

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ  
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ  
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ  
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ  
ИЗВЕСТИЯ  
АКАДЕМИИ НАУК  
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ  
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1886 г.  
Выходит 6 раз в год  
на русском и английском языках.

## ԽՐԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ԶՐԱՍՇԱՆ

Յ. Շ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ  
Ի. Գ. ԶԱՅԱՆՆԱՅԱՆ  
Ա. Ա. ԽԱՆՆԱՅԱՆ  
Ռ. Վ. ՀԱՄԱՐԱՋՈՒԹՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ  
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ  
Ռ. Լ. ՇԱՀՐԱՂՅԱՆ  
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու քարտուղար Մ. Ա. Հովհաննիսյան

## Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլ գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն զրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլիերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ յատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոնեզեր շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Իրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, զրգրի համար նշվում է՝ հեղինակը, զրգրի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված թիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրինակների նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոգալիս ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում ըզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանմանով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է ալյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է օտարազորի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մաբշալ Բաղրամյանի պող., 24 ք. Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա՝ Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. В. АМБАРЦУМЯН  
Н. У. АРАКЕЛЯН  
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ  
С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН  
А. А. ТАЛАЛЯН  
Р. А. ШАХБАГЯН  
зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

### К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АИ Армянской ССР серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке) а кратких сообщений — не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АИ Армянской ССР, серия Математика».



## EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. V. AMBARTZUMIAN  
N. U. ARAKELIAN  
S. N. MERGELIAN  
A. B. NERSESIAN

A. A. TALALIAN  
R. L. SHAKHBAGIAN  
associate editor  
I. D. ZASLAVSKI

executive secretary M. A. Hovhannesian

## TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings zvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series "Matematika"  
Academy of Sciences of Armenian SSR  
24-b, Marshal Bagramian Ave.  
Yerevan, Armenian SSR, USSR

Математика, 1989, т. XXIV, № 4, стр. 312-415.

УДК 517.954

А. А. АНДРЯН

## ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ СОСТАВНОГО ТИПА

В работе исследуются граничные задачи для систем составного типа второго порядка с постоянными коэффициентами в полуплоскости и полосе. В случае полуплоскости наряду с граничной задачей типа задачи Коши изучается и так называемая задача Сёстранда. В случае же полосы рассматривается задача Дирихле. Исследование этих задач проводится на основе формулы общего решения системы и, в зависимости от задачи, преобразования Лапласа, Фурье и Меллина.

Рассмотрим систему составного типа вида

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

где  $A, B, C$  — постоянные действительные матрицы порядка  $n$ ,  $\det C \neq 0$ ,  $u = (u_1, \dots, u_n)$  — искомая вектор-функция.

Напомним, что система (1) называется системой составного типа, если характеристическое уравнение

$$\det(A + 2B\lambda + C\lambda^2) = 0$$

имеет как комплексные, так и действительные корни. Обозначим их через  $\lambda_1, \dots, \lambda_{r_0}, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_{r_0}, \mu_1, \dots, \mu_{r_0}$ , а через  $k_1, \dots, k_{r_0}$  и  $p_1, \dots, p_{r_0}$  — кратности этих корней;  $\sum_{j=1}^{r_0} k_j = m$ ,  $\sum_{j=1}^{r_0} p_j = 2k$ .

Общее решение системы (1) имеет следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{k_j} a_{jr} \left( w_{jr}(x + \lambda_j y) + \right. \\ & \left. + \sum_{p=0}^{r-1} \beta_{jr}^{(p)} y^p w_{jr}^{(p)}(x + \lambda_j y) \right) + \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{p_j} \gamma_{jr} \left( \Psi_{jr}(x + \mu_j y) + \right. \\ & \left. + \sum_{p=0}^{r-1} \delta_{jr}^{(p)} y^p \Psi_{jr}^{(p)}(x + \mu_j y) \right) + z, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $w_{jr}(x + \lambda_j y)$  — произвольные аналитические функции от своих аргументов;  $\Psi_{jr}(x + \mu_j y)$  — произвольные действительные функции;  $a = (a_1, \dots, a_n)$  — произвольный постоянный действительный вектор,  $a_{jr} = (a_{jr}^1, \dots, a_{jr}^n)$ ,  $\gamma_{jr} = (\gamma_{jr}^1, \dots, \gamma_{jr}^n)$  — постоянные векторы, а  $\beta_{jr}^{(p)}$ ,  $\delta_{jr}^{(p)}$  — постоянные числа, причем  $\beta_{jr}^{(0)} = \delta_{jr}^{(0)} = 0$ ; векторы  $\gamma_{jr}$  и числа  $\delta_{jr}^{(p)}$



являются действительными. Как известно [2] следующая матрица порядка  $2n$  является невырожденной:

$$M = \begin{vmatrix} a_{jr} & \bar{a}_{jr} & \gamma_{st} \\ \beta_{j,r+1}^{(1)} a_{j,r+1} & \bar{\beta}_{j,r+1}^{(1)} \bar{a}_{j,r+1} & \mu_s \gamma_{st} + \delta_{s,t+1}^{(1)} \gamma_{s,t+1} \end{vmatrix} \quad (3)$$

( $j = 1, \dots, n_0$ ;  $r = 1, \dots, k_j$ ;  $s = 1, \dots, r_0$ ;  $t = 1, \dots, p_s$ ).

Отсюда вытекает, что ранг матрицы, составленной из первых  $m$  и последних  $2k$  столбцов равен  $m+2k$ . Пусть  $l_1, \dots, l_{m+2k}$  — номера строк, образующих этот невырожденный минор порядка  $m+2k$ .

### § 1. Граничная задача в полуплоскости

Введем класс функций

$$H^{s,l} = \left\{ u(x, y) \mid \sup_{y>0} (1+y)^{-l} \left( \|u(\cdot, y)\|_{H^s} + \left\| \frac{\partial}{\partial y} u(\cdot, y) \right\|_{H^s} \right) < +\infty \right\},$$

где  $l \in \mathbb{N}$ ;  $H^s$  — пространство Соболева. Пусть  $p = \max \{p_1, \dots, p_r\}$ .

Граничная задача А. Требуется определить решение  $u(x, y)$  системы (1), принадлежащее классу  $H^{2,p-1}$  и удовлетворяющее граничным условиям

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} u_{l_1}(x, y) - f_{l_1}(x) \right\|_{L_2, y \rightarrow 0+} \rightarrow 0 \quad \forall l_1 \leq n, \quad (1.1)$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y} u_{l_1-n}(x, y) - g_{l_1}(x) \right\|_{L_2, y \rightarrow 0+} \rightarrow 0 \quad \forall l_1 > n, \quad (1.2)$$

где  $f_{l_1}, g_{l_1} \in H^s$ ,  $s^0 \gg 1$ .

Имеет место

**Лемма I.** Пусть  $\varphi(x + \lambda y)$  — аналитическая функция своего аргумента, когда  $x \in R$ ,  $y \in R^+$ , принадлежащая пространству  $H^{s,l}$ . Тогда справедлива оценка

$$\|D_x^s \varphi(x + \lambda y)\|_{H^s} \leq c_s y^{-s} \|\varphi(x + \lambda y)\|_{H^{s,0}} \quad (\ln \lambda > 0). \quad (1.3)$$

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $w(\xi + i\eta) = \varphi(x + \lambda y)$  аналитическую в верхней полуплоскости. Очевидно  $w \in H^{s,l}$ , поэтому

$$\|w(x + iy)\|_{H^s} < (1+y)^l \|w\|_{H^{s,l}} \leq c_\lambda (1+y)^l \|\varphi(x + \lambda y)\|_{H^{s,0}}.$$

Отсюда следует ([3], стр. 150), что существует функция  $g \in \tilde{H}^s$ ,  $\text{supp } g \subset R^+$  такая, что  $w(x + iy) = \langle g(\xi), \exp(i\xi(x + iy)) \rangle$  — преобразование Лапласа функции  $g$ . А тогда по известной теореме ([3], стр. 152) функция  $w(x + iy)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\sup_{y>0} \|w(x + iy)\|_{H^s} = \|g\|_{H^s} = \|w_+\|_{H^s},$$

где  $w_+(x)$  — граничное значение в  $H^s$  функции  $w(x + iy)$  при  $y \rightarrow 0+$ , причем  $w_+ = F[g]$  — преобразование Фурье функции  $g$ . Имеет место также неравенство ([3], стр. 148)

$$\|D_x^\alpha w(x + iy)\|_{H^s} \leq c_\alpha y^{-1} \|w\|_{H^s}.$$

Из леммы I получаем

$$\|y^\beta D_x^\alpha \varphi(x + \lambda y)\|_{H^s} \xrightarrow{y \rightarrow 0+} 0 \quad \forall \beta > \alpha. \quad (1.4)$$

Лемма II. Существует  $s_0 < 0$  такое, что

$$\|y^\beta D^\alpha w_{j1}(x + \lambda_j y)\|_{H^{s_0}} \xrightarrow{y \rightarrow 0+} 0 \quad \forall \beta \geq \alpha \geq 1, \quad (1.5)$$

$$\|y^\beta D^\alpha \Psi_{j1}(x + \mu_j y)\|_{H^{s_0}} \xrightarrow{y \rightarrow 0+} 0, \quad \forall \beta > 0, \quad 1 \leq \alpha \leq 2 - s_0. \quad (1.6)$$

Доказательство. Как известно [2] выражения

$$w'_{jr}(x + \lambda_j y) + \sum_{p=0}^{r-1} b_{jr}^{(p)} y^p w_{j, r-p}^{(p+1)}(x + \lambda_j y),$$

$$\Psi'_{jr}(x + \mu_j y) + \sum_{p=0}^{r-1} d_{jr}^{(p)} y^p \Psi_{j, r-p}^{(p+1)}(x + \mu_j y),$$

линейно выражаются через  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , поэтому  $w'_{j1}, \Psi'_{j1} \in H^{1, p-1}$ . В качестве  $s_0$  возьмем любое число, меньшее  $-p$ . Формулы (1.5), (1.6) вытекают из оценок

$$\|y^\beta D^\alpha w_{j1}(x + \lambda_j y)\|_{H^{s_0}} \leq c_\alpha y^{\beta-\alpha+1} \|w'_{j1}(x + \lambda_j y)\|_{H^{1, p-1}},$$

$$\|y^\beta D^\alpha \Psi_{j1}(x + \mu_j y)\|_{H^{s_0}} \leq c_\alpha y^\beta \|\Psi'_{j1}\|_{H^{s_0+\alpha-1}}.$$

Перейдем к исследованию граничной задачи A. Для этого подставим общее решение (2) системы (1) в граничные условия (1.1), (1.2). Учитывая непрерывность вложения  $L_2 \subset H^{s_0}$  на основании лемм I, II получим

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{p_j} \alpha_{jr}^{l_l} w'_{jr}(x) + \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{p_j} \gamma_{jr}^{l_l} \Psi'_{jr}(x) = f_{l_l}(x), \quad \forall l_l \leq n, \quad (1.7)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{p_j} \alpha_{jr}^{l_l-n} (\lambda_j w'_{jr}(x) + \beta_{jr}^{(1)} w_{j, r-1}^{(1)}(x)) + \\ + \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{p_j} \gamma_{jr}^{l_l-n} (\mu_j \Psi_{jr}(x) + \delta_{jr}^{(1)} \Psi_{j, r-1}^{(1)}(x)) = g_{l_l}(x) \quad \forall l_l > n. \quad (1.8)$$

В силу выбора чисел  $l_1, \dots, l_{m+2k}$  из (1.7), (1.8) мы можем исключить действительные функции  $\Psi'_{jr}(x)$ ,  $j = 1, \dots, r_0$ ,  $r = 1, \dots, p_r$  в результате получим следующую задачу

$$\operatorname{Re} N w = F, \quad (1.9)$$

где  $N$ —невырожденная матрица порядка  $m$ ,  $w = (w'_{11}, \dots, w'_{s_0, k_{r_0}})$ —неизвестная  $m$ -мерная вектор-функция,  $F = (F_1, \dots, F_m) \in H^{s_0}$ —вполне определенная вектор-функция. Решение задачи (1.9) записывается в виде

$$w(z) = N^{-1} \left\langle F(t), \frac{1}{t-z} \right\rangle \in H^{s_0}, \quad s_0 \gg 1.$$



Далее, подставляя  $\omega(z)$  в систему (1.7), (1.8) мы найдем и вектор-функцию  $\Psi_{jr} = (\Psi_{11}, \dots, \Psi_{r_r, r_r})$ . Таким образом справедлива

**Теорема 1.** *Однородная граничная задача А имеет только нулевое решение, а для разрешимости неоднородной задачи необходимо и достаточно выполнение конечного числа условий на правые части.*

**Замечание.** Отметим, что в случае, когда действительные корни  $\mu_1, \dots, \mu_{r_r}$  являются простыми, из неравенства (1.3) вытекает, что для  $f, g \in H^1$  решение  $u(x, y)$  будет принадлежать  $H^{2,0}$ . Отметим также, что условия (1.1) могут быть заменены на  $\|u_{l_1} - f_{l_1}\|_{L_2} \rightarrow 0$ . Такая задача легко сводится к изученной дифференцированию. Аналогичным образом может быть исследована и общая граничная задача

$$\left\| a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c u - f \right\|_{L_2, y \rightarrow 0+} \rightarrow 0,$$

где  $a, b$  и  $c$  — действительные матрицы размерности  $(n, m + 2k)$ , которая приводится к задаче вида

$$\operatorname{Re} L_1(D) \omega + L_2(D) \Psi = f,$$

где  $L_1(D)$  и  $L_2(D)$  — вполне определенные матричные операторы первого порядка. Легко проверяется, что условие  $\det \|L_1(\xi); L_2(\xi)\| \neq 0$  обеспечивает нетривиальность задачи.

## § 2. Граничная задача в полосе

Пусть  $D$  обозначает полосу  $\{(x, y) | x \in R, 0 < y < 1\}$ , а  $\Gamma$  — её границу. Введем класс функций

$$H_{\alpha, \beta}^{m, k} = \{u | \sup_{\substack{y \in [0, 1] \\ \sigma \in [\beta, \alpha]}} \|\exp(\sigma x) D_y^{k_0} D_x^j u(x, y)\|_{L_2} < +\infty, k_0 = 0 - k, j = 0 - m\}$$

и

$$H_{\alpha, \beta}^m = \{u | \sup_{\sigma \in [\beta, \alpha]} \|\exp(\sigma x) D^j u(x)\|_{L_2} < +\infty, j = 0 - m\}.$$

**Граничная задача В.** Требуется определить решение  $u(x, y)$  системы (1), принадлежащее классу  $H_{\alpha, \beta}^{2, 1}$  и удовлетворяющее граничным условиям

$$\|u(x, y) - f(x)\|_{H_{\alpha, \beta}^0} \xrightarrow{y \rightarrow 0+}, \quad (2.1)$$

$$\|u(x, y) - g(x)\|_{H_{\alpha, \beta}^0} \xrightarrow{y \rightarrow (1-)} 0, \quad (2.2)$$

где  $f, g \in H_{\alpha, \beta}^s, s \gg 1$ .

Справедливы следующие леммы.

**Лемма 1.** *Аналитическая в полосе  $D$  функция  $\omega(z)$  принадлежит пространству  $H_{\alpha, \beta}^{m, 0}$  тогда и только тогда, когда  $\exp(\sigma z) \cdot \omega(z)$  есть преобразование Лапласа единственной функции  $f_\sigma \in$*



$\in H_{1,0}^m, \forall \beta \leq \sigma \leq \alpha$ . При этом существуют граничные значения в  $H_{\sigma,\beta}^m$ , равные соответственно

$$w(x + i0) = \exp(-\sigma x) \langle f_\sigma(t), \exp(-ixt) \rangle,$$

$$w(x + i(1-0)) = \exp(-\sigma(x+i)) \langle f_\sigma(t), \exp(-it(x+i)) \rangle.$$

Лемма 2. Пусть  $w \in H_{\sigma,\beta}^{m,0}$ . Имеет место следующее представление

$$w(z) = w^+(z) + w^-(z), \quad (2.3)$$

где

$$w^+(z) = \exp(-\sigma z) \left\langle \exp_{(Im z > 0)}(\sigma t) w(t+i0), \frac{1}{t-z} \right\rangle,$$

$$w^-(z) = \exp(-\sigma(z-i)) \left\langle \exp_{(Im z < 1)}(\sigma t) w(t+i(1-0)), \frac{1}{t-z+i} \right\rangle.$$

Лемма 3. Для некоторого  $s^0$  имеют место равенства

$$\|y^p w_j^{(p)}(x + \lambda_j y)\|_{H_{\sigma,\beta}^{s_0}} \xrightarrow{y \rightarrow 0+} 0, \quad \|y^p \psi_j^{(p)}(x + \mu_j y)\|_{H_{\sigma,\beta}^{s_0}} \xrightarrow{y \rightarrow 0+} 0, \quad (2.4)$$

$$\|y^p w_j^{(p)}(x + \lambda_j y) - w_j^{(p)}(x + \lambda_j(1-0))\|_{H_{\sigma,\beta}^{s_0}} \xrightarrow{y \rightarrow 1-} 0, \quad (2.5)$$

$$\|y^p \psi_j^{(p)}(x + \mu_j y) - \psi_j^{(p)}(x + \mu_j)\|_{H_{\sigma,\beta}^{s_0}} \xrightarrow{y \rightarrow 1-} 0.$$

Доказательство леммы 1. Заметим, что  $f \in H_{\sigma,\beta}^m$  т. и т. т., когда  $\exp(\sigma x) f \in H^m, \forall \beta \leq \sigma \leq \alpha$ . Отсюда следует, что  $w \in H_{\sigma,\beta}^{m,0}$  т. и т. т., когда  $\exp(\sigma z) w \in H_{0,0}^{m,0}, \forall \beta \leq \sigma \leq \alpha$ . Но, как известно ([4], стр. 173), существует единственная функция  $f_\sigma \in H_{1,0}^m$  такая, что

$$\exp(\sigma z) w(z) = \langle f_\sigma(t), \exp(-izt) \rangle. \quad (2.6)$$

Из (2.6) вытекает существование граничных значений

$$w(x + i0) = \exp(-\sigma x) \langle f_\sigma(t), \exp(-ixt) \rangle, \quad (2.7)$$

$$w(x + i(1-0)) = \exp(-\sigma(x+i)) \langle f_\sigma(t), \exp(-it(x+i)) \rangle.$$

Доказательство леммы 2. Из (2.6) имеем

$$\begin{aligned} \exp(\sigma z) w(z) &= \int_{-\infty}^0 f_\sigma(t) \exp(-izt) dt + \\ &+ \int_0^{+\infty} f_\sigma(t) \exp(-izt) dt = w_0^+(z) + w_0^-(z). \end{aligned}$$

Учитывая равенства

$$\left\langle \int_0^{+\infty} f_\sigma(t) \exp(-i\bar{z}t) dt, \frac{1}{\bar{z}-z} \right\rangle = 0,$$

$$\operatorname{Im} z > 0; \left\langle \int_{-\infty}^0 f_0(t) \exp t(1 - iz) dt, \frac{1}{z + i - z} \right\rangle = 0, \quad \operatorname{Im} z < 1,$$

получим (2.3).

Доказательство леммы 3 вытекает из оценок

$$\begin{aligned} \|\omega_{j1}^{(p)}(x + \lambda_j y)\|_{H_{\alpha, \beta}^{s_0}} &\leq \|(\omega_{j1}^+(x + \lambda_j y))^{(p)}\|_{H_{\alpha, \beta}^{s_0}} + \|(\omega_{j1}^-(x + \lambda_j y))^{(p)}\|_{H_{\alpha, \beta}^{s_0}} \leq \\ &\leq c \cdot y^{-p+1} \|(\omega_{j1}^+(x + i0))^{(p)}\|_{H_{\alpha, \beta}^{s_0+p-1}} + \|(\omega_{j1}^-(x + \lambda_j y))^{(p)}\|_{H_{\alpha, \beta}^{s_0}}, \\ \|\psi_{j1}^{(p)}(x + \mu_j y)\|_{H_{\alpha, \beta}^{s_0}} &\leq c \|\psi_{j1}^{(p)}(x)\|_{H_{\alpha, \beta}^{s_0+p-1}}. \end{aligned}$$

Далее, как следует из леммы 1 (см. равенство (2.7)) условие

$$\langle w(x), \exp(px) \rangle = \exp(ip) \langle w(x+i), \exp(px) \rangle, \quad \beta < \operatorname{Re} p < \alpha, \quad (2.8)$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы функции  $w(x)$  и  $w(x+i)$  были граничными значениями аналитической функции  $w(z) \in H_{\alpha, \beta}^{0,0}$ . Переходя в (2.8) к сопряженным значениям, получим

$$\langle \overline{w(x)}, \exp(px) \rangle = \exp(-ip) \langle \overline{w(x+i)}, \exp(px) \rangle, \quad \beta < \operatorname{Re} p < \alpha. \quad (2.9)$$

Подобно тому как это было сделано при изучении граничной задачи А подставим  $u$  из (2) в граничные условия (2.1), (2.2). На основании леммы 3 получим

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{k_j} a_{jr} w'_{jr}(x) + \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{p_j} \gamma_{jr} \psi'_{jr}(x) = f'(x), \quad (2.10)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{k_j} a_{jr} \left( w_{jr}(x + \lambda_j) + \sum_{p=0}^{r-1} \beta_{jr}^{(p)} w_{jr-p}^{(p)}(x + \lambda_j) \right) + \quad (2.11)$$

$$+ \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{p_j} \gamma_{jr} \left( \psi_{jr}(x + \mu_j) + \sum_{p=0}^{r-1} \delta_{jr}^{(p)} \psi_{jr-p}^{(p)}(x + \mu_j) \right) = g'(x).$$

А теперь применим преобразование Лапласа к (2.10), (2.11). Используя (2.8), (2.9) будем иметь

$$\sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{k_j} a_{jr} L[w'_{jr}] + \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{k_j} \bar{a}_{jr} L[\bar{w}'_{jr}] + \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{p_j} \gamma_{jr} L[\psi'_{jr}] = L[f'], \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{k_j} a_{jr} \exp(-p\lambda_j) \left[ L[w'_{jr}] + \sum_{s=0}^{r-1} \beta_{jr}^{(s)} p^s L[w'_{jr-s}] \right] + \\ &+ \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{k_j} \bar{a}_{jr} \exp(\bar{\lambda}_j p) \left[ L[\bar{w}'_{jr}] + \sum_{s=0}^{r-1} \bar{\beta}_{jr}^{(s)} p^s L[\bar{w}'_{jr-s}] \right] + \\ &+ \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{p_j} \gamma_{jr} \exp(-\mu_j p) \left[ L[\psi'_{jr}] + \sum_{s=0}^{r-1} \delta_{jr}^{(s)} p^s L[\psi'_{jr-s}] \right] = L[g'] \quad (2.13) \end{aligned}$$

$$(\beta < \operatorname{Re} p < \alpha).$$



Обозначим матрицу полученной системы алгебраических уравнений через  $\Phi(p)$ . Покажем, что  $\det \Phi(p) \neq 0$ . Действительно, имеем

$$\Phi(p) = \begin{vmatrix} a_{jr} & \bar{a}_{jr} & \gamma_{jr} \\ l_{jr}(p) \exp(-\lambda_j p) & \overline{l_{jr}(p) \exp(-\lambda_j p)} & q_{jr}(p) \exp(-\mu_j p) \end{vmatrix},$$

где  $l_{jr}(p)$ ,  $q_{jr}(p)$  — вектор-функции, компоненты которых многочлены от  $p$ , причем  $l_{jr}(0) = a_{jr}$ ,  $q_{jr}(0) = \gamma_{jr}$ .

С другой стороны, в силу (3)

$$\det(p^{-n} \Phi(p)) = \begin{vmatrix} a_{jr} & \bar{a}_{jr} \\ \frac{l_{jr}(p) \exp(-\lambda_j p) - a_{jr}}{p} & \frac{\overline{l_{jr}(p) \exp(-\lambda_j p)} - \bar{a}_{jr}}{p} \\ q_{jr}(p) \exp(-\mu_j p) - \gamma_{jr} & \gamma_{jr} \end{vmatrix} \xrightarrow{p \rightarrow 0} \det M \neq 0.$$

Далее, функция  $\det \Phi(p)$  имеет следующий вид:

$$\det \Phi(p) = \sum_{j < N_0} A_j(p) \exp(\nu_j p),$$

где  $\nu_j$  — некоторые, вообще говоря, комплексные числа, а  $A_j(p)$  — многочлены от  $p$ . Имеем также  $\det \Phi(p) = \det \overline{\Phi(p)}$ .

Справедлива следующая

**Лемма 4.** *Каков бы ни был квазимногочлен  $F(p) = \sum_{j < N_0} A_j(p) \exp(\nu_j p)$  такой, что  $F(p) = \overline{F(p)}$ , существуют действительные числа  $a$  и  $b$  такие, что в любой полосе  $\Pi_F \subset \{ \operatorname{Re} p < a \} \cup \{ \operatorname{Re} p > b \}$  он имеет лишь конечное число нулей.*

**Доказательство.** Перепишем квазимногочлен  $F(p)$  в следующем виде:

$$F(p) = \sum_k \exp(i\tau_k p) \sum_j B_j^*(p) \exp(\sigma_j p), \quad \tau_k, \sigma_j \in \mathbb{R}.$$

Установим справедливость леммы для функции  $B_k(p) = \sum_j B_j^k(p) \exp(\sigma_j p)$ . Для этого представим её в виде

$$B_k(p) = \sum_{j < N_0} b_j^k(p) p^j, \quad b_j^k(p) = \sum_{m=1}^{N_1} b_m^{j,k} \exp(\nu_m p),$$

где  $b_m^{j,k}$ ,  $\nu_m$ ,  $N_0$ ,  $N_1$  — вполне определенные действительные числа. Из представления

$$b_{N_0}^k(p) = \exp(p\nu_0) [b_{N_0}^k(p) \exp(-p\nu_0)] = \exp(p\nu_N) [b_{N_0}^k(p) \exp(-p\nu_N)],$$

$$\nu_0 = \max\{\nu_1, \dots, \nu_{N_1}\}, \quad \nu_N = \min\{\nu_1, \dots, \nu_{N_1}\}$$

вытекает существование чисел  $a_k$  и  $b_k$  таких, что

$$b_{N_0}^k(p) \neq 0, \quad p \in \{ \operatorname{Re} p < a_k \} \cup \{ \operatorname{Re} p > b_k \} = D_k.$$

Отсюда следует, что существует положительное число  $M_k$  такое, что

$$|b_{N_k}^k(p)| > M_k, \quad p \in D_k, \quad |\operatorname{Re} p| < \operatorname{cte}.$$

Утверждение леммы для функции  $B_k(p)$  вытекает из этой оценки и оценки  $|\lambda|^{N_k} \leq \operatorname{cte} (1 + |\lambda| + \dots + |\lambda|^{N_k-1})$  для её корней.

Тогда  $a = \min \{a_k\}$ ,  $b = \max \{b_k\}$  и лемма 4 доказана.

Предположим, что числа  $\alpha$  и  $\beta$  в граничной задаче  $B$  такие, что  $\{\beta \leq \operatorname{Re} p \leq \alpha\} \subset \Pi_{\det \Phi(p)}$ . Основное условие, которое мы накладываем на систему (1) следующее:

$$|A_{ij}(p)| \leq c \cdot |p|^r, \quad \beta \leq \operatorname{Re} p < \alpha, \quad |\operatorname{Im} p| \gg 1, \quad r \in N, \quad (2.14)$$

где  $A_{ij}(p)$  — элементы матрицы, обратной к  $\Phi(p)$ .

**Замечание.** Условие (2.14) заведомо выполняется, если, например,  $\operatorname{rang} \{\bar{a}_{jr}, \bar{\gamma}_{jr}\} = \operatorname{rang} \{\bar{a}_{jr}, \bar{\gamma}_{jr} \setminus \{\bar{\gamma}_{jr}\}\} = n$ , что соответствует в случае эллиптической системы условию нормальной разрешимости задачи Дирихле. В случае же, когда система (1) гиперболическая, условие (2.14) выполнено. Отметим также, что при  $n=2$  каждая система составного типа (1) с простыми характеристиками удовлетворяет условию (2.14). Действительно, предположив противное, легко проверить, что условие (3) нарушается.

В сделанных предположениях справедлива

**Теорема 2.** Однородная система (2.12), (2.13) имеет только нулевое решение, а при выполнении условия (2.14) для разрешимости неоднородной системы необходимо и достаточно выполнение конечного числа условий на правые части.

Таким образом получена

**Теорема 3.** Однородная граничная задача  $B$  имеет только нулевое решение, а при выполнении условия (2.14) для разрешимости неоднородной задачи  $B$  необходимо и достаточно выполнение конечного числа условий на правые части.

### § 3. Граничная задача Сёстранда

Пусть  $\Gamma$  — луч с вершиной в начале координат, образующий угол  $\theta_0 > 0$  с положительной полуосью абсцисс такой, что  $k = \operatorname{tg} \theta_0 < < |\mu_j|^{-1}$ ,  $j = 1, \dots, r_0$ . Задача Сёстранда состоит в том, что часть граничных условий задается внутри области. Таким образом рассматривается

Граничная задача  $C$ . Требуется найти решение  $u(x, y)$  системы (1), принадлежащее классу  $H^{2, l-1}$  и удовлетворяющее граничным условиям

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} u_{l_1} - f_{l_1}(x) \right\|_{L_2(R^-)} \xrightarrow{y \rightarrow 0+} 0, \quad \frac{\partial u_{l_1}}{\partial x}(x, kx) = p_{l_1}(x), \quad \forall l_1 \leq n, \quad x > 0, \quad (3.1)$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y} u_{l_1-n} - g_{l_1}(x) \right\|_{L_2(R^-)} \xrightarrow{y \rightarrow 0+} 0, \quad \frac{\partial u_{l_1-n}}{\partial y}(x, kx) = q_{l_1}(x), \quad \forall l_1 > n, \quad x > 0, \quad (3.2)$$

где  $f_{l_1}, g_{l_1} \in H^s_-$ ;  $p_{l_1}, q_{l_1} \in H^s_+$ ,  $s \gg 1$ .



Напомним, что преобразование Меллина функции  $\varphi$  есть интеграл

$$M[\varphi](s) = \widehat{\varphi}(s) = \langle \varphi(x), x^{s-1} \rangle \quad (\varphi \in C_0^\infty(R^+))$$

и имеют место формулы

$$M[x^k D^k \varphi(x)](s) = (-1)^k (s+k-1) \cdots s M[\varphi](s),$$

$$M[\varphi(r \cdot x)](s) = r^{-s} M[\varphi](s), \quad (r > 0).$$

**Лемма 5.** Аналитическая в верхней полуплоскости функция  $\varphi(z)$  принадлежит пространству  $H^{0,1}$  т. и т. т., когда

$$\widehat{\varphi}(\rho)(s) = \widehat{\varphi}(\rho \exp(i\theta))(s) \exp(i\theta s), \quad \forall 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (3.3)$$

**Доказательство.** Существует функция  $\varphi \in L_2$  такая, что

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\langle \varphi(t), \frac{1}{t-z} \right\rangle$$

или

$$\begin{aligned} \varphi(\rho \exp(i\theta)) &= \frac{1}{2\pi i} \left\langle \varphi_+(t), \frac{1}{t - \rho \exp(i\theta)} \right\rangle + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \left\langle \varphi_-(t), \frac{1}{t - \rho \exp(i\theta)} \right\rangle, \end{aligned}$$

где  $x + iy = \rho \exp(i\theta)$ ,  $\varphi_+(t) = \theta(t) \varphi(t)$ ,  $\varphi_-(t) = (1 - \theta(t)) \varphi(t)$ ,  $\theta(t)$  — функция Хевисайда.

Далее, нетрудно показать, что

$$M \left[ \left\langle \varphi_+(t), \frac{1}{t - \rho \exp(i\theta)} \right\rangle \right] (s) = - \frac{\exp(-i\theta s + 2\pi i s)}{1 - \exp(2\pi i s)} \widehat{\varphi}_+(s),$$

$$M \left[ \left\langle \varphi_-(t), \frac{1}{t - \rho \exp(i\theta)} \right\rangle \right] (s) = \frac{\exp(i\pi s - i\theta s)}{1 - \exp(2\pi i s)} \widehat{\varphi}_-(-t)(s).$$

С другой стороны справедливо равенство

$$\widehat{\varphi}_-(-t)(s) = \exp(-i\pi s) \widehat{\varphi}_+(t)(s),$$

которое вытекает из того, что  $\varphi(z) \in H^{0,1}$  т. и т. т., когда существует  $g \in L_2(R^+)$  такая, что  $\varphi(z) = \langle g(t), \exp(izt) \rangle$ , поэтому

$$\widehat{\varphi}(\rho)(s) = \widehat{\varphi}(\rho \exp(i\theta))(s) \exp(i\theta s), \quad \text{Res} = \frac{1}{2}.$$

Переходя в (3.3) к комплексно сопряженным значениям, получим

$$\widehat{\varphi}(\rho)(s) = \overline{\widehat{\varphi}(\rho \exp(i\theta))}(s) \exp(-i\theta s), \quad \text{Res} = \frac{1}{2}. \quad (3.4)$$

**Лемма 6.** Пусть функция  $\varphi(z)$  аналитична в угле  $\{(r, \theta) | 0 \leq \leq \theta < \theta_0\}$  и принадлежит пространству  $L_2^0 = \{u | \|u(r, \theta)\|_{L_2} < +\infty \forall 0 < \theta \leq \theta_0\}$ . Тогда справедлива формула

$$\widehat{\varphi(\rho)}(s) = \varphi(\rho \exp(i\theta_0)) \exp(i\theta_0 s), \operatorname{Res} = \frac{1}{2}. \quad (3.5)$$

Верно и обратное утверждение.

Доказательство. Согласно формуле Коши

$$\int_0^R x^{s-1} \varphi(x) dx - \int_0^R x^{s-1} \exp(i\theta_0(s-1)) \varphi(x \exp(i\theta_0)) \exp(i\theta_0) dx + \\ + i \int_0^{\theta_0} R^s \exp(i\theta s) \varphi(R \exp(i\theta)) d\theta = 0.$$

Покажем, что

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} R^s \int_0^{\theta_0} \exp(i\theta s) \varphi(R \exp(i\theta)) d\theta = 0 \left( \operatorname{Res} = \frac{1}{2} \right).$$

Действительно, рассмотрим функцию  $\psi(R) = \int_0^{\theta_0} \exp(i\theta s) \varphi(R \exp(i\theta)) d\theta$ .

$\psi \in L_2$ . Далее имеем

$$\begin{aligned} \psi'(R) &= \int_0^{\theta_0} \exp(i\theta s) \frac{\partial \varphi}{\partial R}(R \exp(i\theta)) d\theta = \\ &= \frac{1}{iR} \int_0^{\theta_0} \exp(i\theta s) \varphi'_\theta(R \exp(i\theta)) d\theta = \frac{1}{iR} \left[ \exp(i\theta s) \varphi(R \exp(i\theta)) \right]_0^{\theta_0} - \\ &- is \int_0^{\theta_0} \varphi(R \exp(i\theta)) \exp(i\theta s) d\theta = \frac{g(R)}{R}, \quad g \in L_2(R^+). \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$|\psi(R)|^2 = \left| \int_R^{+\infty} \psi'(\tau) d\tau \right|^2 \leq \frac{1}{R} \int_R^{+\infty} |g(\tau)|^2 d\tau,$$

что и доказывает (3.5). Обратное утверждение вытекает из того, что в силу (3.5) функция  $M^{-1}[\widehat{\varphi(\rho)}(s)](z)$  является аналитической в угле  $\theta \leq \theta < \theta_0$  и принадлежит пространству  $L_2^\theta$ .

Прежде чем перейти к исследованию граничной задачи С решим следующую вспомогательную задачу: требуется определить аналитическую в верхней полуплоскости функцию  $\varphi(x + \lambda y)$  ( $\operatorname{Im} \lambda > 0$ ) по условиям

$$\operatorname{Re} \varphi(x) f(x), \quad x < 0; \quad \operatorname{Re} \varphi(x + \lambda k x) = g(x), \quad x > 0; \quad (3.6)$$

$$f \in L_2(R^-), \quad g \in L_2(R^+), \quad k > 0.$$



Решение. Используя формулу (3.3), перепишем (3.6) в образах Меллина

$$\widehat{\exp(-i\pi s) \varphi(\rho)(s)} + \widehat{\exp(i\pi s) \varphi(\rho)(s)} = \widehat{f(-x)(s)},$$

$$\exp(-s \ln(\cos \varphi_0 + \lambda \sin \varphi_0)). \quad (3.7)$$

$$\widehat{\varphi(\rho)(s)} + \exp(-s \ln(\cos \varphi_0 + \lambda \sin \varphi_0)) \widehat{\varphi(\rho)(s)} = \widehat{g(s)}.$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = k, \operatorname{Res} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда непосредственно вытекает единственность решения, так как  $0 < \arg(\cos \varphi_0 + \lambda \sin \varphi_0) < \pi$ . Далее, имеем из (3.7) и (3.3)

$$\widehat{\varphi(\rho)(s)} = \frac{\widehat{f(-x)(s)} \exp(-s \ln(\cos \varphi_0 + \lambda \sin \varphi_0)) - \widehat{g(s)} \exp(i\pi s)}{\exp(-i\pi s - s \ln(\cos \varphi_0 + \lambda \sin \varphi_0)) - \exp(i\pi s - s \ln(\cos \varphi_0 + \lambda \sin \varphi_0))},$$

$$\widehat{\varphi(-\rho)(s)} =$$

$$= \frac{\widehat{f(-x)(s)} \exp(-i\pi s - s \ln(\cos \varphi_0 + \lambda \sin \varphi_0)) - \widehat{g(s)}}{\exp(-i\pi s - s \ln(\cos \varphi_0 + \lambda \sin \varphi_0)) - \exp(i\pi s - s \ln(\cos \varphi_0 + \lambda \sin \varphi_0))}.$$

Вспоминая, что оператор умножения на функцию  $a(s)$  ограничен в  $L_2$  т. и т. т., когда  $\sup |a(s)| < c$ , легко получить, что в случае, если  $\arg(\cos \varphi_0 + \lambda \sin \varphi_0) \leq \frac{\pi}{2}$ , вспомогательная задача везде разрешима в

том и только в том случае, когда  $\widehat{g(s)} \exp(s \ln(\cos \varphi_0 + \lambda \sin \varphi_0)) \in L_2$ . А это означает, в силу леммы 6, что  $g(x)$  является граничным значением аналитической в угле  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  функции  $g(x + \lambda y) \in L_2^0$ . Если же  $\arg(\cos \varphi_0 + \lambda \sin \varphi_0) > \frac{\pi}{2}$ , то и  $f(x)$  должна быть граничным значе-

нием аналитической функции из  $L_2^{2\arg(\cos \varphi_0 + \lambda \sin \varphi_0) - \pi}$ . Ради простоты предположим, что корни характеристического уравнения являются простыми.

Подставим  $u$  из (1) в граничные условия (3.1), (3.2), после чего применим преобразование Меллина. На основании формул (3.3), (3.4) получим

$$\sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{k_j} a_{jr}^{l_l} \exp(-i\pi s) \widehat{w'_{jr}(\rho)(s)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{k_j} a_{jr}^{-l_l} \exp(i\pi s) \widehat{w_{jr}(\rho)(s)} + \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{p_j} \gamma_{jr}^{l_l} \widehat{\psi'_{jr}(-x)(s)} = \widehat{f_{l_l}(-x)(s)}, l_l < n,$$

$$\sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{k_j} a_{jr}^{l_l} \lambda_j^{l_l-n} \exp(-i\pi s) \widehat{w'_{jr}(\rho)(s)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{k_j} \frac{-i_{l_r-n}}{a_{jr}} \lambda_j \exp(i\pi s) \widehat{w'_{jr}(\rho)}(s) + \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{p_j} \mu_j \gamma_{jr}^{i_{l_r-n}} \widehat{\psi'_{jr}(-x)}(s) = \\ = \widehat{g_{l_l}(-x)}(s), \quad l_l > n, \quad (3.8)$$

$$\sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{k_j} a_{jr}^{i_{l_r}} \exp(-s \ln(\cos \theta_0 + \lambda_j \sin \theta_0)) \widehat{w'_{jr}(\rho)}(s) + \\ + \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{k_j} \frac{-i_{l_r}}{a_{jr}} \exp(-s \ln(\cos \theta_0 + \bar{\lambda}_j \sin \theta_0)) \widehat{w'_{jr}(\rho)}(s) + \\ + \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{p_j} (1 + \mu_j k)^{-s} \gamma_{jr}^{i_{l_r}} \widehat{\psi'_{jr}(x)}(s) = \widehat{p_{l_l}}(s), \quad l_l < n, \\ \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{k_j} a_{jr}^{i_{l_r-n}} \lambda_j \exp(-s \ln(\cos \theta_0 + \lambda_j \sin \theta_0)) \widehat{w'_{jr}(\rho)}(s) + \\ + \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{k_j} \frac{-i_{l_r-n}}{a_{jr}} \bar{\lambda}_j \exp(-s \ln(\cos \theta_0 + \bar{\lambda}_j \sin \theta_0)) \cdot \\ \cdot \widehat{w'_{jr}(\rho)}(s) + \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{r=1}^{p_j} \mu_j (1 + \mu_j k)^{-s} \gamma_{jr}^{i_{l_r-n}} \widehat{\psi'_{jr}(x)}(s) = \widehat{g_{l_l}}(s), \quad l_l > n. \quad (3.9)$$

По теореме Лапласа об определителях детерминант системы алгебраических уравнений (3.8), (3.9) имеет следующий вид:

$$\Phi(s) = c \cdot [\exp(v_1(s)) + \exp(v_2(s))] + \dots,$$

где  $c \neq 0$ ,

$$v_1(s) = -i\pi ms - s \sum_j k_j \ln(\cos \theta_0 + \bar{\lambda}_j \sin \theta_0) - s \sum_j p_j \ln(1 + \mu_j k),$$

$$v_2(s) = i\pi ms - s \sum_j k_j \ln(\cos \theta_0 + \lambda_j \sin \theta_0) - s \sum_j p_j \ln(1 + \mu_j k).$$

Очевидно на прямой  $\text{Res} = \frac{1}{2}$  функция  $\Phi(s)$  может иметь только конечное число нулей, поэтому задача Сёстранда однозначно разрешима. Далее, из (3.8), (3.9) имеем

$$\widehat{w'_{jr}(\rho)}(s) = \frac{\exp(v_1(s) + i\pi s) M_{jr}^1(f_{l_1}, \dots, g_{l_l}, \dots) + \\ + \exp(v_2(s) + s \ln(\cos \theta_0 + \lambda_j \sin \theta_0)) M_{jr}^2(p_{l_1}, \dots, q_{l_l}, \dots) + \dots}{\Phi(s)}, \\ \widehat{w'_{jr}(-\rho)}(s) = \frac{\exp(v_1(s)) M_{jr}^1(f_{l_1}, \dots, g_{l_l}) + \\ + \exp(v_2(s) + s \ln(\cos \theta_0 + \lambda_j \sin \theta_0) - i\pi s) M_{jr}^2(p_{l_1}, \dots, q_{l_l}, \dots) + \dots}{\Phi(s)}, \\ \widehat{\psi'_{jr}(x)}(s) = \frac{N_{jr}^1(s)}{\Phi(s)}, \quad \widehat{\psi'_{jr}(-x)}(s) = \frac{N_{jr}^2(s)}{\Phi(s)},$$



где  $M_{jr}^1(\dots)$ ,  $M_{jr}^2(\dots)$  — линейные выражения от своих аргументов,  $N_{jr}^1(s)$ ,  $N_{jr}^2(s)$  удовлетворяют оценке

$$|N_{jr}^k(s)| \leq c |\Phi(s)|, \quad k = 1, 2.$$

Отсюда, согласно вспомогательной задаче, получим следующий результат.

**Теорема 4.** Однородная граничная задача  $S$  имеет только нулевое решение, а для разрешимости неоднородной задачи  $S$  достаточно, чтобы функции  $p_i$ ,  $q_i$  являлись граничными значениями аналитических в угле  $0 \leq \theta \leq \alpha = \max \{ \arg(\cos \theta_0 + \lambda_j \sin \theta_0) \}$  функций и удовлетворялось конечное число условий на правые части.

**Замечание.** Леммы 5, 6 позволяют исследовать и другие задачи типа задачи Сёстранда. Например, на луче  $\Gamma$  можно задать не все граничные условия с полуоси  $R^+$ , а только их часть. Можно также граничные условия ставить на нескольких лучах, выходящих из начала координат. С другой стороны, задача Сёстранда естественно возникает при попытке поставить «хорошую» граничную задачу, например, в полуплоскости  $y > 0$  для системы

$$A \frac{\partial u}{\partial y} = B \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.10)$$

где  $A$ ,  $B$  — постоянные матрицы, причем  $\det A = 0$ , т. е. ось  $y = 0$  является характеристической. При условии, что  $\det(A\eta + B\xi) \neq 0$  мы можем получить общее решение этой системы, которое будет содержать и произвольные функции, зависящие только от  $y$ . Действительно, если при этом  $\det B \neq 0$ , то умножая (3.10) слева на  $B^{-1}$ , нам останется только привести матрицу  $B^{-1}A$  к жордановой форме, среди диагональных элементов которой обязательно будет нулевой. Если же и  $\det B = 0$ , то рассмотрим вектор  $(\xi_0, \eta_0)$  такой, что  $\det(A\eta_0 + B\xi_0) \neq 0$ . После замены переменных  $\xi = \eta_0 y - \xi_0 x$ ,  $\eta = -\xi_0 y$  системе (3.10) приведем к виду

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = (A\eta_0 + B\xi_0)^{-1} A\xi_0 \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

уже рассмотренному. Для определения функций, зависящих только от  $y$ , необходимо часть граничных условий задать, например, на оси  $oy$ .

В заключение отметим, что лемма (3.5) позволяет свести к системе алгебраических уравнений и задачу сопряжения для систем составного типа (1), например, в такой постановке: пусть  $D_1$  и  $D_2$ , соответственно, I и II квадранты, требуется определить функции  $u_1$ ,  $u_2$ , удовлетворяющие системам

$$A_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + 2B_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} + C_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D_i, \quad i = 1, 2$$

и граничным условиям: на полуосях  $x < 0$  и  $x > 0$  для каждой системы задаем задачу  $A$  из § 1, а на полуоси  $oy$  условия сопряжения

$$a_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} = a_3 \frac{\partial u_2}{\partial x} + a_4 \frac{\partial u_2}{\partial y},$$

где матрицы  $a_i$  имеют размерность  $(r_1 + r_2 + r_3; n)$   $r_1$  — число комплексных корней с положительными мнимыми частями обеих систем,  $r_2$  — число отрицательных, а  $r_3$  — число положительных действительных корней системы, заданной, соответственно, в  $D_1$  и  $D_2$ .

Ереванский политехнический  
институт им. К. Маркса

Поступила 11.VII.1986

Ա. Ա. ԱՆԴՐԻԱՆ եզրային խնդիրներ բաղադրյալ տիպի համակարգի համար (ամփոփում)

Աշխատանքում դիտարկված է Կաշու և Սլոտրանդի խնդիրներ երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով բաղադրյալ տիպի համակարգի համար, նույն համակարգի համար շերտում առանձնացված է Դիրիլեի խնդիրը

A. A. ANDRIAN. Boundary value problems for systems of composite type (summary)

For the second order composite type systems with constant coefficients the Cauchy and Sjöstrand problems in a half plane are considered. The Dirichlet problem is considered in a strip.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Е. Топлянян. Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами, Дифф. ур., 2, № 1, 1966, 3—23.
2. А. А. Андриян, Граничные задачи для систем уравнений второго порядка составного типа с постоянными коэффициентами, Изв. АН Арм.ССР, сер. мат., XV, № 2, 1980, 154—160.
3. В. С. Владимиров. Обобщенные функции в математической физике, М., «Наука», 1976.
4. Е. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье, М.—Л., Гостехиздат, 1948.



УДК 517.984.54

Т. Н. АРУТЮНЯН

# АСИМПТОТИКА ФУНКЦИИ ВЕЙЛЯ-ТИТЧМАРША И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИРАКА

## § 1. Введение и формулировка результатов

Рассмотрим каноническую систему дифференциальных уравнений Дирака на полуоси

$$ly = \left\{ a_1 \frac{1}{i} \frac{d}{dr} + a_2 p(r) + a_3 q(r) \right\} y = \lambda y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

известны под названием матриц Паули, а  $p$  и  $q$  — действительные, локально абсолютно интегрируемые функции на полуоси. Известно [1], что при этих условиях операторы, порожденные в гильбертовом пространстве вектор-функций  $L^2(0, \infty; C^2)$  краевыми задачами

$$ly = \lambda y, \quad y_1(0) \cos \alpha + y_2(0) \sin \alpha = 0, \quad (1.2)$$

существенно самосопряжены при любом действительном  $\alpha$ . Известно также [1], что существует единственное, с точностью до умножения на постоянную  $c(\lambda)$ , решение  $u(r, \lambda)$  системы (1.1), принадлежащее  $L^2(0, \infty; C^2)$  при  $\text{Im } \lambda \neq 0$ .

Обозначим через  $m(\lambda)$  функцию

$$m(\lambda) = \frac{u_1(0, \lambda) \cos \alpha + u_2(0, \lambda) \sin \alpha}{u_1(0, \lambda) \cos \beta + u_2(0, \lambda) \sin \beta} = \frac{m_0(\lambda) \cos \alpha + \sin \alpha}{m_0(\lambda) \cos \beta + \sin \beta}, \quad (1.3)$$

где

$$m_0(\lambda) = \frac{u_1(0, \lambda)}{u_2(0, \lambda)}.$$

Поскольку  $u(r, \lambda)$  единственно с точностью до умножения на постоянную, то формулой (1.3)  $m(\lambda)$  определяется однозначно.

Утверждение о существовании решения из  $L^2$  при  $\text{Im } \lambda \neq 0$  обычно называют теоремой Г. Вейля, так как впервые оно появилось в классической работе Г. Вейля [2] (посвященной уравнению Штурма—Лиувилля), где также впервые была введена функция  $m(\lambda)$ . Для системы Дирака функция  $m(\lambda)$  была определена впервые в работе Титчмарша [3]. Изучение аналитических и асимптотических свойств функции  $m(\lambda)$ , которую обычно называют функцией Вейля—Титчмарша, играет важную роль в спектральном анализе соответствующих операторов (см. [4]—[12]).

Асимптотика функции  $m_0(\lambda)$  ( $\lim_{\mu \rightarrow \infty} m_0(i\mu) = i$ ) получена ранее автором в [4] при довольно сильных ограничениях на коэффициенты  $p$  и  $q$  и потом в работе [5] для неотрицательных, монотонно растущих  $p$  и  $q$ . Ниже, в § 2 доказана

Теорема 1. Пусть действительные коэффициенты  $p$  и  $q \in L^1_{loc}[0, \infty)$ . Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\lim_{\mu \rightarrow \pm \infty} m_0(\nu + i\mu) = \pm i. \quad (1.4)$$

равномерно относительно всех действительных  $\nu$ , и, как следствие из определения (1.3)

$$\lim_{\mu \rightarrow \pm \infty} m(\nu + i\mu) = e^{\pm i(3-\pi)}. \quad (1.5)$$

Отметим, что асимптотика (1.4) при тех же условиях получена в работе W. N. Everitt и др. [6], но проводимое нами доказательство полностью отличается от метода авторов [6] и, по нашему мнению, проще.

Допустим далее, что коэффициенты  $p$  и  $q$  кроме условия локальной интегрируемости удовлетворяют условиям, обеспечивающим чистую дискретность спектра краевой задачи (1.2), и будем в дальнейшем называть это условием (D). Например, условие (см. [13])

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [p'(r) + q'(r) - V \overline{[p'(r)]^2 + [q'(r)]^2}] = \infty, \quad ' = \frac{d}{dr}. \quad (1.6)$$

обеспечивает чистую дискретность спектра. В предыдущей работе автора [5] была решена обратная задача о восстановлении „потенциала“  $Q(r) = a_2 p(r) + a_3 q(r) = \begin{pmatrix} p(r) & q(r) \\ q(r) & -p(r) \end{pmatrix}$  системы (1.1) по двум дискретным спектрам в классе неотрицательных монотонно растущих коэффициентов  $p$  и  $q$ , удовлетворяющих условию (D). В настоящей работе мы решаем обратную задачу по двум спектрам в классе локально интегрируемых потенциалов (опять таки при неявном условии (D)). Указываются два частных случая:  $p(x) \equiv 0$  и  $q(x) \equiv 0$ , которые можно свести один к другому, когда потенциал можно восстановить по одному спектру.

Обозначим через  $\Lambda(\alpha) = \{\lambda_n(\alpha)\}_{n=-\infty}^{\infty}$  множество собственных значений (спектр) задачи (1.2). Собственные значения пронумерованы в порядке возрастания, т. е.  $\lambda_n(\alpha) \geq \lambda_k(\alpha)$  при  $n > k$ , причем  $\lambda_n(\alpha) > 0$  при  $n > 0$  и  $\lambda_n(\alpha) < 0$  при  $n < 0$ . Через  $\varphi(r, i)$  обозначим решение системы (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_1(0, \lambda) = \sin \alpha, \quad \varphi_3(0, \lambda) = -\cos \alpha. \quad (1.7)$$

Очевидно, что  $\varphi(r, \lambda_n(\alpha)), n \in \mathbb{Z}$  есть собственные функции задачи (1.2). Квадраты  $L^2$ -норм этих собственных функций,  $a_n(\alpha) = \|\varphi(\cdot, \lambda_n(\alpha))\|^2$ , обычно называют нормировочными постоянными. Непрерывную слева, монотонно возрастающую функцию скачков



$$\rho_\alpha(\lambda) = \begin{cases} \sum_{0 < \lambda_n(\alpha) < \lambda} a_n^{-1}(\alpha), & \lambda > 0, \\ - \sum_{\lambda < \lambda_n(\alpha) < 0} a_n^{-1}(\alpha), & \lambda < 0, \end{cases}$$

называют спектральной функцией задачи (1.2).

Обратная задача по двум спектрам состоит в определении потенциала  $Q(r)$  по спектру  $\Lambda(\alpha)$  задачи (1.2) и по спектру  $\Lambda(\beta) = \{\lambda_n(\beta)\}_{n=-\infty}^{\infty}$  задачи  $ly = \lambda y$ ,  $y_1(0) \cos \beta + y_2(0) \sin \beta = 0$ , отличающейся от (1.2) только краевым условием. В работе [14] доказано, что по спектральной функции  $\rho_0(\lambda)$  можно однозначно и конструктивно восстановить потенциал  $Q(r)$ . Из [14] (см. также [5], теорема 3) следует также, что  $Q(r)$  можно восстановить и по  $\rho_\alpha(\lambda)$  (при  $\alpha \neq 0$ ), если параметр  $\alpha$  из краевого условия заранее известен. Поэтому обратную задачу по двум спектрам обычно рассматривают как задачу определения нормировочных постоянных  $a_n(\alpha)$  по спектрам  $\Lambda(\alpha)$  и  $\Lambda(\beta)$ . В § 3 доказана следующая

**Теорема 2.** Пусть  $p, q \in L^1_{loc}[0, \infty)$  и удовлетворяют условию (D). Тогда нормировочные постоянные  $a_n(\alpha)$  определяются при  $\sin(\beta - \alpha) \neq 0$  формулами:

$$a_n(\alpha) = c \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\lambda_n(\alpha) - \lambda_n(\beta)} \cdot \frac{\lambda_0(\alpha) - \lambda_n(\alpha)}{\lambda_0(\beta) - \lambda_n(\alpha)} \cdot \prod'_{k=-\infty, k \neq n} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} p_k^*, \quad n \neq 0, \quad (1.8),$$

где

$$p_k^* = \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_n(\alpha)}{\lambda_k(\beta) - \lambda_n(\alpha)} \quad \text{при } k \neq n \text{ и } p_n = 1;$$

$$a_0(\alpha) = c \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\lambda_0(\alpha) - \lambda_0(\beta)} \prod'_{k=-\infty, k \neq 0} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_0(\alpha)}{\lambda_k(\beta) - \lambda_0(\alpha)}, \quad (1.8')$$

а положительная постоянная  $c$  определяется из соотношения

$$c \cdot \lim_{\mu \rightarrow \infty} \prod'_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \left| \frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu} \right| = 1, \quad (1.9),$$

т. е.  $\rho_\alpha(\lambda)$ , а следовательно и потенциал  $Q(r)$ , определяются однозначно по двум спектрам.

В работе [15] автором построен пример (т. е. выписан явно потенциал) канонического оператора Дирака, спектр которого совпадает со спектром наперед заданного канонического оператора Дирака, но нормировочные постоянные отличаются в конечном числе. Из этого примера, в частности, следует, что оператор Дирака не определяется однозначно (вообще говоря) одним спектром. Однако, если коэффициент  $p(r) \equiv 0$ , то оказывается, что  $\lambda_n(-\alpha) = -\lambda_{-n}(\alpha)$ , т. е. зная спектр  $\Lambda(\alpha)$ , мы автоматически знаем и второй спектр  $-\Lambda(-\alpha)$ , и взяв в формулах (1.8) и (1.9)  $\beta = -\alpha$ , мы можем определить норми-

\* Штрих при бесконечном произведении означает, что пропускается множитель с номером  $k=0$ . Бесконечные произведения в этой статье понимаются в смысле

главного значения, т. е.  $\prod_{k=-\infty}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=-n}^n a_k$ .

ровочные постоянные по одному спектру. Аналогично доказывается, что при  $q(r) \equiv 0$   $\lambda_n \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = -\lambda_{-n}(\alpha)$  и, взяв  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ , мы опять решаем обратную задачу по одному спектру. Таким образом, в § 3 доказывается

**Теорема 3. 1.** Пусть  $p(r) \equiv 0$ , а  $q \in L^1_{loc}[0, \infty]$  и удовлетворяет условию (D). Тогда нормировочные постоянные определяются по формулам ( $2\alpha \neq \pi k$ ):

$$a_n(\alpha) = c \frac{\sin 2\alpha}{\lambda_n(\alpha) + \lambda_{-n}(\alpha)} \cdot \frac{\lambda_0(\alpha) - \lambda_n(\alpha)}{\lambda_0(\alpha) + \lambda_{-n}(\alpha)} \prod'_{k=-\infty} \frac{-\lambda_{-k}(\alpha)}{\lambda_k(\alpha)} p_k, \quad n \neq 0,$$

где

$$p_k = \frac{\lambda_n(\alpha) - \lambda_k(\alpha)}{\lambda_n(\alpha) + \lambda_{-k}(\alpha)} \quad \text{при } k \neq n, \quad p_n = 1;$$

$$a_0(\alpha) = -c \frac{\sin 2\alpha}{2\lambda_0(\alpha)} \prod'_{k=-\infty} \frac{\lambda_{-k}(\alpha)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_0(\alpha)}{\lambda_{-k}(\alpha) + \lambda_0(\alpha)},$$

а положительная постоянная  $c$  определяется из соотношения

$$c \cdot \lim_{\mu \rightarrow \infty} \prod'_{k=-\infty} \frac{-\lambda_{-k}(\alpha)}{\lambda_k(\alpha)} \left| \frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_{-k}(\alpha) + i\mu} \right| = 1.$$

**2.** Пусть  $q(r) \equiv 0$ , а  $p \in L^1_{loc}[0, \infty]$  и удовлетворяет (D). Тогда ( $2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ ),

$$a_n(\alpha) = c \frac{\cos 2\alpha}{\lambda_n(\alpha) + \lambda_{-n}(\alpha)} \cdot \frac{\lambda_n(\alpha) - \lambda_0(\alpha)}{\lambda_n(\alpha) + \lambda_0(\alpha)} \prod'_{k=-\infty} \frac{-\lambda_{-k}(\alpha)}{\lambda_k(\alpha)} p_k, \quad n \neq 0,$$

где

$$p_k = \frac{\lambda_n(\alpha) - \lambda_k(\alpha)}{\lambda_n(\alpha) + \lambda_{-k}(\alpha)} \quad \text{при } k \neq n, \quad p_n = 1;$$

$$a_0(\alpha) = c \frac{\cos 2\alpha}{2\lambda_0(\alpha)} \prod'_{k=-\infty} \frac{\lambda_{-k}(\alpha)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_0(\alpha)}{\lambda_{-k}(\alpha) + \lambda_0(\alpha)},$$

а с та же, что и в первой части теоремы.

Формулы (1.8) и (1.9), и соответствующие формулы в теореме 3, значительно упрощаются, если в (1.9) оказывается возможным перейти к пределу под знаком бесконечного произведения. Достаточные условия равномерной сходимости бесконечного произведения  $\prod'_{k=-\infty} \left| \frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu} \right|$  и сходимости  $\prod'_{k=-\infty} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)}$ , а, тем самым и возможности предельного перехода в (1.9), приведены в [5]. Эти условия таковы:  $Q(r)$  непрерывна в нуле и удовлетворяет в нуле условию Дини

$$\int_0^\delta \frac{|Q(s) - Q(0)|}{s} ds < \infty, \quad \delta > 0, \quad (1.10)$$



и

$$\lambda_{-n}(\alpha) = \lambda_n(\alpha) [1 + o(1)], \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.11)$$

Условие (1.10) позволяет применять (см. [5]) асимптотику спектральной функции  $\rho(\lambda)$ , полученную в [16] (см. также [17], стр. 117). Таким образом, мы получаем другой вариант теоремы 2.

**Теорема 4.** При условиях теоремы 2 и дополнительных условиях (1.10) и (1.11) имеет место формула:

$$a_n(\alpha) = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\lambda_n(\alpha) - \lambda_n(\beta)} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_n(\alpha)}{\lambda_k(\beta) - \lambda_n(\alpha)}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.12)$$

Возможность предельного перехода в (1.9) позволяет также упростить формулы в теореме 3. При этом оказывается, что условие (1.11) всегда выполняется при  $p(r) \equiv 0$  или  $q(r) \equiv 0$ . Поэтому модификация теоремы 3 имеет следующий вид:

**Теорема 5. 1.** Пусть  $p(r) \equiv 0$ ,  $q \in L^1_{loc}[0, \infty)$ ,  $q$  удовлетворяет условиям (D) и (1.10). Тогда

$$a_n(\alpha) = - \frac{\sin 2\alpha}{\lambda_n(\alpha) + \lambda_{-n}(\alpha)} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_n(\alpha) - \lambda_k(\alpha)}{\lambda_n(\alpha) + \lambda_{-k}(\alpha)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2. Пусть  $q(r) \equiv 0$ ,  $p \in L^1_{loc}(0, \infty)$ ,  $p$  удовлетворяет условиям (D) и (1.10). Тогда

$$a_n(\alpha) = \frac{\cos 2\alpha}{\lambda_n(\alpha) + \lambda_{-n}(\alpha)} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_n(\alpha) - \lambda_k(\alpha)}{\lambda_n(\alpha) + \lambda_{-k}(\alpha)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

## § 2. Асимптотика функции Вейля-Титчмарша

Пусть  $\lambda = \nu + i\mu$  и пусть  $u(r, \lambda)$  — решение системы (1.1), принадлежащее  $L^2(0, \infty; \mathbb{C}^2)$  при  $\text{Im } \lambda \neq 0$ . Запишем систему (1.1) покомпонентно:

$$u'_2 + p(r) u_1 + q(r) u_2 = \nu u_1 + i\mu u_1, \quad (2.1)$$

$$-u'_1 + q(r) u_1 - p(r) u_2 = \nu u_2 + i\mu u_2, \quad (2.2)$$

и запишем также сопряженные тождества:

$$\bar{u}'_2 + p(r) \bar{u}_1 + q(r) \bar{u}_2 = \nu \bar{u}_1 - i\mu \bar{u}_1, \quad (2.3)$$

$$-\bar{u}'_1 + q(r) \bar{u}_1 - p(r) \bar{u}_2 = \nu \bar{u}_2 - i\mu \bar{u}_2. \quad (2.4)$$

Умножая (2.1) на  $\bar{u}_2$ , (2.2) — на  $-\bar{u}_1$ , (2.3) — на  $u_2$ , (2.4) — на  $-u_1$  и складывая все четыре равенства, получим:

$$-\frac{d}{dr} |u|^2 = 4p(r) \text{Re}(u_1 \bar{u}_2) + 2q(r) (|u_2|^2 - |u_1|^2) + 4\mu \text{Im}(u_1 \bar{u}_2), \quad (2.5)$$

откуда, учитывая неравенства

$$|2 \text{Re}(u_1 \bar{u}_2)| \leq |u|^2, \quad |2 \text{Im}(u_1 \bar{u}_2)| \leq |u|^2, \quad |u_2|^2 - |u_1|^2 \leq |u|^2,$$

имеем

$$-\frac{d}{dr} \frac{|u|^2}{|u|^2} = -\frac{d}{dr} \ln |u|^2 < 2(|p(r)| + |q(r)| + |\mu|).$$

Интегрируя последнее неравенство от нуля до  $r$  и потенцируя, получаем

$$\frac{|u(r, \lambda)|^2}{|u(0, \lambda)|^2} \geq e^{-2 \int_0^r (|p(s)| + |q(s)| + |\mu|) ds} \quad (2.6)$$

Введем функцию  $N(\lambda) = \frac{\int_0^\infty |u(r, \lambda)|^2 dr}{|u(0, \lambda)|^2}$ . Интегрируя неравенство (2.6) от 0 до  $\infty$ , имеем

$$\begin{aligned} N(\lambda) &\geq \int_0^\infty \exp \left\{ -2 \int_0^r (|p(s)| + |q(s)| + |\mu|) ds \right\} dr > \\ &> \int_0^{|\mu|^{-\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -2 \int_0^r (|p(s)| + |q(s)|) ds \right\} \exp \{-2|\mu|r\} dr \geq \\ &\geq \int_0^{|\mu|^{-\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -2 \int_0^r (|p(s)| + |q(s)|) ds \right\} \exp \{-2|\mu|r\} dr = \\ &= \exp \left\{ -2 \int_0^{|\mu|^{-\frac{1}{2}}} (|p(s)| + |q(s)|) ds \right\} \cdot \frac{1 - e^{-2|\mu| \cdot |\mu|^{-\frac{1}{2}}}}{2|\mu|}. \end{aligned}$$

В силу локальной абсолютной интегрируемости  $p$  и  $q$ , из последнего неравенства следует предельное соотношение:

$$\lim_{|\mu| \rightarrow \infty} |\mu| \cdot N(v + i\mu) \geq \frac{1}{2}. \quad (2.7)$$

С другой стороны, в работе [5] получено тождество

$$\begin{aligned} m_0(\lambda) &= (1 + |m_0(\lambda)|^2) \left\{ \int_0^\infty p(r) \frac{|u(r, \lambda)|^2}{|u(0, \lambda)|^2} dr + \right. \\ &\quad \left. + v \int_0^\infty \frac{|u_2|^2 - |u_1|^2}{|u(0, \lambda)|^2} dr + i\mu \int_0^\infty \frac{|u(r, \lambda)|^2}{|u(0, \lambda)|^2} dr \right\}. \end{aligned}$$

Перепишав это тождество в виде

$$m_0(\lambda) = (1 + |m_0(\lambda)|^2) \{c(\lambda) + vb(\lambda) + i\mu N(\lambda)\}, \quad (2.8)$$



где через  $c(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  обозначены соответствующие интегралы, которые, очевидно, действительны, и переходя к модулям, получаем неравенства

$$\frac{1}{2} \geq \frac{|m_0(\lambda)|}{1 + |m_0(\lambda)|^2} = \{|c(\lambda) + \nu b(\lambda)|^2 + \mu^2 N^2(\lambda)\}^{1/2} \geq |\mu| \cdot N(\lambda).$$

Переходя к пределу при  $|\mu| \rightarrow \infty$ , получаем, учитывая (2.7),

$$\frac{1}{2} \geq \lim_{|\mu| \rightarrow \infty} \frac{|m_0(\lambda)|}{1 + |m_0(\lambda)|^2} > \frac{1}{2},$$

что возможно только при

$$\lim_{|\mu| \rightarrow \infty} |m_0(\nu + i\mu)| = 1. \quad (2.9)$$

С другой стороны, из (2.8) следует тождество

$$\operatorname{Im} m_0(\lambda) = (1 + |m_0(\lambda)|^2) \cdot \mu N(\lambda), \quad (2.10)$$

из которого, с учетом (2.7) и (2.9), вытекает

$$1 \geq \lim_{|\mu| \rightarrow \infty} |\operatorname{Im} m_0(\lambda)| = \lim_{|\mu| \rightarrow \infty} (1 + |m_0(\lambda)|^2) \cdot \mu \cdot N(\lambda) \geq 1.$$

т. е.

$$\lim_{|\mu| \rightarrow \infty} |\operatorname{Im} m_0(\nu + i\mu)| = 1.$$

Последнее вместе с (2.9) дает равенство  $\lim_{|\mu| \rightarrow \infty} \operatorname{Re} m_0(\nu + i\mu) = 0$ . Таким образом,  $\lim_{|\mu| \rightarrow \infty} m_0(\nu + i\mu) = \pm i$  и знак в правой части определяется из тождества (2.10), т. е. окончательно имеем

$$\lim_{\mu \rightarrow \pm \infty} m_0(\nu + i\mu) = \pm i$$

и теорема 1 доказана.

### § 3. Формулы для нормировочных постоянных

Из определения (1.3) функции  $m(\lambda)$  видно, что  $m(\lambda)$  — мероморфная функция, причем нули ее образуют спектр  $\Lambda(\alpha)$  задачи (1.2), а полюса — спектр  $\Lambda(\beta)$ . Из (1.3) нетрудно также получить равенство (см. [5], § 4)

$$\operatorname{Im} m(\lambda) = \operatorname{Im} \lambda \cdot \frac{\int_0^\infty |u(r, \lambda)|^2 dr}{|u_1(0, \lambda) \cos \beta + u_2(0, \lambda) \sin \beta|^2 \sin(\beta - \alpha)},$$

из которого следует, что  $m(\lambda)$  есть „вещественная“ мероморфная функция (т. е.  $\operatorname{Im} m(\lambda) = 0$  при  $\operatorname{Im} \lambda = 0$ ), переводящая при  $\sin(\beta - \alpha) > 0$  верхнюю полуплоскость в верхнюю и, следовательно, согласно теореме М. Г. Крейна ([18], стр. 398):

1. Нули  $\{\lambda_n(\alpha)\}_{n=-\infty}^{\infty}$  и полюса  $\{\lambda_n(\beta)\}_{n=-\infty}^{\infty}$  функции  $m(\lambda)$  все простые и перемежаются, причем (учитывая нумерацию собственных значений, указанную в § 1), нули лежат правее полюсов, т. е.

$$\lambda_n(\beta) < \lambda_n(\alpha) < \lambda_{n+1}(\beta), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \lambda_{-1}(\alpha) < 0 < \lambda_1(\beta).$$

2. Имеет место представление:

$$m(\lambda) = c \frac{\lambda - \lambda_0(\alpha)}{\lambda - \lambda_0(\beta)} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda}{\lambda_k(\beta) - \lambda}, \quad (3.1)$$

где  $c > 0$ .

Вычисляя производную  $\left. \frac{dm(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_n(\alpha)}$  исходя из определения (1.3), получаем

$$\left. \frac{dm(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_n(\alpha)} = \frac{a_n(\alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Вычисляя ту же производную из представления (3.1) и приравнявая их значения, получаем формулы (1.8) и (1.8') (подробности см. в [5], формулы (4.8) и (4.10)). Поэтому вопрос определения нормировочных постоянных через два спектра сводится к определению положительной постоянной  $c$ , участвующей в представлении (3.1). В условиях, при которых верна асимптотика (1.5), постоянная  $c$  определяется из предельного соотношения (1.9) (см. [5], лемма 4.1). Таким образом, доказана теорема 2, которая является усилением теоремы 1 из [5] в том смысле, что обратная задача по двум спектрам решается в классе локально абсолютно интегрируемых потенциалов, удовлетворяющих условию (D), что существенно менее обременительно, чем условия, приведенные в работе [5].

Замечание 1. Краевое условие из (1.2) не изменяется, если заменить  $\alpha$  на  $\alpha + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , т. е. оно периодическое с периодом  $\pi$ .

Поэтому достаточно рассматривать  $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ . При рассмотре-

нии обратной задачи по двум спектрам не имеет смысла случай  $\beta = \alpha + \pi k$ , так как „вторая задача“ просто совпадает с первой. Поэтому всегда имеет место естественное условие  $\sin(\beta - \alpha) \neq 0$ . Мы рассматривали случай  $\sin(\beta - \alpha) > 0$ . Случай  $\sin(\beta - \alpha) < 0$  изучается совершенно аналогично, причем формулы (1.8), (1.8'), (1.9) не изменяются.

Перейдем к доказательству теоремы 3. Пусть  $p(r) \equiv 0$  и пусть  $\varphi_n(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(r, \lambda_n(\alpha))$  есть собственная вектор-функция, соответствующая собственному значению  $\lambda_n(\alpha)$  и нормированная условием (1.7).

Положим  $v_{-n} \stackrel{\text{def}}{=} -\alpha_2 \varphi_n(\alpha) = (-\varphi_{n1}, \varphi_{n2})^T$  ( $T$  — транспонирование). В силу антикоммутируемости матриц  $\alpha_k$  имеем

$$lv_{-n} = -\lambda_2 \varphi_n = \alpha_2 \lambda_n(\alpha) \varphi_n = \lambda_n(\alpha) \alpha_2 \varphi_n = -\lambda_n(\alpha) v_{-n},$$

причем из определения  $v_{-n}$  следует, что она удовлетворяет начальному условию  $v_{-n}(0) = (\sin(-\alpha), -\cos(-\alpha))^T$  и, следовательно, краевому условию  $y_1(0) \cos(-\alpha) + y_2(0) \sin(-\alpha) = 0$ , т. е.  $v_{-n}$  есть собственная функция задачи  $ly = \lambda y$ ,  $y_1(0) (\cos(-\alpha) + y_2(0) \sin(-\alpha)) = 0$ , соответствующая собственному значению  $-\lambda_n(\alpha)$  и нормированная отмеченным выше начальным условием. В силу обозначений, принятых в § 1, имеем



$$-\lambda_n(\alpha) = \lambda_{-n}(-\alpha), \varphi_{-n}(r) = \varphi(r, \lambda_{-n}(-\alpha)) = \varphi_{-n}(-\alpha), n \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому, если в качестве  $\beta$  взять  $-\alpha$ , то простая подстановка  $\lambda_k(\beta) = -\lambda_{-k}(\alpha)$  в (1.8), (1.8') и (1.9) приводит к формулам первой части теоремы 3. Из приведенного выше замечания 1 следует, что в этих формулах параметр  $\alpha$  может принимать любые действительные значения кроме таких, при которых  $2\alpha = \pi k$ .

**Замечание 2.** В связи с формулой для  $\alpha_0(\alpha)$  в первой части теоремы 3 нам надо также доказать, что нуль не является собственным значением задачи (1.2) при  $p(r) \equiv 0$  и  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ , т. е.  $\alpha_0(\alpha) \neq 0$ . Для этого достаточно заметить, что решение  $\varphi(r, 0)$ , удовлетворяющее начальным условиям (1.7), явно вычисляется:

$$\varphi(r, 0) = \begin{pmatrix} \int_0^r q(s) ds & -\int_0^r q(s) ds \\ \sin \alpha e & -\cos \alpha e \end{pmatrix}^T,$$

а чтобы  $\varphi(\cdot, 0) \in L^2(0, \infty; \mathbb{C}^2)$  необходимо, чтобы  $\exp\left(2 \int_0^r q(s) ds\right)$  и

$\exp\left(-2 \int_0^r q(s) ds\right) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  одновременно, что невозможно.

Случай  $q(x) = 0$  рассматривается совершенно аналогично.

Для доказательства теоремы 4 достаточно заметить, что при равномерной сходимости бесконечного произведения  $\prod_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu} \right|$  и сходимости бесконечных произведений  $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)}$  и  $\prod_{k=1}^{\infty} p_k$  (и, следовательно,  $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} p_k = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} p_k$ ), что обеспечивается условиями (1.10) и (1.11) (см. [5], § 5) формула (1.9) принимает вид с  $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} = 1$ , а формулы (1.8) и (1.8') принимают более простой вид (1.12).

Теорема 5 следует из теоремы 4 так же, как теорема 3 из теоремы 2. Здесь следует объяснить только отсутствие дополнительного условия (1.11). В работе [5] доказано соотношение  $\lambda_n(\alpha) - \lambda_n(\beta) = o(1)$  при  $n \rightarrow \infty$  (см. [5], формула (5.9)). Поэтому, при  $p(r) \equiv 0$ ,  $-\lambda_{-n}(\alpha) = \lambda_n(-\alpha) = \lambda_n(\alpha) + o(1)$ , что намного сильнее, чем (1.11). Аналогично, при  $q(r) \equiv 0$ ,  $-\lambda_{-n}(\alpha) = \lambda_n\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \lambda_n(\alpha) + o(1)$ , т. е. условие (1.11) опять автоматически удовлетворено.

Տ. Ն. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ. Վեյլ-Տիտմարշի ֆունկցիայի ասիմպտոտիկան և հակադարձ խնդիրը Դիրակի համակարգի համար (ամփոփում)

Կիսաառանցքի վրա դիտարկվող կանոնիկ ինքնահամալուծ Դիրակի համակարգի համար ստացված է նրա Վեյլ-Տիտմարշի ֆունկցիայի ասիմպտոտիկ վարքը և լուծված է հակադարձ խնդիրը (երկու դիսկրետ սպեկտրներով վերականգնել գործակիցները):

Բերված է երկու մասնավոր դեպք, երբ գործակիցները կարելի է վերականգնել միայն մեկ սպեկտրով:

T. N. HARUTIUNIAN. *The asymptotic form of the Weyl-Titchmarsh function and the inverse problem for Dirac system (summary)*

For canonic, selfadjoint Dirac system on halfaxis the asymptotic form of the Weyl-Titchmarsh function is obtained under condition of local integrability of the potential. In the case of purely discrete spectrum this helps to solve the problem of reconstruction of the potential matrix by two discrete spectra. Two particular cases, where the inverse problem can be solved by only one spectrum, is indicated.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Левитан, И. С. Сагсян. Введение в спектральную теорию, «Наука», М., 1970.
2. H. Weyl. Über gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Functionen, Math. Ann., 68, 1910, 220—269.
3. E. C. Titchmarsh. Some eigenfunction expansion formulae, Proc. London Math. Soc., 11, 3, 1961, 159—168.
4. Т. Н. Арутюнян. Обратная задача для системы Дирака на полуоси с дискретным спектром, ДАН Арм.ССР, 75, № 5, 1982, 195—199.
5. Т. Н. Арутюнян. Обратная задача для канонической системы Дирака с дискретным спектром, Изв. АН Арм.ССР. «Математика», XX, № 4, 1985, 245—268.
6. W. N. Everitt, D. B. Hinton, J. B. Shaw. The asymptotic form of the Titchmarsh-Weyl coefficient for Dirac systems, J. London Math. Soc., 27, 2, 1983, 465—476.
7. B. J. Harris. The asymptotic form of the Titchmarsh-Weyl  $m$ -function, associated with the Dirac system, J. London Math. Soc., 31, 2, 1985, 321—330.
8. W. N. Everitt, C. Bennewitz. Some remarks on the Titchmarsh-Weyl  $m$ -coefficient, Tribute to Åke Pleijel (University of Uppsala, Sweden, 1980), 49—108.
9. D. B. Hinton, J. K. Shaw. On Titchmarsh-Weyl  $m(\lambda)$ -functions for linear Hamiltonian systems, J. Diff. Equations, 40, 1981, 315—342.
10. D. B. Hinton, J. K. Shaw. On the spectrum of singular Hamiltonian system. Quaestiones Math., 5, 1982, 29—81.
11. D. B. Hinton, J. K. Shaw. Titchmarsh-Weyl theory for Hamiltonian systems, Spectral theory of differential operators (eds. J. Knowless and R. T. Lewis), North-Holland, New-York, 1981, 219—231.
12. Б. М. Левитан. Обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля в случае конечно-зонных и бесконечно-зонных потенциалов, Труды ММО, т. 45, 1982, 3—36.
13. В. В. Мартынов. Прямые методы качественного спектрального анализа несамосопряженной системы дифференциальных уравнений первого порядка. Дифф. уравнения, 4, № 8 и № 12, 1968, 1494—1508, 2243—2257.
14. Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов. Обратная задача для системы Дирака, ДАН СССР, 167, № 5, 1966, 967—970.
15. Т. Н. Арутюнян. О каноническом операторе Дирака с частично заданным спектром. Ученые запiski ЕГУ, 1(161), 1986, 11—19.
16. В. А. Яерян. Об асимптотике спектральной матрицы-функции канонической системы дифференциальных уравнений, ДАН Арм.ССР, 56, № 3, 1973, 129—134.
17. В. А. Марченко. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля, «Научоводумка», Киев, 1972.
18. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, «Гостехиздат», 1956.



УДК 517.53:517.916

С. Ц. САРКИСЯН

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МЕРОМОРФНЫХ  
РЕШЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ

1°. В аналитической теории дифференциальных уравнений при рассмотрении алгебраических дифференциальных уравнений

$$P(z, w, w', \dots, w^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

где  $P$  — многочлен относительно  $w, w', \dots, w^{(n)}$  и относительно  $z$  — рациональная функция, изучаются следующие вопросы: о существовании мероморфных в конечной плоскости  $\mathbb{C}$  решений, и изучение свойств мероморфных решений непосредственно по уравнению.

Оба поставленных вопроса для автономных уравнений первого порядка  $P(w, w') = 0$  полностью решены еще в XIX веке. Необходимое и достаточное условие существования мероморфных решений дает критерий Фукса: всякое мероморфное решение уравнения  $P(w, w') = 0$  есть либо эллиптическая функция, либо рациональная функция, либо функция вида  $R(\exp cz)$ , где  $R$  — рациональная функция относительно  $\exp(cz)$ ,  $c = \text{const}$ . Первым результатом о мероморфных решениях уравнений  $P(z, w, w') = 0$ , является теорема Мальмквиста, [1] (1913 г.): если уравнение  $w' = R(z, w)$ , где  $R$  — рациональная функция двух переменных, допускает трансцендентное мероморфное решение, то это уравнение имеет вид  $w' = a(z)w^2 + b(z)w + c(z)$ , где  $a(z)$ ,  $b(z)$  и  $c(z)$  — рациональные функции от  $z$ , т. е. уравнение  $w' = P(z, w)$  является уравнением Риккати. В 1920 г. Мальмквист доказал [2] более общую теорему: если уравнение  $P(z, w, w') = 0$ , где  $P$  — многочлен от последних двух переменных с алгебраическими коэффициентами, неприводимо и обладает трансцендентным мероморфным решением, то это уравнение удовлетворяет условиям Фукса.

В отличие от уравнений первого порядка, множество результатов о мероморфных решениях уравнений высших порядков, очень скудно. Изучены только некоторые специальные уравнения, общие решения которых мероморфны в  $\mathbb{C}$  (первое уравнение Пенлеве, [3], уравнение Брио—Бука, [4], и т. д.). Так же обстоит дело в случае, когда вместо условия мероморфности решений во всей (открытой) плоскости  $\mathbb{C}$  рассматриваются решения в каких-либо неограниченных областях (полуплоскость, угол и т. д.).

В настоящей работе рассматривается два вопроса: оценки порядков роста мероморфных в углу решений алгебраических дифферен-

циальных уравнений и выделение классов уравнений, допускающих такие решения. При этом описываются локальные свойства мероморфных решений алгебраических дифференциальных уравнений на некоторых неограниченных множествах, скажем, например, на оси  $X$ . Для достижения этой цели нам придется обобщить и найти некоторые аналоги так называемой теории максимального члена Вимана—Валирона, относящейся к целым функциям.

2°. Пусть  $w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  — целая трансцендентная функция;  $M(r, w) = \max_{|z|=r} |w(z)|$ ;

$$\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r, w)}{\ln r} \quad (2)$$

порядок  $w(z)$ . Так как при фиксированном  $r$  члены  $|a_n| r^n \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ , то среди этих членов имеется по крайней мере один наибольший, который обозначают через  $m(r, w) = \max_n |a_n| \cdot r^n$  и называют максимальным членом  $w(z)$  на окружности  $|z| = r$ . Наибольший номер, для которого  $|a_n(r)| \cdot r^{v(r)} = m(r, w)$ , называют центральным индексом функции  $w(z)$  на  $|z| = r$ .

С помощью этих понятий Виман и Валирон построили так называемую теорию максимального члена Вимана—Валирона, [5], [6] (1923 г.). В этой теории основной является следующая

**Теорема А.** Для целой функции  $w(z)$  при любом  $r$ , за возможным исключением  $r$  принадлежащих последовательности интервалов с конечной логарифмической мерой  $E_w$ , имеют место неравенства

$$v(r) < [\ln m(r, w)]^{1+\varepsilon}, \quad (3)$$

$$m(r, w) \leq M(r, w) \leq c(\varepsilon) \cdot m(r, w) [\ln m(r, w)]^{1/2+\varepsilon}, \quad (4)$$

где  $\varepsilon > 0$  — произвольное число,  $c(\varepsilon)$  — некоторая постоянная.

**Теорема В.** Пусть  $w(z)$  — целая функция и  $|w(\xi)| = M(r, w)$ ,  $|\xi| = r$ , тогда при любом натуральном  $k$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{\xi}{v(r)} \right)^k \cdot \frac{w^{(k)}(\xi)}{w(\xi)} = 1, \quad \xi \in E_w, \quad (5)$$

где  $E_w$  — множество колец с центрами в начале координат, пересечение которого с лучом  $\arg z = 0$  есть множество интервалов с конечной логарифмической мерой.

Целая функция на множестве  $G_w = \{\xi \in \mathbb{C} : |w(\xi)| = M(|\xi|, w)\}$ , кроме этих свойств (теоремы А и В) на этом же множестве обладает следующими замечательными свойствами (1939 г., Макинтайр, [7]).

**Теорема С.** Пусть  $w(z)$  — целая функция,  $|w(\xi)| = M(r, w)$ ,  $|\xi| = r$ , тогда

$$|w'(\xi)| = M'(r, w), \quad |\xi| = r, \quad \xi \in G_w, \quad (6)$$

$$\frac{\xi w'(\xi)}{w(\xi)} = \frac{r M'(r, w)}{M(r, w)}, \quad |\xi| = r, \quad \xi \in G_w, \quad (7)$$



где  $G_w = \{\xi \in \mathbb{C} : |w(\xi)| = M(r, w)\}$ , а под  $M'(r, w)$  понимаем правостороннюю производную  $M(r, w)$  по  $r$ .

При  $k=1$  из (5) следует

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{v(r)} \cdot \frac{\xi w'(\xi)}{w(\xi)} = 1, \quad \xi \in G_w/E_w, \quad (8)$$

поэтому на множестве  $G_w/E_w$  при  $\xi \rightarrow \infty$

$$v(r) \sim \frac{\xi w'(\xi)}{w(\xi)}. \quad (9)$$

Из (2), имея в виду теоремы А, В, и С вытекает, что

$$\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln v(r)}{\ln r}, \quad (10)$$

т. е., если  $w(z)$  — целая функция, то из (9) и (10) следует

$$\rho = \overline{\lim}_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\ln |S(\xi, w)|}{\ln |\xi|}, \quad \xi \in G_w/E_w \quad (11)$$

и

$$w(\xi)^{(k)} = \left( \frac{S(\xi, w)}{\xi} \right)^k \cdot w(\xi) (1 + \varepsilon_k(\xi)), \quad \xi \in G_w/E_w, \quad (12)$$

где

$$S(z, w) = \frac{z w'(z)}{w(z)},$$

которую назовем  $S$ -характеристикой целой функции  $w(z)$ .

С другой стороны, порядком мероморфной функции (в смысле Неванлинны) называется порядок ее характеристической функции  $T(r)$ , т. е.

$$\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln T(r)}{\ln r}. \quad (13)$$

В дальнейшем без пояснений будем использовать стандартные обозначения неванлинновой теории распределения значений, [8], [9].

В частности, если  $w(z)$  — целая функция, то

$$T(r, w) < \ln M(r, w) \leq \frac{R+r}{R-r} \cdot T(r, w), \quad 0 < r \leq R, \quad (14)$$

т. е. для целой трансцендентной функции иногда в качестве характеристики можно брать функцию  $\ln M(r, w)$ . В (2) и (13) они взаимозаменяемы, поэтому в (13) можно заменить  $T(r)$  на  $S(z, w)$

$$\rho = \overline{\lim}_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\ln |S(\xi, w)|}{\ln |\xi|}, \quad \xi \in G_w/E_w.$$

Введем следующие обозначения и определения.

Пусть  $\Gamma = \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}, \varphi = \varphi(r)\}$ , где  $\varphi(r)$  — однозначная функция в  $[a, \infty[$ ,  $0 \leq a < \infty$ , и на любом конечном отрезке кусочно-аналитична, и пусть еще  $E = \Gamma \cap \Sigma$ , где  $\Sigma$  — некоторое множество колец с центрами в начале координат, пересечение которого с лучом

$\arg z = 0$  есть множество конечной меры. Замкнутое множество  $\Gamma \setminus E$  назовем  $\Sigma$ -множеством.

Определение. Две кусочно-аналитические кривые  $\Gamma_j: \varphi = \varphi_j(r)$ ,  $z = re^{i\varphi}$ ,  $r \in [a, \infty[$ ,  $0 \leq a \leq \infty$ ,  $j = 1, 2$ , назовем  $L$ -асимптотически совпадающими, если

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{|\ln |\varphi_1(r)| - \ln |\varphi_2(r)||}{\ln r} = 0.$$

Две мероморфные функции  $w = f_j(z)$  ( $j = 1, 2$ ) назовем  $L$ -асимптотически совпадающими на  $\Sigma$ -множестве  $G$ , если

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{|\ln |f_1(z)| - \ln |f_2(z)||}{\ln |z|} = 0, z \in G.$$

Замечание. Если  $f_1(z) = f_2(z)(1 + \varepsilon(z))$ ,  $\varepsilon(z) \rightarrow 0$  при  $z \in G$ ,  $z \rightarrow \infty$  (т. е.  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  на  $G$  асимптотически совпадают), то они  $L$ -асимптотически совпадают на  $G$ .

Определение. Пусть  $w(z)$  — мероморфная во всей плоскости функция и  $G$  — некоторое  $\Sigma$ -множество плоскости  $\mathbb{C}$ .  $S(G)$ -порядком  $w$  назовем

$$\rho_S(G) = \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln |S(z, w)|}{\ln |z|}, z \in G.$$

Из этого определения следует:  $S(G)$ -порядок мероморфной функции  $w = w(z)$  обращается в бесконечность, если например\*:

1)  $\Sigma$ -множество  $G$  содержит бесконечное множество нулей и полюсов  $S(z, w)$ ,

2)  $\Sigma$ -множество  $G$  содержит бесконечное множество нулей и полюсов мероморфной функции  $f(z)$ , которая на  $G$   $L$ -асимптотически совпадает с  $S(z, w)$ ,

3)  $\Sigma$ -множество  $G$   $L$ -асимптотически совпадают с множеством  $|S(z, w)| = |f(z)|$ , где  $f(z)$  — аналитическая функция, причем

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(z)|}{\ln |z|} = \infty, z \in G,$$

4)  $\Sigma$ -множества  $G$   $L$ -асимптотически совпадают с множеством корней уравнения  $S(z, w) = f(r)$ ,  $|z| = r$ , где  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  — аналитическая функция, причем

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(|z|)|}{\ln |z|} = \infty, z \in G,$$

$\Sigma$ -множества этих видов (т. е. множества видов, из структур которых следует, что  $\rho_S(G) = \infty$ ) назовем особыми множествами функции  $w$  и обозначим через  $\sigma_w$ .

Выбор  $G$  можно сделать двумя способами:

\* О существовании неограниченного (непрерывного) множества корней уравнения  $\varphi(z) = f(|z|)$ , где  $\varphi(z)$  мероморфная, а  $f(r): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  непрерывная функция (см. [10], [11]).



1) множество  $G \subset C$  выбираем в зависимости от  $w$  (как это делается в случае целых функций),

2) множество  $G \subset C$  — любое  $\Sigma$ -множество.

Итак, начнем с первого случая.

Определение. Будем говорить, что мероморфная (трансцендентная) во всей плоскости функция  $w(z)$  принадлежит классу  $S_n(X)$ , если существует  $\Sigma$ -множество  $X_w$  такое, что при любом натуральном  $1 \leq k \leq n < \infty$  существует

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \left\{ \left( S(\xi, w) \right)^k \cdot \frac{w^{(k)}(\xi)}{w(\xi)} \right\} = c_k, \quad c_k = \text{const}, \quad \xi \in X_w. \quad (15)$$

Множество  $X_w$  назовем характеристическим множеством.

1) Любая мероморфная функция принадлежит классу  $S_1(X)$ , где  $X_w$  — любое  $\Sigma$ -множество плоскости  $C$ .

2) Любая целая функция принадлежит классу  $S_\infty(X)$ , где  $X_w = G_w \setminus E_w$ ,  $G_w = \{\xi \in C : |\xi| = r, |w(\xi)| = M(r, w)\}$ , а  $E_w$  — последовательность интервалов с конечной логарифмической мерой.

3) Классу  $S_\infty(X)$  также принадлежат мероморфные функции  $w = 1/f(z) - a$  и  $w = f(z) - a$ , где  $f(z)$  — мероморфная функция с пикаровским исключительным значением  $a$ .

Легко убедиться, что для приведенных в п. п. 2) и 3) классов функций  $S$ -порядок по приведенным в них множествам  $X_w$  совпадает с обычным порядком этих функций. Это же заключение верно (см. [12]) для следующих более общих классов функций: мероморфных функций порядка  $\rho < \infty$  с дефектным значением  $a \neq \infty$  ( $a = \infty$ ), если в качестве  $X_w$  взять множество  $G_w \setminus E_0$ , где  $G_w = \{\xi : |w(\xi) - a| = \min_{|\xi|=|z|} |w(z) - a|\}$  ( $G_w = \{\xi : |w(\xi)| = \max_{|\xi|=|z|} |w(z)|\}$ ), а  $E_0$  — некоторое множество колец с конечной суммой длин радиусов.

3°. Здесь наша цель оценить  $S$ -порядок решений из класса  $S_1(X)$  уравнения

$$P\left(z, w, \frac{dw}{dz}\right) = 0 \quad (16)$$

на произвольных  $\Sigma$ -множествах.

Класс  $S_1(X)$  совпадает с классом всех мероморфных функций и любое  $\Sigma$ -множество  $z$ -плоскости является характеристическим множеством мероморфных решений уравнения (16).

Введем следующие определения и обозначения.

Определение. Скажем, что мероморфное решение уравнения (16) есть функция конечного роста на  $G$ , если при  $z \rightarrow \infty$  и  $z \in G$

$$w = c|z|^a z^p S^q(1 + \varepsilon(z)), \quad z \in G, \quad (17)$$

где  $c = \text{const}$ ,  $a$  — действительное,  $p$  и  $q$  — некоторые целые числа,  $\varepsilon(z) \rightarrow 0$  при  $z \in G$  и  $z \rightarrow \infty$ , а  $G$  — некоторое  $\Sigma$ -множество плоскости  $C$ . В противном случае скажем, что  $w(z)$  — функции бесконечного роста на  $G$ .

**Определение.** Скажем, что решение  $w(z)$  уравнения (16) из класса  $S_1(X)$  является особым решением уравнения (16), если существуют целые  $p$  и  $q$  такие, что предел выражения  $z^p S^q w$  при  $z \in X_w$  и  $z \rightarrow \infty$  не существует и  $z^p S^q$  — мероморфная функция бесконечного роста на  $X_w$ .

Пользуясь очевидным тождеством  $w' = w'/w \cdot w$  уравнение (16) приведем к виду

$$O_P(z, w, S) \equiv P(z, w, z^{-1} S w) = 0. \quad (18)$$

Ясно, что  $O_P(z, w, S)$  — многочлен относительно  $S$  и  $w$ . Уравнение (18) назовем определяющим уравнением, а  $O_P(z, w, S)$  — определяющим многочленом уравнения (16).

В зависимости от поведения мероморфных решений уравнения (16) при  $z \in X_w$  и  $z \rightarrow \infty$ , где  $X_w$  — любое  $\Sigma$ -множество  $z$ -плоскости, имеет несколько случаев.

1. Скажем, что мероморфное решение уравнения (16) из класса  $S_1(X)$  принадлежит классу  $S_1^0(X)$ , если для этого решения имеет место

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^p S^q}{w^l} = 0, \quad z \in X_w, \quad (19)$$

где  $p, q, l > 0$  любые целые числа.

Всякое мероморфное решение с бесконечным дефектным значением (в частности целые функции) принадлежит классу  $S_1^0(X)$ , где  $X_w = G_w \setminus E_w$ ,  $G_w = \{z \in \mathbb{C} : |w(z)| = \max_{|z| \leq |z|} |w(z)|\}$ , а  $E_w$  — множество колец с конечной суммой ширины.

Пусть  $O_P(z, w, S)$  — определяющий многочлен уравнения (16) степени  $m$  относительно  $w$

$$O_P(z, S, w) \equiv \sum_{l=0}^m P_l(z, S) w^{m-l} = 0, \quad z \in X_w, \quad (20)$$

где  $P_l$  — многочлены относительно  $S$ , и пусть еще

$$P_0(z, S) \equiv \sum_l Q_l(z) S^l, \quad z \in X_w, \quad (21)$$

где  $Q_l$  — рациональные функции от  $z$ .

После деления левой и правой частей (20) на  $w^m$  при  $z \rightarrow \infty$  получим уравнения

$$\sum_{j=0}^q a_j z^{m_j} S^j (1 + \delta_j(z)) = 0, \quad z \in X_w, \quad (22)$$

где  $q$  — степень многочлена  $P_0$  относительно  $S$ ,  $m_j$  — целые числа, а  $\delta_j(z) \rightarrow 0$  при  $z \in X_w$  и  $z \rightarrow \infty$ .

Пусть  $a_q \neq 0$ , и так как  $\delta_j(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$  и корни алгебраического уравнения (22) непрерывно зависят от его коэффициентов, то решения уравнения (22) на множестве  $X_w$  асимптотически равны решениям уравнения, получающегося при обращении в нуль всех  $\delta_j(z)$

$$R_P^*(z, S) \equiv \sum_{l=0}^q a_l z^{m_l} S^l = 0, \quad z \in X_w, \quad (23)$$



где  $a_i = \text{const}$ . Уравнение (23) назовем первым характеристическим уравнением, а многочлен  $R_p^\infty$  — характеристическим многочленом уравнения (16) в классе  $S_1^\infty(X)$ . В дальнейшем предположим, что многочлен  $R_p^\infty$  неприводим. Скажем, еще, что уравнение (16) есть уравнение, порождающее многочлен  $R_p^\infty$  в классе  $S_1^\infty(X)$ .

Определение. Скажем, что многочлен степени  $q$  относительно  $S$

$$R(z, S) \equiv \sum_{i=0}^q a_i |z|^{\lambda_i} z^{m_i} S^i, \quad (24)$$

где  $a_i = \text{const}$ ,  $\lambda_i$  — действительные,  $m_i$  — целые числа,

- 1) вырождается, если он одночлен и в (24)  $a_q \neq 0$ ,
- 2) не вырождается, если он отличен от одночлена и в (24)  $a_q \neq 0$ .
- 3) Если в (24)  $a_q = 0$ , то скажем, что уравнение, порождающее этот многочлен, является особым.

Лемма 1. 1) Пусть характеристический многочлен  $R_p^\infty$  дифференциального уравнения (16) вырождается. Тогда уравнение (16) мероморфных решений из класса  $S_1^\infty(X)$  не имеет.

2) Пусть характеристический многочлен  $R_p^\infty$  уравнения (16) неприводим и не вырождается. Тогда  $S(X)$ -порядок мероморфного решения  $w$  уравнения (16) из класса  $S_1^\infty(X)$  не конечен тогда и только тогда, когда характеристическое множество  $X_w$  — особое множество решений  $w$ .

Доказательство. 1) Пусть характеристический многочлен  $R_p^\infty$  уравнения (16) вырождается. Сперва запишем уравнения (16) в виде

$$P(z, w, w') \equiv \sum_{j_0, j_1} a_{j_0, j_1}(z) \cdot z^{-j_1} w^{j_0+j_1} S^{j_1} = 0. \quad (25)$$

Предполагая, что уравнение (25) имеет мероморфное трансцендентное решение из класса  $S_1^\infty(X)$ , при  $z \in X_w$ , получим, что характеристическое уравнение имеет вид

$$R_p^\infty(z, S) \equiv \sum_{j_0, j_1=m} a_{j_0, j_1} \cdot z^{m j_0 j_1} S^{j_1} = 0, \quad z \in X_w, \quad (26)$$

где  $m$  — степень определяющего многочлена  $O_p$  относительно  $w$ ,  $m_{j_0, j_1}$  — целые числа,  $a_{j_0, j_1}$  — постоянные.

В силу вырождаемости характеристического многочлена получаем

$$R_p^\infty(z, S) \equiv S^j \sum_{j_0, j_1=m} a_{j_0, j_1} z^{m j_0 j_1} = 0, \quad (27)$$

где  $j = \max j_1$ ,  $j_0 + j_1 = m$ . Так как в (27) второй множитель, в силу вырождаемости характеристического многочлена,  $\neq 0$ , то получаем  $S(z, w) \equiv 0$ . Это противоречие и доказывает наше предположение.

2) Пусть характеристический многочлен  $R_p^\infty$  уравнения (16) не вырождается. Во-первых, если в (24) показатели  $m_i - m_1 < 0$  ( $i = 0, \dots, q-1$ ), то все решения уравнения (24) ограничены, следовательно

но соответствующее решение уравнения (16) из класса  $S_1^\infty(X)$  имеет нулевой  $S(X)$ -порядок. Поэтому в дальнейшем предположим, что один из показателей  $m_l - m_q$  в (24) — положительное число.

Предположим, что уравнение (16) имеет мероморфное решение  $w$  из класса  $S_1^\infty(X)$  и  $X_w$  — не особое множество решений  $w$ ; в противном случае  $S(X)$ -порядок равен бесконечности.

Если уравнение (24) не превращается в одночлен, то уравнение (24) имеет конечное число решений вида

$$S(z, w) = c_j z^{p_j} (1 + \varepsilon_j(z)), \quad j = 1, 2, \dots, l < q. \quad (28)$$

Из леммы 2.2.3 ([12]) вытекает, что в таком случае существует  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \ln |S(\xi, w)/\ln \xi| \in X_w$ , равный одному из положительных чисел  $p_j$ . Отсюда следует, что  $S(X)$ -порядок мероморфного решения уравнения (16) из класса  $S_1^\infty(X)$  — конечное число.

В частности получаем: всякое мероморфное решение с бесконечным дефектным значением (в частности целые решения) уравнения (16) имеет конечный порядок в смысле Неванлинны (см. еще [16]).

**Замечание.** Легко видеть, что в классе  $S_1^\infty(X)$  особых уравнений не существует.

2. Скажем, что мероморфное решение уравнения (16) принадлежит классу  $S_1^0(X)$ , если для этого решения имеет место

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^p S^q w^l = 0, \quad z \in X_w. \quad (29)$$

где  $p, q, l > 0$  — любые целые числа.

Всякое мероморфное решение с нулевым дефектным значением (в частности решение вида  $w = 1/f(z)$ , где  $f(z)$  — целая функция) принадлежит классу  $S_1^0(X)$ , где  $X_w = G_w \setminus E_w$ ,  $G_w = \{\xi \in \mathbb{C} : |w(\xi)| = \min_{|z| = |\xi|} |w(z)|\}$ , а  $E_w$  — множество колец с конечной суммой ширин.

Имея в виду, что все члены левой части (16), содержащие  $w$  или  $w'$ , имеют вид  $z^p S^q w^l$  ( $l > 0$ ), (16) и (29) получаем: чтобы уравнение (16) имело решение из класса  $S_1^0(X)$ , необходимо условие:  $P(z, 0, 0) \equiv 0$ ,  $z \in X_w$ . В самом деле

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P(z, w, w') = \lim_{z \rightarrow \infty} P(z, 0, 0) = 0; \quad z \in X_w.$$

Но функция  $P(z, 0, 0)$  — полином относительно  $z$ , поэтому это равенство возможно в том случае, когда  $P(z, 0, 0) \equiv 0$ , а это и есть необходимое условие.

В уравнении (16) заменим  $w = 1/\omega$ . При такой замене алгебраическое дифференциальное уравнение переходит в алгебраическое дифференциальное уравнение. Имея в виду, что  $S(z, w) = -S(z, \omega)$ , заключаем, что  $S(X)$ -порядок мероморфного решения уравнения (16) при такой замене тоже не меняется. Пусть после замены  $w = 1/\omega$  уравнение (16) переходит в уравнение

$$\omega^k P\left(z, \frac{1}{\omega}, -\frac{\omega'}{\omega^2}\right) \equiv Q(z, \omega, \omega' = 0), \quad (30)$$



где  $Q$  — многочлен от своих переменных) а  $k$  — некоторое целое число. Уравнение (30) назовем инверсионным уравнением уравнения (16), а  $X_Q^0 \equiv X_P^0$  назовем вторым характеристическим многочленом уравнения (16). При  $\omega \in S_1^-(X)$  имеем  $\omega \in S_1^0(X)$ , откуда следует

**Лемма 2.** 1) Если характеристический многочлен  $R_P^0$  дифференциального уравнения (16) вырождается, то уравнение (16) мероморфных решений из класса  $S_1^0$  не имеет.

2) Пусть характеристический многочлен  $R_P^0$  уравнения (16) неприводим и  $P(z, 0, 0) \equiv 0$ . Тогда  $S(X)$ -порядок мероморфного решения  $w$  уравнения (16) из класса  $S_1^0(X)$  не конечен тогда и только тогда, когда характеристическое множество  $X_\omega$  — особое множество мероморфного решения  $w$ .

В частности следует: всякое мероморфное решение с нулевым дефектным значением (в частности решения вида  $w = 1/f(z)$ , где  $f(z)$  — целая функция) уравнения (16) имеет конечный (в смысле Неванлинны) порядок.

**Замечание.** Не трудно видеть, что в классе  $S_1^0(X)$  особых уравнений не существует.

3) Пусть  $w$  — мероморфное решение уравнения (16) и пусть существует  $p, q, l \neq 0$  целые числа такие, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^p S^q}{w^l} = c_1, \quad c_1 = \text{const} \neq 0, \quad z \in X_\omega. \quad (31)$$

Без потери общности можно считать  $l = 1$ . Если мероморфное решение уравнения (16) удовлетворяет условию (31) с  $l = 1$ , то  $w = w^l$  является решением некоторого алгебраического дифференциального уравнения с  $S(z, w) = l S(z, w)$ . Из (31) следует

$$w = c z^p S^q (1 + \varepsilon(z)), \quad c = \text{const} \neq 0, \quad z \in X_\omega, \quad (32)$$

где  $\varepsilon(z) \rightarrow 0$  при  $z \in X_\omega$  и  $z \rightarrow \infty$ .

Скажем, что мероморфное решение уравнения (16) из класса  $S_1(X)$  принадлежит классу  $S_1^c(X)$ , если для этого решения имеет место (32) и там  $q > 0$ .

Всякое мероморфное решение с конечным дефектным значением принадлежит классу  $S_1^c(X)$ .

Из (19), имея в виду (32), получаем

$$P(z, w, c z^{p-1} S^{q+1} (1 + \varepsilon(z))) = 0, \quad z \in X_\omega, \quad (33)$$

где  $p$  и  $q > 0$  — целые числа.

Из (33), имея в виду, что  $P$  — многочлен от своих переменных, получаем

$$\sum_{i=0}^q a_i(c) z^{m_i} S^i (1 + \delta_i(z)) = 0, \quad z \in X_\omega, \quad (34)$$

где  $a_i(c)$  — ограниченные функции от  $c$ ,  $m_i$  — целые числа, а  $\delta_i(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow 0$  и  $z \in X_\omega$ .

Так как  $\delta_i(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ ,  $z \in X_w$  и корни алгебраического уравнения (34) непрерывно зависят от его коэффициентов, то решения уравнения (34) на множестве  $X_w$  асимптотически равны решениям уравнения, получающегося при обращении в нуль всех  $\delta_i(z)$

$$R_p^c(z, S) = \sum_{i=0}^q a_i(c) z^{m_i} S^i = 0, \quad z \in X_w. \quad (35)$$

Уравнение (35) назовем третьим характеристическим уравнением, а многочлен  $R_p^c$  — третьим характеристическим многочленом уравнения (16) в классе  $S_1^c(X)$ . Итак: пусть характеристический многочлен  $R_p^c$  дифференциального уравнения (16) неприводим.

**Лемма 3.** 1) Если характеристический многочлен  $R_p^c$  дифференциального уравнения (16) вырождается, то уравнение (16) мероморфных решений из класса  $S_p^c$  не имеет;

2) Если характеристический многочлен  $R_p^c$  уравнения (16) не вырождается, то  $S(X)$ -порядок всякого мероморфного решения уравнения (16) из класса  $S_1^c$  не конечен тогда и только тогда, когда характеристическое множество  $X_w$  — особое множество мероморфного решения  $w$ .

В частности получаем: всякое мероморфное решение с конечным  $a \neq 0$  дефектным значением уравнения (16) имеет конечный порядок (в смысле Неванлинны).<sup>1</sup>

**Замечание 1.** В отличие от пунктов 1. и 2. здесь старший коэффициент  $a_q$  в характеристическом многочлене может равняться нулю, т. е. уравнение (16) в классе  $S_1^c(X)$  является особым уравнением.

**Замечание 2.** Нетрудно видеть, что заключение 3. остается в силе, если в (42)  $q < 0$ .

4. Пусть  $w$  — мероморфное решение уравнения (16), и пусть существуют целые числа  $p, q$  такие, что предел выражения  $z^p S_w^q$  при  $z \in X_w$  и  $z \rightarrow \infty$  не существует.

Скажем, что мероморфное решение уравнения (16) из класса  $S_1(X)$  принадлежит классу  $\bar{S}_1(X)$ , если для этого решения предел выражения  $z^p S^q w$  при  $z \in X_w$  и  $z \rightarrow \infty$  не существует и  $z^p S^q w$  — мероморфная функция конечного роста на  $X_w$ .

Аналогично 1°—3° показываем, что  $S(X)$ -порядок мероморфных решений уравнения (16) из класса  $\bar{S}_1(X)$  тесно связан с решением алгебраического уравнения

$$\bar{R}_p(z, S) = \sum_{i=0}^l a_i(c) |z|^{\lambda_i} z^{m_i} S^i = 0, \quad z \in X_w, \quad (36)$$

где  $a_i = \text{const}$ ,  $\lambda_i$  — действительные, а  $m_i$  — целые числа.

Уравнение (36) назовем основным характеристическим уравнением, а многочлен  $\bar{R}_p$  — основным характеристическим многочленом уравнения (16).



Из свойств уравнения (36) следует

Лемма 4.1) Пусть характеристический многочлен  $\bar{R}_P$  уравнения (16) вырождается, тогда уравнение (16) мероморфных решений из класса  $\bar{S}_1(X)$  не имеет;

2) пусть характеристический многочлен  $\bar{R}_P$  уравнения (16) неприводим и не вырождается, тогда  $S(X)$ -порядок всякого мероморфного решения уравнения (16) из класса  $\bar{S}_1(X)$  не конечен тогда и только тогда, когда характеристическое множество  $X_w$  есть особое множество мероморфного решения  $w$ .

Замечание 1 из п. 3 здесь остается в силе.

5. Скажем, что мероморфное решение уравнения (16) из класса  $S_1(X)$  принадлежит классу  $\hat{S}_1(X)$ , если для этого решения предел выражения  $z^p S^q w$  при  $z \in X_w$  и  $z \rightarrow \infty$  не существует и  $z^p S^q w$  — мероморфная функция бесконечного роста.

$S$ -характеристика мероморфного решения уравнения (16) из класса  $\hat{S}_1(X)$  при  $z \in X_w$ , получим, что асимптотически равна решению алгебраического относительно  $S$  уравнения вида

$$\hat{R}_P(z, S) \equiv \sum_{j=0}^l a_j(c) R^{l_j} z^{m_j} S^j = 0, \quad z \in X_w, \quad (37)$$

где  $a_j = a_j(c) = \text{const}$ ,  $R = R(|z|)$  бесконечного роста на  $X_w$  функция,  $l_j$  — действительные, а  $m_j$  — целые числа. Решения уравнения (16) из класса  $\hat{S}_1(X)$  назовем особыми решениями этого уравнения.

Лемма 5.1. Пусть характеристический многочлен  $\hat{R}_P$  уравнения (16) вырождается. Тогда уравнение (16) мероморфных решений из класса  $\hat{S}_1(X)$  не имеет;

2) Пусть характеристический многочлен  $\hat{R}_P$  уравнения (16) неприводим и не вырождается. Тогда  $S(X)$ -порядок всякого мероморфного решения  $w$  уравнения (16) из класса  $\hat{S}_1(X)$  (особого решения) равен бесконечности.

Из лемм 1—5 следует

Теорема 1.  $S(X)$ -порядок мероморфного решения  $w(z)$  уравнения (16) равен бесконечности при следующих условиях: 1) характеристическое множество  $X_w$  является особым; 2) уравнение (16) является особым; 3) решение  $w(z)$  является особым.

Замечание 1. Здесь рассматривали решения уравнения (16), мероморфные во всей плоскости  $C$ . Ясно, что доказанная теорема верна для решений уравнения (16), мероморфных в любой неограниченной области плоскости  $C$  (полуплоскость, угол и т. д.).

Замечание 2. Методами, примененными выше, легко доказать аналогичные теоремы для дифференциальных уравнений  $F(z, w, w') = 0$ , где  $F$  — многочлен относительно  $w$  и  $w'$  и рациональная функция относительно  $z$ .

Этим же методами легко доказать теорему 1 для дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{m, n} F_{m, n}(z) w^m w_n^n = 0,$$

где  $F_{mn}$  — мероморфные трансцендентные функции в некоторой неограниченной области, и в этой области  $|F_{mn}(z)| < c|z|^p$ ,  $c = \text{const}$ ,  $p < \infty$  — постоянные величины.

Сейчас сказанное выше проиллюстрируем на уравнении Риккати, [13].

**Теорема 2.** Уравнение Риккати  $w' = P(z)w^2 + Q(z)w + R(z)$ , где  $P(z)$ ,  $Q(z)$  и  $R(z)$  — многочлен от  $z$ ,

1) мероморфных решений (в том числе целых) из класса  $S_1^\infty(X)$  не имеет;

2) мероморфных решений из класса  $S_1^1(X)$  не имеет, если  $R(z) \neq 0$ , а если  $R(z) \equiv 0$ , то  $S(X)$ -порядок всякого мероморфного решения  $w$  из класса  $S_1^1(X)$  имеет конечный  $S(X)$ -порядок при условии, что характеристическое множество  $X_w$  не является особым множеством решений  $w$ ;

3)  $S(X)$ -порядок всякого мероморфного решения  $w$  уравнения Риккати из класса  $\bar{S}_1(X)$  — конечное число, если множество  $X_w$  не является особым множеством  $w$ ;

4)  $S(X)$ -порядок всякого мероморфного решения уравнения Риккати из класса  $\bar{S}_1(X)$  не конечен.

4°. Аналогично 3° получена оценка  $S(X)$ -порядка мероморфных решений  $w$  из класса  $S_\infty(X)$  уравнения

$$P\left(z, w, \left(\frac{dw}{dz}, \dots, \frac{d^n w}{dz^n}\right)\right) = 0, \quad (38)$$

где  $n > 2$  — натуральное число,  $P$  — многочлен от своих переменных, а  $X_w$  — характеристическое множество мероморфного решения  $w$ .

Сперва заметим: тождество  $w' = \frac{S}{\xi} w$  здесь заменяются соотношением

$$w^{(k)}(\xi) = c_k \cdot \left(\frac{S(\xi, w)}{\xi}\right)^k \cdot w(\xi) (1 + \varepsilon_k(\xi)), \quad \xi \in X_w, \quad (39)$$

где  $k > 1$  — натуральное число,  $c_k = \text{const} \neq 0$ , а  $\varepsilon_k(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \infty$  и  $\xi \in X_w$ .

Леммы 1—5 и теорема 1 остаются в силе при замене уравнения (16) уравнением (38) и доказываются аналогичным образом.

**Замечание.** Условие, что в характеристических многочленах старшие коэффициенты не равны нулю существенно (в случае уравнения первого порядка старшие коэффициенты в характеристических многочленах  $R_P^0$  и  $R_P^1$ , исходя из вида уравнения, не обращаются в нуль). Если в характеристических многочленах старшие коэффициенты равны нулю ( $a_q = 0$ ), то следующие примеры показывают, что



уравнение (38) может иметь мероморфные решения бесконечного  $S(X)$ -порядка. В характеристическом многочлене  $R_P \equiv O \cdot \left(\frac{S}{\xi}\right)^4 + \left(\frac{S}{\xi}\right)^2 - 1$  уравнения  $(w''w)^2 - 2w''w'^2w + w'^4 + (w'w)^2 - w^4 = 0$

старший коэффициент равен нулю, и оно имеет целое решение  $w = \exp(\sin z)$  бесконечного  $S(X)$ -порядка. В первом характеристическом многочлене уравнения  $w w'' - w w' - w'^2 = 0$  также старший коэффициент равен нулю, и оно имеет целое решение  $w = \exp(\exp z)$  бесконечного  $S(X)$ -порядка. Инверсионное уравнение  $\omega w'' - \omega'^2 - \omega' \omega = 0$  имеет тот же самый вид, что и данное уравнение, следовательно старший коэффициент  $R_P^0$  равен нулю и оно допускает решение вида  $\omega = \exp(-\exp z)$  бесконечного  $S(X)$ -порядка.

Сказанное в 4° проиллюстрируем на первом уравнении Пенлеве [13], [14],

$$P(z, w, w', w'') \equiv w'' - \{w'' - \{6w^2 + z\} = 0. \quad (40)$$

Как известно первое уравнение Пенлеве имеет только мероморфные решения и все конечного порядка (в смысле Неваплинны, [14], [15].

Определяющее уравнения (40) имеет вид

$$O_P(z, w, S) \equiv c_2 z^{-2} S^2 w - \{6w^2 + z\} = 0, \quad z \in X_w. \quad (41)$$

I. Из (41) получаем  $R_P^{\infty}(z, S) \equiv -6$ ,  $z \in X_w$ , откуда имея в виду, что характеристический многочлен  $R_P^{\infty}$  вырождается, получаем: уравнение (40) мероморфных решений (в том числе целых решений) из класса  $S_w^{\infty}(X)$  не имеет.

II. Уравнение (40) мероморфных решений (в том числе решений вида  $w = 1/f(z)$ , где  $f(z)$  — целая функция) из класса  $S_w^0(X)$  тоже не имеет, так как не имеет места необходимое условие  $P(z, 0, 0, 0) \equiv -z \neq 0$ .

III. Если  $X_w \not\subset \{z: \arg z = 0\}$  и не является особым, то порядок мероморфного решения  $w$  из класса  $\bar{S}_w(X)$  конечен.

IV. В предположении, что уравнение (40) имеет решение из класса  $\bar{S}_w(X)$  получаем: всякое такое решение имеет бесконечный  $S(X)$ -порядок.

Аналогично уравнению (40) рассматривается второе уравнение Пенлеве

$$P(z, w, w', w'') \equiv w'' - \{2w^3 + zw + \alpha\} = 0.$$

Заключения I—IV в таком же виде верны для второго уравнения Пенлеве, если только  $\alpha \neq 0$ .

5°. Пусть  $w = w(z)$  — трансцендентная, однозначная, мероморфная в некотором углу  $g$  функция. Рассмотрим алгебраическое дифференциальное уравнение вида (38) при  $z \in g$ ,  $n \geq 2$  — натуральное число, а  $P$  — рациональная функция относительно  $z$  и многочлен относительно других переменных.

Для мероморфного в  $g$  решения  $w(z)$  определим аналогичным образом понятия  $S(G)$  порядка  $\rho_S(G)$ , где  $G \subset g$  — некоторое  $\Sigma$ -множество.

Пусть  $w = w(z)$  однозначное мероморфное в  $g$  решение (38). Будем говорить, что  $w(z)$  принадлежит классу  $V_n(G)$ , если при любом натуральном  $j \leq n$

$$H_j(z, w) = k_j |z|^{\alpha_j} (1 + \varepsilon_j(z)), \quad 2 \leq j \leq n, \quad z \in G, \quad (42)$$

где

$$H_j(z, w) = \left( \frac{z}{S(z, w)} \right)^j \cdot \frac{w^{(j)}(z)}{w(z)}, \quad z \in g, \quad (43)$$

$k_j = \text{const} = 0$ ,  $\alpha_j \geq 0$  — действительные числа,  $\varepsilon_j(z) \rightarrow 0$  при  $z \in G$  и  $z \rightarrow \infty$ . Т. е.  $A_j(z, w)$  — мероморфная в  $g$  конечного роста на  $G$  функция.

Пусть уравнение (38) имеет решение из класса  $V_j(G)$ . В уравнении (38) имея в виду (43) и сделав замену

$$w(z) = H_k \left( \frac{S}{z} \right)^k w, \quad k = 2, \dots, n,$$

получим

$$P(z, w, H_1 \left( \frac{S}{z} \right) w, H_2 \left( \frac{S}{z} \right)^2 w, \dots, H_n \left( \frac{S}{z} \right)^n w) = 0, \quad (44)$$

где  $H_1 = 1$ .

Из (44) в силу (42) вытекает

$$P(z, w, k_1 |z|^{\alpha_1} z^{-1} S w (1 + \varepsilon_1), k_2 |z|^{\alpha_2} z^{-2} S^2 w (1 + \varepsilon_2), \dots, k_n |z|^{\alpha_n} z^{-n} S^n w (1 + \varepsilon_n)) = 0, \quad z \in G, \quad (45)$$

где  $k_1 = 1$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 0$ , а при  $j \geq 2$ ,  $k_j = \text{const} \neq 0$ ;  $\alpha_j \geq 0$  — действительные числа  $\varepsilon_j(z) \rightarrow 0$  при  $z \in G$  и  $z \rightarrow \infty$ .

Алгебраическое относительно  $S$  и  $w$  уравнение (45) асимптотически совпадает с

$$O_p(z, S, w) = P(z, w, k_1 |z|^{\alpha_1} z^{-1} S w, k_2 |z|^{\alpha_2} z^{-2} S^2 w, \dots, k_n |z|^{\alpha_n} z^{-n} S^n w) = 0, \quad z \in G. \quad (46)$$

Уравнение (46) назовем определяющим уравнением, а  $O_p(z, S, w)$  — определяющим многочленом уравнения (38) на множестве  $G$  в классе  $V_n(G)$ . Ясно, что  $O_p(z, S, w)$  — многочлен относительно  $S$  и  $w$ .

В зависимости от поведения решений уравнения (38) из класса  $V_n(G)$  рассматривается несколько случаев (пять случаев), аналогичных приведенным в пунктах 3° и 4°.

Рассмотрим один из них. Скажем, что решение уравнения (38) из класса  $V_n(G)$  принадлежит классу  $V_n^{\infty}(G)$ , если для этого решения имеет место

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^p S^q}{w^l} = 0, \quad z \in G, \quad (47)$$

где  $p, q, l > 0$  — любые целые числа.



Пусть  $O_p(z, S, w)$  — многочлен степени  $m$  относительно  $w$

$$O_p(z, S, w) \equiv \sum_{i=1}^m F_i(k_1, \dots, k_n, z, |z|, S) w^{m-i} = 0, \quad z \in G, \quad (48)$$

где  $F_i (i=0, \dots, m)$  — многочлены относительно  $S$ , и пусть еще

$$F_0(k_1, \dots, k_n, z, |z|, S) = \sum R_i(k_1, \dots, k_n, z) |z|^{\beta_i} S^i = 0, \quad z \in G, \quad (49)$$

где  $R_i$  — рациональные функции от  $z$ , а  $\beta_i \geq 0$  — действительные числа. После деления левой и правой частей (48) на  $w^m$  при  $z \in G$  и  $z \rightarrow \infty$  получим

$$X_p^{\infty}(z, S) \equiv \sum_{j=0}^q a_j(k_1, \dots, k_n) z^{m_j} |z|^{\beta_j} S^j = 0, \quad z \in G, \quad (50)$$

где  $q$  — степень многочлена  $F_0$  относительно  $S$ ,  $a_j$  — ограниченные функции от своих переменных.  $m_j$  — целые,  $\beta_j \geq 0$  — действительные числа.

Уравнение (50) назовем первым характеристическим уравнением, а многочлен  $X_p^{\infty}$  — первым характеристическим многочленом уравнения (38) на множестве  $G$  в классе  $V_n^{\infty}(G)$ .

**Теорема 3.** Пусть задано алгебраическое дифференциальное уравнение (38), а  $G \subset g$  некоторое  $\Sigma$ -множество, и пусть характеристический многочлен  $X_p^{\infty}$  уравнения (3) неприводим, тогда:

1) уравнение (38) мероморфных решений из класса  $V_n^{\infty}(G)$  не имеет, если характеристический многочлен  $X_p^{\infty}$  вырождается.

2)  $S(G)$ -порядок всякого мероморфного решения  $w$  уравнения (38) из класса  $V_n^{\infty}(G)$  — конечное число, если характеристический многочлен  $X_p^{\infty}$  уравнения (38) не вырождается и  $G$  — не пустое множество решения  $w$ .

**Доказательство** пункта 1). Сперва запишем уравнение (38) в виде

$$P(z, w, w_z, \dots, w_{z^n}) \equiv \sum_{j_0, \dots, j_n} a_{j_0, \dots, j_n}^{(z)} w^{j_0} w_z^{j_1} \dots w_{z^n}^{j_n} = 0. \quad (51)$$

При  $z \in G$  производные  $w_z, \dots, w_{z^n}$  в (51) по формулам

$$w^{(j)}(z) = k_j |z|^{\alpha_j} \left( \frac{S}{z} \right)^j w (1 + \varepsilon_j(z)), \quad z \in G \quad (52)$$

выразим через  $w(z)$  и  $S(z, w)$ .

Предполагая, что уравнение (51) имеет мероморфное решение из класса  $V_n^{\infty}(G)$ , после замены получим определяющее уравнение

$$O_p(z, S, w) \equiv \sum_{j_0, \dots, j_n} a_{j_0, \dots, j_n}(z) k_1^{j_1} \dots k_n^{j_n} |z|^{j_1 \alpha_1 + \dots + j_n \alpha_n} \cdot \left( \frac{S}{z} \right)^{j_1 + \dots + j_n} w^{j_0 + \dots + j_n} = 0, \quad z \in G. \quad (53)$$

В предположении, что многочлен  $O_p$  степени  $m$  относительно  $w$ , из (53) получим, что характеристический многочлен  $X_p^{\infty}$  имеет вид

$$X_P^-(z, S) \equiv \sum_{j_1, \dots, j_n} a_{j_1, \dots, j_n}(k_1, \dots, k_n) \cdot z^{m_{j_1, \dots, j_n}} |z|^{\beta_{j_1, \dots, j_n}} S_{j_1 + \dots + j_n} = 0, \quad z \in G, \quad (54)$$

где  $m_{j_1, \dots, j_n}$  — целые, а  $\beta_{j_1, \dots, j_n}$  — действительные числа.

В силу вырождаемости характеристического многочлена  $X_P^-$  получаем

$$X_D^-(z, S) \equiv S^\chi \sum_{j_1, \dots, j_n} a_{j_1, \dots, j_n} z^{m_{j_1, \dots, j_n}} |z|^{\beta_{j_1, \dots, j_n}} = 0, \quad z \in G, \quad (55)$$

где  $\chi = \max(j_1 + \dots + nj_n)$ ,  $j_0 + \dots + j_n = m$ . Так как в (55) второй множитель, в силу вырождаемости характеристического многочлена  $X_P^- \neq 0$ , то получаем  $S(z, w) \equiv 0$ . Это противоречие и доказывает наше предположение, т. е. (51) мероморфных решений из класса  $V_n^-(G)$  не имеет.

Доказательство пункта 2). Предположим, что  $G$  не является особым множеством этого решения  $w$ .

В (50) положим  $m_j + \beta_j = \gamma_j$ ,  $\gamma = \max(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ . Если  $\gamma \leq 0$ , то все решения уравнения (50) ограничены при  $z \rightarrow \infty$ , следовательно соответствующие решения уравнения (38) из класса  $V_n^-(G)$  имеют нулевой  $S(G)$ -порядок.

Повторю в дальнейшем предположим  $\gamma > 0$ . В этих предположениях при  $|z| > R_0$  с достаточно большим  $R_0$  существует конечное число решений уравнения (50) вида

$$S(z, w) = B_p(\beta, z) \cdot |z|^\rho, \quad \beta = (k_1, \dots, k_n), \quad (56)$$

$$p = 1, 2, \dots, \mu < \infty, \quad z \in G,$$

где функции  $B_p(\beta, z)$  удовлетворяют соотношениям

$$0 < B' < B_p(\beta, z) \leq B'' < \infty, \quad B', B'' = \text{const.}$$

Из (56) следует, что  $S(G)$ -порядок всякого мероморфного в  $G$  решения уравнения (38) из класса  $V_n^-(G)$  — конечное число.

Замечание. Условие, что в (50)  $a_q \neq 0$ , в теореме 3 существенно. Если в (50)  $a_q = 0$ , то существуют примеры, которые показывают, что уравнение (38) может иметь решения как конечного, так и бесконечного  $S(G)$ -порядка из класса  $V_n^-(G)$ , причем с условием, что  $G$  — не особое множество этих решений.

Следствие 1. Всякое решение  $w$  из класса  $V_n^-(G)$  линейного однородного дифференциального уравнения

$$w^{(m)} + a_{m-1}(z) w^{(m-1)} + \dots + a_1(z) w' + a_0(z) w = 0, \quad (57)$$

где  $a_i(z)$  ( $i = 0, \dots, m-1$ ) — многочлены и один из них  $\neq 0$ ,  $G$  — некоторое  $\Sigma$ -множество, имеет конечный  $S(G)$ -порядок, если только  $G$  не особое множество решения  $w$ .

Для доказательства следствия нужно заметить, что характеристический многочлен  $X_P^-$  уравнения (57) не вырожден, и в (50)  $a_q \neq 0$ .



Следствие 2. Если дифференциальное уравнение (51) содержит один член с максимальной степенью  $m = j_0 + j_1 + \dots + j_n$ , либо содержит  $l \geq 2$  членов с максимальной степенью  $m$ , но среди них один член, для которого  $j_1 + \dots + n j_n$  достигает максимума, то уравнение (51) мероморфных решений из класса  $V_n^-(G)$  не имеет.

В обоих случаях характеристический многочлен  $X_D$  превращается в одночлен, т. е. вырождается, откуда и следует утверждение следствия.

6°. Для различных классов функций, являющихся решениями алгебраических дифференциальных уравнений первого порядка, можно установить аналоги теорем типа Мальмквиста. Рассмотрим, например, мероморфные в  $g$  решение уравнения

$$w' = R(z, w), \quad (58)$$

где  $R(z, w)$  — многочлен относительно  $w$  степени  $n$  с рациональными коэффициентами. Скажем, что однозначная мероморфная в  $g$  функция  $w = w(z)$  принадлежит классу  $S_R(G)$ , если  $w$  — мероморфное в  $g$  решение уравнения (58) и существуют целые числа  $p$  и  $q$  такие, что

$$w = c|z|^a z^p S^q (1 + \varepsilon(z)), \quad c = \text{const} \neq 0, \quad z \in G, \quad (59)$$

где  $G \subset g$  — некоторое  $\Sigma$ -множество,  $a$  — действительные числа, а  $\varepsilon(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$  и  $z \in G$ .

Теорема 4. Если дифференциальное уравнение (58) допускает однозначное мероморфное в  $g$  решение из класса  $S_R(G)$ , то уравнение (58) является уравнением Риккати.

Доказательство. Определяющее уравнение (58) будет

$$O_R(z, S, w) \equiv z^{-1} w S - R(z, w) = 0, \quad (60)$$

где  $R(z, w) = R_n(z) w^n + \dots + R_0(z)$ ,  $R_i(z)$  ( $i = 0, \dots, n$ ) — рациональные функции от  $z$ .

Из (60) в силу (50) при предположении, что уравнение (58) допускает мероморфное решение из класса  $S_R(z)$ , получаем, что при  $z \rightarrow \infty$  и  $z \in G$  имеет место асимптотическое соотношение

$$cz^{p-1} S^{q+1} = c^n a_n z^{pn+p} S^{nq} + \dots + a_0 z^{p_0}, \quad (61)$$

где  $p_0, \dots, p_n$  — целые числа.

Соотношение (61) возможно лишь при  $q+1=nq$ , т. е. при  $q = 1/n - 1$ , откуда  $n=0$  либо  $n=2$ , так как  $q$  — целое. Получаем, что уравнение (58) должно иметь вид  $w' = a(z)w^2 + b(z)w + c(z)$  либо  $w' = c(z)$ , где  $a(z)$ ,  $b(z)$  и  $c(z)$  — рациональные от  $z$  функции.

Теорема доказана.

Ереванский политехнический  
институт им. К. Маркса

Поступила 23. VII, 1986 и 20. III, 1989

Ս. Մ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ. Հանգանալիկան դիֆերենցիալ հավասարումների մեծագույն լուծումների ասիմպտոտիկ հատկությունները (ամփոփում)

Հաղվածում ստացված է այսպես կոչված Վիման-Վալիրոնի մաքսիմալ անդամի տեսության մեկ ընդհանրացում. ներմուծված է մերոմորֆ ֆունկցիաների S-կարգ, որը ընդհան-

րացնում է ամբողջ ֆունկցիաների կարգի հասկացությունը Այնուհետև այդ ընդհանրացումները կիրառվում են հանրահաշվական դիֆերենցիալ հավասարումների մերոմորֆ լուծումների S-կարգի գնահատման համար:

S. TC. SARKISIAN. *Asymptotic properties of meromorphic solutions of algebraic differential equations (summary)*

In this paper the generalization of the theory of maximal number of Wiemann—Valiron is obtained. A new notion of *S*-order of meromorphic functions, generalizing the notion of order growth of entire functions is introduced. This generalizations are used for estimations of *S*-order of meromorphic solutions of algebraic differential equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Malmquist. Sur les fonctions à un nombre fini de branches satisfaisant à une équation différentielle du premier order, Acta, math., 1913, 36, 297—343.
2. J. Malmquist. Sur les fonctions à un nombre fini de branches satisfaisant à une équation différentielle du premier order., Acta. math., 1920, 42, 59—79.
3. Э. Л. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков: ДНТБУ, 1939.
4. E. Picard. Sur une propriété des fonctions d'une variable et sur une classe différentielles, Comptes Rendus, 1880, 91, 1058—1060.
5. G. Valiron. Sur un théorème de Hadamard, Bull. scienc. math., 47 (58), 1, 1953, 177—192.
6. G. Valiron. Lectures on the integral functions, Tonlose, 1923.
7. A. J. Macintyre On Bloch's theorem, Math. Z., 44, 1939, 536—540.
8. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941.
9. У. К. Хейман. Мероморфные функции, М., 1966.
10. С. Ц. Саркисян. О разрастании решений некоторых систем уравнений с частными производными, ДАН Арм.ССР, 24, № 5, 1963.
11. А. А. Гольдберг, Л. С. Кочинян, С. Ц. Саркисян. О некоторых теоремах типа Пикара, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 13, 1, № 1, 1978.
12. Ш. И. Стрелиц. Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений, Изв. «Миктис», Вильнюс, 1972.
13. В. В. Голубев. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
14. P. Bouteux. Recherches sur les transcendentes de M. Painleve et l'étude asymptotique des équations différentielles du second order, Ann. Ecole Norm. Supér., 1913, 30:3, 255—375, 1914, 31, 99—159.
15. P. Bouteux. Sur quelques propriétés des fonctions entières, Acta, math., 29, 1904 97—204.



УДК 517.53

Б. Я. ЛЕВИН, И. О. ХАЧАТРЯН

# О ЗАМЫКАНИИ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА ПРИ ВЗВЕШЕННО-РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Для данного числа  $\rho > 1$  обозначим через  $\Delta(\rho)$  угловую область

$$\Delta(\rho) = \left\{ z : |\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}, 0 < |z| < +\infty \right\},$$

а через  $\Delta^*(\rho)$  — дополнительную угловую область. Общую границу этих областей обозначим через  $L_\rho$ .

Пусть  $\omega$  — произвольное число из интервала  $(-1, 1)$  и пусть  $\mu = \frac{1}{2\rho}(1 + \omega + \rho)$ , так что  $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$ .

Пусть на  $L_\rho$  определена вещественная измеримая функция  $\varphi(t)$  такая, что  $\varphi(t) \geq 1$ ,  $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$  и

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{|t|^{\rho(1-\mu)}}{\varphi(t)} = 0. \quad (1)$$

Обозначим через  $C_\varphi(L_\rho)$  пространство непрерывных на  $L_\rho$  функций  $f(t)$ , удовлетворяющих условию

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{|f(t)|}{\varphi(t)} = 0.$$

Под нормой элемента  $f$  понимаем число

$$\|f\| = \sup_{t \in L_\rho} \frac{|f(t)|}{\varphi(t)}.$$

Функция  $E_\rho(z; \mu)$  типа Миттаг — Лерфлера определяется разложением

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma\left(\mu + \frac{n}{\rho}\right)}.$$

Она — целая, порядка  $\rho$  и типа 1 при произвольном значении параметра  $\mu$ . Из ее асимптотических свойств ([1], стр. 127) следует, что при  $t \in L_\rho$ ,  $|t| \rightarrow +\infty$

$$E_\rho(t; \mu) = \rho t^{\rho(1-\mu)} + O(1), \quad (2)$$

и следовательно условие (1) обеспечивает включение

$$E_\rho(ut; \mu) \in C_\varphi(L_\rho)$$

для произвольного неотрицательного значения  $u \geq 0$ .

В настоящей работе рассматривается задача: в каких пространствах  $C_p(L_p)$  система функций типа Миттаг—Леффлера

$$\{E_p(ut; \mu)\}, \quad 0 \leq u \leq a, \quad (3)$$

где  $a$ —данное положительное число, является замкнутой?

В случае  $p=1$ ,  $\mu=1$  множество  $L_p$  становится мнимой осью, а система (3) обращается в систему экспонент  $\{e^{ut}\}$ ,  $0 \leq u \leq a$ . Описанию замыкания этой системы посвящены работы Э. Акутовица [2], Н. Левинсона и А. Мак—Кина [3], Ю. И. Любарского [4] и других.

Здесь мы подробно остановимся на одном результате Б. Я. Левина о замыкании системы  $\{e^{it\mu}\}$ ,  $-\sigma \leq \mu \leq \sigma$  в  $C_p(-\infty, +\infty)$ .

Эта задача родственна известной проблеме С. Н. Бернштейна о весоном приближении непрерывных функций полиномами на вещественной оси. Решение этой проблемы дано в работах Н. И. Ахиезера и С. Н. Бернштейна [5, 6] и С. Н. Мергеляна [7—9]. Одним из существенных моментов метода С. Н. Мергеляна является следующее: множество  $P$  алгебраических полиномов  $p(t)$  обладает свойством (B), т. е. для произвольного  $p \in P$  функция  $q(t) = [p(t) - p(z)](t-z)^{-1}$  входит в  $P$  для любого комплексного  $z$ . Тригонометрические полиномы  $s(t) = \sum c_k e^{ia_k t}$  не обладают таким свойством. Эта трудность обойдена следующим образом. Рассматривается множество  $B_\sigma$  целых функций экспоненциального типа (ц. ф. э. т.) не выше  $\sigma$ , ограниченных на вещественной оси. Это множество уже обладает свойством (B). Далее, с помощью хорошо известной теоремы Б. М. Левитана:

для любой функции  $f \in B_\sigma$  и любых чисел  $\varepsilon > 0$ ,  $N > 0$  существует такой тригонометрический полином  $s(t) = \sum_{-\sigma \leq k \leq \sigma} c_k e^{ia_k t}$  степени  $\sigma$ , что

$$\sup_{|t| < N} |f(t) - s(t)| < \varepsilon, \quad \sup_{-\infty < t < +\infty} |s(t)| \leq \sup_{-\infty < t < +\infty} |f(t)|.$$

доказывается следующая

Лемма 1. Множество тригонометрических полиномов степени не выше  $\sigma$  плотно в  $B_\sigma$  (в метрике пространства  $C_p(-\infty, +\infty)$ ).

Такая замена аппроксимирующих тригонометрических полиномов степени не выше  $\sigma$  множеством  $B_\sigma$  дает возможность применить метод С. Н. Мергеляна.

Чтобы сформулировать соответствующий результат введем следующие обозначения.

Обозначим через  $\mathfrak{M}$  множество ц. ф. э. т.  $\sigma$  таких, что  $f(t) \times (t-i)^{-1}$  ограничена на вещественной оси и  $\|f(t)(t-i)^{-1}\| \leq 1$ , а через  $\psi(z)$ :

$$\psi(z) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} |f(z)|.$$

Тогда имеет место

\* Изложена в спецкурсе, читанном в ХГУ в 1951 г..



**Теорема\*** (Б. Я. Левин). Для полноты множества  $B_\sigma$  в  $C_p(-\infty, +\infty)$  необходимо, чтобы  $\psi(z) \equiv +\infty$ ,  $\text{Im} z \neq 0$ , и достаточно, чтобы  $\psi(z) = +\infty$  хотя бы в одной точке комплексной плоскости.

Другим эквивалентным критерием полноты в  $C_p$  является расходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln \psi(t)}{1+t^2} dt = +\infty.$$

Теперь вернемся к нашей задаче. Нам понадобится обобщение леммы 1 для целых функций порядка  $\rho > 1$ . Чтобы было ясно, именно на какие классы естественным образом обобщается эта лемма, мы приведем теорему Б. М. Левитана (следовательно и лемму 1) в другой, эквивалентной формулировке:

пусть  $f(z)$  — ц. ф. э. т.  $\leq \sigma$ , ограниченная в верхней полуплоскости. Тогда для любых  $\varepsilon > 0$ ,  $N > 0$  существует тригонометрический полином вида

$$s(t) = \sum_{0 < k_k < \sigma} c_k e^{i k_k t}$$

такой, что

$$\sup_{|t| < N} |f(t) - s(t)| < \varepsilon, \quad \sup_{-\infty < t < +\infty} |s(t)| \leq \sup_{-\infty < t < +\infty} |f(t)|.$$

В соответствии с этим лемму 1 можно переформулировать так:

**Лемма 1'.** Множество тригонометрических полиномов вида

$$\sum_{0 < k_k < \sigma} c_k e^{i k_k t}$$

плотно в множестве ц. ф. э. т.  $\leq \sigma$ , ограниченных в верхней полуплоскости.

Эта лемма допускает обобщение на класс  $B_\sigma^*(L_\rho)$  целых функций порядка  $\rho > 1$  и типа  $\leq \sigma$ , ограниченных в области  $\Delta^*(\rho)$

Это обобщение опирается на установленное М. М. Джрбашяном параметрическое представление специальных классов целых функций.

Обозначим через  $A_\sigma^{(p)}\left(\omega; \pm \frac{\pi}{2\rho}\right)$  класс целых функций порядка  $\rho \geq 1$  и типа  $\leq \sigma$ , удовлетворяющих условию

$$\int_0^\pi |f(te^{-i\theta})|^2 t^\omega dt < +\infty, \quad \frac{\pi}{2\rho} \leq |\theta| \leq \pi,$$

где  $\omega \in [-1, 1]$  — заданное число.

**Теорема** (М. М. Джрбашян, [1], стр. 376). Класс  $A_\sigma^{(p)}\left(\omega; \pm \frac{\pi}{2\rho}\right)$  совпадает с множеством функций  $f(z)$ , допускающих представление

\* В указанном ранее спецкурсе была доказана более общая теорема о полноте множества  $B_\sigma$  в произвольных Ф-пространствах. Формулировку см. в [4].

$$f(z) = \int_0^{\sigma} E_p(z\tau^{1/p}; \mu) \gamma(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau,$$

где  $\mu = \frac{1}{2\rho}(1 + \omega + \rho)$  и  $\gamma(\tau) \in L_2(0, \sigma)$ . Функция  $\gamma(\tau)$  единственна и почти всюду определяется формулой

$$\frac{i}{2\pi\rho} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}\mu} \frac{d}{d\tau} \int_0^{+\infty} f(e^{-i\frac{\pi}{2\rho}} v^{1/p}) \frac{e^{i\tau v} - 1}{iv} v^{\mu-1} dv - \right. \\ \left. - e^{i\frac{\pi}{2}\mu} \frac{d}{d\tau} \int_0^{+\infty} f(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} v^{1/p}) \frac{e^{-i\tau v} - 1}{-iv} v^{\mu-1} dv \right\} = \begin{cases} \gamma(\tau), & \tau \in ]0, \sigma[ \\ 0, & \tau \in ]\sigma, +\infty[ \end{cases}$$

Обобщением леммы 1' является

Лемма 2. Множество линейных комбинаций вида

$$\sum_{0 < \lambda_k < \sigma} c_k E_p(\lambda_k^{1/p} t; \mu)$$

плотно (в метрике  $C_p(L_p)$ ) в множестве  $B_{\sigma}^*(L_p)$ .

Прежде, чем перейти к доказательству этой леммы, приведем одно замечание, которое сформулируем в виде леммы.

Лемма 3. Для любой функции  $f(z) \in B_{\sigma}^*(L_p)$  и для любого  $\varepsilon > 0$  существует число  $\delta_0 > 0$  и функция  $F(z) \in B_{\sigma-\delta_0}^*(L_p)$  такая, что

$$\|f(t) - F(t)\| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть  $f \in B_{\sigma}^*(L_p)$ ,  $\varepsilon > 0$  — произвольное число и  $M = \sup_{t \in L_p} |f(t)|$ . Рассмотрим функцию

$$F(t) = f(at) \in B_{\sigma a}^*(L_p).$$

Выберем  $N > 0$  настолько большим, чтобы

$$\frac{2M}{\varphi(t)} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } |t| \geq N. \quad (4)$$

Так как  $\lim_{a \rightarrow 1} F(t) = \lim_{a \rightarrow 1} f(at) = f(t)$ , причем равномерно в любом круге  $|t| < R$ , то существует число  $\delta_1 > 0$  такое, что при  $0 < 1 - a < \delta_1$ ,

$$|F(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (5)$$

для всех  $t \in L_p$ ,  $|t| \leq N$ .

Тогда из (4) и (5) будем иметь

$$\|F(t) - f(t)\| = \|f(at) - f(t)\| = \sup_{t \in L_p} \frac{|f(at) - f(t)|}{\varphi(t)} \leq \\ \leq \sup_{t \in L_p, |t| \leq N} |f(at) - f(t)| + \sup_{t \in L_p, |t| > N} \frac{|f(at) - f(t)|}{\varphi(t)} \leq$$



$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{|t| > N} \frac{2M}{\varphi(t)} < \varepsilon, \quad 1 - \delta_1 < \alpha < 1.$$

Лемма 3 доказана.

Перейдем теперь к доказательству леммы 2. Пусть  $f(t)$  — произвольная функция из  $B_\varepsilon(L_p)$  и  $\varepsilon > 0$  — произвольное число. Пусть, далее,  $F(t)$  и  $\delta_0 > 0$  имеют тот же смысл, что в лемме 3.

Для функции  $E_p(z; \mu + 1)$  имеем ([1], стр. 438)

$$\int_0^{+\infty} |E_p(e^{t\alpha} x^{1/p}; \mu + 1) x^{\mu-1/2} dx| < C, \quad \frac{\pi}{2p} \leq |\alpha| < \pi$$

или, что то же самое

$$\int_0^{+\infty} |E_p(e^{t\alpha} x; \mu + 1)|^2 x^{\mu} dx \leq C, \quad \frac{\pi}{2p} \leq |\alpha| \leq \pi \quad (6)$$

( $C$  не зависит от  $z$ ).

Далее, как следует из (2) при  $|t| \rightarrow +\infty$ ,  $t \in L_p$

$$E_p(t; \mu + 1) = o(1).$$

Введем в рассмотрение функцию

$$s_\delta(z) = E_p(\delta z; \mu + 1) \Gamma(\mu + 1).$$

Из асимптотических свойств функции типа Миттаг-Леффлера следует, что  $s_\delta(z) \in B_{\delta p}^*(L_p)$ , а из (6) следует, что

$$s_\delta(z) \in A_{\delta p}^{(p)}\left(\omega; \pm \frac{\pi}{2p}\right). \quad (7)$$

Легко проверяется, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} s_\delta(z) = 1, \quad (8)$$

причем равномерно в любом круге  $|z| < R$ .

Рассмотрим функцию

$$F_\delta(z) = F(z) s_\delta(z). \quad (9)$$

Имеем

$$F(z) - F_\delta(z) = F(z) [1 - s_\delta(z)]. \quad (10)$$

Из (8), (10) учитывая, что  $F(z)$  и  $s_\delta(z)$  ограничены на  $L_p$ :

$$|s_\delta(t)| \leq C_1, \quad |F(t)| \leq C_2, \quad t \in L_p,$$

причем  $C_1$  не зависит от  $\delta$ , получим

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|F(t) - F_\delta(t)\| = 0.$$

Следовательно, можем написать, что

$$\|F(t) - F_\delta(t)\| < \varepsilon, \quad 0 < \delta < \delta_\varepsilon. \quad (11)$$

Так как по лемме  $3 F \in B_{\sigma-\sigma_0+\delta^p}^*(L_p)$ , то из (7) и (9) будем иметь

$$F_\delta(z) \in A_{\sigma-\sigma_0+\delta^p}^{(p)}\left(\omega; \pm \frac{\pi}{2p}\right).$$

В дальнейшем будем предполагать, что  $\delta^p \leq \delta_0$  и  $\delta < \delta_1$ , так что

$$F_\delta(z) \in A_\sigma^{(p)}\left(\omega; \pm \frac{\pi}{2p}\right)$$

и имеет место неравенство (11).

По теореме М. М. Джрбашяна  $F_\delta(z)$  допускает представление

$$F_\delta(z) = \int_0^\sigma E_p(z\tau^{1/p}; \mu) \gamma_\delta(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau,$$

где

$$\gamma_\delta(\tau) \in L_2(0, \delta), \quad \mu = \frac{1}{2p} (1 + \omega + p).$$

Пусть  $N > 0$  — произвольное число. Подберем непрерывную функцию  $\gamma_{\delta, N}(\tau)$  такую, чтобы при  $|t| \leq N$ ,  $t \in L_p$

$$\left| \int_0^\sigma E_p(t\tau^{1/p}; \mu) \gamma_\delta(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau - \int_0^\sigma E_p(t\tau^{1/p}; \mu) \gamma_{\delta, N}(\tau) d\tau \right| < \varepsilon \quad (12)$$

и чтобы

$$\int_0^\sigma |\gamma_{\delta, N}(\tau)| d\tau \leq 2 \int_0^\sigma |\gamma_\delta(\tau)| \tau^{\mu-1} d\tau. \quad (12')$$

Выберем точки  $\tau_k$  таким образом, чтобы

$$\left| \int_0^\sigma E_p(t\tau^{1/p}; \mu) \gamma_{\delta, N}(\tau) d\tau - \sum \gamma_{\delta, N}(\tau_k) E_p(t\tau_k^{1/p}; \mu) \right| < \varepsilon \quad (13)$$

при  $|t| \leq N$ ,  $t \in L_p$  и чтобы

$$\sum |\gamma_{\delta, N}(\tau_k)| \Delta\tau_k \leq 2 \int_0^\sigma |\gamma_{\delta, N}(\tau)| d\tau. \quad (14)$$

Участвующую в неравенстве (13) сумму обозначим так:

$$\sum \gamma_{\delta, N}(\tau_k) \Delta\tau_k E_p(t\tau_k^{1/p}; \mu) = \sum c_{k, N} E_p(t\tau_k^{1/p}; \mu)$$

и оценим норму

$$|F_\delta(t) - \sum_{0 < \tau_k < \sigma} c_{k, N} E_p(t\tau_k^{1/p}; \mu)|.$$

Из (12) и (13) имеем

$$|F_\delta(t) - \sum c_{k, N} E_p(t\tau_k^{1/p}; \mu)| < 2\varepsilon, \quad t \in L_p, \quad |t| \leq N.$$



Далее для  $t \in L_p$ ,  $|t| \geq N$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi(t)} \left| \sum c_{k,N} E_p(t\tau_k^{1/p}; \mu) \right| &= \frac{1}{\varphi(t)} \left| \sum \gamma_{\delta,N}(\tau_k) \Delta\tau_k E_p(t\tau_k^{1/p}; \mu) \right| \leq \\ &\leq \sup_{|t| > N, 0 < \tau_k < \sigma} \frac{|E_p(t\tau_k^{1/p}; \mu)|}{|t|^{p(1-\mu)}} \cdot \sup_{|t| > N} \frac{|t|^{p(1-\mu)}}{\varphi(t)} \cdot \sum |\gamma_{\delta,N}(\tau_k)| \Delta\tau_k \leq \\ &\leq c_1 \cdot o(1) \cdot 2 \int_0^\sigma |\gamma_{\delta,N}(\tau)| d\tau \leq 4 c_1 \cdot o(1) \int_0^\sigma |\gamma_\delta(\tau)| \tau^{\mu-1} d\tau, \end{aligned}$$

где  $c_1 = \sup_{t \in L_p, |t| > 1} \frac{E_p(t; \mu)}{|t|^{p(1-\mu)}}$ , а  $o(1)$  означает величину, стремящуюся к нулю при  $N \rightarrow +\infty$ . Здесь нами использованы неравенства (14), (12'), условие (1) на весовую функцию  $\varphi(t)$  и асимптотика (2).

Оценим теперь последний интеграл. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\sigma |\gamma_\delta(\tau)| \tau^{\mu-1} d\tau &\leq \left( \int_0^\sigma |\gamma_\delta(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \cdot \left( \int_0^\sigma \tau^{2\mu-2} d\tau \right)^{1/2} = \\ &= \left( \int_0^\sigma |\gamma_\delta(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \cdot \frac{\sigma^{\mu-1/2}}{\sqrt{2\mu-1}}. \end{aligned}$$

Из общей теории интегральных преобразований с ядрами Миттаг-Леффлера ([1], стр. 238), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\sigma |\gamma_\delta(\tau)|^2 d\tau &\leq \frac{1}{\rho} \int_0^{+\infty} [|F_\delta(re^{-i\frac{\pi}{2p}})|^2 + |F_\delta(re^{i\frac{\pi}{2p}})|^2] r^\mu dr = \\ &= \frac{1}{\rho} \int_0^{+\infty} [|F(re^{i\frac{\pi}{2p}})|^2 |s_\delta(re^{i\frac{\pi}{2p}})|^2 + |F(re^{-i\frac{\pi}{2p}})|^2 |s_\delta(re^{-i\frac{\pi}{2p}})|^2] r^\mu dr \leq \\ &\leq \frac{1}{\rho} \sup_{t \in L_p} |F(t)|^2 \cdot \int_{L_p} |s_\delta(t)|^2 |t|^\mu |dt|. \end{aligned}$$

Таким образом, для  $t \in L_p$  и  $|t| > N$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi(t)} \left| \sum c_{k,N} E_p(t\tau_k^{1/p}; \mu) \right| &\leq o(1) \cdot 4c_1 \cdot \frac{\sigma^{\mu-1/2}}{\sqrt{2\mu-1}} \cdot \\ \frac{1}{V_\rho} \sup_{t \in L_p} |F(t)| \cdot \left( \int_{L_p} |s_\delta(t)|^2 |t|^\mu |dt| \right)^{1/2} &= o(1) \cdot C(\delta). \end{aligned} \quad (15)$$

Функция  $F_\delta(t)$  ограничена на  $L_p$ . Пусть  $|F_\delta(t)| \leq K$ ,  $t \in L_p$ , тогда

$$\sup_{|t| > N, t \in L_p} \frac{|F_\delta(t)|}{\varphi(t)} = o(1). \quad (16)$$

Если число  $\delta > 0$  зафиксировано так, что  $\delta \leq \min(\delta_1, \delta_0^{1/p})$ , то будет выполняться неравенство (11). Выберем  $N > 1$  настолько большим, чтобы величина  $o(1) < \varepsilon$  и  $o(1) \cdot C(\delta) < \varepsilon$ . Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}
& \|F_\delta(t) - \sum_{0 < \tau_k \leq \sigma} c_{k,N} E_p(t\tau_k^{-1/p}; \mu)\| = \\
& = \sup_{t \in L_p} \frac{1}{\varphi(t)} \|F_\delta(t) - \sum c_{k,N} E_p(t\tau_k^{-1/p}; \mu)\| \leq \\
& < \sup_{t \in L_p, |t| < N} \|F_\delta(t) - \sum c_{k,N} E_p(t\tau_k^{-1/p}; \mu)\| + \sup_{|t| > N, t \in L_p} \frac{|F_\delta(t)|}{\varphi(t)} + \\
& + \sup_{t \in L_p, |t| < N} \frac{1}{\varphi(t)} \|\sum c_{k,N} E_p(t\tau_k^{-1/p}; \mu)\| < 2\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon. \quad (17)
\end{aligned}$$

Из неравенств (17), (11) и леммы 3

$$\|f(t) - \sum c_{k,N} E_p(t\tau_k^{-1/p}; \mu)\| < 6\varepsilon.$$

Лемма 2 доказана.

Эта лемма сводит интересующий нас вопрос о полноте системы  $\{E_p(ut; \mu) \mid 0 \leq u \leq \sigma \text{ в } C_\varphi(L_p)\}$  к вопросу полноты множества  $B_\sigma^*(L_p)$  в  $C_\varphi(L_p)$ . Но это множество уже обладает свойством (Б). Поэтому, если обозначим через  $\mathfrak{M}$  множество целых функций  $f(t)$  порядка  $p$  и типа  $\leq \sigma$  таких, что  $f(t)(t-1)^{-1}$  ограничена в  $\Delta^*(p)$  и  $\|f(t)(t-1)^{-1}\| \leq 1$  и положим  $\psi(z) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} |f(z)|$ , то будут справедливы следующие

теоремы.

**Теорема 1.** Для того, чтобы замыкание множества  $B_\sigma^*(L_p)$  совпадало со всем пространством  $C_\varphi(L_p)$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\psi(z) \equiv +\infty, z \in L_\sigma.$$

**Теорема 2.**

$$\overline{B_\sigma^*(L_p)} = C_\varphi(L_p) \Leftrightarrow \int_{L_p} \ln \psi(t) (1 + |t|^{1+p})^{-1} |dt| = +\infty.$$

Отметим, что замыкание системы  $E_p(ut; \mu)$ ,  $u \in [0, +\infty[$  исследовано в работе [10], при равномерной метрике с весом  $\varphi^{-1}(t) dt$  и в работе [11] при интегральной метрике с весом  $d\sigma(t)$

Физико-технический институт  
низких температур АН УССР,  
Армянский педагогический  
институт им. Х. Абовяна

Поступила 25. XII. 1987

Р. ՅԱ. ԼԵՎԻՆ, Ի. Օ. ԽԱՇԱՏՐՅԱՆ. Միասագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների համակարգի փակույթի մասին կոմպլեքս տիրույթում կշռային հավասարաչափ մոտարկման դեպքում (ամփոփում)

Աշխատանքում դիտարկվում է հետևյալ խնդիրը.

Ինչ պայմանների առկայության դեպքում կոմպլեքս հարթության սկզբնական տիրույթում երկու հառաքյալների սխտեմի  $L_p \left\{ t: \arg t = \pm \frac{\pi}{2p}, p > 1 \right\}$  վրա որոշված անընդհատ ֆունկցիաների կշռային  $C_\varphi(L_p)$  տարածության մեջ Միասագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների  $\{E_p(ut; \mu)\}$ ,  $0 < u \leq \sigma$  սխտեմը կլինի լրիվ.



B. YA. LEVIN, I. O. KHACHATRIAN. *On the closure of systems of Mittag—Leffler type functions by weighted uniform approximation in the complex domain* (summary)

The following problem is considered in this paper: under what conditions the system  $\{E_p(ut; \mu)\}$ ,  $0 < u \leq a$  of Mittag—Leffler type functions is full in the weighted space of functions, continuous on the pair of spays  $L_p = \left\{t: \arg t = \pm \frac{\pi}{2p}, p > 1\right\}$  starting from the origin.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966.
2. M. E. J. Akutowicz. Sur l'approximation par certaines fonctions entieres, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 3. ser. 77, 1960, 281—301.
3. N. Levinson, H. P. McKean. Weighted trigonometrical approximation on  $R'$  with application to the germ field of a stationary gaussian noise, Acta Math., 112, № 1—2, 1964, 99—143.
4. Ю. И. Любарский. Об аппроксимации целых функций экспоненциального типа тригонометрическими полиномами, Матем. физика и функц. анализ, 3, 1972, 56—67.
5. Н. И. Ахиезер, С. Н. Бернштейн. Обобщение теоремы о весовых функциях и применение к проблеме моментов, ДАН СССР, 92, № 6, 1953, 1109—1112.
6. Н. И. Ахиезер. О взвешенном приближении непрерывных функций многочленами на всей числовой оси, УМН, XI, вып. 4 (70), 1956, 3—43.
7. С. Н. Мергелян. О весовых приближениях многочленами, ДАН СССР, 97, № 4, 1954, 597—600.
8. С. Н. Мергелян. Несколько замечаний по поводу аппроксимационной задачи С. Н. Бернштейна, ДАН АрмССР, 20, № 4, 1955, 113—119.
9. С. Н. Мергелян. Весовые приближения многочленами, УМН, XI, вып. 5 (71), 1956, 107—152.
10. И. О. Хачатрян. О замыкании семейств функций типа Миттаг-Леффлера при взвешенно равномерном приближении в комплексной области, Изв. АН АрмССР, Математика, X, № 4, 1975, 373—384.
11. M. M. Djrbashian and N. V. Grigorian. A new generalisation of the classical Theoreme of G. Szegő, Math. Nachr. 138, 1988, 239—254.

УДК 517. 948. 32

Н. К. КАРАПЕТЯՆԸ

## ОПЕРАТОРЫ СВЕРТКИ В ЛИПШИЦЕВЫХ КЛАССАХ

В настоящей работе исследуются операторы свертки в классах функций, липшицевых порядка  $\mu \in (0, 1]$  в  $L_p$ -норме,  $1 \leq p \leq \infty$ , причем рассматривается как случай локальной на  $R^n$  (класс  $H_{\mu, p}(R^n)$ ), так и глобальной на  $\dot{R}^n$  (класс  $H_{\mu, p}(\dot{R}^n)$ ) липшицевости, где  $\dot{R}^n$ -пополнение  $R^n$  бесконечно удаленной точкой (по поводу пространств  $H_{\mu, p}(R^n)$  см., например, [1] — [2]). Основное внимание уделяется случаю  $p < \infty$ . В п<sup>о</sup>1 приводятся различные свойства рассматриваемых пространств (вложение, пополнение  $H_{\mu, p}(\dot{R}^n)$  по метрике  $H_{\nu, p}(R^n)$  и др.). В частности, компактность вложения  $H_{\mu, p}(\dot{R}^n) \subset H_{\nu, p}(\dot{R}^n)$ ,  $\nu < \mu$ , имеющая место при  $p = \infty$ , в случае  $p < \infty$  получается выделением (см. определение 1) некоторого подкласса  $H_{\nu, p}^0(\dot{R}^n)$  функций, сдвиги которых  $\tau_h \varphi = \varphi(x - h)$  стремятся к нулю почти всюду при  $h \rightarrow \infty$ . Этот подкласс играет важную роль и в дальнейшем. В п<sup>о</sup>2 приводятся результаты о плотности  $C^\infty(R^n)$  и  $C_0^\infty(R^n)$  в некоторых подпространствах функций из  $H_{\mu, p}(R^n)$  и  $H_{\mu, p}(\dot{R}^n)$ . В п<sup>о</sup>3 рассмотрен вопрос о компактности в рассматриваемых классах операторов вида  $T_a \varphi = a(x) K \varphi$ ,  $K \varphi = k * \varphi$ , и получены достаточные для этого условия на  $a(x)$  и  $k(x)$ . Условия на  $k(x)$  — это обычные условия ограниченности оператора свертки  $K$ , а условия на  $a(x)$ , помимо того, чтобы обеспечить ограниченность оператора  $T_a$ , связаны еще и с характером убывания  $a(x)$  на  $\infty$ . В частности для пространств  $H_{\mu, p}(R^n)$  достаточно, чтобы  $a(\infty) = 0$ , а для пространств  $H_{\mu, p}(\dot{R}^n)$  — чтобы  $a(x) = O(|x|^{-\mu-\varepsilon})$ ,  $x \rightarrow \infty$ , с каким либо  $\varepsilon > 0$  (ср. с [3], где  $p = \infty$ ,  $\mu = 1$ ). Отметим, что условие типа убывания  $a(x)$  на  $\infty$  необходимо, поскольку 8) среди операторов, инвариантных относительно сдвига и ограниченных в  $H_{\mu, p}(R^n)$ ,  $p < \infty$ , нет компактных (нулевых) операторов. Наконец, в п<sup>о</sup>4 рассмотрен случай операторов свертки на полные (по сравнению со случаем оси) условия, связанные с наличием граничной точки (в случае  $p = \infty$ , см. [3] — [4]). Здесь приведены также необходимые и достаточные условия продолжимости функций из  $H_{\mu, p}(\dot{R}_+^1)$  нулем до функций из  $H_{\mu, p}(\dot{R}^1)$ .



Используются следующие обозначения:  $x$  — точка в  $R^n$ ;  $x^* = x|x|^{-2}$  — инверсия;  $(\tau_h \varphi)(x) = \varphi(x - h)$  — оператор сдвига на вектор  $h \in R^n$ ;  $(\Delta_h \varphi)(x) = (\tau_h - I)\varphi = \varphi(x + h) - \varphi(x)$ ;  $p' = p(p - 1)^{-1}$ ;  $\|\cdot\|_p$  — норма в  $L_p(R^n)$ ;  $\|\cdot\|_{\mu, p}$  ( $\|\cdot\|_{\mu, p}^0$ ) — норма в  $H_{\mu, p}(R^n)$  (в  $H_{\mu, p}^0(R^n)$ ),  $v(x, h) = b^\mu(x, h)$ ,  $b(x, h) = |h|^{-1}(1 + |x|)(1 + |x + h|)$ ;  $L_p(R^n) = \{f : (1 + |x|)f(x) \in L_p(R^n)\}$ ,  $\nu$  — вещественное число.

1°. Вспомогательные сведения. Пусть  $H_{\mu, p}(R^n)$ ,  $0 < \mu \leq 1$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , обозначает пространство функций  $\varphi(x) \in L_p(R^n)$ , липшицевых в  $L_p$ -норме, для которых  $\|\varphi\|_{\mu, p} = \|\varphi\|_p = \|\tau\|_{\mu, p}^0 < \infty$ , где  $\|\tau\|_{\mu, p}^0 = \sup_{|h| > 0} \|(\Delta_h \varphi)(x) |h|^{-\mu}\|_p$ . Через  $\dot{H}_{\mu, p}(R^n)$  обозначаем аналогичный класс функций с нормой  $\|\varphi\|_{\mu, p} = \|\varphi\|_p + \|\varphi\|_{\mu, p}^0$ , где

$$\|\varphi\|_{\mu, p}^0 = \sup_{|h| > 0} \|(\Delta_h \varphi)(x) v(x, h)\|_p \quad (1)$$

и  $v(x, h) = |h|^{-\mu}(1 + |x|)^\mu(1 + |x + h|)^\mu$ . При  $p = \infty$  мы будем для удобства считать, что  $\varphi(x) \in C(\dot{R}^n)$  и соответствующие классы  $H_{\mu, \infty}(R^n)$ ,  $\dot{H}_{\mu, \infty}(R^n)$  обозначать просто  $H_\mu(R^n)$ ,  $\dot{H}_\mu(R^n)$ . Заметим, что пространство  $H_\mu(\dot{R}^n)$  отличается от  $H_\mu(R^n)$  тем, что входящие в него функции глобально гёльдеровы, т. е. гёльдеровы в любом шаре  $f(x)$  и  $f(x^*)$ . Последнее означает, что  $|f(x^*) - f(x + h^*)| \leq c|h|^\mu$  или, что то же,  $|\Delta_h f(x)| \leq c|x^* - (x + h)^*|$ . Это условие глобальной гёльдеровости может быть записано [5] с помощью (1), если учесть, что при больших  $|x|$ ,  $|x + h|$

$$\frac{1}{3} b(x, h) \leq |x^* - (x + h)^*|^{-1} \leq C_1 b(x, h) \quad (2)$$

(левое неравенство имеет место [5] для всех  $x, h \in R^n$ ).

Через  $h_{\mu, p}(R^n)$ ,  $h_{\mu, p}(\dot{R}^n)$  будем обозначать подпространства функций из  $H_{\mu, p}(R^n)$ ,  $\dot{H}_{\mu, p}(R^n)$ , соответственно, для которых

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{|h| < \delta} \|(\Delta_h \varphi)(x) |h|^{-\mu}\|_p = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{|h| < \delta} \|(\Delta_h \varphi)(x) v(x, h)\|_p = 0. \quad (3)$$

Ясно, что  $H_{\mu, p}(\dot{R}^n) \subset H_{\mu, p}(R^n)$ ,  $h_{\mu, p}(\dot{R}^n) \subset h_{\mu, p}(R^n)$  и

$$h_{\nu, p}(R^n) \subset \dot{H}_{\nu, p}(R^n) \subset h_{\nu, p}(\dot{R}^n), \quad 0 < \nu < \mu \leq 1, \quad (4)$$

$$h_{\nu, p}(\dot{R}^n) \subset \dot{H}_{\nu, p}(\dot{R}^n) \subset h_{\nu, p}(\dot{R}^n), \quad 0 < \nu < \mu \leq 1, \quad (5)$$

причем, в отличие от (4), правое вложение в (5) компактно при  $p = \infty$ . При  $p < \infty$  компактность этого вложения удастся получить в несколько более слабой форме.

Определение 1. Через  $H_{\mu, p}^0(\dot{R}^n)$ ,  $h_{\mu, p}^0(\dot{R}^n)$  обозначим подпространство функций из  $H_{\mu, p}(\dot{R}^n)$ ,  $h_{\mu, p}(\dot{R}^n)$ , сдвиги которых сходятся к нулю почти всюду:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} (\tau_h \varphi)(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} \varphi(x - h) = 0 \text{ для п. в. } x \in R^n. \quad (6)$$

Непосредственно из определения 1 выводится, что функции из  $H_{\mu, p}^0(\dot{R}^n)$  „убывают“ достаточно быстро на бесконечности:

$$h_{\mu, p}^0(\dot{R}^n) \subset H_{\mu, p}^0(\dot{R}^n) \subset L_p^\mu(R^n), \quad 1 \leq p < \infty.$$

Действительно, если  $\varphi(x) \in H_{\mu, p}^0(\dot{R}^n)$ , то для  $\varphi(x)$  конечна величина  $\|\varphi\|_{\mu, p}^0$  в (1). Поскольку  $v(x, h) \rightarrow (1 + |x|)^\mu$  для любого  $x$ , то  $(\Delta_h \varphi)(x) v(x, h) \rightarrow (1 + |x|)^\mu \varphi(x)$  почти всюду в силу (6) и остается в (1) перейти к пределу по теореме Фату, что дает  $(1 + |x|)^\mu \varphi(x) \in L_p(R^n)$ . Отметим, что при  $p = \infty$  функции из  $H_\mu(\dot{R}^n)$  после выделения константы автоматически удовлетворяют условию (6), так что  $H_\mu(\dot{R}^n) \subset L_\infty^\mu(R^n)$ .

Нам понадобится следующая

Лемма 1. Если  $\Omega = \{\varphi\}$  — ограниченное множество в  $H_{\mu, p}^0(\dot{R}^n)$ , то  $\Omega$  компактно в  $L_p^{\mu-\varepsilon}(R^n)$ ,  $0 < \varepsilon \leq \mu$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

Доказательство. Пусть  $\rho(x) = (1 + |x|)^{\mu-\varepsilon}$ . Проверим, что множество  $\Omega_\rho = \rho\Omega = \{\rho\varphi\}$ ,  $\varphi \in \Omega$ , удовлетворяет всем условиям критерия Рисса (см., например, [6]) в  $L_p(R^n)$ : 1)  $\|\rho\varphi\|_p < \infty$ ; 2)  $\int_{|x| > N} |\rho\varphi|^p dx \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$ ; 3)  $\|\Delta_h(\rho\varphi)\|_p \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$ ; причем условия 1)–3) выполнены равномерно по  $\varphi \in \Omega$ . Первое из этих условий, есть следствие описанного перехода по теореме Фату в (1), что дает  $\|(1 + |x|)^\mu \varphi(x)\|_p \leq \|\varphi\|_{\mu, p}^0 < \gamma$  и, следовательно, справедливо включая  $\varepsilon = 0$ . Отсюда же следует, что

$$\left( \int_{|x| > N} |\rho(x) \varphi(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{1}{(1+N)^\varepsilon} \|(1 + |x|)^\mu \varphi\|_p \leq \frac{\gamma}{(1+N)^\varepsilon},$$

что дает выполнимость 2). Наконец

$$|\Delta_h(\rho\varphi)| \leq |h|^{\mu-\varepsilon} |\varphi(x)| + |h|^\mu |(\Delta_h \varphi)(x)| v(x, h).$$

Поэтому при  $|h| < \delta$

$$\|\Delta_h(\rho\varphi)\|_p \leq \delta^{\mu-\varepsilon} \|\varphi\|_{\mu, p} \leq \gamma \delta^{\mu-\varepsilon} \rightarrow 0$$

при  $\delta \rightarrow 0$ . Лемма доказана.

Лемма 2. Вложение

$$H_{\mu, p}^0(\dot{R}^n) \subset h_{\nu, p}^0(R^n), \quad 0 < \nu < \mu \leq 1$$

компактно,  $1 \leq p < \infty$ .



**Доказательство.** Пусть  $\Omega = \{\varphi\}$  ограничено в  $H_{\mu, p}^0(\dot{R}^n)$ . Тогда, согласно лемме 1,  $\Omega$  компактно в  $L_p(R^n)$ . Пусть  $\{\varphi_N\} \in \Omega$  сходится в  $L_p(R^n)$ . Учитывая, что  $b(x, h) = |h|^{-1} (1 + |x|)(1 + |x + h|) > 1$  для всех  $x, h \in R^n$ , имеем

$$\|\varphi_N - \varphi_M\|_{\mu, p}^0 = \sup_{|h| > 0} \left[ \left( \int_{b(x, h) > \delta^{-1}} + \int_{b(x, h) < \delta^{-1}} \right) \cdot dx \right]^{1/p} \leq \\ \leq \delta^{\mu - \nu} \|\varphi_N - \varphi_M\|_{\mu, p}^0 + 2\delta^{-\nu} \|\varphi_N - \varphi_M\|_p$$

и малость первого слагаемого в правой части получается за счет выбора  $\delta$  и ограниченности  $\Omega$ , а уже при фиксированном  $\delta$  используется сходимость  $\varphi_N(x)$  в  $L_p(R^n)$ . Лемма доказана.

**Лемма 3.** Пусть  $\{\varphi\} = \Omega$  — ограниченное множество в  $H_{\mu, p}^0(R^n)$  (или в  $H_{\mu, p}(R^n)$ ) и  $\omega(x) \in C_0^\infty(R^n)$ . Тогда  $\Omega_\omega = \{\omega\varphi\}$  — ограниченное множество в  $H_{\mu, p}^0(\dot{R}^n)$  (в  $H_{\mu, p}(\dot{R}^n)$ ). Если, кроме того,  $\{\varphi\} \in H_{\mu, p}^0(R^n)$  (или  $H_{\mu, p}(R^n)$ ), то оно будет ограниченным и в  $H_{\mu, p}^0(\dot{R}^n)$  (в  $H_{\mu, p}(\dot{R}^n)$ ),  $0 < \mu \leq 1$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что  $\tau_h(\omega\varphi) = \omega(x+h)\varphi(x+h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow \infty$  для почти всех  $x$ . Далее  $\|\Delta_h(\omega\varphi)\|_p \leq c \|\Delta_h \varphi\|_p + \|\varphi\|_p \sup_x |(\Delta_h \omega)(x)| \leq c_1 |h|^\mu$ , откуда следует, что  $\omega\varphi \in H_{\mu, p}^0(R^n)$ .

Это означает, что можно с самого начала считать, что  $\{\varphi\}$  — ограниченное множество в  $H_{\mu, p}^0(R^n)$  и  $\text{supp } \varphi \subset \mathbb{W}_R$ , где  $\mathbb{W}_R$  — шар радиуса  $R$ , так что  $\varphi(x) = 0$  на его границе. Далее имеем

$$\|\Delta_h \varphi\|_p(x) v(x, h) \leq \sum_{j=1}^3 J_j = \\ = \left( \int_{\substack{x \in \mathbb{W}_R \\ x+h \in \mathbb{W}_R}} \cdot dx \right)^{1/p} + \left( \int_{\substack{x \in \mathbb{W}_R \\ x+h \in \mathbb{W}_R}} \cdot dx \right)^{1/p} + \left( \int_{\substack{x \in \mathbb{W}_R \\ x+h \in \mathbb{W}_R}} \cdot dx \right)^{1/p}.$$

Очевидно, если  $x, x+h \in \mathbb{W}_R$ , то  $v(x, h) \leq (1+R)^{2\mu} \cdot |h|^{-\mu}$ , так что  $J_1 \leq c \|\varphi\|_{\mu, p}^0$ . Для  $x \in \mathbb{W}_R$ ,  $x+h \notin \mathbb{W}_R$  имеем  $v(x, h) \leq 2^\mu (1+R)^{2\mu} |h|^{-\mu}$ , если  $|h| < 1$  и  $v(x, h) \leq 2^\mu (1+R)^{2\mu}$ , если  $|h| > 1$ . Поэтому  $J_2 \leq c \|\varphi\|_{\mu, p}$  и аналогично оценивается  $J_3$ .

**Лемма 4.** Замыкание  $H_{\mu, p}(\dot{R}^n)$  в метрике  $H_{\mu, p}(R^n)$  совпадает с подпространством функций из  $H_{\mu, p}(R^n)$ , для которых

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{|h| > 0} \left( \int_{|x| > N} |h|^{-\mu} (\Delta_h \varphi)(x)^p dx \right)^{1/p} = 0, \quad (7)$$

$0 < \mu \leq 1$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Замыкание  $H_{\mu, p}(\dot{R}^n)$  в метрике  $H_{\mu, p}(R^n)$  совпадает с подпространством функций из  $H_{\mu, p}(R^n)$ ,  $0 < \mu \leq 1$ , удовлетворяющих (7) при  $p = \infty$ .

Доказательство. Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение. Пусть  $\omega(x) \in C_0^\infty(R^n)$  и  $\omega(x) = 1$  при  $|x| < 1$ ,  $\omega(x) = 0$  при  $|x| > 3$  и  $0 \leq \omega(x) \leq 1$ ,  $|(D^\alpha \omega)(x)| \leq K_\alpha$ . Пусть далее  $\omega_N(x) = \omega(xN^{-1})$ , так что  $\omega_N(x) = 1$  при  $|x| < N$  и  $\omega(x) = 0$  при  $|x| > 3N$  и, кроме того

$$|(\Delta_h \omega_N)(x)| \leq \frac{k_1 n}{N} |h| \quad (8)$$

(на самом деле эту оценку можно уточнить, заметив, что левая часть в (8) равна нулю, если  $x, x+h \in \Pi_N$  или  $x, x+h \in \Pi_{3N}$ . Кроме того, справедлива глобальная оценка по  $N$  вида

$$\sup_{|h|>0} \sup_{x \in R^n} \frac{|(\Delta_h \omega_N)(x)|}{|h|^\mu} \leq \frac{c}{N^\mu}. \quad (9)$$

Для доказательства (9) замечаем, что

$$A_1 = \sup_{|h|>N} \sup_x \frac{|(\Delta_h \omega_N)(x)|}{|h|^\mu} \leq \frac{2}{N^\mu},$$

и, с использованием (8), находим

$$A_2 = \sup_{|h|<N} \sup_x \frac{|(\Delta_h \omega_N)(x)|}{|h|^\mu} \leq \sup_{|h|<N} \frac{k_1 n}{N} |h|^{1-\mu} \leq \frac{k_1 n}{N^\mu}.$$

Объединение оценок для  $A_1, A_2$  дает (9).

Переходим к непосредственному доказательству леммы. Пусть  $\varphi(x) \in H_{\mu,p}(R^n)$ ,  $0 < \mu \leq 1$ ,  $1 \leq p < \infty$ , и  $\varphi_N(x) = \omega_N(x) \varphi(x) \in H_{\mu,p}(R^n)$  согласно лемме 3. Ясно, что  $\|\varphi - \varphi_N\|_p \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$ . Поскольку

$$\Delta_h(\varphi - \varphi_N) = \bar{\omega}_N(x)(\Delta_h \varphi)(x) + \varphi(x+h)(\Delta_h \omega_N)(x),$$

где  $\bar{\omega}_N(x) = 1 - \omega_N(x)$ , то, с учетом (9) имеем

$$\begin{aligned} \sup_{|h|>0} \| |h|^{-\mu} \Delta_h(\varphi - \varphi_N) \|_p &\leq \|\varphi\|_p \sup_{|h|>0} \sup_x \frac{|(\Delta_h \omega_N)(x)|}{|h|^\mu} + \\ &+ \sup_{|h|>0} \left( \int_{|x|>N} |h|^{-\mu} |\Delta_h \varphi(x)|^p dx \right)^{1/p} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Аналогично рассматривается случай  $p = \infty$ . Лемма доказана.

2°. Плотные множества в  $H_{\mu,p}(R^n)$ ,  $H_{\mu,p}(\dot{R}^n)$ . Пусть  $K$  означает оператор свертки  $K\varphi = k * \varphi$ . Хорошо известно, что если  $k \in L_1(R^n)$ , то  $K$  ограничен в  $L_p(R^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Учитывая инвариантность  $K$  относительно сдвига имеем  $\|\Delta_h K\varphi\|_p = \|K\Delta_h \varphi\|_p \leq \|k\|_1 \|\Delta_h \varphi\|_p$ , что приводит к следующим утверждениям.

Лемма 5. Если  $k(t) \in L_1(R^n)$ , то оператор  $K$  ограничен в  $H_{\mu,p}(R^n)$  (и в  $H_{\mu,p}(\dot{R}^n)$ ),  $0 < \mu \leq 1$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .



Лемма 6. Если  $k(t) \in L_1^{2\mu}(R^n)$ , то оператор  $K$  ограничен в  $H_{\mu,p}(\dot{R}^n)$  (и в  $h_{\mu,p}(\dot{R}^n)$ ),  $0 < \mu \leq 1$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

Доказательство леммы 6, по сравнению с леммой 5, дополнительно использует неравенство  $v(x, h) \leq (1 + |t|)^{2\mu} v(x - t, h)$ .

Лемма 7. Множество  $C^\infty(R^n)$  плотно в  $h_{\mu,p}(R^n)$  и в  $h_{\mu,p}(\dot{R}^n)$ ,  $0 < \mu \leq 1$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

Доказательство основано на известной технике усреднений. Пусть  $h(t) \in C_0^\infty(R^n)$ ,  $h_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-n} k\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$  — усредняющее ядро, причем  $\int k(t) dt = 1$ , и пусть  $\varphi_\varepsilon(x) = (k_\varepsilon * \varphi)(x)$  — усреднение функции  $\varphi(x)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_p &= \left( \int_{R^n} dx \left| \int_{R^n} k_\varepsilon(t) [\varphi(x-t) - \varphi(x)] dt \right|^p \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \|k\|_1 \sup_{|t| < \delta} \|\Delta_{-t} \varphi\|_p + 2 \|\varphi\|_p \int_{|y| > \delta \varepsilon^{-1}} |k(y)| dy. \end{aligned}$$

Выбирая здесь вначале  $\delta$ , с учетом  $\varphi \in h_{\mu,p}(R^n)$  добиваемся малости первого слагаемого. Уже при фиксированном  $\delta$  второе слагаемое стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в силу суммируемости  $k(t)$ , что дает  $\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_p \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Далее нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} |h|^{-\mu} \|\Delta_h(\varphi - \varphi_\varepsilon)\|_p &\leq 2 \|\varphi\|_{p,0}^0 \int_{|y| > \delta \varepsilon^{-1}} k(y) dy + \\ &+ 2 \|k\|_1 \sup_{|h| < \eta} |h|^{-\mu} \|\Delta_h \varphi\|_p + 2 (\delta \eta^{-1})^\mu \|k\|_1 \|\varphi\|_{p,0}^0 \end{aligned}$$

и на сей раз последовательно выбираем  $\eta$  во втором слагаемом и  $\delta$  — в третьем, после чего устремляем  $\varepsilon$  к нулю, что и требовалось. Доказательство в случае  $h_{\mu,p}(\dot{R}^n)$  аналогично, хотя и громоздко.

Оказывается, что в  $h_{\mu,p}(R^n)$  плотно и множество финитных функций (при  $p < \infty$ ). Чтобы привести соответствующую формулировку, охватывающую и случай пространства  $h_{\mu,p}(\dot{R}^n)$ , дадим следующее

Определение 2. Через  $\tilde{h}_{\mu,p}(\dot{R}^n)$  обозначим подпространство функций из  $h_{\mu,p}(\dot{R}^n)$ , для которых  $\varphi(x) \in L_p^{2\mu}(R^n)$ , т. е.  $(1 + |x|)^{2\mu} \varphi(x) \in L_p(R^n)$ .

Теорема 1. Множество  $C_0^\infty(R^n)$  плотно в  $h_{\mu,p}(R^n)$  и в  $\tilde{h}_{\mu,p}(\dot{R}^n)$ ,  $0 < \mu < 1$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

Доказательство. В силу леммы 7 можно считать, что  $\varphi \in C^\infty(R^n) \cap h_{\mu,p}(R^n)$  и пусть  $\omega(x) \in C_0^\infty(R^n)$  — функция из леммы 3. Положим  $\varphi_N(x) = \varphi(x) \omega_N(x) = \varphi(x) \omega(x/N)$ . Ясно, что  $\|\varphi - \varphi_N\|_p \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Оценивая  $J = |h|^{-\mu} \|\Delta_h(\varphi - \varphi_N)\|_p$ , найдем

$$J \leq \sup_{0 < |h| < \delta} |h|^{-\mu} \|\Delta_h \varphi - \varphi_N\|_p + \delta^{-\mu} \sup_{|h| > \delta} \|\Delta_h (\varphi - \varphi_N)\|_p = J_1 + J_2.$$

Оценка  $J_2$  проста:  $J_2 \leq 2\delta^{-\mu} \|\varphi - \varphi_N\|_p \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$ , при фиксированном  $\delta$ .

Оценивая же  $J_1$ , находим

$$J_1 \leq \sup_{0 < |h| < \delta} |h|^{-\mu} \|\Delta_h \varphi\|_p + \sup_{0 < |h| < \delta} |h|^{-\mu} \|(\Delta_h \omega_N)(x)\|_\infty,$$

откуда с использованием (8) получаем

$$J_1 \leq \sup_{0 < |h| < \delta} |h|^{-\mu} \|\Delta_h \varphi\|_p + \frac{c \delta^{1-\mu}}{N} \|\varphi\|_p.$$

Далее выбираем вначале  $\delta$  с учетом  $\varphi \in h_{\mu, p}(R^n)$ , что дает малость первого слагаемого и уже при фиксированном  $\delta$  переходим к пределу при  $N \rightarrow \infty$ .

Переходя ко второй части теоремы, сразу замечаем, что оценка  $\|\varphi - \varphi_N\|_p$  не меняется. Далее имеем

$$J = \|\varphi - \varphi_N\|_{h, p}^0 \leq \leq \sup_{|h| < \delta} \|v(x, h) \Delta_h (\varphi - \varphi_N)\|_p + \sup_{|h| > \delta} \|v(x, h) \Delta_h (\varphi - \varphi_N)\|_p = J_1 + J_2.$$

Очевидно, что

$$J_1 \leq \sup_{|h| < \delta} \|v(x, h) (\Delta_h \varphi)(x)\|_p + \sup_{|h| < \delta} \|\varphi(x) v(x, h) (\Delta_h \omega_N)(x)\|_p.$$

Считая  $\delta < 1$  при  $|h| < \delta$ , найдем

$$\begin{aligned} |v(x, h) (\Delta_h \omega_N)(x)| &\leq \frac{k_1 n (1 + |x|)^\mu (1 + |x + h|)^\mu}{N |h|^\mu} |h| \chi_N(x) \leq \\ &\leq \frac{k_1 n}{N} (1 + |x|)^{2\mu} \delta^{1-\mu} \chi_N(x), \end{aligned}$$

где  $\chi_N(x) = 1$ , если  $N - 1 < |x| < 3N + 1$  и  $\chi_N(x) = 0$  — в остальных случаях. Поэтому

$$\sup_{|h| < \delta} \|\varphi(x) v(x, h) (\Delta_h \omega_N)(x)\|_p \leq \frac{k_1 n}{N} \delta^{1-\mu} \|(1 + |x|)^{2\mu} \varphi(x)\|_p \rightarrow 0$$

при  $\delta \rightarrow 0$ . Следовательно,  $J_1 \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Зафиксируем теперь  $\delta$ . Тогда для  $J_2$  получим

$$J_2 \leq \sup_{|h| > \delta} (\|v(x, h) [\varphi(x + h) - \varphi_N(x + h)]\|_p + \|v(x, h) [\varphi(x) - \varphi_N(x)]\|_p).$$

Учитывая, что  $v(x, h)$  при  $|h| > \delta$  допускает оценку  $v(x, h) \leq (1 + \delta)^{-1} (1 + |x|)^{2\mu}$  для второго слагаемого в правой части неравенства для  $J_2$  получаем оценку

$$(1 + \delta^{-1})^\mu \|(1 + |x|)^{2\mu} [\varphi(x) - \varphi_N(x)]\|_p \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$$

при фиксированном  $\delta$  и аналогично оценивается первое слагаемое.

Заметим, что второе утверждение теоремы 1 верно и при  $p = \infty$ , а для справедливости первого следует также перейти к классу  $\tilde{h}_{\mu, p}(R^n)$ , на сей раз выделяемому условием  $\varphi(\infty) = 0$ .



3°. Полная непрерывность операторов свертки с переменными коэффициентами. Оператор свертки  $K\varphi = k * \varphi$  не может быть вполне непрерывным в пространствах  $H_{\mu, h}(R^n)$  или  $H_{\mu, p}(R^n)$ . Это можно получить из разных соображений. Для пространств  $H_{\mu, p}(R^n)$  имеет место следующая

Лемма 8. Пусть  $K$  — линейный ограниченный в  $H_{\mu, p}(R^n)$ ,  $0 < \mu \leq 1$ ,  $1 \leq p < \infty$ , оператор инвариантный относительно сдвига. Тогда если  $K$  компактен в  $H_{\mu, p}(R^n)$ , то необходимо  $K = 0$ .

Доказательство. Допустим, что  $\varphi(x) \in H_{\mu, p}(R^n)$  такова, что  $(K\varphi)(x) \neq 0$ . Положим  $\varphi_N(x) = \varphi(x + Nh)$ , где  $h$  — фиксированный вектор в  $R^n$ . Тогда  $\{\varphi_N(x)\}$  — ограниченное множество в  $H_{\mu, p}(R^n)$  и можно считать, что  $\|K\varphi_{Nh} - K\varphi_{Mh}\|_{\mu, p} \rightarrow 0$  при  $N, M \rightarrow \infty$ . Но

$$\begin{aligned} \|K\varphi_{Nh} - K\varphi_{Mh}\|_{\mu, p} &\geq \|K\varphi_{Mh} - K\varphi_{Nh}\|_p = \\ &= \|\varphi_{(N-M)h} - K\varphi\|_p \rightarrow 2^{1/p} \|K\|_p, \end{aligned}$$

с учетом теоремы 1 из [7], откуда необходимо  $K\varphi = 0$ . Получили противоречие.

Отметим, что при  $p = \infty$  среди операторов, инвариантных относительно сдвига, возможен ненулевой (одномерный) компактный оператор.

Чтобы добиться компактности оператора свертки обычно его умножают на функцию, исчезающую на бесконечности. Положим

$$T_a\varphi = a(x) K\varphi = a(x) k * \varphi.$$

Теорема 2. Пусть  $k(t) \in L_1^{2p}(R^n)$ ,  $a(x) \in H_{\mu}(R^n)$  ( $a(x) \in h_{\mu}(R^n)$ ).

и

$$B = \sup_{x \in R^n} |a(x)| (1 + |x|)^{\mu+\varepsilon} < \infty$$

для какого-либо  $\varepsilon > 0$ . Тогда  $T_a$  вполне непрерывен в

$$H_{\mu, p}^0(R^n), \quad 0 < \mu \leq 1, \quad 1 \leq p < \infty \quad (\text{и в } h_{\mu, p}^0(R^n)).$$

Доказательство. В силу леммы 6, с учетом плотности  $C_0^\infty(R^n)$  в  $L^{2p}(R^n)$ , можно считать, что  $k(t) \in C_0^\infty(R^n)$ . Согласно лемме 1, если  $\mathcal{Q}$  ограничено в  $H_{\mu, p}^0(R^n)$ , то оно компактно в  $L_{\rho}^{\mu-\varepsilon}(R^n)$  с любым  $0 < \varepsilon \leq \mu$ , и пусть  $\|u_m\|_p = \|\varphi - \varphi_m\|_p \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow \infty$ . Тогда обычная теорема о свертке дает

$$\|T_a u_m\|_p \leq \|a\|_\infty \|k\|_1 \|u_m\|_p \leq \gamma \|u_m\|_p,$$

где  $\rho(x) = (1 + |x|)^{\mu-\varepsilon}$ . Далее

$$\begin{aligned} \Delta_h(T_a u_m) &= a(x+h) \Delta_h(k * u_m) + (k * u_m)(x) (\Delta_h a)(x) = \\ &= \psi_1(x, h) + \psi_2(x, h), \end{aligned}$$

откуда

$$\|\psi(x, h) \psi_2(x, h)\|_p \leq \|a\|_{\mu, p} \|k\|_1 \|u_m\|_p \leq \gamma \|u_m\|_p.$$

Переходим к оценке наиболее сложного слагаемого  $J(h) = \|v(x, h) \psi_1(x, h)\|_p$ . При  $|h| < 1$  имеем

$$\sup_{|h| < 1} J(h) \leq B \|u_m\|_p \sup_{|h| < 1} \left( |h|^{-\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |k(t+h) - k(t)| (1 + |t|)^{n-\varepsilon} dt \right) \leq \gamma \|u_m\|_p.$$

При  $|h| > 1$  будем иметь с помощью неравенства Минковского

$$\sup_{|h| > 1} J(h) \leq \gamma \|u_m\|_p, \text{ где } \gamma = \gamma_1 \gamma_2 \text{ и } \gamma_1 = \|k(y)(1 + |y|)^{n-\varepsilon}\|_1, \text{ а}$$

$$\gamma_2 = \sup_{\substack{x, h \\ |h| > 1}} \frac{|a(x+h)|}{|h|^n} \{(1 + |x|)^n (1 + |x+h|)^n (1 + |x|)^{-\varepsilon} + (1 + |x+h|)^n\}.$$

Объединяя оценки для  $\Delta_h(T_a u_m)$  мы видим, что  $\|\Delta_h(T_h u_m) v(x, h)\|_p \leq \gamma \|u_m\|_p$ , так что  $\|T_a u_m\|_{p, \rho} \leq \gamma \|u_m\|_p$ , что приводит к компактности  $T_a$ . Теорема доказана.

Заметим, что требование на  $\infty$  на  $k(x)$  можно ослабить, увеличив при этом локальную гладкость ядра. А именно, справедлива

**Теорема 3.** Пусть  $k(x) \in H_{\mu, 1}(\mathbb{R}^n)$ ,  $a(x) \in H_\mu(\mathbb{R}^n)$  ( $a(x) \in h_\mu(\mathbb{R}^n)$ ) и  $a(x) = O(|x|^{-\varepsilon})$ ,  $x \rightarrow \infty$ . Тогда оператор  $T_a$  вполне непрерывен в пространстве  $H_{\mu, \rho}^0(\mathbb{R}^n)$ ,  $0 < \mu \leq 1$ ,  $1 \leq p < \infty$  (и в  $h_{\mu, \rho}^0(\mathbb{R}^n)$ ).

В случае пространства  $H_{\mu, \rho}(\mathbb{R}^n)$  получаем следующий результат.

**Теорема 4.** Пусть  $k(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ,  $a(x) \in H_{\mu+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\varepsilon > 0$ , (или  $a(x) \in h_{\mu+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ ) и  $a(\infty) = 0$ . Тогда  $T_a$  вполне непрерывен в  $H_{\mu, \rho}^0(\mathbb{R}^n)$ ,  $0 < \mu < 1$ ,  $1 \leq p < \infty$  (в  $h_{\mu, \rho}^0(\mathbb{R}^n)$ ).

Доказательство основано на следующем утверждении.

**Лемма 9.** Пусть  $k(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$  и  $a(x) \in H_\mu(\mathbb{R}^n)$ , причем  $a(x) = 0$  при  $|x| > M$ . Тогда  $T_a$  вполне непрерывен в  $H_{\mu, \rho}^0(\mathbb{R}^n)$ ,  $0 < \mu < 1$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

Доказательство леммы. В силу леммы 8 можно считать  $k(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , и пусть  $1 = \omega_N(x) + \tilde{\omega}_N(x)$ , где  $\omega_N$  — функция из леммы 4. Тогда  $T_a \varphi = T_a \omega_N \varphi + T_a \tilde{\omega}_N \varphi$ . За счет выбора  $N$  с учетом того что  $\tilde{\omega}_N(x) = 0$  при  $|x| < N$ ,  $a(x) = 0$  при  $|x| > M$  и финитности  $k(x)$  можно добиться чтобы  $T_a \tilde{\omega}_N \varphi \equiv 0$ . Пусть  $\{\varphi\}$  — ограниченное множество в  $H_{\mu, \rho}^0(\mathbb{R}^n)$ . Тогда в силу леммы 3 множество  $\{\omega_N \varphi\}$  ограничено в  $H_{\mu, \rho}^0(\mathbb{R}^n)$  и для оператора  $T_a$  выполнены условия теоремы 2. Следовательно,  $T_a \omega_N \varphi$  компактно в  $H_{\mu, \rho}(\mathbb{R}^n)$  и остается учесть непрерывность вложения  $H_{\mu, \rho}(\mathbb{R}^n)$  в  $H_{\mu, \rho}(\mathbb{R}^n)$ :



$$\|T_{a^{\omega_N} \varphi}\|_{H_{\mu, p}(R^n)} \leq \|T_{a^{\omega_N} \varphi}\|_{H_{\mu, p}(\dot{R}^n)}.$$

Переходим к доказательству теоремы. Имеем  $T_a \varphi = T_{a^{\omega_N}} \varphi + T_{a - a^{\omega_N}} \varphi$ , где  $a^{\omega_N} = 0$  при  $|x| > 3N$  и удовлетворяет условиям леммы.

9. Поэтому  $T_{a^{\omega_N}} \varphi$  вполне непрерывен в  $H_{\mu, p}(R^n)$ ,  $0 < \mu \leq 1$  при любом  $N$ . Далее

$$\begin{aligned} \|T_a \varphi - T_{a^{\omega_N}} \varphi\|_{\mu, p} &= \|T_{a - a^{\omega_N}} \varphi\|_{\mu, p} \leq \\ &\leq \left( \sup_{|x| > N} |a(x)| \right) \|k\|_1 \|\varphi\|_{\mu, p} + \|k\|_1 \|\varphi\|_p \sup_{|h| > 0} \frac{\|\Delta_h(a^{\omega_N})\|_{\infty}}{|h|^{\lambda}}. \end{aligned}$$

Можно показать, что

$$\sup_{|h| > 0} \frac{\|\Delta_h(a^{\omega_N})\|_{\infty}}{|h|^{\lambda}} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

что дает компактность  $T_a$  как предела последовательности вполне непрерывных операторов  $T_{a^{\omega_N}}$ . Переход к случаю  $h_{\mu, p}^0(R^n)$  достаточно прост и следует из неравенств

$$\sup_{|h| < \delta} |h|^{-\mu} \|\Delta_h g\|_p \leq \|T_a \varphi_m - g\|_{\mu, p} + \sup_{|h| < \delta} |h|^{-\mu} \|\Delta_h T_a \varphi_m\|_p,$$

где  $\|g - T_a \varphi_m\|_{\mu, p} \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow \infty$ . Теорема доказана.

Не останавливаясь здесь на формулировке отметим, что можно рассмотреть более общий интегральный оператор вида

$$\int_{R^n} a(x, t) k(x - t) \varphi(t) dt,$$

где  $a(x, t) \in H_{\mu}(R^n \times R^n)$ ,  $k(t) \in L_1^{2\mu}(R^n)$ . В этом случае условие на  $a(x, t)$  на бесконечности задается условием  $\sup_{x, t \in R^n} |a(x, t)| \cdot (1 + |x|)^{\lambda} < \infty$ , где  $\lambda \in [0; \mu + \varepsilon]$ .

4°. Случай полуси. В этом случае пространства  $H_{\mu, p}(R_+^1)$ ,  $H_{\mu, p}(\dot{R}_+^1)$  определяются естественным образом, однако наличие граничной точки  $x=0$  вносит некоторые особенности, хотя свойства из п. 1 сохраняются. Пусть

$$K\varphi = \int_0^{\infty} k(x - t) \varphi(t) dt. \quad (10)$$

Ясно, что в отличие от оператора  $K$ , рассматриваемого в  $R^1$ , оператор  $K$  в  $R_+^1$  не инвариантен относительно сдвига:

$$\Delta_h K\varphi = K\Delta_h \varphi - \int_0^h (\tau_{-h} k)(x - t) \varphi(t) dt, \quad (11)$$

откуда видно, что ограниченность первого слагаемого в правой части (11) в  $H_{\mu, p}(R_+^1)$  (или  $H_{\mu, p}(\dot{R}_+^1)$ ) дается условиями лемм 8, 9. Поэтому ограниченность  $K$  связана с ограниченностью в соответствующем классе второго слагаемого. Для него с использованием неравенства Гельдера имеем

$$\left( \int_0^\infty dx \left| \int_0^h (\tau_{-h} k)(x-t) \varphi(t) dt \right|^p \right)^{1/p} \leq c \|k\|_{L_1(R_+^1)} \|\varphi\|_{L_p(R_+^1)},$$

где

$$c = \sup_{|h|>0} \sup_{x>0} \frac{1}{h^{1/p}} \left( \int_x^{x+h} |k(y)| dy \right)^{1/p}. \quad (12)$$

Лемма 10. Пусть  $k(t) \in L_1(R^1)$  и  $\psi(x) = \int_0^x |k(y)| dy \in H_{\mu, p}(R_+^1)$ .

Тогда оператор  $K$  ограничен в  $H_{\mu, p}(R_+^1)$  (и в  $h_{\mu, p}(R_+^1)$ ),  $0 < \mu \leq 1$ ,  $1 < p < \infty$ .

Лемма 11. Пусть  $k(t) \in L_1^{2\mu}(R^1)$  и  $\psi(x) = \int_0^x |k(y)| dy \in H_{\mu, p}(R_+^1)$ ,

то где оператор  $K$  ограничен в  $H_{\mu, p}(R_+^1)$  (и в  $h_{\mu, p}(R_+^1)$ ),  $0 < \mu \leq 1$ ,  $1 < p < \infty$ .

Приведем простое достаточное условие принадлежности  $\psi(x)$  к  $H_{\mu, p'}(R_+^1)$  (или  $H_{\mu, p'}(\dot{R}_+^1)$ ) при  $\mu, p' < 1$ .

Лемма 12. Пусть  $k(t) \in L_1(R^1)$  и  $k_+(t) \in L_\nu(R_+^1)$  (или  $k(t) \in L_1^{2\mu}(R^1)$  и  $k_+(t) \in L_\nu^{2\mu}(R_+^1)$ ), где  $\nu \geq \frac{1}{1-\mu p'}$ .

Тогда  $K$  ограничен в  $H_{\mu, p}(R_+^1)$  (или в  $H_{\mu, p}(\dot{R}_+^1)$ ), соответственно при  $0 < \mu < 1$ ,  $1 < p < \infty$  и  $0 < \mu < \frac{1}{p'}$ . Если  $\nu > \frac{1}{1-\mu p'}$ , то  $K$  ограничен в  $h_{\mu, p}(R_+^1)$  (и  $h_{\mu, p}(\dot{R}_+^1)$ , соответственно),  $0 < \mu < 1$ ,  $1 < p < \infty$  и  $0 < \mu < \frac{1}{p'}$ .

Используя леммы 10 — 12 можно сформулировать результаты о полной непрерывности операторов  $T_a = a(x) K\varphi$ , аналогичные теоремам 2—4, на чем мы не останавливаемся. Заметим, что эти же результаты можно получить, если использовать продолжимость нулем функций из  $H_{\mu, p}(R_+^1)$  (или  $H_{\mu, p}(\dot{R}_+^1)$ ). Остановимся отдельно на условиях продолжимости нулем и обозначим это продолжение через  $\tilde{\varphi}(x)$ .

Теорема 5. Для того, чтобы функция  $\varphi(x) (\in H_{\mu, p}(R_+^1))$  была продолжима нулем при  $x < 0$  до функции из  $H_{\mu, p}(R_+^1)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $0 < \mu \leq 1$ , необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие



$$A = \sup_{h>0} \frac{1}{h^\mu} \left( \int_0^h |z(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad (13)$$

при этом

$$\|z\|_{H_{\mu,p}(R_+^1)} \leq \|\tilde{z}\|_{H_{\mu,p}(R_+^1)} \leq A + \|\varphi\|_{H_{\mu,p}(R_+^1)}. \quad (14)$$

**Теорема 6.** Для того, чтобы функция  $\varphi(x) (\in H_{\mu,p}(\dot{R}_+^1))$  была продолжима нулем при  $x < 0$  до функции из  $H_{\mu,p}(\dot{R}_+^1)$ , необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия: 1)  $A < \infty$ ; 2)  $\varphi(x) \in L_p^\mu(R_+^1)$ .

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned} & \sup_{h>0} \|v(x, h)(\Delta_h \tilde{\varphi})(x)\|_p = \\ & = \sup_{h>0} \left( \int_0^h |v(x-h, h)\varphi(x)|^p dx + \int_0^\infty |v(x, h)(\Delta_h \varphi)(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \end{aligned}$$

тогда и только, когда

$$J = \sup_{h>0} \frac{1}{h^\mu} \int_0^h |(1+x)^\mu (1+x-h)^\mu \varphi(x)|^p dx < \infty. \quad (15)$$

**Достаточность.** Пусть выполнены условия 1) — 2) теоремы. При  $h < 1$  очевидно (с учетом  $x < h$ ), что  $(1+x)(1+h-x) \leq 4$  и тогда  $J \leq 4^\mu A$ . При  $h > 1$  очевидно  $h^{-1}(1+h-x) \leq 2$  и поэтому  $J \leq 2^\mu \|(1+x)^\mu \varphi(x)\|_{L_p(R_+^1)}^p$ . Таким образом,  $\tilde{\varphi}(x) \in H_{\mu,p}(R_+^1)$ .

**Необходимость.** Допустим, что  $J < \infty$  и обозначим  $F_h(x) = \chi_h(x) \left| \left( \frac{1+h-x}{h} \right)^\mu (1+x)^\mu \varphi(x) \right|^p$ , где  $\chi_h(x) = 1$ , если  $x < h$  и  $\chi_h(x) = 0$  при  $x > h$ . Для почти всех  $x$

$$F_h(x) \rightarrow F(x) = (1+x)^\mu \varphi(x)^p.$$

По теореме Фату  $F(x) \in L_1(R_+^1)$  и

$$\int_0^\infty F(x) dx \leq J = \sup_{h>0} \int_0^\infty F_h(x) dx,$$

т. е. выполнено условие 2) теоремы. После этого остается заметить, что  $A^p \leq J$ .

Наконец, при  $h < 0$  используем аналогичное рассуждение, исходя из равенства

$$\sup_{h<0} \|v(x, h)(\Delta_h \tilde{\varphi})(x)\|_p =$$

$$= \sup_{h < 0} \frac{1}{|h|^p} \left( \int_0^{|h|} |(1+x)^{\mu} (1+|h|-x)^{\mu} \varphi(x)|^p dx + \int_0^{\infty} |v(y, |h|)(\Delta_{|h|}\varphi)(y)|^p dy \right)^{1/p},$$

где учтено, что  $v(y+|h|, h) = v(y, |h|)$  и мы вновь приходим к (15). Теорема доказана.

В качестве примера заметим, что если  $\varphi(x) \in C_0^\infty(R_+) \subset H_{\mu, p}(R_+)$  и  $|\varphi(x)| \geq B$ ,  $0 < x < 1$ , то  $A \geq B \sup_{0 < h < 1} h^{\frac{1}{p}-\mu}$ . Отсюда видно, что продолжение такой функции  $\varphi(x)$  нулем до  $\varphi(x) \in H_{\mu, p}(R^1)$  возможно лишь при  $\mu \leq \frac{1}{p}$  и невозможно, если  $\mu > \frac{1}{p}$ .

Ростовский государственный  
университет

Поступила 14. IV. 1986

Ն. Կ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆԻ. Փաթեքուման օպերատորները լիպշիցյան դասերում (ամփոփում)

Հետազոտվում են փաթեքուման օպերատորները լիպշիցյան և Կարգի  $\mu \in (0, 1]$   $L_p$ -տարածություններում: Ընդ որում դիտարկվում են ինչպես լոկալ, այնպես էլ գլոբալ (ներառյալ անվերջությունը) գլոբալությունը դեպքերը:

N. K. KARAPETIAN. *Convolution operators in Lipschitz classes* (summary)

Convolution operators are investigated in the classes of functions with satisfy the Lipschitz condition of the order  $\mu \in (0, 1]$  in  $L_p$ -spaces. The cases of local and global (including infinity) Lipschitz condition are considered.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. Стейн. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М., Мир, 1973, 343 с.
2. С. М. Никольский. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., Наука, 1977, 556 с.
3. Г. Ю. Виноградова, Н. К. Карапетянц. Операторы типа свертки в гильбертовских классах, В кн. «Математический анализ и его приложения», Ростов н/Д, 1983, 3—10.
4. Г. Ю. Виноградова. Ограниченность операторов типа свертки в гильбертовских классах, Изв. СКНЦ ВШ, Естествен. науки, 1977, № 1, 7—9.
5. С. Г. Самко. Классы  $C^{\mu}(R^n)$  и мультипликаторы в пространствах  $L^p$  риссо-вых потенциалов, Изв. СКНЦ ВШ, 1977, № 3.
6. Н. Данфорда, Дж. Т. Шварц. Линейные операторы, т. 1, М., ИЛ, 1962, 897 с.
7. Л. Хёрмандер. Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига, М., ИЛ, 1962, 71 с.



Ан. А. ТАЛАЯН

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 w(n) = \infty. \quad (3)$$

В настоящей работе сформулированные выше теоремы 1—3 расширяются (с надлежащими [формулировками]) на более широкий класс ортонормированных систем, а именно на ОН системы  $\{\varphi_n(x)\}$ , обладающие следующим, более слабым свойством полноты: для некоторого множества  $E \subset [0, 1]$ ,  $\mu(E) > 0$ , какова бы ни была  $f(x) \in L_2(E)$ , существует ряд  $\sum a_n \varphi_n(x)$ ,  $\sum a_n^2 < \infty$ , который сходится к  $f(x)$  в метрике  $L_2(E)$ .

В частности оказывается, что теорема 1 верна для любой ОН системы  $\{\varphi_n(x)\}$ , обладающей указанным свойством полноты на множествах  $E$ , мера которых может быть сколь угодно близкой к 1 (см. определения 1.1 и 2.1, теоремы 2.1, 2.2 и теоремы 2.3—2.6).

При доказательстве теорем настоящей работы мы пользуемся методами доказательств, приведенных в работах [2], [3], [4] и леммой 2 работы [5] А. А. Талаляна.

### § 1. Доказательства основных лемм

Сначала введем некоторые определения. Если функция  $f(x)$  интегрируема с квадратом на отрезке  $[0, 1]$ , обозначим

$$I = \left( \int_0^1 f^2(x) dx \right)^{1/2}. \quad (1.1)$$

В случае, когда  $f(x)$  интегрируема с квадратом на измеримом множестве  $E \subset [0, 1]$ ,  $\mu(E) > 0$ , обозначим

$$I_E = \left( \int_E f^2(x) dx \right)^{1/2}. \quad (1.2)$$

**Определение 1.1.** Ортонормированная на отрезке  $[0, 1]$  система  $\{\varphi_n(x)\}$  называется полной по рядам из  $l_2$  на множестве  $E \subset [0, 1]$ ,  $\mu(E) > 0$ , если для любой определенной на  $E$  и принадлежащей  $L_2(E)$  функции  $f(x)$  существует ряд

$$\sum a_n \varphi_n(x), \quad \sum a_n^2 < \infty \quad (1.3)$$

такой, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_E \left| \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x) - f(x) \right|^2 dx = 0. \quad (1.4)$$

Мы будем пользоваться следующей леммой, установленной в [5] (см. [5], лемма 2).

**Лемма 1.1.** Пусть ортонормированная на  $[0, 1]$  система  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$  полна по рядам из  $l_2$  на множестве  $E$ ,  $\mu(E) > 0$ . Тогда для любого измеримого множества  $A \subset E$ ,  $\mu(A) > 0$ , для любого натурального числа  $N$  и положительного числа  $\eta > 0$  существуют функция  $\psi(x)$  и линейная комбинация:

$$H(x) = \sum_{k=N+1}^m a_k \varphi_k(x), \quad m > N, \quad (1.5)$$



удовлетворяющие следующим условиям:

$$\psi(x) = 1, x \in A', \psi(x) = -1, x \in A'', \psi(x) = 0, x \in E \setminus (A' \cup A''), \quad (1.6)$$

где

$$A' \cup A'' \subset A, A' \cap A'' = \emptyset, \mu(A') = \mu(A'') = \frac{1}{4} \mu(A), \quad (1.7)$$

$$\left\| \psi(x) - \sum_{k=N+1}^m a_k \varphi_k(x) \right\|_E < \eta, \quad (1.8)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^m a_k \varphi_k(x) \right\|_E < \beta \left\| \psi(x) \right\|_E, \quad N+1 \leq n \leq m, \quad (1.9)$$

где  $\beta$  — постоянная, зависящая только от множества  $E$  и от системы  $\{\varphi_n(x)\}$ .

Следующая лемма легко доказывается при помощи леммы 1.1.

**Лемма 1.2.** Пусть ортонормированная на  $[0, 1]$  система  $\{\varphi_n(x)\}$  полна по рядам из  $l_2$  на множестве  $E \subset [0, 1]$ ,  $\mu(E) > 0$ . Тогда для любого множества  $B \subset E$ ,  $\mu(B) > 0$ , для любого натурального числа  $N$  и для положительных чисел  $\delta > 0$ ,  $\eta > 0$ , существуют функция  $\psi(x)$  и линейная комбинация (1.5), удовлетворяющие условиям

$$\psi(x) = 1, x \in B', \psi(x) = -1, x \in B'', \psi(x) = 0, x \in E \setminus (B' \cup B''), \quad (1.10)$$

где

$$B' \cup B'' \subset B, B' \cap B'' = \emptyset, \mu(B') = \mu(B'') = \frac{1}{4} \mu(B), \quad (1.11)$$

$$\left\| \psi(x) - \sum_{k=N+1}^m a_k \varphi_k(x) \right\|_E < \eta, \quad (1.12)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^m a_k \varphi_k(x) \right\|_E \leq \beta \left\| \psi(x) \right\|_E, \quad (1.13)$$

$$|a_k| < \delta, \quad N+1 \leq k \leq m, \quad (1.14)$$

где  $\beta$  — постоянная из условия (1.9) леммы 1.1.

**Доказательство.** Представим множество  $B$  в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся множеств  $A_1, \dots, A_n$  таких, что

$$\mu(A_i) > 0 \text{ и } 2\beta(\mu(A_i))^{1/2} < \delta. \quad (1.15)$$

Применяя лемму 1.1 к каждому из множеств  $A_i$ , т. е. полагая в ее формулировке  $A = A_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  последовательно мы можем определить полиномы

$$H_i(x) = \sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} a_k \varphi_k(x), \quad N_i > N_{i-1}, \quad N_0 = N \quad (1.16)$$

и функции  $\psi_i(x)$  такие что

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= 1, x \in A_i, \psi_i(x) = -1, x \in A_i^*, \psi_i(x) = 0, \\ &x \in E \setminus (A_i \cup A_i^*), \end{aligned} \quad (1.17)$$

где

$$A_i \cup \bar{A}_i \subset A_i, \quad A_i \cap \bar{A}_i = \emptyset, \quad \mu(A_i) = \mu(\bar{A}_i) = \frac{1}{4} \mu(A_i), \quad (1.17)$$

$$\left\| \psi_i(x) - \sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} a_k \varphi_k(x) \right\|_E < \frac{\eta}{2^i}, \quad (1.18)$$

$$\left\| \sum_{k=N_{i-1}+1}^n a_k \varphi_k(x) \right\| \leq \beta \left\| \psi_i(x) \right\|_E, \quad N_{i-1} < n \leq N_i. \quad (1.20)$$

Положим

$$B' = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad B'' = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i, \quad (1.21)$$

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x), \quad (1.22)$$

$$H(x) = \sum_{k=N+1}^m a_k \varphi_k(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} a_k \varphi_k(x), \quad N_n = m, \quad N_0 = N \quad (1.23)$$

и покажем, что множества  $B'$ ,  $B''$ , определенные равенствами (1.21) функция  $\psi(x)$ , определенная равенством (1.22) и полином  $H(x)$ , определенный равенством (1.23) удовлетворяют условиям (1.10)–(1.14) леммы 1.2. Поскольку  $B = \bigcup A_i$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ , из (1.17), (1.18) и из (1.19) (1.22) и (1.23) следует, что условия (1.10) и (1.11) выполнены. Из (1.19), (1.22), (1.23) следует

$$\left\| \psi(x) - \sum_{k=N+1}^m a_k \varphi_k(x) \right\|_E < \sum_{i=1}^n \left\| \psi_i(x) - \sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} a_k \varphi_k(x) \right\| < \sum_{i=1}^n \frac{\eta}{2^i} < \eta \quad (1.24)$$

и таким образом, условие (1.12) тоже выполнено.

Так как

$$\psi^2(x) = \sum_{i=1}^n \psi_i^2(x) \quad (1.25)$$

и согласно (1.20) имеем

$$\int_0^1 \left( \sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} a_k \varphi_k(x) \right)^2 dx = \sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} a_k^2 \leq \beta^2 \int_E \psi_i^2(x) dx, \quad (1.26)$$

то из (1.23) получаем

$$\left\| \sum_{k=N+1}^m a_k \varphi_k(x) \right\|^2 = \sum_{k=N+1}^m a_k^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} a_k^2 < \beta^2 \sum_{i=1}^n \int_E \psi_i^2(x) dx \leq \beta^2 \|\psi\|_E^2. \quad (1.27)$$

Неравенство (1.27) показывает, что условие (1.13) выполнено. Легко видеть, что для коэффициентов  $a_n$ ,  $N+1 \leq n < m$  линейной комбинации (1.23) выполняются также условия (1.14). В самом деле, пусть  $N_{i-1} < n \leq N_i$ . Тогда из (1.20) будем иметь

$$|a_n| = \|a_n \varphi_n(x)\| < \left\| \sum_{k=N_{i-1}+1}^n a_k \varphi_k(x) \right\| + \left\| \sum_{k=N_{i-1}+1}^{n-1} a_k \varphi_k(x) \right\| < 2\beta \|\psi\|_E. \quad (1.28)$$



Так как, согласно (1.17), имеем  $\|\psi_1 x\|_E = \sqrt{\mu(A_1)}$ , то из (1.15) и (1.28) следует, что  $|a_n| \leq \delta$ ,  $N+1 \leq n \leq m$ . Лемма 1.2 доказана.

**Лемма 1.3.** Пусть ортонормированная на отрезке  $[0,1]$  система  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  полна по рядам из  $l_2$  на множестве  $E \subset [0,1]$ ,  $\mu(E) > 0$ . Тогда для любого множества  $A \subset E$ ,  $\mu(A) > 0$ , для любого натурального числа  $N$  и для положительных чисел  $\delta > 0$ ,  $\eta > 0$  существуют функция  $\psi(x)$  и линейная комбинация (1.5), обладающие свойствами

$$\psi(x) = 1, x \in A_1, \psi(x) = -1, x \in A_2, \psi(x) = 0, x \in E \setminus A, \quad (1.29)$$

$$A_1 \cup A_2 = A, A_1 \cap A_2 = \emptyset, \mu(A_1) = \mu(A_2) = \frac{1}{2} \mu(A), \quad (1.30)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^m a_k \varphi_k(x) - \psi(x) \right\|_E < \eta, \quad (1.31)$$

$$|a_k| < \delta, N+1 \leq k \leq m, \quad (1.32)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^m a_k \varphi_k(x) \right\| \leq \beta \left\| \psi(x) \right\|_E, \quad (1.33)$$

где  $\beta$  — постоянная, зависящая только от множества  $E$  и от системы  $\{\varphi_n(x)\}$ .

**Доказательство.** Применим лемму 1.2, мы можем определить функцию  $\psi_1(x)$  и комбинацию

$$\sum_{k=N+1}^{m_1} a_k \varphi_k(x), \quad (1.34)$$

обладающие свойствами

$$\psi_1(x) = 1, x \in A_1^{(1)}, \psi_1(x) = -1, x \in A_2^{(1)}, \psi_1(x) = 0, x \in E \setminus (A_1^{(1)} \cup A_2^{(1)}), \quad (1.35)$$

$$A_1^{(1)} \cup A_2^{(1)} \subset A, A_1^{(1)} \cap A_2^{(1)} = \emptyset, \mu(A_1^{(1)}) = \mu(A_2^{(1)}) = \frac{1}{4} \mu(A), \quad (1.36)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{m_1} a_k \varphi_k(x) - \psi(x) \right\|_E < \frac{\eta}{2^2}, \quad (1.37)$$

$$|a_k| < \delta, N+1 \leq k \leq m_1, \quad (1.38)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{m_1} a_k \varphi_k(x) \right\| \leq \beta \left\| \psi_1(x) \right\|_E. \quad (1.39)$$

Если уже определены полиномы

$$\sum_{k=m_{j-1}+1}^{m_j} a_k \varphi_k(x), 1 \leq j \leq p-1, N = m_0 < m_1 < \dots < m_{p-1} \quad (1.40)$$

и функции  $\psi_j(x)$ ,  $1 \leq j \leq p-1$ ,

$$\begin{aligned} \psi_j(x) &= 1, x \in A_1^{(j)}, \psi_j(x) = -1, x \in A_2^{(j)}, \psi_j(x) = 0, \\ &x \in E \setminus (A_1^{(j)} \cup A_2^{(j)}). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Применяем лемму 1.2, полагая в ее формулировке  $N = m_{p-1}$  и взяв в качестве  $B$  множество

$$B_{p-1} = A \setminus \bigcup_{j=1}^{p-1} (A_1^{(j)} \cup A_2^{(j)}). \quad (1.42)$$

Тогда для чисел  $\delta > 0$ ,  $\frac{\eta}{2^{p+1}}$  мы можем определить функцию  $\psi_p(x)$  и полином

$$\sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k \varphi_k(x), \quad (1.43)$$

которые удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \psi_p(x) = 1, \quad x \in A_1^{(p)}, \quad \psi_p(x) = -1, \quad x \in A_2^{(p)}, \quad \psi_p(x) = 0, \\ x \in E \setminus (A_1^{(p)} \cup A_2^{(p)}), \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$A_1^{(p)} \cup A_2^{(p)} \subset B_{p-1}, \quad A_1^{(p)} \cap A_2^{(p)} = \emptyset, \quad \mu(A_1^{(p)}) = \mu(A_2^{(p)}) = \frac{1}{4} \mu(B_{p-1}), \quad (1.45)$$

$$\left\| \psi_p(x) - \sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k \varphi_k(x) \right\|_E < \frac{\eta}{2^{p+1}}, \quad (1.46)$$

$$|a_k| < \delta, \quad m_{p-1} < k \leq m_p, \quad (1.47)$$

$$\left\| \sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k \varphi_k(x) \right\| < \beta \left\| \psi_p(x) \right\|_E. \quad (1.48)$$

Таким образом, по индукции определяются последовательности функций  $\{\psi_p(x)\}_{p=1}^{\infty}$  и полиномы (1.43), которые для всех  $p \geq 1$  удовлетворяют условиям (1.42), (1.44)–(1.48) и при этом  $N = m_0 < m_1 < \dots < m_p \dots$ .

Обозначив

$$A_1 = \bigcup_{p=1}^{\infty} A_1^{(p)}, \quad A_2 = \bigcup_{p=1}^{\infty} A_2^{(p)}, \quad (1.49)$$

согласно (1.42) и (1.45), будем иметь

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad A_1 \cup A_2 = A, \quad \mu(A_1) = \mu(A_2) = \frac{1}{2} \mu(A). \quad (1.50)$$

Определим функцию  $\psi(x)$  на множестве  $E$  равенством

$$\psi(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \psi_p(x). \quad (1.51)$$

Мы видим, что она удовлетворяет условиям (1.29) и (1.30) леммы 1.3. Так как ряд (1.51) сходится в метрике  $L_2(E)$  к  $\psi(x)$ , можем взять натуральное число  $\gamma$  настолько большим, что

$$\left\| \sum_{p=1}^{\gamma} \psi_p(x) - \psi(x) \right\|_E < \frac{\eta}{2}. \quad (1.52)$$



Взяв  $m = m_1$ , покажем, что полином

$$\sum_{k=N+1}^m a_k \varphi_k(x) = \sum_{p=1}^s \sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k \varphi_k(x) \quad (1.53)$$

удовлетворяет условиям леммы 1.3. В самом деле, так как согласно (1.46)

$$\left\| \sum_{p=1}^s \psi_p(x) - \sum_{p=1}^s \sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k \varphi_k(x) \right\|_E \leq \sum_{p=1}^s \left\| \psi_p(x) - \sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k \varphi_k(x) \right\|_E < \frac{\eta}{2}, \quad (1.54)$$

то из (1.52), (1.53) и (1.54) получаем

$$\left\| \sum_{k=N+1}^m a_k \varphi_k(x) - \psi(x) \right\|_E < \eta \quad (1.55)$$

и условие (1.31) выполнено. Выполнение условия (1.32) следует из (1.53) и (1.47). Остается проверить выполнение условия (1.33). Из (1.48) и (1.44) следует

$$\left\| \sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k \varphi_k(x) \right\|^2 < \beta^2 \left\| \psi_p(x) \right\|_E^2 = \beta^2 \int_{A_1^{(p)} \cup A_2^{(p)}} \psi_p^2(x) dx \quad (1.56)$$

и так как согласно (1.41), (1.42) и (1.51)

$$\begin{aligned} \beta^2 \int_E \left( \sum_{p=1}^s \psi_p(x) \right)^2 dx &= \beta^2 \int_E \sum_{p=1}^s \psi_p^2(x) dx = \\ &= \beta^2 \sum_{p=1}^s \int_{A_1^{(p)} \cup A_2^{(p)}} \psi_p^2(x) dx \leq \int_E \psi^2(x) dx. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Из (1.56) и (1.57) получаем

$$\left\| \sum_{k=N+1}^m a_k \varphi_k(x) \right\|^2 = \sum_{p=1}^s \left\| \sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k \varphi_k(x) \right\|^2 \leq \beta^2 \int_E \psi^2(x) dx = \beta^2 \left\| \psi(x) \right\|_E^2. \quad (1.58)$$

Таким образом, условие (1.33) тоже выполнено и лемма 1.3 доказана.

**Лемма 1.4.** Пусть ортонормированная на  $[0,1]$  система  $\{\varphi_n(x)\}$  полна по рядам из  $l_2$  на множестве  $E \subset [0,1]$ ,  $\mu(E) > 0$ , и пусть  $B \subset E$ ,  $\mu(B) > 0$ ,  $\chi_B(x)$  — характеристическая функция множества  $B$ . Тогда, для любого натурального  $N$  и положительных чисел  $\varepsilon > 0$ ,  $\eta > 0$ ,  $\delta > 0$  можно определить линейную комбинацию (1.5) и множество  $e$ , обладающие следующими свойствами:

$$e \subset B, \quad \mu(e) < \varepsilon \mu(B), \quad (1.59)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^m a_k \varphi_k(x) - \chi_B(x) \right\|_{E \setminus e} < \eta, \quad (1.60)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^m a_k \varphi_k(x) \right\| < \frac{4\beta}{\varepsilon} \left\| \chi_B(x) \right\|_E, \quad (1.61)$$

$$|a_k| < \delta, \quad N+1 \leq k \leq m, \quad (1.62)$$

где  $\beta$  — постоянная, зависящая только от системы  $\{\varphi_n(x)\}$  и от множества  $E$ .

Доказательство. Применяя лемму 1.3, на первом шагу определим линейную комбинацию

$$\sum_{k=N+1}^{m_1} a_k \varphi_k(x) \quad m_1 > N \quad (1.63)$$

и функцию  $\psi_1(x)$ , обладающие свойствами

$$\psi_1(x) = 1, \quad x \in B_1^{(1)}, \quad \psi_1(x) = -1, \quad x \in B_2^{(1)}, \quad \psi_1(x) = 0, \quad x \in E \setminus B \quad (1.64)$$

$$B_1^{(1)} \cup B_2^{(1)} = B, \quad B_1^{(1)} \cap B_2^{(1)} = \emptyset, \quad \mu(B_1^{(1)}) = \mu(B_2^{(1)}) = \frac{1}{2} \mu(B), \quad (1.65)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{m_1} a_k \varphi_k(x) - \psi_1(x) \right\|_E < \frac{\eta}{2}, \quad (1.66)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{m_1} a_k \varphi_k(x) \right\|_E < \beta \left\| \psi_1(x) \right\|_E, \quad (1.67)$$

$$|a_k| < \delta, \quad N+1 \leq k \leq m_1. \quad (1.68)$$

Предположим теперь, что определены линейные комбинации

$$\sum_{k=m_{i-1}+1}^{m_i} a_k \varphi_k(x), \quad N = m_0 < m_1 < \dots < m_p, \quad 1 \leq i \leq p \quad (1.69)$$

и функции  $\psi_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq p$  такие, что

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= 2^{i-1}, \quad x \in B_1^{(i)}, \quad \psi_i(x) = -2^{i-1}, \quad x \in B_2^{(i)}, \\ \psi_i(x) &= 0, \quad x \in E \setminus (B_1^{(i)} \cup B_2^{(i)}), \end{aligned} \quad (1.70)$$

$$B_1^{(i)} \cup B_2^{(i)} = B_2^{(i-1)}, \quad B_1^{(i)} \cap B_2^{(i)} = \emptyset, \quad \mu(B_1^{(i)}) = \mu(B_2^{(i)}) = \frac{1}{2} \mu(B_2^{(i-1)}), \quad (1.71)$$

где  $B_2^0 = B$ .

Как легко видеть

$$\Phi_p(x) = \sum_{i=1}^p \psi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \setminus B_2^{(p)}, \\ -2^p + 1, & x \in B_2^{(p)}, \\ 0, & x \in E \setminus B. \end{cases} \quad (1.72)$$

Применим лемму 1.3 для  $A = B_2^{(p)}$ ,  $N = m_p$ , взяв вместо  $\delta$  число  $\delta 2^{-p}$  и вместо  $\eta$  — число  $\eta 2^{-p-1}$ . Тогда определяются линейная комбинация

$$\sum_{k=m_p+1}^{m_{p+1}} c_k \varphi_k(x), \quad m_{p+1} > m_p \quad (1.73)$$

и функция  $f_p(x)$ , обладающие свойствами

$$\begin{aligned} f_p(x) &= 1, \quad x \in B_1^{(p+1)}, \quad f_p(x) = -1, \quad x \in B_2^{(p+1)}, \\ f_p(x) &= 0, \quad x \in E \setminus (B_1^{(p+1)} \cup B_2^{(p+1)}), \end{aligned} \quad (1.74)$$



$$B_1^{(p+1)} \cup B_2^{(p+1)} = B_2^{(p)}, \quad B_1^{(p+1)} \cap B_2^{(p+1)} = \emptyset, \quad \mu(B_1^{(p+1)}) = \\ = \mu(B_2^{(p+1)}) = \mu(B_2^{(p)}) = \frac{1}{2} \mu(B_2^{(p)}), \quad (1.75)$$

$$\left\| \sum_{k=m_p+1}^{m_{p+1}} c_k \varphi_k(x) - f_p(x) \right\|_E < \frac{\eta}{2^{2^{p+1}}}, \quad (1.76)$$

$$\left\| \sum_{k=m_p+1}^{m_{p+1}} c_k \varphi_k(x) \right\| \leq \beta \left\| f_p(x) \right\|_E, \quad (1.77)$$

$$|c_k| < \frac{\delta}{2^p}, \quad (1.78)$$

Полагая  $\psi_{p+1}(x) = 2^p f_p(x)$ ,  $x \in E$ ,  $a_k = 2^p c_k$ ,  $m_p < k \leq \frac{\delta}{2^p}$  и  $\Phi_{p+1}(x) = \Phi_p(x) + \psi_{p+1}(x)$ ,  $x \in E$ , мы видим, что (см. (1.76)–(1.78))

$$\left\| \sum_{k=m_p+1}^{m_{p+1}} a_k \varphi_k(x) - \psi_{p+1}(x) \right\| \leq \frac{\eta}{2^{2^{p+1}}} \cdot 2^p = \frac{\eta}{2^{2^{p+1}}}, \quad (1.79)$$

$$\left\| \sum_{k=m_p+1}^{m_{p+1}} a_k \varphi_k(x) \right\| \leq \beta 2^p \left\| f_p(x) \right\|_E = \beta \left\| \psi_{p+1}(x) \right\|_E, \quad (1.80)$$

$$|a_k| = 2^p |c_k| < \frac{\delta}{2^p} \cdot 2^p = \delta, \quad m_p < k \leq m_{p+1} \quad (1.81)$$

и что, кроме того, выполняются также (1.70) и (1.71) при  $i = p + 1$  и (1.72) при замене числа  $p$  на  $p + 1$ . Таким образом, мы можем определить последовательности линейных комбинаций

$$\sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k \varphi_k(x), \quad p=1, 2, \dots, \quad (1.82)$$

и функций  $\{\psi_p(x)\}_{p=1}^{\infty}$ , которые удовлетворяют условиям (1.72), (1.79)–(1.82) для всех  $p \geq 0$ , и выполнены также условия (1.70), (1.71) для всех  $i = 1, 2, \dots$ . Пусть  $\varepsilon$  — число из условия (1.59) леммы 1.4 и  $q$  выбрано так, что  $2^{-q} < \varepsilon \leq 2^{-q+1}$ . Обозначим

$$\sum_{k=N+1}^m a_k \varphi_k(x) = \sum_{p=1}^q \sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k \varphi_k(x), \quad N = m_0 < m_1 < \dots < m_q = m \quad (1.83)$$

и положим

$$e = B_2^{(q)}. \quad (1.84)$$

Покажем, что линейная комбинация (1.83) и множество  $e$  удовлетворяют требованиям леммы 1.4.

Из (1.71) следует

$$e \subset B, \quad \mu(e) = \mu(B_2^{(q)}) = \mu(B) 2^{-q} < \varepsilon \mu(B). \quad (1.85)$$

С другой стороны, из (1.72), где вместо  $p$  взято  $q$ , и из (1.79) получаем

$$\left\| \sum_{k=N+1}^m a_k \varphi_k(x) - \chi_B(x) \right\|_{E \setminus e} \leq \left\| \sum_{k=N+1}^m a_k \varphi_k(x) - \Phi_q(x) \right\|_E \leq \\ \leq \sum_{p=1}^q \left\| \sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k \varphi_k(x) - \psi_p(x) \right\|_E \leq \sum_{p=1}^q \frac{\eta}{2^p} < \eta. \quad (1.86)$$

Из (1.85) и (1.86) следует, что условия (1.59) и (1.60) леммы 1.4 выполнены. Выполнение условия (1.62) следует из неравенств (1.81), которые выполнены для всех  $p$ ,  $1 \leq p \leq q$ , и для всех  $k$ ,  $m_{p-1} < k \leq m_p$ . Остается проверить выполнение условия (1.61). Так как согласно (1.70) и (1.71)

$$\|\psi_p(x)\|_E \leq 2^{p-1} \|\chi_B(x)\|_E, \quad 1 \leq p \leq q, \quad (1.87)$$

из (1.80) получаем

$$\left\| \sum_{k=N+1}^m a_k \varphi_k(x) \right\| \leq \sum_{p=1}^q \left\| \sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k \varphi_k(x) \right\| \leq \sum_{p=1}^q \beta 2^{p-1} \|\chi_B(x)\|_E \leq \\ \leq \beta 2^{q+1} \|\chi_B(x)\|_E < \frac{4\beta}{\varepsilon} \|\chi_B(x)\|_E. \quad (1.88)$$

Лемма доказана.

## § 2. Доказательство теорем

Имеют место следующие теоремы.

**Теорема 2.1.** Пусть ортонормированная на  $[0,1]$  система  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$  полна по рядам из  $l_2$  на множество  $E$ ,  $E \subset [0,1]$ ,  $\mu(E) > 0$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует множество  $e \subset E$ ,  $\mu(e) < \varepsilon$ , такое, что если  $f(x) \in L_2[0,1]$  и  $f(x) = 0$  при  $x \in e \cup ([0,1] \setminus E)$ , то условие

$$\sum_{j=1}^\infty |c_j|^p < \infty, \quad 0 < p < 2, \quad c_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx \quad (2.1)$$

выполняется только тогда, когда  $f(x) = 0$  почти всюду на  $[0,1]$ .

Для формулировки следующей теоремы введем

**Определение 2.1.** Ортонормированную на  $[0,1]$  систему  $\{\varphi_n(x)\}$  назовем почти полной по рядам из  $l_2$  на множестве  $A \subset [0,1]$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует множество  $E \subset A$ ,  $\mu(E) > \mu(A) - \varepsilon$ , такое, что система  $\{\varphi_n(x)\}$  полна по рядам из  $l_2$  на множестве  $E$ .

Из теоремы 2.1 немедленно получается следующее обобщение результата Г. Г. Геворкяна и Л. Голзани (см. теорему 1 во введении).

**Теорема 2.2.** Пусть ортонормированная на  $[0,1]$  система  $\{\varphi_n(x)\}$  почти полна по рядам из  $l_2$  на отрезке  $[0,1]$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует множество  $Q \subset [0,1]$ ,  $\mu(Q) > 1 - \varepsilon$ , которое является множеством единственности для системы  $\{\varphi_n(x)\}$  относительно классов  $l_p$ ,  $p < 2$ .



Доказательство теоремы 2.1. Рассмотрим последовательность  $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $0 < \xi_k < 1$ , в которой каждое рациональное число  $0 < r < 1$  встречается бесконечное число раз, т. е. для любого  $r$  существует зависящая от  $r$  последовательность натуральных чисел  $K(1, r) < K(2, r) < \dots < K(i, r) < \dots$  такая, что  $\xi_{K(i, r)} = r$  для всех  $i \geq 1$ .

Обозначим

$$B_k = [0, \xi_k] \cap E, \quad k \geq 1, \quad (2.2)$$

и возьмем две последовательности положительных чисел  $\eta_k, \varepsilon_k, k \geq 1$ , где

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < +\infty, \quad (2.3)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon. \quad (2.4)$$

Пусть

$$1 < p_1 < p_2 < \dots < p_k < \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 2, \quad (2.5)$$

$$q_k = \frac{p_k}{p_k - 1}, \quad k \geq 1. \quad (2.6)$$

Так как  $q_k > 2, k \geq 2$ , можно выбрать  $\delta_k > 0, k \geq 1$  такие, что

$$\left( \frac{16\beta^2}{\varepsilon^2} \right)^{1/q_k} \cdot (\delta_k^{q_k-2})^{1/q_k} < \eta_k, \quad k \geq 1. \quad (2.7)$$

Из формулировки леммы 1.4 видно, что путем ее последовательного применения, где каждый раз полагается  $B = B_k, \varepsilon = \varepsilon_k, \eta = \eta_k, \delta = \delta_k$ , можно определить последовательность множеств  $e_k, k \geq 1$  и последовательность линейных комбинаций

$$H_k(x) = \sum_{j=N_k}^{m_k} a_j \varphi_j(x), \quad k \geq 1, \quad (2.8)$$

обладающих свойствами

$$N_1 < m_1, \quad m_k < N_{k+1} < m_{k+1}, \quad k \geq 1, \quad (2.9)$$

$$e_k \subset B_k, \quad \mu(e_k) < \varepsilon_k \mu(B_k), \quad (2.10)$$

$$\|H_k(x) - \chi_{B_k}(x)\|_{E \setminus e_k} < \eta_k, \quad (2.11)$$

$$\|H_k(x)\| = \left( \sum_{j=N_k}^{m_k} a_j^2 \right)^{1/2} \leq \frac{4\beta}{\varepsilon_k} \|\chi_{B_k}(x)\|_E, \quad (2.12)$$

$$|a_j| < \delta_k, \quad N_k \leq j \leq m_k. \quad (2.13)$$

Когда  $B_k$  пусто, считаем  $\chi_{B_k}(x) = 0$ , при  $x \in E, H_k(x) = 0$ , (т. е.  $a_j = 0, N_k \leq j \leq m_k$ ).

Покажем, что множество

$$e = \bigcup_{k=1}^{\infty} e_k \quad (2.14)$$

удовлетворяет требованиям теоремы 2.1.

Из (2.2), (2.4) и (2.10) следует, что  $e \in E$ ,  $\mu(e) < \varepsilon$ . Пусть  $f(x) \in L_2[0,1]$  и  $f(x) = 0$  при  $x \in e \cup ([0,1] \setminus E)$ . Без ограничения общности можно считать  $\|f\| = 1$ . Тогда ее коэффициенты Фурье  $c_j$  по системе  $\{\varphi_j(x)\}$  будут по абсолютной величине не больше единицы, и поэтому из выполнения условия (2.1) для некоторого  $p$ ,  $1 < p < 2$  следует  $\sum |c_k|^{p_k} \leq \sum |c_k|^p$  при  $p_k > p$  и, следовательно, существуют  $k_0$  и положительная постоянная  $M$  такие, что

$$\left( \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^{p_k} \right)^{1/p_k} \leq M, \quad k > k_0. \quad (2.15)$$

Из (2.2), (2.10) и (2.14) следует

$$\int_0^{\varepsilon_k} f(x) dx \int_{B_k \setminus e_k} f(x) dx = \int_{E \setminus e_k} f(x) \chi_{B_k}(x) dx, \quad k \geq 1, \quad (2.16)$$

$$\int_0^1 f(x) H_k(x) dx = \int_{E \setminus e_k} f(x) H_k(x) dx, \quad k > 1, \quad (2.17)$$

и поэтому, согласно (2.11), получаем

$$\left| \int_0^{\varepsilon_k} f(x) dx - \int_0^1 f(x) H_k(x) dx \right| < \eta_k, \quad k > 1. \quad (2.18)$$

С другой стороны, согласно (2.6), (2.8), (2.13) и 2.15)

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) H_k(x) dx \right| &= \left| \sum_{j=N_k}^{m_k} c_j a_j \right| \leq \left( \sum_{j=N_k}^{m_k} |c_j|^{p_k} \right)^{1/p_k} \left( \sum_{j=N_k}^{m_k} |a_j|^{q_k} \right)^{1/q_k} \leq \\ &\leq M \left( |\varepsilon_k|^{q_k-2} \right)^{1/q_k} \left( \sum_{j=N_k}^{m_k} |a_j|^2 \right)^{1/q_k}, \quad \forall k > k_0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Из (2.12)

$$\sum_{j=N_k}^{m_k} |a_j|^2 \leq \frac{16 \beta^2}{\varepsilon_k^2}, \quad (2.20)$$

с учетом (2.7) и (2.19), получаем

$$\left| \int_0^1 f(x) H_k(x) dx \right| \leq M \eta_k, \quad k \geq k_0. \quad (2.21)$$

Сравнивая (2.18) (2.21), имеем

$$\left| \int_0^{\varepsilon_k} f(x) dx \right| < (M+1) \eta_k, \quad k \geq k_0. \quad (2.22)$$

Тогда, если  $r$ ,  $0 < r \leq 1$  — рациональное число и  $\xi_{K(i,r)} = r$  для всех  $i \geq 1$ , где  $K(1,r) < K(2,r) < \dots < K(i,r) < \dots$ , то из (2.22), где вместо  $k$  берется  $K(i,r)$ , следует, что



$$\int_0^r f(x) dx = 0. \quad (2.23)$$

Так как (2.23) выполнено для всех рациональных  $r$ ,  $0 < r \leq 1$ , то  $f(x) = 0$  почти всюду на  $[0, 1]$ , и теорема 2.1 доказана.

Следующие теоремы устанавливают существование множества единственности для классов функций из  $L_2[0, 1]$ , коэффициенты Фурье которых по данной системе  $\{\varphi_n(x)\}$  удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 w(n) < +\infty, \quad (2.24)$$

где  $w(n)$  — неотрицательная функция и  $w(n) \uparrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Теорема 2.3.** Пусть ортонормированная на  $[0, 1]$  система  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  по рядам из  $l_2$  на множестве  $E \subset [0, 1]$ ,  $\mu(E) > 0$ , и пусть  $w(n)$  — положительная неубывающая функция, стремящаяся к  $+\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $e \subset E$ ,  $\mu(e) < \varepsilon$  такое, что если  $f(x) = 0$  при  $x \in e \cup ([0, 1] \setminus E)$ , то условие (2.24) на коэффициенты Фурье

$$c_n = \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx \quad (2.25)$$

может выполняться только тогда, когда  $f(x) = 0$  почти всюду на  $[0, 1]$ .

Из теоремы 2.3 немедленно следует

**Теорема 2.4.** Пусть ортонормированная на  $[0, 1]$  система  $\{\varphi_n(x)\}$  почти полна на  $[0, 1]$  и  $v(n) \uparrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $v(n) > 0$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует множество  $e \subset [0, 1]$ ,  $\mu(e) < \varepsilon$ , такое, что если  $f(x) = 0$  при  $x \in e$ , то условие (2.24) на коэффициенты Фурье (2.25) выполняется только тогда, когда  $f(x) = 0$  почти всюду на  $[0, 1]$ .

Доказательство теоремы 2.3. Из формулировки леммы 1.4 видно, что можно выбрать линейные комбинации (2.8), которые удовлетворяют условиям (2.9)–(2.12) и, кроме того, числа  $N_k$  удовлетворяют неравенствам

$$\frac{1}{\sqrt{v(N_k)}} \leq \eta_k \frac{\varepsilon_k}{4\beta}, \quad \forall k \geq 1. \quad (2.26)$$

Покажем, что множество  $e$ , определенное равенством (2.14), в котором множества  $e_k$  удовлетворяют условиям (2.10) и (2.11) при указанном выборе чисел  $N_k$ , удовлетворяет требованиям теоремы 2.3.

Пусть  $f(x) = 0$  при  $x \in e \cup ([0, 1] \setminus E)$ . Тогда, как было показано выше, имеют место (2.16), (2.17) и (2.18). из выполнения условия (2.24) вытекает

$$\left| \int_0^1 f(x) H_k(x) dx \right| = \left| \sum_{j=N_k}^{m_k} c_j a_j \right| \leq \sqrt{\sum_{j=N_k}^{m_k} c_j^2 v(j)} \times$$

$$\times \sqrt{\sum_{j=1}^{m_k} a_j^2 \frac{1}{v(j)}} < M \frac{1}{\sqrt{v(N_k)}} \sqrt{\sum_{j=1}^{m_k} a_j^2}. \quad (2.27)$$

Из (2.27), (2.26) и (2.12) следует

$$\left| \int_0^1 f(x) H_k(x) dx \right| < M \eta_k \quad \forall k, k \geq 1. \quad (2.28)$$

откуда, согласно (2.18), получаем

$$\left| \int_0^{\xi_k} f(x) dx \right| < \eta_k (M+1) \quad \forall k, k \geq 1. \quad (2.29)$$

Как было показано выше, из (2.29) и (2.23) и из выбора последовательности  $\{\xi_k\}$  следует, что  $f(x) = 0$  почти всюду на  $[0,1]$ . Теорема 2.3 доказана.

Из теорем 2.1 и 2.3 легко получаются следующие теоремы, представляющие обобщения соответствующих теорем А. М. Олевского [4] о полных в  $L_2[0,1]$  ОН системах.

**Теорема 2.5.** Если ортонормированная на  $[0,1]$  система  $\{\varphi_n(x)\}$  полна по рядам из  $l_2$  на некотором множестве  $E \subset [0,1]$ ,  $\mu(E) > 0$ , то существует непрерывная на  $[0,1]$  функция  $f(x)$  такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p = \infty \quad (2.30)$$

для всех  $p < 2$ , где

$$c_n = \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx. \quad (2.31)$$

**Теорема 2.6.** Если ортонормированная на  $[0,1]$  система  $\{\varphi_n(x)\}$  полна по рядам из  $l_2$  на некотором множестве  $E \subset [0,1]$ ,  $\mu(E) > 0$ , то для любой функции  $w(n) > 0$ ,  $w(n) \uparrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$  существует непрерывная на  $[0,1]$  функция  $f(x)$ , коэффициенты Фурье (2.31) которой по этой системе удовлетворяют условию

$$\sum c_n^2 w(n) = +\infty. \quad (2.32)$$

Справедливость теоремы 2.5 немедленно следует из теоремы 2.1 и из следующей теоремы Л. Голзани ([1], стр. 1142, теорема 10).

**Теорема (Л. Голзани).** Пусть  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — полная ортонормированная система в  $L_2[0,1]$ . Если существует множество  $E \subset [0,1]$ ,  $0 < \mu(E) < 1$ , которое является множеством единственности системы  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  относительно классов  $l_p$ ,  $p < 2$ , то существует непрерывная на  $[0,1]$  функция  $f(x)$ , коэффициенты Фурье (2.31) которой по этой системе удовлетворяют условию (2.30) для всех  $p < 2$ .

Для получения теоремы 2.6 из теоремы 2.3 нужно установить некоторый аналог вышеуказанной теоремы Л. Голзани. Сначала введем



**Определение 2.** Пусть  $w(n) > 0$ ,  $w(n) \uparrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Будем говорить, что множество  $A \subset [0,1]$ ,  $0 < \mu(A) < 1$  является  $U_{w(n)}$ -множеством единственности ортонормированной на  $[0,1]$  системы  $\{\varphi_n(x)\}$ , если не существует отличной от нуля функции  $f(x)$ , равной нулю на  $[0,1] \setminus A$ , коэффициенты Фурье которой по этой системе удовлетворяли бы условию

$$\sum c_n^2 w(n) < +\infty. \quad (2.33)$$

Теорема 2.6 немедленно следует из теоремы 2.3 и из следующего утверждения.

**Теорема 2.7.** Если ортонормированная на  $[0,1]$  система  $\{\varphi_n(x)\}$  обладает некоторым  $U_{w(n)}$ -множеством единственности, то существует непрерывная на  $[0,1]$  функция  $f(x)$ , коэффициенты Фурье (2.31) которой по этой системе удовлетворяют условию (2.32).

При доказательстве этой теоремы применяются аналогичные приведенным в [4] рассуждения. Обозначим через  $l_2(w(n))$  банахово пространство последовательностей  $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ , где  $\sum a_n^2 w(n) < \infty$  с нормой  $(\sum a_n^2 w(n))^{1/2}$ . Если множество  $A$ ,  $0 < \mu(A) < 1$ , является  $U_{w(n)}$ -множеством единственности для системы  $\{\varphi_n(x)\}$  и если  $\chi_A(x)$  — характеристическая функция этого множества, то коэффициенты

$$c_n(\chi_A(x)) = \int \varphi_n(x) \chi_A(x) dx, \quad n=1, 2, \dots \quad (2.34)$$

будут удовлетворять условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(\chi_A(x))|^2 w(n) = +\infty. \quad (2.35)$$

Рассмотрим последовательность линейных операторов

$$T_N(f) = (c_1(f), c_2(f), \dots, c_N(f), 0, \dots, 0), \quad N=1, 2, \dots, \quad (2.36)$$

где

$$c_n(f) = \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx, \quad (2.37)$$

отображающих пространство  $C[0,1]$  непрерывных на  $[0,1]$  функций в пространство  $l_2(w(n))$ .

Так как

$$\|T_N\| = \sup_{\|f\|_C \leq 1} \left( \sum_{n=1}^N |c_n(f)|^2 w(n) \right)^{1/2} \geq \left( \sum_{n=1}^N |c_n(\chi_A(x))|^2 w(n) \right)^{1/2}, \quad (2.38)$$

то из условия (2.35) следует, что  $\|T_N\| \rightarrow +\infty$  при  $N \rightarrow \infty$ . Отсюда и из теоремы Банаха—Штейнгауза следует существование непрерывной функции  $f(x)$ , для которой

$$\sum |c_n(f)|^2 w(n) = +\infty.$$

Автор выражает благодарность Г. Г. Геворкяну за постановку вопросов и внимание при выполнении настоящей работы.

Республиканский ВЦ

Госагропрома Арм.ССР

Поступила 10.II.1987

ԱՅՍ. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ. Կառլեմանի եզակիությունների և օրթոնորմալ սխեմաների ըստ  $l_p$  դասերի միակությունը բազմությունների մասին (ամփոփում)

Աշխատանքում ապացուցված են ըստ  $l_p$  դասերի միակության բազմությունների գոյության մասին թեորեմներ և նրանցից ստացված է Կառլեմանի եզակիությունների գոյությունը ոչ լրիվ օրթոնորմալ սխեմաների որոշ դասերի համար:

AN. A. TALALIAN. On Carleman's peculiarities and uniqueness sets of orthonormal systems with respect to  $l_p$  classes (summary)

The paper establishes theorems on existence of uniqueness sets with respect to  $l_p$  classes and as a corollary the existence of Carleman's peculiarities for some classes of noncomplete orthonormal system.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. L. Golzani. Sets of uniqueness of  $l_p$  for general orthonormal complete systems Boll. Unione Math. Soc., 1964, 70. 722—723.
2. L. Golzani. Existence of sets of uniqueness of  $l_p$  for orthonormal systems, Proc Amer. Math. Soc., 1981, 83, № 3, 569—671.
3. Г. Г. Геворкян. О множествах единственности для полных ортонормированных систем, Матем. заметки, 32, № 5, 1982, 651—656.
4. А. М. Олевский. О расходимости ортогональных рядов и о коэффициентах Фурье непрерывных функций по полным системам, Сиб. мат. журнал, 4, № 3, 1963, 647—656.
5. А. А. Талалян. О локальном характере некоторых свойств полных ортонормированных систем, Труды МИ АН СССР им. В. А. Стеклова, 164, 1983, 155—168.



УДК 519.63

Н. В. ОГАНЕСЯН

РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО  
ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
ПРОЕКЦИОННО-СЕТОЧНЫМ МЕТОДОМ

Рассматривается краевая задача для модельного полуэллиптического уравнения в области  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  вида

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_y(x, 0) = u_y(x, 1) = 0, \quad (2)$$

где  $f \in L_2(\Omega)$ ,  $\partial\Omega$  — граница области  $\Omega$ . Указывается способ построения проекционно-сеточной схемы, обладающей предельной точностью и имеющей обусловленность порядка  $O(h^{-4})$ .

Известно, что эллиптические операторы составляют подкласс полуэллиптических операторов. В [1], [2] решения эллиптических уравнений 2-го порядка из пространства  $W_2^2$  Соболева аппроксимируются, например, кусочно линейными или полилинейными функциями. В [2] для решений бигармонического уравнения из  $W_2^4$  в качестве аппроксимирующих рассматриваются кусочно эрмитовы кубические функции.

Для задачи (1), (2) решением будем считать функцию из анизотропного пространства  $W_2^{(2,4)}$  Соболева, удовлетворяющую уравнению (1) и краевым условиям (2). Функции из  $W_2^{(2,4)}$  имеют различные дифференциальные свойства по разным переменным. Поэтому решение задачи (1), (2) аппроксимируется с помощью кусочно линейных по  $x$  и кусочно кубических по  $y$  функций (или кусочно линейно-эрмитовых функций).

1°. Вспомогательные предложения. Пусть  $R^n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство действительных векторов,  $\Omega$  — некоторая ограниченная область в  $R^n$ ,  $Z_+^n$  — множество мультииндексов  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , где  $\alpha_i (i=1, \dots, n)$  — целые неотрицательные числа.

Определим классы  $W_p^l(\Omega)$  Соболева (см. [3], [4]), где  $l = (l_1, \dots, l_n)$ ,  $l_i > 0$  — целые числа,  $1 \leq p < \infty$ . Положим  $D^{l_i} u = \frac{\partial^{l_i} u}{\partial x_i^{l_i}}$  ( $i=1, \dots, n$ ).

Обозначим через  $W_p^l(\Omega)$  множество функций  $u \in L_p(\Omega)$ , которые имеют несмешанные обобщенные производные  $D^{l_i} u$  ( $i=1, \dots, n$ ), принадлежащие  $L_p(\Omega)$ . Для них определим норму

$$\|u\|_{L^p} = \left\{ \int_{\Omega} \left( \sum_{i=0}^n |D^i u|^p + |u|^p \right) d\Omega \right\}^{1/p}. \quad (3)$$

Пространство  $\dot{W}_p^l(\Omega)$  определим как замыкание множества функций  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  по норме (3). В  $\dot{W}_p^l(\Omega)$  введем норму

$$\|u\|_{\dot{W}_p^l} = \left\{ \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n |D^i u|^p d\Omega \right\}^{1/p}, \quad (4)$$

которая эквивалентна норме (3) (см. [3], [4]).

Имеет место

**Теорема 1.** Пусть  $\Omega$  —  $n$ -мерный куб в  $R^n$ . Если линейные ограниченные в  $\dot{W}_p^l(\Omega)$  функционалы  $r_k(u)$  ( $k = 1, \dots, M$ ) таковы, что не обращаются в нуль одновременно ни на одном отличном от тождественного нуля полиноме степени не выше  $l_i - 1$  по каждой переменной  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), то норма в  $\dot{W}_p^l(\Omega)$  вида

$$\|u\| = \left\{ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |D^i u|^p d\Omega + \sum_{k=1}^M |r_k(u)|^p \right\}^{1/p}$$

эквивалентна норме (3).

Доказательство теоремы можно получить, используя метод доказательства соответствующего предложения в изотропном случае (см. [5]) с некоторой модификацией, отвечающей анизотропному случаю.

Пусть теперь  $\Omega$  — прямоугольник на плоскости  $(x, y)$  со сторонами, параллельными осям координат. Обозначим через  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) его вершины.

**Следствие.** В пространстве  $W_2^{(2,4)}(\Omega)$  норма, задаваемая формулой.

$$\|u\|_1 = \left\{ \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)^2 \right] d\Omega + \sum_{i=1}^4 (|u(x_i, y_i)|^2 + |u_y(x_i, y_i)|^2) \right\}^{1/2} \quad (5)$$

эквивалентна норме (3).

**Доказательство.** Пусть  $u \in W_2^{(2,4)}(\Omega)$ . По теоремам вложения для анизотропных пространств  $\dot{W}_p^l(\Omega)$  (см. [3], [4]) функции  $u$  и  $u_y$  эквивалентны непрерывным в  $\bar{\Omega}$  функциям, так что если определить функционалы  $r_k(u)$  ( $k = 1, \dots, 8$ ) по формулам:  $r_k(u) = u(x_k, y_k)$  при  $k = 1, \dots, 4$  и  $r_k(u) = u_y(x_{k-4}, y_{k-4})$  при  $k = 5, \dots, 8$ , то  $r_k(u)$  ( $k = 1, \dots, 8$ ) являются линейными ограниченными функционалами в  $W_2^{(2,4)}(\Omega)$ . Норма (5) эквивалентна норме (3), так как функционалы  $r_k(u)$  удовлетворяют условиям теоремы 1. В самом деле, пусть  $P(x, y)$  — полином не выше первой степени по  $x$  и не выше третьей — по  $y$ . Тогда легко проверить, что из условий  $P(x_i, y_i) = \frac{\partial P}{\partial y}(x_i, y_i) = 0$  следует, что  $P(x, y) \equiv 0$ .



Следствие доказано.

Пусть  $\alpha, \beta \in Z^n$  и  $l = (l_1, \dots, l_n)$  — фиксированный вектор с натуральными компонентами. Положим  $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ , где  $D_k = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}$  ( $k=1, \dots, n$ ). Рассмотрим линейный дифференциальный оператор с вещественными коэффициентами  $a_{\alpha\beta}$  дивергентного вида;

$$P(D) = \sum_{\substack{(\lambda, \alpha) \leq 1 \\ (\lambda, \beta) \leq 1}} (-1)^{|\beta|} D^\beta [a_{\alpha\beta} D^\alpha],$$

где  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $\lambda = 1:l = \left(\frac{1}{l_1}, \dots, \frac{1}{l_n}\right)$ ,  $(\lambda, \alpha) = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n$ .

Для функций  $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$  положим

$$P(u, v) = \sum_{\substack{(\lambda, \alpha)=1 \\ (\lambda, \beta)=1}} a_{\alpha\beta} D^\alpha u \cdot D^\beta v \, d\Omega.$$

$P(u, v)$  называется билинейной формой, соответствующей оператору  $P(D)$ .

Определение 1. Оператор  $P(D)$  называется полуэллиптическим, если соответствующая форма  $P(u, v)$  полуэллиптична, т. е. существует постоянная  $\kappa > 0$  такая, что имеет место неравенство

$$P(u, u) \geq \kappa \|u\|_{l/2}^2 \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega). \quad (6)$$

Пусть форма  $P(u, v)$  полуэллиптична и симметрична, т. е.  $P(u, v) = P(v, u) \quad \forall u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ . Тогда в  $C_0^\infty(\Omega)$  можно ввести скалярное произведение

$$(u, v)_P = P(u, v),$$

которое порождает норму

$$\|u\|_P = (u, u)_P^{1/2}. \quad (7)$$

Из неравенства (6) следует эквивалентность норм (7) и (4). Следовательно, пространство  $\dot{W}_2^l(\Omega)$  можно определить как замыкание множества функций  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  по норме (7), порожденной оператором  $P(D)$ . Тогда неравенство (6) будет верно и для всех  $u \in \dot{W}_2^l(\Omega)$ .

2°. Постановка задачи. В квадрате  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  рассматривается краевая задача (1), (2).

Умножив уравнение (1) скалярно в  $L_2(\Omega)$  на  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  и выполнив интегрирование по частям, получим интегральное тождество

$$L(u, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (8)$$

где через  $L(u, \varphi)$  обозначена билинейная форма

$$L(u, \varphi) = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) d\Omega.$$

Очевидно, что если тождество (8) имеет место для всех  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , то оно верно и для всех  $\varphi \in \dot{W}_2^{(1,2)}(\Omega)$ .

Определение 2. Пусть  $f \in L_2(\Omega)$ . Функцию  $u$  из  $\dot{W}_2^{(1,2)}(\Omega)$  назовем обобщенным решением задачи (1), (2), если она удовлетворяет соотношению (8) для всех  $\varphi \in \dot{W}_2^{(1,2)}(\Omega)$ .

Очевидно, что решение краевой задачи (1), (2) из  $W_2^{(2,4)}(\Omega) \cap \dot{W}_2^{(1,2)}(\Omega)$  является и обобщенным решением этой задачи. Можно доказать, что справедливо и обратное: если обобщенное решение задачи (1), (2) принадлежит  $W_2^{(2,4)}(\Omega) \cap \dot{W}_2^{(1,2)}(\Omega)$ , то оно является и решением этой задачи. Известно, что решение краевой задачи (1) (2) существует и принадлежит  $W_2^{(2,4)}(\Omega) \cap \dot{W}_2^{(1,2)}(\Omega)$ , причем имеет место неравенство

$$\|u\|_{(2,4),2} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)}^*. \quad (9)$$

Из неравенства (9) следует единственность обобщенного решения задачи (1), (2).

3°. Линейно-эрмитова интерполяция. Покроем  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  сеткой, образованной прямыми  $x = ih_x$ ,  $y = jh_y$ ,  $h_x = 1/N_x$ ,  $h_y = 1/N_y$ ,  $i = 0, 1, \dots, N_x$ ,  $j = 0, 1, \dots, N_y$  ( $h_x$ ,  $h_y$  — шаги сетки,  $N_x$ ,  $N_y$  — целые положительные числа). Положим  $\Pi_{ij} = \{(x, y) | ih_x \leq x \leq (i+1)h_x, jh_y \leq y \leq (j+1)h_y\}$ . Назовем  $\Pi_{ij}$  ячейками сетки. Обозначим через  $Q_h$  — множество узлов, принадлежащих  $\Omega$  (внутренних узлов), через  $r_h$  — множество узлов, принадлежащих  $\partial\Omega$  (граничных узлов). Положим  $\bar{Q}_h = Q_h \cup r_h$ .

Для описания линейно-эрмитовой интерполяции, рассмотрим две функции

$$\Phi^{(1)}(s, t) = \begin{cases} (1-|s|)(1+2|t|)(1-|t|)^2, & \text{при } |s| \leq 1, |t| \leq 1, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\Phi^{(2)}(s, t) = \begin{cases} (1-|s|)(1-|t|)^2 t, & \text{при } |s| \leq 1, |t| \leq 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Каждому узлу  $(x_i, y_j) \in \bar{Q}_h$  поставим в соответствие по две функции  $\psi_{ij}^{(1)}(x, y)$  и  $\psi_{ij}^{(2)}(x, y)$ , определенные следующим образом:

$$\psi_{ij}^{(1)}(x, y) = \Phi^{(1)}\left(\frac{x}{h_x} - i, \frac{y}{h_y} - j\right), \quad (10)$$

$$\psi_{ij}^{(2)}(x, y) = \Phi^{(2)}\left(\frac{x}{h_x} - i, \frac{y}{h_y} - j\right).$$

Легко проверить, что функции  $\psi_{ij}^{(k)}(x, y)$  ( $k = 1, 2$ ) принадлежат  $\dot{W}_2^{(1,2)}$ .

Пусть теперь в области  $\Omega$  задана функция  $u \in W_2^{(2,4)}(\Omega)$ . По теоремам вложения для анизотропных пространств Соболева функции и

\* Здесь и далее буквой  $C$  с индексами или без них будем обозначать положительные постоянные в неравенствах, причем одной и той же буквой часто будут обозначаться различные постоянные.



и  $u$ , эквивалентны непрерывным в  $\bar{\Omega}$  функциям. Исходя из этого, в каждом узле  $(x_i, y_j) \in \bar{Q}_h$  положим  $p_{ij} = u(x_i, y_j)$ ,  $q_{ij} = h_y u_y(x_i, y_j)$ .

Определение 4. Функцию  $\bar{u}(x, y)$  вида

$$\bar{u}(x, y) = \sum_{(x_i, y_j) \in Q_h} (p_{ij} \psi_{ij}^{(1)}(x, y) + q_{ij} \psi_{ij}^{(2)}(x, y))$$

назовем линейно-эрмитовым интерполянт функции  $u$  в  $\Omega$ .

Из определения функций  $\psi^{(k)}(s, t)$  ( $k = 1, 2$ ) следует, что

$$\bar{u}(x_i, y_j) = u(x_i, y_j), \quad \bar{u}_y(x_i, y_j) = u_y(x_i, y_j)$$

в каждом узле  $(x_i, y_j) \in \bar{Q}_h$ .

Множество функций  $\bar{w}(x, y)$ , представимых в виде

$$\bar{w}(x, y) = \sum_{(x_i, y_j) \in Q_h} (z_{ij} \psi_{ij}^{(1)}(x, y) + \beta_{ij} \psi_{ij}^{(2)}(x, y)),$$

где  $z_{ij}, \beta_{ij}$  — произвольные вещественные числа, образует в  $W_2^{(1,2)}(\Omega)$  конечномерное подпространство. Обозначим его через  $H_h$ . Функции  $\psi_{ij}^{(k)}(x, y)$  образуют в  $H_h$  базис. Назовем их базисными функциями линейно-эрмитовой интерполяции. Обозначим через  $\dot{H}_h$  множество линейно-эрмитовых функций, обращающихся в нуль вместе со своими производными по  $y$  в граничных узлах сетки. Ясно, что базис  $\dot{H}_h$  составляют лишь те  $\psi_{ij}^{(k)}(x, y)$ , которые соответствуют внутренним узлам сетки.

Имеет место

Теорема 2. Пусть  $u \in W_2^{(2,4)}(\Omega) \cap \dot{W}_2^{(1,2)}(\Omega)$ . Тогда

$$\|u - \bar{u}\|_{0,(1,2),\Omega} \leq C \{(h_x^4 + h_y^8)(h_x^{-2} + h_y^{-4})\}^{1/2} \cdot \|u\|_{(2,4),\Omega}, \quad (11)$$

где  $\bar{u}$  — линейно-эрмитов интерполянт функции  $u$  в  $\Omega$ .

Доказательство. Обозначим  $g = u - \bar{u}$ . Функция  $g$  удовлетворяет условиям

$$g(x_i, y_j) = 0 \quad \forall (x_i, y_j) \in \bar{Q}_h. \quad (12)$$

Так как  $\bar{u}(x, y)$  в каждой ячейке  $\Pi_{ij}$  является полиномом не выше первой степени по  $x$  и не выше третьей — по  $y$ , то в каждой ячейке  $\Pi_{ij}$  имеем: 1. Функция  $g \in W_2^{(2,4)}(\Pi_{ij})$  и 2.  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^4 g}{\partial y^4} = \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ .

В интеграле

$$\iint_{\Pi_{ij}} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)^2 \right] d\Pi_{ij}$$

сделаем замену переменных  $x = sh_x + x_i$ ,  $y = th_y + y_j$ . Тогда

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi_{ij}} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)^2 \right] d\Pi_{ij} &= h_x h_y \int_0^1 \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial s} \cdot h_x^{-1} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \cdot h_y^{-2} \right)^2 \right] ds dt \leq \\ &\leq h_x h_y (h_x^{-2} + h_y^{-4}) \int_0^1 \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \right)^2 \right] ds dt. \end{aligned}$$

Функция  $g(s, t)$  в квадрате  $S = \{0 < s, t < 1\}$  принадлежит  $W_2^{(2,4)}(S)$ , так что  $\|g\|_{(1,2)S} \leq C \|g\|_{(2,4)S}$ . Согласно теореме 1 и следствию из нее норму в  $W_2^{(2,4)}(S)$  можно определить по формуле (5). Тогда, учитывая условия (12), получим

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi_{ij}} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)^2 \right] d\Pi_{ij} &\leq C h_x h_y (h_x^{-2} + h_y^{-4}) \|g\|_{(2,4)S} \leq \\ &\leq C h_x h_y (h_x^{-2} + h_y^{-4}) \int_0^1 \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^4 g}{\partial t^4} \right)^2 \right] ds dt = \\ &= C h_x h_y (h_x^{-2} + h_y^{-4}) \int_0^1 \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right)^2 \right] ds dt. \end{aligned}$$

Вернемся к старым переменным  $(x, y)$ . Так как  $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = h_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = h_y^4 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ , то получим

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi_{ij}} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)^2 \right] d\Pi_{ij} &\leq \\ &\leq C (h_x^{-2} + h_y^{-4}) (h_x^4 + h_y^8) \iint_{\Pi_{ij}} \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)^2 \right] d\Pi_{ij}. \quad (13) \end{aligned}$$

Это неравенство имеет место для любой ячейки  $\Pi_{ij}$  с одной и той же постоянной  $C > 0$ . Суммируя неравенства (13) по всем  $\Pi_{ij}$ , образуя  $\bar{\Omega}$ , получим неравенство (11).

Теорема доказана.

4°. Построение проекционно-сеточно схемы. В качестве проекционно-сеточного алгоритма приближенного решения задачи (1), (2) выберем метод Галеркина.

Пусть для  $\Omega$  определена сетка. Будем считать, что внутренние узлы сетки перенумерованы в каком-то порядке. Обозначим через  $(x_k, y_k)$   $k$ -тый узел, а через  $\psi_k^{(i)}(x, y)$ ,  $i = 1, 2$ , функции вида (10), соответствующие узлу  $(x_k, y_k)$ .



В качестве координатных функций метода рассмотрим базисные функции линейно-эрмитовой интерполяции. Положим  $\varphi_k(x, y) = \psi_k^{(1)}(x, y)$  при  $k = 1, \dots, M$  и  $\varphi_k(x, y) = \psi_{k-M}^{(2)}(x, y)$  при  $k = M + 1, \dots, 2M$ , где  $M$  — число внутренних узлов.

Определение 5. Функцию  $\tilde{v}(x, y) \in \dot{H}_h$  вида

$$\tilde{v}(x, y) = \sum_{k=1}^{2M} v_k \varphi_k(x, y)$$

назовем приближенным решением задачи (1), (2), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$L(\tilde{v}, \tilde{\Phi}) = (f, \tilde{\Phi}) \quad (14)$$

для произвольной функции  $\tilde{\Phi} \in \dot{H}_h$ .

Систему сеточных уравнений для нахождения параметров  $v_k$ , определяющих функцию  $\tilde{v}(x, y)$ , запишем в виде

$$L(\tilde{v}, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, 2M$$

или в матричной форме

$$A \bar{v} = \bar{f}, \quad (15)$$

здесь  $\bar{v} = (v_1, \dots, v_{2M})$ ,  $\bar{f} = (f_1, \dots, f_{2M})$ ,  $f_i = (f, \varphi_i)$ ,  $A = (l_{ki})$ ,  $l_{ki} = L(\varphi_k, \varphi_i) = l_{ik}$ ,  $i, k = 1, \dots, 2M$ . При некоторой нумерации узлов сетки матрица системы (15) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ K_2 & K_3 \end{pmatrix},$$

где  $K_1, K_2, K_3$  — теплицевы, блочно-трехдиагональные матрицы размерности  $M \times M$  (причем каждый блок этих матриц, в свою очередь, есть трехдиагональная матрица размерности  $(N_x - 1) \times (N_x - 1)$ ). Для решения этой системы можно предложить модифицированный метод последовательной верхней релаксации (см., например, [6]). Из неравенства (6) следует положительная определенность матрицы  $A$ , а значит, и однозначная разрешимость системы (15).

Из полуэллиптичности формы  $L(u, \varphi)(x=1)$  и из неравенства Коши—Буняковского для приближенного решения  $\tilde{v}(x, y) \in \dot{H}_h \subset W_2^{(1,2)}(\Omega)$  имеем

$$\|\tilde{v}\|_{(1,2)\Omega}^2 \leq L(\tilde{v}, \tilde{v}) = (f, \tilde{v}) \leq$$

$$\leq \|f\|_{L_1(\Omega)} \cdot \|\tilde{v}\|_{L_1(\Omega)} \leq \|f\|_{L_1(\Omega)} \cdot \|\tilde{v}\|_{(1,2)\Omega}.$$

Отсюда

$$\|\tilde{v}\|_{(1,2)\Omega} \leq C \|f\|_{L_1(\Omega)}.$$

В силу последней оценки имеет место непрерывная зависимость от  $f$  и краевых данных (в нашем случае, нулевых).

5°. Оценка скорости сходимости. Как было отмечено, решение задачи (1), (2) существует и принадлежит  $W_2^{(2,4)}(\Omega) \cap \tilde{W}_2^{(1,2)}(\Omega)$ .

Из интегрального тождества (8) для обобщенного решения и тождества (14) для приближенного решения следует, что

$$L(u - \bar{v}, \varphi) = (u - \bar{v}, \varphi - \tilde{\Phi}) \quad \forall \varphi \in \tilde{W}_2^{(1,2)}(\Omega), \quad \forall \tilde{\Phi} \in \tilde{H}.$$

Полагая  $\varphi = u - \bar{v}$ ,  $\Phi = \tilde{u} - \bar{v}$ , где  $\tilde{u}$  — линейно-эрмитов интерполюнт функции  $u$  в  $\Omega$ , получим

$$L(u - \bar{v}, u - \bar{v}) = L(u - \bar{v}, u - \tilde{u}).$$

Тех как форма  $L(u, \varphi)$  полуэллиптическая, то из (6) и из неравенства Коши—Буняковского следует, что

$$\begin{aligned} \|u - \bar{v}\|_{0(1,2)\Omega}^2 &\leq L(u - \bar{v}, u - \bar{v}) = L(u - \bar{v}, u - \tilde{u}) \leq \\ &\leq \|u - \bar{v}\|_{0(1,2)\Omega} \leq \|u - \tilde{u}\|_{0(1,2)\Omega}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\|u - \bar{v}\|_{0(1,2)\Omega} \leq \|u - \tilde{u}\|_{0(1,2)\Omega}.$$

Пусть  $h > 0$ . Выберем шаги  $h_x$  и  $h_y$  так, чтобы  $h_x \sim h^2$ ,  $h_y \sim h$ , тогда из теоремы 2 получим

$$\|u - \tilde{u}\|_{0(1,2)\Omega} \leq C h^2 \|u\|_{(2,4)\Omega},$$

откуда следует искомая оценка точности

$$\|u - \bar{v}\|_{0(1,2)\Omega} \leq C h^2 \|u\|_{(2,4)\Omega}. \quad (16)$$

Пользуясь схемой получения оценки  $N$ -поперечника из [2], можно показать, что оценка скорости сходимости (16) неулучшаема по порядку.

6. Обусловленность матрицы проекционно-сеточной схемы. Оценим спектральное число обусловленности  $P(A)$  матрицы  $A$  системы (15), которое определяется следующим образом:

$$P(A) = \lambda_{\max}/\lambda_{\min},$$

где  $\lambda_{\max}$  и  $\lambda_{\min}$  — наибольшее и наименьшее собственные числа матрицы  $A$ .

$\lambda_{\max}$  и  $\lambda_{\min}$  определяются с помощью отношений Рэлея:

$$\lambda_{\max} = \max_{\substack{\bar{v} \neq 0 \\ \bar{v} \in R^{2M}}} \frac{(A \bar{v}, \bar{v})}{(\bar{v}, \bar{v})}, \quad \lambda_{\min} = \min_{\substack{\bar{v} \neq 0 \\ \bar{v} \in R^{2M}}} \frac{(A \bar{v}, \bar{v})}{(\bar{v}, \bar{v})},$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $R^{2M}$ .

Прежде чем приступить к оценке  $P(A)$ , получим некоторые неравенства для линейно-эрмитовой интерполяции.

Пусть  $w \in W_2^{(2,4)}(\Omega) \cap \tilde{W}_2^{(1,2)}(\Omega)$ ,  $\bar{w}$  — линейно-эрмитов интерполюнт функции  $w$  в  $\Omega$ . Обозначим через  $\bar{w}$  вектор, координатами которого служат параметры  $a_j^{(1)}$ ,  $a_j^{(2)}$ , где



$$\alpha_{ij}^{(1)} = w(x_i, y_j), \quad \alpha_{ij}^{(2)} = w_y(x_i, y_j) \quad ((x_i, y_j) \in Q_h).$$

**Лемма.** Для линейно-эрмитовой интерполяции имеют место неравенства

$$\|\tilde{w}\|_{0,(1,2)} \leq C_1 (h_x^{-1} h_y + h_x h_y^{-3})^{1/2} \cdot (\bar{w}, \bar{w})^{1/2}, \quad (17)$$

$$\|\tilde{w}\|_{0,(1,2)} \geq C_2 (h_x h_y)^{1/2} \cdot (\bar{w}, \bar{w})^{1/2}. \quad (18)$$

Доказательство леммы аналогично доказательству соответствующих неравенств для эрмитова восполнения (см. [2]).

Теперь имеем  $L(\bar{v}, \bar{v}) = (A \bar{v}, \bar{v})$ . Из неравенств (17), (18) следует, что

$$(A \bar{v}, \bar{v}) \geq C h_x h_y (\bar{v}, \bar{v}).$$

$$(A \bar{v}, \bar{v}) \leq C h_x^{-1} h_y + h_x h_y^{-3} (\bar{v}, \bar{v}).$$

Так как  $h_x \sim h^2$ ,  $h_y \sim h$ , то получим

$$\lambda_{\min} \geq C_1 h^3, \quad \lambda_{\max} \leq C_2 h^{-1}.$$

Отсюда следует искомая оценка числа обусловленности

$$P(A) = O(h^{-4}).$$

Ереванский государственный  
университет

Поступила 12.VII. 1986

Ն. Վ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, Մոդելային կիսաէլիպտիկ հավասարման համար առաջին եզրային խնդրի լուծումը պրոյեկտ-ցանցային մեթոդով (ամփոփում)

Հոդվածում դիտարկվում է հետևյալ եզրային խնդրի մոդելային կիսաէլիպտիկ հավասարման համար  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  տիրույթում

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f,$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_y(x, 0) = u_y(x, 1) = 0,$$

որտեղ  $f \in L_2(\Omega)$ : Այդ խնդրի մոտավոր լուծման համար կառուցվում է պրոյեկտ-ցանցային սխեմա գծային-էրմիտյան ինտերպոլյացիայի հիման վրա: Ցույց է տրվում, որ այդ սխեման ունի սահմանային ճշգրտություն և  $O(h^{-4})$  կարգի պայմանավորվածություն:

N. V. HOVHANNESIAN. Solution of the first boundary value problem for model semielliptic equation by the project Grid method (summary)

The paper considers the boundary value problem for model semielliptic equation:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f,$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_y(x, 0) = u_y(x, 1) = 0,$$

where  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $f \in L_2(\Omega)$ . To approximate solve of this problem, the project grid scheme based on linear Hermite interpolation is constructed. This scheme has optimal accuracy and condition of order  $O(h^{-4})$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Марчук, В. И. Азошков. Введение в проекционно-сеточные методы, М., Наука, 1981.
2. Л. А. Оганесян, Л. А. Руховцу. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, Ереван, Изд-во АН Арм.ССР, 1979.
3. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., Наука, 1975.
4. С. В. Успенский, Г. В. Демиденко, В. Г. Перепелкин. Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям, Новосибирск, Наука, 1984.
5. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 5, М., Физматгиз, 1959.
6. В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. Матрицы и вычисления, М., Наука, 1984.
7. А. Kolmogoroff. Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionen-klasse, Math. Ann., 1936, 37.



УДК 517.51

К. С. КАЗАРЯН, А. С. САРГСЯН

РАСХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ РЯДОВ ФУРЬЕ  
ПО СИСТЕМЕ ЧИСЕЛЬСКОГО

1°. Введение. В настоящей работе получены оценки снизу для функций системы Франклина и с их помощью доказываются два результата, касающихся системы Чисельского [1].

Система Франклина определяется с помощью функций Шаудера:

$$\varphi_0(t) = 1; \varphi_n(t) = \int_0^t \chi_n(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots,$$

где  $\chi_n (n = 1, 2, \dots)$  — функции системы Хаара (см. напр., [2]). Система Франклина получается из системы Шаудера с помощью ортогонализации методом Шмидта:

$$f_n(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_{in} \varphi_i(t), \quad (1)$$

где  $\lambda_{in} > 0, n = 1, 2, \dots$  (см., напр., [22]).

Опираясь на результаты З. Чисельского ([3], [4]), мы доказываем следующую теорему.

**Теорема 1.** Пусть  $n = 2^m + v, m \geq 2, 1 \leq v \leq 2^m$  и точки  $t_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$  определяются условиями (4). Тогда для функции системы Франклина справедливы следующие оценки:

$$1) \quad |f_{n-1}(t)| + |f_n(t)| > \alpha \cdot 2^{m/2}$$

при  $t \in [t_{2^m-3}, t_{2^m-3} + 2^{-m}]$  и  $2 \leq v \leq 2^m - 1$ ;

$$2) \quad |f_{2^{m+1}}(t)| + |f_{2^{m+2}}(t)| > \alpha \cdot 2^{m/2} \quad \text{при } t \in \left[0, \frac{1}{2^{m+1}}\right];$$

$$3) \quad |f_{2^{m+1}-2}(t)| + |f_{2^{m+1}-3}(t)| > \alpha \cdot 2^{m/2} \quad \text{при } t \in \left[1 - \frac{1}{2^{m+1}}, 1\right],$$

где  $\alpha > 0$  — абсолютная константа.

Используя эту теорему, мы докажем два факта, относящихся к некоторым равномерно ограниченными полным ортонормированным системам (ПОНС), которые получаются с помощью системы Франклина.

**Определение 1.** Равномерно ограниченную ПОНС  $\{\omega_n\}_{n=0}^\infty$  будем называть системой типа  $(F-W)$ , если функции  $\{\omega_n\}_{n=2^{m+1}}^{2^{m+1}+1}$  можно получить ортогональным преобразованием набора функций Франклина  $\{f_n\}_{n=2^{m+1}}^{2^{m+1}+1}, m = 0, 1, \dots$ .

Система Чисельского  $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$  является системой типа  $(F-W)$ , для которой соответствующие ортогональные преобразования определяются с помощью матриц Уолша—Пэли (см. [1]).

Первый вопрос, который мы рассматриваем для систем типа  $(F-W)$  это вопрос о возможности мультипликативного дополнения до базисов  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$  их некоторых подсистем  $P$ . Болсом и Г. Поллардом [5] была доказана следующая

**Теорема А.** Пусть  $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$  — некоторая ПОНС на отрезке  $[a, b]$ . Тогда для любого натурального числа  $N$  существует ограниченная функция  $m(x)$  такая, что система  $\{m(x) g_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$  является полной в пространстве  $L^2_{[a, b]}$ .

В дальнейшем Дж. Прайс и Р. Зинк [6] дали описание систем функций, обладающих таким свойством.

В работе Бен—Ами Брауна [7] было доказано, что если система  $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  является базисом пространства  $L^p_{[a, b]}$ ,  $1 \leq p < \infty$ , то для любого натурального числа  $N$  можно найти такую ограниченную функцию  $m(x)$ , чтобы для любой функции  $f \in L^p_{[a, b]}$  существовал ряд  $\sum_{k=N+1}^{\infty} c_k m(x) \cdot g_k(x)$ , который в норме  $L^p_{[a, b]}$  сходиллся бы к  $f$ .

В работах [8], [9], [10] был исследован вопрос о возможности мультипликативного дополнения до базиса в  $L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$  некоторых минимальных систем. В частности, была доказана следующая (см. [8 [9]).

**Теорема Б.** Пусть  $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — равномерно ограниченная ПОНС на отрезке  $[a, b]$ . Пусть, далее, система  $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  обладает свойством (А), т. е. существует положительное число  $\alpha > 0$  такое, что для любого натурального числа  $N_1$  найдется такое натуральное число  $N_2$ , что имеет место равенство

$$\left| \bigcup_{k=N_1}^{N_2} E_k \right| = b - a,$$

где

$$E_k = \{x \in [a, b] : |g_k(x)| \geq \alpha\}.$$

Тогда для любого натурального числа  $N$  и измеримой функции  $m(x)$  система  $\{m(x) g_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$  не является базисом ни в одном из пространств  $L^p_{[a, b]}$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

В работе [11] была построена равномерно ограниченная ПОНС, из которой можно таким образом удалить конечный набор функций, чтобы оставшуюся систему функций умножением на некоторую ограниченную функцию превратить в базис пространств  $L^p_{[a, 1]}$ ,  $1 < p < \infty$ . Это показывает, что теорема Б не имеет места, если снять требование, чтобы система  $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$  удовлетворяла условию (А). Отметим, что в пространстве  $L^1$  теорема Б справедлива без требования о выполнении условия (А). Это следует из результатов работ [12], [13]; [14].



в которых независимо было доказано, в частности, что равномерно ограниченная нормированная система не является базисом ни в одном весовом пространстве  $L(\rho)$ .

Из теоремы 1 легко можно вывести, что для систем типа  $(F - W)$  выполняется условие (A). Действительно, если  $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$  является системой типа  $(F - W)$ , тогда из теоремы 1 и определения 1 очевидно имеем:

$$\sum_{n=2^{m-1}}^{2^m-1} \omega_n^2(x) \geq \frac{1}{2} x^2 \cdot 2^m, \quad x \in [0, 1]. \quad (2)$$

Таким образом, применяя теорему Б, получаем, что справедлива

**Теорема 2.** Пусть  $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$  является системой типа  $(F - W)$ . Тогда, удаляя любой конечный набор функций из этой системы, оставшуюся систему функций невозможно умножением на некоторую измеримую функцию  $m(x)$  превратить в базис некоторого пространства  $L_{[0,1]}^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

Следующий вопрос, в изучении которого мы используем теорему 1, это вопрос о существовании расходящегося почти всюду ряда Фурье для систем типа  $(F - W)$ . В работе [15] можно найти обзор последних результатов для ортонормальных сплайн систем.

Историю вопроса, касающегося расходящихся рядов Фурье, мы подробно не будем обсуждать. С обстоятельным изложением этого вопроса можно познакомиться по статье П. А. Ульянова [16]. Необходимо отметить, что первый пример расходящегося почти всюду ряда Фурье по тригонометрической системе был построен А. Н. Колмогоровым [17]. По всей видимости важную роль для дальнейших исследований сигнала также работа И. Стейна [18].

Общую теорему о расходимости рядов Фурье по произвольной равномерно ограниченной ОНС на множестве положительной меры доказал С. В. Бочкарев [19]. В дальнейшем мы используем теорему С. В. Бочкарева в некоторой видоизмененной форме, поэтому приведем ее в нужной нам формулировке.

**Теорема В.** Пусть  $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$  — равномерно ограниченная ОНС на отрезке  $[0, 1]$ . Пусть, далее,  $T$  — некоторое множество положительной меры такое, что выполняется следующее условие: существует последовательность натуральных чисел  $\{N_j\}_{j=1}^{\infty}$ ,  $N_1 < N_2 < \dots$  такая, что для любых  $x \in T$  и  $N > 0$  можно найти число  $m > N$ , чтобы

$$\sum_{k=mN_j}^{(m+1)N_j-1} g_k^2(x) \geq \beta \cdot N_j,$$

где  $\beta > 0$  некоторая константа.

Тогда существует функция  $f \in L_{[0,1]}$  такая, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k(x)$ , где  $a_k = \int_0^1 f(t) g_k(t) dt$  неограниченно расходится на некотором множестве  $T_1 \subset T$ ,  $|T_1| > 0$ .

В справедливости такой формулировки теоремы Бочкарева можно убедиться, внимательно проследив за ходом доказательства этой теоремы. Отметим, что аналог теоремы Колмогорова для ПОНС не имеет места, так как для любого множества  $E \subset [0, 1]$ , имеющего непустую положительную меру, существует равномерно ограниченная ПОНС на отрезке  $[0, 1]$  такая, что ряд Фурье любой функций  $f \in L_{[0,1]}$  почти всюду сходится на множестве  $E$  (см. [20]).

Справедлива следующая

**Теорема 3.** Пусть  $\{\omega_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  — ПОНС типа  $(F-W)$ . Существует интегрируемая на отрезке  $[0, 1]$  функция  $f$  такая, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \omega_k(x), \text{ где } a_k(f) = \int_0^1 f(t) \omega_k(t) dt, \quad (3)$$

неограниченно расходится почти всюду на отрезке  $[0, 1]$ .

2°. Предварительные результаты. Используем обозначения работы [3]. Пусть  $S_n[f]$  —  $n$ -я частичная сумма разложения функций по системе Франклина и

$$S_{n-1}[\sqrt{2^m} \varphi_n] = \psi,$$

где  $n = 2^m + \nu$ ,  $m = 0, 1, \dots$ ,  $1 \leq \nu \leq 2^m$ , а  $\varphi_n(t)$  —  $n$ -я функция Шаудера.

Обозначим  $\eta_i = \psi(t_i)$ , где точки  $t_i$  определяются следующим образом:

$$t_i = \begin{cases} \frac{i}{2^{m+1}}, & i = 0, 1, \dots, 2\nu - 2, \\ \frac{i - \nu + 1}{2^m}, & i = 2\nu - 1, 2\nu, \dots, n - 1. \end{cases} \quad (4)$$

где  $n = 2^m + \nu$ ,  $m = 0, 1, \dots$ ;  $1 \leq \nu \leq 2^m$ .

Для  $\eta_i$  ( $0 \leq i \leq n - 1$ ) получены следующие неравенства (см. [3], стр. 147):

$$\begin{aligned} \eta_{2\nu-2} &> -\eta_{2\nu-3} > \dots > -\eta_1 > \eta_0 > 0, \\ \eta_{2\nu-1} &> -\eta_{2\nu} > \dots > (-1)^{n-1} \eta_{n-2} > (-1)^n \eta_{n-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим еще одно разбиение отрезка  $[0, 1]$  с помощью точек

$$\tau_i = \begin{cases} \frac{i}{2^{m+1}}, & i = 0, 1, \dots, 2\nu, \\ \frac{i - \nu}{2^m}, & i = 2\nu + 1, \dots, n, \end{cases} \quad (6)$$

где  $n = 2^m + \nu$ ,  $m = 0, 1, \dots$ ;  $1 \leq \nu \leq 2^m$ .

В точках  $\tau_i$ , определяемых в форме (6), значения  $n$ -ой функции Франклина с помощью  $\eta_i$  определяются так (см. [4], стр. 294)



$$f_n(\tau_k) = \begin{cases} -\eta_k \lambda_{nn} 2^{-m/2}, & k = 0, 1, \dots, 2\nu - 2 \\ \eta_k \lambda_{nn} 2^{-m/2}, & k = 2\nu - 1 \\ -\eta_{k-1} \lambda_{nn} 2^{-m/2}, & k = 2\nu, \dots, n, \end{cases} \quad (7)$$

где  $\eta = \frac{1}{2}(1 - \eta_{2\nu-2} - \eta_{2\nu-1})$ , а  $\lambda_{nn}$  определяется из равенства (1).

Для  $\eta_k$ ,  $0 \leq k \leq n-1$  получены также следующие формулы (см. [4], стр. 294–295)

$$\left. \begin{aligned} \eta_k &= (-1)^k \frac{\operatorname{ch} ak}{\operatorname{ch} a(2\nu-2)} \eta_{2\nu-2}, & 0 \leq k \leq 2\nu-3, \\ \eta_k &= (-1)^{k+1} \frac{\operatorname{ch} a(n-1-k)}{\operatorname{ch} a(n-2\nu)} \eta_{2\nu-1}, & k = 2\nu, \dots, n-1, \\ &1 < \nu < 2^m \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\eta_{k-1} = (-1)^k \frac{\operatorname{ch} a(n-k)}{\operatorname{ch} a(n-2)} \eta_1, \quad 2 \leq k \leq n, \quad \nu = 1; \quad (8')$$

$$\eta_k = (-1)^k \frac{\operatorname{ch} ak}{\operatorname{ch} a(n-2)} \eta_{n-2}, \quad k = 0, \dots, n-2, \quad \nu = 2^m. \quad (8'')$$

В формулах (8)–(8'')  $a$  – положительное решение уравнения  $\operatorname{ch} a = 2$ .

Теорема Г. (см. [4], стр. 293). Пусть  $n = 2^m + \nu$ ,  $m \geq 0$ ,  $1 \leq \nu \leq 2^m$  и  $\tau_k$  определяются из условия (6). Тогда имеют место следующие оценки:

$$c_1 \cdot 2^{m/2} e^{-a|k-(2\nu-1)|} < (-1)^{k+1} f_n(\tau_k) < c_2 \cdot 2^{m/2} e^{-a|k-(2\nu-1)|},$$

$$\text{где } e'' = 2 + \sqrt{3}, \quad c_1 = \frac{2 + \sqrt{3}}{3\sqrt{3}}, \quad c_2 = 4 \cdot \sqrt{3}(2 + \sqrt{3}).$$

Из (5) и (7) следует, что

$$\left. \begin{aligned} -f_n(\tau_{2\nu-2}) &> f_n(\tau_{2\nu-3}) > \dots > f_n(\tau_1) > -f_n(\tau_0) \\ -f_n(\tau_{2\nu-1}) &> f_n(\tau_{2\nu}) > \dots > (-1)^{n-1} f_n(\tau_{n-1}) > (-1)^{n-1} f_n(\tau_n) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Лемма. (см. [3], стр. 148). Абсолютный максимум  $n$ -ой функции Фраклина определяется следующим образом:

$$\|f_n\| = \begin{cases} -f_{2^{m+\nu}}(0), & \nu = 1, \\ f_{2^{m+\nu}}\left(\frac{2\nu-1}{2^{m+1}}\right), & 1 < \nu < 2^m \\ -f_{2^{m+\nu}}(1), & \nu = 2^m \end{cases} \quad (10)$$

3°. Доказательство теорем 1 и 3. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим три случая: 1) когда  $1 < \nu < 2^m$ ; 2) когда  $\nu = 2^m$ ; 3) когда  $\nu = 1$ .

Предположим, что  $1 < \nu < 2^m$ . Оценим отношение

$$c_*^{(n)} = \frac{|f_n(t_{2\nu-3})|}{|f_n(t_{2\nu-2})|} \quad (11)$$

Из (7) и (8) легко получаем, что

$$c_v^{(n)} = \frac{|\gamma_{2v-3}|}{|\gamma_{2v-2}|} = \frac{\operatorname{ch} \alpha (2v-3)}{\operatorname{ch} \alpha (2v-2)},$$

где  $\operatorname{ch} \alpha = 2$  и  $\alpha > 0$ . Откуда сразу получаем, что

$$e^{-\alpha} < c_v^{(n)} \leq 2e^{-\alpha} = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}. \quad (12)$$

Из линейности функции  $f_n(t)$  на отрезке  $[t_{2v-3}, t_{2v-2}]$  и (9)–(11) имеем, что

$$f_n(t) = \frac{f_n(t_{2v-2}) + c_v^{(n)} f_n(t_{2v-3})}{t_{2v-2} - t_{2v-3}} (t - t_{2v-3}) - c_v^{(n)} f_n(t_{2v-2}). \quad (13)$$

Из равенства (13) найдем точку  $t_0^{(v)} \in [t_{2v-3}, t_{2v-2}]$ , где  $f_n(t_0^{(v)}) = 0$ . Очевидно, что

$$t_0^{(v)} = t_{2v-3} + \frac{c_v^{(n)} 2^{-m-1}}{c_v^{(n)} + 1}. \quad (14)$$

Из условия (9) получаем, что для функций  $f_{n-1}$  справедливо неравенство

$$|f_{n-1}(t_{2v-3})| > |f_{n-1}(t_{2v-2})|.$$

Следовательно, для точки  $t_1^{(v)} \in [t_{2v-3}, t_{2v-2}]$ , где  $f_{n-1}(t_1^{(v)}) = 0$ , выполняется условие

$$t_1^{(v)} > \frac{t_{2v-3} + t_{2v-2}}{2}. \quad (15)$$

Из (14) и (15) сразу получаем, что

$$t_1^{(v)} - t_0^{(v)} > \frac{t_{2v-3} + t_{2v-2}}{2} - t_{2v-3} - \frac{c_v^{(n)} 2^{-m-1}}{c_v^{(n)} + 1} > \frac{1}{7} \cdot 2^{-m-1}. \quad (16)$$

Отсюда и из линейности функции  $f_{n-1}$  на отрезке  $[t_{2v-3}, t_{2v-2}]$  легко получаем, что

$$\left| f_{n-1} \left( \frac{t_1^{(v)} + t_0^{(v)}}{2} \right) \right| > \frac{1}{14} |f_{n-1}(t_{2v-3})|. \quad (17)$$

Аналогичным образом, используя условия (16), получаем

$$\left| f_n \left( \frac{t_1^{(v)} + t_0^{(v)}}{2} \right) \right| > \frac{1}{14} |f_n(t_{2v-2})|. \quad (18)$$

Из (17) и (18) непосредственно следует, что

$$|f_n(t)| + |f_{n-1}(t)| > \frac{1}{14} \min [|f_{n-1}(t_{2v-3})|, |f_n(t_{2v-2})|] \quad (19)$$

при  $t \in [t_{2v-3}, t_{2v-2}]$ .

Перейдем к получению подобной оценки на отрезке  $[t_{2v-2}, t']$ , где  $t' = \frac{1}{2} (t_{2v-2} + t_{2v-1})$ . Из условия (10) следует, что график функции  $f_n$  на отрезке  $[t_{2v-2}, t']$  пересекается с осью  $Ot$  левее центра этого



отрезка. С другой стороны, из условия (9) очевидно, что функция  $f_{n-1}$  на отрезке  $[t_{2^{v-2}}, t_v]$  не равняется нулю. Следовательно

$$\begin{aligned} & |f_{n-1}(t)| + |f_n(t)| \geq \\ & \geq \min[|f_{n-1}(t_{2^{v-2}} + 3 \cdot 2^{-m-3})|, |f_n(t_{2^{v-2}} + 3 \cdot 2^{-3-m})|] \geq \\ & \geq \min\left[\frac{1}{8} |f_{n-1}(t_{2^{v-2}})|, \frac{1}{4} |f_n(t_v)|\right] \end{aligned} \quad (20)$$

при  $t \in [t_{2^{v-2}}, t_v]$ .

Таким образом, из (19) и (20) получаем, что

$$|f_{n-1}(t)| + |f_n(t)| > \beta \cdot 2^{m/2} \quad (21)$$

при  $t \in [t_{2^{v-3}}, t_{2^{v-3}} + 2^{-m}]$ ,  $n = 2^m + v$ ,  $m = 0, 1, \dots$ ,  $v = 2, 3, \dots, 2^m - 1$ ;  $\beta = \frac{1}{84}$  и точка  $t_{2^{v-3}}$  определяется из условия (4).

Рассмотрим теперь случай, когда  $t \in \left[1 - \frac{1}{2^{m+1}}, 1\right]$  и оценим снизу сумму  $|f_{2^{m+1}-2}(t)| + |f_{2^{m+1}-3}(t)|$ .

Пусть

$$t_2^{(m)} \in \left[1 - \frac{1}{2^{m+1}}, 1\right], f_{2^{m+1}-2}(t_2^{(m)}) = 0$$

и

$$t_3^{(m)} \in \left[1 - \frac{1}{2^{m+1}}, 1\right], f_{2^{m+1}-3}(t_3^{(m)}) = 0.$$

Тогда подобным рассуждением, как и при доказательстве условия (14), мы уже конкретно получаем

$$t_2^{(m)} = 1 - \frac{1}{3} \cdot 2^{-m}, t_3^{(m)} = 1 - \frac{1}{8} 2^{-m}.$$

Отсюда, как и выше, выводим

$$\begin{aligned} & |f_{2^{m+1}-2}(t)| + |f_{2^{m+1}-3}(t)| > \\ & > \min\left[\frac{5}{16} |f_{2^{m+1}-2}(1)|, \frac{5}{42} |f_{2^{m+1}-3}\left(1 - \frac{1}{2^m}\right)|\right], \end{aligned}$$

при  $t \in \left[1 - \frac{1}{2^m}, 1\right]$ .

Таким образом, из условия (8) имеем

$$|f_{2^{m+1}-2}(t)| + |f_{2^{m+1}-3}(t)| > \beta_1 \cdot 2^{m/2}$$

при  $t \in \left[1 - \frac{1}{2^{m+1}}, 1\right]$ , где  $\beta_1 = \frac{1}{189}$ ,  $n = 2^{m+1}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ .

И, наконец, рассмотрим случай, когда  $t \in [0, 1/2^{m+1}]$  и оценим сумму  $|f_{2^{m+1}}(t)| + |f_{2^{m+2}}(t)|$ .

Учитывая, что функция  $f_{2^{m+1}}(t)$  достигает своего наибольшего значения в точке  $t=0$ , а функция  $f_{2^{m+2}}(t)$  — в точке  $t = \frac{3}{2^{m+1}}$ , то подобным рассуждением, как и выше, получаем следующую оценку:

$$|f_{2^{m+1}}(t)| + |f_{2^{m+2}}(t)| > \beta_2 \cdot 2^{m/2} \quad \text{при } t \in \left[0, \frac{1}{2^{m+1}}\right],$$

$$\text{где } \beta_2 = \frac{1}{168}.$$

Доказательство теоремы 3. Предположим, что для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует интегрируемая функция  $f$ ,  $\|f\|_1 = 1$  такая, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) \omega_k(t)$$

расходится на некотором множестве  $E_\varepsilon$ ,  $|E_\varepsilon| > 1 - \varepsilon$ . Из этого предположения легко можно вывести, что существует функция  $f \in L_{[0,1]}$  такая, что ряд (22) неограниченно расходится на отрезке  $[0, 1]$ . Действительно, отсюда с помощью стандартных рассуждений получаем, что существуют функции

$$P_k(t) = \sum_{j=n_k}^{m_k} a_j \omega_j(t), \quad k=1, 2, \dots,$$

где  $n_k < m_k < n_{k+1}$ , такие, что  $\|P_k\| < \frac{1}{2^k}$  и

$$\max_{n_k < l < p < m_k} \left| \sum_{j=l}^p a_j \omega_j(t) \right| > k, \quad t \in E_k, \quad |E_k| > 1 - 2^{-k}.$$

Откуда очевидно, что для функции

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t)$$

выполняется утверждение теоремы 3.

Если наше предположение не имело бы места, тогда из теоремы Сакса (см. [21], стр. 36) получили бы, что существует множество  $T \subset [0, 1]$  такое, что для любой функции  $\varphi \in L_{[0,1]}$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n a_k(\varphi) \omega_k(t) \right| < \infty \quad \text{п. в. на } T,$$

и для любой функции  $\varphi \in M \subset L_{[0,1]}$ , где  $M$  — множество второй категории в пространстве  $L_{[0,1]}$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n a_k(\varphi) \omega_k(t) \right| = +\infty \quad \text{п. в. на } T^c,$$

где  $T^c = [0, 1] \setminus T$ .

Если  $|T| > 0$ , то отсюда, из неравенства (2) и теоремы В приходим к противоречию.

Теорема 3 доказана.

Институт математики;  
АН Армянской ССР,  
ВЦ НПО ММП Арм.ССР

Поступила 2. XII. 1987



Ղ. Ս. ՂԱԶԱՐԻԱՆ, Ա. Ս. ՍԱՐԳՍԻԱՆ. Զինելիկու սխառմով Ֆուրյէի շարքերի ճամաւրյա ամ-  
նուրեմ տաւամիտութիւնը (ամփոփում)

Զրանկիւնի սխառմի ֆունկցիաների համար ստացվել են ներքից զնահատականներ, որոնց  
օգնութեամբ ապացուցվում է, որ որոշ հավասարաչափ սահմանափակ օրթոնորմաւորված սխ-  
առմաների համար զոյութեան ունեն համարյա ամենուրեք տարամետ Ֆուրյէի շարքեր: Որպես  
հեղինակներից մեկի նախկինում ապացուցված թեորեմի հետեանց ստացվում է նաև, որ այդ  
սխառմաներից վերջավոր թվով ֆունկցիաներ հեռացնելուց հետո մնացած սխառմը մուտի-  
պլիկատիվ եղանակով հնարավոր չէ  $L^p_{[0,1]}$ ,  $1 < p < \infty$  տարածութեաններում դարձնել բազիս:

K. S. KAZARIAN, A. S. SARGISIAN. *Divergence of almost everywhere*  
*Fourier—Ciesielski system (summary)*

It this paper estimates from below for the Franklin functions are obtained—  
With the help of these estimates, it is proved, that for some uniformly bounded com-  
plete orthonormal spline systems (included the Ciesielski system), there exist Fourier  
series diverging almost everywhere. As a consequence of a theorem proved earlier by  
one of the authors, it follows, that after removing a finite number of functions from  
these systems it is impossible multiplicatively to complete the remaining system up  
to the basis in  $L^p_{[0,1]}$ ,  $1 < p < \infty$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Z. Ciesielski. A bounded orthonormal system of polygonals, *Studia Math.*, 1968, 31, 339—346.
2. Г. Алексич. Проблемы сходимости ортогональных рядов, М., 1959.
3. Z. Ciesielski. Properties of the orthonormal Franklin system, *Studia Math.*, 1963, 23, 141—157.
4. Z. Ciesielski. Properties of the orthonormal Franklin system, *Studia Math.*, 1966, 27, 289—323.
5. R. P. Boas, H. Pollard. The multiplicative completion of sets functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1948, 54, 518—522.
6. J. J. Price, R. E. Zink. On sets of functions that can be multiplicatively completed, *Ann. of Math.*, 1965, 82, 139—145.
7. Ben—Ami Braun. On the multiplicative completion of certain basic sequences in  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$ , *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1975, 176.
8. К. С. Казарян. О мультипликативном дополнении некоторых неполных ортонормированных систем до базисов в  $L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , *Analysis Math.*, 1978, 4, 37—52.
9. К. С. Казарян. О мультипликативном дополнении некоторых систем, *Изв. АН Арм.ССР, сер. матем.*, XIII, № 4, 1978, 315—351.
10. K. S. Kazarian. On bases and unconditional bases in the spaces  $L^p(d\mu)$ ,  $1 < p < \infty$ , *Studia Math.*, 1982, 71, 227—249.
11. К. С. Казарян. Мультипликативное дополнение до базисов в  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$  равномерно ограниченных ортонормированных систем, *Изв. АН Арм.ССР, сер. матем.*, XVIII, № 5, 1983, 344—361.
12. К. С. Казарян. Логарифмический рост средних арифметических от сумм функций Лебега ограниченных биортонормальных систем, *ДАН Арм.ССР*, 1979, 69, 140—145.
13. S. Kwapien, S. J. Szarek. Estimation of Lebesgue functions of biorthogonal systems with application to non existence of certain bases, *Studia Math.*, 1979, 66, 185—200.
14. А. С. Кранцберг. О системах сходимости в  $C$  и базисах в  $L^p$ , *Мат. заметки*, 1979, 26, 183—200.

15. Z. Ciesielski. Equivalence, unconditionality and convergence a. e. of the spline bases in  $L_p$  spaces, App. Theory., Banach Center Publ., 1979, 4, 55—68.  
119: 3, 278—294.  
51—90.
17. A. Kolmogoroff. Une serie de Fourier—Lebesgue divergente presque partout Fund, Math., 1923, 4, 324—328.
18. E. M. Stein. On limits of sequences of operators, Ann. Math., 1961, 74, 140—170.
19. С. В. Бочкарев. Расходящийся на множестве положительной меры ряд Фурье для произвольной ограниченной ортонормированной системы, Мат. сб., 1975, 98, 436—449.
20. К. С. Казарян. О некоторых вопросах теории ортогональных рядов, Мат. сб., 1982, 119: 3, 278—294.
21. С. Качмаж, Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов, М., 1958.
22. Б. С. Кашин, А. А. Саакян. Ортогональные ряды, М., Наука, 1984.



КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.21

А. В. КАКОСЯН

ОБ ОЦЕНКЕ БЛИЗОСТИ ДВУМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ  
С МОНОТОННО ВОЗРАСТАЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ  
ИНТЕНСИВНОСТИ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАРШАЛЛА-ОЛКИНА

Хорошо известна значительная роль, которую играют одномерные распределения с монотонно возрастающей функцией интенсивности (ВФИ-распределения) в математической теории надежности (см. [1]). При этом существенный интерес представляет сравнение ВФИ-распределения с показательным. В [2] и [3] приведены оценки близости ВФИ-распределения к показательному, выраженные в терминах первого момента и значения плотности распределения в нуле. Однако для теории надежности весьма важным является рассмотрение многомерного случая, в котором роль показательного распределения переходит к распределению Маршалла—Олкина (см. [4]).

Ниже мы докажем неравенство, являющееся аналогом утверждения [3], ограничившись, для простоты изложения, двумерным случаем.

Как известно (см., например, [4]) распределение  $F$  называется двумерным с возрастающей функцией интенсивности (кратко ВФИ-распределением), если

$$\frac{\bar{F}_1(x_1 + t)}{\bar{F}_1(x_1)}, \frac{\bar{F}_2(x_2 + t)}{\bar{F}_2(x_2)}, \frac{\bar{F}(x_1 + t, x_2 + t)}{\bar{F}(x_1, x_2)},$$

являются невозрастающими функциями по каждой из переменных  $x_1, x_2$  при любом фиксированном  $t > 0$ . Здесь  $F_i (i = 1, 2)$  — маргинальные распределения, соответствующие  $F$ , а  $\bar{F}(x_1, x_2) = P\{X_1 > x_1, X_2 > x_2\}$ , где  $(X_1, X_2)$  — двумерная случайная величина с функцией распределения  $F$ . Поскольку координаты  $X_1, X_2$  рассматриваемой двумерной случайной величины имеют в приложениях смысл времени безотказной работы некоторого устройства, то мы будем считать, что  $X_i > 0$  ( $i = 1, 2$ ), т.е.  $\bar{F}(+0, +0) = 1$ . Обозначим

$$D_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq x_2 \geq 0\}, D_2 = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq x_2\}.$$

**Теорема.** Пусть  $F(x_1, x_2)$  — ВФИ-распределение. Допустим, что функция  $\bar{F}$  дифференцируема в каждом из множеств  $D_1$ , имеет там ограниченные частные производные:

$$\left| \frac{\partial \bar{F}(x_1, x_2)}{\partial x_j} \right| \leq M, (x_1, x_2) \in D_1$$

и существуют пределы

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0), (x_1, x_2) \in D_i} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_j}(x_1, x_2) = a_{ij}, \quad i=1, 2; j=1, 2.$$

Обозначим

$$\gamma = \min \left\{ -a_{11} \int_0^{\bar{x}} \frac{1}{x} \int_0^x \bar{F}(x, y) dy dx - a_{12} \int_0^{\bar{x}} \frac{1}{x^2} \int_0^x y \bar{F}(x, y) dy dx - \right. \\ \left. - a_{21} \int_0^{\bar{y}} \frac{1}{y^2} \int_0^y x \bar{F}(x, y) dx dy - a_{22} \int_0^{\bar{y}} \frac{1}{y} \int_0^y \bar{F}(x, y) dx dy \right\}.$$

Тогда

$$\sup_{x_1 > 0, x_2 > 0} |\bar{F}(x_1, x_2) - \exp \{a_{21} x_1 + a_{12} x_2 + (a_{11} - a_{21}) \max(x_1, x_2)\}| \leq C \sqrt{1-\gamma} \sqrt{M}, \quad (1)$$

где  $C$  — абсолютная постоянная.

Доказательство. Известно, что если  $(X_1, X_2)$  имеет ВФИ-распределение, то для любых  $a > 0, b > 0$  величина  $\max(a X_1, b X_2)$  имеет одномерное ВФИ-распределение. Выберем  $\alpha \in ]0, 1]$  и рассмотрим величину  $Y_\alpha = \min(\alpha^{-1} X_1, X_2)$ . Ясно, что  $P(Y_\alpha \geq x) = \bar{F}(\alpha x, x)$ . В силу результата [3]

$$\sup_{x > 0} |\bar{F}(\alpha x, x) - \exp \{(a_{21} + a_{22}) x\}| \leq \\ \leq 2 \left[ 1 + (a_{21} + a_{22}) \int_0^{\bar{x}} \bar{F}(\alpha x, x) dx \right].$$

Интегрируя последнее неравенство по  $\alpha$  в пределах от нуля до единицы, получаем

$$\int_0^1 \sup_{x > 0} |\bar{F}(\alpha x, x) - \exp \{(a_{21} + a_{22}) x\}| d\alpha \leq \\ \leq 2 \left[ 1 + \int_0^1 (a_{21} + a_{22}) \int_0^{\bar{x}} \bar{F}(\alpha x, x) dx d\alpha \right] = \\ = 2 \left[ 1 + a_{22} \int_0^{\bar{x}} dx \int_0^1 \bar{F}(\alpha x, x) d\alpha + a_{21} \int_0^{\bar{x}} d\alpha \int_0^1 \alpha \bar{F}(\alpha x, x) d\alpha \right] = \\ = 2 \left[ 1 + a_{22} \int_0^{\bar{x}} \frac{1}{x} \int_0^x \bar{F}(y, x) dy dx + a_{21} \int_0^{\bar{x}} \frac{1}{x^2} \int_0^x y \bar{F}(y, x) dy dx \right].$$

Таким образом, если обозначить

$$G(\alpha) = \sup_{x > 0} |\bar{F}(\alpha x, x) - \exp \{(a_{21} + a_{22}) \alpha x\}|, \quad \text{то}$$



$$|G(\alpha)|_1 \leq 2 \left| 1 + a_{12} \int_0^1 \frac{1}{x^2} \int_0^x y \bar{F}(y, x) dy dx + \right. \\ \left. + a_{22} \int_0^1 \frac{1}{x} \int_0^x \bar{F}(y, x) dy dx \right| \leq 2(1 - \gamma),$$

где  $|\cdot|_1$  означает норму в пространстве  $L^1([0, 1])$ . В силу результата [5] отсюда следует, что

$$\sup_{0 < \alpha < 1} |G(\alpha)| \leq C \sqrt{1 - \gamma} \sqrt{M}, \quad \left( C \leq 2 \left( 1 + \frac{8}{\pi} \right) \sqrt{\frac{8}{\pi}} \right).$$

Обозначая  $\alpha x = x_1$ ,  $x = x_2$ , отсюда находим, что

$$\sup_{(x_1, x_2) \in D_1} |\bar{F}(x_1, x_2) - \exp(a_{21} x_1 + a_{22} x_2)| \leq C \sqrt{1 - \gamma} \sqrt{M}.$$

Аналогичным образом, рассматривая величину  $Z_\beta = \min(X_1, \beta^{-1} X_2)$ ,  $\beta \in ]0, 1]$ , и применяя к ней рассуждения, изложенные выше, для  $Y_\alpha$  получаем

$$\sup_{(x_1, x_2) \in D_1} |\bar{F}(x_1, x_2) - \exp(a_{11} x_1 + a_{12} x_2)| \leq C \sqrt{1 - \gamma} \sqrt{M}. \quad (3)$$

Однако луч  $x_1 = x_2$ ,  $x_2 \geq 0$  входит как в  $D_1$ , так и в  $D_2$ . Поэтому

$$\frac{d}{dx} \bar{F}(x_1, x) \Big|_{x=0} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_1}(0, 0) + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_2}(0, 0) = a_{11} + a_{12} - a_{21} + a_{22}.$$

Отсюда и из (2), (3) вытекает требуемое неравенство (1).

Ереванский институт  
народного хозяйства

Поступила 11.XII. 1987

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Барлоу, Ф. Прошан. Математическая теория надежности, М., 1969, 488 с.
2. Т. А. Азларов, И. А. Володин. Характеризационные задачи, связанные с показательным распределением, Ташкент, ФАН, 1982, 98 с.
3. А. Обретенов, С. Рачев. Устойчивость некоторых характеризационных свойств экспоненциального закона, В сб.: Проблемы устойчивости стохастических моделей: М., ВНИИСИ, 1983, 79—87.
4. Р. Барлоу, Ф. Прошан. Статистическая теория надежности и испытания на безотказность, М., Наука, 1984, 327 с.
5. А. В. Какосян. О сравнении норм в  $L_p(R^1)$  и  $L_{p1}(R^1)$ , Тезисы докладов 7-ой научной сессии ЕрИНХа, Ереван, 1987.

## ՔՈՎԱԼԵԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

|                                                                                                                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Ա. Ա. Անդրյան, Եզրային խնդիրներ բաղադրյալ տիպի համակարգի համար . . . . .                                                                                    | 313 |
| Յ. Ն. Հառուրյունյան, Վեյլ-Տիտչմարշի ֆունկցիայի ասիմպտոտիկան և հակադարձ խնդիրը Դիրակի համակարգի համար . . . . .                                              | 327 |
| Ս. Մ. Սարգսյան, Հանրահաշվական դիֆֆերենցիալ հավասարումների մերոմորֆ լուծումների ասիմպտոտիկ հատկությունները . . . . .                                         | 337 |
| Ի. Յա. Անի, Ի. Հ. Խաչատրյան, Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների համակարգի փակույթի մասին, կոմպլեքս տիրույթում կշռային հավասարաչափ մոտարկման դեպքում . . . . . | 355 |
| Ն. Կ. Կարապետյանց, Փաթեթման օպերատորները լիպշիցյան դասերում . . . . .                                                                                       | 364 |
| ԱԵ. Ա. Թալալյան, Կառլեմանի եզակիությունների և օրթոնորմալ սխտեմների ըստ $l_p$ դասերի միակության բաղմունքների մասին . . . . .                                 | 377 |
| Ն. Վ. Հովհաննիսյան, Մոդելային կոսալիպտիկ հավասարման համար առաջին եզրային խնդրի լուծումը պրոնկցիոն-ցանցային մեթոդով . . . . .                                | 393 |
| Ղ. Ս. Ղազարյան, Ա. Ս. Սարգսյան, Զիսելսկու սխտեմով Ֆուրյեի շարքերի համարյա ամենուրեք տարամիտությունը . . . . .                                               | 403 |

## ՀԱՄԱՌՈՏ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

|                                                                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Ա. Վ. Կակոսյան, Մոնոտոն աճող ինտենսիվություն ունեցող երկչափ բաշխման ֆունկցիայի և Մարշալ-Օլկինի բաշխման մոտիկության գնահատականը . . . . . | 413 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                                      |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| А. А. Андриян, Граничные задачи для систем составного типа . . . . .                                                                                 | 313 |
| Т. Н. Арутюнян, Асимптотика функции Вейля-Титчмарша и обратная задача для системы Дирака . . . . .                                                   | 327 |
| С. Ц. Саркисян, Асимптотические свойства мероморфных решений алгебраических дифференциальных уравнений . . . . .                                     | 337 |
| Б. Я. Левин, И. О. Хачатрян, О замыкании систем функций типа Миттаг-Леффлера при взвешенно-равномерной аппроксимации в комплексной области . . . . . | 355 |
| Н. К. Карапетянц, Операторы светки в липшицевых классах . . . . .                                                                                    | 364 |
| Ан. А. Талалян, Об особенностях Карлемана и о множествах единственности ортонормированных систем относительно классов $l_p$ . . . . .                | 377 |
| Н. В. Оганесян, Решение первой краевой задачи для модельного полуэллиптического уравнения проекционно-сеточным методом . . . . .                     | 393 |
| К. С. Казарян, А. С. Сарисян, Расходимость почти всюду рядов Фурье по системе Чисельского . . . . .                                                  | 403 |

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

|                                                                                                                                                      |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| А. В. Какосян, Об оценке близости двумерного распределения с монотонно возрастающей функцией интенсивности и распределения Маршалла-Олкина . . . . . | 413 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

## CONTENTS

|                                                                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| A. A. Andrian, Boundary value problems for systems of composite type . . . . .                                         | 313 |
| T. N. Harutyan, The asymptotic form of the Weil-Titchmarsh function and the inverse problem for Dirac system . . . . . | 327 |
| S. Ts. Sarkisian, Asymptotic properties of meromorphic solutions of algebraic differential equations . . . . .         | 337 |



|                                                                                                                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>B. Ya. Levin, I. O. Khachatryan.</i> On the closure of systems of Mittag—Lefler type functions by weighted uniform approximation in the complex domain . . . . . | 355 |
| <i>N. K. Karapettian.</i> Convolution operators in Lipschitz classes . . . . .                                                                                      | 364 |
| <i>An. A. Talaltan.</i> On Carleman's peculiarities and uniqueness sets of orthonormal systems with respect to $l_p$ classes . . . . .                              | 377 |
| <i>N. V. Hovhannesian.</i> Solution of the first boundary value problem for model semielliptic equation by the project Grid method . . . . .                        | 393 |
| <i>K. S. Kazarian, A. S. Sargislan.</i> Divergence of almost everywhere Fourier — Ciesielski system . . . . .                                                       | 403 |

#### Short communications

|                                                                                                                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>A. V. Kakoslan.</i> On the closeness estimate between two dimensional distribution function with monotone increasing intensity and Marshal—Olkin distribution . . . . . | 413 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|