

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

ԽՐԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ԶՐԱՍՏՅԱՆ

Ն. Հ. ԱՌԱՅԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԻԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ՔԱԱԼՅԱՆ
Ռ. Վ. ՀԱՄԱՐԱԶՈՒՄՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱՂՅԱՆ
Գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու փառապատիվ Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կոտրիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը աեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ)՝ չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում լրջանդով մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է սովյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ. Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. В. АМБАРЦУМЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. А. ШАХБАГЯН
зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке), а кратких сообщений — не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редакколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилия, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

Editor in chief M. M. DIRBASHIAN

A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKIĬ

executive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series "Matematika"

Academy of Sciences of Armenian SSR

24-b, Marshal Bagramian Ave.

Yerevan, Armonian SSR, USSR

УДК 517.53

М. М. ДЖРБАШЯН

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

§ 0. Введение

В работе автора [1] приводились решения двух неординарных краевых задач A и $\tilde{A}$ для особого рода интегродифференциального уравнения дробного порядка в комплексной области. Доказывалось, что указанные задачи порождают отличные друг от друга последовательности собственных чисел $\{\lambda_k\}_0^\infty$, а также системы собственных функций

$$\{E_{3/2}(\lambda_n z, \mu) z^{\mu-1}\}_0^\infty \quad (0.1)$$

на совокупности трех отрезков

$$\nabla(\sigma) = \bigcup_{j=-1}^1 \nabla_j(\sigma), \quad \nabla_j(\sigma) = \{z = re^{i\frac{2\pi}{3}j} : 0 \leq r \leq \sigma^{2/3}\} \quad (j = -1, 0, 1). \quad (0.2)$$

При этом, собственные числа $\{\lambda_k\}_0^\infty$ этих задач явились простыми корнями функции

$$e_\sigma(z, \nu) \equiv E_{1/2}(\sigma^2 \lambda^\nu, 1 + \nu) \quad (0 \leq \nu < 2) \quad (0.3)$$

(кроме числа $\lambda_0 = 0$), где, как всегда

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n/\rho)} \quad (0.4)$$

— целая функция типа Миттаг-Леффлера порядка ρ .

В заключение этой статьи устанавливалось, что системы собственных функций обеих краевых задач A и $\tilde{A}$ (совместно с присоединенной функцией в случае задачи $\tilde{A}$) полны в классе функций $X(z)$ ($z \in \nabla(\sigma)$), подчиненных условию

$$\int_{\nabla(\sigma)} |X(z)|^2 |z|^{-1/2} |dz| < +\infty. \quad (0.5)$$

В §§ 1, 2 настоящей статьи излагается построение систем функций, биортогональных с весом $|z|^{1/2}$ на $\nabla(\sigma)$ с системой собственных функций задачи A и системой собственных функций задачи $\tilde{A}$ с добавлением присоединенной функции

$$\frac{z^{3\mu/2}}{\Gamma(\mu + 2/3)} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[E_{3/2}(\lambda z, \mu) z^{\frac{3\mu}{2} - 1} \right] \Big|_{\lambda = \lambda_0 = 0} \quad (0.6)$$

ассоциированной с двукратным собственным числом $\lambda_0 = 0$.

В § 3 приводятся доказательства основных результатов статьи. А именно, доказывается, что системы собственных функций (0.1) задачи A с присоединением к ней функции (0.6) в случае задачи $\tilde{A}$, не только полны в том же классе функций (0.5), но и после надлежащей нормировки являются базисами Рисса.

Данную статью в какой-то мере можно считать итоговой в цикле исследований, проведенных за последние годы по обобщенному дискретному гармоническому анализу в комплексной области автором и С. Г. Рафаеляном.

Как уже указывалось во введении работы [2], в давней совместной с А. Б. Нерсисяном работе автора [3] впервые были рассмотрены краевые задачи на отрезке $[0, 1]$ вещественной оси для модельных дифференциальных операторов дробного порядка более сложной природы. Задачи эти также порождали системы от функций типа Миттаг-Леффлера $E_\nu(z, \mu)$, биортогональные на отрезке $[0, 1]$. Наконец, существенно отличным от развитого нами за последние годы методом, сопряженным с преодолением значительных трудностей, устанавливалась лишь равносходимость с рядами Фурье разложений функций $f(x) \in L(0, 1)$ по указанным биортогональным системам.

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Известно, что целая функция типа Миттаг-Леффлера

$$E_{1/2}(\sigma^2 z, 1 + \nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2k} z^k}{\Gamma(1 + \nu + 2k)} \quad (0 < \sigma < +\infty) \quad (1.1)$$

имеет порядок, равный $1/2$ и тип σ при любом значении параметра $\nu \in (-1, +\infty)$. Но кроме того, эта функция обладает другим важным свойством: а именно, для значений параметра $\nu \in [0, 2)$ она имеет только вещественные, отрицательные и простые корни $\{-r_k\}_1^\infty$

$$0 < r_1 < r_2 < \dots < r_k < r_{k+1} < \dots$$

(см. [3], лемму 1.1).

Из сказанного непосредственно следует, что при $0 \leq \nu < 2$ все корни функции

$$\tilde{e}_\nu(z, \nu) \equiv E_{1/2}(\sigma^2 z^3, 1 + \nu) \quad (0 \leq \nu < 2) \quad (1.2)$$

также простые и лежат только на трех полупрямых плоскости z

$$L_j = (0, \alpha^{j+1/2}(\infty)) \quad (j = -1, 0, 1), \quad (1.3)$$

где $\alpha = \exp \left\{ i \frac{2\pi}{3} \right\}$.

Нумеруя эти корни в порядке неубывания их модулей и возрастания аргументов, мы приходим к последовательности комплексных чисел

$$\{ \lambda_k \}_1^\infty, (|\lambda_k| \leq |\lambda_{k+1}|, -\pi/3 = \operatorname{Arg} \lambda_1 < \operatorname{Arg} \lambda_k < \operatorname{Arg} \lambda_{k+1} = 2\pi/3 + \operatorname{Arg} \lambda_k, k \geq 2). \quad (1.4)$$

Таким образом, $\{ \lambda_k \}_1^\infty$ — суть последовательность всевозможных отличных друг от друга и простых корней функции $\tilde{e}_\nu(z, \nu)$, лежащих только на совокупности лучей (1.3).

Как уже отмечалось выше, последовательность $\{ \lambda_k \}_0^\infty$ ($\lambda_0 = 0$) совпадает с множеством всех собственных чисел двух краевых задач A и $\tilde{A}$, поставленных в работе [1] на совокупности отрезков $\gamma(\sigma)$.

При непременном условии на параметр μ

$$2/3 \leq \mu \leq 1 \quad (1.5)$$

в работе [1] была установлена полнота системы собственных функций (0.1) первой задачи A , а также второй задачи $\tilde{A}$ при добавлении к системе (0.1) присоединенной функции (0.6).

Доказательство полноты собственных функций существенно опиралось на установленные в работе [3] интерполяционные разложения специальных классов $W_{3/2, \sigma}^{2, \infty}$ целых функций $f(z)$ порядка $\rho = 3/2$ и типа σ ($0 < \sigma < \infty$), подчиненных условию

$$\sum_{j=-1}^1 \int_0^{+\infty} |f(a^{j+\frac{1}{2}} r)|^2 r^\omega dr < +\infty, \quad (1.6)$$

где $\omega \in (-1, 1)$ — любое число. При этом, узлами интерполяционных разложений служило множество собственных чисел $\{ \lambda_k \}_0^\infty$ обеих краевых задач A или $\tilde{A}$, при соответствующих условиях $\nu \in \Delta = (\mu - 1/6, \mu + 1/6)$, или $\nu \in \tilde{\Delta} = (\mu + 1/6, \mu + 1/2)$ на параметр ν , входящий в определение функций $\tilde{e}_\nu(z, \nu)$ с корнями на последовательности $\{ \lambda_k \}_1^\infty$.

Из более ранних результатов автора, в частности, следовала теорема типа Винера-Пэли для целых функций указанного выше класса $W_{3/2, \omega}^{2, \infty}$ ($-1 < \omega < 1$), устанавливающая изоморфизм между этим классом и пространством трехкомпонентных вектор-функций

$$\varphi(\tau) = [\varphi_j(\tau)]_{j=1}^3 \in L_2(0, \tau). \quad (1.7)$$

Этот факт позволил в нашей совместной с С. Г. Рафаеляном работе [3] установить базисность вектор-систем вида

$$\{ E_{3/2}(\alpha^j \lambda_n \tau^{2/3}, \mu) \tau^{\mu-1} \}_0^\infty \quad (1.8)$$

или же вида

$$\left\{ \frac{\alpha^j \tau^{\mu-1/3}}{\Gamma(\mu + 2/3)}, [E_{1/2}(\alpha^j \lambda_n \tau^{2/3}, \mu) \tau^{\mu-1}]_0^\infty \right\} \quad (1.9)$$

(где $j = -1, 0, 1$) в пространстве вектор-функций (1.7), соответственно, при $v \in \Delta$ и $v \in \bar{\Delta}$.

Наша ближайшая цель — доказать, что указанные базисные вектор-системы функций из $L_2(0, \sigma)$ могут быть сведены к системам собственных функций краевых задач A и $\bar{A}$, исследованных в работе [1].

1.2. Приведем теперь некоторые определения, а также формулировки двух результатов из работы [3], которые понадобятся ниже.

(а) С этой целью сначала введем в рассмотрение две пары систем трехкомпонентных вектор-функций из $L_2(0, \sigma)$, полагая, как и всюду ниже, что

$$\mu = 5/6 + \omega/3 \quad (-1/2 \leq \omega \leq 1/2). \quad (1.10)$$

1°. Если $v \in \Delta = (\mu - 1/6, \mu + 1/6)^*$, пару систем

$$\{x_{n,j}(\tau)\}_0^\sigma \text{ и } \{\omega_{n,j}(\tau)\}_0^\sigma \quad (j = -1, 0, 1) \quad (1.11)$$

кратко обозначим также

$$x_n(\tau) = \{x_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1 \text{ и } \omega_n(\tau) = \{\omega_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.11')$$

где

$$x_{n,j}(\tau) = E_{3/2}(a^j \bar{\lambda}_n \tau^{2/3}, \mu) \tau^{\mu-1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.12)$$

и

$$\omega_{0,j}(\tau) = \frac{\sigma^{-v} \Gamma(1+v)}{3 \Gamma(1+v-\mu)} (\sigma - \tau)^{v-\mu}, \quad (1.13)$$

$$\omega_{n,j}(\tau) = \frac{\sigma^{-v} \Gamma(1+v)}{3 \Gamma(1+v-\mu)} \times$$

$$\times E_{3/2}(a^{-j} \bar{\lambda}_n (\sigma - \tau)^{2/3}, 1+v-\mu) (\sigma - \tau)^{v-\mu} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.13')$$

1°. Если $v \in \bar{\Delta} = (\mu + 1/6, \mu + 1/2)$, пару систем

$$\{\bar{x}_{0,j}(\tau), [\bar{x}_{n,j}(\tau)]_0^\sigma\} \text{ и } \{\bar{\omega}_{0,j}(\tau), [\bar{\omega}_{n,j}(\tau)]_0^\sigma\} \quad (1.14)$$

кратко обозначим

$$\bar{x}_0(\tau) = \{\bar{x}_{0,j}(\tau)\}_{-1}^1, \quad \bar{x}_n(\tau) = \{\bar{x}_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1, \quad (1.14')$$

$$\bar{\omega}_0(\tau) = \{\bar{\omega}_{0,j}(\tau)\}_{-1}^1, \quad \bar{\omega}_n(\tau) = \{\bar{\omega}_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1,$$

где

$$\bar{x}_{0,j}(\tau) = \frac{a^j \tau^{\mu-1/3}}{\Gamma(\mu+2/3)}, \quad \bar{x}_{n,j}(\tau) \equiv x_{n,j}(\tau) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.15)$$

$$\bar{\omega}_{0,j}(\tau) = a^j \frac{\sigma^{-v} \Gamma(1+v)}{3 \Gamma(1/3+v-\mu)} (\sigma - \tau)^{v-\mu-2/3}, \quad (1.16')$$

* В работе [3], как в определении 1° (стр. 54), так и всюду дальше, интервалом изменения параметра v предполагался $\bar{\Delta}_1 = (\mu, \mu + 1/6) (\subset \bar{\Delta})$. Однако, соответствующие утверждения этой работы, как нетрудно убедиться, сохраняют силу при всех $v \in \bar{\Delta}$.

$$\bar{\omega}_{n,j}(\tau) = x^j \frac{\sigma^{-\nu}}{3 \bar{\lambda}_n^2 \bar{e}_n(\bar{\lambda}_n, \nu)} \times \\ \times E_{3/2}(\alpha^{-1} \bar{\lambda}_n (\sigma - \tau)^{2/3}, \nu + 1/3 - \mu) (\sigma - \tau)^{\nu - \mu - 2/3} (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.16'')$$

Легко проверить, что в обоих случаях 1° или 2° введенные функции будут из класса $L_2(0, \sigma)$, а произведения любых двух из них, взятых в отдельности по каждой из указанных систем, будут из класса $L_1(0, \sigma)^*$.

(б) Для произвольной пары трехкомпонентных вектор-функций из $L_2(0, \sigma)$

$$y(\tau) = [y_j(\tau)]_{-1}^1 \text{ и } z(\tau) = [z_j(\tau)]_{-1}^1, \quad (1.17)$$

определим их скалярное произведение и норму, положив

$$(y, z) = \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma y_j(\tau) \overline{z_j(\tau)} d\tau, \quad \|y\| = (y, y)^{1/2}. \quad (1.18)$$

Очевидно, что $\|y\| = 0$ только когда $y_j(\tau) = 0$ ($j = -1, 0, 1$) почти всюду на $(0, \sigma)$.

Справедлива следующая теорема (см. [3], теорему 4.2).

Теорема I. 1°. При $\nu \in \Delta$ системы вектор-функций (1.11) би-ортонормальны в метрике (1.16). Иными словами, согласно обозначениям (1.11')

$$(x_n, \omega_m) = \delta_{n,m} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.19)$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронеккера.

2°. При $\nu \in \tilde{\Delta}$ системы вектор-функций (1.14) биортонормальны в метрике (1.16). Иными словами, согласно обозначениям (1.14')

$$(\tilde{x}_0, \tilde{\omega}_0) = 1, \quad (\tilde{x}_j, \tilde{\omega}_m) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.20)$$

$$(\tilde{x}_n, \tilde{\omega}_1) = 0, \quad (\tilde{x}_n, \tilde{\omega}_m) = \delta_{n,m} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots).$$

(в) Целесообразно путем простой перенормировки ввести еще две пары вектор-систем, определив их таким образом:

1°. При $\nu \in \Delta$ положим

$$M_{n,j}(\tau) = (1+n)^{\mu-1} x_{n,j}(\tau), \quad \Omega_{n,j}(\tau) = (1+n)^{1-\mu} \omega_{n,j}(\tau) \quad (1.21) \\ (n = 0, 1, 2, \dots; j = -1, 0, 1),$$

или короче

$$M_n(\tau) = (1+n)^{\mu-1} x_n(\tau), \quad \Omega_n(\tau) = (1+n)^{1-\mu} \omega_n(\tau) \quad (1.21') \\ (n = 0, 1, 2, \dots).$$

2°. При $\nu \in \tilde{\Delta}$ положим

* Приведенные выше функции тождественны с соответствующими функциями работы [3], если только в них произвести замену $\mu_n = \alpha^{-1/2} \lambda_n$ ($n \geq 0$).

$$\tilde{M}_{0,j}(\tau) = \tilde{x}_{0,j}(\tau), \quad \tilde{M}_{n,j}(\tau) = (1+n)^{n-1} \tilde{x}_{n,j}(\tau), \quad (1.22)$$

$$\tilde{\Omega}_{0,j}(\tau) = \tilde{\omega}_{0,j}(\tau), \quad \tilde{\Omega}_{n,j}(\tau) = (1+n)^{1-n} \tilde{\omega}_{n,j}(\tau) \\ (n=0, 1, 2, \dots; j=-1, 0, 1),$$

или короче

$$\tilde{M}_0(\tau) = \tilde{x}_0(\tau), \quad \tilde{M}_n(\tau) = (1+n)^{n-1} \tilde{x}_n(\tau) \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (1.22')$$

$$\tilde{\Omega}_0(\tau) = \tilde{\omega}_0(\tau), \quad \tilde{\Omega}_n(\tau) = (1+n)^{1-n} \tilde{\omega}_n(\tau)$$

Пользуясь этими определениями утверждение теоремы 1 можно сформулировать в следующем виде.

Теорема I'. 1°. При $v \in \Delta$ имеем

$$\{M_n, \Omega_m\} = \delta_{n,m} \quad (n, m=0, 1, 2, \dots). \quad (1.19')$$

2°. При $v \in \tilde{\Delta}$ имеем

$$\{\tilde{M}_0, \tilde{\Omega}_0\} = 1, \quad \{\tilde{M}_0, \tilde{\Omega}_m\} = 0, \\ \{\tilde{M}_n, \tilde{\Omega}_0\} = 0, \quad \{\tilde{M}_n, \tilde{\Omega}_m\} = \delta_{n,m}. \quad (n, m=0, 1, 2, \dots) \quad (1.20')$$

Второй результат работы [3] (теорема 5.4), необходимый для дальнейшего изложения, может быть сформулирован следующим образом.

Теорема II. Пусть $v \in \Delta$, или $v \in \tilde{\Delta}$. Тогда система вектор-функций (1.21)—(1.21'), или соответственно, система вектор-функций (1.22)—(1.22'), биортогональны на $(0, \sigma)$ и образуют базис Рисса в пространстве $L_2(0, \sigma)$ трехкомпонентных вектор-функций $\varphi(\tau) = \{\varphi_j(\tau)\}_1^3 \in L_2(0, \sigma)$, вектор-ряды при $v \in \Delta$

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi, \Omega_n\} M_n(\tau), \quad (1.23')$$

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi, M_n\} \Omega_n(\tau), \quad (1.23'')$$

или вектор-ряды при $v \in \tilde{\Delta}$

$$\varphi(\tau) = \{\varphi, \tilde{\Omega}_0\} \tilde{M}_0(\tau) + \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi, \tilde{\Omega}_n\} \tilde{M}_n(\tau), \quad (1.24')$$

$$\varphi(\tau) = \{\varphi, \tilde{M}_0\} \tilde{\Omega}_0(\tau) + \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi, \tilde{M}_n\} \tilde{\Omega}_n(\tau) \quad (1.24'')$$

1) сходятся в среднем в метрике вектор-пространства $L_2(0, \sigma)$,

2) имеют место двойные неравенства

$$[\varphi, \varphi] = \|\varphi\|^2 \asymp \sum_{n=0}^{\infty} |[\varphi, \Omega_n]|^2 \asymp \sum_{n=0}^{\infty} |[\varphi, M_n]|^2, \quad v \in \Delta, \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned}
|\varphi, \varphi| &= \|\varphi\|^2 \asymp \|\varphi, \tilde{\Omega}_0\|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi, \tilde{\Omega}_n\|^2 \asymp \\
&\asymp \|\varphi, \tilde{M}_0\|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi, \tilde{M}_n\|^2, \quad \forall \varphi \in \tilde{\Delta}.
\end{aligned} \quad (1.26)$$

§ 2. Построение биортогональных систем на совокупности отрезков $\nabla(\sigma)$ комплексной плоскости

2.1 (а) Взамен отмеченных в § 1 пар систем вектор-функций, биортогональных на $(0, \sigma)$, теперь необходимо ввести в рассмотрение другого рода пары систем функций от переменной z , биортогональных на совокупности трех отрезков

$$\nabla(\sigma) = \bigcup_{j=-1}^1 \nabla_j(\sigma), \quad \nabla_j(\sigma) = \{z = a^j r, 0 \leq r \leq \sigma^{2/3}\} \quad (2.1)$$

комплексной плоскости.

1°. При $\nu \in \Delta = (\mu - 1/6, \mu + 1/6)$, $2/3 \leq \mu \leq 1$ введем пару систем

$$\{E_n(z)\}_{\vec{0}} \text{ и } \{F_n(z)\}_{\vec{0}}, \quad z \in \nabla(\sigma), \quad (2.2)$$

положив для $z \in \nabla_j(\sigma)$ ($j = -1, 0, 1$)

$$E_n(z) \equiv E_{n,j}(r) = a^{\left(\frac{3\mu}{2} - 1\right)j} x_{n,j}(r^{3/2}) r^{1/2} = E_{3/2}(\lambda_n a^j r, \mu) (a^j r)^{\frac{3\mu}{2} - 1}, \quad (2.2')$$

$$F_n(z) \equiv F_{n,j}(r) = \frac{3}{2} a^{\left(\frac{3\mu}{2} - 1\right)j} \omega_{n,j}(r^{3/2}) r^{-1/2}.$$

2°. При $\nu \in \bar{\Delta} = (\mu + 1/6, \mu + 1/2)$, $2/3 \leq \mu \leq 1$ введем другую пару систем

$$\{\tilde{E}_0^*(z), [\tilde{E}_n(z)]_{\vec{0}}\} \text{ и } \{\tilde{F}_0^*(z), [\tilde{F}_n(z)]_{\vec{0}}\}, \quad z \in \nabla(\sigma), \quad (2.3)$$

положив для $z \in \nabla_j(\sigma)$ ($j = -1, 0, 1$)

$$\tilde{E}_0^*(z) \equiv \tilde{E}_{0,j}(r) = a^{\left(\frac{3\mu}{2} - 1\right)j} x_{0,j}(r^{3/2}) r^{1/2} = \frac{z^{\frac{3\mu}{2}}}{\Gamma(\mu + 2/3)}, \quad (2.4')$$

$$\tilde{F}_0^*(z) \equiv \tilde{F}_{0,j}(r) = \frac{3}{2} a^{\left(\frac{3\mu}{2} - 1\right)j} \omega_{0,j}(r^{3/2}) r^{1/2},$$

а затем

$$\bar{E}_n(z) = \tilde{E}_{n,j}(r) \equiv E_{n,j}(r), \quad (2.4'')$$

$$\bar{F}_n(z) = \tilde{F}_{n,j}(r) \equiv F_{n,j}(r).$$

(б) Обозначим через $L_2^{(1/2)}[\nabla(\sigma)]$ множество определенных на $\nabla(\sigma)$ функций $\Psi(z)$, для которых

$$\|\Psi, \nabla(\sigma)\| = \left(\int_{\nabla(\sigma)} |\Psi(z)|^2 |z|^{1/2} |dz| \right)^{1/2} < +\infty. \quad (2.5)$$

Далее, для любой пары функций $\Psi_k(z) \in L_2^{(1/2)}[\nabla(\sigma)]$ ($k = 1, 2$) определим их скалярное произведение, положив

$$[\Psi_1, \Psi_2]_{\nabla(\sigma)} = [\Psi_1, \Psi_2] = \int_{\nabla(\sigma)} \Psi_1(z) \overline{\Psi_2(z)} |z|^{1/2} |dz|, \quad (2.6)$$

и заметив, что тогда

$$|[\Psi_1, \Psi_2]| \leq \|\Psi_1\| \cdot \|\Psi_2\|. \quad (2.7)$$

Нетрудно убедиться в том, что функции каждой из систем (2.2) и (2.3) принадлежат классу $L_2^{(1/2)}[\nabla(\sigma)]$, и тем самым, скалярные произведения (2.7) любой пары функций, взятых в отдельности по каждой из них, всегда конечны. Вместе с тем, для любых функций $\Psi_1, \Psi_2 \in L_2^{(1/2)}[\nabla(\sigma)]$, ввиду (2.1), будем иметь

$$\begin{aligned} [\Psi_1, \Psi_2] &= \sum_{j=-1}^1 \int_{\nabla_j(\sigma)} \Psi_1(z) \overline{\Psi_2(z)} |z|^{1/2} |dz| = \\ &= \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} \Psi_1(\alpha^j r) \overline{\Psi_2(\alpha^j r)} r^{1/2} dr. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Теперь на основе теоремы I (§ 1), установим биортогональность введенных выше систем на совокупности отрезков $\nabla(\sigma)$ и в метрике (2.8).

Теорема 2.1.1°. При $\sigma \in \Delta$ системы функций (2.2) биортогональны на $\nabla(\sigma)$ в метрике (2.8), т. е.

$$[E_n, F_m] = \delta_{n,m} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.9)$$

2°. При $\sigma \in \bar{\Delta}$ системы функций (2.3) биортогональны на $\nabla(\sigma)$ в метрике (2.8), т. е.

$$\begin{aligned} [\tilde{E}_0^*, \tilde{F}_0^*] &= 1, [\tilde{E}_0^*, \tilde{F}_m^*] = 0, \\ [\tilde{E}_n, \tilde{F}_0^*] &= 0, [\tilde{E}_n, \tilde{F}_m^*] = \delta_{n,m}. \end{aligned} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.10)$$

Доказательство. Пользуясь первой из формул (2.8) и определениями (2.2'), получим

$$\begin{aligned} [E_n, F_m] &= \sum_{j=-1}^1 \int_{\nabla_j(\sigma)} E_{n,j}(r) \overline{F_{m,j}(r)} r^{1/2} dr = \\ &= \sum_{j=-1}^1 \frac{3}{2} \int_0^{\sigma^{2/3}} x_{n,j}(r^{3/2}) \overline{\omega_{m,j}(r^{3/2})} r^{1/2} dr = \\ &= \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} x_{n,j}(\tau) \overline{\omega_{m,j}(\tau)} d\tau = [x_n, \omega_m] = \delta_{n,m} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

2°. В силу (2.4')–(2.4'') вполне аналогичным образом из теоремы I (2°) следуют равенства

$$[\tilde{E}_0^*, \tilde{F}_0^*] = \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} \tilde{x}_{0,j}(\tau) \overline{\tilde{\omega}_{0,j}(\tau)} d\tau = [\tilde{x}_0^*, \tilde{\omega}_0^*] = 1,$$

$$[\tilde{E}_0^*, \tilde{F}_m] = \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} \tilde{x}_0(\tau) \overline{\tilde{\omega}_m(\tau)} d\tau = [\tilde{x}_0^*, \tilde{\omega}_m] = 0,$$

$$[\tilde{E}_n, \tilde{F}_0^*] = \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} \tilde{x}_{n,j}(\tau) \overline{\tilde{\omega}_0^*(\tau)} d\tau = [\tilde{x}_n, \tilde{\omega}_0^*] = 0,$$

$$[\tilde{E}_n, \tilde{F}_m] = \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} \tilde{x}_{n,j}(\tau) \overline{\tilde{\omega}_{m,j}(\tau)} d\tau = [\tilde{x}_n, \tilde{\omega}_m] = \delta_{n,m}$$

$$(n, m = 0, 1, 2, \dots).$$

Итак, соотношения (2.9) и (2.10) справедливы.

(в) Наряду с введенными системами полезно ввести также их простые модификации, определив:

при $\nu \in \Delta$ системы

$$\{e_n(z)\}_{\sigma}^* \text{ и } \{T_n(z)\}_{\sigma}^*, \quad z \in \nabla(\sigma) \quad (2.11)$$

как

$$e_n(z) = (1+n)^{\mu-1} E_n(z) \text{ и } T_n(z) = (1+n)^{1-\mu} F_n(z), \quad (2.12)$$

при $\nu \in \Delta$ системы

$$\{\tilde{e}_0^*(z), [\tilde{e}_n(z)]_{\sigma}^*\} \text{ и } \{\tilde{T}_0^*(z), [\tilde{T}_n(z)]_{\sigma}^*\} \quad (2.13)$$

как

$$\tilde{e}_0^*(z) = \tilde{E}_0^*(z), \quad \tilde{T}_0^*(z) = \tilde{F}_0^*(z), \quad (2.14)$$

$$\tilde{e}_n(z) = (1+n)^{\mu-1} \tilde{E}_n(z), \quad \tilde{T}_n(z) = (1+n)^{1-\mu} \tilde{F}_n(z). \quad (2.14')$$

Очевидно, что системы (2.11) и (2.13) сохраняют все свойства биортогональности первоначальных систем (2.2) и (2.3), приведенные в теореме 2.1.

§ 3. Базисность систем собственных функций на системе отрезков $\nabla(\sigma)$

3.1 (а) Наряду с пространством $L_2^{(1/2)}[\nabla(\sigma)]$ необходимо ввести в рассмотрение также пространство $L_2^{(-1/2)}[\nabla(\sigma)]$ функций $\Phi(z)$, вновь заданных на совокупности отрезков $\nabla(\sigma)$, но подчиненных взамен (2.5) уже условию

$$\int |\Phi(z)|^2 |z|^{-1/2} |dz| < +\infty. \quad (3.1)$$

Заметим, что из очевидного неравенства

$$\int_{\nabla(\sigma)} |\Phi(z)|^2 |z|^{-1/2} |dz| > \sigma^{-2/3} \int_{\nabla(\sigma)} |\Phi(z)|^2 |z|^{1/2} |dz|$$

следует включение $L_2^{(-1/2)}[\nabla(\sigma)] \subset L_2^{(1/2)}[\nabla(\sigma)]$.

(б) Перейдем теперь к установлению основных результатов.

Теорема 3.1. Пусть $\nu \in \Delta = (\mu - 1/6, \mu + 1/6)$, $2/3 \leq \mu \leq 1$, и

$$\{E_n(z)\}_n^\infty = \{E_{3/2}(\nu, z, \mu) z^{\frac{3\mu}{2}-1}\}_n^\infty, \quad z \in \nabla(\sigma) \quad (3.2)$$

— системы собственных функций краевой задачи А.

Тогда нормированные согласно формулам (2.12) биортогональные на $\Delta(\sigma)$ системы функций

$$\{e_n(z)\}_n^\infty \text{ и } \{T_n(z)\}_n^\infty \quad (3.3)$$

образуют базис Рисса в $L_2^{(-1/2)}[\nabla(\sigma)]$.

Доказательство. Достаточно установить справедливость следующих двух утверждений для любой функции $\Phi(z) \in L_2^{(-1/2)}[\nabla(\sigma)]$.

1) Имеют место разложения

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi, T_n] e_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi, F_n] E_n(z) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi, e_n] T_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi, E_n] F_n(z), \end{aligned} \quad (3.4)$$

сходящиеся в метрике $L_2^{(-1/2)}[\nabla(\sigma)]$.

2) Имеют место двойные неравенства

$$\begin{aligned} \int_{\nabla(\sigma)} |\Phi(z)|^2 |z|^{-1/2} |dz| &\asymp \sum_{n=0}^{\infty} \|[\Phi, T_n]\|^2 \asymp \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{2(1-\mu)} \|[\Phi, F_n]\|^2 \asymp \\ &\asymp \sum_{n=0}^{\infty} \|[\Phi, e_n]\|^2 \asymp \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{2(\mu-1)} \|[\Phi, E_n]\|^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Метод доказательства опирается на теорему II, и поэтому нам достаточно установить справедливость первых строк соотношений (3.4) и (3.5).

С функцией $\Phi(z) \in L_2^{(-1/2)}[\nabla(\sigma)]$ будем ассоциировать трехкомпонентную вектор-функцию $\varphi(\tau) = \{\varphi_j(\tau)\}_{j=-1}^1$, положив

$$\varphi_j(\tau) = z^{-(\frac{3\mu}{2}-1)j} \Phi(z \tau^{2/3}) \tau^{-1/3} \quad (j = -1, 0, 1). \quad (3.6)$$

Заметим, что при этом $\varphi(\tau) \in L_2(0, \sigma)$, поскольку, как легко видеть

$$\int_0^\sigma |\varphi_j(\tau)|^2 d\tau < 2 \int_{\nabla(\sigma)} |\Phi(z)|^2 |z|^{-1/2} |dz| < +\infty \quad (j = -1, 0, 1).$$

Чтобы приступить непосредственно к доказательству теоремы, вычислим сначала значение $[\varphi, \omega_n]$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Пользуясь соответствующими определениями вектор-функций φ , ω_n и $F_n(z) = F_{n,j}(z)$, $z \in \Gamma_j(\sigma)$ (см. (2.2')), последовательно получим

$$\begin{aligned} [\varphi, \omega_n] &= \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} \varphi_j(\tau) \overline{\omega_{n,j}(\tau)} d\tau = \\ &= \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} \Phi(\alpha^j \tau^{2/3}) \overline{\alpha^{\left(\frac{3n}{2}-1\right)j} \omega_{n,j}(\tau)} d\tau = \\ &= \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma^{2/3}} \Phi(\alpha^j r) \left\{ \frac{3}{2} \alpha^{\left(\frac{3n}{2}-1\right)j} \overline{\omega_{n,j}(r^{3/2})} r^{-1/2} \right\} r^{1/2} dr = \\ &= \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma^{2/3}} \Phi(\alpha^j r) \overline{\dot{F}_{n,j}(r)} r^{1/2} dr = \\ &= \sum_{j=-1}^1 \int_{\Gamma_j(\sigma)} \Phi(z) \overline{\dot{F}_{n,j}(z)} |z|^{1/2} |dz| = [\Phi, F_n]. \end{aligned}$$

Итак, в силу (1.21)–(1.21'), имеем

$$[\varphi, \omega_n] = [\Phi, F_n] = (1+n)^{k-1} [\varphi, \Omega_n] \quad (n \geq 0). \quad (3.7)$$

Теперь воспользуемся теоремой II, согласно которой определяемые из (3.6) компоненты $\varphi_j(\tau)$ ($j = -1, 0, 1$) вектор-функции $\varphi(\tau) = [\varphi_j(\tau)]_{-1}^1$ в силу левого из равенств (1.21) и формулы (3.7) допускают разложения

$$\begin{aligned} \varphi_j(\tau) &= \alpha^{-\left(\frac{3n}{2}-1\right)j} \Phi(\alpha^j \tau^{2/3}) \tau^{-1/3} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi, \Omega_n] M_{n,j}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi, F_n] x_{n,j}(\tau) \quad (j = -1, 0, 1), \end{aligned}$$

сходящиеся в метрике $L_2(0, \sigma)$. Произведем здесь замену переменной $\tau = r^{3/2}$, тогда придем к разложениям

$$\Phi(\alpha^j r) r^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi, F_n] \alpha^{\left(\frac{3n}{2}-1\right)j} x_{n,j}(r^{3/2}) \quad (j = -1, 0, 1), \quad (3.8)$$

сходящимися в метрике $L_2(0, \sigma^{2/3}; dr^{3/2})$.

Наконец, согласно первой из формул (2.2'), имеет место равенство

$$\alpha^{\left(\frac{3n}{2}-1\right)j} x_{n,j}(r^{3/2}) r^{1/2} = E_n(z), \quad z \in \Gamma_j(\sigma) \quad (j = -1, 0, 1).$$

Отсюда и из (3.8) следует утверждение 1) о сходимости рядов (3.4) в метрике $L_2^{(-1/2)}[\nabla(\sigma)]$.

Чтобы завершить доказательство вновь обратимся к теореме II, а точнее к ее двойным неравенствам (1.25) применительно к выбранной нами вектор-функции $\varphi(\tau)$ с компонентами (3.6).

С одной стороны, мы будем иметь

$$\begin{aligned} (\varphi, \varphi) &= \sum_{j=-1}^1 \int_1^{\sigma} |\Phi(\alpha^j \tau^{2/3})|^2 \tau^{-2/3} d\tau = \\ &= \frac{3}{2} \sum_{j=-1}^1 \int_{\nabla_j(\sigma)} |\Phi(z)|^2 |z|^{-1/2} |dz| = \frac{3}{2} \int_{\nabla(\sigma)} |\Phi(z)|^2 |z|^{-1/2} |dz|. \end{aligned}$$

С другой стороны, так как в силу (3.7) и (2.12)

$$(\varphi, \Omega_n) = [\Phi, (1+n)^{1-\mu} F_n] = [\Phi, T_n] \quad (n \geq 0),$$

то двойные неравенства (1.25) могут быть записаны в виде (3.5).

Итак, соотношения (3.4)–(3.5) полностью доказаны. Что касается таких же утверждений при замене местами функций $T_n(z)$ и $e_n(z)$ в (3.4) и (3.5), то они устанавливаются вполне аналогичным способом на основе теоремы II.

Теорема 3.2. Пусть $\nu \in \bar{\Delta} = (\mu + 1/6, \mu + 1/2)$, $2/3 \leq \mu < 1$ и

$$\left\{ \frac{z^{\frac{3\mu}{2}}}{\Gamma(\mu + 2/3)}, \left[E_{3/2}(\lambda_n z, \mu) z^{\frac{3\mu}{2}-1} \right]_0^{\sigma} \right\} = \{\tilde{E}_0^{\circ}, [\tilde{E}_n(z)]_0^{\sigma}\}$$

— система собственных и присоединенных функций краевой задачи $\tilde{A}$.

Тогда биортогональные на $\Delta(\sigma)$ системы функций

$$\{\tilde{e}_0^{\circ}(z), [\tilde{e}_n(z)]_0^{\sigma}\} \text{ и } \{\tilde{T}_0^{\circ}, [\tilde{T}_n(z)]_0^{\sigma}\}$$

из (2.14)–(2.14') образуют базис Рисса в $L_2^{(-1/2)}[\nabla(\sigma)]$.

Доказательство мы опускаем, поскольку оно аналогично доказательству теоремы 3.1.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 11.XI.1987

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Կամպիս տիրույթում մի եզրային խնդրից ծնվող սեփական ֆունկցիաների բազիսայնությունը յստի (ամփոփում)

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է [1] հոդվածում որված A և $\tilde{A}$ եզրային խնդիրների սեփական ֆունկցիաների սիստեմների բազիս լինելը, կամպիս տիրույթում երեք հատվածների

$$\nabla(\sigma) = \bigcup_{j=-1}^1 \{z; z = ze^{i\frac{2\pi}{3}j}, j = -1, 0, 1\}$$

սիստեմի վրա, ֆունկցիաների

$$\int_{\nabla(\sigma)} |\chi(z)|^2 |z|^{-1/2} |dz| < +\infty$$

առարժեքյալն մեզ:

M. M. DJRBASHIAN. *On the basis property of eigenfunctions of a boundary value problem in complex plane (summary)*

In the present paper we prove the basis property of the eigenfunctions of the boundary value problems A and $\tilde{A}$ posed in [1] in the space of functions

$$\int_{\nabla(\sigma)} |\chi(z)|^2 |z|^{-1/2} |dz| < +\infty$$

with

$$\nabla(\sigma) = \bigcup_{j=-1}^1 \left\{ z; z = re^{i\frac{2\pi}{3}j}, j = 1, 0, 1 \right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, Об одной краевой задаче в комплексной области, Изв. АН АрмССР, «Математика», 2, № 6, 1987.
2. М. М. Джрбашян. Интерполяционные и спектральные разложения, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка, Изв. АН АрмССР, «Математика», 19, № 2, 1984, 81—181.
3. М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсисян. Разложение по некоторым биортogonalным системам и краевые задачи для дифференциальных операторов дробного порядка, Труды ММО, 10, 1961, 89—179.
4. М. М. Джрбашян, С. Г. Рафаелян. Интерполяционные разложения в классах целых функций и порождаемые ими базисы Рисса, Изв. АН АрмССР, «Математика», 22, № 1, 1987, 23—63.

UDK 517.986

V. ARZUMANIAN AND S. GRIGORIAN

THE BOUNDARIES OF UNIFORM ALGEBRAS OF OPERATOR FIELDS

O. Introduction. The paper is devoted to the investigation of the geometrical structure of the spectrum of operator-valued functional algebras—a noncommutative analog of usual uniform algebras. The objects of such kind were first introduced by Fell in [1] (so called maximal C^* -algebras of operator fields; detailed presentation of the theory see in [2]). Non-involutive closed subalgebras of such C^* -algebras present certain interest: a number of papers (see e. g. [3]—[5]) are devoted to generalizations of some results known for classical (commutative) uniform algebras.

In [6] the systematic investigation of uniform algebras of operator fields of a specific form was started, illustrating many difficulties inherent in the general case.

Let T be a compactum (for simplicity everywhere supposed metrizable), A be a C^* -algebra with identity, (called a fibre) and let $C(T, A)$ be the C^* -algebra of all continuous A -valued functions on T (from algebraic point of view $C(T, A)$ is the tensor product $C(T) \otimes A$). A uniform algebra $\mathfrak{M}$ is, by definition, a closed subalgebra of $C(T, A)$ separating points and containing the constants. The notion of relative spectrum $Sp_A \mathfrak{M}$ (generalizing the maximal ideal space) is defined as the set of all homomorphisms from $\mathfrak{M}$ into A which may be extended to a conditional expectation of $C(T, A)$ onto its subalgebra isomorphic to A . In the important case of A -algebras (uniform algebras which are A -submodules of $C(T, A)$) with simple fibre, the relative spectrum coincides with the space of all A -linear homomorphisms. The presence of a spectrum in the noncommutative case permits to consider also the other objects connected with it. Corresponding results for various classes of algebras are presented in [6].

In the paper we continue the investigation of noncommutative algebras in two directions. On the one hand, the new objects connected with the geometrical structure of the spectrum are introduced and investigated; on the other hand, the class of fibre C^* -algebras which permits a detailed analysis of corresponding uniform algebras is extended essentially.

In the first two sections we investigate the compactum $P_0(\mathfrak{M})$ (playing the role of "states" on the algebra $\mathfrak{M}$), the extreme points of which are characterized in terms of representing measures. In Section 3 we introduce the notion of reduced spectrum $Sp_r \mathfrak{M}$, adapted for uni-

form algebras with arbitrary fibre and coincided with $Sp_A \mathfrak{M}$ for an algebra A with trivial center. Instead of algebras with simple fibre we suggest for consideration the weakly*-transitive algebras, which permit to revise some results. The important notion of peak point replacing the notion of pure state for involutive algebras does not allow a literal generalization on the noncommutative case; the discussions of some possibilities are placed in Section 5. The main result of the paper consists of "function-theoretic" description of the set of extreme points of $P_0(\mathfrak{M})$, providing the existence of weak peak points of an A -algebra with weakly*-transitive fibre (Section 6). Note, that in [3] Taylor had given a description of peak points in terms of orthogonal operator-valued measures, and in [4], [5] the Hoffman-Wermer theorem was proved in the factual assumption of the existence of peak points. In Section 7 the notion of Shilov boundary is introduced and the maximum principle is proved. The present paper may be considered as a continuation of [6], the results of which are used constantly. A certain (very small) part of facts were announced in [7].

All the information, pertinent concepts and results, used without mentioning the source, can be found in the monographs [2], [8], [9].

1. **The compactum $P_0(T, A)$.** In this Section we introduce and investigate the space $P_0(T, A)$ — a subset of the space of all conditional expectations of the algebra $C(T, A)$ onto its subalgebra A^1 , coinciding with it for the algebras with trivial center. This space is compact for every fibre, which permits essentially extend the class of algebras under consideration. In the next Section the obtained results are generalized to arbitrary uniform subalgebras of $C(T, A)$.

Let T be a metrizable compactum (non single-point), A be a unital C^* -algebra, and $C(T, A)$ be the C^* -algebra of all continuous mappings from T into the algebra A . Let $P(T, A)$ be the set of all conditional expectations from $C(T, A)$ onto the subalgebra A equipped with the topology of pointwise convergence (the details see in [6], Section 2). This set is a closed convex subset of the space of all continuous A -linear mappings of $C(T, A)$ into A . Denote by $P_0(T, A)$ the subset of those conditional expectations, the restrictions of which on $C\{T\}$ are linear functionals (i. e. $p \in P_0(T, A)$ iff $p(C(T)) \subseteq Ce$, e being the identity of A).

Proposition 1.1. *The sets $P_0(T, A)$ and $P(T, A)$ are coinciding iff algebra A is with trivial center.*

Proof. Let $Z(N)$ be the center of an algebra N . Note at first, that $C(T) \subseteq Z(C(T, A))$ (see [6], Proposition 1.4), therefore for each $p \in P(T, A)$ we have $p(C(T)) \subseteq Z(A)$ (cf. [6], the beginning of the proof of Theorem 3.3). Hence, if the algebra A is with trivial center then $P_0(T, A) = P(T, A)$. Conversely, let $Z(A) = C(Y)$ for a non single-point compact Y , and h be some Uryson function on Y , where $0 \leq h(y) \leq 1$. For $x \in C(T, A)$ put $p(x) = x(t_1)h + x(t_2)(1 - h)$, $t_1 \neq t_2$. Evidently,

¹ In contrast with [6], in this paper we make no difference between the algebras A , $C(T)$, and their isomorphic images in $C(T, A)$.

p is a conditional expectation and $p \in P_0(T, A)$ since its values on $C(T)$ are not constants (by the properties of h).

Thus, for the algebras with non-trivial center, $P_0(T, A)$ is a proper subset of $P(T, A)$ which is, obviously, convex and closed in the topology of pointwise convergence; in addition T is imbedded in $P_0(T, A)$ (identifying the compact T with the set of atomic conditional expectations, $p_t(x) = x(t)$, $t \in T$, $x \in C(T, A)$).

Proposition 1.2. *The set $P_0(T, A)$ is a convex subcompactum of the space of all continuous A -linear mappings of $C(T, A)$ into the algebra A .*

Proof. Show, that $P_0(T, A)$ is homeomorphic to the state space of the algebra $C(T)$, from which the result is following at once.

Clearly, every $p \in P_0(T, A)$ determines some state on $C(T)$, namely the restriction of p on $C(T)$. Here the different p_1, p_2 from $P_0(T, A)$ determine the different states (see the beginning of the proof of Theorem 3.3, [6]).

Conversely, each extreme point of the state space of $C(T)$ is determined by some t from T and in turn determines a conditional expectation $p_t \in P_0(T, A)$. The finite convex combinations of such states are corresponding to some conditional expectations from $P_0(T, A)$ (as this set is convex). The restriction mapping $p \rightarrow p|C(T)$ is continuous hence it is extendable to the whole of the state space of $C(T)$ (remind that $C(T, A)$ is generated by its subalgebras A and $C(T)$, see [6], Proposition 1.4).

Remark 1.3. Thus, $P_0(T, A)$ may be identified with the state space of the algebra $C(T)$, hence with the space $M(T)$ of probability Borel measures on T . That permits to define an A -valued integral on T for each $x \in C(T, A)$ with respect to the measure μ by the formula

$$\int x(t) d\mu(t) = p_\mu(x) \quad (1.1)$$

where p_μ is the conditional expectation from $P_0(T, A)$, corresponding to the measure μ . In turn, every measure corresponding to some $p \in P_0(T, A)$ will be called *representing* for p .

Proposition 1.4. *The space $P(T, A)$ is homeomorphic to the set of all continuous mappings of the maximal ideal space of $Z(A)$ (the center of the algebra A) into $P_0(T, A)$, equipped with the topology of pointwise convergence.*

Proof. Let $p \in P(T, A)$, and p_0 be the restriction of p on $C(T)$. Then (see the proof of Proposition 1.1) p_0 maps $C(T)$ into $Z(A)$, hence it uniquely determines a continuous mapping of the compactum Y into the state space of $C(T)$ (here we identify $Z(A)$ with $C(Y)$ for some compactum Y). It follows from Remark 1.3 that this mapping is coinciding with the mapping of Y into $P_0(T, A)$.

Now let $h: Y \rightarrow P_0(T, A)$; show that this continuous mapping generates some conditional expectation from $P(T, A)$. Two elementary facts from the theory of C^* -algebras are necessary for this purpose. The proofs

we adduce for the completeness (and on account of the absence of references).

Lemma 1.4.1. *The restriction of any pure state of an arbitrary unital C^* -algebra A on its center is also the pure state.*

Proof. Let φ be a pure state on A , $\varphi \in P(A)$, and φ_0 be the restriction of φ on $Z(A) = C(Y)$. If φ_0 is not a pure state then it is determined by some non-atomic measure μ on Y . Let F be the support of this measure and F_0 be a closed subset of F such that $0 < \mu(F_0) < 1$ and let f be a continuous function on Y equal to 0 outside of F_0 and such [that $\int f d\mu \neq 0$. Thus $0 < \varphi_0(f) < 1$. Then the functional φ_f on A

defined by the formula $\varphi_f(a) = \varphi(af)$ is positive and is majorized by the state φ (the last statement is verified by follows: $(\varphi - \varphi_f)(a) = \varphi(a - af) = \varphi((e - f)a) \geq 0$). Therefore, $\varphi_f = \lambda\varphi$, which is impossible since φ_f and φ_0 have different supports.

Lemma 1.4.2. *For each pure state φ of a unital C^* -algebra A , $\varphi(af) = \varphi(a)\varphi(f)$, where $a \in A$, $f \in Z(A)$.*

Proof. Let $\varphi(a) = 1$ and let φ_a be a functional on $Z(A)$, defining by the formula $\varphi_a(f) = \varphi(af)$. Show that $\varphi_a = \varphi|Z(A)$. Let $y_0 \in Y$ be such that $\varphi(f) = f(y_0)$ for each $f \in C(Y)$ (see Lemma 1.4.1), then, if there exists $f \in C(Y)$ for which $|\varphi_a(f)| \neq f(y_0)$, then the function $g = f - f(y_0)$ has the property: $\varphi_a(g) \neq 0$. On the other hand $|\varphi_a(g)|^2 = |\varphi(ag)|^2 \leq \varphi(|g|^2) \varphi(aa^*) = 0$, since $\varphi(|g|^2) = |g|^2(y_0) = 0$. Thus, for every $f \in Z(A)$, $\varphi(af) = \varphi(f)$. Hence for each $a \in A$, $a \neq 0$, $\varphi(af) = \varphi(a)\varphi(f)$. If $\varphi(a) = 0$, then $\varphi((1-a)f) = \varphi(1-a)\varphi(f)$, from which we obtain $\varphi(af) = 0$.

Return to the proof. So, let $h: Y \rightarrow P_0(T, A)$ then, for every $\in C(T)$ one can define the mapping $a_h: C(T) \rightarrow C(Y)$ by the formula $a_h(f)(y) = h(y)(f)$ (note, that we identify everywhere $C(Y)$ with $Z(A)$ and $P_0(T, A)$ with the state space of $C(T)$). Thus, a_h is a linear mapping from $C(T)$ into A . Show that it can be extended to conditional expectation on $C(T, A)$.

Let $x = \sum a_i f_i$, $x \in C(T, A)$, $a_i \in A$, $f_i \in C(T)$. Let us verify the inequality

$$\|\sum a_i a_h(f_i)\| \leq \|\sum a_i f_i\|. \quad (1.2)$$

In fact, if $P(A)$ is the pure state space of A , then by Lemma 1.4.2

$$\|\sum a_i a_h(f_i)\|^2 = \sup_{\varphi \in P(A)} \|\sum_{i,j} \varphi(a_i^* a_j) \varphi(a_h(f_i)^*) \varphi(a_h(f_j))\|.$$

Let $\varphi(f) = f(y)$ for each $f \in C(T)$ (see Lemma 1.4.1), then

$$\|\sum a_i a_h(f_i)\|^2 = \sup_{\varphi \in P(A)} \|\sum_{i,j} \varphi(a_i^* \overline{a_h(f_i)}(y) a_j a_h(f_j)(y))\| \leq$$

$$\leq \sup_{y \in Y} \|\sum_{i,j} a_i^* \overline{h(y)(f_i)} a_j h(y)(f_j)\| =$$

$$= \sup_{y \in Y} \|\sum_i h(y)(a_i f_i)\|^2 \leq \|\sum_i a_i f_i\|^2.$$

It follows from (1.2) first the possibility to define correctly an operator p_h on $C_0(T, A)$ (see Proposition 1.4, [6]), $p_h(\sum a_i f_i) = \sum a_i \alpha_h(f_i)$ and, secondly, its continuity on this set, which permits to extend it to an operator $\hat{p}_h: C(T, A) \rightarrow A$. This operator is an A -linear projector and it follows from (1.2) that its norm is equal to 1. Then by the Tomiyama theorem (see [9]), $p_h \in P(T, A)$.

It is easy to show that the mapping $h \rightarrow p_h$ is inverse to the mapping which was constructed in the first part of the proof, hence we obtain the bijection of both the sets appearing in the statement. The continuity of all these mappings is obvious.

2. The compactum $P_0(\mathfrak{X})$. For a noncommutative uniform algebra $\mathfrak{X} \subset C(T, A)$ we introduce the space $P_0(\mathfrak{X})$, the object playing the key role in the further considerations. In a sense it replaces the state space concept for noninvolutive algebra $\mathfrak{X}$. The main result (Proposition 2.2) characterizes the extreme points of $P_0(\mathfrak{X})$ (Choquet boundary) in terms of representing measures.

Let $\mathfrak{X}$ be a uniform algebra, $\mathfrak{X} \subset C(T, A)$, and let $P_0(\mathfrak{X})$ be the restriction of $P_0(T, A)$ on $\mathfrak{X}$. It follows from Proposition 1.2 that this set is convex.

Remark 2.1. It is obvious by Remark 1.3, that every $p \in P_0(\mathfrak{X})$ is corresponding to some measure $\mu \in M(T)$, however to not a unique one. Each such a measure will also be called representing for p .

The following statement describes the extreme point set $\text{ext } P_0(\mathfrak{X})$ of the compact $P_0(\mathfrak{X})$.

Proposition 2.2. *Let $\mathfrak{X}$ be a uniform algebra, $\mathfrak{X} \subset C(T, A)$. Then $\text{ext } P_0(\mathfrak{X})$ is a subset of T and is coinciding with the set of those $t \in T$, for which p_t has a unique representing measure.*

Proof. Show at first that each extreme point of $P_0(\mathfrak{X})$ is corresponding to an atomic measure on T : Let μ be a representing measure for $p \in \text{ext } P_0(\mathfrak{X})$ which is not atomic. Then overcoming some technical difficulties one can show that there exist measures μ_1 and μ_2 , such that $\mu = \lambda \mu_1 + (1 - \lambda) \mu_2$, where $0 < \lambda < 1$ and $\int x d\mu_1 \neq \int x d\mu_2$, $x \in \mathfrak{X}$, hence p is a convex combination of elements p_1, p_2 from $P_0(\mathfrak{X})$ (which are corresponding to μ_1 and μ_2).

The rest of the statement is an immediate consequence of the fact that $\mathfrak{X}$ is point separating.

Corollary 2.3. *For a uniform algebra $\mathfrak{X} \subset C(T, A)$, the space $P_0(\mathfrak{X})$ is the restriction of $P(T, A)$ on $\mathfrak{X}$ iff the algebra is with trivial center.*

Proof. If $Z(A) = C$ then by Proposition 1.1, the statement is evident.

Conversely, let $Z(A) = C(Y)$, where Y is not single-point. Show that $P(T, A) \not\subset P_0(\mathfrak{X})$. Let us suppose at first that the maximal ideal space of $Z(A)$ is connected and let h be a Uryson function on Y , $0 \leq h(y) \leq 1$, $h \in C(Y)$ and t_1, t_2 be two different points of T . Put $p_n(x) = x(t_1)h^n + x(t_2)(1 - h^n)$, where $x \in C(T, A)$, $n = 1, 2, \dots$. It is obvious that all p_n are distinct on $\mathfrak{X}$ and belong to $P(T, A)$. If for each n ,

$p_n|\mathfrak{X} \in P_0(\mathfrak{X})$, then in view of the compactness of this set, there exists a subsequence $p_{n_k}|\mathfrak{X}$ which converges to some p_0 from $P_0(\mathfrak{X})$. Let $x_0 \in \mathfrak{X}$ be such that $x_0(t_1) = e$, $x_0(t_2) = 0$, then $p_{n_k}(x_0) \rightarrow p_0(x_0)$. On the other hand $p_{n_k}(x_0) = h^{n_k}$; but this sequence may not have a limit.

Suppose now that Y is not connected, and let q_1, q_2 be two orthogonal projectors from $Z(A)$, $q_1 + q_2 = e$, $q_1 q_2 = 0$. Let $\mathfrak{X}_i = q_i \mathfrak{X}$, $i = 1, 2$, then it is easy to check that $\mathfrak{X}_i$ are uniform algebras, $\mathfrak{X}_i \subset C(T, q_i A)$. Let $p_i \in \text{ext } P_0(\mathfrak{X}_i)$, $t_1 \neq t_2$, then if we put $p(x) = x(t_1)q_1 + x(t_2)q_2$, for $x \in C(T, A)$ then p is a conditional expectation from $P(T, A)$. If $p|\mathfrak{X} \in P_0(\mathfrak{X})$, then $p(x) = \int x d\mu$ for some representing measure on T . Hence $p(x) = q_1 \int x d\mu + q_2 \int x d\mu = q_1 x(t_1) + q_2 x(t_2)$, from which $q_1(\int x d\mu - x(t_1)) = q_2(x(t_2) - \int x d\mu)$. It follows from the orthogonality of q_1 and q_2 that $\int q_i x d\mu = q_i x(t_i)$, $i = 1, 2$, that is $\int y d\mu = y(t_i)$ for each $y \in \mathfrak{X}_i$. Therefore μ is a representing measure for $p_i \in \text{ext } P_0(\mathfrak{X}_i)$ and for $p_i \in \text{ext } P_0(\mathfrak{X}_2)$. This is impossible since Proposition 2.2, as $t_1 \neq t_2$.

This fact generalizes Proposition 1.1.

3. The reduced spectrum of a uniform algebra. The objects which were introduced in the previous sections permit to revise the concept of the spectrum of a noncommutative uniform algebra, suitable for an essentially larger class of algebras. The notion of reduced spectrum is coinciding with $Sp_A \mathfrak{X}$ for algebras with trivial center, and in particular is homeomorphic to the compactum of maximal ideals for the usual uniform algebras (i. e. when $A = \mathbb{C}$). For a specific class of algebras one can give an "inner" definition of reduced spectrum (see Corollary 4.4, cf. Theorem 3.6, [6]).

Definition 3.1. *The reduced spectrum of a uniform algebra $\mathfrak{X}$ from $C(T, A)$ will be called the set $Sp_A^0 \mathfrak{X}$ of all homomorphisms of $\mathfrak{X}$ into the algebra A , extendable to conditional expectations from $P_0(T, A)$, equipped with the topology of pointwise convergence.*

Thus, $Sp_A^0 \mathfrak{X} = Sp_A \mathfrak{X} \cap P_0(\mathfrak{X})$.

Proposition 3.2. *The reduced spectrum of a uniform algebra $\mathfrak{X}$ is compact, moreover, $Sp_A^0 C(T, A)$ coincides with T . If the algebra A is with trivial center, then $Sp_A^0 \mathfrak{X} = Sp_A \mathfrak{X}$.*

Proof. The set $Sp_A^0 \mathfrak{X}$ is the image of a continuous mapping (the restriction) of some closed subset of $P_0(T, A)$ which is compact (by Proposition 1.2). If $Z(A)$ is trivial then it follows from Corollary 2.3 that $Sp_A^0 \mathfrak{X}$ coincides with $Sp_A \mathfrak{X}$. At last, Remark 1.3 permits evidently to conclude that $Sp_A^0 C(T, A) = T$.

Note that this result is a generalization of Theorem 3.3 and a revision of Corollary 3.5 from [6].

4. **Uniform algebras with weakly*-transitive fibre.** In the paper [6] for uniform A -algebras with simple fibre there was established the coincidence of the relative spectrum with the set all A -linear homomorphisms of $\mathfrak{M}$ into A (Theorem 3.6, [6]). This is not true for algebras with arbitrary fibre. Receding a little from the main subject, let us show (corollary 4.4) in more general case, that continuous homomorphisms can be extended to conditional expectations (in other words, that $P_0(\mathfrak{M})$ coincides with the set of all A -linear continuous homomorphisms of $\mathfrak{M}$ into A).

Let φ be a state of a unital C^* -algebra A , $\varphi \in S(A)$, and u be a unitary from A , $u \in U(A)$. Denote by φ_u the state on A defining by the formula $\varphi_u(a) = \varphi(u^*au)$, $a \in A$. It is easy to check that if φ is pure, then φ_u is also pure, $\varphi, \varphi_u \in P(A)$.

Definition 4.1. A state φ on a C^* -algebra A is called *total*, if the set of finite convex combinations of the states φ_u , when u runs over $U(A)$, is weakly*-dense in $S(A)$, i. e. $\overline{\text{co}\{\varphi_u, u \in U(A)\}} = S(A)$. A C^* -algebra is called *weakly*-transitive* if it possess a pure total state.

Proposition 4.2. (i) Every weakly*-transitive algebra has trivial center.

(ii) A C^* -algebra is simple iff each its pure state is total.

Proof. (i) Let A be a weakly*-transitive algebra, and φ be a total pure state. Suppose $Z(A)$ is not trivial. Then $Z(A) = C(Y)$ for some non single-point compact Y . We have $\varphi|_{Z(A)} \in P(Z(A))$ (see Lemma 1.4.1) from which we obtain $\varphi(f) = f(y_0)$ for some y_0 from Y and all $f \in C(Y)$. It is evident, that for each $u \in U(A)$ we have $\varphi_u|_{Z(A)} = \varphi|_{Z(A)}$, therefore the state $\psi \in S(A)$, the restriction of which coincides with the state $\psi(f) = f(y_1)$ on $C(Y)$, where $y_1 \neq y_0$, can not belongs to $\overline{\text{co}\{\varphi_u, u \in U(A)\}}$.

(ii) Let A be a simple unital C^* -algebra, $\varphi \in P(A)$. Then every pure state ψ is approximable (in the weakly*-topology) by the states of the form of φ_b , $\varphi_b(a) = \varphi(b^*ab)$ (see 3.4.3 of [2]) and by the transitivity theorem (see 2.8.2, [2]) it is sufficient b being unitary.

Conversely, let the algebra A is such that every φ from $P(A)$ is total and let I be an ideal of A , $I \neq A$. Then there exists a pure state ψ , which annuls I . For each $u \in U(A)$, ψ_u annuls I too, therefore all states from $\overline{\text{co}\{\varphi_u, u \in U(A)\}}$ are zero on I , so $I = \{0\}$.

Note, that the algebra $B(H)$ of all bounded linear operators on an infinite dimensional Hilbert space H is an example of weakly*-transitive, but not simple algebra.

Let $\mathfrak{M}$ be a uniform A -algebra, $R(\mathfrak{M})$ be the set of all A -linear normalized mappings of $\mathfrak{M}$ into A which are identity preserving.

In contrast with the case of commutative uniform algebras, the set $R(\mathfrak{M})$ is not coinciding with the set of all restrictions of the space $P(T, A)$ on the algebra $\mathfrak{M}$. We shall show that it is true when the fibre A is weakly*-transitive.

Theorem 4.3. *Let $\mathfrak{X}$ be a uniform A -algebra, $\mathfrak{X} \subset C(T, A)$, where A is weakly*-transitive, then each mapping from $R(\mathfrak{X})$ can be extended to a conditional expectation on $C(T, A)$.*

Proof. Let $p \in R(\mathfrak{X})$, φ be a pure total state on A , then $\varphi \circ p$ is a functional on $\mathfrak{X}$ with norm 1, and $\varphi \circ p(e) = 1$. Therefore such a functional can be extended to some state Φ on $C(T, A)$ such that its restriction on A is pure. We have then, by Theorem 1.5 of [6]

$$\Phi(x) = \int \varphi(x(t)) d\mu(t) \quad (4.1)$$

for a probability measure μ , $x \in C(T, A)$. Denote by $\hat{p}$ the conditional expectation, corresponding to this measure (note that it follows from Propositions 1.1 and 4.2(1) that $P_0(T, A) = P(T, A)$). Then $\Phi = \varphi \circ \hat{p}$. This equality is easily checked for the elements of A and $C(T)$ taking into account (1.1) and (4.1) then it is fulfilled on $C_0(T, A)$, and therefore on $C(T, A)$ (see Proposition 1.4 [6]).

Show, that $\hat{p}|_{\mathfrak{X}} = p$. It is sufficient to verify that $\text{Ker } p \subset \text{Ker } \hat{p}|_{\mathfrak{X}}$. Really, by virtue of A -linearity of p , we have $\mathfrak{X} = \text{Ker } p + A$, therefore if $x \in \mathfrak{X}$, then $x = y + a$, where $y \in \text{Ker } p$, $a \in A$ and, consequently $\hat{p}(x) = \hat{p}(y) + \hat{p}(a) = a = p(x)$.

Thus, let $x \in \text{Ker } p$, then for each $u \in U(A)$ we have $\varphi_u(\hat{p}(x)) = \varphi(u^* \hat{p}(x) u) = \varphi(\hat{p}(u^* x u)) = \Phi(u^* x u) = \varphi_u(p(x)) = 0$.

Hence as A is weakly*-transitive (see the beginning of the proof) we may conclude, that $\psi(\hat{p}(x)) = 0$ for every $\psi \in S(A)$ and, consequently $\hat{p}(x) = 0$.

Corollary 4.4. *The reduced spectrum of an A -algebra with weakly*-transitive fibre coincides with the set of all nontrivial continuous A -linear homomorphisms of $\mathfrak{X}$ into A .*

Proof. Let α be a continuous A -linear homomorphism of the algebra $\mathfrak{X}$ into A . Show, that $\|\alpha\| = 1$. In just the same way as in the proof of Theorem 3.6, [6], suppose that $\|\alpha\| > 1$ and $x \in \mathfrak{X}$ is such that $\|x\| < 1$, but $\|\alpha(x)\| = 1$. For $y = \alpha(x)^* x$ we have: $\|y\| < 1$ and $\|\alpha(y)\| = 1$, therefore $e - \alpha(y)$ is not invertible in A , which is contradictory to the invertibility of $e - y$.

Hence $\alpha \in R(\mathfrak{X})$ and, consequently, by the previous theorem, α can be extended to a conditional expectation on $C(T, A)$.

5. Peak points. In this Section we introduce and investigate some concepts of peak points. In contrast with the classical case, there exist several possibilities which are coinciding for algebras with trivial fibre. We choose as a basic the definition of a weak peak point which describes extreme points of $P_0(\mathfrak{X})$ (see Theorem 6.1) and which corresponds thus to the notion of a pure state (for involutive algebras).

Definition 5.1. Let $\mathfrak{X}$ be a uniform algebra, $\mathfrak{X} \subset C(T, A)$. A point t_0 from T is called

(i) *weak peak* (for the algebra $\mathfrak{X}$) if for every $d > 1$ and each neighborhood U of t_0 , there exists $x \in \mathfrak{X}$ such that $\|x\| < d$, $x(t_0) > 0$, $\|x(t_0)\| = 1$ and also $\|x(t)\| < (2d)^{-1}$ when $t \in U$.

(ii) *norm peak*, if there exists $x \in \mathfrak{X}$ such that $x(t_0) > 0$, $\|x(t_0)\| = 1$, and $\|x(t)\| < 1$ when $t \neq t_0$.

(iii) *peak*, if there exists $x \in \mathfrak{X}$, such that $x(t_0) = e$, $\|x(t)\| < 1$, when $t \neq t_0$.

The set of peak points in the sense of (j) denote by $\Pi_j(\mathfrak{X})$, $j = 1, 2, 3$. It is easy to check that these sets are connected by the following relations: $\Pi_3(\mathfrak{X}) \subseteq \Pi_2(\mathfrak{X}) \subseteq \Pi_1(\mathfrak{X})$.

These notions are essentially different; their characterizations and the relations between them are given in Proposition 5.2 (see also Corollaries 6.2 and 6.3). In [7] the question of existence of peak point has been formulated (in the sense of Definition 5.1 (iii)) which in general has a negative answer. A description of peak point in terms of operator-valued orthogonal measures (without discussions on the existence question) has been given in [3] (in the case of general uniform algebras of operator fields).

At the same time, Definition 5.1 (i) satisfies several natural requirements: for example it is concordant with the geometrical structure of the compactum $P_n(\mathfrak{X})$ (Theorem 6.1) and it satisfies the norm maximum principle in the Gelfand representation (Theorem 7.2). Note here that besides the trivial examples of usual uniform algebras, these three definitions are coincide for A -algebras with matrix fibre (it follows from Propositions 1.8 and 3.7 of [6]) and also for invariant algebras on compact Abelian groups (see Section 7 of [7] and the extensive paper which will appear in the same journal).

Proposition 5.2. Let $\mathfrak{X}$ be a uniform algebra, $\mathfrak{X} \subset C(T, A)$. Then (i) the point t_0 from T is a weak peak point iff for every $d > 1$, $\varepsilon > 0$, and each neighborhood U of t_0 , there exists $x \in \mathfrak{X}$, such that $\|x\| < d$, $x(t_0) \geq 0$, $\|x(t_0)\| = 1$ and $\|x(t)\| < \varepsilon$ when $t \in U$;

(ii) the point t_0 from T is a norm peak point iff there exist a bounded sequence $\{x_n\} \subset \mathfrak{X}$, a positive number $\varepsilon < 1$, a state $\varphi \in S(A)$ and a decreasing sequence of open neighborhoods U_n of the point t_0 , $\cap U_n = \{t_0\}$, such that $x_n(t_0) \geq 0$, $\|x_n(t_0)\| = 1$, $\varphi(x_n(t_0)) = 1$ and $\max \|x_n(t)\| < \varepsilon$, if $t \in T - U_n$, $n = 1, 2, \dots$.

(iii) the point t_0 from T is a peak point iff the conditions of (ii) are satisfied for each $\varphi \in S(A)$, i. e. if there exist a bounded sequence $\{x_n\} \subset \mathfrak{X}$, a positive $\varepsilon < 1$ and a decreasing sequence of open neighborhoods U_n of the point t_0 , $\cap U_n = \{t_0\}$ such that $x_n(t_0) = e$, $\max \|x_n(t)\| < \varepsilon$, where $t \in T - U_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Proof. (i) Sufficiency is clear. Let $t_0 \in \Pi_1(\mathfrak{X})$ and d, ε, U are as in the conditions of (i). Let n be such that $\varepsilon > 2^{-n}$, then, there exists, by Definition 5.1 (i), some $y \in \mathfrak{X}$ for which $\|y\| < d^{1/n}$

$y(t_0) \geq 0$, $\|y(t_0)\| = 1$, $\|y(t)\| < (2d^{1/n})^{-1}$ when $t \notin U$. It is easy to verify that the function $x = y^n$ has needed properties.

(ii) Let $t_0 \in \Pi_2(\mathfrak{X})$, and a function y from $\mathfrak{X}$ satisfies the conditions of Definition 5.1 (ii) and let $\{U_n\}$ be any decreasing sequence of open sets, $\cap U_n = \{t_0\}$. Let also ε be a positive number and φ be a state, $\varphi \in S(A)$, such that $\varphi(y(t_0)) = 1$. By virtue of compactness of $T - U_n$ there exists some m_n such that $\|y(t)\|^{m_n} < \varepsilon$ when $t \notin U_n$. The sequence $x_n = y^{m_n}$ is desired.

The proof of sufficiency is a modification of the proof of Theorem 11.1 of [8]. Assume the conditions of (ii) are satisfied. Let $M = \sup \|x_n\|$, $\varepsilon_n = s^{n+1} (1 - \varepsilon) (4(1 - s^{n+1}))^{-1}$, where $s = (2M - 1 - \varepsilon) (2(M - \varepsilon))^{-1}$, $n = 1, 2, \dots$. It is evident that $s \in]0, 1[$ and ε_n is a sequence decreasing to 0. Let $F_n = T - U_n$ and choose a subsequence h_n , $n = 0, 1, \dots$ of the sequence x_n as follows. Let $h_0 = e$, $h_1 = x_1$ and assume $h_0, h_1, h_2, \dots, h_n$ are already chosen. Put

$$W_n = \{t \in T, \max_{1 \leq j \leq n} \|h_j(t)\| \geq 1 + \varepsilon_n\}, n = 1, 2, \dots$$

Then, since $t_0 \notin W_n$ we have $W_n \subset F_{m_n}$ for some m_n . Denote by h_{n+1} the function x_{m_n} . It is obvious that this function satisfies the condition $\max \|h_{n+1}(t)\| < \varepsilon_n$, where $t \in F_{m_n}$.

Put now $x = (1-s) \sum_{n=0}^{\infty} s^n h_n$. Clearly, $x \in \mathfrak{X}$; show that this function realizes a norm peak at the point t_0 . We have $x(t_0) \geq 0$, $\varphi(x(t_0)) = 1$ and also $\|x(t_0)\| \leq (1-s) \sum_{n=0}^{\infty} s^n \|h_n(t_0)\| = 1$, from which $\|x(t_0)\| = 1$. Let $t \neq t_0$, then we have $\|x(t)\| < 1$. Really, if $t \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$, then $\|h_n(t)\| \leq 1$ for all $n = 0, 1, \dots$, however $t \in F_m$ for some m and therefore $\|h_m(t)\| < \varepsilon < 1$, so $\|x(t)\| < 1$.

If $t \in \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$, then as the sets W_n form an increasing sequence of closed sets, there exists m , such that $t \in W_{m+1} - W_m$, hence $\|h_n(t)\| \leq 1 + \varepsilon_m$, when $n = 0, 1, \dots, m$, $\|h_{m+1}(t)\| \leq M$, and $\|h_n(t)\| \leq \varepsilon$ when $n > m + 1$. Therefore

$$\|x(t)\| \leq (1-s) \left\{ (1 + \varepsilon_m) \sum_{n=0}^m s^n + Ms^{m+1} + \varepsilon \sum_{n=m+2}^{\infty} s^n \right\} < 1$$

by virtue of the choosing of s and ε_m , and finally we obtain that $\|x(t)\| < 1$ when $t \neq t_0$, i. e. $t_0 \in \Pi_2(\mathfrak{X})$.

(iii) The proof is the same (it is necessary only to check $x(t_0) = e$).

6. Characterization of weak peak points. Here we prove the main result of the paper: for the important class of uniform algebras (including A -algebras with simple fibre) the weak peak points are extreme points of $P_0(\mathfrak{X})$. This fact provides the existence of weak peak points. Using that the weak peak points are described in other terms, which complements Proposition 5.2.

Theorem 6.1. *Let $\mathfrak{M}$ be a uniform algebra, $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$. Then each weak peak point is an extreme point of the compactum $P_0(\mathfrak{M})$. If $\mathfrak{M}$ is an A -algebra with weakly*-transitive fibre then the converse statement is also true.*

Proof. Let $t_0 \in \Pi_1(\mathfrak{M})$ and assume that $t_0 \notin \text{ext } P_0(\mathfrak{M})$, then, by virtue of Proposition 2.2, p_{t_0} has a nonatomic representing measure μ . Let F be a closed subset of T not containing t_0 , for which $0 < \mu(F) < 1$ and let d be a number satisfying the inequality $1 < d < 1 + \mu(F)$. By Proposition 5.2 (1), there exists $x \in \mathfrak{M}$, such that $\|x\| < d$, $\|x(t_0)\| = 1$, $\|x(t)\| < \mu(F)$, when $t \in F$. Then

$$1 = \|p_{t_0}(x)\| \leq \int_F \|x(t)\| d\mu(t) + \int_{T-F} \|x(t)\| d\mu(t) < \mu(F)^2 + d(1 - \mu(F)) < 1.$$

It follows from this that $\Pi_1(\mathfrak{M}) \subset \text{ext } P_0(\mathfrak{M})$.

To prove the second part of the theorem we need of the following auxiliary facts, the first of which is well known.

Lemma 6.1.1. *Let A be a C^* -algebra with identity, $a \in A$ $a = u + iv$, where u and v are Hermitian and $u \leq 0$. Then $\| \exp a \| \leq 1$.*

Lemma 6.1.2. *Let $\mathfrak{M}$ be a uniform A -algebra, $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$ and let $t_0 \in \text{ext } P_0(\mathfrak{M})$, $f \in C(T)$, $f(t_0) = 1$, $0 < f(t) < 1$, when $t \neq t_0$. Let $a \in A$, $a > 0$ and let φ be a total state on A , such that $\varphi(a) = \|a\|$. Put*

$$\mathfrak{M}_a = \{u \in \text{Re } \mathfrak{M}, u \leq af, \varphi(u(t_0)) > 0\}.$$

Then $\sup \varphi(u(t_0)) = \|a\|$, when $u \in \mathfrak{M}_a$.

Proof. Let $\sup_{u \in \mathfrak{M}_a} \varphi(u(t_0)) = c \leq \|a\|$. Put $\varphi_{t_0} = \varphi \circ p_{t_0}$ on $\mathfrak{M}$. It is

clear, that φ_{t_0} is a linear continuous normalized functional and $\varphi_{t_0}(e) = 1$.

If $af \in \text{Re } \mathfrak{M}$, then the statement is trivial. Let now $af \notin \text{Re } \mathfrak{M}$ and let us extend φ_{t_0} on $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} \oplus \mathbb{C}af$ (which is a closed subspace of $C(T, A)$) by the formula

$$\psi_{t_0}(x + \alpha af) = \varphi_{t_0}(x) + \alpha c.$$

Verify that ψ_{t_0} is a normalized linear functional. Suppose the opposite, $\|\psi_{t_0}\| \neq 1$, then there exists $x + \alpha af \in \mathfrak{M}'$, $\alpha \neq 0$, such that $\|x + \alpha af\| = 1$, but $\|\psi_{t_0}(x + \alpha af)\| > 1$. Let $\psi_{t_0}(x + \alpha af) = re^{i\theta}$, then $\|e^{-i\theta}(x + \alpha af)\| = 1$ however $\psi_{t_0}(e^{-i\theta}(x + \alpha af)) = r > 1$. Thus, we may assume that $\psi_{t_0}(x + \alpha af) = r > 1$, where $\|x + \alpha af\| = 1$. As ψ_{t_0} is Hermitian (i.e. it takes real values on Hermitian elements of $\mathfrak{M}'$), therefore the following linear functional on $\text{Re } \mathfrak{M}'$ is uniquely defined: if $v \in \text{Re } \mathfrak{M}'$, then for some, $\hat{v} \in \mathfrak{M}'$, $v = \text{Re } \hat{v}$, put $\psi_{t_0}(v) = \text{Re } \psi_{t_0}(\hat{v})$. Let $\text{Re } (x + \alpha af) = w + \beta af$, and $\beta = \text{Re } \alpha$, then $\psi_{t_0}(w + \beta af) = r$. In addition $\|w + \beta af\| \leq 1$, and since it is Hermitian, we obtain

$$e - (w + \beta af) \geq 0. \quad (6.1)$$

Granting this we have

$$\psi_{t_0}(e - (w + \beta af)) = 1 - r < 0. \quad (6.2)$$

On the other hand:

(i) If $\beta > 0$, then it follows from (6.1) that $e - w(t_0) - \beta a \geq 0$, whence

$$\begin{aligned} \psi_{t_0}(e - w - \beta af) &= 1 - \varphi(w(t_0)) - \beta c > 1 - \varphi(w(t_0)) - \beta \|a\| = \\ &= \varphi(e - w(t_0) - \beta a) \geq \varphi(0) = 0, \end{aligned}$$

which contradicts to (6.2).

(ii) If $\beta < 0$, then it follows from (6.1) that

$$\beta^{-1}(e - w) \leq af. \quad (6.3)$$

Show that

$$\varphi(\beta^{-1}(e - w(t_0))) > 0. \quad (6.4)$$

Indeed, $\psi_{t_0}(e - w) = 1 - r + \beta c < \beta c < 0$, whence (6.4).

It means together with (6.3) that $\beta^{-1}(e - w) \in \widehat{\mathfrak{M}}_c$, hence $\varphi(\beta^{-1} \times (e - w(t_0))) \leq c$. On the other hand,

$$\begin{aligned} \varphi(\beta^{-1}(e - w(t_0))) &= \psi_{t_0}(\beta^{-1}(e - w)) = \\ &= \beta^{-1} \psi_{t_0}(e - w) = \beta^{-1}(1 - r + \beta c) > \beta^{-1} \beta c = c. \end{aligned}$$

This contradiction proves finally that $\|\psi_{t_0}\| = 1$.

This functional can be extended by Hahn—Banach theorem to a normalized functional Φ_{t_0} on $C(T, A)$ which is, evidently, a state. Recall, that the restriction $\Phi_{t_0}|_A = \varphi$ is a pure state, and $\Phi_{t_0}(x) = \varphi(x(t_0))$ for $x \in \mathfrak{M}$. Hence, by Theorem 1.5 [6], for some probability measure μ on T and for each $x \in \mathfrak{M}$ we have:

$$\varphi(x(t_0)) = \int \varphi(x(t)) d\mu(t).$$

The algebra $\mathfrak{M}$ is an A -bimodule, whence, for each $u \in U(A)$,

$$\varphi_u(x(t_0)) = \int \varphi_u(x(t)) d\mu(t).$$

At last, since φ is total on A , then, for each state ψ on A we have $\psi(x(t_0)) = \int \psi(x(t)) d\mu(t)$. Therefore μ is a representing measure for p_{t_0} , and so it is atomic (Proposition 2.2). Again, by Theorem 1.5, [6], for each $x \in C(T, A)$ we obtain $\Phi_{t_0}(x) = \varphi(x(t_0))$. Therefore $\Phi_{t_0}(af) = \varphi(af(t_0)) = f(t_0) \varphi(a) = \|a\|$.

On the other hand, $\Phi_{t_0}(af) = \psi_{t_0}(af) = c$, which completes the proof of the Lemma.

Return to the proof of the theorem. Let $t_0 \in \text{ext } P_0(\mathfrak{M})$, $d > 1$ and let U be a neighborhood of the point t_0 . Assume at first that $d < (e/2)^{1/2}$, and let $f \in C(T)$ such that $f(t_0) = 1$, $0 < f(t) < 1$ for $t \neq t_0$, moreover, $f(t) < 1 - \ln 2d^2$ for $t \notin U$. By virtue of Lemma 6.1.2, for the total state φ , putting $a = e$, we obtain $\sup \varphi(u(t_0)) = 1$, hence, for each $\varepsilon > 0$, there

exists $u \in \widehat{\text{Re } \mathfrak{M}}_\varepsilon$, such that $\varphi(u(t_0)) > 1 - \varepsilon$ and $u \leq f$.

Show, that there exists also $v \in \mathfrak{M}_e$, $v > 0$, for which $\varphi(v(t_0)) > 1 - \varepsilon$. Indeed, if $u(t_0) = a_+ - a_-$, then $a_+ - a_- < \varepsilon$ implies $a_+ < \varepsilon$. In addition,

$$\varphi(a_+) > \varphi(u(t_0)) > 1 - \varepsilon.$$

Put $v = a_+^{1/2} u a_+^{1/2}$, $v > 0$, then, by virtue of $\mathfrak{M}$ being an A -module, $v \in \text{Re } \mathfrak{M}$. In addition

$$v = a_+^{1/2} u a_+^{1/2} \leq a_+^{1/2} f a_+^{1/2} + a_+ f \leq f,$$

and so $v \in \mathfrak{M}_e$. Further

$$\varphi(v(t_0)) = \varphi(a_+^2) \geq \varphi(a_+)^2 > (1 - \varepsilon)^2 > 1 - 2\varepsilon. \quad (6.5)$$

Now, let $y \in \mathfrak{M}$, $\text{Re } y = v$ and let $y = \hat{y} - i \text{Im } y(t_0)$. Put

$$x = \exp y (\exp v(t_0))^{-1}$$

and check that this function realizes a weak peak at the point t_0 .

It is obvious that $x \in \mathfrak{M}$, $x(t_0) > 0$, and $\|x(t_0)\| = 1$.

Further, since $v(t) < \varepsilon$, then $\text{Re } (y(t) - \varepsilon) < 0$. By Lemma 6.1.1, we have $\|\exp(y(t) - \varepsilon)\| < 1$, whence

$$\|x(t)\| = \frac{\|\exp y(t)\|}{\|\exp v(t_0)\|} \leq \frac{e}{\|\exp a_+^2\|} = e^{1 - \|a_+^2\|} < e^{2\varepsilon},$$

where $\|a_+^2\| > 1 - 2\varepsilon$ by (6.5). Choosing $\varepsilon = 1/2 \ln d$, we obtain $\|x\| < d$.

Let $t \in U$. Since $\text{Re } (y(t) - f(t)) < 0$, using Lemma 6.1.2, we have

$$\|x(t)\| = \frac{\|\exp y(t)\|}{\|\exp v(t_0)\|} < \frac{\exp f(t)}{\exp \|a_+^2\|} < e^{1 - \ln 2d - \|a_+^2\|}.$$

Again, since $\|a_+^2\| > 1 - \ln d$, we obtain $\|x(t)\| < (2d)^{-1}$. Hence, the function x realizes a weak peak at the point t_0 .

Now, let d is arbitrary, $d > 1$ and let n be such, that $d^{1/n} < (e/2)^{1/2}$, and let y be a function for which $\|y\| < 1/n$, $y(t_0) \geq 0$, $\|y(t_0)\| = 1$, and $\|y(t)\| < (2d^{1/n})^{-1}$ when $t \in U$. Then evidently, the function $x = y^n$ is desired. The theorem is completely proved.

Corollary 6.2. *A point t_0 from T is a weak peak point of a uniform A -algebra with weakly*-transitive fibre iff for each $d > 1$ and every neighborhood U of the point t_0 , there exist $x \in \mathfrak{M}$ and a state φ on the algebra A such that the function $g(t) = \varphi(x(t))$ has the properties: $g(t) < d$, $g(t_0) = 1$, $g(t) < (2d)^{-1}$ if $t \in U$.*

Proof. Prove only sufficiency. Let t_0 be a point satisfying the conditions of the corollary. Taking into consideration the previous theorem it is sufficient to verify that $p_{t_0} \in \text{ext } P_0(\mathfrak{M})$. Let us assume the contrary and let μ be a corresponding nonatomic measure (see Proposition 2.2). It is obvious that there exists a closed subset F , not containing the point t_0 , and such that $0 < \mu(F) < 1$. Let d be such that $1 < d < (2 - \mu(F)) (2(1 - \mu(F)))^{-1}$ and let U be a neighborhood of the

point t_0 , $U \cap F = \emptyset$. According to conditions, there exist a function $x \in \mathfrak{M}$ and a state φ on A , such that the function $g(t) = \varphi(x(t))$ has the properties: $g(t) < d$, $g(t_0) = 1$, $g(t) < (2d)^{-1}$ when $t \notin U$. Then

$$1 = g(t_0) = \int \varphi(x(t)) d\mu(t) = \int_F \varphi(x(t)) d\mu(t) + \int_{T-F} \varphi(x(t)) d\mu(t) < \\ < (2d)^{-1} \mu(F) + d\mu(T-F) < 1.$$

This contradiction proves the corollary.

Corollary 6.3. *A point $t_0 \in T$ is a weak peak point for a uniform A -algebra with weakly*-transitive fibre iff there exist a bounded sequence $\{x_n\} \subset \mathfrak{M}$, an $\varepsilon \in]0, 1[$, and a decreasing sequence of open neighborhoods $\{U_n\}$, $\cap U_n = \{t_0\}$, such that $x_n(t_0) \geq 0$, $\|x_n(t_0)\| = 1$, and $\|x_n\|_{T-U_n} < \varepsilon$ for $n = 1, 2, \dots$.*

Proof. Let $t_0 \in \Pi_1(\mathfrak{M})$, U_n be a sequence of neighborhoods, $\cap U_n = \{t_0\}$. Fix $d > 1$ and for any n let a function $x_n \in \mathfrak{M}$ satisfies the properties: $\|x_n\| < d$, $x_n(t_0) \geq 0$, $\|x_n(t_0)\| = 1$, and $\|x_n(t)\| < \varepsilon$ for $t \in T - U_n$ (see Proposition 5.2 (i)). The sequence $\{x_n\}$ is desired. Conversely, let $\{x_n\}$ be a sequence satisfying the conditions of the corollary. Assume, that $p_{t_0} \notin \text{ext } P_0(\mathfrak{M})$ (we use again Theorem 6.1). Let μ be a nonatomic representing measure (by Proposition 2.2) of the conditional expectation p_{t_0} and let $M = \sup_n \|x_n\|$. For each n , obviously, we have

$$\varepsilon \mu(T - U_n) + \mu(\{t_0\}) < \alpha < 1.$$

Let n_0 be such that $\mu(U_{n_0} - \{t_0\}) < (1 - \alpha)M^{-1}$. Then, for x_{n_0} we obtain

$$1 = \|x_{n_0}(t_0)\| \leq \int_{U_{n_0} - \{t_0\}} \|x_{n_0}(t)\| d\mu(t) + \int_{T - U_{n_0}} \|x_{n_0}(t)\| d\mu(t) + \mu(\{t_0\}) < \\ < M \mu(U_{n_0} - \{t_0\}) + \varepsilon \mu(T - U_{n_0}) + \mu(\{t_0\}) < 1.$$

This contradiction proves the corollary.

This result is a supplement to Proposition 5.2. Thus, Corollary 6.3, Proposition 5.2 (ii) and Proposition 5.2 (iii) compose a sequence of gradually strengthening requirements.

7. Maximum principle. We introduce here the notion of Shilov boundary and for some classes of uniform algebras prove the maximum principle.

Definition 7.1. *Let $\mathfrak{M}$ be a uniform algebra $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$. The closure of the set of weak peak points will be called the Shilov boundary and will be denoted by $\partial(\mathfrak{M})$.*

Thus, $\partial(\mathfrak{M}) = \overline{\Pi_1(\mathfrak{M})}$. It is clear, that for uniform A -algebras with weakly*-transitive fibre the Shilov boundary coincides with the closure of the Choquet boundary (see Section 2 and Theorem 6.1), $\partial(\mathfrak{M}) = \exp P_0(\mathfrak{M})$.

Theorem 7.2. *Let $\mathfrak{M}$ be a uniform A -algebra, $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$, where the algebra A is weakly*-transitive, then, for every $x \in \mathfrak{M}$,*

$$\|x\| = \max_{t \in \partial(\mathfrak{M})} \|x(t)\|.$$

Proof. This fact expressing the maximum principle is an evident consequence of the following statement (which is in turn a generalization of a well known result of the theory of commutative uniform algebras, see, for example, Proposition 6.3, [10]): if M is a subspace of $C(Y)$, containing identity, where Y is compact, then for every function f of M , there exists $y \in \text{ext } P_0(M)$ (the Choquet boundary of the space M), such that $\|f(y)\| = \|f\|$.

Proposition 7.3. Assume that the conditions of Theorem 7.2 are satisfied and denote $F_x = \{t \in T, \|x(t)\| = \|x\|\}$, then $F_x \cap \Pi_1(\mathfrak{M}) \neq \emptyset$.

Proof. Let φ be an arbitrary pure state on A and q_φ be a mapping of $\mathfrak{M}$ into $C(T)$, defined by the formula: $(q_\varphi, x)(t) = \varphi(x(t))$. Obviously q_φ is a linear continuous operator. If $M_\varphi = \overline{q_\varphi(\mathfrak{M})}$ then M_φ is a closed linear subspace of $C(T)$. Show, that $\text{ext } P_0(M_\varphi)$ is contained in $\text{ext } P_0(\mathfrak{M})$. Really, let $t_0 \in \text{ext } P_0(M_\varphi)$ and let μ be some representing measure for p_{t_0} , i. e. for every $x \in \mathfrak{M}$,

$$x(t_0) = \int x(t) d\mu(t), \quad (7.1)$$

whence

$$\varphi(x(t_0)) = \int \varphi(x(t)) d\mu(t). \quad (7.2)$$

This means that μ is a representing measure for the functional f_{t_0} on M_φ given by the formula: $f_{t_0}(g) = g(t_0)$ for $g \in M_\varphi$, therefore μ is necessarily atomic (since t_0 is from $\text{ext } P_0(M_\varphi)$), hence, by Proposition 2.2, we have $t_0 \in \text{ext } P_0(\mathfrak{M})$.

Note, that the previous arguments are true for every uniform algebra. If $\mathfrak{M}$ is an A -algebra with weakly*-transitive fibre, then the same reasons as in the proof of Lemma 6.1 (ii) permit for any total state to deduce (7.1) from (7.2), i. e. in this case M_φ separates points of T and $\text{ext } P_0(M_\varphi) = \text{ext } P_0(\mathfrak{M})$. This fact will not be used in the future.

Return to the proof. Let $t_0 \in F_x$ and let $y = x(t_0)^*x$, then $y \in \mathfrak{M}$, $y(t_0) \geq 0$, $\|y(t_0)\| = \|y\|$ and $\|y(t)\| < \|y(t_0)\|$ when $t \notin F_x$, i. e. $F_y = F_x$. Let φ be a pure state on A for which $\varphi(x(t_0)^*x(t_0)) = \|x(t_0)\|^2$, then $\varphi \circ y \in M_\varphi$ and satisfies the conditions; $\varphi \circ y(t_0) = \|\varphi \circ y\|$, $|\varphi \circ y(t)| < \|\varphi \circ y(t_0)\|$ when $t \notin F_x$, therefore $F_x = F_{\varphi \circ y}$. From the fact which was formulated before Proposition 7.3, it follows that $F_x \cap \text{ext } P_0(M_\varphi) \neq \emptyset$. It remains to note that $\text{ext } P_0(M_\varphi) \subset \text{ext } P_0(\mathfrak{M})$ and $\text{ext } P_0(\mathfrak{M}) = \Pi_1(\mathfrak{M})$ (Theorem 6.1).

The maximum principle is true also in the other, in some sense the opposite (see Proposition 4.2) class of uniform algebras with commutative fibre.

Proposition 7.4. Let $\mathfrak{M}$ be a uniform algebra, $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$ where A is a commutative C^* -algebra. Then for each $x \in \mathfrak{M}$,

$$\|x\| = \max_{t \in \partial(\mathfrak{M})} \|x(t)\|.$$

Proof. Let $A = C(Y)$ for some compactum Y , then $C(T, A)$ can be identified with $C(T \times Y)$. Denote by $\hat{\mathfrak{M}}$ the uniform subalgebra of

$C(T \times Y)$ isomorphing to $\mathfrak{M}$ (if $x \in \mathfrak{M}$, then $\hat{x}(t, y) = x(t)(y)$).

Let $t_0 \in \Pi_1(\mathfrak{M})$, then for every neighborhood of the point t_0 there exists $x \in \mathfrak{M}$, such that $\|x(t_0)\| = 1$, and $\|x(t)\| < 1/2$ for $t \in U$ (see Proposition 5.2 (1)). Hence the function $\hat{x}$ achieves its maximum on the set $\text{ext } P_0(\mathfrak{M}) \cap (U \times Y) \neq \emptyset$ (we use again the very important fact mentioned in the beginning of the proof of Theorem 7.2). Since U is arbitrary we may conclude that $\text{ext } P_0(\mathfrak{M}) \subset \partial(\mathfrak{M}) \times Y$, whence, for every $x \in \mathfrak{M}$ we obtain

$$\|x\| = \sup_{(t, y) \in \text{ext } P_0(\mathfrak{M})} |\hat{x}(t, y)| \leq \max_{(t, y) \in \partial(\mathfrak{M}) \times Y} |\hat{x}(t, y)| = \max_{t \in \partial(\mathfrak{M})} \|x(t)\|$$

which completes the proof.

Corollary 7.5. *Let $\mathfrak{M}$ be a uniform algebra (or A -algebra), $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$, for which the maximum principle is fulfilled. Then the restriction $\mathfrak{M}_1$ of $\mathfrak{M}$ on the Shilov boundary $\partial(\mathfrak{M})$ is also uniform algebra (correspondingly A -algebra), $\mathfrak{M}_1 \subset C(\partial(\mathfrak{M}), A)$.*

Proof. The non-trivial part of the proof is checking the completeness of $\mathfrak{M}_1$, which (as in the commutative case) is the easy consequence of the maximum principle.

Institute of Mathematics
Armenian Academy of Sciences

Received 9.XII.1986.

Վ. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, Ս. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Օպերատորային դաշտերի հավասարաչափ հանրահաշիվների եզրերը (ամփոփում)

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է ոչ կոմուտատիվ հանրահաշիվների սպեկտրի երկրաչափական կառուցվածքը: Որոշ դասի հավասարաչափ հանրահաշիվների սվիճակների կոմպակտի Շոքեյի եզրը բնութագրվում է ներկայացնող չափերի և թույլ պիկերի տերմիններով: Նույն դասերի հանրահաշիվների համար ապացուցված է մաքսիմումի սկզբունքը:

В. АРЗУМАНЯН. С. ГРИГОРЯН. Границы равномерных алгебр операторных полей (резюме)

В работе изучается геометрическая структура спектра некоммутативной равномерной алгебры. Граница Шоке компакта «состояний» алгебр определенного класса характеризуется в терминах представляющих мер и точек слабого пика. Для алгебр того же класса доказан принцип максимума. Библиографий 10.

REFERENCES

1. J. M. G. Fell. The structure of algebras of operator fields, Acta Math. v. 106, № 3—4, 1961, pp. 233—280.
2. J. Dixmier. Les C^* -algèbres et leurs représentations, Gautier—Villars, Paris, 1969.
3. D. C. Taylor. Interpolation in algebras of operator fields, J. Funct. Anal., v. 10, № 2, 1972, pp. 159—190.

4. *D. C. Taylor*. A general Hoffman—Wermer theorem for algebras of operator fields, *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 52, 1975, pp. 212—216.
5. *A. Salluz*. Une extension d'un theoreme de K. Hoffman et J. Wermer aux algebres de champs continues d'operateurs, *C. R. Acad. Sci. Paris, ser. A*, v. 284, № 17, 1977, pp. 1049—1051.
6. *V. Arzumanyan, S. Grigorian*. The spectrum of uniform algebras of operator fields *Izv. Acad. sci. of Arm. SSR, ser. "Mathematics"*, v. 21, № 1, 1936, pp. 63—79 (see, English translation in *Soviet J. of Contemporary Math. Anal.*, Allerton—Press, USA, the same output data, pp. 64—81).
7. *V. Arzumanyan, S. Grigorian*. Uniform algebras of operator fields, *Zap. Nauchn. Sem. Leningr. Otd. Mat. Inst.*, v. 123, 1983, pp. 185—189.
8. *T. W. Gamelin*. Uniform algebras, Prentice—Hall, New-York, 1969.
9. *S. Sakai*. C^* -algebras and W^* -algebras, Springer, New—York, 1971.
10. *R. Felps*. Lectures on Choquet's theorem, Van Nostrand, Princeton, N. Y., 1966.

УДК 517.95

Светлой памяти
Рафаэля Арамовича Александриана
посвящается

К. А. ЯГДЖЯН

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Рассматривается задача Коши

$$Lu = f, \quad (0.1)$$

$$D_t^i u|_{t=s} = \Psi_i(x), \quad i=0, \dots, m-1, \quad (0.2)$$

где $t, s \in J = [0, T]$, $T > 0$, $x \in R^n$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$, $D_t = -i\partial/\partial t$,
 α — мультииндекс, а

$$L = D_t^m + \sum_{\substack{j+|\alpha| \leq m \\ j < m}} a_{j,\alpha}(t, x) D_j^j D_\alpha^\alpha, \quad (0.3)$$

$a_{j,\alpha} \in C^\infty(J \times R^n)$, в предположении, что главный символ

$$P_m(t, x, \tau, \xi) = \tau^m + \sum_{j+|\alpha|=m, j < m} a_{j,\alpha}(t, x) \tau^j \xi^\alpha \quad (0.4)$$

представляется в виде

$$P_m(t, x, \tau, \xi) = \prod_{l=1}^m (\tau - \lambda_l(t, x, \xi)), \quad (0.5)$$

где вещественнозначные функции $\lambda_l(t, x, \xi)$ удовлетворяют условиям

$$|\lambda_l(t, x, \xi)| \leq c\lambda(t) |\xi|, \quad c = \text{const} > 0, \quad (0.6)$$

$$|\lambda_l(t, x, \xi) - \lambda_r(t, x, \xi)| \geq \delta\lambda(t) |\xi|, \quad \delta = \text{const} > 0, \quad l \neq r, \quad (0.7)$$

для всех $t \in J$, $(x, \xi) \in R^{2n}$, $l, r = 1, \dots, m$, с функцией $\lambda \in C^\infty(J)$,
 $\lambda(0) = 0$, такой, что $\lambda_l(t) = \partial_t \lambda(t) > 0$ при $t > 0$, и $c_1 \lambda(t)/\Lambda(t) \leq$
 $\leq \lambda_l(t)/\lambda(t) \leq c_0 \lambda(t)/\Lambda(t)$, $|\lambda^{(k)}(t)| \leq c_k (\lambda'(t)/\lambda(t))^{k-1} \lambda'(t)$, где $c_1 >$
 $> (m-1)/m$, $k=2, 3, \dots$, и $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$.

Таким образом, при $t=0$ имеет место нарушение условия строгой гиперболичности оператора L . В работе [1] автора построены параметрикс и фундаментальное решение задачи (0.1), (0.2) в предположении, что младшие члены оператора при всех k, β и всех j, α , $|\alpha| \neq 0$, $x \in R^n$, $t \in J^0 = (0, T]$, удовлетворяют условиям

$$|D_t^k D_x^\beta a_{j,\alpha}(t, x)| \leq C_{k,\beta} \lambda^{m-j}(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \right)^{m-j-|\alpha|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k, \quad (0.8)$$

$$|D_t^k D_x^\beta \ln a_{m-1-|\alpha|,\alpha}(t, x)| \leq C_{k,\beta} \lambda^{|\alpha|}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^{k+1}. \quad (0.9)$$

Из результатов работы [1], в частности следует, что при выполнении (0.8), (0.9) задача Коши является корректной во многих смыслах. Как показано в [2] в случае, когда $a_{j,\alpha}(t, x) = a_{j,\alpha}(t)$ условия (0.8), (0.9) являются необходимыми для C^∞ -корректности задачи Коши. В настоящей работе мы распространяем теоремы [2, 3 [2] на операторы с коэффициентами, зависящими и от пространственных переменных.

Введем обозначения: $\Omega(x_0, t_0, \varepsilon) = \{(x, t); |x - x_0| \leq \lambda_0(t_0 + \varepsilon - t), t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon\}$, $D(x_0, t_0, \varepsilon) = \Omega(x_0, t_0, \varepsilon) \cap \{t = t_0\}$, $\Omega_-(x_0, t_0, \varepsilon) = \{(x, t); |x - x_0| \leq \lambda_0(t - t_0), t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon\}$, $D_-(x_0, t_0, \varepsilon) = \Omega_-(x_0, t_0, \varepsilon) \cap \{t = t_0 + \varepsilon\}$.

Определение 1. Скажем, что задача Коши (0.1), (0.2) корректно поставлена в окрестности точки (x_0, t_0) , если существуют положительные постоянные ε_0, λ_0 такие, что для любых $x_1, \varepsilon, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\Omega(x_1, t_0, \varepsilon) \subset \Omega(x_0, t_0, \varepsilon_0)$, и любых $f \in C^\infty(\Omega(x_1, t_0, \varepsilon))$, $\Psi_j \in C^\infty(D(x_1, t_0, \varepsilon))$, $j = 0, \dots, m-1$, существует единственное решение $u \in C^\infty(\Omega(x_1, t_0, \varepsilon))$.

Определение 2. Скажем, что задача Коши (0.1), (0.2) корректно поставлена в окрестности точки (x_0, t_0) с данными вне многообразия вырождения, если существуют положительные постоянные ε_0, λ_0 такие, что для любых $x_1, \varepsilon, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, таких, что $\Omega_-(x_1, t_0 + \varepsilon, \varepsilon_0 - \varepsilon) \subset \subset \Omega_-(x_0, t_0, \varepsilon_0)$, для любых $f \in C^\infty(\Omega_-(x_1, t_0 + \varepsilon, \varepsilon_0 - \varepsilon))$, $\Psi_j \in C^\infty(D_-(x_1, t_0 + \varepsilon, \varepsilon_0 - \varepsilon))$, $j = 0, \dots, m-1$, существует единственное решение $u \in C^\infty(\Omega_-(x_1, t_0 + \varepsilon, \varepsilon_0 - \varepsilon))$.

Пусть Γ — открытое коническое множество в $R_x^n \times (R_t^n \setminus 0)$, а $0 \in \Omega = \pi_x(\Gamma)$ — его проекция на R_x^n . Через $S^m(\Gamma)$ обозначим обычное пространство символов (см. [3]), а через $C_l(J; S^m(\Gamma))$ — пространство непрерывных отображений J в $S^m(\Gamma)$.

Теорема 1. Предположим, что существует открытое коническое множество Γ такое, что коэффициенты оператора L удовлетворяют в Γ условиям (0.5), (0.6), (0.7) при всех $t \in J$, и пусть в $J \times \Omega$ для всех $j, \alpha, |\alpha| \neq 0, k, \beta$ выполнены неравенства (0.8). Пусть, далее, существуют символы $c_j \in C_l(J; S^0(\Gamma))$, $j = 0, \dots, m-2$, и функция $v \in C(J) \cap C^1(J^0)$ такие, что

$$\sum_{|\alpha| = m-1-j} \operatorname{Im} a_{j,\alpha}(t, x) \xi^\alpha = c_j(t, x, \xi) (|\xi| \lambda(t))^{m-1-j} \cdot \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) v(t)}, \quad (0.10)$$

$$v(t) > 0, \quad \frac{v_t(t)}{v(t)} < - \frac{\lambda_t(t)}{\lambda(t)} \frac{1}{\ln \lambda(t)}, \quad t > 0. \quad (0.11)$$

Тогда, если $\sum_{j=0}^{m-1} |c_j(0, 0, \xi)| \neq 0$ при $(0, \xi) \in \Gamma$, а $\gamma(0) = 0$, то задача Коши (0.1), (0.2) не является корректно поставленной в окрестности точки $(0, 0)$ ни в смысле определения 1 (т. е. при $s = 0$), ни в смысле определения 2 (т. е. при некотором $s > 0$).

Нам представляется правдоподобным, что нарушение условия (0.8), вообще говоря, приводит к потере единственности в задаче Коши. Отметим в связи с этим работы [4], [9]. Интересный пример построен также в [10]. Во всяком случае нарушение (0.8) ведет к потере корректности. Именно, справедлива следующая

Теорема 2. Предположим, что в некотором открытом комплексном множестве Γ для некоторой пары $(\hat{j}, \hat{k})$, $0 < \hat{k} < m$, $m - \hat{j} - \hat{k} > 0$, для всех $(t, x, \xi) \in J^0 \times \Gamma$ имеет место представление

$$\sum_{|s|=m-\hat{k}-\hat{j}} a_{j,s}(t, x) \xi^s = \lambda^{m-\hat{j}}(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \right)^{\hat{k}} \frac{b(t, x, \xi)}{\gamma(t)} |\xi|^{m-\hat{k}-\hat{j}}, \quad (0.12)$$

с символом $b(t, x, \xi) \in C_l^1(J^0; S^0(\Gamma))$ и с функциями $\gamma, \lambda \in C^1(J^0)$, удовлетворяющими с некоторой постоянной $\varepsilon > 0$ условиям

$$c_1 \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \leq \frac{\lambda_r(t)}{\lambda(t)} \leq \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}, \quad c_1 > (m-1)/m,$$

$$\gamma(t) > 0, \quad |\ln |b(t, x, \xi)|| \leq c, \quad |D_t b(t, x, \xi)| \leq c\lambda(t)/\Lambda(t),$$

$$0 < \frac{\gamma_r(t)}{\gamma(t)} < (m-1-\hat{j}-\varepsilon) \frac{\lambda_r(t)}{\lambda(t)} - (\hat{k}-1) \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}, \quad (t, x, \xi) \in J^0 \times \Gamma, \quad (0.13)$$

а для остальных (j, k) , $k = 0, \dots, m-1$, $m-j-k > 0$, при тех же (t, x, ξ) для любых γ, β

$$|D_t^j D_x^s \sum_{|s|=m-k-j} a_{j,s}(t, x) \xi^s| \leq C_{\gamma,\beta} \lambda^{m-j}(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \right)^k |\xi|^{m-k-j-|s|}. \quad (0.14)$$

Предположим далее, что непрерывно дифференцируемые на $J^0 \times \Gamma$ комплексные корни $(m-j)$ -ой степени из $-b(t, x, \xi)/|b(t, x, \xi)|$, обозначим их через $Z_l(t, x, \xi)$, $l = 1, \dots, m-j$, можно так пронумеровать и разбить на две группы $\{Z_l\}_1$, $\{Z_l\}_{r+1}^{m-j}$, $0 \leq r < m-j$, что $\operatorname{Im} Z_l < 0$, и с некоторой положительной постоянной δ при всех $(t, x, \xi) \in J^0 \times \Gamma$

$$\min_{r+1 \leq l \leq m-j} |\operatorname{Im} Z_l(t, x, \xi)| > \delta > 0, \quad (0.15)$$

$$\min_{1 \leq l \leq r} Z_l(t, x, \xi) \geq o(1), \quad (0.16)$$

где величина $o(1)$ может быть сделана сколь угодно малой за счет уменьшения T и сужения Γ . При $r = 0$ первая группа корней пустая, и условие (0.16) отсутствует.

Тогда, если $\lim_{t \rightarrow 0} \nu(t) = 0$, то задача Коши (0.1), (0.2) с $s=0$ не является корректно поставленной в окрестности точки $(0, 0)$ в смысле определения 1.

Сравнительно полная библиография по необходимым условиям корректности задачи Коши имеется в [2], [3], [6], [7], [11], [8].

Статья построена по следующему плану. В § 1 показано, что при «слабом» нарушении условий гиперболичности, на определенном множестве (зоне) точек (t, x, ξ) нули полного символа оператора различны, а поведение их мнимых частей таково, что позволяет в § 2 построить асимптотическое решение некоторой псевдодифференциальной системы, нарушающее априорную оценку, вытекающую из корректности. В § 3 аналогичным образом рассмотрен случай $s=T$. В § 4 приведено некоторое обобщение на случай, когда нули $\lambda_l(t, x, \xi)$ слипаются с разными скоростями.

§ 1. Начало доказательства теоремы 1. Гиперболичность

Пусть $\{\lambda_l(t, x, \xi)\}_1^m$ — нули главного символа оператора L , обозначим через $\{\tau_l(t, x, \xi)\}_1^m$ — нули полного символа:

$$\tau^m + \sum_{j < m, j+|\alpha| < m} \alpha_{j,\alpha}(t, x) \tau^j \xi^\alpha = 0. \quad (1.1)$$

Обозначим, далее, через t_ξ (соответственно $\langle \xi \rangle$) корень уравнения

$$\Lambda(t) \langle \xi \rangle = N \ln \langle \xi \rangle. \quad (1.2)$$

Лемма 1. Следующие условия А и В эквивалентны:

А. Существуют положительные постоянные M и N такие, что корни $\{\tau_l(t, x, \xi)\}_1^m$ обладают следующими свойствами: для любых k, α, β , с некоторыми положительными постоянными $\delta_1, C_{k,\alpha,\beta}$ имеют место

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta \tau_l(t, x, \xi)| \leq C_{k,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{1-|\alpha|} \lambda_l(t) \left(\frac{\lambda_l(t)}{\Lambda(t)} \right)^k, \quad (1.3)$$

$$|\tau_j(t, x, \xi) - \tau_l(t, x, \xi)| \geq \delta_1 \lambda_l(t) \langle \xi \rangle, \quad j \neq l, \quad (1.4)$$

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta \operatorname{Im} \tau_l(t, x, \xi)| \leq C_{k,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \left(\frac{\lambda_l(t)}{\Lambda(t)} \right)^k \left\{ \frac{\lambda_l(t)}{\Lambda(t)} + \right. \\ \left. + (m-2) \frac{\lambda_l(t) \ln^2 \lambda_l(t)}{\Lambda^2(t) \langle \xi \rangle} \right\}, \quad (1.5)$$

при всех $t \in [t_\xi, T]$, $\xi \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle \xi \rangle \geq M$ и всех $j, l = 1, \dots, m$.

В. Нули $\{\lambda_l(t, x, \xi)\}_1^m$ главного символа (0.4) при всех $t \in J$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$ являются вещественными функциями, удовлетворяющими неравенствам (0.6), (0.7) с $l, r = 1, \dots, m$, а коэффициенты $\alpha_{j,\alpha}(t, x)$ удовлетворяют при всех k, β, j, α , $|\alpha| \neq 0$, $|\alpha| + j \leq m$, и при всех $t \in J$, $x \in R^n$ неравенствам (0.8), (0.9).

Доказательство. Докажем импликацию $A \Rightarrow B$. Согласно теореме Виета

$$|D_t^k D_x^\beta a_{j,\alpha}(t, x)| = |D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_{m-j}} \tau_{i_1}(t, x, \xi) \tau_{i_2}(t, x, \xi) \dots \\ \dots \tau_{i_{m-j}}(t, x, \xi) \leq C_{k,\beta} \lambda^{m-j}(t) \langle \xi \rangle^{m-j-|\alpha|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k, \quad \langle \xi \rangle \geq \langle \xi_t \rangle. \quad (1.6)$$

Левая часть (1.6) и постоянные $C_{k,\beta}$ не зависят от ξ , поэтому, выбрав $\langle \xi \rangle = \langle \xi_t \rangle$, получаем (0.8) при $j + |\alpha| = m$. Для остальных $a_{j,\alpha}$, $j + |\alpha| = m - l$, где $l = 1, \dots, m - 1$, (0.8) устанавливается индукцией по l .

Докажем теперь (0.9). Нетрудно показать, что $\text{Im } a_{m-|\alpha|,\alpha}(t, x) \equiv 0$. Далее, для любых $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle \xi \rangle \geq \langle \xi_t \rangle$ имеем

$$|D_t^k D_x^\beta \text{Im } a_{m-1-|\alpha|,\alpha}(t, x)| = |D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \text{Im} \sum_{i_1 < \dots < i_{|\alpha|+1}} \tau_{i_1} \tau_{i_2} \dots \tau_{i_{|\alpha|+1}}| \leq \\ \leq C_{k,\beta} \lambda^{|\alpha|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k \left\{ \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} + \frac{\lambda(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t) \langle \xi \rangle} \right\}, \quad (1.7)$$

и т. к. $\langle \xi \rangle$ можно выбрать сколь угодно большим, откуда следует (0.9).

Для доказательства (0.6), (0.7) осуществим замену $\lambda = \lambda(t) |\xi|$, $\tau = \lambda(t) |\xi| \gamma$, после которой уравнения для нулей главного символа и нулей полного символа перейдут в

$$\mu^m + \sum_{0 \leq j < m} \left(\sum_{|\alpha| = m-j} (\lambda(t) |\xi|)^{j-m} a_{j,\alpha}(t, x) \xi^\alpha \right) \mu^j = 0, \quad (0.5')$$

$$\gamma^m + \sum_{0 \leq j < m} \left(\sum_{|\alpha| = m-j} (\lambda(t) |\xi|)^{j-m} a_{j,\alpha}(t, x) \xi^\alpha + B_{j+1} \right) \gamma^j = 0, \quad (1.1')$$

где

$$B_{j+1} = B_{j+1}(t, x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m-1-j} (\lambda(t) |\xi|)^{j-m} a_{j,\alpha}(t, x) \xi^\alpha, \quad j = 0, \dots, m-1. \quad (1.8)$$

Согласно уже доказанному (0.8) при $(t, x, \xi) \in Z_h = \{(t, x, \xi): x \in R^n, \xi \in R^n, t \geq t_\xi\}$

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta B_{j+1}(t, x, \xi)| \leq C_{k,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k \sum_{|\alpha| \leq m-1-j} \\ \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t) |\xi|} \right)^{m-j-|\alpha|} \leq C_{k,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k N^{-1}, \quad N > 1, \quad (1.9)$$

повтому рассмотрим (0.5') как возмущенное уравнение (1.1') с возмущениями $[-B_j]_1^m$ в коэффициентах. Корни уравнения (1.1') согласно (1.4) аналитически зависят от возмущений $[-B_j]_1^m$. Ясно, что

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta \gamma_j(t, x, \xi)| \leq C_{k,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k, \quad (1.10)$$

$$|\gamma_j(t, x, \xi) - \gamma_l(t, x, \xi)| \geq \delta_l, \quad j \neq l, \quad (1.11)$$

$$|D_t^k D_{\xi}^{\alpha} D_x^{\beta} \ln \gamma_l(t, x, \xi)| \leq C_{k, \alpha, \beta} \left\{ \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} + \right. \\ \left. + (m-2) \frac{\lambda(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t) < \xi >} \right\} < \xi >^{-1-|\alpha|} \frac{1}{\lambda(t)} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k, \quad (1.12)$$

при всех $t \in [t_0, T]$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $< \xi > > M$, и всех $j, l = 1, \dots, m$.

Далее достаточно показать, что при возмущении каким-либо одним B_{j+1} , при отсутствии остальных, т. е. при $B_1 = \dots = B_j = B_{j+2} = \dots = B_m = 0$, корни уравнения

$$P(t, x, \xi; \mu) - \mu^j B_{j+1} = 0, \quad (1.13)$$

где $P(t, x, \xi; \mu) = (\mu - \gamma_1(t, x, \xi)) \dots (\mu - \gamma_m(t, x, \xi))$, наследуют свойства (1.10)–(1.12) корней уравнения (1.1'), разумеется с новыми постоянными $N, \delta_1, C_{k, \alpha, \beta}, M$. Действительно, в силу (1.11) имеем

$$\mu_l(t, x, \xi) = \gamma_l(t, x, \xi) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(l)}(t, x, \xi) B_{j+1}^n \quad (l=1, \dots, m), \quad (1.14)$$

где

$$c_n^{(l)}(t, x, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\omega - \gamma_l(t, x, \xi)| = \rho} \\ \frac{(\omega - \gamma_l(t, x, \xi)) (\omega P_{\omega}'(t, x, \xi; \omega) - j P(t, x, \xi; \omega) \omega^{j^{n-1}})}{(P(t, x, \xi; \omega))^{n+1}} d\omega = \\ = \frac{1}{(n-1)!} \left| \frac{d^{n-1}}{d\omega^{n-1}} \left\{ \left(\frac{\omega - \gamma_l(t, x, \xi)}{P(t, x, \xi; \omega)} \right)^{n+1} \omega^{j^{n-1}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\omega P_{\omega}'(t, x, \xi; \omega) - j P(t, x, \xi; \omega)) \right\} \right|_{\omega = \gamma_l(t, x, \xi)}. \quad (1.15)$$

Поэтому, при $0 < 2\rho < \delta_1$ справедливо неравенство

$$|c_n^{(l)}(t, x, \xi)| \leq c \delta_1^{1-m} (c_1 / (\rho \delta_1^{m-1}))^n, \quad c = \text{const}, \quad (1.16)$$

в котором правая часть не зависит от t, x, ξ, l . Поэтому радиус r_{j+1} сходимости ряда (1.14) ($|B_{j+1}| < r_{j+1}$) не зависит от t, x, ξ, l , и может быть выбран равным $q_1 \rho \delta_1^{m-1} / c$, где $q_1 = \text{const} < 1$. Таким образом, для сходимости рядов (1.14) достаточно, чтобы

$$-(\ln \lambda(t)) / (\Lambda(t) |\xi|) < q_1 \rho \delta_1^{m-1} / (2c), \quad (1.17)$$

где постоянная c не зависит от t, x, ξ, l , а ρ связана лишь условием $\rho < \delta_1/2$. Выбрав новое N в (1.2), будем теперь рассматривать только $(t, x, \xi) \in Z_h$, где Z_h определено с этим новым N .

Проверим, что корни уравнения (1.13) действительно наследуют все свойства (1.10)–(1.12). Имеем

$$|\mu_l(t, x, \xi)| \leq |\gamma_l(t, x, \xi)| + \sum_{n=1}^{\infty} c \delta_1^{1-m} \left(\frac{c |B_{j+1}|}{\rho \delta_1^{m-1}} \right)^n \leq \text{const}$$

для всех $(t, x, \xi) \in Z_h$ и всех l , что соответствует (1.10) с $k = |\alpha| = |\beta| = 0$.
Далее

$$\mu_l(t, x, \xi) - \mu_k(t, x, \xi) = (\gamma_l - \gamma_k) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n^{(l)} - c_n^{(k)}) B_{j+1}^n.$$

Но $|\gamma_l - \gamma_k| \geq \delta_1$, а

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (c_n^{(l)} - c_n^{(k)}) B_{j+1}^n \right| \leq c \delta_1^{1-m} q_1,$$

что может быть сделано меньше $\delta_1/2$ при соответствующем выборе q_1 ; т. е. при достаточном увеличении N . Окончательно, для корней (1.13) получаем

$$|\mu_l(t, x, \xi) - \mu_k(t, x, \xi)| \geq \delta_1/2, \quad (t, x, \xi) \in Z_h, \quad k \neq l. \quad (1.18)$$

Теперь уже можно оценить производные $D_\xi^\alpha D_x^\beta D_t^\gamma \mu_l(t, x, \xi)$ либо оценив соответствующие производные коэффициентов $c_n^{(l)}(t, x, \xi)$, либо по формуле производной неявной функции, и получить оценки

$$|D_t^\gamma D_\xi^\alpha D_x^\beta \mu_l(t, x, \xi)| \leq C_{k, \alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k. \quad (1.19)$$

Далее

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} \mu_l(t, x, \xi)| &\leq |\operatorname{Im} \gamma_l(t, x, \xi)| + \left| \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(l)}(t, x, \xi) B_{j+1}^n \right| \leq \\ &\leq c (\lambda(t) |\xi|)^{-1} \left\{ \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} + (m-2) \frac{\lambda(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t) |\xi|} \right\} + |\operatorname{Im} c_1^{(l)}| \cdot |B_{j+1}| + \\ &+ |c_1^{(l)}| |\operatorname{Im} B_{j+1}| + |B_{j+1}|^2 \sum_{n=2}^{\infty} |c_n^{(l)}| \cdot |B_{j+1}|^{n-2}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Но

$$|\operatorname{Im} c_1^{(l)}| \leq c (\lambda |\xi|)^{-1} \left\{ \frac{\lambda}{\Lambda} + (m-2) \frac{\lambda \ln^2 \lambda}{\Lambda^2 |\xi|} \right\}, \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} B_{j+1}| &= \left| \sum_{|\alpha| \leq m-1-j} (\lambda |\xi|)^{j-m} \operatorname{Im} a_{j, \alpha}(t, x) \xi^\alpha \right| \leq \\ &\leq c (\lambda |\xi|)^{-1} + c (m-2) \sum_{0 < |\alpha| + j \leq m-2} (\lambda |\xi|)^{j-m} |a_{j, \alpha}(t, x) \xi^\alpha| + \\ &+ \sum_{|\alpha| = m-1-j} (\lambda |\xi|)^{j-m} |\operatorname{Im} a_{j, \alpha}(t, x) \xi^\alpha| \leq c (\lambda |\xi|)^{-m} + \\ &+ c (m-2) \sum_{0 < |\alpha| + j \leq m-2} \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t) |\xi|} \right)^{m-j-|\alpha|} + c (\Lambda(t) |\xi|)^{-1} \leq \\ &\leq c (\lambda(t) |\xi|)^{-1} \left\{ \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} + (m-2) \frac{\lambda(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t) |\xi|} \right\}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$|B_1|^2 \leq c \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t) |\xi|} \right)^2, \quad \sum_{n=2}^{\infty} |c_n^{(l)}| |B_1^{n-2}| \leq c. \quad (1.23)$$

Поэтому из (1.20)–(1.23) следует справедливость неравенств

$$\begin{aligned} |D_t^\gamma D_\xi^\alpha D_x^\beta \operatorname{Im} \mu_l(t, x, \xi)| &\leq C_{k, \alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k \times \\ &\times \frac{1}{\lambda(t) \langle \xi \rangle} \left\{ \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} + \frac{\lambda(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t) \langle \xi \rangle} \right\}, \quad l=1, \dots, m, \end{aligned} \quad (1.24)$$

при $r = k + |\alpha| + |\beta| = 0$. Для доказательства (1.24) при всевозможных r достаточно воспользоваться формулой производной неявной функции и индукцией по r , чем и завершается доказательство того, что корни уравнения (1.13) наследуют все свойства корней $\{\gamma_l(t, x, \xi)\}$.

Таким образом, для корней уравнения (0.5'), а следовательно и для нулей $|\gamma_l(t, x, \xi)|_1^m$ главного символа справедливы неравенства, соответствующие (1.3), (1.4) и, кроме того

$$|\operatorname{Im} \lambda_l(t, x, \xi)| \leq c \left\{ \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} + \frac{\lambda(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t) \langle \xi \rangle} \right\} \quad (1.25)$$

для всех $(t, x, \xi) \in Z_h(N)$. Если предположить теперь, что при некоторых $t_0, \xi_0, t_0 \neq 0, \operatorname{Im} \lambda_{i_0}(t_0, x_0, \xi_0) \neq 0$, то при достаточно больших $|\xi|$ точка $(t_0, x_0, |\xi| \xi_0)$ попадает в зону $Z_h(N)$ и, вследствие однородности по ξ функции $\lambda_{i_0}(t, x, \xi)$, (1.25) нарушается при $|\xi| \rightarrow \infty$. Т. о. все $\lambda_l(t, x, \xi)$ — вещественные функции. Импликация $A \Rightarrow B$ доказана.

Доказательство импликации $B \Rightarrow A$ отличается только тем, что теперь уже рассматриваем (1.1') как возмущенное (0.5'). Лемма доказана.

При «слабом» нарушении условий гиперболичности, которое имеет место в теореме 1, утверждения леммы 1 остаются в силе только частично. Для описания поведения корней полного символа определим точку t_3 как решение уравнения (см. (2.2) [2])

$$\Lambda(t_3) \langle \xi \rangle = N_3 \nu(t_3) \ln^2 \lambda(t_3), \quad N_3 = \text{const} > 0. \quad (1.26)$$

Лемма 2. В условиях теоремы 1 существуют постоянные M_0, N_0, N_{30} , такие, что для всех $N > N_0, N_3 > N_{30}, M > M_0$, корни $|\tau_l(t, x, \xi)|_1^m$ обладают следующими свойствами: для любых k, α, β существуют положительные постоянные $\delta_1, C_{k, \alpha, \beta}$ такие, что при $(x, \xi) \in \Gamma, t_\xi \leq t \leq T$, имеют место (1.3), (1.4), а также

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta \operatorname{Im} \tau_l(t, x, \xi)| \leq C_{k, \alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k \left\{ \frac{\lambda(t)}{\nu(t) \Lambda(t)} + \right. \\ \left. + (m-2) \frac{\lambda(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t) \langle \xi \rangle} \right\} \quad \text{при } (x, \xi) \in \Gamma, t_\xi \leq t \leq T, \quad (1.27)$$

$$|\operatorname{Im} \tau_k(t, x, \xi)| \leq o(1) \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)}, \quad k=1, \dots, r \quad \text{при } (x, \xi) \in \Gamma, t_3 \leq t \leq T, \quad (1.28)$$

$$|\operatorname{Im} \tau_k(t, x, \xi)| \geq \delta_1 \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)}, \quad k=r+1, \dots, m \quad \text{при } (x, \xi) \in \Gamma, t_3 \leq t \leq T, \quad (1.29)$$

для всех $j, l=1, \dots, m$, и с $r \leq m-1$. Здесь $o(1)$ относительно $T \downarrow 0$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1, поэтому мы его опускаем.

§ 2. Построение неустойчивого решения. Случай $s=0$

1°. В § 2 [1] осуществлено приведение (0.1), (0.2) к задаче Коши для системы «первого» порядка (2.8) [1], а затем в §§ 3—5 [1]—построение параметрикса сведено к построению экспоненты некоторого матричного ПДО. Повторяя конструкции §§ 2—5 [1] в ситуации теоремы 1 мы приходим к системе

$$iD_t U - R(t, x, D_x) U = 0, \quad (2.1)$$

аналогичной (5.4) [1], где $U = (U_1, \dots, U_m)$, $R(t, x, \xi) = \bar{D}(t, x, \xi) + \bar{F}(t, x, \xi) + \varepsilon(t, x, \xi)$, $\bar{D}(t, x, \xi)$ — вещественная диагональная матрица, $\varepsilon(t) \in H[0, 0, 1]$ в обозначениях [1], $\bar{F}(t, x, \xi)$ — диагональная матрица, и

$$\bar{D}(t, x, \xi) = \bar{F}(t, x, \xi) = 0 \text{ при } 0 \leq t \leq t_*, (x, \xi) \in \Gamma, \quad (2.2)$$

$$\|D_t^\alpha D_x^\beta \bar{F}(t, x, \xi)\| \leq C_{k, \alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha| + |\beta|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^{k+1},$$

$$t_* \leq t \leq T, (x, \xi) \in \Gamma, \quad (2.3)$$

$$\|D_t^k D_x^\alpha D_x^\beta \bar{D}(t, x, \xi)\| \leq C_{k, \alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha| + |\beta|} \left\{ \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \vee (t)} + \right.$$

$$\left. + (m-2) \frac{\lambda(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t) \langle \xi \rangle} \right\} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k, \quad t_* \leq t \leq T, (x, \xi) \in \Gamma, \quad (2.4)$$

$$\|D_x^\alpha D_x^\beta \varepsilon(t, x, \xi)\| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha| + |\beta|} (\rho(t, \xi) + \rho_t(t, \xi)/\rho(t, \xi)), \quad 0 \leq t \leq t_*, (x, \xi) \in \Gamma, \quad (2.5)$$

$$|\bar{D}_{kj}(t, x, \xi)| \leq o(1) \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \vee (t)} \delta_{kj}, \quad k=1, \dots, r, t_* \leq t \leq T, (x, \xi) \in \Gamma, \quad (2.6)$$

$$|\bar{D}_{kj}(t, x, \xi)| \geq \delta_{kj} \delta_1 \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \vee (t)}, \quad k=r+1, \dots, m, t_* \leq t \leq T, (x, \xi) \in \Gamma, \quad (2.7)$$

$$\bar{D}_{m, m}(t, x, \xi) > 0, \bar{D}_{m-1, m-1}(t, x, \xi) < 0, t_* \leq t \leq T, (x, \xi) \in \Gamma. \quad (2.8)$$

Здесь коническое множество Γ хоть и не совпадает с тем, которое было в условиях теоремы, но, являясь его частью, обладает всеми его свойствами и потому мы его также обозначаем через Γ . Функция $\rho(t, \xi)$ определена в (2.1) [1], а о (1) описана в лемме 2.

2°. Асимптотическое решение системы (2.1) будем искать в виде

$$U(t, x, \xi) = e^{ix\xi} \sum_{n=0}^N U_n(t, x, \xi), \quad (2.9)$$

где большое число N будет выбрано ниже, а $(x, \xi) \in \Gamma$. Подстановка в (2.1) приводит к следующим системам: $(R^{(n)} = \partial_x^n R)$

$$iD_t U_0 - R(t, x, \xi) U_0 = 0, \quad (2.10)$$

$$iD_t U_n - R(t, x, \xi) U_n - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{|\alpha| = n-k} \frac{1}{\alpha!} R^{(\alpha)}(t, x, \xi) D_x^\alpha U_k(t, x, \xi) = 0. \quad (2.11)$$

К (2.10), (2.11) добавим начальные условия

$$U_0(t_3, x, \xi) = \varphi(0, \dots, 0, \varphi(x < \xi >^\delta)) = \Phi(x, \xi), \quad \delta > 0, \quad (2.12)$$

$$U_n(t_3, x, \xi) = 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.13)$$

где $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$, $\int |\varphi(x)|^2 dx = 1$, $(0, \xi) \in \Gamma$, а постоянная $\delta < 1/2$ будет выбрана ниже, причем $\lambda(t)/\Lambda(t) < c\Lambda^{-\delta}(t)$ при $t \in J^0$.

3°. Прежде всего рассмотрим зону $0 \leq t \leq t_3$. Очевидно, что

$$|D_x^\alpha D_t^\beta R(t, x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} < \xi >^{-|\alpha|} (\ln < \xi >)^{|\alpha| + |\beta|} g(t, \xi), \quad t \leq t_3, \quad (2.14)$$

где для функции $g(t, \xi)$ согласно (2.2)–(2.5) имеем при $(x, \xi) \in \Gamma$

$$\int_0^{t_3} g(t, \xi) dt \leq \gamma_1 \ln < \xi >. \quad (2.15)$$

Из (2.10)–(2.13) нетрудно получить представления

$$U_0(t, x, \xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{JR \cdots JR}_i \Phi(x, \xi), \quad (2.16)$$

где обозначено $Jv(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$,

$$U_n(t, x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{JR \cdots JR}_i \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{|\alpha| = n-k} \frac{1}{\alpha!} R^{(\alpha)} D_x^\alpha U_k, \quad (2.17)$$

откуда

$$|D_x^\alpha U_n(t, x, \xi)| \leq C_{n, \alpha} < \xi >^{\delta(|\alpha| + n) - n} \left(\int_0^{t_3} g(\tau, \xi) d\tau \right)^n \times \\ \times \exp \left(\int_0^{t_3} g(\tau, \xi) d\tau \right), \quad \text{при } (x, \xi) \in \Gamma, \quad 0 \leq t \leq t_3, \quad (2.18)$$

и, следовательно,

$$|D_x^\alpha U_n(t, x, \xi)| \leq C_{n, \alpha} (\ln < \xi >)^n < \xi >^{\delta(|\alpha| + n) - n + \gamma_1}, \quad (x, \xi) \in \Gamma, \quad t \leq t_3. \quad (2.19)$$

Далее, для любого псевдодифференциального оператора $R(t, x, D_x)$ имеем:

$$R(t, x, D_x) e^{ix\xi} U_k(t, x, \xi) = e^{ix\xi} \sum_{|\alpha| \leq N-k} \frac{1}{\alpha!} R^{(\alpha)}(t, x, \xi) D_x^\alpha U_k(t, x, \xi) + \\ + r_{N, k}(t, x, \xi), \quad (2.20)$$

где с любым $l > 0$

$$r_{N,k}(t, x, \xi) = e^{ix\xi} \int_{R^n} d\zeta \int_{K^n} dy \int_0^1 d\theta \sum_{|a|=N-k} \frac{1}{a!} R^{(a)}(t, x, \xi + \theta\zeta) e^{K(x-y)} \\ \langle \zeta \rangle^{-2l} < D_y \rangle^{2l} D_x^a U_k(t, y, \xi). \quad (2.21)$$

В случае $R(t, x, D_x)$ из (2.1) для $\forall \varepsilon > 0$ с помощью неравенства Питре получаем ($|z| = N - k$)

$$\|R_{(y)}^{(a)}(t, x, \xi + \theta\zeta)\| \leq C_{\varepsilon, a, \beta} \langle \xi + \theta\zeta \rangle^{s-N+k} < \\ \leq C_{\varepsilon, a, \beta} \langle \xi \rangle^{s-N+k} \langle \zeta \rangle^{N-k-s}. \quad (2.22)$$

Выбирая теперь $2l - N + k + \varepsilon > n$ из (2.21), (2.22) выводим ($\delta < 1/2$)

$$|D_x^b r_{N,k}(t, x, \xi)| \leq C_{\varepsilon, b, N, \beta} \langle \xi \rangle^{|\beta| - N(1-2\delta) + 2\delta(n-k) + s(1-\delta)} |Jg|^k \exp |Jg| \leq \\ \leq C_{\varepsilon, b, N, \beta} (\ln \langle \xi \rangle)^k \langle \xi \rangle^{|\beta| - N(1-2\delta) - 2\delta(k-n) + s(1-\delta) + \gamma_1}, \quad (2.23)$$

где $0 \leq t \leq t_3$, а n — размерность пространства x -ов.

Ясно, что

$$(iD_t - R(t, x, D_x)) U(t, x, \xi) = R_N, \text{ где } R_N = \sum_{k=0}^N r_{N+1,k}, \quad (2.24)$$

$$|D_x^b R_N(t, x, \xi)| \leq C_{\varepsilon, b, N, \beta} \langle \xi \rangle^{|\beta| - (N+1)(1-2\delta) + 2\delta n + \gamma_1 + s}, \quad (2.25)$$

при $(x, \xi) \in \Gamma$, $t \leq t_3$, для любого $\varepsilon > 0$ и $\delta < 1/2$. Отметим также, что

$$|D_x^a (e^{-ix\xi} U(t, x, \xi))| \leq C_{\varepsilon, a} \langle \xi \rangle^{\delta - |a| + \gamma_1}, \quad t \leq t_3, (x, \xi) \in \Gamma. \quad (2.26)$$

4°. Определим точку t_4 как решение уравнения

$$\frac{\ln \lambda(t_4)}{\nu(t_4)} = 2N_3 \ln |\xi| + \frac{\ln \lambda(t_3)}{\nu(t_3)}, \quad N_3 > 0, \quad (2.27)$$

и докажем асимптотическое неравенство Гординга. Выберем еще точку $t_3 < t_4$ из

$$\langle \xi \rangle \Lambda(t_3) = (N_3/4) \nu(t_3) (\ln \lambda(t_3))^2, \quad (2.28)$$

и обозначив через $d_i(t, x, \zeta)$, $i = 1, \dots, m$, элементы матрицы $\tilde{D}_{i,j}(t, x, \xi)$, продолжим их на $[0, T] \times \Gamma$ следующим образом:

$$\tilde{d}_i(t, x, \zeta) = \langle \zeta \rangle \chi \left(\frac{2\langle \zeta \rangle \Lambda(t)}{N_3 \nu(\ln \lambda(t))^2} \right) + d_i(t, x, \zeta) \left(1 - \chi \left(\frac{2\langle \zeta \rangle \Lambda(t)}{N_3 \nu(\ln \lambda(t))^2} \right) \right),$$

так что $\tilde{d}_i \in C(\bar{J}; S^1)$, $\tilde{d}_i$ — вещественны, и для $i = r+1, \dots, m$ $|\tilde{d}_i(t, x, \zeta)| \geq C(t, \zeta)$, где

$$C(t, \zeta) = \langle \zeta \rangle \chi \left(\frac{2\langle \zeta \rangle \Lambda(t)}{N_3 \nu(\ln \lambda(t))^2} \right) + \frac{\delta_1}{2} \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)} \times \\ \times \left(1 - \chi \left(\frac{2\langle \zeta \rangle \Lambda(t)}{N_3 \nu(\ln \lambda(t))^2} \right) \right).$$

Построим теперь оператор $B(t, x, D_x)$ так, чтобы

$$2 \operatorname{Re}(\tilde{d}(t, x, D_x) - \frac{1}{2} C(t, D_x)) - B^*(t, x, D_x) B(t, x, D_x) \in \Psi^{-\infty}(\Gamma)$$

равномерно по $t \in J$, где $2 \operatorname{Re}(\tilde{d} - C/2) = \tilde{d} + \tilde{d}^* - C$. Для этого ищем B в виде

$$B \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k,$$

где $b_{-k} \in C(J; S^{1/2-k}(\Gamma))$, $k = 0, 1, \dots$, определяются рекуррентно.

Рассмотрим теперь действие какого-нибудь п. д. о.: $R(t, x, D_x)$ на функцию $v(t, x, \xi)$ — компоненту вектора $U(t, x, \xi)$ (2.9) определенного согласно (2.10) — (2.13), [где $\xi/|\xi|$ — фиксированный вектор, $(0, \xi) \in \Gamma$]:

$$R(t, x, D_x) v(t, x, \xi) = e^{ix\xi} \sum_{|a| \leq N} \frac{1}{a!} R^{(a)}(t, x, \xi) D_x^a (e^{-ix\xi} \times \\ \times v(t, x, \xi)) + r_N(t, x, \xi), \quad (2.29)$$

$$r_N(t, x, \xi) = e^{ix\xi} \int_{R^n} \int_{R^n} d\zeta \int_0^1 dy \int_0^1 d\theta \frac{1}{a!} R^{(a)}(t, x, \xi + \theta\zeta) e^{i\zeta(x-y)} \times$$

$$\times \langle \zeta \rangle^{-2l} \langle D_y \rangle^{2l} D_y^a (e^{-i\zeta y} v(t, y, \xi)), \quad |a| = N, \quad \forall l \geq 0. \quad (2.30)$$

Заметив, далее, что (2.26) с новым γ_1 , пусть даже зависящим от N_1 , выполняется и при $t_3 \leq t \leq t_4$, $(x, \xi) \in \Gamma$, получаем, что если $d_j(t_3, x, \xi) \geq 0$, $j \geq r+1$, то при $t_3 \leq t \leq t_4$ для любого $N_1 > 0$

$$(\bar{d}_j(t, x, D_x) - d_j(t, x, D_x)) v(t, x, \xi) = \bar{r}_N(t, x, \xi) - \\ - r_N(t, x, \xi) = O(|\xi|^{-N_1}), \quad (2.31)$$

при соответствующем выборе N в (2.9), равномерно по $t, x \in R^n$.

Итак, для указанных $d_j(t, x, D_x)$ при $t \in [t_3, t_4]$

$$2 \operatorname{Re}(d_j(t, x, D_x) v(t, x, \xi), v(t, x, \xi)) = (C(t, D_x) v(t, x, \xi), v(t, x, \xi)) + \\ + O(|\xi|^{-N_1}) + \|B(t, x, D_x) v(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 >$$

$$\geq \frac{\delta_1}{2} \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)} \|v(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 + O(|\xi|^{-N_1}), \quad t \in [t_3, t_4], \quad (2.32)$$

что естественно назвать асимптотическим неравенством Гординга.

Аналогично доказываются оценки сверху при $t \in [t_3, t_4]$:

$$|(d_j(t, x, D_x) v(t, x, \xi), v(t, x, \xi))| \leq c \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)} \|v(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 + \\ + O(|\xi|^{-N_1}), \quad j = r+1, \dots, m, \quad (2.33)$$

$$|(d_j(t, x, D_x) v(t, x, \xi), v(t, x, \xi))| \leq o(1) \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)} \|v(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 + \\ + O(|\xi|^{-N_1}), \quad j = 1, \dots, r, \quad (2.34)$$

$$|(\tilde{F}(t, x, D_x) U(t, x, \xi), U(t, x, \xi))| \leq c \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \|U(t, x, \xi)\|_{L_1(R_x^n)}^2 + \\ + O(|\xi|^{-N_1}), \quad (2.35)$$

$$|(\varepsilon(t, x, D_x) U(t, x, \xi), U(t, x, \xi))| \leq o(1) \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \|U(t, x, \xi)\|_{L_1(R_x^n)}^2 + \\ + O(|\xi|^{-N_1}). \quad (2.36)$$

5°. Введем обозначение $\sigma_k = \text{sign } d_k(t, x, \xi)$, $k \geq r+1$, $t \geq t_3$, и рассмотрим форму

$$S(t, \xi) = \sum_{k=r+1}^m \sigma_k \|U_k(t, x, \xi)\|_{L_1(R_x^n)}^2 - \sum_{k=1}^r \|U_k(t, x, \xi)\|_{L_1(R_x^n)}^2, \quad (2.37)$$

где $U = (U_1, \dots, U_m)$. Тогда, в силу (2.24) имеем ($f_k = \bar{F}_{kk}$)

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \sum_{k=r+1}^m \sigma_k 2 \text{Re}(U_k, U_k)_{L_1} - \sum_{k=1}^r 2 \text{Re}(U_k, U_k)_{L_1} = \\ &= \sum_{k=r+1}^m \sigma_k 2 \text{Re}(U_k, d_k U_k)_{L_1} + \sum_{k=r+1}^m \sigma_k 2 \text{Re}(U_k, f_k U_k)_{L_1} + \\ &\quad + \sum_{k=r+1}^m \sum_{l=1}^m \sigma_k 2 \text{Re}(U_k, \varepsilon_{kl} U_l)_{L_1} - \\ &\quad - \sum_{k=1}^r 2 \text{Re}(U_k, d_k U_k)_{L_1} - \sum_{k=1}^r 2 \text{Re}(U_k, f_k U_k)_{L_1} - \\ &\quad - \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^m 2 \text{Re}(U_k, \varepsilon_{kl} U_l)_{L_1} + \\ &\quad + \sum_{k=r+1}^m \sigma_k 2 \text{Re}(U_k, R_{N_k})_{L_1} - \sum_{k=1}^r 2 \text{Re}(U_k, R_{N_k})_{L_1} > \\ &\geq \frac{\delta_1}{2} \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \vee (t)} \sum_{k=r+1}^m \|U_k\|_{L_1}^2 - c \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \sum_{k=r+1}^m \|U_k\|_{L_1}^2 - \\ &\quad - \sum_{k=1}^m o(1) \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \|U_k\|_{L_1}^2 - o(1) \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \vee (t)} \sum_{k=1}^r \|U_k\|_{L_1}^2 - \\ &\quad - O(|\xi|^{-N_1}) (\|U(t, x, \xi)\|_{L_1} + 1) \geq \\ &> \alpha \frac{\lambda(t)}{\lambda(t) \vee (t)} S(t, \xi) - O(|\xi|^{-N_1}) (\|U(t, x, \xi)\|_{L_1} + 1), \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(S(t, \xi) \exp \left(-\alpha \int_{t_3}^t \frac{\lambda_1(\tau)}{\lambda(\tau) \vee (\tau)} d\tau \right) \right) &\geq -O(|\xi|^{-N_1}) (\|U(t, x, \xi)\|_{L_1} + 1) \times \\ &\times \exp \left(-\alpha \int_{t_3}^t \frac{\lambda_1(\tau)}{\lambda(\tau) \vee (\tau)} d\tau \right), \quad \alpha = \text{const} > 0, \quad t_3 < t, \end{aligned}$$

откуда

$$S(t, \xi) \geq \exp \left(a \int_{t_3}^t \frac{\lambda_1(\tau)}{\lambda(\tau) \vee (\tau)} d\tau \right) \left\{ S(t_3, \xi) - \int_{t_3}^t O(|\xi|^{-N_1}) \times \right. \\ \left. \times (|U(\tau, x, \xi)|_{L_1} + 1) \exp \left(-a \int_{t_3}^{\tau} \frac{\lambda_1(\sigma)}{\lambda(\sigma) \vee (\sigma)} d\sigma \right) d\tau \right\}, \quad t \geq t_3. \quad (2.38)$$

Принимая во внимание, что (2.26) выполняется и при $t \in [t_3, t_4]$, получаем

$$S(t, \xi) \geq \exp \left(a \int_{t_3}^t \frac{\lambda_1(s)}{\lambda(s) \vee (s)} ds \right) |S(t_3, \xi) - O(|\xi|^{-N_1})|. \quad (2.39)$$

Но $S(t_3, \xi) = \langle \xi \rangle^{-N_1} \|\varphi(x)\|_{L_1}^2 = \langle \xi \rangle^{-N_1}$, и поэтому

$$S(t, \xi) \geq \frac{1}{2} \langle \xi \rangle^{-N_1} \exp \left(a \int_{t_3}^t \frac{\lambda_1(s)}{\lambda(s) \vee (s)} ds \right), \quad t_3 < t \leq t_4. \quad (2.40)$$

Далее

$$N_1 \ln |\xi| \leq \int_{t_3}^{t_4} \frac{\lambda_1(s)}{\lambda(s) \vee (s)} ds \leq 2 N_1 \ln |\xi|, \quad (2.41)$$

так что $S(t_4, \xi) \geq \langle \xi \rangle^{-N_1 - \varepsilon N_1/2}$, и следовательно,

$$\|U(t_4, x, \xi)\|_{L_1(R_x^n)}^2 > \frac{1}{2} \langle \xi \rangle^{-N_1 - \varepsilon N_1}. \quad (2.42)$$

Неустойчивое решение для (0.1), (0.2) получаем, взяв первую компоненту вектора

$$U_{\text{неуст.}}(t, x, \xi) = H^{-1}(t) \bar{M}^*(t) N(t) E(t, 0) U(t, x, \xi), \quad (2.43)$$

где $H(t)$, $M(t)$, $N(t)$ описаны в § 2 [1], а матричный интегральный оператор Фурье $E(t, s)$ построен в § 4 [1] и имеет вид (4.31) [1]. Из (2.43) получаем

$$U(t, x, \xi) = E(0, t) N^*(t) M(t) H(t) U_{\text{неуст.}}(t, x, \xi) + O(|\xi|^{-N_1}),$$

откуда

$$\langle \xi \rangle^{-\varepsilon N_1 - \varepsilon N_1} \leq c \sum_{|\alpha| \leq p} |D_x^\alpha U_{\text{неуст.}}(t_4, x, \xi)|_{L_1(R_x^n)}^2. \quad (2.44)$$

Конечно указанные выше построения работы [1] следует проводить микролокально только в коническом множестве Γ , в конической окрестности фиксированного ранее вектора $\xi/|\xi|$. Вне этой окрестности выбор $E(t, s)$, $M(t)$, $H(t)$, $N(t)$ в значительной степени произволен.

6°. Выведем теперь из корректности задачи Коши априорную оценку, нарушение которой неустойчивым решением и доказывает теорему.

Из теоремы о замкнутом графике легко получаем, что если задача (0.1), (0.2) корректно поставлена в окрестности точки (t_0, x_0) в смысле определения 1, то для любого $p \geq 0$ существуют S_0 , $C_{(s, p, t, x)}$ такие, что

$$|u|_{p, \Omega(t_0, x_0, \varepsilon_0)} \leq C_{(s, p, t_0, x_0)} \|Lu\|_{s, \Omega(t_0, x_0, \varepsilon_0)} + \sum_{j=0}^{m-1} |D_t^j u|_{s_0, D(t_0, x_0, \varepsilon_0)}, \quad (2.45)$$

где $\|\cdot\|_{s, \Omega(t_0, x_0, \varepsilon_0)}$ и $\|\cdot\|_{s, D(t_0, x_0, \varepsilon_0)}$ есть равномерные нормы пространств $C^s(\Omega(t_0, x_0, \varepsilon_0))$, $C^s(D(t_0, x_0, \varepsilon_0))$, соответственно.

Введем обозначения $\Omega_\mu = \Omega(t_0, x_0, \mu^{-1})$, $\Omega_{\mu, \text{ус.}} = \Omega_\mu \cap \{t \leq t_0 + 1/(2\mu)\}$, $D_\mu = D(t_0, x_0, \mu^{-1})$.

Лемма 3. Пусть задача Коши (0.1), (0.2) корректно поставлена в окрестности точки (t_0, x_0) в смысле определения 1. Тогда для любого $p \geq 0$ существуют постоянные s_0, s_1, C_0 такие, что для любого $\mu > 1$ и любой функции $u \in C^s(\Omega_1)$

$$|u|_{p, \Omega_{\mu, \text{ус.}}} \leq C_0 \mu^{s_1} (\|Lu\|_{s_0, \Omega_{\mu, \text{ус.}}} + \sum_{j=0}^{m-1} |D_t^j u|_{s_0, D_\mu}). \quad (2.46)$$

Доказательство почти дословно совпадает с доказательством леммы 2.1 [5], по этой причине мы его здесь не приводим.

7°. Для завершения доказательства теоремы 1 остается только указать, что $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $\mu = 1/(2t_1(\xi))$, так что

$$(t_1^{-1}(\xi))^{s_1} \leq (t_1^{-1})^{s_1} \leq (\Lambda(t_1))^{-s_1} \leq \langle \xi \rangle^{s_1}. \quad (2.47)$$

При этом $\lambda_0 t_1(\xi) \geq \lambda_0 \Lambda^{1/2-1}(t_1(\xi)) \geq \lambda_0 (N \ln \langle \xi \rangle)^{1/2-1} \langle \xi \rangle^{-\delta}$ при подходящем выборе $\delta < 1/2$.

Необходимо также принять во внимание следующий легко проверяемый факт. Если $|x| > c|\xi|^{-\delta}$, $\delta < 1/2$, $c = \text{const} > 0$, то при $t \leq t_1(\xi)$

$$A(t, x, D_x)u(t, x, \xi) = O(\xi^{-N_1}), \quad \forall N_1 \geq 0 \quad (2.48)$$

для любого интегрального оператора Фурье, а, в частности, для любого псевдодифференциального оператора $A(t, x, D_x)$.

Таким образом, для неустойчивого решения $U_{\text{неуст.}}(t, x, \xi)$ при достаточно больших N из (2.9), $N_1, |\xi|$ нарушается оценка (2.46). Теорема 1 в случае $s = 0$ доказана.

§ 3. Окончание доказательства теоремы 1. Случай $s = T$

1°. Предварительно выведем из корректности задачи в смысле определения 2 априорную оценку. Из теоремы о замкнутом графике следует, что для любого $p \geq 0$ существуют s_0, C^0 такие, что для любой функции $u \in C^s(\Omega_-(x_0, t_0, \varepsilon_0))$

$$|u|_{p, \Omega_-(x_0, t_0, \varepsilon_0)} \leq C^0 (\|Lu\|_{s_0, \Omega_-(x_0, t_0, \varepsilon_0)} + \sum_{j=0}^{m-1} |D_t^j u|_{s_0, D_-(x_0, t_0, \varepsilon_0)}).$$

Введем обозначения: $\Omega_\mu^- = \Omega_-(x_0, t_0 + \mu^{-1}, \varepsilon_0 - \mu^{-1})$, $D_\mu^- = \Omega_\mu^- \cap \{t = t_0 + \varepsilon_0\}$, $\Omega_{\mu, \text{ус.}}^- = \Omega_\mu^- \cap \{t \geq t_0 + 2\mu^{-1}\}$.

Лемма 4. Для любого $p \geq 0$ существуют постоянные s_0, C_0 такие, что для любого $\mu \geq 2$ и любой функции $u \in C^s(\Omega_-(x_0, t_0, \varepsilon_0))$

$$|u|_{p, \Omega_{\mu, \text{ус.}}^-} \leq C_0 (\|Lu\|_{s_0, \Omega_{\mu, \text{ус.}}^-} + \sum_{j=0}^{m-1} |D_t^j u|_{s_0, D_\mu^-}). \quad (3.1)$$

Доказательство. Предположим, что для каждого μ существует u_μ такая, что

$$|u_\mu|_{p, \Omega_{\mu, \text{ус}}}^- \geq \mu (|Lu_\mu|_{s_0, \Omega_{\mu, \text{ус}}}^- + \sum_{j=0}^{m-1} |D^j u_\mu|_{s_0, D_\mu^-}).$$

Ясно, что можно считать $|u_\mu|_{p, \Omega_{\mu, \text{ус}}}^- = 1$. Положим $f_\mu = Lu_\mu$ и $\Psi_{j, \mu} = D^j u_\mu(t_0 + \varepsilon_0, x)$. Можно продолжить f_μ и $\Psi_{j, \mu}$ на $\Omega_-(x_0, t_0, \varepsilon_0)$ и $D_-(x_0, t_0, \varepsilon_0)$ так, чтобы для их продолжений $\tilde{f}_\mu, \tilde{\Psi}_{j, \mu}$ выполнялись неравенства

$$|\tilde{f}_\mu|_{s_0, \Omega_-(x_0, t_0, \varepsilon_0)} \leq M |f_\mu|_{s_0, \Omega_{\mu, \text{ус}}}^-,$$

$$|\tilde{\Psi}_{j, \mu}|_{s_0, D_-(x_0, t_0, \varepsilon_0)} \leq M |\Psi_{j, \mu}|_{s_0, D_\mu^-}(x_0, t_0, \varepsilon_0),$$

где M не зависит от μ . В самом деле, если, например, $t_0 + \varepsilon_0 = 1$, $g \in C^{s_0}(D_\mu^-)$, то, осуществив переход к полярным координатам в области $\bar{D}_\mu = \{(r, \omega); 0 \leq r \leq 1 - \mu^{-1}, \omega \in S^{n-1}\}$, полагаем

$$\tilde{g}(r, \omega) = \begin{cases} g(r, \omega), & 0 \leq r \leq 1 - \mu^{-1}, \\ \sum_{i=1}^{s_0+1} a_i g(1 - \mu^{-1} - \frac{i}{s_0+1}(r - 1 + \mu^{-1}), \omega), & 1 - \mu^{-1} \leq r \leq 1, \end{cases}$$

где постоянные a_i выбраны так, что $\sum_{i=1}^{s_0+1} a_i \left(-\frac{i}{s_0+1}\right) = 1$, $j = 0, \dots, s_0$.

Функция f_μ продолжается сначала очевидным образом на полный конус Ω_μ^- , а затем и на $\Omega_-(x_0, t_0, \varepsilon_0)$ с помощью преобразования $(x, t) \rightarrow (r, \omega, \tau)$, где $r = |x|$, $\tau = t + r - \mu^{-1}$. Очевидно, что решение и соответствующей задачи Коши согласно определению 2 совпадает с u_μ в $\Omega_{\mu, \text{ус}}^-$, так что $|u_\mu|_{p, \Omega_{\mu, \text{ус}}}^- > 1$. Оставшиеся рассуждения очевидны. Лемма доказана.

2°. Рассмотрим теперь решения систем (2.10), (2.11) с начальными условиями

$$U_0(t_0, x, \xi) = {}^{tr}(0, \dots, 0, \Phi(x < \xi >^{-\delta}), 0), \quad (3.2)$$

$$U_n(t_0, x, \xi) = 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad (3.3)$$

где t_0 определяется из условия

$$N_0 \ln \lambda(t_0) = -\gamma(t_0) \ln |\xi|, \quad \text{где } N_0 = \text{const} > 0. \quad (3.4)$$

Легко видеть, что

$$|D_x^\alpha U_n(t, x, \xi)| \leq C_{n, \alpha, \varepsilon} (\ln < \xi >)^\alpha < \xi >^{\varepsilon(|\alpha| + n) - n + \gamma_2}, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (3.5)$$

$$|D_x^\alpha (e^{-x\xi} U(t, x, \xi))| \leq C_{\alpha, \varepsilon} < \xi >^{\varepsilon|\alpha| + \gamma_2}, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (3.6)$$

что является следствием того факта, что с некоторой постоянной $\gamma_2 > 0$

$$\int_{t_0}^T |d_k(t, x, \xi)| dt \leq c \int_{t_0}^T \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)} dt \leq \gamma_2 \ln |\xi|, (x, \xi) \in \Gamma. \quad (3.7)$$

Если теперь t_5 определить из условия

$$\frac{\ln \lambda(t_0)}{\nu(t_0)} - \frac{\ln \lambda(t_5)}{\nu(t_5)} = 2 N_5 \ln |\xi|, N_5 = \text{const} > 0, \quad (3.8)$$

то ясно, что

$$|D_x^\alpha U_n(t, x, \xi)| \leq C_{n, \alpha, \delta} (\ln \langle \xi \rangle)^n < \langle \xi \rangle^{\delta(|\alpha| + n) - n + \gamma_2}, t_5 \leq t \leq t_0, \quad (3.9)$$

$$|D_x^\alpha (e^{-Lx} U(t, x, \xi))| \leq C_{\alpha, \delta} \langle \xi \rangle^{\delta|\alpha| + \gamma_2}, t_5 \leq t \leq t_0. \quad (3.10)$$

С другой стороны, для формы $S_-(t, \xi) = -S(t, \xi)$ (см. (2.37)) при $t \in [t_0, t_5]$ легко получаем

$$\frac{dS_-(t, \xi)}{dt} \leq -\alpha \frac{\lambda_t(t)}{\lambda(t) \nu(t)} S_-(t, \xi) + O(|\xi|^{-N_1}) (\|U(t, x, \xi)\|_{L_x(R_x^n)} + 1),$$

откуда при достаточно большом N из (2.9) выводим

$$S_-(t_5, \xi) \geq \frac{1}{2} \langle \xi \rangle^{-\delta n} \exp \left(\alpha \int_{t_5}^{t_0} \frac{\lambda_t(t)}{\lambda(t) \nu(t)} dt \right) \geq \frac{1}{2} \langle \xi \rangle^{\alpha N_5 - \delta n}, \quad (3.11)$$

и, следовательно

$$|U(t_5, x, \xi)| \geq \frac{1}{2} \langle \xi \rangle^{\alpha N_5 - \delta n}, \alpha = \text{const} > 0. \quad (3.12)$$

3°. Укажем, наконец, что $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $\tau_0 = T$, $\mu = 2/t_5$, и что

$$\frac{\langle \xi \rangle^{-\delta}}{t_5 - \mu^{-1}} = 2 \frac{\langle \xi \rangle^{-\delta}}{2t_5 - t_5} \leq 2 \frac{\langle \xi \rangle^{-\delta}}{t_5} \leq 2 \frac{\langle \xi \rangle^{-\delta}}{t_5} \leq 2 \frac{1}{(N \ln \langle \xi \rangle)^\delta}, \quad (3.13)$$

при подходящем выборе $\delta < 1/2$, так что правая часть (3.13) стремится к 0 при $|\xi| \rightarrow \infty$. Дальнейшие рассуждения почти дословно совпадают с соответствующими рассуждениями доказательства теоремы в случае $s=0$, и по этой причине мы их не приводим. Отметим только, что построенное неустойчивое решение

$$U_{\text{неуст.}}(t, x, \xi) = H^{-1}(t) M^*(t) N(t) E(t, T) U(t, x, \xi) \quad (3.14)$$

нарушает априорную оценку (4.1). Теорема 1 полностью доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Поскольку многие технические детали доказательства теоремы 2 совпадают с уже описанными и использованными в доказательстве теоремы 1, мы опустим часть из них.

1°. Обозначим через t_i , $i=1, 2$, решения уравнений: ($N_1=1$, $N_2=\text{const} > 0$)

$$|\xi| \Lambda(t) = -N_i \nu^*(t) \ln \lambda(t), \text{ где } \alpha = 1/(m - j - k). \quad (4.1)$$

Запишем уравнение (0.1) в виде системы

$$D_t U - A(t) U = F, \quad (4.2)$$

относительно вектора $U = {}^{tr}(u, D_t u, \dots, D_t^{m-1} u)$. Пусть

$$\rho(t, \xi) = \sqrt[m]{1 + |\xi| \lambda^m(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \right)^{m-1}} + \dots + \sqrt[m-j]{1 + |\xi|^{m-\widehat{k}-j} \frac{\lambda^{m-j}(t)}{v(t)} \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \right)^{\widehat{k}}},$$

$$h(t, \xi) = \rho(t, \xi) \chi \left(\frac{\Lambda(t) < \xi >}{N \ln < \xi >} \right) + < \xi > \left(1 - \chi \left(\frac{\Lambda(t) < \xi >}{N \ln < \xi >} \right) \right),$$

где χ — обычная функция срезки. Введем также функции ($i=1, \dots, m-\widehat{j}$),

$$\begin{aligned} \varphi_i(t, x, \xi) = & \left[\rho(t, \xi) \chi \left(\frac{\Lambda(t) < \xi >}{v^s(t) \ln \lambda(t)} \right) + \right. \\ & \left. + |\Delta_i(t, x, \xi)| \left(1 - \chi \left(\frac{\Lambda(t) < \xi >}{v^s(t) \ln \lambda(t)} \right) \right) \right] \times \\ & \times \exp(\arg \Delta_i(t, x, \xi)) \chi \left(\frac{\Lambda(t) < \xi >}{N \ln < \xi >} \right) + \\ & + < \xi > \exp(\arg \Delta_i(t, x, \xi)) \left(1 - \chi \left(\frac{\Lambda(t) < \xi >}{N \ln < \xi >} \right) \right), \end{aligned}$$

где $|\Delta_i(t, x, \xi)|^{m-\widehat{j}}$ — корни $(m-\widehat{j})$ -ой степени из $-\sum_{|a|=m-\widehat{k}-\widehat{j}} a_{\widehat{j}, a}(t, x) \xi^a$.

Построим частичный диагонализатор-матрицы $A(t, x, \xi)$, (W — матрица Вандермонда):

$$N^*(t) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & h & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \widehat{j}-1 & \\ & & & h & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & h^{\widehat{j}} W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-\widehat{j}}) \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Пусть $N(t, x, D_x)$ — параметрикс для $N^*(t, x, D_x)$. Осуществив замену $V = N(t, x, D_x) U$ получаем систему

$$D_t V - B_1 V - B_2 V - i N N_t^* V = F, \quad (4.4)$$

где $B_1(t, x, \xi)$ — диагональная матрица, $(B_1)_{kk} = 0$, если $k \leq \widehat{j}$, $(B_1(t, x, \xi))_{kk} = \Delta_{k-\widehat{j}}(t, x, \xi)$, если $k > \widehat{j}$, матрица $B_2(t, x, \xi)$ при $t \leq t_2$ для любых $t, 0 \leq t \leq t_2$, и любых $\alpha, \beta, k, x, \xi, (x, \xi) \in \Gamma$, допускает оценки

$$|D_x^{\beta} D_t^{\alpha} D_i^k B_2(t, x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, k} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|+k} \sqrt[m]{1 + |\xi|^m(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \right)^{m-1}}. \quad (4.5)$$

2°. Перепишем (4.4) в виде (2.1) $c - iR = B_1 + B_2 + iNN_i^{\#}$, и решим системы (2.10), (2.11) с начальными условиями

$$U_0(t_1, x, \xi) = {}^{tr}(0, \dots, 0, \varphi(x < \xi >^{\delta})), \quad (4.6)$$

$$U_n(t_1, x, \xi) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (4.7)$$

Очевидно, что при $(x, \xi) \in \Gamma$ имеют место неравенства, аналогичные (2.25), (2.26):

$$|D_x^{\alpha} D_t^k (e^{-ix\xi} U(t, x, \xi))| \leq C_{\alpha, k} \langle \xi \rangle^{\delta|\alpha| + \gamma_l + k}, \quad t \leq t_1, \quad (4.8)$$

$$|D_x^{\beta} R_N(t, x, \xi)| \leq C_{\alpha, \delta, N, \beta} \langle \xi \rangle^{|\beta| - (N+1)(1-2\delta) + \gamma_l + \delta}, \quad t \leq t_1. \quad (4.9)$$

3°. Введем обозначение $\sigma_l = -\text{sign}(\text{Im } \Delta_l)$, $l = r+1, \dots, m-j$, и для функции $U(t, x, \xi)$ рассмотрим форму

$$S(t, \xi) = - \sum_{l=1}^{\widehat{j+r}} \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 + \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m \sigma_{l-\widehat{j}} \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dS(t, \xi)}{dt} &= - \sum_{l=1}^{\widehat{j+r}} 2 \text{Re}(U_l, U_{ll}) + \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m \sigma_{l-\widehat{j}} 2 \text{Re}(U_l, U_{ll}) = \\ &= - \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^{\widehat{j+r}} 2 \text{Re}(U_l, i(B_1)_{ll} U_l) - \sum_{l=1}^{\widehat{j+r}} 2 \text{Re}(U_l, (iB_2 U)_l) + \\ &+ \sum_{l=1}^{\widehat{j+r}} 2 \text{Re}(U_l, (NN_i^{\#} U)_l) - \sum_{l=1}^{\widehat{j+r}} 2 \text{Re}(U_l, iR_{Nl}) + \\ &+ \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m \sigma_{l-\widehat{j}} 2 \text{Re}(U_l, i\Delta_{l-\widehat{j}} U_l) + \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m \sigma_{l-\widehat{j}} 2 \text{Re}(U_l, (iB_2 U)_l) - \\ &- \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m \sigma_{l-\widehat{j}} 2 \text{Re}(U_l, (NN_i^{\#} U)_l) + \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m \sigma_{l-\widehat{j}} 2 \text{Re}(U_l, R_{Nl}). \quad (4.10) \end{aligned}$$

Нам придется оценивать нормы сверху, поэтому приведем пример такой оценки в зоне $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$|(U_l, (B_2)_{lk} U_k)| \leq |U_l| \sqrt{(B_{2lk}^* B_{2lk} U_k, U_l)}.$$

Но (см. (4.5), (4.13))

$$|(B_2)_{lk}(t, x, \xi)| < \frac{c}{2} (1 + N_2^{1/m} \rho(t)), \quad \text{где } \rho(t) = \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} |\ln \lambda(t)| v^{1/m}(t),$$

и поэтому с некоторым оператором T

$$- \tilde{B}_{2lk}^1 \tilde{B}_{2lk} + c^2 (1 + \bar{\rho}(t, D_x))^2 - T^* T \in \Psi^{-N_2},$$

где $\bar{\rho}(t, D_x)$, $\tilde{B}_{2lk}$ — продолжения $N_2^{1/m} \rho(t)$, $B_{2lk}(t, x, \xi)$ на все $[0, T] \times \times R^{2n}$. Повтому при $t_1 \leq t \leq t_2$ имеем

$$\begin{aligned} (B_{2lk}^1 B_{2lk} U_k, U_k) &= (\tilde{B}_{2lk}^1 \tilde{B}_{2lk} U_k, U_k) + O(|\xi|^{-N_2}) = \\ &= (c^2 (1 + \bar{\rho}(t, D_x))^2 U_k, U_k) - (T^* T U_k, U_k) + O(|\xi|^{-N_2}) \leq \\ &\leq (c^2 (1 + \tilde{\rho}(t, D_x))^2 U_k, U_k) + O(|\xi|^{-N_2}) = \\ &= c^2 (1 + N_2^{1/m} \rho(t))^2 \|U_k(t, x, \xi)\|_{L_1(R_x^n)}^2 + O(|\xi|^{-N_2}), \end{aligned}$$

откуда

$$|(U_l, (B_2)_{lk} U_k)| \leq c (1 + N_2^{1/m} \rho(t)) \sum_{l=1}^m \|U_l(t, \xi)\|_{L_1(R_x^n)}^2 + O(|\xi|^{-N_2}).$$

Аналогично

$$|(U_l, (NN_l^*)_{lk} U_k)| \leq c \left(1 + \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right) \sum_{l=1}^m \|U_l(t, \xi)\|_{L_1(R_x^n)}^2 + O(|\xi|^{-N_2}).$$

Таким образом

$$\begin{aligned} &\left| - \sum_{l=1}^{j+r} 2 \operatorname{Re}(U_l, (iB_2 U)_l) - \sum_{l=1}^{j+r} 2 \operatorname{Re}(U_l, (NN_l^* U)_l) + \right. \\ &+ \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m \sigma_{l-\widehat{j}} 2 \operatorname{Re}(U_l, (iB_2 U)_l) + \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m \sigma_{l-\widehat{j}} 2 \operatorname{Re}(U_l, (NN_l^* U)_l) \left| \leq \right. \\ &\leq c \left(1 + N_2^{1/m} \rho(t) + \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right) \sum_{l=1}^m \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_1(R_x^n)}^2 + O(|\xi|^{-N_2}). \quad (4.11) \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \frac{dS(t, \xi)}{dt} &> \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m (2 \operatorname{Re}(i\sigma_{l-\widehat{j}} \Delta_{l-\widehat{j}}) U_l, U_l) - \sum_{l=\widehat{j+1}}^{\widehat{j+r}} (2 \operatorname{Re}(i\Delta_{l-\widehat{j}}) U_l, U_l) - \\ &- c \left(1 + N_2^{1/m} \rho(t) + \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right) \sum_{l=1}^m \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_1(R_x^n)}^2 + O(|\xi|^{-N_2}). \quad (4.12) \end{aligned}$$

Далее, при $t_1 \leq t \leq t_2$ имеем

$$|\xi| \leq v^a(t) \frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} (1 + N_2), \quad |\xi| \geq v^a(t) \frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)}, \quad (4.13)$$

откуда

$$\lambda(t) \frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \leq \sqrt[m-\widehat{j}]{|\xi|^{m-\widehat{k}-\widehat{j}} \lambda^{m-\widehat{j}}(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)}\right)^{\widehat{k}} \cdot \frac{1}{v(t)}}, \quad (4.14)$$

$$\chi(t) \frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \geq (1 + N_2) \sqrt[m-\widehat{j}]{|\xi|^{\widehat{k}+\widehat{j}-m} \lambda^{m-\widehat{j}}(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)}\right)^{\widehat{k}} \cdot \frac{1}{v(t)}}, \quad (4.15)$$

Очевидно также, что

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\lambda(t) |\ln \Lambda(t)|}{\Lambda(t)} dt \geq \frac{1}{2} (\ln^2 \Lambda(t)) \Big|_{t_1}^{t_2} =$$

$$= -\frac{1}{2} (\ln \Lambda(t_2) + \ln \Lambda(t_1)) \ln \frac{N_2 v^*(t_2) |\ln \Lambda(t_2)|}{v^*(t_1) |\ln \Lambda(t_1)|}.$$

Из условия (0.13) следует, что для любого N_2 при достаточно больших M , с постоянной c_1 не зависящей от N_2 , ξ для всех $\xi \in R^n$, $|\xi| > M$, справедливо

$$c_1 \ln \Lambda(t_1) \leq \ln |\xi| \leq 3 |\ln \Lambda(t_2)|,$$

и, следовательно

$$\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) \frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} dt \geq \gamma_1 (\ln N_2) \ln |\xi|, \text{ где } \gamma_1 = \text{const} > 0. \quad (4.16)$$

Рассмотрим теперь первые два из слагаемых в правой части (4.12):

$$G = \sum_{l=\widehat{j}+r+1}^m (2 \operatorname{Re}(i \sigma_{l-\widehat{j}} \Delta_{l-\widehat{j}})) U_l, U_l) - \sum_{l=\widehat{j}+1}^{\widehat{j}+r} (2 \operatorname{Re}(i \Delta_{l-\widehat{j}})) U_l, U_l).$$

Пусть $\rho_l(t, x, D_x)$ — оператор, для которого при $t_1 \leq t \leq t_2$, $(x, \xi) \in \Gamma$, $|\xi| > \text{const}$,

$$\rho_l(t, x, \xi) = \sqrt[2(m-\widehat{j})]{|\xi|^{m-\widehat{k}-\widehat{j}} \lambda^{m-\widehat{j}}(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \right)^k \frac{|b(t, x, \xi)|}{v(t)}} > 0,$$

тогда

$$G \geq \sum_{l=\widehat{j}+r+1}^m (2 \operatorname{Re}(i \sigma_{l-\widehat{j}} Z_{l-\widehat{j}})) \rho_l U_l, \rho_l U_l) -$$

$$- \sum_{l=\widehat{j}+1}^{\widehat{j}+r} (2 \operatorname{Re}(i Z_{l-\widehat{j}})) \rho_l U_l, \rho_l U_l) -$$

$$- c \sum_{l=\widehat{j}+1}^m \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 - O(|\xi|^{-N_3}) \geq$$

$$> \frac{\varepsilon}{2} \sum_{l=\widehat{j}+r+1}^m (\rho_l U_l, \rho_l U_l) - \varepsilon \sum_{l=\widehat{j}+1}^{\widehat{j}+r} (\rho_l U_l, \rho_l U_l) -$$

$$- c \sum_{l=\widehat{j}+1}^m \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 - O(|\xi|^{-N_3}), \quad \forall N_3 > 0,$$

где постоянная ε может быть выбрана сколь угодно малой за счет сужения Γ и увеличения $|\xi|$. Итак

$$G \geq \frac{\delta}{2} \frac{\lambda(t) |\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \left(\sum_{l=\widehat{j}+r+1}^m \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_1(R_x^n)}^2 - \right. \\ \left. - \varepsilon N_2^{\frac{m-k-j}{m-j}} \sum_{l=\widehat{j}+1}^{\widehat{j}+r} \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_1(R_x^n)}^2 \right) - \\ - c \sum_{l=\widehat{j}+1}^m \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_1(R_x^n)}^2 - O(|\xi|^{-N_3}).$$

Так как выбор N_2 диктуется только потерей гладкости из (2.46), то, благодаря свободе в выборе ε , для каждого N_2 можно добиться выполнения

неравенства $\varepsilon N_2^{\frac{m-k-j}{m-j}} < 1/2$, и, следовательно

$$G \geq \frac{\delta}{4} \frac{\lambda(t) |\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \left(\sum_{l=\widehat{j}+r+1}^m \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_1(R_x^n)}^2 - \right. \\ \left. - \sum_{l=\widehat{j}+1}^{\widehat{j}+r} \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_1(R_x^n)}^2 \right) - c \sum_{l=\widehat{j}+1}^m \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_1(R_x^n)}^2 - \\ - O(|\xi|^{-N_3}), \quad \forall N_2 > 0. \quad (4.17)$$

Окончательно, при $t_1 \leq t \leq t_2$

$$\frac{dS(t, \xi)}{dt} \geq \frac{\delta}{4} \frac{\lambda(t) |\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \left(\sum_{l=\widehat{j}+r+1}^m \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_1(R_x^n)}^2 - \right. \\ \left. - \sum_{l=\widehat{j}+1}^{\widehat{j}+r} \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_1(R_x^n)}^2 \right) - c \left(1 + N_2^{1/m} \rho(t) + \right. \\ \left. + \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right) \sum_{l=1}^m \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_1(R_x^n)}^2 - O(|\xi|^{-N_3}), \quad \forall N_3 > 0,$$

и при фиксированном N_2 при достаточно больших M , $|\xi| > M$, для любого $N_3 > 0$,

$$\frac{dS(t, \xi)}{dt} \geq \gamma \frac{\lambda(t) |\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} S(t, \xi) - O(|\xi|^{-N_3}), \quad t_1 < t \leq t_2,$$

откуда

$$S(t, \xi) > \frac{1}{2} \langle \xi \rangle^{-\varepsilon n} \exp \left(\alpha \int_{t_1}^t \frac{\lambda(s) |\ln \lambda(s)|}{\Lambda(s)} ds \right), \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

и потому

$$\sum_{l=1}^m \|U_l(t_2, x, \xi)\|_{L_1(R_x^n)}^2 \geq S(t_2, \xi) \geq \frac{1}{2} \langle \xi \rangle^{-\varepsilon \gamma (\ln N_2) - \varepsilon n}. \quad (4.18)$$

Неустойчивое решение $U_{\text{нест}}(t, x, \xi)$ для (0.1), (0.2), нарушающее оценку (2.45) получаем, взяв первую компоненту вектора $\mu = 1/(2t_2)$. $N^{\pm}(t, x, D_x) U(t, x, \xi)$.

4°. Укажем, наконец, что в (2.46) выбирается $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $\mu = 1/(2t_2)$. При этом принимается во внимание то, что из условия стремления к нулю при $t \rightarrow 0$ правой части (0.12), при подходящем выборе $\varepsilon > 0$

$$t \geq c \left(\frac{\Lambda(t)}{v^*(t) |\ln \lambda(t)|} \right)^{1/2-\varepsilon}, \quad c > 0,$$

откуда

$$t_0 t_2 \geq c \lambda_0 N_2^{1/2-\varepsilon} \langle \xi \rangle^{-\delta}, \quad 0 < \delta = \frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{1}{2}. \quad (4.19)$$

Теорема 2 доказана.

5°. О б о б щ е н и я. Предложенный выше метод вместе с методами работы [1] позволяет получать условия корректности задачи Коши и для более широкого класса гиперболических операторов с кратными характеристиками. В частности, опишем случай слияния к нулю с разными скоростями характеристических корней λ_i .

Предположим, что

$$\lambda_i(t, x, \xi) = \lambda_i(t) \bar{\lambda}_i(t, x, \xi),$$

где $\lambda_i \in C^{\infty}(J)$, $\lambda_i(0) = 0$, $\lambda_i(t) > 0$, при $t > 0$, $c_1 \lambda_i(t)/\Lambda_i(t) \leq \lambda_i/\lambda_i(t) < c_0 \lambda_i(t)/\Lambda_i(t)$, $|\lambda_i^{(k)}(t)| \leq c_k (\lambda_i(t)/\Lambda_i(t))^{k-1} \lambda_i'(t)$, где $c_1 > (m-1)/m$,

$$\Lambda_i(t) = \int_0^t \lambda_i(s) ds, \quad i = 1, \dots, m \text{ и}$$

$$\lambda_i(t)/\lambda_i(t) \leq \lambda_{i+1}(t)/\lambda_{i+1}(t), \quad \lambda_{i+1}(t) \leq c \lambda_i'(t), \quad t \in J^0.$$

Если $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_{k+1}(t)/\lambda_k(t) \neq 0$, то мы будем считать, что $\lambda_{k+1}(t) \equiv \lambda_k(t)$.

Предположим далее, что при всех $t \in J$, $\xi \in R^n \setminus 0$, $x \in R^n$,

$$|\tilde{\lambda}_l(t, x, \xi) - \tilde{\lambda}_r(t, x, \xi)| \geq \delta |\xi|, \quad \delta = \text{const} > 0, \quad l \neq r,$$

и что младшие члены оператора удовлетворяют условиям

$$|D_t^k D_x^{\beta} a_{j, \alpha}(t, x)| \leq C_{k, \beta} \left(\prod_{l=1}^{m-j} \lambda_l(t) \right) \left(\prod_{l=|\alpha|+1}^{m-j} \frac{|\ln \lambda_l(t)|}{\Lambda_l(t)} \right) \left(\frac{\lambda_{m-j}(t)}{\Lambda_{m-j}(t)} \right)^k, \quad (4.20)$$

$$|D_t^k D_x^{\beta} \text{Im } a_{m-1-|\alpha|, \alpha}(t, x)| \leq C_{k, \beta} \left(\prod_{l=1}^{|\alpha|} (\lambda_l(t)) \right) \left(\frac{\lambda_{|\alpha|}(t)}{\Lambda_{|\alpha|}(t)} \right)^{k+1}, \quad (4.21)$$

при всех j, α , $|\alpha| > 0$, $j + |\alpha| \leq m-1$, и условию

$$|D_t^k D_x^{\beta} a_{j, \alpha}(t, x)| \leq C_{k, \beta} \frac{\lambda_1(t) \cdots \lambda_{m-j}(t)}{\Lambda_{|\alpha|+1}(t) \cdots \Lambda_{m-j}(t)} \left(\frac{\lambda_{m-j}(t)}{\Lambda_{m-j}(t)} \right)^k, \quad (4.22)$$

при $\lambda_{|\alpha|+1}(t) \neq \lambda_{|\alpha|}(t)$, $j = 0, \dots, m-2-|\alpha|$. Тогда параметрикс задачи (0.1), (0.2) (при достаточно малых T) строится методами работ [1], [2], что, например, доказывает достаточность указанных условий для

C^∞ -корректности задачи Коши. Необходимость этих условий формулируется и доказывается аналогично теоремам 1, 2. Ввиду громоздкости упомянутых результатов мы их здесь не приводим.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 23.VI.1987

4. Հ. ՋԱԴՋՅԱՆ. Կոշի խնդրի կորեկտության անհրաժեշտ պայմանները բազմապատիկ բնութագրիչներով օպերատորների համար (ամփոփում)

Հոդվածում առանձնաիրված են օպերատորներ, որոնց գլխավոր սիմվոլի արմատները համընկնում են ժամանակի որոշակի պահին ծածր կարգի ածանցյալների գործակիցների վրա պայմանները ձևակերպված են, ինչպես բացահայտ տեսքով, այնպես էլ լրիվ սիմվոլի արմատների միջոցով: Երբ վերահիշյալ պայմանները բավարարված են [1]-ում կառուցված է Կոշի խնդրի ֆունդամենտալ լուծումը: Ներկա հոդվածում ապացուցված է այդ պայմանների անհրաժեշտությունը C^∞ -կորեկտության համար:

K. H. YAGDJIAN. On the Cauchy problem for operators with multiple characteristics (summary)

The paper deals with the operators whose characteristics coincide at certain time instant. The lower order terms satisfy some conditions given both in terms of the explicit form and in terms of the roots of the full symbol. For such operators the fundamental solutions of the Cauchy problem had been constructed in [1]. The paper proves that the mentioned conditions are also necessary for the C^∞ -well-posedness of the Cauchy problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Ягджян. Псевдодифференциальные операторы с параметром и фундаментальное решение задачи Коши для операторов с кратными характеристиками, Изв. АН АрмССР, «Математика», 21, № 4, 1986, 317—344 (Engl. transl. Soviet J. of Contemporary Math. Anal., 1986, v. 21, № 4, 1—29).
2. К. А. Ягджян. Необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши для операторов с кратными характеристиками, Изв. АН АрмССР, «Математика», 20, № 1, 1985, 3—25 (Engl. transl.: Soviet J. of Contemporary Math. Anal., 1985, v. 20, № 1, 1—23).
3. L. Hörmander. The Analysis of linear-partial differential operators, III. Pseudo-differential operators, Berlin, Springer, 1985.
4. S. Nakane. Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem for a class of operators of degenerate type, II, Proc. Japan Acad., v. 59A, № 7, 1983, 318—320.
5. K. Kajitani. Strongly hyperbolic systems with variable coefficients, Publ. RIMS, Kyoto Univ., v. 8, № 3, 1974, 597—612.
6. В. Я. Иорый, В. М. Петков. Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений, УМН, 29, вып. 5, 1974, 3—70.
7. N. Iwasaki. The Cauchy problem for hyperbolic equations with double characteristics, Publ. RIMS, Kyoto Univ., v. 19, № 3, 1983, 927—942.
8. Л. Р. Волевич, В. Я. Иорый. Гиперболические уравнения (комментарий к работам № 1, 3), в кн. Петровский И. Г., Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия, Москва, «Наука», 1986, 395—418.
9. S. Nakane. Non-uniqueness in the Cauchy problem for partial differential operators with multiple characteristics, II, Publ. RIMS, Kyoto Univ., v. 21, № 4, 1985, 699—717.
10. А. Б. Нерсисян. О необходимых условиях корректности задачи Коши для слабогиперболических уравнений (в печати).
11. О. А. Олейник, Е. В. Радкевич. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой, «Итоги науки», М., 1971.

УДК 517.43

Р. Г. АЙРАПЕТЯН, М. И. ГРАЕВ, М. М. ГРАЕВ, Г. Р. ОГАНЕСЯН
ФОРМУЛА ПЛАНШЕРЕЛЯ, СВЯЗАННАЯ С ДОПУСТИМЫМ
КОМПЛЕКСОМ ПРЯМЫХ В $\mathbb{C}P^3$

Введение

Вначале сформулируем одну задачу интегральной геометрии. Пусть H — многообразие k -мерных плоскостей в n -мерном комплексном аффинном пространстве V , $\tilde{H}$ — многообразие пар (h, dt) , где $h \in H$, dt — элемент линейного объема в h ; $\tilde{H}$ является одномерным расслоением над H . Пусть J — интегральное преобразование, которое относит функции f на V ее интегралы по всевозможным k -мерным плоскостям, т. е. однородную функцию $\varphi = Jf$ на $\tilde{H}$ (см. § 1). Мы хотим представить

$$\|f\|^2 = \int_V |f(x)|^2 dx \wedge \bar{dx}$$

интегралом дифференциального выражения $D(\varphi)$ по некоторому n -мерному аналитическому подмногообразию $K \subset H$: $\dim K = \dim V$.

Будем предполагать, что K — допустимый комплекс k -мерных плоскостей в V . Это означает, что отображение $f \rightarrow Jf$ инъективно, и значение функции f в произвольной точке $x \in V$ можно восстановить, зная ее интегралы только по плоскостям из K , бесконечно близким к x (т. е. существует локальная формула обращения).

Сформулируем задачу более подробно. Пусть задан допустимый комплекс $K \subset H$. Требуется найти дифференциальный оператор D , который относит паре однородных функций φ_1, φ_2 на линейном расслоении $\tilde{K}$ над K , удовлетворяющих тому же условию однородности, что и Jf , дифференциальную (n, n) -форму $D(\varphi_1, \varphi_2)$ на базе K со следующими свойствами:

1) $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_K D(\varphi_1, \varphi_2)$ есть положительный эрмитов функционал,

$$2) \langle Jf_1, Jf_2 \rangle = \int_V f_1(x) \overline{f_2(x)} dx \wedge \bar{dx} \quad \text{для любых } f_1, f_2 \in L_2(V)$$

(формула Планшереля).

В работе получена формула Планшереля для случая $k=1, n=3$, т. е. для произвольного допустимого комплекса K прямых в $\mathbb{C}P^3$. Приведем ее (см. § 4). С каждым допустимым комплексом K прямых в $\mathbb{C}P^3$ мы свя-

зываем голоморфную 2-форму τ на $\tilde{K}$ и ставим в соответствие каждой однородной функции $\varphi = Jf$ на $\tilde{K}$ следующую дифференциальную (3.0)-форму на $\tilde{K}$:

$$s(\varphi) = \partial\varphi \wedge \tau + \frac{1}{2} \varphi \partial\tau.$$

Здесь ∂ — (1.0)-составляющая оператора внешнего дифференцирования. Оказывается, что (3.3)-форма $s(\varphi) \wedge \overline{s(\varphi)}$ опускается на K и

$$\int_K s(\varphi) \wedge \overline{s(\varphi)} = c_k \cdot \int_{\mathbb{C}^3} |f(x)|^2 dx \wedge d\bar{x} \text{ при } \varphi = Jf, \quad (0.1)$$

если для простоты f — вещественная быстро убывающая функция на $\mathbb{C}^3$. Это — искомая формула Планшереля ($D(\varphi, \varphi) = c_k^{-1} s(\varphi) \wedge \overline{s(\varphi)}$ для вещественной функции φ). Мы доказываем (0.1) в проективно инвариантных терминах и несколько большей общности (теорема 4).

Примечание. Напомним [4, 5], что допустимый комплекс прямых в $\mathbb{C}^3$ это трехмерное аналитическое многообразие прямых, пересекающих какую-нибудь кривую в $\mathbb{C}^3$, либо касающихся некоторой поверхности в $\mathbb{C}^3$. Другое эквивалентное определение допустимого комплекса прямых см. в § 4. Формула Планшереля для комплекса прямых, пересекающих гиперболу в $\mathbb{C}^3$, играет фундаментальную роль в теории представлений группы Лоренца $SL(2, \mathbb{C})$; она впервые была найдена в [11]. Формула Планшереля для комплекса прямых, пересекающих произвольную кривую в $\mathbb{C}^3$, была получена в ином виде в [6]. В [12] этот результат был перенесен на комплексы прямых в $\mathbb{C}^n$, пересекающих кривую и их обобщения на случай k -мерных плоскостей. Для вывода формулы Планшереля (0.1) мы применяем конструкцию, которая полезна и в более общем случае ($0 < k < p < \infty$). В этой конструкции участвует известный дифференциальный оператор χ . Он был введен в [2] (см. также [1]) для описания образа J и для восстановления функции f по ее образу

Jf . Оператор χ относит однородным функциям φ на $\tilde{H}$ той же степени однородности, что и функции Jf , дифференциальные (k, k) -формы $\chi\varphi$ на базе $\tilde{H}$. В [2] доказано, что 1) $\varphi \in \text{Im } J$ если и только если для любого $x \in V$ форма $\chi\varphi$ замкнута на подмногообразии $H^x \subset \tilde{H}$ плоскостей, проходящих через x ; 2) имеет место следующая локальная формула обращения:

$$\int_{\gamma^x} \chi\varphi = c(\gamma^x) f(x) \text{ для } \varphi = Jf.$$

Здесь $\gamma^x \subset H^x$ — произвольный цикл вещественной размерности $2k$, а число $c(\gamma^x)$ зависит только от класса гомологий цикла γ^x ; при этом существуют циклы γ^x , для которых $c(\gamma^x) \neq 0$.

Рассмотрим теперь дифференциальную $(n+k, n+k)$ -форму

$$\omega(\varphi, g) = \chi\varphi \wedge \overline{g(x)} dx \wedge d\bar{x}$$

на прямом произведении $H \times V = H_{k,n} \times V_n$. Ограничим эту форму на подмногообразии $A \subset H \times V$ пар (h, x) , где x — точка в $h \in H$. Мы пришли к определению оператора

$$\omega: C_{\text{одн}}^{\sim}(H_{k,n}) \times C^{\sim}(V_n) \rightarrow \Omega^{(n+k, n+k)}(A).$$

Здесь $C_{\text{одн}}^{\sim}(H_{k,n})$ — пространство $C^{\sim}$ -функций на $\bar{H}_{k,n}$ заданной степени однородности. Оказывается, что если φ принадлежит образу J , то дифференциальная форма $\omega(\varphi, g)$ замкнута на A . В этом, на наш взгляд, ее преимущество перед формой $\kappa\varphi$ ($\varphi \in \text{Im } J$) на $H_{k,n}$, которая не замкнута; замкнуты лишь ограничения $\kappa\varphi$ на подмногообразия H^x ($x \in V_n$).

Оператор ω изучается в § 1 статьи. Установлено равенство, справедливое для любого цикла $\Gamma \subset H$ вещественной размерности $2n$:

$$\int_{\Gamma} \pi_{*}\omega(Jf_1, f_2) = c_{\Gamma} \int_V f_1(x) \overline{f_2(x)} dx \wedge d\bar{x}.$$

Здесь $\pi_{*}\omega(\cdot)$ — прямой образ формы $\omega(\cdot)$ при естественном отображении $\pi: A \rightarrow H$, а c_{Γ} зависит только от класса гомологий цикла Γ . Определены значения c_{Γ} на базисе $2n$ -мерных гомологий в H . В § 2 аналогичные результаты получены для проективного аналога форм $\omega(\varphi, g)$ и $\pi_{*}\omega(\varphi, g)$.

В качестве приложения $\omega(\varphi, g)$ мы доказываем формулу Планшереля (0.1). Требуется установить равенство:

$$\int_K \pi_{*}\omega(Jf, f) = c \int_K s(Jf) \wedge \overline{s(Jf)},$$

где f — вещественная функция в $\mathbb{C}^n$. В § 3 содержится промежуточное преобразование интеграла $\int \pi_{*}\omega(Jf, f)$. Формула Планшереля для допустимых комплексов $\Gamma = K$ доказана в § 4.

Авторы выражают благодарность Д. Б. Фуксу за полезную консультацию.

§ 1. Дифференциальная форма $\omega(\varphi, f)$; аффинный случай

1. Оператор κ . Напомним определение интегрального преобразования J , связанного с k -мерными плоскостями в $\mathbb{C}^n$, и оператора κ (см. [1], [2]). Обозначим через H многообразие k -мерных плоскостей в $\mathbb{C}^n$ и через $\tilde{H}$ — многообразие пар (h, σ) , где $h \in H$, σ — элемент объема в h . Введем далее многообразие E пар (α, β) , где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ — k -репер в $\mathbb{C}^n$, $\beta \in \mathbb{C}^n$.

Зададим отображение $E \rightarrow \tilde{H}$, поставив в соответствие каждой паре $(\alpha, \beta) \in E$ пару (h, σ) , где h — k -мерная плоскость, заданная уравнениями

$$x^i = \sum \alpha_j t^j + \beta^i, \quad i=1, \dots, n,$$

(1.1)

$$\sigma = \left(\frac{i}{2}\right)^k dt \wedge d\bar{t}, \quad dt = dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k.$$

Пусть $S(C^n)$, $S(\tilde{H})$ — пространства быстро убывающих функций на C^n и $\tilde{H}$ соответственно; $S_0(\tilde{H})$ — подпространство функций $\varphi \in S(\tilde{H})$, удовлетворяющих условию однородности:

$$\varphi(h, \lambda \sigma) = \lambda \varphi(h, \sigma), \quad \text{для любого } \lambda > 0. \quad (1.2)$$

Подставим в соответствие каждой функции $f \in S(C^n)$ функцию $\varphi = Jf$ на E , заданную следующим равенством:

$$(Jf)(\alpha, \beta) = \left(\frac{i}{2}\right)^k \int f(\alpha t + \beta) dt \wedge d\bar{t}. \quad (1.3)$$

Легко убедиться, что функция $\varphi = Jf$ опускается с E на $\tilde{H}$ и удовлетворяет условию (1.2); таким образом, J есть линейное отображение

$$J: S(C^n) \rightarrow S_0(\tilde{H}).$$

Определим линейное отображение

$$\chi: S_0(\tilde{H}) \rightarrow \Omega^{k,k},$$

где $\Omega^{k,k}$ — пространство дифференциальных форм на H бистепени (k, k) , полагая для любой функции $\varphi \in S_0(\tilde{H})$

$$\chi\varphi = \sum \frac{\partial^{2k} \varphi}{\partial \beta^{i_1} \dots \partial \beta^{i_k} \partial \bar{\beta}^{j_1} \dots \partial \bar{\beta}^{j_k}} d\alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge d\alpha^{i_k} \wedge d\bar{\alpha}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{\alpha}^{j_k}. \quad (1.4)$$

Нетрудно убедиться ([1], [2]), что $\chi\varphi$ опускается с E на H .

В [2] были установлены следующие важные свойства оператора χ .

1) Функция $\varphi \in S_0(\tilde{H})$ принадлежит образу интегрального преобразования J тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in C^n$ ограничение дифференциальной формы $\chi\varphi$ на подмногообразии $H^x \subset H$ плоскостей $h \in H$, проходящих через x , есть замкнутая форма на H^x .

2) Если $\varphi = Jf$, $f \in S(C^n)$, то для любого $x \in C^n$ и любого $2k$ -мерного цикла $\gamma_x \subset H^x$ имеем

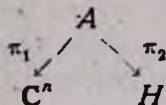
$$\int_{\gamma_x} \chi\varphi = c(\gamma_x) \cdot f(x), \quad (1.5)$$

где коэффициент $c(\gamma_x)$ зависит только от класса гомологий цикла γ_x .

3) Так как пространства H^x и G_k гомеоморфны, то можно выбрать в пространстве гомологий $H_{2k}(H^x)$ базис $\gamma_x^0, \gamma_x^1, \dots$, состоящий из клеток Шуберта, причем γ_x^0 — вйлеровский цикл (т. е. подмногообразие k -мерных плоскостей, проходящих через x и содержащихся в фиксированной $(k+1)$ -мерной плоскости). Тогда имеем: $c(\gamma_x^0) \neq 0$, $c(\gamma_x^i) = 0$ при $i \neq 0$.

Аналогичные определения и утверждения имеют место и в случае вещественного пространства R^n . Единственное отличие вещественного случая от комплексного в том, что при нечетном k имеем $c(\gamma x) = 0$ для любого $\gamma_x \in H_k(H^x)$.

2. Дифференциальная форма $\omega(\varphi, f)$. Введем двойное расслоение



где A — многообразие пар (h, x) , $h \in H$, x — точка на h ; π_1, π_2 — естественные проекции: $\pi_1(h, x) = x$, $\pi_2(h, x) = h$.

Пусть $\Omega^{n+k, n+k}$ — пространство дифференциальных форм на A бистепени $(n+k, n+k)$. Введем отображение

$$\omega: S_0(\tilde{H}) \times S(C^n) \rightarrow \Omega^{n+k, n+k},$$

полагая для любых $\varphi \in S_0(\tilde{H})$, $f \in S(C^n)$

$$\omega(\varphi, f) = \pi_2^*(x\varphi) \wedge \pi_1^*(\bar{f} dx \wedge d\bar{x}), \quad (1.6)$$

где π_1, π_2 — операторы поднятия на A дифференциальных форм, заданных, соответственно, на C^n и H . В дальнейшем для краткости будем писать:

$$\omega(\varphi, f) = x\varphi \wedge \bar{f} dx \wedge d\bar{x}.$$

3. Свойства дифференциальной формы $\omega(\varphi, f)$. Введем отображение $E \rightarrow A$, относящее каждой паре $(\alpha, \beta) \in E$ пару $(h, \beta) \in A$, где h — k -плоскость, заданная уравнением (1.1). Будем записывать форму $\omega(\varphi, f)$ в поднятии с A на E :

$$\omega(\varphi, f) = \sum \frac{\partial^{2k} \varphi}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k} \partial \bar{x}^{j_1} \dots \partial \bar{x}^{j_k}} da_1^{i_1} \wedge \dots \wedge da_k^{i_k} \wedge d\bar{a}_1^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{a}_k^{j_k} \wedge \bar{f}(x) dx \wedge d\bar{x}, \quad (1.7)$$

или символически

$$\omega(\varphi, f) = \left(\prod_{i=1}^k \partial_i \bar{\partial}_i \right) \varphi \wedge \bar{f} dx \wedge d\bar{x},$$

где $\partial_i = \sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial x^s} da_s^i$ (мы пишем x вместо β).

Предложение 1. Если функция $\varphi \in S_0(\tilde{H})$ принадлежит образу интегрального преобразования J , то дифференциальная форма $\omega(\varphi, f)$ замкнута на A .

Доказательство. Представим дифференциал d в виде суммы

$$d = \partial_x + \bar{\partial}_x + \sum_{i=1}^k (\partial_{a_i} + \bar{\partial}_{a_i}), \text{ где } \partial_x = \sum \frac{\partial}{\partial x^s} \partial x^s, \partial_{a_i} = \sum \frac{\partial}{\partial a_i^s} da_i^s.$$

Очевидно, что $\partial_x \omega(\varphi, f) = \bar{\partial}_x \omega(\varphi, f) = 0$. Далее, из принадлежности φ образу интегрального преобразования J вытекает, что $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial a^i} =$

$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial a^i}$; отсюда следует, что $\partial_{x^i} \left(\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x^s} da^s_i \right) = 0$, а потому $\partial_{x^i} \omega$

$(\varphi, f) = 0$. Аналогично $\bar{\partial}_{a^i} \omega(\varphi, f) = 0$. Таким образом, $d\omega(\varphi, f) = 0$.

Обозначим через $(\pi_2)_*$ операцию интегрирования (прямой образ) дифференциальной формы на A по слоям расслоения $A \rightarrow H$ (см. [1]). Если σ — дифференциальная форма на A бистепени (r, s) , $r \geq k$, $s \geq k$, то $(\pi_2)_* \sigma$ — дифференциальная форма на H бистепени $(r-k, s-k)$. Определим далее отображение J из пространства дифференциальных форм на C^n в пространство дифференциальных форм на H : $J = (\pi_2)_* (\pi_1)^*$, где $(\pi_1)^*$ — операция поднятия формы с C^n на A .

Приведем явные выражения для $J(\bar{f} dx \wedge \bar{d}x)$, где $f \in S(C^n)$, $dx = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Пусть $i = (i_1, \dots, i_k)$, $j = (j_1, \dots, j_k)$. Положим

$$J^{(i, j)} f(\alpha, \beta) = \left(\frac{i}{2} \right)^k \int t^i \bar{t}^j f(\alpha t + \beta) dt \wedge \bar{d}t, \quad (1.8)$$

где $t^i = (t^1)^{i_1} \dots (t^k)^{i_k}$, $\bar{t}^j = (\bar{t}^1)^{j_1} \dots (\bar{t}^k)^{j_k}$. Определим далее дифференциальные формы $\sigma_i(\alpha, \beta)$, $0 \leq |i| \leq n-k$ бистепени $(n-k, 0)$ с помощью следующего равенства:

$$\bigwedge_{s=1}^n d(\alpha_s^i t^1 + \dots + \alpha_s^k t^k - \beta^s) = dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k \wedge \sum t^i \sigma_i(\alpha, \beta) + \dots,$$

где многоточием обозначены слагаемые, имеющие степень меньшую чем k относительно $dt^1, \dots, dt^k$.

Тогда из определения операции J непосредственно следует

$$J(f dx \wedge \bar{d}x) = \sum_{0 \leq |i|, |j| \leq n-k} (J^{(i, j)} f) \sigma_i(\alpha, \beta) \bar{\sigma}_j(\alpha, \beta). \quad (1.9)$$

Предложение 2. *Имеет место равенство*

$$(\pi_2)_* \omega(\varphi, f) = x\varphi \wedge (J(\bar{f} dx \wedge \bar{d}x)).$$

Доказательство. Так как $\omega(\varphi, f) = (\pi_2)^* x\varphi \wedge (\pi_1)^* (\bar{f} dx \wedge \bar{d}x)$, то $(\pi_2)_* \omega(\varphi, f) = x\varphi \wedge (\pi_2)_* (\pi_1)^* (\bar{f} dx \wedge \bar{d}x) = x\varphi \wedge J(\bar{f} dx \wedge \bar{d}x)$.

Следствие. *Для любых функций $f_1, f_2 \in S(C^n)$ дифференциальная форма $x(Jf_1) \wedge (J(\bar{f}_2 dx \wedge \bar{d}x))$ есть замкнутая (n, n) -форма на H .*

4. Выражение для $(\pi_2)_* \omega$ в локальных координатах на H . Будем задавать k -мерные плоскости в C^n уравнениями, разрешенными относительно $x^{k+1}, \dots, x^n$

$$x^{k+i} = \sum_{j=1}^k \alpha_j^i x^j + \beta^i, \quad i = 1, \dots, n-k. \quad (1.10)$$

Примем коэффициенты α_j^i, β^i в уравнениях (1.10) в качестве локальных координат на H . Заддим далее на каждой плоскости (1.10) элемент объема σ равенством $\sigma = \left(\frac{i}{2} \right)^k dx' \wedge \bar{d}x'$, где $x' = (x^1, \dots, x^k)$, $dx' = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$. Тогда в координатах (α, β) интегральное преобразование J принимает следующий вид:

$$(f f)(\alpha, \beta) = \left(\frac{i}{2}\right)^k \int_{C^k} f(x', \alpha x' + \beta) dx' \wedge d\bar{x}'.$$

Подчеркнем, что здесь, в отличие от принятого в п. 1, α есть $k \times (n-k)$ -матрица и $\beta \in C^{n-k}$. Далее в локальных координатах (α, β) форма χf задается формулой (1.4), где суммирование по $i_1, \dots, i_k$ ведется в пределах от 1 до $n-k$.

Чтобы записать выражение для $(\pi_2)_* \omega$ в локальных координатах (α, β) введем следующие обозначения. Положим

$$(j^{(i, j)} f)(\alpha, \beta) = \left(\frac{i}{2}\right)^k \int_{C^k} (x')^i (\bar{x}')^j f(x', \alpha x' + \beta) dx' \wedge d\bar{x}', \quad (1.8')$$

где $i = (i_1, \dots, i_k)$, $j = (j_1, \dots, j_k)$, $(x')^i = (x^1)^{i_1} \dots (x^k)^{i_k}$, $(\bar{x}')^j = (\bar{x}^1)^{j_1} \dots (\bar{x}^k)^{j_k}$, в частности, $j^{(0, 0)} f = f f$.

Определим далее дифференциальные формы $\sigma_i(\alpha, \beta)$ на H степени $(n-k, 0)$ с помощью равенства

$$\bigwedge_{s=1}^{n-k} (x^1 dx_1^s + \dots + x^k dx_k^s + d\beta^s) = \sum_{0 \leq |i| \leq n-k} (x')^i \bar{\sigma}_i(\alpha, \beta).$$

Тогда в локальных координатах (α, β) на H имеем

$$J(f dx \wedge d\bar{x}) = \sum_{0 \leq |i|, |j| \leq n-k} (j^{(i, j)} f)(\alpha, \beta) \sigma_i(\alpha, \beta) \wedge \overline{\sigma_j(\alpha, \beta)},$$

следовательно

$$(\pi_2)_* \omega(\varphi, f) = \chi f \wedge \sum_{0 \leq |i|, |j| \leq n-k} (j^{(i, j)} \bar{f})(\alpha, \beta) \sigma_i(\alpha, \beta) \wedge \overline{\sigma_j(\alpha, \beta)}. \quad (1.11)$$

З а м е ч а н и е. Из определения $\sigma_i(\alpha, \beta)$ следует, что эта дифференциальная формула относительно $dx_1^1, \dots, dx_k^{n-k}$ степени однородности $i_s, s = 1, \dots, k$. Поэтому, если хотя бы один из индексов $i_1, \dots, i_k$ равен $n-k$, то $\chi f \wedge \sigma_i(\alpha, \beta) = 0$. Таким образом, суммирование в (1.11) ведется только по мультииндексам $i = (i_1, \dots, i_k)$, $j = (j_1, \dots, j_k)$, где $i_s \leq n-k-1$, $j_s \leq n-k-1$, $s = 1, \dots, k$.

5. Вычисление интегралов дифференциальной формы $(\pi_2)_* \omega(Jf_1, f_2)$ по $2n$ -мерным циклам. Зададим CP^n как пополнение C^n бесконечно удаленной гиперплоскостью; мы получим вложение $C^n \subset CP^n$ и индуцированное вложение $H_{k, n} \subset G_{k+1, n+1}$, где $G_{k+1, n+1}$ — грассманиан k -мерных плоскостей в CP^n . Легко убедиться, что для любых $f_1, f_2 \in S(C^n)$ форма $(\pi_2)_* \omega(Jf_1, f_2)$ продолжается по непрерывности до замкнутой формы на $G_{k+1, n+1}$, равной нулю вместе со всеми производными на подмногообразии $G_{k+1, n}$ бесконечно удаленных k -плоскостей. Введем базис $2n$ -мерных гомологий в $G_{k+1, n+1}$, составленный из клеток Шуберта. Один из элементов этого базиса — многообразие γ^0 всех k -мерных плоскостей h в CP^n таких, что $\dim(h \cap h_0) \geq k-1$, где h_0 — фиксированная k -мерная плоскость в CP^n (размерность комплексная). Остальные элементы базиса обозначим через $\gamma^i, i \geq 1$.

Теорема 1. Для любых $f_1, f_2 \in S(\mathbb{C}^n)$ и любого 2-мерного цикла $\gamma \in G_{k+1, n+1}$ имеем

$$\int_{\gamma} (\pi_2)_* \omega(Jf_1, f_2) = c(\gamma) \int_{\mathbb{C}^n} f_1(x) \overline{f_2(x)} dx \wedge d\bar{x},$$

где множитель $c(\gamma)$ зависит только от класса гомологий цикла γ . При этом $c(\gamma^0) \neq 0$ и $c(\gamma^i) = 0$ при $i > 0$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для циклов γ^i , образующих базис 2-мерных гомологий в $(G_{k+1, n+1})^i$. Из явного описания клеток Шуберта (см., например, [9]) следует: любая 2-мерная клетка Шуберта $\gamma^i \neq \gamma^0$ удовлетворяет одному из следующих условий:

1) все k -мерные плоскости $h \in \gamma^i$ проходят через фиксированную точку $x_0 \in \mathbb{C}P^n$,

2) все k -мерные плоскости $h \in \gamma^i$ содержатся в некоторой плоскости $\tilde{h}$ комплексной размерности $n-1$.

В самом деле, каждая 2-мерная клетка Шуберта в $G_{k+1, n+1}$ есть $W_{a_1, \dots, a_{k+1}} = \{h \in G_{k+1, n+1} \mid \dim(h \cap V_{n-k+i-a_i}) \geq i, i=1, \dots, k+1\}$, где $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n \subset V_{n+1} = \mathbb{C}^{n+1}$ — фиксированная цепочка подпространств, $\dim V_i = i$, а $a_1, \dots, a_{k+1}$ — целые числа, удовлетворяющие условиям: $n-k \geq a_1 \geq \dots \geq a_{k+1} \geq 0$ и $\sum a_i = (k+1)(n-k) - n = k(n-k-1)$. Если $a_1 = n-k$, то $h \supset V_1$, и мы имеем первый случай, если $a_{k+1} > 0$, то $h \subset V_{n+1-a_{k+1}}$, $\dim V_{n+1-a_{k+1}} < n+1$, и мы имеем второй случай. Наконец, если $a_1 < n-k$ и $a_{k+1} = 0$, то это возможно лишь при $a_1 = \dots = a_k = n-k-1$, и в этом случае $W_{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}} = \gamma^0$.

В первом случае ограничение $x\varphi|_{\gamma^i}$ дифференциальной формы $x\varphi$, $\varphi = Jf$ на цикл γ^i равно нулю (см. [1]); следовательно $\int_{\gamma^i} (\pi_2)_* \omega = 0$.

Рассмотрим второй случай. Имеем

$$\int_{\gamma^i} (\pi_2)_* \omega = \int_{\pi_2^{-1} \gamma^i} \omega = \int_{\pi_2^{-1} \gamma^i} x\varphi \wedge \bar{f}_2 dx \wedge d\bar{x}, \quad (1.12)$$

где $\pi_2^{-1} \gamma^i \subset A$ прообраз γ^i . Представим интеграл (1.12) как повторный интеграл, где сначала интегрирование ведется по слоям расслоения $\pi_2^{-1} \gamma^i \rightarrow \pi_1(\pi_2^{-1} \gamma^i)$, а затем по базе $\pi_1(\pi_2^{-1} \gamma^i)$. Так как, по предположению, $\dim_{\mathbb{C}} \pi_1(\pi_2^{-1} \gamma^i) < n$ и $\dim_{\mathbb{C}} (\pi_2^{-1} \gamma^i) = k+n$, то слои расслоения $\pi_2^{-1} \gamma^i \rightarrow \pi_1(\pi_2^{-1} \gamma^i)$ имеют в общем положении комплексную размерность, большую чем k . Так как с другой стороны, относительная степень нашей дифференциальной формы на этих слоях равна $2k$, то ее интегралы по слоям расслоения $\pi_2^{-1} \gamma^i \rightarrow \pi_1(\pi_2^{-1} \gamma^i)$ равны нулю.

Итак доказано, что $\int_{\gamma^i} (\pi_2)_* \omega = 0$ при $\gamma^i \neq \gamma^0$.

Вычислим теперь $\int_{\gamma^0} (\pi_2)_* \omega$. Так как в этом случае $\pi_1(\pi_2 \gamma^0) = \mathbb{C}^n$,

то наш интеграл можно представить в следующем виде:

$$\int_{\gamma^0} (\pi_2)_* \omega = \int_{\mathbb{C}^n} \left(\int_{\gamma_x} x(Jf_1) \right) \wedge \bar{f}_2 dx \wedge d\bar{x},$$

где γ_x — многообразие k -мерных плоскостей h в $\mathbb{C}^n$, проходящих через точку x и таких, что $\dim(h \cap h_0) = k - 1$, где h_0 — фиксированная k -мерная плоскость в $\mathbb{C}^n$. Так как γ_x есть эйлеровский цикл (многообразие всех k -плоскостей, проходящих через x и содержащихся в $(k+1)$ -плоскости, натянутой на x и h_0), то из свойств оператора x ; (см. п. 1) следует

$$\int_{\gamma_x} x(Jf_1) = cf_1(x), \quad c \neq 0.$$

Следовательно

$$\int_{\gamma^0} \pi_2^* \omega = c \int_{\mathbb{C}^n} f_1(x) \overline{f_2(x)} dx \wedge d\bar{x}, \quad c \neq 0.$$

Теорема доказана.

Пусть K — произвольный $2n$ -мерный цикл в $G_{k+1, n+1}$. Представим K как элемент пространства $H_{2n}(G_{k+1, n+1})$ в виде

$$K \sim \sum p_i \gamma^i, \quad (1.13)$$

где γ^i — введенный выше базис в $H_{2n}(G_{k+1, n+1})$. Поставим в соответствие каждой функции $f \in S(\mathbb{C}^n)$ набор функций на K :

$$\varphi^{(i, j)}(z, \beta) = (J^{(i, j)} f)(z, \beta)|_K,$$

где $i = (i_1, \dots, i_k)$, $j = (j_1, \dots, j_k)$, $i_s, j_s \leq n - k - 1$, $|i|, |j| \leq n - k - 1$ операторы $J^{(i, j)}$ задаются формулой (1.8').

Предложение 1.3. Если $p_0 \neq 0$ в разложении (1.13), то отображение $f \rightarrow [\varphi^{(i, j)}]$ инъективно.

Доказательство. Предположим, что $[\varphi^{(i, j)}] = 0$ для некоторой функции $f \in S(\mathbb{C}^n)$. Тогда имеем

$$\int_K (\pi_2)_* \omega (Jf, f) = 0.$$

С другой стороны, в силу доказанной теоремы 1,

$$\int_K (\pi_2)_* \omega (Jf, f) = cn_0 \int_{\mathbb{C}^n} |f(x)|^2 dx \wedge d\bar{x},$$

где $c \neq 0$. Следовательно,

$$\int_{\mathbb{C}^n} |f(x)|^2 dx \wedge d\bar{x} = 0,$$

а потому $f \equiv 0$.

Примечание. Утверждение, аналогичное предложению 1.3, имеет место и в случае вещественного пространства R^n при четном n .

§ 2. Дифференциальная форма $\omega(\varphi, f)$; проективный случай

1. Интегральное преобразование J и оператор α (см. [3]). В проективном варианте (см. [1], [3]) интегральное преобразование J задается на пространстве $F_{k+1} = F_{k+1}(C^{n+1})$ всех C^∞ -функций на $C^{n+1} \setminus \{0\}$, удовлетворяющих условию однородности

$$f(\lambda x) = |\lambda|^{-2(k+1)} f(x), \text{ для любого } \lambda \in C \setminus \{0\}. \quad (2.1)$$

Пусть $G_{k+1, n+1}$ — грассманиан $(k+1)$ -мерных подпространств в C^{n+1} или, что то же самое, многообразие k -мерных плоскостей комплексного проективного пространства CP^n ; $\tilde{G}_{k+1, n+1}$ — многообразие пар (h, τ) , где $h \in G_{k+1, n+1}$, τ — элемент объема в h . Введем пространство $\Phi = \Phi(\tilde{G}_{k+1, n+1})$ всех C^∞ -функций на $\tilde{G}_{k+1, n+1}$, удовлетворяющих условию однородности

$$\varphi(h, \lambda \tau) = \lambda \varphi(h, \tau), \text{ для любого } \lambda > 0. \quad (2.2)$$

Пусть $E_{k+1, n+1}$ — многообразие $(k+1)$ -реперов $u = (u_1, \dots, u_{k+1})$ в C^{n+1} . Введем отображение $E_{k+1, n+1} \rightarrow \tilde{G}_{k+1, n+1}$, относящее каждому $(k+1)$ -реперу $u = (u_1, \dots, u_{k+1})$ пару $(h, \tau) \in \tilde{G}_{k+1, n+1}$, где h задается в однородных координатах на C^{n+1} уравнениями

$$x^i = u_1^i t^1 + \dots + u_{k+1}^i t^{k+1} \text{ и } \tau = \left(\frac{i}{2}\right)^{k+1} dt \wedge d\bar{t}, \quad dt = dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{k+1}.$$

Поставим в соответствие каждой функции $f \in F_{k+1}$ функцию $\varphi = Jf$ на $E_{k+1, n+1}$, определенную равенством

$$(Jf)(u_1, \dots, u_{k+1}) = \left(\frac{i}{2}\right)^k \int_{CP^k} f(u_1 t^1 + \dots + u_{k+1} t^{k+1}) \sigma_k(t) \wedge \overline{\sigma_k(t)}, \quad (2.3)$$

где

$$\sigma_k(t) = \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s-1} t^s dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{s-1} \wedge dt^{s+1} \wedge \dots \wedge dt^{k+1}.$$

(Подынтегральная форма опускается с C^{k+1} на CP^k при естественном отображении $C^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow CP^k$). Легко проверяется, что функция Jf опускается с $E_{k+1, n+1}$ на $\tilde{G}_{k+1, n+1}$ и удовлетворяет на $\tilde{G}_{k+1, n+1}$ условиям однородности (2.2); таким образом, определено отображение

$$J: F_{k+1}(C^{n+1}) \rightarrow \Phi(\tilde{G}_{k+1, n+1}).$$

Образ F_{k+1} при отображении J обозначим через $\Phi^0 = \Phi^0(\tilde{G}_{k+1, n+1})$. Отметим, что в поднятии на $E_{k+1, n+1}$ условие (2.2) на Φ имеет вид:

$$\varphi(gu) = |\det g|^{-2} \varphi(u) \text{ для любого } g \in GL(k+1, \mathbb{C}). \quad (2.2')$$

Перейдем к определению оператора κ (см. [3], [1]). Обозначим через $H_{k, n+1}$ многообразие k -плоскостей в $\mathbb{C}^{n+1}$, не проходящих через точку O , и через $\Omega^{k, k}$ — пространство дифференциальных форм на $H_{k, n+1}$ бистепени (k, k) . Введем отображение $E_{k+1, n+1} \rightarrow H_{k, n+1}$, относящее каждому $(k+1)$ -реперу $u = (u_1, \dots, u_{k+1})$ k -плоскость в $\mathbb{C}^{n+1}$, заданную уравнениями $x^i = u_1^i t^1 + \dots + u_k^i t^k + u_{k+1}^i$, $i = 1, \dots, n+1$.

Пусть $\varphi \in \Phi$, заданная в поднятии на $E_{k+1, n+1}$. Определим дифференциальную (k, k) -форму $\kappa\varphi$ на $E_{k+1, n+1}$ следующим равенством:

$$\kappa\varphi = \sum \frac{\partial^{2k} \varphi}{\partial u_{k+1}^{i_1} \dots \partial u_{k+1}^{i_k} \partial \bar{u}_{k+1}^{j_1} \dots \partial \bar{u}_{k+1}^{j_k}} du_1^{i_1} \wedge \dots \wedge du_k^{i_k} \wedge d\bar{u}_1^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{u}_k^{j_k}.$$

Легко проверить, что $\kappa\varphi$ опускается с $E_{k+1, n+1}$ на $H_{k, n+1}$. Таким образом, определено отображение

$$\kappa: \Phi \rightarrow \Omega^{k, k}.$$

Оператор κ обладает свойствами, аналогичными сформулированным в § 1, п. 1 для аффинного случая (в формулировках § 1 нужно лишь заменить пространство $S_0(\tilde{H})$ на F_{k+1}).

2. Дифференциальная форма $\omega(\varphi, f)$. Введем многообразие A пар (h, x) , где $h \in H_{k, n+1}$, x — точка на h . Отметим, что A лучше интерпретировать как многообразие пар (h, x) , где $h \in G_{k, n+1}$ — k -подпространство в $\mathbb{C}^{n+1}$, а x — точка в $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, не принадлежащая h . Канонический изоморфизм этих двух реализаций A очевиден.

Зададим на A структуру двойного расслоения

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} & & H_{k, n+1} \end{array}$$

где $\pi_1(h, x) = x$, $\pi_2(h, x) = h$. Обозначим через $\Omega^{k+n, k+n}(A)$ пространство дифференциальных форм на A бистепени $(k+n, k+n)$.

Введем отображение

$$\omega: \Phi \times F_{n-k} \rightarrow \Omega^{(k+n, k+n)}(A),$$

где F_{n-k} — пространство C^∞ -функций на $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, удовлетворяющих условию однородности

$$f(\lambda x) = |\lambda|^{-2(n-k)} f(x).$$

Пусть $\varphi \in \Phi$, $f \in F_{n-k}$. Зададим на $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ дифференциальную форму

$$\sigma(x) = \sum (-1)^{s-1} x^s dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{s-1} \wedge dx^{s+1} \wedge \dots \wedge dx^{n+1}$$

и положим

$$\omega(\varphi, f) = (\pi_2)^* \kappa\varphi \wedge \pi_1^*(\bar{f}\sigma/\sigma).$$

Здесь π_1, π_2 — операции поднятия на A -дифференциальных форм, заданных, соответственно, на $C^{n+1} \setminus \{0\}$ и $H_{k, n+1}$.

3. Свойства дифференциальной формы $\omega(\varphi, f)$. Пусть A реализовано как многообразие пар: k -подпространство h в C^{n+1} и точка $x \in C^{n+1} \setminus \{0\}$, не принадлежащая h . Введем многообразие пар $(h, \tilde{x})$, где h — k -подпространство в C^{n+1} , $\tilde{x} \in CP^n$ — 1 -подпространство в C^{n+1} , не принадлежащее h . Зададим отображение $i: A \rightarrow \bar{A}$, относящее каждой паре $(h, x) \in A$ пару $(h, \tilde{x}) \in \bar{A}$, где $\tilde{x} \in CP^n$ — образ x при каноническом отображении $C^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow CP^n$. Отображение i задает на A структуру главного расслоения со структурной группой $C^\times$ (мультипликативная группа комплексных чисел).

Предложение 2.1 Дифференциальная форма $\omega(\varphi, f)$ опускается с A на $\bar{A}$.

Доказательство. Заметим, что слоями расслоения $A \rightarrow \bar{A}$ служат многообразия пар $(h, \lambda x)$, где $(h, x) \in A$ фиксировано, а λ пробегает группу $C^\times$. Поэтому достаточно доказать, что $\omega(\varphi, f)$ сохраняется при преобразованиях $(h, x) \rightarrow (h, \lambda x)$. Утверждение непосредственно следует из того факта, что при этих преобразованиях дифференциальная форма $x\varphi$ умножается на $|\lambda|^{-2(k+1)}$, а $f\sigma \wedge \bar{\sigma}$ — на $|\lambda|^{2(k+1)}$.

Так же, как и в аффинном случае доказывается

Предложение 2.2. Если $\varphi \in \Phi^0$, т. е. φ принадлежит образу интегрального преобразования J , то дифференциальная форма $\omega(\varphi, f)$ замкнута на A .

Определим теперь операции поднятия $(\pi_1)^*$ и опускания $(\pi_1)_*$ дифференциальных форм так же как и в § 1 и положим

$$J = (\pi_2)_* (\pi_1)^*.$$

Предложение 2.3. Имеет место равенство

$$(\pi_2)_* \omega(\varphi, f) = x\varphi \wedge J(f\sigma \wedge \bar{\sigma}).$$

Доказательство такое же как и в аффинном случае.

Положим

$$\hat{\omega}(f_1, f_2) = x(Jf_1) \wedge J(\bar{f}_2 \sigma \wedge \bar{\sigma}), \quad f_1 \in F_{k+1}, \quad f_2 \in F_{n-k}.$$

Следствие 2.1. Для любых функций $f_1 \in F_{k+1}, f_2 \in F_{n-k}$ дифференциальная форма $\omega(f_1, f_2)$ является замкнутой (n, n) -формой на $H_{k, n+1}$.

Из предложений 2.1, 2.3 следует

Предложение 2.4. Дифференциальная форма $\omega(f_1, f_2)$ опускается с $H_{k, n+1}$ на многообразие $X = H_{k, n+1}/C^\times$, где $C^\times$ — мультипликативная группа комплексных чисел, действующая на $H_{k, n+1}$ как группа гомотетий.

Таким образом, дифференциальная форма $\omega(f_1, f_2)$ является замкнутой C^n -формой типа (n, n) на компактном многообразии X .

Добавление. Приведем явное выражение для $(\pi_2)_* \omega(\varphi, f)$. Полагаем

$$\psi^{(p, q)}(u_1, \dots, u_k) = \left(\frac{i}{2}\right)^k \int_{C^k} t^p \bar{t}^q f(x + t^1 u_1 + \dots + t^k u_k) dt \wedge \bar{d}t,$$

где $dt = dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k$. В частности, $\psi^{(0,0)} = f$. Введем далее дифференциальные формы $\sigma_p(u)$, определяемые из равенства

$$\tilde{\sigma} = dt \wedge \sum_p t^p \sigma_p(u) + \dots, \quad p = (p_1, \dots, p_k), \quad t^p = t^{p_1} \dots t^{p_k},$$

где $\tilde{\sigma}$ получается из дифференциальной формы $\sigma(x, dx)$ заменой x на $x + t^1 u_1 + \dots + t^k u_k$ и dx на $d(x + t^1 u_1 + \dots + t^k u_k)$; многоточием обозначены слагаемые степени меньшей чем k относительно $dt^1, \dots, dt^k$. В этих обозначениях имеем

$$(\pi_2)_* \omega(\varphi, f) = x \varphi(u_1, \dots, u_k, x) \bigwedge_{0 \leq |p|, |q| \leq n-k} \psi^{(p, q)}(u_1, \dots, u_k) \sigma_p(u) \wedge \overline{\sigma_q(u)}.$$

4. Вычисление интегралов дифференциальной формы $\omega(f_1, f_2)$ от $2n$ -мерным циклам в $X = H_{k, n+1}/C^n$. Введем базис $2n$ -мерных гомотопий в X . Для этого заметим, что X изоморфно многообразию $G_{k, k+1, n+1}$ флагов $L^{k+1} \supset L^k$ в C^{n+1} , где L^{k+1}, L^k соответственно $(k+1)$ -мерное и k -мерное подпространства. Изоморфизм

$$\psi: X \rightarrow G_{k, k+1, n+1}$$

задается так. Пусть $h \in X$, $\tilde{h} \in H_{k, n+1}$ — любая плоскость из прообраза h . Тогда $\psi(h) = [L^{k+1} \supset L^k]$, где L^{k+1} — линейное подпространство в C^{n+1} , натянутое на $\tilde{h}$, L^k — подпространство в L^{k+1} , параллельное $\tilde{h}$.

Базис $2n$ -мерных гомотопий в $G_{k, k+1, n+1}$ может быть построен следующим образом (см. [10]). Элементы базиса нумеруются последовательностями целых чисел $(a_1, \dots, a_{k+1})$, где $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{k+1} \leq n+1$, удовлетворяющими условию

$$n - k \leq \sum a_i - \frac{(k+1)(k+2)}{2} \leq n.$$

Положим

$$W_{a_1, \dots, a_{k+1}} = \{h \in G_{k+1, n+1} \mid \dim(h \cap C^{a_i}) = i, i = 1, \dots, k+1\};$$

$C^{a_i} \subset C^{n+1}$ — координатное подпространство, натянутое на первые a_i базисных векторов в C^{n+1} . Многообразие $W_{a_1, \dots, a_{k+1}}$ является клеткой

$$\text{Шуберта в } G_{k+1, n+1} \text{ комплексной размерности } d = \sum a_i - \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Отвечающий $(a_1, \dots, a_{k+1})$ $2n$ -мерный цикл в $G_{k, k+1, n+1}$ задается так:

$$V_{a_1, \dots, a_{k+1}} = \{L^{k+1} \supset L^k \mid L^{k+1} \in W_{a_1, \dots, a_{k+1}}, L^{k+1} \supset L^k \supset (L^{k+1} \cap C^{a_s})\},$$

где $s = d - (n - k)$; в случае $d = n - k$ L^k — любое k -подпространство в L^{k+1} .

Выделим в построенном базисе цикл, отвечающий последовательности $(2, 3, \dots, k+1, n+1)$ и обозначим его через $\tilde{\gamma}_0$; остальные элементы базиса обозначим через $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots$. Пусть далее $\gamma_i, i=0, 1, \dots$ — прообразы в X циклов $\tilde{\gamma}_i$ при изоморфизме многообразий $X \rightarrow G_{k, k+1, n+1}$.

Теорема 2. Для любых $f_1 \in F_{k+1}$, $f_2 \in F_{n-k}$ и любого $2n$ -мерного цикла $\gamma \in H_{k, n+1}/\mathbb{C}^X$ имеем

$$\int_{\tilde{\gamma}} \tilde{\omega}(f_1, f_2) = c(\gamma) \int_{\mathbb{CP}^n} f_1(x) \overline{f_2(x)} \cap \bar{\sigma},$$

где $c(\gamma)$ зависит только от класса гомологий цикла γ . При этом $c(\gamma_0) \neq 0$ и $c(\gamma_i) = 0$ при $i > 0$.

Доказательство. Достаточно сосчитать интегралы формы $\tilde{\omega}(f_1, f_2)$ по циклам $\gamma = \gamma_i$, образующим базис $2n$ -мерных гомологий в $X = H_{k, n+1}/\mathbb{C}^X$. Заметим, что если $i > 0$, то $\tilde{\gamma}_i = V_{a_1, \dots, a_{i+1}}$, где либо $a_{k+1} < n+1$ либо $a_1 = 1$. В первом случае все подпространства L^{k+1} , входящие в флаги $L^{k+1} \supset L^1$ из $\tilde{\gamma}_i$ содержатся в собственном подпространстве $\mathbb{C}^{n+k+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$; во втором все они содержат фиксированное подпространство $\mathbb{C}^1$. Отсюда следует, что $\int_{\tilde{\gamma}_i} \tilde{\omega}(f_1, f_2) = 0$ при $i > 0$.

Вычисление интеграла $\int_{\tilde{\gamma}} \tilde{\omega}(f_1, f_2)$ при $\gamma = \gamma_0$ проводится теми же рассуждениями, что и в доказательстве теоремы 1.

Примечание. Пусть $f_1, f_2 \in F_{k+1}$, причем $k+1 \leq n-k$. Зададим произвольный однородный многочлен $P(x)$ степени $n+1-2k$.

Тогда $P\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\right)P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f_2 \in F_{n-k}$, следовательно, дифференциальные формы $\omega(Jf_1, P\bar{P}f_2)$ и $\tilde{\omega}(f_1, P\bar{P}f_2)$ корректно определены, и на основании теоремы 2 получаем для любого $2n$ -мерного цикла

$$\int_{\tilde{\gamma}} \tilde{\omega}(f_1, P\bar{P}f_2) = c(\gamma) \int_{\mathbb{CP}^n} P f_1 \overline{P f_2} \cap \bar{\sigma},$$

где $c(\tilde{\gamma}^0) \neq 0$, $c(\tilde{\gamma}^i) = 0$ при $i > 0$.

§ 3. Дифференциальная форма $\tilde{\omega}(\varphi_1, \varphi_2)$ на многообразии прямых в $\mathbb{C}^3$

В §§ 3 и 4 мы занимаемся задачей интегральной геометрии, связанной с прямыми в $\mathbb{C}^3$ и $\mathbb{CP}^3$ (случай $k=1, n=3$). Результаты § 3 носят промежуточный характер. Здесь будет построена дифференциальная (3,3)-форма на многообразии H прямых в $\mathbb{C}^3$, которая зависит от

функций $\varphi_1, \varphi_2 \in S(H)$ и их производных и обладает следующим свойством. Если $\varphi_i = Jf_i, f_i \in S(\mathbb{C}^3), i = 1, 2$, то

$$\int_{\gamma \cap H} \omega(\varphi_1, \varphi_2) = c_\gamma \int_{\mathbb{C}^3} f_1(x) \overline{f_2(x)} dx \wedge d\bar{x}, \quad (3.1)$$

где γ — любой цикл вещественной размерности 6 на грассманиане $G_{2,4}$ прямых в $\mathbb{C}P^1$, содержащем H как открытое всюду плотное подмножество, а множитель c_γ зависит только от γ .

Согласно § 1 интегральное преобразование J имеет вид

$$(Jf)(\alpha, \beta) = \frac{i}{2} \int_{\mathbb{C}} f(\alpha t + \beta) dt \wedge d\bar{t}, \quad \alpha \in \mathbb{C}^4 \setminus \{0\}, \beta \in \mathbb{C}^4.$$

Запишем выражение формы $(\pi_2)_* \omega(\varphi, f)$ через моменты

$$\psi^{k,l}(\alpha, \beta) = \frac{i}{2} \int t^k \bar{t}^l \overline{f}(\alpha t + \beta) dt \wedge d\bar{t}.$$

Имеем (см. § 1)

$$\begin{aligned} (\pi_2)_* \omega(\varphi, f) &= (x_1 \wedge \bar{x}_1) \varphi \wedge \sum_{k,l=0,1} \psi^{(k,l)} \sigma_k \wedge \bar{\sigma}_l = \\ &= \partial_\beta \bar{\partial}_\beta \varphi \wedge \sum_{k,l=0,1} \psi^{(k,l)} \sigma_{k+1} \wedge \bar{\sigma}_{l+1}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$x_i = \sum \frac{\partial}{\partial \beta^i} d\alpha^i, \quad \partial_\beta = \sum \frac{\partial}{\partial \beta^i} \partial \beta^i, \quad \partial_\alpha = \sum \frac{\partial}{\partial \alpha^i} d\alpha^i,$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \sum \text{sgn}(i, j, k) \alpha^i d\beta^j \wedge d\beta^k,$$

$$\sigma_1 = \sum \text{sgn}(i, j, k) \alpha^i d\alpha^j \wedge d\beta^k,$$

$$\sigma_2 = \alpha^1 d\alpha^2 \wedge d\alpha^3 + \alpha^2 d\alpha^3 \wedge d\alpha^1 + \alpha^3 d\alpha^1 \wedge d\alpha^2.$$

З а м е ч а н и е. Согласно § 1, в выражение для $(\pi_2)_* \omega$ входят моменты $\psi^{(k,l)}$, $k, l = 0, 1, 2$. Нетрудно, однако, убедиться, что слагаемые с $\psi^{(2,l)}$ и $\psi^{(k,2)}$ равны нулю.

Теорема 3. *Существует дифференциальная (3,3)-форма $\omega(\varphi_1, \varphi_2)$ на H , зависящая только от функций $\varphi_1, \varphi_2 \in S(H)$ и их производных такая, что если $\varphi_i = Jf_i, f_i \in S(\mathbb{C}^3), i = 1, 2$, то разность*

$$\tilde{\omega}(\varphi_1, \varphi_2) - (\pi_2)_* \omega(\varphi_1, f_2) = d\chi$$

является точной формой на H . При этом дифференциальная форма χ продолжается с H на грассманиан $G_{2,4}$.

Отсюда и из теоремы 1, ввиду быстрого убывания функций f_i , следует (3.1).

Покажем, что условию теоремы 3 удовлетворяет следующая дифференциальная форма:

$$\tilde{\omega}(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{4} (\overline{\rho\rho\varphi_1}) \overline{\varphi_2} + \varphi_1 (\overline{\rho\rho\varphi_2}) - \rho\varphi_1 \wedge \overline{\rho\varphi_2} - \overline{\rho\varphi_2} \wedge \overline{\rho\varphi_1} \wedge \sigma_1 \wedge \overline{\sigma_1}, \quad (3.3)$$

где $\rho = \partial_{\beta} - \partial_{\alpha}$.

Лемма 3.1. *Форма $\tilde{\omega}(\varphi_1, \varphi_2)$ опускается с многообразия E пар (α, β) , $\alpha \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, $\beta \in \mathbb{C}^3$ на многообразие H при естественном отображении $E \rightarrow H$.*

Для доказательства достаточно убедиться, что форма $\tilde{\omega}$ сохраняется при отображениях

$$1) \alpha \rightarrow \lambda\alpha, d\alpha \rightarrow \lambda d\alpha + \alpha d\lambda,$$

$$2) \beta \rightarrow \beta + \lambda\alpha, d\beta \rightarrow d\beta + \lambda d\alpha + \alpha d\lambda.$$

Инвариантность $\tilde{\omega}$ относительно отображения первого типа очевидна. Инвариантность относительно отображений второго типа устанавливается простой проверкой: надо учесть, что $\rho\varphi$ переходит в $(\rho + 2\lambda\kappa_1)\varphi$, а σ_1 — в $\sigma_1 + 2\lambda\sigma_2$.

Введём дифференциальную форму v на E :

$$v = \overline{x_1} \varphi \wedge \psi^{(1,1)} \sigma_2 \wedge \overline{\sigma_1} + \psi^{(1,0)} \sigma_2 \wedge \overline{\sigma_0} + \frac{1}{2} \psi^{(0,1)} \sigma_1 \wedge \overline{\sigma_1} + \frac{1}{2} \psi^{(0,0)} \sigma_0 \wedge \overline{\sigma_0} - \\ - \frac{1}{2} (\varphi (\rho\psi^{(0,1)}) - (\rho\varphi) \psi^{(0,1)}) \sigma_1 \wedge \overline{\sigma_2} - \frac{1}{4} (\varphi (\rho\psi^{(0,0)}) - (\rho\varphi) \psi^{(0,0)}) \sigma_1 \wedge \overline{\sigma_1},$$

$$\text{где } \varphi = \varphi_1, \psi^{(k,l)}(\alpha, \beta) = \frac{i}{2} \int t^k \overline{t^l} \overline{f_2}(at + \beta) dt \wedge \overline{dt}.$$

Как и в случае $\tilde{\omega}$ можно убедиться, что форма v опускается с E на H . Из быстрого убывания функций $\overline{f_i}$ следует, что v продолжается с H на грассманиан $G_{2,4}$.

Равенство

$$dv = \tilde{\omega}(\varphi_1, \varphi_2) - (\pi_2)_* \omega(\varphi_1, f_2)$$

проверяется непосредственно. Для проверки нужно воспользоваться соотношениями: $\partial_{\beta} \psi^{(k,l)} = x_2 \psi^{(k-1,l)}$, $\overline{\partial}_{\beta} \psi^{(k,l)} = \overline{x_2} \psi^{(k,l-1)}$, где $x_2 \psi = \sum \frac{\partial \psi}{\partial \alpha^i} d\beta^i$. Этим завершается доказательство теоремы.

Пусть теперь φ — вещественнозначная функция из $S(H)$. Тогда

$$\tilde{\omega}(\varphi, \varphi) = \frac{1}{2} (\varphi \wedge \overline{\rho\rho\varphi} - \rho\varphi \wedge \overline{\rho\varphi}) \sigma_1 \wedge \overline{\sigma_1},$$

или короче

$$\tilde{\omega}(\varphi, \varphi) = \frac{1}{2} \varphi^2 (\rho\overline{\rho} \ln \varphi) \wedge \sigma_1 \wedge \overline{\sigma_1}. \quad (3.4)$$

Изучим ограничение формы $\tilde{\omega}(\varphi, \varphi)$ на подпространство $W \subset T_h H$, касательное к изотропному конусу $R_h \subset T_h H$.

Напомним, что (3.3)-форма $\bar{\omega}(\varphi, \varphi)$ определена на E и опускается на H . Выберем локальное сечение расслоения $E \rightarrow H$, полагая

$$\alpha^2 = 1, \beta^2 = 0.$$

Тогда функции $\alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2$ задают локальную систему координат в H . Положим

$$v = d\alpha^1 \wedge d\alpha^2 \wedge d\beta^1 \wedge d\beta^2.$$

$$\Omega = d\alpha^1 d\beta^2 - d\alpha^2 d\beta^1,$$

и пусть $R_h \subset T_h H$ — изотропный конус метрики Ω . Выберем $z \in R_h \setminus \{0\}$ и обозначим

$$W = T_z R_h \subset T_h H.$$

Предложение 3.2. Ограничение $\bar{\omega}(\varphi, \varphi)$ на W равно

$$\text{const} \cdot \varphi^2 \partial \bar{\partial} \ln \varphi \wedge (i_z L_z) \wedge (\overline{i_z L_z}).$$

Здесь L_z — (3,0)-форма на W , определенная из условия $v = \Omega(z, \cdot) \wedge \wedge L_z$, $i_z L_z$ — внутреннее произведение L_z на вектор $z \in W$.

Доказательство. Пусть A — эндоморфизм линейного пространства $C^4 = T_h H$:

$$A: \frac{\partial}{\partial \alpha^j} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha^j}, \frac{\partial}{\partial \beta^j} \rightarrow -\frac{\partial}{\partial \beta^j}, \quad j = 1, 2.$$

Введём кососимметрическую 2-форму

$$\sum_A = \Omega(A \cdot, \cdot) = d\alpha^1 \wedge d\beta^2 - d\alpha^2 \wedge d\beta^1,$$

и зададим голоморфное антидифференцирование ∂_A алгебры внешних форм на C^4 , полагая

$$\partial_A \psi = \partial \psi \circ A$$

для любой функции ψ и $\partial \sigma_A + \partial_A \partial = 0$.

В локальных координатах $\alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2$ на H имеем

$$\bar{\omega}(\varphi, \varphi) = \frac{1}{2} \varphi^2 \partial_A \bar{\partial}_A \ln \varphi \wedge \sum_A \wedge \bar{\sum}_A.$$

Доказательство предложения сводится к проверке равенства

$$(\xi A) \wedge (\bar{\eta} A) \wedge \sum_A \wedge \bar{\sum}_A = \xi \wedge \bar{\eta} \wedge (i_z L_z) \wedge (\overline{i_z L_z}), \quad (3.5)$$

которое должно быть справедливо для любых ковекторов ξ, η типа (1,0) на $C^4 = T_h H$.

Докажем равенство (3.5). Эндоморфизм $A: C^4 \rightarrow C^4$ кососимметричен относительно невырожденной метрики $\Omega: C^4 \times C^4 \rightarrow \mathbb{C}$ и обладает следующими свойствами:

1) Форма $\sum_A = \Omega(A \cdot, \cdot)$ автодуальна [относительно пары v, Ω , т. е. $* \sum_A = \sum_A$ (см. [1], стр. 139).

2) $A^2 = 1$.

Из автодуальности $\sum_A$ легко следует, что для любого ковектора $\xi: C^4 \rightarrow \mathbb{C}$

$$(\xi \wedge \Sigma_A)|_W = \langle \xi, Az \rangle L_z^*.$$

Отсюда, используя тождество

$$\langle \xi, z \rangle L_z = (\xi|_W) \wedge i_z L_z,$$

выводим

$$(\xi A \wedge \Sigma_A)|_W = (\xi|_W) \wedge i_z L_z$$

для любого $\xi \in (C^1)^*$. Мы доказали равенство (3.5) а тем самым предложение.

§ 4. Теорема Планшереля для допустимых комплексов прямых в CP^3

1. Геометрия грассманиана $G_{2,4}$. Пусть $G = G_{2,4}$ — грассманиан 2-мерных подпространств в C^4 или, что то же самое, многообразие комплексных проективных прямых в CP^3 . Грассманиан G естественно вкладывается в $CP^3 = P(C^4 \wedge C^4)$ как проективизация множества разложимых бивекторов $a = u \wedge v \neq 0$, $u, v \in C^4$ и задается в CP^3 одним уравнением 2-го порядка: $a \wedge a / (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) = 0$, где $\{e_j\}$ — базис в C^4 . Прообраз G в $C^6 = \Lambda^2 C^4$ обозначим через $\tilde{G}$.

Плюккеровыми координатами p_{ij} , $i, j = 1, 2, 3, 4$ называются линейные функции на C^6 : $p_{ij} = u_i v_j - u_j v_i$. Величины p_{ij} ($p_{ij} = -p_{ji}$) можно принять в качестве координат в C^6 и в качестве однородных координат на CP^5 . В этих координатах грассманиан G совпадает с квадрикой

$$\Omega(p, p) = p_{12} p_{34} - p_{13} p_{24} + p_{14} p_{23} = 0. \quad (4.1)$$

Через Ω_p , где $p \in C^6$ будем обозначать билинейную форму в касательном пространстве $T_p C^6$, определяемую квадратичной формой (4.1).

Введем радиальное векторное поле X на C^6 , значение которого в любой точке $p \in C^6$ совпадает с вектором p при естественном изоморфизме $T_p C^6 \cong C^6$. Легко видеть, что X касается $\tilde{G}$ и что подпространство $T_p \tilde{G} \subset T_p C^6$ задается уравнением $\Omega_p(X, \cdot) = 0$. Кроме того, семейство метрик $C \Omega_p$ на $T_p \tilde{G}$ проектируется на $T_h G$ и определяет в каждом касательном пространстве $T_h G$ изотропный конус R_h ($\dim R_h = 3$).

Конус R_h обладает следующими свойствами (см. [1]). На R_h имеются два однопараметрических семейства образующих $\{P_a\}$ и $\{Q_i\}$, где P_a и Q_i — 2-мерные подпространства. Именнo, пусть L_h — прямая в CP^3 , заданная точкой $h \in G$; тогда подпространство P_a касательно к многообразию прямых в CP^3 , проходящих через точку $a \in L_h$, а Q_i

* В самом деле, положим $\zeta = \Omega(x, \cdot)$, $\xi = \Omega(x, \cdot)$. Тогда из автодуальности Σ_A следует $\zeta \wedge \xi \wedge \Sigma_A = \Sigma_A(x, x) \cdot v$, т. е. $\zeta \wedge \xi \wedge \Sigma_A = \langle \xi, Az \rangle v$. Сопоставляя это равенство с определением $\zeta \wedge Lx = v$, получаем нужную формулу.

касательно к многообразию прямых, лежащих в плоскости $\xi \supset L_h$. При этом $\dim(P_h \wedge Q_\xi) = 1$ для любых a и ξ и обратно, любое одномерное подпространство $V \subset R_h$ однозначно представимо в виде $V = P_h \cap Q_\xi$.

2. Допустимые комплексы в G . Пусть $K \subset G$ — аналитическое подмногообразие коразмерности 1, т. е. $\dim_c K = 3$. Назовем K допустимым комплексом ([4], [5]), если для почти каждой точки $h \in K$ касательное пространство $T_h K$ совпадает с касательным пространством к изотропному конусу $R_h \subset T_h G$ в одной из точек R_h . Отсюда следует, что $T_h K$ касается R_h по 1-мерному линейному подпространству V_h . Отметим, что V_h — максимальное линейное подпространство в $T_h G$, ортогональное к $T_h K$ относительно невырожденной кэформы метрики на $T_h G$.

3. Уравнение допустимого комплекса. Пусть $\tilde{K} \subset \tilde{G}$ — прообраз 3-мерного подмногообразия $K \subset G$. Обозначим через $\tilde{V}_p \subset T_p \tilde{G}$, $p \in \tilde{K}$ подпространство, ортогональное к $T_p \tilde{K}$ в метрике Ω_p . Так как метрика Ω_p вырождена, то, очевидно, $\dim \tilde{V}_p = 2$, и радиальное векторное поле X касается подпространства $\tilde{V}_p \cap T_p \tilde{K}$. Пусть $F(p) = 0$ — локальное уравнение $\tilde{K}$ в $\tilde{G}$, причем $dF \neq 0$. Обозначим через X_F любое решение уравнения

$$\Omega_p(X_F, \cdot) = dF. \quad (4.2)$$

Очевидно, что X_F и X образуют базис в $\tilde{V}_p$.

Лемма 5.1. Уравнение допустимого комплекса имеет вид

$$X_F F = 0 \text{ при } F = 0. \quad (4.3)$$

В самом деле, условие (4.3) означает, что $\tilde{V}_p$ касается $\tilde{K}$ и, следовательно, $\tilde{V}_p$ — изотропное подпространство. Пусть $V_h \subset T_h G$ — проекция $\tilde{V}_p$ в $T_h G$ (h — образ p в K). Так как V_h — ортогональное дополнение к $T_h K$ относительно конуса R_h , то $T_h K$ касается конуса R_h .

В частности, если функция F продолжается в окрестность C^0 , то $\text{grad } F = \Omega\left(\frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial p}\right)$ касается $\tilde{G}$ вдоль $\tilde{K}$ и удовлетворяет условию 4.2). Поэтому условие допустимости эквивалентно условию

$$\Omega\left(\frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial F}{\partial p}\right) = 0 \text{ при } F = 0. \quad (4.4)$$

4. Многообразие допустимых интегральных элементов; определение дифференциальной формы τ . В этом пункте мы определим инфинитезимальный аналог допустимого комплекса.

Пусть $h \in G$, $p \in \tilde{G}$ — точка из прообраза h . Для каждого подпространства $F_h \subset T_h G$ обозначим через $\tilde{F}_p$ прообраз F_h в $T_p G$.

Определение. Допустимым интегральным элементом на $\bar{G}$ назовем пару (h, W_h) , где $h \in G$, $W_h \subset T_h G$ — 3-мерное подпространство, касательное к изотропному конусу R_h . Допустимым интегральным элементом на $\tilde{G}$ назовем пару $(p, \tilde{W}_p)$ — прообраз допустимого интегрального элемента в G .

Обозначим через M и $\tilde{M}$ — многообразие допустимых интегральных элементов на G и $\tilde{G}$, соответственно. Очевидно, что M и $\tilde{M}$ — однородные пространства группы $SL(4, \mathbb{C})^*$. Пусть $L(\tilde{M})$ — тавтологическое векторное расслоение над $\tilde{M}$ со слоем $\tilde{W}_p$ над точкой $m = (p, \tilde{W}_p)$, $L^*(\tilde{M})$ — сопряженное ему расслоение.

Определение. Обозначим через τ голоморфное ненулевое сечение

$$\tau: \tilde{M} \rightarrow \wedge^2 L^*(\tilde{M}),$$

удовлетворяющее следующим двум условиям:

- 1) $\tau_{(p, \tilde{W}_p)}(\tilde{V}_p, \cdot) = |0|$, где $\tilde{V}_p$ — прообраз прямой $V_h \subset W_h$ касания W_h с изотропным конусом R_h .
- 2) τ инвариантно относительно действия группы $SL(4, \mathbb{C})$.

Так как $\dim(\tilde{W}_p/\tilde{V}_p) = 2$ и $SL(4, \mathbb{C})$ транзитивно действует на $\tilde{M}$, то очевидно, что с точностью до постоянного множителя, существует не более чем одно сечение τ , которое удовлетворяет условиям 1) и 2).

Пусть теперь $K \subset G$ — допустимый комплекс, тогда $\bar{K}$ поднимается в M , точнее, существует разрешение особенностей $\bar{f}$ многообразия (вообще говоря, гладкое):

$$p \in \bar{K} \xrightarrow{\bar{f}} m = (p, T_p \bar{K}) \in \bar{M}.$$

Следовательно, ограничение расслоения $L(\tilde{M})$ на $\bar{K}$ есть $T(\bar{K})$, а потому на $\bar{K}$ определена каноническая голоморфная 2-форма τ .

Можно дать следующее эквивалентное определение объекта τ . Каждому допустимому $K \subset G$ мы относим голоморфную дифференциальную 2-форму τ^K на $\tilde{K}$, удовлетворяющую условию 1), так что если K_1 и K_2 касаются в точке $h \in G$, т. е. $T_p K_1 = T_p K_2$ для любого p из прообраза h , то $\tau_p^{K_1} = \tau_p^{K_2}$.

Приведём две явные конструкции τ .

1. Пусть $m = (p, \tilde{W}_p) \in \tilde{M}$ — допустимый интегральный элемент; $(h, W_h) \in M$ — образ m в M , V_h — одномерное подпространство, вдоль

* Существует естественный изоморфизм M на многообразие полных флагов в $\mathbb{C}^4$

которого W_h касается изотропного конуса R_h . Согласно п. 1, V_h однозначно представимо как пересечение образующих конуса

$$V_h = P_a \cap Q_i$$

(P_a, Q_i — 2-подпространства в $T_h G$).

Полагаем

$$\tau_{(p, \tilde{W}_p)} = \frac{\Omega(\tilde{Y}, \cdot)' \wedge \Omega(\tilde{Z}, \cdot)}{\Omega(\tilde{Y}, \tilde{Z})}, \quad (4.5)$$

где $\tilde{Y} \in \tilde{P}_a \setminus \tilde{V}_p, \tilde{Z} \in \tilde{Q}_i \setminus \tilde{V}_p$ ($\tilde{P}_a, \tilde{Q}_i$ — прообразы P_a, Q_i в $T_p G$). Очевидно, что определение не зависит от выбора $\tilde{Y}, \tilde{Z}$ и что τ удовлетворяет условиям 1) и 2),

II. Введём на $\tilde{G} \subset \mathbb{C}^n$ дифференциальную форму Лере v , заданную равенством

$$\omega = d\Omega(p, p) \wedge v, \quad \omega = \bigwedge_{i < j} dp_{ij}.$$

Пусть $\xi \in T_p^* \tilde{G}$ — произвольный ненулевой ковектор такой, что $\langle \xi, \tilde{W}_p \rangle = 0$. Зададим внешнюю (4,0)-форму $l_\xi \in \Lambda^4(T_p^* \tilde{K})$ и вектор $X_\xi \in T_p(\tilde{G}_p)$ равенствами

$$v = \xi \wedge l_\xi, \quad \Omega_p(X_\xi, \cdot) = \xi.$$

Заметим, что форма l_ξ определена однозначно, а вектор X_ξ — по модулю подпространства $\mathbb{C}X$; следовательно, бивектор $a_\xi = X \wedge X_\xi$ однозначно определяется вектором ξ и принадлежит $\Lambda^2 \tilde{V}_p$.

Определим сечение $\tau': \tilde{M} \rightarrow \Lambda^2 L^*(\tilde{M})$ следующим равенством:

$$\tau'_{(p, \tilde{W}_p)} = i_{a_\xi} l_\xi = l_\xi(X, X_\xi, \cdot, \cdot, \cdot). \quad (4.6)$$

Легко убедиться, что правая часть равенства не зависит от выбора $\xi \in T_p^* \tilde{G}, \langle \xi, \tilde{W}_p \rangle = 0$ и что τ' удовлетворяет условиям 1), 2). В силу единственности τ и τ' различаются лишь постоянным множителем

З а м е ч а н и е. В открытом всюду плотном подмножестве допустимого комплекса $K \subset G$ определена (2,0)-форма $i_Z L_Z$, использованная в предложении 3.2. Нетрудно видеть, что форма $i_Z L_Z$ совпадает с ограничением формы τ на подходящее локальное сечение $s: K \rightarrow \tilde{K}, G \rightarrow \tilde{G}$. Действительно, в локальных координатах $\{\alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2$ на G $s^*v = d\alpha^1 d\alpha^2 d\beta^1 d\beta^2$, $s^*\Omega = \text{const}(d\alpha^1 d\beta^2 - d\alpha^2 d\beta^1)$, где Ω — естественная комплексная (вырожденная) метрика на $\tilde{G}$. Вторая конструкция формы τ по v и Ω совпадает с конструкцией $i_Z L_Z$ по $s^*\Omega$, откуда

$$i_Z L_Z = s^*\tau.$$

5. Положительный эрмитов функционал в пространстве функций $\Phi(\bar{K})$, где K —допустимый комплекс. Пусть $K \subset G$ —допустимый комплекс, $\bar{K} \subset \bar{G}$ —прообраз K , $\Phi(\bar{K})$ —пространство функций на $\bar{K}$, удовлетворяющих соотношению

$$\varphi(\lambda p) = \lambda^{-1} \bar{\lambda}^{-1} \varphi(p), \quad \lambda \in \mathbb{C}^\times.$$

Определение. Зададим линейный дифференциальный оператор $s: \wedge^0(\bar{K}) \rightarrow \wedge^{3,0}(\bar{K})$ следующей формулой:

$$s(\varphi) = \partial \bar{\tau} \wedge \tau + \frac{1}{2} \varphi \partial \bar{\tau} = \partial(\varphi \bar{\tau}) - \frac{1}{2} \varphi \partial \bar{\tau}, \quad (4.7)$$

где τ —каноническая голоморфная 2-форма на K , введенная в п. 4, а ∂ —(1,0)-составляющая оператора дифференцирования d .

Предложение 4.1 Если $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(\bar{K})$, то дифференциальная (3.3)-форма $s(\varphi_1) \wedge \overline{s(\varphi_2)} + s(\varphi_2) \wedge \overline{s(\varphi_1)}$ на $\bar{K}$ опускается с $\bar{K}$ на K .

Доказательство. Достаточно доказать, что

1) форма $s(\varphi_1) \wedge \overline{s(\varphi_2)} + s(\varphi_2) \wedge \overline{s(\varphi_1)}$ инвариантна относительно преобразования $p \rightarrow \lambda p$ и

2) $i_X s(\varphi) = 0$,

где i_X —оператор внутреннего умножения на радиальное векторное поле X .

При преобразовании $p \rightarrow \lambda p$ дифференциальная форма τ умножается на λ^2 , а функция φ на $\lambda^{-1} \bar{\lambda}^{-1}$. Следовательно $s(\varphi_1)$ и $\overline{s(\varphi_2)}$ умножаются соответственно на $\lambda \bar{\lambda}^{-1}$ и $\bar{\lambda} \lambda^{-1}$ и значит $s(\varphi_1) \wedge \overline{s(\varphi_2)} + s(\varphi_2) \wedge \overline{s(\varphi_1)}$ сохраняется при преобразовании $p \rightarrow \lambda p$.

Теперь докажем свойство 2). Очевидны следующие свойства формы $\tau: i_X \tau = 0$, $i_X(\partial \bar{\tau}) = L_X \tau = 2\tau$, где L_X —производная Ли по направлению векторного поля X . Далее имеем $L_X \bar{\tau} = L_X \overline{\tau} = -\bar{\tau}$. Следовательно, $i_X s(\varphi) = \langle \partial \bar{\tau}, X \rangle \tau + \frac{\varphi}{2} i_X(\partial \bar{\tau}) = -\varphi \tau + \varphi \tau = 0$.

Замечание. Из 2) следует, что дифференциальная форма $s(\varphi)$ горизонтальна.

Определение. Зададим положительный эрмитов функционал в пространстве $\Phi(\bar{K})$, где K —допустимый комплекс, следующим равенством:

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \left(\frac{i}{2} \right)^3 \int_K (s(\varphi_1) \wedge \overline{s(\varphi_2)} + s(\varphi_2) \wedge \overline{s(\varphi_1)}).$$

6. Теорема Планшереля. Пусть F —пространство функций на $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$, удовлетворяющих условию

$$f(\lambda x) = |\lambda|^{-4} f(x).$$

Зададим на F скалярное произведение (см. § 2)

$$(f_1, f_2) = \left(\frac{i}{2}\right)^3 \int_{\mathbb{CP}^3} f_1(x) \overline{f_2(x)} \tau(x, dx) \wedge \overline{\tau(x, dx)},$$

где $\tau(x, dx) = \sum_{k=1}^4 (-1)^{k-1} x^k dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \dots \wedge dx^4$. Пусть далее

$K \subset G$ — допустимый комплекс, $J: \mathbb{P} \rightarrow \Phi(\tilde{K})$ — интегральное преобразование, определенное в § 2:

$$(Jf)(p) = \frac{i}{2} \int_{\mathbb{CP}^1} f(tu + sv) (tds - sdt) (\overline{t\overline{ds} - s\overline{dt}}), \quad p \in K,$$

где $p_{ij} = u_i v_j - u_j v_i$.

Теорема 4. Пусть $K \subset G_{2,4}$ — произвольный замкнутый допустимый комплекс прямых в $\mathbb{CP}^3$. Тогда для любой вещественной функции $f \in F$ имеем

$$c_K(f, f) = \left(\frac{i}{2}\right)^3 \int_K s(\varphi) \wedge \overline{s(\varphi)}, \quad \varphi = Jf,$$

где $s(\varphi)$ — форма на $\tilde{K}$, заданная формулой (4.7), а множитель c_K зависит только от класса гомологий K .

Доказательство. Не нарушая общности предположим, что носитель f не пересекает подпространства $x^4 = 0$ в $\mathbb{C}^4$. Тогда интегральное преобразование J сводится к интегрированию финитной функции в $\mathbb{C}^3 \subset \mathbb{CP}^3$ по прямым h , не лежащим в бесконечно удаленной плоскости. Из результатов § 3 следует, что для любой (замкнутой) комплексной гиперповерхности $\Gamma \subset G_{2,4}$

$$c_\Gamma \|\mathbb{P}^2 = \int_\Gamma \bar{\omega}(\varphi, \varphi), \quad \varphi = Jf.$$

Здесь $\bar{\omega}(\varphi, \varphi)$ — замкнутая (3.3)-форма на многообразии H прямых в $\mathbb{C}^3$, которая продолжается на весь грассманиан $G = G_{2,4}$. В случае когда $\Gamma = K$ — допустимый комплекс прямых в $\mathbb{CP}^3$, из предложения 3.2 и замечания в п. 4 следует, что

$$\bar{\omega}(\varphi, \varphi)|_K = \frac{\varphi^2}{2} (d\bar{\partial} \ln \varphi) \wedge \bar{\tau} \wedge \overline{\tau}$$

(легко видеть, что форма в правой части равенства опускается с $\tilde{K}$ на K)*.

* или, более строго, на десингуляризацию N многообразия K . Допустимый комплекс $K \subset G_{2,4}$ не может быть гладким многообразием, однако, обладает гладким, вообще говоря, разрешением особенностей $N \rightarrow K$. При этом $N \subset M$ совпадает с естественным подъемом K в расслоение M допустимых интегральных элементов над грассманианом $G_{2,4}$. Формы $\varphi^2 (\bar{\partial} \ln \varphi) \wedge \bar{\tau} \wedge \overline{\tau}$, $\varphi^2 \bar{\tau} \wedge \overline{\tau}$, $s(\varphi) \wedge \overline{s(\varphi)}$ естественно определены на N .

Итак

$$c_k \cdot \|f\|^2 = \int_K \varphi^2 \cdot (\partial \bar{\partial} \ln \varphi) \wedge \tau \wedge \bar{\tau}. \quad (4.8)$$

Очевидно, что равенство (4.8) остается справедливым для всех вещественных функций $f \in F$.

Ввиду компактности K остается доказать, что разность

$$\varphi^2 (\partial \bar{\partial} \ln \varphi) \wedge \tau \wedge \bar{\tau} - \text{const} \cdot s(\varphi) \wedge \overline{s(\varphi)}$$

точна. Из тождества

$$\varphi^2 \cdot (\partial \bar{\partial} \ln \varphi) - \frac{1}{2} \partial \bar{\partial} \varphi^2 = -2 \partial \varphi \wedge \bar{\partial} \varphi$$

следует, что

$$\varphi^2 (\partial \bar{\partial} \ln \varphi) \tau \wedge \bar{\tau} - \frac{1}{2} \partial \bar{\partial} (\varphi^2 \tau \wedge \bar{\tau}) = -2 \cdot s(\varphi) \wedge \overline{s(\varphi)}.$$

Так как $\varphi: \tilde{K} \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит $\Phi(\tilde{K})$, то (2.2)-форма $\varphi^2 \tau \wedge \bar{\tau}$ опускается с $\tilde{K}$ на K , поэтому $\partial \bar{\partial} (\varphi^2 \tau \wedge \bar{\tau})$ — точная (3.3)-форма на K . Следовательно, интеграл формы $-2s(\varphi) \wedge \overline{s(\varphi)}$ по K совпадает с интегралом (4.8). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Попутно мы доказали, что для любой быстро убывающей функции $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ и любого (не обязательно компактного) допустимого комплекса K прямых в $\mathbb{C}^3$ разность

$$\ast \varphi \wedge (\pi_2)_*(f dx \wedge d\bar{x})|_K - \text{const} \cdot s(\varphi) \wedge \overline{s(\varphi)}$$

есть точная форма на K' .

Добавление

Приведём несколько формул для комплексов прямых в аффинном пространстве, которые легко следуют из § 4.

Пусть H — многообразие прямых $x = \alpha t + \beta$ в $\mathbb{C}^3$, $K \subset H$ — комплекс прямых, K^E — прообраз K в многообразии E пар (α, β) , $\alpha \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, $\beta \in \mathbb{C}^3$ (см. § 1). В окрестности произвольной точки $\xi \in K^E$ многообразие K^E может быть задано уравнением

$$F(\alpha, \beta) = 0,$$

где F — аналитическая функция, однородная относительно α и удовлетворяющая условию $F(\alpha, \beta + \lambda \alpha) = F(\alpha, \beta)$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Условие допустимости комплекса имеет вид:

$$\frac{F_{\alpha_1}}{F_{\beta_1}} = \frac{F_{\alpha^2}}{F_{\beta^2}} = \frac{F_{\alpha^3}}{F_{\beta^3}}, \text{ при } F = 0.$$

Поднятие формы τ с $\tilde{K}$ на K^E равно

$$\tau^E = \partial_\alpha F \wedge \left(\frac{\alpha^3 d\alpha^1 - \alpha^1 d\alpha^3}{F_{\beta^2}} + \frac{\alpha^3 d\beta^2 - \alpha^1 d\beta^3}{F_{\alpha^2}} \right),$$

правая часть сохраняется при циклической перестановке индексов 1, 2, 3.

Если допустимый комплекс K задан в локальных координатах $\alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2$ уравнением $\beta^2 = u(\alpha^1, \alpha^2, \beta^1)$, то

$$s(\varphi)|_{\alpha^2=1, \beta^2=0} = (\varphi_{\alpha^1} + u_{\beta^1} \varphi_{\alpha^2} + u_{\alpha^2} \varphi_{\beta^1} + u_{\alpha\beta^1} \varphi) d\alpha^1 \wedge d\alpha^2 \wedge d\beta^1.$$

Институт математики

АН Армянской ССР,

Институт прикладной

математики АН СССР,

Московская опытно-методическая

геохимическая экспедиция при ИМГРЭ

Поступила 18. VII. 1986.

Ռ. Գ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ, Մ. Ի. ԳՐԱԵՎ, Մ. Մ. ԳՐԱԵՎ, Գ. Ռ. ՆՈՎԱՆԵՆԻՍՅԱՆ. Պլանշերելի բանաձևը կապված CP^3 -ում բարդացման բաղադրանքի համարման հետ (ամփոփում)

Հաղվածում ներմուծված և հետազոտված է դիֆերենցիալ ձևերի մի դաս (h, x) դասերի A բազմաձևության վրա, որտեղ h -ը k -չափանի հարթություն է աֆինական կամ պրոյեկտիվ կամպլեքս տարածությունում, իսկ x ընդհանուր կետ է: Ցույց է տրված, որ առ ձևերը փակ են և հաշված են նրանց ինտեգրալները ըստ $2(n-k)$ չափանի ցիկլերի A -ի վրա: Հիմնվելով այդ արդյունքների վրա ապացուցված է, որ C^n -ի կամ CP^n -ի վրա որոշված ֆունկցիաները միարժեքորեն զերականացվում են, եթե հայտնի են նրանց ինտեգրալները և մոմենտները ըստ k -չափանի հարթությունների կամայական n -չափանի կամպլեքսից:

Հաղվածի ներկայացրած մասում ստացված է Պլանշերելի բանաձևի անալոգը C^3 -ում և CP^3 -ում ուղիղների թափառման կամպլեքսի հետ կապված ինտեգրալ ձևափոխության համար:

R. G. AIRAPETYAN, M. I. GRAEV, M. M. GRAEV AND G. R. OGANESYAN.

Plansherel's formula associated with an admissible complex of straight lines in CP^3 (summary)

A class of differential forms on the manifold A of pairs (h, x) , where h is a k -dimensional plane in affine or projective complex space and x —a point in h , is defined and investigated. It is shown that these forms are closed and their integrals calculated over $2(n+k)$ -dimensional cycles on A . It follows that the functions on the C^n and CP^n are uniquely determined if their integrals and moments by the k -planes of an n -dimensional complex are known.

Plansherel formula for integral transformation associated with a permissible complex of lines in C^3 and CP^3 is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд, С. Г. Гиндикин, М. И. Граев. Интегральная геометрия в аффинном и проективном пространствах, в сб. «Современные проблемы математики», М.: ВИНТИ АН СССР, 1980, т. 16, 53—226.
2. И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Э. Я. Шапиро. Интегральная геометрия на k -мерных плоскостях, Функци. анализ и его прилож., 1967, 1, № 1, 15—31.
3. И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Э. Я. Шапиро. Интегральная геометрия в проективном пространстве, Функци. анализ и его прилож., 1970, 4, № 1, 14—32.
4. И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений («Обобщенные функции», вып. 5), М.: Физматгиз, 1962.
5. И. М. Гельфанд, М. И. Граев. Комплексы прямых в C^n , Функци. анализ и его прилож., 1968, 2, № 2, 39—52.

6. Р. Г. Айрапетян, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Г. Р. Оганесян. Формула Планшереля для интегрального преобразования, связанного с комплексом прямых, пересекающих алгебраическую кривую в $\mathbb{C}^3$ и $\mathbb{CP}^3$, ДАН Арм.ССР, 1982, 75, № 1, 9—15.
7. Ю. И. Манин. Калибровочные поля и комплексная геометрия, М., «Наука», 1984.
8. Твисторы и калибровочные поля. Сборник статей, М., «Мир», 1983.
9. Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. Принципы алгебраической геометрии, М., «Мир», 1982, том 1.
10. Д. Б. Фукс. Классические многообразия, в сб. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления», М., ВИНТИ АН СССР, 1986, т. 12, 253—314.
11. И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк. Унитарные представления группы Лоренца, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 11, 1947, 411—504.
12. Р. Г. Айрапетян, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Г. Р. Оганесян. Теорема Планшереля для интегрального преобразования, связанного с комплексом r -мерных плоскостей в $\mathbb{CP}^n$ и $\mathbb{C}^n$, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1983, 18, № 4, 271—282.

УДК 517.51

Л. А. ШАГИНЯН

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ ВСЮДУ СУММИРУЕМЫМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

§ 1. Введение

Как известно, задача описания класса функций, представимых всюду сходящимися тригонометрическими рядами, поставленная Б. Риманом [1], до сих пор не решена.

По-видимому эта задача становится более «доступной и интересной», если в ней вместо сходимости рассматривать метод суммирования Абеля. Так как для метода А нет единственности, поэтому можно ожидать, что класс тех функций, которые представляются всюду А суммируемыми тригонометрическими рядами, может быть максимально широким, т. е. совпасть с I-ым классом Бэра 2π -периодических функций.

В настоящей статье показывается, что при определенных перестановках тригонометрической системы такое ожидание оправдано, а также рассматриваются некоторые вопросы, примыкающие к этому результату.

Обозначим через $B(2\pi)$ класс тех 2π -периодических, не обязательно конечных функций, которые являются пределами последовательностей непрерывных функций на отрезке $[0, 2\pi]$.

Теорема 1. *Существует такая перестановка тригонометрической системы — $\{\cos n_k x, \sin n_k x\}_{k=1}^{\infty}$ ($\{n_k\}_{k=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$) и ряд по этой системе*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x, \quad (1)$$

что для любой функции $f \in B(2\pi)$ можно в ряде (1), заменив некоторые коэффициенты нулями, получить ряд, всюду суммируемый к $f(x)$ всеми методами $(C, \alpha > 0)$ и методом А.

В частности получают следующие утверждения, аналоги которых неверны для прямых (не переставленных) тригонометрических рядов.

Теорема 2. *Существует нетривиальный (слабо) переставленный тригонометрический ряд, суммируемый всюду к 0 всеми методами $(C, \alpha > 0)$.*

Теорема 3. *Существует (слабо) переставленный тригонометрический ряд, всюду суммируемый $k + \infty$ всеми методами $(C, \alpha > 0)$ и методом А.*

Относительно теоремы 2 отметим, что не существует нетривиального прямого тригонометрического ряда, всюду суммируемого к 0 каким-либо методом $(C, \alpha \geq 0)$ и вместе с тем, например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin x$$

всюду А суммируется к 0 (см. [2], стр. 145).

Кроме того отметим, что вопрос о существовании нетривиального переставленного тригонометрического ряда всюду сходящегося к 0, сформулированный в работе [3] С. Б. Стечкина и П. Л. Ульянова, остается открытым.

Относительно же теоремы 3 отметим следующее. Известно, что прямые тригонометрические ряды не могут A суммироваться к $+\infty$ на метрически плотных множествах II-ой категории*, в частности, на интервалах (это непосредственно следует из известной теоремы Н. Н. Лузина и И. И. Привалова о единственности аналитических функций [4], стр. 319—320). Кроме того, П. Л. Ульяновым установлено (см. [5], стр. 26), что тригонометрические ряды (прямые) не могут сходиться к $\pm\infty$ (в зависимости от точки) на таких множествах.

Этот результат усиливается следующей теоремой.

Теорема 4. *Тригонометрические ряды (прямые) не могут $(C, 1)$ суммироваться к $\pm\infty$ (в зависимости от точки) на метрически плотных множествах II-ой категории, в частности, на интервалах.*

Заметим, что (несмотря на то, что метод A сильнее всех методов $(C, \alpha \geq 0)$) невозможность A суммируемости прямых тригонометрических рядов к $+\infty$ на множествах упомянутого вида а priori не содержит в себе как результат П. Л. Ульянова, так и результат теоремы 4, так как уже существование A средних, вообще говоря, предполагает определенную ограниченность роста коэффициентов ряда.

Фактически доказательства последних двух утверждений основываются на том, что если частичные суммы или $(C, 1)$ -средние тригонометрического ряда ограничены снизу (сверху) константой на каком-либо множестве положительной меры, то отсюда следует определенная ограниченность роста коэффициентов ряда, а именно

$$|a_k| + |b_k| \leq M k^q; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

для некоторых M и q . Этот результат в случае ограниченности снизу частичных сумм доказан Дарсоу [6], где $1 < q < 2$, а в случае $(C, 1)$ средних — в лемме 2 настоящей статьи.

Здесь, естественно, возникает вопрос о порядке роста коэффициентов ряда (1). Они не ограничены в совокупности, но могут расти сколько угодно медленно за счет того, что ряд (1) строится из некоторых тригонометрических полиномов без общих носителей, между которыми при помощи перестановок помещается достаточно много тригонометрических функций с нулевыми коэффициентами. Поэтому представляется более интересным вопрос о порядке роста коэффициентов ряда (1) по отношению к прямому расположению тригонометрических функций в нем.

Теорема 5. *Никакая последовательность тригонометрических полиномов*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^m a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx$$

* под этим выражением мы подразумеваем существование такого интервала (a, b) , что порция множества в этом интервале имеет II-ую категорию и вместе с тем в любом интервале $\alpha, \beta) \subset (a, b)$, множество имеет порцию положительной меры.

не может сходиться к $\pm \infty$ (в зависимости от точки) на метрически плотных множествах II-ой категории, если

$$|a_k^{(n)}| + |b_k^{(n)}| \leq M k^q; \quad n, k \geq 1$$

для каких-либо M и q .

С л е д с т в и е 1. Тригонометрические ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (2)$$

при любых перестановках не могут суммироваться к $\pm \infty$ (в зависимости от точки) на метрически плотных множествах II-ой категории никаким конечнострочным методом, в частности, методами $(C, \alpha \geq 0)$, а также методом A , если

$$|a_k| + |b_k| \leq M k^q; \quad k \geq 0$$

для каких-либо M и q .

Здесь отметим следующее. В работе [7] В. Я. Козлова построен универсальный тригонометрический ряд, некоторая подпоследовательность частичных сумм которого всюду сходится к $+\infty$ (см. также [8], стр. 873—875). Известно, что коэффициенты этого ряда не ограничены (см. [5], стр. 24). Из следствия 1 получается более точное утверждение, а именно: коэффициенты $\{a_k, b_k\}$ универсального ряда В. Я. Козлова удовлетворяют условию

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k| + |b_k|}{k^q} = +\infty$$

для любого q .

Отметим еще одно следствие теоремы 5.

С л е д с т в и е 2. Если тригонометрический ряд (2) при некоторой перестановке суммируется к $\pm \infty$ (в зависимости от точки) каким-либо конечнострочным методом или методом A на некотором метрически плотном множестве II-ой категории, то множества

$$\{x : \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) > -\infty\}, \quad \{x : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n(x) < +\infty\}$$

являются множествами нулевой меры и I-ой категории, т. е. частичные суммы ряда (2) обязаны колебаться от $-\infty$ до $+\infty$ на остаточном множестве полной меры.

В связи с теоремой 3 возникает вопрос, можно ли в ней взять $\alpha = 0$, т. е. существует ли переставленный тригонометрический ряд, сходящийся к $+\infty$ всюду.

Т е о р е м а 6. Для любого переставленного тригонометрического ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x, \quad \text{где} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} < +\infty, \quad (3)$$

если нижний предел частичных сумм больше $-\infty$ на каком-либо множестве II-ой категории, то коэффициенты ряда ограничены в совокупности.

Отсюда, в силу теоремы 5, сразу следует, что тригонометрические ряды вида (3) при любых перестановках не могут сходиться к $\pm\infty$ (в зависимости от точки) на метрически плотных множествах II-ой категории.

Отметим, что утверждение теоремы 6 без дополнительного условия (3), но для прямых тригонометрических рядов, фактически доказано в заметке [6].

Наконец, отметим, что теорему 5 без труда можно распространить на кратные тригонометрические ряды.

Следующее утверждение, которое содержится в одной теореме В. Я. Козлова [7] (см. также [8], стр. 873—875), составляет основу доказательства теоремы 1.

Теорема К. Пусть $E \subset [0, 2\pi]$ и $0 < |E| < 2\pi$ ($|E|$ — мера E). Тогда произвольную непрерывную функцию можно изменить на E таким образом, чтобы она стала ортогональной к любым n заданным тригонометрическим функциям ($\cos kx, \sin kx$).

§ 2. Доказательство теоремы 1

Сперва введем некоторые обозначения. Обозначим через $\{T\}'$ класс вполне регулярных методов суммирований с бесконечными матрицами t_{ij} , высота строк которых стремится к нулю.

Этот класс, по-видимому впервые рассмотренный Д. Е. Меньшовым, содержит в себе все методы суммирований Чезаро— $(C, \alpha > 0)$ (см. [9]).

Ввиду того, что метод (C, α) сильнее любого метода (C, β) , при $\alpha > \beta$ ([8], стр. 886), то теорему 1 достаточно доказать для всех методов $(C, 1/n)$ $n \geq 1$. Мы это сделаем для произвольной последовательности методов $\{T_v\}_{v=1}^\infty$ из класса $\{T\}'$.

Итак, зафиксируем некоторую последовательность $\{T_v\}$, $T_v \in \{T\}'$, $v \geq 1$, и пусть $\{t_{ij}^{(v)}\}$ — матрица метода T_v , $v \geq 1$, где i — индекс строк, а j — индексы столбцов матрицы. Для любого $v \geq 1$ будем иметь

Т. 1. $t_{ij}^{(v)} > 0$; $i, j \geq 1$ (условие Т. 1. используется лишь для представления функций, принимающих значения $\pm\infty$);

Т. 2. $\lim_{v \rightarrow \infty} t_{ij}^{(v)} = 0$, $v, j > 1$;

Т. 3. $\lim_{v \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} t_{ij}^{(v)} = 1$, $v \geq 1$;

Т. 4. $\lim_{v \rightarrow \infty} \sup_i \{t_{ij}^{(v)}\} = 0$, $v \geq 1$.

Далее, тригонометрическим полиномом будем называть любое выражение вида

$$P(x) = \sum_{k=1}^m a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x,$$

где $\{n_k\}_{k=1}^m$ — некоторое подмножество N , взятое в произвольном порядке (здесь и далее в статье N будет означать множество натуральных чисел вместе с 0).

Для произвольного полинома $P(x)$ условимся о следующих обозначениях:

$$\begin{aligned} \underline{\text{ind}} P &= \min_{1 \leq k \leq m} \{n_k\}, \quad \overline{\text{ind}} P = \max_{1 \leq k \leq m} \{n_k\}, \\ p &= \overline{\text{ind}} P - \underline{\text{ind}} P + 1, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} J &= J(P) = N \cap [\underline{\text{ind}} P, \overline{\text{ind}} P], \\ M &= M(P) = \max_{1 \leq i \leq m} \{ \max_{x \in [0, 2\pi]} |S_i(x)| \} + 1, \end{aligned} \quad (5)$$

где $S_i(x)$ — есть i -ая частичная сумма полинома $P(x)$, т. е.

$$S_i(x) = \sum_{k=1}^i a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x.$$

Теперь зафиксируем какую-либо последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, стремящуюся к нулю, и пусть $\{R_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность всевозможных тригонометрических полиномов с рациональными коэффициентами.

Кроме того, зафиксируем последовательность непересекающихся интервалов $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ из отрезка $[0, 2\pi]$, которые сгущаются, например, к точке 2π , и пусть β_i есть концентричный с α_i интервал, равный его половине, а $\gamma_i = [0, 2\pi] - \alpha_i$ ($i \geq 1$).

Перейдем к построению ряда (1). Положим $Q_1(x) \equiv R(x)$, и если полиномы $Q_i(x)$ с рациональными коэффициентами уже определены для $i = 1, 2, \dots, k-1$, то $Q_k(x)$ строится таким образом: согласно теореме К полином $R_k(x)$ меняем на β_k так, чтобы полученная функция $\varphi_k(x)$ была ортогональна всем слагаемым полинома $\sum_{l=1}^{k-1} Q_l(x)$ и затем, поскольку $\varphi_k(x)$ есть тригонометрический полином на дополнении β_k , берем такую частичную сумму $S_j(x)$ ряда Фурье функции $\varphi_k(x)$, чтобы

$$|S_j(x) - R_k(x)| < \frac{\varepsilon_k}{2}, \quad x \in \gamma_k, \quad \underline{\text{ind}} S_j > \overline{\text{ind}} \sum_{l=1}^{k-1} Q_l(x).$$

Теперь отличные от нуля коэффициенты полинома $S_j(x)$ заменяем такими рациональными числами, чтобы вновь полученный полином $\tilde{Q}_k(x)$ удовлетворял условию

$$|\tilde{Q}_k(x) - R_k(x)| < \frac{\varepsilon_k}{2}, \quad x \in \gamma_k \quad \text{и} \quad \underline{\text{ind}} \tilde{Q}_k > \overline{\text{ind}} \sum_{l=1}^{k-1} Q_l = q_{k-1}.$$

Для полинома $\tilde{Q}_k(x)$ определим числа p_k и M_k , согласно (4), (5) и исходя из Т. 3 и Т. 4 найдем такое натуральное n_k , чтобы

$$\begin{aligned} (M_k^* = \sum_{r=1}^k M_r) \\ M_k^* \sum_{l=q_{k-1}+n_k+1}^{q_{k-1}+n_k+p_k} t_{li}^{(v)} \leq \frac{1}{2^k}; \quad v = 1, 2, \dots, k; \quad i = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

Затем перед полиномом $\bar{Q}_k(x)$ в качестве слагаемых помещаем n_k функций вида $A_j(x) = 0 \cdot \cos jx + 0 \cdot \sin jx$ с минимальными индексами $j > q_{k-1}$ и $j \in J(\bar{Q}_k)$.

Таким образом полученный полином обозначим через $Q_k(x)$. Продолжая этот процесс, получим последовательность полиномов $\{Q_l(x)\}$ с рациональными коэффициентами вида

$$Q_k(x) = \sum_{j=q_{k-1}+p_k+1}^{q_{k-1}+p_k+n_k} (0 \cdot \cos jx + 0 \cdot \sin jx) + \\ + \sum_{j=q_{k-1}+1}^{q_{k-1}+p_k} (a_j^{(k)} \cos jx + b_j^{(k)} \sin jx) = \sum_{j=q_{k-1}+1}^{q_k} B_j(x),$$

$$\text{где } q_k = \overline{\text{ind}} \sum_{j=1}^k Q_j = \sum_{j=1}^k (n_j + p_j), \quad (n_1 = 0).$$

Причем

$$B_j(x) \equiv 0, \text{ при } q_{k-1} + 1 \leq j \leq q_{k-1} + n_k \quad (6)$$

и если

$$M_k = \max_{1 \leq l \leq p_k} \left\{ \max_{x \in [0, 2\pi]} \sum_{j=1}^l |B_{q_{k-1}+n_k+j}(x)| \right\} + 1,$$

то

$$M_k^* \sum_{j=q_{k-1}+n_k+1}^{q_k} t_{ij}^{(*)} \leq \frac{1}{2^k}; \quad v = 1, 2, \dots, k; \quad i \geq 1. \quad (7)$$

Из построения полиномов $Q_k(x)$ ясно, что каждая тригонометрическая функция $\cos jx$, $\sin jx$ с некоторым рациональным коэффициентом входит в какой-либо полный $Q_k(x)$ и

$$|Q_k(x) - R_k(x)| < \varepsilon_k, \quad x \in \gamma_k, \quad k \geq 1. \quad (8)$$

Составим ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} Q_l(x). \quad (9)$$

Из построения полиномов очевидно, что после раскрытия внутренних сумм в ряде (9) получится некоторый слабо переставленный тригонометрический ряд (1). Убедимся, что он удовлетворяет утверждению теоремы 1.

Возьмем произвольную функцию $f(x) \in B(2\pi)$. Тогда, в силу теоремы Вейерштрасса о равномерной аппроксимации непрерывных 2π -периодических функций тригонометрическими полиномами, легко убедиться, что

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} R_{k_i}(x), \quad x \in [0, 2\pi], \quad (k_1 < k_2 < \dots).$$

Теперь выберем некоторую подпоследовательность $\{Q_{m_l}(x)\}_{l=1}^{\infty}$. Положим: $Q_{m_l}(x) \equiv R_{k_l}(x)$ и если полиномы $Q_{m_l}(x)$ уже выбраны для $m_1 < m_2 < \dots < m_{l-1}$, то $Q_{m_l}(x)$ выберем следующим образом: рассмотрим тригонометрический полином с рациональными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^n R_{k_i}(x) - \sum_{i=1}^{n-1} Q_{m_i}(x)$$

и поменяем коэффициенты этого полинома так, чтобы получить полином $R_p(x)$, удовлетворяющий условиям

$$p > m_{n-1} \text{ и } \left| R_p(x) - \sum_{i=1}^n R_{k_i}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} Q_{m_i}(x) \right| < \varepsilon_n, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Положим

$$Q_{m_n}(x) \equiv Q_p(x), \quad (m_n = p).$$

Из (8) следует

$$\left| \sum_{i=1}^n R_{k_i}(x) - \sum_{i=1}^n Q_{m_i}(x) \right| < 2\varepsilon_n, \quad x \in \gamma_{m_n} = [0, 2\pi] - \gamma_{m_n}.$$

Таким образом получаем последовательность $\{Q_{m_i}(x)\}$, $m_1 < m_2 < \dots$, причем

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q_{m_i}(x) = f(x), \quad x \in [0, 2\pi], \quad (10)$$

так как каждая точка $x \in [0, 2\pi]$ принадлежит всем γ_k , по крайней мере начиная с некоторого $k \geq k_0$.

Теперь рассмотрим ряд (9) с раскрытыми внутренними суммами. Он будет иметь вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=q_{k-1}+1}^{q_k} B_j(x) \quad (q_0 = n_1 = 0).$$

В нем коэффициенты всех тех слагаемых, которые не входят в полиномы $Q_{m_i}(x)$, $i \geq 1$, заменим нулями, не трогая остальных.

Получится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=q_{k-1}+1}^{q_k} B_j^*(x), \quad (11)$$

где (в силу (6))

$$B_j^*(x) \equiv 0, \quad q_{k-1} + 1 \leq j \leq q_k, \quad k \in \{m_i\}_{i=1}^{\infty} \quad (12)$$

и

$$B_j^*(x) \equiv B_j(x), \quad q_{k-1} + 1 \leq j \leq q_k, \quad k \in \{m_i\}_{i=1}^{\infty}. \quad (13)$$

При этом, если $S_j(x)$ — j -ая частичная сумма ряда (11), то

$$S_j(x) \equiv 0, \quad j = 1, 2, \dots, q_{m_{i-1}} + n_{m_i}, \quad (14)$$

$$|S_j(x)| \leq M_{m_i}, \quad x \in [0, 2\pi], \quad q_{m_{i-1}} + n_{m_i} + 1 \leq j \leq q_{m_i},$$

$$S_j(x) \equiv \sum_{r=1}^k Q_{m_r}(x), \quad x \in [0, 2\pi], \quad q_{m_k} \leq j \leq q_{m_{k+1}} + n_{m_{k+1}}, \quad (15)$$

$$|S_j(x)| \leq M_{m_k}^*, x \in [0, 2\pi], q_{m_{k+1}-1} + n_{m_{k+1}} + 1 \leq j \leq q_{m_{k+1}} \quad (16)$$

для любого $k \geq 1$, согласно (6), (7), (12) и (13).

Таким образом, в частности имеем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{q_{m_k}}(x) = f(x), x \in [0, 2\pi]. \quad (17)$$

Теперь убедимся, что ряд (9) с раскрытыми внутренними суммами на $[0, 2\pi]$ суммируется к $f(x)$ каждым из методов T_{ν} . Обозначив i -ую T_{ν} -среднюю ряда через $\sigma_i^{(\nu)}(x)$ и учитывая (14), (15), будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_i^{(\nu)}(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} t_{ij}^{(\nu)} S_j(x) = \sum_{j=q_{m_1-1}+n_{m_1}+1}^{q_{m_1}} t_{ij}^{(\nu)} S_j(x) + \\ &+ S_{q_{m_1}}(x) \sum_{j=q_{m_1}+1}^{q_{m_2}-1+n_{m_2}} t_{ij}^{(\nu)} + \sum_{j=q_{m_2-1}+n_{m_2}+1}^{q_{m_2}} t_{ij}^{(\nu)} S_j(x) + S_{q_{m_2}}(x) \sum_{j=q_{m_2}+1}^{q_{m_3}-1+n_{m_3}} t_{ij}^{(\nu)} + \\ &+ \dots + \sum_{j=q_{m_k-1}+n_{m_k}+1}^{q_{m_k}} t_{ij}^{(\nu)} S_j(x) + S_{q_{m_k}}(x) \sum_{j=q_{m_k}+1}^{q_{m_{k+1}}-1+n_{m_{k+1}}} t_{ij}^{(\nu)} + \\ &+ \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=q_{m_k-1}+n_{m_k}+1}^{q_{m_k}} S_j(x) t_{ij}^{(\nu)} + \sum_{k=1}^{\infty} S_{q_{m_k}}(x) \sum_{j=q_{m_k}+1}^{q_{m_{k+1}}+n_{m_{k+1}}} t_{ij}^{(\nu)} = \\ &= \mu_i(\nu, x) + r_i(\nu, x). \end{aligned}$$

Теперь убедимся, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \mu_l(\nu, x) = 0, x \in [0, 2\pi], \nu \geq 1, \quad (*)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} r_l(\nu, x) = f(x), x \in [0, 2\pi], \nu \geq 1. \quad (**)$$

Из (7) следует, что в любой точке $x \in [0, 2\pi]$ имеем

$$\begin{aligned} |\mu_l(\nu, x)| &\leq \sum_{k=l}^{\infty} M_{q_{m_k}}^* \sum_{j=q_{m_k-1}+n_{m_k}+1}^{q_{m_k}} t_{ij}^{(\nu)} = \\ &= \sum_{k=l}^l M_{q_{m_k}}^* \sum_{j=q_{m_k-1}+n_{m_k}+1}^{q_{m_k}} t_{ij}^{(\nu)} + \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}, (l > \nu), \end{aligned}$$

где первое слагаемое стремится к 0 для любого l , при $l \rightarrow \infty$, а второе стремится к 0 при $l \rightarrow \infty$. Следовательно, (*) доказано.

Для доказательства (**), в силу (17), достаточно убедиться, что матрица $\|a_{ik}^{(\nu)}\|$ является вполне регулярной для всех $\nu \geq 1$, где

$$a_{ik}^{(\nu)} = \sum_{j=q_{m_k}+1}^{q_{m_k}+n_{m_k}} t_{ij}^{(\nu)} (i, k \geq 1).$$

Это следует из Т. 1—Т. 4, если учесть, что $M_{q_{m_k}}^* \geq 1$, $k \geq 1$ и поэтому

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=q_{m_k-1}+n_{m_k}+1}^{q_{m_k}} t_{lj}^{(\nu)} = 0$$

для любого $\nu \geq 1$. Теорема 1 доказана для методов $(C, \alpha > 0)$. Чтобы распространить ее на метод А остается заметить, что за счет выбора слагаемых с нулевыми коэффициентами, т. е. за счет выбора n_k можно добиться того, чтобы

$$\frac{1}{j} \max_{x \in [0, 2\pi]} |B_j(x)| \rightarrow 0, \text{ при } j \rightarrow \infty$$

и следовательно из $(C, 1)$ суммируемости будет следовать А суммируемость ряда (11) в каждой точке $[0, 2\pi]$ (см., например, доказательство теоремы Фробениуса в [8], стр. 28).

§ 3. Доказательства теорем 4-6

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение, которое сформулируем в виде замечания (доказательство см., например, [8], стр. 696).

Замечание 1. Пусть E есть множество II -ой категории из отрезка $[a, b]$, и $R_n(x)$ — последовательность функций, непрерывных на $[a, b]$, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) > -\infty \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) < +\infty), \quad x \in E.$$

Тогда существует интервал $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ и такое число γ , что

$$R_n(x) \geq \gamma \quad (R_n(x) \leq \gamma), \quad x \in (\alpha, \beta), \quad n = 1, 2, \dots$$

Сперва мы докажем теорему 5, опираясь на следующую лемму.

Лемма 1. Пусть коэффициенты полиномов

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{m_n} a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx, \quad n \geq 1$$

удовлетворяют условию

$$|a_k^{(n)}| + |b_k^{(n)}| \leq M k^q; \quad k = 1, 2, \dots, m_n; \quad n \geq 1 \quad (18)$$

для некоторых чисел M и q . Тогда, если

$$P_n(x) \geq 0, \quad x \in (\alpha, \beta), \quad n \geq 1, \quad (19)$$

то для любого $E \subset (\alpha, \beta)$, $|E| = \text{mes } E > 0$, существует такое число $C = C(E)$, не зависящее от n , что

$$\mu_n(E) = \inf_{x \in E} |P_n(x)| \leq C, \quad n \geq 1.$$

Доказательство. Пусть

$$h(x) = \begin{cases} e^{[(\alpha-x)(\beta-x)]^{-1}}, & x \in [\alpha, \beta], \\ 0, & x \notin [\alpha, \beta] \end{cases}$$

(не нарушая общности мы предполагаем, что $(\alpha, \beta) \subset (0, 2\pi)$).

Положим

$$a_k(h) = \int_0^{2\pi} h(x) \cos kx \, dx, \quad b_k(h) = \int_0^{2\pi} h(x) \sin kx \, dx, \quad k \geq 0.$$

Поскольку $h(x)$ бесконечно дифференцируема, то

$$a_k(h) = o(k^{-q-2}), \quad b_k(h) = o(k^{-q-2}) \quad (20)$$

для любого q ([8], стр. 88) и следовательно, в силу (18), (20)

$$\sum_{k=0}^{m_n} |a_k^{(n)}| |a_k(h)| + |b_k^{(n)}| |b_k(h)| \leq A, \quad n \geq 1,$$

где A — некоторая константа, не зависящая от n .

Теперь, учитывая (19), для любого множества $E \subset (\alpha, \beta)$, $|E| > 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} \mu_n(E) \int_E h(x) \, dx &\leq \int_E h(x) P_n(x) \, dx \leq \int_\alpha^\beta h(x) P_n(x) \, dx = \\ &= \int_0^{2\pi} h(x) P_n(x) \, dx \leq A. \end{aligned}$$

Отсюда сразу следует утверждение леммы 1, так как

$$\int_E h(x) \, dx > \int_\alpha^{\alpha + \frac{1}{2}|E|} h(x) \, dx = C_1(|E|) > 0.$$

З а м е ч а н и е 2. Очевидно, что если условие (19) заменить условием

$$P_n(x) \geq \text{Const}, \quad x \in (\alpha, \beta), \quad n \geq 1,$$

то утверждение леммы останется в силе.

Доказательство теоремы 5. Предположим обратное, а именно: существуют последовательность полиномов $\{P_n(x)\}$, удовлетворяющая условию (18), а также такое метрически плотное множество E II-ой категории, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \pm \infty, \quad x \in E, \quad (21)$$

в зависимости от точки $x \in E$. Тогда (см. подстрочное примечание на стр.) найдется такой отрезок $[a, b]$, что $E_1 = E \cap [a, b]$ есть множество II-ой категории и $|E_1 \cap (\alpha, \beta)| > 0$ для любого $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$.

Положим

$$E_1^+ = \{x : P_n(x) \rightarrow +\infty\} \text{ и } E_1^- = \{x : P_n(x) \rightarrow -\infty\}.$$

Хотя бы одно из этих множеств, для определенности E_1^+ , есть множество II-ой категории, и следовательно, согласно замечанию 1, существуют интервал $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ и константа γ такие, что

$$P_n(x) > \gamma, \quad x \in (\alpha, \beta), \quad n \geq 1.$$

Вместе с тем, согласно (21)

$$|(\alpha, \beta) \cap \{x : P_n(x) \rightarrow +\infty\}| > 0.$$

Ясно, что последние соотношения, в силу теоремы Егорова, противоречат утверждению леммы 1. Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 4 непосредственно получается из следствия 1, если учесть следующую лемму.

Лемма 2. Если $(C, 1)$ средние тригонометрического ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (22)$$

неотрицательны на некотором множестве E , $|E| > 0$, то

$$|a_k| + |b_k| \leq Mk^q, \quad k \geq 1 \quad (23)$$

для некоторых M и q .

Доказательство проводится в основном по схеме заметки [6]. Пусть x — произвольная точка плотности множества E , а β и γ — некоторые фиксированные числа, причем

$$\frac{1}{2}\pi < \beta < \gamma < \pi. \quad (24)$$

Ясно, что точка 0 будет точкой плотности множества

$$F = (x - E) \cap (-x + E)$$

и поэтому для достаточно больших n , скажем $n \geq n_0$, существуют такие $x_n \in F$, что

$$\beta < nx_n < \gamma, \quad n \geq n_0. \quad (25)$$

Обозначим k -ый член ряда (22) через $A_k(x)$, а частичные суммы и $(C, 1)$ средние, соответственно, через $\{S_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\sigma_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Поскольку $x + x_n \in E$, $x - x_n \in E$ при $n \geq n_0$, то используя преобразование Абеля, будем иметь ($n > n_0$)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2} \{\sigma_n(x+x_n) + \sigma_n(x-x_n)\} = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \{A_j(x+x_n) + A_j(x-x_n)\} = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k A_j(x) \cos jx_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (n-k+1) A_k(x) \cos kx_n = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k (n-j+1) A_j(x) \Delta \cos kx_n + \sigma_n(x) \cos nx_n, \end{aligned}$$

где $\Delta \cos kx_n = \cos kx_n - \cos (k+1)x_n = 2 \sin \left(k + \frac{1}{2}\right) x_n \sin \frac{x_n}{2}$.

Вновь, дважды применяя преобразование Абеля, получаем

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &\leq \frac{2(-\cos nx_n)^{-1}}{n+1} - \sin \frac{x_n}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) x_n \left\{ (n-k+1) S_k(x) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^{k-1} S_j(x) \right\} = \\ &= \frac{2(-\cos nx_n)^{-1}}{n+1} - \sin \frac{x_n}{2} \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \sigma_k(x) \Delta \left\{ (n-k+1) \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) x_n \right\} + \\ &\quad + \frac{2(-\cos nx_n)^{-1}}{n+1} 2n \sigma_{n-1}(x) \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) x_n \sin \frac{x_n}{2},\end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned}&\left| \Delta \left\{ (n-k+1) \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) x_n \right\} \right| = \left| (n-k+1) \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) x_n - \right. \\ &\quad \left. - (n-k) \sin\left(k + \frac{3}{2}\right) x_n \right| \leq \\ &\leq (n-k) \left| \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) x_n - \sin\left(k + \frac{3}{2}\right) x_n \right| + \left| \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) x_n \right| \leq \\ &\leq \frac{(n-k)\gamma}{n} + 1 < 2\pi \quad (\text{см. (24) и (25)}).\end{aligned}$$

Следовательно, учитывая, что $\sigma_n(x) \geq 0$, $n \geq 0$, а также соотношения (24) и (25), получаем

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &\leq \frac{\gamma(-\cos \gamma)^{-1}}{n(n+1)} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} k \sigma_{k-1}(x) + 2\pi \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \sigma_k(x) + \right. \\ &\quad \left. + 2\pi n \sigma_{n-1}(x) \right\} \leq \frac{3\pi\gamma(-\cos \gamma)^{-1}}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \sigma_k(x).\end{aligned}$$

Теперь, так как γ может быть выбрано таким, что $\frac{\gamma}{-\cos \gamma} < 3\left(\gamma = \frac{8}{9}\pi\right)$, будем иметь

$$\sigma_n(x) \leq \frac{9\pi}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \sigma_k(x)$$

для всех $n \geq n_0$.

Последовательно применив последнее неравенство, получаем

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &\leq \frac{9\pi}{n(n+1)} \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \sigma_k(x) + n \sigma_{n-1}(x) \right\} \leq \\ &\leq \frac{9\pi}{n(n+1)} \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \sigma_k(x) + \frac{9\pi}{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \sigma_k(x) \right\} = \\ &= \frac{9\pi}{n(n+1)} \left(1 + \frac{9\pi}{n-1} \right) \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \sigma_k(x) \leq \\ &\leq \frac{9\pi}{n(n+1)} \left(1 + \frac{9\pi}{n-1} \right) \left(1 + \frac{9}{n-2} \right) \sum_{k=0}^{n-3} (k+1) \sigma_k(x) \leq \dots \leq\end{aligned}$$

$$\leq \frac{9\pi}{n(n+1)} \left(1 + \frac{9\pi}{n-1}\right) \left(1 + \frac{9\pi}{n-2}\right) \dots \\ \dots \left(1 + \frac{9\pi}{n-n_0+1}\right) \sum_{k=0}^{n_0} (k+1) \varpi_k(x).$$

Положим

$$C = \max_{x \in [0, 2\pi]} \sum_{k=0}^{n_0} (k+1) \varpi_k(x).$$

Имеем

$$\sigma_n(x) \leq \frac{9\pi C}{n(n+1)} e^{\ln\left(1+\frac{9\pi}{n-1}\right)\left(1+\frac{9\pi}{n-2}\right)\dots} \leq \\ \leq \frac{9\pi C}{n(n+1)} e^{9\pi\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)} \leq \frac{9\pi C}{n(n+1)} e^{9\pi \ln n} = 9\pi C n^{9\pi-2}.$$

Таким образом, получаем

$$\sigma_n(x) \leq M_1 n^{q_1} (n \geq 0)$$

в каждой точке плотности E , т. е. почти в каждой точке E , где M_1 и q_1 не зависят от n . Следовательно, почти всюду не E будем иметь

$$|S_n(x)| \leq (n+1) \varpi_n(x) + n \sigma_{n-1}(x) \leq M_2 n^{q_2}$$

и поэтому коэффициенты ряда (22) удовлетворяют условию (23) для некоторых чисел M и q , что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 6. Легко видеть, что в силу замечания I, достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 3. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos m_k x + b_k \sin m_k x = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x)$$

—некоторый переставленный тригонометрический ряд, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k} < +\infty. \quad (26)$$

Тогда, если

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cos m_k x + b_k \sin m_k x > 0, \quad x \in (a, b), \quad (n \geq 1), \quad (27)$$

то для любого $\varepsilon > 0$ найдется интервал $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ и такое число C , не зависящее от n , что

$$\beta - \alpha > b - a - \varepsilon$$

и

$$\int_{\alpha}^{\beta} S_n(x) dx \leq C, \quad n > 1.$$

Доказательство. Не нарушая общности можем предполагать, что $(a, b) \subset (0, 2\pi)$. Положим

$$\alpha_j^k = \frac{2\pi}{m_k} j; j = 1, 2, \dots, m_k; k > 1$$

и для заданного

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(b - a), \quad (28)$$

исходя из (26), зафиксируем такое n_0 , чтобы

$$2\pi \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{m_k} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (29)$$

Далее обозначим через α_0 наименьшее из чисел $\alpha_j^{n_0}$ ($j = 1, 2, \dots, m_{n_0}$), которое содержится в интервале (a, b) , а через α_1 — наименьшее из чисел $\alpha_j^{n_0+1}$ ($j = 1, 2, \dots, m_{n_0+1}$), которое содержится в интервале (α_0, b) . Продолжая этот процесс, получим последовательность

$$\alpha < \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_v < \alpha_{v+1} < \dots,$$

причем

$$0 < \alpha_0 - \alpha < \frac{2\pi}{m_{n_0}}, \quad 0 < \alpha_{v+1} - \alpha_v \leq \frac{2\pi}{m_{n_0+v}}, \quad v \geq 1.$$

Следовательно, существует $\alpha = \lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_v$, причем

$$\alpha < a < b \text{ и } a - \alpha < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (30)$$

согласно (28) и (29).

Аналогичным образом, отправляясь от правого конца отрезка $[0, 2\pi]$, находим такое число β , что

$$\alpha < a < \beta < b, \quad b - \beta < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (31)$$

Теперь для произвольного $n \geq 1$ оценим снизу интеграл

$$\int_0^a S_n(x) dx.$$

Положим

$$J_0 = \max_{1 \leq j \leq n_0} \left| \max_{x \in [0, 2\pi]} |S_j(x)| \right|.$$

Далее, заметив, что

$$\int_0^{\alpha_k} A_{n_0+k}(x) dx = 0, \quad k \geq 0,$$

из условия (27) получаем ($n = n_0 + v$)

$$\int_0^a S_n(x) dx > \int_0^{\alpha_{v+1}} S_{n_0+v}(x) dx = \int_0^{\alpha_{n+1}} S_{n_0-1}(x) dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{a_{n_0+1}} |S_{n_0+v}(x) - S_{n_0-1}(x)| dx \geq \\
& \geq -2\pi J_0 + \sum_{k=n_0}^{n_0+v} \int_0^{a_{k+1}} A_k(x) dx = -2\pi J_0 + \\
& + \int_{a_{n_0}}^{a_{n_0+1}} [S_{n_0}(x) - S_{n_0-1}(x)] dx + \\
& + \int_{a_{n_0+1}}^{a_{n_0+2}} [S_{n_0+1}(x) - S_{n_0-1}(x)] dx + \dots + \int_{a_n}^{a_{n+1}} [S_n(x) - S_{n_0-1}(x)] dx \geq \\
& \geq -2\pi J_0 - \sum_{k=n_0}^{n_0+v=n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} S_{n_0-1}(x) dx \geq -4\pi J_0.
\end{aligned}$$

Таким образом, для всех $n \geq 1$

$$\int_0^a S_n(x) dx \geq -4\pi J_0.$$

Аналогичным образом получаем, что

$$\int_b^{2\pi} S_n(x) dx \geq -4\pi J_0, \quad n \geq 1.$$

Из полученных неравенств сразу следует утверждение леммы, если учесть условие (27), соотношения (30), (31) и что

$$\int_0^{2\pi} S_n(x) dx = \text{Const}, \quad n \geq 1.$$

Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 14. V. 1986

Լ. Ա. ՇԱՀԻՆՅԱՆ. Ամենուրեք բանադրմանի և խափանման շարքերով ֆունկցիաների
հերիտացման մասին (ամփոփում)

Հաղվածում կառուցվում է մի այնպիսի թույլ տեղափոխված եռանկյունաչափական շարք, որ ինչպիսին էլ որ լինի 2π -պարբերական $f(x)$ ֆունկցիան R ու 1 -ին դասից, կարելի է շարքի որոշ գործակիցներ դարձնել 0 այնպես, որ ստացված շարքը հանրագումարվի $f(x)$ -ին ամենուրեք ցանկացած $(C, \alpha > 0)$ և A զամարման եղանակներով:

Մասնավորաբար ստացվում է, որ զայաթյուն ունեն թույլ տեղափոխված այնպիսի եռանկյունաչափական շարքեր, որոնք ցանկացած $(C, \alpha > 0)$ և A մեթոդներով հանրագումարվում են 0 -ի $(+\infty-ի)$ ամենուրեք:

Ուսմանսիրվում է կառուցված շարքի գործակիցների աճման կարգը և ապացուցվում է, որ ուղիղ եռանկյունաչափական շարքերը չեն կարող $(C, 1)$ եղանակով հանրագումարվել $+\infty-ի$ որևէ համակարգի վրա:

L. A. SHAHINIAN. *Representations of functions by the everywhere summable trigonometric series* (summary)

Weakly permutable trigonometric series are constructed such, that for every 2π -periodic function $f(x)$ from the first class of Be., it is possible to replace by 0 some of the coefficients in the series in such a way, that the new series be summable to $f(x)$ everywhere by all methods $(C, \alpha > 0)$ and A .

In particular, there are weakly permutable trigonometric series $(C, \alpha > 0)$ and A methods summable everywhere to $O(+\infty)$.

The behaviour of the coefficients of the series are also investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Риман. Сочинения, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
2. Г. Х. Харди и В. В. Рогозинский. Ряды Фурье, М., Физматгиз, 1959.
3. С. Б. Стецкий и П. А. Ульянов. О множествах единственности, Изв. АН СССР, серия матем. 26, 1962, 211—222.
4. И. И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., 1950.
5. П. А. Ульянов. Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, УМН 19, вып. 1(115), 1964.
6. W. Darsow. On boundedness of trigonometric series. Journ. London Math. Soc., 35, № 2, 1960, 237—239.
7. В. Я. Козлов. О полных системах ортогональных функций, Мат. сборник, 26 (68), 1950, 351—364.
8. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды, М., Физматгиз, 1961.
9. Д. Е. Меньшов. Sur la convergence et la sommation des series de fonctions orthogonales, Bull. Soc. Math. France, 64, 1936, 147—170.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Մ. Մ. Զբրաշյան. Կոմպլեքս տիրույթում մի եզրային խնդրից ծնվող սեփական ֆունկցիաների ռազիոսայնության մասին	409
Վ. Ա. Արզումանյան, Ս. Ա. Գրիգորյան. Օպերատորային դաշտերի համառարաշտի հանրահաշիվների եզրերը	422
Վ. Հ. Յաղչյան. Կոշու խնդրի Կորեկառավարյան անհրաժեշտ պայմանները բազմապատիկ ընդմիջարկներով օպերատորների համար	439
Ռ. Գ. Հայրապետյան, Մ. Ի. Գրան, Մ. Մ. Գրան, Գ. Ռ. Հովհաննիսյան. Պլանշերելի բանաձև կապված CP^3 -ում ուղիղների թույլատրելի կոմպլեքսի հետ	463
Լ. Ա. Շահինյան. Ամենուրեք հանրազամարելի եռանկյունաշախատկան շարքերով ֆունկցիաների ներկայացման մասին	489

СО Д Е Р Ж А Н И Е

М. М. Джрбашян. О базисности собственных функций порожденных одной красвой задачей в комплексной области	409
В. А. Арзуманян, С. А. Григорян. Границы равномерных алгебр операторных полей	422
К. А. Ягджян. Необходимые условия корректности задачи Коши для операторов с кратными характеристиками	439
Р. Г. Айрапетян, М. И. Граев, М. М. Граев, Г. Р. Оганесян. Формула Планшереля, связанная с допустимым докомплексом прямых в CP^3	463
Л. А. Шагинян. О представлениях функций всюду суммируемыми тригонометрическими рядами	489

CONTENTS

M. M. Djrbashian. On the basis property of eigenfunctions of a boundary value problem in complex plane	409
S. Grigorian, V. Arzumanyan. The boundaries of uniform algebras of operator fields	422
K. H. Yagdjian. On the Cauchy problem for operators with multiple characteristics	439
R. G. Atrapetyan, M. I. Graev, M. M. Graev and G. R. Oganessian. Plancherel's formula associated with an admissible complex of straight lines in CP^3	463
L. A. Shahinian. Representations of functions by the everywhere summable trigonometric series	489