Գ. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏԻԱՆ. Պարամետրից կախված սեգուլար հավասարումներ (ամփոփում)

Աշխատանքում պարամետրից կախված սեգուլար հավասարումների համար ապացուցվում են գոյության և միակության, ինչպես նաև ողորկության վերաբերյալ թեորեմներ R^n -ում և R_+^n -ում Կիսատարածության դեպքում ուսումնասիրվում է ընդհանուր եզրային պայմաններով խնդիր:

G. A. KARAPETIAN. Regular equations with a parameter (summary)

Theorems of existence and uniqueness of solutions as well as on their smoothness are proved for a class of hyperelliptical equations in R^n and R_+^n . For R_+^n the notion of a regular equation with general initial conditions is introduced which provides the necessary framework for the study.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Агранович, М. И. Вишик. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, УМН, 1964, XIX, № 3 (117), 1964, 33—157.
2. С. В. Успенский, Г. В. Демиденко, В. Г. Перепелкин. Теоремы вложения и их приложения к дифференциальным уравнениям, М., «Наука», 1983.
3. F. Ornelia. Problem quazi-ellitici nel semispazio dipendenti da un parametro, Rend Accad. naz. sci fis a mat. Soc. naz sci cett e artr., Napoli, 50, № 2, 1983, 301—318.
4. В. П. Михайлов. О поведении на бесконечности одного класса многочленов, Тр. МИАН СССР, т. 91, 1967, 58—81.
5. E. Pehkonen. Ein hypoelliptisches Dirichlet problem, Comm. Phys. Mat., 48, № 3, 1978, 131—143.
6. С. Азмон, А. Дузис, Л. Ниренберг. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, М., ИЛ, 1962.
7. Г. А. Карапетян. Об одном классе вырождающихся регулярных уравнений в полупространстве, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XXI, № 5, 1986, 471—487.

УДК 517.95

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А. А. ГАЛСТЯН, К. А. ЯГДЖАН

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ
ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Целью настоящей работы является доказательство единственности решения задачи Коши для эллиптического оператора с вырождающимся символом. Вырождение описывается с помощью функции $\lambda \in C^n(R^n)$ такой, что $0 < \lambda^2(x) \leq 1/2$. Обозначим $NZ = \{x \in R^n \mid \lambda(x) \neq 0\}$, $Z = \{x \mid \lambda(x) = 0\}$. Предполагается, что для каждого α существует константа C_α такая, что

$$|D^\alpha \lambda(x)| \leq C_\alpha K^{|\alpha|-1}(x) (|\lambda(x)| + |\nabla \lambda(x)|), \text{ при } x \in NZ, \quad (1)$$

где $K(x) = (|\lambda(x)| + |\nabla \lambda(x)|)/|\lambda(x)|$, а также для некоторого положительного $\varepsilon < 1/2$

$$K(x) \leq C_\varepsilon |\lambda(x)|^{-\varepsilon}, \text{ при } x \in NZ. \quad (2)$$

Рассмотрим оператор $(t \in J = [-T, T], T > 0)$

$$P(t, x, D_t, D_x) = D_t^m + \sum_{j+|\alpha| \leq m, j < m} a_{j,\alpha}(t, x) D_x^\alpha D_t^j, \quad (3)$$

где как обычно $D_j = -i\partial_j = -i\partial/\partial x_j$, $D_t = -i\partial_t = -i\partial/\partial t$.

Пусть M и N — положительные постоянные. Обозначим через $Z_\varepsilon(N)$ множество $\{(x, \xi) \in R^{2n} \mid \lambda^2(x) < \xi^2 \leq N^2 \ln^2 \langle \xi \rangle, \langle \xi \rangle \geq M\}$, где $\langle \xi \rangle^2 = \varepsilon^2 + |\xi|^2$.

Рассмотрим $\{\tau_l(t, x, \xi)\}_{l=1}^m$ — множество нулей полного символа оператора P , то есть корней уравнения

$$\tau^m + \sum_{j+|\alpha| \leq m, j < m} a_{j,\alpha}(t, x) \tau^{j+\alpha} = 0. \quad (4)$$

Предположим, что функции $\tau_l(t, x, \xi)$ ($l = 1, \dots, m$) удовлетворяют следующим основным условиям:

(а) существуют M , N и положительная постоянная α такие, что для всех l при $(x, \xi) \in Z_\varepsilon(N)$, $t \in J$, выполнено неравенство

$$|\operatorname{Im} \tau_l(t, x, \xi)| > d |\lambda(x)| < \xi >. \quad (5)$$

(в) для всех j, l , для любых α, β, k с некоторыми постоянными $\delta_{jl}, C_{k,\alpha,\beta}$

$$|\tau_l(t, x, \xi) - \tau_j(t, x, \xi)| \geq \delta_{jl} |\lambda(x)| < \xi >, l \neq j, \quad (6)$$

$$|D_t^k D_x^\alpha D_x^\beta \tau_l(t, x, \xi)| \leq C_{k,\alpha,\beta} |\lambda(x)| < \xi >^{1-|\alpha|} K^{|\beta|}(x), \quad (7)$$

при всех $(x, \xi) \in Z_\varepsilon(N)$, $t \in J$, а при $|\beta| = 0$, $|\alpha| = 1$ — для всех $(x, \xi) \in Z_\varepsilon R^n$.

(с) существуют α_l, β_l , ($l = 1, \dots, m'$, где $m' \leq m$) такие, что $\beta_l - \alpha_l \leq \pi - \varepsilon_l > 0$, $[z_l, \beta_l] \cap [z_k, \beta_k] = \emptyset$ при $l \neq k$, и для любого τ_l ($l = 1, \dots, m$) найдется i такой, что $\arg \tau_l(t, x, \xi) \in [z_i, \beta_i]$ при всех $(x, \xi) \in Z_\varepsilon(N), t \in J$.

Из предположений (а) — (с) следует, что при всех $t \in J$, $x \in NZ$, $|x| < 1$, и всех j, z , $|z| \neq 0$, выполнены неравенства (см. [1]):

$$|D_t^k D_x^j a_{j, \alpha}(t, x)| \leq C_{k, j} |\lambda(x)|^{|\alpha|} K^{|\alpha|}(x) |\ln^{1/2}(x)|^{m-j-|\alpha|}, \quad (8)$$

и $a_{j, \alpha}(t, x) = 0$ при $x \in Z$, $|z| \neq 0$. Обозначим $\bar{R}_+^{n+1} = \{(t, x) | t \geq 0\}$. Мы докажем следующую основную теорему.

Теорема. Существует открытая окрестность U' начала координат в R^{n+1} такая, что если $u \in C^\infty(U)$, $\text{supp } u \subset \bar{R}_+^{n+1}$, удовлетворяет уравнению $Pu = 0$ в U , то $u \equiv 0$ в $U' \subset U$.

Для оператора (3) в случае, когда в правой части (8) отсутствует $|\ln \lambda^2(x)|$ теорема единственности анонсирована в работе [2], а случай вырождения по временной переменной рассмотрен в работе [3].

2. Как обычно, осуществив преобразование Хольмгрена $s = t + |x|^2$, $y = x$, получаем уравнение для новой неизвестной функции $v(s, y)$ $\text{supp } v \subset \{s \geq 0, |y|^2 \leq s\}$, причем, как нетрудно убедиться, преобразованный оператор удовлетворяет тем же условиям, что и первоначальный оператор P . Поэтому можно с самого начала считать, что $\text{supp } u \subset \{t > 0, |x|^2 \leq t\}$.

Пусть J компакт в R^1 , $t \in J$, и пусть $S_{\rho, \delta}^m$ — обычные классы символов.

Определение. (см. [1]). Пусть m_1, m_2, m_3 — действительные числа. Через $S_{\rho, \delta}[m_1, m_2, m_3]$ обозначим пространство всех функций $a(t, x, \xi) \in C^\infty(J \times R_x^n \times R_\xi^n)$ таких, что для некоторых ρ_1, δ_1, m

$$a \in C_t^\infty(J; S_{\rho_1, \delta_1}^m(R_x^n \times R_\xi^n)) \quad (9)$$

и для каждого k, α, β существуют положительные постоянные $C_{k, \alpha, \beta}$ такие, что для всех $t \in J$, $(x, \xi) \in Z_\varepsilon(N)$ верно неравенство

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta a(t, x, \xi)| \leq C_{k, \alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{m_1 - \rho|\alpha| + \delta|\beta|} |\lambda(x)|^{m_2} K^{m_3 + |\beta|}(x). \quad (10)$$

Пусть теперь $\chi(z)$ — функция из $C^\infty(R^1)$ такая, что $0 \leq \chi(z) \leq 1$, $\chi(z) = 1$ при $|z| \leq 8T/10$ и $\chi(z) = 0$ при $|z| \geq 9T/10$.

Выберем постоянные d_l, c_l ($c_l > 0$), $l = 1, \dots, m$ такие, что $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_m$, следующим образом. Если $\arg \tau_l \in [z_l, \beta_l]$, то и $d_l \in [\alpha_l, \beta_l]$, и если $\arg \tau_l$ и $\arg \tau_j$ попадают в один и тот же сегмент $[\alpha_l, \beta_l]$, то $d_l = d_j$, причем $c_l < c_j$ при $|z_l| < |z_j|$. Отметим, что в силу (а) — (с) такой выбор возможен.

Построим функции

$$h(x, \xi) = \chi\left(\frac{\lambda^2(x) \langle \xi \rangle^2}{N^2 \ln^2 \langle \xi \rangle}\right) \ln \langle \xi \rangle + |\lambda(x)| \langle \xi \rangle \left(1 - \chi\left(\frac{\lambda^2(x) \langle \xi \rangle^2}{N^2 \ln^2 \langle \xi \rangle}\right)\right),$$

$$\varphi_l(t, x, \xi) = c_l e^{id_l t} \ln \langle \xi \rangle \chi\left(\frac{\lambda^2(x) \langle \xi \rangle^2}{N^2 \ln^2 \langle \xi \rangle}\right) +$$

$$+ \tau_i(t, x, \xi) \left(1 - x \left(\frac{\lambda^2(x) < \xi >^2}{N^2 \ln^2 < \xi >} \right) \right).$$

Ясно, что $h(x, \xi)$, $\varphi_i(t, x, \xi) \in S[1, 1, 0]$. Пусть $H(x, D_x)$ — диагональный матричный ПДО с элементами $H_{ij} = \delta_{ij} h^{m-1}(x, D_x)$, $i, j = 1, \dots, m$, а $H^{\#}(x, D_x)$ — его параметрикс. Если вектор $(u, D_1 u, \dots, D^{m-1} u)$ обозначить через U , а вектор $H(x, D_x) U$ через V_1 , то уравнение $Pu = 0$ можно переписать в виде системы

$$D_t V_1 + A(t, x, D_x) V_1 + RU = 0, \quad (11)$$

где $R \in C^\infty(J; S^{-\infty})$, а $A(t, x, \xi) \in S[1, 1, 0]$.

Составим по системе $\{\varphi_k(t, x, \xi)/h(x, \xi)\}_1^m$ матрицу Вандермонда $M^{\#}(t, x, \xi)$, и пусть $M(t, x, D_x)$ — параметрикс для $M^{\#}(t, x, D_x)$ (см. [1]), тогда вектор $W = M(t, x, D_x) V_1$ будет решением системы $LW + R_1 U = 0$, где $LW = D_t W + D(t, x, D_x) W + B(t, x, D_x) W$, причем $D(t, x, D_x)$ — оператор с диагональным символом с элементами $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, а $R(t, x, D_x) \in C^\infty(J; \Psi^{-\infty})$. Относительно оператора $B(t, x, D_x)$ можно сказать, что $B(t, x, \xi) \in S[0, 0, 0]$ и при всех $(x, \xi) \in Z_\varepsilon(2N)$, $t \in J$, для произвольных k, α, β

$$|D_t^k D_x^\alpha D_x^\beta B(t, x, \xi)| \leq C_{k, \alpha, \beta} < \xi >^{-|\alpha| + \varepsilon_0 |\beta|} \ln < \xi >. \quad (12)$$

3. Как обычно, в доказательстве теоремы используется следующее неравенство карлемановского типа (см. [4]):

$$\rho \iint e^{\rho(T-t)^2} |V|^2 dx dt \leq C \iint e^{\rho(T-t)^2} |GV|^2 dx dt, \quad (13)$$

здесь ρ — некоторое достаточно большое положительное число,

$$G = \frac{\partial}{\partial t} + iD(t, x, B_x) + iB_1(t, x, D_x),$$

$$B_1(t, x, \xi) = \left(1 - x \left(\frac{\lambda^2(x) < \xi >^2}{N^2 \ln^2 < \xi >} \right) \right) B(t, x, \xi), \quad V(x) = x(t) W.$$

Отметим, что V имеет компактный носитель, лежащий в $R^n \times [0, T]$, а GV — компактный носитель, лежащий в $R^n \times [\delta T/10, T]$.

Осуществим замену $V(t, x) = V_0(t, x) \exp(-\rho(T-t)^2/2)$. Тогда (13) перейдет в

$$\rho \iint |V_0|^2 dx dt \leq C \iint \left| \frac{\partial V_0}{\partial t} + \rho(T-t) V_0 + iD V_0 + iB_1 V_0 \right|^2 dx dt. \quad (14)$$

Разложим операторы в правой части (14) в сумму их самосопряженных и косопряженных частей: $iD = D^+ + D^-$, $iB = B^+ + B^-$. Интегрируя по частям, учитывая то, что $V_0(t, x)$ — функция с компактным по x носителем, получаем

$$\iint \left| \frac{\partial V_0}{\partial t} + \rho(T-t) V_0 + D^+ V_0 + D^- V_0 + B^+ V_0 + B^- V_0 \right|^2 dx dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \iint \left| \frac{\partial V_0}{\partial t} + D^- V_0 + B^- V_0 \right|^2 dx dt + \iint \left| \rho(T-t) V_0 + D^+ V_0 + \right. \\
&\quad \left. + B^+ V_0 \right|^2 dt dx + 2 \operatorname{Re} \int_0^T \left(\left\{ -\frac{\partial}{\partial t} (D^+ + B^+) + [D^+ + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + B^+, D^- + B^-] \right\} V_0, V_0 \right)_0 dt, \quad (15)
\end{aligned}$$

где $(\cdot, \cdot)_0$ — скалярное произведение в $L_2(R^n)$.

Для доказательства (14) теперь уже достаточно показать, что с некоторой постоянной $\kappa > 1$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
&-\kappa \int_0^T \left(\left\{ -\frac{\partial}{\partial t} (D^+ + B^+) + [D^+ + B^+, D^- + B^-] \right\} V_0, V_0 \right)_0 dt < \\
&\leq \int_0^T \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} + D^- + B^- \right) V_0 \right\|^2 dt + \int_0^T \left\| \left(\rho(T-t) + D^+ + B^+ \right) V_0 \right\|^2 dt + \\
&\quad + \frac{\rho}{2} \int_0^T \|V_0\|^2 dt. \quad (16)
\end{aligned}$$

Докажем (16). Обозначим через B_2 оператор $-\frac{\partial}{\partial t} (D^+ + B^+) + [D^+ + B^+, D^- + B^-]$, тогда $\sigma(B_2) \in S[1, 1, 0]$. С другой стороны, согласно свойствам символов операторов B_1 и D при $(x, \xi) \in Z_n(N)$, $t \in J$ имеем $B_2(t, x, \xi) \equiv 0$, а при $(x, \xi) \in Z_e(N)$ с некоторой постоянной C_1

$$\|B_2(t, x, \xi)\| \leq C_1 |\cdot(x)| < \xi >. \quad (17)$$

По предположению (5) с некоторой постоянной $d_1 > 0$ имеем

$$|D^+(t, x, \xi)| \geq d_1 |\cdot(x)| < \xi > \text{ при } (x, \xi) \in Z_e(N), t \in J. \quad (18)$$

Обычным образом с помощью символического исчисления ПДО (см., например, доказательство леммы 6.2, [5]) показывается, что существуют постоянная $C_2 > 0$ и ПДО T такие, что

$$\begin{aligned}
&C_2^2 D^+(t, x, D_x) D^+(t, x, D_x) - B_2^*(t, x, D_x) B_2(t, x, D_x) - \\
&- T^*(t, x, D_x) T(t, x, D_x) \in C^\infty(J; \Psi^{-\infty}(R^n)). \quad (19)
\end{aligned}$$

Потому с $R \in C^\infty(J; \Psi^{-\infty}(R^n))$ имеем $\|B_2 V_0\|^2 \leq C_2^2 \|D^+ V_0\|^2 + \|R V_0\|^2$. Итак

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^T (B_2 V_0, V_0)_0 dt \right| \leq C_2 \int_0^T \|D^+ V_0\| \|V_0\| dt + C_3 \int_0^T \|V_0\|^2 dt < \\
&< C_2 \int_0^T \|D^+ V_0 + B^+ V_0 + \rho(T-t) V_0\| \|V_0\| dt + C_2 \int_0^T \|B^+ V_0\| \|V_0\| dt +
\end{aligned}$$

$$+ (\rho T + C_3) \int_0^T \|V_0\|^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_0^T \|D^+ V_0 + B^+ V_0 + \rho(T-t) V_0\|^2 dt + \\ + \left(T + \frac{C_4}{\rho}\right) \int_0^T \|V_0\|^2 dt \quad (20)$$

и для завершения доказательства (14) достаточно взять T и C_4/ρ достаточно малыми. Итак, (13) доказано.

4. Пусть Q — матричный ПДО, являющийся решением следующей задачи

$$Q_t + (iD + iB)Q - Q(iD + iB_1) + i(B - B_1) \in C_l^-(J; \Psi^{-\infty}), \quad (21)$$

$$Q|_{t=0} = 0. \quad (22)$$

Докажем, что такой Q существует. Для этого заметим, в первую очередь, что $Q(t, x, \xi) = 0$ при $(x, \xi) \in Z_\varepsilon(2N)$. Поэтому, если мы перепишем (21), (22) в виде

$$Q_t + R(t)Q + QR_1(t) + R_0(t) \in C_l^-(\Psi^{-\infty}), \quad (23)$$

$$Q|_{t=0} = 0, \quad (24)$$

то $R(t)$, $R_1(t)$, $R_0(t)$ удовлетворяют условиям следующего предложения.

Предложение 1. Пусть $R(t)$, $R_1(t)$, $R_0(t)$ — матричные ПДО с символами $r(t, x, \xi)$, $r_1(t, x, \xi)$, $r_0(t, x, \xi)$ соответственно. Предположим, что с некоторыми постоянными ρ , K , m , ρ , δ ($0 \leq \delta < \rho \leq 1$), для любых α , β с некоторыми положительными постоянными $C_{\alpha, \beta}$, C_0 , при всех $t \in [0, T]$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle \xi \rangle \geq M$ выполнены неравенства

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta r(t, x, \xi)| + |D_\xi^\alpha D_x^\beta r_1(t, x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|} g(t, \xi), \quad (25)$$

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta r_0(t, x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|} g(t, \xi), \quad (26)$$

$$\int_0^T g(\tau, \xi) d\tau \leq K \ln \langle \xi \rangle, \quad g(t, \xi) \leq C_0 \langle \xi \rangle^m. \quad (27)$$

Тогда существует решение $Q(t)$ задачи (23), (24) с символом $q(t, x, \xi)$, удовлетворяющим при всех $t \in [0, T]$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle \xi \rangle \geq M$, неравенствам

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta q(t, x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{K + \rho - \delta|\alpha| + \delta|\beta|} (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha| + |\beta|} \quad (28)$$

и, следовательно, принадлежащим классу $C_l([0, T]; \bigcap_{0 \leq \alpha \leq 1} S_{\rho, \delta}^{K + \rho + \alpha}(C_l^1([0, T]; \bigcap_{0 \leq \alpha \leq 1} S_{\rho, \delta}^{K + \rho + m + \alpha})))$. Это решение единственно по mod $C_l^1[0, T], S^{-\infty}$.

Покажем, далее, что у операторов $I + Q(t)$ существует параметрикс. Действительно, таковым, как следует из предложения 1, будет оператор $I + Q^*(t)$, где $Q^*(t)$ есть решение задачи

$$Q_t^* + (iD + iB_1)Q^* - Q^*(iD + iB) + i(B_1 - B) \in C_l^-(\Psi^{-\infty}), \quad (29)$$

$$Q^*|_{t=0} = 0. \quad (30)$$

Перейдем к завершению доказательства теоремы. Пусть $Q^*(t)$ — решение (29), (30). Рассмотрим функцию $V(t) = \chi(t) (I + Q^*(t)) W(t)$, где $W = MNU$. Тогда

$$GV = \chi_t (I + Q^*(t)) W(t) + \chi(t) R_2 U, \quad (31)$$

где $R_2 \in C_1^-(J; \Psi^{--})$. Применим к $V(t)$ неравенство (13)

$$\begin{aligned} \rho \int_0^T e^{\rho(T-t)^2} \|V(t)\|_0^2 dt &\leq C \int_0^T e^{\rho(T-t)^2} \|\chi_t(t) (I + Q^*(t)) W(t)\|_0^2 dt + \\ &+ C \int_0^T e^{\rho(T-t)^2} \|\chi(t) R_2 U\|_0^2 dt. \end{aligned} \quad (32)$$

Очевидно, что в соответствии с выбором V с некоторой постоянной $s > 0$ при достаточно малом T , имеем

$$\chi(t) \|U(t)\|_{-s} \leq C \|V(t)\|_0. \quad (33)$$

Так что

$$\chi(t) \|R_2(t) U(t)\|_0 \leq C \|V(t)\|_0. \quad (34)$$

Из (34) при достаточно больших ρ получаем

$$\rho \int_0^T e^{\rho(T-t)^2} \|V(t)\|_0^2 dt \leq C \int_0^T e^{\rho(T-t)^2} \|\chi_t(t) (I + Q^*(t)) W(t)\|_0^2 dt, \quad (35)$$

откуда

$$e^{\rho T^{1/4}} \int_0^{T/2} \|V(t)\|_0^2 dt \leq C e^{\rho T^{1/25}} \int_{T/5}^T \|(I + Q^*(t)) W(t)\|_0^2 dt. \quad (36)$$

Из последнего неравенства, устремляя $\rho \rightarrow \infty$ получаем $V(t) = 0$ в $L_2(R^n)$ при $0 \leq t \leq T/2$, так что $U(t) = 0$ в $H_{-s}(R^n)$ при тех же t .

Межвузовский научный центр

по прикладным проблемам

математики

Институт математики

АН Армянской ССР

Поступила 11. X. 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Н. Ягджян. Fundamental solution for the Cauchy problem for the hyperbolic equation with multiple characteristics, Acta. Math. Hung. 1990. v. 52.
2. Н. Урыа. Uniqueness for the Characteristic Cauchy problem and the Applications Tokyo journal of Mathematics, v. 5, № 1, 1982, 117—137.
3. S. Nakane. Uniqueness and Non-uniqueness in the Cauchy problem for a class of operators of degenerate Type II, Proc. Jap. Acad., 59, ser. A, 1983, 318—320.
4. Ф. Трев. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье, т. 1, М., «Мир», 1984.
5. М. Тейлор. Псевдодифференциальные операторы, М., «Мир», 1985.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В нашей заметке «О коэффициентах Тейлора произведений $B_a(z; z_h)$ », опубликованной в журнале «Математика» Известий АН Армянской ССР, т. 23, № 6, 1988 г., 588—593, для доказательства формулы (8) была неправильно применена теорема о вычетах. Следовательно, основной результат работы не доказан.

В. С. ЗАХАРЯН, И. В. ОГАНЕСЯН

Обобщение теоремы Н. Винера и Р. Пэли. Вагаршакян А. А. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 2, 111—122.

В данной работе обобщается теорема Н. Винера и Р. Пэли для весовых пространств. Полученные результаты применяются в вопросах полноты системы экспоненциальных функций. Библиографий 9.

УДК 517.946

ВКБ-оценки для уравнений в частных производных и задача Коши для сингулярных гиперболических уравнений второго порядка. Оганесян Г. Р. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 2, 123—134.

В работе доказаны ВКБ-оценки для уравнений в частных производных, известные ранее лишь для обыкновенных дифференциальных уравнений.

С помощью этих оценок доказывается однозначная разрешимость в пространствах Соболева весовой задачи Коши для сингулярных (на начальной гиперплоскости) гиперболических псевдодифференциальных уравнений второго порядка. Весовые данные Коши задаются с помощью интегральных операторов Фурье, удовлетворяющим вспомогательным уравнениям в частных производных первого порядка. Библиографий 12.

УДК 517.968

Интегральные уравнения Винера—Хопфа со вполне монотонными ядрами. Арабаджян Л. Г., Енгисбарян Н. Б. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 2, 135—155.

Работа посвящена изучению интегральных уравнений Винера—Хопфа

$$f(x) = g(x) + \int_a^x K(x-t)f(t)dt, \quad (1)$$

$$\text{где } K \geq 0, \mu = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx \leq 1.$$

Основная часть результатов относится к случаю, когда

$$K(\pm x) = \int_a^b e^{-|x|s} d\vartheta_{\pm}(s), \quad x > 0, \vartheta_{\pm}(s) \uparrow \text{ по } s.$$

Путем привлечения нелинейных уравнений факторизации и обобщенных уравнений Амбарцумяна получены результаты по разрешимости и свойствам решения неоднородного и однородного уравнения (1) по редукционному методу их решения. Библиографий 30.

УДК 517.53

О росте функций обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости. Микаелян Г. В. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 2, 156—170.

Для введенных А. М. Джрбашяном классов $N_{\alpha}^m (0 < \alpha < +\infty)$ аналитических в нижней полуплоскости функций $f(w) \equiv f(u+iv)$ иссле-

будет взаимно с ростом считающей функции нулей $N(v, f)$ и ростом самой функции вблизи вещественной оси, выраженного величиной

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [W^{-\alpha} \log |f(u + iv)|]^2 du,$$

где $W^{-\alpha}$ — интегральный оператор Вейля. Библиографий 15.

УДК 517.547

Об одном обобщении интерполяционной проблемы Шура. Галстян Л. А., Дубовой В. К. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 2, 171—181.

Имея в виду неадекватность классической интерполяционной проблемы Шура заданию элементарного J -растягивающего кратного множителя произвольного ранга, в статье предлагается новая задача, названная Φ -касательной проблемой Шура, находящаяся, в известном смысле, по взаимно-однозначному соответствию с таким множителем. Библиографий 13.

УДК 517.5

Оценки мономов через квазиполиномы и коэрцитивность квазидифференциальных операторов. Геворгян О. В. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 2, 182—192.

В работе рассматривается вопрос оценки мономов через данный набор квазиполиномов. Описывается максимальное множество мономов и тот класс наборов квазиполиномов, для которых такая оценка верна. Используя такие оценки, доказывается теорема типа Литтльвуда—Пэли, с помощью которой решается задача о коэрцитивности данного набора квазидифференциальных операторов. Библиографий 12.

УДК 517.95

Регулярные уравнения с параметром. Карапетян Г. А. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 2, 193—202.

В работе доказываются теоремы существования и единственности, а также о гладкости решений одного класса гиперэллиптических уравнений в R^n и R_+^n . В R_+^n вводится понятие регулярного уравнения с общими начальными условиями. Вышеуказанные теоремы в R_+^n доказываются для задачи с общими начальными условиями. В заметке применяются методы работы [1]. Библиографий 7.

УДК 517.95

Единственность решения задачи Коши для вырождающихся эллиптических уравнений. Галстян А. А., Ягджян К. А. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 2, 203—208.

В статье приводятся условия на полный символ вырождающегося по части переменных оператора и, в частности, на коэффициенты при младших производных, при выполнении которых доказывается теорема единственности. Библиографий 5.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Ա. Ս. Վաղարշայան, Ն. Վիներ և Ռ. Պելլի թեորեմի ընդհանրացումը	112
Գ. Ռ. Հովհաննիսյան. Վեր-գնահատականները և Կոշու խնդիր երկրորդ կարգի սին-գուլյար հիպերբոլական հավասարումների համար	123
Լ. Գ. Արարալյան, Ն. Բ. Նեդիբարյան. Լիովին մոնոտոն կորիզներով Վիներ-Հոպֆի ինտեգրալ հավասարումներ	135
Գ. Վ. Մրֆայիլյան. Կիսահարթությունում ընդհանրացված-սահմանափակ տեսքի ֆունկ-ցիաների աճի մասին	156
Լ. Հ. Գալստյան, Վ. Կ. Դաւթալյան. Շուրի ինտերպոլացիոն խնդրի մի ընդհանրացման մասին	171
Հ. Վ. Գեորգյան Մոնոմների գնահատականները քվադրատիկաներով և քվադրիդիկ-րենցիալ օպերատորների կոէրցիտիվությունը	182
Գ. Ա. Կառապետյան. Պարամետրից կախված ռեզոլյար հավասարումներ	193

ՀԱՄԱՌՈՑ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

Ա. Ա. Գալստյան, Կ. Հ. Յաղլյան. Վերասերվող էլիպտիկ հավասարումների համար Կոշու խնդրի լուծման միակությունը	203
Նամակ խմբագրությանը	209

СО ДЕРЖАНИЕ

А. А. Вагаршакян. Обобщение теоремы Н. Винера и Р. Пелли	111
Г. Р. Оганесян. ВКБ-оценки для уравнений в частных производных и задача Коши для сингулярных гиперболических уравнений второго порядка	123
Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян. Интегральные уравнения Винера-Хопфа со вполне монотонными ядрами	135
Г. В. Микаелян. О росте функций обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости	156
Л. А. Галстян, В. К. Дубовой. Об одном обобщении интерполяционной пробле-мы Шура	171
О. В. Геворгян. Оценки мономов через квазиполиномы и коэрцитивность квази-дифференциальных операторов	182
Г. А. Карапетян. Регулярные уравнения с параметром	193

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А. А. Галстян, К. А. Ягджян. Единственность решения задачи Коши для вырож-дающихся эллиптических уравнений	203
Письмо в редакцию	209

CONTENTS

<i>A. A. Vagurshaklan.</i> The extension of N. Wiener and Paley theorem	111
<i>G. R. Oganessyan.</i> JWKB-estimates for the partial differential equations and the Cauchy problem for the second order singular hyperbolic equations	123
<i>L. G. Arabadzhyan, N. B. Englbargan.</i> Wiener-Hopf integral equation with complete monotone kernels	135
<i>G. V. Mikaellan.</i> On the growth of generalized bounded type functions in the half-plane	156
<i>L. A. Galstian, V. C. Dubovoy.</i> On a generalization of interpolation problem of Shur	171
<i>H. V. Gevorgian.</i> Estimates of monomes by quasipolynomials and coercitiveness of quasidifferential operators	182
<i>G. A. Karapettan.</i> Regular equations with a parameter]	193

SHORT COMMUNICATIONS

<i>A. A. Galstian, K. A. Yagdjan.</i> Uniqueness of the solution of Cauchy problem for degenerate elliptic equations	203
Letter to the editor	209