ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները՝ շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке) а кратких сообщений—не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленым на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствущем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае. если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

1989 № 6

1 р. 20 к.   Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contribttors who desire to have their articles published in the proceedings zvestia of the Academy of Sciences of the Armenien S.S.R., series "Matomatika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initals and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date muse be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to indicated by a numeral in square brackets properey inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article shoule contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitied ot twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

Математика. 1989, т. XXIV, № 6, стр. 523—622.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 6, 1989 Математика

УДК 517.547

М. М. ДЖРБАШЯН, А. О КАРАПЕТЯН

ИНЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ОБОБЩЕННОМ ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

§ 0. Введение

0.1. В работах [1, 2] 40-х годов одного из авторов впервые были введены классы $H^p(\alpha)$ $(1 \leqslant p < +\infty,\ -1 < \alpha < +\infty)$ голоморфных в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z)$, подчиненных условию, вида

$$\iint\limits_{D} |f(\zeta)|^p \cdot (1-|\zeta|^2)^\alpha \, d\xi d\eta < +\infty^* \quad (\zeta = \xi + i\eta). \tag{0.1}$$

Здесь, во-первых, была установлена

Теорема I. *Любая функция* $f(z) \in H^p(\alpha)$ $(1 \leqslant p < +\infty$ $-1 < \alpha < +\infty)$ *допускает интегральное представление*

$$f(z) = \frac{1+\alpha}{\pi} \iint\limits_{D} \frac{f(\zeta)\cdot(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-z\cdot\bar{\zeta})^{2+\alpha}} \, d\xi d\eta, \quad z \in D. \tag{0.2}$$

Этот основной результат впоследствии положил начало целой серии работ, посвященных интегральным и факторизационным представлениям для широких классов мероморфных функций и нашел существенные применения в решении ряда задач комплексного анализа. Краткий обзор результатов, установленных в указанной серии работ приводится в статьях [3, 4]. Доказательства как первоначальных результатов работ [1, 2], так и дальнейших их многочисленных применений, изложены в монографии [5]. Одновременно, по мере того, как выяснилась важность введения классов $H^p(\alpha)$ и их интегрального представления, все чаще стали появляться исследования, посвященные установлению их аналогов в многомерном комплексном анализе.

Здесь, во-первых, следует отметить монографию Хуа Ло-кена [6], где для так называемых классических многомерных областей были получены интегральные представления типа (0.2) для определенных классов голоморфных функций из пространств L^2, но без веса. В интересах дальнейшего изложения считаем целесообразным привести один из основных результатов, установленных в монографии [6]. Но для этого нам следует привести формулировки некоторых необходи

---

* Считаем не лишним отметить, что в последние годы рядом авторов вопреки этому неоспоримому факту и в нарушение элементарных норм научной этики, классы $H^p(\alpha)$ именуются „пространства Бергмана A^p_α".

мых понятий и ввести нужные обозначения, которые лежат в основе изложения § 1. настоящей работы.

Обозначим через $M_{m,n}$ $(m \geqslant 1,\ n \geqslant 1)$ множество всех комплексных матриц из m строк и n столбцов. Если $\zeta \in M_{m,n}$, то через $\zeta^* \in M_{n,m}$ обозначается эрмитово сопряженная к ζ матрица, а через $I^{(m)} \in M_{m,m}$ $(m \geqslant 1)$ — квадратная единичная матрица порядка m.

Наконец, через $R_{m,n}$ обозначим область, состоящую из тех матриц $\zeta \in M_{m,n}$, для которых матрица

$$I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^* \in M_{m,m} \tag{0.3}$$

положительно определена.

Полезно отметить, что $M_{1,n}$ суть обычное комплексное координатное пространство $\mathbf{C}^n$, и при этом $R_{1,n}$ представляет собой единичный шар $\mathbf{B}_n = \{\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbf{C}^n\colon |\zeta|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} |\zeta_k|^2 < 1\}$ в $\mathbf{C}^n$.

Положим еще, что $d\mu_{m,n}(\zeta)$ — элемент объема в $M_{m,n}$, т. е.

$$d\mu_{m,n}(\zeta) = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} dm_2(\zeta_{ij}), \tag{0.4}$$

где $\zeta = (\zeta_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n} \in M_{m,n}$ и $m_2(\zeta_{ij})$ — мера Лебега в плоскости комплексного переменного ζ_{ij}.

Тогда справедлива следующая ([6])

Теорема II. *Пусть $f(Z) \in L^2(R_{m,n})$ — любая голоморфная в области $R_{m,n}$ функция.*

Тогда справедлива интегральная формула

$$f(Z) = \frac{1}{V_{m,n}} \cdot \int\limits_{R_{m,n}} \frac{f(\zeta)\, d\mu_{m,n}(\zeta)}{[\det (I^{(m)} - Z \cdot \zeta^*)]^{m+n}}, \quad Z \in R_{m,n} \tag{0.5}$$

где $V_{m,n}$ — объем области $R_{m,n}$.

Отметим, что поскольку при $m = n = 1$ $R_{m,n}$, очевидно, совпадает с единичным кругом $\mathbf{D}$ комплексной плоскости $\mathbf{C}$, то утверждение теоремы II является многомерным обобщением теоремы I, но лишь для значений параметров $p = 2$ и $\alpha = 0$.

Кроме того, при $m = 1$, $n \geqslant 1$ теорема II устанавливает интегральное представление голоморфных в единичном шаре $\mathbf{B}_n \subset \mathbf{C}^n$ функций из пространства L^2, но без веса.

0.2. Таким образом, теорема II оставляет открытым вопрос о существовании аналогичных с (0.2) многомерных представлений для голоморфных функций из весовых L^p-пространств, когда параметр $p \in [1, +\infty)$. Но в последующих после монографии [6] работах ряда авторов для определенных областей было достигнуто решение этой задачи.

Чтобы сформулировать соответствующие результаты, введем некоторые необходимые обозначения.

Если $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ и $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbf{C}^n$, то положим

$$< z, \zeta > = \sum_{k=1}^{n} z_k \cdot \bar{\zeta}_k, \tag{0.6}$$

Далее, согласно общему определению (0.4), $\mu_{1,n}(\zeta)$, $\zeta \in \mathbf{C}^n$, будет обозначать $2n$-мерную меру Лебега в пространстве $\mathbf{C}^n \cong \mathbf{R}^{2n}$.

Тогда справедлива следующая

Теорема III. *Пусть $1 \leqslant p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$ и комплексное число β выбрано так*:

$$\begin{gathered} \operatorname{Re}\beta > \frac{1+\alpha}{p} - 1, \text{ при } 1 < p < +\infty, \\ \operatorname{Re}\beta > \alpha, \text{ при } p = 1. \end{gathered} \tag{0.7}$$

Тогда любая функция $f(z)$, голоморфная в единичном шаре

$$\mathbf{B}_n = \{\zeta \in \mathbf{C}^n \colon |\zeta| < 1\}$$

и удовлетворяющая условию

$$\int_{\mathbf{B}_n} |f(\zeta)|^p \cdot (1 - |\zeta|^2)^\alpha d\mu_{1,n}(\zeta) < +\infty, \tag{0.8}$$

допускает интегральное представление

$$f(z) = \frac{\Gamma(1+n+\beta)}{\Gamma(1+\beta)\cdot\pi^n} \cdot \int_{\mathbf{B}_n} \frac{f(\zeta)\cdot(1-|\zeta|^2)^\beta d\mu_{1,n}(\zeta)}{(1 - < z, \zeta >)^{1+n+\beta}}, \quad z \in \mathbf{B}_n. \tag{0.9}$$

Легко видеть, что при $n=1$, т. е. для единичного круга $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$ утверждение этой теоремы просто следует из приведенной выше теоремы I из работ [1, 2], а при $n > 1$, но $\alpha = 0$, она впервые была установлена в работе Форелли и Рудина [7], где к тому же случай $p=1$, $\operatorname{Re}\beta = 0$ оказался вне рассмотрения. В недавней обзорной статье [4] одного из авторов данной работы показано, что сформулированный выше результат в наиболее общем случае, т. е. при $n > 1$ и $-1 < \alpha < +\infty$, может быть установлен методом, развитым в его работах [1, 2] в ходе доказательства теоремы I*. По ходу заметим, что утверждение теоремы III является существенным обобщением теоремы II, но лишь при $m=1$, $n \geqslant 1$. Наконец, следует отметить, что в работе Штолля [8] для произвольных ограниченных симметрических областей, включающих в себя и области $R_{m,n}$ $(m, n \geqslant 1)$, был установлен аналог интегрального представления (0.9), но, как и в работе Форелли и Рудина [7], для п р о с т р а н с т в б е з в е с а.

0.3. Настоящая работа посвящена установлению далеко идущих обобщений теорем I, II и III — установлению интегральных представлений функций, голоморфных в многомерных областях типа $R_{m,n}$ $(m, n \geqslant 1)$ и принадлежащих там надлежащим весовым пространствам L^p $(1 \leqslant p < +\infty)$.

---

* В работе [4] параметр β в условиях (0.7) предполагается вещественным, однако доказательство по существу остается тем же и для комплексных значений β.

В § 1 работы приводится краткая сводка всех необходимых для дальнейшего изложения сведений из области анализа, линейной алгебры, теории меры и интегрирования, что, по убеждению авторов, существенно облегчает чтение статьи в целом.

В § 2 прежде всего изучаются свойства матричных областей $R_{m,n}$ $(m, n\geqslant 1)$ (предложение 2.2). Далее, при $0<p+\infty$, $-\infty<\alpha<<+\infty$ вводятся классы $H^p_\alpha(R_{m,n})$ голоморфных в областях $R_{m,n}$ функций f, подчиненных условию

$$\int\limits_{R_{m,n}} |f(\zeta)|^p\cdot[\det(I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*)]^\alpha\, d\mu_{m,n}(\zeta)<+\infty, \tag{0.10}$$

которое при $m=1$, $n\geqslant 1$ совпадает с (0.8), а при $m=n=1$ — с (0.1) Затем, на основании развитой в монографии [6] техники интегрирования в областях $R_{m,n}$ $(m, n\geqslant 1)$ устанавливается ряд важных свойств классов $H^p_\alpha(R_{m,n})$ (предложения 2.4—2.6).

В § 3 устанавливаются основные интегральные представления классов $H^p_\alpha(R_{m,n})$, $1\leqslant p<+\infty$, $-1<\alpha<+\infty$ (теоремы 3.1—3.3). Точнее, доказывается (см. теорему 3.3), что каждая функция $f\in H^p_\alpha(R_{m,n})$ допускает интегральное представление вида

$$f(Z)=c_{m,n}(\beta)\cdot\int\limits_{R_{m,n}}\frac{f(\zeta)\cdot[\det(I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*)]^\beta\, d\mu_{m,n}(\zeta)}{[\det(I^{(m)}-Z\cdot\zeta^*)]^{m+n+\beta}}, \quad Z\in R_{m,n}, \tag{0.11}$$

где $\beta\in\mathbf{C}$, $\operatorname{Re}\beta>\dfrac{1+\alpha}{p}-1$ $(1<p<+\infty)$ и $\operatorname{Re}\beta\geqslant\alpha$ $(p=1)$.

Таким образом, устанавливаемая нами теорема 3.3 является обобщением теоремы III и в точности совпадает с ней при $m=1$, $n\geqslant 1$. С другой стороны, наш результат представляет собой существенное обобщение теоремы II, совпадая с ней лишь для специальных значений параметров $p=2$, $\beta=\alpha=0$. При этом развитые в монографии [6] методы доказательства теоремы II оказываются принципиально неприменимыми в случае гораздо более общего утверждения теоремы 3.3, когда $-1<\alpha<+\infty$ и к тому же $1\leqslant p<+\infty$. Приводимое нами доказательство интегрального представления (0.11), расчлененное ради удобства на последовательные шаги (см. теоремы 3.1—3.3), во многих отношениях близко к данным в работах [1, 2] и [4] доказательствам теорем I и III. Более того, мы существенно используем интегральное представление (0.9).

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Обозначим через $M_{m,n}$ $(m\geqslant 1, n\geqslant 1)$ множество всех комплексных матриц, состоящих из m строк и n столбцов. Каждую матрицу $A\in M_{m,n}$ принято записывать в виде

$$A=(a_{ij})_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}, \tag{1.1}$$

где $a_{ij}\in\mathbf{C}$ — элемент матрицы A.

(а) На множестве комплексных матриц $M_{m,n}$ естественным образом вводятся операции сложения матриц и умножения комплексных чисел на матрицы. Как известно, это делается таким образом: если $A=(a_{ij})_{1\leq i\leq m,\,1\leq j\leq n}\in M_{m,n}$, $B=(b_{ij})_{1\leq i\leq m,\,1\leq j\leq n}\in M_{m,n}$, $\alpha\in\mathbf{C}$, то вводятся матрицы

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{1\leq i\leq m,\,1\leq j\leq n},$$
$$\alpha\cdot A=(\alpha\cdot a_{ij})_{1\leq i\leq m,\,1\leq j\leq n}, \tag{1.2}$$

очевидно, входящие в $M_{m,n}$.

Нетрудно убедиться в том, что после введения указанных операций, множество $M_{m,n}$ можно рассматривать как $m\times n$-мерное векторное пространство над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$.

(б) Если

$$A=(a_{ij})_{1\leq i\leq m,\,1\leq j\leq n}\in M_{m,n},$$
$$B=(b_{jk})_{1\leq j\leq n,\,1\leq k\leq l}\in M_{n,l}, \tag{1.3}$$

то произведение этих матриц определяется таким образом:

$$A\cdot B=(\gamma_{ik})_{1\leq i\leq m,\,1\leq k\leq l}\in M_{m,l}, \tag{1.4}$$

где

$$\gamma_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot b_{jk}\ (1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant k\leqslant l). \tag{1.4'}$$

Операция умножения (1.4) ассоциативна, дистрибутивна (как справа, так и слева) относительно сложения матриц и удовлетворяет соотношениям

$$\alpha\cdot(A\cdot B)=(\alpha\cdot A)\cdot B=A\cdot(\alpha\cdot B)$$

для любых $\alpha\in\mathbf{C}$, $A\in M_{m,n}$, $B\in M_{n,l}$ и для произвольных $m,\ n,\ l\geqslant 1$.

(в) В предположении $A=(a_{ij})_{1\leq i\leq m,\,1\leq j\leq n}\in M_{m,n}$ эрмитово сопряженной к A называется матрица

$$A^*=(\gamma_{ji})_{1\leq j\leq n,\,1\leq i\leq m}\in M_{n,m},$$

где $\gamma_{ji}=\overline{a_{ij}}$.

Следующие известные соотношения легко проверяются:

$$(A+B)^*=A^*+B^*;\ A,\ B\in M_{m,n},$$
$$(\alpha\cdot A)^*=\bar{\alpha}\cdot A^*,\ (A^*)^*=A;\ \alpha\in\mathbf{C},\ \alpha\in M_{m,n}, \tag{1.5}$$
$$(A\cdot B)^*=B^*\cdot A^*;\ A\in M_{m,n},\ B\in M_{n,l}.$$

1.2. (а) Несколько подробнее рассмотрим тот случай, когда $m=n\geqslant 1$, т. е. когда $M_{m,n}=M_{m,m}$ совпадает с множеством всех квадратных комплексных матриц порядка $m\geqslant 1$. Каждой такой матрице $A\in M_{m,m}\,(m\geqslant 1)$ сопоставим ее комплексный определитель — $\det(A)$, вычисляемый по известным правилам. Отметим здесь пока лишь некоторые из наиболее употребляемых нами известных соотношений этих определителей:

$$\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B);\ A,\ B\in M_{m,\,m},$$
$$\det(\alpha\cdot A)=\alpha^m\cdot\det(A);\ \alpha\in\mathbf{C},\ A\in M_{m,\,m},\tag{1.6}$$
$$\det(A^*)=\overline{\det(A)};\ A\in M_{m,\,m}.$$

(б) Матрица $A\in M_{m,\,m}$, как известно, называется обратимой, если существует матрица $B\in M_{m,\,m}$ такая, что

$$A\cdot B=B\cdot A=I^{(m)},\tag{1.7}$$

где $I^{(m)}\in M_{m,\,m}$ — единичная матрица.

Известно, что если существует матрица $B\in M_{m,\,m}$, обладающая свойством (1.7), то она единственна. Эту матрицу принято обозначать через A^{-1}, и для ее существования, т. е. для обратимости матрицы A необходимо и достаточно, чтобы

$$\det(A)\neq 0.\tag{1.8}$$

Наконец, положив

$$M^*_{m,\,m}=\{A\in M_{m,\,m}:\det(A)\neq 0\},\tag{1.9}$$

отметим, что $M^*_{m,\,m}$ суть множество всех обратимых матриц из пространства $M_{m,\,m}$.

1.3. Матрицу $A\in M_{m,\,m}$ принято называть эрмитовой, если $A=A^*$. Подмножество всех эрмитовых матриц из $M_{m,\,m}$ обозначим через H_m; оно з мкнуто относительно сложения матриц и их умножения на вещественное число.

Вкратце укажем ряд известных свойств эрмитовых матриц, необходимых нам дальше:

единичная матрица $I^{(m)}\in M_{m,\,m}$ эрмитова;

если A — обратимая эрмитова матрица, то и матрица A^{-1} эрмитова;

если $A\in\mathrm{H}_n$ и $B\in M_{m,\,n}$, то $B\cdot A\cdot B^*\in\mathrm{H}_m$; в частности, если $B\in M_{m,\,n}$, то $B\cdot B^*\in\mathrm{H}_m$;

если $A\in\mathrm{H}_m$, то $\det(A)$ является вещественным числом.

(б) Любую матрицу $A\in M_{m,\,m}$ можно единственным образом представить в виде

$$A=B+iC;\ B,\ C\in\mathrm{H}_m.\tag{1.10}$$

Кроме того, матрицы B и C представимы в виде

$$B=\frac{1}{2}(A+A^*),\ C=\frac{1}{2i}(A-A^*),\tag{1.11}$$

притом здесь будем употреблять также обозначения

$$B=\operatorname{Re}A,\ C=\operatorname{Im}A.$$

Легко видеть также, что для любой матрицы $A\in M_{m,\,m}$

$$\operatorname{Re}(A^*)=\operatorname{Re}A,\ \operatorname{Im}(A^*)=-\operatorname{Im}A$$

и еще, что если $A_1,\ A_2\in M_{m,\,m}$, $\alpha_1,\ \alpha_2\in\mathbf{R}$, то

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\alpha_1\cdot A_1+\alpha_2\cdot A_2)&=\alpha_1\cdot\operatorname{Re}A_1+\alpha_2\cdot\operatorname{Re}A_2,\\ \operatorname{Im}(\alpha_1\cdot A_1+\alpha_2\cdot A_2)&=\alpha_1\cdot\operatorname{Im}A_1+\alpha_2\cdot\operatorname{Im}A_2.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Далее напомним, что выше, во введении, мы уже указывали на очевидное утверждение

$$\mathbf{C}^m = M_{1,m} \ (m \geqslant 1). \tag{1.13}$$

Иначе говоря, элементы $\mathbf{C}^m$ можно считать комплексными матрицами из одной строки и m столбцов, обстоятельство, которое будет учтено нами в дальнейшем.

Как отмечалось в § 0, для двух элементов

$$u = (u_1, \cdots, u_m) \in \mathbf{C}^m, \ v = (v_1, \cdots, v_m) \in \mathbf{C}^m$$

вводится их скалярное произведение

$$< u, v > = \sum_{k=1}^{m} u_k \cdot \bar{v}_k, \tag{1.14}$$

а также произведение $u \cdot A \in \mathbf{C}^m = M_{1,m}$ двух матриц $u \in \mathbf{C}^m = M_{1,m}$ и $A \in M_{m,m}$. Произведение $u \cdot A$ принято называть действием матрицы A на элемент u.

Известно, что матрица $A \in M_{m,m}$ будет эрмитовой лишь в том случае, когда для всех $u \in \mathbf{C}^m$

$$\operatorname{Im} < u \cdot A, u > = 0. \tag{1.15}$$

(в) Определение. Пусть $A \in M_{m,m}$ — произвольная эрмитова матрица из H_m. Матрицу A будем называть неотрицательно определенной и писать $A \geqslant 0$, если для любого элемента $u \in \mathbf{C}^m$

$$< u \cdot A, u > \geqslant 0. \tag{1.16}$$

Матрицу A будем называть положительно определенной и писать $A > 0$, если для всех $u \in \mathbf{C}^m \setminus \{0\}$

$$< u \cdot A, u > > 0. \tag{1.17}$$

Далее, если матрицы A, $B \in M_{m,m}$, то будем писать $A \geqslant B$ (или $A > B$), если $A - B \in \mathrm{H}_m$ и при этом $A - B \geqslant 0$ (или $A - B > 0$).

Следующие свойства матриц $A \in M_{m,m}$ проверяются непосредственно: во-первых, очевидно, что для любой матрицы $A \in M_{m,m}$, $A \geqslant A$, а затем:

если $A_1, A_2 \geqslant 0$, то $A_1 + A_2 \geqslant 0$;

если $A_1 \geqslant 0$, $A_2 > 0$, то $A_1 + A_2 > 0$;

если $A \geqslant 0$ и $\alpha \in [0 + \infty)$, то $\alpha \cdot A \geqslant 0$;

если $A > 0$ и $\alpha \in (0 + \infty)$, то $\alpha \cdot A > 0$.

В заключение раз и навсегда договоримся, что если матрица $A \in M_{m,m}$, то запись $A \geqslant 0$ (или $A > 0$) будет означать, что $A \in \mathrm{H}_m$ и неотрицательно (или положительно) определена.

1.4 (а) В свое время было отмечено, что множество $M_{m,n}$ $(m, n \geqslant 1)$ можно трактовать как $m \times n$-мерное векторное пространство над полем $\mathbf{C}$. Очевидно, что на пространстве $M_{m,n}$ различными способами можно ввести норму. Но ввиду конечномерности $M_{m,n}$ все эти нормы будут порождать одну и ту же топологию. Следовательно, в $M_{m,n}$ однозначно определены понятия сходимости, открытого и замкнутого множества и другие топологические понятия. При этом заметим, что сходимость матриц в пространствах $M_{m,n}$ $(m, n \geqslant 1)$ равносильна их поэлементной сходимости. Легко видеть также, что операции сложения и умножения матриц, умножения матриц на числа из $\mathbf{C}$, сопряжения, а также взятия определителя $\det(A)$, действительных или мнимых частей квадратных матриц $A \in M_{m,m}$ $(m > 1)$, непрерывны в надлежащих матричных пространствах.

(б) Матрицу $U \in M_{m,m}$ принято называть унитарной, если

$$U \cdot U^* = U^* \cdot U = I^{(m)}. \tag{1.18}$$

Из определения (1.18) следует, что если матрица U унитарна, то

$$U \in M^*_{m,m},\ U^{-1} = U^* \text{ и } |\det(U)| = 1.$$

Обозначим через $\mathbf{U}_m$ множество всех унитарных матриц из $M_{m,m}$. Следующие свойства элементов $\mathbf{U}_m$ проверяются непосредственно:

если $U \in \mathbf{U}_m$, то $U^{-1} \in \mathbf{U}_m$;

если $U \in \mathbf{U}_m$ и $\alpha \in \mathbf{C}$, $|\alpha| = 1$, то $\alpha \cdot U \in \mathbf{U}_m$; (1.19)

если $U, V \in \mathbf{U}_m$, то $U \cdot V \in \mathbf{U}_m$.

Приведем важную для дальнейшего известную теорему.

Теорема IV. *Любая матрица $A \in M_{m,n}$ допускает представление вида*

$$A = U \cdot \Lambda \cdot V, \tag{1.20}$$

где $U \in \mathbf{U}_m$, $V \in \mathbf{U}_n$, а матрица $\Lambda \in M_{m,n}$ имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \tag{1.21}$$

где

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots \geqslant \lambda_\nu > 0,\ \nu = \min\{m, n\}. \tag{1.21'}$$

1.5. Начнем этот пункт с одного определения.

Определение. Пусть односвязная область $D \subset \mathbf{C}^N$ и $f(z) \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $z \in D$ — произвольная непрерывная функция. Условимся говорить, что $f(z)$ допускает логарифм, если существует непрерывная функция $g(z) \in \mathbf{C}$, $z \in D$, такая, что

$$\exp\{g(z)\} \equiv f(z),\ z \in D. \tag{1.22}$$

Не исключено, что такого рода функций $g(z)$ будет очень много, но, тем не менее, для них мы воспользуемся одним и тем же обозначением: $g(z) = \ln f(z)$, $z \in D$.

Теорема V (*о логарифме*). *Пусть $D \subset \mathbf{C}^N$ — односвязная область и $f(z) \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $z \in D$ — непрерывна. Тогда*

1. *$f(z)$ допускает логарифм;*
2. *если $g(z) = \ln f(z)$, то имеем также*

$$g(z) + 2\pi ki = \ln f(z),\ k \in \mathbf{Z};$$

3 *если $g_j = \ln f$ $(j = 1, 2)$, то существует целое число k_0 такое, что*

$$g_1(z) = g_2(z) + 2\pi k_0 i, \ z \in D;$$

4. *если* $g(z) = \ln f(z)$ *и* $f(z)$ *голоморфна в области* D, *то там же голоморфна и* $g(z)$.

Доказательства утверждений этой теоремы мы опускаем, поскольку все они хорошо известны и содержатся в различных курсах топологии и теории функций.

1.6 (а) В пространстве $M_{m,\,m}$ $(m \geqslant 1)$ выделим область

$$\widetilde{M}_{m,\,m} = \{A \in M_{m,\,m} : \operatorname{Re} A > 0\} \cup \{A \in M_{m,\,m} : \operatorname{Im} A > 0\} \cup \{A \in M_{m,\,m} : -\\ -\operatorname{Im} A > 0\}$$

и в этой связи отметим еще ряд свойств:

если $A \in M_{m,\,m}$, то $A \in \widetilde{M}_{m,\,m} \Leftrightarrow A^{*} \in \widetilde{M}_{m,\,m}$;

если $\mathrm{H}_m^+ \subset M_{m,\,m}$ суть множество всех положительно определенных эрмитовых матриц, то

$$\mathrm{H}_m^+ \subset \widetilde{M}_{m,\,m};$$

очевидно, что область $\widetilde{M}_{m,\,m}$ звездна относительно единичной матрицы $I^{(m)}$, поэтому $\widetilde{M}_{m,\,m}$ — односвязная область;

если $A \in \widetilde{M}_{m,\,m}$, то $a \cdot A \in \widetilde{M}_{m,\,m}$ для любого $a > 0$.

(б) В области $\widetilde{M}_{m,m}$ определим голоморфную функцию $f(A) = \det(A)$, $A \in \widetilde{M}_{m,\,m}$, и убедимся, что там $f(A) \neq 0$.

В самом деле, если $\operatorname{Re} A > 0$, то из тождества

$$< u \cdot A,\ u > \equiv < u \operatorname{Re} A,\ u > + i < u \cdot \operatorname{Im} A,\ u >,\ u \in \mathbf{C}^m$$

вытекает, что $\operatorname{Re} < u \cdot A,\ u > > 0$, $u \in \mathbf{C}^m \setminus \{0\}$. Вместе с тем, если положим, что $\det(A) = 0$, то существовал бы элемент $u_0 \in \mathbf{C}^m \setminus \{0\}$ такой, что $u_0 \cdot A \equiv 0$. Отсюда следовало бы равенство $< u_0 \cdot A,\ u_0 > = 0$, противоречащее неравенству $\operatorname{Re} < u_0 \cdot A,\ u_0 > 0$. Значит при условии $\operatorname{Re} A > 0$ всегда $\det(A) \neq 0$. Если же $\pm \operatorname{Im} A > 0$, то $\operatorname{Re}(\mp iA) > 0$ и поэтому $\det(\mp iA) \neq 0$, а значит, $\det(A) \neq 0$.

Таким образом, при $A \in \widetilde{M}_{m,\,m}$ всегда $f(A) = \det(A) \neq 0$. Но тогда, согласно теореме о логарифме, существует единственная функция $g(A)$, $A \in \widetilde{M}_{m,\,m}$, голоморфная в $\widetilde{M}_{m,\,m}$ и удовлетворяющая условиям

$$\exp\{g(A)\} \equiv f(A) = \det(A),\ A \in \widetilde{M}_{m,\,m}, \tag{1.24}$$

$$g(I^{(m)}) = 0.$$

Эту однозначно определенную функцию g будем обозначать через lndet.

(в) Укажем некоторые свойства этой функции. Прежде всего, укажем на следующие:

$$\operatorname{Re}[\ln\det(A)] \equiv \ln|\det(A)|, \quad A \in \tilde{M}_{m,m},$$

$$\ln\det(A^*) \equiv \overline{\ln\det(A)}, \quad A \in \tilde{M}_{m,m}, \tag{1.25}$$

$$\ln\det(a\cdot A) \equiv m\cdot\ln a + \ln\det(A), \quad A \in \tilde{M}_{m,m}, \quad a>0.$$

Кроме того, при всех $A \in \mathrm{H}^+_m \subset \tilde{M}_{m,m}$

$$\operatorname{Im}[\ln\det(A)] = 0 \text{ и } \ln\det(A) = \ln[\det(A)]. \tag{1.26}$$

Наконец, имея в нашем распоряжении функцию $\ln\det(A)$, можно определить степенную функцию, положив для любого $\beta \in \mathbf{C}$

$$[\det(A)]^\beta = \exp\{\beta\cdot\ln\det(A)\}, \quad A \in \tilde{M}_{m,m}. \tag{1.27}$$

И в заключение, комбинируя (1.25) с (1.27), приходим к формуле

$$[\det(a\cdot A)]^\beta = a^{m\beta}\cdot[\det(A)]^\beta, \quad A \in \tilde{M}_{m,m}, \ a>0. \tag{1.28}$$

§ 2. Введение классов голоморфных функций $H^p_\alpha(R_{m,n})$ и некоторые их свойства

2.1. Начнем с формулировки одного предложения, доказательство которого на основе теоремы IV (§ 1) приводится в монографии [6] (теорема 2.1.2).

Предложение 2.1. а) *Если* $\zeta \in M_{m,n}$ *то*

$$\det[I^{(m)} - \zeta\cdot\zeta^*] = \det[I^{(n)} - \zeta^*\cdot\zeta]. \tag{2.1}$$

б) *Положительная (неотрицательная) определенность матрицы* $I^{(m)} - \zeta\cdot\zeta^*$ *равносильна положительной (неотрицательной) определенности матрицы* $I^{(n)} - \zeta^*\cdot\zeta$. *Отсюда непосредственно следует равенство*

$$\det[I^{(m)} - Z\cdot\zeta^*] = \det[I^{(n)} - \zeta^*\cdot Z], \tag{2.2}$$

$$Z, \zeta \in M_{m,n}.$$

Определение. В семействе матриц $M_{m,n}$ $(m, n \geqslant 1)$ обобщенным единичным кругом называется множество (см. [6])

$$R_{m,n} = \{\zeta \in M_{m,n} : I^{(m)} - \zeta\cdot\zeta^* > 0\} = \{\zeta \in M_{m,n} : I^{(n)} - \zeta^*\cdot\zeta > 0\}. \tag{2.3}$$

В § 0 мы уже отмечали, что $R_{1,n}$ $(n \geqslant 1)$ — не что иное, как единичный шар пространства $\mathbf{C}^n = M_{1,n}$:

$$\mathrm{B}_n = \left\{\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbf{C}^n : \sum_{j=1}^n |\zeta_j|^2 < 1\right\}.$$

В общем же случае, когда $m, n \geqslant 1$, $R_{m,n}$ является ограниченной областью в пространстве матриц $M_{m,n}$, причем ее замыкание опишется таким образом:

$$\overline{R}_{m,n} = \{\zeta \in M_{m,n} : I^{(m)} - \zeta\cdot\zeta^* \geqslant 0\}. \tag{2.4}$$

Дополнительная информация о свойствах области $R_{m,n}$ содержится в следующем предложении.

Предложение 2.2. а) *$R_{m,n}$ — полная круговая область, т. е. если $\zeta \in R_{m,n}$ и $|\alpha| \leqslant 1$, то $\alpha \cdot \zeta \in R_{m,n}$.*

б) *Если $\zeta \in \overline{R}_{m,n}$, то*

$$0 \leqslant \det[I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*] \leqslant 1. \tag{2.5}$$

в) *Если $Z \in R_{m,n}$ и $\zeta \in \overline{R}_{m,n}$, то*

$$\operatorname{Re}[I^{(m)} - Z \cdot \zeta^*] > 0. \tag{2.6}$$

г) *Если $r \in (0, +\infty)$, то положив*

$$\begin{gathered} r \cdot R_{m,n} = \{r \cdot \zeta, \zeta \in R_{m,n}\}, \\ r \cdot \overline{R}_{m,n} = \{r \cdot \zeta, \zeta \in \overline{R}_{m,n}\}, \end{gathered} \tag{2.7}$$

будем иметь

$$\begin{gathered} r \cdot R_{m,n} = \{\zeta \in M_{m,n} : r^2 \cdot I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^* > 0\}, \\ r \cdot \overline{R}_{m,n} = \{\zeta \in M_{m,n} : r^2 \cdot I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^* \geqslant 0\}. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Доказательство. (а) Пусть $\zeta \in R_{m,n}$ и $|\alpha| \leqslant 1$, тогда будем иметь

$$I^{(m)} - (\alpha \cdot \zeta) \cdot (\alpha \cdot \zeta)^* = I^{(m)} - |\alpha|^2 \cdot \zeta \cdot \zeta^* = (1 - |\alpha|^2) \cdot I^{(m)} + |\alpha|^2 \cdot (I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*) > 0,$$

откуда и следует, что $R_{m,n}$ — полная круговая область.

б) Согласно теореме IV (§ 1), любой элемент $\zeta \in M_{m,n}$ допускает представление вида

$$\zeta = U \cdot \Lambda \cdot V, \tag{2.9}$$

где $U \in \mathrm{U}_m$, $V \in \mathrm{U}_n$ и

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & \cdots\cdots & & \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_\nu \geqslant 0, \quad \nu = \min\{m, n\}. \tag{2.10}$$

Если теперь $\zeta \in \overline{R}_{m,n}$, то в силу (2.4) $I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^* \geqslant 0$, или же $I^{(m)} - \Lambda \cdot \Lambda^* \geqslant 0$, откуда получаем: $0 \leqslant \lambda_k \leqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant \nu$. Кроме того, легко проверить равенства

$$\det[I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*] = \det(U) \cdot \det(I^{(m)} - \Lambda \cdot \Lambda^*] \cdot \det(U^*) = \prod_{k=1}^{\nu} (1 - \lambda_k^2),$$

и, тем самым, наше утверждение (2.5) доказано.

в) Если $Z \in R_{m,n}$ и $\zeta \in \overline{R}_{m,n}$, то

$$I^{(m)} > Z \cdot Z^*, \quad I^{(m)} \geqslant \zeta \cdot \zeta^*. \tag{2.11}$$

Далее, справедлива следующая серия неравенств:

$$\begin{gathered} (Z - \zeta) \cdot (Z^* - \zeta^*) \geqslant 0, \\ Z \cdot Z^* + \zeta \cdot \zeta^* \geqslant Z \cdot \zeta^* + \zeta \cdot Z^*, \\ Z \cdot Z^* + \zeta \cdot \zeta^* \geqslant Z \cdot \zeta^* + (Z \cdot \zeta^*)^*, \\ 2 \cdot I^{(m)} > Z \cdot Z^* + \zeta \cdot \zeta^* \geqslant 2 \cdot \operatorname{Re}(Z \cdot \zeta^*), \\ \operatorname{Re}[I^{(m)} - Z \cdot \zeta^*] > 0. \end{gathered}$$

г) Это утверждение устанавливается тривиальной проверкой.

2.2. а) Обозначим через $\mathrm{Aut}(R_{m,n})$ группу всех биголоморфных изоморфизмов области $R_{m,n}$. Для любого элемента $g\in\mathrm{Aut}(R_{m,n})$ через Δ_g обозначается комплексный якобиан отображения g, при этом заметим, что

$$\Delta_g(\zeta)\neq 0,\ \zeta\in R_{m,n}. \tag{2.12}$$

Далее, из предложения 2.2 (а) следует звездность относительно начала координат, а значит, односвязность области $R_{m,n}$. Поэтому, в силу теоремы V (§ 1) (о логарифме), функция Δ_g допускает голоморфный логарифм. Но тогда, согласно принятой выше договоренности (см. 1.5 — определение), любую голоморфную в $R_{m,n}$ функцию h, удовлетворяющую условию

$$\exp\{h(\zeta)\}\equiv\Delta_g(\zeta),\ \zeta\in R_{m,n}, \tag{2.13}$$

будем обозначать через $\ln\Delta_g$.

Напомнив, что такая функция $h(\zeta)$ отнюдь не единственна, для любого $\beta\in C$ мы полагаем

$$[\Delta_g(\zeta)]^\beta\equiv\exp\{\beta\cdot\ln\Delta_g(\zeta)\},\ \zeta\in R_{m,n}.$$

Далее, для любых целых $m\geqslant 1$ и $n\geqslant 1$ положим

$$V_{m,n}=\frac{\prod\limits_1^n\Gamma(j)\cdot\prod\limits_1^m\Gamma(k)}{\prod\limits_1^{m+n}\Gamma(l)}\cdot\pi^{m\cdot n};\quad c_{m,n}=\frac{1}{V_{m,n}} \tag{2.14}$$

и отметим, что, как установлено в монографии [6, теорема 2.2.1], число $V_{m,n}$ есть объем области $R_{m,n}$. Там же был получен явный вид так называемой керн-функции области $R_{m,n}$:

$$K_{m,n}(Z,\zeta)=\frac{c_{m,n}}{[\det(I^{(m)}-Z\cdot\zeta^*)]^{m+n}},\ Z,\zeta\in R_{m,n}, \tag{2.15}$$

являющейся голоморфной функцией по Z и антиголоморфной по ζ, воспроизводящей голоморфные в области $R_{m,n}$ функции с интегрируемым квадратом модуля по области $R_{m,n}$ и по мере $\mu_{m,n}$ (см. § 0, теорему II).

Отметим, что, как известно, для каждого биголоморфного отображения $g\in\mathrm{Aut}(R_{m,n})$ справедливо тождество

$$K_{m,n}(g(Z),\ g(\zeta))\cdot\Delta_g(Z)\cdot\overline{\Delta_g(\zeta)}\equiv K_{m,n}(Z,\zeta),\ Z,\zeta\in R_{m,n}. \tag{2.16}$$

Как следует из самого определения (2.15)

$$K_{m,n}(Z,\zeta)\neq 0,\ Z,\zeta\in R_{m,n}, \tag{2.17}$$

и поскольку область $R_{m,n}\times R_{m,n}$ односвязна, то по теореме о логарифме там же однозначно определена также функция $\ln K_{m,n}(Z,\zeta)$, голоморфная по $Z\in R_{m,n}$, антиголоморфная по $\zeta\in R_{m,n}$ и такая, что

$$\exp\{\ln K_{m,n}(Z,\zeta)\}\equiv K_{m,n}(Z,\zeta),\ Z,\zeta\in R_{m,n}, \tag{2.18}$$

и

$$\ln K_{m,n}(Z,Z)\ \text{вещественен для}\ Z\in R_{m,n}. \tag{2.19}$$

б) В дальнейшем будем пользоваться следующим простым предложением.

Предложение 2.3. 1. *Если* $g \in \mathrm{Aut}(R_{m,n})$, *то при любом выборе функции* $\ln \Delta_g$ *справедливо тождество*

$$\ln K_{m,n}(g(Z),\ g(\zeta)) + \ln \Delta_g(Z) + \overline{\ln \Delta_g(\zeta)} \equiv \ln K_{m,n}(Z,\zeta),\ \ Z,\zeta \in R_{m,n}. \tag{2.20}$$

2. *Для любых* $Z,\ \zeta \in R_{m,n}$ *справедливо тождество*

$$\ln K_{m,n}(Z,\zeta) = \ln c_{m,n} - (m+n)\cdot \ln\det[I^{(m)} - Z\cdot\zeta^*], \tag{2.21}$$

где $\ln\det$ — *аналитическая в* $\widetilde{M}_{m,m} \subset M_{m,m}$ *функция (определения области* $\widetilde{M}_{m,m}$ *и функции* $\ln\det$ *см. § 1*).

3. *Если* $g \in \mathrm{Aut}(R_{m,n})$, *то при любом выборе функции* $\ln\Delta$ *справедливо тождество*

$$\ln\det[I^{(m)} - g(Z)\cdot g(\zeta)^*] \equiv \frac{1}{m+n}\ln\Delta_g(Z) + \frac{1}{m+n}\overline{\ln\Delta_g(\zeta)} + \tag{2.22}$$

$$\ln\det[I^{(m)} - Z\cdot\zeta^*],\ Z,\ \zeta \in R_{m,n}.$$

Наконец, как обычно, для любого $\beta \in \mathbf{C}$ будем полагать

$$[K_{m,n}[Z,\zeta)]^{\beta} \overset{\mathrm{def}}{=} \exp\{\beta\cdot\ln K_{m,n}(Z,\ \zeta)\},\ Z,\zeta \in R_{m,n}. \tag{2.23}$$

2.2. (а) Приведем сначала одну важную формулу интегрирования по области $R_{m,n}$, установленную в монографии [6, § 2.2].

Начнем с того, что любую матрицу $\zeta \in M_{m,n}$ можно представить в виде

$$\zeta = \begin{pmatrix} \tilde{\zeta} \\ p \end{pmatrix},\ \ \tilde{\zeta} \in M_{m-1,n},\ p \in M_{1,n} = \mathbf{C}^n. \tag{2.24}$$

Тогда справедливо такое индуктивное описание областей $R_{m,n}$ (см. [6], § 2.2):

если $m = 1,\ n \geqslant 1$, то $R_{1,n} = \mathbf{B}_n \subset \mathbf{C}^n$;
если же $m > 1,\ n \geqslant 1$, то

$$R_{m,n} = \{\zeta = \begin{pmatrix} \tilde{\zeta} \\ \omega\cdot\Gamma^* \end{pmatrix} \in M_{m,n} : \tilde{\zeta} \in R_{m-1,n}, \tag{2.25}$$

$$\Gamma \in M^*_{n,n},\ I^{(n)} - \tilde{\zeta}^*\cdot\tilde{\zeta} = \Gamma\cdot\Gamma^*,\ \omega \in \mathbf{B}_n\}.$$

При этом выполняются соотношения

$$\det[I^{(m)} - \tilde{\zeta}^*\cdot\tilde{\zeta}] = |\det(\Gamma)|^2, \tag{2.26}$$

$$\det[I^{(m)} - \zeta^*\cdot\zeta] = (1 - |\omega|^2)\cdot|\det(\Gamma)|^2. \tag{2.27}$$

Далее, пусть $m > 1$, $n \geqslant 1$ и в области $R_{m,n}$ задана произвольная функция $f(\zeta)$. Тогда для любого $\tilde{\zeta} \in R_{m-1,n}$ определим функцию

$$\tilde{f}(\omega) \equiv f\left(\begin{smallmatrix}\tilde{\zeta} \\ \omega\cdot\Gamma^*\end{smallmatrix}\right), \quad \omega \in \mathbf{B}_n, \tag{2.28}$$

уже в единичном шаре $\mathbf{B}_n \subset \mathbf{C}^n$, где

$$I^{(n)} - \tilde{\zeta}^* \cdot \tilde{\zeta} = \Gamma \cdot \Gamma^*, \quad \Gamma \in M^*_{n,n}. \tag{2.29}$$

Очевидно, обозначение (2.28) нельзя считать вполне удачным, поскольку наша функция $\tilde{f}(\omega)$, $\omega \in \mathbf{B}_n$, зависит также от $\tilde{\zeta} \in R_{m-1,n}$ и от выбора $\Gamma \in M^*_{n,n}$, подчиненного условию (2.29). Но мы предпочли указанное обозначение, во избежание более громоздкого.

Формула, о которой речь шла выше, имеет вид

$$\int\limits_{R_{m,n}} f(\zeta)\, d\mu_{m,n}(\zeta) = \int\limits_{R_{m-1,n}} \det\left[I^{(n)} - \tilde{\zeta}^* \cdot \tilde{\zeta}\right] \int\limits_{B_n} \tilde{f}(\omega)\, d\mu_{1,n}(\omega)\, d\mu_{m-1,n}(\tilde{\zeta}), \tag{2.30}$$

где предполагается, что $f(\zeta)$, $\zeta \in R_{m,n}$ $(m > 1,\ n \geqslant 1)$ — любая измеримая интегрируемая по $R_{m,n}$ функция (неотрицательная, либо вообще комплексная).

б) В предположениях $m,\ n \geqslant 1$ и $\operatorname{Re}\beta > -1$ введем обозначение

$$J_{m,n}(\beta) = \int\limits_{R_{m,n}} [\det(I^{(m)} - \zeta\cdot\zeta^*)]^\beta\, d\mu_{m,n}(\zeta) = \int\limits_{R_{m,n}} [\det(I^{(n)} - \zeta^*\cdot\zeta)]^\beta\, d\mu_{m,n}(\zeta). \tag{2.31}$$

Воспользовавшись формулами (2.30), (2.27) и (2.26), можно показать, что

$$J_{m,n}(\beta) = \frac{\prod\limits_1^n \Gamma(\beta+j) \cdot \prod\limits_1^m \Gamma(\beta+k)}{\prod\limits_1^{m+n} \Gamma(\beta+l)} \cdot \pi^{m\cdot n}. \tag{2.32}$$

Далее, при тех же значениях параметров, т. е. при $m,\ n \geqslant 1$ и $\operatorname{Re}\beta > -1$ положим

$$c_{m,n}(\beta) = J^{-1}_{m,n}(\beta). \tag{2.33}$$

Сравнивая введенные нами ранее обозначения (2.14) с (2.32) и (2.33), заключаем, что

$$V_{m,n} = J_{m,n}(0) \text{ и } c_{m,n} = c_{m,n}(0), \quad m,\ n \geqslant 1.$$

Особо отметим также следующие соотношения:

$$c_{1,n}(\beta) = \frac{(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{\pi^n} \quad (n \geqslant 1),$$

$$c_{m,n}(\beta) = c_{m-1,n}(\beta+1)\cdot c_{1,n}(\beta) \quad (m > 1,\ n \geqslant 1), \tag{2.34}$$

2.3. а) Для произвольной измеримой по Лебегу (вообще говоря комплекснозначной) функции $f(\zeta)$, $\zeta \in R_{m,n}$ $(m \geqslant 1,\ n \geqslant 1)$, при данном $p \in (0, +\infty)$ и $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ положим

$$\|f\|^p_{p,\alpha}=\int\limits_{R_{m,n}}|f(\zeta)|^p\cdot[\det(I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*)]^\alpha\, d\mu_{m,n}(\zeta)=$$

$$=\int\limits_{R_{m,n}}|f(\zeta)|^p\cdot[\det(I^{(n)}-\zeta^*\cdot\zeta)]^\alpha\, d\mu_{m,n}(\zeta). \tag{2.35}$$

Затем введем пространство

$$L^p_\alpha(R_{m,n})=\{f:\|f\|_{p,\alpha}<+\infty\}, \tag{2.36}$$

а подмножество всех голоморфных в $R_{m,n}$ функций будем обозначать через $H^p_\alpha(R_{m,n})$.

Отметим, что при $m=1$, $n\geqslant 1$ мы приходим к пространствам $L^p_\alpha(\mathbf{B}_n)$ и $H^p_\alpha(\mathbf{B}_n)$, о которых по существу шла речь в работе [4].

Приводимое ниже предложение является обобщением следующего известного факта: если $0<p<+\infty$ и $-\infty<\alpha\leqslant-1$, то пространство $H^p_\alpha(\mathbf{B}_n)=\{0\}$, т. е. оно пусто.

Предложение 2.4. *Если* $0<p<+\infty$ *и* $-\infty<\alpha\leqslant-1$, *то пространство* $H^p_\alpha(R_{m,n})$ *также пусто.*

Доказательство. Если $f(Z)\in H^p_\alpha(R_{m,n})$, то согласно формулам (2.30), (2.26), (2.27), имеем

$$\|f\|^p_{p,\alpha}=\int\limits_{R_{m,n}}|f(\zeta)|^p\cdot[\det(I^{(n)}-\zeta^*\cdot\zeta)]^\alpha\, d\mu_{m,n}(\zeta)=$$

$$=\int\limits_{R_{m-1,n}}[\det(I^{(n)}-\tilde\zeta^*\cdot\tilde\zeta)]^{\alpha+1}\cdot\Big\{\int\limits_{\mathbf{B}_n}|\tilde f(\omega)|^p\cdot(1-|\omega|^2)^\alpha\, d\mu_{1,n}(\omega)\Big\}\times$$

$$\times\, d\mu_{m-1,n}(\tilde\zeta)<+\infty. \tag{2.37}$$

Отсюда следует, что для почти всех $\tilde\zeta\in R_{m-1,n}$ функция $\tilde f\in H^p_\alpha(\mathbf{B}_n)$. Но поскольку при $0<p<+\infty$ и $-\infty<\alpha\leqslant-1$ мы имеем $H^p_\alpha(\mathbf{B}_n)=\{0\}$, то из (2.37) заключаем, что для почти всех $\tilde\zeta\in R_{m-1,n}$

$$\tilde f(\omega)=f\begin{pmatrix}\tilde\zeta\\ \omega\cdot\Gamma^*\end{pmatrix}=0,\ \omega\in\mathbf{B}_n, \tag{2.38}$$

где $I^{(n)}-\tilde\zeta^*\cdot\tilde\zeta=\Gamma\cdot\Gamma^*$, $\Gamma\in M^*_{n,n}$.

Наконец, из (2.38), ввиду непрерывности функции f, следует что $f(Z)\equiv 0$, $Z\in R_{m,n}$, чем и завершается доказательство.

Таким образом, пространства $H^p_\alpha(R_{m,n})$ представляют интерес, только при условиях

$$0<p<+\infty \text{ и } -1<\alpha<+\infty, \tag{2.39}$$

которые будут предполагаться выполненными всюду дальше.

Из предложения 2.2 (б) легко вытекает

Предложение 2.5. *Если* $0<p<+\infty$ *и* $-1<\alpha<\beta<+\infty$, *то при* m, $n\geqslant 1$

$$L^p_\alpha(R_{m,n}) \subset L^p_\beta(R_{m,n}),\quad H^p_\alpha(R_{m,n}) \subset H^p_\beta(R_{m,n}). \tag{2.40}$$

Лемма 2.1. *Если функция $f(z)$ голоморфна в $\mathbf{B}_n$, то справедливо неравенство*

$$|f(0)|^p \leqslant c_{1,n}(\alpha)\cdot \int\limits_{\mathbf{B}_n} |f(\omega)|^p \cdot (1-|\omega|^2)^\alpha \, d\mu_{1,n}(\omega). \tag{2.41}$$

Доказательство. Переходом к полярным координатам получим равенство

$$I = c_{1,n}(\alpha)\cdot \int\limits_{\mathbf{B}_n} |f(\omega)|^p \cdot (1-|\omega|)^2)^\alpha \, d\mu_{1,n}(\omega) =$$

$$= c_{1,n}(\alpha)\cdot \int\limits_0^1 r^{2n-1}\cdot(1-r^2)^\alpha \int\limits_{S_n} |f(r\cdot\eta)|^p \, d\sigma_n(\eta), \tag{2.42}$$

где $S_n = \{\eta \in \mathbf{C}^n : |\eta| = 1\} \subset \mathbf{C}^n$ — единичная сфера, а $d\sigma_n$ — поверхностная мера Лебега на S_n. Поскольку $|f(z)|^p$ субгармонична в $\mathbf{B}_n$, то имеем для $0 \leqslant r < 1$:

$$|f(0)|^p \leqslant \frac{1}{\sigma_n(S_n)} \int\limits_{S_n} |f(r\cdot\eta)|^p \, d\sigma_n(\eta), \tag{2.43}$$

где $\sigma_n(S_n)$ — полная „площадь" сферы S_n.

Комбинируя (2.42) и (2.43), получим оценку

$$I \geqslant |f(0)|^p \cdot \sigma_n(S_n)\cdot c_{1,n}(\alpha)\cdot \int\limits_0^1 r^{2n-1}\cdot(1-r^2)^\alpha \, dr =$$

$$= c_{1,n}(\alpha)\cdot|f(0)|^p \cdot \int\limits_{\mathbf{B}_n} (1-|\omega|^2)^\alpha \, d\mu_{1,n}(\omega) =$$

$$= c_{1,n}(\alpha)\cdot|f(0)|^p\cdot J_{1,n}(\alpha) = |f(0)|^p.$$

Предложение 2.6. *Если $f(\zeta) \in H^p_\alpha(R_{m,n})$, то функция $f\begin{pmatrix}\tilde\zeta\\ 0\end{pmatrix}$, $\tilde\zeta \in R_{m-1,n}$, принадлежит пространству $H^p_{\alpha+1}(R_{m-1,n})$.*

Доказательство. Пользуясь равенством (2.37), для $f(Z) \in H^p_\alpha(R_{m,n})$ мы имеем

$$+\infty > \int\limits_{R_{m,n}} |f(\zeta)|^p \cdot [\det(I^{(n)} - \zeta^*\cdot\zeta)]^\alpha \, d\mu_{m,n}(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{R_{m-1,n}} [\det(I^{(n)} - \tilde\zeta^*\cdot\tilde\zeta)]^{\alpha+1}\cdot\left\{\int\limits_{\mathbf{B}_n} |\tilde f(\omega)|^p\cdot(1-|\omega|^2)^\alpha d\mu_{1,n}(\omega)\right\} \times d\mu_{m-1,n}(\tilde\zeta) \geqslant$$

$$\geqslant c_{1,n}^{-1}(\alpha)\cdot \int\limits_{R_{m-1,n}} [\det(I^{(n)} - \tilde\zeta^*\cdot\tilde\zeta)]^{\alpha+1}\cdot|\tilde f(0)|^p \, d\mu_{m-1,n}(\tilde\zeta) =$$

$$= c_{1,n}^{-1}(\alpha)\cdot\int\limits_{R_{m-1,n}}[\det(I^{(n)}-\tilde{\zeta}^{*}\cdot\tilde{\zeta})]^{\alpha+1}\cdot\left|f\begin{pmatrix}\tilde{\zeta}\\0\end{pmatrix}\right|^{p}d\mu_{m-1,n}(\tilde{\zeta}). \qquad (2.44)$$

Из (2.44) в итоге следует, что функция $f\begin{pmatrix}\tilde{\zeta}\\0\end{pmatrix}$, $\tilde{\zeta}\in R_{m-1,n}$, принадлежит классу $H^{p}_{\alpha+1}(R_{m-1,n})$.

§ 3. Основные интегральные представления в областях $R_{m,n}(m,\ n\geqslant 1)$

3.1. а) Докажем сначала формулу интегрального представления для класса $H^{p}_{\alpha}(R_{m,n})$ в частном случае, когда $p=2$.

Теорема 3.1. *Любая функция $f(Z)\in H^{2}_{\alpha}(R_{m,n})$ $(-1<\alpha<+\infty)$ допускает интегральное представление вида*

$$f(Z)=c_{m,n}(\alpha)\cdot\int\limits_{R_{m,n}}f(\zeta)\,\frac{[\det(I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^{*})]^{\alpha}}{[\det(I^{(m)}-Z\cdot\zeta^{*})]^{m+n+\alpha}}\,d\mu_{m,n}(\zeta) \qquad (3.1)$$

ри $Z\in R_{m,n}$.

Доказательство. Убедимся сначала, что формула (3.1) верна при $Z=0\in R_{m,n}$. Более того, установим следующий факт:

если $\alpha>-1$, $m,\ n\geqslant 1$, то для любой функции $f(Z)\in H^{2}_{\alpha}(R_{m,n})$ справедливы формулы

$$f(0)=c_{m,n}(\alpha)\cdot\int\limits_{R_{m,n}}f(\zeta)\cdot[\det(I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^{*})]^{\alpha}\,d\mu_{m,n}(\zeta)=$$

$$=c_{m,n}(\alpha)\cdot\int\limits_{R_{m,n}}f(\zeta)\cdot[\det(I^{(n)}-\zeta^{*}\cdot\zeta)]^{\alpha}\,d\mu_{m,n}(\zeta). \qquad (3.2)$$

Равенства мы будем доказывать полной индукцией по индексу m.

При $m=1$ нам нужно с учетом (2.34) показать, что для любой функции $f\in H^{2}_{\alpha}(\mathrm{B}_n)$ справедлива формула

$$f(0)=\frac{(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n)}{\pi^{n}}\int\limits_{\mathrm{B}_n}f(\varsigma)\cdot(1-|\varsigma|^{2})^{\alpha}\,d\mu_{1,n}(\varsigma). \qquad (3.3)$$

Но эта формула (3.3) является простым следствием при $z=0$ теоремы III (§ 0).

Допустим теперь, что $m>1$ и наше утверждение (3.2) справедливо для значения $m-1$, и докажем его для значения m.

С целью сокращения, если обозначить

$$I=c_{m,n}(\alpha)\cdot\int\limits_{R_{m,n}}f(\zeta)\cdot[\det(I^{(n)}-\zeta^{*}\cdot\zeta)]^{\alpha}\,d\mu_{m,n}(\zeta), \qquad (3.4)$$

то мы должны установить равенство $I=f(0)$.

Действительно, по формуле интегрирования (2.30) и в силу рекуррентных соотношений (2.34) имеем

$$I = c_{m-1,n}(\alpha+1) \cdot \int\limits_{R_{m-1,n}} [\det(I^{(n)} - \tilde{\zeta}^* \cdot \tilde{\zeta})]^{\alpha+1} \cdot \Big\{ c_{1,n}(\alpha) \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbf{B}_n} \tilde{f}(\omega) \cdot (1-|\omega|^2)^{\alpha}\, d\mu_{1,n}(\omega) \Big\}\, d\mu_{m-1,n}(\tilde{\zeta}). \tag{3.5}$$

В процессе доказательства предложения 2.4 мы установили следующий факт: при $f \in H^p_\alpha(R_{m,n})$, $\tilde{f} \in H^p_\alpha(\mathbf{B}_n)$ почти для всех $\tilde{\zeta} \in R_{m-1,n}$, $0 < p < +\infty$ и $-1 < \alpha < +\infty$. Поэтому, ввиду того, что наша исходная функция $f \in H^2_\alpha(R_{m,n})$, можем утверждать, что $\tilde{f} \in H^2_\alpha(\mathbf{B}_n)$ для почти всех $\tilde{\zeta} \in R_{m-1,n}$. Следовательно, согласно (3.3), имеем также

$$\tilde{f}(0) = c_{1,n}(\alpha) \cdot \int\limits_{\mathbf{B}_n} \tilde{f}(\omega) \cdot (1-|\omega|^2)^{\alpha}\, d\mu_{1,n}(\omega) \tag{3.6}$$

для почти всех $\tilde{\zeta} \in R_{m-1,n}$.

Комбинируя формулы (3.5) и (3.6), получим

$$I = c_{m-1,n}(\alpha+1) \cdot \int\limits_{R_{m-1,n}} \tilde{f}(0) \cdot [\det(I^{(n)} - \tilde{\zeta}^* \cdot \tilde{\zeta})]^{\alpha+1}\, d\mu_{m-1,n}(\tilde{\zeta}) =$$

$$= c_{m-1,n}(\alpha+1) \cdot \int\limits_{R_{m-1,n}} f\begin{pmatrix} \tilde{\zeta} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot [\det(I^{(n)} - \tilde{\zeta}^* \cdot \tilde{\zeta})]^{\alpha+1}\, d\mu_{m-1,n}(\tilde{\zeta}). \tag{3.7}$$

Далее, из предложения 2.6 следует, что $f\begin{pmatrix} \tilde{\zeta} \\ 0 \end{pmatrix} \in H^2_{\alpha+1}(R_{m-1,n})$, а согласно индуктивному предположению (для $m-1$) из (3.7) получим равенство

$$I = f\begin{pmatrix} \tilde{\zeta} \\ 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{\tilde{\zeta} = 0 \in R_{m-1,n}} = f(0),$$

в чем нам надо было убедиться.

Установив таким образом формулу (3.2) для любой функции $f \in H^2_\alpha(R_{m,n})$, перейдем к доказательству интегрального представления (3.1) теоремы. С этой целью зафиксируем функцию $f \in H^2_\alpha(R_{m,n})$ и произвольную точку $Z_0 \in R_{m,n}$.

Далее, поскольку группа $\mathrm{Aut}(R_{m,n})$ действует транзитивно на $R_{m,n}$ ([6], § 4.3 (1)), то существует элемент $g \in \mathrm{Aut}(R_{m,n})$ такой, что $g(Z_0) = 0 \in R_{m,n}$. Обозначив еще через $g^{-1} \in \mathrm{Aut}(R_{m,n})$ обратное к g отображение, имеем также $g^{-1}(0) = Z_0$.

Наконец, как обычно, Δ_g и $\Delta_{g^{-1}}$ суть соответственно комплексные якобианы отображений g и g^{-1}. Притом заметим, что $\Delta_g(\zeta) \neq 0$

и $\Delta_{g^{-1}}(\zeta) \neq 0$, $\zeta \in R_{m,n}$, и кроме того, если $\zeta_2 = g(\zeta_1) \Leftrightarrow \zeta_1 = g^{-1}(\zeta_2)$, то

$$\Delta_g(\zeta_1)\cdot\Delta_{g^{-1}}(\zeta_2) = 1. \qquad (3.8)$$

Договоримся теперь выбрать голоморфную в $R_{m,n}$ функцию $\ln\Delta_g$ каким-нибудь образом, положив конечно, что

$$\ln\Delta_{g^{-1}}(\zeta) \equiv -\ln\Delta_g(g^{-1}(\zeta)),\ \zeta \in R_{m,n}. \qquad (3.9$$

Тогда согласно предложению 2.3 (3) имеем

$$[\det(I^{(m)} - g(\zeta)\cdot g(\zeta)^*)]^\alpha \equiv$$

$$\equiv |\Delta_g(\zeta)|^{2\alpha/m+n}\cdot[\det(I^{(m)} - \zeta\cdot\zeta^*)]^\alpha,\ \zeta \in R_{m,n}; \qquad (3.10)$$

$$[\det(I^{(m)} - Z_0\cdot\zeta^*)]^{-(m+n+\alpha)} \equiv [\Delta_g(Z_0)]^{\frac{m+n+\alpha}{m+n}}\cdot\overline{[\Delta_g(\zeta)]^{\frac{m+n+\alpha}{m+n}}},\ \zeta \in R_{m,n}, \qquad (3.11)$$

так как $g(Z_0) = 0$.

Затем введем функцию

$$\varphi(W) \equiv f(g^{-1}(W))\cdot[\Delta_{g^{-1}}(W)]^{\frac{m+n+\alpha}{m+n}},\ W \in R_{m,n}, \qquad (3.12)$$

голоморфную в $R_{m,n}$, причем, как следует из (3.8) и (3.10), $\|\varphi\|_{2,\alpha} = \|f\|_{2,\alpha} < +\infty$, т. е. $\varphi \in H^2_\alpha(R_{m,n})$.

Поэтому по формуле (3.2)

$$\varphi(0) = c_{m,n}(\alpha)\cdot\int\limits_{R_{m,n}}\varphi(W)\cdot[\det(I^{(m)} - W\cdot W^*)]^\alpha\, d\mu_{m,n}(W). \qquad (3.13)$$

В заключение подставим явное выражение (3.12) функции $\varphi(W)$ в (3.13), произведем замену переменной $W = g(\zeta)$, $\zeta \in R_{m,n}$, [в интеграле (3.13), принимая во внимание соотношения (3.9)—(3.11). Тогда приходим к формуле (3.1) для $Z = Z_0$, и поскольку точка $Z_0 \in R_{m,n}$ была произвольной, то теорема, т. е. формула (3.1), полностью доказана.

3.2.(a) Распространим теперь теорему 3.1 на пространства $H^p_\alpha(R_{m,n})$, $1 \leqslant p < +\infty$, однако полагая пока, что параметр $\alpha \in [0, +\infty)$.

Теорема 3.2. *Пусть $1 \leqslant p < +\infty$ и $\alpha \geqslant 0$. Тогда любая функция $f(Z) \in H^p_\alpha(R_{m,n})$ допускает представление*

$$f(Z) = c_{m,n}(\alpha)\cdot\int\limits_{R_{m,n}}\frac{[\det(I^{(m)} - \zeta\cdot\zeta^*)]^\alpha}{[\det(I^{(m)} - Z\cdot\zeta^*)]^{m+n+\alpha}}\, d\mu_{m,n}(\zeta),\ Z \in R_{m,n}. \qquad (3.14)$$

Доказательство. Полагая, что $f(Z) \in H^p_\alpha(R_{m,n})$ $(1 \leqslant p < +\infty,\ \alpha > 0)$ — заданная функция, для значений $0 < r < 1$ определим функции

$$f_r(\zeta) = f(r\cdot\zeta),\ \zeta \in R_{m,n}, \qquad (3.15)$$

заметив, что согласно предложению 2.2 а), $r\cdot\zeta \in R_{m,n}$. Очевидно, что функции f_r ограничены в $R_{m,n}$, и поэтому $f_r \in H^2_\alpha(R_{m,n})$, $0 < r < 1$.

Согласно теореме 3.1 имеем

$$f_r(Z) \equiv c_{m,n}(\alpha)\cdot\int\limits_{R_{m,n}} f_r(\zeta)\frac{[\det(I^{(m)} - \zeta\cdot\zeta^*)]^\alpha}{[\det(I^{(m)} - Z\cdot\zeta^*)]^{m+n+\alpha}}\, d\mu_{m,n}(\zeta), \qquad (3.16)$$

$$Z \in R_{m,n},\ r \in (0,1).$$

Полагая, что точка $Z_0 \in R_{m,n}$ произвольна, зафиксируем ее и подберем такое $r_0 \in (0,1)$, чтобы имели $Z_0 \in r \cdot R_{m,n}$ при $r_0 < r < 1$. Исходя из представления (3.16), получаем формулу

$$f(Z_0) = c_{m,n}(\alpha) \cdot \int_{R_{m,n}} f_r(\zeta) \frac{[\det(I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^\alpha \, d\mu_{m,n}(\zeta)}{[\det(I^{(m)} - Z_0/r \cdot \zeta^*)]^{m+n+\alpha}}, \quad r_0 \leqslant r < 1. \tag{3.17}$$

Наконец, если в интеграле (3.17) произведем замену переменной $\zeta \to \zeta/r$, то придем к формуле

$$f(Z_0) = c_{m,n}(\alpha) \cdot r^{2m^2} \cdot \int_{r \cdot R_{m,n}} f(\zeta) \frac{[\det(r^2 I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^\alpha \, d\mu_{m,n}(\zeta)}{[\det(r^2 I^{(m)} - Z_0 \cdot \zeta^*)]^{m+n+\alpha}}, \quad r_0 \leqslant r < 1. \tag{3.18}$$

Пусть $\chi_{m,n}(\zeta; r)$, $\zeta \in R_{m,n}$ — характеристическая функция области $r \cdot R_{m,n}$ и

$$F_r(\zeta) = f(\zeta) \cdot \frac{[\det(r^2 \cdot I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^\alpha}{[\det(r^2 \cdot I^{(m)} - Z_0 \cdot \zeta^*)]^{m+n+\alpha}} \cdot \chi_{m,n}(\zeta; r). \tag{3.19}$$

Тогда формула может быть записана в виде

$$f(Z_0) = c_{m,n}(\alpha) \cdot r^{2m^2} \cdot \int_{R_{m,n}} F_r(\zeta) \, d\mu_{m,n}(\zeta), \quad r_0 \leqslant r < 1. \tag{3.20}$$

Введем, далее, в рассмотрение компактное множество

$$K = \{(r, \zeta), \ r \in \mathbf{R}, \ \zeta \in M_{mn} : r_0 \leqslant r \leqslant 1, \ r^2 \cdot I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^* \geqslant 0\}, \tag{3.21}$$

заметив, что тогда для любого $(r, \zeta) \in K$

$$\det(r^2 \cdot I^{(m)} - Z_0 \cdot \zeta^*) \neq 0. \tag{3.22}$$

Поэтому существует число $\delta \in (0, +\infty)$ такое, что для всех $(r, \zeta) \in K$

$$|\det(r^2 \cdot I^{(m)} - Z_0 \cdot \zeta^*)| \geqslant \delta > 0$$

и тем самым

$$\left| [\det(r^2 \cdot I^{(m)} - Z_0 \cdot \zeta^*)]^{-(m+n+\alpha)} \right| \leqslant \delta^{-(m+n+\alpha)}, \quad (r, \zeta) \in K. \tag{3.23}$$

Далее, рассуждая приблизительно так же, как и при доказательстве предложения 2.2 (б), на основании теоремы IV заключаем, что при $r_0 \leqslant r < 1$ и $\zeta \in r \cdot R_{m,n}$, в предположении $\alpha \geqslant 0$, справедливо неравенство

$$[\det(r^2 \cdot I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^\alpha \leqslant [\det(I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^\alpha. \tag{3.24}$$

С учетом (3.19), (3.23) и (3.24) приходим к оценке

$$|F_r(\zeta)| \leqslant |f(\zeta)| \cdot [\det(I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^\alpha \cdot \delta^{-(m+n+\alpha)}, \quad \zeta \in R_{m,n}, \tag{3.25}$$

откуда ввиду $f \in H^p_\alpha(R_{m,n})$ легко видеть, что правая часть (3.25) из класса $L^1(R_{m,n}; d\mu_{m,n})$ и, тем самым, она является интегрируемой мажорантой для семейства функций $\{F_r(\zeta)\}$, $r_0 < r < 1$.

Поэтому мы вправе в формуле (3.20) переходить к пределу при $r\uparrow 1$ на основе теоремы Лебега об ограниченной сходимости. В результате мы получим формулу (3.14) для выбранной точки $Z_0\in R_{m,n}$. Наконец, поскольку эта точка была произвольной, то теорема 3.2 полностью доказана.

(б) Пусть $1\leqslant p<+\infty$, $\alpha>-1$ и $\beta\in\mathbf{C}$ произвольны. Если

$$\operatorname{Re}\beta>\frac{1+\alpha}{p}-1,\ 1<p<+\infty,$$
$$\operatorname{Re}\beta\geqslant\alpha,\ p=1, \tag{3.26}$$

то будем писать $\beta\vdash(p,\alpha)$.

На основе интегрального неравенства Гёльдера легко установить

Предложение 3.1. *Если* $\beta\vdash(p,\alpha)$, $\operatorname{Im}\beta=0$, *то имеет место включение*

$$H^p_\alpha(R_{m,n})\subset H^1_\beta(R_{m,n}). \tag{3.27}$$

3.3. На функциях $f(Z)$, заданных в области $R_{m,n}$, рассмотрим интегральный оператор

$$T^\beta_{m,n}f(Z)\equiv c_{m,n}(\beta)\cdot\int\limits_{R_{m,n}}G_{m,n}(Z,\zeta;\beta,f)\,d\mu_{m,n}(\zeta),\ Z\in R_{m,n}, \tag{3.28}$$

где

$$G_{m,n}(Z,\zeta;\beta,f)\overset{\text{def}}{\equiv}f(\zeta)\,\frac{[\det(I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*)]^\beta}{[\det(I^{(m)}-Z\cdot\zeta^*)]^{m+n+\beta}},\ \operatorname{Re}\beta>-1. \tag{3.29}$$

(а) Лемма 3.1. *Положим, как всегда,* $1\leqslant p<+\infty$ *и* $-1<\alpha<+\infty$, $f(\zeta)\in L^p_\alpha(R_{m,n})$.

1. *Пусть* $p=1$, *компакт* $K\subset R_{m,n}$, $0<A<+\infty$ *и* $\alpha<a<+\infty$. *Тогда существует функция* $\Psi(\zeta)\equiv\Psi_1(\zeta)\in L^1(R_{m,n};d\mu_{m,n})$ *такая, что оценка*

$$|G_{m,n}(Z,\zeta;\beta,f)|\leqslant\Psi(\zeta),\ \zeta\in R_{m,n}, \tag{3.30}$$

справедлива равномерно по $Z\in K$ *и* $\beta\in\mathbf{C}$, *но при* $|\operatorname{Im}\beta|\leqslant A$, $\alpha\leqslant\operatorname{Re}\beta\leqslant a$.

2. *Пусть* $1<p<+\infty$, *компакт* $K\subset R_{m,n}$ *и* $0<A<+\infty$, $\frac{1+\alpha}{p}-1<a_1<a_2<+\infty$. *Тогда существует функция* $\Psi(\zeta)\equiv\Psi_2(\zeta)\in L^1(R_{m,n};d\mu_{m,n})$ *такая, что оценка* (3.30) *имеет место равномерно по* $Z\in K$ *и* $\beta\in\mathbf{C}$, *при* $|\operatorname{Im}\beta|\leqslant A$ *и* $a_1\leqslant\operatorname{Re}\beta\leqslant a_2$.

Доказательство. При $Z\in R_{m,n}$, $\zeta\in\overline{R}_{m,n}$, $\beta\in\mathbf{C}$ определим функцию

$$\eta(Z,\zeta;\beta)=[\det(I^{(m)}-Z\cdot\zeta^*)]^{m+n+\beta}\equiv$$
$$\equiv\exp\{(m+n+\beta)\cdot\ln\det(I^{(m)}-Z\cdot\zeta^*)\}. \tag{3.31}$$

Очевидно, что η непрерывна по совокупности переменных $Z\in R_{m,n}$, $\zeta\in\overline{R}_{m,n}$, $\beta\in\mathbf{C}$, притом нигде в нуль не обращается. Поэтому в обоих рассматриваемых в лемме 3.1 случаях 1 или 2 справедлива оценка снизу

$$|\eta(Z, \zeta; \beta)| \geqslant \delta > 0.$$

Отсюда и из определения (3.29) функции $G_{m,n}$ следует, что в тех же случаях 1 или 2 имеем оценку сверху

$$|G_{m,n}(Z, \zeta; \beta, f)| \leqslant |f(\zeta)| \cdot |\eta(Z, \zeta; \beta)|^{-1} \times$$
$$\times [\det(I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^{\operatorname{Re}\beta} \leqslant \delta^{-1} \cdot |f(\zeta)| \cdot [\det(I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^{\operatorname{Re}\beta}. \tag{3.32}$$

Наконец, из условий, наложенных на $\operatorname{Re}\beta$ в обоих случаях 1 или 2, вытекает существование функций $\Psi_{1,2}(\zeta) \in L^1(R_{m,n}; d\mu_{m,n})$, чем и завершится доказательство леммы.

Следствие 3.1. Пусть $1 \leqslant p < +\infty$, $\alpha > -1$, $f(Z) \in L^p_\alpha(R_{m,n})$ и $\beta \vdash (p, \alpha)$. Тогда $T^\beta_{m,n} f(Z)$, как функция от $Z \in R_{m,n}$, голоморфна в $R_{m,n}$.

Следствие 3.2. В тех же предположениях $1 \leqslant p < +\infty$, $\alpha > -1$, $f \in L^p_\alpha(R_{m,n})$ и $Z \in R_{m,n}$:

Если $p = 1$, то $T^\beta_{m,n} f(Z)$, как функция от β, голоморфна внутри и непрерывна в замкнутой области $\operatorname{Re}\beta \geqslant \alpha$.

Если же $1 < p < +\infty$, то $T^\beta_{m,n} f(Z)$, как функция от β, голоморфна в области $\operatorname{Re}\beta > (1+\alpha)/p - 1$.

(б) Наконец, сформулируем и докажем основную теорему.

Теорема 3.3. *Пусть* $1 \leqslant p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$ *и* $\beta \vdash (p, \alpha)$. *Тогда любая функция* $f(Z) \in H^p_\alpha(R_{m,n})$ *допускает интегральное представление*

$$f(Z) \equiv T^\beta_{m,n} f(Z), \quad Z \in R_{m,n}. \tag{3.33}$$

Доказательство. Выберем произвольную функцию $f \in H^p_\alpha \times (R_{m,n}) \subset L^p_\alpha(R_{m,n})$, и затем фиксируя точку $Z \in R_{m,n}$, положим

$$h(\beta) \equiv T^\beta_{m,n} f(Z). \tag{3.34}$$

Согласно следствию 3.2 леммы 3.1, при $p = 1$ функция $h(\beta)$ голоморфна внутри и непрерывна в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re}\beta \geqslant \alpha$, а при $1 < p < +\infty$ она голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re}\beta > (1+\alpha)/p - 1$.

Нашей конечной целью является установление тождества

$$h(\beta) \equiv f(Z). \tag{3.35}$$

Если положить $\beta_0 = \max\{0; (1+\alpha)/p - 1\}$, нам в силу теоремы единственности голоморфных функций достаточно установить, что

$$h(\beta) \equiv f(Z), \quad \beta > \beta_0. \tag{3.36}$$

Но при любом $\beta > \beta_0$ легко видеть, что $\beta \vdash (p, \alpha)$ и поэтому, согласно предложению 3.1

$$f(Z) \in H^1_\beta(R_{m,n}).$$

Наконец, поскольку $\beta > 0$, то согласно теореме 3.2 приходим к тождеству (3.36)

$$f(Z)\equiv T^{\beta}_{m,n}f(Z)\equiv h(\beta),\ \beta>\beta_0,$$

т. е. к доказательству теоремы.

Замечание. Комбинируя результаты монографии [6] и работы [8], можно получить утверждение теоремы 3.3 при $\alpha=0$ и вещественном $\beta>0$.

(в) В заключение статьи считаем не лишним отметить, что естественно возникающий в связи с теоремой 3.3 вопрос о справедливости соответствующей ей теоремы проектирования остается открытым.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 10.V.1989

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ, Ա. Հ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ. Ինտեգրալ ներկայացումներ ընդհանրացված միավոր շրջանում (ամփոփում)

Կամայական $m, n\geqslant 1$ բնական թվերի համար նշանակենք $R_{m,n}$-ով $m\times n$ չափսերի այն կոմպլեքս մատրիցներից բաղկացած տիրույթը, որոնց համար $I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*$ մատրիցը դրականորեն որոշված է։ Այստեղ $I^{(m)}$-ը m կարգի միավոր քառակուսի մատրիցն է, իսկ ζ^*-ը ζ-ի Հերմիտյան համալուծումն է։

Բացի այդ, $\mu_{m,n}$ $(m, n\geqslant 1)$ Լեբեգի չափը $R_{m,n}$ տիրույթում։
Ներկայացված աշխատանքում $R_{m,n}$ տիրույթում հոլոմորֆ և

$$\int\limits_{R_{m,n}}|f(\zeta)|^p\cdot[\det(I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*)]^{\alpha}\,d\mu_{m,n}(\zeta)<+\infty \qquad (1)$$

պայմանին բավարարող $H^p_\alpha(R_{m,n})$ դասերի $(1<p<+\infty,\ \alpha>-1)$ $f(\zeta)$ ֆունկցիաների համար ապացուցված է հետևյալ ինտեգրալ բանաձևը
(Թեորեմ 3.3).

$$f(Z)=c_{m,n}(\beta)\cdot\int\limits_{R_{m,n}}f(\zeta)\cdot\frac{[\det(I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*)]^{\beta}\,d\mu_{m,n}(\zeta)}{[\det(I^{(m)}-Z\cdot\zeta^*)]^{m+n+\beta}},\ Z\in R_{m,n}, \qquad (2)$$

որտեղ $\beta\in C$ և

$$\operatorname{Re}\beta>\frac{1+\alpha}{p}-1,\ 1<p<+\infty,$$

$$\operatorname{Re}\beta\geqslant\alpha,\ p=1.$$

Այս հիմնական արդյունքը հանդիսանում է հեղինակներից մեկի 40-ական թվականների [1,2] աշխատանքներում ապացուցված ինտեգրալ ներկայացման բազմաչափ անալոգը։ Միևնույն ժամանակ թեորեմ 3.3-ը ընդհանրացնում է Հուա Լո-Քենի [6] արդյունքը, որը հաստատում է (2) բանաձևը $p=2$ և $\beta=\alpha=0$ պայմանների դեպքում, որոնք ի դեպ, չափազանց էական են [6] մենագրությունում կիրառված մեթոդների տեսակետից։

M. M. DJRBASHIAN, A. H. KARAPETIAN. *Integral representations in a generalized unit disk* (summary)

Let $R_{m,n}$ $(m, n>1)$ be the complex domain of $m\times n$—matrices ζ, for which the matrix $I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*$ is positively determined. Here $I^{(m)}$ denotes square unit matrix of order m and the matrix ζ^* is Hermitian conjugate of ζ. Besides, let $\mu_{m,n}$ $(m, n\geqslant 1)$ denotes Lebesgue measure in the domain $R_{m,n}$.

In the present paper for the classes $H^p_\alpha(R_{m,n})$ $(1\leqslant p<\infty,\ \alpha>-1)$ consisting of functions $f(\zeta)$ holomorphic in $R_{m,n}$ and satisfying the condition

$$\int\limits_{R_{m,n}} |f(\zeta)|^p \cdot [\det (I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^{\alpha} \, d\mu_{m,n}(\zeta) < +\infty \qquad (1)$$

the following integral formula have been established (Theorem 3.3):

$$f(Z) = c_{m,n}(\beta) \cdot \int\limits_{R_{m,n}} \frac{[\det (I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^{\beta} \, d\mu_{m,n}(\zeta)}{[\det (I^{(m)} - Z \cdot \zeta^*)]^{m+n+\beta}}, \quad Z \in R_{m,n}, \qquad (2)$$

where $\beta \in C$ and

$$\operatorname{Re}\beta > \frac{1+\alpha}{p} - 1, \; 1 < p < +\infty,$$

$$\operatorname{Re}\beta \geqslant \alpha, \; p = 1.$$

This main result represents a multidimensional analogue of the integral representation established by one of the authors in the 1940 s ([1], [2]). At the same time Theorem 3.3 of our paper generalizes the result of Hua L. K. [6] asserting that the formula (2) holds under the conditions $p = 2$ and $\beta = \alpha = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян*. О представимости некоторых классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН Арм. ССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
2. *М. М. Джрбашян*. К проблеме представимости аналитических функций. Сообщ. Ин-та матем. и механики АН Арм. ССР, вып. 2, 1948, 3—40.
3. *M. M. Dzrbasjan*, Survey of some achievements of Armenian mathematicians in the theory of integral representations and factorization of analytic functions Математически Весник (Югославая), 39, 1977, 263—282.
4. *М. М. Джрбашян*. Краткий обзор результатов исследований математиков Армении в области теории факторизации мероморфных функций и ее приложений. Изв. АН Арм. ССР, «Математика», 23, № 6, 1988, 517—545.
5. *A. E. Djrbashian, F. A. Shamoian*. Topics in the Theory of A^p_α Spaces, Teubner Texte zur Mathematik, B. 105.
6. *Хуа Ло-кен*. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях, М., ИЛ, 1959.
7. *F. Forelli, W. Rudin*. Projections on spaces of holomorphic functions in balls, Ind. Univ. Math. J., 24, № 6, 1974, 593—602.
8. *M. Stoll*. Mean value theorems for harmonic and holomorphic functions on bounded symmetric domains, J. Reine und Angew. Math., 290, 1977, 191—198.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIV, № 6, 1989 Математика

УДК 517.538.5 + 517.986

Б. Т. БАТИКЯН, С. А. ГРИГОРЯН

О РАВНОМЕРНЫХ АЛГЕБРАХ, СОДЕРЖАЩИХ $A(K)$

1°. Пусть K — компактное подмножество комплексной плоскости с непустой внутренностью K°, и $A(K)$ — алгебра всех тех непрерывных функций на K, которые аналитичны в каждой точке K°. Поскольку каждая функция из $A(K)$ однозначно определяется своим поведением на топологической границе ∂K компакта K, то в дальнейшем мы будем отождествлять алгебру $A(K)$ с ее сужением на ∂K.

Цель настоящей работы — описание равномерных алгебр на ∂K, содержащих в качестве подалгебры алгебру $A(K)$. Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть компакт K удовлетворяет следующим условиям:*

1) *внутренность K° состоит из конечного числа компонент связности $G_1, \cdots, G_n$;*

2) *для каждой компоненты G_i существует хотя бы одна граничная точка $\xi_i \in \partial G_i$ и круг $U(\xi_i)$ с центром в этой точке, что пересечение $U(\xi_i) \cap K$ имеет в дополнении конечное число компонент связности.*

Тогда произвольная равномерная алгебра B на ∂K, содержащая в себе $A(K)$, совпадает с одной из алгебр вида $A(K')$, где компакт K' возникает из K в результате удаления некоторых компонент связности K°.

В частности, если компакт K имеет связную внутренность и существуют точка $\xi \in \partial K^\circ$ и круг $U(\xi)$ такие, что дополнение множества $U(\xi) \cap K$ имеет конечное число компонент, то алгебра B совпадает либо с $A(K)$, либо с $C(\partial K)$. Другими словами, любую непрерывную на ∂K функцию можно равномерно на ∂K аппроксимировать полиномами вида $\sum f_n h^n$, где $f_n \in A(K)$, h — произвольная непрерывная функция, не принадлежащая $A(K)$. В таких случаях говорят, что равномерная алгебра $A(K)$ максимальна на ∂K.

Понятие максимальной подалгебры, тесно связанное с вопросами равномерной аппроксимации, было введено Дж. Вермером [1], который установил максимальность алгебры $A(K)$ в случае, когда K—единичный круг. Ставшая уже классической теорема Вермера, выявив важность понятия максимальной подалгебры, стимулировала появление большого количества работ, посвященных непосредственно теории максимальных равномерных алгебр. Укажем, в частности, на работы К. Гофмана, И. Зингера [2], Е. А. Горина, В. М. Золотаревского [3], П. Пейпа [4], в которых изучались максимальные алгебры аналитических функций.

После работы Вермера естественно возникала задача о непосредственном обобщении теоремы о максимальности на произвольные компактные подмножества (с непустой внутренностью) комплексной плоскости. Первый результат в этом направлении принадлежит Э. Бишопу [5]. Он установил максимальность алгебры $A(K)$ на ∂K в предположении полиномиальной выпуклости K и связности K°. Согласно более общей теореме Т. Гамелина и Х. Росси [6] предположение о полиномиальной выпуклости K можно заменить условием: каждая точка внутренности K° обладает единственной представляющей мерой Йенсена на ∂K. Наиболее тонкий результат получил В. Н. Сеничкин [7], согласно которому максимальность алгебры $A(K)$ вытекает из связности K° и из условия: совокупность точек пика алгебры $A(K)$ образует множество единственности для субгармонических на K° функций.

Подчеркнем, что связность внутренности компакта K есть необходимое условие максимальности $A(K)$ на ∂K. Является ли оно также и достаточным, неизвестно.

В даннной работе рассматривается тот случай, когда внутренность K разлагается на конечное число компонент связности и устанавливается, что при выполнении условия 2) теорема 1, все равномерные алгебры на ∂K, содержащие в себе $A(K)$ в качестве замкнутой подалгебры, допускают простое и естественное описание. Причем, как мы убедимся в процессе доказательства, теорема 1 останется справедливой, если в ней условие 2) заменить условиями Гамелина—Росси или Сеничкина.

Теорема 1 допускает эквивалентную формулировку в терминах подалгебр конечного типа. Понятие подалгебры конечного типа, введенное в нашей работе [8] и обобщающее понятие максимальной алгебры, заключается в следующем.

Пусть A — равномерная алгебра на произвольном компактном пространстве X. Рассмотрим следующую конечную цепочку длины k равномерных алгебр на X (включения строгие):

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{k-1} \subset A_k = C(X). \tag{1}$$

Если при всех $i\,(0 \leqslant i \leqslant k-1)$ между A_i и A_{i+1} не существует промежуточных равномерных подалгебр, то цепочка (1) называется неуплотняемой. По определению равномерная алгебра A называется подалгеброй конечного типа, а именно типа n, алгебры $C(X)$, если всякая цепочка вида (1) имеет длину $\leqslant n$ и существует хотя бы одна неуплотняемая цепочка в точности длины n. Очевидно, максимальные подалгебры суть подалгебры типа 1.

Теперь теорему 1 можно сформулировать следующим образом: если компакт K удовлетворяет условию 2), то алгебра $A(K)$ является подалгеброй конечного типа алгебры $C(\partial K)$ тогда и только тогда, когда внутренность компакта K состоит из конечного числа компонент связности. При этом тип алгебры $A(K)$ совпадает с числом компонент K°.

Опишем в общих чертах содержание статьи. В п. 2° задача об описании промежуточной подалгебры сводится к иньективности естественного отображения из пространства максимальных идеалов этой подалгебры в компакт K и к одной теореме о равномерной аппроксимации. В п. 3 мы устанавливаем иньективность этой проекции. В п. 4° собраны вспомогательные результаты об ортогональных мерах. В п. 5° завершается доказательство основной теоремы.

Основные результаты работы были анонсированы в заметке [9].

2°. Пусть B — произвольная равномерная алгебра на ∂K, содержащая в себе $A(K)$. Обозначим через $M(B)$ компактное пространство максимальных идеалов алгебры B, т. е. множество всех нетривиальных комплексных гомоморфизмов B, наделенное слабо* топологией, и через $\Gamma(B)$ — ее границу Шилова.

Напомним, что граница Шилова $\Gamma(A(K))$ алгебры $A(K)$ гомеоморфна ∂K (следовательно, и $\Gamma(B) = \partial K$), а пространство $M(A(K))$ ее максимальных идеалов естественно отождествляется с компактом K ([10], стр. 49). В связи с последним, рассмотрим непрерывное отображение $\pi: M(B) \to K$, сопоставляющее каждому комплексному гомоморфизму алгебры B его сужение на $A(K)$. Отображение π совпадает, как легко видеть, с преобразованием Гельфанда $\hat{z}$ функции z как элемента алгебры B. Для каждой компоненты G внутренности K° имеются две возможности: либо G целиком содержится в образе $\pi(M(B))$ отображения π, либо найдется точка $\lambda_0 \in G$, не отвечающая никакому гомоморфизму алгебры B. Последний случай означает, что преобразование Гельфанда элемента $z - \lambda_0$ не обращается в нуль на $M(B)$ и, следовательно, функция $\dfrac{1}{z-\lambda_0}$ принадлежит B.

Обратимся к первому случаю: $G \subset \pi(M(B))$. Отметим, прежде всего, что, вообще говоря, отображение π не обязано быть иньективным. Предположим тем не менее однозначность отображения λ^{-1} на G. Тогда π^{-1} будет однозначным и на замыкании компоненты G (см. [11], теорема 1.7). Следовательно, полагая $g(\lambda) = \hat{g}(\pi^{-1}(\lambda))$ для $\lambda \in G$, мы можем любую функцию $g \in B$ непрерывно продолжить с ∂K на компоненту G. Оказываетя это продолжение является аналитическим. В самом деле, пусть замкнутый круг $\overline{U}$ целиком содержится в G, и $B_{\overline{U}}$ — равномерное замыкание сужений функций из B на $\overline{U}$. Согласно локальному принципу максимума модуля ([10], стр. 127) $\Gamma(B_{\overline{U}}) \subset \partial\overline{U}$ и поскольку алгебра B, а значит и $B_{\overline{U}}$, содержит все многочлены, то по теореме Вермера о максимальности $B_{\overline{U}} = A(\overline{U})$. В частности, $g \in A(\partial K \cup G)$.

Таким образом, каждая равномерная алгебра B, содержащая в себе $A(K)$, выделяет из совокупности компонент связности K° семейство $\{G_j\}$, каждая из которых содержит такую точку λ_j, что $\dfrac{1}{z-\lambda_j} \in B$.

Если к тому же проекция π иньективна, то B содержится в алгебре $A(K \setminus \cup G_j)$.

Следовательно, для доказательства теоремы 1 достаточно установить, что 1) отображение π иньективно; 2) если λ_j принадлежит компоненте G_j внутренности компакта K, то равномерная алгебра на ∂K, порожденная элементами из $A(K)$ и системой функций $\frac{1}{z-\lambda_j}$, совпадает с алгеброй $A(K \setminus \cup G_j)$.

3°. В этом пункте мы показываем, что какова бы ни была алгебра B, содержащая $A(K)$, условие 2) теоремы 1 обеспечивает однозначность π^{-1} на K° (точнее на тех компонентах связности K°, которые целиком содержатся в образе отображения π).

Предварительно заметим, что прообраз $\pi^{-1}(\zeta)$ точки пика ζ алгебры $A(K)$ обязан быть одноточечным. В самом деле, пусть x_1, $x_2 \in \pi^{-1}(\zeta)$ и μ_1, μ_2 — положительные меры на $\Gamma(B) = \partial K$, представляющие, соответственно, точки x_1 и x_2. Тогда для любого $f \in A(K)$ будем иметь

$$\int_{\partial K} f d\mu_1 = \int_{\partial K} f d\mu_2 = f(\zeta),$$

т. е. две отличные друг от друга положительные меры представляют точку пика, что невозможно.

Основному результату этого пункта предпошлем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть $R(K)$ — равномерная алгебра тех непрерывных функций на K, которые аппроксимируются на K рациональными дробями с полюсами вне K, и V — открытое (в индуцированной топологии) подмножество компакта K. Тогда точки пика алгебры $R(\overline{V})$, принадлежащие V, будут точками пика и для алгебры $R(K)$.*

Доказательство. Пусть точка $\zeta \in V$ есть точка пика для алгебры $R(\overline{V})$. Согласно известному критерию Гликсберга ([10], стр. 85) это означает, что $\nu(\{\zeta\}) = 0$ для любой меры ν, ортогональной к $R(\overline{V})$. Мы должны доказать это же равенство при всех $\mu \perp R(K)$.

Выберем для этого открытое множество $W \subset K$ так, чтобы $\zeta \in W \subset \overline{W} \subset V$. Тогда множества V и $K \setminus \overline{W}$ будут образовывать открытое покрытие компакта K. По теореме Бишопа о расщеплении ([10], стр. 74) всякая мера $\mu \perp R(K)$ разлагается в сумму мер $\mu_1 + \mu_2$, где $\operatorname{supp}(\mu_1) \subset V$, $\operatorname{supp}(\mu_2) \subset K \setminus \overline{W}$, $\mu_1 \perp R(\overline{V})$ и $\mu_2 \perp R(K \setminus \overline{W})$. В частности, $\mu(\{\zeta\}) = \mu_1(\{\zeta\}) = 0$.

Теорема 2. *Пусть для компоненты G внутренности компакта K найдутся точка $\zeta \in \partial G$ и открытый круг U с центром в ζ такие, что дополнение пересечения $\overline{U} \cap K$ состоит из конечного числа компонент связности. Тогда для любой равномерной на ∂K алгебры $B \supset A(K)$ такой, что $G \subset \pi(M(B))$, отображение π^{-1} будет однозначным на G.*

Доказательство. В силу конечносвязности дополнения множества $F=\overline{U}\cap K$ имеем: 1) $A(F)=R(F)$; 2) каждая точка границы $\partial F=(\partial U\cap K)\cup(U\cap\partial K)$ является точкой пика для алгебры $R(F)$; 3) каждая внутренняя точка компакта F обладает единственной представляющей мерой Йенсена на ∂F. Поскольку $R(F)\subset R(\overline{U\cap K})$, то точки множества $U\cap\partial K$ будут точками пика и для $R(\overline{U\cap K})$, а по лемме 1 и для алгебры $R(K)$, следовательно, для $A(K)$*. Кроме того, заменив, если это необходимо, круг U на круг меньшего радиуса мы можем считать, что $\partial U\cap K$ есть собственное подмножество окружности ∂U и, в частности, полиномиально выпукло.

Покажем одноточечность слоя $\pi^{-1}(\lambda)$ над произвольной точкой $\lambda\in F^\circ$. Обозначим через B_0 равномерную алгебру, полученную посредством замыкания сужений преобразований Гельфанда элементов B на компакте $\pi^{-1}(F)$. Нам будет удобнее рассматривать слой $\pi^{-1}(\lambda)$ в качестве замкнутого подмножества $M(B_0)$, причем, как нетрудно убедиться, $\Gamma(B_0)\subset\pi^{-1}(\partial F)$.

Пусть x_1, $x_2\in\pi^{-1}(\lambda)$ и μ_1, μ_2— соответсвующие этим точкам положительные представляющие меры Йенсена на $\pi^{-1}(\partial F)$. Тогда меры $\tilde{\mu}_1=\pi^{-1}\circ\mu_1$ и $\tilde{\mu}_2=\pi^{-1}\circ\mu_2$ будут определены на ∂F и служить положительными представляющими (относительно алгебры $A(F)$) мерами Йенсена для точки λ. Следовательно, $\tilde{\mu}_1=\tilde{\mu}_2$, а отсюда в силу однозначности π^{-1} на $U\cap\partial K$ вытекает совпадение мер μ_1 и μ_2 на $U\cap\partial K$. Выберем функцию $g\in B$ так, чтобы $g(x_1)=1$ и $g(x_2)=0$, положим $\nu=g(\mu_1-\mu_2)$ и рассмотрим соответствующую ей меру $\tilde{\nu}$. Понятно, что мера $\tilde{\nu}$ равна нулю на $U\cap\partial K$ и в силу выбора g является (комплексной) представляющей мерой для точки λ. Поэтому для любой функции $f\in A(F)$ будем иметь.

$$\int\limits_{\partial F} fd\tilde{\nu}=\int\limits_{\partial U\cap K} fd\tilde{\nu}=f(\lambda),$$

что невозможно, поскольку $\partial U\cap K$ полиномиально выпукло и не содержит λ.

Таким образом, π^{-1} однозначно на открытой части $F^\circ\cap G$ компоненты G. Теперь, используя, точно такие же соображения что и выше, можно доказать однозначность π^{-1} на открытом подмножестве области G, имеющем с $F^\circ\cap G$ непустое пересечение, и т. д.

Теорема доказана.

Замечания. 1) Из условия Гамелина—Росси немедленно следует однозначность π^{-1}, так как неодноточенность слоя $\pi^{-1}(\lambda)$ над некоторой точкой $\lambda\in K^\circ$ приводит к существованию нескольких мер Йенсена, одновременно представляющих точку λ.

---

* Последнее утверждение можно вывести и из известного критерия М. С. Мельникова о точках пика [12].

2). Условие Сеничкина, как показано в его работе [7], обеспечивает гомеоморфность отображения π.

4°. Здесь приводятся вспомогательные результаты, необходимые для доказательства в п. 5° аппроксимационной теоремы. В частности, мы распространим на алгебру $A(K)$ известную лемму Бишопа о расщеплении ортогональной меры.

Установим сперва одно утверждение о слабо* замкнутых подпространствах сопряженного пространства.

Лемма 2. *Пусть X— сопряженное пространство некоторого банахового пространства, и пусть Y и Z — ее слабо* замкнутые подпространства, сумма $Y+Z$ которых также слабо* замкнута. Если подпространство $Y_1 \subset Y$ слабо* замкнуто и содержит в себе $Y \cap Z$, то и сумма $Y_1 + Z$ будет слабо* замкнутой.*

Доказательство. Убедимся сначала, что сумма $Y_1 + Z$ замкнута относительно нормы пространства X. Для этого рассмотрим фактор-пространство $X/Y \cap Z$ и непрерывное фактор-отображение $\rho: X \to X/X \cap Z$. Очевидно, подпространства $\rho(Y_1)$ и $\rho(Z)$ замкнуты в топологии нормы фактор-пространства. Но тогда будет замкнутой и прямая сумма $\rho(Y_1)+\rho(Z)=\rho(Y_1+Z)$, следовательно, ее прообраз Y_1+Z будет замкнут в X.

Теперь в силу непрерывности операции сложения $(y, z) \to y+z$ и по теореме об открытом отображении мы можем указать константу $\gamma > 0$ такую, что для любого $x \in Y_1+Z$ найдутся такие $y \in Y_1$ и $z \in Z$, что

$$x=y+z \text{ и } \|y\|+\|z\| < \gamma \|x\|.$$

В частности, замкнутый единичный шар подпространства Y_1+Z содержится в $S+T$, где S и T — замкнутые шары радиуса γ подпространств Y_1 и Z, соответственно. Так как S и T слабо* компактны, а отображение $(y, z) \to y+z$ слабо* непрерывно, то и $S+T$ слабо* компактно. По теореме Крейна—Шмульяна ([13], стр. 465) сумма Y_1+Z слабо* замкнута.

Лемму 2 мы будем применять в ситуации, когда в качестве X рассматривается пространство $M(K)$ всех конечных комплексных регулярных борелевских мер на компакте K, служащем сопряженным пространством для алгебры $C(K)$. Если E — некоторое подпространство $C(K)$ (соответственно, если L — подпространство $M(K)$), то через $E^{\perp}$ (соответственно, ${}^{\perp}L$) будет обозначаться его аннулятор. Известно, что $E^{\perp}$ — слабо* замкнуто в $M(K)$, а ${}^{\perp}L$ суть замкнутое по норме подпространство $C(K)$.

Если F — замкнутое подмножество компакта K, то, имея в виду теорему Титце о продолжении (с сохранением нормы) непрерывной функции с F на K, мы можем рассматривать алгебру $A(K)$ (или алгебру $R(K)$) в качестве замкнутой подалгебры $A(F)$ (соответственно, $R(F)$), а пространство $A(F)^{\perp}$ (или $R(F)^{\perp}$) в качестве слабо* замкнутого подпространства в $A(K)^{\perp}$ (соответственно, $R(K)^{\perp}$).

Напомним также, что мера $\mu \in M(K)$ ортогональна к алгебре $R(K)$ в том и только в том случае, когда ее преобразование Коши $\hat{\mu}(\lambda) = \int \frac{d\mu(z)}{z-\lambda}$ обращается в нуль всюду вне компакта K.

Лемма 3. *Пусть U_1, U_2 — такое открытое покрытие компакта K, что $A(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2) = R(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2)$ и пусть $\mu \in A(K)^\perp$. Тогда найдутся такие меры $\mu_1 \in A(\overline{U}_1)^\perp$ и $\mu_2 \in A(\overline{U}_2)^\perp$, что $\mu = \mu_1 + \mu_2$.*

Доказательство. Согласно лемме Бишопа о расщеплении пространство $R(K)^\perp$ разлагается в сумму своих слабо* замкнутых подпространств $R(\overline{U}_1)^\perp$ и $R(\overline{U}_2)^\perp$.

Если положить $L = R(\overline{U}_1)^\perp \cap R(\overline{U}_2)^\perp$, то очевидно, $R(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2)^\perp \subset \subset L$. Обратно, если $\nu \in L$, то $\hat{\nu}(\lambda)$ обращается в нуль вне $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$, т. е. $\nu \in R(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2)^\perp$. Следовательно,

$$R(\overline{U}_1)^\perp \cap R(\overline{U}_2)^\perp = R(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2)^\perp = A(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2)^\perp.$$

Согласно лемме 2 (если применить ее двукратно) сумма $A(\overline{U}_1)^\perp + A(\overline{U}_2)^\perp$ слабо* замкнута, и, конечно, содержится в $A(K)$.

Заметим теперь, что всякая непрерывная на K функция, принадлежащая аннулятору $^\perp(A(\overline{U}_1)^\perp + A(\overline{U}_2)^\perp)$, аналитична в каждой внутренней точке множеств $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$ и, следовательно, содержится в $A(K)$ Другими словами, $^\perp(A(\overline{U}_1)^\perp + A(\overline{U}_2)^\perp) = A(K)$ или, что то же, $A(\overline{U}_1)^\perp + A(\overline{U}_2)^\perp = A(K)^\perp$. Лемма доказана.

5°. В этом пункте мы завершаем доказательство основной теоремы 1. Вспомним, что согласно результатам п. п. 2° и 3° равномерная алгебра B обязана содержаться в алгебре $A(K \setminus \cup G_j)$, причем в каждой из компонент C_j можно выделить такую точку λ_j, что $\frac{1}{z-\lambda_j} \in B$. Нам осталось установить, что равномерная алгебра на ∂K, порожденная элементами алгебры $A(K)$ и конечной системой функций $\left\{\frac{1}{z-\lambda_j}\right\}$ совпадет с алгеброй $A(K \setminus \cup G_j)$.

С этой целью мы докажем более общую теорему, не предполагающую, в отличие от теорем 1 и 2, каких-либо ограничений на компакт K и представляющую, быть может, самостоятельный интерес.

Теорема 3. *Пусть K — произвольный компакт на комплексной плоскости, G — компонента связности множества внутренних точек K, λ_0 — любая точка из G. Тогда равномерная алгебра на ∂K, порожденная элементами $A(K)$ и функцией $\frac{1}{z-\lambda_0}$, совпадает с алгеброй $A(K \setminus G)$.*

Доказательство. Для удобства обозначим через A_0 равномерную алгебру $\left[A(K), \frac{1}{z-\lambda_0}\right]$. Очевидно, $A_0 \subset A(K \setminus G)$, так что нам надо доказать обратное включение.

Пусть μ — ортогональная к алгебре A_0 мера, сосредоточенная на множестве $K \setminus G$.

Выберем в компоненте G последовательность открытых областей $\{U_n\}$, подчиненных следующим условиям: 1) $\bigcup U_n = G$; 2) $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$; 3) компакт $E_n = \overline{U}_{n+1} \setminus U_n$ является множеством рациональной аппроксимации, т. е. $R(E_n) = A(E_n)$ (см. [14], стр. 19). Поскольку множества $V_n = K \setminus \overline{U}_n$ и U_{n+1} составляют открытое покрытие компакта K, причем пересечение $\overline{V}_n \cap \overline{U}_{n+1}$ совпадает с E_n, то мера μ, принадлежащая, очевидно, $A(K)^{\perp}$, по лемме 3 разлагается в сумму $\mu_1 + \mu_2$, где $\mu_1 \in A(\overline{V}_n)^{\perp}$, $\mu_2 \in A(\overline{U}_{n+1})^{\perp}$.

Рассмотрим преобразования Коши указанных мер. Так как носитель меры μ содержится в $K \setminus G$, то функция $\hat{\mu}(\lambda)$ аналитична на G, а ее производная любого порядка

$$\hat{\mu}^{(k)}(\lambda) = k! \int \frac{d\mu}{(z-\lambda)^k}$$

обращается в нуль в точке λ_0, поскольку $\mu \perp A_0$. Так что $\hat{\mu}(\lambda) = 0$ на G. Далее, $\hat{\mu}_1 = 0$ вне $\overline{V}_n$ (в частности, на U_n), а функция $\hat{\mu}_2$ равна нулю вне U_{n+1} и, в силу равенства $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2$, на области U_n. Следовательно, $\hat{\mu}_2 = 0$ вне компакта E_n, т. е. $\mu_2 \in R(E_n)^{\perp} = A(E_n)^{\perp}$. Но $A(\overline{V}_n) \subset A(E_n)$, поэтому $\mu_2 \in A(\overline{V}_n)^{\perp}$, а значит и мера μ ортогональна к алгебре $A(\overline{V}_n)$. Это означает, что любую функцию алгебры $A(\overline{V}_n)$ можно равномерно на $K \setminus G$ аппроксимировать элементами алгебры A_0.

По теореме С. Н. Мергеляна (см. [10], стр. 277) каждая функция алгебры $A(K \setminus G)$ может быть равномерно на $K \setminus G$ аппроксимирована такими функциями из $A(K \setminus G)$, которые аналитичны в некоторой окрестности границы компоненты G, т. е. принадлежат $A(\overline{V}_n)$ при некотором n. Таким образом, $A(K \setminus G) \subset A_0$. Теорема 3, а вместе с ней и теорема 1, доказаны.

Следствие. Пусть компакт K с непустой внутренностью является множеством рациональной аппроксимации ($R(K) = A(K)$), и пусть $\{G_1, \cdots, G_n\}$ — некоторое семейство компонент связности внутренности K°. Тогда компакт $K' = K \setminus \bigcup_{1=1}^{n} G_j$ также является множеством рациональной аппроксимации.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку λ_j из каждой компоненты G_j. Тогда

$$R(K') = \left[R(K), \frac{1}{z-\lambda_1}, \cdots, \frac{1}{z-\lambda_n} \right] =$$

$$= \left[A(K); \frac{1}{z-\lambda_1}; \cdots, \frac{1}{z-\lambda_n} \right] = A(K').$$

Замечание. Это следствие может быть получено и из известного критерия А. Г. Витушкина о рациональной аппроксимации [15].

Замечание. Аналогичное теореме 3 утверждение, относящееся к тому случаю, когда из компакта K удаляются все компоненты связности K°, установил А. Дэви [16], основываясь на общих свойствах равномерных алгебр. Соответствующий этому случаю вариант следствия (если $R(K)=A(K)$, то $R(\partial K)=c(\partial K)$), тоже хорошо известен ([17], стр. 74). Нам неизвестно, справедлива ли теорема 3 в общем случае, когда из K удаляется произвольное бесконечное семейство компонент внутренности K°.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 9.VI.1988.

Բ. Թ. ԲԱՏԻԿՅԱՆ, Ս. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. $A(K)$ հանրահաշիվը պարունակող հավասարաչափ հանրահաշիվների մասին *(ամփոփում)*

Դիցուք K-ն կոմպակտ ենթաբազմություն է կոմպլեքս հարթությունում, իսկ $A(K)$-ն՝ K-ի վրա անընդհատ և K-ի ներքին կետերում անալիտիկ ֆունկցիաների հանրահաշիվն է։

Աշխատանքում տրվում է այն հավասարաչափ հանրահաշիվների նկարագրումը, որոնք սահմանված են K-ի եզրի վրա և պարունակում են $A(K)$-ն։ Մասնավոր դեպքում, երբ K-ի ներքին կետերի բազմությունը կապակցված է, այդ նկարագրումը բերում է $A(K)$ հանրահաշվի մաքսիմալությանը։ Ապացուցված է հետևյալ մոտարկման թեորեմը. դիցուք G-ն՝ K-ի ներքին կետերի բազմության կապակցված կոմպոնենտն է և $\lambda \in G$ Այդ $\dfrac{1}{z-\lambda}$ ֆունկցիայով և $A(K)$-ի էլեմենտներով ծնված հանրահաշիվը համընկնում է $A(K \setminus G)$-ի հետ։

B. T. BATIKIAN, S. A. GRIGORIAN. *On uniform algebras, which contained A (K)* (summary)

Let K be a compact subset of the complex plane with nonempty interior, $A(K)$ be the algebra of continuons functions on K, which are analytic in the interior of K

In the paper for sufficiently large class of compacts a description of uniform algebras, which are defined on the boundary of K and containe $A(K)$ as a subalgebra, is given. Preliminary the injectivity of the natural map of the space of maxima ideals of superalgebra of $A(K)$ in the compact K is established. Further the following approximation theorem is proved: let G be connected component of the interior of K, λ be an arbitrary point from G. Then the uniform algebra on ∂K, generated by the elements of $A(K)$ and by the function $\dfrac{1}{z-\lambda}$ co incide with the algebra $A(K \setminus G)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Wermer.* On algebras of continuous functions, Proc. Amer. Math. Soc., 4, 6 1953. 866—869.
2. *K. Hoffman, I. M. Singer.* Maximal algebras of continuous functions. Acta Math., 103, 3, 1960. 217—241.
3. *Е. А. Горин, В. М. Золотаревский.* Максимальные инвариантные подалгебры в алгебрах с инволюцией, Мат. сб., 85, 3, 1971, 373—387.
4. *P. J. de Paepe.* Maximality in function algebras, J. Lond. Math. Soc. (2), 22, 1980 345—354.
5. *Э. Бишоп.* Структура некоторых мер. Сб. Некоторые вопросы теории приближений, М., ИЛ, 1963, 74—86.
6. *T. Gamelin, H. Rossi.* Jensen measures and algebras of functions, Сб. Functoin algebras, Chicago, Scott—Foresman, 1966.

7. *В. Н. Сеничкин.* Субгармонические функции и аналитическая структура в пространстве максимальных идеалов равномерной алгебры, Мат. сб., 108, 1, 1979, 115—133.
8. *Б. Т. Батикян, С. А. Григорян.* О функциональных алгебрах конечного типа, УМН 29, 6, 1974, 155—156.
9. *Б. Т. Батикян, С. А. Григорян.* О равномерных алгебрах, содержащих $A(K)$, УМН. 40, 2, 1985, 169—170.
10. *Т. Гамелин.* Равномерные алгебры, М., Мир, 1973.
11. *J.—E. Bjork.* Analytic structures in the maximal ideal space of a uniform algebra, Arkiv for Matematik, 8, 3, 1971. 239—244.
12. *М. С. Мельников.* Оценка интеграла Коши по аналитической кривой, Мат. сб., 71, 4, 1966, 503—514.
13. *Н. Данфорд, Дж. Шварц.* Линейные операторы, общая теория, М., ИЛ. 1962.
14. *Дж. Уолш.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, М., ИЛ. 1961.
15. *А. Г. Витушкин.* Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений, УМН, 22, 6, 1967, 141—199.
16. *A. M. Davie.* Algebras of analytic functions on plane sets, Dissertation, Aarhus Univ., 1970.
17. *L. Zalcman.* Analytic capacity and rational approximation, Lect. Not. Math., 50, 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, №6, 1989 Математика

УДК 517.984

С. В. БАБАСЯН, И. Г. ХАЧАТРЯН

ОБ ОПЕРАТОРЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

В статье рассматривается интегро-дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)}(x)+\sum_{k=0}^{n-2} q_{n-2-k}(x)\, y^{(k)}(x)+\int_x^{\infty} M(x, t)\, y(t)\, dt=\mu\, y(x),$$

$$a<x<\infty, \tag{1}$$

порядка $n\geqslant 3$, где μ — комплексный параметр, а коэффициенты $q_k(x)$ и ядро $M(x, t)$ — непрерывные функции, для которых существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to\infty} q_k(x)=A_k,\ k=0,\ 1,\cdots, n-2,$$

$$\lim_{x+t\to\infty} M(x, t)=0.$$

Указываются эффективные достаточные условия на функции $q_k(x)$ ($k=0, 1,\cdots, n-2$) и $M(x, t)$, при которых уравнение (1) обладает оператором преобразования с условиями на бесконечности. т. е. уравнение (1) при всех μ из некоторой области имеет решение вида

$$y(x, \lambda)=e^{\lambda x}+\int_x^{\infty} e^{\lambda t} K(x, t)\, dt,\ a<x<\infty, \tag{2}$$

где параметр λ связан с параметром μ равенством

$$\mu=\lambda^n+\sum_{k=0}^{n-2}\lambda^k A_{n-2-k}, \tag{3}$$

а ядро $K(x, t)$ не зависит от λ.

В частном случае, когда $A_k=0$ ($k=0, 1.\cdots, n-2$) и $M(x, t)\equiv 0$, этот вопрос был решен И. Г. Хачатряном [1]. Основной результат работы [1] является обобщением результата, полученного Б. Я. Левиным [2] в случае $n=2$. Использованый в работе [1] метод является развитием метода, предложенного В. А. Марченко [3] для случая $n=2$. В рассматриваемом здесь общем случае применяется метод работы [1]. В случае, когда хотя бы один из пределов A_k ($k=0, 1,\cdots, n-3$) отличен от нуля, возникают дополнительные трудности. Нетривиален, например, аналог исходного интегрального уравнения для $y(x, \lambda)$, использованного в [1].

Теорема. *Пусть в уравнении* (1) *коэффициенты* $q_k(x)$, $k=0, 1, \cdots, n-2$) *и функция* $M_0(x, \tau)=M(x, x+\tau)$ $(x>a, \tau\geqslant 0)$ *по переменной* x *аналитически продолжаются с интервала* (a, ∞) *в сектор*

$$S=\left\{z;\ \arg(z-a) < \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right\},$$

причем функции

$$Q_k(z)=\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}C_{n-2-\nu}^{k-\nu}[q_\nu(z)-A_\nu]^{(k-\nu)},\quad k=0, 1, \cdots, n-2 \tag{4}$$

и $M_0(z, \tau)$ *удовлетворяют оценкам*

$$\int_0^\infty \zeta^k|Q_k(\zeta+z)|\,d\zeta\leqslant h_k(x)\,e^{-b_k x},\quad x=\operatorname{Re} z,\ z\in S,\ k=0, 1, \cdots, n-2, \tag{5}$$

$$\int_0^\infty \zeta^{n-2}|M_0(\zeta+z, \tau)|\,d\zeta< h_{n-1}(x)\,e^{-b_{n-1}\left(x+\frac{\tau}{2}\right)},\quad x=\operatorname{Re} z,\quad z\in S,\quad \tau\geqslant 0, \tag{6}$$

где $h_k(x)$ $(k=0, 1, \cdots, n-1)$ — *невозрастающие функции на интервале* (a, ∞), *причем функции* $h_k(x)$ $(k=0, 1, \cdots, n-2)$ *и* $(x-a)\,h_{n-1}(x)$ *суммируемы на интервале* (a, ∞), *а* $b_k (k=0, 1, \cdots, n-1)$ — *неотрицательные числа, причем число* $b=\min\{b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}\}$ *может равняться нулю лишь при* $A_k=0$ $(k=0, 1, \cdots, n-3)$. *Тогда для всех* λ *из полуплоскости*

$$\Lambda=\left\{\lambda;\ \operatorname{Re}\lambda\leqslant\frac{b}{2}-\frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n-3}|A_k|\left(\frac{2}{b}\right)^{k+1}\right\} \tag{7}$$

(*при* $b=0$ *в качестве* Λ *принимается полуплоскость* $\operatorname{Re}\lambda<0$) *уравнение* (1) *имеет решение* $y(x, \lambda)$, *представимое в виде* (2), *где ядро* $K(x, t)$ $(a\leqslant x\leqslant t<\infty,\ x+t\neq 2a)$ *не зависит от* λ, *непрерывно по совокупности аргументов в области* $a<x\leqslant t<\infty$ *и при каждом* $t>a$ *непрерывно по* x *на отрезке* $[a, t]$. *Кроме того, функция* $K_0(x, \tau)=K(x, x+\tau)$ *при каждом* $\tau\geqslant 0$ *по переменной* x *аналитически продолжается с интервала* (a, ∞) *в сектор* S *и удовлетворяет оценке*

$$|K_0(z, \tau)|<\left[h\left(x+\frac{\tau}{2}\right)+\tau\bar{h}\left(x+\frac{\tau}{2}\right)\right]e^{H(x, \tau)},\quad x=\operatorname{Re} z,\quad z\in S,\quad \tau>0, \tag{8}$$

где

$$h(x)=\frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{2^k}{k!}h_k(x)\,e^{-xb_k}, \tag{9}$$

$$\bar{h}(x)=\frac{2^{n-2}(n-1)}{(n-2)!\,n}h_{n-1}(x)\,e^{-xb_{n-1}}, \tag{10}$$

$$H(x, \tau) = \tau \left[\frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-3} |A_k| \left(\frac{2}{b} \right)^{k+1} \right] + \int_0^{\tau} \left[h\left(x + \frac{u}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + u \, \tilde{h}\left(x + \frac{u}{2}\right) \right] du. \tag{11}$$

Доказательство. При фиксированном λ из области

$$\Omega = \left\{ \lambda;\ \pi - \frac{\pi}{n} < \arg \lambda < \pi + \frac{\pi}{n},\ Re \lambda < \frac{b}{2} - \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-3} |A_k| \left(\frac{2}{b} \right)^{k+1} \right\}. \tag{12}$$

рассмотрим на интервале $a < x < \infty$ следующее интегральное уравнение относительно функции $y(x, \lambda)$:

$$y(x, \lambda) = e^{\lambda x} + \sum_{k=0}^{n-3} \frac{A_k}{\lambda^n} \int_x^{\infty} [\varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda) - \lambda^{n-2-k} \varphi'(x-t, \lambda)] \times$$

$$\times [y(t, \lambda) - e^{\lambda t}] \, dt + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{\lambda^n} \int_x^{\infty} \varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda) \, Q_k(t) \, y(t, \lambda) \, dt +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^n} \int_x^{\infty} \varphi'(x-t, \lambda) \int_t^{\infty} M(t, \tau) \, y(\tau, \lambda) \, d\tau \, dt, \tag{13}$$

где

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} e^{\omega_s \lambda x}, \tag{14}$$

$$\omega_s = \exp\left(i \frac{2\pi s}{n} \right), \quad s = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Докажем, что интегральное уравнение (13) разрешимо, причем определенная из этого уравнения функция $y(x, \lambda)$ представляется в виде (2) и является решением интегро-дифференциального уравнения (1). С этой целью обозначим

$$\tilde{y}(x, \lambda) = e^{-\lambda x} y(x, \lambda) - 1 \tag{15}$$

и интегральное уравнение (13) перепишем в виде

$$\tilde{y}(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{\lambda^n} \int_x^{\infty} e^{\lambda(t-x)} \varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda) \, Q_k(t) \, dt +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^n} \int_x^{\infty} \varphi'(x-t, \lambda) \int_t^{\infty} e^{\lambda(\tau - x)} M(t, \tau) \, d\tau \, dt +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-3} \frac{A_k}{\lambda^n} \int_x^{\infty} e^{\lambda(t-x)} [\varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda) - \lambda^{n-2-k} \varphi'(x-t, \lambda)] \, \tilde{y}(t, \lambda) \, dt +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{\lambda^n}\int_x^{\infty} e^{\lambda(t-x)}\varphi^{(n-1-k)}(x-t,\lambda)\,Q_k(t)\,\tilde{y}(t,\lambda)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\lambda^n}\int_x^{\infty}\varphi'(x-t,\lambda)\int_t^{\infty} e^{\lambda(\tau-x)}M(t,\tau)\,\tilde{y}(\tau,\lambda)\,d\tau\,dt. \qquad (16)$$

Относительно интегрального уравнения (16) применим метод последовательных приближений, т. е. решение $\tilde{y}(x,\lambda)$ этого уравнения ищем в виде ряда

$$\tilde{y}(x,\lambda)=\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{y}_j(x,\lambda), \qquad (17)$$

где функции $\tilde{y}_j(x,\lambda)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$\tilde{y}_1(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{\lambda^n}\int_x^{\infty} e^{\lambda(t-x)}\varphi^{(n-1-k)}(x-t,\lambda)\,Q_k(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\lambda^n}\int_x^{\infty}\varphi'(x-t,\lambda)\int_t^{\infty}M(t,\tau)\,e^{\lambda(\tau-x)}\,d\tau\,dt, \qquad (18)$$

$$\tilde{y}_{j+1}(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{n-3}\frac{A_k}{\lambda^n}\int_x^{\infty} e^{\lambda(t-x)}\left[\varphi^{(n-1-k)}(x-t,\lambda)-\right.$$

$$\left.-\lambda^{n-2-k}\varphi'(x-t,\lambda)\right]\tilde{y}_j(t,\lambda)\,dt+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{\lambda^n}\int_x^{\infty} e^{\lambda(t-x)}\varphi^{(n-1-k)}(x-t,\lambda)\,Q_k(t)\,\tilde{y}_j(t,\lambda)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\lambda^n}\int_x^{\infty}\varphi'(x-t,\lambda)\int_t^{\infty} e^{\lambda(\tau-x)}M(t,\tau)\,\tilde{y}_j(\tau,\lambda)\,d\tau\,dt,\ j=1,2,3,\cdots. \qquad (19)$$

Методом индукции докажем, что функции $\tilde{y}_j(x,\lambda)$ представляются в виде

$$\tilde{y}_j(x,\lambda)=\int_0^{\infty} e^{\lambda\tau}K_j(x,\tau)\,d\tau,\ j=1,2,3,\cdots, \qquad (20)$$

где ядра $K_j(z,\tau)$ определены и непрерывны в области $z\in S$, $0<\tau<<\infty$, при каждом $\tau>0$ голоморфны по z в секторе S и удовлетворяют оценкам

$$|K_j(z,\tau)|<\frac{1}{(j-1)}\left[h\left(Re\,z+\frac{\tau}{2}\right)+\tau\tilde{h}\left(Re\,z+\frac{\tau}{2}\right)\right]H^{j-1}(Re\,z,\tau),$$
$$j=1,2,3,\cdots. \qquad (21)$$

С этой целью используем легко проверяемые равенства

$$\frac{1}{\lambda^n} e^{\lambda(t-x)} \varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda) =$$

$$= \frac{1}{k!\, n} \sum_{s=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\omega_s} - 1\right)^{k+1} \int_x^t (t-v)^k e^{\lambda(1-\omega_s)(v-x)} dv, \tag{22}$$

$$\frac{1}{\lambda^n} e^{\lambda(t-x)} \left[\varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda) - \lambda^{n-2-k} \varphi'(x-t, \lambda)\right] =$$

$$= \frac{1}{k!\, n} \sum_{s=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\omega_s} - 1\right)^{k+1} (1-\omega_s^{k+2}) \int_x^t (t-v)^k e^{\lambda(1-\omega_s)(v-x)} dv,$$

$$k = 0, 1, \cdots, n-2. \tag{23}$$

Из соотношения (18) имеем

$$\tilde{y}_1(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{k!\, n} \left(\frac{1}{\omega_s} - 1\right)^{k+1} \int_x^\infty Q_k(t) \int_x^t (t-v)^k e^{\lambda(1-\omega_s)(v-x)} dv\, dt +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n-2} \frac{\omega_s^{n}(1-\omega_s)^{n-1}}{(n-2)!\, n} \int_x^\infty \int_t^\infty M(t, \tau) \int_x^t (t-v)^{n-2} e^{\lambda[\tau-t+(1-\omega_s)(v-x)]} dv\, d\tau\, dt.$$

Отсюда, учитывая обозначение $M_0(x, \xi) = M(x, x+\xi)$, при помощи простых замен переменных и перестановки порядка интегрирования получаем равенство

$$\tilde{y}_1(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{k!\, n} \left(\frac{1}{\omega_s} - 1\right)^{k+1} \int_0^\infty e^{\lambda\xi(1-\omega_s)} \int_0^\infty \zeta^k Q_k(\zeta + x + \xi)\, d\zeta\, d\xi +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\omega_s(1-\omega_s)^{n-1}}{(n-2)!\, n} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\lambda(u+\xi(1-\omega_s))} \int_0^\infty \zeta^{n-2} M_0(\zeta + x + \xi, u)\, d\zeta\, d\xi\, du.$$

Это равенство после замены пременной $\tau = \xi(1-\omega_s)$ принимает вид

$$\tilde{y}_1(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^k}{k!\, n\, \omega_s^{k+1}} \int_{\gamma_s} e^{\lambda\tau} \int_0^\infty \zeta^k Q_k\left(\zeta + x + \frac{\tau}{1-\omega_s}\right) d\zeta\, d\tau +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\omega_s(1-\omega_s)^{n-2}}{(n-2)!\, n} \int_0^\infty \int_{\gamma_s} e^{\lambda(u+\tau)} \int_0^\infty \zeta^{n-2} M_0\left(\zeta + x + \frac{\tau}{1-\omega_s}, u\right) d\zeta\, d\tau\, du, \tag{24}$$

где γ_s—луч $\arg\tau = \arg(1-\omega_s)$.

Заметим, что при $\lambda \in \Omega$ и $z \in S$ имеет место неравенство $|e^{\lambda z}| \leqslant 1$. Поэтому в силу голоморфности функций $Q_k(z)$ и $M_0(z, \xi)$ по переменной z в секторе S и оценок (5) и (6) в формуле (24) интегриревание вдоль луча γ_s можно заменить интегрированием вдоль положительной полуоси:

$$\tilde{y}_1(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^k}{k!\, n\, \omega_s^{k+1}} \int_0^{\infty} e^{\lambda\tau} \int_0^{\infty} \zeta^k Q_k\left(\zeta + x + \frac{\tau}{1-\omega_s}\right) d\zeta\, d\tau +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\omega_s (1-\omega_s)^{n-2}}{(n-2)!\, n} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{\lambda(u+\tau)} \int_0^{\infty} \zeta^{n-2} M_0\left(\zeta + x + \frac{\tau}{1-\omega_s}, u\right) d\zeta\, d\tau\, du.$$

Полученное равенство легко приводится к виду

$$\tilde{y}_1(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^k}{k!\, n\, \omega_s^{k+1}} \int_0^{\infty} e^{\lambda\tau} \int_0^{\infty} \zeta^k Q_k\left(\zeta + x + \frac{\tau}{1-\omega_s}\right) d\zeta\, d\tau +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\omega_s (1-\omega_s)^{n-2}}{(n-2)!\, n} \int_0^{\infty} e^{\lambda\tau} \int_0^{\tau}\int_0^{\infty} \zeta^{n-2} M_0\left(\zeta + x + \frac{\tau-u}{1-\omega_s}, u\right) d\zeta\, du\, d\tau.$$

Таким образом, получили представление (20) при $j=1$ с ядром

$$K_1(z, \tau) = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^k}{k!\, n\, \omega_s^{k+1}} \int_0^{\infty} \zeta^k Q_k\left(\zeta + z + \frac{\tau}{1-\omega_s}\right) d\zeta +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\omega_s (1-\omega_s)^{n-2}}{(n-2)!\, n} \int_0^{\tau}\int_0^{\infty} \zeta^{n-2} M_0\left(\zeta + z + \frac{\tau-u}{1-\omega_s}, u\right) d\zeta\, du, \qquad (25)$$

удовлетворяющим оценке (21) с $j=1$.

Предположим теперь, что при некотором $j \geqslant 1$ представление (20) и оценка (21) верны. Тогда с использованием формул (22) и (23) из соотношения (19) получим равенство

$$\tilde{y}_{j+1}(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-3} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{A_k}{k!\, n} \left(\frac{1}{\omega_s} - 1\right)^{k+1} (1-\omega_s^{k+2})\, G_{ks}(x, \lambda) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{k!\, n} \left(\frac{1}{\omega_s} - 1\right)^{k+1} T_{ks}(x, \lambda) + \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\omega_s (1-\omega_s)^{n-1}}{(n-2)!\, n} R_s(x, \lambda), \qquad (26)$$

где

$$G_{ks}(x, \lambda) = \int_x^{\infty}\int_0^{\infty} K_j(t, u) \int_x^t (t-v)^k e^{\lambda[u+(1-\omega_s)(v-x)]}\, dv\, du\, dt,$$

$$T_{ks}(x, \lambda) = \int_x^{\infty} Q_k(t) \int_0^{\infty} K_j(t, u) \int_x^t (t-v)^k e^{\lambda[u+(1-\omega_s)(v-x)]}\, dv\, du\, dt,$$

$$R_s(x, \lambda) = \int_x^{\infty}\int_t^{\infty} M(t, \tau) \int_0^{\infty} K_j(\tau, u) \int_x^t (t-v)^{n-2} e^{\lambda[u+\tau-t+(1-\omega_s)(v-x)]}\, dv\, du\, d\tau\, dt.$$

При помощи замен переменных и перестановки порядка интегрирования получаем равенства

$$G_{ks}(x, \lambda)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{\lambda[u+(1-\omega_s)\xi]}\int_0^\infty \zeta^k K_j(\zeta+x+\xi, u)\,d\zeta\,d\xi\,du,$$

$$T_{ks}(x, \lambda)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{\lambda[u+(1-\omega_s)\xi]}\int_0^\infty \zeta^k Q_k(\zeta+x+\xi) K_j(\zeta+x+\xi, u)\,d\zeta\,d\xi\,du,$$

$$R_s(x, \lambda)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{\lambda[u+(1-\omega_s)\xi]}\int_0^\infty \zeta^{n-2} \widetilde{K}_j(\zeta+x+\xi, u)\,d\zeta\,d\xi\,du,$$

где для кратности использовано обозначение

$$\widetilde{K}_j(\zeta, u)=\int_0^u M_0(\zeta, \eta) K_j(\zeta+\eta, u-\eta)\,d\eta. \tag{27}$$

Эти равенства после замены переменной $w=\xi(1-\omega_s)$ принимают вид

$$G_{ks}(x, \lambda)=\frac{1}{1-\omega_s}\int_0^\infty\int_{\gamma_s} e^{\lambda(u+w)}\int_0^\infty \zeta^k K_j\left(\zeta+x+\frac{w}{1-\omega_s}, u\right)d\zeta\,dw\,du,$$

$$T_{ks}(x, \lambda)=\frac{1}{1-\omega_s}\int_0^\infty\int_{\gamma_s} e^{\lambda(u+w)}\int_0^\infty \zeta^k \times$$

$$\times Q_k\left(\zeta+x+\frac{w}{1-\omega_s}\right) K_j\left(\zeta+x+\frac{w}{1-\omega_s}, u\right)d\zeta\,dw\,du,$$

$$R_s(x, \lambda)=\frac{1}{1-\omega_s}\int_0^\infty\int_{\gamma_s} e^{\lambda(u+w)}\int_0^\infty \zeta^{n-2} \widetilde{K}_j\left(\zeta+x+\frac{w}{1-\omega_s}, u\right)d\zeta\,dw\,du.$$

В силу наложенных на функции $Q_k(z)$, $M_0(z, \tau)$ и $K_j(z, \tau)$ условий, в полученных равенствах интегрирование вдоль луча γ_s можно заменить интегрированием вдоль положительной полуоси:

$$G_{ks}(x, \lambda)=\frac{1}{1-\omega_s}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{\lambda(u+w)}\int_0^\infty \zeta^k K_j\left(\zeta+x+\frac{w}{1-\omega_s}, u\right)d\zeta\,dw\,du,$$

$$T_{ks}(x, \lambda)=\frac{1}{1-\omega_s}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{\lambda(u+w)}\int_0^\infty \zeta^k Q_k\left(\zeta+x+\frac{w}{1-\omega_s}\right)\times$$

$$\times K_j\left(\zeta+x+\frac{w}{1-\omega_s}, u\right)d\zeta\,dw\,du,$$

$$R_s(x,\ \lambda)=\frac{1}{1-\omega_s}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{\lambda(u+w)}\int\limits_0^{\infty}\zeta^{n-2}\widetilde{K}_j\left(\zeta+x+\frac{w}{1-\omega_s},\ u\right)d\zeta\, dw\, du.$$

Отсюда легко получаются равенства

$$G_{ks}(x,\ \lambda)=\frac{1}{1-\omega_s}\int\limits_0^{\infty} e^{\lambda\tau}\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{\infty}\zeta^k K_j\left(\zeta+x+\frac{\tau-u}{1-\omega_s},\ u\right)d\zeta\, du\, d\tau, \tag{28}$$

$$T_{ks}(x,\ \lambda)=\frac{1}{1-\omega_s}\int\limits_0^{\infty} e^{\lambda\tau}\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{\infty}\zeta^k Q_k\left(\zeta+x+\frac{\tau-u}{1-\omega_s}\right)\times$$

$$\times K_j\left(\zeta+x+\frac{\tau-u}{1-\omega_s},\ u\right)d\zeta\, du\, d\tau, \tag{29}$$

$$R_s(x,\ \lambda)=\frac{1}{1-\omega_s}\int\limits_0^{\infty} e^{\lambda\tau}\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{\infty}\zeta^k \widetilde{K}_j\left(\zeta+x+\frac{\tau-u}{1-\omega_s},\ u\right)d\zeta\, du\, d\tau. \tag{30}$$

Из равенств (26), (28), (29) и (30) получаем представление

$$\widetilde{y}_{j+1}(x,\ \lambda)=\int\limits_0^{\infty} e^{\lambda\tau} K_{j+1}(x,\ \tau)\, d\tau,$$

где ядро $K_{j+1}(z,\ \tau)$ определяется по формуле

$$K_{j+1}(z,\ \tau)=\sum_{k=0}^{n-3}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{A_k(1-\omega_s)^k}{k!\, n\, \omega_s^{k+1}}\left(1-\omega_s^{k+2}\right)\times$$

$$\times\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{\infty}\zeta^k K_j\left(\zeta+z+\frac{\tau-u}{1-\omega_s},\ u\right)d\zeta\, du+\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(1-\omega_s)^k}{k!\, n\, \omega_s^{k+1}}\times$$

$$\times\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{\infty}\zeta^k Q_k\left(\zeta+z+\frac{\tau-u}{1-\omega_s}\right)K_j\left(\zeta+z+\frac{\tau-u}{1-\omega_s},\ u\right)d\zeta\, du+$$

$$+\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\omega_s(1-\omega_s)^{n-2}}{(n-2)!\, n}\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{u}\int\limits_0^{\infty}\zeta^{n-2}M_0\left(\zeta+z+\frac{\tau-u}{1-\omega_s},\ \eta\right)\times$$

$$\times K_j\left(\zeta+\eta+z+\frac{\tau-u}{1-\omega_s},\ u-\eta\right)d\zeta\, d\eta\, du \tag{31}$$

(при этом мы учли обозначение (27)).

Выведем оценку для ядра $K_j(z,\ \tau)$. Заметим, что в оценке (21) функции $h(x)$, $\widetilde{h}(x)$ и $H(x,\ \tau)$ монотонно убывают по x.

Учитывая это, из формулы (31) получаем следующее неравенство, где использованы оценки (5), (6), (21)) и обозначения (9), (10) и $x=Re\, z$:

$$|K_{j+1}(z,\tau)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-3} \frac{2^{k+1}(n-1)|A_k|}{(j-1)!\,k!\,n} \int_0^{\tau} H^{j-1}\left(x+\frac{\tau-u}{2}, u\right) \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \zeta^k \left[h\left(\zeta+x+\frac{\tau}{2}\right) + u\tilde{h}\left(\zeta+x+\frac{\tau}{2}\right)\right] d\zeta\, du +$$

$$+ \frac{1}{(j-1)!}\left| h\left(x+\frac{\tau}{2}\right) + \tau\tilde{h}\left(x+\frac{\tau}{2}\right)\right| \int_0^{\tau} h\left(x+\frac{\tau-u}{2}\right) \times$$

$$\times H^{j-1}\left(x+\frac{\tau-u}{2}, u\right) du + \frac{1}{(j-1)!}\left[h\left(x+\frac{\tau}{2}\right) + \tau\tilde{h}\left(x+\frac{\tau}{2}\right)\right] \times$$

$$\times \int_0^{\tau}\int_0^{u} \tilde{h}\left(x+\frac{\tau-u+\eta}{2}\right) H^{j-1}\left(x+\eta+\frac{\tau-u}{2}, u-\eta\right) d\eta\, du. \qquad (32)$$

Однако в силу (9) и (10) имеет место неравенство

$$\int_0^{\infty} \zeta^k \left[h\left(\zeta+x+\frac{\tau}{2}\right) + u\tilde{h}\left(\zeta+x+\frac{\tau}{2}\right)\right] d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k!}{b^{k+1}} \left[h\left(x+\frac{\tau}{2}\right) + u\tilde{h}\left(x+\frac{\tau}{2}\right)\right], \qquad (33)$$

где $b = \min\{b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}\}$. Кроме того

$$\int_0^{\tau}\int_0^{u} \tilde{h}\left(x+\frac{\tau-u+\eta}{2}\right) H^{j-1}\left(x+\eta+\frac{\tau-u}{2}, u-\eta\right) d\eta\, du \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\tau}\int_0^{u} \tilde{h}\left(x+\frac{\tau-u+\eta}{2}\right) H^{j-1}\left(x+\frac{\tau-u+\eta}{2}, u-\eta\right) d\eta\, du =$$

$$= \int_0^{\tau} (\tau-u)\, \tilde{h}\left(x+\frac{\tau-u}{2}\right) H^{j-1}\left(x+\frac{\tau-u}{2}, u\right) du. \qquad (34)$$

Из неравенств (32) — (34) следует, что

$$|K_{j+1}(z,\tau)| \leqslant \frac{1}{(j-1)!}\left| h\left(x+\frac{\tau}{2}\right) + \tau\tilde{h}\left(x+\frac{\tau}{2}\right)\right| \times$$

$$\times \int_0^{\tau} H^{j-1}\left(x+\frac{u}{2}, \tau-u\right) \left[\frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-3} |A_k| \left(\frac{2}{b}\right)^{k+1} + \right.$$

$$\left. + h\left(x+\frac{u}{2}\right) + u\tilde{h}\left(x+\frac{u}{2}\right)\right] du.$$

Заметим, что в силу (11)

$$\frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n-3}|A_k|\left(\frac{2}{b}\right)^{k+1}+h\left(x+\frac{u}{2}\right)+u\tilde{h}\left(x+\frac{u}{2}\right)=\frac{d}{du}H(x,u),$$

$$H\left(x+\frac{u}{2},\tau-u\right)\leqslant H(x,\tau)-H(x,u).$$

Поэтому

$$|K_{j+1}(z,\tau)|\leqslant\frac{1}{(j-1)!}\left[h\left(x+\frac{\tau}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\tau\tilde{h}\left(x+\frac{\tau}{2}\right)\right]\int_0^\tau[H(x,\tau)-H(x,u)]^{j-1}\,dH(x,u)=$$

$$=\frac{1}{j!}\left[h\left(x+\frac{\tau}{2}\right)+\tau\tilde{h}\left(x+\frac{\tau}{2}\right)\right]H^j(x,\tau).$$

Тем самым возможность представления функций $\tilde{y}_j(x,\lambda)$ $(j=1,2,3,\cdots)$ в виде (20) и справедливость оценок (21) доказаны:

В силу оценок (21) сходится ряд

$$K_0(z,\tau)=\sum_{j=1}^{\infty}K_j(z,\tau),\quad z\in S,\ \tau\geqslant 0, \tag{35}$$

а его сумма удовлетворяет оценке (8). Кроме того, из равенств (25) и (31) следует, что функция $K_0(z,\xi)$ удовлетворяет интегральную уравнению

$$K_0(z,\tau)=\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(1-\omega_s)^k}{k!\,n\,\omega_s^{k+1}}\int_0^\infty\zeta^k Q_k\left(\zeta+z+\frac{\tau}{1-\omega_s}\right)d\zeta+$$

$$+\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\omega_s(1-\omega_s)^{n-2}}{(n-2)!\,n}\int_0^\tau\int_0^\infty\zeta^{n-2}M_0\left(\zeta+z+\frac{\tau-u}{1-\omega_s},u\right)d\zeta\,du+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-3}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{A_k(1-\omega_s)^2}{k!\,n\,\omega_s^{k+1}}(1-\omega_s^{k+2})\int_0^\tau\int_0^\infty\zeta^k K_0\left(\zeta+z+\frac{\tau-u}{1-\omega_s},u\right)d\zeta\,du+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(1-\omega_s)^k}{k!\,n\,\omega_s^{k+1}}\int_0^\tau\int_0^\infty\zeta^k Q_k\left(\zeta+z+\frac{\tau-u}{1-\omega_s}\right)\times$$

$$K_0\left(\zeta+z+\frac{\tau-u}{1-\omega_s},u\right)d\zeta\,du+$$

$$+\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\omega_s(1-\omega_s)^{n-2}}{(n-2)!\,n}\int_0^\tau\int_0^u\int_0^\infty\zeta^{n-2}M_0\left(\zeta+z+\frac{\tau-u}{1-\omega_s},\eta\right)\times$$

$$\times K_0\left(\zeta+z+\eta+\frac{\tau-u}{1-\omega_s},u-\eta\right)d\zeta\,d\eta\,du. \tag{36}$$

Из представления (20) и сходимости ряда (35) следует, что сходится также ряд (17), а его сумма $\bar{y}(x, \lambda)$ представляется в виде

$$\bar{y}(x, \lambda) = \int\limits_0^{\infty} e^{\lambda\tau} K_0(x, \tau)\, d\tau. \tag{37}$$

Таким образом, разрешимость интегрального уравнения (13) доказана. Из равенств (15) и (37) для решения $y(x, \lambda)$ интегрального уравнения (13) получаем представление

$$y(x, \lambda) = e^{\lambda x}\left[1 + \int\limits_0^{\infty} e^{\lambda\tau} K_0(x, \tau)\, d\tau\right], \quad a < x < \infty, \tag{38}$$

которое можно записать также в виде (2) с ядром $K(x, t) = K_0(x, t - x)$.

Покажем, что при каждом $\tau \geqslant 0$ ядро $K_0(z, \tau)$ имеет граничные значения во всех точках $z\,(z + \tau \neq a)$ границы ∂S сектора S. Действительно, пусть $z_0 \in \partial S$ и $z_0 + \tau \neq a$. Легко заметить, что правая часть равенства (36), а следовательно и функция $K_0(z, \tau)$, стремится к конечному пределу, когда $z \to z_0$ по пути, параллельному вещественной оси. Но тогда функция $K_0(z, \tau)$ стремится к этому пределу, когда $z \to z_0$ по любому некасательному к границе ∂S пути (см. книгу И. И. Привалова [4], стр. 31). Очевидно, что ядро $K(x, t)$ непрерывно в области $a < x \leqslant t < \infty$. Положим в равенстве (36) $z = x$ и $\tau = t - x$, где $a < x < t < \infty$. Указанным способом можно доказать, что правая часть полученного равенства, а следовательно и функция $K(x, t)$, стремится к конечному пределу при $x \to a$. Тем самым ядро $K(k, t)$ определяется в области $a \leqslant x \leqslant t < \infty$, $x + t \neq 2a$. Отсюда следует, что функция $y(x, \lambda)$ стремится к конечному пределу $y(a, \lambda)$ при $x \to a$ и представления (2) и (38) справедливы также при $x = a$.

Теперь убедимся в том, что функция $y(x, \lambda)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению (1). Из представления (38) и оценки (8) следует, что при каждом $\lambda \in \Omega$ (см. (12)) функция $e^{-\lambda x} y(x, \lambda)$ ограничена на интервале (a, ∞). На этом интервале ограничены также функции $e^{\lambda x} \varphi^{(k)}(-x, \lambda)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$. Непосредственно из формулы (14) следует, что функция $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяет равенствам $\varphi^{(n)}(x, \lambda) = \lambda^n \varphi(x, \lambda)$, $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi^{(\nu)}(0, \lambda) = 0$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n - 1)$. Если обе части равенства (13) продифференцировать n раз и учесть равенство (3) и указанные свойства функций $\varphi(x, \lambda)$ и $y(x, \lambda)$, то, как нетрудно убедиться, получим равенство

$$y^{(n)}(x, \lambda) = \mu\, y(x, \lambda) - \sum_{k=0}^{n-2} A_{n-2-k}\, y^{(k)}(x, \lambda) -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-2} [Q_k(x)\, y(x, \lambda)]^{(n-2-k)} - \int\limits_x^{\infty} M(x, \tau)\, y(\tau, \lambda)\, d\tau.$$

Полученное равенство с использованием формул (4) легко приводится к виду (1).

Заметим, что в силу оценки (8) правая часть формулы (38) определена для всех λ из замкнутой полуплоскости Λ (см. (7)), которая содержит область Ω. Остается показать, что определенная по формуле (38) функция $y(x, \lambda)$ является решением интегро-дифференциального уравнения (1) при всех λ из полуплоскости Λ. Для этого достаточно доказать, что все производные по x функции $y(x, \lambda)$ до порядка n включительно голоморфны в полуплоскости Λ и непрерывны вплоть до ее границы. С этой целью воспользуемся формулой Коши

$$K_0(x, \tau)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S}\frac{K_0(\zeta, \tau)}{\zeta-x}\,d\zeta, \quad a<x<\infty.$$

Отсюда имеем

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}K_0(x, \tau)=\frac{\nu!}{2\pi i}\int\limits_{\partial S}\frac{K_0(\zeta, \tau)}{(\zeta-x)^{\nu+1}}\,d\zeta, \quad \nu=1, 2, 3, \cdots.$$

Из этих равенств с учетом (8) легко получаются оценки

$$\left|\frac{d^\nu}{dx^\nu}K_0(x, \tau)\right|\leqslant \nu!\left[(x-a)\cos\frac{\pi}{n}\right]^{-\nu}\left[h\left(a+\frac{\tau}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\tau\tilde{h}\left(a+\frac{\tau}{2}\right)\right]e^{H(a, \tau)}, \quad \nu=1, 2, 3, \cdots.$$

В силу полученных оценок из формулы (38) вытекает требуемое свойство функции $y(x, \lambda)$. Теорема доказана.

Ереванский государственный университет,
Институт математики АН Армянской ССР

Поступила 1.IV.1987

Ս. Վ. ԲԱԲԱՍՅԱՆ, Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Բարձր կարգի ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների համար ձևափոխության օպերատորի մասին *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է կամայական կարգի սովորական գծային ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարում, որի գործակիցներն անվերջությունում ձգտում են վերջավոր սահմանների։ Նշված են էֆեկտիվ բավարար պայմաններ դիֆերենցիալ արտահայտության գործակիցների և ինտեգրալ արտահայտության կորիզի վրա, որոնց դեպքում գոյություն ունի ձևափոխության օպերատոր։

S. V. BABASIAN, I. G. KHACHATRIAN. *On transformation operator for integro-differential equations of high order* (summary)

The ordinary linear integro-differential equation of arbitrary order with the coefficients which converge at infinity to a finte limit is considered. Effective sufficient conditions on the coefficients of the differential expression and the kernel of the integral expression, under which the transform operator exists, are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Г. Хачатрян.* О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, сохраняющего асимптотику решений, Изв. АН АрмССР, серия матем., 14, № 6, 1979, 424—445.
2. *Б. Я. Левин.* Преобразование типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка, ДАН СССР, 106, № 2, 1956, 187—190.
3. *В. А. Марченко.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, Киев, «Наукова думка», 1977.
4. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М., Ленинград, «Гос. изд. технико-теор. лит.», 1950.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 6, 1989 Математика

УДК 517.98

Ф. Э. МЕЛИК-АДАМЯН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КАНОНИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В работе рассматриваются уравнения и операторы, порожденные дифференциальным выражением*

$$(\mathrm{D}\, x)(r) = W^*(r)\, J \frac{d}{dr}(W(r)\, x(r)),\ (r \in R_+ := [0,\ \infty)), \tag{0.1}$$

где J—$(2n \times 2n)$-матрица со свойствами: $J^* = - J$; $J^* = - I_{2n}$, а $W(r)$—непрерывная $(2n\times 2n)$-матрица-функция, J-унитарная при каждом $r \in R_+$: $W^*(r)\, J\, W(r) = W(r)\, J\, W^*(r) = J$.

Исследования таких уравнений и операторов определенным образом связаны с задачами продолжений, рассмотренных в работах [1, 2]. В основном мы будем придерживаться обозначений этих работ.

Рассмотрим матрицу J как оператор в комплексном $2n$-мерном пространстве C^{2n}. Тогда $J = iP_+ - iP_-$, где $P_\pm = \frac{1}{2}\,(I_{2n} \pm iJ)$ суть ортопроекторы на собственные подпространства $H_\pm = P_\pm\, \mathrm{C}^{2n}$ оператора J, отвечающие собственным значениям $\pm i$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что $\dim H_\pm = n$, и будем отождествлять подпространства $H_\pm$ с C^n.

Операторы, действующие в C^{2n}, часто будем задавать их блочно-матричными представлениями в разложении $\mathrm{C}^{2n} = H_+ \oplus H_-$. Так. например

$$J = \begin{bmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{bmatrix},\ \exp(\lambda\, t\, J) = \begin{bmatrix} \exp(-i\lambda t)\, I_n & 0 \\ 0 & \exp(i\lambda t)\, I_n \end{bmatrix}.$$

Дифференциальное выражение (0.1) в том частном случае, когда м-функция $W(r)$ абсолютно непрерывна, совпадает с выражением вида

$$(\mathrm{D}_V\, x)(r) = J\frac{dx(r)}{dr} - V(r)\, x(r), \tag{0.2}$$

где „потенциал“ $V(r)$ определяется равенством $V(r) = W^*(r)\, J \frac{d\, W(r)}{dr}$. M-функция $V(r)$ суммируема на полуоси R_+ и принимает эрмитовы значения. Последнее является следствием J-унитарности $W(r)$:

---

* Дифференциальное выражение (0.1) в дальнейшем мы будем называть каноническим.

$$V(r) - V^*(r) = W^*(r) J \frac{dW(r)}{dr} + \frac{dW^*(r)}{dr} J W(r) =$$

$$= \frac{d}{dr}(W^*(r) J W(r)) = 0.$$

Обратно, выражение (0.2) с указанным потенциалом $V(r)$ ($V(r) = V^*(r)$; $V \in L^1_{2n\times 2n}(R_+)$) всегда можно представить в виде (0.1) с абсолютно непрерывной J-унитарной $м$-функцией $W(r)$, определенной из уравнения $\dfrac{dW(r)}{dr} = - W(r) J V(r)$ при том или ином J-унитарном условии Коши.

С дифференциальным выражением вида (0.1), точнее с задачей Коши вида

$$W^*(r) J \frac{d}{dr}(W(r) U(r, \lambda)) = \lambda U(r, \lambda);\ U^*(r_0, \lambda) J U(r_0, \lambda) = J\ (r_0 \in R_+) \tag{0.3}$$

тесно связано матричное соотношение вида

$$\frac{d}{dr}(U^*(r, \mu) J U(r, \lambda)) = (\lambda - \mu) U^*(r, \mu) U(r, \lambda);$$

$$U^*(r_0, \lambda) J U(r_0, \lambda) = J \begin{pmatrix} r_0 \in R_+ \\ \lambda,\ \mu \in R \end{pmatrix}. \tag{0.4}$$

Действительно, если $м$-функция $U(r, \lambda)$ ($\lambda \in R$) удовлетворяет задаче (0.3), то легко проверить, что она удовлетворяет соотношению (0.4). Обратно, если $U(r, \lambda)$ удовлетворяет соотношению (0.4), то она удовлетворяет задаче Коши (0.3) при $W(r) = U^*(r, 0) J$.

§ 1. Класс K канонических дифференциальных выражений

Определение 1.1 Через K_Γ обозначим класс $(2n\times 2n)$-матриц-функций $\Gamma_\Delta(t)$ ($t \in R_+$), обладающих свойствами:

1) $\Gamma_\Delta(t)$—суммируемая на полуоси R_+ $м$-функция, принимающая эрмитовы и J-эрмитовы значения:

$$a)\ \Gamma_\Delta \in L^1_{2n\times 2n}(R_+);\ b)\ \Gamma_\Delta(t) = \Gamma^*_\Delta(t);\ c)\ \Gamma_\Delta(t) J = -J \Gamma_\Delta(t); \tag{1.1}$$

2) ганкелев оператор Γ_Δ, определяемый формулой

$$(\Gamma_\Delta f)(t) = \int_0^\infty \Gamma_\Delta(t+s) f(s)\, ds, \tag{1.2}$$

является в пространстве $L^2_{2n\times 1}(R_+)$ сжимающим оператором: $\|\Gamma_\Delta\|_2 < 1$.

Условие $\Gamma_\Delta \in K_\Gamma$ можно выразить еще в виде

$$1)\ \Gamma_\Delta(t) = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma^*(t) \\ \Gamma(t) & 0 \end{bmatrix},\ 2)\ \Gamma \in L^1_{n\times n}(R_+),\ 3)\ \|\Gamma\|_2 < 1. \tag{1.3}$$

Легко проверить следующие свойства ганкелевых операторов Γ_Δ и Γ.

1° Оператор $\Gamma_\Delta(\Gamma)$ является вполне непрерывным в каждом из пространств $L^p_{2n\times 1}(R_+)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ и $AC_{2n\times 1}(R_+)$*.

2° Собственные числа (s-числа) и отвечающие им собственные подпространства (подпространства пар Шмидта) оператора $\Gamma_\Delta(\Gamma)$ одни и тех же во всех пространствах $L^p_{2n\times 1}(R_+)(1\leqslant p \leqslant \infty)$ и $AC_{2n\times 1}(R_+)$.

3° Спектр $\sigma(\Gamma_\Delta)$ оператора Γ_Δ симметричен относительно нуля и $\sigma(\Gamma_\Delta)\cap R_+\setminus\{0\}$ совпадают с множеством s-чисел оператора Γ.

Определение 1.2. Через $\mathbf{K}_U$ обозначим класс $(2n\times 2n)$-матриц-функций $U(\lambda)$ $(\lambda\in R)$, обладающих свойствами:

1) $U(\lambda)$ — J-унитарная м-функция, допускающая представление

$$U(\lambda) = I_{2n} + \int_0^\infty K(t)\exp(-\lambda tJ)\,dt, \quad \text{где} \quad K\in L^1_{2n\times 2n}(R_+); \tag{1.4}$$

2) блоки $U_{11}(\lambda)$ и $U_{22}(\lambda)$ в блочно-матричном представлении м-функции $U(\lambda)$ $(U(\lambda) = \|U_{jk}(\lambda)\|^2_{j,k=1})$ обратимы при $Im\lambda\leqslant 0$ и $Im\lambda\geqslant 0$ соответственно и, следовательно, $U_{11}^{\pm 1}\in W^-_{n\times n}$, $U_{22}^{\pm 1}\in W^+_{n\times n}$**.

Теорема 1. *Между множествами* $\mathbf{K}_\Gamma$ *и* $\mathbf{K}_U$ *существует* (1.1)-*значное соответствие. А именно:*

а) *если* $\Gamma_\Delta\in\mathbf{K}_\Gamma$, *то уравнение*

$$K(t) - \int_0^\infty K(s)\,\Gamma_\Delta(s+t)\,ds = \Gamma_\Delta(t)\ \ (t\in R_+) \tag{1.5а}$$

имеет единственное решение $K\in L^1_{2n\times 2n}(R_+)$ *и тогда по формуле* (1.4) *определяется м-функция* $U(\lambda)$ *из класса* $\mathbf{K}_\Gamma$;

в) *если* $U\in\mathbf{K}_U$ *и* $K(t)$ *есть м-функция из представления* (1.4), *то уравнение*

$$\Gamma_\Delta(t) + \int_t^\infty K(s-t)\,\Gamma_\Delta(s)\,ds = K(t)\ \ (t\in R_+) \tag{1.5в}$$

имеет единственное решение Γ_Δ *из класса* $\mathbf{K}_\Gamma$.

Доказательство. Утверждение а) с заменой $U(\lambda)$ на $U^*(\lambda)$ доказано в [1] (см. лемма 1.1 и теорема 2.1). Докажем утверждение в). Пусть задана м-функция $U\in\mathbf{K}_U$:

---

* Через $AC_{2n+1}(R_+)$ обозначено пространство абсолютно непрерывных на полуоси R_+ $2n$-мерных вектор-функций $f(r)$ с нормой

$$\|f\| = \max_{r\in R_+}|f(r)| + \int_0^\infty |f'(r)|\,dr.$$

** Через $W^{\pm}_{n\times n}$ обозначены классы $(n\times n)$-матриц-функций, элементы которых принадлежат винеровским алгебрам $W^{\pm}$.

$$U(\lambda)=\begin{bmatrix} I_n+\int\limits_0^\infty K_{11}(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt & \int\limits_0^\infty K_{12}(t)\,e^{i\lambda t}\,dt \\ \int\limits_0^\infty K_{21}(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt & I+\int\limits_0^\infty K_{22}(t)\,e^{i\lambda t}\,dt \end{bmatrix}.$$

Имеем

$$U_{11}^{\pm 1}(\lambda)=\Big(I_n+\int\limits_0^\infty K_{11}(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt\Big)^{\pm 1}\in W^-_{n\times n};$$

$$U_{22}^{\pm 1}(\lambda)=\Big(I_n+\int\limits_0^\infty K_{22}(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\Big)^{\pm 1}\in W^+_{n\times n}.$$

Рассмотрим уравнения

$$\Gamma_1(t)+\int\limits_t^\infty K_{22}(s-t)\,\Gamma_1(s)\,ds=K_{21}(t), \qquad (1.6_1)$$

$$\Gamma_2(t)+\int\limits_t^\infty K_{11}(s-t)\,\Gamma_2(s)\,ds=K_{12}(t). \qquad (1.6_2)$$

Символами для них служат м-функции $U_{22}(\lambda)$ и $U_{11}(\lambda)$, имеющие нулевые индексы.* Поэтому, на основании общих теорем из [3] (теоремы 21 и 91) можем утверждать, что уравнение (1.6_1) и (1.6_2) однозначно разрешимы в классе $L^1_{n\times n}(R_+)$. Покажем, что $\Gamma_1^*(t)=\Gamma_2(t)$. Положим $U_0(t,\lambda)=\exp(-i\lambda tJ)$ и заметим, что J-унитарность м-функции $U(\lambda)$ равносильна тождеству

$$\int\limits_0^\infty K(t)\,U_0(t,\lambda)\,J\,dt+\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty K(t+s)\,U_0(t,\lambda)\,J\,K^*(s)\,ds\,dt=$$
$$=-\int\limits_0^\infty J\,U_0^*(t,\lambda)\,K^*(t)\,dt-\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty K(t)\,U_0^*(s,\lambda)\,J\,K^*(t+s)\,dt\,ds. \qquad (1.7)$$

В самом деле, имеем

$$\int\limits_0^\infty K(t)\,U_0(t,\lambda)\,dt\,J\int\limits_0^\infty U_0^*(t,\lambda)\,K^*(t)\,dt=$$
$$=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^t K(t)\,U_0(t-s,\lambda)\,J\,K^*(s)\,ds\,dt+$$

---

* Определение правых (левых) частных индексов см. в [3].

$$+\int_0^\infty\int_t^\infty K(t)\,U_0(t-s,\lambda)\,JK^*(s)\,ds\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\int_s^\infty K(t)\,U_0(t-s,\lambda)\,JK^*(s)\,dt\,ds+$$

$$+\int_0^\infty\int_t^\infty K(t)\,U_0(t-s,\lambda)\,JK^*(s)\,ds\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty K(t+s)\,U_0(t,\lambda)\,JK^*(s)\,dt\,ds+$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty K(t)\,U_0^*(s,\lambda)\,JK^*(t+s)\,ds\,dt.$$

и, следовательно, соотношение

$$\left(I_{2n}+\int_0^\infty K(t)\,U_0(t,\lambda)\,dt\right)J\left(I_{2n}+\int_0^\infty K(t)\,U_0(t,\lambda)\,dt\right)^*=J$$

равносильно тождеству (1.7).

Из (1.7) получаем в частности

$$K_{12}(t)+\int_0^\infty K_{12}(t+s)\,K_{22}^*(s)\,ds=K_{21}^*(t)+\int_0^\infty K_{11}(s)\,K_{21}^*(t+s)\,ds, \quad (1.7_1)$$

$$K_{11}(t)+\int_0^\infty K_{11}(t+s)\,K_{11}^*(s)=\int_0^\infty K_{12}(s)\,K_{12}^*(t+s)\,ds. \quad (1.7_2)$$

Подставив в (1.7_1) значение K_{21}^* и K_{12} из (1.6_1) и (1.6_2), получим

$$\left(\Gamma_2(t)+\int_0^\infty K_{11}(s)\,\Gamma_2(t+s)\,ds\right)+$$

$$+\int_0^\infty\left(\Gamma_2(t+s)+\int_0^\infty K_{11}(u)\,\Gamma_2(t+s+u)\,du\right)K_{22}^*(s)\,ds=$$

$$=\left(\Gamma_1(t)+\int_0^\infty K_{22}(s)\,\Gamma_1(t+s)\,ds\right)^*+$$

$$+\int_0^\infty K_{11}(s)\left(\Gamma_1(t+s)+\int_0^\infty K_{22}(u)\,\Gamma_1(t+s+u)\,du\right)^*ds=$$

$$=\left(\Gamma_1^*(t)+\int_0^\infty K_{11}(s)\,\Gamma_1^*(t+s)\,ds\right)+$$

$$+\int_0^\infty\left(\Gamma_1^*(t+s)+\int_0^\infty K_{11}(u)\,\Gamma_1^*(t+s+u)\,du\right)K_{21}^*(s)\,ds.$$

Это в силу единственности решений уравнений (1.6_1) и (1.6_2) означает, что $\Gamma_1^*(t)=\Gamma_2(t)$.

Покажем теперь, что *м*-функция $\Gamma_\Delta(t)$, определенная формулой

$$\Gamma_\Delta(t)=\begin{bmatrix}0 & \Gamma_1^*(t)\\ \Gamma_1(t) & 0\end{bmatrix},$$

удовлетворяет уравнению (1.5в).

Для этого достаточно проверить справедливость равенств

$$K_{11}(t)=\int_0^\infty K_{12}(s)\,\Gamma_1(t+s)\,ds;\quad K_{22}(t)=\int_0^\infty K_{21}(s)\,\Gamma_1^*(t+s)\,ds.$$

Положим

$$\Phi(t)=\int_0^\infty K_{12}(s)\,\Gamma_1(t+s)\,ds.$$

В силу (1.6_1) и (1.7_2) имеем

$$\Phi(t)=\int_0^\infty K_{12}(s)\left(K_{12}^*(t+s)-\int_0^\infty \Gamma_1(t+s+u)\,K_{11}^*(u)\,du\right)ds=$$

$$=\int_0^\infty K_{12}(s)\,K_{12}^*(t+s)\,ds-\int_0^\infty\int_0^\infty K_{12}(s)\,\Gamma_1(t+s+u)\,K_{11}^*(u)\,du\,ds=$$

$$=K_{11}(t)+\int_0^\infty K_{11}(t+s)\,K_{11}^*(s)\,ds-\int_0^\infty\int_0^\infty K_{12}(s)\,\Gamma_1(t+s+u)\,K_{11}^*(u)\,du\,ds=$$

$$=K_{11}(t)+\int_0^\infty\left(K_{11}(t+s)-\int_0^\infty K_{12}(u)\,\Gamma_1(t+s+u)\,du\right)K_{11}^*(s)\,ds=$$

$$=K_{11}(t)+\int_0^\infty\left(K_{11}(t+s)-\Phi(t+s)\right)K_{11}^*(s)\,ds.$$

Отсюда

$$(K_{11}(t)-\Phi(t))+\int_0^\infty\left(K_{11}(t+s)-\Phi(t+s)\right)K_{11}^*(s)\,ds=0.$$

Это в силу единственности решения уравнения (1.6$_1$) дает $K_{11}(t) = \Phi(t)$. Второе равенство доказывается аналогично.

Остается доказать, что $\|\Gamma_\Delta\| < 1$. Введем для этого м-функцию $S_0(\lambda) = U_{22}^{-1}(\lambda)\, U_{21}(\lambda)$. Ясно, что она представима в виде

$$S_0(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\Gamma}(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt \quad (\widetilde{\Gamma} \in L^1_{n\times n}(R)).$$

Легко проверить, что в этом представлении м-функция $\widetilde{\Gamma}(t)$ при $t > 0$ совпадает с $\Gamma_1(t)$. Используя тождество $U_{22}(\lambda)\, U_{22}^*(\lambda) - U_{21}(\lambda)\, U_{21}^*(\lambda) = I_n$, являющееся одним из следствий J-унитарности $U(\lambda)$, получаем

$$I_n - S_0(\lambda)\, S_0^*(\lambda) = U_{22}^{-1}(\lambda)\,[U_{22}(\lambda)\, U_{22}^*(\lambda) -$$

$$- U_{21}(\lambda)\, U_{21}^*(\lambda)]\, U_{22}^{*^{-1}}(\lambda) = U_{22}^{-1}(\lambda)\, U_{22}^{*^{-1}}(\lambda) \gg 0.$$

Отсюда, учитывая, что $S_0(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$, имеем $|S_0(\lambda)| \leqslant q < 1$.

Рассмотрим отображение

$$(\mathbf{S}_0 \widetilde{f})(\lambda) = S_0(\lambda)\, \widetilde{f}(\lambda),$$

$$\text{где } \widetilde{f}(\lambda) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{i\lambda t}\, dt \quad (f \in L^1_{n\times 1}(R_+) \cap L^2_{n\times 1}(R_+)).$$

Легко проверить, что

$$(S_0 \widehat{f})(\lambda) = \int_0^{\infty} (\Gamma f)(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt + \widehat{\Psi}(\lambda),$$

где $\widehat{\Psi} \in H^2_{n\times 1}$, а Γ — ганкелев оперотор, порожденный м-функцией $\Gamma_1(t)$.

Отсюда получаем, что $\|\Gamma f\|^2 \leqslant \|S_0 \widehat{f}\|^2 \leqslant q^2 \|\widehat{f}\|^2 = q^2 \|f\|^2$. Таким образом получаем $\|\Gamma\| \leqslant q < 1$, которое равносильно неравенству $\|\Gamma_\Delta\| \leqslant q < 1$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Произвольную м-функцию $U(\lambda)$ из K_U можно рассматривать как значение в точке $r = 0$ некоторой м-функции $U(r, \lambda)$, являющейся решением уравнения* (0.3) *и имеющей на бесконечности асимптотику*

$$U(r, \lambda) = U_0(r, \lambda) + o(1) \text{ при } r \to \infty. \tag{1.8}$$

При этом м-функция $W(r)$, определяющая это уравнение, начиная с некоторого r_0 $(r_0 > 0)$ представляется в виде:

$$W(r) = I_{2n} + \int_r^{\infty} G(t)\, dt \quad (r_0 < r < \infty;\ G \in L^1_{2n\times 2n}(r_0, \infty)). \tag{1.9}$$

Доказательство. Вместе с заданной м-функцией $U \in \mathbf{K}_U$ рассмотрим соответствующую ей м-функцию $\Gamma_\Delta \in \mathbf{K}_\Gamma$. Мы покажем, что для произвольного $r \in R_+$ можно определить м-функцию $K(r, t)$ из уравнения

$$K(r, t) - \int_r^{\infty} K(r, s)\, \Gamma_{\Delta}(t+s)\, ds = \Gamma_{\Delta}(t+r) \, (0 \leqslant r < t < \infty) \quad (1.10)$$

и положив

$$U(r, \lambda) = U_0(r, \lambda) + \int_r^{\infty} K(r, t)\, U_0(t, \lambda)\, dt, \quad (1.11)$$

получить искомую *м*-функцию $U(r, \lambda)$.

В пространстве $L^2_{2n\times 1}(r, \infty)$ рассмотрим ганкелевы операторы $\Gamma_{\Delta, r}$:

$$(\Gamma_{\Delta, r} f)(t) = \int_r^{\infty} \Gamma_{\Delta}(t+s)\, f(s)\, ds \, (0 \leqslant r \leqslant t < \infty).$$

Операторы $\Gamma_{\Delta, r}$ можно представить в виде $\Gamma_{\Delta, r} = P_r \Gamma_{\Delta} P_r$, где P_r — операторы ортогонального проектирования $L^2_{2n\times 1}(R_+)$ на $L^2_{2n\times 1}(r, \infty)$. Поэтому $\|\Gamma_{\Delta, r}\|_2 \leqslant \|\Gamma_{\Delta}\|_2 \leqslant q < 1$.

В силу свойств $1^{\circ} - 3^{\circ}$ ганкелевых операторов можно утверждать, что спектральный радиус $\rho(\Gamma_{\Delta, r})$ оператора $\Gamma_{\Delta, r}$ в пространстве $L^1_{2n\times 1}(r, \infty)$ удовлетворяет неравенству: $\rho(\Gamma_{\Delta, r}) \leqslant \|\Gamma_{\Delta, r}\|_2 \leqslant q < 1$. Поэтому при каждом фиксированном $r \in R_+$ уравнение (1.10) имеет единственное решение $K(r, t)$ из класса $L^1_{2n\times 2n}(r, \infty)$. Более того, это решение представимо в виде ряда:

$$K(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(r, t),$$

$$\text{где } K_0(r, t) = \Gamma_{\Delta}(r+t),\ K_n(r, t) = \int_r^{\infty} K_{n-1}(r, s)\, \Gamma_{\Delta}(s+t)\, ds \, (n \geqslant 1).$$

Ряд этот сходится по t в метрике пространства $L^1_{2n\times 2n}(r, \infty)$ равномерно по $r \in R_+$. Действительно, так так $K_n(r, t) = \Gamma^n_{\Delta, r} \Gamma_{\Delta}(r+t)$ и $\rho(\Gamma_{\Delta, r}) \leqslant q < 1$, то начиная с некоторого n_0 справедливо неравенство

$$\int_r^{\infty} |K_n(r, t)|\, dt = \int_r^{\infty} |\Gamma^n_{\Delta, r} \Gamma(r+t)|\, dt \leqslant C \|\Gamma^n_{\Delta, r}\|_1 \leqslant C q^n \, (n > n_0).$$

Для *м*-функции $U(r, \lambda)$, введенной по формуле (1.11), имеем $U(r, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(r, \lambda)$, где $U_n(r, \lambda) = \int_r^{\infty} K_{n-1}(r, t)\, U_0(t, \lambda)\, dt$ и еледовательно $|U_n(r, \lambda)| \leqslant C q^{n-1}$. *М*-функции $K_{n-1}(r, t)$ и $U_n(r, \lambda)$ представим в развернутом виде:

$$K_{n-1}(r, t) = \underbrace{\int_r^{\infty} \cdots \int_r^{\infty}}_{n-1} \Gamma_{\Delta}(r+s_1)\, \Gamma_{\Delta}(s_1+s_2) \cdots \Gamma_{\Delta}(s_{n-1}+t)\, ds_1\, ds_2 \cdots ds_{n-1},$$

$$U_n(r,\lambda)=\underbrace{\int_r^\infty\cdots\int_r^\infty}_{n}\Gamma_\Delta(r+s_1)\;\Gamma_\Delta(s_1+s_2)\cdots$$

$$\cdots\Gamma_\Delta(s_{n-1}+t)\;U_0(t,\lambda)\,ds_1\,ds_2\cdots ds_{n-1}\,dt.$$

Введя новые переменные: $\tau_1=r+s_1,\ \tau_2=s_1+s_2,\cdots,\ \tau_{n-1}=s_{n-2}+s_{n-1}$, $\tau_n=s_{n-1}+t\left(s_k=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\tau_j+(-1)^k\;r\,(k=1,2,\cdots,\ n-1);\ t=\right.$ $\left.=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\tau_j+(-1)^n r\right)$, получим

$$K_{n-1}(r,t)=\int_{2r}^\infty\Gamma_\Delta(\tau_1)\int_{\tau_1}^\infty\Gamma_\Delta(\tau_2)\int_{\tau_2-\tau_1+2r}^\infty\Gamma_\Delta(\tau_3)\cdots$$

$$\cdots\int_{\sum\limits_{j=1}^{n-2}(-1)^{n-2-j}\tau_j+(-1)^{n-2}r+r}^\infty\Gamma_\Delta(\tau_{n-1})\,\Gamma_\Delta\Bigl(\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n-1-j}\tau_j+$$

$$+(-1)^{n-1}r+t\Bigr)d\tau_1\,d\tau_2\cdots d\tau_{n-1},\qquad(1.12)$$

$$U_n(r,\lambda)=\int_{2r}^\infty\Gamma_\Delta(\tau_1)\int_{\tau_1}^\infty\Gamma_\Delta(\tau_2)\int_{\tau_2-\tau_1+2r}^\infty\Gamma_\Delta(\tau_3)\cdots$$

$$\cdots\int_{\sum\limits_{j=1}^{n-1}(-1)^{n-1-j}\tau_j+(-1)^{n-1}r+r}^\infty\Gamma_\Delta(\tau_n)\;U_0\Bigl(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\tau_j+$$

$$+(-1)^n r\Bigr)d\tau_1\,d\tau_2\cdots d\tau_n.\qquad(1.13)$$

Из (1.12) следует, что при четных n имеют смысл м-функция $K_n(r,r)$ и выполняются неравенства

$$\int_{r_0}^\infty|K_{2n}(r,r)|\,dr\leqslant\left(\int_{r_0}^\infty|\Gamma_\Delta(t)|\,dt\right)^{2n+1}\ (0\leqslant r_0<\infty).\qquad(1.14)$$

Следовательно, $K_{2n}(r,r)$ является суммируемой м-функцией на полуоси R_+.

Из (1.13) следует дифференцируемость м-функции $U_n(r,\lambda)$ по r и формула

$$J\frac{d}{dr}U_n(r,\lambda)=\lambda\,U_n(r,\lambda)-2J\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]^*}K_{2j}(r,r)\,U_{n-1-2j}(r,\lambda).\qquad(1.15)$$

---

* Через $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ обозначена целая часть числа $\frac{n-1}{2}$.

Рассмотрим теперь выражение

$$U^*(r,\mu)\,JU(r,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n^*(r,\mu)\,J\sum_{k=0}^{\infty}U_k(r,\lambda)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}U_{n-k}^*(r,\mu)\,JU_k(r,\lambda).$$

Воспользовавшись формулой (1.15) и учитывая, что $JK_{2j}(r,r)=-K_{2j}(r,r)\,J$, получим

$$\frac{d}{dr}\sum_{k=0}^{n}U_{n-k}^*(r,\mu)\,JU_k(r,\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\frac{d}{dr}(U_{n-k}^*(r,\mu)\,J)\,U_k(r,\lambda)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}U_{n-k}^*(r,\mu)\frac{d}{dr}(JU_k(r,\lambda))=$$

$$=-\sum_{k=0}^{n}\left(\mu\,U_{n-k}(r,\mu)-2J\sum_{\substack{j=0\\k\neq n}}^{\left[\frac{n-k-1}{2}\right]}K_{2j}(r,r)\,U_{n-k-1-2j}(r,\mu)\right)^*U_k(r,\lambda)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}U_{n-k}^*(r,\mu)\left(\lambda\,U_k(r,\lambda)-2J\sum_{\substack{j=0\\k\neq 0}}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}K_{2j}(r,r)\,U_{k-1-2j}(r,\lambda)\right)=$$

$$=(\lambda-\mu)\sum_{k=0}^{n}U_{n-k}^*(r,\mu)\,U_k(r,\lambda)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}U_{n-k-2j}^*(r,\mu)\,2JK_{2j}(r,r)\,U_k(r,\lambda)-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}U_{n-k}^*(r,\mu)\,2JK_{2j}(r,r)\,U_{k-1-2j}(r,\lambda).$$

С другой стороны, поскольку $\sum_{k=0}^{n}U_{n-k}^*(r,\mu)\,JU_k(r,\lambda)=\sum_{k=0}^{n}U_k^*(r,\mu)\times JU_{n-k}(r,\lambda)$, аналогичным образом получаем также равенство

$$\frac{d}{dr}\sum_{p=0}^{n}U_p^*(r,\mu)\,J\,U_{n-p}(r,\lambda)=(\lambda-\mu)\sum_{p=0}^{n}U_p^*(r,\mu)\,U_{n-p}(r,\lambda)+$$

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{j=0}^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}U_{p-1-2j}^*(r,\mu)\,2JK_{2j}(r,r)\,U_{n-p}(r,\lambda)-$$

$$-\sum_{p=1}^{n}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-p}{2}\right]}U_p^*(r,\mu)\,2JK_{2j}(r,r)\,U_{n-p-2j}(r,\lambda).$$

Подставляя в последнее равенство $p=n-k-1$ и сравнивая полученное с предыдущим равенством, можем утверждать, что

$$\frac{d}{dr}\sum_{k=0}^{n}U_{n-k}^*(r,\mu)\,JU_k(r,\lambda)=(\lambda-\mu)\sum_{k=0}^{n}U_{n-k}^*(r,\mu)\,U_k(r,\lambda).$$

Таким образом, для $м$-функции $U(r,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(r,\lambda)$ получаем тождество (0,4)

Для завершения доказательства теоремы остается доказать представление (1.9) для $м$-функции $W(r)=U^*(r,0)\,J$. Заметим для этого, что в силу неравенства (1.14) ряд $\sum_{j=0}^{\infty}K_{2j}(r,r)$ при некотором $r_0\geqslant 0$ абсолютно сходится в метрике пространства $L^1_{2n\times 2n}(r_0,\infty)$. Поэтому суммируя почленно равенства (1.15) получим

$$J\frac{d}{dr}U(r,\lambda)=\lambda U(r,\lambda)-2J\sum_{j=0}^{\infty}K_{2j}(r,r)\,U(r,\lambda).$$

Это означает, что дифференциальное выражение вида (0.1), порожденное $м$-функцией $U(\lambda)$ из $\mathbf{K}_U$, при $r\geqslant r_0$ принимает вид (0.2), где $V(r)=$ $=-2J\sum_{j=0}^{\infty}K_{2j}(r,r)$ является эрмитовой и J-эрмитовой $м$-функцией, суммируемой в интервале $[r_0,\infty)$:

$$1)\ V\in L^1_{2n\times 2n}(r_0,\infty),\ 2)\ V(r)=V^*(r)\ (r_0\leqslant r<\infty),$$
$$3)\ JV(r)=-V(r)\,J\,(r_0\leqslant r<\infty). \qquad (1.16)$$

Теперь остается добавить, что $м$-функция $K(r,t)$, определенная из уравнения (1.10), удовлетворяет условию

$$\lim_{r\to\infty}\int_r^{\infty}|K(r,t)|\,dt=0,$$

так что $U(r,\lambda)$ имеет асимптотику (1.8), а потому $W(r)$ представима в виде (1.19). Теорема доказана.

Определение 3. Множество канонических дифференциальных выражений вида (0.1), отвечающих по теореме 2 $м$-функциям $U\in\mathbf{K}_U$, обозначим через $\mathbf{K}$.

§ 2. Канонические дифференциальные выражения (0.2) как подмножество класса K

Рассмотрим множество $\mathbf{V}_0$ канонических дифференциальных выражений вида (0.2) с потенциалами $V(r)$, удовлетворяющими условиям (1.16) при $r_0=0$. Покажем, что $\mathbf{V}_0\subset\mathbf{K}$ и в некотором смысле плотно в нем.

Заметим, во-первых, что при рассмотрении операторов, порожденных выражениями вида (0.2), всегда можно ограничиться выражениями с так называемыми „нормализованными“ потенциалами $V(r)$, т. е. потенциалами, удовлетворяющими условию $JV(r)=-V(r)\,J$.

В самом деле, представим рассматриваемый потенциал $V(r)$ в виде $V(r)=V_+(r)+V_-(r)$, где $V_\pm(r)=\frac{1}{2}[V(r)\mp JV(r)\,J]$ $(JV_\pm(r)=$ $=\pm V_\pm J)$, и рассмотрим матричное решение $Q(r)$ следующей задачи Коши:

$$J\frac{dQ(r)}{dr}-V_+(r)\,Q(r)=0,\ \ Q(r_0)=I_{2n}\ (0\leqslant r_0\leqslant\infty).^*$$

Используя свойства: $V_+(r)=V_+^*(r)$, $JV_+(r)=V_+(r)J$ легко проверить, что $\mathcal{M}$-функция $Q(r)$ J-унитарна и унитарна: $Q^*(r)\,J\,Q(r)=J$, $Q^*(r)\,Q(r)=I_{2n}$. Отсюда получаем

$$Q^*(r)\left(J\frac{d}{dr}-V(r)\right)Q(r)\,x(r)=Q^*(r)\left(J\frac{dQ(r)}{dr}-V(r)\,Q(r)\right)x(r)+$$

$$+Q^*(r)\,JQ(r)\frac{dx(r)}{dr}-Q^*(r)\,V(r)\,Q(r)\,x(r)=J\frac{dx(r)}{dr}-\widetilde{V}(r)\,x(r).$$

Очевидно потенциал $\widetilde{V}(r)=Q^*(r)\,V_-(r)\,Q(r)$ суммируем, эрмитов и нормализован.

Рассмотрим класс операторов вида

$$[(\mathbf{I}+\mathbf{K})f](r)=f(r)+\int\limits_r^\infty K(r,\ t)\,f(t)\,dt, \tag{2.1}$$

где ядро $K(r,\ t)\ (0\leqslant r\leqslant t<\infty)$ удовлетворяет условиям

$$1)\ \sup_{r\in R_+}\int\limits_r^\infty |K(r,\ t)|\,dt<\infty,\quad 2)\ \sup_{t\in R_+}\int\limits_0^t |K(r,\ t)|\,dr<\infty,$$

$$3)\ \lim_{r\to\infty}\int\limits_r^\infty |K(r,\ t)|\,dt=0. \tag{2.2}$$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество локально-абсолютно непрерывных $(2n\times 1)$-вектор-функций $f(r)\,(r\in R_+)$ таких, что $f\in L^\infty_{2n\times 1}(R_+)$, $f'\in L^p_{2n\times 1}(R_+)$ при некотором $p\ (1\leqslant p\leqslant\infty)$. Через $\mathfrak{M}_0$ обозначим подмножество $\mathfrak{M}$, элементы которого удовлетворяют условию $f(0)=0$.

Лемма 2.1. *Пусть задан оператор вида* (2.1) — (2.2). *Тогда равенство*

$$\left(J\frac{d}{dr}-V(r)\right)[(\mathbf{I}+\mathbf{K})f](r)=[(\mathbf{I}+\mathbf{K})\,Jf'](r) \tag{2.3}$$

выполняется для всех $f\in\mathfrak{M}$ в том и только в том случае, когда J-перестановочная и J-антиперестановочная компоненты $K_\pm(r,\ t)=\frac{1}{2}(K(r,\ t)\mp JK(r,\ t)\,J)$ ядра $K(r,\ t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$K_+(r,\ t)=J\int\limits_r^\infty V(\tau)\,K_-(\tau,\ \tau+t-r)\,d\tau,$$

* Легко видеть, что в силу суммируемости $V_+(r)$, всегда существует $\lim\limits_{r\to\infty} Q(r)$: $:=Q(\infty)$.

$$K_-(r,\ t) = -\frac{1}{2} J V\left(\frac{r+t}{2}\right) + J \int\limits_r^{\frac{r+t}{2}} V(r)\, K_+(\tau,\ r+t-\tau)\, d\tau.$$

Доказательство. Пусть $K_+(r,\ t)$ удовлетворяет системе (2.4). Тогда после соответствующих замен переменных и порядка интегрирования получим

$$\int\limits_r^{\infty} K(r,\ t)\, f(t)\, dt = \int\limits_r^{\infty} K_+(r,\ t)\, f(t)\, dt + \int\limits_r^{\infty} K_-(r,\ t)\, f(t)\, dt =$$

$$= J \int\limits_r^{\infty} \int\limits_{\tau}^{\infty} V(\tau)\, K_-(\tau,\ t)\, f(t+r-\tau)\, dt\, d\tau + J \int\limits_r^{\infty} V(t)\, f(2t-r)\, dt +$$

$$+ J \int\limits_r^{\infty} \int\limits_{\tau}^{\infty} V(\tau)\, K_+(\tau,\ t)\, f(t+\tau-r)\, dt\, d\tau.$$

Отсюда, учитывая, что $J\, V(r) = -V(r)\, J$, имеем

$$J \frac{d}{dr} \int\limits_r^{\infty} K(r,\ t)\, f(t)\, dt = V(r) \int\limits_r^{\infty} K_-(r,\ t)\, f(t)\, dt +$$

$$+ J \int\limits_r^{\infty} \int\limits_{\tau}^{\infty} V(\tau)\, K_-(\tau,\ t)\, Jf'(t+r-\tau)\, dt\, d\tau + V(r)\, f(r) +$$

$$+ J \int\limits_r^{\infty} V(t)\, Jf'(2t-r)\, dt + V(r) \int\limits_r^{\infty} K_+(r,\ t)\, f(t)\, dt +$$

$$+ J \int\limits_r^{\infty} \int\limits_{\tau}^{\infty} V(\tau)\, K_+(\tau,\ t)\, Jf'(t-r+\tau)\, dt\, d\tau =$$

$$= V(r)\, [(\mathbf{I}+\mathbf{K})\, f]\, (r) + \int\limits_r^{\infty} K(r,\ t)\, Jf'(t)\, dt.$$

Полученное равенство равносильно равенству (2.3).

Обратно, пусть справедливо равенство (2.3) для любого $f \in \mathfrak{M}$. Тогда m-функция $U(r,\ \lambda) = (\mathbf{I}+\mathbf{K})\, U_0(r,\ \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$J \frac{dU(r,\ \lambda)}{dr} - V(r)\, U(r,\ \lambda) = \lambda\, U(r,\ \lambda) \tag{2.5}$$

и асимптотике (1.8). Следовательно, $U(r,\ \lambda)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$U(r,\ \lambda) = U_0(r,\ \lambda) + \int\limits_r^{\infty} U_0(r-s,\ \lambda)\, JV(s)\, U(s,\ \lambda)\, ds.$$

Отсюда получаем

$$\int_r^\infty K(r, t)\, U_0(t, \lambda)\, dt =$$

$$= \int_r^\infty U_0(r-s, \lambda)\, JV(s) \left(U_0(s, \lambda) + \int_s^\infty K(s, t)\, U_0(t, \lambda)\, dt \right) ds.$$

Преобразуем последнее равенство, учитывая соотношение: $K_+(r, t) \times \times U_0(t, \lambda) = U_0(t, \lambda) K_+(r, t)$; $K_-(r, t)\, U_0(t, \lambda) = U_0^*(t, \lambda)\, K_-(r, t)$. Имеем

$$\int_r^\infty U_0(t, \lambda)\, K_+(r, t)\, dt + \int_r^\infty U_0^*(t, \lambda)\, K_-(r, t)\, dt =$$

$$= \int_r^\infty U_0(r-2s, \lambda)\, JV(s) ds + \int_r^\infty \int_s^\infty U_0(r-s+t, \lambda)\, JV(s)\, K_-(s, t)\, dt\, ds +$$

$$+ \int_r^\infty \int_s^\infty U_0(r-s-t, \lambda)\, JV(s)\, K_+(s, t)\, dt ds =$$

$$= \int_r^\infty U_0^*(s, \lambda) \frac{1}{2} JV\left(\frac{r+s}{2}\right) ds + \int_r^\infty \int_{2s-r}^\infty U_0^*(t, \lambda)\, JV(s) K_+(s, r+t-s)\, dt ds +$$

$$+ \int_r^\infty \int_r^\infty U_0(t, \lambda)\, JV(s)\, K_-(s, s+t-r)\, dt\, ds =$$

$$\int_r^\infty U_0(t, \lambda) \int_r^\infty JV(s)\, K_-(s, s+t-r)\, ds\, dt +$$

$$+ \int_r^\infty U_0^*(t, \lambda) \left[\frac{1}{2} JV\left(\frac{r+t}{2}\right) + J \int_r^{\frac{r+t}{2}} V(s)\, K_+(s, t+r-s)\, ds \right] dt.$$

Приравнивая в полученном равенстве члены при $U_0(t, \lambda)$ и $U_0^*(t, \lambda)$, приходим к системе (2.4).

Аналогично первой части доказательства леммы 1 доказывается

Лемма 2.2. *Если ядро $L(r, t)$ оператора вида* (2.1) — (2.2) *удовлетворяет системе*

$$L_+(r, t) = -J \int_r^\infty L_1(\tau + r - t, \tau)\, V(\tau)\, d\tau,$$

$$L_-(r,t) = -\frac{1}{2} J V\left(\frac{r+t}{2}\right) - J \int_{\frac{r+t}{2}}^{r} L_+(t+r-\tau, \tau)\, V(\tau)\, d\tau, \qquad (2.6)$$

то выполняются равенства

$$J\frac{d}{dr}[(\mathrm{I}+\mathrm{L})f](r) = [\mathrm{I}+\mathrm{L})\left(J\frac{d}{dr} - V(r)f\right)(r)\ \forall f \in \mathfrak{M}. \qquad (2.7)$$

$$\left(J\frac{d}{dr} - V(r)\right)[(\mathrm{I}+\mathrm{L}^*)f](r) = [(\mathrm{I}+\mathrm{L}^*)Jf'](r)\ \forall f \in \mathfrak{M}_0. \qquad (2.8)$$

Замечание 1. Существование решений систем (2.4) и (2.6) в классе *м*-функций, удовлетворяющих условиям (2.2; 1), 2)), доказывается методом последовательных приближений. Затем, исходя из этих систем, легко проверить справедливость равенств типа

$$\lim_{r\to\infty} \int_r^\infty |L(r,t)|\, dt = 0; \ \lim_{t\to\infty} \int_0^t |L(r,t)|\, dr = 0. \qquad (2.9)$$

Лемма 2.3 *Операторы* $\mathrm{I}+\mathrm{K}$ *и* $\mathrm{I}+\mathrm{L}$, *определенные с помощью систем* (2.1) *и* (2.6), *взаимно обратные.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $\mathrm{I}+\mathrm{M} = (\mathrm{I}+\mathrm{L})(\mathrm{I}+\mathrm{K})$ и покажем, что ядро $M(r,t)$ этого оператора равно нулю. Для *м*-функции $(\mathrm{I}+\mathrm{M})\, U_0(r,\lambda)$ в силу равенств (2.3) и (2.4) имеем

$$J\frac{d}{dr}[(\mathrm{I}+\mathrm{M})\, U_0(r,\lambda)] = \lambda(\mathrm{I}+\mathrm{M})\, U_0(r,\lambda).$$

Отсюда

$$U_0(r,\lambda) + \int_r^\infty M(r,t)\, U_0(t,\lambda)\, dt = \left(I_{2n} + \int_0^\infty M(0,t)\, U_0(t,\lambda)\, dt\right) U_0(r,\lambda).$$

Это приводит к равенству

$$\int_0^\infty M(r, r+t)\, U_0(t,\lambda)\, dt = \int_0^\infty M(0,t)\, U_0(t,\lambda)\, dt,$$

т. е. $M(r, r+t) = M(0,t)\ \forall r \in R_+$. Но ядро $M(r,t)$ также удовлетворяет условиям (2.9). Следовательно $M(r,t) \equiv 0$.

Теорема 3 *Оператор* $\Gamma_\Delta = -(\mathrm{I}+\mathrm{L})(\mathrm{I}+\mathrm{L}^*) + \mathrm{I}$ *есть ганкелев оператор, порожденный м-функцией* $\Gamma_\Delta(t)$ *из класса* K_Γ.

Доказательство. Легко видеть, что для ядра $\Gamma(r,t)$ оператора $\mathrm{I}-\Gamma_\Delta = (\mathrm{I}+\mathrm{L})(\mathrm{I}+\mathrm{L}^*)$ имеем представление

$$\Gamma(r,t) = \begin{cases} L(r,t) + \int_t^\infty L(r,s)\, L^*(t,s)\, ds, & \text{при } r < t \\ L^*(t,r) + \int_r^\infty L(r,s)\, L^*(t,s)\, ds, & \text{при } r > t. \end{cases}$$

Отсюда $\Gamma^*(r, t) = \Gamma(t, r)$ и в силу (2.9)

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^\infty |\Gamma(r, t)|\, dt = 0. \tag{2.10}$$

Далее, в силу (2.7) и (2.8) для произвольного $f \in \mathfrak{M}_0$ имеем

$$J \frac{d}{dr} \int_0^\infty \Gamma(r, t) f(t)\, dt = \int_0^\infty \Gamma(r, t)\, Jf'(t)\, dt.$$

Отсюда следует (см. [4], стр. 20), что $\Gamma(r, t)$ представимо в виде: $\Gamma(r, t) = \Gamma_+(r-t) + \Gamma_-(r+t)$, где $J\Gamma_\pm(t) = \pm\Gamma_\pm(t)\, J$. Но в силу (2.10) $\Gamma_+(t) \equiv 0$ и следовательно оператор $\mathbf{\Gamma}_\Delta$ является ганкелевым оператором, порожденным суммируемой функцией $\Gamma_\Delta(t) := \Gamma_-(t)$.

Остается доказать, что $\|\mathbf{\Gamma}_\Delta\|_2 < 1$. Заметим для этого, что $\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_\Delta = (\mathbf{I} + \mathbf{L})(\mathbf{I} + \mathbf{L}^*) = (\mathbf{I} + \mathbf{K})^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{K}^*)^{-1}$ — обратимый оператор по самому построению.

Рассмотрим теперь операторы $\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_{\Delta, a}$, построенные соответственно потенциалом $V_a(r) = V(r+a)(a \geqslant 0)$: $\mathbf{I} - \mathbf{I}_{\Delta, a} = (\mathbf{I} + \mathbf{L}_a)(\mathbf{I} + \mathbf{L}_a^*)$. С помощью системы (2.6) легко убедиться, что ядра $L_a(r, t)$ связаны с ядром $L(r, t)$ соотношением: $L_a(r, t) = L(r+a, t+a)$. Поэтому ганкелевы операторы $\mathbf{\Gamma}_{\Delta, a}$ порождаются *м*-функциями $\Gamma_{\Delta, a}(t) = \Gamma_\Delta(t+a)$. Это позволяет утверждать, что $\|\mathbf{\Gamma}_{\Delta, a}\|_2 < 1$ для достаточно больших a. Заметим теперь, что $\|\mathbf{\Gamma}_{\Delta, a}\|_2$ есть непрерывная неубывающая функция от $a \in R_+$, которая не может принимать значение 1, так как условие $\|\mathbf{\Gamma}_{\Delta, a}\|_2 = 1$ противоречит обратимости оператора $\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_{\Delta, a}$. Следовательно $\|\mathbf{\Gamma}_{\Delta, a}\|_2 < 1$ $\forall a \in R_+$. Теорема доказана.

Равенство $\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_\Delta = (\mathbf{I} + \mathbf{K})^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{K}^*)^{-1}$ в терминах ядер этих операторов равносильно уравнению (1.10). Поэтому восстанавливая уравнение (0.3) по процедуре, указанной в теореме 2, мы приходим к уравнению (2.5), где потенциал $V(r)$ удовлетворяет условиям (1.16) при $r_0 = 0$.

Замечание. 2 Нам неизвестны условия на *м*-функцию $\Gamma_\Delta \in \mathbf{K}_\Gamma$ для того, чтобы она соответствовала каноническому дифференциальному выражению из класса $\mathbf{V}_0$. Однако легко показать, что если Γ_Δ абсолютно непрерывна, то ей отвечает выражение вида (0.2) из класса $\mathbf{V}_0$. В качестве другого достаточного условия можно указать условие: $\Gamma_\Delta \in L^2_{2n\times 2n}(R_+)$.

§ 3 S-матрица канонического дифференциального оператора класса K и обратная задача

Рассмотрим операторы в пространстве $L^2_{2n\times 1}(R_+)$, порожденные дифференциальным выражением вида (0.1). Через A_0 обозначим „минимальный" симметрический оператор, порожденный выражением (0.1). $D(A_0)$ состоит из финитных (в нуле и на бесконечности) вектор-функций $x \in L^2_{2n\times 1}(R_+)$ таких, что $W(r)\, x(r)$—локально абсолютно непрерывна и $\frac{d}{dr}(W(r)\,x(r))\in L^2_{2n\times 1}(R_+)$. Оператор $\overset{*}{A_p}$ определяется выражением (0.1) на многообразии $D(\overset{*}{A_0})\subset L^2_{2n\times 1}(R_+)$ таких вектор-функций $x(r)$, для которых $W(r)\,x(r)$ — локально абсолютно непрерывна и $\frac{d}{dr}(W(r)\,x(r))\in L^2_{2n\times 1}(R_+)$. Произвольное самосопряженное расширение A_p оператора A_0 получается сужением оператора $\overset{*}{A_0}$ на многообразии $D(A_p)\subset D(\overset{*}{A_0})$, определенном самосопряженным граничным условием в нуле. Известно (см. [4], стр. 14), что каждое такое условие можно задать в виде $P_K\,x(0)=x(0)$, где P_K — ортопроектор на гипермаксимальное J-нейтральное подпространство* $L\subset C^{2n}$. Легко показать, что такой проектор P_K в разложении $C^{2n}=H_+\oplus H_-$ представляется в вида

$$P_K=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_n & K^* \\ K & I_n \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

где K так называемый угловой оператор подпространства L, унитарно отображает H_+ на H_-.

Пусть задано дифференциальное выражение (0.1) из класса **K**. Рассмотрим $(2n\times n)$-матричное решение $X(r,\lambda)$ уравнения

$$W^*(r)\,J\frac{d}{dr}(W(r)\,X(r,\lambda))=\lambda\,X(r,\lambda), \tag{3.1}$$

удовлетворяющее какому-либо самосопряженному граничному условию

$$P_K\,X(0,\lambda)=X(0,\lambda). \tag{3.2}$$

Лемма 3.1. *Среди всех $(2n\times n)$-матричных решений $X(r,\lambda)$ уравнения* (3.1), *удовлетворяющих заданному граничному условию* (3.2) *существует единственное решение $X_0(r,\lambda)$ такое, что $P_+\,X_0(r,\lambda)=e^{-i\lambda r}I_n+o(1)$ при $r\to\infty$.*

При этом $P_-\,X_0(r,\lambda)=e^{Dr}\,S(\lambda)+o(1)$ при $r\to\infty$, где $S(\lambda)$ — однозначно определенная $(n\times n)$-матрица, зависящая от параметра $\lambda\in R$.

Доказательство. Ясно, что решение $X(r,\lambda)$ задачи (3.1) — (3.2) можно представить в виде

$$X(r,\lambda)=U(r,\lambda)\,U^{-1}(0,\lambda)\,P_K\begin{bmatrix} C(\lambda) \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $U(r,\lambda)$—$(2n\times 2n)$-матричное решение уравнения (0.3), удовлетворяющее асимптотике (1.8), а $C(\lambda)$ — произвольная $(n\times n)$-марица, зависящая от параметра $\lambda\in R$.

---

* В пространстве $C^{2n}=H_+\oplus H_-$ наряду с обычным скалярным произведением можно рассмотреть индефинитное скалярное произведение $[x,y]=(Jx,y)$. Подпространство $L\subset C^{2n}$ называется J-нейтральным гипермаксимальным, если $L=L^{[\perp]}$, где $L^{[\perp]}=\{x\in C^{2n}/[x,y]=0\ \forall y\in L\}$. Подробнее о геометрии J-пространств см. в [5].

Отсюда, учитывая, что $U^{-1}(0, \lambda) = -JU^*(0, \lambda)J$, и вид матрицы P_K, получим

$$X(r, \lambda) = U(r, \lambda)\begin{bmatrix} (U_{11}^*(0, \lambda) - U_{21}^*(0, \lambda)K)C(\lambda) \\ (-U_{12}^*(0, \lambda) + U_{22}^*(0, \lambda)K)C(\lambda). \end{bmatrix}.$$

Подставим $C(\lambda) = (U_{11}^*(0, \lambda) - U_{21}^*(0, \lambda)K)^{-1}$. Получим

$$X_0(r, \lambda) = U(r, \lambda)\begin{vmatrix} I_n \\ S(\lambda) \end{vmatrix},$$

где

$$S(\lambda) = (-U_{12}^*(0, \lambda) + U_{22}^*(0, \lambda)K)(U_{11}^*(0, \lambda) - U_{21}^*(0, \lambda)K)^{-1}. \quad (3.3)$$

Теперь для $м$-функции $X_0(r, \lambda)$, учитывая асимптотику (1.8), получаем

$$X_0(r, \lambda) = e^{-i\lambda r}I_n + e^{i\lambda r}S(\lambda) + o(1), \text{ при } r \to \infty. \quad (3.4)$$

Лемма доказана.

Определение 3.1. *М*-функция $S(\lambda)$ $(\lambda \in R)$, однозначно определенная с помощью задачи (3.1)—(3.2), называется *S*-матрицей уравнения (3.1), отвечающей граничному условию (3.2), или оператора A_p, порожденного дифференциальным выражением (0.1) и граничным условием (3.2).

Матрицу $U^{-1}(0, \lambda)$ естественно назвать матрицей асимптотической эквивалентности уравнений

$$W^*(r)J\frac{d}{dr}(W(r)x(r, \lambda)) = \lambda x(r, \lambda) \text{ и } J\frac{d}{dr}x_0(r, \lambda) = \lambda x_0(r, \lambda),$$

поскольку $x(r, \lambda) = x_0(r, \lambda) + o(1)$ при $r \to \infty$ тогда и только тогда, когда $x(0, \lambda) = U^{-1}(0, \lambda)x_0(0, \lambda)$.

Теорема 4*. *Для того, чтобы некоторая м-функция* $S(\lambda)$ $(\lambda \in R)$ *являлась S-матрицей некоторого уравнения вида* (3.1) *из класса K необходимо и достаточно, чтобы она обладала следующими свойствами;*

1) $S(\lambda)$ — *непрерывная на сомкнутой оси* $\overline{R} = R \cup \{\pm\infty\}$ *унитарная м-функция, допускающая представление*

$$S(\lambda) = S(\infty) - \int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(t)e^{-i\lambda t}dt \quad (\Gamma \in L_{n\times n}^1(R)). \quad (3.5)$$

2) *Частные индексы м-функции* $S(\lambda)$ *равны нулю.*

Определение частных индексов невырожденной $м$-функции вида (3.5) см. в [3], стр. 33. Здесь мы в пояснение условия 2) отметим только, что оно эквивалентно условию

2') $S(\lambda)$ допускает факторизацию в виде

$$S(\lambda) = S_-(\lambda)S_+(\lambda), \quad (3.6)$$

* В работе [6] эта теорема ошибочно формулировалась для канонических уравнений класса V_0, а не K.

где $S_{\pm}(\lambda)$ принадлежат, соответственно, $W^{\pm}_{n\times n}$ и $\det S_{\pm}(\lambda) \neq 0$ в соответствующих полуплоскостях $Jm\lambda > 0$ и $Jm\lambda < 0$.

Доказательство. Необходимость. Из леммы 3.1 следует, что S-матрица $S(\lambda)$ определяется дробно-линейным преобразованием (3.3) унитарной матрицы K с J-унитарной матрицей преобразования $U^{-1}(0, \lambda)$. Можно показать (см. [1], теорема 3.1), что $(U^{*}_{11}(\lambda) - U^{*}_{21}(\lambda)K)^{\pm 1} \in W^{+}_{n\times n}$ и $(-U^{*}_{12}(\lambda) + U^{*}_{22}(\lambda)K)^{\pm 1} \in W^{-}_{n\times n}$. Таким образом свойства 1), 2) S-матрицы $S(\lambda)$ являются непосредственным следствием представления (3.3) матрицы $S(\lambda)$.

Достаточность. В силу теоремы 4.3 работы [1] ганкелев оператор Γ, порожденный $м$-функцией $\Gamma(t)$ при $t > 0$ в представлении (3.5) матрицы $S(\lambda)$, удовлетворяет условию $\|\Gamma\|_2 < 1$. Следодовательно $м$-функция $\Gamma_{\Delta}(t)$, определенная формулой (1. 3.1) принадлежит классу $\mathbf{K}_{\Gamma}$. Теперь нетрудно проверить, что $S(\lambda)$ является S-матрицей задачи (3.1)—(3.2), в которой дифференциальное выражение порождено $м$-функцией $-\Gamma_{\Delta}(t)$,* а граничное условие — унитарной матрицей $S(\infty) = K$. (см. [1], следствие 4.2). Теорема доказана.

В заключение рассмотрим связь между спектральной функцией $\sum(\lambda)$ оператора A_p, порожденного дифференциальным выражением (0.1) и граничным условием (3.2) и его S-матрицей.

Теорема 5. *Спектральная функция* $\Sigma(\lambda)$ $(\lambda \in R)$ *оператора* A_P *и его S-матрица* $S(\lambda)$ *связаны соотношением*

$$\frac{d\sum(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\pi} S_{+}^{-1}(\lambda)\, S_{+}^{*\,-1}(\lambda)\ (= S_{-}^{-1}(\lambda)\, S_{-}^{*\,-1}(\lambda)), \tag{3.7}$$

где $S_{\pm}(\lambda)$—*множители в представлении* (3.6) *матрицы* $S(\lambda)$.

Доказательство. Рассмотрим многообразие L финитных вектор-функций из $L^2_{2n\times 1}(R_+)$ и покажем, что выражение

$$\Phi(f, \lambda) = [I, 0]\, \mathbf{P}_k\, U^{*^{-1}}(0, \lambda) \int_0^{\infty} U^*(s, \lambda) f(s)\, ds \quad (f \in L),$$

где $U(r, \lambda)$ есть решение уравнения (0.3), удовлетворяющее асимптотике (1.8), является направляющим функционалом для оператора A_P Это означает (см. [17]). что уравнение

$$(A_P - \lambda \mathrm{I})\, x = f$$

имеет решение в $D(A_p) \cap L$ в том и только в том случае, если $\Phi(f, \lambda) = 0$.

Для проверки этого заметим, что финитное решение уравнения

$$W^*(r)\, J \frac{d}{dr}(W(r)\, x(r)) - \lambda\, x(r) = f(r)$$

---

* Дело в том, что в представлении $м$-функции— $JU(0, \lambda)J$ в виде (1.4) участвует $м$-функция $-JK(t)J$ и, следовательно, из уравнения (1.5в) определяется $м$-функция—$\Gamma_{\Delta}(t)$.

можно прндставить в виде

$$x(r, \lambda) = U(r, \lambda)\, J \int_0^\infty U^*(s, \lambda) f(s)\, ds.$$

Отсюда

$$x(0, \lambda) = U(0, \lambda)\, J \int_0^\infty U^*(s, \lambda) f(s)\, ds.$$

Поэтому для выполнения условия $\mathbf{P}_K x(0, \lambda) = x(0, \lambda)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$0 = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_K)\, x(0, \lambda) = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_K)\, J U^{*-1}(0, \lambda) \int_0^\infty U^*(s, \lambda) f(s)\, ds =$$

$$= J \mathbf{P}_K\, U^{*-1}(0, \lambda) \int_0^\infty U^*(s, \lambda) f(s)\, ds.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_K)\, J = J\mathbf{P}_K$ и $JU^{*-1}(0, \lambda) = U(0, \lambda)\, J$. Остается заметить, что полученное равенство равносильно условию

$$P_+ \mathrm{P}_K\, U^{*-1}(0, \lambda) \int_0^\infty U^*(s, \lambda) f(s)\, ds = 0.$$

Поэтому теорема будет доказана, если показать, что

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\chi(f, \lambda), \chi(g, \lambda))\, d\lambda \quad \forall f, g \in L,$$

где $\chi(f, \lambda) = \overset{\bullet}{S}{}_+^{-1}(\lambda)\, \Phi(f, \lambda)$.

Предположим сперва, что дифференциальное выражение, определяющее оператор A_p, имеет вид (0.2). Тогда для м-функции $U(r, \lambda)$ имеем $U(r, \lambda) = (\mathbf{I} + \mathbf{K})\, U_0(r, \lambda)$, где $\mathbf{I} + \mathbf{K}$ есть ограниченный оператор, действующий в каждом из пространств $L^p_{2n\times 1}(R_+)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ по формуле (2.1). С другой стороны $\overset{\bullet}{S}{}_+^{-1}(\lambda)\, P_+ \mathrm{P}_k\, \overset{\bullet}{U}{}^{-1}(0, \lambda) = [I_n, S^*(\lambda)]$, так что, положив $X_0(r, \lambda) = [I_n, S^*(\lambda)]\, \overset{\bullet}{U}_0(r, \lambda) = [e^{i\lambda r} I_n, e^{-i\lambda r} S^*(\lambda)]$, получим

$$\chi(f, \lambda) = \overset{\bullet}{S}{}_+^{-1}(\lambda)\, P_+ \mathrm{P}_K\, \overset{\bullet}{U}{}^{-1}(0, \lambda) \int_0^\infty U^*(s, \lambda) f(s)\, ds =$$

$$= \int_0^\infty \overset{\bullet}{X}_0(s, \lambda)\, [(\mathbf{I} + \mathbf{K}^*) f](s)\, ds.$$

Отсюда, положив $[(\mathrm{I}+\mathrm{K})f](r)=f_1(r)$, $[(\mathrm{I}+\mathrm{K})g](r)=g_1(r)$, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\chi(f,\lambda),\chi(g,\lambda))\,d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}(f_1(t),X_0^*(t,\lambda)\cdot X_0(s,\lambda)\,g_1(s))\,ds\,dt\,d\lambda=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\left(f_1(t),\right.$$

$$\left.\begin{bmatrix} e^{-i\lambda(t-s)}I_n & e^{-i\lambda(t+s)}\left(S^*(\infty)-\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma^*(\tau)\,e^{i\lambda\tau}\,d\tau\right)\\ e^{i\lambda(t+s)}\left(S(\infty)-\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(\tau)\,e^{-i\lambda\tau}\,d\tau\right) & e^{i\lambda(t-s)}I_n\end{bmatrix}g(s)\right)ds\,dt\,d\lambda=$$

$$=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f_1(t),\begin{bmatrix} e^{-i\lambda(t-s)}I_n & e^{-i\lambda(t+s)}S^*(\infty)\\ e^{i\lambda(t+s)}S(\infty) & e^{i\lambda(t-s)}I_n\end{bmatrix}g_1(s)\right)d\lambda\,ds\,dt-$$

$$-\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}(f_1(t)\,\Gamma_\Delta(t+s)\,g_1(s)\,ds\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}(\widehat{f}_1(\lambda),\widehat{g}_1(\lambda))\,d\lambda-$$

$$-\int_{0}^{\infty}(f_1(t),(\Gamma_\Delta g_1)(t))\,dt=\int_{0}^{\infty}(f_1(t),(\mathrm{I}-\Gamma_\Delta)\,g_1(t))\,dt=$$

$$=\int_{0}^{\infty}((\mathrm{I}+\mathrm{K}^*)f(t),(\mathrm{I}-\Gamma_\Delta)(\mathrm{I}+\mathrm{K}^*)\,g(t))\,dt=$$

$$=\int_{0}^{\infty}(f(t),(\mathrm{I}+\mathrm{K})(\mathrm{I}-\Gamma_\Delta)(\mathrm{I}+\mathrm{K}^*)\,g(t))\,dt=(f,g).$$

Общий случай получается предельным переходом, поскольку множество m-функций $\Gamma\in\mathrm{K}_\Gamma$, отвечающее дифференциальным выражениям из класса V_0, плотно в K_Γ. Теорема доказана.

Замечание. Из доказанной теоремы следует, что спектральную плотность оператора A_p можно представить в виде

$$\frac{d\sum(\lambda)}{d\lambda}=\frac{1}{\pi}\left(I_n+\int_{-\infty}^{\infty}H(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt\right)>0, \tag{3.8}$$

где $H(t)$ — суммируемая на оси эрмитова акселеранта*.

* Определение и свойства акселерант см., например, в [2].

Теперь формулу (3.7) можно рассматривать как правую и левую каноническую факторизации правой части равенства (3.8), которая однозначно определяет факторы $S_{\pm}(\lambda)$. Таким образом, между множествами S-матриц уравнений класса **K** и эрмитовых акселерант, удовлетворяющих условию (3.8) существует (1—1)— значное соответствие.

Это предложение можно рассматривать как решение прямой и обратной спектральной задачи для операторов класса **K**.

Ереванский государственный
университет

Поступила 21.III.1987.

Ֆ. Է. ՄԵԼԻՔ-ԱԴԱՄՅԱՆ. Կանոնական դիֆերենցիալ օպերատորների մի դասի մասին *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է

$$(Dx)(r) = W^*(r)\, J \frac{d}{dr}(W(r)\, x(r))\ (r \in [0,\ \infty)). \qquad (0.1)$$

տեսքի դիֆերենցիալ արտահայտությունը, որտեղ J*-ը* $(2n\times 2n)$*- մատրից է* $J^* = -J$, $J^2 = -I_{2n}$ *հատկություններով, իսկ* $W(r)$*-ը անընդհատ* $(2n)$*-մատրից-ֆունկցիա է* J*-ունիտար արժեքներով* $(W^*(r)\, J\, W(r) = J,\ r J\,[0,\ \infty))$*: (0.1) տեսքի արտահայտությունը ընդհանրացնում է էրմիտյան* V(r) *պոտենցիալով* $(V^*(r) = V(r))$ *կանոնական դիֆերենցիալ արտահայտությունը՝*

$$(D_V x)(r) = J \frac{dx(r)}{dr} - V(r)\, x(r)$$

$(Dx)(r,\lambda) = \lambda x(r,\lambda)$ *հավասարումների մի դասի համար, որը ընդգրկում է իր մեջ հանրագումարելի* V(r) *պոտենցիալով* $(D_V x)(r,\lambda) = \lambda x(r,$ λ *հավասարումները, լուծվում է ցրման տեսության և սպեկտրալ տեսության խնդիրները։*

F. E. MELIK—ADAMIAN. *On a class of canonical differential operators* (summary)

Differential expression of the type

$$(Dx)(r) = W^*(r)\, J \frac{d}{dr}(W(r)\, x(r))((r \in [0,\ \infty)); \qquad (0.1)$$

where J is $(2n\times 2n)$-matrix with the properties $J^* - J$, $J_2^2 - I_{2n}$ and $W(r)$ is a continuous $(2n\times 2n)$-matrix function with J-unitary values $(W^*(r)\ J W(r) = J \forall r \in [0,\ \infty))$ is considered.

The expression of this type generalized the canonical differential expression

$$(D_v x)(r) = J \frac{dx(r)}{dr} - V(r)\, x(r)$$

with Hermitian potential $V(r)\ V^*(r) = V(r))$.

For the special class of equations $(Dx)(r,\ \lambda) = \lambda x(r,\ \lambda)$ which include equations $(D_v x)(r,\ \lambda) = \lambda x(r,\ \lambda)$ with summable potential $V(r)(V \in L^1_{2n\times 2n}(0,\ \infty))$, the problems of scattering and spectral theory are solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян.* Интегральные ганкелевы операторы и связанные с ними проблемы продолжения, Изв. АН Арм.ССР, Математика, XIX, № 4, 5, 1984, 311—360.

2. *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян*. Матрично-континуальные аналоги задачи Шура и Каратеодори-Теплица, Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. XXI, № 2, 1986, 107—141.
3. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, XIII, вып. 2 (80), 1958, 3—72.
4. *Ф. Э. Мелик-Адамян*. О канонических дифференциальных операторах в гильбертовом пространстве, Изв. АН Арм.ССР, Математика, XII, № 1, 1977, 10—31.
5. *М. Г. Крейн*. Введение в геометрию J-пространств и теория операторов в этих пространствах, Вторая летняя мат. школа, часть I, «Наукова думка», Киев, 1956, 15—93.
6. *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян*. К теории S-матриц канонических уравнений с суммируемым потенциалом, ДАН Арм.ССР, XVI, № 4, 1968, 150—155.
7. *М. Г. Крейн*. При эрмітові оператори с напрямними функционалами, Збірник проць математики, АН УССР, № 10, 1948, 83—105.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 6, 1989 Математика

УДК 519.2

Т. П. КАЗАНЧЯН

ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА В ФОРМЕ ЧЖУНА ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В работе [1] Эрдеш и Кац для широкого класса последовательностей независимых случайных величин ξ_t, $t \in Z^1$, показали, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\max_{1<k<n} |S_k| < s_n x\right) = P\left(\sup_{0<s<1} B(s) < x\right) = T(x), \quad x > 0, \tag{1}$$

где $S_k = \sum_{t=1}^{k} \xi_t$, $s_n^2 = \sum_{t=1}^{n} D\xi_t$,

$(B(s),\ s > 0)$ — стандартное броуновское движение

$$T(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \exp\left(-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{8x^2}\right).$$

Соотношение (1) обычно называют принципом инвариантности типа Эрдеша—Каца в отличие от общего принципа инвариантности Донскера—Прохорова [2]. Несколько позже Чжун [3] оценил скорость сходимости в принципе инвариантности Эрдеша—Каца и с помощью полученной оценки доказал следующую теорему:

Теорема. *Пусть ξ_t, $t=1, 2, \cdots$ — такая последовательност независимых случайных величин, что*

$$E\xi_t = 0, \ \gamma_t = E|\xi_t|^3 < +\infty, \ t = 1, 2, \cdots$$

и, кроме того, выполнены условия:

1. $s_n^2 \to \infty$, $n \to \infty$;
2. $\max\limits_{1<k<n} \gamma_k (D\xi_k)^{-1} = O(s_n^{1-\theta})$ *для некоторого* $\theta > 0$. *Тогда*

$$P\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{\max\limits_{1<k<n} |S_k|}{8^{-1/2}\pi s_n (\lg\lg s_n)^{-1/2}} = 1\right) = 1. \tag{2}$$

Утверждение этой теоремы будем называть законом повторного логарифма в форме Чжуна. В дальнейшем много работ было посвящено уточнению оценок скорости сходимости в соотношении (1) как для последовательностей независимых случайных величин, так и для последовательностей с зависимыми членами (см., например, [4], [5]). В настоящей работе нас интересует справедливость соотношения (2) для слабо зависимых случайных последовательностей.

Говорят, что стационарная в узком смысле последовательность случайных величин ξ_t, $t \in Z^1$, удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания (р. с. п.) или φ-перемешивания, если

$$|P(A\cap B)-P(A)P(B)|\leqslant\varphi(n)P(B),\ \varphi(n)\to 0,\ n\to\infty,$$

при всех

$$B\in\sigma(\xi_t,\ t\leqslant 0)\ \text{и}\ A\in\sigma(\xi_t,\ t>n).$$

Последовательность ξ_t, $t\in Z^1$ удовлетворяет условию ψ-перемешивания, если

$$|P(A\cap B)-P(A)P(B)|\leqslant\psi(n)P(A)P(B),\ \psi(n)\to 0,\ n\to\infty,$$

при всех

$$B\in\sigma(\xi_t,\ t\leqslant\infty\ 0)\ \text{и}\ A\in\sigma(\xi_t,\ t\geqslant n).$$

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть стационарная случайная последовательность ξ_t, $t\in Z^1$, $E\xi_t=0$, $E|\xi_t|^3<+\infty$, удовлетворяет условию р. с. п., причем $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi^{1/2}(n)<+\infty$. Тогда ряд $\sigma_0^2=E\xi_0^2+2\sum_{t=1}^{\infty}E\xi_1\xi_t<+\infty$ и если $\sigma_0^2>0$, то для последовательности ξ_t, $t\in Z^1$, справедлив закон повторного логарифма в форме Чжуна.*

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 справедливо следующее утверждение:*

$$P\left(\max_{1<k<n}|S_k|<s_nx\right)=T(x)+O\left(\left(\frac{\lg\lg s_n}{\lg s_n}\right)^{1/2}\right).$$

Приведенные теоремы усиливают результаты работы [4], в которой используются мартингальные методы, а также работы [6].

Отметим, что утверждения теорем 1 и 2 остаются справедливыми и для последовательностей с ψ-перемешиванием с заменой условия $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi^{1/2}(n)<+\infty$ на $\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)<+\infty$. Поскольку доказательства соответствующих утверждений проводятся точно так же как доказательства теорем 1 и 2, то мы их опускаем. Заметим также, что аналогичные результаты можно получить и для стационарных случайных последовательностей, удовлетворяющих условиям α, β и ρ-перемешивания, но это тема отдельной публикации автора.

Автор благодарит профессора В. В. Петрова за внимание к настоящей работе.

Доказательства сформулированных результатов. Прежде всего докажем теорему 2. Доказательство будем проводить путем сведения к независимым случайным величинам с дальнейшей проверкой условий теоремы Чжуна. Заметим, что в отличие от традиционных доказательств предельных теорем с использованием метода Бернштейна, нами в процессе доказательства будут использоваться блоки разной длины.

Пусть

$$f(n)=[n^\alpha],\ g(n)=[n^\beta],\ \text{где}\ \frac{1}{2}<\beta<\alpha<1,\ [\cdot]-\text{целая часть числа.}$$

Обозначим через $k(n)$ наибольшее целое число такое, что

$$\sum_{j=1}^{k(n)}f(j)+\sum_{j=1}^{k(n)}g(j)\leqslant n. \tag{3}$$

Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. *При любом $n \in N$ существуют константы $0 < c_1 < < c_2 < +\infty$ такие, что*

$$c_1 n^{\frac{1}{1+\alpha}} < k(n) < c_2 n^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

Доказательство. Из определения функции $k(n)$ следует что

$$n < \sum_{j=1}^{k(n)+1} f(j) + \sum_{j=1}^{k(n)+1} g(j) < 2f(k(n)+1)K(n)+1 \leqslant a_1 k^{\alpha+1}(n),\ a_1 > 0,$$

т. о. $c_1 n^{\frac{1}{1+\alpha}} < k(n),\ c_1 > 0.$

Далее имеем

$$n > \sum_{j=1}^{k(n)} f(j) > \sum_{j > \frac{k(n)}{2}}^{k(n)} f(j) > a_2 k^{\alpha+1}(n),\ a_2 > 0.$$

Лемма 2. *При любом $n \in N$ имеют место следующие оценки:*

$$1 - \frac{\sum_{j=1}^{k(n)} f(j)}{n} < C_3 n^{\frac{\beta-\alpha}{1+\alpha}},\quad \frac{\sum_{j=1}^{k(n)} g(j)}{n} < C_4 n^{\frac{\beta-\alpha}{1+\alpha}}.$$

Доказательство. Имеем

$$n < \sum_{j=1}^{k(n)+1} f(j) + \sum_{j=1}^{k(n)+1} g(j).$$

Отсюда

$$\frac{n}{\sum_{j=1}^{k(n)} f(j)} - 1 < \frac{f(k(n)+1)}{\sum_{j=1}^{k(n)} f(j)} + \frac{\sum_{j=1}^{k(n)} g(j)}{\sum_{j=1}^{k(n)} f(j)} + \frac{g(k(n)+1)}{\sum_{j=1}^{k(n)} f(j)} \leqslant$$

$$< \frac{f(k(n)+1)}{\sum_{j > \frac{k(n)}{2}}^{k(n)} f(j)} + \frac{\sum_{j=1}^{k(n)} g(j)}{\sum_{j > \frac{k(n)}{2}}^{k(n)} f(j)} + \frac{g(k(n)+1)}{\sum_{j > \frac{k(n)}{2}}^{k(n)} f(j)} \leqslant$$

$$\leqslant a_3 \frac{(k(n)+1)^{\alpha} + k(n)k^{\beta}(n) + (k(n)+1)^{\beta}}{\left(\frac{k(n)}{2}\right)^{\alpha}\frac{k(n)}{2}} < C_3 n^{\frac{\beta-\alpha}{1+\alpha}},\ a_3 > 0,\ C_3 > 0.$$

Далее

$$\frac{\sum_{j=1}^{k(n)} g(j)}{n} \leqslant a_4 \frac{k(n)k^{\beta}(n)}{n} < C_4 n^{\frac{\beta-\alpha}{1+\alpha}},\ a_4 > 0,\ C_4 > 0.$$

Лемма 3. [7]. *В условиях теоремы 1*

$$s_n^2 = \sigma_0^2 n(1 + o(1)),\ n \to \infty.$$

Лемма 4. [8]. *В условиях теоремы 1*

$$s_n^2 = \sigma_0^2 n + O(n^{2/3}).$$

Лемма 5. [7]. *В условиях теоремы 1*

$$E|S_n|^3 \leqslant C_5 s_n^3, \quad C_5 > 0.$$

Лемма 6. [9]. *Пусть при некотором* $\nu \geqslant 2$

$$E|S_n|^\nu \leqslant C_6 n^{1/2\,\nu}, \quad C_6 > 0.$$

Тогда

$$E(\max_{1<k<n} |S_k|)^\nu \leqslant C_6 n^{\nu/2}.$$

Лемма 7. [10]. *Пусть* ξ_t, $t \in Z^1$ *— стационарная случайная последовательность, удовлетворяющая условию* φ*-перемешивания, и* $L(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ *— некоторая ограниченная борелевская функция, т. е.* $L(x_1, x_2, \cdots, x_k) \leqslant M$. *Пусть далее* $F^{(1)}(x_1, x_2, \cdots, x_j)$ *и* $F^{(2)}(x_{j+1}, \cdots, x_k)$ *— функции распределения случайных векторов* $(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \cdots, \xi_{i_j})$ *и* $(\xi_{i_{j+1}}, \cdots, \xi_{i_k})$, *соответственно, где* $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. *Тогда*

$$|EL(\xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_k}) - \int \cdots \int_{R^k} L(x_1, x_2, \cdots, x_j, x_{j+1}, \cdots, x_k)\, dF^{(1)}(x_1, x_2, \cdots$$

$$\cdots, x_j) \times dF^{(2)}(x_{j+1}, \cdots, x_k)| \leqslant 2M\varphi(i_{j+1} - i_j).$$

Лемма 8. *Пусть* ξ *и* η *— случайные величины такие, что*

$$E\xi = E\eta = 0, \quad E\xi^2 < +\infty, \quad E\eta^2 < +\infty.$$

Тогда при любом $n \in N$, $n > 1$

$$|P(\xi + \eta < x) - P(\xi < x)| \leqslant C_7 E^{1/2}|\eta|^2 \ln n + \frac{C_8}{\ln n}, \quad C_7 > 0, \; C_8 > 0.$$

Доказательство. Для оценки выражения $|P(\xi + \eta < x) - P(\xi < x)|$ воспользуемся теоремой Эссеена (см. [11], стр. 137). Непосредственно здесь теорему Эссеена применить мы не можем, так как в последней имеется условие ограниченности производной функции распределения. Но мы поступим следующим образом. Пусть ζ_n — нормально распределенная случайная величина с нулевым средним и дисперсией $1/n$. Тогда $\xi + \eta + \zeta_n$ будет иметь абсолютно непрерывное распределение с ограниченной плотностью (см. [7], § 2). Далее

$$|P(\xi + \eta < x) - P(\xi < x)| \leqslant |P(\xi + \eta + \zeta_n < x) - P(\xi < x)| +$$

$$+ |P(\xi + \eta + \zeta_n < x) - P(\xi + \eta < x)|.$$

Кроме того

$$|Ee^{it(\xi+\eta+\zeta_n)} - Ee^{it\xi}| \leqslant |t|\, E|\eta + \zeta_n| \leqslant$$

$$\leqslant |t|\, E^{1/2}|\eta + \zeta_n|^2 \leqslant |t|\, (E^{1/2}|\eta|^2 + E^{1/2}|\zeta_n|^2).$$

Применяя теорему Эссеена получим

$$|P(\xi + \eta + \zeta_n < x) - P(\xi < x)| \leqslant b \int_{-T}^{T} \frac{1}{|t|} |Ee^{it(\xi+\eta+\zeta_n)} - Ee^{it\xi}|\, dt +$$

$$+r(b)\frac{C^*}{T} \leqslant b\,(E^{1/2}|\eta|^2 + E^{1/2}|\zeta_n|^2)\cdot 2\,T + r(b)\frac{C^*}{T},$$

где C^*, b, $r(b)$ — константы, не зависящие от T. Аналогично

$$|P(\xi+\eta+\zeta_n<x) - P(\xi+\eta<x)| \leqslant 2\,b\,TE|\zeta_n| + r(b)\frac{C^*}{T}.$$

Полагая теперь, $T=\ln n$ и учитывая, что $E|\zeta_n|^2 = \frac{1}{n}$, завершаем доказательство леммы 8.

Обозначим $a(\nu)=\sum\limits_{s=0}^{\nu} f(s)$, $b(\nu)=\sum\limits_{s=0}^{\nu} g(s)$, и представим сумму $S_n=\sum\limits_{l=1}^{n}\xi_l$ следующим образом

$$S_n = S_n' + S_n'',$$

где

$$S_n' = \sum_{\nu=1}^{k(n)} X_\nu,\quad X_\nu = \sum_{j=a(\nu-1)+b(\nu-1)}^{a(\nu)+b(\nu-1)} \xi_j,\quad \nu=1,2,\cdots,k(n),$$

$$S_n'' = \sum_{\nu=1}^{k(n)+1} Z_\nu,\quad Z_\nu = \sum_{j=a(\nu)+b(\nu-1)}^{a(\nu)+b(\nu)} \xi_j,\quad \nu=1,2,\cdots,k(n),$$

$$Z_{k(n)+1} = \sum_{j=a(k)+b(k)}^{n} \xi_j,\quad k=k(n).$$

Пусть

$$S_n^* = \max_{1<m<n}|S_m|,\quad S_n'^* = \max_{1<m<n}|S_m'|,\quad S_n''^* = \max_{1<m<n}|S_m''|.$$

Кроме того, введем в рассмотрение последовательность независимых случайных величин Y_ν, $\nu=1,2,\cdots,k(n)$, где Y_ν распределены так же как X_ν и пусть

$$\tilde S_n = \sum_{\nu=1}^{k(n)} Y_\nu,\quad \tilde s_n^2 = \sum_{\nu=1}^{k(n)} DY_\nu,\quad \tilde S_n^* = \max_{1<m<n}|\tilde S_m|.$$

Далее имеем

$$\left|P\left(\frac{S_n^*}{s_n}<x\right) - T(x)\right| \leqslant \left|P\left(\frac{S_n^*}{s_n}<x\right) - P\left(\frac{S_n'^*}{s_n}<x\right)\right| +$$

$$+\left|P\left(\frac{S_n'^*}{s_n}<x\right) - P\left(\frac{\tilde S_n^*}{s_n}<x\right)\right| + \left|P\left(\frac{\tilde S_n'^*}{s_n}<x\right) - T(x)\right| = A_1 + A_2 + A_3.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности

Поскольку

$$S_n'^* - S_n''^* \leqslant S_n^* \leqslant S_n'^* + S_n''^*,$$

то

$$A_1 \leqslant \max\left\{\left|P\left(\frac{S_n'^* - S_n''^*}{s_n}<x\right) - P\left(\frac{S_n'^*}{s_n}<x\right)\right|,\right.$$

$$\left.\left|P\left(\frac{S_n'^* + S_n''^*}{s_n}<x\right) - P\left(\frac{S_n'^*}{s_n}<x\right)\right|\right\}.$$

Согласно лемме 8

$$A_1 < C_7 E^{1/2}\left|\frac{S_n^{**}}{s_n}\right|^2 \ln n + \frac{C_8}{\ln n}.$$

Но так как

$$E|S_n'|^2 \leqslant E\left|\sum_{\nu=1}^{k(n)} Z_\nu\right|^2 + 2\sqrt{E\left|\sum_{\nu=1}^{k(n)} Z_\nu\right|^2 E|Z_{k(n)+1}|^2} + E|Z_{k(n)+1}|^2,$$

то, воспользовавшись леммами 6 и 2, имеем

$$E\left|\frac{S_n^{**}}{s_n}\right|^2 \leqslant C_9 n^{\frac{\beta-\alpha}{1+\alpha}}. \tag{4}$$

Отсюда ясно, что $A_1 = O\left(\left(\frac{\lg\lg s_n}{\lg s_n}\right)^{1/2}\right)$.

Оценим A_2. Пусть $\tau(n) = [n^\mu]$, $0 < \mu < \frac{1}{2}$. Тогда можем написать

$$S_n' = Q_n' + Q_n'',$$

где

$$Q_n' = \sum_{\nu=1}^{\tau(n)} X_\nu,\quad Q_n'' = \sum_{\nu=\tau(n)+1}^{k(n)} X_\nu.$$

Аналогично

$$\tilde{S}_n = \tilde{Q}_n' + \tilde{Q}_n'',$$

где

$$\tilde{Q}_n' = \sum_{\nu=1}^{\tau(n)} Y_\nu,\quad \tilde{Q}_n'' = \sum_{\nu=\tau(n)+1}^{k(n)} Y_\nu.$$

Далее обозначим

$$Q_n''^{*} = \max_{\tau(n)+1<m<n} |Q_m''|,\quad \tilde{Q}_n''^{*} = \max_{\tau(n)+1<m<n} |\tilde{Q}_m''|.$$

Тогда

$$A_2 \leqslant \left|P\left(\frac{S_n'^{*}}{s_n} < x\right) - P\left(\frac{Q_n''^{*}}{s_n} < x\right)\right| +$$

$$+\left|P\left(\frac{Q_n''^{*}}{s_n} < x\right) - P\left(\frac{\tilde{Q}_n''^{*}}{s_n} < x\right)\right| + \left|P\left(\frac{\tilde{Q}_n''^{*}}{s_n} < x\right) - P\left(\frac{\tilde{S}_n^{*}}{s_n} < x\right)\right| =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

Оценим I_1.

$$I_1 \leqslant \left|P\left(\frac{S_n'^{*}}{s_n} < x\right) - P\left(\frac{\max\limits_{\tau(n)+1<m<n} |S_m'|}{s_n} < x\right)\right| +$$

$$+\left|P\left(\frac{\max\limits_{\tau(n)+1<m<n} |S_m'|}{s_n} < x\right) - P\left(\frac{\max\limits_{\tau(n)+1<m<n} |Q_m''|}{s_n} < x\right)\right| = I_1' + I_1''.$$

$$I'_1 = \left| P\left(\bigcup_{m=1}^{n} \left\{ \frac{|S'_m|}{s_n} > x \right\} \right) - P\left(\frac{\max\limits_{\tau(n)+1 \leq m \leq n} |S'_m|}{s_n} > x \right) \right| =$$

$$= \left| P\left(\left(\bigcup_{m=1}^{\tau(n)} \left\{ \frac{|S'_m|}{s_n} > x \right\} \right) \cup \left(\bigcup_{m=\tau(n)+1}^{n} \left\{ \frac{|S'_m|}{s_n} > x \right\} \right) \right) - \right.$$

$$\left. - P\left(\frac{\max\limits_{\tau(n)+1 \leq m \leq n} |S'_m|}{s_n} > x \right) \right| = \left| P\left(\bigcup_{m=\tau(n)+1}^{n} \left\{ \frac{|S'_m|}{s_n} > x \right\} \right) + \right.$$

$$+ P\left(\left(\overline{\bigcup_{m=\tau(n)+1}^{n} \left\{ \frac{|S'_m|}{s_n} > x \right\}} \right) \cap \left(\bigcup_{m=1}^{\tau(n)} \left\{ \frac{|S'_m|}{s_n} > x \right\} \right) \right) -$$

$$\left. - P\left(\frac{\max\limits_{\tau(n)+1 \leq m \leq n} |S'_m|}{s_n} > x \right) \right| \leq P\left(\bigcup_{m=1}^{\tau(n)} \left\{ \frac{|S'_m|}{s_n} > x \right\} \right) \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\tau(n)} P\left(\frac{|S'_m|}{s_n} > x \right) \leq \frac{1}{x^2} \sum_{m=1}^{\tau(n)} E\left| \frac{S'_m}{s_n} \right|^2 \leq c_{10} \frac{1}{x^2} \sum_{m=1}^{\tau(n)} \frac{k^{\alpha+1}(m)}{n} \leq$$

$$\leq c_{10} \frac{1}{x^2} \frac{\tau(n)\, k^{\alpha+1}(\tau(n))}{n} \leq c_{11} \frac{n^{2\mu-1}}{x^2}.$$

Таким образом, при $x \geq \frac{1}{\ln n}$ имеем $I'_1 = O\left(\left(\frac{\lg \lg s_n}{\lg s_n} \right)^{1/2} \right)$. Поскольку $S'_m = Q'_m + Q^*_m$, то точно так же, как и при выводе соотношения (4) можно показать, что

$$I''_1 = O\left(\left(\frac{\lg \lg s_n}{\lg s_n} \right)^{1/2} \right).$$

Следовательно

$$I_1 = O\left(\left(\frac{\lg \lg s_n}{\lg s_n} \right)^{1/2} \right).$$

Совершенно аналогично показывается, что

$$I_3 = O\left(\left(\frac{\lg \lg s_n}{\lg s_n} \right)^{1/2} \right).$$

Оценим теперь I_2. Рассмотрим борелевскую функцию

$$L_n(x_{\tau(\tau(n)+1)+1}, \ldots, x_{k(n)}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{1}{s_n} \cdot \max\limits_{\tau(n)+1 \leq m \leq n} \left| \sum\limits_{\nu=\tau(m)+1}^{k(m)} x_\nu \right| < x \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда на основании леммы 7

$$I_2 = |EL_n(X_{\tau(\tau(n)+1)+1}, \ldots, X_{k(n)}) - EL_n(Y_{\tau(\tau(n)+1)+1}, \ldots, Y_{k(n)}| \leq$$

$$\leq c_{12} \sum_{j=\tau(\tau(n)+1)+1}^{k(n)} \varphi(g(j)) \leq c_{12} \sum_{j=\tau(\tau(n)+1)+1}^{\infty} \varphi(g(j)).$$

Так как

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(j) < +\infty, \text{ то } \varphi(j) < c_{13} \frac{1}{j^2}.$$

Отсюда

$$\sum_{j=\tau(\tau(n)+1)+1}^{\infty} \varphi(g(j)) < c_{13} \sum_{j=\tau(\tau(n)+1)+1}^{\infty} \frac{1}{g^2(j)} < c_{14} \frac{1}{(\tau(\tau(n)+1)+1)^{2\beta-1}} <$$

$$< c_{15}\, n^{(1-2\beta)\mu^2} \to 0,\ n \to \infty,$$ так как $\beta > \frac{1}{2}$. Следовательно

$$I_2 = O\left(\left(\frac{\lg\lg s_n}{\lg s_n}\right)^{1/2}\right).$$

Остается оценить A_3:

$$A_3 \leqslant \left| P\left(\frac{\tilde{S}_n^*}{\tilde{s}_n} < x\right) - T(x)\right| + \left| P\left(\frac{\tilde{S}_n^*}{\tilde{s}_n} < x\right) - P\left(\frac{\tilde{S}_n^*}{\bar{s}_n} < x\right)\right| = A_3' + A_3''.$$

Поскольку $\tilde{S}_n$ представляет собой нарастающую сумму независимых случайных величин Y_ν, $\nu = 1, 2, \cdots$, то для получения требуемой оценки для A_3' достаточно проверить справедливость условий теоремы Чжуна.

Воспользовавшись леммой 5, имеем

$$\frac{E|Y_\nu|^3}{E|Y_\nu|^2\left(\sum_{\nu=1}^{k(n)} E|Y_\nu|^2\right)^{\frac{1-\theta}{2}}} \leqslant \frac{C_{15}(E|Y_\nu|^2)^{3/2}}{E|Y_\nu|^2\left(\sum_{\nu=1}^{k(n)} E|Y_\nu|^2\right)^{\frac{1-\theta}{2}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_{16}(E|Y_\nu|^2)^{1/2}}{\left(\sum_{\nu=1}^{k(n)} f(\nu)\right)^{\frac{1-\theta}{2}}} \leqslant \frac{C_{17}\, k^{\alpha/2}(n)}{k^{\frac{1-\theta}{2}}(n)} =$$

$$= C_{18}\, n^{\frac{\alpha-1+\theta}{2(1+\alpha)}} \to 0,\ n \to \infty,$$ при $\theta < 1 - \alpha$.

Отсюда $A_3' = O\left(\left(\frac{\lg\lg s_n}{\lg s_n}\right)^{1/2}\right)$.

Оценим теперь A_3''.

Воспользовавшись леммами 4 и 2 имеем

$$\left| Ee^{it\frac{\tilde{S}_n^*}{\tilde{s}_n}} - Ee^{it\frac{\tilde{S}_n^*}{\bar{s}_n}}\right| \leqslant |t|\left|\frac{1}{s_n} - \frac{1}{\bar{s}_n}\right| E|\tilde{S}_n^*| \leqslant$$

$$\leqslant |t|\frac{|\bar{s}_n - s_n|}{s_n} = |t|\frac{|\bar{s}_n^2 - s_n^2|}{s_n(s_n + \bar{s}_n)} =$$

$$= |t|\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{k(n)} E|Y_\nu|^2 - \sigma_0^2 n - O(n^{2/3})\right|}{s_n(s_n + \tilde{s}_n)} \leqslant$$

$$\leqslant C_{19}|t|\frac{\sigma_0^2\left|\sum_{\nu=1}^{k(n)} f(\nu) - n\right| + O\left(\sum_{\nu=1}^{k(n)} (f(\nu))^{2/3}\right) + O(n^{2/3})}{n} \leqslant$$

$$\leqslant C_{20}|t|\left(n^{\frac{\beta-\alpha}{1+\alpha}}+n^{-\frac{\alpha}{8(1+\alpha)}}+n^{-\frac{1}{3}}\right)\to 0,\ n\to\infty.$$

Применяя теорему Эссеена, получим требуемую оценку, т. е.

$$A_3^{*}=O\left(\left(\frac{\lg\lg s_n}{\lg s_n}\right)^{1/2}\right).$$

Следовательно и $A_3=O\left(\left(\dfrac{\lg\lg s_n}{\lg s_n}\right)^{1/2}\right)$.

Из полученных оценок следует, что для $x\geqslant\dfrac{1}{\ln n}$

$$\sup_{x>\frac{1}{\ln n}}\left|P\left(\frac{S_n^{*}}{s_n}<x\right)-T(x)\right|=O\left(\left(\frac{\lg\lg s_n}{\lg s_n}\right)^{1/2}\right).$$

Для завершения доказательства теоремы 2 поступим следующим образом:

$$\sup_{0<x<+\infty}\left|P\left(\frac{S_n^{*}}{s_n}<x\right)-T(x)\right|\leqslant\sup_{0<x<\frac{1}{\ln n}}\left|P\left(\frac{S_n^{*}}{s_n}<x\right)-T(x)\right|+$$

$$+\sup_{x>\frac{1}{\ln n}}\left|P\left(\frac{S_n^{*}}{s_n}<x\right)-T(x)\right|\leqslant\sup_{0<x<\frac{1}{\ln n}}P\left(\frac{S_n^{*}}{s_n}<x\right)+$$

$$+\sup_{0<x<\frac{1}{\ln n}}T(x)+\sup_{x>\frac{1}{\ln n}}\left|P\left(\frac{S_n^{*}}{s_n}<x\right)-T(x)\right|.$$

Далее, используя оценку скорости сходимости в центральной предельной теореме, полученную в [12] (см. доказательство теоремы 2, формула 23), можем написать

$$\sup_{0<x<\frac{1}{\ln n}}P\left(\frac{S_n^{*}}{s_n}<x\right)\leqslant\sup_{0<x<\frac{1}{\ln n}}P\left(\frac{|S_n|}{s_n}<x\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|P\left(\frac{S_n}{s_n}<x\right)-\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\right|+2\sup_{0<x<\frac{1}{\ln n}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\,du=$$

$$=O\left(\frac{1}{\ln^{5/4}n}\right)+O\left(\frac{1}{\ln n}\right)=O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

Далее, поскольку ([3], стр. 221)

$$T(x)\leqslant\frac{4}{\pi}\exp\left(-\frac{\pi^2}{8x^2}\right),$$

имеем

$$\sup_{0<x<\frac{1}{\ln n}}T(x)\leqslant T\left(\frac{1}{\ln n}\right)\leqslant\frac{4}{\pi}\exp\left(-\frac{\pi^2}{8}\ln^2 n\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4}{\pi}\exp(-\ln n)=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{\ln n}=O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

Теорема доказана.

Теорема 1 вытекает из теоремы 2. Доказательство этого факта проводится точно так же, как и для случая независимых случайных величин (см. [3]).

Ереванский государственный
университет

Поступила 7.V.1988

Տ. Պ. ՂԱԶԱՆՉՅԱՆ. Չունի կրկնակի լոգարիթմի օրենքի իրագործման թույլ կախյալ պատահական հաջորդականությունների համար (*ամփոփում*)

Չունի կրկնակի լոգարիթմի օրենքի իրագործման թույլ կախյալ պատահական հաջորդականությունների համար ստացված են բավարար պայմաններ։

T. P. KAZANCHIAN. *The Chung law of iterated logarithm for weakly dependent random sequences* (summary)

Some sufficient conditions for validity of Chung law of iterated logarithm for weakly dependent random sequences are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *P. Erdös and M. Kac.* On certain limit theorems of the theory of probability. Bull. Amer. Math. Soc., v. 52, 1946, 292—302.
2. *Ю. В. Прохоров.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероят. и ее примен., 1, вып. 2, 1956, 177—238.
3. *K. L. Chung.* Sequences of independent random variables, Trans. Amer. Math. Soc., v. 64, 1948, 205—233.
4. *N. C. Jain, K. Jogdeo, W. F. Stout.* Upper and lower functions for martingales and mixing processes, Ann. Probab., v. 3, № 1, 1975, 119—145.
5. *S. Kanagawa.* Rates of convergence in the Erdös—Kac type invariance principle for weakly dependent random variables, Yokohama Math. J., v. 31, № 1, 2, 121—129.
6. *Т. П. Казанчян.* Закон повторного логарифма в форме Чжуна для m-зависимых случайных величин, Уч. зап. ЕГУ, 2, 1984, 22—29.
7. *И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник.* Независимые и стационарно связанные величины, М., «Наука», 1965.
8. *W. Philipp, F. Stant.* Almost sure invariance principles for partial sums of weayk ly dependent random variables, Mem. Amer. Math. Soc., 161.
9. *R. J. Serfling* Moment inequalities for the maximum cumulative sum, Ann. Math. Statist., 41, 1970, 1227—1234.
10. *K. Yoshthara.* Probability inequalities for sums of absolutely regular processes and their applications, Z. Wahrscheinlirhkeitstheorie verw. Gebicte, 43, 1979, 319—329.
11. *В. В. Петров.* Суммы независимых случайных величин, М., «Наука», 1972.
12. *H. Oodaira, K. Yoshthara.* The law of the iterated logarithm for stationary processes saitsfying nixing conditions' Kodai Math. sem. rep., 23, 1971, 311—334.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIV, № 6, 1989 Математика

УДК 517.53

А. Г. ДЖВАРШЕЙШВИЛИ

РАЗЛИЧНЫЕ УГЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Предварительные сведения

Через E_n обозначим n-мерное евклидово пространство элементы которого суть $x=(x_1,\cdots,x_n)\cdot x_k\in E_1=(-\infty,\ \infty)$, $k>1$. Для $x\in E_n$, $y\in E_n$, число $x\cdot y=\sum\limits_1^n x_k y_k$ есть скалярное произведение, а норма $|x|=(\sum x_k^2)^{1/2}$. Пусть $L_p(E_n)$ есть пространство измеримых функций f, для которых норма

$$\|f\|_p=\Big(\int\limits_{E_n}|f|^p\,dx\Big)^{1/p}<\infty,\ dx=dx_1\cdots dx_n.$$

Положим далее $\mathbf{C}_1^+=\{z=x+iy;\ x\in E_1,\ y>0\}$; $\mathbf{C}_2^{++}=\mathbf{C}_1^+\times\mathbf{C}_1^+$. Для функции $f\in L_1(E_n)$ преобразование Фурье есть

$$\mathbf{F}[f,\ x]=\int\limits_{E_n}f(t)\,e^{-2\pi ixt}\,dt,\quad x\in E_n$$

и которое обладает свойствами (см. [1], стр 8—27).

1. Пусть $f,\ g\in L_1(E_n)$. Тогда

$$\mathbf{F}[(f*g),\ x]=\mathbf{F}[f,\ x]\cdot\mathbf{F}[g,\ x],$$

где $(f*g)=\int\limits_{E_n}f(x-y)\,g(y)\,dy$.

2. Пусть $f\in L_1(E_n)$. Тогда

$$\mathbf{F}[f(t-h),\ x]=e^{-2\pi ihx}\,\mathbf{F}[f,\ x].$$

3. Пусть $f,\ g\in L_1(E_n)$. Тогда

$$\int\limits_{E_n}\mathbf{F}[f,\ x]\,g(x)\,dx=\int\limits_{E_n}\mathbf{F}[g,\ x]\,f(x)\,dx.$$

Здесь интеграл понимается в смысле среднего по Абелю ([1], стр. 11). При этом, если подынтегральная функция суммируема, то интеграл совпадает с интегралом Лебега.

4. Если $f \in L_1(E_n)$, то

$$f(x) = \int\limits_{E_n} \mathbf{F}[f, t]\, e^{2\pi i t x}\, dt = \mathbf{F}^2[f, -x] = \mathbf{F}[\mathbf{F}[f, t]; -x].$$

5. Если $P_\eta(t) = \dfrac{\eta}{t^2 + \eta^2}$ — ядро Пуассона, $\eta > 0$, $t \in E_1$, то

$$\mathbf{F}[P_\eta, x] = e^{-2\pi\eta|x|}, \quad \mathbf{F}^2[P_\eta, x] = P_\eta(x).$$

6. Если $f \in L_1(E_n)$, $g = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}$, то

$$\mathbf{F}[g, x] = 2\pi\, i x_k\, \mathbf{F}[f, x].$$

7. Если $f \in L_2(E_n)$, то $\|f\|_2 = \|\mathbf{F}[f, x]\|_2$.

Заметим, что в статье приведенные рассуждения и выкладки идентичны для случаев $n > 2$, $n = 2$. В силу этого для краткости и большей наглядности рассмотрим случай $n = 2$. Введем множества

$$\delta(\lambda, h) = \{(\eta_1, \eta_2): 0 < \eta_k < h;\ 1/\lambda < \eta_1/\eta_2 < \Lambda,\ k = 1, 2\},$$

$$\Delta(x_1, x_2) = \Delta(x_1, x_2, \alpha, h, \lambda) = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}_2^{++};\ |\mathrm{Re}\, z_k - x_k| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \mathrm{Im}\, z_k;\ 0 < \mathrm{Im}\, z_k < h,\ k = 1, 2;\ 1/\lambda \leqslant \mathrm{Im}\, z_1/\mathrm{Re} z_2 \leqslant \lambda\},$$

$$z_k = \xi_k + i\eta_k,\ \xi_k \in E_1,\ \eta_k \in (0, \infty),\ k = 1, 2,$$

где $0 < \alpha$, $0 < h$, $1 < \lambda$, $(x_1, x_2) \in E_2$.

Пусть $f \in L_1(E_2)$, $\lambda_n = 2^{n-1}$, $n \geqslant 1$. Для любой точки $(x_1, x_2) \in E_2$ положим

$$M_{\lambda_n} = \sup_r \frac{1}{|r|} \int\limits_r |f|\, dt\, d\tau, \quad r = [a, b;\ c, d],$$

где $1/\lambda_n < \left|\dfrac{b-a}{d-c}\right| < \lambda_n$, $(x_1, x_2) \in r$. Затем положим

$$M(f, x_1, x_2) = \sup\{M_{\lambda_1}, \cdots, 1/\sqrt{\lambda_n}\, M_{\lambda_n}, \cdots\}. \tag{1.1}$$

Указанные функции были введены в [2], [3] и там же доказано неравенство

$$|\{(x_1, x_2) \in E_2: M(f, x_1, x_2) > \nu\}| < \frac{C}{\nu}\|f\|. \tag{2.1}$$

Если $f \in L_p(E_2)$, $p > 1$, то

$$\|M(f, x_1, x_2)\|_p \leqslant C_p \|f\|_p, \tag{3.1}$$

где C, C_p не зависят от ν, f.

Пусть F — комплекснозначная функция с непрерывными частными производными до второго порядка. Для точки $(x_1, x_2) \in E_2$ введем

$$S^2(F, x_1, x_2) = \int\limits_{\Delta(x_1, x_2, \alpha, h, \lambda)} \left\{\left|\left|\frac{\partial F(z_1, z_2)}{\partial \xi_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial F}{\partial \eta_1}\right|^2\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial \xi_2}\right|^2 + \right.$$

$$+\left|\frac{\partial F}{\partial \eta_2}\right|^2\Bigg]\Bigg\}\, d\xi_1 d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2 = \int\limits_{\Delta(x_1 x_2)} [L_1(F, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) + L_2]\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2, \tag{4.1}$$

$$g^2(F, x_1, x_2) = \int\limits_{\delta(\lambda, h)} \Bigg\{\eta_1 \Bigg[\left|\frac{\partial F(x_1 + i\eta_1, x_2 + i\eta_2)}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial F}{\partial \eta_1}\right|^2\Bigg] + \eta_2 \Bigg[\left|\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|^2 +$$

$$+\left|\frac{\partial F}{\partial \eta_2}\right|^2\Bigg]\, d\eta_1\, d\eta_2 = \int\limits_{\delta(\lambda, h)} [\eta_1 L_1(F, x_1, x_2, \eta_1, \eta_2) + \eta_2 L_2]\, d\eta_1\, d\eta_2, \tag{5.1}$$

$$z_k = \xi_k + i\eta_k, \quad k = 1, 2.$$

Очевидны неравенства

$$S^2(F, x_1, x_2) \leqslant \int\limits_0^h d\eta_1 \int\limits_{\lambda^{-1}\eta_1}^{\lambda\eta_1} d\eta_2 \int\limits_{x_1 - \lambda\eta_1}^{x_1 + \lambda\eta_1} d\xi_1 \int\limits_{x_2 - \alpha\eta_2}^{x_2 + \alpha\eta_2} (L_1 + L_2)\, d\xi_2.$$

$$g^2(F, x_1, x_2) \leqslant \int\limits_0^h d\eta_1 \int\limits_{\lambda^{-1}\eta_1}^{\lambda\eta_1} (\eta_1 L_1(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2) + \eta_2 L_2)\, d\eta_1 d\eta_2.$$

Подобные величины для функций одной переменной были рассмотрены в работах [4], [5], а для функций, определенных в $C_n^+ = E_n \times (0, \infty)$, в работе [6]. Указанный круг вопросов в настоящей статье рассматриваем для функций, определенных в области $C_n^{+\cdots+} = E_n + i(0, \infty)^n = E_n \times (0, \infty)^n$.

2. Основные неравенства для введенных величин

Предложение 1.2. *Пусть $f \in L_1(E_2)$. Тогда для $(x_1, x_2) \in E_2$, $\alpha > 0$, $h > 0$, $\lambda \geqslant 1$ выполнено неравенство*

$$g(U_f, x_1, x_2) \leqslant CS(U_f, x_1, x_2, \alpha_0, h_0, \lambda_0),$$

где $C > 0$ не зависит от f, (x_1, x_2), а

$$U_f(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2) = U_f(x_1, x_2) = \int\limits_{E_2} f(x_1 + t, x_2 + \tau)\, P_{\eta_1}(t)\, P_{\eta_2}(\tau)\, dt\, d\tau,$$

где $P_\eta(t) = \dfrac{\eta}{t^2 + \eta^2}$, $t \in E_1$, $\eta > 0$, $\alpha_0 > \alpha$, $h_0 > h$, $\lambda_0 > \lambda$.

Доказательсво. Зафиксируем $0 < \alpha < 1$, $h > 0$, $1 \leqslant \lambda$, $(x_1, x_2) \in E_2$ и рассмотрим выражение

$$g^2(U_f, x_1, x_2) \leqslant \int\limits_0^h d\eta_1 \int\limits_{\lambda^{-1}\eta_1}^{\lambda\eta_1} [\eta_1 L_1 + \eta_2 L_2]\, d\eta_2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_1^\infty \Bigg[\int\limits_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} d\eta_1 \int\limits_{\lambda^{-1}\eta_1}^{\lambda\eta_1} + \int\limits_1^h d\eta_1 \int\limits_{\lambda^{-1}\eta_1}^{\lambda\eta_1}\Bigg| (\eta_1 L_1 + \eta_2 L_2)\, d\eta_2 = J_1 + J_2, \tag{1.2}$$

$$J_1=\sum_1^\infty \int\limits_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} d\eta_1 \int\limits_{\lambda^{-1}\eta_1}^{\lambda\eta_1} (\eta_1 L_1+\eta_2 L_2)\, d\eta_2 = J_{11}+J_{12}.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Имеем

$$J_{1.1} \leqslant C\sum_1^\infty 2^{-3k} M_k, \tag{2.2}$$

где C не зависит от (x_1, x_2), f, а

$$M_k = \max L_1(U_f, x_1, x_2, \eta_1, \eta_2),$$

при

$$2^{-k-1} \leqslant \eta_1 \leqslant 2^{-k},\ \lambda^{-1}\eta_1 \leqslant \eta_2 \leqslant \lambda\eta_1. \tag{3.2}$$

Пусть в точке $Q_k(x_1, x_2, a_k, b_k)$ достигается максимум. Тогда

$$J_{1,1} \leqslant C\sum_1^\infty 2^{-3k}\left[\left|\frac{\partial U_f(Q_k)}{\partial x_1}\right|^2+\left|\frac{\partial U_f(Q_k)}{\partial\eta_1}\right|^2\right].$$

Обозначим через $\sigma_k=\sigma(Q_k, r_k)$ сферу в C_2^{++} с центром в точке Q_k и радиусом $r_k=\alpha 2^{-k-2}$, соответствующий шар через T_k. Для произвольной точки $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)\in T_k$ и так как $0<\alpha<1$ имеем

$$0\leqslant a_k-\alpha 2^{-k-2}\leqslant \eta_1\leqslant a_k+\alpha 2^{-k-2};\ 0\leqslant b_k-\alpha 2^{-k-2}\leqslant\eta_2\leqslant b_k+\alpha 2^{-k-2},$$

$$1/\lambda\leqslant\frac{a_k}{b_k}\leqslant\lambda,\ |\xi_1-x_1|\leqslant\alpha 2^{-k-2}<\alpha\eta_1;\ |\xi_2-x_2|\leqslant\alpha 2^{-k-2}\leqslant\alpha\lambda\eta_2, \tag{4.2}$$

$$\frac{2-\alpha}{\lambda(4+\alpha)}\leqslant\frac{\eta_1}{\eta_2}\leqslant\frac{4+\alpha}{2-\alpha}\lambda.$$

Пусть $\lambda_0\geqslant\lambda\dfrac{4+\alpha}{2-\alpha}>\lambda$, $\alpha_0>\alpha\lambda$, $h_0\geqslant h\lambda$. Тогда в силу (4.2) точка $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ будет принадлежать $\Delta(x_1, x_2, \alpha_0, h_0, \lambda_0)$. Следовательно, $T_k\subset\Delta(x_1, x_2, \alpha_0, h_0, \lambda_0)$. Далее функция $L_1(U_f, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ является субгармонической в C_2^{++}, а потому справедлива формула

$$M_k\leqslant\frac{1}{|\sigma(Q_k, r_k)|}\int\limits_{\sigma_k} L_1(U_f, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)\, d\xi_1 d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2\leqslant$$

$$\leqslant C2^{3k}\int\limits_{\sigma_k} L_1\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2,$$

где $|\sigma_k|$ есть площадь поверхности σ_k, а C не зависит от f, $k\geqslant 1$.

Теперь заметим, что для всех $k\geqslant 1$

$$\sigma_k\cap\sigma_{k+3}=\varnothing. \tag{5.2}$$

В самом деле, в силу (4.2) для точек $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)\in\sigma_k$ и $(\xi_1', \xi_2', \eta_1', \eta_2')\in\sigma_{k+3}$

$$\eta_1'\leqslant 2^{-k-3}+\alpha 2^{-k-5}=2^{-k-3}(1+\alpha/4):\ \eta_1\geqslant 2^{-k-1}-\alpha 2^{-k-2}>2^{-k-1}(1-\alpha/2),$$

то есть $\eta_1' < \eta_1$. Стало быть (5.2) выполнено. Отсюда получаем

$$J_{1,1} \leqslant C\Big(\sum_{k=3j} + \sum_{k=3j+1} + \sum_{k=3j+2}\Big) M_k 2^{-3\nu} \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{\Delta(x_1, x_2)} L_1\, d\xi_1 d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2, \tag{6.2}$$

где C не зависит от f, (x_1, x_2). Аналогично имеем

$$J_{2,1} \leqslant C \int\limits_{\Delta(x_1, x_2)} L_2\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2. \tag{7.2}$$

Из (6.2), (7.2) вытекает

$$J_1 \leqslant C \int\limits_{\Delta(x_1, x_2, a_0, h_0, \lambda_0)} (L_1 + L_2)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2.$$

Подобным рассуждением получим

$$J_2 \leqslant C \int\limits_{\Delta(x_1, x_2)} (L_1 + L_2)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2,$$

где C не зависит от f, (x_1, x_2). Из последних соотношений вытекает требуемое неравенство и предложение доказано.

Предложение 2.2. *Пусть $f \in L_2(E_2)$. Тогда для $\alpha > 0$, $h > 0$, $\lambda \geqslant 1$*

$$\| S(U_f, x_1, x_2, \alpha, h, \lambda)\|_2 \leqslant C \|f\|_2,$$

где C не зависит от f.

Доказательство. Заметим, что если $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \in \Delta(0, 0, \alpha, h, \lambda)$, то $(\xi_1 + x_1, \xi_2 + x_2, \eta_1, \eta_2) \in \Delta(x_1, x_2, \alpha, h, \lambda)$. Положим $\Psi(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = \Psi(z_1, z_2)$, $z_k = \xi_k + i\eta_k$, $k = 1, 2$ есть характеристическая функция множества $\Delta(0, 0, \alpha, h, \lambda)$ и рассмотрим выражение

$$\int\limits_{E_2} S^2(U_f, x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int\limits_{E_2} dx_1\, dx_2 \int\limits_{\Delta(x_1, x_2)} (L_1 + L_2)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2 =$$

$$= \int\limits_{E_2} dx_1\, dx_2 \int\limits_{C_2^{++}} \Psi(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) [L_1(\xi_1 + x_1, \xi_2 +$$

$$+ x_2, \eta_1, \eta_2) + L_2]\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2. \tag{8.2}$$

Используя свойства преобразования Фурье получим

$$\left|\mathrm{F}\left[\frac{\partial U_f(\xi_1 + t, \xi_2 + \tau, \eta_1, \eta_2)}{\partial \xi_1} : x_1\, x_2\right]\right| =$$

$$= |\mathrm{F}[f, x_1, x_2]| \left|\mathrm{F}\left[\frac{\partial}{\partial t} P_{\eta_1}, x_1\right]\right| |\mathrm{F}[P_{\eta_2}, x_2]|,$$

$$\left|\mathrm{F}\left[\frac{\partial U_f(\xi_1 + t, \xi_2 + \tau, \eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} ; x_1, x_2\right]\right| =$$

$$= |\mathbf{F}[f, x_1, x_2]| \left|\mathbf{F}\left[\frac{\partial}{\partial\eta_1} P_{\eta_1}, x_1\right]\right| |\mathbf{F}[P_{\eta_2}, x_2]|.$$

С другой стороны

$$\left|\mathbf{F}\left[\frac{\partial}{\partial t} P_\eta, x\right]\right| \leqslant C|x| |\mathbf{F}[P_\eta, x]| \leqslant C|x| e^{-2\pi\eta|x|} < \frac{C}{\eta},$$

$$\left|\mathbf{F}\left[\frac{\partial}{\partial\eta} P_\eta, x\right]\right| \leqslant C|x| e^{-2\pi\eta|x|} < \frac{C}{\eta},$$

для всех $x \in E_1$, а $C > 0$ не зависит от x, η. Таким образом

$$\int\limits_{\Delta(0,0)} d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2 \int\limits_{E_2} \left|\frac{\partial U_f(\xi_1 + x_1, \xi_2 + x_2, \eta_1, \eta_2)}{\partial\xi_1}\right|^2 dx_1 \, dx_2 \leqslant \int\limits_{E_2} |\mathbf{F}[f, x_1, x_2]|^2 \times$$

$$\times \int\limits_{\Delta(0,0)} d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2 \left|\mathbf{F}\left[\frac{\partial}{\partial t} P_{\eta_1}, x_1\right]\right|^2 |\mathbf{F}[P_{\eta_2}, x_2]|^2 \, dx_1 \, dx_2 \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{E_2} |\mathbf{F}[f, x_1, x_2]|^2 \, dx_1 \, dx_2 \int\limits_0^h \frac{d\eta_1}{\eta_1^2} \int\limits_{\lambda^{-1}\eta_1}^{\lambda\eta_1} \eta_2 \, d\eta_2 \leqslant$$

$$< C \int\limits_{E_2} |f(x_1, x_2)|^2 \, dx_1 \, dx_2, \tag{9.2}$$

где C не зависит от f. Подобные оценки получим для $\dfrac{\partial U}{\partial\eta_1}$, $\dfrac{\partial U}{\partial\xi_2}$, $\dfrac{\partial U}{\partial\eta_2}$, и из полученных неравенств вытекает предложение (2.2).

Предложение 3.2. *Пусть $f \in L_1(E_2)$. Тогда существует константа $C > 0$, не зависящая от f и x_1, x_2 такая, что*

$$\sup \eta_1 \left(\left|\frac{\partial U_f(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)}{\partial\xi_1}\right| + \left|\frac{\partial U_f}{\partial\eta_1}\right|\right) \leqslant CM(f, x_1, x_2),$$

$$\sup \eta_2 \left(\left|\frac{\partial U_f(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)}{\partial\xi_2}\right| + \left|\frac{\partial U_f}{\partial\eta_2}\right|\right) \leqslant CM(f, x_1, x_2),$$

где sup *берётся по* $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \in \Delta(x_1, x_2, a, h, \lambda)$.

Доказательство. Положим

$$Q_\eta(t) = \eta \frac{\partial P_\eta(t)}{\partial t}; \; G_\eta(t) = \eta \frac{\partial P_\eta(t)}{\partial\eta}, \; t \in E_1 \; \eta > 0.$$

Непосредственными вычислениями получим

$$|Q_\eta(t)| < C/\eta, \; |G_\eta(t)| < C/\eta, \; |Q_\eta(t)| \leqslant C\eta/t^2,$$
$$|G_\eta(t)| \leqslant C\eta/t, \; \int\limits_{E_1} |Q_\eta(t)| \, dt < C: \int\limits_{E_1} |G_\eta(t)| \, dt < C \tag{10.2}$$

и для всех $(\xi, \eta) \in \{(\xi, \eta): |\xi| \leqslant a\eta\}$, $t \in E_2$,

$$|t - \xi|^2 + \eta^2 > C t^2, \tag{10.2'}$$

где константа C не зависит от t, ξ, η.

Зафиксируем $(x_1, x_2) \in E_2$ и $\varphi(t, \tau) = f(x_1 + t, x_2 + \tau)$. Пусть $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \in \Delta(0, 0, \alpha, h, \lambda)$ и $U_f(\xi_1 + x_1, \xi_2 + x_2, \eta_1, \eta_2) = U_\varphi(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$. Полагая $\delta > 0$, рассмотрим выражение

$$\eta_1 \left| \frac{\partial U_f(\xi_1 + x_1, \xi_2 + x_2, \eta_1, \eta_2)}{\partial \xi_1} \right| = \eta_1 \left| \frac{\partial U_\varphi(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)}{\partial \xi_1} \right| =$$

$$= \left| \int_{E_2} \varphi(t, \tau) Q_{\eta_1}(t - \xi_1) P_{\eta_2}(\tau - \xi_2)\, dt\, d\tau \right| < \left(\left| \int_{-\infty}^{-\delta} \int_{-\infty}^{-\delta} \right| + \left| \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\infty}^{-\delta} \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \int_{\delta}^{\infty} \int_{-\infty}^{-\delta} \right| + \cdots + \left| \int_{\delta}^{\infty} \int_{\delta}^{\infty} \varphi\, Q_{\eta_1} P_{\eta_2}\, dt\, d\tau \right| \right) = J_1 + \cdots + J_9.$$

Используя (10.2) и уже известные рассуждения ([2], стр. 88— 95; [7], стр. 465—470), получим неравенства

$$|J_k| < CM(\varphi, 0, 0) = CM(f, x_1, x_2), \ k = 1, 9,$$

где C не зависит от f, (x_1, x_2). Подобные оценки получим и для $\frac{\partial U_f}{\partial \eta_1}$, $\frac{\partial U_f}{\partial \xi_2}$, $\frac{\partial U_f}{\partial \eta_2}$. Предложение доказано.

3. Связь между угловыми характеристиками и граничными значениями

Теорема 1.3. *Пусть $f \in L_1(E_2)$ и $\nu > 0$. Тогда*

$$|\{(x_1, x_2) : S(U_f, x_1, x_2) > \nu\}| \leqslant C/\nu \|f\|_1, \tag{1.3}$$

где C не зависит от f, ν.

Доказательство. Не ограничивая общности положим $f \geqslant 0$. В силу предположения (3.2) имеем

$$S_1^2 = \int_{\Delta(x_1, x_2)} \left| \frac{\partial U_f(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)}{\partial \xi_1} \right|^2 d\xi_1\, d\xi_2, d\eta_1\, d\eta_2 \leqslant CM(f, x_1, x_2) \times$$

$$\times \int_{\Delta(x_1, x_2)} \left| \frac{\partial U_f}{\partial \xi_1} \right| \frac{d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2}{\eta_1} = CM(f, x_1, x_2)\, B(x_1, x_2). \tag{2.3}$$

Исследуем выражение

$$\int_{E_2} B(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \leqslant \int_{E_2} dx_1\, dx_2 \int_{\Delta(0, 0)} \frac{d\xi_2\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2}{\eta_1} \times$$

$$\times \int_{E_2} f(\xi_1 + x_1 + t, \xi_2 + x_2 + \tau) \left| \frac{\partial P_{\eta_1}(t)}{\partial t} \right| \cdot |P_{\eta_2}(\tau)|\, dt\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\Delta(0, 0)} \frac{d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2}{\eta_1} \int_{E_2} \left| \frac{\partial P_{\eta_1}(t)}{\partial t} \right| P_{\eta_2}(t)\ dt\ d\tau \int_{E_2} f(u, v)\, du\, dv \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_1 \int\limits_{\Delta(0,\,0)} \frac{d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2}{\eta_1^2} \leqslant C\|f\|_1, \tag{3.3}$$

где C не зависит от f. Теперь из (3.3), (2.3), (2.1) имеем

$$|\{(x_1,\ x_2): S_1^2 > \nu^2\}| \leqslant |\{M(f,\ x_1,\ x_2)\cdot B(x_1,\ x_2) > \nu^2/C\}| \leqslant$$

$$\leqslant |\{M(f,\ x_1,\ x_2) > \nu/C\}| + |\{B(x_1,\ x_2) > \nu\}| \leqslant \frac{C}{\nu}\|f\|_1.$$

Аналогичные неравенства получим для $\dfrac{\partial U_f}{\partial \eta_1}$, $\dfrac{\partial U_f}{\partial \xi_2}$, $\dfrac{\partial U_f}{\partial \eta_2}$. Отсюда следует требуемое неравенство.

Следствие 1.3. *Пусть* $f \in L_p(E_2)$, $1 < p < 2$. *Тогда*

$$\|S(U_f)\|_p \leqslant C_p\|f\|_p, \tag{4.3}$$

где $C_p > 0$ *не зависит от* f.

Доказательство. Справедливость (4.3) вытекает из предложения (2.2), теоремы (1.3) и теоремы Марцинкевича об интерполировании операторов ([8], [9], [10], [7], стр. 169).

Теорема 2.3. *Пусть* $f \in L_p(E_2)$, $1 < p < \infty$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\|S(U_f)\|_p \leqslant C_p\|f\|_p, \tag{4.3}$$

где C_p *не зависит от* f.

Доказательство. Положим $p \geqslant 4$, $1/q + \dfrac{2}{p} = 1$. Имеем

$$\|S(U_f)\|_p^2 = \left(\int\limits_{E_2} |S^2(U_f,\ x_1,\ x_2)|^{p/2}\, dx_1\, dx_2\right)^{2/p} =$$

$$= \sup_{\varphi} \int\limits_{E_2} S^2(U_f,\ x_1,\ x_2)\,\varphi(x_1,\ x_2)\, dx_1\, dx_2, \tag{5.3}$$

где sup рассматривается на функциях $\varphi \in L_q(E_2)$; $\|\varphi\|_q \leqslant 1$, $\varphi \geqslant 0$. Рассмотрим выражение

$$J_1 = \int\limits_{E_2} \varphi(x_1,\ x_2)\, dx_1\, dx_2 \int\limits_{\Delta(x_1,\,x_2)} \left|\frac{\partial U_f(\xi_1,\ \xi_2,\ \eta_1,\ \eta_2)}{\partial \xi_1}\right|^2 d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2 =$$

$$= \int\limits_{E_2} \varphi\, dx_1\, dx_2 \int\limits_{\Delta(0,\,0)} d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2 \times$$

$$\times \left|\int\limits_{E_2} f(\xi_1 + x_1 + t,\ \xi_2 + x_2 + \tau)\frac{\partial}{\partial t} P_{\eta_1} P_{\eta_2}\, dt\, d\tau\right|^2.$$

Отсюда и в силу предложения (3.2) имеем

$$J_1 \leqslant C\cdot\int\limits_{E_2} \varphi \int\limits_{\Delta(0,\,0)} \frac{d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2}{\eta_1^2} M^2(f,\ x_1 + \xi_1,\ x_2 + \xi_2)\, dx_1\, dx_2 \leqslant$$

$$\leqslant C_p \int\limits_{\Delta(0,\,0)} \frac{d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2}{\eta_1^2} \Big(\int\limits_{E_2} |\varphi|^q \, dx_1\, dx_2 \Big)^{1/q} \times$$

$$\times \Big(\int\limits_{E_2} [M^2(f,\ x_1+\xi_1,\ x_2+\xi_2)]^{p/2} dx_1\, dx_2 \Big)^{2/p} \leqslant$$

$$< C_p \| M(f,\ x_1,\ x_2)\|_p^2,$$

где C_p не зависит от f. Аналогичные неравенства получаются для $\frac{\partial U}{\partial \eta_1},\ \frac{\partial U}{\partial \xi_2},\ \frac{\partial U}{\partial \eta_2}$. Из полученных неравенств и (5.3) вытекает (4.3) для $p \geqslant 4$. Отсюда и из предложеиия (2.2), теоремы Марцинкевича заключаем, что (4.3) верно для всех $p > 1$ и теорема доказана.

На основании предложения (1.2) доказанные теоремы распространяются на величину $g(F)$, а именно справедлива

Теорема 3.3. *Пусть $f \in L_p(E_2)$, $p \geqslant 1$. Тогда*

$$|\{(x_1,\ x_2) : g(U_f,\ x_1,\ x_2) > \nu\}| \leqslant C/\nu \, \|f\|_1,$$

если $p = 1$, и

$$\|g(U_f)\|_p \leqslant C_p \|f\|_p,$$

если $p > 1$, где C, C_p не зависят от f.

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе АН Грузинской ССР

Поступила 3. XI. 1987

Ա. Գ. ՋՎԱՇԵԻՇՎԻԼԻ Բազմակի փոփոխական ներդաշնակ ֆունկցիաների անկյունային ոչ բնութագրեր *(ամփոփում)*

Հոդվածի մեջ մտցվում են $S(F, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(F, x_1, x_2, \ldots x_n)$ անկյունային բնութագրերը և Պուասոնի ինտեգրալի համար ապացուցված է (1,3), (4,3) անհավասարությունները.

A. G. JVASHEISHVILI. *Various non-tangential characterizations for harmonic functions of many variables* (summary)

In the paper the non-tangential characterizations $S(F)$ and $y(F)$ are introduced for the functions, difined In the domain $E_n^{+\cdots+}$. The inequalities (1.3) and (4.3) are proved for the Poisson singular integral.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Стейн, Г. Вейс.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, Изд. «Мир», М., 1974.
2. *В. Г. Челидзе.* Метод Абеля суммирования двойных рядов Фурье, Тр. Тбилисского ин-та матем., 1943, 79—101.
3. *J. Marcinkiewicz and A. Zygmund.* On the summability of double Fourier series, Fund- Math., 32, 1939, 111—132.
4. *N. Lusin.* Sur une propriete des fnnctions a Carre sommable, Bull. Calcuta Math, Soc., v. 20, 1930, 139—154.

5. *J. E. Littlewood and R. E. Paley.* Theorems on Fourier series and power series. (I). J. London Math. Soc., v. 6, 1931, 230—233; (II). P. L. M. S., v. 42, 1936, 52—89; (III). P. L. M. S., v. 43. 1937, 105—126.
6. *E. M. Stein.* On the functions of Littlewood—Paley, Lusin and Marcinkiewicz, Trans. Amer. Math. Soc., v. 89, № 2, 1958, 432—436.
7. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, 2, Изд. «Мир», 1965.
8. *J. Marcinkiewicz.* Sur l'interpolations. d'operations, C. R., 203, 1929, 1272—1273.
9. *A. Sygmund.* On theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operation, Journal de Math.. 35, 1956, 223—248.
10. A. *P. Calderon.* On the theorem of Marcinkiewicz and Zygmund, Trans. Amer. Math. Soc., v. 68, 1958, 51—60.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Հայկական ՍՍՀ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր «Մաթեմատիկա» ամսագրի 1989 թ., XXIV, №№ 1—6

ՀԱՄԱՌՈՏ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армянской ССР, серия «Математика». за 1989 г., XXIV, №№ 1—6

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

CONTENTS

of the Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian SSR
seria "Matematika", 1989, Vol, XXIV, №№ 1—6

SHORT COMMUNICATIONS

СОДЕРЖАНИЕ

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

CONTENTS