

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1936 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈՒՆԳՐԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ԶԻՐԱՇՅԱՆ

Կ. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Գ. ԶԱՍԻԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ՔԱԼԱՆՅԱՆ
Ռ. Վ. ՀԱՄԱՐԱԶՈՒՄՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԱՐԱԶՅԱՆ
գլխավոր խմբագիր տեղակալ

Պատասխանատու ֆարտագրի Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել, Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաջվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ:

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն զրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով:

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու զծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու զծիկով վերևում:

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով. ինդոսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կոտսով տառերը ընդգծվեն ալիքաձև զծով:

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում:

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, զրգքերի համար էջում է՝ հեղինակը, զրգքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագրի, համարը, տարեթիվը և էջերը:

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի, նկատմամբ) չեն թույլատրվում:

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի առաջման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում լրջադվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը:

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատպեր:

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ. Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա:

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. В. АМБАРЦУМЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. А. ШАХБАГЯН
зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке), а кратких сообщений — не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редакколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

1 20 k.



EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. V. AMBARTZUMIAN
N. U. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN

A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKII

executive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.
2. The articles to be submitted should be typed, doublespace in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.
3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.
4. Drafts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.
5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.
6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.
7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.
8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.
9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.
10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.
11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

УДК 517.51

А. А. ТАЛАЛЯН и Ф. А. ТАЛАЛЯН

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ
ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Введение

Как известно ([1], стр. 564) абсолютно непрерывная на прямоугольнике $J = [a, b] \times [c, d]$ функция двух переменных F представляется в виде

$$F(x, y) = g(x) + h(y) + \int_a^x \int_c^y f(s, t) ds dt, \quad (1.1)$$

где g и h — абсолютно непрерывные функции одной переменной на отрезках $[a, b]$ и $[c, d]$ соответственно и $f \in L^1(J)$.

В работе [2] приводится новое доказательство этого утверждения, основанное на теоремах Рисса о представлении и Радона—Никодима. Там же оно применяется при исследовании вопроса функциональной характеристики операторов вида $C + iD$, где D и C — коммутирующие вполне ограниченные операторы, действующие в заданном банаховом пространстве.

В настоящей работе с помощью теоремы сходимости мартингалов установлена справедливость формулы (1.1) для произвольной размерности и при более слабых ограничениях на свойство абсолютной непрерывности.

Будем пользоваться следующими обозначениями:

N — множество натуральных чисел,

R^n — n -мерное евклидово пространство,

$\{e_1, \dots, e_n\}$ — стандартный базис пространства R^n ,

μ_n — n -мерная мера Лебега,

$$D_k = \left\{ \frac{l}{2^k} : l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k.$$

D_k^m (соответственно D^m) — прямое произведение m экземпляров D_k (D).

Если $x \in R^m$, то через x^i ($1 \leq i \leq m$) мы обозначим i -ю координату x . Таким образом, $x = (x^1, \dots, x^m)$. Аналогично $a = (a^1, \dots, a^m)$, $b = (b^1, \dots, b^m)$, $u = (u^1, \dots, u^m)$ и т. д.

Пусть $x \in R^m$ и $i_1, \dots, i_k$ — произвольный набор натуральных чисел таких, что $1 \leq k \leq m-1$ и $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$. Обозначим через $r^{i_1, \dots, i_k}(x)$ точку из R^{m-k} , полученную из x удалением координат $x^{i_1}, \dots, x^{i_k}$, через $\tilde{r}^{i_1, \dots, i_k}(x)$ — точку из R^k , полученную из x сохранением указанных координат и удалением остальных.

Если $E \subset R^m$, то полагаем

$$r^{i_1, \dots, i_k}(E) = \{r^{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in E\}$$

и

$$t^{i_1, \dots, i_k}(E) = \{t^{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in E\}.$$

Пусть, как и выше, $1 \leq k \leq m-1$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$ — натуральные числа и $w^1, \dots, w^k$ — действительные числа. Для любого $\mathbf{x} \in R^m$ через $s_{w^1, \dots, w^k}^{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{x})$ мы будем обозначать точку из R^m , полученную из $\mathbf{x}$ заменой x^{i_p} на w^p , $p=1, \dots, k$. Заметим, что если $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^m) \in R^m$, то $s_{y^{i_1}, \dots, y^{i_k}}^{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{x})$ есть точка пересечения k -мерной плоскости, параллельной векторам $\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}$, проходящей через $\mathbf{x}$ с $(m-k)$ -мерной плоскостью, перпендикулярной векторам $\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}$, проходящей через $\mathbf{y}$.

Если $E \subset R^m$, то мы полагаем

$$E_{w^1, \dots, w^k}^{i_1, \dots, i_k} = \{r^{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in E, t^{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{x}) = (w^1, \dots, w^k)\}.$$

Наконец, если F — функция m переменных, то через $F_{w^1, \dots, w^k}^{i_1, \dots, i_k}$ мы обозначим функцию $m-k$ переменных, определенную равенством

$$F_{w^1, \dots, w^k}^{i_1, \dots, i_k}(r^{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{x})) = F(s_{w^1, \dots, w^k}^{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{x})).$$

В дальнейшем мы будем иметь дело с многомерными сегментами, грани которых параллельны координатным подпространствам (т. е. подпространствам, порожденным векторами из стандартного базиса). Каждый такой m -мерный сегмент J задается двумя точками $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из R^m такими, что $a^i \neq b^i$ для всех $i=1, \dots, m$, а именно, J совпадает с множеством

$$J(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in R^m : \min(a^i, b^i) \leq x^i \leq \max(a^i, b^i), i=1, \dots, m\}, \quad (1.2)$$

Вершины сегмента $J(\mathbf{a}; \mathbf{b})$, заданного равенством (1.2) — это те точки $\mathbf{v} \in R^m$, для которых при любом $i=1, \dots, m$ либо $v^i = a^i$, либо $v^i = b^i$. При этом, очевидно, сегмент J может быть задан любой другой парой своих вершин $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ таких, что $u^i \neq v^i$, $i=1, \dots, m$. В этом случае мы будем говорить, что пара вершин $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ является определяющей для J .

Будем говорить, что сегмент J ориентирован, если каждой вершине J приписан знак $+$ или $-$ так, что знаки, приписанные соседним вершинам (т. е. вершинам, у которых все координаты кроме одной совпадают) различны.

Пусть $\mathbf{a}$ — некоторая фиксированная вершина сегмента J . Каждой вершине $\mathbf{v}$ припишем знак $(-1)^{q(\mathbf{v}; \mathbf{a})}$, где $q(\mathbf{v}; \mathbf{a})$ — число координат v^i вершины $\mathbf{v}$, совпадающих с соответствующими координатами a^i выбранной вершины $\mathbf{a}$. Таким образом, выбор одной вершины задает определенную ориентацию на данном сегменте. Справедливо и обратное. Каждая ориентация определяется некоторой вершиной. Как сле-

дует из леммы 4 для любых двух фиксированных вершин a и c сегмента J разность $q(v; a) - q(v; c)$ имеет постоянную четность. Поэтому на каждом сегменте возможны только две ориентации.

Будем говорить, что m -мерный сегмент J ориентирован положительно, если его ориентация совпадает с ориентацией, определяемой вершиной с минимальными координатами. В противном случае J называется отрицательно ориентированной. Если v — вершина ориентированного сегмента J , то приписанный ей знак будем обозначать через $s(v; J)$.

Если m -мерный сегмент J ориентирован по вершине a и $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$, то $(m-k)$ -мерный сегмент $r^{i_1, \dots, i_k}(J)$ всегда будем считать ориентированным по вершине $r^{i_1, \dots, i_k}(a)$. Аналогично понимается выражение $t^{i_1, \dots, i_k}(J)$. Ориентированные сегменты $r^{i_1, \dots, i_k}(J)$ и $t^{i_1, \dots, i_k}(J)$ будем называть ориентированными проекциями ориентированного сегмента J .

Пусть теперь J есть ориентированный m -мерный сегмент и F — действительная функция, область определения которой содержит все вершины J . Положим

$$\Delta_m(F; J) = \sum s(v; J) F(v), \quad (1.3)$$

где сумма берется по всем вершинам v сегмента J .

Величину $\Delta_m(F; J)$ принято называть смешанной разностью F на J . Очевидно при переходе к противоположной ориентации смешанная разность меняет знак.

Пусть, наконец, J есть m -мерный сегмент и f — действительная измеримая функция на J . Пусть на J выбрана некоторая ориентация. Тогда интеграл

$$\int_J f d\mu_m$$

по ориентированному сегменту J полагается, по определению, равным обычному интегралу Лебега помноженному на коэффициент $+1$ или -1 в зависимости от того, положительно или отрицательно ориентирован J .

Теперь мы можем привести основные определения и формулировки результатов.

Определение 1. Пусть F — действительная функция, заданная на R^m и $E \subset R^m$ — измеримое множество. Функция F называется абсолютно непрерывной по Витали на E , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что каково бы ни было конечное семейство $\{J_k; k = 1, \dots, n\}$ попарно неперекрывающихся m -мерных сегментов с вершинами из E и с суммой мер

$$\sum_{k=1}^n \mu_m(J_k) < \delta,$$

имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^n |\Delta_m(F; J_k)| < \varepsilon.$$

F называется абсолютно непрерывной по Витали почти всюду на m -мерном сегменте J , если F абсолютно непрерывна по Витали на некотором множестве $E \subset J$ с $\mu_m(J \setminus E) = 0$.

Определение 2. Пусть J — m -мерный сегмент, f — действительная функция, заданная на J и $E \subset J$ — измеримое множество с $\mu_m(J \setminus E) = 0$. Функция F называется абсолютно непрерывной на E , если выполняются следующие условия:

а) F абсолютно непрерывна по Витали на E .

б) Для каждого набора натуральных чисел $i_1, \dots, i_k$ таких, что $1 \leq k \leq m-1$ и $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$, для μ_k -почти всех $y = (y^1, \dots, y^k) \in r^{i_1, \dots, i_k}(J)$ функция $F_{y^1, \dots, y^k}^{i_1, \dots, i_k}$ абсолютно непрерывна по Витали μ_{m-k} -почти всюду на $(m-k)$ -мерном сегменте $r^{i_1, \dots, i_k}(J)$.

F называется абсолютно непрерывной почти всюду на J , если F абсолютно непрерывна на некотором множестве $E \subset J$ с $\mu_m(J \setminus E) = 0$.

Теорема 1. Пусть J — m -мерный сегмент и F — действительная функция, абсолютно непрерывная по Витали почти всюду на J . Тогда существуют точка $a \in J$ и функция $f \in L^1(J)$ такие, что для почти всех $x \in J$ имеет место равенство

$$\Delta_m(F; J(a; x)) = \int_{J(a; x)} f d\mu_m,$$

где $J(a; x)$ — ориентированный сегмент, определенный точками a и x .

Указанным свойством обладают почти все точки $a \in J$.

Теорема 2. Пусть J — m -мерный сегмент и F — действительная функция, абсолютно непрерывная почти всюду на J . Тогда какова бы ни была точка $a \in J$ существуют постоянная C и функции $f \in L^1(J)$ и $f_{i_1, \dots, i_k} \in L^1(r^{i_1, \dots, i_k}(J))$ для всех наборов натуральных чисел $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$ такие, что для почти всех $x \in J$ имеет место равенство

$$F(x) = \int_{J(a; x)} f d\mu_m + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \int_{r^{i_1, \dots, i_k}(J(a; x))} f_{i_1, \dots, i_k} d\mu_{m-k} + C, \quad (1.5)$$

где $J(a; x)$ считается ориентированным по вершине a и $r^{i_1, \dots, i_k}(J(a; x))$ — ориентированная проекция $J(a; x)$.

Теорема 3. Пусть $T_0 \subset R^n$ есть измеримое множество положительной меры и F — измеримая функция, абсолютно непрерывная по Витали на множестве $t + D^n$ для каждого $t \in T_0$. Тогда F абсолютно непрерывна по Витали почти всюду на R^n .

Непосредственным следствием теорем 2 и 3 является следующая

Теорема 4. Пусть F — измеримая функция m переменных, определенная на m -мерном сегменте J , удовлетворяющая условиям

а) Существует множество $T_0 \subset R^n$ с $\mu_m(T_0) > 0$ такое, что при любом $t \in T_0$ функция F абсолютно непрерывна по Витали на множестве $(t + D^n) \cap J$.

б) Для каждого набора натуральных чисел $i_1, \dots, i_k$ таких, что $1 \leq k \leq m-1$ и $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$, и для μ_m -почти всех $(y^1, \dots, y^k) \in r^{i_1, \dots, i_k}(J)$ существует множество

$T(i_1, \dots, i_k; y^1, \dots, y^k) \subset R^{m-k}$ с $\mu_{m-k}(T(i_1, \dots, i_k; y^1, \dots, y^k)) > 0$ такое, что при любом $t \in T(i_1, \dots, i_k; y^1, \dots, y^k)$ функция $F_{y^1, \dots, y^k}^{i_1, \dots, i_k}$ абсолютно непрерывна по Витали на множестве $(t + D^{m-k}) \cap r^{i_1, \dots, i_k}(J)$.

Тогда для функции F справедливо представление (1.5).

§ 2. Предварительные леммы

Лемма 1. Пусть $E \subset R^m$ — измеримое множество с $\mu_m(R^m \setminus E) = 0$. Тогда для почти всех $u \in R^m$ справедливо включение $u + D^m \subset E$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \mu_m(R^m \setminus \{u \in R^m : u + D^m \subset E\}) &= \mu_m(R^m \setminus \bigcap_{x \in D^m} \{u \in R^m : u + x \in E\}) = \\ &= \mu_m(\bigcap_{x \in D^m} \{u \in R^m : u + x \notin E\}) \leq \sum_{x \in D^m} \mu_m(\{u \in R^m : u \notin E - x\}) = \\ &= \sum_{x \in D^m} \mu_m(R^m \setminus E - x) = 0. \end{aligned}$$

Лемма 2. Пусть $E \subset R^m$ — измеримое множество с $\mu_m(R^m \setminus E) = 0$. Тогда почти каждой точке $u \in R^m$ соответствует измеримое множество $H(u)$ с $\mu_m(R^m \setminus H(u)) = 0$ такое, что если $v \in H(u)$, то

$$s_{v^{i_1, \dots, i_k}, v^{j_1, \dots, j_k}}^{i_1, \dots, i_k}(u) \in E \text{ и } s_{u^{i_1, \dots, i_k}, u^{j_1, \dots, j_k}}^{i_1, \dots, i_k}(v) \in E \quad (2.1)$$

для всех $k, i_1, \dots, i_k$, где $1 \leq k \leq m$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$.

Доказательство. Пусть $k, i_1, \dots, i_k$ зафиксированы, и пусть $j_1, \dots, j_{m-k}$ — все натуральные числа, не превосходящие m , отличные от всех $i_1, \dots, i_k$, занумерованные в порядке возрастания.

В силу теоремы Фубини существует измеримое множество $A_{i_1, \dots, i_k} \subset R^k$ с $\mu_k(R^k \setminus A_{i_1, \dots, i_k}) = 0$ такое, что для любого $a = (a^1, \dots, a^k) \in A_{i_1, \dots, i_k}$ имеет место

$$\mu_{m-k}(R^{m-k} \setminus E_{a^1, \dots, a^k}^{i_1, \dots, i_k}) = 0. \quad (2.2)$$

С другой стороны, существует множество $B_{i_1, \dots, i_k} \subset R^{m-k}$ с $\mu_{m-k}(R^{m-k} \setminus B_{i_1, \dots, i_k}) = 0$ такое, что для любого $b = (b^1, \dots, b^{m-k}) \in B_{i_1, \dots, i_k}$ имеет место

$$\mu_k(R^k \setminus E_{b^1, \dots, b^{m-k}}^{j_1, \dots, j_{m-k}}) = 0. \quad (2.3)$$

Пусть

$$G_{i_1, \dots, i_k} = \{x \in R^m : t^{i_1, \dots, i_k}(x) \in A_{i_1, \dots, i_k}, r^{i_1, \dots, i_k}(x) \in B_{i_1, \dots, i_k}\} \quad (2.4)$$

и для каждого $u \in G_{i_1, \dots, i_k}$ пусть

$$H_{i_1, \dots, i_k}(u) = \{x \in R^m : t^{i_1, \dots, i_k}(x) \in E_{u^{j_1}, \dots, u^{j_{m-k}}}^{i_1, \dots, i_{m-k}}; r^{i_1, \dots, i_k}(x) \in E_{u^{i_1}, \dots, u^{i_k}}^{i_1, \dots, i_k}\}. \quad (2.5)$$

Тогда, очевидно, имеем

$$\mu_m(R^m \setminus G_{i_1, \dots, i_k}) = 0. \quad (2.6)$$

Так как $(u^{i_1}, \dots, u^{i_k}) \in A_{i_1, \dots, i_k}$ и $(u^{j_1}, \dots, u^{j_{m-k}}) \in B_{i_1, \dots, i_k}$, то в силу (2.2) и (2.3) имеем также

$$\mu_m(R^m \setminus H_{i_1, \dots, i_k}(u)) = 0 \text{ для любого } u \in G_{i_1, \dots, i_k}. \quad (2.7)$$

Теперь положим

$$G = \bigcap_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} G_{i_1, \dots, i_k}$$

и для каждого $u \in G$

$$H(u) = \bigcap_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} H_{i_1, \dots, i_k}(u).$$

Тогда из (2.6) и (2.7) имеем

$$\mu_m(R^m \setminus G) = 0 \quad (2.8)$$

и

$$\mu_m(R^m \setminus H(u)) = 0 \text{ для каждого } u \in G. \quad (2.9)$$

Далее пусть $u \in G$, $v \in H(u)$ и $i_1, \dots, i_k$ заданы. Тогда $u \in G_{i_1, \dots, i_k}$, $v \in H_{i_1, \dots, i_k}(u)$. Повторю, в силу (2.5) имеем

$$t^{i_1, \dots, i_k}(v) \in E_{u^{j_1}, \dots, u^{j_{m-k}}}^{i_1, \dots, i_{m-k}} \text{ и } r^{i_1, \dots, i_k}(v) \in E_{u^{i_1}, \dots, u^{i_k}}^{i_1, \dots, i_k}.$$

Отсюда получаем

$$s_{u^{i_1}, \dots, u^{i_k}}^{i_1, \dots, i_k}(u), s_{u^{i_1}, \dots, u^{i_k}}^{i_1, \dots, i_k}(v) \in E \text{ для } u \in G, v \in H(u).$$

Так как справедливы (2.8) и (2.9), то этим лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $E \subset R^m$ — измеримое множество с $\mu_m(R^m \setminus E) = 0$. Тогда для почти всех $u \in R^m$ выполняются следующие условия:

$$1) u + D^m \subset E.$$

2) Существует измеримое множество $H(u) \subset R^m$ с $\mu_m(R^m \setminus H(u)) = 0$ такое, что при $v \in H(u)$

$$s_{u^{i_1+y}, \dots, u^{i_k+y}}^{i_1, \dots, i_k}(u+x) \in E \text{ и } s_{u^{i_1+x}, \dots, u^{i_k+x}}^{i_1, \dots, i_k}(v+y) \in E$$

для всех $x, y \in D^m$, $1 \leq k \leq m$ и $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$.

Доказательство. Для каждой пары точек $x, y \in D^m$ положим

$$E(x, y) = \bigcap_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} [(E - s_{y^{i_1}, \dots, y^{i_k}}^{i_1, \dots, i_k}(x)) \cap (E - s_{x^{i_1}, \dots, x^{i_k}}^{i_1, \dots, i_k}(y))]. \quad (2.10)$$

Очевидно, $\mu_m(R^m \setminus E(x, y)) = 0$. Применяя лемму 2 к множеству $E(x, y)$, построим соответствующее множество $G(x, y)$ и положим

$$G = \bigcap_{x, y \in D^m} G(x, y).$$

Тогда

$$\mu_m(R^m \setminus G) = 0 \quad (2.11)$$

и каждому $u \in G$ при заданных $x, y \in D^m$ соответствует множество $H(u, x, y)$, для которого справедливо утверждение леммы 2. Положим

$$H(u) = \bigcap_{x, y \in D^m} H(u, x, y).$$

Тогда

$$\mu_m(R^m \setminus H(u)) = 0 \text{ для всех } u \in G, \quad (2.12)$$

Пусть $u \in G$ и $v \in H(u)$. Тогда $u \in G(x, y)$ и $v \in H(u, x, y)$ для всех $x, y \in D^m$. Следовательно будем иметь

$$s_{v^{i_1}, \dots, v^{i_k}}^{i_1, \dots, i_k}(u) \in E(x, y) \text{ и } s_{u^{i_1}, \dots, u^{i_k}}^{i_1, \dots, i_k}(v) \in E(x, y)$$

для всех $x, y \in D^m$ и $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$. Отсюда, в силу (2.10) получаем

$$s_{v^{i_1}, \dots, v^{i_k}}^{i_1, \dots, i_k}(u) \in E - s_{y^{i_1}, \dots, y^{i_k}}^{i_1, \dots, i_k}(x) \text{ и } s_{u^{i_1}, \dots, u^{i_k}}^{i_1, \dots, i_k}(v) \in E - s_{x^{i_1}, \dots, x^{i_k}}^{i_1, \dots, i_k}(y)$$

или

$$s_{v^{i_1}+y^{i_1}, \dots, v^{i_k}+y^{i_k}}^{i_1, \dots, i_k}(u+x) \in E \text{ и } s_{u^{i_1}+x^{i_1}, \dots, u^{i_k}+x^{i_k}}^{i_1, \dots, i_k}(v+y) \in E$$

для всех $x, v \in D^m$ и $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$.

Тем самым, учитывая (2.11) и (2.12), мы видим, что доказано условие 2) леммы 3. Справедливость условия 1) для почти всех $u \in R^m$ следует из леммы 1.

Следующие три леммы относятся к свойствам смешанной разности.

Лемма 4. Пусть J — m -мерный сегмент, F — действительная функция, заданная на J , а a и c — вершины J , J^a и J^c — соответствующие ориентированные сегменты с ориентациями, определяемыми вершинами a и c соответственно. Тогда

$$\Delta_m(F; J^c) = (-1)^{m-q(c, a)} \Delta_m(F; J^a). \quad (2.13)$$

Доказательство. Пусть $i_1, \dots, i_q(c, a)$ — все натуральные числа между 1 и m , для которых $c^{i_r} = a^{i_r}$, $1 \leq r \leq q(c, a)$. Рассмотрим произвольную вершину v сегмента J . Пусть p — число тех i_k , $1 \leq k \leq q(c, a)$, для которых $v^{i_r} = a^{i_r}$. Тогда, очевидно имеем

$q(v; c) = p + m - q(c; a) - (q(v; a) - p) = 2p + m - q(c; a) - q(v; a)$, откуда следует (2.13).

Лемма 5. Пусть G — действительная функция, заданная на m -мерном сегменте $J(a; b)$. Если $J(a; b)$ ориентирован по вершине a , то имеет место равенство

$$\Delta_m(G; J(a; b)) = G(b) - \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k < m} \Delta_{m-k}(G_{a^{i_1, \dots, i_k}}^{i_1, \dots, i_k}; r^{i_1, \dots, i_k}(J(a; b))) - G(a), \quad (2.14)$$

где $r^{i_1, \dots, i_k}(J(a; b))$ — ориентированные проекции ориентированного сегмента $J(a; b)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную вершину $v = (v^1, \dots, v^m)$ сегмента $J(a; b)$. Пусть $q(v; a) = n$, $1 \leq n \leq m$. Тогда непосредственное вычисление показывает, что $G(v)$ входит в правую часть (2.14) с коэффициентом $-\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k}$.

Далее, из формулы

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} = 1$$

следует, что указанный коэффициент равен $(-1)^n$, что и требовалось.

Следствие. Пусть J — m -мерный сегмент, $a \in J$ — фиксированная точка и G — действительная функция, заданная на J . Тогда для всех $x \in J$ имеет место равенство

$$G(x) = \Delta_m(G; J(a; x)) + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k < m} \Delta_{m-k}(G_{a^{i_1, \dots, i_k}}^{i_1, \dots, i_k}; r^{i_1, \dots, i_k}(J(a; x))) + G(a), \quad (2.15)$$

где $J(a; x)$ предполагается ориентированным по вершине a .

Лемма 6. Пусть m -мерный сегмент J разбит на конечное число попарно неперекрывающихся сегментов $J_1, \dots, J_n$, и пусть F — действительная функция, область определения которой содержит вершины всех сегментов $J_1, \dots, J_n$. Тогда, предполагая сегменты $J, J_1, \dots, J_n$ одинаково ориентированными, будем иметь

$$\Delta_m(F; J) = \sum_{k=1}^n \Delta_m(F; J_k). \quad (2.16)$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть тот случай, когда J разбит на два сегмента J_1 и J_2 . При этом, очевидно, можно считать, что все они ориентированы положительно. Пусть a и b — вершины, определяющие J , причем $a^i < b^i$ для всех $i = 1, \dots, m$. Тогда существуют натуральное число $j \leq m$ и действительное число $t \in (a^j, b^j)$ такие, что J_1 определяется точками a и $s_j^1(b)$, а J_2 — точками $s_j^1(a)$ и b .

Точки v , являющиеся общими вершинами J_1 и J_2 , характеризуются условием

$$v^i = \begin{cases} t & \text{при } i = j \\ a^i \text{ или } b^i & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

откуда следует, что $q(v; s'_i(a)) = q(v; a) + 1$. Тогда, в силу положительной ориентированности J_1 и J_2 , имеем

$$s(v; J_2) = -s(v; J_1). \quad (2.17)$$

С другой стороны, имеем следующее. Если v является вершиной для J и $v^j = a^j$, то v будет также вершиной для J_1 , причем

$$s(v; J) = s(v; J_1). \quad (2.18)$$

Аналогично, если v есть вершина для J и $v^j = b^j$, то v будет также вершиной для J_2 , причем

$$s(v; J) = s(v; J_2). \quad (2.19)$$

Теперь из (1.4), (2.17), (2.18) и (2.19) получаем

$$\Delta_m(F; J) = \Delta_m(F; J_1) + \Delta_m(F; J_2),$$

что и требовалось.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится также следующая

Лемма 7. Пусть J — m -мерный сегмент, $E \subset J$ — измеримое множество, содержащее $D^m \cap J$ с $\mu_m(J \setminus E) = 0$ и F — действительная функция, абсолютно непрерывная по Витали на E . Тогда величина $V_m(F; E)$, определенная равенством

$$V_m(F; E) = \sup \sum |\Delta_m(F; J_i)|, \quad (2.20)$$

где супремум берется по всем конечным системам попарно неперекрывающихся сегментов $\{J_i\}$ с вершинами из $D^m \cap E$, конечна.

Доказательство. Выберем такое число $\delta > 0$, что как только $\{J_r\}$ есть конечная система попарно неперекрывающихся сегментов с вершинами из E и $\sum_r \mu_m(J_r) < \delta$, то $\sum_r |\Delta_m(F; J_r)| < 1$.

Пусть $\{J_i\}$ — некоторая конечная система попарно неперекрывающихся сегментов с вершинами из $D^m \cap E$. Возьмем настолько большое натуральное число k , чтобы вершины всех сегментов J_i принадлежали D_k^m и чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{2^{km}} < \frac{\delta}{2}. \quad (2.21)$$

Тогда каждый сегмент J_i можно разбить на элементарные сегменты k -го ранга. Пусть $J_{i1}, \dots, J_{in}$ — все элементарные сегменты k -го ранга, участвовавшие во всех указанных разбиениях. Тогда, в силу леммы 6 имеем

$$\sum_l |\Delta_m(F; J_l)| \leq \sum_{r=1}^n |\Delta_m(F; I_r)|. \quad (2.22)$$

Так как $\mu_m(I_r) = 1/2^{km}$; $r=1, \dots, n$, то в силу (2.21) сумму, стоящую в правой части (2.22), можно представить в виде

$$\sum_{r=1}^n |\Delta_m(F; I_r)| = \sum_{j=1}^l \sum_{r=r_j}^{r_{j+1}-1} |\Delta_m(F; I_r)| + c_{l+1}, \quad (2.23)$$

где

$$1 = r_1 < r_2 < \dots < r_{l+1} - 1 \leq n, \quad (2.24)$$

$$\frac{\delta}{2} < \sum_{r=r_j}^{r_{j+1}-1} \mu_m(I_r) < \delta; \quad j=1, \dots, l \quad (2.25)$$

и

$$c_{l+1} = \begin{cases} 0, & \text{если } r_{l+1} = n+1, \\ \sum_{r=r_j}^n |\Delta_m(F; I_r)|, & \text{если } r_{l+1} < n+1. \end{cases} \quad (2.26)$$

При этом, если $r_{l+1} < n+1$, то имеем

$$\sum_{r=r_{l+1}}^n \mu_m(I_r) \leq \frac{\delta}{2}. \quad (2.27)$$

Из (2.24) и левого неравенства (2.25) следует, что

$$l < \frac{2\mu_m(J)}{\delta}. \quad (2.28)$$

С другой стороны, в силу выбора δ , из правого неравенства (2.25) и из (2.26) следуют соответственно

$$\sum_{r=r_j}^{r_{j+1}-1} |\Delta_m(F; I_r)| < 1, \quad j=1, \dots, l \quad (2.29)$$

и

$$0 \leq c_{l+1} < 1. \quad (2.30)$$

Из (2.22), (2.23), (2.28), (2.29) и (2.30) получаем оценку

$$\sum_l |\Delta_m(F; J_l)| \leq \frac{2\mu_m(J)}{\delta} + 1,$$

откуда следует конечность $V_m(F; E)$. Лемма 7 доказана.

§ 3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть $E \subset J$, $\mu_m(J \setminus E) = 0$ и F — действительная функция, абсолютно непрерывная по Витали на E . В силу леммы 3 существует точка $a \in E$ и множество $H \subset E$ с $\mu_m(J \setminus H) = 0$ такие, что

$$(a + D^m) \cap J \subset E \quad (3.1)$$

$$s_{v^{i_1+y^{i_1}, \dots, v^{i_k+y^{i_k}}}}^{i_1, \dots, i_k} (a+x), s_{v^{i_1+x^{i_1}, \dots, v^{i_k+x^{i_k}}}}^{i_1, \dots, i_k} (v+y) \in EU(R^m \setminus J) \quad (3.2)$$

для всех $v \in H$, $x, y \in D^m$, $1 \leq k \leq m$ и $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$.

Зафиксируем некоторую точку $a \in E$, обладающую свойствами (3.1) и (3.2). Далее, построим последовательность $\{f_k; k \in N\}$ функций, определенных почти всюду на J следующим образом. Для заданного $k \in N$ пусть $J^{(k)}$ — это наибольший сегмент, содержащийся в J , вершины которого принадлежат $a + D_k^m$ и $\{J_{k,i}^{(k)}, i=1, \dots, l(k)\}$ — разбиение $J^{(k)}$ на элементарные сегменты k -го ранга с вершинами из $a + D_k^m$. При этом будем считать сегменты $J^{(k)}$ и $J_{k,i}^{(k)}$; $i=1, \dots, l(k)$ положительно ориентированными. Положим

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{\Delta_m(F; J_{k,i}^{(k)})}{\mu_m(J_{k,i}^{(k)})}, & \text{при } x \in \text{int}(J_{k,i}^{(k)}) \\ 0, & \text{при } x \in J \setminus J^{(k)}. \end{cases}$$

Пусть $q \in N$ — фиксированное число. Для каждого $k \geq q$ пусть $B(q, k)$ это $\mathcal{A}$ -алгебра подмножеств $J^{(q)}$, порожденная элементарными сегментами k -го ранга $J_{k,i}^{(q)}$, $i=1, \dots, l(q, k)$ с вершинами из $a + D_k^m$, содержащимися в $J^{(q)}$. Докажем, что последовательность $\{f_k, B(q, k); k \geq q\}$ есть равномерно интегрируемый мартингал.

Действительно, представив каждый сегмент $J_{k,i}^{(q)}$ в виде объединения сегментов $(k+1)$ -го ранга: $J_{k,i}^{(q)} = \bigcup_{r=1}^{2^m} I_r$ и считая их положительно ориентированными, в силу леммы 6 будет иметь

$$\begin{aligned} \int_{J_{k,i}^{(q)}} E(f_{k+1} | B(q, k)) d\mu_m &= \int_{J_{k,i}^{(q)}} f_{k+1} d\mu_m = \sum_{r=1}^{2^m} \int_{I_r} f_{k+1} d\mu_m = \\ &= \sum_{r=1}^{2^m} \Delta_m(F; I_r) = \Delta_m(F; J_{k,i}^{(q)}) = \int_{J_{k,i}^{(q)}} f_k d\mu_m. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу $B(q, k)$ -измеримости функций $E(f_{k+1} | B(q, k))$ и f_k , получаем

$$E(f_{k+1} | B(q, k)) = f_k.$$

Таким образом, $\{f_k, B(q, k); k \geq q\}$ есть мартингал. Докажем его равномерно интегрируемость.

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем $\eta > 0$ так, чтобы из $\sum_r \mu_m(J_r) \leq \eta$ вытекало $\sum_r |\Delta_m(F; J_r)| \leq \varepsilon$, где $\{J_r\}$ — произвольная конечная система попарно неперекрывающихся сегментов с вершинами из $E \cap J^{(q)}$, и положим $\delta = \eta\varepsilon$.

Пусть, теперь, $A \subset J^{(q)}$ — произвольное измеримое множество с $\mu_m(A) < \delta$ и $k \geq q$ — натуральное число. Положим

$$N_1 = \left\{ i \in N : 1 \leq i < l(q, k), \mu_m(j_{k,i}^{(q)}) < \frac{1}{\varepsilon} \mu_m(j_{k,i}^{(q)} \cap A) \right\}$$

и $N_2 = \{1, \dots, l(q, k)\} \setminus N_1$. Тогда

$$\sum_{i \in N_1} \mu_m(j_{k,i}^{(q)}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mu_m(A) \leq \frac{1}{\varepsilon} \delta = \eta,$$

откуда, в силу выбора η , имеем

$$\sum_{i \in N_1} |\Delta_m(F; j_{k,i}^{(q)})| \leq \varepsilon. \quad (3.3)$$

С другой стороны, выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N_2} \frac{|\Delta_m(F; j_{k,i}^{(q)})|}{\mu_m(j_{k,i}^{(q)})} \mu_m(j_{k,i}^{(q)} \cap A) &\leq \\ &\leq \varepsilon \cdot \sum_{i \in N_2} |\Delta_m(F; j_{k,i}^{(q)})| \leq \varepsilon V_m(F; E \cap j^{(q)}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

В силу неравенств (3.3) и (3.4) имеем

$$\begin{aligned} \int_A |f_k| d\mu_m &= \sum_{i=1}^{l(q,k)} \int_{j_{k,i}^{(q)} \cap A} |f_k| d\mu_m = \sum_{i \in N_1} \frac{|\Delta_m(F; j_{k,i}^{(q)})|}{\mu_m(j_{k,i}^{(q)})} \cdot \mu_m(j_{k,i}^{(q)} \cap A) + \\ &+ \sum_{i \in N_2} \frac{|\Delta_m(F; j_{k,i}^{(q)})|}{\mu_m(j_{k,i}^{(q)})} \mu_m(j_{k,i}^{(q)} \cap A) \leq \varepsilon + \varepsilon V_m(F; E \cap j^{(q)}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Так как, согласно лемме 7, величина $V_m(F; E \cap j^{(q)})$ конечна, то из (3.5) следует равномерная интегрируемость последовательности $\{f_k; k \geq q\}$.

Далее, применяя теорему о сходимости мартингалов (см., например, [3], стр. 64) к последовательности $\{f_k; k \geq q\}$, получаем, что предел

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \quad (3.6)$$

существует для почти всех $x \in j^{(q)}$, $f \in L^1(j^{(q)})$ и

$$f_k \rightarrow f \text{ в } L^1(j^{(q)}). \quad (3.7)$$

Очевидно, $j^{(k)} \subset j^{(k+1)}$ для любого $k \in N$ и объединение $\bigcup_{k=1}^{\infty} j^{(k)}$ отличается от J на множество нулевой меры. Отсюда следует, что равенство (3.6) выполняется почти всюду на J .

Далее, для любого $q \in N$ и $k \geq q$, имеем

$$\int_{j^{(q)}} |f_k| d\mu_m = \sum_{i=1}^{l(q,k)} \int_{j_{k,i}^{(q)}} |f_k| d\mu_m = \sum_{i=1}^{l(q,k)} |\Delta_m(F; j_{k,i}^{(q)})| \leq V_m(F; E). \quad (3.8)$$

Из (3.7) и (3.8) следует, что для любого $q \in N$

$$\int_{j^{(q)}} |f| d\mu_m \leq V_m(F; E).$$

откуда, предельным переходом, получаем

$$\int |f| d\mu_m \leq V_m(F; E). \quad (3.9)$$

В силу леммы 7, из (3.9) следует, что $f \in L^1(J)$.

Теперь докажем равенство

$$\Delta_m(F; J(a; v)) = \int_{J(a; v)} f d\mu_m, \quad v \in H, \quad (3.10)$$

считая, без ограничения общности, что сегмент $J(a; v)$ ориентирован положительно.

Зафиксируем произвольную точку $v \in H$. Для любого $q \in N$ наибольший сегмент с вершинами из $a + D_q^m$, содержащийся в $J(a; v)$, имеет вид $J(a; a + z)$, $z \in D_q^m$, $z^l = \theta_l(v^l - a^l)$, $0 < \theta_l < 1$. При этом имеем также

$$J(a; v) \setminus J(a; a + z) = \bigcup_{i=1}^m J(s_{a^l+z^l}^{l, \dots, l-1}(a); s_{a^{l-1}+z^{l-1}, \dots, a^{l-1}+z^{l-1}}^{1, \dots, l-1}(v)), \quad (3.11)$$

где, при $i = 1$ положено

$$s_{a^{l-1}+z^{l-1}, \dots, a^{l-1}+z^{l-1}}^{1, \dots, l-1}(v) = v.$$

Сегменты, стоящие в правой части (3.11), попарно не перекрываются и их вершины имеют вид $s_{a^{i_1}+x^{i_1}, \dots, a^{i_k}+x^{i_k}}^{i_1, \dots, i_k}(v)$, где $x = (x^1, \dots, x^m) \in D_q^m$. Отсюда, в силу условий $a \in J$, $v \in J$ и (3.2) получаем, что все указанные вершины принадлежат множеству E . Тогда, если q достаточно велико будет выполняться неравенство

$$\sum_{i=1}^m |\Delta_m(F; J(s_{a^l+z^l}^{l, \dots, l-1}(a); s_{a^{l-1}+z^{l-1}, \dots, a^{l-1}+z^{l-1}}^{1, \dots, l-1}(v)))| < \varepsilon, \quad (3.12)$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное непредзаданное число. Очевидно, мы можем одновременно обеспечить также выполнение неравенства

$$\left| \int_{J(a; v) \setminus J(a; a+z)} f d\mu_m \right| < \varepsilon. \quad (3.13)$$

Далее, в силу (3.7) и очевидного равенства

$$\int_{J(a; a+z)} f_k d\mu_m = \Delta_m(F; J(a; a+z)), \quad k \geq q$$

получаем равенство

$$\Delta_m(F; J(a; a+z)) = \int_{J(a; a+z)} f d\mu_m. \quad (3.14)$$

Из (3.12), (3.13) и (3.14) следует, что

$$\left| \Delta_m(F; J(a; v)) - \int_{J(a; v)} f d\mu_m \right| < 2\varepsilon.$$

В силу произвольности $v \in H$ и $\varepsilon > 0$, откуда получим (3.10).

Замечание. Как видно из приведенного доказательства, в качестве a можно взять любую точку, удовлетворяющую условиям (3.1) и (3.2). Следовательно, в том случае, когда функция F абсолютно непрерывна по Витали на всем сегменте J , (1.4) будет иметь место для любого $a \in J$.

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем следующее: если G — действительная функция, абсолютно непрерывная почти всюду на J , и $a \in J$ — произвольная точка, то существует функция $g \in L^1(J)$ такая, что для почти всех $x \in J$ имеет место равенство

$$G(x) = \int_{J(a; x)} g d\mu_m + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} G_{i_1, \dots, i_k}(r^{i_1, \dots, i_k}(x)) + C, \quad (3.15)$$

где при любом $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$, $G_{i_1, \dots, i_k}$ есть функция $m-k$ переменных, абсолютно непрерывная почти всюду на сегменте $r^{i_1, \dots, i_k}(J)$, C — постоянная и сегмент $J(a; x)$ предполагается ориентированным по вершине a .

Действительно, согласно теореме 1 существует точка $a_0 \in J$ и функция $g_0 \in L^1(J)$ такие, что для почти всех $x \in J$

$$\Delta_m(G; J(a_0; x)) = \int_{J(a_0; x)} g_0 d\mu_m. \quad (3.16)$$

В силу равенства (2.15) из (3.16) получим

$$G(x) = \int_{J(a_0; x)} g_0 d\mu_m + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \Delta_{m-k}(G_{i_1, \dots, i_k}^{i_1, \dots, i_k}; r^{i_1, \dots, i_k}(J(a_0; x))) + C_0. \quad (3.17)$$

Все слагаемые

$$\Delta_{m-k}(G_{i_1, \dots, i_k}^{i_1, \dots, i_k}; r^{i_1, \dots, i_k}(J(a_0; x))) \quad (3.18)$$

в правой части равенства (3.17) абсолютно непрерывны μ_{m-k} -почти всюду на соответствующих сегментах $r^{i_1, \dots, i_k}(J)$. Проверим это сначала для функций

$$\Delta_{m-1}(G_{a_0}^1; r^1(J(a_0; x))), \dots, \Delta_{m-1}(G_{a_0}^m; r^m(J(a_0; x))), \quad (3.19)$$

составляющих группу слагаемых в (3.17), соответствующую значению $k=1$. Рассмотрим, например, функцию

$$\Delta_{m-1}(G_{a_0}^1; r^1(J(a_0; x))).$$

По условию для μ_1 -почти всех $t \in r^1(J)$ функция $G(t, x^1, \dots, x^m)$ абсолютно непрерывна по Витали μ_{m-1} -почти всюду на $r^1(J)$ относительно переменных $x^1, \dots, x^m$. Фиксируя t из (3.17) получим

$$\Delta_{m-1}(G_{a_0}^1; r^1(J(a_0; x))) = G(t, x^1, \dots, x^m) - \int_{J(a_0; s_1^1(x))} g_0 d\mu_m + \Sigma, \quad (3.20)$$

где первые два слагаемых в правой части абсолютно непрерывны по Витали μ_{m-1} -почти всюду на $r^1(J)$, а Σ представляет собой сумму конечного числа функций, каждая из которых зависит от не более чем $m-2$ координат точки x .

С другой стороны, легко видеть, что если некоторая функция Φ , заданная на k -мерном сегменте I , зависит от не более чем $k-1$ переменных, то $\Delta_k(\Phi; I) = 0$. В силу этого замечания из (3.20) получаем, что функция

$$\Delta_{m-1}(G_{a_0}^1; r^1(J(a_0; x)))$$

абсолютно непрерывна по Витали почти всюду на $r^1(J)$. Таким образом, она удовлетворяет условию а) определения 2. Аналогично проверяется выполнение условия б).

Далее, после того как установлена абсолютная непрерывность функций (3.19), мы переходим к рассмотрению функций

$$\Delta_{m-2}(G_{a_0}^{i_1, i_2}; r^{i_1, i_2}(J(a_0; x))), \quad 1 \leq i_1 < i_2 \leq m,$$

соответствующих значению $k=2$. Используя приведенные выше рассуждения, мы установим абсолютную непрерывность каждой из этих функций на соответствующем сегменте $r^{i_1, i_2}(J)$ и т. д. Переходя по возрастанию k от 1 до $m-1$, мы установим абсолютную непрерывность всех функций (3.18).

Пусть теперь задана произвольная точка $a \in J$. Интеграл

$$\int_{r^1(a; x)} g_0 d\mu_m, \quad (3.21)$$

фигурирующий в (3.17), является абсолютно непрерывной функцией на всем сегменте J . Поэтому, в силу замечания, приведенного в конце доказательства теоремы 1, мы, согласно равенству (3.17) (примененному к указанному интегралу, взятому в качестве G), получим для почти всех $x \in J$ представление

$$\int_{J(a_0; x)} g_0 d\mu_m = \int_{J(a; x)} g d\mu_m + \Sigma_0, \quad (3.22)$$

где $g \in L^1(J)$ и Σ_0 — сумма конечного числа функций, каждая из которых зависит не более чем от $m-1$ переменных, причем все они абсолютно непрерывны на соответствующих сегментах.

Подставляя в (3.17) вместо интеграла (3.21) правую часть (3.22) и группируя слагаемые, зависящие от одних и тех же переменных, мы получим (3.15).

Теперь непосредственно перейдем к доказательству (1.6). Пусть точка $a \in J$ задана. Применяя (3.15) к функции F , мы получим

$$F(x) = \int_{J(a; x)} f d\mu_m + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k < m} F_{i_1, \dots, i_k}^{(1)}(r^{i_1, \dots, i_k}(x)) + C_1, \quad (3.23)$$

для почти всех $x \in J$.

Далее применяя (3.15) к функциям $F_i^{(1)}$ на $r^i(J)$ и соответствующим точкам $r^i(a)$, подставляя полученные выражения в (3.23) и группируя слагаемые, зависящие от одних и тех же координат точки x мы получим

$$\begin{aligned} F(x) = & \int_{J(a; x)} f d\mu_m + \sum_{i=1}^m \int_{r^i(a; x)} f_i d\mu_m + \\ & + \sum_{k=2}^{m-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k < m} F_{i_1, \dots, i_k}^{(2)}(r^{i_1, \dots, i_k}(x)) + C_2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Перейдем к следующему шагу. Применяем (3.15) к функциям $F_{i_1, i_2}^{(2)}$ на $r^{i_1, i_2}(J)$ и соответствующим точкам $r^{i_1, i_2}(a)$, полученные выражения подставляем в (3.24) и группируем слагаемые, зависящие от одних и тех же координат точки x .

Продолжая этот процесс, мы через m шагов придем к равенству (1.5). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть E есть множество точек аппроксимативной непрерывности F . Тогда, как известно ([4], стр.199), $\mu_m(R^m \setminus E) = 0$. Докажем, что F абсолютно непрерывна по Витали на E . Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Для каждого $p \in \mathbb{N}$ обозначим через T_p множество всех точек $t \in T_0$, обладающих следующим свойством: для каждого конечного семейства попарно неперекрывающихся m -мерных сегментов $\{I_1, \dots, I_n\}$ с вершинами из D^m и с суммой мер

$$\sum_{i=1}^n \mu_m(I_i) < \frac{1}{p}$$

справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n |\Delta_m(F; t + I_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда имеем

$$\bigcup_{p=1}^{\infty} T_p = T_0 \text{ и } T_p \subset T_{p-1} \text{ для всех } p \in \mathbb{N},$$

откуда, в силу условия $\mu_m(T_0) > 0$, следует, что при некотором $p_0 \in \mathbb{N}$,

$\mu_m(T_{p_0}) > 0$. Положим $T = T_{p_0}$ и $\delta = \frac{1}{p_0}$. Тогда

$$\mu_m(T) > 0 \quad (3.25)$$

и для каждого конечного семейства попарно неперекрывающихся m -мерных сегментов $I_1, \dots, I_n$ с вершинами из D^m и с суммой мер

$$\sum_{i=1}^n \mu_m(I_i) < \delta \quad (3.26)$$

для всех $t \in T$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^n |\Delta_m(f; t + I_i)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.27)$$

Кроме того, без ограничения общности, можно считать, что начало координат является точкой плотности для T .

Пусть, теперь, $\{J_1, \dots, J_n\}$ — произвольное конечное семейство попарно не перекрывающихся m -мерных сегментов с вершинами из E и с суммой мер

$$\sum_{i=1}^n \mu_m(J_i) < \delta \quad (3.28)$$

и пусть $v_{i,1}, \dots, v_{i,2^m}$ — вершины сегмента J_i ; $i=1, \dots, n$.

Для любого $\alpha > 0$ обозначим через C_α m -мерный куб со стороной α и с центром в начале координат.

Возьмем число $\eta > 0$ так, чтобы имело место

$$\mu_m(T \cap C_\eta) > \frac{1}{2} \eta^m \quad (3.29)$$

и чтобы для всех $i=1, \dots, n$ и $k=1, \dots, 2^m$ существовало множество $E_{i,k} \subset v_{i,k} + C_\eta$ с мерой

$$\mu_m(E_{i,k}) > \left(1 - \frac{1}{n 2^{m+1}}\right) \eta^m \quad (3.30)$$

такое, что для любого $x \in E_{i,k}$ выполнялось неравенство

$$|F(v_{i,k}) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{n 2^{m+1}}. \quad (3.31)$$

Далее выбираем положительное число $\zeta < \eta$ настолько малым, чтобы для всех $i=1, \dots, n$ и $k=1, \dots, 2^m$ множество $G_{i,k} = E_{i,k} \cap (v_{i,k} + C_{\eta-\zeta})$ имело меру

$$\mu_m(G_{i,k}) > \left(1 - \frac{1}{n 2^{m+1}}\right) \eta^m. \quad (3.32)$$

Наконец, возьмем точки $w_{i,k} \in D^m$; $i=1, \dots, n$; $k=1, \dots, 2^m$ так, чтобы выполнялись условия

$$w_{i,k} \in D^m \cap J_i \cap (v_{i,k} + C_\zeta) \quad (3.33)$$

и чтобы при каждом $i=1, \dots, n$ точки $w_{i,1}, \dots, w_{i,2^m}$ являлись вершинами некоторого m -мерного сегмента I_i .

Заметим, что сегменты I_i , $i=1, \dots, n$ попарно не перекрываются, так как по построению $I_i \subset J_i$; $i=1, \dots, n$.

В силу определения множеств $G_{i,k}$ и условия (3.33) имеем включение

$$G_{i,k} - w_{i,k} \subset C_\eta; \quad i=1, \dots, n; \quad k=1, \dots, 2^m. \quad (3.34)$$

Далее, в силу (3.29), (3.32) и (3.34) будем иметь

$$\begin{aligned} \mu_m(C_\eta \setminus (T \cap C_\eta) \cap (\bigcap_{i,k} (G_{i,k} - w_{i,k}))) &\leq \\ &\leq \mu_m(C_\eta \setminus (T \cap C_\eta)) + \sum_{i,k} \mu_m(C_\eta \setminus (G_{i,k} - w_{i,k})) < \eta^m, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\mu_m(T \cap (\bigcap_{i,k} (G_{i,k} - w_{i,k}))) > 0. \quad (3.35)$$

Пусть

$$t \in T \cap (\bigcap_{i,k} (G_{i,k} - w_{i,k})).$$

Тогда, в силу (3.28) и (3.33) будем иметь

$$\sum_{i=1}^n \mu_m(t + I_i) = \sum_{i=1}^n \mu_m(I_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu_m(J_i) < \delta,$$

откуда, в силу выбора δ , имеем

$$\sum_{i=1}^n |\Delta_m(F; t + I_i)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.36)$$

С другой стороны, так как $t + w_{i,k} \in G_{i,k} \subset E_{i,k}$ для всех $i=1, \dots, n$ и $k=1, \dots, 2^m$, то, в силу (3.31), будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\Delta_m(F; J_i) - \Delta_m(F; t + I_i)| &\leq \\ &\leq \sum_{i,k} |F(v_{i,k}) - F(t + w_{i,k})| \leq n 2^m \cdot \frac{\varepsilon}{n 2^{m+1}} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Из (3.36) и (3.37) получим

$$\sum_{i=1}^n |\Delta_m(F; J_i)| < \varepsilon,$$

что и требовалось.

Ереванский государственный университет,
Институт прикладных проблем физики
АН Армянской ССР

Поступила 25. IX. 1988

Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ և Ֆ. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ Բազմաթիվ փոփոխականների բացարձակ անընդհատ
ֆունկցիաների ենթալայցման մասին (ամփոփում)

Աշխատանքում ուսումնասիրված է բազմաթիվ փոփոխականների ֆունկցիաների ընդհան-
րացված իմաստով բացարձակ անընդհատության հատկությունը: Մարտինգալների զուգամի-
տության թեորեմի օգնությամբ ստացված է նշված ֆունկցիաների ենթալայցումը ինտեգրալով:

A. A. TALALIAN and F. A. TALALIAN. *On the representation of absolutely continuous functions of several variables* (summary)

The property of generalized absolute continuity of functions of several variables is investigated. With the aid of martingale convergence theorem representation of these functions by integrals is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Caratheodory. Vorlesungen über reelle funktionen, Leipzig und Berlin, 1927.
2. E. Berkson and T. A. Gillespie. Absolutely continuous functions on two variables and well-bounded operators, J. London Math. Soc., (2). 30, 1984, 305–321.
3. J. Neveu. Martingales a temps discret, Masson, Paris, 1972.
4. С. Сакс. Теория интеграла, ИИЛ, М., 1949.



Дорогой Александр Андраникович!

Редакция журнала „Математика“ поздравляет Вас с шестидесятилетием и искренне желает Вам крепкого здоровья и дальнейшей плодотворной творческой деятельности.

УДК 515.518+519.11

Р. И. ОВСЕПЯН

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ХААРА И ЦЕНТРИРОВАННЫХ СИСТЕМ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Вопросы единственности представления тригонометрическими рядами возникли, как известно [1], в непосредственной связи с проблемой Римана о представлении функций всюду сходящимися тригонометрическими рядами.

Некоторое расширение постановки Римана позволило (см., например, [2]) получить положительные результаты общего характера сначала для тригонометрической системы (Д. Е. Меньшов), а затем, по существу, для произвольных полных ортонормированных систем (А. А. Талалян, Ф. Г. Арутюнян, Н. Б. Погосян).

С другой стороны, теория единственности, основательно разработанная для классических систем (тригонометрическая, с. Уолша, с. Хаара), пока не поддается распространению на более или менее общие классы ортогональных систем. По-видимому классические формулировки этой теории не могут иметь места в широком диапазоне, во всяком случае известны примеры (с. [3, 4]) полных ортонормированных систем (подчиненных довольно суровым условиям), для которых неверна даже теорема Кантора.

Поэтому один из аспектов развития теории единственности, естественно, связан с поисками новых постановок (см., например, [5] [6]). Такое расширение рассматриваемого вопроса может иметь и самостоятельный интерес, поскольку доставляет новые средства для распознавания рядов Фурье по тем или иным системам.

В настоящей работе устанавливаются некоторые теоремы единственности нового типа самой системы Хаара и для одного класса ортогональных систем, а именно, центрированных систем непрерывных функций. Эти последние (без требования непрерывности) являются объектом исследования теории мартингалов (см. [7, 8]).

Определение 1 (см. [8], стр. 207). Последовательность функций f_n , $n \geq 1$, принадлежащих пространству $L^1(\mathcal{Q}, A, P)$ называется центрированной системой, если для любого n и произвольного элемента e $\mathcal{F}$ -алгебры $\mathcal{F}_n$, порожденной функциями $f_1, f_2, \dots, f_n$, выполняется равенство $\int_e f_{n+1} dP = 0$.

Последовательность $S_n = \sum_{i=1}^n f_i$ называется мартингалом. Ясно, что определяющим свойством мартингала является равенство

$$\int_c S_n = \int_c S_{n+1} \quad \forall c \in \sigma_n.$$

Если $f_n \in L^2$, то система $(f_n)_1^\infty$ будет ортогональной (см. [8], стр. 208).

В настоящей работе предполагается, что все f_n непрерывны на $[0; 1]$. Заметим, что по теореме Ганди (см. [9], а также [10]) центрированные системы непрерывных функций не могут быть полными в $L^2 [0; 1]$; однако они могут быть системами представления почти всюду, в чем можно убедиться, используя технику работы [11]. В определенном смысле класс центрированных систем непрерывных функций довольно широк, о чем свидетельствует теорема А. В. Бахшецана [11]: для произвольной системы непрерывных на $[0; 1]$ функций φ_n , $n \geq 1$ с условием $\int_0^1 \varphi_n = 0$, $n \geq 2$, существует центрированная

система непрерывных функций f_n , $n \geq 1$, такая, что f_n и φ_n равноизмеримы при любом $n \geq 1$.

Мы предполагаем, что определение системы Хаара (см., например, [2]) известно читателю.

Определение 2. Вложенную последовательность двоичных интервалов постоянства γ_l функций Хаара χ_{n_l} , $|\gamma_{n_l+1}| = 2^{-1} \cdot |\gamma_l|$ будем называть цепочкой.

Перейдем к формулировкам наших утверждений (анонсированных ранее в [12]).

Теорема 1. Если для ряда

$$\sum a_n \cdot \chi_n \quad (1)$$

выполнены условия:

1. $\sum a_n^2 \cdot \chi_n^2 < \infty$ всюду, исключая, быть может, некоторое множество не более, чем счетное (кратко: и. с. м.)
2. для любой цепочки γ_l верно

$$\lim \left| \int_{\gamma_l} a_{n_l} \cdot \chi_{n_l} = 0 \right| \quad (3)$$

3. Ряд (1) сходится п. в. к $\Phi \in L^{**}$, то (1) — ряд Фурье—Хаара функции Φ .

Для теорем единственности рядов Хаара условие 1 представляет собой условие нового типа. В отличие от предыдущих теорем подобного рода, данная позволяет выявлять такие ряды Фурье—Хаара, которые во

* Условие (3) в несколько иной записи впервые появляется в работе [13] (см. также [14]).

** D — класс функций, интегрируемых в смысле широкого интеграла Даниэля.

многих точках могут сходиться к бесконечности*). Заметим еще, что для справедливости теоремы 1 существенно требование счетности исключительного множества в условии 1. даже, если $\Phi \equiv 0$,

$$|a_n \cdot \chi_n|_n = 0 \text{ и } \sum_i |a_n \cdot \chi_n(t)|^p < \infty \quad \forall t, \quad \forall p > 2 \text{ (см. [15])}.$$

Теорема А. Если для ряда (1) выполнены условия:

$$1. \sup_i |S_{m_i}(t)| \equiv \sum_i^1 |a_n \cdot \chi_n(t)| < \infty \text{ и. с. м.},$$

2. для любой цепочки верно (3),

3. $\lim S_m \leq \Phi \leq \overline{\lim} S_m$ п. в.; $\Phi \in L^1$, то (1) — ряд Фурье функции Φ .

Это утверждение фактически является частным случаем теоремы В. А. Скворцова [21].

Следующее утверждение представляет собой гибридный вариант первых двух теорем.

Теорема 2. Пусть для ряда (1) выполнены условия:

$$1. \min \left(\sum_i a_n^2 \cdot \chi_n^2(t); \sup_i |S_{m_i}(t)|_i \right) < \infty \text{ и. с. м.}, \quad (4)$$

2. для любой цепочки верно (3),

$$4. \lim S_m \leq \Phi \leq \overline{\lim} S_m \text{ п. в. } \Phi \in L^1.$$

Тогда (1) — ряд Фурье функции Φ .

Пусть f обозначает центрированную систему непрерывных функций $f_1, f_2, \dots$ на $[0; 1]$. Положим $\|f_n\|_2 = 1$. Класс таких систем обозначим через F . Пусть S_n обозначает n -ую частную сумму ряда

$$\sum_i a_i \cdot f_i. \quad (5)$$

Теорема 3. Если $f \in F$ и

$$1. \sup_i |S_{n_i}| < \infty \text{ и. с. м.}, \quad (6)$$

$$2. \sup_i |a_i \cdot f_i| \in L^1, \quad (7)$$

$$3. \lim S_n \leq \Phi \leq \overline{\lim} S_n \text{ п. в. и } \Phi \in L^1, \quad (8)$$

то (5) — ряд Фурье функции Φ (и, следовательно, сходится к ней в L^1 и почти всюду).

Заметим, что условие 2 можно опустить, если f такова, что множества уровней ее линейных комбинаций (т. е. $\left\{ t : \sum_i^n b_i \cdot f_i(t) = \text{const} \right\}$) имеют нулевую меру, а в общем случае условие 2 близко к необходимому (см. замечание 3 в тексте).

* Существуют тривиальные ряды Фурье—Хаара, сходящиеся всюду, причем на множестве мощности континуума к бесконечности.

В случае же ограниченной Φ первые два условия теоремы 4 можно опустить, если полагать, что условие 3 [выполняется всюду, за исключением, быть может, некоторого счетного множества (и это верно при любой перестановке ряда (5))].

Теорема 4. Если $f \in F$ и

$$1. \min \left(\sum_1^{\infty} a_i \cdot f_i^2(t); \sup_i |S_{n_i}(t)| \right) < \infty \text{ и. с. м.}, \quad (9)$$

$$2. \sup |a_i \cdot f_i| \in L^2, \quad (10)$$

$$3. \lim S_n < \Phi \leq \overline{\lim} S_n \text{ п. в. и } \Phi \in L^1, \quad (11)$$

то (5) — ряд Фурье функции Φ .

Доказательства наших утверждений мы строим, отправляясь от схем, предложенных в работах [13, 16].

Доказательство теоремы 1. Как известно, утверждение, что ряд (1) является рядом Фурье суммируемой функции Φ , равносильно тому, что при любом m на каждом из двух двоичных интервалов постоянства δ_m функции χ_m выполняется равенство

$$\int_{\delta_m} S_m = \int_{\delta_m} \Phi, \quad \forall m. \quad (12)$$

Это утверждение справедливо и в том случае, когда $\Phi \in D$ [16].

Лемма 1. Пусть для ряда (1) выполнены условия:

$$1. \lim S_n \leq \Phi < \overline{\lim} S_n \text{ п. в.}, \quad \Phi \in D, \quad (13)$$

2. существует пара (n, δ_n) , для которой нарушено (12).

Тогда для произвольного $A > 0$ существуют $m > n$ и $\delta_m \subset \delta_n$ (кратко: $(m, \delta_m) \prec (n, \delta_n)$), такие, что:

$$\text{для пары } (m, \delta_m) \text{ нарушено равенство (12)}, \quad (14)$$

$$\sum_1^m a_i^2 \cdot \chi_i^2(t) > A, \quad \forall t \in \delta_m. \quad (15)$$

Доказательство леммы 1. Сумма Σ' будет обозначать сужение ряда (1) (аналогично для ряда $\sum a_i^2 \cdot \chi_i^2$) на интервал δ_n из условия 2 леммы 1, причем сумму первых слагаемых, которые постоянны на δ_n , т. е. $S_n(t)$, $t \in \delta_n$ будем считать за первый член ряда Σ' .

Теперь заметим, что ряд $\sum_1^{\infty} a_i^2 \cdot \chi_i^2$ не может быть равномерно ограниченным на δ_n , так как в противном случае по теореме Б. Леви получим, что $\sum_1^{\infty} a_i^2 < \infty$, а это (надо учесть, что функции Хаара, сосредоточенные на δ_n , образуют ортонормированную систему сходимости п. в.), в свою очередь, повлечет сходимость в L^2 и почти всюду на δ_n , причем к функции Φ , что явствует из условия (13). Но если учесть, что функция $S_n(t)$, $t \in \delta_n$ является первым членом ряда $\Sigma' a_i \cdot \chi_i$, то из вышесказанного мгновенно будет следовать, что для

пары (n, δ_n) выполнено равенство (12), а это противоречит условию 2 леммы 1. Итак, на δ_n

$$|\sum a_i^2 \cdot \chi_{\delta_n}^2| = \infty. \quad (16)$$

Если теперь предположить, что лемма 1 неверна, то это будет означать существование такого A , что как только для какой-нибудь пары $(m, \delta_m) \vdash (n, \delta_n)$ выполняется условие (15), то для нее не имеет места (14), т. е. верно равенство (12). Если учесть, что функция χ_m^2 постоянна на объединении обоих интервалов постоянства δ_m^+ , δ_m^- функции χ_m , то будет ясно, что мы имеем две пары $(m, \delta_m^+) \vdash (n, \delta_n)$ и $(m, \delta_m^-) \vdash (n, \delta_n)$, удовлетворяющие одновременно условиям (15) и (12).

Пусть m — первое из таких чисел. Тогда ясно, что для пары (m_1, δ_{m_1}) , где $\delta_{m_1} = \delta_m^+ \cup \delta_m^-$ выполнены соотношения

$$\sum_1^{m_1} a_i^2 \cdot \chi_i^2(t) < A, t \in \delta_{m_1}; \int_{\delta_{m_1}} S_{m_1} = (D) \int \Phi. \quad (17)$$

Пусть Σ_1 обозначает ряд Σ' , из которого выброшены те χ_n , носители которых сосредоточены на δ_{m_1} . Повторив процедуру для ряда Σ_1 (вместо Σ'), мы придем к ряду Σ_2 и т. д. Через конечное или бесконечное количество таких процедур мы получим ряд Σ_{∞} со свойствами:

существует бесконечное количество пар (m_i, δ_{m_i}) (δ_{m_i} попарно не пересекаются), для которых имеют место соотношения типа (17), откуда

$$\sum_1 a_i^2 \cdot \chi_i^2(t) \leq A, \forall t \in \delta_n. \quad (18)$$

Из (13), (17) и (18) следует, что ортогональный ряд Σ_{∞} сходится в L^2 и почти всюду на δ_n к функции $\tilde{\Phi} \in L^2$, которая совпадает с Φ на множестве $\delta_n \setminus (\bigcup_1^{\infty} \delta_{m_i})$, а на каждом из интервалов δ_{m_i} она постоянна и

$$(L) \int_{\delta_{m_i}} \tilde{\Phi} = (D) \int_{\delta_{m_i}} \Phi \quad \forall i. \quad (19)$$

Но в таком случае (см. [17], стр. 370) получим

$$(L) \int_{\delta_n} \tilde{\Phi} = (D) \int_{\delta_n} \Phi \quad (20)$$

и поскольку ряд Σ_{∞} сходится к $\tilde{\Phi}$ по метрике L^2 , то будем иметь $\int_{\delta_n} S_n = \int_{\delta_n} \tilde{\Phi}$ (напомним, что постоянная $S_n(t)$, $t \in \delta_n$ является первым слагаемым ряда Σ' , а следовательно, и ряда Σ_{∞}), а это вместе с (20)

приводит к равенству $\int_{\delta_n} S_n = (D) \int_{\delta_n} \Phi$, что противоречит исходному предположению.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть для ряда (1) помимо условий 1 и 2 леммы 1 выполнено требование (3).

Тогда для произвольного $A > 0$ существуют пары $(m, \delta_m) \vdash (n, \delta_n)$ и $(l, \delta_l) \vdash (n, \delta_n)$ такие, что $\delta_m \cap \delta_l = \emptyset$, и для них справедливо утверждение леммы 1, т. е. выполнены (14) и (15).

Доказательство леммы 2. Поскольку для пары (n, δ_n) нарушено (12), то имеем

$$\int_{\delta_n} S_n = (D) \int_{\delta_n} \Phi + \alpha, \alpha \neq 0. \quad (21)$$

В силу леммы 1 ясно, что предположение о неверности леммы 2 равносильно существованию бесконечной „монотонной“ последовательности пар $(m_1, \delta_{m_1}) \vdash (m_2, \delta_{m_2}) \vdash \dots$; $\delta_n \supset \delta_{m_1}$; $2 \cdot |\delta_{m_{l+1}}| = |\delta_{m_l}|$, для которых нарушено равенство (12), причем для любой другой пары $(m, \delta_m) \vdash (n, \delta_n)$ это равенство выполнено. Это последнее обстоятельство в сочетании с (21) приводит к соотношениям

$$\int_{\delta_{m_l}} S_{m_l} = (D) \int_{\delta_{m_l}} \Phi + \alpha, \forall l. \quad (22)$$

Так как неопределенный D -интеграл функции Φ является непрерывной (а следовательно, и равномерно непрерывной) функцией на $[0; 1]$, то ясно, что первое слагаемое в (22) стремится к нулю. Пусть i_0 настолько велико, что выполнено неравенство

$$\left| (D) \int_{\delta} \Phi \right| < \frac{\alpha}{10}, \forall \delta \subset \delta_{m_{i_0}}. \quad (23)$$

В таком случае для всех $i \geq i_0$ будем иметь

$$\left| \int_{\delta_{m_i}} S_{m_i} \right| > \frac{9}{10} \cdot \alpha \quad \forall i \geq i_0. \quad (24)$$

Для каждого i одна из половин интервала δ_{m_i} совпадает с $\delta_{m_{i+1}}$, а на другой половине $\delta_{m_{i+1}}$ интегралы функций Φ и $S_{m_{i+1}}$ совпадают. Далее, на $\delta_{m_{i+1}}$ и $\delta_{m_{i+1}}$ $S_{m_{i+1}} = S_{m_i} + \alpha_{m_{i+1}} \cdot \chi_{m_{i+1}}$. Так как S_{m_i} постоянна на δ_{m_i} , то из (24) следует

$$\left| \int_{\delta_{m_{i+1}}} S_{m_{i+1}} \right| > \frac{9}{20} \cdot \alpha \quad \forall i \geq i_0. \quad (25)$$

Из (23), (25) и равенства интегралов функций Φ и $S_{m_{i+1}}$ на $\delta_{m_{i+1}}$, следует

$$\left| \int_{\delta_{m_i+1}} a_{m_i+1} \cdot \chi_{m_i+1} \right| = \left| \int_{\delta_{m_i+1}} a_{m_i+1} \cdot \chi_{m_i+1} \right| > \left(\frac{9}{20} - \frac{1}{10} \right) \cdot 2 \quad \forall i \geq i_0. \quad (26)$$

Но это противоречит предпосылкам леммы 2, а именно условию (3).

Лемма 2 доказана.

Теперь ясно, что если предположить, что теорема 1 неверна, то по лемме 2 для произвольного A_1 найдутся пары (m_1, δ_{m_1}) и (l_1, δ_{l_1}) , $\delta_{m_1} \cap \delta_{l_1} = \emptyset$, для которых выполнены условия (14) и (15). Затем при $A_2 > A_1 + 1$ надо применить лемму 2 к каждой из пар, определенных на предыдущем шаге, и т. д. Поскольку $A_n \uparrow \infty$, то через бесконечное число шагов мы придем к некоторому множеству мощности континуум, в точках которого будет нарушено первое условие теоремы 1. Подобные выкладки хорошо известны и потому мы опустим их.

Теорема 1 доказана.

Пусть σ_i — σ -алгебра множеств, порожденная функциями Хаара χ_j , $1 \leq j \leq m_i$, а $\tau_i (\in \tau_i)$ — система всех двоичных интервалов, на каждом из которых функция S_{m_i} постоянна (m_i — последовательность из теоремы 2).

Замечание 1. Условие (12) равносильно соотношениям

$$\int_{\Delta} S_{m_i} = \int_{\Delta} \Phi, \quad \forall \Delta \in \tau_i, \quad \forall i. \quad (27)$$

В самом деле, если условие (12) нарушено для какой-нибудь пары (m, δ_m) , то на одной из половинок интервала δ_m оно опять будет нарушено (для соответствующей пары). Повторяя это рассуждение, мы придем к некоторой паре (m_i, Δ) , $\Delta \in \tau_i$, для которой (27) не будет выполняться.

Замечание 2. Если последовательность S_{m_i} равномерно ограничена на некотором $\Delta \in \tau_i$, то ряд (1) сходится на Δ в метрике L^2 и почти всюду к функции Φ (в силу условия 3 теоремы 2) и поэтому

$$\int_{\Delta} S_{m_i} \neq \int_{\Delta} \Phi, \quad \Delta \in \tau_i.$$

Это утверждение легко следует из того, что функции Хаара, сосредоточенные на Δ , образуют ортономированную систему сходимости почти всюду и сужение ряда (1) на Δ по условию замечания принадлежит классу L^2 .

Лемма 3. Пусть для ряда (1) выполнены условия:

$$1. \quad \lim S_n \leq \Phi \leq \overline{\lim} S_n \text{ п. в.}, \quad \Phi \in L^1, \quad (28)$$

2. существует пара (m_i, Δ_i) , $\Delta_i \in \tau_i$, для которой нарушено (27).

Тогда для произвольного $A > 0$ существует пара $(m_j, \Delta_j) \leftarrow (m_i, \Delta_i)$ (т. е. $j > i$, $\Delta_j \in \tau_j$, $\Delta_j \subset \Delta_i$), для которой тоже нарушено (27) и, кроме того

$$|S_{m_j}(t)| > A, \quad t \in \Delta_j. \quad (29)$$

Доказательство леммы 3. Как и раньше сумма Σ' обозначает сужение ряда (1) на нужный интервал, в данном случае на Δ_1 , причем $S_{m_l}(t)$, $t \in \Delta_1$ — первое слагаемое ряда Σ' . За частными суммами ряда Σ' мы сохраним прежнее обозначение S_m . В силу условия 2 леммы 3 и замечания 2, последовательность S_{m_j} не может быть равномерно ограниченной на Δ_1 , и поэтому предположение, что лемма 3 не имеет места равносильно утверждению: существует такое $A > 0$, что

$$|S_{m_j}(t)| > A, \quad t \in \Delta_j, \quad (m_j, \Delta_j) \vdash (m_1, \Delta_1) \Rightarrow \int_{\Delta_j} S_{m_j} = \int_{\Delta_1} \Phi. \quad (30)$$

Пусть m_{j_1} — первый такой номер. Через ω_1 обозначим объединение всех $\Delta_{j_1} \in \tau_{j_1}$, которые вместе с m_{j_1} удовлетворяют соотношениям (30). Пусть теперь Σ_1 — ряд, полученный из Σ' после того, как из последнего изъяты те функции Хаара, которые сосредоточены на ω_1 (т. е. на каком-нибудь Δ_{j_1}). Тогда

$$|S_{m_j}(t)| \leq A \quad \forall j < j_1, \quad \forall t \in \Delta_j, \quad \forall \Delta_j \in \tau_j, \quad (31)$$

$$\int_{\Delta_{j_1}} S_{m_{j_1}} = \int_{\Delta_{j_1}} \Phi, \quad \forall \Delta_{j_1} \subset \omega_1. \quad (32)$$

Если учесть, что S_{m_j} при $j > j_1$ постоянна на каждом из интервалов $\Delta_{j_1} \subset \omega_1$, то из (32) можно извлечь такое соотношение

$$|S_{m_j}(t)| \leq \frac{1}{|\Delta_{j_1}|} \cdot \int_{\Delta_{j_1}} |\Phi|, \quad \forall j \geq j_1, \quad \forall t \in \Delta_{j_1}, \quad \forall \Delta_{j_1} \subset \omega_1. \quad (33)$$

Теперь, продолжив это рассуждение уже для ряда Σ_1 , получим номер m_{j_2} , множества $\Delta_{j_2} \in \tau_{j_2}$, ω_2 ($\omega_2 \cap \omega_1 = \emptyset$), такие, что для ряда Σ_2 , который получается из Σ_1 после выбрасывания из него тех функций Хаара, которые сосредоточены на ω_2 , будут выполняться соотношения

$$|S_{m_j}(t)| \leq A, \quad \forall j < j_2, \quad \forall t \in \Delta_j, \quad \forall \Delta_j \in \tau_j, \quad \Delta_j \cap \omega_1 = \emptyset, \quad (34)$$

$$\int_{\Delta_{j_2}} S_{m_{j_2}} = \int_{\Delta_{j_2}} \Phi, \quad \forall \Delta_{j_2} \subset \omega_2, \quad (35)$$

$$|S_{m_j}(t)| \leq \frac{1}{|\Delta_{j_2}|} \cdot \int_{\Delta_{j_2}} |\Phi|, \quad \forall j \geq j_2, \quad \forall t \in \Delta_{j_2}, \quad \forall \Delta_{j_2} \subset \omega_2. \quad (36)$$

Продолжим этот процесс. Ясно, что через конечное или бесконечное число шагов мы придем к ряду Σ_∞ , который удовлетворяет условиям

$$|S_{m_j}(t)| \leq A, \quad \forall j, \quad \forall t \in \Delta_j \setminus \left(\bigcup_1^\infty \omega_l \right), \quad (37)$$

$$|S_{m_j}(t)| \leq A, \quad \forall j < j_r, \quad \forall t \in \Delta_j, \quad \forall \Delta_j \in \tau_j, \quad \Delta_j \cap \left(\bigcup_1^{r-1} \omega_l \right) = \emptyset, \quad \forall r, \quad (38)$$

$$\int_{\Delta_{j,r}} S_{m_j} = \int_{\Delta_{j,r}} \Phi, \quad \forall \Delta_{j,r} \subset \omega_r, \quad \forall r, \quad (39)$$

$$|S_{m_j}(t)| \leq \frac{1}{|\Delta_{j,r}|} \cdot \int_{\Delta_{j,r}} |\Phi|, \quad \forall j \geq j_r, \quad \forall t \in \Delta_{j,r}, \quad \forall \Delta_{j,r} \subset \omega_r, \quad \forall r. \quad (40)$$

Но так как функция Φ суммируема, то такой же будет и функция

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{cases} \Phi(t), & t \in \Delta_1 \setminus \left(\bigcup_1^{\infty} \omega_i \right) \\ \frac{1}{|\Delta_{j,r}|} \cdot \int_{\Delta_{j,r}} \Phi, & t \in \Delta_{j,r}, \quad \forall r. \end{cases}$$

Из соотношений (37)–(40) следует, что частные суммы S_{m_j} ряда $\sum_{j=1}^{\infty}$ имеют суммируемую мажоранту $\tilde{\Phi}$, откуда вытекает, что последовательность S_{m_j} слабо компактна в L^1 . Но S_{m_j} — подпоследовательность частных сумм некоторого ряда $\sum_{j=1}^{\infty}$ по системе Хаара, являющейся базисом в L^1 , и поэтому ряд $\sum_{j=1}^{\infty}$ будет разложением некоторой функции $\varphi \in L^1$. Теперь учтем, что $\sum_{j=1}^{\infty}$ сходится п. в. на Δ_1 (из условия 2 леммы 3), причем на множестве $\Delta_1 \setminus \left(\bigcup_1^{\infty} \omega_i \right)$ он совпадает с рядом (1), и поэтому в силу (28), получим, что функции φ и Φ совпадают на $\Delta_1 \setminus \left(\bigcup_1^{\infty} \omega_i \right)$. А из (39) следует

$$\int_{\bigcup_1^{\infty} \omega_r} \varphi = \int_{\bigcup_1^{\infty} \omega_r} \Phi.$$

В итоге получим

$$\int_{\Delta_1} \varphi = \int_{\Delta_1} \Phi.$$

Но так как

$$\int_{\Delta_1} \varphi = \int_{\Delta_1} \sum_{j=1}^{\infty} S_{m_j} = \int_{\Delta_1} S_{m_l}, \quad \Delta_1 \in \tau_l,$$

то приходим к равенству

$$\int_{\Delta_1} S_{m_l} = \int_{\Delta_1} \Phi, \quad \Delta_1 \in \tau_l,$$

противоречащему условию 2 леммы 3.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть для ряда (1) помимо условий 1 и 2 леммы 3 выполнено требование (3). Тогда для произвольного $A > 0$ суще-

составляют пары $(m_j, \Delta_j) \vdash (m_l, \Delta_l)$, $(m_l, \Delta_l) \vdash (m_j, \Delta_j)$, $\Delta_j \cup \Delta_l = \emptyset$, для каждой из которых нарушено (27) и выполнено (29).

В силу замечания 1, доказательство леммы 4 сводится к таким же рассуждениям, с помощью которых была доказана лемма 2.

Доказательство теоремы А проводится рассуждением от противного по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.

Теорема А доказана.

Доказательство теоремы 2. Начиная рассуждение от противного используя лемму 2, найдем для произвольного $A_1 > 0$ пары (m, δ_m) и (l, δ_l) , $\delta_m \cap \delta_l = \emptyset$, для которых выполнены условия

$$\sum_1^m a_i^2 \cdot \chi_i^2(t) > A_1, \quad t \in \delta_m; \quad \sum_1^l a_i^2 \cdot \chi_i^2(t) > A_1, \quad t \in \delta_l, \quad (41)$$

$$\int_{\delta_m} S_m \neq \int \Phi; \quad \int_{\delta_l} S_l \neq \int \Phi.$$

Теперь, применяя лемму 3 для $A_1 > 0$ к каждой из уже определенных пар, найдем новые пары

$$(m_{j_1}, \Delta_{j_1}), (m_{l_1}, \Delta_{l_1}), \Delta_{j_1} \cap \Delta_{l_1} = \emptyset, \quad (42)$$

для которых (с учетом (41)) выполняются условия

$$\sum_1^{m_{j_1}} a_i^2 \cdot \chi_i^2(t) > A_1, \quad t \in \Delta_{j_1}; \quad \sum_1^{m_{l_1}} a_i^2 \cdot \chi_i^2(t) > A_1, \quad t \in \Delta_{l_1},$$

$$|S_{m_{j_1}}(t)| > A_1, \quad t \in \Delta_{j_1}; \quad |S_{m_{l_1}}(t)| > A_1, \quad t \in \Delta_{l_1},$$

$$\int_{\Delta_{j_1}} S_{m_{j_1}} \neq \int \Phi; \quad \int_{\Delta_{l_1}} S_{m_{l_1}} \neq \int \Phi.$$

На втором шаге надо повторить всю процедуру применительно к парам (42) и числу $A_2 > A_1 + 1$ и т. д. Поскольку $A_n \uparrow \infty$, то ясно, что в результате всех этих действий получится некоторое множество мощности континуум, в точках которого будет нарушено условие 1 теоремы 2.

Теорема 2 доказана.

Лемма 5. Центрированная система функций $f_n \in L^r(\Omega, A, P)$ $r > 1$ является базисной последовательностью (т. е. базисом в своем линейном замыкании) и все разложения сходятся почти всюду.

Доказательство. Для произвольного ряда $\sum a_k f_k$ его частные суммы S_n образуют мартингал, и следовательно, последовательность $|S_n|^r$ будет полумартингалом (см. [7], стр. 256), а математическое ожидание полумартингала — возрастающая функция (см. [7], стр. 280), т. е. в нашем случае

$$\int_{\Omega} \left| \sum_1^n a_k \cdot f_k \right|^r dP < \int_{\Omega} \left| \sum_1^{n+m} a_k \cdot f_k \right|^r dP, \quad \forall n, \quad \forall m, \quad \forall \{a_k\}. \quad (43)$$

Неравенство (43) означает, что $(f_n)_1^\infty$ — базис в своем линейном замыкании (см., например, [18], стр. 116). Согласно неравенству Дуба (см. например, [19], стр. 59) для мажоранты $S_n^* = \max_{1 \leq l \leq n} |S_l|$ выполняется соотношение

$$P\{S_n^* > \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \int_{\{S_n^* > \lambda\}} |S_n| dP \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \int_{\Omega} |S_n| dP, \quad \forall \lambda > 0, \quad (44)$$

откуда следует, что для произвольного разложения $\sum_1^\infty a_n \cdot f_n$ мажоранта S_n^* будет конечной почти всюду. Но отсюда уже вытекает, что все разложения сходятся почти всюду, надо только учесть, что f_n — базисная последовательность и повторить хорошо известные рассуждения (см., например, [20], стр. 307). Суть этих рассуждений такова: если некоторое разложение $\sum a_n \cdot f_n$ расходится на множестве положительной меры, то найдутся числа $a_l \uparrow \infty$ и $n_k \uparrow$ такие, что ряд $\sum_{l=1}^\infty a_l \cdot \sum_{k=n_l}^{n_{l+1}-1} a_k \cdot f_k$ будет разложением, которое неограниченно расходится на множестве положительной меры.

Замечание 3. Из первого неравенства (44) следует (см. [19], стр. 25) при $p > 1$

$$\|S_n^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \cdot \|\Phi\|_p \quad (45)$$

в предположении, что ряд $\sum a_n \cdot f_n$ является разложением функции Φ .

Лемма 6. Пусть $(\psi_n)_1^\infty$ — центрированная система непрерывных функций на $[0; 1]$, $\|\psi_n\|_2 = 1$. Чтобы $\sum a_n \cdot \psi_n$ был рядом Фурье функции Φ из линейного L^1 -замыкания системы ψ_n , необходимо и достаточно, чтобы для любого сегмента J и любого n имело место

$$\int_{\psi_n^{-1}(J)} S_n = \int_{\psi_n^{-1}(J)} \Phi. \quad (46)$$

Доказательство. Необходимость очевидным образом следует из леммы 5.

Достаточность. Зафиксируем n и заметим, что если соотношение (46) справедливо для произвольного сегмента J , то оно, очевидно, имеет место и для любого полусегмента. Пусть $\psi_n([0; 1]) \subset [a; \beta]$. Разложим $[a; \beta]$ на сумму $\bigcup_1^l \lambda_l$ попарно непересекающихся полусегментов λ_l , длины которых меньше наперед заданного ε . Ясно, что $\bigcup_{l=1}^l \psi_n^{-1}(\lambda_l) = [0; 1]$. В силу ортонормированности ψ_n имеем

$$a_n = \int_0^1 S_n \cdot \psi_n, \quad \text{Пусть } c_l \in \lambda_l \text{ и } \Lambda_l = \psi_n^{-1} \lambda_l,$$

$$a_n = \int_0^1 S_n \cdot \psi_n = \sum_{l=1}^l \int_{\Lambda_l} S_n \cdot \psi_n = \sum_{l=1}^l \int_{\Lambda_l} S_n \cdot (\psi_n - c_l) + \sum_{l=1}^l \int_{\Lambda_l} S_n \cdot c_l.$$

Первая сумма по модулю не превышает $\varepsilon \cdot \|S_n\|_1$, а вторая, в силу (46) равна $\sum_{l=1}^l \int_{\Lambda_l} \Phi \cdot \psi_n + \sum_{l=1}^l \int_{\Lambda_l} \Phi \cdot (c_l - \psi_n)$. А здесь первая сумма совпадает с

$$\int_0^1 \Phi \cdot \psi_n, \text{ а вторая оценивается через } \varepsilon \cdot \|\Phi\|_1. \text{ Теперь, если учесть, что}$$

эти выкладки справедливы при фиксированном n и произвольном ε , то

$$\text{получим } a_n = \int_0^1 \Phi \cdot \psi_n, \text{ чем завершается доказательство леммы 6.}$$

Лемма 7. Пусть $f \in F$, n_i — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, Ω — замкнутое множество, принадлежащее σ -алгебре σ_k , порожденной функциями $(f_i)_1^\infty$, S_k — k -ая частичная сумма ряда (5), Φ — суммируемая функция, удовлетворяющая условию (8). Если выполнено неравенство

$$\int_{\Omega} S_k \neq \int_{\Omega} \Phi, \quad (47)$$

то для $\forall c > 0$ существуют сегмент $I \subset (-\infty; -c) \cup (c; \infty)$ и число $n_i > k$ (n_i из условия (6)), такие, что

$$\int_{\Omega_i} S_{n_i} \neq \int_{\Omega_i} \Phi, \quad \Omega_i \equiv \Omega \cap S_{n_i}^{-1}(I) \cap \bigcap_{\substack{n_j > k \\ j < i}} (|S_{n_j}| \leq c). \quad (48)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что сужение системы f_i , $i \geq k$ на Ω является центрированной последовательностью. Далее, S_{n_i} не может быть равномерно ограниченной на Ω , так как в силу ортогональности системы f_i , $i \geq k$ на Ω и леммы 5 отсюда следовало бы, что ряд (5) сходится на Ω в метрике L^2 , причем к Φ (см. (8)), а это противоречило бы неравенству (47).

Если в данной ситуации предположить, что лемма 7 неверна, то это будет означать, что существует такое $c > 0$, что при каждом $n_i > k$ на любом множестве вида Ω_i из (48) должно выполняться равенство

$$\int_{\Omega_i} Q_i = \int_{\Omega_i} \Phi, \quad Q_i(t) \equiv S_{n_i}(t), \quad t \in \Omega. \quad (49)$$

Ясно, что равенство (49) будет выполняться и в том случае, когда I , входящее в определение множества Ω_i , будет обозначать произвольный полусегмент, лежащий на множестве $(-\infty; -c) \cup (c; \infty)$.

Теперь заметим, что последовательность Q_i образует мартингал. Определим для нее и вышеуказанной постоянной c момент останова

$$\tau(t) = \min_{n_l \leq k} |n_l: |Q_l(t)| \geq c|. \quad (50)$$

Пусть B_j обозначают множества уровней функции τ , т. е.

$$B_j = \{\tau = n_l\} \neq \emptyset, \quad B_\infty = \{\tau = \infty\}. \quad (51)$$

Ясно, что B_j попарно не пересекаются

$$\Omega = \bigcup_{j < \infty} B_j \cup B_\infty. \quad (52)$$

Образует новую последовательность $T_m = Q_{\tau \wedge m}$, $m > k$, $\tau \wedge m = \min(\tau, m)$. Как известно (см. [8], стр. 146), T_m будет мартингалом. Легко проверить, что в силу (49) и (50) на каждом из B_j выполняются соотношения

$$|T_m| \leq c, \quad \forall m < n_l; \quad T_m = S_{n_l}, \quad \forall m \geq n_l; \quad \forall j < \infty. \quad (53)$$

$$|T_m(t)| \leq c, \quad \forall m, \quad \forall t \in B_\infty. \quad (54)$$

$$\int_{B_j} T_{n_l} = \int_{B_j} \Phi, \quad \forall j. \quad (55)$$

Теперь вспомним, что при фиксированном j для произвольного допустимого сегмента (полусегмента) I будет выполняться равенство

$$\int_A T_{n_l} = \int_A \Phi, \quad A \equiv B_j \cap T_{n_l}^{-1}(I). \quad (56)$$

Из (56) путем несложных выкладок, аналогичных тем, которые уже проводились при доказательстве леммы 3, придем к заключению, что мажоранта $\sup |T_{n_l}|$ — суммируемая на Ω функция. Тогда, в силу леммы 5 и соображений слабой компактности, T_{n_l} будет сходиться на Ω и в метрике L^1 и почти всюду к функции Φ , равной Φ на B_∞ и T_{n_l} на каждом из B_j , $j < \infty$. Но в силу (55) интегралы функций Φ и Φ на Ω совпадают и если еще учесть мартингаловое соотношение

$$\int_{\Omega} S_k = \int_{\Omega} T_{n_l}, \quad \forall n_l > k,$$

то получится противоречие с условием (47).

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. Если к условиям леммы 7 добавить требование (7), то из (47) следует: для произвольного $c > 0$ существуют непустые, пересекающиеся замкнутые множества $\omega_j \subset \Omega$, $\omega_j \subset B_{n_l}$, $j = 1, 2$, такие что

$$|S_{n_l}| \geq c, \quad t \in \omega_j; \quad \int_{\omega_j} S_{n_l} \neq \int_{\omega_j} \Phi, \quad j=1, 2. \quad (57)$$

Доказательство. В силу леммы 7 мы можем ограничиться установлением интегральных неравенств (57). Положим $\alpha = \min S_k$.

$\beta = \max S_k$, где S_k удовлетворяет соотношению (47). Пусть $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Если существуют множества $\omega_1 \subset \Omega \subset S_k^{-1}[\alpha; \gamma)$, $\omega_2 \subset \Omega \cap S_k^{-1}[\gamma; \beta]$, $\omega_j \in \sigma_{n_j}$, удовлетворяющие второму неравенству (57), то доказательство леммы 8 завершается. В противном случае, для одного из множеств, например, $[\gamma; \beta]$, выполняются такие условия: для произвольно-го $\omega \subset \Omega \cap S_k^{-1}[\gamma; \beta]$, $\omega \in \sigma_n$, $n > k$ имеет место равенство

$$\int_{\omega} S_m = \int_{\omega} \Phi, \quad \forall m > n, \quad (58)$$

Далее, повторяем все эти рассуждения, отправляясь от отрезка $[z, \gamma)$ и т. д. На этом пути возможны два случая: 1) на каком-нибудь шаге произойдет „расщепление“ (как выше уже описано), чем и завершится доказательство леммы 8; 2) найдется уровень a_k [такой, что для множества $A_k \equiv \Omega \cap \{S_k = a_k\}$ выполнено соотношение

$$\int_{A_k} S_k = \int_{A_k} \Phi + a, \quad a \neq 0. \quad (59)$$

Так как $A_k \in a_k$, то $\int_{A_k} S_k = \int_{A_k} S_{k+1}$.

Теперь повторим всю процедуру для S_{k+1} и A_k . Если произойдет „расщепление“, то лемма 8 будет доказана, в противном случае найдется уровень a_{k+1} такой, что для

$$A_{k+1} \equiv A_k \cap \{S_{k+1} = a_{k+1}\} \text{ имеем}$$

$$\int_{A_{k+1}} S_{k+1} = \int_{A_{k+1}} \Phi + a. \quad (60)$$

Если допустить, что при продолжении этих рассуждений ни на одном шаге не произойдет „расщепления“, то значит появится последовательность множеств $A_k \supset A_{k+1} \supset \dots$, удовлетворяющая условиям (59), (60), ...

Если $|A_n| \rightarrow 0$, то оставшуюся часть рассуждений надо проводить по той же схеме, как при доказательстве леммы 2 и тогда получится противоречие с условием (7) леммы (8).

Если же $|A_n| \neq 0$, то сопоставляя (59), (60), ... и (7), получим, что S_n на $\bigcap_{n=k} A_n$ сходится (очевидно равномерно) к функции Φ , а это

приведет к соотношению $\int_{\Omega} S_n \rightarrow \int_{\Omega} \Phi$, противоречащему исходной предпосылке (47). Подробные выкладки провести нетрудно, и мы их опустим.

Итак, лемма 8 доказана, а вместе с ней и теорема 3 (рассуждения проводятся по той же схеме, что и при доказательстве теоремы 1,

в данном случае надо пользоваться леммой 6 и сопоставлять соотношения (57) с исходным предположением (6)).

Лемма 9. Если $f \in F$ и для ряда $\sum a_i \cdot f_i$ выполнены условия (10), (11) и

$$\sum_1^{\infty} a_i^2 \cdot f_i^2 < \infty \text{ и. с. м.}, \quad (61)$$

то этот ряд является разложением функции Φ .

Доказательство. Если предположить противное, то по лемме 6 найдется замкнутое множество $\Omega \in \sigma_k$, удовлетворяющее неравенству (47), а по лемме 8 найдутся такие замкнутые множества ω_i , что

$$\omega_i \subset \Omega, \quad \omega_i \in \sigma_{m_i}, \quad \omega_i \cap \omega_j = \emptyset, \quad \int_{\omega_i} S_{m_i} \neq \int_{\omega_i} \Phi, \quad i = 1, 2. \quad (62)$$

Теперь к каждому из ω_i надо применить рассуждения, которые мы изложим для Ω из (47). Сумма ряда (61) не может быть ограниченной на Ω , ибо в противном случае сужение ряда (5) на Ω сходилось бы в метрике L^2 и почти всюду к функции Φ (ведь f_n , $n > k$ на Ω — центрированная и, следовательно, ортогональная система), а это противоречило бы неравенству (47). Покажем, что для произвольной постоянной $c > 0$ существует замкнутое множество ω с условиями

$$\omega \subset \Omega; \quad \omega \in \sigma_n, \quad n > k; \quad \int_{\omega} S_n \neq \int_{\omega} \Phi; \quad \sum_1^n a_i^2 \cdot f_i^2(t) > c, \quad \forall t \in \omega. \quad (63)$$

Противоположное допущение повлекло бы, что существует постоянная $a > 0$ такая, что для любого $n > k$ имеет место

$$\int_{\omega} S_n = \int_{\omega} \Phi, \quad \omega \equiv \Omega \cap \left\{ \sum_1^n a_i^2 \cdot f_i^2 > a \right\} \cap \left\{ \sum_1^{n-1} a_i^2 \cdot f_i^2 \leq a \right\}. \quad (64)$$

Определим момент остановки τ

$$\tau(t) = \min_{n > k} \left\{ n: \sum_1^n a_i^2 \cdot f_i^2(t) \geq a \right\}, \quad t \in \Omega. \quad (65)$$

Пусть B_j — множества уровней функции τ , т. е.

$$B_j = \{(\tau = n_j) \neq \emptyset\}, \quad j < \infty; \quad B_{\infty} = (\tau = \infty). \quad (66)$$

Очевидно, B_j попарно не пересекаются и верно (52). Новая последовательность $T_m \equiv S_{\tau \wedge m}$, $m \geq k$ ($\tau \wedge m \equiv \min(\tau, m)$) также будет мартингалом, причем в силу условия (10) сумма квадратов членов ряда, соответствующего мартингалу T_m , не превышает величину $a + \sup_i a_i^2 \cdot f_i^2$ на Ω . Отсюда (по соображениям ортогональности) следует, что мартингал T_m сходится на Ω в метрике L^2 и почти всюду к некоторой функции $\tilde{\Phi}$ с условиями (см. доказательство леммы 7)

$$\tilde{\Phi} = \Phi, \quad t \in B_{\infty}; \quad \int_{B_j} \tilde{\Phi} = \int_{B_j} \Phi, \quad \forall j < \infty. \quad (67)$$

Сопоставляя (67) и (52) получим, что функции $\bar{\Phi}$ и Φ имеют одинаковые интегралы на Ω . Следовательно, $\int_2 T_m - \int_2 \Phi$. Остается еще учесть, что $\int_2 T_m = \int_2 S$, для любого $m \geq k$, что приведет к противоречию с исходной предпосылкой (47).

Итак, (63) установлено. Сопоставляя (63) с (62), найдем для произвольного $c > 0$ непересекающиеся замкнутые ω_i , которые удовлетворяют условиям (62) и еще неравенствам

$$\sum_1^{m_i} a_k^2 \cdot f_k^2(t) > c, \quad \forall t \in \omega_i. \quad (68)$$

Оставшуюся часть рассуждений надо проводить так, как в конце доказательства теоремы 1.

Лемма 9 доказана.

Доказательство теоремы 4 проводится по такой же схеме, что и доказательство теоремы 2, только в данном случае надо пользоваться соотношениями (57), из леммы 8 и (63) из леммы 9, которые будут в нашем распоряжении, если исходить из того, что теорема 4 неверна. Последовательное применение этих соотношений по упомянутой схеме в конце концов приведет к противоречию с условием (9).

Теорема 4 доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 27.IV.198

Ռ. Ի. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ. Միակության բնույթի որոշ պնդումներ Հաարի սխեմայի և անընդհատ ֆունկցիաներից բաղկացած կենտրոնավորված սխեմաների համար (ամփոփում)

Աշխատանքում ապացուցվում են նոր բնույթի պնդումներ Հաարի շարքերի միակության վերաբերյալ և ցույց է տրվում, որ այդ պնդումները պահպանվում են օրթոգոնալ սխեմաների որոշ դասերի համար:

R. I. HOVSEPIAN, *Some theorems on uniqueness of series by Haar and continuous martingal differences systems (summary)*

In this paper we prove new type theorems on uniqueness of Haar series and show that these results hold for some classes of orthogonal systems.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Б. Паплаускас. Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега, Изд. «Наука», М., 1966.
2. Б. С. Кашин, А. А. Саакян. Ортогональные ряды, Изд. «Наука», М., 1984.
3. Г. М. Мушегян, Р. И. Овсепян. О единственности ортогональных рядов, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», IV, № 4, 1969, 259—266.
4. Р. И. Овсепян. О пустом множестве как M -множестве в классе общих ортонормированных систем, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIII, № 4, 1978, 261—274.

5. Г. Г. Геворкян. О единственности рядов по центрированным Н-системам, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 45 (1—2), 1982, 1—10.
6. Л. А. Шагинян. О единственности тригонометрических рядов, *ДАН Арм.ССР*, LXXVIII, № 3, 1984, 101—104.
7. Дж. Л. Дуб. Вероятностные процессы, Изд. ИЛ, М., 1956.
8. Ж. Невё. Математические основы теории вероятностей, Изд. «Мир», М., 1969.
9. R. F. Gundy. Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 124, 1966, 228—248.
10. А. В. Бахшеян. О структуре некоторых классов центрированных систем, *Изв. АН Арм.ССР, «Математика»*, XIII, № 4, 1978, 301—314.
11. А. В. Бахшеян. О центрированных системах в $C[0; 1]$, *Acta Sci. Math.*, 47, № 1—2, 1984, 223—231.
12. Р. И. Овсепян. О теоремах единственности для некоторых ортогональных систем, *Abstracts, Alfred Haar Memorial Conference, Budapest, 1985*, 43.
13. Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян. О единственности рядов по системам Хаара и Уолша, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 28:61, 1964, 1391—1408.
14. А. А. Талалян. О единственности двойных тригонометрических рядов, *Изв. АН Арм.ССР, «Математика»*, XX, № 6, 1985, 426—462.
15. М. Б. Петровская. О нуль-рядах по системе Хаара и множествах единственности, *Изв. АН Арм.ССР, сер. матем.*, 28, № 4, 1964, 773—798.
16. Ф. Г. Арутюнян. Восстановление коэффициентов рядов по системам Хаара и Уолша, сходящихся к функциям, интегрируемым по Данажу, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 30, № 2, 1966, 325—344.
17. С. Сакс. Теория интеграла, Изд. ИЛ, М., 1949.
18. В. Д. Мильман. Геометрическая теория пространств Банаха, *УМН*, 25, № 3, 1970, 113—174.
19. Adriano M. Garsia. Topics in almost everywhere convergence, Chicago, 1970.
20. А. М. Олевский. Об одной ортонормальной системе и ее приложениях, *Матем. сб., новая серия*, 71, № 3, 1966, 297—336.
21. В. А. Скворцов. Некоторые обобщения теоремы единственности для рядов по системе Уолша, *Матем. заметки*, 13, № 3, 1973, 367—372.

УДК 517.51

Г. М. МУШЕГЯН

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ПЕРЕСТАВЛЕННОГО РЯДА ПО
 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ И ПО БАЗИСАМ
 ПРОСТРАНСТВА С $[0, 1]$ ВСЮДУ СХОДЯЩЕГОСЯ К
 ФУНКЦИИ ИЗ L_p , $1 \leq p < 2$

§ 1. Введение

Известный результат Валле--Пуссена, в частности, можно сформулировать в следующем виде (см. [1]).

Теорема 1. (Валле--Пуссен). Если тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n x + b_n \sin n x \quad (1.1)$$

всюду на $[0, 2\pi]$, кроме, быть может, счетного множества точек, сходится к всюду конечной, интегрируемой по Лебегу функции $f(x)$, то (1.1) является рядом Фурье--Лебега функции $f(x)$.

Результаты типа теоремы 1 были получены и для других ортонормированных систем. А. Хааром [2] была доказана следующая

Теорема 2. (А. Хаар). Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x) \quad (1.2)$$

по системе Хаара всюду на $[0, 1]$ сходится к нулю, то $a_n = 0$ при $n \geq 1$.

Г. Фабером [3] был приведен пример ряда (1.2), который всюду на $[0, 1]$, кроме одной точки, сходится к нулю, но не все коэффициенты которого равны нулю.

В работе [4] Ф. Г. Арутюнян и А. А. Талалаян выделили естественный класс рядов Хаара, для которых счетное множество является множеством единственности. Этот класс определяется следующим образом.

Определение 1.1. Скажем, что ряд (1.2) принадлежит классу А, если для произвольной точки x_0 , $x_0 \in [0, 1]$, выполняется условие

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n_k}| \cdot |\chi_{n_k}(x_0)|^{-1} = 0, \text{ где } \{n_k\}_{k=1}^{\infty} = \{n : \chi_n(x_0) \neq 0\}. \quad (1.3)$$

Отметим, что если ряд (1.2) всюду на $[0, 1]$ сходится к конечной функции $f(x)$, то этот ряд принадлежит классу А.

В работе [4] была доказана следующая

Теорема 3 (Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалаян). Если ряд (1.2) принадлежит классу А и некоторая подпоследовательность его частичных сумм $\{S_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ всюду на $[0, 1]$, кроме, быть может, счетного

множества точек сходится к конечной функции $f(x)$, $f(x) \in L_1$, то (1.2) является рядом Фурье—Лебега функции $f(x)$.

В этой же работе результат типа теоремы Валле—Пуссена был получен для системы Уолша (см. также [5]).

В работе [6] подобные вопросы рассмотрены для переставленной системы Хаара.

Если $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная перестановка натурального ряда (то есть взаимнооднозначное отображение последовательности $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ на себя), то через (σ) $\sum_{n=1}^{\infty}$ обозначим переставленный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.

Имеют место следующие теоремы (см. [6]).

Теорема 4. Пусть переставленный ряд

$$(\sigma) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \chi_{\sigma(n)}(x) \quad (1.4)$$

по системе Хаара принадлежит классу А. Если некоторая подпоследовательность $\{S_{n_k}(x, \sigma)\}_{k=1}^{\infty}$ его частичных сумм всюду на $[0, 1]$, кроме, быть может, счетного множества точек, сходится к конечной функции $f(x)$, $f(x) \in L_1$, то (1.4) является рядом Фурье—Лебега функции $f(x)$.

Теорема 5. Существует переставленный ряд (1.4) и определенная на $[0, 1]$ всюду конечная функция $f(x)$, удовлетворяющие условиям:

1. $a_n = o(n^{-1/2})$, $f(x) \in L_p$ для любого p , $p \in [1, 2)$;
2. ряд (1.4) всюду на $[0, 1]$ сходится к $f(x)$;
3. (1.4) не является рядом Фурье—Лебега функции $f(x)$.

Отметим, что для любой фиксированной перестановки σ , как следует из теоремы 4, ряд по системе Хаара, который после этой перестановки может всюду сходиться к данной функции $f(x)$, единственный и в том случае, когда $f(x) \in L_2$. Следовательно, коэффициенты такого ряда должны восстанавливаться с помощью функции $f(x)$. Несмотря на это, теорема 5 показывает, что интеграл Лебега не всегда восстанавливает коэффициенты такого ряда, даже если $f(x) \in L_p$, $1 < p < 2$.

Ниже через $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ обозначена любая из следующих систем: система Хаара, система Уолша, произвольный ортонормированный базис пространства $C[0, 1]$, тригонометрическая система, определенная на $[0, 1]$, то есть система $\{1, \sqrt{2} \cos 2\pi n x, \sqrt{2} \sin 2\pi n x\}_{n=1}^{\infty}$.

В настоящей работе результат типа теоремы 5 устанавливается для этих систем, а именно справедлива следующая

Теорема А. Существуют переставленный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \Phi_{\sigma(n)}(x) \quad (1.5)$$

по системе Φ и определенная на $[0, 1]$ всюду конечная функция $f(x)$, удовлетворяющие условиям:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $f(x) \in L_p$ для любого p , $1 \leq p < 2$; ..

2. ряд (1.5) всюду на $[0, 1]$ сходится к $f(x)$;

3. (1.5) не является рядом Фурье—Лебега функции $f(x)$.

В случае, когда Φ —система Хаара, рассматривается следующий вопрос: насколько быстро коэффициенты ряда (1.4) в теореме 5 могут стремиться к нулю? Ясно, что в этой теореме не может выполняться условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty. \quad (1.6)$$

Поэтому на скорость стремления к нулю коэффициентов a_n , $n=1, 2, \dots$, естественно наложить условия, из которых не следует (1.6).

Теорема В. Для любой монотонно убывающей последовательности положительных чисел $h = \{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 = +\infty, \quad (1.7)$$

существует переставленный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \chi_{\sigma(n)}(x) \quad (1.8)$$

по системе Хаара и определенная на $[0, 1]$ всюду конечная функция $f(x)$, обладающие свойствами:

1) $|a_n| \leq h_n$, $n=1, 2, \dots$;

2) $f(x) \in L_p$ для любого p , $1 \leq p < 2$;

3) ряд (1.8) всюду на $[0, 1]$ сходится к $f(x)$;

4) (1.8) не является рядом Фурье—Лебега функции $f(x)$.

§ 2. Определения и вспомогательные утверждения

Пусть $P(x) \in L_2[0, 1]$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad a_n = a_n(P) = \int_0^1 P(x) \varphi_n(x) dx$$

—ряд Фурье функции $P(x)$ по системе Φ . Обозначим

$$\Phi_N(x, P) = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x), \quad N = 1, 2, \dots;$$

$$P^*(x) = P_{\Phi}^*(x) = \sup_{1 \leq N < +\infty} \left| \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x) \right|, \quad x \in [0, 1],$$

$$n[P] = \min \{n : a_n \neq 0\}, \quad N[P] = \sup \{n : a_n \neq 0\}, \quad (N[P] \leq +\infty);$$

$$[P] = \{n : n[P] \leq n < N[P]\}.$$

Если $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая перестановка, то

$$(\sigma) \Phi_N(x, P) = \Phi_N(x, P(\sigma)) = \sum_{n=1}^N a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x),$$

$$(\sigma) P^*(x) = f^*(x, \sigma) = \sup_{1 \leq N < \infty} \left| \sum_{n=1}^N a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \right|, \quad x \in [0, 1],$$

$$[(\sigma) P] = [P(\sigma)] = [P].$$

Определение 2.1. Множество полиномов $\{P_j(x, \sigma_j)\}_{j=1}^M$, $1 \leq M \leq +\infty$, по системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ назовем согласованным с последовательностью натуральных чисел $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, если

$$N_1 < n[P_1], \quad \max\{N_k, N[P_{k-1}]\} < n[P_k] \quad \text{при } k = 1, 2, \dots, M.$$

Определение 2.2. Если $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система Хаара или Уолша, то Φ -интервалом назовем множество, которое можно представить в следующем виде: $(l \cdot 2^{-r}, (l+1) \cdot 2^{-r})$, $r = 1, 2, \dots$; $0 \leq l \leq 2^r - 1$. Если Φ — тригонометрическая система или ортонормальный базис пространства $C[0, 1]$, то Φ -интервалом называем множество вида $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) .

Определение 2.3. Через $\mathcal{O}(\Phi)$ обозначим класс множеств, каждое из которых (в случае, когда Φ — система Хаара или Уолша с точностью до конечного числа точек) можно представить в виде объединения конечного числа попарно не пересекающихся Φ -интервалов.

Определение 2.4. Перестановку σ последовательности $m, m+1, \dots, M$ назовем слабой, если для любого набора чисел a_n , $n = m, m+1, \dots, M$, выполняется неравенство

$$\sup_{1 \leq N < M} \left| \sum_{n=m}^N a_{\sigma(n)} \right| \leq 4 \sup_{m \leq N < M} \left| \sum_{n=m}^N a_n \right|.$$

Определение 2.5. Пусть $h = \{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность монотонно убывающих чисел $h_k \rightarrow 0$, при $k \rightarrow \infty$. Скажем, что полином или ряд

$$P(x) = \sum_{i=m}^M a_i \varphi_i(x), \quad m \leq M \leq +\infty,$$

из класса (h) , если $|a_i| \leq h_i$, $i \in [P]$.

Если E — измеримое по Лебегу множество, то через $|E|$ обозначим меру Лебега множества E , $\bar{E}$ — замыкание, а $\overset{0}{E}$ — внутренность множества E .

Ниже через Δ_n обозначена внутренность замыкания множества $\sup\{\chi_n(x)\}$.

Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система Хаара, а $h = \{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ — монотонная последовательность с условием (1.7), тогда справедливо следующее

Предложение 1. Для произвольных чисел β_0, η_0 , $0 < \beta_0 < 1$, $0 < \eta_0 < 1$, натурального числа N' и множества $\Lambda \in \mathcal{O}(\Phi)$ существуют множества $\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, U$ и полином

$$\Psi(x) = \sum_{n=m}^{m'} a_n \chi_n(x),$$

обладающие свойствами:

1. $U \in \theta(\Phi)$, $\Lambda^{(i)} \in \theta(\Phi)$, $i = 1, 2$; $\|\Lambda^{(i)}\| - |\Lambda| \cdot 2^{-1} < 2^{-1} \gamma_0$ при $i = 1, 2$, $\Lambda^{(1)} \cap \Lambda^{(2)} = \emptyset$; $\Lambda^{(i)} \cap U = \emptyset$, $i = 1, 2$, $\Lambda^{(1)} \cup \Lambda^{(2)} \cup U = \Lambda$; $|U| < \gamma_0$, $i = 1, 2$;
2. $N' < m$;
3. $|\Psi(x) - (-1)^{i+1}| < \beta_0$ при $x \in \Lambda_i$, $i = 1, 2$; $\Psi(x) = 0$ при $x \notin \Lambda$;
4. $\Psi^*(x) \leq 2$ при $x \in \Lambda$; $\Psi^*(x) = 0$ при $x \notin \Lambda$;
5. $|a_n| \leq h_n$ при $n = m, m+1, \dots, m'$;
6. $\int_{\Lambda} \Psi(x) dx = 0$.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что существует монотонно убывающая последовательность положительных чисел $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$h_n \leq h_n \text{ при } n = 1, 2, \dots; \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \sqrt{n} = 0; \sum_{n=1}^{\infty} (h_n)^2 = +\infty. \quad (2.1)$$

Выберем такое положительное число β' , что

$$\beta' < \gamma_0, \beta' < \beta_0, \beta' < \gamma_0 (|\Lambda| - \gamma_0)^{-1} \text{ (полагаем } \gamma_0 < |\Lambda|). \quad (2.2)$$

Согласно определению класса $\theta(\Phi)$ множество Λ с точностью до конечного числа точек можно представить в виде

$$\Lambda = \bigcap_{i=1}^s \omega_i, \text{ где } \omega_i, 1 \leq i \leq s, \Phi - \text{интервал; } \omega_i \cap \omega_j = \emptyset, 1 \leq i < j \leq s. \quad (2.3)$$

Пусть, далее натуральное число m таково, что

$$m > \max \{N', 2 \max_{1 \leq i \leq s} (|\omega_i|^{-1})\}, h_n \sqrt{n} < \beta' \text{ при } n \geq m. \quad (2.4)$$

Очевидно, что для любого n , $n \geq m$

$$\text{либо существует } i, 1 \leq i \leq s \text{ такое, что } \Delta_n \subset \omega_i, \quad (2.5)$$

$$\text{либо } \Delta_n \cap \bigcup_{i=1}^s \omega_i = \emptyset. \quad (2.6)$$

Рассмотрим следующие ряды:

$$T(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} h_n \chi_n(x), \quad P(x) \sim \sum_{n=m}^{\infty} e_n \chi_n(x), \quad (2.7)$$

где $e_n = h_n$, если $\Delta_n \subset \omega_i$ и $e_n = 0$ — в противном случае.

Из расходимости ряда в (2.1) и монотонности чисел h_n , согласно результату работы [7] первый ряд в (2.7) расходится почти всюду на $[0, 1]$, откуда следует (см. [8]), что

* Здесь и всюду ниже в случаях систем Хаара и Уолша равенство для множеств имеют место с точностью до конечного множества двоично рациональных точек.

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} S_N(x, T) = +\infty, \quad \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} S_N(x, T) = -\infty \text{ п. в. на } [0, 1].$$

Так как для внутренних точек x множества Λ и $N > m$ имеем

$$S_N(x, P) = S_N(x, T) - S_{m-1}(x, T),$$

то получим, что почти всюду на Λ выполняется условие

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} S_N(x, P) = +\infty, \quad \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} S_N(x, P) = -\infty. \quad (2.8)$$

Составим новый ряд

$$P'(x) \sim \sum_{n=m}^{\infty} a_n \gamma_n(x), \quad (2.9)$$

где $a_n = e_n$ для тех значений n , $n \geq m$, при которых

$$|S_N(x, P)| < 1 \text{ при } x \in \Delta_n \subset \Lambda, \quad N = m, m+1, \dots, n-1$$

и полагаем $a_n = 0$ для остальных значений n .

Ясно, что

$$|S_N(x, P')| < 1 + \beta' \text{ при } N \geq m, \quad x \in \overset{0}{\Lambda}, \quad (2.10)$$

$$S_N(x, P') = 0 \text{ при } N \geq m, \quad x \in \overline{\Lambda}. \quad (2.11)$$

Отсюда следует, что ряд (2.9) сходится почти всюду на $[0, 1]$ к некоторой функции $P'(x)$, причем

$$1 < |P'(x)| < 1 + \beta' \text{ п. в. на } \Lambda; \quad P'(x) = 0 \text{ при } x \in \overline{\Lambda}. \quad (2.12)$$

Исходя из теоремы Егорова можно указать такое натуральное число m' , что

$$|\{ \Lambda \setminus \{x : |S_{m'}(x, P')| > 1 \} | > 4^{-1} \gamma_0. \quad (2.13)$$

Обозначим

$$\Lambda^{(1)} = \{x : S_{m'}(x, P') > 1\}, \quad \Lambda^{(2)} = \{x : S_{m'}(x, P') < -1\}, \quad (2.14)$$

$$U = \Lambda \setminus (\Lambda^{(1)} \cup \Lambda^{(2)}).$$

Очевидно, что $\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, U \in \eta(\Phi)$. Оценим меру множества $\Lambda^{(1)}$. Исходя из условий (2.5), (2.6), (2.12), (2.13), (2.14) получим

$$0 = \int_{\Lambda} S_{m'}(x, P') dx \leq (1 + \beta') |\Lambda^{(1)}| - |\Lambda^{(2)}| + 4^{-1} \gamma_0.$$

Отсюда и из равенства $|\Lambda^{(2)}| = |\Lambda| - |\Lambda^{(1)}| - |U|$ следует, что $(2 + \beta') \times |\Lambda^{(1)}| - |\Lambda| + 2^{-1} \gamma_0 \geq 0$ и из (2.2)

$$|\Lambda^{(1)}| > 2^{-1} |\Lambda| - \frac{|\Lambda| \beta'}{2(2 + \beta')} - \frac{2 \cdot 4^{-1} \gamma_0}{2 + \beta'} > 2^{-1} |\Lambda| - 2^{-1} \gamma_0.$$

Тем же путем можно установить, что $|\Lambda^{(2)}| > 2^{-1} |\Lambda| - 2^{-1} \gamma_0$.

Легко убедиться, что полином

$$\Psi(x) = \sum_{n=m}^{m'} a_n \gamma_n(x)$$

удовлетворяет всем условиям предложения 1.

Ниже, чтобы использовать общую терминологию и случай системы Хаара не отделять от случаев, когда Φ — одна из вышеуказанных систем, полином вида $\Psi(x)$, фигурующий в предложении 1, назовем слабо переставленным (формально это не противоречит определению слабо переставленного полинома).

Если Φ — одна из вышеуказанных систем, то справедлива следующая

Лемма 2.1. Пусть ω — Φ -интервал, $\omega \subset [0, 1]$, δ', α' и $N^{(0)}$ — положительные числа, $\{N_k^{(0)}\}_{k=1}^\infty$ — последовательность натуральных чисел. Тогда существуют последовательности слабо переставленных полиномов $\{\Psi_i(x, \omega)\}_{i=1}^\infty$, ступенчатых функций $\{\tilde{\Psi}_i(x, \omega)\}_{i=1}^\infty$ и множеств $\{\Lambda_i(\omega)\}_{i=1}^\infty$, $\{U_i(\omega)\}_{i=1}^\infty$, обладающие свойствами:

$$1. \Lambda_i(\omega), U_i(\omega) \in \theta(\Phi), i \geq 1; U_i(\omega) \cap U_j(\omega) = \emptyset \text{ при } 1 \leq i < j < +\infty;$$

$$\Lambda_n(\omega) = \Lambda_{2n}(\omega) \cup \Lambda_{2n+1}(\omega) \cup U_n(\omega), n \geq 1;$$

$$U_n(\omega) \cap (\Lambda_{2n}(\omega) \cup \Lambda_{2n+1}(\omega)) = \emptyset, n = 1, 2, \dots; \Lambda_1(\omega) = \omega;$$

$$|U_n(\omega)| < 2^{-(n+1)} \alpha', n \geq 1; \bar{\Lambda}_n(\omega) \subset \bar{\omega};$$

$$2. |\Omega'| > |\omega| - \alpha', \text{ где } \Omega'(\omega) = \bigcap_{k=0}^\infty \bigcup_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \Lambda_n(\omega) = \omega \setminus \bigcup_{n=1}^\infty U_n(\omega);$$

$$3. \tilde{\Psi}_n(x, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Lambda_{2n}(\omega), \\ -1 & \text{при } x \in \Lambda_{2n+1}(\omega), \\ 0 & \text{при } x \in \Lambda_{2n} \cup \Lambda_{2n+1}(\omega); \end{cases}$$

$$4. \int_{\Lambda_n} \tilde{\Psi}_n(x, \omega) dx < \delta' 2^{-(n+1)}, n \geq 1;$$

5. почти всюду на множестве Ω' выполняются условия

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \tilde{\Psi}_n(x, \omega) = -\infty, \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \tilde{\Psi}_n(x, \omega) = +\infty;$$

6. последовательность полиномов $\{\Psi_n(x, \omega)\}_{n=1}^\infty$ согласована с последовательностью $\{N_k^{(0)}\}_{k=1}^\infty$, причём $N^{(0)} < n[\Psi_1(\omega)]$;

7. $|\Psi_n(x, \omega) - \tilde{\Psi}_n(x, \omega)| < 2^{-(n+1)} \delta'$ при $x \in U_n(\omega)$, $|\Psi_n(x, \omega)| \leq C$ при $x \in [0, 1]$;

8. если Φ — система Хаара и $i \in [\Psi_n(\omega)]$, то $|a_i| \leq h_i$, где a_i — коэффициент функции $\chi_i(x)$ в полиноме $\Psi_n(x, \omega)$.

Доказательство. В случаях, когда Φ — тригонометрическая система, система Уолша или произвольный ортонормированный базис пространства $C[0, 1]$, доказательство леммы 2.1 можно найти в работе [9]. Докажем эту лемму в том случае, когда Φ — система Хаара.

Положив $\Lambda = \Lambda_1(\omega)$, $\gamma_0 = 2^{-4} \alpha'$, $\beta_0 = 2^{-3} \delta'$, причём можем предполагать, что $\alpha' < \delta'$, $N' = \max\{N^{(0)}, N_1^{(0)}\}$ и применив предложение 1 определим полином $\Psi(x) = \Psi_1(x, \omega)$ и множества $\Lambda^{(1)} = \Lambda_2(\omega)$, $\Lambda^{(2)} =$

$= \Lambda_n(\omega)$, $U = U_1(\omega)$, которые удовлетворяют условиям 1. — 6. предложения 1. Предположим уже определены полиномы

$$\{\Psi_j(x, \omega)\}_{j=1}^{n-1} \text{ и множества } \{\Lambda_j(\omega)\}_{j=1}^{2^{n-1}-1}, \{U_j(\omega)\}_{j=1}^{n-1}.$$

Положим $\Lambda = \Lambda_n(\omega)$, $\eta_0 = \alpha' 2^{-(n+3)}$, $\beta_0 = \delta' 2^{-(n+2)}$, $N' = \max \{N_n^{(n)}, N[\Psi_{n-1}(\omega)]\}$ и применив предложение 1, определим полином $\Psi(x) = \Psi_n(x, \omega)$ и множества $\Lambda^{(1)} = \Lambda_{2^n}(\omega)$, $\Lambda^{(2)} = \Lambda_{2^{n+1}}(\omega)$, $U = U_n(\omega)$, которые удовлетворяют всем условиям предложения 1.

Пусть указанным способом построены полиномы

$$\{\Psi_n(x, \omega)\}_{n=1}^{\infty} \text{ и множества } \{\Lambda_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}, \{U_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Из индукционного построения и из условия 1 предложения 1 легко следует справедливость условия 1. леммы 2.1. Методом индукции легко установить, что если $2^n \leq i < j < 2^{n+1}$, то $\Lambda_i(\omega) \cap \Lambda_j(\omega) = \emptyset$. Нетрудно также убедиться, что

$$\bigcup_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} \Lambda_i(\omega) \subset \bigcup_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} \Lambda_i(\omega). \quad (2.15)$$

Обозначим

$$\Omega' = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} \Lambda_i(\omega) \right).$$

Тогда, используя (2.15) и тот факт, что $\Lambda_1(\omega) = \omega$, находим

$$\begin{aligned} \omega \setminus \Omega' &= \omega \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} \Lambda_i(\omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\omega \setminus \bigcup_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} \Lambda_i(\omega) \right) = \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} \Lambda_i(\omega) \right) \setminus \bigcup_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} \Lambda_i(\omega) = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i(\omega), \end{aligned}$$

откуда

$$|\omega \setminus \Omega'| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |U_n(\omega)| < \alpha'.$$

Так как

$$\left| \sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} \Psi_i(x, \omega) \right| > 1 - \delta' > 2^{-1} \text{ при } x \in \bigcup_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} \Lambda_i(\omega),$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} \sum_{j=m_i}^{m_i} a_j \chi_j(x), \text{ где } \Psi_i(x, \omega) = \sum_{j=m_i}^{m_i} a_j \chi_j(x), \quad (2.16)$$

расходится всюду на Ω' . Следовательно, верхний и нижний пределы частичных сумм ряда (2.16) соответственно равны $+\infty$ и $-\infty$ почти всюду на Ω' . Но так как из условия 4 предложения 1 и из того, что $\Lambda_i(\omega) \cap \Lambda_j(\omega) = \emptyset$ при $2^{n-1} \leq i < j < 2^n$ следует

$$\left\{ \sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} \Psi_i(x, \omega) \right\}^* \leq 2 \text{ при } x \in \Omega',$$

то легко убедиться, что почти всюду на Ω' выполняется условие

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \Psi_n(x, \omega) = +\infty, \quad \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \Psi_n(x, \omega) = -\infty. \quad (2.17)$$

Обозначим

$$\tilde{\Psi}_n(x, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Lambda_{2n}(\omega), \\ -1 & \text{при } x \in \Lambda_{2n+1}(\omega), \\ 0 & \text{при } x \notin \Lambda_{2n}(\omega) \cup \Lambda_{2n+1}(\omega). \end{cases}$$

Из условия 3 предложения 1 имеем

$$|\tilde{\Psi}_n(x, \omega) - \Psi_n(x, \omega)| < 2^{-(n+2)} \delta' \quad \text{при } x \in \Lambda_{2n}(\omega) \cup \Lambda_{2n+1}(\omega). \quad (2.18)$$

Отсюда, учитывая (2.17) и из определения множества Ω' , легко установить, что выполняется условие 5 леммы 2.1. Из условия 4 предложения 1 и из (2.18) имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Lambda_n(\omega)} \tilde{\Psi}_n(x, \omega) dx \right| &\leq \left| \int_{\Lambda_n(\omega)} \Psi_n(x, \omega) dx \right| + \int_{\Lambda_{2n}(\omega) \cup \Lambda_{2n+1}(\omega)} |\tilde{\Psi}_n(x, \omega) - \\ &- \Psi_n(x, \omega)| dx + \int_{U_n(\omega)} |\Psi_n(x, \omega)| dx \leq 2^{-(n+2)} \delta' + \\ &+ 2 \cdot 2^{-(n+3)} \alpha' < 2^{-(n+1)} \delta'. \end{aligned}$$

Условие 7 леммы 2.1 следует из условия 5 предложения 1. Тем самым лемма 2.1 доказана.

В условиях леммы 2.1 сделаем следующие замечания.

Замечание 2.1. Если для k и i имеем

$$U_k(\omega) \cap \Lambda_i(\omega) \neq \emptyset, \quad \text{то } \Lambda_k(\omega) \subset \Lambda_i(\omega), \quad k > i.$$

Замечание 2.2. Если для некоторых чисел $k, i, k > i$, имеем

$$\text{supp } \tilde{\Psi}_k(x, \omega) \subset \text{supp } \tilde{\Psi}_i(x, \omega) \neq \emptyset,$$

то либо $\text{supp } \tilde{\Psi}_k(x, \omega) \subset \text{supp } \tilde{\Psi}_i^+(x, \omega)$, либо $\text{supp } \tilde{\Psi}_k(x, \omega) \subset$

$\subset \text{supp } \tilde{\Psi}_i^-(x, \omega)$, где $\tilde{\Psi}_i^+(x, \omega) = 2^{-1}(|\tilde{\Psi}_i(x, \omega)| + \tilde{\Psi}_i(x, \omega))$,

$$\tilde{\Psi}_i^-(x, \omega) = \tilde{\Psi}_i(x, \omega) - \tilde{\Psi}_i^+(x, \omega).$$

Пусть $\{f_i(x)\}_{i=1}^m$ — конечная подсистема системы $\{\tilde{\Psi}_i(x, \omega)\}_{i=1}^\infty$, построенной в лемме 2.1, и пусть $\{i_k(x)\}_{k=1}^{k(x)} = \{i: f_i(x) \neq 0, i = 1, 2, \dots, m\}$ (если здесь множество справа пусто, то полагаем $k(x) = 0$, и множество слева тоже пусто).

Лемма 2.2. Существует целозначная функция $I(x)$, $0 \leq I(x) \leq m$, определенная на ω и перестановка σ последовательности $1, 2, \dots, m$ такие, что

$$\operatorname{sign} \{f_{\sigma(n_k(x))}(x)\} = \begin{cases} (-1)^{k+1} & \text{при } k \leq I(x), \\ (-1)^{I(x)+1} & \text{при } k > I(x), \end{cases}$$

где $\{n_k(x)\}_{k=1}^{k(x)}$, $n_k(x) < n_{k+1}(x)$ — множество всех тех значений n , $1 \leq n \leq m$, для которых $\sigma(n) \in \{i_k(x)\}_{k=1}^{k(x)}$.

Доказательство этой леммы можно найти в работе [6].

Замечание 2.3. Пусть функции $f_1(x), \dots, f_m(x)$ удовлетворяют условиям леммы 2.2, q и δ — некоторые числа, причем $q = \delta r$, где r — натуральное число, а d такое, что $|df_k(x)| = |\delta|$ при $x \in \operatorname{supp} |f_k(x)|$. Тогда

$$\sup_{1 \leq N \leq m} \left| q + \sum_{n=1}^N df_{\sigma(n)}(x) \right| \leq |q| + |\delta| \text{ при } x \in E, \text{ где}$$

$$E = \left\{ x : q + \sum_{n=1}^m df_n(x) = 0 \right\},$$

а $\sigma(n)$ — перестановка, удовлетворяющая условиям леммы 2.2.

Доказательство. Пусть $x \in E$, тогда из набора $df_1(x), \dots, df_m(x)$ в точке x количество отличных от нуля функций равно $k(x)$. При этом из них $(k(x) - r) 2^{-1}$ функций в точке x принимают одинаковый с q знак, а $(k(x) + r) 2^{-1}$ функций — противоположный с q знака. Ясно, что $I(x) = k(x) - r + 1$ и согласно лемме 2.2 имеем

$$\left| \sum_{n=1}^N df_{\sigma(n)}(x) \right| \leq |\delta| \text{ при } N < n_{I(x)}(x).$$

Из леммы 2.2 следует, что при возрастании N , $n_{I(x)}(x) \leq N \leq m$ суммы

$$\sum_{n=1}^N df_{\sigma(n)}(x)$$

монотонно стремятся к $-q$. Откуда получим

$$\left| q + \sum_{n=1}^N df_{\sigma(n)}(x) \right| \leq |q| + |\delta| \text{ при } x \in E, 1 \leq N \leq m.$$

Замечание 2.3 доказано.

§ 3. Основная лемма и доказательство теорем

Пусть имеем множество B_0 , $B_0 \in \mathcal{O}(\Phi)$ и полином

$$L_0(x) = \sum_{i=\tau}^{\gamma} c_i \Psi_i(x),$$

где $\{\Psi_i(x)\}_{i=\tau}^{\gamma}$ — слабо переставленный полином по системе Φ . Предположим также, что выполняются условия

$$[\Psi_i] \cap [\Psi_j] = \emptyset \text{ при } \tau \leq i < j \leq \gamma; L_0(x) \neq 0 \text{ при } x \in B_0, \quad (3.1)$$

$$\max \{ |c_i| \Psi_i^*(x) : x \in [0, 1], \tau \leq i \leq \gamma \} \leq \varepsilon_0. \quad (3.2)$$

Тогда справедлива следующая

Основная лемма. Для произвольных чисел $\varepsilon, \varepsilon > 0, p, 1 \leq p < 2$, натуральных N и $\tau', \tau' < \tau$, последовательности $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}, N_k > 0$, существуют множества F, H, B, A , полиномы

$$L(x) = \sum_{n=\tau}^{\tau'} c_n \Psi_n(x); Q_i(x) = \sum_{n=t_i+1}^{t_{i+1}} c_n \Psi_n(x), i = \tau, \tau+1, \dots, \gamma,$$

где $t_\tau = \tau', t_i < t_{i+1}$ при $i = \tau, \tau+1, \dots, \gamma$, перестановки π_i последовательностей $\{n\}_{n=t_i+1}^{t_{i+1}}, i = \tau, \tau+1, \dots, \gamma$, удовлетворяющие условиям

$$1. F \in \theta(\Phi), H \in \theta(\Phi), B \in \theta(\Phi), A \in \theta(\Phi),$$

$$F \cup H = B_0, F \cap H = \emptyset, A \cup B = F, A \cap B \leq \emptyset, |A| < \varepsilon;$$

2. $\{\Psi_n(x)\}_{n=\tau}^{\tau'+1}$ — последовательность слабо переставленных полиномов, согласованная с последовательностью $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, причем $\max |N, N[L_0]| < n[\Psi_\tau]$;

$$3. |L_0(x) + L(x)| < \varepsilon \text{ при } x \in H; L^*(x) < \varepsilon \text{ при } x_0 \in B_0;$$

$$4. L(x) \neq 0 \text{ при } x \in B, \max |c_n| \Psi_n^*(x) : x \in [0, 1], \tau' \leq n \leq \tau' + 1 < \varepsilon;$$

$$5. |L_0(x) + T(x, \sigma)| < \varepsilon \text{ при } x \in B, \text{ где } T(x, \sigma) = \sum_{i=\tau}^{\gamma} (\sigma_i) Q_i(x);$$

$$6. T^*(x, \sigma) < \varepsilon \text{ при } x \notin F; |T(x, \sigma)| < \varepsilon \text{ при } x \notin F,$$

$$7. \left\{ \sum_{n=\tau}^{\tau'} (c_n \Psi_n(x) + (\sigma_n) Q_n(x)) \right\}^* < 8 \varepsilon_0 \text{ при } x \in B,$$

$$8. \int_A |L_0(x) + L(x) + T(x, \sigma)|^p dx < \varepsilon.$$

9. В случае, когда Φ — система Хаара, полиномы $L(x)$ и $T(x, \sigma)$ из класса (h) , $h = \{h_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Доказательство. Без ограничения общности можем положить $\varepsilon < \varepsilon_0$. Для данного p выберем такие β и α , чтобы выполнялись условия

$$0 < \beta < \varepsilon, 4(\beta^2 + \alpha) < \varepsilon, (5\varepsilon_0\beta + \nu\varepsilon_0^3 + 2\nu\varepsilon_0)^p 4(\beta^{2-p} + \alpha\beta^{-p}) < 2^{-1}\varepsilon \quad (3.3)$$

(здесь и всюду ниже обозначено $\nu = \gamma - \tau + 1$).

Пусть, далее $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — такая последовательность монотонно убывающих положительных чисел, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < 4^{-1}\varepsilon. \quad (3.4)$$

Существует конечное число Φ -интервалов $\{\omega_j^{(0)}\}_{j=1}^{r_0}$, удовлетворяющих условиям

$$B_0 = \bigcup_{j=1}^{r_0} \omega_j^{(0)}; \omega_j^{(0)} \cap \omega_i^{(0)} = \emptyset \text{ при } 1 \leq j < i \leq r_0; \quad (3.5)$$

$$|L_0(x) - L_0(x')| < 4^{-1}\varepsilon \text{ при } x, x' \in \omega_j^{(0)}, 1 \leq j \leq r_0. \quad (3.6)$$

Пусть определены полиномы

$$\bar{L}(x, \omega_k^{(0)}) = \sum_{i=1}^{m_k} b_i^{(k)} \bar{\Psi}_i(x, \omega_k^{(0)}); L(x, \omega_k^{(0)}) = \sum_{i=1}^{m_k} b_i^{(k)} \Psi_i(x, \omega_k^{(0)}), \quad (3.7)$$

$k = 1, 2, \dots, j-1, j \leq r_0$, где $\Psi_i(x, \omega_k^{(0)})$, $1 \leq i \leq m_k$, слабо переставленный полином, а $\bar{\Psi}_i(x, \omega_k^{(0)})$, $i = 1, 2, \dots, m_k$, последовательность ступенчатых функций.

Положим

$$N' = \max \{N, N[L(\omega_k^{(0)})] : k = 1, 2, \dots, j-1\}, \quad (3.8)$$

$$N_k^{(0)} = N_{k+N'}, \quad k = 1, 2, \dots; \omega = \omega_j^{(0)}, \delta' = \delta_j, \alpha' = \alpha r^{-1}$$

и применив лемму 2.1, определим последовательности полиномов

$\{\Psi_i(x, \omega_j^{(0)})\}_{i=1}^{\infty}$, ступенчатых функций $\{\bar{\Psi}_i(x, \omega_j^{(0)})\}_{i=1}^{\infty}$ и множеств $\{\Lambda_i(\omega_j^{(0)})\}_{i=1}^{\infty}$, $\{U_i(\omega_j^{(0)})\}_{i=1}^{\infty}$, удовлетворяющих всем условиям леммы 2.1.

Выберем точку $x_j, x_j \in \omega_j^{(0)}$, из (3.1) имеем $L_0(x_j) \neq 0$. Натуральное число $q_j^{(0)}$ и положительное число α_j определим так, что

$$(q_j^{(0)})^{-1} \max \{|L(x_j), C+1|\} < 4^{-1}\epsilon, \quad \alpha_j = (q_j^{(0)})^{-1} |L_0(x_j)|. \quad (3.10)$$

Исходя из ряда

$$L'(x, \omega_j^{(0)}) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_j \bar{\Psi}_i(x, \omega_j^{(0)}) \quad (3.11)$$

составим новый ряд следующим образом. Положим

$$\tilde{L}'(x, \omega_j^{(0)}) \sim \sum_{i=1}^{\infty} c_i^{(j)} \bar{\Psi}_i(x, \omega_j^{(0)}), \quad (3.12)$$

где коэффициенты $\{c_i^{(j)}\}_{i=1}^{\infty}$ определены следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} c_i^{(j)} &= \alpha_j, \text{ если } 0 < |L_0(x_j) + S_m(x, \tilde{L}'(\omega_j^{(0)}))| \leq \nu \epsilon_0 \beta^{-1} \text{ при всех} \\ x, x \in \Lambda_i(\omega_j^{(0)}) \text{ и для любого } m, m = 1, 2, \dots, i-1, \\ c_i^{(j)} &= 0 \text{ в остальных случаях.} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Обозначим

$$I_{j,m} = \{i : L_0(x_j) + S_m(x, \tilde{L}'(\omega_j^{(0)})) = 0 \text{ при } x \in \Lambda_i(\omega_j^{(0)}), i \leq 2m+1\}, \quad (3.14)$$

$$K_{j,m} = \{i : |L_0(x_j) + S_m(x, \tilde{L}'(\omega_j^{(0)}))| > \nu \epsilon_0 \beta^{-1} \text{ при } x \in \Lambda_i(\omega_j^{(0)}), i \leq 2m+1\},$$

$$H_m^{(j)} = \bigcup_{i \in I_{j,m}} \Lambda_i(\omega_j^{(0)}), F_m^{(j)} = \bigcup_{i \in K_{j,m}} \Lambda_i(\omega_j^{(0)}), G_m^{(j)} = \omega_j^{(0)} \setminus (H_m^{(j)} \cup F_m^{(j)}). \quad (3.15)$$

Легко проверить, что выполняются следующие условия:

а) если $c_i^{(j)} = 0$, то $c_k^{(j)} = 0$ при тех $k, k > i$, для которых

$$\Lambda_k(\omega_j^{(0)}) \subset \Lambda_i(\omega_j^{(0)});$$

б) из (3.10)–(3.13) и из условия 3. леммы 2.1 следует, что если хотя бы для одного $m, m < i$ выполняется неравенство

$\{L_0(x_j) + S_m(x, \tilde{L}'(\omega_j^{(0)}))\} \operatorname{sign} \{L_0(x_j)\} \leq 0$ на $\Lambda_l(\omega_j^{(0)})$, то

$L_0(x_j) + S_l(x, \tilde{L}'(\omega_j^{(0)})) = 0$ при $x \in \Lambda_l(\omega_j^{(0)})$ и всех $l, l > m$;

в) если хотя бы для одного $m, m < i$ выполняется условие

$|L_0(x_j) + S_m(x, \tilde{L}'(\omega_j^{(0)}))| > \nu \varepsilon_0 \beta^{-1}$ при $x \in \Lambda_l(\omega_j^{(0)})$, то

$L_0(x_j) + S_l(x, \tilde{L}'(\omega_j^{(0)})) = L_0(x_j) + S_m(x, \tilde{L}'(\omega_j^{(0)}))$ при $x \in \Lambda_l(\omega_j^{(0)})$,
 $l = m, m+1, \dots$;

г) из условий б), в) из (3.14), (3.15) легко следует, что

$$H_m^{(j)} \subset H_{m+1}^{(j)}, \quad F_m^{(j)} \subset F_{m+1}^{(j)}, \quad G_m^{(j)} \supset G_{m+1}^{(j)};$$

д) из определения множества $F_m^{(j)}$, условия в) и (3.10) легко установить, что

$|L_0(x_j) + S_m(x, \tilde{L}'(\omega_j^{(0)}))| \leq \nu \beta^{-1} \varepsilon_0 + 4^{-1} \varepsilon$ при $x \in \omega_j^{(0)}, m \geq 1$;

е) из условия 3. леммы 2.1 имеем $\tilde{\Psi}_i(x, \omega_j^{(0)}) = 0$ при $x \in \omega_j^{(0)}, i=1, 2, \dots$

Из условий 2. и 5. леммы 2.1 следует, что почти для каждого $x, x \in \Omega'(\omega_j^{(0)})$ существует число m , удовлетворяющее условию $x \in F_m^{(j)} \cup H_m^{(j)}$. Отсюда и из (3.15), с точностью до множества меры нуль, получим

$$U(\omega_j^{(0)}) = (\omega_j^{(0)} \setminus \Omega'(\omega_j^{(0)})) \supset \omega_j^{(0)} \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} (F_m^{(j)} \cup H_m^{(j)}) = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m^{(j)}.$$

Учитывая также условие г), будем иметь

$$\alpha' \geq |U(\omega_j^{(0)})| \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \bigcap_{m=1}^m G_m^{(j)} \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} |G_m^{(j)}|.$$

Следовательно, существует целое число m_j , удовлетворяющее условию

$$|G_{m_j}^{(j)}| < 2\alpha' = 2\alpha r^{-1}. \quad (3.16)$$

Обозначим

$$F^{(j)} = F_{m_j}^{(j)}, \quad H^{(j)} = H_{m_j}^{(j)}, \quad G^{(j)} = G_{m_j}^{(j)}, \quad (3.17)$$

$$L(x, \omega_j^{(0)}) = \sum_{i=1}^{m_j} c_i^{(j)} \Psi_i(x, \omega_j^{(0)}), \quad \tilde{L}(x, \omega_j^{(0)}) = \sum_{i=1}^{m_j} c_i^{(j)} \tilde{\Psi}_i(x, \omega_j^{(0)}). \quad (3.18)$$

Оценим меру множества $F^{(j)}$. Для этого заметим, что из б) и условий 1. и 3. леммы 2.1 вытекает

$$(L_0(x_j) + \tilde{L}(x, \omega_j^{(0)})) \operatorname{sign} L_0(x_j) \geq 0 \text{ при } x \in \omega_j^{(0)}.$$

Отсюда, воспользовавшись условием 4 леммы 2.1, получим

$$\int_{\omega_j^{(0)}} |L_0(x) + \tilde{L}(x, \omega_j^{(0)})| dx = \operatorname{sign}(L_0(x_j)) \int_{\omega_j^{(0)}} |L_0(x)| dx$$

$$+ \tilde{L}(x, \omega_j^{(0)}) \} dx \leq |L_0(x_j)| |\omega_j^{(0)}| + \left| \int_{\omega_j^{(0)}} \tilde{L}(x, \omega_j^{(0)}) dx \right| \leq |L_0(x_j)| |\omega_j^{(0)}| + \delta_j.$$

Учитывая условия (3.14), (3.15), получим

$$\begin{aligned} |L_0(x_j)| |\omega_j^{(0)}| + \delta_j &\geq \int_{\omega_j^{(0)}} |L_0(x_j) + \tilde{L}(x, \omega_j^{(0)})| dx \geq \\ &\geq \int_{F^{(j)}} |L_0(x_j) + \tilde{L}(x, \omega_j^{(0)})| dx \geq \nu \varepsilon_0 \beta^{-1} |F^{(j)}|. \end{aligned}$$

Откуда, исходя из условий $|L_0(x_j)| \leq (\gamma - \tau + 1) \varepsilon_0 = \nu \varepsilon_0$ и $\nu \geq 1$ получим

$$|F^{(j)}| \leq \beta |\omega_j^{(0)}| + \delta_j (\nu \varepsilon_0)^{-1} \beta \leq \beta |\omega_j^{(0)}| + \delta_j \beta \varepsilon^{-1}. \quad (3.19)$$

Предположим, что указанным способом построены полиномы и множества в формулах (3.17) и (3.18) при $j = 1, 2, \dots, r_0$. Обозначим

$$\begin{aligned} F' = \bigcup_{j=1}^{r_0} F^{(j)}; \quad H = \bigcup_{j=1}^{r_0} H^{(j)}; \quad G = \bigcup_{j=1}^{r_0} G_j; \quad F = F' \cup G, \\ L(x) = \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{i=1}^{m_j} c_i^{(j)} \Psi_i(x, \omega_j^{(0)}) = \sum_{k=\tau'}^{\gamma'} c_k \Psi_k(x), \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\tilde{L}(x) = \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{i=1}^{m_j} c_i^{(j)} \tilde{\Psi}_i(x, \omega_j^{(0)}) = \sum_{k=\tau'}^{\gamma'} c_k \tilde{\Psi}_k(x),$$

где $\gamma' = m_1 + m_2 + \dots + m_{r_0} + \tau' - 1$, $c_k \Psi_k(x) = c_i^{(j)} \Psi_i(x, \omega_j^{(0)})$,

$c_k \tilde{\Psi}_k(x) = c_i^{(j)} \tilde{\Psi}_i(x, \omega_j^{(0)})$, как только

$$k = \tau' + \sum_{l=1}^{j-1} m_l + i - 1.$$

Из (3.4), (3.5), (3.16), (3.19) имеем

$$|F'| \leq \sum_{j=1}^{r_0} |F^{(j)}| \leq \beta \sum_{j=1}^{r_0} |\omega_j^{(0)}| + \varepsilon^{-1} \beta \sum_{j=1}^{r_0} \delta_j < 2\beta; \quad |F| = |F'| + |G| \leq 2\alpha + 2\beta, \quad (3.21)$$

Оценим сверху величину $|L_0(x) + L(x)|$ при $x \in H$. Пусть x — некоторая фиксированная точка множества H . Ясно, что существует единственное число l , удовлетворяющее условию $x \in \omega_l^{(0)}$, $1 \leq l \leq r_0$ и следовательно $x \in H_{m_l}^{(l)}$

$$|L_0(x) + L(x)| \leq |L_0(x) - L_0(x_l)| + |L_0(x_l) + \tilde{L}(x)| + |L(x) - \tilde{L}(x)|.$$

Из условия (3.6) имеем, что первое слагаемое в правой части неравенства меньше, чем $4^{-1} \varepsilon$. Исходя из условия е), из определения множества $H_{m_l}^{(l)}$, получим

$$|L_0(x_l) + \tilde{L}(x)| = \left| \sum_{i=1}^{m_l} c_i^{(l)} \tilde{\Psi}_i(x, \omega_l^{(0)}) + L_0(x_l) \right| = 0.$$

Рассмотрим последнее слагаемое

$$|L(x) - \tilde{L}(x)| \leq \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{i=1}^{m_j} |c_i^{(j)}| |\Psi_i(x, \omega_j^{(0)}) - \tilde{\Psi}_i(x, \omega_j^{(0)})|.$$

Предположим существует такое число i_0 , что $1 \leq i_0 \leq m_1$ и $x \in U_{i_0}(\omega_1^{(0)})$. Так как $x \in H_{m_1}^{(1)}$, то из (3.14) и (3.15) следует, что $x \in \Lambda_{i_0}(\omega_1^{(0)}) \subset H_{m_1}^{(1)}$, $i_0 \in I_{1, m_1}$. Тогда $\Lambda_{i_0}(\omega_1^{(0)}) \cap U_{i_0}(\omega_1^{(0)}) \neq \emptyset$ и согласно замечанию 2.1 имеем $\Lambda_{i_0}(\omega_1^{(0)}) \subset \Lambda_{i_0}(\omega_1^{(0)})$. Из свойства а) и (3.15), учитывая, что $i_0 \in I_{1, m_1}$, получим $c_{i_0}^{(1)} = 0$. Поэтому независимо от существования такого числа i_0 из условия 7. леммы 2.1 последует справедливость неравенства

$$|c_i^{(j)}| |\Psi_i(x, \omega_j^{(0)}) - \tilde{\Psi}_i(x, \omega_j^{(0)})| < \delta_j 2^{-(i+1)} \text{ при } 1 \leq i \leq m_j, j = 1, 2, \dots, r_0.$$

Отсюда и из (3.4)

$$|L(x) - \tilde{L}(x)| \leq \sum_{j=1}^{r_0} \delta_j < 4^{-1} \varepsilon.$$

Следовательно

$$|L_0(x) + L(x)| < \varepsilon 4^{-1} + \varepsilon 4^{-1} < \varepsilon \text{ при } x \in H. \quad (3.22)$$

Пусть теперь $x \in \overline{B_0}$, тогда $x \in \omega_j^{(0)}$ при $j = 1, 2, \dots, r_0$ и поэтому $x \in U_i(\omega_j^{(0)})$, $j = 1, 2, \dots, r_0$, $i = 1, 2, \dots, m_j$. Отсюда, из условий 3, 7. леммы 2.1, из (3.10)–(3.13) и е) получим

$$\begin{aligned} L^*(x) &\leq \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{i=1}^{m_j} |c_i^{(j)}| |\Psi_i(x, \omega_j^{(0)})| + \\ &+ \sup \{|c_i^{(j)}| |\Psi_i^*(x, \omega_j^{(0)})| : 1 \leq j \leq r_0, 1 \leq i \leq m_j\} \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{i=1}^{m_j} |c_i^{(j)}| |\Psi_i(x, \omega_j^{(0)}) - \tilde{\Psi}_i(x, \omega_j^{(0)})| + \frac{\varepsilon}{4} \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{r_0} \delta_j + 4^{-1} \varepsilon < 2^{-1} \varepsilon \text{ при } x \in \overline{B_0}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.22) следует справедливость условия 3 основной леммы.

Оценим величину $|L_0(x) + L(x)|$ при $x \in F$. Пусть x — фиксированная точка множества F , а l , $1 \leq l \leq r_0$, такое число, что $x \in \omega_l^{(0)}$. Из условий (3.6), д) и е) имеем

$$\begin{aligned} |L_0(x) + L(x)| &\leq |L_0(x) - L_0(x_l)| + |L_0(x_l) + \tilde{L}(x)| + |L(x) - \tilde{L}(x)| < \\ &< \varepsilon 4^{-1} + \nu \beta^{-1} \varepsilon_0 + \varepsilon 4^{-1} + \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{i=1}^{m_j} |\Psi_i(x, \omega_j^{(0)}) - \tilde{\Psi}_i(x, \omega_j^{(0)})|. \end{aligned}$$

Если существует такое i_0 , что $x \in U_{i_0}(\omega_l^{(0)})$, то из условий 3., 7. леммы 2.1 и (3.10) следует

$$|c_{i_0}^{(l)}| |\Psi_{i_0}(x, \omega_l^{(0)}) - \tilde{\Psi}_{i_0}(x, \omega_l^{(0)})| < \varepsilon 4^{-1} < \varepsilon 4^{-1} + \delta_l 2^{-(i_0+1)}.$$

Учитывая, что множества $I_j(\omega_j^{(0)})$, $1 \leq j \leq r_0$, $1 \leq i \leq \pi_j$, попарно не пересекаются из (3.8) и из условия 7. леммы 2.1 получим

$$|c_i^{(j)}| |\Psi_i(x, \omega_j^{(0)}) - \tilde{\Psi}_i(x, \omega_j^{(0)})| < \delta_j \cdot 2^{-(i+1)} \text{ при } x \in F, (i, j) \neq (i_0, l). \quad (3.23)$$

Следовательно, независимо от существования такого числа i_0 , справедливо неравенство

$$|L_0(x) + L(x)| < \nu \beta^{-1} \varepsilon_0 + 3 \varepsilon 4^{-1} + \sum_{j=1}^r \delta_j < \nu \beta^{-1} \varepsilon_0 + \varepsilon \text{ при } x \in F. \quad (3.24)$$

Для каждой функции $c_n \Psi_n(x)$, $\tau \leq n \leq \gamma$, определим полином $Q(x, \sigma_n)$ следующим образом. Пусть определены последовательности целых чисел $\{r_i\}_{i=\tau-1}^{n-1}$, множеств $\{B^{(i)}\}_{i=\tau-1}^{n-1}$ и полиномов

$$Q(x, \sigma_i) = (\sigma_i) \sum_{i=t_i+1}^{t_{i+1}} c_i \Psi_i(x), \quad \bar{Q}(x, \sigma_i) = (\sigma_i) \sum_{i=t_i+1}^{t_{i+1}} c_i \tilde{\Psi}_i(x),$$

$$j = \tau, \tau+1, \dots, n-1; n-1 < \gamma,$$

где $\Psi_i(x)$, $t_i+1 \leq i \leq t_n$ — слабо переставленный полином, $\Psi_i(x)$ — ступенчатая функция. Кроме того, пусть

$$B^{(i)} \in \theta(\Phi), B^{(\tau-1)} = F', B^{(i)} \subset B^{(i-1)} \text{ при } \tau \leq i \leq n-1. \quad (3.25)$$

Существуют такие Φ -интервалы, $\omega_j^{(n)}$, $j=1, 2, \dots, r_n$, что

$$B^{(n-1)} = \bigcup_{j=1}^{r_n} \omega_j^{(n)}, \omega_j^{(n)} \cap \omega_l^{(n)} \neq \emptyset \text{ при } 1 \leq j < l \leq r_n, \quad (3.26)$$

$$c_n | \Psi_n(x) - \Psi_n(x') | < \varepsilon (4\nu)^{-1} \text{ при } x, x' \in \omega_j^{(n)}, 1 \leq j \leq r_n.$$

Предположим также, что построены полиномы

$$Q(x, \omega_j^{(n)}) = \sum_{i=1}^{t_j} d_i^{(n)} \Psi_i(x, \omega_j^{(n)}), 1 \leq j \leq s-1, s \leq r_n. \quad (3.27)$$

где $\Psi_i(x, \omega_j^{(n)})$ — слабо переставленный полином. Обозначим

$$k_s^{(n)} = t_n - \tau' + 1 + \sum_{j=1}^{s-1} l_j; r_{\tau-1} = r_0; j(s, n) = \sum_{i=\tau-1}^{n-1} r_i + 3. \quad (3.28)$$

Положим

$$\omega = \omega_s^{(n)}, \alpha' = \alpha(\nu r_n)^{-1}, \delta' = \delta_{j(s, n)} |F'| < \delta_{j(s, n)}, \quad (3.29)$$

$$N^{(n)} = N[Q(\omega_{s-1}^{(n)})]; |N_k^{(n)}|_{k=1}^\infty = |N k + k_s^{(n)}|_{k=1}^\infty. \quad (3.30)$$

При $s=1$ полагаем $N^{(0)} = N[Q(\tau_{n-1})]$, $k_1^{(n)} = t_n - \tau' + 1$, а если одновременно $n=\tau$, то берем $N^{(0)} = N[L]$, $k_1^{(\tau)} = \tau' - \tau' + 1$.

Применим лемму 2.1 для величин, приведенных в (3.29) и (3.30), определим последовательности слабо переставленных полиномов $\{\Psi_i(x, \omega_s^{(n)})\}_{i=1}^\infty$, ступенчатых функций $\{\tilde{\Psi}_i(x, \omega_s^{(n)})\}_{i=1}^\infty$ и множеств $\{\Lambda_i \cdot (\omega_s^{(n)})\}_{i=1}^\infty$, $\{U_i(\omega_s^{(n)})\}_{i=1}^\infty$.

Выберем точку $x_s^{(n)}$, $x_s^{(n)} \in \omega_s^{(n)}$. Натуральное число $q_s^{(n)}$ и число $b_s^{(n)}$ определим так, чтобы выполнялись условия

$$(q_s^{(n)})^{-1} \max \{|c_n \Psi_n(x_s^{(n)})|, C+1\} < \varepsilon (4\nu)^{-1}, \quad b_s^{(n)} = |c_n \Psi_n(x_s^{(n)})| (q_s^{(n)})^{-1}. \quad (3.31)$$

В том случае, когда $c_n \Psi_n(x_s^{(n)}) = 0$ полагаем

$$Q(x, \omega_s^{(n)}) = 0 \cdot \Psi_1(x, \omega_s^{(n)}), \quad \tilde{Q}(x, \omega_s^{(n)}) = 0 \cdot \tilde{\Psi}_1(x, \omega_s^{(n)}). \quad (3.32)$$

Пусть $c_n \Psi_n(x, \omega_s^{(n)}) \neq 0$. Рассмотрим следующие ряды:

$$\tilde{Q}'(x, \omega_s^{(n)}) \sim \sum_{i=1}^{\infty} b_s^{(n)} \tilde{\Psi}_i(x, \omega_s^{(n)}), \quad \tilde{Q}''(x, \omega_s^{(n)}) \sim \sum_{i=1}^{\infty} d_{s,i}^{(n)} \Psi_i(x, \omega_s^{(n)}), \quad (3.33)$$

где коэффициенты $d_{s,i}^{(n)}$, $i \geq 1$ определяются следующим образом:

$$d_{s,i}^{(n)} = b_s^{(n)}, \text{ если } 0 < |c_n \Psi_n(x_s^{(n)}) + S_l(x, \tilde{Q}'(\omega_s^{(n)}))| < \nu \beta^{-1} \varepsilon_0 \quad (3.34)$$

при $x \in \Lambda_l(\omega_s^{(n)})$, $l = 1, 2, \dots, i-1$.

$d_{s,i}^{(n)} = 0$ — в остальных случаях.

Из свойств леммы 2.1, (3.31), (3.33) и (3.34) легко убедиться в справедливости следующих утверждений:

а') Если $d_{s,i}^{(n)} = 0$, то $d_{s,k}^{(n)} = 0$ для тех k , $k > i$, при которых

$$\Lambda_k(\omega_s^{(n)}) \subset \Lambda_i(\omega_s^{(n)}).$$

б') Из условия 3 леммы 2.1 нетрудно убедиться, что если хотя бы для одного m , $m < i$, выполняется неравенство

$$\{c_n \Psi_n(x_s^{(n)}) + S_m(x, \tilde{Q}''(\omega_s^{(n)}))\} \operatorname{sign} \{c_n \Psi_n(x, \omega_s^{(n)})\} \leq 0 \quad \text{при } x \in \Lambda_l(\omega_s^{(n)}),$$

то $c_n \Psi_n(x_s^{(n)}) + S_l(x, \tilde{Q}''(\omega_s^{(n)})) = 0$ при $x \in \Lambda_l(\omega_s^{(n)})$, $l = m, m+1, \dots$.

в') Если хотя бы для одного m , $m < i$ выполняется условие

$$c_n \Psi_n(x_s^{(n)}) + S_m(x, \tilde{Q}''(\omega_s^{(n)})) < \nu \varepsilon_0 \beta^{-1} \quad \text{при } x \in \Lambda_l(\omega_s^{(n)}),$$

то $c_n \Psi_n(x_s^{(n)}) + S_l(x, \tilde{Q}''(\omega_s^{(n)})) = c_n \Psi_n(x_s^{(n)}) + S_m(x, \tilde{Q}''(\omega_s^{(n)}))$

при $x \in \Lambda_l(\omega_s^{(n)})$, $l = m, m+1, \dots$.

г') Из (3.31)–(3.34), а также из условия 3. леммы 2.1 имеем

$$0 \leq \{c_n \Psi_n(x_s^{(n)}) + S_m(x, \tilde{Q}''(\omega_s^{(n)}))\} \operatorname{sign} \{c_n \Psi_n(x_s^{(n)})\} \leq \nu \beta^{-1} \varepsilon_0 + \varepsilon (4\nu)^{-1}$$

при $x \in \omega_s^{(n)}$, $1 \leq m < +\infty$.

д') $\tilde{\Psi}_l(x, \omega_s^{(n)}) = 0$ при $x \in \omega_s^{(n)}$, $l = 1, 2, \dots$.

Обозначим

$$I_{s,l} = \{i : c_n \Psi_n(x_s^{(n)}) + S_l(x, \tilde{Q}''(\omega_s^{(n)})) = 0 \text{ при } x \in \Lambda_l(\omega_s^{(n)}), i \leq 2l+1,$$

$$K_{n, s, l} = \{i: |c_n \Psi_n(x_s^{(n)}) + S_l(x, \tilde{Q}''(\omega_s^{(n)}))| \geq \nu \beta^{-1} \varepsilon_0, x \in \Lambda_l(\omega_s^{(n)}), i \leq 2l+1, \quad (3.35)$$

$$B_{s, l}^{(n)} = \bigcup_{i \in I_{n, s, l}} \Lambda_i(\omega_s^{(n)}), D_{s, l}^{(n)} = \bigcup_{i \in K_{n, s, l}} \Lambda_i(\omega_s^{(n)}); E_{s, l}^{(n)} = \omega_s^{(n)} \setminus (B_{s, l}^{(n)} \cup D_{s, l}^{(n)}).$$

Из условия 5' леммы 2. б'), и в') нетрудно установить, что почти для каждого x , $x \in \Omega'(\omega_s^{(n)})$ существует такое натуральное число $i(x)$, что

$$x \in B_{s, l}^{(n)} \cup D_{s, l}^{(n)} \text{ при } l > i(x). \quad (3.36)$$

Из а'), б'), в') легко следует, что

$$B_{s, l}^{(n)} \subset B_{s, l+1}^{(n)}, D_{s, l}^{(n)} \subset D_{s, l+1}^{(n)}, E_{s, l}^{(n)} \supset E_{s, l+1}^{(n)}. \quad (3.37)$$

Используя условие 4. леммы 2.1, а также условие г') и (3.30), получим

$$\begin{aligned} & \int_{\omega_s^{(n)}} |c_n \Psi_n(x_s^{(n)}) + S_l(x, \tilde{Q}''(\omega_s^{(n)}))| dx = \\ & = \text{sign} \{c_n \Psi_n(x_s^{(n)})\} \int_{\omega_s^{(n)}} \{c_n \Psi_n(x_s^{(n)}) + S_l(x, \tilde{Q}''(\omega_s^{(n)}))\} dx \leq \\ & \leq |c_n \Psi_n(x_s^{(n)})| |\omega_s^{(n)}| + \delta_{j(s, n)} |F'|. \end{aligned}$$

Из (3.35) и того, что $D_{s, l}^{(n)} \subset \omega_s^{(n)}$, будем иметь

$$\begin{aligned} |c_n \Psi_n(x_s^{(n)})| |\omega_s^{(n)}| + \delta_{j(s, n)} |F'| & \geq \int_{D_{s, l}^{(n)}} |c_n \Psi_n(x_s^{(n)}) + S_l(x, \tilde{Q}''(\omega_s^{(n)}))| dx > \\ & \geq \nu \beta^{-1} \varepsilon_0 |D_{s, l}^{(n)}|. \end{aligned}$$

Откуда, учитывая, что $\omega_s^{(n)} \subset B^{(n-1)} \subset F'$ и $|c_n \Psi_n(x_s^{(n)})| < \varepsilon_0$, получим

$$|D_{s, l}^{(n)}| \leq |\omega_s^{(n)}| \beta \nu^{-1} + \delta_{j(s, n)} (\nu \varepsilon_0)^{-1} \beta |F'|. \quad (3.38)$$

Из (3.36) следует, что с точностью до множества меры нуль справедливо включение

$$\Omega'(\omega_s^{(n)}) \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} (B_{s, l}^{(n)} \cup D_{s, l}^{(n)})$$

и следовательно из условия 2. леммы 2.1

$$U(\omega_s^{(n)}) = \omega_s^{(n)} \setminus \Omega'(\omega_s^{(n)}) \supset \omega_s^{(n)} \setminus \bigcup_{l=1}^{\infty} (B_{s, l}^{(n)} \cup D_{s, l}^{(n)}) = \bigcap_{l=1}^{\infty} E_{s, l}^{(n)}.$$

Тогда из (3.30) и (3.37) имеем

$$\lim_{l \rightarrow \infty} |E_{s, l}^{(n)}| \leq |U(\omega_s^{(n)})| = \alpha(\nu r)^{-1}.$$

Выберем целое число $l_s^{(n)}$ настолько большим, чтобы

$$|E_{s, l_s^{(n)}}^{(n)}| < 2\alpha(\nu r)^{-1}. \quad (3.39)$$

Обозначим

$$\tilde{Q}(x, \omega_s^{(n)}) = \sum_{i=1}^{l_s^{(n)}} d_{s,i}^{(n)} \tilde{\Psi}_i(x, \omega_s^{(n)}); \quad Q(x, \omega_s^{(n)}) = \sum_{i=1}^{l_s^{(n)}} d_{s,i}^{(n)} \Psi_i(x, \omega_s^{(n)}), \quad (3.40)$$

$$B_s^{(n)} = B_{s, l_s^{(n)}}^{(n)}, \quad D_s^{(n)} = D_{s, l_s^{(n)}}^{(n)}, \quad E_s^{(n)} = E_{s, l_s^{(n)}}^{(n)}.$$

Учитывая условие б') из 3.35 и 3.40 имеем

$$c_n \Psi_n(x_s^{(n)}) + \tilde{Q}(x, \omega_s^{(n)}) = 0 \text{ при } x \in B_s^{(n)}. \quad (3.41)$$

Отсюда, так как при любом i и x , $x \in B_s^{(n)}$, $1 \leq i \leq l_s^{(n)}$, из (3.31) (3.34) из условия 3. леммы 2.1 имеем, что либо $d_{s,i}^{(n)} = 0$, либо $d_{s,i}^{(n)} = b_s^{(n)}$, то из замечания 2.3 следует существование такой перестановки $\pi_s^{(n)}$ набора чисел $1, 2, \dots, l_s^{(n)}$, что

$$\left. \begin{aligned} R_s^{(n)}(x) &= \sup_{1 \leq N < l_s^{(n)}} |c_n \Psi_n(x_s^{(n)}) + \sum_{i=1}^N d_{s, \sigma_s^{(n)}(i)} \Psi_{\sigma_s^{(n)}(i)}(x)| \leq \\ &\leq |c_n \Psi_n(x_s^{(n)})| + b_s^{(n)} \leq \epsilon_0 + \epsilon 4^{-1} \text{ при } x \in B_s^{(n)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Пусть x — некоторая фиксированная точка множества $B_s^{(n)}$. Тогда можно указать такое число i_0 , $1 \leq i_0 \leq 2l_s^{(n)} + 1$, что $x \in \Lambda_{i_0}(\omega_s^{(n)}) \subset B_s^{(n)}$. Если существует такое число i' , $1 \leq i' \leq 2l_s^{(n)} + 1$, что $x \in U_{i'}(\omega_s^{(n)})$, то согласно замечанию 2.1 будем иметь $\Lambda_{i'}(\omega_s^{(n)}) \subset \Lambda_{i_0}(\omega_s^{(n)})$ и из а'), (3.35) (3.40) получим $d_{s,i'}^{(n)} = 0$. Следовательно, независимо от существования такого числа i' , из условия 7. леммы 2.1 и из (3.30)

$$|d_{s,i}^{(n)}| |\Psi_i(x, \omega_s^{(n)}) - \tilde{\Psi}_i(x, \omega_s^{(n)})| < 2^{-(i+1)} \delta_{j(s,n)} \text{ при } 1 \leq i \leq l_s^{(n)}, \quad x \in B_s^{(n)}. \quad (3.43)$$

Из условий (3.2), (3.26), (3.41), (3.42) будем иметь

$$\begin{aligned} &|c_n \Psi_n(x) + Q(x, \omega_s^{(n)})| \leq |c_n \Psi_n(x) - c_n \Psi_n(x_s^{(n)})| + \\ &+ |c_n \Psi_n(x_s^{(n)}) + \tilde{Q}(x, \omega_s^{(n)})| + \sum_{i=1}^{l_s^{(n)}} |d_{s,i}^{(n)}| |\Psi_i(x, \omega_s^{(n)}) - \\ &- \tilde{\Psi}_i(x, \omega_s^{(n)})| \leq \epsilon (4\nu)^{-1} + \delta_{j(s,n)} \text{ при } x \in B_s^{(n)}, \quad (3.44) \\ &|c_n \Psi_n(x) + (\sigma_s^{(n)}) Q(x, \omega_s^{(n)})|^* \leq |c_n \Psi_n(x) + c_n \Psi_n(x) - c_n \Psi_n(x_s^{(n)})| + \\ &+ R_s^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{l_s^{(n)}} |d_{s,i}^{(n)}| |\Psi_i(x, \omega_s^{(n)}) - \tilde{\Psi}_i(x, \omega_s^{(n)})| + \\ &+ \sup_{1 \leq i \leq l_s^{(n)}} |d_{s,i}^{(n)}| |\Psi_i(x, \omega_s^{(n)})| \leq \epsilon_0 + \epsilon (4\nu)^{-1} + (\epsilon_0 + \epsilon 4^{-1}) + \delta_{j(s,n)} + \epsilon (4\nu)^{-1} \leq \\ &\leq 2(\epsilon_0 + \epsilon) + \delta_{j(s,n)} \text{ при } x \in B_s^{(n)}. \quad (3.45) \end{aligned}$$

Так как $U_i(\omega_s^{(n)}) \subset \omega_s^{(n)}$ при $1 \leq i \leq l_s^{(n)}$, то исходя из (3.30), (3.31) и условий 1., 3., 7. леммы 2.1 имеем

$$(\sigma_s^{(n)}) Q^*(x, \omega_s^{(n)}) < \varepsilon + \delta_{j(s, n)}; |(\delta_s^{(n)}) Q(x, \omega_s^{(n)})| < \delta_{j(s, n)} \text{ при } x \in \omega_s^{(n)}. \quad (3.46)$$

Оценим величину $|Q(x, \omega_s^{(n)})|$ при $x \in D_s^{(n)} \cup E_s^{(n)}$. Из (3.2), г') будем иметь

$$\begin{aligned} |Q(x, \omega_s^{(n)})| &\leq |c_n \Psi_n(x_s^{(n)})| + |c_n \Psi_n(x_s^{(n)}) + \bar{Q}(x, \omega_s^{(n)})| + \\ &+ |Q(x, \omega_s^{(n)}) - \bar{Q}(x, \omega_s^{(n)})| < \varepsilon_0 + v\varepsilon_0 \beta^{-1} + \varepsilon + \\ &+ \sum_{i=1}^{l_s^{(n)}} |d_{s,i}^{(n)}| |\Psi_i(x, \omega_s^{(n)}) - \bar{\Psi}_i(x, \omega_s^{(n)})|. \end{aligned}$$

Для оценки последней суммы заметим, что так как множества $U_i(\omega_s^{(n)})$, $1 \leq i \leq l_s^{(n)}$, попарно не пересекаются, то для данного x может существовать только одно множество $U_{i'}(\omega_s^{(n)})$, которое содержит эту точку. В этом случае из (3.3) и из условий 3., 7. леммы 2.1 получим

$$|d_{s,i'}^{(n)}| |\Psi_{i'}(x, \omega_s^{(n)}) - \bar{\Psi}_{i'}(x, \omega_s^{(n)})| \leq (C+1) b_s^{(n)} < \varepsilon 4^{-1} < 4^{-1} \varepsilon + \delta_{j(s, n)} 2^{-(l+1)}.$$

При $i \neq i'$, $1 \leq i \leq l_s^{(n)}$ имеем

$$|d_{s,i}^{(n)}| |\Psi_i(x, \omega_s^{(n)}) - \bar{\Psi}_i(x, \omega_s^{(n)})| < \delta_{j(s, n)} 2^{-(l+1)}.$$

Следовательно, независимо от существования такого числа i' , из условия $\varepsilon < \varepsilon_0$ легко убедиться, что

$$|Q(x, \omega_s^{(n)})| \geq v\varepsilon_0 \beta^{-1} + 3\varepsilon_0 + \delta_{j(s, n)} \text{ при } x \in D_s^{(n)} \cup E_s^{(n)}. \quad (3.47)$$

Предположим указанным способом построены полиномы и множества в (3.40) при $s=1, 2, \dots, r_n$. Обозначим

$$B^{(n)} = \bigcup_{s=1}^{r_n} B_s^{(n)}, D^{(n)} = \bigcup_{s=1}^{r_n} D_s^{(n)}, E^{(n)} = \bigcup_{s=1}^{r_n} E_s^{(n)},$$

$$d_{s,i}^{(n)} \Psi_i(x, \omega_s^{(n)}) = c_j \Psi_j(x), \text{ если } j = t_n + \sum_{k=1}^{s-1} l_k^{(n)} + i \quad (3.48)$$

(при $s=1$ здесь сумму по k полагаем равной нулю)

$$Q(x, \sigma_n) = \sum_{s=1}^{r_n} \sum_{i=1}^{l_s^{(n)}} d_{s, \sigma_s^{(n)}(i)} \Psi_{\sigma_s^{(n)}(i)}(x) = (\sigma_n) \sum_{i=t_n+1}^{t_{n+1}} c_i \Psi_i(x).$$

Из (3.38), (3.39), (3.40) имеем

$$|D^{(n)}| \leq \beta v^{-1} |F'| + |F'| \beta (v\varepsilon_0)^{-1} \sum_{j=1}^{r_n} \delta_j, \quad (3.49)$$

$$|E^{(n)}| \leq 2\alpha v^{-1} \sum_{s=1}^{r_n} r_n^{-1} = 2\alpha v^{-1}. \quad (3.50)$$

Пусть $x \in B^{(n-1)}$, а s' — такое число, что $x \in \omega_s^{(n)}$. Из условий (3.44), (3.46) следует

$$\begin{aligned} |c_n \Psi_n(x) + Q(x, \sigma_n)| &\leq |c_n \Psi_n(x) + Q(x, \omega_s^{(n)})| + \sum_{s=1}^{r_n} |Q(x, \omega_s^{(n)})| \leq \\ &\leq \varepsilon (4\nu)^{-1} + \sum_{s=1}^{r_n} \delta_j(s, n) \quad \text{при } x \in B^{n-1}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

При том же значении x из (3.2), (3.45), (3.46) получим

$$\begin{aligned} |c_n \Psi_n(x) + Q(x, \sigma_n)|^* &\leq |c_n| \Psi_n^*(x) + \sum_{s=1}^{r_n} |Q(x, \omega_s^{(n)})| + \\ &+ \sup \{(\sigma_s^{(n)}) Q^*(x, \omega_s^{(n)}) : 1 \leq s \leq r_n, s \neq s'\} + |c_n \Psi_n(x) + \\ &+ (\sigma_{s'}^{(n)}) Q(x, \omega_{s'}^{(n)})|^* \leq \varepsilon_0 + \sum_{s=1}^{r_n} \delta_j(s, n) + \sup_{1 \leq s \leq r_n} \{\varepsilon + \\ &+ \delta_j(s, n)\} + 2(\varepsilon_0 + \varepsilon) + \delta_j(s', n) \leq 7\varepsilon_0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Отметим, что из (3.46) при $x \in B^{(n-1)}$ имеем

$$|Q(x, \sigma_n)| \leq \sum_{s=1}^{r_n} \delta_j(s, n), \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} Q^*(x, \sigma_n) &\leq \sum_{n=1}^{r_n} |(\sigma_s^{(n)}) Q(x, \omega_s^{(n)})| + \sup_{1 \leq s \leq r_n} (\sigma_s^{(n)}) Q(x, \omega_s^{(n)}) < \\ &< \varepsilon + 2 \sum_{s=1}^{r_n} \delta_j(s, n). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Пусть построены полиномы и множества в (3.48) при $n = \tau, \tau + 1, \dots, \gamma$. Обозначим

$$T(x, \sigma) = \sum_{n=\tau}^{\gamma} Q(x, \sigma_n), \quad (3.55)$$

$$B = \bigcap_{n=\tau}^{\gamma} B^{(n)}, \quad D = \bigcup_{n=\tau}^{\gamma} D^{(n)}, \quad E = \bigcup_{n=\tau}^{\gamma} E^{(n)}, \quad A = D \cup E \cup G.$$

Из (3.21) и (3.49) вспомнив, что $\nu = \gamma - \tau + 1$, получим

$$\begin{aligned} |D| = \sum_{n=\tau}^{\gamma} |D^{(n)}| &\leq \beta |F'| \sum_{n=\tau}^{\gamma} \left\{ \nu^{-1} + (\nu \varepsilon_0)^{-1} \sum_{j=j(1, n)}^{j(r_n, n)} \delta_j \right\} \leq \\ &\leq \beta |F'| (1 + \varepsilon_0^{-1} \varepsilon) < 4\beta^2. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Из (3.16), (3.17), (3.20), (3.50), (3.55) следует

$$|E \cup G| \leq \sum_{n=\tau}^{\gamma} |E^{(n)}| + \sum_{j=1}^{r_0} |G^{(j)}| \leq 4\alpha, \quad |A| < 4(\alpha + \beta^2) < \varepsilon. \quad (3.57)$$

Легко убедиться также, что выполняются следующие условия:

$$F' = B \cup D \cup E, \quad F = F' \cup G = A \cup B, \quad H \cup F = B_0. \quad (3.58)$$

Оценим величину $|T(x, \sigma)|$ при $x \in D \cup E$. Для каждого x из $D \cup E$ существует число n_0 , $\tau \leq n_0 \leq \gamma$ такое, что $x \in D^{(n_0)} \cup E^{(n_0)}$ и поэтому $x \in \omega_{s_0}^{(n_0)}$ при некотором s_0 , $1 \leq s_0 \leq r_{n_0}$. Ясно, что $x \in B^{(n_0-1)} \subset \dots \subset B^{(\tau-1)} = F'$ и $x \in B^{(n)}$, если только $n \geq n_0$. Отсюда, исходя из условий (3.2), (3.4), (3.46), (3.47), (3.51), (3.53), получим

$$\begin{aligned} |T(x, \sigma)| &\leq \sum_{n=\tau}^{n_0-1} |Q(x, \sigma_n) + c_n \Psi_n(x)| + \sum_{n=\tau}^{n_0-1} |c_n \Psi_n(x)| + \sum_{n=n_0+1}^{\gamma} |Q(x, \sigma_n)| + \\ &\quad + \sum_{s=1}^{r_{n_0}} |(c_{s_0}^{(n_0)}) Q(x, \omega_{s_0}^{(n_0)})| + |(c_{s_0}^{(n_0)}) Q(x, \omega_{s_0}^{(n_0)})| \leq \\ &\leq \sum_{n=\tau}^{n_0-1} \left\{ \varepsilon (4\nu)^{-1} + \sum_{s=1}^{r_n} \delta_j(s, n) \right\} + \sum_{n=n_0+1}^{\gamma} \sum_{s=1}^{r_n} \delta_j(s, n) + \sum_{s=1}^{r_{n_0}} \delta_j(s, n) + \\ &\quad + (\nu \varepsilon_0 \beta^{-1} + 3\varepsilon_0 + \delta_j(s_0, n_0)) < \varepsilon 4^{-1} + \sum_{n=\tau}^{\gamma} \sum_{s=1}^{r_n} \delta_j(s, n) + \nu \varepsilon_0 \beta^{-1} + 3\varepsilon_0 < \\ &< \nu \varepsilon_0 \beta^{-1} + (\nu + 4) \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (3.58')$$

Заметим, что при $x \in G$ имеем $x \in B^{(n)}$ при $n = \tau - 1, \dots, \gamma$ и из (3.53) имеем

$$|T(x, \sigma)| \leq \sum_{n=\tau}^{\gamma} \sum_{s=1}^{r_n} \delta_j(s, n) < \varepsilon < \nu \varepsilon_0 \beta^{-1} + (\nu + 4) \varepsilon_0 \text{ при } x \in G. \quad (3.59)$$

Из (3.24), (3.58'), (3.59) следует

$$|L_0(x) + L(x) + T(x, \sigma)| < 2\nu \varepsilon_0 \beta^{-1} + (\nu + 5) \varepsilon_0 \text{ при } x \in A.$$

Отсюда, из (3.57) и (3.3) будем иметь

$$\begin{aligned} \int_A |L_0(x) + L(x) + T(x, \sigma)|^p dx &\leq (2\nu \varepsilon_0 \beta^{-1} + (\nu + 5) \varepsilon_0)^p 4(\alpha + \beta^2) = \\ &= 4(2\nu \varepsilon_0 + (\nu + 5) \varepsilon_0 \beta)^p (\alpha \beta^{-p} + \beta^{2-p}) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Тем самым установлено условие 8. основной леммы.

Из 3.5 следует

$$\sum_{n=\tau}^{\gamma} |c_n \Psi_n(x) + Q(x, \sigma_n)| < \sum_{n=\tau}^{\gamma} \left\{ \varepsilon (4\nu)^{-1} + \sum_{s=1}^{r_n} \delta_j(s, n) \right\} < \varepsilon \text{ при } x \in B. \quad (3.60)$$

Откуда, учитывая также условие (3.52), получим

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{n=\tau}^{\gamma} (c_n \Psi_n(x) + Q(x, \sigma_n)) \right\}^* &\leq \sum_{n=\tau}^{\gamma} |c_n \Psi_n(x) + Q(x, \sigma_n)| + \\ &+ \sup_{\tau < n < \gamma} |c_n \Psi_n(x) + Q(x, \sigma_n)|^* < \varepsilon + 7\varepsilon_0 < 8\varepsilon_0 \text{ при } x \in B. \end{aligned}$$

Тем самым установлены условия 5. и 7. основной леммы. Из (3.53) (3.54), учитывая, что $B^{(n)} \subset F'$ при $n = \tau - 1, \tau, \dots, \gamma$, имеем

$$\begin{aligned} |T(x, \sigma)| &< \varepsilon \text{ при } x \in F: T^*(x, \sigma) \leq \\ &\leq \sum_{n=\tau}^{\gamma} |Q(x, \sigma_n)| + \sup_{\tau < n < \gamma} |Q(x, \sigma_n)|^* < 2\varepsilon, \quad x \in F, \end{aligned}$$

чем и доказано условие 6. основной леммы. Условие 4. следует из (3.14), (3.15), (3.20) и из того, что $B \subset F'$. Условие 9. основной леммы следует из (3.8), (3.29), (3.30) и из леммы 2.1. Тем самым основная лемма доказана.*

Перейдем к доказательству теорем А. и В. Положим

$$L_1(x) = d_1 \varphi_1(x) = \Psi_1(x), \text{ где } d_1 = h_1, \text{ если } \Phi \text{ — система Хаара и } \quad (3.61)$$

$$d_1 = 1 \text{ — в остальных случаях.}$$

Обозначим $M = \max \{L_1(x) : x \in [0, 1]\}$.

$$B_1 = \begin{cases} (0, 1), & \text{если } \Phi \text{ — система Хаара или Уолша,} \\ \text{supp } L_1(x) & \text{— в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.62)$$

Пусть последовательности чисел $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяют условиям

$$1 > \varepsilon_k > \varepsilon_{k+1} > 0 \text{ при } k = 1, 2, \dots; \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^{1/2} < \frac{d_1^2}{6M}, \quad (3.63)$$

$$1 < p_k < 2, \quad p_k < p_{k+1} \text{ при } k = 1, 2, \dots; \lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 2.$$

Возьмем $L_0(x) = L_1(x)$, $B_0 = B_1$, $\varepsilon = \varepsilon_1$, $p = p_1$, $N = 1$, $\tau' = 2$, $N_k = N = 1$ при $k = 1, 2, \dots$, и, применив основную лемму, определим полиномы

$$L(x) = L_2(x) = \sum_{n=\tau_2}^{\tau_1} c_n \Psi_n(x); \quad Q_1(x) = \sum_{n=t_1+1}^{t_2} c_n \Psi_n(x), \text{ где } \tau_2 = t_1 < t_2,$$

перестановку σ_1 последовательности $t_1 + 1, \dots, t_2$ и множества $F = F_1$, $H = H_1$, $A = A_1$, $B = B_2$, удовлетворяющие всем условиям этой леммы.

Предположим определены множество B_k , $B_k \subset \emptyset(\Phi)$ и полиномы

$$L_j(x) = \sum_{n=\tau_j}^{\tau_j} c_n \Psi_n(x), \quad j = 2, \dots, k, \quad (3.64)$$

$$T_j(x, \tau_j') = \sum_{n=\tau_j}^{\tau_j} (\tau_n) \sum_{l=t_n+1}^{t_{n+1}} c_l \Psi_l(x) = \sum_{n=\tau_j}^{\tau_j} (\tau_n) Q_n(x), \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Причем

$$L_k(x) \neq 0 \text{ при } x \in B_k, \text{ так } |c_n \Psi_n^*(x)| : \\ : x \in [0, 1], \tau_j \leq n \leq \tau_{j+1} \leq \varepsilon_{j-1}, 1 \leq j \leq k. \quad (3.65)$$

Положив

$$L_0(x) = L_k(x), \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_{k-1}, \quad B_0 = B_k, \quad \varepsilon = \varepsilon_k, \quad p = p_k, \quad (3.66)$$

$$N = N[Q_{\tau_{k-1}}], \quad \tau' = \tau_{k+1} = \tau_{k-1} + 1, \quad N_k = N, \quad k = 1, 2, \dots;$$

* Отметим, что в основной лемме в целях, выходящих за рамки настоящей работы, на согласованность последовательности $\{\Psi_n(x)\}$ наложены более сильные условия, чем нужны при доказательствах теорем А, В.

и применив основную лемму, определим полиномы

$$L_{k+1}(x) = L(x) = \sum_{n=\tau_{k+1}}^{\tau_{k+1}} c_n \Psi_n(x), \quad (3.67)$$

$$T_k(x, \sigma'_k) = \sum_{n=\tau_k}^{\tau_k} (\sigma_n) Q_n(x) = \sum_{n=\tau_k}^{\tau_k} (\sigma_n) \sum_{i=\tau_{n+1}}^{\tau_{n+1}} c_n \Psi_n(x)$$

и множества $F=F_k$, $H=H_k$, $A=A_k$, $B=B_{k+1}$, удовлетворяющие всем условиям основной леммы.

Предположим, что этим способом построены следующие полиномы и множества:

$$\{L_k(x)\}_{k=1}^{\infty}, \{T_k(x, \sigma'_k)\}_{k=1}^{\infty}, \{F_k, H_k, B_k, A_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} P_k(x, \sigma_k^{(0)}) &= \sum_{n=\tau_k}^{\tau_k} \{c_n \Psi_n(x) + (\sigma_n) Q_n(x)\}, A_{\infty} = \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, H_{\infty} = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k, B_{\infty} = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Из условий $F_k \cup H_k = B_k$, $A_k \cup B_{k+1} = F_k$ легко убедиться, что

$$[0, 1] = ([0, 1] \setminus B_1) \cup (H_{\infty} \cup A_{\infty} \cup B_{\infty}). \quad (3.69)$$

Напомним, что в случаях системы Хаара и Уолша все равенства множеств надо понимать с точностью до конечного числа точек, а последнее равенство выполняется с точностью до счетного числа двоично рациональных точек.

Рассмотрим ряд

$$P(x, \sigma) \sim \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x, \sigma_k^{(0)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=\tau_k}^{\tau_k} \left\{ c_n \Psi_n(x) + (\sigma_n) \sum_{i=\tau_{n+1}}^{\tau_{n+1}} c_n \Psi_n(x) \right\}. \quad (3.70)$$

Вспомнив, что $\Psi_n(x)$ — полином по системе Φ , подставляя их выражения в (3.70), получим переставленный ряд

$$P(x, \sigma, \Phi) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \Phi_{\sigma(n)}(x). \quad (3.71)$$

Убедимся, что ряд (3.71) всюду на $[0, 1]$ сходится к всюду конечной функции $f(x)$. Действительно, пусть $x \in H_{\infty} \cup A_{\infty}$, тогда $x \in H_{k_0} \cup A_{k_0}$ при некотором k_0 и, следовательно, $x \in B_{k_0} \subset B_{k_0+1} \subset \dots \subset B_1$ и $x \notin B_{k_0+1}$, поэтому из условий 3. и 6. основной леммы получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0+2}^{\infty} |P_k(x, \sigma_k^{(0)})| &\leq \sum_{k=k_0+2}^{\infty} \{|L_k(x)| + |T_k(x, \sigma'_k)|\} < \\ &< \sum_{k=k_0+2}^{\infty} 2\varepsilon_k \text{ при } x \notin B_{k_0+1}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Так как из тех же условий имеем

$$P_k(x, \sigma_k^{(0)}) \leq L_k(x) + T_k(x, \sigma'_k) < \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k \text{ при } x \in B_{k_0+1}, k \geq k_0 + 2, \quad (3.73)$$

то сходимость ряда (3.71) следует из ограниченности полинома

$$P_1(x, \sigma_1^{(0)}) + P_2(x, \sigma_2^{(0)}) + \dots + P_{k_0+1}(x, \sigma_{k_0+1}^{(0)}).$$

Оценим последний полином при $x \in H_{k_0}$. Так как $x \in B_i$ при $1 \leq i \leq k_0$ и $x \in F_{k_0+1}$, то из условий 3., 5., 6. основной леммы следует

$$\left| \sum_{k=1}^{k_0+1} P_k(x, \sigma_k^{(0)}) \right| \leq \sum_{k=1}^{k_0+1} |P_k(x, \sigma_k^{(0)})| + |L_{k_0}(x) + L_{k_0+1}(x)| + \\ + |T_{k_0+1}(x, \sigma'_{k_0})| + |T_{k_0}(x, \sigma'_{k_0})| < 2 \sum_{k=1}^{k_0+1} \varepsilon_k. \quad (3.74)$$

Из (3.72) и (3.74) следует

$$|f(x)| < 2 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \text{ при } x \in H_{\infty}. \quad (3.75)$$

При $x \in A_{k_0}$ имеем $x \in F_{k_0+1}$ и $x \in B_i$, $1 \leq i \leq k_0$. Поэтому из условий 3., 5., 6. основной леммы получим

$$\left| \sum_{k=1}^{k_0+1} P_k(x, \sigma_k^{(0)}) \right| \leq \sum_{k=1}^{k_0+1} |P_k(x, \sigma_k^{(0)})| + |L_{k_0}(x) + L_{k_0+1}(x) + T_{k_0}(x, \sigma'_{k_0})| + \\ + |T_{k_0+1}(x, \sigma'_{k_0+1})| < |L_{k_0}(x) + L_{k_0+1}(x) + T_{k_0}(x, \sigma'_{k_0})| + 2 \sum_{k=1}^{k_0+1} \varepsilon_k. \quad (3.76)$$

Отсюда и из (3.72)

$$|f(x)| < |L_{k_0}(x) + L_{k_0+1}(x) + T_{k_0}(x, \sigma'_{k_0})| + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \text{ при } x \in A_{k_0}. \quad (3.77)$$

Если $x \in B_{\infty} \cup ([0, 1] \setminus B_1)$, то сходимость ряда (3.71) следует из условий 3.—7. основной леммы, при этом выполняется условие

$$|f(x)| < 2 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \text{ при } x \in B_{\infty} \cup ([0, 1] \setminus B_1). \quad (3.78)$$

Теперь в случаях систем Хаара и Уолша установим сходимость ряда (3.71) на счетном множестве Z двоично рациональных точек, не принадлежащих множеству $\{[0, 1] \setminus B_1\} \cup H_{\infty} \cup A_{\infty} \cup B_{\infty}$. Пусть $x_0 \in Z$, надо установить существование и конечность предела

$$\lim_{l \rightarrow \infty} 2^{-l} \{S_l(x_0 + 0, P(\sigma, \Phi)) + S_l(x_0 - 0, P(\tau, \Phi))\}. \quad (3.79)$$

Очевидно, что для любого фиксированного l существуют и конечны пределы $S_l(x_0 + 0, P(\tau, \Phi))$ и $S_l(x_0 - 0, P(\tau, \Phi))$, поэтому достаточно установить конечность пределов

$$\lim_{l \rightarrow \infty} S_l(x_0 + 0, P(\tau, \Phi)), \lim_{l \rightarrow \infty} S_l(x_0 - 0, P(\tau, \Phi)). \quad (3.80)$$

Установим первое из них. Рассмотрим два случая:

I) существует такое натуральное число k_0 , что x_0 является левым концом некоторого интервала ω , $\omega \subset A_{k_0} \cup H_{k_0}$,

II) такого числа k_0 не существует.

В случае 1), пусть $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ — такая последовательность, что $x_j > x_{j+1}$, при $j \geq 1$; $x_j \in \omega_j$, при $j \geq 1$; $x_j \rightarrow x_0$ при $j \rightarrow \infty$. Выберем число m_0 так, что

$$m_0 > k_0 + 1, \quad \sum_{k=m_0}^{\infty} \varepsilon_k < 2^{-1} \varepsilon. \quad (3.81)$$

Очевидно, что для любого натурального l существуют единственные числа $r(l)$ и $q(l)$, удовлетворяющие условиям

$$S_l(x, P(\sigma, \Phi)) = \sum_{k=1}^{r(l)} P_k(x, \sigma_k^{(0)}) + \Phi_{q(l)}(x, P_{r(l)+1}(\sigma_{r(l)+1}^{(0)})), \quad (3.82)$$

где $\Phi_{q(l)}(x, P_{r(l)+1}(\sigma_{r(l)+1}^{(0)}))$ — частичная сумма согласованного с перестановкой $\sigma_{r(l)+1}$ переставленного ряда Фурье функции $P_{r(l)+1} \times \chi(x, \sigma_{r(l)+1})$. Отметим, что когда $r(l) = 0$ ($q(l) = 0$), то первое (второе) слагаемое в (3.82) равно нулю.

Ясно, что если $l \rightarrow \infty$, то $r(l) \rightarrow \infty$. Следовательно, число l_0 можно выбрать таким, чтобы $r(l) > m_0$ как только $l > l_0$. Пусть $l' > l > l_0$, тогда из условий 3.—7. основной леммы будем иметь

$$\begin{aligned} & |S_{l'}(x_j, P(\sigma, \Phi)) - S_l(x_j, P(\sigma, \Phi))| \leq \\ & \leq |P_{r(l)+1}(x_j, \sigma_{r(l)+1}^{(0)}) - \Phi_{q(l)}(x_j, P_{r(l)+1}(\sigma_{r(l)+1}^{(0)}))| + \\ & + |\Phi_{q(l')}(x_j, P_{r(l')+1}(\sigma_{r(l')+1}^{(0)}))| \leq |P_{r(l)+1}(x_j, \sigma_{r(l)+1}^{(0)})| + \\ & + P_{r(l)+1}^*(x, \sigma_{r(l)+1}^{(0)}) + \sum_{k=r(l)+2}^{r(l')} \varepsilon_k + P_{r(l')+1}^*(x, \sigma_{r(l')+1}^{(0)}) < 2 \sum_{k=m_0}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon. \end{aligned}$$

Прейдя к пределу при $j \rightarrow \infty$, получим

$$|S_{l'}(x_0 + 0, P(\sigma, \Phi)) - S_l(x_0 + 0, P(\sigma, \Phi))| < \varepsilon \text{ при } l, l' > l_0.$$

Следовательно в этом случае конечность первого предела в (3.80) доказана.

Рассмотрим II) случай. Если существует монотонно убывающая последовательность $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ такая, что $x_j \in [0, 1] \setminus B_1$ и $x_j \rightarrow x_0$ при $j \rightarrow \infty$, то конечность первого предела в (3.80) устанавливается тем же путем, что и в предыдущем случае. Предположим, что существует такая последовательность $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$, что $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H_{\infty} \cup A_{\infty} \cup B_{\infty}$ и $x_j \downarrow x_0$ при $j \rightarrow \infty$. Исходя из условия II) можем полагать, что $x_j \in A_k \cup H_k$ при $j \geq k$ (в противном случае последовательность $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ можем разряжать). Следовательно $x_j \in B_{k+1}$ при $j \geq k$. Пусть m_0 и l_0 выбраны так, что

$$\sum_{k=m_0}^{l_0} \varepsilon_j < 9^{-1} \varepsilon, \quad r(l) > m_0, \text{ как только } l \geq l_0.$$

Пусть, далее, $l' > l > l_0$ и $j \geq r(l') + 1$. Тогда из условий 5. и 7. основной леммы, учитывая, что $x_j \in B_{r(l')+2} \subset B_{r(l')+1} \subset \dots \subset B_1$ при $j \geq r(l') + 1$, получим

$$|P_k(x_j, \sigma_k^{(0)})| < \varepsilon_k, \quad P_k^*(x_j, \sigma_k^{(0)}) < 8 \varepsilon_{k-1} \text{ при } j \geq r(l') + 1, \quad 1 \leq k \leq r(l') + 1.$$

Следовательно, при сделанных предположениях будем иметь

$$\begin{aligned} |S_{l'}(x_j, P(\sigma, \Phi)) - S_l(x_j, P(\sigma, \Phi))| &< \varepsilon_{r(l)+1} + 8\varepsilon_{r(l)} - \\ &+ \sum_{k=r(l)+2}^{r(l')} \varepsilon_k + 8\varepsilon_{r(l')+1} < 9 \sum_{k=m_0}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon \end{aligned}$$

(в случае, когда $r(l) = r(l')$, в правой части получится $9\varepsilon_{r(l)} < \varepsilon$).
Перейдя к пределу при $l \rightarrow \infty$, получим фундаментальность последовательности $\{S_l(x_0 + 0, P(\sigma, \Phi))\}_{l=1}^{\infty}$. Следовательно, это последовательность имеет конечный предел. Тем же путем можно установить, что $\{S_l(x_0 - 0, P(\sigma, \Phi))\}_{l=1}^{\infty}$ имеет конечный предел при $l \rightarrow \infty$ и, тем самым, установим сходимость ряда (3.71) в точке x_0 , $x_0 \in z$. И так имеем, что ряд (3.71) всюду на $[0, 1]$ сходится к некоторой конечной функции $f(x)$.

Теперь установим, что $f(x) \in L_p$ при любом p , $p \in [1, 2)$. Пусть p — фиксированное число из этой области. Из (3.63) следует существование числа k_0 такого, что $p < p_k$ при $k < k_0$. Из условия (3.77) следует, что $f(x)$ ограничена на множестве $\bigcup_{k=1}^{k_0} A_k$. Обозначим $E = B_{\infty} \cup H_{\infty} \cup \{[0, 1] \setminus B_1\}$.

Из (3.75) и (3.78) следует ограниченность функции $f(x)$ на E . Из условий (3.69) и (3.77) будем иметь

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^1 |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} &\leq \sum_{k=1}^{k_0} \left\{ \int_{A_k} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left\{ \int_{A_k} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} + \\ &+ \left\{ \int_E |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

Первое и последнее слагаемые — конечные числа. Из условия 8. основной леммы и из неравенства $p < p_k$ при $k > k_0$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left\{ \int_{A_k} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} &\leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left\{ \int_{A_k} |f(x)|^{p_k} dx \right\}^{1/p_k} \leq \\ &< \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (\varepsilon_k)^{1/p_k} < \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sqrt[p_k]{\varepsilon_k} < +\infty. \end{aligned}$$

Следовательно, $f(x) \in L_p$ при $p \in [1, 2)$.

Убедимся, что ряд (3.71) не является рядом Фурье—Лебега функции $f(x)$. Из условий (3.63), (3.69), (3.75), (3.77), (3.78), учитывая также условие 8. основной леммы, получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)| dx &= \int_{A_{\infty}} |f(x)| dx + \int_E |f(x)| dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_{A_k} |f(x)|^{p_k} dx \right\}^{1/p_k} + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon_k)^{1/p_k} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[p_k]{\varepsilon_k} < 3 \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[p_k]{\varepsilon_k} < \frac{d_1^2}{M}. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\left| \int_0^1 \varphi(x) f(x) dx \right| \leq \frac{M}{d_1} \int_0^1 |f(x)| dx < \frac{d_0}{2}.$$

Но из (3.61) имеем, что коэффициент при $\varphi_1(x)$ в ряде (3.71) равен числу d_1 , $d_1 \neq 0$, откуда вытекает, что ряд (3.71) не является рядом Фурье—Лебега функции $f(x)$. Теоремы А и В доказаны.

Отметим, что в случае системы Хаара почти по той же схеме можно получить более сильный результат, чем теорема В. Именно, справедлива следующая

Теорема С. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x) \quad (3.83)$$

расходится на некотором множестве E , $E \subset [0, 1]$, $|E| > 0$, если при этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \chi_n(x) = 0 \text{ почти всюду на } E,$$

то существуют подряд ряда (3.83), то есть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(x), \quad (3.84)$$

где для любого n выполняется одно из следующих условий: либо $c_n = a_n$, либо $c_n = 0$; и перестановка σ последовательности $1, 2, \dots, n, \dots$, обладающие свойствами:

I. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{\sigma(n)} \chi_{\sigma(n)}(x)$$

всюду на $[0, 1]$ сходится к всюду конечной функции $f(x)$, $f(x) \in L_p$ для любого p , $p \in [1, 2]$.

II. ряд (3.84) не является рядом Фурье—Лебега функции $f(x)$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 15. II. 1987

Հ. Մ. ՄՈՒՇԵԳԻԱՆ. Եռանկյունաչափական սիստեմով և $C[0,1]$ -ի կամայական օրթոնորմալ բազիսով L_p -ի, $1 \leq p < 2$, ֆունկցիայի ամենուրեք զուգամիտող, տեղափոխված անդամներով շարքի գոյնակիցների մասին (ամփոփում)

Աշխատանքում ցույց է տրված, որ գոյություն ունի եռանկյունաչափական սիստեմով, կամ $C[0,1]$ -ի կամայական օրթոնորմալ բազիսով $f(x)$ -ին, $f(x) \in L_p$, $1 \leq p < 2$, ամենուրեք զուգամիտող տեղափոխված անդամներով շարք, որը չի հանդիսանում $f(x)$ -ի Ֆուրիեի շարքը:

G. M. MUSHEGIAN. On coefficient of rearranged series by trigonometric system and by arbitrary orthonormal basis of $C[0, 1]$, which converges everywhere to a function L_p , $1 < p < 2$ (summary)

In this paper we prove that there exists rearranged everywhere convergent to f , $f \in L_p$, $1 < p < 2$ series by trigonometric system or by arbitrary orthonormal basis of $C[0, 1]$, which differs from the Fourier series of $f(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды, М., Физ. мат. гиз., 1961.
2. Haar Affred. *Gesamelte Arbelten*, Budapest, 1959.
3. G. Faber. Über die Orthogonal funktionen des Herrn Haar, *Jahrebericht Deutschen Math.*, (19), 1910, 104—112.
4. Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян. О единственности рядов по системам Хаара Уолша, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 28, № 6, 1964, 1391—1408.
5. R. B. Grittenden and V. L. Shapiro. Sets of the group 2^n , *Ann. of Math.*, 81, 1965, 550—564.
6. Г. М. Мушегян. О восстановлении коэффициентов переставленного ряда Хаара. *Математический сборник*, 130 (172), № 1 (5), 1986, 35—61.
7. П. А. Ульянов. О рядах по системе Хаара с монотонными коэффициентами, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 28, № 4, 1964, 3—69.
8. Ф. Г. Арутюнян. О рядах по системе Хаара ДАН Арм.ССР, 42, № 3, 1966, 134—140.
9. Г. М. Мушегян, А. А. Саакян. О единственности всюду сходящегося переставленного ряда по тригонометрической системе и по ортонормированным базисам $C[0, 1]$, *Изв. АН Арм.ССР, сер. матем.*, 22, № 6, 1987, 543—584.

УДК 517.95

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А. А. АКОПЯН, А. А. СААЖЯН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
 УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В этой заметке вводится шкала систем дифференциальных уравнений, включающая (при $l=k-1$) систему, рассмотренную в [1]. Для систем этой шкалы доказывается теорема о существовании и единственности. Затем приводится рекуррентный метод решения таких систем. Далее описывается выбор независимых начальных условий, основанный на соответствующем выборе, данном в [1].

Пусть

$$X = \{x^1, \dots, x^n\} \subset R^k \setminus \{0\}.$$

Фиксируем целое число l , $0 \leq l < \dim \langle X \rangle$, где $\langle X \rangle := \text{лин. обол. } \{X\}$.

Обозначим

$$Y = Y(X) = Y_l(X) = \{Y \subset X; \dim \langle X \setminus Y \rangle = l, Y \cap \langle X \setminus Y \rangle = \emptyset\},$$

$$Z = Z(X) = Z_l(X) = \{Z \subset X; \dim \langle X \setminus Z \rangle > l\}.$$

Заметим, что $\emptyset \in Z \setminus Y$ при $l < \dim \langle X \rangle$ и $\emptyset \in Y \setminus Z$ при $l = \dim \langle X \rangle$.

Выберем L -аффинное подпространство R^k такое, что

$$\dim L = k - l - 1; \dim \{L \cap \langle A \rangle\} = 0 \quad \forall A \subset X, \dim \langle A \rangle = l + 1 \quad (1)$$

($\dim B = 0$ означает $\# B := \text{мощность } B = 1$).

Пусть $D_Y = \prod_{y \in Y} D_y$, где D_y — производная по направлению y , т. е.

$D_y = y \cdot \text{grad } f$ (точка — скалярное произведение в R^k , при $Y = \emptyset$ полагаем $D_Y f = f$).

Рассмотрим систему

$$D_Y f = \varphi_Y, \quad Y \in Y \quad (2)$$

с условиями согласованности правых частей

$$D_{Y' \setminus Y} \varphi_Y = D_{Y' \setminus Y'} \varphi_{Y'}, \quad Y, Y' \in Y. \quad (3)$$

Начальные условия для системы (2) пока будем задавать с помощью некоторой функции Ψ :

$$D_Z f(x) = D_Z \Psi(x), \quad x \in L, Z \in Z. \quad (4)$$

Естественно, заданные функции φ_Y, Ψ предполагаются достаточно гладкими.

Заметим, что в случае $l = \dim \langle X \rangle$ условия (3) и (4) отсутствуют, а система (2) состоит из одного (решенного) уравнения:

$$f = \varphi_{\sigma}.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Система (2) с условиями согласованности (3) и с начальными условиями (4) имеет единственное решение.

Нижеследующая теорема играет решающую роль в доказательстве теоремы 1 и содержит рекуррентный метод решения системы (2).

Для $Y \subset X$, $\dim \langle X \setminus Y \rangle = l$ положим $\Phi_Y = D_{Y \setminus \hat{Y}} \varphi_{\hat{Y}}$, где $\hat{Y}$:

$\hat{Y} := Y \setminus \langle X \setminus Y \rangle$, т. е. $\hat{Y} \in Y$, $\hat{Y} \subset Y$.

Теорема 2. Пусть $A \subset X$, $\dim \langle A \rangle = \# A = l + 1$. Функция f является решением системы (2) с начальными условиями (4) тогда и только тогда, когда f удовлетворяет системе

$$D_Y f = F_Y, \quad y \in A \quad (5)$$

с начальными условиями

$$f(x) = \Psi(x), \quad x \in L, \quad (6)$$

где F_Y удовлетворяет развешенной системе

$$D_Y F_Y = \Phi_{\{y\} \cup Y}, \quad Y \in Y(X \setminus \{y\}), \quad (7)$$

с начальными условиями

$$D_Z F_Y(x) = D_{Z \cup \{y\}} \Psi(x), \quad x \in L, \quad Z \in Z(X \setminus \{y\}). \quad (8)$$

Доказательство теоремы 2. Пусть f является решением системы (2) с начальными условиями (4). Определим функции F_Y , $y \in A$ равенствами (5). Тогда ввиду того, что $\emptyset \in Z$ ($l < \dim \langle X \rangle$) и $Z \in Z(X \setminus \{y\})$ эквивалентно $Z \cup \{y\} \in Z$, имеют место начальные условия (6) и (8). Для $Y \in Y(X \setminus \{y\})$, обозначая $Y' = Y \cup \{y\}$, имеем, что

$$D_Y F_Y = D_{Y'} f = D_{Y \setminus \hat{Y}'} \varphi_{\hat{Y}'} = \Phi_{Y'}.$$

т. е. F_Y удовлетворяет системе (7).

Пусть теперь f является решением системы (5) с начальными условиями (6), где F_Y , $y \in A$ — решения систем (7) с начальными условиями (8).

Докажем, что f является решением системы (2). Для любого $Y \in Y$ имеем, что $Y \cap A \neq \emptyset$, так как $\dim \langle X \setminus Y \rangle = l$. Пусть $y \in Y \cap A$, тогда $Y \setminus \{y\} \in Y(X \setminus \{y\})$ и в силу (5) и (7)

$$D_Y f = D_{Y \setminus \{y\}} F_Y = \Phi_{\{y\} \cup (Y \setminus \{y\})} = \Phi_{Y'}.$$

Теперь проверим выполнение начальных условий (4). При $Z = \emptyset$ (4) совпадает с (6).

Если $Z \in Z$ и $y \in Z \cap A$, то $Z \setminus \{y\} \in Z(X \setminus \{y\})$ и согласно (5) и (8) находим, что

$$D_Z f(x) = D_{Z \setminus \{y\}} F_Y = D_Z \Psi(x), \quad x \in L.$$

Остается рассмотреть случай $Z \in \mathcal{Z}$, $Z \neq \emptyset$, $Z \cap A = \emptyset$.

Пусть $Z = \{z\} \cup Z'$. Предположим, что $L = x^0 + L_0$, где $x^0 \in L$ и L_0 — линейное подпространство R^k .

В силу (1) имеем следующее прямое разложение

$$R^k = L_0 \oplus \langle A \rangle.$$

Следовательно получаем, что

$$z = z_0 + \sum_{x \in A} \lambda_x x, \quad z_0 \in L_0, \quad \lambda_x \in R,$$

и тогда

$$D_z = D_{z' \cup \{z_0\}} + \sum_{x \in A} \lambda_x D_{z' \cup \{x\}},$$

причем $\lambda_x = 0$, если $\{x\} \cup Z' \not\subset Z$, так как в этом случае $\dim \langle (A \setminus \{x\}) \cup \{z\} \rangle = l$.

Вышеуказанным разложением рассматриваемый случай сводится к доказательству равенства

$$D_{z_0} f(x) = D_z \Psi(x), \quad x \in L;$$

при $z_0 \in L_0$, что очевидно ввиду (6).

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1 проводим индукцией по $n = \#X$. В случае $\#X = \dim \langle X \rangle = l + 1$ система (2) сводится к системе

$$D_y f = \varphi_y, \quad y \in X$$

с соответствующими условиями согласованности

$$D_{y'} \varphi_y = D_y \varphi_{y'}, \quad y, y' \in X$$

и с начальными условиями

$$f(x) = \Psi(x), \quad x \in L.$$

Пусть $M := \langle X \rangle$. Для фиксированного $x \in R^k$ рассмотрим выше указанную систему в аффинном пространстве $M_x := x + M$, параллельном M , с начальным условием в точке $M_x \cap L$. Для этой системы существование и единственность решения (в M_x) общеизвестно. Остается заметить, что $\bigcup_{x \in R^k} M_x = R^k$.

Допустим, что теорема верна для системы, мощность множества условий которого меньше n , и докажем для n .

Воспользуемся теоремой 2. Достаточно доказать существование и единственность решений систем (5) и (7). Согласно индукционному предположению, для этого достаточно проверить соблюдение условий согласованности правых частей этих систем.

Условия согласованности системы (7) имеют вид:

$$D_{Y' \cup Y} \Phi_{Y \cup \{y\}} = D_{Y' \cup Y'} \Phi_{Y' \cup \{y\}}; \quad Y, Y' \in \mathcal{Y}(X \setminus \{y\}).$$

При $Y, Y' \in \mathcal{Y}$ или $Y \cup \{y\}, Y' \cup \{y\} \in \mathcal{Y}$ эти условия сразу следуют из (3). В случае же $Y, Y' \cup \{y\} \in \mathcal{Y}$ имеем, что

$$D_{Y \setminus Y} \Phi_{Y \cup \{y\}} = D_{(Y \cup \{y\}) \setminus Y} \Phi_Y = D_{Y \setminus (Y \cup \{y\})} \Phi_{Y \cup \{y\}} = D_{Y \setminus Y} \Phi_{Y \cup \{y\}}.$$

Докажем согласованность правых частей системы (5), т. е. равенство

$$D_Y F_Y = D_Y F_{Y'}, \quad y, y' \in A. \quad (9)$$

Сначала рассмотрим случай $\dim \langle X \setminus \{y\} \rangle = \langle X \setminus \{y'\} \rangle = l$. Легко видеть, что тогда среди уравнений системы (2) имеются следующие: $D_Y f = \Psi_Y$, $D_{Y'} f = \Psi_{Y'}$. Следовательно $F_Y = \Psi_Y$, $F_{Y'} = \Psi_{Y'}$ и равенство (9) есть не что иное как одно из условий согласованности (3).

В случае $\dim \langle X \setminus \{y, y'\} \rangle \geq l$ рассмотрим следующую повторно разветвленную систему с множеством узлов $X \setminus \{y, y'\}$:

$$D_Y F = \Phi_{Y \cup \{y, y'\}}, \quad Y \in Y(X \setminus \{y, y'\}) \quad (10)$$

с начальными условиями

$$D_Z F = D_{Z \cup \{y, y'\}} \Psi, \quad Z \in Z(X \setminus \{y, y'\}). \quad (11)$$

Ясно, что функции $D_Y F_Y$ и $D_{Y'} F_{Y'}$ удовлетворяют системе (10) и начальным условиям (11). Легко убедиться также, что правые части системы (10) согласованы. Согласно индукционному предположению система (10) с начальными условиями (11) имеет единственное решение и следовательно равенство (9) доказано. Этим завершается доказательство теоремы 1.

Следствие. Пусть $B \subset X$, $\dim \langle B \rangle \geq l+1$.

Тогда система (2) с начальными условиями (4) эквивалентна системе

$$D_Y f = F_Y, \quad Y \in Y(B),$$

с начальными условиями

$$D_Z f(x) = D_Z \Psi(x); \quad x \in L, \quad Z \in Z(B),$$

где F_Y удовлетворяет разветвленной системе

$$D_Y F_Y = \Phi_{Y \cup Y'}, \quad Y' \in Y(Y \setminus X)$$

начальными условиями

$$D_Z F_Y(x) = D_{Z \cup Y} \Psi(x); \quad x \in L, \quad Z \in Z(X \setminus Y).$$

Выбор независимых начальных условий из (4) равносильно нахождению базиса в следующем полиномиальном пространстве:

$$\pi(X, l) = \langle \{ \prod_{x^i \in Z} (x^i \cdot x); \quad Z \in Z_l(X) \} \rangle,$$

где $\prod_{x^i \in Z} (x^i \cdot x) = 1$ при $Z = \emptyset$.

Пусть

$$X = \{X' \subset X; \langle X' \rangle \cap X = X, \dim \langle X' \rangle \geq l\},$$

$$q \cdot \pi(X, l) = \{q \cdot p; p \in \pi(X, l)\}.$$

Лемма 1. Имеет место следующее прямое разложение:

$$\pi(X, l) = \sum_{X' \in X} \prod_{x^i \in X \setminus X'} (x^i \cdot x) \pi(X', \dim X' - 1)$$

Доказательство. Достаточно доказать, что сумма пространств в правой части равенства—прямая, так как каждый элемент простран-

ства $\pi(X, l)$ вида $\prod_{x^i \in Z} (x^i \cdot x)$. $Z \in Z_l(X)$ принадлежит одному из слагаемых пространств.

Итак допустим, что

$$\sum_{x' \in X} \prod_{x^i \in X' / X'} (x^i \cdot x) p_{X'}(x) = 0, \quad (12)$$

где

$$p_{X'} \in \pi(X', \dim X' - 1). \quad (13)$$

Будем считать, что слагаемые полиномы (12) однородны одинакового порядка— m .

Разделив (12) на $\prod_{x^i \in X} (x^i \cdot x)$, получаем, что

$$\sum_{x' \in X} \frac{p_{X'}(x)}{\prod_{x^i \in X'} (x^i \cdot x)} = 0. \quad (14)$$

Для каждого слагаемого этой суммы, согласно (13) имеем, что

$$q_{X'}(x) := \frac{p_{X'}(x)}{\prod_{x^i \in X'} (x^i \cdot x)} = \sum_{\substack{X'' \subset X' \\ \# X'' = n-m}} \lambda_{X''} \frac{1}{\prod_{x^i \in X''} (x^i \cdot x)}.$$

Обозначим через $N_{X'}$ — нормальное дополнение $\langle X' \rangle$ в R^k :

$$N_{X'} := \{x; (x \cdot x') = 0 \quad \forall x' \in X'\}.$$

Теперь рассмотрим слагаемые $q_{X'}$, для которых линейные оболочки $X' \in X$ имеют наименьшую размерность: $\dim \langle X' \rangle = l + 1$. Для этих слагаемых размерности $N_{X'}$ максимальны: $\dim N_{X'} = k - l - 1$. С другой стороны, N_{X_1} и N_{X_2} различных для различных X_1 и X_2 . Следовательно

для каждого $X' \in X$, $\dim \langle X' \rangle = l + 1$ можно найти точку $x' \in N_{X'} \setminus (\bigcup_{X'' \in X, X'' \neq X'} N_{X''})$. Теперь, устремив в равенстве (14) x к x' по прямой,

не принадлежащей $\bigcup_{X'' \in X} N_{X''}$, получим, что $q_{X'} \equiv 0$. Действительно, иначе это слагаемое стремится к бесконечности с максимальным, среди остальных слагаемых, порядком: $\rho(x, x')^{-(n-m)}$ (ρ —расстояние в R^k).

Аналогично доказывается, что $q_{X'} = 0$ для любого $X' \in X$, $\dim X' = l + 2$ и так далее. Итак, все слагаемые в левой части (12) равны нулю, что и требовалось доказать.

Следствие. *Имеет место равенство*

$$\dim \pi(X, l) = \# \{X' \subset X; \# X' = \dim \langle X' \rangle > l\}.$$

Доказательство сразу вытекает из леммы 1 и равенства (см. следствие 9 [1]):

$$\dim \pi(X', \dim X' - 1) = \# \{X'' \subset X'; \# X'' = \dim \langle X'' \rangle = \dim \langle X' \rangle\}.$$

Заметим, что лемма 1 и конструкция базиса в пространстве $\pi(X', \dim X' - 1)$ (см. следствие 6 [1]) дают конструкцию базиса в пространстве $\pi(X, l)$.

Институт математики

АН Армянской ССР

Ереванский государственный университет

Учен. зап. кн.-б. АН Арм. ССР

Поступила 7. IX. 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Акопян, А. А. Саакян. О системе дифференциальных уравнений, связанной с полноразмерным классом сдвигов бокс-сплайна, Мат. заметки, т. 44, № 6, 1988, 705—724.

УДК 517.51

Г. Г. ГЕВОРКЯН

ТЕОРЕМЫ О МОДИФИЦИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ
ФРАНКЛИНА — СТРОМБЕРГА

Разными авторами (см. [1]—[5]) исследовался вопрос о базисности (безусловной базисности) системы Франклина $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ в разных пространствах.

Ныне известно, что система Франклина является базисом в $L_1(0,1)$ и $C(0,1)$ (см. [1]), безусловным базисом в $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$ (см. [2]), безусловным базисом в $H_p(0,1)$, $\frac{1}{2} < p \leq 1$ (случай $p=1$ см. [3], общий случай см. [4]), и базисом в $H_{1/2}(0,1)$ (см. [5]).

Все необходимые определения приведены в первом параграфе.

Однако система Франклина не является безусловным базисом в $H_p(T)$, где T — периодический отрезок $[0,1)$. В работе [6] было доказано, что система, построенная З. Чисельским [7] является безусловным базисом в $H_1(T)$. Эта система по своим свойствам похожа на систему Франклина.

Стромберг [8] поставил перед собой задачу построить базис в пространстве $H_p(R)$. Модифицируя систему Франклина Стромберг [8] получил систему $\{f_{j,k}(x)\}_{j,k=-\infty}^{+\infty}$, которая является безусловным базисом в $H_p(R)$.

В работах [9]—[12] исследовались свойства мажоранты частичных сумм рядов Франклина и Фурье—Франклина, а также связь между мажорантой и безусловной сходимостью рядов Франклина.

В настоящей работе исследуются ряды по системе Стромберга на R . Полученные результаты являются аналогами соответствующих теорем о системе Франклина, полученных в работах [9]—[12].

В статье мы пользуемся следующими обозначениями:

R — множество действительных чисел;

Z, Z_+, Z_- — соответственно, множества целых, целых положительных, целых отрицательных чисел;

R_+ — множество положительных чисел;

C — положительные абсолютные постоянные, которые могут принимать разные значения в разных формулах;

q — абсолютные постоянные с условием $0 < q < 1$, которые в разных формулах могут принимать разные значения;

$C(p), C(\delta)$ — постоянные, зависящие только от p и δ ;

$|A|$ — Лебегова мера множества A ;

$\chi_A(x)$ — характеристическая функция множества A ;

$\rho(x, A)$ — расстояние между точкой x и множеством $A \subset R$, т. е.

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} |x - y|;$$

I^c — дополнение множества I ;

$L_p(E)$, $p > 0$, пространство измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\|_{L_p(E)} = \left\{ \int_E |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Если из текста ясно что такое E , то будем писать просто L_p , $\| \cdot \|_p$.

Интервал вида $[2^{-j} \cdot k, 2^{-j} \cdot (k+1)]$, $j, k \in \mathbb{Z}$ назовем двоичным интервалом ранга k .

Будем писать $A \subset B$, если $|A \setminus B| = 0$. В этом смысле интервалы и сегменты не различаются.

Если $f(x)$ — действительнoзначная функция, то

$$\text{supp } f(x) = \{x : f(x) \neq 0\}.$$

Фигурными скобками $| \cdot |$ в тексте пользуемся в разных смыслах. Первое для обозначения множеств. Другое будет дано в первом параграфе. Однако это не будет вызывать недоразумений.

Ссылка вида: „см. (1.3)“ означает ссылка на формулу (3) первого параграфа. При ссылках внутри одного параграфа номер параграфа опускается.

§ 1. Определение системы Стромберга и некоторые вспомогательные факты

Пусть $A_0 = \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \cup \frac{1}{2}\mathbb{Z}_-$ и $A_1 = A_0 \cup \left\{ \frac{1}{2} \right\}$. Точки множества

A_0 разбивают действительную ось R на интервалы $(I_\sigma)_{\sigma \in A_0}$, где σ — левая концевая точка интервала I_σ . Обозначим через S_0 подпространство пространства $L_1(R)$, состоящее из таких непрерывных функций, которые линейны на каждом интервале I_σ , $\sigma \in A_0$. Аналогично определяется подпространство S_1 , если вместо A_0 рассмотреть A_1 . Очевидно, что $S_0 \subset S_1$ и, если $f(x) \in S_0$, то $f(x-1) \in S_1$. Вообще, функции из S_1 отличаются от функций S_0 только тем, что функции из S_0 должны быть линейными на $[0, 1]$, а функции из S_1 могут быть линейными только на каждом из интервалов $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Поэтому S_0 имеет коразмерность 1 в S_1 . Следовательно существует функция $\tau(x) \in L_1(R)$, с точностью до знака определяемая из соотношений $\tau(x) \in S_1$

$$\tau(x) \perp S_0, \text{ т. е. } \int_R \tau(x) f(x) dx = 0 \text{ для любого } f \in S_0, \quad (1)$$

$$\|\tau(x)\|_2 = 1. \quad (2)$$

Для любой пары $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$ положим

$$f_{j,k}(x) = 2^{j/2} \cdot \tau(2^j x - k), \quad (j, k) \in \mathbb{Z}^2. \quad (3)$$

Система $\{f_{j,k}(x)\}_{j,k=-\infty}^{+\infty}$ была введена Стромбергом [8]. Им же получено, что $\{f_{j,k}(x)\}_{j,k=-\infty}^{+\infty}$ — полная ортонормированная в $L_2(R)$ система и что система $\{f_{j,k}(x)\}_{j,k=-\infty}^{+\infty}$ является безусловным базисом в $H_p(R)$ при любом $p > \frac{1}{2}$.

Очевидно, что функция $\tau(x)$ однозначно определяется значениями $\tau(\sigma)$, $\sigma \in A_1$. Числа $\tau(\sigma)$, $\sigma \in A_1$, удовлетворяют соотношениям (см. [8])

$$\tau(\sigma-1) + 4\tau(\sigma) + \tau(\sigma+1) = 0, \quad \sigma = 2, 3, \dots, \quad (4)$$

$$\tau\left(\sigma - \frac{1}{2}\right) + 4\tau(\sigma) + \tau\left(\sigma + \frac{1}{2}\right) = 0, \quad \sigma = -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \dots, \quad (5)$$

$$\tau(0) + 6\tau\left(\frac{1}{2}\right) + 13\tau(1) + 4\tau(2) = 0, \quad (6)$$

$$2\tau\left(-\frac{1}{2}\right) + 9\tau(0) + 6\tau\left(\frac{1}{2}\right) + \tau(1) = 0. \quad (7)$$

Как показано в [8] из (4), (5) и (2) следует:

$$\tau(\sigma) = \tau(1)(\sqrt{3}-2)^{\sigma-1}, \quad \sigma = 1, 2, 3, \dots, \quad (8)$$

$$\tau(\sigma) = \tau(0)(\sqrt{3}-2)^{-2\sigma}, \quad \sigma = 0, -\frac{1}{2}, -1, \dots. \quad (9)$$

Из соотношений (6)–(9) легко выводится, что

$$\tau(0) = -\tau\left(\frac{1}{2}\right) \frac{4(7-3\sqrt{3})}{11}, \quad (10)$$

$$\tau(1) = -\tau\left(\frac{1}{2}\right) \frac{4\sqrt{3}-1}{11}. \quad (11)$$

Из (8)–(11) следует, что $\tau\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ (для определенности в дальнейшем будем считать, что $\tau\left(\frac{1}{2}\right) > 0$) и поэтому

$$\int_0^1 \tau^2(x) dx > 0. \quad (12)$$

Из (8)–(11) вытекает также, что

$$\max_{x \in R} |\tau(x)| = \tau\left(\frac{1}{2}\right). \quad (13)$$

Для $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$ обозначим через $\{j, k\}$ отрезок $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$, а через $t_{j,k}$ точку $2^{-j}\left(k + \frac{1}{2}\right)$.

Из (3), (12) и (13) имеем

$$\int_{\langle j, k \rangle} f_{j, k}^2(x) dx = \int_0^1 \tau^2(x) dx > 0, \quad (14)$$

$$\max_{x \in R} |f_{j, k}(x)| = f_{j, k}(t_{j, k}). \quad (15)$$

Скажем, что $(j_1, k_1) < (j_2, k_2)$, если $j_1 < j_2$ или если $j_1 = j_2$ и $k_1 < k_2$.

Обозначим

$$N_{j, k}(x) = \begin{cases} 1, & x = t_{j, k}; \\ 0, & x \in (2^{-j}k; 2^{-j}(k+1)); \\ \text{линейная на } [2^{-j}k; t_{j, k}] \text{ и } [t_{j, k}; 2^{-j}(k+1)]. \end{cases} \quad (16)$$

Пусть $(j', k') < (j, k)$, Тогда из (см. (3))

$$\int_R N_{j', k'}(x) f_{j, k}(x) dx = 2^{-\frac{j}{2}} \int_R N_{j', k'}(2^{-j}(x+k)) \tau(x) dx$$

и (1) следует (легко проверить, что $N_{j', k'}(2^{-j}(x+k)) \in S_0$), что

$$\int N_{j', k'}(x) f_{j, k}(x) dx = 0, \text{ когда } (j', k') < (j, k). \quad (17)$$

Из (8), (9) и (13) следует существование некоторых абсолютных постоянных $C > 0$ и $0 < q < 1$ таких, что при любом $(j, k) \in Z^2$ имеет место

$$|f_{j, k}(x)| \leq C 2^{j/2} q^{2^j |x - t_{j, k}|}. \quad (18)$$

Учитывая, что функция $f_{j, k}(x)$ является линейной на отрезках $[2^{-j-1}n, 2^{-j-1}(n+1)]$, $n \in Z$, из (18) получим

$$|f_{j, k}(x)| \leq C 2^{3j/2} q^{2^j |x - t_{j, k}|}. \quad (19)$$

Оценки (18) и (19) получены в работе [8].

Определим понятие частичных сумм ряда

$$\sum_{(j, k) \in Z^2} a_{j, k} f_{j, k}(x) \quad (20)$$

по системе $\{f_{j, k}(x)\}_{(j, k) \in Z^2}$. При фиксированном j рассмотрим частичные суммы

$$S_{m, n}^{(j)}(x) = \sum_{k=m}^n a_{j, k} f_{j, k}(x) \quad (21)$$

и допустим, что почти всюду существует предел сумм $S_{m, n}^{(j)}(x)$, когда m и n стремятся, соответственно, $k \rightarrow -\infty$ и $+\infty$. Этот предел обозначим через $S^{(j)}(x)$. Отметим, что из сходимости почти всюду сумм (21) следует равномерная сходимость на каждом конечном интервале. Это следует из того, что все функции $f_{j, k}(x)$, $k \in Z$, линейны на отрезках вида $[2^{-j-1}l, 2^{-j-1}(l+1)]$, $l \in Z$.

Наконец, для $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$ положим

$$S_{j, k}(x) = \sum_{(j, k) \leq (j, k)} a_{j, k} f_{j, k}(x) = \sum_{j < j} S^{(j)}(x) + \sum_{k < k} a_{j, k} f_{j, k}(x). \quad (22)$$

Полагается также

$$S_{j, +\infty}(x) = S_{j+1, -\infty} = \sum_{j < j} S^{(j)}(x).$$

Легко видеть, что из (18) следует равномерная сходимость на R ряда

$$\sum_k f_{j, k}(t) f_{j, k}(x)$$

и что его сумма не превосходит $C 2^j$. Обозначим

$$D_{j, k}(x, t) = \sum_{(j, k) \leq (j, k)} f_{j, k}(x) f_{j, k}(t).$$

3. Чисельский [13] доказал, что

$$|D_{j, k}(x, t)| \leq C 2^j q^{2^j |x-t|}. \quad (23)$$

Из сказанного следует, что если для функции $f(x) \in L_p(R)$, $p \geq 1$ положить

$$a_{j, k} = \int_R f_{j, k}(t) f(t) dt,$$

то частичные суммы (22) будут определены и их можно найти по формуле

$$S_{j, k}(x) = \int_R D_{j, k}(x, t) f(t) dt.$$

В работе [13] доказано, что если $f(x) \in L_p(R)$, $p \geq 1$ и $\sum_{(j, k) \in \mathbb{Z}^2} a_{j, k} f_{j, k}(x)$ — его ряд Фурье, то

$$\|f(x) - S_{j, k}(x)\|_p \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow +\infty.$$

Отметим также, что не существует одноиндексной нумерации системы $\{f_{j, k}(x)\}_{j, k \in \mathbb{Z}}$, т. е. не существует взаимно-однозначного отображения $\alpha: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_+$, при котором система $\{f_{\alpha(j, k)}\}_{j, k \in \mathbb{Z}}$ была бы базисом в $L_1(R)$. Это следует из того, что (см. [8])

$$\int_R f_{j, k}(x) dx = 0, \quad (j, k) \in \mathbb{Z}^2,$$

и поэтому, если $\sum_{\alpha(j, k) < N} a_{\alpha(j, k)} f_{\alpha(j, k)}(x)$ в метрике $L_1(R)$ сходится, то интеграл от предельной функции равен нулю.

Пусть $f(x) \in L_p(R)$, $p \geq 1$ и $M(f, x)$ — ее максимальная функция Харди—Литтльвуда. Тогда (см. [23])

$$S_{j, k}(x) \leq \int_R |D_{j, k}(x, t)| |f(t)| dt =$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} \left(\int_{x+v2^{-j}}^{x+(v+1)2^{-j}} |D_{j,\kappa}(x, t)| |f(t)| dt + \int_{x-(v+1)2^{-j}}^{x-v2^{-j}} |D_{j,\kappa}(x, t)| |f(t)| dt \right) \leq \quad (24)$$

$$\leq \sum_{v=0}^{\infty} C 2^j q^v \int_{x-(v+1)2^{-j}}^{x+(v+1)2^{-j}} |f(t)| dt \leq C \sum_{v=0}^{\infty} 2^j q^v (2v+2) 2^{-j} M(f, x).$$

Поскольку ряд $\sum_{v=0}^{\infty} (v+1) q^v$ сходится, то из (24) следует

$$|S_{j,\kappa}(x)| \leq C M(f, x). \quad (25)$$

Известно, что максимальный оператор Харди—Литтльвуда имеет тип (p, p) , при $p > 1$. Поэтому из (25) следует, что система $\{f_{j,\kappa}\}_{j,\kappa \in \mathbb{Z}^1}(x)$ типа (p, p) , при $p > 1$, т. е. при любом $p > 1$ существует константа $C(p)$, зависящая только от p такая, что для любой функции $f(x) \in L_p(R)$ имеет место

$$\left\{ \int_R \sup_{j,\kappa} |S_{j,\kappa}(x)|^p dx \right\}^{1/p} \leq C(p) \|f\|_p, \quad p > 1. \quad (26)$$

Из (26) следует, что если ряд (20) является рядом Фурье некоторой функции $f(x) \in L_p(R)$, $p \geq 1$, то

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} S_{j,\kappa}(x) = f(x) \text{ п. в. на } R \text{ независимо от } \kappa.$$

Лемма 1.1. Пусть $I = [2^{-\mu} \cdot v_1; 2^{-\mu} \cdot v_2]$, $v_1, v_2, \mu \in \mathbb{Z}$, $v_1 < v_2$ и $a_{j_0, k}$ — любые действительные числа. Тогда для любого $j_0 \geq \mu$ имеет место

$$\left| \sum_{\{j_0, k\} \subset I} a_{j_0, k} f_{j_0, k}(x) \right| \leq \quad (27)$$

$$\leq C q^{2^{j_0} \varphi(x, I)} \left| \sum_{\{j_0, k\} \subset I} a_{j_0, k} f_{j_0, k}(2^{-\mu} \cdot v_2) \right|, \text{ когда } x \geq 2^{-\mu} \cdot v_2$$

и

$$\left| \sum_{\{j_0, k\} \subset I} a_{j_0, k} f_{j_0, k}(x) \right| \leq \quad (28)$$

$$\leq C q^{2^{j_0} \varphi(x, I)} \left| \sum_{\{j_0, k\} \subset I} a_{j_0, k} f_{j_0, k}(2^{-\mu} \cdot v_1) \right|, \text{ когда } x \leq 2^{-\mu} \cdot v_1.$$

Действительно, из (3) имеем

$$\sum_{\{j_0, k\} \subset I} a_{j_0, k} f_{j_0, k}(x) = 2^{j_0/2} \sum_{k=2^{j_0-\mu} v_1}^{2^{j_0-\mu} v_2-1} a_{j_0, k} \tau(2^{j_0} x - k).$$

Для $x = 2^{-j_0} n \geq 2^{-\mu} v_2$ из (8) получим

$$2^{j_0/2} \sum_{k=2^{j_0-\mu} v_1}^{2^{j_0-\mu} v_2-1} a_{j_0, k} \tau(2^{j_0} x - k) = 2^{j_0/2} \sum_{k=2^{j_0-\mu} v_1}^{2^{j_0-\mu} v_2-1} a_{j_0, k} \tau(n - k) =$$

$$= (\sqrt{3}-2)^{n-2^{j_0-\mu}v_2} 2^{j_0/2} \sum_{k=2^{j_0-\mu}v_1}^{2^{j_0-\mu}v_2-1} a_{j_0, k} \tau(2^{j_0-\mu}v_2-k) = \quad (29)$$

$$= (\sqrt{3}-2)^{2^{j_0-\mu}v_2} \sum_{k=2^{j_0-\mu}v_1}^{2^{j_0-\mu}v_2-1} a_{j_0, k} f_{j_0, k}(2^{-\mu}v_2).$$

Учитывая, что между точками $2^{-j_0}n$ и $2^{-j_0}(n+1)$ функция $\sum_{\{j_0, k\} \subset I} a_{j_0, k} f_{j_0, k}(x)$ является линейной функцией, из (29) получим 27). Аналогично устанавливается (28).

Аналогично лемме 1.1. доказывается

Лемма 1.2. Пусть $I = [2^{-\mu}v_1; 2^{-\mu}v_2]$, $v_1, v_2, \mu \in \mathbb{Z}$, $v_1 < v_2$ и $a_{j, k}$ — любые действительные числа. Тогда для любого $j_0 \geq \mu$ имеют место оценки

$$\sum_{\{j_0, k\} \subset I} a_{j_0, k}^2 f_{j_0, k}^2(x) \leq C \cdot q^{2^{j_0 p}(x, I)} \sum_{\{j_0, k\} \subset I} a_{j_0, k}^2 f_{j_0, k}^2(2^{-\mu}v_2), \text{ когда } x > 2^{-\mu}v_2,$$

и

$$\sum_{\{j_0, k\} \subset I} a_{j_0, k}^2 f_{j_0, k}^2(x) \leq C q^{2^{j_0 p}(x, I)} \sum_{\{j_0, k\} \subset I} a_{j_0, k}^2 f_{j_0, k}^2(2^{-\mu}v_1), \text{ когда } x \leq 2^{-\mu}v_1.$$

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная ортонормированная система. Известно, что ряд $\sum_n a_n \varphi_n(x)$ безусловно сходится в L_p в том и только в том случае, когда при любых $\varepsilon_n = \pm 1$ ряд $\sum_n \varepsilon_n a_n \varphi_n$ сходится в L_p , $p > 0$

При этом выполняется

$$\sup_{\{\varepsilon_n\}} \left\| \sum_n \varepsilon_n a_n \varphi_n(x) \right\|_p < +\infty.$$

Пространства $H_p(T)$ и $H_p(R)$ определяются с помощью классических пространств Харди H_p , рассматриваемых, соответственно, на единичном круге и в верхней полуплоскости.

В настоящее время найдены (см. [14], [15]) другие эквивалентные определения пространств $H_p(T)$ и $H_p(R)$, в которых не фигурируют аналитические функции, а фигурируют только их граничные значения в смысле распределений. В ряде случаев (в данном случае тоже) [удобнее пользоваться этими характеристиками пространств $H_p(T)$, $H_p(R)$. Следуя работам [14], [15], дадим некоторые определения.

Определение 1. Действительнозначную функцию назовем p -атомом в $H_p(T)$, $\frac{1}{2} < p \leq 1$, если существует обобщенный интервал $I \subset [0, 1]$ (т. е. дуга единичной окружности) такой, что:

$$\text{supp } a(x) \subset I, \quad (30)$$

$$\|a(x)\|_{L_\infty(R)} \leq |I|^{-\frac{1}{p}}, \quad (31)$$

$$\int a(x) dx = 0. \quad (32)$$

Атомом назовем также функцию $a(x) \equiv 1$, $x \in [0, 1]$.

Определение 2. Пространство $H_p(T)$ — это множество функционалов (обобщенных функций), допускающих представление $f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i$, где a_i являются p -атомами и $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p < +\infty$. Норма в $H_p(T)$ определяется следующим образом:

$$\|f\|_{H_p(T)} = \inf \left\{ \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p \right)^{1/p} : f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i, a_i - p\text{-атомы} \right\}.$$

Пространства $H_p(R)$, p -атом в $H_p(R)$ и норма в $H_p(R)$, $\frac{1}{2} < p < 1$, определяются аналогично, с той лишь разницей, что вместо обобщенного интервала рассматривается обычный интервал $I \subset R$, а функция $a(x) \equiv 1$ атомом не считается.

В пространстве $H_p(0, 1)$, $\frac{1}{2} < p \leq 1$ p -атомом считается функция $a(x)$, удовлетворяющая условиям (30)–(32), где $I \subset [0, 1]$ — обычный интервал. Пространство $H_p(0, 1)$ есть множество функционалов, допускающих представление $f = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i a_i$, где $a_0(x) \equiv 1$, $a_i(x)$, $i \geq 1$, p -атомы в $H_p(0, 1)$ и $\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|^p < +\infty$.

Когда $p = 1$ вместо 1-атома, будем говорить просто атом.

Пусть $\{R_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система Радемахера. Легко видеть, что при любых a_n , $n = 1, 2, \dots$ и $p, 0 < p \leq 1$, имеет место оценка

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n R_n(x) \right\|_p \leq C(p) \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n R_n(x) \right\|_1. \quad (33)$$

Действительно, достаточно рассмотреть только тот случай, когда

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n R_n(x) \right\|_p < +\infty. \quad (34)$$

Из (34) следует сходимость по мере ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n R_n(x)$ на $[0, 1]$, а отсюда, в свою очередь (см. [16]), следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Обозначим $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R_n(x)$. Очевидно

$$\begin{aligned} \int_0^1 P^2(x) dx &= \int_0^1 |P(x)|^{p/2} |P(x)|^{2-\frac{p}{2}} dx \leq \\ &\leq \left\{ \int_0^1 |P(x)|^p dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^1 |P(x)|^{4-p} dx \right\}^{1/2} = \|P(x)\|_p^{p/2} \|P(x)\|_{4-p}^{2-\frac{p}{2}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Известно, что при любом $q > 2$ выполняется (неравенство Хинчина см. [16])

$$\|P(x)\|_q \leq C(q) \|P(x)\|_2. \quad (36)$$

Из (35) и (36) следует

$$\|P(x)\|_2^2 \leq C(p) \|P(x)\|_p^{\frac{p}{2}} \|P(x)\|_2^{2-\frac{p}{2}},$$

которое и есть (33).

Приведем еще две леммы, доказанные в работах [12], [6].

Лемма 1.3. Для любых натурального m и положительного ε существует постоянная $C(m, \varepsilon)$ такая, что если полином m -ой степени $P(x)$ на множестве $E \subset [0, 1]$ удовлетворяет условию

$$|P(x)| \leq 1, \text{ когда } x \in E$$

и

$$|E| \geq \varepsilon(b-a),$$

то

$$\|P(x)\| \leq C(m, \varepsilon), \text{ когда } x \in [a, b].$$

Лемма 1.4. Для любого натурального m и положительного ε существует постоянная $C(m, \varepsilon)$ такая, что для любого полинома m -ой степени $P(x)$ и любого множества $E \subset [a, b]$, $|E| \geq \varepsilon(b-a)$, имеет место

$$\|P(x)\|_{L_1(a,b)} \leq C(m, \varepsilon) \|P(x)\|_{L_1(E)}.$$

§ 2. Мажоранта и безусловная сходимость рядов Стромберга

Основной целью настоящего параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2.1. Для ряда (1.20) следующие условия эквивалентны:

(A) ряд (1.20) безусловно сходится в $L_p(R)$, $p > 0$;

(B) $\{\sum_{j,k} a_{j,k}^2 f_{j,k}^2(x)\}^{1/2} \in L_p(R)$, $p > 0$;

(C) $\sup_{j,k} |S_{j,k}(x)| \in L_p(R)$, $p > 0$.

В доказательстве нуждается только случай $p \leq 1$. Доказательство теоремы 2.1 разобьем на несколько частей. Сначала докажем одну вспомогательную лемму.

Лемма 2.1. Пусть $I = [2^{-j_0} k_0, 2^{-j_0}(k_0+1)]$, $j_0, k_0 \in \mathbb{Z}$, $\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} a_{j,k}^2 < +\infty$ и если $\{j, k\} \supseteq I$, то $a_{j,k} = 0$. Тогда при любом $0 < p \leq 1$ и любых $\varepsilon_{j,k} = \pm 1$, справедливы

$$\int_R \sup_{j,k} |S_{j,k}(x)|^p dx \leq C(p) |I|^{1-\frac{p}{2}} \left(\sum_{j,k} a_{j,k}^2 \right)^{p/2} \quad (1)$$

и

$$\int_R \left| \sum_{j,k} \varepsilon_{j,k} a_{j,k} f_{j,k}(x) \right|^p dx \leq C(p) |I|^{1-\frac{p}{2}} \left(\sum_{j,k} a_{j,k}^2 \right)^{p/2}, \quad (2)$$

где $C(p)$ — постоянные, зависящие только от p , а $S_{j,k}(x)$ — частичные суммы ряда $\sum a_{j,k} f_{j,k}(x)$.

Доказательство. Прежде всего оценим следующий интеграл:

$$\int_c \left(\sum_{j,k} |a_{j,k} f_{j,k}(x)| \right)^p dx = \int_{-\infty}^{2^{-j_0 k_0}} \left(\sum_{j,k} |a_{j,k} f_{j,k}(x)| \right)^p dx + \\ + \int_{2^{-j_0(k_0+1)}}^{+\infty} \left(\sum_{j,k} |a_{j,k} f_{j,k}(x)| \right)^p dx = \sigma_1 + \sigma_2.$$

Интегралы σ_1 и σ_2 оцениваются аналогично. Мы оценим только σ_2 . Напомним, что если $\{j, k\} \in I$, то $a_{j,k} = 0$. Поэтому с учетом (1.18) получим (применяется неравенство Минковского с показателем $p \leq 1$)

$$\sigma_2 < \int_{2^{-j_0(k_0+1)}}^{+\infty} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k: \{j,k\} \in I} |a_{j,k} f_{j,k}(x)|^p dx \leq \\ \leq C(p) \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k: \{j,k\} \in I} |a_{j,k}|^p \sum_{2^{-j_0(k_0+1)}}^{+\infty} 2^{j p/2} q^{2j/p |x - t_{j,k}|} dx = \\ = C(p) \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k: \{j,k\} \in I} |a_{j,k}|^p 2^{j p/2} \int_{t_{j,k}^{(c)}}^{+\infty} q^{2j/p t} dt \leq \\ \leq C(p) \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k: \{j,k\} \in I} |a_{j,k}|^p 2^{j \left(\frac{p}{2} - 1 \right)} q^{2j/p t_{j,k}^{(c)}}.$$

Применяя неравенство Гёльдера к внутренней сумме с показателями $\frac{2}{p}$ и $\frac{2}{2-p}$, получим

$$\sigma_2 \leq C(p) \sum_{j=j_0}^{\infty} \left\{ \sum_{k: \{j,k\} \in I} a_{j,k}^2 \right\}^{p/2} \left\{ \sum_{k: \{j,k\} \in I} 2^{-j} q^{2j/p t_{j,k}^{(c)}} \right\}^{1 - \frac{p}{2}}. \quad (3)$$

Легко заметить, что

$$\sum_{k: \{j,k\} \in I} q^{2j/p t_{j,k}^{(c)}} \leq C(p). \quad (4)$$

Еще раз применяя неравенство Гельдера, из (3) и (4) получим

$$\sigma_2 \leq C(p) \left\{ \sum_{j,k} a_{j,k}^2 \right\}^{p/2} \left\{ \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{-j} \right\}^{1 - \frac{p}{2}} \leq C(p) |I|^{1 - \frac{p}{2}} \left\{ \sum_{j,k} a_{j,k}^2 \right\}^{p/2}.$$

Аналогично оценивая σ_1 , получим

$$\int_c \left(\sum_{j,k} |a_{j,k} f_{j,k}(x)| \right)^p dx \leq C(p) |I|^{1 - \frac{p}{2}} \left\{ \sum_{j,k} a_{j,k}^2 \right\}^{p/2}. \quad (5)$$

Учитывая, что система $\{f_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}(x)$ ортонормированная и выполняется (1.26), можем сделать следующие оценки:

$$\int_I \sup_{j,k} |S_{j,k}(x)|^p dx \leq |I|^{1-\frac{p}{2}} \left(\int_I \sup_{j,k} |S_{j,k}(x)|^2 dx \right)^{p/2} \leq C(p) |I|^{1-\frac{p}{2}} \left\{ \sum_{j,k} a_{j,k}^2 \right\}^{p/2}, \quad (6)$$

$$\int_I \left| \sum_{j,k} \varepsilon_{j,k} a_{j,k} f_{j,k}(x) \right|^p dx \leq |I|^{1-\frac{p}{2}} \left(\int_I \left| \sum_{j,k} \varepsilon_{j,k} a_{j,k} f_{j,k}(x) \right|^2 dx \right)^{p/2} \leq C(p) |I|^{1-\frac{p}{2}} \left\{ \sum_{j,k} a_{j,k}^2 \right\}^{p/2}. \quad (7)$$

Из (5) и (6) следует (1), а из (7) и (5) вытекает (2). Лемма доказана.

При доказательстве теоремы 2.1 нам нужна следующая

Теорема 2.2. Если ряд 1.20 удовлетворяет условию

$$\int_R \sup_{j,k} |S_{j,k}(x)| dx = 1, \quad (8)$$

то ряд (1.20) является рядом Фурье некоторой функции $f(x) \in H_1(R)$ и

$$\int_R \left| \sum_{j,k} a_{j,k}^2 f_{j,k}^2(x) \right|^{1/2} dx \leq C.$$

Доказательство. Обозначим

$$\sigma_j(x) = \int_0^x S_{j,0}(t) dt \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Из (8) следует, что как функции $\sigma_j(x)$, так и их вариации равномерно ограничены. По теореме Хелли существует функция ограниченной вариации $\sigma(x)$ такая, что при любом (j, k) имеет место

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_R f_{j,k}(x) d\sigma_j(x) = \int_R f_{j,k}(x) d\sigma(x). \quad (9)$$

Поскольку левая часть (9) равна $a_{j,k}$, то

$$\int_R f_{j,k}(x) d\sigma(x) = a_{j,k}.$$

Из (8) следует, что $\sigma(x)$ — абсолютно непрерывная функция. Следовательно существует некоторая $f(x) \in L_1(R)$ такая, что

$$a_{j,k} = \int_R f_{j,k}(x) f(x) dx.$$

Итак, из условия (8) следует, что ряд

$$\sum_k a_{j,k} f_{j,k}(x)$$

является рядом Фурье некоторой интегрируемой функции $f(x)$.
Обозначим

$$E_r = \{x \in R: S^*(x) > 2^r\}, \quad r \in \mathbb{Z}, \quad (10)$$

где

$$S^*(x) = \sup_{j,k} |S_{j,k}(x)|. \quad (11)$$

Фиксируем некоторое $r \in \mathbb{Z}$. Разделим действительную ось на отрезки $[2^{-r+3}k; 2^{-r+3}(k+1)]$, $k \in \mathbb{Z}$ и обозначим через $I_{r-3,k}^{(r)}$ те интервалы среди интервалов $[2^{-r+k}k; 2^{-r+3}(k+1)]$, [которые удовлетворяют условию (таких может и не быть)]

$$\frac{|I_{r-3,k}^{(r)} \cap E_r|}{|I_{r-3,k}^{(r)}|} \geq \frac{1}{8}. \quad (12)$$

Отметим, что если бы мы рассмотрели отрезки длины 2^{-r+4} , то среди них не нашлось бы отрезка, удовлетворяющего (12), поскольку $|E_r| \leq 2^{-r}$. Потом рассмотрим отрезки $[2^{-r+2}k; 2^{-r+2}(k+1)]$ и обозначим через $I_{r-2,k}^{(r)}$ те интервалы из них, которые не пересекаются с интервалами $I_{r-3,k}^{(r)}$ и удовлетворяют условию:

$$\frac{|I_{r-2,k}^{(r)} \cap E_r|}{|I_{r-2,k}^{(r)}|} \geq \frac{1}{8}. \quad (13)$$

Далее, для каждого j обозначим через $I_{j,k}^{(r)}$ те интервалы среди интервалов $[2^j k; 2^j(k+1)]$, $k \in \mathbb{Z}$, которые не пересекаются с интервалами $I_{q,k}^{(r)}$, $q < j$ и удовлетворяют условию

$$\frac{|I_{j,k}^{(r)} \cap E_r|}{|I_{j,k}^{(r)}|} \geq \frac{1}{8}. \quad (14)$$

Обозначим

$$B_r = \bigcup_{j,k} I_{j,k}^{(r)}, \quad r \in \mathbb{Z}. \quad (15)$$

Очевидно, что

$$E_{r+1} \subset E_r \subset B_r \subset B_{r+1} \text{ и } |B_r| \leq 8 |E_r|. \quad (16)$$

При каждом r множество B_r с точностью до множества меры нуль можно представить в виде объединения счетного числа интервалов, которые не имеют общих концов. Итак, пусть

$$B_r = \bigcup_q I_q^{(r)}, \quad (17)$$

где интервалы $I_q^{(r)}$ не имеют общих концов при фиксированном r и разных q .

Обозначим

$$h_r(x) = \begin{cases} f(x), & \text{когда } x \notin B, \\ \frac{1}{|I_q^{(r)}|} \int_{I_q^{(r)}} f(t) dt, & \text{когда } x \in I_q^{(r)}. \end{cases} \quad (18)$$

Докажем, что

$$\|h_r(x)\|_{L_1(R)} < C 2^r. \quad (19)$$

Поскольку вне B , выполняется $|f(x)| < 2^r$ (см. (10), (16) и (18)), то для доказательства (19) нам нужно установить, что

$$\left| \frac{1}{|I_q^{(r)}|} \int_{I_q^{(r)}} f(t) dt \right| \leq C 2^r. \quad (20)$$

Фиксируем некоторое $I_q^{(r)}$ и пусть $I_{j_0, k_0}^{(r)}$ — самый длинный интервал, содержащийся в $I_q^{(r)}$. Очевидно, что

$$|I_q^{(r)}| \leq 4 |I_{j_0, k_0}^{(r)}| \leq 4 |I_q^{(r)}|. \quad (21)$$

Учитывая, что $S_{j, k}(x)$ в метрике L_1 сходится к $f(x)$, можем записать

$$\int_{I_q^{(r)}} f(t) dt = \int_{I_q^{(r)}} S_{j_0, +}(x) dx + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \int_{I_q^{(r)}} (S_{j+1, -}(x) - S_{j, -}(x)) dx. \quad (22)$$

Функция $S_{j, +}$ является линейной на каждом интервале вида $[2^{-j_0-1}k; 2^{-j_0-1}(k+1)]$. Пусть Δ — какой-нибудь интервал вида $[2^{-j_0-1}k; 2^{-j_0-1}(k+1)]$, который пересекается с $I_q^{(r)}$. Тогда

$$|\Delta \cap E_r| \leq \frac{1}{2} |\Delta|. \quad (23)$$

Действительно, если бы не выполнялось (23), то для содержащегося в Δ двоичного интервала Δ_1 ранга j_0-1 выполнялось бы

$$|\Delta_1 \cap E_r| \geq \frac{1}{8} |\Delta_1|, \quad (24)$$

которое означает, что $\Delta_1 \subset E_r$ и $\Delta_1 \cap I_q^{(r)} \neq \emptyset$. Следовательно $\Delta_1 \subset I_q^{(r)}$. Но это противоречило бы тому, что $I_{j_0, k_0}^{(r)}$ — самый длинный интервал, содержащийся в $I_q^{(r)}$.

Поскольку $S_{j_0, +}(x)$ является линейной функцией на Δ и выполняется (23), то (см. лемму 1.3)

$$|S_{j_0, +}(x)| \leq C 2^r, \quad x \in \Delta. \quad (25)$$

Из (25) следует, что

$$\left| \int_{I_q^{(r)}} S_{j_0, +}(x) dx \right| \leq C 2^r |I_q^{(r)}|. \quad (26)$$

Рассмотрим функции

$$\Psi_J(x) = S_{J+1, \dots}(x) - S_{J, \dots}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{J, k} f_{J, k}(x), \quad J \geq j_0.$$

Функция $\Psi_J(x)$ — линейная на каждом $[2^{-J-1}k; 2^{-J-1}(k+1)]$ и выполняется (см. (1.17), (1.16))

$$\int_R \Psi_J(x) N_{J-1, k}(x) dx = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (27)$$

где $N_{J, k}(x)$ — функции, определяемые формулами (1.16).

Пусть $J \geq j_0$. Выберем интервал $\Delta_J = [2^{-J}k_1; 2^{-J}k_2]$ такой, что

$$[2^{-J}(k_1+1); 2^{-J}(k_2-1)] \subset I_q^{(r)} \subset [2^{-J}k_1; 2^{-J}k_2],$$

$$\delta_1 = [2^{-J}k_1; 2^{-J}(k_1+1)] \subset I_q^{(r)}, \quad \delta_2 = [2^{-J}(k_2-1); 2^{-J}k_2] \subset I_q^{(r)}. \quad (28)$$

Положим

$$\Phi_J(x) = \sum_{\text{supp } N_{J-1, k} \subset \Delta_J} N_{J-1, k}(x). \quad (29)$$

Очевидно, что

$$\Phi_J(x) = \begin{cases} 1, & x \in [2^{-J}(k_1+1); 2^{-J}(k_2-1)], \\ 0, & x \notin \Delta \\ \text{линейная на } \delta_1 \text{ и } \delta_2. \end{cases} \quad (30)$$

Из (27), (29) и (30) следует

$$\begin{aligned} \int_{I_q^{(r)}} \Psi_J(x) dx &= \int_R \Psi_J(x) (\chi_{I_q^{(r)}}(x) - \Phi_J(x)) dx = \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_{\delta_i} \Psi_J(x) (\chi_{I_q^{(r)}}(x) - \Phi_J(x)) dx. \end{aligned} \quad (31)$$

Обозначим через δ_i^- и δ_i^+ , соответственно, левые и правые половины интервалов δ_i , $i=1, 2$. Тогда выполняются

$$|\delta_i^- \cap E_r| < \frac{1}{2} |\delta_i^-|, \quad i=1, 2, \quad (32)$$

$$|\delta_i^+ \cap E_r| < \frac{1}{2} |\delta_i^+|, \quad i=1, 2. \quad (33)$$

Действительно, если скажем не выполняется одна из (32) и (33) для $i=1$, то выполняется

$$|\delta_1 \cap E_r| > \frac{1}{4} |\delta_1|,$$

которое противоречит (28).

Поскольку $S_{J+1, \dots}(x)$ и $S_{J, \dots}(x)$ — линейные функции на δ_i^- и δ_i^+ , $i=1, 2$, то из (32) и (33) следует (см. (10), (11) и лемму 1.3)

$$|S_{J+1, -\infty}(x)| \leq C 2^J, \quad x \in \delta_1 \cup \delta_2, \quad (34)$$

$$|S_{J, -\infty}(x)| \leq C 2^J, \quad x \in \delta_1 \cup \delta_2. \quad (35)$$

Из (31), (34) и (35) получим (напомним, что $|\delta_i| = 2^{-J}$)

$$\left| \int_{J_q^{(r)}} \Psi_J(x) dx \right| \leq 2^J 2^{-J}. \quad (36)$$

Из (22), (26) и (36) вытекает (см. также (21))

$$\left| \int_{J_q^{(r)}} f(t) dt \right| \leq C 2^J |J_q^{(r)}| + C \sum_{j=J_q+1}^{\infty} 2^j \cdot 2^{-j} \leq C 2^J |J_q^{(r)}|,$$

которое и есть (20).

Положим (см. (18))

$$b_q^{(r)}(x) = \frac{1}{C 2^J |J_q^{(r)}|} \chi_{J_q^{(r)}}(x) (h_{r+1}(x) - h_r(x)), \quad (37)$$

где C — константа, фигурирующая в (19).

Тогда из (18), (19) и (37) получим

$$\int_{J_q^{(r)}} b_q^{(r)}(x) dx = 0, \quad |b_q^{(r)}(x)| \leq \frac{1}{|J_q^{(r)}|}, \quad \text{supp } b_q^{(r)} \subset J_q^{(r)},$$

т. е. $b_q^{(r)}(x)$ являются атомами.

Очевидно, что

$$f(x) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} (h_{r+1}(x) - h_r(x)) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_q C 2^J |J_q^{(r)}| b_q^{(r)}(x).$$

Оценим $H_1(R)$ -норму функции $f(x)$ (см. (17), (16), (10))

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_{H_1(R)} &\leq \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_q C 2^J |J_q^{(r)}| = C \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2^r |B_r| \leq \\ &\leq C \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2^r |E_r| = C \sum_{r=-\infty}^{+\infty} (2^{r+1} - 2^r) |E_r| = C \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2^{r+1} (|E_r| - |E_{r+1}|) = \\ &= C \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2^r |E_r - E_{r+1}| < C \int_R S^*(x) dx = C. \end{aligned} \quad (38)$$

Для завершения доказательства теоремы остается к (38) применить теорему Стромберга [8], которую можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2.3. (Стромберг). Для любого $p > \frac{1}{2}$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} C_1(p) \left\| \left| \sum_{j,k} a_{j,k}^2 f_{j,k}^2(x) \right|^{1/2} \right\|_p &\leq \left\| \sum_{j,k} a_{j,k} f_{j,k}(x) \right\|_{H_p(R)} \leq \\ &\leq C_2(p) \left\| \left| \sum_{j,k} a_{j,k}^2 f_{j,k}^2(x) \right|^{1/2} \right\|_p. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2.1. Мы докажем, что $(A) \Rightarrow (B)$, $(B) \Rightarrow (C)$ и $(A), (C) \Rightarrow (B)$.

Доказательство импликации $(A) \Rightarrow (B)$. Допустим ряд (1.20) безусловно сходится. Пусть $\{R_{j,k}(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ — система Радемахера в какой-нибудь двойной нумерации. Тогда

$$\sup_t \int_R \left| \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} R_{j,k}(t) a_{j,k} f_{j,k}(x) \right|^p dx < +\infty. \quad (39)$$

Интегрируя (39) по переменной t и меняя порядок интегрирования, получим

$$\int_R \int_0^1 \left| \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} R_{j,k}(t) a_{j,k} f_{j,k}(x) \right|^p dt dx < +\infty. \quad (40)$$

К внутреннему интегралу (40) применяя неравенство (1.35), получим

$$\int_R \left\{ \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} a_{j,k}^2 f_{j,k}^2(x) \right\}^{p/2} dx < +\infty.$$

Доказательство импликаций $(B) \Rightarrow (A)$, $(B) \Rightarrow (C)$. Пусть

$$\int_R \left\{ \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} a_{j,k}^2 f_{j,k}^2(x) \right\}^{p/2} dx = 1. \quad (41)$$

Положим

$$E_r = \{x \in R : S(x) > 2^r\}, \quad r \in \mathbb{Z}, \quad (42)$$

где

$$S(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} a_{j,k}^2 f_{j,k}^2(x). \quad (43)$$

Аналогично определим множества B_r из соотношений (12)–(15). Обозначим

$$\Lambda_r^{(j,k)} = \{(m, n) : [m, n] \subset I_{r,k}^{(j)} \text{ и } [m, n] \subset B_{r+1}\}. \quad (44)$$

Очевидно, что если $(m, n) \in \Lambda_r^{(j,k)}$, то (см. (44) и (14))

$$|[m, n] \cap E_{r+1}| < \frac{1}{8} |[m, n]|. \quad (45)$$

Из (45) следует, что если $[m, n]^-$ и $[m, n]^+$ — левая и правая половины интервала $[m, n]$ и $(m, n) \in \Lambda_r^{(j,k)}$, то

$$|[m, n]^- \cap E_{r+1}| < \frac{1}{4} |[m, n]^-|, \quad (46)$$

$$|[m, n]^+ \cap E_{r+1}| < \frac{1}{4} |[m, n]^+|. \quad (47)$$

Учитывая, что $f_{m,k}^2(x)$ на интервалах $[m, n]^-$ и $[m, n]^+$ является полиномом второй степени, из (46), (47) и леммы 1.4 получим

$$\int_{\{m, n\} \setminus E_{r+1}} f_{j, k}^2(x) dx \geq C \int_{\{m, n\}} f_{j, k}^2(x) dx. \quad (48)$$

Из (1.14), (48), (42) и (43) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{(m, n) \in \Lambda_r^{(j, k)}} a_{m, n}^2 &\leq C \sum_{(m, n) \in \Lambda_r^{(j, k)}} a_{m, n}^2 \int_{\{m, n\}} f_{m, n}^2(x) dx \leq \\ &\leq C \int_{I_{j, k}^{(r)} \setminus E_{r+1}} \sum_{(m, n) \in \Lambda_r^{(j, k)}} a_{m, n}^2 f_{m, n}^2(x) dx \leq C 2^r |I_{j, k}^{(r)}|. \end{aligned} \quad (49)$$

Рассмотрим ряды $\sum_{(m, n) \in \Lambda_r^{(j, k)}} a_{m, n} f_{m, n}(x)$. Из (49) следует, что эти ряды в $L_2(R)$ сходятся. Их суммы обозначим через $F_r^{(j, k)}(x)$, а мажоранты — $S_r^{(j, k)}(x)$, т. е.

$$S_r^{(j, k)}(x) = \sup_{J, K} \left| \sum_{\substack{(m, n) \in \Lambda_r^{(j, k)} \\ (m, n) < (J, K)}} a_{m, n} f_{m, n}(x) \right|.$$

Из леммы 2.1 и (49) следует

$$\int_R (S_r^{(j, k)}(x))^p dx \leq C(p) 2^{rp/2} |I_{j, k}^{(r)}|, \quad (50)$$

$$\int_R \left| \sum_{(m, n) \in \Lambda_r^{(j, k)}} \varepsilon_{m, n} a_{m, n} f_{m, n}(x) \right|^p dx \leq C(p) 2^{rp/2} |I_{j, k}^{(r)}|. \quad (51)$$

Из (50), (41)—(43) вытекает

$$\begin{aligned} \int_R \sup_{J, K} |S_{J, K}(x)|^p dx &\leq \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{J, K} \int_R |S_r^{(j, k)}(x)|^p dx \leq \\ &\leq C(p) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2^{rp/2} |E_r| = C(p) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^r 2^{lp/2} - \sum_{l=-\infty}^{r-1} 2^{lp/2} \right) |E_r| \leq \\ &\leq C(p) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2^{\frac{r}{2}p} |E_r \setminus E_{r+1}| \leq C(p). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что из (51) и (41)—(43) следует

$$\int_R \left| \sum_{J, K \in \mathbb{Z}} \varepsilon_{J, K} a_{J, K} f_{J, K}(x) \right|^p dx \leq C(p).$$

Импликация $(B) \Rightarrow (A)$ и $(B) \Rightarrow (C)$ доказаны.

Доказательство импликации $(C) \Rightarrow (B)$. Пусть

$$\int_R (S^*(x))^p dx = 1,$$

где

$$S^*(x) = \sup_{J, K} |S_{J, K}(x)|.$$

Обозначим

$$E_r = \{x \in R: S^*(x) > 2^r\}, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Как и при доказательстве теоремы 2.2. из соотношений (12)–(15) определим множества $B_r = \bigcup_k I_{j_0, k}^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}$.

Обозначим далее

$$\Gamma_r = \{(j, k): \{j, k\} \subset B_{r+1}, \{j, k\} \not\subset B_r\}$$

и положим

$$a_{j, k}^{(r)} = \begin{cases} a_{j, k}, & \text{если } (j, k) \in \Gamma_r, \\ 0, & \text{если } (j, k) \notin \Gamma_r. \end{cases}$$

Рассмотрим ряды

$$\sum_{j, k \in \mathbb{Z}} a_{j, k}^{(r)} f_{j, k}(x) \quad (52)$$

с частичными суммами

$$S_{j, k}^{(r)}(x) = \sum_{(j, k) \in \Gamma_r} a_{j, k}^{(r)} f_{j, k}(x). \quad (53)$$

Отметим, что если $(j, k) \in \Gamma_r$, то

$$\|a_{j, k} f_{j, k}(x)\|_\infty = \|a_{j, k} f_{j, k}(t_{j, k})\| \leq C 2^r. \quad (54)$$

Действительно, из $\{j, k\} \subset B_{r+1}$ следует, что

$$|\{j, k\} \cap E_{r+1}| < \frac{1}{8} \|\{j, k\}\|, \quad (55)$$

а из (55), (1.15) и леммы 1.3 вытекает (54).

Фиксируем некоторое $I_{j_0, k_0}^{(r)}$, некоторое $j \geq j_0 - 1$ и $x \in I_{j_0, k_0}^{(r)}$. Тогда из (54) и (1.18) следует

$$\begin{aligned} \sum_{k: \{j, k\} \subset B_{r+1}} |a_{j, k} f_{j, k}(x)| &\leq C 2^r \sum_{k: \{j, k\} \subset B_{r+1}} q^{2^j |x - t_{j, k}|} \leq \\ &\leq C 2^r q^{2^j \rho(x, I_{j_0, k_0}^{(r)})^c}. \end{aligned} \quad (56)$$

Из (56) получим

$$\begin{aligned} \int_{I_{j_0, k_0}^{(r)}} \sum_{j=j_0-1}^{\infty} \sum_{k: \{j, k\} \subset B_{r+1}} |a_{j, k} f_{j, k}(x)| dx &\leq \\ &\leq C 2^r \sum_{j=j_0-1}^{\infty} \int_{I_{j_0, k_0}^{(r)}} q^{2^j \rho(x, I_{j_0, k_0}^{(r)})^c} dx \leq \\ &\leq C 2^r \sum_{j=j_0-1}^{\infty} 2^{-j} \int_0^{\infty} q^t dt = C 2^r 2^{-j_0} = C 2^r |I_{j_0, k_0}^{(r)}|. \end{aligned} \quad (57)$$

Из (57) следует, что ряд $\sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k: \{j, k\} \in B_r} |a_{j, k} f_{j, k}(x)|$ п. в. сходится.

Обозначим

$$\varphi_{r, 1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin B_r, \\ \sum_{j=j_0-1}^{\infty} \sum_{k: \{j, k\} \in E_r} |a_{j, k} f_{j, k}(x)|, & \text{если } x \in I_{j_0, k_0}^{(r)}. \end{cases} \quad (58)$$

Очевидно, что (см. 57).

$$\int_R \varphi_{r, 1}(x) dx \leq C 2^r |B_r|. \quad (59)$$

Теперь множества B_r представим в виде (17). Возьмем некоторое $I_q^{(r)}$ и пусть $I_{j_0, k_0}^{(r)}$ является самым длинным составляющим интервала $I_q^{(r)}$. Для $j \geq j_0$ обозначим через $I_{j_0, k_0}^{(r, j)}$ самый длинный интервал вида $(2^{-j} k_1; 2^{-j} k_2)$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, который содержит $I_{j_0, k_0}^{(r)}$ и содержится в $I_q^{(r)}$. Пусть Δ — справа от $I_{j_0, k_0}^{(r, j)}$ первый интервал ранга j . Тогда Δ не пересекается с $\bigcup_{q < j} \left(\bigcup_k I_{j_0, k}^{(r, q)} \right)$ и

$$|\Delta \cap E_r| \leq \frac{1}{8} |\Delta|. \quad (60)$$

Рассмотрим суммы $(j_0, k_0, j$ — вышеуказанные)

$$S_{j_0, k_0, j, m}^{(r)}(x) = \sum_{\substack{k: \{j, k\} \in I_{j_0, k_0}^{(r, j)} \\ k < m}} a_{j, k} f_{j, k}(x). \quad (61)$$

Очевидно, что

$$|S_{j_0, k_0, j, m}^{(r)}(x)| \leq 2 \cdot 2^r, \text{ вне } E_r, \quad (62)$$

так как $S_{j_0, k_0, j, m}^{(r)}(x)$ — разность двух частичных сумм. Поскольку $S_{j_0, k_0, j, m}^{(r)}(x)$ линейна на Δ , то из (60) и (62) следует

$$|S_{j_0, k_0, j, m}^{(r)}(x)| \leq C 2^r, \text{ на } \Delta. \quad (63)$$

Применяя лемму 1.1 из (63) получим

$$|S_{j_0, k_0, j, m}^{(r)}(x)| \leq C 2^r q^{2^j p(x, I_{j_0, k_0}^{(r, j)})}, \text{ когда } x \geq \max I_{j_0, k_0}^{(r, j)}.$$

Аналогичное неравенство можно получить для $x \leq \min I_{j_0, k_0}^{(r, j)}$.

Итак

$$|S_{j_0, k_0, j, m}^{(r)}(x)| \leq C 2^r q^{2^j p(x, I_{j_0, k_0}^{(r, j)})}, \text{ когда } x \notin I_{j_0, k_0}^{(r, j)}. \quad (64)$$

Ясно, что

$$I_{j_0, k_0}^{(r, j)} \subset \bigcup_{q < j} \bigcup_k I_{j_0, k}^{(r, q)}.$$

Положим

$$\varphi_q^{(r)}(x) = \begin{cases} 0, & x \in I_{j_0, k_0}^{(r)} \\ \sum_{j=j_0}^{h-1} \max_m |S_{j_0, k_0, j, m}^{(r)}(x)|, & x \in I_{j_0, k_0}^{(r, h)} \setminus I_{j_0, k_0}^{(r, h-1)}, \quad h > j_0, \\ \sum_{j=j_0}^{\infty} \max_m |S_{j_0, k_0, j, m}^{(r)}(x)|, & x \in \bigcup_{j=j_0}^{\infty} I_{j_0, k_0}^{(r, j)} = I_q^{(r)}. \end{cases} \quad (65)$$

Применяя

$$\begin{aligned} \int_R \varphi_q^{(r)}(x) dx &\leq \sum_{j=j_0}^{\infty} \int_{(I_{j_0, k_0}^{(r, j)})^c} \max_m |S_{j_0, k_0, j, m}^{(r)}(x)| dx < \\ &\leq C 2^r \sum_{j=j_0}^{\infty} \int_{(I_{j_0, k_0}^{(r, j)})^c} q^{2^j \rho(x, I_{j_0, k_0}^{(r, j)})} dx \leq 2^r \sum_{j=j_0}^{\infty} \int_0^{\infty} q^{2^j t} dt = \\ &= C 2^r \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{-j} \leq 2^r |I_{j_0, k_0}^{(r)}| \leq C 2^r |I_q^{(r)}| \end{aligned} \quad (66)$$

и обозначая

$$\varphi^{(r)}(x) = \varphi_{r,1}(x) + \sum_q \varphi_q^{(r)}(x), \quad (67)$$

из (66) и (59) получим

$$\int_R \varphi^{(r)}(x) dx \leq C 2^r |B_r|.$$

Через $S_r^*(x)$ обозначим мажоранту ряда (52), т. е. (см. (53))

$$S_r^*(x) = \sup_{j, k} |S_{j, k}^{(r)}(x)|, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Из соотношений

$$S_{j, k}^{(r)}(x) = \sum_{\substack{\{j, k\} \subset B_r \\ (j, k) < (J, K)}} a_{j, k} f_{j, k}(x) - \sum_{\substack{\{j, k\} \subset B_r \\ (j, k) < (J, K)}} a_{j, k} f_{j, k}(x), \quad r \in \mathbb{Z}$$

следует (см. (65)), что

$$\begin{aligned} S^*(x) &\leq \sum_q \varphi_q^{(r)}(x) + \sum_q \varphi_q^{(r+1)}(x) \leq \\ &\leq \varphi^{(r)}(x) + \varphi^{(r+1)}(x), \quad \text{когда } x \in B_r. \end{aligned} \quad (68)$$

Легко видеть, что

$$S_{j, k}^{(r)}(x) = \sum_{\substack{\{j, k\} \subset B_{r+1} \\ (j, k) < (J, K)}} a_{j, k} f_{j, k}(x) - \sum_{\substack{\{j, k\} \subset B_r \\ (j, k) < (J, K)}} a_{j, k} f_{j, k}(x), \quad r \in \mathbb{Z}. \quad (69)$$

При любом (J, K) имеем

$$\left| \sum_{\substack{\{j, k\} \subset B_r \\ (j, k) < (J, K)}} a_{j, k} f_{j, k}(x) \right| \leq |S_{j, k}^{(r)}(x)| + \left| \sum_{\substack{\{j, k\} \subset B_r \\ (j, k) < (J, K)}} a_{j, k} f_{j, k}(x) \right|. \quad (70)$$

Из (70), (65) и (67) следует

$$\left| \sum_{\substack{\{j, k\} \subset P_r \\ (j, k) < (J, K)}} a_{j, k} f_{j, k}(x) \right| \leq 2^r + \varphi^{(r)}(x), \text{ когда } x \in B_r, r \in \mathbb{Z}. \quad (71)$$

Пусть x принадлежит некоторому $I_{j, k}^{(r)}$ и $(j, K) \leq (j, -\infty)$. Тогда

$$\left| \sum_{\substack{\{m, n\} \subset B_r \\ (m, n) < (J, K)}} a_{m, n} f_{m, n}(x) \right| \leq |S_{j, K}(x)| + \left| \sum_{\substack{\{m, n\} \subset B_r \\ (m, n) < (J, K)}} a_{m, n} f_{m, n}(x) \right|. \quad (72)$$

Первое слагаемое является линейной функцией на $I_{j, k}^{(r)}$. Из того, что $I_{j, k}^{(r)}$ не пересекается с интервалами $I_{j, k}^{(r)}$, k (см. построение множеств B_r) следует

$$|I_{j, k}^{(r)} \cap E_r| \leq \frac{1}{4} |I_{j, k}^{(r)}|. \quad (73)$$

Из (73) и леммы 1.3 вытекает, что первое слагаемое в (72) не превосходит $C 2^r$. Второе слагаемое в (72) не превосходит $\sum_q \varphi_q^{(r)}(x)$ (см. (65), (61)).

Пусть $x \in I_{j, k}^{(r)}$ и $(j, K) > (j, -\infty)$. Тогда из (58), (65), (67) следует

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{\{m, n\} \subset B_r \\ (m, n) < (J, K)}} a_{m, n} f_{m, n}(x) \right| &\leq |S_{j, K}(x)| + \left| \sum_{\substack{\{m, n\} \subset B_r \\ (m, n) < (j, -\infty)}} a_{m, n} f_{m, n}(x) \right| + \\ &+ \left| \sum_{\substack{\{m, n\} \subset B_r \\ (j, -\infty) < (m, n) < (J, K)}} a_{m, n} f_{m, n}(x) \right| \leq C 2^r + \varphi^{(r)}(x). \end{aligned}$$

Итак на B_r имеем

$$\sup_{\substack{j, K \\ \{j, k\} \subset B_r \\ (j, K) < (J, K)}} \left| \sum_{\{j, k\} \subset B_r} a_{j, k} f_{j, k}(x) \right| \leq C 2^r + \varphi^{(r)}(x). \quad (74)$$

Из (74) и (69) следует

$$S_r^*(x) \leq C 2^{r+1} + \varphi^{(r)}(x) + \varphi^{(r+1)}(x), \text{ когда } x \in B_{r+1}, \quad (75)$$

а из (74) и (71) имеем

$$S_r^*(x) \leq C 2^{r+1} + \varphi^{(r)}(x) + \varphi^{(r+1)}(x), \text{ когда } x \in B_r \setminus B_{r+1}. \quad (76)$$

Объединяя (76), (75) и (68), получим

$$S_r^*(x) \leq C 2^r \chi_{B_r}(x) + \varphi^{(r)}(x) + \varphi^{(r+1)}(x)$$

$$\int_R S_r^*(x) dx \leq C 2^r |B_r| + C 2^r |B_r| + C 2^{r+1} |B_{r+1}| \leq C 2^r |B_r|. \quad (77)$$

Применяя теорему 2.2 из (77), получим

$$\int_R \left\{ \sum_{\{j, k\} \in \Gamma_r} a_{j, k}^2 f_{j, k}^2(x) \right\}^{1/2} dx \leq C 2^r |B_r|, r \in \mathbb{Z}. \quad (78)$$

Обозначим

$$Q_r(x) = \left| \sum_{(j,k) \in \Gamma_r} a_{j,k}^2 f_{j,k}^2(x) \right|^{1/2}, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Применяя неравенство Гельдера, из (78) получим

$$\int_{B_r} Q_r^p(x) dx < \left\{ \int_{B_r} Q_r(x) dx \right\}^p |B_r|^{1-p} < C(p) 2^{rp} |B_r|, \quad r \in \mathbb{Z}. \quad (79)$$

Применяя лемму 1.2, легко можно убедиться, что

$$\int_K Q_r^p(x) dx \leq C(p) \int_{B_r} Q_r^p(x) dx. \quad (80)$$

Из (79) и (80) следует

$$\int_{B_r} Q_r^p(x) dx \leq C(p) 2^{rp} |B_r|, \quad r \in \mathbb{Z}. \quad (81)$$

Легко заметить, что $\bigcup_{r \in \mathbb{Z}} \Gamma_r \supset \{(j,k) : a_{j,k} \neq 0\}$. Поэтому

$$\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} a_{j,k}^2 f_{j,k}^2(x) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} Q_r^2(x),$$

из которого получим

$$\left\{ \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} a_{j,k}^2 f_{j,k}^2(x) \right\}^{p/2} \leq \sum_{r \in \mathbb{Z}} Q_r^p(x). \quad (82)$$

В силу (82), (81), (16)

$$\begin{aligned} \int_R \left| \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} a_{j,k}^2 f_{j,k}^2(x) \right|^{p/2} dx &\leq \sum_{r \in \mathbb{Z}} \int_R Q_r^p(x) dx \leq C(p) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2^{rp} |B_r| \leq \\ &\leq C(p) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2^{rp} |E_r| < C(p) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2^{rp} |E_r \setminus E_{r+1}| < C(p). \end{aligned}$$

Теорема 2.1 полностью доказана.

Из теорем 2.1 и 2.3 следует

Теорема 2.4. Для любого $p > \frac{1}{2}$ следующие условия эквивалентны:

(A) ряд (1.20) безусловно сходится в $L_p(R)$;

(B) $\left| \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} a_{j,k}^2 f_{j,k}^2(x) \right|^{1/2} \in L_p(R)$;

(C) $\sup_{j,k} |S_{j,k}(x)| \in L_p(R)$;

(D) ряд (1.20) является рядом Фурье некоторой функции $f \in H_p(R)$;

(E) ряд (1.20) безусловно сходится в $H_p(R)$.

Аналог теоремы 2.4 для системы Франклина установлен в работе [12].

Գ. Դ. ԴԵՎՈՐԿՅԱՆ. Քերտեմաներ Ֆրանկլին-Ստրոմբերգի մոդիֆիկացված համակարգի վերաբերյալ (ամփոփում)

Աշխատանքում ապացուցված է, որ Ստրոմբերգի կողմից կառուցված Ֆրանկլինի մոդիֆիկացված համակարգի $\{f_{j,k}(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ համար հետևյալ պնդումները համարժեք են.

1. $\sup_{j,k} \left| \sum_{j < J} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} f_{j,k}(x) + \sum_{k < K} a_{j,k} f_{j,k}(x) \right| \in L_p(-\infty, +\infty), p > 0,$
2. $\left\{ \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} a_{j,k}^2 f_{j,k}^2(x) \right\}^{1/2} \in L_p(-\infty, +\infty), p > 0.$
3. $\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} f_{j,k}(x)$ արժեքը պայմանական զուգամիտում է $L_p(-\infty, +\infty)$. $p > 0$:

G. G. CEVORKIAN. *Theorems on modified Franklin — Stromberg system*
(summary)

In the paper it is proved, that for modified Franklin system $\{f_{j,k}(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ the following properties are equivalent.

1. $\sup_{j,k} \left| \sum_{j < J} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} f_{j,k} + \sum_{k < K} a_{j,k} f_{j,k}(x) \right| \in L_p(-\infty, +\infty), p > 0,$
2. $\left\{ \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} a_{j,k}^2 f_{j,k}^2(x) \right\}^{1/2} \in L_p(-\infty, +\infty), p > 0,$
3. The series $\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} f_{j,k}(x)$ unconditionally converges in $L_p(-\infty, +\infty)$; $p > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ph. Franklin. A set of continuous orthogonal functions. Math. Annalen, Bd. 100, 1928, 522—529.
2. С. В. Бочкарев. Существование базиса в пространстве функций аналитических в круге и некоторые свойства системы Франклина, Мат. сб., 95, № 1, 1974, 3—18.
3. P. Wollaszyk. The Franklin system is an unconditional basis in H_1 , Ark. for Mat., v. 20, № 2, 1982, 293—300.
4. P. Sjolin. and J.—O. Stromberg. Bases properties of Hardy spaces, Ark. Mat., 21, № 1, 1983, 111—125.
5. P. Oswald. On Schauder bases in Hardy spaces, Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh, 93A, 1983, 259—263.
6. A. Sun Yung Chang. Z. Ciesielski. Spline characterizations of H^1 , Studia Math., v 75, 1983, 183—192.
7. Z. Ciesielski. Bases and approximation by splines, in Proc. of the International Congress of Math., Vancouver, 1974, 47—51.
8. J. O. Stromberg. A modified Franklin system and higher-order Spline systems on R_n as unconditional bases for Hardy spaces, Conf. on Harmonic Analyses in honor of A. Zygmund, v. II, 475—494.
9. P. Sjolin. Convergence almost everywhere of spline expansions in Hardy spaces. Top. Mod. Harmonic Anal. Proc. Semin., Torino and Milano. May-June. 1982. v. 2, Roma, 1983, 645—651.
10. F., Schipp, P. Simon. Investigation of Haar and Franklin series in Hardy spaces, Analysis Math., 8, 1982, 47—56.

11. Г. Г. Геворкян. О рядах по системе Франклина, *Analysis Math.*
12. Г. Г. Геворкян. Некоторые теоремы о безусловной сходимости и мажоранте рядов Франклина и их применение в пространстве $Re H_p$, Труды МИАН, т. 193, 1989.
13. Z. Ciesielski, Spiline bases in spaces of analytic functions, *Canadian Math. Soc. Conf. Proc.*, 3, 1983, 81—111.
14. R. R. Coifman. A real variable characterization of H_p , *Studia Math.*, v 51, 1974, 269—274.
15. R. R. Coifman, Weiss. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83, 1977, 569—645.
16. Б. С. Кашин, А. А. Саакян. Ортогональные ряды, М., «Наука», 1984.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Ա. Ա. Թալալյան և Ֆ. Ա. Թալալյան. Բազմաթիվ փոփոխականների բացարձակ անընդհատ ֆունկցիաների ներկայացման մասին	3
Բ. Ի. Հովսեփյան. Միակազմյալ բնույթի որոշ պնդումներ Հաարի սխտեմի և անընդհատ ֆունկցիաներից բաղկացած կենտրոնավորված սխտեմների համար	23
Հ. Մ. Մաղիսյան. Եռանկյունաչափական սխտեմով և $C[0,1]$ -ի կամայական օրթոնորմով բազիսով L_p -ի, $1 \leq p < 2$ ֆունկցիայի ամենափոքր զուգամիտող, տեղափոխված անդամներով շարքի գործակիցների մասին	40
Գ. Գ. Գևորգյան. Թևորեմներ Ֆրանկլին-Ստրոմբերգի մոդիֆիկացված համակարգի վերաբերյալ	69

ՀԱՄԱՌՈՑ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

Հ. Ա. Հակոբյան, Ա. Ա. Սահակյան. Մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների դասի մասին	93
---	----

СОДЕРЖАНИЕ

А. А. Талалян и Ф. А. Талалян. О представлении абсолютно непрерывных функций многих переменных	3
Р. И. Овсепян. О некоторых теоремах единственности для системы Хаара и центрированных систем непрерывных функций	23
Г. М. Мушегян. О коэффициенте переставленного ряда по тригонометрической системе и по базисам пространства $C[0, 1]$ всюду сходящегося к функции из L_p , $1 \leq p < 2$	40
Г. Г. Геворкян. Теоремы о модифицированной системе Фракллина—Стромберга	69

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А. А. Акопян, А. А. Саакян. Об одном классе систем дифференциальные уравнений с частными производными	93
---	----

CONTENTS

A. A. Talalyan, F. A. Talalyan. On the representation of absolutely continuous functions of several variables	3
R. I. Hovsepian. Some theorems on uniqueness of series by Haar and continuous martingale differences systems	23
G. M. Musheghyan. On coefficient of rearranged series by trigonometric system and by arbitrary orthonormal basis of $C[0,1]$, which converges everywhere to a function from L_p , $1 < p < 2$	40
G. G. Gevorgyan. Theorems on modified Franklin—Strömberg system	69

SHORT COMMUNICATIONS

H. A. Hakopian, A. A. Sahakyan. On a class of systems of partial differential equations	93
---	----