

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈՆԳՐԵՍ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ԶՐԱՍԵՅԱՆ

Յ. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

Ի. Գ. ԶԱՍԼԱՎՈՍԿԻ

Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ

Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

Ռ. Լ. ՇԱՀՐԱՂՅԱՆ

Գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու ֆարտուղատ Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ:

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով:

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում:

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոնեզերի շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով:

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում:

5. Գրականությանը տեղափոխվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը:

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թվով փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) լին թույլատրվում:

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մեթոդական դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում լրջադիվ մեթոդական պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը:

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր:

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ: Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա:

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. В. АМБАРЦУМЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН
зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке) а кратких сообщений—не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакция Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-6. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. V. AMBARTZUMIAN
N. U. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN

A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKII

executive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings zvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

УДК 517. 547, 24

Р. А. АВЕТИСЯН, Н. У. АРАКЕЛЯН, А. А. ГОНЧАР

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ
МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Известная теорема Данжуа—Карлемана—Альфorsa (см. [1] и [2], стр. 234) утверждает, что если целая функция f при некотором натуральном p удовлетворяет условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-p/2} T(r, f) = 0, \quad (1)$$

то число ее конечных асимптотических значений и, более того, число соответствующих асимптотических мест строго меньше p . В условии (1) неванлинновскую характеристику $T(r, f)$ можно заменить на $\log M(r, f)$, где

$$M(r, f) = \sup_{|z|=r} |f(z)|. \quad (2)$$

Отметим следствие указанного результата, известное под названием теоремы Данжуа—Карлемана—Альфorsa: целая функция конечного порядка p имеет не более чем $2p$ конечных асимптотических значений. Более сильное следствие мы получим, заменяя в этом утверждении число p нижним порядком λ функции f .

Вопрос о количестве асимптотических значений мероморфных в S функций исследовался в ряде работ (см. обзор [3], стр. 52). Л. Альфорс доказал (см. [4], стр. 310—314), что условие (1) гарантирует, чтобы часть асимптотических значений функции f , состоящая из так называемых прямо критических точек обратной к f функции, содержала менее p точек. С другой стороны, было хорошо известно, что порядок мероморфной функции не лимитирует количество ее асимптотических значений (см. [5], пример на стр. 92—93, а также [2], стр. 161—163).

Из сказанного, казалось, напрашивается вывод, что для мероморфных функций трудно ожидать выполнения утверждений типа теоремы Данжуа—Карлемана—Альфorsa. Пожалуй, единственным обнадеживающим результатом, относящимся, правда, к довольно узкому классу функций, является давний результат Валирона (см. [6]—[7]): если $T(r, f) = O(\log^2 r)$ при $r \rightarrow \infty$, то тогда мероморфная функция f может иметь не более одного (конечного или бесконечного) асимптотического значения. Это заключение впоследствии было распространено (Тумура, [8]) на мероморфные функции, удовлетворяющие условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, f)}{\log^2 r} < +\infty. \quad (3)$$

Основной целью настоящей работы является решение следующей задачи: каким ограничениям надо подчинить рост числа полюсов мероморфной функции (с учетом роста ее характеристики) для того, чтобы для количества всех ее конечных асимптотических значений выполнялись закономерности типа теоремы Данжуа-Карлемана-Альфурса? Ответ содержится в теореме 1 этой работы, охватывающей отмеченные выше результаты и ряд новых.

Доказательство теоремы 1 основано на мероморфном аналоге обобщенной теоремы Фрагмена-Линделёфа — теореме 2. Эта последняя, а также вытекающая из нее теорема 3, являющаяся аналогом другой известной теоремы Линделёфа, представляют, как нам кажется, самостоятельный интерес.

Одним из средств исследования рассматриваемых вопросов является математическое понятие емкости плоского конденсатора и ее свойства (см. [9] и [10]). Оно играет важную роль в вопросах наилучших рациональных приближений и их применений (см. работы [11]—[12] одного из авторов, содержащие также формулировки и доказательства ряда общих свойств этого понятия). Заключительная теорема 4 настоящей статьи, представляющая еще одно такое применение, обобщает на случай мероморфных функций и усиливает основные результаты работы [13] о скорости наилучшего рационального приближения целых функций на асимптотическом пути.

Не входя в детали отметим, что обсуждение рассматриваемых здесь вопросов стимулировалось также результатами [14] о наилучшем приближении мероморфными функциями.

Настоящая работа состоит из двух параграфов. В § 1 приводится формулировка теорем 1—4 с необходимыми определениями и комментариями, а § 2 посвящен доказательствам.

§ 1. Формулировка результатов

1°. Для мероморфной в $\mathbb{C}$ функции f величина $a \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *асимптотическим значением*, если существует такая уходящая в бесконечность непрерывная кривая $\Gamma = \Gamma(a, f)$, что

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \Gamma}} f(z) = a.$$

При этом, Γ будет называться *асимптотическим путем* (для функции f и значения a). Асимптотические пути $\Gamma_1 = \Gamma_1(a, f)$ и $\Gamma_2 = \Gamma_2(a, f)$ назовем *эквивалентными*, если $a_1 = a_2 = a$ и, кроме того, существует асимптотический путь $\Gamma_3 = \Gamma_3(a, f)$ такой, что оба множества $\Gamma_1 \cap \Gamma_3$ и $\Gamma_2 \cap \Gamma_3$ непусты и неограничены. *Кратностью* асимптотического значения a назовем (максимальное) число попарно неэквивалентных асимптотических путей $\{\Gamma_\alpha(a, f)\}$ (которых может быть бесконечное множество).

Перейдем к формулировке основного результата настоящей работы. Здесь и далее будем придерживаться общепринятых обозначений неванлинновской теории (см. [4] и [2]). В частности, $T(r, f)$ озна-

чает неванлинновскую характеристику мероморфной в $\mathbb{C}$ функции f , а $n(r, f) = n(r, \infty, f)$ — число ее полюсов, лежащих в круге $|z| \leq r$, с учетом кратности. Величина $M(r, f)$ определяется согласно (2), а порядок ρ и нижний порядок λ функции f — формулами

$$\rho = \overline{\lim} \frac{\log T(r, f)}{\log r}, \quad \lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}.$$

Теорема 1. Пусть f — мероморфная (в $\mathbb{C}$) функция и $\rho \geq 1$ — натуральное число. Предположим, что существует такая последовательность $r_k \uparrow \infty$, что

$$\lim_{r=r_k \rightarrow \infty} r^{-\rho/2} \log^+ M(r, f) = 0, \quad (1.1)$$

$$n(r, f) = O\left(\log \frac{r^{\rho/2}}{1 + \log^+ M(r, f)}\right) \text{ при } r = r_k \rightarrow \infty. \quad (1.2)$$

Тогда при $\rho = 1$ функция f не имеет таких осимптотических значений a , что

$$|a| < \lim_{r \rightarrow \infty} M(r, f), \quad (13)$$

а при $\rho > 1$ число конечных асимптотических значений f , с учетом их кратности, меньше ρ .

Замечания. 1) Если в теореме 1 при $\rho = 1$ дополнительно к условиям (1.1)—(1.2) предположить, что $M(r, f) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$ (это слабее предположения, что ∞ — асимптотическое значение для f), то тогда из (1.3) следует, что f не имеет конечных асимптотических значений.

2) Для вывода интересных следствий из теоремы 1 полезно заметить, что условия (1.1)—(1.2) вытекают из аналогичных условий, относящихся к более регулярной функции $T(r, f)$, а именно: существует такая последовательность $R_k \uparrow +\infty$, что

$$\lim_{r=R_k \rightarrow \infty} r^{-\rho/2} T(r, f) = 0, \quad (1.1')$$

$$n(r, f) = O\left(\log \frac{r^{\rho/2}}{T(r, f)}\right) \text{ при } r = R_k \rightarrow \infty. \quad (1.2')$$

В самом деле, из одной оценки Р. Неванлинны (см. [2], стр. 55. теорему 7.2) следует, что для любого $R > 0$ существует такое $r \in \left[\frac{1}{2}R, R\right]$, что $\log^+ M(r, f) \leq c T(r, f)$, где c — абсолютная константа, и достаточно для $R_k = R$ положить $r_k = r$.

Следствия. а) Для целых функций f теорема 1 по существу совпадает с приведенным в начале общим вариантом теоремы Данжуа-Карлемана-Альфorsa, поскольку тогда $n(r, f) \equiv 0$. При этом в случае $\rho = 1$ необходимо сослаться также на теорему Лиувилля, из которой следует, что $M(r, f) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$.

б) При $\rho = 1$ теорема 1 содержит упомянутые выше результаты Валирона и Тумуры: если мероморфная функция f удовлетворяет условию (3), то она имеет не более одного асимптотического значения a .

В самом деле, полагая без ограничения общности $a = \infty$, покажем, что f не имеет конечных асимптотических значений. Из условия (3) следует, что $T(p_k, f) = O(\log^2 p_k)$ для некоторой последовательности $p_k \uparrow + \infty$. Полагая $R_k = p_k^{1/2}$, заметим сначала, что $T(R_k, f) = O(\log^2 R_k)$, и поскольку

$$\begin{aligned} n(R_k, f) &\leq (\log R_k)^{-1} \int_{R_k}^{p_k} \frac{n(t, f)}{t} dt \leq \frac{T(p_k, f)}{\log R_k} = \\ &= O(\log R_k) = O\left(\log \frac{R_k^{1/2}}{T(R_k, f)}\right), \quad R_k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

то условие (1.2') соблюдено при $p = 1$.

в) Пусть f — мероморфная функция конечного порядка ρ и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \infty, f)}{\log r} < +\infty. \quad (1.4)$$

В случае $2\rho < 1$ дополнительно предполагаем, что ∞ является асимптотическим значением для f . Тогда из теоремы 1 непосредственно следует (выбирая $2\rho < p \leq 2\rho + 1$), что количество конечных асимптотических значений функции f , с учетом их кратности, не превосходит 2ρ . В случае, когда 2ρ — натуральное число, эту оценку, вообще говоря, нельзя усилить (см. ниже пример 1). Для такого усиления теорема 1 взамен (1.4) предполагает (при $p = 2\rho$) более строгое ограничение (1.2).

г) Если в пункте в) условие (1.4) заменить на

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \infty, f)}{\log r} < +\infty \quad (1.5)$$

(эквивалентным условию $N(r, \infty, f) = O(\log^2 r)$, $r \rightarrow \infty$), то тогда там всюду число ρ можно заменить нижним порядком λ функции f .

Представляется интересным выяснить открытый вопрос о том, насколько существенно в утверждении в) (или г)) дополнительное при $2\rho < 1$ ($2\lambda < 1$) предположение, что ∞ является асимптотическим значением для f , т. е. не следует ли указанное предположение (или хотя бы условие $M(r, f) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$) из (1.4) ((1.5)) при $2\rho < 1$ ($2\lambda < 1$).

В заключение этого пункта рассмотрим вопрос о точности условий теоремы 1. Поскольку точность условия (1) теоремы Данжуа-Карлемана-Альфorsa хорошо исследована, то заслуживает внимания проверка условия (1.2) или (1.2'). Утвердительный ответ об их точности дает построенный Ж. Валироном [6] пример: для произвольной сколь угодно медленно возрастающей к $+\infty$ функции $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ существует мероморфная функция f с бесконечным числом (и даже мощности континуума) асимптотических значений, удовлетворяющая условию

$$T(r, f) < \varphi(r) \log^2 r.$$

Таким образом, можно считать, что функция f удовлетворяет условию (1.1') при $p = 1$ и для любой последовательности $R_k \uparrow + \infty$, а вместо (1.2') из приведенного условия следует оценка

$$n(r, f) < 4\varphi(r^2) \log r = O\left(r^2 \log \frac{r^{1,2}}{T(r, f)}\right).$$

2°. Пусть D — произвольная неограниченная область в $\mathbb{C}$, ∂D — граница D в $\bar{\mathbb{C}}$, так что $\infty \in D$. Положим

$$\gamma_r = l_r \cap D, \quad l_r = \{z: |z| = r\} \text{ для } r > r' = \inf_{\zeta \in \partial D} |\zeta|,$$

и если $|\gamma_r|$ — линейная мера γ_r , то следуя М. Цудзи (см. [15], стр. 112) положим $r\theta(r) = |\gamma_r|$ при $\gamma_r \neq l_r$ и $r\theta(r) = \infty$, когда $\gamma_r = l_r$, либо $0 < \leq r < r'$. Функция $\theta(r)$, представляющая угловую меру γ_r при $\gamma_r \neq l_r$, является полунепрерывной снизу функцией.

Пусть теперь f — мероморфная в D функция. Если f ограничена вблизи каждой граничной точки $\zeta \neq \infty$, то тогда в каждом круге $|z| \leq r$ содержится лишь конечное число ее полюсов. Обозначим это число, с учетом кратности полюсов, через $n(r, f) = n(r, \infty, f)$ и положим

$$M(r, f) = \sup_{z \in l_r} f(z), \quad r > r'. \quad (1.6)$$

Следующая теорема является естественным аналогом для мероморфных функций обобщенного варианта теоремы Фрагмена-Линделёфа (см. [16], стр. 104, теорему 7.6 при $u = \log |f|$, где f — голоморфная в D функция). Для простоты мы предполагаем, что D — односвязная неограниченная область в $\mathbb{C}$ с непустым дополнением. В этом случае $r\theta(r) = |\gamma_r|$ при $r > r'$.

Теорема 2. Пусть f — мероморфная в области D функция такая, что

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} |f(z)| \leq M < +\infty \text{ для } \zeta \in \partial D \setminus \{\infty\}. \quad (1.7)$$

Предположим, что существуют две последовательности $(\rho_k)_{k=1}^\infty$ и $(r_k)_{k=1}^\infty$, $r' < \rho_k < r_k \rightarrow +\infty$ и $\rho_k = o(r_k)$ при $k \rightarrow \infty$, для которых

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \exp\left(-\pi \int_{\rho_k}^{r_k} \frac{dt}{t \theta(t)}\right) \log^+ M(r_k, f) = 0, \quad (1.8)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n(r_k, f)}{\log^+ \rho_k} = A < +\infty. \quad (1.9)$$

Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M(r, f) \leq M e^{\pi^2 A}. \quad (1.10)$$

Замечания. 1) Для голоморфных в D функций f (когда $\rho_k = \text{const}$ и $A = 0$ в условии (1.9)) теорема 2 по существу совпадает с отмеченной выше обобщенной теоремой Фрагмена-Линделёфа.

2) Теорема 2 сохраняет силу и содержательность для произвольных неограниченных областей D с достаточно «массивной» границей; нужно предположить, что

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{t^{\theta}(t)} = +\infty$$

(напомним, что $1/t^{\theta}(t) = 0$, если $\gamma_t = l_t$). Необходимо только верхний предел r_k интеграла в (1.8) заменить на τr_k , где τ — фиксированное число, $0 < \tau < 1$, а в доказательстве вместо (2.2) воспользоваться оценкой Цудзи (2.1) (ср. с теоремой III. 68 Цудзи [15]).

3) Фигурирующая в (1.10) константа π^2 является, по-видимому, наилучшей.

Следствие. Если D — угол (возможно — криволинейный) раствора α , $0 < \alpha < 2\pi$ (так что $\theta(r) \equiv \alpha$), то тогда при оптимальном выборе ρ_k в зависимости от r_k , условия (1.8) и (1.9) теоремы 2 примут вид

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r^{-\pi/\alpha} \log M(r_k, f) = 0, \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} n(r_k, f) \log^{-1} \frac{r_k}{[1 + \log^+ M(r_k, f)]^{1/\alpha}} \leq A < +\infty.$$

Следующее утверждение, вытекающее из теоремы 2, заслуживает быть представленным в виде отдельной теоремы, поскольку оно является «мероморфным» аналогом другой известной теоремы Линделёфа (см. [16], стр. 105, теорему 7.7). Рассмотрим для простоты односвязную область D , граница Γ которой состоит из жордановых дуг Γ_1 и Γ_2 с общим началом ξ_0 и концом ∞ . Γ_1 и Γ_2 могут иметь и другие общие точки и, в частности, могут совпадать. В последнем случае они как бы представляют собой достижимые из D с разных сторон «берега» границы ∂D .

Теорема 3. Пусть f — мероморфная в D функция, допускающая непрерывное продолжение на $\Gamma_1 \setminus \{\infty\}$ и $\Gamma_2 \setminus \{\infty\}$ в отдельности и удовлетворяющая условию

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \Gamma_1}} f(z) = a_1, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \Gamma_2}} f(z) = a_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{C} \quad (1.11)$$

вместо (1.7), а также остальным условиям (1.8) и (1.9) теоремы 2. Тогда $a_1 = a_2 (= a)$ и, кроме того

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M(r, f - a) = 0. \quad (1.12)$$

Замечания. 1) В терминах начала пункта 1 (с заменой $\mathbb{C}$ на $D \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$) заключение теоремы 3 означает, в частности, что асимптотические пути Γ_1 и Γ_2 эквивалентны.

2) Теорема 3 содержит следующее утверждение, принадлежащее Ж. Валирону (см. [6] — [7]). Пусть мероморфная в $\mathbb{C}$ функция f удовлетворяет условию $T(r, f) = O(\log^2 r)$ при $r \rightarrow \infty$ и имеет асимптотическое значение a . Тогда существует последовательность окружностей $|z| = r_n \rightarrow \infty$, на которых f равномерно стремится к a (т. е. выполнено условие (1.12), если без ограничения общности полагать, что $a \neq \infty$). Это означает, что f не может иметь других, отличных от a , асимптотических значений.

3°. Пусть Γ — замкнутое множество в $\mathbb{C}$ со связным дополнением такое, что все окружности $|z|=r$, $r \geq 0$, пересекаются с Γ . Назовем такое Γ *асимптотическим множеством* для мероморфной в $\mathbb{C}$ функции f , если существует конечный предел

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \Gamma}} f(z) = a.$$

В этом случае функцию f можно равномерно на Γ приблизить рациональными функциями. Рассмотрим наилучшее приближение f на Γ рациональными функциями порядка не выше n :

$$\rho_n(f) = \rho_n(f, \Gamma) = \inf_{\{Q_n\}} \sup_{z \in \Gamma} |f(z) - Q_n(z)|, \quad (1.13)$$

где Q_n — всевозможные рациональные функции порядка не выше n (т. е. число полюсов Q_n в $\overline{\mathbb{C}}$, с учетом кратности, не больше n).

Сказанное выше означает, что $\rho_n(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и представляет интерес вопрос о том, насколько быстро может $\rho_n(f)$ стремиться к нулю. В работе [17] показано, что в случае функции $f(z) = e^{-z}$ при $z \in [0, +\infty)$ возможно „геометрическое“ убывание $\rho_n(f)$, т. е. $\rho_n(f) < c^n$, $0 < c < 1$. Обратный вопрос исследовался в работе [13] (см. там теоремы 1—3). Установлено, что не только для показательной функции, но и для широкого класса целых функций f конечного порядка, когда Γ — неограниченный континуум со связным дополнением, $\rho_n(f)$ не может стремиться к нулю быстрее геометрической прогрессии. Если же подчинить рост функции f определенным условиям регулярности, то тогда $\rho_n^{1/n}(f) > c > 0$.

Что касается мероморфных функций конечного порядка, то даже при весьма регулярном их росте величина $\rho_n(f)$ может стремиться к нулю сколь угодно быстро (см. приводимый ниже пример), в частности — быстрее геометрической прогрессии. Такой эффект может достигаться за счет того, что полюсы функции f аннулируются полюсами аппроксимирующих рациональных функций Q_n . Однако, если мерморфная функция имеет определенный «дефицит» полюсов, то тогда для нее величина $\rho_n(f)$ ведет себя как в случае целых функций. Нижеследующая теорема 4 обобщает и усиливает результаты теорем 1 и 2 работы [13].

Теорема 4. Пусть f — трансцендентная мероморфная в $\mathbb{C}$ функция с асимптотическим множеством Γ , для которой ∞ является дефектным значением в смысле Неванлинны с дефектом $\delta(\infty, f) = 1$, и пусть существует число $q > 1$ и такая последовательность $r_j \rightarrow \infty$, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} T(r_j, f) / T(qr_j, f) > 0. \quad (1.14)$$

Тогда существует такая зависящая лишь от q константа $\delta_q > 0$, что если $\delta \in (0, \delta_q]$ и n_j — целая часть числа $\delta T(r_j, f)$, то

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \rho_{n_j}^{1/n_j}(f, \Gamma) > 0. \quad (1.15)$$

Замечания. 1) Если условие (1.14) теоремы 4 заменить одним из условий

$$\lim_{r \rightarrow \infty} T(r, f) / T(qr, f) > 0, \quad (1.14')$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} T(r, f) / T(qr, f) > 0, \quad (1.14'')$$

то тогда из (1.15) соответственно следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^{1/n}(f, \Gamma) > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^{1/n}(f, \Gamma) > 0.$$

Отметим, что условие (1.14') следует из предположения, что функция f имеет конечный нижний порядок λ . Наоборот, условие (1.14'') гарантирует конечность обычного порядка ρ функции f и является определенным условием регулярности ее роста.

2) Условие $\delta(\infty, f) = 1$ теоремы можно заменить условием $\delta(\infty, f) > 0$. Доказательство требует некоторой модификации леммы.

Следующий пример показывает, что от условия $\delta(\infty, f) > 0$ отказаться нельзя.

Пример. Пусть мероморфная функция f определена рядом

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{z + h_k}, \quad (1.16)$$

где $1 \leq h_k \uparrow + \infty$ при $k \uparrow + \infty$ и $\sum |A_k| < +\infty$. Полагая

$$Q_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z + h_k}, \quad \varepsilon_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} |A_k|, \quad n = 1, 2, \dots,$$

очевидно, имеем

$$|f(x)| \leq \frac{\varepsilon_1}{x+1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty, \quad x \in \Gamma = [0, +\infty),$$

$$|f(x) - Q_n(x)| \leq \varepsilon_n \quad \text{при} \quad x \in \Gamma,$$

так что $\rho_n(f, \Gamma) \leq \varepsilon_n$. Здесь ε_n можно считать сколь угодно быстро убывающей к нулю и, в частности так, чтобы $\rho_n^{1/n}(f, \Gamma) \rightarrow 0$.

С другой стороны, для функций f вида (1.16) М. В. Келдыш доказал (см. [18] или [2], стр. 330), что

$$T(r, f) = N(r, f) + O(1) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.17)$$

так что $\delta(\infty, f) = 0$. Если теперь для произвольного числа $\rho > 0$ фиксировать $h_k = k^{1/\rho}$, $k = 1, 2, \dots$, то тогда $n(r, f) = r^\rho + O(1)$, $N(r, f) = r^\rho + O(\log r)$ ($r \rightarrow \infty$), так что, согласно (1.17), $T(r, f) = r^\rho + O(\log r)$. Таким образом, функция f имеет наперед заданный порядок ρ и удовлетворяет условию (1.14''), однако для нее $\rho_n^{1/n}(f, \Gamma) \rightarrow 0$.

§ 2. Доказательства

Нам будет удобнее доказывать теоремы 1—4 в следующей последовательности: сначала будет доказана теорема 2, затем — теоремы 3, 1 и 4. Далее мы придерживаемся обозначений, введенных в § 1.

1°. Для доказательства теорем 2 и 4 нам нужны определенные оценки гармонических мер и функций Грина. Начнем с первых. Рассмотрим неограниченную область $D \subset \mathbb{C}$. Для $r > r'$ рассмотрим (непустое) пересечение D_r области D с кругом $|z| \leq r$, $\omega_r(z)$ — гармоническая мера в точке z совокупности Γ_r относительно D_r . Общие и достаточно хорошие оценки величины $\omega_r(z)$ в простых геометрических терминах были установлены М. Цудзи (см. [15], теорему III. 67 и Следствие):

$$\omega_r(z) \leq c_r \exp\left(-\pi \int_{2|z|}^r \frac{dt}{t\theta(t)}\right) \text{ для } z \in D_r, |z| \leq \frac{r}{2}, \quad (2.1)$$

где $0 < \tau < 1$ и $c_r > 0$ — определенная константа, зависящая лишь от τ .

Рассмотрим теперь более узкий класс неограниченных областей $D \subset \mathbb{C}$, которые односвязны и имеют непустое связное дополнение в $\mathbb{C}$. Для них $t\theta(t) = |\gamma_t|$ при $t > r'$. Для областей такого типа оценка Цудзи (2.1) несколько улучшена (при $z = 0 \in D$) П. Кусисом [19]:

$$\omega_r(0) \leq c_1 \exp\left(-\pi \int_0^r \frac{dt}{t\theta(t)}\right),$$

где $c_1 = 10$, но для нас достаточно, что c_1 не зависит от r .

Из этой оценки с помощью одного простого приема (см. [15], стр. 116) мы сейчас получим нужную нам оценку величины $\omega_r(z)$ при $z \neq 0$.

Пусть $z \in D_r$ и $\rho = 2|z| < r$. По принципу расширения Карлема-на [4], гармоническая мера $\omega_r(z)$ только увеличится, если присоединить к D_r круг $|w| < \rho$. Применяя к этому кругу и функции $\omega_r(w)$ неравенство Гарнака для точки $w = z$, имеем, что $\omega_r(z) \leq 3\omega_r(0)$. Отсюда и из (2.1), учитывая, что D_r содержит круг $|w| < \rho$, получим

$$\omega_r(z) \leq c_2 \exp\left(-\pi \int_{2|z|}^r \frac{dt}{t\theta(t)}\right) \text{ при } z \in D_r, 2|z| \leq r. \quad (2.2)$$

Перейдем к оценке функции Грина и сформулируем соответствующее утверждение в виде леммы. Рассмотрим, как и в теореме 4, неограниченное замкнутое множество $\Gamma \subset \mathbb{C}$ с неограниченным связным дополнением D , и пусть при некотором $r' \geq 0$ все окружности $|z| = r$, $r \geq r'$ имеют непустое пересечение как с Γ , так и с D . Это условие несколько слабее сделанного в теореме 2 предположения, что дополнение D является неограниченным континуумом. Через $g(z, \zeta)$ будем обозначать функцию Грина области D .

Лемма. Пусть $z_1, \dots, z_n$ — точки из D , не обязательно попарно различные и пусть $I \subset (r', R]$ — компакт линейной меры λR , $0 < \lambda < 1$. Тогда существует $t \in I$ такое, что

$$\sup_{z \in \Gamma} \sum_{j=1}^n g(z, z_j) < n\pi^2 / \log \frac{1}{1-\lambda}. \quad (2.3)$$

Доказательство. Положим

$$g(z) = \sum_{j=1}^n g(z, z_j)$$

и* введем компакты E и F_0 , где E — часть $\Gamma \cup \{\infty\}$, лежащая вне круга $|z| < r'$,

$$F_0 = \{z \in D : |z| \in I, g(z) = \sup_{\zeta \in \Gamma} g(\zeta)\}.$$

Присоединяя к F_0 ограниченные компоненты его дополнения (если таковые имеются), мы получим компакт $F \supset F_0$. При этом компакты E и F не пересекаются и каждый из них имеет связное дополнение.

Рассмотрим теперь плоский конденсатор (E, F) и пусть $h(E, F)$ — его модуль $(= c^{-1}(E, F))$, где $c(E, F)$ — емкость конденсатора (E, F) . Согласно [10] (см. стр. 648, оценку (21)) имеем

$$\min_{z \in F} g(z) \leq nh(E, F).$$

Однако указанный минимум всегда достигается и на F_0 : в случае $F \neq F_0$ это следует из гармоничности g на $F \setminus F_0$ и из принципа минимума гармонических функций. Поэтому существует $z_0 \in F_0$ такое, что $g(z_0) \leq nh(E, F)$. Полагая $|z_0| = t$ и учитывая определение множества F_0 , имеем, что $t \in I$ и

$$\sup_{z \in \Gamma} g(z) \leq nh(E, F). \quad (2.4)$$

Для оценки модуля $h(E, F)$ воспользуемся круговой симметризацией конденсатора (E, F) . Положим

$$E^* = \{-|z| : z \in E\}, F^* = \{|z| : z \in F\}.$$

Хорошо известно (см., например, [11], стр. 648), что $h(E, F) \leq h(E^*, F^*)$, и так как в нашем случае $E^* = I_- = [-\infty, -r']$ и $F^* = I$, то с учетом (2.4) оценка (2.3) и, следовательно, лемма будет доказана, если мы сумеем установить, что $h(I_-, I) < \pi^2 / \log \frac{1}{1-\lambda}$.

С этой целью докажем сначала следующий интуитивно очевидный факт: среди рассматриваемых компактов I фиксированной линейной меры λR минимум емкости конденсатора (I_-, I) достигается в случае отрезка $\tilde{I} = [(1-\lambda)R, R]$, наиболее удаленного от I_- , так что $h(I_-, I) \leq h(I_-, \tilde{I})$.

Достаточно обосновать этот факт в случае, когда компакт I регулярен, т. е. состоит из конечного числа отрезков. Рассмотрим функцию φ на $[0, +\infty)$, которая характеризуется следующими свойствами: φ непрерывна, $\varphi(x) = x$ при $x \geq R$, φ принимает постоянные значения на каждом интервале множества $[0, R] \setminus I$ и осуществляет сдвиги вправо вида $x \rightarrow x + d$, $d > 0$ отрезков — составляющих компонент I , притом так, чтобы имели $\varphi(I) = \tilde{I}$. Очевидно, функция φ уменьшает расстояния, т. е. $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$ и двигает вправо все точки. т. е. $(\varphi(x)) \geq x$.

Для сравнения модулей консерваторов (I_∞, I) и $(I_\infty, \bar{I})$ воспользуемся теперь установленной в [11] (см. стр. 644, теорему 1) характеристикой модуля произвольного конденсатора (E, F) :

$$h(E, F) = \lim_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \log \sigma_m(E, F), \quad (2.5)$$

где

$$\sigma_m(E, F) = \sup_{\{r_m\}} \min_{z \in F} |r_m(z)| / \max_{z \in E} |r_m(z)|,$$

а верхняя грань берется в классе всех рациональных функций r_m порядка не выше m :

$$r_m(z) = \alpha \frac{(z - a_1) \cdots (z - a_p)}{(z - \beta_1) \cdots (z - \beta_q)}, \quad p, q \leq m.$$

Сопоставим с r_m две новые рациональные функции порядка не выше m :

$$r_m^*(z) = \alpha \frac{(z + |a_1|) \cdots (z + |a_p|)}{(z - |\beta_1|) \cdots (z - |\beta_q|)},$$

$$\tilde{r}_m(z) = \alpha \frac{(z + |a_1|) \cdots (z + |a_p|)}{(z - \bar{\beta}_1) \cdots (z - \bar{\beta}_q)}, \quad \text{где } \bar{\beta}_j = \varphi(|\beta_j|).$$

Очевидно, имеем

$$|r_m(x)| > |r_m^*(x)| \text{ при } x < 0, \quad |r_m(x)| < |r_m^*(x)| \text{ при } x > 0.$$

С другой стороны, $|r_m^*(x)| \geq |\tilde{r}_m(x)|$ при $x < 0$, так как $\bar{\beta}_j \geq \beta_j$.

Если же $\tilde{x} \in \bar{I}$, то существует такая точка $x \in I$, что $\varphi(x) = \tilde{x}$. Тогда $x \leq \tilde{x}$ и $|x - \beta_j| < |x - \bar{\beta}_j|$, поэтому $|r_m^*(x)| \leq |\tilde{r}_m(x)|$. Из отмеченных оценок следует, что

$$\max_{x \in I_\infty} |r_m(x)| \geq \max_{x \in I_\infty} |\tilde{r}_m(x)|, \quad \min_{x \in I} (r_m(x)) \leq \min_{x \in I} |\tilde{r}_m(x)|,$$

так что $\sigma_m(I_\infty, I) \leq \sigma_m(I_\infty, \bar{I})$, откуда согласно (2.5) следует требуемая оценка $h(I_\infty, I) \leq h(I_\infty, \bar{I})$.

Осуществляя теперь линейное преобразование $L: z \rightarrow -\frac{z}{\lambda R} + \frac{1-\lambda}{\lambda}$ и полагая $h(\rho) = h([-1, 0], [\rho, +\infty])$, где $\rho = L(-r')$, получим, что $h(I_\infty, I) \leq h(\rho)$. Заметим далее (см. [20], стр. 53 и 75), что $\pi^{-1} h(\rho)$ и $\pi^{-1} h(\rho^{-1})$ являются взаимно сопряженными экстремальными расстояниями, соответственно, между отрезками $[-1, 0]$, $[\rho, +\infty]$ и $[-\infty, -1]$, $[0, \rho]$, поэтому выполняется тождество $h(\rho) h(\rho^{-1}) = \pi^2$. Полагая $q = \exp(-h(\rho^{-1}))$, имеем, что (см. [20], стр. 76, формулу (4.19))

$$16\rho^{-1}q = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - q^{2n-1}}{1 + q^{2n}} \right)^8 < 1 - q.$$

откуда, учитывая, что $\rho \leq 2\lambda^{-1}(1-\lambda)$, получим оценку $h(\rho^{-1}) > \log \frac{1}{1-\lambda}$.

Отсюда и из указанного выше тождества следует доказывающая лемма оценка.

2°. Доказательство теоремы 2. Пусть $z_1, z_2, \dots, z_{n_k}$ — полюсы функции f , лежащие в D_{r_k} и $n_k = n(r_k, f)$, причем каждый полюс перечислен с учетом его кратности. Тогда имеем оценку

$$\log \frac{|f(z)|}{M} \leq \omega_{r_k}(z) \left[\log^+ M(r_k, f) + \log^+ \frac{1}{M} \right] + \sum_{j=1}^{n_k} g(z, z_j), \quad z \in D_{r_k}, \quad (2.6)$$

которую легко проверить, перенеся все слагаемые в левую часть и применяя, с учетом (1.6) и (1.7), принцип максимума к образовавшейся субгармонической функции и к D_{r_k} .

Заметим теперь, что условия (1.8) и (1.9) сохраняются, если заменить $(\rho_k)_I^\infty$ и $(r_k)_I^\infty$ их подпоследовательностями $(\rho_{k_j})_I^\infty$ и $(r_{k_j})_I^\infty$. Поэтому можно считать, что ρ_k ограничена сверху, если ρ_k не стремится к $+\infty$. Однако, в этом случае очевидно, что вместо ρ_k существует $\tilde{\rho}_k = o(r_k)$, $\tilde{\rho}_k \rightarrow +\infty$, удовлетворяющая условиям (1.8) и (1.9) (даже с заменой A на 0). Поэтому без ограничения общности можем считать, что $\rho_k \rightarrow +\infty$ и $2\rho_k < r_k$ при $k \geq k_0$.

Оценим при $k \geq k_0$ функцию $\omega_{r_k}(z)$ в (2.6) для $z \in D_{r_k}$ и $|z| \leq \rho_k$ согласно (2.2), а для оценки последней суммы в (2.6) применим лемму, когда $n = n_k$ и $I = [\log \rho_k, \rho_k]$. В результате мы найдем такое $t_k \in I$, что функция f будет иметь одинаковую оценку для всех $z \in D_{r_k}$ и $|z| = t_k$, $k \geq k_0$, а именно:

$$\log \frac{M(t_k, f)}{M} < c_2 \exp \left(-\pi \int_{\rho_k}^{r_k} \frac{dt}{t \theta(t)} \right) \left[\log^+ M(r_k, f) + \log^+ \frac{1}{M} \right] + \frac{\pi^2 n_k}{\log(\rho_k / \log \rho_k)}. \quad (2.7)$$

Первое слагаемое правой части (2.7) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ согласно (1.8) и замечания, что $\exp(\cdot) < (\rho_k / r_k)^{1/2}$ (вследствие оценки $\theta(t) \leq 2\pi$). Второе слагаемое оценивается согласно (1.9), и поскольку в левой части $t_k \rightarrow +\infty$, то предельным переходом в (2.7) получим (1.10).

Доказательство теоремы 3. Проведем в $DU\{\infty\}$ замкнутую жордановую кусочно-линейную в D кривую Γ' , состоящую, как и $\Gamma = \partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, из двух жордановых дуг Γ_1 и Γ_2 с общим началом ζ_0 и концом ∞ и не имеющих других общих точек. Пусть Ω — подобласть D , ограниченная кривыми Γ и Γ' , $l_\Omega(t)$ — линейная мера множества $\{z \in \Omega : |z| = t\}$. Разрез L в Ω , соединяющий точку ζ_0 с началом ζ_0 дуг Γ_1 и Γ_2 , делит Ω на две области Ω_i , $i = 1, 2$; можно считать,

что $\mathcal{Q}_i$ ограничена кривой $L \cup \Gamma_i \cup \Gamma_i'$ и Γ_i' настолько быстро приближается к Γ_i в бесконечности, что выполняются условия

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \mathcal{Q}_i}} f(z) = a_i, \quad i = 1, 2, \quad (2.8)$$

$$\varepsilon(t) < \frac{1}{2} \theta(t) \text{ при } t \geq t', \quad \int \frac{\varepsilon(t)}{t \theta^2(t)} dt < +\infty. \quad (2.9)$$

Теперь ясно, что достаточно доказать теорему для области $D' = D \setminus \Omega$, ограниченной замкнутой жордановой кривой Γ' : при $a_1 = a_2 = a$, из утверждения (1.12) для области D' и из (2.8) следует (1.12) для области D . Для области D' условие (1.11) выполняется согласно (2.8), а оценка (1.9), очевидно, сохраняется. Выполнение (1.8) для D' следует из (1.8) и (2.9).

Итак, при доказательстве теоремы 3 без ограничения общности можем считать, что граница Γ области D является замкнутой жордановой кривой, а мероморфная в D функция f непрерывна вплоть до $\Gamma \setminus \{\infty\}$. Кроме того, как и при доказательстве теоремы 2, можем предположить, что $\rho_k \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим теперь мероморфную в D и непрерывную вплоть до $\Gamma \setminus \{\infty\}$ функцию $z \rightarrow F(z) = P(f(z))$, $z \in D$, где

$$P(w) = c(w - a_1)(w - a_2), \quad c = (1 + |a_1|)^{-1}(1 + |a_2|)^{-1},$$

и пусть Q — произвольная рациональная функция с полюсами вне Γ и такая, что $Q(\infty) = 0$. Тогда, очевидно, что функция $F + Q$ удовлетворяет условию (1.11) при $a_1 = a_2 = 0$. Докажем, что она удовлетворяет и остальным условиям теоремы 3 при тех же (ρ_k) и (r_k) , возможно, с заменой в (1.9) величины A на $2A$. Последнее, с учетом условия $\rho_k \rightarrow +\infty$, следует из (1.9) и оценки

$$n(r, F + Q) \leq 2n(r, f) + n_Q \text{ для } r > r',$$

где n_Q — порядок Q . Для проверки соблюдения условия (1.8) заметим, что

$$\begin{aligned} \log^+ |F + Q| &\leq |Q| + \log^+ |F|, \\ \log^+ |P(w)| &\leq 2 \log^+ |w| \text{ для } w \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Из этих оценок следует, что

$$\log^+ M(r, F + Q) \leq M(r, Q) + 2 \log^+ M(r, f),$$

откуда, с учетом (1.8) и условия $M(r, Q) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, получим (1.8) для функции $F + Q$.

Полагая теперь $F(\infty) = 0$, воспользуемся тем, что сужение F на Γ непрерывно. Из аппроксимационной теоремы Уолша (см. [21], стр. 55) следует, что для наперед заданного $\varepsilon > 0$ рациональную функцию Q , $Q(\infty) = 0$, можно подобрать так, чтобы

$$\sup_{z \in \Gamma} |F(z) + Q(z)| < \varepsilon.$$

При таком выборе Q функция $F + Q$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 (полагая в ней $M = \varepsilon$ и $2A$ вместо A), поэтому, согласно (1.10),

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M(r, F + Q) \leq \varepsilon e^{2\pi^2 A},$$

откуда, учитывая, что $M(r, Q) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M(r, F) \leq \varepsilon e^{2\pi^2 A},$$

и поскольку левая часть не зависит от ε , то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M(r, F) = 0. \quad (2.10)$$

Допустим теперь, что $a_1 \neq a_2$. Тогда, очевидно, существуют непересекающиеся окрестности V_1 и V_2 этих точек и число $\delta > 0$ такое, что из условия $|P(w)| < \delta$ следует, что $w \in V_1 \cup V_2$. Согласно (2.10) существует $r_0 > r'$ такое, что $M(r_0, F) < \delta$. На окружности $|z| = r_0$ существует дуга γ , лежащая в D , кроме своих концов $z_1 \in \Gamma_1$, $z_2 \in \Gamma_2$. Мы получаем, что $f(\gamma) \subset V_1 \cup V_2$, причем $f(z_i) \in V_i \cap f(\gamma) \neq \emptyset$, $i = 1, 2$. Однако это противоречит тому, что $f(\gamma)$ связно (как непрерывный образ дуги).

Таким образом, мы доказали, что $a_1 = a_2 (=a)$ и поскольку тогда

$$M(r, f - a) = c^{-1/2} M^{1/2}(r, F), \quad r > r',$$

то заключение (1.12) следует из (2.10). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1. Допустим, что функция f имеет по крайней мере p конечных асимптотических значений $a_1, \dots, a_p$ (с учетом кратности), причем при $p = 1$ значение $a = a_1$ удовлетворяет условию (1.3), $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$ — соответствующие попарно неэквивалентные (при $p > 1$) асимптотические пути, являющиеся жордановыми дугами с началом 0 и концом ∞ . При $p > 1$ можем считать, что они попарно не имеют других общих точек.

Положим $D_1 = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ при $p = 1$. Если же $p > 1$, то кривые $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$ разбивают плоскость $\mathbb{C}$ на попарно непересекающиеся области $\rho D_1, \dots, D_p$, причем граница D_j состоит из Γ_j и Γ_{j+1} ($\Gamma_{p+1} \equiv \Gamma_1$). Если $\theta_j(r)$ означает линейную меру множества $\{z \in D_j : |z| = r\}$, $r > 0$, то очевидно

$$\sum_{j=1}^p \theta_j(r) \leq 2\pi. \quad (2.11)$$

Теперь вместе с $(r_k)_{k=1}^\infty$ рассмотрим последовательность $(\rho_k)_{k=1}^\infty$, $\rho_k = o(r_k)$, определяем ую формулой

$$\rho_k = \left(\frac{r_k^{p/2}}{1 + \log^+ M(r_k, f)} \right)^{1/p}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

которая, с учетом (1.1) и (1.2), будет удовлетворять условиям

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\rho_k}{r_k} \right)^{p/2} \log^+ M(r_k, f) = 0, \quad n(r_k, f) = O(\log \rho_k), \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

Для фиксированного j , $1 \leq j \leq p$ имеем, что

$$\log \frac{r_k}{\rho_k} = \int_{\rho_k}^{r_k} \frac{dt}{t} \leq \left(\int_{\rho_k}^{r_k} \frac{\theta_j(t)}{t} dt \right)^{1/2} \left(\int_{\rho_k}^{r_k} \frac{dt}{t \theta_j(t)} \right)^{1/2},$$

откуда, суммируя по j и еще раз применяя неравенство Коши-Буняковского, с учетом (2.11), получим

$$\begin{aligned} p \log \frac{r_k}{\rho_k} &\leq \left(\int_{\rho_k}^{r_k} \left(\sum_{j=1}^p \theta_j(t) \right) \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^p \int_{\rho_k}^{r_k} \frac{dt}{t \theta_j(t)} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq (2\pi)^{1/2} \left(\log \frac{r_k}{\rho_k} \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^p \int_{\rho_k}^{r_k} \frac{dt}{t \theta_j(t)} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

так что

$$\log \left(\frac{r_k}{\rho_k} \right)^{p/2} \leq \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \pi \int_{\rho_k}^{r_k} \frac{dt}{t \theta_j(t)}.$$

Отсюда следует, что существует такое $j = j(k)$, что

$$\log \left(\frac{r_k}{\rho_k} \right)^{p/2} \leq \pi \int_{\rho_k}^{r_k} \frac{dt}{t \theta_j(t)}. \quad (2.13)$$

Однако, ввиду конечности числа индексов $j = j(k)$, существует такое j , скажем $j = 1$, что оценка (2.13) выполняется для бесконечной последовательности $k = k_m \rightarrow \infty$. Тогда

$$\exp \left(-\pi \int_{\rho_{k_m}}^{r_{k_m}} \frac{dt}{t \theta_1(t)} \right) \leq \left(\frac{\rho_{k_m}}{r_{k_m}} \right)^{p/2}.$$

Отсюда и из (2.12) следует, что функция f в области D_1 удовлетворяет условиям (1.8) и (1.9) для последовательностей (ρ_{k_m}) и (r_{k_m}) . Кроме того, она, очевидно, удовлетворяет также условию (1.11) теоремы 3 (полагая $a_2 = a_1 = a$ при $p = 1$). Поэтому, согласно теореме 3, при $p = 1$ функция f удовлетворяет условию (1.12), откуда следует оценка

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M(r, f) \leq |a|,$$

противоречащая допущению (1.3). Если же $p > 1$, то мы имеем, что $a_1 = a_2$ и тогда (1.12) означает, вопреки нашему допущению, что асимптотические пути Γ_1 и Γ_2 эквивалентны. Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство теоремы 4. Поскольку область $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ не может быть ограниченной, выберем числа $r' > 0$ так, чтобы окружность

сти $|z| = r$ при $r \geq r'$ пересекались с D . Можно также без ограничения общности считать, заменяя в случае надобности f на $f - Q_n$, что функция f не имеет полюсов на Γ и $|f(z)| \leq 3^{-1}$ для $z \in \Gamma$, откуда следует, что $\rho_n = \rho_n(f, \Gamma) \leq r^{-1}$ для $n = 1, 2, \dots$.

Выберем теперь рациональную функцию Q_n -порядка n так, чтобы

$$|f(z) - Q_n(z)| \leq 2\rho_n \text{ для } z \in \Gamma, n = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Ясно, что Q_n не имеет полюсов на Γ и, кроме того, $|Q_n(z)| \leq 1$ для $z \in \Gamma$. Если $g(z, \zeta)$ — функция Грина области $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ и $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ — полюсы функции Q_n , перечисленные с учетом их кратности, то по принципу максимума имеем

$$\log |Q_n(z)| \leq \sum_{m=1}^n g(z, \zeta_m) \text{ для } z \in D. \quad (2.15)$$

Для дальнейшего весьма полезна следующая известная оценка Р. Неванлинны (см. [2], стр. 55, теорему 7.2): для мероморфной функции f и числа $\mu > 1$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{r} \int_0^r \log^+ M(t, f) dt \leq k(\mu) T(\mu r, f),$$

где постоянная $k(\mu) > 1$ зависит только от μ . Отсюда, полагая $\mu = \sqrt[q]{r}$, $k_q = \mu^2(\mu - 1)^{-1} k(\mu)$ и заменяя r на $\mu^4 r$, мы получим, что линейная мера открытого множества

$$G = \{t \in (0, \mu^3 r) : \log^+ M(t, f) > k_q T(qr, f)\}$$

меньше, чем $(\mu^3 - \mu^2)r$. Тогда существует такой компакт $I_r \subset [\mu^2 r, \mu^4 r] \setminus G$ линейной меры $|I_r| = (\mu^4 - \mu^3)r$, что

$$\log^+ M(t, f) \leq k_q T(qr, f) \text{ для } t \in I_r. \quad (2.16)$$

Для оценки правой части (2.15) применим установленную выше лемму в случае, когда $I = I_{r_j}$, $R = \mu^4 r_j$, $r_j > r'$, и, следовательно, $\lambda = 1 - \mu^{-1}$. С учетом (2.3) и (2.15) мы найдем такую точку $t_j \in I_{r_j}$, что

$$\log^+ M(t_j, Q_n) \leq c_q n, \quad (2.17)$$

где для нас достаточно информация, что константа c_q зависит только от q .

Пусть теперь $z_1, z_2, \dots, z_{p_j}$ — полюсы функции f , лежащие в круге $|z| \leq t_j$ и перечисленные с учетом их кратности, так что $p_j = n(t_j, f)$ и $z_{p_j+1} = \zeta_1, \dots, z_{p_j+n} = \zeta_n$. Рассмотрим пересечение D_{t_j} области D с кругом $|z| < t_j$ и оценим $f - Q_n$ в D_{t_j} сверху. Из (2.16) при $r = r_j$ и $t = t_j$ и из (2.17) следует, что

$$\log^+ M(t_j, f - Q_n) \leq k_q T(qr_j, f) + c_q n + 1,$$

и принцип максимума субгармонических функций с учетом (2.14) приводит нас к оценке

$$\log |f(z) - Q_n(z)| \leq \sum_{m=1}^{p_j+n} g(z, z_m) + \omega_j^*(z) \log p_n + \\ + k_q T(qr_j, f) + c_q n + 2, \quad z \in D_{t_j}, \quad (2.18)$$

где ω_j^* — гармоническая мера относительно D_{t_j} части множества Γ , лежащей в круге $|z| \leq t_j$.

Первое слагаемое в правой части (2.18) мы опять можем оценить с помощью леммы, полагая на этот раз $I = [r_j, \mu r_j]$ и $R = \mu r_j$, так что опять $\lambda = |I| R^{-1} = 1 - \mu^{-1}$. Мы найдем такую точку $z_j \in [r_j, \mu r_j]$, что

$$\sup_{z \in \gamma_{z_j}} \sum_{m=1}^{p_j+n} g(z, z_m) < c_q (p_j + n). \quad (2.19)$$

Отсюда и из (2.15), между прочим, следует, что

$$\log^+ M(z_j, Q_n) < c_q (p_j + n). \quad (2.20)$$

Далее, поскольку $\mu < 1$, возникает необходимость оценить в (2.18) величину $\omega_j^*(z)$ снизу для тех же $z \in \gamma_{z_j}$. Пусть $D_{t_j}^*$ — компонента D_{t_j} , содержащая точку $z \in \gamma_{z_j}$, $\Gamma_{t_j}^* = \Gamma \cap \partial D_{t_j}^*$. По определению, $\omega_j^*(z)$ — это гармоническая мера $\Gamma_{t_j}^*$ в точке z относительно области $D_{t_j}^*$. Легко видеть, что $\Gamma_{t_j}^*$ пересекается со всеми окружностями $|z| = r$, $\theta \leq r \leq t_j$, так что для оценки $\omega_j^*(z)$ снизу применима оценка Карлемана-Мию (см. [4], гл. IV, § 5, стр. 104—109): точнее, можно утверждать (поскольку $t_j \geq \mu r_j$), что существует зависящая лишь от q константа $a_q \in (0, 1)$ такая, что $\omega_j^*(z) \geq a_q$ для $z \in \gamma_{z_j}$. Тогда из оценок (2.18) и (2.14) с учетом (2.19) следует, что

$$\log M(z_j, f - Q_n) \leq a_q \log p_n + k_q T(qr_j, f) + 2c_q p_j + c_q n + 2. \quad (2.21)$$

Заметив теперь, что $t_j \leq \mu^4 r_j$, с учетом условий $\delta(\infty, f) = 1$ и (1.14), имеем

$$p_j \leq (\log \mu)^{-1} \int_{\mu^4 r_j}^{\mu^4 r_j} \frac{n(t, f) dt}{t} < (\log \mu)^{-1} N(qr_j, f) = \\ = o(T(qr_j, f)) = o(T(r_j, f)) \text{ при } j \rightarrow \infty,$$

так что полагая $\delta_q = (3c_q)^{-1}$ и $n_j = [\delta T(r_j, f)]$, где $0 < \delta \leq \delta_q$, из (2.20) получим

$$L(z_j, Q_{n_j}) < \exp\left(\frac{1}{2} T(r_j, f)\right) \text{ при } j > j_0.$$

Аналогично из (2.21), с учетом (1.14), имеем

$$M(z_j, f - Q_{n_j}) < p_n^{a_q} \exp(O(T(r_j, f))) \text{ при } j \rightarrow \infty,$$

так что, с одной стороны

$$M(\tau_j, f) < \exp\left(\frac{1}{2} T(r_j, f)\right) + p_{n_j} \exp(O(T(r_j, f))).$$

С другой стороны, из условия $\delta(\infty, f) = 1$ и из оценки $\tau_j \geq r_j$, следует, что

$$M(\tau_j, f) \geq \exp([1 - o(1)] T(\tau_j, f)) \geq \exp([1 - o(1)] T(r_j, f)).$$

Сопоставление полученных для $M(\tau_j, f)$ неравенств дает оценку

$$p_{n_j} \geq \exp(-O(T(r_j, f))), \quad j \rightarrow \infty,$$

откуда, учитывая, что $p_j = \delta T(r_j, f) + O(1)$, приходим к (1.15). Теорема 4 доказана.

Институт математики

АН Армянской ССР

МИАН СССР им. В. А. Стеклова

Поступила 4.XII.1987

Ռ. Ա. Ավետիսյան, Ն. Մ. Արակելյան, Ա. Ա. Գոնչար. Մերոմորֆ ֆունկցիաների ասիմպտոտիկական հատկությունների մասին (ամփոփում)

Աշխատանքի հիմնական նպատակն է ամբողջ ֆունկցիաների ասիմպտոտական արժեքների քանակի վերաբերյալ Ռանոմ-Կարլեմանի-Ալֆորսի հայտերի թեորեմի «մերոմորֆ» ներմանակի ստացումը, Հաստված են նաև ֆրագմեն-հիդրոլիզի թեորեմի ընդհանրացված տարբիրակների «մերոմորֆ» նմանակներ և արդյունքներ ասիմպտոտական ճանապարհի վրա մերոմորֆ ֆունկցիայի լավագույն ռացիոնալ մոտաձերսթյունների արագության վերաբերյալ:

R. A. AVETISYAN, N. U. ARAKELYAN, A. A. GONCAR. On asymptotic properties of meromorphic functions (summary)

The main purpose of this work is the establishment of meromorphic analogues of the well known Denjoy—Carleman—Ahlfors' theorem. It is also established the meromorphic analogues of the generalized variants of Phragmen—Lindelöf theorem and the results on a speed of the best rational approximations of a meromorphic function on an asymptotic path.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Ahlfors. Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und ganzen Functionen, Acta Soc. Fenn., 1, № 9, 1930, 1—40.
2. А. А. Гольдберг, Н. В. Островский. Распределение значений мероморфных функций, М., Наука, 1970.
3. А. А. Гольдберг. Мероморфные функции. Матем. анализ, т. 10, Итоги науки и техники, М., Наука, 1970.
4. Р. Неванlinna. Однозначные аналитические функции, М.—Л., Гостехиздат, 1941.
5. R. Nevanlinna. Le théorème de Picard—Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris, Gauthier—Villars, 1929.
6. G. Valiron. Sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions méromorphes, Palermo Rend., 46, 1925.
7. G. Valiron. Sur le nombre des singularités des fonctions inverses d'une d'algebroides, C. R. Acad. sci. 200, 1935, 713—715.
8. Y. Tuzura. Recherches sur la distribution des valeurs des fonctions analytiques, Jap. J. Math., 18, № 4, 1943, 797—876.

9. Г. Поля и Г. Сеге. Изопериметрические неравенства в математической физике, М., Физматгиз, 1962.
10. G. Szegő. On the capacity of a condenser, Bull. of Amer. Math. Soc., 51, 1945, 325—350.
11. А. А. Гончар. О задачах Е. И. Золотарёва, связанных с рациональными функциями, Мат. сборник, 78 (120), № 4, 1969, 640—654.
12. А. А. Гончар. Скорость рациональной аппроксимации и свойство однозначности аналитической функции в окрестности изолированной особой точки, Мат. сборник, 94 (136), № 2 (6), 1974, 265—282.
13. W. H. J. Fuchs and A. A. Gončar. Approximation of entire functions on bounded continua, Canad. Math. Soc. Conf. Proceedings. v. 3, 1983, 171—184.
14. Н. У. Аракелян, Р. А. Аветисян. О наилучшем равномерном приближении мероморфными функциями на вещественной оси, ДАН СССР, 257, № 6, 1981, 1289—1292.
15. M. Tsjuzt. Potential theory in modern function theory, Maruzen, Tokyo, 1959.
16. W. H. J. Fuchs. Topics in theory of functions of one complex variable, Van Nostrand, Princeton, 1967.
17. W. J. Cody, G. Meinardus and R. S. Varga. Chebyshev rational approximations to e^{-x} in $[0, \infty)$ and applications to heat condition problems, J. Approx. Theory, 2, 1969, 50—65.
18. М. В. Келдыш. О рядах по рациональным дробям, ДАН СССР, 94, № 3, 1954, 377—380.
19. P. Koosis. Extremal length and harmonic measure of general sets on a Jordan curve (manuscript. Jan. 29, 1983).
20. L. V. Ahlfors, Conformal invariants, Mc. Graw—Hill, N. Y., 1973.
21. Дж. А. Уолш. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, ИЛ, М., 1961.

УДК 517.986.6

С. А. ГРИГОРЯН

ОБОБЩЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПЮ АРЕНСУ—ЗИНГЕРУ ФУНКЦИИ

Введение

В начале 60-ых годов Р. Аренс и И. Зингер начали изучение специального вида алгебр функций, порожденных полугруппой характеров локально компактной абелевой группы. Этим функциям присущи многие свойства аналитичности, отсюда и их название — обобщенные аналитические функции. К алгебрам обобщенных аналитических функций можно отнести равномерную алгебру на компактной группе, инвариантную относительно сдвигов. Приведем наиболее характерный пример такой равномерной алгебры.

Пусть G — компактная абелева группа, характеры которой образуют аддитивную подгруппу Γ группы вещественных чисел $\mathbb{R}$, наделенную дискретной топологией. Тогда равномерная алгебра A на G , порожденная характеристиками из $\Gamma_+ = \{x \in \Gamma; x \geq 0\}$, является алгеброй обобщенных аналитических функций. Интерес к такой алгебре обусловлен тем, что в случае, когда Γ изоморфна $\mathbb{Z}$ ($\Gamma = \mathbb{Z}$), A — диск-алгебра, а в случае $\Gamma = \mathbb{R}$ A изоморфна алгебре равномерно почти-периодических аналитических функций в верхней полуплоскости. Это, в частности, позволяет с единой точки зрения взглянуть на многие вопросы теории функций одного комплексного переменного и теории почти-периодических функций (см., например, [1]—[6]).

В настоящей работе продолжается изучение таких обобщенных аналитических функций: описываются аналитические свойства этих функций, вводится понятие производной, устанавливается формула Иенсена, дается новая трактовка известных теорем теории почти-периодических аналитических функций (Г. Бора, А. Безиковича, Б. Я. Левина, Дж. Фаварда и др., ср. [8], [9]).

Содержание статьи распределено по параграфам. В § 1 приведены определение обобщенной аналитической функции, примеры и результаты, необходимые для дальнейшего. В §§ 2—6 формулируются и доказываются теоремы, в которых явно прослеживается специфика обобщенных аналитических функций.

Часть результатов ранее была анонсирована в [14]—[16].

§ 1. Обобщенные аналитические функции

Пусть G — такая компактная абелева группа, группа характеров которой изоморфна некоторой аддитивной подгруппе Γ группы веществен-

ных чисел R , наделенной дискретной топологией. Поэтому можно считать, что Γ — группа характеров G . Заметим, что по теореме двойственности Понтрягина верно и обратное — группа G есть группа характеров группы Γ . На локально компактном пространстве Ω , полученном из декартова произведения $G \times [0, \infty)$, путем отождествления слоя $G \times \{0\}$, в точку для каждого $\alpha \in \Gamma_+ = \{\alpha \in \Gamma, \alpha \geq 0\}$ рассмотрим функцию φ^α , полагая для $s = \alpha \cdot r \in \Omega$ $\varphi^\alpha(s) = \alpha(\alpha) \cdot r^\alpha$. Можно проверить, что φ^α — непрерывная на Ω функция и семейство $\{\varphi^\alpha\}_{\alpha \in \Gamma_+}$ разделяет точки Ω .

Определение 1.1. Пусть D — открытое множество в Ω и f — непрерывная функция на D . Будем говорить, что f — обобщенно аналитическая или просто аналитическая функция на D , если она локально в некоторой окрестности каждой точки из D аппроксимируется линейными комбинациями функций из $\{\varphi^\alpha\}_{\alpha \in \Gamma_+}$.

Аналитическую на всем Ω функцию будем называть целой, конечную комбинацию функций из $\{\varphi^\alpha\}_{\alpha \in \Gamma_+}$ — полиномами, а отношение двух полиномов — рациональной функцией.

В зависимости от выбора Γ получаются различные пространства Ω .

Пример [5]. Пусть $G = T^2$ — двумерный тор $\mathbb{C}^2$ и α — положительное иррациональное число. Рассмотрим отображение τ из $Z_2 = Z \oplus Z$ в R : $\tau(m, n) = m + \alpha n$. Положим $\Gamma = \{m + \alpha n, (m, n) \in Z_2\}$ и $\Gamma_+ = \Gamma \cap R_+$. Для каждого $\alpha = m + \alpha n \in \Gamma_+$ определим на пространстве $\Omega = G \times [0, \infty) / G \times \{0\}$ функцию φ^α , полагая для $s \in \Omega$, $s = (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \cdot r$, $\varphi^\alpha(s) = e^{i(m\theta_1 + n\theta_2)} \cdot r^\alpha$. Очевидно, в этом примере множество $\Omega \setminus \{*\}$, $* = G \times \{0\}$ — вещественное многообразие размерности 3.

В дальнейшем для $s \in \Omega$, $s = \alpha \cdot r$, число r будем называть модулем элемента s и обозначать $|s|$.

Отметим, что на пространстве Ω можно определить действие как группы G , так и R_+ , если $s = \alpha \cdot r_0 \in \Omega$, $\beta \cdot s = (\alpha \cdot \beta) \cdot r_0$, $s \cdot r = \alpha \cdot (r \cdot r_0)$, где $\beta \in G$, $r \in R_+$.

Пусть A — равномерная алгебра на некотором компакте X , т. е. содержащая константы и разделяющая точки, замкнутая в равномерной норме подалгебра $C(X)$ алгебры всех непрерывных комплекснозначных функций на X . Говорят, что алгебра A — максимальная алгебра Дирихле, если $Re A = C_R(X)$ — пространству всех вещественнозначных функций на X , и любая равномерная алгебра на X , строго содержащая A , совпадает с $C(X)$. Известным примером максимальной алгебры Дирихле служит след-диск алгебры на единичный круг.

Другой пример строится следующим образом.

Предложение 1.2 Пусть $\Omega_1 = \{s \in \mathbb{D}; |s| \leq 1\}$ и A — пространство всех обобщенно аналитических в $\text{int } \Omega_1$ и непрерывных вплоть до $T_1 = \{s \in \Omega; |s| = 1\}$ функций. Тогда

- i) A — равномерная алгебра на Ω_1 ;
- ii) пространство максимальных идеалов алгебры A есть Ω_1 ;
- iii) граница Шилова алгебры A совпадает с T_1 , а сужение A на T_1 является максимальной алгеброй Дирихле;
- iv) полиномы плотны в A .

Доказательство этого утверждения непосредственно следует из работы [5].

Пусть μ — мера Хаара группы G . Так как обобщенная окружность $T_r = G \times \{r\}$ естественным образом наделяется структурой группы G , можно считать, что μ — мера Хаара на T_r . Поскольку характеры из Γ образуют ортонормированный базис в $L^2(G, d\mu)$, для любого $f \in C(T_r)$ существует формальный ряд $f \simeq \sum_{a \in \Gamma} c(a) \varphi^a$, $\varphi^a = \overline{\varphi^{-a}}$, где

$$c(a) = \int_{T_r} f / \varphi^a d\mu. \text{ В частности } f \in A|_{T_r} \text{ тогда и только тогда, когда}$$

$$c(a) = 0 \text{ для всех } a \in \Gamma \setminus \Gamma_+.$$

Пусть теперь функция $f \in L^2(T_1, d\mu)$, $f \sim \sum_{a \in \Gamma} c(a) \varphi^a$. Преобразование Гильберта H этой функции представляется в виде ряда

$$Hf = \sum_{a \in \Gamma} c(a) \operatorname{sign}(a) \cdot \varphi^a \in L^2(T_1, d\mu).$$

Оператор H , в силу теоремы Парсеваля, непрерывен и $\|Hf\| = \|f\|$, а так как оператор вложения $C_R(T_1)$ в $L^2(T_1, d\mu)$ также непрерывен, H является непрерывным отображением из $C_R(T_1)$ в $L^2(T_1, d\mu)$. И поскольку $\operatorname{Re} A|_{T_r}$ плотно в $C_R(T_1)$ каждую функцию $u \in C_R(T_1)$ можно расширить до некоторой функции $\hat{u} \in \overline{\operatorname{Re} A}$ на $\mathcal{Q}_1$.

В случае, когда $\Gamma = \mathbb{Z}$, найдется такая аналитическая в $\operatorname{int} \mathcal{Q}_1$ функция f , что $\hat{u} = \operatorname{Re} f$. Дж. Милашевич в [12] показал, что в общем случае этот факт неверен (пример Х. Бора и Дж. Фоварда для аналитических почти-периодических функций см. [8]). Здесь приведем простое доказательство этого результата, заметив, что если f — обобщенная аналитическая функция в $\operatorname{int} \mathcal{Q}_1$, для любого $r > 0$, $f_r(s) = f(r \cdot s)$ принадлежит алгебре A .

Предложение 1.3. Пусть $\Gamma \neq \mathbb{Z}$, тогда существует такая функция $u \in C_R(T_1)$, что соответствующая ей функция $\hat{u}$ не является вещественной частью аналитической в $\operatorname{int} \mathcal{Q}_1$ функции.

◀ Доказательство проведем от противного. Зафиксируем r , $0 < r < 1$. Тогда, в силу допущения, для всякого $u \in C_R(T_1)$ найдется $f \in A$ такая, что $\operatorname{Im} f(*) = 0$ и $\operatorname{Re} f = \hat{u}_r$, где $\hat{u}_r(s) = \hat{u}(s \cdot r)$. А так как отображение $u \rightarrow \hat{u}_r$, $u \in C_R(T)$, непрерывно в равномерной топологии см. предложение 1.2 iii)) и равномерная норма сильнее, чем L^2 -норма, применив теорему о замкнутом графике, получим, что непрерывный в L^2 норме оператор $H_r: u \rightarrow H(\hat{u}_r)$, отображающий $C_R(T_1)$ в $\operatorname{Im} A$, также непрерывен в равномерной топологии.

Пусть $\|H_r\| = \sup_{\|u\| \leq 1} |H(\hat{u}_r)| = c$. Рассмотрим в единичном круге D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ такую аналитическую функцию g , $\operatorname{Im} g(0) = 0$,

что функция $u = \operatorname{Re} g$ непрерывно продолжается вплоть до границы, $|u| < 1$, а $v = \operatorname{Im} g$ неограничена в D . Поэтому для некоторого $z \in D$, $|v(z)| > c$. Выберем $a \in \Gamma_+$ так, что $z \notin \varphi^a(\mathcal{Q}_1 \setminus \mathcal{Q}_r)$. Тогда функция $f = g \circ \varphi^a \in A$ и $|\operatorname{Re} f| = |u \circ \varphi^a| < 1$, а $\|H(\operatorname{Re} f_r)\| = \sup_{\mathcal{Q}_r} |v \circ \varphi^a| > |v(z)| > c$.

Пришли к противоречию. ►

Теперь перейдем к описанию локальной структуры пространства Ω . Следуя Р. Аренсу и И. Зингеру [1], рассмотрим непрерывный гомоморфизм $h: R \rightarrow G$, $h(x) = a_x \in G$, полагая $a_x(a) = e^{iax}$, $a \in \Gamma$. В случае, когда Γ не изоморфна группе целых чисел, h взаимно однозначно отображает R на всюду плотную подгруппу группы G . Действительно, в противном случае из известных фактов теорий абелевых компактных групп нашлось бы $a \in \Gamma$, $a \neq 0$ такое, что $a_x(a) = 1$ для всех $x \in R$, т. е. $e^{iax} = 1$. А это невозможно. Следовательно $\overline{h(R)} = G$.

Заметим, что в случае $\Gamma = \mathbb{Z}$, $h(R) = G$.

Зададим теперь отображение χ из $\mathbb{C}$ в $\mathcal{Q}$, полагая для $z = x + iy$

$$\chi(x + iy) = a_x \cdot e^{-y}. \quad (1.1)$$

Из вышесказанного следует, что в случае $\Gamma \neq \mathbb{Z}$ χ непрерывно взаимно однозначно отображает $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}_\Gamma$ — всюду плотное подмножество в $\mathcal{Q}$. Кроме того, так как

$$\varphi^a \circ \chi(z) = e^{iaz}, \quad (1.2)$$

сужение целой обобщенно аналитической функции f на $\mathbb{C}_\Gamma$ является целой (даже почти-периодической) функцией. Множество $\chi(R) = R_\Gamma$ совпадает с $\mathbb{C}_\Gamma \cap T_1$ и, в случае $\Gamma \neq \mathbb{Z}$ является всюду плотной подгруппой группы T_1 .

Пусть W — компакт в $\mathbb{C}$ и $P(W)$ — равномерная алгебра на W , порожденная полиномами. Для фиксированного $a \in \Gamma$, $G_a = \{a \in G, a(a) = 1\}$ — подгруппа группы G .

Через B обозначим пространство всех целых функций на Ω .

Предложение 1.4. Для каждой точки пространства $\mathcal{Q} \setminus \{*\}$ существует замкнутая окрестность F , гомеоморфная декартову произведению $W \times G_a$ (W — некоторое замкнутое подмножество в $\mathbb{C}$), так что равномерная алгебра B_F , полученная из равномерного замыкания сужения B на F , изометрически изоморфна равномерной алгебре на $W \times G_a$, порожденной функциями вида $f \cdot g$, где $f \in P(W)$, $g \in C(G_a)$.

► Пусть $w = |e^{i\theta}$, $|\theta| \leq \pi/2$ — дуга на единичной окружности. Зафиксируем $a \in \Gamma_+$ и рассмотрим два множества: $K = \{a \in G; \pi(a) \in w\}$ и $l = \{x \in R; |x| \leq \pi/2a\}$. Определим отображение h° из $l \times G_a$ на K , полагая $h^\circ(x \cdot a) = h(x) \cdot a$. Покажем, что h° — гомеоморфизм. Пусть $a_0 \in K$, т. е. $a_0(a) = e^{i\theta}$, $|\theta| \leq \pi/2$. Из построения h следует, что найдется $x \in l$ такое, что $h(x) = e^{-i\theta}$. Поэтому $h(x) \cdot a_0 \in G_a$. Следовательно, $a_0 \in h(l) \cdot G_a$. Пусть теперь $s \in \mathcal{Q} \setminus \{*\}$, $s = \beta \cdot r$ и $F = \beta K \times [r_1, r_2]$, $0 < r_1 < r < r_2$ — некоторая окрестность точки s . Полагая $W = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z \in l, \operatorname{Im} z \in [-\log r_2, -\log r_1]\}$, определим отображение χ_0 из $W \times G_a$ на F : $\chi_0(z, a) = \beta \cdot a \cdot \chi(z)$. Так как $a(a) = 1$, $a \in G_a$, функция $\varphi^a \chi_0(z, a) = \beta(a) e^{iaz}$ не зависит от a , аналитична по z и разделяет точки W .

Поэтому в силу теоремы Мергеляна любая непрерывная на W и аналитическая в $\text{int } W$ функция аппроксимируется полиномами от e^{ibz} . Следовательно, $P(W)$ содержится в $B_{F^0\chi_0}$ — равномерной алгебре на $W \times G_a$. Покажем теперь, что $C(G_a) \subset B_{F^0\chi_0}$. Согласно (1.2) $\varphi^b \chi(z, \alpha) = \alpha(b) \beta(b) e^{ibz}$ для $b \in \Gamma_+$. Пусть $f \in P(W)$ такое, что $f(z) = e^{ibz}$. Из полиномиальности выпуклости W имеем $f^{-1}(z) \in P(W)$, т. е. $g_b = f^{-1} \cdot (\varphi^b \chi_0) \in B_{F^0\chi_0}$. Так как $|g_b(z, \alpha)| = |\beta(b) \cdot \alpha(b)| = 1$ и пространство максимальных идеалов алгебры B_F есть F , g_b^{-1} принадлежит $B_{F^0\chi_0}$. Теперь заметив, что система функций $\{g_b\}_{b \in \Gamma_+}$ разделяет точки G_a , получим $C(G_a) \subset B_{F^0\chi_0}$ (теорема Стоуна—Вейерштрасса). Пусть теперь $g \in B_F$. Тогда функция $g^0 \chi_0(z, \alpha)$ при каждом фиксированном $\alpha \in G_a$ принадлежит $P(W)$. Следовательно, в силу теоремы Бишопа—Шилова $g^0 \chi_a$ принадлежит равномерной алгебре $\overline{P(W) \cdot C(G_a)}$. ►

Следствие Пусть $s \in \mathbb{Q}$, $s \neq *$ и V — такое компактное подмножество в C_Γ , что $W = \varphi^s(V)$ является окрестностью точки $\varphi^s(s)$ в C . Тогда множество $V \cdot G_a$ — окрестность точки s , и $V \cdot G_a$ гомеоморфно $W \times G_a$.

Предложение 1.5. Пусть μ и γ — нормированные меры Хаара групп G и G_a , соответственно, а K — множество, фигурирующее в доказательстве предыдущего утверждения. Тогда сужение μ на K совпадает с $\frac{2a}{\pi} dx \times d\gamma$.

◄ Поскольку $K = I \times G_a$, для доказательства достаточно показать, что для любого $b \in \Gamma_+$

$$\int_K b(\alpha) d\mu(\alpha) = \frac{a}{2\pi} \int_I \int_{G_a} b(x \cdot \beta) dx \cdot d\gamma(\beta).$$

Легко проверить, что $\int_K d\mu = 1/2$ и $\frac{a}{2\pi} \int_I \int_{G_a} dx d\gamma = 1/2$. Пусть

$b \in \Gamma_+ \setminus \{0\}$ не является степенью a . Тогда сужение b на G_a — нетривиальный характер группы G_a . Следовательно

$$\int_I \int_{G_a} b(x \cdot \beta) dx \times d\gamma(\beta) = \int_I \int_{G_a} e^{ixb} b(\beta) dx d\gamma(\beta) = 0,$$

так как $\int_{G_a} b(\beta) d\gamma(\beta) = 0$.

С другой стороны, поскольку $\beta \cdot K = K$ для любого $\beta \in G_a$ и μ — инвариантная мера, имеем

$$\int_K b(z) d\mu(\alpha) = \int_K b(\beta\alpha) d\mu(\alpha) = b(\beta) \int_K b(z) d\mu = 0.$$

Для подсчета $\int_K a(z) d\mu(z)$ заметим, что характер $a \in \Gamma_+$ порождает отображение G на единичный круг, причем полный прообраз дуги $w = \{e^{i\theta}; -\pi/2\}$ есть K . Поэтому $\int_K a(z) d\mu = 1/2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\theta} d\theta = \frac{i}{\pi}$.

Аналогично $\frac{a}{2\pi} \int \int_{\sigma_a} a(x \cdot \beta) dx d\gamma(\beta) = \frac{i}{\pi} \triangleright$

§ 2. Голоморфные отображения

Пусть $\mathcal{Q}(r_1, r_2) = \{s \in \mathcal{Q}; r_1 \leq |s| \leq r_2\}$ и $B(r_1, r_2)$ — алгебра всех обобщенных аналитических функций в $\text{int } \mathcal{Q}(r_1, r_2)$, непрерывных вплоть до $T_{r_1} \cup T_{r_2}$. Для каждой функции $f \in B(r_1, r_2)$ существует формальный ряд

$$f \sim \sum_{a \in \Gamma} c(a) \varphi^a, \quad \varphi^{-a} = (\varphi^a)^{-1}, \quad (2.1)$$

где $c(a) = \int_{T_r} f \varphi^a d\mu$ не зависит от выбора r , $r_1 \leq r \leq r_2$ [7].

Дальнейшее утверждение является аналогом следующей теоремы Бора—ван Кампена: пусть G — связная компактная абелева группа и $f \in C(G)$ не обращается в нуль на G . Тогда существует характер φ группы G и функция $g \in C(G)$ такая, что $f = \varphi \cdot \exp g$ (см. [10]).

Лемма 2.1. Пусть функция $f \in B(r_1, r_2)$ не обращается в нуль на $\mathcal{Q}(r_1, r_2)$. Тогда найдутся $a \in \Gamma$ и $g \in B(r_1, r_2)$ такие, что $f = \varphi^a \cdot \exp g$.

◀ По теореме Бора—ван Кампена для фиксированного r_0 , $r_1 \leq r_0 \leq r_2$, существуют $a_0 \in \Gamma$ и $\Psi_{r_0} \in C(T_{r_0})$ такие, что $f(a \cdot r_0) = a(a_0) \cdot \exp \Psi_{r_0}(z)$. Поэтому для любого r , $r_1 \leq r \leq r_2$ такого, что $|f(a \cdot r) - f(a \cdot r_0)| < M$, $M = \int_{\mathcal{Q}(r_1, r_2)} |f|$, имеем $f(a \cdot r) = a(a_0) \cdot \exp \Psi_r(z)$. Отсюда,

так как f — непрерывная по r функция, для всех $a \cdot r \in \mathcal{Q}(r_1, r_2)$, $f(a \cdot r) = a(a_0) \cdot \exp \Psi_r(a)$, где $\Psi_r(a)$ непрерывна, вообще говоря, только по a . А поскольку $f(e \cdot r) = f(r)$ не обращается в нуль на отрезке $[r_1, r_2]$, функция $g(a \cdot r) = \Psi_r(a) - \Psi_r(e) + \log f(r) - a_0 \log r$ непрерывна на $\mathcal{Q}(r_1, r_2)$ и $f = \varphi^{a_0} \cdot \exp g$. Но пространство максимальных идеалов алгебры $B(r_1, r_2)$ есть $\mathcal{Q}(r_1, r_2)$ (см. [7]). Поэтому $g \in B(r_1, r_2)$ ▶

Следующая лемма является некоторым вариантом принципа Фратти-на-Линделёфа для обобщенных аналитических функций.

Лемма 2.2. Пусть f — обобщенная аналитическая функция на $\mathcal{Q}_1 \setminus \{*\}$, $* = G \times \{0\}$ такая, что $\text{Re } f(s) \leq c \log |s|$ для всех $s \in \mathcal{Q}_1 \setminus \{*\}$. Тогда f расширяется до функции из A .

◀ Отметим, что утверждение тривиально для функции одного комплексного переменного. Действительно, если функция $f(z)$ аналитична в единичном круге с выколотым нулем и удовлетворяет условию леммы,

нуль является устранимой особенностью. Доказывается это следующим образом.

Имеем

$$|\exp f(z)| \leq |z|^c < \frac{1}{|z|^n}, \quad n > c.$$

Отсюда функция $g(z) = z^n \exp f(z)$ аналитически продолжается на весь диск. Поэтому $g(z) = z^m \exp k(z)$, где $k(z)$ — аналитическая в единичном круге функция. Применяя принцип аргумента, имеем $m = n$ и $f(z) - k(z) = \text{const.}$

Доказательство в общем случае производится по следующей схеме. Поскольку f — аналитическая на $\Omega_1 \setminus \{*\}$ функция, то она представима в виде ряда $\sum_{a \in \Gamma} c(a) \varphi^a$. Покажем, что для $a \in \Gamma$, $-a \in \Gamma_+$, $c(a) = 0$. Это и будет означать, что $f \in A$.

Допустим противное. Пусть для некоторого $a \in -\Gamma_+$, $c(a) \neq 0$. Тогда функция

$$g(a \cdot r) = \int_{\sigma_a} f(a \cdot \beta \cdot r) d\gamma(\beta) \quad (\gamma \text{ — мера Хаара } G_a)$$

также обобщенно аналитическая функция и ее ряд имеет вид $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c(na) \cdot \varphi^{na}$, $c(a) \neq 0$. Поэтому g можно рассматривать как аналитическую от φ^a функцию. Кроме того $\text{Re } g(s) < c \log |s|$. Следовательно, в силу вышесказанного, $g(s)$ аналитически продолжается на все Ω_1 , т. е. $c(a) = 0$. ►

Теорема 2.3. Пусть для $f \in A$ существует такое $r > 1$, что f не обращается в нуль на $\Omega_r \setminus \{*\}$, $\Omega_r = \{s \in \Omega; |s| \leq r\}$. Тогда найдутся $a \in \Gamma_+$ и $g \in A$, $g(*) \neq 0$ такие, что $f = \varphi^a g$.

◀ Если $f(*) \neq 0$, то теорема тривиальна. Достаточно взять $a = 0$, $g = f$. Пусть $f(*) = 0$. Тогда по лемме 2.1 найдутся обобщенно аналитическая на $\Omega_r \setminus \{*\}$ функция Ψ и $a \in \Gamma$ такие, что на $\Omega_r \setminus \{*\}$ справедливо

$$f = \varphi^a \cdot \exp \Psi. \quad (2.2)$$

Поэтому $\text{Re } \Psi(s) < c \log |s|$ для всех $s \in \Omega_r \setminus \{*\}$ и некоторого фиксированного $c > 0$. По лемме 2.2 функция f/φ^a ограничена на $\Omega_r \setminus \{*\}$ и, следовательно, ее можно расширить до некоторого $g \in A$ (см. теорему 4.2). ►

Следствие. В разложении (2.2) $a \in \Gamma_+$.

В работе [2] Р. Аренс описал автоморфизмы алгебры A . В случае, когда $\Gamma = \mathbb{Z}$, эти автоморфизмы порождаются преобразованиями Мёбиуса. В остальных случаях каждый автоморфизм на алгебре A порождается некоторым сдвигом группы G и сохраняющим порядок автоморфизмом группы Γ . Напомним, что автоморфизм τ на Γ сохраняет порядок, если $\tau(\Gamma_+) = \Gamma$. Например, в случае $\Gamma = R$ группа автоморфизмов на R , сохраняющих порядок, совпадает с $R_+ \setminus \{0\}$ — группой относительно умножения. Гомоморфизмы же, действующие на ал-

гребре A , определяются несколько иначе. Прежде чем описать эти гомоморфизмы, приведем одно понятие.

Определение 2.4. Будем говорить, что отображение $H: \mathcal{Q}_1 \rightarrow \mathcal{Q}_1$ голоморфно, если для любого $f \in A$ функция $f \circ H$ принадлежит A .

Следующее утверждение является аналогом леммы Шварца.

Теорема 2.5. Пусть H — голоморфное отображение и $H(*) = *$. Тогда найдется такое $b \in \Gamma_+$, что

$$|H(s)| \leq |s|^b.$$

◀ В случае, когда Γ изоморфна $\mathbb{Z}$, утверждение леммы есть лемма Шварца.

Пусть Γ не изоморфна $\mathbb{Z}$, т. е. Γ_+ плотно в R_+ .

Покажем, что если $s \neq *$, $|s| < 1$, $H(s) \neq *$. Из предложения 1.4 следует: функция $\varphi^a \circ H$ аналитична как функция одного переменного на некотором множестве $F \subset \mathcal{Q}_1$, содержащем s . Поэтому $H(s) = *$ означало бы, что $\varphi^a \circ H(s) = 0$ для всех $a \in \Gamma_+$. И поскольку для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ найдутся $b_1, \dots, b_n \in \Gamma$ такие, что $a = \sum_1^n b_i$, то $\varphi^a \circ H = \prod_1^n (\varphi^{b_i} \circ H)$ и, следовательно, функция $\varphi^a \circ H$ на F имеет нуль бесконечной кратности, а это невозможно. Таким образом, $H(s) \neq *$.

Рассмотрим теперь функцию $f(s) = \varphi^a \circ H(s)$. Так как $f(*) = 0$ и $f \neq 0$ на $\mathcal{Q}_1 \setminus \{*\}$, $r < 1$, применив теорему 2.3, получим $f = \varphi^a \circ g$, $d \in \Gamma_+$, $g \in A$, $\sup_{\mathcal{Q}_1} |g| < 1$. Поэтому $|\varphi^a(H(s))| \leq |\varphi^d(s)| = |s|^d$, т. е. $|H(s)|^a \leq |s|^d$. Взяв $b < \frac{d}{a}$, $b \in \Gamma_+$, получим утверждение теоремы. ▶

Перейдем теперь к гомоморфизмам, действующим на алгебре. Заметим, что существует взаимно однозначное соответствие между гомоморфизмами и голоморфными отображениями.

Теорема 2.6. Пусть $\Gamma \neq \mathbb{Z}$, тогда каждый гомоморфизм на алгебре A задается тройкой (σ, V_σ, k) , где σ (возможно и тривиальный) — сохраняющий порядок гомоморфизм на Γ , V_σ — оператор сдвига на $a \in G$, а k — обобщенная аналитическая в $\text{int } \mathcal{Q}_1$ функция, $\text{Re } k(s) \leq 0$ и $f(s) = \exp k(s) \in A$. Верно и обратное, каждая такая тройка (σ, V_σ, k) определяет гомоморфизм на A .

◀ Пусть H^0 — гомоморфизм на A , и H — соответствующее ей голоморфное отображение. Предположим сначала $H(*) = *$. Так как $H(s) \neq *$ для $s \in \mathcal{Q}_1$, $0 < |s| < 1$ (см. доказательство предыдущей теоремы), по теореме 2.3 имеем

$$H^0 \varphi^a = \varphi^{\sigma(a)} g_a, \quad a \in \Gamma_+, \quad (2.3)$$

где σ — гомоморфизм на Γ_+ , продолжающийся до сохраняющего порядок гомоморфизма из Γ в Γ , g_a — обобщенно аналитическая функция, не обращающаяся в нуль на $\text{int } \mathcal{Q}_1$, $g_{a+b} = g_a \cdot g_b$. При каждом фиксированном $s \in \mathcal{Q}_1$, $g_a(s)$ определяет характер на полугруппе Γ_+ , поэтому найдутся $\alpha \in G$ и $r > 0$ такие, что $g_a(*) = \alpha(a) \cdot r^a$ для всех $a \in \Gamma_+$.

Пусть $f_a = \alpha(a) \cdot g_a$. Тогда существует k -обобщенно аналитическая в $\text{int } \Omega_1$ функция такая, что

$$f_a(s) = \exp \alpha \cdot k(s).$$

Таким образом

$$H^0 \varphi^a = \varphi^{\sigma(a)} \cdot \alpha(a) \cdot \exp \alpha \cdot k.$$

Следовательно, гомоморфизм H^0 определяется тройкой (σ, V_α, k) . Пусть $H(*) \neq *$, тогда в (2.3) $\sigma = 0$ и поэтому H^0 задается тройкой $(0, V_\alpha, k)$. Пусть теперь дана тройка (σ, V_α, k) . Определим при каждом фиксированном $s \in \Omega$ характер τ_s на Γ_+ : $\tau_s(a) = \sigma(a) \cdot \alpha(a) \exp \alpha \cdot k(s)$. Так как $\text{Re } k(s) < 0$, то найдутся $\beta_s \in G$ и $r_s \in [0, 1]$ такие, что $\tau_s(a) = \beta_s(a) \cdot r_s(a)$. Определим отображение $H: \Omega \rightarrow \Omega_1$, полагая $H(s) = \beta_s \cdot r_s$. Так как $\varphi^a H(s) = \beta_s(a) r_s(a) = \sigma(a) \alpha(a) \exp \alpha \cdot k(s)$, $\varphi^a H(s)$ — обобщенная аналитическая функция на Ω_1 . Поэтому H — голоморфное отображение, следовательно, соответствующее ей отображение H^0 — гомоморфизм. ►

С л е д с т в и е [2]. Пусть $\Gamma \neq \mathbb{Z}$, тогда каждый автоморфизм на A определяется парой (σ, V_α) , где σ — сохраняющий порядок автоморфизм на Γ , а V_α — оператор сдвига.

◄ Пусть H^0 — автоморфизм. Тогда $H(T_1) = T_1$. Поэтому $k(s) = 0$ и σ — автоморфизм. ►

Заметим, что существуют такие подгруппы группы R , на которых нет нетождественного, сохраняющего порядок, автоморфизма. Примером служит группа Γ (§ 1, пример).

§ 3. Теоремы единственности

Каждая аналитическая функция, заданная на связном открытом множестве D комплексной плоскости $\mathbb{C}$, удовлетворяет условию единственности, т. е. если аналитическая функция f равна нулю на некотором открытом подмножестве множества D , то $f \equiv 0$ на D . Естественно поставить вопрос: верно ли аналогичное утверждение в пространстве Ω в случае, когда $\Gamma \neq \mathbb{Z}$ (что и предполагается везде в этом параграфе). Прежде, чем ответить на этот вопрос, напомним: линейные комбинации функций из $\{\varphi^a\}_{a \in \Gamma_+}$ — полиномы, а отношение двух полиномов — рациональная функция. Семейство полиномов будем обозначать через P .

О п р е д е л е н и е 3.1. Пусть K — компакт в Ω . Полиномиально выпуклой оболочкой K назовем множество $K^0 = \{s \in \Omega; |p(s)| \leq \sup_K |p|, p \in P\}$, а рационально выпуклой оболочкой — множество $K_0 = \left\{s \in \Omega,$

$\left| \frac{p_1(s)}{p_2(s)} \right| \leq \sup_K \left| \frac{p_1}{p_2} \right|, p_1, p_2 \in P\right\}$, при этом предполагая, что p_2 не имеет нулей на K . Очевидно

$$K \subset K_0 \subset K^0. \quad (3.1)$$

Предложение 3.2. Пусть K — компакт в Ω . Тогда

i) K^0 совпадает с пространством максимальных идеалов равномерной алгебры $P(K)$ на K , порожденной полиномами.

ii) K_0 совпадает с пространством максимальных идеалов равномерной алгебры $R(K)$ на K , порожденной рациональными функциями вида p_1/p_2 , где нули p_2 лежат вне K .

Доказательство этого факта следует из предложения 1.2.

Возникает естественный вопрос: всегда ли компакт K рационально выпукл? Например, хорошо известно, что если $\Gamma = \mathbb{Z}$, K — рационально выпукл. С другой стороны, с помощью предложения 1.4 можно построить различные примеры, зависящие от выбора Γ , нерационально выпуклых компактов.

Предложение 3.3. Пусть Γ изоморфно некоторой подгруппе группы рациональных чисел. Тогда каждый компакт в Ω рационально выпукл.

◀ Пусть K — компакт в Ω и $s_0 \in \Omega \setminus K$. Выберем $a_1, \dots, a_n \in \Gamma_+$ и $\varepsilon > 0$ так, чтобы пересечение $U = \{s \in \Omega; |\varphi^{a_i}(s) - \varphi^{a_i}(s_0)| < \varepsilon\}, i=1, \dots, n$ и K было бы пустым множеством. Так как Γ изоморфна подгруппе рациональных чисел, то найдется такое $a_0 \in \Gamma_+$, что каждое $a_i = m_i \cdot a_0$, где m_i — положительное целое число. Поэтому множество $V = \{s \in \Omega; |\varphi^{a_0}(s) - \varphi^{a_0}(s_0)| < \varepsilon/N\}$, где $N = \left(\sum_1^n m_i\right) \max_U |\varphi^{a_i}(s)|$ содержится в U , и следовательно, функция $\frac{1}{\varphi^{a_0}(s) - \varphi^{a_0}(s_0)}$ принадлежит $R(K)$, т. е. $K_0 = K$. ▶

Для дальнейшего приведем следующий факт.

Пусть U — открытое множество в G и $h: R \rightarrow G$ — гомеоморфизм, определенный в § 1. Тогда множество $U_n = h^{-1}(U)$ — относительно плотное подмножество в R , т. е. существует число l такое, что пересечение любого отрезка на R длины l с U_n не пусто. Действительно, в противном случае найдутся семейства отрезков $\{F_i\}_1^\infty$ такие, что $d(F_i)$ — длина множества F_i — равна i и $h(F_i) \cap U = \emptyset$. Пусть x_i — центр множества F_i . Тогда $h(F_i - x_i) \cap [h(-x_i) \cdot U] = \emptyset$.

Поскольку $\bigcup_1^\infty (F_i - x_i) = R$ и $\{h(x_i)\}_1^\infty$ предкомпактно в G , найдется

$\beta \in G$ такое, что $h(R) \cap (U \cdot \beta) = \emptyset$. А это невозможно, так как $\overline{h(R)} = G$.

Заметим, что теми же рассуждениями можно показать, что если V — открытое множество в G , $\overline{V} \neq G$, то $V_n = \bigcup_1^\infty V_i$, где каждое V_i связно, $V_i \cap V_j = \emptyset, i \neq j$, и $\sup d(V_i) < \infty$.

Лемма 3.4. Пусть D — полиномиально выпуклый компакт в Ω , $\chi \in \overline{D}$ и $D_\chi = \chi^{-1}(D)$ — подмножества в $\mathbb{C}$ (χ — отображение, фигурирующее в § 1). Тогда $D_\chi = \bigcup_1^\infty D_i$, где каждое D_i — связный полиномиально выпуклый компакт в $\mathbb{C}$ и $D_i \cap D_j = \emptyset, i \neq j$.

◀ Из непрерывности отображения χ следует, что D_x — замкнутое в $\mathbb{C}$ множество. Пусть D_i — одна из компонент связности множества D_x . Покажем сначала, что D_i — ограниченное в $\mathbb{C}$ множество, т. е. компакт. Допустим противное. Так как $* \in D_i$, то найдутся $r_2 > r_1 > 0$ такие, что $D \subset G \times [r_1, r_2]$. Поэтому (см. (1.1)) D_i содержится в $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z \in [-\log r_2, -\log r_1]\}$. Из неограниченности D_i в $\mathbb{C}$ (см. рассуждения, изложенные перед леммой) непосредственно следует, что $\operatorname{Re} D_i = \mathbb{R}$.

Пусть W — та неограниченная компонента связности $\mathbb{C} \setminus D_i$, пересечение которой с прямой $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z = 1 - \log r_1\}$ не пусто. Пусть f — обобщенная аналитическая функция на Ω . Тогда, так как $W \subset \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > -\log r_2\}$ и $f \circ \chi$ — целая функция на $\mathbb{C}$, ограниченная в $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > -\log r_2\}$, то имеем: $f \circ \chi$ ограничена на W . По принципу Фрагмена — Линделёфа

$$\sup_W |f \circ \chi| = \sup_{\partial W} |f \circ \chi|,$$

где ∂W — топологическая граница W в $\mathbb{C}$. Но $\partial W \subset D_i$, и так как $* = \lim_{\substack{z \in W \\ \operatorname{Im} z \rightarrow -\infty}} \chi(z)$, имеем: $|f(*)| \leq \sup_{D_i} |f \circ \chi| \leq \sup_D |f|$. Поэтому $* \in D$. При-

шли к противоречию. Таким образом, каждая компонента связности D_x является компактом (полиномиальная выпуклость D_i очевидна). ▶

Теорема 3.5. Пусть D — открытое ограниченное множество в Ω . Для того, чтобы D было множеством единственности, необходимо, чтобы точка $* \in \Omega$ принадлежала множеству D^0 .

◀ Доказательство проведем от противного. Пусть $* \notin D^0$, и $p \in \mathbb{P}$ — такой полином, что $|p(*)| > \sup_D |p| = \delta$. Множество $U = \left\{ s \in \Omega; |p(s)| < \frac{|p(*)| + \delta}{2} \right\}$ является полиномиально выпуклой замкнутой окрестностью множества D^0 . Так как $* \notin U$, то по лемме 3.4 $U_x = \bigcup_1 U_i$, где U_i — связный полиномиально выпуклый компакт $\mathbb{C}$. За-

фиксируем U_i так, что $U_i \cap D_x \neq \emptyset$.

Так как U_i — компактное подмножество в $\mathbb{C}$, функция $\varphi^a \circ \chi$ разделяет точки U_i для некоторого $a \in \Gamma_+$. Тогда для любой открытой окрестности V — единичного элемента группы G_a ($V \subset G_a$) и $z \in U_i \setminus \partial U_i$, где ∂U_i — топологическая граница U_i , множество $\chi(U_i) \cdot V$ — окрестность точки $\chi(z)$ (см. предложение 1.4 и его следствие). Так как $\partial U_i \cap D_x = \emptyset$, найдется V -окрестность единицы в G_a такая, что $\chi^{-1}(\chi(\partial U_i) \cdot V) \cap D_x = \emptyset$. Очевидно, $\chi(\partial U_i) \subset \chi(\partial U_i) \cdot V$.

Пусть V_1 — другая окрестность единицы в G_a такая, что $\overline{V_1} \subset V$ и $f \in C(G_a)$, $f \neq 0$ такая, что $f|_{V_1 \setminus V_1} = 0$. Тогда функция

$$g(s) = \begin{cases} 0; & s \in D \setminus (\chi(U_i) \cdot V_1) \\ f(s); & s \in \chi(U_i) \cdot V_1, \end{cases}$$

в силу предложения 1.4 — обобщенно аналитическая. ▶

Заметим, что условие $* \in D$, вообще говоря, не достаточно для единственности обобщенно аналитической функции.

Определение 3.6. Множество $D \subset \Omega$ назовем звездным, если для любого $s \in D$, $s = z \cdot r$, прямая $l(s) = \{z \cdot r, 0 \leq r < \rho\}$ также принадлежит D .

Теорема 3.7. Пусть D — звездное открытое ограниченное множество в Ω . Тогда D — множество единственности.

◀ Отметим, что из условия теоремы следует: множество $D_1 = \chi^{-1}(D)$ открыто и связно и, кроме того, $\Omega_r \subset D$ для некоторого $r > 0$. Поэтому, если f — обобщенно аналитическая функция на D , обращающаяся в нуль на некотором открытом подмножестве D , она, так как $f \notin \chi$ аналитична на D_1 , обращается в нуль на всем D , следовательно, и на Ω_r . Отсюда, $f = 0$ ▶

§ 4. Особенности обобщенных аналитических функций

В этом параграфе рассматривается поведение обобщенных аналитических функций вблизи особых точек в случае, когда группа Γ не изоморфна $\mathbb{Z}$. Естественно ожидать, что тогда обобщенно аналитические функции ведут себя несколько иначе, чем функции одного комплексного переменного. Следующее утверждение как раз и устанавливает одно из таких различий.

Теорема 4.1. Пусть D — открытое в Ω множество и $s \in D$, $s \neq *$. Тогда каждая аналитическая на $D \setminus \{s\}$ функция аналитически продолжается на все D .

◀ Пусть $U = W \times V$, $U \subset D$ — замкнутая окрестность точки $s = (z_0, \alpha_0)$, ($W \subset \mathbb{C}$, $V \subset G_\alpha$), и f — аналитическая на $D \setminus \{s\}$ функция. Тогда она непрерывна на ∂U и, в силу принципа максимума, для $\alpha \in V$, $\alpha \neq \alpha_0$

$$\sup_{W \times \{\alpha\}} |f| < \sup_{\partial W \times \{\alpha\}} |f| \leq \sup_{\partial W \times V} |f| = M < \infty.$$

Поскольку G_α — совершенное множество для любых $z \neq z_0$ и $\varepsilon > 0$, то найдется $\alpha \in V$ такое, что

$$|f(z, \alpha_0) - f(z, \alpha)| < \varepsilon. \quad (4.1)$$

Отсюда $|f(z, \alpha_0)| < M$, $z \neq z_0$. Поэтому f — ограниченная аналитическая на $(W \times \{\alpha_0\}) \setminus \{s\}$ функция и, следовательно, ее можно расширить на все $W \times \{\alpha_0\}$ с сохранением аналитичности. Применив теперь 4.1, получим, что f непрерывна на D ▶

Теорема 4.2. Пусть f — ограниченная аналитическая на $D \setminus \{*\}$ функция. Тогда f продолжается на все D .

◀ Пусть $\Omega_r \subset D$ при некотором $r_0 > 0$. Тогда на $\Omega_r \setminus \{*\}$ функция f представима в виде формального ряда $\sum_{a \in \Gamma} c(a) \varphi^a$, где $c(a) =$

$$= \int_{T_r} f \cdot \varphi^{-a} d\mu, \quad r < r_0. \text{ Поэтому, если бы для некоторого } a \in \Gamma, a < 0,$$

$$c(a) \neq 0, \text{ имеем } 0 < |c(a)| < \int_{T_r} |f| \cdot r^a d\mu. \text{ Следовательно, } \limsup_{r \rightarrow 0} |f| = \infty.$$

А это противоречит условию теоремы. Поэтому f расширяется до аналитической на всем Ω_{r_0} функции и, следовательно, аналитична на всем D .

Определение 4.3. Пусть D — открытое множество в Ω , и F — подмножество множества D . Будем говорить, что F — тонкое множество, если для любого $s \in F$ существует окрестность U и аналитическая на U функция f такая, что $F \cap U = E(f)$, где $E(f)$ — множество нулей функции f .

Очевидно, конечное объединение тонких множеств также является тонким, а вот пересечение, вообще говоря, не тонкое множество. Из теоремы 4.1 следует, что единственным одноточечным тонким множеством является $\ast \in \Omega$. Заметим также, что тонкое множество не обязано быть множеством нулей аналитической функции.

Теорема 4.4. Пусть f — ограниченная аналитическая функция на $D \setminus E$, где E — тонкое множество D . Тогда f аналитически продолжается на все D .

◀ Пусть $s \in E$ и $U = W \times V$, $U \subset D$ — такая замкнутая окрестность точки s , что $\partial U \cap E = \emptyset$. Тогда из определения 4.3 следует, что при фиксированном $\alpha \in V$ множество $(W \times \{\alpha\}) \cap E$ конечно. Поэтому функцию f можно аналитически продолжить на $W \times \{\alpha\}$. В силу принципа максимума для любых $\alpha, \beta \in V$

$$|f(z, \alpha) - f(z, \beta)| \leq \sup_{\partial W} |f(z, \alpha) - f(z, \beta)|.$$

Отсюда функция f , так как она непрерывна на $\partial W \times V$, аналитически продолжается на D .

Следующее утверждение является усиленным вариантом теоремы 4.1, хотя и доказывается аналогичными рассуждениями. Поэтому доказательство не приводится.

Теорема 4.5. Пусть D — открытое множество в Ω и F — такое подмножество тонкого в D множества, никакое подмножество которого не является тонким. Тогда любая функция, аналитическая на $D \setminus F$, аналитически продолжается на все D .

Теорема 4.6. Пусть E — тонкое множество и f — аналитическая на $D \setminus E$ функция. Тогда поведение f в окрестности каждой точки $s_0 \in E$ может быть одним из следующих:

- i) $f(s_n)$ стремится к конечному пределу для любого $s_n \rightarrow s_0$;
- ii) $|f(s_n)|$ стремится к ∞ для любого $s_n \rightarrow s_0$;
- iii) в каждой окрестности точки $s_0 \in E$ функция f принимает все значения, близкие к каждому числу.

◀ Пусть U — такая замкнутая окрестность точки s_0 , содержащаяся в D , что $U = W \times V$ для некоторых $W \subset \mathbb{C}$ и $V \subset G_n$. Так как F — тонкое множество, то при каждом фиксированном $\alpha \in V$ множество $(W \times \{\alpha\}) \cap F$ конечно. Поэтому W можно выбрать таким, что $(W \times \{z_0\}) \cap F = \{s_0\}$, $s_0 = (z_0, \alpha_0)$. Пусть в окрестности s_0 для функции f не выполняются условия i) и ii). Тогда, если на слое $W \times \{z_0\}$ точка z_0 является существенно особой для функции $\Psi_{\alpha_0}(z) = f(z_0, \alpha_0)$, в силу теоремы Пикара, справедливо условие iii). Очевидно также,

что если s_0 является предельной точкой для некоторого множества существенно особых (послойно) точек, то в окрестности точки s_0 снова справедливо iii).

Пусть теперь W и V такие окрестности точек z_0 и a_0 , соответственно, что для любого $a \in V$ функция $\Psi_a(z)$ не имеет существенно особой точки на W . Не теряя общности, можно предположить, что z_0 является полюсом для функции $\Psi_{a_0}(z)$. Покажем, что для a , близких к a_0 , $\inf_W |\Psi_a(z)| = 0$.

Действительно, в противном случае функция $1/f(z, a)$ была бы ограничена на $W \times V_1$, где V_1 — некоторая открытая окрестность a_0 , содержащаяся в V . Поэтому (см. теорему 4.4) функция $1/f(z, a_0)$ имеет аналитическое продолжение на $W \times V$. Следовательно, для функции f в окрестности s_0 выполняются условия либо i), либо ii). Пришли к противоречию.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что $\sup_W |\Psi_a(z)| = \infty$. Поэтому для любого $d \in \mathbb{C}$ функция $\frac{1}{f-d}$ неограничена в некоторой окрестности точки s_0 ►

В дальнейшем точки вида i), ii), iii) будем называть, соответственно, устранимой особенностью, полюсом и существенно особой точкой.

В качестве примера рассмотрим отношение двух целых обобщенно аналитических функций f и g . Пусть $E(f)$ и $E(g)$ — множества нулей этих функций. Из вышеуказанного следует, что если $E(f) \cap E(g) \neq \emptyset$, то функция $\Psi = f/g$ имеет только полюсы. В противном случае у Ψ могут быть существенно особые точки. Можно также показать, что если $* \in E(f) \cap E(g)$, то существенно особые точки функции Ψ образуют нигде не плотное множество.

Пусть f — аналитическая на $\Omega_1 \setminus \{*\}$ функция. Тогда она разложима в ряд $\sum_{a \in \Gamma} c(a) \varphi^a$. Множество тех $a \in \Gamma$, для которых $c(a) \neq 0$, обозначим через $S(f)$ и назовем спектром функции f . Оказывается, что поведение функции f в окрестности $\{*\}$ характеризуется свойством спектра. Точнее справедлива

Теорема 4.7. Пусть $a_0 \in \inf S(f)$, тогда

- i) если $a_0 \geq 0$. $\{*\}$ — устранимая особенность;
- ii) если $a_0 < 0$ и $a \in S(f)$, то $\{*\}$ — полюс;
- iii) если $a_0 < 0$. $a_0 \notin S(f)$, то $\{*\}$ — существенно особая точка.

◀ Доказательство i) очевидно (см. § 3). Пусть выполняется условие ii). Тогда для функции $g = f/\varphi^{a_0}$, $\inf S(g) = 0$, $0 \in S(g)$. Следовательно, применив i) для функции g , получим: $*$ является устранимой особенностью для g и $g(*) = c(a_0)$. Поэтому $*$ — полюс для функции f . Пусть теперь $a_0 < 0$ и $a_0 \notin S(f)$. Покажем, что в этом случае $*$ — существенно особая точка. Допустим противное. Пусть $z_0 \in f(\Omega_r \setminus \{*\})$, $0 < r < 1$. Тогда функция $1/f - z_0$ ограничена на $\Omega_r \setminus \{*\}$ и не равна нулю на этом множестве. Поэтому она расширяет-

ся на все Ω_r и имеет вид $\varphi^b g$, $g(s) = 0$, для $s \in \Omega_r$ (см. теорему 4.2). Отсюда, $g(s) = \exp k(s)$, где $k(s)$ — обобщенно аналитическая на Ω_r функция. Поэтому $f - z_0 = 1/\varphi^b \cdot \exp(-k)$. И поскольку $\inf S(\exp - k) = 0 \in S(\exp - k)$, а $a_0 < 0$, то имеем $b = a_0 \in S(f)$. Пришли к противоречию.

Нижеследующая теорема характеризует поведение целой функции в окрестности бесконечно удаленной точки.

Теорема 4.8. Пусть f — целая функция на Ω и $a_0 \in \sup S(f)$. Тогда

- i) если $a_0 \in S(f)$, $a_0 \neq 0$, ∞ — полюс для функции f ;
- ii) если $a_0 \notin S(f)$, ∞ — существенно особая точка.

Для доказательства достаточно рассмотреть гомеоморфизм τ на $\Omega \setminus \{*\}$; $\tau(a \cdot r) = a^{-1}/r$ и применить теорему 4.7.

§ 5.. Дифференцирование

В данном параграфе дается описание всех непрерывных дифференцирований на пространстве целых функций.

Пространство целых функций B на Ω можно естественным образом превратить в алгебру Фреше, задав на ней систему полунорм $\|f\|_n$

$$\|f\|_n = \sup_{T_n} |f|, \quad f \in B, \quad T_n = \{s \in \Omega; |s| = n\}$$

Определение 5.1. Непрерывный линейный функционал D_s на B называется точечным дифференцированием в точке $s \in \Omega$, если для любых $f, g \in B$

$$D_s(f \cdot g) = f(s) \cdot D_s(g) + g(s) \cdot D_s(f).$$

Линейный непрерывный оператор D на B называется дифференцированием, если

$$D(f \cdot g) = f \cdot D(g) + g \cdot D(f).$$

Очевидно, пространство всех дифференцирований на B является B -модулем. Следующим результатом устанавливается размерность этого модуля.

Теорема 5.2. Существует такое дифференцирование D на B , что каждое другое дифференцирование D на B представимо в виде

$$D = g \cdot D^0, \quad g \in B.$$

◀ Сначала отметим, что в любой точке $s \in \Omega$, $s \neq *$, существует нетривиальное точечное дифференцирование. Действительно, пусть $F = W \times G_a$ — замкнутая окрестность точки s . Тогда оператор сужения B на F непрерывен и отображает B в равномерную алгебру B_F . Из предложения 1.4 непосредственно следует существование в точке $s \in F$ непрерывного точечного дифференцирования D_s на алгебре B_F . Поэтому D_s также определяет непрерывное точечное дифференциро-

вание и на B . С помощью точечного дифференцирования D_s на B можно определить аддитивную на Γ_+ функцию $k(a) = \frac{D_s(\varphi^a)}{\varphi^a(s)}$, $a \in \Gamma_+$.

Так как Γ_+ порождает Γ , то $k(a)$ можно расширить до аддитивной на Γ функции. Из непрерывности D_s следует

$$|k(a)| \leq \frac{c \|\varphi^a\|_1}{|s|^a} = c \left(\frac{n}{|s|} \right)^a, \quad n > n_0.$$

Повтому, если на Γ задать естественную топологию, индуцированную с R , то $k(a)$ будет непрерывной аддитивной на Γ функцией, а каждая такая функция линейна. Повтому существует $z \in \mathbb{C}$ такое, что $k(z) = z \cdot a$. Таким образом, между пространством E_s точечных дифференцирований в $s \in \Omega$ и линейными функционалами на Γ существует взаимно однозначное соответствие. Следовательно, $\dim E_s = 1$.

Пусть P — алгебра полиномов. Если а) $\Gamma = \mathbb{Z}$ для $p \in P$, $p = \sum_{k=1}^n c_k \varphi^k$, то полином $D^0(p) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot k \cdot \varphi^{k-1}$. Хорошо известно, что D^0 расширяется до некоторого дифференцирования на всем B . Пусть D — другое дифференцирование. Так как $\dim E_s = 1$, то для каждого $s \in \Omega$ имеем

$$D(f)(s) = g(s) \cdot D^0(f)(s),$$

а так как $D^0 \varphi^1 = 1$, то получим $g(s) = D(\varphi)(s) \in B$.

Если же б) Γ не изоморфна $\mathbb{Z}$, для $p \in P$, $p = \sum_{a \in \Gamma_+} c(a) \varphi^a$ определим $D^0 p = \sum_{a \in \Gamma_+} a \cdot c(a) \cdot \varphi^a$. Так как $D^0 p \in P$ и $D^0(p)(s) = D_s^0 p$ при фиксированном $s \in \Omega$ является непрерывным точечным дифференцированием, D^0 можно расширить до непрерывного на B дифференцирования. Пусть теперь D — другое дифференцирование. Так как $D_s^0 \neq 0$ на $\Omega \setminus \{0\}$ и $\dim E_s = 1$, то имеем

$$D(\varphi^a)(s) = D_s \varphi^a = g(s) D_s^0 \varphi^a = g(s) \cdot D^0(\varphi^a)(s) = a \cdot g(s) \cdot \varphi^a(s).$$

Следовательно, $g(s)$ — обобщенная аналитическая на $\Omega \setminus \{*\}$ функция. А так как $D \varphi^b \in B$, для $b \in \Gamma_+$ имеем $\inf S(g) > 0$.

Отсюда, по теореме 4.7, $*$ — устранимая особенность для g , т. е. $g \in B$. ►

Отметим, что в случае, когда $\Gamma \neq \mathbb{Z}$, в точке $*$ $\in \Omega$ нет нетривиального дифференцирования. Неизвестно, есть ли в этой точке разрывное дифференцирование?

Определение 5.3. Производной целой функции $f \in B$ назовем функцию $D^0 f$.

Из построения оператора D^0 непосредственно следует

Предложение 5.4. Пусть $\sum_{a \in \Gamma_+} c(a) \varphi^a$ — ряд некоторой функции $f \in B$. Тогда ряд ее производной имеет вид

i) если $\Gamma = \mathbb{Z}$, $\sum_{a \in \Gamma_+} c(a) \cdot a \cdot \varphi^{a-1}$;

ii) если $\Gamma \neq \mathbb{Z}$, $\sum_{a \in \Gamma_+} c(a) \cdot a \cdot \varphi^a$.

Отметим, что в случае, когда $\Gamma \neq \mathbb{Z}$, оператор D^0 не является сюръективным отображением. Для доказательства этого факта выберем последовательность $\{a_n\}_1^\infty \subset \Gamma_+$ такую, что $a_n \cdot 2^n < \frac{1}{2^n}$. Тогда функция $f = \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} \varphi^n$ принадлежит B . Но операторное уравнение $D^0 g = f$ неразрешимо в B .

§ 6. Формула Иенсена

Пусть A — равномерная алгебра на X и μ — представляющая мера точки $x \in X$, сосредоточенная на ∂A — границе Шилова алгебры A . Говорят, что μ — мера Иенсена, если для $f \in A$ справедливо неравенство

$$\log |f(x)| \leq \int_X \log |f| d\mu.$$

Каждой точке $x \in X$ может соответствовать несколько представляющих мер Иенсена, но среди них всегда найдется такая мера μ , сосредоточенная на ∂A , что для любой другой представляющей меры γ точки $x \in X$, не обязательно сосредоточенной на ∂A , справедливо неравенство

$$\int_X \log |f| d\gamma \leq \int_X \log |f| d\mu \quad (\text{см. [3]}).$$

Рассмотрим теперь алгебру $A = B_{\mathbb{D}_1}$ — равномерное замыкание на $\mathbb{D}_1 = \{s \in \mathbb{D}; |s| \leq 1\}$ алгебры обобщенных целых функций из B . По предложению 1.2 граница Шилова алгебры A есть $T_1 = G \times \{1\}$, а пространство максимальных идеалов — $\mathbb{D}_1$. Мера μ на T_1 , индуцированная мерой Хаара группы G , является представляющей для точки $* \in \mathbb{D}_1$. Так как A_{T_1} — алгебра Дирихле, μ — единственная представляющая мера точки $* \in \mathbb{D}_1$, сосредоточенная на T_1 и, в силу вышесказанного, любая другая представляющая мера γ точки $* \in \mathbb{D}_1$, сосредоточенная на $\mathbb{D}_1$, удовлетворяет неравенству

$$\int_{\mathbb{D}_1} \log |f| d\gamma \leq \int_{T_1} \log |f| d\mu, \quad f \in A. \quad (6.1)$$

Правое выражение, в случае $f = 0$, строго больше $-\infty$ (см. [3], [6]). Аналогичный факт верен и для других представляющих мер. Точнее, справедливо

Предложение 6.1. Пусть $f \in A$, $f \not\equiv 0$ и m_s — представляющая мера $s \in \mathbb{D}_1$, $|s| < 1$, сосредоточенная на T_1 . Тогда

$$\int_{T_1} \log |f| dm_s > -\infty.$$

◀ Поскольку $\overline{\operatorname{Re} A}|_{T_1} = C(T_1)$, m_s — единственная представляющая мера точки $s \in \Omega$. Пусть $F = W \times G_a$ — замкнутая окрестность точки s , $s = (z_0, a_0)$. Тогда $f(z, a)$ при фиксированном $a \in G_a$ является аналитической по f функцией (см. предложение 1.4). Взяв такую полиномиально выпуклую окрестность W_1 точки z_0 , $W_1 \subset W$, что на $\partial W_1 \times \{a_0\}$ функция f не обращается в нуль, имеем

$$f(z_0, a_0) = \int_{\partial W_1 \times \{a_0\}} f(z, a_0) dm,$$

где m — представляющая мера точки $s = (z_0, a_0)$, сосредоточенная на $\partial W_1 \times \{a_0\}$. Но $\int_{\partial W_1 \times \{a_0\}} \log |f| dm > -\infty$, поэтому

$$(\text{см. (6.1)}) \int_{T_1} \log |f| dm_s > -\infty.$$

Пусть $B(r_1, r_2)$ — равномерная алгебра на $\Omega(r_1, r_2) = \{s \in \Omega; r_1 < |s| < r_2\}$, порожденная семейством $\{\varphi^a\}_{a \in \Gamma_+}$. Граница Шилова этой алгебры совпадает с $F = T_{r_1} \cup T_{r_2}$, а $\Omega(r_1, r_2)$ — с ее пространством максимальных идеалов и, кроме того (см [17]),

$$\operatorname{codim}_{C_R(F)} \overline{\operatorname{Re} B(r_1, r_2)}|_F = 1. \quad (6.2)$$

Из этого равенства непосредственно следует, что размерность выпуклого компакта M_s представляющих мер алгебры $B(r_1, r_2)$ в точке $s \in \Omega(r_1, r_2)$ не превосходит 2. Более того, воспользовавшись описанием долей Глисона алгебры $B(r_1, r_2)$, можно показать, что в случае, когда $\Gamma = \mathbb{Z}$, для $s \in \Omega(r_1, r_2) \setminus F$ $\dim M_s = 2$. В остальных случаях $\dim M_s = 1$.

Теорема 6.2. Пусть f — целая функция на Ω . Тогда $\Phi(z) = \int_{T_r} \log |f| d\mu$ является выпуклой функцией от $\log r$.

◀ Зафиксируем $r_0 > 0$ и пусть $0 < r_1 < r_2$ такие, что $r_0^2 = r_1 \cdot r_2$. Определим гомеоморфизм τ на пространстве $\Omega(r_1, r_2)$, полагая для $s = a \cdot r$, $\tau(s) = a^{-1} \cdot \frac{r_0^2}{r}$. Тогда $\varphi^a \circ \tau(s) = r_0^{-a} \cdot \varphi^{-a}(s)$ и, поскольку

$B(r_1, r_2)$ порождается семейством функций $\{\varphi^a\}_{a \in \Gamma}$, то τ индуцирует автоморфизм на $B(r_1, r_2)$. Точка $s_0 = e \cdot r_0$ (e — единица группы G) — единственная неподвижная точка гомеоморфизма τ . Пусть m_{s_0} — представляющая мера точки s_0 , сосредоточенная на $F = T_1 \cup T_2$. Тогда $m_{s_0} \circ \tau$ также будет представляющей мерой точки s_0 . Поэтому мера

$$\tilde{m} = \frac{m_{s_0} + m_{s_0} \circ \tau}{2} — представляющая мера точки s_0 , инвариантная от-$$

носителем τ . Следовательно, $\|\tilde{m}|_{T_{r_1}}\| = \|\tilde{m}|_{T_{r_2}}\| = 1/2$.

Покажем, что $\tilde{m}$ — единственная логарифмическая представляющая мера точки $s_0 = l \cdot r_0$. Заметим сначала, что для всех φ^a , $a \in \Gamma$, справедливо

$$\begin{aligned} \int_F \log |\varphi^a| d\tilde{m} &= \int_{T_{r_1}} \log |\varphi^a| d\tilde{m} + \int_{T_{r_2}} \log |\varphi^a| d\tilde{m} = \frac{a}{2} \log r_1 + \frac{a}{2} \log r_2 = \\ &= a \cdot \log r_0 = \log |\varphi^a(s_0)|. \end{aligned}$$

Из равенства (6.2) следует, что все вещественные меры, ортогональные к алгебре $B(r_1, r_2)$ и сосредоточенные на F , кратны мере $n = \mu_1 - \mu_2$, где μ_i обозначает меру μ , заданную на T_i , $i = 1, 2$. Поэтому, если

m — некоторая логарифмическая мера точки s_0 , $m = c \cdot n + \tilde{m}$, $c \in \mathbb{R}$. А так как $\varphi^a \in B^{-1}(r_1, r_2)$, то имеем

$$a \log r_0 = \int_F \log |\varphi^a| dm = a \cdot c \cdot (\log r_1 - \log r_2) + a \log r_0.$$

Отсюда $c = 0$, т. е. $m = \tilde{m}$. Поэтому для $f \in B(r_1, r_2)$ справедливо неравенство

$$\log |f(l \cdot r_0)| \leq \int_F \log |f(s)| d\tilde{m}(s).$$

Таким образом,

$$\log |f(\beta \cdot r_0)| \leq \int_F \log |f(\beta \cdot s)| d\tilde{m}(s). \quad (6.3)$$

Поэтому, применив теорему Фубини, имеем

$$\Phi(r_0) = \int_0 \log |f_r| d\mu \leq \frac{1}{2} \Phi(r_1) + \frac{1}{2} \Phi(r_2).$$

Но $\log r_0 = \frac{1}{2} \log r_1 + \frac{1}{2} \log r_2$, следовательно, $\Phi(r)$ — выпуклая от $\log r$ функция. ►

Следствие. Пусть $f(s) = 0$, $f \neq 0$. Тогда для $0 < r_1 < r_2$ таких, что $r_1 \cdot r_2 = |s|^2$, имеем

$$\Phi(|s|) < \frac{1}{2} \Phi(r_1) + \frac{1}{2} \Phi(r_2).$$

Доказательство непосредственно следует из (6.3).

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 6.3. Пусть f — целая на Ω функция, $f \neq 0$. Тогда

i) $\Phi(r)$ — монотонно неубывающая выпуклая от $\log r$ функция;

ii) если $\Phi(r) = \text{const}$, то $f = \exp g$, $g \in B$;

iii) $\log |f(*)| \leq \Phi(r)$.

◀ Условия i) и iii) непосредственно следуют из теоремы 6.2.
 ii) Так как $\Phi(r) = \text{const}$, f не обращается в нуль на Ω (см. предыдущее следствие). Поэтому, в силу теоремы 2.3 и леммы 2.1, найдется g такое, что $f = \exp g$. ▶

Пусть f — целая функция. Тогда, так как функция $\Phi(r) = \int_{T_r} \log |f| d\mu$ выпукла от $\log r$, существует такая положительная функция $n(r, f)$, что

$$\Phi(r_2) - \Phi(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{n(r, f)}{r} dr.$$

Определение 6.4. Число $n(r, f) = r \cdot \Phi'(r + 0)$ будем называть мерой множества нулей функции f на Ω_r .

Опишем основные свойства числа $n(r, f)$.

Теорема 6.5. Пусть $f \in B$. Тогда

- i) $n(r, f)$ — неубывающая положительная функция;
- ii) если $n(r, f) = \text{const}$, то $a = n(r, f) \in \Gamma_+$ и найдется $g \in B$ такое, что $f = \varphi^a \cdot \exp g$;
- iii) если f и g такие функции из B , что на T_r , $|f| > |g|$, то $n(r, f + g) = n(r, f)$.

◀ i) очевидно. ii). Пусть $n(r, f) = \text{const}$, тогда $\Phi(r) = a \log r + c$, где $a = n(r, f)$. Поэтому (см. следствие теоремы 6.2) f нигде на $\Omega \setminus \{*\}$ не обращается в нуль. Следовательно, по теореме 2.3 и лемме 2.1, найдутся $b \in \Gamma_+$ и $g \in B$ такие, что $f = \varphi^b \cdot \exp g$. А так как

$$\Phi(r, f) = b \cdot \log r + \int_{T_r} \text{Re } g d\mu,$$

то получим $b = a$.

iii). Так как $|f| > |g|$ на T_r , то для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется обобщенная аналитическая на $\Omega(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$ функция h такая, что $1 + \frac{g}{f} = \exp h$. Поэтому, если $|r_1 - r| < \varepsilon$, то $\Phi(r_1, f + g) = \Phi(r_1, f) + \int_{T_{r_1}} \text{Re } h d\mu$. Правый интеграл постоянен на отрезке $[r - \varepsilon, r + \varepsilon]$.

Следовательно, $n(r, f + g) = n(r, f)$. ▶

Теперь можно доказать формулу Иенсена для обобщенных аналитических функций.

Пусть f — обобщенная аналитическая функция. Формула Иенсена позволяет подсчитывать модуль первого коэффициента функции f . Поэтому естественно предположить, что $a = \inf S(f) \in S(f)$. Пусть $n(r, f)$ — мера нулей функции f на Ω_r . Положим

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, f) - a}{t} dt.$$

Теорема 6.6. Пусть $f \in B$ и $a = \inf S(f) \in S(f)$. Тогда

$$\log |c(a)| = \int_{r_0}^r \log |f| d\mu - N(r, f) - a \log r.$$

◀ Так как $a \in S(f)$, то найдется $r_0 > 0$ такое, что функция f на Ω_{r_0} равна $c(a) \cdot \varphi^a \cdot \exp g$, где g — обобщенно аналитическая на Ω_{r_0} функция и $g(*) = 0$. Поэтому $\Phi(r_0, f) = \log |c(a)| + a \log r_0$. Теперь для завершения доказательства достаточно заметить, что

$$N(r, f) = \Phi(r, f) - \Phi(r_0, f) - a \int_{r_0}^r \frac{dt}{t} \blacktriangleright$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 8. IV. 1987

Ս. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Արեն-Ջինգերի իմաստով ընդհանրացված անալիտիկ ֆունկցիաներ (ամփոփում)

Աշխատանքում շարունակվում է Ռ. Արենսի և Ի. Ջինգերի ներմուծված ընդհանրացված անալիտիկ ֆունկցիաների հանրահաշվի ուսումնասիրությունը, նկարագրված է այդ ֆունկցիաների անալիտիկ հատկությունները, մտցված է ածանցյալի գաղափարը, ստացված է Ցենսենի բանաձևը, Տրված է անալիտիկ համարյա պարբերական ֆունկցիաների տեսության բնութմաների նոր մեկնարանություն:

S. A. GRIGORIAN. *Generalized analytic functions by Arens—Singer* (summary)

The paper investigates the algebra of generalized analytic functions introduced by R. Arens and I. Singer. The analytic properties of such functions, the notion of derivative is introduced and the Jensen's formula is established. A new interpretation of some theorems of the theory of almost periodic analytic functions is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Arens, I. Singer. Generalized analytic functions, T. A. M. S., 81, 1956, 379—393.
2. R. Arens. A Banach algebra generalization of conformal mappings of the disc.
3. R. Arens. The boundary integral of $\log |F|$ for generalized analytic functions, T. A. M. S., 86, 1957, 57—69.
4. K. Hoffman. Boundary behavior of generalized analytic functions, T. A. M. S., 87, 1958, 447—466.
5. K. Hoffman, I. Singer. Maximal subalgebras of $C(\Gamma)$, Amer. J. Math., 79, 1957, 295—305.
6. H. Helson, D. Lowdenslager. Prediction theory and Fourier series in several variables, II, Acta Math., 106, 1961, 175—213.
7. С. А. Григорян. Максимальные алгебры обобщенных аналитических функций, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XVI, № 5, 1981, 258—264.
8. Б. М. Левитан. Почти-периодические функции, М., ГИГТЛ, 1953.
9. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., ГИТТЛ, 1956.
10. Е. А. Горин. Функционально-алгебраический вариант теоремы Бора-ван Кампена, Мат. сборник, 82, № 2, 124, 1970, 260—272.
11. Т. Гамелин. Равномерные алгебры, «Мир», 1973.
12. J. P. Milasewits. Gleason parts and certain counterexamples in the big disc context, Amer. Math. Soc., 45, 1, 1974, 217—227.

13. С. А. Григорян, Т. В. Тонев. Одна характеристика алгебры обобщенных функций, Докл. БАН, 33, № 1, 1980, 25—26.
14. С. А. Григорян. Об алгебрах, порожденных аналитическими по Аренсу-Зингеру функциями, ДАН Арм.ССР, LXVIII, № 3, 1979, 146—149.
15. С. А. Григорян. Об особенностях обобщенных аналитических функций, ДАН Арм.ССР, LXXI, № 2, 1980, 65—68.
16. С. А. Григорян. О распределении значений обобщенных аналитических функций, ДАН СССР, 296, № 6, 1987, 1293—1295.

УДК 517. 53

Г. А. БАРСЕГЯН, К. Н. МАРТИРОСЯН

О ЗНАЧЕНИЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА МНОЖЕСТВАХ α -ТОЧЕК МЕРОМОРФНОЙ В ЗАДАННОЙ ОБЛАСТИ ФУНКЦИИ

По первой основной теореме Р. Неванлинны (см. [1]), для мероморфной в $\mathbb{C}$ функции $w(z)$ и произвольного значения $\alpha \in \mathbb{C}$ выполняется

$$N(r, \alpha) + m(r, \alpha) = T(r) + O(1), \quad r \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где $N(r, \alpha) = \int_0^r \frac{n(t, \alpha)}{t} dt$, $n(t, \alpha)$ — количество α -точек функции, с учетом кратности, в круге $|z| \leq t$

$$m(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|w - \alpha|} d\varphi, \quad (z = re^{i\varphi}), \quad m(r, \infty) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |w| d\varphi, \quad T(r) = N(r, \infty) + m(r, \infty).$$

Соотношение (1) устанавливает инвариантность левой части ее относительно значения α с точностью до несущественного остаточного члена $O(1)$.

В заметке [2] было анонсировано следующее аналогичное соотношение, в котором роль $N(r, \alpha)$ выполняют алгебраические суммы $B(r, \alpha)$ α -точек, т. е. если $z_i(\alpha)$, $i = 1, 2, \dots, n(r, \alpha)$ α -точки функции $w(z)$ в круге $|z| < r$ с учетом кратности, то $B(r, \alpha) = \sum_{i=1}^{n(r, \alpha)} z_i(\alpha)$.

Теорема А [2]. Пусть $w(z)$ — мероморфная в $\mathbb{C}$ функция, $\alpha \in \mathbb{C}$. Тогда

$$B(r, \alpha) + m^*(r, \alpha) = C(r) + O(rL(r)), \quad r \rightarrow \infty, \quad (2)$$

где

$$m^*(r, \alpha) = \frac{r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} \frac{\partial}{\partial r} \ln^+ \frac{1}{|w - \alpha|} d\varphi - \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} \ln^+ \frac{1}{|w - \alpha|} d\varphi, \\ m^*(r, \infty) = \frac{r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} \frac{\partial}{\partial r} \ln^+ |w| d\varphi - \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} \ln^+ |w| d\varphi,$$

$$C(r) = B(r, \infty) + m^*(r, \infty),$$

$$L(r) = \int_0^{2\pi} \frac{|w'|}{1 + |w|^2} r d\tau - \text{сферическая длина } w\text{-образа окружности } |z| = r.$$

Соотношение (2) интересно тем, что в величинах $B(r, a)$ естественным образом фигурируют аргументы a -точек, что позволяет делать выводы о расположении a -точек.

Величину $C(r)$ естественно рассматривать как аналог неванлинновской характеристики $T(r)$, а величину $m^*(r, a)$ — как аналог неванлинновской функции приближения $m(r, a)$.

Величина $L(r)$ выполняет роль несущественного остаточного члена в теории поверхностей наложения Л. Альфорса (см. [1], гл. X). Очевидно в соотношении (2) интересными являются только случаи, когда величины B, m^*, C или хотя бы одна из них по модулю больше, чем $rL(r)$. Однако эта ситуация встречается довольно часто. По теории Л. Альфорса для „большинства“ a и r выполняется

$$L(r) < [n(r, a)]^{\frac{1}{2} + \varepsilon}, \quad \varepsilon = \text{const} > 0,$$

так что $L(r)$ не будет выполнять роль несущественного остаточного члена в (2) лишь когда $|B(r, a)| = O[rn(r, a)]^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$, что может быть лишь при очень равномерном распределении a -точек функции w по аргументам.

Следующий наш результат устанавливает подобное соотношение для функций $w(z) \in M(D)$ — мероморфной в замыкании заданной односвязной области D с гладкой границей. При этом вместо сумм a -точек мы рассматриваем более общие выражения $B_\varphi(D, a) = \sum \varphi(z_i(a))$ где $\varphi(z)$ — аналитична в $\bar{D}$, а суммы берутся с учетом кратности a -точек $z_i(a)$. Будем пользоваться обозначениями: n — направление внешней нормали к границе ∂D области D ; $n(z)$ — комплексное число с единичным модулем, направленное по n ; ds — элемент границы ∂D ; $h(f)$ — выражение, модуль которого не превосходит $|f|$; $l(\partial D)$ — длина ∂D ; $L(\partial D)$ — сферическая длина w -образа ∂D ; M_f — максимум модуля f на $\bar{D}$.

Теорема 1. Пусть $w(z) \in M(D)$, $a \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\begin{aligned} 1. \quad B_\varphi(D, a) + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial n} \ln^+ \frac{1}{|w - a|} ds - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} n(z) \varphi'(z) \ln^+ \frac{1}{|w - a|} ds = C_\varphi(D) + \\ + h\left(\frac{5}{2\pi} M_\varphi(|a| + 1)^2 L(\partial D) + \frac{3}{2\pi} M_\varphi |a| l(\partial D)\right). \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$C_{\varphi}(D) = B_{\varphi}(D, \infty) + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial n} \ln^+ |w| dz - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} n(z) \varphi'(z) \ln^+ |w| ds.$$

$$\text{II.} \quad B_{\varphi}(D, a) + m_{\varphi}(D, a) = B_{\varphi}(D, \infty) + m_{\varphi}(D, \infty) + \\ + h \left(\frac{5}{2\pi} M_{\varphi}(|a| + 1)^2 (\partial D) \right), \quad (4)$$

где

$$m_{\varphi}(D, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln \frac{1}{w-a} dz, \quad m_{\varphi}(D, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_2(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln w dz,$$

$$\Delta_1(a) = \{z: z \in \partial D, |w(z) - a| \leq 1\}, \quad \Delta_2(a) = \{z: z \in \partial D, |w(z) - a| > 1\}.$$

Отметим, что при $D = \{z: |z| < r\}$, $n(z) = e^{i\varphi}$, $\frac{\partial}{\partial n} f = \frac{\partial}{\partial r} f$, так что из (3) при $\varphi(z) = z$ вытекает (2).

Соотношение (4) имеет более простой вид, однако соотношение (3) практичнее, ибо интеграл $\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} n(z) \varphi'(z) \ln^+ \frac{1}{|w-a|} ds$ хорошо

увязывается с функцией приближения $m(r, a)$, а выражение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial n} \ln^+ \frac{1}{|w-a|} ds - \text{с функцией } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \ln^+ \frac{1}{|w-a|} r d\varphi,$$

которая фигурирует в следующем аналоге первой основной теоремы (см. [3]): для мероморфной в $\mathbb{C}$ функции $w(z)$ и $a \in \mathbb{C}$ имеет место

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \ln^+ \frac{1}{|w-a|} r d\varphi + n(r, a) = A(r) + O(L(r)), \quad r \rightarrow \infty,$$

где $A(r)$ — характеристика Л. Альфорса.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Установим сначала соотношение (4).

Рассмотрим два случая: 1) $\Delta_1(0) \cap \Delta_1(a) = \emptyset$ и 2) $\Delta_1(0) \cap \Delta_1(a) \neq \emptyset$.

Случай 1). Имеем

$$\int_{\partial D} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a) dz = \int_{\Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a) dz + \\ + \int_{\Delta_2(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a) dz = \int_{\Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a) dz + \\ + \int_{\Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a) dz + \int_{\Delta_2(a) \setminus \Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a) dz = \\ = \int_{\Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a) dz + \int_{\Delta_2(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a) dz +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Delta_2(a) \setminus \Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln \frac{w-a}{w} dz + \int_{\Delta_2(a) \setminus \Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln w dz = \\
& = \int_{\Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a) dz + \int_{\Delta_2(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln w dz + \\
& + \int_{\Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a) dz + \int_{\Delta_2(a) \setminus \Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln \frac{w-a}{w} dz + \\
& + \left\{ \int_{\Delta_2(a) \setminus \Delta_2(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln w dz - \int_{\Delta_2(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln w dz \right\}. \quad (5)
\end{aligned}$$

Оценим 3-й, 4-й интегралы и выражение в скобке в последнем соотношении. Учитывая, что в случае 1) при $z \in \Delta_1(0)$ выполняется неравенство $|w-a| > 1$, следовательно $\sup_{z \in \Delta_1(0)} \frac{1+|w|^2}{|w-a|} \leq 2$, получим

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a) dz \right| \leq M_\varphi \int_{\Delta_1(0)} \left| \frac{w'}{w-a} \right| ds \leq \\
& \leq M_\varphi \sup_{z \in \Delta_1(0)} \frac{1+|w|^2}{|w-a|} \int_{\Delta_1(0)} \frac{|w'|}{1+|w|^2} ds \leq 2 M_\varphi \int_{\Delta_1(0)} \frac{|w'|}{1+|w|^2} ds. \quad (6)
\end{aligned}$$

При $z \in \Delta_1(a)$ в случае 1) выполняется $|w| > 1$ и $|w| < |a| + 1$, так что

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Delta_2(a) \setminus \Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln w dz - \int_{\Delta_2(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln w dz \right| = \left| - \int_{\Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln w dz \right| \leq \\
& \leq M_\varphi \int_{\Delta_1(a)} \left| \frac{w'}{w} \right| ds \leq M_\varphi \sup_{z \in \Delta_1(a)} \frac{1+|w|^2}{|w|} \int_{\Delta_1(a)} \frac{|w'|}{1+|w|^2} ds \leq \\
& \leq M_\varphi ((|a|+1)^2 + 1) \int_{\Delta_1(a)} \frac{|w'|}{1+|w|^2} ds. \quad (7)
\end{aligned}$$

Оценим теперь 4-й интеграл в последнем выражении равенства (5). Имеем

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Delta_2(a) \setminus \Delta_1(0)} \varphi(z) \left[\frac{d}{dz} \ln(w-a) - \frac{d}{dz} \ln w \right] dz \right| = \left| \int_{\Delta_2(a) \setminus \Delta_1(0)} \varphi(z) \left[\frac{w'}{w-a} - \frac{w'}{w} \right] dz \right| \leq \\
& \leq M_\varphi \int_{\Delta_2(a) \setminus \Delta_1(0)} \frac{|a||w'|}{|w-a||w|} ds \leq M_\varphi |a| \sup_{z \in \Delta_2(a) \setminus \Delta_1(0)} \frac{1+|a|^2}{|w-a||w|} \int_{\Delta_2(a) \setminus \Delta_1(0)} \frac{|w'|}{1+|w|^2} ds.
\end{aligned}$$

Поскольку при $z \in \Delta_2(a) \setminus \Delta_1(0)$ выполняется $|w| > 1$ и $|w-a| > 1$, то

$$\begin{aligned}
& \frac{1+|w|^2}{|w-a||w|} = \frac{\frac{1}{|w|} + |w|}{|w-a|} < \frac{1+|w|}{|w-a|} = \left(\frac{1}{|w-a|} - \frac{|w|}{|w-a|} \right) < \\
& < 1 + \frac{|w|}{|w-a|} \leq |a| + 2,
\end{aligned}$$

откуда следует

$$\left| \int_{\Delta_2(a) \setminus \Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln \frac{w-a}{w} dz \right| \leq M_\varphi |a| (|a| + 2) \cdot \int_{\Delta_2(a) \setminus \Delta_1(0)} \frac{|w'|}{1 + |w|^2} ds. \quad (8)$$

Объединяя соотношения (5)–(8) и учитывая, что множества интегрирования по оцениваемым интегралам не пересекаются, а также, что в случае 1) выполняется $|a| \geq 2$, получим

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a) dz + m_\varphi(D, a) - m_\varphi(D, \infty) \right| \leq \leq \frac{5}{2\pi} M_\varphi (|a| + 1)^2 L(\partial D).$$

По теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a) dz = B_\varphi(D, a) - B_\varphi(D, \infty),$$

так что из последнего неравенства вытекает (4) в случае 1).

Рассмотрим случай 2), когда $\Delta_1(0) \cap \Delta_1(a) \neq \emptyset$. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a) dz = \int_{\Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a) dz + \\ & + \int_{\Delta_2(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a) dz = \int_{\Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a) dz + \\ & + \int_{\Delta_2(a) \setminus \Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a) dz + \int_{\Delta_1(0) \setminus \Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a) dz = \\ & = \int_{\Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a) dz + \int_{\Delta_2(a) \setminus \Delta_2(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln \frac{w-a}{w} dz + \\ & + \int_{\Delta_2(a) \setminus \Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln w dz + \int_{\Delta_1(0) \setminus \Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a) dz = \\ & = \int_{\Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a) dz + \int_{\Delta_2(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln w dz + \\ & + \int_{\Delta_2(a) \setminus \Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln \frac{w-a}{w} dz + \int_{\Delta_1(0) \setminus \Delta_1(a)} \varphi(z) \ln(w-a) dz + \\ & + \left\{ \int_{\Delta_2(a) \setminus \Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln w dz - \int_{\Delta_2(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln w dz \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Оценим 3-й, 4-й интегралы и выражение в скобках в последнем соотношении. При $z \in \Delta_2(a) \setminus \Delta_1(0)$ в случае 2) имеем $|w| > 1$, $|w-a| > 1$, так что как и при выводе неравенства (8), получим

$$\left| \int_{\Delta_2(a) \setminus \Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln \frac{w-a}{w} dz \right| \leq M_\varphi |a| \sup_{z \in \Delta_2(a) \setminus \Delta_1(0)} \frac{1+|w|^2}{|w-a||w|} \cdot \int_{\Delta_2(a) \setminus \Delta_1(0)} \frac{|w'|}{1+|w|^2} ds \leq \\ \leq M_\varphi |a| (|a|+1) \int_{\Delta_2(a) \setminus \Delta_1(0)} \frac{|w'|}{1+|w|^2} ds.$$

При $z \in \Delta_1(0) \setminus \Delta_1(a)$ выполняется $|w| \leq 1$, $|w-a| > 1$ и поэтому

$$\left| \int_{\Delta_1(0) \setminus \Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln (w-a) dz \right| \leq M_\varphi \sup_{z \in \Delta_1(0) \setminus \Delta_1(a)} \frac{1+|w|^2}{|w-a|} \cdot \int_{\Delta_1(0) \setminus \Delta_1(a)} \frac{|w'|}{1+|w|^2} ds < \\ < 2 M_\varphi \int_{\Delta_1(0) \setminus \Delta_1(a)} \frac{|w'|}{1+|w|^2} ds.$$

Далее, при $z \in \Delta_1(a) \setminus \Delta_1(0)$ выполняется $|w| < |a|+1$ и $|w| > 1$, следовательно

$$\left| \int_{\Delta_2(a) \setminus \Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln w dz - \int_{\Delta_2(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln w dz \right| = \left| - \int_{\Delta_1(a) \setminus \Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln w dz \right| \leq \\ \leq M_\varphi \sup_{z \in \Delta_1(a) \setminus \Delta_1(0)} \frac{1+|w|^2}{|w|} \cdot \int_{\Delta_1(a) \setminus \Delta_1(0)} \frac{|w'|}{1+|w|^2} ds \leq M_\varphi [(|a|+1)^2 + 1] \times \\ \times \int_{\Delta_1(a) \setminus \Delta_1(0)} \frac{|w'|}{1+|w|^2} ds.$$

Заметим, что $|a| \leq 2$ в случае 2), так что в этом случае выполняется

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln (w-a) dz + m_\varphi(D, a) - m_\varphi(D, \infty) \right| \leq \\ \leq \frac{5}{2\pi} M_\varphi (|a|+1)^2 \cdot L(\partial D).$$

Теперь, точно так же как и при выводе неравенства (4) в случае (1), придем к нему в случае 2).

Докажем теперь соотношение (3). Пусть s_0 и n_0 — комплексные числа с единичным модулем, аргументы перпендикулярны и такие, что поворот от s_0 к n_0 совершается на прямой угол против часовой стрелки, т. е. $n_0 = i s_0$; s и n — направления, соответствующие этим единичным векторам. Напомним, что для производной аналитической функции $f = u + iv$ выполняется (см., например, [4], стр. 23)

$$f'(z) = \frac{1}{s_0} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + i \frac{\partial v}{\partial s} \right) = \frac{1}{n_0} \left(\frac{\partial u}{\partial n} + i \frac{\partial v}{\partial n} \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}. \quad (11)$$

Применим (10) к функции $\ln f$ на кривой ∂D , где $s_0 = s_0(z)$ направлено по касательной к ∂D , а $n_0 = n_0(z)$ направлено по внутренней

нормали к ∂D . При этом $s_0 = s_0(z) = -in_0 = -in_0(z)$; $\partial z = -in_0(z) ds$, $\frac{\partial f}{\partial n^*}$ — производная функции f по внутренней нормали. Получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{1}{w-a} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{1}{n_0(z)} \frac{\partial}{\partial n^*} \ln \frac{1}{|w-a|} dz + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{1}{n_0(z)} \frac{\partial}{\partial n^*} \arg \frac{1}{w-a} dz = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial n^*} \ln \frac{1}{|w-a|} ds - \\ &- \frac{i}{2\pi} \int_{\Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial n^*} \arg \frac{1}{w-a} ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Фактически при доказательстве соотношения (4) мы установили следующее соотношение (см. (12) и теорему о вычетах):

$$\begin{aligned} \left| B_\varphi(D, a) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial n^*} \ln^+ \frac{1}{|w-a|} ds - B_\varphi(D, \infty) + \right. \\ \left. + \frac{i}{2\pi} \int_{\Delta_2(a)} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial n^*} \ln^+ |w| ds - \frac{i}{2\pi} \int_{\partial D} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial n^*} \arg \left(\frac{1}{w-a} \right) ds \right| \leq \\ \leq \frac{5}{2\pi} M_\varphi (|a| + 1)^2 L(\partial D). \end{aligned} \quad (13)$$

Покажем теперь, что

$$\begin{aligned} \left| \frac{i}{2\pi} \int_{\partial D} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial n^*} \arg \frac{1}{w-a} ds - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} n_0(z) \varphi'(z) \ln^+ \frac{1}{|w-a|} ds + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} n_0(z) \varphi'(z) \ln^+ |w| ds \right| \leq \frac{3}{2\pi} M_\varphi |a| l(\partial D). \end{aligned} \quad (14)$$

В самом деле, используя равенства (11) и $s_0(z) = -in_0(z)$ и интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2\pi} \int_{\partial D} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial n^*} \arg \left(\frac{1}{w-a} \right) ds &= -\frac{i}{2\pi} \int_{\partial D} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial s} \ln \frac{1}{|w-a|} ds = \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{\partial D} \varphi'(z) \ln \frac{1}{|w-a|} ds = \frac{i}{2\pi} \int_{\partial D} \varphi'(z) s_0(z) \ln \frac{1}{|w-a|} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} n_0(z) \varphi'(z) \ln \frac{1}{|w-a|} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} n_0(z) \varphi'(z) \ln^+ \frac{1}{|w-a|} ds - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_1(0)} n_0(z) \varphi'(z) \ln^+ |w| ds + \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_2(0)} n_0(z) \varphi'(z) \ln^+ |w| ds - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_3(0)} n_0(z) \varphi'(z) \ln^+ |w-a| ds \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Выражение в скобках равно

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_2(a) \setminus \Delta_2(0)} n_0(z) \varphi'(z) (\ln^+ |w - a| - \ln^+ |w|) ds - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_1(a) \setminus \Delta_1(0)} n_0(z) \varphi'(z) \ln^+ |w| ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_1(0) \setminus \Delta_1(a)} n_0(z) \varphi'(z) \ln^+ |w - a| ds. \end{aligned}$$

Модуль каждого из последних интегралов не превосходит величины $M_\varphi \cdot |a| l(\partial D)/2\pi$, т. е. справедливо неравенство (14).

Из (13) и (14) получим

$$\begin{aligned} B_\varphi(D, a) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial n^*} \ln^+ \frac{1}{|w - a|} ds + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} n_0(z) \varphi'(z) \ln^+ \frac{1}{|w - a|} ds = B_\varphi(D, \infty) - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial n^*} \ln^+ |w| ds + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} n_0(z) \varphi'(z) \ln^+ |w| ds + h \left(\frac{5}{2\pi} M_\varphi (|a| + 1)^2 L(\partial D) + \right. \\ &\left. + \frac{3}{2\pi} M_\varphi |a| l(\partial D) \right). \end{aligned}$$

Из последнего равенства, учитывая, что $\frac{\partial}{\partial n^*} f = -\frac{\partial}{\partial n} f \equiv n_0(z) = -n(z)$, получим равенство (2).

Величину $C_\varphi(D)$, очевидно, можно рассматривать как аналог неванлинновской характеристики $T(r)$. Интересно, что для величин $C_\varphi(D)$ и $B_\varphi(D, a)$ в полном объеме выполняется аналог тождества Картана (см. [1]): для мероморфной в $\mathbb{C}$ функции

$$T(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta}) d\theta + \text{const.}$$

Именно, справедлива

Теорема 2. Пусть $w(z) \in M(D)$. Тогда

$$C_\varphi(D) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_\varphi(D, e^{i\theta}) d\theta. \quad (16)$$

Докажем равенство (16). Из теоремы о вычетах, учитывая (12) и (15), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_\varphi(D, e^{i\theta}) d\theta - B_\varphi(D, \infty) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w - e^{i\theta}) dz d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \varphi(z) \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(w - e^{i\theta}) d\theta \right] dz = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial n^*} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |w - e^{i\theta}| d\theta \right] ds + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} n_0(z) \varphi'(z) \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |w - e^{i\theta}| d\theta \right] ds.$$

Применив к последним интегралам известное равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |w - e^{i\theta}| d\theta = \ln^+ |w|$$

и поменяв $\frac{\partial}{\partial n^*} f$ на $-\frac{\partial f}{\partial n}$, $n_0(z)$ — на $-n(z)$, получим (16).

Естественен следующий вопрос. Какая величина выполняет при рассмотрении величин $B_r(D, a)$ роль, аналогичную роли альфорсовской характеристики $A(r) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \iint_{|r| > r} \frac{|w'|^2}{(1 + |w|^2)^2} r dr d\varphi$ — сферической площа-

ди w -образа круга $|z| \leq r$, с учетом кратности покрытия. Из геометрической интерпретации усматриваем, что

$$A(r) = \frac{1}{\pi} \iint_C n(r, a) d\mu(a), \text{ где } a = |a|e^{i\alpha}, d\mu(a) = \frac{|a| d|a| d\alpha}{(1 + |a|^2)^2}$$

— сферическая площадь элемента сферы. В качестве искомого аналога величины $A(r)$ рассмотрим величину $A_r(D) = \frac{1}{\pi} \iint_C B_r(D, a) d\mu(a)$.

Связь между величинами $A_r(D)$ и $C_r(D)$ устанавливает следующая

Теорема 3. Пусть $w(z) \in M(D)$. Тогда

$$A_r(D) = C_r(D) + h \left(\frac{M_r}{\pi} L(\partial D) + \frac{M_r}{2\pi} l(\partial D) \right). \quad (17)$$

Докажем равенство теоремы 3. Поскольку $\frac{1}{\pi} \iint_C d\mu(a) = 1$, из

теоремы о вычетах получим

$$\frac{1}{\pi} \iint_C \left((B_r(D, a) - B_r(D, \infty)) d\mu(a) = \right. \\ = \frac{1}{\pi} \iint_C \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w - a) dz \right) d\mu(a). \quad (18)$$

Учитывая соотношения (12) и (15), перепишем последний интеграл в виде

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial n^*} \left[\frac{1}{\pi} \iint_C \ln \frac{1}{|w - a|} d\mu(a) \right] ds +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} n_0(z) \varphi'(z) \left[\frac{1}{\pi} \int_C \ln \frac{1}{|w-a|} d\mu(a) \right] ds. \quad (19)$$

Согласно [1], стр. 181 выполняется

$$\frac{1}{\pi} \int_C \frac{1}{|w-a|} d\mu(a) = \ln \frac{1}{\sqrt{1+|w|^2}}.$$

так что выражение (19) можем переписать так

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial n^*} \ln \frac{1}{\sqrt{1+|w|^2}} ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} n_0(z) \varphi'(z) \ln \frac{ds}{\sqrt{1+|w|^2}} = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial n^*} \ln \sqrt{1+|w|^2} ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial n^*} \ln \frac{\sqrt{1+|w|^2}}{|w|} ds + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\partial D} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial n^*} \ln |w| ds - \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_1(0)} n_0(z) \varphi'(z) \ln \sqrt{1+|w|^2} ds - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_2(0)} n_0(z) \varphi'(z) \frac{\ln \sqrt{1+|w|^2}}{w} ds - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} n_0(z) \varphi'(z) \ln |w| ds. \quad (20) \end{aligned}$$

Поскольку $\ln \sqrt{1+|w|^2}$ на $\Delta_1(0)$ меньше чем $1/2$, а $\ln \frac{\sqrt{1+|w|^2}}{|w|}$ на $\Delta_2(0)$ меньше чем $1/2$, то 4-й и 5-й интегралы последнего выражения окажутся по модулю не больше $\frac{M_\varphi}{4\pi} l(\partial D)$. Далее

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial n^*} \ln \sqrt{1+|w|^2} ds \right| \leq \frac{M_\varphi}{4\pi} \int_{\Delta_1(0)} \frac{2|w||w|_{n^*}}{1+|w|^2} ds \leq \frac{M_\varphi}{2\pi} L(\partial D).$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_2(0)} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial n^*} \ln \frac{\sqrt{1+|w|^2}}{|w|} ds \leq \frac{M_\varphi}{2\pi} \int_{\Delta_2(0)} |w||w|_{n^*} \left| \frac{1}{1+|w|^2} - \frac{1}{|w|^2} \right| ds \leq \\ & \leq \frac{M_\varphi}{2\pi} \int_{\Delta_2(0)} \frac{1}{|w|} \cdot \frac{|w'|}{1+|w|^2} ds \leq \frac{M_\varphi}{2\pi} L(\partial D). \end{aligned}$$

Из (18) — (20) и последних оценок следует (17).

Институт математики

АН Армянской ССР,

Армянский государственный педагогический

институт им. Х. Абовяна

Поступила 13. VII. 1987

Գ. Ա. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ, Կ. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Մերումարի ֆունկցիաների α -կետերում աճալիսիկ ֆունկցիաների արժեքների մասին (ամփոփում)

Աշխատանքում ներմուծվում են բնութագրիչ ֆունկցիաներ, որոնք կապում են $w(z)$ մե-
րումարի միակապ D տիրույթում α -կետերի գումարը, $w(z)$ -ի ասիմպտոտիկ վարքի և համա-
պատասխան բնութագրիչ վարքի հետ:

Այդ բնութագրիչների վարքը, բնականորեն, նկարագրում է α -կետերի արգումենտները և ճյուղվածությունը:

G. A. BARSEGHIAN, K. N. MARTIROSIAN. *On the value of analytical functions on the set of α -points meromorphic in the given domain of the function (summary)*.

In this paper characteristic functions are introduced, which connect the behaviour of the sums of α -points, meromorphic in the simply connected domain of D function, with asymptotic behaviour and the corresponding characteristics. This characteristic functions give the natural description of the arguments and modules of α -points.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Неванlinna. Однозначные аналитические функции.
2. Г. А. Барсегян. О распределении сумм α -точек мероморфных функций, ДАН СССР, 1977, 232, № 4, 741—744.
3. Г. А. Барсегян. О геометрической структуре образа жуга при отображениях мероморфными функциями, Мат. сборник, 1978, 106, № 1, 35—43.
4. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного, «Наука», 1973.

УДК 517.538.5

Р. Ш. СААКЯН

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ТЕОРЕМ О ПРИБЛИЖЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Для множества $E \subset \bar{C}$ обозначим через $C(E)$ множество комплексных функций, непрерывных на E , и пусть $A(E)$ — подмножество $C(E)$, состоящее из функций, аналитических на множестве E° внутренних точек E . Через $H(E)$ будем обозначать множество функций, каждая из которых голоморфна в некоторой окрестности множества E .

Далее, рассмотрим область $D \subset \bar{C}$, $\partial D \neq \emptyset$, и пусть E — относительно замкнутое подмножество D . Обозначим через $A_D(E)$ — равномерное замыкание множества сужений функций из $H(D)$ на E , а через $A_D^B(E)$ — класс ограниченных на E функций из $A_D(E)$.

Пусть D^* — одноточечное компактное расширение области D .

В работе [1] Н. У. Аракеляном решена задача о возможности равномерного приближения на E аналитическими в D функциями. Точнее доказана

Теорема А. $A_D(E) = A(E)$ тогда и только тогда, когда $D^* \setminus E$ связно и локально связно (т. е. $E \in K_D$).

Назовем множество $E \subset D$, замкнутое в D , множеством Карлемана в D , если для любой пары функций $f \in A(E)$ и $\varepsilon \in C(E)$, $\varepsilon > 0$, существует функция $g \in H(D)$ такая, что

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon(z) \text{ при } z \in E.$$

Из теоремы А следует [1]

Теорема А*. Пусть $E \in K_D$ и $E'' = \emptyset$. Тогда E является множеством Карлемана.

Отметим, что в случае $E \notin K_D$ до сих пор не найдено достаточно простого и эффективного описания класса $A_D(E)$, а его внутренние свойства мало изучены. В настоящей работе приводятся некоторые новые результаты в этом направлении об алгебраических свойствах класса $A_D(E)$.

Мы приводим также некоторые применения теорем А и А* для получения обобщенных вариантов классической теоремы Миттаг-Леффлера о восстановлении мероморфной функции по ее главным частям и теоремы Вейерштрасса о факторизации целых функций, подчеркнув тем самым, что теоремы приближения являются подходящим инструментом для изучения подобного рода вопросов.

Работа состоит из двух пунктов: первый из них содержит постановки задач и формулировки результатов, а второй — полные их доказательства.

1°. Необходимые понятия и формулировка результатов. а) *Оболочкой* множества $E \subset D$ относительно области D принято называть (см. [2]) множество

$$\widehat{E}_D = \text{Hull}(E, D) = \{z \in D : |f(z)| \leq |f|_E, f \in H(D)\},$$

где $|f|_E = \sup_E |f(z)|$.

Если E замкнуто в D , то оболочка $\widehat{E}_D$ состоит из E и из тех компонент множества $D \setminus E$, для которых ∂D линейно недостижима [2].

В [3] А. Страем показано, что любая функции из $A_D(E)$ аналитически продолжается на $\widehat{E}_D$ (равносильный результат в случае $D = \mathbb{C}$ ранее был отмечен Н. У. Аракелян [4]). Отсюда легко следует, что при $\widehat{E}_D \in K_D$ класс $A_D(E)$ является алгеброй. Спрашивается, что можно сказать об алгебраических свойствах класса $A_D(E)$ в случае $\widehat{E}_D \notin K_D$? Отметим также, что ранее в [5] было показано, что в общем случае $A_D(E)$ не является алгеброй, точнее, при $\widehat{E}_D \notin K_D$ существуют функции $f, g \in A_D(E)$, причем f — ограниченная в D мероморфная функция, а $g \in H(D)$, однако $fg \notin A_D(E)$.

Введем некоторые обозначения: U_ρ означает круг $|z| \leq \rho$, $\widehat{E}$ — оболочка множества E относительно плоскости $\mathbb{C}$, и $\widehat{E}(\rho) = \widehat{E} \cup U_\rho$. Обозначим через $\mathfrak{Q}_\rho$ замыкание в $\mathbb{C}$ объединения тех компонент множества $\mathbb{C} \setminus \widehat{E}(\rho)$, для которых ∞ не является линейно достижимой, и пусть $E_\rho^* = \mathfrak{Q}_\rho \cap E$. Далее для семейства функций Φ через A_Φ будем обозначать минимальную алгебру функций, содержащую Φ . Имеет место

Т е о р е м а 1. Пусть E — замкнутое в $\mathbb{C}$ множество и Φ — такое семейство функций, что $A_\Phi^B(E) \subset \Phi \subset A_\Phi(E)$. Если A_Φ содержится в $A_\Phi(E)$, то для произвольной функции $f \in \Phi$ ее сужение $f|_{E_\rho^*}$ ограничено на E_ρ^* при любом $\rho > 0$.

З а м е ч а н и е. При $\widehat{E} \in K_\mathbb{C}$ условия теоремы обеспечиваются автоматически, так как в этом случае множество $\mathfrak{Q}_\rho$ ограничено при любом $\rho > 0$, и поэтому непрерывная на E функция ограничена на E_ρ^* .

С л е д с т в и е. Пусть E — замкнутое в $\mathbb{C}$ множество и $\widehat{E} \notin K_\mathbb{C}$. Тогда

- 1) существует функция $f \in A_\mathbb{C}(E)$ такая, что $f^2 \notin A_\mathbb{C}(E)$,
- 2) существует ограниченная функция $g \in A_\mathbb{C}(E)$ такая, что для функции $h: z \rightarrow zg(z)$ имеем, что $h \notin A_\mathbb{C}(E)$.

В самом деле, пусть квадрат любой функции из $A_\mathbb{C}(E)$ есть функция из $A_\mathbb{C}(E)$ и $\Phi = [A_\mathbb{C}^B(E), \varphi]$, где $\varphi \in A_\mathbb{C}(E)$ — неограниченная на E_ρ^* для некоторого $\rho_0 > 0$. Тогда равенство

$$g\varphi = \frac{1}{4}(\varphi + g)^2 - \frac{1}{4}(\varphi - g)^2, \quad g \in \Phi$$

показывает, что $A_\Phi \subset A_\mathbb{C}(E)$, а это противоречит теореме 1.

Второй пункт легко следует из теоремы 1, если положить

$$\Phi = [A_C^B(E), I] \text{ где } I(z) = z, z \in C.$$

Оказывается, что указанное в теореме 1 необходимое условие принадлежности A_Φ к $A_C(E)$ является, при некоторых дополнительных предположениях на E , также и достаточным. В самом деле, пусть для замкнутого в C множества E , $E_\rho = \mathcal{Q}_\rho \cap E$, где $\mathcal{Q}_\rho$ — замыкание в C объединения тех компонент дополнения к множеству $E(\rho) = EU_\rho$, для которых ∞ не является линейно достижимой. Далее, будем говорить, что множество E удовлетворяет условию (H) (см. [6]), если

а) $E^\circ = \emptyset$,

б) $C \setminus E$ — линейно связно.

в) при любом $\rho > 0$ все компоненты дополнения к множеству $E(\rho)$, для которых ∞ не является линейно достижимой, ограничены.

В [6] А. А. Нерсисяном доказана

Теорема Н. Пусть E удовлетворяет условию (H) и $f \in C(E)$. Если при любом $\rho > 0$ функция f аппроксимируема на E_ρ с любой точностью функциями из $A(\mathcal{Q}_\rho)$, то $f \in A_C(E)$.

Как следствие из этой теоремы доказывается

Теорема 1'. Пусть замкнутое в C множество E удовлетворяет условию (H), а Φ — такое семейство функций, что $A_C^B(E) \subset \subset \Phi \subset A_C(E)$. Если для произвольной функции $f \in \Phi$ ее сужение $f|E_\rho$ ограничено на E_ρ при любом $\rho > 0$, то $A_\Phi \subset A_C(E)$.

Действительно, пусть функции $f_1, f_2 \in \Phi$ ограничены на E_ρ для любого $\rho > 0$. Тогда функция $f = f_1 \cdot f_2$ также ограничена на E_ρ и, следовательно, $f \in A_C(E_\rho)$ для любого $\rho > 0$. Отсюда по вышеупомянутой теореме $f \in A_C(E)$.

б). Классическую теорему Миттага-Леффлера можно переформулировать следующим образом: какова бы не была последовательность точек $(a_n)_{n=1}^\infty$ области Ω , $a_n \rightarrow \partial\Omega$ при $n \rightarrow \infty$ и последовательность $\{g_n(z)\}_{n=1}^\infty$ многочленов от $(z - a_n)^{-1}$, существует функция G , голоморфная в Ω за исключением точек $(a_n)_{n=1}^\infty$ такая, что для разности $G - g_n$ ($n = 1, 2, \dots$) точка a_n устранимая.

Приведем один вариант его доказательства, ссылаясь на теорему А. Так как точки последовательности $(a_n)_{n=1}^\infty$ изолированные, то вокруг каждой точки a_n ($n = 1, 2, \dots$) можно описать замкнутый круг U_n радиуса r_n , $r_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ так, чтобы $U_m \cap U_n = \emptyset$ при $m \neq n$, и $g_n \in H(U_n \setminus \{a_n\})$ ($n = 1, 2, \dots$). Пусть $e = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, $U = \bigcup_{n=1}^\infty U_n$, и определим на $U \setminus e$ функцию f формулой

$$f(z) = g_n(z) \text{ для } z \in U_n \setminus \{a_n\} \text{ } (n = 1, 2, \dots).$$

Легко проверить, что $U \setminus e \in K_{\Omega \setminus e}$. Тогда по теореме А существует функция $G \in H(\Omega \setminus e)$ такая, что

$$|G(z) - f(z)| < 1 \text{ для } z \in U \setminus e.$$

Отсюда следует, что $G - g_n$ ограничена в $U_n \setminus \{a_n\}$, так что точка a_n для нее устранимая.

Приведенное доказательство без существенных изменений проходит и в случае, когда вместо последовательности точек $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ рассмотреть произвольное множество аналитической емкости нуль, а роль главных частей $\{g_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ выполняет функция $f \in H(\omega \setminus e)$, где ω — окрестность e в Ω . Остается лишь заметить, что если e имеет аналитическую емкость нуль, то функция, ограниченная и аналитическая в проколотой окрестности множества e , аналитически продолжится на e (см. [7], стр. 206).

Далее, заслуживает внимания результат В. В. Голубева (см. [8], стр. 104), обобщающий теорему Миттаг-Леффлера (при соответствующем определении главных частей) на случай, когда взамен полюсов рассматриваются так называемые особые линии. Из него уже видно, что ограничение на емкость не существенно.

В связи с этим, возникает вопрос, какие особенности общего характера вместо полюсов можно задать в теореме Миттаг-Леффлера. Нижеследующая теорема дает более или менее полный ответ на этот вопрос.

Теорема 2. Пусть $e \neq \emptyset$ — относительно замкнутое подмножество области $\Omega \subset \mathbb{C}$, ω — окрестность e в Ω и $f \in H(\omega \setminus e)$. Тогда существует функция $F \in H(\Omega \setminus e)$ такая, что функция $F - f$ аналитически продолжается из $\omega \setminus e$ на e .

Заметим, что теорема 2 кроме теоремы Миттаг-Леффлера содержит в себе известный результат о разложении голоморфной в кольце функции. Действительно, пусть функция f голоморфна в кольце $\omega = \{z \in \mathbb{C}, r < |z| < R\}$. Тогда полагая $e = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$, по теореме 2 можем утверждать, что существует функция F , аналитическая всюду вне круга $|z| \leq r$ такая, что $F - f$ продолжается до функции φ , аналитической в круге $|z| < R$. Следовательно

$$f(z) = F(z) - \varphi(z) \text{ для всех } z \in \omega.$$

С помощью теоремы 2 элементарно доказывается следующая хорошо известная интерполяционная теорема [9]: пусть $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательность точек области $\Omega \subset \mathbb{C}$, не имеющая в Ω предельных точек. Если каждому номеру k поставить в соответствие неотрицательное число m_k и комплексное число $b_{n,k}$, $0 \leq n \leq m_k$, то существует функции $f \in H(\Omega)$ такая, что

$$f_{(a_k)}^{(n)} = n! b_{n,k} \quad (0 \leq n \leq m_k, k = 1, 2, \dots).$$

В самом деле, по факторизационной теореме Вейерштрасса (см. [9], стр. 295) можно построить функцию $B \in H(\Omega)$, нули которой лежат в точках a_k и имеют там кратность m_k ($k = 1, 2, \dots$). Далее, каждому номеру k поставим в соответствие полином

$$P_k(z) = b_{0,k} + b_{1,k}(z - a_k) + \dots + b_{m_k,k}(z - a_k)^{m_k}.$$

Тогда функция $\frac{P_k}{B}$ голоморфна в некоторой проколотой окрестности $\omega \setminus \{a_k\}$ точки a_k ($k = 1, 2, \dots$). По теореме 2 существует функция F ,

аналитическая в Ω за исключением точек $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ такая, что функция $F - \frac{P_k}{B}$ продолжается до функции φ_k , аналитической в ω_k ($k=1, 2, \dots$).

Отсюда, полагая $f = BF$, получаем искомую функцию.

Будем говорить, что функция f не исчезает локально-тождественно на множестве M , если она не обращается тождественно в нуль в любой окрестности произвольной точки из M .

В то время как теорема 2 обобщает теорему Миттаг-Леффлера, следующую теорему можно интерпретировать как общий вариант теоремы Вейерштрасса о факторизации целых функций.

Теорема 3. Пусть e и ω — относительно замкнутые подмножества односвязной области Ω и $e \subset \omega$. Пусть $f \in H(\omega \setminus e)$ и f не исчезает локально-тождественно на $\omega \setminus e$. Тогда существует функция $B \in H(\Omega \setminus e)$, не имеющая нулей на $\Omega \setminus \omega$ и такая, что отношение $\frac{B}{f}$ голоморфно на $\omega \setminus e$, допускает аналитическое продолжение на e , и при этом не имеет нулей на ω .

Убедимся в том, что эта теорема содержит факторизационную теорему Вейерштрасса. В самом деле, пусть вместо множества e имеем последовательность точек $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ области Ω такую, что $a_n \rightarrow \partial\Omega$ при $n \rightarrow \infty$.

Положим $\omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n$, где $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность попарно не пересекающихся замкнутых окрестностей точек a_n соответственно, лежащих в Ω . Определим функцию f формулой

$$f(z) = (z - a_n)^{m_n} \quad (m_n \geq 0) \text{ для всех } z \in \omega_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда по утверждению теоремы 3, существует функция $B \in H(\Omega)$, не имеющая нулей в $\Omega \setminus \omega$ и такая, что отношение $\frac{B}{f}$ голоморфно на ω и не имеет нулей в ω .

2°. Доказательство теоремы 1. Пусть в силу сделанного выше замечания, $\widehat{E} \in K_C$ и для некоторого $\rho_0 > 0$ функция $f \in \Phi$ не ограничена на $E_{\rho_0}^*$. Мы покажем, что существует функция $F \in A_C^B(E)$ такая, что $fF \in A_C(E)$.

Так как $f \in A_C(E)$, то существует целая функция g такая, что

$$|f(z) - g(z)| < 1 \text{ при } z \in E.$$

Пусть $\{\Omega_{\rho_n}^n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность компонент множества $\Omega_{\rho_0}^*$. Поскольку функция f не ограничена на $E_{\rho_0}^*$, то функция g также будет неограниченной на $E_{\rho_0}^*$. Более того, можно считать, что g стремится к ∞ по некоторой последовательности точек $(z_k)_{k=1}^{\infty}$, $z_k \in \Omega_{\rho_n}^n$ ($k=1, 2, \dots$).

Пусть далее, $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательность чисел таких, что $\frac{a_k}{d_k} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, где d_k — расстояние от точки z_k до $\partial\Omega_{\rho_n}^n$. Выбрав, если это

необходимо, соответствующую подпоследовательность, можно добиться того, чтобы ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_k)^{-1}$$

сходилась равномерно на E , так как точки $z_k (k=1, 2, 3, \dots)$ можно соединить с бесконечностью непрерывной кривой в $\mathbb{C} \setminus E$, то сумма F этого ряда будет функцией из $A_C(E)$.

Нам достаточно доказать, что $Fg \in A_C(E)$, так как при этом из $(f-g)F = fF - fg \in A_C^B(E)$ будет следовать, что $fF \in A_C(E)$. Пусть это не так, т. е. $Fg \notin A_C(E)$, тогда существует целая функция h такая, что

$$|a_k g(z_k) (z - z_k)^{-1} + \Psi(z) - h(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in E, \quad (1)$$

где функция Ψ голоморфна в точке $z = z_k$.

Обозначим теперь через $\varphi: U \rightarrow \bar{\Omega}_{\infty}^{n_k}$ гомеоморфизм, конформно отображающий единичный круг $U = \{z: |z| < 1\}$ на $\bar{\Omega}_{\infty}^{n_k}$ так, чтобы $\varphi(0) = z_k$. Тогда

$$\frac{a_k g(z_k)}{z - z_k} = \frac{1}{\varphi'(0)\zeta} + \omega(\zeta), \text{ где } \omega(\zeta) \in A(U).$$

Отсюда и из (1) в силу принципа максимума имеем

$$\left| \frac{a_k g(z_k)}{\varphi'(0)} + \zeta(\Psi_1(\zeta) + \omega(\zeta) - h_1(\zeta)) \right| < \varepsilon_0 \text{ при } z \in U$$

и при $\zeta = 0$ получаем

$$\left| \frac{a_k g(z_k)}{\varphi'(0)} \right| < \varepsilon_0. \quad (2)$$

Далее, из теоремы Кёбе о покрытии (см. [10], стр. 51) имеем, что

$$\frac{1}{|\varphi'(0)|} \geq \frac{1}{4d_k}.$$

Учитывая это, из (2) получим

$$\frac{|a_k| |g(z_k)|}{d_k} < 4\varepsilon_0. \quad (3)$$

Тогда достаточно положить $a_k = d_k [g(z_k)]^{-\frac{1}{2}}$, и получим противоречие с (3) для достаточно больших k . Это противоречие показывает, что $Fg \in A_C(E)$ или, что то же $Ff \in A_C(E)$, и тем самым доказательство теоремы 1 завершается.

Доказательство теоремы 2. Заметим сначала, что в случае, когда $\Omega \setminus e$ не связно, доказательство сводится к доказательству аналогичного утверждения для каждой связной компоненты множества $\Omega \setminus e$, поэтому будем считать, что $\Omega \setminus e$ связно.

Пусть $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность компактов, исчерпывающая Ω . Для компакта Ω_1 положим $e_1 = e \cap \Omega_1$. Очевидно,

что e_1 — компакт. Обозначим через $\{U_z^1\}_{z \in e_1}$ совокупность замкнутых кругов U_z^1 с центрами на e и радиусами r_1 таких, что $U_z^1 \subset \omega$ для всех $z \in e_1$. Из этой совокупности выделим их конечное число, покрывающее e_1 , объединение которых обозначим через U^1 . Если U^n построены для $n=1, 2, \dots, n$, то для компакта Ω_{n+1} положим $e_{n+1} = \Omega_{n+1} \cap \overline{(e \setminus U^n)}$. Обозначим через $\{U_z^{n+1}\}_{z \in e_{n+1}}$ совокупность замкнутых кругов U_z^{n+1} с центрами на e_{n+1} и радиусами r_n , $r_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ таких, что $U_z^{n+1} \subset \omega$ для всех $z \in e_{n+1}$. Пусть U^{n+1} — объединение конечного числа таких кругов, покрывающее e_{n+1} , и $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ и пусть $\Gamma = \partial U$.

Очевидно, что $f \in H(\Gamma)$ и Γ состоит из конечного или счетного числа кривых Γ_n , $\Gamma_n = \Gamma \cap \partial U^n$, каждая из которых лежит в $\omega \setminus e$. Далее заметим, что каждый компакт из $\Omega \setminus e$ пересекается лишь с конечным числом кривых Γ_n и поэтому, учитывая, что $r_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, легко проверить, что $\Gamma \in K_{\omega \setminus e}$. Более того, поскольку $\Gamma^0 = \emptyset$ и $\partial(\Omega \setminus e) \neq \emptyset$, то в силу теоремы A^* Γ является множеством Карлемана в $\Omega \setminus e$. Таким образом, для функций f и g , где $\varepsilon > 0$ непрерывная на $\Omega \setminus e$ функция, убывающая к нулю при $z \rightarrow \partial(\Omega \setminus e)$ и такая, что

$$\varepsilon(z) \leq \frac{2\pi}{2^n \text{ дл. } \Gamma_n}, \text{ когда } z \in \Gamma_n, n=1, 2, \dots, \quad (4)$$

существует функция $g \in H(\Omega \setminus e)$ такая, что

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon(z) \text{ при } z \in \Gamma. \quad (5)$$

Зададим на Γ направление, индуцированное положительным направлением границ кругов U_z^n , $z \in e$ ($n=1, 2, \dots$).

Покажем теперь, что интеграл

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

сходится локально-равномерно на $\Omega \setminus \Gamma$ и определяет аналитическую там функцию. Для этого достаточно показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_n(z), \quad (6)$$

где

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{f(\zeta) - g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

сходится равномерно на любом компакте P из $\Omega \setminus \Gamma$. Обозначим через d расстояние от компакта P до Γ . Тогда всюду на P , в силу (4) и (5), имеем

$$|I_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n} \left| \frac{f(\zeta) - g(\zeta)}{\zeta - z} \right| d\zeta \leq \frac{1}{2\pi d} \int_{\Gamma_n} \varepsilon(\zeta) d\zeta \leq \frac{1}{2^n \text{ дл. } \Gamma_n} \int_{\Gamma_n} d\zeta = \frac{1}{2^n d}.$$

Отсюда следует, что ряд (6) равномерно сходится на P и $I \in H(\Omega \setminus \Gamma)$. Кроме того, поскольку функция $f - g$ аналитична на Γ , то функцию I можно аналитически продолжить за Γ в обе стороны.

Рассмотрим функцию

$$F(z) = \begin{cases} f(z) - I(z), & \text{когда } z \in U \setminus e \\ g(z) - I(z), & \text{когда } z \in \Omega \setminus e, \end{cases}$$

которая является аналитической в Ω за исключением точек множества e и кривой Γ . Докажем, что $F \in H(\Omega \setminus e)$. Пусть для этого, C — замкнутый круг с центром в произвольной точке из Γ столь малого радиуса, что $C \subset \omega$. Пусть z_0 — произвольная точка внутренней точки круга, лежащая в U , и положим $S = \partial C \cap U$ и $\Gamma' = C \cap \Gamma$. Обозначим через F_1 функцию, которая получается из $f - I$ аналитическим продолжением за Γ . Ясно, что

$$F_1(z_0) = f(z_0) - I(z_0).$$

Теперь обозначим через F_2 функцию, которая получается из $g - I$ аналитическим продолжением за Γ .

Ясно, что

$$F_2(z_0) = g(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) - g(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta,$$

где γ — кривая, которая получается из Γ заменой дуги Γ' дугой S (S — ориентирована как Γ). Покажем, что $F_1(z_0) = F_2(z_0)$. В самом деле, из интегральной формулы Коши имеем

$$\begin{aligned} F_2(z_0) &= g(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) - g(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = g(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} - \frac{1}{2\pi i} \int_S = \\ &= g(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \dots + f(z_0) + g(z_0) = F_1(z_0). \end{aligned}$$

Таким образом, $F_1(z_0) = F_2(z_0)$, и так как точка z_0 выбрана произвольно, то по теореме единственности функции F_1 и F_2 совпадают на множестве $\Omega \setminus e$ и поэтому функции $f - I$ и $g - I$ аналитически продолжают друг в друга через кривую Γ . Следовательно, $F \in H(\Omega \setminus e)$, и функция $F - f$ допускает аналитическое продолжение из $\omega \setminus e$ на e . Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим функцию $\frac{f'}{f}$, она имеет особенности на множестве e и полюсы в нулях функции f . Так как ω замкнуто в Ω , и f не исчезает локально-тождественно, то нули функции f имеют предельные точки лишь на множестве e и $\partial\Omega$. Обозначим через e' объединение множества e с нулями функции f . Применяя к функции $\frac{f'}{f}$ по отношению к множеству e' теорему 2, получим, что существует функция $F \in H(\Omega \setminus e')$ такая, что функция $\varphi = F - \frac{f'}{f}$

аналитически продолжается из $\omega \setminus e'$ до функции, аналитической на ω , которую также обозначим через φ .

Интегрируя функцию F по любому контуру от 0 до z , не имеющему на себе точек на e' , получим функцию

$$\Phi(z) = \int_0^z F(\zeta) d\zeta,$$

которая вообще говоря многозначна и аналитическая в $\Omega \setminus e'$. Так как функция φ аналитическая на ω и область D односвязна, то интегралы от функций f' и $\frac{f'}{f}$ по любому замкнутому контуру, лежащему в $\omega \setminus e'$, равны. Более того, известно (см. [10], стр. 254), что значение интеграла от $\frac{f'}{f}$ по такому контуру кратно $2\pi i$. Следовательно, функция $B(z) = \exp[\Phi(z)]$ регулярна в $\omega \setminus e'$. Пусть $z_0 \in \omega \setminus e'$, так что дуга $\widehat{z_0 z}$ лежит в $\omega \setminus e$. Тогда

$$\begin{aligned} B(z) = \exp \left[\int_0^z F(\zeta) d\zeta \right] &= \exp \left[\int_0^{z_0} F(\zeta) d\zeta + \int_{z_0}^z \left(F(\zeta) - \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \right) d\zeta + \right. \\ &\left. + \int_{z_0}^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \right] = f(z) \exp \left[C + \int_{z_0}^z \varphi(\zeta) d\zeta \right], \quad C = \text{const} \end{aligned}$$

и так как $\varphi \in H(\omega)$, то функция $\frac{B}{f}$ голоморфна на $\omega \setminus e$, допускает аналитическое продолжение на e и не имеет нулей на ω .

Пусть теперь γ — произвольный замкнутый контур в $\Omega \setminus e'$. Так как $F \in H(\Omega \setminus e')$ и Ω односвязна, то интеграл по контуру γ от функции F , в случае необходимости, можно заменить интегралом по замкнутому контуру $\gamma' \subset \omega \setminus e'$ (γ' содержит множество e' внутри себя).

Значение последнего интеграла равно значению интеграла от $\frac{f'}{f}$ по контуру γ' и, как уже отмечалось, кратно $2\pi i$. Следовательно, функция B является регулярной в $\Omega \setminus e$, не имеющей нулей на $\Omega \setminus e$. Теорема 3 доказана.

В заключение выражаю свою благодарность члену-корреспонденту АН Арм.ССР Н. У. Аракеляну за постановку задач и руководство.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 15. V. 1987

Ռ. Շ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ. Անալիտիկ ֆունկցիաների մոտավորության բնորոշմանի որոշ կիցառությունների մասին (ամփոփում)

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է E փակ բազմության վրա սփռող ֆունկցիաների հավասարաչափ փակման ($A_C(E)$) հանրահաշվական հատկությունները: Ապացուցվում է, որ եթե $A \subset A_C(E)$, (որտեղ Φ -ն այնպիսի ֆունկցիաների ընտանիք է, որ $A_C^H(E) \subset \Phi \subset A_C(E)$).

իսկ A_Φ -ն Φ -ն պարունակող միևնույն հանրահաշիվն է), ապա կամայական $f \in \Phi$ ֆունկցիայի նեղացումը $f|E_\rho$ սահմանափակ է E_ρ վրա, ցանկացած $\rho > 0$ համար:

Ապացուցված են նաև մերոմորֆ ֆունկցիաների վերականգնման Միտտագ-Լեֆլերի թեորեմի և Վայերշտրասի ֆակտորիզացիոն թեորեմի ընդհանրացումներ:

R. Sh. SAHAKIAN. *On some application of approximation theorems by analytic functions (summary)*

In this paper the algebraic properties of the uniform closure $A_C(E)$ of contractions on a closed set E of entire functions is considered. We prove that if $A_\Phi \subset A_C(E)$ (where Φ is function's family such that $A_C^B(E) \subset \Phi \subset A_C(E)$ and A_Φ is minimal algebra which contains Φ), then for each function $f \in \Phi$ its contraction $f|E_\rho$ is bounded on E_ρ for all $\rho > 0$.

We obtain the general versions of Mittag—Leffler theorem and Weierstrass factorization theorem as well.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. У. Аракелян. Равномерные и касательные приближения аналитическими функциями, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 3, №№ 4—5, 1968, 273—286.
2. L. Brown, A. L. Shields. Approximation by analytic functions uniformly continuous on a set, Duke Math. Journal, 42, 1975, 71—81.
3. A. Stray. Decomposition of approximable functions, Lect. Notes in Math, 1043, Linear and Complex analysis Problem book, t. 2, 1984, 225—238.
4. N. U. Arakelian. Approximation complex et propriétés des fonctions analytiques, Actes, Congres intern. Math, 1970, t. 1, 595—600.
5. Р. Ш. Саакян. Об одном обобщении принципа максимума, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XXII, № 1, 1987, 94—101.
6. А. А. Нерсисян. О функциях, аппроксимируемых на замкнутых подмножествах комплексной плоскости, Изв. АН Арм.ССР, серия матем., XXII, № 1, 1987, 64—74.
7. Т. Гамелин. Равномерные алгебры, М., «Мир», 1973.
8. В. В. Голубев. Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции, Изд. ФМЛ, М., 1961.
9. W. Rudin. Real and Complex Analysis, Mc Grow—Hill Book Company.
10. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», М., 1966.
11. Ж. Дьедоне. Основы современного анализа, «Мир», М., 1964.

УДК 517.547

И. В. КОВАЛИШИНА, **В. П. ПОТАПОВ**

МЕТОД ТРИАДЫ В ТЕОРИИ ПРОДОЛЖЕНИЯ ЭРМИТОВО-ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В конце 60-х годов В. П. Потаповым был намечен перопективный план исследований интерполяционных задач анализа методами теории аналитических J -растягивающих матриц-функций (J -теория).

Постановка рассматриваемых интерполяционных задач такова: задается класс функций ω , определяемый одним из неравенств

$$1 - \omega^* \omega \geq 0, \quad \frac{1}{2i}(\omega - \omega^*) \geq 0, \quad \frac{1}{2}(\omega + \omega^*) \geq 0$$

(то есть либо класс S сжимающих функций, либо класс N неванлинновских функций, либо класс P позитивных функций), аналитических в области G , и интерполяционные условия. Ищется функция ω из класса, удовлетворяющая интерполяционным условиям.

В основе предложенного В. П. Потаповым метода исследования таких задач лежат следующие два предложения:

1. С каждой интерполяционной задачей связано основное матричное неравенство (ОМН), в котором тесно переплетаются заданные интерполяционные условия и искомая функция ω .

2. Множество ω решений ОМН описывается дробно-линейным преобразованием

$$\omega(z) = [a(z)\omega(z) + b(z)][c(z)\omega(z) + d(z)]^{-1}, \quad z \in G$$

произвольной функции класса $\omega(z)$, а матрица коэффициентов

$$A(z) = \begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{bmatrix}$$

строится по данным задачи и является объектом J -теории.

Намеченный план частично реализован В. П. Потаповым, его учениками и последователями в работах [4]—[14] и ряде других.

Особенно значителен вклад В. П. Потапова в исследование дискретной проблемы Неванлинны-Пика [6] и континуальной задачи М. Г. Крейна ([1]—[3]) о продолжении эрмитово-положительных функций [4], [5].

В настоящей работе изучается теория продолжения эрмитово-положительных функций $s(x)$, удовлетворяющих следующим требованиям:

- (i) Функция $s(x) = \overline{s(-x)}$ — непрерывна на $(-a, a)$.
- (ii) Производная $s'(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0, a)$.
- (iii) $s'(+0) + \overline{s'(+0)} = -\lambda < 0$.

Подкласс эрмитово-положительных функций со свойствами (i)—(iii) характерен тем, что резольвентная матрица $A : (z)$, дающая описание всех продолжений функции $s(x)$ с сегмента $[-\frac{1}{z}, \frac{1}{z}]C(-a, a)$ на всю числовую ось, допускает четкое мультипликативное представление в терминах, непосредственно связанных с функцией $s(x)$.

§ 1. Основные понятия

Приведем необходимые нам в настоящей работе сведения из [4].

1. Непрерывная на $[-l, l]$ функция $s(x)$ называется эрмитово-положительной, если

$$(K\varphi, \varphi) = \int_0^l \int_0^l s(x-t) \varphi(t) \overline{\varphi(x)} dt dx \geq 0, \quad \forall \varphi \in L^2[0, l],$$

где

$$K\varphi = \int_0^l s(x-t) \varphi(t) dt.$$

2. Пусть $s(x)$ — эрмитово-положительная функция, заданная на сегменте $[-l, l]$; пусть интеграл Хинчина-Бохнера [1]—[3]

$$S(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} d\sigma(t) \quad (\sigma(t) \uparrow, \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(t) < +\infty) \quad (1)$$

определяет какое-либо из продолжений $s(x)$ на всю ось $(-\infty, +\infty)$ и

$$W(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-z} \left(\frac{W(z) - W^*(z)}{z - \bar{z}} \geq 0, \quad W(z) = W^*(\bar{z}), \operatorname{Im} z \neq 0 \right) \quad (2)$$

— ассоциированная функция.

Привлечение понятия ассоциированной функции (2) позволяет решать задачу о представлении эрмитово-положительной функции методами теории функций комплексного переменного. Имеет место

Теорема 1.1. Ассоциированная функция $W(z)$ продолжения $S(x)$ заданной на $[-l, l]$ эрмитово-положительной функции $s(x)$ удовлетворяет следующему матричному неравенству*

$$\begin{bmatrix} (K(\varphi, \varphi) (e^{-ixx} W(z) - M_z(x), \varphi) \\ * & \frac{W(z) - W^*(z)}{z - \bar{z}} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (K).$$

$$M_z(x) = i \int_0^x e^{-ix(x-u)} s(u) du.$$

справедливого для всех $\varphi \in L^2[0, l]$ и всех $z: \operatorname{Im} z \neq 0$.

* Символом * обозначен элемент a_{21} , сопряженный a_{12} .

Теорема 1.1 естественно дополняется обратным утверждением:

Теорема 2.1. Если голоморфная в верхней полуплоскости функция $W(z)$ удовлетворяет матричному неравенству (ОМН К), она представима в виде

$$W(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-z} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(t) < \infty \right)$$

и соответствующий интеграл Хинчина-Бохнера (1)

$$S(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} d\sigma(t)$$

совпадает на $[-l, l]$ с заданной эрмитово-положительной функцией $s(x)$.

Кроме того, доставляемое интегралом распространение по симметрии функции $W(z)$ в нижнюю полуплоскость также удовлетворяет ОМН (К).

Теоремы 1.1 и 2.1 свидетельствуют о том, что вся информация задачи об интегральном представлении эрмитово-положительной функции содержится в неравенстве (К).

Используя аппроксимацию ОМН (К) основным матричным неравенством дискретного аналога-задачи Каратеодори, в [4] доказано, что ОМН (К) всегда имеет решение.

3. Здесь мы будем широко использовать обозначения главы IV [4]. Пусть $\varphi_j(x)$ — собственные функции, $\lambda_j > 0$ — фундаментальные числа строго положительного оператора

$$Kf = \int_0^l s(x-t) f(t) dt,$$

порожденного непрерывной эрмитово-положительной на $[-l, l]$ функцией $s(x)$, действующего в пространстве $H = L^2[0, l]$. По известной теореме Мерсера

$$s(x-t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j(x) \overline{\varphi_j(t)}}{\lambda_j}.$$

Ставя каждой функции $g \in H = L^2[0, l]$ в соответствие последовательность $\{b_j\}$ ее коэффициентов Фурье $b_j = (g, \varphi_j)$ ($j=1, 2, \dots$), рассмотрим функции

$$|g|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^2 < \infty, \quad b_j = (g, \varphi_j), \quad g \in H,$$

$$|f|_+^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |a_j|^2 < \infty, \quad a_j = (f, \varphi_j), \quad f \in H_+. \quad (3)$$

Наконец, пополним пространство $H = L^2[0, l]$ формальными рядами

$$h(x) \sim \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j(x) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|c_j|^2}{\lambda_j} < \infty \right) \quad (4)$$

и определим оператор К на новых объектах равенством

$$Kh = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda_j} p_j(x).$$

Совокупность всех рядов вида (4) образует гильбертово пространство H_- с метрикой

$$(h_1, h_2) = (Kh_1, h_2), \|h\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|c_j|^2}{\lambda_j} < \infty.$$

Последовательности $C = \{c_j\} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|c_j|^2}{\lambda_j} < \infty \right)$ назовем „обобщенными“ функциями.

Если множество H_+ плотно в $C[0, l]$, то H_- содержит как все $f \in L^1[0, l]$, так и все функции Дирака $\delta(x - x_0)$, $x_0 \in [0, l]$. Построенная так тройка гильбертовых пространств $H_- \supseteq H \supseteq H_+$ называется оснащением пространства H по оператору K .

4. Теорема 3.1. (Глава V [4]). Если $OMH(K)$ имеет два решения, то все функции e^{-izx} , $M_z(x)$ с не вещественными z принадлежат H_+ . $OMH(K)$ имеет бесконечное множество решений и совокупность их описывается дробно-линейным преобразованием

$$W(z) = \frac{\alpha(z, z_0) \omega(z) + \beta(z, z_0)}{\gamma(z, z_0) \omega(z) + \delta(z, z_0)},$$

где z_0 — произвольная фиксированная не вещественная точка, $\omega(z)$ — произвольная функция класса $N \left(N: \frac{\omega(z) - \overline{\omega^*(z)}}{z - \bar{z}} > 0, \forall z \neq \bar{z} \right)$, а матрица коэффициентов (резольвентная матрица) имеет вид

$$\begin{vmatrix} \alpha(z, z_0) & \beta(z, z_0) \\ \gamma(z, z_0) & \delta(z, z_0) \end{vmatrix} = A(z, z_0) = T(z, z_0) M_0 = [I + H(z, z_0) J] M_0,$$

где

$$H(z, z_0) = \frac{z - z_0}{i} \begin{vmatrix} (KC_{z_0}, C_z^-) & (KB_{z_0}, C_z^-) \\ (KC_{z_0}, B_z^-) & (KB_{z_0}, B_z^-) \end{vmatrix},$$

$$J - M_0^{*-1} J M_0^{-1} = -J H(z_0, \bar{z}_0) J,$$

а B_z и C_z — элементы из H_- , удовлетворяющие соотношениям

$$KB_z = e^{-izx}, KC_z = M_z(x), J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица-функция $A(z, z_0)$ — J -растягивающая в верхней полуплоскости, J -сжимающая в нижней полуплоскости и удовлетворяет принципу симметрии

$$A(\bar{z}, z_0) = J A^{*-1}(z, z_0) J.$$

5. Теорема 4.1*. Для того чтобы непрерывная эрмитово-положительная на $[-l, l]$ функция $s(x)$ допускала многозначное продолжение на всю ось необходимо, чтобы функция e^{-izx} H_+ для

* Этот критерий многозначной продолжаемости эрмитово-положительной функции $s(x)$ впервые доказал М. Г. Крейн [3].

всех без исключения z , и достаточно, чтобы она принадлежала H_+ для одного какого-нибудь не вещественного значения z (например, для $z = i$, то есть $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |(e^x, \varphi_j)|^2 < \infty$).

Матрица-функция $A(z, z_0)$ — целая. Выбрав я качестве опорной точки z_0 точку 0, в качестве M_0 — единичную матрицу, получим

$$A(z) = A(z, 0) = I + H(z, 0) J,$$

$$H(z, 0) = \frac{z}{i} \begin{bmatrix} (C_0, M_z^-(x)) (B_0, M_z^-(x)) \\ (C_0, e^{-i\bar{z}x}) (B_0, e^{-i\bar{z}x}) \end{bmatrix},$$

где B_0, C_0 удовлетворяют соотношениям

$$KB_0 = 1, KC_0 = i \int_0^x s(u) du$$

и являются числовыми последовательностями из $l_-^2(H_-)$

$$B_0 = |\lambda_j(1, \varphi_j)|, C_0 = \left\{ \lambda_j \left(i \int_0^x s(u) du, \varphi_j \right) \right\},$$

откуда

$$H(z, 0) = \frac{z}{i} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \left(i \int_0^x s(u) du, \varphi_j \right) (\varphi_j, M_z^-(x)) (1, \varphi_j) (\varphi_j, M_z^-(x)) \\ \left(i \int_0^x s(u) du, \varphi_j \right) (\varphi_j, e^{-i\bar{z}x}) (1, \varphi_j) (\varphi_j, e^{-i\bar{z}x}) \end{bmatrix}.$$

6. Как всякая целая матрица-функция, обладающая J -свойствами, $A(z)$ представима в виде мультипликативного интеграла

$$A(z) = \int_0^L e^{-iz\Sigma(t)} dt,$$

где $\Sigma(t) J > 0$, $\text{tr} \{\Sigma(t) J\} = 1$ п. в. Однако это представление, полученное применением теорем Хелли, недостаточно конструктивно, в нем не прослеживаются связи между заданной эрмитово-положительной функцией $s(x)$ и элементами показателя $\Sigma(t)$. Четкую зависимость удастся установить, накладывая дополнительные ограничения на поведение $s(x)$.

§ 2. Уравнение триады. Существование и единственность

1°. Нашей целью является изучение той ситуации, когда в условиях (i) — (iii) $s(x)$ многозначно продолжаема с заданного интервала $(-a, a)$ (т. е. с любого $[-\xi, \xi] \subset (-a, a)$) на всю ось с сохранением эрмитовой положительности.

Фиксируя $\xi (0 < \xi < a)$, рассмотрим уравнение

$$\int_0^{\xi} s(x-t) \chi(t) dt = s(x) - kx - b \quad (5)$$

относительно трех неизвестных величин: функции $\chi(t) = \chi_{\xi}(t) \in L^1[0, \xi]$ и комплексных чисел $k = k(\xi)$, $b = b(\xi)$. Тройку величин $\{\chi_{\xi}(t), k(\xi), b(\xi)\}$, удовлетворяющих этому уравнению, назовем триадой.

Наряду с (5) будем рассматривать «сопряженное» уравнение

$$\int_0^{\xi} s(x-t) \overline{\chi(\xi-t)} dt = s(x-\xi) + \bar{k}x - (k\xi + \bar{b}); \quad (6)$$

оно получается из (5) заменой x на $\xi - x$, t на $\xi - t$ с последующим переходом к комплексно сопряженным величинам.

Введем еще величину

$$\Delta = k\bar{k}\xi + k\bar{b} + \bar{k}b,$$

являющуюся важнейшим структурным элементом нашего исследования.

Поясним отношение триады $\{\chi(t), k, b\}$, величины Δ и условий (i) — (iii) к поставленной здесь задаче о многозначном продолжении функции $s(x)$.

Пусть $s(x)$ многозначно продолжаема с сегмента $[-\xi, \xi]$, $\forall \xi$, $0 < \xi < a$. Предположим сверх того, что

1) триада $\{\chi_{\xi}(t), k(\xi), b(\xi)\}$ существует, 2) $\Delta(\xi) \neq 0$.

(На деле, как будет показано в дальнейшем, 1), 2) логически вытекают из факта многозначной продолжаемости функции $s(x)$ и условий (i) — (iii)).

В силу многозначной продолжаемости $s(x)$ интегральный оператор

$$K\varphi = \int_0^{\xi} s(x-t) \varphi(t) dt, \quad x \in [0, \xi],$$

рассматриваемый в пространстве $H = L^2[0, \xi]$ строго положительных

$$(K\varphi, \varphi) > 0, \quad \forall \varphi: (\varphi, \varphi) > 0;$$

пусть $H_- \supseteq H \supseteq H_+$ — построенное по K оснащение H .

По теореме 4.1 [4], $e^{-izx} \in H_+$ для всех комплексных z , и так как функции e^{-izx} плотны в $C[0, \xi]$, то пространство H_- содержит $L^1[0, \xi]$ и совокупность функций Дирака $\delta_{x_0} = \delta(x - x_0)$ с $x_0 \in [0, \xi]$. Легко проверяется

Теорема 1.2. В сделанных выше предположениях, обобщенные функции

$$B = \frac{\bar{k}}{\Delta} \delta_0 + \frac{k}{\Delta} \delta_{\xi} - \frac{\bar{k}}{\Delta} f(x) - \frac{k}{\Delta} \overline{\chi(\xi-x)}, \quad (B)$$

$$L = i \frac{\bar{k}\xi + \bar{b}}{\Delta} \delta_0 - i \frac{b}{\Delta} \delta_{\xi} - i \frac{\bar{k}\xi + \bar{b}}{\Delta} \chi(x) + \frac{ib}{\Delta} \overline{\chi(\xi-x)}, \quad (L)$$

$$C = \frac{1}{(B, 1)} \{L + (B, M) B - A^* B\} \quad (C)$$

удовлетворяют соотношениям

$$KB = 1; KL = ix, KC = M(x) \quad (M(x) = i \int_0^x s(u) du).$$

Здесь A — оператор интегрирования:

$$Af = i \int_0^x f(t) dt, \quad A^* f = -i \int_x^\xi f(t) dt,$$

а

$$A^* B = -\frac{ik}{\Delta} + i \int_x^\xi \left[\frac{\bar{k}}{\Delta} \chi(t) + \frac{k}{\Delta} \overline{\chi(\xi - t)} \right] dt.$$

Как было показано в [4], резольвентная матрица $A(z) = A_\pm(z)$, дающая описание всех продолжений, имеет вид:

$$\begin{aligned} A(z) = A(z, 0) = T(z, 0) &= I + H(z, 0) J = \\ &= I + \frac{z}{i} \begin{bmatrix} (KC_0, C_{\bar{x}}) (KB_0, C_{\bar{x}}) \\ (KC_0, B_{\bar{x}}) (KB_0, B_{\bar{x}}) \end{bmatrix} \cdot J = I + \\ &+ \frac{z}{i} \begin{bmatrix} (C, M_{\bar{x}}(x)) (B, M_{\bar{x}}(x)) \\ (C, e^{-i\bar{x}k}) (B, e^{-i\bar{x}k}) \end{bmatrix} \cdot J. \end{aligned}$$

Подставив в последнюю матрицу значения B и C из теоремы 1.2, мы выразим элементы $A(z)$ через составляющие триады $\chi(x)$, k , b . Тем самым в рассматриваемой ситуации отпадает необходимость использования спектрального разложения оператора Kf . Все же, несмотря на это, структура матрицы $A(z)$ остается трудно обозримой. Однако четко прослеживаемая зависимость $A(z)$ от параметра ξ , позволит нам в дальнейшем получить неожиданно простое мультипликативное представление резольвентной матрицы в терминах триады.

Пусть теперь $s(x)$ — произвольная (не обязательно эрмитово-положительная) функция, удовлетворяющая условиям (i) — (iii). Имеет место

Теорема 2.2. Если триада $\{\chi(x), k, b\}$ существует, то функция $\chi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению второго рода

$$\chi(x) - \int_0^\xi s''(x-t) \chi(t) dt = -s''(x), \quad x \in [0, \xi], \quad (7)$$

а составляющие b и k выражаются через $\chi(t)$ и $s(t)$ по формулам

$$b = s(0) - \int_0^\xi \overline{s(t)} \chi(t) dt, \quad (8)$$

$$k = (s'(+0) + \int_0^{\xi} \overline{s'(t)} \chi(t) dt. \quad (9)$$

Наоборот, если $\chi(t)$ — решение уравнения (7), h и k определены равенствами (8), (9), то $\{\chi(x), k, b\}$ — триада.

Доказательство. Вычислим первую и вторую производные выражения

$$\Phi(x) = \int_0^{\xi} s(x-t) \chi(t) dt,$$

считая пока $\chi(x)$ произвольной суммируемой функцией:

$$\Phi'(x) = \int_0^{\xi} s'(x-t) \chi(t) dt; \quad \Phi''(x) = -\chi(x) + \int_0^{\xi} s''(x-t) \chi(t) dt.$$

Если теперь $\{\chi(x), k, b\}$ -триада, то имеют место тождества

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi} s(x-t) \chi(t) dt &= s(x) - kx - b, \\ \int_0^{\xi} s'(x-t) \chi(t) dt &= s'(x) - k, \\ -\chi(x) + \int_0^{\xi} s''(x-t) \chi(t) dt &= s''(x). \end{aligned}$$

Последнее означает, что $\chi(x)$ удовлетворяет уравнению (7), а положив в первых двух $x=0$, получим (8), (9).

Обратно, пусть $\chi(x) \in L^1[0, \xi]$ удовлетворяет уравнению (7) п. в. Определив b, k равенствами (8), (9), рассмотрим функцию

$$\Psi(x) = \int_0^{\xi} s(x-t) \chi(t) dt - s(x) + kx + b.$$

Так как

$$\Psi''(x) = 0 \text{ (п. в.)}, \quad \Psi'(0) = 0, \quad \Psi(0) = 0$$

и функции $\Psi'(x), \Psi(x)$ — абсолютно непрерывны, то $\Psi(x) \equiv 0$ и, следовательно, $\{\chi(x), k, b\}$ является триадой.

Интегральное уравнение (7) называется уравнением Гельфанда-Левитана. Из сказанного выше следует, что при наличии условий (i)–(iii), описание всех продолжений эрмитово-положительной функции сводится к решению уравнения Гельфанда-Левитана. Преимущество триады состоит в том, что с ее помощью удачно записываются элементы $A(z)$.

2°. Здесь предполагая только, что $s(x)$ является непрерывной эрмитово-положительной функцией, многозначно продолжаемой с $[-\xi, \xi]$, и опираясь на доказанную в [5]

лемму 1.2. Для любой непрерывной эрмитово-положительной функции $s(x)$, неоднозначно продолжаемой с $[-\xi, \xi]$ и произвольных комплексных чисел α, β не равных нулю одновременно, уравнение

$$\int_0^{\xi} s(x-t)\chi(t)dt = \alpha s(x) + \beta s(x-\xi) (|\alpha| + |\beta| > 0)$$

не имеет решений $\chi(t)$ в классе суммируемых функций, легко убедимся в справедливости следующих теорем.

Теорема 3.2. Если непрерывная эрмитово-положительная функция $s(x)$ неоднозначно продолжаема с $[-\xi, \xi]$ и если триада $\{\chi(x), k, b\}$ существует, то число $\Delta = k\bar{k}\xi + k\bar{b} + \bar{k}b$ (а значит и число $\bar{k}$) отлично от нуля.

Теорема 4.2. Если непрерывная эрмитово-положительная функция $s(x)$ неоднозначно продолжаема с $[-\xi, \xi]$, и если триада существует, то она единственна.

Замечание. Теорема 3.2 свидетельствует о том, что условие $\Delta \neq 0$ является следствием многозначной продолжаемости и существования триады. Мы покажем ниже, что существование триады, в свою очередь, является следствием многозначности продолжения и условий (i)–(iii).

3°. В связи с анализом уравнения Гельфанда-Левитана (7) рассмотрим интегральное преобразование

$$g(x) = \int_0^{\xi} k(x-t)f(t)dt \quad (10)$$

с ядром $k(x-t)$, порожденным суммируемой на $[-\xi, \xi]$ эрмитовой функцией $k(x)$:

$$(a) \int_{-\xi}^{\xi} |k(u)| du < +\infty, \quad (b) k(-x) = \overline{k(x)} \text{ п. в. на } [-\xi, \xi].$$

Естественной областью определения этого преобразования является множество измеримых функций $f(x)$, $x \in [0, \xi]$ таких, что интеграл

$$\int_0^{\xi} k(x-t)f(t)dt \text{ существует для п. в. } x \in [0, \xi]. \text{ Имеет место}$$

Теорема 5.2. В каждом из трех банаховых пространств $L^1[0, \xi]$, $L^2[0, \xi]$, $C[0, \xi]$ интегральное преобразование (10) с ядром, удовлетворяющим условию (a), индуцирует ограниченный оператор Kf с нормой, не превосходящей

$$\int_{-\xi}^{\xi} |k(u)| du.$$

Операторы Kf ($f \in L^1[0, \xi]$, $L^2[0, \xi]$, $C[0, \xi]$) вполне непрерывны (компактны), а оператор Kf ($f \in L^2[0, \xi]$), удовлетворяющий дополнительно условию (b), является самосопряженным.

Доказательство. В случае $f \in L^1[0, \xi]$ легко проверить, что

$$\int_0^\xi |g(x)| dx \leq \int_{-\xi}^\xi |k(u)| du \cdot \|f\|_{L^1},$$

то есть $Kf \in L^1(0, \xi]$ и его норма

$$\|K\|_{L^1} \leq \int_{-\xi}^\xi |k(u)| du.$$

В случае $f \in L^2[0, \xi]$ легко доказывается с использованием неравенства Буняковского—Шварца оценка

$$\int_0^\xi |g(x)|^2 dx \leq \left\{ \int_{-\xi}^\xi |k(u)| du \right\}^2 \int_0^\xi |f(t)|^2 dt,$$

откуда видно, что $g = Kf \in L^2[0, \xi]$ и

$$\|K\|_{L^2} \leq \int_{-\xi}^\xi |k(u)| du.$$

Если $f \in C[0, \xi]$, то, как нетрудно проверить, $g(x) \in C[0, \xi]$ и

$$\|g\|_C = \|Kf\|_C \leq \int_{-\xi}^\xi |k(u)| du \cdot \|f\|_C, \text{ то есть}$$

$$\|K\|_C \leq \int_{-\xi}^\xi |k(u)| du.$$

Второе утверждение теоремы также легко следует из аппроксимируемости оператора K , во всех трех случаях, конечномерными операторами, получаемыми из оператора K заменой ядра $k(x-t)$ полиномом $k_n(x-t)$.

Наконец, утверждение о самосопряженности Kf в $L^2[0, \xi]$ непосредственно следует из теоремы Фубини и эрмитовости ядра $k(x-t) = \overline{k(t-x)}$.

4°. Так как интегральный оператор Kf является компактным оператором из $L^p[0, \xi]$ в $L^p[0, \xi]$ ($p=1, 2$ и даже $p \in [1, \infty]$), из $C[0, \xi]$ в $C[0, \xi]$, то всякая ненулевая точка спектра K есть собственное значение [15]. Используя специфическую структуру ядра, — x и t входят в него лишь в виде разности, — можно показать, что при $\mu \neq 0$ всякая суммируемая функция $h(t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\mu h(x) = \int_0^\xi k(x-t) h(t) dt \quad (0 \leq x \leq \xi)$$

будет непрерывной на $[0, \xi]$.

Таким образом, спектр интегрального оператора на конечном интервале с суммируемым зависящим от разности аргументов ядром не зависит

от того в каком из пространств $L^p[0, \xi]$ ($1 \leq p \leq +\infty$) или $C[0, \xi]$ рассматривается этот интегральный оператор. Если ядро $k(x-t) = k(t-x)$ эрмитово, то спектр интегрального оператора, рассматриваемого в $L^2[0, \xi]$, вещественен, следовательно, таким же он будет и в $L^1[0, \xi]$ и $C[0, \xi]$.

5°. Всюду до конца настоящего параграфа, будем считать, что $\hat{k}(x) = s''(x)$, где $s(x)$ — эрмитово-положительная функция, удовлетворяющая следующим двум требованиям: (с) $s(x)$ — многозначно продолжаема с любого внутреннего сегмента $[-\xi, \xi] \subset (-a, a)$; (d) $s(x)$ подчинена условиям (i), (ii), (iii) с $\lambda = 1$.

Теорема 6.2. (Первая основная теорема). Если эрмитово-положительная функция $s(x)$ удовлетворяет требованиям (с) и (d), то уравнение Гельфанда-Левитана

$$\chi(x) - \int_0^{\xi} s''(x-t) \chi(t) dt = -s''(x)$$

однозначно разрешимо в пространстве $L^1[0, \xi]$ и, следовательно, триада $\{\chi(x), k, b\}$ существует.

Для доказательства обратимся к ОМН (K) задачи о продолжении:

$$\left[\begin{array}{c} (K\varphi, \varphi) (e^{-\lambda x} w(z) - M_z(x), \varphi) \\ * \quad \frac{w(z) - w^*(z)}{z - \bar{z}} \end{array} \right] \geq 0, \quad \forall z: \operatorname{Im} z \neq 0, \quad \forall \varphi \in L^2[0, \xi].$$

Отправляясь от функции $\Psi(x)$ такой, что $\Psi' \in L^2[0, \xi]$, $\Psi(0) = \Psi(\xi) = 0$, положим в ОМН (K) $\varphi = \Psi'$, после чего, интегрируя по частям, преобразуем элементы a_{11} и a_{12} . Мы получим

$$\begin{aligned} K\Psi' &= \int_0^{\xi} s(x-t) \Psi'(t) dt = - \int_0^{\xi} \frac{d}{dt} s(x-t) \Psi(t) dt = \\ &= \int_0^{\xi} \frac{d}{dx} s(x-t) \Psi(t) dt, \\ (K\Psi', \Psi') &= - \left(\frac{d}{dx} \int_0^{\xi} s'(x-t) \Psi(t) dt, \Psi(x) \right) \end{aligned}$$

и, так как из-за скачка производной

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^{\xi} s'(x-t) \Psi(t) dt &= \lambda \Psi(x) + \int_0^{\xi} s'(x-t) \Psi(t) dt = \\ &= -\Psi(x) + \int_0^{\xi} \hat{k}(x-t) \Psi(t) dt, \end{aligned}$$

то

$$a_{11} = (K\Psi', \Psi') = (\Psi, \Psi) - (\widehat{K}\Psi, \Psi),$$

$$a_{12} = (e^{-izx} w(z) - M_z(x), \Psi'(x)) = -(-ize^{-izx} w(z) - M_z(x), \Psi(x)).$$

В итоге ОМН приобретает вид

$$\left[\begin{array}{c} (\Psi, \Psi) - (\widehat{K}\Psi, \Psi) (ize^{-izx} w(z) + M'_z(x), \Psi(x)) \\ * \quad w(z) - \overline{w^*(z)} / z - \bar{z} \end{array} \right] \geq 0, \operatorname{Im} z \neq 0$$

и так как функция $\Psi(x)$ с указанными свойствами плотна в $L^2[0, \xi]$, то неравенство справедливо для всех $\Psi \in L^2[0, \xi]$.

Отсюда сразу же следует, что единица не является собственным числом оператора $\widehat{K}f$, действующего в $L^2[0, \xi]$. Действительно, в противном случае существует собственная функция $\Psi_0 \in L^2[0, \xi]$ такая, что

$$\Psi_0 - \widehat{K}\Psi_0 = 0, (\Psi_0, \Psi_0) - (\widehat{K}\Psi_0, \Psi_0) = 0,$$

в силу чего $w(z)$ определится однозначно из ОМН вопреки требованию (с). Но тогда единица не будет собственным числом и оператора $\widehat{K}f$, действующего в $L^1[0, \xi]$. Уравнение Гельфанда—Левитана разрешимо [15], и по теореме 2.2 триада $\{\chi(x), k, b\}$ существует.

Итак, при выполнении условий (с) и (d) триада $\{\chi(x), k, b\}$ существует; более того, из теоремы 3.2 вытекает, что эти же условия обеспечивают выполнение неравенства $\Delta \neq 0$. Тем самым имеют смысл величины B, L, C теоремы 1.2 и справедлива следующая

Теорема 7.2. (Вторая основная теорема). Если эрмитово-положительная функция $s(x)$, удовлетворяющая условиям (i)–(iii), допускает многозначное продолжение с сегмента $[-\xi, \xi]$, то резольвентная матрица задачи имеет вид

$$A(z) = \begin{bmatrix} 1 - z(B, M_z^-(x)) & z(C, M_z^-(x)) \\ -z(B, e^{-izx}) & 1 + z(C, e^{-izx}) \end{bmatrix},$$

где обобщенные функции B, L, C определены теоремой 1.2.

6° Важную информацию о величине $\Delta = k\bar{k}\xi + k\bar{b} + \bar{k}b$ доставляет

Теорема 8.2. Если эрмитово-положительная функция $s(x)$ удовлетворяет требованиям (с) и (d), то 1) справедливо равенство $(KB, B) = -\frac{1}{\Delta}$; 2) $\Delta(\xi) = k(\xi)\bar{k}(\xi)\xi + k(\xi)\bar{b}(\xi) + \bar{k}(\xi)b(\xi)$ отрицательна для всех $\xi \in (0, a)$ и монотонно неубывает с ростом ξ .

§ 3. Элементы триады, как функции правого конца сегмента $[0, \xi]$

По-прежнему считаем, что эрмитово-положительная функция $s(x)$ подчинена требованиям (с) и (d). По теореме 6.2 уравнение (7) имеет ре-

шение $\chi_{\xi}(x)$ и величины $\chi_{\xi}(x)$, $k(\xi) = s'(+0) + \int_0^{\xi} \overline{s'(t)} \chi_{\xi}(t) dt$, $b(\xi) =$
 $= s(0) - \int_0^{\xi} \overline{s(t)} \chi_{\xi}(t) dt$ образуют триаду.

В этом параграфе мы выясним зависимости этих величин от параметра ξ . Нас будет интересовать поведение элементов триады при $\xi \rightarrow +0$, их непрерывность и формулы дифференцирования.

1°. Пусть $\xi \rightarrow +0$. По теореме 5.2 норма оператора

$$\widehat{K}_{\xi} f = \int_0^{\xi} s''(x-t) f(t) dt$$

в пространстве $L^1[0, \xi]$ допускает оценку:

$$\|\widehat{K}_{\xi}\| \leq \int_{-\xi}^{\xi} |s''(x)| dx = 2 \int_0^{\xi} |s''(x)| dx = 2 \|s''\|_{\xi}$$

и тогда

$$\begin{aligned} \|\chi_{\xi}\|_{\xi} &\leq \left\| \int_0^{\xi} s''(x-t) \chi_{\xi}(t) dt \right\|_{\xi} + \|s''\|_{\xi} < \\ &\leq \|\widehat{K}_{\xi}\| \|\chi_{\xi}\|_{\xi} + \|s''\|_{\xi} \leq 2 \|s''\|_{\xi} \|\chi_{\xi}\|_{\xi} + \|s''\|_{\xi}, \end{aligned}$$

то есть $\|\chi_{\xi}\|_{\xi} \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow 0$. Далее очевидно

$$|b(\xi) - s(0)| \leq \int_0^{\xi} |\overline{s(t)}| |\chi_{\xi}(t)| dt, \quad |k(\xi) - s'(+0)| \leq \int_0^{\xi} |\overline{s'(t)}| |\chi_{\xi}(t)| dt$$

и, если обозначить

$$M = \max_{[0, \xi_0]} |s(x)|, \quad M' = \max_{[0, \xi_0]} |s'(x)|,$$

то при

$$\xi \leq \xi_0 \quad |b(\xi) - s(0)| \leq M \|\chi_{\xi}\|_{\xi}, \quad |k(\xi) - s'(+0)| \leq M' \|\chi_{\xi}\|_{\xi}$$

и следовательно

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} b(\xi) = s(0), \quad \lim_{\xi \rightarrow +0} k(\xi) = s'(+0).$$

Наконец

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow +0} \Delta(\xi) &= \lim_{\xi \rightarrow +0} [k(\xi) \overline{k(\xi)} \xi + k(\xi) \overline{b(\xi)} + \overline{k(\xi)} b(\xi)] = \\ &= [s'(+0) + \overline{s'(+0)}] s(0) = -s(0). \end{aligned}$$

Тем самым доказана следующая

Теорема 1.3. Если эрмитово-положительная функция $s(x)$ удовлетворяет требованиям (с) и (d), то имеют место следующие соотношения:

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} \|\chi_{\xi}\|_{\xi} = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +0} b(\xi) = s(0), \quad \lim_{\xi \rightarrow +0} k(\xi) = s'(+0), \quad \lim_{\xi \rightarrow +0} \Delta(\xi) = -s(0).$$

2°. Доказательство непрерывности элементов триады опирается на факт равномерной ограниченности по параметру ξ операторов $[I - \hat{K}_\xi]^{-1} g$.

Теорема 2.3. Если функция $k(x)$ суммируема на любом внутреннем сегменте $[-\xi, \xi] \subset (-a, a)$, и если для каждого $\xi \in [0, a)$ однородное уравнение $\varphi - \hat{K}_\xi \varphi = 0$ имеет в $L^1[0, \xi]$ лишь тривиальное решение, то семейство операторов $(I - \hat{K}_\xi)^{-1} f$ равномерно по ξ ограничено на каждом внутреннем сегменте $[0, \xi_0]$.

В частных случаях, когда $k(x) \in C[0, \xi]$ или $k(x) \in L^2[0, \xi]$, доказательство теоремы может быть получено стандартным образом из известных фактов теории Фредгольма. В рассматриваемом случае $k(x) \in L^1[0, \xi]$ теоремы Фредгольма остаются верными (см., например, [15]), а доказательство равномерной ограниченности по ξ семейства $(I - \hat{K}_\xi)^{-1} f$ несколько громоздко. Из теоремы 2.3 вытекает

Теорема 3.3. Если функция $k(x)$ суммируема на любом $[-\xi, \xi] \subset (-a, a)$, и если для каждого $\xi \in [0, a)$ однородное уравнение $\varphi - \hat{K}_\xi \varphi = 0$ имеет в $L^1[0, \xi]$ лишь тривиальное решение, а $|g(x)| \leq C$ ограничена на $(-a, a)$, то

$$q(\xi) = \int_0^\xi \chi_\xi(x) \overline{g(x)} dx$$

является непрерывной функцией параметра ξ . В частности

$$k = s'(+0) + \int_0^\xi \chi_\xi(t) \overline{s'(t)} dt, \quad b = s(0) - \int_0^\xi \chi_\xi(t) \overline{s(t)} dt,$$

$\Delta = k \bar{k}\xi + k \bar{b} + \bar{k}b$ являются непрерывными функциями параметра ξ .

Следствие. В условиях предыдущей теоремы резольвентная матрица $A_\xi(z)$ непрерывно зависит от параметра ξ .

Наша главная задача состоит в том, чтобы доказать при выполнении тех же условий дифференцируемость матрицы $A_\xi(z)$ по параметру ξ и вывести для нее дифференциальное уравнение.

3°. С этой целью временно усилим требование (ii), заменив его условием (ii) „ $s''(x)$ непрерывна на $[0, a)$ “. Для этого случая в [5] доказана

Теорема 4.3. (Третья основная теорема). Если функция $s(x)$ удовлетворяет условиям (i), (ii), (iii), и если для всех $\xi \in [0, a)$ однородное уравнение $\varphi - \hat{K}_\xi \varphi = 0$ имеет в $C[0, \xi]$ лишь тривиальное решение, то справедливы формулы дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \chi_\xi(x) = -\theta(\xi) \overline{\chi_\xi(\xi - x)}, \quad (11)$$

$$\frac{dk}{d\xi} = \theta(\xi) \bar{k}, \quad (12)$$

$$\frac{db}{d\xi} = -\Theta(\xi) (\bar{k}\xi + \bar{b}). \quad (13)$$

Здесь $\chi_\xi(x)$, k , $\bar{b}$ образует триаду, а $\Theta(\xi) = \chi_\xi(\xi)$.

В частности, из (12) и (13) вытекает важное, не содержащее $\Theta(\xi)$, соотношение

$$\frac{d}{d\xi} \Delta(\xi) = k \bar{k}. \quad (14)$$

Формула (11) впервые получена М. Г. Крейном [3]. Несмотря на ее важную роль в вычислениях, она не может считаться основным элементом теории по следующим соображениям: во-первых, она утрачивает смысл в случае суммируемой второй производной $s''(x)$, так как значение суммируемой функции $\chi_\xi(x)$ в точке $x = \xi$ бессодержательно; во-вторых, как будет показано, основные формулы вообще не содержат величины $\Theta(\xi) = \chi_\xi(\xi)$.

Замечание. Из соотношения (12) с учетом начального условия $k(+0) = s'(+0)$ ($s'(+0) \neq 0$) видно, что функция $k = k(\xi)$ всюду на $[0, a)$ отлична от нуля, и так как $\frac{d}{d\xi} \Delta = k \bar{k} > 0$, то $\Delta(\xi)$ — строго возрастает, обращаясь в нуль не более чем в одной точке.

4°. Имея в виду вычисление производной $\frac{d}{d\xi} A_\xi(z)$, рассмотрим произведения (B, f) , (L, f) , (C, f) обобщенных функций B, L, C на произвольную, непрерывную на $[0, a)$ вместе со своей производной функцию $f(x)$. Эти скалярные произведения являются, очевидно, антилинейными функционалами

$$B(f) = (B, f)_\xi, \quad L(f) = (L, f)_\xi, \quad C(f) = (C, f)_\xi.$$

Мы придем к нужным формулам, вычислив производные $\frac{d}{d\xi} B(f)$,

$$\frac{d}{d\xi} C(f), \text{ и положив там } f = e^{-i\bar{s}x}, \quad f = M_{\bar{s}}(x)/M_{\bar{s}}(x) =$$

$$= i \int_0^x e^{-i\bar{s}(x-u)} s(u) du.$$

Формула для $\frac{d}{d\xi} L(f)$ при этом играет вспомогательную роль.

Теорема 5.3. [5]. Если функция $s(x)$ удовлетворяет условиям (i), (ii), (iii), если для всех $\xi \in [0, a)$ однородное уравнение

$$\varphi(x) - \int_0^x s''(x-t) \varphi(t) dt = 0$$

имеет в $C[0, \xi)$ лишь тривиальное решение, то имеют место формулы:

$$\frac{d}{d\xi} B(f) = - \{ \bar{k} B(f) - \overline{f'(\xi)} + \overline{\chi_\xi(\xi - u)}, f'(u) \}_\xi \frac{k}{\Delta}, \quad (15)$$

$$\frac{d}{d\xi} C(f) = \{ \bar{k} B(f) - \overline{f'(\xi)} + \overline{\chi_\xi(\xi - u)}, f'(u) \}_\xi [k B(M_0) - i b], \quad (16)$$

при этом из первой, в частности, вытекает

$$\Delta \cdot B(1) = -1, \quad (17)$$

$$\Delta \cdot B(M_0) = \int_0^\xi \frac{1}{2i} \left[k(v) \overline{b(v)} - \overline{k(v)} b(v) \right] dv - \frac{i}{2} \Delta \cdot \xi. \quad (18)$$

5°. Мы покажем здесь, что эти формулы останутся в силе и тогда, когда функция $s''(x) = k(x)$ лишь локально суммируема на $(-a, a)$.

Метод доказательства основывается на том, что на $\mathbb{R}$ выделенном сегменте $[0, \xi_0] \subset [0, a)$ функция $s(x)$ класса (i), (ii), (iii) с суммируемой второй производной $s''(x)$ аппроксимируется последовательностью функций $s_n(x) = \tilde{s}(x)$ класса (i), (ii), (iii) с непрерывной $s_n'' = \tilde{s}'' = \tilde{k}(x)$.

Эта аппроксимация строится следующим образом: отпавляясь от $s''(x) = k(x)$, подбираем непрерывную $k_n(x) = \tilde{k}(x)$ так, чтобы

$$\|k - k_n\|_{\xi_0} = \int_0^{\xi_0} |k(u) - \tilde{k}(u)| du < \varepsilon_n \quad (\varepsilon_n \rightarrow +0).$$

и полагаем

$$\tilde{s}(x) = \int_0^x \int_0^t \tilde{k}(u) du dt + s'(+0)x + s(0), \quad x \in [0, \xi_0].$$

Ясно, что

$$\tilde{s}'(x) = \int_0^x \tilde{k}(u) du + s'(+0), \quad \tilde{s}(0) = s(0), \quad \tilde{s}'(+0) = s'(+0).$$

Так как с другой стороны

$$s(x) = \int_0^x \int_0^t k(u) du dt + s'(+0)x + s(0),$$

$$s'(x) = \int_0^x k(u) du + s'(+0),$$

то для всех $x \in [0, \xi_0]$

$$|s(x) - \tilde{s}(x)| \leq \xi_0 \int_0^{\xi_0} |k(u) - \tilde{k}(u)| du < \xi_0 \varepsilon_n,$$

$$|s'(x) - \tilde{s}'(x)| \leq \int_0^{\xi_0} |k(u) - \tilde{k}(u)| du < \varepsilon_n$$

и, следовательно, $s_n(x)$ и $s'_n(x)$ равномерно на $[0, \xi_0]$ стремятся к $s(x)$ и $s'(x)$ соответственно.

Функции $\tilde{s}(x)$ доопределим на $[-\xi_0, 0]$ по закону четности: $\tilde{s}(x) = \tilde{s}(-x)$, тем самым доопределяются и $\tilde{s}'(x)$, $\tilde{s}''(x)$: $\tilde{s}'(x) = -\tilde{s}'(-x)$, $\tilde{s}''(x) = \tilde{s}''(-x)$. Ход рассуждений проиллюстрируем на формуле $\frac{d}{d\xi} \Delta = k \bar{k}$. Легко устанавливается, что если $s(x)$ такова, что однородное уравнение

$$\varphi(x) - \int_0^{\xi} s''(x-t) \varphi(t) dt = 0$$

имеет для всех $\xi \in [0, \xi_0]$ лишь тривиальное решение, то это же верно и для любых $\tilde{s}(x)$ при достаточно малых ε_n . Но тогда для всех $\xi \in [0, \xi_0]$ разрешимо уравнение Гельфанда—Левитана

$$\bar{\chi}_{\xi}(x) - \int_0^{\xi} \tilde{s}''(x-t) \bar{\chi}_{\xi}(t) dt = -\tilde{s}''(x)$$

и имеют смысл элементы триады

$$\bar{b}_{\xi} = s(0) - \int_0^{\xi} \tilde{s}(t) \bar{\chi}_{\xi}(t) dt, \quad \bar{k}_{\xi} = s'(+0) + \int_0^{\xi} \tilde{s}'(t) \bar{\chi}_{\xi}(t) dt.$$

При $\varepsilon_n \rightarrow 0$ $\bar{b}_{\xi} \rightarrow b_{\xi}$, $\bar{k}_{\xi} \rightarrow k_{\xi}$. (19)

В самом деле, в силу равномерной ограниченности на $[0, \xi_0]$ операторов $(I - \tilde{K}_{\xi})^{-1}$, для функций $\tilde{g}(x)$, мало отличающихся на $[0, \xi_0]$ от непрерывной функции $g(x)$ в смысле

$$\|g - \tilde{g}\|_C = \sup_{x \in [0, \xi_0]} |g(x) - \tilde{g}(x)| < \varepsilon$$

имеет место неравенство

$$|(\bar{\chi}_{\xi}, \tilde{g})_{\xi} - (\chi_{\xi}, g)_{\xi}| < C\varepsilon,$$

где постоянная C не зависит не от выбора аппроксимант $\tilde{k}(x)$, $\tilde{g}(x)$, ни от значения $\xi \in [0, \xi_0]$. Но тогда справедливы соотношения (19).

Однако, для функций $\tilde{s}(x)$ формула $\frac{d}{d\xi} \bar{\Delta}_{\xi} = \bar{k}_{\xi} \bar{k}_{\xi}$ уже доказана.

Проинтегрируем ее, учитывая начальные условия при $\xi \rightarrow +0$

$$\bar{k}_{\xi} \bar{k}_{\xi} \xi + \bar{k}_{\xi} \bar{b}_{\xi} + \bar{k}_{\xi} \bar{b}_{\xi} = \int_0^{\xi} \bar{k}_{\eta} \bar{k}_{\eta} d\eta - s(0)$$

и перейдем к пределу при $\varepsilon_n \rightarrow 0$ (Переход к пределу под знаком интеграла возможен в силу равномерной сходимости $\bar{k} \rightarrow k$). Мы получим

$$k_\xi \bar{k}_\xi \xi + k_\xi \bar{b}_\xi + \bar{k}_\xi b_\xi = \int_0^\xi k_\eta \bar{k}_\eta d\eta - s(0)$$

и так как подынтегральная функция непрерывна, то всюду на $[0, \xi_0]$ существует производная $\frac{d}{d\xi} \Delta = k \bar{k}$.

Теорема 6.3. Если функция $s(x)$, удовлетворяющая требованиям (i), (ii), (iii), такова, что однородное уравнение

$$\varphi(x) - \int_0^\xi s''(x-t) \varphi(t) dt = 0$$

имеет лишь тривиальное решение, и если $\Delta \neq 0$ на $[0, a)$, то для функции $f(x)$, непрерывной вместе с $f'(x)$ на $[0, a)$, справедливы формулы дифференцирования

$$\frac{d}{d\xi} B(f) = -(\bar{k} B(f) - \overline{f'(\xi)} + \overline{\chi_\xi(\xi-u)}, f'(u))_\xi \frac{k}{\Delta}, \quad (20)$$

$$\frac{d}{d\xi} C(f) = (\bar{k} B(f) - \overline{f'(\xi)} + \overline{\chi_\xi(\xi-u)}, f'(u))_\xi |k B(M_0) - ib|, \quad (21)$$

а значит и вытекающие из них соотношения

$$\Delta \cdot B(1) = -1, \quad (22)$$

$$\Delta \cdot B(M_0) = \int_0^\xi \frac{1}{2i} [k(u) \overline{b(u)} - \bar{k}(u) b(u)] du - \frac{i}{2} \xi \cdot \Delta. \quad (23)$$

Доказательство. Выделив произвольно сегмент $[0, \xi_0] \subset [0, a)$, построим последовательность аппроксимирующих функций $s_n(x)$ с непрерывными вторыми производными. Для таких функций справедливость формул

$$\frac{d}{d\xi} B_n(f) = -(\bar{k}_n B_n(f) - \overline{f'(\xi)} + \overline{\chi_\xi^{(n)}(\xi-u)}, f'(u))_\xi \frac{k_n}{\Delta_n}, \quad (24)$$

$$\frac{d}{d\xi} C_n(f) = (\bar{k}_n B_n(f) - \overline{f'(\xi)} + \overline{\chi_\xi^{(n)}(\xi-u)}, f'(u))_\xi [k_n B_n(M_0) - ib_n] \quad (25)$$

установлена в теореме 5.3 [5].

Проинтегрируем (24), (25) по ξ с учетом начальных условий при $\xi \rightarrow +0$. Отправляясь от уже известных предельных соотношений

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} \|\chi_\xi^{(n)}\| = 0, \lim_{\xi \rightarrow +0} b_n = s(0), \lim_{\xi \rightarrow +0} k_n = s'(+0), \lim_{\xi \rightarrow +0} \Delta_n = -s(0),$$

найдем без труда

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} B_n(f) = \frac{1}{s(0)} = \lim_{\xi \rightarrow +0} B(f). \quad (26)$$

Из (26) в частности следует

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} (B_n, 1)_\xi = \lim_{\xi \rightarrow +0} B_n(1) = \frac{1}{s(0)}; \quad \lim_{\xi \rightarrow +0} (B_n, M_0)_\xi = \lim_{\xi \rightarrow +0} B_n(M_0) = 0,$$

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} (B_n, Af)_\xi = \lim_{\xi \rightarrow +0} B_n(Af) = 0,$$

после чего

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} C_n(f) = 0 = \lim_{\xi \rightarrow +0} C(f). \quad (27)$$

Таким образом, учитывая (26) и (27), получаем

$$B_n(f) = - \int_0^\xi [\bar{k}_n B_n(f) - \overline{f'(\eta)} + \overline{(\chi_\eta^{(n)}(\eta - u), f'(u)_\eta)]} \frac{k_n}{\Delta_n} d\eta + \lim_{\xi \rightarrow +0} B(f),$$

$$C_n(f) = \int_0^\xi [\bar{k}_n B_n(f) - \overline{f'(\eta)} + \overline{(\chi_\eta^{(n)}(\eta - u), f'(u)_\eta)]} [k_n B_n(M_0) - ib_n] d\eta + \lim_{\xi \rightarrow +0} C(f).$$

Равномерная сходимость левых частей и подынтегральных функций позволяет перейти к пределу под знаками интегралов. Так как предельные подынтегральные функции по [теореме 3.3 непрерывны, то всюду на $[0, \xi_0]$ существуют производные $\frac{d}{d\xi} B(f)$, $\frac{d}{d\xi} C(f)$ такие, что выполняются неравенства (20), (21), а значит и (22), (23). В частности

Теорема 7.3. (Четвертая основная теорема). Если эрмитово-положительная функция $s(x)$, удовлетворяющая требованиям (i), (ii), (iii), многозначно продолжаема с интервала $(-a, a)$, то справедливы формулы дифференцирования (20), (21) и, вытекающие из них (22), (23).

В самом деле, по теореме 6.2 однородное уравнение

$$\varphi(x) - \int_0^\xi s''(x-t) \varphi(t) dt = 0$$

имеет лишь тривиальное решение, а по теореме 3.2 $\Delta \neq 0$.

§ 4. Мультипликативное представление резольвентной матрицы

1°. Пусть эрмитово-положительная функция $s(x)$, удовлетворяющая требованиям (i), (ii), (iii), многозначно продолжаема с интервала $(-a, a)$, и пусть

$$A_\xi(z) = A(\xi, z) = \begin{bmatrix} \alpha(\xi, z) & \beta(\xi, z) \\ \gamma(\xi, z) & \delta(\xi, z) \end{bmatrix} \quad \xi \in (0, a)$$

— резольвентная матрица задачи. Элементы матрицы $A_\xi(z)$ выражаются через антилинейные функционалы $B(f)$ и $C(f)$ следующим образом:

$$\alpha(\xi, z) = 1 - zB(M_{\bar{z}}), \quad \beta(\xi, z) = zC(M_{\bar{z}}),$$

$$\gamma(\xi, z) = -zB(e^{-i\bar{z}x}), \quad \delta(\xi, z) = 1 + zC(e^{-i\bar{z}x}).$$

Формулы (20), (21) теоремы 6.3 позволяют вычислить $\frac{d}{d\xi} A_{\pm}(z)$.

Предварительно введем следующие обозначения: положив

$$p = \frac{k}{\Delta}, \quad q = kB(M_0) - ib, \quad \text{рассмотрим матрицу}$$

$$Q(\xi) = J \left[\begin{array}{c} \bar{p} \\ q \end{array} \right] [p, q], \quad \text{где } J = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

Проверим, что Q является „минус- J -проектором“, то есть что $JQ \geq 0$, $Q^2 = -Q$. Первое очевидно, второе же вытекает из того, что, в силу (23), $\text{Im } B(M_0) = -\frac{\xi}{2}$, откуда $\bar{p}q - p\bar{q} = -i$, и тогда

$$Q^2 = J \left[\begin{array}{c} \bar{p} \\ q \end{array} \right] [-i(q\bar{p} - p\bar{q})] [p, q] = -Q.$$

Мультипликативное представление $A(\xi, z)$ устанавливает следующую

Теорема 1.4. (Пятая основная теорема). Матрица-функция $A(\xi, z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{d\xi} A(\xi, z) = -izA(\xi, z)Q(\xi)$$

и начальному условию

$$A(0, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -z/s(0) & 1 \end{bmatrix}.$$

Доказательство начнем с проверки первого утверждения. Запишем

$$\frac{d}{d\xi} A(\xi, z) = \frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \alpha(\xi, z) & \beta(\xi, z) \\ \gamma(\xi, z) & \delta(\xi, z) \end{bmatrix} = z \frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} -B(M_{\bar{z}}) & C(M_{\bar{z}}) \\ -B(e^{-i\bar{z}x}) & C(e^{-i\bar{z}x}) \end{bmatrix},$$

воспользуемся формулами дифференцирования теоремы 7.3:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} A(\xi, z) &= z \left[\begin{array}{c} \bar{k}B(M_{\bar{z}}) - \overline{M'_{\bar{z}}(\xi)} + \overline{(\chi_{\bar{z}}(\xi - u), M'_{\bar{z}}(u))_{\xi}} \\ \bar{k}B(e^{-i\bar{z}x}) - ize^{i\bar{z}x} + iz(\overline{\chi_{\bar{z}}(\xi - u)}, e^{-i\bar{z}x})_{\xi} \end{array} \right] \times \\ &\quad \times \left[\begin{array}{c} k \\ \Delta \end{array} \cdot kB(M_0) - ib \right] \end{aligned}$$

и так как в состав

$$Q = J \left[\begin{array}{c} \bar{k}/\Delta \\ kB(M_0) - ib \end{array} \right] [k/\Delta, kB(M_0) - ib]$$

входит та же строка, то достаточно проверить лишь равенство

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{c} \bar{k}B(M_{\bar{z}}) - \overline{M'_{\bar{z}}(\xi)} + \overline{(\chi_{\bar{z}}(\xi - u), M'_{\bar{z}}(u))_{\xi}} \\ \bar{k}B(e^{-i\bar{z}x}) - ize^{-i\bar{z}x} + iz(\overline{\chi_{\bar{z}}(\xi - u)}, e^{-i\bar{z}x})_{\xi} \end{array} \right] = - \\ &- iA(\xi, z) J \left[\begin{array}{c} \bar{k}/\Delta \\ kB(M_0) - ib \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Преобразуем сначала правую часть этого равенства. Учитывая, что $\overline{B(M_0)} = B(M_0) + i\bar{\xi}$, получим

$$-iJ \left[\frac{\bar{k}/\Delta}{kB(M_0) - ib} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k}/\Delta \\ \bar{k}B(M_0) + i\bar{k}\bar{\xi} + i\bar{b} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \bar{k}B(M_0) + i\bar{k}\bar{\xi} + i\bar{b} \\ -\frac{\bar{k}}{\Delta} \end{bmatrix},$$

откуда

$$-iA(\xi, z)J \left[\frac{\bar{k}/\Delta}{kB(M_0) - ib} \right] = \\ = \begin{bmatrix} 1 - zB(M_{\bar{z}})zC(M_{\bar{z}}) \\ -zB(e^{-i\bar{z}x})1 + zC(e^{-i\bar{z}x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k}B(M_0) + i\bar{k}\bar{\xi} + i\bar{b} \\ \bar{k}/\Delta \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \bar{k}B(M_0) + i\bar{k}\bar{\xi} + i\bar{b} - izB(M_{\bar{z}})(\bar{k}\bar{\xi} + \bar{b}) - z\bar{k}B(M_0)B(M_{\bar{z}}) - z\frac{\bar{k}}{\Delta}C(M_{\bar{z}}) \\ -izB(e^{-i\bar{z}x})(\bar{k}\bar{\xi} + \bar{b}) - \bar{k}/\Delta - z\bar{k}B(M_0)B(e^{-i\bar{z}x}) - z\bar{k}/\Delta C(e^{-i\bar{z}x}) \end{bmatrix}.$$

Формула

$$C(f) = -\Delta \{L(f) + B(M_0)B(f) - B(A_0f)\}$$

дает возможность преобразовать сумму двух последних слагаемых элементов колонны:

$$z\bar{k}B(M_0)B(M_{\bar{z}}) + z\bar{k}/\Delta C(M_{\bar{z}}) = -z\bar{k}L(M_{\bar{z}}) + z\bar{k}B(A_0M_{\bar{z}}), \\ z\bar{k}B(e^{-i\bar{z}x})B(M_0) + z\bar{k}/\Delta C(e^{-i\bar{z}x}) = -z\bar{k}L(e^{-i\bar{z}x}) + z\bar{k}B(A_0e^{-i\bar{z}x})$$

и, если учесть соотношения

$$A_0e^{-i\bar{z}x} = i \int_0^x e^{-i\bar{z}v} dv = \frac{1}{z}(1 - e^{-i\bar{z}x}),$$

$$A_0M_{\bar{z}}(x) = -i \int_0^x \int_0^u e^{-i\bar{z}(u-v)} s(v) dv du = \frac{1}{z}(M_0(x) - M_{\bar{z}}(x)),$$

то мы приходим к равенству

$$-iA(\xi, z)J \left[\frac{\bar{k}/\Delta}{kB(M_0) - ib} \right] = \\ = \begin{bmatrix} \bar{k}B(M_0) + i\bar{k}\bar{\xi} + i\bar{b} - izB(M_{\bar{z}})(\bar{k}\bar{\xi} + \bar{b}) + \bar{k}zL(M_{\bar{z}}) - \bar{k}B(M_0) + \bar{k}B(M_{\bar{z}}) \\ -izB(e^{-i\bar{z}x})(\bar{k}\bar{\xi} + \bar{b}) - \frac{\bar{k}}{\Delta} + \bar{k}zL(e^{-i\bar{z}x}) - \bar{k}B(1) + \bar{k}B(e^{-i\bar{z}x}) \end{bmatrix}.$$

Наконец, учитывая, что $B(1) = -\Delta^{-1}$, мы, после приведения подобных, получим

$$\begin{aligned}
 & -iA(\xi, z) J \left[\frac{\bar{k}/\Delta}{kB(M_0) - ib} \right] = \\
 & = \left[\begin{aligned} & i\bar{k}\xi + i\bar{b} - izB(M_{\bar{z}})(\bar{k}\xi + \bar{b}) + z\bar{k}L(M_{\bar{z}}) + \bar{k}B(M_{\bar{z}}) \\ & - iz(e^{-i\bar{z}x})(\bar{k}\xi + \bar{b}) + z\bar{k}L(e^{-i\bar{z}x}) + \bar{k}B(e^{-i\bar{z}x}) \end{aligned} \right].
 \end{aligned}$$

Преобразуем теперь левую часть проверяемого равенства (28). С этой целью вычислим производную

$$M'_{\bar{z}}(x) = i \frac{d}{dx} \int_0^x e^{-i\bar{z}(x-u)} s(u) du = is(x) - i\bar{z}M_{\bar{z}}(x)$$

и подсчитаем, используя тождество триады,

$$\begin{aligned}
 & -\overline{M'_{\bar{z}}(\xi)}(\overline{\chi_{\xi}(\xi - u)}, M'_{\bar{z}}(u))_{\xi} = \\
 & = i\overline{s(\xi)} - i \int_0^{\xi} \overline{\chi_{\xi}(\xi - u)} \overline{s(u)} du - iz\overline{M_{\bar{z}}(\xi)} + iz(\overline{\chi_{\xi}(\xi - u)}, M_{\bar{z}}(u))_{\xi} = \\
 & = i\bar{k}\xi + i\bar{b} - iz\overline{M_{\bar{z}}(\xi)} + iz(\overline{\chi_{\xi}(\xi - u)}, M_{\bar{z}}(u))_{\xi}.
 \end{aligned}$$

После этого (28) становится эквивалентным равенству

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned} & -i\overline{M_{\bar{z}}(\xi)} + i(\overline{\chi_{\xi}(\xi - u)}, M_{\bar{z}}(u))_{\xi} \\ & -ie^{i\bar{z}\xi} + i(\overline{\chi_{\xi}(\xi - u)}, e^{-i\bar{z}u})_{\xi} \end{aligned} \right] = \\
 & = \left[\begin{aligned} & -i(\bar{k}\xi + \bar{b})B(M_{\bar{z}}) + \bar{k}L(M_{\bar{z}}) \\ & -i(\bar{k}\xi + \bar{b})B(e^{-i\bar{z}x}) + \bar{k}L(e^{-i\bar{z}x}) \end{aligned} \right].
 \end{aligned}$$

Но оно является частным случаем тождества

$$-if(\xi) + i(\overline{\chi_{\xi}(\xi - u)}, f(u))_{\xi} = -i(\bar{k}\xi + \bar{b})B(f) + \bar{k}L(f),$$

вытекающего из определения функционалов

$$B(f) = \frac{1}{\Delta} \{ \bar{k}f(0) + k\overline{f(\xi)} - k(\overline{\chi_{\xi}(\xi - u)}, f(u))_{\xi} - \bar{k}(\chi_{\xi}(u), f(u))_{\xi} \},$$

$$\begin{aligned}
 L(f) = \frac{i}{\Delta} \{ & (\bar{k}\xi + \bar{b})\overline{f(0)} - b\overline{f(\xi)} - (\bar{k}\xi + \bar{b})(\overline{\chi_{\xi}(u)}, f(u))_{\xi} + \\ & + b(\overline{\chi_{\xi}(\xi - u)}, f(u))_{\xi} \}.
 \end{aligned}$$

Первое утверждение теоремы доказано. Второе вытекает из элементарных соотношений

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} B(f) = \frac{\overline{f(0)}}{s(0)}, \quad \lim_{\xi \rightarrow +0} L(f) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +0} C(f) = 0.$$

Используя их, получим

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} A(\xi, z) = \lim_{\xi \rightarrow +0} \begin{bmatrix} 1 - zB(M_{\bar{z}}) & zC(M_{\bar{z}}) \\ -zB(e^{-i\bar{z}x}) & 1 + zC(e^{-i\bar{z}x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -z/s(0) & 1 \end{bmatrix}.$$

Полученный здесь результат может быть перефразирован так:

Теорема 2.4. Резольвентная матрица $A(z) = A(\xi, z)$ допускает следующее мультипликативное представление:

$$A(\xi, z) = e^{-iz\varepsilon_0} \int_0^{\infty} e^{-izQ(t)} dt,$$

где

$$\varepsilon_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{i}{s(0)} & 0 \end{bmatrix}, \quad J\varepsilon_0 \geq 0, \quad \varepsilon_0^2 = 0,$$

$$Q = J \left| \frac{p}{q} \right| [p, q], \quad JQ \geq 0, \quad Q^2 = -Q, \quad p = k/\Delta,$$

$$q = \frac{k}{\Delta} \int_0^t \frac{1}{2i} [k(u) \overline{b(v)} - \overline{k(v)} b(u)] dv - \frac{i}{2} kt - ib.$$

Харьковский институт инженеров
железнодорожного транспорта
имени С. М. Кирова

Поступила 17. VI. 1985

ի. Վ. ԿՈՎԱԼԻՇԻՆԱ, Վ. Պ. ՊՈՏԱՊՈՎ. Տրիադայի մեթոդը էրմիտյան-դրական ֆունկցիաների շարունակման տեսությունում (ամփոփում)։

Աշխատանքի նպատակը կայանում է $(-a, a)$ ինտերվալից էրմիտյան-դրական $s(x)$ ֆունկցիայի շարունակման խնդրի ռեզոլվենտային $A\xi(x)$ մատրիցի կառուցումը, երբ առկա են հետևյալ երեք պայմանները՝ 1) $s(x) = \overline{s(-x)}$ ֆունկցիան անընդհատ է $(-a, a)$ -ում, 2) $s'(x)$ անհայտը բացարձակ անընդհատ է $[0, a]$ -ում, 3) $s'(+0) + \overline{s'(+0)} < 0$ ։
Հետազոտվում է երկան եկած Գելֆանդ-Լևիտանի տիպի ինտեգրալ հավասարումը։

I. V. KOVALISHINA, V. P. POTAPOV. The triad method in the theory of continuation of Hermitian positive functions (summary)

The aim of the paper is the construction of the resolvent matrix $A\xi(z)$ in the problem of continuation of the Hermitian positive function $s(x)$ from the interval $(-a, a)$ under the following three requirements: 1) the function $s(x) = \overline{s(-x)}$ is continuous on the interval $(-a, a)$; 2) the function $s'(x)$ is totally continuous on the interval $[0, a]$; 3) $s'(+0) + \overline{s'(+0)} = -\lambda < 0$. The integral equation originating here (equation of Gelfand-Levitan) is studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн. О проблеме продолжения эрмитово-положительных непрерывных функций, ДАН СССР, 1940, 26, № 1, 17—22.
2. М. Г. Крейн. О логарифме безгранично разложимой эрмитово-положительной функции, ДАН СССР, 1944, 45, № 3, 99—102.
3. М. Г. Крейн. Об интегральных уравнениях, порождающих дифференциальные уравнения 2-го порядка, ДАН СССР, 1954, 97, № 1, 21—24.
4. И. В. Ковалишина, В. П. Потопов. Интегральное представление эрмитово-положительных функций, ВИНТИ, 1981, № 2984—81, деп. рук.

5. И. В. Михайлова, В. П. Потапов. Об одном критерии эрмитовой положительности, Теория функций, функц. ан. и их прил., 1981, вып. 36, 65—89.
6. И. В. Ковалишина, В. П. Потапов. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны-Пика, ДАН Арм.ССР, 1974, 59, № 3, 17—22.
7. И. В. Ковалишина, Г. М. Чубкова-Видова. Проблема Неванлинны-Пика для симметрических матриц-функций в верхней полуплоскости, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1978, 13, № 1, 48—78.
8. И. В. Ковалишина. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач, Изв. АН СССР, 1983, 47, № 3, 455—497.
9. И. В. Ковалишина. О граничной производной аналитической сжимающей в круте матрицы-функции, ВИНТИ, 1983, № 2709—83, деп. рук.
10. В. Э. Кацнельсон. Континуальные аналоги теоремы Гамбургера-Неванлинны и основные матричные неравенства пластических задач. I—IV, Теория функций, функц. ан. и их прил., 1981, вып. 36, 31—48, 1982, вып. 37, 31—48, 1983, вып. 39, 61—73, вып. 41, 56—70.
11. Л. А. Галстян. Аналитические J -растягивающие матрицы-функции в проблеме Шура, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1977, 12, № 3, 204—227.
12. В. К. Дубовой. Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций, Теория функций, функц. ан. и их прил., 1982, вып. 36, 14—26, 1982, вып. 38, 32—39.
13. Ю. М. Дюкарев, В. Э. Кацнельсон. Мультипликативные и аддитивные классы Стильтеса аналитических матриц-функций и связанные с ними интерполяционные задачи, Теория функций, функц. ан. и их прил., 1981, вып. 36, 13—27, 1982, вып. 38, 40—48.
14. Е. Я. Меламуд. Граничная задача Неванлинны-Пика для J -растягивающих матриц-функций, Изв. ВУЗов, 1984, «Математика», № 6, 36—43.
15. К. Иосида. Функциональный анализ, М., 1967, 378—396.

УДК 517.95

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

П. Э. МКРТЧЯН

ОЦЕНКА ГРАДИЕНТА РЕШЕНИЯ И КЛАССИЧЕСКАЯ
РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕРАВНОМЕРНО
ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

О. Введение

Пусть Ω — ограниченная область в R^2 , $Q = \Omega \times (0, T]$, $\partial\Omega$ — граница области Ω , Γ — параболическая граница цилиндра Q , т. е. $\Gamma = (\partial\Omega \times [0, T]) \cup (\Omega \times \{t=0\})$, $\bar{Q} = Q \cup \Gamma$.

Рассмотрим в цилиндре Q задачу

$$\begin{cases} u_t - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(u, u_{x_i}) = f(x, t, u, u_x), \\ u|_{\Gamma} = \psi(x, t), \end{cases} \quad (0.1)$$

где $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, $t \in [0, T]$, $u_x = (u_{x_1}, u_{x_2})$,

$$a_i(u, p_i) = \nu p_i + a(u) |p_i|^{m-2} p_i, \quad (0.2)$$

$\nu = \text{const} > 0$, $m \geq 3$,

$$\psi(x, t) > 0, \quad (0.3)$$

функция $f(x, t, u, p)$, где $p = (p_1, p_2)$ для всех $(x, t, u, p) \in \bar{Q} \times \{|u| \leq M\} \times R^2$, а $M = \text{const} > 0$, непрерывно дифференцируема по x, t, u, p и удовлетворяет неравенствам

$$|f| + \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right| + \sum_{k=1}^2 \left| \frac{\partial f}{\partial p_k} p_k \right| \leq c_1 (1 + |p|^{\bar{m}}), \quad (0.4)$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right| \leq c_1 (1 + |p|^{\bar{m}+1}), \quad k = 1, 2,$$

где $c_1 = \text{const} > 0$, $0 < \bar{m} < m$.

Относительно функции $a(u)$ из (0.2) будем предполагать, что $a > \delta > 0$, дважды непрерывно дифференцируема на множестве $\{|u| \leq M\}$ и для всех $u \in [0, M]$ удовлетворяет неравенству

$$q(u) \equiv (m-2) \left(\frac{a'}{a} \right)' - \frac{a'^2}{a^2} \geq - \frac{\sigma(m-1)^2}{(\delta_1 + u)^2}, \quad (0.5)$$

где $\sigma < 1$, $\delta_1 > 0$.

В частности, легко проверить, что функция

$$\alpha(u) = (\delta^{2/l} + |u|^m)^{1/\alpha}, \quad (0.6)$$

где $\alpha > 1$, $l > 0$, удовлетворяет условию (0.5) с

$$\sigma = l(l+m-2)/(m-1)^2, \quad \delta_1 = \delta^{2/l}/M^{\alpha-1}, \quad \text{если} \\ l(l+m-2) < (m-1)^2. \quad (0.7)$$

Всюду ниже будем предполагать выполненными условия (0.2)–(0.5).

Основным результатом настоящей работы является оценка $\max_{(x,t) \in \bar{Q}} |u_x|$

через $M = \max_{(x,t) \in \bar{Q}} u$ и $M_1 = \max_{(x,t) \in \Gamma} |u_x|$, полученная для неотрицательного

решения u задачи (0.1) в предположении некоторой гладкости u , ψ , f и $\partial\Omega$ (теорема 1). После получения этой оценки разрешимость задачи (0.1) в гёльдеровских пространствах устанавливается стандартными рассуждениями (теорема 2).

Особенностью уравнения (0.1) является то, что для него не выполнены так называемые условия ослабленного вхождения аргумента u в функции, составляющие уравнения (малость ε в (3.5) и (3.6), гл. VI [1], малость σ_1 , σ_2 , σ_3 в (3.2), (3.15), (3.16), гл. 2 [2]), при которых в [1, 2] получены оценки градиента решения для широких классов равномерно и неравномерно параболических уравнений общего вида. Рассматривать же уравнение (0.1) как недивергентное приходится из-за того, что в теории дивергентных параболических уравнений (см. [1], гл. V) оценка градиента получена для уравнений, главная часть которых имеет первую степень роста по градиенту, тогда как в (0.1) функция a_i имеет по p_i степень роста $m-1 \geq 2$.

В работе [3] отдельно рассмотрены уравнения (квазилинейные неравномерно параболические) с двумя пространственными переменными. Однако, уравнение (0.1) не удовлетворяет условиям этой работы, при которых получена оценка градиента решения.

В последние годы, применяя новую методику получения оценок гёльдеровских норм, О. А. Ладыженской и Н. Н. Уралцевой были сняты упомянутые условия ослабленного вхождения аргумента u для всего класса равномерно эллиптических уравнений общего вида, а также для равномерно параболических уравнений общего вида, коэффициенты главной части которых ограничены по градиенту (см., напр., [4–6]). Однако, для параболических уравнений с растущими по градиенту коэффициентами главной части (тем более неравномерных) вопрос пока остается открытым. Вот почему выделение пусть узких классов таких уравнений, или даже отдельных уравнений, для которых удастся получить оценку градиента решения, думается, представляет определенный интерес.

Кроме того, уравнения типа (0.1) приходится рассматривать в качестве регуляризаций при изучении уравнения нестационарной фильтрации: уравнения (0.1), в котором $a_i(u, p_i) = u^l |p_i|^{m-2} p_i$.

Что касается неравномерности уравнения (0.1), то она в данном случае не «мешает», а «помогает». Говоря точнее «помогает» то обстоятельство, что функция a_i зависит только от u , p_i и не зависит от p_k , $k \neq i$.

Поэтому приводимое доказательство не удастся применить, например, к уравнению

$$u_i - \sum_{l=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_l} (\nu u_{x_l} + \alpha(u) |u_x|^{m-2} u_{x_l}) = 0,$$

которое является равномерно параболическим, т. е. доказательство слишком сильно привязано к структуре уравнения (0.1).

Кроме того нужно отметить, что условие (0.5), или условие (0.7) при α , определенном (0.6), тоже, по сути дела, являются условиями ослабленного вхождения аргумента u .

1. Оценка максимума модуля градиента решения

Теорема 1. Пусть выполнены условия (0.2)–(0.5), $\alpha \geq \delta > 0$; пусть $u(x, t)$ — неотрицательное решение задачи (0.1) такое, что

$$u, u_{x_i} \in C(\bar{Q}), u_t, u_{x_i t}, u_{x_i x_k x_k} \in C(Q), i, k = 1, 2;$$

граница ∂Q области Q трижды непрерывно дифференцируема; функция ψ такова, что $\psi, \psi_t, \psi_{x_i}, \psi_{x_i x_k}, \psi_{x_i x_i x_k} \in C(\bar{Q}), i, k = 1, 2$. Тогда для u справедлива оценка

$$\max_{(x, t) \in \bar{Q}} |u_x| \leq M_2, \quad (1.1)$$

где M_2 зависит только от $M = \max_{(x, t) \in \bar{Q}} u$, $M_1 = \max_{(x, t) \in \Gamma} |u_x|$, $\nu, \delta, \alpha, \delta_1, m, \bar{m}, c_1$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что для задачи (0.1) и решения u выполнены все условия, при которых в [2] (см. гл. 2, § 2) получена оценка $\max_{(x, t) \in \Gamma} |u_x|$. Поэтому можно считать константу M известной и зависящей только от $M, \nu, \delta, m, \bar{m}, c_1$ и конфигурации области Q , если известна константа M .

Запишем уравнение (0.1) в виде

$$u_t - \frac{\partial a_i}{\partial p_i} u_{x_i x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial u} u_{x_i} = f. \quad (1.2)$$

Здесь и всюду ниже, если не оговорено особо, по повторяющимся индексам производится суммирование.

Введем обозначения

$$v = |u_{x_i}|^m + |u_{x_i}|^{\bar{m}}, \quad w = \varphi(u) v,$$

где $\varphi(u)$ — положительная, определенная на интервале $[0, M]$, дважды непрерывно дифференцируемая функция, которая будет определена ниже.

Применив к обеим частям (1.2) оператор $m\varphi |u_{x_i}|^{m-2} u_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_k}$, получим:

$$w_t - \frac{\partial a_i}{\partial p_i} w_{x_i x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial u} w_{x_i} + m(m-1) \varphi \frac{\partial a_i}{\partial p_i} |u_{x_i}|^{m-2} u_{x_i x_k}^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + 2\varphi' v_{x_i} \frac{\partial a_i}{\partial p_i} u_{x_i} + \varphi'' v \frac{\partial a_i}{\partial p_i} u_{x_i}^2 - \frac{\partial^2 a_i}{\partial p_i^2} u_{x_i x_i} \varphi v_{x_i} - \\
& - m w \frac{\partial^2 a_i}{\partial p_i \partial u} u_{x_i x_i} - m w \frac{\partial^2 a_i}{\partial u^2} u_{x_i} - \frac{\partial^2 a_i}{\partial p_i \partial u} u_{x_i} \varphi v_{x_i} = \\
& = f\varphi' v + m\varphi \frac{\partial f}{\partial x_k} |u_{x_k}|^{m-2} u_{x_k} + m w \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \varphi v_{x_i}. \quad (1.3)
\end{aligned}$$

Пусть (x_0, t_0) — точка максимума функции w , лежащая внутри цилиндра Q . Будем рассматривать (1.3) в точке (x_0, t_0) . Очевидно, $w_t \geq 0$, $-w_{x_i x_i} \geq 0$, $w_{x_i} = 0$.

Сначала предположим, что $u_{x_i}(x_0, t_0) \neq 0$, $u_{x_k}(x_0, t_0) \neq 0$. Тогда из условий $w_{x_i} = \varphi v_{x_i} + \varphi' v u_{x_i} = 0$, $i = 1, 2$ определим

$$u_{x_i x_i} = - \left(\frac{1}{m} \frac{\varphi'}{\varphi} u_{x_i} v + |u_{x_k}|^{m-2} u_{x_k} u_{x_i x_i} (|u_{x_i}|^{m-2} u_{x_i})^{-1}, k \neq i \right) \quad (1.4)$$

(здесь по i и k не производится суммирования).

Отбрасывая в (1.3) первые три неотрицательных члена и исключая с помощью (1.4) $u_{x_i x_i}$, $u_{x_k x_k}$, учитывая конкретный вид функции a , вводя обозначения $\xi = \frac{u_{x_i x_i}}{u_{x_i} u_{x_k}}$, $y = \frac{\varphi'}{\varphi}$, получим

$$\begin{aligned}
& \frac{m-1}{m} v w \sum_{i=1}^2 \frac{v - |u_{x_i}|^m}{|u_{x_i}|^{m-2}} (m\xi + y)^2 + v w \left(y' - \frac{1}{m} y^2 \right) \sum_{i=1}^2 u_{x_i}^2 + \\
& + (m-1) a v w \left\{ m(m-1) \xi^2 + m \left(y + \frac{a'}{a} \right) \xi + x_1(u) \right\} < F, \quad (1.5)
\end{aligned}$$

$$F \equiv f y w + m \varphi \frac{\partial f}{\partial x_k} |u_{x_k}|^{m-2} u_{x_k} + m w \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial p_k} u_{x_k} w y,$$

где $x_1(u) = y' - \frac{m-2}{m} y^2 + 3 \frac{a'}{a} y - \frac{m}{m-1} \frac{a''}{a}$. Из (1.5) следует неравенство

$$v w \left(y' - \frac{1}{m} y^2 \right) \sum_{i=1}^2 u_{x_i}^2 + (m-1) a v w x_2 < F, \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 - \frac{m}{4(m-1)} \left(y + \frac{a'}{a} \right)^2 = y' - \lambda_1 y^2 + 2\lambda_2 \frac{a'}{a} y - \\
& - \frac{m}{m-1} \left(\frac{a''}{a} + \frac{1}{4} \frac{a'^2}{a^2} \right), \quad \lambda_1 = \frac{m-1}{m} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{(m-2)^2}{(m-1)^2} \right), \quad \lambda_2 = 1 + \frac{1}{4} \frac{m-2}{m-1}.
\end{aligned}$$

Подберем y таким образом, чтобы для любого $u \in [0, M]$, $x_2 > 0$. Тогда из (1.6) в силу условий (0.4) очевидным образом будет следовать оценка для w в точке (x_0, t_0) . Положим $\hat{y} = \lambda_1 y - \lambda_2 \frac{a'}{a}$. Тогда

$$x_2 = \frac{1}{\lambda_1} \left(\hat{y}' - \hat{y}^2 + \frac{q(u)}{4(m-1)^2} \right), \text{ где функция } q \text{ определена (0.5). В силу (0.5)}$$

$$x_2 > \frac{1}{\lambda_1} \left(\hat{y}' - \hat{y}^2 - \frac{\sigma}{4(\delta_1 + u)^2} \right).$$

Положив $\hat{y} = -1/2(\delta_1 + u)$, получим: $x_2 > \frac{1-\sigma}{4\lambda_1(\delta_1 + u)^2}$,

$$y = \frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{1}{2\lambda_1(\delta_1 + u)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{a'}{a}, \quad \varphi = \frac{\alpha^{\lambda_1/\lambda_2}}{(\delta_1 + u)^{1/2\lambda_1}}.$$

Пусть теперь в точке (x_0, t_0) $u_{x_i} = 0$ (аналогично рассматривается случай $u_{x_i} = 0$). Тогда из условий $w_{x_i} = 0$, $i = 1, 2$, получим, что $u_{x_1 x_1} = 0$,

$$u_{x_2 x_2} = -\frac{1}{m} y u_{x_1}^2.$$

Воспользовавшись этими соотношениями, из (1.3) получим

$$v \left(y' - \frac{1}{m} y^2 \right) w u_{x_1}^2 + (m-1) a v w x_3 \leq F, \quad (1.7)$$

где $x_3 = y' - \frac{m-1}{m} y^2 + 2 \frac{a'}{a} y - \frac{m}{m-1} \frac{a''}{a}$. Поскольку

$$x_3 - x_2 = -\frac{1}{4m(m-1)} \left[(m-2)y - m \frac{a'}{a} \right]^2 \geq 0, \text{ то } x_3 \geq x_2 > 0.$$

Тогда из (1.7) в силу условий (0.4) следует оценка для w в точке (x_0, t_0) . Из оценок для w на Γ и в точке (x_0, t_0) следует оценка для w во всем цилиндре Q , откуда, в свою очередь, следует оценка (1.1). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Общая схема доказательства теоремы 1 во многом сходна с доказательствами соответствующих теорем [2, 3]. Но если к уравнению (0.1) применить оператор $\varphi u_{x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}$, как это делается в [2, 3], и

рассматривать полученное уравнение в точке максимума функции $w = \varphi(u) (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2)$, то дифференциальное неравенство для φ , соответствующее неравенству $x_2 > 0$, оказывается неразрешимым.

2. Неотрицательность и оценка максимума решения

Пусть $u(x, t)$ — классическое решение задачи (0.1). Покажем, что если

$$f(x, t, u, 0) \geq 0, \quad (x, t, u) \in Q \times \{u < 0\}, \quad (2.1)$$

то $u(x, t) \geq 0$. Действительно, применяя принцип максимума, рассмотрим уравнение (0.1) в точке $(x_0, t_0) \in Q$ минимума функции $\tilde{u} = ue^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$. Тогда получим $\lambda e^{\lambda t} \tilde{u}(x_0, t_0) \geq f(x_0, t_0, u, 0)$. Из этого неравенства и условия (0.3) следует неотрицательность u .

Приведем теперь условие на функцию f , обеспечивающее оценку $\max_{(x, t) \in \bar{Q}} u$ через известные величины (см. теорему 2.9, гл. 1. [1]):

$$u f(x, t, u, 0) \leq u \Phi(u) + b, \quad (x, t, u) \in Q \times [0, \infty), \quad (2.2)$$

где $b > 0$, $\Phi(\tau)$ — неубывающая положительная функция $\tau \geq 0$ такая, что

$$\int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\Phi(\tau)} = \infty.$$

Можно привести и ряд других условий, обеспечивающих оценку $\max u$.

$(x, t) \in \bar{Q}$

3. Разрешимость в пространствах Гёльдера

Пусть $C^{\alpha}(\bar{Q})$, $\alpha \in (0, 1)$ — множество всех функций $u(x, t)$, удовлетворяющих неравенству

$$\max_{(x, t) \in \bar{Q}} |u| + \max_{(x, t), (x', t') \in \bar{Q}} \frac{|u(x, t) - u(x', t')|}{(|x - x'|^{\alpha} + |t - t'|)^{1/2}} \leq K, \quad K = \text{const} \geq 0.$$

Через $C^{2+\alpha}(\bar{Q})$, $\alpha \in (0, 1)$ обозначим множество всех функций u , для которых $u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, u_t \in C^{\alpha}(\bar{Q})$, $i, j = 1, 2$.

Граница $\partial\Omega$ области Ω называется принадлежащей классу $C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, если для любой точки $\partial\Omega$ найдется такая окрестность ω , что часть $\partial\Omega \cap \omega$ представима в виде $x_k = \varphi(x_i)$, $i \neq k$, причем $\varphi, \varphi_{x_i}, \varphi_{x_i x_j} \in C^{\alpha}(\bar{\omega}_i)$, где $\bar{\omega}_i$ — проекция окрестности ω на прямую $x_k = 0$, а $C^{\alpha}(\bar{\omega}_i)$ — множество всех функций $u(x_i)$, удовлетворяющих условию

$$\max_{x_i \in \bar{\omega}_i} |u(x_i)| + \max_{x_i, x'_i \in \bar{\omega}_i} \frac{|u(x_i) - u(x'_i)|}{|x_i - x'_i|^{\alpha}} \leq K, \quad K = \text{const} \geq 0.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия (0.2)–(0.5), (2.1), (2.2) и пусть $\partial\Omega \in C^{2+\gamma}$, $\psi \in C^{2+\gamma}(\bar{Q})$, $\gamma \in (0, 1)$, $\alpha \geq \delta > 0$, ψ на $\partial\Omega \times \{t = 0\}$ удовлетворяет условию

$$\psi_t - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(\psi, \psi_{x_i}) = f(x, 0, \psi, \psi_x).$$

Тогда задача (0.1) имеет хотя бы одно решение u , причем $u \geq 0$, $u \in C^{2+\alpha}(\bar{Q})$ с некоторым $\alpha \in (0, 1)$.

Теорема 2 доказывается с применением принципа Лере—Шаудера и теоремы 1 совершенно так же, как, скажем, доказываются теоремы § 4, гл. 2 [2]. Укажем лишь, что в качестве однопараметрического семейства линейных задач следует взять

$$v_t - \frac{\partial a_i(u, u_{x_i})}{\partial p_i} v_{x_i x_i} - \frac{\partial a_i(u, u_{x_i})}{\partial u} v_{x_i} = \tau f(x, t, u, u_x),$$

$$v|_{\Gamma} = \tau \psi, \quad \tau \in [0, 1].$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 12. III. 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., «Наука», 1967, 736 с.

2. А. В. Иванов. Квазилинейные вырождающиеся и неравномерно эллиптические и параболические уравнения второго порядка, Труды МИАН, т. CLX, Л., «Наука», 1982, 285 с.
3. D. E. Edmund, L. A. Peletier. Quasilinear parabolic equations. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Ser. 3, 1971, v. 25, 397—421.
4. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева. Оценка гёльдеровской нормы решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка общего вида. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1980, т. 96, 161—168.
5. O. A. Ladtzhenskay, N. N. Ural'teva. Estimates of Hölder constants for bounded solutions of second order quasilinear parabolic equations of nondivergent form. LOMI preprints, E—11—81, L., 1981, 35 p.
6. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева. Об оценках $\max |u_x|$ для решений квазилинейных эллиптических и параболических уравнений общего вида и теоремах существования, Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1984, 138, 90—107.

УДК 517.988

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

С. Г. КАРАДЖЯН

ЭКОНОМИЧНЫЙ АЛГОРИТМ ОБРАЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО
ОПЕРАТОРА С РАЗНОСТНО-СУММАРНО-ГАРМОНИЧЕСКИМ
ЯДРОМ

Рассматривается задача эффективного приближенного обращения интегрального оператора Фредгольма второго рода

$$(I - K) y \stackrel{\text{def}}{=} y(x) - \int_0^T K(x, t) y(t) dt; \quad (0 \leq x, t \leq T). \quad (1)$$

В дальнейшем будем предполагать существование обратного оператора $(I + K) = (I - K)^{-1}$ с ядром $R(x, t)$ (это обеспечено, например, при достаточно малом T).

В работе [4] (см. также [5]) выявлена структура резольвентного оператора $(I + R)$, если K удовлетворяет дифференциальному уравнению определенного типа. Здесь будет рассмотрен случай, когда

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right) K(x, t) = 0. \quad (2)$$

В работе [3] получена явная формула резольвентного ядра оператора (1) с ядром (2). Однако при численной реализации этой формулы число арифметических операций имеет порядок $O(N^4)$, $N \rightarrow \infty$, где N — число узлов, на которые разбивается интервал $(0, T)$. В общем же случае, при непосредственной дискретизации оператора (1), путем разбиения интервала $(0, T)$ на N частей (т. е. при сведении к алгебраической системе), потребуется порядка $O(N^3)$ арифметических операций. Под экономичным обращением оператора (1) здесь будем понимать алгоритм, требующий затрат порядка не более чем $O(N^2)$. Оказывается, что такие алгоритмы существуют не только в теплицевом случае (при $K = K(x - t)$). Так, в работе [2] построен алгоритм с числом арифметических операций порядка $O(N^2)$ в случае, когда K имеет вид $K(x, t) = f(x + t) + g(x - t)$.

Ниже будет построен экономичный алгоритм обращения оператора (1) с ядром (2), а также будут указаны пути его реализации на ЭВМ параллельной архитектуры.

§ 1. Дифференциально-функциональные уравнения
для резольвентного ядра на границе

Нетрудно доказать, что уравнению (2) удовлетворяют те и только те функции, которые можно представить в виде $K(x, t) = f(x + t) + g(x - t) + H(x, t)$, где $H(x, t)$ — гармоническая функция

(см. (2)). Оператор $(I - K)$ будем рассматривать в паре со вспомогательным оператором $(I - K^-)$ с ядром $K^-(x, t) = f(x + t) + g(x - t) - H(x, t)$ (примем $K = K^+$).

Для каждого $\tau \in [0, T]$ рассмотрим интегральные операторы

$$(I - K^\pm) y = y(x) - \int_0^\tau K^\pm(x, s) y(s) ds; \quad 0 \leq x \leq \tau \leq T. \quad (3)$$

Всюду в дальнейшем предполагается существование операторов $(I + R_\tau) = (I - K_\tau)^{-1}$. Ядра $K^\pm(x, t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 K^\pm(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 K^\mp(x, t)}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^p R^\pm(x, t)}{\partial t^p} \Big|_{t=0} &= r_1^{\pm p}(x, \tau); \quad \frac{\partial^p R^\pm(x, t)}{\partial t^p} \Big|_{t=\tau} = r_2^{\pm p}(x, \tau), \\ \frac{\partial^p R^\pm(x, t)}{\partial x^p} \Big|_{x=0} &= R_1^{\pm p}(\tau, t); \quad \frac{\partial^p R^\pm(x, t)}{\partial x^p} \Big|_{x=\tau} = R_2^{\pm p}(\tau, t), \quad (5) \\ (p=0, 1); \quad \frac{\partial^0 R}{\partial x^0} &= R. \end{aligned}$$

Исходя из известных интегральных уравнений для резольвентных ядер, с учетом соотношений (4) придем к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r_2^{\pm 0}(x, \tau)}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 r_2^{\mp 0}(x, \tau)}{\partial x^2} &= r_2^{\pm 0}(x, \tau) \cdot \left[\frac{\partial r_2^{\pm 0}(s, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{s=\tau} + \right. \\ &+ \frac{\partial r_2^{\pm 0}(\tau, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial r_2^{\mp 0}(s, \tau)}{\partial s} \Big|_{s=\tau} \Big] + \left[\frac{\partial r_2^{\pm 0}(x, \tau)}{\partial \tau} - \right. \\ &- r_2^{\pm 0}(x, \tau) \cdot r_2^{\mp 0}(\tau, \tau) \Big] \cdot [r_2^{\pm 0}(\tau, \tau) - r_2^{\mp 0}(\tau, \tau)] + \\ &+ r_1^{\pm 1}(x, \tau) \cdot r_2^{\pm 0}(0, \tau) - r_1^{\pm 0}(x, \tau) \cdot \frac{\partial r_2^{\mp 0}(s, \tau)}{\partial s} \Big|_{s=0}. \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим также соотношения

$$\begin{aligned} r_2^\pm(x, \tau) &= \frac{\partial r_2^{\pm 0}(x, \tau)}{\partial \tau} - r_2^{\pm 0}(\tau, \tau) r_2^{\pm 0}(x, \tau), \\ \frac{\partial r_1^{\pm p}(x, \tau)}{\partial \tau} &= r_1^{\pm p}(\tau, \tau) r_2^{\pm 0}(x, \tau), \quad p=0, 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Вполне аналогично можно получить дифференциальные соотношения для функций $R_q^{\pm p}(\tau, t)$, $(p=0, 1)$, $(q=1, 2)$

$$\frac{\partial^2 R^{\pm 0}(\tau, t)}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 R^{\mp 0}(\tau, t)}{\partial t^2} = R_2^{\pm 0}(\tau, t) \cdot \left[\frac{\partial R_2^{\pm 0}(\tau, s)}{\partial \tau} \Big|_{s=\tau} + \right.$$

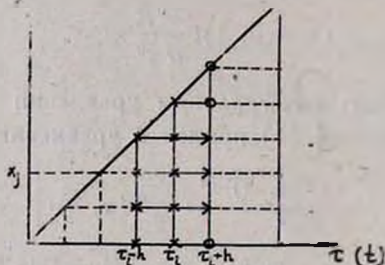
$$+ \frac{\partial R_2^{\pm 0}(\tau, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial R_2^{\mp 0}(\tau, s)}{\partial s} \Big|_{s=\tau} \Big] + \left[\frac{\partial R_2^{\mp 0}(\tau, t)}{\partial \tau} - R_2^{\pm 0}(\tau, t) \cdot R_2^{\pm 0}(\tau, \tau) \right] \times \\ \times [R_2^{\pm 0}(\tau, \tau) - R_2^{\mp 0}(\tau, \tau)] + R_1^{\pm 1}(\tau, t) \cdot R_2^{\pm 0}(\tau, 0) - R_1^{\pm 0}(\tau, t) \cdot \frac{\partial R_2^{\mp 0}(\tau, s)}{\partial s} \Big|_{s=0}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial R_1^{\pm p}(\tau, t)}{\partial \tau} = R_1^{\pm p}(\tau, \tau) \cdot R_2^{\pm 0}(\tau, t) \quad (p = 0, 1).$$

§ 2. Приближенное нахождение значений резольвентного ядра на границе

Построим на основе формул (6), (7), (8) рекуррентный алгоритм нахождения функций (5).

На плоскости (τ, x) разобьём треугольник $0 \leq x \leq \tau \leq T$ прямыми $\tau_i = ih$, $x_j = jh$; $0 \leq j \leq i \leq N$, $h = T/N$. Значение функций (5) определим на сетке



Пусть для некоторого $i \leq N$ известны значения функций $r_q^{\pm p}$, $q = 1, 2$; $p = 0, 1$ в узлах сетки с координатами (x, τ) , $x \leq \tau \leq \tau_i$. В уравнениях (6), (7) заменяя производные разностными отношениями, получим рекуррентные формулы для вычисления значений искомых функций в „столбце“ $\tau = \tau_i + h$ при $x = x_j$; $1 \leq j \leq i - 2$

$$r_2^{\pm 0}(x_j, \tau_i + h) = 2 r_2^{\pm 0}(x_j, \tau_i) - r_2^{\pm 0}(x_j, \tau_i - h) + r_2^{\mp 0}(x_j + h, \tau_i) - \\ - 2 r_2^{\mp 0}(x_j, \tau_i) + r_2^{\mp 0}(x_j - h, \tau_i) + 2h \cdot [r_2^{\pm 0}(x_j, \tau_i) \cdot [3 r_2^{\pm 0}(\tau_i, \tau_i) - \\ - r_2^{\pm 0}(\tau_i, \tau_i + h) - r_2^{\pm 0}(\tau_i - h, \tau_i - h) - r_2^{\mp 0}(\tau_i - h, \tau_i)] - [r_2^{\pm 0}(x_j, \tau_i - h) + \\ + h r_2^{\pm 0}(x_j, \tau_i) \cdot r_2^{\pm 0}(\tau_i, \tau_i)] \cdot [r_2^{\pm 0}(\tau_i, \tau_i) - r_2^{\mp 0}(\tau_i, \tau_i)] - \\ - 2h r_1^{\pm 1}(x_j, \tau_i) \cdot [r_2^{\mp 0}(h, \tau_i) - r_2^{\mp 0}(0, \tau_i)] + \\ + 2h^2 r_1^{\pm 1}(x_j, \tau_i) \cdot r_2^{\mp 0}(0, \tau_i); \quad (9)$$

$$r_1^{\pm 1}(x_j, \tau_i + h) = r_1^{\pm 1}(x_j, \tau_i) + h r_1^{\pm 1}(\tau_i, \tau_i) \cdot r_2^{\pm 0}(x_j, \tau_i), \quad (10)$$

$$r_1^{\pm 0}(x_j, \tau_i + h) = r_1^{\pm 0}(x_j, \tau_i) + h r_1^{\pm 0}(\tau_i, \tau_i) \cdot r_2^{\pm 0}(x_j, \tau_i).$$

Значения искомых функций в узлах $(0, \tau_i + h)$, $(\tau_i, \tau_i + h)$, $(\tau_i + h, \tau_i + h)$ (на рис. 1 они отмечены кружками), можно получить, например, из формул

$$\tau_2^{\pm 0}(\tau_i, \tau_i + h) = K^{\pm}(\tau_i, \tau_i + h) + \sum_{s=1}^i K^{\pm}(\tau_i, sh) \cdot r_2^{\pm 0}(sh, \tau_i + h). \quad (11)$$

Нетрудно получить аналогичные рекуррентные формулы для функций R_q^p . Не выписывая этих формул, присвоим им номера (9'), (10'), (11'). Конечным шагом рекуррентного процесса по τ является вычисление значений функций r_q^p и R_q^p при $\tau = Nh = T$, т. е. приближенных значений резольвентного ядра R и её производных на границе квадрата $0 \leq x, t \leq T$.

Таким образом, этот вычислительный процесс можно представить инструкциями следующего алгоритма:

а) при $i=h$ и $i=2h$ с помощью формул типа (11) и (11') вычислить значения функций r_q^p , R_q^p .

Дальше действуем рекуррентно:

б) по формулам (9), (10), (9'), (10') вычислить значения функций r_q^p и R_q^p в очередном столбце при $\tau = \tau_i + h$ на основе данных при $\tau \leq \tau_i$;

в) по формулам типа (11), (11') вычислить значения искомых функций в «приграничных» узлах;

г) при $i = Nh$ завершить вычисления.

Сложность этого алгоритма (с учетом всех аддитивных и мультипликативных операций) равна $4(15 N^2 - 64N + 100)$. При этом требуется N^2 ячеек памяти.

§ 3. Приближенное решение интегрального уравнения и восстановление резольвентного ядра

Рассмотрим уравнение

$$y(x) - \int_0^{\tau} K^+(x, s) y(s) ds = f(x). \quad (12)$$

Поставим вопрос приближенного вычисления решения этого уравнения при $\tau = T$.

Обозначив решение (12) через $y(x, \tau)$ и дифференцируя (12) по τ придем к соотношению

$$\frac{\partial y(x, \tau)}{\partial \tau} = r_2^{+0}(x, \tau) \cdot y(\tau, \tau). \quad (13)$$

Дискретизируя (12) и (13) на сетке (рис. 1) получим рекуррентные соотношения для вычисления $y(x_j) = y(x_j, T)$

$$y(x_j, \tau_i + h) = y(x_j, \tau_i) + h r_2^{+0}(x_j, \tau_i) y(\tau_i, \tau_i), \quad (14)$$

$$y(\tau_i + h, \tau_i + h) = f(\tau_i + h) + h \sum_{k=0}^i K^+(\tau_i + h, kh) y(kh, \tau_i + h).$$

Значения функции $r_2^{+0}(x, \tau)$ в узлах сетки вычисляются по формулам (9)—(11). Нетрудно посчитать что алгоритм приближенного нахождения $y(x, T)$ на данной сетке по формулам (9)—(11) и (14) имеет сложность $2(16N^2 - 62N + 100)$.

Для резольвентного ядра R в работе [3] получено дифференциальное соотношение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \pm \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(R^+ \mp R^-) = F^+(x, t) \pm F^-(x, t). \quad (15)$$

где $F^\pm(x, t) = r_2^{\mp 1}(x, T) \cdot R_2^{\pm 0}(T, t) - r_2^{\mp 0}(x, T) \cdot R_2^{\pm 1}(T, t) - r_1^{\mp 1}(x, T) \cdot R_1^{\pm 1}(T, t) + r_1^{\mp 0}(x, T) \cdot R_1^{\pm 0}(T, t)$.

Дискретизацию уравнения (15) проведем в квадрате $0 \leq x, t \leq T$ на плоскости (t, x) (см. рис. 1), прямыми $x_m = mh$, $t_n = nh$, $0 \leq m, n \leq N$, с учётом уже приближённо вычисленной в § 2 её правой части

$$R^\pm(x_m, t_n + h) = 2[2R^\pm(x_m, t_n) - R^\pm(x_m, t_n - h)] + \\ + R^\pm(x_m + h, t_n) - R^\pm(x_m - h, t_n) + 2h^2 F^\pm(x_m, t_n). \quad (16)$$

Шаблон, соответствующий столбцовому вычислению значений $R(x_m, t_n)$ на основе этой формулы, показан в пунктирной части рис. 1. Сложность данного алгоритма приближенного восстановления $R(x, t)$ на сетке рис. 1 равна $28(N-2)^2$.

§ 4. Распараллеливание алгоритмов

В связи с увеличением производства ЭВМ параллельной архитектуры возникает необходимость построения алгоритмов с параллельным счетом (см. [1]). Это позволяет значительно сократить время счета. Пусть в нашем распоряжении есть p идентичных процессоров. Сделаем дополнительное допущение, что все процессоры могут одновременно обращаться к памяти, а каналы передачи информации действуют с бесконечной скоростью. Дадим определение коэффициента повышения быстродействия, (т. е. введем некоторую меру эффективности). Пусть Ω —общая сложность алгоритма, t —время, затрачиваемое процессором на выполнение одной (мультипликативной или аддитивной) операции. Тогда время, необходимое для реализации алгоритма на однопроцессорной ЭВМ, равно $T_1 = \Omega t$. Если T_p — время обчета того же алгоритма на параллельной ЭВМ с p процессорами, то за величину коэффициента повышения быстродействия примем $K_p = T_1/p \cdot T_p$ ($0 < K_p \leq 1$). Чем ближе K_p к единице, тем, очевидно, эффективней распараллеливание.

Здесь рассмотрим реализацию на параллельной ЭВМ алгоритма восстановления резольвентного ядра R . Учитывая, что формула типа (9) примерно в 6 раз сложнее формулы типа (10), а формула типа (16) в 7 раз сложнее формулы (10), и воспользуясь полной независимостью формул (9)—(11) для вычисления r_q^p и формул (9')—(11') для вычисления R , распределим процессоры следующим образом: 8—для формул (10), 24—для формул (9), 14—для формул (16). Тогда $p = 46$, $K_p = \frac{2(11N^2 - 46N + 64)}{23N(N+2)}$. При $N \rightarrow \infty$, $K_p = \frac{22}{23}$.

Таким образом, время обсчета алгоритма сокращается примерно в 40 раз.

При абстрактном подходе возможно полная векторизация, — распараллеливание при $p = O(N)$, — поскольку оказывается, что выполнены все условия T -алгоритма (см. [6], § 12).

Что же касается памяти, то нетрудно видеть, что для реализации этого алгоритма требуется $18N$ ячеек оперативной памяти и N^2 ячеек дополнительной памяти для записи итоговой матрицы.

В заключение заметим, что предлагаемые алгоритмы очень удобны для реализации на ЭВМ конвейерного типа (см. [1]).

Кироваканский филиал
ЕрПИ

Поступила 5. V. 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Валях. Последовательно-параллельные вычисления, М., «Мир», 1985.
2. А. А. Папоян. Обращение операторов с разностно-суммарно-гармоническим ядром. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ. мат. наук, Ереван, 1986.
3. А. А. Папоян. Об интегральном операторе с разностно-суммарно-гармоническим ядром, Изв. АН Арм.ССР, Математика, XX, № 4, 1985, 307—317.
4. А. Б. Нерсисян. Структура резольвент некоторых интегральных операторов, Изв. АН Арм.ССР, Математика, XVII, № 6, 1982, 442—463.
5. А. Б. Нерсисян. О структуре резольвент некоторых дифференциальных операторов с ядрами, определенными дифференциальными уравнениями, ДАН СССР, 279, № 4, 1984, 805—809.
6. В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами, М., «Наука», 1987.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Ց Ո Ւ Ն .

Ռ. Ա. Ավետիսյան, Ն. Հ. Առաքելյան, Ա. Ա. Գոնչար. Մերոմորֆ ֆունկցիաների ասիմպտոտական հատկությունների մասին	207
Ս. Ա. Գրիգորյան. Արենս-Ջինգերի իմաստով ընդհանրացված անալիտիկ ֆունկցիաներ	226
Գ. Ա. Բարսեղյան, Կ. Ն. Մարտիրոսյան. Մերոմորֆ ֆունկցիաների α -կետերում անալիտիկ ֆունկցիաների արժեքների մասին	248
Ռ. Շ. Սանակյան. Անալիտիկ ֆունկցիաներով մոտավորության թեզերմների որոշ կիրառությունների մասին	259
Ի. Վ. Կավալիշինա, Վ. Պ. Պոտապով. Տրիադայի մեթոդը էրմիտյան դրական ֆունկցիաների շարունակման տեսությունում	269

ՀԱՄԱՌՈՑ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

Պ. Զ. Մկրտչյան. Լուծման գրադիենտի զնահատականը և առաջին սկզբնական դրային խնդրի լուծելիությունը քվադրեգծային ու հավասարաչափ պարաբոլական հավասարումների մի դասի համար	293
Ս. Հ. Ղառաբյան. Տարրերակա-գումարային-հարմարիկ կորիզով ինտեգրալ օպերատորի շրջման խնայողական ալգորիթմ	300

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян, А. А. Гончар.</i> Об асимптотических свойствах мероморфных функций	207
<i>С. А. Григорян.</i> Обобщенные аналитические по Аренсу-Зингеру функции	226
<i>Г. А. Барсесян, К. Н. Мартиросян.</i> О значениях аналитических функций на множествах α -точек мероморфной в заданной области функции	248
<i>Р. Ш. Саакян.</i> О некоторых применениях теорем о приближении аналитическими функциями	259
<i>И. В. Ковалишина, В. П. Потапов.</i> Метод триады в теории продолжения эрмитово-положительных функций	269

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>П. В. Мкртычян.</i> Оценка градиента решения и классическая разрешимость первой начально-краевой задачи для одного класса квазилинейных неравномерных параболических уравнений	293
<i>С. Г. Караджян.</i> Экономичный алгоритм обращения интегрального оператора с разностно-суммарно-гармоническим ядром	300

C O N T E N T S

<i>R. A. Avetisyan, N. U. Arakelian, A.A. Gonchar.</i> On asymptotic properties of meromorphic functions	207
<i>S. A. Grigorian.</i> Generalized analytic functions by Arens—Singer	226
<i>G. A. Barsgeyan, K. N. Martirosyan.</i> On the value of analytical functions on the set of α -points meromorphic in the given domain of the function	248
<i>R. Sh. Sahakian.</i> On some application of approximation theorems by analytic functions	259
<i>I. V. Kovalyshina, V. P. Potarov.</i> The triad method in the theory of continuation of Hermitian positive functions	269

SHORT COMMUNICATIONS

<i>P. Z. Mkrtchian.</i> Estimate of gradient of solution and classical solvability of first initial—boundary value problem for one class quasilinear non—uniformly parabolic equations	293
<i>S. H. Karajyan.</i> An optimal algorithm of inversion of the integral operator with a kernel representing a sum of a harmonic function and functions depending on the sum and difference of variables	300