ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке), а кратких сообщений—не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contribttors who desire to have their articles published in the proceedings zvestia of the Academy of Sciences of the Armenien S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication,

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of.the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initals and name, the title of the book, the place of publication, the publisher tbe date muse be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of thc publication should be marked. Reference to a quoted source is to indicated by a numeral in square brackets properey inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article shoule contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitied ot twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIV, № 2, 1989 Математика

УДК 517.956

П. Э. МКРТЫЧЯН

ОБ ОДНОМ ВЫРОЖДАЮЩЕМСЯ КВАЗИЛИНЕЙНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ, ВОЗНИКАЮЩЕМ В ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

0. Введение и постановка задач

В настоящей работе рассматривается уравнение

$$u_t - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u^{l_i} |u_{x_i}|^{m_i-2} u_{x_i}\right) = f(x, t). \tag{0.1}$$

Для него доказаны теоремы о разрешимости задачи Коши и второй начально-краевой задачи.

При этом предполагается, что $l_i \geqslant 1$, $m_i \geqslant 3$,

$$D_i \equiv (m_i - 1)^2 - l_i(m_i - 1) - l_i(l_i - 1) > 0, \quad i = 1, 2, \tag{0.2}$$

а величины $|\Delta l| = |l_2 - l_1|$, $|\Delta m| = |m_2 - m_1|$ достаточно малы.

Сформулируем доказанные в работе утверждения в виде теорем.

Рассмотрим уравнение (0.1) с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x) \geqslant 0, \quad x = (x_1, x_2) \in R^2. \tag{0.3}$$

Теорема 1. *Пусть* $l_i \geqslant 1$, $m_i \geqslant 3$; $|\Delta l|$, $|\Delta m|$ *достаточно малы имеет место* (0.2); *функция* $f(x, t) \geqslant 0$, $(x, t) \in R_T^2 = R^2 \times [0, T]$, *ограничена со своими производными по* x; *функция* $\varphi(x) \geqslant 0$ *такова, что* $\varphi^{\alpha_i/m_i} |\varphi_{x_i}| < C_1$, *где*

$$\alpha_1 \in (\alpha_1^*, \alpha_2^*), \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \Delta l, \quad C_1 = \mathrm{const} > 0,$$

$$\alpha_k^* = \frac{(2l_1 - 1)(m_1 - 1) + \frac{1}{2} l_1 (m_1 - 2) + (-1)^k D_1^{1/2}}{2(m_1 - 1)^2 + \frac{1}{2}(m_1 - 2)^2} m_1, \quad k = 1, 2. \tag{0.4}$$

Тогда существует решение задачи Коши (0.1), (0.3) $u(x, t) \geqslant 0$,

$$u \in C(R_T^2), \quad u^{\alpha_i/m_i} |u_{x_i}| < C_2, \quad u^\beta u_t \in L_2(G), \quad \beta > 2\frac{l_i}{m_i - 1} + 1,$$

$C_2 = \mathrm{const} > 0$, G — *произвольный компакт, содержащийся в* R_T^2, *определенное как функция, удовлетворяющая* (0.3) *и интегральному тождеству*

$$\int_{D_T} \left[-u\eta_t + \sum_{i=1}^{2} u^{l_i} |u_{x_i}|^{m_i-2} u_{x_i} \eta_{x_i} - f\eta \right] dx\, dt = -\int_D u\eta\, dx \Big|_0^T, \tag{0.5}$$

$D = R^2$, $D_T = R^2_T$, выполняющемуся при любой финитной по x функции $\eta \in C^1(\bar{R}^2_T)$.

Рассмотрим теперь уравнение (0.1) в цилиндре $Q_T = \Omega \times [0, T]$,

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) : x \in (N_1^-, N_1^+) \times (N_2^-, N_2^+)\},$$

где $N_i^{\pm}$—некоторые числа, $N_i^- < N_i^+$, с начальными и граничными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x) \geqslant 0, \ x \in \Omega, \tag{0.6}$$

$$u_{x_i}\big|_{x_i = N_i^{\pm}} = 0, \ i = 1, 2. \tag{0.7}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 с той лишь разницей, что функции φ и f определены при $x \in \Omega$. Тогда существует решение задачи* (0.1), (0.6), (0.7) *и* $(x, t) \geqslant 0$, $u \in C(\bar{Q}_T)$, $u^{\alpha_i/m_i}|u_{x_i}| < c$, $c = \text{const} > 0$, $u^{\beta} u_t \in L_2(Q_T)$, $\beta > 2\dfrac{l_i}{m_i - 1} + 1$, *определенное как функция, удовлетворяющая* (0.6) *и интегральному тождеству* (0.5) *с* $D = \Omega$, $D_T = Q_T$, *выполняющемуся при любой* $\eta \in C^1(\bar{Q}_T)$.

Уравнение (0.1) описывает движение жидкости в пористой среде. Оно является параболическим и вырождается при $u=0$ и $u_x=0$.

В работах [1, 2] изучалась первая начально-краевая задача для уравнения типа (0.1) соответственно с одной и многими пространственными переменными при $l_i = l$, $m_i = m$.

Настоящая работа наиболее близка к работам [3, 4], в которых изучалась задача Коши для уравнения (0.1) с одной пространственной переменной*.

Следует, однако, отметить, что результаты настоящей работы не есть тривиальное распространение результатов [3, 4] на двумерный случай, поскольку при оценке градиента возникает принципиальное различие по сравнению с одномерным случаем, заключающееся в том, что в одномерном случае в точке максимума функции $w = u^{\alpha}|u_x|^m$ из условия $w_x = 0$ можно выразить u_{xx} через u и u_x, тогда как в двумерном случае в точке максимума функции $w = \sum_{i=1}^{2} u^{\alpha_i}|u_{x_i}|^{m_i}$ из условий $w_{x_i} = 0$, $i = 1, 2$, можно исключить из рассмотрения только две из трех вторых производных. Это обстоятельство и заставляет нас накладывать условие (0.2), которое в одномерном случае не возникает. Отметим также, что показатель α в двумерном случае несколько хуже (больше), чем в одномерном случае $\left(\dfrac{(l-1)m}{m-1}\right)$.

Основным этапом доказательства теорем 1 и 2 является получение оценки градиента

---

* Мы приводим только работы, содержащие теоремы существования. В частности, не упомянуты работы А. С. Калашникова и С. Н. Антонцева, в которых исследуются интересные и важные качественные свойства решений уравнений типа (0.1).

$$\sum_{i=1}^{2} u^{\alpha_i} |u_{x_i}|^{m_i} < M_1. \tag{0.8}$$

Именно при получении оценки (0.8) приходится накладывать самые сильные ограничения на структуру уравнения: условие (0.2), о котором уже говорилось, и условие малости $|\Delta l|$, $|\Delta m|$.

Для лучшей наглядности мы сначала получаем оценку (0.8) при $l_1 = l_2$, $m_1 = m_2$ (п. 2), а затем (п. 3) рассматриваем общий случай. При этом мы позволили себе не выписывать условия малости $|\Delta l|$ и $|\Delta m|$ в явном виде ввиду их громоздкости.

Нам приходится доказывать классическую разрешимость вспомогательной задачи (1.1), так как для нее нарушены некоторые из условий, при которых в [5—7] для широких классов квазилинейных параболических уравнений установлена классическая разрешимость основных начально-краевых задач.

Мы рассматриваем случай $l_i \geqslant 1$, поскольку, с одной стороны, при $l_i < 1$ оценка градиента получается проще, с другой стороны, при включении этого случая в данную схему доказательства пришлось бы прибегнуть к некоторым дополнительным рассмотрениям.

Условие $m_i \geqslant 3$ вызвано тем, что при доказательстве классической разрешимости задачи (1.1) нам нужна двукратная дифференцируемость функции $a_i(u, p_i)$ по p_i. При $m < 3$ это бы нас заставило прибегнуть к более сложной регуляризации. Мы предпочли пожертвовать общностью ради простоты.

1. Оценка минимума и максимума решения вспомогательной задачи

Рассмотрим в цилиндре Q_T, определенном в п. 0, задачу

$$\begin{cases} u_t - \sum\limits_{i=1}^{2} \dfrac{\partial}{\partial x_i} a_i(u, u_{x_i}) = f(x, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_{x_i}\big|_{x_i = N_i^{\pm}} = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $a_i(u, p_i) = \nu p_i + |u|^{l_i} |p_i|^{m_i - 2} p_i$, $\varphi(x) \geqslant \varepsilon > 0$, $0 < \nu \leqslant \varepsilon^{\beta_0}$, $\beta_0 \geqslant \dfrac{l_i + m_i - 2}{m_i - 1}$, $f(x, t) \geqslant 0$, φ и f — бесконечно гладкие функции своих аргументов, $\varphi_{x_i}\big|_{x_i = N_i^{\pm}} = 0$, $f_{x_i}\big|_{x_i = N_i^{\pm}} = 0$, $i = 1, 2$.

(В п. 6 мы будем такими функциями аппроксимировать φ и f из условий теорем 1 и 2).

Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (1.1) из $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, т. е. u, u_{x_i}, u_t, $u_{x_i x_k} \in C(\overline{Q}_T)$. Легко показать, что $u(x, t) \geqslant \varepsilon$.

Действительно, умножая уравнение из (1.1) на $\overline{u}(x, t) = \min\{0; u - \varepsilon\}$ и интегрируя по $Q_t = \Omega \times [0, t]$, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{A_\varepsilon(t)}\bar{u}^2\,dx+\int\limits_0^t\int\limits_{A_\varepsilon(t)}\sum_{l=1}^{2}a_l(u,u_{x_l})\,u_{x_l}\,dx\,dt=\int\limits_{Q_t}f\bar{u}\,dx\,dt\leqslant 0,$$

где $A_\varepsilon(t)=\{x\in\Omega: u(x,t)<\varepsilon\}$, откуда следует, что $\operatorname{mes} A_\varepsilon(t)=0$ при любом $t\in(0;\,T]$, т. е. $u(x,t)\geqslant\varepsilon$.

Для оценки функции u сверху применим классический принцип максимума. Запишем уравнение в виде

$$u_t-\sum_{l=1}^{2}\left[\frac{\partial a_l}{\partial p_l}u_{x_lx_l}+\frac{\partial a_l}{\partial u}u_{x_l}\right]=f,$$

полагая $v=ue^{-\lambda t}$, $\lambda>0$, получим

$$e^{\lambda t}v_t-e^{\lambda t}\sum_{l=1}^{2}\left[\frac{\partial a_l}{\partial p_l}v_{x_lx_l}+\frac{\partial a_l}{\partial u}v_{x_l}\right]+\lambda\,v\,e^{\lambda t}=f.$$

Заметим, что $v(x,0)=u(x,0)=\varphi(x)$.

Пусть (x_0,t_0) — точка максимума функции v, лежащая вне нижнего цилиндра $\overline{Q}_T$. Тогда $v_t(x_0,t_0)\geqslant 0$, $v_{x_l}(x_0,t_0)=0$, $v_{x_lx_l}(x_0,t_0)\leqslant 0$ (заметим, что в силу граничных условий (1.1) это справедливо и в том случае, когда точка (x_0,t_0) находится на боковой поверхности цилиндра $\overline{Q}_T$). Имеем

$$v(x_0,t_0)\leqslant f(x_0,t_0)\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\leqslant\frac{1}{\lambda}\max_{(x,t)\in\overline{Q}_T}f,$$

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_T}v(x,t)\leqslant\max\left\{\max_{x\in\overline{\Omega}}\varphi(x);\ \frac{1}{\lambda}\max_{(x,t)\in\overline{Q}_T}f\right\},$$

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_T}u(x,t)\leqslant\inf_{\lambda>0}e^{\lambda T}\max\left\{\max_{x\in\overline{\Omega}}\varphi(x);\ \frac{1}{\lambda}\max_{(x,t)\in\overline{Q}_T}f\right\}.$$

Таким образом, доказана оценка

$$\varepsilon\leqslant u(x,t)\leqslant M, \tag{1.2}$$

где M не зависит от ε, ν, $N_l^\pm$.

2. Оценка градиента решения при $l_1=l_2=l$, $m_1=m_2=m$.

Пусть $l_1=l_2=l$, $m_1=m_2=m$ и u — такое решение задачи (1.1), что $u_{x_k t}$, $u_{x_k x_l x_l}\in C(\overline{Q}_T)$. Функцию u с помощью зеркального отражения от боковой поверхности цилиндра Q_T (напомним, что Ω — прямоугольник) можно продолжить сначала на смежные с Q_T и равные ему цилиндры, а затем таким же образом — на весь слой $R^2\times(0,\,T]$. Аналогичным образом продолжим функцию f на слой $R^2\times(0,\,T)$, φ на R^2.

Ниже функции u, f и φ будем считать продолженными таким образом.

Легко показать, что функция u будет удовлетворять уравнению из (1.1) в слое $R^2\times(0,\,T]$ и начальному условию $u(x,0)=\varphi(x)$ для всех $x\in R^2$. При этом нетрудно проследить, что продолженные функции u, f и φ будут обладать гладкостью, необходимой нам в дальнейшем.

Введем обозначения: $|u_{x_1}|^m + |u_{x_2}|^m = v$, $u^\alpha v = w$, $\alpha > 0$.

Применим к обеим частям уравнения из (1.1) оператор $m\, u^\alpha \sum\limits_{k=1}^{2} \times$ $\times |u_{x_k}|^{m-2} u_{x_k} \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ и воспользуемся очевидными соотношениями

$$v_t = \sum_{k=1}^{2} m\, |u_{x_k}|^{m-2} u_{x_k} u_{x_k t}, \quad v_{x_l} = \sum_{k=1}^{2} m\, |u_{x_k}|^{m-2} u_{x_k} u_{x_k x_l},$$

$$v_{x_l x_l} = \sum_{k=1}^{2} (m\, |u_{x_k}|^{m-2} u_{x_k} u_{x_k x_l x_l} + m\,(m-1)\, |u_{x_k}|^{m-2} u^2_{x_k x_l}),$$

$$w_t = u^\alpha v_t + \alpha\, u^{\alpha-1} v\, u_t = u^\alpha v_t + \alpha\, u^{\alpha-1} v \left[\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_l} a_l (u, u_{x_l}) + f \right],$$

$$w_{x_l} = u^\alpha v_{x_l} + \alpha\, u^{\alpha-1} v\, u_{x_l},$$

$$w_{x_l x_l} = u^\alpha v_{x_l x_l} + 2\, \alpha\, u^{\alpha-1} u_{x_l} v_{x_l} + \alpha\, (\alpha - 1)\, u^{\alpha-2} v\, u^2_{x_l} + \alpha\, v\, u^{\alpha-1} u_{x_l x_l}.$$

Получим

$$w_t - \frac{\partial a_l}{\partial p_l} w_{x_l x_l} - \frac{\partial a_l}{\partial u} w_{x_l} + m\,(m-1)\, u^\alpha \frac{\partial a_l}{\partial p_l} |u_{x_k}|^{m-2} u^2_{x_l x_k} +$$

$$+ 2\, \alpha\, u^{\alpha-1} v_{x_l} \frac{\partial a_l}{\partial p_l} u_{x_l} + \alpha\, (\alpha - 1)\, u^{\alpha-2} v \frac{\partial a_l}{\partial p_l} u^2_{x_l} - \frac{\partial^2 a_l}{\partial p_l^2} u_{x_l x_l} u^\alpha v_{x_l} -$$

$$- m w \frac{\partial^2 a_l}{\partial p_l\, \partial u} u_{x_l} - m\, w \frac{\partial^2 a_l}{\partial u^2} u_{x_l} - \frac{\partial^2 a_l}{\partial u\, \partial p_l} u_{x_l} u^\alpha v_{x_l} =$$

$$= f_{x_k} m u^\alpha |u_{x_k}|^{m-2} u_{x_k} + \alpha\, f\, u^{\alpha-1} v. \tag{2.1}$$

Здесь и всюду ниже, если не оговорено особо, мы опускаем знак суммы по повторяющимся индексам.

Пусть (x_0, t_0)—точка максимума функции w, причем $t_0 > 0$. Рассмотрим равенство (2.1) в точке (x_0, t_0). Очевидно, $w_t \geqslant 0$, $-w_{x_l x_l} \geqslant$ $\geqslant 0$, $w_{x_l} = 0$. Сначала предположим, что одна из компонент градиента, например, для определенности u_{x_1}, равна нулю. Тогда из условий $w_{x_l} = 0$ получим, что $u_{x_1 x_2} = 0$, $u_{x_2 x_2} = -\dfrac{\alpha}{m} \dfrac{u^2_{x_2}}{u}$. Воспользовавшись этими соотношениями и отбрасывая первые три неотрицательных члена из (2.1), легко получить

$$-\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{m}\right) \nu\, u^{\alpha-2} |u_{x_2}|^{m+2} + \varkappa_1 (m-1)\, u^{l+\alpha-2} |u_{x_2}|^{2m} \leqslant$$

$$\leqslant m\, f_{x_2} u^\alpha |u_{x_2}|^{m-2} u_{x_2} + \alpha\, f\, u^{\alpha-1} |u_{x_2}|^m, \tag{2.2}$$

$$\varkappa_1 = \frac{m-1}{m} \left(l \frac{m}{m-1} - \alpha \right) \left(\alpha - \frac{(l-1)\, m}{m-1} \right).$$

Аналогичное неравенство получим для u_{x_1}, если $u_{x_1}(x_0\ \ t_0)=0$.

Пусть теперь $u_{x_1}(x_0, t_0)\neq 0$, $u_{x_2}(x_0, t_0)\neq 0$.

Тогда из условий $w_i=0$, $i=1, 2$, определим:

$$u_{x_i}=-\left(\frac{\alpha}{m}u^{-1}u_{x_i}v+|u_{x_k}|^{m-2}u_{x_k}u_{x_ix_k}\right)(|u_{x_i}|^{m-2}u_{x_i})^{-1},\ k\neq i. \quad (2.3)$$

Исключая из (2.1) с помощью (2.3) $u_{x_1x_1}$ и $u_{x_2x_2}$ и отбрасывая первые три неотрицательных члена, после некоторых преобразований получим

$$v\left\{u^{\alpha-2}\frac{m-1}{m}\nu\sum_{i=1}^{2}\frac{v-|u_{x_i}|^m}{|u_{x_i}|^{m-2}}(m\xi+\alpha)^2-\nu u^{\alpha-2}\sum_{i=1}^{2}u_{x_i}^2\alpha\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)+\right.$$

$$\left.+\ u^{l-2}w(m-1)\left[m(m-1)\xi^2+m(l+\alpha)\xi+\varkappa_2\right]\right\}\leqslant$$

$$\leqslant mf_{x_k}u^{\alpha}|u_{x_k}|^{m-2}u_{x_k}+\alpha fu^{\alpha-1}v, \quad (2.4)$$

где $\xi=\dfrac{u\,u_{x_1x_2}}{u_{x_1}u_{x_2}}$, $\varkappa_2=-\alpha^2\dfrac{m-2}{m}+(3l-1)\alpha-\dfrac{m}{m-1}l(l-1)$,

откуда очевидным образом следует неравенство

$$-\nu\alpha\left(\frac{\alpha}{m}+1\right)u^{-2}w\sum_{i=1}^{2}u_{x_i}^2+u^{l-2-\alpha}w^2(m-1)\varkappa_3\leqslant$$

$$\leqslant mf_{x_k}u^{\alpha}|u_{x_k}|^{m-2}u_{x_k}+\alpha fu^{-1}w, \quad (2.5)$$

где $\varkappa_3=\varkappa_2-\dfrac{1}{4}\dfrac{m}{m-1}(l+\alpha)^2$. Подберем α так, чтобы $\varkappa_1>0$, $\varkappa_3>0$.

Очевидно, $\varkappa_1>0$ при $\alpha\in\left(\dfrac{(l-1)m}{m-1}, \dfrac{lm}{m-1}\right)$.

Неравенство

$$\varkappa_3=\frac{1}{m-1}\left\{-\alpha^2\left(\frac{(m-1)^2}{m}+\frac{(m-2)^2}{4m}\right)+\right.$$

$$\left.+\ \alpha\left[(2l-1)(m-1)+\frac{1}{2}l(m-2)\right]-ml\left(\frac{5}{4}l-1\right)\right\}>0$$

разрешимо при условии (0.2), и его решениями являются $\alpha\in(\alpha_1^*, \alpha_2^*)$, где α_1^* и α_2^* определены (0.4).

Поскольку $\varkappa_1-\varkappa_3=[\alpha(m-2)-lm]^2/4m(m-1)>0$ при $\alpha\neq l/(m-2)$, то $(l-1)m/(m-1)<\alpha_1^*<\alpha_2^*<lm/(m-1)$.

Тогда из (2.2) и (2.5) легко получить неравенство

$$w^2\leqslant c_1\left[\nu u^{-\beta_1}w^{1+\frac{2}{m}}\max_{(x,t)\in\overline{Q}_T}|f_x|u^{\beta_2}w^{1-\frac{1}{m}}+\max_{(x,t)\in\overline{Q}_T}fu^{\beta_3}w\right], \quad (2.6)$$

$$c_1=\text{const}>0,\ \beta_1=l-\alpha\frac{m-2}{m},\ \beta_2=2-l+\alpha\left(1+\frac{1}{m}\right),$$

$\beta_3 = 1 - l + \alpha$. Легко показать, что $\beta_1, \beta_2, \beta_3 > 0$.
Из ограниченности $w(x, 0)$, неравенства (2.6), а также в силу выбора ν следует оценка

$$\max_{(x,\ t)\in\overline{Q}_T} w(x, t) < M_1, \tag{2.7}$$

равномерная по $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Из (2.7) следует оценка

$$\max_{(x,\ t)\in\overline{Q}_T} |u_x| < M_2\, \varepsilon^{-\frac{\alpha}{m}}. \tag{2.8}$$

3. Оценка градиента в анизотропном случае

Пусть теперь $l_1 = l$, $m_1 = m$, $l_2 = l + \Delta l$, $m_2 = m + \Delta m$.

В этом пункте мы по возможности кратко покажем, как получить оценку, аналогичную (2.7), в предположении достатчной малости $|\Delta l|$, $|\Delta m|$.

Положим $v_k = |u_{x_k}|^{m_k}$, $w_k = u^{\alpha_k} v_k$, $w = w_1 + w_2$, причем будем считать, что $l_1 - \alpha_1 = l_2 - \alpha_2 = q$.

Тогда, подействовав на обе части уравнения (1.1) оператором $\sum_{k=1}^{2} m_k u^{\alpha_k} |u_{x_k}|^{m_k - 2} u_{x_k} \dfrac{\partial}{\partial x_k}$, получим

$$w_t - \frac{\partial a_i}{\partial p_i} w_{x_l x_l} - \frac{\partial a_i}{\partial u} w_{x_l} + m_k (m_k - 1) u^{\alpha_k} \frac{\partial a_i}{\partial p_l} |u_{x_k}|^{m_k - 2} u^2_{x_l x_k} +$$

$$+ 2\alpha_k u^{\alpha_k - 1} v_{k x_l} \frac{\partial a_l}{\partial p_l} u_{x_l} + \alpha_k (\alpha_k - 1) u^{\alpha_k - 2} v_k \frac{\partial a_l}{\partial p_l} u^2_{x_l} -$$

$$- \frac{\partial^2 a_l}{\partial p_l^2} u_{x_l x_l} u^{\alpha_k} v_{k x_l} - m_k u^{\alpha_k} v_k \frac{\partial^2 a_l}{\partial p_l \partial u} u_{x_l x_l} -$$

$$- m_k u^{\alpha_k} v_k \frac{\partial^2 a_l}{\partial u^2} u_{x_l} - \frac{\partial^2 a_l}{\partial u \partial p_l} u_{x_l} u^{\alpha_k} v_{k x_l} =$$

$$= f_{x_k} m_k u^{\alpha_k} |u_{x_k}|^{m_k - 2} u_{x_k} + f \alpha_k u^{-1} w_k. \tag{3.1}$$

Рассмотрим (3.1) в точке (x_0, t_0), $t_0 > 0$, максимума функции w.

Сначала предположим, что $v_k(x_0, t_0) = 0$. Тогда для другой компоненты $w_{x_j} = 0$, $j = 1, 2$, из которых следует, что $u_{x_l x_l} = 0$,

$u_{x_l x_i} = -\dfrac{\alpha_l}{m_l} \dfrac{u_{x_l}}{u}$, $i \neq k$, получим неравенство, аналогичное (2.2)

$$-\alpha_l \left(1 + \frac{\alpha_l}{m_l}\right) \nu\, u^{\alpha_l - 2} |u_{x_l}|^{m_l + 2} + u^{l_l + \alpha_l - 2} |u_{x_l}|^{2m_l} (m_l - 1)\, \varkappa_1^l <$$

$$< m_l f_{x_l} u^{\alpha_l} |u_{x_l}|^{m_l - 2} u_{x_l} + \alpha_l f u^{\alpha_l - 1} v_l,\ i \neq k \tag{3.2}$$

(здесь по i не производится суммирования), где

$$\varkappa_i^l = \frac{m_l - 1}{m_l}\left(l_l \frac{m_l}{m_l - 1} - a_l\right)\left(a_l - \frac{(l_l - 1)\, m_l}{m_l - 1}\right).$$

Пусть теперь $v_i(x_0, t_0) \neq 0$, $i = 1, 2$. Тогда, исключая из (3.1) с помощью соотношений $w_{x_i} = 0$, $i = 1, 2$, производные $u_{x_1x_1}$, $u_{x_2x_2}$, получим неравенство, аналогичное (2.4):

$$u^{-2}\nu \left\{\sum_{l \neq j}\left[\frac{m_l - 1}{m_l}\frac{u_{x_l}^2}{w_l}\left(\xi m_j w_j + \sum_{k=1}^{2} a_k w_k\right)^2 + \right.\right.$$
$$\left. + m_l(m_l - 1)\, w_l u_{x_j}^2\left(\xi + \frac{a_l - a_j}{m_l - 1}\right)^2 - \frac{m_l}{m_l - 1}\, w_l u_{x_j}^2 (\Delta l)^2\right] +$$
$$\left. + \sum_{l,\, k=1}^{2} u_{x_l}^2 w_k a_k(-2a_l + a_k - 1)\right\} +$$
$$+ u^{q-2}\sum_{l,\, j=1}^{2} w_l w_j \{[m(m-1)^2 + a_{lj}]\, \xi^2 + [m(m-1)(l + \alpha) + b_{lj}]\, \xi +$$
$$+ (m-1)\varkappa_2 + c_{lj}\} < \sum_{k=1}^{2} m_k f_{x_k} u^{\alpha_k} |u_{x_k}|^{m_k - 2} u_{x_k} + \sum_{k=1}^{2} a_k f u^{-1} w_k, \qquad (3.3)$$

где a_{lj}, b_{lj}, c_{lj}—некоторые выражения, зависящие от l, m, Δl, Δm и стремящиеся к нулю при $\Delta l \to 0$, $\Delta m \to 0$; $\alpha = \alpha_1 = l - q$ (напомним, что $l = l_1$, $m = m_1$); $\varkappa_2$ и ξ—те же, что в (2.4). Тогда при достаточно малых Δl и Δm из (3.3) получим

$$-c_1 u^{-2}\nu \sum_{i=1}^{2} u_{x_i} w + u^{q-2} w^2 (m-1)(\varkappa_3 - d) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{2}\left[m_k f_{x_k} u^{\alpha_k} |u_{x_k}|^{m_k - 2} u_{x_k} + a_k f u^{-1} w_k\right], \qquad (3.4)$$

где $c_1 = \mathrm{const} > 0$, $d = d(l, m, \Delta l, \Delta m) \to 0$ при $\Delta l \to 0$, $\Delta m \to 0$: $\varkappa_3$—то же, что в (2.5). Теперь, если выполнено условие (0.2), то при достаточно малых Δl и Δm найдется $\alpha \in (\alpha_1^*, \alpha_2^*)$ такое, что $\varkappa_3 > 0$, $\varkappa_i^l > 0$, $i = 1, 2$. Тогда из (3.2) и (3.4) и $w(x, 0) < C$ получим оценку

$$\max_{(x,\, t) \in \overline{Q}_T} w(x, t) < M_1, \qquad (3.5)$$

равномерную по $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Из (3.5) следует

$$\max_{(x,\, t) \in \overline{Q}_T} |u_{x_i}| < M_2\, \varepsilon^{-\frac{a_l}{m_l}}, \quad i = 1, 2. \qquad (3.6)$$

4. О разрешимости задачи (1.1)

Оценка градиента является основным этапом доказательства разрешимости задачи (1.1) в пространствах Гёльдера. После ее получения процедура аккуратного применения принципа Лере-Шаудера с точным указанием пространств может быть проведена аналогично тому, как это делается в [5, 6, 8]. Мы ее опускаем, отметив, что бесконечной гладкости функций φ и f с той гладкостью, которой обладают функции a_i, (u, p_i), заведомо хватит, чтобы обеспечить гладкость решения u, используемую в пп. 2 и 3 и ниже.

Укажем также, что в качестве однопараметрического семейства линейных задач следует взять

$$\left|\begin{array}{l} v_t - \sum\limits_{i=1}^{2}\left[\dfrac{\partial a_i(u, u_{x_i})}{\partial p_i} v_{x_i x_i} + \dfrac{\partial a_i(u, u_{x_i})}{\partial u} v_{x_i}\right] = \tau f, \\ v(x, 0) = \tau \varphi, \; v_{x_i}\big|_{x_i = N_i^{\pm}} = 0, \; i = 1, 2; \; \tau \in [0, 1]; \; u_{x_i}\big|_{x_i = N_i^{\pm}} = 0. \end{array}\right. \quad (4.1)$$

При $\tau = 1$ задача определяет нелинейное отображение $v = T(u)$. Решения уравнения $u^\tau = \tau T(u^\tau)$ являются решениями задачи (1.1), где вместо f и φ стоят, соответственно, τf и $\tau\varphi$, и потому для них в силу (1.2) и (3.6) справедливы оценки $0 \leqslant u^\tau \leqslant M$, $|u_x^\tau| < M'$, равномерные по τ.

Строгим доказательством существования неподвижной точки отображения $T(u)$ (в подходящим образом подобранном пространстве) может служить почти дословное повторение рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы 1.3 гл. 2 [6].

То обстоятельство, что в [6] рассматривается первая начально-краевая задача в области с гладкой границей, а мы рассматриваем вторую начально-краевую задачу в области с угловыми точками, не имеет никакого значения. Дело в том, что гладкость границы используется только при получении необходимых априорных оценок у границы. Нас же возможность продолжения функций за пределы Q_T с помощью зеркального отражения избавляет от дополнительных рассмотрений в угловых точках.

Отметим также, что для доказательства необходимой гладкости решения v задачи (4.1) в угловых точках можно прибегнуть к тому же приему продолжения функций v, u, f с помощью зеркального отражения от боковой поверхности цилиндра Q_T на весь слой $R^2 \times (O, T)$. Действительно, тогда продолженная функция v будет решением уравнения из (4.1) во всем слое $R^2 \times (Q, T]$ и все необходимые оценки в угловых точках цилиндра Q_T получаются совершенно так же, как во внутренних точках.

5. Интегральные оценки $u_{x_i x_k}$ и u_t

Используя оценку (3.5), теперь легко получить интегральные оценки $u_{x_i x_k}$ и u_t.

$$\text{Пусть } \beta \geqslant 2\frac{l_i}{m_i - 1} + 1, \quad q \geqslant 2\beta + l_i + m_i, \quad i = 1, 2,$$

Ω'—некоторая подобласть области Ω (возможно $\Omega = \Omega'$), $\zeta(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, $0 \leqslant \zeta(x) \leqslant 1$, $\zeta(x) = 1$ при $x \in \Omega'$. Умножим уравнение из (1.1) на

$-\sum_{k=1}^{2} \zeta^q u^\beta (\zeta^q u^\beta u_{x_k})_{x_k}$ и проинтегрируем по Q_T. Произведем дважды интегрирование по частям, замечая, что в силу граничных условий интегралы по боковой поверхности равны нулю. Пользуясь оценкой

$$|u u_{x_k x_l} u_{x_k} u_{x_l}| \leqslant \delta u^2 u^2_{x_l x_k} + \frac{1}{4\delta} u^2_{x_k} u^2_{x_l}, \ \delta > 0,$$

и учитывая (3.5), получим

$$\sum_{l,\,k=1}^{2} \int\limits_{Q'_T} [\nu + u^{l_l} |u_{x_l}|^{m_l - 2}] u^{2\beta} u^2_{x_l x_k} \, dx\, dt \leqslant c_1 T \operatorname{mes} K_\zeta, \tag{5.2}$$

где $Q'_T = \Omega' \times [0, T]$, K_ζ — носитель ζ, c_1 зависит от q, β, l_l, m_l, $\max|f_x|$, $\max f$, $\max|\zeta_x|$, $\max|\zeta_{xx}|$ и M_1 из (3.5)

Получим теперь оценку u_t. Для этого запишем уравнение из (1.1) в виде

$$u_t = \sum_{l=1}^{2} \left[\frac{\partial a_l}{\partial p_l} u_{x_l x_l} + \frac{\partial a_l}{\partial u} u_{x_l}\right] + f,$$

умножим его на u^β, возведем обе части в квадрат, проинтегрируем по Q'_T, тогда в силу (5.2) получим

$$\int\limits_{Q'_T} u^{2\beta} u_t^2 \, dx\, dt \leqslant c_2 T \operatorname{mes} K_\zeta, \tag{5.3}$$

где c_2 зависит от тех же величин, что c_1 в (5.2).

Наконец, умножая уравнение на ζu и интегрируя по Q_T, получим оценку

$$\int\limits_{Q'_T} \sum_{l=1}^{2} [\nu u^2_{x_l} + u^{l_l} |u_{x_l}|^{m_l}] \, dx\, dt \leqslant c_3 T \operatorname{mes} K_\zeta, \tag{5.4}$$

где c_3 зависит от тех же величин, что и c_1, c_2.

6. Предельный переход

Полученных оценок достаточно для того, чтобы совершить предельный переход по $\varepsilon \to 0$. Мы его проведем подробно только для задачи Коши, поскольку для начально-краевой задачи он проводится совершенно аналогично с той лишь разницей, что не нужно устремлять к $\pm\infty$ числа $N_l^\pm$.

Пометим в (1.1) все функции индексом ε: a_l^ε, u^ε, φ^ε, f^ε, $\nu = \varepsilon^{\beta_0}$, $\beta_0 \geqslant \dfrac{l_l + m_l - 2}{m_l - 1}$, $i = 1, 2$. Будем считать, что числа $N_i^\pm$ тоже зависят от ε, причем $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} N_i^\pm(\varepsilon) = \pm\infty$, $i = 1, 2$.

Пусть функции φ^ε (продолженные на все R^2) при $\varepsilon \to 0$ сходятся равномерно на любом компакте к функции φ из условия теоремы 1, причем $(\varphi^\varepsilon)^{\alpha_l m_l} |\varphi^\varepsilon_{x_l}|$ равномерно ограничены по $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Функции f^ε (продолженные на R^2_T) равномерно по $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ ограничены вместе с производными по x и при $\varepsilon \to 0$ сходятся в L_2 на любом компакте из R^2_T к функции f из условия теоремы 1.

Возможность построения таких последовательностей φ^ε и f^ε по произвольным функциям φ и f с указанными свойствами очевидна.

Оценки $0 \leqslant u \leqslant M$ (см. (1, 2)), (3.5), (5.3) и (5.4) равномерны по ε.

Пусть Ω_k, $k = 1, 2, \cdots$ — последовательность бесконечно расширяющихся компактов в R^2. Зафиксируем произвольный номер k. Из (1.2), (3.5) и (5.3) следует, что для функций $(u^\varepsilon)^{1+\beta}$ равномерно ограничены нормы в анизотропном соболевском пространстве $W^1_{\infty, \infty, 2}(Q_k)$, $Q_k = \Omega_k \times [0, T]$, которое (см., напр., [9]) компактно вкладывается в $C(\overline{Q_k})$. Из (5.4) следует; что семейство $\{(u^\varepsilon)^{l_l/m_l} u^\varepsilon_{x_l}\}$ слабо компактно в $L_{m_l}(Q_k)$. Выберем для каждого k сходящиеся последовательности, а затем с помощью диагонального процесса построим последовательность $\{u_\varepsilon\}$ (индекс j будем опускать) такую, что $u^\varepsilon \to u$ сильно в $C(G)$ при $\varepsilon \to 0$, $(u^\varepsilon)^{l_l/m_l} u^\varepsilon_{x_l} \to u^{l_l/m_l} u_{x_l}$ слабо в $L_{m_l}(G)$, $(u^\varepsilon)^\beta u^\varepsilon_t \to u^\beta u_t$ слабо в $L_2(G)$ $(u^\varepsilon)^{l_l/m_l} |u^\varepsilon_{x_l}|^{m_l - 2} u^\varepsilon_{x_l} \to L_l$ слабо в $L_{m'_l}(G)$, $m'_l = m/m_l - 1$, где C—произвольный компакт из R^2_T.

Очевидно, что $u(x, t) \geqslant 0$, $u(x, 0) = \varphi(x)$. Докажем, что функция u будет решением задачи (0.1), (0.3). Для доказательства применим известный метод монотонности (см., напр., [5, 8]).

Умножив уравнение из (1.1) на гладкую финитную по x функцию $\eta(x, t)$, интегрируя получим

$$\int\limits_{R^2_T} \left[-u^\varepsilon \eta_t + \sum_{l=1}^{2} a^\varepsilon_l (u^\varepsilon, u^\varepsilon_{x_l}) \eta_{x_l} - f_\varepsilon \eta \right] dx\, dt = - \int\limits_{R^1} u^\varepsilon \eta \, dx \Big|_0^T. \quad (6,1)$$

Устремляя ε к нулю, получим

$$\int\limits_{R^2_T} \left[-u \eta_t + \sum_{l=1}^{2} L_l u^{l_l/m_l} \eta_{x_l} - f \eta \right] dx\, dt = - \int\limits_{R^1} u \eta \, dx \Big|_0^T. \quad (6.2)$$

Положим $\bar{u} = \max\{u - \delta, 0\}$, $\delta > 0$. Очевидно, в силу (3.5) и (5.3), в (6.2) можно положить $\eta = \bar{u} \zeta(x)$, где $\zeta \geqslant 0$—гладкая финитная функция. Устремляя теперь δ к нулю, пользуясь тем, что $\bar{u}_t = u_t$, $\bar{u}_{x_l} = u_{x_l}$ при $u \geqslant \delta$, $\bar{u}_t = 0$, $\bar{u}_{x_l} = 0$ при $u < \delta$, в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега получим*

$$\int\limits_{R_T^2}\left[\sum_{l=1}^{2} L_l\, u^{l_l|m_l}(u_{x_l}\zeta+u\zeta_{x_l})-f u\zeta\right]dx\,dt=-\frac{1}{2}\int\limits_{R^2}u^2\,\zeta\,dx\Big|_0^T. \qquad (6.3)$$

В силу монотонности функций a_l^ε по p_l для любой гладкой функции $\xi(x,t)$ имеем

$$0\leqslant\sum_{l=1}^{2}\int\limits_{R_T^2}(a_l^\varepsilon(u^\varepsilon,u^\varepsilon_{x_l})-a_l^\varepsilon(u^\varepsilon,\xi_{x_l}))(u^\varepsilon_{x_l}-\xi_{x_l})\,\zeta\,dx\,dt=$$

$$=\sum_{l=1}^{2}\int\limits_{R_T^2}\Big[a_l^\varepsilon(u^\varepsilon,u^\varepsilon_{x_l})\,\zeta\,u^\varepsilon_{x_l}-a_l^\varepsilon(u^\varepsilon,u^\varepsilon_{x_l})\,\zeta\,\xi_{x_l}-$$

$$-a_l^\varepsilon(u^\varepsilon,\xi_{x_l})\,\zeta\,(u^\varepsilon_{x_l}-\xi_{x_l})\Big]\,dx\,dt.$$

Из (6.1) с $\eta=\zeta u^\varepsilon$

$$\sum_{l=1}^{2}\int\limits_{R_T^2}a_l^\varepsilon(u^\varepsilon,u^\varepsilon_{x_l})\,\zeta\,u^\varepsilon_{x_l}\,dx\,dt=$$

$$=\int\limits_{R_T^2}\Big[f^\varepsilon u^\varepsilon-\sum_{l=1}^{2}a_l^\varepsilon(u^\varepsilon,u^\varepsilon_{x_l})\,\zeta_{x_l}\,u^\varepsilon\Big]\,dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{R^2}(u^\varepsilon)^2\,\zeta\,dx\Big|_0^T.$$

Тогда, устремляя ε к нулю, получим

$$0\leqslant\int\limits_{R_T^2}\Big\{f\zeta u-\sum_{l=1}^{2}\Big[L_l u^{l_l|m_l}(u\zeta_{x_l}+\zeta\,\xi_{x_l})+$$

$$+u^{l_l}|\xi_{x_l}|^{m_l-2}\xi_{x_l}\,\zeta\,(u_{x_l}-\xi_{x_l})\Big]\Big\}\,dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{R^2}u^2\,\zeta\,dx\Big|_0^T,$$

откуда, в силу (6.3)

$$\sum_{l=1}^{2}\int\limits_{R_T^2}(u^{l_l|m_l}L_l-u^{l_l}|\xi_{x_l}|^{m_l-2}\xi_{x_l})\,\zeta\,(u_{x_l}-\xi_{x_l})\,dx\,dt\geqslant 0.$$

---

*Аналогичные приемы использовались в [10, 11] при рассмотрении соответствующих эллиптических уравнений.

Теперь, как и при доказательстве (6.3), положим $\zeta = \bar{u} + \lambda\,\eta\,(x,\ t)$, где η — произвольная гладкая финитная по x функция, $\lambda = \mathrm{const} > 0$, затем устремим δ к нулю и, считая $\zeta = 1$ на носителе η, после деления на λ получим

$$\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{R_T^2} \left[u^{l_i/m_i} L_i - u^{l_i} \left|u_{x_i} + \lambda\eta_{x_i}\right|^{m_i-2} (u_{x_i} + \lambda\eta_{x_i})\,\eta_{x_i}\,dx\,dt \geqslant 0.\right.$$

Устремив λ к нулю, получим

$$\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{R_T^2} \left(u^{l_i/m_i} L_i - u^{l_i} \left|u_{x_i}\right|^{m_i-2} u_{x_i}\right) \eta_{x_i}\,dx\,dt \geqslant 0. \tag{6.4}$$

Поменяв η на $-\eta$, заключаем, что в (6.4) имеет место равенство. Но тогда в силу (6.2) функция u удовлетворяет интегральному тождеству (0.5). Теорема 1 доказана.

Как уже отмечалось, теорема 2 доказывается аналогично. Только нужно считать числа $N_i^{\pm}$ не зависящими от ε. Более того, оставляя одно, два, три числа из $N_i^{\pm}$ постоянными, а остальные устремляя к бесконечности при $\varepsilon \to 0$, можно доказать разрешимость начально-краевой задачи в $\Omega \times [0,\ T]$, где Ω—полупространство, четверть пространства, бесконечная полоса, полуполоса.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 26. I. 1987

Պ. Զ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ. Ոչ ստացիոնար ֆիլտրացիայի տեսությունում առաջացող մի վերածվող քվազիգծային պարաբոլական հավասարման մասին *(ամփոփում)*

$$u_t - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u^{l_i} \left|u_{x_i}\right|^{m_i-2} u_{x_i}\right) = f(x,\ t)$$

Հավասարման Համար ստացված են թեորեմներ Կոշու և երկրորդ սկզբնա-եզրային խնդիրների լուծելիության մասին։

P. Z. MKRTYCHYAN. *A degener ate quasilinear parabolic equation arising in non stationary filtration theory* (summary)

Solvability theorems for the Cauchy and second initial-boundary value problems for the equation

$$u_t - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u^{l_i} \left|u_{x_i}\right|^{m_i-2} u_{x_i}\right) = f(x,\ t)$$

are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *P. A. Raviart*. Sur la resolution de cértaines équations paraboliques non linéaires, J. Func. Anal., 1970, v. 5, № 2, 299—328.
2. *A. Bamberger*. Etude d'une equation doublementnon lineaire, J. Func. Anal, 1977, v. 24, № 2, 148—155.
3. *А. С. Калашников*. Об одном нелинейном уравнении, возникающем в теории нестационарной фильтрации, Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1978, вып. 4, 137—146.
4. *А. С. Калашников*. О квазилинейных вырождающихся параболических уравнениях с конечной скоростью распространения возмущений, в сб. «Дифференциальные уравнения с частными производными», Новосибирск, 1980, 80—83.
5. *О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева*. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., «Наука», 1967, 736 с.
6. *А. В. Иванов*. Квазилинейные вырождающиеся и неравномерно эллиптические и параболические уравнения второго порядка, Труды МИАН, т. CLX, Л., «Наука», 1982, 285 с.
7. *D. E. Edmund., L. A. Peletler*. Quasilinear parabolic equations-Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Ser 3, 1971, 5. 25, 397—421.
8. *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева*. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., «Наука», 1973, 576 с.
9. *Лу Вень-Туан*. К теоремам вложения для пространств функций с частными производными, суммируемыми с различными степенями, Вестник ЛГУ, 1961, № 7, вып. 2, 23—37.
10. *П. З. Мкртычян*. О разрешимости задачи Дирихле для одного класса вырождающихся квазилинейных уравнений эллиптического типа, Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1980, т. 102, 181—189.
11. *П. З. Мкртычян*. О разрешимости задачи Дирихле для вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений, там же, 1982, т. 115, 178—190.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIV, № 2, 1989 Математика

УДК 517.53

В. А. МАРТИРОСЯН

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ В ТЕРМИНАХ ИХ ТЕЙЛОРОВСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Настоящая работа посвящена исследованию вопросов о существовании ограниченных на угле (прямолинейном либо спиральном) нетривиальных целых функций в терминах их тейлоровских коэффициентов. Этот круг вопросов, естественно примыкающий к классическим теоремам Лиувилля и Фрагмена-Линделёфа, возник под влиянием известной работы Г. Полиа [1] и в дальнейшем исследовался рядом авторов (см. [2]—[6]). Некоторые из полученных здесь результатов, относящихся к случаю, когда рассматривается ограниченность на полуоси $[0+\infty)$, имели необходимо-достаточный характер (результаты А. Макинтайра, А. Эдрея и др.). Однако для других случаев подобных окончательных результатов не имелось до недавнего времени. Так обстояло дело даже в случае ограниченности на прямолинейном угле положительного раствора, рассмотренном еще Г. Полиа.

Результаты необходимо-достаточного характера о существовании ограниченных на угле (прямолинейном или спиральном) нетривиальных целых функций в терминах их тейлоровских коэффициентов (лакунарность, перемены знаков) были сформулированы в заметке [7]. В данной работе доказываются эти результаты и некоторые их обобщения и усиления. Здесь, по-видимому, впервые в указанном круге вопросов, удается выявить в явной форме влияние аргументов тейлоровских коэффициентов.

Работа состоит из трех частей. В первой части сформулированы основные результаты; их доказательства приведены в § 3, а в § 2 доказываются необходимые в § 3 вспомогательные леммы.

Пользуясь случаем, выражаю благодарность Н. У. Аракеляну за обсуждение работы.

§ 1. Формулировка результатов

Введем сначала некоторые обозначения. Пусть **N**, **R** и **C** означают, соответственно, множества натуральных, вещественных и комплексных чисел. Для $a, b \in \mathbf{R}$ $(a \geqq b)$ обозначим через $[a, b]$ и (a, b), соответственно, замкнутый и открытый промежутки с концами a и b (при $a = b$ полагаем $(a, b) = \varnothing$).

Положим

$$D_r(a) = \{z: |z-a| < r\} \text{ для } a \in \mathbf{C},\ r > 0;$$

$$\Delta_\beta^\alpha = \{z: |\arg z - \alpha \log |z|| \leqslant \beta/2\} \text{ для } \alpha \in \mathbf{R},\ \beta \in [0,\ 2\pi);$$

$$\Pi_\alpha = \{z: \operatorname{Re} z \geqslant \alpha \operatorname{Im} z\},\ S_\alpha = \{z: \operatorname{Re} z \geqslant \alpha \operatorname{Im} z + 2^{-1}\} \text{ для } \alpha \in \mathbf{R}.$$

Обозначим также для краткости

$$D_r = D_r(0),\ \Delta_\beta = \Delta_\beta^\alpha,\ \Pi = \Pi_\alpha,\ S = S_\alpha \text{ для } \alpha = 0.$$

Полуплоскость Π_α иногда будет удобно представлять в полярных координатах:

$$\Pi_\alpha = \{z : \arg z \in [\gamma - \pi/2,\ \gamma + \pi/2]\},$$

где γ — корень уравнения

$$\operatorname{tg} \gamma = -\alpha,\ \gamma \in (-\pi/2,\ \pi/2). \tag{1}$$

Для $E \subset \mathbf{C}$ обозначим через $H(E)$ множество всех голоморфных на E функций.

Переходя к формулировке полученных результатов, приведем сперва результаты о целых функциях, определяемых *лакунарными* степенными рядами.

Рассмотрим произвольной степенной ряд, определяющий целую функцию

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n,\ \lim_{n\to\infty} |f_n|^{1/n} = 0. \tag{2}$$

Последовательности коэффициентов этого ряда сопоставим (ср. с [8], стр. 124) *мажорантную функцию ряда:* наибольшую неотрицательную на $[0, +\infty)$ и выпуклую функцию $\psi(x) = \psi(x;\ \{f_n\})$ такую, что

$$\log^- |f_n| \leqslant -\psi(n) \text{ при } n = 0,\ 1, \cdots.$$

С учетом условия (2) имеем, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} = +\infty. \tag{3}$$

Пусть $Q = \{q_n\}_1^\infty$ — подпоследовательность натуральных чисел, $E(Q)$—класс всех целых функций, каждая из которых определяется степенным рядом вида (2), для которого $f_n = 0$ для всех $n \overline{\in} Q \cup \{0\}$. Обозначим также

$$Q(r) = \sum q_n^{-1} \text{ для } q_n \in (0,\ r],\ r \geqslant 1. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть ψ—неотрицательная на $[0, +\infty)$ и выпуклая функция, удовлетворяющая условию (3). Для того чтобы каждая функция класса $E(Q)$, определяемая рядом (2) с*

$$|f_n| = O(e^{-\psi(n)}) \text{ при } n \to \infty \tag{5}$$

и ограниченная на Δ_β^α при некоторых $\alpha \in \mathbf{R}$ и $\beta \in [0,\ 2\pi)$, была константой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\varliminf_{r\to+\infty} \left\{ Q(r) - \frac{\beta}{2\pi} \log r - \frac{1+\alpha^2}{2r} \psi(r) \right\} = -\infty. \tag{6}$$

Выделим несколько прозрачных случаев теоремы 1 (см. [7]).

Следствие 1.1. *Для того чтобы каждая функция класса $E(Q)$, ограниченная на Δ_β^α при некоторых $\alpha \in \mathbf{R}$ и $\beta \in [0,\ 2\pi)$, была константой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\varliminf_{r\to+\infty}\left\{Q(r)-\frac{\beta}{2\pi}\log r\right\}<+\infty. \qquad (7)$$

Следствие 1.2. *Для того чтобы каждая функция класса $E(Q)$ конечного порядка $\leqslant\rho_1$, ограниченная на Δ_β^α при некоторых $\alpha\in\mathbf{R}$ и $\beta\in[0,2\pi)$, была константой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{Q(r)}{\log r}<\frac{\beta}{2\pi}+\frac{1+\alpha^2}{2\rho}. \qquad (8)$$

Для числа $\rho\in(0,+\infty)$ целую функцию f отнесем к классу E^ρ, *если*

$$\log|f(z)|=O(|z|^\rho) \text{ при } |z|\to+\infty.$$

Следствие 1.3. *Для того чтобы каждая функция класса $E(Q)\cap E^\rho$, ограниченная на Δ_β^α при некоторых $\alpha\in\mathbf{R}$ и $\beta\in[0,2\pi)$, была константой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\varliminf_{r\to+\infty}\left\{Q(r)-\left(\frac{\beta}{2\pi}+\frac{1+\alpha^2}{2\rho}\right)\log r\right\}=-\infty.$$

Теорема 1 и ее следствия обобщают и усиливают ряд предшествовавших им результатов. Частным случаем следствия 1.1, когда $\alpha=\beta=0$ и, значит, $\Delta_\beta^\alpha=[0,+\infty)$, является известный результат А. Макинтайра [2]. Для более общего случая этого же следствия, когда лишь $\alpha=0$, необходимость условия (7) установлена в работе Дж. Андерсона [5]; там же предложено достаточное условие, получающееся заменой в условии (7) нижнего предела на верхний предел. Частным случаем следствия 1.2, когда $\alpha=\beta=0$, является результат А. Эдрея [4]. Достаточность следствия 1.3 в случае, когда $\alpha=0$, установлена М. М. Джрбашяном ([3], стр. 510, теорема 7). Отметим еще, что частный случай теоремы 1, когда $\alpha=\beta=0$, установлен в работе [6] Дж. Андерсона и К. Бинмора.

Теорема 1 в части достаточности, когда $\alpha=0$, допускает существенное усиление за счет использования более тонкой, чем лакунарность, характеристики для тейлоровских коэффициентов целой функции. Для степенного ряда (2) положим $f_n=|f_n|e^{i\omega_n}$ для $n=0,1,\cdots$, где $|\omega_{n+1}-\omega_n|\leqslant\pi$, и обозначим

$$N(r)=\sum\frac{|\omega_{n+1}-\omega_n|}{\pi n} \text{ для } n\in(0,r],\ r\geqslant1. \qquad (9)$$

Теорема 2. *Пусть ψ—неотрицательная на $[0,+\infty)$ и выпуклая функция, удовлетворяющая условию (3). Тогда произвольная целая функция, ограниченная на Δ_β при некотором $\beta\in[0,2\pi)$ и определяемая рядом (2), удовлетворяющим оценке (5) и условию*

$$\varliminf_{r\to+\infty}\left\{N(r)-\frac{\beta}{2\pi}\log r-\frac{1}{2r}\psi(r)\right\}=-\infty, \qquad (10)$$

будет константой.

Следствие 2.1. *Пусть целая функция ограничена на Δ_β при некотором $\beta\in[0,2\pi)$ и определяется рядом (2), удовлетворяющим условию*

$$\varliminf_{r\to+\infty}\left\{N(r)-\frac{\beta}{2\pi}\log r\right\}<+\infty. \tag{11}$$

Тогда она будет константой.

Следствие 2.2. *Пусть целая функция конечного порядка* $\leqslant\rho$ *ограничена на* Δ_β *при некотором* $\beta\in[0,2\pi)$ *и определяется рядом* (2), *удовлетворяющим условию*

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{N(r)}{\log r}<\frac{\beta}{2\pi}+\frac{1}{2\rho}. \tag{12}$$

Тогда она будет константой.

Следствие 2.3. *Пусть целая функция класса* E^ρ *ограничена на* Δ_β *при некотором* $\beta\in[0,2\pi)$ *и определяется рядом* (2), *удовлетворяющим условию*

$$\varliminf_{r\to+\infty}\left\{N(r)-\left(\frac{\beta}{2\pi}+\frac{1}{2\rho}\right)\log r\right\}=-\infty. \tag{13}$$

Тогда она будет константой.

Из теоремы 2 видно, что аргументы ω_n целесообразно выбрать таким образом, чтобы суммы вида (9) имели по возможност минимальное значение. Следующий индуктивный выбор последовательности $\{\omega_n\}_0^\infty$ обеспечивает такую минимальность. Положим $\omega_{-1}=0$. Если $f_{n+1}=0$, то полагаем $\omega_{n+1}=\omega_n$; если же $f_{n+1}\neq0$, то ω_{n+1} — значение $\arg f_{n+1}$ из полуинтервала $[-\pi+\omega_n,\ \pi+\omega_n)$.

Для фиксированных таким образом аргументов ω_n сумма (9) зависит лишь от тех ω_n, для которых $f_n\neq0$. Запишем ряд (2) в виде

$$f_0+\sum_{n=1}^{\infty}f_{q_n}z^{q_n},\ \lim_{n\to\infty}|f_{q_n}|^{1/q_n}=0,$$

где все $f_{q_n}\neq0$. Тогда вместо (9) величину $N(r)$ можно определить формулой

$$N(r)=\sum\frac{1}{\pi q_n}|\omega_{q_{n+1}}-\omega_{q_n}|=\sum\frac{1}{\pi q_n}\left|\arg\left(\frac{f_{q_n}}{f_{q_{n+1}}}\right)\right|,\ q_n\in(0,r],\ r\geqslant1,$$

где значение аргумента arg выбирается из промежутка $[-\pi,\pi)$. Теперь уже очевидно, что теорема 2 и ее следствия 2.1—2.3 соответственно усиливают теорему 1 и следствия 1.1—1.3 в части достаточности, когда $\alpha=0$.

Из теоремы 2 (при указанном способе выбора аргументов ω_n) выводятся также результаты о существовании нетривиальных целых функций, определяемых вещественными степенными рядами, т. е. рядами вида (2) с коэффициентами $\{f_n\}_0^\infty\subset\mathbf{R}$.

Последовзтельность $\{\nu_n\}_1^\infty\subset\mathbf{N}$ назовем *последовательностью мест перемен знака* вещественного степенного ряда (2), если

$$f_{\mu_n}\cdot f_{\nu_n}<0 \text{ при } n=1,2,\cdots,$$

где μ_n — наибольший из тех индексов $\lambda\in(0,\nu_n)$, для которых $f_\lambda\neq0$. Функцию, соответствующую по формуле (4) последовательности $\{\nu_n\}_1^\infty$ мест перемен знака вещественного ряда (2), будем обозначать через $Q^*(r)$.

Теорема 3. *Пусть ψ—неотрицательная на $[0,+\infty)$ и выпуклая функция, удовлетворяющая условию* (3). *Для того чтобы каждая целая функция, ограниченная на Δ_β при некотром $\beta \in [0,2\pi)$ и определяемая вещественным рядом* (2), *удовлетворяющим оценке* (5) *и имеющим наперед заданную последовательность $\{\nu_n\}_1^\infty$ мест перемен знака, была константой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (10) *с заменой $N(r)$ на $Q^*(r)$.*

Приведем несколько наглядных следствий теоремы 3 (см. [7]).

Следствие 3.1. *Для того чтобы каждая целая функция, определяемая вещественным рядом* (2) *с наперед заданной последовательностью $\{\nu_n\}_1^\infty$ мест перемен знака и ограниченная на Δ_β при некотором $\beta \in [0,2\pi)$, была константой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (11) *с заменой $N(r)$ на $Q^*(r)$.*

Следствие 3.2. *Для того чтобы каждая целая функция конечного порядка $\leqslant\rho$, определяемая вещественным рядом* (2) *с наперед заданной последовательностью $\{\nu_n\}_1^\infty$ мест перемен знака и ограниченная на Δ при некотором $\beta \in [0,2\pi)$, была константой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (12) *с заменой $N(r)$ на $Q^*(r)$.*

Следствие 3.3. *Для того чтобы каждая целая функция класса E^ρ, определяемая вещественным рядом* (2) *с наперед заданной последовательностью $\{\nu_n\}_1^\infty$ мест перемен знака и ограниченная на Δ_β при некотором $\beta\in [0, 2\pi)$, была константой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (13) *с заменой $N(r)$ на $Q^*(r)$.*

Отметим, что частный случай следствий 3.1 и 3.2, когда $\beta=0$, установлен А. Эдреем [4].

§ 2. Вспомогательные леммы

Ниже и в дальнейшем мы используем общепринятые теоретикомножественные обозначения. В частности, для множества $e\subset\mathbf{C}$ его граница, замыкание, внутренность и дополнение, соответственно, будут обозначаться через ∂e, $\bar{e}$, e^0 и e^c $(\mathbf{C}\setminus e)$.

Укажем здесь же необходимые нам свойства выпуклых функций (см., напр., [9], стр. 205). Пусть $t\to\psi(t)$—выпуклая функция на $[0,+\infty)$. Она непрерывна на $(0,+\infty)$ и полунепрерывна сверху на $[0, +\infty)$, в каждой точке из $(0,+\infty)$ существуют конечные левая и правая производные ψ'_- и ψ'_+, являющиеся неубывающими функциями, причем $\psi'_-\leqslant\psi'_+$ и для любых $t_2 > t_1>0$ выполняются неравенства

$$\psi'_+ (t_1)\leqslant \frac{\psi(t_2)-\psi(t_1)}{t_2-t_1}\leqslant \psi'_- (t_2). \qquad (14)$$

Из (14) легко следует, что $t\to t^{-1}[\psi(t) - \psi(0)]$ — неубывающая функция на $(0, +\infty)$, причем

$$t^{-1}[\psi(t)-\psi(0)]\leqslant \psi'_-(t) \text{ для } t>0.$$

Лемма 1. *Если степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \qquad (15)$$

определяет целую функцию, ограниченную на Δ_β^* *при некоторых* $\alpha \in \mathbf{R}$ *и* $\beta \in [0, 2\pi)$, *то существует функция* $\varphi \in H(\Pi_\alpha^0)$, *удовлетворяющая условиям*

$$\varphi(n) = (-1)^n f_n \text{ при } n = 1, 2, \cdots \tag{16}$$

и оценке

$$|\varphi(z)| \leqslant C(x - \alpha y) \exp\left\{\left(\pi - \frac{\beta}{2}\right)|y| - \psi(x - \alpha y)\right\} \text{ для } z = x + iy \in S_\alpha, \tag{17}$$

где ψ — *мажорантная функция ряда* (15), *а константа* $C > 0$ *не зависит от* z.

Доказательство. Для $\theta \in [-\pi, \pi]$ и $r \geqslant 0$ рассмотрим кривую $\gamma_r = \gamma_{r,\theta}$ (дугу логарифмической α-спирали), заданную уравнением

$$\zeta = t \exp(i\alpha \log t + i\theta), \; t \in [r, +\infty), \tag{18}$$

и пусть $\gamma_r^- = \gamma_{r,\theta}^-$ —кривая, противоположно ориентированная с $\gamma_r = \gamma_{r,\theta}$.

Зафиксируем кривую $\gamma_r = \gamma_{r,\pi}$, задаваемую уравнением (18) при $\theta = \pi$, и рассмотрим область $\Omega_r = (\gamma_r \cup \overline{D}_r)^c$. Пусть Γ_r означает отрицательно ориентированную границу Ω_r.

В предположениях леммы степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n \zeta^n \tag{19}$$

определяет целую функцию f, удовлетворяющую неравенству

$$|f(\zeta)| \leqslant M \text{ для } \zeta \in \Delta_\beta^*(\pi), \tag{20}$$

где $M > 0$ — некоторая константа, $\Delta_\beta^*(\pi) = \{\zeta : |\arg \zeta - \pi - \alpha \log|\zeta|| \leqslant \beta/2\}$.

Пусть $\zeta \to \log \zeta = \log|\zeta| + i \arg \zeta$ — такая однозначная ветвь логарифма в Ω_0, что

$$-\pi < \arg \zeta - \alpha \log |\zeta| < \pi,$$

с непрерывным продолжением на $\gamma_0 \setminus \{0\}$ сверху и снизу. Полагая

$$\zeta^w = \exp(w \log \zeta) \text{ для } w \in \mathbf{C},$$

определим искомую функцию φ формулой

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_r} \zeta^{-z-1} f(\zeta)\, d\zeta, \; z \in \Pi_\alpha^0. \tag{21}$$

Отметим сперва, что интеграл (21) не зависит от $r\,(>0)$ ввиду голоморфности подынтегральной функции по $\zeta \in \Omega_0$. Его локально равномерная по $z \in \Pi_\alpha^0$ сходимость обеспечивается выполнением (20) для $\zeta \in \gamma_0 \subset \Delta_\beta^*(\pi)$. Итак, функция $\varphi \in H(\Pi_\alpha^0)$. Далее, для натуральных значений z интеграл в (21) превращается в формулу Коши для коэффициентов степенного ряда (19), так что условия (16) выполняются.

Для оценки функции φ на полуплоскости S_α нам необходимо подходящим образом деформировать контур Γ_r в (21). С этой целью рассмотрим область $D_r^\beta = D_r \cup (\Delta_\beta^*(\pi))^0$. Пусть Γ_r^β— положительно ориентированная граница D_r^β. Для фиксированной точки $z\in\Pi_\alpha^0$ подынтегральная функция в (21) голоморфна по ζ в области $D_r^\beta\cap\Omega_{r/2}$, непрерывно продолжается на ее границу, состоящую из Γ_r^β и $\Gamma_{r/2}$, и с учетом (20) достаточно быстро убывает к нулю при $\zeta\to\infty$. Применение интегральной теоремы Коши позволяет поэтому заменить в (21) контур интегрирования Γ_r через Γ_r^β.

Заметив, что $\Gamma_r^\beta=\gamma_{r,\theta}\cup\gamma^-_{r,-\theta}\cup l_r^\beta$, где $\theta=\pi-\beta/2$, $l_r^\beta=\partial D_r\setminus(\Delta_\beta^*(\pi))^0$ с индуцированной из Γ_r^β ориентацией, представим интеграл из (21) в виде суммы интегралов I_1, I_2 и I_3, соответственно, по трем указанным кривым. Полагая $z\in S_\alpha$ ($z=x+iy$, $x-\alpha y\geqslant 2^{-1}$), $c=\sqrt{1+\alpha^2}$ и учитывая (18) и (20), при произвольном $r>0$ имеем

$$|I_1|+|I_2|\leqslant cMe^{(\pi-\beta/2)|y|}\int_r^{+\infty} t^{\alpha y-x-1}\,dt\leqslant 2cMe^{(\pi-\beta/2)|y|}\,r^{\alpha y-x}.$$

Следовательно, приходим к оценке: для $z\in S_\alpha$ и при любом $r>0$

$$|\varphi(z)|\leqslant 2cMe^{(\pi-\beta/2)|y|}\,r^{\alpha y-x}+|I_3| \tag{22}$$

Обратимся к оценке интеграла I_3. Учитывая (21), почленным интегрированием ряда (19) на l_r^β получим, что для $z\in\mathbf{C}$ и при произвольном $r>0$

$$I_3=\pi^{-1}\,r^{-z(1+i\alpha)}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f_n r^{n(1+i\alpha)}\,\frac{\sin[(\pi-\beta/2)(n-z)]}{n-z}.$$

Отсюда, с учетом оценки

$$\left|\frac{\sin[(\pi-\beta/2)\,w]}{w}\right|\leqslant C_\beta\frac{\exp[(\pi-\beta/2)|\mathrm{Im}\,w|]}{1+|w|},\quad w\in\mathbf{C},$$

и неравенств $|f_n|\leqslant e^{-\psi(n)}$ при $n\geqslant n_0$, для $z\in\mathbf{C}$ ($z=x+iy$) и при любом $r>0$ имеем

$$|I_3|\leqslant\pi^{-1}\,C'_\beta\,e^{(\pi-\beta/2)|y|}\cdot\sum\nolimits_1, \tag{23}$$

где

$$\sum\nolimits_1=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\psi(n)}\,r^{n+\alpha y-x}\,\frac{1}{1+|x-n|}.$$

Нам необходимо оценить сумму $\sum_1$ для $z\in S_\alpha$ при подходящем выборе величины $r>0$ в зависимости от z. С этой целью для каждого $z\in S_\alpha$ выберем $r=r_z>0$, удовлетворяющим условию

$$\log r_z=\psi'_-(x-\alpha y)-\frac{1}{x-\alpha y+1}.$$

Докажем теперь оценку

$$\sum\nolimits_1\leqslant C_1(x-\alpha y)\exp(-\psi(x-\alpha y))\quad\text{для } z\in S_\alpha,\ r=r_z, \tag{24}$$

где константа $C_1>0$ не зависит от z. В самом деле, легко видеть, что функция $t\to-\psi(t)+(t+\alpha y-x)\log r_z+\log(t+1)$ достигает на $[0,+\infty)$ своего максимума в точке $t=x-\alpha y$. Следовательно, имеем

$$\sum_1 \leqslant e^{-\psi(x-\alpha y)+\log(x-\alpha y+1)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(1+|x-n|)},$$

откуда вытекает (24).

Таким образом, сравнивая (23) и (24), получим

$$|I_3| < C_2(x-\alpha y)\exp\{(\pi-\beta/2)|y| - \psi(x-\alpha y)\} \text{ для } z\in S_\alpha,\ r=r_z, \quad (25)$$

где константа $C_2 > 0$ не зависит от z.

Аналогичная (25) оценка при указанном выше выборе величины $r=r_z$ выполняется также для первого слагаемого из (22), если с учетом (14) заметить, что

$$r_z^{\alpha y-x} \leqslant e^{(y\alpha-x)\psi'_-(x-\alpha y)+1} \leqslant e^{-\psi(x-\alpha y)+\psi(0)+1},\ z\in S_\alpha.$$

Следовательно, положив в правой части (22) $r=r_z$, с учетом (25), получим требуемую оценку (17). Лемма доказана.

Частным обращением леммы 1 является следующая

Лемма 2. *Если при некоторых* $\alpha\in\mathrm{R}$ *и* $\beta\in[0,2\pi)$ *функция* $\varphi\in H(\Pi_\alpha)$ *удовлетворяет оценке*

$$|\varphi(z)| \leqslant C\exp\left\{\left(\pi-\frac{\beta}{2}\right)|y| - \psi(x-\alpha y)\right\} \text{ для } z=x+iy\in\Pi_\alpha, \quad (26)$$

где ψ*—неотрицательная на* $[0,+\infty)$ *функция, удовлетворяющая условию* (3), *а константа* $C>0$ *не зависит от* z, *то ряд вида* (15) *с*

$$f_n = \frac{(-1)^n}{(1+n)^2}\varphi(n) \text{ при } n=1,2,\cdots \quad (27)$$

определяет целую функцию, ограниченную на Δ_β^α.

Доказательство. Из (27) и оценки (26) при $y=0$ с учетом условия (3) следует, что $|f_n|^{1/n}\to 0$ при $n\to\infty$, так что степенной ряд (15) определяет целую функцию f. Ее ограниченность на Δ_β^α усматривается из одного интегрального представления рядов вида (15), систематически использовавшемся Э. Линделефом (см. [10]).

Пусть L означает положительно ориентированную границу полуплоскости Π_α. Для натуральных m положим

$$G_m = \Pi_\alpha^0 \cap D_{m+0,5},\ \gamma_m = \partial G_m \cap \partial D_{m+0.5},$$

ориентировав γ_m положительно относительно G_m.

Докажем, что ряд (15) представляется формулой

$$f(z) = f_0 + \int_L \frac{\varphi(\zeta)(-z)^\zeta\, d\zeta}{(1+\zeta)^2(e^{2\pi i\zeta}-1)} \text{ для } z\in\Delta_\beta^\alpha\setminus\{0\}. \quad (28)$$

Предварительно нам необходимо оценить рост подынтегральной функции $g(\zeta, z)$ в (28) не только при $\zeta\in L$, но и из Π_α. С этой целью положим $\zeta=\xi+i\eta=te^{i\theta}$ и заметим сначала, что для $z\in\Delta_\beta^\alpha\setminus\{0\}$ и $\zeta\in\Pi_\alpha$ имеем

$$|(-z)^\zeta| \leqslant \exp\{(\xi-\alpha\eta)\log|z| + |\tau(z)|\,|\eta| - \pi\eta\}, \quad (29)$$

где $\tau(z)=\arg z-\alpha\log|z|$, а $\arg z$ — непрерывная ветвь аргумента в Δ_β^α такая, что $\arg 1=0$.

Выберем теперь константу $\rho\in(0,2^{-1})$ так, чтобы $D_\rho(n)\subset\Pi_\alpha^0$ для всех $n\in\mathbf{N}$ и найдем для нее такую константу $b>0$, что

$$|e^{2\pi i\zeta}-1|>b^{-1}\exp(\pi|\eta|-\pi\eta),\ \zeta\in\mathbf{C}\diagdown\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}D_\rho(n). \tag{30}$$

Из (26), (19) и (30) получим необходимую оценку

$$|g(\zeta,z)|\leqslant\frac{bC}{|1+\zeta|^2}\exp[(\xi-\alpha\eta)\log|z|-\psi(\xi-\alpha\eta)+d(z)|\eta|], \tag{31}$$

где

$$\zeta\in\Pi_\alpha\diagdown\bigcup_{n=1}^{\infty}D_\rho(n),\ z\in\Delta_\beta^\alpha\diagdown\{0\},\ d(z)=|\tau(z)|-\beta/2\leqslant 0.$$

Поскольку $\xi=\alpha\eta$ для $\zeta\in L$, мы из (31) получим оценку

$$|g(\zeta,z)|\leqslant\frac{C_1}{|1+\zeta|^2}\ \text{для}\ \zeta\in L,\ z\in\Delta_\beta^\alpha\diagdown\{0\},$$

где C_1—константа, откуда очевидно следует сходимость и ограниченность на $\Delta_\beta\diagdown\{0\}$ интеграла в (28). Чтобы вычислить этот интеграл зафиксируем $z\in\Delta_\beta^\alpha\diagdown\{0\}$ и заметим, что оценка (31) с учетом (3) влечет условие

$$\int_{\gamma_m}g(\zeta,z)\,d\zeta\to 0\ \text{при}\ m\to+\infty.$$

Следовательно, применяя к функции $g(\zeta,z)$ и области G_m теорему о вычетах с последующим предельным переходом при $m\to+\infty$, получим формулу (28). Лемма полностью доказана.

Отметим, что упрощенные варианты лемм 1 и 2, когда влияние мажорантной функции ψ не учитывалось, были приведены в [7]. Эти леммы, представляя самостоятельный интерес, позволяют (см. ниже § 3) свести некоторые вопросы о существовании ограниченных на Δ_β^α нетривиальных целых функций к вопросам существования функций $\varphi\in H(\Pi_\alpha^0)$, интерполирующих на $\mathbf{N}$ коэффициенты их рядов (2). Толчком к их установлению послужила работа Н. У. Аракеляна [11], в которой подобная интерполяция *целыми функциями* успешно применена к решению некоторых классических проблем об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов.

§ 3. Доказательства

Доказательство теоремы 1. Достаточность. Пусть $f\in E(Q)$ ограничена на Δ_β^α и определяется рядом (2), удовлетворяющим оценке (5). Докажем, что $f\equiv const$ при выполнении условия (6).

Предположим, что $f\not\equiv$ const. Построим соответствующую ряду (2) по лемме 1 функцию $\varphi=\varphi_f$. Поскольку $f\not\equiv$ const, то $\varphi\not\equiv 0$ на S_α. Применим к функции φ и полуплоскости S_α формулу Т. Карлемана (см. [12], стр. 291). Обозначив через $\{p_n\}_1^\infty$ подпоследовательность, дополнительную к $\{q_n\}_1^\infty$ относительно всех натуральных чисел, и выбрав γ удовлетворяющим (1), из этой формулы с учетом (16) будем иметь

$$\cos\gamma\cdot\sum_{p_n\in I}(p_n-2^{-1})^{-1}\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_1^r(t^{-2}-r^{-2})\log\left|\varphi(-ite^{i\gamma}+2^{-1})\,\varphi(ite^{i\gamma}+\right.$$

$$\left.+2^{-1})\right|dt+\frac{1}{\pi r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\log|\varphi(re^{i(\theta+\gamma)}+2^{-1})|\cos\theta d\theta+B_1(r),\tag{32}$$

где $I=(0,\ r+2^{-1})$ и $B_1(r)=O(1)$ при $r\to+\infty$.

Заметим сперва, что для последовательности $\{q_n\}_1^\infty\subset\mathrm{N}$ имеем

$$\sum_{p_n\in I}(p_n-2^{-1})^{-1}=\log r-Q(r)+O(1)\ \text{при}\ r\to+\infty.\tag{33}$$

Далее, с помощью оценки (17) легко оцениваются интегралы справа в (32): они, соответственно, не превосходят величин $(1-\beta/2\pi)\cos\gamma\log r+B_2(r)$,

$$-\frac{1}{\pi r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\psi(\sqrt{1+\alpha^2}\,r\cos\theta+2^{-1})\cos\theta d\theta+B_3(r),\tag{34}$$

где $B_i(r)=O(1)$ при $r\to+\infty$, $i=2,3$.

Однако, с учетом (14) функция $t\to t^{-1}[\psi(t)-\psi(0)]$ не убывает на $(0,+\infty)$, так что, используя это и применяя неравенство Иенсена (см. [13], часть 1, отдел 2, глава 2, № 75), будем иметь

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\psi(\sqrt{1+\alpha^2}\,r\cos\theta+2^{-1})\cos\theta d\theta\geqslant\sqrt{1+\alpha^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\psi\left(r\cos\theta+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\sqrt{1+\alpha^2}}\right)\cos\theta d\theta+2(1-\sqrt{1+\alpha^2})\,\psi(0)\geqslant$$

$$\geqslant2\sqrt{1+\alpha^2}\,\psi\left(\frac{\pi}{4}r+\frac{1}{2\sqrt{1+\alpha^2}}\right)+2(1-\sqrt{1+\alpha^2})\,\psi(0).\tag{35}$$

Следовательно, из (32), разделив обе его части на $\cos\gamma=1/\sqrt{1+\alpha^2}$, с учетом (33)—(35), получим оценку

$$Q(r)-\frac{\beta}{2\pi}\log r-\frac{2(1+\alpha^2)}{\pi r}\,\psi\left(\frac{\pi}{4}r+\frac{1}{2\sqrt{1+\alpha^2}}\right)\geqslant O(1)\ \text{при}\ r\to+\infty.$$

Из приведенной оценки, заменяя в ней r через $\frac{4}{\pi}r - \frac{2}{\pi\sqrt{1+\alpha^2}}$ и учитывая, что

$$Q\left(\frac{4}{\pi}r - \frac{2}{\pi\sqrt{1+\alpha^2}}\right) - Q(r) = O(1) \text{ при } r \to +\infty,$$

окончательно найдем

$$Q(r) - \frac{\beta}{2\pi}\log r - \frac{1+\alpha^2}{2r}\psi(r) \geqslant O(1) \text{ при } r \to +\infty. \tag{36}$$

Таким образом, наше предположение о том, что $f \not\equiv \mathrm{const}$, приводит к оценке (36) и остается отметить, что последняя представляет собой отрицание условия (6). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть последовательность $\{q_n\}_1^\infty$ не удовлетворяет условию (6) и, значит, дополнительная к ней относительно $\mathbf{N}$ последовательность $\{p_n\}_1^\infty$ удовлетворяет условию

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\left\{P(r) - \left(1-\frac{\beta}{2\pi}\right)\log r + \frac{1+\alpha^2}{2r}\psi(r)\right\} < +\infty, \tag{37}$$

где функция $P(r)$ соответствует последовательности $\{p_n\}_1^\infty$ по формуле (4).

Построим нетривиальную и ограниченную на Δ_β^α функцию класса $E(Q)$, для которой коэффициенты определяющего ее ряда (2) удовлетворяют оценке (5).

В силу леммы 2 достаточно построить функцию $\varphi \in H(\Pi_\alpha)$ удовлетворяющую оценке (26) и такую, что

$$\varphi(p_n) = 0,\ \varphi(q_n) \neq 0 \text{ при } n = 1, 2, \cdots. \tag{38}$$

С этой целью зафиксируем $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$ и рассмотрим функцию

$$h_\gamma(\zeta) = \prod_{n=1}^\infty \frac{p_n - \zeta e^{i\gamma}}{p_n + \zeta e^{i\gamma}} \exp\left(\frac{2\zeta}{p_n}\cos\gamma\right).$$

Как отношение двух канонических произведений рода один функция $h_\gamma \in H(\Pi)$ и обращается в нуль только в точках $p_n e^{-i\gamma}$, $n = 1, 2, \cdots$. Кроме того, рассуждая аналогично (см. [14], стр. 159) известному случаю, когда $\gamma = 0$, для h_γ получаем оценку

$$|h_\gamma(\zeta)| < \exp\{2\cos\gamma\, P(|\zeta|)\operatorname{Re}\zeta + C_1\operatorname{Re}\zeta\} \text{ для } \zeta \in \Pi, \tag{39}$$

где C_1 — некоторая константа.

Выберем теперь параметр γ удовлетворяющим (1) и пусть $\zeta \to \log(1+\zeta) = \log|1+\zeta| + i\arg(1+\zeta)$ — такая однозначная на Π ветвь логарифма, что $\arg 1 = 0$. Определим искомую функцию φ следующим образом:

$$\varphi(z) = h_\gamma(ze^{-i\gamma})\exp\{-2(1-\beta/2\pi)\cos\gamma\, ze^{-i\gamma}\log(1+ze^{-i\gamma})\} \text{ для } z \in \Pi_\alpha.$$

Из определения φ с учетом (1) очевидно, что $\varphi \in H(\Pi_\alpha)$ и удовлетворяет условиям (38). Чтобы доказать для φ оценку (26), заметим, что из (39) с учетом (1) следует оценка

$$|\varphi(z)| \leqslant \exp\{(\pi - \beta/2)|y| + \varepsilon(|z|)(x - \alpha y)\} \text{ для } z = x = iy \in \Pi_\alpha, \quad (40)$$

где

$$\varepsilon(r) = 2\,[P(r) - (1-\beta/2\pi)\log r]\cos^2\gamma + O(1) \text{ при } r \to +\infty.$$

Однако, заменяя в условии (37) r через $r\sqrt{1+\alpha^2}$ и учитывая, что $P(r\sqrt{1+\alpha^2}) - P(r) = O(1)$ при $r \to +\infty$, будем иметь

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\left\{P(r) - (1-\beta/2\pi)\log r + \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{2r}\psi(r\sqrt{1+\alpha^2})\right\} < +\infty.$$

Следовательно, из (40) получим оценку

$$|\varphi(z)| \leqslant C_2 \exp\left\{(\pi - \beta/2)|y| - \frac{\psi(|z|\sqrt{1+\alpha^2})}{|z|\sqrt{1+\alpha^2}}(x - \alpha y)\right\} \text{ для } z\in\Pi_\alpha,$$

где $C_2>0$—некоторая константа, и остается отметить, что она влечет оценку (26), поскольку $x - \alpha y \leqslant |z|\sqrt{1+\alpha^2}$ и функция $t \to t^{-1}[\psi(t) - \psi(0)]$ не убывает на $(0, +\infty)$. Необходимость доказана.

Доказательство следствия 1.1. Легко видеть, что условие (7) равносильно выполнению (6) для любой неотрицательной на $[0, +\infty)$ функции ψ, для которой справедливо (3) и $t^{-1}[\psi(t) - \psi(0)]$ не убывает на $(0, \infty)$. Следовательно, достаточность следствия 1.1 вытекает из достаточности теоремы 1, примененной к произвольной ограниченной на Δ_β^α функции класса $E(Q)$ и мажорантной функции ψ определяющего ее ряда (2), а ее необходимость доказывается аналогично доказательству необходимости теоремы 1.

Доказательство следствия 1.2. Легко видеть, что условие (8) равносильно существованию такого числа $\varepsilon_0>0$, что условие (6) удовлетворяется для функции вида $\psi(t) = (\rho+\varepsilon_0)^{-1} t\log t$, $t\geqslant 1$. Следовательно, учитывая, что для произвольной целой функции конечного порядка $\geqslant\rho$ коэффициенты определяющего ее ряда (2) при любом фиксированном $\varepsilon>0$ удовлетворяют оценке

$$|f_n| = O\left(\exp\left(-\frac{n\log n}{\rho+\varepsilon}\right)\right) \text{ при } n \to +\infty, \quad (41)$$

можем заключить, что из достаточности теоремы 1, примененной для функции ψ указанного выше вида с надлежаще выбранным $\varepsilon_0>0$, вытекает достаточность следствия 1.2.

Чтобы доказать необходимость следствия 1.2, отметим, что отрицание условия (8) означает, что при любом $\varepsilon>0$ не удовлетворяется условие (6) для функции вида $\psi(t) = (\rho+\varepsilon)^{-1} t\log t$, $t>1$. Следовательно, в этом случае функция, построенная при доказательстве необходимости теоремы 1, будет ограниченной на Δ_β^α и нетривиальной функцией класса $E(Q)$, а коэффициенты определяющего ее ряда (2) при любом фиксированном $\varepsilon>0$ удовлетворяют оценке (41). Теперь остается отметить, что из (41) с учетом произвольности $\varepsilon>0$ следует, что порядок указанной функции не превосходит ρ.

Доказательство следствия 1.3. Принадлежность функции классу E^ρ в терминах коэффициентов определяющего ее ряда (2) выражается оценкой

$$|f_n| = O\left(\exp\left(-\frac{n\log n}{\rho}\right)\right) \text{ при } n \to +\infty,$$

так что следствие 1.3 вытекает из теоремы 1 при выборе $\psi(t) = \rho^{-1} t \log t,\ t \geqslant 1$.

Доказательство теоремы 2. Пусть целая функция f ограничена на Δ_3 и определяется рядом (2), удовлетворяющим оценке (5) и условию (10). Докажем, что $f \equiv \mathrm{const}$.

Предположим, что $f \not\equiv \mathrm{const}$. Тогда среди коэффициентов $\{f_n\}_1^\infty$ ряда (2) найдутся ненулевые. Положим f_m, $m \geqslant 1$,— первый из них. Применяя к ряду (2) лемму 1 (при $\alpha = 0$), построим соответствующую ему по этой лемме функцию $\varphi = \varphi_f$.

Образуем функцию

$$\varphi(z, \vartheta) = \frac{1}{2}\left[\varphi(z)\, e^{i\vartheta} + \overline{\varphi(\bar z)}\, e^{-i\vartheta}\right],\quad z \in \Pi^0,\ \vartheta \in [0, \pi],$$

голоморфную по z, вещественную при $z \in (0, +\infty)$ и удовлетворяющую с учетом (16) интерполяционным условиям

$$(-1)^j \varphi(j, \vartheta) = \mathrm{Re}\,(f_j e^{i\vartheta}),\ j = 1, 2, \cdots. \tag{42}$$

Ясно, что

$$|\varphi(z, \vartheta)| \leqslant \max(|\varphi(z)|, |\varphi(\bar z)|),\ z \in \Pi^0,\ \vartheta \in [0, \pi]. \tag{43}$$

Далее мы хотим применить к функции $\varphi(z, \theta)$ известную формулу Р. Неванлинны (см. [15], стр. 16). Пусть $G(\zeta, z)$—функция Грина для полукруга $D_r \cap \Pi^0$, $r > 2^{-1}$, с полюсом в точке z. Очевидно имеем

$$g(\zeta) \equiv G(\zeta, 2^{-1}) = \log\left|\frac{\zeta + 2^{-1}}{\zeta - 2^{-1}} \cdot \frac{r^2 - \zeta\cdot 2^{-1}}{r^2 + \zeta\cdot 2^{-1}}\right|. \tag{44}$$

Из этой формулы следует, в частности, что функция $g(\tau)$ возрастает на $(0, 2^{-1})$ и убывает на $(2^{-1}, r)$.

Применяя к функции $\varphi(z + m - 2^{-1}, \vartheta)$ и к полукругу $D_r \cap \Pi^0$ в точке $z = 2^{-1}$ формулу Р. Неванлинны (с учетом (42) при $j = m$), получим оценку

$$\log|\mathrm{Re}\,(f_m e^{i\vartheta})| < -\sum_\nu g(\tau_\nu(\vartheta)) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r} \log|\varphi(it + m - 2^{-1}, \vartheta)| \left\{\frac{1}{|i\cdot 2^{-1} + t|^2} - \frac{r^2}{|r^2 + i\cdot 2^{-1}\cdot t|^2}\right\} dt +$$

$$+\frac{r^2 - 4^{-1}}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log|\varphi(re^{i\theta} + m - 2^{-1}, \vartheta)| \left\{\frac{1}{|re^{i\theta} - 2^{-1}|^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{|re^{-i\theta} + 2^{-1}|^2}\right\} d\theta = -\sum\nolimits_\vartheta + J_{1,\vartheta} + J_{2,\vartheta}, \tag{45}$$

где сумма берется по всем нулям $\tau = \tau_\nu(\vartheta) \in (0, r)$, $\tau \neq 2^{-1}$, функции $\varphi(z + m - 2^{-1}, \vartheta)$ с учетом кратности.

Интегралы $J_{1,\theta}$ и $J_{2,\theta}$ в (45) достаточно просто оцениваются сверху. Заметив, что $it + m - 2^{-1} \in S$ при $t \in [-r, r]$, из (17) и (43), полагая там $z = it + m - 2^{-1}$, $C_1 = \log (C(m - 2^{-1}))$, будем иметь не зависящую от θ оценку

$$J_{1,\theta} < \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^{r} [C_1 + (\pi - \beta/2)|t|] \left\{ \frac{1}{t^2 + 4^{-1}} - \frac{r^2}{r^4 + 4^{-1} t^2} \right\} dt <$$

$$< \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^{r} \frac{C_1 + (\pi - \beta/2)|t|}{t^2 + 4^{-1}} dt = \left(1 - \frac{\beta}{2\pi}\right) \log r + O(1) \text{ при } r \to +\infty. \quad (46)$$

Аналогично, из (17) и (43) с учетом неравенства Иенсена имеем не зависящую от θ оценку

$$J_{2,\theta} \leqslant -\frac{1}{\pi r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \psi (r \cos \theta + m - 2^{-1}) \cos \theta \, d\theta + O(1) <$$

$$< -\frac{2}{\pi r} \psi \left(\frac{\pi}{4} r + m - 2^{-1} \right) + O(1) \text{ при } r \to +\infty. \quad (47)$$

Далее несколько преобразуем и оценим сумму $\sum_\theta$. С этой целью для $\tau \geqslant 0$ обозначим через $w(\tau, \theta)$ число перемен знака (см. [13], часть 2, стр. 48) конечной последовательности $\{\mathrm{Re}(f_j e^{i\theta})\}$ при $j \in [m, m + \tau - 2^{-1}]$, а через $n(\tau, \theta)$ — количество нулей функции $\varphi(z, \theta)$ в этом же промежутке (с учетом кратности). Очевидно, что

$$\sum\nolimits_\theta = \int_0^r g(\tau) \, dn(\tau, \theta)|,$$

откуда, интегрируя по частям и учитывая отмеченное выше свойство монотонности функции $g(\tau)$, получим

$$\sum\nolimits_\theta = \int_0^r [n(\tau, \theta) - n(2^{-1}, \theta)] \, |dg(\tau)|.$$

Применяя лемму 3 из работы [16] к функции $\varphi(z, \theta)$ и к максимальному отрезку I с целыми концами, содержащемуся в открытом промежутке $(m, m + \tau - 2^{-1})$, придем к оценке

$$n(\tau, \theta) - n(2^{-1}, \theta) \geqslant |\tau - 2^{-1}| - w(\tau, \theta) - 2.$$

Применив эту оценку при $\tau \geqslant 1$, получим

$$-\sum\nolimits_\theta \leqslant \int_1^r \left(w(\tau, \theta) - \tau + \frac{5}{2} \right) |dg(\tau)|. \quad (48)$$

Замечая теперь, что с учетом формулы (44) имеем

$$\int_1^r \left(\frac{5}{2}-\tau\right)|dg(\tau)| = -\log r + O(1) \text{ при } r \to +\infty,$$

из (45) с учетом (46)—(48) получим оценку

$$\log|\operatorname{Re}(f_m e^{i\theta})| \leqslant \int_1^r |w(\tau,\theta)|\, |dg| - \frac{\beta}{2\pi}\log r - \frac{2}{\pi r}\psi\left(\frac{\pi}{4}r + m - 2^{-1}\right) + B_1(r), \tag{49}$$

где $B_1(r)$ не зависит от ϑ и $B_1(r) = O(1)$ при $r \to +\infty$.

Разделим обе части неравенства (49) на π и проинтегрируем по ν в пределах от нуля до π. Мы получим оценку

$$\log|2^{-1}\cdot f_m| \leqslant \int_1^r I(\tau)\,|dg(\tau)| - \frac{\beta}{2\pi}\log r - \frac{2}{\pi r}\psi\left(\frac{\pi}{4}r + m - 2^{-1}\right) + B_1(r), \tag{50}$$

где

$$I(\tau) = \pi^{-1}\int_0^\pi w(\tau,\vartheta)\,d\vartheta.$$

Для интегралов такого вида в работе [16] (см. стр. 18) доказана оценка вида

$$I(\tau) \leqslant v(\tau) \equiv \pi^{-1}\cdot\sum_j |\omega_{j+1}-\omega_j|,\ j \in [m, m+\tau-2^{-1}].$$

Поэтому из (50) получим

$$\log|2^{-1}\cdot f_m| \leqslant \int_1^r v(\tau)\,|dg(\tau)| - \frac{\beta}{2\pi}\log r - \frac{2}{\pi r}\psi\left(\frac{\pi}{4}r + m - 2^{-1}\right) + B_1(r). \tag{51}$$

Несколько преобразуем интеграл ($\equiv J$) в (51). Подставляя в нем значение функции $g(\tau)$ по формуле (44) и учитывая (следующую из условия $|\omega_{j+1}-\omega_j| \leqslant \pi$) оценку $v(r) = O(r)$ при $r \to +\infty$, легко видеть, что

$$J = \int_1^r \frac{v(\tau)}{\tau^2}\,d\tau + O(1) \text{ при } r \to +\infty.$$

Отсюда, интегрируя по частям и учитывая определение $v(\tau)$, получим: при $r \to +\infty$

$$J = \sum_j \frac{|\omega_{j+1}-\omega_j|}{\pi j} + O(1),\ j \in [m, m+r-2^{-1}],$$

так что

$$J = N(r) + O(1) \text{ при } r \to +\infty. \tag{52}$$

Из (51) с учетом (52) заключаем, что

$$N(r)-\frac{\beta}{2\pi}\log r-\frac{2}{\pi r}\psi\left(\frac{\pi}{4}r+m-2^{-1}\right)\geqslant O(1)\ \text{при}\ r\to+\infty,$$

откуда, заменяя r на $\frac{4}{\pi}(r-m+2^{-1})$ и учитывая, что

$$N\left(\frac{4}{\pi}(r-m+2^{-1})\right)-N(r)=O(1)\ \text{при}\ r\to+\infty,$$

окончательно найдем:

$$N(r)-\frac{\beta}{2\pi}\log r-\frac{1}{2r}\psi(r)\geqslant O(1)\ \text{при}\ r\to+\infty.$$

Итак, наше предположение о том, что $f\not\equiv\mathrm{const}$, приводят к последней оценке, являющейся отрицанием условия (10). Следовательно, $f\equiv\mathrm{const}$ вещественного ряда (2) при указанном в § 1 способе выбора аргументов и доказательство теоремы завершено.

Следствия 2.1—2.3 выводятся из теоремы 2 точно так же, как выводятся из теоремы 1 соответствующие им следствия 1.1—1.3 в части достаточности.

Доказательство теоремы 3. Достаточность. Утверждение достаточности непосредственно следует из теоремы 2, поскольку для вещественного ряда (2) при указанном в § 1 способе выбора аргументов ω_n очевидно имеем $N(r)=Q^*(r)+\mathrm{const}$, $r\geqslant 1$.

Необходимость. Пусть последовательность $\{\nu_n\}_1^\infty\subset\mathbf{N}$ не удовлетворяет условию (10) с заменой в нем $N(r)$ на $Q^*(r)$ и, значит, дополнительная к ней относительно $\mathbf{N}$ последовательность $\{\mu_n\}_1^\infty$ удовлетворяет условию

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\left\{S(r)-\left(1-\frac{\beta}{2\pi}\right)\log r+\frac{1}{2r}\psi(r)\right\}<+\infty, \tag{53}$$

где $S(r)$ соответствует последовательности $\{\mu_n\}_1^\infty$ по формуле (4). Построим нетривиальную и ограниченную на Δ^β целую функцию, которая определяется вещественным рядом вида (2), удовлетворяющим оценке (5) и имеющим совпадающую с $\{\nu_n\}_1^\infty$ последовательность перемен знака.

Пусть $z\to\log(1+z)=\log|1+z|+i\arg(1+z)$ — такая однозначная на Π ветвь логарифма, что $\arg 1=0$. Образуем функцию

$$\varphi(z)=h(z)\exp\left\{-2\left(1-\frac{\beta}{2\pi}\right)z\log(1+z)\right\},\quad z\in\Pi,$$

где

$$h(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n-2^{-1}-z}{\mu_n-2^{-1}+z}\exp\left(\frac{2z}{\mu_n-2^{-1}}\right).$$

Рассуждая как при доказательстве необходимости теоремы 1, с учетом условия (53), получим, что функция φ удовлетворяет предположениям леммы 2 при $\alpha=0$. Следовательно, соответствующий ей по лемме 2 вещественный ряд вида (2) с $f_0=\varphi(0)$ определяет ограниченную на Δ_β целую функцию, удовлетворяющую оценке (5). Из вида (27) коэффициентов $\{f_n\}_0^\infty$ этого ряда видно, что они все отличны от нуля; более того, обозначая через $n(t)$ количество членов последовательности $\{\mu_n\}_1^\infty$ на отрезке $[0, t]$, будем иметь:

$$\operatorname{sign} f_k = (-1)^{k+n(k+2^{-1})}$$

и, значит

$$\operatorname{sign}(f_k f_{k-1}) = \operatorname{sign}(f_k/f_{k-1}) = (-1)^{1+n(k+2^{-1})-n(k-2^{-1})},$$

откуда следует, что последовательность перемен знака этого же ряда совпадает с последовательностью $\{\nu_n\}_1^\infty$. Необходимость доказана.

Вывод следствий 3.1—3.3 из теоремы 3 вполне аналогичен выводу соответствующих им следствий 1.1—1.3 из теоремы 1.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 23. IX. 1987

Վ. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Միակության թեորեմներ ամբողջ ֆունկցիաների համար իրենց Թեյլորյան գործակիցների տերմիններով *(ամփոփում)*

Ներկա աշխատանքում ընդհանրացվում և ուժեղացվում են [7]-ում ձևակերպված անհրաժեշտ-բավարար բնույթի արդյունքները անկյան վրա սահմանափակ ոչ տրիվիալ ամբողջ ֆունկցիաների գոյության մասին իրենց Թեյլորյան գործակիցների տերմիններով։ Թեյլորյան գործակիցների հաշվի առման տրադիցիոն եղանակների (բացթողումներ, նշանափոխություններ) հետ միասին աշխատանքում, հավանաբար առաջին անգամ դիտարկվող հարցերի շրջանակում, բացահայտ ձևով դրված է այդ գործակիցների արգումենտների ազդեցությունը (տես թեորեմ 2-ը)։

V. A. MARTIROSIAN. *Uniquenees theorems for entlre functions in terms of their Taylor coefficients* (summary)

The present paper generalizes and strengthens the results of [7] of necessary and sufficient nature about exi+tence of bounded within an angle entire functions in terms of their Taylor coefficients.

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. Polya*. Untersuchungen über Iücken und singularitäten von potenzreihen, Math Z., 29, 1929, 549—640.
2. *A. J. Macintyre*. Asymptotic paths of integral functions with gap power series, Proc. London Math. Soc. (3), 2, 1952, 286—296.
3. *М. М. Джрбашян*. Об интегральном представлении и единственности некоторых классов целых функций, Матем. сб., 33(75), № 3, 1953, 485—530.
4. *A. Edrei*. Gap and density theorems for entire functions, Scripta Math., 23. № 1—4, 1957, 117—141.
5. *J. M. Anderson*. Müntz—Szasz type approximation and the angwlar growth of lacunary integral functions, Trans. Amer. Math. Soc., 169, 1972, 237—248.
6. *J. M. Anderson, K. G. Binmore*. On entire functions with gap power series, Glasgow Math. J., 12, part 2, Sept., 1971, 89—97.
7. *В. А. Мартиросян*. О целых функциях, ограниченных на замкнутом угле и представимых степенными рядами с лакунами или с вещественными коэффициентами, ДАН СССР, 29, № 6, 1986, 1301—1304.
8. *Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян*. Локализация особенностей степенных рядов на границе круга сходимости II, Изв. АН Арм.ССР, сер. Матем., 23, № 2, 1988, 123—137.
9. *Л. Шварц*. Анализ, том I, М., Мир, 1972.

10. *E. Lindelöf*. La calcul des residus et ses applications a'la theorie des fonctions, Paris, Gauthier—Villars, 1905.

11. *Н. У. Аракелян*. Об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов, Матем. сб., 124(166), № 1, 1984, 24—44.

12. *Б. Я. Левин*. Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат, 1956.

13. *Г. Полиа, Г. Сегё*. Задачи и теоремы из анализа, части 1, 2, М., ГИТТЛ, 1956.

14. *R. P. Boas*. Entire functions, New—York, Academik Press, 1954.

15. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский*. Распределение значений мероморфных функций, М., Наука, 1970.

16. *Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян*. Локализация особенностей степенных рядов на границе круга сходимости, Изв. АН АрмССР, сер. матем., 22, № 1, 1987, 3—21.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 2, 1989 Математика

УДК 517.95

Э. М. МАДУНЦ, А. Б. НЕРСЕСЯН

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, НЕ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛОПАТИНСКОГО

Введение

Пусть D—плоская односвязная область, Г—её граница. Рассматривается следующая задача: найти дважды непрерывно-дифференцируемое решение эллиптической системы

$$A\,u_{xx}+2\,B\,u_{xy}+C\,u_{yy}+a(z)\,u_x+b(z)\,u_y+c(z)\,u=h(x,\,y),\qquad (1)$$

принадлежащее классу $C^{1,\alpha}(\overline{D})$ и удовлетворяющее граничному условию

$$u|_\Gamma=f,\qquad (2)$$

где $z=x+iy$, u—искомая, а f и h — заданные вещественные вектор-функции. A, B, C — вещественные постоянные матрицы; $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ — вещественные матрицы порядка n. Коэффициенты уравнения (1) и граница Г достаточное число раз дифференцируемы.

Как известно, система (1) называется эллиптической, если $\det C\neq 0$ и уравнение

$$\det(A+2B\lambda+C\lambda^2)=0\qquad (3)$$

не имеет вещественных корней.

При выполнении условия Я. Б. Лопатинского, как известно [1], задача (1), (2) фредгольмова.

В случае, когда уравнение (3) имеет лишь два n-кратных корня $\lambda=\pm i$, задача (1), (2) исследована в работе Е. В. Золотаревой [2], где показано, что при отсутствии младших членов в уравнении (1), задача (1), (2) фредгольмова тогда и только тогда, когда система (1) слабо связана [3].

При нарушении условия Я. Б. Лопатинского коэффициенты $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ играют решающую роль в вопросе нормальной разрешимости задачи (1), (2). Это впервые было обнаружено в работе Н. Е. Товмасяна [4], где исследована задача (1), (2) в том случае, когда уравнение (3) имеет лишь простые корни.

В настоящей работе исследован вопрос о влиянии младших членов уравнения (1) на нормальную разрешимость задачи в общем случае, а именно, при нарушении условия Я. Б. Лопатинского и наличии у уравнения (3) корней произвольной кратности.

§ 1. Основные результаты

Наряду с уравнением (1) рассмотрим систему

$$A w_{xx} + 2B w_{xy} + C w_{yy} = 0. \tag{4}$$

Как показано в работе [5], для общего решения системы имеется следующее представление:

$$w(x, y) = \operatorname{Re}\{\delta S^{-1} X(x, y)\}, \tag{5}$$

где

$$X(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{i}{2} \bar{z} H S\right)^k F^{(k)}(z). \tag{6}$$

Для простоты изложения, не ограничивая общности, нами рассматривается случай, когда характеристическое уравнение (3) имеет два n-кратных корня $\lambda = \pm i$.

В формулах (5) и (6), δ, S и H вполне определенные постоянные матрицы.

Введем следующие обозначения:

$$D(\lambda, z_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i} \frac{1}{2i} HS \left(1 + \frac{i}{2} \bar{z}_0'^2 HS\right)^{-1}\right)^k, \tag{7}$$

$$B(z_0) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{e'} \frac{\Delta(\lambda)(a(z_0) + \lambda b(z_0))}{\lambda - i} \delta S^{-1} D(\lambda, z_0)\, d\lambda, \tag{8}$$

$$B_1(z_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{e'} \frac{\Delta(\lambda)\, c(z_0)}{\lambda - i} \delta S^{-1} D(\lambda, z_0)\, d\lambda, \tag{9}$$

здесь $\Delta(\lambda) = (A + 2B\lambda + C\lambda^2)^{-1}$, когда λ пробегает контур e', охватывающий корни уравнения (3), лежащие в нижней полуплоскости, z_0' означает производную относительно длины дуги.

Рассмотрим разложение по параметру λ следующих определителей:

$$\det(\delta\lambda - \pi i t B(t) S) = \omega_r(t) \lambda^r + \omega_{r-1}(t) \lambda^{r-1} + \cdots + \omega_0(t), \tag{10}$$

$$\det(\delta\lambda + \pi i t B_1(t) M^{-1} S) = \varepsilon_r(t) \lambda^r + \varepsilon_{r-1}(t) \lambda^{r-1} + \cdots + \varepsilon_0(t), \tag{11}$$

в (11) возникает постоянная матрица M, которая определена в ходе доказательства теоремы 2.

Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть для системы (1) нарушено условие слабой связности, т.е.* $\det \delta = 0$.

Предположим, что коэффициент $\omega_r(t)$ *в (10) отличен от нуля. Тогда задача (1), (2) нетерова и её индекс*

$$\varkappa = 2(n - r) - \frac{1}{\pi} [\ln \omega_r(t)]_\Gamma, \tag{12}$$

где $r = \operatorname{rank} \delta$.

Теорема 2. *Пусть для системы (1) нарушено условие слабой связности и пусть*

$$a(z)=b(z)=\frac{\partial a(z)}{\partial N}=\frac{\partial b(z)}{\partial N}=0,\ z\in\Gamma. \tag{13}$$

Предположим, что коэффициент $\varepsilon_r(t)$, *входящий в разложение* (11), *отличен от нуля. Тогда задача* (1), (2) *нетёрова и её индекс*

$$\varkappa=2(n-r)-\frac{1}{\pi}[\ln \varepsilon_r(t)]_\Gamma, \tag{14}$$

где снова $r=rank\,\delta$.

Замечание. В условиях теоремы 1 коэффициент $c(z)$ уравнения (1) не влияет на результат. Из (13) следует, что $\omega_r=0$ и теорема 1 в этом случае теряет силу, а из (9) и (11) заключаем, что $c(z)$ играет решающую роль.

Пусть коэффициенты системы (1) и граница области D бесконечно дифференцируемы. Тогда имеют место следующие теоремы.

Теорема 3. *Если* $h\in C^{\alpha,\,k-2}(\overline{D})$, $f\in C^{\alpha,\,k}(\Gamma)$ *и коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условию Я. Б. Лопатинского, то её решение принадлежит классу* $C^{\alpha,\,k}(\overline{D})$.

Теорема 4. *Если* $h\in C^{\alpha,\,k-2}(\overline{D})$, $f\in C^{\alpha,\,k}(\Gamma)$ *и коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условию* $\omega_r(t)\neq 0$, *то решение задачи* (1), (2) *принадлежит классу* $C^{\alpha,\,k-1}(\overline{D})$.

Теорема 5. *Если* $h\in C^{\alpha,\,k-2}(\overline{D})$, $f\in C^{\alpha,\,k}(\Gamma)$ *и коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условию* $\varepsilon_r(t)\neq 0$ *и условию* (13), *то решение задачи* (1), (2) *принадлежит классу* $C^{\alpha,\,k}(\overline{D})$.

§ 2. Сведение к интегральному уравнению на границе

Как показано в [4] система (1) эквивалентна следующей системе интегральных уравнений Фредгольма:

$$u(x,y)=\iint\limits_D K(x,y,\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta+H(x,y)+w(x,y), \tag{15}$$

где

$$H(x,y)=\iint\limits_D K(x,y,\xi,\eta)\,h(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

$$K(x,y,\xi,\eta)=(v(\xi-x,\eta-y)\,a(\xi,\eta))_\xi+(v(\xi-x,\eta-y)\,b(\xi,\eta))_\eta-$$
$$-v(\xi-x,\eta-y)\,c(\xi,\eta), \tag{16}$$

$$v(x,y)=\frac{1}{2\pi^2}\operatorname{Re}\int\limits_l \Delta(\lambda)\ln(x+\lambda y)\,d\lambda, \tag{17}$$

l—контур, охватывающий корни уравнения (3), лежащие в верхней полуплоскости. $w(x,y)$ определено в (5).

Решение уравнения (15) можно записать так:

$$u(x,y)=w(x,y)+\iint\limits_D \widetilde{K}(x,y,\xi,\eta)\,w(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta+$$

$$+ H_1(x, y) + c^1 u_1(x, y) + \cdots + c^{k_1} u_{k_1}(x, y), \tag{18}$$

где $\widetilde{K}(x, y, \xi, \eta)$ — обобщенная резольвента уравнения (15), c^j — произвольные действительные постоянные, $u_j(x, y)$ — полная система линейно независимых решений однородного интегрального уравнения

$$H_1(x, y) = H(x, y) + \iint_D \widetilde{K}(x, y, \xi, \eta) H(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Для обобщенной резольвенты используем представление

$$\widetilde{K}(x, y, \xi, \eta) = v_\xi(\xi - x, \eta - y)\, a(\xi, \eta) + v_\eta(\xi - x, \eta - y)\, b(\xi, \eta) +$$
$$+ \widetilde{K}_1(x, y, \xi, \eta), \tag{19}$$

$\widetilde{K}_1(x, y, \xi, \eta)$ имеет особенность при $(x, y) = (\xi, \eta)$ не выше логарифмического порядка.

Подставим (18) в краевое условие (2), предварительно обозначив

$$f_1(z_0) = f(z_0) - H_1(z_0) - c^1 u_1(z_0) - \cdots - c^{k_1} u_{k_1}(z_0),$$

$$\widetilde{K}_{1,1}(z_0, \xi, \eta) = \widetilde{K}_1(z_0, \xi, \eta)\, \delta S^{-1},$$

получим

$$f_1(z_0) = \mathrm{Re}\Big\{\delta S^{-1} X(z_0) + \frac{1}{4\pi^2}\int_l \Delta(\lambda)\, I(z_0, \lambda)\, d\lambda -$$
$$- \frac{1}{4\pi^2}\int_{l'} \Delta(\lambda)\, I(z_0, \lambda)\, d\lambda + \iint_D \widetilde{K}_{1,1}(z_0, \xi, \eta)\, X(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\Big\}, \tag{20}$$

где

$$I(z_0, \lambda) = \iint_D \frac{a(\xi, \eta) + \lambda b(\xi, \eta)}{\theta_\lambda - z_\lambda^0}\, \delta S^{-1} X(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{21}$$

$$\theta_\lambda = \xi + \lambda\eta, \quad z_\lambda^0 = x_0 + \lambda y_0, \quad x_0 + iy_0 \in \Gamma.$$

Обозначим

$$K_0(z_\lambda^0, \theta_\lambda) = \ln\left(1 - \frac{\theta_\lambda}{z_\lambda^0}\right) \tag{22}$$

и для $p = 1, \cdots, n-1$ определим $K_p(z_\lambda^0, \theta_\lambda)$ по формуле

$$\partial_{\theta_\lambda} K_p(z_\lambda^0, \theta_\lambda) = K_{p-1}(z_\lambda^0, \theta_\lambda). \tag{23}$$

Заметим сразу, что

$$\partial_\theta K_p(z_\lambda^0, \theta_\lambda) = \frac{i + \lambda}{2i} K_{p-1}(z_\lambda^0, \theta_\lambda). \tag{24}$$

Обозначим

$$X^{(p)}(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{i}{2}\bar{\theta} H S\right)^k F^{(k+p)}(\theta). \tag{25}$$

Тогда (21) преобразуется к виду

$$
I(z_0, \lambda) = \frac{1}{i-\lambda} \int_{\Gamma} (a(\theta) + \lambda b(\theta)) P(z_0, \lambda, \theta) d\theta +
$$

$$
+ \frac{2i}{\lambda - i} \iint_{D} \partial_{\bar{\theta}} (a(\theta) + \lambda b(\theta)) R(z_0, \lambda, \theta) d\xi \, d\eta, \tag{26}
$$

где $\theta = \xi + i\eta$,

$$
P(z_0, \lambda, \theta) = \sum_{p=0}^{n-1} K_p(z_\lambda^0, \theta_\lambda) \delta S^{-1} \left(\frac{1}{i-\lambda} HS \right)^p X^{(p)}(\theta), \tag{27}
$$

$$
R(z_0, \lambda, \theta) = \sum_{p=0}^{n-1} K_p(z_\lambda^0, \theta_\lambda) \delta S^{-1} \left(\frac{2i}{\lambda - i} HS \right)^p X^{(p)}(\theta), \tag{28}
$$

как и раньше здесь $\theta = \xi + i\eta$, $\theta_\lambda = \xi + \lambda\eta$.

Полагая в формуле (6) $z \in \Gamma$, дифференцированием относительно длины дуги на Γ легко показать, что

$$
X^{(p)}(z) = \left(1 + \frac{i}{2} \overline{z'}^2 HS \right)^{-1} \frac{d}{dz} X^{(p-1)}(z). \tag{29}
$$

Теперь интегрирование по частям в (26), с учетом (24) и (29), дает

$$
I(z_0, \lambda) = \frac{a(z_0) + \lambda b(z_0)}{i - \lambda} \delta S^{-1} D(\lambda, z_0) \int_{\Gamma} K_0(z_\lambda^0, \theta_0) X(\theta) d\theta +
$$

$$
+ \int_{\Gamma} \tilde{K}_{1,3}(z_0, \lambda, \theta) X(\theta) d\theta + \iint_{D} \tilde{K}_{1,2}(z_0, \lambda, \theta) X(\xi, \eta) d\xi \, d\eta, \tag{30}
$$

где $\tilde{K}_{1,3}$, $\tilde{K}_{1,2}$, а также и первые производные $\tilde{K}_{1,3}$ по z_0 и θ имеют особенность при $\theta = z_0$ не выше логарифмического порядка. Естественно интегралы с такими ядрами называть компактными. $D(\lambda, z_0)$ определено формулой (7).

Заметим теперь следующее:

$$
\operatorname{Im} \lambda > 0 \Rightarrow K_0(z_\lambda^0, \theta_\lambda) - \ln(1 - \theta/z_0) \in C^{2,\alpha}(\Gamma), \tag{31}
$$

$$
\operatorname{Im} \lambda < 0 \Rightarrow K_0(z_\lambda^0, \theta_\lambda) - \ln(1 - z_0/\theta) \in C^{2,\alpha}(\Gamma). \tag{32}
$$

Теперь, учитывая (30)—(32), будем иметь

$$
f_1(z_0) = \operatorname{Re} \left\{ \delta S^{-1} X(z_0) + \tilde{A}(z_0) \int_{\Gamma} \ln\left(1 - \frac{\theta}{z_0}\right) X(\theta) d\theta + \right.
$$

$$
+ B(z_0) \int_{\Delta} \ln\left(1 - \frac{z_0}{\theta}\right) X(\theta) d\theta + \int_{\Gamma} \tilde{K}_{1,4}(z_0, \theta) X(\theta) d\theta +
$$

$$
\left. + \iint_{D} \tilde{K}_{1,5}(z_0, \theta) X(\xi, \eta) d\xi \, d\eta \right\}, \tag{33}
$$

где

$$\tilde{A}(z_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_l \frac{\Delta(\lambda)\,(a(z_0) + \lambda b(z_0))}{i - \lambda}\, \delta S^{-1} D(\lambda, z_0)\, d\lambda. \tag{34}$$

$B(z_0)$ определено формулой (8), интегралы с ядрами $\tilde{K}_{1,4}$ и $\tilde{K}_{1,5}$ являются компактными.

Структура (6) для $X(\theta)$ позволяет сделать преобразование

$$X(\theta) = \nu(\theta) + \int_\Gamma T(\theta, t)\, \nu(t)\, dt, \tag{35}$$

где $\nu(t)$—граничное значение голоморфной в области D вектор-функции, ядро $T(\theta, t)$ является гладкой матрицей-функцией. Преобразование (35) обратимо:

$$\nu(\theta) = X(\theta) + \int_\Gamma T_1(\theta, t)\, X(t)\, dt. \tag{36}$$

Ядра $T(\theta, t)$ и $T_1(\theta, t)$ можно выписать в явном виде. Если обозначить

$$T_0(\theta, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{\bar{\theta}^k - \bar{t}^k}{\theta - t}\right) \cdot \left(\frac{i}{2} HS\right)^k, \tag{37}$$

то ядра T и T_1 есть не что иное, как линейная комбинация ядра T_0 и её производных, откуда и следует их гладкость.

Теперь преобразуя (33) по (35) получим

$$f_1(z_0) = \operatorname{Re}\left\{\delta S^{-1} \nu(z_0) + B(z_0) \int_\Gamma \ln\left(1 - \frac{z_0}{\theta}\right) \nu(\theta)\, d\theta + \right.$$

$$\left. + \int_\Gamma R(z_0, \theta)\, \nu(\theta)\, d\theta \right\}, \tag{38}$$

здесь интеграл с ядром $R(z_0, \theta)$ компактен.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Используем представление И. Н. Векуа [6]

$$\nu(z) = \int_\Gamma \frac{t\, \mu(t)}{t - z}\, ds + id, \tag{39}$$

где $\mu(t)$—вещественная вектор-функция на Γ, причем вещественная постоянная d и вектор-функция $\mu(t)$ однозначно определяются по $\nu(t)$. Для $z_0 \in \Gamma$ из (39) получаем

$$\nu(z_0) = \pi i\, z_0 \bar{z}_0 \left(\mu(z_0) + \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\mu(t)}{t - z_0}\, dt\right) +$$

$$+ \int_\Gamma R_1(z_0, t)\, \mu(t)\, dt. \tag{40}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\ln\left(1-\frac{z_0}{\theta}\right)\frac{d\theta}{t-\theta}=\ln\left(1-\frac{z_0}{t}\right),$$

при этом (38) преобразуется к виду

$$f_1(z_0)=\operatorname{Re}\Big\{\delta S^{-1}\pi i z_0 \bar{z}_0^{-1}\left(\mu(z_0)+\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu(t)}{t-z_0}dt\right)+$$

$$+\pi i z_0 \bar{z}_0^{-1} B(z_0)\int_{\Gamma}\mu(t)\ln\left(1-\frac{z_0}{t}\right)dt+$$

$$+\int_{\Gamma}R_2(z_0,t)\,\mu(t)\,dt\Big\}. \tag{41}$$

Легко убедиться в равенстве

$$\operatorname{Re}\left\{\alpha(z_0)\left(\mu(z_0)+\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu(t)}{t-z_0}dt\right)\right\}=$$

$$=\operatorname{Re}\alpha(z_0)\cdot\mu(z_0)+\frac{\operatorname{Im}\alpha(z_0)}{\pi}\int_{\Gamma}\frac{\mu(t)}{t-z_0}dt+$$

$$+\int_{\Gamma}K_1(z_0,t)\,\mu(t)\,dt, \tag{42}$$

где

$$K_1(z_0,t)=\frac{1}{\pi i}\bar{\alpha}(z_0)\left(\frac{t'}{t-z_0}-\frac{\bar{t}'}{\bar{t}-\bar{z}_0}\right), \tag{43}$$

а следующее равенство

$$\operatorname{Re}\left\{\beta(z_0)\int_{\Gamma}\Psi'(t)\ln\left(1-\frac{t_0}{t}\right)dt\right\}=\frac{\beta(t_0)}{2}\int_{\Gamma}\Psi'(t)\ln\left(1-\frac{t_0}{t}\right)dt+$$

$$+\frac{\bar{\beta}(t_0)}{2}\int_{\Gamma}\Psi'(t)\ln\left(1-\frac{t}{t_0}\right)dt+\int_{\Gamma}K_2(t_0,t)\,\Psi(t)\,dt, \tag{44}$$

где

$$K_2(t_0,t)=\bar{\beta}(t_0)\left(\frac{t'}{t-t_0}-\frac{\bar{t}'}{\bar{t}-\bar{t}_0}\right)+\frac{\beta(t_0)}{2}, \tag{45}$$

устанавливается на основе (42) и формул

$$\int_{\Gamma}\Psi'(t)\ln\left(1-\frac{t_0}{t}\right)dt=-\pi i\,\Psi(t_0)-\int_{\Gamma}\frac{\Psi(t)}{t-t_0}dt+\int_{\Gamma}\frac{\Psi(t)}{t}dt,$$

$$\int_{\Gamma}\Psi'(t)\ln\left(1-\frac{t}{t_0}\right)dt=\pi i\,\Psi(t_0)-\int_{\Gamma}\frac{\Psi(t)}{t-t_0}dt,$$

последние получаются интегрированием по частям. Теперь, отделяя вещественную часть в (41), на основе (42) и (44) мы получим

$$f_1(z_0) = \operatorname{Re} \alpha(z_0) \cdot \mu(z_0) + \frac{\operatorname{Im}(\alpha(z_0))}{\pi} \int_\Gamma \frac{\mu(t)}{t - z_0} dt +$$

$$+ \frac{\beta(z_0)}{2} \int_\Gamma \ln\left(1 - \frac{z_0}{t}\right) \mu(t)\, dt +$$

$$+ \frac{\bar\beta(z_0)}{2} \int_\Gamma \ln\left(1 - \frac{t}{z_0}\right) \mu(t)\, dt + \int_\Gamma R(z_0, t)\, \mu(t)\, dt, \tag{46}$$

где

$$\alpha(z_0) = \delta\, S^{-1}\, \pi i\, z_0\, \overline{z_0'}, \tag{47}$$

$$\beta(z_0) = B(z_0)\, \pi i\, z_0\, \overline{z_0'}. \tag{48}$$

Напомним, что δ и S—матрицы, входящие в (5), а $B(z_0)$ определено формулой (8).

Заметим, что в случае слабой связности исходной системы (1), полученная система (46) сингулярных интегральных уравнений является системой нормального типа, полная теория которых содержится в [6].

При нарушении условия слабой связности для системы (1), т. е. $\det \delta = 0$, как легко видеть, система (46) вырождается. Уравнения с такими вырождениями рассматривались в [7].

Пусть $r = rank\, \delta$. Следуя [7], пусть $\sigma_1(t)$—невырожденная квадратная матрица такая, что $(n - r)$ последних её столбцов являются линейно независимыми решениями линейной системы

$$\delta\, S^{-1}\, \sigma_1^{(j)} = 0 \quad (j = r + 1, \cdots, n), \tag{49}$$

далее определим матрицы $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ порядка $n \times n$

$$\Omega_1(t) = (\alpha(t)\, \sigma_1^{(k)}, \quad -t\, \pi i\, \beta(t)\, \sigma_1^{(j)}), \tag{50}$$

$$\Omega_2(t) = (\bar\alpha(t)\, \bar\sigma_1^{(k)},\ t\, \pi i\, \bar\beta(t)\, \bar\sigma_1^{(j)}), \tag{51}$$

где $k = 1, \cdots, r$; $j = r + 1, \cdots, n$.

Легко заметить, что в этом случае

$$\det \Omega_2(t) = \left(\frac{t}{\bar t}\right)^{n-1} \det \bar\Omega_1(t). \tag{52}$$

Теперь, если определить матрицу σ_2 по формуле $\sigma_2 = \bar\sigma_1$, то при условии, что

$$\det \Omega_1(t) \neq 0, \tag{53}$$

как показано в [7], сингулярное интегральное уравнение (46) нормально разрешимо и её индекс $\varkappa$ вычисляется по формуле

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{\det(\Omega_2(t)\, \sigma_1(t))}{\det(\Omega_1(t)\, \sigma_2(t))} \right]_\Gamma. \tag{54}$$

Рассмотрим следующее разложение по параметру λ определителя

$$\det(\delta\lambda - \pi it\, B(t)\, S) = \omega_r(t)\,\lambda^r + \omega_{r-1}(t)\,\lambda^{r-1} + \cdots + \omega_0(t). \tag{55}$$

С другой стороны, рассмотрим разложение

$$\det(\alpha(t)\,\lambda - \pi it\,\beta(t)) = \det(\Omega_1(t)\,\sigma_1^{-1})\,\lambda^r + \cdots + a_0(t). \tag{56}$$

Сравнение (55) с (56) дает

$$\det \Omega_1(t) = (\pi it\,\overline{t'})^n \cdot \det(\sigma_1 \cdot S^{-1}) \cdot \omega_r(t), \tag{57}$$

матрицы $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ те, что определены в (47) и (48), соответственно.

Теперь не представляет большого труда вичислить индекс $\varkappa$ по формуле (54): принимая во внимание (49), (52), $\sigma_2 = \bar{\sigma}_1$, также (57) получим формулу (12). Тем самым теорема 1 доказана.

§ 4. Доказательства теорем 2—5

Пусть теперь $z \in \Gamma$ и

$$a(z) = b(z) = \frac{\partial a(z)}{\partial N} = \frac{\partial b(z)}{\partial N} = 0.$$

Для обобщенной резольвенты $\breve{K}(x, y, \xi, \eta)$ используем представление

$$\breve{K}(x, y, \xi, \eta) = K(x, y, \xi, \eta) +$$
$$+ \iint\limits_D K(x, y, t, \tau)\, K(t, \tau, \xi, \eta)\, dt\, d\tau + \breve{K}_2(x, y, \xi, \eta), \tag{58}$$

где $K(x, y, \xi, \eta)$ определено по формуле (16), причем $\partial_\xi \widetilde{K}_2$ и $\partial_\eta \breve{K}_2$ имеют в точках $(\xi, \eta) = (x, y)$ особенность не выше логарифмического порядка. В дальнейшем такие ядра условимся называть сверхкомпактными.

Повторяя рассуждения доказательства теоремы 1, получим

$$\iint\limits_D \widetilde{K}(x, y, \xi, \eta)\, W(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{l} \Delta(\lambda)\, I_1(z_0, \lambda)\, d\lambda - \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{l'} \Delta(\lambda)\, I_1(z_0, \lambda)\, d\lambda + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{\breve{\Gamma}} R(z_0, \theta)\, X(\theta)\, d\theta \right\}, \tag{59}$$

$R(z_0, \theta)$—компактное ядро, а

$$I_1(z_0, \lambda) = \iint\limits_D \ln(\theta_\lambda - z_\lambda^0)\, c(\xi, \eta)\, \delta\, S^{-1} X(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{60}$$

Обозначим

$$K_0(z_\lambda^0, \theta_\lambda) = \ln(\theta_\lambda - z_\lambda^0) \tag{61}$$

и для $p=1,\cdots,n-1$ определим $K_p(z_\lambda^0,\ \theta_\lambda)$ так:

$$\partial_{\theta_\lambda} K_p(z_\lambda^0,\ \theta_\lambda) = K_{p-1}(z_\lambda^0,\ \theta_\lambda). \tag{62}$$

Осуществляя в (51) переход к контурному интегралу формулой Грина, будем иметь

$$I_1(z_0,\ \lambda) = \frac{c(z_0)}{i-\lambda}\,\delta S^{-1} D(\lambda,\ z_0)\int\limits_\Gamma K_1(z_\lambda^0,\ \theta_\lambda)\,X(\theta)\,d\theta +$$

$$+\int\limits_\Gamma \widetilde{R}_1(z_0,\ \theta)\,X(\theta)\,d\theta, \tag{63}$$

где $D(\lambda,\ z_0)$, как и раньше, определяется формулой (7), $\widetilde{R}_1(z_0,\ \theta)$ — компактное ядро.

Подставляя решение системы (1), заданное формулой (18), в краевое условие, с учетом (59)—(63), получим следующее интегральное уравнение на границе

$$f_1(z_0) = \mathrm{Re}\Big\{\delta S^{-1} X(z_0) + A_1(z_0)\int\limits_\Gamma K_{1,1}(z_0,\ \theta)\,X(\theta)\,d\theta +$$

$$+ B_1(z_0)\int\limits_\Gamma K_{1,2}(z_0,\ \theta)\,X(\theta)\,d\theta + \int\limits_\Gamma \widetilde{R}_2(z_0,\ \theta)\,X(\theta)\,d\theta\Big\}, \tag{64}$$

причем $K_{1,1}(z_0,\ \theta)$—первообразная от $\ln(1-\theta/z_0)$, а $K_{1,2}(z_0,\theta)$—первообразная от $\ln(1-z_0/\theta)$, далее

$$A_1(z_0) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_l \frac{\Delta(\lambda)\,c(z_0)}{i-\lambda}\,\delta S^{-1} D(\lambda,\ z_0)\,d\lambda,$$

а $B_1(z_0)$ определно формулой (9).

Преобразование искомой функции (35) преобразует (64) к виду

$$f_1(z_0) = \mathrm{Re}\Big\{\delta S^{-1}\nu(z_0) +$$

$$+ B_1(z_0)\int\limits_\Gamma K_{1,2}(z_0,\ \theta)\,\nu(\theta)\,d\theta + \int\limits_\Gamma \widetilde{K}_3(z_0,\ \theta)\,\nu(\theta)\,d\theta\Big\}. \tag{65}$$

Напомним, что $\nu(z_0)$ является граничным значением голоморфной в области D вектор-функции. Пусть нарушено условие слабой связности, т. е. $\det\delta=0$, предположим $rank\,\delta=r$. Пусть M обозначает невырожденную матрицу такую, что $(n-r)$ последних её столбцов являются решениями алгебраической системы

$$\delta S^{-1} M^{(j)} = 0\ \ (j=r+1,\cdots,n). \tag{66}$$

Применим два последовательных преобразования искмой вектор-функции уравнения (65)

$$\nu(t) = M\mu(t) \tag{67}$$

и далее

$$\mu_j(t) = \omega_j(t) \quad (j = 1, \cdots, r),$$
$$\mu_j(t) = \omega_j'(t) \quad (j = r+1, \cdots, n). \tag{68}$$

Тогда для искомой вектор-функции $\omega(t)$ получим следующее уравнение:

$$f_1(z_0) = \operatorname{Re}\left\{\delta S^{-1} M \omega(z_0) - \right.$$
$$- B_1(z_0) \int_\Gamma \omega(\theta) \ln\left(1 - \frac{z_0}{\theta}\right) d\theta +$$
$$\left. + \int_\Gamma \widetilde{R}_4(z_0, \theta)\, \omega(\theta)\, d\theta \right\}. \tag{69}$$

Это уравнение, по существу, не отличается от уравнения (38), которое нами уже исследовано.

Как и при исследовании (38) введем матрицы

$$\alpha_1(t) = \delta S^{-1} M \pi i t \overline{t'}, \tag{70}$$

$$\beta_1(t) = - B_1(t) \pi i t \overline{t'} \tag{71}$$

и вычислим индекс уравнения (69) по формуле (54) в терминах разложения определителя

$$\det(\delta\lambda + \pi i t B_1(t) M^{-1} S) = \varepsilon_r(t)\lambda^r + \varepsilon_{r-1}(t)\lambda^{r-1} + \cdots + \varepsilon_0(t).$$

Тем самым, теорема 2 доказана.

Доказательства теорем 3—5 основаны на эквивалентности задачи (1), (2) системам сингулярных интегральных уравнений нормального типа (46) и (69) при условиях $\omega_r(t) = 0$ и $\varepsilon_r(t) = 0$, соответственно.

Потеря гладкости в теоремах 4 и 5 точная и легко выявляется в ходе доказательств теорем 1 и 2.

Институт математики
АН Армянской ССР,
Ереванский физический
институт

Поступила 24. VI. 1986

Է. Մ. ՄԱԴՈՒՆՑ, Հ. Գ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ. Լոպատինսկու պայմանին չբավարարող էլիպտական հավասարումների համակարգի համար Դիրիխլեի խնդիրը *(ամփոփում)*

Ինչպես հայտնի է, Յա. Բ. Լոպատինսկու պայմանը էապես կախված է բարձր ածանցյալների գործակիցներից, ապահովում է Դիրիխլեի խնդրի նորմալ լուծելիությունը։

1966 թ. Ն. Ե. Թովմասյանի կողմից հայտնաբերվել է, որ այդ պայմանի խախտման դեպքում ցածր ածանցյալների գործակիցները որոշիչ դեր են խաղում։ Դա ցույց է տրված խարակտերիստիկ հավասարման պարզ արմատների դեպքում։

Տվյալ աշխատանքում, հիմնվելով հաստատուն գործակիցներով էլիպսական համակարգի ընդհանուր լուծման նոր ներկայացման վրա, ցույց է տրված, որ այդ երևույթը տեղի ունի ընդհանուր դեպքում, երբ խարակտերիստիկ հավասարման արմատները ունեն ցանկացած պատիկություն։ Ստացված նոր պայմանն ընդհանրացնում է Յա. Բ. Լոպատինսկու պայմանը, պարունակելով նաև ցածր ածանցյալների գործակիցներ։

E. M. MADUNTS, A. B. NERSESIAN. *The Dirichlet problem for the elliptic systems of second order differential equations, which non satisfy the Lopatinski condition* (summary)

A condition for normal solvability of the Direclet problem is suggested. It imposes restrictions on the coefficients by lower derivatives and thus is more general than the Lopatinski condition.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. И. Вольперт.* Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости, Труды ММО, т. 10, 1961, 41—89.
2. *Е. В. Золотарева.* Необходимые и достаточные условия фредгольмовости для некоторого класса эллиптических систем, ДАН СССР, т. 145, 1962, 724—726.
3. *А. В. Бицадзе.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, 1966.
4. *Н. Е. Товмасян.* Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка, не удовлетворяющих условию Я. Б. Лопатинского, Сиб. мат. ж., т. VII, № 4, 1966.
5. *Э. М. Мадунц.* Представление общего решения эллиптической системы дифференциальных уравнений, Изв. АН АрмССР, сер. мат., XXIII, № 4, 1988.
6. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962.
7. *Н. Е. Товмасян.* К теории сингулярных интегральных уравнений, Дифф. уравнения, III, № 1, 1967, 69—80.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 2, 1989 Математика

УДК 517.51

Г. А. КАРАГУЛЯН

О РАСХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ПОЛНЫМ ОРТОНОРМИРОВАННЫМ СИСТЕМАМ

Если $\lambda(t):[0, \infty)\to[0, \infty)$, $\lambda(0)=0$, некоторая монотонно возрастающая непрерывная функция, то через $\lambda(L)$ обозначим класс тех функций $f(x, y)$ на квадрате I^2 ($I=(0, 1)$), для которых $\lambda(|f(x, y)|)\in\in L^1(I^2)$.

Известно (см. [1], [2]), что если $f(x, y)\in\lambda(L)$ при $\lambda(t)=t\ln^+ t$, то её ряд Фурье по двойной системе Хаара $\{\chi_n(x)\cdot\chi_m(y)\}_{n, m=1}^{\infty}$ сходится почти всюду (п. в.) по Прингсхейму на I^2, и что при условии

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda(t)}{t\ln^+ t}=0, \tag{1}$$

существует функция из класса $\lambda(L)$, ряд Фурье которой по двойной системе Хаара расходится п. в. по Прингсхейму.

В дальнейшем, говоря о сходимости двойного ряда (в метрике $L^1(I^2)$, почти всюду или в некоторой точке), подразумеваем его сходимость по Прингсхейму.

В настоящей работе доказывается

Теорема 1. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x\in(0, 1)$*—полная ортонормированная система с условием*

$$|\varphi_n(x)|<M_n,\ x\in(0, 1),\ M_n>0,\ n=1, 2,\cdots \tag{2}$$

и $\lambda(t):[0, \infty)\to[0, \infty)$, $\lambda(0)=0$ *— некоторая непрерывная возрастающая функция, с условием* (1). *Тогда существует функция* $f(x, y)\in\in\lambda(L)$, *двойной ряд Фурье которой по системе* $\{\varphi_n(x)\cdot\varphi_m(y)\}_{n, m=1}^{\infty}$ *расходится п. в.*.

Эта теорема, с учетом вышеупомянутого результата работы [2] Т. Ш. Зерекидзе о расходимости двойных рядов Фурье-Хаара, является следствием следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $g(x, y)\in L^1(I^2)$ *— некоторая функция, двойной ряд Фурье-Хаара которой расходится п. в. и* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$*— полная ортонормированная система с условием* (2). *Тогда существует функция* $f(x, y)$, *равнораспределенная с* $g(x, y)$, *и такая, что её двойной ряд Фурье по системе* $\{\varphi_n(x)\varphi_m(y)\}_{n, m=1}^{\infty}$ *тоже расходится п. в.*.

При доказательстве теоремы 2 мы будем использовать некоторые свойства систем типа Хаара $\{\bar{\chi}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определяемые следующим образом. Пусть $\{E_i^{(k)},\ i=1, 2, \cdots, 2^k,\ k=1, 2, \cdots\}$ — семейство измеримых множеств, где $E_1^{(0)}=(0, 1)$, $E_i^{(k)}\subset(0, 1)$ и:

I) $m(E_i^{(k)})=\dfrac{1}{2^k}$,

II) $E_i^{(k)} \cap E_j^{(k)} = \varnothing$ при $i \neq j$,

III) $E_i^{(k)} = E_{2i-1}^{(k+1)} \cup E_{2i}^{(k+1)}$.

Тогда полагаем

$$\tilde{\chi}_n(x)=\begin{cases} 2^{k/2} \text{ при } x\in E_{2i-1}^{(k+1)}, \\ -2^{k/2} \text{ при } x\in E_{2i}^{(k+1)}, \\ 0 \text{ при остальных } x, \end{cases}$$

где $n=2^k+i$, $1< i\leqslant 2^k$. Когда $E_i^{(k)}=[i-1/2^k,\ i/2^k)$, получаем обычную систему Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Как известно (см. [3], стр. 122), полиномы по обычной системе Хаара и по системе типа Хаара, имеющие одинаковые коэффициенты

$$P(x)=\sum_{n=1}^{N} a_n \tilde{\chi}_n(x),\quad P'(x)=\sum_{n=1}^{N} a_n \chi_n(x),$$

имеют одинаковые функции распределения. Многие следствия, получаемые из этого факта, в дальнейшем будут использованы.

Верна следующая

Лемма 1. *Для любой полной ортонормированной системы* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *и номеров* $0=n(1)<n(2)<n(3)<\cdots$ *существуют система типа Хаара* $\tilde{\chi}=\{\tilde{\chi}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *и полиномы по системе* Φ.

$$Q_m(x)=\sum_{l=k(m)+1}^{k(m+1)} a_l\,\varphi_l(x),\ m=1, 2, \cdots,\ 0=k(1)<k(2)<k(3)<\cdots, \tag{3}$$

такие, что

1) $$\{k(i)\}_{i=1}^{\infty}\subset\{n(i)\}_{i=1}^{\infty}, \tag{4}$$

2) $$\tilde{\chi}_m(x)=Q_m(x)+\alpha_m(x),\ m=1, 2, \cdots, \tag{5}$$

$$\|\alpha_m\|^2_{L^2(I)}\leqslant\frac{1}{32^{m+1}},\ m=1, 2, \cdots, \tag{6}$$

3) $$\sum_{j=1}^{n-1}\left[\sum_{m=k(n+1)+1}^{\infty} c_m^2(\alpha_j, \Phi)\right]^{1/2}\leqslant\frac{1}{4^{n+1}},\ n=2, 3, \cdots,$$

где числа $c_m(\alpha_j, \Phi)$, $m=1, 2, \cdots$ *— коэффициенты Фурье функций относительно системы* Φ.

Доказательство леммы 1 в точности совпадает с доказательством аналогичной леммы, приведенной в [3] (см. [3], стр. 341).

Перейдем к доказательству теоремы 2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая полная ортонормированная система с условием (2). Согласно теореме Меньшова-Марцинкевича найдется последовательность номеров $0 = n(1) < n(2) < \cdots$ такая, что если $\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 < \infty$, то ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{l=n(m)+1}^{n(m+1)} c_l \varphi_l(x) \right]$$

будет сходиться п. в. Полагая, что в формулировке леммы 1 номера $\{n(i)\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяют вышеуказанному требованию теоремы Меньшова-Марцинкевича для системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, мы можем согласно этой лемме определить полиномы $Q_m(x)$ и функции $\tilde{\chi}_m(x)$ и $\alpha_m(x)$ с условиями (3)—(7) такие, что почти всюду сходились ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{l=k(m)+1}^{k(m+1)} c_l(\alpha_j, \Phi)\, \varphi_l(x) \right], \quad j = 1, 2, \cdots. \tag{8}$$

Пусть теперь $g(x, y)$ такая интегрируемая функция, двойной ряд Фурье-Хаара которой расходится п. в. Обозначим

$$b_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 g(x, y)\, \chi_i(x)\, \chi_j(y)\, dx\, dy, \quad i, j = 1, 2, \cdots, \tag{9}$$

$$c_m^{(j)} = c_m(\alpha_j, \Phi) = \int_0^1 \alpha_j(x)\, \varphi_m(x)\, dx, \quad j, m = 1, 2, \cdots. \tag{10}$$

Известно, что двойные ряды Фурье-Хаара функций из $L^1(I^2)$ сходятся в метрике $L^1(I^2)$. В частности, это имеет место для функции $g(x, y)$, т. е. ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}\, \chi_i(x)\, \chi_j(y) \quad (\text{см. } (9)) \tag{11'}$$

сходится в $L^1(I^2)$. Следовательно, имея в виду определение системы типа Хаара, найдется равнораспределенная с $g(x, y)$ функция $f(x, y)$ такая, что

$$f(x, y) \overset{L^1(I^2)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}\, \tilde{\chi}_i(x)\, \tilde{\chi}_j(y). \tag{11}$$

Аналогично, из расходимости п. в. ряда (11′) следует расходимость п. в. ряда (11). Покажем, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^j \left(\sum_{m=k(n)+1}^{k(n+1)} (c_m^{(j)})^2 \right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{12}$$

Имеем (см. (6), (7), (10))

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^j \left(\sum_{m=k(n)+1}^{k(n+1)} (c_m^{(j)})^2 \right)^{1/2} \leqslant \sum_{j=1}^{n-2} 2^j \left(\sum_{m=k(n)+1}^{k(n+1)} (c_m^{(j)})^2 \right)^{1/2} +$$

$$+ \sum_{j=n-1}^{\infty} 2^j \left(\sum_{m=1}^{\infty} (c_m^{(j)})^2 \right)^{1/2} \leqslant 2^{n-2} \sum_{j=1}^{n-2} \left(\sum_{m=k(n)+1}^{k(n+1)} (c_m^{(j)})^2 \right)^{1/2} +$$

$$+\sum_{j=n-1}^{\infty} 2^j \|\alpha_j\|_{L^2(I)} \leqslant \frac{2^{n-2}}{4^n} \sum_{j=n-1}^{\infty} \frac{2^j}{(4\sqrt{2})^j} < \frac{1}{2^n}.$$

Итак, неравенство (12) установлено.

Для доказательства теоремы достаточно доказать расходимость п. в. двойного ряда Фурье вышеопределенной функции $f(x, y)$ (см. (11)) по системе $\{\varphi_n(x)\varphi_m(y)\}_{n,m=1}^{\infty}$ (как отмечалось выше $f(x, y)$ и $g(x, y)$ равнораспределенные).

Лемма 2. *Все ряды*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}\, Q_i(x)\, Q_j(y), \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}\, \tilde{\chi}_i(x)\, \alpha_j(y), \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}\, \alpha_i(x)\, \tilde{\chi}_j(y), \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}\, \alpha_i(x)\, \alpha_j(y), \tag{16}$$

где b_{ij}, Q_i *и* α_j *определены выше* (см. (3), (5), (9)), *сходятся в метрике* $L^1(I^2)$. *Причем ряды* (14), (15) *и* (16) *ещё сходятся п. в., а ряд* (13) *расходятся п. в.*.

Доказательство. Имея в виду (9) и определение системы Хаара, легко убедиться, что

$$|b_{ij}| \leqslant \sqrt{i}\sqrt{j}\, \|g\|_{L^1(I^2)}, \quad i, j = 1, 2, \cdots. \tag{17}$$

Используя этот факт, имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \|b_{ij}\, \alpha_i(x)\, \alpha_j(y)\|_{L^1(I^2)} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |b_{ij}|\, \|\alpha_i\|_{L^1(I)} \|\alpha_j\|_{L^1(I)} \leqslant$$

$$\leqslant \|g\|_{L^1(I^2)} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sqrt{i}}{2^i} \cdot \frac{\sqrt{j}}{2^j} < \infty.$$

Следовательно, ряд (16) сходится п. в. и в метрике $L^1(I^2)$.

Докажем сходимость п. в. ряда (14). Обозначим

$$B_j = \left\{y \in (0, 1);\ |\alpha_j(y)| \leqslant \frac{1}{4^j}\right\}, \quad j = 1, 2, \cdots. \tag{18}$$

Используя (6) и неравенство Чебишева, имеем

$$m\, B_j > 1 - \frac{1}{2^j}, \quad j = 1, 2, \cdots. \tag{19}$$

Известно следующее неравенство (см. [3], стр. 83):

$$m\left\{x \in (0, 1),\ \sup_{1 \leqslant n < \infty} \left|\sum_{i=1}^{n} c_i(f, \chi)\, \chi_i(x)\right| > \lambda\right\} \leqslant \frac{d_1}{\lambda} \|f\|_{L^1(I)},$$

где d_1 есть абсолютная постоянная, а $c_i(f, \chi)$ — коэффициенты Фурье-Хаара некоторой функции $f(x) \in L^1(I)$. Отсюда, используя определение системы типа Хаара, получаем аналогичное неравенство

$$m\left\{x \in (0, 1);\ \sup_{1<n<\infty} \left|\sum_{i=1}^{n} c_i(f, \chi)\,\tilde{\chi}_i(x)\right| > \lambda\right\} \leqslant \frac{d_1}{\lambda}\|f\|_{L^1(I)}. \qquad (20)$$

Имеем (см. (9))

$$b_{ij} = \int_0^1\int_0^1 g(x, y)\,\chi_i(x)\,\chi_j(y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 g(x, y)\,\chi_j(y)\,dy\right]\chi_i(x)\,dx. \qquad (21)$$

Это означает, что при фиксированном $1 \leqslant j < \infty$, числа b_{ij}, $i = 1, 2, \ldots$ являются коэффициентами Фурье-Хаара функции

$$F_j(x) = \int_0^1 g(x, y)\,\chi_j(y)\,dy,\ j = 1, 2, \cdots. \qquad (22)$$

Очевидно, что

$$\|F_j\|_{L^1(I)} \leqslant \sqrt{j}\cdot\|g\|_{L^1(I^2)},\ j = 1, 2, \cdots. \qquad (23)$$

Следовательно, применяя неравенство (20) к функциям F_j, $j = 1, 2, \ldots$ и обозначая

$$A_j = \left\{x \in (0, 1);\ \sup_{1<n<\infty}\left|\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\,\chi_i(x)\right| \leqslant 2^j\right\},\ j = 1, 2, \cdots, \qquad (24)$$

получаем (см. (21), (22), (23))

$$m A_j > 1 - \frac{d_1\sqrt{j}\,\|g\|_{L^1(I^2)}}{2^j},\ j = 1, 2, \cdots. \qquad (25)$$

Из определения системы типа Хаара следует, что (см. (21), (22)) ряды

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_{ij}\,\tilde{\chi}_i(x),\ j = 1, 2, \cdots, \qquad (26)$$

сходятся п. в. и в метрике $L^1(I)$. Поэтому множество $G \subset (0, 1)$, на котором все ряды сходятся п. в. одновременно, имеет полную меру. Из (25) следует, что множество $\lim A_j$ тоже имеет полную меру. В итоге получим, что множество

$$A = \left(\bigcup_{n>1}\ \bigcap_{j>n} A_j\right) \cap G \qquad (27)$$

имеет полную меру. Из (19) следует, что множество $B = \bigcup_{n>1}\bigcap_{j>n} B_j$ тоже имеет полную меру. Следовательно, для сходимости п. в. ряда (14) достаточно доказать его сходимость п. в. на множестве $A \times B \subset I^2$.

Итак, пусть $(x_0, y_0) \in A \times B$—фиксированная точка. Имея в виду характер множеств A и B, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать целое число M такое, что

$$x_0 \in A_j \text{ при } j > M, \tag{28}$$

$$y_0 \in B_j \text{ при } j > M, \tag{29}$$

$$2^{-M} < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \tag{30}$$

После этого, используя сходимость п. в. рядов (16) в точке $x_0 \quad A \subset G$ (см. (27)), выберем такое N, что

$$\left|\sum_{j=1}^{M} \sum_{l=N+1}^{n} b_{lj}\, \chi_l(x_0)\, \alpha_j(y_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } n > N. \tag{31}$$

При $m > M$ и $n > N$, очевидно, что

$$\left|\sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{M} b_{lj}\, \tilde{\chi}_l(x)\, \alpha_j(y) - \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} b_{lj}\, \tilde{\chi}_l(x)\, \alpha_j(y)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{l=1}^{M} \sum_{j=N+1}^{n} b_{lj}\, \tilde{\chi}_l(x)\, \alpha_j(y)\right| + \left|\sum_{j=M+1}^{m} \sum_{l=1}^{n} b_{lj}\, \tilde{\chi}_l(x)\, \alpha_j(y)\right| \cdot \tag{32}$$

Имеем (см. (18), (24), (28), (29))

$$\left|\sum_{l=1}^{n} b_{lj}\, \chi_l(x_0)\right| \leqslant 2^j \text{ и } |\alpha_j(y_0)| < \frac{1}{4^j} \text{ при } j > M. \tag{33}$$

Следовательно (см. (30), (33))

$$\left|\sum_{j=M+1}^{m} \sum_{l=1}^{n} b_{lj}\, \tilde{\chi}_l(x_0)\, \alpha_j(y_0)\right| \leqslant \sum_{j=M+1}^{m} \left[|\alpha_j(y_0)| \left|\sum_{l=1}^{n} b_{lj}\, \chi_l(x_0)\right|\right] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^M} < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \tag{34}$$

Из (31), (32) и (34) вытекает

$$\left|\sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{lj}\, \tilde{\chi}_l(x_0)\, \alpha_j(y_0) - \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} b_{lj}\, \tilde{\chi}_l(x_0)\, \alpha_j(y_0)\right| < \varepsilon.$$

Этим доказана сходимость ряда (14) в любой точке $(x_0, y_0) \in A \times B$ и, следовательно, его сходимость п. в.. Аналогично можно доказать сходимость п. в. ряда (15).

Теперь докажем их сходимость в метрике $L^1(I^2)$. Сделаем это для ряда (14) (для ряда (15) оно аналогично). В силу базисности системы $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в $L^1(I)$ и определения системы типа Хаара имеем

$$\left\|\sum_{l=1}^{n} c_l(f, \chi)\, \tilde{\chi}_l(x)\right\|_{L^1(I)} \leqslant d_2 \|f\|_{L^1(I)}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

где d_2 — абсолютная постоянная, а $c_l(f, \chi)$ — коэффициенты Фурье-Хаара некоторой функции $f(x) \in L^1(I)$. Применяя это неравенство к функциям F_j, $j = 1, 2, \cdots$ (см. (22)), получаем (см. (21), (23))

$$\left\| \sum_{l=1}^{n} b_{lj} \tilde{\chi}_l(x) \right\|_{L^1(I)} \leqslant d_2 \sqrt{j}\, \|g\|_{L^1(I^2)},\quad j = 1, 2, \cdots. \tag{35}$$

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Выберем целое число M такое, что

$$\sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{d_2 \sqrt{j}\, \|g\|_{L^1(I^2)}}{32^j} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{36}$$

Затем, используя сходимость в метрике $L^1(I)$ рядов (26) найдем целое число N такое, что

$$\left\| \sum_{j=1}^{M} \sum_{l=N+1}^{n} b_{lj} \chi_l(x)\, \alpha_j(y) \right\|_{L^1(I^2)} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } n > N. \tag{37}$$

При $n < N$ и $m > M$ имеем (см. (32), (35), (36), (37))

$$\left\| \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{lj} \tilde{\chi}_l(x)\, \alpha_j(y) - \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} b_{lj} \tilde{\chi}_l(x)\, \alpha_j(y) \right\|_{L^1(I^2)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \sum_{j=1}^{M} \sum_{l=N+1}^{n} b_{lj} \chi_l(x)\, \alpha_j(y) \right\|_{L^1(I^2)} + \sum_{j=M+1}^{\infty} \|\alpha_j(y)\|_{L^1(I)} \left\| \sum_{l=1}^{n} b_{lj} \chi_l(x) \right\|_{L^1(I)} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{d_2 \sqrt{j}\, \|g\|_{L^1(I^2)}}{2^j} < \varepsilon.$$

Тем самым доказана сходимость рядов (14) и (15) в метрике $L^1(I^2)$. Сходимость в метрике $L^1(I^2)$ ряда (13) непосредственно следует из сходимости в $L_1(I^2)$ рядов (11), (14), (15), (16) и равенства

$$Q_l(x)\, Q_j(y) = \tilde{\chi}_l(x)\, \tilde{\chi}_l(y) - \tilde{\chi}_l(x)\, \alpha_j(y) -$$

$$- \alpha_l(x)\, \tilde{\chi}_l(y) + \alpha_l(x)\, \alpha_j(y), \tag{38}$$

которое следует из (5).

Расходимость п. в. ряда (13) вытекает из расходимости п. в. ряда (11) и сходимости п. в. рядов (14), (15) и (16), если иметь в виду (38).

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Используя сходимость в метрике рядов (13), (14), (15) и (16) (см. лемму 2), а также условие (2), вычислим коэффициенты Фурье a_{nm} функции $f(x, y)$ (см. (II)) по системе $\{\varphi_n(x)\, \varphi_m(y)\}_{n,\, m=1}^{\infty}$. При $k(p) < n \leqslant k(p+1)$ и $k(q) < m \leqslant$ $\leqslant k(q+1)$ имеем (см. (2), (3), (5), (11), (10), (38))

$$a_{nm} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, \varphi_n(x)\, \varphi_m(y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{lj} \tilde{\chi}_l(x)\, \tilde{\chi}_j(y)\, \varphi_n(x)\, \varphi_m(y)\, dx\, dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \int_0^1 \int_0^1 Q_i(x)\, Q_j(y)\, \varphi_n(x)\, \varphi_m(y)\, dx\, dy +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \int_0^1 \int_0^1 Q_i(x)\, a_j(y)\, \varphi_n(x)\, \varphi_m(y)\, dx\, dy +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \int_0^1 \int_0^1 a_i(x)\, Q_j(y)\, \varphi_n(x)\, \varphi_m(y)\, dx\, dy +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \int_0^1 \int_0^1 a_i(x)\, a_j(y)\, \varphi_n(x)\, \varphi_m(y)\, dx\, dy =$$

$$= b_{pq}\, a_n\, a_m + \sum_{j=1}^{\infty} b_{pj}\, a_n\, c_m^{(j)} + \sum_{i=1}^{\infty} b_{iq}\, a_m\, c_n^{(i)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}\, c_n^{(i)}\, c_m^{(j)}. \tag{39}$$

Для доказательства теоремы 2 достаточно доказать расходимость п. в. ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[\sum_{n=k(p)+1}^{k(p+1)} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} a_{nm}\, \varphi_n(x)\, \varphi_m(y) \right], \tag{40}$$

для которого, как легко убедиться, имеем (см. (3), (39))

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[\sum_{n=k(p)+1}^{k(p+1)} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} a_{nm}\, \varphi_n(x)\, \varphi_m(y) \right] =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} b_{pq}\, Q_p(x)\, Q_q(y) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[Q_p(x) \sum_{j=1}^{\infty} b_{pj} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_m^{(j)}\, \varphi_m(y) \right] +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[Q_q(y) \sum_{i=1}^{\infty} b_{iq} \sum_{n=k(p)+1}^{k(p+1)} c_n^{(i)}\, \varphi_n(x) \right] +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \sum_{n=k(p)+1}^{k(p+1)} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_n^{(i)}\, c_m^{(j)}\, \varphi_n(x)\, \varphi_m(y) \right].$$

Итак, ряд (40) разложен на четыре ряда. Для первого из них

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} b_{pq}\, Q_p(x)\, Q_q(y)$$

имеем расходимость п. в. (см. лемму 2). Поэтому для доказательства расходимости п. в. ряда (40) достаточно доказать сходимость п. в. остальных трех рядов:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[Q_p(x) \sum_{j=1}^{\infty} b_{pj} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_m^{(j)}\, \varphi_m(y) \right], \tag{41}$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left[Q_q(y)\sum_{i=1}^{\infty}b_{iq}\sum_{n=k(p)+1}^{k(p+1)}c_n^{(i)}\varphi_n(x)\right], \tag{42}$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}b_{ij}\sum_{n=k(p)+1}^{k(p+1)}\sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)}c_n^{(i)}c_m^{(j)}\varphi_n(x)\varphi_m(y)\right]. \tag{43}$$

Имеем (см. (12), (17))

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}b_{ij}\sum_{n=k(p)+1}^{k(p+1)}\sum_{m=k(k)+1}^{k(q+1)}c_n^{(i)}c_m^{(j)}\varphi_n(x)\varphi_m(y)\right\|_{L^1(I^2)}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|b_{ij}|\left(\sum_{n=k(p)+1}^{k(p+1)}\sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)}(c_n^{(i)})^2(c_m^{(j)})^2\right)^{1/2}\leqslant$$

$$<\|g\|_{L^1(I^2)}\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{i}\left(\sum_{n=k(p)+1}^{k(p+1)}(c_n^{(i)})^2\right)^{1/2}\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{j}\left(\sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)}(c_m^{(j)})^2\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\|g\|_{L^1(I^2)}\frac{1}{2^q}\cdot\frac{1}{2^p}.$$

Отсюда следует сходимость п. в. ряда (43).

Теперь докажем сходимость п. в. ряда (41). Имеем

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left[Q_p(x)\sum_{j=1}^{\infty}b_{pj}\sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)}c_m^{(j)}\varphi_m(y)\right]=$$

$$=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left[\bar{\chi}_p(x)\sum_{j=1}^{\infty}b_{pj}\sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)}c_m^{(j)}\varphi_m(y)\right]-$$

$$-\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left[\alpha_p(x)\sum_{j=1}^{\infty}b_{pj}\sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)}c_m^{(j)}\varphi_m(y)\right]. \tag{44}$$

Имеем также (см. (6), (12), (17))

$$\left\|\alpha_p(x)\sum_{j=1}^{\infty}b_{pj}\sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)}c_m^{(j)}\varphi_m(y)\right\|_{L^1(I^2)}<$$

$$\leqslant\|\alpha_p(x)\|_{L^1(I)}\sum_{j=1}^{\infty}|b_{pj}|\left(\sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)}(c_m^{(j)})^2\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\|g\|_{L^1(I^2)}\frac{\sqrt{p}}{(4\sqrt{2})^{p+1}}\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{j}\left(\sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)}(c_m^{(j)})^2\right)^{1/2}\leqslant$$

$$<\|g\|_{L^1(I^2)}\frac{\sqrt{p}}{(4\sqrt{2})^{p+1}}\cdot\frac{1}{2^q}.$$

Следовательно, имеем сходимость п. в. ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left[\alpha_p(x)\sum_{j=1}^{\infty}b_{pj}\sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)}c_m^{(j)}\varphi_m(y)\right].$$

Отсюда и из (44) следует, что для доказательства сходимости п. в. ряда (41) достаточно доказать сходимость п. в. ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left[\bar{\chi}_p(x)\sum_{j=1}^{\infty}b_{pj}\sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)}c_m^{(j)}\varphi_m(y)\right]. \tag{45}$$

Для этого достаточно доказать что в фиксированной точке $x \in A$ (см. (27)) он сходится для п. в. $y \in (0, 1)$. Итак, пусть $x_0 \in A$. Тогда существует такое число R_0, что

$$x_0 \in A_j \text{ при } j > R_0. \tag{46}$$

Учитывая (12), для любого целого M выберем такое число $R(M)$, что

$$R(M) > R_0, \tag{47}$$

$$\sum_{q=1}^{M} \sum_{j=R(M)+1}^{\infty} 2^j \left(\sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} (c_m^{(j)})^2 \right)^{1/2} < \frac{1}{2^\mu}, \; M = 1, 2, \cdots . \tag{48}$$

Если через $S_{\mu\nu}(x, y)$ обозначить частичную сумму ряда (45), то, обозначая

$$F_{\mu\nu}(x, y, M) = \sum_{p=1}^{\mu} \sum_{q=1}^{\nu} \left[\tilde{\chi}_p(x) \sum_{j=R(M)+1}^{\infty} b_{pj} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_m^{(j)} \varphi_m(y) \right], \tag{49}$$

$$H_{\mu\nu}(x, y, M) = \sum_{p=1}^{\mu} \sum_{q=1}^{\nu} \left[\tilde{\chi}_p(x) \sum_{j=R(M)}^{\infty} b_{pj} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_m^{(j)} \varphi_m(y) \right], \tag{50}$$

получим

$$S_{\mu\nu}(x, y) = F_{\mu\nu}(x, y, M) + H_{\mu\nu}(x, y, M) = 1, 2, \cdots . \tag{51}$$

Преобразуя (50), имеем

$$H_{\mu\nu}(x, y, M) = \sum_{j=1}^{R(M)} \left\{ \left[\sum_{p=1}^{\mu} b_{pj} \tilde{\chi}_p(x) \right] \left[\sum_{q=1}^{\nu} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_m^{(j)} \varphi_m(y) \right] \right\}. \tag{52}$$

Известна сходимость п. в. рядов (26) в точке $x \in A \subset G$ (см. (27)). Используя также сходимость п. в. рядов (8), получаем (см. (10), (52))

$$\lim_{\mu, \nu \to \infty} H_{\mu\nu}(x_0, y, M) = H(x_0, y, M) \text{ для п. в. } y \in (0, 1), \tag{53}$$

где функции $H(x_0, y, M)$, $M = 1, 2, \ldots$, являются п. в. конечными. С другой стороны, имеем (см. (24), (12), (46), (47), (48), (49))

$$\left\| \max_{1<\mu, \nu<\infty} |F_{\mu\nu}(x_0, y, M)| \right\|_{L^2(I)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \max_{1<\mu, \nu<\infty} \sum_{q=1}^{\nu} \sum_{j=R(M)+1}^{\infty} \left| \sum_{p=1}^{\mu} b_{pj} \tilde{\chi}_p(x_0) \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_m^{(j)} \varphi_m(y) \right| \right\|_{L^2(I)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{j=R(M)+1}^{\infty} \max_{1<p<\infty} \left| \sum_{p=1}^{\mu} b_{pj} \tilde{\chi}_p(x_0) \right| \left| \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_m^{(j)} \varphi_m(y) \right| \right\|_{L^2(I)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{j=R(M)+1}^{\infty} 2^j \left(\sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} (c_m^{(j)})^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \sum_{q=1}^{M} \sum_{j=R(M)+1}^{\infty} 2^j \left(\sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} (c_m^{(j)})^2 \right)^{1/2} +$$

$$+ \sum_{q=M+1}^{\infty} \sum_{j=R(m)+1}^{\infty} 2^j \left(\sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} (c_m^{(j)})^2 \right)^{1/2} < \frac{1}{2^\mu} + \sum_{q=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^q} = \frac{1}{2^{M-1}}.$$

Отсюда следует

$$\lim_{M\to\infty} \left\| \max_{1<\mu, \nu<\infty} |F_{\mu\nu}(x_0, y, M)| \right\|_{L^2(I)} = 0,$$

а это означает существование последовательности чисел M_n, $n=1, 2, \ldots$ таких, что для п. в. $y \in (0, 1)$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1<\mu,\nu<\infty} |F_{\mu\nu}(x_0, y, M_n)| = 0. \tag{54}$$

Отсюда получим, что на множестве полной меры $E \subset (0, 1)$ выполняются условия (53) и (54). Пусть теперь $y_0 \in B$ и $\varepsilon > 0$.

Тогда существует целое число n_0 такое, что

$$|F_{\mu\nu}(x_0, y_0, M_{n_0})| < \frac{\varepsilon}{4}, \ \mu, \nu = 1, 2 \cdots. \tag{55}$$

С другой стороны, из (53) следует существование такого числа T, что

$$|H_{\mu\nu}(x_0, y_0, M_{n_0}) - H(x_0, y_0, M_{n_0})| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ при } \mu, \nu \geqslant T. \tag{56}$$

Из (51), (52) и (56) получаем

$$|S_{\mu_1\nu_1}(x_0, y_0) - S_{\mu_2\nu_2}(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

при $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2 \geqslant T$.

Итак, доказана сходимость п. в. ряда (45) и, тем самым, сходимость п. в. ряда (41). Сходимость п. в. ряда (42) доказывается аналогичным образом. Теорема 2 доказана.

Из неё, как уже отмечалось, с учетом результата работы [2], следует теорема 1.

Замечание. Для полных ортонормированных систем общего вида $\{\varphi_{nm}(x, y)\}_{n, m=1}^{\infty}$, вообще говоря, теорема 1 неверна. Точнее, построим пример такой полной ортонормированной системы $\{\Omega_{nm}(x, y)\}_{n, m=1}^{\infty}$, все двойные ряды Фурье по которой сходятся п. в. и в метрике $L_1(I^2)$.

Известно, что существует измеримое отображение $\sigma(x): (0, 1) \to (0, 1) \times (0, 1)$ с условиями

1) Если $x \neq y$, то $\sigma(x) \neq \sigma(y)$,

2) Если E — измеримое множество, то измеримо также $\sigma(E)$ и имеет место равенство $m_1 E = m_2 \sigma(E)$.

Пример такого отображения описывается в [4], стр. 94.

Обозначая $T_n(x, y) = \chi_n(\sigma^{-1}(x, y))$, $n = 1, 2, \cdots$, где $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ система Хаара, получаем полную ортонормированную в $L^1(I^2)$ систему, для которой, как легко убедиться, все ряды Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f(t, s)\, T_n(t, s)\, dt\, ds\, T_n(x, y) \quad (f \in L^1(I^2))$$

сходятся п. в. и в метрике $L^1(I^2)$. Для неё справедливо

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_2 \{T_{2^k}(x, y) \neq 0\} < \infty. \tag{57}$$

Теперь определим систему $\{\Omega_{nm}(x, y)\}_{n, m=1}^{\infty}$ с помощью системы $\{T_n(x, y)\}_{n=1}^{\infty}$. Для двойных индексов $A = \{n, 1\}$; $n \neq 2^k$, $k=1, 2, \cdots\}$ полагаем $\Omega_{n1}(x, y) = T_n(x, y)$ $(n \neq 2^k)$. Для остальных же индексов

$(n, m) \in A^c$ определим каждую функцию $\mathfrak{Q}_{nm}(x, y)((n, m) \in A^c)$ равной одной функции $T_{2^k}(x, y)$, $k = 1, 2, \cdots$, таким образом, чтобы этим осуществлялось взаимнооднозначное соответствие между семействами функций $\{\mathfrak{Q}_{nm}(x, y); (n, m) \in A^c\}$ и $\{T_{2^k}(x, y); k = 1, 2, \cdots\}$. В силу полноты системы $\{T_n(x, y)\}_{n=1}^{\infty}$, система $\{\mathfrak{Q}_{nm}(x, y)\}_{n, m=1}^{\infty}$ тоже станет полной в $L^1(I^2)$. Докажем, что все двойные ряды Фурье по этой системе сходятся п. в. и в метрике $L^1(I^2)$. Пусть $f(x, y) \in L^1(I^2)$ — некоторая функция. Частичную сумму двойного ряда Фурье этой функции разложим на три слагаемых следующим образом (при этом используя определение системы $\{\mathfrak{Q}_{nm}(x, y)\}_{n, m=1}^{\infty}$)

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\int_0^1\int_0^1 f(t, s)\, \mathfrak{Q}_{nm}(t, s)\, dt\, ds\, \mathfrak{Q}_{nm}(x, y) =$$

$$= \sum_{\substack{1<n<N \\ n\neq 2^k}} \int_0^1\int_0^1 f(t, s)\, \mathfrak{Q}_{n1}(t, s)\, dt\, ds\, \mathfrak{Q}_{n1}(x, y) +$$

$$+ \sum_{\substack{(n, m)\in A^c \\ 1<n<N \\ 1<m<M}} \int_0^1\int_0^1 f(t, s)\, \mathfrak{Q}_{nm}(t, s)\, dt\, ds\, \mathfrak{Q}_{nm}(x, y) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\int_0^1\int_0^1 f(t, s)\, T_n(t, s)\, dt\, ds\, T_n(x, y) -$$

$$- \sum_{\substack{k>1 \\ 2^k<N}} \int_0^1\int_0^1 f(t, s)\, T_{2^k}(t, s)\, dt\, ds\, T_{2^k}(x, y) +$$

$$+ \sum_{\substack{(n, m)\in A^c \\ 1<n<N \\ 1<m<M}} \int_0^1\int_0^1 f(t, s)\, \mathfrak{Q}_{nm}(t, s)\, dt\, ds\, \mathfrak{Q}_{nm}(x, y).$$

Во втором и третьем слагаемых участвуют только функции $T_{2^k}(x, y)$, $k = 1, 2, \cdots$. Поэтому в силу (57), они сходятся п. в. и в метрике $L^1(I^2)$ при $N, M \to \infty$. Первое слагаемое тоже сходится п. в. и в метрике $L^1(I^2)$, так как оно является частичной суммой ряде Фурье функции $f(x, y)$ по системе $\{T_n(x, y)\}_{n=1}^{\infty}$. Отсюда следует, что все двойные ряды Фурье по системе $\{\mathfrak{Q}_{nm}(x, y)\}_{n, m=1}^{\infty}$ сходятся п. в. и в метрике $L^1(I^2)$ (по Прингсхейму).

В заключение выражаю благодарность А. А. Талаляну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 26. II. 1986

Գ. Ա. ԿԱՐԱԳՈՒԼՅԱՆ. Ըստ լրիվ օրթոնորմավորված համակարգերի Ֆուրյեի կրկնակի շարքերի տարամիտության մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ապացուցվում է՝

Թեորեմ. Դիցուք $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *սահմանափակ ֆունկցիաներից բաղկացած լրիվ օրթոնորմավորված համակարգ է, իսկ* $\lambda(t):[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\lambda(0)=0$, *մոնոտոն աճող անընդհատ ֆունկցիա է, որը բավարարում է՝*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda(t)}{t\ln^+ t}=0$$

պայմանին։ Այդ դեպքում գոյություն ունի $\lambda(L)$ *դասին պատկանող* $f(x,y)$ *ֆունկցիա* $(\lambda(|f(x,y)|)\in L^1(I^2)$, *որի Ֆուրյեի կրկնակի շարքը ըստ* $\{\varphi_n(x)\varphi_m(y)\}_{n,m=1}^{\infty}$ *համակարգի համարյա ամենուրեք տարամետ է Պրինգսհեյմի մեթոդով* $(0,1)\times(0,1)$ *քառակուսու վրա։*

Այս արդյունքը ընդհանրացնում է Հաարի $\{\chi_n(x)\chi_m(y)\}_{n,m=1}^{\infty}$ *կրկնակի համակարգի համար հայտնի անալոգ թեորեմը ձևակերպված [2] աշխատանքում։*

G. A. KARAGULIAN. *On the divergence of Fourier double series by complete orthonormal sysѕems* (summary)

Theorem. Let $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ be a complete orthonormal system including a bounded functions, and let $\lambda(1):[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\lambda(0)=0$, be a continuous increasing unction for which

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda(t)}{t\ln^+ t}=0.$$

Then there exists a function $f(x,y)$ from the class $\lambda(L)$ $(\lambda(|f(x,y)|)\in L^1(I^2)$), whose double Fourier series by the system $\{\varphi_n(x)\varphi_m(y)\}_{n,m=1}^{\infty}$ divergens almost everywhere by method of Pringsheim.

This result generalizes analogous theorem of [2] for Haar double system $\{\chi_n(x)\chi_m(y)\}_{n,m=1}^{\infty}$

ЛИТЕРАТУРА

1. О. *П. Джагнидзе*. Представление измеримых функций двух переменных двойными рядами, Сообщ. АН ГССР, 34, № 2, 1964, 277—282.
2. *Т. Ш. Зерекидзе*. Сходимость кратных рядов Фурье-Хаара и сильная диффеернцируемость интегралов, Тр. Тбил. мат. ин-та АН ГССР, 76, 185, 88—89.
3. *Б. С. Кашин, А. А. Саакян*. Ортогональные ряды, М., «Наука», 1984.
4. *Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь*. Лекции по функциональному анализу, М., «Мир», 1979.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIV, № 2, 1989 Математика

УДК 517.53

В. В. АНДРИЕВСКИЙ

О МЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОТОБРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ РИМАНА ДЛЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ К КОНТИНУУМУ БЕЗ ВНЕШНИХ НУЛЕВЫХ УГЛОВ ОБЛАСТИ

В 1959—1963 гг. В. К. Дзядыком [1—3] для некоторых областей G с кусочно-гладкой границей была получена конструктивная характеристика аналитических в G и удовлетворяющих условию Гельдера в $\bar{G}$ функций. Центральную роль в этом описании играет расстояние $\rho_R(z)$ от граничной точки $z \in \partial G$ до R-й линии уровня $(R>1)$ функции $\Phi(z)$, конформно и однолистно отображающей область $\bar{C}\setminus\bar{G}$ ($\bar{C}$ —расширенная комплексная плоскость) на внешность единичного круга со стандартной нормировкой в ∞. Очевидно, что расстояние $\rho_R(z)$ зависит от свойств функции $\Phi(z)$ или, что то же самое, от геометрического строения области G. В дальнейшем эти результаты распространялись на более общие множества В. К. Дзядыком, Н. А. Лебедевым, Н. А. Широковым, П. М. Тамразовым, В. И. Белым и др. (подробный обзор можно найти в монографии [4], глава IX).

В работах [5—7] были найдены два геометрических условия на континуум $\mathfrak{M}$, которые достаточны и при некоторых дополнительных предположениях необходимы для того, чтобы на $\mathfrak{M}$ имела место прямая теорема В. К. Дзядыка. В формулировке этих условий, подобно построениям работ [8, 9], использовано понятие модуля четырехсторонника (см. [10, 11]), который хотя и зависит от конфигурации четырехсторонника, но, как известно, не является столь же геометричной характеристикой, как, например, диаметр или площадь.

Указанный факт делает необходимым более детальное изучение содержащихся в [5—7] геометрических условий и их связи с метрическими свойствами отображающей функции $\Phi(z)$.

§ 1. Основные определения и результаты

Пусть $\mathfrak{M}\subset C$ — конечный континуум $(\operatorname{diam}\mathfrak{M}>0)$ с односвязным дополнением $\Omega=\bar{C}\setminus\mathfrak{M}$ и границей $L=\partial\mathfrak{M}$, функция $w=\Phi(z)$ конформно и однолистно отображает Ω на $\Omega'\overset{\mathrm{df}}{=}\{w:|w|>1\}$, причем $\Phi(\infty)=\infty,\ \Phi'(\infty)>0$.

Следуя [5—7] будем говорить, что $\mathfrak{M}\in H$, если любые точки z и $\zeta\in\mathfrak{M}$ можно соединить дугой $\gamma(z,\zeta)\subset\mathfrak{M}$, длина которой удовлетворяет условию

$$\operatorname{mes} \gamma (z, \zeta) \leqslant C |z - \zeta|, \quad C = C(\mathfrak{M}) \geqslant 1. \tag{1}$$

Континуумы класса H в силу определяющего их условия (1) естественно называть континуумами без внешних нулевых углов. Тем же символом Φ будем обозначать гомеоморфизм между компактификацией $\tilde{\Omega}$ области Ω простыми концами по Каратеодори (см. [12], стр. 45—50) и $\bar{\Omega}$, совпадающий в Ω с отображением $\Phi(z)$. Пусть $\Psi \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi^{-1}$, $\bar{\tilde{L}} \overset{\mathrm{df}}{=} \tilde{\Omega} \setminus \Omega$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{M} \in H$. *Тогда*: (I) *все простые концы* $Z \in \tilde{L}$ *первого рода, т. е. имеют одноточечные тела* $|Z| = Z \in L$; (II) *каждая точка* $z \in L$ *имеет кратность, не превосходящую некоторого числа* $k = k(\mathfrak{M}) > 1$, *т. е. может быть телом не более k простых концов.*

Будем говорить, что дуга $\gamma \subset \Omega$ отделяет простые концы Z_1, $Z_2, \cdots (\in \tilde{\Omega})$ от простых концов $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \cdots (\in \tilde{\Omega})$, если $\Omega \setminus \gamma$ состоит из двух связных компонент, к одной из которых примыкают $Z_1, Z_2, \cdots$, а к другой—$\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \cdots$ (под примыканием простого конца понимается тот факт, что в области и подобласти он может быть определен одной и той же цепью сечений). В дальнейшем, не оговариваясь особо, будем рассматривать только локально-спрямляемые дуги и кривые.

Через $\gamma_Z(r)$, $Z \in \tilde{L}$, $r > 0$ обозначим дугу на окружности $\{\zeta : |\zeta - z| = r\}$, $z = |Z|$, отделяющую Z от ∞ (если таких дуг несколько, то в качестве $\gamma_Z(r)$ выбираем ту из них, которая отделяет Z от всех остальных). При $0 < r < R < d/2$, $d \overset{\mathrm{df}}{=} \operatorname{diam} \mathfrak{M}$, дуги $\gamma_Z(r)$ и $\gamma_Z(R)$ являются сторонами некоторого четырехсторонника $Q_Z(r, R) \subset \Omega$, две другие стороны которого—части границы L. Через $m_Z(r, R)$ обозначим его модуль [8 — 11], т. е. модуль семейства дуг, разделяющих в $Q_Z(r, R)$ стороны $\gamma_Z(r)$ и $\gamma_Z(R)$.

В дальнейшем через $C, C_1, \ldots$ будем обозначать неотрицательные константы, а через $\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots$—достаточно малые неотрицательные константы, в различных соотношениях, вообще говоря, различные и зависящие только от континуума $\mathfrak{M}$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{M} \in H$, $Z \in \bar{\tilde{L}}$, $0 < r_1 < r_2 < r_3 < d/2$. *Тогда*

$$0 \leqslant m_Z(r_1, r_3) - [m_Z(r_1, r_2) + m_Z(r_2, r_3)] \leqslant C_1; \tag{2}$$

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \leqslant m_Z(r_1, r_2) \leqslant C_2 \ln \frac{r_2}{r_1} + C_3. \tag{3}$$

Будем говорить, что $\mathfrak{M} \in H^*$ (см. [5—7]), если $\mathfrak{M} \in H$ и для любых простых концов Z и $\mathbf{Z} \in \tilde{L}$ со свойством $|z - \zeta| < \varepsilon$ $(z = |Z|, \zeta = |\mathbf{Z}|)$ выполняется неравенство

$$|m_Z(|z - \zeta|, \varepsilon) - m_{\mathbf{Z}}(|z - \zeta|, \varepsilon)| \leqslant C. \tag{4}$$

Пусть $Z \in \bar{L}$, $\mathbf{Z} \in \tilde{\Omega}$. Через $r_Z(\mathbf{Z})$ обозначим точную верхнюю грань тех $r > 0$, для которых дуга $\gamma_Z(r)$ отделяет Z от $\mathbf{Z}$.

Если $\mathfrak{M} \in H$, то непосредственно из определения вытекает соотношение

$$|z - \zeta| \leqslant C\, r_Z(\mathbf{Z}); \quad \overset{\bullet}{z} = |Z|, \ \zeta = |\mathbf{Z}|. \tag{5}$$

При проверке условия (4) полезен суледующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{M} \in H$; Z *и* $\mathbf{Z} \in \tilde{L}$, $z = |Z| \in L$, $\zeta = |\mathbf{Z}| \in L$, $0 < |z - \zeta| < \varepsilon < d/2$. *Тогда*: (I) *если* $r_Z(\mathbf{Z}) \leqslant C\,|z - \zeta|$, *то выполняется соотношение* (4); (II) *если* $r_Z(\mathbf{Z}) > |z - \zeta|$, *то соотношение* (4) *эквивалентно условию*

$$|m_Z(|z - \zeta|,\ r_Z(\mathbf{Z})) - m_{\mathbf{Z}}(|z - \zeta|,\ r_Z(\mathbf{Z}))| \leqslant C_1. \tag{6}$$

При рассмотрении задач теории приближения, которые привели к необходимости введения классов H и H^*, отдельному изучению подвергается случай, когда $\mathfrak{M} = L$—конечная жорданова дуга.

Дуги класса H принято называть квазигладкими (см. [13]). Каждая точка $z \in L$, за исключением ее концов, является телом двух различных простых концов Z^1 и $Z^2 \in \tilde{L}$.

Теорема 4. *Для того чтобы квазигладкая дуга* $L \in H^*$, *необходимо и достаточно, чтобы при всех* $z = |Z^1| = |Z^2| \in L \setminus \{z_1, z_2\}$ *и* $0 < \delta < \varepsilon_Z \overset{\mathrm{df}}{=} \min\{|z - z_1|, |z - z_2|\}$ (z_1 *и* z_2 — *концы дуги* L) *выполнялось неравенство*

$$|m_{Z^1}(\delta, \varepsilon_z) - m_{Z^2}(\delta, \varepsilon_z)| \leqslant C. \tag{7}$$

Теорема 4 дает удобное для геометрической проверки описание квазигладких дуг $L \in H^*$. Условие (7) отражает в некотором смысле «симметрию» дуги $L \in H^*$ и ассоциируется с гладкостью (т. е. с непрерывным изменением касательной к дуге L). Однако, как показывают приводимые ниже примеры 1 и 2, эти условия имеют существенно разную природу.

Пример 1. Дугу L^1 в плоскости переменного $z = x + iy$ зададим в виде графика функции

$$y = |x| / \ln 1 / |x|, \ |x| \leqslant 1/2,$$

L^1 — гладкая, но $L^1 \bar{\in} H^*$.

Пример 2. Определим последовательность точек $x_1 > x_2 > \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, пользуясь следующим рекуррентным правилом. Положим $x_1 = 1$. Точку x_{n+1}, $n = 1, 2 \cdots$ находим из условия

$$(1 + x_n^2)^{1/2} + (1 + x_{n+1})^{1/2} = 2 + x_n - x_{n+1}.$$

Положим далее $\gamma_n = \{z : |z - x_n| = (1 + x_n^2)^{1/2} - 1,\ (-1)^n \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ и рассмотрим дугу

$$L^2 = [-1, 0] \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n\right).$$

$L^2 \in H^*$, но ее касательная терпит разрыв в начале координат.

§ 2. Континуумы классов H и H^*

Доказательство теоремы 1. Как известно [12, стр. 45—50], всякий простой конец $Z \in \tilde{L}$ можно определить последовательностью круговых сечений $\{\gamma_k\}_{k=1,2\ldots}$ (с концами, соответственно, в точках ζ'_k и $\zeta''_k \in L$), диаметры которых d_k стремятся к 0 при $k \to \infty$. Соединим точки ζ'_k и ζ''_k дугой $\gamma(\zeta'_k, \zeta''_k) \subset \mathfrak{M}$ со свойством

$$\operatorname{mes} \gamma(\zeta'_k, \zeta''_k) \leqslant C|\zeta'_k - \zeta''_k| \leqslant C d_k.$$

Таким образом, тело $|Z|$ простого конца $Z \in \tilde{L}$ можно заключить в область, ограниченную кривой $\gamma_k \cup \gamma(\zeta'_k, \zeta''_k)$ и диаметром $\leqslant C_1 d_k$, $k=1, 2, \cdots$. Следовательно, оно является точкой.

Пусть теперь произвольная точка $z \in L$ является телом более, чем n простых концов $Z^1, \cdots, Z^n, \cdots$. Для достаточно малых $r > 0$ имеем

$$\gamma_{Z^i}(r) \cap \gamma_{Z^j}(r) = \varnothing;\ i \neq j;\ i, j = \overline{1, n}.$$

Повторяя рассуждения из первой части доказательства теоремы 1, нетрудно заметить, что

$$\operatorname{mes} \gamma_{Z^j}(r) > C r,\ j = \overline{1, n}.$$

Таким образом

$$2\pi r \geqslant \sum_{j=1}^{n} \operatorname{mes} \gamma_{Z^j}(r) \geqslant C n r,$$

откуда следует искомое неравенство $n \leqslant k = k(\mathfrak{M})$.

Приведем необходимые в дальнейшем факты о свойствах континуума $\mathfrak{M} \in H$, доказательство которых для случая области с жордановой границей содержится в [5] и в общем случае совершенно аналогично.

На протяжении всего § 2 будем считать, что $\mathfrak{M} \in H$.

Лемма 1. *Пусть дуга $\gamma \subset \Omega$ отделяет простой конец $Z \in \tilde{L}$ от ∞, $|Z| = z \in L$, $\zeta \in \gamma$,*

$$\rho_{Z,\zeta}(\xi) \overset{\text{df}}{=} \begin{cases} |\xi - z|^{-1}, & \xi \in \Omega,\ e^{-1} \leqslant \left|\dfrac{\xi - z}{\zeta - z}\right| \leqslant e; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{\gamma} \rho_{Z,\zeta}(\xi)\, |d\xi| \geqslant C.$$

Лемма 2. *Отображение $\Phi(\zeta)$ при всех $Z \in \tilde{L}$ и $r > 0$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{\zeta \in \gamma_Z(r)} |\Phi(\zeta) - \Phi(Z)| \asymp \inf_{\zeta \in \gamma_Z(r)} |\Phi(\zeta) - \Phi(Z)|,$$

где под символом $A \asymp B$ понимается неравенство $C_1 A \leqslant B \leqslant C_2 A$.

Для $Z \in \widetilde{L}$ *положим*

$$\Gamma_Z = \{\zeta : \zeta \in \Omega, \ \arg \Phi(\zeta) = \arg \Phi(Z)\}.$$

Если $\zeta \in \Gamma_Z$, $z = |Z|$, *то имеют место соотношения*

$$\inf_{\xi \in L} |\xi - \zeta| \overset{\mathrm{df}}{=} d(\zeta, L) \asymp r_Z(\zeta) \asymp |z - \zeta|. \tag{8}$$

Лемма 3. *Пусть* $Z \in \widetilde{L}$, $|Z| = z \in L$; ζ_1 *и* $\zeta_2 \in \Gamma_Z$; $\Phi(Z) = \tau$, $\Phi(\zeta_j) = \omega_j$, $j = 1, 2$. *Тогда условия* $|z - \zeta_1| < C_1 |z - \zeta_2|$ *и* $|\tau - \omega_1| \leqslant C_2 (\tau - \omega_2$ *эквивалентны.*

Согласно лемме 2 отображение $\Phi(\zeta)$ обладает по терминологии работы [8] слабым (K)-свойством, следовательно, для $\zeta \in \gamma_Z(|z - \zeta|)$, $Z \in \widetilde{L}$, $z = |Z|$, $|\zeta - z| < \varepsilon < d/2$, справедливо соотношение (см. [8], следствие 3)

$$|\Phi(\zeta) - \Phi(Z)| \asymp \exp\{-\pi m_Z(|z - \zeta|, \varepsilon)\}. \tag{9}$$

Этот факт в случае континуумов класса H допускает некоторое дополнение.

Лемма 4. *Пусть* $Z \in \widetilde{L}$, $z = |Z| \in L$, $\zeta \in \Gamma_Z$, $|\zeta - z| < \varepsilon < d/2$. *Тогда имеет место соотношение* (9).

Доказательство. Через $\Gamma_Z(\zeta)$ обозначим часть дуги Γ_Z, лежащую между точками z и ζ. Не ограничивая общности можно считать, что $|z - \zeta| < C_1^{-1} \varepsilon$, где C_1 достаточно велико. Положим

$$\gamma_1 = \gamma_Z(C_2^{-1} |z - \zeta|), \ \gamma_2 = \gamma_Z(C_2 |z - \zeta|),$$

где константа C_2 $(1 \leqslant C_2 < C_1)$ выбрана так, чтобы нашлись точки

$$\zeta_1 \in \gamma_1 \cap \Gamma_Z(\zeta), \ \zeta_2 \in \gamma_2 \cap [\Gamma_Z \setminus \Gamma_Z(\zeta)]$$

(существование такой константы гарантирует лемма 3).
Положим $\Phi(Z) = \tau$, $\Phi(\zeta_j) = w_j$, $j = 1, 2$. По лемме 3 $|\tau - w_1| \asymp |\tau - w_2|$ а по построению $|\tau - w_1| < |\tau - w| < |\tau - w_2|$. Следовательно, имеем

$$|\tau - w| \asymp |\tau - w_1| \asymp \exp\{-\pi m_Z(|z - \zeta_1|, \varepsilon)\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\{-\pi m_Z(|z - \zeta|, \varepsilon)\}.$$

Аналогично

$$|\tau - w| \asymp |\tau - w_2| \asymp \exp\{-\pi m_Z(|z - \zeta_2|, \varepsilon)\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\{-\pi m_Z(|z - \zeta|, \varepsilon)\}.$$

Простым следствием леммы 4 является следующий факт.

Пусть $Z \in \widetilde{L}$, $0 < r_j < \varepsilon$, $j = 1, 2$. Для того, чтобы выполнялось соотношение

$$|m_Z(r_1, \varepsilon) - m_Z(r_2, \varepsilon)| \leqslant C, \tag{10}$$

необходимо и достаточно, чтобы $r_1 \asymp r_2$.

Действительно, возьмем произвольно точки $\zeta_j \in \Gamma_Z \cap \gamma_Z(r_j)$, $j=1$, 2 и положим $\Phi(Z) = \tau$, $\Phi(\zeta_j) = w_j$, $j = 1, 2$. Согласно лемме 4 имеем

$$|\tau - w_j| \asymp \exp\{\pi\, m_Z(r_j, \varepsilon)\},\ j = 1, 2.$$

Следовательно, неравенство (10) эквивалентно условию $|\tau - w_1| \asymp \asymp |\tau - w_2|$ которое, в свою очередь, в силу леммы 3, эквивалентно соотношению $r_1 \asymp r_2$.

Доказательство теоремы 2. Левая часть неравенства (2) следует из известных свойств модулей семейств кривых (см., например. [10], стр. 21). Докажем правую часть. Через $\Gamma_{i,j} = \Gamma_Z(r_i, r_j)$, $i=1, 2$, $j=2, 3$ $(\Gamma_{2,2} \overset{\mathrm{df}}{=} \varnothing)$ обозначим семейство дуг, отделяющих в $Q_Z(r_i, r_j)$ сторону $\gamma_Z(r_i)$ от стороны $\gamma_Z(r_j)$. Согласно определению модуля семейств кривых [10, 11] найдутся такие допустимые (т. е. заданные в $\mathbf{C}$, неотрицателные, измеримые, суммируемые с квадратом) функции $\rho_k(\zeta)$, $k = 1, 2$, для которых

$$L_{\rho_k}(\Gamma_{k,\,k+1}) \overset{\mathrm{df}}{=} \inf_{\gamma \in \Gamma_{k,\,k+1}} \int_\gamma \rho_k(\zeta)\,|d\zeta| = 1;$$

$$A(\rho_k) \overset{\mathrm{df}}{=} \iint_{\mathbf{C}} \rho_k^2(\zeta)\, d\sigma_\zeta \leqslant m_Z(r_k, r_{k+1}) + 1.$$

Положим далее

$$\rho_3(\zeta) = \begin{cases} C_1/|z - \zeta|, & \zeta \in \Omega,\ e^{-1} \leqslant \dfrac{|\zeta - z|}{r_2} < e; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях,} \end{cases}$$

где константа C_1 выбрана настолько большой чтобы для всех дуг $\gamma \subset \Omega$, $\gamma \cap \gamma_Z(r_2) \neq \varnothing$, отделяющих простой конец Z от ∞, выполнялось условие $\int_\gamma \rho_3(\zeta)\,|d\zeta| > 1$ (существование такой константы вытекает из леммы 1). Рассмотрим допустимую функцию $\rho(\zeta) \overset{\mathrm{df}}{=} \max\limits_{k=1,2,3} \rho_k(\zeta)$. Очевидно

$$L_\rho(\Gamma_{1,3}) \overset{\mathrm{df}}{=} \inf_{\gamma \in \Gamma_{1,3}} \int_\gamma \rho(\zeta)\,|d\zeta| = 1,$$

следовательно

$$m_Z(r_1, r_3) \leqslant \sum_{k=1}^{3} \iint_{\mathbf{C}} \rho_k^2(\zeta)\, d\sigma_\zeta \leqslant$$

$$\leqslant m_Z(r_1, r_2) + m_Z(r_2, r_3) + C_2,$$

что и утверждается в неравенстве (2).

Левая часть неравенства (3) становится очевидной, если учесть вложение $\Gamma_{1,2} \supset \{\gamma_Z(r) : r_1 < r < r_2\}$. Для доказательства правой части рассмотрим точки $\zeta_j \in \gamma_Z(r_j) \cap \Gamma_Z$, $j = 1, 2$, для которых

$$\Gamma_Z(\zeta_2) \setminus \Gamma_Z(\zeta_1) \subset \overline{Q_Z(r_1, r_2)}.$$

Согласно лемме 3 имеем

$$C_3 r_1 \leqslant |z - \zeta| \leqslant C_4 r_2, \ \zeta \in \Gamma_Z(\zeta_2) \setminus \Gamma_Z(\zeta_1).$$

Рассмотрим допустимую функцию

$$\rho(\zeta) = \begin{cases} |\zeta - z|^{-1}, & \zeta \in \Omega, \ C_3 r_1/e \leqslant |\zeta - z| \leqslant C_4 e r_2, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Учитывая лемму 1 и тот факт, что

$$\gamma \cap [\Gamma_Z(\zeta_2) \setminus \Gamma_Z(\zeta_1)] \neq \varnothing, \ \gamma \in \Gamma_{1,2},$$

имеем $L_\rho(\Gamma_{1,2}) \geqslant C_5$, в то время как

$$A(\rho) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \iint\limits_{C} \rho^2(\zeta)\, d\sigma_\zeta \leqslant C_6 \ln \frac{r_2}{r_1} + C_7,$$

откуда вытекает правая часть неравенства (3).

Доказательство теоремы 3. Не ограничивая общности предположим, что $|z - \zeta|$ достаточно мало. Положим

$$h = \min\{|z - \zeta| + r_Z(Z), \ \varepsilon/2\}.$$

Теорема 2 позволяет выписать следующие соотношения:

$$m_Z(|z - \zeta|, \varepsilon) = m_Z(|z - \zeta|, h) + m_Z(h, \varepsilon) + \delta_1, \tag{11}$$

$$m_Z(|z - \zeta|, \varepsilon) = m_Z(|z - \zeta|, h) + m_Z(h, \varepsilon) + \delta_2, \tag{12}$$

где $|z - \zeta| < \varepsilon/2$, $0 < \delta_j \leqslant C_1$, $j = 1, 2$. Покажем, что

$$|m_Z(h, \varepsilon) - m_Z(h, \varepsilon)| < C_2. \tag{13}$$

Для этого достаточно рассмотреть случай малых h, так как если $h \asymp \varepsilon$, то каждый из входящих в неравенство (13) модулей оценивается сверху по теореме 2 константой. При малых h в силу леммы 3 и оценки (5) имеет место вложение четырехсторонников

$$Q_Z(C_3 h, C_4) \subset Q_Z(h, \varepsilon) \subset Q_Z(C_5 h, C_6).$$

Следовательно

$$m_Z(h, \varepsilon) \leqslant C_7 + m_Z(C_3 h, C_4) \leqslant C_7 + m_Z(h, \varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant C_7 + m_Z(C_5 h, C_6) \leqslant C_8 + m_Z(h, \varepsilon).$$

Сопоставляя соотношения (11)—(13) находим

$$|[m_Z(|z - \zeta|, \varepsilon) - m_Z(|z - \zeta|, \varepsilon)] -$$
$$- [m_Z(z - \zeta|, h) - m_Z(|z - \zeta|, h)]| \leqslant C_9.$$

Для завершения доказательства теоремы 3 остается воспользоваться в каждом из оговариваемых в условиях (I) и (II) случаях теоремой 2.

§ 3. Квазигладкие дуги из класса H^*

Для $R > 1$, Z и $\mathbf{Z} \in \tilde{L}$ положим

$$\tilde{z}_R = \Psi[R\Phi(Z)], \quad \tilde{\zeta}_R = \Psi[R\Phi(\mathbf{Z})].$$

Лемма 5 (см. [5]). *Пусть $\mathfrak{M} \in H$. Следующие условия эквивалентны:* (I) $\mathfrak{M} \in H^*$; (II) $\forall R > 1$, Z *и* $\mathbf{Z} \in \tilde{L}$, $|z - \zeta| \leqslant C|z - \tilde{z}_R|$ $(z = |Z|$, $\zeta = |\mathbf{Z}|)$ *выполняется соотношение*

$$|\zeta - \tilde{\zeta}_R| \asymp |z - \tilde{z}_R|. \tag{14}$$

Пусть $\mathfrak{M} = L$ — конечная квазигладкая дуга, z_1 и z_2 — ее концы. При $R > 1$, $j = 1, 2$ положим $\Phi(z_j) = \tau_j$,

$$\Omega_1' = \{\tau : |\tau| > 1, \arg \tau_1 < \arg \tau < \arg \tau_2\}, \quad \Omega_2' = \Omega' \setminus \overline{\Omega}_1',$$

$$\overline{\Omega}_j = \Psi(\overline{\Omega}_j'), \quad \Omega^j = \Psi(\Omega_j'), \quad \tilde{L}^j = \overline{\Omega}^j \cap \tilde{L},$$

$$L_R^j = \{\zeta : \zeta \in \Omega^j, |\Phi(\zeta)| = R\}, \quad \rho_R^j(z) = \inf_{\zeta \in L_R^j} |\zeta - z|.$$

Как уже отмечалось, каждая точка $z \in L \setminus \{z_1, z_2\}$ является телом двух простых концов $Z^1 \in \tilde{L}^1$ и $Z^2 \in \tilde{L}^2$.

Лемма 6 (см. [14]). *Пусть* $\mathbf{Z}_k^j \in \overline{\Omega}^j$, $\zeta_k = |\mathbf{Z}_k^j| \in \overline{\Omega^j}$, $\Phi(\mathbf{Z}_k^j) = w_k \in \overline{\Omega}_j'$, $j = 1, 2$, $k = 1, 2, 3$. *Тогда условия* $|\zeta_1 - \zeta_2| \leqslant C_1 |\zeta_1 - \zeta_3|$ *и* $|w_1 - w_2| \leqslant C_2 |w_1 - w_3|$ *эквивалентны.*

Применение леммы 6 к различным конкретно выбираемым тройкам точек позволяет убедиться в справедливости при $R > 1$, z и ζ L, $j = 1, 2$ следующих соотношений:

$$\rho_R^j(z) \asymp |z - \tilde{z}_R^j|, \tag{15}$$

$$|\zeta - \tilde{\zeta}_R^j| \asymp \rho_R^j(z), \text{ если } |\zeta - z| \leqslant C\rho_R^j(z), \tag{16}$$

где $\tilde{S}_R^j \stackrel{\text{df}}{=} \Psi[R\Phi(S^j)]$, $S^j \in \tilde{L}^j$, $|S^j| = S \in L$.

Следуя [9] через $\Gamma(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2; \mathbf{Z}_3; \Omega)$, $\mathbf{Z}_k \in \tilde{\Omega}$, $k = 1, 2, 3$ обозначим семейство локально-спрямляемых дуг и кривых $\gamma \subset \Omega$, отделяющих простые концы $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$ от $\mathbf{Z}_3$ и ∞

Доказательство теоремы 4. Согласно лемме 5 мы должны убедиться, что справедливость неравенства (7) эквивалентна выполнимости соотношения (14). Если Z и $\mathbf{Z}$ принадлежат одновременно одному и тому же $\tilde{L}^j$ $j = 1, 2$, то соотношение (14) автоматически выполняется в силу неравенств (15) и (16). Если же Z и $\mathbf{Z}$ принадлежат разным $\tilde{L}^j$, то согласно (15) и (16) проверка соотношения (14) элементарно сводится к рассмотрению только случая $|Z| = |\mathbf{Z}|$. Итак, пусть точка

$z \in L \setminus \{z_1, z_2\}$ является телом простых концов $Z^1 \in \widetilde{L}^1$ и $Z^2 \in \widetilde{L}^2$. Для доказательства теоремы 4 необходимо показать, что неравенство (7) эквивалентно соотношению

$$|z - \widetilde{z}_R^1| \asymp |z - \widetilde{z}_R^2|, \quad R > 1. \tag{17}$$

Пусть для определенности $\varepsilon_z = |z - z_1|$. Положим $\Phi(z_1) = \tau_0$, $\Phi(Z^j) = \tau^j$, $\Phi(\widetilde{z}_R^j) = \widetilde{\tau}_R^j$, $j = 1, 2$. Через $\zeta_1 \in \Omega$ обозначим точку со свойствами

$$|z - z_1| = |\zeta_1 - z_1|, \ \arg \Phi(\zeta_1) = \arg \tau_0.$$

В силу леммы 6, примененной к точкам z_1, ζ_1 и z, имеем

$$|\tau_0 - \tau^1| \asymp |\tau_0 - \Phi(\zeta_1)| \asymp |\tau_0 - \tau^2|.$$

Рассмотрим семейства кривых $\Gamma_j \overset{\mathrm{df}}{=} \Gamma(Z^j, \widetilde{z}_R^j; z_1; \Omega)$, $\Gamma_j' = \Phi(\Gamma_j)$, $j = 1, 2$. Относительно их модулей можно сказать следующее (см. [9]):

$$\left| m(\Gamma_j') - \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{|\tau_0 - \tau^j|}{R - 1} + 1 \right) \right| \leqslant C_1.$$

Таким образом, имеем

$$|m(\Gamma_1) - m(\Gamma_2)| = |m(\Gamma_1') - m(\Gamma_2')| \leqslant C_2. \tag{18}$$

Положим далее $r_j = r_{Z^j}(z_1)$, $r_Z = \widetilde{r}_{Z^j}(\widetilde{z}_R^j)$, $j=1, 2$. Согласно оценке (8)

$r_j' \asymp |z - \widetilde{z}_R^j|$.

Кроме того, $r_j \asymp |z - z_1|$, $j = 1, 2$. Действительно, определим точку $\zeta \in \Omega^j \cap \gamma_{Z^j}(r_j/2)$ из условия $\arg \Phi(\zeta) = \arg \tau^j$. В силу леммы 2 $|\Phi(\zeta) - \tau^j| \leqslant C_3 |\tau_0 - \tau^j|$. Применяя лемму 6, получим

$$r_j = 2|\zeta - z| \leqslant C_4 |z - z_1|.$$

Неравенство в обратную сторону следует из оценки (5). Предположим теперь, что имеет место неравенство (7) и докажем справедливость оценки (17). Если $r_j \leqslant r_j'$ хотя бы при одном $j=1, 2$ (например при $j = 1$), то $|z - z_1| \leqslant C_5 |z - \widetilde{z}_R^1|$ и согласно соотношениям (15) и (16)

$$|z - \widetilde{z}_R^1| \asymp \rho_R^1(z^1) \asymp \rho_R^2(z_1) \asymp |z - \widetilde{z}_R^2|.$$

Следовательно, нетривиальным является случай, когда $r_j > r_j'$, $j=1, 2$. При этом имеет место неравенство

$$-C_6 \leqslant m(\Gamma_j) - m_{Z^j}(r_j', r_j) \leqslant C_7, \ j = 1, 2. \tag{19}$$

Действительно, зафиксируем индекс j. Левая часть неравенства (19) следует из теоремы 1 и того факта, что семейство Γ_j содержит в себе при любом достаточно малом $\varepsilon_1 > 0$ семейство дуг, разделяющих в четырехсторонние $Q_{Z^j}(r_j' + \varepsilon_1, r_j - \varepsilon_1)$ дуги $\gamma_{Z^j}(r_j' + \varepsilon_1)$ и $\gamma_{Z^j}(r_j - \varepsilon_1)$. Для доказательства правой части проведем следующие рассуждения. Через $\rho_1(\zeta)$ обозначим допустимую функцию, удовлетворяющую условиям

$$\inf_{\gamma \in \Gamma_j^*} \int_\gamma \rho_1(\xi)\,|d\xi| = 1,$$

$$\iint_C [\rho_1(\xi)]^2\, d\sigma_\xi \leqslant m_{z^j}(r_j', r_j) + 1,$$

где Γ_j^* — семейство дуг $\gamma \subset Q_{z^j}(r_j', r_j)$, разделяющих $\gamma_{z^j}(r_j')$ и $\gamma_{z^j}(r_j)$

Положим далее

$$\rho_2(\xi) = \begin{cases} C_8/|\xi - z|, & r_j/e \leqslant |\xi - z| \leqslant 2e\,r_j \\ \text{или } r_j'/(2e) \leqslant |\xi - z| \leqslant e r_j'; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях,} \end{cases}$$

где константа C_8 выбрана настолько большой, чтобы всякая дуга $\gamma \subset \Omega$ отделяющая простой конец Z^j от ∞, для которой

$$\gamma \cap [\gamma_{z^j}(r_j) \cup \gamma_{z^j}(r_j')] \neq \varnothing,$$

удовлетворяла условию $\int_\gamma \rho_2(\xi)\,|d\xi| \geqslant 1$ (такая константа найдется в силу леммы 1).

Рассмотрим допустимую функцию $\rho(\xi) \overset{\text{df}}{=} \max\{\rho_1(\xi), \rho_2(\xi)\}$. В силу сделанных предложений

$$\inf_{\gamma \in \Gamma_j} \int_\gamma \rho(\xi)\,|d\xi| = 1,$$

$$\iint_C \rho^2(\xi)\, d\sigma_\xi \leqslant m_{z^j}(r_j', r_j) + C_9,$$

откуда следует правая часть соотношения (19).

Комбинируя неравенства (18) и (19) получим

$$|m_{Z^1}(r_1', r_1) - m_{Z^1}(r_2', r_2)| \leqslant C_{10}. \tag{20}$$

Пусть для определенности $r_1' < r_2'$. Пользуясь теоремой 2, неравенство (20) перепишем в виде

$$m_{Z^1}(r_1', r_2') \leqslant C_{11},$$

откуда заключаем, что $r_2' \leqslant C_{12}\, r_1'$. Окончательно имеем

$$|z - \tilde{z}_R^1| \asymp r_1' \asymp r_2' \asymp |z - \tilde{z}_R^2|.$$

Покажем теперь как из соотношения (17) следует оценка (7). При фиксированном j в качестве ζ_j возьмем первую при движении по $\Gamma_{Z^j} \overset{\text{df}}{=} \{\zeta : \arg\Phi(\zeta) = \arg\Phi(Z^j)\}$ от точки z точку пересечения $\Gamma_{Z^j} \cap \cap\, \gamma_{Z^j}(\delta)$, где $0 < \delta < \varepsilon_z = |z - z_1|$ — произвольное число. Положим $R_j = |\Phi(\zeta_j)|$. Очевидно

$$r'_j \overset{\mathrm{df}}{=} r_{z^j}(\zeta_j) = |z - \zeta_j| = \delta.$$

Соотношение (17) в совокупности с леммой 6 указывает на то, что $R_1 - 0 \asymp R_2 - 1$. Рассмотрим семейства кривых $\tilde{\Gamma}_j \overset{\mathrm{df}}{=} \Gamma(Z^j, \zeta_j; z_1; \Omega)$, $\tilde{\Gamma}'_j \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi(\tilde{\Gamma}_j)$, $j = 1, 2$. Их модули можно оценить следующим образом (см. [9]):

$$\left| m(\tilde{\Gamma}'_j) - \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{|\tau_0 - \Phi(\zeta_j)|}{R_j - 1} + 1 \right) \right| \leqslant C_1.$$

Следовательно

$$|m(\tilde{\Gamma}_1) - m(\tilde{\Gamma}_2)| = |m(\tilde{\Gamma}'_1) - m(\tilde{\Gamma}'_2)| \leqslant C_2. \tag{21}$$

Неравенство (19), в котром положено $R = R_j$, с учетом теремы 2 перепишется в виде

$$|m(\tilde{\Gamma}_j) - m_{z^j}(\delta, |z - z_1|) \leqslant C_3, \ j = 1, 2. \tag{22}$$

Необходимое соотношение (7) немедленно следует из оценок (21) и (22).

Обоснование примера 1. Положим $z = 0$, при этом $\varepsilon_z = (1 + 1/\ln^2 2)^{1/2}/2$. Пусть для определенности $(0, \varepsilon i) \subset \Omega^1$ при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$. Нетрудно видеть, что при $0 < \delta < \varepsilon_z$ имеют место неравенства

$$m_{z^1}(\delta, \varepsilon_z) \geqslant \frac{1}{\pi} \ln \frac{C_1}{\delta} + C_2 \ln |\ln \delta|,$$

$$m_{z^2}(\delta, \varepsilon_z) \leqslant \frac{1}{\pi} \ln \frac{C_3}{\delta},$$

откуда заключаем, что

$$m_{z^1}(\delta, \varepsilon_z - m_{z^2}(\delta, \varepsilon_z) \geqslant C_2 \ln |\ln \delta| - C_4.$$

Следовательно в начале координат нарушается условие (7) и по теореме 4 $L^1 \notin H^*$.

Обоснование примера 2. Несложный подсчет показывает, что для любой точки $z \in L^2$ и $0 < \delta < \varepsilon_z$ выполняется неравенство

$$\left| m_{z^j}(\delta, \varepsilon_z) - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\varepsilon_z}{\delta} \right| \leqslant C, \ j = 1, 2,$$

откуда следует соотношение (7). А значит по теореме 4 $L^2 \in H^*$.

Институт прикладной математики
и механики АН УССР, г. Донецк

Поступила 28. I. 1985

Վ. Վ. ԱՆԴՐԻԵՎՍԿԻ. Երկրաչափական հատկությունների մասին, որոնք արտահայտում են Ռիմանի ֆունկցիան, կոնտինուումի և նրան լրացնող, տանեց արտաքին զրոյական անկյունների, տիրույթի համար *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ուսումնասիրվել են մի քանի հատկություններ, հարթ կոնտինուումի և նրան լրացնող տիրույթին, որոնք բավարարում են երկու երկրաչափական պայմանների, և մեծ դեր են խաղում կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների կոնստրուկտիվ տեսությունում։

V. V. ANDRIEVSKII. *On the metrical properties of Rieman's mapping function for the region supplemented to continuum without external zero angles* (summary)

The properties of planar continua and their complementary regions which satisfy two geometrical conditions are studied. They are importance for the constructive theory of functions of the ccmlex variable.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. К. Дзядык.* О проблеме С. М. Никольского в комплексной области, Изв. АН СССР, сер. матем., 23, № 5, 1959, 697—736.
2. *В. К. Дзядык.* К вопросу о приближении непрерывных функций в замкнутых областях с углами и о проблеме С. М. Никольского (первое сообщение), Изв. АН СССР, сер. матем., 26, № 6, 1962, 796—824.
3. *В. К. Дзядык.* К теории приближения аналитических функций, непрерывных в замкнутых областях, и о проблеме С. М. Никольского (второе сообщение), Изв. АН СССР, сер. матем., 27, № 5, 1963, 1135—1164.
4. *В. К. Дзядык.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., «Наука», 1977.
5. *В. В. Андриевский.* Геометрические свойства областей В. К. Дзядыка, Укр. матем. ж., 33, № 6, 1981, 723—727.
6. *В. В. Андриевский.* Конструктивное описание классов функций на континуумах комплексной плоскости с учетом роста аппроксимационных полиномов, ИМ-83.12, Препринт ин-та математики АН УССР, 1983.
7. *В. В. Андриевский.* Описание классов функций с заданной скоростью убывания их наилучших равномерных полиномиальных приближений, Укр. матем. ж., 36, № 5, 1984, 602—606.
8. *В. И. Белый, В. М. Миклюков.* Некоторые свойства конформных и квазиконформных отображений и прямые теоремы конструктивной теории функций, Изв. АН СССР, сер. матем., 38, № 6, 1974, 1343—1361.
9. *В. И. Белый.* Конформные отображения и приближение функций в областях с квазиконформной границей, Матем. сб., 102(144).
10. *Л. Альфорс.* Лекции по квазиконформным отображениям, М., «Мир», 1969.
11. *O. Lehto, K. I. Virtanen.* Quasiconformal Mappings in the Plane, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
12. *Г. Д. Суворов.* Семейства плоских топологических отображений, Новосибирск, «Наука», 1965.
13. *М. А. Лаврентьев.* О некоторых граничных задачах в теории однолистных функций, Матем. сб., 1(43), 1936, 815—846.
14. *В. В. Андриевский.* Прямые теоремы теории приближения на квазиконформных дугах, Изв. АН СССР, сер. матем., 44, № 2, 1980, 243—261.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 2, 1989 Математика

УДК 517.51

С. С. АКБАРОВ

О СТЕПЕННЫХ РЯДАХ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ В НЕНОРМИРУЕМЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Как известно, область сходимости всякого степенного ряда

$$\sum_n \lambda^n x_n, \ \lambda \in \mathbf{C} \tag{1}$$

является кругом на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ (возможно, нулевого или бесконечного радиуса) с точностью до точек на границе. Этот факт являетя следствием леммы Абеля, согласно которой область сходимости ряда (1) (с числовыми коэффициентами) вместе с любой своей точкой λ_0 содержит и все точки, по модулю меньшие λ_0.

Легко проверить, что лемма Абеля выполняется и в случае, когда коэффициенты $\{x_n\}$ степенного ряда (1) являются векторами какого-нибудь банахова пространства, а сходимость понимается в метрике этого пространства. С другой стороны, как показал В. Желязко [1] в пространстве S измеримых по Лебегу функций на отрезке $[0, 1]$ с топологией сходимости по мере можно указать последовательность векторов $\{x_n\}$ такую, что область сходимости ряда (1) совпадает с любым наперед заданным конечным множеством в $\mathbf{C}$, содержащим нуль. В связи с этим возникают следующие впросы:

1) какие вообще множества на комплексной плоскости могут быть областями сходимости степенных рядов с коэффициентами из различных топологических векторных пространств (ТВП)?

2) каким требованиям нужно подчинить ТВП, чтобы исключить возможность появления в нем степенных рядов с аномальной областью сходимости?

Их рассмтрению и посвящена настоящая работа.

1. Степенные ряды в пространстве S

В этом пункте мы коснемся вопроса о том, какой может быть область сходимости степенного ряда в уже упомянутом пространстве S (см., напр., [2], стр. 63). Первому содержательному утверждению мы предпошлем две несложные числовые леммы.

Лемма 1. *Существует стремящаяся к бесконечнсти последовательность натуральных чисел $\{h_k\}$, обладающая свойствами:*

$$\forall R \geqslant 0 \ \sum_{k=1}^{\infty} R^{h_k}/k^2 < \infty, \tag{2}$$

$$\forall R > 0 \ \ k^2 R^{h_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty. \tag{3}$$

Доказательство. Нам достаточно просто выбрать монотонную последовательность $\{f_l\}$ со свойствами $f_{l-1} \geqslant \sqrt{l!}$, $\sum\limits_{k > f_{l-1}} 1/k^2 \leqslant 1/l!$ и положить $h_k = l \leftrightarrow f_{l-1} \leqslant k < f_l$. Мы получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} R^{h_k}/k^2 = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{f_{l-1} < k < f_l} R^{h_k}/k^2 = \sum_{l=1}^{\infty} R^l \sum_{f_{l-1} < k < f_l} 1/k^2 \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} R^l/l! < \infty,$$

$$k^2 R^{h_k} \geqslant (f_{n_k-1})^2 R^{h_k} \geqslant h_k!\, R^{h_k} \underset{n \to \infty}{\to} \infty, \ \forall R > 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\{f_l\}$ и $\{g_l\}$—произвольные последовательности натуральных чисел, причем $\{f_l\}$ стремится к бесконечности. Существует последовательность $\{a_k\}$ положительных чисел, обладающая свойствами:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty, \tag{4}$$

$$\sum_{f_l < k < g_l} a_k \underset{l \to \infty}{\to} 0. \tag{5}$$

Доказательство. Совершенно очевидно, что нам достаточно рассмотреть случай, когда $\{f_l\}$ и $\{g_l\}$ монотонны и $f_l \leqslant g_l$. Выберем последовательность индексов $m_n : g_{m_n} < f_{m_{n+1}}$ и положим $a_k = 1/n(g_{m_n} - g_{m_{n-1}})$ при $g_{m_{n-1}} < k \leqslant g_{m_n}$ (мы считаем, что $g_0 = m_0 = 0$). Легко проверить, что последовательность $\{a_k\}$ будет искомой. Лемма 2 доказана.

Отметим попутно, что построенная нами последовательность обладает следующими дополнительными свойствами: для любого k

$$0 < a_k \leqslant 1, \tag{6}$$

$$a_k \underset{k \to \infty}{\to} 0. \tag{7}$$

Лемма 3. *Для всякой последовательности полиномов $\{p_k\}$ существует степенной ряд (1) в пространстве S с областью сходимости D, удовлетворяющей ограничениям:*

$$\{\lambda \in \mathbf{C} : \overline{\lim_k} |p_k(\lambda)| < 1\} \cup \{0\} \subseteq D \subseteq \{\lambda \in \mathbf{C} : \underline{\lim_k} |p_k(\lambda)| \leqslant 1\} \cup \{0\}.$$

Доказательство. 1. Обозначим $E = \{\lambda : \overline{\lim} |p_k(\lambda)| < 1\}$, $F = \{\lambda : \underline{\lim} |p_k(\lambda)| \leqslant 1\}$ и отметим следующие очевидные свойства этих множеств:

$$\forall \lambda \in E\ k^2 \Big| \prod_{k < l < 2k} p_l(\lambda) \Big| \underset{k \to \infty}{\to} 0, \tag{8}$$

$$\forall \lambda \overline{\in} F\ \frac{1}{k^2} \Big| \prod_{k < l < 2k} p_l(\lambda) \Big| \underset{k \to \infty}{\to} \infty. \tag{9}$$

2. Рассмотрим последовательность $\{h_k\}$ с описанными в лемме 1 свойствами и положим

$$q_k(\lambda) = \lambda^{h_k} \prod_{k < l < 2k} p_l(\lambda).$$

Обозначим через b_k^n коэффициент при n-й степени аргумента в полиноме q_k и выберем строго растущую последовательность $\{d_k\}$ такую, что

$$q_k(\lambda) \sum_{0<n<d_k} \lambda^n b_k^n.$$

Вспомним, что $\{h_k\}$ стремится к бесконечности, поэтому при всяком фиксированном n лишь конечное множество чисел $\{b_k^n;\ k\in N\}$ отлично от нуля. Выберем монотонную последовательность $\{g_n\}$, обладающую свойством:

$$\forall n\ \forall k > g_n\ b_k^n = 0. \tag{10}$$

3. Положим $f_l = k \leftrightarrow d_{k-1} \leqslant l < d_k$ и применим лемму 2 к последовательностям $\{f_l\}$ и $\{g_l\}$. Пусть $\{a_k\}$ — последовательность, обладающая свойствами (4)—(7). Положим $m_0 = 0$, $m_l = \max\{l\in N: : \sum_{m_{l-1}<k<l} a_k < 1\}$, тогда

$$\forall i\in N \sum_{m_{l-1}<k<m_l} a_k \leqslant 1. \tag{11}$$

4. Каждому индексу $i\in N$ поставим в соответствие полуинтервал на действительной оси $M_l = [0, \sum_{m_{l-1}<k<m_l} a_k [$. В силу (11) все $\{M_l\}$ являются подмножествами отрезка [0, 1], причем из условия (7) немедленно следует, что

$$\mu(M_l) = \sum_{m_{l-1}<k<m_l} a_k \underset{l\to\infty}{\to} 1.$$

5. Разобьем каждый полуинтервал M_l на полуинтервалы $\{I_k;\ m_{l-1} < k \leqslant m_l\}$ с длинами $\{a_k;\ m_{l-1} < k \leqslant m_l\}$. Пусть $\{y_k\}$ — индикаторные функции множеств $\{I_k\}$:

$$y_k(t) = \begin{cases} 0, & t\in[0,1]\setminus I_k \\ 1, & t\in I_k. \end{cases}$$

Каждому $\lambda\in \mathbf{C}$ поставим в соответствие ряд $\sum_k q_k(\lambda)\, y_k$ в пространстве S (эта конструкция еще не будет степенным рядом) и рассмотрим множество

$$D = \{\lambda\in \mathbf{C} : \text{ряд } \sum_k q_k(\lambda)\, y_k \text{ сходится в } S\}.$$

Покажем, что $E\cup\{0\} \subseteq D \subseteq F\cup\{0\}$.

а) Если $\lambda\in E$, то из (8) получим: $\exists l\ \forall k > l\ |q_k(\lambda)| \leqslant |\lambda|^{h_k}/k$, откуда, с учетом (2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |q_k(\lambda)| \leqslant \sum_{k<l} |q_k(\lambda)| + \sum_{k>l} |\lambda|^{h_k}/k^2 < \infty.$$

Это означает, что ряд $\sum_k q_k(\lambda)\, y_k$ сходится поточечно, а поэтому и в S.

б) Пусть $\lambda \overline{\in} F\cup\{0\}$, тогда из (9) получим: $\exists l\ \forall k > l\ |q_k(\lambda)| \geqslant \geqslant k^2 |\lambda|^{h_k}$, откуда, с учетом (3),

$$|q_k(\lambda)| \underset{k\to\infty}{\to} \infty.$$

Зафиксируем индекс $i_0 : \forall k > m_{i_0-1}\ |q_k(\lambda)| \geqslant 1$. Для всякого $i \in N$ полуинтервалы $\{I_k;\ m_{l-1} < k \leqslant m_l\}$ не пересекаются, поэтому

$$\forall i \geqslant i_0\ \forall t \in M_i\ \Big|\sum_{m_{l-1} < k \leqslant m_l} q_k(\lambda)\, y_k(t) \geqslant 1.$$

Это означает что

$$\mu\,\{t \in [0, 1] : |\sum_{m_{l-1} < k \leqslant m_l} q_k(\lambda)\, y_k(t)| \geqslant 1\} = \mu(M_l) \underset{l\to\infty}{\to} 1 \neq 0$$

и, следовательно, ряд $\sum_k q_k(\lambda)\, y_k$ расходится в S.

6. Положим теперь

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^n y_k = \sum_{k<g_n} b_k^n y_k. \qquad \text{(см. 10)}$$

Покажем что множество D является областью сходимости степенного ряда $\sum_n \lambda^n x_n$. Для этого зафиксируем $\lambda \in \mathbf{C}$ и рассмотрим частичные суммы

$$\sum_{n<l} \lambda^n x_n = \sum_{n<l} \lambda^n \sum_{k<g_n} b_k^n y_k = \sum_{n<l} \lambda^n \sum_{k<g_l} b_k^n y_k = \sum_{k<g_l}\Big(\sum_{n<l} \lambda^n b_k^n\Big) y_k$$

(здесь мы использовали (10) и свойство монотонности $\{g_j\}$). Так как $\forall k < f_l\ d_k \leqslant d_{f_l-1} \leqslant l$ (из определения $\{f_l\}$),

$$\sum_{k<f_l}\Big(\sum_{n<l} \lambda^n b_k^n\Big) y_k = \sum_{k<f_l} q_k(\lambda)\, y_k, \text{ поэтому}$$

$$\sum_{n<l} \lambda^n x_n - \sum_{k<f_l} q_k(\lambda)\, y_k = \sum_{f_l<k<g_l}\Big(\sum_{n<l} \lambda^n b_k^n\Big) y_k$$

(легко заметить, что эта формула распространяется и на случай, когда $f_l > g_l$). Однако, в силу (5)

$$\mu\Big(\operatorname{supp} \sum_{f_l<k<g_l}\Big(\sum_{n<l} \lambda^n b_k^n\Big) y_k\Big) \leqslant \sum_{f_l<k<g_l} \mu\big(\operatorname{supp} y_k\big) = \sum_{f_l<k<g_l} a_k \underset{l\to\infty}{\to} 0.$$

Таким образом

$$\sum_{n<l} \lambda^n x_n - \sum_{k<f_l} q_k(\lambda)\, y_k \underset{l\to\infty}{\overset{S}{\to}} 0. \qquad (12)$$

Последовательность $\{d_k\}$ мы выбирали строго растущей, поэтому $\{f_l\}$ монотонно стремится к бесконечности, причем $\forall l\ f_{l+1} \leqslant f_l + 1$, то есть $\{f_l\}$ пробегает все натуральные числа, начиная с f_1. Поэтому (12) как раз и означает, что ряды $\sum_n \lambda^n x_n$ и $\sum_k q_k(\lambda)\, y_k$ сходятся или расходятся одновременно. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пересечение $\bigcap_{l=1}^{\infty} D_l$ всякой счетной системы множеств $\{D_l\}$, являющихся областями сходимости степенных рядов в пространстве S, само является областью сходимости степенного ряда в S.*

Доказательство. Обозначим через S_l подпространство в S, состоящее из функций, носители которых сосредоточены в полуинтервале $I_l = \left]\frac{1}{l+1}, \frac{1}{l}\right]$. Для всякого $l \in N$ пространства S и S_l изоморфны;

пусть φ_l: $S \to S_l$ — какой-нибудь их изоморфизм. Если теперь ряд $\sum_n \lambda^n x_n^l$ имеет область сходимости D_l, то ряд $\sum_n \lambda^n \varphi_l(x_n^l)$ будет иметь ту же область сходимости D_l. Положим

$$x_n = \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_l(x_n^l) \quad (\operatorname{supp} \varphi_l(x_n^l) \subseteq I_l).$$

Степенной ряд $\sum_n \lambda^n x_n$ будет сходиться в S тогда и только тогда, когда он будет сходиться по мере на каждом интервале I_l. Это означает что он имеет областью сходимости множество $\bigcap_{l=1}^{\infty} D_l$. Лемма 4 доказана.

Объединяя два последних утверждения, сформулируем основную лемму данного пункта.

Лемма 5. *Для всякой последовательности полиномов $\{p_k\}$ и всякого числа $R \geqslant 0$, существует степенной ряд (1) в пространстве S с областью сходимости D, удовлетворяющей ограничениям:*

$$\{\lambda \in \mathbf{C} : \overline{\lim_k}\, |p_k(\lambda)| \leqslant R\} \cup \{0\} \subseteq D \subseteq \{\lambda \in \mathbf{C} : \underline{\lim_k}\, |p_k(\lambda)| \leqslant R\} \cap \{0\}.$$

Доказательство. Фиксируя число $l \in N$ и применяя лемму 3 к полиномам $\left\{\left(R + \frac{1}{l}\right)^{-1} p_k;\ k \in N\right\}$, мы получим степенной ряд с областью сходимости D_l:

$$\left\{\lambda : \overline{\lim}\, p_k(\lambda)| < R + \frac{1}{l}\right\} \cup \left\{0\right\} \subseteq D_l \subseteq \left\{\lambda : \underline{\lim}\, |p_k(\lambda)| \leqslant R + \frac{1}{l}\right\} \cap \{0\}.$$

Применяя теперь лемму 4 к множествам $\{D_l;\ l \in N\}$, мы получим искомый степенной ряд. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Существует последовательность полиномов $\{q_k\}$, поточечно на множестве $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ сходящихся к функции $\lambda \to 1/\lambda$, а в точке $\lambda = 0$ стремящаяся к бесконечности:*

$$\forall \lambda \neq 0\ q_k(\lambda) \xrightarrow[k\to\infty]{} 1/\lambda, \quad |q_k(0)| \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty.$$

Доказательство. Каждому $k \in N$ поставим в соответствие луч L_k на комплексной плоскости с началом в нуле, проходящий через точку $\exp(i\pi/2k)$. Обозначим через A_k невыпуклое замкнутое множество в $\mathbf{C}$, ограниченное лучами L_k и $\{\lambda : \operatorname{Im}\lambda = 0,\ \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\}$. Полижим

$$B_k = \{\lambda \in A_k : 1/k \leqslant |\lambda| \leqslant k\}.$$

Последовательность компактов $\{B_k\}$ покрывает множество $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Каждый компакт b_k содержится в области голоморфности функции $\lambda \to 1/\lambda$ и имеет связное дополнение. Поэтому, пользуясь теоремой Рунге о равномерной полиномиальной аппроксимации голоморфных функций (см. [4]), мы можем подобрать полином p_k, для которого

$$\sup_{\lambda \in B_k} |p_k(\lambda) - 1/\lambda| < 1/k.$$

Положив теперь $q_k(\lambda) = p_k(\lambda - 1/k)$, мы получим искомую последовательность. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть U—произвольный открытый круг на комплексной плоскости* $\mathbf{C}$. *В пространстве S существует степенной ряд (1) с областью сходимости*

$$D = \mathbf{C} \setminus U) \cup \{0\}.$$

Доказательство. Обозначим через α центр круга U, а через ε—его радиус. Рассмотрим последовательность полиномов $\{q_k\}$ с описанными в лемме 6 свойствами и положим $p_k(\lambda) = q_k(\lambda - \alpha)$. Применим теперь лемму 5 к полиномам $\{p_k\}$ при $R = 1/\varepsilon$, мы получим степенной ряд с областью сходимости D, удовлетворяющей ограничениями: $(\mathbf{C} \setminus U) \cup \{0\} \subseteq D \subseteq (\mathbf{C} \setminus U) \cup \{0\}$. Лемма 7 доказана.

Теорема 1. *Всякое замкнутое множество A на комплексной плоскости* $\mathbf{C}$, *содержащее нуль, является областью сходимости некоторого степенного ряда* (*1*) *в пространстве S.*

Доказательство. Дополнение $\mathbf{C} \setminus A$ к множеству A будет открытом и поэтому его можно представить в виде объединения счетной системы $\{U_l\}$ открытых кругов: $\mathbf{C} \setminus A = \bigcup_{l=1}^{\infty} U_l$. Пользуясь леммой 7, каждому $l \in N$ поставим в соответствие степенной ряд с областью сходимости $D_l = \mathbf{C} \setminus U_l$. Пересечение $\bigcap_{l=1}^{\infty} D_l = A$ множеств $\{D_l\}$, в силу леммы 4, также будет областью сходимости степенного ряда в S. Теорема 1 доказана.

Докажем еще одно следствие из леммы 5.

Предложение. *В пространстве S существует степенной ряд* (1), *область сходимоти которого D являетя плотным в* $\mathbf{C}$ *множеством, имеющие нулевую лебеговскую меру:* $\overline{D} = \mathbf{C}$, $\mu(D) = 0$.

Доказательство. 1. Зафиксируем следующие две числовые последовательности:

$$p_k = k\,(k+1)/2 = k + p_{k-1}, \quad \theta_k = 1/2^{p_k}.$$

Обозначим через E_k множество точек плоскости $\mathbf{C}$ вида $(m + il)\,\theta_k$, где m и l — целые числа. Объединение E множеств $\{E_k\}$ является (счетным) плотным в $\mathbf{C}$ множеством:

$$\overline{E} = \mathbf{C}. \tag{13}$$

2. Каждому $k \in N$ поставим в соответствие множество

$$F_k = \bigcup_{\alpha \in E_k} U_{\theta_{k+1}},$$

где $U_\varepsilon(\alpha)$ есть ε-окрестность точки α, и покажем, что верхний предел $F = \bigcap_n \bigcup_{k>n} F_k$ этой последовательности имеет нулевую меру. Зафиксируем произвольный квадрат Q со сторонами параллельными осям координат, и оценим меру множества $F_k \cap Q$:

$$\mu(F_k \cap Q) \leqslant \pi\theta_{k+1}^2 \operatorname{card}(E_k \cap Q) + \pi\,\theta_{k+1}^2\, 4\sqrt{\mu(Q)}/\theta_k =$$

$$= \pi \left(\frac{\theta_{k+1}}{\theta_k} \right)^2 \theta_k^2 \operatorname{card}(E_k \cap Q) + 4\pi \sqrt{\mu(Q)}\, \theta_{k+1} \frac{\theta_{k+1}}{\theta_k} =$$

$$= \pi \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \theta_k^2 \operatorname{card}(E_k \cap Q) + 4\pi \sqrt{\mu(Q)}\, \theta_{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.$$

Заметим теперь, что если каждой точке $\alpha \in E_k \cap Q$ поставить в соответствие квадрат со стороной θ_k, имеющий α своим центром симметрии, то число $\theta_k^2 \operatorname{card}(E_k \cap Q)$, то есть суммарная площадь таких квадратов, будет сколь угодно мало отличаться от площади Q; точнее

$$\theta_k^2 \operatorname{card}(E_k (E_k \cap Q) \underset{k\to\infty}{\to} \mu(Q).$$

Поэтому $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(F_k \cap Q) < \infty$, и, следовательно, $\mu(F \cap Q) = \mu(\overline{\lim\limits_k} F_k \cap$ $\cap Q) = 0$. Так как это верно для любого квадрата Q, то

$$\mu(F) = 0. \tag{14}$$

3. Рассмотрим теперь последовательность $\{Q_k\}$ вложенных друг в друга квадратов, покрывающих $\mathbf{C}$, и положим

$$p_k(\lambda) = \left(\frac{1}{\theta_{k+1}}\right)^{\operatorname{card}(E_k \cap Q_k)} \prod_{\alpha \in E_k Q_k} (\lambda - \alpha).$$

Применим лемму 5 к полиномам $\{p_k\}$ при $R = 0$. Нетрудно убедиться, что область сходимости D полученного степенного ряда будет удовлетворять включению $E \subseteq D \subseteq F$, что в сочетании с (13) и (14) как раз и доказывает наше предложение.

2. Пространства, в которых выполняется лемма Абеля

Перейдем теперь к вопросу о том, какими свойствами должно обладать полное ТВП, чтобы в нем выполнялась лемма Абеля о степенных рядах. Заметим, прежде всего, что это заведомо будет так, если пространство локально выпукло. Однако условие локальной выпуклости, как легко понять, вовсе не необходимо. Действительно, в пространстве L^p [0, 1] при $0<p<1$ (см. напр., [3]) лемма Абеля справедлива, несмотря на то, что оно вообще не содержит открытых выпуклых множеств, отличных от $\varnothing$ и L^p [0, 1].

Лемма 8. *Пусть X—произвольное ТВП. Следующие три условия равносильны:*

(*i*) *в X выполняется лемма Абеля о степенных рядах;*

(*ii*) *всякий степенной ряд* (1) *со сходящимся к нулю коэффициентами сходится всюду в круге* $\{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| < 1\}$:

(*iii*) *всякий степенной ряд* (1) *с ограниченными коэффициентами сходится всюду в круге* $\{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| < 1\}$.

Доказательство. 1. Пусть в X выполнена лемма Абеля, и пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к нулю в X. Положив $y_n = x_n - x_{n-1}$, мы получим сходящийся ряд $\sum\limits_n y_n$. Поэтому ряд $\sum\limits_n \lambda^n y_n$ сходится при всех $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| < 1$. В силу тождества

$$\sum_{n \leqslant l} \lambda^n y_n = (1-\lambda) \sum_{n<l} \lambda^n x_n + \lambda^l x_l, \ \lambda \in \mathbf{C}$$

(легко проверяется индукцией), это означает что ряд $\sum\limits_n \lambda^n x_n$ сходится в круге $\{\lambda : |\lambda| < 1\}$. Мы доказали импликацию (i) $\Rightarrow$ (ii).

2. Пусть выполнено (ii), и пусть $\{x_n\}$ ограничена в X. Зафиксируем λ, $0<|\lambda|<1$ и покажем что ряд (1) сходится. Действительно, положив $\varepsilon=\sqrt{|\lambda|}$ $(0<\varepsilon<1)$, получим $\varepsilon^n x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ $\{x_n\}$ ограничена). В силу (ii) это означает, что ряд $\sum \alpha^n(\varepsilon^n x_n)$ сходится при $\alpha=\lambda/\varepsilon$ $(|\alpha|=\sqrt{|\lambda|}<1)$, что нам и требовалось.

3. Импликация (iii) $\Rightarrow$ (i) очевидна. Лемма 8 доказана.

Для удобства дальнейшего изложения введем следующее

Определение. Пусть λ—комплексное число V—окрестность нуля в ТВП X. Условимся говорить, что гомотетия λ: $X\to X$ сжимает множество V, если существует некоторая окрестность нуля W, для которой

$$\lambda V+W\subseteq V.$$

Лемма 9. *Пусть X—произвольное ТВП. Следующие два условия равносильны:*

(IV) *для всякого числа θ, $0<\theta<1$, любая окрестность нуля U в X содержит некоторую сжимаемую гомотетией θ окрестность нуля V;*

(V) *для всякого числа $\lambda\in\mathbf{C}$ $|\lambda|<1$, любая окрестность нуля U в X содержит некоторую окрестность нуля W, для которой*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n W\subseteq U. \tag{15}$$

Замечание. Здесь под бесконечной суммой мы понимаем объединение всевозможных конечных сумм вида $W+\lambda W+\lambda^2 W+\cdots+\lambda^n W$.

Доказательство. 1. Пусть выполнено (iv), и пусть $\lambda\in\mathbf{C}$, $|\lambda|<1$, и U—произвольная окрестность нуля в X. Выбрав сжимаемую гомотетией $\theta=|\lambda|$ окрестность V, содержащуюся в U, мы получим, что для некоторой окрестности W_0

$$U\supseteq V\supseteq W_0+\theta V\supseteq W_0+\theta(W_0+\theta V)\supseteq W_0+\theta W_0+\theta^2 V\supseteq\cdots\supseteq$$

$$\supseteq\sum_{n=0}^{\infty}\theta^n W_0=\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda|^n W_0.$$

Выбрав теперь уравновешенную окрестность нуля W, содержащуюся в W_0, мы получим $\lambda^n W\subseteq|\lambda|^n W$, и поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n W\subseteq\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda|^n W\subseteq\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda|^n W_0\subseteq U.$$

Мы доказали импликацию (IV) $\Rightarrow$ (V).

2. Пусть, наоборот, выполнено (V), и пусть $0<\theta<1$ и U—окрестность нуля в X. Выбрав окрестность W, удовлетворяющую (15) при $\lambda=\theta$ и положив $V=\sum_{n=0}^{\infty}\theta^n W$, получим

$$W+\theta V=W+\theta\sum_{n=0}^{\infty}\theta^n W=W+\sum_{n=1}^{\infty}\theta^n W=V\subseteq V.$$

Лемма 9 доказана.

Теорема 2. *Пусть X—полное топологическое векторное пространство. Для того чтобы в X выполнялась лемма Абеля о степенных рядах достаточно, а если X обладает счетной локальной базой, то и необходимо, чтобы X удовлетворяло условию (iV): для всякого числа θ, $0<\theta<1$, в X существует локальная база, состоящая из сжимаемых гомотетией θ окрестностей нуля.*

Доказательство. Из лемм 8 и 9 видно, что для доказательства достаточности можно просто убедиться в истинности импликации (V)$\Rightarrow$(II). Пусть выполнено условие (V). Зафиксируем произвольную сходящуюся к нулю последовательность $\{x_n\}$ из X и число $\lambda\in\mathbf{C}$, $|\lambda|<1$. Рассмотрим окрестность нуля U и выберем окрестность нуля W, удовлетворяющую (15). Начиная с некоторого номера все вектора будут содержаться в W. Значит

$$\exists l\ \forall m\geqslant l \sum_{l<n<m} \lambda_n x_n \in \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n W \subseteq U.$$

Так как это верно для всякой окрестности нуля U, в силу полноты пространства X это означает, что ряд $\sum\limits_n \lambda^n x_n$ сходится. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть X обладает счетной локальной базой $\{W_k\}$. Будем считать, что $\{W_k\}$ вложены друг в друга.. Пусть условие (iV) не выполняется; значит, не выполняется и условие (V): существуют число $\lambda\in\mathbf{C}$, $|\lambda|<1$, и окрестность нуля U такие, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda^n W \subseteq U$ для любой окрестности нуля. Заметим, прежде всего, что в этом случае

$$\forall l \sum_{n>l}\lambda^n W = \sum_{n\geqslant 0}\lambda^n(\lambda^l W) \subseteq U.$$

Покажем что условие (II) не выполнено.

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0}\lambda^n W_1 \subseteq U$, поэтому $\exists l_1\,\exists x_0,\cdots, x_{l_1}\in W_1: \sum\limits_{0<n<l_1}\lambda^n x_n \overline{\in} U$.

 Зафиксируем вектора $x_0,\cdots, x_{l_1}$.

2. $\sum\limits_{n>l_1}\lambda^n W_2 \subseteq V$, поэтому $\exists l_2>l_1\,\exists x_{l_1+1},\cdots, x_{l_2}\in W_2: \sum\limits_{l_1<n<l_2}\lambda^n x_n \overline{\in} U$.

 Фиксируем вектора $x_{l_1+1},\cdots, x_{l_2}$.

Действуя таким образом, мы получим последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к нулю (потому что $\{W_k\}$ вложены друг в друга и образуют локальную базу, при этом ряд $\sum\limits_n \lambda^n x_n$ будет расходиться. Теорема 2 доказана.

Следствие. В полном метризуемом ТВП X лемма Абеля справедлива тогда и только тогда, когда X удовлетворяет условию (iV).

В заключение нам остается лишь продемонстрировать каким образом доказанная нами теорема действует в конкретных пространствах.

Прежде всего локально выпуклые пространства, очевидно, обладают свойством (IV). Это немедленно вытекает из формулы $\theta V+(1-\theta)V=V$ для всякого θ, $0<\theta\leq 1$ и для всякого выпуклого множества V.

Рассмотрим, далее, пространство $L_p\,[0,\ 1]$ при $0<p<1$. Его топология порождается метрикой

$$\rho\,(x,\ y)=\int_0^1 |x\,(t)-y\,(t)|^p\,dt.$$

Легко убедиться, что любой открытый шар с центром в нуле сжимается всякой гомотетией θ, $0<\theta<1$. Действительно, выбрав $\varepsilon>0$ и положив $V=\{x:\rho\,(x,\ 0)<\varepsilon\}$, $W=\{y:\rho(y,\ 0)<(1-\theta^p)\,\varepsilon\}$, получим $\theta V+W\subseteq V$.

Автор глубоко благодарен А. М. Олевскому за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Московский институт
электронного машиностроения

Поступила 17. I. 1985

Ս. Ս. ԱԿԲԱՐՈՎ. Ոչ նորմավորված տարածություններում գործակիցներով աստիճանային շարքերի վերաբերյալ *(ամփոփում)*

Ստացված են որոշ արդյունքներ տարբեր տոպոլոգիական տարածություններում գործակիցներ ունեցող աստիճանային շարքերի զուգամիտության տիրույթների կառուցվածքի վերաբերյալ: Մասնավորապես ցույց է տրված, որ կոմպլեքս հարթության վրա զերոն պարունակող յուրաքանչյուր փակ բազմություն հանդիսանում է չափելի ֆունկցիաների տարածության մեջ ըստ չափի զուգամիտության իմաստով որոշ աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթ:

S. S. ACBAROV. *On power series with coefficients in the spaces without norm* (summary)

The paper contains some results on the structure of domain of convergence of power series with coefficients in various topological vector spaces. In particular, it is shown that every closed set on complex plane containing zero is the domain of convergence of some power series in the space of measurable functions with the measure convergence.

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. Zelazko.* A power series with a finite domain of convergence, Comment. Math. Prace Mat., 15, 1971, 115—117.
2. *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов.* Функциональный анализ, М., «Наука», 1977.
3. *У. Рудин.* Функциональный анализ, М., «Мир», 1975.
4. Математическая энциклопедия, т. 4, М., Советская энциклопедия, 1984.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIV, № 2, 1989 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.547

Н. В. ГРИГОРЯН

О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВАХ М. М. ДЖРБАШЯНА

1 (а). В работе [1] доказана следующая

Теорема I. *Пусть* $\{f_k(z)\}_1^\infty \subset H_p$ $(1<p<+\infty)$, $\sup\limits_{k\geq 1}\{\|f_k\|_p\}<+\infty$ *и* $\{\hat{f}_k(\theta)\}_1^\infty$ $(\hat{f}_k(\theta)\equiv f_k(e^{i\theta}))$ *сходится на множестве* $E\subset[0, 2\pi]$ *положительной меры. Тогда* $\{f_k(z)\}_1^\infty$ *слабо сходится в* H_p *(в смысле слабой сходимости последовательности элементов банахова пространства* H_p*).*

H_p — это пространство Харди функций $f(z)$, голоморфных в круге $D:|z|<1$ и таких, что

$$\|f\|_p=\sup_{0<r<1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right\}<+\infty.$$

Напомним (см., напр., [2]), что $f(z)\in H_p$, то почти всюду на окружности $|z|=1$ существуют некасательные граничные значения $f(e^{i\theta})=\hat{f}(\theta)$, причем

$$\|f\|_p=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\hat{f}(\theta)|^p\,d\theta\right\}^{1/p}.$$

Цель настоящей заметки—доказать теоремы типа теоремы 1 для последовательностей функций из пространств $H_p(\alpha)$ М. М. Джрбашяна.

(б) $H_p(\alpha)$ $(p\geqslant 0,\ \alpha>-1)$ — это пространство функций $f(z)$, голоморфных в D и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{p,\alpha}\equiv\left\{\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1(1-r^2)^\alpha\,|f(re^{i\theta})|^p\,r\,dr\,d\theta\right\}^{1/p}<+\infty. \tag{1}$$

Пространства $H_p(\alpha)$ были введены М. М. Джрбашяном в его работе [3] 1945 года. Им был установлен ряд важных свойств этих пространств. Одно из них следующее [3, 4]: если $f(z)\in H_p(\alpha)$ $(p\geqslant 1,\ \alpha>-1)$, то

$$f(z)\equiv\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1(1-r^2)^\alpha\,\frac{f(re^{i\theta})}{(1-z\,re^{-i\theta})^{\alpha+1}}\,r\,dr\,d\theta,\quad z\in D. \tag{2}$$

Отсюда вытекает оценка

$$|f(z)| \leqslant \|f\|_{p,\alpha}(1-|z|)^{-(\alpha+2)},\ z\in D, \tag{3}$$

и поэтому $H_p(\alpha)$ ($p \geqslant 1$, $\alpha > -1$) с нормой $\|f\|_{p,\alpha}$ — банахово пространство.

Заметим, что $H_p \subset H_p(\alpha)$ ($p > 0$, $\alpha > -1$). Кроме того, справедлива

Теорема II [4]. *Если $0 < p < +\infty$, то голоморфная в D функция $f(z)$ принадлежит H_p тогда и только тогда, когда интегралы $(1)_{\alpha}^{\infty}$ равномерно ограничены при $\alpha \to -1$.*

Замечание I. Если функция $f(z)$ голоморфна в D, то при всех $p \in (0, +\infty)$ существует предел (конечный или бесконечный)

$$\lim_{\alpha\to-1} \|f\|_{p,\alpha} = \sup_{0<r<1} \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p\, d\theta\right\}^{1/p}.$$

Замечание. II. Последовательность $\{f_k(z)\}_1^{\infty}$ голоморфных в D функций лежит в H_p ($0 < p < +\infty$) и сходится в этом пространстве тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(i) $\lim\limits_{\alpha\to-1} \|f_k\|_{p,\alpha} < +\infty$ ($k = 1, 2, \cdots$);

(ii) для любого $\varepsilon > 0$ существует $N_\varepsilon > 0$ такое, что

$$\lim_{\alpha\to-1} \|f_n - f_m\|_{p,\alpha} < \varepsilon\ (n,\ m \geqslant N_\varepsilon).$$

(в) Последовательность $\{z_j\}_1^{\infty} \subset D$ будем называть множеством единственности для $H_p(\alpha)$, если не существует отличной от тождественного нуля функции из $H_p(\alpha)$, обращающейся в нуль на этой последовательности.

Пусть числа z_j ($z_j \neq 0$) пронумерованы в порядке неубывания модулей, $n(t)$ — количество этих чисел из круга $|z| \leqslant t$ и

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt.$$

Теорема III [4]. *Если $p > 0$, $\alpha > -1$ и*

$$\int_0^1 (1-r^2)^{\alpha}\, e^{pN(r)}\, dr = +\infty,$$

то $\{z_j\}_1^{\infty}$ — множество единственности для $H_p(\alpha)$.

Отметим, что в работе [4] установлены также другие достаточные условия, при которых $\{z_j\}_1^{\infty}$ — множество единственности для $H_p(\alpha)$.

2. Приведем основной результат заметки.

Теорема 1. *Пусть $p \geqslant 1$, $\alpha > -1$, $\{f_k(z)\}_1^{\infty} \subset H_p(\alpha)$ и $\{z_j\}_1^{\infty}$ — множество единственности для $H_p(\alpha)$. Если существуют пределы*

$$\lim_{k\to+\infty} f_k(z_j) = c_j\ (j = 1, 2, \cdots) \tag{4}$$

и равномерно относительно $k\,(k=1,\,2,\cdots)$

$$\lim_{\delta\to+0}\int_0^{2\pi}\int_{1-\delta}^{1}(1-r^2)^{\alpha}\,|f_k(re^{i\theta})|^p\,rd\,r\,d\theta=0, \tag{5}$$

то последовательность $\{f_k(z)\}_1^{\infty}$ *сходится в* $H_p(\alpha)$.

Доказательство. В силу (5) для любого $\varepsilon>0$ существует не зависящее от $k\,(k=1,\,2,\cdots)$ число $\delta\in(0,\,1)$ такое, что

$$\int_{1-\delta}^{1}\int_0^{2\pi}(1-r^2)^{\alpha}|f_k(re^{i\theta})|^p\,rd\,\theta\,dr<\varepsilon\,(k\geqslant 1). \tag{6}$$

Отсюда, в частности, имеем

$$\int_{1-\delta/2}^{1-\delta/4}\int_0^{2\pi}(1-r^2)^{\alpha}\,|f_k(re^{i\theta})\;r\,d\theta\,dr<\varepsilon\;(k\geqslant 1).$$

Значит, при каждом $k\geqslant 1$ можно найти $r_k\in\left(1\quad\frac{\delta}{2},\,1-\frac{\delta}{4}\right)$ такое, что

$$\int_0^{2\pi}(1-r_k^2)|^{\alpha}f_k(r_k\,e^{i\theta})|^p\,r_k\,d\theta<\varepsilon\,(4/\delta)\;(k\geqslant 1).$$

Поскольку эти неравенства можно переписать в виде

$$\int_0^{2\pi}|f_k(r_k\,e^{i\theta})|^p\,d\theta<4\varepsilon/\{\delta\,r_k(1-r_k^2)^{\alpha}\}\;(k>1),$$

то существует не зависящее от k число $C>0$ такое, что

$$\int_0^{2\pi}|f_k(r_k\,e^{i\theta})|^p\,d\theta<C\;(k\geqslant 1).$$

Из формулы Коши

$$f_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r_k}\frac{f_k(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\;\;(|z|\leqslant 1-\delta),$$

пользуясь неравенством Гёльдера и оценкой (7), получим

$$\max\{|f_k(z)|:|z|\leqslant 1-\delta|\leqslant c_1\;(k\geqslant 1),$$

где $C_1>0$ не зависит от k. Отсюда и из (6) следует оценка

$$\frac{\pi}{\alpha+1}\|f_k\|_{p,\,\alpha}^p=\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\delta}+\int_0^{2\pi}\int_{1-\delta}^{1}\right\}(1-r^2)^{\alpha}\,|f_k(re^{i\theta})|^p\,rd\,r\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant C_1^p\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\delta}(1-r^2)^{\alpha}\,rd\,r\,d\theta+\varepsilon\leqslant\frac{\pi}{\alpha+1}\,C_1^p+\varepsilon,$$

так что

$$\sup_{k\geq 1}\{\|f_k\|_{p,\alpha}\}\equiv M<+\infty. \tag{9}$$

Пусть теперь $\{f_{k_n}(z)\}_1^\infty$ — произвольная подпоследовательность последовательности $\{f_k(z)\}_1^\infty$. Из (9) и (3) вытекает, что функции $f_{k_n}(z)$ равномерно ограничены внутри D. Следовательно, по теореме Монтеля из $\{f_{k_n}(z)\}_1^\infty$ можно извлечь равномерно сходящуюся внутри D подпоследовательность $\{f_{k_{n_j}}(z)\}_1^\infty$.

Предположим, что $\varepsilon>0$ произвольно, а число $\delta\in(0, 1)$ выбрано так, что выполняются оценки (6). Выберем также не зависящее от j и m число $N>0$ таким образом, чтобы

$$|f_{k_{n_j}}(z)-f_{k_{n_m}}(z)|<\varepsilon\ (j,\ m>N;\ |z|\leqslant 1-\delta) \tag{10}$$

Посредством выкладок, аналогичных (8), с использованием (6) и (10), получим

$$\|f_{k_{n_j}}-f_{k_{n_m}}\|_{p,\alpha}^p<(\varepsilon^{p-1}+2(\alpha+1)/\pi)\ (j,\ m\geqslant N),$$

так что последовательность $\{f_{k_{n_j}}(z)\}_1^\infty$ сходится в $H_p(\alpha)$.

Таким образом, из условия (5) следует, что последовательность $\{f_k(z)\}_1^\infty$ компактна в $H_p(\alpha)$.

Чтобы завершить доказательство теоремы остается заметить, что если $\{f_{k_n}(z)\}_1^\infty$ и $\{\bar{f}_{k_n}(z)\}_1^\infty$ —две подпоследовательности последовательности $\{f_k(z)\}_1^\infty$, сходящиеся в $H_p(\alpha)$ к функциям $f(z)$ и $\bar{f}(z)$ соответственно, то $f(z)=\bar{f}(z)$, $z\in D$ (это следует из (4) и того, что $\{z_j\}_1^\infty$ — множество единственности для $H_p(\alpha)$).

Следствие 1. *Если последовательность $\{f_k(z)\}_1^\infty\subset H_p\ (p\geqslant 1)$ слабо сходится в H_p, то она сходится в $H_p(\alpha)$ при всех $\alpha>-1$.*

Действительно, если последовательность $\{f_k(z)\}_1^\infty$ слабо сходится в H_p, то $\sup\limits_{k\in N}\{\|f_k\|_p\}<+\infty$ и эта последовательность поточечно сходится в D. Кроме того

$$\int\limits_{1-\delta}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}(1-r^2)^\alpha|f_k(re^{i\theta})|^p\,r\,d\theta\,dr\leqslant\left\{\int\limits_{1-\delta}^{1}(1-r^2)^\alpha\,r\,dr\right\}\cdot 2\pi\sup_{k\in N}\|f_k\|_p^p=$$

$$=[\delta(2-\delta)]^{\alpha+1}\frac{\pi}{\alpha+1}\sup_{k\in N}\|f_k\|_p^p.$$

Значит для последовательности $\{f_k(z)\}_1^\infty$ выполнены условия теоремы 1 при всех $\alpha>-1$, так что она сходится в $H_p(\alpha)$.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, так как существуют последовательности $\{f_k(z)\}_1^\infty\subset H_p$, для которых $\lim\limits_{k\to+\infty}\|f_k\|_{p,\alpha}=0$ при всех $\alpha>-1$ и, вместе с тем, $\lim\limits_{k\to+\infty}\|f_k\|_p=+\infty$.

Докажем более общее

Предложение. *Пусть* $\{f_k(z)\}_1^\infty \subset H_p\,(1 \leqslant p < +\infty)$ — *произвольная последовательность. Тогда существует последовательность* $\{F_k(z)\}_1^\infty \subset H_p$, *удовлетворяющая условиям*

(i) $\|F_k\|_p = \|f_k\|_p\ (k = 1, 2, \cdots)$,

(ii) *при всех* $\alpha > -1$ $\lim\limits_{k\to+\infty} \|F_k\|_{p,\,\alpha} = 0$.

Доказательство. Пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty$ — убывающая последовательность действительных чисел, причем $\lim\limits_{k\to+\infty} \alpha_k = -1$, и пусть

$$M_{f_k}(r) = \int\limits_0^{2\pi} |f_k(re^{i\theta})|^p\, d\theta \quad (0 \leqslant r < 1;\ k = 1, 2, \cdots). \tag{11}$$

Поскольку при $k = 1, 2, \cdots;\ m = 1, 2, \cdots;\ 0 \leqslant r < 1$

$$M_{f_k}(r)\, r^{mp} \leqslant M_{f_k}(r) < 2\pi \|f_k\|_p^p$$

и при фиксированном k $\lim\limits_{m\to+\infty} M_{f_k}(r)\, r^{mp} = 0$, то в силу теоремы Лебега о мажорированной сходимости

$$\lim_{m\to+\infty} \int\limits_0^1 (1 - r^2)^{\alpha_k} [M_{f_k}(r)\, r^{mp}]\, r\, dr = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

Поэтому при фиксированном $k = 1, 2, \cdots$ существует число $m_k > 0$, такое, что

$$\int\limits_0^1 (1 - r^2)^{\alpha_k} [M_{f_k}(r)\, r^{m_k p}]\, r\, dr < 1/k. \tag{12}$$

Убедимся в том, что функции $F_k(z) \equiv z^{m_k} f_k(z)$, $k = 1, 2, \cdots$, удовлетворяют условиям (i) и (ii).

Равенства $\|F_k\|_p = \|f_k\|_p\ (k = 1, 2, \cdots)$ очевидны.

Пусть $\alpha > -1$ — фиксированное число. Поскольку $\alpha_k \downarrow -1$, то

$$-1 < \alpha_k < \alpha \text{ при } k \geqslant k(\alpha). \tag{13}$$

Поэтому при $k \geqslant k(\alpha)$ из (13), (11) и (12) получим

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 (1 - r^2)^{\alpha} |F_k(re^{i\theta})|^p\, r\, dr\, d\theta \leqslant \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 (1 - r^2)^{\alpha_k} |F_k(re^{i\theta})|^p\, r\, dr\, d\theta =$$

$$= \int\limits_0^1 (1 - r^2)^{\alpha_k} M_{f_k}(r)\, r^{m_k p + 1}\, dr < 1/k,$$

откуда следует (ii).

Следствие. 2. *Последовательность* $\{f_k(z)\}_1^\infty$ *голоморфных в* D *функций лежит в* $H_p\ (p > 1)$ *и слабо сходится в* H_p *тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{k \geqslant 1} \{\lim_{\alpha\to-1} \|f_k\|_{p,\,\alpha}\} < +\infty, \tag{14}$$

$\{f_k(z)\}_1^\infty$ *сходится в* $H_p(\alpha)$ *при некотором* $\alpha > -1$. (15)

Доказательство. Если последовательность $\{f_k(z)\}_1^\infty$ лежит в H_p и слабо сходится в этом пространстве, то в силу следствия 1 имеем (15). Кроме того, $\sup\limits_{k\geq 1} \{\|f_k\|_p\} < +\infty$, так что с учетом замечания I верна оценка (14).

Обратно, пусть последовательность $\{f_k(z)\}_1^\infty$ голоморфных в D функций удовлетворяет условиям (14) и (15).

Из (14), с учетом замечания I, получаем: $\{f_k(z)\}_1^\infty \subset H_p$ и $\sup\limits_{k\geq 1} \{\|f_k\|_p\}_1^\infty < -+\infty$. Поскольку H_p — рефлексивное пространство (см., напр., [1]), то из ограниченности последовательности норм $\{\|f_k\|_p\}$ в силу теоремы Банаха—Алаоглу вытекает слабая компактность последовательности $\{f_k(z)\}_1^\infty$ в H_p.

Пусть $\{f_{k_n}(z)\}_1^\infty$ и $\{\bar{f}_{k_n}(z)\}_1^\infty$—две подпоследовательности последовательности $\{f_k(z)\}_1^\infty$, слабо сходящиеся в $H_p(\alpha)$ к функциям $f(z)$ и $\tilde{f}(z)$ соответственно. Поскольку $H_p \subset H_p(\alpha)$, то $H_p^*(\alpha) \subset H_p^*$, поэтому последовательности $\{f_{k_n}(z)\}_1^\infty$ и $\{\bar{f}_{k_n}(z)\}$ сходятся также слабо в $H_p(\alpha)$ к функциям $f(z)$ и $\tilde{f}(z)$ соответственно. Отсюда и из (15) заключаем, что $f(z) \equiv \bar{f}(z)$. Следовательно, последовательность $\{f_k(z)\}_1^\infty$ слабо сходится в H_p.

В заключение заметим, что сопоставив замечание II и следствие 2, можем утверждать следующее.

Если $\{f_k(z)\}_1^\infty$ — ограниченная в $H_p\ (p > 1)$ последовательность функций, то ее слабая сходимость в H_p равносильна сходимости в $H_p(\alpha)$ при $\alpha > -1$, а её сходимость в H_p равносильна сходимости в $H_p(\alpha)$, равномерной по $\alpha > -1$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 13. XI. 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Reinerman*. Eine Funktionalanalytische Methode zur Formulierung von Konverge nzsätzen der Funktionentheorie, Mathematika, vol. 12 (35), 2, CLUJ, 1970.
2. *P. L. Duren*. Theory of H^p-spaces, Academic Press, New York, 1970.
3. *М. М. Джрбашян*. О представимости некоторых классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН Арм.ССР, 3, № 1, 1945.
4. *М. М. Джрбашян*. К проблеме представимости аналитических функций, Сообщения института математики и механики АН Арм.ССР, вып. 2, 1948.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 2, 1989 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.984

А. БЕТТХЕР

ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ Л. В. МИКАЕЛЯНА В ТЕОРИИ ДЕТЕРМИНАНТОВ ВИНЕРА-ХОПФА

1°. Пусть k—функция из $L^2(\mathbf{R})$, и $\hat{k}\in L^2(\mathbf{R})$ — ее преобразование Фурье

$$\hat{k}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}k(t)\,e^{ixt}\,dt\ (x\in\mathbf{R}).$$

Положим $a=1+\hat{k}$ и обозначим через $T_\tau(a)$ или $I+T_\tau(\hat{k})$ усеченный оператор Винера-Хопфа, действующий в пространстве $L^2(0,\tau)(0<\tau<\infty)$ по правилу

$$(T_\tau(a)\,\varphi)(t)=\varphi(t)+\int_0^\tau k(t-s)\,\varphi(s)\,ds\ (0<t<\tau).$$

Функция a называется символом семейства операторов $T_\tau(a)$ $(0<\tau<\infty)$. Если $\hat{k}\in L^1(\mathbf{R})$, то операторы $T_\tau(\hat{k})$ являются ядерными, и поэтому можно определить детерминанты $D_\tau(a):=\det(I+T_\tau(\hat{k}))$ (см. [1]). В случае „регулярного" символа a асимптотика детерминантов $D_\tau(a)$ при $\tau\to\infty$ описана известной формулой Ахиезера—Каца (см. [2]). В недавней работе [3] Л. В. Микаеляна рассматривался один класс „сингулярных" символов, а именно, класс символов вида $a=\sigma_{\alpha_1}^{r_1}\cdots\sigma_{\alpha_N}^{r_N}b$, где

$$\sigma_\alpha^r(x):=\left|\frac{x-\alpha}{x-\alpha+i}\right|^{2r}=\frac{(x-\alpha)^{2r}}{((x-\alpha)^2+1)^r}\ (\alpha\in\mathbf{R},\ r>0)$$

и b—«регулярная» функция. Отметим, что символ a обращается в нуль в точках $\alpha_1,\dots,\alpha_N$, из-за чего формула Ахиезера-Каца не применима. В настоящей работе под «регулярной» функцией b будем понимать ограниченную рациональную функцию такую, что $b(\pm\infty)=1$, $b(x)\neq 0$ при всех $x\in\mathbf{R}$ и $\operatorname{ind} b=0$ ($\operatorname{ind} b$ обозначает число оборотов образа функции b относительно начала координат). В этом случае b допускает факторизацию Винера—Хопфа $b=b_-b_+$ (будем считать, что $b_\pm(\pm\infty)=1$), а формула Ахиезера—Каца дает $D_\tau(b)\sim G(b)^\tau E(b)$ $(\tau\to\infty)$ с некоторыми постоянными $G(b)$ и $E(b)$.

Л. В. Микаелян [3] выдвинул гипотезу, что

$$D_\tau(a) \sim Ce^{-(r_1+\cdots+r_N)\tau}\, G(b)^\tau \tau^{r_1^2+\cdots+r_N^2} \quad (\tau\to\infty), \tag{1}$$

где

$$C = cE(b)\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{b_+(\alpha_j+i)\,b_-(\alpha_j-i)}{b(\alpha_j)}\right)^{r_j}\prod_{l<j}\left(\frac{((\alpha_j-\alpha_l)^2+1)^2}{((\alpha_j-\alpha_l)^2+4)(\alpha_j-\alpha_l)^2}\right)^{r_l r_j} \tag{2}$$

и c—некоторая постоянная, зависящая только от $r_1,\ldots,r_N$. Мы выдвигаем гипотезу, что для постоянной c можно указать вид

$$c=(1/2)^{r_1^2+\cdots+r_N^2}\prod_{j=1}^{N} G(r_j+1)^2/G(2r_j+1), \tag{3}$$

где $G(z)$—так называемая функция Барнса (см. [4]). Отметим, что $G(z)$ является целой функцией, удовлетворяющей соотношениям $G(z+1)=\Gamma(z)\,G(z)$ и $G(2)=G(1)=0$. В частности, если $m\geqslant 3$ — целое число, то $G(m)=(m-2)!\cdots 2!\,1!$.

Гипотеза Л. В. Микаеляна является континуальным аналогом одного результата Х. Уидома [4] и была доказана в [3] для некоторых частных случаев ($a=\sigma_\alpha^{-}b$, $a=\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}$ или $a=\sigma_\alpha^2$). В настоящей работе эта гипотеза доказываетя для случая, когда $r_1,\cdots,r_N$—целые числа.

2. Пусть a—ограниченная рациональная функция на $\mathbf{R}$ такая, что $a(\pm\infty)=1$. В таком случае операторы $T_\tau(\hat{k})$ являются операторами Гильберта-Шмидта в $L^2(0,\tau)$ и, следовательно, можно определить регуляризованные детерминанты $\tilde{D}_\tau(a):=\det_2(I+T_\tau(\hat{k}))$ (см. [1]). Следующую теорему можно считать континуальным аналогом формулы К. М. Дей [5] для теплицевых определителей с рациональным символом.

Теорема 1. *Пусть*

$$a(x)=1+\hat{k}(x)=\prod_{n=1}^{g+s}(x-\xi_n)\prod_{l=1}^{g}(x+i\lambda_l)^{-1}\prod_{m=1}^{s}(x-i\mu_m)^{-1}\ (x\in\mathbf{R}),$$

где $\operatorname{Re}\lambda_l>0$, $\operatorname{Re}\mu_m>0$, $g\geqslant 1$, $s\geqslant 1$ *и* $\xi_1,\cdots,\xi_{g+s}$ *— попарно различные комплексные числа. Тогда для всех* $\tau\in(0,\infty)$ *имеет место равенство*

$$\tilde{D}_\tau(a)=e^{-\tau\left[k(0+0)+\sum_{l=1}^{g}\lambda_l\right]}\sum_{M}W_M e^{w_M\tau}; \tag{4}$$

здесь M *пробегает все множества* $M\subset\{1,2,\cdots,g+s\}$, *такие, что* $\operatorname{card}M=s$, *и полагая* $\bar{M}=\{1,\cdots,g+s\}\setminus M$, $Q=\{1,\cdots,g\}$, $S=\{1,\cdots,s\}$, *имеем*

$$w_M=\sum_{j\in\bar{M}} i\xi_j\ (i=\sqrt{-1}),$$

$$W_M=\prod_{\substack{j\in\bar{M}\\ m\in S}}(i\xi_j+\mu_m)\prod_{\substack{l\in S\\ k\in M}}(\lambda_l-i\xi_k)\prod_{\substack{m\in S\\ l\in Q}}(\mu_m+\lambda_l)^{-1}\prod_{\substack{j\in\bar{M}\\ k\in M}}(i\xi_j-i\xi_k)^{-1}.$$

Доказательство. Разлагая a на элементарные дроби, легко видеть, что ядро k является непрерывной функцией на $[-\tau, \tau]\setminus\{0\}$ и что (конечные) пределы $k(0\pm0)$ существуют. Можно показать, что

$$\tilde{D}_\tau(a)=\lim_{n\to\infty}\det\left(I+\frac{\tau}{n}k\left((i-j)\frac{\tau}{n}\right)\right)_{i,j=0}^{n}, \tag{5}$$

если только в правой части (5) полагается $k(0)=0$. Символы теплицевых детерминантов, встречающихся в правой части (5), являются рациональными и поэтому они могут быть вычислены при помощи формулы Дэй [5]. Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем утверждение теоремы.

Предыдущая теорема решает проблему вычисления детерминантов $\tilde{D}_\tau(a)$ для рациональных символов a полностью. Отметим, что, совершая подходящие предельные переходы в (4), можно освободиться от требования, что $\xi_1,\dots,\xi_{g+s}$ должны быть попарно различными.

Легко убедиться в том, что $T_\tau(\hat{k})$ является ядерным тогда и только тогда, когда $k(0-0)=k(0+0)=k(0)$ (вспомним, что a—рациональная функция). В этом случае имеем

$$D_\tau(a)=\tilde{D}_\tau(a)\,e^{\tau k(0)}. \tag{6}$$

Сочетая (6) и теорему 1 получим, например, следующие формулы:

$$D_\tau\left(\frac{x^2-\beta^2}{x^2+\beta^2}\right)=e^{-\beta\tau}\cos\beta\tau\ (\operatorname{Re}\beta>0),$$

$$D_\tau\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)=e^{-\tau}\left(\frac{\tau}{2}+1\right),$$

$$D_\tau\left(\frac{x^4}{(x^2+1)^2}\right)=e^{-2\tau}\frac{1}{12}\left[\left(\frac{\tau}{2}\right)^4+8\left(\frac{\tau}{2}\right)^3+24\left(\frac{\tau}{2}\right)^2+30\frac{\tau}{2}+12\right].$$

Вторая формула была другими методами установлена Л. В. Микаеляном [3], который также доказал, что $D_\tau(x^4/(x^2+1)^2)\sim(1/12)\,e^{-2\tau}(\tau/2)^4$.

3°. Предположим теперь, что a имеет вид

$$a(x)=\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{x-\alpha_j}{x+i}\right)^{r_j}\left(\frac{x-\alpha_j}{x-i}\right)^{s_j}b(x)\ (x\in\mathrm{R}), \tag{7}$$

где $i=\sqrt{-1}$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_N$—попарно различные вещественные числа, r_j и s_j—натуральные числа такие, что $z_j=r_j+s_j>0$ и $r=\sum r_j\leqslant\leqslant s=\sum s_j$ и где b—„регулярная“ функция. Следующая теорема является континуальным аналогом основного результата работы [6].

Теорема 2. *Пусть a имеет вид* (7). *Полагаем*

$$\mathfrak{M}=\{(m_1,\cdots,m_N)\in\mathrm{Z}^N: 0\leqslant m_j\leqslant z_j,\ m_1+\cdots+m_N=r\},$$

$$Q=\max\left\{\sum_{j=1}^{N}m_j(z_j-m_j):(m_1,\cdots,m_N)\in\mathfrak{M}\right\},$$

$$\mathfrak{M}^*=\left\{(m_1,\cdots,m_N)\in\mathfrak{M}:\ \sum_{j=1}^{N}m_j(z_j-m_j)=Q\right\},$$

и пусть $a = 1 + \widehat{k}_a$, $b = 1 + \widehat{k}_b$. *Тогда при* $\tau \to \infty$

$$\widetilde{D}_\tau(a) \sim e^{-\tau[k_a(0+0) - k_b(0+0) + r]}\, \widetilde{G}(b)^\tau \tau^Q \times$$

$$\times \left\{ \sum_{(m_1,\cdots,m_N)\in\mathfrak{M}^*} H_{m_1,\cdots,m_N} e^{i\left(\sum_{j=1}^{N} m_j \varphi_j\right)\tau} + \Delta(\tau) \right\},$$

где $\Delta(\tau) = O(1/\tau)$ *при* $Q \geqslant 1$, $\Delta(\tau) = O(e^{-\delta\tau})$ *с некоторым* $\delta > 0$ *при* $Q = 0$, *и*

$$\widetilde{G}(b) = \exp\left\{ -\int_0^\infty k_b^-(-t)\, k_b^+(t)\, dt \right\} \quad (b_\pm =: 1 + \widehat{k}_b^\pm),$$

$$H_{m_1,\cdots,m_N} = \frac{1}{2^{rs}} \prod_{j=1}^{N} \frac{G(z_j - m_j + 1)\, G(m_j + 1)}{G(z_j + 1)} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{N} [(1 + ia_j)^{m_j s} (1 - ia_j)^{(z_j - m_j) r}] \prod_{j \neq k} (ia_j - ia_k)^{-m_j(z_k - m_k)} \times$$

$$\times E(b)\, b_-(-i)^r\, b_+(i)^s \prod_{j=1}^{N} b_-(a_j)^{-m_j}\, b_+(a_j)^{-(z_j - m_j)}.$$

Доказательство получается из теоремы 1 с помощью подходящих предельных переходов в (4) и из результатов работы [6].

Отметим один интересный частный случай предыдущей теоремы (дискретный аналог см. [7]):

$$\widetilde{D}_\tau\left[\frac{x^{r+s}}{(x+i)^r (x-i)^s}\right] \sim \frac{G(r+1)\, G(s+1)}{G(r+s+1)}\, e^{-\tau[k(0+0)+r]} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{rs}, \quad (8)$$

где $k(0+0) = s - r - \frac{1}{2^r} \sum_{j=1}^{s} \binom{r+s}{s-j} \binom{r+j-2}{j-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^j$.

4°. Оператор $T_\tau[x^{r+s}(x-i)^{-r}(x-i)^{-s}] - I$ является ядерным тогда и только тогда, когда $r = s$. В этом случае из (8) и (6) вытекает, что при $r = 1, 2, 3, \cdots$

$$D_\tau\left[\frac{x^{2r}}{(x^2+1)^r}\right] \sim \frac{G(r+1)^2}{G(2r+1)}\, e^{-\tau r} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{r^2} \quad (\tau \to \infty). \quad (9)$$

Следующая теорема подтверждает гипотезу Л. В. Микаеляна в случае рациональных символов.

Теорема 3. *Пуст* $a = \sigma_{a_1}^{r_1} \cdots \sigma_{a_N}^{r_N} b$, *где* $r_1, \cdots, r_N$ — *натуральные числа и* b — *„регулярная" функция. Тогда справедливы* (1), (2) *и* (3).

Доказательство. Полагая в теореме 2 $r_j = s_j$, имеем $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^* = \{(r_1, \cdots, r_N)\}$ и $Q = \sum r_r^2$, откуда вместе с равенством (6) получаем утверждение.

5°. В заключение отметим, что гипотеза Л. В. Микаеляна может быть доказана методом работ [8], [9] для случая $0 < r_j < 1/2$ (или даже

$|\mathrm{Re}\, r_j| < 1/2$), *если* только установлена справедливость соотношения (9) для $0 < r < 1/2$ (или, соответственно, $|\mathrm{Re}\, r| < 1/2$). Итак, как первый шаг в доказательстве этой гипотезы в полной общности, предлагаем доказать (9) при нецелых r. Заметим, что все выражения в (9) являются аналитическими функциями от r.

Технический университет
Кар-Маркс-Штадт (ГДР)

Поступила 1. X. 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Ввведение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., Изд. «Наука», 1965.
2. *Н. И. Ахиезер.* Континуальный аналог некоторых теорем о теплицевых матрицах, УМН, XVI, № 4, 1964, 445—462.
3. *Л. В. Микаелян.* Асимптотика детерминантов усеченных операторов Винера-Хопфа в некотором сингулярном случае, ДАН Арм.ССР, 82, № 4, 1986, 151—155.
4. *H. Widom.* Toeplitz determinants with singular generating fiunctions, Amer. Journal of Math., v. 95, 1973, 333—383.
5. *K. M. Day.* Toeplitz matrices generated by the Laurent series expansion of an arbitrary rational functions, Trans. Amer. Math. Soc., v. 206, 1975, 224—245.
6. *A. Bottcher, B. Silbermann.* The asymptotic behaviour or Toeplitz determinants for generating functions with zeros of integral orders, Math. Nachr., 102, 1981, 79—105.
7. *A. Bottcher, B. Silbermann.* Toeplitz operators and determinants generated by symbols with one Fisher—Hartwig singularity, Math. Nachr., 127, 1986, 95—124.
8. *А. Бёттхер, Б. Зильберман.* Теплицивы определители с символами из класса Фишера-Хартвига, ДАН СССР, 278, № 1, 1984, 13—16.
9. *A. Bottcher, S. Silbermann.* Toeplitz matrices and determinants with Fisher—Hartwig symbols, J. Funct. Anal., 63, № 2, 1985, 178—214.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 2, 1989 Математика

УДК 517.95

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А. С. ГРИГОРЯН, А. Б. НЕРСЕСЯН

ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ-ГУРСА И КОШИ-ДАРБУ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

1°. Теория задачи Коши для слабо гиперболического уравнения с вырождением на гладком многообразии продвинута достаточно далеко (см. [1]). Изучены также многие случаи вырождения на более общих множествах ([2]). Однако другие классические задачи для таких уравнений изучены очень мало. И это неудивительно, если учесть, что уже для простейших модельных слабо гиперболических уравнений второго порядка в плоском случае задачи типа Гурса и Дарбу оказываются некорректными, а попытка их изучения в более или менее общих случаях наталкивается на технические преграды, до сих пор не преодоленные. Заметим также, что упомянутая некорректность может иметь место, когда задача Коши заведомо корректна, а уравнение вырождается лишь на некоторой гладкой линии (см. [3]).

В связи с этим определенный интерес представляет случай «минимального» вырождения, то есть вырождения лишь в одной точке.

Ниже будут изучены некоторые краевые задачи для определенного класса модельных уравнений, вырождающихся в одной точке на границе области.

2°. Рассмотрим уравнения

$$\partial_+ ((t + \varphi(\operatorname{arctg}(x + t) - t))\, \partial_- U - U) = 0, \tag{1}$$

$$\partial_- ((t + \varphi(\rho(x, t)))\, \partial_+ U - U) = 0, \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция $\partial_\pm = \dfrac{\partial}{\partial t} \pm (x + t)^2 \dfrac{\partial}{\partial x}$ и

$$\rho(x, t) = [\exp(\ln[(1 + x + t)(1 - x - t)^{-1}] - 2t) - 1] \times$$
$$\times [\exp(\ln[(1 + x + t)(1 - x - t)^{-1}] - 2t) + 1]^{-1}.$$

Характеристики этих уравнений определяются функцией $\lambda(x, t) = (x + t)^2$ и, таким образом, вырождение происходит на прямой $x + t = 0$. В данных случаях семейства характеристик выписываются, соответственно, явно посредством формул

$$x = \operatorname{tg}(t + \mathrm{const}) - t,$$

$$x = [\exp(2t + \mathrm{const}) - 1][\exp(2t + \mathrm{const}) + 1]^{-1} - t$$

и нетрудно видеть, что речь идет о модельных уравнениях типа предложенных в [3].

Задачи будут рассматриваться в характеристическом треугольнике G, опирающемся на отрезок $[0, 1/2]$. Обозначим координаты его вершины B, лежащей в полуплоскости $t>0$, через (p, q).

Таким образом, уравнение (1), рассматриваемое в G, вырождается лишь при приближении к точке $(0, 0)$.

3° Задачи Коши с начальными данными

$$U(x, 0)=\alpha(x), \quad U_t(x, 0)=\beta(x) \tag{3}$$

заведомо корректна при соответствующих ограничениях на φ—достаточно применить один из известных критериев (напр., [1]). Однако для дальнейшего понадобятся более точные условия и явные формулы.

Пронитегрировав уравнения (1), (2) по соответствующим характеристикам и учитывая (3), получим

$$U(x, t)=\Big[\alpha(z(0, x, t))-\sum_{l=1}^{N}\frac{\alpha_{(0)}^{(l)}}{l!}z^{l}(0, x, t)\Big]\exp\Big\{\int_{0}^{t}(\tau+$$

$$+\varphi(\operatorname{arctg} z(\tau, x, t))^{-1}\Big\}d\tau+\int_{0}^{t}\Big\{\Big|\varphi(\operatorname{arctg} z(\eta, x, t))(\beta(z(\eta, x, t))-$$

$$-z^{2}(\eta, x, t)\alpha'(z(\eta, x, t)))-\Big(\alpha(z(\eta, x, t))-\sum_{l=1}^{N}\frac{\alpha_{(0)}^{(l)}}{l!}z^{l}(\eta, x, t)\Big)\Big|\times$$

$$\times(\eta+\varphi(\operatorname{arctg} z(\eta, x, t)))^{-1}-\sum_{l=0}^{N}\frac{\alpha_{(0)}^{(l)}}{l!}z_{\eta}^{l}(\eta, x, t)\Big\}\exp\Big\{\int_{\eta}^{t}(\tau+$$

$$+\varphi(\operatorname{arctg} z(\tau, x, t)))^{-1}d\tau\Big\}d\eta+\sum_{l=1}^{N}\frac{\alpha_{(0)}^{(l)}}{l!}z^{l}(t, x, t), \tag{4}$$

где

$$z(\eta, x, t)=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}[(\exp\{2\eta-2t+\ln[(1+x+t)(1-x-t)^{-1}]\}-1)\times$$
$$\times(\exp\{2\eta-2t+\ln[(1+x+t)(1-x-t)^{-1}]\}+1)^{-1}]-\eta),$$

$$U(x, t)=\Big[\alpha(\delta(0, \varepsilon, t))-\sum_{l=0}^{N}\frac{\alpha^{(l)}(0)}{l!}\delta^{l}(0, \varepsilon, t)\Big]\exp\Big\{\int_{0}^{t}(\tau+$$

$$+\varphi(\delta(\tau, \varepsilon, t)))^{-1}d\tau\Big\}+\int_{0}^{t}\Big\{\Big|\varphi(\delta(\eta, x, t)(\beta(\delta(\eta, x, t))+ \tag{5}$$

$$+\delta^{2}(\eta, x, t)\alpha'(\delta(\eta, x, t)))-\Big(\alpha(\delta(\eta, x, t))-\sum_{l=1}^{N}\frac{\alpha^{(l)}(0)}{l!}\delta^{l}(\eta, \varepsilon, t)\Big)\Big]\times$$

$$\times\exp\Big\{\int_{\eta}^{t}(\tau+\varphi(\delta(\tau, \varepsilon, t)))^{-1}d\tau\Big\}(\eta+\varphi(\delta(\eta, \varepsilon, t))^{-1}-$$

$$-\sum_{l=0}^{N}\frac{\alpha^{(l)}(0)}{l!}\delta_{\eta}^{l}(\eta, \varepsilon, t)\exp\Big\{\int_{\eta}^{t}(\tau+\varphi(\delta(\tau, \varepsilon, t)))^{-1}d\tau\Big\}d\eta+\sum_{l=0}^{N}\frac{\alpha^{(l)}(0)}{l!}\delta^{l}(t, \varepsilon, t),$$

а $x+t=\varepsilon+\operatorname{tg}t$ и

$$\theta(\eta, x, t)=[\exp(\ln[(1+\operatorname{tg}(\eta+\operatorname{arctg}(x+t)-t))(1-\operatorname{tg}(\eta+$$
$$+\operatorname{arctg}(x+t)-t))^{-1}]-2\eta)-1][\exp(\ln[(1+\operatorname{tg}(\eta+$$
$$+\operatorname{arctg}(x+t)-t))(1-\operatorname{tg}(\eta+\operatorname{arctg}(x+t)-t))^{-1}]-2\eta)+1]^{-1}.$$

Из (4) и (5) следует

Теорема 1. *Решение задачи Коши* (1), (2) *и* ((2), (2) *в классе* $C^2(G)\cap C(\overline{G})$ *существует и единственно при условии*

$$\left|\alpha(z)-\sum_{i=0}^{N}\frac{\alpha^{(i)}(0)}{i!}z^i\right|\leqslant L\cdot\varphi(z),\ L=\mathrm{const}>0. \tag{6}$$

4°. Задача Дарбу

$$U(x, 0)=\alpha(x),\ U(x^-(t), t)=\nu(t), \tag{7}$$

где $x^-(t)$ — соответствующая из характеристик, исходящих из точки (1/2, 0).

Интегрируя уравнение (1) и подставляя $t\to 0$ ($t\ \partial\ u\to 0$), получим

$$\alpha(x)=\varphi(\operatorname{arctg}x)(\beta(x)-x^2\alpha'(x))+\nu(p-x\sin^{-2}p)-$$
$$-(p-x\sin^{-2}p+\varphi(\operatorname{arctg}x))\nu'(p-x\sin^{-2}p).$$

Это соотношение, связывающее α, β, ν—ключевое.

Проведя второе интегрирование, получим

$$U(x, t)=\left[\alpha(z(0, x, t))-\sum_{i=0}^{N}\frac{\alpha^{(i)}(0)}{i!}z^i(0, x, t)\right]Q(0, x, t)+$$
$$+\int_0^t\left\{\left[\theta(\eta, x, t)+\varphi(\operatorname{arctg}z(\eta, x, t))\right)\nu'(\theta(\eta, x, t))-\right.$$
$$-\nu(\theta(\eta, x, t))+\sum_{i=0}^{N}\frac{\alpha^{(i)}(0)}{i!}z^i(\eta, x, t)\Big](\eta+\varphi(\operatorname{arctg}z(\eta, x, t)))^{-1}-$$
$$\left.-\sum_{i=0}^{N}\frac{\alpha^{(i)}(0)}{i!}z^i_\eta(\eta, x, t)\right\}Q(\eta, x, t)\,d\eta+\sum_{i=0}^{N}\frac{\alpha^{(i)}(0)}{i!}z^i(t, x, t),$$

где

$$\theta(\eta, x, t)=p-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}z(\eta, x, t)-\operatorname{tg}\eta)\sin^{-2}p,$$

$$Q(\eta, x, t)=\exp\left\{\int_\eta^t(\tau+\varphi(\operatorname{arctg}z(\tau, x, t)))^{-1}d\tau\right\}.$$

Отсюда следует

Теорема 2. *Решение задачи Дарбу* (1), (7) *в классе* $C^2(G)\cap C(\overline{G})$ *существует и единственно при условии* (6), *если дополнительно потребовать, что*

$$(p\nu'(p)-\nu(p))^{(i)}+\alpha^{(i)}(0)=0,\ i=1, 2, \cdots, n.$$

5°. Задача Коши—Дарбу

$$U_t(x, 0)=\beta(x),\ U(x^-(t), t)=\nu(t(\tag{8}$$

сводится, как нетрудно убедиться, к интегральному уравнению

$$U(x, t) = \nu\left(p - (x + t - \operatorname{tg} t)\sin^{-2}p\right) W_1(0, x, t) +$$

$$+ \int\limits_{p-(x+t-\operatorname{tg} t)\sin^{-2}p}^{t} \{\varphi(\delta(\eta, x, t)) \times (\beta(\delta(\eta, x, t)) +$$

$$+ \delta^2(\eta, x, t)\, U'(\delta(\eta, x, 0), 0)) - U(\delta(\eta, x, 0), 0)] \times$$

$$\times W_2(\eta, x, t)\,(\eta + \varphi(\delta(\eta, x, t)))^{-1}]\, d\eta,$$

где

$$W_1(0, x, t) = \exp\left\{\int\limits_{t}^{p-(x+t-\operatorname{tg} t)\sin^{-2}p} (\tau + \varphi(\delta(\tau, x, t)))^{-1}\, d\tau\right\},$$

$$W_2(\eta, x, t) = \exp\left\{\int\limits_{\eta}^{t} (\tau + \varphi(\delta(\tau, x, t)))^{-1}\, d\tau\right\}.$$

При $t=0$ приходим к интегральному уравнению типа Вольтерра:

$$U(x, 0) = \Phi(x) + R(x, p)\, U(\delta(p - x\sin^{-2}p, x, 0), 0) -$$

$$- 2\int\limits_{0}^{p-x\sin^{-2}p} K(\eta, p, x)\, U(\delta(\eta, x, 0), 0)\, d\eta,$$

которое однозначно разрешимо, если $|R(x, p)| < 1$ и

$$\left|\int\limits_{0}^{p-x\sin^{-2}p} |K(\eta, x, p)|\, d\eta\right| \to 0, \text{ где } p \to 0 \text{ при}$$

$$R(x, p) = 2\varphi(\delta(p - x\sin^{-2}p, x, 0))\,\delta^2(p - x\sin^{-2}p, x, 0)\exp\left\{-\right.$$

$$\left.- \int\limits_{0}^{p-x\sin^{-2}p} (\tau + \varphi(\delta(\tau, x, 0)))^{-1}\, d\tau\right\}[p - x\sin^{-2}p +$$

$$+ \varphi(\delta(-x\sin^{-2}p, x, 0))\,\delta'(p - x\sin^{-2}p, x, 0)]^{-1},$$

$$K(\eta, x, p) = \exp\left\{-\int\limits_{0}^{\eta} (\tau + \varphi(\delta(\tau, x, 0)))^{-1}\, d\tau\right\}(\eta + \varphi(\delta(\eta, x, 0)))^{-1} -$$

$$- \frac{d}{d\eta}\left[\varphi(\delta(\eta, x, 0))\,\delta^2(\eta, x, 0) \times\right.$$

$$\left.\times \exp\left\{-\int\limits_{0}^{\eta} (\tau + \varphi(\delta(\tau, x, 0)))^{-1}\, d\tau\right\}[\eta + \varphi(\delta(\eta, x, 0))\,\delta_\eta(\eta, x, 0)]^{-1}\right].$$

Чтобы обеспечить эти условия заметим, что если $q = p - x\sin^{-2}p$, $0 < q < p$

$$2\,\delta^2(q,\ x,\ 0)\,(\delta'(q,\ x,\ 0))^{-1} < 1 + 1/9\cdot(q+x)^4 + 2/3\cdot(q+x)^2,$$

$$\exp\left\{-\int\limits_0^q (\tau + \varphi(\delta(\tau,\ x,\ 0)))^{-1}\,d\tau\right\} < \exp\{-q\,(\varphi(x) + (1+2x^2\varphi'(x))\,q)^{-1}\} < 1.$$

то $|R(x,\ p)| < 1$.

Для доказательства второго неравенства заметим, что

$$\max_{0<\eta<p} |K(\eta,\ x,\ p)| = N(x,\ p) < +\infty \text{ при } x > 0.$$

Обозначим найденное решение через $V(x,\ t)$ и $\varepsilon = x + t - \operatorname{tg} t$. В итоге получим

$$U(x,\ t) = \left(\nu(p - \varepsilon\sin^{-2}p) - \sum_{l=0}^{N} \frac{\nu^{(l)}(p)}{l!}(p - \varepsilon\sin^{-2}p)^l\right)\Omega_1(\varepsilon,\ t) +$$

$$+ \int\limits_{p-\varepsilon\sin^{-2}p}^{t} \left\{\Big[\varphi(\delta(\eta,\ \varepsilon,\ 0))\,(\beta(\delta(\eta,\ \varepsilon,\ 0)) + \delta^2(\eta,\ \varepsilon,\ 0)\,V'(\delta(\eta,\ \varepsilon,\ 0),\ t) -\right.$$

$$- \left(V(\delta(\eta,\ \varepsilon,\ 0),\ t) - \sum_{l=0}^{N} \frac{\nu^{(l)}(p)}{l!}\eta^l\right)\Big]\,(\eta + \varphi(\delta(\eta,\ \varepsilon,\ 0)))^{-1} -$$

$$\left. - \sum_{l=0}^{N} \frac{\nu^{(l)}(p)}{l!}(\eta^l)'\right\}\Omega_2(\eta,\ t,\ \varepsilon)\,d\eta + \sum_{l=0}^{N} \frac{\nu^{(l)}(p)}{l!}t^l,$$

где

$$\Omega_1(\varepsilon,\ t) = \exp\left\{\int\limits_{p-\varepsilon\sin^{-2}p}^{t} (\tau + \varphi(\delta(\tau,\ \varepsilon,\ 0)))^{-1}\,d\tau\right\},$$

$$\Omega_2(\eta,\ t,\ \varepsilon) = \exp\left\{\int\limits_{\eta}^{t} (\tau + \varphi(\delta(\tau,\ \varepsilon,\ 0)))^{-1}\,d\tau\right\}.$$

Отсюда следует

Теорема 3. *Решение задачи Коши—Дарбу (2), (8) существует и единственно в классе $C^2(G) \cap C(\overline{G})$ при выполнении оценки*

$$\left|\nu(z) - \sum_{l=0}^{N} \frac{\nu^{(l)}(p)}{l!}z^l\right| \leqslant L\,\varphi(z),\ L = \text{const} > 0.$$

6°. Задача Гурса с граничными данными

$$U(x^+(t),\ t) = \Psi_0(t),\ U(x^-(t),\ t) = \Psi_1(t), \tag{9}$$

ггде $x^-(t)$, $x^+(t)$—пара характеристик, исходящих из точки $(0,\ 0)$.

Проинтегрировав уравнение (1) по соответствующим характеристикам, получим

$$U(x,\ t) = \Big[\Psi_0(c_2t)\,(c_2t + \varphi(c_3t))^{-1} + \int\limits_{c_3t}^{t} (c_1\tau\Psi_1'(c_1\tau) -$$

$$- \Psi_1(c_1\tau)\,(\tau + \varphi(t^3))^{-2}\,d\tau\Big][t + \varphi(t^3)]^{-1}.$$

После упрощения этого интеграла получим

$$U(x,\ t) = (t + \varphi(t^3))\,[\Psi_0(c_2 t)(c_2 t + \varphi(c_3 t))^{-1} + $$
$$+ (c_4 t\,\Psi_1'(c_4 t) - \Psi_1(c_4 t)(c_2 t + \varphi(t^3))^{-1}] -$$
$$- c_1 t\,\Psi_1'(c_1 t) + \Psi_1(c_1 t) + c_5 \int\limits_{c_4 t}^{t} \tau^2\,\Psi_1''(\tau\cdot c_1)(\tau + \varphi(t^3))^{-1}\,dt,$$

где $c_2 = 3^{1/3}$, $c_3 = c_2 - 1$, $c_4 = c_1\cdot c_2$, $c_5 = c_1^2$.

В итоге получаем следующий результат:

Теорема 4. *Решение задачи Гурса* (1), (9) *существует и единственно в* $C^2(\bar{G})$, *если* $\Psi_1(t_1)\in C^2[0,\ 1/2]$ *и*

$$|\Psi_0(c_2 t)(c_2 t + \varphi(c_3 t))^{-1} + (c_4 t\,\Psi_1'(c_4 t) -$$
$$- \Psi_1(c_4 t)(c_2 t + \varphi(t^3))^{-1}| \leqslant L(t + \varphi(t^3))^{-1},\ L = \text{const} > 0.$$

7°. Из приведенных результатов следует, что наличие одной (угловой) точки вырождения гиперболичности, как правило, приводит к условиям согласования в этой точке (или даже в других точках, см. теоремы 2 и 3), если изучаются классические задачи для гиперболических уравнений.

Институт математики
АН Армянской ССР,
Научно-производственное объединение «АНИ»
министерства микроэлектроники СССР

Поступила 14. I. 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Б. Нерсесян, А. О. Оганесян, Г. Р. Оганесян.* Об одном методе исследования задачи Коши для слабо гиперболических уравнений, Труды всесоюзной конфер. по уравнениям с частными производными Изд. МГУ, 1978.
2. *О. А. Олейник, Е. В. Радкевич.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой, «Итоги науки», М., 1971.
3. *Л. Ш. Агабабян, А. Б. Нерсесян.* О некоторых задачах для одного модельного слабо гиперболического уравнения, Изв. АН Арм.ССР, Математика, XVI, № 5, 1981, 397—407.
4. *А. Б. Нерсесян.* О некоторых новых модельных слабо гиперболических уравнениях второго порядка, УМН, 40, вып. 5 (245), 1985.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՀԱՄԱՌՈՏ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

СОДЕРЖАНИЕ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

CONTENTS

SHORT COMMUNICATIONS