

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1936 г.

Выходит 6 раз в год

на русском и английском языках.

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈՒՆԳՐԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ԶԻՐԱՇՅԱՆ

Ն. Ն. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

Ի. Կ. ԶԱՍՆԱՎԱԿԻ

Ա. Ա. ՔԱՆԱՆՅԱՆ

Ռ. Վ. ՀԱՄԱՐԱՋՈՒՄՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ

Ա. Ռ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

Ռ. Լ. ՇԱՀԱՐԱՅԱՆ

Գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու Բարձրագույն Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀՆԴԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա Մաթեմատիկա առարկայում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով՝ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ յատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոնեզերի շրջանցված սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը, տեղափոխվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Որբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոգվածի՝ ստանձման ծանուցանի՝ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մեծմասն դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չգրադվել մեծմասն պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ. Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. В. АМБАРЦУМЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИИ
С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН
зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке), а кратких сообщений — не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редакции.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название места издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (кроме оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакция: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. V. AMBARTZUMIAN
N. U. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN

A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKI

executive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings zvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.
2. The articles to be submitted should be typed, doublespace in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.
3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.
4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.
5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.
6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.
7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.
8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.
9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.
10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.
11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR



ДЖРБАШЯН МХИТАР МКРТИЧЕВИЧ
Академик АН Армянской ССР

ДОРОГОЙ МХИТАР МКРТИЧЕВИЧ!

Исполнилось семьдесят лет со дня Вашего рождения (11.IX.1988). Редакция журнала „Математика“ сердечно поздравляет Вас, основателя и бессменного главного редактора нашего журнала и желает Вам крепкого здоровья, новых творческих свершений на благо Армянской математики.

СПИСОК ПЕЧАТНЫХ РАБОТ М. М. ДЖРБАШЯНА*

1944

1. О некоторых экстремальных проблемах в нежордановых областях, ДАН АрмССР, т. 1, № 3, 5—12.

1945

2. О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН АрмССР, т. 3, № 1, 3—9.

1947

3. О представимости некоторых классов голоморфных функций в единичном круге, ДАН АрмССР, т. 6, № 5, 129—134.

4. О метрических признаках полноты системы полиномов в неограниченных областях, ДАН АрмССР, т. 7, № 1, 3—10.

5. О представимости некоторых классов целых функций, ДАН АрмССР, т. 7, № 5, 193—197.

1948

6. К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. Ин-та математики и механики АН АрмССР, вып. 2, 3—40.

7. О полноте некоторых систем аналитических функций на линейных измеримых совокупностях, ДАН СССР, т. 62, № 5, 581—584.

8. Об одной экстремальной задаче из теории взвешенных ортогональных полиномов, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 12, № 6, 555—568.

1949

9. О метрических признаках полноты системы полиномов при взвешенном приближении, ДАН СССР, т. 66, № 6, 1037—1040.

10. О полноте некоторых систем аналитических функций в бесконечных областях, ДАН СССР, т. 67, № 1, 15—18.

1950

11. О полноте одной ортогональной системы целых периодических функций, ДАН СССР, т. 71, № 3, 429—432.

12. О полноте системы функций $\{z^n\}$ в круге с радиальным взрывом, ДАН СССР, т. 74, № 2, 173—176.

1951

13. О кручении валов переменного сечения, Прикл. матем. и мех., т. 15, вып. 4, 451—472 (совм. с Б. А. Абрамяном).

14. О представимости и единственности аналитических функций, ДАН АрмССР, т. 14, № 1, 3—7.

1952

15. О разложении целых функций в обобщенный ряд Тейлора, ДАН СССР, т. 82, № 5, 665—668.

16. О росте производных полиномов, ДАН СССР, т. 84, № 1, 5—8.

* Научная и организационная деятельность М. М. Джрбашяна освещена в нашем журнале: том XIII, №№ 5—6, 1978, 359—368.

17. О взвешенно-наилучшем приближении полиномами на вещественной оси, ДАН СССР, т. 84, № 6, 1123—1126.

18. Об интегральном представлении и единственности некоторых классов целых функций, ДАН СССР, т. 85, № 1, 29—32.

19. Теоремы единственности и представимости для аналитических функций, Изв. АН СССР, сер. мат., т. 16, № 3, 225—252.

1953

20. Об интегральном представлении и единственности некоторых классов целых функций, Матем. сб., т. 33(75), № 3, 485—530.

21. Оценки производных полиномов и взвешенно-наилучшие приближения в комплексной области, ДАН АрмССР, т. 17, № 1, 3—7.

1954

22. Метрические признаки полноты полиномов при взвешенном приближении на бесконечных кривых, ДАН СССР, т. 98, № 5, 713—716.

23. Некоторые экстремальные задачи для целых функций, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем. наук, т. 7, № 5, 1—17 (совм. с А. Б. Тавадяном).

24. Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций, ДАН СССР, т. 95, № 6, 1133—1136.

25. О наилучших приближениях рациональными функциями, ДАН СССР, т. 99, № 5, 673—675 (совм. с С. Н. Мергеляном).

26. О суммировании по Абелю обобщенных интегральных преобразований, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем., ест. и техн. наук, т. 7, № 6, 1—26.

27. Об асимптотическом поведении функции типа Миттаг-Леффлера, ДАН АрмССР, т. 19, № 3, 65—72.

28. Об интегральном представлении функций, непрерывных на нескольких лучах (Обобщение интеграла Фурье), Изв. АН СССР, сер. матем., т. 18, № 5, 427—448.

1955

29. Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области, Матем. сб., т. 36(78), № 3, 353—440.

30. О двух квази-аналитических классах функций на вещественной оси, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем., ест. и техн. наук, т. 8, № 1, 3—14.

31. Оценки для производных целых функций конечного порядка и нормального типа, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем., ест. и техн. наук, т. 8, № 2, 1—16.

32. К теории некоторых классов целых функций многих переменных, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем., ест. и техн. наук, т. 8, № 4, 1—23.

33. О кручении призматических стержней, Труды ЕРГУ, сер. физ.-мат. наук, т. 48, вып. 2, 49—70.

34. О наилучшем приближении целыми функциями в комплексной области, ДАН СССР, т. 104, № 3, 345—348 (совм. с А. П. Тамадяном).

35. Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 19, № 2, 133—190.

1956

36. О взвешенно-полиномиальном приближении в комплексной области, Труды Третьего Всесоюз. мат. съезда, секционные доклады, т. 1, М., 80.

37. Исследования по теории обобщенных интегральных преобразований в комплексной области и по теории целых функций, Труды Третьего Всесоюз. мат. съезда, т. 2, краткое содержание обзорных и секционных докладов, М., 26—27.

38. К теории рядов Фурье по рациональным функциям, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем., ест. и техн. наук, т. 9, № 7, 3—28.

39. О квази-аналитическом классе функций взвешенно-полиномиального приближения на всей вещественной оси, ДАН АрмССР, т. 23, № 3, 97—102.

40. О наилучшем приближении целыми функциями в комплексной области, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 20, № 4, 485—512 (совм. с А. П. Тамадяном).

41. О полноте системы функций $\{z^{k/n}\}$ в комплексной области при взвешенно-квадратической аппроксимации, ДАН СССР, т. 110, № 6, 914—917 (совм. с И. О. Хачатряном).

42. Об асимптотическом приближении целыми функциями в полуплоскости, ДАН СССР, т. 111, № 4, 749—752.

1957

43. Об интегральном представлении и разложении в обобщенный ряд Тейлора целых функций многих комплексных переменных, Матем. сб., т. 41(83), № 3, 257—276.

44. О взвешенно-равномерном приближении полиномами функций многих переменных, Матем. сб., т. 43(85), № 2, 227—256 (совм. с А. Б. Тагадяном).

45. О разложении аналитических функций в ряд по рациональным функциям с заданным множеством полюсов, Изв. АН АрмССР, сер. физ.—матем. наук, т. 10, № 1, 21—29.

46. Об одном методе решения гиперболического уравнения, содержащего смешанную производную, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем. наук, т. 10, № 1, 113—121 (совм. с Р. А. Александряном и Н. Х. Арутюняном).

47. Об одном интегральном преобразовании, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем. наук, т. 10, № 4, 3—18.

48. Теоремы единственности для преобразований Фурье и для бесконечно дифференцируемых функций, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 10, № 6, 7—24.

1958

49. Интегральное представление некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, т. 120, № 3, 457—460 (совм. с А. Е. Аветисяном).

50. О взвешенно-наилучшем приближении функции $|\lambda|$ на всей вещественной оси, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 11, № 1, 77—84.

51. Исследования по теории обобщенных интегральных преобразований и по теории целых функций, Труды Третьего всес. мат. съезда, т. 3, Обзорные доклады, М., 182—189.

52. О применении некоторых интегро-дифференциальных операторов, ДАН СССР, т. 121, № 2, 210—213 (совм. с А. Б. Нерсисяном).

53. Об обратной задаче наилучшего приближения в пространстве функций $L_2(-\infty, +\infty)$, Изв. АН АрмССР, сер. физ. мат. наук, т. 11, № 2, 79—82.

54. Критерии разложимости функций в ряды Дирихле, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 11, № 5, 85—106 (совм. с А. Б. Нерсисяном).

55. Некоторые интегро-дифференциальные операторы и связанные с ними квазианалитические классы функций, Изв. АН АрмССР, сер. физ.—мат. наук, т. 11, № 5, 107—120 (совм. с А. Б. Нерсисяном).

1959

56. К теории интегральных преобразований с ядрами Вольтерра, ДАН СССР, т. 124, № 1, 22—25.

57. Разложение мероморфных функций в обобщенный ряд Маклорена, ДАН СССР, т. 125, № 4, 707—710.

58. О квазиизометрическом отображении пространств функций $L^2_{\rho_1}(a_1, b_1)$, $L^2_{\rho_2}(a_2, b_2)$, ДАН СССР, т. 128, № 3, 456—459.

59. О построении некоторых специальных биортогональных систем, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук т. 12, № 5, 17—42 (совм. с А. Б. Нерсисяном).

1960

60. Интегральное представление некоторых классов функций, аналитических в области угла, Сиб. матем. журнал, т. 1, № 3, 383—426 (совм. с А. Е. Аветисяном).

61. Интегральные преобразования с ядрами Вольтерра, Изв. АН СССР, сер. мат., т. 24, № 3, 387—420.

62. Разложения по специальным биортогональным системам и краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка, ДАН СССР, т. 132, № 4, 747—750 (совм. с А. Б. Нерсисяном).

63. К общей теории биортогональных ядер, ДАН СССР, т. 132, № 5, 994—997 (совм. с Р. М. Мартиросяном).

64. Проблема моментов и биортогонализация ядер, ДАН СССР, т. 132, № 6, 1250—1253 (совм. с Р. М. Мартиросяном).

65. Об интегральных преобразованиях, порожденных обобщенной функцией типа Миттаг-Леффлера, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 13, № 3, 21—63.

1961

66. О квазиизометрическом отображении пространства функций $L^2_{a_1}(a_1, b_1)$, $L^2_{a_2}(a_2, b_2)$, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 25, № 1, 87—112.

67. Теория общих ядерных преобразований, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 25, № 6, 825—870 (совм. с Р. М. Мартиросяном).

68. Разложения по некоторым биортогональным системам и краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка, Труды Моск. мат. общества, т. 10, 89—179 (совм. с А. Б. Нерсисяном).

69. Унитарные пары операторов и их аналитическая характеристика в пространстве $L_2(a, b)$, ДАН СССР, т. 141, № 2, 281—284.

70. О пополнении и замыкании неполной системы функций $(e^{-\lambda_1 x} x^{\lambda_2 - 1})$, ДАН СССР, т. 141, № 3, 539—542.

1962

71. Об интегральном представлении некоторых ортогональных систем, ДАН АрмССР, т. 35, № 1, 13—19.

72. О пополнении неполной системы Мальмквиста на вещественной оси, ДАН АрмССР, т. 35, № 2, 55—61.

73. О пополнении одной неполной системы, ДАН АрмССР, т. 35, № 3, 97—105.

74. Разложения по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, ДАН СССР, т. 143, № 1, 17—20.

75. Ортогональные системы рациональных функций на окружности с заданным множеством полюсов, ДАН СССР, т. 147, № 6, 1278—1281.

1964

76. Лекции по избранным вопросам теории функций. Вып. 1. Преобразования Фурье (на армянском языке), г. Ереван, 1—101, изд. Митк.

77. О параметрическом представлении некоторых общих классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН СССР, т. 157, № 5, 1024—1027.

78. О представлении некоторых классов целых и квазицелых функций, ДАН СССР, т. 159, № 1, 9—12.

79. Об интегральных преобразованиях в комплексной области, ДАН СССР, т. 159, № 2, 258—261.

80. К теории интегральных преобразований с ядрами Миттаг-Леффлера, ДАН АрмССР, т. 38, № 4, 207—216 (совм. с С. А. Акопяном).

81. Об одном обобщении полиномов Чебышева, ДАН АрмССР, т. 38, № 5, 263—270 (совм. с А. А. Китбашяном).

1965

82. Об оценке голоморфных функций, подчиненных дополнительным условиям в единичном круге, УМН, т. 20, вып. 4 (124), 148—150.

1966

83. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Наука, 1—682.

84. Классы функций и ассоциированные с ними интегральные преобразования в комплексной области, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 30, № 4, 825—852 (совм. с С. А. Ахсезяном).

85. Классы функций и их параметрическое представление (Межд. конфер. по теории аналит. функций, Ереван, 1965). В кн. Современные проблемы теории аналит. функций, М., 118—137.

86. Ортогональные системы рациональных функций на окружности, Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 1, № 1, 3—24 и № 2, 106—125

1967

87. О граничных свойствах мероморфных функций класса A_n , ДАН СССР, т. 173, № 6, 1247—1250 (совм. с В. С. Захаряном).

88. Об одном свойстве функции Бляшке, ДАН СССР, т. 175, № 5, 981—984.

89. Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые его применения, ДАН СССР, т. 177, № 4, 767—770.

90. Разложения по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 2, № 1, 3—51.

91. Граничные свойства мероморфных функций класса N_n , Изв. АН АрмССР, Математика, т. 2, № 5, 275—294 (совм. с В. С. Захаряном).

1968

92. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 3, № 1, 3—29 (совм. с А. Б. Нерсисяном).

93. Расширение квазианалитических классов Данжуа-Карлемана, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 3, № 3, 171—248.

94. О факторизации функции $B_n(z)$, Матем. заметки, т. 4, вып. 1, 3—10 (совм. с В. С. Захаряном).

95. Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые его применения, Изв. АН СССР, т. 32, № 5, 1075—1111.

96. Расширение квазианалитических классов Данжуа-Карлемана, ДАН СССР, т. 180, № 4, 782—785.

1969

97. О распадении классов однолистных функций, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 4, № 4, 225—243.

98. Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Матем. сб., т. 79(121), № 4(8), 517—615.

1970

99. Красная задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма-Лиувилля, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 5, № 2, 71—96.

100. Факторизация функций, мероморфных в конечной плоскости, Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 5, № 6, 453—485.

101. Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 34, № 2, 1262—1339 (совм. с В. С. Захаряном).

1971

102. Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 6, №№ 2—3, 182—194 (совм. с В. С. Захаряном).

1972

103. Присмыкание и единственность рядов типа Дирихле на вещественной оси, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 7, № 4, 258—274.

1973

104. Теория факторизации и граничных свойства функций, мероморфных в круге, УМН, т. 28, вып. 4(172), 3—14.
105. Теоремы единственности для некоторых классов аналитических функций, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 37, № 1, 98—134 (совм. с Г. С. Кочаряном).
106. Теоремы единственности аналитических функций, асимптотически представимых рядами Дирихле-Тейлора, Матем. сб., т. 91(133), № 4(8), 580—626.
107. Некоторые основные результаты, полученные армянскими математиками в теории функций за последние 15 лет, История естествознания и техники в Армении, т. 5, 21—34.
108. Биортогональные системы рациональных функций и представления ядра Коши, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 8, № 5, 384—409.

1974

109. Harmonic analysis in the complex domain and applications in the theory of analytical and infinitely differentiable functions. Lecture Notes in Maths., 399, Functional Analysis and its Applications International Conference, Madras, 1973, 94—118.
110. Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_2 , Изв. АН АрмССР, Математика, т. 9, № 5, 339—373.
111. Биортогональные системы рациональных функций и наилучшее приближение ядра Коши на вещественной оси, Матем. сб., т. 95(137), № 3(11), 418—444.
112. Решение обратной электродинамической задачи для звездообразной системы отрезков, ДАН СССР, т. 218, № 2, 312—315 (совм. с А. Д. Бахрахом, О. С. Литвиновым).
113. О замкнутости систем функций типа Миттаг-Леффлера, ДАН СССР, т. 219, № 6, 1302—1305.
114. Теория факторизации и граничные свойства функций, мероморфных в круге, Математические структуры. Вычислительная математика. Математическое моделирование. Труды, посвященные 60-летию академика А. Илiewa, г. София, 69—79.

1975

115. Классы формул и разложения типа Тейлора-Маклорена, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 39, № 1, 69—122 (совм. с Б. А. Саакяном).
116. Об интегральных представлениях и мерах, ассоциированных с функциями типа Миттаг-Леффлера, ДАН СССР, т. 223, № 6, 1297—1300 (совм. с Р. А. Багняном).
117. Теоремы типа Винера-Пэли и Мюнца-Сасса, ДАН СССР, т. 225, № 5, 1001—1004 (совм. с В. М. Мартиросяном).
118. Об интегральных представлениях и мерах, ассоциированных с функциями типа Миттаг-Леффлера, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 10, № 6, 483—508 (совм. с Р. А. Багняном).

119. Theory of Factorization and Boundary Properties of functions Meromorphic in the Disk, Proceedings of the International Congress of Mathematicians Vancouver, 1974, 197—202.

1976

120. Some problems in the theory of single-valued analytical functions and harmonic analysis in the complex domain, "Complex analysis and its applications, vol. II, IAEA Vienna, pp. 145—202.

1977

121. Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классе H_2^2 , ДАН СССР, т. 234, № 3, 517—520.
122. Теоремы типа Винера-Пэли и Мюнца-Сасса, Известия АН СССР, сер. матем., т. 41, № 4, 868—894 (совм. с В. М. Мартиросяном).

123. Общие классы формул типа Тейлора-Маклорена, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 12, № 1, 66—83 (совм. с Б. А. Саакяном).

124. An extension of the Denjoy—Carleman quasi-analytic classes, Amer. Maths Soc. Transl. (2), vol. 110, 1—59.

1978

125. Об одном бесконечном произведении, ДАН СССР, т. 240, № 3, 518—521.

126. Об одном бесконечном произведении, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 13, № 3, 175—208.

127. Базисность некоторых биортонормальных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H^p в полуплоскости, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 42, № 6, 1322—1384.

128. Некоторые открытые вопросы теории представлений аналитических функций. Исследования по линейным операторам и теории функций (99 нерешенных задач линейного и комплексного анализа); Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 81, «Наука», Ленинградское отделение, Л., 238—241.

1979

129. Представление и замкнутость некоторых ортогональных систем, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 14, № 6, 446—493.

1980

130. О коэффициентах разложения мероморфных функций в обобщенный ряд Маклорена, ДАН СССР, т. 255, № 4, 789—793 (совм. с В. С. Захаряном).

131. On the Riesz basis of certain biorthogonal systems in the halfplane, Coll. Math Soc. Janos Bolyai (Hungary), 35.

1981

132. Характеристика замкнутых линейных оболочек двух семейств неполных систем аналитических функций. Матем. сб., т. 114(156), № 1, 3—84.

133. О разложении в ряды обобщенно-абсолютно-монотонных функций, *Analysis Math.* 7, № 2, 85—106 (совм. с Б. А. Саакяном).

134. О целых функциях экспоненциального типа из весовых классов, ДАН АрмССР, т. 73, № 1, 29—36 (совм. с С. Г. Рафаеляном).

135. Базисность биортонормальных систем, порожденных краевыми задачами для дифференциальных операторов дробного порядка, ДАН СССР, т. 261, № 5, 1054—1058.

1982

136. К теории α -квазианалитических классов, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 17, № 4, 264—306 (совм. с В. М. Мартиросяном).

1984

137. Интерполяционные и спектральные разложения, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 19, № 2, 81—181.

138. Краткий обзор теории α -квазианалитических классов, Математические структуры, София.

1985

139. Interpolation and spectral expansions, associated with differential operators of fractional order, A Haar memorial conference, 1985, Budapest.

140. Об одном новом обобщении классической теоремы Г. Сеге, ДАН СССР, т. 281, № 5, 1035—1038 (совм. с Н. В. Григорян).

141. Интегральные представления некоторых классов функций, голоморфных в полосе или в полуплоскости, ДАН СССР, т. 238, № 5, 1054—1057 (совм. с В. М. Мартиросяном).

142. Интегральное представление для некоторых классов аналитических функций в полуплоскости, ДАН СССР, т. 285, № 3, 547—550 (совм. с А. Э. Джрбашяном).

143. Интерполяционные теоремы и разложения по системам Фурье, ДАН СССР, т. 285, № 4, 782—787 (совм. с С. Г. Рафаеляном).

1986

144. Integral representations for some classes of functions holomorphic in a strip or in a half-plane, *Analysis Mathematica*, v. 12, № 3, 191—212 (совм. с В. М. Мартиросяном).

1987

145. Interpolation Theorems and Expansions with respect to Fourier type systems, *Journ. of Approx. Theory*, v. 50, № 4, 297—325 (совм. с С. Г. Рафаеляном).

146. Интерполяционные разложения в классах целых функций и порожденные ими базисы Рисса, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 22, № 1, 23—63 (совм. с С. Г. Рафаеляном).

147. Об одной краевой задаче в комплексной области, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 22, № 6, 523—542.

148. Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области Зигеля, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 22, № 4, 399—405 (совм. с А. О. Карапетяном).

1988

149. Особые краевые задачи, порождающие системы типа Фурье, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 23, № 2, 109—122 (совм. с С. Г. Рафаеляном).

150. О базисности собственных функций, порожденных одной граничной задачей на комплексной плоскости, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 23, № 5.

151. A New Generalization of the Classical Theorem of G. Szegő, *Math. Nachr.*, v. 138, 239—254 (совм. с Н. В. Григорян).

152. Краткий обзор результатов исследований математиков Армении в области теории факторизации мероморфных функций и ее приложений, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 23, № 6, 541—569.

УДК 517.53

М. М. ДЖРБАШЯН

† КРАТКИЙ ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЙ
МАТЕМАТИКОВ АРМЕНИИ В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ
ФАКТОРИЗАЦИИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЙ*

Почти в самый начальный период развертывания в Армении научных исследований в области математики, в начале сороковых годов, лично меня, как аспиранта, привлекла одна из фундаментальных областей классического комплексного анализа—теория представлений аналитических функций и их граничных свойств. Началом зарождения этого направления в Армении явились результаты, анонсированные автором в статье [2] в 1945 г. Тρία года спустя, в 1948 году, развернутое изложение этой статьи, а также ряд новых результатов, были опубликованы автором в работах [3] и [4].

Указанные результаты были получены под свежим впечатлением выдающихся достижений в комплексном анализе, достигнутых в фундаментальных трудах Фату, Привалова, Рисса, Сеге/Неванлинны, Харди и других. Эти результаты, изложенные в замечательных монографиях Р. Неванлинны [5] и И. И. Привалова [6], сыграли решающую роль в становлении научных интересов автора, как начинающего математика.

Исследования, проведенные в нашей математической школе, в указанных выше важных направлениях классической теории функций и инициированные публикацией автора 1945 года, интенсивно продолжались как мною, так и моими учениками и последователями.

В данной статье, однако, я не коснусь исследований в том же кругу проблем, проведенных у нас за период с 1964 по 1971 г.г. Они были представлены в докладе автора на Ванкуверском международном математическом конгрессе в 1974 году (см. [7], где приведена также полная библиография публикаций этого периода).

Итак, настоящая статья посвящается краткому обзору как ранних, так и недавних результатов, полученных в исследованиях армянской школы советских математиков и инициированных первоначальными результатами автора 1945 года. Они посвящены интегральным и факторизационным представлениям функций, аналитических или мероморфных в круге и в полуплоскости, а также их применениям.

Отметим, что в недавно вышедшей в свет монографии А. Е. Djrbashian, F. A. Shamoian. „Topics in the theory A_p^p spaces“, Teubner-

* Содержание данного обзора в значительно менее полном виде было представлено автором в качестве доклада на международной конференции по комплексному анализу в г. Будва (Югославия) в мае 1986 г. и опубликовано там же [1].

Verlag, Leipzig, 1988, многие из основных результатов данного обзора приведены с подробными доказательствами.

§ 1. Классы аналитических функций одного и многих комплексных переменных и их интегральные представления

1.1. В первом сообщении [2] 1945 года впервые был введен класс аналитических в единичном круге $D = \{z; |z| < 1\}$ функций $f(z)$, для которых

$$\frac{1+\alpha}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2)^\alpha \cdot |f(re^{i\theta})|^\delta r \, d\theta \, dr < +\infty, \quad (1.1)$$

где $-1 < \alpha < +\infty$ и $0 < \delta < +\infty$ — произвольные параметры. Этот класс первоначально был обозначен через $B_\delta(\alpha)$, но впоследствии, начиная со второй публикации [3] и дальше, ввиду глубокой аналогии с классами Харди, в работе [4] автором было введено более удобное обозначение. А именно, через $H^p(\alpha)$ ($-1 < \alpha < +\infty$, $0 < p < +\infty$) обозначался класс функций $f(z)$, аналитических в круге D , для которых конечна их норма, т. е.

$$\|f\|_{p,\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1+\alpha}{\pi} \int_D (1-|\zeta|^2)^\alpha \cdot |f(\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) \right)^{1/p} < +\infty. \quad (1.2)$$

Легко заметить, что при любом $\alpha > -1$ эти классы включают в себя класс H^p Харди, т. е. $H^p \subset H^p(\alpha)$ ($-1 < \alpha < +\infty$).

По-видимому, эти результаты прошли мимо некоторых исследователей. Частично лишь этим я могу объяснить то, что спустя десятилетия после публикации работы [2], а также работ [3] и [4], где впервые были введены классы $H^p(\alpha)$ и установлены их интегральные представления, появились публикации как у нас, так и за рубежом, авторы которых повторяя или обобщая лишь часть моих результатов, для этих же классов ввели, по моему убеждению, совершенно неудачные обозначения $A_{p,\alpha}$ и A_p^α и именовали их «пространствами Бергмана». Общеизвестны заслуги покойного профессора С. Бергмана в введении и изучении ядер-функций в гильбертовых пространствах голоморфных функций (см., напр., его монографию [8] 1950 г.). Ни там, ни в какой-либо публикации С. Бергмана до и после 1945 года нет и следа введения им моих классов $H^p(\alpha)$. Именно поэтому «крещение» некоторыми математиками этих классов его именем является явным недоразумением.

1.2. (а) Важнейшее значение для всего данного цикла исследований имела следующая основная теорема ([2], [4]).

Теорема 1.1. Для любой функции $f(z) \in H^p(\alpha)$ ($1 \leq p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$) имеют место интегральные представления

$$f(z) = \frac{1+\alpha}{\pi} \int_D \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-\bar{\zeta} \cdot z)^{2+\alpha}} f(\zeta) \, d\sigma(\zeta), \quad z \in D, \quad (1.3)$$

и

$$f(z) = -\overline{f(0)} + \frac{(1+\alpha) \cdot 2}{\pi} \int_D \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-\bar{\zeta} \cdot z)^{2+\alpha}} \operatorname{Re} \{f(\zeta)\} \, d\sigma(\zeta), \quad z \in D, \quad (1.4)$$

где $d\sigma(\zeta)$ —элемент площади D^* .

Отметим, что для частных значений параметров $\alpha=0$ и $p=2$, интегральное представление (1.3) для класса $H^2(0)$ в неявной форме содержится в одной работе Виртингера [11] (см. также Дж. Уолш [12]).

(6) В случае, когда $p=2$, справедливы также следующие теоремы ([3], [4]).

Теорема 1. 2. 1. Класс $H^2(\alpha)$ совпадает с множеством функций, представимых в виде

$$f_F(z) = \frac{1+\alpha}{\pi} \int_D \int \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-\bar{\zeta} \cdot z)^{2+\alpha}} F(\zeta) d\sigma(\zeta), \quad z \in D, \quad (1.5)$$

где $F(z)$ —произвольная функция, определенная на D , с конечной нормой $\|F\|$.

2. Функция $f_F(z)$ минимизирует интеграл

$$\int_D \int (1-|\zeta|^2)^\alpha |F(\zeta) - f(\zeta)|^2 d\sigma(\zeta) \quad (1.6)$$

в классе функций $f(z) \in H^2(\alpha)$.

В случае $\alpha=0$ (см. также [11] и [12]).

Теорема 1. 3. 1. Класс $H^2(\alpha)$ совпадает с множеством функций, представимых в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{\varphi(\zeta)}{(1-\bar{\zeta} \cdot z)^{\frac{\alpha+3}{2}}} |d\zeta|, \quad z \in D, \quad (1.7)$$

где $\varphi(\zeta)$ —произвольная функция на ∂D с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{\partial D} = \left(\int_{\partial D} |\varphi(\zeta)|^2 |d\zeta| \right)^{1/2}. \quad (1.8)$$

2. Если $f(z) \in H^2(\alpha)$ ($-1 < \alpha < +\infty$), то функция

$$\varphi_f(z) = \frac{1+\alpha}{2} \int_0^1 (1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{2}} f(\rho \cdot z) d\rho \quad (1.9)$$

в круге D принадлежит классу H^2 Харди, и имеет место формула обращения

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{\varphi_f(\zeta)}{(1-\bar{\zeta} \cdot z)^{\frac{\alpha+3}{2}}} |d\zeta|, \quad z \in D. \quad (1.10)$$

При этом функция $\varphi_f(\zeta)$ минимизирует интеграл (1. 8) в семействе функций $\varphi(\zeta)$, определенных на ∂D , у которых $\|\varphi\|_{\partial D} < \infty$, и представляющих с данную функцию $f(z) \in H^2(\alpha)$ в виде (1.7)

* Следует отметить еще, что в ряде публикаций, например, в монографии [9], а также в статье [10], ядрам типа ядер интегральных операторов теоремы 1.1 (а также приводимой нами дальше теоремы 1.7), как и классам $H_p(\alpha)$, столь же безосновательно «присуждается» имя С. Бергмана.

Классы $H^p(\alpha)$ ($0 < p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$) являются естественными расширениями классов Харди, поскольку $H^p \subset H^p(\alpha)$, $\forall \alpha > -1$, и кроме того, справедлива следующая простая

Теорема 1.4. Для того, чтобы аналитическая в D функция $f(z)$ принадлежала классу H^p Харди, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1} \sup \frac{1+\alpha}{\pi} \iint_D (1 - |\zeta|^2)^\alpha \cdot |f(\zeta)|^p d\sigma(\zeta) < +\infty. \quad (1.11)$$

Можно доказать, что для любой функции $f(z) \in H^p (p \geq 1)$ предельный переход в формулах (1.3) и (1.10) при $\alpha \rightarrow -1$ приводит к интегральной формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{1 - \bar{\zeta} \cdot z} |d\zeta|, \quad z \in D,$$

где $f(\zeta)$ ($\zeta = e^{i\theta}$) — суть граничные значения функции $f(z)$.

(в) Расширив класс $H^p(\alpha)$ рассматриваемых функций, Ф. А. Шамоян [13] дал обобщение интегрального представления (1.3) теоремы 1.1. Но усажив, налагаемые в лемме 1 его работы, целесообразно несколько видоизменить, и тогда его результат может быть сформулирован в таком виде.

Теорема 1.5. Пусть функция $f(z)$ непрерывно-дифференцируема в круге D и удовлетворяет условиям:

$$\iint_D (1 - |\zeta|^2)^\alpha \cdot |f(\zeta)|^p d\sigma(\zeta) < +\infty,$$

где $\alpha \in (-1, +\infty)$ и $p \in [1, +\infty)$.

2) Пусть

$$\sup_{\zeta \in D} \left\| \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \right\| < +\infty.$$

Тогда справедлива формула

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1+\alpha}{\pi} \iint_D \frac{(1 - |\zeta|^2)^\alpha}{(1 - \bar{\zeta} \cdot z)^{2+\alpha}} f(\zeta) d\sigma(\zeta) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \iint_D \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta} \cdot z} \right)^{1+\alpha} \cdot \frac{\partial f(\zeta)/\partial \bar{\zeta}}{z - \zeta} d\sigma(\zeta), \quad z \in D. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Заметим, что если функция $f(z)$ аналитична в круге D , то

$$\partial f(\sigma)/\partial \bar{\zeta} \equiv 0, \quad \zeta \in D,$$

и формула (1.12) сводится к основному интегральному представлению (1.3) теоремы 1.1*.

* Во введении работы Шергантье [14] приводится формула (1.12) для функций $f(z) \in C^1(\bar{D})$, при этом без какой-либо ссылки автор заявляет ее "известной" и, тем самым, пользуясь "математическим фольклором", обозначивает ее. Между тем выше

Отметим еще, что, например, в классе $C^1(\bar{D})$ непрерывно-дифференцируемых в $\bar{D}$ функций $f(z)$, формула (1.12), после надлежащего предельного перехода при $\alpha \rightarrow -1+0$, переходит в известную формулу Коши-Грина

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{1 - \bar{\zeta} \cdot z} |d\zeta| + \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\partial f(\zeta)/\partial \bar{\zeta}}{z - \zeta} d^2(\zeta), \quad z \in D. \quad (1.12')$$

1.3 (а) Теорема 1.1 допускает другие естественные обобщения в многомерном комплексном анализе. Чтобы привести их, сначала напомним принятые здесь простейшие обозначения.

Здесь $C^n (n \geq 1)$ означает декартово произведение n экземпляров комплексной плоскости C . Точками C являются упорядоченные наборы n комплексных чисел $z = (z_1, \dots, z_n)$, где $z_j \in C$ ($1 \leq j \leq n$).

Множество точек $z = (z_1, \dots, z_n)$, $|z_j| < 1$ ($1 \leq j \leq n$), называемое единичным полидиском, обозначается символом $D^n = D \times D \times \dots \times D$ (n раз).

Следующая теорема является тривиальным обобщением теоремы 1.1 и получается в результате ее n -кратного применения.

Теорема 1.6. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в единичном полидиске D^n и принадлежит классу

$$H_n^p(\alpha): \iint_{D^n} W_\alpha(z) \cdot |f(z)|^p d^2_n(z) < +\infty, \quad (1.13)$$

где

$$W_\alpha(z) = \prod_{j=1}^n (1 - |z_j|^2)^{\alpha_j} \quad (-1 < \alpha_j < +\infty, 1 \leq j \leq n),$$

$d^2_n(z) = 2n$ -мерная мера Лебега для D^n .

Тогда имеет место интегральное представление

$$f(z) = \prod_{j=1}^n \frac{1 + z_j}{\pi} \iint_{D^n} \left\{ \prod_{j=1}^n (1 - |z_j|^2)^{\alpha_j} \times \right. \\ \left. \times (1 - \bar{z}_j z_j)^{-2-\alpha_j} \right\} f(\zeta) d^2_n(\zeta). \quad (1.14)$$

(б) Более глубоким является обобщение теоремы 1.1 на случай единичного шара

$$B^n = \left\{ z \in C^n : |z|^2 = \sum_{j=1}^n |z_j|^2 < 1 \right\},$$

где $z = (z_1, \dots, z_n)$, $z_j \in C$ ($1 \leq j \leq n$).

Мы видели, что эта формула для функций $f(z) \in H^p(\alpha)$ ($-1 < \alpha < +\infty$, $1 < p < +\infty$) на самом деле известна с 1945 года, и была впервые установлена именно в работах автора [2], [4]. Что же касается формулы (1.12) теоремы 1.5, то мне неизвестны другие публикации, кроме работы Ф. А. Шамоляна [13], где она была анонсирована с наметкой доказательства.

В данном случае мы сочли нужным привести не только формулировку, но краткое доказательство теоремы, содержащей в себе и одномерный случай—теорему 1.1.

Приводимое нами ниже доказательство является перенесением доказательства теоремы 1.1, изложенного в работе [4], на случай шара B^n ($n \geq 2$).

Предварительно введем некоторые дополнительные обозначения.

Полается, что скалярное произведение двух векторов $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ и $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ задается формулой

$$\langle z, \zeta \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \bar{\zeta}_j, \quad (1.15)$$

$d\omega_{2n}(\zeta)$, как и выше, будет означать меру Лебега в $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, а $ds(\zeta)$ — поверхностную меру Лебега на единичной сфере $S = \partial B^n$.

Поскольку точки шара B_n в полярных координатах запишутся в виде $z = r \cdot \zeta$, где $\zeta \in S$, $r = |z| \in (0, 1)$, то указанные выше меры связаны соотношением

$$\int_{B^n} f(\zeta) d\omega_{2n}(\zeta) = \int_0^1 r^{2n-1} dr \int_S f(r \cdot \zeta) ds(\zeta), \quad (1.16)$$

Обозначим через Z_+^n множество всех упорядоченных наборов целых чисел $z = (z_1, \dots, z_n)$, где $a_j \geq 0$ ($1 \leq j \leq n$). Для произвольных $a = (a_1, \dots, a_n) \in Z_+^n$ и $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ полагается $z^a = z_1^{a_1} \dots z_n^{a_n}$, $|a| = a_1 + \dots + a_n$, $|a| = a_1 + \dots + a_n$.

Наконец, определим класс $H^p(a)$ ($0 < p < +\infty$, $-1 < a < +\infty$), как множество голоморфных в шаре B^n функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|_{p, a} \equiv \left(\int_{B^n} (1 - |\zeta|^2)^a \cdot |f(\zeta)|^p d\omega_{2n}(\zeta) \right)^{1/p} < +\infty. \quad (1.17)$$

Справедлива следующая

Лемма 1.1 Если $a, \beta \in Z_+^n$, то

$$\int_S \zeta^a \cdot \bar{\zeta}^\beta ds(\zeta) = \begin{cases} 0, & \text{при } a \neq \beta \\ \frac{2\pi^n a!}{(n-1+|a|)!}, & \text{при } a = \beta, \end{cases} \quad (1.18)$$

2. Если $\beta \in Z_+^n$, $j \in Z_+^1$ и $z \in \mathbb{C}^n$, то

$$\int_S \zeta^\beta \cdot \langle z, \zeta \rangle^j ds(\zeta) = \begin{cases} 0, & \text{при } |\beta| \neq j \\ \frac{2\pi^n \cdot |\beta|! \cdot z^\beta}{(n-1+|\beta|)!}, & \text{при } |\beta| = j. \end{cases} \quad (1.19)$$

По поводу (1.18) см., например, [15] или [9].

Соотношение (1.19) следует из (1.18), если воспользоваться формулой Ньютона для $\langle z, \zeta \rangle^j$.

Теорема 1.7. Если $f(z) \in H^p(a)$ ($1 \leq p < +\infty$, $-1 < a < +\infty$), то она допускает интегральное представление

$$f(z) = \frac{\Gamma(1+a+n)}{\pi^n \cdot \Gamma(1+a)} \int_{B^n} \frac{(1-|\zeta|^2)^a}{(1-\langle z, \zeta \rangle)^{1+a+n}} f(\zeta) d\sigma_{2n}(\zeta), \quad z \in B^n. \quad (1.20)$$

Доказательство. В шаре B^n функция $f(\zeta)$ допускает разложение в ряд Тейлора

$$f(\zeta) \equiv \sum_{|\beta| \geq 0} a_\beta \zeta^\beta, \quad \zeta \in B^n, \quad (1.21)$$

равномерно сходящийся в любом компакте $K \subset B^n$.

Тогда при $t \in (0, 1)$ имеем разложение

$$f_t(\zeta) \equiv f(t \cdot \zeta) \equiv \sum_{|\beta| \geq 0} a_\beta t^{|\beta|} \zeta^\beta, \quad (1.22)$$

равномерно сходящееся в $\overline{B^n}$.

Заметим еще, что справедливо также биномиальное разложение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-\langle z, \zeta \rangle)^{1+a+n}} = \\ &= \sum_{j \geq 0} \frac{\Gamma(1+a+n+j)}{\Gamma(1+a+n) \cdot \Gamma(1+j)} \langle z, \zeta \rangle^j, \quad z, \zeta \in B^n. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Пользуясь разложениями (1.22) и (1.23), притом заметив, что второе также равномерно сходится при $\zeta \in \overline{B^n}$, для любого фиксированного значения $z \in B^n$, на основании формул (1.15) и (1.19) приходим к следующей цепочке равенств:

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(1+a+n)}{\pi^n \cdot \Gamma(1+a)} \int_{B^n} \frac{(1-|\zeta|^2)^a}{(1-\langle z, \zeta \rangle)^{1+a+n}} f_t(\zeta) d\sigma_{2n}(\zeta) = \\ &= \frac{\Gamma(1+a+n)}{\pi^n \cdot \Gamma(1+a)} \cdot \sum_{\substack{|\beta| \geq 0 \\ j \geq 0}} \left\{ a_\beta t^{|\beta|} \frac{\Gamma(1+a+n+j)}{\Gamma(1+a+n) \cdot \Gamma(1+j)} \times \right. \\ & \quad \times \left. \int_{B^n} (1-|\zeta|^2)^a \cdot \zeta^\beta \cdot \langle z, \zeta \rangle^j d\sigma_{2n}(\zeta) \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi^n \cdot \Gamma(1+a)} \cdot \sum_{\substack{|\beta| \geq 0 \\ j \geq 0}} \left\{ a_\beta t^{|\beta|} \frac{\Gamma(1+a+n+j)}{\Gamma(1+j)} \times \right. \\ & \quad \times \left. \int_0^1 (1-r^2)^a \cdot r^{2n-1+|\beta|+j} dr \int_S \zeta^\beta \cdot \langle z, \zeta \rangle^j dS(\zeta) \right\} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+a)} \cdot \sum_{|\beta| \geq 0} \left\{ a_\beta \cdot \frac{\Gamma(1+a+n+|\beta|)}{\Gamma(n+|\beta|)} t^{|\beta|} \cdot z^\beta \times \right. \end{aligned}$$

$$\times 2 \int_0^1 (1-r^2)^{\alpha} \cdot r^{2n-1+2|\beta|} dr \Bigg\} = \sum_{|\alpha|, |\beta|} a_{\alpha\beta} t^{|\beta|} z^{\alpha} = f_t(z). \quad (1.24)$$

Так как, очевидно, при $t \rightarrow 1-0$

$$\|f - f_t\|_{p, \alpha} \rightarrow 0,$$

то переходом к пределу в левом и крайнем правом членах формулы (1.24), получим интегральную формулу (1.20) теоремы.

(в) Из очевидных вложений $H^p(\alpha) \subset H^1(\beta)$, при $\beta > \frac{1+\alpha}{p} - 1$ ($1 < p < +\infty$) и $H^1(\alpha) \subset H^1(\beta)$, $\beta \geq \alpha$, вытекает

Следствие. В условиях теоремы 1.7, т. е. при $f(z) \in H^p(\alpha)$ ($1 \leq p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$) справедливо также представление

$$f(z) = \frac{\Gamma(1+\beta+n)}{\pi^n \cdot \Gamma(1+\beta)} \cdot \int_{B^n} \frac{(1-|\zeta|^2)^{\beta}}{(1-\langle z, \zeta \rangle)^{n+1+\beta}} f(\zeta) d\sigma_{2n}(\zeta), \quad z \in B^n, \quad (1.25)$$

если только $\beta > \frac{1+\alpha}{p} - 1$ при $1 < p < +\infty$, или $\beta \geq \alpha$ при $p = 1$.

Замечание 1. Частный случай этого следствия, когда $\alpha=0$, содержится в работе Форелли и Рудина [10] (см. также [9]). То обстоятельство, что там соответствующий параметр β — комплексный, не меняет дела. Отметим также, что в этой работе представление (1.25) доказывается при $\beta > \frac{1}{p} - 1$ и, тем самым, важный случай, когда $\beta=0$ при $p=1$, просто отсутствует.

Таким образом, теорема 1.7 является существенным обобщением теоремы 1.1, а также теоремы Форелли и Рудина (для $n \geq 2$).

Замечание 2. В публикациях автора [1] и [16] была допущена досадная ошибка, поскольку в них теорема 1.7 приписана Форелли и Рудину, между тем, как отмечено в замечании 1, это не так.

1.4. Методом специальных преобразований и предельного перехода, на основе теорем 1.1 и 1.7, были получены интегральные представления для классов $H_+^p(\alpha)$ функций, аналитических в верхней полуплоскости

$$G_+ = \{z \in \mathbb{C}^1, \operatorname{Im} z > 0\}$$

и в ее n -мерном аналоге — в области Зигеля типа

$$G_+^n = \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \operatorname{Im} z_1 > \sum_{j=2}^n |z_j|^2 \right\} \quad (n \geq 2).$$

Перейдем к формулировкам полученных здесь результатов.

(а) Условимся отнести к классу $H_+^p(\alpha)$ голоморфную в полуплоскости функцию $f(z)$, для которой

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p \cdot y^{\alpha} dx dy < +\infty \quad (0 < p < +\infty, -1 < \alpha < +\infty). \quad (1.26)$$

Теорема 1.8 ([17]). Если $f(z) \in H^p_+(\alpha)$ ($1 \leq p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$), то справедлива интегральная формула

$$f(z) = c_\alpha \cdot \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\zeta)}{(\bar{\zeta} - z)^{2+\alpha}} (\operatorname{Im} \zeta)^\alpha d\bar{\zeta} d\eta, \quad z \in G_+, \quad (1.27),$$

где $c_\alpha = -e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} \cdot 2^\alpha \cdot (1+\alpha)/\pi$, $\zeta = \xi + i\eta$.

Такое же представление справедливо с заменой α на β , если только $(p > 1) \beta > \frac{(1+\alpha)}{p} - 1$ или $\beta \geq \alpha$ ($p=1$).

З а м е ч а н и е. Хотя первое последовательное и строгое доказательство теоремы 1.8 появилось только в 1985 г. в совместной с А. Э. Джрбашяном работе автора [17], на формулу (1.27) для целых значений α указывали и ранее, но не более, чем на уровне «математического фольклора» (см., напр., [18], [19]).

(6) Для формулировки аналога теоремы 1.8 для области Зигеля G^n_+ ($n \geq 2$) введем некоторые дополнительные обозначения.

Для $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ положим $z' = (z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$, так что $z = (z_1, z')$. Кроме того, если $z, \zeta \in \mathbb{C}^n$, то будем полагать

$$\langle z', \zeta' \rangle = \sum_{j=2}^n z_j \cdot \bar{\zeta}_j, \quad |z'| = \langle z', z' \rangle^{1/2}.$$

Обозначим через $H^p_+(\alpha)$ класс голоморфных в области Зигеля G^n_+ функций, для которых

$$\|f\|_{p,\alpha} \equiv \left(\int_{G^n_+} (\operatorname{Im} \zeta_1 - |\zeta'|^2)^\alpha |f(\zeta)|^p d\sigma_{2n}(\zeta) \right)^{1/p} < +\infty, \quad (1.28),$$

где $1 \leq p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$.

В работе автора, совместной с А. О. Карапетяном [16], на основе теоремы 1.7, была установлена

Теорема 1.9. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области Зигеля G^n_+ ($n \geq 2$) и принадлежит классу $H^p_+(\alpha)$ ($1 \leq p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$).

Тогда справедлива интегральная формула

$$f(z) = d_\alpha \cdot \int_{G^n_+} \frac{(\operatorname{Im} \zeta_1 - |\zeta'|^2)^\alpha}{[i(\bar{\zeta}_1 - z_1) - 2\langle z', \zeta' \rangle]^{1+\alpha+n}} f(\zeta) d\sigma_{2n}(\zeta), \quad z \in G^n_+, \quad (1.29)$$

где $d_\alpha = 2^{\alpha-1+\alpha} \cdot \Gamma(1+\alpha+n)/\pi^n \cdot \Gamma(1+\alpha)$.

Такое же представление справедливо при замене α на β , если только

$\beta > \frac{1+\alpha}{p} - 1$ при $1 < p < +\infty$ и $\beta \geq \alpha$, при $p=1$.

Эта теорема при $\alpha=\beta=0$ и $p=2$ является следствием значительно более общей теоремы, установленной С. Г. Гиндикиным [20] методом применения техники преобразований Фурье-Планшереля.

(в) Легко видеть, что во всех формулах интегральных представлений теорем 1.1, 1.7—1.9 можно вместо аналитических функций подставить произвольные измеримые функции из классов L^p с соответствующим весом в каждой из рассматриваемых областей. В результате все интегралы будут иметь смысл и будут аналитическими функциями в соответствующих областях.

В этой связи справедлива

Теорема 1.10. Пусть $G \subset \mathbb{C}^n$ ($n \geq 1$) одна из областей из теорем 1.1, 1.7—1.9, где мы имеем интегральное представление для принадлежащих классов $H_G^p(\alpha)$. Пусть, далее, $K_\alpha(z; \zeta)$ и $\rho_G(z)$ —соответствующие представляющие ядра и весовые функции.

Если $L_G^p(G)$ —множество функций $f(z)$, $z \in G$, с конечным интегралом

$$\int_G \rho_G^p(\zeta) \cdot |f(\zeta)|^p d\sigma_{2n}(\zeta) < +\infty, \quad (1.30)$$

то оператор

$$T_\beta f(z) = \int_G \rho_G^\beta(\zeta) \cdot K_\beta(z; \zeta) \cdot f(\zeta) d\sigma_{2n}(\zeta), \quad z \in G, \quad (1.31)$$

является непрерывным проектором из пространства $L_G^p(G)$ в $H_G^p(\alpha)$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$) только при соблюдении условия $\beta > (1 + \alpha)/p - 1$.

В случае шара B^n теорема эта доказывается так же, как и в работе [10], где был рассмотрен частный случай, когда $\alpha = 0$. В случае области $G_+^n \subset \mathbb{C}^n$ ($n \geq 1$) доказательство приведено в работах [17] и [16].

§ 2. Каноническая факторизация подклассов мероморфных в круге D функций с неограниченной характеристикой Р. Неванлинны

2.1. Введенные в § 1 классы $H(\alpha)$ и их интегральные представления преследовали важную цель. Она заключалась в установленных в тех же работах [2] и [4] теоремах о канонической факторизации мероморфных в единичном круге D функций $F(z)$, для которых конечен интеграл вида

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha \cdot T(r, F) dr, \quad \alpha \in (-1, +\infty). \quad (2.1)$$

При этом здесь

$$T(r, F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |F(re^{i\theta})| d\theta + \int_0^r \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t} dt + \\ + n(0, \infty) \log r \equiv m(r, \infty) + N(r, \infty) \quad (2.2)$$

характеристическая функция Р. Неванлинны, а $m(r, \infty)$ и $N(r, \infty)$ —известные ее слагаемые.

(а) Пусть $w = F(z)$ мероморфна в круге D , и в окрестности $z=0$ ее разложение в ряд Лорана имеет вид

$$F(z) = c_\lambda \cdot z^\lambda + \dots \quad (c_\lambda \neq 0), \quad (2.3)$$

где $\lambda \leq 0$ — целое.

Пусть $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$, соответственно, означают различные от $z=0$ последовательности всевозможных нулей и полюсов функции $F(z)$, расположенные в порядке неубывания их модулей, причем с условием, что каждый кратный нуль или полюс пишется столько раз, какова его кратность.

В работах [2] и [4], прежде всего, устанавливаются следующие результаты.

Теорема 2.1. Пусть $F(z)$ мероморфна в круге $D_R = \{z: |z| < R\}$ с нулями $\{a_\mu\}$ и полюсами $\{b_\nu\}$.

Тогда при любом значении параметра $\alpha \in (-1, +\infty)$ и для любого $r \in (0, R)$ справедлива формула

$$\begin{aligned} \log F(z) = & \frac{2(1+\alpha)}{\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} (r^2 - \rho^2)^\alpha \frac{\log |F(\rho e^{i\theta})|}{(r^2 - \rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} \rho d\rho d\theta + \\ & + \sum_{0 < |a_\mu| < r} \log \left(1 - \frac{z}{a_\mu}\right) \cdot \exp \left\{ -U_\alpha \left(\frac{z}{r}, \frac{a_\mu}{r} \right) \right\} - \sum_{0 < |b_\nu| < r} \log \left(1 - \frac{z}{b_\nu}\right) \cdot \\ & \cdot \exp \left\{ -U_\alpha \left(\frac{z}{r}, \frac{b_\nu}{r} \right) \right\} + \lambda \log z + 4\lambda(1+\alpha) \cdot r^{-2\alpha-2} \cdot \\ & \cdot \int_0^r (r^2 - \rho^2)^\alpha \cdot \rho \log \frac{1}{\rho} d\rho - \log \bar{c}_\lambda, \quad z \in D_r, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$U_\alpha(z, \zeta) = \frac{2(1+\alpha)}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - \rho^2)^\alpha \frac{\log \left| 1 - \frac{\rho e^{i\theta} z}{\zeta} \right|}{(1 - z \rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} \rho d\rho d\theta. \quad (2.5)$$

При этом отметим, что формула (2.4)—(2.5) явилась существенным обобщением классической формулы Иенсена-Неванлинны и после предельного перехода $\alpha \rightarrow -1+0$ совпадает с нею, в чем легко убедиться (см. [4], стр. 21—22).

(6) Введенная по формуле (2.5) функция $U_\alpha(z, \zeta)$ обладает важными свойствами.

Теорема 2.2. При $z \in D$ и $0 < |\zeta| \leq 1$ функция $U_\alpha(z, \zeta)$ допускает разложение

$$\begin{aligned} U_\alpha(z, \zeta) = & \int_{|t|^2}^1 \frac{(1-t)^{1+\alpha}}{t} dt - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2+\alpha+k)}{\Gamma(2+\alpha)\Gamma(1+k)} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \int_0^{|t|^2} (1-t)^{1+\alpha} t^{\alpha-1} dt, \end{aligned} \quad (2.6)$$

а при $0 < |z| < |\zeta| < 1$ она представима в виде

$$U_\alpha(z, \zeta) = \log \left(1 - \frac{z}{\zeta} \right) + \int_{\frac{|z|^2}{|\zeta|^2}}^1 \frac{(1-t)^{1+\alpha}}{\left(1 - \frac{z}{\zeta} t\right)^{\alpha+2}} \frac{dt}{t}. \quad (2.7)$$

Теорема 2.3. 1°. Имеет место рекуррентная формула

$$U_{\alpha-1}(z, \zeta) - U_\alpha(z, \zeta) = \frac{1}{1+\alpha} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} \right)^{1+\alpha} (\alpha > 0). \quad (2.8)$$

2°. При любом целом $\alpha = p \geq -1$

$$U_p(z, \zeta) = \begin{cases} \log \frac{1-\bar{\zeta}z}{|\zeta|^2}, & \text{при } p = -1 \\ -\log \frac{|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} - \sum_{j=0}^p \frac{1}{1+j} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} \right)^{1+j}, & \text{при } p \geq 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Из этой теоремы следует

Теорема 2.4. 1°. Если $p \geq 0$ — целое число, то при $0 < |\zeta| \leq 1, z \in D$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{z}{\zeta} \right) \exp \{-U_p(z, \zeta)\} = \\ = \left(1 - \frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} \right) \cdot \exp \left\{ \sum_{j=0}^p \frac{1}{1+j} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} \right)^{1+j} \right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

2°. Если $p = -1$, то

$$\left(1 - \frac{z}{\zeta} \right) \cdot \exp \{U_{-1}(z, \zeta)\} = \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z} \bar{\zeta}; \quad z, \zeta \in D. \quad (2.11)$$

(в) Формула (2.8) теоремы 2.3 приводит нас к существенному расширению классического понятия функции Бляшке.

Здесь устанавливается следующий основной результат.

Теорема 2.5. Пусть $\{z_k\}_1^\infty \subset D$ ($0 < |z_k| \leq |z_{k+1}|$) — любая последовательность комплексных чисел, для которой при данном $\alpha \in (-1, +\infty)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{2+\alpha} < +\infty. \quad (2.12)$$

Тогда бесконечное произведение

$$\pi_\alpha(z, z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) \exp \{-U_\alpha(z, z_k)\} \quad (2.13)$$

абсолютно и равномерно сходится на любом компакте $K \subset D$, не содержащем точек последовательности $\{z_k\}_1^\infty$. При этом оно представляет аналитическую в круге D функцию, равную нулю только в точках последовательности $\{z_k\}_1^\infty$.

Здесь надо отметить важное

Следствие. При $\alpha = -1$

$$\pi_{-1}(z, z_k) = c_0 \cdot B(z, z_k), \quad (2.14)$$

где

$$B(z, z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k \cdot z} \cdot \frac{|z_k|}{z_k} \quad (2.15)$$

произведение Бляшке, а $c_0 = \prod_{k=1}^{\infty} z_k \neq 0$ — постоянная.

Таким образом, $\pi_{\alpha}(z, z_k)$ ($-1 < \alpha < \infty$) является существенным обобщением функции Бляшке в том случае, когда последовательность ее нулей $\{z_k\}_1^{\infty}$ вместо условия Бляшке

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < +\infty$$

подчинена условию вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+2} < +\infty, \alpha \in (-1, +\infty).$$

(г) Обозначим через N_{α}^* ($-1 < \alpha < +\infty$) множество мероморфных в круге D функций $F(z)$, для которых

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha} \cdot T(r, F) dr < +\infty.$$

Тогда основная теорема факторизации класса N_{α}^* формулируется таким образом ([2], [4]).

Теорема 2.6. Любая функция $F(z) \in N_{\alpha}^*$ ($-1 < \alpha < +\infty$) допускает каноническую факторизацию вида

$$F(z) \equiv K(\lambda, \alpha) z^{\lambda} \frac{\pi_{\alpha}(z, a_{\mu})}{\pi_{\alpha}(z, b_{\nu})} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{2(1+\alpha)}{\pi} \int_0^1 \int_D (1-|\zeta|^2)^{\alpha} \frac{\log |F(\zeta)|}{(1-\bar{\zeta}z)^{\alpha+2}} d\zeta \right\}, \quad z \in D, \quad (2.16)$$

где $\pi_{\alpha}(z, a_{\mu})$ и $\pi_{\alpha}(z, b_{\nu})$ определяются из (2.13), $\lambda \geq 0$ — целое число,

$$K(\lambda, \alpha) = c_1^{-1} \cdot \exp \left\{ \lambda(1+\alpha) \int_0^1 (1-\rho)^{\alpha} \log \frac{1}{\rho} d\rho \right\}. \quad (2.17)$$

По поводу этой теоремы отметим, что если $p \geq 0$ — наименьшее целое число, для которого

$$\int_0^1 (1-\rho)^p \cdot T(\rho, F) d\rho < +\infty,$$

то в представлении (2.16) факторы произведений π_{ρ} , отделяющих нули и полюсы функции $F(z)$, могут быть записаны в более простом виде (2.10), напоминающем классические факторы Вейерштрасса.

Впрочем, при $\alpha = p \geq 0$ целом, вид соответствующих факторов (2.10) и произведений легко угадать, если применить схему построения факторов Вейерштрасса к факторам Бляшке вида $\frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z}$.

Наконец отметим, что спустя 11 лет после нашей публикации [2] этот частный случай факторов и произведений $\pi_p(z)$ был вновь введен японским математиком Цудзи [21].

2.2. В связи с основной теоремой факторизации 2.6 естественно возникли постановки ряда соответствующих задач.

Приведем здесь краткую сводку решений такого рода задач, которые в основном были даны Ф. А. Шамоном [22].

(а) Пусть $A_\alpha^* (-1 < \alpha < +\infty)$ — класс голоморфных в круге D функций $f(z)$, для которых

$$\iint_D (1 - |\zeta|^2)^\alpha \cdot \log^+ |f(\zeta)| d\sigma(\zeta) < +\infty. \quad (2.18)$$

Очевидно, что имеет место включение $A_\alpha^* \subset \dot{N}_\alpha$ и, тем самым, любая функция $f(z) \in A_\alpha^*$ допускает факторизационное представление (2.16) теоремы 2.6, но без множителя $\pi_\alpha^{-1}(z, b)$.

Теорема 2.7. Если $\{z_k\}_1^\infty \subset D$, то

1. При условии

$$\sum_{k=1}^\infty (1 - |z_k|)^{\alpha+2} < +\infty \quad (-1 < \alpha < +\infty) \quad (2.19)$$

для любого $\beta > \alpha$ будем иметь

$$\pi_\beta(z, z_k) \in A_\alpha^*. \quad (2.20)$$

2. При условии

$$\sum_{k=1}^\infty (1 - |z_k|)^{\alpha+2} \cdot \log \frac{1}{1 - |z_k|} < +\infty \quad (2.21)$$

имеет место включение $\pi_\alpha(z, z_k) \in A_\alpha^*$.

3. Если $\{z_k\}_1^\infty \subset D$ лежит внутри некоторого угла Штольца раствора $< \pi$ с вершиной на ∂D и ряд (2.21) расходится, то $\pi_\alpha(z, z_k) \notin A_\alpha^*$.

Из утверждений теоремы 2.7, в частности следует, что в факторизации функции $f(z) \in A_\alpha^*$ возможны случаи, когда отдельные факторы все же не входят в тот же класс A_α^* .

Однако, имеет место следующее усиление теоремы 2.6 [23].

Теорема 2.8. Класс $A_\alpha^* (-1 < \alpha < +\infty)$ совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление вида

$$f(z) = c(\alpha, \beta) z^\lambda \cdot \pi_\beta(z, a_\mu) \times \\ \times \exp \left\{ \iint_D \frac{(1 - |\zeta|^2)^\beta}{(1 - \bar{\zeta}z)^{\beta+2}} d\mu(\zeta) \right\}, \quad z \in D. \quad (2.22)$$

Здесь $\beta > \alpha$ любое, $c(\alpha, \beta)$ — постоянная, $\lambda \geq 0$ — целое, а последовательность $\{a_\mu\} \subset D$ и подчинена условию

$$\sum_{\mu} (1 - |a_\mu|)^{\alpha+2} < +\infty. \quad (2.23)$$

Наконец, $\mu(\zeta)$ — произвольная вещественная мера на D с конечным интегралом

$$\iint_D (1 - |\zeta|^2)^\alpha |d\mu(\zeta)| < +\infty. \quad (2.24)$$

(6) Приведем некоторые замечания к результатам этого пункта ([23], [24], [25]).

1. Положим, что функция $\omega(t) \in C^1(0, 1)$ и такова, что

$$\begin{aligned} \omega(t) > 0, \quad t \in (0, 1); \quad \int_0^1 \omega(t) dt < +\infty; \\ \sup_{t \in (0, 1)} \frac{|\omega'(t)| \cdot (1-t)}{\omega(t)} < +\infty. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Тогда аналог теоремы 2.8 при надлежащих переформулировках останется в силе и для класса

$$A_{\omega}^{\ast}: \iint_D \omega(|\zeta|) \log^+ |f(\zeta)| d\sigma(\zeta) < +\infty. \quad (2.26)$$

2. Введем класс $X_{\varphi}^{\ast}$ аналитических в круге D функций $f(z)$ с мажорантой вида

$$|f(z)| < \exp \left\{ C_f \cdot \varphi \left(\frac{1}{1 - |z|} \right) \right\}, \quad z \in D, \quad (2.27)$$

где $C_f > 0$ — постоянная, а функция $\varphi(t)$ из класса $C^1(0, +\infty)$ и подчинена условиям типа

$$\alpha_{\varphi} = \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \varphi'(x)}{\varphi(x)} < +\infty, \quad \beta_{\varphi} = \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \varphi'(x)}{\varphi(x)} > 1. \quad (2.28)$$

В цитированных выше работах Ф. А. Шамойна для классов $X_{\varphi}^{\ast}$ была получена полная характеристика нулей и аналог теоремы 2.8. При этом было установлено также, что условия (2.28) существенно необходимы для справедливости соответствующих результатов.

Наконец, последние результаты в дальнейшем были успешно применены в исследовании замкнутых идеалов в алгебрах аналитических в круге D функций.

В заключение отметим, что приведенные выше результаты были получены на основе фундаментальных свойств произведений $\pi_{\mu}(z, a_{\mu})$, введенных в нашей первоначальной работе [2].

§ 3. Канонические факторизации классов голоморфных в полуплоскости G_+ функций с неограниченной характеристикой М. Цудзи

Существенное продвижение в исследованиях наших математиков за последние десять лет было достигнуто благодаря циклу работ в области интегральных и факторизационных представлений мероморфных в полуплоскости функций обобщенно-ограниченного вида ([26]—[29]). Эти результаты по духу родственны общей теории факторизации мероморфных в круге D функций, развитой нами в период 1964—1971 г.г. На них, как и на результатах автора указанного периода мы останавливаться не будем.

В случае полуплоскости $G_+ = \{z, \operatorname{Im} z > 0\}$ так же как и в случае круга D , представляет особый интерес нахождение аналогичных приведенным в § 2 простых, но вместе с тем удобных для приложений классов функций и их факторизационных представлений. Недавно результаты такого рода для полуплоскости G_+ также были получены А. М. Джрбашяном [30]. Их мы приводим ниже в пунктах 3.1, 3.2. В конце параграфа, в пункте 3.3, приводятся другие результаты А. М. Джрбашяна [35], которые, в частности, также посвящены изучению классов аналитических в G_+ функций с неограниченной характеристикой Цудзи.

3.1 (а) Характеристическая функция $T(r, F)$ Р. Неванлинны (2.2) инвариантна относительно вращения круга вокруг начала координат. Естественным ее аналогом для полуплоскости можно считать специальный тип характеристики М. Цудзи, инвариантный при параллельном перемещении верхней полуплоскости относительно вещественной оси.

Для любой функции $F(z)$, мероморфной в верхней полуплоскости $G_+ = \{z, \operatorname{Im} z > 0\}$, характеристикой Цудзи будем называть функцию

$$\begin{aligned} L(\rho, F) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \log^+ |F(x + i\rho)| dx + \int_{\rho}^{+\infty} (t - \rho) dx(t, F) \equiv \\ &\equiv m(\rho, F) + N(\rho, F) \quad (0 < \rho < +\infty), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $x(t, F)$ —количество полюсов $F(z)$, лежащих в полуплоскости $G_+(t) = \{z, \operatorname{Im} z > t > 0\}$.

Заметим, что величина L представляет собой инверсию специального случая характеристики М. Цудзи [31] с интегралом, взятым по всей касательной к вещественной оси окружности.

Впервые классы аналитических в G_+ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{\rho > 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \log^+ |F(x + i\rho)| dx < +\infty \quad (3.1')$$

(т. е. ограничена характеристика $L(\rho, F)$), были рассмотрены В. И. Крыловым [32] в 1939 г., при этом, значительно раньше работ Б. Я. Левина [33] и М. Цудзи [31], связанных соответственно с вопросом выявления и исследованием такого рода характеристик.

Применив специальный способ исчерпания полуплоскости G_+ , наметенный в статье [17], автор работы [30], опираясь на теорему 2.6, мето-

дом тонких предельных переходов установил каноническую факторизацию классов типа В. И. Крылова $N_{\alpha, \beta}^m$ ($-1 < \alpha < +\infty$, $0 \leq \beta \leq 2 + \alpha$) мероморфных в полуплоскости G_+ функций $F(z)$, у которых характеристика Цудзи $L(\rho, F)$, вообще говоря, не ограничена.

Ниже с некоторыми незначительными, но целесообразными для данного изложения видоизменениями, приводится основное содержание работы [30]. С этой целью сначала же необходимо отметить, что далеко не для всех функций $F(z)$, мероморфных в полуплоскости G_+ , имеет место соотношение равновесия между характеристиками $L(\rho, F)$ и $L(\rho, F^{-1})$. По этой причине в работе [30] классы $N_{\alpha, \beta}^m$ ($-1 < \alpha < +\infty$, $0 \leq \beta \leq 2 + \alpha$) естественно было определить как множества тех мероморфных в G_+ функций $F(z)$, для которых

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta} [L(t, F) + L(t, F^{-1})] dt < +\infty. \quad (3.2)$$

Для этих классов имеют место включения

$$N_{\alpha, \beta_1}^m \subseteq N_{\alpha, \beta_2}^m \quad (-1 < \alpha < +\infty, 0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \alpha + 2) \quad (3.3)$$

$$N_{\alpha, \beta}^m \subseteq N_{\alpha+\delta, \beta+\delta}^m \quad (-1 < \alpha < +\infty, 0 \leq \beta \leq 2 + \alpha, 0 < \delta < +\infty).$$

(6) В факторизационных представлениях классов $N_{\alpha, \beta}^m$ участвуют особого рода произведения типа Бляшке для полуплоскости G_+ . На основе идеи работы А. М. Джрбашяна [26] (см. также [28]) в другой его работе [34], совместной с Г. В. Микаеляном, были введены факторы вида

$$a_\alpha(z, \zeta) \equiv \exp \left\{ - \int_0^{2 \operatorname{Im} \zeta} \frac{\tau^{\alpha+1}}{[\tau - i(z-\zeta)]^{\alpha+2}} d\tau \right\}, \quad (-2 < \alpha < +\infty, \zeta \in G_+) \quad (3.4)$$

и установлена следующая

Теорема 3.1. 1. Функция $a_\alpha(z, \zeta)$ ($-2 < \alpha < \infty$, $\zeta \in G_+$) аналитична в полуплоскости G_+ и имеет нуль, притом первого порядка, только в точке $z = \zeta$. При этом

$$a_{-1}(z, \zeta) = \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}}. \quad (3.5)$$

2. При любом $\alpha \in (-1, +\infty)$ справедлива рекуррентная формула

$$a_\alpha(z, \zeta) = a_{\alpha-1}(z, \zeta) \cdot \exp \left\{ \frac{1}{1+\alpha} \left(\frac{2i \operatorname{Im} \zeta}{z - \bar{\zeta}} \right)^{1+\alpha} \right\}. \quad (3.6)$$

3. При любом целом $\alpha = p \geq 1$ имеет место представление

$$a_p(z, \zeta) = \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} \exp \left\{ \sum_{j=1}^p \frac{1}{1+j} \left(\frac{2i \operatorname{Im} \zeta}{z - \bar{\zeta}} \right)^{1+j} \right\}. \quad (3.7)$$

Для произведений с такого рода факторами справедлива

Теорема 3.2. Если последовательность $\{z_n\}_n^{\infty} \subset G_+$ при данном $\alpha \in (-2, +\infty)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Im} z_k)^{2+\alpha} < +\infty, \quad (3.8)$$

то бесконечное произведение

$$B_{\alpha}(z, \{z_k\}_1^{\infty}) \equiv B_{\alpha}(z) \equiv \prod_{k=1}^{\infty} a_{\alpha}(z, z_k) \quad (3.9)$$

абсолютно и равномерно сходится внутри G_+ и представляет аналитическую функцию, нули которой совпадают с последовательностью чисел $\{z_k\}_1^{\infty}$. При этом порядок нуля в каждой точке $z = z_k$ ($k \geq 1$) равен кратности его появления в последовательности $\{z_k\}_1^{\infty}$.

в) Установлена следующая теорема о канонической факторизации функций классов $N_{\sigma, \beta}^m$.

Теорема 3.3. Пусть $F(z) \in N_{\sigma, \beta}^m$ ($-1 < \alpha < +\infty$, $0 \leq \beta \leq 2+\alpha$). Тогда

1. Интеграл

$$\int_0^{\infty} \int_{G_+} \frac{(\operatorname{Im} \zeta)^{\alpha}}{1 + (\operatorname{Im} \zeta)^{\beta}} \cdot |\log |F(\zeta)|| d\sigma(\zeta) < +\infty \quad (3.10)$$

(здесь $d\sigma(\zeta)$ — элемент площади). Кроме того, нули $\{a_{\mu}\}$ и полюсы $\{b_{\nu}\}$ функции $F(z)$ таковы, что

$$\sum_{\mu} (\operatorname{Im} a_{\mu})^{2+\alpha} < +\infty, \quad \sum_{\nu} (\operatorname{Im} b_{\nu})^{2+\alpha} < +\infty. \quad (3.11)$$

2. Справедливо каноническое представление вида

$$F(z) \equiv C_F \frac{B_{\alpha}(z, \{a_{\mu}\})}{B_{\beta}(z, \{b_{\nu}\})} \times \\ \times \exp \left\{ D_{\alpha} \cdot \int_0^{\infty} \int_{G_+} (\operatorname{Im} \zeta)^{\alpha} \frac{\log |F(\zeta)|}{(\zeta - z)^{\alpha+2}} d\sigma(\zeta) \right\}, \quad z \in G_+, \quad (3.12)$$

где $C_F = \lim_{t \rightarrow \infty} [F(-it)]^{-1} \neq 0$, причем $C_F = \pm 1$, если $0 \leq \beta < 2+\alpha$,

а $D_{\alpha} = (\alpha + 1) \cdot 2^{\alpha+1} \cdot e^{-\pi i / 2 \cdot (\alpha+2)} \cdot \pi^{-1}$.

Следует отметить, что такие же канонические факторизации допускают аналитические в G_+ функции $f(z)$ из рассмотренных в той же работе классов, определенных некоторыми ограничениями, накладываемыми лишь на их характеристики роста $L(\rho, f)$.

3.2 (а) Автору работы [30] удалось также установить своеобразные аналоги приведенных в п. 2.2 результатов для круга. Для произведений типа Бляшке $B_{\alpha}(z)$ имеет место важная для дальнейшего оценка.

Теорема 3.4. Если для $\{z_k\}_1^{\infty} \subset G_+$ выполняется условие (3.8), то справедлива оценка

$$\log |B_{\alpha}(z, \{z_k\})| \leq C_{\alpha} \cdot \sum_k \left(\frac{\operatorname{Im} z_k}{|z - z_k|} \right)^{2+\alpha}, \quad (-1 < \alpha < \infty). \quad (3.13)$$

Не менее существенным является справедливость соотношения равновесия

$$L(\rho, B_\alpha) = L(\rho, B_\alpha^{-1}) \quad (0 < \rho < \infty, -1 < \alpha < \infty) \quad (3.14)$$

и следующей теоремы.

Теорема 3.5 Если $\{z_k\}_1^\infty \subset G_+$, то

1. При условии

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Im} z_k)^{\alpha+2} < +\infty \quad (-1 < \alpha < +\infty) \quad (3.15)$$

для любого $\beta > \alpha$ имеет место включение

$$B_\beta(z) \in N_{\alpha, 0}^m.$$

2. Для $\operatorname{Im} z_k < 1$ ($k \geq 1$), при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Im} z_k)^{\alpha+2} \log \frac{1}{\operatorname{Im} z_k} < +\infty \quad (-1 < \alpha < +\infty) \quad (3.16)$$

для любого $\beta > 0$ имеет место включение

$$B_\alpha(z) \in N_{\alpha, \beta}^m.$$

3. Если $\operatorname{Re} z_k = 0$ ($k \geq 1$) и ряд (3.16) расходится, то

$$B_\alpha(z) \notin N_{\alpha, \alpha+2}^m.$$

(6) Наконец, на основе результатов, приведенных выше, была установлена следующая теорема о параметрическом представлении классов $N_{\alpha, \beta}^m$.

Теорема 3.6. Класс $N_{\alpha, \beta}^m$ ($-1 < \alpha < +\infty$, $0 \leq \beta < 1 + \alpha$) совпадает с множеством функций, допускающих при каком-либо $\alpha_0 > \alpha$ представление вида

$$F(z) = \pm \frac{B_{\alpha_0}(z, \{a_\mu\})}{B_{\alpha_0}(z, \{b_\mu\})} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{2^{1+\alpha_0} (1 + \alpha_0)}{\pi} e^{-i \frac{\pi}{2} (2 + \alpha_0)} \cdot \int \int_{G_+} \frac{(\operatorname{Im} \zeta)^{\alpha_0}}{(\bar{\zeta} - z)^{\alpha_0+2}} d\mu(\zeta) \right\}, \quad z \in G_+, \quad (3.17)$$

где последовательности $\{a_\mu\}$, $\{b_\mu\} \in G_+$ подчинены условию (3.11), а $\mu(\zeta) = \mu_{\alpha_0}(\zeta)$ — функция ограниченной вариации на каждой компакте G_+ такая, что

$$\int \int_{G_+} \frac{(\operatorname{Im} \zeta)^{\alpha}}{1 + (\operatorname{Im} \zeta)^{\beta}} |d\mu(\zeta)| < +\infty. \quad (3.18)$$

Установлено также, что в случае, когда $1 + \alpha < \beta \leq 2$; α , классы $N_{\alpha, \beta}^m$ ($-1 < \alpha < +\infty$) не допускают параметрического представления вида (3.17)–(3.18).

3.3. В этом пункте приводится краткий обзор некоторых результатов, установленных в недавней работе А. М. Джрбашяна [35].

(а) Основной из установленных результатов усиливает и дополняет классический факторизационный результат Р. Неванлинны [36] (см. также [37] п. п. 6.3.—6.5) в полуплоскости.

Р. Неванлинна дал полное описание класса аналитических функций $f(z)$ ограниченного вида в полуплоскости $G_+ = \{z, \operatorname{Im} z > 0\}$, непрерывных вплоть до вещественной оси. Этим полным описанием является следующая пара условий на рост функции

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^{\pi} \log^+ |f(\operatorname{Re}^{\theta})| \cdot \sin \theta \, d\theta < +\infty, \quad (3.19)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log^+ |f(x)|}{1+x^2} \, dx < +\infty. \quad (3.20)$$

В отличие от указанного класса в работе [35] вводится в рассмотрение семейство классов $N_{\gamma}^{\pm}$ ($-1 < \gamma \leq 2$), аналитических в полуплоскости G_+ функций $f(z)$, подчиненных условиям:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^{\pi} \log^+ |f(\operatorname{Re}^{\theta})| \sin \theta \, d\theta = \begin{cases} 0, & \text{при } -1 < \gamma \leq 1 \\ < \infty, & \text{при } 1 < \gamma \leq 2, \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_{-R}^R \frac{\log^+ |f(x+iy)|}{(1+|x|)^{\gamma}} \, dx < +\infty. \quad (3.22)$$

Первое принципиальное отличие этих классов от класса, рассмотренного Р. Неванлинной в полуплоскости, как видим, заключается в том, что в их определении вовсе не предполагается даже существования граничных значений функций класса $N_{\gamma}^{\pm}$ на вещественной оси. Значительная общность условий (3.21)—(3.22), налагаемых на классы $N_{\gamma}^{\pm}$ по сравнению с классическими условиями (3.19)—(3.20) очевидна.

Установлена следующая

Теорема 3.7. Класс $N_{\gamma}^{\pm}$ ($-1 < \gamma \leq 2$) совпадает с множеством аналитических в G_+ функций $f(z)$, допускающих представление вида

$$f(z) = e^{ic} \cdot B(z) \cdot \exp \left\{ -ihz + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+tz}{t-z} \frac{d\mu(t)}{1+t^2} \right\}, \quad z \in G_+. \quad (3.23)$$

Здесь

$$B(z) = \prod_k \frac{z-a_k}{z-\bar{a}_k} \frac{|1+a_k^2|}{1+a_k^2} \quad (3.24)$$

— произведение Бляшке с нулями $\{a_k\} \subset G_+$ функции $f(z)$, h, c — вещественные числа (причем $h \leq 0$, при $-1 < \gamma \leq 1$), а $\mu(t)$ — произвольная вещественная функция на $(-\infty, +\infty)$, допускающая разложение

$$\mu(t) = \mu^+(t) - \mu^-(t), \quad (3.25)$$

где $\mu^{\pm}(t)$ — неубывающие функции, такие, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu^+(t)}{(1+|t|)^{\gamma}} < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu^-(t)}{(1+|t|)^{\gamma}} < +\infty. \quad (3.26)$$

Из параметрического представления (3.23) — (3.26) классов $N_{\gamma}^{\pm}$ непосредственно вытекает, что класс $N_{\gamma}^{\pm}$ монотонно расширяясь с возрастанием параметра γ , при $\gamma=2$ совпадает с множеством всех аналитических в G_{+} функций ограниченного вида. И, тем самым, при $\gamma=2$ условия (3.21) — (3.22) являются, в отличие от отмеченного выше результата Р. Неванлинны, полным описанием уже всего класса аналитических в G_{+} функций ограниченного вида. Причем этот результат одновременно содержит в себе результат Р. Неванлинны.

Из параметрического представления (3.23) — (3.26) также непосредственно вытекает, что представление класса $N_0^{\pm}$ совпадает с представлением класса В. И. Крылова, определенного условием (3.1') ограниченности характеристики Цудзи.

(6) Своеобразие и общность приведенных ниже теоремы типа Фрагмена-Линделёфа и теоремы единственности автора работы [35] заключается в том, что поведение вблизи вещественной оси рассматриваемой аналитической в G_{+} функции $f(z)$ вместо общепринятого условия Р. Неванлинны

$$\overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow x \\ z \in G_{+}}} |f(z)| \leq 1 \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (3.27)$$

подчинено некоторым интегральным ограничениям большей общности.

Нижеприводимая теорема единственности из работы [35], с одной стороны, содержит в себе классическую теорему единственности Р. Неванлинны [5] (гл. III, п. 38), а с другой — качественно отличается от нее тем, что ее условия предполагают «превалирование» в некотором интегральном смысле скорости убывания функции вблизи границы G_{+} над скоростью ее возрастания.

Теорема 3.8. Пусть $f(z)$ аналитична в G_{+} и существует последовательность $R_k \uparrow \infty$ такая, что при любом $k \geq 1$

$$\int_0^{\pi} \log^{+} |f(R_k e^{i\theta})| \sin \theta \, d\theta < +\infty \quad (3.28)$$

и

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{-R_k}^{R_k} \log^{+} |f(x + iy)| \, dx < +\infty. \quad (3.29)$$

Если выполняется условие

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{R} \int_0^{\pi} \log |f(R e^{i\theta})| \sin \theta \, d\theta + \right.$$

$$+ \lim_{y \rightarrow +0} \int_{-R}^R g(R; x) \log |f(x + iy)| dx \} = -\infty, \quad (3.30)$$

где

$$g(R; x) \equiv \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{R^2} \right), & \text{при } 1 \leq |x| \leq R, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{R^2} \right), & \text{при } |x| \leq 1, \end{cases} \quad (3.31)$$

то будем иметь

$$f(z) \equiv 0, \quad z \in G_+. \quad (3.32)$$

Нижеприводимая теорема типа Фрагмена-Линделёфа из работы [35] содержит в себе известную теорему типа Фрагмена-Линделёфа, принадлежащую Л. Альфорсу и М. Хейнсу [37], [38] (см. также [39], стр. 115).

Теорема 3.9. Пусть функция $f(z) \not\equiv 0$ аналитична в G_+ и такова, что при любом R ($0 < R < +\infty$)

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int_{-R}^R \log^+ |f(x + iy)| dx = 0. \quad (3.33)$$

1. Тогда, если $M(R) = \sup_{0 < \theta < \pi} |f(Re^{i\theta})|$, то существуют и равны пределы

$$\begin{aligned} \beta &= \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-1} \log M(R) = \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-1} \log^+ M(R) = \\ &= \frac{2}{\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi \log^+ |f(Re^{i\theta})| \sin \theta d\theta \in [0, +\infty]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

При этом, если

$$\alpha = \sup_{y > 0} y^{-1} \log |f(x + iy)|, \quad (3.35)$$

то

$$\beta = \alpha^+ = \sup_{y > 0} y^{-1} \log^+ |f(x + iy)|. \quad (3.36)$$

2. В случае, когда $\beta = \alpha^+ < +\infty$, имеем

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi \log |f(Re^{i\theta})| \sin \theta d\theta, \quad (3.37)$$

и для всех $\theta \in (0, \pi)$, лежащих вне некоторого множества нулевой внешней логарифмической емкости, также соотношения

$$\alpha \sin \theta = \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-1} \log |f(Re^{i\theta})|, \quad (3.38)$$

$$\alpha^+ \sin \theta = \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-1} \log^+ |f(Re^{i\theta})|.$$

Несколько слов о методе получения результатов этого пункта. В их основу изначально кладется установление теоремы о полном описании аналитических в G_+ функций ограниченного вида в полукруге $G_+(R) = \{z \in G_+, |z| < R\}$. Затем производится поэтапное исчерпание полукруга сегментами вида $G_+(R, \rho) = \{z \in G_+(R), \operatorname{Im} z > \rho\}$ (при $\rho \rightarrow +0$), и в конце — исчерпание полуплоскости полукругами при $R \rightarrow +\infty$.

Следует отметить, что все результаты работы [35], изложенные в этом пункте, после замены

гармонических в G_+ функций. Причем метод их доказательств остается в силе. В частном случае, когда $u(z) = |F(z)|^p$, в теореме 3.1 содержится эквивалентное определение для шкалы модельных весов, весовых классов H^p в полуплоскости.

§ 4. Приложения и смежные результаты

Введенные нами классы функций, их интегральные и факторизационные представления получили существенные приложения в решении различного рода задач комплексного анализа.

В данном заключительном параграфе нашего обзора мы приведем лишь часть такого рода результатов.

4.1. (а) Начнем с теорем единственности ([3], [4]). Пусть $f(z) \in H^p(\alpha)$ ($-1 < \alpha < +\infty$, $0 < p < +\infty$) и $\{a_k\}$ означает последовательность ее нулей, расположенных в круге D и нумерованных в порядке возрастания их модулей, причем каждый нуль берется соответственно его кратности.

Пусть, далее, $n(t)$ означает число чисел $\{a_k\}$, лежащих в круге $|z| < t$ ($0 < t < 1$) и

$$N(r) \equiv \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt.$$

Тогда справедлива

Теорема 4.1. Пусть $f(z) \in H^p(\alpha)$. Тогда

1. Если $f(z) \not\equiv 0$, $z \in D$, то

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha \cdot \exp \{p N(r)\} dr < +\infty. \quad (4.1)$$

2. Если же

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha \cdot \exp \{p N(r)\} dr = +\infty, \quad (4.2)$$

то $f(z) \equiv 0$.

Из теоремы 4.1 (2) вытекает следующая

Теорема 4.2. Если $f(z) \in H^p(\alpha)$ и числовая функция $n(r)$ ее нулей удовлетворяет условию

$$\liminf_{r \rightarrow 1-0} (1-r) n(r) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} (1 - |a_n|) n > \frac{1+\alpha}{p} \quad (4.3)$$

или же условием

$$\limsup_{r \rightarrow 1-0} \frac{(1-r)n(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-|a_n|)n}{\log \frac{1}{1-|a_n|}} > e^{\frac{1+\alpha}{p}}, \quad (4.4)$$

то $f(z) \equiv 0$.

По поводу дальнейших усилений теоремы 4.2 см Ч. Горовиц [40] и А. М. Седлецкий [41].

(6) Если нули $\{a_n\}$ имеют особое расположение, то для определенных классов аналитических в круге D функций свойство единственности сохраняется и при меньшей плотности последовательности $\{a_n\}$.

Полагая, что последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = e^{i\theta_0} \quad (0 \leq \theta_0 < 2\pi), \quad (4.5)$$

$$2) |\arg(a_n e^{-i\theta_0} - 1)| \geq \frac{\pi}{2} + \delta \quad (\delta > 0),$$

установлена

Теорема 4.3. Пусть для аналитической в круге D функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = e^{i\theta_0}$ имеет место оценка вида

$$|f(z)| < \frac{M}{(1-|z|)^p}, \quad (4.6)$$

где $M > 0$ и $p > 0$ — произвольные постоянные.

Если $\{a_n\}$ — нули функции $f(z)$ подчинены условиям (4.5) и, кроме того

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) = +\infty, \quad (4.7)$$

то $f(z) \equiv 0$.

(в) Существенно опираясь на аппарат интегральных представлений для надлежащих классов, в работах Ф. А. Шамомяна ([13], [42]) было дано полное решение некоторых тонких задач многомерного комплексного анализа. Для их формулировки необходимо ввести некоторые обозначения и определения. Пусть, как и в п. 1.3, $H_n^p(z_1, \dots, z_n)$ ($1 < p < \infty$, $-1 < \alpha_j < \infty$, $1 \leq j \leq n$) — множество голоморфных в n -мерном полидиске D^n функций $f(z) \equiv f(z_1, \dots, z_n)$, для которых конечна величина интеграла (1.13).

Рассмотрим, далее, n -мерный тор

$$T_n = \{z = (z_1, \dots, z_n) : |z_j| = 1, 1 \leq j \leq n\} \quad (4.8)$$

и обозначим через $H^p(D^n)$ ($0 < p < \infty$) класс голоморфных в D^n функций $f(z)$, для которых

$$\sup_{0 < r < 1} \int_{T_n} |f(r\zeta)|^p d\mu_n(\zeta) < +\infty, \quad (4.9)$$

где $d\mu_n(\zeta)$ — n -мерная мера Лебега на T_n .

Отметим, что класс $H^p(D^n)$ — естественный аналог класса Харди для значений $n \geq 2$. Полагая, наконец, что $f \in H^p(D^n)$ ($0 < p < +\infty$), можно определить функцию

$$Df(z) \stackrel{\text{def}}{=} f(z, \dots, z), \quad z \in D, \quad (4.10)$$

и поставить две задачи.

1. Дать полную характеристику тех голоморфных в D функций $F(z)$, которые допускают представление вида

$$F(z) = Df(z), \quad f \in H^p(D^n). \quad (4.11)$$

Решение этой задачи дается следующей теоремой.

Теорема 4.4. Функция $F(z)$, $z \in D$, допускает представление вида (4.11) только в том случае, когда

$$F(z) \in H^p(n-2) \quad (n \geq 2, \quad 0 < p < +\infty). \quad (4.12)$$

2. Дать решение задачи, родственной задаче 1, для многомерных пространств.

Здесь имеет место

Теорема 4.5. Функция $F(z)$ допускает представление вида

$$F(z) = Df(z), \quad f \in H_n^p(a_1, \dots, a_n), \quad 0 < p < +\infty, \\ -1 < a_j < +\infty \quad (1 \leq j \leq n) \quad (4.13)$$

только в том случае, когда

$$F(z) \in H^p(|a| + 2n - 2), \quad |a| = \sum_{j=1}^n |a_j|. \quad (4.14)$$

3. Третья задача несколько иного рода — она относится к вопросу конструктивного решения проблемы короны.

Пусть $\omega(t)$, $t \in [0, 1]$ — функция типа модуля непрерывности, и пусть Δ_ω — класс голоморфных в D функций $f(z)$, для которых

$$\sup_{\zeta_1, \zeta_2 \in D} \{|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \cdot \omega^{-1}(|\zeta_1 - \zeta_2|)\} < +\infty. \quad (4.15)$$

Как известно из теории нормированных колец, для любой совокупности функций $\{f_j(z)\}_1^n \subset \Delta_\omega$ ($n \geq 1$), подчиненных условию

$$\sum_{j=1}^n |f_j(z)| \geq \delta > 0, \quad z \in D, \quad (4.16)$$

существует совокупность функций $\{g_j(z)\}_1^n \subset \Delta_\omega$, такая, что

$$\sum_{j=1}^n f_j(z) \cdot g_j(z) \equiv 1, \quad z \in D. \quad (4.17)$$

Опираясь на теорему 1.1 об интегральном представлении классов $H^p(\alpha)$, в работе [13] была дана явная конструкция искомых функций $\{g_j(z)\}_1^n \subset \Delta_\omega$ посредством заданной совокупности функций $\{f_j\}_1^n \subset \Delta_\omega$.

Такого рода явное решение проблемы короны было достигнуто впервые, благодаря, как уже отмечалось вначале, привлечению аппарата интегрального представления классов $H^p(\alpha)$, данного в работах [2] — [3].

4.2. В работах А. Э. Джрбашяна ([43], [44], [45]) рассматривались классы A_α^p гармонических функций в единичном шаре и в полупространстве, но в многомерном евклидовом пространстве $R^n (n \geq 3)$.

(а) Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ ($-\infty < x_j < +\infty$, $1 \leq j \leq n$) — точка n -мерного евклидова пространства R^n ($n \geq 3$). Единичным шаром B^n этого пространства принято называть множество тех точек $x \in R^n$, для которых

$$|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} < 1. \quad (4.18)$$

Обозначим, далее, через A_α^p ($0 < p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$) класс гармонических функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, которые определены в шаре B^n и для которых

$$\int_{B^n} (1 - |x|^2)^\alpha \cdot |f(x)|^p dx < +\infty. \quad (4.19)$$

Теорема 4.6. [43]. Если $f(x) \in A_\alpha^p$ ($1 \leq p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$) то справедливо интегральное представление

$$f(x) = \int_{B^n} (1 - |y|^2)^\alpha \cdot Q_\alpha(x, y) f(y) dy. \quad (4.20)$$

Здесь

$$Q_\alpha(x, y) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + n/2 + \alpha + k)}{\Gamma(1 + \alpha) \Gamma(n/2 + k)} (|x| \cdot |y|)^k \cdot Z_x^{(k)}(y'), \quad (4.21)$$

где $x' = x/|x|$, $y' = y/|y|$, а $Z_x^{(k)}(y')$ — зональная гармоника порядка $k \geq 0$ (см., напр., [46]).

Отметим, что ядро $Q_\alpha(x, y)$ допускает эффективную оценку, аналогично оценкам представляющих ядер для функций, аналитических в круге или в шаре. На основе такого рода оценок устанавливается ограниченность проектора из весовых пространств L^p в A_α^p , а также оценивается порядок роста дробных производных и интегралов гармонических функций в шаре ([43], [44]).

(б) Пусть R_+^{n+1} — верхнее полупространство в R^{n+1} ($n \geq 2$). Условимся отнести к классу $A_\alpha^p(R_+^{n+1})$ ($0 < p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$) множество гармонических функций $f(x)$, которые определены в R_+^{n+1} и удовлетворяют условию

$$\int_{R_+^{n+1}} |f(x', x_{n+1})|^p \cdot x_{n+1}^\alpha dx' dx_{n+1} < +\infty, \quad (4.22)$$

где $(x', x_{n+1}) \in R_+^{n+1}$, $x' \in R^n$, $x_{n+1} > 0$.

Теорема 4.7. ([45]) Пусть $f(x) \in A_\alpha^p$ ($0 < p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$ и m — целое число такое, что

$$m > \frac{1+\alpha}{p} - (n+1) \quad (0 < p \leq 1), \quad m > \frac{1+\alpha}{p} - 1 \quad (1 < p < \infty). \quad (4.23)$$

Тогда справедлива интегральная формула

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} f(y', y_{n+1}) \cdot Q^{(m)}(x, y) \cdot y_{n+1}^{m+1} dy' dy_{n+1}, \quad (4.24)$$

где

$$Q^{(m)}(x, y) = \frac{(-2)^{m+1}}{m!} \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_{n+1}^{m+1}} P(x' - y', x_{n+1} + y_{n+1}),$$

а $P(\omega', \omega_{n+1})$ — ядро Пуассона в $\mathbb{R}_+^{n+1}$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 20.VI.1986 и 12.VI.1988

Մ. Մ. ԶԻՐԲԱՇՅԱՆ. Համառոտ ակնարկ Հայաստանի մաթեմատիկոսների կողմից իրականացված մեթո-
մոֆ ֆունկցիաների ֆակտորիզացիայի տեսության կառուցման և նրա կիրառությունների բնա-
գավորում ձեռք բերված աղյուսեցների մասին (ամփոփում)

Հոդվածը պարունակում է 1945 թվականին հեղինակի կողմից հրապարակված մի աշխա-
տության և այնուհետև մինչև օրս այդ հիմքի վրա տարված հետազոտությունների արդյունք-
ների բնույթի ակնարկը:

M. M. DZRBASJAN. A brief survey of the obtained results of Armenian mathematicians in the field of construction and applications of factorization theory of meromorphic functions in the disk (summary)

The paper contains the brief survey of results of work of the author published in 1945 as well as of the investigations accomplished on the base of this work until now.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Dzrbasjan. Survey of some achievements of Armenian mathematicians in the theory of integral representations and factorization of analytic functions; Математичн Весник (Югославия), т. 39, 1987, 263—282.
2. М. М. Джрбашян. О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН АрмССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
3. М. М. Джрбашян. О представимости некоторых классов голоморфных функций в единичном круге, ДАН АрмССР, 6, № 5, 1947, 129—134.
4. М. М. Джрбашян. К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН АрмССР, 2, 1948, 3—40.
5. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, М., Гостехиздат, 1941.
6. И. И. Привалов. Граничные свойства однозначных аналитических функций, М., Изд-во МГУ, 1941.
7. М. М. Dzrbasjan. Theory of factorization and boundary properties of functions meromorphic in the disk, Proc. of the Int. Cong. of Math., Vancouver, vol. 2, 1974, 197—202.
8. S. Bergman. The kernel functions and conformal mapping; Amer. Math. Soc. Providence, 1970.

9. W. Rudin. Functions theory in the unit ball of C^n . Springer Verlag 1980. Русский перевод книги «Теория функций в единичном шаре из C^n », М., Мир, 1984.
10. F. Forelli, W. Rudin. Projections on spaces of holomorphic functions in ball, Indiana Univ. Math. J., 24, 1974, 593—602.
11. W. Wirtinger. Monatshefte für Math. and Phys., vol. 39, 1932, 377—384.
12. Дж. Уолш. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями, М., ИИЛ, 1961.
13. Ф. А. Шамоян. Приложения интегральных представлений Джрбашяна к некоторым задачам анализа, ДАН СССР, 261, № 3, 1981, 557—561.
14. P. Charpentier. Formules explicites pour les solutions minimales de l'équation $\bar{\partial}u=f$ dans la boule et dans le polydisque de C^n ; Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 30, 41, 1980, 1921—1954.
15. Б. В. Шабат. Введение в комплексный анализ, часть II, М., «Наука», 1976.
- ✕ ✓ 16. М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян. Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области Энгеля, Изв. АН АрмССР, сер. матем. 22, № 4, 1987, 399—405.
17. М. М. Джрбашян, А. Э. Джрбашян. Интегральное представление для некоторых классов аналитических функций в полуплоскости, ДАН СССР, 285, № 3, 1985, 547—550.
18. M. Taibelson, G. Weiss. Asterisque, v. 77, 1980, 67—112.
19. F. Ricci. M. Taibelson. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa. Serie IV, vol. 10, № 1, 1983, 1—54.
20. С. Г. Гиндикин. Анализ в однородных областях, УМН, 19, № 4, 1964, 3—92.
21. M. Tsuji. Canonical product for a meromorphic function in a unit circle, Journ. Math. Soc., Japan, 8, 1956.
22. Ф. А. Шамоян. Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста, Изв. АН АрмССР, «Математика», 13, № 5—6, 1978, 405—421.
23. Ф. А. Шамоян. Параметрическое представление классов голоморфных в круге функций, допускающих рост вблизи его границы, Тезисы докладов, Ереван, 1986.
24. Ф. А. Шамоян. О нулях аналитических в круге функций, растущих вблизи границы, Изв. АН АрмССР, «Математика», 18, № 1, 1983, 15—27.
25. Ф. А. Шамоян. Теоремы деления и замкнутые идеалы в алгебрах аналитических функций с мажорантой конечного роста, Изв. АН АрмССР, «Математика», 15, № 4, 1980, 323—332.
- ✓ — 26. А. М. Джрбашян. Функции типа Бляшке для полуплоскости, ДАН СССР, 246, № 6, 1979, 1295—1298.
- ✓ 27. А. М. Джрбашян. Факторизация некоторых общих классов мероморфных в полуплоскости функций, ДАН СССР, 257, № 1, 1981, 21—25.
28. А. М. Джрбашян. Функции типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН АрмССР, «Математика», 18, № 6, 1983, 409—440.
- ✓ 29. А. М. Джрбашян. Соотношения равновесия и факторизационные теоремы для мероморфных в полуплоскости функций, Изв. АН АрмССР, «Математика», 21, № 3, 1986, 213—279.
- ✓ — 30. А. М. Джрбашян. Параметрические представления классов мероморфных функций с неограниченной характеристикой, Изв. АН АрмССР, «Математика», 22, № 5, 1987, 451—477.
31. M. Tsuji. On Borel directions of meromorphic functions of finite order, Tokyo Math. J., v. 2, № 2, 1950, 97—112.
32. В. И. Крылов. О функциях, регулярных в полуплоскости, Матем. сб. т. 6 (48), № 1, 1939, 95—138.
33. Б. Я. Левин. О функциях, голоморфных в полуплоскости, Труды Одесского государственного ун-та, № 3, 1941, 5—14.
- ✓ — 34. А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян. Построение и основные свойства одного семейства произведений типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН АрмССР, «Математика», 15, № 6, 1980, 462—474.

- ✓ 35. А. М. Джрбашян. Классы функций ограниченного вида в полуплоскости, теорема единственности и теорема типа Фрагмена-Линделёфа, Изв. АН АрмССР, «Математика», т. 23, № 4, 1988, 396—401.
36. R. Nevanlinna. Über die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum, Acta Soc. Sci Fennicae, v. 50, 12, 1925, 3—15.
37. M. Heins. On the Phragmen—Lindelöf principle, Trans. Amer. Math. Soc., v. 60, 1946, 238—244.
38. L. Ahlfors, M. Heins. Questions of regularity connected with the Phragmen-Lindelöf principle, Ann. of Math., v. 50, № 2, 1949, 341—346.
39. R. P. Boas. Entire functions, New York, Acad. Press, 1954.
40. Ch. Horowitz. Zeros of functions in the Bergman spaces, Duke Math. J., 41, 1974, 693—710.
41. А. М. Седлецкий. О нулях аналитических функций классов A_p^p . Актуальные вопросы теории функций, Изв-во Ростовского ун-та, 1987, 24—29.
42. Ф. А. Шамоян. Теоремы вложения и характеристика следов в пространствах $H^p(U^n)$ ($0 < p < +\infty$), Мат. сб., т. 107(109), вып. 3, 1978.
- ✓ 43. А. Э. Джрбашян. Интегральные представления и непрерывные проекторы в некоторых пространствах гармонических функций, Мат. сб., т. 121(163), № 2(6), 1983, 259—271.
- ✓ 44. А. Э. Джрбашян. О порядке роста дробных интегралов и производных гармонических функций в многомерном шаре, Изв. АН АрмССР, «Математика», 20, № 5, 1985, 366—374.
- ✓ 45. А. Э. Джрбашян. Классы A_p^p гармонических функций в полупространствах и аналог теоремы М. Рисса, Изв. АН АрмССР, «Математика», 22, № 4, 1987, 386—398.
46. И. Стейн, Г. Вейс. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, М., «Мир», 1974.

УДК 517.53

Р. А. АВЕТИСЯН, Н. У. АРАКЕЛЯН

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ МЕРОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В УГЛОВЫХ ОБЛАСТЯХ

Основной целью настоящей заметки является конструирование мероморфных функций, которые равномерно аппроксимировали бы заданную голоморфную в угловой области функцию в несколько более узкой угловой области и имели бы, в известном смысле, возможно медленный рост на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (измеряемой ростом их неванлинновской характеристики). Эта задача впервые исследовалась в работе [1], где были получены близкие к точным результаты. Последние нуждаются в уточнении, особенно когда аппроксимируемые функции ограничены либо имеют сравнительно медленный рост. Интерес к такого рода приближениям стимулируется как потребностями самой теории приближений (см. [2]), так и возможными их приложениями в теории распределения значений мероморфных функций (см., напр., [3]).

1. Формулировка результатов. Помимо общепринятых обозначений неванлинновской теории (см. [4]), мы по мере надобности вводим новые.

Для открытого множества $\Omega \subset \mathbb{C}$ обозначим через $H(\Omega)$ множество голоморфных в Ω функций. Если $0 \in \Omega$ и K_r означает круг $|z| < r$, то обозначим через $H_B(\Omega)$ множество функций $f \in H(\Omega)$, для которых величина

$$M(r, f) = \sup \{|f(z)| : z \in \Omega \cap \bar{K}_r\}$$

конечна при всех $r > 0$.

Рассмотрим далее конечную систему Δ открытых углов с общей вершиной в точке 0 и пусть для $\sigma > 0$

$$\Delta_\sigma = \{z \in \Delta : \inf_{\zeta \in \partial \Delta} |\arg z - \arg \zeta| > \sigma\}.$$

Теорема 1. Для функции $f \in H_B(\Delta)$ и чисел $\varepsilon, \sigma \in (0, 1]$ и $p > 1$ существует такая мероморфная функция g , что

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in \Delta_\sigma, |z| \geq p\sigma, \quad (1)$$

$$T(r, \varepsilon^{-1}g) < c \int_{\sigma}^{pr} \int_{\sigma}^t \log \frac{M(\tau, f)}{\varepsilon} \frac{d\tau dt}{\tau t} + c \log^2(r+1), \text{ при } r \geq p\sigma, \quad (2)$$

где константа $c > 0$ зависит только от σ, p и от системы Δ .

Замечание 1. По сравнению с (2) установленная в [1] оценка роста аппроксимирующих мероморфных функций менее точна и компактна, и там не указан явным образом характер зависимости от величины уклонения ε .

Замечание 2. Если дополнительно к условиям теоремы 1 предположить, что $f|_{K_{r_0}} \in H_B(K_{r_0})$ при некотором $r_0 > 0$, то тогда приближение вида (1) можно обеспечить не только на $\Delta_0 \setminus K_{r_0}$, но и на $\Delta_0 \cup \overline{K_{r_0}}$. При этом в (2) число σ всюду следует заменить на r_0 .

Что касается вопроса точности оценки (2), то заметим, во-первых, что рост функции g , с учетом (1), не может быть ниже роста функции f на Δ . Поэтому оценка (2) асимптотически точна по r , во всяком случае, для функций f , имеющих регулярный рост конечного порядка. Если же функция f ограничена—допустим, что $|f(z)| \leq 1$ для $z \in \Delta$, то для осуществляющих приближение (1) мероморфных функций g , согласно (2), имеем оценку

$$T(r, g) < c \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right) \log^2 r, \quad r \geq 2. \quad (2')$$

Следующий простой пример иллюстрирует точность оценки (2') (без учета величины константы c).

Пример. Пусть Γ_0 и Γ_1 —лучи без общих точек, $f(z) = 0$ для $z \in \Gamma_0$ и $f(z) = 1$ для $z \in \Gamma_1$. Предположим, что для $0 < \varepsilon \leq 4^{-1}$ мероморфная функция g удовлетворяет неравенству

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon \quad \text{для } z \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \quad (3)$$

и оценим снизу величину

$$c_g = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, g)}{\log^2 r}.$$

Если $c_g < +\infty$, то тогда из (3) следует существование такой последовательности $r_k \uparrow +\infty$, что

$$T(r_k, g) = o(\sqrt{r_k}) \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{n(r_k, g)}{\log r_k} \leq 4c_g.$$

Полагая $\rho_k = r_k / \log r_k$, применим к функции g и к области $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma_0$ теорему 2 работы [5], являющуюся аналогом на случай мероморфных функций обобщенного варианта теоремы Фрагмена—Линделёфа. Учитывая, что согласно (3), $|g(z)| < \varepsilon$ для $z \in \partial D$ и $M(r, g) > 1 - \varepsilon \geq \sqrt{\varepsilon}$ при $r \geq r_0$, из оценки (1.10) работы [5] получим, что

$$c_g > \frac{1}{8\pi^2} \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

В качестве другого примера можно рассматривать зависящую от ε , $0 < \varepsilon < 1$, голоморфную функцию $f = f_\varepsilon$:

$$f_\varepsilon(z) = 2\varepsilon \sin \left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right) \log z \right] \quad \text{при } |\arg z| \leq 1,$$

где $\log z$ —главное значение логарифма. Имеем, что $M(r, f_\varepsilon) \leq 1$. Если для $f = f_\varepsilon$ выполнено приближение (3) при $z \in [1, +\infty]$, то заменяя $g(z)$ на $g_1(z) = 2^{-1}(g(z) + \overline{g(\bar{z})})$ и оценивая снизу число нулей g_1 на отрезке $[1, r]$, легко приходим к оценке $T(r, g) \geq$

$\geq k \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right) \log^2 r$, $r \geq 2$ где $k > 0$ — абсолютная константа.

С помощью теоремы 1 можно получить более общие и удобные для приложений результаты об асимптотическом (касательном) приближении мероморфными функциями на системе угловых областей с оценкой роста аппроксимирующих функций.

Теорема 2. Пусть $f \in H_s(\Delta)$, $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\varepsilon, \sigma \in (0, 1)$ и $\rho > 1$. Тогда существует такая мероморфная функция G , что

$$|f(z) - G(z)| < \varepsilon |z|^{-\rho(|z|)} \text{ для } z \in \Delta_\sigma, |z| \geq r_\sigma, \quad (4)$$

$$T(r, \varepsilon^{-1} G) < k \int_{\sigma/2}^r \int_{\sigma/2}^t \log \frac{M(t, f)}{\varepsilon} \frac{dt}{t} + k\rho(r) \log^2(r+1) \text{ при } r \geq r_\sigma, \quad (5)$$

где константа $k > 0$ не зависит от f и от чисел ε и r .

Замечание 3. Рассматривая уточненный порядок $\rho(r)$, мы подразумеваем, что $r^{\rho(r)} \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Это условие, которое может нарушаться, когда $\rho(r) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$) продиктовано желанием иметь в (4) касательное приближение.

Следующее следствие из теоремы 2 хорошо известно [6].

Следствие. Пусть ψ — произвольно медленно возрастающая к $+\infty$ функция на $[0, +\infty)$ и $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Существует мероморфная функция G с асимптотическими значениями $a_1, a_2, \dots, a_n$, рост которой удовлетворяет условию

$$T(r, G) = O(\psi(r) \log^2 r) \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

В самом деле, пусть Δ — система из n открытых углов $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ с вершиной 0 и попарно без общих точек, $f(z) = a_k$ для $z \in \Delta_k$. Далее можно считать, что $\psi(r) \leq \log(r+1)$. Для функции e^z существует (см. [7], теорему 2.1 и стр. 70–72) нижний уточненный порядок $\rho(r)$ так, что при $r \geq r_0$

$$e^{r^{\rho(r)}} > r^{\rho(r)}, \text{ т. е. } \rho(r) \log r \leq \psi(r).$$

Искомую функцию G мы получим, применяя к функциям f и ρ теорему 2 при $\varepsilon=1$, $\rho=2$ и достаточно малом δ (более подробно о количестве асимптотических значений мероморфных функций см. [5], теорема 1).

2. Доказательства. Для доказательства теоремы 1 мы применяем несколько более сложную, чем в работе [1], аппроксимационную схему. Нам понадобится следующая

Лемма 1. Для ветви аналитической функции $z \rightarrow \sqrt[n]{z}$, $\sqrt[n]{1}=1$, однозначной в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, и для числа $\delta \in (0, 1]$ существует мероморфная функция $\omega = \omega_\delta$ с полюсами на $(-\infty, -1)$ такая, что

$$|\omega(z) - \sqrt[n]{z}| \leq \frac{1}{2} |\sqrt[n]{z}| \text{ при } |\arg z| \leq \pi - \delta, |z| \geq \delta, \quad (6)$$

$$T(r, \omega) = O(\log^2 r) \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (7)$$

а) Доказательство леммы 1. Определим функцию ω формулой.

$$\omega(z) = A_0 + z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{z - \zeta_k}, \quad (8)$$

где $\zeta_k = -q^k$ для $k = 1, 2, \dots$ и $q = 1 + 4^{-1} \sin \delta$,

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} \frac{d\zeta}{V|\zeta|} \quad \text{для } k = 0, 1, 2, \dots, \zeta_0 = 0. \quad (9)$$

Ряд в (8) сходится абсолютно в точке $z=0$, что гарантирует локально равномерную сходимость этого ряда в C . Свойства мероморфных функций, представимых рядами вида (8), исследовались М. В. Келдышем [7]. Из его результатов следует, в частности, что

$$T(r, \omega) = N(r, \omega) + O(\log r) \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Теперь оценка (7) следует из замечания, что если $|\zeta_k| \leq t < |\zeta_{k+1}|$, $k \geq 1$, то $n(t, \omega) = k \leq (\log q)^{-1} \log t$, поэтому $N(r, \omega) = O(\log^2 r)$. Для доказательства оценки (6) удобно представить ряд (8) в виде интеграла. С этой целью положим

$$Q(\zeta, z) = \frac{\zeta - \zeta_k}{z - \zeta_k} \quad \text{для } \zeta \in (\zeta_{k+1}, \zeta_k], k = 0, 1, \dots.$$

Учитывая, что при $\zeta \in (\zeta_{k+1}, \zeta_k]$ величина

$$\frac{Q(\zeta, z) - 1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - \zeta_k}$$

не зависит от ζ , для $z \in C \setminus (-\infty, 0)$ согласно (8) и (9) имеем

$$\omega(z) = \frac{z}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{Q(\zeta, z) - 1}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{V|\zeta|} = \frac{z}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1 - Q(\zeta, z)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{V|\zeta|},$$

где Γ — положительно ориентированная граница области $C \setminus (-\infty, 0]$.

Отсюда с учетом формулы Коши функции $1/Vz$ получим представление

$$\omega(z) - V^{-1}z = -\frac{z}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{Q(\zeta, z)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{V\zeta} = \frac{z}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{Q(\zeta, z)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{V|\zeta|},$$

$$z \in C \setminus (-\infty, 0].$$

Оценим последний интеграл при $|z| \geq \delta$ и $|\arg z| \leq \pi - \delta$, учитывая при этом неравенства

$$|Q(\zeta, z)| \leq \frac{q-1}{\sin \delta} = \frac{1}{4} \sin \delta, \quad |z - \zeta| \geq \frac{1}{2} (\sin \delta) (|z| + |\zeta|).$$

Мы приходим к оценке (6):

$$|\omega(z) - V^{-1}z| \leq \frac{|z|}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(|z| + t)Vt} = \frac{1}{2} V|z|.$$

Лемма 1 доказана.

б) Доказательство теоремы 1. Пусть $\omega = \omega_\delta$ — построенная в лемме 1 мероморфная функция для числа $\delta = \frac{\sigma}{\rho}$. Заменяя $f(z)$ на $\varepsilon^{-1} f(\alpha z)$, можно свести доказательство к случаю, когда $\varepsilon = 1$ и считать (при подходящем выборе числа $\alpha \in \mathbb{C}$), что полюсы $(-\infty, -1)$ лежат в $\mathbb{C} \setminus \Delta$, т. е. полюсы ω лежат вне $\Delta \cup \bar{K}_1$. При этом в условиях замечания 2 можем также считать, что $r_0 = \sigma$.

Пусть теперь $E_0 = \Delta_\delta \setminus K_\sigma$, $E = \Delta_\sigma \setminus K_{\rho\sigma}$, а если дополнительно известно, что $f|_{K_\sigma} \in H_2(K_\sigma)$, то естественно полагаем $E_0 = \Delta_\delta \cup \bar{K}_\sigma$, $E = \Delta_\sigma \cup \bar{K}_\delta$. Обозначим через Γ положительно ориентированную границу E_0 и пусть $\Gamma_r = \Gamma \cap K_r$. Из оценки (6) леммы 1 следует, что

$$|\omega(\zeta)| \geq \frac{1}{2} V|\zeta| \text{ для } \zeta \in \Gamma, \quad |\omega(z)| \leq c_1 + \frac{3}{2} V|z| \text{ для } z \in E, \quad (10)$$

где константа c_1 зависит от δ . В дальнейшем через c_j , $j=2, 3, \dots$ будем обозначать положительные константы, зависящие лишь от чисел σ , ρ и от системы Δ . Заметим, в частности, что $E \subset E_0$ и существует такая константа $c_2 < 1$, что

$$|\zeta - z| > c_2 (|\zeta| + |z|) \text{ для } \zeta \in \Gamma, z \in E. \quad (11)$$

Рассмотрим рациональную по z и кусочно-аналитическую по $\zeta \in \Gamma$ функцию $Q(\zeta, z)$, $Q(\zeta, \zeta) \equiv 1$, вида

$$Q(\zeta, z) = \left(\frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'} \right)^{n'},$$

где выбор полюсов ζ' и их кратностей n' , кусочно-постоянных по ζ , подлежит уточнению. С этой целью фиксируем число $q > 1$:

$$q = \min \{ V\rho, 1 + c_2/V\rho \}$$

и возьмем произвольную пока последовательность $(n_k)_{k=0}^\infty$ целых чисел $n_k \geq 0$. Для полюсов $\zeta \in \Gamma_\sigma$ мы полагаем $n' = n_0$. Сами же полюсы $\zeta' \in \Gamma_\sigma$ выбираем так, чтобы они делили Γ_σ на дуги длины не больше $(1 - q^{-1})\sigma$. Каждой точке ζ любой из этих дуг сопоставим один и тот же конец ζ' этой дуги. Можно считать, что количество указанных точек $\zeta' \in \Gamma_\sigma$ (без учета их кратности n_0) ограничено числом c_3 .

Для определения полюсов на $\Gamma \setminus \Gamma_\sigma$ положим $q_k = \sigma q^k$ для $k=0, 1, 2, \dots$, $\gamma_0 = \Gamma_\sigma$ и $\gamma_k = \Gamma_{q_k} \setminus \Gamma_{q_{k-1}}$ для $k \geq 1$. Учитывая, что $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и

$$\Gamma \setminus \Gamma_\sigma = \bigcup_{k=1}^\infty \gamma_k,$$

мы для точек $\zeta \in \gamma_k$ при $k \geq 1$ полагаем $\zeta' = (\zeta/|\zeta|) q_k$ и $n' = n_k$.

Таким образом, для $\zeta \in \Gamma$ соответствующий полюс $\zeta' \in \Gamma$ у нас выбран так, что $q^{-1}|\zeta'| \leq |\zeta| \leq |\zeta'|$ и $|\zeta - \zeta'| \leq (1 - q^{-1})|\zeta'|$. Если теперь $z \in E$, то с учетом (11) имеем

$$\left| \frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'} \right| \leq \frac{1 - q^{-1}}{c_2} \leq \frac{1}{q} < \frac{q^2 + 1}{q^2 + q} = d < 1,$$

так что при $k=0, 1, 2, \dots$ выполняется оценка

$$|Q(\zeta, z)| \leq d^k \text{ для } \zeta \in \gamma_k, z \in E \quad (12)$$

Оценка (12) выполняется не только для $z \in E$, но и для всех $z \in \bar{K}_{\mu|\zeta|}$, где $\mu = 2q(q^2+1)^{-1} < 1$, поскольку тогда

$$\left| \frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'} \right| \leq \frac{|\zeta - \zeta'|}{(1-\mu)|\zeta| + |\zeta - \zeta'|} \leq \frac{q-1}{q-\mu} = d.$$

Наконец, оценка (12) выполняется еще в одном случае—когда $\zeta \in \Gamma \setminus \gamma_k$ и $|z| = \mu q_k$ для $k = 1, 2, \dots$. В самом деле, если $|\zeta| > q_k$, то мы приходим к предыдущему случаю, когда $|z| \leq \mu|\zeta|$. Если же $|\zeta| \leq q_{k-1}$, то тогда $sq^{m-1} < |\zeta| \leq sq^m$ при некотором $m \leq k-1$, так что $|z - \zeta'| \geq q_m(\mu q^{k-m} - 1)$, $|\zeta - \zeta'| \leq (1 - q^{-1})q_m$, и поэтому

$$\left| \frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'} \right| \leq \frac{q-1}{q(\mu-1)} = d.$$

Из сказанного об оценке (12) ясно, что если определить последовательность $(n_k)_{k=0}^\infty$ из условий

$$0 \leq n_k - c_1 [A + \log^+ M(q_k, f)] < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

где $c_1 = \left(\log \frac{1}{d}\right)^{-1}$, а $A > 0$ — пока произвольная константа, то тогда неравенство

$$|f(\zeta) Q(\zeta, z)| < e^{-A} \quad (14)$$

выполняется, если а) $\zeta \in \Gamma$ и $z \in E \cup \bar{K}_{\mu|\zeta|}$; б) $\zeta \in \Gamma \setminus \gamma_k$, $|z| = \mu q_k$ при $k = 1, 2, \dots$.

Рассмотрим теперь несобственный интеграл

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{Q(\zeta, z)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma. \quad (15)$$

Из (10) и (14) следует, что подынтегральная функция при $|\zeta| \geq \mu^{-1}|z|$ мажорируется интегрируемой функцией $c_2 |\zeta|^{-\frac{1}{2}}$. Поэтому $I(z)$ сходится в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ локально равномерно и представляет голоморфную функцию.

Полагая теперь $f_n(z) = f(z)$ для $z \in E_0$ и $f_0(z) = 0$ для $z \in \Gamma \setminus E_0$, покажем, что при подходящем выборе константы A требуемую мероморфную функцию g можно определить формулой

$$g(z) = f_0(z) - I(z) \omega(z) \text{ для } z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma. \quad (16)$$

Эта формула определяет g как мероморфную вне Γ функцию с возможными полюсами лишь в точках, где лежат полюсы функции ω . Убедимся однако, что g допускает голоморфное продолжение и на Γ , за исключением возможных полюсов в выбранных выше точках $(\zeta') \subset \Gamma$. В самом деле, учитывая (15), (16) и формулу Коши для функции f/ω применительно к контуру $\partial(E_0 \cap K_r)$, мы для $z \in K_r \setminus \Gamma$, при любом $r \geq \sigma$ получим представление

$$\frac{g(z)}{\omega(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{1 - Q(\zeta, z)}{\zeta - z} d\zeta + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{Q(\zeta, z)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_r} \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

где $L_r = E_0 \cap \partial K_r$. Здесь последние два интеграла допускают голоморфное продолжение на K_r , а первый интеграл — мероморфное, с возможными полюсами в точках $\zeta' \in K_r$, кратности соответственно не выше n' , если учесть, что $Q(\zeta, \zeta) \equiv 1$ для $\zeta \in \Gamma$.

Согласно (16) для доказательства оценки (1) (при $\varepsilon = 1$) нам необходимо иметь подходящие оценки функции $I(z)\omega(z)$ на E .

Из (15) с учетом (10), (11) и (14) (случай а)) следует, что

$$|I(z)|e^A \leq c_2^{-1} \int_{\Gamma} (|\zeta| + |z|)^{-1} \frac{|d\zeta|}{\sqrt{|\zeta|}} \text{ для } z \in E.$$

Здесь часть интеграла по Γ_0 [равна $c_6(\sigma + |z|)^{-1}$, а остальная часть (по $\Gamma \setminus \Gamma_0$) ограничена интегралом

$$c_7 \int_{\Gamma} (1 + |z|)^{-1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq c_7(1 + \sqrt{|z|})^{-1},$$

поэтому с учетом (10) для $z \in E$ получаем, что функция $I(z)\omega(z)$ ограничена величиной $c_8 e^{-A}$. Для выполнения оценки (1) достаточно фиксировать $A = \log^+ c_8$.

Перейдем к оценке характеристики $T(r, g)$. Из (16) следует, что

$$m(r, g) \leq \log^+ M(r, f) + m(r, I) + m(r, \omega) + 1.$$

Поскольку

$$N(r, g) \leq N(r, g/\omega) + N(r, \omega),$$

то с учетом оценки (7) получим

$$T(r, g) < N(r, g/\omega) + m(r, I) + \log^+ M(r, f) + c_9 \log^3(r+1) \\ \text{при } r \geq \sigma. \quad (17)$$

Полюсы функции g/ω расположены на множестве (ζ') , имея в ζ' кратность не выше n' , поэтому с учетом (13) получим (при некотором $c_{10} \geq c_9$)

$$N(r, g/\omega) \leq \sum_{|\zeta'| \leq r} n' \log \frac{r}{|\zeta'|} \leq c_{10} \sum_{q_k < r} n_k \log \frac{r}{q_k} \leq \\ \leq c_{11} \sum_{q_k < r} [1 + \log^+ M(q_k, f)] \log \frac{r}{q_k}, \quad r \geq \sigma.$$

Отсюда, учитывая, что

$$[1 + \log^+ M(q_k, f)] \log \frac{r}{q_k} \leq (\log q)^{-1} \int_{q_k}^{qr} [1 + \log^+ M(t, f)] \log \frac{qr}{t} \frac{dt}{t},$$

находим, что

$$N(r, g/\omega) < c_{12} \int_a^r [1 + \log^+ M(t, f)] \log \frac{qr}{t} \frac{dt}{t}, \quad r > a.$$

Интегрированием по частям отсюда получаем

$$N(r, g/\omega) < c_{12} \int_a^r \int_a^t \log^+ M(\tau, f) \frac{d\tau dt}{\tau t} + c_{13} \log^2(r+1), \quad r \geq a. \quad (18)$$

Величину $m(r, l)$ нам достаточно оценить при $r = r_k = \mu q_k$, $k = 1, 2, \dots$. С этой целью разобьем в (15) интеграл $I(z)$ на сумму интегралов $I_k(z)$ и $J_k(z)$, соответственно, по контурам $\Gamma \setminus \gamma_k$ и γ_k .

Если $\zeta \in \Gamma \setminus \gamma_k$ и $|z| = r_k$, то тогда $|\zeta - z| > (1 - \mu) |\zeta|$. Учитывая также оценки (10) и (14) (случай б)), получим

$$|I_k(z)| < (1 - \mu)^{-1} \int_{\Gamma} |\zeta|^{-\frac{3}{2}} |d\zeta| < e^{c_{14}}, \quad |z| = r_k. \quad (19)$$

Если же $\zeta \in \gamma_k$ и $|z| = r_k$, то тогда

$$|Q(\zeta, z)| = \left| \frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'} \right|^{\alpha'} \leq \left(\frac{q-1}{q+1} \right)^{2\alpha_k},$$

а согласно (10), $|\omega(\zeta)| \geq 0,5 \sqrt{\sigma}$, поэтому с учетом (13) имеем

$$|f_k(r_k e^{i\varphi})| \leq \exp(c_{15} + c_{15} \log^+ M(q_k, f)) \alpha_k(\varphi), \quad (20)$$

где

$$\alpha_k(\varphi) = \int_{\gamma_k} |\zeta - r_k e^{i\varphi}|^{-1} |d\zeta|.$$

Заменяя в этом интеграле ζ на $q_{k-1}\zeta$ при $k > 1$ и учитывая, что $r_k = r_1 q_{k-1}$, мы обнаруживаем, что $\alpha_k(\varphi) \equiv \alpha_1(\varphi)$. Кроме того, $\alpha_1(\varphi)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, за исключением конечного числа точек $\varphi = \varphi'$, где она возрастает, как $|\varphi - \varphi'|^{-1}$. Полагая поэтому

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \alpha_1(\varphi) d\varphi = c_{16},$$

из (19) и (20) выводим

$$m(r_k, l) \leq c_{14} + c_{15} [1 + \log^+ M(q_k, f)] + c_{16} + 1.$$

Сопоставляя эту оценку с (17) и (18) и учитывая, что $r_1 > \sigma$, для $k = 1, 2, \dots$ получим

$$\begin{aligned} T(r_k, g) &< c_{12} \int_a^{qr_k} \int_a^t \log^+ M(\tau, f) \frac{d\tau dt}{\tau t} + \\ &+ c_{17} \log^+ M(q_k, f) + c_{17} \log^2(r_k + 1). \end{aligned}$$

Здесь второе слагаемое оценивается через первое. Так как

$$\int_{q_k}^{qr_k} \log \frac{qr_k}{t} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \log^2 (\mu q) = c_{18},$$

то ясно, что

$$\begin{aligned} \log^+ M(q_k, f) &\leq c_{18}^{-1} \int_{q_k}^{qr_k} \log^+ M(\tau, f) \log \frac{qr_k}{t} \frac{dt}{t} = \\ &= c_{18}^{-1} \int_{q_k}^{qr_k} \int_{q_k}^t \log^+ M(\tau, f) \frac{d\tau dt}{\tau t}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к оценке

$$T(r_k, g) < c_{19} \int_{\sigma}^{qr_k} \int_{\sigma}^t \log^+ M(\tau, f) \frac{d\tau dt}{\tau t} + c_{17} \log^2(r_k, f), \quad k \geq 1. \quad (21)$$

Пусть, наконец, $r \geq 1$. Так как $r_k = qr_{k-1}$ для $k=2, 3, \dots$, то существует такое $k \geq 1$, что $r \leq r_k < qr$. Поскольку $T(r, g) \leq T(r_k, g)$, то из оценки (21) окончательно получим

$$T(r, g) < c_{19} \int_{\sigma}^{qr} \int_{\sigma}^t \log^+ M(\tau, f) \frac{d\tau dt}{\tau t} + c_{20} \log^2(r+1), \quad r \geq r_1.$$

Для установления оценки (2) остается лишь заметить, что $q^2 \leq p$ и $r_1 > p\sigma$. Теорема 1 полностью доказана.

в) Доказательство теоремы 2. Можно считать, что $(-\infty, 0) \subset C \setminus \Delta$ и что $r^p(r) \geq 1$ для $r \geq \sigma$. Положим

$$\Lambda_\alpha = \{z : |\arg z| \leq \pi - \alpha\}.$$

Из теоремы 5.1 работы [4] следует существование такой голоморфной для $z \in \Lambda_{\sigma/4} \cup K_1$ функции $f_p(z)$ и константы c_1 , что

$$2 \leq |f_p(z)| |z|^{-p(|z|)} \leq c_1. \quad (22)$$

Применим к функции f_p и к области $\Lambda_{\sigma/4} \cup K_1$ теорему 1 (с учетом замечания 2) при $\varepsilon = 1$, $p = 2$ и заменой σ на $\sigma/4$.

Аппроксимирующая мероморфная функция g_p будет удовлетворять, в силу, (1) и (22), неравенствам

$$1 \leq |g_p(z)| |z|^{-p(|z|)} \leq 2c_1, \quad z \in \Lambda_{\sigma/2}, \quad (23)$$

а согласно (22) и (2) ее рост ограничивается неравенством ($\delta = \sigma/4$):

$$T(r, g_p) < c \int_{\sigma}^{2r} \int_{\sigma}^t \rho(\tau) \log \tau \frac{d\tau dt}{\tau t} + c_2 \log^2(r+1) \leq$$

$$\leq c_p(2r) \log(2r) \int_1^{2r} \int_1^t \frac{dz dt}{zt} + c_2 \log^2(r+1) \leq \\ \leq c_3 p(r) \log^2(r+1), \quad r > \sigma. \quad (24)$$

На последнем шагу мы использовали тот факт, что $r^p(r)$ является медленно растущей функцией (см. [4], стр. 72—73), если $p(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Константа c_3 зависит от выбора функции p и от σ (но не зависит от r). Замечая теперь, что $\Delta_{\sigma/2} \subset \Delta_{\sigma/2}$, применим к функции $f \cdot g_p$ и системе $\Delta_{\sigma/2}$ теорему 1 с заменой там σ на $\sigma/2$. Если g — аппроксимирующая функция, то требуемую в теореме 2 функцию G мы получим, полагая $G = g/g_p$. Тогда, согласно (1)

$$|f(z) - G(z)| < \frac{\varepsilon}{|g_p(z)|} \quad \text{для } z \in \Delta_\sigma, |z| > \rho_\sigma,$$

откуда, с учетом (23), получим (4). Кроме того

$$T(r, \varepsilon^{-1}G) \leq T(r, \varepsilon^{-1}g) + T(r, \rho_\sigma) + c_4,$$

где константа c_4 зависит только от σ и от выбора функции p . Теперь оценка (5) следует из оценок (2) и (24), если в (2) заменить f на fg_p , σ на $\sigma/2$ и учесть (23). Теорема 2 доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 21. XI. 1988.

Ռ. Ա. ԱՎԵՏԻՍԻԱՆ, Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼԻԱՆ. Լավագույն մոտավորությունների միջամտի ֆունկցիաների մեկյանային տիրույթներում (ամփոփում)

Սույն աշխատանքում ստացված են արդյունքներ անկյունների զերչավոր համակարգերի վրա հոլոմորֆ ֆունկցիաների հարթության մեջ մերոմորֆ ֆունկցիաների հավասարաչափ կամ շեղափոխով մոտավորության մասին, մոտարկող ֆունկցիաների աճի ճշգրիտ գնահատականներով:

R. A. AVETISIAN, N. U. ARAKELIAN. *Best approximations by meromorphic functions in angular domains (summary)*

In this paper results on uniform and tangential approximation of functions holomorphic on finite systems of angular domains by functions meromorphic in the complex plane, with exact estimates of their growth are established.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Тер-Исраелян. Равномерные и касательные приближения голоморфных в угле функций мероморфными с оценкой их роста. Изв. АН АрмССР, «Математика», 6, № 1, 1971, 67—80.
2. Н. У. Аракелян, Р. А. Аветисян. О наилучшем равномерном приближении мероморфными функциями на вещественной оси, ДАН СССР, 257, № 6, 1981, 128—1293.
3. M. Domodaron. On the distribution of values of meromorphic functions of slow growth, *Lecture Notes in Math.*, 599, Compl. Anal., Kentucky, 1976, Springer-Verlag, N. Y., 1977, 17—21.

4. А. А. Гольдберг, И. В. Островский. Распределение значений мероморфных функций. М., Наука, 1970.
5. Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян, А. А. Гончар. Об асимптотических свойствах мероморфных функций, Изв. АН АрмССР, «Математика», 24, № 2, 1989.
6. G. Vallron. Sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions meromorphes, Palermo Rend., 46, 1925.
7. М. В. Келдыш. О рядах по рациональным дробям, ДАН СССР, 94, № 3, 1954, 377—380.

УДК 517.53

А. Е. АВЕТИСЯН

О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ ПОРЯДКА ρ ($1 < \rho < 2$)

Введение

Известно, что целая функция экспоненциального типа, которая имеет «много» вещественных нулей, не может быть «малой» на мнимой оси. Одним из первых результатов в этом направлении можно считать теорему Карлесона о том, что функция экспоненциального типа $f(z)$ не может обращаться в нуль во всех положительных целых точках и одновременно удовлетворять на мнимой оси неравенству $|f(iy)| < \exp\{a|y|\}$, если $a < \pi$. Известны результаты, которые довольно точно отражают связь между количеством действительных нулей такой функции (или поведением на действительной оси) и ее ростом на мнимой оси. Приведем теорему, которую Винер и Пэли [1] сформулировали и доказали для четных целых функций. А. Пфлюгер ([12], см. также [3]) заметил, что общий случай легко приводится к случаю четной функции.

Пусть, как обычно, $n_f(r)$ означает число нулей функции $f(z)$ в круге $|z| < r$.

Теорема А. Если $f(z)$ — каноническое произведение порядка 1 с действительными нулями, то следующие условия эквивалентны:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\ln |f(x)|}{x^2} dx = -\pi^2 B, \quad (1)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_f(r)}{r} = 2B, \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow \pm \infty} \frac{\ln |f(iy)|}{|y|} = \pi B. \quad (3)$$

В (1) берется главное значение интеграла в точке $z=0$, которое существует, так как $f(0)=1$.

Аналогичные результаты имеют место в случае, когда нули функции $f(z)$ не обязательно действительны, но лежат близко к действительной оси.

Целая функция называется функцией класса A , если ее корни $z_k = r_k e^{i\theta_k}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin \theta_k|}{r_k} < +\infty.$$

Функции этого класса являются естественным обобщением функций, все корни которых вещественны.

Теорема В. (Пфлюгер [2]). Пусть

$$f(z) = e^{cz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{iz_n}$$

—целая функция экспоненциального типа. Тогда условия

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_f(r)}{r} = D, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin \theta_n|}{r_n} = \pi C < \infty$$

и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{\ln |f(x)|}{x^2} dx = -\pi^2 J \neq \pm \infty$$

эквивалентны и $D = 2C + 2J$.

Теорема С. (Нюбль [4]). Пусть

$$f(z) = e^{cz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n}}$$

—целая функция экспоненциального типа и класса A . Тогда предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_f(r)}{r}$$

существует тогда и только тогда, когда существует предел

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(iy)|}{y},$$

где y стремится к бесконечности, не принимая значений из множества конечной логарифмической длины.* Исключительное множество пусто, если существует угол $\left| \arg z - \frac{\pi}{2} \right| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), не содержащий точек z_n .

Настоящая работа состоит из трех параграфов. В первых двух параграфах доказываются теоремы типа теорем А, В, С для целых функций порядка ρ ($1 < \rho < 2$). В третьем параграфе приводятся теоремы об условиях, при которых целые функции порядка ρ и конечного типа принадлежат классу A_ρ и имеют вполне регулярный рост.

Доказательства этих теорем основываются на систематическом применении методов теории функций вполне регулярного роста Б. Я. Левина—А. Пфлюгера. Мы неоднократно пользуемся результатами работ [2] и [5]. В то же время, при рассмотрении целых функций порядка выше первого, возникают новые ситуации, появляются новые условия, в связи с чем привлекаются новые методы или различные модификации ранее известных методов.

* Множество E имеет конечную логарифмическую длину, если $\int_E \frac{dx}{x} < \infty$.

Обозначим через Γ совокупность лучей $\arg z = \varphi_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$),

где $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\rho}$, $\varphi_3 = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}$, $\varphi_4 = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\rho}$.

§ 1. Целые функции с нулями на Γ

В этом параграфе мы рассмотрим целые функции порядка ρ ($1 < \rho < 2$), все нули которых лежат на Γ . Этот класс функций аналогичен классу целых функций конечной степени с вещественными нулями. Для функций этого класса справедливы теоремы типа теоремы А.

Теорема 1.1. Пусть $f(z)$ — каноническое произведение порядка ρ ($1 < \rho < 2$), конечного типа, с нулями, лежащими на Γ . Тогда условия

$$(D_\rho) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_f(r)}{r^\rho} = 2\Delta$$

и

$$(B_\rho) \quad \text{а) } \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(iy)f(-iy)|}{y^\rho} = 2\pi\Delta, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(x)f(-x)|}{x^\rho} = 0$$

эквивалентны.

Доказательство. Пусть выполнено условие (D_ρ) . Составим функцию

$$\varphi(z) = f(z)f(-z)\bar{f}(z)\bar{f}(-z) \quad (1.1)$$

$(\bar{f}(z) = \overline{f(\bar{z})})$. Ясно, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_\varphi(r)}{r^\rho} = 8\Delta.$$

Нули функции $\varphi(z)$ также лежат на Γ , при этом они симметричны относительно действительной и мнимой осей. На каждом из лучей φ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) плотность нулей функции $\varphi(z)$ равна 2Δ . Согласно известным результатам Б. Я. Левина и А. Пфлюгера (см. [5], гл. II) отсюда следует, что $\varphi(z)$ — целая функция вполне регулярного роста с индикатором

$$h_\varphi(\theta) = \begin{cases} 4\pi\Delta \cos \rho \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right), & \text{при } \left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2\rho} \\ 4\pi\Delta \cos \rho \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right), & \text{при } \left| \theta + \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2\rho} \\ 0, & \text{при } |\theta| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} \text{ и } |\theta - \pi| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Отсюда имеем

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(iy)|}{y^\rho} = 4\pi\Delta, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(x)|}{x^\rho} = 0 \quad (1.3)$$

и поскольку

$$|\varphi(iy)| = |f(iy)f(-iy)|^2, \quad |\varphi(x)| = |f(x)f(-x)|^2,$$

то (1.3) равносильно условию (B_ρ)

Предположим теперь, что выполнено условие (B_p) . В терминах функции $\varphi(z)$ это означает, что имеет место (1.3). Но на мнимой оси $\varphi(z)$ принимает действительные значения. Для $y > 0$ $\varphi(iy) = |f(iy)f(-iy)|^2$ и поэтому при $y \rightarrow +\infty$

$$\ln \varphi(iy) \sim 4\pi \Delta y^p$$

или

$$\ln \varphi(re^{i\frac{\pi}{2}}) \sim 4\Delta e^{-i\frac{\pi p}{2}} (re^{i\frac{\pi}{2}})^p.$$

Функция $\frac{\ln \varphi(z)}{z^p}$ голоморфна в угловой области

$$\Delta_p^{(+)} = \left\{ 0 < |z| < \infty, \left| \arg z - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2p} \right\}$$

и ограничена в области

$$\Delta_p^{(+)}(\delta) = \left\{ \delta < |z| < \infty, \left| \arg z - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{\pi}{2p} - \delta \right\} \left(0 < \delta < \frac{\pi}{2p} \right).$$

Действительно, $\varphi(z)$ — целая функция порядка p и конечного типа, поэтому в $\Delta_p^{(+)}(\delta)$ ограничена величина $\frac{\ln |\varphi(z)|}{|z|^p}$ и, кроме того, $n_r(r) < cr^p$ ($r \geq r_0$).

Отсюда следует, что в этой области ограничена также $\frac{|\arg \varphi(z)|}{|z|^p}$

(см. [5], стр. 87). При этом на луче $\arg z = \frac{\pi}{2}$ $\frac{\ln \varphi(z)}{z^p}$ стремится к

конечному пределу $4\pi \Delta e^{-i\frac{\pi p}{2}}$. По теореме Монтеля она равномерно стремится к этому же пределу на любом луче из $\Delta_p^{(+)}(\delta)$. Так как $\delta > 0$ — произвольное, то отсюда заключаем, что $\varphi(z)$ вполне регулярного роста внутри угла $\Delta_p^{(+)}$ и ее индикатор выражается формулой

$$h_\varphi(\theta) = 4\pi \Delta \cos p \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right), \quad \left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{\pi}{2p}. \quad (1.4)$$

Аналогично убеждаемся, что $\varphi(z)$ вполне регулярного роста внутри области

$$\Delta_p^{(-)} = \left\{ 0 < |z| < \infty, \left| \arg z + \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2p} \right\}$$

и имеет там индикатор

$$h_\varphi(\theta) = 4\pi \Delta \cos p \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right), \quad \left| \theta + \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{\pi}{2p}. \quad (1.5)$$

Из (1.4) и (1.5) следует, что $h(\varphi_k) = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$. Но по предположению $1 < p < 2$ и значит растворы угловых областей

$$D_p^{(+)} = \left\{ 0 < |z| < \infty, |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2p} \right\}$$

и

$$D_p^{(-)} = \left\{ 0 < |z| < \infty, |\arg z - \pi| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} \right\}$$

меньше чем $\frac{\pi}{\rho}$, и поэтому

$$h_{\varphi}(\theta) < 0 \text{ при } |\theta| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} \text{ и } |\theta - \pi| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}. \quad (1.6)$$

Так как из условия $(B\rho)$ δ) следуют равенства

$$h_{\varphi}(0) = h_{\varphi}(\pi) = 0,$$

то в силу (1.6) получим

$$h(\varphi) = 0 \text{ при } |\theta| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} \text{ и } |\theta - \pi| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}.$$

Поскольку $\varphi(z)$ имеет вполне регулярный рост на лучах $\arg z = 0$ и $\arg z = \pi$, то она вполне регулярного роста в областях $D_p^{(+)}$ и $D_p^{(-)}$ (см. [5], теорема 6, стр. 213). Таким образом, $\varphi(z)$ — вполне регулярного роста на всей плоскости (множество лучей вполне регулярного роста замкнуто). Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_{\varphi}(r)}{r^{\rho}} &= \frac{\rho}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_{\varphi}(\theta) d\theta = \\ &= \frac{\rho}{2\pi} \left\{ \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\rho}} 4\pi \Delta \cos \rho \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) d\theta + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\rho}} 4\pi \Delta \cos \rho \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) d\theta \right\} = 8\Delta. \end{aligned}$$

Отсюда, имея в виду (1.1), получаем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_f(r)}{r^{\rho}} = 2\Delta,$$

т. е. утверждение $(D\rho)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Теорема 1.1 справедлива не только для канонического произведения, но и для любой целой функции $F(z)$, удовлетворяющей условию $F(0)=1$. Действительно, множитель типа e^{az} при каноническом произведении в представлении Адамара (факторизационная теорема) никак не влияет на условия $(D\rho)$ и $(B\rho)$.

Теорема 1.2. Пусть $f(z)$ — каноническое произведение порядка $\rho (1 < \rho < 2)$ и конечного типа с нулями, лежащими на Γ . Тогда условия

$$(I_p) \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{\ln \left| \prod_{k=1}^4 f(te^{i\varphi_k}) \right|}{t^{p+1}} dt = -\frac{2\pi^2 \Delta}{p},$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(x)f(-x)|}{x^p} = 0$$

и

$$(D_p) \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_f(r)}{r^p} = 2\Delta$$

эквиваленты.

Доказательство. Пусть имеет место (D_p) . Снова рассмотрим функцию $\varphi(z)$ (см. (1.1)). Ясно, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_f(r)}{r^p} = 8\Delta$$

и $\varphi(z)$ — целая функция порядка p , конечного типа и вполне регулярного роста. Напишем для нее формулу Карлемана (см., например, [6]) для области

$$\begin{aligned} \Delta_p^{(+)}(\lambda, R) &= \left\{ 0 < \lambda \leq |z| \leq R, \left| \arg z - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{\pi}{2p} \right\}, \\ &\sum_{\lambda < r_k < R} \left(\frac{1}{r_k^p} - \frac{r_k^p}{R^{2p}} \right) \cos p \left(\theta_k - \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= \frac{p}{\pi R^p} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \ln |\varphi(Re^{i\theta})| \cos p \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) d\theta + \\ &+ \frac{p}{2\pi} \int_{\lambda}^R \left(\frac{1}{t^{p+1}} - \frac{t^{p-1}}{R^{2p}} \right) \ln |\varphi(te^{i\varphi_1}) \varphi(te^{i\varphi_2})| dt + \\ &+ Re \frac{p}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\frac{1}{\lambda^p e^{i p (\theta - \frac{\pi}{2})}} + \frac{\lambda^p e^{i p (\theta - \frac{\pi}{2})}}{R^{2p}} \right) \ln \varphi(\lambda e^{i\theta}) d\theta. \end{aligned} \quad (1.6')$$

Функция $\varphi(z)$ не имеет нулей внутри области $\Delta_p^{(+)}$, так что левая часть (1.6') равняется нулю. С другой стороны $\varphi(z)$ — четная функция и $\varphi(0) = 1$, поэтому при $\lambda \rightarrow 0$ $\ln \varphi(\lambda e^{i\theta}) = O(\lambda^2)$. Значит, при $\lambda \rightarrow 0$ последний член правой части стремится к нулю. Переходя к пределу в (1.6') при $\lambda \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{p}{\pi R^p} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \ln |\varphi(Re^{i\theta})| \cos p \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) d\theta + \frac{p}{2\pi} \int_0^R \frac{\ln |\varphi(te^{i\varphi_1}) \varphi(te^{i\varphi_2})|}{t^{p+1}} dt - \\ &- \frac{p}{2\pi R^{2p}} \int_0^R t^{p-1} \ln |\varphi(te^{i\varphi_1}) \varphi(te^{i\varphi_2})| dt = I_1(R) + I_2(R) - I_3(R). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Заметим теперь, что поскольку $1 < \rho < 2$, то второй интеграл справа вблизи точки $t=0$ сходится. Далее, ввиду равенства $|\varphi(t^{t^{\varphi_1}})| = |\varphi(xe^{t^{\varphi_1}})|$ имеем

$$\begin{aligned} I_2(R) &= \frac{\rho}{\pi} \frac{1}{R^{2\rho}} \int_0^R t^\rho \frac{\ln |\varphi(t^{t^{\varphi_1}})|}{t} dt = \frac{\rho}{\pi} \frac{1}{R^{2\rho}} \int_0^R t^\rho d \left(\int_0^t \frac{\ln |\varphi(xe^{t^{\varphi_1}})|}{x} dx \right) = \\ &= \frac{\rho}{\pi} \left[\frac{t^\rho}{R^{2\rho}} \int_0^t \frac{\ln |\varphi(xe^{t^{\varphi_1}})|}{x} dx \right]_0^R - \frac{\rho^2}{\pi R^{2\rho}} \int_0^R t^{\rho-1} \left(\int_0^t \frac{\ln |\varphi(xe^{t^{\varphi_1}})|}{x} dx \right) dt = \\ &= \frac{\rho}{\pi} \frac{1}{R^\rho} \int_0^R \frac{\ln |\varphi(xe^{t^{\varphi_1}})|}{x} dx - \frac{\rho^2}{\pi R^{2\rho}} \int_0^R \frac{J'_\varphi(t^{\varphi_1})}{t^{1-\rho}} dt, \end{aligned}$$

где

$$J'_\varphi(t^{\varphi_1}) = \int_0^t \frac{\ln |\varphi(xe^{t^{\varphi_1}})|}{x} dx.$$

Функция $\varphi(z)$ — вполне регулярного роста на луче $\arg z = \varphi_1$ и поэтому (см. [5], стр. 188) существует предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^{2\rho}} \int_0^R \frac{\ln |\varphi(xe^{t^{\varphi_1}})|}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} R^{-\rho} J'_\varphi(R^{\varphi_1}) = \frac{1}{\rho} h_\varphi(\varphi_1) = 0.$$

Отсюда, в свою очередь, следует (см. [5], стр. 52), что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^{2\rho}} \int_0^R \frac{J'_\varphi(t^{\varphi_1})}{t^{1-\rho}} dt = \frac{1}{2\rho^2} h_\varphi(\varphi_1) = 0.$$

Таким образом

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_3(R) = 0. \quad (1.8)$$

Так как $\varphi(z)$ не имеет нулей внутри области $\Delta_\rho^{(+)}$, то $\frac{\ln |\varphi(Re^{i\theta})|}{R^\rho}$ равномерно стремится к $h_\varphi(\theta)$ в любом замкнутом промежутке интервала (φ_1, φ_2) . Поэтому перейдя к пределу под знаком интеграла и учитывая (1.2), получим

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} I_1(R) &= \frac{\rho}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} h_\varphi(\theta) \cos \rho \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) d\theta = \\ &= -\frac{\rho}{\pi} 4\pi \Delta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^2 \rho \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) d\theta = \frac{\rho}{\pi} 4\pi \Delta \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\rho} = 2\pi \Delta. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Имея в виду (1.8) и (1.9) и переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ в (1.), получим

$$\frac{\rho}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln |\varphi(te^{i\varphi_1}) \bar{\varphi}(te^{i\varphi_2})|}{t^{\rho+1}} dt = -2\pi \Delta. \quad (1.10)$$

Замечая теперь, что $|\varphi(te^{i\varphi_1})| = |\varphi(te^{i\varphi_2})|$ и $|\varphi(te^{i\varphi_1})| = \left| \prod_{k=1}^n f(te^{i\varphi_k}) \right|$, получим, что (1.10) эквивалентно условию (I_ρ) а). Условие же (I_ρ) б) следует из (B_ρ) , что следует из (D_ρ) .

Допустим теперь, что имеет место (I_ρ) . Из (I_ρ) а) следует, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln |\varphi(te^{i\varphi_k})|}{t^{\rho+1}} dt = -\frac{2\pi^2 \Delta}{\rho} \quad (k=1, 2, 3, 4) \quad (1.11)$$

Для функции $\varphi(z)$ справедлива формула (1.7). Докажем, что при $R \rightarrow \infty$ $J_3(R) \rightarrow 0$. Действительно, обозначим

$$\Phi(t) = \int_0^t \frac{\ln |\varphi(xe^{i\varphi_1}) \bar{\varphi}(xe^{i\varphi_2})|}{x^{\rho+1}} dx = 2 \int_0^t \frac{\ln |\varphi(xe^{i\varphi_1})|}{x^{\rho+1}} dx.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^{2\rho}} \int_0^R t^{\rho-1} \ln |\varphi(te^{i\varphi_1}) \bar{\varphi}(te^{i\varphi_2})| dt &= \frac{1}{R^{2\rho}} \int_0^R t^{2\rho} d\Phi(t) = \\ &= \frac{1}{R^{2\rho}} \left\{ [t^{2\rho} \Phi(t)] \Big|_0^R - 2\rho \int_0^R t^{2\rho-1} \Phi(t) dt \right\} = \\ &= \Phi(R) - \frac{2\rho}{R^{2\rho}} \int_0^R t^{2\rho-1} \Phi(t) dt. \end{aligned}$$

При $R \rightarrow \infty$ это выражение стремится к нулю, так как по условию $\Phi(R) \rightarrow -\frac{4\pi^2 \Delta}{\rho}$ и к такому же пределу стремится выражение $\frac{2\rho}{R^{2\rho}} \times \times \int_0^R t^{2\rho-1} \cdot \Phi(t) dt$ (см. [5], стр. 52). Таким образом, из (1.7) получаем:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^\rho} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \ln |\varphi(Re^{i\theta})| \cos \rho \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) d\theta = \frac{2\pi^2 \Delta}{\rho}. \quad (1.12)$$

Но с другой стороны, при условии (I_ρ) а) в области $\Delta_\rho^{(\perp)}$ функция $\varphi(z)$ вполне регулярного роста и

$$h_\rho(\theta) = k \cos \rho \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right), \quad \varphi_1 \leq \theta \leq \varphi_2. \quad (1.13)$$

Это утверждение получается из соответствующей теоремы Б. Я. Левина (см. [5], теорема 6, гл. V) конформным отображением полуплоскости на

угол $\Delta_r^{(+)}$ раствора $\frac{\pi}{2}$. Переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ под знаком интеграла в (1.12) и имея в виду (1.13), получим

$$k \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^2 \rho \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) d\theta = 2\pi^2 \Delta / \rho,$$

т. е. $k = 4\pi\Delta$. Из (1.13) имеем

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln |\varphi(iy)|}{y^\rho} = 4\pi \Delta.$$

Снова замечая, что $|\varphi(iy)| = |f(iy)f(-iy)|^2$, получим

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(iy)f(-iy)|}{y^\rho} = 2\pi \Delta,$$

т. е. условие (B_ρ) а). Таким образом, из условия (I_ρ) следует (B_ρ) , из которого, в свою очередь, по теореме 1.1 следует (D_ρ) . Теорема полностью доказана.

И здесь можно сделать замечание, аналогичное замечанию 1 после теоремы 1.1. Сопоставляя теоремы 1.1 и 1.2 и имея в виду эти замечания, получим следующий результат.

Теорема 1.3. Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ ($1 < \rho < 2$), конечного типа с нулями, лежащими на Γ и $f(0) = 1$. Тогда условия (I_ρ) , (D_ρ) и (B_ρ) эквивалентны.

§ 2. Целые функции класса A .

1° Определение. Целая функция порядка ρ ($1 < \rho < 2$) и конечного типа принадлежит классу A_ρ , если ее нули $z_k = r_k e^{i\theta_k}$, лежащие в областях $\Delta_r^{(+)}$, соответственно, удовлетворяют условиям

$$\sum_{\left| \theta_k \mp \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2\rho}} \frac{\cos \rho \left(\theta_k \mp \frac{\pi}{2} \right)}{r_k^\rho} < +\infty \quad (2.1)$$

и для любого δ ($0 < \delta < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}$) множество нулей, лежащих в угловых областях

$$|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} - \delta \text{ и } |\arg z - \pi| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} - \delta$$

нули которых лежат на Γ .

Легко убедиться, что для функций класса A_ρ множество нулей, лежащих вне маленьких углов $|\varphi_k - \theta| < \delta$, $k = 1, 2, 3, 4$, имеет нулевую плотность. Таким образом, функции класса A^ρ являются обобщением функций, нули которых лежат на Γ .

Классу A_ρ принадлежат, например, функции $E_\rho(iz; \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})}$,

$S_\rho(z; \rho) = \frac{1}{2i} [E_\rho(iz; \rho) - E_\rho(-iz; \rho)]$. Это следует из асимптотики нулей этих функций (см. [7], [8]).

В этом параграфе для функций класса A_p мы докажем теоремы типа теорем В и С.

Теорема 2.1. Если $f(z)$ — целая функция порядка ρ ($1 < \rho < 2$), конечного типа, класса A_p и $f(0) = 1$, то следующие условия эквивалентны:

$$(I_p) \quad a) \text{ интеграл } \int_0^\infty \frac{\ln \left| \prod_{k=1}^n f(te^{i\tau_k}) \right|}{t^{\rho+1}} dt$$

сходится:

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty}^* \frac{\ln |f(x) f(-x)|}{x^\rho} = 0$$

и

$$(D_p^*) \text{ существует предел } \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_f(r)}{r^\rho}$$

$(\lim_{x \rightarrow \infty}^* F(x))$ обозначает предел функции $F(x)$, который существует при условии, что $x \rightarrow \infty$ не принимая значений из некоторого множества нулевой относительной меры*).

Доказательство. Предположим сначала, что имеет место условие (D_p^*) . Пусть $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_f(r)}{r^\rho} = 2\Delta$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = f(z) f(-z) \bar{f}(z) \bar{f}(-z).$$

Очевидно будем иметь

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_\varphi(r)}{r^\rho} = 8\Delta.$$

Ясно, что $\varphi(z) \in A_p$ и нули ее расположены симметрично относительно осей x и y ($z = x + iy$). Множество нулей функции $\varphi(z)$ имеет угловую плотность $\Delta(\theta, \theta)$ при показателе ρ , т. е. для всех θ и θ , за исключением, быть может, счетного множества, существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_\varphi(r, \theta, \theta)}{r^\rho} = \Delta(\theta, \theta)$$

$(n_\varphi(r, \theta, \theta))$ — число нулей $\varphi(z)$ в секторе $\theta < \arg z \leq \theta$, $|z| < r$. Равенство

$$\Delta(\theta) - \Delta(\theta) = \Delta(\theta, \theta)$$

определяет с точностью до аддитивного слагаемого некоторую неубывающую функцию $\Delta(\theta)$.

* Множество E_0 точек интервала $(0, \infty)$ называется множеством нулевой относительной меры, если при любом $r > 0$ множество $E_0 \cap [0, r]$ измеримо и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{mes } E_0 \cap [0, r]}{r} = 0.$$

Для функции $\varphi(z)$ $\Delta(\theta)$ — кусочно-постоянная функция с четырьмя равными 2Δ скачками в точках φ_k ($k=1, 2, 3, 4$). Значит $\varphi(z)$ — целая функция вполне регулярного роста с индикатором

$$h_{\varphi}(\theta) = \begin{cases} 4\pi\Delta \cos \rho \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right), & \text{при } \left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2\rho} \\ 4\pi\Delta \cos \rho \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right), & \text{при } \left| \theta + \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{\pi}{2\rho} \\ 0, & \text{при } |\theta| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} \text{ и } |\theta - \pi| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Отсюда сразу следует пункт б) условия (I_1^*) (надо иметь в виду $|\varphi(x)| = |\varphi(x)\varphi(-x)|^2$). Чтобы доказать пункт а) воспользуемся формулой (1.6'). Устремляя λ к нулю, получим (ср. с. (1.7))

$$\begin{aligned} & \sum_{0 < r_k < R} \left(\frac{1}{r_k^{\rho}} - \frac{r_k^{\rho}}{R^{2\rho}} \right) \cos \rho \left(\varphi_k - \frac{\pi}{2} \right) = \\ & = \frac{\rho}{\pi R^{\rho}} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \ln |\varphi(Re^{i\theta})| \cos \rho \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) d\theta + \\ & + \frac{\rho}{2\pi} \int_0^R \left(\frac{1}{t^{\rho+1}} - \frac{t^{\rho-1}}{R^{2\rho}} \right) \ln |\varphi(te^{i\varphi_1}) \varphi(te^{i\varphi_2})| dt. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Докажем, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^{2\rho}} \sum_{\substack{r_k < R \\ \left| \varphi_k - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2\rho}}} r_k^{\rho} \cos \rho \left(\varphi_k - \frac{\pi}{2} \right) = 0. \quad (2.4)$$

Действительно, это следует из (2.1) и из оценки

$$\frac{1}{R^{2\rho}} \sum_{r_0 < r_k < R} r_k^{\rho} \cos \rho \left(\varphi_k - \frac{\pi}{2} \right) < \sum_{r_k < r_0} \frac{\cos \rho \left(\varphi_k - \frac{\pi}{2} \right)}{r_k^{\rho}} < \epsilon,$$

которая верна при достаточно большом r_0 . Таким образом, предел левой части при $R \rightarrow \infty$ конечен и равняется

$$\sum_{\substack{\varphi_k \\ \left| \varphi_k - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2\rho}}} \frac{\cos \rho \left(\varphi_k - \frac{\pi}{2} \right)}{r_k^{\rho}}.$$

Рассмотрим первый член правой части (2.3). Пользуясь тем, что $\varphi(z)$ вполне регулярного роста, можно вычислить предел этого члена, перейдя к пределу под знаком интеграла (см. [5], стр. 320)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\rho}{\pi R^{\rho}} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \ln |\varphi(Re^{i\theta})| \cos \rho \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) d\theta =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\rho}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} h_{\rho}(\theta) \cos \rho \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) d\theta = \\
 &= \frac{\rho}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} 4\pi \Delta \cos^2 \rho \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) d\theta = \frac{\rho}{\pi} 4\pi \Delta \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\rho} = 2\pi \Delta. \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

Из (2.3), (2.4) и (2.5) следует, что существует предел выражения

$$\frac{\rho}{2\pi} \int_0^R \left(\frac{1}{t^{\rho+1}} - \frac{t^{\rho-1}}{R^{2\rho}} \right) \ln |\varphi(te^{i\varphi_1}) \varphi(te^{i\varphi_2})| dt = J_1(R) - J_2(R). \quad (2.6)$$

В § 1 (теорема 1.2) доказано, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} J_2(R) = 0$$

Отсюда и из (2.6) следует, что существует конечный предел $\lim_{R \rightarrow \infty} J_1(R)$, т. е. сходится интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln |\varphi(te^{i\varphi_1}) \varphi(te^{i\varphi_2})|}{t^{\rho+1}} dt = 2 \int_0^{\infty} \frac{\ln |\varphi(te^{i\varphi_1})|}{t^{\rho+1}} dt,$$

что равносильно утверждению (I_p^*) а).

Допустим теперь, что имеет место (I_p) . Условие (I_p) а) означает, что сходятся интегралы

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln |\varphi(te^{i\varphi_k})|}{t^{\rho+1}} dt \quad (k = 1, 2).$$

Отсюда, как и раньше (см. (1.13)) следует, что в угловой области $\Delta_p^{(+)}$ $\varphi(z)$ вполне регулярного роста и ее индикатор выражается формулой

$$h_{\rho}(\theta) = K_1 \cos \rho \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right), \quad \varphi_1 \leq \theta < \varphi_2. \quad (2.7)$$

В частности

$$h_{\rho}(\varphi_1) = h_{\rho}(\varphi_2) = 0. \quad (2.8)$$

Аналогично доказывается, что $\varphi(z)$ вполне регулярного роста в области $\Delta_p^{(-)}$ и имеет там индикатор

$$h_{\rho}(\theta) = K_2 \cos \rho \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right), \quad \varphi_3 \leq \theta < \varphi_4.$$

В частности

$$h_{\rho}(\varphi_3) = h_{\rho}(\varphi_4) = 0. \quad (2.9)$$

Из (2.8) и (2.9) следует, что $h_{\rho}(\theta) \leq 0$ при $|\theta| \leq \varphi_1$ и $|\theta - \pi| \leq \varphi_1$. Но из (I_p) б) имеем

$$h_{\rho}(0) = h_{\rho}(\pi) = 0.$$

Значит

$$h_*(\theta) = 0 \text{ при } |\theta| < \varphi_1, |\theta - \pi| < \varphi_1.$$

По условию (I'_p) $\phi(z)$ имеет вполне регулярный рост на лучах $\arg z = 0$ и $\arg z = \pi$, поэтому она имеет вполне регулярный рост в угловых областях $D_p^{(+)}$ и $D_p^{(-)}$. Таким образом, $\phi(z)$ имеет вполне регулярный рост во всей плоскости. Это означает, что множество ее нулей имеет плотность,

т. е. существует предел $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_p(r)}{r^p}$.

Но очевидно, $n_f(r) = \frac{1}{4} n_p(r)$. Значит выполняется условие (D_p).

Теорема доказана.

Теорема 22. Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ ($1 < \rho < 2$), конечного типа, класса A_ρ и $f(0) = 1$. Пусть далее для некоторого $\delta > 0$ имеет только конечное число нулей в угловых областях

$$\arg z \mp \frac{\pi}{2} \leq \delta. \text{ Тогда следующие условия эквивалентны. } (D_p^*) \text{ суще-}$$

ствует предел $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_f(r)}{r^p}$

и

(B_p^*) а) существует предел

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(iy) f(-iy)|}{y^p};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty}^* \frac{\ln |f(x) f(-x)|}{x^p} = 0.$$

Доказательство. Пусть сначала выполняется (D_p^*). Отсюда, как в теореме 2.1 следует, что функция $\phi(z)$ вполне регулярного роста, откуда и вытекает (B_p^*). Здесь учитывается, что

$$|\phi(iy)| = |f(iy) f(-iy)|^2, \quad |\phi(x)| = |f(x) f(-x)|^2$$

и что $\phi(z)$ также имеет конечное число нулей в угловых областях $|\arg z| \pm \frac{\pi}{2} \leq \delta$, содержащих мнимую ось.

Предположим теперь, что выполняется (B_p^*). Из (B_p^*) а) вытекает существование конечного предела

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln |\phi(iy)|}{y^p} = K. \quad (2.10)$$

Ясно, что $\phi(z) \in A_\rho$ и поэтому для нулей $\phi(z)$, лежащих в области $\Delta_p^{(+)}$ существует произведение Бляшке $B_p^{(+)}(z)$. Функцию $\phi(z)$ в области $\Delta_p^{(+)}$ можно представить в виде

$$\phi(z) = B_p^{(+)}(z) G(z),$$

где $G(z)$ не имеет нулей в $\Delta_p^{(+)}$. Так как (см. [3], [5])

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |B_p^{(+)}(re^{\theta})|}{r^p} = 0, \quad \varphi_1 \leq \theta \leq \varphi_2.$$

то $G(z)$ в области $\Delta_p^{(+)}$ порядка p , конечного типа, с тем же индикатором, что и $\varphi(z)$. С другой стороны, нули $\varphi(z)$ симметрично расположены относительно оси y . Значит $\varphi(iy)$ и $B_p^{(+)}(iy)$ действительны и неотрицательны, откуда следует, что $G(iy) > 0$. Из (2.10) имеем

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln G(iy)}{y^p} = K.$$

Отсюда, как при доказательстве теоремы 1.1 получается, что $G(z)$ вполне регулярного роста в области $\Delta_p^{(+)}$ и имеет там индикатор

$$h_G(\theta) = K \cos p \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right), \quad \varphi_1 < \theta < \varphi_2.$$

Очевидно, $\varphi(z)$ также имеет вполне регулярный рост в $\Delta_p^{(+)}$ и

$$h_\varphi(\theta) = K \cos p \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right), \quad \varphi_1 \leq \theta \leq \varphi_2.$$

В частности

$$h_\varphi(\varphi_1) = h_\varphi(\varphi_2) = 0. \quad (2.11)$$

Аналогично доказывается, что $\varphi(z)$ вполне регулярного роста в области $\Delta_p^{(-)}$ и

$$h_\varphi(\theta) = K_1 \cos p \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right), \quad \varphi_3 \leq \theta < \varphi_4$$

и значит

$$h_\varphi(\varphi_3) = h_\varphi(\varphi_4) = 0. \quad (2.12)$$

Из (2.11), (2.12) и (B_p) б), как и раньше, легко выводим, что $\varphi(z)$ вполне регулярного роста в угловых областях $D_p^{(+)}$ и $D_p^{(-)}$.

Таким образом, $\varphi(z)$ имеет вполне регулярный рост во всей плоскости. Значит множество ее нулей имеет плотность. Очевидно то же самое верно и для функции $f(z)$. Теорема доказана.

2°. Условия (I_p), (D_p) и (B_p) в теоремах 2.1 и 2.2 можно несколько видоизменить.

Обозначим через $n^{(\pm)}(r)$ число нулей функции $f(z)$ в верхнем, соответственно, нижнем полукруге радиуса r . Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 2.3. Пусть $f(z)$ — целая функция порядка p ($1 < p < 2$) конечного типа и класса A_p . Тогда следующие условия эквивалентны:

(I) а) сходятся интегралы

$$\int_1^\infty \frac{\ln |f(re^{i\varphi_1}) f(re^{i\varphi_2})|}{r^{p+1}} dr, \quad \int_1^\infty \frac{\ln |f(re^{i\varphi_3}) f(re^{i\varphi_4})|}{r^{p+1}} dr,$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty}^* \frac{\ln |f(x) f(-x)|}{x^p} = 0;$$

(II) существуют пределы

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_f^{(\pm)}(r)}{r^p}.$$

Теорема 2.4. Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ ($1 < \rho < 2$) конечного типа и класса A_ρ . Пусть далее для некоторого $\delta > 0$ она имеет только конечное число нулей в угловых областях $|\arg z \pm \frac{\pi}{2}| < \delta$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(II) существуют пределы

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_f^{(\pm)}(r)}{r^p};$$

(III) а) существуют пределы

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(\pm iy)|}{y^p},$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty}^* \frac{\ln |f(x) f(-x)|}{x^p} = 0.$$

Доказательства этих теорем мало отличаются от доказательств теорем 2.1 и 2.2, поэтому мы их опускаем. Заметим только, что вместо функции $\varphi(z)$ здесь надо рассматривать функцию $\psi(z) = f(z)\overline{f(-z)}$, которая также принадлежит классу A_ρ и нули которой симметрично расположены относительно мнимой оси.

§ 3. Целые функции класса A_ρ и вполне регулярного роста

1° В этом параграфе с помощью предыдущих результатов мы укажем условия, при которых целые функции порядка ρ и конечного типа принадлежат классу A_ρ и имеют вполне регулярный рост.

Теорема 3.1. Если $f(z)$ — целая функция порядка ρ ($1 < \rho < 2$), конечного типа и удовлетворяет условиям

(а) сходятся интегралы

$$\int_1^\infty \frac{\ln |f(te^{i\varphi_k})|}{t^{p+1}} dt \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow \infty}^* \frac{\ln |f(\pm x)|}{x^p} = 0,$$

то она принадлежит классу A_ρ и вполне регулярного роста.

Доказательство. Из условия (а), как и раньше (см. (1.13), (2.7)) следует, что $f(z)$ вполне регулярного роста в областях $\Delta_\rho^{(\pm)}$ и

$$h_f(\theta) = \begin{cases} k_1 \cos \rho \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right), & \text{при } \left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{\pi}{2\rho} \\ k_2 \cos \rho \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right), & \text{при } \left| \theta + \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{\pi}{2\rho} \end{cases}$$

В частности

$$h_\varphi(\varphi_k) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (3.1)$$

Условие (β) означает, что на лучах $\arg z = 0$ и $\arg z = \pi$ $f(z)$ имеет вполне регулярный рост, при этом

$$h_f(0) = h_f(\pi) = 0. \quad (3.2)$$

Из (3.1) и (3.2) следует, что

$$h_f(\theta) = 0, \text{ при } |\theta| \leq \frac{\pi}{2\rho} \text{ и } |\theta - \pi| \leq \frac{\pi}{2\rho} \quad (3.3)$$

и что $f(z)$ вполне регулярного роста в областях $D_\rho^{(\pm)}$. Таким образом, $f(z)$ имеет вполне регулярный рост во всей плоскости. Кроме того из (3.3) по теореме А. Пфлюгера (см. [5], стр. 199) имеем, что для любого $\delta \left(0 < \delta < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} \right)$ множество нулей функции $f(z)$ в областях

$$D_\rho^{(+)}(\delta) = \left\{ 0 < |z| < \infty, |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} - \delta \right\},$$

$$D_\rho^{(-)}(\delta) = \left\{ 0 < |z| < \infty, |\arg z - \pi| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} - \delta \right\}$$

имеет нулевую плотность. Для завершения доказательства остается показать сходимость рядов

$$\sum_{\left| \theta_k \mp \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2\rho}} \frac{\cos \rho \left(\theta_k \mp \frac{\pi}{2} \right)}{r_k^\rho}, \quad (3.4)$$

где $r_k e^{i\varphi_k}$ — нули функции $f(z)$. Напишем формулу Карлемана для функции $f(z)$ в области $\Delta_\rho^{(+)}(\lambda, R)$ (см. (1.6))

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda < r_k < R} \left(\frac{1}{r_k^\rho} - \frac{r_k^\rho}{R^{2\rho}} \right) \cos \rho \left(\theta_k - \frac{\pi}{2} \right) &= \frac{\rho}{\pi R^\rho} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \ln |f(Re^{i\theta})| \cos \rho \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) d\theta + \\ &+ \frac{\rho}{2\pi} \int_{\lambda}^R \left(\frac{1}{t^{\rho+1}} - \frac{t^{\rho-1}}{R^{2\rho}} \right) \ln |f(te^{i\varphi_1}) f(te^{i\varphi_2})| dt + O(1) = \\ &= J_1(R) + J_2(R) + O(1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Обозначим

$$\Psi(x) = \int_{\lambda}^x \frac{\ln |f(te^{i\varphi_1}) f(te^{i\varphi_2})|}{t^{\rho+1}} dt.$$

По условию (α) функция $\psi(x)$ ограничена. Значит ограничен и интеграл

$$\frac{2\rho}{R^{2\rho}} \int_{\lambda}^R \Psi(t) t^{2\rho-1} dt.$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \frac{2\rho}{R^{2\rho}} \int_{\lambda}^R \Psi(t) t^{2\rho-1} dt &= \frac{1}{R^{2\rho}} \Psi(t) t^{2\rho} \Big|_{\lambda}^R - \frac{1}{R^{2\rho}} \int_{\lambda}^R t^{2\rho} \frac{\ln |f(te^{i\varphi_1}) f(te^{i\varphi_2})|}{t^{2\rho+1}} dt = \\ &= \int_{\lambda}^R \left(\frac{1}{t^{2\rho+1}} - \frac{t^{2\rho-1}}{R^{2\rho}} \right) \ln |f(te^{i\varphi_1}) f(te^{i\varphi_2})| dt + O(1), \end{aligned}$$

так что $J_2(R)$ в правой части (3.5) ограничен. $f(z)$ имеет порядок ρ и конечный тип, поэтому $J_1(R)$ также ограничен. Таким образом, правая часть равенства (3.5), а с ней и левая часть ограничены. Теперь сходимость одного из рядов (3.4) следует из неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda < r_k < \frac{R}{2^{1/2\rho}}} \frac{\cos \rho \left(\theta_k - \frac{\pi}{2} \right)}{r_k^\rho} &< 2 \sum_{\lambda < r_k < \frac{R}{2^{1/2\rho}}} \left(\frac{1}{r_k^\rho} - \frac{r_k^\rho}{R^{2\rho}} \right) \cos \rho \left(\theta_k - \frac{\pi}{2} \right) < \\ &< 2 \sum_{\lambda < r_k < R} \left(\frac{1}{r_k^\rho} - \frac{r_k^\rho}{R^{2\rho}} \right) \cos \rho \left(\theta_k - \frac{\pi}{2\rho} \right). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается сходимость другого ряда. Теорема доказана.

2°. В следующей теореме условие (α) заменено другими условиями.

Теорема 3.2. Если $f(z)$ — целая функция порядка ρ ($1 < \rho < 2$), конечного типа и удовлетворяет условиям

(γ) 1) сходятся интегралы

$$\int_0^\infty \frac{\ln |f(te^{i\varphi_k}) f(te^{i\varphi_{k+1}})|}{t^{2\rho+1}} dt \quad (k = 1, 3),$$

$$2) h_f(\varphi_k) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

$$(б) \lim_{x \rightarrow \infty}^* \frac{\ln |f(\pm x)|}{x^\rho} = 0,$$

то и $f(z)$ — класса A_ρ и вполне регулярного роста.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(z) = f(z) \bar{f}(-z)$. Она удовлетворяет условиям теоремы 3.1 и, следовательно, имеет вполне регулярный рост и принадлежит классу A_ρ . Очевидно и $\bar{f}(z) \in A_\rho$. Индикатор $F(z)$ при $\theta \in [\varphi_1, \varphi_2]$ выражается формулой

$$h_F(\theta) = 2 k_1 \cos \rho \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right), \quad \left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{\pi}{2\rho}, \quad (3.6)$$

где, как легко видеть, $k_1 = h_f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. С другой стороны, по условию теоремы $h(\varphi_1) = h(\varphi_2) = 0$. Из этих двух условий вытекает, что

$$h_f(\theta) = k_1 \cos \rho \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right), \text{ при } \left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{\pi}{2\rho}, \quad (3.7)$$

Имея в виду, что при $\theta \in [\varphi_1, \varphi_2]$, $h_f(\theta) = h_f(\pi - \theta)$, из (2.1) и (2.2) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in E^0}} \frac{\ln |f(re^{\theta})|}{r^\rho} &= \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in E^1}} \frac{\ln |F(re^{\theta})|}{r^\rho} - \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in E^0}} \frac{\ln |f(re^{i(\pi-\theta)})|}{r^\rho} = \\ &= k_1 \cos \rho \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

(E^0 —множество нулевой относительной меры). Это означает, что $f(z)$ вполне регулярного роста в области $\Delta_r^{(+)}$. Аналогичное утверждение верно для области $\Delta_r^{(-)}$. Регулярность роста $f(z)$ в областях $D_r^{(+)}$ и $D_r^{(-)}$ доказывается как в теореме 3.1. Таким образом, $f(z)$ вполне регулярного роста во всей плоскости. Теореме доказана.

Ереванский институт
народного хозяйства

Поступила 20. II. 1987

Ա. Ե. ԱՎԵՏԻՍԻԱՆ. ρ ($1 < \rho < 2$) կարգի ամբողջ ֆունկցիաների մասին (ամփոփում),

Դիցուք Γ -ն $\arg z = \pm \left(\frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2\rho} \right)$ ճառագայթների համախումբն է: Ներկա աշխատանքում

քննարկվում են ρ ($1 < \rho < 2$) կարգի ամբողջ ֆունկցիաներ, որոնց զրոները ընկած են Γ -ի վրա կամ նրա «մոտ»։ Այդպիսի ֆունկցիաների համար քանակական կապ է հաստատվում նրա զրոների բազմության խտության, կեղծ և իրական առանցքներով աճի և Γ -ի վրա ֆունկցիայի վարքի միջև։ Վերջում բերվում են բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում ամբողջ ֆունկցիաները պատկանում են A_ρ դասին և ունեն իրական և կեղծ առանցքներ։

A. E. AVETICIAN. On entire functions of order ρ ($1 < \rho < 2$) (summary)

Let Γ be a set of rays $\arg z = \pm \left(\frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2\rho} \right)$. This paper investigates entire functions of order ρ ($1 < \rho < 2$) with zeros on or "close" to Γ . For such functions connections are established between the density of sets zeros, its growth on real and imaginary axis and behavior on Γ . At the end sufficient conditions are given which imply the functions belong to class A_ρ and have regular asymptotic behavior.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Винер, Р. Пили. Преобразование Фурье в комплексной области, М., «Наука», 1966.
2. A. Pfluger. Über gewisse ganze Funktionen vom Exponentialtypus. Comment. Math. Helv., 16, 1944, 1—18.
3. R. Boas. Entire functions, New-York, 1954.
4. M. E. Noble. Extensions and applications of a Tauberian theorem du to Valiron. Proc. Cambridge Philos. Soc., 47, 1951, 22—37.
5. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., 1956.
6. А. А. Гольдберг, И. В. Островский. Распределение значений мероморфных функций, М., «Наука», 1970.
7. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
8. С. Г. Рафаэлян. Кандидатская диссертация, Ереван, 1981.

УДК 517.53

Ф. А. ШАМОЯН

ОПИСАНИЕ ЗАМКНУТЫХ ИДЕАЛОВ В АЛГЕБРАХ НЕВАНЛИННЫ-ДЖРБАШЯНА, И ХАРАКТЕРИСТИКА СЛАБОЦИКЛИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ АЛГЕБРЫ N^+

Пусть D -единичный круг на комплексной плоскости, Γ —его граница, $\alpha > -1$, обозначим через A_α^* множество всех голоморфных в D функций f , для которых

$$\int_D (1 - |\zeta|)^\alpha \log^+ |f(\zeta)| dm_2(\zeta) < +\infty,$$

где m_2 —плоская мера Лебега на D . В работах [1], [2] М. М. Джрбашяном было построено каноническое представление классов A_α^* , а именно им было установлено, что каждая функция $f \in A_\alpha^*$ допускает представление

$$f(z) = C_\lambda z^\lambda \pi_\alpha^f(z, z_k) \exp g_\alpha^f(z), z \in D,$$

где

$$g_\alpha^f(z) = \frac{\alpha + 1}{\pi} \int_D \frac{(1 - |\zeta|^2)^\alpha \log |f(\zeta)| dm_2(\zeta)}{(1 - \bar{\zeta}z)^{\alpha+2}}, z \in D,$$

$$\pi_\alpha^f(z, z_k) = \prod_1^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp \{-U_\alpha(z, z_k)\}, z \in D,$$

$$U_\alpha(z, z_k) = \frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int_D \frac{(1 - |\zeta|^2)^\alpha \log \left(1 - \frac{\bar{\zeta}z}{z_k}\right)}{(1 - \bar{\zeta}z)^{\alpha+2}} dm_2(\zeta), k = 1, 2, \dots$$

Произведение π_α^f равномерно сходится внутри D при условии сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+2} < +\infty. \quad (1)$$

Еще раньше в [3] Р. Неванлинной было доказано, что если $f \in A_\alpha^*$, $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, $f(z) \not\equiv 0$, то выполняется (1).

В работе автора [4] установлено, что существуют функции $f \in A_\alpha^*$, для которых $\pi_\alpha^f, \exp g_\alpha^f \in A_\alpha^*$. В то же время, если $f \in A_\alpha^*$ и $\beta > \alpha$, то функции $\pi_\beta^f, \exp g_\beta^f \in A_\alpha^*$. На основе последнего утверждения и вышеуказанных результатов М. М. Джрбашяна было построено параметри-

ческое представление класса A_* (см. [4], [5]), т. е. установлено следующее утверждение:

Класс A_* совпадает с классом голоморфных в D функций f , допускающих представление

$$f(z) = C_\lambda z^\lambda \pi_\beta(z, z_k) \exp \left\{ \int_D \frac{(1 - |\zeta|^2)^2}{(1 - \bar{\zeta}z)^{2+2}} d\mu(\zeta) \right\}, \quad z \in D. \quad (2)$$

Здесь $\{z_k\}$ — произвольная последовательность из D , удовлетворяющая условию (1), μ — любая комплекснозначная борелевская мера на D такая, что

$$\int_D (1 - |\zeta|)^2 |d\mu(\zeta)| < +\infty. \quad (3)$$

Нетрудно заметить, что относительно метрики

$$\rho(f, g) = \int_D (1 - |\zeta|)^2 \log(1 + |f(\zeta) - g(\zeta)|) dm_2(\zeta) \quad (4)$$

A_* превращается в F -алгебру, т. е. превращается в топологическое векторное пространство с полной инвариантной метрикой, в котором оператор умножения на функции из A_* является непрерывным оператором (см. [6]). Интересно отметить, что в классе функций ограниченного вида N невозможно ввести метрику, относительно которой N превращалось даже в топологическое векторное пространство (см. [7], [8]). В этой работе на основе представления (2) мы получим полное описание замкнутых идеалов алгебры A_* . Мы докажем, что идеалы этой алгебры определяются своими внутренними нулями и порождаются одной функцией. Для того чтобы привести остальные результаты, введем обозначение. Через N^+ обозначим множество всех голоморфных в D функций f , для которых

$$\lim_{\rho \rightarrow 1-0} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi.$$

В N^+ вводится метрика (см. [8], [9])

$$\rho(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} \log(1 + |f(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta})|) d\theta, \quad (5)$$

относительно которой N^+ превращается в F -алгебру. В [9] получено описание замкнутых идеалов алгебры N^+ . В отличие от алгебры A_* для описания замкнутых идеалов алгебры N^+ существенны также «граничные» нули. Так что в этом случае идеалы не определяются только внутренними нулями. В § 2 мы докажем, что замыкание любого идеала в слабой топологии алгебры N^+ определяется внутренними нулями. Этим мы даем полный ответ на вопрос, поставленный в работе [9].

§ 1. Замкнутые идеалы алгебры A_*

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 1. Пусть I — замкнутый идеал алгебры A_* , $Z(I) = \bigcap_{f \in I} Z(f)$, где

$$Z(f) = \{z \in D : f(z) = 0\}.$$

Тогда

$$I = \{f : Z(f) \supset Z(I)\}, \quad (6)$$

причем существует $f_1 \in A_*$ такая, что $I = f_1 A_*$.

В качестве f_1 можно брать произведение Джрбашяна $\pi_\beta(z, z_k)$, ($\beta > \alpha$) с нулями $Z(I) = \{z_k\}_1^\infty$. И обратно, каждое множество вида (6) представляет замкнутый идеал алгебры A_* .

Доказательство. Обратимся к представлению (2), из которого видно, что если $f \in A_*$ и $f = \pi_\beta \exp g'_\beta$, ($\beta > \alpha$), то $\exp \{\pm g'_\beta\} \in A_*$. Пусть I — замкнутый идеал алгебры A_* и $I_0 = \{f \in A_* : Z(f) \supset Z(I)\}$. Для доказательства первой части теоремы достаточно установить равенство $I = I_0$. Очевидно, что $I_0 \supset I$. Докажем обратное включение. Положим $I^* = \{f \in A_* : f I_0 \subset I\}$. Легко видеть, что I^* — замкнутый идеал алгебры A_* . Докажем, что $I^* = A_*$, откуда следует первая часть теоремы. С этой целью сначала докажем, что если $f \in I^*$ и $f(z_0) = 0$, то $f(z)(z - z_0)^{-1}$ принадлежит идеалу I^* . Предположим, что z_0 является нулем порядка k , ($k \geq 0$) идеала I . По предположению существует функция $h \in I$ такая, что $h^{(k)}(z_0) \neq 0$, $h^{(j)}(z_0) = 0$, $0 \leq j \leq k-1$. Тогда если g — произвольная функция из I_0 , то функция $f(z)g(z) \times \times [h(z) - h^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k](z - z_0)^{-k-1}$ принадлежит идеалу I , т. е. $f(z)g(z)h(z)(z - z_0)^{-k-1} - f(z)g(z)h^{(k)}(z_0)(z - z_0)^{-1}$ принадлежит I . Поскольку $f(z)g(z)(z - z_0)^{-k-1} \in A_*$, то первая функция в последнем выражении принадлежит идеалу I . Следовательно, $f(z)g(z)h^{(k)}(z_0)(z - z_0)^{-1} \in I$. Но ввиду определения I^* и произвольности $g \in I_0$ получаем, что $f(z)(z - z_0)^{-1} \in I^*$. Таким образом, если $f \in I^*$ и $\{z_k\}$ — нули f , то исходя из вышеприведенных рассуждений и учитывая представление (2), получаем

$$\frac{f(z)}{\prod_1^n \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp \{-U_\beta(z, z_k)\}} = \frac{\pi_\beta^f(z, z_k) \exp \{g'_\beta(z)\}}{\prod_1^n \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp \{-U_\beta(z, z_k)\}} \in I^* (\beta > \alpha).$$

Но поскольку $\exp(-g'_\beta) \in A_*$, то

$$\frac{\pi_\beta^f(z, z_k)}{\prod_1^n \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp \{-U_\beta(z, z_k)\}} = \pi_{\beta, n}^f \in I^*.$$

Если мы докажем, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi_{\beta, n}^f = 1$ в топологии алгебры A_* , то, используя замкнутость I^* , будем иметь $I^* = A_*$.

Итак, остается доказать, что

$$\rho(\pi'_{\beta, n}, 1) = \int_D (1 - |\zeta|)^a \log(1 + |\pi'_{\beta, n}(\zeta) - 1|) dm_2(\zeta) \rightarrow 0,$$

при $n \rightarrow +\infty$. Функцию $\pi'_{\beta, n}$, чтобы не усложнять запись, будем обозначать через π_n . Далее, положим $I_n = \rho(\pi_n, 1)$. Пусть ε — фиксиро-

ванное положительное число и $r_\varepsilon = 1 - \left(\frac{\varepsilon}{4 \log 8} \right)^{\frac{1}{a+2}}$. Положим

$$D_{r_\varepsilon} = \{\zeta : |\zeta| \leq r_\varepsilon\}, \quad CD_\varepsilon = D \setminus D_{r_\varepsilon},$$

$$\rho(\pi_n, 1) = \int_{D_{r_\varepsilon}} (\quad) + \int_{CD_{r_\varepsilon}} (\quad) \stackrel{\text{def}}{=} I_n^1 + I_n^2. \quad (7)$$

Сначала оценим I_n^2 . Пусть

$$CD_{r_\varepsilon}^1 = \{\zeta \in CD_{r_\varepsilon} : |\pi_n(\zeta)| \geq 2\}, \quad CD_{r_\varepsilon}^2 = CD_{r_\varepsilon} \setminus CD_{r_\varepsilon}^1,$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} I_n^2 &= \int_{CD_{r_\varepsilon}^1} (1 - |\zeta|)^a \log(1 + |\pi_n(\zeta) - 1|) dm_2(\zeta) + \\ &+ \int_{CD_{r_\varepsilon}^2} (1 - |\zeta|)^a \log(1 + |\pi_n(\zeta) - 1|) dm_2(\zeta) < \\ &< \int_{CD_{r_\varepsilon}^1} (1 - |\zeta|)^a \log(1 + |\pi_n(\zeta) - 1|) dm_2(\zeta) + (1 - r_\varepsilon)^{a+2} \log 4. \end{aligned} \quad (8)$$

Кроме того, нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} &\int_{CD_{r_\varepsilon}^1} (1 - |\zeta|)^a \log(1 + |\pi_n(\zeta) - 1|) dm_2(\zeta) \leq \\ &\leq \int_{CD_{r_\varepsilon}^1} (1 - |\zeta|)^a \log^+ |\pi_n(\zeta)| dm_2(\zeta) + (1 - r_\varepsilon)^{a+2} \log 2. \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая (8), получаем

$$I_n^2 \leq \text{const} \int_D (1 - |\zeta|)^{a+2} \log^+ |\pi_n(\zeta)| dm_2(\zeta) + (1 - r_\varepsilon)^{a+2} \log 8.$$

Используя лемму 1.2 из [4], приходим к оценке

$$I_n^2 \leq \text{const} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{a+2} + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отсюда, подбирая $n > n_1(\varepsilon)$, окончательно получаем

$$I_n^2 < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (9)$$

Но поскольку на D_r равномерно $\pi_n(z) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow +\infty$, то существует $n_2(\varepsilon)$ такое, что

$$I_n^1 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n > n_2(\varepsilon). \quad (10)$$

Объединяя оценки (9), (10), получим, что при $n > n_1 + n_2$

$$\rho(\pi_n, 1) < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Имеет место аналог этой теоремы в несколько более общих алгебрах. Чтобы привести этот результат сначала введем обозначение. Символом Ω обозначим класс положительных функций ω на $(0, 1)$, удовлетворяющих также условиям $\omega \in L^1(0, 1)$, существуют числа $m_\omega, q_\omega, M_\omega$, причем $m_\omega, q_\omega \in (0, 1)$ такие, что

$$m_\omega < \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} < M_\omega, \quad r \in (0, 1), \lambda \in [q_\omega, 1].$$

По аналогии с классом A_ω^* символом A_ω^* обозначим класс голоморфных в D функций f , для которых

$$\int_D \omega(1 - |\zeta|) \log^+ |f(\zeta)| dm_2(\zeta) < +\infty.$$

Введем в A_ω^* метрику

$$\rho(f, g) = \int_D \omega(1 - |\zeta|) \log(1 + |f(\zeta) - g(\zeta)|) dm_2(\zeta),$$

относительно которой A_ω^* превращается в F -алгебру. Используя результаты [10], аналогично доказываем

Теорема 2. Пусть I — замкнутый идеал алгебры A_ω^* , $\beta > \frac{\log m_\omega}{\log q_\omega}$. Тогда

$$I = \pi_\beta(z, z_n) A_\omega^*, \quad (11)$$

где $Z(I) = \{z_k\}$ — множество нулей I , т. е.

$$Z(I) = \bigcap_{f \in I} Z(f). \quad (12)$$

И обратно, каждое множество вида (11) представляет замкнутый идеал алгебры A_ω^* .

§ 2. Характеристика слабоциклических элементов алгебры N^+

Как уже отмечалось выше, относительно метрики

$$\rho(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} \log(1 + |f(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta})|) d\theta \quad (13)$$

N^+ превращается в F -алгебру. В работе [9] получено описание замкнутых идеалов этой алгебры. Для формулировки основного результата этого параграфа приведем

Определение. Пусть $f \in N^+$, скажем, что f является слабоциклическим элементом алгебры N^+ , если замкнутая линейная оболочка системы $\{z^k f\}_{k=0}^{\infty}$ в слабой топологии алгебры N^+ совпадает с ней.

Поскольку множество всех многочленов P всюду плотно в N^+ , то функция $f \in N^+$ будет слабоциклической тогда и только тогда, когда существует последовательность многочленов $\{P_n\}_1^{\infty}$ такая, что для произвольного линейно-непрерывного функционала $\Phi \in (N^+)^*$ выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(P_n f) = \Phi(1). \quad (13)$$

Для сингулярных внутренних функций в работе [9] установлено, что если их представляющая мера подчинена некоторым ограничениям, то эти функции являются слабоциклическими элементами алгебры N^+ . Здесь же поставлена задача о характеристике тех представляющих мер, для которых соответствующая функция является слабоциклическим элементом алгебры N^+ . Из теоремы 3, в частности, следует, что любая сингулярная внутренняя функция является слабоциклическим элементом алгебры N^+ . Интересно отметить, что в случае пространств Харди H^p , $0 < p < 1$ сингулярная внутренняя функция S_μ является слабоциклическим элементом пространства H^p тогда и только тогда, когда $\mu(k) = 0$ для произвольного карлесоновского множества $K \subset \Gamma$ (см. [11]), т. е. множества K , для которого $|K| = 0$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_k \log \frac{1}{l_k} < +\infty. \text{ Здесь } \mu - \text{представляющая мера функции } S_\mu.$$

$\{l_k\}_1^{\infty}$ — последовательность длин дополнительных интервалов замкнутого множества K .

Теорема 3. Пусть $f \in N^+$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1) $f(z) \neq 0$, $z \in D$,

1) f — слабоциклический элемент алгебры N^+ .

Доказательству теоремы предположим несколько вспомогательных утверждений. Следующая лемма вытекает из результатов работы [8].

Лемма 1. Пусть Φ — линейный непрерывный функционал на N^+ . $b_k = \Phi(z^k)$, $k = 0, 1, \dots$. Тогда существуют положительные числа $A = A(\Phi)$ и $\delta = \delta(\Phi)$ такие, что

$$|b_k| \leq A \exp \{-\delta \sqrt{k}\}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (14)$$

причем, если $g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k$, $z \in \bar{D}$, то имеет место представление

$$\Phi(f) = \lim_{\nu \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\theta}) g(e^{-i\theta}) d\theta, \quad f \in N^+. \quad (15)$$

И обратно, если g — голоморфная в D функция, коэффициенты разложения которой при некоторых $A > 0$ и $\delta > 0$ удовлетворяют оценке (14), то по формуле (15) g порождает линейный непрерывный функционал на N^+ .

Пусть $P(r) = \left[(1-r) \log \frac{2}{1-r} \right]^{-1}$, $r \in (0, 1)$. Введем в рассмотрение пространство $E(P)$ как множество всех голоморфных в D функций f , для которых

$$\|f\|_{E(P)} = \int_D |f(\zeta)| \exp \{-P(|\zeta|)\} dm_2(\zeta).$$

Очевидно, что относительно нормы $\|\cdot\|_{E(P)}$ $E(P)$ превращается в банахово пространство.

Лемма 2. Пусть $f \in E(P)$, $M(r, f) = \max_{|z| < r} |f(z)|$. Тогда справедлива оценка

$$M(r, f) \leq C \exp \left\{ \frac{6}{(1-r) \log \frac{2}{1-r}} \right\} \cdot \|f\|_{E(P)}, \quad (16)$$

где C — положительное число, не зависящее от f .

Доказательство. Пусть $f \in E(P)$, $\zeta_0 \in D$. Используя субгармоничность $|f(\zeta)|$, имеем

$$|f(\zeta_0)| \leq \frac{1}{\pi \rho^2 (1 - |\zeta_0|)^2} \int_{K_\rho(\zeta_0)} |f(\zeta)| dm_2(\zeta), \quad (17)$$

где $K_\rho(\zeta_0) = \{\zeta : |\zeta - \zeta_0| < \rho(1 - |\zeta_0|)\}$. Поскольку при $\zeta \in K_\rho(\zeta_0)$

$$\frac{1}{(1+\rho)(1-|\zeta_0|)} \leq \frac{1}{1-|\zeta|} \leq \frac{1}{(1-\rho)(1-|\zeta_0|)},$$

то справедлива оценка

$$\begin{aligned} |f(\zeta_0)| &\leq \frac{1}{\pi \rho^2 (1 - |\zeta_0|)^2} \exp \left\{ \frac{1}{(1-\rho)(1-|\zeta_0|) \log \frac{1}{(1-\rho)(1-|\zeta_0|)}} \right\} \times \\ &\times \int_{K_\rho(\zeta_0)} |f(\zeta)| \exp \{-P(|\zeta|)\} dm_2(\zeta). \end{aligned}$$

Полагая $\rho = \frac{1}{2}$, получаем

$$|f(\zeta_0)| \leq C \|f\|_{E(p)} \exp \left\{ \frac{6}{(1-|\zeta_0|) \log \frac{2}{1-|\zeta_0|}} \right\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $f \in E(p)$ и $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, $z \in D$, тогда имеет место оценка

$$|a_n| \leq C \|f\|_{E(p)} \exp \left\{ 12 \sqrt{\frac{n}{\log n}} \right\}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (18)$$

Доказательство. Исходя из неравенства Коши и учитывая лемму 2, имеем

$$|a_n| \leq \inf_{r \in (0, 1)} \frac{M(r, f)}{r^n} \leq C \|f\|_{E(p)} \inf_{r \in (0, 1)} \frac{\exp \left\{ \frac{6}{(1-r) \log \frac{2}{1-r}} \right\}}{r^n}.$$

Следовательно

$$|a_n| \leq C_1 \|f\|_{E(p)} \exp \left\{ \frac{6}{(1-r_n) \log \frac{2}{1-r_n}} \right\}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

где $r_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n \log n}}$.

Подставляя указанное значение r_n , сразу получим доказательство леммы.

Лемма 4. Пусть $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ — голоморфная в D функция, при этом коэффициенты b_n , $n=0, 1, \dots$ при некоторых $\delta > 0$ и $A > 0$ удовлетворяют оценке (14). Тогда по формуле

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\varphi}) g(e^{-i\varphi}) d\varphi, \quad f \in E(P) \quad (19)$$

порождается линейный непрерывный функционал на $E(P)$.

Доказательство. Пусть

$$\Phi_\rho(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\varphi}) g(e^{-i\varphi}) d\varphi = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k \rho^k, \quad \rho \in (0, 1),$$

где $\{a_k\}$ — коэффициенты разложения функции f . Тогда, учитывая оценки (14) и (18), получаем

$$|a_k| |b_k| \leq C_1 \|f\|_{E(p)} \exp \{-\delta \sqrt{k}\} \exp \left\{ 12 \sqrt{\frac{k}{\log k}} \right\} \leq \\ \leq C_2 \|f\|_{E(p)} \exp \{-\delta_1 \sqrt{k}\} \quad (\delta_1 > 0).$$

Отсюда немедленно следует представление

$$\Phi(f) = \lim_{p \rightarrow 1-0} \Phi_p(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k$$

и оценка

$$|\Phi(f)| \leq C_3 \|f\|_{E(p)},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 5. Пусть $S_\mu(z) = \exp \left\{ - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta) \right\}$ — сингулярная внутренняя функция

$$\Psi(z) = - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta), \quad z \in D.$$

Тогда для любого натурального m существует последовательность многочленов $\{Q_{m,n}\}_{n=1}^{+\infty}$ такая, что $\|Q_{m,n} S - S \Psi^m\|_{E(p)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.

Доказательство непосредственно следует из полноты системы многочленов в N^+ . Действительно, очевидно, что $\Psi^m \in E(p)$ при любом $m = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому существует $\{Q_{m,n}\}_{n=1}^{+\infty}$ такая, что

$$\|Q_{m,n} \Psi^m\|_{E(p)} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty. \text{ Отсюда}$$

$$\|Q_{m,n} S - S \Psi^m\|_{E(p)} \leq \|Q_{m,n} - \Psi^m\|_{E(p)} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow +\infty$. Лемма доказана.

При доказательстве следующей леммы мы используем методику работы [14].

Лемма 6. Пусть S_μ — сингулярная внутренняя функция. Тогда существует последовательность многочленов $\{P_n\}_{n=1}^{+\infty}$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n S - 1\|_{E(p)} = 0.$$

Доказательство. Обозначим через $E(S)$ замыкание множества PS в $E(p)$, здесь P — множество всех многочленов от z . Из леммы 5 следует, что $S \Psi^m \in E(S)$, $m = 0, 1, \dots$, где $\Psi = \log S$, $\operatorname{Im} \Psi(0) = 0$. Пусть Φ — линейный непрерывный функционал: $\Phi \perp E(S)$. Докажем, что $\Phi(1) = 0$. После этого утверждение леммы будет следовать из теоремы Хана — Банаха. Пусть $t \in [0, 1]$, положим $\delta(t) = \Phi(S')$. Имеем $\delta^{(m)}(t) = \Phi(S' \Psi^m)$. Учитывая лемму 5, имеем

$$\delta^{(m)}(1) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, (*).$$

Используя теорему Ф. Рисса, получим представление

$$\Phi(f) = \int_D f(\zeta) g(\zeta) \exp \{ - P(|\zeta|) \} dm_2(\zeta), \quad f \in E(p),$$

где $g \in L^\infty(D)$. Следовательно

$$|\delta^{(n)}(t)| \leq \int_D |S'(\zeta)| |\Psi^n(\zeta)| |g(\zeta)| \exp \{-\dot{P}(|\zeta|)\} dm_1(\zeta) \leq \\ \leq \|g\|_\infty (2|\mu|)^n \sup_{r \in (0,1)} \left\{ \frac{\exp(-\dot{P}(r))}{(1-r)^n} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \|g\|_\infty (2|\mu|)^n M_n.$$

Последняя оценка следует из неравенства

$$|\Psi(\zeta)| \leq \frac{2|\mu|}{(1-|\zeta|)}, \quad \zeta \in D.$$

Отсюда легко видеть, что

$$M_n = \sup_{r > 1} \left\{ \exp \left(-\frac{r}{\log r} \right) \cdot r^n \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Вычисляя указанный супремум и производя элементарные упрощения, убеждаемся, что

$$|\delta^{(n)}(t)| \leq C_1^n M_n \leq C_1^n n^n (\log n)^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

где C_1 — некоторое положительное число, не зависящее от t .

Но поскольку $\sum_k \frac{1}{\sqrt{M_k}} = +\infty$, то по теореме Т. Карлемана (см.

[12]), δ принадлежит некоторому квазианалитическому классу функций. По (*) $\delta(t) = 0$, $t \in [0, 1]$. Поэтому $\Phi(1) = \delta(0) = 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Сначала докажем импликацию $2) \Rightarrow 1)$. Итак, пусть f — слабо циклический элемент алгебры N^+ . Докажем, что $f(z) \neq 0$, $z \in D$. Пусть $l_z(\zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \zeta^n$. Очевидно, что при фиксированном $z \in D$ функция $\zeta \rightarrow l_z(\zeta)$ удовлетворяет всем условиям леммы 1. Следовательно, по формуле

$$\Phi_z(g) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\rho e^{i\theta}) l_z(e^{-i\theta}) d\theta = g(z), \quad z \in D, \quad g \in N^+,$$

порождается линейный непрерывный функционал на N^+ . Поскольку f — слабоциклический элемент алгебры N^+ , то существует последовательность многочленов $\{P_n\}_1^\infty$, такая, что для любого линейного функционала $\Phi \in (N^+)^*$ $\Phi(P_n f) \rightarrow \Phi(1)$, в частности

$$\Phi_z(P_n f) \rightarrow \Phi_z(1), \quad \text{т. е. } P_n(z) f(z) \rightarrow 1, \quad z \in D.$$

Поэтому $f(z) \neq 0$, $z \in D$. Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $f \in N^+$ и $f(z) \neq 0$, $z \in D$. Обозначим через $L(f)$ замыкание множества Pf в слабой топологии алгебры N^+ . P , как и прежде, множество всех многочленов от z . По теореме факторизации f допускает представление

$$f(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log |f(e^{i\theta})| d\theta \right\} \exp \left\{ - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta) \right\} \stackrel{\text{def}}{=} Q_f S_f.$$

Здесь μ — неотрицательная сингулярная мера на $[-\pi, \pi]$. Очевидно, что Q_f — обратимый элемент алгебры N^+ . Поэтому существует последовательность многочленов $\{P_n\}_1^\infty$, так что $\rho(P_n, Q_f^{-1}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Но поскольку оператор умножения на Q_f является непрерывным оператором в N^+ , то $\rho(P_n Q_f, 1) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Таким образом, $L(f) = L(S_f)$. Учитывая лемму 6, можно подобрать последовательность многочленов $\{Q_n\}_1^\infty$ такую, что $Q_n S_f \rightarrow 1$ в сильной топологии пространства $F(p)$. Следовательно, для любого линейного непрерывного функционала $\Phi \in (F(p))^*$

$$\Phi(Q_n S_f) \rightarrow \Phi(1) \quad (n \rightarrow +\infty). \quad (20)$$

Но поскольку каждый линейный функционал $\Phi \in (N^+)^*$ по лемме 1 порождается некоторой функцией g с условием (14), то по лемме 4 этот же функционал непрерывен в топологии пространства $F(p)$. Поэтому равенство (20) выполняется при всех $\Phi \in (N^+)^*$. Теорема доказана.

Замечание. В работе [15] доказано, что если $f = S$ — сингулярная внутренняя функция и $\Phi \in (N^+)^*$, то существует последовательность многочленов $\{P_n\}_1^\infty$, вообще говоря зависящая от Φ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(P_n S) = \Phi(1). \quad (21)$$

Из теоремы 3 следует, что можно подобрать $\{P_n\}_1^\infty$ такую, чтобы (21) выполнялось одновременно при всех $\Phi \in (N^+)^*$.

Естественно возникает вопрос: существуют ли сингулярная внутренняя функция S и последовательность многочленов $\{P_n\}$ такие, что $P_n S \rightarrow 1$ ($n \rightarrow +\infty$) в сильной топологии алгебры N^+ . Следующий результат дает ответ на указанный вопрос.

Теорема 4. Для произвольной сингулярной внутренней функции имеет место соотношение

$$\inf_{P \in N^+} \rho(P S, 1) = q_s > 0.$$

Доказательство. Вопреки утверждению теоремы предположим, что существуют P_n такие, что $\rho(P_n S, 1) \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$. Тогда $\rho(P_n S, P_m S) \rightarrow 0$, ($n, m \rightarrow +\infty$). Следовательно

$$\begin{aligned} \rho(P_n S, P_m S) &= \int_{-\pi}^{\pi} \log(1 + |P_n(e^{i\theta}) S(e^{i\theta}) - P_m(e^{i\theta}) S(e^{i\theta})|) d\theta = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \log(1 + |P_n(e^{i\theta}) - P_m(e^{i\theta})|) d\theta \rightarrow 0, \end{aligned}$$

при $n, m \rightarrow +\infty$. Но ввиду полноты пространства N^+ получим, что существует функция $f \in N^+$ такая, что $\rho(P_n, f) \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$. И следовательно, по первой части теоремы 3, $P_n(z) \rightarrow f(z)$, $z \in \mathbb{D}$ и одновременно $P_n(z) \rightarrow S^{-1}(z)$, $z \in \mathbb{D}$. Отсюда получаем, $S^{-1} = f \in N^+$, что очевидно не выполняется. Теорема доказана.

Из теорем 3 и 4 непосредственно вытекает

Следствие. Пусть S —произвольная сингулярная внутренняя функция. Тогда на фактор-пространстве N^+/SN^+ не существует линейных непрерывных функционалов, кроме тождественного нуля.

Институт математики
АН Армянской ССР

Получила 21. XI. 1988.

Յ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ. Նևանլիննա-Ջրբաշյանի հանրահայդներում փակ իդեալների նկարագրումը և N^+ հանրահայդի բալլ ցիկլիկ էլեմենտների բնութագրերը (ամփոփում)

Հոդվածում ստացված է միավոր շրջանում անալիտիկ այն f ֆունկցիաների հանրահայդի իդեալների նկարագրումը, որոնց համար

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 (1-r)^{\alpha} \log^+ |f(re^{it})| r dr d\varphi < +\infty:$$

Ստացված է նաև շրջանում անալիտիկ, սահմանափակ տեսք և հավասարապատկան բացարձակ անընդհատ ինտեգրալներ ունեցող ֆունկցիաների հանրահայդի բալլ ցիկլիկ էլեմենտների նկարագրումը:

F. A. SHAMOIAN. Closed ideals of the Nevanlinna-Djrbashian algebras and weak cyclic functions in the algebra N^+ (summary)

The paper gives a description of the closed ideals of the algebra of the functions f for which

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 (1-r)^{\alpha} \log^+ |f(re^{it})| r dr d\varphi < +\infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН Арм.ССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
2. М. М. Джрбашян. К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. ин-та математики и механики АН Арм.ССР, вып. 2, 1948, 3—55.
3. Р. Неванlinna. Однозначные аналитические функции, М., 1941.
4. Փ. Ա. Շամոյան. Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 13, №№ 5—6, 1978, 405—423.
5. A. E. Djrbashian, F. A. Shamoyan. Topics in theory of A_p^+ spaces, Teubner-Texte Math., 105, Leipzig, Teubner, 1988.
6. Փ. Ա. Շամոյան, Ս. Ա. Մաթեոսյան. Об одной алгебре аналитических в круге функций, Всесоюз. школа по теор. функций, Ереван, 1987. Тезисы докладов.
7. J. H. Shapiro, A. Shields. Unusual topological properties of the Nevanlinna class, Amer. Journ. Math., 97, № 4, 915—936.
8. N. Yanaagthara. Multipliers and linear functionals on N^+ , Trans. Amer. Math. Soc., 180, 1973, 449—461.
9. J. W. Roberts., M. Stool. Prime and principal Ideals in the algebra N^+ , Arch. Math., XVII. 1976. 387—393.
10. Փ. Ա. Շամոյան. Параметрическое представление классов голоморфных в круге функций, допускающих рост вблизи его границы, Материалы республиканской конференции по методике преподавания математики и механики в вузе, Ереван, 1986.

11. J. W. Roberts. Cyclic inner functions in the Bergman spaces and weak outer functions in H^p , $0 < p < 1$, Illin. Journ. Math., 29 № 1, 1985, 23—37.
12. С. Мандельбройт. Прямые ряды. Регуляризации последовательностей. Промышленность, М., ИЛ, 1955, 268 с.
13. H. S. Shapiro. Weakly invertible elements in certain function spaces and generators on l_1 , Mich. Math. Journ., 11, 1964. 161—165.
14. Н. К. Никольский. Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 120, 1974.
15. J. H. Shapiro. Remarks on F -spaces of analytic functions, Lecture Notes. Matq., 604, 1976. 103—123.

УДК 517.53

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

В. С. ЗАХАРЯН, И. В. ОГАНИСЯН

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ТЕЙЛОРА ПРОИЗВЕДЕНИЙ
М. М. ДЖРБАШЯНА $B_a(z; z_k)$

Пусть $\{z_k\}_1^\infty$, $(0 < |z_k| < 1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, пронумерованных в порядке неубывания их модулей $(|z_k| \leq |z_{k+1}|, k = 1, 2, \dots)$.

Как известно [1], если

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{1+\alpha} < \infty \quad (-1 < \alpha < +\infty), \quad (1)$$

то бесконечное произведение М. М. Джрбашяна

$$B_a(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{-W_a(z; z_k)}, \quad (2)$$

где

$$W_a(z; \xi) = \int_{|\xi|}^1 \frac{(1-x)^a}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+z+k)}{\Gamma(1+\alpha) \cdot \Gamma(1+k)} \times \\ \times \left\{ \xi^{-k} \int_0^{|\xi|} (1-x)^a x^{k-1} dx - \overline{\xi}^k \int_{|\xi|}^1 (1-x)^a x^{-k-1} dx \right\} z^k, \quad |z| < 1, \quad |\xi| < 1 \quad (3)$$

сходится в единичном круге $|z| < 1$ и представляет там аналитическую функцию, обращающуюся в нуль на последовательности $\{z_k\}_1^\infty$.

Функция $B_a(z; z_k)$ является естественным обобщением произведения Бляшке

$$B(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|z_k|}{z_k} \frac{z_k - z}{1 - \overline{z_k} z}$$

и совпадает с ним при значении параметра $\alpha = 0$, то есть $B_0(z; z_k) \equiv B(z; z_k)$.

Обозначим через $\widehat{B}_a(n)$ n -ный коэффициент ряда Тейлора функции $B_a(z; z_k)$. Для тех $B(z; z_k)$, нули которых удовлетворяют условию Ньюмана

$$\sup_{k \geq 1} (1 - |z_{k+1}|) / (1 - |z_k|) < 1, \quad (N)$$

получена [4] оценка

$$\widehat{B}_0(n) = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (4)$$

В работе [5] доказано и обратное утверждение: из условия (4) следует, что множество нулей $\{z_k\}_1^\infty$ состоит из конечного объединения (N) последовательностей.

Для значений параметра $\alpha \in (-1; 0]$ в работе [2] доказывается, что если выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - |z_k|}{|e^{i\theta} - z_k|} \right)^{1+\alpha} < +\infty, \quad (5)$$

то в точке $e^{i\theta}$ существует радиальный предел

$$B_\alpha(e^{i\theta}; z_k) = \lim_{r \rightarrow 1-0} B_\alpha(re^{i\theta}, z_k). \quad (6)$$

При $\alpha=0$ условие (5) является [3] необходимым и достаточным для существования радиального предела (6), равного по модулю единице.

В данной работе получена оценка коэффициентов Тейлора $B_\alpha(n)$ для $-1 < \alpha \leq 0$ при условии, что все нули расположены на одном радиусе и по модулю, со скоростью геометрической прогрессии, стремятся к единице. Из этой оценки видно, что тогда функция $B_\alpha(z; z_k)$ при $-1 < \alpha < 0$ становится непрерывной в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Полученная оценка показывает, что при $-1 < \alpha < 0$ условие (5) является только достаточным для существования радиального предела (6).

Для доказательства теоремы сначала приведем вспомогательные леммы.

Лемма 1. Для всех значений $r \in (0; 1)$ и $\alpha \in (-1; \infty)$ имеет место соотношение

$$W_\alpha(r; r) = \ln(1-r) + \int_0^r \frac{(1-x)^\alpha - 1}{x} dx + \int_r^1 \frac{1-x}{x \left(1 - \frac{r^2}{x}\right)^{\alpha+1}} dx.$$

Доказательство. Согласно (3)

$$\begin{aligned} W_\alpha(r; r) &= \int_r^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha) \cdot \Gamma(1+k)} \times \\ &\times \left\{ \int_0^r (1-x)^\alpha x^{k-1} dx - r^{2k} \int_r^1 (1-x)^\alpha x^{-k-1} dx \right\} = \int_r^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \\ &- \int_0^r \left\{ \frac{(1-x)^\alpha}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha) \cdot \Gamma(1+k)} x^k \right\} dx + \\ &+ \int_r^1 \left\{ \frac{(1-x)^\alpha}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha) \Gamma(1+k)} \frac{r^{2k}}{x^k} \right\} dx. \end{aligned}$$

Применяя разложение

$$\frac{1}{(1-\omega)^{1+\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+k) \cdot \Gamma(1+\alpha)} \cdot \omega^k, \quad |\omega| < 1,$$

получим

$$\begin{aligned}
 W_\alpha(r; r) &= \int_r^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \int_0^r \left\{ \frac{(1-x)^\alpha}{x} \left[\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} - 1 \right] \right\} dx + \\
 &+ \int_r^1 \left\{ \frac{(1-x)^\alpha}{x} \left[\frac{1}{\left(1-\frac{r^2}{x}\right)^{1+\alpha}} - 1 \right] \right\} dx = \int_r^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \\
 &- \int_0^r \left[\frac{1}{x(1-x)} - \frac{(1-x)^\alpha}{x} \right] dx + \int_r^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x \left(1-\frac{r^2}{x}\right)^{\alpha+1}} dx - \int_r^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx = \\
 &= \ln(1-r) + \int_0^r \frac{(1-x)^\alpha - 1}{x} dx + \int_r^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x \left(1-\frac{r^2}{x}\right)^{\alpha+1}} dx.
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Приведем также две леммы, доказательства которых можно найти в работах [6] и [9]. Они нам понадобятся при доказательстве теоремы.

Лемма 2. Если последовательность $\{z_k\}$ удовлетворяет условию (N) , то для любого $\beta > 0$, при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^n |z_k|^n (1 - |z_k|)^\beta = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right).$$

Лемма 3. Если множество нулей $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (N) , то имеет место неравенство

$$|B'(z_n; z_k)| > \frac{b}{1 - |z_n|},$$

где $b > 0$ — некоторая постоянная.

Докажем теперь основную теорему.

Теорема. Пусть множество нулей $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет следующему условию:

$$z_k = (1 - a^k) e^{i\varphi}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 0 < a < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (7)$$

тогда

$$|\widehat{B}_\alpha(n)| = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha \ln a}}\right), \quad -1 < \alpha \leq 0.$$

Доказательство. Во-первых заметим, что произведение $B_\alpha(z; z_k)$ сходится, так как из (7) следует, что выполняется условие (1).

Имеем, далее

$$\widehat{B}_\alpha(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_\alpha(e^{i\theta}; z_k) e^{-in\theta} d\theta,$$

$$\overline{B_\alpha(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{B_\alpha(e^{i\theta}; z_k)} e^{in\theta} d\theta.$$

Но

$$\begin{aligned} B_\alpha(e^{i\theta}; z_k) &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{e^{i\theta}}{z_k}\right) e^{-W_0(e^{i\theta}; z_k)} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} e^{W_0(e^{i\theta}; z_k) - W_\alpha(e^{i\theta}; z_k)} = \\ &= B_0(e^{i\theta}; z_k) e^{\sum_{k=1}^{\infty} \{W_0(e^{i\theta}; z_k) - W_\alpha(e^{i\theta}; z_k)\}}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \overline{B_\alpha(n)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{B_0(e^{i\theta}; z_k)} \cdot e^{\sum_{k=1}^{\infty} \{W_0(e^{i\theta}; z_k) - W_\alpha(e^{i\theta}; z_k)\}} \cdot e^{in\theta} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} e^{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{W_0(z; z_k)} - \overline{W_\alpha(z; z_k)}}{z}} \cdot z^{n-1} \cdot \overline{B_0(z; z_k)} dz. \end{aligned}$$

Вычисляя интеграл с помощью вычетов, получим

$$\overline{B_\alpha(n)} = \sum_{m=1}^{\infty} e^{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{W_0(z_m; z_k)} - \overline{W_\alpha(z_m; z_k)}}{z_m}} \cdot \overline{B_0(z_m; z_k)} \cdot z_m^{n-1}. \quad (8)$$

Имея в виду [7, 8] неравенство

$$\operatorname{Re} |W_\alpha(z; \xi) - W_0(z; \xi)| \geq 0, \quad -1 < \alpha \leq 0, \quad |z| < 1, \quad |\xi| < 1, \quad (9)$$

оценим сумму

$$\sum_{k=1}^m \operatorname{Re} |W_0(z_m; z_k) - W_\alpha(z_m; z_k)| \leq \sum_{k=1}^m \operatorname{Re} |W_0(z_m; z_k) - W_\alpha(z_m; z_k)|.$$

Имея в виду применяемое при доказательстве неравенства (9) разложение в тригонометрический ряд функции

$$\operatorname{Re} |W_\alpha(z; \xi) - W_0(z; \xi)| = \frac{\alpha_0(\rho)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\rho) |\omega|^k \cos(k \cdot \arg \omega),$$

где $\rho = |\xi|$, $\omega = z \cdot \xi$ и $\alpha_k(\rho) \geq 0$, $k=0, 1, \dots$, а также условие (7), находим

$$\sum_{k=1}^m \operatorname{Re} |W_0(z_m; z_k) - W_\alpha(z_m; z_k)| \leq \sum_{k=1}^m \operatorname{Re} |W_0(z_k; z_k) - W_\alpha(z_m; z_k)|.$$

Используя лемму 1, имеем

$$\sum_{k=1}^m \operatorname{Re} |W_0(z_m; z_k) - W_\alpha(z_m; z_k)| \leq \sum_{k=1}^m \left\{ \int_0^{|z_k|} \frac{1-(1-x)^2}{x} dx + \right.$$

$$+ \int_{|z_k|}^1 \left[\frac{1}{x \left(1 - \frac{|z_k|^2}{x}\right)} - \frac{(1-x)^\alpha}{x \left(1 - \frac{|z_k|^2}{x}\right)^{\alpha+1}} \right] dx \leq \\ \leq \sum_{k=1}^m \int_0^{|z_k|} \frac{1 - (1-x)^\alpha}{x} dx,$$

так как

$$\frac{1}{x \left(1 - \frac{|z_k|^2}{x}\right)} - \frac{(1-x)^\alpha}{x \left(1 - \frac{|z_k|^2}{x}\right)^{\alpha+1}} \leq 0, \quad \alpha \in (-1; 0], \quad x \geq |z_k|.$$

Из равенства (7) и условия $-1 < \alpha \leq 0$ получим

$$\sum_{k=1}^m \int_0^{|z_k|} \frac{1 - (1-x)^\alpha}{x} dx \leq \sum_{k=1}^m \alpha |z_k| = \alpha \sum_{k=1}^m (1 - a^k) = \\ = \alpha \left(m - \sum_{k=1}^m a^k \right) \leq \alpha \left(m - \frac{a}{1-a} \right).$$

Так как $\ln(1 - |z_m|) = m \cdot \ln a$, то $m = \frac{\ln(1 - |z_m|)}{\ln a}$, следовательно

$$\sum_1 \operatorname{Re} |W_0(z_m; z_k) - W_\alpha(z_m; z_k)| \leq \ln(1 - |z_m|)^{\alpha/\ln a} - \frac{\alpha a}{1-a}.$$

Из (8), применив полученную оценку, а также лемму 3, находим

$$|\widehat{B}_\alpha(n)| \leq \operatorname{const} \sum_{m=1}^n |z_m|^{n-1} (1 - |z_m|)^{1 + \alpha/\ln a}.$$

Используя, наконец, лемму 2, находим

$$|\widehat{B}_\alpha(n)| \leq O\left(\frac{1}{n^{1 + \alpha/\ln a}}\right).$$

Теорема полностью доказана.

Следствие 1. Если нули $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяют условию (7), то, согласно доказанной теореме, при $-1 < \alpha < 0$ имеем $|\widehat{B}_\alpha(n)| = O\left(\frac{1}{n^{1 + \alpha/\ln a}}\right)$, где $1 + \alpha/\ln a > 1$, поэтому функция $B_\alpha(z; z_k)$ будет непрерывной и m раз дифференцируемой в замкнутом круге $|z| \leq 1$, где m — наибольшее целое число, удовлетворяющее условию $m < \frac{\alpha}{\ln a}$.

Следствие 2. Так как при $z_k = (1 - a^k) e^{i\theta}$ имеем

$$\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1 - |z_k|}{|e^{i\theta} - z_k|} \right)^{1+\alpha} = +\infty,$$

то из следствия 1 вытекает, что для существования в точке $e^{i\theta}$ радиаль-

ного предела (6), условие (5) при $\alpha \in (-1; 0)$ является только достаточным.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 2. IV.1987

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., «Наука», 1966.
2. В. С. Захарян. Радиальные пределы и радиальные изменения произведения $B_\alpha(z; z)$. Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 3, № 1, 1968, 38—51.
3. Э. Коллинзвуд, А. Ловатер. Теория предельных множеств. М., «Мир», 1971.
4. D. J. Newman, H. S. Shapiro. The Taylor coefficients of inner functions, Mich. Math. J., 1962, 9, 249—254.
5. Н. Э. Вербицкий. О коэффициентах Тейлора и L_p -модулях непрерывности произведений Бляшке, Зап. научн. семина. ЛОМИ, том. 107, 1982, 27—35.
6. С. А. Виноградов, В. П. Хавин. Свободная интерполяция в H^∞ и в некоторых других классах функций, Зап. научн. семина. ЛОМИ, том. 47, 1974, 15—55.
7. М. М. Джрбашян и В. С. Захарян. О граничных свойствах мероморфных функций класса N_α , ДАН СССР, 173, № 6, 1967, 1247—1250.
8. М. М. Джрбашян и В. С. Захарян. Граничные свойства мероморфных функций класса N_α , Изв. АН АрмССР, «Математика», 2, № 5, 1967, 275—294.
9. D. J. Newman. Interpolation in H_∞ , Trans. Amer. Math. Soc., 92, 1959, 501—507

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Հայկական ՍՍՀ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր
«Մաթեմատիկա» ամսագրի 1988 թ., XXIII, № 1—6

Ռ. Ա. Ալեքսանդրյան (մահախոսական)	2, 187
Ա. Ս. Աղաբաբյան. Սնմալիկադիկ օպերատորի մոդուլով ամենափոքր սեփական արժեքի գնահատականը	3, 286
Ն. Հ. Առաքելյան, Վ. Հ. Մաթեմատիկ. Առաքելյանի շարքերի հզորությունների տեղայնացումը զուգամիտության շրջանի հզորին	2, 129
Վ. Վ. Առաքելյան. Հիմնական հզորային խնդիրները երկրորդ կարգի փոփոխական դարձակերպումով էլիպտիկ հավասարումների համար կիսաառարկայական	1, 54
Ա. Ն. Ավետիսյան. $\rho(1 < \rho < 2)$ կարգի ամբողջ ֆունկցիաների մասին	6, 557
Ռ. Ա. Ավետիսյան, Ն. Հ. Առաքելյան. Հավասարային մատակարարությունների մեթոդով ֆունկցիաներով անկյունային տիրույթում	6, 546
Ա. Մ. Արամյան. $C^1(\Omega)$ և $W_p^1(\Omega)$ տարածությունների ֆունկցիաների զբաղումը շարժականության մասին	1, 73
Ռ. Դ. Արաբկյան, Ռ. Ռ. Շահբազյան. Երկրորդ կարգի էլիպտական օպերատորների սեփական արժեքների գնահատականներ	4, 343
Վ. Ա. Արզումանյան, Ս. Ա. Գրիգորյան. Օպերատորային դաշտերի հավասարաչափ հանրահաշիվների հերթերը	5, 422
Ա. Գ. Բաղդասարյան. Որոշ անհղաթուղղ ֆունկցիանալ տարածությունների հետքերի և ինտեգրալային մասին	4, 353
Գ. Մ. Գաբրիել. Միտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների ընտանիքների բազմությունը, Զրաշխանի ձևափոխությունները և Կոշի տիպի ինտեգրալների կշռային գնահատականներ	2, 237
Ն. Ն. Թովմասյան. Կոռեկտ խնդիրների մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների սխեմաների համար, բազմանդամային և ածանցյալ ֆունկցիաների դասերում	4, 309
Յու. Ի. Լյուբարսկի. Վինկ-Պոլիի թեորեմը ուղղանկյուն բազմությունների համար	2, 163
Ի. Հ. Խաչատրյան, Ս. Ա. Հակոբյան. Միտագ-Լեֆլերի կորիզներով ինտեգրալ ձևափոխությունները ներկայացվող ֆունկցիանալ թվադիանալիտիկ դասեր	3, 199
Ռ. Ա. Խաչատրյան. Վրանների հատման մասին հիլբերտյան տարածություններում և էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները ոչ ռզորկ ֆունկցիաների համար	2, 149
Դ. Ա. Կառապետյան. Եզրային խնդիր թվադիանալիտիկ տեղայնացում հավասարումների համար անսահմանափակ տիրույթներում	1, 22
Յու. Ա. Կառապետյան. Փոքր ազմուկով դինամիկական համակարգային նույնականացման մեկ խնդիր մասին	3, 270
Ռ. Գ. Հալաբաբյան, Մ. Ի. Գրան, Մ. Մ. Գրան, Գ. Ռ. Հովհաննիսյան. Պլանշե-րելի բանաձև կապված CP^3 -ում ուղիղների թույլատրելի կոմպլեքսի հետ	5, 463
Դ. Ռ. Հովհաննիսյան. Կշռային միջին արժեքի թեորեմ սինգուլյար զրգռումով կապված հավասարման համար	4, 325
Դ. Ռ. Հովհաննիսյան. Կշռային կշռային և Դիրիխլեի խնդիրների մասին հզորին. հզոր կիսառարկայական ունեցող մասնակի ածանցյալներով հավասարումների համար	1, 3
Ս. Մ. Հովհաննիսյան. Պոտենցիալի տեսության հակադարձ խնդիրը $L_p(S)$ տարածության մեջ և $W_p(S)$ էլեմենտների մատակարարումը անգլիզ դիֆերենցիալ ֆինիտ ֆունկցիաներով	1, 39
Հ. Ս. Մկրտչյան. Հոլոմորֆ ֆունկցիայի վերականգնման մասին C^n -ում աստիճանային շարքերի զրոարման օգնությամբ	4, 366

Պ. Հ. Տաղչյան. Կոշու խնդրի կորեկտության անհրաժեշտ պայմանները բազմազատ- տիկ բնութագրիչներով օպերատորների համար	5, 439
Ո. Հ. Նեոսիյան. Ալիս Ռոթի միաձուլման լեմմայի վերաբերյալ	2, 138
Ղ. Ա. Շանինյան. Ամենուրեք հանրազանության եռանկյունապատկան շաբաթով ֆունկցիաների ներկայացման մասին	5, 489
Յ. Ա. Շամոյան. Նևանլինսա—Ջրաշյանի հանրահաշիվներում փակ իզոմորֆիզմների նկարագրության և հանրահաշիվի թույլ ցիկլիկ էլեմենտների բնութագրերը	6, 575
Գ. Յու. Պանին. Ուսուցիկ մարմինների ներկայացումը նվազ չափազանցություն ունեցող մարմինների դամարի տեսքով	4, 385
Պ. Լ. Պոլյակով. Հալմարի ֆունկցիաների վերջավոր կարգի դրոները բազմաշրջանում	4, 366
Ա. Է. Ջրաշյան, Ա. Հ. Կարապետյան. Խոտեղրալ տեսչակառարություններ համալսած պուրիֆիկացիայի ֆունկցիաների միջև բազմազան տիրույթներում	3, 216
Մ. Մ. Ջրաշյան. Կոմպլեքս տիրույթում մի եզրային խնդրից ծնվող սեփական ֆունկցիաների բաշխայնության մասին	5, 409
Մ. Մ. Ջրաշյան. Գիտական աշխատությունների ցուցակ	6, 509
Մ. Մ. Ջրաշյան. Համառոտ ակնարկ Հայաստանի մաթեմատիկոսների կողմից շրջա- նում մերժող ֆունկցիաների ֆակտորիզացիայի տեսության կառուցման և նրա կիրառությունների բնագավառում ձեռք բերված արդյունքների մասին	6, 517
Մ. Մ. Ջրաշյան, Ս. Գ. Ռաֆայելյան. Ֆուրիեի տեսքի համակարգը ծնող հատուկ եզրային խնդիրները	2, 109
Ռ. Վ. Օգինեզով. Հարթ սիմվոլով օպերատորների համար Կոշու խնդրի կոռեկտու- թյան մասին	1, 85

Համառոտ հաղորդումներ

Ա. Ն. Ավետիսյան. Ֆունկցիաների համակարգի լրիվության և միևնույնության մասին	1, 81
Ռ. Հ. Արամյան. Ուսուցիկ մարմինների դրաշյանային ներկայացումներ և կորու- թյան չափեր	1, 97
Վ. Ս. Զախարյան, Ի. Վ. Հավանեթյան, Մ. Մ. Ջրաշյան. $B_{\alpha}(x, x)$ արտա- դրյալի Բեյզերի գործակիցների մասին	6, 588
Վ. Ս. Զախարյան, Մ. Մ. Ջրաշյանի արտադրյալների մի զնահատականի մասին	2, 189
Ս. Հ. Կարապետյան. Խոտեղրալ ներկայացումներ խողովակաձև տիրույթներում	1, 91
Հ. Մ. Հայրապետյան. Սենսիտիվ բնույթի բնական ռացիոնալ կոտորակների ոչ լրիվ հա- մակարգով ծնվող ֆունկցիաների եզրային արժեքների մասին	3, 297
Է. Մ. Մաքսիմ. Դիֆերենցիալ հավասարումների էլիպտիկ համակարգերի ընդհա- նուր լուծման ներկայացումը	4, 402
Հ. Ռ. Նեոսիյան, Մ. Գ. Սադախյան. Վիներ-Հոպֆի ինտեգրալ հավասարումների դիսկրետացված համակարգի նեոսիյանի մասին	1, 87
Պ. Ա. Սելվերցով. Բազմազան չափի շաբաթի միաձուլման վերաբերյալ մի թեորեմի մասին	3, 293
Ե. Ա. Հարաբյան. Մարկովի շաբաթի վերաբերյալ վարկածների օպտիմալ ստուգ- ման սխալների հավանականությունների առիթմաբանական փոխադարձ կապի մասին	1, 76
Ա. Մ. Ջրաշյան. Սահմանափակ տեսքի ֆունկցիաների դասերի կիսահարթությունում, միակության թեորեմ և Ֆրադե-Լիդելլ-Ֆիեի տիպի թեորեմ	4, 396

СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армянской ССР, серия «Математика»,
за 1988 г., XXIII, №№ 1—6.

А. Е. Аветисян. О целых функциях порядка ρ ($1 < \rho < 2$)	6, 557
Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян. Наилучшие приближения мероморфными функциями в угловых областях	6, 546
А. С. Атабабян. Об оценке снизу наименьшего по модулю собственного значения семивалинтического оператора	3, 286
Р. Г. Айрапетян, М. И. Граев, М. М. Граев, Г. Р. Оганесян. Формула Планшереля, связанная с допустимым комплексом прямых в CP^3	5, 463
Р. А. Александрия (некролог)	2, 187
Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян. Локализация особенностей степенных рядов на границе круга сходимости II	2, 123
А. М. Арамян. О продолжении нулем функций из пространств $S(\Omega)$ и $W_p(\Omega)$	2, 173
Б. Г. Араркян, Р. Р. Шахбазян. Оценки собственных значений эллиптических операторов второго порядка	4, 343
В. А. Арзуманян, С. А. Григорян. Границы равномерных алгебр операторных полей	5, 422
В. В. Асатрян. Основные краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в полупространстве	1, 54
А. Г. Багдасарян. Об интерполяции и о следах из некоторых изотропных функциональных пространств	4, 353
Г. М. Губреев. Базисность семейств функций типа Миттаг-Леффлера, преобразования Джрбашяна и весовые оценки интегралов типа Коши	3, 237
А. Э. Джрбашян, А. О. Карапетян. Интегральные неравенства между сопряжениями пласригармоническими функциями в многомерных областях	3, 216
М. М. Джрбашян. О базисности собственных функций, порожденных одной краевой задачей в комплексной области	5, 409
М. М. Джрбашян. Список трудов	6, 509
М. М. Джрбашян. Краткий обзор результатов исследований математиков Армении в области теории факторизации мероморфных функций и ее приложений	6, 517
М. М. Джрбашян, С. Г. Рсфаян. Особые краевые задачи, порождающие системы типа Фурье	2, 109
Г. А. Карапетян. Краевая задача для квазилинейных регулярных уравнений в неограниченных областях	1, 22
Ю. А. Кутоянц. Об одной задаче идентификации динамических систем с малым шумом	3, 270
Ю. И. Любарский. Теорема Винера-Палли для выпуклых множеств	2, 163
Е. С. Мкртчян. О восстановлении голоморфной функции с помощью суммирования степенных рядов в S^1	4, 336
А. А. Нерсисян. О лемме Алис Рот о сращивании	2, 138
Г. Р. Оганесян. О весовых задачах Коши и Дирихле для некоторых сингулярных на границе уравнений в частных производных	1, 3
Г. Р. Оганесян. Весовая теорема о среднем для сингулярно возмущенного уравнения Лапласа	4, 325

С. М. Оганесян. Обратная задача теории потенциала в пространстве $L_p(S)$ и приближении элементов из $W_p(S)$ бесконечно дифференцируемыми финитными функциями	1, 39
О. В. Одинокоев. О корректности задачи Коши для операторов с гладкими символами	1, 65
Г. Ю. Панина. Представление n -мерного тела в виде суммы m -мерных тел	4, 385
П. А. Поляков. Нули голоморфных функций конечного порядка в полдиске	4, 366
Н. Е. Товмасын. Корректные краевые задачи для системы уравнений в частных производных в полупространстве в классе функций, растущих не быстрее полинома	4, 309
И. О. Хачатрян, С. А. Акопян. Квазианалитические классы функций, представимых интегралами с ядрами Миттаг-Леффлера	3, 199
Р. А. Хачатрян. О пересечении шатров в гильбертовом пространстве и необходимых условиях экстремума для негладких функций	2, 149
Л. А. Шагинян. О представлении функций всюду суммируемыми тригонометрическими рядами	5, 489
Ф. А. Шамоян. Описание замкнутых идеалов в алгебрах Неванлинны-Джрбашяна, и характеристика слабоциклических элементов алгебры	6, 575
К. А. Ядзян. Необходимые условия корректности задачи Коши для операторов с кратными характеристиками	5, 439

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А. Е. Аветисян. О полноте и минимальности системы функций	1, 81
Г. М. Айрапетян. О граничных значениях функций, порожденных непустыми системами рациональных дробей с фиксированными полюсами	3, 297
Р. Г. Арамян. Флаг-представления и меры кривизны выпуклых тел	1, 97
Е. А. Арутюнян. Об асимптотически оптимальном разложении гипотез относительно цепи Маркова	1, 76
А. М. Джрбашян. Классы функций ограниченного вида в полуплоскости теорема единственности и теорема типа Фрагмена-Линделефа	4, 396
В. С. Захарян. Об одной оценке для произведения М. М. Джрбашяна	2, 189
В. С. Захарян, И. В. Оганисян. О коэффициентах Тейлора произведений М. М. Джрбашяна $B_a(z; z_k)$	6, 583
А. О. Карапетян. Интегральные представления в трубчатых областях	1, 91
Э. М. Мадуну. Представление общего решения эллиптической системы дифференциальных уравнений	4, 402
А. Б. Нерсисян, М. Г. Садакашвили. О неустойчивости дискретизированной системы интегральных уравнений Винера-Хопфа	1, 87
В. А. Скворцов. Об одной теореме единственности для многомерного ряда Хаара	3, 293

CONTENTS

of the Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian SSR
 seria "Matematika, 1988, Vol. XXIII, №№ 1—6

<i>A. S. Aghababian</i> . The estimation of the smallest eigenvalue of semielliptic operator	3, 286
<i>R. G. Atrapetyan, M. I. Graev, M. M. Graev and G. R. Oganesyan</i> . Plancherel's formula associated with an admissible complex of straight lines in CP^3	5, 463
A. R. Alexandrian (obituary)	2, 187
<i>N. U. Arakelian, V. A. Martirosian</i> . The location of singularities of power series on the circle of convergence II	2, 123
<i>A. M. Aramian</i> . On zero continuation of functions from the space $C^l(\Omega)$ and $W_p^l(\Omega)$	2, 173
<i>B. G. Ararkelian, R. R. Shachbagtan</i> . Estimating the eigenvalues of second order elliptic operators	4, 443
<i>V. V. Asatryan</i> . Basic boundary-value problem for elliptic equations of second order with variable coefficients in half-space	1, 54
<i>A. E. Avetisyan</i> . On entire functions of order ρ ($1 < \rho < 2$)	6, 664
<i>V. A. Arzumanyan, S. A. Grigorian</i> . The boundaries of uniform algebras of operator fields	5, 422
<i>R. A. Avetisyan, N. U. Arakelyan</i> . Best approximations by meromorphic functions in angular domains	6, 546
<i>A. G. Bagdasarian</i> . On interpolation and function traces from some anisotropic functional spaces	4, 354
<i>A. E. Djrbashian, A. H. Karapetian</i> . Integral inequalities between conjugate pluriharmonic functions in multidimensional domains	3, 219
<i>M. M. Djrbashian</i> . A brief survey of the obtained results of Armenian mathematicians in the field of construction and applications of factorization theory of meromorphic functions in the disk	6, 517
<i>M. M. Djrbashian</i> . List of scientific publications	6, 509
<i>M. M. Djrbashian</i> . On the basis property of eigenfunctions of a boundary value problem in complex plane	5, 409
<i>M. M. Djrbashian, S. G. Rafaelian</i> . Special boundary problems generating Fourier type systems	2, 109
<i>G. M. Gubreev</i> . Basisity of systems of Mittag-Leffler type, the Djrbashian transforms and weighted estimate for Cauchy type integrals	3, 237
<i>S. M. Hovanesian</i> . The converse problem of the potential theory in the space $L_p(S)$ and approximation of elements from $W_p^r(S)$ by the continuously differentiable finite functions	1, 39
<i>G. A. Karapetian</i> . Boundary value problem for non-linear equations in unbounded domains	1, 22
<i>I. H. Khachatryan, S. A. Hakopian</i> . Quasianalytical classes of functions representable by integrals with Mittag-Leffler kernels	3, 199
<i>R. A. Khachatryan</i> . On intersection of tents in Hilbert distances and the necessary conditions of extremum for planar functions	2, 149
<i>Y. A. Kutoyants</i> . On a problem of dynamical systems with small noise identification	3, 270

<i>Ja. I. Ljubarsky</i> . Wiener—Paley theorem for convex sets	2, 163
<i>E. S. Mkrtchian</i> . On recapturing holomorph functions by summing the power series in C^*	4, 336
<i>A. H. Nersesjan</i> . On Alice Roth's fusion lemma	2, 183
<i>O. V. Odinokov</i> . On correctness of the Cauchy problem for the operators with smooth symbols	1, 65
<i>G. R. Oganesian</i> . Weighted Cauchy and Dirichlet for the singular differential equations	1, 3
<i>G. R. Oganesian</i> . Weighted mean value theorem for the singular Laplace equation	4, 325
<i>G. J. Pantna</i> . On the representation of central symmetric body by a sum of less-dimensional bodies	4, 385
<i>P. L. Polyakov</i> . Zeros of finite order holomorphic functions within a polydisc	4, 366
<i>L. A. Shahtnjan</i> . Representations of functions by the everywhere summable trigonometric series	5, 489
<i>F. A. Shamotan</i> . Closed ideals of the Nevanlinna—Djrbashian algebras and weak cyclic functions in the algebra	6, 575
<i>N. E. Tzumasian</i> . Correct boundary problems in half-space for a system of partial differential equations in a class of functions with polynomial growth	4, 309
<i>K. H. Yagdjian</i> . On the Cauchy problem for operators with multiple characteristics	5, 439

SHORT COMMUNICATIONS

<i>H. M. Atrapettan</i> . On boundary values of functions generated by incomplete system of rational fractions	3, 297
<i>R. H. Aramian</i> . Flag representation and curvative measures for convex bodies	1, 97
<i>A. E. Avetisjan</i> . On the completeness and minimality of sets of functions	1, 81
<i>A. M. Djrbashian</i> . Classes of functions of bounded type in the half-plane, a uniqueness theorem and a theorem of Phragmen-Lindelöf type	4, 396
<i>E. A. Haroutunian</i> . On asymptotic interdependence of the errors probabilities of optimal test concerning Markov chain	1, 76
<i>A. H. Karapettian</i> . Integral representation in the tube domains	1, 91
<i>E. M. Madanc</i> . Representation of general solution for the elliptic system of differential equations	4, 408
<i>A. B. Nersesjan, M. G. Sadakashvili</i> . On Neoter property of discretized system of Wiener—Hopf integral equations	1, 87
<i>V. A. Skvortsou</i> . On a uniqueness theorem for multidimensional Haar series	3, 293
<i>V. S. Zakarian</i> . On an estimate for the Djrbashian M. M. product	2, 189
<i>V. S. Zakarian, I. V. Ogansian</i> . On Taylor coefficients of Djrbashian products $B_\alpha(z, z_k)$	6, 588

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Մ. Մ. Զրբաշյան. Գիտական աշխատությունների ցուցակ	509
Մ. Մ. Զրբաշյան. Համառոտ ակնարկ Հայաստանի մաթեմատիկոսների կողմից շրջափակ մերոմորֆ ֆունկցիաների ֆակտորիզացիայի տեսության կառուցման և նրա կիրառությունների բնագավառում ձևաբան բերված արդյունքների մասին	517
Ռ. Ա. Ավետիսյան, Ն. Հ. Առաքելյան. Կապալայի մոտափոխությունների մերոմորֆ ֆունկցիաներով անկյունային տիրույթներում	546
Ա. Ն. Ավետիսյան. $\rho(1 < \rho < 2)$ կարգի ամբողջ ֆունկցիաների մասին	557
Յ. Ա. Շամոլյան. Նեանլինն-Ջրբաշյանի հանրահաշիվներում փակ իդեալների նկարագրության և հանրահաշիվի թույլ ցիկլիկ էլեմենտների բնութագրերը	575

ՀԱՄԱՌՈՏ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

Վ. Ս. Զախարյան, Ի. Վ. Հովհաննիսյան. Մ. Մ. Զրբաշյանի $B_\alpha(z; z_k)$ արտադրյալի թելուրի գործակիցների մասին	588
--	-----

СОДЕРЖАНИЕ

М. М. Джрбашян. Список трудов	509
М. М. Джрбашян. Краткий обзор результатов исследований математиков Армении в области теории факторизации мероморфных функций и ее приложений	517
Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян. Наилучшие приближения мероморфными функциями в угловых областях	546
А. Е. Аветисян. О целых функциях порядка $\rho(1 < \rho < 2)$	557
Ф. А. Шамolian. Описание замкнутых идеалов в алгебрах Неванлинны—Джрбашяна, и характеристика слабоциклических элементов алгебры	575

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

В. С. Захарян, И. В. Оганисян. О коэффициентах Тейлора произведений М. М. Джрбашяна $B_\alpha(z; z_k)$	588
--	-----

CONTENTS

M. M. Djrbashian. List of scientific publications	509
M. M. Djrbashian. A brief survey of the obtained results of Armenian mathematicians in the field of construction and applications of factorization theory of meromorphic functions in the disk	517
R. A. Avetisyan, N. U. Arakelian. Best approximations by meromorphic function in angular domains	546
A. E. Avetisyan. On entire functions of order $\rho(1 < \rho < 2)$	557
F. A. Shamolian. Closed ideals of the Nevanlinna—Djrbashian algebras and weak cyclic functions in the algebra	575

SHORT COMMUNICATIONS

V. S. Zakarian, I. V. Oganisyan. On Taylor coefficients of M. M. Djrbashian $B_\alpha(z; z_k)$ products	588
---	-----