# ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

# ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

## ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
## МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.



## Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

*Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝*

*1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։*

*Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։*

*2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։*

*Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։*

*3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։*

*Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։*

*4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։*

*5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։*

*Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։*

*6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։*

*7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։*

*8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։*

*9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։*

*10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։*

*11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։*

*Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։*

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках



## К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке) а кратких сообщений—не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствущем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

1990 №1

1 р. 20 к. Индекс 77735



## TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contribttors who desire to have their articles published in the proceedings zvestia of the Academy of Sciences of the Armenien S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication,

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initals and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date muse be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is ·to indicated by a numeral in square brackets properey inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article shoule contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitied ot twenty-five free reprints of their articles.


Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR



Математика, 1990, т. XXV, № 1, стр. 3—108.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXV, № 1, 1990 Математика

УДК 517.53

Г. М. АЙРАПЕТЯН

# РАЗРЫВНАЯ ЗАДАЧА РИМАНА-ПРИВАЛОВА СО СМЕЩЕНИЕМ В КЛАССЕ $L^1$

1°. Пусть $G^+$—некоторая область на комплексной плоскости, ограниченная простым замкнутым контуром Ляпунова $\Gamma$, а $G^-$ — дополнение множества $G^+ \cup \Gamma$.

Обозначим через $H(\Omega)$ класс функций, определенных на множестве $\Omega$ и удовлетворяющих условию Гельдера. Соответственно через $H_0(\Gamma;\ t_1, t_2, \cdots, t_n)$ обозначим класс функций, имеющих разрыв первого рода в точках $t_k \in \Gamma$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ и удовлетворающих условию Гельдера на каждой замкнутой части $\Gamma$, находящейся между такими соседними точками.

Пусть, далее, $\alpha(t)$ — заданная на $\Gamma$ непрерывная функция, которая удовлетворяет следующим условиям:

а) $\alpha(t)$ взаимно однозначно отображает $\Gamma$ на себя, сохраняя ориентацию.

в) Производная $\alpha'(t)=d\alpha(t)/dt$ отлична от нуля на $\Gamma$ и принадлежит классу $H(\Gamma)$.

Приведем классическое определение граничной задачи сопряжения со сдвигом: найти голоморфную в $G^+ \cup G^-$ функцию $\Phi(z)$, имеющую конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^+(\alpha(t)) - D(t)\,\Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{1}$$

где $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ — сужения функции $\Phi(z)$ соответственно на $G^+$ и $G^-$, $D(t)$ и $f(t)$ — некоторые функции, заданные на $\Gamma$, а $\alpha(t)$ удовлетворяет вышеуказанным условиям а) и в).

В случае, когда $\alpha(t) \equiv t$, $D(t)$ и $f(t)$ принадлежат классу $H_0(\Gamma;\ t_1, t_2, \cdots, t_n)$, $D(t) \neq 0$ и функция $\Phi(z)$ ищется в классе функций, непрерывно продолжаемых на $\Gamma$ слева и справа, кроме точек разрыва $t_1, t_2, \cdots, t_n$ функции $D(t)$, где предполагается выполнение неравенства $|\Phi(z)| < \mathrm{Const}\cdot|z-t_k|^{-\alpha}$ $(0<\alpha<1,\ k=1, 2, \cdots, n)$, задача (1) полностью изучена в монографиях Н. И. Мусхелишвили [1] и Ф. Д. Гахова [2]. В [1], вводя понятие классов $h(t_1, t_2, \cdots, t_q)$ $(q<n)$, вычисляется индекс соответствующей задачи и устанавливается, что общее решение неоднородной задачи в классе $h(t_1, t_2, \cdots, t_q)$ можно представить в виде

$$\Phi(z) = \frac{S(z)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(t)}{S^+(t)}\,\frac{dt}{t-z} + S(z)\,P(z), \tag{2}$$

где $S(z)$ — каноническое решение задачи (1) в классе $h(t_1, \cdots, t_q)$, а $P(z)$ — произвольный полином.

В работах [3, 4] Б. В. Хведелидзе рассмотрена задача (1) в том случае, когда $f(t) \in L^p(\Gamma; \rho)$, $p > 1$ и $\rho$ — вес специального вида. В этом случае, если требовать, чтобы решения $\Phi(z)$ были представлены интегралом типа Коши от функции из класса $L^p(\Gamma, \rho)$, $1 < p < \infty$, то общее решение также можно представить в виде (2). Отметим, что в этой работе рассматривается также случай, когда коэффициент $D(t)$ в точках $t_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ может стремиться к бесконечности или к нулю со скоростью любого порядка.

Задача (1), когда $f(t) \in L^1(\Gamma)$, $D(t) \in H(\Gamma)$, изучена в работах Г. А. Хускивадзе (см., например, [5]). Им было установлено, что если решение этой задачи ищется в классе функций $\bar{K}_n(\Gamma)$, состоящего из $\bar{L}$-интегралов типа Коши с кривой разрыва $\Gamma$, то общее решение также может быть представлено в виде (2).

Случай, когда функция $D(t)$ — произвольная измеримая функция, рассмотрен в работе И. Б. Симоненко [6]. Полагая, что $D(t)$ удовлетворяет условию $A(p)$, $f(t) \in L^p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ устанавливается, что задачу (1) можно решить в классе $E_p (1 < p < \infty)$ Смирнова и решение представить в виде (2).

В дальнейшем эти результаты были обобщены в различных направлениях. Отметим обзорную работу Б. В. Хведелидзе [6], а также монографии И. И. Данилюка [8] и Г. С. Литвинчука [9], где можно найти подробный литературный обзор.

2°. В настоящей работе рассматривается задача (1) в том случае, когда $f(t) \in L^1(\Gamma)$, а $D(t) \in H_0(\Gamma; t_1, t_2, \cdots, t_n)$. Для формулировки задачи введем некоторые обозначения. Пусть $D^+$ — единичный круг, $T$ — единичная окружность, а $D^-$ — область $|z| > 1$. Обозначим через $\omega(z)$ и $\mu(z)$ $(\mu(\infty) = \infty)$ функции, конформно отображающие области $D^+$ и $D^-$ соответственно на $G^+$ и $G^-$. Для любого $r (0 < r < 1)$ положим

$$\lambda_r(z) = \omega(r\omega^{-1}(z)), \text{ при } z \in G^+,$$

$$\lambda_{r^{-1}}(z) = \mu(r^{-1}\mu^{-1}(z)), \text{ при } z \in G^-.$$

Под задачей сопряжения со смещением в $L^1(\Gamma)$ будем понимать следующую задачу.

Задача А. Найти голоморфную в $G^+ \cup G^-$ функцию $\Phi(z)$, обращающуюся в нуль на бесконечности, по граничному условию

$$\lim_{r \to 1-0} \|\Phi^+(\lambda_r(\alpha(t))) - D(t)\Phi^-(\lambda_{r^{-1}}(t)) - f(t)\|_1 = 0, \tag{3}$$

где $f(t) \in L^1(\Gamma)$, $D(t) \in H_0(\Gamma; t_1, t_2, \cdots, t_n)$, $D(t) \neq 0$, а $\| \ \|_1$ — норма в пространстве $L^1(\Gamma)$.

В случае, когда граничные данные принадлежат $L^1(\Gamma)$, краевые задачи для эллиптических уровнений приводятся к задаче А, где граничные условия понимаются в смысле (3).

При решении задачи А, как и в случае $D(t) \in H(\Gamma)$ (см. [10]), при помощи интеграла типа Коши строим семейство интегральных операторов, которые равномерно ограничены в $L^1(\Gamma)$. Доказывается нетеровость задачи А, вычисляется её индекс и построены все решения.

Отметим, что если $D(t) \in H_0(T;\ t_1,\ t_2, \cdots, t_n)$ и $f \in L^1(\Gamma)$ — произвольная функция, то вообще говоря не каждое решение задачи А может быть представлено в виде интеграла типа Коши от функций из $L^1(\Gamma)$.

Для того чтобы формулы приняли более обозримый вид, сначала будем рассматривать случай, когда $\Gamma$ — единичная окружность. В этом случае (3) примет вид

$$\lim_{r \to 1-0} \|\Phi^+(r\alpha(t)) - D(t)\,\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)\|_1 = 0. \tag{3'}$$

## § 1. Некоторые свойства решения задачи А

1. Выбирая обход окружности $T$ в положительном направлении точках $t_1, t_2, \cdots, t_n$ разрыва функции $D(t)$ положим $\alpha_k + i\beta_k = \frac{1}{2\pi i}(g^*(t_k - 0) - g^*(t_k + 0))$, где $g^*(t) = \ln D(t)$.

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} S_1^+(z) &= e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\varphi(\beta(t))}{t-z}dt}, \quad \text{при } z \in D^+, \\ S_1^-(z) &= e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\varphi(t)}{t-z}dt}, \quad \text{при } z \in D^-, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\beta(t)$ — функция, обратная $\alpha(t)$, а $\varphi(t)$ — решение уравнения

$$K\varphi \equiv \varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \left(\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\right)\varphi(\tau)\,d\tau = g^*(t). \tag{5}$$

Легко проверить, что функция $S_1(z)$ удовлетворяет граничному условию

$$S_1^+(\alpha(t)) - D(t)\,S_1^-(t) = 0,\ t \in T,\ t \neq t_1,\ t_2, \cdots, t_n. \tag{6}$$

Так как ядро

$$k(\tau,\ t) = \frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \tag{7}$$

в этих условиях имеет слабую особенность, то из (5) следует, что в точках $t_1, \cdots, t_n$ функция $\varphi(t)$ также имеет разрывы первого рода и $\alpha_k + i\beta_k = \frac{1}{2\pi i}(\varphi(t_k - 0) - \varphi(t_k + 0))$.

Положим $t_k' = \alpha(t_k)$ $(k = 1,\ 2, \cdots, n)$. Из свойства интеграла типа Коши для функций из класса $H_0(T)$ (см. [1]) вблизи точек $t_k$ $(k = 1,\ 2, \cdots, n)$ имеем

$$S_1^+(z) = (z - t_k')^{\alpha_k+\beta_k} \cdot \Omega_k^+(z),$$

где $\Omega_k^+(z)$ — голоморфная функция в той части окрестности $t_k'$, которая входит в область $D^+$, при этом $\Omega_k^+(z)$ имеет отличный от нуля предел при $z \to t_k'$, $z \in D^+$. Соответственно, для функции $S_1^-(z)$ вблизи точек $t_k\,(k=1, 2,\cdots, n)$ имеем

$$S_1^-(z) = (z - t_k)^{\alpha_k+\beta_k} \cdot \Omega_k^-(z),$$

где $\Omega_k^-(z)$ имеет отличный от нуля предел при $z \to t_k$, $z \in D^-$.

Рассмотрим теперь граничную задачу

$$\Phi^+(\alpha(t)) - \Phi^-(t) = 0, \quad t \in T, \tag{8}$$

где $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ — аналитические в $D^+$ и $D^-$ функции.

По теореме о конформном склеивании существует такое решение $\lambda(z)$ задачи (8), что $\lambda^+(z)$ и $\lambda^-(z)$ конформно отображают области $D^+$ и $D^-$ на некоторые области $\Delta_+$ и $\Delta_-$ $(\lambda(\infty)=\infty)$ и удовлетворяют условию Липшица в $D^+ \cup T$ и $D^- \cup T$ соответственно. Теперь положим

$$\Phi_1^+(z) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda^+(z) - \lambda^+(t_k'))^{\lambda_k}, \text{ при } z \in D^+,$$

$$\Phi_1^-(z) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda^-(z) - \lambda^-(t_k))^{\lambda_k}, \text{ при } z \in D^-,$$

где $\lambda_k\,(k=1, 2,\cdots, n)$ — целые числа, удовлетворяющие условиям $-1 < \alpha_k + \lambda_k \leqslant 0\,(k=1, 2,\cdots, n)$. Ясно, что функции $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_1^-(z)$ удовлетворяют условию (8) и вблизи точек $t_k'$, $t_k\,(k=1, 2\cdots, n)$ имеем

$$\Phi_1^+(z) = (z - t_k')^{\lambda_k}\, \tilde{\Omega}_k^+(z), \quad \Phi_1^-(z) = (z - t_k)^{\lambda_k}\, \tilde{\Omega}_k^-(z), \tag{9}$$

где $\tilde{\Omega}_k^+(z)$ и $\tilde{\Omega}_k^-(z)$ обладают такими же свойствами, как и $\Omega_k^+(z)$ и $\Omega_k^-(z)$.

Если $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ — некоторые функции на $D^+$ и $D^-$, то под $\Phi(z)$ будем понимать функцию

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z), & z \in D^+, \\ \Phi^-(z), & z \in D^-. \end{cases}$$

Если же $\Phi(z)$ определена на $D^+ \cup D^-$, то под $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ будем понимать сужение этой функции на $D^+$ и $D^-$ соответственно.

Для дальнейшего введем в рассмотрение функцию

$$S(z) = S_1(z)\, \Phi_1(z), \quad z \in D^+ \cup D^-, \tag{10}$$

где $S_1(z)$ и $\Phi_1(z)$ — функции, построенные выше.

Из определения функций $S_1(z)$, $\Phi_1(z)$ и $S(z)$ непосредственно следует

Лемма 1. *Функция $S(z)$ удовлетворяет условиям*

a) $S^+(\alpha(t)) - D(t)\,S^-(t) = 0,\ t \in T$;

в) $S^+(\alpha(t)),\ S^-(t) \in L^1(T)$ и $(S^+(\alpha(t)))^{-1},\ (S^-(t))^{-1} \in L^\infty(T)$;

c) *в достаточно малых окрестностях* $\dot{V}_k$ *и* $V$ *точек* $\dot{t}_k$ *и* $t_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ $S^+(z)$ *и* $S^-(z)$ *представляются в виде*

$$S^+(z) = \frac{\mu_k^-(z)}{(z - \dot{t}_k)^{\gamma_k - \beta_k}}\,,\quad z \in D^+ \cap \dot{V}_k,$$

$$S^-(z) = \frac{\lambda_k^-(z)}{(z - t_k)^{\gamma_k - \beta_k}}\,,\quad z \in D^- \cap V_k,$$

*где* $\gamma_k = -(\alpha_k + i\lambda_k)$ *и* $0 \leqslant \gamma_k < 1$, *а* $\lambda_k^-(z), \mu_k^-(z)$ — *голоморфные в* $D^+ \cap \dot{V}_k$ *и* $D^- \cap V_k$ *функции, стремящиеся к определенным, отличным от нуля, пределам, при* $z \to \dot{t}_k,\ z \in D^+$ *и* $z \to t_k,\ z \in D^-$.

3°. Теорема 1. *Пусть* $f(t) \in L^1(T)$. *Если* $\Phi(z)$ *есть решение граничной задачи* (3′), *имеющее конечный порядок на бесконечности, то оно представимо в виде*

$$\Phi^+(z) = \frac{S(z)}{2\pi i}\int_T \frac{\varphi(\beta(t))}{t - z}\,dt,\ \text{при}\ z \in D^+,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{S(z)}{2\pi i}\int_T \frac{\varphi(t)}{t - z}\,dt + S(z)\,P(z),\ \text{при}\ z \in D^-, \tag{11}$$

*где* $P(z)$ — *некоторый полином, а* $\varphi(t)$ — *решение уравнения* $K\varphi = P(t) + f(t)\,(S^+(\alpha(t)))^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\Phi(z)$ — некоторое решение граничной задачи (3′) и пусть $f_r(t)$ — последовательность функций из $H(T)$ такая, что $\|f_r(t) - f(t)\|_1 \to 0$, при $r \to 1 - 0$. Если $\Phi(z)$ удовлетворяет условию (3′), то будем иметь

$$\lim_{r\to 1-0} \|\Phi^+(r\,\alpha(t)) - D(t)\,\Phi^-(r^{-1}t) - f_r(t)\|_1 = 0.$$

Учитывая лемму 1 имеем

$$\lim_{r\to 1-0}\left\|\frac{\Phi^+(r\,\alpha(t))}{S^-(\alpha(t))} - \frac{\Phi^-(r^{-1}t)}{S^-(t)} - \frac{f_r(t)}{S^-(\alpha(t))}\right\|_1 = 0. \tag{12}$$

Обозначив

$$\psi_r(t) = \frac{\Phi^+(r\alpha(t))}{S^+(\alpha(t))} - \frac{\Phi^-(r^{-1}t)}{S^-(t)} - \frac{f_r(t)}{S^+(\alpha(t))}\,,$$

$$F_r^+(z) = \frac{\Phi^+(rz)}{S^+(z)}\ (z \in D^+),\quad F_r^-(z) = \frac{\Phi^-(r^{-1}z)}{S^-(z)}\ (z \in D^-), \tag{13}$$

из (12) получим

$$F_r^+(\alpha(t)) - F_r^-(t) = \psi_r(t) + \frac{f_r(t)}{S^+(\alpha(t))}, \quad t \in T, \ 0 < r < 1, \tag{14}$$

где $\psi_r(t) \in H_0(\Gamma)$ и $\|\psi_r(t)\|_1 \to 0$, при $r \to 1-0$. Так как функции $F_r^+(z)$ и $F_r^-(z)$ ограничены в $D^+$ и $D^-$, то из (14) будем иметь [4]

$$F_r^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\varphi_r(\beta(t))}{t-z}\, dt,$$

$$F_r^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\varphi_r(t)}{t-z}\, dt + P_r(z), \tag{15}$$

где $P_r(z)$ — главная часть функции $F_r^-(z)$, а $\varphi_r(t)$—решение уравнения

$$K\varphi = \psi_r(t) + P_r(t) + f_r(t)\,(S^+(\alpha(t)))^{-1}.$$

Имеем

$$\lim_{r \to 1-0} F_r^+(z) = \frac{\Phi^+(z)}{S^+(z)}, \quad \lim_{r \to 1-0} F_r^-(z) = \frac{\Phi^-(z)}{S^-(z)}$$

и $P_r(z)$ равномерно сходятся к полиному $P(z)$, при $r \to 1-0$, где $P(z)$ — главная часть функции $\Phi^-(z)\,(S^-(z))^{-1}$ на бесконечности.

Так как

$$\lim_{r \to 1-0} \left\| \psi_r(t) + P_r(t) + \frac{f_r(t)}{S^+(\alpha(t))} - P(t) - \frac{f(t)}{S^+(\alpha(t))} \right\|_1 = 0,$$

то $\|\varphi_r(t) - \varphi(t)\|_1 \to 0$ (см. [10]). Переходя к пределу в (15) и учитывая (13) получим доказательство теоремы.

Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть* $f(t) \in H_0(T)$. *Тогда общее решение граничной задачи* (3') *в классе функций, удовлетворяющих условию* $|\Phi(z)| < \mathrm{Const}\cdot|z-t_k|^{-\alpha}$ $(0 < \alpha < 1,\ k = 1, \cdots, n)$ *в окрестностях точек* $t^k$ *и имеющее конечный порядок на бесконечности, задается формулой* (11), *где* $\varphi(t) \in H_0(T)$.

Если граничное условие понимать поточечно, кроме точек разрыва $t_1, t_2, \cdots, t_n$, то эта теорема известна (см., напр., [4], [6]). Пусть граничное условие понимается в смысле (3'), тогда согласно теореме 1 она представляется в виде (11), где $\varphi(t)$ является решением уравнения $K\varphi = P(t) + f(t)\,(S^+(\alpha(t)))^{-1}$. Так как $f(t)\,(S^+(\alpha(t)))^{-1} \in H_0(T)$, то решение этого уравнения также принадлежит классу $H_0(T)$.

## § 2. Предварительные леммы

1°. Положим

$$h_r(\tau, t) = \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - r\alpha(t)} - \frac{1}{\tau - r^{-1} t}. \tag{16}$$

Нам в дальнейшем необходимы следующие неравенства из [10]:

$$|h_r(\tau, t)| < A\left(\frac{1-r^2}{|\tau - rt|^2} + 1\right), \tag{17}$$

$$|\alpha(\tau) - r\alpha(t)| > A_1 |\tau - rt|, \tag{18}$$

где $A$, $A_1$ — положительные постоянные.

2°. Пусть $\varphi(\tau) \in L^1(T)$ и $\alpha < 1$. Положим

$$(A_r\varphi)(t) = \frac{1}{(\tau_0 - r\,t)^\alpha} \int_T \varphi(\tau)(\tau_0 - \tau)^\alpha P_r(\tau, t)\, d\tau,$$

где $\tau_0$, $t \in T$, а $P_r(\tau, t) = (1 - r^2)|\tau - rt|^{-2}$ — ядро Пуассона.

Лемма 2. *Существует число $C$, не зависящее от $r$ такое, что для любой функции $\varphi \in L^1(T)$*

$$\|A_r\varphi\|_1 \leqslant C\|\varphi\|_1.$$

Доказательство. Так как $|\,|\tau_0 - t|^\alpha - |\tau_0 - rt|^\alpha| < \mathrm{Const}\,|\tau - rt|^\alpha$, то

$$|(A_r\varphi)(t)| \leqslant C_1 \left( \int_T |\varphi(\tau)|\, P_r(\tau, t)\, |d\tau| + \right.$$

$$\left. + \int_T |\varphi(\tau)| \frac{1 - r^2}{|\tau_0 - r\,t|^\alpha\, |\tau - r\,t|^{2-\alpha}} |d\tau| \right).$$

Учитывая, что

$$\frac{1 - r^2}{|\tau_0 - r\,t|^\alpha\, |\tau - r\,t|^{2-\alpha}} \leqslant \frac{1 - r^2}{|\tau_0 - r\,t|^2} + \frac{1 - r^2}{|\tau - r\,t|^2}$$

и

$$\frac{1}{2\pi} \int_T \frac{1 - r^2}{|\tau - r\,t|^2} |dt| = 1,$$

будем иметь $\|A_r\varphi\|_1 \leqslant C\|\varphi\|_1$.

Лемма доказана.

Для любой функции $\varphi(\tau) \in L^1(T)$ положим

$$(H_r\varphi)(t) = \frac{S^+(r\alpha(t))}{2\pi i} \int_T \frac{\varphi(\tau)}{S^+(\alpha(\tau))} h_r(\tau, t)\, d\tau.$$

Имеет место

Лемма 3. *Существует число С, не зависящее от $r$ такое, что*

$$\|H_r\varphi\|_1 < C\|\varphi\|_1. \tag{19}$$

Доказательсво. Для простоты изложения приведем доказательство при $n = 1$, то есть когда функция $D(t)$ имеет разрыв только в точке $t = t_1$. Согласно лемме 1 имеет место неравенство

$$c_1 |t_1' - z|^{-\delta_1} \leqslant |S^+(z)| \leqslant C_1 |t_1' - z|^{-\delta_1}, \tag{20}$$

где $c_1$, $C_1$ — положительные постоянные, $\delta_1 = -(\alpha_1 + \lambda_1)$. Учитывая неравенство (18), получим

$$c\,|t_1 - r\,t|^{-\delta_1} \leqslant |S^+(r\alpha(t))| < C\,|t_1 - r\,t|^{-\delta_1}. \tag{21}$$

Применяя неравенства (17) и (21) при $t \in T$, будем иметь

$$|(H_r\varphi)(t)| < \frac{1}{|t_1 - r\,t|^{\delta_1}}\left(\int_T |\varphi(\tau)|\,|t_1-\tau|^{\delta_1}\,P_r(\tau,\,t)\,|d\tau| + \int_T |\varphi(\tau)|\,|t_1-\tau|^{\delta_1}\right),$$

отсюда и из леммы 2 следует лемма 3.

3°. Лемма 4. *Пусть* $\tau$, $t \in T$, *тогда*

$$\left|\ln\left|\frac{\alpha(\tau) - r\,\alpha(t)}{\tau - r\,t}\right| - \ln\left|\frac{\alpha(\tau)-\alpha(t)}{\tau - t}\right|\right| < C\,\frac{1-r}{|\tau - r\,t|}. \tag{22}$$

Доказательство. Из неравенства (18) и свойств функции $\alpha(\tau)$ следует, что существует число $\delta > 0$ такое, что

$$\left|\frac{\alpha(\tau) - r\,\alpha(t)}{\tau - rt}\right|\cdot\left|\frac{\tau - t}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\right| > \delta.$$

Ясно, что $|\ln x| < A\,|x-1|$, при $x > \delta$. Поэтому

$$\left|\ln\left|\frac{\alpha(\tau) - r\alpha(t)}{\tau - rt}\right| - \ln\left|\frac{\alpha(\tau)-\alpha(t)}{\tau - t}\right|\right| = \left|\ln\frac{|\alpha(\tau) - r\alpha(t)|\,|\tau - t|}{|\tau - rt|\,|\alpha(\tau)-\alpha(t)|}\right| \leqslant$$

$$< A\left|1 - \frac{|\alpha(\tau) - r\alpha(t)|\,|\tau - t|}{|\tau - rt|\,|\alpha(\tau)-\alpha(t)|}\right| \leqslant$$

$$\leqslant A\,\frac{|(1-r)\,t\,[\alpha(\tau)-\alpha(t)] - (\tau - t)\,[\alpha(\tau) - r\alpha(t)]|}{|\tau - rt|\,|\alpha(\tau)-\alpha(t)|} \leqslant$$

$$\leqslant A\left(\frac{1-r}{|\tau - rt|} + \frac{|\tau - t|}{|\alpha(\tau)-\alpha(t)|}\cdot\frac{1-r}{|\tau - rt|}\right).$$

Теперь доказательство леммы следует из неравенства $|\alpha(\tau) - \alpha(t)| > a|\tau - t|$, где $a$ — положителяная постоянная.

Лемма 5. *Пусть* $\tau$, $t \in T$, *тогда*

$$\left|\arg\frac{\tau - t}{\tau - rt}\right| < C\,\frac{1-r}{|\tau - rt|}, \quad \left|\arg\frac{\tau - t}{\tau - r^{-1}t}\right| < C\,\frac{1-r}{|\tau - rt|},$$

*где* $C$ — *постоянная, не зависящая от* $r$. *Под* $\arg(\tau - t)(\tau - r^{-1}t)$ *мы понимаем угол при вершине* $\tau$ *треугольника с вершинами* $\tau$, $t$, $rt$.

Доказательство. Обозначим этот треугольник через $\Delta$. Положим $\varphi = \arg(\tau - t)(\tau - rt)^{-1}$. Из определения $\varphi$ следует, что $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Когда точки $\tau$ и $t$ достаточно близки, угол при вершине $t$ треугольника $\Delta$ мало отличается от $\frac{\pi}{2}$. Применяя теорему синусов, можем утверждать, что

$$|\sin\varphi| < C\frac{1-r}{|\tau - rt|},$$

где $C$ не зависит от $r$. Отсюда, учитывая неравенство $|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}|\sin\varphi|$ $\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, получим доказательство первого неравенства леммы. Аналогично доказывается второе неравенство.

Лемма 6. *Пусть $T_+ = (\tau_1, \tau_2)$ — некоторая дуга окружности $T$, соединяющая точки $\tau_1$ и $\tau_2$ в положительном направлении, а $\chi(\tau) = 1$, при $\tau \in T_+$ и $\chi(\tau) = 0$, при $\tau \in T \setminus T_+$.*
*Пусть далее $V \subset T$ — некоторая окрестность точки $\tau_1$, не содержащая точку $\tau_2$. Тогда существует число $C$, не зависящее от $r$ такое, что для любого $t \in V$*

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_T \left[\frac{1}{\tau - rt} - \frac{1}{\tau - r^{-1}t}\right]\chi(\tau)\,d\tau - \chi(t)\right| < C\frac{1-r}{|\tau_1 - rt|}. \tag{23}$$

Доказательство. Пусть $t = e^{i\varphi}$, $\tau = e^{i\theta}$. Для простоты изложения будем считать, что $T_+$ есть верхняя полуокружность, то есть $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = -1$. Рассмотрим функцию

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \left[\frac{1}{\tau - rt} - \frac{1}{\tau - r^{-1}t}\right]\chi(\tau)\,d\tau.$$

Так как

$$\left(\frac{1}{\tau - rt} - \frac{1}{\tau - r^{-1}t}\right)d\tau = i\,\frac{1-r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2}\,d\theta,$$

то $U(r, \varphi)$ — ограниченная гармоническая функция, равная $\chi(t)$ на $T$. Эту функцию можно представить в виде

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arg\frac{1 + re^{i\varphi}}{1 - re^{i\varphi}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2r\sin\varphi}{1 - r^2},$$

где $\arg(1 + re^{i\varphi})(1 - re^{i\varphi})^{-1} = \arg(1 + re^{i\varphi}) - \arg(1 - re^{i\varphi})$ и под $\arg(1 + re^{i\varphi})$ и $\arg(1 - re^{i\varphi})$ понимаем те значения, которые находятся в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Учитывая, что при $|x| \to \infty$

$$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x} + O\left(\dfrac{1}{x^3}\right), & \text{при } x \geqslant 1, \\ -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{x} + O\left(\dfrac{1}{x^3}\right), & \text{при } x \leqslant -1, \end{cases}$$

будем иметь

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2r\sin\varphi}{1 - r^2} =$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1-r^2}{2r\sin\varphi}+O\left(\dfrac{1-r^2}{2r\sin\varphi}\right)^3, \text{ при } \dfrac{2r\sin\varphi}{1-r^2}>1,\right.\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1-r^2}{2r\sin\varphi}+O\left(\dfrac{1-r^2}{2r\sin\varphi}\right)^3, \text{ при } \dfrac{2r\sin\varphi}{1-r^2}<-1.\right.\end{cases}$$

Поэтому

$$|U(r,\varphi)-\chi(e^{i\varphi})|<C_1\frac{1-r}{|\varphi|}<C_1\frac{1-r}{|1-rt|},$$

если $2r|\sin\varphi|(1-r^2)^{-1}>1$. Но при $2r|\sin\varphi|(1-r^2)^{-1}<1$ неравенство (23) очевидно, так как $|1-rt|>a(1-r)$, где $a>0$.

Лемма 7. *Пусть $T_k\subset T$ — некоторая окрестность точки $t_k$ такая, что $t_l\,\overline{\in}\,T_k$ $(l\neq k)$. Тогда для любого $t\in T_k$*

$$|S^+(r\alpha(t))-D(t)\,S^-(r^{-1}t)|\leqslant C|S^+(r\alpha(t))|\left(\frac{1-r}{|t_k-rt|}+(1-r)^{\delta}\right),\quad(24)$$

*где $\delta>0$, а $C$ — постоянная, не зависящая от $r$.*

Доказательство. Из определения функций $\Phi_1(z)$ и $S(z)$ имеем

$$|S^+(r\alpha(t))-D(t)\,S^-(r^{-1}t)|=|S^+(r\alpha(t))|\,|1-\Phi_1^-(r^{-1}t);$$

$$\cdot[\Phi_1^+(r\alpha(t))]^{-1}\cdot e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T h_r(\tau,t)\,\varphi(\tau)\,d\tau-\ln D(\tau)}|.$$

Из свойств функции $\lambda(z)$ и (18), при $t\in T_k$ следует

$$\left|\frac{\lambda^-(r^{-1}t)-\lambda^-(t)}{\lambda^+(r\alpha(t))-\lambda^+(\alpha(t_k))}-1\right|\leqslant C\frac{1-r}{|t_k-rt|}.$$

Учитывая это неравенство и (17), будем иметь

$$|S^+(r\alpha(t))-D(t)\,S^-(r^{-1}t)|<C|S^+(r\alpha(t))|\left[\frac{1-r}{|t_k-rt|}+\right.$$
$$\left.+\left|\int\limits_T h_r(\tau,t)\,\varphi(\tau)\,d\tau-\ln D(t)\right|\right].\quad(25)$$

Из формулы Сохоцкого—Племеля и определения функции $\varphi(\tau)$ следует, что

$$\lim_{r\to1-0}\int\limits_T h_r(\tau,t)\,\varphi(\tau)\,d\tau=\ln D(t),\quad t\in T,$$

причем при $D(t)\in H(T)$, $D(t)\neq0$, имеет место неравенство

$$\left|\int\limits_T h_r(\tau,t)\,\varphi(\tau)\,d\tau-\ln D(t)\right|<C(1-r)^{\delta},\ (\delta>0).\quad(26)$$

Ясно, что в окрестности $T_k$ функцию $\ln D(t)$ можно представить в виде $\ln D(t)=C\chi(t)+\psi_1(t)$, где $\psi_1(t)\in H(T)$, а $\chi(t)=1$, при $t\in(t_k,t_{k+1})$ и $\chi(t)=0$, при $t\in T\setminus(t_k,t_{k+1})$. Так как функция $\varphi(t)$

удовлетворяет уравнению $\ln D(t) = K\varphi$, то в этой окрестности она также представима в виде

$$\varphi(t) = C\chi(t) + \psi_2(t), \quad \psi_2(t) \in H(T). \tag{27}$$

Заменяя в (25) $\ln D(t) = K\varphi$ и учитывая (27) и неравенство (26), получим

$$|S^+(r\alpha(t)) - D(t)\,S^-(r^{-1}t)| < C\,|S^+(r\alpha(t))| \cdot$$
$$\cdot\left(\left|\int_T\left(\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - r\alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right)\chi(\tau)\,d\tau - \int_T\left(\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right)\chi(\tau)\,d\tau -\right.\right.$$
$$\left.\left. - \chi(t)\right| + (1-r)^\delta + \frac{1-r}{|t_k - rt|}\right).$$

Перепишем это неравенство в следующем виде:

$$|S^+(r\alpha(t)) - D(t)\,S^-(r^{-1}t)| \leqslant C\,|S^+(r\alpha(t))| \cdot$$
$$\cdot\left|\int_{T_k}\left(\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - r\alpha(t)} - \frac{1}{\tau - rt}\right)d\tau - \int_{T_k}\left(\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right)d\tau +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\pi i}\int_{T_k}\left(\frac{1}{\tau - rt} - \frac{1}{\tau - r^{-1}t}\right)d\tau - \chi(t) + (1-r)^\delta\right|.$$

Применяя лемму 6 и производя интегрирование в первых двух интегралах, получим

$$|S^+(r\alpha(t)) - D(t)\,S^-(r^{-1}t)| < C\,|S^+(r\alpha(t))|\left(\left|\ln\left|\frac{\alpha(t_k) - r\alpha(t)}{t_k - rt}\right| -\right.\right.$$
$$\left. - \ln\left|\frac{\alpha(t_k) - \alpha(t)}{t_k - t}\right|\right| + \left\{\left|\arg\frac{\alpha(t_k) - \alpha(t)}{\alpha(t_k) - r\alpha(t)}\right| +\right.$$
$$\left.\left. + \left|\arg\frac{t_k - t}{t_k - rt}\right|\right\} + \frac{1-r}{|t_k - rt|} + (1-r)^\delta + O((1-r))\right).$$

Теперь доказательство леммы следует из лемм 4 и 5.

4°. Пусть $\tau,\ t \in T$. Для любого $r\,(0 < r < 1)$ положим

$$\lambda_r(\tau, t) = \frac{|S^+(r\alpha(t)) - D(t)\,S^-(r^{-1}t)|}{|S^+(\alpha(\tau))|\,|\tau - r^{-1}t|}.$$

Введем в рассмотрение оператор

$$(B_r\varphi)(t) = \int_T \lambda_r(\tau, t)\,\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{28}$$

Лемма 8. *Существует число $C$, не зависящее от $r$ такое, что*

$$\|B_r\varphi\|_1 \leqslant C\|\varphi\|_1. \tag{28'}$$

Доказательство. Для простоты опять изложим доказательство, когда $n = 1$. Учитывая неравенства (21) и (24), будем иметь

$$\int_T |(B_r\varphi)(t)|\,|dt| \leqslant \text{Const}\left\{\int_T \frac{1-r}{|t_1-rt|^{1+\delta_1}} \int_T \frac{|\varphi(\tau)|\,|t_1-\tau|^{\delta_1}}{|\tau-rt|}\,|d\tau|\,|dt| + \right.$$

$$\left. + \int_T \frac{(1-r)^\delta}{|t_1-rt|^{\delta_1}} \int_T \frac{|\varphi(\tau)|\,|t_1-\tau|^{\delta_1}}{|\tau-rt|}\,|d\tau|\,|dt|\right\} = \text{Const}\,(J_1(r)+J_2(r)).$$

Так как $\left|\,|t_1-\tau|^{\delta_1}-|t_1-rt|^{\delta_1}\right| \leqslant \text{Const}\,|\tau-rt|^{\delta_1}$, то, учитывая оценку

$$\frac{1}{a^\alpha\cdot b^\beta} \leqslant \frac{1}{a^{\alpha+\beta}} + \frac{1}{b^{\alpha+\beta}},$$

получим

$$J_1(r) \leqslant \text{Const}\left(\int_T |\varphi(\tau)| \int_T \frac{1-r}{|t_1-rt|^{1+\delta_1}\cdot|\tau-rt|^{1-\delta_1}}\,|dt|\,|d\tau| + \right.$$

$$\left. + \int_T |\varphi(\tau)| \int_T \frac{1-r}{|t_1-rt|\,|\tau-rt|}\,|dt|\,|d\tau|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \text{Const}\left(\int_T |\varphi(\tau)| \int_T \frac{1-r}{|t_1-rt|^2}\,|dt|\,|d\tau| + \right.$$

$$\left. + \int_T |\varphi(\tau)| \int_T \frac{1-r}{|\tau-rt|^2}\,|dt|\,|d\tau|\right) \leqslant \text{Const}\,\|\varphi\|_1.$$

Соответственно, имеем

$$J_2(r) \leqslant \int_T (1-r)^\delta \int_T \frac{|\varphi(\tau)|}{(\tau-rt)}\,|d\tau|\,|dt| +$$

$$+ \int_T (1-r)^\delta \int_T \frac{|\varphi(\tau)|\,|d\tau|\,|dt|}{|t_1-rt|^{\delta_1}\,|\tau-rt|^{1-\delta_1}} \leqslant$$

$$< \text{Const}\,(1-r)^\delta \ln\frac{1}{1-r}\|\varphi\|_1 + \int_T (1-r)^\delta \int_T \left(\frac{1}{|t_1-rt|} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(\tau-rt)}\right)|\varphi(\tau)|\,|dt|\,|d\tau| < \text{Const}\,\|\varphi\|_1.$$

Лемма доказана.

## § 3. Исследование задачи $A$

1°. Теорема 3. *Пусть $f(t)\in L^1(T)$. Тогда общее решение граничной задачи* (3′), *имеющее конечный порядок на бесконечности, определяется формулой*

$$\Phi^+(z) = \frac{S(z)}{2\pi i}\int_T \frac{\varphi(\beta(t))}{t-z}\,dt, \quad \text{при} \quad z\in D^+,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{S(z)}{2\pi i}\int_T \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt + S(z)\cdot P(z), \quad \text{при} \quad z\in D^-, \tag{29}$$

*где $P(z)$ — некоторой полином, $\varphi(t)$ — решение уравнения $K\varphi = P(t)+f(t)\,(S^{+}(\alpha(t)))^{-1}$, а $\beta(t)$ — обратная функции $\alpha(t)$.*

Доказательство. В теореме 1 мы установили, что каждое решение задачи (3′), имеющее конечный порядок на бесконечности, представляется в виде (29). Теперь докажем, что любая функпия вида (29) является решением задачи (3′). Из (29) следует, что $\Phi(z)$, определенная этой формулой, имеет на бесконечности конечный порядок.

Пусть $f_n(t)\in H(T)$ и $\|f_n(t)-f(t)\|_1\to 0$, при $n\to\infty$, а $\varphi_n(t)$ является решением уравнения $K\varphi = P(t)+f_n(t)\,(S^{+}(\alpha(t)))^{-1}$. Положим

$$\Phi_n^{+}(z)=\frac{S(z)}{2\pi i}\int_T\frac{\varphi_n(\beta(t))}{t-z}\,dt,\ \text{при}\ z\in D^{+}, \tag{30}$$

$$\Phi_n^{-}(z)=\frac{S(z)}{2\pi i}\int_T\frac{\varphi_n(t)}{t-z}\,dt+S(z)\,P(z),\ \text{при}\ z\in D^{-}.$$

Так как функции $\Phi_n^{+}(z)$ и $\Phi_n^{-}(z)$ на $T$ удовлетворяют граничному условию $\Phi_n^{+}(\alpha(t))-D(t)\,\Phi_n^{-}(t)=f_n(t)$ и в окрестности точек $t_k'=\alpha(t_k)$ и $t_k$ имеют порядок $|z-t_k'|^{-\delta}$ и $|z-t_k|^{-\delta}$, где $0<\delta<1$, то ясно, что существует некоторое число $p_0\,(p_0>1)$ такое, что для любого $r\,(0<<1)$

$$\int_T|\Phi_n^{+}(r\,\alpha(t))|^{p_0}\,|dt|<\mathrm{Const},\quad \int_T|\Phi_n^{-}(r^{-1}t)|^{p_0}\,|dt|<\mathrm{Const} \tag{31}$$

и поэтому для любого $n,\ n\geq 1$

$$J_n^{(1)}(r)=\|\Phi_n^{+}(r\alpha(t))-D(t)\,\Phi_n^{-}(r^{-1}t)-f_n(t)\|_1\to 0 \tag{32}$$

при $r\to 1-0$. Положив теперь $\psi_n(t)=\varphi_n(t)-\varphi(t)$, из (29), (30) и (31) будем иметь

$$\int_T|\Phi^{+}(r\alpha(t))-D(t)\,\Phi^{-}(r^{-1}t)-f(t)|\,|dt|=$$

$$=\int_T|(\Phi^{+}(r\alpha(t))-\Phi_n(r\alpha(t)))-D(t)\,(\Phi^{-}(r^{-1}t)-\Phi_n^{-}(r^{-1}t))+$$

$$+(\Phi_n^{+}(r\alpha(t))-D(t)\,\Phi_n^{-}(r^{-1}t)-f_n(t))+(f_n(t)-f(t))|\,|dt|\leqslant$$

$$\leqslant C\Big(\int_T|S^{+}(r\alpha(t))|\int_T|h_r(\tau,t)|\,|\psi_n(\tau)|\,|d\tau|\,|dt|+$$

$$+\int_T\int_T|\psi_n(\tau)|\frac{|S^{+}(r\alpha(t))-D(t)\,S^{-}(r^{-1}t)|}{|\tau-r^{-1}t|}\,|d\tau|\,|dt|\Big)+$$

$$+J_n^{1}(r)+\|f_n-f\|_1\leqslant C\,(J_n^{(2)}(r)+J_n^{(3)}(r)+J_n^{(1)}(r)+\|f_n-f\|_1).$$

Так как $K\psi_n = (f(t) - f_n(t))\,(S^+(\alpha(t))^{-1})$, то

$$\psi_n(\tau) = \frac{f(\tau) - f_n(\tau)}{S^+(\alpha(\tau))} + \int_T \frac{f(t) - f_n(t)}{S^+(\alpha(t))}\,\tilde{k}(\tau, t)\,dt, \tag{33}$$

где ядро $\tilde{k}(\tau, t)$ имеет слабую особенность ($|\tilde{k}(\tau, t)| < C|\tau - t|^{-\lambda}$, $\lambda < 1$). Обозначим

$$g_n(\tau) = \int_T \frac{f(t) - f_n(t)}{S^+(\alpha(t))}\,\tilde{k}(\tau, t)\,dt.$$

Так как $\big|\,|\tau - t_0|^\delta - |t - t_0|^\delta\big| < C|t - \tau|^\delta$ $(0 < \delta < 1)$, то

$$\frac{1}{|\tau - t|^\lambda}\left|\frac{t - t_0}{\tau - t_0}\right|^\delta = \frac{1}{|\tau - t|^\lambda} + \frac{|\tau - t_0|^\delta - |t - t_0|^\delta}{|t - \tau|^\lambda\,|\tau - t_0|^\delta} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\tau - t|^\lambda} + \frac{C}{|\tau - t_0|^\delta\,|\tau - t|^{\lambda - \delta}}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_T \frac{1}{|\tau - t|^\lambda}\left|\frac{t - t_0}{\tau - t_0}\right|^\delta |d\tau| < C_1,$$

где $C_1$ не зависит от $t$, $t_0$. Используя это неравенство, легко доказать, что

$$\|S^+(\alpha(\tau))\,g_n(\tau)\|_1 \leqslant \mathrm{Const}\,\|f - f_n\|_1.$$

Поэтому функцию $\psi_n(\tau)$ можно представить в виде

$$\psi_n(\tau) = \frac{\delta F_n(\tau)}{S^+(\alpha(\tau))},$$

где $\|F_n(\tau)\|_1 < A\,\|f - f_n\|_1$ и $A$ не зависит от $n$. Отсюда, применяя лемму 3, будем иметь $J_n^{(2)}(r) \leqslant \mathrm{Const}\,\|f - f_n\|_1$. Соответственно из леммы 8 имеем $J_n^{(3)}(r) \leqslant \mathrm{Const}\,\|f - f_n\|$. Учитывая теперь (32), завершаем доказательство теоремы.

2°. Для каждого целого $k$ обозначим через $\bar{\varphi}_k(t)$ решение уравнения $K\varphi = t^k$. Положим

$$\Phi_k^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\tilde{\varphi}_k(\beta(t))}{t - z}\,dt, \quad \text{при} \quad z \in D^+,$$

$$\Phi_k^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\bar{\varphi}_k(t)}{t - z}\,dt + z^k, \quad \text{при} \quad z \in D^-.$$

Ясно, что любая конечная система функций $\Phi_k(z)$ линейно независима. Пусть, далее, $K\tilde{\varphi} = f(t)\,(S^+(\alpha(t)))^{-1}$. Исходя из этих обозначений, для любого $P(z) = c_0 + \cdots + c_n z^n$ функцию (29) можно представить в виде

$$\Phi^+(z) = \frac{S^+(z)}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\widetilde{\varphi}(\beta(t))}{t-z}\,dt + S^+(z)\sum_{k=0}^{n} c_k\,\Phi_k^+(z),$$

$$\Phi^-(z) = \frac{S^-(z)}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\widetilde{\varphi}(t)}{t-z}\,dt + S^-(z)\sum_{k=0}^{n} c_k\,\Phi_k^-(z). \tag{34}$$

Положим $\varkappa = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$. Очевидно, что $-\varkappa$ есть порядок функции $S(z)$, при $z \to \infty$. Число $\varkappa$ будем называть индексом функции $D(t)$. Теперь из теоремы 3 и (34) следует

Теорема. 4. *Пусть $f(t) \in L^1(T)$, тогда общее решение задачи $A$, равное нулю на бесконечности, в зависимости от индекса $\varkappa$ можно представить в виде:*

а) *если $\varkappa \geqslant 0$, то*

$$\Phi^+(z) = \frac{S^+(z)}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\widetilde{\varphi}(\beta(t))}{t-z}\,dt + S^+(z)\sum_{k=0}^{\varkappa-1} c_k\,\Phi_k^+(z),$$

$$\Phi^-(z) = \frac{S^-(z)}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\widetilde{\varphi}(t)}{t-z}\,dt + S^-(z)\sum_{k=0}^{\varkappa-1} c_k\,\Phi_k^-(z), \tag{35}$$

*где $c_0, c_1, \cdots, c_{\varkappa-1}$ — произвольные комплексные числа, при $\varkappa \geqslant 1$ и $c_0 = c_1 = \cdots = c_{\varkappa-1} = 0$, при $\varkappa = 0$.*

в) *Если $\varkappa \leqslant -1$, то задача имеет решение тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_T \widetilde{\varphi}(t)\,t^k\,dt = 0,\ k = 0, 1, \cdots, -(\varkappa+1),$$

*при этом решение определяется по формуле* (35), *если положить* $c_0 = c_1 = \cdots = c_{\varkappa-1} = 0$.

3°. Пусть теперь $\Gamma$ — кривая Ляпунова, а $\tau = \lambda(U)$ $(U_0 < U \leqslant U_1)$ — ее параметрическое уравнение. Предположим, что $\lambda(U)$ и $\lambda(\tau)$ дважды непрерывно дифференцируемы по параметру. Для любого $\zeta \in T$ положим $\widetilde{\alpha}(\zeta) = \omega^{-1}(\alpha(\omega(\zeta)))$ и $\widetilde{\beta}(\zeta) = \mu^{-1}(\omega(\zeta))$. Обозначим

$$\widetilde{h}_r(\zeta;\ \xi) = \frac{\omega'(\widetilde{\alpha}(\zeta))\,\widetilde{\alpha}(\zeta)}{\omega(\widetilde{\alpha}(\zeta)) - \omega(r\widetilde{\alpha}(\xi))} - \frac{\mu'(\widetilde{\beta}(\zeta))\,\widetilde{\beta}'(\zeta)}{\mu(\widetilde{\beta}(\zeta)) - \mu(r^{-1}\widetilde{\beta}(\xi))}\ (\zeta;\ \xi \in T). \tag{36}$$

Имеет место оценка [10]

$$|\widetilde{h}_r(\zeta;\ \xi)| \leqslant A\left(\frac{1-r^2}{|\zeta - r\xi|^2} + 1\right)(\zeta;\ \xi \in T). \tag{37}$$

Аналог функции $S(z)$ обозначим через $\widetilde{S}(z)$. Она имеет следующий вид

$$\tilde{S}^{+}(z)=\tilde{\Phi}_1^{+}(z)\,e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\beta(t))}{t-z}dt},\quad \text{при}\quad z\in G^{+},$$

$$\tilde{S}^{-}(z)=\bar{\Phi}_1^{-}(z)\cdot e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{t-z}},\quad z\in G^{-},$$

где $\beta(t)$ — обратная функции $\alpha(t)$, $\varphi(t)$ — решение уравнения

$$\tilde{K}\varphi=\varphi(t)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{1}{\tau-t}-\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\right)\varphi(\tau)\,d\tau=\ln D(t),$$

а через $\bar{\Phi}_1(z)$ обозначен аналог функции $\Phi_1(z)$.

Далее аналоги преобразований $H_r$ и $B_r$ сбозначим через $\bar{H}_r$ и $\tilde{B}_r$, соответственно. Используя оценку (37) можно установить оценки (24) и (28) для преобразований $\bar{H}_r$ и $\bar{B}_r$.

Пусть теперь $\tilde{K}\tilde{\varphi}=f(t)\cdot(\tilde{S}^{+}(\alpha(t)))^{-1}$,

$$\Phi_k^{+}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\bar{\psi}_k(\beta(t))}{t-z}dt,\ z\in G^{+},$$

$$\Phi_k^{-}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\bar{\psi}_k(t)}{t-z}dt+z^k,\ z\in G^{-},$$

где $\tilde{\psi}_k(t)$ — решения уравнения $\tilde{K}\psi=t^k$ $(k=0,1,2,\cdots)$.

Применяя отображение $t=\omega(\zeta)$ в условие (3) и используя указанные оценки аналогично теореме 4, получим решение задачи A.

Теорема 5. *Общее решение задачи A, в зависимости от индекса $\varkappa$, можно представить в виде*

2) *если* $\varkappa>0$, *то*

$$\Phi^{+}(z)=\frac{\tilde{S}^{+}(z)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\tilde{\psi}(\beta(t))}{t-z}dt+\tilde{S}^{+}(z)\sum_{k=0}^{\varkappa-1}c_k\tilde{\Phi}_k(z),$$

$$\Phi^{-}(z)=\frac{\bar{S}^{-}(z)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\bar{\psi}(t)}{t-z}dt+\tilde{S}^{-}(z)\sum_{k=0}^{\varkappa-1}c_k\tilde{\Phi}_k(z),\tag{38}$$

*где* $c_0,c_1,\cdots,c_{\varkappa-1}$ — *произвольные комплексные числа при* $\varkappa\geqslant1$ *и* $c_0=c_1=\cdots=c_{\varkappa-1}=0$, *при* $\varkappa=0$.

в) *если* $\varkappa\leqslant-1$, *то задача имеет решение тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_{\Gamma}\tilde{\psi}(t)\,t^k\,dt=0,\ k=0,1,\cdots,-(\varkappa+1),$$

*при этом решение определяется по формуле* (38), *если положить* $c_0 = c_1 = \cdots = c_{\varkappa-1} = 0$.

4°. В качестве применения рассмотрим следующую задачу: найти в единичном круге $|z| < 1$ решение уравнения Лапласа $\Delta U = 0$, удовлетворяющее граничному условию

$$a(t)\,\frac{\partial U(t)}{\partial x} + b(t)\,\frac{\partial U(t)}{\partial y} = f(t),\ t \in T,$$

где $t = \xi + i\eta$, $U(t) = U(\xi, \eta)$, $a(t)$, $b(t) \in H_0(T)$, $a(t) + ib(t) \neq 0$, $f(t) \in L^1(T)$. Так как $f \in L^1(T)$, то естественно граничное условие также понимать в смысле $L^1$. То есть

$$\lim_{r \to 1-0} \int_T \left| a(t)\,\frac{\partial U(rt)}{\partial x} + b(t)\,\frac{\partial U(rt)}{\partial y} - f(t) \right| |dt| = 0. \tag{39}$$

Так как $U(z)$ представляется в виде $U(z) = \mathrm{Re}\,\Psi(z)$, где $\Psi(z)$— —аналитическая в единичном круге функция, то (39) можно представить в виде

$$\lim_{r \to 1-0} \| \mathrm{Re}\, D(t)\,\Psi(rt) - f(t) \|_1 = 0, \tag{40}$$

где $D(t) = a(t) + ib(t)$.

Введем теперь функцию

$$F(z) = \begin{cases} \Psi(z), & \text{при } |z| < 1 \\ \overline{\Psi}\left(\dfrac{1}{z}\right), & \text{при } |z| > 1, \end{cases}$$

тогда условие (40) примет вид

$$\left\| F^+(rt) - \frac{\overline{D(t)}}{D(t)} F(r^{-1}t) - \frac{f(t)}{D(t)} \right\|_1 \to 0,$$

который является граничной задачей типа (3), когда $\alpha(t) \equiv t$.

Автор признателен профессору Н. Е. Товмасяну за постоянное внимание при выполнении данной работы.

Ереванский политехнический
институт

Поступила 9.IV.1987

Հ. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. Տեղաշարժով Ռիման-Պրիվալովի խզվող խնդիրը $L^1$-ում (*ամփոփում*)

*Աշխատանքում դիտարկվում է խզվող գործակցով Ռիման-Պրիվալովի խնդիրը այն դեպքում, երբ աջ մասը պատկանում է* $L^1$ *դասին։ Դասական եզրային խնդրի պայմանը փոխարինվում է միջին իմաստով զուգամիտության պայմանով։ Ապացուցվում է դրված խնդրի նյոտերությունը* $L^1$ *դասում, հաշվվում է այդ խնդրի ինդեքսը և կառուցվում են բոլոր լուծումները։*

H. M. HAIRAPETIAN. *Discontinuous Riemann—Privalov problem with shift in* $L^1$ (summary)

In the paper the Riemann—Privalov problem with a discontinuous coefficient and the right hand side belonging to $L^1$ is considered.

The classical boundary condition is appropriately changed to fit the $L_1$ case.

The Noetherness of this problem is proved and the index is calculated. All solutions of the problem are constructed.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962.
2. *Ф. Д. Гахов.* Краевые задачи, М., Физматгиз, 1963.
3. *Б. В. Хведелидзе.* Линейные разрывные граничные задачи теории функций, труды Тбилисского математического института АН Груз. ССР, 1956, 23, 3—158.
4. *Б. В. Хведелидзе.* Граничная задача Римана-Привалова с заданным смещением, Сообщения АН Груз.ССР, 1958, 21, № 4, 385—389.
5. *Г. А. Хускивадзе.* О сопряженных функциях и интегралах типа Коши, тр. Тбилисского мат. ин-та АН Груз. ССР, 1966, 31, 5—54.
6. *И. Б. Симоненко.* Краевая задача Римана для пар функций с измеримыми коэффициентами и ее применение к исследованию сингулярных интегралов в пространствах $L^p$ с весом, Изв. АН СССР, сер. матем., 1964, 28, № 2, 277—306.
7. *Б. В. Хведелидзе.* Метод интегралов типа Коши в разрывных задачах теории голоморфных функций, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 7, 1975.
8. *И. И. Данилюк.* Нерегулярные граничные задачи на плоскости, М., Наука, 1975.
9. *Г. С. Литвинчук.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, М., Наука, 1977.
10. *Г. М. Айрапетян.* Граничная задача сопряжения со сдвигом в классе $L_1$, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XXII, 3, 1987.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXV, № 1, 1990 Математика

УДК 517.53

Г. А. БАРСЕГЯН, Г. А. СУКИАСЯН

# СВОЙСТВО БЛИЗОСТИ ДЛЯ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С БЛИЗКИМИ НУЛЯМИ И ПОЛЮСАМИ

Согласно основному выводу теории распределения значений мероморфных функции (теория Р. Неванлинны и теория поверхностей наложения Л. Альфорса), если значения $a$ и $b$ „хорошие", не дефектные, для заданной мероморфной в $\mathbf{C}$ функции $w(z)$, то количества $a$-точек и $b$-точек в кругах $|z|\leqslant r$ примерно равны, близки. Этот вывод оказался частью более общей закономерности — свойства близости $a$-точек, которое устанавливает, что близки не только количества этих $a$-точек и $b$-точек, но, одновременно, близки их модули и аргументы.

Общая формулировка „свойства близости $a$-точек" излагается в терминах, рассмотренных в [2] „однолистных областей наполнения" $E_i(r)$, $i=1, 2, \cdots$ — областей из $\{z: |z|\leqslant r\}$, удовлетворяющих условиям: а) в каждой области $E_i(r)$ функция $w(z)$ однолистна; б) множество $\overline{\mathbf{C}}\setminus\overline{w(E_i(r))}$ состоит из некоторого числа $k_i(r)$ односвязных областей, сферический диаметр каждого из которых стремится к нулю при $r\to\infty$.

В работе [2] была доказана следующая

Теорема A. *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $\mathbf{C}$ функция; $\varphi(r)\uparrow\infty$, $r\to\infty$. Тогда в круге $|z|\leqslant r$ можно указать $\Phi(r)$ попарно непересекающихся однолистных областей наполнения $E_i(r)$, $i=1, 2, \cdots, \Phi(r)$, для которых справедливы следующие утверждения:*

I.
$$\Phi(r)\sim A(r),\ r\to\infty,\ r\overline{\in} E, \tag{1}$$

*где $A(r)$ — характеристика Л. Альфорса*, $E$ — некоторое множество конечной логарифмической меры.*

II.
$$\sum_{i=1}^{\Phi(r)} k_i(r)\leqslant 2A(r)+o[A(r)],\ r\to\infty,\ r\overline{\in} E. \tag{2}$$

III.
$$d(E_i(r))\leqslant\frac{K\varphi(r)\,r}{A^{\frac{1}{2}}(r)},\ i=1,\cdots,\Phi(r),\ r\to\infty,\ K=\mathrm{const}. \tag{3}$$

Поясним вкратце сущность свойства близости, содержащуюся в теореме $A$.

Мы видим, что области $E_i(r)$ „малы" и в каждой из этих областей $w(z)$ принимает всякое значение $a\in\overline{\mathbf{C}}$, исключая множество зна-

* Мы полагаем известными основные положения теории Р. Неванлинны и пользуемся стандартными обозначениями (см. [1]).

чений пренебрежительно малой сферической площади. Следовательно, для любых значений $a$ и $b \in \overline{C}$ (за описанным исключением) $a$ точки, принадлежащие $E_l(r)$, близкс располагаются друг от друга. Подробные разъяснения этого свойства см. в работе [2].

Здесь отметим, что все оценки теоремы А точны, из них вытекают вторые основные теоремы теории распределения значений как в форме Р. Неванлинны, так и в форме Л. Альфорса, а также вытекают результаты, предельно уточняющие проблематику о лучах Бореля и кругах наполнения.

Пример функции Вейерштрасса показывает, что однолистные облати наполнения в кругах $|z| < r$ заполняют почти весь круг $|z| \leqslant r$, т. е. имеют относительную плотность 1. Естественно, интересны случаи классов функций, для которых относительная плотность нулевая (так как для этих классов большинство $a$-точек окажется лежащим на множестве пренебрежно малой площади).

Ниже вводится класс функций, характеризуемых близостью их нулей и полюсов, для которых диаметры однолистных областей наполнения оказываются существенно более маленькими, чем в общем случае, соответственно объединение этих областей имеют нулевую относительную площадь.

Пусть $w(z)$ — мероморфная в С функция конечного порядка, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ее полюсы с учетом кратности ($b_k$ занумерованы в порядке возрастания их модулей). Скажем, что $w(z) \in M_{0,\infty}$, если существует такая нумерация ее нулей $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ (с учетом кратности), что выполняется

$$\sum_k \left| \frac{a_k - b_k}{b_k} \right| < +\infty. \tag{4}$$

Из (4) легко следует, что на любом ограниченном множестве комплексной плоскости равномерно и абсолютно сходится произведение

$$\prod(z) = \prod_k \frac{z - a_k}{z - b_k}. \tag{5}$$

Таким образом, если $w(z) \in M_{0,\infty}$, то согласно известным теоремам о представлении функций в виде произведения, имеем

$$w(z) = e^{P_m(z)} \prod_k \frac{z - a_k}{z - b_k}, \tag{6}$$

где $P_m(z)$ — многочлен, степень которого $m$ не превосходит порядка функции $w(z)$.

Теорема. *Пусть $w(z) \in M_{0,\infty}$. Тогда в теореме* А *неравенство* (3) *можно заменить следующими*

$$d(E_l(r)) \leqslant K\varphi(r)\frac{r \ln r}{A(r)}, \quad m = 0, \quad K = K(w) = \text{const}^*, \quad r > r^*, \tag{7}$$

* В дальнейшем через $K(K_1)$ будем обозначать абсолютные постоянные, не обязательно одинаковые даже на протяжении одной цепочки неравенств, зависящие только от выбора функции (и $\varepsilon$).

$$d(E_i(r)) \leqslant K_1 \varphi(r) \ln r \left\{ \frac{r}{A(r)} + \frac{r^{1-\alpha}}{A^{1/2}(r)} \right\}, \ m \geqslant 1, r > r_1^*, \tag{8}$$

*где* $\alpha = \min(\varepsilon, 1)$, $\varepsilon$ — *любое число из промежутка* $\left(0, \dfrac{m}{3}\right)$.

Отметим, что неравенства (7) и (8) усиливают неравенства (3) в том случае, когда $\lim \ln^2 r / A(r) = 0$.

Для доказательства приведенной выше теоремы установим предварительно несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть* $w(z) \in M_{0,\infty}$. *Тогда произведение* (2) *для любого* $r$ *удовлетворяет неравенству*

$$\iint\limits_{D(r)} \left| \frac{\Pi'(te^{i\varphi})}{\Pi(te^{i\varphi})} \right| t\,dt\,d\varphi \leqslant Kr(1 + \ln^+ r), \tag{9}$$

*где* $D(r) = \{z : |z| \leqslant r\}$.

Доказательство. Пользуясь тем, что

$$\left| \frac{\Pi'(te^{i\varphi})}{\Pi(te^{i\varphi})} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{te^{i\varphi} - a_k} - \frac{1}{te^{i\varphi} - b_k} \right|,$$

получим

$$I = \iint\limits_{D(r)} \left| \frac{\Pi'(te^{i\varphi})}{\Pi(te^{i\varphi})} \right| t\,dt\,d\varphi \leqslant \sum_{|b_k| \leqslant 2r} \iint\limits_{D(r)} \left| \frac{1}{te^{i\varphi} - a_k} - \frac{1}{te^{i\varphi} - b_k} \right| t\,dt\,d\varphi +$$

$$+ \sum_{|b_k| > 2r} \iint\limits_{D(r)} \left| \frac{1}{te^{i\varphi} - a_k} - \frac{1}{te^{i\varphi} - b_k} \right| t\,dt\,d\varphi = I_1 + I_2. \tag{10}$$

Для оценки $I_1$ обозначим через

$$\delta_k(r) = \max_{|b_k| \leqslant 2r} \left\{ |a_k - b_k|, \ \frac{2r}{n(2r; \infty)} \right\},$$

$$D_k(r) = \left\{ z : |z - z_k| \leqslant \delta_k(r), \ z_k = \frac{a_k + b_k}{2} \right\},$$

где $n(2r; \infty)$ — количество полюсов в круге $|z| \leqslant 2r$ с учетом кратности. Тогда, поскольку для $|b_k| < 2r$ и $z \in D(r) \setminus D_k(r)$, имеем $\dfrac{|z - b_k|}{3} \leqslant |z - a_k| \leqslant 3|z - b_k|$, то

$$I_1 \leqslant \sum_{|b_k| \leqslant 2r} \left\{ 3|a_k - b_k| \iint\limits_{D(r) \setminus D_k(r)} \frac{t\,dt\,d\varphi}{|te^{i\varphi} - b_k|^2} + \iint\limits_{D_k(r)} \frac{t\,dt\,d\varphi}{|te^{i\varphi} - b_k|} + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{D_k(r)} \frac{t\,dt\,d\varphi}{|te^{i\varphi} - b_k|} \right\} \leqslant \sum_{|b_k| \leqslant 2r} \left\{ 3|a_k - b_k| \int\limits_{\frac{1}{2}\delta_k(r)}^{3r} \int\limits_0^{2\pi} \frac{dR\,d\theta}{R} + \right.$$

$$\left. + 2 \int\limits_0^{\frac{3}{2}\delta_k(r)} \int\limits_0^{2\pi} dR\,d\theta \right\} \leqslant 2\pi \sum_{|b_k| \leqslant 2r} \left\{ 3|a_k - b_k| \ln \frac{6r}{\delta_k(r)} + 3\delta_k(r) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant 6\pi \sum_{|b_k| \leqslant 2r} \left\{ |a_k - b_k| \ln 3n(2r; \infty) + \frac{2r}{n(2r; \infty)} + |a_k - b_k| \right\}. \tag{11}$$

Так как $|z-b_k|>\frac{b_k}{2}$ при $|b_k|>2r$ и $z\in D(r)$, то используя известное соотношение

$$\iint\limits_{D(r)}\frac{tdtd\varphi}{|te^{i\varphi}-a|}\leqslant 4\pi r,$$

получим

$$I_2\leqslant\sum_{|b_k|>2r}|a_k-b_k|\iint\limits_{D(r)}\frac{tdtd\varphi}{|te^{i\varphi}-a_k|\,|te^{i\varphi}-b_k|}\leqslant 8\pi r\sum_{|b_k|>2r}\left|\frac{a_k-b_k}{b_k}\right|. \tag{12}$$

Если $n(2r;\ \infty)=0$, то $I_1=0$ и из (10) и (12) следует, что

$$I< I_2\leqslant Kr. \tag{13}$$

Если же $n(2r;\ \infty)\geqslant 1$ (тогда $\ln 3n(2r;\ \infty)>1$), то из (10), (11), (12) будем иметь

$$I\leqslant Kr(1+\ln n(2r;\ \infty)); \tag{14}$$

фактически из (13) и (14) вытекает, что для любого $r$ справедливо

$$I< Kr(1+\ln^+ n(2r;\ \infty)),$$

а поскольку $\ln^+ n(2r;\ \infty)\leqslant K(1+\ln^+ r)$ для любого $r$, то тем самым утверждение леммы доказано.

Лемма 2. *Если через $E(r)$ обозначить множество*

$$E(r)=\{z:|z|< r.\ |\ln|\Pi(z)||\geqslant\psi(r)\},$$

*где $\psi(r)\uparrow\infty$, $r\to\infty$, то для любого $r$*

$$S[E(r)]\leqslant K\frac{r^2(1+|\ln r|)^2}{\psi^2(r)}, \tag{15}$$

*где $S[X]$ — площадь множества $X$.*

Доказательство. Поскольку $E(r)=E_1(r)\cup E_2(r)$, где

$$E_1(r)=\{z:|z|\leqslant r,\ \ln|\Pi(z)|\geqslant\psi(r)\},$$

$$E_2(r)=\{z:|z|\leqslant r,\ -\ln|\Pi(z)|\geqslant\psi(r)\},$$

то достаточно вычислить площадь каждого $E_i(r)$, $i=1, 2$. Из определения множества $E_1(r)$ имеем $(z=te^{i\varphi})$

$$S[E_1(r)]\psi(r)\leqslant I=\iint\limits_{E_1(r)}\ln|\Pi(te^{i\varphi})|\,tdtd\varphi<\sum_{|b_k|<2r}\iint\limits_{E_1(r)}\ln\left|\frac{te^{i\varphi}-a_k}{te^{i\varphi}-b_k}\right|tdtd\varphi+$$

$$+\sum_{|b_k|>2r}\iint\limits_{E_1(r)}\ln\left|\frac{te^{i\varphi}-a_k}{te^{i\varphi}-b_k}\right|tdtd\varphi=I_1+I_2. \tag{16}$$

Поскольку при $|b_k|>2r$ и $z\in E_1(r)$ имеем $|z-b_k|>\frac{|b_k|}{2}$, то

$$I_2<\sum_{|b_k|>2r}\iint\limits_{E_1(r)}\ln\left|1+\frac{b_k-a_k}{te^{i\varphi}-b_k}\right|tdtd\varphi<\sum_{|b_k|>2r}\iint\limits_{E_1(r)}\left|\frac{b_k-a_k}{te^{i\varphi}-b_k}\right|tdtd\varphi\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|b_k|>2r} 2\left|\frac{a_k - b_k}{b_k}\right| S[E_1(r)] \leqslant 2\sqrt{\pi}\sqrt{S[E_1(r)]}\; r \sum_{|b_k|>2r}\left|\frac{a_k - b_k}{b_k}\right|. \tag{17}$$

Обозначим через

$$\delta_k'(r) = 2 \max_{|b_k|\leqslant 2r}\left\{|a_k - b_k|,\ \frac{2r}{n(2r;\ \infty)}\right\},$$

$$D_k'(r) = \left\{z : |z - z_k| \leqslant \delta_k'(r),\ z_k = \frac{a_k + b_k}{2}\right\}.$$

Тогда применив неравенство Коши-Буняковского получим, что

$$I_1 \leqslant \sum_{|b_k|\leqslant 2r}\left\{\iint\limits_{E_1(r)\setminus D_k'(r)} \ln\left|\frac{te^{i\varphi} - a_k}{te^{i\varphi} - b_k}\right| t\,dt\,d\varphi + \iint\limits_{E_1(r)\cap D_k'(r)} \ln|te^{i\varphi} - a_k|\, t\,dt\,d\varphi + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{E_1(r)\cap D_k'(r)} \ln\frac{1}{|te^{i\varphi} - b_k|}\, t\,dt\,d\varphi\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{S[E_1(r)]}\sum_{|b_k|\leqslant 2r}\left\{\left(\iint\limits_{D(r)\setminus D_k'(r)} \ln^2\left|1 + \frac{b_k - a_k}{te^{i\varphi} - b_k}\right| t\,dt\,d\varphi\right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \left(\iint\limits_{D_k'(r)} \ln^2|te^{i\varphi} - a_k|\, t\,dt\,d\varphi\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\iint\limits_{D_k'(r)} \ln^2|te^{i\varphi} - b_k|\, t\,dt\,d\varphi\right)^{\frac{1}{2}}\right\} =$$

$$= \sqrt{S[E_1(r)]}\,\{I_1^1 + I_1^2 + I_1^3\}. \tag{18}$$

Так как для $|b_k| \leqslant 2r$ и $z \in D(r)\setminus D_k'$ имеем

$$\left|\frac{b_k - a_k}{z - b_k}\right| \leqslant \frac{2}{3},$$

то из известного неравенства $|\ln(1 + z)|^2 \leqslant 9|z|^2$, $|z| \leqslant \frac{2}{3}$ получим, что

$$I_1^1 \leqslant \sum_{|b_k|\leqslant 2r} 3|a_k - b_k|\left(\iint\limits_{D(r)\setminus D_k'(r)} \frac{t\,dt\,d\varphi}{|te^{i\varphi} - b_k|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant 6\sum_{|b_k|\leqslant 2r}|a_k - b_k|\left(\int\limits_{\frac{3}{4}\delta_k'(r)}^{3r}\int\limits_0^{2\pi}\frac{dR\,d\theta}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 6\sqrt{2\pi}\sqrt{\ln n(2r;\ \infty)}\sum_{|b_k|\leqslant 2r}|a_k - b_k|. \tag{19}$$

Интегралы $I_1^2$ и $I_1^3$ оцениваются аналогично, т. е.

$$I_1^2 + I_1^3 \leqslant \sum_{|b_k|\leqslant 2r} 2\left(\int\limits_0^{\frac{5}{4}\delta_k'(r)}\int\limits_0^{2\pi}(\ln^2 R)\, R\,dR\,d\theta\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{2\pi}\sum_{|b_k|<2r}\Big(\int\limits_0^{\frac{5}{4}\delta_k'(r)}(\ln^2 R)\,R d\theta\Big)^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{\pi}\sum_{|b_k|<2r}\delta_k'(r)\Big(\Big|\ln\frac{5}{4}\delta_k'(r)\Big| +$$

$$+\frac{1}{4}\Big) \leqslant \frac{5}{2}\sqrt{\pi}\sum_{|b_k|<2r}\delta_k'(r)\,(|\ln\delta_k'(r)|+2) \leqslant Kr\,(|\ln r| + |\ln n(2r;\infty)|+1). \tag{20}$$

Если $n(2r;\infty)<1$, то $I_1=0$ и из (16) и (17) следует, что

$$S[E_1(r)]\,\psi(r) \leqslant Kr\sqrt{S[E_1(r)]}. \tag{21}$$

Если же $n(2r;\infty)\geqslant 1$, то из (16)—(20) будем иметь

$$I \leqslant Kr\sqrt{S[E_1(r)]}\,(\sqrt{\ln n(2r;\infty)} + |\ln r| +$$
$$+\ln n(2r;\infty)+1). \tag{22}$$

Из (21) и (22) вытекает, что для любого $r$

$$I \leqslant Kr\sqrt{S[E_1(r)]}\,(1+\sqrt{\ln^+ n(2r;\infty)} + |\ln r| + \ln^+ n(2r;\infty)),$$

а поскольку $\ln^+ n(2r;\infty) \leqslant K(\ln^+ r+1)$ для любого $r$, то последнее неравенство примет вид

$$I \leqslant Kr\sqrt{S[E_1(r)]}\cdot(\ln^+ r+1+|\ln r|) \leqslant Kr\sqrt{S[E_1(r)]}\,(1+|\ln r|). \tag{23}$$

Из (16) и (23) получаем

$$S[E_1(r)] \leqslant K\frac{r^2(1+|\ln r|)^2}{\psi^2(r)},\quad r>0.$$

Точно так же оценивается и $S[E_2(r)]$. Таким образом, лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $a_\nu = \sigma_\nu e^{i\gamma_\nu}$, $\nu=0, m$ — *произвольные комплексные числа и пусть* $k(r)\uparrow+\infty$, $r\to\infty$, *причем такая, что*

$$\frac{2^m}{\sigma_m}\,\frac{\ln k(r)}{r^m} < c < 1,\ r > r_0,\ c=\mathrm{const}<+\infty.$$

*Тогда в кольце* $D\left(\frac{r}{2};r\right)=\left\{r:\frac{r}{2}\leqslant|z|\leqslant r\right\}$ *при* $r>r_1$ *можно указать множества* $D(r;k(r))$ *и* $D^*(r;k(r))$, *для которых справедливо следующее:*

I. $|\exp\{a_m z^m+\cdots+a_0\}| > k(r),\ z\in D(r;k(r)),$

II. $|\exp\{a_m z^m+\cdots+a_0\}| \leqslant \dfrac{1}{k(r)},\ z\in D^*(r;k(r)),$

III. $S\left[D\left(\frac{r}{2};r\right)\setminus\{D(r;k(r))\cup D^*(r;k(r))\}\right] \leqslant M\dfrac{\ln k(r)}{r^{m-2}},$

где $M=\mathrm{const}<+\infty$.

Доказательство. Полагая $z=te^{i\theta}$, получим

$$u(t;\ \theta) = Re\,(a_m z^m + \cdots + a_1 z + a_0) + a_0) =$$
$$= \sigma_m t^m \cos(\xi_m + m\theta)\left[1 + \frac{1}{\sigma_m t^m}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\sigma_j t^j \cos(\xi_j + j\theta)}{\cos(\xi_m + m\theta)}\right], \tag{24}$$

$$u'_\theta(t;\ \theta) = -\sigma_m t^m m \sin(\xi_m + m\theta)\left[1 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sigma_m t^m m}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\sigma_j t^j j \sin(\xi_j + j\theta)}{\sin(\xi_m + m\theta)}\right]. \tag{25}$$

Пусть $\varphi(t) \downarrow 0, t \to \infty$ и $t\varphi(t) \to \infty$ $t \to \infty$. Рассмотрим $\varphi(t)$ — окрестности нулей функции $\cos(\xi_m + m\theta)$, т. е. рассмотрим совокупность интервалов

$$\Gamma_k(t) = \left(\frac{1}{m}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k - \xi_m\right) - \varphi(t);\ \frac{1}{m}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k - \xi_m\right) + \varphi(t)\right),$$
$$k = 0 \pm 1, \pm 2 \cdots.$$

Так как вне этих интервалов, т. е. при $\theta \in R \setminus \left\{\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Gamma_k(t)\right\}$

$$|\cos(\xi_m + m\theta)| \geqslant \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - m\varphi(t)\right)\right| \geqslant |\sin(m\varphi(t))|,$$

то применяя известное соотношение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, получим, что

$$\left|\frac{1}{\sigma_m t^m}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\sigma_j t^j \cos(\xi_j + j\theta)}{\cos(\xi_m + m\theta)}\right| \leqslant M_1 \frac{1}{t\varphi(t)} \quad t \geqslant \overset{*}{t_0}\ M_1 = \text{const}. \tag{26}$$

Если $\theta \in \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Gamma_k(t)$, то

$$|\sin(\xi_m + m\theta)| > \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - m\varphi(t)\right)\right| = |\cos(m\varphi(t))|$$

и следовательно

$$\left|\frac{1}{\sigma_m t^m m}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\sigma_j t^j (\xi_j \sin + j\theta)}{\sin(\xi_m + m\theta)}\right| < M_2 \frac{1}{t},\ t \geqslant \overset{**}{t_0},\ M_2 = \text{const}. \tag{27}$$

Из (26) следует, что величина в квадратных скобках (24) стремится к 1 при $t \to \infty$ равномерно по $\theta \in R \setminus \left\{\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Gamma_k(t)\right\}$, т. е. для этих $\theta$ и для каждого $t \geqslant t^* \geqslant \overset{*}{t_0}$ функции $u(t;\ \theta)$ и $t^m \sigma_m \cos(\xi_m + m\theta)$ имеют одинаковый знак. Из (26) следует, что величина в квадратных скобках (25) стремится к 1 при $t \to \infty$ равномерно по $\theta \in \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Gamma_k(t)$, т. е. для этих $\theta$ и для каждого $t \geqslant t^{**} \geqslant \overset{**}{t_0}$ функции $u'_\theta(t;\ \theta)$ и $-\sigma_m t^m \sin(\xi_m + m\theta)$ имеют одинаковый знак. Мы получили, что на любом $\Gamma_k(t)$ для каждого $t > t_1 = \max(t^*, t^{**})$ функция $u(t; \theta)$ строго монотонна по $\theta$, а на концах $\Gamma_k(t)$ она имеет разные знаки. Следовательно уравнение $u(t; \theta) = 0$ на $\Gamma_k(t)$, $k = 0, \pm 1, \cdots$ имеет единственный корень, т. е. количество решений уравнения $u(t; \theta) = 0$ на отрезке $(0; 2\pi]$ совпадает с количеством нулей функции $\cos(\xi_m + m\theta)$ для каждого $t \geqslant t_1$. Окончательно мы получили, что для каждого $t > t_1$ на окружности $|z| = t$ это уравнение имеет $2m$ решений, лежащих на $\Gamma_k(t)$, и поэтому при $t \to \infty$ эти решения (точки на $|z| = t$) описывают кривые (обозначим их через $\beta_j$, $j = 1, \cdots, 2m$), которые асимптотически приближаются к лучам $\alpha_j = \left\{z : \arg z = \frac{1}{m}\left(\frac{\pi}{2} + \pi j - \xi_m\right)\right\}$, $j = 1, \cdots, 2m$. Эти лучи, в свою очередь, являются геометрическим местом решений уравнения $Re(a_m z^m) = 0$, т. е. $a_m t^m \cos(\xi_m + m\theta) = 0$.

Рассмотрим уравнение $|\exp\{a_m z^m + \cdots + a_1 z a_1 z + a_0\}| = k(r)$ или,

$$u(t; \theta) = \ln k(r),\ r > r_0,\ \frac{r}{2} \leqslant t \leqslant r,\ 0 < \theta \leqslant 2\pi.$$

Буквально повторяя предыдущие рассуждения (только вместо $\varphi(t)$ — окрестностей нулей функции $\cos(\xi_m + m\theta)$ нужно взять $\varphi(t)$ — окрестности решений уравнения $a_m t^m \cos(\xi_m + m\theta) - \ln k(r) = 0$, $r > r_0$ $\frac{r}{2} \leqslant t < r$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$), получим, что для $r > \bar{r}_0$ решения этого уравнения представляют собой $2m$ кривых (обозначим их через $\gamma_j(k(r))$, $j = 1, \cdots, 2m$), асимптотически приближающихся к кривым, которые являются решениями уравнения $a_m t^m \cos(\xi_m + m\theta) = \ln k(r)$, $r \geqslant r_0$, $\frac{r}{2} < t \leqslant r$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$; причем $\gamma_j(k(r))$, $j = 1, \cdots, 2m$ попарно лежат в тех криволинейных угловых областях, где $u(t; \theta) > 0$, $t \geqslant t_1$ (см. рис. 1)

Если обозначить заштрихованные области, обведенные штрихами через $D(r; k(r))$, то нетрудно убедиться в том, что

$$|\exp\{a_m t^m + \cdots + a_1 z + a_0| \geqslant k(r),\ r \in D(r; k(r)),\ r > \bar{r}_0.$$

Точно так же находим кривые $\gamma_j^*(k(r))$, $j = 1, \cdots, 2m$, которые являются решениями уравнения $u(t; \theta) = -\ln k(r)$, $\frac{r}{2} \leqslant t \leqslant r$, $r \geqslant \bar{r}$.

Они попарно лежат в угловых областях, где $u(t; \theta) < 0$, $t \geqslant t_1$ (см. рис. 1). Через $D^*(r; k(r))$ обозначим заштрихованные области, обведенные точками. Ясно, что если $z \in D^*(r; k(r))$, то

$$|\exp\{a_m z^m + \cdots + a_1 + z a_0\}| \leqslant \frac{1}{k(r)},\ r > \bar{r}_0,$$

Множество $D\left(\frac{r}{2}; r\right) \setminus \{D(r; k(r)) \cup D^*(r; k(r))\}$ состоит из $2m$ компонент, которые обозначим через $E_j(r; k(r))$, $j = 1, \cdots, 2m$. Так как

$$S\left[D\left(\frac{r}{2}; r\right) \setminus \{D(r; k(r)) \cup D^*(r; k(r))\}\right] = \sum_{j=1}^{2m} S[E_j(r; k(r))],\ r \geqslant \bar{r}_0,$$

то достаточно вычислить площадь каждого $E_j(r; k(r))$, $j=1, \cdots, 2m$.

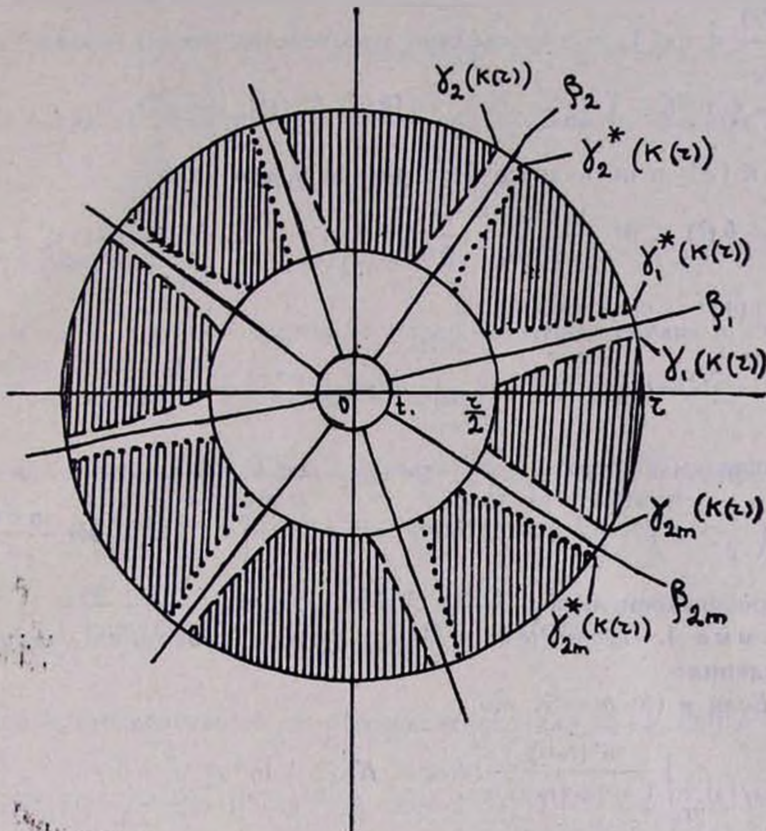


Рис. 1.

Пусть $\theta(t)$ — аргумент точки $z \in \gamma_1(k(r))$, $\theta^*(t)$ — аргумент точки $z \in \gamma_1^*(k(r))$. Тогда

$$u(t;\ \theta(t)) = \ln k(r),\ u(t;\ \theta^*(t)) = -\ln k(r),\ \frac{r}{2} \leqslant t \leqslant r,\ r \geqslant \bar{r}_0,$$

и по теореме Лагранжа получим

$$|\theta^*(t) - \theta(t)| = \frac{2\ln k(r)}{\left|u'_\theta(t,\ \tilde{\theta}(t))\right|},\ \frac{r}{2} \leqslant t \leqslant r,\ r \geqslant \bar{r}_0, \tag{28}$$

где $\tilde{\theta}(t) \in [\theta(t),\ \theta^*(t)]$.

Так как $\left(\frac{r}{2} \leqslant t \leqslant r,\ r \geqslant \bar{r}_0\right)$

$$\cos(\xi_m + m\theta(t)) = \frac{\ln k(r)}{\sigma_m t^m} - \frac{1}{\sigma_m t_m} \sum_{j=0}^{m-1} \sigma_j t^j \cos(\xi_j + j\theta(t)),$$

$$\cos(\xi_m + m\theta^*(t)) = -\frac{\ln k(r)}{\sigma_m t^m} - \frac{1}{\sigma_m t^m} \sum_{j=0}^{m-1} \sigma_j t^j \cos(\xi_j + j\theta^*(t))$$

и выражения в квадратных скобках этих соотношений стремятся к нулю при $t \to \infty$, то функция $\cos(\xi_m + m\theta)$ на отрезке $[\theta(t),\ \theta^*(t)]$ монотонна по $\theta$ для достаточно больших $t$. Поэтому из того, что

$\frac{2^m}{\sigma_m}\frac{\ln k(r)}{r^m}<c<1$, $r\geqslant r_0$, следуют неравенства $|\cos(\xi_m+m\theta)|<c<1$,

$$|\sin(\xi_m+m\theta)|\geqslant\sqrt{1-c^2}>0,\ \theta\in[\theta(t),\theta^*(t)],\ \frac{r}{2}\leqslant t\leqslant r,\ r\geqslant\bar{r}_0.$$

Из (25) и (28) и последнего неравенства будем иметь

$$\theta^*(t)-\theta(t)\leqslant M_3\frac{\ln k(r)}{t^m},\ \frac{r}{2}\leqslant t\leqslant r,\ r\geqslant r_0,\ M_3=\mathrm{const}<+\infty.$$

Значит при $r\geqslant r_1=\max(r_0,\ \bar{r}_0)$

$$S[E_1(r,\ k(r))]=\int\limits_{r/2}^{r}\int\limits_{\theta(t)}^{\theta^*(t)}tdtd\theta\leqslant 2^{m-1}M_3\frac{\ln k(r)}{r^{m-2}}.$$

Аналогично вычисляются и остальные $E_j(r,\ k(r))$. Поэтому при $r\geqslant r_1$,

$$S\left[D\left(\frac{r}{2};\ r\right)\setminus(D(r;k(r))\cup D^*(r;\ k(r)))\right]\leqslant 2_m2^{m-1}M_3\frac{\ln k(r)}{r^{m-2}},$$

что и требовалось доказать при $M=2_m2^{m-1}M_3$.

Лемма 4. *Пусть $w(z)\in M_{0,\infty}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

I. *Если в* (6) $m=0$, *то*

$$\iint\limits_{D(r)}\frac{|w'(te^{i\varphi})|}{1+|w(te^{i\varphi})|^2}tdtd\varphi\leqslant Kr(1+\ln^+r),\ r>0.$$

II. *Если же в* (6) $m\geqslant 1$, *то для любого* $0<\varepsilon<\frac{m}{3}$ *существует* $r_1^*>0$ *такое, что*

$$\iint\limits_{D(r)}\frac{|w'(te^{i\varphi})|}{1+|w(te^{i\varphi})|^2}tdtd\varphi\leqslant K_1r\ln r\left\{\frac{\sqrt{A(r)}}{r^\alpha}+1\right\},\ r\geqslant r_1^*,$$

*где* $\alpha=\min(\varepsilon;\ 1)$.

Доказательство. Используя лемму 1, получим, что для любого $r>0$ справедливо $(m=0)$

$$\iint\limits_{D(r)}\frac{|w'(te^{i\varphi})|}{1+|w(te^{i\varphi})|^2}tdtd\varphi\leqslant\iint\limits_{D(r)}\frac{|\Pi'(te^{i\varphi})|}{|\Pi(te^{i\varphi})|}tdtd\varphi\leqslant Kr(1+\ln^+r).$$

Тем самым утверждение I доказано.

Пусть $m\geqslant 1$, $\psi(r)\uparrow\infty$, $r\to\infty$ и $\psi_1(r)\uparrow\infty$, $r\to\infty$, причем $\frac{\psi_1(r)}{r^m}\to 0$, $r\to\infty$. Обозначим через

$$E(r)=\left\{z:\frac{r}{2}\leqslant|z|\leqslant r,\ |\ln|\Pi(z)||\geqslant\psi(r)\right\},$$

$$D(r;\ e^{\psi_1(r)})=\left\{z:\frac{r}{2}\leqslant|z|\leqslant r,\ |\exp[a_mz^m+\cdots+a_1z+a_0]|\geqslant e^{\psi_1(r)}\right\},$$

$$D^*(r;\, e^{\psi_1(r)}) = \left\{ z:\ \frac{r}{2} \leqslant |z| < r,\ |\exp\{a_m z^m + \cdots + a_1 z + a_0\}| \leqslant \frac{1}{e^{\psi_1(r)}} \right\}.$$

Тогда согласно леммам 2 и 3 можно найти такое $r_1$, что при $r > r_1$

$$S[E(r)] < K\frac{r^2 \ln^2 r}{\psi^2(r)}, \tag{29}$$

$$S[\overline{E}(r) = D\left(\frac{r}{2};\ r\right) \setminus [D(r;\ e^{\psi_1(r)}) \cup D^*(r;\ e^{\psi_1(r)})]] \leqslant K\frac{\psi_1(r)}{r^{m-2}}. \tag{30}$$

К тому же $r_1$ выберем настолько большим, чтобы справа в (9) стояла величина $Kr\ln r$, $r \geqslant r_1$.

Сперва для $r \geqslant r_1$ оценим интеграл

$$I = \iint\limits_{D\left(\frac{r}{2};\, r\right)} \frac{|w'(te^{i\varphi})|^2}{1+|w(te^{i\varphi})|^2}\, tdtd\varphi \leqslant \iint\limits_{E(r)\cup\overline{E}(r)} \frac{|w'(te^{i\varphi})|}{1+|w(te^{i\varphi})|^2}\, tdtd\varphi +$$

$$+ \iint\limits_{D(r;\, e^{\psi_1(r)})\setminus E(r)} \frac{|w'(te^{i\varphi})|}{1+|w(te^{i\varphi})|^2}\, tdtd\varphi + \iint\limits_{D^*(r;\, e^{\psi_1(r)})\setminus E(r)} \frac{w'(te^{i\varphi})|}{1+|w(te^{i\varphi})|^2}\, tdtd\varphi = I_1 + I_2 + I_3. \tag{31}$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского для 1, из (29) и (30) получим

$$I_1 \leqslant (S[E(r)] + S[\overline{E}(r)])^{1/2} A^{1/2}(r) \leqslant Kr A^{1/2}(r)\left(\frac{\psi_1(r)}{r^m} + \frac{\ln^2(r)}{\psi^2(r)}\right)^{1/2}. \tag{32}$$

Если $z \in D(r;\ e^{\psi_1(r)}) \setminus E(r)$, то

$$\frac{|w(z)|}{1+|w(z)|^2} \leqslant e^{\psi(r) - \psi_1(r)},$$

и поэтому, используя (9) будем иметь

$$I_2 \leqslant \iint\limits_{D(r;\, e^{\psi_1(r)})\setminus E(r)} \frac{|w(te^{i\varphi})|}{1+|w(te^{i\varphi})|^2} \Big| P_m'(te^{i\varphi}) +$$

$$+ \frac{\Pi'(te^{i\varphi})}{\Pi(te^{i\varphi})} \Big| tdtd\varphi \leqslant K\left[\frac{r^{m+1}}{e^{\psi_1(r)-\psi(r)}} + r\ln r\right].$$

Аналогично можно показать, что

$$I_3 \leqslant K\left[\frac{r^{m+1}}{e^{\psi_1(r)-\psi(r)}} + r\ln r\right]. \tag{34}$$

Из (31), (32), (33) и (34) следует, что

$$I \leqslant KrA^{1/2}(r)\left(\frac{\psi_1(r)}{r^m} + \frac{\ln^2 r}{\psi^2(r)}\right)^{1/2} + K\left(\frac{r^{m+1}}{e^{\psi_1(r)-\psi(\psi)}} + r\ln r\right),\ r > r_1.$$

Пусть $\psi_1(r) = r^{m-2\varepsilon}$, $\psi(r) = \psi^{\varepsilon}\ln r$, где $0 < \varepsilon < \frac{m}{3}$. Тогда

$$I < Kr\,A^{1/2}(r)\,\frac{1}{r^{\varepsilon}} + K\left(\frac{r^{m+1}}{e^{r^{m-2\varepsilon}-r^{\varepsilon}\ln r}} + r\ln r\right) \leqslant$$
$$\leqslant K_1\left(r^{1-\varepsilon}A^{1/2}(r) + r\ln r\right),\quad r \geqslant r_2 > r. \tag{35}$$

Теперь оценим интеграл от сферической производной функции $w(z)$ в области $D(r)$. Для $r > r_2$ выберем неотрицательное целое число $l$ такое, что $l \leqslant \log_2\frac{r}{r_2} < l+1$ и разделим отрезок $[0;\ r]$ следующим образом:

$$[0;\ r] = \left[0;\ \frac{r}{2^{l+1}}\right] \cup \left[\frac{r}{2^{l+1}};\ \frac{r}{2^{l}}\right] \cup \cdots \cup \left[\frac{r}{2};\ r\right].$$

Так как $\frac{r}{2^{l+1}} < r_2 \leqslant \frac{r}{2^{l}}$, то применяя (35) получим, что

$$\iint\limits_{D(r)} \frac{|w'(te^{i\varphi})|}{1+|w(te^{i\varphi})|^2}\,tdtd\varphi \leqslant \iint\limits_{D(r_2)} \frac{|w'(te^{i\varphi})|}{1+|w(te^{i\varphi})|^2}\,tdtd\varphi +$$
$$+ \sum_{j=0}^{l} \iint\limits_{D\left(\frac{r}{2^{j+1}};\ \frac{r}{2^{j}}\right)} \frac{|w'(te^{i\varphi})|}{1+|w(te^{i\varphi})|^2}\,tdtd\varphi \leqslant K_1 +$$
$$+ K_1 r^{1-\varepsilon}A^{1/2}(r)\,\{1+\cdots+(2^{l})^{\varepsilon-1}\} + K_1 r\ln r\left\{1+\cdots+\frac{1}{2^{l}}\right\}. \tag{36}$$

Поскольку $(l+1) \leqslant \log_2 2\frac{r}{r_2}$ и

$$1 + 2^{\varepsilon-1} + \cdots + 2^{l(\varepsilon-1)} = l+1,\quad \varepsilon = 1,$$
$$1 + 2^{\varepsilon-1} + \cdots + 2^{l(\varepsilon-1)} = \frac{1-2^{(l+1)(\varepsilon-1)}}{1-2^{\varepsilon-1}},\quad \varepsilon \neq 1,$$

то из (36) следует, что

$$I \leqslant K_1 r\ln r\left\{\frac{\sqrt{A(r)}}{r^{\alpha}} + 1\right\},\quad r \geqslant r_1^{*} > r_2,$$

где $\alpha = \min(\varepsilon,\ 1)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Доказательство неравенств (3) теоремы А вытекало из следующего неравенства (см. [2], стр. 418—419):

$$\sum_{i=1}^{\Phi(r)} d(E_i(r) \leqslant K\sqrt{\varphi(r)}\iint\limits_{D(r)} \frac{|w(te^{i\varphi})|}{1+|w(te^{i\varphi})|^2}\,tdtd\varphi + Kr,$$

где $K = \mathrm{const}$.

Если $w(z) \in M_{0,\infty}$, то воспользовавшись леммой 4 будем иметь

$$\sum_{i=1}^{\Phi(r)} d(E_i(r)) < K\sqrt{\varphi(r)}\,r\ln r,\quad m=0,\ r > r^{*},$$
$$\sum_{i=1}^{\Phi(r)} d(E_i(r)) < K_1\sqrt{\varphi(r)}\,r\ln r\left\{\frac{\sqrt{A(r)}}{r^{\alpha}} + 1\right\},\quad r > r_1^{*}. \tag{37}$$

Чтобы получить неравенство (7) выбросим из рассмотрения те области $E_i(r)$, для которых $d(E_i(r)) \geqslant K \dfrac{\varphi(r)\, r \ln r}{A(r)}$. Так как согласно (37) количество таких областей $o[A(r)]$, $r \to \infty$, то сохраняя для оставшихся областей все обозначения теоремы 1, получим неравенство (7).

Аналогично можно доказать неравенство (8).

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 22.VI.1988

Գ. Ա. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ, Գ. Ա. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ Մոտիկության հատկություն մերոմորֆ ֆունկցիաների համար, որոնց զրոները և բևեռները մոտ են *(ամփոփում)*

*Տվյալ աշխատանքում C-ում մերոմորֆ $w(z)$ ֆունկցիաների համար, որոնք բնութագրվում են զրոների և բևեռների մոտիկությամբ, ճշգրտվում են որոշ գնահատականներ այդ ֆունկցիաների a-կետերի մոտիկության վերաբերյալ, ըստ որի $|z| \leqslant r$ շրջաններում կարելի է ցույց տալ փոքր տրամագծով $\sim A(r)$ տիրույթներ՝ լցման տիրույթներ, որոնց w-պատկերները միաթերթ ծածկում են համարյա լրիվ հարթությունը։*

*Պարզվում է, որ այդ դասի ֆունկցիաների համար նշված լցման տիրույթների տրամագիծը ավելի փոքր է, քան ընդհանուր դեպքում։*

G. A. BARSEGIAN. G. A. SUKIASIAN. *A proximity property of meromorphic functions with close zeros and poles* (summary)

In the paper for certain class of meromorphic in $C$ functions $w(z)$ with close zeros and poles some estimates relating to the proximity property of the $a$-points are made more precise. By the property in question one can point out in the circles $|z| \leqslant r$ approximately $A(r)$ regions of small diameter (regions de remplissage) such thal their $w$ — images cover univalently almost the whole plane.

For the functions from the class under consideration the diameters of the mentioned regions de remplissage have been found small in comparison with general case

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции. М., Гостехиздат, 1941.
2. *Г. А. Барсегян.* Свойство близости $a$-точек мероморфных функций и структура однолистных областей римановых поверхностей, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XX, № 5, 1985. 375—400; т. XX, 6, 1985. 407—425.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXV, № 1, 1990 Математика

УДК 517.51

М. Г. ГРИГОРЯН

# О СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ РЯДОВ ФУРЬЕ—ЛЕЖАНДРА СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

## Введение

Вопросам сходимости рядов Фурье—Лежандра посвящено много работ. Полард [1] показал, что любая функция $f(x) \in L^p$ разлагается в ряд Фурье по многочленам Лежандра в пространстве $L^p$, если $\frac{4}{3} < p < 4$, и указал примеры функций, для которых разложение расходится, если $1 \leqslant p < \frac{4}{3}$ или $p > 4$.

Нейман и Рудин [2] установили, что для $p = \frac{4}{3}$ и $p = 4$ разложение функций $f(x) \in L^p$ может расходиться в пространстве $L^p(-1; 1)$. Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[-1; 1]$ и, кроме того, произведение $(1-x^2)^{-\frac{1}{4}} \cdot f(x)$ также интегрируемо на этом сегменте, то (см. [3], стр. 144) для всякого $x$ из интервала $(-1; 1)$ выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} [\sigma_n(x, f) - (1-x^2)^{-\frac{1}{4}} \cdot S_n(\arccos x, F)] = 0,$$

причем сходимость равномерная на всяком сегменте $[-1+\alpha; 1-\alpha]$, $\alpha > 0$, где

$$F(t) = \sqrt{\sin t} \cdot f(\cos t), \quad t \in (0, \pi),$$

$$S_n(t, F) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\, dt,$$

$$\sigma_n(x, f) = \sum_{k=0}^{n} a_k(f) \widehat{P}_k(x), \quad a_k(f) = \int_{-1}^{1} f(x) \widehat{P}_k(x)\, dx$$

($\widehat{P}_n(x)$ — ортонормированный многочлен Лежандра). Вместе с тем известно, что ряд Фурье — Лежандра функции $f_0(x) = (1+x)^{-3/4}$; $x \in (-1; 1)$ (см. [4], стр. 321) расходится всюду на $(-1; 1)$.

В настоящей работе рассматривается вопрос сходимости рядов Фурье—Лежандра суммируемых функций $f(x)$ в зависимости от изменения их значений вне заданного множества.

Идея улучшения сходимости рядов Фурье путем изменения разлагаемой функции вне заданного множества принадлежит Д. Е. Меньшову.

Теорема 1. (Д. Е. Меньшов [5]). *Пусть $f(x)$ — любая суммируемая на $[0; 2\pi]$ функция, $Q$ — любое совершенное нигде не плотное множество на $[0, 2\pi]$. Тогда можно найти такую суммируемую функцию $g(x)$, что $g(x)=f(x)$ на $Q$, и ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится почти всюду на $[0; 2\pi]$.*

Оказывается, что эта теорема верна для рядов Фурье—Лежандра. Более того, справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть $Q$ — любое совершенное нигде не плотное множество на $[-1; 1]$. Тогда существует ряд по многочленам Лежандра*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x), \tag{1}$$

*обладающий тем свойством, что для любой функции $F(x)\in L(-1; 1)$ можно найти такую функцию $G(x)\in L(-1; 1)$, что $G(x)=F(x)$ на $Q$, ряд Фурье—Лежандра вновь полученной функции $G(x)$ является подрядом ряда (1) и сходится к ней почти всюду на $[-1; 1]$.*

Замечание 1. Теорема 2 верна и для рядов Фурье и Фурье—Уолша.

При доказательстве сформулированной теоремы мы будем пользоваться следующей леммой, доказанной в работе [6] автора.

Лемма 1. *Пусть даны: интервал $\Delta=(a; b)\subset[0; 2\pi]$, совершенное нигде не плотное множество $Q\subset\Delta$, числа $\bar{\gamma}\neq 0$, $\bar{\varepsilon}>0$, $\tilde{N}>1$, $\nu>8$. Тогда существуют измеримое множество $\tilde{E}$, функция $\varphi(t)\in L^2$ такие, что*

1) $$\varphi(t)=\begin{cases}\tilde{\gamma} \text{ на } Q\\ 0 \text{ вне } \Delta,\end{cases}$$

2) $$\int_{\Delta}|\varphi(t)|\,dt<2\,|\bar{\gamma}|\,|\Delta|^*,$$

3) $$|S_n(t, \varphi)|<B_0\cdot\nu\cdot|\tilde{\gamma}|+\tilde{\varepsilon} \text{ при } t\in\tilde{E} \text{ для всех } n,$$

4) $$|\tilde{E}|>|\Delta|\,(1-8/\nu),$$

5) $$|S_n(t, \varphi)|<\tilde{\varepsilon} \text{ для всех } n\geqslant 1, \text{ при } t\overline{\in}\left[a-\frac{|\Delta|}{\nu};\ b+\frac{|\Delta|}{\nu}\right].$$

6) $$|S_n(t, \varphi)|<\bar{\varepsilon},\ t\in[0, 2\pi],\ n\leqslant N.$$

* Через $|E|$ обозначена мера Лебега множества $E$.

Отметим, что в доказательстве леммы 1 существенно используется одна лемма Меньшова о ствойствах интеграла Дирихле (см. [7], 460). Отметим также, что в отличие от доказательства теоремы 1 Д. Е. Меньшова схема доказательства теоремы 2, приведенная в настоящей статье такова: строится ряд (1) такой, что после изменения любой функции $F(x)$ вне $Q$, вновь полученная функция $G(x)$ представляется рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} H_k(x)$ в метрике $L^1$, члены которого выбраны из ряда (1), являются непересекающимися полиномами

$$H_k(x)=\sum_{l=M_k}^{\overline{M}_k} a_l P_l(x),\ M_k<\overline{M}_k<M_{k+1};\ k\geqslant 1,$$

внутренние колебания которых стремятся к нулю, т. е.

$$\lim_{k\to\infty}\Bigg[\sup_{M_k<n<\overline{M}_k}\Bigg|\sum_{l=M_k}^{n} a_l P_l(x)\Bigg|\Bigg]\overset{\text{п. в.}}{=}0.$$

**Замечание 2.** В лемме 1 можно добиться того, чтобы функция $\varphi(t)$ сохраняя условия 1) — 6), удовлетворяла и следующему условию (см. доказательство леммы 1):

$$\Bigg|\int\limits_0^{\pi}\varphi(t)\widehat{P}_k(\cos t)\sqrt{\sin t}\,dt\Bigg|<\frac{\varepsilon}{2(N+1)C_N},\ k\leqslant N, \tag{2}$$

$$C_N=\max_{1\leqslant k\leqslant N}\big(\max_{x\in[-1;1]}|\widehat{P}_k(x)|\big).$$

## § 2. Доказательство основных лемм

Пусть

$$P_0(x)\equiv 1,\ P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}[(x^2-1)^n]^{(n)},\ x\in[-1;1],\ n\geqslant 1 \tag{3}$$

— стандартизованные многочлены Лежандра и

$$\widehat{P}_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(x) \tag{4}$$

— ортонормированные многочлены Лежандра.

Пусть $F(t)\in L^1(-\pi;\pi)$ и $f(x)\in L^1(-1;1)$.

Положим

$$S_n(t;F)=\sum_{k=-n}^{n} b_k e^{ikt};\ b_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F(t)e^{-ikt}\,dt,$$

$$\sigma_n(x,f)=\sum_{k=0}^{n} a_k\widehat{P}_k(x),\ a_k=\int\limits_{-1}^{1}f(x)\widehat{P}_k(x)\,dx. \tag{5}$$

Известно, что частичную сумму ряда Фурье — Лежандра функции $f(x)$ можно представить в виде

$$\sigma_n(x, f) = \frac{n+1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{P_{n+1}(x)\,P_n(t) - P_{n+1}(t)\,P_n(x)}{x-t} f(t)\,dt. \qquad (6)$$

Мы будем пользоваться асимптотической формулой многочленов Лежандра (см. [3], стр. 128)

$$\sqrt{\sin t}\,P_n(\cos t) = \lambda_n \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t - \frac{\pi}{4}\right] + R_n(t) : t\in(0,\pi), \qquad (7)$$

$$|\lambda_n| < \frac{C_0}{\sqrt{n}}\ (C_0 = \text{const}), \qquad (8)$$

$$|R_n(t)| < \frac{C_0}{\alpha_0\cdot \pi^{3/2}};\ t\in[\alpha_0;\ \pi-\alpha_0], \qquad (9)$$

$$|R_n'(t)| < \frac{C_0}{\alpha_0\cdot\sqrt{n}};\ t\in[\alpha_0;\ \pi-\alpha_0],\ (0<\alpha_0<\pi). \qquad (10)$$

В дальнейшем через $\chi_E(x)$ будем обозначать характеристическую функцию множества $E$.

Лемма 2. *Пусть даны: положительное число* $0<\alpha<1$, *интервал* $[a;\ b]\subset[-1+\alpha;\ 1-\alpha]$, *функция* $f(x)\in L_{[a;\ b]}$, $f(x)=0$, $x\bar{\in}[a;\ b]$. *Тогда для всех* $n$ *и при* $\theta\in[\alpha;\ \pi-\alpha]$ *имеет место неравенство*

$$|\sigma_n(\cos\theta,\ f)| \leqslant \frac{A_0}{\alpha_0^{5/2}}\int\limits_c^d |f(\cos t)|\sqrt{\sin t}\,dt +$$

$$+\frac{A_0}{\sqrt{\alpha_0}}\left|\int\limits_c^d f(\cos t)\sqrt{\sin t}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta-t)}{2\sin\frac{\theta-t}{2}}\,dt\right|,$$

*где* $A_0 = \text{const}$, $\theta = \arccos x$, $c = \arccos a$, $d = \arccos b$ $\alpha_0 = \arccos \alpha$.

Доказательство. В силу (6) имеем

$$\sigma_n(\cos\theta,\ f) = \frac{n+1}{2}\int\limits_c^d \frac{P_{n+1}(\cos\theta)\cdot P_n(\cos t) - P_{n+1}(\cos t)\,P_n(\cos\theta)}{\cos\theta - \cos t}\times \qquad (11)$$

$$\times f(t)\sin t\,dt = \frac{n+1}{2\sqrt{\sin\theta}}\int\limits_c^d \frac{\varphi_n(\theta,\ t)}{\cos\theta-\cos t} f(\cos t)\sqrt{\sin t}\,dt,$$

где

$$\varphi_n(\theta,\ t) = \sqrt{\sin\theta}\sqrt{\sin t}\,[P_{n+1}(\cos\theta)\,P_n(\cos t) - P_n(\cos\theta)\,P_{n+1}(\cos t)]. \qquad (12)$$

Из (7) и (12) получим

$$\varphi_n(\theta,\ t) = \lambda_n\cdot\lambda_{n+1}\left\{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t - \frac{\pi}{4}\right] - \right.$$

$$-\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]\Bigg\}+$$

$$+\lambda_{n+1}\left\{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]R_n(t)-\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]R_n(\theta)\right\}+$$

$$+\lambda_n\Bigg\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]R_{n+1}(\theta)-$$

$$-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]R_{n+1}(t)\Bigg\}+$$

$$+\{R_{n+1}(\theta)R_n(t)-R_{n+1}(t)R_n(\theta)\}. \qquad (13)$$

Итак, интеграл из (11) по четырем фигурным скобкам (13) представляется в виде суммы четырех интегралов $J_n^{(1)}+J_n^{(2)}+J_n^{(3)}+J_n^{(4)}$.

Оценим их. Начнем с четвертого. Выражение в последних фигурных скобках в (13) приводится к сумме

$$R_n(t)\,[R_{n+1}(\theta)-R_{n+1}(t)]+R_{n+1}(t)\,[R_n(t)-R_n(\theta)]. \qquad (14)$$

Учитывая соотношения (7)—(10), получим

$$|J_n^{(4)}|=\frac{n+1}{2\sqrt{\sin\theta}}\Bigg|\times$$

$$\times\int_c^d\frac{R_{n+1}(t)\,[R_{n+1}(\theta)-R_{n+1}(t)]+R_{n+1}(t)\,[R_n(t)-R_n(\theta)]}{\cos\theta-\cos t}\times$$

$$\times f(\cos t)\sqrt{\sin t}\,dt\Bigg|\leqslant\frac{B_1}{\alpha^2\cdot n\sqrt{\sin\theta}}\times$$

$$\times\int_c^d|f(\cos t)|\sqrt{\sin t}\,\frac{|\theta-t|}{2\left|\sin\frac{\theta-t}{2}\right|}\,dt<\frac{B_1}{\alpha_0^{5/2}\cdot n}\int_c^d|f(\cos t)|\sqrt{\sin t}\,dt. \qquad (15)$$

Выражение в третьих фигурных скобках (13) представляется в виде

$$\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right][R_{n+1}(\theta)-R_{n+1}(t)]+$$

$$+R_{n+1}(t)\cdot\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]\right\}. \qquad (16)$$

Следовательно, из (8), (13) и (17) следует

$$|J_n^{(3)}|\leqslant\frac{B_2\sqrt{n}}{\sqrt{\alpha_0}}\int_c^d|f(\cos t)|\sqrt{\sin t}\,\frac{|R_{n+1}(\theta)-R_{n+1}(t)|}{|\theta-t|}\,dt+$$

$$+\frac{B_2\sqrt{n}}{\sqrt{\alpha_0}}\int_c^d|f(\cos t)|\sqrt{\sin t}\,|R_{n+1}(t)\times$$

$$\times\left|\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{t-\theta}\right|. \tag{17}$$

Поскольку $\left|\frac{\sin kt}{t}\right|\leqslant k$, то из (9), (10) и (17) вытекает

$$|J_n^{(3)}|<\frac{B_3}{\alpha_0^{3/2}}\int_c^d|f(\cos t)|\sqrt{\sin t}\,dt. \tag{18}$$

Аналогичные рассуждения применимы к второму интегралу в (13), т. е

$$|J_n^{(2)}|<\frac{B_4}{\alpha_0^{3/2}}\int_c^d|f(\cos t)|\sqrt{\sin t}\,dt. \tag{19}$$

Теперь оценим интеграл $J_n^{(1)}$. Легко видеть, что

$$\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]-$$

$$-\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]\cdot\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]=$$

$$=\cos(n+1)(\theta+t)\sin\frac{\theta-t}{2}-2\cos\left(n+\frac{3}{2}\right)(\theta-t)\sin\frac{\theta-t}{2}-$$

$$-\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta-t)\sin\frac{\theta+t}{2}. \tag{20}$$

Следовательно, первый интеграл в (13) можно представить в виде

$$J_n^{(1)}=\frac{\lambda_n\lambda_{n+1}(n+1)}{2\sqrt{\sin\theta}}\cdot\left[-\int_c^d f(\cos t)\sqrt{\sin t}\,\frac{\cos(n+1)(\theta+t)}{2\sin\frac{\theta+t}{2}}\,dt+\right.$$

$$+\int_c^d f(\cos t)\sqrt{\sin t}\,\frac{\cos\left(n+\frac{3}{4}\right)(\theta-t)}{2\sin\frac{\theta+t}{2}\cos\frac{\theta-t}{2}}\,dt+$$

$$\left.+\int_c^d f(\cos t)\sqrt{\sin t}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-\theta)}{2\sin\frac{t-\theta}{2}}\,dt\right]. \tag{21}$$

В силу (8) и (21) будем иметь

$$|J_n^{(1)}|\leqslant\frac{B_5}{\alpha_0^{3/2}}\int_c^d|f(\cos t)|\sqrt{\sin t}\,dt+$$

$$+\frac{B_5}{\sqrt{\alpha_0}}\left|\int_c^d f(\cos t)\sqrt{\sin t}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-\theta)}{2\sin\frac{t-\theta}{2}}\,dt\right|. \qquad (22)$$

Учитывая соотношения (11), (12), (13), (15), (17) — (19) и (22) при $\theta\in[\alpha_0;\ \pi-\alpha_0]$ для всех $n$ получим

$$|\sigma_n(\cos\theta,\ f)|<\frac{A_0}{\alpha_0^{5/2}}\int_c^d|f(\cos t)|\sqrt{\sin t}\,dt+$$

$$+\frac{A_0}{\sqrt{\alpha_0}}\left|\int_c^d f(\cos t)\sqrt{\sin t}\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-\theta)}{2\sin\frac{t-\theta}{2}}\,dt\right|.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть даны: числа* $\gamma\neq 0$; $0<\alpha_0<\frac{\pi}{2}$, $\nu>8$, $N>1$ $\varepsilon$, *интервал* $\Delta=(a;\ b)\subset[-1+\alpha;\ 1-\alpha]$, $\alpha=\cos\alpha_0'$ *и совершенное нигде не плотное множество* $P\subset(a,\ b)$. *Тогда существуют полином по многочленам Лежандра* $H(x)=\sum_{k=N}^{M}a_k P_k(x)$, *измеримое множество* $E\subset(a,\ b)$ *и функция* $f(x)$, *которые удовлетворяют условиям:*

1. *Функция* $(1-x^2)^{\frac{1}{4}}\cdot f(x)$ *ступенчатая и*

$$f(x)=\begin{cases}(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}\cdot\gamma, & x\in P\\ 0, & x\bar{\in}[a,\ b];\end{cases}$$

2. $$\int_\Delta|f(x)|\,dx<\frac{\pi^2}{\alpha_0}|\gamma|\cdot|\Delta|,$$

3. $$\int_{-1}^{1}|H(x)-f(x)|\,dx<\varepsilon,$$

4. $$\sup_{N<n<M}\left|\sum_{k=N}^{n}a_k P_k(x)\right|<\frac{A_0}{\alpha_0^{7/2}}|\gamma|\,|\Delta|+\frac{A_0}{\sqrt{\alpha_0}}|\gamma|\cdot\nu+\varepsilon,\ x\in E,$$

5. $$\sup_{N<n<M}\left|\sum_{k=N}^{n}a_k P_k(x)\right|<\frac{A_0}{\alpha_0^{7/2}}|\gamma|\,|\Delta|+\varepsilon;\ t\in\left[a_0-\frac{|\Delta_0|}{\nu};\ b_0+\frac{|\Delta_0|}{\nu}\right],$$

6. $$|E_0|>|\Delta_0|\left(1-\frac{8}{\nu}\right),\ E_0=\{t;\ x=\cos t\in E\}$$

$$(a_0=\arccos b;\ b_0=\arccos a;\ \Delta_0=[a_0;\ b_0].$$

Доказательство. Положим $\alpha_0=\arccos\alpha$. $a_0=\arccos b$, $b_0=$ $=\arccos a$

$$Q_0=\{t;\ t=\arccos x;\ x\in P\}. \qquad (23)$$

Согласно лемме 1, в формулировке которой берется

$$\Delta=\Delta_0=[a_0;\ b_0],\ Q=Q_0,\ \tilde{\gamma}=\gamma;\ \tilde{N}=N;\ \tilde{\varepsilon}=\frac{\varepsilon\sqrt{a_0}}{2A_0}$$

и учитывая замечания 2, определяются ступенчатая функция $\varphi(t)$ и измеримое множество $E_0\subset[a_0;\ b_0]$ такие, что

$$\varphi(t)=\begin{cases}\gamma, & t\in Q_0\\ 0, & t\overline{\in}\Delta_0=[a_0;\ b_0],\end{cases} \tag{24}$$

$$\int_{\Delta_0}|\varphi(t)|\,dt\leqslant 2\,|\gamma|\cdot|\Delta_0|, \tag{25}$$

$$\left|\int_0^{\pi}\varphi(t)\sqrt{\sin t}\,\widehat{P}_k(\cos t)\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{2(N+1)\,C_N},\quad n\leqslant N\ (\text{см. }(2)), \tag{26}$$

$$\left(C_N=\max_{x\in[-1,\,1]}\left(\max_{0<k<N}|\widehat{P}_k(x)|\right)\right)$$

$$|S_n(t,\ \varphi)|<\frac{\varepsilon\sqrt{a_0}}{2A_0};\ n\geqslant 1;\ t\overline{\in}\left[a_0-\frac{|\Delta_0|}{\nu};\ b_0+\frac{|\Delta_0|}{\nu}\right], \tag{27}$$

$$|S_n(t,\ \varphi)|<B_0\cdot|\gamma_0|\cdot\nu+\frac{\varepsilon\sqrt{a_0}}{2A_0},\ t\in E_0,\ n\geqslant 1, \tag{28}$$

$$|E_0|>|\Delta_0|\left(1-\frac{8}{\nu}\right),\ E_0\subset[a_0;\ b_0]. \tag{29}$$

Положим

$$f(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}\cdot\varphi(\arccos x). \tag{30}$$

Ясно, что

$$\varphi(t)=f(\cos t)\sqrt{\sin t}, \tag{31}$$

$$f(x)=\begin{cases}\gamma\cdot(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}; & x\in P\\ 0, & x\overline{\in}[a;\ b]=\Delta,\end{cases} \tag{32}$$

$$\left|\int_a^b|f(x)|\right|dx<\int_{a_0}^{b_0}|\varphi(t)|\,dt<2\,|\gamma|\,|\Delta_0|\leqslant\frac{\pi^2}{a_0}|\gamma|\cdot|\Delta|. \tag{33}$$

Теперь применяя лемму 2, учитывая (31), (33), получим

$$|\sigma_n(x;\ f)|<\frac{A_0}{a_0^{5/2}}\int_{a_0}^{b_0}|f(\cos t)|\sqrt{\sin t}\,dt+$$

$$+\frac{A_0}{\sqrt{a_0}}\left|\int_{a_0}^{b_0}\varphi(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta-t)}{2\sin\frac{\theta-t}{2}}dt\right|\leqslant \tag{34}$$

$$< \frac{A_1}{\alpha_0^{5/2}} |\gamma|\cdot|\Delta| + \frac{A_0}{\sqrt{\alpha_0}} |S_n(t;\ \varphi)|.$$

Отсюда и из соотношений (26)—(29) будем иметь

$$|\sigma_n(x,\ f)| \leqslant \frac{A_1\cdot|\gamma|\cdot|\Delta|}{\alpha_0^{7/2}} + \frac{B_0\cdot\nu\cdot|\gamma|\cdot A_0}{\sqrt{\alpha_0}} + \varepsilon, \tag{35}$$

$$n \geqslant 1,\ t \in E_0\ (t = \arccos x),$$

$$|\sigma_n(x,\ f)| \leqslant \frac{A_2}{\alpha_0^{7/2}} |\gamma|\cdot|\Delta| + \frac{\varepsilon}{2},\ t \in \left[a_0 - \frac{|\Delta|}{\nu},\ b_0 + \frac{|\Delta|}{\nu}\right]. \tag{36}$$

$$|\sigma_n(x,\ f)| < \frac{\varepsilon}{2},\ n \leqslant N,\ x \in [-1;\ 1]. \tag{37}$$

Поскольку ряд Фурье—Лежандра функции $f(x) \in L^2(-1,\ 1)$ сходится к ней в метрике $L^1$, то можно найти такое натуральное число $M > N$, что

$$\int_{-1}^{1} |\sigma_M(x,\ f) - f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{38}$$

Следовательно, в силу (37) будем иметь

$$\int_{-1}^{1} |[\sigma_M(x,\ f) - \sigma_{N-1}(x,\ f)] - f(x)|\, dx < \varepsilon. \tag{39}$$

Положим

$$\begin{gathered} H(x) = \sum_{k=N}^{M} a_k \widehat{P}_k(x) = \sigma_M(x,\ f) - \sigma_N(x,\ f), \\ E = \{x;\ x = \cos t,\ t \in E_0\}. \end{gathered} \tag{40}$$

Из условий (35)—(37), (40) следует

$$\int_{-1}^{1} |H(x) - f(x)|\, dx < \varepsilon,$$

$$\sup_{N < n < M} \left|\sum_{k=N}^{n} a_k \widehat{P}_k(x)\right| < \frac{A_2}{\alpha_0^{7/2}} |\gamma|\cdot|\Delta| + \frac{A_2}{\sqrt{\alpha_0}} |\gamma|\cdot\nu + \varepsilon,$$

$$x \in E\,(t = \arccos x \in E_0),$$

$$\sup_{N < n < M} \left|\sum_{k=N}^{n} a_k \widehat{P}_k(x)\right| < \frac{A_2}{\alpha_0^{7/2}} |\gamma|\cdot|\Delta| + \varepsilon,\ t \in \left[a_0 - \frac{|\Delta_0|}{\nu},\ b_0 + \frac{|\Delta_0|}{\nu}\right],$$

$|E_0| > |\Delta_0|\cdot\left(1 - \frac{8}{\nu}\right)$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть даны: совершенное нигде не плотное множество $Q \subset [-1,\ 1]$, числа $N_0 > 1$, $\varepsilon_0 > 0$, и ограниченная функция $f(x)$, удовлетворяющая неравенству $\left(\int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx\right)^{1/8} < (7\pi)^{-1}$. Тогда су-*

*шествуют функция* $F(x) \in L(-1, 1)$, *измеримое множество* $E \subset [-1; 1]$ *и полином* $H(x) = \sum_{k=N_0}^{M} a_k P_k(x)$ *по многочленам Лежандра, обладающие свойствами:*

a) $$F(x) = f(x), \ x \in Q,$$

$$\text{в)} \int_{-1}^{1} |F(x)|\, dx < \varepsilon_0,$$

$$\text{c)} \int_{-1}^{1} |H(x) - F(x)|\, dx < C \cdot \left( \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx \right)^{1/4},$$

$$\text{d)} \sup_{N_0 < n < M} \left| \sum_{k=N_0}^{n} a_k P_k(x) \right| \leqslant C \cdot \left( \sqrt[4]{\int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx} + \frac{|f(x)|}{\sqrt[4]{\int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx}} \right),$$

$$x \in E$$

e) $|E| > 2(1 - 7\pi(\sqrt[8]{|f(x)|}))$.

Доказательство. Положим

$$\nu_0 = \left[ \left( \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx \right)^{-1/8} \right], \ a_0 = \nu_0^{-2}, \ \varepsilon = a_0. \tag{41}$$

Возьмем ступенчатую функцию вида

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{q+1} \gamma_k \chi_{\Delta_k}(x), \ \gamma_0 = \gamma_{q+1} = 0, \tag{42}$$

$$\Delta_0 = [-1; -1 + a], \ \Delta_{q+1} = [1 - a; 1], \ \Delta_k = [b_{k-1}; b_k], \ 1 \leqslant k \leqslant q, \tag{43}$$

$$a = \cos a_0, \ b_k = (-1 + a) + \frac{2 - 2a}{q} \cdot k, \ k = 0, 1, \cdots, q \tag{44}$$

такую, что

$$\int_{-1}^{1} |(1 - x^2)^{1/4} \cdot f(x) - \varphi(x)| \frac{dx}{\sqrt[4]{1 - x^2}} \leqslant \min \left\{ \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx; \ \frac{\varepsilon_0}{2} \right\}, \tag{45}$$

Пусть

$$E_0 = \left\{ x \in [-1; 1], \left| f(x) - \frac{\varphi(x)}{\sqrt[4]{1 - x^2}} \right| < \nu_0^{-4} \right\}. \tag{46}$$

Очевидно, что

$$|E_0|>2\left(1-\nu_0^4\cdot\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx\right)\text{(см. (45) и (46)).} \tag{47}$$

Применим лемму 3, полагая в ее формулировке

$\Delta=\Delta_1;\ \gamma=\gamma_1,\ N=N_0,\ \nu=\nu_0,\ \alpha_0=\nu_0^{-2},\ \varepsilon=\varepsilon_0,\ P=Q\cap\Delta_1.$

Тогда определяются функция $g_1(x)$, измеримое множество $E_1\subset\Delta_1$ и полином $h_1(x)=\sum_{k=N_0}^{N_1-1}a_k P_k(x)$, удовлетворяющие условиям: функция $\sqrt[4]{1-x^2}\cdot g_1(x)$ ступенчатая и

$$g_1(x)=\begin{cases}(1-x^2)^{-1/4}\cdot\gamma_1; & x\in Q\cap\Delta_1,\\ 0\ ; & x\overline{\in}\Delta_1\end{cases}$$

$$\int_{\Delta_1}|g_1(x)|\,dx<\frac{\pi^2}{\alpha_0}|\gamma_1|\cdot|\Delta_1|,$$

$$\sup_{N_0<n<N_1}\left|\sum_{k=N_0}^{n}a_k P_k(x)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\begin{cases}A\left(\alpha_0^{-7/2}\cdot|\gamma_1|\cdot|\Delta_1|+\alpha_0^{-1/2}\cdot\nu_0\cdot|\gamma_1|\right)+\varepsilon_0 & x\in E_1\\ A\,\alpha_0^{-7/2}|\gamma_1|\cdot|\Delta_1|+\varepsilon_0/4, & t\overline{\in}\left[\alpha_0^{(0)}-\frac{|\Delta_1^{(0)}|}{\nu_0};\ \alpha_1^{(0)}+\frac{|\Delta_1^{(0)}|}{\nu_0}\right],\end{cases} \tag{48}$$

$$\int_{-1}^{1}|h_1(x)-g_1(x)|\,dx<\frac{\varepsilon_0}{2(q+1)},$$

$$|E_1^{(0)}|>|\Delta_1^{(0)}|\cdot\left(1-\frac{8}{\nu_0}\right),\quad E_1^{(0)}=\{t\in\Delta_1^{(0)};\ x=\cos t\in E_1\}.$$

Предположим, что уже определены функции $g_1(x), g_2(x),\cdots$ $\cdots, g_{k_0}(x)$, множества $E_1, E_2,\cdots,E_{k_0}$, числа $N_1<N_2<\cdots<N_{k_0}$ и полиномы $h_k(x)=\sum_{l=N_{k-1}}^{N_k-1}a_l P_l(x)\ (1\leqslant k\leqslant k_0)$ такие, что функция $\sqrt[4]{1-x^2}\cdot g_k(x)$ ступенчатая,

$$g_k(x)=\begin{cases}(1-x^2)^{-1/4}\cdot\gamma_k, & x\in Q\cap\Delta_k \quad (49)\\ 0\ , & x\overline{\in}\Delta_k, \quad (50)\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}|g_k(x)|\,dx<\frac{\pi^2}{\alpha_0}\cdot|\gamma_k|\cdot|\Delta_k|, \tag{51}$$

$$\int_{-1}^{1}|h_k(x)-g_k(x)|\,dx<\frac{\varepsilon_0}{2(q+1)}, \tag{52}$$

$$\sup_{N_{k-1}\leq n\leq N_k}\left|\sum_{i=N_{k-1}}^{n} a_i P_i(x)\right| <$$

$$\leqslant \begin{cases} A\,(\alpha_0^{-7/2}\cdot|\gamma_k|\,|\Delta_k| + \alpha_0^{-1/2}\cdot\nu_0\cdot|\gamma_k| + \frac{\varepsilon_0}{2}, & x\in E_k \\ A\,\alpha_0^{-7/2}\,|\gamma_k|\,|\Delta_k| + \frac{\varepsilon_0}{2q}, & t\in\left[a_{k-1}^{(0)} - \frac{|\Delta_k^{(0)}|}{\nu_0};\ a_k^{(0)} + \frac{|\Delta_k^{(0)}|}{\nu_0}\right], \end{cases} \tag{53}$$

$$E_k\subset\Delta_k,\ a_k^{(0)} = \arccos b_k;\ k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ k_0$$

$$|E_k^{(0)}| > |\Delta_k^{(0)}|\left(1-\frac{8}{\nu_0}\right),\ E_k^{(0)} = \{t,\ \ x=\cos t\in E_k\}\subset\Delta_k^{(0)} \tag{54}$$

$$\Delta_k^{(0)} = [a_{k-1}^{(0)};\ a_k^{(0)}].$$

Если теперь применить лемму 3, в формулировке которой берем
$\Delta=\Delta_{k_0+1},\ N=N_{k_0},\ \nu=\nu_0,\ \alpha_0=\nu_0^{-2},\ \gamma=\gamma_{k_0+1},\ \mathrm{P}=Q\cap\Delta_{k_0+1},\ \varepsilon=\varepsilon_0,$

то можно определить функцию $g_{k_0+1}(x)$, множество $E_{k_0+1}$, полином $h_{k_0+1}(x) = \sum_{i=N_{k_0}}^{N_{k_0+1}-1} a_i P_i(x)$, которые удовлетворяют условиям (49)—(54), где вместо $k$ взято $k_0+1$.

Таким образом будут определены функции $g_1(x),\ g_2(x),\cdots,\ g_q(x)$, множества $E_1,\ E_2,\cdots,\ E_q$, полиномы $h_1(x),\ h_2(x),\cdots,\ h_q(x)$ такие, что для каждого $k$, $1\leqslant k\leqslant q$ удовлетворяются условия (49)—(50).

Положим

$$g(x) = \sum_{k=1}^{q} g_k(x), \tag{55}$$

$$E^{(0)} = \left(\bigcup_{k=1}^{q} E_k^{(0)}\right)\cap\left(\bigcup_{k=1}^{q}\left[a_{k-1}^{(0)} + \frac{|\Delta_k^{(0)}|}{\nu_0};\ a_k^{(0)} - \frac{|\Delta_k^{(0)}|}{\nu_0}\right]\right);$$

$$a_k^{(0)} = \arccos b_k\ \ k=0,\ 1,\cdots,\ q, \tag{56}$$

$$H(x) = \sum_{k=1}^{q} h_k(x) = \sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{i=N_{k-1}}^{N_k-1} a_i P_i(x)\right) = \sum_{i=N_0}^{M} a_i P_i(x) \tag{57}$$

$$(M=N_q-1);\ \ F(x) = f(x) + \left[g(x) - \frac{\varphi(x)}{\sqrt[4]{1-x^2}}\right]. \tag{58}$$

Покажем, что функция $F(x)$, полином $H(x)$ и множество $E = \overline{E}\cap E_0$ удовлетворяют условиям леммы 4; $\overline{E} = \{x\in[-1;\ 1];\ t=\arccos x\in E^{(0)}\}$.

Из условий (43), (44), (48) — (57) вытекает, что функция $\sqrt[4]{1-x^2}\cdot g(x)$ ступенчатая и

$$g(x) = (1-x^2)^{-1/4}\cdot\varphi(x);\ \ x\in Q, \tag{59}$$

$$\int_{-1}^{1}|g(x)|\,dx \leqslant \frac{\pi^2}{\alpha_0}\int_{-1}^{1}|\varphi(x)|\,dx. \tag{60}$$

$$\int_{-1}^{1} |H(x) - g(x)|\, dx < \varepsilon_0/2, \tag{61}$$

$$|\overline{E}| > 2\left(1 - 6\pi\left(\int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx\right)^{1/8}\right). \tag{62}$$

$$\overline{E} \subset [-1;\ 1].$$

Пусть $N_0 \leqslant n < M$, тогда для некоторого $k_0$, $1 \leqslant k_0 < q$, $N_{k_0} \leqslant \leqslant n < N_{k_0+1}$. Следовательно

$$\sum_{l=N_0}^{n} a_l P_l(x) = \sum_{k=1}^{k_0-1}\left(\sum_{l=N_{k-1}}^{N_k-1} a_l P_l(x)\right) + \sum_{l=N_{k_0}}^{n} a_l P_l(x). \tag{63}$$

Отсюда и из (42), (53) при $x \in E$ будем иметь

$$\left|\sum_{l=N_0}^{n} a_l P_l(x)\right| \leqslant 2A\left(\alpha_0^{-7/2} \cdot \int_{-1}^{1} |\varphi(x)|\, dx + \frac{\gamma_0}{\sqrt{\alpha_0}} \sum_{k=1}^{q} |\gamma_k|\, \chi_{\Delta_k}(x)\right) + \varepsilon_0. \tag{64}$$

Очевидно, что (см. (41), (58), (59) и (62))

$$F(x) = f(x), x \in Q, \tag{65}$$

$$|E| > 2\left(1 - 7\pi \cdot \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx\right)^{1/8}\right), \tag{66}$$

$$F(x) - g(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(\sqrt[4]{1 - x^2}\, f(x) - \varphi(x)\right). \tag{67}$$

Ввиду того, что (см. (45))

$$\int_{-1}^{1} |\varphi(x)|\, dx \leqslant \int_{-1}^{1} \frac{|\varphi(x)|}{\sqrt[4]{1 - x^2}}\, dx \leqslant 3 \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx, \tag{68}$$

из (44), (45), (60), (61), (67) имеем

$$\int_{-1}^{1} |F(x)|\, dx \leqslant \int_{-1}^{1} |F(x) - g(x)|\, dx + \int_{-1}^{1} |g(x)|\, dx \leqslant 2 \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx +$$

$$+ 3 \cdot \frac{\pi^2}{\alpha_0} \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx \leqslant (3\pi^2 + 2) \cdot \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx\right)^{3/4}, \tag{69}$$

$$\int_{-1}^{1} |F(x) - H(x)|\, dx \leqslant \int_{-1}^{1} |F(x) - g(x)|\, dx +$$

$$+ \int_{-1}^{1} |g(x) - H(x)|\, dx \leqslant \varepsilon_0.$$

Из (41), (42), (46), (56) и (64), (68) при $x \in E$ получим

$$\sup_{N_0 < n < M} \left| \sum_{l=N_0}^{n} a_l P_l(x) \right| \leqslant 6A\, \alpha_0^{-7/2} \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx + \frac{2A\, \nu_0}{\sqrt{\alpha_0}} \frac{|\varphi(x)|}{\sqrt{1-x^2}} + \varepsilon_0 <$$

$$< 6A\, \nu_0^7 \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx + 2A\, (\nu_0^2 |f(x)| + \nu_0^{-2}) + \nu_0^{-2} \leqslant$$

$$\leqslant 6A \left( \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx \right)^{1/8} +$$

$$+ (2A+1) \sqrt[4]{\int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx + 2A\, |f(x)| \left( \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx \right)^{-\frac{1}{4}}} <$$

$$< C \cdot \left( \left( \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx \right)^{-1/4} \cdot |f(x)| + \left( \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx \right)^{1/4} \right), \tag{70}$$

$$(C = 6A + 3\pi^2 + 3).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим множество функций $\Phi = \left\{ f(x);\ f(x) = \sum_{l=0}^{m} b_l P_l(x) \right\}$, где коэффициенты $b_l$ пробегают множество всех рациональных чисел, $P_l(x)$ — многочлены Лежандра.

Перенумеровав множество $\Phi$, мы можем представить его в виде последовательности

$$f_1(x),\ f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots. \tag{71}$$

Нетрудно видеть, что путем последовательного применения леммы 4 можно определить последовательности множеств $\{\overline{E}_s\}_{s=1}^{\infty}$, функций $\{\overline{g}_s(x)\}_{s=1}^{\infty}$ и полиномов

$$h_s(x) = \sum_{k=m_s+1}^{m_{s+1}} a_k^{(s)} P_k(x), \quad s \geqslant 1, \tag{72}$$

которые обладают следующими свойствами:

$$\overline{g}_s(x) = f_s(x); \quad x \in Q, \tag{73}$$

$$\int_{-1}^{1} |\overline{g}_s(x)|\, dx \leqslant C \cdot \left( \int_{-1}^{1} |f_s(x)|\, dx \right)^{3/4}, \tag{74}$$

$$\int_{-1}^{1} |h_s(x) - \overline{g}_s(x)|\, dx \leqslant 10^{-30 s}. \tag{75}$$

$$\sup_{m_s < n < m_{s+1}} \left| \sum_{k=m_s+1}^{n} a_k P_k(x) \right| <$$

$$\leqslant C \cdot \left( \frac{|f_s(x)|}{\sqrt[4]{\int_{-1}^{1} |f_s(x)|\, dx}} + \sqrt[4]{\int_{-1}^{1} |f_s(x)|\, dx} \right), \tag{76}$$

$$\text{при } x \in E_s,\ |E_s| > 2\left(1 - 7\pi \left( \int_{-1}^{1} |f_s(x)|\, dx \right)^{1/8} \right). \tag{77}$$

Определим ряд по многочленам Лежандра

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x) \tag{78}$$

следующим образом.

Положим

$$a_k = a_k^{(s)},\ m_s + 1 \leqslant k < m_{s+1}.$$

Установим, что ряд (78) удовлетворяет условиям теоремы 2.

Пусть $F(x) \in L(-1, 1)$. Легко видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{k_s}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ из последовательности (71) такую, что

$$\lim_{m \to \infty} \int_{-1}^{1} \left| \sum_{s=1}^{m} f_{k_s}(x) - F(x) \right| dx = 0;\ f_{k_1}(x) = \sum_{l=0}^{N_1} c_l^{(1)} P_l(x), \tag{79}$$

$$\frac{1}{2} 10^{-20s} < \int_{-1}^{1} |f_{k_s}(x)|\, dx < 10^{-20s},\ s \geqslant 2. \tag{80}$$

Положим

$$g_1(x) = H_1(x) = f_{k_1}(x),\ g_2(x) = \overline{g}_{k_2}(x), \tag{81}$$

$$H_2(x) = h_{k_2}(x), \tag{82}$$

$$E_2 \equiv \overline{E}_{k_2}. \tag{83}$$

Предположим, что уже определены функции $g_j(x)$, $j \leqslant q$, множества $E_j$, $G_j$ и полиномы

$$H_j(x) = \sum_{l=M_j}^{\overline{M}_j} c_l^{(j)} P_l(x),\ M_j < \overline{M}_j < M_{j+1}, \tag{84}$$

удовлетворяющие условиям

$$g_j(x) = f_{k_j}(x),\ x \in Q, \tag{85}$$

$$\int_{-1}^{1} |g_j(x)|\, dx < 3c \cdot 10^{-5(j-1)}, \tag{86}$$

$$\int_{-1}^{1}\left|\sum_{j=1}^{q_0}[H_j(x)-g_j(x)\right| dx < 2\cdot 10^{-30},\ 1 < q_0 < q, \tag{87}$$

если $x \in E_j \cap G_j$, то для всех $M_j \leqslant n \leqslant \overline{M}_j$ имеет место

$$\sup_{M_j < n < \overline{M}_j}\left|\sum_{i=M_j}^{n} c_i^{(j)} P_i(x)\right| \leqslant \bar{c}\cdot 10^{-j},\ 2 \leqslant j \leqslant q, \tag{88}$$

$$|E_j| > 2(1-10^{-j}),\ |G_j| > 2(1-10^{-j}). \tag{89}$$

Возьмем функцию $\varphi(x) = f_{N_{q+1}}(x)$ из последовательности (71) такую, что

$$m_{N_{q+1}} > M_q \tag{90}$$

$$\int_{-1}^{1}\left|\varphi(x) - \left\{f_{k_{q+1}}(x) - \sum_{j=2}^{q}[H_j(x)-g_j(x)]\right\}\right| dx < 10^{-30(q+1)}. \tag{91}$$

Ввиду того, что (см. (80), (87))

$$\frac{1}{4}10^{-20(q+1)} < \int_{-1}^{1}\left|f_{k_{q+1}}(x) - \sum_{j=2}^{q}[H_j(x)-g_j(x)]\right| dx < 2\cdot 10^{-20(q+1)}, \tag{92}$$

из (91) следует

$$\frac{1}{6}10^{-20(q+1)} < \int_{-1}^{1}|f_{N_{q+1}}(x)|\, dx = \int_{-1}^{1}|\varphi(x)|\, dx < 3\cdot 10^{-20(q+1)}. \tag{93}$$

Положим

$$H_{q+1}(x) = k_{N_{q+1}}(x) = \sum_{l=m_{N_{q+1}}+1}^{m_{N_{q+1}+1}} a_l^{(N_{q+1})} P_l(x) = \sum_{l=M_{q+1}}^{\overline{M}_{q+1}} c_l^{(q+1)} P_l(x), \tag{94}$$

$$c_i^{(q+1)} = a_i^{(N_{q+1})},\ M_{q+1} < i \leqslant \overline{M}_{q+1},\ M_{q+1} = m_{N_{q+1}}+1;\ \overline{M}_{q+1} = m_{N_{q+1}+1}, \tag{95}$$

$$g_{q+1}(x) = f_{k_{q+1}}(x) + \overline{g}_{N_{q+1}} - f_{N_{q+1}}(x), \tag{96}$$

$$G_{q+1} = \{x \in [-1;\ 1],\ |f_{N_{q+1}}(x)| < 10^{-12q}\}, \tag{97}$$

$$E_{q+1} = \overline{E}_{N_{q+1}}. \tag{98}$$

В силу (73) -(75), (90), (91), (96) получим

$$g_{q+1}(x) = f_{k_{q+1}}(x);\ x \in Q, \tag{99}$$

$$\int_{-1}^{1}|g_{q+1}(x)|\, dx \leqslant \int_{-1}^{1}\left|\varphi(x) - \left[f_{k_{q+1}}(x) - \sum_{j=2}^{q}[H_j(x)-g_j(x)\right]\right| dx +$$

$$+\int_{-1}^{1}|\overline{g}_{N_{q+1}}(x)|\, dx + \int_{-1}^{1}\left|\sum_{j=2}^{q}[H_j(x)-g_j(x)]\right| dx < 3c\cdot 10^{-5q}, \tag{100}$$

$$\int_{-1}^{1}\left|\sum_{j=2}^{q+1}[H_j(x)-g_j(x)]\right|dx \leqslant \int_{-1}^{1}|\bar{g}_{N_{q+1}}(x)-h_{N_{q+1}}(x)|\,dx+ \tag{101}$$

$$+\int_{-1}^{1}\left|\varphi(x)-\left(f_{k_{q+1}}(x)-\sum_{j=2}^{q}[H_j(x)-g_j(x)]\right)\right|dx<2c\cdot 10^{-30(q+1)}.$$

Если $x\in E_{q+1}\cap G_{q+1}$, то в силу (78), (79), (93), (97), (98) имеем

$$\sup_{M_{q+1}\leqslant n\leqslant \overline{M}_{q+1}}\left|\sum_{i=M_{q+1}}^{n} c_i^{(q+1)}P_i(x)\right|<$$

$$<C\left(\sqrt[4]{\int_{-1}^{1}|f_{N_{q+1}}(x)|\,dx}+\frac{|f_{N_{q+1}}(x)|}{\sqrt[4]{\int_{-1}^{1}|f_{N_{q+1}}(x)|\,dx}}\right)<\tilde{c}\cdot 10^{-q}. \tag{102}$$

Из условий (77), (93), (97), (98) вытекает

$$|E_{q+1}|=|E_{N_{q+1}}|>2\left(1-7\pi\cdot\sqrt[8]{\int_{-1}^{1}|f_{N_{q+1}}(x)|\,dx}\right)>2\left(1-10^{-\frac{q}{2}}\right), \tag{103}$$

$$|G_{q+1}|>2(1-10^{-q}). \tag{104}$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций $\{g_q(x)\}_{q=2}^{\infty}$, множеств $\{E_q\}_{q=2}^{\infty}$, $\{G_q\}_{q=2}^{\infty}$ и полиномов $\{H_q(x)\}_{q=2}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям (85)—(89) для всех $q\geqslant 2$. Из (100) вытекает

$$\int_{-1}^{1}\left|\sum_{q=2}^{\infty} g_q(x)\right|dx<\infty. \tag{105}$$

Определим функцию $G(x)$ и ряд $\sum_{i=0}^{\infty} c_i P_i(x)$ следующим образом:

$$G(x)=f_{k_1}(x)+\sum_{q=2}^{\infty} g_q(x), \tag{106}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i P_i(x)=\sum_{q=1}^{\infty}\left(\sum_{i=M_q}^{\overline{M}_q} c_i^{(q)} P_i(x)\right), \tag{107}$$

$$c_i=\begin{cases} c_i^{(q)}, \text{ при } M_q\leqslant i\leqslant \overline{M}_q,\ M_1=0,\ \overline{M}_1=N_1\\ 0 \text{ — в остальных случаях.}\end{cases}$$

Очевидно, что ряд (107) является подрядом ряда (78).

В силу (79), (80), (99), (105), (106) получим $G(x)\in L(-1,1)$, $G(x)=F(x)$, $x\in Q$.

Из условий (87), (105), (106) вытекает

$$\int_{-1}^{1}\left|\sum_{j=1}^{q}\left[\sum_{i=M_j}^{\overline{M}_j} c_i P_i(x) - G(x)\right| dx \leqslant \int_{-1}^{1}\left|\sum_{j=q+1}^{\infty} g_j(x)\right| dx +$$

$$+\int_{-1}^{1}\left|\sum_{j=2}^{q}[H_j(x)-g_j(x)]\right| dx < 10^{-q}.$$

Следовательно, ряд (107) является рядом Фурье—Лежандра функции $G(x)$ Покажем, что ряд (107) сходится к $G(x)$ почти всюду на $[-1;$ $1]$. Положим

$$\mathbf{B}_q=\left\{x\in[-1;\ 1],\ \left|\sum_{j=2}^{q}[H_j(x)-g_j(x)]\right|<10^{-2q}\right\}, \tag{108}$$

$$\mathbf{A}_q=\left\{x\in[-1,\ 1],\ \left|\sum_{j=q}^{\infty} g_j(x)\right|<10^{-2q}\right\}, \tag{109}$$

$$E=\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{q=l}^{\infty}\{E_q\cap G_q\cap\mathbf{B}_q\cap\mathbf{A}_q\}. \tag{110}$$

Из условий (89), (108)—(110) следует $|E|=2$.

Пусть $x\in E$, тогда существует натуральное число $i_0$ такое, что при $q\geqslant i_0$

$$x\in E_q\cap G_q\cap\mathbf{B}_q\cap\mathbf{A}_q.$$

Пусть далее $n\geqslant M_{i_0}$, тогда найдется натуральное число $i\geqslant i_0$ такое, что $M_l\leqslant n<\overline{M}_l$.

Учитывая соотношения (88), (106), (108), (109) при $x\in E$ получим

$$|\sigma_n(x,\ G)-G(x)|\leqslant\left|\sum_{q=1}^{l-1}\left[\sum_{j=M_q}^{\overline{M}_q} c_j P_j(x)-g_j(x)\right]\right|+$$

$$+\sup_{M_l<n<\overline{M}_l}\left|\sum_{j=M_l}^{n} c_j P_j(x)\right|+\left|\sum_{j=l+1}^{\infty} g_j(x)\right|<10^{-l}.$$

Теорема доказана.

Замечание 3. В работе [8] автора анонсировано, что теорема 2 верна и для кратных рядов по многочленам Лежандра, по многочленам Якоби, по тригонометрической системе, а также по системам Уолша и Хаара.

Замечание 4. Теорема 1 Д. Е. Меньшова для полной ортонормированной системы $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, построенной Б. С. Кашиным [9], не верна. В связи с этим в работе [10] автора установлено, что если $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$—полная в $L^2(0,\ 1)$ ортонормированная система ограниченных функций и $\varepsilon>0$ — положительное число, то существуют измеримое множество $E\subset[0,\ 1]$; $|E|>1-\varepsilon$ и возрастающая подпоследовательность натуральных чисел $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, обладающих следующим свойством: для любой функции $f(x)\in L(0,\ 1)$ можно найти функцию $F(x)=f(x)$ на $E$ и

$F(x) \in L$ такую, что подпоследовательность $S_{m_k}(x, F)$ частичных сумм ее ряда Фурье по системе $\{\varphi_k(x)\}$ сходится к $F(x)$ почти всюду и в метрике $L^1$.

Ереванский государственный
университет

Поступила 15.V,1987.

Մ. Գ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Ինտեգրելի ֆունկցիաների Ֆուրիե-Լեժանդրի շարքերի համարյա ամենուրեք զուգամիտության մասին (ամփոփում)

Հոդվածում տրված ամենուրեք նոսր $Q$ բազմության համար կառուցվում է $\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)$ շարք ըստ Լեժանդրի բազմանդամների հետևյալ հատկությամբ.

$$\forall f(x) \in L(-1, 1); \ \exists F(x) \in L(-1, 1)$$

$$\text{ա)} \ F(x) = f(x), \ x \in Q,$$

$F(x)$-ի Ֆուրիե-Լեժանդրի շարքը համարյա ամենուրեք զուգամիտում է իրեն և համընկնում է $\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)$ շարքի ենթաշարքը։

M. G. GRIGORIAN. *On the almost everywere convergence of Fourier—Legander series of integrable functions* (summary)

Let $Q \subset [-1; 1]$ be an arbitrary perfect and nowhere dense set. Then for each unction $f(x) \in L(-1; 1)$ there is a function $F(x) \in L(-1, 1)$ such that $F(x) = f(x)$ on $Q$ and the Fourier—Legader series of $F(x)$ convergens to almost everywere.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *H. Pollard.* The mean convergence of orthogonal series, Duke Mat. J., 1949, 6 89—98.
2. *J. Newman. W. Kudin.* Mean convergence of orthogonal series, Proc. Amer. Mat. Soc., 1952, 3, 219—222.
3. *П. К. Суетин.* Классические ортогональные многочлены, Наука, М., 1976.
4. *Е. Б. Гобсон.* Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952.
5. *Д. Е. Меньшов.* О рядах фурье от суммирусмых функций, ТММО, I, 5—58, 1952.
6. *M. G. Grigorian.* On the almost everywhere conwergence of double Fourier series of integrable functions, Analysis Mathematica, V. 11, 3, 1985.
7. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, М., Физматгиз, 1961.
8. *М. Г. Григорян.* Представление измеримых функции простыми и кратными рядами по многочленам Лежандра, Ученые записки ЕГУ, № 3, 1987.
9. *Б. С. Кашин.* Об одной полной ортономированной системе, Мат сб., 141, № 3, 1976.
10. *М. Г. Григорян.* О сходимости в метрике L и почти всюду подпоследовательностей сферических частичных двойных рядов Фурье по ПОНС, Межвузовский сборник «Математика», вып. 2, Ереван, 1984.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXV, № 1, 1990 Математика

УДК 517.946

В. А. ОГАНЯН

# РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАЗРЫВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

## Введение

Пусть $D$ — верхняя полуплоскость $y>0$, $R$ — ее граница. Рассмотрим в области $D$ эллиптическую систему

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

где $A$, $B$, $C$ — действительные постоянные квадратные матрицы $m$-го порядка, $u(x, y)=\{u_1(x, y),\cdots, u_m(x, y)\}$ — искомая дважды непрерывно-дифференцируемая действительная вектор-функция.

Напомним, что система (1) называется эллиптической, если $\det C\neq 0$ и характеристическое уравнение $\det(A+2\lambda B+\lambda^2 C)=0$ не имеет действительных корней.

Пусть $x_1, x_2,\cdots, x_n$ — конечные точки на границе $R$ области $D$; $l_1, l_2,\cdots, l_n, l_{n+1}$ — неотрицательные числа.

Обозначим через $N_R(x_1, x_2,\cdots, x_n, \infty; l_1, l_2,\cdots, l_n, l_{n+1})$ — класс действительных вектор-функций $f(x)=\{f_1(x), f_2(x),\cdots, f_m(x)\}$, непрерывных всюду на $R$, кроме, быть может, точек $x_1, x_2,\cdots, x_n$, в окрестностях которых они удовлетворяют неравенствам:

$$|f(x)|\leqslant C_0|x-x_k|^{-l_k}\quad (k=1, 2,\cdots, n),$$

а в окрестности бесконечности

$$|f(x)|\leqslant C_0|x|^{l_{n+1}}, \text{ где } C_0 \text{ — постоянная.}$$

Обозначим через $M_D(x_1, x_2,\cdots, x_n, \infty; l_1, l_2,\cdots, l_n, l_{n+1})$ класс действительных вектор-функций $u(x, y)=\{u_1(x, y),\cdots, u_m(x, y)\}$, непрерывных всюду в $\overline{D}$ со своими частными производными первого порядка, кроме, быть может, граничных точек $x_1, x_2,\cdots, x_n$, в окрестностях которых они удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered}|u(z)|\leqslant C_1|z-x_k|^{-l_k+1}\cdot\ln|z-x_k|^{-1},\\ \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\leqslant C_1|z-x_k|^{-l_k}\cdot\ln|z-x_k|^{-1}\quad (k=1, 2,\cdots, n),\end{gathered} \tag{A}$$

а в окрестности бесконечности

$$|u(z)|\leqslant C_1|z|^{l_{n+1}+1}\cdot\ln|z|,\quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\leqslant C_1|z|^{l_{n+1}}\cdot\ln|z|,$$

где $C_1$ — постоянная.

Пусть $\{x_k'\}_1^\infty$ — монотонная последовательность, стремящаяся к $+\infty$ на границе $R$ области $D$, а $\{l_k'\}_1^\infty$ — произвольная ограниченная сверху последовательность неотрицательных чисел, $l_0 \geqslant \sup\{l_k'\}_1^\infty$. Обозначим через $N_R(\infty, x_1', x_2', \cdots, l_0, l_1', \cdots)$ класс действительных вектор-функций $f(x) = \{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)\}$, непрерывных всюду на $R$ кроме, быть может, точек $x_1', x_2', \cdots$, в окрестностях которых они удовлетворяют неравенствам

$$|f(x)| \leqslant C_2 |x - x_k'|^{-l_k'}, \ k = 1, 2, \cdots,$$

а в окрестностях бесконечности

$$|f(x)| \leqslant C_2 |x|^{l_0}, \text{ где } C_2 \text{ — постоянная.}$$

Обозначим, далее, через $M_D(\infty, x_1', x_2', \cdots; l_0, l_1', l_2', \cdots)$ класс действительных вектор-функций $u(x, y) = \{u_1(x, y), \cdots, u_m(x, y)\}$, непрерывных всюду в $\overline{D}$ со своими частными производными первого порядка, кроме, быть может, граничных точек $x_1', x_2', \cdots$, в окрестностях которых они удовлетворяют неравенствам

$$|u(z)| \leqslant C_3 |z - x_k'|^{-l_k'+1} \cdot \ln|z - x_k'|^{-1},$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant C_3 |z - x_k'|^{-l_k'} \cdot \ln|z - x_k'|^{-1}, \ k = 1, 2, \cdots,$$

а в окрестности бесконечности

$$|u(z)| \leqslant C_3 |z|^{l_0+1} \ln|z|, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant C_3 |z|^{l_0} \cdot \ln|z|, \text{ где } C_3 \text{ — постоянная.}$$

Рассмотрим задачи Неймана:

Задача 1. *Найти в области $D(y > 0)$ регулярное решение системы (1), принадлежащее классу $M_D(x_1, x_2, \cdots, x_n, \infty; l_1, l_2, \cdots, l_n, l_{n+1})$ и удовлетворяющее граничному условию*

$$\left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = f(x), \ x \neq x_1, x_2, \cdots, x_n, \tag{2}$$

*где $f(x)$ — заданная вектор-функция класса $N_R(x_1, \cdots, x_n, \infty; l_1, \cdots, l_n, l_{n+1})$.*

Задача 2. *Найти в области $D(y > 0)$ регулярное решение системы (1), принадлежащее классу $M_D(\infty, x_1', x_2', \cdots; l_0, l_1', l_2', \cdots)$ и удовлетворяющее граничному условию*

$$\left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = f(x), \ x \neq x_1', x_2', \cdots, \tag{3}$$

*где $f(x)$ — заданная вектор-функция класса $N_R(\infty, x_1', \cdots; l_0, l_1', \cdots)$.*

Задача Неймана для эллиптических уравнений рассмотрена во многих работах (например, см. [1]). В этих работах граничная функция или непрерывна, или принадлежит классу Гельдера.

Задача Неймана для системы (1), когда областью является внешность единичного круга, а граничная функция принадлежит классу Гельдера, рассмотрена в работе [2], где получены необходимые и достаточные условия для ее разрешимости.

Задача Неймана для эллиптической системы (1) в области, граница которой достаточно гладкая, а граничная функция непрерывная, рассмотрена в монографии [3], где доказана разрешимость задачи.

В настоящей работе рассматривается задача Неймана для системы (1) при условии, что граничная функция имеет особенность на $R$.

Рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение системы (1) имеет только простые корни. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ корни характеристического уравнения с положительными мнимыми частями, тогда общее решение системы (1) дается формулой (см. [3])

$$u(x, y) = \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi_j(x + \lambda_j y), \tag{4}$$

где $\alpha_j (j = 1, 2, \cdots, m)$ — ненулевое решение системы $(A + 2\lambda_j B + \lambda_j^2 C) \alpha_j = 0$, а $\varphi_j(x + \lambda_j y)$ $(j = 1, \cdots, m)$ — произвольные аналитические функции относительно аргумента $x + \lambda_j y$.

Система (1) называется слабо связанной, если векторы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ линейно независимы (см [3]).

Мы будем рассматривать слабо связанную эллиптическую систему. Основные результаты работы содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. *Если система* (1) *слабо связанная, то для любой функции* $f(x)$ *класса* $N_R(x_1, x_2, \cdots, x_n, \infty; l_1, \cdots, l_{n+1})$ *задача* (1), (2) *имеет решение в классе* $M_D(x_1, x_2, \cdots, x_n, \infty; l_1, l_2, \cdots, l_{n+1})$.

Теорема 2. *Соответствующая однородная задача* (1), (2) *имеет* $r = m\left(2 + \sum_{k=1}^{n+1} [l_k]\right)$ *линейно независимых решений, где* $[l_k]$ — *целая часть* $l_k$, $m$ — *число уравнений системы* (1).

Теорема 3. *Если система* (1) *слабо связанная, то для любой функции* $f(x)$ *класса* $N_R(\infty, x_1', x_2', \cdots; l_0', l_1', l_2', \cdots)$ *задача* (1), (3) *имеет решение в классе* $M_D(\infty, x_1', x_2', \cdots; l_0', l_1', l_2', \cdots)$.

Заметим, что в теоремах 1 и 3 не только доказывается существование решения задачи, а в каждом случае строится одно такое решение.

### § 1. Доказательство теоремы 1

Докажем теорему 1 в частном случае, когда $n = 1$, $x_1 = 0$. В общем случае доказательство аналогично.

Обозначим через $l_1 = l$, $[l] = m_0$, $l - m_0 = \gamma$, $l_2 = d$, $[d] = s$, $d - s = \tau$. Представим граничную функцию из класса $N_R(0, \infty; l, d)$ в виде

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \tag{5}$$

где

$$f_1(x) = f(x)\,\alpha(x);\ f_2(x) = f(x)\,(1 - \alpha(x)), \tag{6}$$

а $\alpha(x)$ — непрерывная функция на $R$ и такая, что

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ 0, & x \overline{\in} (-1,\ 1). \end{cases} \tag{7}$$

Рассмотрим функцию

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left\{ \gamma_j \int_{z_0}^{z} \left[ \frac{1}{\pi i \lambda_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{m_0+1} f_1(t)\, dt}{\zeta^{m_0+1} (t - \zeta)} \right] d\zeta \right\} +$$

$$+ \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left\{ \gamma_j \int_{z_0}^{z_j} \left[ \frac{1}{\pi i \lambda_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta^{s+1} f_2(t)\, dt}{t^{s+1} (t - \zeta)} \right] d\zeta \right\}, \tag{8}$$

где $\gamma_j$ — $j$-ая строка матрицы, которая является обратной той матрице, столбцами которой являются векторы $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$; $z_j = x + \lambda_j y$, $z_0 = x_0 + \lambda_j y_0$, $\zeta = \xi + i\eta$ все указанные точки из $D$. Для определенности возьмем $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

Очевидно, что вектор-функция $u(x, y)$, определяемая формулой (8), удовлетворяет системе (1). Покажем, что эта функция удовлетворяет и граничному условию (2).

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left\{ \gamma_j \left[ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{m_0+1} f_1(t)\, dt}{z_j^{m_0+1} (t - z_j)} \right] \right\} +$$

$$+ \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left\{ \gamma_j \left[ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_j^{s+1} f_2(t)\, dt}{t^{s+1} (t - z_j)} \right] \right\}. \tag{9}$$

В работе [4] доказано, что функция $\frac{\partial u}{\partial y}$, определяемая формулой (9), при $(x, y) \to (x_0, 0)$ $(y > 0)$ имеет предел $f(x_0)$. Остается доказать, что вектор-функция $u(x, y)$ принадлежит классу $M_D(0, \infty; l, d)$. Для этого оценим $u(x, y)$ в окрестности точек $z = 0$ и $z = \infty$. Представим $u(x, y)$ в виде

$$u(x, y) = -\int_{y}^{1} \frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta}\, d\eta + u(x, 1),\ y > 0. \tag{10}$$

Сначала оценим первое слагаемое в правой части формулы (10).

В работе [4] показано, что в окрестности точек $z = 0$ и $z = \infty$ функция, определяемая формулой (8), удовлетворяет соответственно оценкам

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant \begin{cases} \text{const}\,|z|^{-l}\ln|z|^{-1}, \text{ если } l=[l], \\ \text{const}\,|z|^{-l}, \text{ если } l \neq [l], \end{cases} \tag{11}$$

и

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant \text{const}\,|z|^{d}\ln|z|. \tag{12}$$

Из неравенства (11) в окрестности точки $z = 0$ получим

$$\left|\int_y^1 \frac{\partial u(x,\eta)}{\partial \eta}\,d\eta\right| \leqslant \text{const}\left|\int_y^1 \frac{\ln(x^2+\eta^2)^{-1}\,d\eta}{(x^2+\eta^2)^{\frac{l+1}{2}}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\,J(x,y)\ln|z|^{-1},\ 0<|z|<1, \tag{13}$$

где

$$J(x,y)=\int_y^1 \frac{d\eta}{(x^2+\eta^2)^{\frac{l+1}{2}}}.$$

Очевидно, что в окрестности $z = 0$ можно считать $0 < y < 1$. Оценим $J(x, y)$ в окрестности точки $z = 0$. Возможны следующие два случая:

1. $y > x$, тогда

$$J(x,y) \leqslant \text{const}\int_y^1 \frac{d\eta}{\eta^{l+1}} \leqslant \frac{\text{const}}{y^l} \leqslant \frac{\text{const}}{|z|^l}. \tag{14}$$

2. $x > y$, тогда

$$J(x,y)=\int_y^x \frac{d\eta}{(x^2+\eta^2)^{\frac{l+1}{2}}}+\int_x^1 \frac{d\eta}{(x^2+\eta^2)^{\frac{l+1}{2}}} \leqslant \frac{\text{const}}{|z|^l}. \tag{15}$$

Так как в окрестности $x = 0$ функция $u(x, 1)$ ограничена, то из неравенств (13—(15) в окрестности $z = 0$ получим оценку

$$|u(x,y)| \leqslant \text{const}\,|z|^{-l}\cdot\ln|z|^{-1}. \tag{16}$$

Теперь оценим функцию $u(x, y)$ в окрестности $z = \infty$. Заметим, что для достаточно больших $|z|$ имеем

$$\left|\int_1^y \frac{\partial u(x,\eta)}{\partial \eta}\,d\eta\right| \leqslant \text{const}\left|\int_1^y (x^2+\eta^2)^{\frac{d}{2}}\ln(x^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}\,d\eta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \text{const}\,|z|^{d+1}\ln|z|,\ y>1, \\ \text{const}\,(x^2+1)^{d/2}\ln(x^2+1)^{1/2},\ 0<y<1. \end{cases} \tag{17}$$

Ясно, что в окрестности бесконечности при $0 < y < 1$ имеет место неравенство

$$x^2+1 \leqslant 2|z|^2, \tag{18}$$

поэтому

$$(x^2+1)^{d/2}\ln(x^2+1)^{1/2}\leqslant \text{const}\,|z|^d\ln|z|,$$

следовательно, в окрестности бесконечности имеет место неравенство

$$\left|\int\limits_{1}^{y}\frac{\partial u}{\partial\eta}d\eta\right|\leqslant \text{const}\,|z|^{d+1}\cdot\ln|z|. \tag{19}$$

Остается оценить второе слагаемое, входящее в правую часть формулы. Имеем

$$u(x,1)=\text{Re}\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\left[\gamma_j\int\limits_{\lambda_j}^{x+\lambda_j}\left(\frac{1}{\pi i\lambda_j}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^{m_0+1}f_1(t)\,dt}{\zeta^{m_0+1}(t-\zeta)}\right)d\zeta\right]+$$

$$+\text{Re}\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\left[\gamma_j\left(\int\limits_{\lambda_j}^{x+\lambda_j}\frac{1}{\pi i\lambda_j}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\zeta^{s+1}f_2(t)\,dt}{t^{s+1}(t-\zeta)}\right)d\zeta\right]. \tag{20}$$

Ясно, что

$$\Phi_1(\zeta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^{m_0+1}f_1(t)\,dt}{\zeta^{m_0+1}(t-\zeta)},\quad \Phi_2(\zeta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\zeta^{s+1}f_2(t)\,dt}{\zeta^{m_0+1}(t-\zeta)} \tag{21), (22}$$

— аналитические функции комплексной переменной $\zeta=\xi+i\eta$, следовательно в формуле (20) можно интегрировать по отрезку, соединяющему точки $\lambda_j$ и $x+\lambda_j$. На прямой $y=\text{Jm}\,\lambda_j$ переменная $\zeta$ имеет вид: $\zeta=\xi+i\,\text{Jm}\,\lambda_j$ $(-\infty<\xi<+\infty)$. Обозначим $\Phi_2(\xi)=\Phi_2(\xi+i\,\text{Jm}\,\lambda_j)$ через $\Psi(\xi)$. $\Psi(\xi)$ непрерывна на действительной оси $\xi$. Оценим ее в окрестности бесконечности. Для этого представим функцию $\Psi(\xi)$ в виде

$$\Psi(\xi)=\int\limits_{|t|<\frac{|\xi|}{2}}+\int\limits_{\frac{|\xi|}{2}<|t|<2|\xi|}+\int\limits_{|t|>2|\xi|}=\Psi_1(\xi)+\Psi_2(\xi)+\Psi_3(\xi). \tag{23}$$

Имеем

$$|\Psi_1(\xi)|=\left|\int\limits_{|t|<\frac{|\xi|}{2}}\frac{(\xi+i\,\text{Jm}\,\lambda_j)^{s+1}f(t)(1-\alpha(t))\,dt}{t^{s+1}(t-\xi-i\,\text{Jm}\,\lambda_j)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant|\xi+i\,\text{Jm}\,\lambda_j|^{s+1}\int\limits_{\frac{1}{2}<|t|<\frac{|\xi|}{2}}\frac{|f(t)|\cdot|1-\alpha(t)|\,dt}{|t|^{s+1}\cdot|t-\xi-i\,\text{Jm}\,\lambda_j|}\leqslant \text{const}\,|\xi|^d, \tag{24}$$

$$|\Psi_2(\xi)|\leqslant \text{const}\,|\xi|^d\ln|\xi|,\quad |\Psi_3(\xi)|\leqslant \text{const}\,|\xi|^d. \tag{25}$$

Используя (23) — (25), а также ограниченность функции $\Phi_1(z)$ на прямой $y=\text{Jm}\,\lambda_j$, из (20) получим

$$|u(x,1)|\leqslant|z|^{d+1}\ln|z| \text{ в окрестности } z=\infty. \tag{26}$$

Из оценок (16), (19), (26) и равенства (10) следует, что $u(x, y) \in \in M_D(0, \infty; l, d)$. Теорема 1 доказана.

## § 2. Доказательство теоремы 2

В классе $M_D(0, \infty; l, d)$ рассмотрим однородную задачу

$$A u_{xx} + 2 B u_{xy} + C u_{yy} = 0, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \quad (x \neq 0). \tag{27}$$

Пусть $u_0(x, y)$ — решение задачи (1), (27), удовлетворяющее дополнительным условиям: $\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x}$ непрерывна в замкнутой полуплоскости $\overline{D}(y \geqslant 0)$, кроме, быть может, точки (0; 0), в окрестности которой удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right| \leqslant \text{const}\, |z|^{-l} \cdot \ln |z|^{-1}, \quad 0 < |z| < 1, \tag{28}$$

а в окрестности бесконечности

$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right| \leqslant \text{const}\, |z|^{-l} \cdot \ln |z|, \quad |z| \geqslant 2. \tag{29}$$

Так как $u_0(x, y)$ удовлетворяет системе (1), то она дается формулой

$$u_0(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \psi_j (x + \lambda_j y), \tag{30}$$

где $\psi_j(x + \lambda_j y)$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$ — аналитические функции относительно аргумента $x + \lambda_j y$.

Рассмотрим следующую аналитическую вектор-функцию:

$$T(z) = \lambda_1 \alpha_1 \psi_1'(z) + \cdots + \lambda_m \alpha_m \psi_m'(z) \quad (\operatorname{Jm} z > 0). \tag{31}$$

Очевидно, что

$$\left.\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \operatorname{Re} T(z)|_{y=0} = 0, \quad x \neq 0. \tag{32}$$

следовательно, функцию $T(z)$ можно аналитически продолжить в нижнюю полуплоскость по следующему закону:

$$K(z) = \begin{cases} T(z), & \operatorname{Jm} z \geqslant 0, \ z \neq 0, \\ -\overline{T(\bar{z})}, & \operatorname{Jm} z < 0. \end{cases} \tag{33}$$

Ясно, что

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\alpha_1 \psi_1'(z_1) + \cdots + \alpha_m \psi_m'(z_m) + \overline{\alpha_1 \psi_1'(z_1)} + \cdots + \overline{\alpha_m \psi_m'(z_m)}\right), \tag{34}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\alpha_1 \lambda_1 \psi_1'(z_1) + \cdots + \alpha_m \lambda_m \psi_m'(z_m) + \overline{\alpha_1 \lambda_1 \psi_1'(z_1)} + \cdots + \overline{\alpha_m \lambda_m \psi_m'(z_m)}\right). \tag{35}$$

Так как (см. [5])

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_1\cdots\alpha_m\,\overline{\alpha_1}\cdots\overline{\alpha_m} \\ \lambda_1\alpha_1\cdots\lambda_m\alpha_n\,\overline{\lambda_1\alpha_1}\cdots\overline{\lambda_m\,\alpha_m}\end{pmatrix}\neq 0,$$

то $\psi_1'(z_1),\cdots,\psi_m'(z_m)$ линейно выражаются через $\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}$.

Отсюда, в свою очередь, следует оценка

$$|\psi_j(z)|<\begin{cases}\text{const}\,|z|^{-l+\beta}\ln\cdot|z|^{-1}, & 0<|z|<\frac{1}{2}\cdot \operatorname{Jm} z>0,\\ \text{const}\,|z|^{d+1}\ln|z|, & |z|>2,\ \operatorname{Jm} z>0.\end{cases} \tag{36}$$

Следовательно, функции $\psi_j(z)$ представляются в виде

$$\psi_j(z)=a_{-m_0}^{(j)}z^{-m_0}+\cdots a_{-1}^{(j)}z^{-1}+a_0^{(j)}+a_1^{(j)}z+\cdots+a_{s+1}^{(j)}z^{s+1},$$
$$z\neq 0\ (j=1,\cdots,m). \tag{37}$$

Из (37) имеем

$$\frac{\partial u_0}{\partial y}=\operatorname{Re}\sum_{j=1}^m\alpha_j\Big(-\frac{-m_0\lambda_j a_{-m_0}^{(j)}}{z_j^{m_0+1}}+\cdots+\frac{-\lambda_j a_{-1}^{(j)}}{z_j^2}+$$
$$+\lambda_j a_1^{(j)}+\cdots+\lambda_j(s+1)\,a_{s+1}^{(j)}z_j^s\Big)\cdot \tag{38}$$

Учитывая условия (27) из (38) получим

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^m\alpha_j\lambda_j a_k^{(j)}=0\ (k=-m_0,\cdots,-1,1,2,\cdots,s+1). \tag{39}$$

Пусть $e_k=i\left(0,0,\cdots,\underset{k}{1},0,\cdots,0\right)$ — столбцы. Рассмотрим системы

$$\sum_{j=1}^m\alpha_j\lambda_j a_k^{(j)}=e_r\ (k=-m_0,\cdots,s+1),\ (r=(1,\cdots,m)). \tag{40}$$

Так как векторы $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ линейно независимы, то система (40) имеет единственное решение $\tilde{a}_r\equiv(\bar{a}_r^{(1)},\cdots,\bar{a}_r^{(m)})$. Очевидно, что

$$(a_k^{(1)},\cdots,a_k^{(m)})=c_1\tilde{a}_1+\cdots+c_m\tilde{a}_m. \tag{41}$$

Обозначим через $u_{kr}(x,y)$ вектор-функцию

$$u_{kr}(x,y)=\operatorname{Re}\sum_{j=1}^m\alpha_j\bar{a}_r^{(j)}z_j^k\,(k=-m_0,\cdots,-1,1,\cdots,s+1,\ r=1,\cdots,m). \tag{42}$$

Подставляя (37) и (41) в (30) получим, что общее решение однородной задачи определяется формулой

$$u_0(x,y)=a_0+\sum_{k=-m_0}^{s+1}\sum_{r=1}^m c_{kr}u_{kr}(x,y), \tag{43}$$

где $c_{kr}$ — произвольные действительные постоянные.

Из линейной независимости векторов $\tilde{a}_1, \ldots, \bar{a}_m$ следует линейная независимость функций.

Легко доказать, что любое решение однородной задачи (1), (27) без дополнительных условий (28) и (29) представляется линейной комбинацией решений $u_{kr}(x, y)$. Теорема 2 доказана.

## § 3. Доказательство теоремы 3

Так как последовательность $\{x_k'\}_1^\infty$ монотонно стремится к $+\infty$, то для любого $x_k'$ $(k = 1, 2, \cdots)$ существует число $\beta_k > 0$ такое, что множества $(x_k' - \beta_k, x_k' + \beta_k) \cap (x_j' - \beta_j, x_j' + \beta_j)$ $(j \neq k)$, $j, k = 1, 2, \cdots$ пустые. Обозначим через $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ функции

$$f_k(x) = f(x)\, \alpha_k(x) \; (k = 1, 2, \cdots),$$

где $\alpha_k(x)$ — непрерывная функция на всей оси и такая, что

$$\alpha_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(x_k' - \dfrac{\delta_k}{2},\; x_k' + \dfrac{\delta_k}{2}\right), \\ 0, & x \,\overline{\in}\, (x_k' - \delta_k,\; x_k' + \delta_k), \end{cases}$$

а $\delta_k$ определяется так: $\delta_k = \min(\beta_k, 2^{-k})$ $(k = 1, 2, \cdots)$. Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится всюду, кроме, быть может, точек $x_k'$ $(k = 1, 2, \cdots)$. Его сумма в любой точке $x$ интервала $\left(x_k' - \dfrac{\delta_k}{2},\; x_k' + \dfrac{\delta_k}{2}\right)$ равна $f(x)$ кроме, быть может, точки $x_k'$ $(k = 1, 2, \cdots)$. Определим функцию $\tilde{f}(x)$ следующим образом:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) - \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x), & x \neq x_k', \\ 0, & x = x_k' \quad (k = 1, 2, \cdots). \end{cases}$$

Очевидно, что функция $\tilde{f}(x)$ непрерывна на всей оси.

Пусть $\beta(x)$ — непрерывная функция на всей оси и такая, что

$$\beta(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 1), \\ 1, & x \,\overline{\in}\, (-2, 2). \end{cases}$$

Представим $\tilde{f}(x)$ в виде

$$\tilde{f}(x) = f_{-1}(x) + f_0(x), \text{ где } f_{-1}(x) = \tilde{f}(x)\, \beta(x),\; f_0(x) =$$
$$= \tilde{f}(x)\,(1 - \beta(x)).$$

Теперь рассмотрим задачи:

$$A u_{xx} + 2 B u_{xy} + C u_{yy} = 0, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = f_k(x), \quad x \neq x_k'. \tag{44}$$

Как уже доказано в § 1 функция $u_k(x, y)(k = 1, 2, \cdots)$, определяемая формулой

$$u_k(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left\{ \gamma_j \int_{z_0}^{z_j} \left[ \frac{1}{\pi i \lambda_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t - x_k')^{\tau_k+2}}{(\zeta - x_k')^{\tau_k+2}} \frac{f_k(t)\, dt}{(t - \zeta)} \right] d\zeta, \tag{45}$$

является решением задачи (1), (44) и принадлежит классу $M_D(\infty, x_1', x_2', \cdots; l_0, l_1, l_2, \cdots)$, где $\tau_k$ целая часть числа $l_k (k = 1, 2, \cdots)$, а $\alpha_j$, $\gamma_j$ — векторы, которые входят в формулы (4) и (7), интегрирование от $z_0 = \lambda_j$ до $z_j = x + \lambda_j y$ производим по отрезку, соединяющему точки $z_0$ и $z_j$. Как и в случае $u_k(x, y)\,(k = 1, 2 \cdots)$ легко доказать, что, функции

$$u_0(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left\{ \gamma_j \int_{z_0}^{z_j} \left[ \frac{1}{\pi i \lambda_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(t)}{t - z_j}\, dt \right] d\zeta \right\}$$

и

$$u_{-1}(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left\{ \gamma_j \int_{z_0}^{z_j} \left[ \frac{1}{\pi i \lambda_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_j^{[l_0]+2} f_{-1}(t)\, dt}{t^{[l_0]+2}(t - z_j)} \right] d\zeta \right\}$$

являются решением задачи (1), (44) при $k = -1$, 0 и принадлежат классу $M_D(\infty, x_1', x_2', \cdots; l_0, l_1, l_2, \cdots)$.

Покажем, что функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{m} u_k(x, y)$, где $u_k(x, y)$ определяются формулами (45), сходится в верхней полуплоскости $y > 0$. Для этого рассмотрим последовательность замкнутых полукругов:

$$D_k = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leqslant \frac{x_{k-1}^2}{4}, \quad y \geqslant 0 \right\}, \quad (k = 2, 3, \cdots).$$

Докажем, что функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x, y)$ равномерно сходится в любом из полукругов $D_k$.

Действительно, пусть $x + iy \in D_k$, тогда для любого натурального $q \geqslant k$ имеем

$$|u_q(x, y)| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \left| \alpha_j \left\{ \gamma_j \int_{z_0}^{z_j} \left| \frac{1}{\pi i \lambda_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t - x_q')^{\tau_q+2}}{(\zeta - x_q')^{\tau_q+2}} \frac{f_q(t)\, dt}{(t - \zeta)} \right| d\zeta \right\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_0 \sum_{j=1}^{m} \left| \alpha_j \left\{ \gamma_j \int_{z_0}^{z_j} \frac{1}{\pi i \lambda_j} \int_{x_q' - \delta_q}^{x_q' + \delta_q} \frac{|t - x_q'|^{\tau_q+2} \cdot |t - x_q'|^{-l_q'}}{|\zeta - x_q'|^{\tau_q+2} \cdot |t - \zeta|}\, dt \right\} d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j| |\gamma_j| \int_{z_0}^{z_j} \frac{2\delta_q}{\left(\frac{|x_k|}{2}\right)^{\delta_q+2}} \frac{1}{|t-z_j|} d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\, \delta_q \cdot \frac{|z_j - z_0|}{\left(\frac{|x_k|}{2}\right)^2}. \tag{46}$$

Имея в виду, что $|z_j - z_0| \leqslant |x_{k-1}|$, $|x_k| > 4$, из (46) получим

$$|u_k(x, y)| \leqslant \text{const} \cdot \frac{1}{2^q}. \tag{47}$$

Из (47) получим, что функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, y)$ равномерно сходится в области $D_k$.

Ясно, что последовательность замкнутых кругов $D_k (k = 2, 3, \cdots)$ покрывает верхнюю полуплоскость. Отсюда следует и равномерная сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, y)$ в любом полукруге $E_R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$.

Таким образом, функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, y)$ сходится в полуплоскости $y > 0$.

Обозначим через $\tilde{u}(x, y)$ сумму следующего ряда:

$$\tilde{u}(x, y) = \sum_{k=-1}^{\infty} u_k(x, y), \quad y > 0 \tag{48}$$

и покажем, что $\tilde{u}(x, y)$ является решением задачи (1), (44). Действительно, функциональные ряды, полученные из (43) почленным дифференцированием по $x$ и $y$ любое число раз, равномерно сходятся в любом полукруге $E_R$. Так как каждая функция $u_k(x, y)$ $(k = -1, 0, 1, \cdots)$ удовлетворяет одному уравнению (1), то отсюда следует, что функция, определяемая формулой (48) в верхней полуплоскости $y > 0$ удовлетворяет уравнению (1).

Очевидно, что $\tilde{u}(x, y) \in M_D(\infty, x', x'_2, \cdots; l_0, l'_1, l'_2, \cdots)$. Теперь покажем, что функция, определяемая формулой (48), удовлетворяет и граничному условию (44).

Пусть $x_0$ — любая точка множества $R$, отличная от точек $x'_k (k = 1, 2, \cdots)$. Покажем, что $\frac{\partial \tilde{u}(x_0, y)}{\partial y}$ стремится к $f(x_0)$, когда точка $(x_0, y)$ стремится к точке $(x_0, 0)$, оставаясь в верхней полуплоскости. Рассмотрим следующую разность:

$$\frac{\partial \tilde{u}(x_0, y)}{\partial y} - f(x_0) = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{\partial u_k(x_0, y)}{\partial y} - \sum_{k=-1}^{\infty} f_k(x_0) \tag{49}$$

в окрестности точки $(x_0, 0)$. Ясно, что точка $(x_0, 0)$ вместе с некоторой окрестностью принадлежит одному из множеств $D_m$. Так как ряд $\sum\limits_{k=-1}^{\infty} \frac{\partial u_k(x_0, y)}{\partial y}$ равномерно сходится в $D_m$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_1$, что в указанной окрестности

$$\left|\sum_{k=n_1}^{\infty} \frac{\partial u_k(x_0, y)}{\partial y}\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{50}$$

Из сходимости ряда $\sum\limits_{k=-1}^{\infty} f_k(x_0)$ следует существование такого натурального числа $n_2$, что

$$\left|\sum_{k=n_2}^{\infty} f_k(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{51}$$

Обозначим через $n_0 = \max(n_1, n_2)$ и представим правую часть равенства (49) в виде

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \frac{\partial u_k(x_0, y)}{\partial y} - \sum_{k=-1}^{\infty} f_k(x_0) = \sum_{k=-1}^{n_0-1} \left| \frac{\partial u_k(x_0, y)}{\partial y} - f_k(x_0) \right| +$$
$$+ \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{\partial u_k(x_0, y)}{\partial y} - \sum_{k=n_0}^{\infty} f_k(x_0). \tag{52}$$

В работе [4] доказано, что выражение $\sum\limits_{k=-1}^{n_0-1}\left|\frac{\partial u_k(x_0, y)}{\partial y} - f_k(x_0)\right|$ стремится к нулю, когда $y \to 0$, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $0 < y < \delta$, то

$$\left|\sum_{k=-1}^{n_0-1} \left| \frac{\partial u_k(x_0, y)}{\partial y} - f_k(x_0) \right|\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{53}$$

Из (50) — (53) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое,

что если $0 < y < \delta$, то $\left|\frac{\partial \tilde{u}(x_0, y)}{\partial y} - f(x_0)\right| < \varepsilon$.

Таким образом

$$\lim_{y \to +0} \frac{\partial \tilde{u}(x_0, y)}{\partial y} = f(x_0), \quad x_0 \neq x_1', \ x_2', \cdots.$$

Так как $x_0$ любое, то теорема 3 доказана.

В заключение выражаю благодарность профессору Н. Е. Товмасяну за обсуждение результатов работы.

Ереванский государственный университет

Поступила 1.XII. 1987

Վ. Հ. ՕՀԱՆՅԱՆ. Խզվող եզրային պայմաններով էլիպտական տիպի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի համար Նեյմանի խնդիրը *(ամփոփում)*

*Վերին կիսահարթությունում*

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

*երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով էլիպտական համակարգի համար դիտարկված է Նեյմանի խնդիրը։*

*Քննարկված է երկու դեպք։ Առաջին դեպքում ենթադրվում է, որ եզրային $f(x)$ վեկտոր-ֆունկցիան անընդհատ է, բացառությամբ թերևս վերջավոր թվով կետերից՝ $x_1, x_2, \cdots, x_n$, որոնց շրջակայքերում տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները.*

$$|f(x)| \leqslant \mathrm{const}\,|x - x_k|^{-l_k} \quad (k=1, 2, \cdots, n),$$

*որտեղ $l_k$-երը (k=1, 2, ..., n) ոչ բացասական իրական թվեր են, իսկ անվերջի շրջակայքում՝*

$$|f(x)| \leqslant \mathrm{const}\,|x|^{l_0} \quad (l_0 \geqslant 0):$$

*Երկրորդ դեպքում եզրային ֆունկցիան կարող է ունենալ խզումներ անվերջ թվով կետերում։ Լուծումները փնտրվում են որոշակի դասերում։*

*Առաջին դեպքում ապացուցված է Նեյմանի խնդրի լուծման գոյությունը և գտնված է համապատասխան համասեռ խնդրի լուծումների տարածության չափողականությունը։*

*Երկրորդ դեպքում ապացուցված է խնդրի լուծման գոյությունը։*

V. H. OHANIAN *The Negman problem for the elliptic system of differential equations with discontinuous boundary conditions* (summary)

For an elliptic system

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

two boundary problems are considered in the domain $D\,(y>0)$, $(\partial D = R)$. In the first problem, the boundary function is of the class $N_R(x_1, x_2, \cdots, x_n, \infty; l_1, l_2, \cdots, l_n, l_{n+1})$. The solution is looked for in the class $M_D(x_1, x_2, \cdots, x_n, \infty; l_1, l_2, \cdots, l_n, l_{n+1})$.

It is shown that the problem has a solution.

The number of the linear independent solutions of corresponding homogeneous problems is found.

In the second problem the boundary function is of the class $N'_R(\infty, x'_1, x'_2, \cdots, l'_0, l'_1, l'_2, \cdots)$. The solution is looked for the class $M'_D(\infty, x'_1, x'_2, \cdots; l'_0, l'_1, l'_2, \cdots)$. It is shown that the problem has a solution.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер.* Уравнения с частными производными, М., Мир, 1966.
2. *Н. Е. Товмасян.* Об одном методе решения краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости, Мат. сборник, 89(131), № 4, 1972, 599—615.
3. *А. В. Бицадзе.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., Наука, 1966.
4. *В. А. Оганян.* Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений с разрывными граничными условиями, Изв. АН Арм. ССР, Математика, XVI, № 6 1981, 465—477.
5. *Д. К. Фаддеев* и *В. И. Фаддеева.* Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, 1960.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXV, № 1, 1990 Математика

УДК 517.53

К. Г. КАЗАРЯН

# РЕШЕНИЕ КРАТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧИ В КЛАССАХ $H^\infty$ В ПОЛУПЛОСКОСТИ И ПОЛОСЕ

## § 0. Введение

0.1 (а). В работе М. М. Джрбашяна [1] была поставлена следующая задача свободной интерполяции с кратными узлами в классах $H_p$ $(0 < p < +\infty)$ Харди-Рисса.

Пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел из единичного круга, и для данного $k$ $(1 \leq k < +\infty)$ $s_k \geq 1$ — кратность появления числа $\alpha_k$ на отрезке $\{\alpha_j\}_1^k$.

Выявить условия на последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ и на пространство последовательностей $J$, при которых имеет место совпадение

$$\{(f^{(s_k-1)}(\alpha_k))_{k=1}^\infty : f \in H_p\} = J, \tag{0.1}$$

и построить аппарат для эффективного представления решений интерполяционной задачи

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \gamma_k \ (k = 1, 2, \cdots); \ \{\gamma_k\}_1^\infty \in J. \tag{0.2}$$

В том специальном случае, когда $\{\alpha_k\}_1^\infty$ — суть отличные друг от друга точки круга $|z| < 1$ и, таким образом, $s_k = 1$ $(k = 1, 2, \cdots)$, эта задача сводится к интерполяционной задаче с простыми узлами:

$$f(\alpha_k) = \gamma_k \ (k = 1, 2, \cdots). \tag{0.2'}$$

б) Критерии существования решения задачи (0.1) — (0.2′) в классе $H_\infty$ ограниченных в круге $|z| < 1$ функций, либо в классах $H_p$ $(1 \leq p < +\infty)$, были установлены в работах У. Хеймана [2], Д. Ньюмена [3], Л. Карлесона [4], Г. Шапиро и А. Шилдса [5] (см. [6], а также [7], где приведены подробные литературные данные).

В работе В. П. Кабайла [8] было получено эффективное решение задачи (0.1)—(0.2) в классах $H_p$ $(0 < p < 1)$.

В случае, когда различные точки последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$ появляются двукратно, либо с одинаковой кратностью, в классе $H_2$ задача была рассмотрена в работах Дж. Розенбаума [9], [10] и Б. Л. Чалмерса [11], но вновь лишь в постановке существования ее решения.

Следует отметить, что эти работы существенно опираются на методы теории гильбертовых и банаховых пространств.

На вопрос о существовании решений кратной интерполяционной задачи (0.1)—(0.2) в классе $H^\infty$ в круге впервые был дан полный ответ в работе А. М. Джрбашяна [12].

0.2 (а). В работе М. М. Джрбашяна [1] был предложен новый, аналитический метод для полного решения сформулированной выше общей интерполяционной задачи (0.1)—(0.2) в классе $H_2$, метод, позволяющий дать также аналитический аппарат для представления решений этой задачи. Он основан на построении специальных систем аналитических в круге $|z| < 1$ функций, ассоциированных с последовательностью $\{\alpha_k\}_1^\infty$ и биортогональных на окружности $|z| = 1$.

В цикле работ М. М. Джрбашяна [1, 13, 14], Ф. А. Шамояна [15], Г. М. Айрапетяна [16—18], В. М. Мартиросяна [19—21], А. М. Джрбашяна [12] и Ш. А. Григорян [22] применением метода биортогонализации М. М. Джрбашяна было получено полное и эффективное решение задачи (0.1)—(0.2) в классах $H_p$ в круге, в полуплоскости и угловых областях (в этом случае $\{\alpha_k\}_1^\infty$ — последовательность точек из круга, полуплоскости или угловой области соответственно) (см. [7], [8], где приведены подробные литературные указания).

(б). В случае их существования эффективное представление решений задачи (0.1)—(0.2′) с простыми узлами в классе $H^\infty$ в круге было дано П. Джонсом (препринт). Модификация этого построения приведена в работе С. А. Виноградова, Е. А. Горина, С. В. Хрущева [23].

Этот результат был обобщен В. М. Мартиросяном [24]. С применением метода биортогонализации М. М. Джрбашяна им был построен аналитический аппарат, позволяющий, в случае их существования, представлять решения интерполяционной задачи (0.1)—(0.2) в классе $H^\infty$ в круге.

0.3. При рассмотрении интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классах $H^\infty$ в полосе или в полуплоскости естественно попытаться свести ее к случаю единичного круга при помощи конформных отображений. Этот путь приводит к необходимости решения бесконечных систем линейных уравнений для каждой конкретной интерполяционной задачи. В конечном итоге приходим лишь к существованию решения.

С применением метода биортогонализации М. М. Джрбашяна в данной работе дано эффективное построение решений интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классах $H^\infty$ в полуплоскости и в полосе.

Автор приносит благодарность профессору М. М. Джрбашяну за постановку задачи и полезные обсуждения.

## § 1. Эффективное решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе $H^\infty$ в полуплоскости

1.1. (а). Пусть $\{\mu_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел из полуплоскости $G^{(+)} = \{w : \operatorname{Re} w > 0\}$, а $s_j$ и $p_j$ — кратности появления числа $\mu_j$ на отрезке $\{\mu_k\}_1^j$ и во всей последовательности $\{\mu_k\}_1^\infty$ соответственно. Пусть, далее

$$B(w) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{w - \mu_k}{w + \bar{\mu}_k} \frac{|1 - \mu_k^2|}{1 - \mu_k^2}, \tag{1.1}$$

— сходящееся при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \mu_k}{1+|\mu_k|^2} < +\infty \tag{1.2}$$

произведение Бляшке для полуплоскости $G^{(-)}$.

Наряду с $\{\mu_k\}_1^{\infty}$ будем рассматривать последовательность $\{w_n\}_1^{\infty}$ попарно различных точек этой последовательности. Тогда последовательность $\{w_n\}_1^{\infty}$ также будет удовлетворять условию Бляшке

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} w_n}{1+|w_n|^2} < +\infty. \tag{1.2'}$$

Из (1.2′) следует, что члены последовательности $\{w_n\}_1^{\infty}$ можем считать расположенными таким образом, чтобы имели

$$\frac{\operatorname{Re} w_{n_1}}{1+|w_{n_1}|^2} \geqslant \frac{\operatorname{Re} w_{n_2}}{1+|w_{n_2}|^2}, \ n_1 < n_2. \tag{1.3}$$

б) Рассмотрим функции

$$F_n(w) = \exp\left\{-\sum_{j>n} \frac{\operatorname{Re} w_j}{1+|w_j|^2} \cdot \frac{1+w\overline{w}_j}{w+\overline{w}_j}\right\} (n=1, 2, \cdots). \tag{1.4}$$

Поскольку из условия (1.2′) вытекает абсолютная и равномерная сходимость рядов

$$\Psi_n(w) = \sum_{j>k} \frac{\operatorname{Re} w_j}{1+|w_j|^2} \cdot \frac{1+w\overline{w}_j}{w+\overline{w}_j}, \ \operatorname{Re} w > 0 \ (n=1, 2, \cdots) \tag{1.5}$$

внутри полуплоскости $G^{(+)}$ и так как при любом $w$ $(\operatorname{Re} w > 0)$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\operatorname{Re} w_j}{1+|w_j|^2} \cdot \frac{1+w\overline{w}_j}{w+\overline{w}_j}\right\} =$$

$$= \frac{\operatorname{Re} w_j}{1+|w_j|^2} \cdot \frac{\operatorname{Re} w\,(1+|w_j|^2) + \operatorname{Re} w_j(1+|w|^2)}{|w+\overline{w}_j|^2} > 0,$$

то функции $F_n(w)$ $(n=1, 2, \cdots)$ аналитичны и ограничны в $G^{(+)}$ и не обращаются там в нуль. Положим

$$F(w;\ \mu_k) = F_n(w)\left(\frac{\operatorname{Re} \mu_k}{1+\mu_k} \cdot \frac{w+1}{w+\overline{\mu}_k}\right)^2, \tag{1.6}$$

при $\mu_k = w_n$, и отметим, что $F(w;\ \mu_{k_1}) \equiv F(w;\ \mu_{k_2})$, если $\mu_{k_1} = \mu_{k_2}$.

1.2. Произведение $B(w)(w-\mu_k)^{-p_k} F(w;\ \mu_k)$ аналитично в $G^{(+)}$ и не обращается в нуль в некоторой окрестности точки $w = \mu_k$. Поэтому для любого целого $k \geqslant 1$, положив

$$\tau_k(w) = \frac{(w-\mu_k)^{p_k}}{B(w)\,F(w;\ \mu_k)}, \tag{1.7}$$

можем утверждать, что в достаточно малой окрестности точки $w = \mu_k$ эта функция разлагается в степенной ряд

$$\tau_k(w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\mu_k)(w-\mu_k)^\nu, \ |w-\mu_k| < \tau_i, \tag{1.8}$$

где

$$a_\nu(\mu_k) = \frac{1}{\nu!}\,\frac{d^\nu}{dw^\nu}\left\{\frac{(w-\mu_k)^{p_k}}{B(w)F(w;\,\mu_k)}\right\}_{w=\mu_k} \quad \left(\begin{matrix} 0 \leqslant \nu < +\infty \\ 1 \leqslant k < +\infty \end{matrix}\right). \tag{1.9}$$

Введем, наконец, в рассмотрение полиномы

$$q_k(w) = \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} a_\nu(\mu_k)(w-\mu_k)^\nu \quad (k=1, 2, \cdots) \tag{1.10}$$

и последовательность $\{\Omega_k(w)\}_1^\infty$ аналитических и ограниченных в $G^{(+)}$ функций, положив

$$\Omega_k(w) \equiv \frac{(w-\mu_k)^{s_k-1} q_k(w)}{(s_k-1)!\,\pi_k(w)} \equiv \tag{1.11}$$

$$\equiv \frac{B(w)F(w;\,\mu_k)}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\frac{a_\nu(\mu_k)}{(w-\mu_k)^{p_k-s_k-\nu+1}} \quad (k=1, 2, \cdots).$$

Рассуждая, как и в работах [1], [13], получим следующее утверждение.

Лемма 1. *Функции системы $\{\Omega_k(w)\}_1^\infty$ обладают следующими интерполяционными свойствами:*

$$\Omega_k^{(s_j-1)}(\mu_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k=j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (k, j = 1, 2, \cdots). \tag{1.12}$$

1.3. (а). Последовательность комплексных чисел $\{\mu_k\}_1^\infty$ ($\operatorname{Re}\mu_k > 0$) условимся относить к классу $\Delta(P;\,\delta)$ $(0 < \delta < 1,\ P < +\infty)$, если она удовлетворяет условиям

$$\inf_{k \geqslant 1}\left\{\prod_{\substack{j=1 \\ \mu_j \neq \mu_k}}^{\infty}\left|\frac{\mu_j-\mu_k}{\mu_j-\bar{\mu}_k}\right|\right\} \geqslant \delta > 0, \tag{1.13}$$

$$\sup_{k \geqslant 1}\{p_k\} = P < +\infty. \tag{1.14}$$

(б). Приведем теперь формулировку леммы 3.1 из [14].

Лемма 2. *Если последовательность $\{w_n\}_1^\infty$ удовлетворяет условию* (1.13), *то*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}w_j \operatorname{Re}w_n}{|w_n+\bar{w}_j|^2} \leqslant \frac{1}{4}\left(1+2\log\frac{1}{\delta}\right) \quad (n=1, 2, \cdots). \tag{1.15}$$

Введем в рассмотрение функции

$$\Phi(w;\,\mu_k) = \frac{1}{F(w;\,\mu_k)} \quad (k=1, 2, \cdots) \tag{1.16}$$

и заметим, что ввиду (1.7)

$$\pi_k(w) = \Phi(w;\,\mu_k)\frac{(w-\mu_k)^{p_k}}{B(w)} \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{1.17}$$

Отметим также, что в силу (1.7), (1.6) и (1.16)

$$\Phi(w;\mu_k)=\left(\frac{1+\mu_k}{\operatorname{Re}\mu_k}\cdot\frac{w+\bar\mu_k}{w+1}\right)^2\times$$
$$\times\exp\left\{\sum_{j>n}\frac{\operatorname{Re}w_j}{1+|w_j|^2}\cdot\frac{1+w\bar w_j}{w+\bar w_j}\right\}(k=1,2,\cdots). \tag{1.18}$$

Лемма 3. *Если последовательность $\{\mu_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (1.13), то справедливы неравенства*

$$(\operatorname{Re}\mu_k)^r|\Phi^{(r)}(\mu_k;\mu_k)|\leqslant M_r^1(\delta)\,(0\leqslant r<+\infty,\ 1\leqslant k<+\infty), \tag{1.19}$$

*где $M_r^1(\delta)$ — положительные постоянные, зависящие исключительно от $r$ и $\delta$.*

Доказательство. Пусть $\mu_k=w_n$, где $\{w_n\}_1^\infty$ — определенная по $\{\mu_k\}_1^\infty$ последовательность. Учитывая, что

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\operatorname{Re}w_j}{1+|w_j|^2}\cdot\frac{1+\bar w_j w_n}{w_n+\bar w_j}\right\}=$$
$$=\frac{\operatorname{Re}w_j\operatorname{Re}w_n}{|w_n+\bar w_j|^2}\left[1+\frac{\operatorname{Re}w_j}{1+|w_j|^2}\cdot\frac{1+|w_n|^2}{\operatorname{Re}w_n}\right],$$

по (1.3), (1.18) и в силу леммы 2 будем иметь

$$|\Phi(\mu_k;\mu_k)|\leqslant 4\exp\left\{2\sum_{j>n}\frac{\operatorname{Re}w_j\operatorname{Re}w_n}{|w_n+\bar w_j|^2}\right\}\leqslant$$
$$<4\exp\left\{\frac{1}{2}\left(1+2\log\frac{1}{\delta}\right)\right\}=\frac{4e^{1/2}}{\delta}=M_0^1(\delta),$$

где $M_0^1(\delta)=4e^{1/2}/\delta$, т. е. неравенства (1.19) справедливы при $r=0$.

Применим теперь полную индукцию. Предположим, что неравенства (1.19) справедливы при $0\leqslant r\leqslant\nu$, т. е.

$$[\operatorname{Re}\mu_k]^r|\Phi^{(r)}(\mu_k;\mu_k)|\leqslant M_r^1(\delta)\,(0\leqslant r\leqslant\nu;\ 1\leqslant k<+\infty), \tag{1.20}$$

где $M_r^1(\delta)>0$ зависят только от $r$ и $\delta$. Докажем справедливость неравенства (1.19) при $r=\nu+1$. С этой целью заметим сначала, что взяв логарифмическую производную функции $\Phi(w;\mu_k)$, приходим к тождеству

$$\Phi'(w;\mu_k)=\Phi(w;\mu_k)\left\{\frac{2}{w+\bar\mu_k}-\frac{2}{w+1}+\right.$$
$$\left.+\sum_{j>n}\frac{\operatorname{Re}w_j}{1+|w_j|^2}\cdot\frac{(\bar w_j)^2-1}{(w+\bar w_j)^2}\right\}(k=1,\ 2,\cdots). \tag{1.21}$$

Положив

$$\Psi(w;\mu_k)=\frac{2}{w+\mu_k}-\frac{2}{w+1}+\sum_{j>n}\frac{\operatorname{Re}w_j}{1+|w_j|^2}\cdot\frac{(\bar w_j)^2-1}{(w+\bar w_j)^2}, \tag{1.22}$$

будем иметь

$$\Psi^{(m)}(w;\ \mu_k) = 2(-1)^m m! \left[ \frac{1}{(w+\mu_k)^{m+1}} - \frac{1}{(w+1)^{m+1}} \right] + \tag{1.23}$$

$$+ \sum_{j\neq n} \frac{(-1)^{m+1}\operatorname{Re} w_j}{1+|w_j|^2} \cdot \frac{[(\bar{w}_j)^2-1](m+1)!}{2(w+\bar{w}_j)^{m+2}}.$$

Следовательно, если учесть также, что $\mu_k = w_n$, можем написать

$$|\Psi^{(m)}(\mu_k;\ \mu_k)| \leqslant \frac{4\,m!}{(\operatorname{Re}\mu_k)^{m+1}} + \tag{1.24}$$

$$+ \frac{(m+1)!}{2} \sum_{j\neq n} \frac{\operatorname{Re} w_j}{1+|w_j|^2} \cdot \frac{1+|w_j|^2}{|w_n+\bar{w}_j|^{m+2}}.$$

Однако

$$\frac{\operatorname{Re} w_j}{|w_n+\bar{w}_j|^{m+2}} \leqslant \frac{\operatorname{Re} w_j \operatorname{Re} w_n}{|w_n+\bar{w}_j|^2} \cdot \frac{1}{(\operatorname{Re} w_n)^{m+1}}.$$

Из этих неравенств, леммы 2 и (1.24) получаем

$$|\Psi^{(m)}(\mu_k;\ \mu_k)| \leqslant (\operatorname{Re}\mu_k)^{-(m+1)} \left\{ 4\,m! + \frac{(m+1)!}{2}\frac{1}{4}\left(1+2\log\frac{1}{\delta}\right)\right\}. \tag{1.25}$$

Из формулы (1.21) и (1.22) следует

$$\Phi'(w;\ \mu_k) = \Phi(w;\ \mu_k)\,\Psi(w;\ \mu_k)\ (k=1,2,\cdots).$$

Отсюда

$$\Phi^{(\nu+1)}(w;\ \mu_k) = \sum_{r=0}^{\nu} C_\nu^r\, \Phi^{(r)}(w;\ \mu_k)\, \Psi^{(\nu-r)}(w;\ \mu_k),$$

так что

$$|\Phi^{(\nu+1)}(\mu_k;\ \mu_k)| \leqslant \sum_{r=0}^{\nu} C_\nu^r\, |\Phi^{(r)}(\mu_k;\ \mu_k)|\, |\Psi^{(\nu-r)}(\mu_k,\ \mu_k)|.$$

Воспользовавшись теперь предположением индукции (1.20) и неравенствами (1.25), можем написать

$$|\Phi^{(\nu+1)}(\mu_k;\ \mu_k)| \leqslant \left\{ \sum_{r=0}^{\nu} C_\nu^r M_r^1(\delta)\, B_{\nu-r}^1(\delta) \right\} [\operatorname{Re}\mu_k]^{-(\nu+1)},$$

причем постоянная

$$M_{\nu+1}^1(\delta) = \sum_{r=0}^{\nu} C_\nu^r M_r^1(\delta)\, B_{\nu-r}^1(\delta)$$

зависит исключительно от $\nu+1$ и $\delta$, поскольку таковыми являются $M_r^1(\delta)$ $(0 \leqslant r \leqslant \nu)$, в силу предположения индукции, а

$$B_{\nu-r}^1(\delta) = 4(\nu-r)! + \frac{1}{8}(\nu-r+1)!\left(1+2\log\frac{1}{\delta}\right).$$

Таким образом, неравенства (1.20) справедливы также для $r = \nu+1$, и лемма доказана.

(в). Теперь дадим оценки коэффициентов разложения (1.8) в предположении, что $\{\mu_k\}_1^\infty \in \Delta(P, \delta)$.

Лемма 4. *Если при некоторых* $P(1 < P < +\infty)$ *и* $\delta(0 < \delta < 1)$ *последовательность* $\{\mu_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условиям* (1.13) *и* (1.14), *то для коэффициентов разложения* (1.8):

$$\tau_k(w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\mu_k)(w-\mu_k)^\nu, \ |w-\mu_k| < \eta,$$

*справедливы неравенства*

$$|a_\nu(\mu_k)| \leqslant C_1(\delta; P)(\operatorname{Re}\mu_k)^{p_k-\nu} (0 \leqslant \nu \leqslant p_k - 1; \ 1 \leqslant k < +\infty), \tag{1.26}$$

*где* $C_1(\delta; P)$, *зависит исключительно от* $\delta$ *и* $P$.

Доказательство. Ввиду (1.17)

$$\tau_k^{(\nu)}(w) = \sum_{s=0}^{\nu} C_\nu^s \left| \frac{(w-\mu_k)^{p_k}}{B(w)} \right|^{(s)} \Phi^{(\nu-s)}(w; \mu_k)(\nu \geqslant 0). \tag{1.27}$$

В силу леммы 3.2 из работы [14] справедливы оценки

$$\left| \left| \frac{(w-\mu_k)^{p_k}}{B(w)} \right|^{(s)}_{w=\mu_k} \right| \leqslant C_s(\delta)(\operatorname{Re}\mu_k)^{p_k-s} (0 \leqslant s < +\infty; \ k \geqslant 1), \tag{1.28}$$

где $C_s(\delta)$ — положительные постоянные, зависящие исключительно от $s$ и $\delta$. На основании оценок (1.28) и (1.19), из (1.27) заключаем, что

$$\left|\tau_k^{(\nu)}(\mu_k)\right| \leqslant \left\{ \sum_{s=0}^{\nu} C_\nu^s C_s(\delta) M_{\nu-s}^1(\delta) \right\} (\operatorname{Re}\mu_k)^{p_k-\nu} (\nu \geqslant 0; \ k \geqslant 1). \tag{1.29}$$

Учитывая еще равенства

$$a_\nu(\mu_k) = \frac{1}{\nu!} \tau_k^{(\nu)}(\mu_k) \ (0 \leqslant \nu < +\infty; \ 1 \leqslant k < +\infty)$$

ввиду условия (1.14) из (1.29) получаем (1.26).

1.4. Через $l^\infty\{\mu_k\}$ обозначим класс комплексных последовательностей $\{\gamma_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{k \geqslant 1} \{|\gamma_k| [\operatorname{Re}\mu_k]^{s_k-1}\} < +\infty.$$

Через $H^\infty[G^{(+)}]$ обозначим класс ограниченных и голоморфных функций в $G^{(+)}$.

Теорема 1. *Пусть* $\{\mu_k\}_1^\infty$ *последовательность комплексных чисел из* $G^{(+)}$, *которая удовлетворяет условию*

$$\sup_{k \geqslant 1} |p_k| < +\infty. \tag{1.30}$$

*Тогда имеют место следующие утверждения:*

1°. *Для справедливости равенства*

$$\{(f^{(s_k-1)}(\mu_k))_{k=1}^\infty : f \in H^\infty[G^{(+)}]\} = l^\infty\{\mu_k\}$$

*необходимо и достаточно условие*

$$\inf_{k \geqslant 1} \left\{ \prod_{\substack{j=1\\ \mu_j \neq \mu_k}}^{\infty} \left| \frac{\mu_j - \mu_k}{\mu_j + \bar{\mu}_k} \right| \right\} > 0; \tag{1.31}$$

2°. *Если* $\{\gamma_k\}_1^\infty \in l^\infty \{\mu_k\}$ *— произвольная последовательность комплексных чисел, то при условии* (1.31) *ряд*

$$f(w) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \Omega_k(w), \quad w \in G^{(+)}, \tag{1.32}$$

*сходится абсолютно и равномерно внутри* $G^{(+)}$ *и определяет функцию* $f \in H^\infty [G^{(+)}]$, *удовлетворяющую следующим интерполяционным данным:*

$$f^{(s_k-1)}(\mu_k) = \gamma_k \; (k = 1, \cdots). \tag{1.33}$$

Доказательство. Сначала докажем утверждение 2°. Отметим, что ввиду условий (1.30) и (1.31) последовательность $\{\mu_k\}_1^\infty \in \Delta\,(P;\ \delta)$ при некоторых $\delta\,(0 < \delta < 1)$ и $P\,(1 \leqslant P < +\infty)$.

Далее, ввиду (1.6)

$$\Omega_k(w) < \frac{|F_n(w)|}{(s_k - 1)!} \left| \frac{\operatorname{Re} \mu_k}{1 + \mu_k} \cdot \frac{w + 1}{w + \bar{\mu}_k} \right|^2 \times$$

$$\times \left| \frac{B(w)}{(w - \mu_k)^{p_k}} \right| \sum_{\nu=0}^{p_k - s_k} |a_\nu(\mu_k)| \, |w - \mu_k|^{\nu + s_k - 1}. \tag{1.34}$$

Однако

$$\frac{1}{|w + \bar{\mu}_k|^2} \sum_{\nu=0}^{p_k - s_k} |a_\nu(\mu_k)| \, |w - \mu_k|^{\nu + s_k - 1} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{p_k - s_k} |a_\nu(\mu_k)| \, (\operatorname{Re} \mu_k)^{-p_k + \nu + s_k - 1} \leqslant PC_1(\delta;\ P)\, (\operatorname{Re} \mu_k)^{s_k - 1}.$$

Из этих оценок на основании (1.34) имеем

$$|(\operatorname{Re} \mu_k)^{1 - s_k} \gamma_k \Omega_k(w)| \leqslant PC_1(\delta;\ P) \|\{\gamma_k\}_1^\infty\|_\infty \times$$

$$\times \left| \left( \frac{\operatorname{Re} \mu_k}{1 + \mu_k} \cdot \frac{w + 1}{w + \bar{\mu}_k} \right)^2 F_n(w) \right| \; (\operatorname{Re} w > 0, \; k = 1, 2, \cdots). \tag{1.35}$$

Теперь напомним, что через $\{w_n\}_1^\omega$ мы обозначили последовательность попарно различных чисел последовательности $\{\mu_k\}_1^\infty$. Отсюда, во-первых, следует, что

$$\left| \frac{\operatorname{Re} \mu_k}{1 + \mu_k} \cdot \frac{w + 1}{w + \bar{\mu}_k} \right| = \left| \frac{\operatorname{Re} w_n}{1 + w_n} \cdot \frac{w + 1}{w + \bar{w}_n} \right| \; (k = 1, 2 \cdots). \tag{1.36}$$

С другой стороны, в силу условия (1.30), число $w_n$ появляется в последовательности $\{\mu_k\}_1^\infty$ не более, чем $P$ раз. Из сказанного, на основании (1.35), заключаем, что ряд (1.32) мажорируется рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} PC_1(\delta;\ P)\|\{\gamma_k\}_1^\infty\|_\infty \left|\left(\frac{\operatorname{Re} w_n}{1+w_n}\cdot\frac{w+1}{w+\bar{w}_n}\right)^2 F_n(w)\right| (\operatorname{Re} w>0). \quad (1.37)$$

С другой стороны, если $a_n \geqslant 0$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left\{-\sum_{j<n} a_j\right\} < 1 \quad (1.38)$$

(см. [23]).

Заметим теперь, что при $\operatorname{Re} w>0$

$$\left|\frac{\operatorname{Re} w_n}{1+w_n}\cdot\frac{w+1}{w+\bar{w}_n}\right|^2 < 2\operatorname{Re}\left(\frac{\operatorname{Re} w_n}{1+|w_n|^2}\cdot\frac{1+\bar{w}_n w}{w+\bar{w}_n}\right) (n=1, 2, \cdots),$$

откуда на основании (1.5) и (1.38) следует, что ряд (1.37) сходится абсолютно и равномерно внутри $G^{(+)}$.

Из приведенных выше рассуждений, на основании (1.35) и (1.36), заключаем, что ряд (1.32) сходится абсолютно и равномерно внутри полуплоскости $G^{(+)}$ и определяет функцию $f\in H^\infty[G^{(+)}]$.

Наконец, равенства (1.35) вытекают из леммы 1, и утверждение 2° доказано.

Из утверждения 2° следует, что если $\{\mu_k\}_1^\infty \in \Delta(P;\ \delta)$, то

$$\{(f^{(s_k-1)}(\mu_k)[\operatorname{Re}\mu_k]^{s_k-1})_{k=1}^\infty : f\in H^\infty[G^{(+)}]\} \supset l^\infty. \quad (1.39)$$

Докажем обратное включение. Пусть $\{\mu_k\}_1^\infty \in \Delta(P;\ \delta)$. Из интегральной формулы Коши имеем

$$f^{(s_k-1)}(\mu_k) = \frac{(s_k-1)!}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-\mu_k|=\operatorname{Re}\mu_k}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\mu_k)^{s_k}}d\zeta.$$

Следовательно

$$(\operatorname{Re}\mu_k)^{s_k-1}|f^{(s_k-1)}(\mu_k)| \leqslant (s_k-1)!\,\|f\|_\infty,$$

то есть

$$\{(f^{(s_k-1)}(\mu_k)[\operatorname{Re}\mu_k]^{s_k-1})_{k=1}^\infty : f\in H^\infty[G^{(+)}]\} \subset l^\infty. \quad (1.40)$$

Из (1.39) и (1.40) следует достаточность утверждения 1°, а необходимость доказывается рассуждениями, аналогичными приведенным в [6] (гл. 10) для круга.

## § 2. Эффективное решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе $H^\infty$ в полосе

2.1. (а). Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел из области $S_h=\{z:|\operatorname{Im} z|<h\}\ h>0)$, а $s_j$ и $p_j$ — кратности появления числа $\lambda_j$ на отрезке $\{\lambda_k\}_1^j$ и во всей последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ соответственно. Пусть далее

$$B_h(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\pi z/(2h)}-e^{\pi\lambda_k/(2h)}}{e^{\pi z/(2h)}+e^{\pi\bar{\lambda}_k/(2h)}}\cdot\frac{|1-e^{\pi\lambda_k/h}|}{1-e^{\pi\lambda_k/h}} \qquad (2.1)$$

— произведение Бляшке для полосы $S_h$, как легко видеть, сходящиеся при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda_k\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Re}\lambda_k\right)}<+\infty. \qquad (2.2)$$

(б). Наряду с $\{\lambda_k\}_1^{\infty}$ будем рассматривать последовательность $\{z_n\}_1^{\infty}$ попарно различных точек этой последовательности. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}z_n\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Re}z_n\right)}<+\infty. \qquad (2.3)$$

Так как

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}z_n\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Re}z_n\right)}=2\,\frac{\operatorname{Re}e^{\pi z_n/(2h)}}{1+|e^{\pi z_n/(2h)}|^2}, \qquad (2.4)$$

то из (2.3) следует, что члены последовательности $\{z_n\}_1^{\infty}$ можем считать расположенными таким образом, чтобы имели

$$\frac{\operatorname{Re}e^{\pi z_{n_1}/(2h)}}{1+|e^{\pi z_{n_1}/(2h)}|^2}\geqslant\frac{\operatorname{Re}e^{\pi z_{n_2}/(2h)}}{1+|e^{\pi z_{n_2}/(2h)}|^2},\quad n_1<n_2. \qquad (2.5)$$

(в). Рассмотрим функции

$$\tilde{F}_n(z)=\exp\{-\tilde{\Psi}_n(z)\}\quad(n\geqslant 1), \qquad (2.6)$$

где в силу условия (2.3) ряды

$$\tilde{\Psi}_n(z)\equiv\sum_{j>n}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}z_j\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Re}z_j\right)}\cdot\frac{1+e^{\pi z/(2h)}e^{\pi \bar{z}_j/(2h)}}{e^{\pi z/(2h)}+e^{\pi \bar{z}_j/(2h)}},\quad z\in S_h\ (n\geqslant 1) \qquad (2.7)$$

сходятся абсолютно и равномерно внутри области $S_n$. Кроме того легко убедиться, что

$$\operatorname{Re}\{\tilde{\Psi}_n(z)\}>0,\quad z\in S_h\ (n\geqslant 1),$$

и следовательно функции $\tilde{F}_n(z)$ $(n=1,2,\ldots)$ аналитичны, ограничены в полосе $S_h$ и не обращаются там в нуль.

Положим

$$\tilde{F}(z;\lambda_k)=\tilde{F}_n(z)\cdot G_k(z),\quad G_k(z)\equiv\left(\frac{\operatorname{Re}e^{\pi\lambda_k/(2h)}}{1+e^{\pi\lambda_k/(2h)}}\cdot\frac{1+e^{\pi z/(2h)}}{e^{\pi z/(2h)}+e^{\pi\bar{\lambda}_k/(2h)}}\right)^2 \qquad (2.8)$$

при $\lambda_k=z_n$. Тогда $\tilde{F}(z;\lambda_{k_1})\equiv\tilde{F}(z;\lambda_{k_2})$, если $\lambda_{k_1}=\lambda_{k_2}$.

2.2. Из (2.8) вытекает, что $B_h(z)(z-\lambda_k)^{-p_k}\widetilde{F}(z;\lambda_k)$ аналитично в $S_h$ и не обращается в нуль в некоторой окрестности точки $z=\lambda_k$. Поэтому для любого целого $k\geq 1$, положив

$$\widetilde{\tau}_k(z)=\frac{(z-\lambda_k)^{p_k}}{B_h(z)\widetilde{F}(z;\lambda_k)}, \tag{2.9}$$

можем утверждать, что в достаточно малой окрестности токки $z=\lambda_k$ эта функция разлагается в степенной ряд

$$\widetilde{\tau}_k(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\widetilde{a}_\nu(\lambda_k)(z-\lambda_k)^\nu, \quad |z-\lambda_k|<\eta_k, \tag{2.10}$$

где

$$\widetilde{a}_\nu(\lambda_k)=\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left\{\frac{(z-\lambda_k)^{p_k}}{B_h(z)\widetilde{F}(z;\lambda_k)}\right\}_{z=\lambda_k} (\nu\geq 0;\ k\geq 1). \tag{2.11}$$

Введем наконец в рассмотрение полиномы

$$\widetilde{q}_k(z)=\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\widetilde{a}_\nu(\lambda_k)(z-\lambda_k)^\nu \quad (k=1,2,\cdots) \tag{2.12}$$

и последовательность $\{\widetilde{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$ аналитических и ограниченных в полосе $S_h$ функций, положив

$$\widetilde{\Omega}_k(z)\equiv\frac{(z-\lambda_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!}\frac{\widetilde{q}_k(z)}{\widetilde{\tau}_k(z)}\equiv$$

$$\equiv\frac{B_h(z)\widetilde{F}(z;\lambda_k)}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\frac{\widetilde{a}_\nu(\lambda_k)}{(z-\lambda_k)^{p_k-\nu+1-s_k}} \quad (k=1,2,\cdots). \tag{2.13}$$

Рассуждая как и в работах [1], [13], получим следующее утверждение.

Лемма 5. *Функции системы $\{\widetilde{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$ обладают следующими интерполяционными свойствами*

$$\widetilde{\Omega}_k^{(s_j-1)}(\lambda_j)=\delta_{kj}=\begin{cases}1, & k=j\\ 0, & k\neq j\end{cases} \quad (k,\ j=1,2,\cdots). \tag{2.14}$$

2.3. (а). Последовательность комплексных чисел $\{\lambda_k\}_1^\infty$ ($\{\lambda_k\}\subset S_h$) условимся относить к классу $\Lambda_h(P,\delta)$ ($0<\delta\leq 1$, $P<+\infty$), если она удовлетворяет условиям:

$$\inf_{k\geq 1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ \lambda_j\neq\lambda_k}}^{\infty}\left|\frac{\operatorname{sh}\left[\dfrac{\pi}{4h}(\lambda_k-\lambda_j)\right]}{\operatorname{ch}\left[\dfrac{\pi}{4h}(\lambda_k+\overline{\lambda}_j)\right]}\right|\right\}\geq\delta, \tag{2.15}$$

$$\sup_{k\geq 1}\{p_k\}=P. \tag{2.16}$$

(б). При помощи отображения $e^{\pi z/(2h)}$ из известного результата (см. [14], лемму 3.1) легко получается следующая

Лемма 6. *Если последовательность* $\{z_n\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию* (2.15), *то*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} e^{\pi z_j/(2h)} \operatorname{Re} e^{-\pi z_n/(2h)}}{|e^{\pi z_n/(2h)} + \bar{e}^{\pi z_j/(2h)}|^2} \leqslant \frac{1}{4}\left(1+2\log\frac{1}{\delta}\right) (n \geqslant 1). \qquad (2.17)$$

Введем теперь в рассмотрение функции

$$\bar{\Phi}(z, \lambda_k) = \frac{1}{\bar{F}(z; \lambda_k)} \ (k = 1, 2, \cdots), \qquad (2.18)$$

и заметим, что ввиду (2.9)

$$\tilde{\tau}_k(z) = \tilde{\Phi}(z; \lambda_k) \frac{(z-\lambda_k)^{p_k}}{B_k(z)} \ (k = 1, 2, \cdots). \qquad (2.19)$$

Отметим также, что в силу (2.6), (2.8) и (2.18)

$$\bar{\Phi}(z; \lambda_k) = \frac{\exp\{\tilde{\Psi}_n(z)\}}{G_k(z)}, \text{ при } \lambda_k = z_n \ (k \geqslant 1). \qquad (2.20)$$

Лемма 7. *Если последовательность* $\{\lambda_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию* (2.15), *то справедливы неравенства*

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda_k\right)\right]^r \left|\tilde{\Phi}^{(r)}(\lambda_k; \lambda_k)\right| \leqslant M_r^2(\delta) \ (r \geqslant 0, \ k \geqslant 1), \qquad (2.21)$$

*где* $M_r^2(\delta)$ *зависит исключительно от* $r$ *и* $\delta$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.

(b). Теперь дадим оценки коэффициентов разложения (2.10) в предположении, что последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \Delta_h(P; \delta)$.

Лемма 8. *Если при некоторых* $P(1 \leqslant P < +\infty$ *и* $\delta(0 < \delta < 1)$ *последовательность* $\{\lambda_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условиям* (2.15) *и* (2.16), *то для коэффициентов разложения* (2.10) *справедливы неравенства*

$$|\bar{a}_\nu(\lambda_k)| \leqslant C_2(\delta; P) \left|\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda_k\right)\right|^{p_k-\nu} (0 \leqslant \nu \leqslant p_k - 1, \ k \geqslant 1), \qquad (2.22)$$

*где* $C_2(\delta, P)$ *зависит исключительно от* $\delta$ *и* $P$.

Доказательство. В силу (2.19)

$$\tilde{\tau}_k^{(\nu)}(z) = \sum_{s=0}^{\nu} C_\nu^s \frac{d^s}{dz^s}\left\{\frac{(z-\lambda_k)^{p_k}}{B_k(z)}\right\} \tilde{\Phi}^{(\nu-s)}(z; \lambda_k) \ (\nu \geqslant 0),$$

откуда на основании леммы 3.2 из работы [14] и (2.21) заключаем, что

$$|\tilde{\tau}_k^{(\nu)}(\lambda_k)| \leqslant \left\{\sum_{s=0}^{\nu} C_\nu^s s! A M_{\nu-s}^2(\delta)\right\} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda_k\right)\right]^{p_k-\nu} \qquad (2.23)$$

Учитывая еще равенства

$$\tilde{a}_\nu(\lambda_k)=\frac{1}{\nu!}\tilde{\tau}_k^{(\nu)}(\lambda_k)\ (\nu\geqslant 0,\ k\geqslant 1),$$

ввиду условия (2.16), из (2.23) получаем неравенства (2.22).

2.4. Пусть $\bar{l}^\infty\{\lambda_k\}$ — класс последовательностей комплексных чисел $\{\gamma_k\}_1^\infty$ таких, что

$$\sup_{k\geqslant 1}\left\{|\gamma_k|\left|\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda_k\right)\right|^{s_k-1}\right\}<+\infty.$$

Через $H^\infty[S_h]$ обозначим класс ограниченных и голоморфных функций в $S_h$.

Теорема 2. *Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — последовательность комплексных чисел из $S_h$, которая удовлетворяет условию*

$$\sup_{k\geqslant 1}\{p_k\}<+\infty. \tag{2.24}$$

*Тогда имеют место следующие утверждения:*

1°. *Для справедливости равенства*

$$\{(f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty : f\in H^\infty[S_h]\}=\bar{l}^\infty\{\lambda_k\}$$

*необходимо и достаточно условие*

$$\inf_{k\geqslant 1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ \lambda_j\neq\lambda_k}}^\infty\left|\frac{\operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{4h}(\lambda_k-\lambda_j)\right]}{\operatorname{ch}\left[\frac{\pi}{4h}(\lambda_k-\bar{\lambda}_j)\right]}\right|\right\}>0. \tag{2.25}$$

2°. *Если $\{\gamma_k\}_1^\infty\in\bar{l}^\infty\{\lambda_k\}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, то при условии (2.25) ряд*

$$f(z)=\sum_{k=1}^\infty\gamma_k\tilde{\Omega}_k(z), z\in S_h, \tag{2.26}$$

*сходится абсолютно и равномерно внутри полосы $S_h$ и определяет функцию $f\in H^\infty[S_h]$, удовлетворяющую следующим интерполяционным данным:*

$$f^{(s_k-1)}(\lambda_k)=\gamma_k\ (k=1,\ 2,\cdots). \tag{2.27}$$

Доказательство. Докажем утверждение 1°, отметив, что ввиду (2.24) и (2.25) $\{\lambda_k\}_1^\infty\in\Delta_h(P,\ \delta)$ при некоторых $\delta\,(0<\delta<1)$ и $P(1\leqslant P<+\infty)$.

Ввиду (2.8)

$$|\tilde{\Omega}_k(z)|\leqslant\frac{|\tilde{F}_n(z)|}{(s_k-1)!}\left|\frac{\operatorname{Re}e^{\pi\lambda_k/(2h)}}{1+e^{\pi\lambda_k/(2h)}}\cdot\frac{1+e^{\pi z/(2h)}}{e^{\pi z/(2h)}+e^{\pi\bar{\lambda}_k/(2h)}}\right|^2\times$$

$$\times\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}|\tilde{a}_\nu(\lambda_k)|\left|\frac{e^{\pi z/(2h)}-e^{\pi\lambda_k/(2h)}}{e^{\pi z/(2h)}+e^{\pi\bar{\lambda}_k/(2h)}}\right|^{p_k-s_k-\nu+1}|z-\lambda_k|^{-p_k+s_k+\nu-1}. \tag{2.28}$$

Легко показать, что существует число $\beta > 1$, не зависящее от $z$ и $k$ такое, что

$$\left|\frac{e^{\pi z/(2h)} - e^{\pi\lambda_k/(2h)}}{z-\lambda_k}\right| \cdot \frac{1}{\left|e^{\pi z/(2h)} + e^{\pi\bar{\lambda}_k/(2h)}\right|} \leqslant \beta\left[\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda_k\right)\right]^{-1}.$$

Отсюда, учитывая оценки (2.22), получим

$$\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\left|\tilde{a}_\nu(\lambda_k)\right|\left|\frac{e^{\pi z/(2h)} - e^{\pi\lambda_k/(2h)}}{e^{\pi z/(2h)} + e^{\pi\bar{\lambda}_k/(2h)}}\right|^{p_k-s_k-\nu+1} |z-\lambda_k|^{-p_k+s_k+\nu-1} \leqslant$$

$$\leqslant P\beta^P C_2(\delta;\ P)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda_k\right)\right]^{s_k-1}.$$

Из этих оценок на основании (2.28) имеем

$$\left|\gamma_k\left[\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda_k\right)\right]^{1-s_k}\tilde{\Omega}_k(z)\right| \leqslant A(\delta;\ P)\,\|\{\gamma_k\}_1^\infty\|_\infty \times$$

$$\times |G_k(z)|\cdot|\tilde{F}_n(z)|,\quad z\in S_h\ \ (k\geqslant 1), \tag{2.29}$$

где $A(\delta;\ P)$ — положительная постоянная, зависящая исключительно от $\delta$ и $P$, а

$$\|\{\gamma_k\}_1^\infty\|_\infty = \sup_{k\geqslant 1}\{|\gamma_k|\} < +\infty.$$

Далее, при $\lambda_k = z_n$

$$\left|\frac{\operatorname{Re} e^{\pi\lambda_k/(2h)}}{1+e^{\pi\lambda_k/(2h)}}\cdot\frac{e^{\pi z/(2h)}+1}{e^{\pi z/(2h)}+e^{\pi\bar{\lambda}_k/(2h)}}\right| =$$

$$= \left|\frac{\operatorname{Re} e^{\pi z_n/(2h)}}{1+e^{\pi z_n/(2h)}}\cdot\frac{e^{\pi z/(2h)}+1}{e^{\pi z/(2h)}+e^{\pi\bar{z}_n/(2h)}}\right|\ (k=1,2,\cdots). \tag{2.30}$$

С другой стороны ,в силу условия (2.24) число $z_n$ появляется в последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ не более, чем $P$ раз. Из оказанного на основании (2.29) заключаем, что ряд (2.26) мажорируется рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} PA(\delta;\ P)\,\|\{\gamma_k\}_1^\infty\|_\infty\left|\left(\frac{\operatorname{Re} e^{\pi z_n/(2h)}}{1+e^{\pi z_n/(2h)}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\ \frac{e^{\pi z/(2h)}+1}{e^{\pi z/(2h)}+e^{\pi\bar{z}_n/(2h)}}\right)^2\tilde{F}_n(z)\right|,\quad z\in S_h. \tag{2.31}$$

Сходимость ряда

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{Re} e^{\pi z_n/(2h)}}{1+e^{\pi z_n/(2h)}}\cdot\frac{e^{\pi z/(2h)}+1}{e^{\pi z/(2h)}+e^{\pi\bar{z}_n/(2h)}}\right)^2\tilde{F}_n(z),\ z\in S_h, \tag{2.32}$$

доказывается также на основании неравенства (1.38).

Нетрудно убедиться далее, что при $z \in S_h$

$$\left| \frac{\operatorname{Re} e^{\pi z_n/(2h)}}{1+e^{\pi z_n/(2h)}} \cdot \frac{e^{\pi z/(2h)}+1}{e^{\pi z/(2h)}+e^{\pi \bar{z}_n/(2h)}} \right|^2 <$$

$$\leqslant 2\operatorname{Re}\left( \frac{\operatorname{Re} e^{\pi z_n/(2h)}}{1+|e^{\pi z_n/(2h)}|^2} \cdot \frac{1+e^{\pi z/(2h)}\, e^{\pi z_n/(2h)}}{e^{\pi z/(2h)}+e^{\pi \bar{z}_n/(2h)}} \right),$$

откуда на основании (2.7) и (1.38) следует, что ряд (2.32) сходится абсолютно и равномерно внутри полосы $S_h$ и определяет функцию $\varphi \in H^\infty[S_n]$.

Из приведенных выше рассуждений, на основании (2.29) и (2.30) заключаем, что ряд (2.26) сходится абсолютно и равномерно внутри полосы $S_h$ и определяет функцию $f \in H^\infty[S_h]$.

Наконец, равенства (2.27) вытекают из леммы 5, и утверждение 2° доказано.

Из утверждения 2° следует, что при $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \Delta_h(P;\ \delta)$

$$\left\{\left( f^{(s_k-1)}(\lambda_k) \left| \cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda_k\right)\right|^{s_k-1}\right)_{k=1}^\infty : f \in H^\infty[S_h]\right\} \supset l^\infty. \qquad (2.33)$$

Обратно, пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \Delta_h(P,\ \delta)$. Поскольку

$$f^{(s_k-1)}(\lambda_k) = \frac{(s_k-1)!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-\lambda_k| = h - |\operatorname{Im}\lambda_k|} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-\lambda_k)^{s_k}},$$

то

$$|f^{(s_k-1)}(\lambda_k)| < \frac{(s_k-1)}{2\pi} \|f\|_\infty \int\limits_0^{2\pi} \frac{h-|\operatorname{Im}\lambda_k|}{(h-|\operatorname{Im}\lambda_k|)^{s_k}}\, d\theta, \qquad (2.34)$$

и, следовательно

$$|f^{(s_k-1)}(\lambda_k)|\,(h-|\operatorname{Im}\lambda_k|)^{s_k-1} < (s_k-1)!\, \|f\|_\infty.$$

Но очевидно $h-|\operatorname{Im}\lambda_k| \geqslant 1/h \cos(\pi/(2h)\operatorname{Im}\lambda_k)$, и значит в силу 2.34)

$$|f^{(s_k-1)}(\lambda_k)| \left[\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda_k\right)\right]^{s_k-1} \leqslant h^{s_k-1}(s_k-1)!\, \|f\|_\infty.$$

Таким образом

$$\left\{\left( f^{(s_k-1)}(\lambda_k) \left[\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda_k\right)\right]^{s_k-1}\right)_{k=1}^\infty : f \in H^\infty[S_h]\right\} \subset l^\infty. \qquad (2.35)$$

Из (2.33) и (2.35) следует достаточность утверждения 1°, а необходимость доказывается так же как и аналогичное утверждение для круга (см. [6], гл. 10).

Ереванский государственный университет

Поступила 13.IV.1987

Կ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ. Կիսահարթությունում և շերտում $H^\infty$ դասերում բազմապատիկ ինտերպոլյացիոն խնդրի էֆեկտիվ լուծում *(ամփոփում)*

*Աշխատանքում կառուցվում են ֆունկցիաների համակարգեր, որոնց միջոցով ներկայացվում են կիսահարթությունում և շերտում* $H^\infty$ *դասերում բազմապատիկ ինտերպոլյացիոն խնդրի լուծումները։*

K. H. KAZARIAN. *The effective solution of the multiple interpolation problem in the classes $H^\infty$ in the halfplane or in the strip* (summary)

Special system of functions are constructed. The solutions of the multiple interpolation problem im the classes $H^\infty$ in a halfplane or in a strip are represented by this systems.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джербашян*. Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе $H_2$, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», IX, № 5, 1974, 339—373.
2. *W. K. Hayman*. Interpolation by bounded functions, Ann. Inst. Fourier (Greno ble), 8, 1959, 277—290.
3. *D. J. Newman*. Interpolation in $H^\infty$, Trans. Amer Math. Soc., 92, 1959, 501—507.
4. *L. Carleson*. An interpolation problem for bounded analytic functions, Amer. J. Math., 80, 1958, 921—930.
5. *H. S. Shapiro, A. L. Shields*. On some interpolation problems for analytic functions, Amer. J. Math., 83, 1961, 513—522.
6. *К. Гофман*. Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, М., 1963.
7. *P. Duren*. Theory of $H^p$-spaces, Ac. Press, New York and London, 1970.
8. *В. П. Кабайла*. Интерполяционные последовательности для классов $H_p$ в случае $p<1$, Лит. матем. ж., III, № 1, 1963, 141—147.
9. *J. Rosenbaum*. Simultanous interpolation in $H_2$, Michigan Math. J., 14, 1967, 65—70.
10. *J. Rosenbaum*. Simultaneous ntepolation in $H_2$, II, Pacific J. Math., 27, 1968, 608—610.
11. *B. L. Chalmers*. Some interpolation problem in Hilbert spaces, Michigan Math. J., 18, 1971, 41—49.
12. *А. М. Джрбашян*. Кратная интерполяция в классе $H^p$, $0 < p \leqslant +\infty$, ДАН СССР, 234, №6, 1977, 1253—1256.
13. *М. М. Джрбашян*. Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классе $H^p$, ДАН СССР, 234, № 3, 1977, 517—520.
14. *М. М. Джрбашян*. Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классе $H^p$ в полуплоскости, Изв. АН СССР, «Матеметика», 43, № 6, 1978, 1322—1384.
15. *Ф. А. Шамоян*. Теоремы вложения, связанные с задачей кратного интерполирования в пространствах $H^p$, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XI, № 2, 1976, 124—131.
16. *Г. М. Айрапетян*. О базисе рациональных функций в подпространствах Харди $H^p$ $(1<p<+\infty)$, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», УШ, № 6, 1973, 429—450.
17. *Г. М. Айрапетян*. О базисности некоторых биортогональных систем в комплексной области, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», X, № 2, 1975, 133—152

6—707

18. *Г. М. Айрапетян*. Кратная интерполяция и базисность некоторых биортогольных систем рациональных функций в классах $H_p$ Харди. Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XII, № 4, 1977, 262—277.

19. *В. М. Мартиросян*. Базисность некоторых систем аналитических функций и решение интерполяционной задачи в области угла, ДАН Арм. ССР, 63, № 5, 1976, 278—283.

20. *В. М. Мартиросян*. Замыкания и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XII, № 5—6, 1978, 490—531.

21. *В. М. Мартиросян*. Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в $H_p(\alpha, \omega)$, ДАН СССР, 245, № 1, 1979, 24—27.

22. *Ш. А. Григорян*. Об одном свойстве функций из $H^p$ $(0<p<+\infty)$ в полуплоскости, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XII, № 5, 1977, 335—340.

23. *С. А. Виноградов, Е. А. Горин, С. В. Хрущев*. Свободная интерполяция в $H^\infty$ методом Петера Джонса, Записки научных семинаров ЛОМИ.

24. *В. М. Мартиросян*. Эффективное решение задачи кратной интерполяции в $H^\infty$ применением метода биортогонализации М. М. Джрбашяна, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XVI, № 5, 1981, 339—357.

25. *К. Г. Казарян*. Эффективное решение кратной интерполяционной задачи в классах $H^\infty$ в полуплоскости и в полосе, ДАН Арм. ССР, LXXIX, № 4, 1984, 163—168.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXV, № 1, 1990 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.53

Г. М. ГУБРЕЕВ

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПА ДЖРБАШЯНА И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Теория классов Харди в угловых областях и со степенными весами была развита в цикле работ М. М. Джрбашяна и подробно изложена в монографии [1]. В заметке основные факты этой теории распространены на случай произвольных весов Макенхаупта: построены интегральные операторы, которые в случае степенных весов совпадают с преобразованиями М. М. Джрбашяна с ядрами Миттаг-Леффлера. Полученные результаты применяются к решению кратных интерполяционных задач в классах целых функций порядка $\rho \geqslant 1/2$, квадрат модуля которых суммируем с произвольным весом Макенхаупта $w^{-2}(z)$ на правильной системе лучей $\Gamma_\rho$ (в статье они обозначаются через $A^2_\omega(\Gamma_\rho, w^{-2})$ и представляют собой обобщение соответстующих классов М. М. Джрбашяна [1]). Эта тематика имеет давнюю историю и берет свое начало с работы [2], а в последствии такого рода интерполяционные задачи ($\rho = 1$, $w^2(z) \equiv 1$) исследсвались в [3]. В случае степенного веса и произвольного $\rho \geqslant 1/2$ постановка задач принадлежит М. М. Джрбашяну и первоначальные результаты изложены в статьях [4—9], где рассматривались и другие интерполяционные проблемы. Отметим также работу [10], в которой теорема Б. Я. Левина [3] обобщается на случай весов Макенхаупта.

Рассматриваемые здесь интерполяционные задачи исследуются с помощью теорем п. 1—2 настоящей статьи и операторного метода проектирования, который возник в работах Б. С. Павлова [11—12] при решении задачи о безусловной базисности систем экспонент, а в дальнейшем применялся к изучению базисных свойств более общих семейств функций [13—17]. В работах [13], [17] были сформулированы соответствующие интерполяционные следствия.

1. Как уже отмечалось, все теоремы этого пункта в случае $w^2(z) = |z|^\omega$ $(-1 < \omega < 1)$ впервые были доказаны М. М. Джрбашяном, причем его доказательства опираются на асимптотические свойства функций типа Миттаг-Леффлера и получены с помощью тонких аналитических методов теории функций в классическом смысле. Доказательства теорем 1—3 основаны на других соображениях и возникли в результате переосмысливания некоторых фактов из книги [1] с позиции теории операторов.

Произвольному числу $\rho > 1/2$ отнесем контур $\gamma_\rho$ в комплексной плоскости $\mathbf{C}$, представляющий собой угол с вершиной в нуле, аргументы точек сторон которого равны $-\pi/\rho$, 0 соответственно. Для образовавшихся областей будем использовать обозначения:

$$\gamma_\rho^- = \{z \in \mathbf{C} : -\pi/\rho < \arg z < 0\}, \quad \gamma_\rho^+ = \{z \in \mathbf{C} : 0 < \arg z < \pi/\alpha\},$$

$$\alpha = \rho(2\rho - 1)^{-1}. \tag{1}$$

При $\rho = 1/2$ под контуром $\gamma_\rho$ понимаем положительный луч $\mathbf{R}_+$ и считаем, что $\gamma_\rho^- = \mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_+$. Если на $\gamma_\rho$ задан вес $p(z) \geqslant 0$, то через $L_2(\gamma_\rho, p)$ будем обозначать пространство функций $f$ с нормой $\|f\|^2 = \int_{\gamma_\rho} |f(z)|^2 p(z)\,|dz| < \infty$. Напомним [18], что вес $p(z)$ называется весом Макенхаупта на контуре $\gamma_\rho$, если

$$\sup_{z\in\gamma_\rho} \sup_{r>0} \left\{ r^{-1} \int_{B(z,r)\cap\gamma_\rho} p(\lambda)\,|d\lambda|\, r^{-1} \int_{B(z,r)\cap\gamma_\rho} p^{-1}(\lambda)\,|d\lambda| \right\} < \infty, \quad (A^2_{\gamma_\rho})$$

где $B(z, r)$ — круг с центром $z$ и радиуса $r$. И, наконец, ветви встречающихся в статье степенных функций, в областях $\gamma_\rho^\pm$ фиксируются условиями изменения аргумента (1).

Предложение 1. *Пусть $\rho \geqslant 1/2$, а $w^2(z)$ — произвольный вес Макенхаупта на контуре $\gamma_\rho$. Тогда справедливы утверждения:*

1) *если $\rho > 1/2$, то существует единственная, с точностью до постоянного унимодулярного множителя, аналитическая в области $\gamma_\rho^-$ функция $w_-(\lambda)$, имеющая почти всюду некасательные предельные значения при $\lambda \to z$ и такие, что $w(z) \overset{\text{п.в.}}{=} |w_-(z)|\ (z \in \gamma_\rho)$. Далее, функция $w_-(\lambda^{1/\rho})$ является внешней [19] в нижней полуплоскости и имеет место представление*

$$w_-(\lambda) = \lambda^{\frac{1+\rho}{2}} \int_0^\infty e^{-it\lambda^\rho} y(t)\,dt, \quad \lambda \in \gamma_\rho^-$$

*с некоторой функцией $y \in L_2^{\text{loc}}(\mathbf{R}_+)$;*

2) *если $\rho = 1/2$, то предыдущее утверждение остается в силе, причем модули граничных значений аналитической в $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_+$ функции $w_-(\lambda)$ на верхнем и нижнем берегу разреза почти всюду совпадают:*

$$|w_-(x + i0)| = |w_-(x - i0)| = w(x), \quad x \in \mathbf{R}_+.$$

Рассмотрим теперь следующую конструкцию. Произвольному весу Макенхаупта $w^2(z)$ на контуре $\gamma_\rho(\rho \geqslant 1/2)$ в силу предложения 1 отвечает в существенном единственная функция $y \in L_2^{\text{loc}}(\mathbf{R}_+)$. Эта функция, в свою очередь, порождает решение $y_{\rho,w}(\lambda, t)$ интегрального уравнения

$$y_{\rho, w}(\lambda, t) - \lambda e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\right) \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{\rho}-1} y_{\rho, w}(\lambda, s)\, ds = y(t), t \geqslant 0, \lambda \in \mathbf{C}. \tag{2}$$

Таким образом, каждый такой вес $w^2(z)$ на контуре $\gamma_\rho$ индуцирует в $L_2(\mathbf{R}_+)$ интегральный оператор

$$(D_{\rho, w} f)(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y_{\rho, w}(z, t) f(t)\, dt, \quad z \in \gamma_\rho.$$

Теорема 1. *Пусть $w^2(z)$ — вес на контуре $\gamma_\rho$ ($\rho > 1/2$), удовлетворяющий условию $(A^2_{\gamma_\rho})$. Тогда оператор $D_{\rho, w}$ непрерывно отображает пространство $L_2(\mathbf{R}_+)$ в $L_2(\gamma_\rho, w^{-2})$. Кроме того, он ограничен снизу и имеет место формула обращения*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{\gamma_\rho} (D_{\rho, w} f)(z)\, w_-^{-1}(z)\, z^{\frac{\rho-1}{2}} e^{-iz^\rho t}\, dz, \quad t \geqslant 0$$

Замечание. В предельном случае $\rho = 1/2$ в этой формуле интегрирование ведется по „двойному" лучу $\mathbf{R}_+$, то есть по границе области $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_+$. Другими словами, она может быть записана в виде

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} (D_{\frac{1}{2}, w} f)(x^2)\, w_-^{-1}(x^2)\, x^{1/2} e^{-ix^2 t}\, dx, \quad t \geqslant 0.$$

В случае степенного веса $w^2(z) = |z|^\omega$ $(-1 < \omega < 1)$ оператор $D_{\rho, w}$ совпадает с преобразованием М. М. Джрбашяна. В самом деле, поскольку для степенного веса $w_-(\lambda) = \lambda^{\omega/2}$, то в качестве $y$ можно взять функцию [20]:

$$y(t) = \Gamma^{-1}(\mu)\, t^{\mu-1}, \quad \mu = (2\rho)^{-1}(1 + \rho - \omega).$$

Поэтому решение уравнения (2) выражается через функцию Миттаг-Леффлера:

$$y_{\rho, w}(\lambda, t) = t^{\mu-1} E_\rho\left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda t^{\frac{1}{\rho}}; \mu\right), \quad E_\rho(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})},$$

$$\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{5} + \frac{1}{\rho}.$$

Таким образом, в этом случае ядро оператора $D_{\rho, w}$ порождается функцией типа Миттаг — Леффера, а теория таких операторов была построена в [1].

Естественный вопрос об области значений операторов $D_{\rho, w}$ приводит к понятию классов Харди с весом Макенхаупта. Для любого веса $w^2(z)$, удовлетворяющего условию $(A^2_{\gamma_\rho})$, определим класс Харди $H^2(\gamma_\rho^-, w^{-2})$ как совокупность всех аналитических в области $\gamma_\rho^-$ функций $F$, для которых конечна величина

$$\|F\|_{-}^{2} = \sup_{-\pi/\rho<\varphi<0} \int_{0}^{\infty} |F(re^{i\varphi})|^{2} \, |w_{-}(re^{i\varphi})|^{-2} \, dr < \infty,$$

где функция $w_{-}$ отвечает $w^{2}(z)$ в смысле предложения 1. Совершенно аналогично, этому же весу отвечает аналитическая в $\gamma_{\rho}^{+}$ $(\rho > 1/2)$ функция $w_{+}(\lambda)$, которая после замены $\lambda = z^{1/\alpha}$ $(\mathrm{Im}\, z > 0)$ становится внешней в верхней полуплоскости и такая, что

$$w(x^{1/\alpha}) \overset{\text{п.в.}}{=} |w_{+}((x+i0)^{1/\alpha})|, \; x \in \mathrm{R}, \; \alpha = \rho(2\rho-1)^{-1}.$$

По определению, класс $H^{2}(\gamma_{\rho}^{+}, w^{-2})$ состоит из аналитических в $\gamma_{\rho}^{-}$ функций $F$, удовлетворяющих условию

$$\|F\|_{+}^{2} = \sup_{0<\varphi<\pi/\alpha} \int_{0}^{\infty} |F(re^{i\varphi})|^{2} \, |w_{+}(re^{i\varphi})|^{-2} \, dr < \infty, \; \rho > 1/2.$$

Отметим, что при $\rho = 1$, $w^{2}(z) \equiv 1$ введенные пространства совпадают с обычными классами Харди $H_{\pm}^{2}$ в верхней и нижней полуплоскостях соответственно [1]. Как и в случае степенного веса $w^{2}(z) = |z|^{\nu}$ [1] [21—22] такие классы обладают всеми основными свойствами классов Харди $H_{\pm}^{2}$. В частности, элементы из $H^{2}(\gamma_{\rho}^{\pm}, w^{-2})$ стандартным образом отождествляются с функциями пространства $L_{2}(\gamma_{\rho}, w^{-2})$, которое распадается в прямую сумму своих подпространств:

$$L_{2}(\gamma_{\rho}, w^{-2}) = H^{2}(\gamma_{\rho}^{+}, w^{-2}) \dotplus H^{2}(\gamma_{\rho}^{-}, w^{-2}), \; \rho > 1/2.$$

Теорема 2. *Если $\rho > 1/2$, то оператор $D_{\rho, w}$, порожденный весом Макенхаупта на контуре $\gamma_{\rho}$ пространство $L_{2}(\mathrm{R}_{+})$ отображает на класс Харди $H^{2}(\gamma_{\rho}^{+}, w^{-2})$. Если $\rho = 1/2$, то $D_{\rho, w}$ отображает $L_{2}(\mathrm{R}_{+})$ на все пространство $L_{2}(\mathrm{R}_{+}, w^{-2})$.*

Введем теперь в рассмотрение контур $\Gamma_{\rho}$, пологая, что $\Gamma_{\rho} = \gamma_{\rho}$ при $1/2 \leqslant \rho \leqslant 1$, а при $\rho > 1$ $\Gamma_{\rho}$ получается из $\gamma_{\rho}$ присоединением $n = [2\rho] - 1$ лучей, выходящих из начала координат и лежащих в $\gamma_{\rho}^{+}$. При этом должно соблюдаться условие: каждый из $n+1$ углов, на которые разбивается $\gamma_{\rho}^{+}$, имеет раствор $< \pi/\rho$. Далее, через $h_{F}(\theta)$ обозначим индикатор целой функции $F$ при порядке $\rho$.

Теорема 3. *Пусть $w^{2}(z)$ — вес Макенхаупта на контуре $\gamma_{\rho}(\rho \geqslant 1/2)$. Функция $F$ тогда и только тогда допускает интегральное представление вида*

$$F(z) = \int_{0}^{\sigma} y_{\rho, w}(z, t) \, f(t) \, dt, \; f \in L_{2}(0, \sigma),$$

*когда выполнены условия:*

1) *$F$ — целая функция порядка $\rho$, нормального типа и* $\int\limits_{\Gamma_\rho} |F(z)|^2 |w_+(z)|^{-2} |dz| < \infty$;

2) $h_F(-\pi/2\rho) \leqslant \sigma$ *при* $\rho \neq 1$ *и* $h_F(-\pi/2) \leqslant \sigma$, $h_F(\pi/2) \leqslant 0$, *если* $\rho = 1$.

В дальнейшем пространство целых функций порядка $\rho$, описание которого дается теоремой 3, будем обозначать через $A^2_\sigma(\Gamma_\rho, w^{-2})$, а норму в нем определим равенством

$$\|F\|^2 = \int\limits_{\Gamma_\rho} |F(z)|^2 |w_+(z)|^{-2} |dz|.$$

2. В задачах интерполяции целыми функциями из классов $A^2_\sigma(\Gamma_\rho, w^{-2})$ важную роль играет следующий результат. Следуя М. М. Джрбашяну, для произвольной комплексной последовательности $\{z_j\}_1^\infty$ через $s_k(p_k)$ обозначим кратность появления $z_k$ на отрезке $\{z_j\}_1^k$ (во всей последовательности).

Теорема 4. Пусть $\{z_j\}_1^\infty$ — последовательность из области $\gamma_\rho^-$ $(\rho \geqslant 1/2)$, $w^2(z)$ — вес Макенхаупта на контуре $\gamma_\rho$. Тогда семейство рациональных дробей $\{(s_k-1)!(z-z_k)^{-s_k}\}_1^\infty$ образует безусловный базис замыкания своей линейной оболочки в пространстве $L_2(\gamma_\rho, w^2)$ тогда и только тогда, когда $\sup\limits_k p_k < \infty$ и последовательность $\{z_j^\rho\}_1^\infty$ (из нижней полуплоскости) удовлетворяет условию Карлесона [19].

С помощью специальных операторов преобразования рассматриваемая задача о базисности сводится к аналогичной задаче в классе $H^2_-$ для семейства дробей с полюсами на множестве $\{z_j^\rho\}_1^\infty$. При $\rho > 1/2$ и $w^2(z) = |z|^\omega$ теорема 4 впервые была доказана в [21 — 22] методом биортогонализации М. М. Джрбашяна.

3. Пусть $\Lambda = \{\lambda_j\}_1^\infty$ — последовательность комплексных чисел, занумерованная в порядке неубывания модулей, $s_k$, $p_k$ — уже упоминавшиеся ее целочисленные параметры. Через $l^2\{b_j\}$ обозначим весовое пространство последовательностей $C = \{c_j\}_1^\infty$ с нормой $\|C\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 b_j < \infty$, $b_j > 0$. Далее, по любому весу Макенхаупта $w^2(z)$ на контуре $\gamma_\rho$ построим класс $A^2_\sigma(\Gamma_\rho, w^{-2})$ и рассмотрим на нем оператор $J_\Lambda$:

$$J_\Lambda F = \{F^{(s_j-1)}(\lambda_j)\}_1^\infty, \quad F \in A^2_\sigma(\Gamma_\rho, w^{-2}).$$

Вопрос о разрешимости интерполяционных задач вида $F^{(s_j-1)}(\lambda_j) = c_j$ $(1 \leqslant j < \infty)$ в классах $A^2_\sigma(\Gamma_\rho, w^{-2})$ сформулируем следующим образом: какими должны быть $\Lambda$ и весовая последовательность $\{b_j\}_1^\infty$, чтобы оператор $J_\Lambda$ взаимно-непрерывно и взаимно-однозначно отображал пространство $A^2_\sigma(\Gamma_\rho, w^{-2})$ на $l^2\{b_j\}$? Здесь получен ответ на этот вопрос в предположении, что кратности $p_k$ ограничены в совокупности: $\sup_k p_k < \infty$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\Lambda \subset \gamma_\rho^+$ $(\rho > 1/2)$ и не „сильно прижимается" к сторонам угла $\gamma_\rho$ в том смысле, что части последовательности $\Lambda$, попавшие в достаточно малые углы $0 < \arg\lambda < \varepsilon$ и $-\pi/\rho - \varepsilon < \arg\lambda < -\pi/\rho$ при некотором $\delta > 0$ подчинены условию:

$$\operatorname{Im}\lambda_k^\rho > \delta, \tag{3}$$

где под $\lambda^\rho$ понимается аналитическое продолжение в указанные углы стандартной ветви этой функции в области $\gamma_\rho^-$. При доказательстве теоремы 5 используются все предыдущие результаты.

Теорема 5. *Пусть* $\Lambda \subset \gamma_\rho^+$ *и выполнено условие* (3). *Если* $J_\Lambda$ *осуществляет изоморфное отображение* $A_\sigma^2(\Gamma_\rho, w^{-2})$ *на пространство* $l^2\{b_j\}$, *то*:

$$b_j \asymp |w_+(\lambda_j)|^{-2} \left(\operatorname{Im}\lambda_j^\alpha\, |\lambda_j|^{1-\alpha}\right)^{2s_j-1}, \quad \alpha = \rho(2\rho-1)^{-1}. \tag{4}$$

*Далее, оператор* $J_\Lambda$ *является изоморфизмом пространств* $A_\sigma^2(\Gamma_\rho, w^{-2})$ *и* $l^2\{b_j\}$ *с весом (4) тогда и только тогда, когда* $\Lambda^\alpha \overset{\mathrm{df}}{=} \{\lambda_k^\alpha : \lambda_k \in \Lambda\}$ *удовлетворяет условию Карлесона, а последовательность* $\Lambda$ *совпадает с множеством корней (с учетом кратностей) целой функции* $\Phi$, *удовлетворяющей требованиям*:

1) *функция* $z^{-1}(\Phi(z) - \Phi(0)) \in A_\sigma^2(\Gamma_\rho, w^{-2})$;

2) $\displaystyle\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log|\Phi(re^{-i\frac{\pi}{2\rho}})|}{r^\rho} = \sigma, \quad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log|\Phi(re^{i\gamma})|}{r^\rho} = 0, \quad \gamma = \pi - \pi/2\rho;$

3) *функция* $w^2(z)\,|\Phi(z)|^{-2}$ *является весом Макенхаупта на контуре* $\gamma_\rho$.

Замечание. Поскольку из требования 1) вытекает, что порядок $\Phi$ равен $\rho$, то второе условие требования 2) при $1/2 < \rho < 1$ выполняется автоматически.

Аналогичный результат имеет место и в том случае, когда последовательность $\Lambda \subset \gamma_\rho^-$ и лежит в произвольной криволинейной полосе вида

$$0 < \delta < |\operatorname{Im}\lambda_j^\rho| < \Delta, \quad 1 \leqslant j < \infty. \tag{5}$$

Теорема 5'. *Пусть* $\rho \geqslant 1/2$, $\Lambda \subset \gamma_\rho^-$ *и выполнено условие* (5). *Если* $J_\Lambda$ *изоморфно отображает* $A_\sigma^2(\Gamma_\rho, w^{-2})$ *на* $l^2\{b_j\}$, *то*

$$b_j \asymp |w_-(\lambda_j)|^{-2} \left(|\lambda_j|^{1-\rho}\right)^{2s_j-1}, \tag{6}$$

*Оператор* $J_\Lambda$ *является изоморфизмом пространств* $A_\sigma^2(\Gamma_\rho, w^{-2})$ *и* $l^2\{b_j\}$ *с весом* (6) *тогда и только тогда, когда последовательность* $\Lambda^\rho \overset{\mathrm{df}}{=} \{\lambda_k^\rho : \lambda_k \in \Lambda\}$ *отделима, т. е.* $\inf\limits_{\lambda_k \neq \lambda_j} |\lambda_k^\rho - \lambda_j^\rho| > 0$, *а* $\Lambda$

*совпадает с множеством корней целой функции $\Phi$, удовлетворяющей требованиям теоремы* 5.

Не останавливаясь на подробностях отметим, что как и в работах [2—10] здесь тоже можно выписать эффективные формулы, восстанавливающие интерполирующую функцию $F$ по последовательности $\{c_j\}_1^\infty \in l^2\{b_j\}$.

Результаты этой статьи докладывались на семинарах М. Г. Крейна (1986), М. М. Джрбашяна (1987), Н. К. Никольского—В. П. Хавина (1988). Пользуясь случаем, выражаю глубокую признательность участникам семинаров за обсуждение результатов и ценные замечания.

Одесский государственный
пединститут

Поступила 24. V. 1988

## ЛИТЕРАТУРА


1. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., «Наука», 1966.
2. *В. А. Котельников.* О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи (Материалы к I-му Всесоюзному съезду по вопросам связи...) М., Управление связи РКК, 1933.
3. *Б. Я. Левин.* Интерполяция функциями экспоненциального типа, матем. физика и функц. анализ, ФТИНТ АН УССР, вып. 1, 1969,, 136—146.
4. *М. М. Джрбашян.* Интерполяционные и спектральные разложения, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка, Изв. АН Арм. ССР,, «Математика», 19, № 2, 1984, 81—181.
5. *С. Г. Рафаелян.* О базисности некоторых систем целых функций, ДАН Арм. ССР, 70, № 4, 1980, 198—204.
6. *С. Г. Рафаелян.* Базисность некоторых биортогональных систем в $L^2(-\sigma,\sigma)$ с весом. Изв. АН Арм. ССР, «Математика», 19, № 3, 1984, 207—218.
7. *М. М. Джрбашян, С. Г. Рафаелян.* Интерполяционные теоремы и разложения по системам типа Фурье. ДАН СССР, 285, № 4, 1985, 782—787.
8. *M. M. Djrbashian and S. G. Raphaelian.* Interpolation theorems and expansions with respect to Fourier type systems, Journal of approximation theory, USA, № 5, 1987.
9. *М. М. Джрбашян, С. Г. Рафаелян.* Интерполяционные разложения в классах целых функций и порождаемые ими базисы Рисса, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», 22, № 1, 1987, 23—63.
10. *В. Б. Дыбин.* О базисах в пространствах аналитических функций со счетным множеством существенно особых точек, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», 21, № 6, 1986, 566—582.
11. *Б. С. Павлов.* Спектральный анализ дифференциального оператора с «размазанным» граничным условием, Проблемы матем. физики, ЛГУ, вып. 1, 1973, 101—119.
12. *Б С. Павлов.* Базисность систем экспонент и условие Макенхаупта, ДАН СССР, 247, № 1, 1979, 37—40.
13. *S. V. Hruscev, N. K. Nikolskii, B. S. Pavlov.* Unconditional bases of exponentials and reproducing kernels, Lecture Notes in Math., 864, 1981, 214—335.
14. *Г. М. Губреев.* Обобщенные преобразования Джрбашяна и их применения, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», 21, № 3, 1986, 306—310.
15. *Г. М. Губреев.* Базисность семейств функций типа Миттаг-Леффлера, преобразования Джрбашяна и условие Макенхаупта, Функц. анализ и его прилож., 21, № 3, 1987, 71—72.
16. *S. V. Hruscev.* Unconditional bases in $L_2(0, a)$, Preprint CdRM, Spain, 1985.

17. *Г. М. Губреев.* Базисность семейств функций типа Миттаг-Леффлера, преобразования Джрбашяна и весовые оценки интегралов типа Коши, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», 23, 1988.
18. *Е. М. Дынькин, Б. П. Осиленкер.* Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения, Итоги науки, матем. анализ, т. 21, 1983, 42—129.
19. *П. Кусис.* Введение в теорию пространств $H^p$, М., «Мир», 1984.
20. *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Таблицы интегральных пореобразований, М., «Наука», т. 1, 1969.
21. *В. М. Мартиросян.* Базисность некоторых систем аналитических функций и решение интерполяционной задачи в области угла, ДАН Арм. ССР, 63, № 5, 1976, 278—283.
22. *В. М. Мартиросян.* Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», 13, № 5—6, 1978, 490—531.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXV, № 1, 1990 Математика

УДК 517.53

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

И. В. ОСТРОВСКИЙ

# ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ ХАУСДОРФА

М. М. Джрбашян [1, 2] поставил ряд вопросов, связанных с развитой им в [3] теорией факторизации классов мероморфных функций. Настоящая заметка посвящена решению одного из них, который формулируется так. Пусть $\omega_1$, $\omega_2$ — неубывающие непрерывные на $[0, 1)$ функции, удовлетворяющие условиям

$$\omega_j(0)=1, \int_0^1 (\omega_j(t)-1)\, t^{-1}\, dt<\infty, \ j=1, 2. \tag{1}$$

Положим

$$\lambda_0=1, \ \lambda_n=\int_0^1 t^{n-1}\, \omega_1(t)\, dt \Big/ \int_0^1 t^{n-1}\, \omega_2(t)\, dt, \ n=1, 2, \cdots. \tag{2}$$

Верно ли, что если отношение $\omega_1/\omega_2$ невозрастает на $[0, 1)$, то числа $\{\lambda_n\}_0^\infty$ образуют разрешимую проблему моментов Хаусдорфа, т. е. существует неубывающая на $[0, 1]$ функция $\beta$ такая, что

$$\lambda_n=\int_0^1 t^n\, d\beta(t), \ n=0, 1, 2, \cdots? \tag{3}$$

Мы покажем, что представление (3) будет иметь место, если условие невозрастания $\omega_1/\omega_2$ заменить несколько более сильным: при достаточно малых $\varepsilon>0$ выполняется

$$\sup_{1>\tau>t} \frac{\omega_2(\tau(1-\varepsilon))}{\omega_2(\tau)} < \frac{\omega_1(t(1-\varepsilon))}{\omega_1(t)}, \ 0\leqslant t<1. \tag{4}$$

Это условие является в известной мере неулучшаемым.

Теорема 1. *Пусть* $\omega_1$, $\omega_2$ — *неубывающие непрерывные на* $[0, 1)$ *функции, удовлетворяющие условиям* (1), (4). *Тогда для чисел* $\lambda_n$, *определяемых равенствами* (2), *справедливо представление* (3). *Условие* (4) *нельзя заменить условием невозрастания отношения* $\omega_1/\omega_2$.

Положим $\Omega_j(y)=\omega_j(e^{-y})$, $0<y<\infty$. Функции $\Omega_j$ являются невозрастающими и удовлетворяют условиям

$$\Omega_j(+\infty)=1, \int_0^\infty (\Omega_j(y)-1)\, dy<\infty, \ j=1, 2. \tag{5}$$

Пусть

$$\lambda(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\,\Omega_1(y)\,dy \Big/ \int_0^\infty e^{-sy}\,\Omega_2(y)\,dy,\ s>0, \tag{6}$$

ясно, что $\lambda_n = \lambda(n)\,(n=1, 2, \cdots)$. Замечая, что в силу (5)

$$\int_0^\infty e^{-sy}\,\Omega_j(y)\,dy = \frac{1}{s} + \int_0^\infty e^{-sy}(\Omega_j(y)-1)\,dy = \frac{1}{s} + O(1),\ s\to+0,$$

видим, что $\lambda(+0) = 1 = \lambda_0$. Поэтому теорема 1 будет доказана, если докажем такой факт.

Теорема 2. *Пусть $\Omega_1$, $\Omega_2$ — невозрастающие непрерывные на $(0, \infty)$ функции, удовлетворяющие условиям (5) и, кроме того, условию: для достаточно малых $h>0$ выполняется*

$$\sup_{0<x<y} \frac{\Omega_2(x+h)}{\Omega_2(x)} \leqslant \frac{\Omega_1(y+h)}{\Omega_1(y)},\ 0<y<\infty. \tag{7}$$

*Тогда для функции $\lambda(s)$, определяемой равенством (6), справедливо представление*

$$\lambda(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\,d\alpha(y),\ s\geqslant 0, \tag{8}$$

*где $\alpha$ — неубывающая на $[0, \infty)$ функция, $\alpha(0)=0$, $\alpha(+\infty)=1$.*

*Утверждение теоремы перестает быть верным, если условие (7) заменить условием неубывания отношения $\Omega_1/\Omega_2$.*

Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма. *Пусть $\{p_k\}_0^\infty$ и $\{c_k\}_0^\infty$ — две последовательности положительных чисел. Если выполнено условие*

$$\max_{0\leqslant j\leqslant i}(c_{j+1}/c_j) \leqslant p_{i+1}/p_i,\ i=0, 1, 2, \cdots, \tag{9}$$

*то последовательность $\{x_k\}_0^\infty$, определяемая бесконечной системой линейных уравнений*

$$\begin{aligned} &p_0 = c_0 x_0, \\ &p_1 = c_1 x_0 + c_0 x_1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &p_i = c_i x_0 + c_{i-1} x_1 + \cdots + c_1 x_{i-1} + c_0 x_i, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{10}$$

*состоит из неотрицательных чисел.*

Доказательство. Умножим $i$-е уравнение системы (10) на $p_{i+1}$, а $i+1$-е — на $p_i$ и вычтем. Будем иметь

$$0 = (c_i p_{i+1} - c_{i+1} p_i)\,x_0 + (c_{i-1} p_{i+1} - c_i p_i)\,x_1 + \cdots +$$
$$+ (c_0 p_{i+1} - c_1 p_i)\,x_i - c_0 p_i x_{i+1}.$$

Так как, в силу условия (9), имеем

$$c_j p_{i+1} - c_{j+1} p_i = c_j p_i \left( \frac{p_{i+1}}{p_i} - \frac{c_{j+1}}{c_j} \right) \geqslant 0, \; j = 0, \cdots, i,$$

то справедливость утверждения леммы получается по индукции.

Докажем теорему 2. Пусть $h > 0$ столь мало, что выполняется (7). Положим

$$p_k = \Omega_1((k+1)h), \; c_k = \Omega_2((k+1)h), \; k = 0, 1, \cdots, \tag{11}$$

и обозначим через $\{x_k\}_0^\infty$ соответствующее решение системы (10). В силу леммы имеем $x_k \geqslant 0$, $k \geqslant 0$. Из условий, наложенных на функции $\Omega_j$, следует, что последовательности $\{p_k\}_0^\infty$ и $\{c_k\}_0^\infty$, определяемые (11), невозрастают и $\operatorname{Lim}_{k \to \infty} p_k = \operatorname{Lim}_{k \to \infty} c_k = 1$. Поэтому из (10) вытекает, что

$$p_i/c_i \geqslant x_0 + x_1 + \cdots + x_i, \; i = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$1 \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} x_k.$$

Так как условия (5) обеспечивают сходимость рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksh} \Omega_j((k+1)h), \; j = 1, 2, \; s > 0,$$

то имеем равенство

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} e^{-skh} \Omega_1((k+1)h)}{\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksh} \Omega_2((k+1)h)} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skh} x_k, \; s > 0. \tag{12}$$

Покажем, что при $h \to +0$ выражение в левой части (12) стремится к $\lambda(s)$. Для этого достаточно установить, что при $h \to +0$ имеем для всех $s > 0$, $j = 1, 2$

$$h \sum_{k=0}^{\infty} e^{-s(k+1)h} \Omega_j((k+1)h) \to \int_0^\infty e^{-sy} \Omega_j(y)\, dy. \tag{13}$$

Имеем

$$J_j(h) = \int_0^\infty e^{-sy} \Omega_j(y)\, dy - h \sum_{k=0}^{\infty} e^{-s(k+1)h} \Omega_j((k+1)h) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kh}^{(k+1)h} (e^{-sy} - e^{-s(k+1)h}) \Omega_j(y)\, dy +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} e^{-s(k+1)h} \int_{kh}^{(k+1)h} (\Omega_j(y) - \Omega_j((k+1)h))\, dy.$$

Используя для оценки первой суммы неравенство

$$e^{-sy}-e^{-s(k+1)h}=e^{-sy}(1-e^{-s((k+1)h-y)})\leqslant$$

$$\leqslant e^{-sy}s((k+1)h-y)\leqslant she^{-sy},\ kh\leqslant y<(k+1)h,$$

а для оценки второй, замечая, что

$$e^{-s(k+1)h}\int\limits_{kh}^{(k+1)h}(\Omega_j(y)-\Omega_j((k+1)h))\,dy<h(\Omega_j(kh)-\Omega_j((k+1)h)),\ k\geqslant 1,$$

видим, что

$$J_j(h)\leqslant sh\int\limits_0^\infty e^{-sy}\,\Omega_j(y)\,dy+e^{-sh}\int\limits_0^h\Omega_j(y)\,dy\to 0,\ h\to+0.$$

Итак, (13) доказано, а вместе с тем установлено, что выражение в левой части (12) стремится к $\lambda(s)$ при $h\to+0$.

Положим $\alpha_h(y)=\sum\limits_{0\leqslant k<y/h}x_k$. В силу доказанного имеем

$$\operatorname*{Lim}_{h\to+0}\int\limits_0^\infty e^{-sy}\,d\alpha_h(y)=\lambda(s),\quad\int\limits_0^\infty d\alpha_h(y)\leqslant 1.$$

Применяя теорему Хелли, заключаем, что справедливо соотношение (8), где $\alpha$ — неубывающая функция, $\int\limits_0^\infty d\alpha(y)\leqslant 1$. Из (8) и того, что $\lambda(+0)=1$, следует $\int\limits_0^\infty d\alpha(y)=1$. Тем самым справедливость представления (8) при выполнении условия (7) доказана.

Докажем невозможность замены условия (7) условием неубывания отношения $\Omega_1/\Omega_2$. Предположим, что такая замена возможна и покажем, что это ведет к противоречию.

Выберем произвольно числа $0<\xi<\eta<1$ и положим

$$\Omega_1^{(n)}(y)=ny^{-\xi},\ \Omega_2^{(n)}=ny^{-\eta},\ 0<y<1;$$

$$\Omega_1^{(n)}(y)=\Omega_2^{(n)}(y)=\begin{cases}(n-n^2)y+n^2, & 1\leqslant y\leqslant 1+\dfrac{1}{n},\\[2mm] 1, & 1+\dfrac{1}{n}\leqslant y<\infty;\ n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

Ясно, что функции $\Omega_1^{(n)}$, $\Omega_2^{(n)}$, $n=1,2,\cdots$, удовлетворяют условиям (5), и отношение $\Omega_1^{(n)}/\Omega_2^{(n)}$ неубывает. Ввиду сделанного предположения имеем представление

$$\frac{\int\limits_0^\infty e^{-sy}\,\Omega_1^{(n)}(y)\,dy}{\int\limits_0^\infty e^{-sy}\,\Omega_2^{(n)}(y)\,dy} = \int\limits_0^\infty e^{-sy}\,d\alpha_n(y),\quad n = 1, 2, \cdots, \tag{14}$$

где $\alpha_n$ — неубывающие функции, $\alpha_n(0) = 0$, $\alpha_n(+\infty) = 1$. Выражение в левой части (14) можно записать в виде

$$\frac{\int\limits_0^1 e^{-sy}\,y^{-\xi}\,dy + \int\limits_1^{1+1/n}((1-n)y+n)\,e^{-sy}\,dy + \frac{1}{n}\int\limits_{1+1/n}^\infty e^{-sy}\,dy}{\int\limits_0^1 e^{-sy}\,y^{-\eta}\,dy + \int\limits_1^{1+1/n}((1-n)y+n)\,e^{-sy}\,dy + \frac{1}{n}\int\limits_{1+1/n}^\infty e^{-sy}\,dy},$$

откуда видно, что при $n \to \infty$, $s > 0$, оно имеет пределом функцию

$$\mu(s) = \int\limits_0^1 e^{-sy}\,y^{-\xi}\,dy \Big/ \int\limits_0^1 e^{-sy}\,y^{-\eta}\,dy.$$

Поэтому делая в (14) предельный переход при $n \to \infty$ и применяя теорему Хелли, получим

$$\mu(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sy}\,d\alpha_0(y),$$

где $\alpha_0$ — неубывающая функция, $\int\limits_0^\infty d\alpha_0(y) \leqslant 1$. Таким образом, мы приходим к равенству

$$\int\limits_0^1 e^{-sy}\,y^{-\xi}\,dy = \int\limits_0^1 e^{-sy}\,y^{-\eta}\,dy \cdot \int\limits_0^\infty e^{-sy}\,d\alpha_0(y).$$

Полагая $-s = it$, $t \in R$, запишем это равенство в виде

$$\int\limits_R e^{ity}\,\nu_1(dy) = \int\limits_R e^{ity}\,\nu_2(dy) \cdot \int\limits_R e^{ity}\,\nu_3(dy),\quad t \in R, \tag{15}$$

где $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$ — соответствующим образом определенные неотрицательные меры. В силу (15) имеем $\nu_1 = \nu_2 * \nu_3$, поэтому (см., напр., [4], с. 85) для носителей $S(\nu_j)$ мер $\nu_j$ справедливо равенство

$$S(\nu_1) = S(\nu_2) + S(\nu_3), \tag{16}$$

где знак $+$ обозначает арифметическое сложение множеств (определение см., напр., [4], с. 84). Так как $S(\nu_1) = S(\nu_2) = [0, 1]$, то из (16 следует, что $S(\nu_3)$ состоит из единственной точки 0. Полагая $\nu_3(\{0\}) = c$, из (15) заключаем, что $\nu_1 \equiv c\nu_2$. Это абсурдно, так как меры $\nu_1$ и $\nu_2$ имеют на [0, 1] плотности, равные $y^{-\xi}$ и $y^{-\gamma}$, $\xi \neq \gamma$, соответственно.

Физико-технический институт низких температур
АН УССР, г. Харьков

Поступила 20.VI.1988

## ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян*. Некоторые открытые вопросы теории представлений аналитических функций, Записки научн. семинаров ЛОМИ, 81, 1978, 238—241.
2. *M. M. Dzhrbashgan*. Some open problems in the theory of representations of analytic functions, Lecture Notes in Math., 1043, 1984, 522—526.
3. *М. М. Джрбашян*. Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Матем. сб., 79, № 4, 1969, 517—615.
4. *Ю. В. Линник, И. В. Островский*. Разложения случайных величин и векторов, М., «Наука», 1972, 480 с.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXV, № 1, 1990 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.53

А. Е. АВЕТИСЯН

# О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ $\{E_\rho(\lambda_n z;\ \mu)\}_1^\infty$ НА СИСТЕМЕ КОНЕЧНЫХ ОТРЕЗКОВ

**В настоящей заметке при некоторых ограничениях на расположение последовательности $\{\lambda_n\}$ устанавливаются теоремы о достаточных, а затем и необходимых условиях полноты системы целых функций $\{E_\rho(\lambda_n z;\ \mu)\}_1^\infty$ в $L^p\ (p \geqslant 1)$ на отрезке и на системе конечных отрезков. Здесь**

$$E_\rho(z;\ \mu) = \sum \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})}$$

**—целая функция Миттаг—Лиффлера. При специальных натуральных значениях параметра $\rho$ необходимые и достаточные условия совпадают.**

1°. Вспомогательные результаты. В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться следующим результатом.

Лемма 1. *Пусть $F(z)$ — голоморфная функция в угловой области*

$$\Delta_\rho(\alpha) = \left\{z;\ 0 \leqslant |z| < \infty,\ \alpha \leqslant \arg z \leqslant \alpha + \frac{\pi}{\rho}\right\}\ (\rho \geqslant 1)$$

$\left(0 \leqslant \alpha < 2\pi - \dfrac{\pi}{\rho}\right)$, *имеет в этой области порядок роста $\rho \geqslant 1$ и конечный тип.*

Если сходятся интегралы

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln^+|F(re^{i\alpha})|}{r^{1+\rho}}\,dr < +\infty,\quad \int\limits_1^\infty \frac{\ln^+\left|F\left(re^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{\rho}\right)}\right)\right|}{r^{1+\rho}}\,dr < +\infty,$$

то $F(z)$ вполне регулярного роста внутри $\bar{\Delta}_\rho(\alpha)$, причем ее индикатор определяется формулой

$$h_F(\theta) = \sigma\cos\rho\left(\theta - \alpha - \frac{\pi}{2\rho}\right),\quad \left|\theta - \alpha - \frac{\pi}{2\rho}\right| < \frac{\pi}{2\rho},$$

а нули $F(z)$, $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$, лежащие внутри $\bar{\Delta}_\rho(\alpha)$, удовлетворяют условию

$$\sum_{\left|\varphi_k-\alpha-\frac{\pi}{2\rho}\right|<\frac{\pi}{2\rho}} \frac{\cos\rho\left(\varphi_k-\alpha-\dfrac{\pi}{2\rho}\right)}{r_k^\rho} < +\infty.$$

Эта лемма является следствием известной теоремы М. Картрайт (см. [1], теорема 7, гл. V) и может быть просто получена из указанной теоремы конформным отображением полуплоскости на угол раствора $\frac{\pi}{\rho}$.

Ниже мы будем пользоваться также теоремой о существовании целой функции, которая максимально быстро убывает в некоторой угловой области и имеет возможно медленный рост во всей плоскости. Реализуя схему, предложенную Н. У. Аракеляном, К. Н. Хачатрян доказал следующую теорему ([3], см. также [4]), которую мы приводим в удобной для нас форме.

Теорема A. *Пусть* $\rho \geqslant 1$, $\rho_1 = \frac{\rho}{2\rho-1}$ *и*

$$\overline{\Delta}_{\rho_1} = \left\{ z \in \mathbf{C},\ |\arg z - \pi| \leqslant \frac{\pi}{2\rho_1},\ 0 < |z| < +\infty \right\}.$$

*Пусть далее* $p(t)$ — *положительная, неубывающая функция на* $[1, \infty)$, *подчиненная условиям*

$$\int_1^\infty \frac{p(t)}{t^{\rho_1+1}}\,dt < +\infty,\quad \rho_1 = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln p(r)}{\ln r}.$$

*Тогда существует целая функция* $\omega_\rho(z)$ *порядка* $\rho$ *и нормального типа, удовлетворяющая в области* $\overline{\Delta}_{\rho_1}$ *неравенствам*

$$\exp\left\{ -c|z|^{\rho_1} \int_{|z|}^\infty \frac{p(t)}{t^{\rho_1+1}}\,dt \right\} < |\omega_\rho(z)| < \exp\{-p(|z|)\}\quad (|z|>1).$$

2°. **Достаточное условие полноты в** $L^p(0, \sigma^{1/\rho})$. Введем обозначения

$$B_\delta(\alpha) = \{z \in \mathbf{C},\ |\arg z - \alpha| < \delta,\ 0 \leqslant |z| < \infty\}\quad \left(0 < \delta < \frac{\pi}{2\rho}\right),$$

$$B_\delta = B_\delta\left(\frac{\pi}{2\rho}\right) \cup B_\delta\left(-\frac{\pi}{2\rho}\right).$$

Теорема 1. *Если множество комплексных чисел* $\{\lambda_k\}_1^\infty$ $(\lambda_k \neq 0)$ *лежит вне* $B_\delta$ *для некоторого* $\delta > 0$ *и*

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|\lambda_k|^\rho} = +\infty, \tag{1}$$

*то система* $\{E_\rho(\lambda_k u;\ \mu)\}_1^\infty$ $(\rho \geqslant 1,\ \mu > 0)$ *полна в* $L^p(0, \sigma^{1/\rho})$ $(p \geqslant 1)$ *при любом* $\sigma > 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \int_0^{\sigma^{1/\rho}} E_\rho(zu;\ \mu)\, g(u)\, du \quad (\rho \geqslant 1,\ \mu > 0),$$

где $g(u) \in L^q(0, \sigma^{1/\rho}) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ при $p > 1$ (при $p = 1$ $g(u)$ — ограниченная измеримая функция). Из асимптотических свойств функции $E_\rho(z;\ \mu)$ (см. [2]) и из леммы 1 следует, что $F(z)$ — целая функция порядка $\leqslant \rho$, типа $\leqslant \sigma$ и имеет вполне регулярный рост. При этом, если $r_k e^{i\varphi_k}$ — нули $F(z)$, то

$$\sum_{|\varphi_k| < \frac{\pi}{2\rho}} \frac{\cos \rho\varphi_k}{r_k^\rho} < +\infty.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{|\varphi_k| < \frac{\pi}{2\rho} - \delta} \frac{1}{r_k^\rho} < +\infty. \tag{2}$$

То же самое можно сказать о нулях, лежащих в области $|\arg z| \geqslant \frac{\pi}{2\rho} + \delta$. В итоге получаем

$$\sum_{r_k e^{i\varphi_k} \in \bar{B}_\delta} \frac{1}{r_k^\rho} < +\infty.$$

Таким образом, целая функция $F(z)$, если она отлична от тождественного нуля, не может обращаться в нуль на множестве $\{\lambda_k\}_1^\infty$, которое подчинено условиям теоремы 1. Это значит, что из

$$F(\lambda_k) = \int_0^{\sigma^{1/\rho}} E_\rho(\lambda_k u;\ \mu)\, g(u)\, du = 0 \quad (k = 1, 2 \cdots)$$

следует $F(z) \equiv 0$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что $g(u) = 0$ почти всюду на $(0, \sigma^{1/\rho})$. Полнота системы $\{E_\rho(\lambda_k u;\ \mu)\}_1^\infty$ в $L^p(0, \sigma^{1/\rho})$ доказана.

3°. Необходимое условие полноты в $L^p(0, \sigma^{1/\rho})$.

Теорема 2. *Если система* $\{E_\rho(\lambda_n u;\ \mu)\}_1^\infty \left(\lambda_n \neq 0,\ \rho \geqslant 1,\ \mu = \frac{p\rho - \rho + 1}{p\rho}\right)$ *полна в* $L^p(0, \sigma^{1/\rho})$ $(p > 1)$ *при любом* $\sigma > 0$, *то*

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|\lambda_n|^{\frac{\rho}{2\rho - 1}}} = +\infty. \tag{4}$$

*Доказательство.* Обозначим $\rho_1 = \frac{\rho}{2\rho - 1}$. Ясно, что при $\rho \geqslant 1$, $\rho_1 \leqslant 1$ и $\rho_1 = 1$ при $\rho = 1$. Допустим обратное, т. е., что ряд (4) сходится:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|\lambda_n|^{\rho_1}} < +\infty. \tag{5}$$

Обозначим через $\{\mu_n\}$ последовательность, состоящую из точек $\{\lambda_k\}_1^\infty$ и $\{-\lambda_k\}_1^\infty$, и составим произведение с нулями в точках $\{\mu_n\}$:

$$\Pi(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right).$$

Очевидно, что

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|\mu_n|^{\rho_1}} < +\infty. \tag{6}$$

Отметим также, что при $\rho_1 = 1$ сходится интеграл

$$\int_1^\infty \frac{|\delta(r)|}{r} dr, \tag{7}$$

где $\delta(r) = \sum_{|\lambda_k| < r} \frac{1}{\mu_k^{\rho_1}}$, ибо в этом случае $\delta(r) = 0$.

$\Pi(z)$ — целая функция не выше порядка $\rho_1$ и нулевого типа. Из (6), а в случае целого $\rho_1$ из (6) и (7), следует

$$\int_1^\infty \frac{\ln M_n(r)}{r^{\rho_1+1}} dr < +\infty, \tag{8}$$

где $M_n(r) = \max_{|z|=r} |\Pi(z)|$. Теперь применим теорему А, выбирая функцию $p(t)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$p(t) \geqslant \ln M_n(t) + 2 \ln t \tag{9}$$

(в силу (8) это возможно). По теореме А существует нетривиальная целая функция $\omega_\rho(z)$ порядка $\rho$ и нормального типа $\sigma_1$, удовлетворяющая в $\bar{\Delta}_{\rho_1}$ нераненству

$$|\omega_\rho(z)| < e^{-p(|z|)}. \tag{10}$$

Составим функцию

$$F(z) = \omega_\rho(z)\Pi(z). \tag{11}$$

Она тоже порядка $\rho$ и нормального типа $\sigma_1$. Из (9), (10), (11) следует, что при $z \in \bar{\Delta}_{\rho_1}$, $|z| \geqslant 1$

$$|F(z)| < c_2 \frac{1}{|z|^2}.$$

Если $1 < p \leqslant 2$, то по теореме М. М. Джрбашяна – И. О. Хачатряна (см. [5], теорема 3.1) $F(z)$ имеет представление

$$F(z) = \int_0^{\sigma_1^{1/\rho}} E_\rho(zu; \mu)\, g(u)\, du, \quad g(u) \in L^q(0, \sigma^{1/\rho}). \tag{12}$$

Очевидно

$$F(\lambda_n)=\int_0^{\sigma_1^{1/\rho}} E_\rho(\lambda_n u;\ \mu)\, g(u)\, du = 0\ (n=1,\ 2,\cdots),$$

т. е. система не полна в $L^p(0,\ \sigma_1^{1/\rho})$. Если же $p>2$, то по теореме М. М. Джрбашяна (см. [2]) $F(z)$ можно представить в форме (12), где $g(u)\in L^2(0,\ \sigma^{1/\rho})$.

Но тогда $g(u)\in L^q(0,\ \sigma_1^{1/\rho})$ (ведь при $p>2,\ q<2$). $F(\lambda_n)=0$ $(n=1,\ 2\cdots)$ и снова получается, что система $\{E_\rho(\lambda_n u;\ \mu)\}_1^\infty$ не полна в $L^p(0,\ \sigma_1^{1/\rho})$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание 1. При $\rho=1$ имеем $\rho_1=1,\ \mu=1,\ E_1(\lambda_n u,\ 1)=e^{\lambda_k u}$ и условие (1) становится необходимым и достаточным для полноты системы $\{e^{\lambda_k u}\}_1^\infty$ в $L^p(0,\ \sigma)$ $(p>1)$ при любом $\sigma>0$. Достаточность этого условия была отмечена Б. Я. Левиным (см. [2], прил. III). Доказательство необходимости содержится в работе Коревара и Люксембурга [6].

4°. Полнота на совокупности отрезков, исходящих из начала координат.

Обозначим через $\Gamma_n(\sigma)$ $(n\geqslant 2$ целое) совокупность отрезков

$$\Gamma_k(\sigma)=\left\{z\in\mathbf{C},\ \arg z=\frac{\pi}{n}+k\frac{2\pi}{n},\ 0\leqslant|z|\leqslant\sigma^{1/\rho}\right\},$$

$$k=0,1,\cdots,\ (n-1),\ \Gamma_n(\sigma)=\bigcup_{k=0}^{n-1}\Gamma_k(\sigma).$$

Введем также обозначения:

$$\varphi_k=\frac{\pi}{n}+k\frac{2\pi}{n},\quad \psi_k^{(\pm)}=\varphi_k\pm\frac{\pi}{2\rho},\quad k=0,\ 1,\cdots,\ (n-1),$$

$$B_k^{(\pm)}(\delta)=\{z\in\mathbf{C};\ |\arg z-\psi_k^{(\pm)}|\leqslant\delta,\ 0\leqslant|z|<\infty\}\ \left(0<\delta<\frac{\pi}{2\rho}\right),$$

$$B_\delta=\bigcup_{k=0}^{n-1}B_k^{(\pm)}(\delta).$$

При $\rho\geqslant n,\ \mu>0$ рассмотрим функцию

$$F(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\sigma^{1/\rho}} E_\rho(zue^{i\varphi_k};\ \mu)\, g_k(u)\, du=\int_{\Gamma_n(\sigma)} E_\rho(z\zeta;\ \mu)\, G(\zeta)\, d\zeta,$$

где $G(\zeta)=g_k(u)\,e^{-i\varphi_k}$ при $\zeta\in\Gamma_k(\sigma)$, а $g_k(u)\in L^q(\Gamma_k(\sigma))$ $(k=0,\ 1,\cdots,n-1)$.

С помощью леммы 1, как в 2° легко доказать, что $F(z)$ — целая функция вполне регулярного роста и ее нули $r_k e^{i\theta_k}$, $(r_k\neq 0)$, лежащие вне $B_\delta$, удовлетворяют условию

$$\sum_{r_k e^{i\theta_k} \in B_\delta} \frac{1}{r_k^\rho} < +\infty.$$

Отсюда следует достаточное условие полноты.

Теорема 3. *Если последовательность точек* $\{\lambda_k\}_1^\infty$ $(\lambda_k \neq 0)$ *лежит вне* $B_\delta \left(0 < \delta < \frac{\pi}{2\rho}\right)$ *и*

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|\lambda_k|^\rho} = +\infty,$$

*то система* $\{E_\rho(\lambda_k u;\ \mu)\}_1^\infty$ $(\rho \geqslant n,\ \mu > 0)$ *полна в* $L^p(\Gamma_n(\sigma))$ $(p \geqslant 1)$ *при любом* $\sigma > 0$.

Необходимое условие полноты дается следующей теоремой.

Теорема 4. *Если система* $\{E_\rho(\lambda_k \zeta;\ \mu)\}_1^\infty \left(\lambda_k \neq 0,\ \rho \geqslant n,\ \mu = \frac{p\rho - \rho + 1}{p\rho}\right)$ *полна в* $L^p(\Gamma_n(\sigma))$ $(p > 1)$ *при любом* $\sigma > 0$, *то*

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|\lambda_k|^{\frac{n\rho}{2\rho - n}}} = +\infty. \tag{13}$$

Доказательство. Допустим обратное, т. е.

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|\lambda_k|^{\rho_1}} < +\infty \quad \left(\rho_1 = \frac{n\rho}{2\rho - n}\right).$$

Обозначим через $\{\mu_k\}$ последовательность, состоящую из точек $\{\lambda_k\}$ и $\{\lambda_k e^{i\frac{\pi}{\rho_1}}\}$. Имеем

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|\mu_k|^{\rho_1}} < +\infty, \quad \delta(r) = \sum_{|\mu_k| < r} \frac{1}{\mu_k^{\rho_1}} = 0$$

(последнее условие играет роль, когда $\rho_1$ — целое). Каноническое произведение $\Pi(z)$ с нулями $\mu_k$ имеет самое большее порядок $\rho_1$ и минимальный тип, при этом

$$\int_1^\infty \frac{\ln M_n(r)}{r^{1+\rho_1}}\, dr < +\infty, \text{ где } M_n(r) = \max_{|z| = r} |\Pi(z)|.$$

По теореме А для любой функции $p_1(r)$, удовлетворяющей условиям

$$\int_1^\infty \frac{p_1(r)}{r^{1+\frac{\rho_1}{n}}}\, dr < +\infty, \quad \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln p_1(r)}{\ln r} = \frac{\rho_1}{n},$$

существует нетривиальная целая функция $\omega(z)$ порядка $\frac{\rho_1}{n}$ и нормального типа, удовлетворяющая в области $|\arg z| \leqslant \frac{n\pi}{2\rho_1}$ неравенству

$$|\omega(z)| < e^{-p_1(|z|)}, \quad |z| \geqslant 1.$$

Обозначим $p(r) = p_1(r^n)$, $\Omega(z) = \omega(z^n)$. $\Omega(z)$ — целая функция порядка $\rho$, нормального типа $\sigma_1 > 0$, которая в угловых областях

$$D_k = \left\{ z \in C, \ \left| \arg z - k\frac{2\pi}{n} \right| \leqslant \frac{\pi}{2\rho_1} \right\}, \ k = 0, 1, \cdots, (n-1)$$

удовлетворяет неравенству

$$|\Omega(z)| \leqslant e^{-p(|z|)} \quad \left( \int_0^\infty \frac{p(r)}{r^{1+\rho_1}} dr < +\infty \right).$$

Составим функцию $F(z) = \Omega(z) \cdot \Pi(z)$. Она также порядка $\rho$ и типа $\sigma_1$. Выбирая, как в теореме 2, $p(r)$ из условия $p(r) \geqslant \ln M_n(r) + 2\ln r$, в области $D = \bigcup_0^{n-1} D_n$ будем иметь

$$|F(z)| < \frac{c_3}{|z|^2}, \ |z| \geqslant 1.$$

По теореме М. М. Джрбашяна (или М. М. Джрбашяна — И. О. Хачатряна) $F(z)$ имеет представление ($G(\zeta)$ — не эквивалентна нулю)

$$F(z) = \int_{\Gamma_n(\sigma_1)} E_\rho(z\zeta; \mu) \, G(\zeta) \, d\zeta, \quad G(\zeta) \in L^q(\Gamma_n(\sigma_1)).$$

Очевидно $F(\lambda_k) = 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$, т. е. наша система не полна. Теорема доказана.

При $\rho = n$ из теорем 3—4 вытекает

Теорема 5. *Если последовательность точек* $\{\lambda_k\}_1^\infty$ $(\lambda_k \neq 0)$ *лежит вне* $B_6$, *то для того чтобы система функций* $\{E_n(\lambda_k u; \mu)\}_1^\infty$ $\left(\mu = 1 - \frac{n-1}{np}\right)$ *была полна в* $L^p(\Gamma_n(\sigma))$ *при любом* $\sigma > 0$, *необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд*

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{|\lambda_k|^n}.$$

Ереванский институт народного хозяйства

Поступила 5.IV.1988

ЛИТЕРАТУРА


1. *Б. Я. Левин*. Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат, 1956.
2. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
3. *К. Н. Хачатрян*. Построение целых функций минимального порядка, убывающих в угле с заданной скоростью, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем. XI, № 1, 1976, 34—55.
4. *Н. У. Аракелян*. Построение целых функций конечного порядка, равномерно убывающих в угле, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1, № 3, 1966, 162—191.
5. *А. Е. Аветисян*. Классы функций в комплексной области и их интегральные представления, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XVII, № 1, 1982, 3—31.
6. *W. A. J. Luxemburg, J. Korevaar*. Entire functions and Müntz—Szasz type approximation, Trans. Amer. Math. Soc., 157, 1971, 23—37.

УДК 517.53

*Разрывная задача Римана-Привалова со смещением в классе $L^1$.* Айрапетян Г. М. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 1, 3—20.

Рассматривается задача Римана-Привалова, когда коэффициент—разрывная функция, а правая часть принадлежит классу $L^1$. Условие классической граничной задачи заменяется на условие, подходящее для случая пространства $L^1$. Доказывается нетеровость этой задачи, вычисляется индекс и построены все решения. Библиографий 10.

УДК 517.53

*Свойство близости для мероморфных функций с близкими нулями и полюсами.* Барсегян Г. А., Сукиасян Г. А., Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 1, 21—33.

В данной работе для одного класса мероморфных в $\mathbb{C}$ функций $w(z)$, характеризуемых близостью их нулей и полюсов, уточняются некоторые оценки, касающихся свойства близости $a$-точек, согласно которому в кругах $|z| \leqslant r$ можно указать $\sim A(r)$ областей с маленькими диаметрами (областей наполнения), $w$-образы которых однолистно покрывают почти всю плоскость.

Для функкций из этого класса диаметры указанных областей наполнения оказываются более маленькими, чем в общем случае. Библиографий 2.

УДК 517.51

*О сходимости почти всюду рядов Фурье-Лежандра суммируемых функций.* Григорян М. Г. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 1, 34—52.

В работе доказывается, что если $Q$—совершенное нигде не плотное множество, то существует ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)$ по многочленам Лежандра со свойством: для любой $f(x) \in L$; $\exists F(x) \in L$,

1) $F(x) = f(x)$ на $Q$;

2) ряд Фурье-Лежандра вновь полученной функции $F(x)$ сходится к ней почти всюду на $[-1; 1]$ и является подрядом ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)$.

Библиографий 10.

УДК 517.946

*Разрешимость задачи Неймана для эллиптических систем с разрывными граничными условиями.* Оганян В. А. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 1, 53—65.

Рассматриваются задачи Неймана для эллиптических систем

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в верхней полуплоскости $D (y > 0)$, $(\partial D = R)$, предполагается что система слабо связанная.

В первой задаче, когда граничная вектор-функция $f(x)$ принадлежит классу $N_R(x_1, x_2, \cdots, x_n, \infty; l_1, l_2, \cdots, l_n, l_{n+1})$, а решение ищется в классе $M_D(x_1, x_2, \cdots, x_n, \infty; l_1, l_2, \cdots, l_n, l_{n+1})$, доказана разрешимость задачи Неймана и найдена размерность пространства решений соответствующей однородной задачи.

Во второй задаче, когда граничная вектор-функция $f(x)$ принадлежит классу $N_R'(\infty, x_1', x_2', \cdots; l_0, l_1, l_2, \cdots)$, а решение ищется в классе $M_D'(\infty, x_1', x_2', \cdots; l_0, l_1', l_2', \cdots)$ доказана разрешимость задачи Неймана. Библиографий 22.

УДК 517.53

*Решение кратной интерполяционной задачи в классах $H^\infty$ в полуплоскости и полосе.* Казарян К. Г. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 1, 66—82.

В работе строится системы функций, посредством которых представляются решения кратной интерполяционной задачи в классах $H^\infty$ в полуплоскости и в полосе. Библиографий 25.

УДК 517.5

*Интегральные преобразования типа Джрбашяна и интерполяция целыми функциями конечного порядка.* Губреев Г. М. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 1, 83—90.

В первой части работы приведены формулировки основных теорем о классах Харди в угловых областях и с весами Макенхаупта, которые являются обобщениями соответствующих результатов М. М. Джрбашяна (случай степенного веса). Вторая часть статьи посвящена решению кратных интерполяционных задач в классах целых функций порядка $\rho \geqslant {}^1]_2$, квадрат модуля которых суммируем с произвольным весом Макенхаупта на правильной системе лучей, выходящих из начала координат. Библиографий 22.

УДК 517.53

*Об одной проблеме моментов Хаусдорфа.* Островский И. В. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, №1, 91—96.

Пусть $\omega_1$, $\omega_2$ — неубывающие непрерывные на $[0, 1]$ функции, удовлетворяющие условиям

$$\omega_j(0) = 1, \int_0^1 (\omega_j(t) - 1)\, t^{-1}\, dt < \infty, \; j = 1, 2.$$

Положим

$$\lambda_0 = 1, \lambda_n = \int_0^1 t^{n-1} \omega_1(t)\, dt \Big/ \int_0^1 t^{n-1} \omega_2(t)\, dt, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Теорема. Если при достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\sup_{1 > \tau > t} \frac{\omega_2(\tau(1-\varepsilon))}{\omega_2(\tau)} \leqslant \frac{\omega_1(t(1-\varepsilon))}{\omega_1(t)}, \quad 0 \leqslant t < 1, \qquad (1)$$

то справедливо представление

$$\lambda_n = \int_0^1 t^n\, d\beta(t), \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

где $\beta$ — неубывающая ограниченная на $[0, 1]$ функция. Утверждение теряет силу, если условие (1) заменить условием невозрастания отношения $\omega_1/\omega_2$.

Теорема дает ответ на один из вопросов, поставленных М. М. Джрбашяном в связи с развитой им теорией факторизации функций, мероморфных в единичном круге. Библиографий 4.

*О необходимых и достаточных условиях полноты системы функций* $\{E_\rho(\lambda_n z; \mu)\}_1^\infty$ *на системе конечных отрезков.* Аветисян А. Е. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 1, 97—103.

В настоящей работе, при некоторых ограничениях на последовательность $\{\lambda_n\}$, доказываются теоремы о достаточных, а затем и необходимых условиях полноты вышеуказанной системы. Вопросы полноты рассматриваются в пространстве $L_p$ $(p \geqslant 1)$ на отрезке или на совокупности отрезков. Условия формулируются в терминах рядов. При определенных натуральных значениях параметра $\rho$ необходимые и достаточные условия совпадают. Библиографий 6.

# ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ



## ՀԱՄԱՌՈՏ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ



# СОДЕРЖАНИЕ



## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ



# CONTENTS



## SHORT COMMUNICATIONS