ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Ա. Հ. ԱՌԱՔԵԼՑԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ
Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՑԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՑԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀՐԱԳԱՆՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու քարտուղար Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա ֆիզմաթեմատիկան ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված ցիչ քիչ շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզրաղվել մերժման պատճառների պարզաբանմամբ։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մաբեյալ Բաղրամյանի պող., 24 բ, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկան։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. В. АМБАРЦУМЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН
А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН
зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке) а кратких сообщений—не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленым на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

Арх 411
1989 л:5

1 р. 20 к. Индекс 77735

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. V. AMBARTZUMIAN
N. U. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKIĬ

exacutive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contribttors who desire to have their articles published in 'the proceedings zvestia of the Academy of Sciences of the Armenien S.S.R., series "Matomatika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication,

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initals and name, the title of the book, the place of publication, the publisher tbe date muse be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to indicated by a numeral in square brackets properey inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article shoule contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitled ot twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

Математика, 1989, т. XXIV, № 5, стр. 421—516.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 5, 1989 Математика

УДК 517.95

К. А. ЯГДЖЯН

ПАРАМЕТРИКС ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ, ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

Введение

Целью настоящей работы является построение параметрикса задачи Коши для определенного класса дифференциальных операторов, описание которого осуществляется с помощью некоторой функции $\lambda \in C^1(R^1)$ такой, что

$$\lambda(0) = 0,\ \lambda(z) > 0,\ \lambda'(z) \geqslant 0 \text{ при } z > 0\ (\lambda'(z) \equiv \partial_z \lambda(z)), \tag{0.1}$$

$$|\partial_z^k \lambda(z)| \leqslant c_k (\lambda'(z)\lambda(z))^{k-1} \lambda'(z) \text{ при } 0 < z \leqslant 1,\ k = 2, 3, \cdots, \tag{0.2}$$

с некоторым δ_0, $0 < \delta_0 < 1/2$, $0 < \lambda'(z) \leqslant c\lambda^{1-\delta_0}(z)$ при $0 < z \leqslant 1$. (0.3)

Рассмотрим оператор L вида

$$L = D_t^m + \sum_{j+|\alpha| \leqslant m,\ j<m} a_{j,\alpha}(t, x) D_t^j D_x^\alpha. \tag{0.4}$$

где $t \in J = [0, T]$, $T > 0$, $x \in R^n$, $D_j = -i\partial_j = -i\partial/\partial x_j$, $D_t = -i\partial_t = -i\partial/\partial t$, $a_{j,\alpha} \in C^\infty(J \times R^n)$ и задачу Коши:

$$Lu = f, \tag{0.5}$$

$$D_t^i u|_{t=s} = \psi_i(x),\ i = 0, \cdots, m-1,\ s \in J. \tag{0.6}$$

Пусть M, N — положительные постоянные. Определим зону гиперболичности $Z_h(N) = \{(x, \xi) \in R^{2n},\ \lambda(|x|) < \xi > \geqslant N \ln < \xi >, < \xi > \geqslant M\}$ где $< \xi >^2 = e + |\xi|^2$. Рассмотрим $\{\tau_l(t, x, \xi)\}_1^m$ — нули полного символа оператора L, т. е. корни уравнения

$$\tau^m + \sum_{j+|\alpha| \leqslant m,\ j<m} a_{j,\alpha}(t, x) \tau^j \xi^\alpha = 0. \tag{0.7}$$

Предполагается выполненным следующее основное условие:

(A) *существуют положительные постоянные M, N такие, что для любых α, β, k с некоторыми постоянными $\delta_1 > 0$, $C_{k,\alpha,\beta}$ для всех $l, j = 1, \cdots, m$, при $(x, \xi) \in Z_h(N)$, $t \in J$ выполнены неравенства*

$$|\tau_j(t, x, \xi) - \tau_l(t, x, \xi)| \geqslant \delta^1 \lambda(|x|) < \xi >,\ j \neq l, \tag{0.8}$$

$$|D_t^k D_\xi^\beta D_x^\beta \tau_l(t, x, \xi)| \leqslant C_{k,\alpha,\beta} < \xi >^{1-|\alpha|} \lambda(|x|) \left(\frac{\lambda'(|x|)}{\lambda(|x|)}\right)^{|\beta|},\ |x| \leqslant 1, \tag{0.9}$$

$$|D_t^k D_\xi^\beta D_x^\beta \operatorname{Im} \tau_l(t, x, \xi)| \leqslant C_{k,\alpha,\beta} < \xi >^{-|\alpha|} \left(\frac{\lambda'(|x|)}{\lambda(|x|)}\right)^{|\beta|} \ln < \xi >,\ |x| \leqslant 1. \tag{0.10}$$

Неравенство (0.10) естественно назвать (при $k = |\alpha| = |\beta| = 0$) условием гиперболичности. В § 1 будет показано, что из (A) следует, что нули $\{\lambda_l(t, x, \xi)\}_1^m$ главного символа оператора, т. е. корни уравнения

$$\lambda^m + \sum_{j+|\alpha|=m,\ j<m} a_{j,\alpha}(t, x)\lambda^j \xi^\alpha = 0 \tag{0.11}$$

вещественны при всех $(t, x, \xi) \in J \times R^{2n}$ и что при этих же t, x, ξ

$$|\lambda_l(t, x, \xi)| \leqslant c\lambda(|x|)|\xi|, \quad l = 1, \cdots, m, \tag{0.12}$$

$$|\lambda_l(t, x, \xi) - \lambda_k(t, x, \xi)| \geqslant \delta\lambda(|x|)|\xi|, \ \delta = \text{const} > 0, \ l \neq k. \tag{0.13}$$

Таким образом, при $x = 0$, и только там, имеет место нарушение условия строгой гиперболичности оператора L, в связи с чем возникает вопрос об условиях на младшие члены оператора, достаточных или необходимых для C^∞-корректности задачи Коши. Нахождение таких условий, т. е. решению так называемой проблемы Е. Е. Леви [1], посвящено большое число работ. Сравнительно полная библиография есть в [2—16].

Далее будет показано, что (0.8)—(0.10) приводит к выполнению при всех $t \in J$, $(x, \xi) \in R^{2n}$, $|x| \leqslant 1$, и всех j, α, $|\gamma| \neq 0$, неравенств

$$|D_t^k D_x^\beta a_{j,\alpha}(t, x)| < C_{k,\beta}\lambda^{|\alpha|}(|x|)|\ln\lambda(|x|)|^{m-j-|\alpha|}\left(\frac{\lambda'(|x|)}{\lambda(|x|)}\right)^{|\beta|}. \tag{0.14}$$

Верно также и обратное, т. е. из (0.12)—(0.14), в совокупности с вещественностью $\{\lambda_l\}_1^m$, следует (A) (см. лемму 1).

Отметим здесь, что если (0.3) выполняются с любым $\delta_0 > 0$, то, как следует из результатов работы [7], условия (0.12)—(0.14) являются достаточными для C^∞-корректности задачи Коши. В случае $\lambda(z) = z^k$, k — целое, условие (0.12)—(0.14), как следует из работы [2], являются также и необходимыми для корректности. По очевидной причине мы будем интересоваться только окрестностью прямой $x = 0$. В качестве функции $\lambda(z)$ можно взять, например, z^k, $\exp(-|x|^{-k})$, $\exp(-\exp|x|)^{-k})$ $(k > 0)$ и т. д.

Оценка (0.9) лежит в основе предлагаемого ниже класса псевдодифференциальных операторов (ПДО) и интегральных операторов Фурье (ИОФ), посредством которых и выражается параметрикс задачи Коши.

§ 1. Гиперболичность. Классы символов и исчисление ПДО

Лемма 1. *Условие* (A) *эквивалентно следующему условию:*

(T) *нули* $\{\lambda_l(t, x, \xi)\}_1^m$ *главного символа оператора вещественны и выполнены условия* (0.12), (0.13), (0.14).

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 [11].

Пусть $S_{\rho,\delta}^m(\Omega)$ — обычные классы символов $(0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1)$, обозначим через $C_t^\infty(J; S_{\rho,\delta}^m(\Omega))$ пространство всех гладких отображений J в $S_{\rho,\delta}^m(\Omega)$.

Определение 1. Пусть m_1, m_2, m_3 — действительные числа. Через $S_{\rho,\delta}\{m_1, m_2, m_3\}_\varepsilon$ обозначим множество всех функций $a(t, x, \xi) \in C^\infty(J \times R^{2n})$ таких, что с некоторыми m, ρ_1, δ_1 справедливо включение $a \in C_t^\infty(J; S^m_{\rho_1,\delta_1})$ и для любых k, α, β с некоторыми постоянными $C_{k,\alpha,\beta}$ при всех $t \in J$, $(x, \xi) \in Z_h(N)$, $|x| \leqslant \varepsilon$, справедливы неравенства

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta a(t, x, \xi)| \leqslant C_{k,\alpha,\beta} <\xi>^{m_1-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \lambda^{m_2}(|x|) \left(\frac{\lambda'(|x|)}{\lambda(|x|)}\right)^{m_3+|\beta|}. \tag{1.1}$$

Введем также обозначения $S_\varepsilon\{m_1, m_2, m_3\} = S_{1,0}\{m_1, m_2, m_3\}_\varepsilon$,

$$H_\varepsilon\{m_1, m_2, m_3\} = \bigcap_{\nu=0}^{\infty} S_{\rho,\delta}\{m_1 - \nu, m_2 - \nu, m_3\}_\varepsilon.$$

Предложение 1. (i). *Пусть* $a_k(t, x, \xi) \in S_{\rho,\delta}\{m_{1(k)}, m_2, m_3\}_\varepsilon$ $(k=0, 1, \cdots)$ *и начиная с некоторого* n $a_k(t, x, \xi) = 0$ *при* $(x, \xi) \overline{\in} Z_h(N) \cap \{|x| |x| < \varepsilon\}$, $k \geqslant n$. *Тогда, если* $m_{1(k)} \to -\infty$ *при* $k \to \infty$, *то существует символ* $a(t, x, \xi) \in S_{\rho,\delta}\{m_{1(0)}, m_2, m_3\}_\varepsilon$ *такой, что*

$$a \sim a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \bmod C_t^\infty(J; S^{-\infty}), \tag{1.2}$$

в том смысле, что для любого k

$$(a - a_0 - a_1 - \cdots - a_{k-1}) \in S_{\rho,\delta}\{\overline{m}_{1(k)}, m_2, m_3\}_\varepsilon, \tag{1.3}$$

$$\overline{m}_{1(k)} = \max_{j \geqslant k} m_{1(j)},$$

и два таких символа отличаются на элемент класса $C_t^\infty(J; S^{-\infty})$;

(ii) *Пусть* $b_k(t, x, \xi) \in S_{\rho,\delta}\{m_1 - k, m_2 - k_3, m_3\}_\varepsilon$ $(k=0, 1, \cdots)$ *и начиная с некоторого* n $b_k(t, x, \xi) = 0$ *при* $(x, \xi) \overline{\in} Z_h(N) \cap \{x | |x| < \varepsilon\}$, $k \geqslant n$. *Тогда существует символ* $b(t, x, \xi) \in S_{\rho,\delta}\{m_1, m_2, m_3\}$ *такой, что*

$$b \sim b_0 + b_1 + b_2 + \cdots \bmod H_\varepsilon\{m_1, m_2, m_3\}, \tag{1.4}$$

в том смысле, что для любого k

$$(b - b_0 - b_1 - \cdots - b_{k-1}) \in S_{\rho,\delta}\{m_1 - k, m_2 - k, m_3\}_\varepsilon, \tag{1.5}$$

и два таких символа отличаются на элемент класса $H_\varepsilon\{m_1, m_2, m_3\}$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 1 [8].

Определенные выше классы символов являются, в частности, и обычными классами символов, что дает нам право пользоваться обычными формулами теории ПДО, а с другой стороны, возможность, используя предложение 1, проследить за свойствами полученных с помощью упомянутых формул символов. Всюду далее в $S_{\rho,\delta}\{m_1, m_2, m_3\}_\varepsilon$ мы предполагаем, что $0 \leqslant \delta_0 + \delta < 1/2 < \rho \leqslant 1$.

Лемма 2. *Пусть задана последовательность* $m \times m$ *матричных символов* $N^{(\nu)}(t, x, \xi) \in S_{\rho,\delta}\{-\nu, -\nu, 0\}_\varepsilon$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ *таких, что* $N^{(\nu)}(t, x, \xi) = 0$ *при* $(x, \xi) \overline{\in} Z_h(N) \cap \{|x| < \varepsilon\}$. *Тогда существует оператор* $N(t)$ *такой, что* $N(t, x, \xi) \in S_{\rho,\delta}\{0, 0, 0\}_\varepsilon$, *и*

$$N(t, x, \xi) \sim I + N^{(1)}(t, x, \xi) + N^{(2)}(t, x, \xi) + \cdots \bmod H_{\rho}^{0} = H_{\rho}|0, 0, 0|. \tag{1.6}$$

Более того $N(t)$ имеет параметрикс $N^{*}(t)$ (такой, что $N^{*}(t, x, \xi) \in S_{\rho,\varepsilon}|0, 0, 0|$ и символы операторов $N(t)N^{*}(t) - I$, $N^{*}(t)N(t) - I$ принадлежат $C_t^{\infty}(J, S^{-\infty})$).

Доказательство ничем не отличается от принятого в теории ПДО.

§ 2. Приведение к задаче Коши для системы первого порядка

Пусть $\chi \in C^{\infty}(R^1)$, $0 \leqslant \chi(t) \leqslant 1$, $\chi(t) = 0$ при $|t| \geqslant 2$, $\chi(t) = 1$ при $|t| \leqslant 1$. Рассмотрим гипоэллиптический оператор $h(x, D_x)$ с символом $h(x, \xi) = \chi(\lambda(|x|)\langle\xi\rangle/(N\ln\langle\xi\rangle))\ln\langle\xi\rangle + \lambda(|x|)\langle\xi\rangle(1 - \chi(\lambda(|x|)\langle\xi\rangle/(N\ln\langle\xi\rangle)))$. Очевидно, что $h(x, \xi) \in S_{\varepsilon}|1, 1, 0|$. Если $H(x, D_x)$ — диагональный матричный ПДО с элементами $H_{ij}(x, D_x) = \delta_{ij} h^{m-i}(x, D_x)$ $(i, j = 1, \cdots, m)$, то через $H^{*}(x, D_x)$ обозначим параметрикс оператора $H(x, D_x)$.

Для $U = {}^{t}(u, D_t u, \cdots, D_t^{m-1} u)$ и $\mathfrak{U} = H(x, D_x)U$ уравнение (0.5) можно переписать в виде системы

$$L_0 \mathfrak{U} + R_3 U = \Phi \tag{2.1}$$

с $R_3(t, x, \xi) \in C_t^{\infty}(J; S^{-\infty})$, $\Phi = {}^{t}(0, \cdots, 0, f)$, $L_0 = D_t + A(t, x, D_x)$, где $A(t, x, \xi) \in C_t^{\infty}(J; S_{\rho}^{m})$, $A(t, x, \xi) \in S_{\varepsilon}|1, 1, 0|$, а при $(x, \xi) \in Z_1(2N) = |(x, \xi) \in R^{2n} | \lambda(|x|)\langle\xi\rangle \leqslant 2N\ln\langle\xi\rangle, \langle\xi\rangle \geqslant M|$, $t \in J$

$$\|D_t^{k} D_{\xi}^{\alpha} D_x^{\beta} A(t, x, \xi)\| \leqslant C_{k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|+\varepsilon_0|\beta|}\ln\langle\xi\rangle. \tag{2.2}$$

Упорядочим в $Z_h(N)$ корни уравнения (0.7): $\operatorname{Re}\tau_1 \leqslant \operatorname{Re}\tau_2 \leqslant \cdots \leqslant \operatorname{Re}\tau_m$. Выберем постоянные $d_1 < d_2 < \cdots < d_m$ и рассмотрим функции $\varphi_k(t, x, \xi) = d_k\chi(\lambda(|x|)\langle\xi\rangle/(N\ln\langle\xi\rangle))\ln\langle\xi\rangle + \tau_k(t, x, \xi)(1 - \chi(\lambda(|x|)\langle\xi\rangle/(N\ln\langle\xi\rangle)))$. По системе $|\varphi_k/h|_1^m$ составим матрицу Вандермонда $M^{*}(t, x, \xi) = V(\varphi_1/h, \cdots, \varphi_m/h)$, и пусть $M(t, x, D_x)$ — параметрикс для $M^{*}(t, x, D_x)$. Тогда вектор $U = M(t)U$ будет решением системы

$$D_t V + M(t)A(t)M^{*}(t)V - iM_t(t)M^{*}(t)V + R_1(t)U = \Phi_1, \tag{2.3}$$

где $R_1(t, x, \xi) \in C_t^{\infty}(J; S^{-\infty})$, $\Phi_1 = M(t)\Phi$. Легко убедиться в том, что (2.3) можно записать в следующем виде:

$$D_t V - D(t)V + B(t)V + R_2(t)U = \Phi_1, \tag{2.4}$$

где $D(t)$ — оператор с диагональным символам, элементы которого $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$, $R_2(t, x, \xi) \in C_t^{\infty}(J; S^{-\infty})$, $B(t, x, \xi) \in S_{\varepsilon}|0, 0, 0|$, и при $t \in J$, $(x, \xi) \in Z_{1,\varepsilon}(2N) = Z_1(2N) \cap |x| |x| < \varepsilon|$ справедливы оценки

$$\|D_t^{k} D_{\xi}^{\alpha} D_x^{\beta} B(t, x, \xi)\| \leqslant C_{k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|+\varepsilon_0|\beta|}\ln\langle\xi\rangle. \tag{2.5}$$

Осуществим в зоне $Z_{h,\varepsilon}(N) = Z_h(N) \cap |x \in R^n | |x| < \varepsilon|$ „полную“ диагонализацию системы.

Теорема 1. *Существует оператор $N(t)$ такой, что $N(t, x, \xi)=1$ при $(x, \xi)\in Z_{1,\varepsilon}(N)$, $N(t, x, \xi)\in S_{\varepsilon}\{0, 0, 0\}$, $|\det N(t, x, \xi)| > \text{const} > 0$ на $J\times R^{2n}$*

$$(D_t - D(t) + B(t))\, N(t) = N(t)\, L_1, \mod C_t^{\infty}(J; \Psi^{-\infty}), \tag{2.6}$$

с некоторым оператором L_1 вида

$$L_1 = D_t - D(t) + F(t) + R(t), \tag{2.7}$$

где при некотором $\varepsilon > 0$:

(i) *$F(t, x, \xi)$ — диагональная матрица $F(t, x, \xi)\in S_{\varepsilon}\{0, 0, 0\}$,*

$$F(t, x, \xi) = 0 \text{ при } (x, \xi)\in Z_{1,\varepsilon}(N),\ t\in J,$$

(ii) *$R(t, x, \xi)\in H^0_{\varepsilon}$, и для любых k, α, β при $(x, \xi)\in Z_{1,\varepsilon}(2N)$, $t\in J$*

$$\|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta R(t, x, \xi)\| \leqslant C_{k,\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{-|\alpha|+\varepsilon_0|\beta|} \ln\langle\xi\rangle. \tag{2.8}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 [8].

§ 3. Построение фазовой функции

Обозначим через $\lambda(t, x, \xi)$ вещественную часть одной из функций $\varphi_i(t, x, \xi)$, $i=1, 2, \cdots, m$. Рассмотрим для системы Гамильтона задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = -\nabla_\xi \lambda(t, q, p), \ \dfrac{dp}{dt} = \nabla_x \lambda(t, q, p), \\ q|_{t=s} = y, \qquad p|_{t=s} = \xi. \end{cases} \tag{3.1}$$

Решение задачи (3.1) существует при всех $s, t\in[0, T_0]$, $\xi\in R^n$, $y\in R^n$, $\langle\xi\rangle \geqslant M$, если T_0 достаточно мало. Опишем поведение решения $(q(t, s, y, \xi), p(t, s, y, \xi))$. С этой целью определим классы $S^{\cdot}_{\rho,\delta}\{m_1 m_2, m_3\}_{\varepsilon}$, учитывающие также и зависимость от параметра s. Они получатся, если считать, что в определении J — компакт в R_d, а k — мультииндекс $(x, \xi)\in Z_h(N/2)$. Соответственным образом определяются $S^{\cdot}_{\varepsilon}\{m_1, m_2, m_3\}$, $H^{\cdot}_{\varepsilon}\{m_1, m_2, m_3\}$. Отметим, что в классах $S^{\cdot}_{\rho,\delta}\{m_1, m_2, m_3\}$ справедливы утверждения предложения 1 и леммы 2, очевидным образом видоизмененные.

Лемма 3. *Существуют положительные постоянные N, M, ε, T_0 такие, что для любого $s\in[0, T_0]$ и любых $(y, \xi)\in R^{2n}$ справедливы утверждения:*

(a) *из $(y, \xi)\in Z_{1,\varepsilon}(N/2)$ следует $(q(t), p(t))\in Z_{1,2\varepsilon}(N)$ для $\forall t\in[0, T_0]$;*
из $(y, \xi)\in Z_{h,\varepsilon}(N/2)$ следует $(q, (t), p(t))\in Z_{h,2\varepsilon}(N/4)$ для $\forall t\in[0, T_0]$ (т. е. „зоны не смешиваются“);

(b) *если $(y, \xi)\in Z_{1,\varepsilon}(N/2)$, то $p(t, s, y, \xi) = \xi$, $q(t, s, y, \xi) = y - (t-s)\nabla_\xi \ln\langle\xi\rangle$ для всех $t\in[0, T_0]$;*

(c) *если $(y, \xi)\in Z_{h,\varepsilon}(N/2)$, то*

$$|q(t, s, y, \xi) - y| \leqslant c\lambda(|y|), \ \forall t\in[0, T_0],$$
$$|p(t, s, y, \xi) - \xi| \leqslant c\lambda'(|y|)\langle\xi\rangle, \ \forall t\in[0, T_0];$$

(d) *существует постоянные* c_1, c_2 *такие, что для всех* $t \in [0, T_0]$, $(y, \xi) \in Z_{h,s}(N/2)$ *выполняются неравенства*

$$c_1^{-1} \lambda(|y|) \leqslant \lambda(|q(t)|) \leqslant c_1 \lambda(|y|),$$

$$c_1^{-1} \lambda'(|y|) \leqslant \lambda'(|q(t)|) \leqslant c_1 \lambda'(|y|),$$

$$c_2^{-1} \lambda'(|y|)/\lambda(|y|) \leqslant \lambda'(|q(t)|)/\lambda(|q(t)|) \leqslant c_2 \lambda'(|y|)/\lambda(|y|);$$

(e) $q(t, s, y, \xi) - y \in S^1_{1,1}[0, 1, 0]$, $p(t, s, y, \xi) - \xi \in S^1_{1,1}[1, 1, 1]$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3 [8].

Лемма 4. *Пусть* T_1 *и* $\varepsilon_1 \in (0, 1)$ *такие постоянные, что*

$$\|I - \partial q/\partial y\| \leqslant 1 - \varepsilon_1 \text{ при } s, t \in [0, T_1],\ y \in R^n,\ \xi \in R^n,\ \langle \xi \rangle \geqslant M. \tag{3.3}$$

Тогда для отображения $x = q(t, s, y, \xi) : R^n_y \ni y \to R^n_x$ *(окрестностей начал координат в* R^n_x *и* R^n_y*) с параметрами* s, t, ξ *существует обратное отображение* $y = y(t, s, x, \xi)$, *причем* $y(t, s, x, \xi) - x \in S^1_{1,1}\{0, 1, 0\}$, $\|I - \partial y/\partial x\| \leqslant (1 - \varepsilon_1)/\varepsilon_1$ *при* $t, s \in [0, T_1]$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle \xi \rangle \geqslant M$. *Если* $(x, \xi) \in Z_{1,s}(N/2)$, *то* $y = x + (t - s) \nabla_\xi \ln \langle \xi \rangle$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4 [8].

Построим, наконец, фазовую функцию $\Phi(t, s, y, \xi)$, для чего рассмотрим задачу Коши

$$iD_t \Phi - \lambda(t, x, \nabla_x \Phi) = 0,\ \Phi|_{t=s} = x \cdot \xi. \tag{3.4}$$

Лемма 5. *Пусть* T_1 *и* ε_1 *— постоянные из леммы 4. Тогда* $\Phi(t, s, x, \xi) - x \cdot \xi \in S^1_{1,1}[1, 1, 0]$, *а при* $(x, \xi) \in Z_{1,s}(N/2)$ *имеем* $\Phi(t, s, x, \xi) = x \cdot \xi + (t - s) \ln \langle \xi \rangle$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 5 [8].

§ 4. Параметрикс задачи Коши для элементарного оператора

Рассмотрим в $[0, T_1] \times U_\varepsilon$, где $U_\varepsilon = \{x \in R^n \mid |x| < \varepsilon\}$, элементарный гиперболический оператор первого порядка

$$L = D_t - \lambda(t, x, D_x) + f(t, x, D_x), \tag{4.1}$$

где $\lambda(t, x, \xi)$ — та же функция, что и в § 3. $f(t, x, \xi) \in S^1_{1,1}[0, 0, 0]$, и $f(t, x, \xi) = 0$ при $(x, \xi) \in Z_{1,s}(N)$, $t \in [0, T_1]$. Продолжим его с U_ε на все R^n_x и построим параметрикс следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} Lu = 0,\ [0, T_1] \times R^n, \\ u|_{t=s} = \psi\ (0 \leqslant s \leqslant T), \end{cases} \tag{4.2}$$

т. е. оператор $E_\Phi(t, s)$ такой, что

$$\begin{cases} LE_\Phi(t, s) = 0 \bmod C^\infty_{t,s}(\Psi^{-\infty})\ (= C^\infty_{t,s}([0, T_1]^2; \Psi^{-\infty})), \\ E_\Phi(s, s) = I \text{ (тождественный оператор)}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Будем искать $E_\Phi(t, s)$ в виде ИОФ:

$$E_\Phi(t, s)\psi(x) = (2\pi)^{-n} \int\int e^{i(\Phi(t, s, x, \xi) - y \cdot \xi)} e(t, s, x, \xi) \psi(y)\, dy d\xi, \tag{4.4}$$

с символом $e(t, s, x, \xi)$, разлагающимся в асимптотический ряд

$$e(t, x, s, \xi) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} e_\nu(t, s, x, \xi) \bmod C^{\infty}_{t,s}(S^{-\infty}). \tag{4.5}$$

Определим как в [9]

$$g(t, s, x, \xi) = -\sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \lambda^{(\alpha)}(t, x, \nabla_x \Phi(t, s, x, \xi)) \cdot \partial_x^\alpha \Phi(t, s, x, \xi) + \\ + f(t, x, \nabla_x \Phi(t, s, x, \xi)), \tag{4.6}$$

$$Z = D_t - \sum_{|\alpha|=1} \lambda^{(\alpha)}(t, x, \nabla_x \Phi(t, s, x, \xi)) D_x^\alpha + g(t, s, x, \xi). \tag{4.7}$$

Если $e_{\nu,\Phi}(t, s)$ — ИОФ с символом $e_\nu(t, s, x, \xi)$, то

$$\sigma(Le_{\nu,\Phi}(t, s))(t, s, x, \xi) = Ze_\nu + r_\nu(t, s, x, \xi), \tag{4.8}$$

где

$$r_\nu(t, s, x, \xi) \sim -\sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} |D_y^\alpha (\lambda^{(\alpha)}(t, x, \bar{\nabla}_x \Phi(t, s, x, y, \xi)) e_\nu(t, s, y, \xi)|_{y=x} \\ \bmod C^{\infty}_{t,s}(S^{-\infty}), \nu = 0, 1, \cdots, \tag{4.9}$$

$$\bar{\nabla}_x \Phi(t, s, x, y, \xi) = \int_0^1 \nabla_x \Phi(t, s, y, + \theta(x - y), \xi)\, d\theta. \tag{4.10}$$

И так, пусть

$$\begin{cases} Ze_0 = 0, \qquad Ze_\nu + r_{\nu-1} = 0, \\ e_0(s, s) = 1, \; e_\nu(s, s) = 0, \; \nu = 1, 2, \cdots. \end{cases} \tag{4.11}$$

Лемма 6. *Если* $(x, \xi) \in Z_{1,s}(N/2)$, *то для всех* $t, s \in [0, T_1]$ $e_0(t, s, x, \xi) = 1$, $e_\nu(t, s, x, \xi) = 0$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$. *Если же* $(x, \xi) \in Z_{h,s}(N/2)$, $s, t \in [0, T_1]$, *то для любых* k, l, α, β, ν $(\nu = 0, 1, 2)$

$$|D_t^k D_s^l D_\xi^\alpha D_x^\beta e_\nu(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{k,l,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{-\nu - |\alpha|} \left(\frac{\lambda'(|x|)}{\lambda(|x|)} \right)^{k+l+|\alpha+\beta|+2\nu}. \tag{4.12}$$

Доказательство проводится по индукции с помощью (3.24), (3.25) [9].

Теорема 2. *Существует ИОФ* $E_\Phi(t, s) = e_\Phi(l, s, x, D_x)$ *с фазовой функцией из леммы* 5 *и амплитудной функцией* $e(t, s, x, \xi)$ *такой, что* $e(t, s, x, \xi) = 1$ *при* $(x, \xi) \in Z_{1,s}(N/2)$, $t, s \in [0, T_1]$, *а при* $t, s \in [0, T_1]$, $(x, \xi) \in Z_{h,s}(N/2)$ *удовлетворяющей неравенствам* (4.12) *с* $\nu = 0$, *являющийся параметриксом задачи* (4.2). *В частности для любого* $k \geqslant 0$ $e(t, s, x, \xi) \in C^k_{t,s}(J^2; S^{k\delta_0}_{1-\delta_0, \delta_0})$. *Параметрикс единственен по* mod $C^{\infty}_{t,s}(\Psi^{-\infty})$.

Доказательство. Существование указанной амплитудной функции устанавливается подобно тому, как было доказано предложение 1. Единственность доказывается рассмотрением сопряженной задачи для формально сопряженного оператора. Теорема доказана.

Нам понадобится следующий простой факт.

Предложение 2. *Пусть* $a(t, s, x, \xi) \in \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k_{t,s}(J^2; S^{k\hat{\delta}}_{\rho,\delta})(0 \leqslant \hat{\delta} < 1/2 < \rho \leqslant 1)$, *и для любых* k, l, α, β *при всех* $(x, \xi) \in Z_{h,\varepsilon}(N/2)$ $t, s \in [0, T_1]$

$$|D_t^k D_s^l D_\xi^\alpha D_x^\beta a(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{k,l,\alpha,\beta} < \xi >^{m_1 - |\alpha|} (\lambda)(|x|) < \xi >)^{k+l+|\alpha+\beta|} \times$$

$$\times \lambda^{m_2}(|x|)\,(\lambda'(|x|)/\lambda(|x|))^{m_3+l+|\alpha+\beta|}, \tag{4.13,}$$

а символ $r(t, s, x, \xi)$ *таков, что* $r(t, s, x, \xi) = 0$ *при* $(x, \xi) \in Z_{1,\varepsilon}(N/2)$ $t, s \in [0, T_1]$ *и для любых* k, l, α, β, ν $(\nu \geqslant 0)$

$$|D_t^k D_s^l D_\xi^\alpha D_x^\beta r(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{k,\alpha,\beta,l,\nu} < \xi >^{m_1' - |\alpha| - \nu} \lambda^{m_2' - \nu}(|x|) \times$$

$$\times (\lambda'(|x|)/\lambda(|x|))^{m_3' + k + l + |\alpha+\beta|} \quad \textit{при } (x, \xi) \in Z_{h,\varepsilon}(N/2),\ t, s \in [0, T_1]. \tag{4.14}$$

Тогда при достаточно малом T_1 *как* $R_1 = A_\Phi(t, s) R(t, s)$ *так, и* $R_2 = R(t, s) A_\Phi(t, s)$ *являются ПДО-ми с символами* $r_j(t, s, x, \xi)$ $(j = 1, 2)$ *такими, что* $(\text{по mod } C^\infty_{t,s}(S^{-\infty}))\, r_j(t, s, x, \xi) = 0$ *при* $t, s \in [0, T_1]$, $(x, \xi) \in Z_{1,\varepsilon}(N/2)$, *и для любых* k, l, α, β, ν $(\nu \geqslant 0)$

$$|D_t^k D_s^l D_\xi^\alpha D_x^\beta r_j(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{k,l,\alpha,\beta,\nu} < \xi >^{m_1 + m_1' - |\alpha| - \nu} \lambda^{m_2 + m_2' - \nu}(|x|) \times$$

$$\times (\lambda'(|x|)/\lambda(|x|))^{m_3 + m_3' + k + l - |\alpha+\beta|} \quad \textit{при } (x, \xi) \in Z_{h,\varepsilon}(N/2). \tag{4.15}$$

Доказательство проводится с помощью теоремы 2.3 [10] и лемм 3, 5.

Наконец, сформулируем в рассматриваемых нами классах операторов теорему Ю. В. Егорова.

Предложение 3. *Пусть* $E_\Phi(t, s)$ — *ИОФ, построенный в теореме* 2, *и пусть символ* $p(t, x, \xi)$ *оператора* $P(t, x, D_x)$ *таков, что* $p(t, x, \xi) = 0$ *при* $(x, \xi) \in Z_{1,\varepsilon}(N)$, $t \in [0, T_1]$ *и* $(p(t, x, \xi)/\ln < \xi >) \in S_{\varepsilon}\{0, 0, 0\}$. *Тогда* $P_1(t, s, x, D_x) = E_\Phi(s, t) P(t, x, D_x) E_\Phi(t, s)$ *есть ПДО с символом* $p_1(t, s, x, \xi)$ *таким, что* $p_1(t, s, x, \xi) = 0$ *при* $(x, \xi) \in Z_{1,\varepsilon}(N)$, $t, s \in [0, T_1]$ *и* $(p_1(t, s, x, \xi)/\ln < \xi >) \in S'_{\varepsilon}\{0, 0, 0\}$.

Доказательство проводится стандартными рассуждениями с использованием лемм 3, 5 и теорем работы [10].

§ 5. Окончание построения параметрикса

Рассмотрим предварительно задачу Коши

$$L_1 U = \Phi(t),\ U|_{t=s} = \Psi \tag{5.1}$$

для матричного ПДО вида (2.7), описанного в теореме 1. Параметрикс задачи (5.1) будем искать в виде $E_1(t, s) = E_2(t, s)(I + Q(t, s))$, где $E_2(t, s)$ — матричный диагональный ИОФ с элементами $E_{\Phi_j}(t, s)$ $(j = 1, \cdots, m)$, являющимися параметриксами задачи Коши для операторов $D_t - \lambda_j(t, x, D_x) + f_j(t, x, D_x)$, описанными в теореме 2. Подставляя $E_1(t, s)$ в (5.1) и применяя предложение 3 приходим к задаче Коши для оператора $Q(t, s)$;

$$D_t Q(t, s) + R(t, s) Q(t, s) + R_0(t, s) \in C^\infty_{t,s}(\Psi^{-\infty}),\ Q(s, s) = 0. \tag{5.2}$$

для которой справедливо следующее

Предложение 4. *Пусть* $R(t, s)$, $R_0(t, s)$ — *матричные ПДО с символами* $r(t, s, x, \xi)$ *и* $r_0(t, s, x, \xi)$, *соответственно. Предположим, что с некоторыми* p, K, m, ρ, δ $(0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1)$ *для любых* α, β *с некоторыми положительными постоянными* $C_{\alpha,\beta}$, C_0 *при всех* $t, s \in [0, T_1]$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle \xi \rangle \geqslant M$ *выполнены неравенства*

$$\|D_\xi^\alpha D_x^\beta r(t, s, x, \xi)\| \leqslant C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} g(t, \xi), \tag{5.3}$$

$$\|D_\xi^\alpha D_x^\beta r_0(t, s, x, \xi)\| \leqslant C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{p-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} g(t, \xi), \tag{5.3$_0$}$$

$$\int_0^{T_1} g(\tau, \xi)\, d\tau \leqslant K \ln \langle \xi \rangle, \quad g(t, \xi) \leqslant C_0 \langle \xi \rangle^m. \tag{5.4}$$

Тогда существует ПДО $Q(t, s)$, *являющийся решением задачи* (5.2) *с символом* $q(t, s, x, \xi)$, *удовлетворяющим при всех* $t, s \in [0, T_1]$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle \xi \rangle \geqslant M$ *неравенствам*

$$\|D_\xi^\alpha D_x^\beta q(t, s, x, \xi)\| \leqslant C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{K+p-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha+\beta|} \tag{5.5}$$

и, следовательно, принадлежащим классу

$$q \in C_{t,s}([0, T_1]^2; \bigcap_{0<\varepsilon<1} S^{K+p+\varepsilon}_{\rho,\delta}) \cap C_t^1([0, T]^2; \bigcap_{0<\varepsilon<1} S^{K+m+p+\varepsilon}_{\rho,\delta}).$$

Решение единственно по $\operatorname{mod} C_{t,s}([0, T_1]^2; \Psi^{-\infty})$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 5 [8].

В нашем случае, допуская некоторую вольность в обозначениях $R(t, s) = E_2(s, t)\,[-\operatorname{Im} D(t) + R(t)]\,E_2(t, s) = R_0(t, s)$, причем $g(t, \xi) = \ln \langle \xi \rangle$, так что условия предложения 4 выполнены. Итак нами построен параметрикс $E_1(t, s)$, а следовательно, и доказана

Теорема 3. *Пусть* $E_1(t, s)$ — *параметрикс задачи* (5.1). *Тогда параметрикс задачи Коши для* L_0 (2.1) *существует и может быть записан в форме* $E_0(t, s) = M^*(t)\,N(t)\,E_1(t, s)\,N^{**}(t)\,M(t)$, *где операторы* $M(t)$, $N(t)$, $M^*(t)$, $N^{**}(t)$ *описаны в* § 2. *Он представляется в виде сумм ИОФ с фазовыми функциями* $\Phi_j(t, s, x, \xi)$ $(j = 1, \cdots, m)$, *описанными в лемме* 5.

С помощью теоремы 3 и оператора $H(x, D_x)$ легко доказывается

Теорема 4. *Пусть оператор* L (0.4) *удовлетворяет условию* (A). *Тогда решение задачи Коши* (0.5), (0.6) *с* $f \in C_t^m([0, T]; E(R^n))$, $\psi_j \in E(R^n)$, $j = 0, \cdots, m-1$, *существует, единственно и* $u \in C_t^m([0, T]; E(R^n))$, *а задача имеет обычный конус зависимости. Параметрикс задачи Коши* (0.5), (0.6) *может быть записан в виде оператора, действующего на вектор начальных данных* $(\psi_0, \cdots, \psi_{m-1})$ *по формуле*

$$\sum_{j=0}^{m-1} h^{(j-m)}(x, D_x)\, E_0^{1, j+1}(t, s, x, D_x)\, h^{m-1}(x, D_x)\, \psi_j(x), \tag{5.6}$$

где $E_0^{1,j}(t, s)$ есть $(1, j)$ элемент параметрикса $E_0(t, s)$ из теоремы 3.

Как следствие получаем. что решение задачи (0.5), (0.6) с $f \in C^j([0, T]; E'(R^n)))$, $\psi_j \in E'(R^n)$ имеет вид (по mod C^∞)

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^{m-1} h^{(j-m)}(x, D_x) E_0^{1, j+1}(t, s, x, D_x) h^{m-j}(x, D_x) \psi_j(x) + \\ + i \int_s^t E_0^{1, m}(t, \sigma, x, D_x) f(\sigma, x) d\sigma. \tag{5.7}$$

(Здесь $E'(R^n)$ — пространство распределений с компактными носителями).

Ясно, что с помощью (5.7) можно построить фундаментальное решение задачи Коши [10], доказать ее корректность в соболевских пространствах, уточнить потерю гладкости, исследовать вопрос распространения и ветвления особенностей.

То, что условие (A) является, в определенном смысле, и необходимым для C^∞-корректности задачи Коши (0.5), (0.6) следует из теоремы 5, доказательство которой, аналогичное доказательству теоремы 2 [11], в настоящей работе мы не приводим, и для формулировки которой нам потребуются нижеследующие обозначения. Пусть $\nu \in C^\infty(R^1_+)$ такова, что при $z \in (0,1)$ с некоторыми постоянными c, c_k, δ, γ, ε_1, $0 < \delta < 1/3$, $0 < \gamma \leqslant 1$, $0 < \varepsilon_1 < 1$ для всех $k \in N$

$$\nu(0) = 0,\ \nu(z) > 0,\ \nu'(z) \geqslant 0,\ |\nu^{(k)}(z)| \leqslant c_k (\nu'(z)/\nu(z))^{k-1} \nu'(z), \tag{5.8}$$

$$\lambda'(z)/\lambda(z) + \nu'(z)/\nu(z) \leqslant c (\nu^\gamma(z)/\lambda(z))^\delta, \tag{5.9}$$

$$\gamma \nu'(z)/\nu(z) \leqslant (1 - \varepsilon_1) \lambda'(z)/\lambda(z). \tag{5.10}$$

Будем обозначать через Γ коническое (по ξ) множество в $R^n_x \times (R^n_\xi \setminus 0)$, а через π_x, π_ξ — естественные проекции на R^n_x и R^n_ξ, соответственно, причем $0 \in \pi_x(\Gamma)$. Обозначим также $\Gamma_0 = \Gamma \cap \{(x, \xi) | x \neq 0\}$.

Теорема 5. *Предположим, что в некотором открытом коническом множестве Γ для некоторой пары $(\hat{j}, \hat{k})$, $0 < \hat{k} < m$, $m - j - \hat{k} > 0$, для всех $(t, x, \xi) \in J \times \Gamma_0$ имеет место представление*

$$\sum_{|\alpha| = m - \hat{j} - \hat{k}} a_{\hat{j}, \alpha}(t, x) \xi^\alpha = \lambda^{m - \hat{j} - \hat{k}}(|x|) |\ln \lambda(|x|)|^{\hat{k}} \frac{b(t, x, \xi)}{\nu(|x|)} |\xi|^{m - j - \hat{k}} \tag{5.11}$$

с $\gamma = 1/(m - \hat{j} - \hat{k})$ и с функцией $b(t, x, \xi)$, удовлетворяющей при всех l, α, β и всех $(t, x, \xi) \in J \times \Gamma_0$ оценкам

$$|D_t^l D_\xi^\alpha D_x^\beta b(t, x, \xi)| \leqslant C_{l, \alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} (\lambda'(|x|)/\lambda(|x|))^{|\beta|}, \tag{5.12}$$

$$|b(t, x, \xi)| \text{ const} > 0 \tag{5.13}$$

и для которой существуют постоянные $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, $\varepsilon \in (0, \pi)$ такие, что

$$|\theta_0 - \arg(-b(t, x, \xi))| \leqslant \varepsilon \text{ при } (t, x, \xi) \in J \times \Gamma_0. \tag{5.14}$$

Пусть, далее, при тех же (t, x, ξ) комплексные корни $(m - \hat{j})$-ой степени из $-b(t, x, \xi)/|b(t, x, \xi)|$ обозначим их через $z_l(t, x, \xi)$

$(l=1,\cdots,m-\hat{j})$, *можно так пронумеровать и разбить на две группы* $|z_l|_{r+1}^{m-\hat{j}}$, $0\leqslant r<m-\hat{j}$, *что* $\operatorname{Im} z_{m-\hat{j}}\leqslant 0$ *и с некоторой постоянной* δ_1 *при всех* $(t, x, \xi)\in J\times\Gamma_0$

$$\min_{1\leqslant l\leqslant r}\operatorname{Im} z_l(t, x, \xi)\geqslant o(1),\qquad \min_{r+1<l<m-\hat{j}}|\operatorname{Im} z_l(t, x, \xi)|\geqslant\delta_1>0,$$

где величина $o(1)$ *может быть сделана сколь угодно малой за счет уменьшения* $\pi_x(\Gamma)$ *и сужения* $\pi_t(\Gamma)$. (*При* $r=0$ *первая группа пустая*).

Предположим также, что для остальных (j, k), $k=0,\cdots,m-1$, $m-j-k>0$, *при тех же* (t, x, ξ) *для любых* l, β, γ

$$|D_t^l D_x^\beta D_\xi^\gamma\sum_{|\alpha|=m-j-k}a_{l,\alpha}(t, x)\xi^\alpha|\leqslant C_{l,\gamma,\beta}\lambda^{m-j-\alpha-|\beta|}(|x|)\times$$

$$\times|\ln\lambda(|x|)|^k(\lambda'(|x|))^{|\beta|}\langle\xi\rangle^{m-l-k-|\gamma|}. \tag{5.15}$$

Тогда задача Коши (0.5), (0.6) *с* $s=0$ *не является корректно поставленной в окрестности точки* $(0, 0)$ *в смысле определения* 1 [11].

С другой стороны, как показывает следующая теорема (в которой $J=[-T, T]$) условия (0.14) являются достаточными для справедливости теоремы единственности, доказанной в нашей, совместной с А. А. Галстян работе [17].

Теорема 6. [17]. *Пусть условие* (A) *выполнено частично, а именно, справедливы* (0.8), (0.9), *а вместо* (0.10) *выполнено неравенство* $|\operatorname{Im}\tau_l(t, x, \xi)|\geqslant d\lambda(|x|)\langle\xi\rangle$, $d=\text{const}>0$, $(l=1,\cdots,m)$, *причем существуют* α_l, β_l $(l=1,\cdots,m',\ m'\leqslant m)$ *такие, что* $\beta_l-\alpha_l\leqslant\pi-\varepsilon$, $\varepsilon>0$, $[\alpha_l, \beta_l]\cap[\alpha_{l'}, \beta_{l'}]=\varnothing$, $l\neq k$, *и для любого* τ_l *найдется такой индекс* l, *что* $\arg\tau_l(t, x, \xi)\in[\alpha_l, \beta_l]$, $(t, x, \xi)\in J\times Z_h(N)$. *Тогда существуют открытые окрестности* V, V', $V'\subset V$, *начала координат в* R^{n+1} *такие, что если* $u\in C^\infty(V)$, $Lu=0$ *в* V *и* $\operatorname{supp} u\subset\{(t, x): t\geqslant 0\}$, *то* $u\equiv 0$ *в* V'.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 16.III.1988

Կ. Հ. ՅԱՂՋՅԱՆ. Կոշու խնդրի պարամետրիքսը ըստ տարածական փոփոխականների վերածվող հիպերբոլական օպերատորների համար (*ամփոփում*)

Հոդվածում ուսումնասիրված են օպերատորներ, որոնց գլխավոր սիմվոլի արմատները համընկնում են ժամանակի առանցքի վրա՝ ծածր կարգի ածանցյալների գործակիցների վրա պայմանները ձևակերպված են, ինչպես բացահայտ տեսքով, այնպես էլ լրիվ սիմվոլի արմատների միջոցով։ Պարամետրիքսի կառուցումը կատարվում է օպերատորի սիմվոլի որոշման տիրույթը երկու գոտիների տրոհման և համապատասխան ձևով որոշված պսևդոդիֆերենցիալ օպերատորների և ֆուրյեի ինտեգրալ օպերատորների որոշ դասերի օգնությամբ։ Նշված է, որ վերոհիշյալ պայմանները նաև անհրաժեշտ են Կոշու խնդրի C^∞-կորեկտության համար։

K. H. YAGDJIAN, *Parametrix for a Cauchy problem for a hyperbolic operators which degenerate with respect to the space variables* (summary)

The paper with the operators which have variable multiplicity characteristics which coincide on the time-axis. It is assumed that the coefficients satiafy some con-

ditions formulated in derms of the roots of the complete symbol of the operator. We construct the parametrix of the Cauchy problem by means of zonal subdivision of the cotangent bundle and of specific classes of pseudodifferential operators and Fourier integral operators. It is shown also that the conditions are necessary for the C^∞-well-posedness of the Cauchy problem. (Engl. transl. see Souviet J. of Contemporary Math, Anal., 1989, v. XYIV, n. 5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *E. E. Levi.* Caracteristiche multiple e problema di Cauchy, Ann. di. Matem., Ser. 3a, v. 16, 1909, 161—201.
2. *В. Я. Иврий, В. М. Петков.* Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений, УМН 29, вып. 5, 1974, 3—70.
3. *О. А. Олейник.* О гиперболических уравнениях второго порядка, вырождающихся внутри области и на ее границе. УМН, 24, вып. 2, 1969, 229—230.
4. *N. Iwasaki.* The Cauchy problem for hyperbolic equations with double characteristics, Publ. RIMS, Kyoto Univ., v. 19, № 3, 1983, 927—942.
5. Hyperbolic equations and related topics. Proc. of the Taniguchi Intern. Symp., Katata and Kyoto, 1984.
6. *В. Я. Иврий.* Линейные гиперболические уравнения. В кн.: «Линейные дифференциальные уравнения с частными производными-4», Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 33, 1988, 157—247.
7. *S. Tarama.* Sur le probleme de Cauchy pour un class des operateurs differentiels du type faiblement hyperbolique, Jour. Math. Kyoto Univ., v. 22, № 2, 1982 333—368.
8. *К. А. Ягджян.* Псевдодифференциальные операторы с параметром и фундаментальное решение задачи Коши для операторов с кратными характеристиками, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 21, № 4, 1986, 317—344 (Engl. transl.: Souviet J. Contemporary Math. Anal., v. 21. № 4, 1986, 1—30).
9. *K. Shinkai.* On the fundamental solution for a degenerate hyperbolic system, Osaka J. Math., v. 18, № 1, 1981, 257—288).
10. *H. Kumano-go.* A calculus of Fourier integral operaaors on R^n and the fundamental solution for an operator of hyperbolic type, Comm. Partial Diff. Equations, v. 1, № 1, 1976, 1—44.
11. *К. А. Ягджян.* Необходимые условия корректности задачи Коши для операторов с кратными характеристиками, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 23, № 5, 1988, 439—462 (Engl. transl.: Souviet J. Contemporary Math. Anal., v. 23, № 5, 1988).
12. *К. А. Ярджян.* Экспонента псевдодифференциального оператора и вырождающиеся уравнения. УМН, 42, вып. 4, 1987, 170.
13. *H. Urgu.* The Cauchy problem for weakly hyperbolic equations (II) Infinite degenerate case. Tokyo J. Math., v. 3, № 1, 1980, 99—113.
14. *T. Mandai.* Generalized Levi conditions for weacly hyperbolic equations-an attemt. to treat the degeneracy with respect to the space variables, Publ. RIMS, Kyoto Univ,, v. 22, № 1, 1986, 1—23.
15. *Y. Mortmoto.* Fundamental solutions for a hyperbolic equations with involutive characteristics of variable multiplicity, Comm. Partial Diff. Equations, v. 4, № 6, 1979, 609—643.
16. *C. Iwasaki, Y. Mortmoto.* Propagation of singularities of solutions for a hyperbolic system with nilpotent characteristics, I, II, Comm. Partial Diff. Equations-v. 7, № 7, 1982, 743—794, v. 9, № 15, 1984, 1407—1436.
17. *А. А. Галстян, К. А. Ягджян.* Единственность решения задачи Коши для вырождающихся эллиптических уравнений, УМН, 44, вып. 4, 1989, 175.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 5, 1989 Математика

УДК 517.95

В. Г. САГОЯН

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ РЕДЖЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИРАКА

Настоящая работа посвящена исследованию полноты системы собственных функций несамосопряженного оператора Дирака **B** с финитным (безмассовым) потенциалом, который порождается дифференциальным выражением

$$L\,y(x)=\left\{\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}\right\}y(x) \tag{1.1}$$

и граничными условиями

$$y_1(0)=0,\ y_2(b)+iy_1(b)=0.$$

Относительно коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ мы предполагаем, что они непрерывны на интервале $[0,\ a)$ и

$$p(x)=q(x)=0,\ x>a$$
$$p(a)\neq 0,\ q(a)\neq 0. \tag{1.2}$$

Оператор **B** действует в пространстве $L^2(0,\ b;\ \mathbf{C}^2)$, $b\geqslant a$. Собственные числа оператора **B** называются резонансами задачи Редже, а собственные функции—резонансными состояниями (см. [9]).

В работе доказывается, что система резонансных состояний задачи Редже полна (при $b=a$) в пространстве $L^2(0,\ a;\ \mathbf{C}^2)$(см. теорему 6). Исследована также совместная полнота собственных функций оператора **B** и его сопряженного. Доказано, что при $b\leqslant 2a$ системы собственных функций оператора **B** и его сопряженного совместно полны в $L^2(0,\ b;\ \mathbf{C}^2)$.

Решения вышепоставленных задач с помощью методов работ [1], [2] сводятся к исследованию аналитических свойств характеристической функции оператора **B**.

§ 1. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе приводятся вспомогательные сведения из спектральной теории самосопряженного оператора Дирака (см. [8]).

Рассмотрим самосопряженный дифференциальный оператор **L**, действующий в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbf{R}_+,\ \mathbf{C}^2)$, который порождается дифференциальным выражением (1.1) и следующим граничным условием

$$y_1(0)=0. \tag{1.3}$$

Обозначим через $f(x, \lambda)$ решение Йоста уравнения

$$(L - \lambda I)\, y(x) = 0. \tag{1.4}$$

Оно определяется из условия

$$f(x, \lambda) - f(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\lambda x}, \quad x \geqslant a. \tag{1.5}$$

Как известно, для решения $F(x, \lambda)$ имеется представление Левина

$$F(x, \lambda) = f(x, \lambda) + \int_x^{\infty} A(x, t) f(t, \lambda)\, dt. \tag{1.6}$$

Обозначим через $\varphi(x, \lambda)$ решение уравнения (1.4) с граничными значениями

$$\varphi_1(0, \lambda) = 0, \quad \varphi_2(0, \lambda) = 1. \tag{1.7}$$

Очевидно, что при действительных λ функции $F(x, \lambda)$ и $\overline{F(x, \lambda)}$ образуют линейно независимую систему решений уравнения (1.4). Легко проверить, что $\varphi(x, \lambda)$ выражается через их линейную комбинацию следующим образом:

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{2i} [F(x, \lambda) \overline{F_1(\lambda)} - \overline{F(x, \lambda)} F_1(\lambda)], \tag{1.8}$$

где $F_1(\lambda) = F_1(0, \lambda)$.

В верхней полуплоскости $Im\lambda > 0$ ядро резольвенты $\mathbf{R}_\lambda$ оператора $\mathbf{L}$ имеет вид

$$R_\lambda(x, t) = \begin{cases} F(x, \lambda) \overline{\varphi}(t, \lambda) F_1^{-1}(\lambda), & t < x, \\ \varphi(x, \lambda) \widetilde{F}(t, \lambda) F_1^{-1}(\lambda), & t > x. \end{cases} \tag{1.9}$$

Здесь $\widetilde{\varphi}(x, \lambda)$ и $\widetilde{F}(x, \lambda)$ — соответсвующие транспонированные векторы. Кроме того имеет место соотношение

$$\mathbf{R}_\lambda^* = \mathbf{R}_{\overline{\lambda}}. \tag{1.10}$$

У оператора L дискретный спектр отсутствует, непрерывный спектр заполняет всю вещественную ось. Для любой функции $f(x)$ из пространства $L^2(\mathbf{R}_+, \mathbf{C}^2)$ имеет место следующее разложение по собственным функциям непрерывного спектра оператора L:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \varphi(x, \lambda) \int_0^{\infty} \frac{\overline{\varphi}(t, \lambda)}{|F_1(\lambda)|^2} f(t)\, dt, \tag{1.11}$$

а также равенство Парсеваля

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{\varphi}(f, \lambda)|^2\, d\lambda, \tag{1.12}$$

где

$$\tilde{\varphi}(f, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{\varphi}(t, \lambda)}{F_1(\lambda)} f(t)\, dt.$$

Отметим, что в случае финитного потенциала решение $F(x, \lambda)$ при любом фиксированном x продолжается на всю комплексную плоскость λ как целая функция.

§ 2. Подход Лакса—Филлипса

Рассмотрим следующую задачу Коши

$$-i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix}, \quad u_1(0, t) = 0, \tag{2.1}$$

с начальными данными

$$\begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix}\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где пара $(u_1(x), u_2(x))$ принадлежит пространству $\mathbf{H} = L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^2)$, которые называют данными Коши.

Обозначим через V_t оператор эволюции задачи (2.1), (2.2), т. е. оператор, который переводит данные Коши $u(x, 0)$ в момент времени $t = 0$, в данные в момент времени t:

$$V_t u(x, 0) = u(x, t). \tag{2.3}$$

Согласно теореме Стоуна (см. [10], с. 292) самосопряженный оператор $\mathbf{L}$ порождает в пространстве $\mathbf{H}$ однопараметрическую сильно непрерывную группу унитарных операторов

$$U_t = \exp(i\mathbf{L}t), \quad U_{t+s} = U_t U_s, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Теорема 1. *Унитарный оператор U_t совпадает с оператором эволюции задачи* (2.1), (2.2).

Доказательство. Согласно теореме VIII. 7 книги [10] имеем $U_t \mathbf{D}(\mathbf{L}) \subset \mathbf{D}(\mathbf{L})$. Обозначим

$$u(t) = U_t u, \quad u \in \mathbf{H} \cap \mathbf{D}(\mathbf{L}). \tag{2.5}$$

Но тогда из формул (2.4) и (2.5) имеем

$$\frac{d}{dt} u(t) = i\mathbf{L}\, u(t).$$

Теорема доказана.

Обозначим через $\mathbf{D}_\pm$ следующие подмножества пространства $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{D}_\pm = \{u \in \mathbf{H} : \operatorname{supp} u_i(x) \subset [b, \infty),\ b \geqslant a,\ i = 1, 2;$$

$$u_2(x) = \mp i u_1(x)\}. \tag{2.6}$$

Мы покажем, что $\mathbf{D}_+$ и $\mathbf{D}_-$ являются соответственно уходящим и приходящим подпространствами (см. [1], с. 45) для унитарной группы U_t, $t \in \mathbb{R}$, т. е. обладают следующими свойствами:

$$1)\ U_{\pm t}\,\mathbf{D}_{\pm}\subset D_{\pm},\ t\geqslant 0;$$
$$2)\ \cap\, U_t D_{\pm}=|\varnothing|,\ t\in\mathbf{R}; \tag{2.7}$$
$$3)\ \cup\, U_t D_{\pm}=\mathbf{H},\ t\in\mathbf{R}.$$

Очевидно, что D_+ и D_- замкнуты и ортогональны в пространстве $\mathbf{H}$. Действительно, возьмем элементы f из D_+, и g из D_-, тогда имеем

$$\int_0^{\infty}(f,\ g)\,dx=\int_b^{\infty}\left(\begin{pmatrix} f(t)\\ -if(x)\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} g(x)\\ ig(x)\end{pmatrix}\right)dx=0.$$

Теперь, обращая внимание на формулу (1.3) и учитывая, что $U_t=e^{iLt}$ действует как оператор эволюции задачи (2.1), (2.2), получим что действие унитарного оператора U_t в подпространстве $D_+(D_-)$ совпадает с правым (левым) сдвигом:

$$U_t\begin{pmatrix} u(x)\\ -iu(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u(x-t)\\ -iu(x-t)\end{pmatrix}$$
$$u(x)=0,\ 0\leqslant x\leqslant b. \tag{2.8}$$
$$U_t\begin{pmatrix} u(x)\\ iu(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u(x+t)\\ iu(x+t)\end{pmatrix}.$$

Теперь соотношения 1) и 2) из формулы (2.7) для наших подпространств D_+, определенных формулой (2.6), являются элементарным следствием формулы (2.8). Выполнение условия 3) будет доказано ниже. Решение $u(x,\ t)=\begin{pmatrix} u(x-t)\\ -iu(x-t)\end{pmatrix}$, данные Коши которого принадлежат D_-, называется уходящей волной, решение $u(x,\ t)=\begin{pmatrix} u(x-t)\\ iu(x+t)\end{pmatrix}$, данные Коши которого принадлежат D_-, называется приходящей волной. Обозначим через $\mathbf{K}$ ортогональное дополнение суммы $D_+\oplus D_-$ в пространстве $\mathbf{H}$: $\mathbf{K}=\mathbf{H}\ominus(D_+\oplus\mathbf{D}_-)$. Оно называется трансляционно-инвариантным подпространством.

Лемма 1. *Подпространство* $\mathbf{K}$ *состоит из тех данных Коши, носители которых содержатся в отрезке* $[0,\ b]$:

$$\mathbf{K}=\{u(x):\operatorname{supp} u_i(x)\subset[0,\ b],\ i=1,\ 2\}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Возьмем скалярную функцию $f(x)$ такую, что $\operatorname{supp} f(x)\subset[b,\ \infty)$, тогда векторы $\begin{pmatrix} f(x)\\ 0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0\\ f(x)\end{pmatrix}$ принадлежат $D_+\oplus D_-$. Действительно,

$$\begin{pmatrix} f(x)\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} f(x)\\ -if(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} f(x)\\ if(x)\end{pmatrix}\right\},$$
$$\begin{pmatrix} 0\\ f(x)\end{pmatrix}=\frac{1}{2i}\left\{\begin{pmatrix} f(x)\\ if(x)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} f(x)\\ -if(x)\end{pmatrix}\right\}.$$

Следовательно, любой элемент из K ортогонален этим векторам. Отсюда немедленно следует (2.9). Лемма доказана.

Обозначим через $F_a(x, \lambda)$ решение Йоста (для точки a) уравнения (1.4), определенное следующим условием: $F_a(a, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Для точек $b \geqslant a$ решение Йоста определяется соотношением

$$F_b(x, \lambda) = e^{-i\lambda(b-a)} \cdot F_a(x, \lambda).$$

Ясно, что $F_{b1}(b, \lambda) = 1$, $F_{b2}(b, \lambda) = i$ и

$$F_b(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\lambda(x-b)}, \quad x \geqslant b.$$

Обозначим через $\varphi_-(x, \lambda)$ следующее решение задачи рассеяния:

$$\varphi_-(x, \lambda) = \frac{1}{2i}\left[F_b(x, \lambda) - e^{-2i\lambda b}\frac{F_1(\lambda)}{\overline{F_1(\lambda)}} \cdot \overline{F_b(x, \lambda)}\right].$$

Пусть $\mathbf{H}_0$ подмножество $\mathbf{H}$, состоящее из функций, имеющих финитные носители в $(0, \infty)$. Для вектор-функций из $\mathbf{H}_0$ определим следующую операцию:

$$\Gamma_- f(x) = \varphi_-(f, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varphi_-^*(t, \lambda) f(t)\, dt.$$

Теорема 2. *Операция Γ_- осуществляет изометрическое отображение $\mathbf{H}_0$ в $L^2(R)$, причем*

$$\Gamma_- D_- = H_-^2, \quad \Gamma_- D_+ = S_b(\lambda) H_+^2, \quad \Gamma_- U_t = e^{i\lambda t}\Gamma_-,$$

функция $S_b(\lambda)$ является внутренней в верхней полуплоскости и

$$\Gamma_- \mathbf{K} = H_+^2 \ominus S_b(\lambda) H_+^2.$$

Доказательство. Возьмем элемент $f(x) = \begin{pmatrix} g(x) \\ ig(x) \end{pmatrix}$ принадлежащий пересечению подпространства D_- с множеством $\mathbf{H}_0$. Имеем

$$\Gamma_- f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varphi_-^*(x, \lambda) f(x)\, dx = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \int_b^\infty g(x) e^{-i\lambda(x-b)}\, dx. \quad (2.10)$$

Отсюда, учитывая равенство Парсеваля (1.12) и унитарность преобразования Фурье в $L^2(R_+)$, имеем

$$\|\Gamma_- f\|_{L^2(R)}^2 = 2\|g\|_{L^2(R_+)}^2 = \|f\|_H^2.$$

Аналогичным образом, взяв элемнт $f(x) = \begin{pmatrix} g(x) \\ -ig(x) \end{pmatrix}$ из пересечения D_+ с $\mathbf{H}_0$, получим

$$\Gamma_- f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_b^\infty \varphi_-^*(x, \lambda) f(x)\, dx = \frac{-i}{\sqrt{\pi}} S_b(\lambda) \int_b^\infty g(x) e^{i\lambda(x-b)}\, dx,$$

где

$$S_b(\lambda) = e^{2i\lambda b}\frac{\overline{F_1(\lambda)}}{F_1(\lambda)}. \quad (2.11)$$

Заметим, что множество $\mathbf{H}_0$ плотно в $\mathbf{H}$, и изометрическое отображение Γ_- можно продолжать до унитарного оператора на все пространство $\mathbf{H}$, тогда с помощью теоремы Винера—Пели (см. [11]) из формул (2.10) и (2.11) немедленно следует

$$\Gamma_- D_- = H^2_-, \quad \Gamma_- D_+ = S_b(\lambda) H^2_+;$$

и, следовательно

$$\Gamma_- \mathbf{K} = \Gamma_- [H \ominus (D_+ \oplus D_-)] = H^2_- \ominus S_b(\lambda) H^2_+.$$

Вспоминая, что функции $\varphi_-(x, \lambda)$, $Im\lambda = 0$ являются собственными функциями непрерывного спектра оператора L, для любого элемента $f(x)$ из $\mathbf{H}_0$ имеем

$$(Lf, \varphi_-)_H = \lambda (f, \varphi_-)_H,$$

следовательно, в силу (2.4) имеем

$$\frac{d}{dt}(U_t f, \varphi_-)_H = i\lambda (f, \varphi_-)_H$$

или, учитывая, что $U_0 = I$, имеем

$$(U_t f, \varphi_-)_H = e^{i\lambda t} (f, \varphi_-)_H.$$

Отсюда и из условия $\overline{\mathbf{H}_0} = \mathbf{H}$ следует $\Gamma_- U_t = e^{i\lambda t} \Gamma_-$. Докажем внутренность функции $S_b(\lambda)$ в $\mathbf{C}_+$. Согласно (2.11) для нее имеем следующее выражение через решение Йоста:

$$S_b(\lambda) = e^{2i\lambda b} \cdot \frac{\overline{F_1(\lambda)}}{F_1(\lambda)} = e^{2i\lambda(b-a)} \cdot \frac{\overline{F_{a1}(\lambda)}}{F_{a1}(\lambda)}, \tag{2.12}$$

где $F_{a1}(\lambda) = e^{-i\lambda a} F_1(\lambda)$. Как видно из формулы (2.12), нам достаточно доказать, что отношение $S_a(\lambda) = \dfrac{\overline{F_{a1}(\lambda)}}{F_{a1}(\lambda)}$ является произведением Бляшке (сомножитель $e^{2i\lambda(b-a)}$ в $\mathbf{C}_-$ является сингулярной внутренней функцией). Имеем

$$S_a(\lambda) = \frac{e^{2i\lambda a} \left| 1 + \int_0^{2a} g(t) e^{-i\lambda t} dt \right|}{1 + \int_0^{2a} g(t) e^{i\lambda t} dt}, \tag{2.13}$$

где $g(t) = A_{11}(0, t) + iA_{12}(0, t)$. Функция $\Phi(\lambda) = \int_0^{2a} \overline{g(t)} e^{-i\lambda t} dt$ является целой и имеет экспоненциальный тип $2a$, поэтому в силу условия (1.2), из которого следует, что $g(2a) \neq 0$, имеем

$$\overline{\lim_{y \to +\infty}} \frac{\ln |\Phi(iy)|}{y} = 2a$$

и, следовательно

$$\lim_{y\to+\infty} e^{-2iy}\int_0^{2a}\overline{g(t)}\,e^{yt}\,dt = 1. \tag{2.14}$$

Теперь комбинируя формулы (2.13) и (2.14), получим

$$S_1(iy)\underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 1. \tag{2.15}$$

Формула (2.15) в комбинации с леммой 2 работы [2] доказывает, что функция $S_1(\lambda)$ является произведением Бляшке (см. [7])

$$S_{11}(\lambda) = \Pi(\lambda). \tag{2.16}$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Как известно (см. [1]) выполнение соотношения 3) из формулы (2.7) эквивалентно внутренности функции $S_b(\lambda)$. Таким образом, по ходу доказательства теоремы, мы доказали выполнение этого условия для наших подпространств $\mathbf{D}_\pm$.

Теорема 3. *На том же множестве* $\mathbf{H}_{11}$ *имеет место формула обращения*

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x)\end{pmatrix} \overset{\Gamma_-}{\longrightarrow} \varphi_-(f,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \varphi_-^*(t,\lambda)\,f(t)\,dt,$$

$$\varphi(\lambda) \overset{\Gamma_-^{-1}}{\longrightarrow} f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \varphi_-(x,\lambda)\,\varphi(\lambda)\,d\lambda.$$

Эта теорема является очевидным следствием теоремы разложения и равенства Парсеваля (см. формулы (1.11), (1.12)).

§ 3. Спектральный анализ полугруппы Z_t

Пусть P_K — ортопроектор в $\mathbf{H}$ на ортогональное дополнение к подпространству $D_+ \oplus D_-$. Обозначим

$$Z_t = P_K U_t|\mathbf{K},\ t \geqslant 0. \tag{3.1}$$

Имеет место следующая теорема (см. [1], с. 67).

Теорема. *Операторы* Z_t, $t \geqslant 0$ *образуют на подпространстве* $\mathbf{K}$ *сильно непрерывную полугруппу сжатий. Кроме того,* Z_t *сильно стремится к нулю при* $t \to +\infty$: *для любого* u *из* $\mathbf{K}$ $\lim\limits_{t\to+\infty} Z_t u = 0$.

Как следует из теоремы 2, для элементов u из $\mathbf{K}$ справедлива формула

$$\Gamma_- Z_t u = P_{K_s} e^{i\lambda t}\,\Gamma_- u,$$

из которой следует, что полугруппа Z_t, $t \geqslant 0$ унитарно эквивалентна полугруппе

$$P_{K_s} e^{i\lambda t}|K_s,\ t \geqslant 0,$$

где K_s означает подпространство в H_+^2: $K_s = H_+^2 \ominus S_b(\lambda) H_+^2$, а $S_b(\lambda)$ является внутренней функцией в $\mathbf{C}_+$. Функция $S_b(\lambda)$ называется характеристической функцией полугруппы Z_t, $t \geqslant 0$ и содержит в себе всю спектральную информацию об этой полугруппе.

Обозначим через B инфинитезимальный оператор (генератор) полугруппы Z_t, $t \geqslant 0$, тогда имеем

$$Z_t = e^{tB}, \quad t \geqslant 0. \tag{3.2}$$

Так как оператор B порождает сильно непрерывную полугруппу сжатий, то он является максимальным диссипативным оператором (см. теорему X. 48 [12], с. 267).

Теорема 4. *Оператор* B *прост, его областью определения является следующее множество*:

$$\mathbf{D}(\mathbf{B}) = \{f \in K: f' \in L^2(0, b; \mathbf{C}^2);\ f_1(0) = 0,\ f_2(b) = if_1(b)\}, \tag{3.3}$$

кроме того для f *из* $\mathbf{D}(\mathbf{B})$ *имеем* $\mathbf{B}f = Lf$.

Доказательство. Сначала докажем, что оператор B прост. Если бы это было не так, т. е. если бы у оператора B существовала нетривиальная самосопряженная часть, то тогда существовал бы ненулевой элемент f из K такой, что $Z_t f = U_t f$ для $t \geqslant 0$. Но тогда должно выполняться $U_t f \perp D_+$, $t > 0$ и, следовательно, $f \perp U_{-t} D_+$, $t > 0$. Но в силу соотношений (2.7) имеем $\mathbf{H} = \bigvee (U_{-t} D_+ : t > 0)$, следовательно, $f = 0$.

Так как оператор B является максимально диссипативным, то все точки λ нижней полуплоскости входят в его резольвентное множество, следовательно

$$D(\mathbf{B}) = R(\lambda, \mathbf{B})\,\mathbf{K}, \quad \operatorname{Im}\lambda < 0. \tag{3.4}$$

Для таких же точек λ имеется представление (см., например, [1], с. 242)

$$R(\lambda, \mathbf{B}) = \frac{1}{i} \int_0^\infty e^{i(\mathbf{B}-\lambda)t}\, dt. \tag{3.5}$$

Сопоставляя формулы (3.1), (3.2), (3.5), получим следующее соотношение между резольвентами операторов B и L:

$$P_K \mathbf{R}(\lambda, \mathbf{L})\, P_K = R(\lambda, \mathbf{B}). \tag{3.6}$$

Теперь, используя явный вид резольвенты оператора L (см. формулу (1.9)) и то обстоятельство, что в x-представлении оператором ортогонального проектирования на трансляционно-инвариантное подпространство K является оператор умножения на индикатор интервала $](0, b)$, легко установить явный вид резольвенты оператора B. Действительно, возьмем элемент $f(x)$ из K и обозначим $g(x) = R(\lambda, \mathbf{B}) f(x)$, тогда в силу (3.6) имеем

$$g(x) = P_K R(\lambda, \mathbf{L}) f(x) = \overline{F(x, \bar\lambda)}\ \overline{F_1(\bar\lambda)}^{-1} \int_0^x \tilde\varphi(t, \bar\lambda) f(t)\, dt\ +$$

$$+\varphi(x,\bar{\lambda})\,\overline{F_1(\bar{\lambda})}^{-1}\int_x^b \overline{F(t,\bar{\lambda})}\,f(t)\,dt. \qquad (3.7)$$

Из формулы (3.7) следует, что операторы **B** и **L** порождаются одним и тем же дифференциальным выражением, кроме того, из определения решения Йоста $F(x,\lambda)$ немедленно вытекает

$$g_1(0)=0, \text{ т. к. } \varphi_1(0,\lambda)=0;$$

$$g_2(b)=-ig_1(b), \text{ т. к. } \overline{F_1(b,\bar{\lambda})}=i\overline{F_2(b,\bar{\lambda})}.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. *Аналогичным образом можно доказать, что генератор сопряженной полугруппы* $-\mathbf{B}^*$ *имеет своей областью определения следующее множество*:

$$\{f\in K: f'\in L^2(0,b;\mathbf{C}^2),\ f_1(0)=0,\ f_2(b)=if_1(b)\}.$$

Как видно из формулы (3.7) ядро резольвенты оператора **B**

$$R(x,t;\lambda)=\begin{cases}\overline{F_1(\bar{\lambda})}^{-1}\,\overline{F(x,\bar{\lambda})}\,\overline{\varphi(t,\bar{\lambda})}, & t<x,\\ \overline{F_1(\bar{\lambda})}^{-1}\,\varphi(x,\bar{\lambda})\,\overline{F(t,\bar{\lambda})}^{-1}, & x<t\leqslant b\end{cases}\qquad \operatorname{Im}\lambda<0$$

аналитически продолжается на всю комплексную плоскость λ как мероморфная функция. Её особенности в верхней полуплоскости совпадают с нулями функции $\overline{F_1(\bar{\lambda})}$. Кроме того, резольвента $(\mathbf{B}-\lambda I)^{-1}$ является компактным оператором. Это также следует из явного вида резольвенты.

Теорема 5. *Спектр диссипативного оператора* **B** *состоит из объединения точки* ∞ *с множеством* $\sigma_d(\mathbf{B})=\{\lambda\in\mathbf{C}_+: S_b(\lambda)=0\}$, *которое составляет дискретный спектр оператора* **B**. *Собственные функции* $u_n(x)$, *отвечающие собственным числам* $\lambda_n\in\sigma_d(\mathbf{B})$, *являются проекциями йостовских решений на подпространство* **K**

$$u_n(x)=\overline{F_b(x,\bar{\lambda}_n)},\ \operatorname{Im}\lambda_n>0.$$

Доказательство. Дискретность спектра оператора **B** является следствием компактности резольвенты $(\mathbf{B}-\lambda I)^{-1}$ и общих теорем о полугруппах полуунитарных операторов (см. [1], с. 87). Принадлежность функций $u_n(x)$ к области определения оператора **B**, а также выполнение равенства $\mathbf{B}u_n(x)=\lambda_n u_n(x)$, следуют из определения (1.5) решения Йоста. Теорема доказана.

Аналогичное утверждение можно доказать для сопряженного оператора $\mathbf{B}^*$. Для его множества дискретного спектра имеем $\sigma_d(\mathbf{B}^*)=\overline{\sigma_d(\mathbf{B})}$, а собственные функции, соответсвующие собственным числам $\bar{\lambda}_n$, имеют вид $\overline{u_n(x)}=F_2(x,\bar{\lambda}_n)$.

§ 4. Полнота системы собственных функций

Как доказали в предыдущем параграфе для характеристической функции оператора **B** имеем выражение (см. формулы (2.12), (2.16))

$$S_b(\lambda) = e^{2i\lambda(b-a)} \cdot \Pi(\lambda) = \theta(\lambda) \cdot \Pi(\lambda). \tag{4.1}$$

Теорема 6. *Система резонансных состояний задачи Редже будет полной в пространстве* $L^2(0, b; \mathbf{C}^2)$ *тогда и только тогда, когда* $b = a$.

Доказательство. В формуле (4.1) приведена факторизация (см. [7]) внутренней в $\mathbf{C}_+$ функции $S_b(\lambda)$ на произведение сингулярной внутренней функции $\theta(\lambda)$ и произведения Бляшке $\Pi(\lambda)$. Согласно теореме Секефальви Надя—Фойаша (см. [6]), полнота системы собственных функций оператора **B** в трансляционно-инвариантном подпространстве $\mathbf{K} = L^2(0, b; \mathbf{C}^2)$ эквивалентна тому, что в факторизации (4.1) сингулярный сомножитель $\theta(\lambda)$ является тривиальным. Но, как видно из формулы (4.1), последнее утверждение имеет место тогда и только тогда, когда $b = a$. Теорема доказана.

Для приложений важное значение имеет исследование совместной полноты систем собственных функций полугрупп Z_t и Z_t^*. Говорят, что система собственных функций полугрупп Z_t и Z_t^* совместно полна в K, если из ортогональности элемента f из K всем собственным функциям Z_t и Z_t^* следует, что $f = 0$. Приступим к решению этой задачи.

Теорема 7. *Если* $a < b \leqslant 2a$, *то системы собственных функций оператора* **B** *и его сопряженного совместно полны в пространстве* $L^2(0, b; \mathbf{C}^2)$.

Доказательство. Ширина индикаторной диаграммы целой функции $\overline{F_{a1}(\lambda)}$ равна $2a$, в верхней полуплоскости ее можно факторизовать в виде произведения

$$\overline{F_{a1}(\lambda)} = e^{-ia\lambda} \cdot \Pi(\lambda)\, h(\lambda), \tag{4.2}$$

где $\Pi(\lambda)$ — произведение Бляшке, а $h(\lambda)$ — внешняя функция в C_+. Согласно формулам (2.12) и (2.16) имеем

$$\overline{F_{a1}(\lambda)} = \Pi(\lambda) \cdot F_{a1}(\lambda).$$

Теперь, сопоставляя последнюю формулу с формулой (4.2), получим: $h(\lambda) = e^{ia\lambda} \cdot F_{a1}(\lambda)$. Следовательно, имеем

$$\frac{\overline{h}(\lambda)}{h(\lambda)} = \frac{\overline{F_{a1}(\lambda)}}{F_{a1}(\lambda)} \cdot e^{-2ia\lambda} = \Pi(\lambda) \cdot e^{-2ia\lambda}. \tag{4.3}$$

Докажем, что функция $|h^2|\,\mathbf{R}$ удовлетворяет следующему условию Макенхоупта

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I |h|^2\, dx \right) \cdot \left(\frac{1}{|I|} \int_I |h|^{-2}\, dx \right) < +\infty, \tag{4.4}$$

где j — семейство всех интервалов на вещественной прямой. Действительно, функция Йоста $F_1(\lambda)$ самосопряженного оператора L на вещественной оси не обращается в нуль (в противном случае оператор L имел бы спектральные особенности, что исключено ввиду самосопряженности), с другой стороны из формулы $\overline{F_{a1}(\lambda)} = e^{i\lambda a}\,\overline{F_1(\lambda)}$ и представления Левина (1.6) имеем

$$|F_1(\lambda)| \leqslant 1 + \int_0^{2a} |g(t)|\,dt,\ \operatorname{Im}\lambda = 0.$$

Таким образом, на вещественной прямой для функции $|h|^2$ выполняется условие $0 < \gamma < |h|^2 < \Gamma < \infty$, из которого немедленно следует (4.4). Как известно (см. [3]), выполнение (4.4) равносильно тому, что функция $|h|^2 R$ удовлетворяет условию Хельсона—Сеге ($|h|^2 \in (\mathrm{HS})$). Теперь согласно теоремам 3 и 5 работы [3] (см. часть *I*), в силу формул (4.3) и (4.1), имеем, что при выполнении условия $0 \leqslant 2(b-a) \leqslant 2a$, т. е. $a \leqslant b \leqslant 2a$, системы собственных функций оператора **B** и его сопряженного совместно полны в пространстве $L^2(0, b; \mathbf{C}^2)$. Теорема доказана.

Замечание 3. Методы работы позволяют исследовать спектральные свойства операторов Дирака с общим диссипативным граничны условием на одном конце: $y_2(b) + hy_1(b) = 0$, $\operatorname{Im} h > 0$.

Отметим, что проблема Редже для «струны» (с соответствующей обратной задачей) решена в работе [4] (см. также [5] и для полярного оператора—в [3]. Решение обратной спектральной задачи для характеристической функции диссипативного оператора Шредингера приведено в работе [13], а для оператора Дирака—в [14].

В заключение автор приносит благодарность Б. С. Павлову за руководство работой.

Ереванский государственный
университет

Поступила 5. XII. 1986

Վ. Գ. ՍԱՂՈՅԱՆ *Ռեջեի խնդրի սեփական ֆունկցիաների լրիվության մասին Դիրակի օպերատորի համար (ամփոփում)։*

Աշխատանքում ուսումնասիրված են իրական ֆինիտ պոտենցիալով և կոմպլեքս եզրային պայմանով Դիրակի ոչ ինքնահամալուծ օպերատորի սեփական ֆունկցիաների լրիվության, ինչպես նաև այդ օպերատորի և նրա համալուծի սեփական ֆունկցիաների համատեղ լրիվության հարցերը։

V. G. SAGHOIAN. *On the completenes of the eigenfunctions of the Regge problem for the Dirac operator* (summary).

In the paper the completeness of the eigenfunctions of Regge problem for the Dirac operator with real finite potential and complex boundary condition is investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *П. Лакс, Р. Филлипс.* Теория рассеяния, М., «Мир», 1971.
2. *Б. С. Павлов.* О совместной полноте системы собственных функций сжатия и его сопряженного, Пробл. матем. физики, 5, 1971, 101—112.
3. *S. V. Hrusčev, N. K. Nikolskii, B. S. Pavlov.* Unconditional bases of exponentials and of reproducing kernels, Lecture Notes in Math., Springer—Verlag 864, 1981, 214 - 335.
4. *S. V. Hrusčev.* The Regge problem for strings, unconditionally convergent eigenfunction expansions, and unconditional bases of exponentials in $L^2(-T, T)$, J. Operator Theory, Bucharest, 14, 1985, 67—85.
5. *М. Г. Крейн, А. А. Нудельман.* О прямых и обратных задачах для частот граничной диссипации неоднородной струны, ДАН СССР, 247, № 5, 1979, 1046—1049.
6. *Б. С.-Надь, Ч. Фойаш.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, М., «Мир», 1970.
7. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., «Мир», 1963.
8. *М. Г. Гасымов.* Обратная задача теории рассеяния для системы уравнений Дирака порядка $2n$, Тр. Моск. матем. о-ва, 19, 1968, 41—112.
9. *T. Regge.* Construction of potentials from resonance parameters, Nuovo Cimento, 9, 1958, 491—503.
10. *М. Рид, Б. Саймон.* Методы современной математической физики, т. 1, М., «Мир», 1977.
11. *Н. Винер, Р. Пэли.* Преобразование Фурье в комплексной области, М., «Мир», 1964.
12. *М. Рид, Б. Саймон.* Методы современной математической физики, т. 2, М., «Мир», 1978.
13. *S. V. Hrusčev.* Spectral Singularities of Dissipative Schrodinger Operators with Rapidly Decreasing Potential, Indiana University Mathematics Journal, 33, № 4, 1984, 613—636.
14. *В. Г. Сагоян.* Описание множества нулей хатактеристической функции диссипативного оператора Дирака, Вестник ЛГУ, 19, 1983, 108—111.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 5, 1989 Математика

УДК 519.248

М. Р. МАРТИРОСЯН

О НЕФИНИТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ГАУССОВСКИХ ГИББСОВСКИХ ПОЛЕЙ

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматриваются гиббсовские поля на ν-мерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^\nu$, являющиеся малыми нефинитными возмущениями гауссовского гиббсовского поля. Потенциал возмущения имеет вид

$$U(x)=\sum_{A\subset\mathbb{Z}^\nu} U_A(x),\ A-\text{конечно},\ x\in(\mathbf{R}^k)^{\mathbb{Z}^\nu}.$$

Задача данной работы состоит в нахождении достаточных условий на скорость убывания величин $U_A=\sup_{x_A\in X^A}|U_A(x_A)|$ с ростом $|A|$ — числа точек множества A, при которых свободная энергия существует и аналитически зависит от всех параметров, от которых аналитически зависит потенциал U, что, в частности, является критерием отсутствия фазовых переходов.

Финитные возмущения гауссовских полей (т. е. возмущения, удовлетворяющие для некоторого $R>0$ условию $U_A\equiv 0$ при $|A|>R$) изучались ранее при помощи техники кластерных разложений (см. [1] и указанную там литературу).

В настоящей статье использован другой подход, связанный с индуктивными оценками статистических сумм, который был впервые предложен Добрушиным в [2] и развит им впоследствии в работах [3]—[5]. В частности, в [4] доказана аналитичность свободной энергии для случая финитных неограниченных возмущений гауссовского поля.

Оценки на скорость убывания $\|U_A\|$ аналогичны оценкам, полученным ранее тем же методом для случая моделей с компактным спином (см. [5]).

§ 2. Гауссовские гиббсовские поля

Ниже будут приведены основные сведения о гауссовских гиббсовских полях, которые нам понадобятся в дальнейшем. В изложении этих сведений мы будем следовать определениям работ [4] и [6]. Результаты, приводимые без доказательств, также заимствованы из этих работ.

Пусть $\mathbf{Z}^\nu$ — ν-мерная целочисленная решетка с метрикой $|t^{(1)} - t^{(2)}| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant \nu} |t_j^{(1)} - t_j^{(2)}|$, $t^{(i)} = (t_1^{(i)}, \cdots, t_\nu^{(i)}) \in \mathbf{Z}^\nu$, $i = 1, 2$. Для произвольного $A \subset \mathbf{Z}^\nu$ будем обозначать $\mathbf{C}(A) = \{B \subset \mathbf{Z}^\nu : B \cap A \neq \varnothing, |B| < \infty\}$ (здесь $|B|$ — число точек множества B). Пусть $\mathbf{R}^k$ — k-мерное линейное пространство со скалярным произведением $(x^{(1)}, x^{(2)}) = \sum\limits_{j=1}^{k} x_j^{(1)} x_j^{(2)}$, $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \cdots, x_k^{(j)})$, $j = 1, 2$ и нормой $|x| = (x, x)^{1/2}$, $x \in \mathbf{R}^k$. Элементы множества $(\mathbf{R}^k)^\Lambda$, $\Lambda \subset \mathbf{Z}^\nu$ будем называть конфигурациями (на Λ). Сужение конфигурации $x \in (\mathbf{R}^k)^\Lambda$ на множество $A \subset \Lambda$ будем обозначать через x_Λ, а под $x_{A_1} \cup x_{A_2}$ будем понимать конфигурацию $x \in (\mathbf{R}^k)^{A_1 \cup A_2}$, сужение которой на A_i, $i = 1, 2$ совпадает с x_{A_i}.

Гауссовское (k-мерное) гиббсовское поле в объеме Λ (под объемом здесь и далее мы будем понимать произвольное конечное подмножество решетки $\mathbf{Z}^\nu$) задается при помощи теплицевой $k|\Lambda| \times k|\Lambda|$ матрицы Φ^Λ, $k \times k$-блоки которой суть положительно определенные симметричные матрицы $\Phi_{s,t}^\Lambda = \Phi_{s-t}^\Lambda = \Phi_{t-s}^\Lambda$, $s, t \in \Lambda$, относительно которых мы будем предполагать, что $\Phi_{s,t}^\Lambda \equiv 0$ при $|s - t| > r$, где r — некоторое фиксированное число (радиус взаимодействия) и, помимо этого, будем считать выполненным условие

$$Q^{-1} \|x_\Lambda\|^2 \leqslant \sum_{s,\, t \in \Lambda} (\Phi_{s,t}^\Lambda x_s, x_t) \leqslant Q \|x_\Lambda\|^2, \tag{2.1}$$

где $\|x_\Lambda\|^2 = \sum\limits_{t \in \Lambda} |x_t|^2$ и Q — некоторое фиксированное число, $1 \leqslant Q < \infty$ (существенное предположение здесь составляет, очевидно, лишь левое из неравенств (2.1), представляющее собой так называемое условие „положительности массы“). Введем также следующие стандартные обозначения: $\Lambda^c = \mathbf{Z}^\nu \setminus \Lambda$ и для $\Lambda \in \mathbf{C}(\mathbf{Z}^\nu)$

$$\partial\Lambda = \{t \overline{\in} \Lambda : \operatorname{dist}(t, \Lambda) \leqslant r\},$$

где r — радиус взаимодействия и $\operatorname{dist}(t, \Lambda) = \min\limits_{s \in \Lambda} |t - s|$. Для произвольных $\Lambda \in \mathbf{C}(\mathbf{Z}^\nu)$ и конфигурации $\tau \in (\mathbf{R}^k)^{\partial\Lambda}$ (которую мы будем называть граничным условием для Λ) плотность гауссовского распределения вероятностей в объеме Λ задается формулой

$$P_\tau^\Lambda(x_\Lambda) = [Z_\Lambda(\Phi^\Lambda, \tau)]^{-1} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{s,\, t \in \Lambda} (\Phi_{s-t}^\Lambda x_s, x_t) - \right.$$

$$\left. - \sum_{s \in \Lambda,\ u \in \partial\Lambda} (\Phi_{s-u}^\Lambda x_s, \tau_u)\right\}, \tag{2.2}$$

где статистическая сумма

$$Z_\Lambda(\Phi_\tau^\Lambda, \tau) = \int\limits_{(\mathbf{R}^k)^\Lambda} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{s,\, t \in \Lambda} (\Phi_{s-t}^\Lambda x_s, x_t) - \right.$$

$$- \sum_{s\in\Lambda,\ u\in\partial\Lambda} (\Phi^{\Lambda}_{s-u}\ x_s,\ \tau_u)\Big\}. \tag{2.3}$$

При этом известно, что плотность P^{Λ}_{τ} представима в виде

$$P^{\Lambda}_{\tau}(x_\Lambda) = [(2\pi)^{k|\Lambda|} \det B^{\Lambda}]^{-\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{s,\ t\in\Lambda} (\Phi^{\Lambda}_{s,t}(x_s - \bar{x}_s(\tau)),\ x_t - \bar{x}_t(\tau))\right\}, \tag{2.4}$$

где $\bar{x}^{\Lambda,\tau}$ — вектор среднего значения и матрица ковариаций $B^{\Lambda} = \|b^{\Lambda}_{s,t},\ s,\ t\in\Lambda\|$ обратна к матрице Φ^{Λ}. Если $\Lambda'\subset\Lambda$ и $\tau\in(\mathbf{R}^k)^{\partial\Lambda}$, то проекция плотности P^{Λ}_{τ} на $(\mathbf{R}^k)^{\Lambda'}$ есть

$$P^{\Lambda,\Lambda'}_{\tau}(x_{\Lambda'}) = \int\limits_{(\mathbf{R}^k)^{\Lambda\setminus\Lambda'}} P^{\Lambda}_{\tau}(x)\,dx_{\Lambda\setminus\Lambda'} =$$

$$= [(2\pi)^{k|\Lambda'|} \det B^{\Lambda,\Lambda'}]^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{s,\ t\in\Lambda'} \times\right.$$

$$\left. \times (\Phi^{\Lambda,\Lambda'}_{s,t}(x_s - \bar{x}_s(\tau)),\ x_t - \bar{x}_t(\tau))\right\}, \tag{2.5}$$

где $B^{\Lambda,\Lambda'} = \|b^{\Lambda}_{s,t},\ s,\ t\in\Lambda'\| - \Lambda'\times\Lambda'$ — подматрица матрицы B^{Λ}, а матрица $\Phi^{\Lambda,\Lambda'}$ обратна к $B^{\Lambda,\Lambda'}$. Вектор среднего значения выражается линейно через граничное условие, т. е. существуют $k\times k$-матрицы $a^{\Lambda}_{s,t}$, $s\in\Lambda$, $t\in\partial\Lambda$ такие, что

$$\bar{x}_s(\tau) = \sum_{t\in\partial\Lambda} a^{\Lambda}_{s,t}\tau_t,\ s\in\Lambda \tag{2.6}$$

и, кроме того, существуют положительные константы A_0, a_0, Φ_0, φ_0 и B_0 (зависящие лишь от основных характеристик поля ν, k, r и Q) такие, что для произвольных $\Lambda'\subset\Lambda\in\mathbf{C}(\mathbf{Z}^\nu)$

$$\|a^{\Lambda}_{s,t}\| \leqslant A_0 \exp\{-a_0|s-t|\},\ s\in\Lambda,\ t\in\partial\Lambda, \tag{2.7}$$

$$\|\Phi^{\Lambda,\Lambda'}_{s,t}\| \leqslant \Phi_0 \exp|-\varphi_0|s-t||,\ s,\ t\in\Lambda', \tag{2.8}$$

$$B_0^{-1}|x_{\Lambda'}|^2 \leqslant \sum_{s,\ t\in\Lambda'} (b^{\Lambda}_{s,t}\ x_s,\ x_t) \leqslant B_0|x_{\Lambda'}|^2, \tag{2.9}$$

где для произвольной $k\times k$-матрицы $A = \|a_{ij}\|$ мы считаем $\|A\| = (\sum_{i,j}|a_{ij}|^2)^{1/2}$ (отметим, что так определенная матричная норма согласована с уже введенной вектор-нормой, т. е. $\|Ax\| \leqslant \|A\|\cdot\|x\|$). Наконец, известно, что при $\Lambda'\subset\Lambda$ и $\tau_{\Lambda'}\in(\mathbf{R}^k)^{\Lambda'}$

$$\int\limits_{(\mathbf{R}^k)^{\Lambda'}} \prod_{s\in\Lambda'} \exp\{(\sigma_s,\ x_s - \bar{x}_s(\tau))\}\ P^{\Lambda,\Lambda'}_{\tau}(x_{\Lambda'})\,dx_{\Lambda'} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{u,\ v\in\Lambda'} (b^{\Lambda}_{u,v}\sigma_u,\ \sigma_v)\right\}. \tag{2.10}$$

Докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 2.1. Пусть $W \subset V \subset \Lambda \in \mathbf{C}(Z^k)$. *Обозначим*

$$T_V^{\Lambda} = \{\tau \in (\mathbf{R}^k)^{\partial V} : \tau_{\partial V \cap \Lambda^c} = 0\}. \tag{2.11}$$

Пусть $\tau \in T_V^{\Lambda}$ *и*

$$\varphi_W(x,\ V,\ \tau) = \varphi_W(x) = \prod_{s \in W} (1 + \alpha_s \exp\{|x_s - \bar{x}_s(\tau)|\}), \tag{2.12}$$

где все $\alpha_s > 0$. *Тогда существует константа* h_0 *(зависящая лишь от* ν, k, r *и* Q *такая, что*

$$\int_{(\mathbf{R}^k)^W} \varphi_W(x_W)\, P_{\tau}^{V,\ W}(x_W)\, dx_W \leqslant \prod_{s \in W} (1 + \alpha_s e^{h_0}). \tag{2.13}$$

Доказательство. Пусть $W' \subset W$ и $S(W') \subset (\mathbf{R}^k)^{W'}$ — множество всех векторов с координатами ± 1. Воспользуемся формулой (2.10), взяв в качестве $\sigma_{W'}$ произвольный вектор $S(W')$. В силу (2.9) имеем

$$\int_{(\mathbf{R}^k)^{W'}} \exp\Big\{\sum_{s \in W'} (\sigma_s,\ x_s - \bar{x}_s(\tau))\Big\}\, P_{\tau}^{V,\ W'}(x_{W'})\, dx_{W'} =$$

$$= \exp\Big\{\frac{1}{2} \sum_{s,\ s' \in W'} (b_{s,s'}^V \sigma_s,\ \sigma_{s'})\Big\} \leqslant \exp\Big\{\frac{B_0}{2} k\, |W'|\Big\},$$

т. к. ясно, что $\|\sigma_{W'}\|^2 = k\,|W'|$ для всех $\sigma_{W'} \in S(W')$. Поскольку $S(W') = 2^{k|W'|}$ и $\|x\| \leqslant |x_1| + \cdots + |x_k|$, $x = (x_1, \cdots, x_k) \in \mathbf{R}^k$, то отсюда

$$\int_{(\mathbf{R}^k)^{W'}} \exp\Big\{\sum_{u \in W'} |x_u - \bar{x}_u(\tau)|\Big\}\, P_{\tau}^{V,\ W'}(x_{W'})\, dx_{W'} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\sigma \in S(W')} \int_{(\mathbf{R}^k)^{W'}} \exp\Big|\sum_{s \in W'} (\sigma_s,\ x_s - \bar{x}_s(\tau))\Big|\, P_{\tau}^{V,\ W'}(x_{W'})\, dx_{W'} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{k|W'|} \exp\Big\{\frac{B_0}{2} k\, |W'|\Big\} = e^{h_0 |W'|}, \tag{2.14}$$

где $h_0 = k\left[\ln 2 + \dfrac{B_0}{2}\right]$. Остается заметить, что

$$\int_{(\mathbf{R}^k)^W} \varphi_W(x)\, P_{\tau}^{V,\ W}(x)\, dx = 1 +$$

$$+ \sum_{W' \subset W} \prod_{s \in W'} \alpha_s \int_{(\mathbf{R}^k)^{W'}} \exp\Big\{\sum_{u \in W'} |x_u - \bar{x}_u(\tau)|\Big\}\, P_{\tau}^{W',\ V}(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \sum_{W' \subset W} \prod_{s \in W'} \alpha_s e^{h_0} = \prod_{s \in W} (1 + \alpha_s e^{h_0}),$$

что и требовалось.

Лемма 2.2. Пусть $V \subset \Lambda$, $t \in \partial V \cap \Lambda$ *и граничные условия* τ^1, $\tau^2 \in T_V^{\Lambda}$ *таковы, что* $\tau_s^1 = \tau_s^2$ *при* $s \neq t$. *Для произвольного* $l > 0$ *обозначим*

$$V_l = \{s \in V : |s - t_i| > l\}, \quad \Gamma_l = \partial V_l \cap V. \tag{2.15}$$

Пусть далее $P_l^i(x) = P_{\cdot i}^{V, \Gamma_l}(x)$, $i = 1, 2$ *(см. (2.5))— суть проекции плотностей* $P_{\cdot i}^{V}$ *на* Γ_l. *Обозначим коротко* $\bar{x}_s^l = \bar{x}_s(\cdot^l)$, $i = 1, 2$. *Как и в (2.12) для произвольных* $a_s > 0$, $s \in \Gamma_l$ *пусть*

$$\varphi_l(x) = \varphi_{\Gamma_l}(x, V, \cdot^2) = \prod_{s \in \Gamma_l} (1 + a_s \exp\{|x_s - \bar{x}_s^2|\}). \tag{2.16}$$

Пусть далее

$$J_l = \int_{(\mathbb{R}^k)^{\Gamma_l}} (\varphi_l(x) - 1)\, |P_l^1(x) - P_l^2(x)|\, dx, \tag{2.17}$$

$$J_l^i = \int_{(\mathbb{R}^k)^{\Gamma_l}} (\varphi_l(x) - 1)\, P_l^i(x)\, dx, \quad i = 1, 2. \tag{2.18}$$

Тогда существуют положительные константы $\bar{a}$ *и* H *(зависящие лишь от* ν, k, r *и* Q*) такие, что при*

$$l \geqslant H \max\{|\ln(|\tau_l^1 - \tau_l^2|)|, 1\} \tag{2.19}$$

справедливы следующие два утверждения:

1) *если* $a_s \leqslant 1$, $s \in \Gamma_l$, *то*

$$J_l^i \leqslant \frac{1}{|\Gamma_l|} \sum_{s \in \Gamma_l} a_s \exp\{l^\nu\}, \tag{2.20}$$

2) *существует функция* $a(l)$ *такая, что при* $a_s \leqslant a(l)$, $s \in \Gamma$

$$I_l \leqslant \frac{1}{|\Gamma_l|} \sum_{s \in \Gamma_l} a_s \exp\{-\bar{a} l\}. \tag{2.21}$$

Доказательство. Для доказательства оценки (2.20) воспользуемся леммой 2.1 и простым неравенством

$$\left|\prod_{l=1}^{n} (1 + z_l) - 1\right| \leqslant \sum_{l=1}^{n} |z_l| \exp\left(\sum_{l=1}^{n} |z_l|\right), \tag{2.22}$$

справедливым для любых (вообще говоря, комплексных) чисел z_i, $i = 1, \cdots, n$. Тогда из (2.18) и (2.13) следует существование константы K (зависящей лишь от ν, k, r и Q) такой, что

$$J_l^i \leqslant \prod_{s \in \Gamma_l} (1 + a_s e^{h_0}) - 1 \leqslant \exp\left\{h_0 + e^{h_0} \sum_{s \in \Gamma_l} a_s + \ln |\Gamma_l|\right\} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{|\Gamma_l|} \sum_{s \in \Gamma_l} a_s \leqslant \exp\{K l^{\nu - 1}\} \cdot \frac{1}{|\Gamma_l|} \sum_{s \in \Gamma_l} a_s,$$

так что, считая $H \geqslant K$ приходим к оценке (2.20).

Перейдем к доказательству оценки (2.21). Согласно (2.5) гуссовские плотности $P_l^i(x) = P_{\cdot i}^{V, \Gamma_l}(x)$, $i = 1, 2$ имеют средние значения

$\{\bar{x}_s^1 = \bar{x}_s(\tau^1),\ s \in \Gamma_l\}$ и одинаковую матрицу ковариаций $B^{V,\Gamma_l} = \{b_{u,v},\ u, v \in \Gamma_l\}$. Положим

$$\Delta_l = \max_{s \in \Gamma_l} |\bar{x}_s^1 - \bar{x}_s^2|. \tag{2.23}$$

В силу (2.6), (2.7) и условия $\tau_s^1 = \tau_s^2$ при $s \neq l$

$$\Delta_l = \max_{s \in \Gamma_l} \|a_{s,l}^{\Lambda}(\tau_l^1 - \tau_l^2)\| \leqslant \max_{s \in \Gamma_l} A_0 \|\tau_l^1 - \tau_l^2\| \exp\{-a_0|s-l|\} \leqslant$$

$$\leqslant A_0' \|\tau_l^1 - \tau_l^2\| \exp\{-a_0 l\},$$

где $A_0' = A_0 \exp\left\{-\frac{a_0}{2} l\right\}$. Отсюда, считая, что $H > \frac{2}{a_0}$ получаем, что при выполнении условия (2.19)

$$\Delta_l \leqslant A_0' \exp\left\{-\frac{a_0}{2} l\right\}. \tag{2.24}$$

Заметим, что оценку (2.21) достаточно доказать лишь для больших l, поскольку имеется свобода выбора H в (2.19). В частности, на основании (2.24) можно считать, что

$$\Delta_l < 1. \tag{2.25}$$

Поэтому

$$\varphi_l(x) \leqslant \prod_{s \in \Gamma_l} \left(1 + a_s \exp\left\{|x_s'| + \frac{1}{2}\right\}\right), \tag{2.26}$$

где

$$x_s' = x_s - \frac{1}{2}(\bar{x}_s^1 + \bar{x}_s^2) \quad s \in \Gamma_l. \tag{2.27}$$

Пусть

$$\alpha(l) = \exp\{-l^{\gamma}\} \tag{2.28}$$

и числа $\bar{\alpha}$, L, M выбраны следующим образом:

$$2\bar{\alpha} < L = \frac{a_0}{4} l,\ M = \ln\left[\left(\sum_{s \in \Gamma_l} a_s\right)^{-1}\right] \tag{2.29}$$

(условие (2.28) позволяет считать, что $L < M$). Оценку интеграла (2.17) проведем раздельно по следующим трем областям:

$$S_1(l) = \{x \in (\mathbf{R}^k)^{\Gamma_l} : \max_{s \in \Gamma_l} |x_s'| < L\}, \tag{2.30а}$$

$$S_2(l) = \{x \in (\mathbf{R}^k)^{\Gamma_l} : L \leqslant \max_{s \in \Gamma_l} |x_s'| \leqslant M\}, \tag{2.30б}$$

$$S_3(l) = (\mathbf{R}^k)^{\Gamma_l} \setminus \{S_1(l) \cup S_2(l)\}. \tag{2.30в}$$

Обозначим

$$I_j(l) = \int_{S_j(l)} (\varphi_l(x) - 1)\,|P_l^1(x) - P_l^2(x)|\,dx,\ j = 1, 2, 3. \tag{2.31}$$

Оценим сначала интеграл $I_1(l)$. Согласно (2.5)

$$P_l^1(x)/P_l^2(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{u,\,v\in\Gamma_l}\left[(\Phi_{u,\,v}^{V,\,\Gamma_l}(x_u-\bar{x}_u^1),\ x_v-\bar{x}_v^1)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(\Phi_{u,\,v}^{V,\,\Gamma_l}(x_u-\bar{x}_u^2),\ x_v-\bar{x}_v^2)\right]\right\}.$$

Переходя к переменным x_s', $s\in\Gamma_l$ (см. (2.27)) несложными преобразованиями получаем отсюда, что

$$\frac{P_l^1(x)}{P_l^2(x)} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{u,\,v\in\Gamma_l}\left[(\Phi_{u,\,v}^{V,\,\Gamma_l}x_u',\ \bar{x}_v^1-\bar{x}_v^2)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(\Phi_{u,\,v}^{V,\,\Gamma_l}(\bar{x}_u^1-\bar{x}_u^2),\ x_v')\right]\right\}$$

откуда, используя оценку (2.8), определение (2.23) и условие (2.30а) находим, что в области S_1

$$P_l^1(x)/P_l^2(x) \leqslant \exp|\Phi_0 L\,\Delta_l|\Gamma_l|^2|. \tag{2.32}$$

Поскольку, в силу (2.29) и (2.24) $\Phi_0 L\,\Delta_l|\Gamma_l|^2 = o(1)$, то из (2.32), аналогичной оценки для $P_l^2(x)/P_l^1(x)$ и неравенства $|e^x-1|\leqslant e|x|$, справедливого при $|x|\leqslant 1$, заключаем, что

$$\int\limits_{S_1(l)}|P_l^1(x)-P_l^2(x)|\,dx = \int\limits_{S_1(l)}P_l^2(x)\left|\frac{P_l^1(x)}{P_l^2(x)}-1\right|dx \leqslant$$

$$\leqslant e\,\Phi_0 L\,\Delta_l|\Gamma_l|^2, \tag{2.33}$$

когда l достаточно велико. Далее из определений (2.29), (2.30а) и (2.30б) следует, что

$$\sum_{s\in\Gamma_l}a_s\exp|x_s'| \leqslant 1,\quad x\in S_1(l)\cup S_2(l).$$

Поэтому, в силу (2.26) и (2.22)

$$\varphi_l(x)-1 \leqslant \sum_{s\in\Gamma_l}a_s\exp\left\{|x_s'|+\frac{1}{2}\right\}\exp\left\{\sum_{s\in\Gamma_l}a_s\exp\left\{|x_s'|+\frac{1}{2}\right\}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant K_{(2.34)}\cdot\sum_{s\in\Gamma_l}a_s\exp(|x_s'|),\quad x\in S_1(l)\cup S_2(l). \tag{2.34}$$

Оценки (2.33), (2.34) вместе с определениями (2.30а) и (2.31) позволяют заключить, что

$$I_1(l) \leqslant K_{(2.34)}\cdot e\,\Phi_0 L\,\Delta_l|\Gamma_l|^2\,e^L\sum_{s\in\Gamma_l}a_s,$$

откуда, в силу оценки (2.24) и выбора чисел $\bar{a}$ и L (см. (2.29)) находим, что

$$I_1(l) = o(e^{-\bar{a}l})\frac{1}{|\Gamma_l|}\sum_{s\in\Gamma_l}a_s. \tag{2.35}$$

Перейдем к оценке интеграла $I_2(l)$. На основании (2.34) и (2.29) имеем, что для $x\in S_2(l)$

$$\varphi_l(x) - 1 \leqslant K_{(2.34)} \cdot \sum_{s \in \Gamma_l} (\alpha_s e^{L} + \alpha_s \chi_s(x) \exp(|x_s'|)),$$

где $\chi_s(x)$ — индикатор множества $E_s = \{x \in \mathbf{R}^k)^{\Gamma_l} : |x_s'| \geqslant L\}$. Поэтому

$$I_2(l) \leqslant K_{(2.34)} \sum_{s \in \Gamma_l} \left\{ \alpha_s \sum_{i=1,2} \left| e^{L} \int_{S_2(l)} P_l^i(x)\, dx + \int_{E_s} \exp(|x_s'|)\, P_l^i(x)\, dx \right| \right\}. \tag{2.36}$$

Пусть $P_{l,s}^i(x_s')$, $s \in \Gamma_l$, $i = 1, 2$ — плотность распределения вероятностей для x_s', индуцируемая плотностью $P_l^i(x)$. Ясно, что в таком случае $P_{l,s}^1(x_s')$ (соответственно $P_{l,s}^2(x_s')$) — гауссовская плотность распределения вероятностей со средним значением $m_s^1 = \bar{x}_s^1 - \frac{1}{2}(\bar{x}_s^1 + \bar{x}_s^2) = \frac{1}{2}(\bar{x}_s^1 - \bar{x}_s^2)$ (соответственно $m_s^2 = \frac{1}{2}(\bar{x}_s^2 - \bar{x}_s^1)$). При этом согласно (2.23) $m_s^1 \leqslant \frac{1}{2}\Delta_l$, $m_s^2 \leqslant \frac{1}{2}\Delta_l$ и обе плотности имеют равномерно ограниченные (по l) ковариации (см. (2.2)). Вследствие этого

$$\int_{E_s} \exp(|x_s'|)\, P_l^i(x)\, dx = \int_{\{|x_s'| > L\}} \exp(|x_s'|)\, P_{l,s}^i(x_s')\, dx_s' \leqslant K_{(2.37)}\, e^{-L}, \tag{2.37}$$

где константа $K_{(2.37)}$ зависит лишь от ν, k, r и Q. Кроме того из определения области $S_2(l)$ и известных свойств гауссовского поля

$$\int_{S_2(l)} P_l^i(x)\, dx \leqslant \sum_{s \in \Gamma_l} \int_{\{|x_s'| > L\}} P_{l,s}^i(x_s')\, dx_s' \leqslant K_{(2.38)} |\Gamma_l|\, e^{-\bar{K}_{(2.38)} \cdot L^2}, \tag{2.38}$$

где константы $K_{(2.38)}$, $\bar{K}_{(2.38)}$ зависят лишь от характеристик ν, k, r и Q. Подставляя оценки (2.37) и (2.38) в (2.36), а также используя (2.29), получаем, что

$$I_2(l) \leqslant 2 K_{(2.34)} \sum_{s \in \Gamma_l} \left\{ \alpha_s \left| K_{(2.38)} |\Gamma_l|\, e^{-K_{(2.38)} \cdot L^2} \cdot e^{L} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + K_{(2.37)}\, e^{-L} \right| \right\} = o(e^{-\bar{a}l}) \cdot \frac{1}{|\Gamma_l|} \sum_{s \in \Gamma_l} \alpha_s. \tag{2.39}$$

Теперь оценим интеграл $I_3(l)$. Поскольку можно считать, что $\alpha_s\, e^{1/2} < 1$, то в силу (2.26) и определения (2.30в) области $S_3(l)$

$$\varphi_l(x) \leqslant \prod_{s \in \Gamma_l} \left(1 + \alpha_s \exp\left(|x_s'| + \frac{1}{2}\right)\right) \leqslant \tag{2.40}$$

$$\leqslant 2^{|\Gamma_l|} \prod_{s \in \Gamma_l} \exp(|x_s'|) \leqslant 2^{|\Gamma_l|} \exp\{-2M\} \exp\left\{3 \sum_{s \in \Gamma_l} |x_s'|\right\}.$$

Заметим также, что из (2.27), (2.23) и (2.25) следует, что для $i=1, 2$ $|x_s'| \leqslant |x_s - \bar{x}_s^l| + \frac{\Delta_l}{2} \leqslant |x_s - \bar{x}_s^l| + \frac{1}{2}$, $s \in \Gamma_l$, ввиду чего

$$\exp\{3 \sum_{s \in \Gamma_l} |x_s'|\} \leqslant e^{3/2} \exp\{3 \sum_{s \in \Gamma_l} |x_s - \bar{x}_s^l|\} \tag{2.41}$$

и, воспользовавшись оценкой (2.14) получаем на основании (2.31), (2.40) и (2.41), что

$$I_3(l) \leqslant \sum_{i=1, 2} \int_{S_i(l)} \varphi_l(x)\, P_l^i(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant e^{3/2} \cdot 2^{|\Gamma_l|}\, e^{-2M} \int_{(R^k)^{\nu_l}} \exp\{3 \sum_{s \in \Gamma_l} |x_s - \bar{x}_s^l|\}\, P_l^i(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\frac{3}{2} + (3h_0 + \ln 2)\, |\Gamma_l|\right\} e^{-2M}. \tag{2.42}$$

Теперь, используя определение (2.29) величины M, а также (2.28), находим из (2.42), что при $\alpha_s \leqslant \alpha(l)$, $s \in \Gamma_l$ и достаточно большом l

$$I_3(l) \leqslant o(\exp\{-l^{\gamma-1}\})\, e^{-M} \leqslant \frac{1}{|\Gamma_l|} \sum_{s \in \Gamma_l} \alpha_s\, e^{-\bar{a}l},$$

и соединяя последнюю оценку с (2.35) и (2.29) находим окончательно, что для достаточно больших l при выполнении условия $\alpha_s \leqslant \alpha(l)$, $s \in \Gamma_l$

$$I_l = I_l^1 + I_l^2 + I_l^3 \leqslant |\Gamma_l|^{-1} \sum_{s \in \Gamma_l} \alpha_s e^{-\bar{a}l},$$

что и требовалось.

§ 3. Формулировка основного результата

Рассмотрим комплекснозначный потенциал

$$U = \{U_A(x_A),\ A \in \mathbf{C}(\mathbf{Z}^\nu),\ x_A \in X^A\}, \tag{3.1}$$

где здесь и далее будет для кратности обозначено $X = \mathbf{R}^k$. Функции U_A считаются измеримыми. Пусть $\Lambda \in \mathbf{C}(\mathbf{Z}^\nu)$ и $\sigma \in X^{\Lambda^c}$ — произвольная конфигурация („внешнее условие"). Гауссовской статистической суммой в объеме Λ, отвечающей потенциалу („возмущению") U и внешнему условию σ, назовем величину

$$\Xi_\Lambda(U, \sigma) = \int_{X^\Lambda} \exp\{-H_U(x_\Lambda | \sigma)\}\, P_0^\Lambda(x_\Lambda)\, dx_\Lambda, \tag{3.2}$$

где условный (при условии σ) гамильтониан

$$H_U(x_\Lambda | \sigma) = \sum_{A \in \mathbf{C}(\Lambda)} U_A(x_{A \cap \Lambda} \cup \sigma_{A \cup \Lambda^c}) \tag{3.3}$$

и P_0^Λ — гауссовская плотность распределения вероятностей в объеме Λ с нулевыми граничными условиями (см. (2.2)).

Сформулируем основной результат.

Теорема 3.1. *Пусть потенциал (3.1) удовлетворяет условию*

$$\sum_{\substack{A\in\mathbf{C}(\mathbf{Z}^\nu)\\ t\in A}} \|U_A\| e^{\varkappa|A|} \leqslant \gamma_t, \quad t\in\mathbf{Z}^\nu, \tag{3.4}$$

где $\varkappa>0$ — некоторое фиксированное число и $0\leqslant\gamma_t<1$, $t\in\mathbf{Z}^\nu$. Тогда существуют константы C и γ, зависящие лишь от $\varkappa$ и характеристик основного гауссовского поля ν, k, r и Q, такие, что равномерно по всем внешним условиям $\eta\in X^{A^c}$

$$|\operatorname{Ln}\Xi_A(U|\eta)|\leqslant C\sum_{t\in A}\gamma_t, \tag{3.5}$$

если только

$$\gamma_t\leqslant\gamma,\quad t\in\mathbf{Z}^\nu \tag{3.6}$$

(логарифм в (3.5) понимается в смысле главного значения).

Эта теорема влечет за собой

Следствие. *Пусть потенциал*

$$U(z_1,\cdots,z_n)=\{U_A(x_A;\ z_1,\cdots,z_n),\ A\in\mathbf{C}(\mathbf{Z}^\nu);\ x_A\in X^A\}$$

зависит от n комплексных параметров $z_1,\cdots,z_n$, причем в некоторой области $D\subset\mathbf{C}^n$ значений этих параметров, представляющей собой поликруг с центром в 0, все функции $U_A(x_A;\ z_1,\cdots,z_n)$, $A\in\mathbf{C}(\mathbf{Z}^\nu)$, $x_A\in X^A$ аналитичны и при $z_1,\cdots,z_n\in D\cap\mathbf{R}^n$ вещественны. Тогда, если потенциал $U(z_1,\cdots,z_n)$ удовлетворяет условию (3.4) и γ достаточно мало, то свободная энергия

$$F(z_1,\cdots z_n)=\lim_{\Lambda\to\infty}|\Lambda|^{-1}\operatorname{Ln}\Xi_\Lambda(U(z_1,\cdots,z_n),\ 0) \tag{3.7}$$

существует и является аналитической фуикцией в D.

Доказательство. Согласно теореме Ван Хова предел (3.7) существует при $(z_1,\cdots,z_n)\in D\cap\mathbf{R}^n$. Поскольку $\mathbf{R}^n\cap D$ является множеством единственности в D (т. е. из условия $f(z)=0$ для $z\in\mathbf{R}^n\cap D$, где f аналитична в D, следует, что $f(z)=0$ для всех $z\in D$ (см., например, [1]), то остается воспользоваться теоремой 3.1 и следующим многомерным аналогом теоремы Витали об ограниченной сходимости, который мы приведем без доказательства: пусть $D\subset\mathbf{C}^n$ — поликруг, $E\subset D$ — множество единственности в D и пусть $f_n(z)$, $n=1,2,\cdots$, — последовательность равномерно ограниченных аналитичных в области D функций. Тогда, если эта последовательность сходится на множестве E, то она сходится всюду в области D и ее предел $f(z)=\lim_{n\to\infty} f_n(z)$ является аналитической функцией на D.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3.1.

§ 4. Основная лемма

Введем ряд дополнительных определений. Пусть $\mathbf{F}$ — класс всевозможных отображений $F: \bigcup_{\Lambda\subset Z^\nu} X^\Lambda \to \bigcup_{\Lambda\subset Z^\nu} X^\Lambda$ таких, что $F(x_\Lambda)\in X^\Lambda$ для произвольных $\Lambda\subset Z^\nu$, $x_\Lambda\in X^\Lambda$. Пусть $A\subset Z^\nu$ и $\sigma\in X^A$. Обозначим через I_σ отображение из класса $\mathbf{F}$ такое, что для любых $B\subset Z^\nu$, $x\in X^B$

$$I_\sigma(x) = x_{B\cap A^c} \cup \sigma_{B\cap A} \tag{4.1}$$

(фактически отображение I_σ „фиксирует" конфигурацию на множестве A).

Пусть U — потенциал вида (3.1). Для произвольного $F\in\mathbf{F}$ потенциал $U(F) = \{U_A^F,\ A\in\mathbf{C}(Z^\nu)\}$ определим равенством

$$U_\Lambda^F(x_\Lambda) = U(F(x_\Lambda)),\ \Lambda\in\mathbf{C}(Z^\nu),\ x_\Lambda\in X^\Lambda. \tag{4.2}$$

Заметим, что отсюда следует, что если потенциал U удовлетворяет оценке (3.4), то той же оценке удовлетворяют все потенциалы $U(F)$, $F\in\mathbf{F}$.

Определение 4.1. *Пусть $F\in\mathbf{F}$. Будем обозначать через $\operatorname{supp}_{Z^\nu} F$ и называть носителем (в Z^ν) отображения F множество всех точек $t\in Z^\nu$ таких, что для некоторых $A\subset Z^\nu$, $t\in A$ и $x_A^{(2)}, x_A^{(1)}\in X^A$ — конфигураций, отличающихся лишь в одной точке t, $F(x_A^{(1)}) = F(x_A^{(2)})$. В частности понятно, что для произвольных $A\subset Z^\nu$ и $\sigma_{A^c}\in X^{A^c}$ $\operatorname{supp}_{Z^\nu} I_{\sigma_{A^c}}\subset A$. Более того, легко видеть, что, если $\operatorname{supp}_{Z^\nu} F\subset V\subset Z^\nu$ и $W\subset V$, $\sigma\in X^{V\setminus W}$, то $\operatorname{supp}_{Z^\nu} I_\sigma F\subset W$, где $I_\sigma F$ — обычное произведение отображений $I_\sigma F(x) = I_\sigma(F(x))$, $x\in\bigcup_{\Lambda\subset Z^\nu} X^\Lambda$.*

Определение 4.2. *Пусть $V\subset\mathbf{C}(Z^\nu)$ и $\operatorname{supp}_{Z^\nu} F\subset V$. Условным гамильтонианом для потенциала U (в объеме V, при условии F) назовем величину*

$$H_U(x_V|F) = \sum_{A\in\mathbf{C}(V)} U_A^F(x_{A\cap V}) \tag{4.3}$$

(под $U_A^F(x_{A\cap V})$ мы понимаем величину $U_A^F(x_{A\cap V}\cup y_{A\cap V^c})$, где $y_{A\cap V^c}\in X^{A\cap V^c}$ — произвольно, что корректно в силу условия $\operatorname{supp}_{Z^\nu} F\subset V$).

Ясно, что в частном случае $F = I_\sigma$, где $\sigma\in X^{V^c}$

$$H_U(x_V|I_\sigma) = H_U(x_V|\sigma), \tag{4.4}$$

где $H_U(x_V|\sigma)$ определен как в (3.4), т. е. для $F = I_\sigma$ определение условного гамильтониана $H_U(\cdot|I_\sigma)$ совпадает с обычным.

Определение 4.3. *Пусть $V\in\mathbf{C}(Z^\nu)$, $\operatorname{supp}_{Z^\nu} F\subset V$ и $\tau\in X^{\partial V}$. Условной статистической суммой, отвечающей потенциалу U*

(в объеме V, при условиях F (внешнее условие) и τ (граничное условие) назовем величину

$$Z_V(F|\tau) = Z_V(U|F, \tau) = \int_{X^V} \exp|-H_U(x_V|F)|\, P_\tau^V(x_V)\, dx_V, \qquad (4.5)$$

где P_τ^V определено как в (2.2).

Из замечания (4.4) понятно, что, если $\Lambda = V$, $\sigma \in X^{\Lambda^c}$, $F = I_\sigma$ и граничное условие $\tau \equiv 0$, то

$$Z_V(U|I_\sigma, 0) = \Xi_V(U|\sigma) \qquad (4.6)$$

в соответствии с определением (3.2).

Зафиксируем некоторый объем $\Lambda \in \mathbf{C}(\mathbf{Z}^\nu)$. Будет доказана следующая

Основная лемма. *Пусть $\varkappa > 0$ — фиксированное число, $P_0^\Lambda(\cdot)$ — плотность гауссовского распределения вероятностей с нулевыми граничными условиями) в объеме Λ (см. (2.2)) и T_V^Λ определено как в (2.11). Тогда существуют положительные константы α, C_1, C_2 и $\gamma < 1$, зависящие лишь от $\varkappa$ (а также от ν, k, r и Q) такие, что для всех потенциалов U, для которых выполнена оценка (3.4) с*

$$\gamma_t \leqslant \gamma < 1, \quad t \in \mathbf{Z}^\nu \qquad (4.7)$$

справедливы следующие утверждения:

I) *Пусть $W \subset V \subset \Lambda$, $\operatorname{supp}_{Z^\nu} F \subset V$, $F \in \mathbf{F}$, $\sigma \in X^{\Lambda^c}$ и $\tau_V \in T_V^\Lambda$, $\tau_W \in T_W^\Lambda$ таковы, что ограничение конфигурации τ_W на множество $\partial W \cap \partial V$ совпадает с ограничением τ_V на это множество, а ее ограничение на множество $\partial W \cap V$ совпадает с ограничением на это множество конфигурации $\bar{x}_V(\tau_V)$. Тогда*

$$\left|\operatorname{Ln} \frac{Z_V(U|F, \tau_V)}{Z_W(U|I_\sigma F, \tau_W)}\right| \leqslant C_1 \sum_{t \in V \setminus W} \sum_{s \in V} \gamma_s\, e^{-\alpha|s-t|} \qquad (4.8)$$

(где логарифм понимается в смысле главного значения).

II) *Пусть $V \subset \Lambda$, $F_i \in \mathbf{F}$, $\operatorname{supp}_{Z^\nu} F_i \subset V$, $i = 1, 2$, $\mathbf{L} \subset \mathbf{C}(V)$, причем для любых $A \in \mathbf{L}$, $x_A \in X^A$, $F_1(x_A) = F_2(x_A)$. Тогда для произвольного граничного условия $\tau \in T_V^\Lambda$*

$$|Z_V(U|F_1, \tau) / Z_V(U|F_2, \tau) - 1| \leqslant \Psi \exp(\Psi), \qquad (4.9)$$

где

$$\Psi = 2 \sum_{B \in \mathbf{L}} \|U_B\|. \qquad (4.10)$$

III) *Пусть $V \subset \Lambda$, $t \in \partial V \cap \Lambda$, $\operatorname{supp}_{Z^\nu} F \subset V$ и τ^1, $\tau^2 \in T_V^\Lambda$ таковы, что $\tau_s^1 = \tau_s^2$ при $s \neq t$. Тогда*

$$|Z_V(U|F, \tau^1) / Z_V(U|F, \tau^2) - 1| \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \sum_{s \in V} \gamma_s\, e^{-\alpha|s-t|} \exp(|\tau_t^1 - \tau_t^2|). \qquad (4.11)$$

Сразу заметим, что из утверждения I) основной леммы следует справедливость теоремы 3.1, если положить $V \subset \Lambda$, $W = \varnothing$ (считаем $Z_{\varnothing} = 1$), $F = I_{\sigma}$, $\sigma \in X^{\Lambda^c}$ и учесть замечание (4.6) и определение множества T^{Λ}_{V}.

Техника доказательства основной леммы во многом повторяет технику, используемую в [5], в силу чего мы будем опускать несложные, но громоздкие детали доказательства.

Мы будем использовать индукцию по числу точек множества V, в связи с чем предполагается, что оценки (4.8), (4.9) и (4.11) выполнены при замене множества V на любое его подмножество для всех потенциалов U, удовлетворяющих оценке (3.4) с (4.7). Справедливость первого шага индукции легко проверяется непосредственным вычислением.

Относительно обозначений сделаем следующие замечания. В §§ 5, 6 для статистической суммы будем использовать первое из обозначений (4.5), поскольку будет ясно, о каком потенциале идет речь. В тех случаях, когда это не вызовет недоразумений, будем записывать $\bar{x}_t$ вместо $\bar{x}_t(\tau)$. В соответствии с замечанием к определению 4.2 будем использовать обозначение $U^F_A(x_{A \cap V})$ в случае, когда $\operatorname{supp}_{Z^{\nu}} F \subset V$. Под граничным для объема V' условием $\tau \in X^{V''}$, где $V'' \supset \partial V'$, будем понимать ограничение $\tau_{\partial V'}$ конфигурации τ на множество $\partial V'$. Через S мы будем обозначать сумму ряда

$$S_{\alpha} = \sum_{s \in Z^{\nu}} e^{-\alpha |s|}.$$

Наконец, будем использовать одно и то же обозначение $\|f\|$ для функций f различной природы, каждый раз понимая под этим $\|f\| = \sup |f|$, где верхняя грань берется по всем переменным параметрам, от которых зависит f.

§ 5. Вывод оценки (4.8)

Пусть сначала $|V \setminus W| = 1$, $V = W \cup \{t\}$, $\sigma = \sigma_t$, $(\tau_W)_t = \bar{x}_t$. По предположению индукции $Z_W(I_{\sigma_t} F, \tau_W) \neq 0$. Ясно, что

$$Z_V(F, \tau_V) = \int_{\bar{X}} \exp\Big|- \sum_{A: A \cap V = \{t\}} U^F_A(x_t)\Big| \, Z_W(I_{x_t} F, \tau_V \cup x_t) \, P^{V, \{t\}}_{\tau_V}(x_t) \, dx_t, \tag{5.1}$$

где $P^{V, \{t\}}_{\tau_V}$ определяется в (2.5). Отсюда

$$\left|\frac{Z_V(F, \tau_V)}{Z_W(I_{\sigma_t} F, \tau_W)} - 1\right| \leqslant \Big\|\exp\Big|- \sum_{A: A \cap V = \{t\}} U^F_A(x_t)\Big| - 1\Big\| + \tag{5.2}$$

$$+ \Big\|\exp\Big|- \sum_{A: A \cap V = \{t\}} U^F_A(x_t)\Big|\Big\| \left\|\frac{Z_W(I_{x_t} F, \tau_V \cup x_t)}{Z_W(I_{x_t} F, \tau_V \cup x_t)} - 1\right\| +$$

$$+\left|\frac{Z_W(I_{x_t}F,\ \tau_V\cup x_t)}{Z_W(I_{\sigma_t}F,\ \tau_V\cup x_t)}\right|\cdot\int\limits_X\left|\frac{Z_W(I_{\sigma_t}F,\ \tau_V\cup x_t)}{Z_W(I_{\sigma_t}F,\ \tau_W)}-1\right|P^{V,\{t\}}_{\tau_V}(x_t)\,dx_t\Big|.$$

Первое слагаемое оценивается с помощью неравенства

$$|e^z-1|\leqslant|z|\,e^{|z|},\quad z\in\mathbb{C} \tag{5.3}$$

и из условий (3.4) и (4.7)

$$\Big|\exp\Big|-\sum_{A:A\cap V=\{t\}}U^W_A(x_t)\Big|-1\Big|\leqslant e\,\gamma_t. \tag{5.4}$$

Далее, используя индуктивную оценку (4.9), а также (3.4) и (4.7), имеем для первого слагаемого в скобках

$$\begin{aligned}&\big|Z_W(I_{x_t}F,\ \tau_V\cup x_t)/Z_W(I_{\sigma_t}F,\ \tau_V\cup x_t)-1\big|\leqslant\\ &\leqslant 2\sum_{A:A\cap V=\{t\}}\|U_A\|\exp\Big|2\sum_{A:A\cap V=\{t\}}\|U_A\|\Big|\leqslant 2\,e^2\gamma_t.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Наконец, согласно индуктивной оценке (4.11) и лемме 2.1 с учетом условия $(\tau_W)_t=\bar{x}_t$

$$\begin{aligned}&\int\limits_X\big|Z_W(I_{\sigma_t}F,\ \tau_V\cup x_t)/Z_W(I_{\sigma_t}F,\ \tau_W)-1\big|\,P^{V,\{t\}}_{\tau_V}(x_t)\,dx_t\leqslant\\ &\leqslant C_2\sum_{s\in V}\gamma_s\,e^{-a|s-t|}\int\limits_X\exp\big(|x_t-\bar{x}_t|\big)\,P^{V,\{t\}}_{\tau_V}(x_t)\,dx_t\leqslant\\ &\leqslant C_2\,e^{h_0}\sum_{s\in W}\gamma_s\,e^{-a|s-t|},\end{aligned} \tag{5.6}$$

где h_0 — константа, фигурирующая в (2.13). Теперь, считая γ достаточно малым, на основании оценок (5.4) — (5.6) получаем согласно представлению (5.2), что

$$\begin{aligned}&|Z_V(F,\ \tau_V)/Z_W(I_\sigma F,\ \tau_W)-1|\leqslant e\,\gamma_t+\\ &+(1+e\gamma_t)\big[2e^2\gamma_t+(1+2e^2\gamma_t)\,C_2\,e^{h_0}\sum_{s\in W}\gamma_s\,e^{-a|s-t|}\big]\leqslant\\ &\leqslant C^*\sum_{s\in V}\gamma_s\,e^{-a|s-t|}\end{aligned} \tag{5.7}$$

с некоторой константой $C^*=C^*(C_2,\ h_0)$.

В общем случае пусть $V\setminus W=\{t_1,\cdots,t_m\}$ и положим $V_0=V$, $F_0=F$, $\tau_0=\tau_V$ и $V_k=V\setminus\{t_1,\cdots,t_k\}$, $F_k=I_{\sigma_{t_k}}\cdots I_{\sigma_{t_1}}F$ и $\tau_k\in X^{\partial V_k}$ равным τ_V на множестве $\partial V_k\cap\partial V$ и равным τ_W (т. е. $\bar{x}_{\partial W\cap V}$ на множестве $\partial V_k\cap V$, $k=1,\cdots,m$). Тогда

$$Z_V(F,\ \tau_V)/Z_W(I_\sigma F,\ \tau_W)=\prod_{k=0}^{m-1}Z_{V_k}(F_k,\ \tau_k)/Z_{V_{k+1}}(F_{k+1},\ \tau_{k+1}). \tag{5.8}$$

Теперь используем свойство гауссовского поля, состоящее в том, что средние значения величин x_s, $s\in V_k$, задаваемые плотностями $P^{V_k}_{\tau_k}$ (см. (2.5)), снова равны $\bar{x}_s(\tau_V)$, и следовательно к каждому сомножителю

в (5.8) применима оценка (5.7), так что m-кратное применение оценки (5.7) вместе с неравенством

$$|\mathrm{Ln}(1+z)| \leqslant \frac{3}{2}|z|, \text{ когда } |z| < \frac{1}{2} \tag{5.9}$$

(где логарифм понимается в смысле главного значения) приходим, полагая $C_1 = \frac{3}{2} C^*$, к оценке

$$\left|\mathrm{Ln}\frac{Z_V(F, \tau_V)}{Z_{V'}(I_x F, \tau_{V'})}\right| \leqslant \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\left|\frac{Z_{V_k}(F_k, \tau_k)}{Z_{V_{k+1}}(F_{k+1}, \tau_{k+1})} - 1\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_{l \in V \setminus V'} \sum_{s \in V'} \gamma_s e^{-\alpha|s-l|},$$

поскольку за счет выбора γ достаточно малым можно сделать правую часть в (5.7) меньше $1/2$.

§ 6. Вывод оценки (4.9)

Пусть $\bar{\mathbf{L}} = \{\bar{B} \subset V | \exists\, B \in \mathbf{L} : B \cap V = \bar{B}\}$. Пусть сначала $|\mathbf{L}| = 1$, $\mathbf{L} = \{\bar{B}\}$. Соотношение, которому в силу условия удовлетворяют отображения F_1 и F_2, позволяет записать для $i = 1, 2$

$$Z_V(F_i, \tau) = \int_{X^{\bar{B}}} \exp\Big\{-\sum_{B \in \mathbf{L}} U_B^{F_i}(x) -$$

$$- \sum_{A : A \cap V \subset \bar{B},\ A \in \mathbf{L}} U_A^{F_i}(x)\Big\} Z_{V \setminus \bar{B}}(I_x F_i, \tau \cup x)\, P_\tau^{V, \bar{B}}(x)\, dx \tag{6.1}$$

(на протяжении всего § 6 мы будем обозначать через $x \in X^{\bar{B}}$ переменную конфигурацию и через $\bar{x}$ конфигурацию $\bar{x}_{\bar{B}}(\tau)$). Отсюда несложно получить, что

$$|Z_V(F_1, \tau)/Z_V(F_2, \tau) - 1| \leqslant \|Z_{V \setminus \bar{B}}(I_x F_2, \tau \cup x)/Z_V(F_2, \tau)\| \times$$

$$\times \Big\|\exp\Big\{-\sum_{\substack{A : A \cap V \subset \bar{B} \\ A \in \mathbf{L}}} U_A^{F_2}(x)\Big\}\Big\| \Big[\sum_{i=1,2} \Big\|\exp\Big\{\sum_{B \in \mathbf{L}} U_B^{F_i}(x)\Big| - 1\Big\|\Big] \times$$

$$\times \int_{X^{\bar{B}}} |Z_{V \setminus \bar{B}}(I_x F_2, \tau \cup x)/Z_{V \setminus \bar{B}}(I_x F_2, \tau \cup \bar{x})|\, P_\tau^{V, \bar{B}}(x)\, dx. \tag{6.2}$$

Первый сомножитель в (6.2) согласно индуктивной оценке (4.8) и условию (4.7) можно оценить как

$$\|Z_{V \setminus \bar{B}}(I_x F_2, \tau \cup x)/Z_V(F_2, \tau)\| \leqslant \exp\{C_1 S \gamma |\bar{B}|\}. \tag{6.3}$$

Что касается второго сомножителя, то на основании условий (3.4) и (4.7) путем несложного преобразования множества, по которому идет суммирование, можно получить, что

$$\left|\exp\left\{-\sum_{\substack{A:\,A\cap V\subset\overline{B}\\ A\in\mathbf{L}}} U_A^{F_2}(x)\right\}\right| \leqslant \exp\{\gamma|\overline{B}|\}. \tag{6.4}$$

Для оценки третьего сомножителя воспользуемся неравенством (5.3), условиями (3.4) и (4.7), в результате чего, учитывая замечание к соотношению (4.2), будем иметь

$$\sum_{l=1,\,2}\left|\exp\left\{-\sum_{B\in\mathbf{L}} U_B^{F_l}(x)\right\} - 1\right| \leqslant 2\sum_{B\in\mathbf{L}}\|U_B\|\, e^{\gamma}. \tag{6.5}$$

Наконец, для оценки последнего сомножителя в (6.2) представим величину $|Z_{V\setminus\overline{B}}(I_x F_2, \tau\cup x)/Z_{V\setminus\overline{B}}(I_x F_2, \tau\cup\overline{x})|$ в виде произведения $|V\cap\partial(V\setminus\overline{B})|$ сомножителей, отличающихся лишь граничным условием в одной точке s, $s\in V\cap\partial(V\setminus\overline{B})$ и применяя к каждому из этих сомножителей индуктивную оценку (4.11), а затем лемму 2.1, придем к оценке

$$\int_{X^{\overline{B}}} |Z_{V\setminus\overline{B}}(I_x F_2, \tau\cup x)/Z_{V\setminus\overline{B}}(I_x F_2, \tau\cup\overline{x})| P_\tau^{V,\,\overline{B}}(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{X^{\overline{B}}} \prod_{s\in V\cap\partial(V\setminus\overline{B})} \{1 + C_2 \sum_{u\in V\setminus\overline{B}} \gamma_u\, e^{-\varkappa|u-s|}\exp\{|x_s - \overline{x}_s|\}\} P_\tau^{V,\,\overline{B}}(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant (1 + C_2 S\gamma\, e^{h_0})^{|V\cap\partial(V\setminus\overline{B})|} \leqslant \exp\{C_2 S\gamma\,|\overline{B}|\}, \tag{6.6}$$

где h_0—константа леммы 2.1, зависящая лишь от основного гауссовского поля.

Выберем теперь γ настолько малым, что $\gamma[(C_1 + C_2)S + 2] < \varkappa$. В таком случае, на основании оценок (6.3)—(6.6) можем заключить из (6.2), что

$$|Z_V(F_1, \tau)/Z_V(F_2, \tau) - 1| \leqslant 2\sum_{B\in\mathbf{L}}\|U_B\|\, e^{\varkappa|B|} = \Psi, \tag{6.7}$$

где Ψ—величина, определенная в (4.10).

В общем случае, когда $\overline{\mathbf{L}} = \{\overline{B}_1, \cdots, \overline{B}_N\}$, запишем

$$Z_V(F_1, \tau)/Z_V(F_2, \tau) = \prod_{j=0}^{N-1} (Z_V(F^{(j)}, \tau)/Z_V(F^{(j+1)}, \tau), \tag{6.8}$$

где для $j = 0, 1, \cdots, N$

$$F^{(j)} = \begin{cases} F_2, & \text{если } B\in\mathbf{L} \text{ и } B\cap V = \overline{B}_l \\ F_1 & \text{— в противном случае,} \end{cases}$$

так что применяя к каждому из сомножителей в (6.8) оценку (6.7) (представив предварительно соответствующий сомножитель в виде $r = 1 + (z - 1)$ и пользуясь общим неравенством (2.22), получаем, что

$$|Z_V(F_1, \tau)/Z_V(F_2, \tau) - 1| \leqslant \Psi\exp(\Psi),$$

что и требовалось.

§ 7. Вывод оценки (4.11)

Выберем $\alpha > 0$ таким образом, чтобы

$$\alpha < \bar{a} \tag{7.1}$$

(где $\bar{a}$—величина, фигурирующая в лемме 2.2). Пусть $l = l(\tau_t^1, \tau_t^2) > 0$ (τ_t^1, τ_t^2 — суть значения граничных условий τ^1, τ^2 в точке t) удовлетворяет условию (2.19), множества V_l, Γ_l определены как в (2.15) и $\sigma \in X^{V \setminus V_l}$ — некоторая фиксированная конфигурация. Легко видеть, что

$$|Z_V(U|F, \tau^1) Z_V(U|F, \tau^2) - 1| \leqslant |Z - 1| + \tag{7.2}$$

$$+ |Z|\,|Z_V(U|I_\sigma F, \tau^1)/Z_V(U|I_\sigma F, \tau^2) - 1|,$$

где

$$Z = \{Z_V(U|F, \tau^1)/Z_V(U|I_\sigma F, \tau^1)\}\,\{Z_V(U|I_\sigma F, \tau^2)/Z_V(U|F, \tau^2)\}.$$

Величину $|Z - 1|$ (а вместе с ней и $|Z|$) можно оценить при помощи индуктивной оценки (4.9) и простого неравенства

$$|z_1 z_2 - 1| \leqslant \frac{1}{2}\,|(1 + |z_2|)\,|z_1 - 1| + (1 + |z_1|)\,|z_2 - 1|,$$

справедливого для произвольных комплексных чисел z_1, z_2. Несложные вычисления с использованием условия (3.4) и определения (2.15) показывают, что при достаточно малом γ и большом l

$$|Z - 1| \leqslant 2 \sum_{A \in \mathbf{C}(V \setminus V_l)} \|U_A\| \exp\{2 \sum_{A \in \mathbf{C}(V \setminus V_l)} \|U_A\|\} \times$$

$$\times [2 + 2 \sum_{A \in \mathbf{C}(V \setminus V_l)} \|U_A\| \exp\{2 \sum_{A \in \mathbf{C}(V \setminus V_l)} \|U_A\|\}] \leqslant$$

$$\leqslant 4 \exp\{\alpha l + 5 \cdot 2^\nu \Gamma \gamma\} \sum_{s \in V \setminus V_l} \gamma_s e^{-\alpha |s-t|} \tag{7.3}$$

и кроме того

$$|Z| \leqslant 1 + 4 \sum_{s \in V \setminus V_l} \gamma_s \exp\{5 \sum_{s \in V \setminus V_l} \gamma_s\} \leqslant \exp\{9 \cdot (2l)^\nu \gamma\}. \tag{7.4}$$

Перейдем к оценке последнего сомножителя в (7.2). Прежде всего заметим, что

$$Z_V(U|I_\sigma F, \tau^1)/Z_V(U|I_\sigma F, \tau^2) = Z_V(\tilde{U}|I_\sigma F, \tau^1)/Z_V(\tilde{U}|I_\sigma F, \tau^2),$$

где потенциал $\tilde{U} = \{\tilde{U}_A(x_A),\ A \in \mathbf{C}(\mathbf{Z}^\nu),\ x_A \in X^A\}$ определен равенствами

$$\tilde{U}_A(x_A) = \begin{cases} U_A(x_A), & \text{если } A \in \mathbf{C}(V_l) \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Это замечание позволяет заключить, что

$$\left|\frac{Z_V(U|I_\sigma F,\ \tau^1)}{Z_V(U|I_\sigma F,\ \tau^2)}-1\right|=\left|\frac{Z_V(\tilde U|I_\sigma F,\ \tau^1)}{Z_V(\tilde U|I_\sigma F,\ \tau^2)}-1\right|=$$

$$=|Z_{V_l}(\tilde U|I_\sigma F,\ \tau^2\cup\bar x(\tau^2))/Z_V(U|I_\sigma F,\ \tau^2)|\times \tag{7.5}$$

$$\times\left|\int_{X^{\Gamma_l}}\left|\frac{Z_{V_l}(\tilde U|I_\sigma F,\ \tau^2\cup x)}{Z_{V_l}(\tilde U|I_\sigma F,\ \tau^2\cup\bar x(\tau^2))}\right|[P_l^1(x)-P_l^2(x)]\,dx\right|,$$

где, как и в лемме 2.2, плотности P_l^i, $i=1,\ 2$ — суть проекции $P_l^{V,\ \Gamma_l}$ плотностей $P_{\tau_l}^V$ на X^{Γ_l}. Для оценки первого из сомножителей в (7.5) воспользуемся индуктивной оценкой (4.9) и условием (4.7), в результате чего будем иметь

$$\left|Z_{V_l}(\tilde U|I_\sigma F,\ \tau^2\cup\bar x(\tau^2))/Z_V(U|I_\sigma F,\ \tau^2)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\exp\{C_1\sum_{s\in V\setminus V_l}\sum_{u\in V_l}\gamma_u\,e^{-\varkappa|u-s|}\leqslant\exp\{C_1\,S\,(2l)^\nu\gamma\}. \tag{7.6}$$

Осталось оценить интеграл в (7.5). Поскольку граничные условия $(\tau^2\cup x)_{\partial V_l}$ и $(\tau^2\cup\bar x(\tau^2))_{\partial V_l}$ отличаются лишь на множестве Γ_l, то подынтегральное выражение в (7.5) можно представить в виде произведения $|\Gamma_l|$ отношений статистических сумм, отличающихся лишь граничным условием в одной точке (эти точки пробегают множество Γ_l) и поэтому $|\Gamma_l|$ — кратное применение индуктивной оценки (4.11) вместе с неравенством

$$\left|\prod_{i=1}^N(1+z_i)-1\right|\leqslant\prod_{i=1}^N(1+|z_i|)-1;\ z_i\in\mathbf{C},\ i=1,\cdots,N$$

приводит к оценке

$$\left|\int_{X^{\Gamma_l}}\frac{Z_{V_l}(\tilde U|I_\sigma F,\ \tau^2\cup x)}{Z_{V_l}(\tilde U|I_\sigma F,\ \tau^2\cup\bar x(\tau^2))}[P_l^1(x)-P_l^2(x)]\,dx\right|=$$

$$=\left|\int_{X^{\Gamma_l}}\left|\frac{Z_{V_l}(\tilde U|I_\sigma F,\ \tau^2\cup x)}{Z_{V_l}(\tilde U|I_\sigma F,\ \tau^2\cup\bar x(\tau^2))}-1\right|[P_l^1(x)-P_l^2(x)]\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{X^{\Gamma_l}}\left[\prod_{s\in\Gamma_l}\left\{1+C_2\sum_{u\in V_l}\gamma_u\,e^{-\varkappa|s-u|}\exp(|x_s-\bar x_s(\tau^2)|)\right\}-1\right]\times$$

$$\times|P_l^1(x)-P_l^2(\tau)|\,dx=\int_{X^{\Gamma_l}}(\varphi_l(x)-1)\,|P_l^1(x)-P_l^2(x)|\,dx, \tag{7.7}$$

где мы использовали функцию $\varphi_l(x)$, введенную в лемме 2.2 (см. (2.16)), взяв в качестве чисел α_s, $s \in \Gamma_l$ числа

$$\alpha_s = C_2 \sum_{u \in V_l} \gamma_u e^{-\alpha|s-u|}. \tag{7.8}$$

Используя (7.7) и обозначения (2.16) и (2.17), можем заключить, что

$$\left| \int_{X^{\Gamma_l}} \frac{Z_{V_l}(\tilde{U}|I_s F, \tau^2 \cup x)}{Z_{V_l}(\tilde{U}|I_s F, \tau^2 \cup x(\tau^2))} [P_l^1(x) - P_l^2(x)]\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant I_l \leqslant J_l^1 + J_l^2. \tag{7.9}$$

В силу этого на основании (7.2) — (7.6) и (7.8) заключаем, что при удовлетворении условий леммы 2.2 для достаточно малых γ и больших l справедливы следующие две оценки (см. (2.20), (2.21)):

$$|Z_V(U|F, \tau^1)/Z_V(U|F, \tau^2) - 1| \leqslant$$

$$\leqslant 4 \exp\{\alpha l + 5(2l)^\nu \gamma\} \sum_{s \in V \setminus V_l} \gamma_s e^{-\alpha|s-l|} +$$

$$+ \exp\{9 \cdot (2l)^\nu \gamma + C_1 S (2l)^\nu \gamma\} [J_l^1 + J_l^2] \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\frac{l^\nu}{2}\right\} \left| \sum_{s \in V \setminus V_l} \gamma_s e^{-\alpha|s-l} + \frac{1}{|\Gamma_l|} \sum_{s \in \Gamma_l} \alpha_s \exp\{l^\nu\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\frac{l^\nu}{2}\right\} \left| \sum_{s \in V \setminus V_l} \gamma_s e^{-\alpha|s-l|} + C_2 \sum_{u \in V_l} \gamma_u e^{-\alpha|s-l|} \times \right.$$

$$\left. \times \exp\{\alpha l + l^\nu\} \right| \leqslant C_2 \exp\{2l^\nu\} \sum_{s \in V} \gamma_s e^{-\alpha|s-l|} \tag{7.10}$$

и при выполнении условия $\alpha_s \leqslant \alpha(l)$

$$|Z_V(U|F, \tau^1)/Z_V(U|F, \tau^2) - 1| \leqslant$$

$$\leqslant 4 \exp\{\alpha l + 5(2l)^\nu \gamma\} \sum_{s \in V \setminus V_l} \gamma_s e^{-\alpha|s-l|} +$$

$$+ \exp\{9(2l)^\nu \gamma + C_1 S (2l)^\nu \gamma\} I_l \leqslant \exp\{(9 + C_1 S)(2l)^\nu \gamma\}.$$

$$\cdot \left| 4 \exp\{\alpha l\} \sum_{s \in V \setminus V_l} \gamma_s e^{-\alpha|s-l|} + \frac{1}{|\Gamma_l|} e^{-\bar{\alpha} l} \sum_{s \in \Gamma_l} \alpha_s \right| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\{(9 + C_1 S)(2l)^\nu \gamma\} [4 \exp\{\alpha l\} \sum_{s \in V \setminus V_l} \gamma_s e^{-\alpha|s-l|} +$$

$$+ C_2 e^{-(\bar{\alpha}-\alpha) l} \sum_{s \in V_l} \gamma_s e^{-\alpha|s-l|}]. \tag{7.11}$$

Теперь применение леммы 2.2 завершает доказательство. В самом деле, выберем некоторое H, при котором справедливо утверждение леммы 2.2. Поскольку функция $f(x) = (2H \ln x)^\nu$ растет медленнее, чем x, то существует наименьшее x_0 такое, что

$$2(1 + H \ln x)^\nu < x \text{ при } x \geqslant x_0 \tag{7.12}$$

и число $l_n = H \ln x_n$ — целое. Определим теперь функцию $l = l(\tau_t^1, \tau_t^2)$, как

$$l(\tau_t^1, \tau_t^2) = \begin{cases} [H \ln (|\tau_t^1 - \tau_t^2|)] + 1, & \text{если } |\tau_t^1 - \tau_t^2| \geqslant x_0 \\ l_n \text{ в противном случае} \end{cases} \quad (7.13)$$

(здесь $[\cdot]$ — целая часть числа). Ясно, что такое определение делает возможным применение леммы 2.2. При $|\tau_t^1 - \tau_t^2| \geqslant x_0$ воспользуемся оценкой (7.10), что сразу же приводит к оценке (4.11) (поскольку из (7.12) и (7.13) ясно, что при $|\tau_t^1 - \tau_t^2| \geqslant x_0$ $2[l(\tau_t^1, \tau_t^2)]^\gamma \leqslant |\tau_t^1 - \tau_t^2|$.

В случае же, когда $|\tau_t^1 - \tau_t^2| < x_0$, воспользуемся оценкой (7.11). Полагая $C_2 = 8 \cdot \exp\{\alpha l_0\}$ и считая γ настолько малым, что $\exp\{(9 + C_1 S)(2l_0)^\gamma \gamma\} < 2$, вновь приходим к оценке (4.11), что и завершает доказательство основной леммы.

В заключение автор благодарит Р. Л. Добрушина за постановку задачи и постоянное внимание.

ВЦ АН Армянской ССР

Поступила 17.VI.1987

Մ. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Դասական գիբսյան դաշտերի ոչ-ֆինիտ գրգռումների մասին (ամփոփում)։

Աշխատանքում դիտարկվում են կ-չափանի ամբողջաթիվ ցանցի վրա որոշված պատահական դասական գիբսյան դաշտերի ոչ ֆինիտ գրգռումները։ Կոմպլեքսարժեք

$$U = \{U_A(x_A),\ x_A \in (\mathbf{R}^k)^A,\ \operatorname{card}(A) < \infty\}$$

պոտենցիալի միջոցով ձույլ է տրվում, որ եթե U գրգռող պոտենցիալը բավարարում է

$$\sum_{A:\,i \in A} |U_A|\, e^{\varkappa |A|} < \gamma_i < \gamma$$

պայմանին (ինչ որ $\varkappa > 0$ և γ-ի համար), ապա վիճակագրական գումարը հավասար չէ 0-ի։ Այստեղից հետևում է ազատ էներգիայի գոյությունը։ Բացի այդ, եթե բոլոր $U_A(x_A)$, $A \subset \mathbf{Z}^\nu$ $x_A \in (\mathbf{R}^k)^A$ անալիտիկորեն կախված են $z_1, \ldots, z_n$ պարամետրերից վերջիններիս փոփոխման $D \subset \mathbf{C}^n$ տիրույթում, (D-ն պսևդոլրյան է), ապա նույն հատկությամբ օժտված է նաև ազատ էներգիան։

M. H. MARTIROSIAN. *On nonfinite perturbations of the gaussian Gibbsian fields* (summary)

We consider in this paper nonfinite perturbations of the random gaussian Gibbsian field by the complex valued potential

$$U = \{U_A(x_A),\ x_A \in (\mathbf{R}^k)^A,\ \operatorname{card}(A) < \infty\}.$$

It is proved that if the perturbative potential U satisfies the condition

$$\sum_{A:\,i \in A} |U_A(x_A)|\, e^{\varkappa |A|} < \gamma_i < \gamma$$

(for some $\varkappa > 0$ and γ), then the partition function does not vanish and the existence of the free energy follows. Moreover, if all $U_A(x_A)$, $A \subset \mathbf{Z}^\nu$, $x_A \in (\mathbf{R}^k)^A$ depend analytically on $z_1, \ldots, z_n$ in the region $D \subset \mathbf{C}^n$, (D is a polydisk), then the same property is true for the free energy also.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Малышев, Р. А. Минлос.* Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений, М., «Наука», 1985.
2. *Р. Л. Добрушин.* Аналитичность корреляционных функций в одномерных классических системах со степенным убыванием потенциала, Матем. сб., 94 (136), № 1 (5), 1974, 16—48.
3. *Р. Л. Добрушин, С. Б. Шлосман.* Вполне аналитические гиббсовские поля, Препринт, М., ИППИ АН СССР, 1986.
4. *Р. Л. Добрушин.* Новый подход к исследованию гиббсовских возмущений гауссовских полей, Препринт, М., ИППИ АН СССР, 1987.
5. *Р. Л. Добрушин, М. Р. Мартиросян.* Нефиниты возмущения гиббсовских полей, ТМФ, 74, № 1, 1988, 16—28.
6. *R. L. Dobrushin, M. Zahradnik.* Phase diagrams for the continuous spin models, Extension of Pirogov—Sinai theory, in: Mathematical Problems of Statistical Mechanics and Dynamics, Dodrecht, Netherlands, D. Reidel Publ. Comp., 1986.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV. № 5. 1989 Математика

УДК 517.538.5

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Р. Ш. СААКЯН

ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ А. А. ГОНЧАРА

Исследования граничных вопросов единственности аналитических функций начинаются с классических работ М. и Ф. Рисса [1], а также Н. Н. Лузина и И. И. Привалова [2]. Полученные ими результаты относятся к случаю односвязных областей. Аналогичные вопросы для бесконечносвязных областей менее изучены. Первый результат в этом направлении принадлежит А. А. Гончару [3]. Некоторые из его результатов подвергнуты дальнейшему изучению в [4]. Данная работа посвящена подтверждению одного предположения об областях неединственности, выдвинутого А. А. Гончаром в [3].

1.1. Пусть $K=\{z;\ |z|<1\}$, $C=\{z;\ |z|=1\}$, $\overline{K}=K\cup C$, $K(t,\ r)=\{z;\ |z-t|<r,\ r>0\}$.

Если последовательности $\{z_j\}_{j=0}^{\infty}$, $|z_j|<1$ и $\{r_j\}_{j=0}^{\infty}$, $r_j>0$ таковы, что

$$\{z_j\}'=C,\ r_j<1-|z_j|,\ r_j+r_i<|z_j-z_i|\ (i\neq j),$$

то замкнутую область вида

$$\Omega=\Omega(\{z_j\},\ \{r_j\})=\overline{K}\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}K(z_j,\ r_j)$$

называют областью типа L. Если $\Omega=\Omega(\{z_j\},\ \{r_j\})$ — область типа L, то для любого $\delta\in(0,\ 1]$ область $\Omega=\Omega(\{z_j\},\ \{\delta r_j\})$ также является областью типа L.

Через $A(\Omega)$ обозначим множество функций, голоморфных в Ω° и непрерывных на Ω.

Принято говорить, что замкнутая область Ω типа L обладает свойством единственности, если из условий $\varphi\in A(\Omega)$ и $\varphi(z)=0$ при $z\in C$ следует, что $\varphi=0$. Если же существует функция $\varphi\in A(\Omega)$ такая, что $\varphi(z)=0$ для $z\in C$ и $\varphi\not\equiv 0$, то говорят, что область Ω обладает свойством неединственности.

В работе [3] А. А. Гончар, используя известный метод Вольфа (см. [5], [6]), предложил некоторую общую схему построения областей типа L, обладающих свойством неединственности. Из его результатов следовало, в частности, для любого $\beta>2$ существуют:

(1Г) *замкнутая область* $\Omega=\Omega(\{z_j\},\ \{r_j\})$ *типа* L *такая, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\log\frac{1}{r_j}\right)^{-\beta}<+\infty, \tag{1}$$

(2Г) *функция* $\varphi \in A(\Omega)$ *такая, что* $\varphi(z) = 0$ *для* $z \in C$ *и* $\varphi \not\equiv 0$.

В действительности, у А. А. Гончара функция $\varphi(z)$ мероморфна при $|z| < 1$ с полюсами в $|z_j|$ и представляется рядом

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j (z - z_j)^{-1}. \tag{2}$$

При этом $\varphi \in A(\Omega_\delta)$ для всех $\delta \in (0, 1]$, так что заменяя в (1Г) область Ω на Ω_δ, можно (при достаточно малом δ) сделать сумму ряда (1) меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$.

С другой стороны, в [3] отмечено, что если область $\Omega = \Omega(|z_j|, |r_j|)$, удовлетворяет условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - |z_j|}{\log \dfrac{1 - |z_j|^2}{r_j}} < +\infty, \tag{3}$$

то тогда она обладает свойством единственности. Отсюда, в частности, следует, что утверждение (1Г) — (2Г), верное при $\beta > 2$, теряет силу при $\beta < 1$.

В связи со сказанным А. А. Гончаром было выдвинуто предположение [3], что утверждение (1Г) — (2Г) сохраняет силу при любом $\beta > 1$. Мы доказываем это предположение в пункте 1.2., установив предварительно, анологично [3], одно общее предложение о построении областей типа L, обладающих свойством неединственности. Это предложение, полученное с помощью несколько модернизированного варианта метода Вольфа, дает таким образом в известном смысле точные результаты.

Следует отметить, что в несколько более общей формулировке подробное доказательство критерия (3), основанное на положительности гармонической меры $\omega(z, \Omega, C)$, приводится в работе А. Г. Балакян [4]. Она также получила метрические условия на область Ω типа L, при которых $\omega = 0$, но Ω обладает свойством единственности. Наличие таких условий a'priori может представлять препятствие для доказательства предположения А. А. Гончара.

1.2. Лемма. *Пусть* $f(z)$ — *голоморфная при* $|z| \geqslant R$ *функция,* $f(\infty) = 0$ *и* $M = \sup_{|z| = R} |f(z)|$. *Рассмотрим разложение* f *вокруг точки* ∞:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k}, \quad |z| \geqslant R$$

и пусть $P_n^f(z)$ — *n-ая частичная сумма этого ряда. Тогда*

$$|f(z) - P_n^f| \leqslant M \left| \frac{R}{z} \right|^n \sqrt{\frac{R}{|z| - R}}, \quad |z| > R, \tag{4}$$

$$|P_n^f(z)| \leqslant M \sqrt{\frac{R}{|z| - R}}, \quad |z > R. \tag{5}$$

Доказательство. Согласно равенству Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{R^{2k}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})|^2 \, d\theta \leqslant M^2.$$

Отсюда, применяя к суммам

$$|f(z)-P_n^f(z)|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|a_k|}{R^k}\left|\frac{R}{z}\right|^k,\quad |P_n^f(z)|<\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{R^k}\left|\frac{R}{z}\right|^k$$

неравенство Шварца, приходим к оценкам (4), (5).

Как и в [3] рассмотрим специального типа подкласс областей типа L. Пусть $\{R_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательности чисел $0<R_k\uparrow\infty$, $1<n_k\uparrow\infty$. Положим $R_k'=(R_{k+1}+R_k)\,2^{-1}$ $k\geqslant 0$. $\Delta_k=R_{k+1}-R_k$ и пусть $\{\rho_k\}_{k=0}^{\infty}$ последовательность чисел таких, что

$$0<\rho_k<\min\left\{R_k\,n_k^{-1},\ \frac{\Delta_{k-1}}{2},\ \frac{\Delta_k}{2}\right\}.$$

Обозначим через $\{\zeta_{kl}\}_{l=1}^{n_k}$ множество корней уравнения $z^{n_k}=R^{n_k}$ и рассмотрим область

$$\Omega=\Omega(\{R_k\},\ \{n_k\},\ \{\rho_k\})=\overline{K}\setminus\bigcap_{k=0}^{\infty}\bigcup_{l=1}^{n_k}K(\zeta_{kl},\ \rho_k)$$

и соответствующую $\delta\in(0,1]$ область Ω_δ.

Предложение. *Пусть* $\{R_k\}$, $\{n_k\}$ *и* $\{\rho_k\}$ *выбраны так, что*

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{6^k}{(\Delta_1\cdots\Delta_{k-1})^2}\exp\left[-\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{k-1}\Delta_m n_m\right]\frac{1}{\rho_k}<+\infty. \tag{6}$$

Тогда существует мероморфная в K *функция* $\varphi\not\equiv 0$ *с полю сами на совокупности* $|\zeta_{kl}|$ $1\leqslant i\leqslant n_k$, $k\geqslant 0$, *вида*

$$\varphi(z)=\sum_{j=1}^{\infty}A_j(z-z_j)^{-1},\quad \sum_{j=1}^{\infty}|A_j|<+\infty \tag{7}$$

такая, что $\varphi(z)=0$ *для* $z\in C$ *и* $\varphi_{\Omega_\delta}\in A(\Omega_\delta)$ *для всех* $\delta\in(0,1]$.

Доказательство. Пусть $V_k=\{z;\ |z|>R_k'\}$, $k\geqslant 0$. Положим

$$\omega_k=z^{-n_k}-R_k^{-n_k},\ k\geqslant 1,\ \varphi_0(z)=(z^{n_0}-R_0^{n_0})^{-1},\ |z|\geqslant R_0,$$

$$\varphi_k=\varphi_{k-1}-P_{n_k}^{\varphi_{k-1}}\omega_k\,\omega_k^{-1}=\varphi_{k-1}-Q_k,\ k>1\ \text{и}\ M_k=\sup_{|z|=R_k'}|\varphi_k(z)|,\ k\geqslant 0.$$

Учитывая, что для $z\in\overline{V}_k$

$$\frac{\Delta_k}{R_k^{n_k}}\leqslant|\omega_k(z)|\leqslant\frac{2}{R_k^{n_k}},\quad k\geqslant 1,$$

в силу утверждения [4] леммы, примененной к функции $\varphi_{k-1}\,\omega_k$, получим

$$|\varphi_k(z)|\leqslant M_0\,\frac{6^k}{(\Delta_1\cdots\Delta_{k-1})^{3/2}}\left(\frac{R_0'}{R_1'}\right)^{n_1}\cdots\left(\frac{R_{k-1}'}{R_k'}\right)^{n_k},\quad z\in\overline{V}_k,$$

причем $\varphi_k(\infty)=0$.

Обозначив через A_{kl} вычет функции Q_k в точке ζ_{kl}, $1\leqslant i\leqslant n_k$, в силу (5) будем иметь, что

$$|A_{kl}|<\frac{M_0\,6^k}{n_k(\Delta_1\cdots\Delta_{k-1})^2}\left(\frac{R_0'}{R_1'}\right)^{n_1}\cdots\left(\frac{R_{k-2}'}{R_{k-1}'}\right)^{n_{k-1}},\quad i=1,\cdots,n_k. \tag{8}$$

Учитывая оценку $\log(x+1) > x2^{-1}$ при $x \in (0, 1)$, из (8) получим

$$|A_{kl}| \leqslant \frac{M_0 6^k}{n_k(\Delta_1 \cdots \Delta_{k-1})^2} \exp\left| -\frac{1}{4} \sum_{m=1}^{k-1} \Delta_m n_m \right|, \quad l = 1, \cdots, n_k. \tag{9}$$

Далее для $z \in \Omega_i \cup \{z;\ |z| \geqslant 1\}$ будем иметь

$$\left| \frac{A_{kl}}{z_{kl} - z} \right| \leqslant \frac{M_0 6^k}{n_k(\Delta_1 \cdots \Delta_{k-1})^2} \exp\left| -\frac{1}{4} \sum_{m=1}^{k-1} \Delta_m n_m \right| \frac{1}{\delta \rho_k}, \quad k \geqslant 2.$$

Отсюда в силу условия (6) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n_k} A_{kl}(z_{kl} - z)^{-1} \tag{10}$$

сходится абсолютно и равномерно на $\Omega_i \cup \{z;\ |z| \geqslant 1\}$. Более того, поскольку множество $|z| \geqslant 1$ принадлежит всем V_k, то из

$$|\varphi_k(z)| = |\varphi_0(z) - Q_1(z) - \cdots - Q_k(z)| \leqslant M_k \to 0, \quad k \to \infty$$

получим, что ряд (10) равномерно на $|z| \geqslant 1$ сходится к функции φ_0. Подходящим образом перенумеровав ряд (10) и обозначив через

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j (z - z_j)^{-1},$$

где $A_j = \operatorname{Res}|_{z_j} \varphi_0(z)$ $j = 1, \cdots n_0$, получим мероморфную в K функцию с полюсами на совокупности точек $\{z_j\}$ такую, что $\varphi(z) = 0$ для $z \in C$, $\varphi(z)| \to \infty$, когда $z \to z_j$, $1 \leqslant j \leqslant n_0$, и $\varphi|_{\Omega_i} \in A(\Omega_i)$ для любого $\delta \in (0, 1]$.

Убедимся теперь, что существует выбор чисел $\{R_k\}$, $\{n_k\}$ и $\{\rho_k\}$, гарантирующий выполнение условия (6).

Пусть ψ — положительная, непрерывная и возрастающая функция такая, что

$$\psi'(x) \geqslant c_0 > 0, \quad c_0 = \text{const}, \tag{11}$$

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\log \psi(m+1)}{\log \psi(m)} = 1, \tag{12}$$

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\log \psi(m)}{\log m} = \infty. \tag{13}$$

Положим

$$\Delta_k = \frac{\psi(k+1) - \psi(k)}{\psi(k+1) \log \psi(k+1)} c_1, \quad k \geqslant 2, \quad \Delta_1 = \frac{c_1 \psi(2)}{\psi(2) \log \psi(2)}, \quad \alpha > 1,$$

где постоянная c_1 определяется из условия $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k = 1 - R_0$. И пусть

$$n_k = \left[\psi(k+1) \log \psi(k+1) \right] \text{ и } \rho_k = c_2 \exp\left[-\frac{1}{16} c_1 \psi(k) \right], \quad k \geqslant 0,$$

где $[x]$ — целая часть x, а c_2 находим из условия $\rho_k \leqslant \pi R_k n_k^{-1}$. Ясно, что $\Delta_k \to 0$ при $k \to \infty$ и легко проверить, что $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k < \infty$. Учитывая, что $x - 1 < [x] < x$ оценим предварительно несколько сумм;

$$\sum_{m=1}^{k-1} \Delta_m n_m \geqslant c_1 \psi(k) - 1, \tag{14}$$

$$\sum_{m=1}^{k-1} \log n_m \Delta_m \geqslant \sum_{m=1}^{k-1} \log (c_1 (\psi(m+1) - \psi(m)) - 1) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{m=1}^{k-1} \log \left(c_1 \int_m^{m+1} \psi'(x)\, dx - 1 \right) \geqslant (k-1) \log (c_0 c_1 - 1), \tag{15}$$

$$\sum_{m=1}^{k-1} \log n_m \leqslant (1+\alpha)(k-1) \log \psi(k). \tag{16}$$

Отсюда в силу (12) — (16) получаем

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{6^k}{(\Delta_1 \cdots \Delta_{k-1})^2} \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_{m=1}^{k-1} \Delta_m n_m \right) \frac{1}{\rho_k} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{6^k \left(\prod_{m=1}^{k-1} n_m \right)^2}{\left(\sum_{m=1}^{k-1} \Delta_m n_m \right)^2} \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_{m=1}^{k-1} \Delta_m n_m \right) \frac{1}{\rho_k} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=2}^{\infty} A_1^k \exp\left(A_2 (k-1) \log \psi(k) - \frac{3}{16} c_1 \psi(k) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=2}^{\infty} A_3 \exp\left(-\frac{1}{16} c_1 \psi(k) \right) < +\infty,$$

где $A_k (k = 1, 2, 3)$ — константы.

Пусть, теперь, $\beta > 1$, тогда из (12) и (13) получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{n_j}{\left(\log \frac{1}{\rho_j} \right)^{\beta}} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\psi(j+1) \log \psi(j+1)}{A \psi^3(j)} \leqslant A \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\log \psi(j+1)}{\psi^{\varepsilon}(j)} < \infty, \ \varepsilon > 0. \tag{17}$$

Таким образом, в силу доказанного предложения и (17) имеем, что для любого $\beta > 1$ утверждение (1Г) — (2Г) остаются в силе.

Замечание 1. Здесь важно, что выбор чисел $\{R_k\}$, $\{n_k\}$ и $\{\rho_k\}$ а следовательно и конструкция области Ω, ни коим образом не зависит от β. Следует также отметить, что если условий (12) и (13) на функцию ψ не налагать, то в зависимости от β, допустимую для функции ψ „шкалу роста“ можно несколько расширить.

Замечание 2. В [4] А. Г. Балакян получила условия на числа $\{R_k\}$, $\{n_k\}$ и $\{\rho_k\}$, при которых область $\Omega \in L(\{R_k, n_k, \rho_k\})$ является областью единственности. При нашем выборе этих параметров полученные в [4] условия в совокупности не выполняются, однако если положить

$$\rho_k = \exp\left(\frac{1}{16} c_1 \psi^{1+\varepsilon}(k) \right), \ \varepsilon > 0,$$

то они будут выполнены. Это еще раз показывает, что в случае неединственности числа ρ_k не могут сколь угодно быстро стремиться к

нулю, и указывает на определенную степень точности как результата А. Г. Балакян, так и выбора последовательности $\{\rho_k\}$.

В заключение хочу выразить благодарность Н. У. Аракеляну за руководство и ценные обсуждения.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 23.V.1989

ЛИТЕРАТУРА

1. *F. und M. Riesz.* Uber die Randwerte einer analytischen Function. IV Cong. Scand. Math., Stockholm, 1916. 27—44.
2. *И. И. Привалов.* Граничные значения аналитических функций, М.—Л., «Гостехиздат», 1950.
3. *А. А. Гончар.* О примерах неединственности аналитических функций, Вестник МГУ, сер. матем. и механ., № 1, 1964, 37—44.
4. *А. Г. Балакян.* Метрические критерии единственности голоморфных функций в бесконечно связных областях типа L, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем, XX, № 2, 1985, 131—145.
5. *J. Wolff.* Sur les séries $\sum A_k(Z-z_k)^{-1}$ "Comptes Rendus". 173, 1921, 1327—1328

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 5, 1989 Математика

УДК 519.218.5

Г .С. СУКИАСЯН

РАНДОМИЗИРУЕМЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ СИСТЕМЫ И ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ

Введение

Простейшим примером точечной системы, рандомизируемой относительно группы T_n параллельных переносов евклидова пространства R^n, является решетка точек, имеющих в декартовой системе координат в R^n целочисленные координаты. Имеется в виду ее следующее свойство. Сдвигая решетку l на случайный вектор, распределенный равномерно на $[0,1)^n$, получим случайный точечный процесс, распределение которого

а) инвариантно относительно группы T_n,

б) сосредоточено на множестве $\{tl : t \in T_n\}$ (tl—образ l при преобразовании t).

Представляет интерес отыскать все точечные системы (т. е. подмножества R^n, не имеющие точек сгущения), обладающие такими же свойствами. Естественно также рассмотреть аналогичную задачу для других групп.

Определение 1. *Пусть G — группа преобразований пространства R^n. Точечная система ω называется G-рандомизируемой, если существует G-инвариантный случайный точечный процесс распределения которого сосредоточено на множестве образов $\{g\omega : g \in G\}$.*

Еще один пример рандомизируемой точечной системы доставляет известная из интегральной геометрии теорема Зигеля [1]. Обозначим через A_n группу сохраняющих меру Лебега аффинных преобразований пространства R^n. Согласно теореме Зигеля решетка l A_n-рандомизируема.

Впервые понятие рандомизируемой точечной системы было введено в [2], где показано, что для группы T_n и для группы M_n евклидовых движений пространства R^n точечная система ω рандомизируема тогда и только тогда, когда ω есть объединение k штук n-мерных решеток, получающихся друг из друга сдвигом (такие системы называем k-решетками).

В настоящей статье введены понятия параболических решеток I и II типа. Показано, что для исследуемой в статье подгруппы B группы A_2 все параболические решетки I типа B-рандомизируемы, но некоторые параболические решетки обоих типов не являются

k-решетками. Показано также, что все параболические решетки являются правильными (см. [3]) относительно группы B точечными системами, однако параболические решетки II типа не являются B-рандомизируемыми. (В связи с этим отметим, что для групп T_n и M_n все правильные точечные системы рандомизируемы [2]). Полученные результаты применяются в § 5 для решения задачи Давидсона [4] о построении M_2-инвариантных процессов прямых.

Некоторые результаты статьи анонсированы в [5]. В [6] развит алгебраический подход к тем же задачам с привлечением понятий из теории дискретных групп.

§ 1. Группа B и решетки

Обозначим через C подгруппу аффинных преобразований плоскости, имеющих следующий вид:

$$\begin{cases} x' = x + cy, \\ y' = y. \end{cases} \quad c \in R^1,$$

Через B обозначим подгруппу группы A_2, состоящую из аффинных преобразований $t\bar{c}$ следующего вида:

$$t\bar{c}: \begin{cases} x' = x + cy + a, \\ y' = y + b, \end{cases} \quad a,\ b,\ c \in R^1$$

(вначале делается преобразование $\bar{c} \in C$ с параметром c, затем параллельный перенос $t \in T_2$ на вектор (a, b)). Заметим, что группа B участвует в построении так называемой геометрии Галилея [7].

Определение 2. *В пространстве R^n решетками называются точечные системы, получающиеся из множества l точек с целочисленными координатами аффинным преобразованием.*

Определение 3. *Плоская решетка называется решеткой I типа, если она содержит хотя бы две точки с одинаковыми y-ординатами, в противном случае решетка называется II типа.*

Отметим, что преобразования из группы B сохраняют тип решетки.

Лемма 1.1 (см. [6]). *Все плоские решетки I типа B-рандомизируемы.*

В [2, 6] рекомендовано исследование рандомизируемых точечных систем начать с нахождения правильных относительно данной группы систем.

§ 2. Правильные точечные системы

Определение 4. (ср. [3]). *Точечная система $\omega \subset R^n$, содержащая начало координат O, называется правильной относительно группы G, если для любой точки $a \in \omega$ существует такое $g \in G$, что $g\omega = \omega$ и $gO = a$.*

Всякая правильная относительно группы G_1 точечная система является правильной и относительно любой более широкой группы

$G_2 \supset G_1$. Относительно группы T_n все решетки и только они являются правильными [3]. Следовательно, класс F правильных относительно группы B точечных систем содержит по меньшей мере все плоские решетки, так как T_2 является подгруппой группы B.

Известно [3], что все правильные относительно группы M_n точечные системы (т. н. кристаллографические множества) являются k-решетками (обратное неверно). Мы покажем, что F содержит и отличные от k-решеток точечные системы.

Пусть $\omega \in F$. Для того, чтобы преобразованием $t\bar{c} \in B$ точку O перевести в a, надо чтобы сдвиг t был бы на вектор a, так как любое $\bar{c} \in C$ оставляет на месте начало координат. Следовательно для каждой точки $a \in \omega$ существует такое $\bar{c}_a \in C$, что

$$\bar{c}_a \omega + a = \omega, \tag{2.1}$$

где $\omega + a$ означает сдвиг множества ω на вектор $a \in R^2$.

Лемма 2.1. *Всякая правильная относительно группы B точечная система вместе с точками $a = (x_a, y_a)$ и $b_0 = (x_b, y_b)$ содержит точки*

$$b_n = \left(x_b + nx_a + nc_a y_b + \frac{n}{2}(n-1)\, c_a y_a;\ ny_a + y_b\right),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

Доказательство. Преобразование $\bar{c}_a$ переводит точку $b_0 \in \omega$ в точку $b' = (x_b + c_a y_b,\ y_b)$. Из (2.1) следует, что ω содержит точку $b_1 = b' + a = (x_b + x_a + c_a y_b;\ y_a + y_b)$. Продолжая подобным образом, получим искомые координаты точек $b_n = \bar{c}_a b_{n-1} + a$, лежащих в ω.

Если $y_a \neq 0$, то точки b_n лежат на параболе Z, описываемой формулой

$$x = \frac{c_a}{2y_a}(y^2 - y_b^2) + \left(\frac{x_a}{y_a} - \frac{c_a}{2}\right)(y - y_b) + x_b. \tag{2.2}$$

Кривизна $\frac{c_a}{y_a}$ и ось $y = \frac{y_a}{2} - \frac{x_a}{c_a}$ параболы Z не зависят от точки b_0. Параболы, у которых кривизны и оси совпадают, называются [7] концентрическими. Итак, во всякой правильной относительно B точечной системе точки располагаются вдоль концентрических парабол, общая ось которых параллельна оси абсцисс.

Лемма 2.2. *На оси абсцисс точки из $\omega \in F$ образуют одномерную решетку (в частности, эта решетка может состоять из одной точки O).*

Доказательство. Пусть на оси Ox кроме O есть и другие точки из ω, и пусть $e = (x_e,\ 0)$ — ближайшая к O такая точка. Взяв в лемме 2.1 $a = e$, и $b_0 = 0$, получим, что точки $e_n = (nx_e;\ 0)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ лежат в ω и образуют решетку. Из леммы 2.1 следует, что на оси Ox нет кроме $\{e_n\}$ других точек $b \in \omega$, иначе среди точек $b_n = b + e_n \in \omega$ нашлась бы точка, более близкая к O, чем e.

Пусть $\omega \in F$ содержит точку $a = (x_a; y_a)$, причем $y_a \neq 0$. Обозначим через Z_0 параболу (2.2) с $x_b = 0$, $y_b = 0$. Возьмем в лемме 2.1 $b_0 = e_n$, получим семейство концентрических парабол $Z_n = Z_0 + e_n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Семейство парабол назовем решеткой парабол, если они концентрические и их вершины образуют одномерную решетку. Согласно лемме 2.2 $\{Z_n\}$ есть решетка парабол. В силу лемме 2.1, точки пересечения решетки парабол $\{Z_n\}$ с прямыми $y = my_a$; $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ принадлежат ω, при этом образуется т. н. параболическая решетка I типа.

§ 3. Параболические решетки I типа

Под решеткой прямых понимаем семейство параллельных равноотстоящих прямых на плоскости.

Определение 5. *Параболической решеткой I типа называется множество узлов пересечения решетки парабол с решеткой прямых, параллельных оси парабол* (рис. 1).

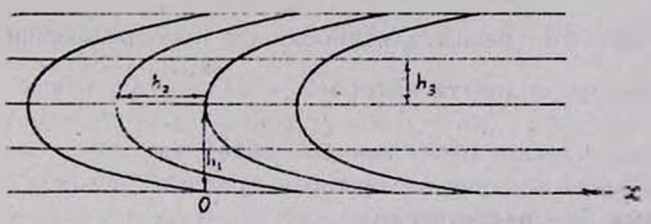

Рис. 1.

Параболические решетки I типа, оси которых параллельны оси Ox, описываются параметрами (r, h_1, h_2, h_3), где r — кривизна парабол, h_1 — ордината оси парабол, h_2 — шаг решетки парабол, h_3 — шаг решетки прямых (рис. 1). Из результатов § 2 следует, что если точечная система $\omega \in F$ содержит точки $a = (x_a, y_a)$ и $b = (x_b, 0)$, то все точки параболической решетки I типа с параметрами $r = \frac{c_a}{y_a}$, $h_1 = \frac{y_a}{2} - \frac{x_a}{c_a}$, $h_2 = x_b$, $h_3 = y_a$ принадлежат ω. Для доказательства того, что ω исчерпывается этими точками, нам потребуются следующие леммы.

Лемма 3.1. *Если точечная система $\omega \in F$ содержит точки a и $b = (x_b, 0)$, то точка $a + b$ также лежит в ω.*

Доказательство следует из леммы 2.1, если взять $y_b = 0$, $n = 1$.

Лемма 3.2. *Если точечная система $\omega \in F$ содержит на оси Ox другие (кроме O) точки и $a = (x_a, y_a) \in \omega$, то на прямой $y = y_a$ точки из ω образуют решетку с тем же шагом, что и на оси Ox.*

Доказательство следует из лемм 2.2 и 3.1.

Лемма 3.3. *Если точечная система $\omega \in F$ содержит на оси Ox другие точки кроме O, то среди точек $\omega \setminus Ox$ существует точка с минимальной по абсолютной величине ординатой.*

Доказательство. Предположим противное, что существует

последовательность точек из $\omega \setminus Ox$, ординаты y_n которых стремятся к 0 при $n \to \infty$. По лемме 3.2 на прямых $y = y_n$ имеем решетки точек из ω с одинаковым шагом h. В прямоугольник D с основанием $[0, h)$ и высотой y_1 попадает по одной точке из этих решеток. То есть в D имеется счетное множество точек из ω, что противоречит условию, что ω не имеет точек сгущения.

Лемма 3.4. *Пусть ω — параболическая решетка I типа с параметрами (r, h_1, h_2, h_3). Преобразование $\bar{c} \in C$ с параметром $c = nrh_3$ (n — целое число) эквивалентно сдвигу ω на вектор t с ординатой $y_t = nh_3$, т. е. $\bar{c}\omega = \omega + t$.*

Доказательство. Парабола $x = \frac{r}{2} y^2$ кривизны r преобразованием $\bar{c} \in C$ с параметром c переходит в параболу с той же кривизной

$$x = \frac{r}{2} y^2 + cy = \frac{r}{2}\left(y + \frac{c}{r}\right)^2 - \frac{c^2}{2r}. \tag{3.1}$$

Таким образом, решетка парабол при преобразовании $\bar{c}$ передвигается на вектор, ордината которого, в силу (3.1), равна $\frac{c}{r}$. Решетки же прямых, параллельных оси Ox, преобразование $\bar{c}$ оставляет на месте, так же как и сдвиг на вектор с ординатой nh_3, где h_3 — шаг решетки прямых, n — целое число.

Эти леммы приводят нас к следующему утверждению.

Теорема 1. *Для того, чтобы точечная система ω, имеющая на оси Ox более одной точки, была правильной относительно группы B, необходимо и достаточно, чтобы ω была параболической решеткой I типа с осью, параллельной оси абсцисс.*

Доказательство. Пусть $\omega \in F$ и пусть $e = (x_e, 0)$ — ближайшая к O точка из $\omega \cap Ox$; $a = (x_a, y_a)$ — точка из ω с минимальной ординатой (лемма 3.3). Точки параболической решетки I типа γ с параметрами $r = c_a y_a$, $h_1 = \frac{y_a}{2} - \frac{x_a}{c_a}$, $h_2 = x_e$, $h_3 = y_a$ принадлежат ω. Пусть этими точками ω не исчерпывается, есть точка $b \in \omega$, отличная от точек γ. По лемме 3.2 точка b не может иметь ординату $y_b = ny_a$, где n — целое. Среди ординат $ny_a + y_b$ точек $b_n \in \omega$ (лемма 2.1) найдется такая, что лежит между O и y_a, что противоречит минимальности y_a. Следовательно, ω совпадает с параболической решеткой γ.

Теперь положим, что ω есть параболическая решетка I типа с параметрами (r, h_1, h_2, h_3). В силу леммы 3.4, для произвольной точки $a = (x_a, y_a) \in \omega$ параметром преобразования $\bar{c}_a$, фигурирующего в (2.1), будет $c_a = ry_a$. Теорема 1 доказана.

Заметим, что параболическая решетка I типа с параметрами (2,0, 1,1) есть обычная плоская решетка l точек с целочисленными координатами. Однако существуют параболические решетки, не являющиеся k-решетками.

Теорема 2. *Параболическая решетка I типа с параметрами* $(1, h_1, h_2, h_3)$ *(без ограничения общности один из параметров, например, кривизну можно взять единичным) является k-решеткой тогда и только тогда, когда величины* h_2 *и* h_3^2 *соизмеримы.*

Доказательство. Пусть параболическая решетка I типа ω является k-решеткой. Тогда существует пара центрально-симметричных точек v и $-v$, лежащих в ω. Пусть v является узлом пересечения прямой $y = mh_3$ с параболой Z_n; m, n — целые. Подставив в (2.2) $r = \frac{c}{y_a} = 1$, $y_a = h_3$, $y_b = 0$, $x_b = nh_2$, $\frac{x_a}{y_a} = \frac{1}{2}h_3 - h_1$, получим уравнение параболы Z_n:

$$x = \frac{1}{2}y^2 - h_1 y + nh_2. \tag{3.2}$$

Точка v имеет координаты (x_v, mh_3), где

$$x_v = \frac{1}{2}m^2h_3^2 - h_1h_3m + nh_2.$$

Рассмотрим лежащую на Z_n точку $\bar{v} \in \omega$ с координатами $(\bar{x}_v, -mh_3)$. В силу (3.2) имеем

$$\bar{x}_v = \frac{1}{2}m^2h_3^2 + mh_1h_3 + nh_2.$$

В силу леммы 3.2 и теоремы 1 точки $-v$, $\bar{v} \in \omega$ лежат на прямой $y = -mh_3$ и принадлежат одномерной решетке с шагом h_2. Величина

$$\bar{x}_v - (-x_v) = m^2h_3^2 + 2nh_2,$$

следовательно кратна h_2, откуда получаем, что h_3^2 и h_2 соизмеримы.

Теперь положим $\frac{h_3^2}{h_2} = \frac{n}{m}$. Точка v пересечения прямой $y = 2mh_3$ и параболы Z_{-2mn}, согласно (3.2), имеет абсциссу

$$x_v = 2m^2h_3^2 - 2mh_1h_3 - 2mnh_2 = -2mh_1h_3.$$

Для любого целого i точки $v_i = (-2mih_1h_3, 2mih_3)$ лежат в ω и образуют одномерную решетку. Векторы v и $(h_2, 0)$ будут составляющими фундаментального параллелограмма k-решетки ω.

§ 4. Инверсия и параболические решетки II типа

Определение 6. (см. [7]). *Параболической инверсией* J_r *с параметром* $r \in R^1$ *называется (неаффинное) преобразование плоскости, задаваемое уравнениями:*

$$\begin{cases} x' = ry^2 - x \\ y' = y. \end{cases} \tag{4.1}$$

Лемма 4.1. (см. [7]). *При параболической инверсии* J_r *параболы с кривизной* r_1 *и осями, параллельными оси Ox, переходят в параболы кривизны* $2r - r_1$*; параллельные прямые (параболы нулевой кривизны) переходят (кроме прямых, параллельных оси Ox) в концентрические параболы кривизны* $2r$.

Прямые, параллельные оси Ox, при параболической инверсии остаются на месте, при этом сохраняются расстояния между точками, лежащими на таких прямых. Следовательно, одномерные решетки на прямых, параллельных оси Ox, при инверсии переходят в решетки на тех же прямых, с тем же шагом. Из леммы 4.1 следует, что параболические решетки I типа с кривизной $2r$ при инверсии с параметром r переходят в обычные решетки со счетным множеством точек на оси Ox, т. е. решетки I типа. Так как $J_r = J_r^{-1}$, верно и обратное утверждение, что позволяет дать общее

Определение 7. *Параболической решеткой называется точечная система, получающаяся из плоской решетки параболической инверсией J_r, при этом если ω — решетка i-го типа (см. определение 3), то $J_r\omega$ называется параболической решеткой i-го типа, $i = 1, 2$.*

Лемма 4.2. (см. [6]). *Для того, чтобы точечная система ω была правильной относительно группы B необходимо и достаточно, чтобы $J_r\omega$ для всех $r \in R^1$ также были бы правильными относительно B.*

Следствие. *Все параболические решетки правильны относительно B.*

Ниже показано, что параболическими решетками класс F исчерпывается.

Лемма 4.3. (см. [6]). *Точечная система ω B-рандомизируема тогда и только тогда, когда $J_r\omega$ для всех $r \in R^1$ также B-рандомизируемы.*

Из лемм 1.1 и 4.3 следует

Теорема 3. *Все параболические решетки I типа B-рандомизируемы.*

Всякую плоскую решетку можно представить как множество узлов пересечения двух решеток прямых, не параллельных оси Ox. Отсюда следует

Теорема 4. *Всякая параболическая решетка есть множество узлов пересечения двух решеток парабол равной кривизны и осями, параллельными оси Ox.*

Заметим, что множество ординат точек параболической решетки II типа, в отличие от параболических решеток I типа (лемма 3.3), всюду плотно на оси Oy. Оказывается полезным следующее описание параболических решеток II типа. Рассмотрим на плоскости решетку парабол $\{Z_n\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. На параболе Z_n выделим точки, имеющие ординаты $my_a + ny_b$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Если величины y_a и y_b несоизмеримы, то полученная точечная система есть параболическая решетка II типа. И наоборот, для каждой параболической решетки II типа γ существуют такие y_a и y_b, что γ получается приведенным построением.

Пусть $\omega \in F$ и не имеет на оси Ox точек, кроме O. Докажем, что ω — параболическая решетка II типа. Для фиксированной точки $\bar{a} \in \omega$ построим параболу Z, взяв в (2.2) $x_b = 0$, $y_b = 0$. В качестве a в лем-

ме 2.1 возьмем точку из $\omega \cap Z$, наиболее близко лежащую к O. Каждой точке $b_l \in \omega$ согласно (2.2) соответствует парабола Z_l, концентричная Z. Заметим, что вершины концентрических парабол Z_l не могут иметь точек сгущения, так как ω — точечная система. В качестве b возьмем такую точку, у которой вершина соответствующей параболы Z_l наиболее близко лежит к вершине Z. Точки параболической решетки II типа, построенной вышеописанной процедурой, по лемме 2.1 принадлежат ω. С другой стороны ω не содержит других точек, ввиду экстремальности точек a и b. Отсюда получается обобщение теоремы 1.

Теорема 5. *Точечная система $\omega \subset R^2$ правильна относительно группы B тогда и только тогда, когда ω есть параболическая решетка (одного из двух типов).*

Отметим, что плоские решетки II типа не являются B-рандомизируемыми, и в силу леммы 4.3 параболические решетки II типа не являются B-рандомизируемыми.

§ 5. Решение проблемы Давидсона

Полученные результаты можно применить для решения следующей задачи, сформулированной Р. Давидсоном [4] и привлекшей значительное внимание [8—10]: существует ли на плоскости стационарный (т. е. T_x-инвариантный) случайный процесс прямых II порядка, не являющийся процессом Кокса (т. е. дважды стохастическим пуассоновским процессом), и реализации которого с вероятностью 1 не содержат пар параллельных прямых. Эта задача решена Калленбергом [9] построением соответствующего (и до последнего времени единственного) примера. Ниже мы построим семейство таких примеров, содержащее, в частности, и пример Калленберга.

Представим процессы прямых как точечные процессы. Прямую g на плоскости опишем с помощью параметров (x, y), где x — абсцисса точки пересечения g с осью Ox, $y = \operatorname{ctg} \varphi$, φ — угол между прямой g и осью Ox. Процессу прямых P_g, реализации которого с вероятностью 1 не содержат прямых, параллельных оси Ox, соответствует точечный процесс P на параметрической плоскости. Сдвигу прямой g на вектор с координатами (a, c) соответствует следующее преобразование ее параметров (рис. 2)

$$\begin{cases} x' = x + cy + a \\ y' = y. \end{cases} \tag{5.1}$$

Процесс прямых P_g стационарен тогда и только тогда, когда соответствующий точечный процесс P инвариантен относительно группы H аффинных преобразований вида (5.1). Группа H есть подгруппа группы B.

Случайным процессом прямых II порядка называется процесс, у которого вторая моментная мера локально конечна, т. е. для всех ограниченных подмножеств D плоскости математическое ожидание квадрата числа прямых, пересекающих D, конечно. Отметим, что это

условие приводит к существенным ограничениям на соответствующий точечный процесс. В частности, B-инвариантный точечный процесс никогда не соответствует процессу прямых II порядка. Но из B-инвариантного точечного процесса можно получить процесс прямых II порядка соответствующим прореживанием. Например, достаточно взять кусок реализации точечного процесса, попадающий в любую параллельную оси Ox полосу произвольной конечной ширины.

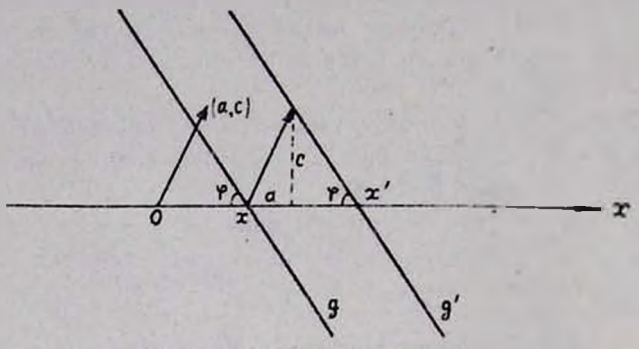

Рис. 2.

На параметрической плоскости параллельным прямым соответствуют точки с равными ординатами. Итак, для решения задачи Давидсона достаточно построить на плоскости некоксовский B-инвариантный точечный процесс, реализации которого с вероятностью 1 не содержат пар точек с одинаковой ординатой. Последнее условие не разрешает использовать существующий по теореме 3 B-инвариантный точечный процесс, сосредоточенный на параболических решетках I типа.

Инверсией μ_r меры μ на R^2 назовем меру на плоскости, задаваемую для всех борелевских $A \subset R^2$ равенством $\mu_r(A) = \mu(J_r A)$, $r \in R^1$. Аналогично, инверсия P_r точечного процесса P на плоскости определяется равенством

$$P_r(A) = P(|\omega : J_r \omega \in A|)$$

(здесь случайный процесс и его распределение обозначаются одинаково).

Лемма 5.1. *Пусть P — точечный процесс Кокса с управляющей мерой μ. Для любого $r \in R^1$ инверсия P_r также является процессом Кокса с управляющей мерой μ_r.*

Лемма 5.2. *Точечный процесс P на плоскости инвариантен относительно группы B тогда и только тогда, когда для любого $r \in R^1$ его инверсия P_r также B-инвариантна.*

На основании теоремы Зигеля (см. введение) в [8, 9] построен процесс прямых $\overline{P}$, удовлетворяющий условиям задачи Давидсона и соответствующий точечный процесс P которого сосредоточен на кусках решеток II типа. Инверсия P_r точечного процесса P сосредоточена на кусках параболических решеток II типа. Следовательно, реализации соответствующего процесса прямых $\overline{P}_r$ не содержат с вероятностью 1 пар параллельных прямых. В силу лемм 5.1 и 5.2, для лю-

бого $r \in R^1$ точечный процесс P_r не является процессом Кокса, но инвариантен относительно группы B. Следовательно, процесс прямых $\overline{P}_r$ стационарен, откуда получается

Теорема 6. *Семейство* $\{\overline{P}_r\}$, $r \in R^1$ *стационарных процессов прямых является решением проблемы Давидсона. Оно содержит при* $r = 0$ *пример Калленберга* [9].

Аналогично теореме 2 можно показать, что параболические решетки II типа не являются k-решетками. Поэтому процесс прямых $\overline{P}_r$, $r \neq 0$ нельзя получить из калленбергского процесса прямых $\overline{P}$ аффинными преобразованиями и операциями наложения и прореживания.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 28.I.1986
20.VIII.1989

Գ. Ս. ՍՈՒԿԻԱՍՅԱՆ. Ռանդոմիզացվող կետային համակարգեր և պարաբոլիկ վանդակներ (ամփոփում)

Հոդվածում ներմուծված են ձևափոխությունների խմբերի նկատմամբ ինվարիանտ ռանդոմիզացվող կետային համակարգերի, ինչպես նաև I և II տեսակների պարաբոլիկ վանդակների հատկացողությունները։ Ապացուցված է, որ հարթության վրա ամեն ձևափոխությունների խմբի համար B ենթախմբի նկատմամբ ռանդոմիզացման ենթակա են բոլոր I տեսակի պարաբոլիկ վանդակները։

Ցույց է տրված, որ B խմբի նկատմամբ կանոնավոր կետային համակարգեր են հանդիսանում միայն պարաբոլիկ վանդակները։ Ստացված արդյունքները կիրառվում են ուղիղների համասեռ պատահական պրոցեսների կառուցման մասին Դևիդսոնի խնդրի լուծման համար։

G. S. SUKIASIAN. *Randomizable point systems and parabolic lattices* (summary)

The concepts of the I and II type parabolic lattices and randomizable point systems are introduced. It is shown, that all I type parabolic lattices are randomizable with respect to the special subgroup B of the group of affine transformations of the plane. It is also shown, that all parabolic lattices are regular with respect to the group B.

The results are applied to the solution of R. Davidson's problem on construction of line processes.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Сантало.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности, М., «Наука», 1983.
2. *Г. С. Сукиасян.* О характеризации случайных решеток, Изв. АН Арм.ССР, «Математка», 20, № 4, 1985, 299—306.
3. *Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен.* Наглядная геометрия, М., «Наука», 1981.
4. *R. Davidson.* Construction of line processes, second order properties. Изв. АН АрмССР. Математика, 5, № 3, 1970, 219—234.
5. *Г. С. Сукиасян.* Инвариантные рандомизации решеток и проблема Дэвидсона, Тезисы докладов IV международной Вильнюсской конференции по теории вероятностей, Вильнюс, 1985, 162—163.
6. *G. S. Sukiasian.* Randomizable point systems, Acta Appl. Math., 9, 1987, 83—95.
7. *И. М. Яглом.* Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия, М., «Наука», 1969.
8. *J. Mecke.* An explicit description of Kallenberg's lattice type point process Math. Nachr., 89, 1979, 185—195.
9. *O. Kallenberg.* A counterexample to R. Davidson's conjecture on line processes, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 82, 1977, 301—307.
10. *R. V. Ambartzumian.* Factorization in integral and stochastic geometry. Stochastic geometry, Geometric Statistics, Stereology. Teubner—Texte zur Math., 65, 1984, 14—33.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 5, 1989 Математика

УДК 517.946

С. Ю. НАЗАРОВ

О НЕКОТОРЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА—ДАРБУ

В области $D=\{(x, y): 0<x<y<1\}$ рассмотрим уравнение Эйлера—Дарбу

$$u_{xy}-\frac{\beta}{x-y}u_x+\frac{\alpha}{x-y}u_y=0. \tag{1}$$

1°. Пусть $\beta>0$, $\alpha>0$, $\alpha+\beta<1$.

Задача 1. Найти решение $u(x, y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D\cup\{(x, y): x=y, 0<x<1\})\cap C^2(D)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$I_{0x}^{\alpha, b, -\alpha+\beta-1}u(0, x)+A(x)I_{0x}^{\beta, b, \alpha+\beta-c-1}u(x, x)+$$
$$+B(x)u(x, x)=f(x),\ 0<x<1, \tag{2}$$
$$c_0(x)[(y-x)^{\alpha+\beta}(u_y-u_x)]|_{y=x}+b_0(x)u(x, x)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)D_{0x}^{\alpha_i}u(x, x)+\sum_{j=1}^{m}c_j(x)D_{0x}^{\gamma_j}[(y-x)^{\alpha+\beta}(u_y-u_x)]|_{y=x}=$$
$$=f_1(x),\ 0<x<1. \tag{3}$$

Задача 2. Найти решение $u(x, y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D\cup\{(x, y): x=y, 0<x<1\})\cap C^2(D)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$J_{x1}^{\alpha, b, -\alpha+\beta-1}u(x, 1)+A(x)J_{x1}^{\beta, b, \alpha+\beta-c}u(x, x)+$$
$$+B(x)u(x, x)=f(x),\ 0<x<1, \tag{4}$$
$$c_0(x)[(y-x)^{\alpha+\beta}(u_y-u_x)]|_{y=x}+b_0(x)u(x, x)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)D_{x1}^{\alpha_i}u(x, x)+\sum_{j=1}^{m}c_j(x)D_{x1}^{\gamma_j}[(y-x)^{\alpha+\beta}(u_y-u_x)]|_{y=x}=$$
$$=f_1(x),\ 0<x<1. \tag{5}$$

Здесь $A(x)$, $B(x)$, $b_0(x)$, $b_i(x)$, $c_0(x)$, $c_j(x)$, $f(x)$, $f_1(x)$ — заданные функции, принадлежащие классу $C^1(\overline{J})\cap C^3(J)$; J — единичный интервал $0<x<1$, a, b, c, α_i, γ_j — заданные действительные числа, причем $\alpha_i|<1$, $|\gamma_j|<1$, $-1<c<0$, $1-\alpha-a+c>0$, $\beta-a-b>0$, $1-\beta+a>0$, $1-\alpha-\beta+c>0$, $\alpha+a>0$, $1-\alpha-\beta+a>0$, $1>\alpha+a+b>0$, $i=\overline{1, n}$, $j=\overline{1, m}$, D_{ax}^{μ}, D_{xb}^{μ} — операторы дробного, в смысле Римана—Лиувилля, интегро-дифференцирования, выражаемые формулой [1, 2]

$$D_{ax}^{\mu} f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(-\mu)} \displaystyle\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{|x-t|^{\mu+1}}, & \mu < 0, \\ f(x), & \mu = 0, \\ \operatorname{sign}(x-a) \dfrac{d^{[\mu]+1}}{dx^{[\mu]+1}} D_{ax}^{\mu-[\mu]-1} f(x), & \mu > 0, \end{cases}$$

где $[\mu]$ — целая часть μ, $[\mu] \leqslant \mu < [\mu]+1$, $I_{0x}^{\alpha,\beta,\gamma}$, $I_{x1}^{\alpha,\beta,\gamma}$ — операторы дробного интегро-дифференцирования в смысле М. Сайго [3]

$$I_{0x}^{\alpha,\beta,\gamma} f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F\left(\alpha+\beta, -\gamma, \alpha, \frac{x-t}{x}\right) f(t)\,dt, & \alpha > 0, \\ \dfrac{d^n}{dx^n} I_{0x}^{\alpha+n, \beta-n, \gamma-n} f(x), & 0 < \alpha + n < 1, \end{cases}$$

$$I_{x1}^{\alpha,\beta,\gamma} f(x) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(1-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} F\left(\alpha+\beta, -\gamma, \alpha, -\frac{x-t}{1-x}\right) f(t)\,dt, & \alpha > 0, \\ (-1)^n \dfrac{d^n}{dx^n} I_{x1}^{\alpha+n, \beta-n, \gamma-n} f(x), & 0 < \alpha + n < 1. \end{cases}$$

Без ограничения общности положим

$$-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p < 0 < \alpha_{p+1} < \cdots < \alpha_n < 1,$$
$$-1 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_l < 0 < \gamma_{l+1} < \cdots < \gamma_m < 1. \qquad (6)$$

Для простоты рассуждений будем рассматривать только задачу 1. Решение будем искать в классе функций таких, что функции

$$u(x, x) = \tau(x), \quad (y-x)^{\alpha+\beta} (u_y - u_x)|_{y=x} = \nu(x)$$

принадлежит пространству Гельдера с показателем $k (1 > k > \max \times \times \{\alpha_n, \gamma_m, -c, -a\})$.

Теорема 1. *Пусть* $A(x) \neq 0$, $c_m(x) \neq 0 \ \forall x \in \overline{J}$, $\gamma_m > \alpha_n$, $-c \geqslant b \geqslant 0$. *Тогда задача 1 разрешима и притом единственным образом.*

Доказательство. Преобразуем краевое условие (3). Действуя на обе части (3) оператором $D_{ox}^{-\gamma_m}$ и учитывая

$$D_{ox}^{-\mu} D_{ox}^{\mu} f = D_{ox}^{\mu} D_{ox}^{-\mu} = f$$

после некоторых преобразований получим

$$\nu(x) + \int_0^x K(x, t) \nu(t)\,dt = D_{ox}^{-\gamma_m} \frac{f_1(x)}{c_m(x)} - \int_0^x K_1(x, t) \tau(t)\,dt, \qquad (7)$$

где

$$K(x,t)=\frac{1}{\Gamma(\gamma_m)}\left\{(x-t)^{\gamma_m-1}\frac{c_0(t)}{c_m(t)}+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{\Gamma(-\gamma_j)}(x-t)^{\gamma_m-\gamma_j-1}\int_0^1 z^{\gamma_m-1}(1-z)^{-\gamma_j-1}\frac{c_j(x-(x-t)z)}{c_m(x-(x-t)z)}\,dz+$$

$$+\sum_{k=l+1}^{m}\frac{1}{\Gamma(1-\gamma_k)}\left[(\gamma_m-\gamma_k)(x-t)^{\gamma_m-\gamma_k-1}\times\right.$$

$$\times\int_0^1 z^{\gamma_m-1}(1-z)^{-\gamma_k}\frac{c_k(x-(x-t)z)}{c_m(x-(x-t)z)}\,dz+(x-t)^{\gamma_m-\gamma_k}\times$$

$$\left.\left.\times\int_0^1 z^{\gamma_m-1}(1-z)^{-\gamma_k}\frac{d}{dt}\left[\frac{c_k(x-(x-t)z)}{c_m(x-(x-t)z)}\right]dz\right]\right\},$$

$$K_1(x,t)=\frac{1}{\Gamma(\gamma_m)}\left\{(x-t)^{\gamma_m-1}\frac{b_0(t)}{c_m(t)}+\right.$$

$$+\sum_{l=1}^{p}\frac{1}{\Gamma(-\alpha_l)}(x-t)^{\gamma_m-\alpha_l-1}\int_0^1 z^{\gamma_m-1}(1-z)^{-\alpha_l-1}\frac{b_l(x-(x-t)z)}{c_m(x-(x-t)z)}\,dz+$$

$$+\sum_{k=p+1}^{n}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_k)}\left[(x-t)^{\gamma_m-\alpha_k-1}\int_0^1 z^{\gamma_m-1}(1-z)^{-\alpha_k}\frac{b_k(x-(x-t)z)}{c_m(x-(x-t)z)}\,dz\times\right.$$

$$\left.\left.\times(\gamma_m-\alpha_k)+(x-t)^{\gamma_m-\alpha_k}\int_0^1 z^{\gamma_m-1}(1-z)^{-\alpha_k}\frac{d}{dt}\left[\frac{b_k(x-(x-t)z)}{c_m(x-(x-t)z)}\right]dz\right]\right\}.$$

Из представлений видно, что $K(x,t)$ и $K_1(x,t)$ непрерывны в квадрате $0\leqslant x,\ t\leqslant 1$ при $x\neq t$, а при $x=t$ могут обращаться в бесконечность порядка не больше $-\gamma_m+\gamma_{m-1}+1$, $-\gamma_m+\alpha_n+1$, соответственно. Кроме того, из условий задачи 1 и свойств операторов дробного интегро-дифференцирования следует, что

$$D_{0x}^{-\gamma_m}\frac{f_1(x)}{c_m(x)}\in C^1(\bar{J})\cap C^3(J).$$

Соотношение (7) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно неизвестной функции $\nu(x)$. Разрешая его по известной схеме (см., напр., [4, с. 127]), будем иметь

$$\nu(x)+\int_0^x K^*(x,t)\tau(t)\,dt=\Phi(x),\qquad(8)$$

где

$$K^*(x,\ t) = K_1(x,\ t) + \int_t^x R(x,\ y)\, K(y,\ t)\, dy,$$

$$\Phi(x) = D_{0x}^{-\gamma m} \frac{f_1(x)}{c_m(x)} + \int_0^x R(x,\ t)\, D_{0t}^{-\gamma m} \frac{f_1(t)}{c_m(t)}\, dt,$$

$R(x,\ t)$ — резольвента ядра $K(x,\ t)$.

Рассмотрим теперь (2). Пользуясь свойствами функции Римана уравнения (1) можно показать, что любое решение задачи 1, если оно существует, представимо в виде (см. [3])

$$u(x,\ y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \tau[x + (y-x)\,t]\, t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}\, dt + \tag{9}$$

$$+ \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} (y-x)^{1-\alpha-\beta} \int_0^1 \nu[x + (y-x)\,t]\, t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}\, dt.$$

Из (9) с учетом формулы $I_{ox}^{\alpha,\beta,\eta} I_{ox}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta} f = I_{ox}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta} f$, условие (2) можно записать в виде

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)} I_{ox}^{\alpha+a,\,b,\,-\alpha+\beta-1} \tau(x) + A(x)\, I_{ox}^{c,\,b,\,-1+\alpha+\beta-c} \tau(x) + \tag{10}$$

$$+ B(x)\tau(x) = f(x) - \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(1-\alpha)} I_{ox}^{\alpha+1-\beta,\ b+\alpha+\beta-1,\ -\alpha+\beta-1} \nu(x).$$

Разделив обе части (10) на $A(x)$ и подействовав оператором $I_{ox}^{c,\,-b,\,-1+\beta+\alpha}$, применяя формулу [3]

$$[I_{ox}^{\alpha,\beta,\eta} f]^{-1} = I_{ox}^{-\alpha,-\beta,\alpha+\eta} f$$

запишем

$$\tau(x) + \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)} I_{ox}^{-c,\,-b,\,-1+\alpha+\beta} \frac{1}{A(x)} I_{ox}^{\alpha+a,\,b,\,-a+\beta-1} \tau(x) +$$

$$+ I_{ox}^{-c,\,-b,\,-1+\alpha+\beta} \frac{B(x)}{A(x)} \tau(x) = I_{ox}^{-c,\,-b,\,-1+\alpha+\beta} \frac{f(x)}{A(x)} -$$

$$- \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(1-\alpha)} I_{ox}^{-c,\,-b,\,-1+\alpha+\beta} \frac{1}{A(x)} I_{ox}^{\alpha+1-\beta,\ b+\alpha+\beta-1,\ -\alpha+\beta-1} \nu(x)$$

или, после некоторых преобразований

$$\tau(x) + \int_0^x K_1(x,\ t)\,\tau(t)\, dt = f_2(x) - \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x K_2(x,\ t)\,\nu(t)\, dt, \tag{11}$$

где

$$f_2(x) = I_{ox}^{-c,\,-b,\,-1+\alpha+\beta} \frac{f(x)}{A(x)},$$

$$K_1^*(x,\,t)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\;x^{1-\alpha-\beta+c}}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(-c)\,\Gamma(\alpha+a)}\,t^{\beta-a-b-1}\int\limits_t^x\frac{y^b}{A(y)}(x-y)^{-c-1}\times$$

$$\times(y-t)^{\alpha+a-1}F\left(b,c+\alpha+\beta-1,\,-c,\,\frac{x-y}{x}\right)F\left(-b,\,\alpha+\beta-1,\,\alpha+a,\,\frac{y-t}{y}\right)dy+$$

$$+\frac{x^{1-\alpha-\beta+c}}{\Gamma(-c)}(x-t)^{-c-1}\,t^{\alpha+\beta+b-1}\,\frac{B(t)}{A(t)}F\left(b,\,-c+\alpha+\beta-1,\,-c,\,\frac{x-t}{x}\right),$$

$$K_2(x,\,t)=\frac{x^{1-\alpha-\beta+c}}{\Gamma(-c)\,\Gamma(1-\beta+\alpha)}\,t^{-\alpha-a-\beta}\int\limits_t^x\frac{1}{A(y)}(x-y)^{-c-1}\times$$

$$\times(y-t)^{a-\beta}\,y^{\alpha+\beta+b-1}F\left(b,\,-c+\alpha+\beta-1,\,-c,\,\frac{x-y}{x}\right)dy.$$

Можно показать, что ядра $K_1^*(x,\,t)$ и $K_2(x,\,t)$ допускают оценки

$$K_1^*(x,\,t)=(x-t)^{-\lambda}\,O(1),\quad 0<\lambda<1,$$

$$K_2(x,\,t)=(x-t)^{-\lambda_1}\,O(1),\quad 0<\lambda_1<1.$$

Исключая $\nu(x)$ из (11) посредством (8) находим

$$\tau(x)+\int\limits_0^x K_2^*(x,\,t)\,\tau(t)\,dt=\Phi_1(x),\qquad(12)$$

где

$$K_2^*(x,\,t)=K_1^*(x,\,t)-\frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\,\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_t^x K_2(x,\,y)\,K^*(y,\,t)\,dy,$$

$$\Phi_1(x)=f_2(x)-\frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\,\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^x\Phi(t)\,K_2(x,\,t)\,dt.$$

Пользуясь результатами работы [5] нетрудно убедиться, что

$$\Phi_1(x)\in C(\overline{J})\cap C^2(J).$$

Таким образом, задача 1 эквивалентно редуцирована к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, которое разрешимо безусловно и однозначно в классе $C(\overline{J})\cap C^2(J)$, а следовательно и функция $\nu(x)$, определяемая из (8), принадлежит требуемому классу.

Единственное решение задачи 1 дается формулой (9). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $A(x)\equiv 0$, $B(x)\neq 0$. $c_m(x)\neq 0\ \forall\, x\in\overline{J}$ $\gamma_m>\alpha_n$, $b\leqslant 0$. *Тогда задача 1 имеет и притом единственное решение.*

Доказательство. В этом случае из (10) сразу же имеем

$$\tau(x)+\frac{x^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha+a)\,B(x)}\int\limits_0^x t^{-1+\beta-a-b}(x-t)^{\alpha+a-1}\times$$

$$\times F\left(-b,\ \alpha+\beta-1,\ \alpha+a,\ \frac{x-t}{x}\right)\tau(t)\,dt =$$

$$= \frac{f(x)}{B(x)} - \frac{1}{\Gamma(1-\beta+\alpha)B(x)}\int_0^x (x-t)^{-\alpha-\beta}\,t^{-\alpha-a-b}\,\nu(t)\,dt.$$

Так же как и в теореме 1, подставляя в полученное выражение значение $\nu(x)$ из (8), после элементарных выкладок придем к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно функции $\tau(x)$, которое разрешимо безусловно и однозначно в требуемом $(C(\overline{J})\cap C^2(J))$ классе функций.

Единственное решение задачи 1 будет задаваться формулой (9). Теорема доказана.

2° Пусть $\beta=\frac{1-a}{4}$, $\alpha=\frac{1+a}{4}$, $a\equiv\text{const}>0$. В этом случае уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$y^2u_{xx}-u_{yy}+au_x=0. \tag{13}$$

Область D преобразуется в область Ω, ограниченную отрезком $AB=\{(x,\ y):\ y=0,\ 0<x<1\}$ и характеристиками

$$AC:\xi=x-\frac{1}{2}\,y^2=0,\quad BC:\eta=x+\frac{1}{2}\,y^2=1$$

уравнения (13), выходящими из точек $A(0,\ 0)$ и $B(1,\ 0)$.

Задача 3. Найти регулярное в области Ω и непрерывное в замыкании $\overline{\Omega}$, за исключением быть может точек A и B, решение уравнения (13), удовлетворяющее краевым условиям

$$u[\theta_1(x)]=\varphi(x),\ x\in\overline{J}, \tag{14}$$

$$a_0(x)\,u_y(x,\ 0)+b_0(x)\,u_x(x,\ 0)+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\,D_{ox}^{\alpha_i}\omega_i^0(x)\,u(x,\ 0)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}b_j(x)\,D_{x1}^{\gamma_j}\omega_j^1(x)\,u(x,\ 0)=\Psi_1(x),\ x\in J, \tag{15}$$

где $\theta_1(x)$ — аффикс точки пересечения характеристики уравнения (13) выходящей из точки $x\in\overline{J}$, с характеристикой BC, $a_i(x)$, $b_j(x)$, $\varphi(x)$ $\psi_1(x)$, $a_0(x)$, $b_0(x)$, $a_{n+1}(x)$, $\omega_i^0(x)$, $\omega_j^1(x)$ — заданные действительные функции, непрерывные в замыкании множества их определения, α_i, γ_j — заданные действительные числа, удовлетворяющие (6), $i=\overline{1,\ n}$ $j=\overline{1,\ m}$.

Согласно [6, 7] любое решение задачи 3, если оно существует представимо в виде

$$u(x,\ y)=(1-\xi)^{\beta}(\eta-\xi)^{-\beta}\varphi(\xi)-\eta^{-\beta}(1-\xi)^{-\beta}F(\alpha,\ \beta,\ 1,\ z_1)\,\varphi(0)-$$

$$-\beta(1-\alpha)(1-\eta)(1-\xi)^{-\alpha}\int_0^{\xi}\frac{F(\alpha,\ \beta+1,\ 2,\ z_2)\,\varphi(t)}{\sqrt{1-t}\,(\eta-t)^{\beta-1}}\,dt+$$

$$+\left(\frac{\eta-\xi}{\eta}\right)^{-\alpha}\psi(\eta)+\beta(1-\beta)\,\xi\eta^{-\beta}\int_0^{\eta}\frac{F(\alpha+1,\ \beta,\ 2,\ z_3)}{\sqrt{t}\,(t-\xi)^{\alpha+1}}\,dt, \qquad (16)$$

где

$$z_1=\frac{\xi(1-\eta)}{\eta(1-\xi)},\quad z_2=\frac{(1-\eta)(\xi-t)}{(1-\xi)(\eta-t)},\quad z_3=\frac{\xi(t-\eta)}{\eta(t-\xi)},$$

$$\varphi(x)\in C(0\leqslant x<1)\cap C^2(J),\ \psi(x)\in C(0<x\leqslant 1)\cap C^2(J).$$

Теорема 3. *Задача 3 разрешима и притом единственным образом, если выполняется одно из следующих двух условий:*

1. $$a=4k+3,\ k=0,1,2,\cdots,\ a_0(x)\neq 0\ \forall x\in\overline{J},$$
$$a_0(x),\ a_l(x),\ a_{n+1}(x),\ \omega_l^0(x),\ b_0(x),\ b_j(x),$$
$$\omega_j^1(x),\ \psi_1(x)\in C^{k+3}(\overline{J}),\ \varphi(x)\in C^{2k+4}(\overline{J})\cap C^{2k+5}(J),$$
$$i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}.$$

2. $$a=4k+1,\ k=0,1,2,\cdots,\ a_l(x)\equiv 0,$$
$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}\varphi(x)\in C^{2k+3}(\overline{J})\cap C^{2k+1}(J),\ a_0(x),\ a_{n+1}(x),$$
$$b_0(x),\ b_j(x),\ \omega_j^1(x),\psi_1(x)\in C^{k+1}(\overline{J})\cap C^{k+3}(J),\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$$

и $b_0(x)\neq 0\ \forall x\in\overline{J}$ *либо* $b_0(x)\equiv 0$ *и* $\omega_m^1(x)\neq 0,\ b_m(x)\neq 0\ \forall x\in\overline{J}$.

Доказательство. Предположим, что в условии 1, теоремы $a=3$ и существует решение задачи. Тогда из [6]

$$u(x,\ 0)=\varphi(x)+2(1-x)\varphi'(x),\ x\in J,$$

$$u_y(x,\ 0)=x^{-\frac{1}{2}}[\varphi(0)+2(1-x)\varphi'(0)]-x^{-\frac{1}{2}}\psi(x)+$$
$$+2(1-x)\int_0^x(x-t)^{-\frac{1}{2}}\varphi''(t)\,dt,\ x\in J.$$

Подставляя эти выражения в краевое условие (15), получим искомую функцию $\psi(x)$:

$$\psi(x)=\frac{x^{1/2}}{a_0(x)}\Big\{b_0(x)[2(1-x)\varphi''(x)-\varphi'(x)]+$$
$$+\sum_{l=1}^{n}a_l(x)D_{ox}^{\alpha_l}\omega_l^0(x)[\varphi(x)+2(1-x)\varphi'(x)]+ \qquad (17)$$
$$+\sum_{j=1}^{m}b_j(x)D_{x1}^{\beta_j}\omega_j^1(x)[\varphi(x)+2(1-x)\varphi'(x)]-$$
$$-\psi_1(x)\Big\}-\varphi(0)-2(1-x)\varphi'(0)-2(1-x)^{\frac{1}{2}}\int_0^x(x-t)^{-\frac{1}{2}}\varphi''(t)\,dt.$$

Пусть теперь $\alpha = 4k+3$, $k = 1, 2, \cdots$. Из [6] имеем

$$u(x, 0) = \tau(x) + \sum_{r=1}^{k+1} \frac{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}-r\right)}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} (-1)^{r+1}(k+1) \times$$

$$\times F(-r+1,\ 2+k,\ 2,\ 1)(1-x)^r \tau^{(r)}(x),\ x \in J,$$

$$u_y(x, 0) = x^{-k-\frac{1}{2}}(1-x)^k F\left(-k,\ k+\frac{3}{2},\ 1,\ 1\right)\varphi(0) +$$

$$+ (k+1)\left(k+\frac{3}{2}\right) F\left(-k,\ k+\frac{5}{2},\ 2,\ 1\right)(1-x)^{k+1} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{k+2} \frac{(-1)^r \varphi^{(r)}(x)\, x^{r-k-\frac{3}{2}}}{r!\left(r-k-\frac{3}{2}\right)} + \frac{(-1)^{k+1}}{(k+2)!}(k+1)\left(k+\frac{3}{2}\right) \times$$

$$\times F\left(-k,\ k+\frac{5}{2},\ 2,\ 1\right)(1-x)^{k+1} \int_0^x (x-t)^{1/2}\, dt \int_0^1 \varphi^{(k+3)} \times$$

$$\times (t+(x-t)s)\, s^{k+2}\, ds - k(k+1)\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(-k+\frac{1}{2}\right) F\left(-k+1,\right.$$

$$\left. k+\frac{3}{2},\ 3,\ 1\right) \times x^{-k-\frac{1}{2}} \int_x^1 \frac{\psi(t)\, dt}{(t-x)^{-k+1}},\ x \in J.$$

Отсюда

$$\int_x^1 (t-x)^{k-1} \psi(t)\, dt = \Phi_3(x),$$

где

$$\Phi_3(x) = \frac{-x^{k+\frac{1}{2}}}{a_0(x)\, k(k+1)\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(-k+\frac{1}{2}\right) F\left(-k+1,\ k+\frac{3}{2},\ 3,\ 1\right)} \times$$

$$\times \left\{ \psi_1(x) - \sum_{l=1}^{n} a_l(x)\, D_{ox}^{\alpha_l}\, \omega_l^0(x)\, \varphi(x) - \sum_{j=1}^{m} b_j(x)\, D_{x1}^{\gamma_j}\, \omega_j^1(x)\, \varphi(x) - \right.$$

$$- \sum_{r=1}^{k+1} (k+1) \frac{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}-r\right)}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} (-1)^r F(-r+1,\ 2+k,\ 2,\ 1) \times$$

$$\left. \times \left[\sum_{l=1}^{n} a_l(x)\, D_{ox}^{\alpha_l}\, \omega_l^0(x)(1-x)^r \varphi^{(r)}(x) + \right. \right.$$

$$+\sum_{j=1}^{m} b_j(x)\, D_{x1}^{\gamma_j}\omega_j^1(x)\,(1-x)^r\overset{\circ}{\varphi}{}^{(r)}(x) + a_{n+1}(x)\,(1-x)^r\varphi^{(r)}(x)\}-$$

$$-a_0(x)\,x^{-k-\frac{3}{2}}(1-x)^k F\left(-k,\ k+\frac{3}{2},\ 1,\ 1\right)\overset{\circ}{\varphi}(0) -$$

$$-a_0(x)\,(k+1)\left(k+\frac{3}{2}\right)F\left(-k,\ k+\frac{5}{2},\ 2,\ 1\right)(1-x)^{k+1}\sum_{r=0}^{k+2}\times$$

$$\times\frac{(-1)^r\varphi^{(r)}(x)\,x^{r-k-\frac{3}{2}}}{r!\left(r-k-\frac{3}{2}\right)} - \frac{a_0(x)\,(-1)^{k+1}}{(k+2)!}(k+1)\left(k+\frac{3}{2}\right)\times$$

$$\times F\left(-k,\ k+\frac{5}{2},\ 2,\ 1\right)(1-x)^{k+1}\times\int_0^x (x-t)^{1/2}\,dt\times$$

$$\times\int_0^1 s^{k+2}\overset{\circ}{\varphi}{}^{(k+3)}(t+(x-t)\,s)\,ds\Big\}.$$

Дифференцируя k раз получим

$$\psi(x)=\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\,\Phi^{(k)}(x). \tag{18}$$

Легко видеть, что при выполнении условий 1. теоремы единственное решение задачи 3 дается формулой (16), где $\overset{\circ}{\varphi}(x)$ определяется из (17) или (18).

Пусть в условии 2. теоремы $a=1$ и существует решение задачи. Тогда из (7)

$$u(x,\ 0)=\psi(x)+\int_0^x\left(\frac{1-t}{x-t}\right)^{1/2}\varphi'(t)\,dt,\ \ x\in J,$$

$$u_y(x,\ 0)=2\,(1-x)^{\frac{1}{2}}\overset{\circ}{\varphi}{}'(x),\ \ x\in J.$$

Принимая это во внимание, с учетом того, что $a_i(x)\equiv 0$, $i=\overline{1,n}$ из краевого условия (15) находим

$$b_0(x)\,\psi(x)+\sum_{j=1}^{m} b_j(x)\,D_{x1}^{\gamma_j}\omega_j^1(x)\,\psi(x)+a_{n+1}(x)\,\overset{\circ}{\varphi}(x)=$$

$$=\psi_1(x)-2\,a_0(x)\,(1-x)^{1/2}\varphi'(x)-b_0(x)\,\frac{d}{dx}\int_0^x\left(\frac{1-t}{x-t}\right)^{1/2}\overset{\circ}{\varphi}{}'(t)\,dt- \tag{19}$$

$$-\sum_{j=1}^{m} b_j(x)\,D_{x1}^{\gamma_j}\omega_j^1(x)\int_0^x\left(\frac{1-t}{x-t}\right)^{1/2}\varphi'(t)\,dt-a_{n+1}(x)\int_0^x\left(\frac{1-t}{x-t}\right)^{1/2}\overset{\circ}{\varphi}{}'(t)\,dt.$$

В предположении, что $b_0(x)\neq 0\ \ \forall x\in\overline{J}$ проинтегрируем (19) в пределах от x до 1. Учитывая, что $\psi(1)=\varphi(0)$, будем иметь

$$\psi(x)+\int_x^1 K_2^*(x,\ t)\,\psi(t)\,dt=\varphi_1(x), \qquad (20)$$

где

$$K_2^*(x,\ t)=\frac{1}{b_0(x)}\left\{-b_0'(t)+\sum_{j=1}^{l}\frac{\omega_j^1(t)}{\Gamma(-\gamma_j)}\int_x^t (t-y)^{-\gamma_j-1}b_j(y)\,dy+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=l+1}^{m}\frac{\omega_k^1(t)}{\Gamma(1-\gamma_k)}\left|b_k(x)(t-x)^{-\gamma_k}+\int_x^t (t-y)^{-\gamma_k}b_k'(y)\,dy\right|+a_{n+1}'(t)\right\},$$

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{b_0(x)}\left\{\int_x^1\left\{\psi_1(t)-2a_0(t)(1-t)^{1/2}\varphi'(t)-\right.\right.$$

$$-\sum_{j=1}^{m}b_j(t)\,D_{t1}^{\gamma_j}\omega_j^1(t)\int_0^t\left(\frac{1-y}{t-y}\right)^{1/2}\varphi'(y)\,dy-$$

$$\left.-a_{n+1}(t)\int_0^t\left(\frac{1-y}{t-y}\right)^{1/2}\varphi'(y)\,dy+b_0'(t)\int_0^t\left(\frac{1-y}{t-y}\right)^{1/2}\varphi'(y)\,dy\right]dt-$$

$$\left.-b_0(1)\int_0^1\varphi'(t)\,dt+b_0(1)\varphi(0)+b_0(x)\int_0^x\left(\frac{1-t}{x-t}\right)^{1/2}\varphi'(t)\,dt\right\}.$$

Нетрудно показать, что при соблюдении условий 2. теоремы $\varphi_1(x)\in C(\overline{J})\cap C^2(J)$ и ядро $K_2^*(x,\ t)$ непрерывно в квадрате $\overline{J}\times\overline{J}$ при $x\neq t$ и при $x=t$ может обращаться в бесконечность порядка не больше γ_m.

Таким образом, уравнение (20) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода, которое разрешимо безусловно и однозначно в классе функций $C(\overline{J})\cap C^2(J)$.

При $b_0(x)\equiv 0$, а $b_m(x)\neq 0$, $\omega_m^1(x)\neq 0$ $\forall x\in\overline{J}$ подействуем в (19) оператором $D_{x1}^{-\gamma_m}$.

Принимая во внимание тождество

$$\frac{d}{dt}\int_x^{t-\varepsilon}(y-x)^{\gamma_m-1}(t-y)^{-\gamma_k}b_k(y)\,dy=$$

$$=-\gamma_k\int_x^{t-\varepsilon}(y-x)^{\gamma_m-1}(t-y)^{\gamma_k-1}b(y)\,dy+\varepsilon^{-\gamma_k}b(t-\varepsilon)(t-\varepsilon-x)^{\gamma_m-1},$$

после несложных преобразований получим

$$\psi(x)+\int_x^1 K_3^*(x,\ t)\,\psi(t)\,dt=\varphi_2(x), \qquad (21)$$

где

$$K_3(x,t)=\frac{1}{\omega_m^1(x)}\left\{\sum_{j=1}^{l}\frac{\omega_j^1(t)}{\Gamma(\gamma_m)\Gamma(-\gamma_j)}\int_t^x\frac{b_j(y)}{b_m(y)}(y-x)^{\gamma_m-1}\times\right.$$

$$\times(t-y)^{-\gamma_j-1}dy-\sum_{k=l+1}^{m-1}\frac{\omega_k^1(t)}{\Gamma(\gamma_m)\Gamma(1-\gamma_k)}\left[(\gamma_m-\gamma_k)(t-x)^{\gamma_m-\gamma_k-1}\times\right.$$

$$\times\int_0^1 s^{-\gamma_k}(1-s)^{\gamma_m-1}\frac{b_k(t-(t-x)s)}{b_m(t-(t-x)s)}ds+(t-x)^{\gamma_m-\gamma_k}\times$$

$$\left.\left.\times\int_0^1 s^{-\gamma_k}(1-s)^{\gamma_m-1}\frac{d}{dt}\left[\frac{b_k(t-(t-x)s)}{b_m(t-(t-x)s)}\right]ds\right]+\frac{1}{\Gamma(\gamma_m)}\frac{a_{n+1}(t)}{b_m(t)}\right\},$$

$$\varphi_2(x)=\frac{1}{\omega_m^1(x)}\left\{D_{x1}^{-\gamma_m}\frac{1}{b_m(x)}\left[\psi_1(x)-2a_0(x)(1-x)^{1/2}\varphi'(x)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{j=1}^{m-1}b_j(x)D_{x1}^{\gamma_j}\int_0^x\left(\frac{1-t}{x-t}\right)^{1/2}\varphi'(t)\,dt-a_{n+1}(x)\int_0^x\left(\frac{1-t}{x-t}\right)^{1/2}\varphi'(t)\,dt\right]\right\}.$$

Из представлений видно, что $K_3(x,t)\in C(\bar{J}\times\bar{J})$ при $x\neq t$ и при $x=t$ обращается в бесконечность порядка не больше $1-\gamma_m+\gamma_{m-1}$. Из свойств операторов дробного интегро-дифференцирования следует [8], что $\varphi_2(x)\in C(\bar{J})\cap C^1(J)$.

Следовательно, уравнение (21) также является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, которое разрешимо безусловно и однозначно в требуемом классе функций.

Случай $\alpha=4k+1$, $k=1,2,\cdots$ рассматривается аналогично случаю $\alpha=1$.

Единственное решение задачи 3 будет задаваться формулой (16). Теорема доказана.

Замечание. В случае, если в условии 2. теоремы 3 $a_i(x)\not\equiv 0$, $i=\overline{1,n}$, задача эквивалентно редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода и можно говорить лишь об условной разрешимости задачи 3.

Автор благодарен профессору А. М. Нахушеву и профессору А. Б. Нерсесяну за помощь и внимание, оказанные при написании работы.

НИИ прикладной математики и механики
Кабардино-Балкарского госуниверситета

Поступила 11.IV.1985

Ս. ՅՈՒ. ՆԱԶԱՐՈՎ. Ոչ լոկալ եզրային խնդիրներ էլլիպտական հավասարման համար (ամփոփում)

Հետազոտվում են խնդիրներ կոտորակային ինտեգրո-դիֆերենցիալ օպերատորներ (Ռիման-Լիուվիլ-Սալգոյի իմաստով) պարունակող եզրային պայմաններով։

S. Y. NAZAROV. *On some nonlocal boundary value problems for the Euler—Darboux equation* (summary)

Some boundary problems with operators of fractional integro-differentiation in the sense of Riemann—Liouville and M. Saigo are solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. М. Нахушев.* О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями, Диф. уравнения, 1985, 21, № 1, 92—101.
2. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966.
3. *M. Saigo.* A certain boundary value problem for the Euler—Darboux equation, II, Math. Japon., 1980, v. 25, № 2, 211—220.
4. *М. Л. Краснов.* Интегральные уравнения, «Наука», М., 1975, 304 с.
5. *M. Saigo.* On the Hölder continuity of the generalized fractional integrals and derivatives, Math. Rep. Kyushu Univ., 1980, v. 12, № 2, 55—57.
6. *Ф. Б. Нахушева.* О некоторых конструктивных свойствах решений вырождающегося гиперболического уравнения влагопереноса, Изв. АН Узб.ССР, сер. физ.-мат. наук, 1981, № 5, 22—29.
7. *Ф. Б. Нахушева.* Некоторые конструктивные свойства решений вырождающегося гиперболического уравнения, Диф. уравнения, 1982, 17, № 2, 334—340.
8. *G. Hardy, J. Littlewood.* Some properties of fractional integrals, I, Math. Zeitschrift, 1928, v. 27, № 4, 565—606.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 5, 1989 Математика

УДК 517.98

Р. Л. ШАХБАГЯН

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Статья посвящена исследованию разрешимости первой краевой задачи в полупространстве для одного класса бесконечномерных эллиптических псевдодифференциальных операторов.

Полученные в ней результаты являются обобщением на случай бесконечномерных псевдодифференциальных операторов некоторых фактов построенной автором [1]—[4] теории разрешимости общих краевых задач для бесконечномерных эллиптических дифференциальных уравнений.

1. Обозначим через H вещественное гильбертово пространство l_2 с нормой $\|\xi\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2\right)^{1/2} < \infty$. Пространство H', по определению, — подпространство H, определяемое следующим образом:

$$H' = \left\{\xi' = (\xi_2, \xi_3, \cdots),\ \|\xi'\| = \left(\sum_{k=2}^{\infty} \xi_k^2\right)^{1/2} < \infty\right\}.$$

На пространстве H рассмотрим класс символов вида

$$a(\xi_1, \xi') = \sum_{k=0}^{2m} a_k(\xi')\, \xi_1^{2m-k}, \tag{1}$$

где $m \in \mathbb{Z}_+$, а функции $a_k(\xi')$ — положительно однородные относительно ξ' порядка k:

$$a_k(t\xi') = t^k a_k(\xi'),\ t > 0.$$

Класс E. Функция $a(\xi_1, \xi')$ вида (1) принадлежит E (классу эллиптических символов), если она удовлетворяет условию эллиптичности

$$a(\xi) \neq 0, \text{ при } \xi \in H \setminus \{0\}. \tag{2}$$

и бесконечно дифференцируема: $a \in C^{\infty}(H \setminus \{0\})$.

Предполагается, что „вектор“ $\operatorname{grad} a = \left(\frac{\partial a}{\partial \xi_1}, \frac{\partial a}{\partial \xi_2}, \cdots\right) \in H, \xi \in H$, при этом выполнена оценка

$$\|\operatorname{grad} a\|_H = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\partial a}{\partial \xi_k}\right|^2\right)^{1/2} < C\|\xi\|^{2m-1}.$$

Исследование краевой задачи будет существенно опираться на возможность факторизации символов рассматриваемого класса опера-

торов. Как будет показано ниже (см. лемму 1), число граничных условий, обеспечивающих корректную постановку задачи Дирихле, обуславливается индексом фактора a_- (участвующего в представлении (3) символа эллиптического оператора), равного m ($\operatorname{ind} a_+ = m$).

2. Факторизация символов. Функция $a(\xi) \in \mathbf{E}$ -- полином по ξ_1 порядка $2m$ с коэффициентами, определёнными на H'. В силу условия эллиптичности (2), при $\xi' \in H' \setminus |0|$ он не имеет вещественных корней. Обозначим через $a_-(\xi_1 + i\tau, \xi')$ многочлен относительно $\xi_1 + i\tau$, натянутый на корни символа $a(\xi_1 + i\tau, \xi')$, лежащие в комплексной полуплоскости $\mathbf{C}_- = |\xi_1 + i\tau, \tau < 0|$, $\xi' \in H' \setminus |0|$. По аналогии, через $a_+(\xi_1 + i\tau, \xi')$ обозначим полином по $\xi_1 + i\tau$, натянутый на корни символа $a(\xi_1 + i\tau, \xi')$, лежащие в полуплоскости $\mathbf{C}_+ = |\xi_1 + i\tau, \tau > 0|$, $\xi' \in H' \setminus |0|$.

Имеет место

Предложение 1. *Пусть символ $a \in \mathbf{E}$, тогда он допускает однородную факторизацию*

$$a(\xi_1, \xi') = a_+(\xi_1, \xi')\, a_-(\xi_1, \xi'), \tag{3}$$

при этом порядок однородности: $\operatorname{ord} a_+ = \operatorname{ord} a_- = m$. *Если потребовать дополнительно выполнения нормировочного условия* $a_+(0,1) = 1$, $a(0,1) = a_-(0,1)$, *то факторизация* (3) *единственна, при этом функции a_+ и a_- аналитически по ξ_1 продолжаются в полуплоскость $\mathbf{C}_+$ и $\mathbf{C}_-$, соответственно, при этом*

$$a_+(\xi_1 + i\tau, \xi') \neq 0 \text{ при } \tau \geqslant 0,\ |\xi_1| + \|\xi'\| + \tau > 0,$$

$$a_-(\xi_1 + i\tau, \xi') \neq 0 \text{ при } \tau \leqslant 0\ |\xi_1| + \|\xi'\| + |\tau| > 0.$$

Доказательство мы опускаем, поскольку оно по существу совпадает с конечномерным случаем (см. [5])

Замечание 1. Утверждение предложения 1, на самом деле, справедливо при более общих предположениях на символы $a(\xi)$, а именно, достаточно предположить, что функция $a(\xi)$ положительно однородна порядка $\alpha (\alpha \in \mathbf{C})$, удовлетворяет условию (2) и имеет непрерывные первые производные, ограниченные на единичной сфере $\|\xi\| = 1$, $\xi' \neq 0$. Мы же ограничились лишь тем классом символов, который исследуется в работе.

Замечание 2. Символ $a(\xi_1, \xi')$ имеет особенность при $\xi = 0$. Факторы $a_\pm^{-1}(\xi_1, \xi')$ будут участвовать в представлении решения краевой задачи в полупространстве. Чтобы исключить эту особенность, поступим следующим образом.

Пусть $\omega = \dfrac{\xi'}{\|\xi'\|}$, $\omega_k = \dfrac{\xi_k}{\|\xi'\|}$. Обозначим через

$$a'(\xi_1, \xi') = a(\xi_1, (1 + \|\xi'\|)\,\omega), \text{ а } \widetilde{a}(\xi_1, \xi') \text{ — разность}$$

$$\widetilde{a}(\xi_1, \xi') = a'(\xi_1, \xi') - a(\xi_1, \xi').$$

Имеем

$$|\widetilde{a}(\xi_1, \xi')| = |a(\xi_1, \xi' + \omega) - a(\xi_1, \xi')| =$$

$$= \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\partial a(\xi_1, \xi' + \theta\omega)}{\partial \xi_k} \omega_k\right| < \left(\sum_{k=2}^{\infty} \left|\frac{\partial a}{\partial \xi_k}\right|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \omega_k^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$< C(1 + \|\xi'\| + |\xi_1|)^{2m-1}. \tag{4}$$

С точки зрения разрешимости краевых задач символы $a(\xi)$, удовлетворяющие оценке (4), играют (как и в конечномерном случае) подчинённую роль. Поэтому в дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что исследуемый нами символ есть $a'(\xi)$.

Из условия (2) следует, что для символа $a'(\xi)$ выполняется оценка

$$C_1(1 + |\xi_1| + \|\xi'\|)^{2m} \leqslant |a'(\xi)| \leqslant C_2(1 + |\xi_1| + \|\xi'\|)^{2m}. \tag{5}$$

3. Опишем классы символов и функциональные пространства, в которых исследуется краевая задача (ср. [1]).

Класс $\sum_{a_0}^{q, s}$. Пусть $a_0(\xi)$—фиксированный эллиптический символ второго порядка. В качестве a_0 можно выбрать $a_0 = \|\xi\|^2 + 1$—символ оператора $-\Delta + I$.

Обозначим через H_1 пространство последовательностей $x = (x_1, x_2, \cdots)$ с конечной нормой

$$\|x\|_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \sigma_k^{-2}\right)^{1/2} < +\infty, \tag{6}$$

где $\{\sigma_k\}$—заданная последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию $\sum \sigma_k^{-2} < \infty$.

Пусть функция $Q(x, \xi)$ определена на $H_1(x) \times \{H(\xi) \setminus 0\}$ и принадлежит $C^{\infty}(H_1(x) \times \{H(\xi) \setminus 0\})$. Пусть, далее, $Q(x, \xi^N) = Q(x, P^N\xi)$—ограничение $Q(x, \xi)$ на $H_1(x) \times \{H^N(\xi) \setminus 0\}$ ($H^N = \{\xi \subset H, \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_N, 0, \cdots)\}$. Положим

$$G^N(x, z^N) = F^{-1}_{\xi^N \to z^N} Q(x, \xi^N) = (2\pi)^{-N/2} \int_{H^N} e^{-i(\xi^N, z^N)} Q(x, \xi^N)\, d\xi^N \tag{7}$$

и предположим, что ядра $G^N \in L_1(H_z^N)$ при любых $x \in H_1$ и $N \in Z_+$.

Введём следующие нормы:

$$\|Q(x, \xi)\|_0 = \sup_{\Lambda} \|G^N(x, z^N)\|_{L_1(H_z^N)}, \tag{8}$$

$$\|\|Q\|\|_0^{(q)} = \sup_{\beta, \gamma} \|a_0^{\frac{-q+|\gamma|}{2}}(\xi) D_x^{\beta} D_{\xi}^{\gamma} Q\|_0, \tag{9}$$

где sup берётся по β, γ, $\beta \leqslant \beta_0$, $|\gamma| \leqslant \gamma_0$.

Положим, наконец, для любых $s \in Z_+^1$, $R > 0$

$$\|\|Q\|\|_{s, R}^{(q)} = \sum_{|\gamma| < s} \sup_{\|x\|_1 < R} \|\|D_x^{\gamma} Q(x, \xi)\|\|_0^{(q)}. \tag{10}$$

Определение 1. Символ $Q(x, \xi)$ принадлежит пространству $\sum_{a_0}^{q,s}$, если при любых β_0, γ_0 выполняются следующие условия:

$$\text{а)} \quad |||Q|||_{s,\infty} < +\infty$$

и для любого $N \in Z_+$

$$|||Q(x^N, \xi|||_{s,\infty}^{(q)} < +\infty;$$

$$\text{в)} \quad \lim_{N\to\infty} |||Q(x, \xi) - Q(x^N, \xi)|||_{s,R}^{(q)} = 0$$

для любого R, $0 < R < \infty$.

Пространства $CL^s(H_1)$ и $CL^s(H_1^+)$. По определению, пространство $CL^s(H_1)$ есть пополнение множества C_Φ цилиндрических функций, заданных на H_1, в смысле следующей сходимости: для $f \in C_\Phi$ положим

$$\|f\|_{0,R} = \sup_{\|x\|_1 < R} |f(x)|, \quad 0 < R \leqslant \infty.$$

Пусть, далее, $s > 0$—целое число. Обозначим

$$\|f\|_{s,R} = \sum_{|\alpha| \leqslant s} \|D^\alpha f\|_{0,R}, \quad 0 < R \leqslant \infty.$$

Последовательность $\{f_k\}_1^\infty$, $f_k \in C_\Phi$ называется фундаментальной, если

а) $$\sup_k \|f_k\|_{s,\infty} \leqslant M < +\infty,$$

в) для любого R, $0 < R < \infty$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N > 0$, что $\|f_n - f_m\|_{s,R} < \varepsilon$ при n, $m > N$.

Обозначим через H_1^+ полупространство $H_1^+ = \{x \in H_1, \ x_1 > 0\}$. Пусть P^+ — оператор сужения функции, заданной на H_1, на полупространство $H_1^+ : P^+ : H_1 \to H_1^+$.

Определение 2. Мы скажем, что функция $f(x)$ принадлежит пространству $CL^s(H_1^+)$, если она является сужением функции, принадлежащей пространству $CL^s(H_1)$.

Это определение равносильно тому, что если $f \in CL^s(H_1^+)$, то для неё существует гладкое продолжение $lf \in CL^s(H_1)$ (подробнее о свойствах введённых пространств см. [6], [7]).

4. Предложение 2. *Оператор $\widehat{a'}$, порождённый символом a', допускает замыкание в пространстве $CL^0(H_1^+)$.*

Доказательство. Замыкаемость оператора $\widehat{a'}$ будет доказана, если мы установим принадлежность его символа $a'(\xi)$ соответствующему классу $\sum_{a_0}^{q,s}$ (см. [6], теорема 6.1). С этой целью введём обозначения: $\eta_1 = \xi_1$, $\eta' = \xi' + \omega$, тогда символ $a'(\xi_1, \xi') = a(\eta_1, \eta')$. Положим $\eta = (\eta_1, \eta')$, $P^n\eta = \eta^n$ и рассмотрим символ

$$Q(\eta^n) = \|\eta^n\|^{-2m+\varepsilon} a(\eta^n), \quad \|\eta^n\| = \left(\sum_{k=1}^n \eta_k^2\right)^{1/2}, \quad \varepsilon > 0. \tag{11}$$

Очевидно функция $Q(\eta^n)$ положительно однородна по η^n, при этом порядок однородности равен ε. Отсюда, как хорошо известно, следует, что её преобразование Фурье в смысле обобщенных функций

$$F^{-1}_{\xi_1^n \to z^n}\, Q(\eta_1'') = q(z^n)$$

удовлетворяет оценке

$$|q(z^n)| \leqslant C \|z^n\|^{-n-s}, \quad z^n \neq 0 \tag{12}$$

с некоторой постоянной $C > 0$ и, стало быть, $q \in L_1(R^n_{z^n})$.

Переходя к sup по n, получаем

$$\|Q(\xi)\|_0 = \sup_n \|q(z^n)\|_{L_1(R^n_{z^n})} \leqslant M < \infty. \tag{13}$$

Используя, далее, однородность и гладкость функции Q, получаем

$$\|| Q \||_0^{2s} = \sup_{\Gamma} \|a_0^{\frac{-2s+|\gamma|}{2}}(\eta_1)\, \partial_{\eta_1}^{\gamma} Q(\eta_1)\|_0 < \infty. \tag{14}$$

Поскольку символ Q не зависит от x, то очевидным образом выполняются также условия а) и в) определения 1, откуда следует принадлежность символа Q классу $\sum_{a_0}^{2s,\,s}$ при любом $s > 0$.

Очевидно, далее, что $\|\eta_1\|^{2m-s} \in \sum_{a_0}^{2m,\,s}$. Отсюда, в силу свойства мультипликативности классов $\sum_{a_0}$ (см. [6], предложение 4.1) получаем, что символ $a(\eta) = \|\eta\|^{2m-s} Q(\eta)$, а значит и $a'(\xi)$, принадлежит классу $\sum_{a_0}^{2m+2s,\,s}$ при любом s. Отсюда, согласно упомянутой теореме 6.1 [6] получаем, что оператор $\widehat{a'}$ замыкаем в пространстве $CL^0(H_1)$.

Докажем теперь замыкаемость оператора $\widehat{a'}$ в пространстве $CL^0(H_1^+)$. Пусть $\varphi \in C_\Phi(H_1^+)$, то есть $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(P^N x) = \tilde{\varphi}(x^N) \in C_0^\infty(H_1^+)$

Как известно, на множестве $C_\Phi(H_1^+)$ оператор $\widehat{a'}$, порожденный символом $a'(\xi)$, задается как псевдодифференциальный оператор:

$$\widehat{a'}\varphi(x^N) = (2\pi)^{-N/2} \int_{H_1^N} e^{-i(x^N, \xi^N)}\, a'(\xi^N)\, \tilde{\varphi}(\xi^N)\, d\xi^N, \tag{15}$$

где $\tilde{\varphi}(\xi^N) = F_{x^N \to \xi^N} \varphi(x^N)$.

Очевидно

$$\widehat{a'} : C_\Phi(H_1^+) \to CL^0(H_1^+).$$

Пусть последовательность $\{\varphi_n\}_1^\infty$, $\varphi_n \in C_\Phi(H_1^+)$ стремится к нулю в $CL^0(H_1^+)$: $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\widehat{a'}\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ также в $CL^0(H_1^+)$. Нам надлежит доказать, что $f(x) \equiv 0$, при $x \in H_1^+$.

Поскольку оператор $\widehat{a'}$ дифференциальный по переменной x_1, то он представим в виде

$$\widehat{a'}\varphi(x) = (2\pi)^{\frac{-n+1}{2}} \sum_{k=0}^{2m} \int_{H_1^n = 0} e^{-i(x'^n, \xi'^n)} a_k'(\xi'^n)\, D_1^{2m-k}\, \tilde{\varphi}_x(x_1, \xi'^n)\, d\xi'^n,$$

где положено: $a_k'(\xi') = a_k((1+|\xi'|)\omega)$, $x'^n = (x_2, \cdots, x_n)$,

$$\xi'^n = (\xi_2, \cdots, \xi_n),\ D_1^k = i^k \frac{\partial^k}{\partial x_1^k},\ \widetilde{\varphi}_n(x_1, \xi'^n) = F^{-1}_{\xi_1 \to x_1} \widetilde{\varphi}(\xi^n).$$

Из последнего представления следует, что

$$\widehat{a'}\,\varphi_n(x) \equiv 0 \text{ в } H_1^- = \{x \in H_1,\ x_1 < 0\},$$

поскольку $D_1^k \widetilde{\varphi}(x_1, \xi'^n) \equiv 0$, при $x_1 < 0$ и $\forall \xi'^n$. Продолжая $\varphi_n(x)$ и $f(x)$ нулём в H_1^- и обозначая полученные продолжения, соответственно, через $l\varphi_n$ и lf, имеем

$$l\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ и } \widehat{a'}(l\varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} lf \text{ в } CL^0(H_1).$$

Но поскольку оператор $\widehat{a'}$ допускает замыкание в $CL^0(H_1)$, то $lf(x) \equiv 0$ в H_1, а, значит, $f(x) \equiv 0$ в H_1^+, чем и завершается доказательство предложения.

Замечание. Обозначим через

$$H_{1,\varepsilon}^+ = \{x \in H_1,\ x_1 \geqslant -\varepsilon\},\ \varepsilon \in R_+^1.$$

Тогда точно так же как и выше доказывается, что оператор $\widehat{a'}$ допускает замыкание в пространстве $CL^0(H_{1,\varepsilon}^+)$.

Это замечание будет использовано при исследовании задачи Дирихле.

5. Постановка краевой задачи. В полупространстве H_1^+ рассмотрим однородную задачу Дирихле

$$\widehat{a'}\,u(x) = f(x),\ x \in H_1^+, \tag{16}$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}\right|_{x_1=0} = 0,\ k = \overline{0,\ m-1}. \tag{17}$$

Предполагается, что символ оператора $\widehat{a'}$:

$$a'(\xi_1, \xi') = a(\xi_1, (1+|\xi'|)\omega) \text{ и } a \in \mathbf{E}.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ оператор, соответствующий краевой задаче (16), (17):

$$\mathfrak{M}u = \left\{\widehat{a'}\,u(x),\ x \in H_1^+,\ u|_{x_1=0},\ \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}, \cdots, \left.\frac{\partial_a^{m-1} u}{\partial x_1^{m-1}}\right|_{x_1=0}\right\}.$$

Пусть $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{M}}$ — область определения замыкания оператора $\mathfrak{M}$.

Через $\mathfrak{Q}^0_{\mathfrak{M}}$ обозначим следующее множество:

$$\mathfrak{Q}^0_{\mathfrak{M}} = \left\{u \in \mathfrak{Q}_{\mathfrak{M}},\ u|_{x_1=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = \cdots = \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_1^{m-1} u}\right|_{x_1=0} = 0\right\}.$$

Таким образом, задача Дирихле (16), (17) заключается в отыскании функции $u \in \Omega^0_{\mathfrak{M}}$ и удовлетворяющей уравнению (16) для произвольно заданной функции $f \in CL^0(H_1^+)$.

Ниже будет приведена формула, задающая решение задачи (16), (17). В ней существенную роль будут играть свойства факторов $a_\pm(\xi)$, входящих в представление (3) для символа $a(\xi)$.

Функция $a(\xi_1, \xi')$ -- полином по ξ_1 степени $2m$. Пусть $\tau_j^+ = \tau_j^+(\xi')$ и $\tau_j^- = \tau_j^-(\xi')$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$ — корни символа $a(\xi_1, \xi')$, лежащие, соответственно, в верхней и нижней комплексных полуплоскостях $\mathbf{C}_\pm$. Имеем тогда

$$a_\pm(\xi_1, \xi') = \prod_{j=1}^{m} (\xi_1 - \tau_j^\mp(\xi')). \tag{18}$$

Решение $u(x)$ задачи Дирихле будем искать, по аналогии с конечномерным случаем, в виде

$$u(x) = P^+ \widehat{\ } (\psi(x_1)\, a_+'^{-1}(\xi))\, \theta(x_1)\, o\, \widehat{\ } (\psi(x_1)\, a_-'^{-1}(\xi)) o l f, \tag{19}$$

где P^+ — оператор сужения функций на H_1^+,

$$a_\pm' = a_\pm(\xi_1, (1 + |\xi'|)\,\omega),\ \psi \in C^\infty(R^1),$$

$\psi(x_1) \equiv 1$, при $x_1 \geqslant -\varepsilon/2$, $\psi(x_1) \equiv 0$, при $x_1 \leqslant -\varepsilon$, $\varepsilon > 0$; $\theta(x_1)$—функция Хевисайда, а lf — гладкое продолжение функции $f \in CL^n(H_1^+)$ на H_1 : $lf \in CL^0(H_1)$.

Легко доказать, что функция $u(x)$ не зависит от конкретного выбора оператора продолжения l.

Теорема 1. *Оператор*

$$\widehat{R} f = P^+ \widehat{\ } (\psi(x_1)\, a_+'^{-1}(\xi))\, \theta(x_1)\, o\, \widehat{\ } (\psi(x_1)\, a_-'^{-1}(\xi)) o l f \tag{19'}$$

осуществляет непрерывное отображение пространства $CL^{2m}(H_1^+)$ *в* $CL^{2m}(H_1^+) \cap \Omega^0_{\mathfrak{M}}$.

Доказательству теоремы предпошлём две леммы.

Лемма 1. *Оператор* $P^+(\psi(x_1)\, a_+'^{-1})\, \theta(x_1)$ *непрерывно действует из пространства* $CL^{2m}(H_{1,\varepsilon}^+)$ *в* $CL^{2m}(H_1^+) \cap \Omega^0_{\mathfrak{M}}$.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что поскольку перед множителем $\psi(x_1)$ в выражении для решения задачи стоит оператор проектирования P^+, либо $\theta(x_1)$, а в R_+^1 $\theta(x_1) \equiv 1$, то его мы будем опускать.

Пусть последовательность $\{\varphi_n\}_1^\infty$, $\varphi_n \in C_\Phi(H_{1,\varepsilon}^+)$ сходится к φ в $CL^{2m}(H_{1,\varepsilon}^+)$:

$$\varphi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \text{ в } CL^{2m}(H_{1,\varepsilon}^+). \tag{20}$$

Обозначим через

$$\Psi_n(x^n) = P^+ \widehat{a_+^{-1}}(\xi_1, \xi')\, \theta\, \varphi_n$$

(здесь мы опускаем множитель Ψ) и покажем, что $\Psi_n' \in CL^{2m}(H_1^+) \cap \Omega_{\mathfrak{M}}^0$.

Действительно, в силу (18) и предложения 1 функция $a_+'^{-1}(\xi_1 + i\tau, \xi')$ аналитична по $\xi_1 + i\tau$ при $\tau > 0$ и допускает оценку

$$|a_+'^{-1}(\xi_1 + i\tau, \xi'^n)| \leqslant C(1 + \|\xi'^n\| + |\xi_1| + |\tau|)^{-m}. \tag{21}$$

Поскольку $\varphi_n' \in C_0(H_1^+)$, то $\varphi_n' = \theta\varphi_n' \in S(H_1^+)$, откуда легко следует, что $\widetilde{\varphi}_n' = F\varphi_n'$ допускает аналитическое продолжение по $\xi_1 + i\tau$ в полуплоскость $\tau > 0$. В самом деле, из представления

$$\widetilde{\varphi}_n'(\xi_1, \xi'^n) = (2\pi)^{-n/2} \int_0^\infty \int_{H_1^{n-1}} e^{ix_1\xi_1 + i(x'^n, \xi'^n)} \varphi_n'(x_1, x'^n)\, dx'^n\, dx_1 \tag{22}$$

вытекает, что (заметим, что интегрирование по x_1 ведётся от 0 до $+\infty$) правая часть представления (22) допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\mathbf{C}_+$:

$$\widetilde{\varphi}_n'(\xi_1 + i\tau, \xi'^n) = (2\pi)^{-n/2} \int_0^\infty \int_{H_1^{n-1}} e^{ix_1(\xi_1 + i\tau) + i(x'^n, \xi'^n)} \varphi_n'(x_1, x'^n)\, dx'^n\, dx_1.$$

При этом, очевидно, выполняется оценка

$$(1 + \|\xi'^n\| + |\xi_1| + \tau)^N |\widetilde{\varphi}_n'(\xi_1 + i\tau, \xi'^n)| \leqslant C_N \tag{23}$$

при любых $\tau > 0$ и $N > 0$.

Обозначим через $\widetilde{\Psi}_n' = a_+'^{-1}(\xi_1, \xi'^n)\, \widetilde{\varphi}_n'$, тогда

$$\Psi_n'(x_1, x'^n) = (2\pi)^{-n/2} \int_{H^n} e^{-ix_1\xi_1 - i(x'^n, \xi'^n)} a_+'^{-1}(\xi_1, \xi'^n)\, \widetilde{\varphi}_n'(\xi_1, \xi'^n)\, d\xi^n. \tag{24}$$

Из (21) и (23) очевидным образом следует, что $\Psi_n' \in C^\infty(H_1^n)$. Покажем теперь, что $\Psi_n' \in C_0^\infty(\overline{H_1^n})$. В самом деле, в силу аналитичности функции $a_\tau^{-1}(\xi_1 + i\tau, \xi'^n)\, \widetilde{\theta\varphi}_n(\xi_1 + i\tau, \xi'^n)$ по $\xi_1 + i\tau$ в полуплоскости $\mathbf{C}_+$ и непрерывности в замкнутой полуплоскости $\overline{\mathbf{C}}_+$, используя теорему Коши, представим

$$\Psi_n'(x_1, x'^n) = (2\pi)^{-n/2} \int_{H^n} e^{-ix_1(\xi_1 + i\tau) - i(x'^n, \xi'^n)} \widetilde{\Psi}_n'(\xi_1 + i\tau, \xi'^n)\, d\xi^n,$$

где τ произвольно. Учитывая вновь оценки (21) и (23), приходим к неравенству

$$|\Psi_n'(x_1, x'^n)| < C_1 e^{x_1\tau}, \tag{25}$$

где $C_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от τ.

Произвольным образом фиксируя $x_1 < 0$ и устремляя $\tau \to +\infty$, из последней оценки имеем $\Psi_n'(x_1, x'^n) = 0$, то есть $\operatorname{supp} \Psi_n' \in \overline{H_1^+}$. Таким образом, $\Psi_n' \in C^\infty(H_1')$. Отсюда легко следует, что $\Psi_n = P^+\Psi_n' \in C^\infty(H_1^+)$ и, стало быть, $\Psi_n \in CL^{2m}(H_1^+)$.

Очевидно, далее, что $\Psi_n \in \mathfrak{Q}_{\mathfrak{M}}$, покажем, что они удовлетворяют граничным условиям (17), то есть, что $\Psi_n \in \mathfrak{Q}^0_{\mathfrak{M}}$. Имеем

$$\frac{\partial^k \Psi_n}{\partial x_1^k} = P^+((-i\xi_1)^k a_+'^{-1}(\xi_1, \xi'^n)\theta\varphi_n, \quad k = \overline{0, m-1}.$$

Функция $\xi_1^k a_+'^{-1}(\xi_1, \xi'^n)$ аналитична по $\xi_1 + i\tau$ при $\tau > 0$, непрерывна в $\overline{C_+}$ и, в силу (21), удовлетворяет оценке

$$|(\xi_1 + i\tau)^k a_+'^{-1}(\xi_1 + i\tau, \xi'^n)| \leqslant C(1 + |\xi'^n| + |\xi_1| + |\tau|)^{k-m}$$

для $0 \leqslant k \leqslant m-1$. Отсюда, как и выше, следует, что

$$\left.\frac{\partial^k \Psi_n}{\partial x_1^k}\right|_{x_1=0} = 0, \quad k = \overline{0, m-1},$$

то есть $\Psi_n \in \mathfrak{Q}^0_{\mathfrak{M}}$. Таким образом, получено, что $\Psi_n \in CL^{2m}(H_1^+) \cap \mathfrak{Q}^0_{\mathfrak{M}}$.

Для завершения доказательства леммы нам надлежит совершить предельный переход по n. С этой целью докажем, что $a_+'^{-1} \in \sum_{a_0}^{-m+s, s}$. Из неравенств (5) и (18) следует оценка

$$|a_+'^{-1}(\xi_1, \xi'^n)| \leqslant C(1 + |\xi'^n| + |\xi_1|)^{-m}.$$

Используя далее эту оценку, нетрудно убедиться, что

$$F^{-1}_{\xi^n \to x^n}\left(a_0^{\frac{m-s+|\tau|}{2}}(\xi_1, \xi'^n)\partial_\tau^\tau a_+'^{-1}(\xi_1, \xi'^n)\right) \in L_1(H_\varepsilon''),$$

откуда, переходя к sup по n и τ, получаем

$$\| a_+'^{-1} \|_0^{(q)} = \sup \left\| a_0^{\frac{m-s+|\tau|}{2}}(\xi)\, \partial_\xi^\tau a_+'^{-1}(\xi) \right\|_0 < +\infty.$$

Поскольку символ $a_+'^{-1}$ не зависит от x, то условия а) и в) определения 1 очевидным образом выполняются и, следовательно, $a_+'^{-1} \in \sum_{a_0}^{-m+s, s}$ при любом $s \geqslant 0$. Но тогда, согласно теореме 3.2 [6], оператор $\widehat{a_+'^{-1}}$ продолжается с множества C_Φ до непрерывного оператора:

$$\widehat{a_+'^{-1}} : CL^{2m}(H_1) \to CL^{2m}(H_1).$$

Отсюда, в силу (20), имеем

$$\widehat{a_+'^{-1}}(\varphi_n) \to \widehat{a_+'^{-1}}\varphi \text{ в } CL^{2m}(H_{1,\varepsilon}^+). \tag{26}$$

Докажем теперь, что $\Psi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \Psi$ в $CL^{2m}(H_1^-)$. Из представления (24) следует, что для любого α, $|\alpha| \leqslant 2m$

$$D^\alpha \Psi_n = D^\alpha P^+ \hat{a}_-^{-1} \theta\varphi_n = P^+ \hat{a}_-^{-1} D^\alpha (\theta\varphi_n),$$

откуда, в соответствии с (26), имеем

$$\Psi_n \to \Psi = P^+ \hat{a}_+^{-1} \theta\varphi \text{ в } CL^{2m}(H_1^+). \tag{27}$$

Из (20) и (27) следует, что оператор $P^+ \hat{a}_+^{-1} \theta$ непрерывным образом отображает пространство $CL^{2m}(H_{1,\varepsilon}^-)$ в $CL^{2m}(H_1^+)$.

Лемма доказана.

Замечание. Совершенно аналогично можно доказать, что оператор $P^- (\psi(x_1)\, a_+^{\prime -1})\, \theta(x_1)$ непрерывно действует из пространства $CL^0(H_{1,\varepsilon}^-)$ в $CL^0(H_1^+) \cap \Omega^0_{\mathfrak{M}}$.

Имеет место

Предложение 3. *Существует счётно-аддитивная мера $\mu(dz)$, сосредоточенная на H_1 такая, что имеет место представление*

$$P^+ (\psi a_-^{\prime -1})\, \theta\varphi(x) = P^+ \int \varphi(x - z)\, \mu(dz) \tag{28}$$

для любого $\varphi \in CL^0(H_{1,\varepsilon}^+)$.

Доказательство. В процессе доказательства леммы 1 было установлено, что символ $a_+^{\prime -1} \in \sum_{a_0}^{-m+\varepsilon,\, s}$, где $\varepsilon > 0$ и $s \geqslant 0$ — произвольные числа. Отсюда следует, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ — $m + \varepsilon < 0$ и $\sum_{a_0}^{-m+\varepsilon,\, s} \subset \sum_{a_0}^{0,\, 0}$ (здесь мы воспользовались известным свойством вложения классов $\sum_{a_0}^{q,\, s}$, а именно, по следствию предложения 3.3 [6]: $\sum_{a_0}^{q_1,\, s} \subset \sum_{a_0}^{q_2,\, s}$ при $q_1 < q_2$). Принадлежность же символа $a_+^{\prime -1}$ классу $\sum_{a_0}^{0,\, 0}$, в соответствии с теоремой 2.2 [7], в свою очередь, обеспечивает существование счётно-аддитивной меры, заданной на пространстве H_1 и такой, что для любого $\varphi \in CL^0(H_{1,\varepsilon}^+)$ имеет место представление (28), в котором $\mu(dz)$ есть проекция этой меры на полупространство $H_{1,\varepsilon}^+$, что и доказывает наше утверждение.

Лемма 2. *Оператор $\hat{}\,(\psi(x_1)\, a_-^{\prime -1}) \circ l$ непрерывно действует из пространства $CL^{2m}(H_1^+)$ в $CL^{2m}(H_{1,\varepsilon}^+)$.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{\varphi_n\}_1^\infty$, $\varphi_n \in C_\Phi(H_1^+)$ сходится к φ в пространстве $CL^{2m}(H_1^+)$:

$$\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi \text{ в } CL^{2m}(H_1^+). \tag{29}$$

Обозначим через $l\varphi_n$ гладкое продолжение функции φ_n на H_1: $l\varphi_n \in CL^{2m}(H_1)$. Как доказано в [1] из (29) следует

$$l\varphi_n \to l\varphi \text{ в } CL^{2m}(H_1), \tag{30}$$

то есть оператор l непрерывно действует из $CL^{2m}(H_1^+)$ в $CL^{2m}(H_1)$.

Аналогично тому, как это было установлено в процессе доказательства леммы 1, используя оценку

$$|a_-'^{-1}(\xi_1, \xi')| \leqslant C(1 + |\xi'| + |\xi_1|)^{-m},$$

можно показать, что символ $a_-'^{-1} \in \sum_{a_0}^{-m+\varepsilon, s}$ при любых $\varepsilon > 0$ и $s \in \mathbf{Z}_+$. Отсюда, как и выше, получаем, что оператор

$$\hat{a}_-'^{-1} : CL^{2m}(H_1) \to CL^{2m}(H_1), \tag{31}$$

при этом отображение непрерывно. Таким образом, из (29)—(31) имеем

$$\hat{a}_-'^{-1} l\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \hat{a}_-'^{-1} l\varphi \text{ в } CL^{2m}(H_1). \tag{32}$$

Для завершения доказательства леммы нам остаётся заметить, что оператор ψ умножения на $\psi(x_1)$ непрерывным образом отображает пространство $CL^{2m}(H_1)$ в $CL^{2m}(H_{1,\varepsilon}^+)$:

$$\psi : CL^{2m}(H_1) \to CL^{2m}(H_{1,\varepsilon}^+). \tag{33}$$

Из (32) и (33) окончательно получаем

$$\widehat{(\psi\, a_-'^{-1})} \circ l\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \widehat{(\psi\, a_-'^{-1})} \circ l\varphi \text{ в } CL^{2m}(H_{1,\varepsilon}^+).$$

Лемма доказана.

Следствие. Из доказанной леммы, в частности, вытыкает, что оператор $\widehat{(\psi\, a_-'^{-1})} \circ l$ непрерывно действует из пространства $CL^0(H_1^+)$ в $CL^0(H_{1,\varepsilon}^+)$.

Предложение 4. *Существует счётно-аддитивная мера $\mu_1(dz)$, определённая на H_1 такая, что имеет место представление*

$$\widehat{(\psi\, a_-'^{-1})} \circ lf(x) = \psi(x_1) \int_{H_1} lf(x - z)\, \mu_1(dz) \tag{34}$$

для любого $f \in CL^0(H_1^+)$.

Доказательство по существу повторяет доказательство предложения 3, и поэтому мы его опускаем.

Доказательство теоремы 1. Утверждение теоремы 1 есть непосредственное следствие лемм 1 и 2.

Действительно, в силу леммы 2 оператор $\widehat{(\psi\, a_-'^{-1})} \circ l$ осуществляет непрерывное отображение:

$$\widehat{(\psi\, a_-'^{-1})} \circ l : CL^{2m}(H_1^+) \to CL^{2m}(H_{1,\varepsilon}^+). \tag{35}$$

Далее, согласно лемме 1, оператор

$$P^+ \widehat{(\psi\, a_+'^{-1})} \circ \theta : CL^{2m}(H_{1,\varepsilon}^+) \to CL^{2m}(H_1^+) \cap \Omega_{\mathfrak{M}}^0 \tag{36}$$

и отображение непрерывно.

Из (35) и (36) получаем, что оператор $\widehat{R}$, задаваемый выражением (19'), осуществляет непрерывное отображение:

$$\widehat{R} : CL^{2m}(H_1^+) \to CL^{2m}(H_1^+) \cap \Omega^0_{\mathfrak{M}}. \tag{37}$$

Теорема доказана.

Замечание. Используя замечания к леммам 1 и 2, можно доказать, что оператор $\widehat{R}$ непрерывно действует из пространства $CL^0(H_1^+)$ в $CL^0(H_1^+) \cap \Omega^0_{\mathfrak{M}}$.

6. В этом пункте будет сформулирован и доказан основной результат статьи.

Предварительно введём следующее обозначение:

$$\|f\|_{C(H_1^+)} \overset{\text{def}}{=} \sup_{x \in H_1^+} |f(x)|.$$

Имеет место

Теорема 2. *Пусть символ $a(\xi) \in \mathbf{E}$, тогда для любого $f \in CL^0(H_1^+)$ существует единственное решение $u(x)$ задачи* (16), (17), *принадлежащее пространству $CL^0(H_1^+) \cap \Omega^0_{\mathfrak{M}}$, определяемое формулой* (19). *При этом входящие в представление решения операторы порождаются счётно-аддитивными мерами, заданными на H_1.*

Имеет место априорная оценка

$$\|u\|_{C(H_1^+)} \leqslant C \|f\|_{C(H_1^+)}, \tag{38}$$

где $C > 0$—постоянная, не зависящая от f.

Доказательство. Проверим, что функция $u(x)$, задаваемая формулой (19), является решением задачи (16), (17). Пусть вначале правая часть f уравнения (16) принадлежит $C_\Phi(H_1^+)$. Применим к оператору $\widehat{R}$, задаваемому представлением (19), оператор $\widehat{a'}$. Имеем

$$\widehat{a'}\, u = \widehat{a'} \circ \widehat{R} f = \widehat{a'} \circ P^+ \widehat{\ } \left(\psi(x_1)\, a_+'^{-1}\right) \theta(x_1) \circ$$

$$\circ \widehat{\ } \left(\psi(x_1)\, a_-'^{-1}\right) \circ lf = P^+ \widehat{a'_+} \circ \widehat{a'_-} \circ \widehat{\ } \left(\psi(x_1)\, a_+'^{-1}\right) \theta(x_1) \circ$$

$$\circ \widehat{\ } \left(\psi(x_1)\, a_-'^{-1}\right) \circ lf = P^+ \psi(x_1) \widehat{a'_-} \circ \theta \circ \widehat{a'^{-1}_-}\, lf =$$

$$= P^+ \theta(x_1)\, lf = f,$$

откуда следует, что $u(x)$ удовлетворяет уравнению (16) в полупространстве H_1^+.

Пусть теперь $f \in CL^0(H_1^+)$ — произвольно заданная функция, и пусть последовательность $\{f_n(x)\}_1^\infty$, $f_n \in C_\Phi$ сходится к f в $CL^0(H_1^+)$. Обозначим через $u_n(x)$ решение задачи (16), (17), отвечающее правой части $f_n(x)$. Для $u_n(x)$ справедливо представление

$$u_n(x) = P^{+}\widehat{}(\psi(x_1)\, a_{+}^{-1})\, \theta(x_1)\, \widehat{}(\psi(x_1)\, a_{-}^{-1})\, lf_n(x). \qquad (39)$$

Имеем

$$\hat{a}'\, u_n(x) = f_n(x),\ x \in H_1^{+},\ n = 1, 2, \cdots. \qquad (40)$$

В силу замечания к теореме 1, в формуле (39) можно совершить предельный переход в пространстве $CL^0(H_1^+)$ при $n \to \infty$. Получаем, что $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \in CL^0(H_1^+) \cap \Omega^0_{\mathfrak{M}}$ и, следовательно, $u(x)$ есть решение задачи Дирихле (16), (17), принадлежащее пространству $CL^0(H_1^+)$.

В силу предложений 3 и 4 операторы, определяющие решение задачи, порождаются счётно- аддитивными мерами, сосредоточенными на пространстве H_1.

Обратимся теперь к оценке (38). В силу замечания к теореме 1 оператор $\hat{R}$ осуществляет непрерывное отображение пространства $CL^0(H_1^+)$ в $CL^0(H_1^+) \cap \Omega^0_{\mathfrak{M}}$. Из линейности оператора $\hat{R}$ и свойств пространства CL^0 приходим к неравенству

$$\|u\|_{C(H_1^+)} \leqslant C\|f\|_{C(H_1^+)}.$$

Из последней оценки очевидно следует единственность решения задачи (16), (17).

Теорема доказана.

Ереванский государственный университет,
Институт математики АН Армянской ССР

Поступила 7.IX.1988

Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱՂՅԱՆ. Դիրիխլեի խնդիրը կիսատարածությունում անվերջ չափանի էլիպտական տիպի պսեդո-դիֆերենցիալ օպերատորների համար *(ամփոփում)*

Հոդվածը նվիրված է կիսատարածությունում անվերջ չափանի էլիպտական տիպի պսեդո-դիֆերենցիալ օպերատորների մի դասի համար առաջին եզրային խնդրի միարժեքորեն լուծելիության հարցին։ Ստացված արդյունքները հանդիսանում են հեղինակի կողմից կառուցած [1]—[4] անվերջ չափանի էլիպտական դիֆերենցիալ հավասարումների համար ընդհանուր եզրային խնդիրների լուծելիության տեսության որոշ փաստերի ընդհանրացում էլիպտական պսեդո-դիֆերենցիալ օպերատորների դեպքի համար։

R. L. SHAKHBAGIAN. *Dirichlet problem for the infinite dimensional elliptic pseudo-differential operators in the half-space* (summary)

In the paper the uniquely solvability of the above mentioned problem is investigated. The main results are the generalization of the results of the author's papers [1]—[4] in which the author has constructed the theory of the solvability of the general boundary value problem for the infinite dimensional elliptic differential operators.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Л. Шахбагян.* Краевая задача в полупространстве для эллиптических операторов второго порядка с бесконечным числом независимых переменных, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XI, № 1, 1976, 82—96.
2. *Р. Л. Шахбагян.* Эллиптическая задача с параметром для уравнений второго порядка с бесконечным числом независимых переменных, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XII, № 4, 1977, 252—261.
3. *Р. Л. Шахбагян.* Задача Дирихле в полупространстве для эллиптических операторов высокого порядка с бесконечным числом независимых переменных, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XVI, № 2, 1981, 150—166.
4. *Р. Л. Шахбагян.* Докторская диссертация, Тбилиси, 1985.
5. *М. И. Вишик, Г. И. Эскин.* Уравнения в свертках в ограниченной области, УМН, 20, № 3, 1965, 85—151.
6. *П. М. Блехер, М. И. Вишик.* Об одном классе псевдодифференциальных операторов с бесконечным числом переменных и их приложениях, Матем. сб., 86 (128), № 3 (11), 1971, 446—494.
7. *М. И. Вишик, А. В. Марченко.* Краевые задачи для эллиптических и параболических операторов второго порядка на бесконечномерных многообразиях с краем, Матем. сб., 88, № 3, 1973, 331—371.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 5, 1989 Математика

УДК 517.53

А. М. ДЖРБАШЯН

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТИПА БЛЯШКЕ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

1°. В работах автора [1], [2] были введены в рассмотрение и исследованы зависящие от параметра $\alpha\ (-1<\alpha<\infty)$ произведения типа Бляшке для нижней полуплоскости $G^{(-)}=\{w:\operatorname{Im} w<0\}$

$$B_\alpha(w,\{w_k\})=\prod_k b_\alpha(w,w_k)=\prod_k \exp\{-\Omega_\alpha(w,w_k)\}, \tag{1}$$

$$\Omega_\alpha(w,\zeta)=-\int_{-|\eta|}^{|\eta|}\frac{(|\eta|-|t|)^\alpha\,dt}{[i(w-\xi)-t]^{1+\alpha}};\quad \zeta=\xi+i\eta\in G^{(-)}. \tag{2}$$

Условие сходимости этих произведений, налагаемое на последовательность их нулей $\{w_k\}\subset G^{(-)}$, имеет вид

$$\sum_k|\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha}<+\infty.$$

При выполнении последнего условия функция $B_\alpha(w,\{w_k\})$ аналитична в $G^{(-)}$ и имеет нули только в точках последовательности $\{w_k\}$, с кратностями, равными кратностями их появления в этой последовательности. Одновременно, при $\alpha=0$, после замены $w=z^{-1}$, $\{w_k\}\equiv\{z_k^{-1}\}$ произведение (1) переходит в хорошо известное произведение Бляшке—Неванлинны

$$\prod_k(1-z/z_k)/(1-z/\bar z_k).$$

Основной областью применения отмеченных произведений типа Бляшке является теория факторизации классов функций обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости [3], [4], ассоциированных с оператором интегродифференцирования Вейля. На надлежащих множествах функций $U(w)$, определенных в $G^{(-)}$, этот оператор был введен следующим образом:

$$W^{-\alpha}U(w)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\sigma^{\alpha-1}U(w-i\sigma)\,d\sigma;\quad 0<\alpha<+\infty, \tag{3}$$

$$W^0U(w)=U(w);$$

$$W^\alpha U(w)=W^{-(p-\alpha)}\frac{\partial^p}{\partial(\operatorname{Im} w)^p}U(w);\quad 0<\alpha<+\infty, \tag{4}$$

где $p\geqslant 0$ — целое число такое, что $p-1\leqslant\alpha<p$.

2°. Целью данной статьи является доказательство нижеприведенной теоремы о представлениях произведений типа Бляшке для полуплоскости, существенно упрощающих исследование их свойств.

Теорема. *Пусть* $\alpha \in (-1, 1)$ *любое, а последовательность* $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ *такова, что одновременно*

$$\sum_k |\operatorname{Im} w_k| < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_k |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha} < +\infty. \tag{5}$$

Тогда справедливо представление

$$B_k(w, \{w_k\}) = B_0(w, \{w_k\}) \exp\left\{\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}}\right\}; \quad w \in G^{(-)}, \tag{6}$$

где функция $\mu(t)$ *при* $-1 < \alpha < 0$ *— монотонно невозрастающая и ограниченная на* $(-\infty, +\infty)$, *а при* $0 < \alpha < 1$ *— монотонно неубывающая на* $(-\infty, +\infty)$, *но подчиненная условию*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{1+|t|^{2+\varepsilon}} < +\infty \tag{7}$$

при любом $\varepsilon > 0$.

При этом, каково бы ни было $\alpha \in (-1, 1)$, *существует последовательность* $\delta_n \downarrow 0$ *такая, что*

$$\mu(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t W^{-\alpha} \log \left| \frac{B_\alpha(u - i\delta_n, \{w_k\})}{B_0(u - i\delta_n, \{w_k\})} \right| du \quad (-\infty < t < +\infty). \tag{8}$$

Замечание. Из формулы (6), в частности, непосредственно следует, что *в случае, когда* $-1 < \alpha < 0$

$$|B_\alpha(w, \{w_k\})| \leqslant |B_0(w, \{w_k\})| \leqslant 1; \quad w \in G^{(-)}.$$

Следует отметить, что как и в теории факторизации функций обобщенно-ограниченного вида в круге [5], [6], здесь также основной интерес представляют факторизации произведений типа Бляшке в случае, когда $-1 < \alpha < 0$. И в этом случае результат приведенной теоремы наиболее полон.

Перейдем к доказательству ряда лемм, необходимых для установления результата статьи.

3°. Всюду ниже будем полагать

$$\log b_\alpha(w, \zeta) \equiv -\Omega_\alpha(w, \zeta) \quad (w, \zeta \in G^{(-)}, \alpha > -1),$$

отметив, что при $\alpha = 0$ это определение логарифмической функции приводит к ее главной ветви.

Лемма 1. *При любых* $\alpha \in (-1, 1)$ *и* $\zeta = \xi + i\eta \in G^{(-)}$ *функция*

$$\varphi_\alpha(w, \zeta) = W^{-\alpha} \log \frac{b_\alpha(w, \zeta)}{b_0(w, \zeta)} \tag{9}$$

аналитична в области $\mathbf{C} \setminus \{\xi + ih : 0 \leqslant h < +\infty\}$, *где для нее справедливо представление*

$$\Gamma(1+\alpha)\,\varphi_\alpha(w,\zeta)=\int_{|\eta|}^{+\infty}\left\{\frac{1}{\sigma+i(w-\zeta)}-\frac{1}{\sigma+i(w-\bar\zeta)}\right\}\sigma^\alpha\,d\sigma+$$

$$+\int_0^{|\eta|}\left\{\frac{1}{\sigma-i(w-\zeta)}-\frac{1}{\sigma+i(w-\bar\zeta)}\right\}\sigma^\alpha\,d\sigma. \tag{10}$$

Доказательство. Покажем сначала, что при $w\in\{\zeta+ih:0\leqslant h<+\infty\}$

$$W^{-\alpha}\log b_0(w,\zeta)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{+\infty}\left\{\frac{1}{\sigma+i(w-\bar\zeta)}-\frac{1}{\sigma+i(w-\zeta)}\right\}\sigma^\alpha\,d\sigma. \tag{11}$$

Действительно, при $\alpha=0$ это очевидно ввиду тождественности оператора W^0. При $0<\alpha<1$ интегрированием по частям получаем

$$W^{-\alpha}\log b_0(w,\zeta)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{+\infty}\sigma^\alpha\,d\log\frac{\sigma+i(w-\bar\zeta)}{\sigma+i(w-\zeta)}.$$

что приводит к формуле (1). В случае же, когда $-1<\alpha<0$, очевидно

$$W^{-\alpha}\log b_0(w,\zeta)=W^{-(1+\alpha)}\left\{\frac{1}{i(w-\bar\zeta)}-\frac{1}{i(w-\zeta)}\right\},$$

что опять приводит к формуле (11).

Представление (10) и, тем самым, аналитичность функции $\varphi_\alpha(w,\zeta)$ в требуемой области следуют из (11) и формулы

$$W^{-\alpha}\log b_\alpha(w,\zeta)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-|\eta|}^{|\eta|}\frac{(|\eta|-|t|)^{-\alpha}\,dt}{t-i(w-\xi)}. \tag{12}$$

(см. [2], формулу (2.5)).

Лемма 2. *При любых* $\alpha\in(-1,1)$ *и* $\zeta=\xi+i\eta\in G^{(-)}$ *функция* $\operatorname{Re}\varphi_\alpha(w,\zeta)$ *гармонична в* $G^{(-)}$ *и непрерывна в* $\overline{G^{(-)}}=\{w:\operatorname{Im}w\leqslant 0\}$.

Доказательство. В силу предыдущей леммы достаточно показать непрерывность этой функции в точке $w=\xi$, или, что то же самое, непрерывность в начале координат вещественной части функции

$$\varphi_\alpha^*(w,\zeta)=\Gamma(1+\alpha)\,\varphi_\alpha(w+\xi,\zeta). \tag{13}$$

С этой целью отнимем от (10) такую же формулу для $\varphi_0(w,\zeta)$ $(\equiv 0)$, умноженную на $|\eta|^\alpha$, вследствие чего получим:

$$\varphi_\alpha^*(w,\zeta)=\int_{|\eta|}^{+\infty}\frac{1}{\sigma-|\eta|+iw}-\left\{\frac{1}{\sigma+|\eta|+iw}\right\}(\sigma^\alpha-|\eta|^\alpha)\,d\sigma+$$

$$+\int_0^{|\eta|}\left\{\frac{1}{\sigma-|\eta|-iw}-\frac{1}{\sigma-|\eta|+iw}\right\}(\sigma^\alpha-|\eta|^\alpha)\,d\sigma.$$

Однако, как нетрудно проверить, $|\sigma^\alpha - |\eta|^\alpha| < C_\alpha |\sigma - |\eta||$ $(\sigma > 0)$, где C_α — постоянная, зависящая лишь от α и $|\eta|$. Поэтому, оценивая вещественные части подынтегральных выражений последней формулы и воспользовавшись теоремой Лебега о мажорированной сходимости приходим к заключению, что $\operatorname{Re} \varphi_\alpha^*(w, \zeta)$ непрерывна в $\overline{G^{(-)}}$, причем

$$\lim_{\substack{w \to 0 \\ \operatorname{Im} w < 0}} \operatorname{Re} \varphi_\alpha^*(w, \zeta) = 2|\eta| \int_0^{+\infty} \frac{\sigma^\alpha - |\eta|^\alpha}{\sigma^2 - |\eta|^2} d\sigma.$$

4°. Лемма 3. *При любых* $\zeta \in G^{(-)}$ *и* $w \in \overline{G^{(-)}}$

$$\operatorname{Re} \varphi_\alpha(w, \zeta) \begin{cases} < 0, \text{ если } -1 < \alpha < 0 \\ > 0, \text{ если } 0 < \alpha < 1. \end{cases} \tag{14}$$

Доказательство. Установим эти неравенства для функции $\operatorname{Re} \varphi_\alpha^*(w, \zeta)$, и сначала при $w = u \in (-\infty, +\infty)$.

Как следует из (13) и (10)

$$\operatorname{Re} \varphi_\alpha^*(u, \zeta) = \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\sigma - |\eta| + iu} - \frac{1}{\sigma + |\eta| + iu} \right\} \sigma^\alpha d\sigma =$$

$$= \left(\int_0^{|\eta|} + \int_{|\eta|}^{+\infty} \right) \sigma^\alpha d \log \left| \frac{\sigma - |\eta| + iu}{\sigma + |\eta| + iu} \right| \equiv I_1(u) + I_2(u).$$

При этом, если $0 < \sigma < |\eta|$, то

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \log \left| \frac{\sigma - |\eta| + iu}{\sigma + |\eta| + iu} \right| = -2|\eta| \frac{u^2 + \eta^2 - \sigma^2}{|(\sigma + iu)^2 - \eta^2|^2} < 0.$$

Одновременно, $\sigma^\alpha < |\eta|^\alpha$, если $\alpha > 0$ и $\sigma^\alpha > |\eta|^\alpha$, если $\alpha < 0$. Поэтому

$$-|\eta|^\alpha \log \left| \frac{2|\eta| + iu}{u} \right| \begin{cases} > I_1(u), \text{ при } -1 < \alpha < 0 \\ < I_1(u), \text{ при } 0 < \alpha < 1 \end{cases} (-\infty < u < +\infty).$$

Интегрированием по частям приходим к представлению для $I_2(u)$:

$$I_2(u) = |\eta|^\alpha \log \left| \frac{2|\eta| + iu}{u} \right| - \alpha \int_{|\eta|}^{+\infty} \log \left| \frac{\sigma - |\eta| + iu}{\sigma + |\eta| + iu} \right| \sigma^{\alpha - 1} d\sigma.$$

Отсюда и из оценок для $I_1(u)$ следуют неравенства вида (14) для функции $\operatorname{Re} \varphi_\alpha^*(w, \zeta)$ при $w = u \in (-\infty, +\infty)$. Для их распространения на все $w \in \overline{G^{(-)}}$ достаточно воспользоваться принципом Фрагмена—Линделефа и оценкой

$$|\varphi_\alpha^*(w, \zeta)| \leqslant \frac{8}{3} \left[\frac{|\eta|}{|w|^{1-\alpha}} + \frac{1}{1+\alpha} \frac{|\eta|^{1+\alpha}}{|w|} \right] (w \in G^{(-)}, \ |w| > 2|\eta|),$$

которую нетрудно получить из представления (11), (13) функции $\varphi_\alpha^*(w, \zeta)$, оценивая модули подынтегральных выражений.

Замечание. Из последней оценки функции $\varphi_\alpha^*(w, \zeta)$ вытекает следующая оценка для $\varphi_\alpha(w, \zeta)$:

$$|\varphi_\alpha(u+iv)| \leqslant \frac{8}{3\Gamma(1+\alpha)}\left|\frac{|\gamma_1|}{|v|^{1-\alpha}} + \frac{1}{1+\alpha}\frac{|\gamma_1|^{1+\alpha}}{|v|}\right| \quad (v < -2|\gamma_1|). \tag{15}$$

С другой стороны, воспользовавшись представлением (10) и неравенствами (14), нетрудно проверить, что если $v < 0$ достаточно мало, то при любом $\gamma_1 \in (-1, 0)$ справедливы оценки

$$|\operatorname{Re}\varphi_\alpha(iv, i\gamma_1)| > \begin{cases} C_\alpha \dfrac{|\gamma_1|}{|v|^{1-\alpha}}, & \text{при} \quad 0 < \alpha < 1 \\ C_\alpha' \dfrac{|\gamma_1|^{1+\alpha}}{|v|}, & \text{при} \quad -1 < \alpha < 0, \end{cases} \tag{16}$$

где C_α и C_α' — положительные постоянные, зависящие лишь от α.

5°. Предположив, что $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ — некая последовательность, подчиненная условиям (5) при данном $\alpha \in (-1, 1)$, введем в рассмотрение аналитическую в $G^{(-)}$ функцию

$$\Phi_\alpha(w, \{w_k\}) \equiv W^{-\alpha} \log \frac{B_\alpha(w, \{w_k\})}{B_0(w, \{w_k\})} =$$

$$= \sum_k W^{-\alpha} \log \frac{b_\alpha(w, w_k)}{b_0(w, w_k)} \equiv \sum_k \varphi_\alpha(w, w_k). \tag{17}$$

Отметим, что абсолютная и равномерная сходимость последних двух рядов внутри $G^{(-)}$ обеспечивается оценкой (15) и такой же сходимостью ряда от $W^{-\alpha}|\log b_\alpha(w, w_k)|$. А их равенство первым двум справедливо в силу теоремы Фубини (см. [2], оценки (1.11) и (2.7)).

Лемма 4. *Пусть $\alpha \in (-1, 1)$ и последовательность $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ такова, что выполнено условие* (5). *Тогда справедливо представление*

$$\Phi_\alpha(w, \{w_k\}) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{w-t}; \quad w \in G^{(-)}, \tag{18}$$

где функция $\mu(t)$ при $-1 < \alpha < 1$ — монотонно невозрастающая и ограниченная на $(-\infty, +\infty)$, а при $0 < \alpha < 1$ — монотонно неубывающая на $(-\infty, +\infty)$, но подчиненная условию (7) *при любом $\varepsilon > 0$. При этом, каково бы ни было $\alpha \in (-1, 1)$, существует последовательность $\delta_n \downarrow 0$, по которой выполнено соотношение* (8).

Доказательство. В силу формулы (17), неравенства (14) и теоремы Герглотца—Рисса, в обоих случаях $-1 < \alpha < 0$ и $0 < \alpha < 1$ справедливо представление

$$\Phi_\alpha(w, \{w_k\}) = ipw + \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{w-t} - \frac{1}{1+t^2}\right\} d\mu(t) + iC,$$

где p и C — вещественные числа, а $\mu(t)$ — функция, монотонно невозрастающая в случае $-1 < \alpha < 0$ и монотонно неубывающая в случае $0 < \alpha < 1$, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|d\mu(t)|}{1+t^2} < +\infty.$$

При этом (см., напр., [8], гл. I, § 4), можно считать, что существует последовательность $\delta_n \downarrow 0$ такая, что имеет место соотношение (8).

Заметим теперь, что в силу (15) и (17) при $v < -2 \max_k |\operatorname{Im} w_k|$ справедлива оценка

$$|\Phi_\alpha(u+iv, \{w_k\})| \leqslant \frac{8}{3\Gamma(1+\alpha)}\left[\frac{1}{|v|^{1-\alpha}}\sum_k |\operatorname{Im} w_k| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(1+\alpha)|v|}\sum_k |\operatorname{Im} w_k|^{1-\alpha}\right].$$

Поэтому, в случае, когда $-1 < \alpha < 0$, имеем

$$\sup_{v<\eta} |v\Phi_\alpha(iv, \{w_k\})| < +\infty,$$

что влечет представление (18) и ограниченность функции $\mu(t)$ (см., напр., [8], доп. I, § 4). В случае же когда $0 < \alpha < 1$, очевидно

$$\lim_{v \to -\infty} \Phi_\alpha(iv, \{w_k\}) = 0,$$

и при любом $\varepsilon > 0$

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\Phi_\alpha(-it, \{w_k\})|}{t^{\alpha+1}}\, dt < +\infty$$

(при этом, $\varepsilon > 0$ в степени знаменателя нельзя отбросить ввиду оценки снизу для функции $\operatorname{Re}\Phi_\alpha$, вытекающей из (16)). Отсюда опять следует представление (18) и соотношение (7), где нельзя отбросить $\varepsilon > 0$ (см. [8], доп. I, § 3).

6°. Лемма 5. *В условиях леммы 4 справедлива формула*

$$W^\alpha \Phi_\alpha(w, \{w_k\}) = \log \frac{B_\alpha(w, \{w_k\})}{B_0(w, \{w_k\})};\ \operatorname{Im} w < -\max_k |\operatorname{Im} w_k|.$$

Доказательство начнем со случая, когда последовательность $\{w_k\}$ состоит из единственного члена $\zeta = \xi + i\eta \in G^{(-)}$ и будем пользоваться формулой

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sigma^{-\gamma}\, d\sigma}{(z+\sigma)^{n+1}} = \frac{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(1-\gamma)}{n!}\,\frac{1}{z^{\gamma+n}};\ z \in (-\infty, 0], \qquad (19)$$

справедливой при любом целом $n \geqslant 0$ и любом $\gamma \in (-n, 1)$.

В случае, когда $0 < \alpha < 1$, при $\operatorname{Im} w < \eta$, ввиду (12), (4) и (1)—(2) имеем

$$W^\alpha W^{-\alpha} \log b_\alpha(w, \zeta) =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_{-|\eta|}^{|\eta|} (|\eta| - |t|)^\alpha\, dt \int_0^{+\infty} \frac{\sigma^{-\alpha}\, d\sigma}{[i(w-\xi) - t + \sigma]^2} =$$

$$= \log b_\alpha(w, \zeta),$$

Одновременно, поскольку в силу (3) и (19)

$$W^{-\alpha}\log b_0(w,\zeta)=-\Gamma(1-\alpha)\int\limits_{-|\gamma_1|}^{|\gamma_1|}\frac{dt}{[i(w-\xi)-t]^{1-\alpha}},$$

то

$$W^{\alpha}W^{-\alpha}\log b_0(w,\zeta)=-(1-\alpha)\int\limits_{-|\gamma_1|}^{|\gamma_1|}dt\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sigma^{-\alpha}\,d\sigma}{[i(w-\xi)-t+\sigma]^{2-\alpha}}=\log b_0(w,\zeta).$$

В случае, когда $-1<\alpha<0$, при $\operatorname{Im} w<\gamma_1$ аналогичным способом приходим к таким же равенствам. Тем самым, при $\operatorname{Im} w<\gamma_1$ и любом $\alpha\in(-1,1)$

$$W^{\alpha}z_{\alpha}(w,\zeta)=\log\frac{b_{\alpha}(w,\zeta)}{b_0(w,\zeta)}.$$

Отсюда и из (9) следует формула леммы в силу абсолютной и равномерной сходимости ряда

$$\log\frac{B_{\alpha}(w,|w_k|)}{B_0(w,|w_k|)}=\sum_k\log\frac{b_{\alpha}(w,w_k)}{b_0(w,w_k)}$$

при $\operatorname{Im} w<-\max|\operatorname{Im} w_k|$ (см. [2]).

Доказательство теоремы в силу лемм 4 и 5 очевидно сводится к доказательству равенства

$$W^{\alpha}\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{w-t}\right\}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}},\quad w\in G^{(-)},$$

в предположении, что функция $\mu(t)$ такова, как в теореме. А это проверяется непосредственно, с использованием формулы (19).

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 14.I.1988

Ա. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Կիսահարթության Բլյաշկեյի տիպի արտադրյալի մի ներկայացման մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտված են ֆակտորիզացիաներ հեղինակի կողմից ներմուծված $B_{\alpha}(-1<\alpha<+\infty)$ Բլյաշկեյի տիպի արտադրյալների համար կիսահարթությունում։ Այդ ֆակտորիզացիաները ապացուցված են $-1<\alpha<1$ դեպքում և իրականացվում են Բլյաշկե—Նևանլիննի արտադրյալի և որոշ պարզ տեսքի հատուկ արտադրիչների միջոցով։ Ֆակտորիզացիաները էապես պարզեցնում են B_{α} արտադրյալների հատկությունների ուսումնասիրությունը։

A. M. JERBASHYAN (DZRBASJAN). *On some representation of Blaschke type product for the half-plane* (summary)

In the present paper we establish factorisations of Blaschke type products $B_{\alpha}(-1<\alpha<+\infty)$ for the half-plane introduced earlyer. These factorizations are formed by Blaschke—Nevanlinna products and some special factors of simple structure and are proved in the case $-1<\alpha<1$ only. These factorizations substantially simplify the investigation of the properties of the products B_{α}.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. М. Джрбашян.* Функции типа Бляшке для полуплоскости, ДАН СССР, 1979, 246, № 6, 1295—1298.
2. *А. М. Джрбашян.* Функции типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1983, XVIII, № 6, 409—440.
3. *А. М. Джрбашян.* Факторизация, параметрические представления и граничные свойства некоторых общих классов мероморфных в полуплоскости функций, автореферат дис. на соискание уч. степ. кандидата физ.-мат. наук, Харьков, 1983.
4. *А. М. Джрбашян.* Соотношения равновесия и факторизационные теоремы для мероморфных в полуплоскости функций, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1986, XXI, № 3, 213—279.
5. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Мат. сб., 1969, 79 (121), № 4 (8), 517—615.
6. *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян.* Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1971, VI, №№ 2—3, 182—194.
7. *L. De Branges.* Hilbert Spaces of Entire Functions, Prentice—Hall Inc., Englewood Cliffs, N. Y., 1968.
8. *Ф. Аткинсон.* Дискретные и непрерывные граничные задачи, «Мир», М., 1968.

СОДЕРЖАНИЕ

К. А. Ягджян. Параметрикс задачи Коши для гиперболических операторов, вырождающихся по пространственным переменным 421
В. Г. Сагоян. О полноте системы собственный функций задачи Редже для операторов Дирака 433
М. Р. Мартиросян. О нефинитных возмущениях гауссовских гиббсовских полей 445
А. М. Джрбашян. Об одном представлении произведения типа Бляшке для полуплоскости 466
Г. С. Сукиасян. Рандомизируемые точечные системы и параболические решетки . 473
С. Ю. Назаров. О некоторых нелокальных краевых задачах для уравнения Эйлера—Дарбу 484
Р. Л. Шахбагян. Задача Дирихле для бесконечномерных эллиптических псевдодифференциальных операторов в полупространстве 496

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Р. Ш. Саакян. Об одной гипотезе А. А. Гончара 510

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Կ. Հ. Յաղջյան. Կոշու խնդրի պարամետրիքսը ըստ տարածական փոփոխականների վերածվող հիպերբոլական օպերատորների համար 421
Վ. Գ. Սաղոյան. Ռիչեի խնդրի սեփական ֆունկցիաների լրիվության մասին Դիրակի օպերատորի համար 433
Մ. Հ. Մարտիրոսյան. Գաուսյան գիբսյան դաշտերի ոչ ֆինիտ գրգռումների մասին . 445
Ա. Մ. Ջրբաշյան. Կիսահարթության Բլյաշկեի տիպի արտադրյալի մի ներկայացման մասին 466
Հ. Ս. Սուքիասյան. Ռանդոմիզացվող կետային համակարգեր և պարաբոլիկ վանդակներ 473
Ս. Յու. Նազարով. Ոչ լոկալ եզրային խնդիրներ էյլեր-Դարբուի հավասարման համար 484
Ռ. Լ. Շահբաղյան. Դիրիխլեի խնդիրը կիսատարածությունում անվերջ չափանի էլիպտական տիպի պսևդոդիֆերենցիալ օպերատորների համար 496

ՀԱՄԱՌՈՏ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

Ռ. Շ. Սահակյան. Ա. Ա. Գոնչարի մի հիպոթեզի մասին 510

CONTENTS

K. H. Yagdjian. Parametrix for a Cauchy problem for a hyperbolic operators which degenerate with respect to the space variables 421
V. G. Saghotan. On the completeness of the eigenfunctions of the Regge problem for the Dirac operator 433
M. H. Martirostan. On non finite perturbations of the Gaussian Gibbsian fields 445
A. M. Jerbashyan (Dzrbasjan). On some representation of Blaschke type product for the half-plane 466
A. S. Sukiastan. Randomizable point systems and parabolic lattices 473
S. Y. Nazarov. On some non local boundary value problems for the Euler-Darboux equation 484
R. L. Shakhbagtan. Dirichlet problem for the infinite dimensional elliptic pseudo-differential operators in the half-space 496

SHORT COMMUNICATIONS

R. Sh. Sahuktan. On one hypothesis by A. A. Gonchar 510