ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке), а кратких сообщений—не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

ԳԻՆԸ 1 Ռ. 20 Կ.
ЦЕНА 1 Р. 20 К. Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contribttors who desire to have their articles published in the proceedings zvestia of the Academy of Sciences of the Armenion S.S.R., series "Matomatika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initals and name, the title of the book, the place of publication, the publisher tbe date muse be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to indicated by a numeral in square brackets properey inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article shoule contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitied ot twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 4, 1988 Математика

УДК 517.927.21

Н. Е. ТОВМАСЯН

КОРРЕКТНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ, РАСТУЩИХ НЕ БЫСТРЕЕ ПОЛИНОМА

Введение

Рассматривается система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0;\ (t, x) \in R_+^{n+1}, \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$; $\frac{\partial}{\partial x} = \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$, $A(x)$ — квадратная матрица порядка m, элементы которой — полиномы действительной переменной $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $u(x, t) = (u_1(x, t), \cdots, u_m(x, t))$ — искомая вектор-функция, $i = \sqrt{-1}$, $R_+^{n+1} = \{(x, t), t > 0, x \in R^n\}$.

Определение 1. Мы считаем, что функция $u(x, t)$ принадлежит классу M, если она вместе с производной по t непрерывна в замкнутом полупространстве $t \geqslant 0$, $x \in R^n$ и удовлетворяет оценкам

$$\left|\frac{\partial^j u(x, t)}{\partial t^j}\right| \leqslant c_1(1 + |x| + |t|)^{c_2},\ (x, t) \in R_+^{n+1},\ j = 0, 1, \tag{2}$$

где c_1 и c_2 — некоторые постоянные, зависящие от функции $u(x, t)$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f(x)$, заданная в R^n, принадлежит классу N, если она бесконечно дифференцируема и удовлетворяет оценкам

$$|D_x^k f(x)| \leqslant c_k(1 + |x|)^{\alpha},\ x \in R^n, \tag{3}$$

где c_k и α — некоторые постоянные, зависящие от $f(x)$ (α не зависит от k), $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$, $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$; $D_x^k f = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}, \cdots, \partial_n^{k}}$.

Делая преобразование Фурье по переменной x в системе (1), получим

$$Lv = \frac{dv}{dt} - A(\sigma)v = 0,\ t > 0,\ \sigma \in R^n, \tag{4}$$

где $v = F(u(x, t))$. Здесь и в дальнейшем под $F(u(x, t))$ и $F^{-1}(u(x, t))$ понимается преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье функции $u(x, t)$ (как обобщенной функции) по переменной x. Под решением уравнения (4) понимается функционал $v(t)$, зависящей от t

как от параметра, который при фиксированном t принадлежит классу $S'(R^n)$ и имеет вид $v(t)=F(u(x, t))$, где $u(x, t)\in M$. В уравнении (4) производная по t понимается в слабом смысле, а по x — в обобщенном смысле.

Пусть E — единичная m-мерная матрица, $\lambda_1(\sigma), \lambda_2(\sigma), \cdots, \lambda_m(\sigma)$ — корни характеристического уравнения

$$\det(E\lambda - A(\sigma)) = 0. \tag{5}$$

Корень берется столько раз, какова его кратность. Обозначим $\rho(\sigma)$ — число корней уравнения (5) с $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$.

Определение 3. Точка $\sigma_0 \in R^n$ называется регулярной точкой для системы (1), если в некоторой окрестности этой точки функция $\rho(\sigma)$ постоянна, в противном случае точка называется нерегулярной.

В дальнейшем регулярность или нерегулярность точки σ подразумевается для системы (1). В данной работе предполагается, что все точки регулярные, кроме конечного числа точек $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_q$.

Отметим, что при $n=1$ данное предположение всегда выполняется.

Пусть G_0 — пространство R^n без точек $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_q$. При $n \geqslant 2$ функция $\rho(\sigma)$ в области G_0 постоянна. Это число, называемое показателем регулярности уравнения (1), обозначим через ρ_0.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача А. Найти решение системы (1) в классе M, удовлетворяющее граничному условию

$$Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, 0) = f(x), \tag{6}$$

где $Q(x)$ — матрица размерности $\rho_0 \times m$, элементы которой — полиномы, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_{\rho_0}(x))$ — заданная вектор-функция из класса N.

Под решением задачи А понимается классическое решение. Делая преобразование Фурье по x в граничном условии (6), получим

$$Q(\sigma)v(\sigma, 0) = g(\sigma), \tag{7}$$

где $g(\sigma) = Ff$.

Определение 4. Будем говорить, что задача А в точке $\sigma_0 \in R^n$ удовлетворяет условию Лопатинского, если однородная задача (4), (7) при $\sigma = \sigma_0$ имеет только нулевое решение в классе обычных функций, растущих по t не быстрее полинома.

Отметим, что в нерегулярной точке условие Лопатинского заведомо нарушается.

В случае, когда все точки регулярные, кроме меры 0, задача А в классе обобщенных функций $u(x, t)$, для которых $Fu(x, t)$ есть обычная функция, растущая не быстрее полинома по x и по t, рассмотрена в работах [1]—[3]. В этом классе доказана единственность решения этой задачи и получены необходимые и достаточные условия на $g(\sigma) = Ff(x)$ для разрешимости неоднородной задачи.

В случае, когда условие Лопатинского выполняется всюду, задача А рассмотрена в работах [4]—[5] и доказано существование и единственность решения этой задачи.

Задача А для однородного эллиптического уравнения высшего порядка с однородными граничными условиями в классе бесконечно дифференцируемых функций определенного роста рассмотрена в монографии [6]. При выполнении условия дополнительности доказаны существование и единственность решения этой задачи.

В работах [7]—[8] показано, что если есть нерегулярные точки, то однородная задача А имеет бесконечное число линейно независимых решений, даже если во всех регулярных точках условие Лопатинского выполняется.

Как показывают вышеуказанные работы, при добавлении хотя бы одного условия вида (6) рассматриваемая задача становится некорректной.

Целью данной работы является указание дополнительных начальных условий, при которых задача А становится корректной. При этом предполагается, что во всех регулярных точках условие Лопатинского выполняется.

Теперь сформулируем основные результаты данной работы. Для этого введем некоторые обозначения.

Пусть $n \geqslant 2$ и $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_q$ — нерегулярные точки системы (1) $(\sigma_k \in R^n)$

$$P^+(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma^+(\sigma)} (E\lambda - A(\sigma))^{-1} d\lambda; \quad P^-(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma^-(\sigma)} (E\lambda - A(\sigma))^{-1} d\lambda, \tag{8}$$

где $\gamma^+(\sigma)$ $(\gamma^-(\sigma))$ — контур в комплексной плоскости, охватывающий корни характеристического уравнения (5) с $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ $(\mathrm{Re}\,\lambda < 0)$.

В работе [9] показано, что матрицы $P^+(\sigma)$ и $P^-(\sigma)$ бесконечно дифференцируемы в регулярных точках, причем

$$\mathrm{rang}\, P^+(\sigma) = m - \rho(\sigma), \quad \mathrm{rang}\, P^-(\sigma) = \rho(\sigma).$$

Условие Лопатинского в регулярных точках эквивалентно условию [9]

$$\mathrm{rang} \begin{pmatrix} P^+(\sigma) \\ Q(\sigma) \end{pmatrix} = m, \quad \sigma \in G_0. \tag{9}$$

В дальнейшем условие (9) предполагается выполненным. Пусть $u_0(x, t)$ — частное решение задачи А, существование которого будет показано в § 2 данной работы. Дополнительные условия зададим в виде

$$B_j\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)(u(x, 0) - u_0(x, 0)) * \hat{\varphi}_j(x) = e^{-i\sigma_j x} p_j(x); \quad j = 1, 2, \cdots, q, \tag{10}$$

где $B_j(x)$ — матрица размерности $(\rho(\sigma_j) - \rho_0) \times m$, элементы которой — полиномы, $p_j(x)$ — заданная вектор-функция размерности $\rho(\sigma_j) - \rho_0$, компонентами которой являются полиномы, $\varphi_j(x) \in C_0^\infty$, $\mathrm{supp}\,\varphi_j(x)$ находится в малой окрестности точки σ_j, и в некоторой окрестности этой точки функция $\varphi_j(x)$ равна 1, $\tilde{\varphi}(x)=F^{-1}(\varphi(\xi))$. Здесь и в дальнейшем $f*g$ — свертка функций f и g, т. е.

$$f(x)*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)\,g(\xi)\,d\xi.$$

В работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Для того, чтобы задача* А *с дополнительными условиями* (10) *имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} Q(\sigma_j) \\ B_j(\sigma_j) \\ P^+(\sigma_j) \end{pmatrix}=m,\ j=1,\ 2,\cdots,\ q. \tag{11}$$

В высказывании «имеет единственное решение» понимается существование и единственность.

Пусть $\rho(\sigma_1)=\rho(\sigma_2)=\cdots=\rho(\sigma_q)=r_0$. Рассмотрим дополнитель ные условия вида

$$B_0\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)(u(x,\ 0-u_0(x,\ 0))=\sum_{j=1}^{q}\exp(-i\sigma_j\ x)\ p_j(x), \tag{12}$$

где $B_0(x)$ — матрица размерности $(r_0-\rho_0)\times m$, элементы которой — полиномы, $p_j(x)$ — заданные вектор-функции размерности $r_0-\rho_0$, компонентами которых являются полиномы. В этом случае имеет место следующая

Теорема 2. *Для того, чтобы задача* А *с дополнительными условиями* (12) *имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} Q(\sigma_j) \\ B_0(\sigma_j) \\ P^+(\sigma_j) \end{pmatrix}=m,\ j=1,2,\cdots,q.$$

Работа состоит из двух параграфов. В § 1 приводятся некоторые вспомогательные предложения. В § 2 исследуется задача А с дополнительными условиями (10) или (12) и приводятся результаты для $n=1$. Показана естественность дополнительных условий (10). § 3 — полученные результаты иллюстрируются для системы Карлемана-Векуа.

В работе указывается метод решения поставленной задачи и оценки производных решения.

§ 1. Некоторые вспомогательные предложения

Рассмотрим следующую задачу.

Задача В. Найти на полуоси $t>0$ решение системы

$$\frac{dy}{dt}=A_0 y+f(t), \tag{13}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$B_0 y(0) = a \tag{14}$$

в классе функций, растущих не быстрее полинома, где A_0 и B_0 — постоянные матрицы размерности $m \times m$ и $r \times m$ соответственно, $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_m(t))$ — непрерывная вектор-функция, растущая при $t \to +\infty$ не быстрее полинома, a — заданный постоянный r-мерный вектор, r — число корней характеристического уравнения

$$\det(E\lambda - A_0) = 0, \tag{15}$$

у которых $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$.

Пусть P^+ — матрица, определяемая формулой

$$P^+ = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma+} (E\lambda - A_0)^{-1}\, d\lambda,$$

где γ^+ — контур в комплексной плоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$, охватывающий корни уравнения (15) с $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Условие Лопатинского для задачи В совпадает с условием

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} P^+ \\ B_0 \end{pmatrix} = m.$$

В работах [1] и [9] доказана следующая

Лемма 1. *При выполнении условия Лопатинского задача* В *имеет решение и оно единственно.*

Лемма 2. *Если матрица B_0 имеет размерность $r_1 \times m$, где $r_1 < r$ и*

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} P^+ \\ B_0 \end{pmatrix} = m - r + r_1,$$

то однородная задача B имеет $r - r_1$ линейно независимых решений, а неоднородная задача всегда разрешима.

Действительно, в этом случае в условие (14) можно добавить новые условия так, что будет справедливо утверждение леммы 1.

Обозначим через M_0 класс функций в R^2_+ вида

$$w(x, t) = \sum_{k=0}^{l_0} c_k(t)\, x^k, \tag{16}$$

где l_0 — произвольное целое число, $c_k(t)$ $(k = 0, 1, \cdots, l_0)$ — m-мерные вектор-функции, первые производные которых непрерывны в области $t \geqslant 0$ и растут не быстрее полинома при $t \to +\infty$.

Задача С. В классе M_0 найти решение системы

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) w + \sum_{k=0}^{l} a_k(t)\, x^k, \quad (x, t) \in R^q_+, \tag{17}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$C\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) w(x, 0) = \sum_{k=0}^{l_1} \alpha_k x^k, \quad x \in R^1, \tag{18}$$

где $a_k(t)$ — непрерывные вектор-функции размерности m на полуоси $t \geqslant 0$, растущие не быстрее полинома, $C(x)$ — матрица размерности $r \times m$, элементы которой — полиномы, r — число корней уравнения $\det(E\lambda - A(0)) = 0$ с $\operatorname{Re}\lambda < 0$, a_k — постоянные векторы.

Лемма 3. *Если*

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} C(0) \\ P^+(0) \end{pmatrix} = m,$$

то задача C в классе M_0 имеет, и притом единственное решение.

Доказательство. Подставляя $w(x, t)$ из (16) в (17) и (18) при $l_0 \geqslant \max(l, l_1)$, получим относительно $c_k(t)$ задачу вида B, которая удовлетворяет условию Лопатинского. Согласно лемме 1 она имеет единственное решение в классе функций, растущих не быстрее полинома.

Так как вектор-функции $c_k(t)$ удовлетворяют уравнению вида (13), то $c_k(t)$ также непрерывны и растут не быстрее полинома.

Лемма 4. *Если $C(x)$ — матрица размерности $r_1 \times m$, где $r_1 < r$ и*

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} C(0) \\ P^+(0) \end{pmatrix} = m - r - r_1,$$

то однородная задача C имеет бесконечное число линейно независимых решений, а неоднородная задача всегда разрешима.

Лемма 4 доказывается аналогично лемме 3, при этом используется лемма 2.

Лемма 5. *Для того, чтобы однородная задача A с дополнительными условиями* (10) *имела конечное число линейно независимых решений, необходимо, чтобы имело место условие* (11).

В случае однродной задачи в условии (10) частное решение $u_0(x, t)$ можно взять равным нулю. При $n=1$, $q=1$, $x_1=0$ лемма 5 непосредственно следует из лемм 3 и 4. Общий случай доказывается аналогично. Лемма 5 говорит о том, что условие (11) необходимо для корректности задачи A с дополнительными условиями (10). В дальнейшем это условие предполагается выполненным.

В работе [5] доказаны следующие оценки для корней уравнения (5):

$$|\lambda_j(\sigma)| \leqslant c_0(1 + |\sigma|)^{n_0} \; (j = 1, 2, \cdots, m), \tag{19}$$

$$|\operatorname{Re}\lambda_j(\sigma)| \geqslant c_1 |\sigma - \sigma_1|^{n_1} \cdots |\sigma - \sigma_q|^{n_q} (1 + |\sigma|)^{n_{q+1}}; \; j = \rho_0, \cdots, m, \tag{20}$$

где c_0, c_1, n_1, $n_2, \cdots, n_{q+1}$ — некоторые положительные постоянные.

Рассмотрим следующую систему уравнений в классе обычных функций:

$$\frac{dy}{dt} = A(\sigma)\, y + f(\sigma, t), \; t > 0, \tag{21}$$

где $y(\sigma, t) = (y_1(\sigma, t), \; y_2(\sigma, t), \cdots, y_m(\sigma, t))$ — искомое решение, $f(\sigma, t)$ — непрерывная функция по σ и t при $\sigma \in R^n$, $t \geqslant 0$, $\sigma \neq \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_q$, удовлетворяющая неравенству

$$|f(\sigma, t)| < c|\sigma - \sigma_1|^{-m_1} \cdots |\sigma - \sigma_q|^{-m_q} (1 + |\sigma|)^{m_{q+1}} (1 + t)^{m_{q+2}}, \tag{22}$$

$c, m_1, m_2, \cdots, m_{q+2}$ — некоторые положительные постоянные.

Лемма 6. *Если $y(\sigma, t)$ является решением уравнения* (21) *при $\sigma \in R^n$ и $\sigma \neq \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_q$ и удовлетворяет оценкам*

$$|y(\sigma, t)| \leqslant g(\sigma)(1 + t)^l, \ \sigma \in R^n, \ \sigma \neq \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_q, \tag{23}$$

$$|y(x, 0)| \leqslant c_1 |\sigma - \sigma_1|^{-l_1} \cdots |\sigma - \sigma_q|^{-l_q} (1 + |\sigma|)^{l_{q+1}}, \tag{24}$$

где $g(\sigma)$ — некоторая положительная функция, $c_1, l_1, l_2, \cdots, l_{q+1}$ — положительные постоянные, то $y(\sigma, t)$ удовлетворяет оценке вида (22).

Лемма 6 доказана в работе [1].

Обозначим

$$\alpha(\sigma) = \begin{pmatrix} Q(\sigma) \\ P^+(\sigma) \end{pmatrix}, \ \beta(\sigma) = \sum_{k=1}^{l} |\beta_k(\sigma)|^2,$$

где l — число миноров $\beta_k(\sigma)$ порядка m матрицы $\alpha(\sigma)$. Из условия (9) следует, что функция $\beta(\sigma)$ отлична от нуля и бесконечно дифференцируема всюду, кроме, быть может, точек $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_q$. Имеет место следующая

Лемма 7. *Функция $\beta(\sigma)$ удовлетворяет оценке*

$$|\beta(\sigma)| \geqslant c|\sigma - \sigma_1|^{n_1} \cdots |\sigma - \sigma_q|^{n_q} (1 + |\sigma|)^{-n_{q+1}}, \tag{25}$$

где $c, n_1, n_2, \cdots, n_{q+1}$ — некоторые положительные постоянные.

Доказательство. Вычисляя $P^+(\sigma)$ по теореме о вычетах, получим, что $P^+(\sigma)$ имеет вид

$$P^+(\sigma) = \frac{R(\sigma, \lambda_1(\sigma), \cdots, \lambda_m(\sigma))}{\omega(\sigma)}, \ \omega(\sigma) = \prod_{j=p_0+1}^{m} \prod_{k=1}^{p_0} (\lambda_k(\sigma) - \lambda_j(\sigma)),$$

где $R(\sigma, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$ — квадратная матрица порядка m, элементы которой — полиномы относительно $\sigma, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$. Следовательно $\beta(\sigma)$ имеет вид

$$\beta(\sigma) = \frac{\beta_0(\sigma, \lambda_1(\sigma), \cdots, \lambda_m(\sigma))}{\omega^{2m}(\sigma)}, \tag{26}$$

где $\beta_0(\sigma, \lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ — полиномы относительно $\sigma, \lambda_1, \cdots, \lambda_m$. Ясно, что $\beta_0(\sigma, \lambda_1(\sigma), \cdots, \lambda_m(\sigma)) \neq 0$ при $\sigma \in R^n$ и $\sigma \neq \sigma_1, \cdots, \sigma_q$. В работе [5] (стр. 381, лемма 2.2) доказано, что функция $\beta_0(\sigma, \lambda_1(\sigma), \cdots, \lambda_m(\sigma))$, обладающая вышеуказанными свойствами, удовлетворяет оценке (25). Из соотношений (19) и (26) следует, что $\beta(\sigma)$ также удовлетворяет оценке (25).

Лемма 8. *Матрица $w(\sigma, t) = e^{A(\sigma)t} P^-(\sigma)$ бесконечно дифференцируема при $\sigma \in R^n$, $t \geqslant 0$, $\sigma \neq \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_q$ и вместе с производными удовлетворяет оценкам вида* (22).

Доказательство. Вектор-функция $w(\sigma, t)$ является решением уравнения

$$\frac{dw}{dt} = A(\sigma) w, \ t > 0 \tag{27}$$

и удовлетворяет начальному условию

$$w(\sigma, 0) = P^{-}(\sigma). \tag{28}$$

В работе [9] доказано, что

$$w(\sigma, t) \equiv \exp(A(\sigma)t)\, P^{-}(\sigma) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^{-}} e^{\lambda t}(E\lambda - A(\sigma))^{-1}\, d\lambda.$$

Вычисляя $w(\sigma, t)$ и $\frac{\partial^k w}{\partial\sigma^k}$ по теореме о вычетах, убедимся, что для них имеет место оценка (23). Используя оценки (19) и (20), получим, что для матриц $P^{-}(\sigma)$ и $P^{+}(\sigma)$ и их производных имеют место оценки (24). Согласно лемме 6, $w(\sigma, t)$ удовлетворяет оценке вида (22). Дифференцируя уравнение (27) и начальные условия (28) по σ, получим

$$\frac{\partial y(\sigma, t)}{\partial t} = A(\sigma)\, y(\sigma, t) + \frac{dA(\sigma)}{d\sigma}\, w(\sigma, t), \tag{29}$$

$$y(\sigma, 0) = \frac{dP^{-}(\sigma)}{d\sigma},$$

где $y(\sigma, t) = \frac{dw}{d\sigma}$. Применяя лемму 5 для уравнения (29), получим оценку (27) для $\frac{\partial w}{\partial\sigma}$. Аналогичным образом можно показать справедливость леммы 8 для всех производных $\frac{\partial^k w}{\partial\sigma^k}$ $(k = 1, 2, \cdots)$.

Лемма 9. *Если выполнено условие* (9) *и*

$$\operatorname{rang} Q(\sigma) = \rho_0, \quad \sigma \in G_0, \tag{30}$$

то задача A *имеет решение.*

Отметим, что условие (30) следует из условий (9) и (11).

Лемму докажем для случая, когда $n = 1$ и система (1) имеет одну нерегулярную точку $\sigma_1 = 0$. Общий случай доказывается аналогично. Вначале найдем решение задачи А, когда граничное условие (6) имеет вид

$$Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, 0) = D_x^{2k} f(x), \tag{31}$$

где $f(x)$ — правая часть условия (6), k — достаточно большое целое число, зависящее от $f(x)$. Делая преобразование Фурье по переменной x в уравнении (1) и граничном условии (31), получим

$$\frac{dv}{dt} = A(\sigma)\, v, \tag{32}$$

$$Q(\sigma)\, v(\sigma, 0) = \sigma^{2k} g(\sigma), \tag{33}$$

где $g(\sigma) = Ff$.

Рассмоторим в классе обычных функций систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} P^{+}(\sigma)\,\omega(\sigma)=0, & (34)\\ Q(\sigma)\,\omega(\sigma)=b\sigma^{k}, & (35)\end{cases}$$

где $b=(b_1, b_2, \cdots, b_{\rho_0})$ — заданный постоянный вектор, $\omega(\sigma)=(\omega_1(\sigma), \omega_2(\sigma), \cdots, \omega_m(\sigma))$ — искомая вектор-функция.

Поскольку выполняется условие (9), то в области G_0 система (34)—(35) имеет единственное бесконечно дифференцируемое решение. Если доопределить это решение $\omega(0)=0$, то, согласно лемме 7, при достаточно большом k оно будет иметь непрерывные производные до заданного порядка, растущие не быстрее полинома при $|\sigma|\to+\infty$.

Пусть $\overset{1}{\omega}(\sigma), \overset{2}{\omega}(\sigma), \cdots, \overset{\rho_0}{\omega}(\sigma)$ — решение системы (34) — (35) при $b=(1, 0, \cdots, 0)$; $(0, 1, \cdots, 0)$; $\underbrace{(0, 0, \cdots, 1)}_{\rho_0}$.

Ясно, что частным решением уравнения (33) относительно $v(\sigma, 0)$ является

$$v(\sigma, 0)=\overset{1}{\omega}(\sigma)\,\sigma^{k}g_1(\sigma)+\overset{2}{\omega}(\sigma)\,\sigma^{k}g_2(\sigma)+\cdots+\overset{\rho_0}{\omega}\sigma^{k}g_{\rho_0}(\sigma). \qquad (36)$$

Решение уравнения (32) через начальные условия задается формулой

$$v(\sigma, t)=\exp(A(\sigma)t)\,v(\sigma, 0). \qquad (37)$$

Подставляя (36) в (37) и имея в виду, что $P^{+}(\sigma)+P^{-}(\sigma)=E$ [9], а $\overset{j}{\omega}(\sigma)$ удовлетворяет уравнению (34), получим

$$v(\sigma, t)=\sum_{s=1}^{\rho_0} w_{ks}(\sigma, t)\,g_s,$$

где

$$w_{ks}(\sigma, t)=\exp(A(\sigma)t)\,\sigma^{k}P^{-}(\sigma)\,\overset{s}{\omega}(\sigma).$$

Из леммы 8 следует, что для любого l можно указать достаточно большое натуральное число k такое, что функции $w_{ks}(\sigma, t)$ непрерывно дифференцируемы в R_{+}^{2} до порядка l и эти производные растут не быстрее полинома по σ и t при $|\sigma|\to+\infty$, $t\to+\infty$. Пусть $f(x)$ удовлетворяет условию (3). Обозначим через $z_{kl}(x, t)$ обратное преобразование Фурье функции $\dfrac{w_{kl}(\sigma, t)}{(1+\sigma^2)^{\mu+k}}$, т. е.

$$z_{kl}(x, t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{R^1}\frac{w_{kl}(\sigma, t)}{(1+\sigma^2)^{\mu+k}}\,e^{-i\sigma x}\,d\sigma.$$

При достаточно больших μ и k функция $z_{kl}(x, t)$ и ее производная по t непрерывны и удовлетворяют оценке

$$\left|\frac{\partial^{p} z_{kl}}{\partial t^{p}}\right|\leqslant\frac{c(1+t)^{\alpha_0}}{(1+|x|)^{\alpha+2}},\quad p=0, 1,$$

где α_0 и c — некоторые постоянные, α — постоянная из оценки (3).

Решение $v(\sigma, t)$ можно записать в виде

$$v(\sigma, t) = \sum_{l=1}^{m} F(z_{kl}(\sigma, t)) F(\psi_{\mu l}(x)),$$

где $\psi_{\mu l}(x) = \left(E - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\mu} f_l(x)$.

Ясно, что

$$u_0(x, t) = \sum_{l=1}^{m} z_{kl}(x, t) * \psi_{\mu l}(x) \tag{38}$$

является частным решением задачи (1), (31). Из формулы (38) следует, что $D_x^k u_0(x, t)$ удовлетворяет оценке

$$|D_x^k u_0(x, t)| \leqslant c_k (1 + |x|)^{\alpha} (1 + t)^{\alpha_0}; \; k = 0, 1, \cdots, \tag{39}$$

где c_k — некоторые постоянные.

Так как $u_0(x, t)$ является решением системы (1), то оценка (39) имеет место для всех смешанных производных функции $u_0(x, t)$.

Теперь докажем лемму для общего случая. Пусть $u_1(x, t)$ — частное решение уравнения

$$D_x^{2k} u_1(x, t) = u_0(x, t). \tag{40}$$

Так как $u_0(x, t)$ удовлетворяет оценке (39), то $u_1(x, t)$ также удовлетворяет этой оценке с другим показателем α. Подставляя $u_0(x, t)$ из (40) в уравнение (1) и граничное условие (31), получим

$$D_x^{2k} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - A\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u_1(x, t) \right) = 0,$$

$$D_x^{2k} Q\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u_1(x, 0) = D_x^{2k} f(x).$$

Отсюда имеем

$$L(u_1) \equiv \frac{\partial u_1}{\partial t} - A\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u_1(x, t) = \sum_{j=0}^{2k-1} a_j(t)\, x^j; \tag{41}$$

$$Q\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u_1(x, 0) = f(x) + \sum_{j=0}^{2k-1} b_j\, x^j, \tag{42}$$

где

$$a_j(t) = \frac{1}{j!} \left. \frac{\partial^j (L u_1)}{\partial x^j} \right|_{x=0},$$

b_j — постоянные ρ_0-мерные векторы. Ясно, что $a_j(t)$ непрерывны и растут не быстрее полинома при $t \to +\infty$.

Чтобы найти частное решение задачи А делаем замену искомого решения

$$u(x, t) = u_1(x, t) + w(x, t).$$

Подставляя $u(x, t)$ в уравнение (1) и граничные условие (6) и имея в виду (41) и (42), относительно $w(x, t)$ получим задачу С, удовлетворяющую условиям леммы 4, которая имеет решение $w(x, t) \in M$. Утверждение леммы доказано.

§ 2. Исследование задачи А с дополнительными условиями

Доказательство теоремы 1. Необходимость условия (11) следует из леммы 5. Покажем достаточность этого условия для существования и единственности решения задачи А с дополнительными условиями (10). Делая замену в системе (1) и граничных условиях (6) и (10) $u(x, t) = u_0(x, t) + w(x, t)$, относительно $w(x, t)$ получим

$$\frac{\partial w}{\partial t} - A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) w = 0), (x, t) \in R_+^{n+1}, \tag{43}$$

$$Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) w(x, 0) = 0, \ x \in R^n, \tag{44}$$

$$B_j\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) w(x, 0) * \hat{\varphi}_j(x) = e^{-i\sigma_j x} p_j(x); \ x \in R^n; \ j = 1, 2, \cdots, q. \tag{45}$$

Теорему докажем для случая, когда $n = 1$, $q = 1$, $\sigma_1 = 0$. В этом случае $G_0 = R^1 \setminus \{0\}$. После преобразования Фурье по переменной x в (43) — (45) получим

$$\frac{d\omega}{dt} = A(\sigma)\,\omega, \ (\sigma, t) \in R_+^2, \tag{46}$$

$$Q(\sigma)\,\omega(\sigma, 0) = 0, \ \sigma \in R^1, \tag{47}$$

$$B(\sigma)\,\omega(\sigma, 0)\,\varphi(\sigma) = \gamma, \ \sigma \in R^1, \tag{48}$$

где $\omega = Fw(x, t)$, γ — функционал из S', сосредоточенный в нуле.

В работах [7] и [9] показано: для того, чтобы функционал $\omega = F(w(x, t))$, где $w(x, t) \in M$, был решением системы (46), необходимо, чтобы начальные данные $\omega(\sigma, 0)$ удовлетворяли условию

$$P^+(\sigma)\,\omega(\sigma, 0) = 0 \text{ при } \sigma \in G_0. \tag{49}$$

Из соотношений (47) и (49) (имея в виду условие (9)) получим $\omega(\sigma, 0) = 0$ при $\sigma \in G_0$. Следовательно

$$\omega(\sigma, t) = 0, \quad \text{при} \quad t \geqslant 0, \ \sigma \in G_0. \tag{50}$$

Отсюда, в частности, следует, что если $\omega(\sigma, t)$ является решением задачи (46) — (48) и $F^{-1}(\omega(\sigma, t)) \in M$, то $B(\sigma)\,\omega(\sigma, 0)$ вектор-функционал, сосредоточенный в точке $\sigma = 0$. Это означает, что $B\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) w(x, 0) * \hat{\varphi}(x)$ является полиномом, т. е. в дополнительном условии (10) естественно задавать правую часть в виде

$$p_j(x) \exp(-i\sigma_j x).$$

Из (50) следует, что решение задачи (46), (47) имеет вид

$$\omega(\sigma, t) = \sum_{k=0}^{l_0} c_k(t)\,\delta^{(k)}(\sigma), \tag{51}$$

где $c_k(t)$ и их первые производные растут не быстрее полинома, $\delta(\sigma)$ — дельта-функция Дирака.

Так как функционал $w(\sigma, 0)$ сосредоточен в точке $\sigma=0$, то в условии (48) функцию $\varphi(\sigma)$ можно полагать единицей. Делая обратное преобразование Фурье в (46)—(48) и (51) ($\varphi(\sigma)=1$), для определения $w(\sigma, t)$ получим задачу C, которая удовлетворяет условию леммы 3. Следовательно, задача A с дополнительными условиями (10) имеет решение и оно единственно.

Теорема 2 доказывается аналогично теореме 1.

Теорема 3. *Если выполнено условие теоремы* 1 *и* $f(x) \in N$, *то решение задачи* A *с дополнительным условием* (10) *бесконечно дифференцируемо и удовлетворяет оценке*

$$|D_t^l D_x^k u(x, t)| \leqslant c_{kl}(1+|x|)^{\alpha_0}(1+t)^{\beta_0}, \quad l=0, 1, \cdots, \quad |k|=0, 1, \cdots,$$

где c_{kl}, α_0, β_0 — *некоторые постоянные*, α_0 *и* β_0 *не зависят от* k *и* l.

Для производных $D_x^k u(x, t)$ эта оценка непосредственно следует из построенного решения. Так как $u(x, t)$ — решение системы (1), то все смешанные производные линейно выражаются через эти производные. Отсюда и следует утверждение теоремы 3.

Замечание 1. Если правая часть граничного условия (6) имеет вид такой же, как и правая часть условия (12), то в граничных условиях (10) и (12) можно полагать $u_0(x, t)\equiv 0$.

Пусть $n=1$ и все точки R^1 регулярны для системы (1), кроме точек $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_q$ и $\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_q$. Обозначим $\Omega_0, \Omega_1, \cdots, \Omega_q$ — интервалы $(-\infty, \sigma_1)$, $(\sigma_1, \sigma_2), \cdots, (\sigma_q, +\infty)$, а $\overline{\Omega}_0, \overline{\Omega}_1, \cdots, \overline{\Omega}_q$ — отрезки $(-\infty, \sigma_1]$, $[\sigma_1, \sigma_2], \cdots, [\sigma_q, +\infty)$, $\rho(\sigma)$ — число корней характеристического уравнения (5) с $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$. Функция $\rho(\sigma)$ в каждом интервале Ω_l $(l=1, 2, \cdots, q)$ постоянна. Это число обозначим через μ_l.

Пусть $\mu=\max(\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_q)$, $G_l = \bigcup\limits_{\mu_k \geqslant l} \overline{\Omega}_k$

$$(l=1, 2, \cdots, \mu), \quad \rho_k=\min(\mu_{k-1}, \mu_k), \quad r_k=\rho(\sigma_k) \quad (k=1, 2, \cdots, q).$$

Ясно, что $G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_\mu$. В случае, когда $\mu_0=\mu_1=\cdots=\mu_q$, то постановка задачи и результаты остаются те же, что и при $n \geqslant 2$. Теперь поставим корректную краевую задачу, когда среди чисел μ_l есть различные.

Так как система (1) при помощи преобразования Фурье всегда приводится к системе (4), то корректные краевые задачи рассмотрим для системы (4), а решение будем искать в классе обобщенных функций вида $v=F(u(x, t))$, где $u(x, t) \in M$.

Рассмотрим систему (4) с граничными условиями

$$\sum_{j=1}^{m} Q_{lj}(\sigma)\, v_j(\sigma, 0)=g_l, \quad \sigma \in G_l; \quad l=1, 2, \cdots, \mu, \tag{52}$$

где $Q_{lj}(\sigma)$ — полиномы, $f_k(x) \in N$, $g_l=Ff_l(x)$.

Обозначим через $Q_l(\sigma)$ матрицу с элементами $Q_{\nu j}(\sigma)$ $(\nu=1, 2, \cdots, l;$ $j=1, 2, \cdots, m)$. Условие Лопатинского для задачи (4), (52) в интервале Ω_k $(k=0, 1, \cdots, q)$ совпадает с условием

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} Q_{\rho_k}(\sigma) \\ P^+(\sigma) \end{pmatrix} = m, \text{ при } \sigma \in \Omega_k;\ k = 0, 1, \cdots, q.$$

В дальнейшем это условие предполагается выполненным.

Можно показать, что если существует хотя бы одна нерегулярная точка, то однородная задача (4), (52) в рассматриваемом классе имеет бесконечное число линейно независимых решений, а неоднородная задача разрешима. Если нерегулярных точек нет, то задача (4), (52) имеет решение и оно единственно. Теперь укажем дополнительные условия, при которых задача (4), (52) станвоится корректной, если есть нерегулярные точки $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_q$. Дополнительные условия зададим в виде

$$R_j(\sigma)\, v(\sigma, 0) - v_0(\sigma, 0)) = \gamma_j, \text{ при } |\sigma - \sigma_j| \leqslant \varepsilon, \tag{53}$$

где $j = 1, 2, \cdots, q$, $v_0(\sigma, t)$ — частное решение задачи (4), (52) в классе функций $v(\sigma, t)$, для которых $F^{-1} v(x, t) \in M$, γ_j — $(r_j - \rho_j)$-мерный вектор, компоненты которого — функционалы из S', сосредоточенные в точке σ_j, $R_j(\sigma)$ — матрица размерности $(r_j - \rho_j \times m)$ с бесконечно дифференцируемыми элементами.

Имеет место следующая

Теорема 4. *Для того, чтобы задача* (4), (52) *с дополнительными условиями* (53) *имела единственное решение, небоходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} Q_{\rho_k}(\sigma_k) \\ R_k(\sigma_k) \\ P^+(\sigma_k) \end{pmatrix} = m,\ k = 0, 1, \cdots, q.$$

Доказательство теоремы 4 и метод решения указанной задачи остаются такими же, как и при $n \geqslant 2$.

Замечание 2. В случае, когда правая часть граничного условия (6) является обобщенной функцией из S', а решение ищется в классе функционалов $u(x, t)$, которые при любом фиксированном $t > 0$ принадлежат S' и имеют полиномиальный рост при $t \to +\infty$, то дополнительные условия, обеспечивающие корректность краевой задачи, задаются также в виде (10) и при такой постановке приведенные результаты сохраняются.

§ 3. Корректные граничные задачи для системы Карлемана—Векуа

Результат работы рассмотрим на примере следующей системы Карлемана-Векуа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} + au + bv,\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + cu + dv,\ (x, t) \in R^2_+, \tag{54}$$

где a, b, c, d — действительные постоянные, а решение $(u(x, t), v(x, t))$ ищется в классе функций, растущих вместе с производными до первого порядка не быстрее полинома.

Делая преобразование Фурье по переменной x в (54), получим

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = i\sigma \tilde{v} + a\tilde{u} + b\tilde{v}, \quad \frac{d\tilde{v}}{dt} = -i\sigma\tilde{u} + c\tilde{u} + d\tilde{v}, \tag{55}$$

где $\tilde{u}(\sigma, t) = F(u(x, t))$, $\tilde{v}(\sigma, t) = F(v(x, t))$,
(преобразование Фурье понимается как от обобщенной функции). Характеристическим уравнением, соответствующим системе (55), является уравнение

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda - \sigma^2 + i\sigma(b - c) + ad - bc = 0. \tag{56}$$

Если $|\sigma|$ — достаточно большое число, то один из корней характеристического уравнения (56) имеет $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$, а второй — $\operatorname{Re}\lambda_2 > 0$. Поэтому, чтобы граничное условие задавать на всей оси x, необходимо, чтобы число корней характеристического уравнения (56) с $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ было равно 1 всюду, кроме конечного числа точек. А это возможно тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

A_1) $bc - ad > 0$ или $bc - ad = 0$, $a + d > 0$. В этом случае все точки $\sigma \in R^1$ регулярные и число корней уравнения (56) с $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ равно 1 для всех $\sigma \in R^1$.

A_2) $bc - ad = 0$, $a + d = 0$ или $bc - ad < 0$, $a + d = 0$ и $b - c \neq 0$. Тогда система имеет одну нерегулярную точку $\sigma = 0$ и в этой точке число корней уравнения (56) с $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ равно двум, а в остальных точках оно равно единице. В дальнейшем одно из этих условий предполагается выполненным. Рассмотрим систему (54) с граничным условием

$$\alpha u(x, 0) + \beta v(x, 0) = f(x), \tag{57}$$

где $f(x)$ — заданная функция из класса N, α и β — заданные действительные постоянные. При наших предположениях на коэффициенты системы задача (54), (57) удовлетворяет условию Лопатинского всюду, кроме, быть может, точки $\sigma = 0$.

При выполнении условия A_1), условие Лопатинского в точке $\sigma = 0$ эквивалентно:

B_1) либо $$b\alpha^2 - (d - a)\alpha\beta - c\beta^2 \neq 0, \tag{59}$$

либо $$a\alpha^2 + (b + c)\alpha\beta + d\beta^2 \leqslant 0. \tag{60}$$

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. Если выполнены условия A_1) и B_1), то задача (54), (57) имеет единственное решение в классе M.

При выполнении условия A_2) из леммы 9 следует, что неоднородная задача (54), (57) имеет решение в классе M. Пусть $(u_0(x, t), v_0(x, t))$ — частное решение этой задачи. Применяя теорему 1, получим

Следствие 2. Если выполнены условия A_2), то задача (54), (57) с дополнительными условиями

$$\gamma(u(x, 0) - u_0(x, 0)) + \delta(v(x, 0) - v_0(x, 0)) = p(x) \tag{61}$$

имеет единственное решение, где $P(x)$ — произвольный полином, γ и δ — действительные постоянные, удовлетворяющие условию $\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$. Пусть граничное условие для системы (54) имеет вид

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,\ 0)+Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x,\ 0)=f(x), \tag{62}$$

где $p(x)$ и $Q(x)$ — полиномы с действительными коэффициентами, $f(x)\in N$. Тогда при выполнении условий A_1) или A_2) условие Лопатинского для задачи (54), (62) выполняется всюду, кроме, быть может, конечного числа точек. Используя результаты работы [7], получим: если выполнено условие A_1), то однородная задача (54), (62) имеет конечное число линейно независимых решений, а неоднородная задача всегда разрешима. В частности, из этих результатов следует, что если выполнено условие A_1), но нарушено условие B_1), то однородная задача (54), (57) имеет одно линейно независимое решение:

$$u(x,\ t)=c\beta\exp(\lambda t);\ \ v(x,\ t)=-c\alpha\exp(\lambda t),$$

где c — произвольная постоянная, λ — корень уравнения (56) при $\sigma=0$ с $\operatorname{Re}\lambda\leqslant0$.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 17.I.1986

Ն. Ս. ԹՈՎՄԱՍՅԱՆ. Կոռեկտ խնդիրներ մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմների համար, բազմանդամային աճ ունեցող ֆունկցիաների դասերում (*ամփոփում*)։

Ուսումնասիրված են ընդհանուր եզրային խնդիրներ, որոնք բավարարում են Լոպատինսկու պայմանին ամենուրեք, բացի վերջավոր թվով կետերից։ Այդ խնդիրները կիսատարածություններում բազմանդամային աճ ունեցող ֆունկցիաների դասում ունեն անվերջ թվով լուծումներ։ Աշխատանքում բերված են լրացուցիչ եզրային պայմաններ, որոնք ապահովում են նշված խնդիրների լուծման գոյությունը և միակությունը այդ ֆունկցիաների դասերում։

N. E. TOVMASIAN. *Correct boundary problems in half-space for a system of partial differential equations in a class of functions with polynomial growth* (summary)

The boundary problems, satisfying Lopatinsky condition everywhere except for finite number of points are studied. Such problems in half-space in the class of functions with polynomial growth have infinite number of solutions. In the paper some additional boundary conditions are given, with which the problem has a unique solution in the same classes.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Е. Шилов*. Математический анализ. Второй специальный курс, М., «Наука», 1965, с. 327.
2. *Г. В. Дикополов, Г. Е. Шилов*. О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 24, 1960. 369—380.
3. *В. П. Паломодов*. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, М., «Наука», 1967.

4. *Г.В. Дикополов.* О краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве, Мат. сб., 59 (101), № 2, 1962, 215—228.
5. *А. Л. Павлов.* Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве, Мат. сб., 103 (145), № 3 (7), 1977, 367—391.
6. *С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, М., ИИЛ, 1962.
7. *Н. Е. Товмасян.* Общая граничная задача для системы дифференциальных уравнений в полуплоскости с нарушением условия Я. Б. Лопатинского, Дифф. уравн., 20, № 1, 1984, 132—141.
8. *Т. М. Кошелева.* Некоторые граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений m-го порядка в классе обобщенных функций, Изв. вузов, математика, № 3 (250), 1983, 52—58.
9. *Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн.* Устойчивость решения дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., «Наука», 1970, 1—534.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 4, 1988 Математика

УДК 517.956

Г. Р. ОГАНЕСЯН

ВЕСОВАЯ ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

§ 1. Формулировка результатов

В настоящей работе, пользуясь весовой постановкой задачи Дирихле, предложенной в [4], мы докажем весовой вариант теоремы о среднем для уравнения

$$\Delta u = q(r)\, u(x), \quad q(\rho - 0) = \infty, \tag{1.1}$$

в шаре $K = K_\rho = \{x \in R^n, |x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} < \rho\}$ радиуса ρ.

Пусть уравнение

$$\Psi''(r) = Q(r)\,\Psi(r), \quad Q(r) = q(r) + \frac{n^2 - 4n + 3}{4r^2} \tag{1.2}$$

является уравнением без сопряженных точек (например, $Q(r) > 0$, см. [2] или § 2). Обозначим через $\Psi_1(r)$ неглавное решение уравнения (1, 2).

Зададим весовое условие Дирихле

$$\lim_{r \to \rho - 0} \mu(r)\, u(x) = \Phi(\omega), \quad \omega = \frac{x}{|x|}, \tag{1.3}$$

где весовая функция μ определяется по формуле

$$\mu(r) = \varkappa \rho^{\frac{n-1}{2}} \Big/ \Psi_1(r), \quad \varkappa = \mathrm{const}. \tag{1.4}$$

Весовые функции $\mu(r)$, $\mu_1(r)$ мы назовем эквивалентными, если

$$\lim_{r \to \rho} \frac{\mu(r)}{\mu_1(r)} = 1,$$

т. е, асимптотики $\mu(r)$ и $\mu_1(r)$ совпадают при $r \to \rho$.

Теорема 1. *Если $n \geqslant 3$ и $q(r)$ является вещественной, положительной, непрерывной на $[0, \rho[$ функцией, то для любого решения $u \in C^2(K)$ уравнения* (1.1) *имеет место формула*

$$u(0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial K} \Phi(\omega)\, d\omega, \tag{1.5}$$

где $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — площадь поверхности единичной сферы в R^n, $d\omega$ — элемент объема единичной сферы, постоянная $\varkappa$ зависит только от n, $q(r)$ и выбора функции $\Psi_1(r)$, а асимптотика $\mu(r)$ при $r \to \rho$ зависит только от n, ρ, $q(r)$.

Замечание 1.1. Условия теоремы 1 можно ослабить, потребовав, чтобы $\rho(r)$ была вещественной функцией класса $C(]0, \rho[)$, $rq(r) \in L_1[0, \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < \rho$ и такой, что уравнение (1.2) было бы уравнением без сопряженных точек на $[0, \rho]$.

Наложив на функцию $q(r)$ дополнительные ограничения

$$\int_0^\rho \sqrt{q(r)}\, dr = \infty, \tag{1.6}$$

$$q(r) \in C^2([0, \rho[), \quad \frac{5[Q'(r)]^2}{Q^{5/2}(r)} - \frac{4Q''(r)}{Q^{3/2}(r)} \in L_1([\varepsilon, \rho[), \quad \varepsilon > 0, \tag{1.7}$$

весовую функцию можно выписать в явном виде, пользуясь теорией асимптотического интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений ([2]).

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 и* (1.6), (1.7) *для любого решения* $u \in C^2(K)$ *уравнения* (1.1) *справедлива формула* (1.5), *где функция* $\mu = \mu_1$ *из* (1.3) *задается формулой*

$$\mu_1(r) = \varkappa \rho^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[4]{Q(r)} \exp\left\{-\int_0^r \frac{q(s)\, ds}{\sqrt{Q-q} + \sqrt{Q(s)}}\right\}. \tag{1.8}$$

Условия (1.6), (1.7) следствия 1 можно ослабить (см. пример 4 § 6), усложнив вид весовой функции (1.8).

Введем вспомогательные функции

$$\sigma(r) = Q'(r)\, Q^{-\frac{3}{2}}(r),$$

$$q_1(r) = Q(r) - \frac{\sigma'(r)}{4\sqrt{q(r)}}\left(1 - \frac{\sigma(r)}{\sqrt{\sigma^2 + 16}}\right), \tag{1.9}$$

$$y(r) = Q^{-\frac{1}{4}}(r) \exp \int_\varepsilon^r \sqrt{Q\left(1 + \frac{\sigma^2}{16}\right)}\, dr, \tag{1.9'}$$

$$y_1(r) = y(r) \int_\varepsilon^r \frac{ds}{y^2(s)}, \quad r \in [\varepsilon, \rho[, \tag{1.10}$$

$$y_2(r) = y_1(r) \int_r^\rho \frac{ds}{y_1^2(s)}, \quad r \in [\varepsilon, \rho], \tag{1.11}$$

$$\mu_2(r) = \varkappa \rho^{\frac{n-1}{2}} \Big/ y_1(r), \tag{1.12}$$

здесь значение $r = \varepsilon$ выбирается бо́льшим последнего нуля функции $y(r)$.

Следствие 2. *В условиях теоремы 1 и*

$$q_1(r) > 0, \quad r \in]0, \rho[, \tag{1.13}$$

$$y_1(r)\, y_2(r)\, [Q(r) - q_1(r)] \in L_1[\varepsilon, \rho], \tag{1.14}$$

для любого решения $u \in C^2(K)$ *уравнения* (1.1) *имеет место формула* (1.5), *где функция* $\mu = \mu_2(r)$ *из* (1.3) *определяется по формуле* (1.12).

§ 2. Вспомогательные формулы и леммы

Переходя в формуле Грина

$$\int_{K_r} \Delta u\, dx = \int_{\partial K_r} \frac{\partial u}{\partial r}\, dS$$

к сферическим координатам ($dS = r^{n-1}\, d\omega$) имеем

$$\int_0^r r^{n-1}\, dr \int \Delta u(r, \omega)\, d\omega = r^{n-1} \int \frac{\partial u}{\partial r}(r, \omega)\, d\omega,$$

откуда, обозначив

$$\varphi(r) = \int u(r, \omega)\, d\omega, \tag{2.1}$$

получаем, в силу (1.1), уравнение

$$\int_0^r r^{n-1} q(r)\, \varphi(r)\, dr = r^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

дифференцируя которое по r получаем

$$\varphi''(r) + \frac{n-1}{r} \varphi'(r) = q(r)\, \varphi(r). \tag{2.2}$$

Из (2.2) заменой

$$\varphi(r) = r^{-\frac{n-1}{2}}\, \Psi(r) \tag{2.3}$$

получаем уравнение (1.2).

Приведем некоторые определения и утверждения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [2], глава XI).

Если каждое решение ($\not\equiv 0$) однородного линейного уравнения второго порядка с вещественными коэффициентами, определенного на интервале J имеет на J не более конечного числа нулей, то уравнение называется неосциллирующим на J. В последнем случае уравнение называется уравнением без сопряженных точек на J, если каждое его решение ($\not\equiv 0$) имеет на J не более одного нуля. Если граничная точка $r = \rho$ интервала не принадлежит этому интервалу, то уравнение называется осциллирующим при $r = \rho$, когда некоторое (или каждое) вещественное решение ($\not\equiv 0$) имеет бесконечную последовательность нулей, сходящуюся к $r = \rho$. В противном случае уравнение называется неосциллирующим при $r = \rho$.

Из теоремы сравнения Штурма следует, что уравнение (1.2) при $Q > 0$ (что следует из условий $n \geqslant 3$, $q(r) > 0$, теоремы 1) является уравнением без сопряженных точек.

Если уравнение (1.2) является неосциллирующим при $r=\rho$, то оно имеет такое решение Ψ_2, определенное однозначно с точностью до постоянного множителя, для которого интеграл $\int^{\rho} \frac{dr}{\Psi_2^2}$ расходится.

Решение, удовлетворяющее последнему условию, называется главным решением уравнения (1.2), а решение $\Psi_1(r)$, линейно независимое с $\Psi_2(r)$, называется неглавным решением уравнения (1.2) при $r=\rho$.

Отметим важное для нас свойство главного и неглавного решений:

$$\lim_{r\to\rho-0} \frac{\Psi_2(r)}{\Psi_1^2} = 0. \tag{2.4}$$

Нам понадобится следующий результатХартмана—Уинтера.

Лемма 2.1. Пусть $q_0(r)$ — непрерывная, вещественная при $r\in [0, \rho[$ функция и уравнение

$$y''(r) = q_0(r)\, y(r) \tag{2.5}$$

является неосциллирующим при $r=\rho$. Пусть $y_2(r)$, $y_1(r)$ — главное и неглавное решения уравнения (2.5). Если $Q(r)$ — непрерывная, комплексная функция такая, что выполнено условие

$$y_1(r)\, y_2(r)\,[Q(r) - q_0(r)] \in L_1[\varepsilon, \rho], \ \varepsilon>0, \tag{2.6}$$

то уравнение (1.2) имеет пару решений $\Psi_2(r)$, $\Psi_1(r)$, удовлетворяющих при $r\to\rho-0$ соотношениям

$$\lim_{r\to\rho-0} \frac{\Psi_j(r)}{y_j(r)} = 1, \ \frac{\Psi_j'}{\Psi_j}(r) = \frac{y_j'}{y_j}(r) + o\left(\frac{1}{|y_1 y_2|}\right), \ j=1, 2. \tag{2.7}$$

§ 3. Доказательство теоремы 1

Для выяснения поведения решений уравнения (1.2) при $r\to 0$ преобразованием

$$r = \frac{1}{t}, \ \Psi(r) = \frac{z(t)}{t} \tag{3.1}$$

уравнение (1.2) с левой крайней особой точкой $r=+0$ сведем к уравнению

$$z''(t) = Q_1(t)\, z(t), \ t\in \left]\frac{1}{\rho}, \infty\right[, \ Q_1(t) = t^{-4}\, Q\left(\frac{1}{t}\right), \tag{3.2}$$

с правой крайней особой точкой $t=\infty$.

Чтобы применить к (3.2) лемму 2.1 найдем главное и неглавное решения $\varkappa_2(t)$, $\varkappa_1(t)$ точно решаемого вспомогательного уравнения

$$\varkappa''(t) = \frac{n^2-4n+3}{4t^2}\varkappa(t), \ 0<\varepsilon+\frac{1}{\rho}<t<\infty. \tag{3.3}$$

Имеем при $n\geqslant 3$

$$\varkappa_1(t) = t^{\frac{n-1}{2}}, \ \varkappa_2(t) = t^{\frac{3-n}{2}}. \tag{3.4}$$

Условие (2.6) леммы 2.1 принимает вид

$$\int_{1+\frac{1}{\rho}}^{\infty} t\left|Q_1(t)-\frac{n^2-4n+3}{4t^2}\right|dt<\infty$$

или, в терминах переменной r:

$$\int_0^{\rho-\varepsilon} rq(r)\,dr<\infty. \qquad (3.5)$$

Последнее условие автоматически вытекает из условий теоремы 1, а также из условий замечания 1.1.

Таким образом, применяя лемму 2.1 (при $\rho=\infty$) к уравнениям (3.2), (3.3) получаем для главного и неглавного решений уравнения (3.2) асимптотику

$$z_1(t)=t^{\frac{n-1}{2}}[1+o(1)],\ z_2(t)=t^{\frac{3-n}{2}}[1+o(1)],\ t\to\infty,$$

из которой для линейно независимых решений (1.2) получаем асимптотику

$$\Psi_0(r)=r^{\frac{n-1}{2}}[1+o(1)],\ \Psi_3(r)=r^{\frac{3-n}{2}}[1+o(1)],\ r\to 0. \qquad (3.6)$$

Из (2.3) и (3.6) получаем при $n\geqslant 3$

$$\varphi_0(r)=1+o(1),\ \varphi_1(r)=r^{2-n}[1+o(1)],\ r\to 0. \qquad (3.7)$$

Так как нас интересуют решения ($u\in C^2(K)$), ограниченные при $r=0$, то неглавные решения $\varphi_1(r)$, $\Psi_3(r)$ мы отбрасываем.

Итак

$$\Psi_0(r)=r^{\frac{n-1}{2}}[1+o(1)],\ r\to 0. \qquad (3.8)$$

Так как уравнение (1.2) является неосциллирующим при $r=\rho$, то существуют главное и неглавное решения уравнения (1.2) при $r=\rho$, которые мы обозначим через $\Psi_2(r)$, $\Psi_1(r)$.

Общее решение уравнения (1.2) класса $C^2([0,\rho[)$ можно записать в виде

$$\Psi(r)=\begin{cases} C_0\Psi_0(r),\ 0\leqslant r<\delta,\\ C_1\Psi_1(r)+C_2\Psi_2(r),\ \delta<r<\rho.\end{cases} \qquad (3.9)$$

Так как нас интересуют лишь решения уравнения (1.2) класса $C^2([0,\rho[)$, то должны выполняться следующие условия склейки для $\Psi(r)$ и его производных при $r=\delta$:

$$\begin{aligned} C_0\Psi_0(\delta)&=C_1\Psi_1(\delta)+C_2\Psi_2(\delta),\\ C_0\Psi_0'(\delta)&=C_1\Psi_1'(\delta)+C_2\Psi_2'(\delta), \qquad (3.10)\\ C_0\Psi_0''(\delta)&=C_1\Psi_1''(\delta)+C_2\Psi_2''(\delta).\end{aligned}$$

Функции $\Psi_{0,1,2}(r)$ являются решениями уравнения (1.2), поэтому (ввиду $Q(r)>0$) третье из соотношений (3.10) вытекает из первых двух. Из первых двух соотношений (3.10) находим

$$C_1=\frac{W(\Psi_0,\ \Psi_2)}{W(\Psi_1,\ \Psi_2)}\,C_0,\ C_2=\frac{W(\Psi_1,\ \Psi_0)}{W(\Psi_1,\ \Psi_2)}\,C_0, \tag{3.11}$$

где через $W(\Psi_1,\ \Psi_2)$ обозначен вронскиан $\Psi_1(r)\Psi_2'(r)-\Psi_1'(r)\Psi_2(r)$.

Вводя весовую функцию (1.4), где постоянная $\varkappa$ определяется по формуле

$$\varkappa=\frac{C_0}{C_1}=\frac{W(\Psi_1,\ W_2)}{W(\Psi_0,\ W_2)}\bigg|_{r=\delta}, \tag{3.12}$$

имеем из (2.4) соотношения

$$\lim_{r\to\rho-0}\mu\Psi=\varkappa\rho^{\frac{n-1}{2}}C_1=C_0\rho^{\frac{n-1}{2}},$$

$$\lim_{r\to\rho-0}\mu\Psi=\lim_{r\to\rho-0}\mu\rho^{\frac{n-1}{2}}\int u\,d\omega=\rho^{\frac{n-1}{2}}\int\Phi(\omega)\,d\omega, \tag{3.13}$$

$$C_0=\lim_{r\to+0}\frac{\Psi}{\Psi_0}=\lim_{r\to+0}\varphi(r)=\lim_{r\to+0}\int u\,d\omega=\omega_n\cdot u(0),$$

из которых вытекает формула (1.5).

Покажем, что постоянная $\varkappa$ конечна и зависит только от функции $Q(r)$ и выбора $\Psi_1(r)$, а асимптотика $\mu(r)$ при $r\to\rho$ зависит только от $q(r)$, ρ, n.

Для доказательства конечности $\varkappa$ достаточно показать, что $W(\Psi_0,\ \Psi_2)\neq0$. Если $W(\Psi_0,\ \Psi_2)=0$, то существует отличная от нуля постоянная C такая, что $\Psi_2(r)=C\Psi_0(r)$, а это, ввиду $\Psi_2(\rho)=\Psi_0(0)=0$, означает существование решения (1.2) с двумя сопряженными точками, вопреки условию $Q=\frac{\Psi''}{\Psi}>q(r)>0$ теоремы 1 (см. также замечание 1.1).

Ввиду формулы Лиувилля, вронскианы, фигурирующие в формуле (3.12), не зависят от $r=\delta$, поэтому постоянная $\varkappa$ также не зависит от δ.

В силу (1.4), (3.12) постоянная $\varkappa$ и функция μ зависят от $\Psi_{0,1,2}$, ρ, n.

Решение $\Psi_0(r)$ уравнения (1.2) определяется однозначно асимптотикой (3.8) и зависит только от $Q(r)$. Главное решение $\Psi_2(r)$ уравнения (1.2) определяется однозначно с точностью до постоянного множителя, от выбора которого, ввиду (3.12), постоянная $\varkappa$ не зависит. Итак, постоянная $\varkappa$ зависит только от $Q(r)$ и выбора $\Psi_1(r)$.

Изменение $\Psi_1(r)$ на слагаемое, кратное $\Psi_2(r)$, не влияет на $\varkappa$ и асимптотику $\mu(r)$ при $r\to\rho$. А выбор неглавного решения $\Psi_1(r)$ по модулю главного решения также однозначен с точностью до постоянного множителя, от которого $\mu(r)$ не зависит (см. (1.4), (3.12)).

Итак, асимптотика функции $\mu(r)$ при $r\to\rho$ зависит только от $q(r)$, ρ, n.

§ 4. Доказательство следствия 1

Выясним асимптотику решений уравнения (1.2) вблизи $r=\rho$ при дополнительных условиях (1.6), (1.7), которая позволит нам вычислить явно весовую функцию $\mu(r)$ с точностью до постоянного множителя $\varkappa$.

Рассмотрим вспомогательное, точно решаемое, уравнение

$$\sigma''(r)=\left[Q(r)+\frac{5Q'^2(r)}{16Q^2(r)}-\frac{Q''(r)}{4Q(r)}\right]\sigma(r). \tag{4.1}$$

В силу (1.6) имеем

$$\int\limits_{a}^{\rho}\sqrt{Q(r)}\,dr=\infty, \tag{4.2}$$

откуда следует, что главное и неглавное решения уравнения (4.1) имеют вид

$$Q^{-\frac{1}{4}}(r)\exp\left\{\pm\int\limits_{r}^{a}\sqrt{Q(s)}\,ds\right\},$$

или, в регуляризованном виде,

$$\sigma_{2,1}(r)=Q^{-\frac{1}{4}}(r)\exp\left\{\pm\int\limits_{r}^{a}\sqrt{Q-q}\,ds\pm\int\limits_{0}^{r}(\sqrt{Q-q}-\sqrt{Q})\,ds\right\}. \tag{4.3}$$

В условии (1.7) к уравнениям (1.2), (4.1) применима лемма 2.1 с $q_0=Q(r)+\frac{5Q'^2}{16Q^2}-\frac{Q''}{4Q}$, из которого следует, что

$$\lim_{r\to\rho-0}\frac{\Psi_1}{\sigma_1}(r)=\lim_{r\to\rho-0}\frac{\Psi_2}{\sigma_2}=1. \tag{4.4}$$

Из (4.3), (4.4) следует, что если ввести весовую функцию μ_1 по формуле (1.8), то

$$\lim_{r\to\rho-0}\frac{\mu(r)}{\mu_1(r)}=1. \tag{4.5}$$

Следствие 1 непосредственно вытекает из теоремы 1 и (4.5).

§ 5. Доказательство следствия 2

Рассмотрим вспомогательное, точно решаемое уравнение

$$y''(r)=q_1(r)\,y(r),\quad r\in\,]0,\rho[, \tag{5.1}$$

где $q_1(r)$ определяется по формуле (1.9).

Так как на $[0,\rho[$ имеем $q(r)>0$ и $n\geqslant 3$, то $Q(r)>0$ и явное решение (1.9′) уравнения (5.1) не имеет нулей на $[\varepsilon,\rho[$, где ε — произвольное положительное число. Поэтому в формулах (1.11), (1.10) главного и неглавного (при $r=\rho-0$) решений уравнения (5.1) ε можно выбрать произвольным положительным числом (см. [2], следствие 6.3 на с. 420).

В условиях (1.13), (1.14) следствия 2 к уравнениям (1.2), (5.1) применима лемма 2.1, из которой следует, что

$$\lim_{r\to\rho-0}\frac{\Psi_1(r)}{y_1(r)}=\lim_{r\to\rho-0}\frac{\Psi_2(r)}{y_2(r)}=1. \tag{5.2}$$

Из этих соотношений и теоремы 1 вытекает следствие 2.

§ 6. Примеры

Пример 1. Применим теорему 1 к частному случаю $q(r)\equiv 0$.

В этом случае фундаментальная система решений уравнения (1.2) имеет вид

$$\Psi_0=r^{\frac{n-1}{2}},\ \Psi_3=r^{\frac{3-n}{2}},\ n>3,$$

откуда находим главное и неглавное решения

$$\Psi_2(r)=\Psi_3(r)-\rho^{2-n}\Psi_0(r),\ \Psi_1(r)=\Psi_0(r)-\frac{n-3}{n-2}\rho^{n-2}\Psi_3(r).$$

Непосредственным вычислением получаем

$$\varkappa=\frac{W(\Psi_1,\Psi_2)}{W(\Psi_0,\Psi_2)}=\frac{1}{n-2},\ \mu(r)=\frac{\rho^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)\Psi_1(r)},$$

$$\lim_{r\to\rho}\Psi_1(r)=\frac{1}{n-2}\rho^{\frac{n-1}{2}}.$$

Из этих формул получаем $\lim\limits_{r\to\rho}\mu=1$, поэтому из теоремы 1 при $q\equiv 0$ следует классическая теорема о среднем для гармонических функций.

Пример 2. Из теоремы 1 можно вывести известную (см. [1], [3]) теорему о среднем для уравнения (1.1) с $q=\text{const}$, т. к. и в этом случае известна фундаментальная система решений уравнения (1.2), выражаемая через функции Бесселя.

Пример 3. Функция $q(r)=\dfrac{\alpha^2}{(\rho-r)^\gamma}$, $\gamma>2$, $\alpha>0$ удовлетворяет условиям следствия 1.

Пример 4. Функция $q(r)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{(\rho-r)^2}$, $\alpha<0$ не удовлетворяет условию (1.7) следствия 1, но удовлетворяет условиям следствия 2, при дополнительных условиях на α и ρ (см. пример 6, условие (6.12)).

Приведем формулы для вычисления постоянной $\varkappa$ в двух частных случаях.

Пример 5. Пусть $q(r)=\dfrac{\alpha^2}{(\rho-r)^4}$, $0<\rho<\alpha$.

Реешение уравнения

$$\Psi''(\ )=\left[\frac{\alpha^2}{(\rho-r)^4}+\frac{\beta(\beta-1)}{r^2}\right]\Psi(r),\ \beta=\frac{n-1}{2}, \tag{6.1}$$

ищем в виде

$$\Psi(r)=\Psi_0(r)\,v(r),\quad \Psi(r)=r^{\beta}(\rho-r)\exp\left\{\frac{\alpha}{\rho-r}\right\}. \tag{6.2}$$

В полученное после подстановки уравнение

$$v''(r)+\left[\frac{2\beta}{r}+\frac{1}{r-\rho}+\frac{\alpha}{(\rho-r)^2}\right]v'(r)+\frac{2(\alpha+r-\rho)}{r(\rho-r)^2}v(r)=0 \tag{6.3}$$

подставив ряд

$$v(r)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(\frac{r}{\rho}\right)^k,\quad a_0=1, \tag{6.4}$$

получим для чисел a_k рекуррентные соотношения

$$a_{k+1}=\frac{1}{Q_k}\left[2P_k a_k-Q_{k-1}a_{k-1}\right],\quad k=0,1,\cdots, \tag{6.5}$$

где

$$P_k=k^2+\left(2\beta-\frac{\alpha}{\rho}\right)k+\beta\left(1-\frac{\alpha}{\rho}\right),\quad Q_k=(k+1)(k+2\beta).$$

Полагая (см. (1.4))

$$\mu(r)=\frac{\varkappa\rho^{\beta}}{\sigma_1(r)},\quad \sigma_1(r)=(\rho-r)\exp\left\{\frac{\alpha}{\rho-r}\right\}, \tag{6.6}$$

получим

$$C_0=\lim_{r\to+0}\Psi\, r^{-\beta}=\rho\exp\left\{\frac{\alpha}{\rho}\right\},$$

$$C_1=\lim_{r\to\rho}\frac{\Psi(r)}{\sigma_1(r)}=\rho^{\beta}\sum_{k=0}^{\infty}a_k,$$

откуда, в силу (3.12), получаем

$$\varkappa=\frac{C_0}{C_1}=\frac{\rho^{1-\beta}\exp\left\{\frac{\alpha}{\rho}\right\}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k}. \tag{6.7}$$

Докажем абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$ при

$$\rho<\alpha. \tag{6.8}$$

Обозначив $\rho_k=\dfrac{a_{k-1}}{a_k}$, из (6.5) получаем

$$2P_k\rho_{k+1}=Q_k+Q_{k-1}\rho_k\rho_{k+1}, \tag{6.9}$$

откуда $\lim\limits_{k\to\infty}\rho_k=1$, поэтому признак сходимости Даламбера не проходит. Нетрудно проверить, что

$$\rho_k=1+i\sqrt{\frac{2\alpha}{\rho k}}+O\left(\frac{1}{k}\right),$$

$$k(|p_k|-1)=k\left[\sqrt{1+\frac{2\gamma}{k\rho}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)}-1\right]\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{\alpha}{\rho}\cdot \tag{6.10}$$

По признаку Раабе ряд $\sum^{\infty} a_k$ абсолютно сходится, если

$$\lim_{k\to\infty} k(\rho-1)>1,$$

т. е., ввиду (6.10), если выполнено условие (6.8).

Пример 6. Пусть $q(r)=\frac{\alpha(\alpha-1)}{(\rho-r)^2}$, $\alpha<0$.

Проверим условия следствия 2. Очевидно, $q(r)\in C^2([0,\ \rho[)$, $q(r)>0$. Обозначив $\beta=\beta_1=\frac{n-1}{2}$, $\beta_2=\frac{3-n}{2}$ получаем, вместо (1.2), уравнение

$$\Psi''(r)=Q_1(r)\Psi(r),\ Q_1=\frac{\alpha(\alpha-1)}{(\rho-r)^2}+\frac{\beta(\beta-1)}{r^2}\cdot \tag{6.11}$$

При дополнительном условии

$$\rho<\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\alpha(\alpha-1)\left|\frac{\beta(\beta-1)}{\beta(\beta-1)+\alpha(\alpha-1)}\right|^{3/4} \tag{6.12}$$

условие $q_1>0$ следствия 2 вытекает из оценок

$$\sigma'(r)\leqslant\gamma_0=\frac{6[\alpha(\alpha-1)+\beta(\beta-1)]^{5/2}}{\rho[\alpha\beta(\alpha-1)\beta(\beta-1)]^{3/2}},$$

$$q_1(r)>\frac{\alpha(\alpha-1)+\beta(\beta-1)}{\rho^2}-\frac{\rho\gamma_0}{4\sqrt{\alpha(\alpha-1)}}\cdot$$

В качестве главного и неглавного решений уравнения (6.11) выберем, вместо (1.11), (1.10), более простые выражения

$$y_{2,1}(r)=Q^{-\frac{1}{4}}(r)\exp\left\{\pm\int_r^{\rho}\sqrt{Q_1\left(1+\frac{\sigma^2}{16}\right)}dr\right\}.$$

Условие (1.14) выполнено, если

$$\frac{\sigma'}{\sqrt{qQ_1}}\left[1-\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+16}}\right]\in L_1[0,\ \rho]\ \text{или}\ \frac{1}{q(r)}\in\ '0]\ '7\rho],$$

что выполняется автоматически.

Итак, при $n\geqslant 3$ для уравнения (1.1) с $q=\frac{\alpha(\alpha-1)}{(\rho-r)^2}$, $\alpha<0$ в условии (6.12) справедливо следствие 2.

Для вычисления постоянной $\varkappa$ в этом частном случае решение уравнения (6.11) ищем в виде

$$\Psi(r)=\Psi_0(r)v(r),\ \Psi_0(r)=r^{\beta}(\rho-r)^{\alpha},\ \alpha<0,\ \beta>0. \tag{6.13}$$

Для функции $v(r)$ получаем уравнение

$$r(r-\rho)v''(r)+2[\beta(r-\rho)+\alpha r]v'(r)+2\alpha\beta v(r)=0,$$

решение которого ищем в виде ряда

$$v(r) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\frac{r}{\rho}\right)^k, \; b_0 = 1. \tag{6.14}$$

Для чисел b_k получаем рекуррентные соотношения

$$b_{k+1} = \frac{k^2 + (2\alpha + 2\beta - 1)k + 2\alpha\beta}{(k+1)(k+2\beta)} b_k, \; k = 0, 1, \cdots. \tag{6.15}$$

Неглавное решение уравнения (6.11) имеет вид

$$y_1(r) = (\rho - r)^\alpha r^\beta, \tag{6.16}$$

поэтому

$$\mu(r) = \frac{\varkappa\rho^\beta}{y_1(r)} = \varkappa(\rho - r)^\alpha,$$

$$C_0 = \lim_{r\to 0} \Psi r^{-\beta} = \rho^\alpha, \; C_2 = \lim_{r\to\rho} \frac{\Psi}{y_1} = v(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k,$$

откуда находим постоянную

$$\varkappa = \frac{C_0}{C_2} = \frac{\rho^\alpha}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k}. \tag{6.17}$$

Так как

$$\lim_{k\to\infty} k\left(\frac{b_k}{b_{k+1}} - 1\right) = 2 - 2\alpha,$$

то, по признаку Раабе, ряд $\sum\limits^{\infty} d_k$ абсолютно сходится при $\alpha < \frac{1}{2}$ и, тем более, при $\alpha < 0$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 19. XII. 1985

Գ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Կշռային միջին արժեքի թեորեմ սինգուլյար գրգռումով Լապլասի հավասարման համար (*ամփոփում*)

Վերնագրում նշված հավասարման համար ապացուցվում է թեորեմ կշռային միջին արժեքի վերաբերյալ։ Բերվում են օրինակներ, որտեղ կշռային ֆունկցիան գրվում է բացահայտ տեսքով։

G. R. OGANESIAN. *Weighted mean value theorem for the singular Laplace equation* (summary)

A mean value theorem for the equation $\Delta u = q(r)u(x)$, $q(\rho - 0) = \infty$ in the n-dimensional ball of radius ρ is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Э. Ч. Титчмарш.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. 2, М., ИЛ, 1961.
2. *Ф. Хартман.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Мир, 1970.
3. *И. А. Шишмарев.* Введение в теорию эллиптических уравнений, М., МГУ, 1979.
4. *Г. Р. Оганесян.* О весовых задачах задачах Коши и Дирихле для некоторых сингулярных на границе уравнений в частных производных, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XXIII, № 1, 1988, 3—21.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIII, № 4, 1988 Математика

УДК 517.55

Е. С. МКРТЧЯН

ОПИСАНИЕ ОБЛАСТЕЙ ОДНОРОДНОЙ СУММИРУЕМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА В $\mathbf{C}^n$

Вопросы аналитического продолжения многомерных степенных рядов исследованы сравнительно мало. Постановка задачи здесь аналогична одномерному случаю. Сначала задается элемент аналитической функции в $\mathbf{C}^n$ с помощью степенного ряда

$$f(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{\|k\|=0}^{\infty} a_{k_1, \cdots, k_n} (z_1 - a_1)^{k_1} \cdots (z_n - a_n)^{k_n}, \tag{*}$$

сходящийся в поликруге

$$U^n(a, r) = \{z \in \mathbf{C}^n; |z_p - a_p| < r_p, \ p = 1, 2, \cdots, n\},$$

где $k_j \geqslant 0$ целые числа $j = 1, 2, \cdots, n$, а $\|k\| = k_1 + \cdots + k_n$.

Далее, ставится целью выразить все свойства определяемой элементом (*) аналитической функции в терминах коэффициентов этого элемента. Использование для решения указанной задачи метода непосредственного аналитического продолжения, как и в одномерном случае, приводит к непреодолимым трудностям. Поэтому возникает необходимость поиска других подходов. Один из них основан на применении к ряду (*) методов матричного суммирования за пределами поликруга его сходимости, если заранее известно, что это продолжение возможно.

В работе [1] был рассмотрен частный класс таких методов суммирования, фактически суммирующих не ряд (*), а сгруппированный ряд

$$f(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(z_1, \cdots, z_n), \tag{**}$$

где

$$P_m(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{\|k\|=m} a_{k_1, \cdots, k_n} (z_1 - a_1)^{k_1} \cdots (z_n - a_n)^{k_n},$$

т. е. $P_m(z_1, \ldots, z_n)$ — однородные полиномы относительно переменных $w_p = z_p - a_p$, $p = 1, 2, \ldots, n$. Там же получено достаточное условие на область для эффективного* суммирования элемента (**).

В настоящей работе дается условие уже необходимо-достаточного характера на область для эффективного суммирования сгруппированного элемента (**). Этот результат, в частности, содержит утверждения работ [1] и [2] и распространяет на ногомерный случай теорему Н. У. Аракеляна (см. § 1).

---

* Всюду в дальнейшем мы под эффективностью суммирования подразумеваем восстановление голоморфной функции с помощью формул и предельных переходов.

§ 1. Определения

Рассмотрим зависящую от параметра $\delta \in I$ последовательность комплексных чисел

$$C = \{C_m(\delta)\}_{m=0}^{\infty}. \tag{1.1}$$

В случае $I = N = \{1, 2, 3, ...\}$ принято называть C бесконечной матрицей (см. [3]). Нам будет удобно сохранить это название и в общем случае, когда I — некоторое бесконечное множество чисел с предельной точкой δ_0 (см. [4]).

Пусть область $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ и $H(\Omega)$ — множество всех функций, голоморфных в Ω. Для функции $f \in H(\Omega)$ рассмотрим разложение (*) в окрестности некоторой точки a, полагая, для простоты, $a = 0$.

Тогда каждая матрица C вида (1.1) порождает зависящее от параметра δ преобразование рядов (*) (в самом деле, рядов (**)), определяемое формулой

$$(C_\delta * f)(z) = \sum_{\|k\|=0}^{\infty} C_{\|k\|}(\delta)\, a_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}. \tag{1.2}$$

Для обеспечения локальной сходимости ряда (1.2) в Ω потребуем, чтобы $C_m(\delta)$ удовлетворяла следующему условию:

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|C_m(\delta)|} \leqslant \frac{R_1}{R_2}, \ \delta \in I, \tag{1.3}$$

где R_1 и R_2 — радиусы n-мерных шаров B_{R_1} и B_{R_2} соответственно (с центрами в точке o), причем $B_{R_1} \Subset \Omega \Subset B_{R_2}$. Если область Ω неограниченная, то считаем, что правая часть неравенства (1.3) равна нулю.

Определение 1.1 (см. [4]). а) Бесконечную матрицу C, удовлетворяющую условию (1.3), называют эффективной для $H(\Omega)$, если для каждого элемента из $H(\Omega)$ выполнено условие

$$\lim_{\delta\to\delta_0} (C_\delta * f)(z) = f(z), \ z \in \Omega, \tag{1.4}$$

причем сходимость локально равномерная в Ω.

б) Множество всех эффективных для $H(\Omega)$ матриц обозначим через $\mathfrak{M}(\Omega)$.

в) Область Ω назовем областью эффективной однородной суммируемости для $H(\Omega)$, если $\mathfrak{M}(\Omega) \neq \varnothing$. В случае $n = 1$ слово „однородной" опускаем.

Для формулировки и доказательства основных результатов работы предпошлем необходимые определения и обозначения.

Определение 1.2. а) Для $\alpha \in \mathbf{R}^1$ и $t \in [0, +\infty)$ положим

$$z_\alpha(t) = t^{1+i\alpha} = t \exp(i\alpha \log t)$$

и рассмотрим логарифмическую α-спираль $L_\alpha = z_\alpha([0, +\infty))$, а также ее части $L_\alpha^- = z_\alpha([0, 1])$, $L_\alpha^+ = z_\alpha([1, +\infty))$.

б) Для $A \subset \mathbf{C}^n$ и $B \subset \mathbf{C}^1$ обозначим

$$AB=\{w\in \mathbf{C}^n;\ w=\zeta z,\ \zeta\in A,\ z\in B\},$$

полагая $AB=\zeta B$ в случае $A=\{\zeta\}$, $\zeta\in \mathbf{C}^n$.

Определение 1.3. Область $\Omega\subset \mathbf{C}^n$, $0\in\Omega$ назовем α-(спиралью) звездной или α-звездной областью (относительно точки 0), если $\Omega\cdot L_\alpha^-=\Omega$. Равносильное условие — $\Omega^c\cdot L_\alpha^+=\Omega^c$. Здесь и далее мы полагаем $E^c=\mathbf{C}^n\setminus E$ для $E\subset \mathbf{C}^n$.

Приведем формулировку результата Н. У. Аракеляна (см. [4]).

Теорема А. *Для того, чтобы область $\Omega\subset \mathbf{C}^1$, $0\in\Omega$, была областью эффективной суммируемости для $H(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы Ω являлась α-звездной относительно точки нуль для некоторого фиксированного $\alpha\in \mathbf{R}^1$.*

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1.1. *Для того, чтобы область $\Omega\subset \mathbf{C}^n$, $0\in\Omega$ была областью эффективной однородной суммируемости для $H(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы оболочка голоморфности Ω являлась α-звездной относительно точки нуль для некоторого фиксированного $\alpha\in \mathbf{R}^1$.*

Замечание 1.1. В случае $n=1$ понятие эффективной однородной суммируемости совпадает с понятием эффективной суммируемости, а теорема 1.1 совпадает с теоремой А.

Замечание 1.2. Достаточное условие из работы [1] получается из теоремы 1.1 в случае $\alpha=0$, т. е. при обычной звездности Миттаг-Леффлера.

§ 2. Доказательство основного результата

Пусть $E\subset \mathbf{C}^1$, $E^c\neq\varnothing$ и $0\in E$. В работе [4] рассмотрено множество

$$E_*=\bigcup_{\zeta\in E^c}(\zeta^{-1}E). \tag{2.1}$$

Там же замечено, что если E — область, то E_* — также область.

Для каждого $j\in J$, где J — некоторое конечное или бесконечное множество индексов, рассмотрим области $E^j\subset \mathbf{C}^1$, $(E^j)^c\neq 0$, $0\in E^j$ и соответствующие им по формуле (2.1) области E^j_*.

Лемма 2.1. а) *Если матрица С эффективна для всех $H(E^j_*)$, $j\in J$, то она эффективна и для $H(E^*)$, где*

$$E^*=\bigcup_{j\in J}E^j_*. \tag{2.2}$$

б) *Если область E^* из (2.2) является α-звездой, то все области E^j_* и E^j также являются α-звездными.*

Доказательство утверждения а) очевидно. Докажем утверждение б).

Так как $1\in(E_*)^c$, то по определению 1.3

$$L_\alpha^+\subset(E_*)^c=\bigcap_{j\in J}(E^j_*)^c.$$

откуда следует, что $L_i^+ \subset (E_\cdot^j)^c$ для всех $j \in J$. Отсюда, с учетом того, что $(E_\cdot^j)^c$ — моноид (см. лемму 2.1 из [4]) и $1 \in L_\cdot^+$, получаем, что $(E_\cdot^j)^c \cdot L_\cdot^+ = (E_\cdot^j)^c$. Лемма доказана.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ — область и $\Omega_w = \Omega \cap W$, где $W = \{wt \in \mathbf{C}^n;\ w$ фиксирована $w \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\},\ t \in \mathbf{C}^1\}$.

Лемма 2.2. *Если область Ω является областью голоморфности и областью эффективной однородной суммируемости, то для любого $w \in \mathbf{C}^n \setminus \{o\}$ множество Ω_w связно.*

Доказательство. Не нарушая общности можно считать, что, аналитическая прямая W задается уравнением $z_2 = z_3 = \cdots = z_n = 0$.

Предположим обратное, т. е. Ω_w для некоторого w не связно. Тогда Ω_w можно представить в виде $\Omega_w = \Omega_w^0 \cup B$, где Ω_w^0 — область, содержащая нуль, $B = \Omega_w \setminus \Omega_w^0 \neq \varnothing$. Далее рассмотрим функцию $g(z_1)$ равную нулю на Ω_w^0 и единице на B. Из теоремы Картана следует, что $g(z_1)$ можно аналитически продолжить во всю область Ω. Продолженную функцию обозначим через $G(z)$. Таким образом

$$G \in H(\Omega) \text{ и } G(z)|_{z \in \Omega_w} = g(z_1).$$

По условию леммы существует бесконечная матрица $C \in \mathfrak{M}(\Omega)$ такая, что для любого $z \in \Omega$

$$(C_\delta * G)(z) \to G(z), \text{ когда } \delta \to \delta_0. \tag{2.3}$$

Очевидно на области Ω_w вместо (2.3) имеем

$$o = (G_\delta * G)(z)|_{z \in \Omega_w} \to G(z)|_{z \in \Omega_w} = g(z_1) \text{ при } \delta \to \delta_0.$$

Получаем противоречие. Таким образом, Λ_w связана.

Перейдем к доказательству теоремы 1.1 сначала в случае, когда Ω — область голоморфности.

Необходимость. Пусть $C \in \mathfrak{M}(\Omega) \neq \Phi$. Тогда из определения 1.1 следует, что для всех $f \in H(\Omega)$ и $\xi \in \Omega_w$ локально равномерно выполняется условие

$$\lim_{\delta \to \delta_0} (C_\delta * f)(\xi) = f(\xi),\ w \in J = \mathbf{C}^n \setminus \{o\}.$$

Перейдем к областям $(\Omega_w)_*$. Применяя для них, а также для области $\Omega^* = \bigcup_{w \in J} (\Omega_w)_*$ теорему A, получим, в частности, что существует такое $\alpha \in \mathbf{R}^1$, что все области $\Omega^*, (\Omega_w)_*$ и Ω_w α-звездны (лемма 2.1). Необходимость доказана.

Вместо доказательства достаточности мы докажем теорему, из которой, в частности, следует и достаточность условия теоремы 1.1.

Пусть $t \in \mathbf{C}^1$ и бесконечная матрица C, такая, что для всех $t \in \mathbf{C}^1 \setminus L_\cdot^+$ локально равномерно выполняется условие

$$\lim_{\delta \to \delta_0} C_\delta(t) = \frac{1}{1-t}, \tag{2.4}$$

где

$$C_\delta(t) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(\delta) t^m.$$

Теорема 2.1. *Если бесконечная матрица C удовлетворяет условию (2.4), то она эффективна для любой α-звездной области $\Omega \subset \mathbf{C}^n$.*

Доказательство. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в Ω. Представим ее в начале координат рядом (*) и составим сумму (1.2).

Рассмотрим следы функций $f(z)$ и $(C_\delta f)*(z)$ на Ω_w. Обозначим их через $f^*(t) = f(wt)$ и

$$(C_\delta * f^*)(t) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(\delta)\, b_m(w)\, t^m,$$

где

$$b_m(w) = \sum_{\|k\|=m} a_{k_1,\ldots,k_n} w_1^{k_1}, \cdots, w_n^{k_n}.$$

Из леммы 2.3 работы [4] следует, что при условии (2.4) бесконечная матрица C эффективна для каждой области Ω_w. Следовательно

$$(C_\delta * f^*)(t) \to f^*(t) \text{ при } \delta \to \delta_0. \tag{2.5}$$

Это равносильно тому, что для любого $z \in \Omega$

$$(C_\delta * f)(z) \to f(z) \text{ при } \delta \to \delta_0. \tag{2.6}$$

Докажем, что предел в (2.6) достигается локально равномерно. Для этого возьмем произвольную точку $z_0 \in \Omega$ и шары $B_i(z_0)$ с центрами в точке z_0, $i = 1, 2, 3$, такие, что

$$B_1(z_0) \Subset B_2(z_0) \Subset B_3(z_0) \Subset \Omega.$$

Из α-звездности области Ω следует, что

$$L_\alpha^- \cdot B_i(z_0) \Subset \Omega \text{ при } i = 1, 2, 3.$$

Так как $o \in \Omega$, то к областям $L_\alpha^- \cdot B_i(z_0)$ можно добавить такие шары $B_i(0)$, что полученные области U_i, $i = 2, 3$ удовлетворят следующему включению

$$U_2 \Subset U_3 \Subset \Omega.$$

Пусть $B_1(w) = B_1(z_0) \cap W$, $U_i(w) = U_i \cap W$, $i = 2, 3$ и обозначим через

$$E = \{w \in \mathbf{C}^n;\ |w| = 1 \text{ и таких, что } \overline{B_1(w)} \neq \varnothing\}.$$

Для каждого сечения W рассмотрим функцию $t \cdot \xi^{-1}$, где $t \in \overline{B_1(w)}$, а точка $\xi \in \partial U_2(w)$. Из построения областей U_i, $i = 2, 3$ следует, что $\partial U_3(w) \subset (U_2(w))^c$. Тогда из определения (2.1) имеем, что $t \cdot \xi^{-1} \in$ $\in (U_2(w))_*$, причем образ D_w этого отображения есть компактное множество из области $\mathbf{C}^1 \setminus L_\alpha^+$. Из непрерывности границы U_3 и отображения $t \cdot \xi^{-1}$ следует, что для некоторой окрестности w из E также справедливо включение $D_w \Subset \mathbf{C}^1 \setminus L_\alpha^+$, причем существует компакт G из $\mathbf{C}^1 \setminus L_\alpha^+$ такой, что $D_w \subset G$ для всех w из упомянутой окрестности.

По условию предел (2.4) выполняется равномерно на компакте G. Из компактности E следует, что G можно выбрать таким, что $D_w \subset G$ для всех $w \in E$.

Разложив функцию $f(z)$ в степенной ряд в $B_3(o)$ с помощью подстановки получим

$$(C_\xi * f^*)(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial B_3(0)\cap W} f^*(\xi)\, C_\xi\left(\frac{t}{\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi}, \quad t\in\overline{B_1(w)}.$$

Отсюда, с учетом формулы Коши для контура $\partial U_3(w)$, имеем, что при $t\in\overline{B_1(w)}$

$$(C_\xi * f^*)(t) - f^*(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_3(w)} f(\xi)\left[C_\xi\left(\frac{t}{\xi}\right) - \left(1-\frac{t}{\xi}\right)^{-1}\right]\frac{d\xi}{\xi}. \qquad (2.7)$$

Отметим, что здесь $t\cdot\xi^{-1}\in G$ для всех $t\in\overline{B_1(w)}$, $\xi\in\partial U_3(w)$ и $w\in E$. Однако из условия (2.4) следует, что правая часть (2.7) равномерно на $B_1(w)$, $w\in E$ стремится к нулю, что и требовалось доказать.

Чтобы закончить доказательство теоремы 1.1 заметим, что из условия (1.4) на область Ω следует, что Ω является областью Рунге первого рода (см. [5], стр. 66—67). Следовательно, из теоремы 3.1 (см. [5], стр. 67) вытекает, что Ω имеет однолистную оболочку голоморфности.

Теорема 1.1 полностью доказана.

Приведем примеры таких матриц C, для которых выполняется условие (2.4). Как и в одномерном случае (см. [4]) ими являются следующие матрицы

$$C=\{m^{-\delta(1+i\alpha)m}\}_{m=1}^{\infty}, \quad C=\left\{\frac{1}{\Gamma(1+\delta(1+i\alpha)m)}\right\}_{m=0}^{\infty}, \quad \delta>0,$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера.

Первая из них обобщает метод суммирования Линделёфа, а вторая — Миттаг-Леффлера (см. [1]) для α—спиральных звезд в C^n.

Пользуясь случаем выражаю свою благодарность Н. У. Аракеляну за критические замечания.

Армянский сельскохозяйственный институт

Поступила 17. X. 1985 и 4. V. 1988

Ե. Ս. ՄԿՐՏՉՅԱՆ. Հոլոմորֆ ֆունկցիաների վերականգնման մասին C^n-ում աստիճանային շարքերի գումարման օգնությամբ *(ամփոփում)*

Բազմաչափ աստիճանային շարքերի համար աշխատանքում տրվում է Բորելի, Միտտագ-Լեֆֆլերի և Լինդելյոֆի գումարման մեթոդի մի ընդհանրացում, որի միջոցով դիտարկվում է տիրույթում հոլոմորֆ ֆունկցիաների վերականգնումը այսպես կոչված գումարման տիրույթներում։ Ապացուցվում է, որ C^n-ում ընդհանրացված Միտտագ-Լեֆֆլերի-Լինդելյոֆի տիրույթի աստղաձևությունը համարժեք է այդ տիրույթը գումարման տիրույթ լինելուն։ Այս արդյունքը ընդհանրացնում է Ն. Հ. Առաքելյանի թեորեմը $n>1$ դեպքի համար։

E. S. MKRTCHIAN. *On recapturing holomorph functions by summing the power series in* C^n (summary)

A summation method for power series is given generalizing the method due to Borel, Mittag—Leffler anb Lindelöf. We consider the problem of recapturing a holomorph function by summation of his analytic element inside the disk of couvergence. Domain where holomorph function is recaptured by this generalized summing method are called summation domains. We prove, that Mittag—Leffler—Lindelof generalized star condition in C^n and summation domain condition are equivalent. This result is a generalization of a theorem of N. H. Arakelian for the case $n > 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. С. Мкртчян*. О восстановлении голоморфных функций по ее значениям на некоторых множествах единственности, ДАН АрмССР, XII, № 4, 1976, 199—202.
2. *Л. А. Айзенберг, В. М. Трутнев*. Об одном методе суммирования Бореля n-кратных степенных рядов, Сиб. мат. ж., 12, № 6, 1971, 1398—1404.
3. *Р. Кук*. Бескоечные матрицы и пространства последовательностей, М., Физматгиз, 1960.
4. *Н. У. Аракелян*. Об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов. Мат. сб., 124:1, 1984, 24—45.
5. *Б. А. Фукс*. Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1963.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 4, 1988 Математика

УДК 517.95

Б. Г. АРАРКЦЯН, Р. Р. ШАХБАГЯН

ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Постановка задачи. Формулировка основных результатов

Пусть Ω—n-мирный открытый куб с границей Γ, точки которого будем обозначать через $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$$Lu=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+a(x)\,u$$

— симметрический, равномерно эллиптический оператор, т. е.

$$a_{ij}(x)=a_{ji}(x),\ a(x)\geqslant\gamma_1>0$$

и для любого вектора $\xi=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$

$$\gamma_3\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j\leqslant\gamma_2\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,$$

где γ_1, γ_2 и γ_3 — некоторые положительные постоянные.

Рассмотрим задачу определения собственных значений первой краевой задачи для оператора L в области Ω

$$\begin{gathered}Lu=\lambda\,p(x)\,u,\\ u|_{\Gamma}=0.\end{gathered}\tag{1}$$

На коэффициенты оператора L и $p(x)$ накладываются ограничения

$$a_{ij}(x)\in C^1(\overline{\Omega}),\ a(x)\in C(\overline{\Omega}),$$

$$p(x)\geqslant p_0>0,\ p(x)\in C^1(\overline{\Omega}),$$

при которых известно (см., напр., [1]), что оператор L имеет счетное число положительных собственных значений:

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots.$$

Целью настоящей работы является получение оценок собственных значений оператора L через собственные значения оператора, коэффициенты которого являются кусочно-постоянными в Ω функциями.

Перейдем к точным формулировкам.

Пусть $\{\Omega_j\}$, $j=1, 2, \cdots, q$ — равномерное разбиение куба Ω на кубы Ω_j со стороной h такое, что $\overline{\Omega}=\bigcup_{j=1}^{q}\Omega_j$, $\Omega_i\cap\Omega_j=\varnothing$. Для любой функции $f(x)\in C(\Omega)$ определим в Ω ступенчатые функции $f^+(x)$, $f^-(x)$ и $f^\frown(x)$ следующим образом: для $x\in\Omega_j$

$$f^{+}(x) = \sup f(x),\ f^{-}(x) = \inf f(x),\ f^{\frown}(x) = f(x^{(c)}),$$

$x^{(c)}$ — серединная точка Ω_j.

Через (1^{+}), (1^{-}) и $(1^{\frown})$ обозначим краевые задачи, получаемые из задачи (1) путем замены коэффициентов $(a_{ij}(x),\ a(x),\ p(x))$ оператора L на $(a_{ij}^{+}(x),\ a^{+}(x),\ p^{-}(x))$, $(a_{ij}^{-}(x),\ a^{-}(x),\ p^{+}(x))$, $(a_{ij}^{\frown}(x),\ a^{\frown}(x),\ p^{\frown}(x))$, соответственно. Пусть, далее, $\lambda_k^{\pm}$, $u_k^{\pm}$, $\lambda_k^{\frown}$, u_k обозначают k-ые собственные значения и соответствующие им обобщенные собственные функции задач $(1^{\pm})$ и $(1^{\frown})$ (см., напр., [5]).

Основным результатом настоящей работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Если $a_{ij}(x),\ a(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, $p(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, то существуют постоянные $C(k) > 0$ и $h_0 > 0$ такие, что при $h < h_0$*

$$|\lambda_k - \lambda_k^{\frown}| \leqslant C(k)\, h^2.$$

Теорема 2. *Если $a_{ij}(x),\ a(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, $p(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, то существуют постоянные $C(k) > 0$ и $h_0 > 0$ такие, что при $h < h_0$*

$$\left|\lambda_k - \frac{1}{2}(\lambda_k^{+} + \lambda_k^{-})\right| \leqslant C(k)\, h^2. \tag{2}$$

Получению оценок вида (2) для оператора Штурма-Лиувилля (задача (1), $n = 1$), с установлением различных скоростей сходимости, посвящены многочисленные работы, из которых отметим лишь работы [2]—[4], где можно найти и дальнейшие ссылки.

В [2] получена оценка (2) для оператора Штурма-Лиувилля первого порядка по h, которая в дальнейшем улучшена в [3], где получена квадратичная скорость сходимости. В [4] при более жестких ограничениях на гладкость коэффициентов оператора, получены оценки более высоких порядков по h.

В настоящей работе оценка вида (2) получена для симметрических эллиптических операторов второго порядка в кубе.

Случай, когда Ω—произвольная ограниченная область с кусочно-гладкой границей, сводится к рассматриваемому с использованием известных приемов продолжения функций на более широкую область с сохранением гладкости. Отметим также, что аналогичный результат имеет место и в случае неравномерного разбиени куба Ω на параллелепипеды Ω_j, при этом роль h играет длина наибольшей стороны параллелепипеда Ω_j.

Доказательствам основных теорем, которым посвящен § 3, предпосылаются три леммы, приведенные в § 2.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Предварительно введем некоторые обозначения. Для любой точки $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ и для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ с целыми неотрицательными компонентами определим как обычно

$$x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},\ D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n},$$

где $D_i^{\alpha_i} = \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Пусть далее

$$\|f\| = \sup_{\Omega} |f(x)|$$

— обычная норма в $C(\Omega)$.

Лемма 1. *Если*

1. $f(x) \in C^1(\overline{\Omega})$,

то

$$\|f - f^{\frown}\| \leqslant \frac{nh}{2} \max_{|\alpha|=1} \|D^{\alpha} f\|,$$

2. $f(x) \in C^2(\overline{\Omega})$,

то

$$\left\| f^{\frown} - \frac{1}{2}(f^{+} + f^{-}) \right\| \leqslant \frac{n^2 h^2}{8} \max_{|\alpha|=2} \|D^{\alpha} f\|.$$

Для доказательства обозначим через $f_k(x)$ сужение $f(x)$ на Ω_k. По формуле Тейлора в точке $x^{(c)} \in \Omega_k$

$$f_k(x) = f_k(x^{(c)}) + \sum_{|\alpha|=1} (x - x^{(c)})^{\alpha} D^{\alpha} f_k(\xi_{\alpha}(x^{(c)})),$$

где $\xi_{\alpha}(x^{(c)})$ — некоторая точка Ω_k. Отсюда

$$|f_k(x) - f^{\frown}(x)| \leqslant \sum_{|\alpha|=1} |(x - x^{(c)})^{\alpha}| \, |D^{\alpha} f_k(\xi_{\alpha}(x^{(c)}))| <$$

$$\leqslant \frac{h}{2} \sum_{|\alpha|=1} \sup_{\Omega_k} |D^{\alpha} f_k(x)| < \frac{nh}{2} \|D^{\alpha} f(x)\|,$$

что и доказывает первое неравенство. Аналогично доказывается оценка

$$\|f - f^{\pm}\| \leqslant nh \max_{|\alpha|=1} \|D^{\alpha} f(x)\|. \tag{3}$$

Перейдем к доказательству второго утверждения. Не ограничивая общности можно предположить, что в Ω_k имеет место следующая система неравенств:

$$\begin{aligned} &D_i f_k(x^{(c)}) \geqslant 0, \ i = 1, 2, \cdots, l, \\ &D_i f_k(x^{(c)}) < 0, \ i = l + 1, \cdots, n. \end{aligned} \tag{4}$$

По формуле Тейлора в точке $x^{(c)}$

$$f_k(x) = f_k(x^{(c)}) + \sum_{|\alpha|=1} (x - x^{(c)})^{\alpha} D^{\alpha} f_k(x^{(c)}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=2} (x - x^{(c)})^{\alpha} D^{\alpha} f_k(\xi_{\alpha}(x^{(c)})). \tag{5}$$

Обозначим через

$$x^{(k)} = (x_1^{(k_1)}, x_2^{(k_2)}, \cdots, x_n^{(k_n)})$$

вершину куба Ω_k, наименее удаленную от начала координат. Тогда координаты всех вершин Ω_k будут иметь вид

$$x^{(k+r)} = (x_1^{(k_1+r)}, x_2^{(k_2+r)}, \cdots, x_n^{(k_n+r)})$$

при всевозможных подстановках вместо r значений 0 или 1. Далее очевидно

$$f_k(x_1^{(k_1)}, x_2^{(k_2)}, \cdots, x_l^{(k_l)}, x_{l+1}^{(k_l+1)}, \cdots, x_n^{k_n+1}) - f_k^- > 0, \tag{6}$$

$$f_k(x_1^{(k_1+1)}, x_2^{(k_2+1)}, \cdots, x_l^{(k_l+1)}, x_{l+1}^{(k_l+1)}, \cdots, x_n^{(k_n)}) - f_k^+ < 0. \tag{7}$$

Подставляя в (6) значения

$$f_k(x_1^{(k_1)}, \cdots, x_l^{k_l}, x_{l+1}^{(k_l+1)}, \cdots, x_n^{k_n+1}),\ f_k^-,$$

вычисленные по формулам (5), получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=2}(x^{(k+\delta)} - x^{(c)})^\alpha D^\alpha f_k(\xi_\alpha(x^{(c)})) - \\ &-\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=2}(x^{(m)} - x^{(c)})^\alpha D^\alpha f_k(\eta_\alpha(x^{(c)})) \geqslant \\ &\geqslant \sum_{|\alpha|=1}(x^{(m)} - x^{(k+\delta)})^\alpha D^\alpha f_k(x^{(c)}), \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\delta = \begin{cases} 0, & i = 1, \cdots, l \\ 1, & i = l+1, \cdots, n, \end{cases}$$

а $x^{(m)} \in \overline{\Omega}_k$ и $f_k(x^{(m)}) = f_k^-$ в Ω_k.

С другой стороны, в силу выбора вершины $(x_1^{(k_1)}, \cdots, x_l^{(k_l)}$ $x_{l+1}^{k_l+1+1}, \cdots, x_n^{k_n+1})$ и условий (4), имеем

$$\sum_{|\alpha|=1}(x^{(m)} - x^{(k+\delta)})^\alpha D^\alpha f_k(x^{(c)}) \geqslant 0. \tag{9}$$

Аналогично, подставляя в (7) значения

$$f_k(x_1^{(k_1+1)}, \cdots, x_l^{(k_l+1)}, x_{l+1}^{(k_l+1)}, \cdots, x_n^{(k_n)}),\ f_k^+,$$

вычисленные по формуле (4), получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=2}(x^{(k+\varepsilon)} - x^{(c)})^\alpha D^\alpha f_k(\mu_\alpha(x^{(c)})) - \\ &-\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=2}(x^{(M)} - x^{(c)})^\alpha D^\alpha f_k(\nu_k(x^{(c)})) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{|\alpha|=1}(x^{(M)} - x^{(k+\varepsilon)})^\alpha D^\alpha f_k(x^{(c)}), \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\varepsilon = 1 - \delta,\ x^{(M)} \in \overline{\Omega}_k \text{ и } f_k(x^{(M)}) = f^+$$

в Ω_k. Как и выше из выбора вершины

$$(x_1^{(k_1+1)}, \cdots, x_l^{(k_l+1)}, x_{l+1}^{k_l+1)}, \cdots, x_n^{k_n})$$

и условия (4) имеем

$$\sum_{|\alpha|=1} (x^{(M)} - x^{(k+\delta)})^\alpha D^\alpha f_k(x^{(c)}) \leqslant 0. \tag{11}$$

Используя (5), вычисленную соответственно в точках $x^{(M)}$ и $x^{(m)}$ и очевидное соотношение $2x^{(c)} = x^{(k+\delta)} + x^{(k+\delta)}$, имеем

$$\begin{aligned} f_k^+ + f_k^- - 2\hat{f_k} = \sum_{|\alpha|=1} (x^{(M)} - x^{(k+\delta)})^\alpha D^\alpha f_k(x^{(c)}) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=2} (x^{(M)} - x^{(c)})^\alpha D^\alpha f_k(\mu_\alpha(x^{(c)})) + \\ + \sum_{|\alpha|=1} (x^{(m)} - x^{k+\delta})^\alpha D^\alpha f_k(x^{(c)}) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=2} (x^{(m)} - x^{(c)})^\alpha D^\alpha (f_k(\eta_\alpha(x^{(c)})), \end{aligned} \tag{12}$$

откуда, с использованием соотношений (8) и (11), получим верхнюю оценку

$$\begin{aligned} f_k^+ + f_k^- - 2\hat{f_k} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=2} (x^{(k+\delta)} - x^{(c)})^\alpha D^\alpha f_k(\zeta_\alpha(x^{(c)})) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=2} (x^{(M)} - x^{(c)})^\alpha D^\alpha f_k(\mu_\alpha(x^{(c)})) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=2} |(x^{(k+\delta)} - x^{(c)})^\alpha| \, |D^\alpha f_k(\zeta_\alpha(x^{(c)}))| + \\ + \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=2} |(x^{(M)} - x^{(c)})^\alpha| \, |D^\alpha f_k(\mu_\alpha(x^{(c)}))| \leqslant \\ \leqslant \frac{n^2 h^2}{4} \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha f\|. \end{aligned}$$

Аналогично из (12) при помощи неравенств (9) и (10) получается оценка снизу

$$\begin{aligned} f_k^+ + f_k^- - 2\hat{f_k} > \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=2} |(x^{(m)} - x^{(c)})^\alpha| \, |D^\alpha f_k(\nu_\alpha(x^c))| + \\ + \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=2} |(x^{(k+\delta)} - x^{(c)})^\alpha| \, |D^\alpha f_k(\eta_\alpha(x^{(c)}))| \geqslant \\ \geqslant -\frac{n^2 h^2}{4} \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha f\|. \end{aligned}$$

Из последних двух соотношений и следует второе утверждение леммы.

В дальнейшем нам понадобятся следующие функционалы:

$$N(v) = \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i v D_j v + a(x) v^2 \Big) d\Omega, \tag{13}$$

$$M(v) = \int\limits_{\Omega} p(x)\, v^2\, d\Omega, \tag{14}$$

$$R(v) = \frac{N(v)}{M(v)}. \tag{15}$$

Обозначим через

$$N^{\pm}(v),\ N^{\frown}(v),\ M^{\pm}(v),\ M^{\frown}(v),\ R^{\pm}(v), R^{\frown}(v)$$

функционалы, построенные по формулам (12)—(14) для краевых задач ($1^{\pm}$), (1^{-}) и ($1^{\frown}$), соответственно.

Отметим, что если u_k — k-ая собственная функция оператора L, а λ_k— соответствующее ей собственное значение, то, как известно, [1]

$$\lambda_k = R(u_k) = \frac{N(u_k)}{M(u_k)}. \tag{16}$$

Лемма 2. *Если $a_{ij}(x)$, $a(x)$ и $p(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, то существуют постоянные $C(k) > 0$ и $h_0 > 0$ такие, что при $h < h_0$*

$$|\lambda_k - \lambda_k^{\pm}| \leqslant C(k)\, h, \tag{17}$$

$$|\lambda_k - \lambda_k^{\frown}| \leqslant C(k)\, h. \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, где $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — замыкание множества бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций в норме

$$\|v\|_1^2 = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} (D_i v)^2 + v^2 \right) d\Omega.$$

В силу оценки (3)

$$|M(v) - M^{\pm}(v)| \leqslant \int\limits_{\Omega} \frac{|p(x) - p^{\pm}(x)|}{p(x)}\, p(x)\, v^2\, d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \frac{p(x) - p^{\pm}(x)}{p(x)} \right\| M(v) \leqslant \frac{c_1 h}{p_0} M(v)$$

и

$$|N(v) - N^{\pm}(v)| \leqslant \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x) - a_{ij}^{\pm}(x)|\, |D_i v|\, |D_j v| + \right.$$

$$\left. + |a(x) - a^{\pm}(x)|\, v^2 \right] d\Omega \leqslant c_2 h\, \|v\|_1^2.$$

С другой стороны, в силу условия эллиптичности

$$N(v) \geqslant c_3 \|v\|_1^2, \tag{19}$$

т. е.

$$|N(v) - N^{\pm}(v)| \leqslant \frac{c_2}{c_3} h N(v),$$

отсюда следует

$$N^{+}(v) \geqslant (1 - \delta_1 h)\, N(v),$$

где $\delta = \frac{c_2}{c_3}$. Таким образом, $R^{\pm}(v) > 0$ при $h < \frac{1}{\delta_1}$.

Далее из очевидного равенства

$$R(v) - R^{\pm}(v) = R^{\pm}_{(v)} \frac{M^{\pm}(v) - M(v)}{M(v)} + R(v) \frac{N(v) - N^{\pm}(v)}{N(v)}$$

следует, что существует положительная постоянная $\delta_2 = \delta_2(c_1, c_2, c_3, p_0)$ такая, что

$$\frac{1-\delta_2 h}{1+\delta_1 h} R^{\pm}(v) \leqslant R(v) \leqslant \frac{1+\delta_2 h}{1-\delta_1 h} R^{\pm}(v), \tag{20}$$

откуда в силу определения функционалов $R(v)$ и $R^{\pm}(v)$, минимаксных свойств собственных значений (см. [1], или [5])

$$\frac{1-\delta_2 h}{1+\delta_1 h} \lambda_k^{\pm} \leqslant \lambda_k < \frac{1+\delta_2 h}{1-\delta_1 h} \lambda_k^{\pm}.$$

Оценка (18) доказывается аналогично.

Лемма 3. *Если $a_{ij}(x)$, $a(x)$ и $p(x) \in C^1\overline{\Omega}$, то существуют постоянные $c(k) > 0$ и $h_0 > 0$ такие, что при $h < h_0$*

$$|R^{\pm}(u_k) - \lambda_k^{\pm}| \leqslant C(k) h^2, \tag{21}$$

$$|R^{-}(\hat{u}_k) - \lambda_k^{\widehat{}}| \leqslant C(k) h^2. \tag{22}$$

Доказательство. Имеем

$$L(u_k - u_k^{\pm}) = \lambda^{\pm} p^{\mp}(x)(u_k - u_k^{\pm}) + \lambda_k (p(x) - p^{\mp}(x)) u_k +$$
$$+ p^{\mp}(\lambda_k - \lambda_k^{\pm}) u_k - (L - L^{\pm}) u_k^{\pm}. \tag{23}$$

С другой стороны (для нормированных u_k и $u_k^{\mp}$, k фиксировано)

$$\gamma_3 \|u_k - u_k^{\pm}\|_1 \leqslant (L(u_k - u_k^{\pm}), u_k - u_k^{\pm}),$$

где $(\cdot\,, \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Откуда с использованием (23), получим

$$\gamma_3 \|u_k - u_k^{\pm}\|_1 \leqslant \lambda_k^{\pm} \int_{\Omega} p^{\mp}(x) |u_k - u_k^{\pm}|^2 d\Omega +$$

$$+ \lambda_k \int_{\Omega} |p(x) - p^{\pm}(x)| \, |u_k - u_k^{\pm}| \, d\Omega +$$

$$+ |\lambda_k - \lambda_k^{\pm}| \int_{\Omega} p^{\mp}(x) |u_k| \, |u_k - u_k^{\pm}| \, d\Omega +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} |a_{ij}(x) - a_{ij}^{\pm}(x)| \, |D_i u_k| \, |D_j(u_k - u_k^{\pm})| \, d\Omega.$$

Используя неравенство Юнга, лемму 1 и (17), получим

$$\gamma_3 \|u_k - u_k^{\pm}\|_1^2 \leqslant c_4 h^2 + \varepsilon c_5 \|u_k - u_k^{\pm}\|_1^2,$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно. Выбирая $\varepsilon > 0$ из условия $\gamma_3 - \varepsilon c_5 > 0$, получим

$$|u_k - u_k^{\pm}| \leqslant c_6(k) h.$$

Отсюда следует, что

$$|N^{\pm}(u_k - u_k^{\pm})| \leqslant c_7(k) h, \tag{24}$$

$$|M^{\pm}(u_k - u_k^{\pm})| \leqslant c_8(k) h. \tag{25}$$

С другой стороны, используя соотношения (13)—(16), нетрудно проверить, что

$$N^{\pm}(u_k) - \lambda_k^{\pm} M^{\pm}(u_k) = N^{\pm}(u_k - u_k^{\pm}) + \lambda_k^{\pm} M^{\pm}(u_k - u_k^{\pm})$$

и окончательно

$$|R^{\pm}(u_k) - \lambda_k^{\pm}| = \left| \frac{N^{\pm}(u_k) - \lambda_k^{\pm} M^{\pm}(u_k)}{M^{\pm}(u_k)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|N^{\pm}(u_k - u_k^{\pm})| + |\lambda_k^{\pm}| \, |M^{\pm}(u_k - u_k^{\pm})|}{M^{\pm}(u_k)} \leqslant C(k) h^2.$$

Аналогичным образом доказывается оценка (22).

§ 3. Доказательство основных теорем

Теорема 1. *Если $a_{ij}(x)$, $a(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, $p(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, то существуют постоянные $C(k) > 0$, $h_0 > 0$ такие, что при $h < h_0$*

$$|\lambda_k - \lambda_k^{\sim}| \leqslant C(k) h^2. \tag{26}$$

Для доказательства воспользуемся соотношением (16), полагая собственные функции задач (1) и (1~) нормированными. Очевидно

$$|\lambda_k - \lambda_k^{\sim}| \leqslant |N_k^{\sim}(u_k) - N^{\sim}(u_k^{\sim})| + |N(u_k) - N^{\sim}(u_k)|. \tag{27}$$

Первое слагаемое в правой части (27) в точности совпадает с левой частью (22), следовательно достаточно оценить второе слагаемое в (27). Для этого оценим предварительно интеграл вида

$$\int_{\Omega} (f(x) - f^{\sim}(x)) \, w(x) \, d\Omega,$$

где

$$f(x) \in C^2(\overline{\Omega}), w(x) \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Используя формулу Тейлора для функций $w_l(x)$, получим

$$\int_{\Omega_l} (f_l(x) - f_l^{\sim}(x)) \, w_l(x) \, d\Omega_l = \int_{\Omega_l} (f_l(x) - f_l^{\sim}(x)) \, w_l(x^{(c)}) \, d\Omega_l +$$

$$+ \int_{\Omega_l} (f_l(x) - f^{\sim}(x)) \sum_{|\alpha|=1} (x - x^{(c)})^{\alpha} D^{\alpha} w_l(\xi_{\alpha}(x^{(c)})) \, d\Omega_l.$$

Второй интеграл в силу первого утверждения леммы 1. очевидно не превосходит по абсолютной величине ch^{n+2}. Покажем, что аналогично оценивается и первое слагаемое. Имеем

$$\int_{\Omega_l} (f_l(x) - f_l^{\frown}(x))\, w_l(x^{(c)})\, d\Omega_l =$$

$$= w_l(x^{(c)}) \sum_{|\alpha|=1} D^\alpha f_l(x^{(c)}) \int_{\Omega_l} (x - x^{(c)})^\alpha\, d\Omega_l +$$

$$+ \int_{\Omega_l} w_l(x^{(c)}) \sum_{|\alpha|=2} (x - x^{(c)})^\alpha D^\alpha f_l(\xi_\alpha(x^{(c)})\, d\Omega_l. \tag{28}$$

Первый интеграл в правой части (28) равен нулю, а второй — по абсолютной величине оценивается через ch^{n+2}.

Таким образом

$$\left| \int_{\Omega_l} (f_l(x) - f_l^{\frown}(x))\, w_l(x)\, d\Omega_l \right| \leqslant ch^{n+2}$$

и окончательно

$$\left| \int_{\Omega} (f(x) - f^{\frown}(x))\, w(x)\, d\Omega \right| \leqslant ch^2. \tag{29}$$

Далее по определению

$$|N(u_k) - N^{\frown}(u_k)| = \left| \int_{\Omega} \Big[\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) - a_{ij}^{\frown}(x))\, D_i u_k D_j u_k + \right.$$

$$\left. + (a(x) - a^{\frown}(x))\, u_k^2 \Big] d\Omega \right| \leqslant \left| \int_{\Omega} (a(x) - a^{\frown}(x))\, u_k^2\, d\Omega \right| +$$

$$+ \left| \int_{\Omega} \Big[\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) - a_{ij}^{\frown}(x)\, D_i u_k D_j u_k \Big] d\Omega \right|. \tag{30}$$

Применяя поочередно неравенство вида (29) к каждому слагаемому в правой части (30), приходим к оценке

$$|N(u_k) - N^{\frown}(u_k)| \leqslant c(k)\, h^2,$$

которая вместе с оценкой (22) и доказывает теорему.

Теорема 2. *Пусть $a_{ij}(x)$, $a(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ и $p(x) \in C^1(\overline{\Omega})$. Тогда существуют постоянные $C(k) > 0$ и $h_0 > 0$ такие, что при $h < h_0$*

$$\left| \lambda_k - \frac{1}{2}(\lambda_k^+ + \lambda_k^-) \right| \leqslant c(k)\, h^2.$$

Для простоты доказательства будем полагать, что собственные функции задач ($1^\pm$) нормированы. При фиксированном k имеем

$$\left| \lambda_k - \frac{1}{2}(\lambda_k^+ + \lambda_k^-) \right| \leqslant |\lambda_k - \lambda_k^{\frown}| +$$

$$+|\hat{\lambda}_k - \hat{R}(u_k)| + \frac{1}{2}|R^+(u_k) - \lambda_k^+| +$$

$$+\frac{1}{2}|R^-(u_k) - \lambda_k^-| + \left|\left[\hat{R} - \frac{1}{2}(R^+ + R^-)\right](u_k)\right|. \qquad (31)$$

Из определения функционалов $R^\pm(u_k)$ и $\hat{R}(u_k)$, после очевидных преобразований, с использованием второго утверждения леммы 1, получим

$$\left|\left[\hat{R} - \frac{1}{2}(R^+ + R^-)\right](u_k)\right| \leqslant C(k)\left[\left\|\hat{a}(x) - \frac{1}{2}(a^+(x) + a^-(x))\right\| +\right.$$

$$\left. + \sum_{i,j=1}^{n}\left\|\hat{a}_{ij}(x) - \frac{1}{2}(a_{ij}^+(x) + a_{ij}^-(x))\right\|\right] \leqslant C(k)\,h^2.$$

Теперь доказательство теоремы следует из теоремы 1 и оценок (21), (22) леммы 3.

Ереванский государственный
университет,
Ереванский физический
институт

Поступила 13. III. 1980

Բ. Գ. ԱՐԱՐՔՑՅԱՆ, Ռ. Ռ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ. Երկրորդ կարգի էլիպտական օպերատորների սեփական արժեքների գնահատականներ *(ամփոփում)*

Ապացուցված է թեորեմ, որը թույլ է տալիս գնահատել երկրորդ կարգի էլիպտական օպերատորների սեփական արժեքները, որոնք բավարարում են Դիրիխլեի խնդրի եզրային պայմաններին, այլ ավելի պարզ կառուցվածք ունեցող նմանատիպ օպերատորների սեփական արժեքների միջոցով։

B. G. ARARKCIAN, R. R. SHAKHBAGIAN. *Estimating the eigenvalues of second order elliptic operators* (summary)

The paper gives some estimates for the eigenvalues of the first boundary value problem for the second order elliptical operators.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Курант, Д. Гильберт*. Методы математической физики, тт. I, II, М., Гостехиздат, 1951.
2. *A. L. Andrew, F. R. de Hoog, P. J. Robb*. Leighton's bounds for Sturm—Lioville eigenvalues. Journ. of Math. Anal. and Appl., 83, 1981, 11—19.
3. *J. W. Paine, A. L. Andrew*. Bound and higher—order estimates for Sturm—Lioville eigenvalucs, Journal of Math. Anal. and Appl., 96, 1983, 338—394.
4. *S. Pruess*. Estimatin the eigenvalues of Sturm—Lioville problem by approximating the differential equations, SIAM Jour. Numer. Anal., 10, 1973, 65—68.
5. *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева*. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., «Наука», 1964.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 4, 1988 Математика

УДК 517.5

А. Г. БАГДАСАРЯН

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И О СЛЕДАХ ФУНКЦИЙ ИЗ НЕКОТОРЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Сущность функционального подхода при изучении различных вопросов, возникающих в теории дифференциальных уравнений с частными производными заключается в том, что дифференциальное уравнение вместе с граничными условиями реализуется как оператор, действующий в специально подобранном пространстве. Появляется необходимость изучения свойств этого пространства, осуществления интерполяции и получения теорем вложения различных измерений и различных метрик. Первые результаты по проблеме следов функций из пространств С. Л. Соболева были получены С. Л. Соболевым [1] и дополнены затем В. И. Кондрашовым [2] и В. П. Ильиным [3]. Эти результаты формулировались в терминах пространств W и, как выяснилось, не могут иметь замкнутой формы в терминах этих пространств (во всяком случае при $p \neq 2$). Окончательные результаты были получены при $p = 2$ Ароншайном [4], В. М. Бабичем и Л. Н. Слободецким [5]. Гальярдо [6] охарактеризовал следы функций из пространства $W_p^1(R_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, на $(n-1)$-мерном сечении R_n. О. В. Бесов [7, 8] решил эту задачу для анизотропных пространств С. Л. Соболева и сечения произвольной размерности m; $m < n-1$. Для пространств Никольского-Бесова $B^r_{p,q}$ прямые и обратные теоремы вложения различных измерений были доказаны С. М. Никольским [9, 10] при $q = \infty$ и О. В. Бесовым [7, 8] при $1 \leqslant q < \infty$. Обобщением предыдущих результатов занимались многие авторы. Отметим, прежде всего, работы П. И. Лизоркина [11], Л. Н. Слободецкого [12], С. В. Успенского [13]. Более подробное изложение истории вопроса и соответствующую библиографию можно найти в монографиях [14—17]. В работе [18] Л. Р. Волевича и Б. П. Панеяха описаны следы из достаточно общих гильбертовых пространств (содержащих в частности лиувиллевские гильбертовые пространства).

В настоящей заметке вводятся некоторые банаховые пространства функций, совпадающие при $p = 2$ с изученными в [18] пространствами. В отличие от случая гильбертовых пространств, когда следы функций из этих пространств описываются терминами пространств такого же типа (с иной весовой функцией), в нашем случае для достижения этой цели, как и в классическом случае, возникает необходимость введения более общих пространств типа Бесова. В частности при $n = 2$ следы функций из этих пространств совпадают со следами функций из обычных пространств Соболева.

Как самостоятельное направление исследований теория интерполяции в банаховых пространствах сложилась в 1958—1961 годах в работах Ж. Л. Лионса, Э. Гальярдо, А. П. Кальдерона, С. Г. Крейна и других. Существенную роль в ее развитии сыграли работы Я. Петре, который, в частности, в работе [19] получил результаты об интерполяции изотропных пространств Соболева и Бесова. Х. Трибелем в работе [20] были распространены эти результаты для обобщенно-однородных пространств. Здесь мы доказываем теорему об интерполяции некоторых пространств типа Соболева—Лиувилля. В изложении мы будем придерживаться схем, предложенных Трибелем в [17, 21], Бергом и Лефстрёмом в [22], при этом будем пользоваться методами и результатами как перечисленных, так и многих других авторов. В дальнейшем мы намерены применить полученные здесь результаты при доказательстве априорных оценок для одного класса дифференциальных операторов, являющегося подклассом регулярных операторов, введенных С. М. Никольским в [23].

1°. Будем пользоваться следующими обозначениями: R_n — n-мерное эвклидово пространство, Z_n^+ — множество мультииндексов, т. е. векторов $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ с целыми, неотрицательными компонентами. Если $\xi\in R_n$, $\alpha\in Z_n^+$, то положим: $|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$, $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$. Пусть $\mathbf{A}=\{\alpha^1,\cdots,\alpha^N\}$, $\alpha^j\in Z_n^+$ $(j=1,2,\cdots,N)$.

Определение 1. Характеристическим многогранником множества $\mathbf{A}$ назовем наименьший выпуклый многогранник $\mathbf{N}=\mathbf{N}(\mathbf{A})$ в R_n, содержащий все точки $\mathbf{A}$.

Определение 2. Непустой многограник $\mathbf{N}$ с вершинами из Z_n^+ назовем полным, если начало координат Z_n^+ является вершиной $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}$ имеет вершины на каждой оси координат Z_n^+, отличные от начала координат. Полный многогранник $\mathbf{N}$ назовем вполне правильным, если внешние нормали $(n-1)$-мерных некоординатных граней $\mathbf{N}$ имеют только положительные координаты. Пусть $\mathbf{N}$ — полный многогранник с вершинами $\alpha^0,\alpha^1,\cdots,\alpha^n,\beta^1,\cdots,\beta^N$, при этом вершина α^j находится на j-той координатной оси $(j=1,2,\cdots,n)$ и $\alpha^0=(0,\cdots,0)$. Сопоставим многограннику $\mathbf{N}$ функцию

$$\mu(\xi)=\left(\sum_{j=1}^{n}\xi^{2\alpha^j}+\sum_{i=1}^{N}\xi^{2\beta^i}\right)^{1/2} \tag{1}$$

и многогранник $\mathfrak{M}(\bar{s},\mathbf{N})$ с вершинами $(0,\cdots,0)$, $s\alpha^j$, $s\beta^i$ $(j=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,N)$.

Определение 3. Пусть $-\infty<s<\infty$, $1<p<\infty$, S' — пространство медленно растущих распределений.

Положим

$$H_p^s(\mu;R_n)=\left\{f;\ f\in S',\ \|f\|_{H_p^s}=\left\|F^{-1}\{(1+\mu^2)^{s/2}Ff\}\right\|_{L_p(R_n)}<\infty\right\}.$$

Определение 4. Пусть s — натуральное число и следовательно вершины многогранника $\mathfrak{M}$ принадлежат Z_n^+. Положим:

$$W_p^s(\mu; R_n) = \left\{ f;\ f \in S',\ \|f\|_{W_p^s} \left(\sum_{\alpha \in \mathfrak{M}} \|D^\alpha f\|^p_{L_p(R_n)} \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

При $|\alpha^j| = |\beta^i| = m$ $(j = 1, 2, \cdots, n;\ i = 1, 2, \cdots, N)$ определенные выше пространства H_p^s, W_p^s совпадают с обычными пространствами Лиувилля и Соболева, соответственно. Здесь, как и в классическом случае можно доказать, что при натуральном s $H_p^s(\mu; R_n) = W_p^s(\mu; R_n)$. Пусть M_p^q — пространство всех мультипликаторов Фурье типа(p,q), т. е. обобщенных функций ρ из S' таких, что $(F^{-1}\rho)_* g \in L_q$ для всех $g \in S$ и конечна следующая норма:

$$\|\rho\|_{M_p^q} = \sup_{\|g\|_{L_p}=1} \|(F^{-1}\rho) * g\|_{L_q(R_n)}.$$

Определение 5. Пусть функция $\mu(\xi)$ определена формулой (1). Через $\Phi(\mu; R_n)$ обозначим множество систем функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$, обладающих следующими свойствами:

а) $\varphi_k \in S(R_n)$, $(F\varphi_k)(\xi) \geqslant 0$, $k = 0, 1, \cdots$,

б) $\operatorname{supp} F\varphi_k \subset \{\xi;\ \xi \in R_n,\ 2^{k-1} < \mu(\xi) < 2^{k+1}\}$,

$$\operatorname{supp} F\varphi_0 \subset \{\xi;\ \xi \in R_n,\ \mu(\xi) < 2\}, \tag{2}$$

в) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (F\varphi_k)(\xi) \geqslant c_1 > 0$, $\forall \xi \in R_n$,

г) существует $c_2 > 0$ такое, что

$$\|(F\varphi_k)\|_{M_p^p} < c_2,\quad k = 1, 2, \cdots. \tag{3}$$

Приведем примеры таких систем функций.

Пример 1. Пусть $\omega(t)$ — несколько видоизмененное ядро Соболева, т. е. бесконечно дифференцируемая, неотрицательная функция одной переменной с носителем в $[0, 1]$ такая, что $\int\limits_0^1 \omega(t)\,dt = 1$. Положим далее для $k = 0, 1, 2, \cdots$

$$G_k(\xi) = \{t;\ t \in R_1,\ 2^k \leqslant \mu(\xi) + 2^{k-1} t \leqslant 2^{k+1}\}.$$

Покажем, что система $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$, где

$$(F\varphi_k)(\xi) = \int\limits_{G_k(\xi)} \omega(t)\,dt,\quad k = 1, 2, \cdots \tag{4}$$

и функция $\varphi_0(\xi)$ выбрана подходящим образом, удовлетворяет условиям а)— г). Свойство а) следует из(1) и (4). Докажем свойство б). Если точка ξ_0 такова, что $\mu(\xi_0) > 2^{k+1}$ или $\mu(\xi_0) < 2^{k-1}$, то $4 - 2^{-(k-1)}\mu(\xi_0) < 0$ или $2 - 2^{-(k-1)}\mu(\xi_0) > 1$. В обоих случаях по формуле (4) $(F\varphi_k)(\xi_0) = 0$. Для доказательства свойства в) убедимся, что для любого ξ_0;

$\mu(\xi_0) > 3/2$ существует номер k_0 такой, что $G_{k_0}(\xi_0) \supset \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ т. е. одновременно $2 - 2^{-(k_0-1)}\mu(\xi_0) \leqslant \frac{1}{2}$ и $1 \leqslant 4 - 2^{-(k_0-1)}\mu(\xi_0)$. Поскольку $[3/2; \infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty}[3\cdot 2^{k-2}; 3\cdot 2^{k-1}]$, то хотя бы для одного натурального k_0

$$3\cdot 2^{k_0-2} \leqslant \mu(\xi_0) \leqslant 3\cdot 2^{k_0-1}.$$

Теперь, если выбрана подходящая функция $\varphi_0(\xi)$, то свойство в) становится очевидным.

Для доказательства свойства г) применим теорему П. И. Лизоркина о мультипликаторах типа (p, p) (см. [24]). Представим произвольно взятый мультииндекс α в виде суммы ненулевых мультииндексов; $\alpha = \beta^1 + \cdots + \beta^M$ и обозначим через $\mathbf{A}(\alpha)$ множество всех таких представлений, т. е. множество всевозможных наборов мультииндексов $\{\beta^1, \cdots, \beta^M\}$ таких, что $\beta^1 + \cdots + \beta^M = \alpha$. При этом очевидно число M принимает значения $M = 1, 2, \cdots, |\alpha|$. Тогда производные $D^\alpha F\varphi_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ представляются в вида

$$(D^\alpha F\varphi_k)(\xi) = \sum_{\mathbf{A}(\alpha)} C_k(\beta^1, \cdots, \beta^M; \omega, \omega', \cdots, \omega^{(|\alpha|)}) D^{\beta^1}\mu(\xi), \cdots, D^{\beta^M}\mu(\xi), \tag{5}$$

где сумма распространяется по всевозможным наборам $\{\beta^1, \cdots, \beta^M\} \in \mathbf{A}(\alpha)$, а для коэффициентов C_k справедливо неравенство

$$|C_k(\beta^1, \cdots, \beta^M; \omega, \omega', \cdots, \omega^{(|\alpha|)})| \leqslant c_1 \cdot 2^{-Mk} \tag{6}$$

с некоторой постоянной $c_1 = c_1(\alpha) > 0$.

Теперь из представления (5) имеем

$$\xi^\alpha (D^\alpha F\varphi_k)(\xi) = \sum_{\mathbf{A}(\alpha)} C_k[\xi^{\beta^1} D^{\beta^1}\mu(\xi)], \cdots, [\xi^{\beta^M}\cdot D^{\beta^M}\mu(\xi)].$$

Так как $\mathbf{N}(\mu)$ является вполне правильным многогранником, то (см. [25]) существует постоянная $c_2 = c_2(\gamma)$ такая, что

$$|\xi^\gamma D^\gamma \mu(\xi)| \leqslant c_2\mu(\xi), \quad \gamma \in Z_n^+, \quad \xi \in R_n. \tag{7}$$

Пользуясь доказанным свойством б) и неравенствами (6), (7), из представления (5) получим для любого $\alpha \in Z_n^+$

$$|\xi^\alpha (D^\alpha F\varphi_k)(\xi)| \leqslant c, \quad k = 1; 2, \cdots.$$

Пример 2. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu; R_n)$. Положим

$$(F\psi_k)(\xi) = (F\varphi_k)(\xi)\left[\sum_{j=0}^{\infty}(F\varphi_j)(\xi)\right]^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

Получим систему $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu; R_n)$, для которой справедливо тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty}(F\psi_k)(\xi) \equiv 1. \tag{8}$$

Определение 6. Пусть $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Положим

$$B^s_{p,q}(\mu;\ R_n) = \left\{f;\ f \in S', \|f\|_{B^s_{p,q}} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} (2^{ks}\|f * \varphi_k\|_{L_p(R_n)})^q\right]^{1/q} < \infty\right\},$$

$$F^s_{p,q}(\mu;\ R_n) = \left\{f;\ f \in S', \|f\|_{F^s_{p,q}} = \left[\int\limits_{R_n}\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq}|f * \varphi_k|^q\right)^{p/q} dx\right]^{1/p} < \infty\right\},$$

$$B^s_{p,\infty}(\mu;\ R_n) = \left\{f;\ f \in S', \|f\|_{B^s_{p,\infty}} = \sup_k 2^{ks}\|f * \varphi_k\|_{L_p(R_n)} < \infty\right\}.$$

При этом в определении $F^s_{p,q}$ будем считать, что $1 < q < \infty$. Пусть $f \in S'(R_n)$, положим $I^s f = F^{-1}\{(1 + \mu^2)^{s/2} Ff\}$. Всюду в дальнейшем, если это не вызывает путаницы, через c мы обозначаем (вообще говоря) разные постоянные.

2°. **Лемма.** Пусть $f \in S'(R_n)$, для системы $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu;\ R_n)$ выполняется тождество (8), $f * \varphi_k \in L_k(R_n)$, $k = 1, 2, \cdots$. Тогда для любого p; $1 < p < \infty$, $\exists c > 0$ такое, что

$$\|I^s \varphi_k * f\|_{L_p(R_n)} \leqslant c\, 2^{ks}\|f * \varphi_k\|_{L_p(R_n)},\ k = 0, 1, \cdots.$$

Доказательство. Будем считать, что $\varphi_k \equiv 0$ при $k < 0$. Из условий (2), (8) следует, что для всех k

$$f * \varphi_k = \sum_{r=-2}^{2} (\varphi_{k+r} * \varphi_k * f), \tag{9}$$

поэтому

$$2^{-ks}\|I^s \varphi_k * f\|_{L_p(R_n)} = (2\pi)^{n/2}\|F^{-1}\{(1+\mu^2)^{s/2} F\varphi_k \cdot Ff \cdot 2^{-sk}\}\|_{L_p(R_n)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r=-2}^{2} \|F^{-1}\{(1+\mu^2)^{s/2} F(\varphi_{k+r} * \varphi_k * f)\, 2^{-ks}\}\|_{L_p(R_n)} =$$

$$= (2\pi)^{n/2} \sum_{r=-2}^{2} \|F^{-1}\{2^{-ks}(1+\mu^2)^{s/2} F\varphi_{k+r} \cdot F(\varphi_k * f)\}\|_{L_p(R_n)} \leqslant$$

$$\leqslant c\|f * \varphi_k\|_{L_p(R_n)}.$$

Последнее неравенство следует из того, что функции

$$2^{-ks}(1 + \mu^2)^{s/2} F\varphi_{k+r},\ r = -2, \cdots, 2;\ k = 0, 1, \cdots$$

является элементом пространства M^p_p, причем

$$\sup_{\|g\|_{L_p}=1} \|F^{-1}\{(1+\mu^2)^{s/2} F\varphi_{k+r} \cdot Fg\}\|_{L_p} \leqslant c,\ k = 0, 1, \cdots.$$

Проверка этого факта легко осуществляется с помощью теоремы П. И. Лизоркина, при этом свойства (2) и (3) обеспечивают выполнение условий этой теоремы. Лемма доказана.

Наша ближайшая цель — доказательство интерполяционной теоремы для пространств H^s_p $(\mu;\ R_n)$. Приведенная выше лемма будет играть основную роль в этом вопросе. Пусть A_0 и A_1 — два комплексных банаховых пространства, линейно и непрерывно вложенных в комплексное топологическое пространство $A : A_0 \subset A$, $A_1 \subset A$. Два таких пространства будем называть интерполяционной парой $\{A_0, A_1\}$. Для интерполяционной пары $\{A_0, A_1\}$ и всякого t, $0 < t < \infty$ определим в $A_0 + A_1$ функционал K следующим образом:

$$K(t, a; A_0, A_1) = \inf_{a = a_0 + a_1} (\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}).$$

Определение 7а. Пусть $\{A_0, A_1\}$ — интерполяционная пара, $0 < \theta < 1$. При $1 \leqslant q < \infty$ положим

$$(A_0, A_1)_{\theta, q} = \Big\{a;\ a \in A_0 + A_1,\ \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, q}} =$$

$$= \left(\int_0^\infty [t^{-\theta} K(t, a)]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty\Big\},$$

при $q = \infty$

$$(A_0, A_1)_{\theta, \infty} = \{a;\ a \in A_0 + A_1,\ \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, \infty}} = \sup_t t^{-\theta} K(t, a) < \infty\}.$$

Дадим другое определение пространства $(A_0, A_1)_{\theta, q}$, эквивалентное определение 7а (см. [17]). Для интерполяционной пары $\{A_0, A_1\}$ и t $0 < t < \infty$ введем функционал, определенный в $A_0 \cap A_1$:

$$J(t, a; A_0, A_1) = \max\{\|a\|_{A_0}, t\|a\|_{A_1}\}.$$

Для сокращения записи положим

$$\|v\|_{L_p^*} = \left(\int_0^\infty |v(t)|^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}, \text{ при } 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|v\|_{L_\infty^*} = \operatorname*{vrai\,max}_{0 < t < \infty} |v(t)|, \text{ при } p = \infty.$$

Определение 7б. Пусть $\{A_0, A_1\}$ — интерполяционная пара, $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Через $(A_0, A_1)_{\theta, q}$, обозначим множество элементов a, $a \in A_0 + A_1$ для которых существует непрерывная $A_0 \cap A_1$ — значная функция $u(t)$ с конечной нормой $\|t^{-\theta} J(t, u)\|_{L_p^*}$ такая, что $a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}$. Введем в $(A_0, A_1)_{\theta, q}$ норму следующим образом:

$$\|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, q}} = \inf \|t^{-\theta} J(t, u)\|_{L_p^*},$$

где нижняя грань берется по всем представлениям элемента a описанного типа.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < \theta < 1$, $s_0 \neq s_1$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, *тогда*

$$(H_p^{s_0}(\mu, R_n), H_p^{s_1}(\mu; R_n))_{\theta, q} = B_{p, q}^s(\mu; R_n),$$

где $s = (1 - \theta) s_0 + \theta s_1$.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu; R_n)$, $\sum_{k=0}^{\infty} (F\varphi_k)(\xi) \equiv 1$ и $f \in (H_p^{s_0}, H_p^{s_1})_{\theta, q}$. Представим функцию f в виде суммы $f = f_0 + f_1$, где $f_0 \in H_p^{s_0}$, $f_1 \in H_p^{s_1}$. В силу доказанной леммы имеем

$$\|f * \varphi_k\|_{L_p} \leqslant \| < \|f_0 * \varphi_k\|_{L_p} + \|f_1 * \varphi_k\|_{L_p} <$$
$$\leqslant c\,(2^{-s_0 k}\|I^{s_0} f_0\|_{L_p} + 2^{-s_1 k}\|I^{s_1} f_1\|_{L_p}).$$

Беря нижнюю грань по всем разложениям функции f, получим

$$\|f * \varphi_k\|_{L_p} \leqslant c\,2^{-s_0 k} K(2^{k(s_0 - s_1)}, f;\ H_p^{s_0}, H_p^{s_1}).$$

Это неравенство вместе с леммой 3.1.3 из [22] приводит к оценке

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (2^{ks}\|f * \varphi_k\|_{L_p})^q\Big)^{1/q} \leqslant c\,\|f\|_{(H_p^{s_0},\ H_p^{s_1})_{\theta, q}}.$$

Докажем обратную оценку. Пусть $f \in B^s_{p,q}(\mu; R_n)$. На основании доказанной леммы имеем

$$2^{k(s-s_0)} J(2^{k(s_0-s_1)}, \varphi_k * f;\ H_p^{s_0}, H_p^{s_1}) \leqslant$$
$$\leqslant c\,2^{k(s-s_0)} \max(2^{ks_1}\cdot\|\varphi_k * f\|_{L_p},\ 2^{ks_0}\|\varphi_k * f\|_{L_p}) = c\,2^{ks}\|\varphi_k * f\|_{L_p}.$$

Из полученного неравенства и леммы 3.2.3 из [22] будет следовать нужная оценка, если мы докажем, что $f = \sum_{k=0}^{\infty} f * \varphi_k$, в $H_p^{s_0} + H_p^{s_1}$.

Пусть $s_0 < s_1$, тогда $H_p^{s_0} + H_p^{s_1} = H_p^{s_0}$ и

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f * \varphi_k\|_{H_p^{s_0}} \leqslant c\,\|f\|_{B^s_{p,q}} < \infty.$$

Теперь уже условие $\sum_{k=0}^{\infty} (F\varphi_k)(\xi) \equiv 1$ обеспечивает нужную сходимость в $H_p^{s_0}$. Теорема доказана.

3°. Определим оператор следа соотношением

$$(Trf)(x') = f(x', 0),\ x' = (x_1, \cdots, x_{n-1}),\ f \in S(R_n).$$

Следы остальных функций определяем с помощью предельного перехода. В настоящем пункте мы опишем следы функций из определенных весовых классов (определение весовой функции см. в [18]). В качестве таких весов будем использовать в частности функции $(1+\mu^2)^{s/2}$, ν, где функции $\mu(\xi)$ и $\nu(\xi)$ определяются следующим образом:

$$\mu(\xi) = \Big(\sum_{j=1}^{n} \xi^{2\alpha_j} + \sum_{j=1}^{N} (\xi')^{2(\beta')^j}\Big)^{1/2}, \tag{10}$$

$$\nu(\xi) = (1 + \mu^2(\xi'))^{\frac{s_1}{2}} (1 + \mu^2(\xi))^{\frac{s_0 - s_1}{2}}. \tag{11}$$

Расширим несколько определение 3.

Определение 8. Для $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и весовой функции $\lambda(\xi)$ положим

$$H_{p,\lambda} R_n = \{f;\ f \in S', \|f\|_{H_{p,\lambda}} = \|F^{-1}\{\lambda(\xi) Ff\}\|_{L_p(R_n)} < \infty\}.$$

Теорема 2. *Пусть s_0, s_1 — натуральные числа, причем $s_1 < s_0$. Тогда для p, $1 < p < \infty$*

$$\mathrm{Tr}:\ H_{p,\nu}(R_n) \to B_{p,p}^{s_0 - \frac{1}{pm}}(\mu(\xi');\ R_{n-1}), \tag{12}$$

где $m = |\alpha^n|$.

Доказательство. По соображениям плотности (см. [18]) достаточно рассмотреть лишь функции из S.

Пусть R_n^+ — полупространство $x_n > 0$ и

$$W_{p,\nu}(R_n^+) = \left\{f;\ f \in S',\ \|f\|_{W_{p,\nu}(R_n^+)} = \left(\sum_{\alpha \in B} \|D^\alpha f\|^p_{L_p(R_n^+)}\right)^{1/p} < \infty\right\},$$

где $B = B(\nu)$ — многогранник, отвечающий функции $\nu(\xi)$, т. е. многогранник с вершинами $(0, \cdots, 0)$, $s_0 \alpha^j$ $(j = 1, \cdots, n-1)$, $(s_0(\beta')^i,\ 0)$ $(i = 1, \cdots, N)$, $(s_1 \alpha^j,\ s_1 m)$ $(j = 1, \cdots, n-1)$, $(s_1(\beta')^i,\ s_1 m)$ $(i = 1, \cdots, N)$, $(0, \cdots, s_1 m)$ из Z_n^+. Обозначим через R оператор сужения на R_n^+.

Так как $\mathrm{Tr} f = \mathrm{Tr} Rf$, то соотношение (12) будет установлено, если мы докажем, что

$$\mathrm{Tr}:\ W_{p,\nu}(R_n^+) \to B_{p,p}^{s_0 - \frac{1}{pm}}(\mu(\xi');\ R_{n-1}).$$

Из теоремы 1 следует, что для любого s_1, $s_1 \neq s_0$

$$(H_p^{s_0}(\mu(\xi');\ R_{n-1}),\ H_p^{s_1}(\mu(\xi');\ R_{n-1}))_{\frac{1}{pm(s_0 - s_1)},\, p} =$$

$$= B_{p,p}^{\left(1 - \frac{1}{pm(s_0 - s_1)}\right) s_0 + \frac{s_1}{pm(s_0 - s_1)}}(\mu(\xi');\ R_{n-1}) = B_{p,p}^{s_0 - \frac{1}{pm}}(\mu(\xi');\ R_{n-1}).$$

Пусть $f \in S$, положим $u(t) = f(x', t)$ при $t > 0$. Тогда $u(t) \to \mathrm{Tr} f$ в $H_p^{s_1}(\mu(\xi');\ R_{n-1})$ при $t \to 0$. Теперь следствие 3.12.3 из [22] дает

$$\|\mathrm{Tr} f\|_{B_{p,p}^{s_0 - \frac{1}{pm}}} \leqslant c \max\left\{\|t^{1/p} u(t)\|_{L_p^*(H_p^{s_0})},\ \|t^{1/p} u^{(m(s_0 - s_1))}(t)\|_{L_p^*(H_p^{s_1})}\right\}.$$

Правая часть полученного неравенства эквивалентна норме пространства $W_{p,\nu}(R_n^+)$. Теорема доказана.

Пусть система функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu;\ R_n)$ такая, что имеет место неравенство

$$|\xi|^{|\alpha|} |(D^\alpha F\varphi_k)(\xi)| \leqslant c,\ k = 1, 2, \cdots,\ \alpha \in Z_n^+, \tag{13}$$

где $c = c(\alpha) > 0$. Условие (13) обеспечивает выполнение оценки (3) (см. [26]).

Теорема 3. *Пусть $\mu(\xi)$ — функция, определенная в (10), $1 < p < \infty$, $-\infty < s < \infty$. Тогда какова бы ни была функция $f(x') \in B_{p,p}^{s - \frac{1}{pm}}(\mu(\xi');\ R_{n-1})$ существует функция $g(x) \in H_p^s(\mu;\ R_n)$ такая, что $\mathrm{Tr}\, g(x) = f(x')$.*

Доказательство. Обозначим преобразование Фурье на R_i $(i=1,\ n-1)$ и его обращение соответственно через F_i и F_i^{-1}. Пусть $\{\varphi_k'\}_{k=0}^{\infty}\in\Phi(\mu(\xi');R_{n-1})$, $\psi_0(t)\in S(R_1)$, $\psi(t)\in S(R_1)$, при этом $\operatorname{supp} F_1\psi_0\subset\subset(-1,\ 1)$ $\operatorname{supp} F_1\psi\subset(1,\ 2)$, $\psi_0(0)=\psi(0)=1$.

Положим $(F_1\psi_k)(t)=\psi(2^{-\frac{k}{m}}t)$ при $k=1,\ 2,\cdots$, тогда

$$\psi_j(y)|_{y=0}=F_1^{-1}\{(F_1\psi)(2^{-\frac{j}{m}}t)\}(y)|_{y=0}=2^{\frac{j}{m}}\psi(2^{\frac{j}{m}}y)|_{y=0}=2^{\frac{j}{m}}. \tag{14}$$

Пусть $f\in B^s_{p,p}(\mu(\xi');R_{n-1})$, положим еще

$$g(x',\ x_n)=\sum_{k=0}^{\infty}2^{-\frac{k}{m}}\psi_k(x_n)(\varphi_k'*f)(x').$$

Тогда из (14) имеем $g(x',\ x_n)=f(x')$, т. е. $f(x')$ — след функции $g(x',\ x_n)$. Докажем сначала, что $g\in F_{p,2}^{s+\frac{1}{pm}}$. Пусть система $\{\varphi_k\}\in\in\Phi(\mu;\ R_n)$ такова, что для нее выполняется неравенство (13). Тогда из (2), (13) следует, что матрица $K_{jj}=\varphi_j$ при $j=0,\ 1,\ 2,\cdots$ и $K_{ij}=0$ удовлетворяет условиям теоремы 2.2.4 из [17]*. Применяя ее получаем

$$\|g\|_{F_{p,2}^{s+\frac{1}{pm}}}=\int_{R_n}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}2^{2k\left(s+\frac{1}{pm}\right)}|g*\varphi_k|^2\Big)^{p/2}dx\leqslant$$

$$\leqslant c\int_{R_n}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}2^{2k\left(s+\frac{1}{pm}-\frac{1}{m}\right)}|\psi_k\cdot(\varphi_k'*f)|^2\Big)^{p/2}dx=$$

$$=\int_{R_1}\Big\|\sum_{k=0}^{\infty}\Big|2^{-\frac{k}{m}}\psi_k(x_n)2^{k\left(s+\frac{1}{pm}\right)}(\varphi_k'*f)\Big|^2\Big\|^{p/2}_{L_{p/2}(R_{n-1})}dx_n\leqslant$$

$$\leqslant c\int_{R_1}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}2^{-\frac{2k}{m}}|\psi_k(x_n)|^2\cdot 2^{2k\left(s+\frac{1}{pm}\right)}\|\varphi_k'*f\|^2_{L_p(R_{n-1})}\Big)^{p/2}dx_n. \tag{15}$$

Представим последний интеграл в виде

$$\int_{R_1}\cdots dx_n=\int_{L}\cdots dx_n+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{L_k}\cdots dx_n, \tag{16}$$

где $L=(-\infty;\ -1)\cup(1;\ \infty)$ и

$$L_k=(-2^{-\frac{k}{m}};\ 2^{\frac{-k-1}{m}})\cup(2^{\frac{-k-1}{m}};\ 2^{-\frac{k}{m}}).$$

---

* Недавно П. И. Лизоркин доказал теорему (см. признак B из [27]) о мультипликаторах Фурье для L_p-пространств со значениями в гильбертовых пространствах. Применяя при доказательстве теоремы 3 этот признак вместо теоремы 2.2.4 из [17], можно в качестве рассматриваемой здесь системы $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}\in\Phi(\mu;\ R_n)$ брать систему, приведенную в примере 2.

Согласно (14) имеем

$$2^{-\frac{k}{m}} |\psi_k(x_n)| \leqslant c\,(1 + |2^{\frac{k}{m}} x_n|)^{-\sigma}, \tag{17}$$

где σ — произвольное положительное число, $c = c(\sigma) > 0$. Если σ выбрано достаточно большим, то

$$\int\limits_L \cdots dx_n \leqslant c \int\limits_L \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k\left(s+\frac{1}{pm}\right)}}{2^{\frac{2k\sigma}{m}}} \|\varphi_k' * f\|^2_{L_p(R_{n-1})} \right)^{p/2} \frac{dx_n}{|x_n|^{\sigma p}} \leqslant$$

$$\leqslant c' \sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksp} \|\varphi_k' * f\|_{L_p(R_{n-1})}. \tag{18}$$

Чтобы оценить соответствующие интегралы L_j, снова воспользуемся (17). Получим

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{L_j} \cdots dx_n \leqslant c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\frac{j}{m}} \left(\sum_{k=0}^{j} 2^{2k\left(s+\frac{1}{pm}\right)} \|\varphi_k' * f\|^2_{L_n(R_{n-1})} \right)^{p/2} +$$

$$+ c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\frac{j}{m}} \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{2k\left(s+\frac{1}{pm}\right)} \cdot 2^{-2(k-j)\frac{\sigma}{m}} \|\varphi_k' * f\|^2_{L_n(R_{n-1})} \right)^{p/2} \equiv E_1 + E_2. \tag{19}$$

При $0 < \varepsilon < 1$ имеем

$$E_1 \leqslant c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\frac{j}{m}} \sum_{k=0}^{j} 2^{\frac{\varepsilon'}{m}(j-k)} \cdot 2^{kp\left(s+\frac{1}{pm}\right)} \|\varphi_k' * f\|^p_{L_p(R_{n-1})} =$$

$$= c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\frac{\varepsilon k}{m} + kp\left(s+\frac{1}{pm}\right)} \|\varphi_k' * f\|^p_{L_p(R_{n-1})} \cdot \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-\frac{j}{m} + \frac{\varepsilon j}{m}} =$$

$$= c' \sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksp} \|\varphi_k' * f\|^p_{L_n(R_{n-1})}. \tag{20}$$

Далее, если σ достаточно велико, то

$$E_2 \leqslant c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\frac{j}{m}} \sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{kp\left(s+\frac{1}{pm}\right)} \cdot 2^{-(k-j)(\sigma-1)\frac{p}{m}} \|\varphi_k' * f\|^p_{L_n(R_{n-1})} \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksp} \|\varphi_k' * f\|^p_{L_n(R_{n-1})} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(k-j)(\sigma-1)\frac{p}{m} + \frac{k-j}{m}} \leqslant$$

$$\leqslant c' \sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksp} \|\varphi_k' * f\|^p_{L_p(R_{n-1})}. \tag{21}$$

Теперь (15), (16), (18)—(21) дают

$$\|g\|_{F^{s+\frac{1}{mp}}_{p,2}} \leqslant c \|f\|_{B^s_{p,p}}.$$

Для завершения доказательства нам остается показать вложение $F^{s}_{p,2}(\mu; R_n) \subset H^{s}_{p}(\mu; R_n)$, т. е. неравенство

$$\|g\|_{H^s_p} \leqslant c\|g\|_{F^s_{p,2}} \tag{22}$$

для всех $g \in F^{s}_{p,2}(\mu; R_n)$.

Пусть $g \in F^{s}_{p,2}(\mu; R_n)$, система $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu; R_n)$ такая, что выполняется неравенство (13).

Далее предположим, что для системы $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ верно тождество

$$(2\pi)^{n/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{sj}}{(1+\mu^2(x))^{s/2}} (F\varphi_j)(\xi) \equiv 1$$

(см. пример 2). Далее выберем вторую систему $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi(\mu; R_n)$ так, чтобы $(F\psi_j)(\xi) = 1$ при $\xi \in \operatorname{supp} F\varphi_j$. Тогда для $f_j = 2^{sj} g * \varphi_j$ при $j = 0, 1, 2, \cdots$ и $f_j = 0$ в остальных случаях, и для матрицы $K_{0,j}(x) = \psi_j(x)$ при $j = 0, 1, 2, \cdots$ и $K_{ij} = 0$ — в остальных случаях выполнены условия теоремы 2. 2. 4 из [17]. На основании этой теоремы имеем

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} 2^{sj} g * \varphi_j * \psi_j \right\|_{L_p(R_n)} \leqslant c\|f\|_{F^s_{p,2}}.$$

Далее

$$\sum_{j=0}^{\infty} (2^{sj} g * \varphi_j * \psi_j) = (2\pi)^{n/2} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{sj} F^{-1}(Ff \cdot F\varphi_j) =$$

$$= F^{-1}\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (2\pi)^{n/2} \frac{2^{sj}}{(1+\mu^2(x))^{s/2}} F\varphi_j \cdot (1+\mu^2(x))^{s/2} Fg \right\} =$$

$$F^{-1}\{(1+\mu^2(x))^{s/2} Fg\}.$$

Отсюда немедленно следует (22). Теорема доказана.

Пусть теперь $\lambda(\xi)$ такая функция, что

$$H^{s_0}_{p}(\mu; R_n) \subset H_{p,\lambda}(R_n) \subset H_{p,\nu}(R_n), \tag{23}$$

где $\mu(\xi)$ и $\nu(\xi)$ определены формулами (10), (11). s_0, s — натуральные числа; $s_0 > s_1$. Условие (23) эквивалентно условиям

$$\frac{(1+\mu^2)^{s_0/2}}{\lambda(\xi)} \in M^p_p, \quad \frac{\lambda(\xi)}{\nu(\lambda)} \in M^p_p$$

(см. [18]). В частности, $H_{p,\lambda}(R_n)$ может совпадать с $H^{s_0}_p(\mu; R_n)$ или с $H_{p,\nu}(R_n)$. Из теорем 2 и 3 и из условия (23) немедленно следует

Теорема 4. *Пусть величины $s_0, s_1, \mu, \nu, \lambda$, определены как выше и справедливо соотношение (23), тогда*

а) *при $1 < p < \infty$ оператор следа действует следующим образом:*

$$\operatorname{Tr}: H_{p,\lambda}(R_n) \to B^{s_0 - \frac{1}{pm}}_{p,p}(\mu(\xi'); R_{n-1}).$$

б) *для любой функции* $f(x') \in B_{p,p}^{s_0 - \frac{1}{p\alpha}}(\mu(\xi'); R_{n-1})$ *существует: функция* $g(x) \in H_{p,\lambda}(R_n)$ *такая, что* $g(x', 0) = f(x')$.

Ереванский государственный
университет

Поступила 15. XII. 1986
и 25. III. 1987

Ա. Գ. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ. Որոշ անիզոտրոպ ֆունկցիոնալ տարածությունների հետքերի և ինտերպոլյացիայի մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկվում են $H_p^s(\mu; R_n)$ *անիզոտրոպ ֆունկցիոնալ տարածությունները և մուծվում են* $B^s_{p,q}(\mu; R_n)$ *Բեսովի տիպի տարածությունները։ Ապացուցվում է ինտերպոլյացիայի թեորեմ և թեորեմ* $H_p^s(\mu; R_n)$ *տարածության ֆունկցիաների հետքերի մասին։*

A. G. BAGDASASIAN. *On interpolation aud function traces some from anisotropic functional spaces* (summary)

In the article anisotropic functional $H_p^s(\mu; R_n)$ spaces are considered as well as spaces $B^s_{p,q}(\mu; R_n)$ of Besov type. Interpolation theorem and the theorem on function traces from $H_p^s(\mu; R_n)$ space are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Л. Соболев.* Об одной теореме функционального анализа, Мат. сб., 4, 46, 1938, 471—497.
2. *В. И. Кондрашов.* О некоторых свойствах функций пространства L_p, ДАН СССР. 48, 1945, 563—566.
3. *В. П. Ильин.* О теореме вложения для предельного показателя, ДАН СССР, 96, 1954, 905—908.
4. *N. Aronszajn.* Boundary values of functions with finite Dirichlet integral, Techn. Report 14, Univ. of Kansas, 1955, 77—94.
5. *В. М. Бабич, Л. Н. Слободецкий.* Об ограниченности интеграла Дирихле, ДАН СССР, 106, 4, 1956, 604—607.
6. *E. Gagliardo.* Caratterizazioni delle trace sulla frontiera relative ad alcune class di funzioni in u variabili, Rend. Semin, matem, un-ta di Podova, 27, 1967' 284—305.
7. *О. В. Бесов.* Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения, Труды МИАН СССР, 60, 1961, 42—81.
8. *О. В. Бесов.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения, ДАН СССР, 126, 6, 1959, 1163—1165.
9. *С. М. Никольский.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, Труды МИАН СССР, 38, 1951, 244—278.
10. *С. М. Никольский.* Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях, Мат. сб. 33, 75, 2, 1953, 261—326.
11. *П. И. Лизоркин.* Граничные свойства функций из весовых классов, ДАН СССР, 132, 1960, 514—517.
12. *Л. Н. Слободецкий.* Пространства С. Л. Соболева дробного порядка и их приложения к краевым задачам для дифференциального уравнения в частных производных ДАН СССР, 118, 2, 1958, 243—246.

13. С. В. Успенский. Свойства классов W с дробной производной на дифференцируемых многообразиях. ДАН СССР, 132, 1, 1960, 60—62.
14. С. М. Никольский. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., «Наука», 1977.
15. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., «Наука», 1975.
16. Ж.-Л. Лионс, Е. Madженес. Неоднородные граничные задачи и их применения, М., «Мир», 1971.
17. Х. Трибель. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы, М., «Мир», 1980.
18. Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения, УМН, 20, № 1, 1965, 3—74.
19. *J. Peetre.* Thooghts on Besov spaces. Lecture noteh, Lund, 1966.
20. *H. Triebel.* Anisotropic function spaces. I: Hardys's inequaliti, decamposition Aualisis Math., 10, 1984, 53—77.
21. Х. Трибель. Теория функциональных пространств, М., «Мир», 1986.
22. Й. Берг, Й. Лёфстрём. Интерполяционные пространства. Введение, М., «Мир», 1980.
23. С. М. Никольский. Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения, ДАН СССР, 146, № 4, 1962, 767—769.
24. П. И. Лизоркин. (L_p, L_q) мультипликаторы интегралов Фурье, ДАН СССР, 152, № 4, 1963, 808—811.
25. В. П. Михайлов. О поведении на бесконечности одного класса многочленов, Труды МИАН СССР, 91, 1967, 59—80.
26. С. Г. Михлин. О мультипликаторах интегралов Фурье, ДАН СССР, 109, 1966, 701—703.
27. П. И. Лизоркин. К теории мультипликаторов Фурье, Труды МИАН СССР, 173, 1986, 149—163.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIII, № 4, 1988 Математика

УДК 517.55

П. Л. ПОЛЯКОВ

НУЛИ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В ПОЛИДИСКЕ

Пусть f — голоморфная функция в полидиске $D^n = \{\zeta \in \mathbf{C}^n : |\zeta_i| \leqslant \leqslant 1,\ i = 1, \cdots, n\}$. Ее порядок определяется следующим образом [1], [2]:

$$\operatorname{ord} f = \inf \left\{ \alpha : \int\limits_{\{|\zeta_1| = \cdots = |\zeta_n|\}} (\rho(\zeta))^{-1+\alpha} \ln^+ |f(\zeta)|\, d\lambda(\zeta) < \infty \right\},$$

где $\lambda(\zeta)$ — мера Лебега на $\{\zeta : |\zeta_1| = \cdots = |\zeta_n|\}$, $\rho(\zeta) = \operatorname{dist}(\zeta, (bD)^n)$ и $\ln^+ |f(\zeta)| = \max\{\ln f(\zeta), 0\}$.

Пусть M — аналитическое подмножество в D^n чистой размерности $n-1$. μ — положительный поток типа $(1, 1)$, соответствующий интегрированию на M форм типа $(n-1, n-1)$. Порядок M определяется следующим образом [1]:

$$\operatorname{ord} M = \inf \left\{ \alpha : \int\limits_{\{|\zeta_1| = \cdots = |\zeta_n|\}} (\rho(\zeta))^{1+\alpha} \mu(\zeta) \wedge \varphi'(\zeta) < \infty \right\},$$

где $\varphi'(\zeta) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} d\varphi_1(\zeta) \wedge, \underset{\wedge}{\cdots}, \wedge d\varphi_n(\zeta)$, и $\varphi_i(\zeta) = \operatorname{Arg} \zeta_i$.

Имеет место известная теорема М. Джрбашяна [3].

Теорема. *Для дискретного подмножества M в D^1 выполняется равенство*

$$\operatorname{ord} M = \min_{\{f:\, Z(f) = M\}} \operatorname{ord} f,$$

где $Z(f) = \{\zeta : f(\zeta) = 0\}$.

Обобщение результата М. Джрбашяна на строго псевдовыпуклые области в $\mathbf{C}^n$ было получено Ш. Даутовым и Г. Хенкиным в [4]. Обобщение для случая бидиска получено в 1983 г. в работах [5], [8]. Для случая полидиска в $\mathbf{C}^n$ из многомерной формулы Йенсена [1], [2] вытекает

Предложение 1. *Если $M = \{\zeta : f(\zeta) = 0\}$, то* $\operatorname{ord} M \leqslant \operatorname{ord} f$.

Однако вопрос о построении функции f, обращающейся в нуль на $M \subset D^n$ и такой, что $\operatorname{ord} f = \operatorname{ord} M$, оставался открытым. Настоящая работа посвящена решению этого вопроса.

В работе доказывается следующая

Теорема 1. *Для любого аналитического подмножества M в D^n чистой размерности $n-1$ выполняется равенство*

$$\operatorname{ord} M = \min_{\{f: Z(f) = M\}} \operatorname{ord} f.$$

Эта теорема дает ответ на вопрос, поставленный в работе В. Штолля [1] и частичное решение задачи М. Джрбашяна об описании нулей голоморфных функций класса Неванлинны-Джрбашяна $N^{\alpha}(D^n)$, определенного условием

$$N^{\alpha}(D^n) = \left\{ f: \int\limits_{\{|\zeta_1| = \cdots = |\zeta_n|\}} (\rho(\zeta))^{-1+\alpha} \ln^+ |f(\zeta)| \, d\lambda(\zeta) < \infty \right\}.$$

Мы доказываем теорему 1 как следствие двух других теорем, формулируемых в терминах классов $N^{\alpha}(D^n)$. Для формулировки этих теорем нам потребуются следующие обозначения:

$$D(\delta) = \left\{ \zeta \in D: \rho_i \Big/ \sum_{k=1}^{n} \rho_k > \delta, \ i = 1, \cdots, n \right\},$$

где $0 \leqslant \delta \leqslant 1/n$ и $\rho_k = 1 - |\zeta_k|$;

$$V_M^{\alpha}(\delta) = \int\limits_{D(\delta)} (\rho_{\min})^{\alpha} \cdot \mu \Lambda \left(\sum_{l=1}^{n} \rho_{\widehat{l}} \cdot \Lambda_{j \neq l} \frac{\tau_j}{\rho_j} \right),$$

где M — аналитическое множество, μ — соответствующий положительный поток, $\tau_j = \sqrt{-1}\, d\zeta_j \Lambda d\bar{\zeta}_j$, $\rho_{\min}(\zeta) = \min\limits_k \rho_k(\zeta)$, $\rho_{\widehat{I}} = \sum\limits_{k \in I} \rho_k$, I — мультииндекс.

Теорема 2. *Пусть $M \subset D^n$ — аналитическое подмножество чистой размерности $n-1$. Тогда для существования голоморфной функции $f \in N^{\alpha}(D^n)$ такой, что $M = \{\zeta: f(\zeta) = 0\}$, необходимо, чтобы*

$$V_M^{\alpha}(\delta) = O\left(\frac{(\ln \delta)^{n-2}}{\delta} \right), \tag{1}$$

и достаточно, чтобы:

при $\alpha > 0$

$$\int\limits_{0}^{1/n} V_M^{\alpha}(\delta) \, d\delta = C(\mu) < \infty, \tag{2}$$

при $\alpha = 0$

$$\int\limits_{0}^{1/n} V_M(\delta) \cdot (\ln \delta)^{\nu(n) + \varepsilon} d\delta = C(\mu) < \infty, \tag{3}$$

где в случае $\alpha = 0$ $\nu(n) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} (n-i) \cdot 2^{i-1}$, $\varepsilon > 0$, а под $N(D^n)$ понимается класс Неванлинны, состоящий из голоморфных функций, удовлетворяющих условию

$$\sup_{r<1} \left\{ \int\limits_{\{|\zeta_1| = \cdots = |\zeta_n| = r\}} \ln^+ |f(\zeta)| \bigwedge_{k=1}^{n} d\varphi_k(\zeta) \right\} < \infty.$$

Теорема 3. *Пусть $M \subset D^n$ — аналитическое подмножество чистой размерности $n-1$ такое, что* $\operatorname{ord} M = \alpha$. *Тогда для* $\forall \varepsilon > 0$ *имеет место следующая оценка:*

$$V_M^{\alpha+1}(\delta) < C(\varepsilon, M) \cdot \frac{(\ln \delta)^{n-2}}{\delta^{1-\varepsilon/2}},$$

где $C(\varepsilon, M)$-константа, зависящая только от ε и M.

Утверждение теоремы 2 для случая бидиска вытекает из результатов [5] и [8]. Дополнительные результаты для бидиска получены в [9]. Необходимость условия (1) в теореме 2 и теорема 3 доказаны в [12]. В настоящей работе мы докажем достаточные условия в теореме 2, и докажем теорему 1, используя теоремы 2 и 3.

Автор приносит благодарность Г. М. Хенкину за поддержку и внимание, оказанные при написании этой работы.

§ 1. Доказательство оценок для коэффициентов потока, определяемого аналитическим множеством

Аналитическому множеству $M = \{\zeta \in D^n : f(\zeta) = 0\}$ соответствует замкнутый положительный поток $\mu = \left\{\sum_{i,j=1}^{n} \sqrt{-1}\, \mu_{ij}\, d\zeta_i \wedge d\bar{\zeta}_j\right.$, задаваемый интегрированием по M форм типа $(n-1, n-1)$, и положительная обобщенная функция типа меры $|\mu| = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ii}$. При этом [10]:

(i) f и μ связаны уравнением Пуанкаре—Лелона

$$\frac{\sqrt{-1}}{\pi} \partial\bar{\partial} \ln |f| = \mu,$$

(ii) коэффициенты μ_{ij} являются мерами с носителями на M, регулярными относительно $|\mu|$, а меры μ_{ii} положительны.

Доказательство достаточности в теореме 2 мы проведем по классической схеме, предложенной впервые Лелоном [11] и использовавшейся затем во многих работах (см. [4], [5], [7], [8]). По этой схеме последовательно решаются d и $\bar{\partial}$ уравнения с необходимыми оценками, и полученное решение уравнения $\partial\bar{\partial}$ задает искомую голоморфную функцию. Нашей ближайшей целью является получение оценок на коэффициенты μ_{ij} потока μ, следующих из условий (2), (3).

Введем такие обозначения.

Для мультииндексов I, J, K таких, что $|I|, |J|, |K| \leqslant n$, и набора строго положительных чисел $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ таких, что $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$, определим многообразия

$$\gamma^{\alpha}_{I,K}(z_J) = \{\zeta \in D^n : \zeta_J = z_J;\ 0 \leqslant \hat{\alpha}_{j_1} \cdot \rho_{j_1} \leqslant \cdots < \hat{\alpha}_{j_r} \cdot \rho_{j_r} \leqslant$$

$$\leqslant \hat{\alpha}_{i_1} \cdot \rho_{i_1} = \cdots = \hat{\alpha}_{i_p} \cdot \rho_{i_p} \leqslant \hat{\alpha}_{k_1} \cdot \rho_{k_1} = \cdots = \hat{\alpha}_{k_q} \cdot \rho_{k_q};\ \hat{\alpha}_{k_q} \cdot \rho_{k_q} \leqslant$$

$$< \hat{\alpha}_l \cdot \rho_l \text{ для } l \bar{\in} I \cup K \cup J\}, \text{ где } r = |J|,\ p = |I|,\ q = |K| \text{ и } \hat{\alpha}_s = \prod_{m \neq s} \alpha_m;$$

$$\gamma^a_{I,K} = \gamma^a_{I,K}(z_J) \text{ для } J=\varnothing; \quad \gamma^a_I=\gamma^a_{I,K}, \text{ для } K=\varnothing;$$

$$a^a_{I,K}(z_J) = \{\zeta\in D^n\colon \zeta_J=z_J;\ 0\leqslant \widehat{a}_{j_1}\cdot\rho_{j_1}\leqslant\cdots\leqslant \widehat{a}_{j_r}\cdot\rho_{j_r}=$$

$$=\widehat{a}_{i_1}\cdot\rho_{i_1}=\cdots=\widehat{a}_{i_p}\cdot\rho_{i_p}\leqslant\widehat{a}_{k_1}\cdot\rho_{k_1}=\cdots=\widehat{a}_{k_q}\cdot\rho_{k_q};\ \widehat{a}_{k_q}\cdot\rho_{k_q}\leqslant$$

$$\leqslant\widehat{a}_l\cdot\rho_l, \text{ для } l\overline{\in} I\cup K\cup J\}.$$

В следующем предложении мы доказываем необходимые оценки на коэффициенты μ.

Предложение 2. *Пусть* $\mu=\sum\limits_{l,j}\sqrt{-1}\,\mu_{lj}\,d\zeta_l\wedge d\overline{\zeta}_j$ *— поток интегрирования по аналитическому множеству* $M\subset D^n$ *чистой размерности* $n-1$ *такому, что* $M\overline{\ni}\{0\}$. *Пусть* μ *удовлетворяет условиям:*

при $\alpha>0$ *выполнено условие (2) теоремы 2;*

при $\alpha=0$ *выполнено условие (3), и аналитическое множество* M *задано в некоторой окрестности* D^n.

Тогда найдется набор чисел $(a_1,\ldots,a_n)$ *и константа* A *такие, что коэффициенты потока* μ *удовлетворяют следующим условиям:*

при $\alpha\geqslant 0$

$$\int\limits_{\gamma^a_I}\mu_{ll}\cdot\rho_l^{1+\alpha}\cdot T_I<A\cdot C(\mu), \tag{4}$$

$$\int\limits_{\gamma^n_I}(\mu_{mm}+|\mu_{ml}|)\cdot\rho_l^{\alpha}\cdot\rho_m\cdot T_I<A\cdot C(\mu), \tag{5}$$

$$\int\limits_{\gamma^a_{I,K}}(\mu_{mm}+\mu_{kk}+|\mu_{mk}|)\cdot\rho_l^{\alpha}\cdot T_{I,K}<A\cdot C(\mu); \tag{6}$$

при $\alpha=0$, *кроме условий (4), (5), (6) условиям*

$$\int\limits_0^{2\pi}d\varphi_{j_1}\cdots\int\limits_0^{2\pi}d\varphi_{j_r}\int\limits_{\gamma^a_I(z_J)}\mu_{ll}\cdot\rho_l\cdot T^J_I<A\cdot C(\mu), \tag{7}$$

$$\int\limits_0^{2\pi}d\varphi_{j_1}\cdots\int\limits_0^{2\pi}d\varphi_{j_r}\int\limits_{\gamma^a_I(z_J)}(\mu_{mm}+|\mu_{ml}|)\cdot\rho_m\cdot T^J_I<A\cdot C(\mu), \tag{8}$$

где $i\in I$, $k\in K$, $m\overline{\in} I$, $T_I=\bigwedge\limits_{s\overline{\in} I}\dfrac{\tau_s}{\rho_s}\wedge dr_{i_1}\bigwedge\limits_{i\in I}r_i\,d\varphi_i$,

$$T_{I,k}=\bigwedge\limits_{s\overline{\in} I\cup K}\frac{\tau_s}{\rho_s}\wedge dr_{i_1}\bigwedge\limits_{i\in I}r_i\,d\varphi_i\wedge dr_{k_1}\bigwedge\limits_{k\in K}r_k\,d\varphi_k,\quad T^J_I=\bigwedge\limits_{s\overline{\in} I\cup J}\frac{\tau_s}{\rho_s}\wedge dr_{i_1}\bigwedge\limits_{i\in I}r_i\,d\varphi_i,$$

в (7) и (8) $|z_{j_s}|=1$, *а константа* A *при* $\alpha=0$ *не зависит от окрестности полидиска* D^n, *в которой определен поток* μ.

Для доказательства предложения 2 нам понадобятся несколько лемм. Введем вначале такие обозначения. Для набора положительных чисел $\{a_i\}$ такого, что $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, и числа $\delta \in (0, 1)$ определим

$$D^a(\delta) = \left\{ \zeta \in D: \rho_k / \sum_{m=1}^{n} \rho_m > a_k \delta \right\},$$

$$\gamma_I^a(\delta) = \left\{ \zeta \in \gamma_I^a: \rho_i / \sum_{m=1}^{n} \rho_m \geqslant a_i \delta, \text{ для } i \in I \right\},$$

$$\sigma_I^a(\delta) = \left\{ \zeta \in \gamma_I^a: \rho_i / \sum_{m=1}^{n} \rho_m = a_i \delta, \text{ для } i \in I \right\}.$$

Лемма 1. *Пусть положительный поток типа* (1,1) μ *удовлетворяет условиям:*

$$\int_0^{1/n} V_M^{\alpha}(\delta)\, d\delta = C(\mu) < \infty, \text{ при } \alpha > 0, \tag{9}$$

$$\int_0^{1/n} V_M(\delta) \cdot (\ln \delta)^{\nu(n)+\varepsilon} d\delta = C(\mu), \text{ при } \alpha = 0. \tag{10}$$

Тогда найдется набор положительных чисел $(a_1, \ldots, a_n)$ *такой, что* $\sum_{m=1}^{n} a_m = 1$, *и константы* A, *для которых выполняются условия:*

при $\alpha > 0$

$$\int_{\gamma_I^a} \mu_{II} \cdot \rho_I^{1+\alpha} \cdot T < A \cdot C(\mu), \tag{11}$$

при $\alpha = 0$

$$\int_{\gamma_I^a} \mu_{II} \cdot \rho_I \cdot (\ln \theta_I)^{\nu(n)+\varepsilon} \cdot T_I < A \cdot C(\mu), \tag{12}$$

$$\int_0^{1/n} (\ln \delta)^{\nu(n)+\varepsilon} d\delta \int_{\gamma_I^a(\delta)} \mu_{II} \cdot \rho_{\hat{I}} \cdot T_I < A \cdot C(\mu), \tag{13}$$

$$\int_0^{1/n} (\ln \delta)^{\nu(n)+\delta} d\delta \int_{\gamma_I^a(\delta)} \mu_{kk} \cdot \rho_{\hat{k}} \frac{\rho_k}{\rho_I} \cdot T_I < A \cdot C(\mu), \tag{14}$$

где $i \in I$, $k \overline{\in} I$, $\rho_I = \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} \rho_i = \theta_I = \rho_I / \sum_{m=1}^{n} \rho_m$.

Доказательство. Пусть $V_a^{\alpha}(\delta) = \int_{D^a(\delta)} \rho_{\min}^{\alpha} \cdot \mu \Lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \rho_{\hat{i}} \bigwedge_{j \neq i} \frac{\tau_j}{\rho_j} \right)$.

Тогда, учитывая, что $V_a^\alpha(\delta) \leqslant V^\alpha(\hat{a}\cdot\delta)$, где $\hat{a} = \min_i a_i$, получаем для $\alpha > 0$ из условия (9) леммы:

$$\int_0^{1/n} V_a^\alpha(\delta)\, d\delta < A(a)\cdot C(\mu).$$

Интегрируя полученный интеграл по частям, имеем

$$\int_0^{1/n} \frac{dV_a^\alpha(\theta)}{d\theta}\cdot\theta\, d\theta < A(a)\cdot C(\mu). \tag{15}$$

где константа A зависит только от $\{a_i\}$.

Используя теперь в (15) неравенство

$$\frac{dV_a^\alpha(\theta)}{d\theta} \geqslant \frac{2a_l^{1+\alpha}\theta^\alpha}{(1-a_l\theta)^{2+\alpha}} \int_{\sigma_l^a(\theta)} \mu_{ll}\cdot r_l\cdot \rho_{\hat{l}}\cdot\left(\sum_{m\neq l}\rho_m\right) d\varphi_l \bigwedge_{m\neq l}\frac{\tau_m}{\rho_m},$$

получаем

$$\int_{\gamma_l^a(\delta)} \mu_{ll}\,\rho_l^{1+\alpha}\cdot T_l <$$

$$\leqslant \int_0^1 \frac{2a_l^{2+\alpha}\theta^{1+\alpha}}{(1-a_l\theta)^{3+\alpha}}\,d\theta \int_{\sigma_l^a(\theta)} \mu_{ll}\, r_l\left(\sum_{m\neq l}\rho_m\right)^2 d\varphi_l \bigwedge_{m\neq l}\frac{\tau_m}{\rho_m} < A(a)\cdot C(\mu), \tag{16}$$

где $A(a)$ — константа, зависящая только от набора $\{a_i\}$.

Из (16) заключаем, что неравенство (11) выполняется для $|I| = 1$ при произвольном выборе $\{a_i\}$ и соответствующей константе $A(a)$. Для доказательства (11) при $|I| > 1$ достаточно в интеграле из левой части (16) воспользоваться теоремой Фубини. Неравенство (12) доказывается вполне аналогично неравенству (11), но с использованием условия (10). Неравенства (13), (14) доказываются применением теоремы Фубини к интегралу из левой части (10).

З а м е ч а н и е. *Из доказательства леммы* 1 *видно, что множество наборов* $\{a_i\}$, *для которых выполняются неравенства* (11)—(14) *при соответствующей константе* A, *имеет положительную меру.*

Теперь всюду в дальнейшем будем предполагать набор $\{a_i\}$, для которого выполняется утверждение леммы 1, равным $\{1/n\}$ и будем писать всюду $\gamma_{I,K}$, $\sigma_{I,K}$ вместо $\gamma_{I,K}^a$, $\sigma_{I,K}^a$. В тех местах, где необходимо учесть отличие наборов $\{a_i\}$ и $\{1/n\}$, будут сделаны дополнительные замечания.

Для доказательства неравенства (5) нам понадобится такая лемма.

Л е м м а 2. *Пусть замкнутый положительный поток типа* (1,1) μ *удовлетворяет условиям* (9) *при* $\alpha > 0$ *или* (10)—*при* $\alpha = 0$. *Пусть кроме того выполнены условия:*

при $\alpha > 0$

$$\int\limits_{\gamma_I} \theta_I^{-1} \cdot \mu_{mm} \cdot \psi_I^{\alpha} \cdot (\rho_m)^2 \left(\sum_{s=1}^{n} \rho_s\right)^{-1} \cdot T_I < A \cdot C(\mu), \tag{17}$$

при $\alpha = 0$

$$\int\limits_{\gamma_I} \theta_I^{-1} (\ln \theta_I)^{-n+p+1-\varepsilon} \cdot \mu_{mm} (\rho_m)^2 \cdot \left(\sum_{s=1}^{n} \rho_s\right)^{-1} \cdot T_I < A \cdot C(\mu), \tag{18}$$

где $|I| = p + 1 \geqslant 2$. *Тогда неравенства* (17) *при* $\alpha > 0$ *или* (18) *при* $\alpha = 0$ *выполняются и для мультииндексов* I *таких, что* $|I| = p$.

Доказательство. Мы будем доказывать лемму для $\alpha > 0$. При $\alpha = 0$ доказательство несколько отличается от приводимого ниже, но более громоздко.

Рассмотрим функцию $\chi(\rho) \in C^{\infty}[0, 1]$ такую, что $\chi(\rho) = 0$ для $\rho > 19/20$ и $\chi(\rho) = 1$, для $\rho \leqslant 9/10$. Зафиксируем мультииндекс $I = (i_1, \cdots, i_p)$, индекс $m \overline{\in} I$ и определим

$$\psi_m = \chi(\rho_m) \cdot \rho_m, \quad \psi_I = \chi(\rho_I) \cdot \rho_I \ \text{ и } \ \beta = \psi_I^{\alpha} \cdot \psi_m \cdot \mu \bigwedge_{l \in I} d\varphi_l \bigwedge_{s \overline{\in} I \cup m} \frac{\tau_s}{\rho_s}.$$

Предположим вначале, что μ — гладкая дифференциальная форма, удовлетворяющая условиям леммы, и применим к форме β формулу Стокса на многообразии γ_I. Тогда получим

$$\sum_{l \in I} \int\limits_{\gamma_{I \cup l}} \beta = \int\limits_{\gamma_I} d\beta. \tag{19}$$

По определению формы β имеем на γ_I: $\beta = \beta_m + \sum_{l \in I} \beta_{lm}$, где

$$\beta_m = \psi_I^{\alpha} \cdot \psi_m \cdot \mu_{mm} \tau_m \bigwedge_{l \in I} d\varphi_l \bigwedge_{s \overline{\in} I \cup m} \frac{\tau_s}{\rho_s},$$

$$\beta_{lm} = \psi_I^{\alpha} \cdot \psi_m (\mu_{lm} \sqrt{-1}\, d\zeta_l \wedge d\bar{\zeta}_m + \mu_{ml} \sqrt{-1}\, d\zeta_m \wedge d\bar{\zeta}_l) \bigwedge_{l \in I} d\varphi_l \bigwedge_{s \overline{\in} I \cup m} \frac{\tau_s}{\rho_s}.$$

Аналогично $d\beta = \eta_m + \sum_{l \in I} \eta_{lm}$,

где

$$\eta_m = \psi_m \cdot \psi_I^{\alpha-1} \cdot \mu_{mm} d\psi_I \wedge \tau_m \bigwedge_{l \in I} d\varphi_l \bigwedge_{s \overline{\in} I \cup m} \frac{\tau_s}{\rho_s},$$

$$\eta_{lm} = \psi_I^{\alpha} \cdot (\mu_{lm} \sqrt{-1}\, d\zeta_l \wedge d\bar{\zeta}_m + \mu_{ml} \sqrt{-1}\, d\zeta_m \wedge d\bar{\zeta}_l) \wedge d\psi_m \bigwedge_{l \in I} d\varphi_l \bigwedge_{s \overline{\in} I \cup m} \frac{\tau_s}{\rho_s}.$$

Введем такие обозначения:

$$\beta_l = \psi_I^{1+\alpha} \cdot \mu_{ll} d\varphi_m \wedge dr_l \bigwedge_{l \in I} d\varphi_l \bigwedge_{s \overline{\in} I \cup m} \frac{\tau_s}{\rho_s},$$

$$\eta_l = \psi_I^{1+\alpha} \cdot \mu_{ll} dr_l \bigwedge_{l \in I} d\varphi_l \bigwedge_{s \overline{\in} I} \frac{\tau_s}{\rho_s},$$

$$P_{ml}=\int\limits_{\gamma/\cup l}|\beta_m|,\ P_l=\int\limits_{\gamma/\cup m}|\beta_l|,\ P_m=\int\limits_{\gamma/\cup m}\beta_m,\ P_{lm}=\int\limits_{\gamma/\cup m}|\beta_{lm}|,$$

$$Q_m=\int\limits_{\gamma_I}|\gamma_{lm}|,\ Q_l=\int\limits_{\gamma_I}|\gamma_{ll}|,\ Q_{lm}=\int\limits_{\gamma_I}|\gamma_{lm}|.$$

Ограничим область интегрирования в интеграле из (17) множеством $\hat{\gamma}_I=\gamma_I\cap\left\{\rho_i<\frac{9}{10}(i\in I),\ \rho_m<\frac{9}{10}\right\}$ и оценим этот интеграл следующим образом:

$$\int\limits_{\hat{\gamma}_I}\theta_I^{-1}\cdot\mu_{mm}\cdot\rho_I^{2}\cdot\rho_m^{2}\left(\sum_{s=1}^{n}\rho_s\right)^{-1}\cdot T_I<4\cdot Q_m. \tag{20}$$

Из (19), используя неравенство $|\mu_{lm}|^2\leqslant|\mu_{ll}|\cdot|\mu_{mm}|$ и неравенство Гёльдера для P_{lm} и Q_{lm}, получим

$$Q_m-\sum_{l\in I}Q_l^{1/2}\cdot Q_m^{1/2}<A\cdot\left(\sum_{l\in I\cup m}P_{ml}+\sum_{l\in I}P_l+P_m\right). \tag{21}$$

Используя теперь предположение леммы 2 для оценки P_l, P_m, P_{ml} и неравенство (11) из леммы 1 для оценки Q_l, получаем следующую оценку:

$$Q_m<A\cdot C(\mu). \tag{22}$$

Теперь, для завершения доказательства леммы 2 для гладких потоков, достаточно показать, что требуемая оценка сохраняется, если в интеграле из (20) расширить область интегрирования до γ_I. Для того, чтобы убрать условие $\rho_m<\frac{9}{10}$, произведем биголоморфное отображение $D^n\to D^n$ такое, что $\zeta_j'(\zeta)=\zeta_j$ при $j\neq m$, а $\zeta_m'(\zeta)=\frac{\zeta_m-1/5}{1-\zeta_m/5}$. При таком отображении $\rho_j'(\zeta)=\rho_j(\zeta)$ для $j\neq m$, а для $\rho_m'(\zeta)$ выполнены неравенства $C_1\rho_m(\zeta)\leqslant\rho_m'(\zeta)<C_2\cdot\rho_m(\zeta)$. Используя функции $\{\rho_j(j\neq m),\ \rho_m'\}$, получаем требуемую оценку для интеграла по области $\gamma_I\cap\left\{\rho_i(\zeta)<\frac{9}{10}(i\in I),\ \rho_m'(\zeta)<\frac{9}{10}\right\}$, которая вместе с полученной ранее оценкой позволяет убрать условие $\rho_m(\zeta)<\frac{9}{10}$. Для того, чтобы убрать условие $\rho_l(\zeta)<\frac{9}{10}(i\in I)$, достаточно воспользоваться ограниченностью $V^a(\delta)$ при $\delta>0$ и теоремой Фубини, так как многообразие $\gamma_I\cap\left\{\rho_l\geqslant\frac{9}{10}(i\in I)\right\}$ лежит строго внутри D^n для любого мультииндекса I.

Для доказательства леммы 2 для произвольного потока, приблизим поток μ на вложенных полидисках гладкими потоками $\mu^\delta(z)=$

$= \int\limits_D \chi_\delta(\zeta, z)\,\mu(\zeta)$, где $\chi_\delta(\zeta, z)$ — семейство гладких форм, приближающее диагональ $\{\zeta = z\}$ в $D(\zeta) \times D(z)$ в смысле теории потоков. Используя затем лемму 2 для гладких потоков μ^δ и неравенства (17) для потоков μ^δ и μ, получаем утверждение леммы 2 для произвольного потока μ.

Докажем теперь неравенство (5) из предложения 2. Для этого считая утверждение леммы 1 для $\gamma_{1\ldots n}$ базой индукции и применяя лемму 2 в качестве шага индукции, получим такие неравенства для замкнутого положительного потока μ, удовлетворяющего условиям предложения 2:

при $\alpha > 0$

$$\int\limits_{\gamma_I} \mu_{mm} \cdot \rho_I^{\alpha-1} \cdot \rho_m^2 \cdot T_I < A \cdot C(\mu), \tag{23}$$

при $\alpha = 0$

$$\int\limits_{\gamma_I} \mu_{mm} \cdot \rho_I^{-1} \cdot (\ln \theta_I)^{-n+p-\varepsilon} \cdot \rho_m^2 \cdot T_I < A \cdot C(\mu), \tag{24}$$

где $p = |I|$.

Из (23), (24) сразу следует часть неравенства (5) для μ_{mm}. Оставшаяся часть неравенства (5) при $\alpha > 0$ следует из такой цепочки неравенств:

$$\int\limits_{\gamma_I} |\mu_{ml}| \cdot \rho_l^{\alpha} \cdot \rho_m \cdot T_I < \left(\int\limits_{\gamma_I} \mu_{ll} \cdot \rho_l^{1+\alpha} \cdot T_I \right)^{1/2} \times$$
$$\times \left(\int\limits_{\gamma_I} \mu_{mm}\, \rho_l^{\alpha-1} \cdot \rho_m^2 \cdot T_I \right)^{1/2} < A \cdot C(\mu). \tag{25}$$

При $\alpha = 0$ необходимо воспользоваться неравенствами (12), (24) и неравенством $\nu(n) = 2\nu(n-1) + n - 1 \geqslant 2\nu(n-1) + n - p$ для получения неравенства

$$\int\limits_{\gamma_I} |\mu_{ml}|\,(\ln \theta_I)^{\nu(n-1)+\varepsilon/4} \cdot \rho_m \cdot T_I < A \cdot C(\mu), \tag{26}$$

которое заведомо сильнее (5) при $\alpha = 0$.

Неравенство (6) является простым следствием неравенства (5), которое получается с использованием теоремы Фубини для диагональных коэффициентов μ и затем неравенства Гёльдера для недиагональных.

Для завершения доказательства предложения 2, т. е. для доказательства неравенств (7), (8) нам нужна, кроме доказанных выше лемм 1 и 2, еще одна лемма, которую мы приведем без доказательства.

Введем также обозначения:

$$D(\varphi_j, \delta) = \left\{ \zeta \in D\colon \zeta_j = e^{\sqrt{-1}\,\varphi_j},\ \frac{\rho_i}{\sum\limits_{k \neq j} \rho_k} \geqslant \delta\ (i \neq j) \right\},$$

$$V_M(\varphi_j, \delta) = \int\limits_{D(\varphi_j, \delta)} \mu \wedge \Big(\sum_{l \neq j} \rho_{\widehat{lj}} \bigwedge_{s \neq l, j} \frac{\tau_s}{\rho_s} \Big).$$

Лемма 3. *Пусть положительный замкнутый поток типа* $(1, 1)$ μ *задан в окрестности полидиска* D^n *и удовлетворяет условию* (3). *Тогда выполняются следующие неравенства:*

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi_j \int\limits_0^{1/n} (\ln \delta)^{\nu(n-1)+\varepsilon 2}\, V'_M(\varphi_j \delta),\, d\delta < A \cdot C(\mu), \tag{27}$$

где $j \in (1, \ldots, n)$ *и константа* A *не зависит от окрестности* D^n, *в которой задан поток.*

Теперь, для доказательства неравенств (7), (8) достаточно применять по индукции лемму 3 и использовать на каждом шаге леммы 1, 2 для ограничения потока μ на $D(z_j)$ $(|z_{jm}| = 1)$. Это возможно для почти всех φ_j по теореме Фубини.

§ 2. Решение d-уравнения с оценкой

Наше следующее предложение показывает существование специального решения уравнения $dg = \mu$ для правой части μ, удовлетворяющей неравенствам (4)—(8).

Предложение 3. *Пусть аналитическое множество в* D^n $M \mathrel{\overline{\ni}} \{0\}$ *таково, что соответствующий положительный замкнутый поток* μ *удовлетворяет неравенствам* (4)$\div$(8), *а при* $\alpha = 0$ *множество* M *задано в некоторой окрестности* D^n. *Тогда существует решение уравнения* $dg = \mu$ *на* D^n *такое, что* $g = g^{0,1} + \overline{g^{0,1}}$, *и коэффициенты* $\overline{\partial}$*-замкнутой формы* $g^{0,1} = \sum\limits_{m=1}^{n} g_m\, d\overline{\zeta}_m$ *удовлетворяют следующим условиям:*

при $\alpha > 0$

$$\int\limits_{\tau_I} \rho_I^{\varepsilon} \cdot |g_i| \cdot T_I < A \cdot C(\mu), \tag{28}$$

$$\int\limits_{\tau_{I,K}} \rho_I^{\alpha-1} \cdot |g_k| \cdot T_{I,K} < A \cdot C(\mu), \tag{29}$$

при $\alpha = 0$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi_{j_1} \cdots \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_{j_r} \int\limits_{\tau_I(z_J)} |g_i| \cdot T_I^J < A \cdot C(\mu) \quad (|z_{\tau m}| = 1), \tag{30}$$

где $i \in I$, $k \in K$, *и при* $\alpha = 0$ *константа* A *не зависит от окрестности, в которой задан поток* μ.

Доказательство. Искомая форма $g^{0,1}$ находится по формулам гомотопии

$$g^{0,1}(\zeta)=\sum_{l=1}^{n}\left(\int_{0}^{1}dt\sum_{k=1}^{n}\frac{dZ_k(\zeta,t)}{dt}\cdot\mu_{kl}(Z(\zeta,t))\right)d\bar{\zeta}_l, \tag{31}$$

где $Z(\zeta,t):D^n\times[0,1]\to D^n$ — гомотопия, выбираемая по разному для случаев $\alpha>0$ и $\alpha=0$. Опишем выбор гомотопии в случаях $\alpha>0$ и $\alpha=0$.

Пусть $\alpha>0$. Предположим для упрощения выкладок, что набор чисел $\{a_i\}$ из предложения 2 таков: $\{1/n\}$, и рассмотрим гомотопию Пуанкаре: $Z_m(\zeta,t)=t\cdot\zeta_m$. Для доказательства (28) предположим, что $I=(1,\dots,p)$ и воспользуемся такой цепочкой неравенств:

$$\int_{\gamma_I}\rho_I^{\alpha}(\zeta)\cdot|g_I(\zeta)|\cdot T_I(\zeta)<A\cdot\int_{\gamma_I}\rho_I^{\alpha}(\zeta)\cdot T_I(\zeta)\int_{t_0}^{1}dt\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{dZ_k(\zeta,t)}{dt}\right|\times\right.$$

$$\left.\times|\mu_{kl}(Z(\zeta,t))|\right)<A\cdot\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_I}\rho_I^{\alpha}(\zeta)\,d\rho_I(\zeta)\bigwedge_{m>p}\frac{d\rho_m(\zeta)}{\rho_m(\zeta)}\bigwedge_{s=1}^{n}r_s(\zeta)\,d\varphi_s(\zeta)\times$$

$$\times\int_{t_0}^{1}dt\,|\mu_{kl}(Z(\zeta,t))|<A\cdot\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\rho_0}u^{\alpha}\,du\int_{u}^{\rho_0}\frac{dv_1}{v_1}\cdots\int_{u}^{\rho_0}\frac{dv_{n-p}}{v_{n-p}}\times$$

$$\times\int_{\gamma_I\cap\{\rho_I=u,\ \rho_m=v_{m-p}\}}\bigwedge_{s=1}^{n}r_s\,d\varphi_s\int_{t_0}^{1}dt\,|\mu_{kl}(Z(\zeta,t))|<A\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=p+1}^{n}\int_{0}^{\rho_0}\frac{u^{\alpha+1}\,du}{u}\times\right. \tag{32}$$

$$\times\int_{u}^{\rho_0}\frac{dv_1}{v_1}\cdots\widehat{j}\cdots\int_{u}^{\rho_0}\frac{dv_{n-p}}{v_{n-p}}\int_{\gamma_I\cap\{\rho_I=\rho_j=u,\ \rho_m=v_{m-p}\}}\bigwedge_{s=1}^{n}r_s\,d\varphi_s\int_{t_0}^{1}dt\,|\mu_{kl}(Z(\zeta,t))|+$$

$$+\int_{0}^{\rho_0}u^{\alpha+1}\,du\int_{u}^{\rho_0}\frac{dv_1}{v_1}\cdots\int_{u}^{\rho_0}\frac{dv_{n-p}}{v_{n-p}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\int_{\gamma_I\cap\{\rho_I=u,\ \rho_m=v_{m-p}\}}\bigwedge_{s=1}^{n}r_s\,d\varphi_s\times\right.$$

$$\left.\times\int_{t_0}^{1}dt\,|\mu_{kl}(Z(\zeta,t))|\right)<A\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j\in I}\int_{\gamma_{I\cup j}}\rho_{I\cup j}^{\alpha}(\zeta)\cdot T_{I\cup j}(\zeta)\int_{t_0}^{1}dt\,|\mu_{kl}(Z(\zeta,t))|+\right.$$

$$\left.+\int_{\gamma_I}\rho_I^{1+\alpha}(\zeta)|\mu_{kl}(\zeta)|\cdot T_I(\zeta)\right),$$

где в предпоследнем неравенстве мы воспользовались интегрированием по частям по u, а в последнем таким неравенством:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\int_{\gamma_I\cap\{\rho_I=u,\ \rho_m=v_{m-p}\}}\bigwedge_{s=1}^{n}r_s\,d\varphi_s\int_{t_0}^{1}dt\,|\mu_{kl}(Z(\zeta,t))|\right)<$$

$$<A\cdot\int_{\gamma_I\cap\{\rho_I=u,\ \rho_m=v_{m-p}\}}\bigwedge_{s=1}^{n}r_s\,d\varphi_s\cdot|\mu_{kl}(\zeta)|.$$

Теперь из (32) получаем, что (28) доказывается индукцией по $p=|I|$ от n до 1 с использованием условий (4), (5) на каждом шаге индукции. Предположение индукции при $|I|=n$ доказывается с помощью выкладок, вполне аналогичных (32).

Оценка (29) доказывается аналогично (28) индукцией по $|K|$ от $n-|I|$ до 1 с использованием выкладок, аналогичных (32). При доказательстве шага индукции применяются неравенства (28) и (6). Предположение индукции при $|K|=n-|I|$ является следствием неравенства (28) при $|I|=n$.

При произвольном «неравновесном» выборе $\{a_i\}$ гомотопию Пуанкаре необходимо модифицировать следующим образом. Если $a_l=\max\limits_i\{a_i\}$, то определим

$$
\begin{gathered}
Z_l^a(\zeta,\ t)=t\cdot\zeta_l,\\
Z_m^a(\zeta,\ t)=\left(1-\frac{a_m}{a_l}+t\left(|\zeta_m|-1+\frac{a_m}{a_l}\right)\right)\cdot\frac{\zeta_m}{|\zeta_m|}\ (m\neq l).
\end{gathered}
\tag{33}
$$

Легко видеть, что построенная гомотопия сохраняет многообразия $\Upsilon^a_{I,K}$ и $Z^a(\zeta,\ t)\in D^n$ при $t<1$.

Пусть теперь $\alpha=0$. В этом случае используются несколько гомотопий, которые строятся индуктивно по размерности полидиска n. В случае $n=1$ искомой гомотопией является гомотопия Пуанкаре. В случае произвольного n рассмотрим покрытие полидиска D^n областями:

$$
\begin{aligned}
D^{(0)}&=\{\zeta\in D^n:\rho_i(\zeta)<1-\delta/2\ (i=1,\cdots,\ n)\},\\
D^{(l)}&=\{\zeta\in D^n:\rho_l(\zeta)>1-\delta\},
\end{aligned}
$$

где $\delta>0$ выбрано из условия $\mu_{IJ}(\zeta)=0$, если $\max\limits_k|\zeta_k|<\delta$. Приведем доказательство предложения 3 при $\alpha=0$ для „равновесного" набора $\{a_i\}=\{1/n\}$.

Используя разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{D^{(0)},\ D^{(l)}\}$, получаем, что для доказательства предложения 3 достаточно построить формы $g^{(0)}, g^{(l)}$ на областях соответственно $D^{(0)}$, $D^{(l)}$, удовлетворяющие (30) и такие, что $d\,(g^{(0)}+\overline{g^{(0)}})=\mu|_{D^{(0)}}$ и $d\,(g^{(l)}+\overline{g^{(l)}})=\mu|_{D^{(l)}}$.

При построении искомых форм $g^{(l)}$ на $D^{(l)}$ мы можем предполагать, что условия предложения 3 выполнены на полидисках $D_0^{(l)}=\{\zeta\in D^n:\zeta_l=0\}$ размерности $n-1$, так как этого можно добиться подходящей голоморфной заменой координат. Поэтому, используя предположение индукции, находим формы $g_0^{(l)}$ на $D_0^{(l)}$, удовлетворяющие условиям (30) на $D_0^{(l)}$. Теперь форма $g^{(l)}$ определяется из равенства

$$
g^{(l)}(\zeta_1,\cdots,\ \zeta_n)=g_0^{(l)}(\zeta_1,\cdots,\ \underset{\widehat{l}}{0},\cdots,\ \zeta_n)+\tilde{g}^{l}(\zeta_1,\cdots,\ \zeta_n),
$$

где форма $\tilde{g}^{(l)}$ получается применением оператора гомотопии Пуанкаре по переменной ζ_l к потоку μ. Коэффициенты $\tilde{g}_J^{(l)}$ при $d\bar{\zeta}_J$ находятся по формулам

$$\tilde{g}_j^{(l)}(\zeta)=\int_0^1 dt\cdot\zeta_j\cdot\mu_{lj}(\zeta_1,\cdots,t\zeta_l,\cdots,\zeta_n).$$

Предполагая теперь без ограничения общности, что $M\cap D_0^{(l)}$ является аналитическим подмножеством в $D_0^{(l)}$ коразмерности 1 $(i=1,\cdots,n)$ и учитывая условие (30) для $g_0^{(l)}$ на $D_0^{(l)}$, получаем выполнение (30) для $g_0^{(l)}$ на $D^{(l)}$. Оценка (30) для $\tilde{g}^{(l)}$ получается из условий (4), (5) для коэффициентов μ.

Для завершения доказательства предложения 3 в случае $\alpha=0$ достаточно теперь построить форму $g^{(0)}$ на $D^{(0)}$, удовлетворяющую (30). Эта задача решается специальной гомотопией «к остову». А именно, определим отображение $\tilde{Z}(\zeta,t)$:

$$\varphi_k(\tilde{Z}(\zeta,t))=\varphi_k(\zeta),$$

$$\rho_k(\tilde{Z}(\zeta,t))=t\cdot\rho_k(\zeta)+n(1-t)\rho_k(\zeta)\cdot\left(\sum_{m=1}^n\rho_m(\zeta)\right)^{-1}, \tag{34}$$

и гомотопию Z по формуле $Z(\zeta,t)=\tilde{Z}(\zeta,\tau(\zeta,t))$, где функция $\tau(\zeta,t)\in\in C^\infty(D^n\times[0,1])$ выбирается следующим образом. Для произвольной точки ζ рассматриваем $T(\zeta)=\{t:\max\limits_l\rho_l(\tilde{Z}(\zeta,t))\geqslant 1-\delta/2\}$. Из (34) следует, что $T(\zeta)$ непусто для $\zeta\in D^n$. Определим $t'(\zeta)=\sup\{T(\zeta)\}$ и строим функцию $\tau(\zeta,t)$ так, чтобы $\tau(\zeta,t)=t$ при $t>t'(\zeta)+\delta/n$ и $\dfrac{d\tau(\zeta,t)}{dt}=0$ при $t<t'(\zeta)-\delta/n$. Модификация $\tilde{Z}$ с помощью τ производится для того, чтобы гомотопия Z была определена корректно, т. е. чтобы $\rho_k(Z(\zeta,t))\leqslant 1$.

Для доказательства оценки (30) для $g^{(0)}$ нам понадобятся такие оценки:

$$\frac{dZ_k(\zeta,t)}{dt}=O(1)\cdot\frac{\rho_k(Z(\zeta,t))}{\rho(Z(\zeta,t))}, \tag{35}$$

$$T_l'(\zeta)\big|_{\gamma_l(z_j)\cap D^{(0)}}=O(1)\cdot T_l'(Z(\zeta,t))\big|_{\gamma_l(z_j)\cap D^{(0)}}, \tag{36}$$

где $\rho(\zeta)=\sum\limits_{m=1}^n\rho_m(\zeta)$.

Оценка (35) является непосредственным следствием формул (34). Для доказательства (36) необходимо ввести сферические координаты $\theta_1,\cdots,\theta_{n-r-p}$ из условий

$$\rho_l(\zeta)=\frac{1}{p}\,\rho(\zeta)\cdot\sin^2\theta_1(\zeta),\quad \rho_n(\zeta)=\rho(\zeta)\cdot\cos^2\theta_1(\zeta)\cdots\cos^2\theta_{n-r-p}(\zeta),$$

где $p=|I|$, $r=|J|$ и для простоты обозначений $J=(1,\cdots,r)$, $I==(r+1,\cdots,r+p)$. Формулы (34) показывают, что $\theta_s(Z(\zeta,t))==\theta_s(\zeta)$ и $d_\varphi\rho(\zeta)=O(1)\,d\varphi(Z(\zeta,t))$, а отсюда легко следует (36).

Используя теперь формулы (31), (34) и оценки (35), (36), получаем

$$\int\limits_{\gamma_I(z_J)\cap D^{(0)}} |g_I^{(0)}|\cdot T_I^J <$$

$$< A\cdot \int\limits_{\gamma_I(z_J)\cap D^{(0)}} T_I^J(\zeta)\cdot \int\limits_{t_0}^{1} dt \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{dZ_k(\zeta,\ t)}{dt}\right|\cdot|\mu_{kI}(Z(\zeta,\ t))| <$$

$$< A\cdot\int\limits_{t_0}^{1} dt \int\limits_{\gamma_I(z_J)\cap\{\rho(w)>n(1-t)\}} T_I^J(w)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_k(w)}{\rho(w)}\cdot|\mu_{kI}(w)|\right) < \tag{37}$$

$$< A\cdot \int\limits_{t_0}^{1} dt \int\limits_{t_0}^{t} \frac{ds}{n(1-s)} \int\limits_{\gamma_I(z_J)\cap\{\rho(w)=n\cdot(1-s)\}} T_I^J(w)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\rho_k(w)\cdot|\mu_{kI}(w)|\right) <$$

$$< A\cdot \int\limits_{\gamma_I(z_J)\cap D^{(0)}} T_I^J(w)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\rho_k(w)\cdot|\mu_{kI}(w)|\right) < A\cdot C(\mu),$$

где в предпоследнем неравенстве мы воспользовались интегрированием по частям, и в последнем условиями (4), (5).

§ 3. Решение $\bar\partial$-уравнения с оценкой и доказательство теорем

Следующее предложение посвящено решению с оценкой уравнения $\bar\partial h = g$ для $\bar\partial$-замкнутой формы типа $(0,1)$ g, удовлетворяющей условиям (28), (29) или (30).

Предложение 4. *Пусть* $g^{0,1}$ $\bar\partial$*-замкнутая форма на полидиске* D^n*, удовлетворяющая условиям* (28), (29) *или условию* (30). *Тогда существует решение* h *уравнения*

$$\bar\partial h = g^{0,1} \tag{38}$$

такое, что:

при $\alpha > 0$

$$\int\limits_{\gamma_{1\ldots n}} \rho(\zeta)^{-1+\alpha}\cdot|\operatorname{Im} h(\zeta)|\, d\lambda(\zeta) < A\cdot C(\mu), \tag{39}$$

при $\alpha = 0$

$$\int\limits_{\sigma_{1\ldots n}} |h(\zeta)| \bigwedge_{k=1}^{n} d\varphi_k(\zeta) < A\cdot C(\mu). \tag{40}$$

Для доказательства предложения 4 нам понадобится специальная формула для решения уравнения (38). Введем необходимые обозначения:

$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ — набор неотрицательных чисел,

$$G_m(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\frac{1-|\zeta_m|^2}{1-\bar{\zeta}_m \cdot z_m} \right)^{1+\gamma_m} \cdot P_{I,J}(\zeta, z) =$$

$$= (-1)^{n-p-r+\frac{1}{2}p\cdot(p-1)+1} \bigwedge_{l \in I} G_l(\zeta, z) \frac{d\zeta_l}{\zeta_l - z_l} \bigwedge_{l \notin I, J} \bar{\partial}_\zeta \left(G_l(\zeta, z) \frac{d\zeta_l}{\zeta_l - z_l} \right),$$

где $p = |I|$, $r = |J|$.

Зафиксируем на $\gamma_{I,K}(z_J)$ в качестве положительной формы объема следующую форму:

$$\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \right)^{n-p-q-r} dr_1 \wedge dr_2 \wedge d\varphi_{k_q} \wedge, \cdots, \wedge d\varphi_{k_1} \wedge d\varphi_{l_p} \wedge, \cdots, \wedge$$

$$\wedge d\varphi_{l_1} \wedge \omega(n-p-q-r),$$

где

$$r_1 = |\zeta_i| (i \in I),\ r_2 = |\zeta_k|\ (k \in K),\ \omega(n-p-q-r) =$$

$$= \bigwedge_{l \notin I, J, K} (d\xi_l \wedge d\zeta_l),\ p = |I|,\ r = |J|,\ q = |K|.$$

Предложение 5. *Пусть $g^{0,1}$ — $\bar{\partial}$-замкнутая форма на полидиске D^n. Тогда функция h на D^n, определяемая по формуле*

$$h(z) = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{\{|J|=r\}} \left(\sum_{\{I \cap J = \varnothing\}} \int_{\gamma_I(z_J)} g^{0,1}(\zeta) \wedge P_{I,J}(\zeta, z) \right), \tag{41}$$

удовлетворяет уравнению (38).

Предложение 5 является обобщением ряда формул, полученных в работах [5], [6] при участии Б. Берндтссона (B. Berndtsson). Доказательство предложения 5 здесь не приводится.

Доказательство предложения 4. Пусть вначале $\alpha = 0$. Будем доказывать оценку (40) для компонент решения, определенных следующим образом:

$$h_{I,J}(z) = \int_{\gamma_I(z_J)} g^{0,1}(\zeta) \wedge P_{I,J}(\zeta, z), \tag{42}$$

где $P_{I,J}$ построены по набору $\{\alpha_m = 0\ (m = 1, \cdots, n)\}$.

Используя определение $P_{I,J}$, получаем

$$\int_{\sigma_{1\ldots n}} |h_{I,J}(z)| \bigwedge_{k=1}^{n} d\varphi_k(z) = \int_{\sigma_{1\ldots n}} \bigwedge_{k=1}^{n} d\varphi_k(z) \left| \int_{\gamma_I(z_J)} g^{0,1}(\zeta) \wedge P_{I,J}(\zeta, z) \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi_1(z) \cdots \int_0^{2\pi} d\varphi_n(z) \left| \int_{\gamma_I(z_J)} g^{0,1}(\zeta) \bigwedge_{l \in I} \left(\frac{(1-|\zeta_l|^2\, d\zeta_l}{2\pi\sqrt{-1}(1-\bar{\zeta}_l z_l)\ (\zeta_l - z_l)} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \bigwedge_{l \notin I, J} \left(\frac{d\zeta_l \wedge d\bar{\zeta}_l}{2\pi\sqrt{-1}\,(1-\bar{\zeta}_l z_l)^3} \right) \right| < A \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi_{j_1} \cdots \int_0^{2\pi} d\varphi_{j_r} \times$$

$$\times\Big(\sum_{l\in I}\int\limits_{T_I(z_J)}|g_l(\zeta)|\cdot T_I^J(\zeta)\Big)<A\cdot C(\mu),$$

где в предпоследнем неравенстве мы воспользовались оценками

$$\Big|\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{|\zeta-z|\cdot|1-\bar\zeta z|}\Big|<A\cdot\frac{1}{1-|\zeta|^2},\quad\Big|\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{|1-\bar\zeta z|^2}\Big|<A\cdot\frac{1}{1-|\zeta|^2},$$

а в последнем условием (30).

Пусть теперь $\alpha>0$. В этом случае мы воспользуемся формулой (41) для набора $\{\alpha_m=\alpha\ (m=1,\dots,n)\}$. Так же, как в (42) определим компоненты $h_{I,J}$. Для доказательства оценки (39) нам понадобится такая лемма.

Лемма 4. *Существует $A>0$ такое, что при $|\zeta|<1$ и $\alpha>0$:*

$$\Big|\int\limits_{|z|=1}\frac{(1-|\zeta|^2)^{\alpha-1}}{|1-\bar\zeta z|^{\alpha+1}}dz\Big|<A\cdot\frac{1}{1-|\zeta|^2},\tag{43}$$

$$\Big|\int\limits_{|z|=1}\frac{(1-|\zeta|^2)^{\alpha+1}dz}{|1-\bar\zeta\cdot z|^{\alpha+1}|\zeta-z|}\Big|<A.\tag{44}$$

Если $|\zeta_1|=\dots=|\zeta_p|<1$, то

$$\prod_{l=1}^{p}(1-|\zeta_l|^2)^{1+\alpha}\cdot\Bigg|\int\limits_{|z_1|=\dots=|z_p|}\frac{d\bar z_1\bigwedge\limits_{l=1}^{p}dz_l\cdot(1-|z_1|^2)^{\alpha-1}}{\prod\limits_{l=1}^{p}\big[|1-\bar\zeta_l z_l|^{\alpha+1}\cdot|\zeta_l-z_l|\big]}\Bigg|<A\cdot(1-|\zeta_1|^2)^{\alpha}.\tag{45}$$

Доказательство этой леммы мы опускаем.

Оценим теперь те компоненты $h_{I,J}$, у которых $J=\varnothing$. В этом случае имеем

$$\int\limits_{T_{1\dots n}}\rho^{\alpha-1}(z)\,d\bar z_1\bigwedge_{s=1}^{n}dz_s\Big|\int\limits_{T_I}g^{0,1}(\zeta)\bigwedge_{l\in I}\Big(G_l(\zeta,z)\cdot\frac{d\zeta_l}{\zeta_l-z_l}\Big)\bigwedge_{s\bar\in I}\times$$

$$\times\Big(\bar\partial_\zeta G_s(\zeta,z)\wedge\frac{d\zeta_s}{\zeta_s-z_s}\Big)\Big|\leqslant A\cdot\int\limits_{T_I}|g^{0,1}(\zeta)|\bigwedge_{l\in I}d\zeta_l\bigwedge_{s\bar\in I}\tau_s(\zeta)\times$$

$$\times\Bigg(\prod_{l\in I}(1-|\zeta_l|^2)^{1+\alpha}\int\limits_{|z_{l_1}|=\dots=|z_{l_p}|}\frac{d\bar z_1\bigwedge\limits_{l\in I}dz_l\cdot\rho_{l_1}^{\alpha-1}(z)}{\prod\limits_{l\in I}\big[|1-\bar\zeta_l z_l|^{\alpha+1}\cdot|\zeta_l-z_l|\big]}\Bigg)\times$$

$$\times\prod_{s\bar\in I}\Big(\int\limits_{|z_s|=1}\frac{dz_s\cdot(1-|\zeta_s|^2)^{\alpha-1}}{|1-\bar\zeta_s z_s|^{\alpha+1}}\Big)<$$

$$<A\cdot\sum_{l\in I}\int\limits_{T_I}\rho_I^{\alpha}(\zeta)\cdot|g_I(\zeta)|\cdot T_I(\zeta)<A\cdot C(\mu),$$

где в предпоследнем неравенстве мы воспользовались неравенствами (33) и (35), а в последнем условием (28).

Для оценки тех компонент, у которых $J \neq \varnothing$, применим индукцию по $|I|$ от 1 до $n - |J|$. Зафиксируем мультииндексы I и J, набор $z_{j_1}, \ldots, z_{j_r}$ такой, что $|z_{j_1}| = \cdots = |z_{j_r}| = \cdots = |z_{I_r}|$, и определим

$$D(z_J) = \{\zeta \in D^n : \zeta_{j_m} = z_{j_m}\}, \quad D^I(z_J) = \{\zeta \in D(z_J) : 1 \geqslant |\zeta_i| >$$

$$> |z_{j_1}| \ (i \in I)\}, \quad h_J^I(z) = \sum_{\substack{J' \supseteq J \\ \{I', J' \subset I \cup J\}}} \int\limits_{T_{I'}(z_{J'})} g^{0,1}(\zeta) \wedge p_{I', J'}(\zeta, z).$$

Тогда функция $\operatorname{Im} h_J^I(z)$ плюригармонична по $z_i \ (i \in I)$ в $D^I(z_J)$, так как $\bar\partial_I h_J^I(z)|_{D^I(z_J)} = 0$, где $\bar\partial_I$ — $\bar\partial$-дифференциал по переменным $z_i \ (i \in I)$. Отсюда заключаем

$$\left| \int\limits_{|z_I| = |z_{j_1}|} \bigwedge_{i \in I} dz_i \, |\operatorname{Im} h_{I,J}(z)| \right| \leqslant \left| \int\limits_{|z_i| = |z_{j_1}|} \bigwedge_{i \in I} dz_i \Big(|\operatorname{Im} h_J^I(z)| + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{|I'| \leq |I| \\ J' \supset J}} |\operatorname{Im} h_{I', J'}(z)| \Big) \right| < \left| \int\limits_{|z_i| = 1} \bigwedge_{i \in I} dz_i \, |\operatorname{Im} h_J^I(z)| \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{|z_I| = |z_{j_1}|} \bigwedge_{i \in I} dz_i \sum_{\substack{|I'| \leq |I| \\ J' \supset J}} |\operatorname{Im} h_{I', J'}(z)| \right|. \tag{46}$$

Тогда имеем

$$\int\limits_{T_{1 \ldots n}} \rho^{\alpha-1}(z) \, d\bar z_{j_1} \bigwedge_{s=1}^{n} dz_s \, |\operatorname{Im} h_{I,J}(z)| <$$

$$< \int\limits_{|z_{j_1}| = \cdots = |z_{j_r}|} \rho_{j_1}^{\alpha-1}(z) \, d\bar z_{j_1} \bigwedge_{m \bar\in I} dz_m \int\limits_{\substack{\{|z_i| = |z_{j_1}|\} \\ i \in I}} \bigwedge_{i \in I} dz_i \, |\operatorname{Im} h_J^I(z)| + A \cdot C(\mu) <$$

$$< \int\limits_{|z_{j_1}| = \cdots = |z_{j_r}|} \rho_{j_1}^{\alpha-1}(z) \, d\bar z_{j_1} \bigwedge_{m \bar\in I} dz_m \int\limits_{\substack{\{|z_i| = 1\} \\ i \in I}} \bigwedge_{i \in I} dz_i \, |\operatorname{Im} h_J^I(z)| + A \cdot C(\mu) <$$

$$< \sum_{\substack{I' \subseteq I \\ J' \supseteq J}} \Bigg(\int\limits_{\substack{\{|z_j| = |z_{j_1}|\} \\ j \in J'}} \rho_{j_1}^{\alpha-1}(z) \, d\bar z_{j_1} \bigwedge_{j \in J'} dz_j \cdot \Bigg(\int\limits_{T_{I'}(z_{J'})} \Big(\sum_{i \in I'} |g_i| \, d\bar\zeta_i \Big) \bigwedge_{i \in I'} d\zeta_i \bigwedge_{s \bar\in I', J'} \zeta_s(\zeta) \times$$

$$\times \int\limits_{\substack{\{|z_i| = 1\} \\ i \in I'}} \bigwedge_{i \in I'} \frac{(1 - |\zeta_i|^2) \, dz_i}{|1 - \bar\zeta_i z_i|^{1+\alpha} \, |\zeta_i - z_i|^{\beta}} \times \int\limits_{\substack{\{|z_s| = 1\} \\ s \bar\in I', J'}} \frac{(1 - |\zeta_s|^2)^{\alpha-1} \, dz_s}{|1 - \bar\zeta_s z_s|^{\alpha+1}} \Bigg) \Bigg) +$$

$$+ A \cdot C(\mu) < A \cdot C(\mu),$$

где в первом неравенстве мы воспользовались (46) и предположением индукции, во втором неравенстве использовано (46), а в последнем неравенства (43), (44) и условие (39) для $\gamma_{J',J''}$. При доказательстве базы индукции, т. е. оценки для $\operatorname{Im} h_{I,J}$ при $|I|=1$ достаточно воспользоваться гармоничностью $h_{I,J}$ в $D^{I}(z_J)$, что впервые было отмечено Ф. Шарпантье (Ph. Charpentier) в [7].

Замечание. Нами доказана необходимая оценка на многообразии $\gamma^{a}_{1\ldots n}$, где набор $\{a_i\}$ фиксирован. Однако, используя одномерное неравенство Йенсена, легко получаем требуемую оценку на произвольном многообразии $\gamma^{a}_{1\ldots n}$.

Доказательство достаточности в теореме 2.

Для доказательства достаточности в теореме 2 последовательно применяем предложения 2, 3 и 4 и получаем решение $u=2\pi\,(\operatorname{Im} h)$ уравнения Пуанкаре — Лелона $\partial\bar{\partial}\dfrac{\sqrt{-1}}{\pi}u=\mu$, удовлетворяющее (39) или (40). Т. к. для призвольной голоморфной F, имеющей M множеством нулей, выполняется уравнение $\partial\bar{\partial}\dfrac{\sqrt{-1}}{\pi}\ln|F|=\mu$, то получаем, что существует голоморфная функция f на D^n такая, что $u=\ln|f|$. Это завершает доказательство теоремы 2 при $\alpha>0$. При $\alpha=0$ необходимо применить предложения 2, 3, и 4 к потоку μ на вложенных полидисках, а затем, используя диагональный канторовский процесс, построить последовательность голоморфных функций, сходящуюся равномерно на компактах к искомой голоморфной функции.

Доказательство теоремы 1. Для доказательства теоремы 1 достаточно для аналитического подмножества M в D^n чистой размерности $n-1$ построить голоморфную функцию f такую, что $M=\{\xi\in D^n: f(\xi)=0\}$ и $\operatorname{ord} f=\operatorname{ord} M$.

Обозначим $\alpha=\operatorname{ord} M$. Тогда, используя теорему 3, получаем:

$$V_M^{\alpha+\varepsilon}(\delta)<A(\varepsilon)\cdot\frac{(\ln\delta)^{n-2}}{\delta^{1-\varepsilon/2}},$$

т. е. выполнение достаточных условий теоремы 2 для $\alpha+\varepsilon$.

Применяя теперь предложение 2, находим набор $\{a_i\}$ такой, что для $\forall\varepsilon>0$ выполняются условия

$$\int\limits_{\gamma_I^a}\mu_{ll}\cdot\rho_l^{1+\alpha+\varepsilon}\cdot T_I<A(\varepsilon),$$

$$\int\limits_{\gamma_I^a}(\mu_{mm}+|\mu_{ml}|)\cdot\rho_l^{\alpha}\cdot\rho_m\cdot T_I<A(\varepsilon),$$

$$\int\limits_{\gamma_{I,K}^a}(\mu_{mm}+\mu_{kk}+|\mu_{mk}|)\cdot\rho_l^{\alpha}\cdot T_{I,K}<A(\varepsilon).$$

Теперь для построения искомой функции f порядка α достаточно воспользоваться гомотопией (33) для $\alpha>0$ из предложения 3 и формулой (41) из предложения 5.

НПО Главмосавтотранс

Поступила 14. VII. 1986

Պ. Լ. ՊՈԼՅԱԿՈՎ. *Հոլոմորֆ ֆունկցիաների վերջավոր կարգի զրոները բազմաշրջանում (ամփոփում)*

Աշխատանքում ապացուցվում է ord $M = \min \{\operatorname{ord} f\}$ *հավասարությունը* D^n *բազմաշրջանում 1 կոդաչափականության անալիտիկ* M *ենթաբազմության, ինչպես նաև* f *հոլոմորֆ ֆունկցիաների համար, որոնց զրոների բազմությունը* M*-ն է։ Այդ հավասարությունը պատասխան է Վ. Շտոլլի կողմից դրված հարցին, ինչպես նաև մասնակի պատասխան Մ. Ջրբաշյանի* $N^\alpha(D^n)$ *Նևանլիննա-Ջրբաշյանի դասի հոլոմորֆ ֆունկցիաների զրոների նկարագրման խնդրում։*

P. L. POLYAKOV. *Zeros of finite order holomorphic functions within a polydisc* (summary)

In this work the equality ord $M = \min \{\operatorname{ord} f\}$ is proved for analytic subvariety M of codimensional 1 in a polydisc D^n and holomorphic functions f for which M is a zero set. This equality gives an answer to the question, posed by W. Stoll, and a partial answer to the problem of M. Dzrbasjan of description of zero sets of holomorphic functions of the class of Nevanlinna—Dzrbasjan $N^\alpha(D^n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. Stoll*. Holomorphic functions of finite order in several complex variables, Conf. board of math. science, Regional conf. series in math., 21, Providence, Amer. Math. Soc.. 1974.
2. *Л. И. Ронкин*. Введение в теорию целых функций многих переменных, М., Наука, 1971.
3. *М. М. Джрбашян*. К проблеме представимости аналитических функций, Сообщения инст. матем. и механики АН Арм.ССР, вып. 2, 1948, 3—40.
4. *Ш. А. Даутов, Г. М. Хенкин*. Нули голоморфных функций конечного порядка и весовые оценки решений $\bar{\partial}$-уравнения, Матем. сб., 107, вып. 2, 1978, 165—174.
5. *G. M. Henkin, P. L. Polyakov*. Les zéros des fonctions holomorphes d'ordre fini dans le bidisque, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 298, Serie I. n. 1, 1984, 5—8.
6. *G. M. Henkin, P. L. Polyakov*. Prolongement des fonctions holomorphes bornées 'une sous—variete du polydisquh, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 298, Serie I, n. 10 1984, 221—224.
7. *Ph. Charpentier*. Caractérisation des zéros des fonctions de certaines classes de de type Nevanlinna dans le bidisque, Prepublication, Université de Paris—Sud, Orsay, 1983.
8. *Ph. Charpentier*. Sur les zéros des fonctions de type Nevanlinna dans le bidisque, Prepublication, Université de Paris—Sud, Orsay. 1983.
9. *M. Andersson*. Solution formulas for the $\partial\bar{\partial}$-equation and weighted Nevanlinna classes in the polydisc, Preprint, Chalmers University of Technology and University of Göteborg, Göteborg, 1984.
10. *P. Lelong*. Fonctions plurisousharmoniques et formes differentielles, positives, Paris, Gordon and Breach, 1968.
11. *P. Lelong*. Fonctionelles analytiques et fonctions entiéras, Montrèal, Les Presses de l'Univ. de Montréal, 1968.
12. *П. Л. Поляков*. Нуля голоморфных функций конечного порядка в полидиске. Мат. сб., 1986.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա .XXIII, № 4, 1988 Математика

УДК 519.2.18.5

Г. Ю. ПАНИНА

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ n-МЕРНОГО ТЕЛА В ВИДЕ СУММЫ (n—1)-МЕРНЫХ ТЕЛ

Введение

В статье получено разложение n-мерных выпуклых гладких центрально-симметричных тел (n четно, $n \geqslant 4$) в виде интегральной суммы Минковского тел меньшей размерности.

Для осуществления такого разложения построен аппарат так называемых веджевых плотностей трансляционно-инвариантных мер и ядер выпуклых тел. Этот аппарат в значительной степени опирается на разработанный ранее (см. [1]), но отличен от последнего.

Для гладких тел K получено представление вида

$$K = \int [K^+(\omega) - K^-(\omega)]\, d\omega,$$

где $K^{\pm}(\omega)$ — тела, лежащие в гиперплоскости ω. Они указываются явно, в терминах опорной функции.

Этот результат относится к общей теории выпуклых тел, но имеет интересное приложение в теории зоноидов. В качестве несложного следствия (сл. 2 к теореме 6.1) получается гипотеза Вейля (см. [2]) о характеризации зоноидов для случая четной размерности пространства.

Автор выражает глубокую признательность Р. В. Амбарцумяну и его коллегам за пристальное внимание к данной работе.

§ 1. Предварительные сведения

Рассмотрим множество гиперплоскостей E в пространстве $\mathbf{R}_n$. Пусть на E задана мера μ, инвариантная относительно параллельных переносов $\mathbf{R}^n$.

Пусть Ω^{n-1} — единичная сфера в $\mathbf{R}^n$ с площадью S_{n-1}. Каждую гиперплоскость $\omega \in E$ можно задать парой координат: $\omega_0 \in \Omega^{n-1}$ — нормаль ω.

p — расстояние до начала координат O.

В дальнейшем будем отождествлять точку ω_0 на Ω^{n-1} с гиперплоскостью, проходящей через O и имеющей нормаль ω_0.

Каждая трансляционно-инвариантная мера μ однозначно представляется в виде

$$d\mu(\omega) = d\mu^*(\omega_0) \times dp,$$

где μ^* — некоторая симметричная мера на Ω^{n-1}.

Если в качестве $d\mu^*(\omega_0)$ взять $d\omega_0$, то мы получим т. наз. стандартную инвариантную меру $\mu_{\text{инв}}$. Она будет инвариантна относительно всех движений $\mathbf{R}^n$.

Как показано в [1] каждой мере μ соответствует ее т. наз. веджевая плотность ρ_μ. $\rho=\rho_\mu$ — это функция на множестве флагов F. Флагом называется пара.

f (прямая L, проходящая через O; гиперплоскость ω, содержащая L).

ρ аддитивно зависит от μ и может быть вычислена с помощью следующей формулы:

$$\rho_\mu(f(L,\ \omega_0))=\int\limits_{S^{n-1}}\frac{\sin^2(\omega\cap\omega_0,\widehat{\ }L)}{\cos^{n-3}(\omega,\widehat{\ }\omega_0)}\,d\mu^*(\omega).$$

Пусть $K\subset\mathbf{R}^n$ — выпуклое тело,

$$[K]=\{\omega\in E:\omega\cap K\neq\varnothing\}.$$

В статье [1] найдено выражение для $\mu([K])$ в терминах веджевой плотности ρ. Нам потребуется это выражение для многогранных K в § 2.

§ 1. $\mu([K])$ для многогранников

На протяжении всей статьи n — четное число, $n\geqslant 4$. Пусть $K\subset\mathbf{R}^n$ — выпуклый многогранник, $\omega\in E$, ω пересекает K. Тогда $K\cap\omega$ — $(n-1)$-мерный многогранник (случай касания мы не рассматриваем).

Если $\Delta_j^i(K)$ — i-мерные грани K, то согласно формуле Эйлера, примененной к $K\cap\omega$

$$\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\sum_j I_{\left[\Delta_j^i(K)\right]}(\omega)=2I_{(K)}(\omega).\tag{1.1}$$

Здесь $I_{[\cdot]}$ — индикаторная функция $[\cdot]$.

Проинтегрировав (1.1) по $d\mu(\omega)$, получаем

$$2\mu([K])=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\sum_j\mu([\Delta_j^i]).\tag{1.2}$$

В правую часть (1.2) входят меры множеств гиперплоскостей, пересекающих многогранники размерности не выше $(n-1)$.

Коль скоро (1.2) выполняется для любой трансляционно-инвариантной меры μ, то верно

$$K=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_j(-1)^{i+1}\Delta_j^i(K)\tag{1.3}$$

(это равенство следует понимать как равенство опорных функций).

§ 2. Веджевая плотность ρ

Плоскостью мы будем называть плоскость размерности $n-2$. Равенство (1.2) дает возможность вычисления $\mu([K])$ для n-мерных многогранников, если известен способ вычисления $\mu([\Delta])$, где Δ — $(n-1)$-мерный многогранник в R^n. Пусть $\Delta\subset\omega_0\in E$. Мера μ на E индуцирует меру $\bar\mu$ на множестве плоскостей в ω_0, причем для плоскости $e\subset\omega_0$

$$d\bar\mu^*(e)=\int\limits_{\omega\supset e}|\sin(\omega,\widehat{\ }\omega_0)|^{n-1}\,d\mu^*(\omega).$$

В статье [1] было введено понятие внешнего веджа многогранника Δ. С каждым внешним веджем W в [1] связывается некоторое множество плоскостей $\Phi(W)$. При этом справедливо:

$$\mu([\Delta])=\bar\mu([\Delta])=\frac{1}{S_{n-3}}\sum_{W_l}F_{\omega_0}(W_l), \tag{2.1}$$

где W_l — внешние веджи Δ с ребрами ν_l;

$$F_{\omega_0}(W_l)=|\nu_l|\int\limits_{\Phi(W_l)}\rho_{\omega_0}(f(\nu_l,\ e))\,de.$$

Здесь $\rho_{\omega_0}(f)$ — веджевая плотность меры μ в гиперплоскости ω_0:

$$\rho_{\omega_0}(f(\nu,\ e_0))=\int\limits_{\Omega^{n-2}}\frac{\sin^2(\widehat{e\cap e_0,\ \nu})}{\cos^{n-4}(\widehat{e,\ e_0})}\,d\bar\mu^*(e_*)=$$

$$=\int\limits_{\Omega^{n-1}}\frac{\sin^2(\widehat{\omega\cap\omega_0\cap e_0,\ \nu})}{\cos^{n-4}(\widehat{e_0,\ \omega\cap\omega_0})}|\sin(\omega,\widehat{\ }\omega_0)|^{n-1}\,d\mu^*(\omega).$$

Удобно ввести новое понятие флага: с этого момента флагом $f(L,\ e,\ \omega)$ будем называть тройку:

f(прямая L, содержащая начало координат O; плоскость e, содержащая L; гиперплоскость ω, содержащая e).

Тогда, полагая

$$\rho(f(L,\ e,\ \omega))=\rho_\omega(f(L,\ e)),$$

имеем

$$F(W_l)=|\nu_l|\int\limits_{\Phi(W_l)}\rho(f(L,\ e,\ \omega))\,de,$$

где ω — гиперплоскость, содержащая W_l.

Сопоставляя (1.2) и (2.1), можно выразить $\mu([K])$ через $F(W_l)$, где W_l пробегает множество внешних веджей граней K размерности не выше $(n-1)$:

$$\mu([K])=\frac{1}{2S_{n-3}}\sum_{l=1}^{n-1}(-1)^{l+1}\sum_j\sum_k F(W^l_{jk}), \tag{2.2}$$

где W^l_{jk} — внешние веджи Δ^l_j.

В дальнейшем нам будет удобно пользоваться мерой df на множестве флагов, инвариантной относительно евклидовых движения R^n.

Удобно представлять меру df следующим образом:

Пусть $d\omega$ — стандартная инвариантная мера на множестве гиперплоскостей, содержащих O.

$dL(\omega)$ — стандартная инвариантная мера на множестве прямых в ω, содержащих O.

$de(L, \omega)$ — стандартная инвариантная мера на множестве плоскостей из ω, содержащих L.

Тогда

$$df(L, e, \omega) = d\omega\, dL(\omega)\, de(\omega, L).$$

В дальнейших вычислениях будет полезен

Пример. Пусть $\mu = \mu_{\text{инв}}$ — стандартная инвариантная мера на E: $d\mu^*_{\text{инв}} = d\omega$, вычислим ее веджевую плотность $\rho_{\text{инв}}$:

$$\rho_{\text{инв}}(f(L, e, \omega_0)) = \int\limits_{S^{n-1}} \frac{\sin^2(\omega \cap \omega_0 \cap e, \widehat{L})}{\cos^{n-4}(\omega \cap \omega_0, \widehat{e})} |\sin(\omega, \widehat{\omega_0})|^{n-1} d\omega =$$

$$= \frac{S_{n-3}}{n-2} \int\limits_0^{\pi} \sin_\alpha^{n-1} d\alpha = \frac{S_{n-3}\, n!}{(n-2)\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2 2^{n-2}}.$$

§ 3. Основная теорема

Для гиперплоскости $\omega = \omega_0$ из R^n пусть $\Phi(\omega)$ — множество флагов с гиперплоскостью ω.

Для

$$f_0 = f_0(L_0, e_0, \omega) \in \Phi(\omega)$$

$$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$\beta \in \Omega_+^{n-3}$ — верхняя полусфера Ω^{n-3}, положим $L_0^\perp$ — плоскость в ω, ортогональная L_0, $f_\alpha(f_0)$ — флаг, полученный из f_0 поворотом на угол α относительно e_0, $\omega_\alpha(f_0)$ — поворот ω на угол α относительно e_0, $e_{\alpha,\beta}(f_0)$ — плоскость из ω_α, образующая угол β с e_0 и содержащая L, $\omega_{\alpha,\beta}(f_0)$ — поворот ω на угол α относительно $e_{0,\beta}(f_0)$

$$f_{\alpha,\beta}(f_0) = f(L_0, e_{\alpha,\beta}(f_0), \omega_\alpha(f_0)).$$

В этих обозначениях справедлива

Теорема 3.1. *Для центрально-симметричного выпуклого тела $K \subset R^n$ класса C^n-гладкости с опорной функцией H существует непрерывная функция $A_k(f)$, заданная на множестве флагов F, такая, что*

1) *для любой трансляционно-инвариантной меры μ с веджевой плоскостью ρ:*

$$\mu([K]) = \int_P A_k(f)\rho(f)\,df;$$

2) *$A_k(f(L, e, \omega))$ зависит лишь от значений функции H и ее первых n производных в точке ω.*

Замечание. Как станет ясно из доказательства функцию A_k можно вычислить явно:

$$A_k(f) = \sum_{i=0}^{n/2} C_n^{2i}\left[(-1)^{\frac{n-2i}{2}+1}\cdot\frac{L(n-2)(n-1)}{n!\,S_{n-3}^2} + \right.$$

$$\left. + I_n(2_i)\cdot\frac{2^{2n+1}\cdot(n-2)\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2}{n!\cdot S_{n-2}\cdot S_{n-3}^n}\right]\cdot$$

$$\cdot\int_{\Omega_+^{n-3}}\sum_{i=0}^{n/2} C_n^{2i}(-1)^{\frac{n-2i}{2}}\frac{8(n-2)(n-1)}{n!\,S_{n-3}^3}H_\beta^{(2i)}(f)\,d\beta.$$

Здесь

$$I_n(2i) = \begin{cases} 1, & \text{если } 2i = n,\\ 0, & \text{иначе;}\end{cases}$$

$$H^{(i)}(f) = \frac{d^i}{d\alpha^i}\bigg|_{\alpha=0} H(\omega_\alpha(f)),\quad H_\beta^{(i)}(f) = \frac{d^i}{d\alpha^i}\bigg|_{\alpha=0} H(\omega_{\alpha,\beta}(f)).$$

Доказательство теоремы. Зафиксируем гиперплоскость ω. Построим прямой круговой конус D с основанием — единичным шаром $D_0 \subset \omega$ и с высотой $h = \operatorname{tg}\alpha$. Пусть на D_0 случайным образом брошены с независимыми и равномерными распределениями n точек. D_{n_0} — их выпуклая оболочка. D_n — конус с основанием D_{n_0} и с той же вершиной, что и D.

Тогда

$$\mu([D]\setminus[D_0]) = \lim_{n\to\infty} E\mu([D_n]\setminus[D_0]) =$$

D_n и D_{n_0} — многогранники. Применим к ним формулу (2.2), а затем из соображений симметрии получим

$$= A_1(\alpha)\int_{\Phi(\omega)}\rho(f_\alpha(f))\,df(\omega) - S_{n-2}\frac{n!\,S_{n-3}}{(n-2)\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2 2^{n-2}}\int_{\Phi(\omega)}\rho(f)\,df(\omega) +$$

$$+\frac{S_{n-2}\,n!\cos\alpha}{\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2 2^{n-2}(n-2)}\int_{\Phi(\omega)}\int_{\Omega^{n-3}}\rho(f_{\alpha,\beta}(f))\,df(\omega).$$

Здесь $df(\omega) = dL(\omega)\,de(\omega, L)$ — инвариантная мера на $\Phi(\omega)$. Величину $A_1(\alpha)$ можно вычислить, подсчитав независимо

$$\mu_{\text{инв}}([D]\setminus[D_0]) = S_{n-2}\frac{\alpha^n}{(n-1)\,(n-2)} + o(\alpha^n) \text{ при } \alpha\to 0$$

и приравняв к соответствующему выражению.

При этом получаем

$$A_1(\alpha) = \frac{\alpha^n}{(n-1)(n-2)S_{n-3}} - \frac{S_{n-2}S_{n-3}\,n!\cos\alpha}{(n-2)\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2 2^{n-1}} + o(\alpha^n). \quad (3.1)$$

Для краткости обозначив

$$A_2(\alpha) = \frac{S_{n-2}\,n!\cos\alpha}{\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2 2^{n-1}(n-2)},\quad A_3(\alpha) = -\frac{S_{n-2}S_{n-3}\,n!}{\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2 2^{n-2}(n-2)},$$

получаем

$$\mu([D]\setminus[D_0]) = A_1(\alpha)\int\limits_{\Phi(\omega)}\rho(f_\alpha(f))\,df(\omega) +$$
$$+ A_2(\alpha)\int\limits_{\Phi(\omega)}\int\limits_{\Omega_+^{n-3}}\rho(f_{\alpha,\beta}(f))\,d\beta\,df(\omega) + A_3\int\limits_{\Phi(\omega)}\rho(f)\,df. \quad (3.2)$$

Предположим, что мера μ обладает плотностью λ относительно стандартной инвариантной меры $\mu_{\text{инв}}$.

Тогда при $\alpha\to 0$

$$\mu([D]\setminus[D_0]) = \lambda(\omega)\,\mu_{\text{инв}}([D]\setminus[D_0]) + o(\alpha^n).$$

Значит

$$\lambda(\omega) = \frac{\left.\frac{d^n}{d\alpha^n}\right|_{\alpha=0}\mu([D]\setminus[D_0])}{\left.\frac{d^n}{d\alpha^n}\right|_{\alpha=0}\mu_{\text{инв}}([D]\setminus[D_0])}.$$

Продифференцируем тождество (3.2)

$$\left.\frac{d^n}{d\alpha^n}\right|_{\alpha=0}\mu([D]\setminus[D_0]) = \int\limits_{\Phi(\omega)}\sum_{l=0}^{n/2}C_n^{2l}A_1^{(n-2l)}\rho^{(2l)}(f)\,df(\omega) +$$
$$+ \int\limits_{\Phi(\omega)}\int\limits_{\Omega_+^{n-3}}\sum_{l=0}^{n/2}C_n^{2l}A_2^{(n-2l)}\rho_\beta^{(2l)}(f)\,d\beta\,df(\omega).$$

Здесь

$$A_i^{(k)} = \left.\frac{d^k}{d\alpha^k}\right|_{\alpha=0}A_i,\quad \rho^{(l)}(f) = \left.\frac{d^l}{d\alpha^l}\right|_{\alpha=0}\rho(f_\alpha(f)),$$

$$\rho_\beta^{(l)}(f) = \left.\frac{d^l}{d\alpha^l}\right|_{\alpha=0}\rho(f_{\alpha,\beta}(f)),\quad \left.\frac{d^n}{d\alpha^n}\right|_{\alpha=0}\mu_{\text{инв}}([D]\setminus[D_0]) = \quad (33)$$

$$=|\Phi(\omega)|\,\rho_{\text{инв}}(f)\left(A_1^{(n)}+A_2^{(n)}\frac{S_{n-3}}{2}\right)=$$

$$=\frac{S_{n-2}S_{n-3}}{4}\cdot\frac{S_{n-3}\,n!}{(n-2)\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2 2^{n-2}}\,\frac{S_{n-3}}{2}\,\frac{n!}{(n-1)\,(n-2)}=$$

$$=\frac{S_{n-2}\,S_{n-3}^3\,(n!)^2}{(n-2)^2\,(n-1)\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2 2^{n+1}}.$$

Отсюда получаем

$$\lambda(\omega)=\frac{\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2 2^{n+1}\,(n-2)^2(n-1)}{(n!)^2\,S_{n-2}S_{n-3}}\times$$

$$\times\int\limits_{\Phi(\omega)}\left[\sum_{l=0}^{n/2}C_n^{2l}A_1^{(n-2l)}\rho^{(2l)}(f)+\int\limits_{\Omega_+^{n-3}}\sum_{l=0}^{n/2}C_n^{2l}A_2^{(n-2l)}\rho_\beta^{(2l)}(f)\,d\beta\right]df(\omega).$$

Мы получили выражение для плотности меры через ее веджевую плотность. Пользуясь этим, вычислим теперь $\mu([K])$:

$$\mu([K])=\int\limits_{\Omega^{n-1}}H(\omega)\,\lambda(\omega)\,d\omega=$$

$$=\frac{\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2 2^{n+1}\,(n-2)^2\,(n-1)}{(n!)\,S_{n-2}\,S_{n-3}^3}\int\limits_{\Omega^{n-1}}\int\limits_{\Phi(\omega)}\left[\sum_{l=0}^{n/2}C_n^{2l}A_1^{(n-2l)}\rho^{(2l)}(f)\,H(\omega)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\Omega_+^{n-3}}\sum_{l=0}^{n/2}C_n^{2l}A_2^{(n-2l)}\rho_\beta^{(2l)}(f)\,H(\omega)\,d\beta\right]df(\omega)\,d\omega=$$

$$=\frac{\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2 2^{n+1}\,(n-2)^2(n-1)}{(n!)^2S_{n-2}\,S_{n-3}^3}\int\limits_{F}\left[\sum_{l=0}^{n/2}C_n^{2l}A_1^{(n-2l)}H^{(2l)}(f)\,\rho(f)\,df+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\Omega_+^{n-3}}\sum_{l=0}^{n/2}C_n^{2l}A_2^{(n-2l)}H_\beta^{(2l)}(f)\,\rho(f)\,d\beta\right]df,$$

где

$$H^{(l)}(f)=\frac{d^l}{d\alpha^l}\bigg|_{\alpha=0}H(\omega_\alpha(f)),\tag{3.4}$$

$$H_\beta^{(l)}(f)=\frac{d^l}{d\alpha^l}\bigg|_{\alpha=0}H(\omega_{\alpha,\beta}(f)).$$

Вычислим явно $A_j^{(n-2l)}$ и произведем сокращения

$$\mu([K]) = \int\limits_F \rho(f) \Big(\sum_{i=0}^{n/2} C_n^{2i} \Big[(-1)^{\frac{n-2i}{2}+1} \frac{4(n-2)(n-1)}{n!\, S_{n-3}^2} +$$

$$+ I_n(2i) \frac{2^{2n+1}(n-2)\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2}{n!\, S_{n-2} S_{n-3}^4} \Big] H^{(2i)}(f) +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_+^{n-3}} \sum_{i=0}^{n/2} C_n^{2i} (-1)^{\frac{(n-2i)}{2}} \frac{8(n-2)(n-1)}{n!\, S_{n-3}^3} H_3^{(2i)}(f)\, df.$$

Теорема доказана для мер, обладающих плотностью, а следовательно и для всех мер.

§ 4. Ядра выпуклых тел

Определение 4.1. Функция A, заданная на множестве флагов F, называется ядром выпуклого центрально-симметричного тела $K \subset \mathbf{R}$ если для любой трансляционно-инвариантной меры μ на E с веджевой плотностью ρ

$$\mu([K]) = \int\limits_F A(f) \rho(f)\, df.$$

Ядро тела K определено неоднозначно. Действительно, если A—ядро K, A_0 таково, что для любой μ

$$\int\limits_F A_0(f) \rho(f)\, df = 0,$$

то $A + A_0$ тоже является ядром K. Ядро A однозначно определяет тело K.

Очевидно, что ядро тела аддитивно зависит от K: если A_1 и A_2— ядра тел K_1 и K_2, то $A_1 + A_2$ служит ядром $K_1 + K_2$.

Нам известен способ вычисления некоторого ядра для довольно широкого класса тел: формула (2.2) дает представление о ядрах n-мерных многогранников, теорема 3.1 дает пример ядра гладкого тела.

Основной результат статьи [1] описывает ядра гладких тел из $\mathbf{R}^n$ размерности $(n-1)$. При этом очевидно, что если $K \subset \omega_0 \in E$— тело размерности не выше $(n-1$, то K обладает таким ядром A, что

$$A(f(L, e, \omega)) = 0, \text{ при } \omega \neq \omega_0. \qquad (4.1$$

Обратное тоже верно: если тело K обладает ядром, которое удовлетворяет условию (4.1), то $K \subset \omega_0$. Это замечание весьма существенно и будет использоваться в § 5.

§ 5. Представление n-мерного тела в виде интегральной суммы $(n-1)$-мерных тел

Пусть тело K удовлетворяет условиям теоремы 3.1. Наша задача — представить K в виде интегральной суммы тел меньшей размерности.

Это равносильно представлению ядра $A_k(f)$ в виде суммы ядер тел меньшей размерности.

Для каждого $\omega_0 \in \Omega_+^{n-1}$ определим

$$B_{\omega_0}(f(L, e, \omega)) = A_k(f(L, e, \omega))\,\delta_{\omega_0}(\omega),$$

где δ_{ω_0} — дельта-функция, сосредоточенная в точке ω_0. В таком случае

$$A_k(f) = \int\limits_{\Omega_+^{n-1}} B_{\omega_0}(f)\,d\omega_0.$$

Если $B_{\omega_0}(f)$ является ядром некоторого выпуклого тела, то это тело $(n-1)$-мерно (лежит в ω_0), и, следовательно, задача о разложении в этом случае решена.

В общем случае $B_{\omega_0}(f)$ — не обязательно ядро выпуклого тела, но $B_{\omega_0}(f)$ всегда является разностью ядер $(n-1)$-мерных выпуклых тел. Докажем это. Для каждого $\xi \in \Omega^{n-1}$ пусть μ_ξ такова, что $\mu_\xi^* = \delta_\xi$ — дельта-мера, сосредоточенная в точке ξ; ρ_ξ — веджевая плотность μ_ξ. Тогда

$$\mu_\xi([K]) = 2\,H_k(\xi),$$

где $H_k(\xi)$ — опорная функция K в направлении ξ.

Для каждого ω_0 образуем

$$H_{\omega_0}(\xi) = \frac{1}{2}\int\limits_{F} B_{\omega_0}(f)\,\rho_\xi(f)\,df = \frac{1}{2}\int\limits_{\Phi(\omega_0)} A_k(f)\,\rho_\xi(f)\,df(\omega_0).$$

Здесь $df(\omega_0)$ — инвариантная относительно движений мера на множестве флагов, лежащих в ω_0. При этом

$$df = d\omega_0\,df(\omega_0).$$

Представим $H_{\omega_0}(\xi)$ в виде разности двух выпуклых функций, являющихся опорными функциями тел, лежащих в ω_0:

$$H_{\omega_0}(\xi) = H_{\omega_0}^+(\xi) - H_{\omega_0}^-(\xi).$$

$H_{\omega_0}^+$ — опорная функция $K_{\omega_0}^+ \subset \omega_0$; $H_{\omega_0}^-$ — опорная функция $K_{\omega_0}^- \subset \omega_0$.

Пусть $B_{\omega_0}^+$ — ядро тела $K_{\omega_0}^+$. Тогда $B_{\omega_0}^- = B_{\omega_0}^+ - B_{\omega_0}$ — ядро $K_{\omega_0}^-$. Итак, получено представление

$$A_k(f) = \int\limits_{\Omega_+^{n-1}} [B_{\omega_0}^+(f) - B_{\omega_0}^-(f)]\,d\omega_0, \tag{5.1}$$

где $B_{\omega_0}^\pm$ — ядро некоторого выпуклого центрально-симметричного тела $K_{\omega_0}^\pm$, лежащего в гиперплоскости ω_0.

$B^{\pm}_{\omega_0}$ зависит лишь от значений $A_k(f)$, где $f\subset\omega_0$, а, значат, лишь от значений H_k и ее первых n производных в точке ω_0. Поскольку имеет место представление (5.1), то

$$K = \int\limits_{\Omega_+^{n-1}} [K_\omega^+ - K_\omega^-]\, d\omega. \qquad (5.2)$$

Это равенство следует понимать как равенство опорных функций.

§ 6. Представление тела K в виде интегральной суммы отрезков

Как известно (см. [3]), гладкое центрально-симметричное выпуклое тело $A\subset\mathbf{R}^{n-1}$ представимо в виде

$$A = \int\limits_{\Omega_+^{n-2}} P_\xi(H_A)\,\bar{\xi}\, d\xi,$$

где $\bar{\xi}$ — единичный отрезок с направлением ξ, H_A — опорная функция A, P_ξ — некоторый линейный функционал.

Если известен вид P_ξ для размерности $(n-1)$, то получим его вид для размерности n следующим образом: представим n-мерное тело вначале в виде суммы $(n-1)$-мерных тел, а затем каждое $(n-1)$-мерное тело с помощью P_ξ представим в виде интегральной суммы отрезков.

Теорема 6.1. *Для выпуклого тела $K\subset\mathbf{R}^n$, удовлетворяющего условиям теоремы* 4.1, *верно:*

$$K = \int \mathbf{P}_\xi(K)\,\bar{\xi}\, d\xi,$$

где

$$\mathbf{P}_\xi(K) = \int\limits_{\bar{\xi}\in\omega} P_\xi(H)\, d\xi,\quad H_\omega = H_\omega^+ - H_\omega^- \quad (\textit{см.}\ \S\ 5).$$

Следствие 1. Значение $\mathbf{P}_\xi(K)$ определяется поведением опорной функции H_k в окрестности точек ω, содержащих $\bar{\xi}$.

Следствие 2. Если тело K с опорной функцией H_k таково, что для любой сферы $\Omega=\Omega^{n-2}\subset\Omega^{n-1}$ существует окрестность $\varepsilon(\Omega)$ и зоноид K_Ω с опорной функцией H_{K_Ω} такой, что $H_{K_\Omega}=H_K$, $\varepsilon(\Omega)$, то тело K тоже является зоноидом.

Доказательство. Для тел класса C^n-гладкости утверждение следует непосредственно из следствия 1 к теореме 6.1. Для произвольных тел результат получается путем аппроксимации их гладкими.

Следствие 2 дает доказательство гипотезы Вейля (см. [2]) для случая четной размерности. Формулировка гипотезы в точности совпадает с формулировкой следствия.

ЛОМИ АН СССР
им. В. А. Стеклова

Поступила 6. I. 1988

Գ. ՅՈՒ. ՊԱՆԻՆԱ. Ուռուցիկ մարմինների ներկայացումը նվազ չափողականություն ունեցող մարմինների գումարի տեսքով *(ամփոփում)*

Հոդվածը նվիրված է ուռուցիկ մարմինների ինտեգրալային ներկայացումներին։ Օգտագործված է սեպային խտությունների ապարատը։ Հիմնական արդյունքն է՝ ուռուցիկ մարմինների ներկայացումը նվազ չափողականություն ունեցող մարմինների գումարի տեսքով։ Որպես հետևանք ստացվել է զոնոիդների բնույթին վերաբերվող Վայլի վարկածի ապացույցը։

G. J. PANINA. *On the representation of central symmetric body by a sum of less-dimensional bodies* (summary)

The article is devoted to convex body integral representations. The method of wedge dencities and nuclei is developed. The main result is the representation of central by symmetric even-dimensional convex body as a sum of less-dimensional bodies.

A positive solution of Weil's zonoid characterisation hypotheses is obtained as a result.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Ю. Панина.* Трансляционно-инвариантные меры и выпуклые тела в R^n, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XXII № 5, 1987.
3. *W. Weil.* Blaschkes Problem der lokalen Charakterisierng von Zonoiden. Arch. Math., 29, 1977, 655—659.
3. *А. В. Погорелов.* Четвертая проблема Гильберта, М., «Наука», 1974.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ: ԱՐՅԱՆ ՇՐՋԱՆԱՌՈՒԹՅՈՒՆ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIII, № 4, 1988 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.53

А. М. ДЖРБАШЯН

КЛАССЫ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА В ПОЛУПЛОСКОСТИ, ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ И ТЕОРЕМА ТИПА ФРАГМЕНА-ЛИНДЕЛЕФА

1. Основные результаты, анонсированные в данной заметке, усиливают и обобщают классические и хорошо известные результаты, приводимые в этом пункте.

Общеизвестно принадлежащее Р. Неванлинне [1] (см. также [2], п.п. 6.3—6.5) полное описание роста аналитических функций ограниченного вида в верхней полуплоскости $G^{(+)}=\{z:\operatorname{Im} z>0\}$, *непрерывных вплоть до вещественной оси.* А именно, пара условий Р. Неванлинны

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^{\pi}\log^+|f(Re^{i\theta})|\sin\theta d\theta<+\infty, \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\log^+|f(x)|\frac{dx}{1+x^2}<+\infty, \tag{2}$$

выполнение которых необходимо и достаточно для того, чтобы аналитическая в $G^{(+)}$ функция $f(z)$, непрерывная вплоть до вещественной оси, была ограниченного вида в $G^{(+)}$ (т. е. функция $\log^+|f(z)|\equiv\max\{\log|f(z)|,0\}$ имела бы в $G^{(+)}$ гармоническую мажоранту).

Общеизвестна также нижеприведенная классическая теорема единственности Р. Неванлинны [3] (гл. III, п. 38).

Теорема А. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в $G^{(+)}$ и такова, что для всех $t\in(-\infty,+\infty)$*

$$\varlimsup_{\substack{z\to t\\ z\in G^{(+)}}}|f(z)|\leq 1. \tag{3}$$

Тогда, если

$$\varliminf_{R\to+\infty}R^{-1}\log M(R)=-\infty\ \Big(M(R)=\sup_{0<\theta<\pi}|f(Re^{i\theta})|\Big), \tag{4}$$

то $f(z)\equiv 0$, $z\in G^{(+)}$.

С двумя вышеприведенными результатами идейно неразрывно связана классическая теорема типа Фрагмена-Линделефа, принадлежащая Ф. и Р. Неванлиннам [4]. Ее существенным дополнением является следующая теорема, принадлежащая Л. Альфорсу и М. Хейнсу [5], [6].

Теорема Б. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в $G^{(+)}$ и удовлетворяет условию (3).*

1°. *Тогда существует предел*

$$\beta = \lim_{R\to+\infty} R^{-1}\log M(R) \in [0, +\infty],$$

и, если

$$\alpha = \sup_{y>0} y^{-1}\log|f(x+iy)|,$$

то $\beta = \alpha^+$

2°. *В случае, когда $\beta = \alpha^+ < +\infty$, для всех $\theta \in (0, \pi)$, лежащих вне некоторого множества нулевой внешней логарифмической емкости, справедливо также соотношение*

$$\alpha \sin\theta = \lim_{R\to+\infty} R^{-1}\log|f(Re^{i\theta})|. \tag{5}$$

Отметим, что как приведенные результаты Р. Неванлинны, так и теорема Б. Альфорса-Хейнса справедливы для субгармонических в $G^{(+)}$ функций $u(z)$ после замены $\log|f(z)| = u(z)$. Аналогично, после такой замены верны для субгармонических в $G^{(+)}$ функций и все нижеприводимые результаты заметки.

2. Прежде чем перейти к изложению результатов заметки, укажем методы, с применением которых они получены. Изначально, путем исчерпания полукруга $G^{(+)}(R) = \{z: \operatorname{Im} z > 0, |z| < R\}$ сегментами вида $G^{(+)}_\rho(R) = \{z \in G^{(+)}(R): \operatorname{Im} z > \rho > \}$, получены формулы типа Ф. и Р. Неванлинн и Карлемана для аналитических в $G^{(+)}$ функций, ограниченного вида в $G^{(+)}(R)$. Эти формулы совпадают с аналогичными формулами Н. В. Говорова [7] (формулы (2.4), (2.15), однако основополагающее значение для результатов заметки имеет также конструктивное построение меры по отрезку $(-R, R)$ в тех же формулах, найденное благодаря вышеуказанному исчерпыванию. Результаты, анонсированные в заметке получены путем применения указанных формул и перехода $R\to+\infty$.

Обозначим через $N^a(\gamma)$ $(-1 < \gamma \leq 2)$ множество всех аналитических в $G^{(+)}$ функцию $f(z)$, удовлетворяющих условиям

$$\varliminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\int_0^\pi \log^+|f(Re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta \begin{cases} <+\infty, & \text{если } 1<\gamma\leq 2 \\ =0, & \text{если } -1<\gamma\leq 1, \end{cases} \tag{6}$$

$$\varliminf_{R\to+\infty}\ \varliminf_{y\to+0} \int_{-R}^{R} \log^+|f(x+iy)|\frac{dx}{(1+|x|)^\gamma} < +\infty. \tag{7}$$

Справедлива следующая теорема о параметрических представлениях классов $N^a(\gamma)$.

Теорема 1. 1°. *Класс $N^a(\gamma)$ $(-1 < \gamma \leq 2)$ совпадает с множеством функций, допускающих в $G^{(+)}$ представление вида*

$$f(z)=B(z)\exp\left\{-ihz+\frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+tz}{t-z}\,\frac{d\mu(t)}{1+t^2}+iC\right\}, \tag{8}$$

где

$$B(z)=\prod_k\frac{z-z_k}{z-\bar z_k}\,\frac{|1+z_k^2|}{1+z_k^2}$$

— произведение Бляшке, составленное по нулям $\{z_k\}\subset G^{(+)}$ *функции* $f(z)$, h *и* C *— вещественные числа, причем* $h\leqslant 0$, *если* $-1\leqslant\gamma<1$, *а* $\mu(t)$ *— функция, допускающая разложение* $\mu(t)=\mu^+(t)-\mu^-(t)$, *в котором* $\mu^{\pm}(t)$ *— монотонно неубывающие функции, подчиненные условиям*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu^+(t)}{(1+|t|)^{\gamma}}<+\infty,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu^-(t)}{(1+|t|)^{2}}<+\infty. \tag{9}$$

2° *Функции* $\mu^{\pm}(t)$ *из представлоения (8)—(9) могут быть определены из соотношений*

$$\lim_{y\to+0}\int_0^t\log^{\pm}|f(x+iy)|\,dx=\mu^{\pm}(t)$$

$(a^-=a^+-a)$, *где пределы существуют и конечны для всех* $t\in\in(-\infty,+\infty)$. *При этом, будут справе дливы также соотношения*

$$\lim_{y\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\log^+|f(x+iy)|\frac{dx}{(1+|x|)^{\gamma}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu^+(x)}{(1+|x|)^{\gamma}},$$

$$\lim_{y\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\log^-|f(x+iy)|\frac{dx}{(1+|x|)^{2}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu^-(x)}{(1+|x|)^{2}}.$$

Кроме того, для любого конечного отрезка $[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$ *будет справедливо равенство*

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}\mu=\overset{b}{\underset{a}{V}}\mu^+ +\overset{b}{\underset{a}{V}}\mu^-,$$

а для любой непрерывной на $[a,b]$ *функции* $g(x)$ *— соотношения*

$$\lim_{y\to+0}\int_a^b g(x)\log^{\pm}|f(x+iy)|\,dx=\int_a^b g(x)\,d\mu^{\pm}(x).$$

3°. *Для числа* h *из представления (8)—(9) (так называемого среднего типа функции* $f(z)$*) справедливы соотношения*

$$h^{\pm}=\frac{2}{\pi}\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^{\pi}\log^{\pm}|f(Re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta,$$

$$h = \overline{\lim_{y\to+\infty}}\, y^{-1}\log|f(iy)|,$$

а также, вне некоторого множества нулевой внешней логарифмической емкости — соотношение

$$h\sin\theta = \lim_{R\to+\infty} R^{-1}\log|f(Re^{i\theta})|.$$

Замечание 1. Как очевидно из представления (8)—(9), класс $N^a(2)$ совпадает с неванлинновским классом всех аналитических в $G^{(+)}$ функций ограниченного вида. Тем самым, условия (6)—(7) при $\gamma = 2$, в отличие от более частных условий (1)—(2) Р. Неванлинны, представляют собой полное описание роста уже *всего* класса аналитических в $G^{(+)}$ функций ограниченного вида, независимо от того, задана ли каким-либо образом функция на вещественной оси.

Замечание 2. Из представления (8)—(9) также непосредственно следует, что класс $N^{(a)}(0)$ совпадает с классом **N** В. И. Крылова [8] аналитических в $G^{(+)}$ функций $f(z)$, для которых

$$\sup_{y>0}\int_{-\infty}^{+\infty}\log^{+}|f(x+iy)|\,dx < +\infty.$$

Замечание 3. Как показывают примеры аналитических в $G^{(+)}$ функций неограниченного вида $\exp\{z^{-1}\}$ и $\exp\{-(z+i)^{-2}\exp\{-iz\}\}$, ни одно из условий (6) или (7), взятое в отдельности, не обеспечивает ограниченный вид функции $f(z)$.

3. Справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 2. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в $G^{(+)}$ и существует последовательность $R_n \uparrow +\infty$ такая, что при любом $n > 1$*

$$\int_0^{\pi}\log^{+}|f(R_ne^{i\theta})|\sin\theta d\theta < +\infty$$

и

$$\lim_{y\to+0}\int_{-R_n}^{R_n}\log^{+}|f(x+iy)|\,dx < +\infty.$$

Тогда, если при каком-либо R_0 $(0 < R_0 < +\infty)$

$$\lim_{R\to+\infty}\left\{\frac{1}{R}\int_0^{\pi}\log|f(Re^{i\theta})|\sin\theta d\theta +\right.$$

$$\left.+\varliminf_{y\to+0}\int_{-R}^{R} g_{R_0}(R,\ x)\log|f(x+iy)|\,dx\right\} = -\infty, \qquad (10)$$

где

$$g_{R_0}(R,\ x) = \begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{R^2}\right), & \text{при } R_0 \leqslant |x| \leqslant R\\ g_{R_0}(R,\ R_0), & \text{при } |x| < R_0,\end{cases}$$

то $f(z)\equiv 0,\ z\in G^{(+)}$.

Замечание. Легко видеть, что из теоремы 2, в частности, следует теорема А Р. Неванлинны. Однако имеет место также качественное различие условия (10) теоремы 2 от условий (3)—(4) Р. Неванлинны. А именно, в отличие от (3)—(4) условие (10) предполагает «превалирование» в некотором интегральном смысле скорости убывания функции $f(z)$ вблизи границы $G^{(+)}$ над скоростью ее возрастания.

4. Установлена также следующая теорема типа Фрагмена-Линделефа, более общая, чем теорема Б Альфорса-Хейнса.

Теорема 3. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в $G^{(+)}$ и такова, что при любом R $(0 < R < +\infty)$*

$$\lim_{y\to+0}\int_{-R}^{R}\log^+ f(x+iy)|\,dx=0.$$

1°. *Тогда существуют и равны пределы*

$$\beta=\lim_{R\to+\infty}R^{-1}\log M(R)=\lim_{R\to+\infty}R^{-1}\log^- M(R)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^{\pi}\log^+|f(Re^{i\theta})|\sin\theta d\theta\in[0,\ +\infty].$$

При этом, если

$$\alpha=\sup_{y>0}y^{-1}\log|f(x+iy)|,$$

то

$$\alpha^+=\sup_{y>0}y^{-1}\log^+|f(x+iy)|,$$

и $\beta=\alpha^+$.

2°. *В случае, когда $\beta=\alpha^+<+\infty$, имеем также*

$$\alpha=\frac{2}{\pi}\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^{\pi}\log|f(Re^{i\theta})|\sin\theta d\theta,$$

и, кроме соотношения (5), вне некоторого множества нулевой внешней логарифмической емкости справедливо также соотношение

$$\alpha^+\sin\theta\lim_{R\to+\infty}=R^{-1}\log^+|f(Re^{i\theta})|.$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 30. V 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Nevanlinna.* Über die Eigenschaften meromorpher Functionen in einem Wincelraum, Acta Soc. Sci. Fennicae, 50, № 12, 1925, 3—45.
2. *R. P. Boas.* Entire Functions, New York, Ac. Press, 1954.
3. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М.—Л., ОГИЗ, ГИТТЛ. 1941.

4. *F. Nevanlinna, R. Nevanlinna.* Über die Eigenschaften analytischer Functionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie. Acta Soc. Sci. Fennicae, 1922, 50, № 5, 3—46.
5. *M. Heins.* On the Phragmen — Lindelöf principle. Trans. Amer. Math. Soc., 60, 1946, 238 — 244.
6. *L. Ahlfors, M. Heins.* Questions of regularity connected with the Phragmen—Lindelöf principle, Ann. of Math., 50, № 2, 1949, 341 — 346.
7. *Н. В. Говоров.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М., «Наука», 1986.
8. *В. И. Крылов.* О функциях, регулярных в полуплоскости, Матем. сб., 6 (48), № 1, 1939, 95—138.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 4, 1988 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.946

Э. М. МАДУНЦ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1°. Рассмотрим эллиптическую систему

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}=0, \tag{1}$$

где A, B, C — постоянные вещественные матрицы порядка $n\times n$. Эллиптичность, как известно, означает: $\det C\neq 0$ и уравнение

$$\det(A+2B\lambda+C\lambda^2)=0 \tag{2}$$

не имеет действительных корней.

В работе [1] А. В. Бицадзе было получено представление общего решения системы (1). На основе этого представления в работах [2, 3] исследовалась задача Дирихле для системы (1) в случае одного кратного корня.

Впоследствие Н. Е. Товмасяном [4] было получено другое представление для решений [1], обладающее тем преимуществом, что технически позволило исследовать также и задачу Пуанкаре [5].

Ниже получено новое, уже векторно-матричное, представление решений уравнения (1), коэффициенты которого, в отличие от упомянутых представлений, имеют явный вид. Это представление может быть использовано при изучении граничных задач для эллиптических систем.

2°. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\mu$ корни уравнения (2), а через $k_1, k_2, \cdots, k_\mu$ их кратности, соответствинно. Без ограничения общности можно положить $C=E$ (E — единичная матрица).

Система (1) эквивалентна следующей:

$$v_y=\tilde{A}v_x\equiv\begin{pmatrix} O, & E \\ -A, & -B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{2x}\end{pmatrix};\ v_1=u_x,\ v_2=u_y. \tag{3}$$

Пусть матрица J приводит матрицу $\tilde{A}$ к нормальной форме Жордана, т. е.

$$J^{-1}\tilde{A}J=N\oplus\bar{N}, \tag{4}$$

где

$$P\oplus Q\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix} P, & O \\ O, & Q\end{pmatrix},$$

а черта означает комплексное сопряжение.

Заметим, что собственные числа матрицы $\tilde{A}$ в точности совпадают с корнями уравнения (2). Тогда матрица N представляется в виде

$$N = \bigoplus_{l=1}^{\mu} N_l. \qquad (5)$$

В свою очередь, каждый блок N_l разлагается в прямую сумму «чистых» клеток, соответствующих корню λ_l

$$N_l = \bigoplus_{j=1}^{m_l} N_{lj}. \qquad (6)$$

Заметим, что размеры матрицы N_l равны $k_l \times k_l$, а число „чистых" клеток в блоке N_l равно $m_l = n - r_l$, где $r_l = rank\,(A + 2B\lambda_l + \lambda_l^2)$. Формула для m_l отражает тот факт, что число „чистых" клеток равно падению ранга матрицы $(\tilde{A} - \lambda_l)$. Если размеры матриц N_{lj} обозначить через $l_{lj} \times l_{lj}$, то очевидны равенства

$$k_l = \sum_{j=1}^{m_l} l_{lj}, \quad n = \sum_{l=1}^{\mu} k_l.$$

Для структуры приводящей матрицы J из (4) заключаем

$$J = \begin{pmatrix} \delta, & \overline{\delta} \\ \delta N, & \overline{\delta N} \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

где δ—матрица порядка $n \times n$, а столбцы матрицы J, не что иное, как цепочка собственных и присоединенных векторов матрицы $\tilde{A}$.

Преобразование $v = Jw$ приводит систему (3) к виду

$$w_y = (N \oplus \overline{N})\, w_x. \qquad (8)$$

Поскольку N имеет блочную структуру, является прямой суммой клеток N_{lj}, то система (8) расщепляется на независимые подсистемы так, что для ее решения достаточно решить каждую подсистему в отдельности.

3°. Обозначим

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n] \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ a_2 & a_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_n & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Общий вид подсистемы системы (8) таков

$$w_y = [\lambda, 1, 0, \cdots, 0]\, w_x.$$

Замена $x' + iy' = x + iy$ приведет к виду

$$w_y = [i, 2p, 0, \cdots, 0]\, w_x, \qquad (9)$$

где переменные (x', y') вновь переобозначены через (x, y), и если $\lambda = \alpha + i\beta$, то $p = i/2\beta$. Систему (9) запишем в виде

$$\partial_{\bar{z}}\, w = [0, p, 0, \cdots, 0]\, w_x, \qquad (10)$$

где $\partial_{\bar{z}} = (1/2)(\partial_x + i\partial_y)$.

Из (10) видно, что систему можно проинтегрировать. Для этого обозначим

$$S=[1,\ p,\ p^2,\cdots,\ p^{n-1}], \tag{11}$$

$$H=[0,\ 1,\ 0,\cdots,\ 0]. \tag{12}$$

Лемма 1. *Пусть $z=x+\lambda y$, тогда общее решение системы (10) представляется в виде*

$$w(z)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}(p\bar{z}HS)^k\Phi^{(k)}(z), \tag{13}$$

где p, H, S определены выше, а $\Phi(z)$ — произвольная голоморфная функция переменного z.

Доказательство. Интегрируя систему (10), легко убедиться, что

$$w_1(z)=\varphi_1(z),\quad w_2(z)=\varphi_2(z)+p\bar{z}\varphi_1'(z).$$

Наше утверждение заключается в том, что

$$w_n(z)=\varphi_n(z)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(p\bar{z})^k}{k!}\sum_{l=1}^{n-k}p^{n-k-l}C_{n-l-1}^{k-1}\varphi_l^{(k)}(z), \tag{14}$$

где $\varphi_l(z)$ — произвольные голоморфные функции.

Интегрируя (10) для $n=2,\ 3$, легко убедиться, что решения действительно даются формулой (14). Индукцией по n докажем (14). Прежде всего легко убедиться в равенствах

$$\partial_{\bar{z}}w_{n+1}(z)=\sum_{k=1}^{n}p\frac{(p\bar{z})^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{l=1}^{n+1-k}p^{n+1-k-l}C_{n-l}^{k-1}\varphi_l^{(k+1)}(z),$$

$$\partial_x w_n(z)=\varphi_n'(z)+\sum_{k=1}^{n-1}p\frac{(p\bar{z})^{k-1}}{(k-1)!}\sum p^{n-k-l}C_{n-l-1}^{k-1}\varphi_l^{(k)}(z)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(p\bar{z})^k}{k!}\sum_{l=1}^{n-k}p^{n-k-l}C_{n-l-1}^{k-1}\varphi_l^{(k+1)}(z).$$

Исплоьзуя очевидные соотношения

$$C_{n-l-1}^0=C_{n-l}^0,\quad C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k,\quad C_k^k=C_{k+1}^{k+1},$$

легко видеть, что $\partial_{\bar{z}}w_{n+1}=p\partial_x w_n$.

Также имеет место равенство

$$[0,\cdots,0,\ C_{k-1}^{k-1},pC_k^{k-1},\cdots,\ p^{n-k-1}C_{n-2}^{k-1}]=[0,\ 1,0,\cdots,\ 0]^k\cdot[1,\ p,\ p^2,\cdots,\ p^{n-1}]^k$$

что в обозначениях (11), (12) дает (13).

4°. Лемма 2. *Пусть $z=x+\lambda y$, $\lambda=\alpha+i\beta$ и $p=i/2\beta$, матрицы S, H и вектор-функция $w(z)$ определены по формулам (11), (12) и (13), соответственно. Тогда справедливо равенство*

$$\int_{z_0}^{z}w(z)\,dx+(H+\lambda E)\,w(z)\,dy=S^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}(p\bar{z}HS)^kF^{(k)}(z)\Bigg|_{z_0}^{z}, \tag{15}$$

где $F(z)$— первообразная от $\Phi(z)$, входящей в (13).

Доказательство. При вычислении

$$\int\limits_{z_0}^{z} w(z)\,dx$$

используем соотношения

$$E - pH = S^{-1},\ (HS)^{n-1} = (HS)^{n-1} S^{-1}, \tag{16}$$

а при вычислении

$$\int\limits_{z_0}^{z} (H + \lambda E)\, w(z)\, dx$$

кроме (16), используем равенство

$$p\bar{\lambda} = 1 + p\lambda.$$

В итоге нетрудно убедиться в справедливости формулы (15).

Теперь вспомним, что

$$v = J\, w_1 \oplus w_2,$$

где $w_1(z)$ — решение системы (10). Структура матрицы J, и тот факт, что нас интересуют лишь вещественные решения исходной системы (1), позволяют заключить: $w_2(z) = \overline{w}_1(z)$, что, в свою очередь, приводит к формуле

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\left\{\delta \int\limits_{z_0}^{z} w_1(z)\,dx + N w_1(z) dy\right\},$$

где δ—матрица, входящая в (7), а N определено в (5).

5°. Пусть

$$z_k = x + \lambda_k y,\ \lambda_k = \alpha_k + i\beta_k,\ p_k = i/2\beta_k,\ (k=1, \cdots, \mu), \tag{17}$$

$$N_{ij} = [\lambda_i,\ 1.\ 0, \cdots, 0], \tag{18}$$

$$S_{ij} = [1,\ p_i,\ p_i^2, \cdots, p_i^{l_{ij}-1}], \tag{19}$$

здесь N_{ij} и S_{ij} — теплицевы матрицы порядка $l_{ij} \times l_{ij}$.

Пусть, далее, $w^{ij}(z_i)$ обозначает общее решение системы

$$\partial_{\bar{z}} w^{ij} = N_{ij} \partial_x w^{ij}. \tag{20}$$

Теорема. Общее решение системы (1) имеет вид

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\left\{\left\| \delta \bigoplus_{i,j} S_{ij}^{-1} \sum_{k=0}^{l_{ij}-1} \frac{1}{k!} (p_i \bar{z}_i H_{ij} S_{ij})^k F_{ij}^{(k)}(z_i) \right\|\right\}, \tag{21}$$

где δ — *постоянная матрица, входящая в* (7); S_{ij}, H_{ij} — *матрицы, определенные в* (18) *и* (19), *соответственно, наконец,* $F_{ij}(z_i)$ — *произвольные голоморфные вектор-функции переменного* z_i.

Доказательство. Общее решение системы (20) нами получено в лемме 1, а лемма 2 позволяет вычислить криволинейные интегралы для получения решений системы (1) из решений системы (20). Заметим, что $S_{ij}^{-1} = E - p_i H_{ij}$, где E — единичная матрица порядка $l_{ij} \times l_{ij}$.

Ереванский физический
институт

Поступила 20. IV. 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Бицадзе.* Об эллиптических системах дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, ДАН СССР, 112, № 6, 1957, 983—986.
2. *Е. В. Золотарева.* Необходимые и достаточные условия фредгольмовости для некоторого класса эллиптических систем, ДАН СССР, 145, 1962, 724—726.
3. *Е. В. Золотарева.* О задаче Дирихле для некоторого класса эллиптических систем, ДАН СССР, 145, 1962, 983—985.
4. *Н. Е. Товмасян.* Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами, Дифф. уравнения, 2, № 2, 1966, 163—171.
5. *А. В. Бицадзе.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., Наука, 1966.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՀԱՄԱՌՈՏ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

СОДЕРЖАНИЕ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

CONTENTS

SHORT COMMUNICATIONS