

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ  
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ  
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ  
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ  
ИЗВЕСТИЯ  
АКАДЕМИИ НАУК  
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ  
МАТЕМАТИКА

## ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈՒԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ԶՐԲԱՇՅԱՆ

Ի. Ա. ԱՆԽՍԱՆԻՐՅԱՆ

Գլխավոր խմբագրի տեղակալ  
Ն. Հ. ԱՌԻԳԵՆՅԱՆ  
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ  
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Ի. Վ. ՀԱՄԻՐԱԶՈՒՄՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵՆՅԱՆ  
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ  
Ի. Լ. ՇԱՀՐԱՂՅԱՆ

Գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու փաբուսպոր Մ. Ա. Հովհաննիսյան

## Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հոդորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ:

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն զրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով:

Ստաբիլիզացիոն հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում:

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով: Ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ակիցած գծով:

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում:

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը:

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

6. Որբագրություն ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխություններ (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում:

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մեթոդական դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չգրադիվ մեթոդական պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հանցն, անունը և հայրանունը:

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր:

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ: Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա:

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

**Р. А. АЛЕКСАНДРЯН**

зам. главного редактора

**Р. В. АМБАРЦУМЯН**

**Н. У. АРАКЕЛЯН**

**И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ**

**С. Н. МЕРГЕЛЯН**

**А. Б. НЕРСЕСЯН**

**А. А. ТАЛАЛЯН**

**Р. Л. ШАХБАГЯН**

зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

### К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статью в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке), а кратких сообщений — не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссии по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

## EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

**R. A. ALEXANDRIAN**

associate editor

R. V. AMBARTZUMIAN

N. U. ARAKELIAN

S. N. MERGELIAN

A. B. NERSESIAN

A. A. TALALIAN

R. L. SHAKHBAGIAN

associate editor

I. D. ZASLAVSKIĬ

executive secretary M. A. Hovhannesian

## TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings *zvestia* of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

*Izvestia*, series "Matematika"

Academy of Sciences of Armenian SSR

24-b, Marshal Bagramian Ave.

Yerevan, Armenian SSR, USSR

УДК 517.53

И. О. ХАЧАТРЯН, С. А. АКОПЯН

# КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ ИНТЕГРАЛАМИ С ЯДРАМИ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

В настоящей статье устанавливается квазианалитичность некоторых классов бесконечно дифференцируемых функций. Эти классы вводятся с помощью интегральных представлений с ядрами Миттаг-Леффлера. Признаки квазианалитичности классов даются в терминах полноты системы полиномов или целых функций в различных пространствах. Такой подход впервые указан Б. Я. Левиным в том случае, когда классы определяются с помощью интегральных представлений с ядрами Фурье.

В некоторых приведенных ниже теоремах мы существенно опираемся на представление ядра Коши с помощью функции типа Миттаг-Леффлера, установленном М. М. Джрбашяном [1]. Статья является продолжением работы [2].

1°. Пусть  $w(t)$  — определенная на  $[0, +\infty[$  вещественная измеримая функция, удовлетворяющая условиям:

$$w(t) > 1, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^n}{w(t)} = 0, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$C_w[0, \infty[$  — множество непрерывных на  $[0, +\infty[$  функций  $f(t)$ , для которых

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{w(t)} = 0 \text{ и } \|f\| = \sup_{0 < t < +\infty} \frac{|f(t)|}{w(t)}.$$

Очевидно, что функция  $\cos \sqrt{ut}$  для каждого  $u \geq 0$  принадлежит пространству  $C_w[0, \infty[$  и если  $F$  — линейный функционал, действующий в  $C_w[0, \infty[$ , то равенством

$$f(u) \stackrel{\text{def}}{=} F[\cos \sqrt{ut}] = \int_0^{+\infty} \cos \sqrt{ut} \frac{d\sigma(t)}{w(t)} \quad (1)$$

получим функцию  $f$ , бесконечно дифференцируемую на  $[0, +\infty[$ .

В самом деле, имеем

$$(\cos \sqrt{ut})^{(n)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}} (-t)^n \left(\frac{\sqrt{ut}}{2}\right)^{-n + \frac{1}{2}} J_{n - \frac{1}{2}}(\sqrt{ut}),$$

где  $J_\nu(x)$  — функция Бесселя первого рода. Но так как

$$\left| \left( \frac{\sqrt{ut}}{2} \right)^{-n+\frac{1}{2}} \int_{n-\frac{1}{2}}^1 (\sqrt{ut}) \right| = \left| \frac{2}{\sqrt{\pi} \Gamma(n)} \int_0^1 (1-\tau^2)^{n-1} \cos \sqrt{ut} \tau d\tau \right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{\pi} (n-1)!} \int_0^1 (1-\tau^2)^{n-1} d\tau = \frac{1}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \quad (u \geq 0, n \geq 1),$$

то дифференцирование под знаком интеграла (1) любое число раз законно.

Пусть теперь  $F$  пробегает сопряженное пространство. Тогда формулой (1) определяется некоторый класс бесконечно дифференцируемых функций на  $[0, +\infty[$ . Этот класс обозначим через  $K_w$ .

Определение 1. Класс  $K_w$  назовем квазианалитическим, если из  $f \in K_w$ ,  $g \in K_w$ ,  $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , следует, что  $f(u) \equiv g(u)$ ,  $u \in [0, +\infty[$ .

Имеет место следующая

Теорема 1. Для квазианалитичности класса  $K_w$ , необходимо и достаточно, чтобы система  $\{t^n\}_{n=0}^\infty$  была полна в  $C_w[0, \infty[$ .

Необходимость. Пусть класс  $K_w$  квазианалитичен и пусть  $F_0$  — произвольный линейный функционал, обращающийся в нуль на системе  $\{t^n\}_{n=0}^\infty$ :  $F_0[t^n] = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Рассмотрим ту функцию  $f_0(u)$ , которая порождается этим функционалом равенством (1):

$$f_0(u) = F_0[\cos \sqrt{ut}] = \int_0^{+\infty} \cos \sqrt{ut} \frac{d\alpha_0(t)}{w(t)}.$$

Имеем  $f_0^{(n)}(0) = c_n F_0[t^n] = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , и так как класс  $K_w$  квазианалитичен по предположению, то  $f_0(u) \equiv 0$ ,  $u \in [0, +\infty[$ , т. е.

$$\int_0^{+\infty} \cos \sqrt{ut} \frac{d\alpha_0(t)}{w(t)} = 0, \quad u \in [0, +\infty[. \quad (2)$$

По теореме единственности преобразования Фурье—Стилтьеса [3, стр. 452] из (2) следует, что  $d\alpha_0(t) \equiv 0$ ,  $t \in [0, +\infty[$ , следовательно  $F_0 = 0$ .

Достаточность. Пусть система  $\{t^n\}_{n=0}^\infty$  полна в  $C_w[0, \infty[$  и пусть  $f_1(u)$  и  $f_2(u)$  — две функции из  $K_w$ , такие, что  $f_1^{(n)}(0) = f_2^{(n)}(0) = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Рассмотрим функцию  $f_0(u) = f_1(u) - f_2(u)$ . Из линейности класса  $K_w$  следует, что  $f_0(u) \in K_w$ , т. е.  $f_0(u) = F_0[\cos \sqrt{ut}]$ .

Легко видеть, что  $f_0^{(n)}(0) = c_n F_0[t^n]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  ( $c_n \neq 0$ ) и так как  $f_0^{(n)}(0) = 0$ , то  $F_0[t^n] = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Но по предположению система  $\{t^n\}_{n=0}^\infty$  полна в  $C_w[0, \infty[$ . Отсюда следует, что  $F_0 = 0$ , т. е.  $f_0(u) \equiv 0$  или  $f_1(u) \equiv f_2(u)$ ,  $u \in [0, +\infty[$ . Отметим, что критерий полноты системы  $\{t^n\}_{n=0}^\infty$  в  $C_w[0, \infty[$  имеется в работе [4] в случае, ко-

гда  $w(t)$  — нормально возрастающая функция и в [5] — в общем случае.

Пусть теперь класс  $K_w$  не квазианалитичен в смысле определения 1. Мы хотим выяснить, при каких условиях этот класс будет квазианалитическим по отношению к заданному порядку [6], [7]. При этом мы следуем схеме рассуждений Б. Я. Левина.

**Определение 2.** Пусть  $\varphi(z)$  — определенная в правосторонней окрестности нуля функция такая, что  $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \alpha^{-n} \varphi(\alpha) = 0$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ . Класс  $K_w$  назовем квазианалитическим по отношению к порядку  $\varphi(z)$ , если из условий  $f_0(u) \in K_w$  и

$$\int_0^{\alpha^2} |f_0(u)| u^{-\frac{1}{2}} du \leq \varphi(\alpha) \quad (3)$$

следует, что  $f_0(u) \equiv 0$ ,  $u > 0$ .

Теперь приведем вышеупомянутое представление ядра Коши.

**Теорема (М. М. Джрбашян)** [1, стр. 149]. Пусть  $\rho > 0$ ,  $\nu > 0$  и  $\theta (-\pi < \theta \leq \pi)$  — фиксированные параметры. Тогда справедлива формула

$$\frac{1}{z-t} = \rho e^{-i\rho t} z^{\mu\rho-1} \int_0^{\infty} e^{-(e^{-i\theta} z)^{\rho-\rho}} E_{\rho}(e^{-i\theta} t\tau, \mu) \tau^{\mu\rho-1} d\tau \quad (\mu > 0), \quad (4)$$

если  $t \in D_{\rho}^*(\theta, \nu)$ ,  $z \in \overline{D_{\rho}(\theta, \nu)}$ , где  $D_{\rho}(\theta, \nu) = \{z : \operatorname{Re}(e^{-i\theta} z)^{\rho} > \nu\}$ , а  $D_{\rho}^*(\theta, \nu)$  — дополнение к  $\overline{D_{\rho}}$ . Интеграл (4) сходится абсолютно и равномерно относительно обеих переменных  $t$  и  $z$ , если  $t \in \overline{G}$  и  $z \in \overline{D_{\rho}(\theta, \nu)}$ , где  $G$  — любая ограниченная подобласть области  $D_{\rho}^*(\theta, \nu)$ . В формуле (4) участвует целая функция типа Миттаг—Леффлера, которая определяется разложением

$$E_{\rho}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\frac{k}{\rho} + \mu\right)}. \quad (5)$$

Отметим асимптотику функции типа Миттаг—Леффлера, которой мы воспользуемся позже:

$$E_{\rho}(z; \mu) = \begin{cases} \rho z^{\rho(1-\mu)} e^{z^{\rho}} + O\left(\frac{1}{z}\right), & |\arg z| \leq \alpha, \\ O\left(\frac{1}{z}\right), & \alpha \leq |\arg z| \leq \pi, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\frac{\pi}{2\rho} < \alpha < \min\left(\pi, \frac{\pi}{\rho}\right)$ , а также соотношения

$$E_1(z; 1) = e^z, \quad E_{\frac{1}{2}}(-z, 1) = \cos \sqrt{z}.$$

Предположим, что  $\beta = -\frac{1}{\alpha} \ln \varphi(\alpha) \nearrow +\infty$  при  $\alpha \nearrow 0$ . Обратную функцию обозначим через  $\eta(\beta)$ :

$$\beta = -\frac{1}{\alpha} \ln \varphi(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = \eta(\beta).$$

Перейдем теперь к изложению нашего результата.

Итак, рассмотрим класс функций

$$f(u) = F \left[ E \left( -ut, 1 \right) \right] = F[\cos \sqrt{ut}], \quad u > 0,$$

и пусть некоторая функция  $f_0(u)$  из этого класса удовлетворяет условию (3).

Обозначим через  $F_0$  функционал, которым порождается функция  $f_0$ :  $f_0(u) = F_0[\cos \sqrt{ut}]$ . В формуле (4), беря  $\rho = \frac{1}{2}$ ,  $\mu = 1$ ,  $\theta = \pi$ , получим

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{2} (-z)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-(-z)^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}} \cos \sqrt{t\tau} \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau,$$

откуда следует, что

$$F_0(z) \stackrel{\text{def}}{=} F_0 \left[ \frac{1}{z-t} \right] = \frac{1}{2} (-z)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-(-z)^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}} f_0(\tau) \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau. \quad (7)$$

В равенстве (7), полагая  $z = -x$  ( $x > 0$ ), получим

$$\begin{aligned} F_0(-x) &= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-x^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}} f_0(\tau) \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau, \\ |F_0(-x)| &\leq \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-x^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}} |f_0(\tau)| \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau = \\ &= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{a^2} |f_0(\tau)| \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau + \int_{a^2}^{+\infty} e^{-x^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}} |f_0(\tau)| \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для второго слагаемого в (8) имеем оценку

$$\int_{a^2}^{+\infty} e^{-x^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}} |f_0(\tau)| \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau \leq c_1 \int_{a^2}^{+\infty} e^{-x^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}} \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau = \frac{c_2}{\sqrt{x}} e^{-a\sqrt{x}}.$$

Таким образом, получаем

$$|F_0(-x)| \leq c_3 x^{-\frac{1}{2}} [\varphi(a) + x^{-\frac{1}{2}} e^{-a\sqrt{x}}],$$

или

$$|F_0(-x)| \leq c_4 x^{-\frac{1}{2}} [\varphi(x) + e^{-a\sqrt{x}}], \quad x \geq 1.$$

Возьмем  $a = \eta(\sqrt{x})$ , тогда

$$|F_0(-x)| \leq 2c_4 x^{-\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{x} \eta(\sqrt{x})}, \quad x \geq 1. \quad (9)$$

Обозначим через  $E$  множество целых функций  $\Phi(z)$ ,  $t\Phi(t) \in C_w[0, \infty[$  порядка  $1/2$  и минимального типа, удовлетворяющих условию

$$|\Phi(-x)| \leq \text{const} \cdot x^{-\frac{1}{2}} e^{\sqrt{x} \gamma(\sqrt{x})}, \text{ при } x \geq 1, \quad (10)$$

а через  $\mathcal{M}_\Phi$  — множество тех функций из  $E$ , для которых выполняется условие  $\|\Phi(t)\| \leq 1$ .

Введем обозначения:  $\Phi_1(z) = (1+z^2)\Phi(z)$  и

$$q_\Phi(z) = F_0 \left[ \frac{\Phi_1(t) - \Phi_1(z)}{t - z} \right].$$

Нетрудно доказать [5], что  $q_\Phi(z)$  — целая функция порядка  $1/2$  и минимального типа. Имеем

$$q_\Phi(z) = F_0 \left[ \frac{\Phi_1(t)}{t - z} \right] - \Phi_1(z) F_0 \left[ \frac{1}{t - z} \right].$$

Предположим, что  $\Phi \in \mathcal{M}_\Phi$  (тогда  $\|\Phi_1(t)(t+1)^{-1}\| \leq \text{const}$ ) и  $z$  принимает отрицательные значения  $z = -x$ , где  $x \geq 1$ .

Имея в виду (9) и (10) получаем

$$\begin{aligned} |q_\Phi(-x)| &= \left| F_0 \left[ \frac{\Phi_1(t)}{t+x} \right] - \Phi_1(-x) F_0 \left[ \frac{1}{t+x} \right] \right| \leq \\ &\leq \|F_0\| \left\| \frac{\Phi_1(t)}{t+x} \right\| + |\Phi_1(-x)| |F_0(-x)| \leq \\ &\leq \|F_0\| \left\| \frac{\Phi_1(t)}{t+1} \right\| \max_{0 < t < +\infty} \left| \frac{t+1}{t+x} \right| + |\Phi_1(-x)| |F_0(-x)| \leq c_5 (x \geq 1). \end{aligned}$$

Следовательно, по принципу Фрагмена—Линделёфа  $q_\Phi(z) \equiv c_\Phi$ , т. е.

$$F_0 \left[ \frac{\Phi_1(t) - \Phi_1(z)}{t - z} \right] \equiv c_\Phi = \text{const}. \quad (11)$$

В частности, беря в (11)  $z = i$  и  $z = -i$ , получим, что

$$F_0[(t+i)\Phi(t)] = F_0[(t-i)\Phi(t)] = c_\Phi$$

или

$$F_0(\Phi(t)) = 0, \quad \forall \Phi \in E. \quad (12)$$

Из (12) следует, что если  $E$  плотно в  $C_w[0, \infty[$ , то будем иметь  $F_0 = 0$ . Таким образом, доказана

**Теорема 2.** Если множество  $E$  целых функций порядка  $1/2$  и минимального типа, удовлетворяющих условию (10), плотно в  $C_w[0, \infty[$ , то класс  $K_w$  квазианалитичен по отношению к порядку  $\varphi(z)$ .

Рассмотрим следующий пример. Пусть  $\eta(r)$  — монотонно убывающая на  $]0, +\infty[$  функция такая, что  $\lim_{r \rightarrow \infty} r \frac{\eta'(r)}{\eta(r)} = 0$ , и пусть

$$\rho(r) = \frac{1}{2} + \frac{\ln \eta(r)}{\ln r} \quad (r^\rho(r) = r^{\frac{1}{2}} \eta(r)).$$

Так как

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \eta(r)}{\ln r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r \eta'(r)}{\eta(r)} = 0$$

и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \ln r \rho'(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[ r \frac{\eta'(r)}{\eta(r)} - \frac{\ln \eta(r)}{\ln r} \right] = 0,$$

то  $\rho(r)$  — уточненный порядок [7], следовательно  $r^{\rho(r)}$  — монотонно растет для всех достаточно больших значений  $r$ . Без ограничения общности можно предположить, что это свойство имеет место при  $r \geq 1$ . Пусть  $r = \lambda_k$  — решение уравнения  $r^{\rho(r)} = k$ , т. е.  $\lambda_k^{\rho(\lambda_k)} = k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) и

$$G(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right).$$

Легко видеть, что  $G(\lambda)$  — целая функция порядка  $\rho = \frac{1}{2}$  и минимального типа. Пусть далее  $n(r)$  означает число нулей функции  $G(\lambda)$  в круге  $|\lambda| \leq r$ , тогда

$$\Delta = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^{\rho(r)}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n(\lambda_k)}{\lambda_k^{\rho(\lambda_k)}} = 1$$

и по теореме Б. Я. Левина ([7], стр. 88) имеем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |G(-r)|}{r^{\rho(r)}} = \pi.$$

Следовательно

$$|G(-x)| = G(-x) < e^{c \sqrt{x} \eta_1(x)} = x^{-\frac{3}{2}} e^{\sqrt{x} \eta_1(\sqrt{x})}, \quad x \geq 1 \quad (c > \pi).$$

Пусть теперь  $\varphi(z) = e^{-a \eta_1^{-1}(z)}$ , где  $\eta_1^{-1}(z)$  — обратная функция к  $\eta_1$ . Определим весовую функцию  $w(t)$  на полуоси следующим образом:  $w(\lambda_k) = A_k$ , а в остальных точках полуоси  $w(t) = +\infty$ , где  $A_k$  выбраны так, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k^n}{A_k} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и чтобы система полиномов не была полна в  $C_w[0, \infty[$ . Пусть множество  $E$  имеет тот же смысл, что и в теореме 2. Тогда  $cG(\lambda) \in E$  при любом значении постоянной  $c$ , так как  $\|G(t)\| = 0$  и  $G(\lambda)$  удовлетворяет условию (10). С другой стороны имеем

$$\sup_{\substack{\|\Phi\| < 1 \\ \Phi \in E}} |\Phi(t)| \geq \sup_c |cG(t)| = +\infty.$$

Но отсюда следует, что множество  $E$  плотно в  $C_w[0, \infty[$ . Следовательно, класс

$$f(u) = F[\cos \sqrt{ut}] = \int_0^{+\infty} \cos \sqrt{ut} \frac{dw(t)}{w(t)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{A_k} \cos \sqrt{u \lambda_k}, \quad \sum_1^{\infty} |a_k| < \infty.$$

будет квазианалитическим по отношению к порядку  $\varphi(a) = e^{-a^2} \cdot$   
 Обозначим  $\sqrt[n]{u} = x$ ,  $\sqrt[n]{v_k} = \mu_k$ , получим, что класс

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{A_k} \cos \mu_k x, \quad \sum_1 |a_k| = c(\tilde{f}) < \infty$$

квазианалитичен по порядку  $\varphi(x)$ . Приведенный результат можно рассмотреть как некоторое дополнение к теореме Б. Я. Левина [7, стр. 526—530].

2°. Теперь рассмотрим множество функций вида

$$f(u) = F[E_p(-ut, 1)] = \int_0^{+\infty} E_p(-ut, 1) \frac{dw(t)}{w(t)}, \quad \left(\rho > \frac{1}{2}\right). \quad (13)$$

Из асимптотики (6) функции типа Миттаг—Леффлера, а также асимптотики ее производных следует, что формулой (13) задается класс функций  $K_{\rho}^+$ , определенных в замкнутой области  $|\arg u| \leq \pi \left(1 - \frac{1}{2\rho}\right)$ , аналитических в области  $|\arg u| < \pi \left(1 - \frac{1}{2\rho}\right)$ , значения которых на границе  $L: \arg u = \pm \pi \left(1 - \frac{1}{2\rho}\right)$  бесконечно дифференцируемы.

В самом деле, имеем

$$E_p(-ut, 1)^n = (-t)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+n+1)}{k! \Gamma\left(\frac{k}{\rho} + \frac{n}{\rho} + 1\right)} (-ut)^k = (-t)_1^n F_1(-ut).$$

[Целая функция

$${}_1F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+n+1)}{k! \Gamma\left(\frac{k}{\rho} + \frac{n}{\rho} + 1\right)} z^k \quad \left(\rho > \frac{1}{2}\right)$$

имеет асимптотику [8]

$${}_1F_1(z) = \begin{cases} \rho^n z^{n(\rho-1)} e^{z^\rho} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{z^\rho}\right) \right\}, & \text{при } |\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon, \\ O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), & \text{при } \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon \leq |\arg z| \leq \pi \quad (\varepsilon > 0) \\ \rho^n z^{n(\rho-1)} e^{z^\rho} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{z^\rho}\right) \right\} + O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), & \text{при } \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon < |\arg z| < \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon. \end{cases}$$

Следовательно, можно найти такие постоянные  $M_1$  и  $M_2$ , чтобы имели место неравенства:

а) если  $\frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon < |\arg z| < \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon$ ,  $|z| \geq 0$ , то

$$|{}_1F_1(z)| \leq M_1 (1 + |z|^{n(\rho-1)}) e^{\operatorname{Re} z^\rho} + \frac{M_2}{1 + |z|^{n+1}},$$

б) если  $\frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon \leq |\arg z| \leq \pi$ ,  $|z| > 0$ , то

$$|f_1(z)| \leq \frac{M_2}{1 + |z|^{n+1}}.$$

Поэтому, если  $u = re^{\pm i\pi(1 - \frac{1}{2\rho})}$ , то

$$|[E_\rho(-ut, 1)]^{(n)}| \leq M_1 t^n [1 + (rt)^n (r^{p-1})] + \frac{M_2 t^n}{1 + (rt)^{n+1}} \quad (t > 0),$$

так что дифференцирование под знаком интеграла (13) любое число раз законно.

Квазианалитичность класса  $K_{\Sigma, \rho}^+$  определяется как в определении 1. Аналогично теореме 1 доказывается следующая

**Теорема 3.** Для квазианалитичности класса  $K_{\Sigma, \rho}^+$ , необходимо и достаточно, чтобы система  $\{t^n\}_{n=0}^\infty$  была полна в  $C_\Sigma[0, \infty[$ .

Пусть теперь класс  $K_{\Sigma, \rho}^+$  не квазианалитичен в смысле определения 1. Пусть функция  $\varphi(\alpha)$  удовлетворяет тем же условиям, что и в определении 2.

**Определение 3.** Класс  $K_{\Sigma, \rho}^+$  называется квазианалитическим по отношению к порядку  $\varphi(\alpha)$ , если из условий  $f_0(u) \in K_{\Sigma, \rho}^+$  и

$$\int_0^{a^{1/\rho}} |f_0(re^{\pm i\pi(1 - \frac{1}{2\rho})})| r^{p-1} dr \leq \varphi(\alpha) \quad (14)$$

следует, что  $f_0(u) \equiv 0$ ,  $|\arg u| < \pi(1 - \frac{1}{2\rho})$ .

Далее рассмотрим класс  $A_\rho^+$  целых функций  $\Phi(z)$ ,  $t\Phi(t) \in C_\Sigma[0, \infty[$  порядка  $\rho$  и минимального типа, удовлетворяющих условиям

$$|\Phi(re^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}})| \leq \text{const} \cdot r^{-\rho-1} e^{r^\rho \eta(r^\rho)}, \quad r \geq 1, \quad (15)$$

где функция  $\eta$  определяется как и выше (стр. 201—202). Аналогично теореме 2 справедлива следующая

**Теорема 4.** Пусть  $\frac{1}{2} < \rho \leq 1$ . Если класс  $A_\rho^+$  целых функций порядка  $\rho$  и минимального типа, удовлетворяющих условию (15), плотен в  $C_\Sigma[0, \infty[$ , то класс  $K_{\Sigma, \rho}^+$  квазианалитичен по отношению к порядку  $\varphi(\alpha)$ .

**Доказательство.** Пусть некоторая функция  $f_0(u)$  из класса  $K_{\Sigma, \rho}^+$  удовлетворяет условиям (14), и пусть  $F_0$  — функционал, которым порождается функция  $f_0: f_0(u) = F_0[E_\rho(-ut, 1)]$ . Воспользовавшись представлением (4) (взяв  $\mu = 1$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2\rho}$ ,  $\theta = -\frac{\pi}{2\rho}$ ) и условиями (14

для функции  $F_0(z) = F_0\left[\frac{1}{z-t}\right]$  как в доказательстве теоремы 2, получим оценки

$$|F_0(re^{\pm i \frac{\pi}{2p}})| \leq \text{const} \cdot r^{p-1} e^{-r^p}, \quad r \geq 1. \quad (16)$$

Далее, рассматриваем как и в теореме 2 целую функцию порядка  $\rho$  и минимального типа  $q_\Phi(z)$ :

$$q_\Phi(z) = F_0 \left| \frac{\Phi_1(z) - \Phi_1(z)}{z - z} \right|, \quad \Phi_1(z) = (1 + z^2) \Phi(z), \quad \Phi \in A_p^+.$$

Для функции  $q_\Phi(z)$  с помощью оценок (15) и (16) получаем ограниченность на лучах  $\arg z = \frac{\pi}{2\rho}$  и  $\arg z = -\frac{\pi}{2\rho}$ , откуда по принципу Фрагмена—Линделёфа и учитывая, что  $\rho \leq 1$ , получаем ограниченность функции  $q_\Phi(z)$  на всей плоскости, т. е.  $q_\Phi(z) \equiv \text{const}$ . Доказательство заканчивается как в теореме 2.

Отметим частный случай  $\rho = 1$  теоремы 3 (с заменой  $u$  на  $iu$ ).

**Теорема 3'.** Чтобы класс функций, представимых в виде

$$f(u) = \int_0^{+\infty} e^{-iut} \frac{d\sigma(t)}{w(t)}, \quad (17)$$

был квазианалитичен, необходимо и достаточно, чтобы система  $\{t^n\}_{n=0}^{\infty}$  была полна в  $C_w[0, \infty[$ .

Эту теорему можно рассмотреть как некоторое дополнение к теореме Б. Я. Левина: для того, чтобы класс функций, представимых в виде

$$g(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iut} \frac{d\sigma(t)}{w(t)}, \quad (18)$$

был квазианалитичным, необходимо и достаточно, чтобы система  $\{t^n\}_{n=0}^{\infty}$  была полна в  $C_w[-\infty, +\infty[$ . В том случае, когда весовая функция  $w(t)$  ( $w(t) = w(-t)$ ) не обеспечивает полноту системы полиномов в  $C_w[-\infty, +\infty[$ , но обеспечивает полноту в  $C_w[0, \infty[$ , то тот подкласс неквазианалитического класса (18), который получается из (18), если взять только те меры  $d\sigma(t)$ , которые равны нулю на полуоси  $]-\infty, 0[$ , будет квазианалитическим.

**Пример.** Пусть  $\lambda_k = k^p$  ( $p > 1$ ),  $k = 0, 1, 2, \dots$ , и  $G(\lambda) = \lambda \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)$ . Имеем [7]

$$\ln |G(\pm ir)| \sim \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi}{2p}} r^{1/p} = c(p) r \cdot r^{\frac{1}{p}-1}.$$

Следовательно

$$|G(\pm ir)| \leq e^{\eta(r)},$$

где  $\eta(r) = c_1(p) r^{\frac{1}{p}-1}$  и  $c_1 > c$  — произвольная постоянная. Соответствующая функция  $\varphi(a)$  будет равна

$$\varphi(\alpha) = \exp(-c_2 \alpha^{\frac{1}{p-1}}), \quad c_2 = c_1^{\frac{p}{1-p}}.$$

Определим весовую функцию  $w(t)$  на полуоси следующим образом:

$$w(t) = \begin{cases} +\infty, & \lambda_k < t < \lambda_{k+1} \\ A_k, & t = \lambda_k \end{cases} \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

где значения  $A_k$  подчинены тем же условиям, что и в предыдущем примере. Пусть множество  $A_1^+$  имеет тот же смысл, что и в теореме 4. Тогда  $cG(\lambda) \in A_1^+$  при любом значении постоянной  $c$ , так как  $\|G(t)\|=0$  и  $G(\lambda)$  удовлетворяет условию (15). С другой стороны

$$\sup_{\substack{\|G\| < 1 \\ \Phi \in A_1^+}} |\Phi(i)| \geq \sup_c |cG(i)| = +\infty.$$

Но отсюда следует, что множество  $A_1^+$  плотно в  $C_w[0, \infty[$ . Следовательно, класс

$$f(u) = F[e^{-ut}] = \int_0^{+\infty} e^{-ut} \frac{d\sigma(t)}{w(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{A_k} e^{-\lambda_k u}, \quad \sum_k |a_k| < \infty,$$

$u \in ]-i\infty, i\infty[$ , неквазианалитический в обычном смысле является квазианалитическим по порядку  $\varphi(z)$ .

3°. Теперь перейдем к рассмотрению классов, связанных с весовыми приближениями на оси. Пусть  $w(t)$  — определенная на  $] -\infty, +\infty[$  вещественная измеримая функция, удовлетворяющая условиям

$$w(t) \geq 1, \quad \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{t^n}{w(t)} = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Обозначим через  $C_w ]-\infty, +\infty[$  множество непрерывных на  $] -\infty, +\infty[$  функций  $f(t)$ , для которых

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{w(t)} = 0,$$

и определим норму элемента  $f \in C_w ]-\infty, +\infty[$  как

$$\|f\| = \sup_{-\infty < t < +\infty} \frac{|f(t)|}{w(t)}.$$

Для данного  $\rho > 1$  рассмотрим класс  $K_{w, \rho}$  функций вида

$$f(u) = F[E_\rho(-iut, 1)] = \int_{-\infty}^{+\infty} E_\rho(-iut, 1) \frac{d\sigma(t)}{w(t)}, \quad (19)$$

где  $F$  — произвольный линейный функционал в  $C_w ]-\infty, +\infty[$ , а  $E_\rho(z; \mu)$  — функция типа Миттаг—Леффлера (5). Каждая функция этого класса определена на объединении  $D = \bar{\Delta}_1 \cup \bar{\Delta}_2$ , где

$$\Delta_1 = \left\{ u : |\arg u| < \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{\rho} \right) \right\} \text{ и } \Delta_2 = \left\{ u : |\arg u - \pi| < \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{\rho} \right) \right\},$$

аналитична в областях  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , бесконечно дифференцируема на  $\partial D$ .

Нас интересует квазианалитичность рассматриваемого класса в следующем смысле:

**Определение 4.** Класс  $K_{w,p}$  назовем квазианалитическим, если из условий  $f \in K_{w,p}$  и  $f^{(n)}(0) = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , следует, что  $f(u) \equiv 0$  при  $u \in \Delta_1$  (или  $\Delta_2$ ).

Имеет место следующая

**Теорема 5.** Для того, чтобы класс  $K_{w,p}$  был квазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы система  $\{t^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$  была полна в  $C_w] - \infty, +\infty[$ .

**Необходимость.** Пусть класс  $K_{w,p}$  квазианалитичен,  $F_0$  — произвольный линейный функционал, исчезающий на системе  $\{t^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ :  $F_0[t^n] = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Рассмотрим функцию  $f_0(u)$ , порожденную этим функционалом формулой (19):  $f_0(u) = F_0[E_p(-iut, 1)]$ .

Имеем  $f_0^{(n)}(0) = c_n F_0[t^n] = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , и так как по предположению класс  $K_{w,p}$  квазианалитичен, то  $f_0(u) \equiv 0$ ,  $u \in \Delta_1$  ( $u \in \Delta_2$ ), т. е.  $F_0[E_p(-iut, 1)] = 0$  при  $u \in \Delta_1$  ( $\Delta_2$ ). В частности, беря  $u = 1$ , получим  $F_0[E_p(-it, 1)] = 0$ . Таким образом, получили, что произвольный линейный функционал, исчезающий на системе  $\{t^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ , исчезает также на функции  $E_p(-it, 1)$ . Это означает, что функцию  $E_p(-it, 1)$ , которая является целой функцией порядка  $p$  и типа 1 можно приблизить полиномами в метрике  $C_w] - \infty, +\infty[$ . Но это возможно только в случае, когда система  $\{t^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$  полна в  $C_w] - \infty, +\infty[$  [9, 10].

**Достаточность.** Пусть функция  $f(u) \in K_{w,p}$  и  $f^{(n)}(0) = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Из (19) имеем  $f^{(n)}(0) = c_n F[t^n]$ ,  $c_n \neq 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , следовательно  $F[t^n] = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  и так как по предположению система  $\{t^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$  полна в  $C_w] - \infty, +\infty[$ , то  $F = 0$  и, следовательно,  $f(u) \equiv 0$ ,  $u \in \Delta_1 \cup \Delta_2$ .

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса квазианалитичности класса  $K_{w,p}$  по данному порядку. Пусть класс  $K_{w,p}$  не квазианалитичен в смысле определения 3, и пусть  $\varphi(z)$  удовлетворяет тем же условиям, что и в определении 2.

**Определение 5.** Класс  $K_{w,p}$  называется квазианалитическим по отношению к порядку  $\varphi(z)$ , если из условий  $f_0(u) \in K_{w,p}$  и

$$\int_0^{1/p} |f_0(re^{+i\frac{\pi}{2}(1 \pm \frac{1}{p})})| r^{p-1} dr \leq \varphi(z) \quad (20)$$

следует, что  $f_0(u) \equiv 0$ ,  $u \in \Delta_1 \cup \Delta_2$ .

Далее рассмотрим класс  $A_p$  целых функций  $\Phi(z)$ ,  $t\Phi(t) \in C_w] - \infty, +\infty[$ , порядка  $p$  и минимального типа, удовлетворяющих условиям:

$$|\Phi(z)| \leq \text{const} \cdot |z|^{-p-1} e^{\gamma|z|^2} \quad (\gamma|z|^2), \quad |z| > 1, \quad |\arg z| = \frac{\pi}{2} \pm \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2p} \right), \quad (21)$$

где функция  $\gamma$  определяется как и выше (стр. 201—202). Тогда имеет место следующая

**Теорема 6.** Пусть  $1 \leq \rho \leq 2$ . Если множество  $A_\rho$  целых функций порядка  $\rho$  и минимального типа, удовлетворяющих условию (21), плотно в  $C_w$  —  $\infty$ ,  $+\infty$ ], то класс  $K_{w,\rho}$  квазианалитичен по отношению к порядку  $\varphi(x)$ .

**Доказательство.** Пусть некоторая функция  $f_0(u)$  из класса  $K_{w,\rho}$  удовлетворяет условиям (20), и пусть  $F_0$  — функционал, которым порождается функция  $f_0: f_0(u) = F_0[E_\rho(-iut, 1)]$ . Воспользовавшись представлением (4) (взяв  $\theta = \pm \frac{\pi}{2\rho}$ ,  $\theta_1 = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right)$  и  $\mu = 1$ ) и условиями (20) для функции  $F_0(z) = F_0\left[\frac{1}{z-t}\right]$  как в доказательстве теоремы 2, получим оценки

$$|F_0(re^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq \text{const} \cdot r^{\rho-1} e^{-r^\rho \eta(r^\rho)}, \quad (r \geq 1) \quad (22)$$

$$|F_0(re^{\pm i \pi \left(1 - \frac{1}{2\rho}\right)})| \leq \text{const} \cdot r^{\rho-1} e^{-r^\rho \eta(r^\rho)}.$$

Далее, рассматриваем как и в теореме 2 целую функцию порядка  $\rho$  и минимального типа  $q_\Phi(z)$ :

$$q_\Phi(z) = F_0\left[\frac{\Phi_1(t) - \Phi_1(z)}{t-z}\right], \quad \Phi_1(z) = (z^2 + 1)\Phi(z), \quad \Phi \in A_\rho.$$

С помощью оценок (21) и (22) для функции  $q_\Phi(z)$  получаем ограниченность на лучах  $\arg z = \pm \frac{\pi}{2\rho}$  и  $\arg z = \pm \pi \left(1 - \frac{1}{2\rho}\right)$ , откуда по принципу Фрагмена—Линделёфа и учитывая, что  $\rho \leq 2$ , получаем ограниченность функции  $q_\Phi(z)$  на всей плоскости, т. е.  $q_\Phi(z) \equiv \text{const}$ . Доказательство заканчивается как в теореме 2.

4°. Пусть  $w(t)$  — определенная на  $L \equiv ]-\infty, +\infty[ \cup ]-\infty, i\infty[$ , вещественная измеримая функция, удовлетворяющая условиям:

$$w(t) \geq 1, \quad \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{t^n}{w(t)} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$C_w(L)$  — множество непрерывных на  $L$  функций, для которых

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{w(t)} = 0.$$

Норма элемента  $f \in C_w(L)$  определяется как

$$\|f\| = \sup_{t \in L} \frac{|f(t)|}{w(t)}.$$

Для данного  $\rho > 2$  рассмотрим класс  $K_{w,\rho}^*$  функций вида

$$f(u) = F[E_\rho(-iut, 1)] = \int_L E_\rho(-iut, 1) \frac{dc(t)}{w(t)}, \quad (23)$$

где  $F$  — произвольный линейный функционал в  $C_w(L)$ .

Каждая функция этого класса определена на объединении  $D = \bigcup_{k=1}^4 \bar{\Delta}_k$ , где

$$\Delta_k = \left\{ u : \left| \arg u - (2k-1) \frac{\pi}{4} \right| < \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2\rho} \right\}, \quad k=1, 2, 3, 4,$$

аналитична в областях  $\Delta_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) и бесконечно дифференцируема на  $\partial D$ .

**Определение 6.** Класс  $K_{\Sigma, \rho}^*$  назовем квазианалитическим, если из условий  $f \in K_{\Sigma, \rho}^*$  и  $f^{(n)}(0) = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  следует, что  $f(u) \equiv 0$  при  $u \in \Delta_1$  (или  $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ ).

Имеет место следующая

**Теорема 7.** Для того, чтобы класс  $K_{\Sigma, \rho}^*$  был квазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы система  $\{t^n\}_{n=0}^\infty$  была полна в  $C_\Sigma(L)$ .

Доказательство почти не отличается от доказательства теоремы 5 (см. также доказательство теоремы 9). Пусть теперь класс  $K_{\Sigma, \rho}^*$  не квазианалитичен в смысле определения 6 и пусть  $\varphi(\alpha)$  удовлетворяет тем же условиям, что и в определении 2.

**Определение 7.** Класс  $K_{\Sigma, \rho}^*$  называется квазианалитическим по отношению к порядку  $\rho(\alpha)$ , если из условий  $f_0(u) \in K_{\Sigma, \rho}^*$  и

$$\int_0^{\alpha^{1/\rho}} |f_0(re^{i\gamma_k^{(\pm)}})| r^{\rho-1} dr \leq \varphi(\alpha), \quad k=1, 2, 3, 4, \quad (24)$$

где  $\gamma_k^{(\pm)} = (2k-1) \frac{\pi}{4} \pm \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2\rho} \right)$ ,  $k=1, 2, 3, 4$  следует, что  $f_0(u) \equiv 0$ ,  $u \in D$ .

Далее рассмотрим класс  $A_\rho^*$  целых функций  $\Phi(z)$  порядка  $\rho$  и минимального типа,  $t\Phi(t) \in C_\Sigma(L)$ , удовлетворяющих условиям

$$|\Phi(z)| \leq \text{const} \cdot |z|^{-\rho-1} e^{|z|^\rho \eta(|z|^\rho)}, \quad |z| \geq 1, \quad |\arg z| = (2k-1) \frac{\pi}{4} \pm \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2\rho} \right), \quad k=1, 2, \quad (25)$$

где функция  $\eta$  определяется как и выше (стр. 201–202).

Тогда имеет место

**Теорема 8.** Пусть  $2 < \rho \leq 4$ . Если множество  $A_\rho^*$  целых функций порядка  $\rho$  и минимального типа, удовлетворяющих условию (25), плотно в  $C_\Sigma(L)$ , то класс  $K_{\Sigma, \rho}^*$  квазианалитичен по отношению к порядку  $\rho(\alpha)$ .

**Доказательство.** Пусть некоторая функция  $f_0(u) \in K_{\Sigma, \rho}^*$  удовлетворяет условиям (24). Обозначим через  $F_0$  функционал, которым порождается функция  $f_0$ :  $f_0(u) = F_0[E_\rho(-iut, 1)]$ . Снова восполь-

зовавшись представлением (4) (взяв  $\theta = \pm \frac{\pi}{2\rho}$ ,  $\vartheta = \pm \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}\right)$ ,  $\theta = \pm \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\rho}\right)$  и  $\mu=1$ ) и условиями (24) для функции  $F_0(z) = F_0\left[\frac{1}{z-t}\right]$ , получим оценки

$$|F_0(re^{i\theta})| \leq \text{const} \cdot r^{\rho-1} e^{-r^\rho \eta(r^\rho)}, \quad r \geq 1, \quad |\theta| = (2k-1) \frac{\pi}{4} \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2\rho}\right), \quad k=1, 2. \quad (26)$$

Пусть  $\mathfrak{M}_\Phi$  — множество тех функций из  $A_\rho$ , для которых выполняется условие  $\left\| \frac{\Phi_1(t)}{t+1+i} \right\| \leq 1$  и

$$q_\Phi(z) = F_0 \left[ \frac{\Phi_1(t) - \Phi_1(z)}{t-z} \right], \quad \Phi_1(z) = (z^2 - i)\Phi(z).$$

$q_\Phi(z)$  — целая функция порядка  $\rho$  и минимального типа. Предполагая что  $\Phi \in \mathfrak{M}_\Phi$  и учитывая оценки (25), (26) как в доказательстве теоремы 2 получим, что на лучах  $|\arg z| = (2k-1) \frac{\pi}{4} \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2\rho}\right)$ , ( $k=1, 2$ ) функция  $q_\Phi(z)$  ограничена. Применяя принцип Фрагмена—Линделёфа и учитывая, что  $\rho \leq 4$ , получим, что  $q_\Phi(z) \equiv \text{const}$ . Доказательство заканчивается как в теореме 2.

5°. Теперь рассмотрим класс  $K_{w,2}^*$  функций вида

$$f(u) = F(E_2(-iut, 1)) = \int_1^\infty E_2(-iut, 1) \frac{d\tau(t)}{w(t)}, \quad (27)$$

где  $F$  — произвольный линейный функционал в  $C_w(L)$ . Каждая функция этого класса определена на лучах  $\arg u = (2k-1) \frac{\pi}{4}$ ,  $k=1, 2, 3, 4$  и бесконечно дифференцируема.

Определение 8. Класс  $K_{w,2}^*$  назовем квазианалитическим, если из условий  $f \in K_{w,2}^*$  и  $f^{(n)}(0) = 0$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ , следует, что  $f(u) \equiv 0$  при  $\arg u = (2k-1) \frac{\pi}{4}$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ). Справедлива следующая

Теорема 9. Для того, чтобы класс  $K_{w,2}^*$  был квазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы система  $\{t^n\}_{n=0}^\infty$  была полной в  $C_w(L)$ .

Необходимость. Пусть класс  $K_{w,2}^*$  квазианалитичен, и  $F_0$  — произвольный линейный функционал, исчезающий на системе  $\{t^n\}_{n=0}^\infty$ :  $F_0[t^n] = 0$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ . Рассмотрим функцию  $f_0(u)$ , порожденную этим функционалом формулой (27):  $f_0(u) = F_0[E_2(-iut, 1)]$ . Имеем  $f_0^{(n)}(0) = c_n F_0[t^n] = 0$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$  и так как по предположению класс  $K_{w,2}^*$  квазианалитичен, то  $f_0(u) \equiv 0$  при  $\arg u = (2k-1) \frac{\pi}{4}$ .

т. е.  $F_0[E_2(-iut, 1)] \equiv 0$  при  $\arg u = (2k-1)\frac{\pi}{4}$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ). Это означает, что функция  $E_2(-iut, 1)$  для произвольного значения  $u$ ,  $\arg u = (2k-1)\frac{\pi}{4}$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) допускает приближение полиномами в  $C_w(L)$ . Отсюда следует, что система  $\{t^n\}_{n=0}^\infty$  полна в  $C_w(L)$ . В самом деле, в противном случае множество полиномов  $\mathfrak{M} \left( P \in \mathfrak{M}, \text{ если } \left\| \frac{P(t)}{t+1+i} \right\| \leq 1 \right)$  составило бы нормальное семейство хотя бы в одном из квадрантов [10, 11]. Пусть это — первый квадрант. Пусть  $D_1$  означает угловую область, стороны которой параллельны координатным осям и замыкание которой лежит в первом квадранте. Обозначим через  $\psi(z) = \sup_{P \in \mathfrak{M}} |P(z)|$ , будем иметь [5]

$$\int_{\partial D_1} \ln \psi(\zeta) \frac{\partial G(\zeta, z)}{\partial n} ds < +\infty, \quad z \in D_1,$$

где  $G$  — функция Грина задачи Дирихле области  $D_1$ . Далее из неравенства

$$\ln \psi(z) \leq \int_{\partial D_1} \ln \psi(\zeta) \frac{\partial G(\zeta, z)}{\partial n} ds, \quad z \in D_1$$

следует, что  $\ln \psi(z)$  имеет порядок роста  $\rho=2$  и минимальный тип в  $D_1$ . Тогда любая функция, принадлежащая замыканию системы полиномов в метрике  $C_w(L)$ , на границе первого квадранта совпадает со значениями аналитической в этом квадранте функции, которая в  $D_1$  имеет порядок роста  $\rho=2$  и минимальный тип. Но функция  $E_2(-iuz, 1)$  при  $u = e^{i\frac{\pi}{4}}$  не удовлетворяет этому требованию. Следовательно,

функция  $E_2(-ie^{i\frac{\pi}{4}}t, 1)$  может быть приближена полиномами в метрике  $C_w(L)$  только в том случае, когда система полиномов полна в  $C_w(L)$ .

**Достаточность.** Пусть функция  $f(u) \in K_{w,2}^*$  и  $f^{(n)}(0) = 0$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ . Из (27) имеем  $f^{(n)}(0) = c_n F[t^n]$ ,  $c_n \neq 0$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ , следовательно  $F[t^n] = 0$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$  и так как по предположению система  $\{t^n\}_{n=0}^\infty$  полна в  $C_w(L)$ , то  $F=0$  и, следовательно,  $f(u) \equiv 0$ .

**Определение 9.** Класс  $K_{w,2}^*$  называется квазианалитическим по отношению к порядку  $\varphi(z)$ , если из условий  $f_0(u) \in K_{w,2}^*$  и

$$\int_0^{\sqrt{a}} |f_0(re^{i(2k-1)\frac{\pi}{4}})| r dr \leq \varphi(a), \quad k=1, 2, 3, 4 \quad (28)$$

следует, что  $f_0(u) \equiv 0$  при  $\arg u = (2k-1)\frac{\pi}{4}$ ,  $k=1, 2, 3, 4$ . Далее

рассматривается класс  $A_2^*$  целых функций  $\Phi(z)$  второго порядка и минимального типа,  $i\Phi(t) \in C_w(L)$ , удовлетворяющих условиям

$$|\Phi(z)| \leq \text{const} \cdot |z|^{-2} e^{|z|^2 \eta(|z|^2)}, \quad |z| \geq 1, \quad |\arg z| = (2k-1) \frac{\pi}{4}, \quad k=1, 2. \quad (29)$$

Справедлива следующая

**Теорема 10.** Если множество  $A_2^*$  целых функций второго порядка и минимального типа, удовлетворяющих условию (29), плотно в  $C_w(L)$ , то класс  $K_{w,2}$  квазианалитичен по отношению к порядку  $\varphi(\alpha)$ .

**Доказательство.** Пусть некоторая функция  $f_0(u)$  из класса  $K_{w,2}$  удовлетворяет условиям (28), и пусть  $F_0$  — функционал, которым порождается функция  $f_0$ :  $f_0(u) = F_0[E_2(-iut, 1)]$ . Воспользовавшись представлением (4) (взяв  $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$ ,  $\theta = \pm \frac{3}{4}\pi$  и  $\mu=1$ ) и условиями

(28) для функции  $F_0(z) = F_0 \left| \frac{1}{z-t} \right|$  получим оценки

$$\begin{aligned} |F_0(re^{\pm i \frac{\pi}{4}})| &\leq \text{const} \cdot re^{-r^2 \eta(r^2)}, & (r \geq 1) \\ |F_0(re^{\pm i \frac{3\pi}{4}})| &\leq \text{const} \cdot re^{-r^2 \eta(r^2)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Далее рассматриваем целую функцию второго порядка и минимального типа  $q_\Phi(z)$ :

$$q_\Phi(z) = F_0 \left| \frac{\Phi_1(t) - \Phi_1(z)}{t-z} \right|, \quad \Phi_1(z) = (z^2 - i)\Phi(z), \quad \Phi \in A_2^*.$$

Для функции  $q_\Phi(z)$  с помощью оценок (29) и (30) получаем ограниченность на лучах  $|\arg z| = (2k-1) \frac{\pi}{4}$ ,  $k=1, 2$ , откуда по принципу Фрагмена—Линделёфа получаем ограниченность функции  $q_\Phi(z)$  на всей плоскости, т. е.  $q_\Phi(z) \equiv \text{const}$ .

Доказательство заканчивается как в теореме 2.

Авторы выражают искреннюю благодарность М. М. Джрбешяну и Б. Я. Левину за обсуждение работы и ценные советы.

Арм. государственный педагогический  
институт им. Х. Абовяна,  
Ереванский государственный  
университет

Поступила 3. XI. 1986

Ի. Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Ս. Ա. ԱԿՈՊՅԱՆ. Միտտագ-Լեֆլերի կոնֆինեռով ինտեգրալ ձևափոխությամբ ներկայացվող ֆունկցիաների բնագիտական դասեր (ամփոփում)

Հոդվածում քննարկվում է անվերջ դիֆերենցիալ ֆունկցիաների որոշ դասերի բնագիտական խտրական հարցը: Այդ դասերը մտցված են Միտտագ-Լեֆլերի կորիզով ինտեգրալ ներկայացումների օգնությամբ: Բնագիտական խտրական հայտանիշները տրված են բազմանդամների համակարգի կամ ամբողջ ֆունկցիաների որոշ դասերի լրիվության տերմիններով տարրեր ֆունկցիոնալ տարածություններում: Նման դրվածքով ինդերն առաջինը դիտարկել է Բ. Ցա. Ակերը Ֆրեդերիկ կորիզով ներկայացվող դասերի համար:

Ներկա աշխատանքի մի շարք թեորեմներում մենք հենվում ենք համալիր տիրույթում ինտեգրալ ձևափոխությունների Մ. Մ. Զրբաշյանի տեսության որոշ արդյունքների վրա:

I. H. KHACHATRIAN, S. A. HAKOBIAN. *Quasianalytical classes of functions representable by integrals with Mittag-Leffler kernels (summary)*

The quasianalyticity of some classes of infinitely differentiable functions is established. These classes are introduced by means of integral representations with Mittag-Leffler kernel. Quasianalyticity criteria for these classes are given in terms of completeness of systems of polynomials or entire functions in different spaces.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966.
2. И. О. Хачатрян. Квазианалитические классы, связанные с весовыми приближениями в комплексной области, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 21, № 6, 1986.
3. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, М., 1976.
4. М. М. Джрбашян. Некоторые вопросы взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области, Мат. сборник, 36, № 3, 1955, 353—440.
5. И. О. Хачатрян. О взвешенном приближении целых функций нулевой степени многочленами на действительной оси, Записки мех.-мат. фак-а и Харьковского матем. об-ва, серия 4, том 29, 1963, 129—142.
6. Б. Я. Левин, М. С. Лифшиц. О квазианалитических классах функций, представленных рядами Фурье, Мат. сборник, 9 (51):3 (1941), 693—710.
7. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., 1956.
8. E. M. Wright. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. The Journal of The London Mathematical Society, vol. X, 1935, 286—293.
9. Н. И. Ахиезер. О взвешенном приближении непрерывных функций многочленами на всей числовой оси, УМН, XI, вып. 4 (70), 1956, 2—43.
10. С. Н. Мертелян. Весовые приближения многочленами, УМН, XI, вып. 5 (71), 1956, 107—152.
11. И. О. Хачатрян. О взвешенно-равномерном приближении непрерывных функций полиномами на двух лучах, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 3, №№ 4, 5, 1968, 301—326.

УДК 517.54

А. Э. ДЖРБАШЯН, А. О. КАРАПЕТЯН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ СОПРЯЖЕННЫМИ  
ПЛЮРИГАРМОНИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ В МНОГОМЕРНЫХ  
ОБЛАСТЯХ

## Введение

Обозначим через  $D$  единичный круг в комплексной плоскости  $C: D = \{z: |z| < 1\}$ . Рассмотрим класс всех аналитических в  $D$  функций  $f$ , для которых конечна величина

$$M_{p, \alpha}^f = \frac{1 + \alpha}{\pi} \iint_D |f(z)|^p (1 - |z|)^\alpha dm_2(z),$$

где  $0 < p < \infty$ ,  $\alpha > -1$  и  $dm_2$  — плоская мера Лебега. Обозначим этот класс через  $A_{\alpha}^p$ .

Эти пространства впервые были введены в работах [1], [2] и там же был доказан следующий фундаментальный результат.

**Теорема А.** Если  $f \in A_{\alpha}^p$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $\alpha > -1$ , то справедливы представления

$$f(z) = \frac{1 + \alpha}{\pi} \iint_D \frac{f(w)}{(1 - z\bar{w})^{2+\alpha}} (1 - |w|^2)^\alpha dm_2(w), \quad (1)$$

$$\overline{f(0)} = \frac{1 + \alpha}{\pi} \iint_D \frac{\overline{f(w)}}{(1 - z\bar{w})^{2+\alpha}} (1 - |w|^2)^\alpha dm_2(w). \quad (2)$$

Классы  $A_{\alpha}^p$ , являясь естественным и существенным обобщением классических пространств Харди  $H^p$ , обладают рядом свойств, которыми они сильно отличаются от этих пространств. Одним из таких свойств является свойство ограниченности оператора гармонического сопряжения при  $0 < p \leq 1$  ([3] — [5]).

**Теорема В.** Пусть  $0 < p < \infty$ ,  $\alpha > -1$  и  $f = u + iv$  аналитична в  $D$ . Если  $f$  нормирована условием  $\operatorname{Im} f(0) = 0$ , то существует константа  $C$ , зависящая только от  $p$  и  $\alpha$  и такая, что

$$\iint_D |f(z)|^p (1 - |z|)^\alpha dm_2(z) \leq C \iint_D |u(z)|^p (1 - |z|)^\alpha dm_2(z). \quad (3)$$

Оказывается, что этот факт является универсальным и имеет место также в соответствующих пространствах функций в других областях. Например, для подходящих обобщений классов  $A_{\alpha}^p$  в полупространствах для гармонических функций (и при подходящем определе-

нии понятия сопряженной гармонической функции) этот результат доказан в [6].

Соответствующий результат для классов  $A^p_\alpha$  в единичном шаре в  $\mathbb{C}^n$  является простым следствием теоремы  $B^*$ . Действительно, вспомним элементарную формулу ( $B$  — единичный шар в  $\mathbb{C}^n$ ,  $S = \partial B$ ,  $d\sigma$  — мера Лебега на  $S$ )

$$\int_B \varphi(w) dm_{2n}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_S d\sigma(\zeta) \int_D \varphi(z) z^{2n-2} dm_2(z) \quad (4)$$

(см., напр., [7]). Теперь, если  $f$  — некоторая голоморфная функция в  $B$ ,  $f = u + iv$  ( $u$  и  $v$  плюригармоничны,  $v(0) = 0$ ), и  $0 < p < \infty$ ,  $\alpha > -1$ , то по формуле (4) и теореме В будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_B |f(w)|^p (1 - |w|)^\alpha dm_{2n}(w) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_S d\sigma(\zeta) \int_D |f(z)|^p |z|^{2n-2} (1 - |z|)^\alpha dm_2(z) \leq \\ &\leq \frac{C}{2\pi} \int_S d\sigma(\zeta) \int_D |u(z)|^p |z|^{2n-2} (1 - |z|)^\alpha dm_2(z) = \\ &= C \int_B |u(w)|^p (1 - |w|)^\alpha dm_{2n}(w). \end{aligned}$$

Настоящая работа посвящена доказательству этого неравенства для плюригармонических функций класса  $A^p_\alpha$  в различных многомерных комплексных областях. Оказывается, что во многих случаях результаты в многомерных областях также можно свести к одномерному случаю. Для этого мы приводим некоторые результаты из теории пространств  $A^p_\alpha$  в полуплоскости и, в частности, подробное доказательство неравенства между сопряженными гармоническими функциями класса  $A^p_\alpha$ . Этот факт в дальнейшем существенно используется при доказательстве аналогов этого результата в многомерных областях.

В § 2 устанавливаются интегральные неравенства между сопряженными плюригармоническими функциями, заданными в некоторых многомерных областях  $D \subset \mathbb{C}^{n+m}$ ,  $n \geq 1$ ,  $m \geq 0$ , имеющих специфический вид. Эти области несколько более общие, чем аффинно-однородные комплексные области Зигеля, изученные в работе [8]. Для доказательства основных результатов при  $p \in (0, \infty)$  и  $\alpha \in \mathbb{R}$  вводятся пространства  $A^p_\alpha(D)$  голоморфных в  $D$  функций, интегрируемых с определенным весом. При специальном выборе области  $D$  и параметра  $\alpha$ , пространства  $A^p_\alpha(D)$  совпадают с пространствами  $A^{p,\alpha}$ , введенными в [5].

\* Авторы благодарны А. Б. Александрову, указавшему им на этот простой способ доказательства.

При  $n=1$ ,  $m=0$ ,  $D$  совпадает с верхней полуплоскостью, а  $A_\alpha^p(D)$  дают пространства, рассмотренные в § 1.

В заключительном параграфе дается несколько иное, чем в § 2, обобщение соответствующего одномерного результата. Здесь рассматриваются многомерные области  $D$ , более общие по сравнению с теми, что рассматривались в предыдущем параграфе (не требуем от основного конуса афинной однородности). В силу этого фигурирующие в определении пространств  $A_\alpha^p(D)$ ,  $p \in (0, \infty)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^1$  веса менее специфические.

### § 1. Неравенства между сопряженными гармоническими функциями в верхней полуплоскости

Обозначим через  $C_+$  верхнюю полуплоскость в комплексной плоскости и рассмотрим там класс  $A_\alpha^p(C_+)$ ,  $0 < p < \infty$ ,  $\alpha > -1$ , определенный следующим образом:  $f \in A_\alpha^p$ , если  $f$  аналитична в  $C_+$

$$\|f\|_{p, \alpha} = \left( \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p y^\alpha dx dy \right)^{1/p} < \infty.$$

Аналогичный класс гармонических функций в  $C_+$  будем обозначать через  $hA_\alpha^p = hA_\alpha^p(C_+)$ .

В работе [9] было установлено интегральное представление для функций класса  $A_\alpha^p$  в полуплоскости. Мы приведем его с небольшим дополнением: нижеследующая формула (1.2) получается из формулы (2) точно таким же образом, как в работе [9] была получена формула (1.1) из формулы (1).

**Теорема С.** Если  $f \in A_\alpha^p(C_+)$  и  $1 \leq p < \infty$ ,  $\alpha > -1$ , то имеют место представления

$$f(z) = C_\alpha \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(w)}{(\bar{w} - z)^{2+\alpha}} (\operatorname{Im} w)^\alpha dm_2(w), \quad (1.1)$$

$$0 = C_\alpha \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{f(w)}}{(\bar{w} - z)^{2+\alpha}} (\operatorname{Im} w)^\alpha dm_2(w), \quad (1.2)$$

где  $C_\alpha$  — некоторая константа, зависящая только от  $\alpha$ .

Если функция  $f$  принадлежит классу  $A_\alpha^p$  при  $0 < p < 1$ , то имеет место аналогичное интегральное представление с некоторым другим показателем, зависящим от  $p$  и  $\alpha$ . Это вытекает из следующей леммы, которую мы заимствовали из работы [10] (предложение 2.2).

**Лемма 1.** Если  $1 \leq p < \infty$ ,  $\alpha > -1$ , то верно вложение  $A_\alpha^p \subset A_{\frac{1+\alpha}{p}-1}^1$ , а если  $0 < p \leq 1$ , то вложение  $A_\alpha^p \subset A_{\frac{1+\alpha}{p}-2}^1$ .

Применяя эту лемму, немедленно получаем следующий результат

Теорема 1. Если  $f \in A_\alpha^p(\mathbb{C}_+)$ ,  $0 < p < \infty$ ,  $\alpha > -1$ , то справедливо представление

$$f(z) = C_\beta \int_0^{\bar{z}} \int_{-\infty}^{\bar{z}} \frac{f(w)}{(\bar{w} - z)^{2+\beta}} (\operatorname{Im} w)^\beta dm_2(w), \quad (1.3)$$

где при  $0 < p \leq 1$ ,  $\beta \geq \frac{2+\alpha}{p} - 2$ , а при  $1 \leq p < \infty$ ,  $\beta \geq \frac{1+\alpha}{p} - 1$ .

При тех же значениях параметра  $\beta$

$$0 = C_\beta \int_0^{\bar{z}} \int_{-\infty}^{\bar{z}} \frac{\overline{f(w)}}{(\bar{w} - z)^{2+\beta}} (\operatorname{Im} w)^\beta dm_2(w). \quad (1.4)$$

Формулы (1.3) и (1.4) вместе дают

Следствие 1. В условиях теоремы 1, если  $f(z) = u(z) + iv(z)$ , то

$$f(z) = 2C_\beta \int_0^{\bar{z}} \int_{-\infty}^{\bar{z}} \frac{u(w)}{(\bar{w} - z)^{2+\beta}} (\operatorname{Im} w)^\beta dm_2(w). \quad (1.5)$$

Следствие 2. Если  $u \in hA_\alpha^p(\mathbb{C}_+)$ , то справедливо представление

$$u(z) = \int_0^{\bar{z}} \int_{-\infty}^{\bar{z}} u(w) R_\beta(z, w) (\operatorname{Im} w)^\beta dm_2(w),$$

где  $R_\beta(z, w) = \operatorname{Re} \{ 2C_\beta (\bar{w} - z)^{-2-\beta} \}$  и параметр  $\beta$  удовлетворяет условиям теоремы 1.

Ясно, что если функция  $f$  принадлежит пространству  $A_\alpha^p$ , то ее вещественная и мнимая части принадлежат пространству  $hA_\alpha^p$ . Мы докажем, что верно и обратное: если гармоническая функция принадлежит  $hA_\alpha^p$ , то ее аналитическое дополнение, то есть аналитическая функция с этой вещественной частью, принадлежит пространству  $A_\alpha^p$ . Из этого, в частности, будет вытекать интегральное неравенство между сопряженными гармоническими функциями.

Для этого нам понадобится еще одна лемма, за доказательством которой мы отсылаем к [6].

Лемма 2. Пусть полуплоскость  $\mathbb{C}_+$  разбита на двоичные квадраты, которые мы некоторым образом пронумеруем и обозначим через  $\{\Delta_k\}$ :  $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k = \mathbb{C}_+$ . Пусть  $\Delta_k^*$  обозначает квадрат с тем же центром  $z_k = x_k + iy_k \in \mathbb{C}_+$ , что и  $\Delta_k$  и со сторонами в  $5/4$  раза большей длины. Тогда, если  $u$  гармонична в  $\mathbb{C}_+$ , то для всех  $p$  и  $\alpha$ ,  $0 < p < \infty$ ,  $\alpha > -1$

$$\max_{z \in \Delta_k} |u(z)|^p \cdot y_k^\alpha \leq \frac{C}{|\Delta_k|} \int_{\Delta_k^*} |u(w)|^p (\operatorname{Im} w)^\alpha dm_2(w).$$

Здесь  $|E|$  — лебегова мера множества  $E$ .

**Теорема 2.** Пусть гармоническая в  $C_+$  функция  $u$  принадлежит пространству  $hA^p$ ,  $0 < p < \infty$ ,  $\alpha > -1$ . Если функция  $f = u + iv$  аналитична в  $C_+$  и  $v(\infty) = 0$ , то она принадлежит пространству  $A^p$ , при этом

$$\iint_{C_+} |f(z)|^p (\operatorname{Im} z)^\alpha dm_2(z) \leq C \iint_{C_+} |u(z)|^p (\operatorname{Im} z)^\alpha dm_2(z),$$

где константа  $C$  не зависит от функций, участвующих в неравенстве.

**Доказательство.** Введем в рассмотрение функцию

$$F(z) = F_\beta(z) = 2C_\beta \iint_{C_+} \frac{u(w)}{(\overline{w} - z)^{2+\beta}} (\operatorname{Im} w)^\beta dm_2(w), \quad (1.6)$$

где параметр  $\beta$  удовлетворяет условиям теоремы 1. Из следствия 1 теоремы 1 вытекает, что таким образом функция определена корректно, так как в формуле (1.5) важна лишь принадлежность функции  $u$  классу  $hA^p$ . Однако теперь а priori не очевидно, что функция  $F_\beta$  одна и та же для всех  $\beta$  и совпадает с функцией  $f$  из формулы (1.5). Это будет доказано, если мы покажем, что  $F \in A^p$ . Действительно, тогда по следствию 1 из теоремы 1 функция  $F$  будет выражаться формулой (1.5) и поэтому будет служить аналитическим дополнением для  $u$ .

Если  $1 \leq p < \infty$ , то этот факт (и утверждение теоремы) следует из теорем 2 и 3 работы [9] и мы не будем на этом останавливаться. Перейдем к рассмотрению случая  $0 < p < 1$ .

Воспользовавшись разбиением  $C_+$  на двоичные квадраты  $\Delta_k$ , теоремой Фубини и проведя некоторые элементарные вычисления, мы последовательно будем иметь

$$\begin{aligned} & \iint_{C_+} |F(z)|^p (\operatorname{Im} z)^\alpha dm_2(z) = \\ &= C \cdot \int_{C_+} (\operatorname{Im} z)^\alpha \cdot \left| \int_{C_+} \frac{u(w)}{(\overline{w} - z)^{2+\beta}} (\operatorname{Im} w)^\beta dm_2(w) \right|^p dm_2(z) = \\ &= C \cdot \int_{C_+} (\operatorname{Im} z)^\alpha \left| \sum_k \int_{\Delta_k} \frac{u(w)}{(\overline{w} - z)^{2+\beta}} (\operatorname{Im} w)^\beta dm_2(w) \right|^p dm_2(z) \leq \\ &\leq C \cdot \int_{C_+} (\operatorname{Im} z)^\alpha \cdot \sum_k \left( \int_{\Delta_k} \frac{|u(w)|}{|\overline{w} - z|^{2+\beta}} (\operatorname{Im} w)^\beta dm_2(w) \right)^p dm_2(z) \leq \\ &\leq C \cdot \int_{C_+} (\operatorname{Im} z)^\alpha \cdot \left\{ \sum_k (\operatorname{Im} w_k)^{\beta p} \cdot \frac{\max_{\Delta_k} |u(w)|^p}{|\overline{w}_k - z|^{(2+\beta)p}} |\Delta_k|^p \right\} dm_2(z) = \end{aligned}$$

$$= C \cdot \sum_k \max_{\Delta_k} |u(w)|^p \cdot |\Delta_k|^p (\operatorname{Im} w_k)^{3p} \cdot \int_{C_+} \frac{(\operatorname{Im} z)^{\alpha}}{|\overline{w_k} - z|^{(3+2)p}} dm_2(z). \quad (1.7)$$

Здесь  $w_k$  — центр квадрата  $\Delta_k$ . Далее, если выбрать  $\beta$  настолько большим, чтобы  $(2 + \beta) \cdot p > 2$ , то простые вычисления дадут

$$\int_{C_+} \frac{(\operatorname{Im} z)^{\alpha}}{|\overline{w_k} - z|^{(2+\beta)p}} dm_2(z) \leq C (\operatorname{Im} w_k)^{\alpha+2-(\beta+2)p}.$$

Подставив это в (1.7) и заметив, что  $(\operatorname{Im} w_k)^2 \asymp |\Delta_k|$ , окончательно получим

$$\begin{aligned} \|F\|_{p, \alpha}^p &\leq C \sum_k \max_{\Delta_k} |u(w)|^p \cdot |\Delta_k|^p \cdot (\operatorname{Im} w_k)^{\alpha+2(1-p)} \leq \\ &\leq C \sum_k \max_{\Delta_k} |u(w)|^p \cdot |\Delta_k| \cdot (\operatorname{Im} w_k)^{\alpha} \leq \\ &\leq C \sum_k \int_{\Delta_k} |u(w)|^p (\operatorname{Im} w)^{\alpha} dm_2(w) \leq C \int_{C_+} |u(w)|^p \cdot (\operatorname{Im} w)^{\alpha} dm_2(w). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Замечание.** В работе [10] были рассмотрены пространства более общие, чем  $A_p^{\alpha}$  и фактически неявно была доказана и теорема 2 при помощи довольно сложной теории разбиения функций на атомы и молекулы. Наш метод может быть без каких-либо изменений применен и к этим пространствам и таким образом можно получить более простое доказательство этого факта. Таким образом, можно упростить и многие другие результаты этой статьи.

## § 2. Классы $A_{\alpha}^p$ , $p \in (0, \infty)$ , $\alpha \in \mathbb{R}^l$ , в многомерных областях над аффинно-однородными конусами

2.1. Обозначим через  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{C}^n$ ,  $n \geq 1$ , обычные координатные пространства действительных и комплексных чисел соответственно. Мы будем отождествлять  $\mathbb{R}^n$  с вещественным подпространством в  $\mathbb{C}^n$ , точнее

$$\mathbb{R}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \operatorname{Im} z_j = 0 \ (1 \leq j \leq n)\}. \quad (2.1)$$

Для произвольного  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  будем использовать сокращенную запись  $z = x + iy$ , где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ,

$$z_j = x_j + iy_j \ (1 \leq j \leq n).$$

Если  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ ,  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ , то полагаем

$$(z, w) = \sum_{k=1}^n z_k \cdot \overline{w_k}, \quad |z| = \sqrt{(z, z)}.$$

Если  $R$  есть некоторое вещественное координатное пространство, то через  $CR$  обозначаем комплексное координатное пространство,

содержащее  $R$  в качестве максимального вполне вещественного подпространства. Более точно:  $CR = R + iR$ .

Далее, для произвольного множества  $E \subset \mathbb{R}^n$  положим

$$T_E = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n, y \in E\}. \quad (2.2)$$

Тогда  $T_E$  является областью в  $\mathbb{C}^n$  тогда и только тогда, когда  $E$  является областью в  $\mathbb{R}^n$ .

Через  $L(\mathbb{C}^n)$  ( $L(\mathbb{R}^n)$ ) будем обозначать группу всех комплексно (соответственно вещественно) линейных изоморфизмов пространства  $\mathbb{C}^n$  ( $\mathbb{R}^n$ ). Если  $D_1, D_2$  — произвольные множества в  $\mathbb{C}^n$  ( $\mathbb{R}^n$ ), то будем говорить, что они линейно эквивалентны, если  $D_2 = L(D_1)$  для некоторого  $L \in L(\mathbb{C}^n)$  ( $L \in L(\mathbb{R}^n)$ ). Заметим, что если  $D_1$  и  $D_2$  линейно эквивалентны в  $\mathbb{R}^n$ , то  $T_{D_1}$  и  $T_{D_2}$  линейно эквивалентны в  $\mathbb{C}^n$ .

Если  $D \subset \mathbb{C}^n$  есть открытое множество, то через  $H(D)$  обозначим пространство всех голоморфных в  $D$  функций.

Кроме того,  $m(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}^n$ , обозначает  $2n$ -мерную меру Лебега в пространстве  $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$  и  $m(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , обозначает обычную меру Лебега в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

2.2. В этом пункте мы бегло, но достаточно аккуратно, обсудим некоторые понятия, определения, утверждения, подробно рассмотренные в [8].

Множество  $E \subset \mathbb{R}^n$  называется конусом, если из  $x \in E$ ,  $t \in (0; +\infty)$  следует, что  $t \cdot x \in E$ . Прямой в  $\mathbb{R}^n$  называется множество вида

$$l = \{a + \lambda \cdot e, \lambda \in \mathbb{R}^1\}, \quad (2.3)$$

где  $a, e \in \mathbb{R}^n$ ,  $e \neq 0$ .

Множество  $E \subset \mathbb{R}^n$  назовем острым, если в  $\mathbb{R}^n$  не существует прямой, целиком находящейся в  $E$ . Всюду в этом пункте  $V$  будет обозначать острый открытый выпуклый конус в  $\mathbb{R}^n$ .

Для  $V \subset \mathbb{R}^n$  введем обозначение

$$L(V) = \{L \in L(\mathbb{R}^n), L(V) = V\}. \quad (2.4)$$

Конус  $V$  называется афинно-однородным, если для любых  $y_1, y_2 \in V$  существует  $L \in L(V)$  такой, что  $y_2 = Ly_1$ .

Приведем некоторые хорошо известные примеры афинно-однородных острых открытых выпуклых конусов

$$\mathbb{R}_+^n = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, y_j > 0 \ (1 \leq j \leq n)\}, \quad (2.5)$$

$$\Gamma = \{(y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, y_0 \cdot y_1 > \sum_{k=2}^n y_k^2, y_0 > 0\}, \quad (2.6)$$

$$C = \{(y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, y_0^2 > \sum_{k=1}^n y_k^2, y_0 > 0\}. \quad (2.7)$$

Пусть  $V \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ .  $V$ -билинейной симметрической формой на пространстве  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 0$ , называется функция  $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , обладающая свойствами:

$$1) F(s, t) = F(t, s), \quad t, s \in \mathbb{R}^m,$$

$$2) F(\lambda_1 \cdot s_1 + \lambda_2 \cdot s_2, t) = \lambda_1 \cdot F(s_1, t) + \lambda_2 \cdot F(s_2, t),$$

где  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^1, s_1, s_2, t \in \mathbb{R}^m$ ,

$$3) F(t, t) \in \bar{V}, \quad t \in \mathbb{R}^m,$$

$$4) F(t, t) = 0 \in \mathbb{R}^n \text{ тогда и только тогда, когда } t = 0.$$

**З а м е ч а н и е.** В приведенном выше определении случай  $m=0$  означает, что  $F \equiv 0$ , то есть форма не задана.

$V$ -билинейная симметрическая форма  $F$  называется афинно-однородной, если выполнены два дополнительных требования:

5) конус  $V$  является афинно-однородным,

6) существует подгруппа  $G(V)$  группы  $L(V)$ , обладающая следующими свойствами:

а) если  $y_1, y_2 \in V$ , то существует  $g \in G(V)$  такой, что  $y_2 = g(y_1)$ ,

б) для любого  $g \in G(V)$  существует  $\tilde{g} \in L(\mathbb{R}^m)$  такой, что

$$gF(t, t) \equiv F(\tilde{g}t, \tilde{g}t), \quad t \in \mathbb{R}^m.$$

**З а м е ч а н и е.** При  $m=0, F \equiv 0$  афинная однородность формы  $F$  означает лишь афинную однородность конуса  $V$ .

Пусть  $V$ —афинно-однородный конус в  $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ , а  $F$  есть афинно-однородная  $V$ -билинейная симметрическая форма на  $\mathbb{R}^m, m \geq 0$ . Рассмотрим следующее множество:

$$\pi(V, F) = \{(y, t, r) \in \mathbb{R}^{n+m+1}, y \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^m, r \in \mathbb{R}^1, \\ r > 0 \text{ и } r \cdot y - F(t, t) \in V\}. \quad (2.8)$$

Таким образом,  $\pi(V, F)$ —некоторое множество в  $\mathbb{R}^{n+m+1}$ .

**П р е д л о ж е н и е 1.** Пусть  $V$ —афинно-однородный конус в  $\mathbb{R}^n, n > 1$ , а  $F$  есть афинно-однородная  $V$ -билинейная симметрическая форма на  $\mathbb{R}^m, m \geq 0$ . Тогда  $\pi(V, F)$  является афинно-однородным острым открытым выпуклым конусом в пространстве  $\mathbb{R}^{n+m+1}$ .

Доказательство см. в [8].

Договоримся употреблять вместо выражения «афинно-однородный острый открытый выпуклый конус» более краткое «афинно-однородный конус».

Сейчас мы опишем специальную процедуру, состоящую из бесконечного числа шагов, причем описание будет индуктивным. На первом шаге положим  $V^1 = \mathbb{R}_+^1 = (0, +\infty)$ . Очевидно,  $V^1$  является афинно-однородным конусом (в  $\mathbb{R}^1$ ). Допустим, что после  $i$ -го шага мы построили некоторый афинно-однородный конус  $V^i$ . Тогда на  $i+1$ -ом шаге выберем некоторую афинно-однородную  $V^i$ -билинейную симметрическую форму  $F^{i+1}$ , заданную на некотором вещественном координатном пространстве  $\mathbb{R}_{i+1}$  размерности  $n_{i+1} \geq 0$  и положим

$$V^{i+1} = \pi(V^i, F^{i+1}). \quad (2.9)$$

Согласно предложению 1,  $V^{i+1}$  также является афинно-однородным конусом, представляющим собой конечный результат  $i+1$ -го шага.

Афинно-однородный конус  $V \subset \mathbb{R}^n$  назовем специальным, если его можно построить при помощи описанной выше процедуры за конечное число шагов. Это число шагов  $l = l(V)$  называется рангом специального афинно-однородного конуса  $V$ . Имеет место следующая важная теорема (см. [8]).

**Теорема 3.** *Всякий афинно-однородный конус  $V \subset \mathbb{R}^n$  линейно эквивалентен некоторому специальному афинно-однородному конусу, также лежащему в  $\mathbb{R}^n$ .*

Сформулированная теорема во многих случаях позволяет ограничиться рассмотрением лишь специальных афинно-однородных конусов.

Итак, пусть  $V$  есть специальный афинно-однородный конус ранга  $l$ , лежащий в пространстве  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ . Обозначим через  $V^i$ ,  $1 \leq i \leq l$ , конусы, участвующие в индуктивном построении  $V$ , тогда  $V^l = V$ . При  $1 \leq i \leq l$  обозначим через  $R(i)$  то вещественное координатное пространство, в котором лежит  $V^i$ . Полезно заметить, что при  $1 \leq i \leq l$   $V^i$  является специальным афинно-однородным конусом в  $R(i)$ . Далее, в индуктивном построении  $V$  участвуют также вещественные координатные пространства  $R_j$  и формы  $F^j$  ( $2 \leq j \leq l$ ). При этом справедливы соотношения

$$R(i) = R_{i1} \times R_{i2} \times R_{i3} \times \cdots \times R_{il} \times R_{ii} \quad (1 \leq i \leq l), \quad (2.10)$$

где через  $R_{ii}$  ( $1 \leq i \leq l$ ) мы обозначили вещественные координатные пространства размерности 1. Из (2.10) вытекают соотношения

$$R(i+1) = R(i) \times R_{i+1} \times R_{i+1+i+1} \quad (1 \leq i < l). \quad (2.11)$$

Следовательно, произвольный элемент  $y \in R(i+1)$  можно записать так:

$$y = (y', y_{i+1}, y_{i+1+i+1}), \quad (2.12)$$

где  $y' \in R(i)$ ,  $y_{i+1} \in R_{i+1}$ ,  $y_{i+1+i+1} \in R_{i+1+i+1}$ . При этом, как легко следует из (2.9),  $y \in V^{i+1}$  тогда и только тогда, когда

$$y_{i+1+i+1} > 0, \quad y_{i+1+i+1} \cdot y' - F^{i+1}(y_{i+1}, y_{i+1}) \in V^i. \quad (2.13)$$

Теперь введем соответствующие комплексные координатные пространства. При  $1 \leq i \leq l$ ,  $2 \leq j \leq l$  положим

$$C(i) = \mathbb{C}R(i), \quad C_{ii} = \mathbb{C}R_{ii}, \quad C_j = \mathbb{C}R_j.$$

Тогда будут выполнены соотношения

$$C(i) = C_{i1} \times C_{i2} \times C_{i3} \times \cdots \times C_{il} \times C_{ii} \quad (1 \leq i \leq l), \quad (2.14)$$

$$C(i+1) = C(i) \times C_{i+1} \times C_{i+1+i+1} \quad (1 \leq i < l). \quad (2.15)$$

Поэтому произвольный элемент  $z \in C(i+1)$  запишется в виде

$$z = (z', z_{i+1}, z_{i+1+i+1}), \quad (2.16)$$

где  $z' \in C(i)$ ,  $z_{i+1} \in C_{i+1}$ ,  $z_{i+1+i+1} \in C_{i+i+1}$ .

Для произвольного  $y \in V^{i+1}$  введем следующее обозначение:

$$y_{-1} = y' - \frac{1}{y_{i+1+i+1}} \cdot F^{i+1}(y_{i+1}, y_{i+1}). \quad (2.17)$$

Из (2.13) следует, что  $y_{-1} \in V^i$ .

При  $1 \leq i \leq l$  с конусами  $V^i$  каноническим образом связываются (см. [8]) функции  $\chi_m^i(y)$ ,  $1 \leq m \leq i$ , заданные в  $R(i)$  и являющиеся дробно-рациональными. Эти функции, как следует из [8], обладают следующими свойствами:

1) при  $1 \leq i \leq l$

$$V^i = \{y \in R(i), \chi_m^i(y) > 0, 1 \leq m \leq i\}, \quad (2.18)$$

2) при  $1 < i < l$

$$\chi_{i+1}^{i+1}(y) \equiv y_{i+1+i+1}(y \in V^{i+1}). \quad (2.19)$$

$$\chi_m^{i+1}(y) \equiv \chi_m^i(y_{-1})(y \in V^{i+1}, 1 \leq m \leq i). \quad (2.20)$$

При помощи этих канонических функций можно ввести аналог степенной функции. Если  $y \in V^i$ ,  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_i) \in C^i$ , то положим

$$y^\rho = \prod_{m=1}^i [\chi_m^i(y)]^{\rho_m}. \quad (2.21)$$

**Предложение 2.** Пусть  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_i, \rho_{i+1}) \in C^{i+1}$ ,  $\rho' = (\rho_1, \dots, \rho_i) \in C^i$ , так что  $\rho = (\rho', \rho_{i+1})$ . Тогда для любого  $y \in V^{i+1}$  справедлива формула

$$y^\rho = (y_{-1})^{\rho'} \cdot (y_{i+1+i+1})^{\rho_{i+1}}. \quad (2.22)$$

Доказательство немедленно следует из (2.19)—(2.21).

2.3. Пусть  $V$  — открытый выпуклый конус в  $R^n$ ,  $n \geq 1$ ,  $\Omega$  — открытое множество в  $C^m$ ,  $m \geq 0$ , и  $\gamma$  является непрерывным отображением из  $\Omega$  в  $R^n$ . Если точки из  $C^{n+m}$  обозначать через  $(z, \zeta)$ , где  $z \in C^n$ ,  $\zeta \in C^m$ , то можно рассмотреть следующее множество в  $C^{n+m}$ :

$$D = \{(z, \zeta) \in C^{n+m} : z = x + iy \in C^n, \zeta \in C^m, y - \gamma(\zeta) \in V\}. \quad (2.23)$$

Это соотношение удобно записывать в виде  $D = \pi(V, \gamma)$ .

Заметим, что  $D$  открыто в  $C^{n+m}$ , и если  $\Omega$  является областью в  $C^m$ , то и  $D$  является областью в  $C^{n+m}$ . Если  $m = 0$ ,  $\gamma \equiv 0$ , то  $D$  — просто трубчатая область над  $V$ :  $D = T_V$ . Отметим также, что множества вида (2.23) включают в себя комплексные области Зигеля (см. [8]), для которых  $\Omega = C^m$  и  $\gamma(\zeta) \equiv F(\zeta, \bar{\zeta})$ , где  $F$  является  $V$ -эрмитовой формой на  $C^m$ .

Из теоремы 3 легко вытекает следующее

Предложение 3. Пусть  $D = \pi(V, \gamma) \subset \mathbb{C}^{n+m}$ , где  $V$  — афинно-однородный конус в  $\mathbb{R}^n$ , а  $\gamma$  есть непрерывное отображение из  $\Omega \subset \mathbb{C}^m$  в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда существуют специальный афинно-однородный конус  $V_1 \subset \mathbb{R}^n$  и непрерывное отображение  $\gamma_1$  из  $\Omega$  в  $\mathbb{R}^n$  такие, что  $D$  линейно эквивалентно  $D_1 = \pi(V_1, \gamma_1) \subset \mathbb{C}^{n+m}$ .

Таким образом, можно ограничиться рассмотрением тех множеств  $D = \pi(V, \gamma) \subset \mathbb{C}^{n+m}$ , у которых  $V$  является специальным афинно-однородным конусом, что мы и будем делать всюду в этом пункте.

Введем некоторые дополнительные понятия.

Пусть  $D = \pi(V, \gamma) \subset \mathbb{C}^{n+m}$ ,  $m \geq 1$ , и функция  $\Psi$  определена в  $D$ . При произвольном фиксированном  $\zeta \in \Omega$  определим на  $T_V$  функцию

$$\Psi_\zeta(\omega) = \Psi(\omega + i\gamma(\zeta), \zeta), \quad \omega \in T_V. \quad (2.24)$$

Если же  $m = 0$ , то  $D = T_V$ . Предположим, что  $V$  есть специальный афинно-однородный конус ранга  $l+1$ ,  $V = V^{l+1}$ . Тогда  $V^{l+1} = \pi(V^l, F^{l+1})$ , где  $V^l$  есть специальный афинно-однородный конус ранга  $l$ . Если в  $D = T_V$  задана произвольная функция  $\Psi$ , то при любых фиксированных  $z_{l+1} = x_{l+1} + iy_{l+1} \in C_{l+1}$ ,  $z_{l+1+l+1} = x_{l+1+l+1} + iy_{l+1+l+1} \in \mathbb{C}_+$ , определим функцию от  $\omega \in T_{V^l}$ :

$$\Psi_{-1}(\omega) = \Psi\left(\omega + \frac{i}{y_{l+1+l+1}} \dots F^{l+1}(y_{l+1}, y_{l+1}), z_{l+1}, z_{l+1+l+1}\right). \quad (2.25)$$

Ясно, что функция  $\Psi_{-1}(\omega)$  зависит от выбора  $z_{l+1} \in C_{l+1}$ ,  $z_{l+1+l+1} \in \mathbb{C}_+$ , но ради удобства мы не будем отмечать этот факт в обозначении.

При помощи введенных обозначений мы сформулируем существенное для дальнейшего условие. Пусть  $D = T_V$  и  $\Psi$  — произвольная функция, заданная в  $D$ . Мы хотим наложить на  $\Psi$  условие, которое формально можно записать так:

$$\Psi(\infty) = 0. \quad (2.26)$$

Это удобно сделать индуктивно, взяв в качестве параметра индукции ранг  $l = l(V)$  конуса  $V$ . При  $l = 1$   $V = (0 + \infty)$ ,  $T_V = \mathbb{C}_+$  и  $\Psi$  задана в  $\mathbb{C}_+$ . Будем писать  $\Psi(\infty) = 0$ , если  $\Psi(iy) \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow +\infty$ .

Допустим теперь, что мы придали смысл условию (2.26) для функций  $\Psi$ , заданных в  $T_V$  и ранг  $V$  равен  $l$ . Возьмем произвольный конус  $V$  ранга  $l+1$ . Тогда  $V = V^{l+1} = \pi(V^l, F^{l+1})$ , где  $V^l$  — конус ранга  $l$ . Если функция  $\Psi$  задана в  $T_V$ , то будем писать  $\Psi(\infty) = 0$ , если для почти всех  $(z_{l+1}, z_{l+1+l+1})$  из  $C_{l+1} \times \mathbb{C}_+$   $\Psi_{-1}(\infty) = 0$ .

Если же  $D = \pi(V, \gamma) \subset \mathbb{C}^{n+m}$ ,  $m \geq 1$ , то пишем  $\Psi(\infty) = 0$  для функции  $\Psi$ , заданной в  $D$ , если для почти всех  $\zeta \in \Omega$   $\Psi_\zeta(\infty) = 0$ .

2.4. Всяду в этом пункте полагаем  $D = \pi(V, \gamma) \subset \mathbb{C}^{n+m}$ , где  $V$  — специальный афинно-однородный конус в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , а отображение  $\gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  непрерывно и  $\Omega$  открыто в  $\mathbb{C}^m$ ,  $m \geq 0$ . Через  $l = l(V)$ , как обычно, будем обозначать ранг конуса  $V$ . Как следует из предложе-

ния 3, предположение о том, что конус  $V$  специальный не умаляет общности.

Пусть  $p \in (0, +\infty)$ ,  $z = (z_1, \dots, z_l) \in R^l$ . Для произвольной измеримой по Лебегу, вообще говоря, комплекснозначной функции  $f(z, \zeta)$ ,  $(z, \zeta) \in D$ , положим

$$\|f\|_{p, \alpha} = \left[ \int_D |f(z, \zeta)|^p \cdot (y - \gamma(\zeta))^\alpha dm(z) \times dm(\zeta) \right]^{1/p}, \quad z = x + iy. \quad (2.27)$$

Тогда  $L^p_\alpha(D)$  состоит из всех тех функций  $f$ , для которых  $\|f\|_{p, \alpha} < +\infty$ . Далее положим

$$A^p_\alpha(D) = H(D) \cap L^p_\alpha(D). \quad (2.28)$$

Отметим, что если  $D$  является комплексной областью Зигеля в  $\mathbb{C}^{n+m}$ , а  $\alpha \in R^l$  выбрано специальным образом, то  $A^p_\alpha(D)$  превращаются в пространства  $A^{p, r}(D)$ , рассмотренные в [5].

**Лемма 3.** Пусть  $0 < p < \infty$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l, \alpha_{l+1}) \in R^{l+1}$ ,  $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in R^l$ , так что  $\alpha = (\alpha', \alpha_{l+1})$ . Далее, пусть  $V$  есть специальный аффинно-однородный конус ранга  $l+1$ ,  $V = V^{l+1} = \pi(V^l, F^{l+1})$ , где  $V^l$  — специальный аффинно-однородный конус ранга  $l$ . Тогда если  $f \in A^p_\alpha(D)$ ,  $D = T_V$ , то для почти всех,  $(z_{l+1}, z_{l+1+l+1}) \in C_{l+1} \times \mathbb{C}_+$ ,  $f_{-1} \in A^{p'}_{\alpha'}(T_{V^l})$ .

**Доказательство.** Поскольку у нас  $m=0$ ,  $\gamma \equiv 0$ , то

$$\|f\|_{p, \alpha}^p = \int_{T_{V^{l+1}}} |f(z)|^p \cdot y^\alpha dm(z), \quad z = x + iy. \quad (2.29)$$

Далее, так как  $\mathbb{C}(l+1) = \mathbb{C}(l) \times C_{l+1} \times C_{l+1+l+1}$ , то каждое  $z = x + iy \in \mathbb{C}(l+1)$  запишется так:  $z = (z', z_{l+1}, z_{l+1+l+1})$ , где  $z' = x' + iy' \in \mathbb{C}(l)$ ,  $z_{l+1} = x_{l+1} + iy_{l+1} \in C_{l+1}$ ,  $z_{l+1+l+1} = x_{l+1+l+1} \in C_{l+1+l+1}$ . При этом  $x = (x', x_{l+1}, x_{l+1+l+1})$ ,  $y = (y', y_{l+1}, y_{l+1+l+1})$ .

Теперь заметим, что  $D = T_{V^{l+1}}$  лежит в  $\mathbb{C}(l+1)$  и при помощи предложения 2 и теоремы Фубини получим

$$\begin{aligned} \|f\|_{p, \alpha}^p = & \int_{C_{l+1} \times \mathbb{C}_+} [y_{l+1, l+1}]^{\alpha_{l+1, l+1}} dm(z_{l+1, l+1}, z_{l+1, l+1}) \int |f(z', z_{l+1}, z_{l+1+l+1})|^p \cdot \\ & \cdot \left( y' - \frac{1}{y_{l+1+l+1}} \cdot F^{l+1}(y_{l+1}, y_{l+1}) \right)^{\alpha'} dm(z'). \end{aligned} \quad (2.30)$$

В этом равенстве во внутреннем интеграле интегрирование ведется по множеству тех  $z' \in \mathbb{C}(l)$ , для которых

$$y' \in \frac{1}{y_{l+1+l+1}} \cdot F^{l+1}(y_{l+1}, y_{l+1}) + V^l.$$

Во внутреннем интеграле сделаем следующую замену переменной:

$$z' = \omega + \frac{i}{y_{l+1l+1}} \cdot F^{l+1}(y_{l+1}, y_{l+1}). \quad (2.31)$$

Тогда из (2.30) будем иметь

$$\begin{aligned} \|f\|_{p, \alpha}^p = & \int_{C_{l+1} \times C_+} [y_{l+1l+1}]^{\alpha_{l+1}} dm(z_{l+1}, z_{l+1l+1}) \cdot \int_{T_{V^l}} |f_{-1}(\omega)|^p \cdot \\ & \cdot t^{\alpha'} dm(\omega), \quad \omega = s + it. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Поскольку  $f \in A_\alpha^p(D)$ , то  $\|f\|_{p, \alpha} < +\infty$ . Поэтому из (2.32) следует, что для почти всех  $(z_{l+1}, z_{l+1l+1}) \in C_{l+1} \times C_+$

$$\int_{T_{V^l}} |f_{-1}(\omega)|^p \cdot t^{\alpha'} dm(\omega) < +\infty, \quad \omega = s + it, \quad (2.33)$$

что и требовалось доказать.

При помощи аналогичных рассуждений доказывается

**Лемма 4.** Пусть  $0 < p < \infty$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in R^l$ ,  $D = \pi(V, \gamma) \subset C^{n+m}$ ,  $m \geq 1$ , и  $l(V) = l$ . Если  $f \in A_\alpha^p(D)$ , то для почти всех  $\zeta \in \Omega$   $f_\zeta \in A_\alpha^p(T_{V^l})$ .

Приступим теперь к формулировке и доказательству основных результатов.

**Теорема 4.** Пусть  $0 < p < \infty$ ,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in R^l$ ,  $D = \pi(V, \gamma) \subset C^{n+m}$ ,  $n \geq 1$ ,  $m \geq 0$ ,  $l = l(V)$ . Если  $\alpha_1 \leq -1$ , то  $A_\alpha^p(D) = \{0\}$ .

**Доказательство.** Сначала рассмотрим случай  $m = 0$ ,  $D = T_V$  тогда проведем доказательство индукцией по  $l$ . При  $l = 1$   $V = (0, +\infty)$ ,  $T_V = C_+$ ,  $\alpha \in R^1$  и  $\alpha \leq -1$ . Но хорошо известно, что при  $\alpha \leq -1$ ,  $A_\alpha^p(C_+) = \{0\}$ . Допустим, что для  $l \geq 1$  утверждение доказано и докажем его для  $l + 1$ . Тогда  $V = V^{l+1} = \pi(V^l, F^{l+1})$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l, \alpha_{l+1}) \in R^{l+1}$ ,  $\alpha_1 \leq -1$ ,  $0 < p < \infty$ . Положим  $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in R^l$ . Согласно предположению индукции,  $A_{\alpha'}^p(T_{V^l}) = \{0\}$ . Комбинируя этот факт с леммой 3, получим, что если  $f \in A_\alpha^p(T_V)$ , то для почти всех  $(z_{l+1}, z_{l+1l+1})$  из  $C_{l+1} \times C_+$ ,  $f_{-1} \equiv 0$  в  $T_{V^l}$ . Следовательно,  $f \equiv 0$ .

Пусть теперь  $m > 1$ ,  $f \in A_\alpha^p(D)$ .  $\alpha_1 \leq -1$ . Согласно уже доказанному случаю  $m = 0$ ,  $A_\alpha^p(T_V) = \{0\}$ . Комбинируя этот факт с леммой 4, получим, что для почти всех  $\zeta \in \Omega$   $f_\zeta \equiv 0$  в  $T_V$ , значит  $f \equiv 0$  и теорема доказана.

Мы впредь будем предполагать, что выполнено условие  $\alpha_1 > -1$ .

Похожие рассуждения приводят к доказательству следующей теоремы.

**Теорема 5.** Пусть  $0 < p < \infty$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in R^l$ ,  $\alpha_1 > -1$ ,  $D = \pi(V, \gamma) \subset C^{n+m}$ .  $n \geq 1$ ,  $m \geq 0$ ,  $l = l(V)$ . Если  $f \in A_\alpha^p(D)$ , то  $f(\infty) = 0$ .

Наконец, имеет место следующая основная

**Теорема 6.** Пусть  $0 < p < \infty$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in R^l$ ,  $\alpha_1 > -1$ ,  $D = \pi(V, i) \subset C^{n+m}$ ,  $n > 1$ ,  $m \geq 0$ ,  $l = l(V)$ . Тогда существует константа  $C$ , зависящая от  $p$  и  $\alpha_1$  и такая, что

$$\|f\|_{p, \alpha} \leq C \cdot \|u\|_{p, \alpha} \quad (2.34)$$

для произвольной функции  $f = u + iv \in H(D)$  с  $v(\infty) = 0$ .

**Доказательство.** Займемся сначала случаем  $m = 0$ ,  $D = T_V$  и опять проведем доказательство индукцией по  $l$ . При  $l = 1$  неравенство (2.34) сразу следует из теоремы 2. Допустим, что для некоторого  $l > 1$  теорема доказана и докажем ее для  $l+1$ . Пусть  $V = V^{l+1} = \pi(V^l, F^{l+1})$ ,  $0 < p < \infty$ ,  $\alpha = (\alpha', \alpha_{l+1}) \in R^{l+1}$ , где  $\alpha' \in R^l$  и  $\alpha_1 > -1$ . Далее,  $f = u + iv \in H(T_V)$  и  $v(\infty) = 0$ . Заметим, что для произвольного фиксированного  $(z_{l+1}, z_{l+1+l+1}) \in C_{l+1} \times C_+$

$$f_{-1}(\omega) = u_{-1}(\omega) + iv_{-1}(\omega), \quad \omega \in T_{V^l}. \quad (2.35)$$

Из условия  $v(\infty) = 0$  следует, что для почти всех  $(z_{l+1}, z_{l+1+l+1})$ ,  $\in C_{l+1} \times C_+$ ,  $v_{-1}(\infty) = 0$ . Согласно предположению индукции, для почти всех  $(z_{l+1}, z_{l+1+l+1}) \in C_{l+1} \times C_+$

$$\|f_{-1}\|_{p, \alpha'} \leq C \cdot \|u_{-1}\|_{p, \alpha'} \quad (2.36)$$

где  $C$  зависит только от  $p$  и  $\alpha_1$ .

Перепишем (2.36) в виде

$$\int_{T_{V^l}} |f_{-1}(\omega)|^p \cdot t^{\alpha'} dm(\omega) \leq C^p \cdot \int_{T_{V^l}} |u_{-1}(\omega)|^p \cdot t^{\alpha'} dm(\omega), \quad (2.37)$$

где  $\omega = s + it$ . После соответствующей замены переменной в (2.37) получим

$$\begin{aligned} \int |f(z', z_{l+1}, z_{l+1+l+1})|^p \left\{ y' - \frac{1}{y_{l+1+l+1}} F^{l+1}(y_{l+1}, y_{l+1}) \right\}^{\alpha'} dm(z') &\leq \\ &\leq C^p \cdot \int |u(z', z_{l+1}, z_{l+1+l+1})|^p \left\{ y' - \frac{1}{y_{l+1+l+1}} \times \right. \\ &\quad \left. \times F^{l+1}(y_{l+1}, y_{l+1}) \right\}^{\alpha'} dm(z'). \end{aligned} \quad (2.38)$$

При этом в обеих частях этого неравенства интегрирование ведется по множеству  $z' = x' + iy'$  с  $y' \in \frac{1}{y_{l+1+l+1}} \cdot F^{l+1}(y_{l+1}, y_{l+1}) + V^l$ .

Поскольку (2.38) справедливо для почти всех  $(z_{l+1}, z_{l+1+l+1}) \in C_{l+1} \times C_+$ , то умножим обе части неравенства (2.38) на  $[y_{l+1+l+1}]^{\alpha_{l+1}}$  и проинтегрируем по  $C_{l+1} \times C_+$ . Тогда получим (2.34), если воспользуемся предположением 2. Итак, при  $m = 0$  теорема доказана.

Пусть теперь  $m > 1$ . Заметим, что при произвольном  $\zeta \in \Omega$

$$f_{\zeta}(\omega) = u_{\zeta}(\omega) + iv_{\zeta}(\omega), \quad (2.39)$$

где  $\omega \in T_V$ . Поскольку  $v(\infty) = 0$ , то для почти всех  $\zeta \in \Omega$   $v_{\zeta}(\infty) = 0$ .

Но раз для  $m=0$  теорема доказана, то существует константа  $C$ , зависящая только от  $p$  и  $\alpha_1$ , такая, что

$$\|f\|_{p, \alpha} \leq C \cdot \|u\|_{p, \alpha}$$

для почти всех  $\zeta \in \Omega$ , то есть

$$\int_{\Gamma_V} |f_\zeta(\omega)|^p \cdot t^\alpha dm(\omega) \leq C^p \cdot \int_{\Gamma_V} |u_\zeta(\omega)|^p \cdot t^\alpha dm(\omega), \quad \omega = s + it. \quad (2.40)$$

Учитывая обозначение (2.24) сделаем в (2.40) соответствующую замену переменной и полученное неравенство проинтегрируем по  $\zeta \in \Omega$ . Тогда получим (2.34) и теорема полностью доказана.

Приведем два важных частных случая этой теоремы.

Положим

$$V = \left\{ y = (y_1, \dots, y_n, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1} : y_0 y_1 > \sum_{k=2}^n y_k^2, y_0 > 0 \right\}.$$

Тогда  $V$  является специальным аффинно-однородным конусом ранга  $l=2$  и связанные с ним канонические функции имеют вид

$$\chi_1^2(y) \equiv y_1 - \frac{1}{y_0} \cdot \sum_{k=2}^n y_k^2, \quad \chi_2^2(y) \equiv y_0.$$

Если положить  $D = T_V$ , то для этой трубчатой области теорема 6 сформулируется следующим образом.

**Теорема 6'.** Пусть  $0 < p < \infty$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\alpha_1 > -1$ . Тогда существует константа, зависящая только от  $p$  и  $\alpha_1$  и такая, что для произвольной  $f = u + iv \in H(T_V)$  с  $v(\infty) = 0$  справедливо неравенство ( $z = x + iy$ )

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_V} |f(z)|^p \cdot \left( y_1 - \frac{1}{y_0} \cdot \sum_{k=2}^n y_k^2 \right)^{\alpha_1} \cdot y_0^{\alpha_2} dm(z) &\leq \\ &\leq \text{const} \int_{\Gamma_V} |u(z)|^p \cdot \left( y_1 - \frac{1}{y_0} \cdot \sum_{k=2}^n y_k^2 \right)^{\alpha_1} \cdot y_0^{\alpha_2} dm(z). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Далее рассмотрим другой частный случай:

$$D = \{(z, \zeta) \in \mathbb{C}^n, z \in \mathbb{C}^1, \zeta \in \mathbb{C}^{n-1}, \text{Im } z > |\zeta|^2\}.$$

Легко заметить, что  $D = \pi(V, \gamma)$ , где  $V = (0, +\infty) \subset \mathbb{R}^1$ ,  $\Omega = \mathbb{C}^{n-1}$ ,  $\gamma(\zeta) \equiv |\zeta|^2$ , и поэтому справедлива следующая

**Теорема 6''.** Пусть  $0 < p < \infty$ ,  $\alpha > -1$ . Тогда существует константа  $C$ , зависящая только от  $p$  и  $\alpha$  и такая, что для произвольной  $f = u + iv \in H(D)$  с  $v(\infty) = 0$  имеет место неравенство ( $w = (z, \zeta)$ )

$$\int_D |f(w)|^p \cdot (\text{Im } z - |\zeta|^2)^\alpha dm(w) \leq C^p \cdot \int_D |u(w)|^p (\text{Im } z - |\zeta|^2)^\alpha dm(w). \quad (2.42)$$

### § 3. Классы $A_\alpha^p$ , $p \in (0, \infty)$ , $\alpha \in R^1$ , в многомерных областях, ассоциированных с конусами

3.1. Множество  $V \subset R^n$ ,  $n \geq 1$ , назовем открытым выпуклым конусом, если:

1) множество  $V$  открыто, выпукло и является конусом в смысле определения предыдущего параграфа;

2)  $0 \in V$ .

В § 2 мы уже вводили понятие открытого выпуклого конуса, но там отсутствовало условие 2), которое равносильно тому, что  $V \neq R^n$ . Договоримся, что если некоторое множество из  $R^n$  обозначается через  $V$ , то тем самым подразумевается, что оно есть открытый выпуклый конус в смысле последнего определения.

Далее, если  $y = (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) \in R^n$ , то часто будем писать:  $y = (y', y_n)$ , где  $y' = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in R^{n-1}$ . Через  $e$  обозначим ту точку  $y \in R^n$ , для которой  $y' = 0 \in R^{n-1}$ ,  $y_n = 1 \in R^1$ .

Предложение 4. Пусть  $V \subset R^n$ . Тогда  $V + \bar{V} = V$ .

Доказательство. Так как  $0 \in \bar{V}$ , то очевидно,  $V \subset V + \bar{V}$ . Далее, из того, что  $V$  открыто и выпукло, следует, что  $V$  канонически открыто, то есть  $\text{Int}(\bar{V}) = V$ .

Теперь заметим, что  $V + \bar{V}$  открыто и содержится в  $\bar{V} + \bar{V} = \bar{V}$ . Но  $\text{Int}(\bar{V})$  есть наибольшее открытое множество, лежащее в  $\bar{V}$ , поэтому  $V + \bar{V} \subset \text{Int}(\bar{V}) = V$  и предложение доказано.

Если  $V \subset R^n$  и  $y \in V$ , то через  $\rho_V(y)$  обозначим евклидово расстояние от  $y$  до  $\partial V$ . Таким образом,  $\rho_V(y)$  является положительной функцией, определенной в  $V$ .

Пусть  $V$  — открытый выпуклый конус в  $R^n$ .  $V$  называется специальным, если

2)  $V \subset \{y = (y', y_n) \in R^n, y_n > 0\}$ .

2)  $e \in V$ .

Предложение 5. Всякий открытый выпуклый конус из  $R^n$  линейно эквивалентен некоторому специальному открытому выпуклому конусу из  $R^n$ .

Доказательство простое и поэтому опускается.

Если  $V$  — специальный открытый выпуклый конус, то помимо функции  $\rho_V(y)$  с  $V$  можно связать и другие функции, которые мы сейчас опишем.

Предложение 6. Пусть  $V$  — специальный открытый выпуклый конус в  $R^n$ . Тогда для любого  $y' \in R^{n-1}$  множество

$$E = \{\sigma \in R^1, (y', \sigma) \in V\} \quad (3.1)$$

не пусто.

Доказательство. Заметим прежде всего, что  $E \subset (0; +\infty)$ . Далее, если  $\sigma_1 \in E$  и  $\sigma_2 > \sigma_1$ , то и  $\sigma_2 \in E$ . Действительно,  $(y', \sigma_2) = (y', \sigma_1) + (\sigma_2 - \sigma_1) \cdot e$  и так как  $(y', \sigma_1) \in V$ ,  $e \in V$ ,  $\sigma_2 - \sigma_1 > 0$ , а

$V$  — выпуклый конус, то  $(y', \sigma_2) \in V$ , поэтому  $\sigma_2 \in E$ . Наконец,  $E$  открыто в  $R^1$ . Следовательно,  $E$  имеет вид

$$E = (b; +\infty), \quad 0 \leq b < +\infty. \quad (3.2)$$

Мы должны показать, что  $E \neq \emptyset$ , то есть  $b < +\infty$ .

Так как  $V$  открыто и  $e \in V$ , то существует  $\varepsilon > 0$  такое, что если  $x' \in R^{n-1}$  и  $|x'| < \varepsilon$ , то  $(x', 1) \in V$ . Так как  $y' \in R^{n-1}$  зафиксировано, то выбирая число  $\sigma > 0$  очень большим, можно добиться выполнения неравенства  $|y'/\sigma| < \varepsilon$ . Тогда  $(y'/\sigma, 1) \in V$  и поскольку  $V$  — конус, то и  $(y', \sigma) \in V$  (при достаточно больших  $\sigma$ ). Таким образом,  $E \neq \emptyset$  и предложение доказано.

Теперь можно ввести следующую неотрицательную функцию:

$$\tau_V(y') = \inf \{ \sigma \in R^1, (y', \sigma) \in V \}, \quad y' \in R^{n-1}. \quad (3.3)$$

Кроме того, для произвольного  $y = (y', y_n) \in V$  положим

$$\tau_V(y) = y_n - \tau_V(y'). \quad (3.4)$$

Легко проверяется, что  $\tau_V(y)$  является положительной функцией, определенной в  $V$ .

**Предложение 7.** Пусть  $V$  — специальный открытый выпуклый конус в  $R^n$ . Тогда существует число  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , зависящее только от конуса и такое, что

$$\alpha \leq \frac{\rho_V(y)}{\tau_V(y)} \leq 1, \quad y \in V. \quad (3.5)$$

**Доказательство.** Положим  $\alpha = \rho_V(e)$ . Очевидно, что  $0 < \alpha \leq 1$ . Мы утверждаем, что для этого  $\alpha$  справедливо неравенство (3.5). Зафиксируем произвольное  $y = (y', y_n) \in V$ . Рассмотрим точку  $r = (y', \sigma_V(y')) \in R^n$ . Тогда  $r \in \partial V$  и расстояние между  $y$  и  $r$  равно  $y_n - \sigma_V(y') = \tau_V(y)$ . Следовательно,  $\rho_V(y) \leq \tau_V(y)$ . Далее, нетрудно показать, что  $y \in r + V$ , ибо  $y = r + \tau_V(y) \cdot e$ . А из предложения 4 следует, что  $r + V \subset V$ . Значит, расстояние от  $y$  до  $\partial(r + V)$  не больше расстояния от  $y$  до  $\partial V$ , то есть  $\rho_V(y)$ . Но расстояние от  $y$  до  $\partial(r + V)$  равно расстоянию от  $y - r$  до  $\partial V$ , то есть  $\rho_V(y - r)$ . Итак  $\rho_V(y - r) \leq \rho_V(y)$ . Так как  $y = r + \tau_V(y) \cdot e$ , то

$$\rho_V(y - r) = \rho_V[\tau_V(y) \cdot e] = \tau_V(y) \cdot \rho_V(e) = \alpha \cdot \tau_V(y).$$

Следовательно,  $\alpha \cdot \tau_V(y) \leq \rho_V(y)$  и предложение доказано.

**3.2.** Как и в § 2, мы будем рассматривать множества вида  $D = \pi(V, \gamma) \subset C^{n+m}$ , где  $V$  (не обязательно специальный) — открытый выпуклый конус в  $R^n$ ,  $n \geq 1$ , а  $\gamma$  — непрерывное отображение из  $\Omega$  в  $R^n$ , где  $\Omega$  открыто в  $C^m$ ,  $m \geq 0$ .

Напомним, что при  $m = 0$ ,  $\gamma \equiv 0$ ,  $D = T_V$ .

Предположим, что в области  $D$  задана произвольная функция  $\Psi$  и рассмотрим два случая:

1) Пусть  $m=0$ ,  $D=T_V$ . Тогда будем писать  $\lim_{\tau_V} \Psi = 0$ , если  $\Psi(z) \rightarrow 0$  при  $\tau_V(y) \rightarrow +\infty$  ( $z = x + iy$ ).

Если к тому же  $V$  — специальный открытый выпуклый конус, то  $\lim_{\tau_V} \Psi = 0$ , тогда и только тогда, когда  $\Psi(z) \rightarrow 0$  при  $\tau_V(y) \rightarrow +\infty$  ( $z = x + iy$ ). При этом для каждого фиксированного  $z' = x' + iy' \in \mathbb{C}^{n-1}$  полезно ввести следующую функцию:

$$\Psi_{z'}(\omega) = \Psi(z', \omega + i \cdot \tau_V(y')), \omega \in \mathbb{C}_+. \quad (3.6)$$

2)  $m \geq 1$ . Тогда при любом фиксированном  $\zeta \in \Omega$  рассмотрим функцию

$$\Psi_{\zeta}(\omega) = \Psi(\omega + i\gamma(\zeta), \zeta), \omega \in T_V. \quad (3.7)$$

Будем писать  $\lim_{\tau_V} \Psi = 0$ , если для почти всех  $\zeta \in \Omega$  имеем  $\lim_{\tau_V} \Psi_{\zeta} = 0$ .

Наконец, отметим, что точки  $\omega \in \mathbb{C}^{n+m}$  часто будем записывать в виде  $\omega = (z, \zeta)$ ,  $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$ ,  $\zeta \in \mathbb{C}^m$ .

3.3. В этом пункте мы доказываем основные утверждения настоящего параграфа.

Пусть  $D = \pi(V, \gamma) \subset \mathbb{C}^{n+m}$ ,  $p \in (0, \infty)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^1$ . Для произвольной измеримой по Лебегу, вообще говоря, комплекснозначной функции  $f(z, \zeta)$ ,  $(z, \zeta) \in D$ , положим ( $z = x + iy$ )

$$\|f\|_{p, \alpha} = \left\{ \int_D |f(z, \zeta)|^p \cdot [\tau_V(y - \gamma(\zeta))]^\alpha dm(z) \times dm(\zeta) \right\}^{1/p}. \quad (3.8)$$

Тогда  $L_p^\alpha(D)$  состоит, по определению, из тех функций  $f$ , для которых  $\|f\|_{p, \alpha} < \infty$ . Затем положим:  $A_\alpha^p(D) = H(D) \cap L_p^\alpha(D)$ .

Если  $D = \pi(V, \gamma)$ , где  $V$  — специальный открытый выпуклый конус и  $f = f(z, \zeta)$ , то из предложения 7 следует, что  $f \in L_p^\alpha(D)$  тогда и только тогда, когда ( $z = x + iy$ )

$$\int_D |f(z, \zeta)|^p \cdot [\tau_V(y - \gamma(\zeta))]^\alpha dm(z) \times dm(\zeta) < +\infty. \quad (3.9)$$

Имеют место следующие утверждения, являющиеся аналогами лемм 3 и 4, доказательства которых почти совпадают с доказательствами названных лемм.

**Лемма 5.** Пусть  $V$  — специальный открытый выпуклый конус в  $\mathbb{R}^n$ ,  $D = T_V$ ,  $0 < p < \infty$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^1$ . Если  $f \in A_\alpha^p(D)$ , то для почти всех  $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$ ,  $f_{z'} \in A_\alpha^p(\mathbb{C}_+)$ .

**Лемма 6.** Пусть  $V$  — открытый выпуклый конус в  $\mathbb{R}^n$ ,  $D = \pi(V, \gamma) \subset \mathbb{C}^{n+m}$ ,  $m \geq 1$ ,  $0 < p < \infty$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^1$ . Если  $f \in A_\alpha^p(D)$ , то для почти всех  $\zeta \in \Omega$ ,  $f_\zeta \in A_\alpha^p(T_V)$ .

**Теорема 7.** Пусть  $0 < p < \infty$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^1$ ,  $D = \pi(V, \gamma) \subset \mathbb{C}^{n+m}$ . Если  $\alpha \leq -1$ , то  $A_\alpha^p(D) = \{0\}$ .

Доказательство немедленно следует из предыдущих лемм. Ввиду этой теоремы всюду в дальнейшем имеет смысл рассматривать пространства  $A_\alpha^p(D)$  при  $\alpha > -1$ .

**Теорема 8.** Пусть  $0 < p < \infty$ ,  $\alpha > -1$ ,  $D = \pi(V, \gamma) \subset \mathbb{C}^{n+m}$ . Если  $f \in A_\alpha^p(D)$ , то  $\lim_{\rho_V(y) \rightarrow +\infty} f = 0$ .

**Доказательство.** Пусть сначала  $m = 0$ ,  $D = T_V$ . Нам нужно показать, что при  $\rho_V(y) \rightarrow +\infty$ ,  $f(z) \rightarrow 0$  ( $z = x + iy \in T_V$ ).

Зафиксируем произвольное  $z_0 = x_0 + iy_0 \in T_V$ . Так как функция  $|f|^p$  субгармонична в  $T_V$ , то ( $z = x + iy$ )

$$|f(z_0)|^p \leq \frac{2^{2n}}{[\rho_V(y_0)]^{2n}} \cdot \int_B |f(z)|^p dm(z), \quad (3.10)$$

где  $B = \left\{ z; |z - z_0| < \frac{\rho_V(y_0)}{2} \right\}$ . Заметим, что при  $z \in B$

$$\frac{\rho_V(y_0)}{2} \leq \rho_V(y) \leq \frac{3}{2} \rho_V(y_0). \quad (3.11)$$

Если  $\alpha \geq 0$ , то

$$\begin{aligned} |f(z_0)|^p &\leq \frac{2^{2n}}{[\rho_V(y_0)]^{2n}} \cdot \frac{[\rho_V(y_0)/2]^\alpha}{[\rho_V(y_0)/2]^\alpha} \cdot \int_B |f(z)|^p dm(z) \leq \\ &\leq \frac{2^{2n+\alpha}}{[\rho_V(y_0)]^{2n+\alpha}} \cdot \int_B |f(z)|^p \cdot [\rho_V(y)]^\alpha dm(z) \leq \frac{2^{2n+\alpha}}{[\rho_V(y_0)]^{2n+\alpha}} \cdot \|f\|_{p, \alpha}^p. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Если же  $-1 < \alpha < 0$ , то

$$\begin{aligned} |f(z_0)|^p &\leq \frac{2^{2n}}{[\rho_V(y_0)]^{2n}} \cdot \frac{\left[ \frac{3}{2} \rho_V(y_0) \right]^\alpha}{\left[ \frac{3}{2} \rho_V(y_0) \right]^\alpha} \cdot \int_B |f(z)|^p dm(z) \leq \\ &\leq \left( \frac{2}{3} \right)^\alpha \cdot \frac{2^{2n}}{[\rho_V(y_0)]^{2n+\alpha}} \cdot \int_B |f(z)|^p \cdot [\rho_V(y)]^\alpha dm(z) \leq \\ &\leq \left( \frac{2}{3} \right)^\alpha \cdot \frac{2^{2n}}{[\rho_V(y_0)]^{2n+\alpha}} \cdot \|f\|_{p, \alpha}^p. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из (3.12) и (3.13) следует, что  $|f(z_0)| \rightarrow 0$  при  $\rho_V(y_0) \rightarrow +\infty$ , что и требовалось доказать.

Если же  $m \geq 1$ , то утверждение теоремы сразу же следует из леммы 6 и уже рассмотренного случая  $m = 0$ .

**Теорема 9.** Пусть  $0 < p < \infty$ ,  $\alpha > -1$ ,  $D = \pi(V, \gamma) \subset \mathbb{C}^{n+m}$ . Тогда существует константа  $C$ , зависящая только от  $p$  и  $\alpha$  и конуса  $V$  такая, что

$$\|f\|_{p, \tau} \leq C \cdot \|u\|_{p, \tau} \quad (3.14)$$

для произвольной функции  $f = u + iv \in H(D)$  с  $\lim v = 0$ .

Доказательство. Пусть сначала  $m = 0$ ,  $D = T_V$ . Как следует из предложения 5, без ограничения общности можно считать, что  $V$  — специальный открытый выпуклый конус в  $\mathbb{R}^n$ . Пусть  $f = u + iv \in H(D)$  и  $\lim v = 0$ . Это означает, что  $v(z) \rightarrow 0$  при  $\tau_V(y) \rightarrow +\infty$  ( $z = x + iy$ ). Далее заметим, что при любом фиксированном  $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$

$$f_{z'}(\omega) = u_{z'}(\omega) + iv_{z'}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{C}_+. \quad (3.15)$$

При фиксированном  $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$ ,  $v_{z'}(\omega) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  ( $\omega = s + it \in \mathbb{C}_+$ ). Действительно,  $v_{z'}(\omega) = v(z', \omega + i\sigma_V(y'))$  и если положим

$$z = x + iy = (z', \omega + i\sigma_V(y')), \quad (3.16)$$

то  $x = (x', s)$ ,  $y = (y', t + \sigma_V(y'))$ .

Поэтому  $\tau_V(y) = t$ . Значит, при  $t \rightarrow +\infty$ ,  $\tau_V(y) \rightarrow +\infty$  ( $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$  фиксировано). И поскольку  $\lim v = 0$ , то получаем, что  $v_{z'}(\omega) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Таким образом, при произвольном  $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$ ,  $f_{z'} = u_{z'} + iv_{z'} \in H(\mathbb{C}_+)$  и  $v_{z'}(\omega) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  ( $\omega = s + it$ ). Тогда по теореме 2

$$\int_{\mathbb{C}_+} |f_{z'}(\omega)|^p \cdot t^\alpha dm(\omega) \leq C^p \cdot \int_{\mathbb{C}_+} |u_{z'}(\omega)|^p \cdot t^\alpha dm(\omega), \quad (3.17)$$

где  $C$  зависит от  $p$  и  $\alpha$ , но не от  $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$ . При каждом  $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$  в (3.17) сделаем замену переменных:  $\omega + i\sigma_V(y') = z_n$ . Тогда ( $z_n = x_n + iy_n$ ,  $z' = x' + iy$ )

$$\begin{aligned} & \int_{y_n > \sigma_V(y')} |f(z', z_n)|^p \cdot [y_n - \sigma_V(y')]^\alpha dm(z_n) \leq \\ & \leq C^p \cdot \int_{y_n > \sigma_V(y')} |u(z', z_n)|^p \cdot [y_n - \sigma_V(y')]^\alpha dm(z_n). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Учитывая соотношение (3.4) и интегрируя неравенство по всем  $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$ , получим ( $z = x + iy$ )

$$\int_{T_V} |f(z)|^p \cdot [\tau_V(y)]^\alpha dm(z) \leq C^p \cdot \int_{T_V} |u(z)|^p \cdot [\tau_V(y)]^\alpha dm(z). \quad (3.19)$$

Остается вспомнить предложение 7, которое вместе с (3.19) и дает (3.14), но уже с константой, зависящей и от конуса  $V$ .

Пусть теперь  $m \geq 1$ . Из условия  $\lim v = 0$  следует, что для почти всех  $\zeta \in \Omega$ ,  $\lim v_\zeta = 0$ . Поскольку для этих  $\zeta$ :  $f_\zeta = u_\zeta + i \cdot v_\zeta \in H(T_V)$ , то согласно уже доказанному случаю  $m = 0$

$$\int_{\Gamma_V} |f_z(\omega)|^p [\rho_V(t)]^2 dm(\omega) \leq C^p \cdot \int_{\Gamma_1} |u_z(\omega)|^p [\rho_V(t)]^2 dm(\omega). \quad (3.20)$$

Затем в (3.20) сделаем замену переменной  $z = \omega + i \cdot \gamma(\zeta)$  и полученное неравенство проинтегрируем по всем  $\zeta \in \Omega$ . В результате опять получим (3.14) и теорема доказана.

Институт математики АН Армянской ССР

Поступила 3. XI. 1986

Ա. Է. Զրբաշյան, Ա. Օ. Կարապետյան. Ինտեգրալ անհավասարություններ համալուծ պլուրիհարմոնիկ ֆունկցիաների միջև բազմաչափ տիրույթներում (ամփոփում)

Աշխատանքը նվիրված է տարրեր բազմաչափ կոմպլեքս տիրույթներում համալուծ պլուրիհարմոնիկ ֆունկցիաների  $L^p$  նորմերի ( $0 < p < \infty$ ) միջև անհավասարությունների հաստատմանը:

Չրա համար սկզբում՝ հենվելով ինտեգրալ ներկայացումների վրա, ստացվում են համապատասխան խտեղրալ անհավասարություններ վերին կիսահարթությունում համալուծ հարմոնիկ ֆունկցիաների համար: Այնուհետև բազմաչափ տիրույթների լայն դասի համար համապատասխան խտեղրալ բերվում է արդեն դիտարկված միաչափ դեպքին:

A. E. DJRBASHIAN, A. H. KARAPETIAN. *Integral inequalities between conjugate pluriharmonic functions in multidimensional domains* (summary)

In the present paper we prove inequalities between weighted  $L^p$  norms ( $0 < p < \infty$ ) of conjugate pluriharmonic functions in different multidimensional complex domains

To do this we first prove corresponding inequalities between conjugate harmonic functions in the upper half-plane on the basis of their integral representation formula. Further for a wide class of domains in  $C^n$  the problem is reduced to the one-dimensional case for which the solution is known.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. О представимости некоторых классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН Арм.ССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
2. М. М. Джрбашян. К проблеме представимости аналитических функций. Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН Арм.ССР, вып. 2, 1948, 3—40.
3. T. M. Flett. The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities, J. Math. Anal. Appl., 38, 1972, 746—765.
4. Փ. А. Шамоян. Приложения интегральных представлений Джрбашяна к некоторым задачам анализа, ДАН СССР, 261, № 3, 1981, 557—562.
5. R. R. Coifman, R. Rochberg. Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in  $L^p$ , Astérisque, 77, 1980, 11—66.
6. А. Э. Джрбашян. Классы  $A_p^\alpha$  гармонических функций в полупространствах и аналог теоремы М. Рисса, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 22, № 4, 1987, 386—398.
7. А. Б. Александров. Теория функций в шаре, Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, фундаментальные направления, т. 8, 1985, 115—190.
8. С. Г. Гиндикин. Анализ в однородных областях, УМН, 19, № 4, 1964, 3—92.
9. М. М. Джрбашян, А. Э. Джрбашян. Интегральные представления для некоторых классов аналитических функций в полуплоскости, ДАН СССР, 285, № 3, 1985, 547—550.
10. F. Ricci, M. Taibleson. Boundary values of harmonic functions in mixed norm spaces and their atomic structure, Annali Scuola Nor. Superiore—Pisa. Serie 6, 10, № 1, 1983, 1—54.

УДК 517.51

Г. М. ГУБРЕЕВ

# БАЗИСНОСТЬ СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ— ЛЕФФЛЕРА, ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЖРБАШЯНА И ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ

## § 0. Введение

1. Настоящая работа посвящена выяснению необходимых и достаточных условий, при которых семейства функций

$$\{t^{z-1} E_p(e^{i\frac{z}{p}} t^p; \alpha); \lambda_k \in \Lambda\}, p \geq \frac{1}{2} \quad (0.1)$$

образуют безусловные базисы пространства  $L_2(0, 1)$ . Здесь через  $E_p(z; \alpha)$  обозначена целая функция типа Миттаг—Леффлера, которая определяется рядом [1]:

$$E_p(z; \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(z + np^{-1})}.$$

Проблема разложения функций в биортогональные ряды по системам типа Миттаг—Леффлера имеет давнюю историю. В случае  $p = \alpha = 1$ , когда функции семейства (0.1) совпадают с экспонентами, первый крупный вклад в решение этой проблемы был сделан Н. Винером [2] и Н. Винером—Р. Пэли [3]. Подробное изложение истории вопроса можно найти в работе ленинградских математиков Н. К. Никольского, Б. С. Павлова и С. В. Хрущева [4], в которой было получено полное решение задачи о безусловных базисах из экспонент, а также исследованы свойства таких базисов. В общем случае исследование базисных свойств семейств (0.1) было начато М. М. Джрбашяном и его учениками. Еще в работе [5] М. М. Джрбашяном и А. Б. Нерсисяном был построен вариант дискретного аналога теории М. М. Джрбашяна [1], основанный на теоремах равносходимости рядов по системе (0.1) с обычными рядами Фурье функций из класса  $L_1(0, 1)$ . С другой стороны, в работе М. М. Джрбашяна [6] указывалось на необходимость решения задачи о безусловной базисности семейств функций типа Миттаг—Леффлера (а также более общих семейств) в пространстве  $L_2$  на конечном интервале. Для частных значений параметров  $p, \alpha$  эта задача рассматривалась в работах С. Г. Рафаеляна [7—8] и автора [9].

Методы настоящей статьи примыкают к методам работы [4] и являются их развитием. При этом, на протяжении всей статьи систематически используются многие факты теории М. М. Джрбашяна [1]. Как и в случае экспонент, в наших построениях важную роль играет известное условие Макенхаупта, обеспечивающее ограниченность сингулярного интеграла типа Коши в весовых пространствах. Отметим, что впервые условие Макенхаупта в проблеме базисности экспонент появилось в работе Б. С. Павлова [10], а операторные соображения, лежащие в основе ее решения, бы-

ли высказаны еще в [11]. В этой статье решение задачи о безусловной базисности систем (0.1) также получено в рамках спектрального анализа одного класса неограниченных несамосопряженных операторов. Речь идет об операторах  $A$ , обратные к которым задаются посредством формул:

$$(A^{-1}h)(t) = e^{i\frac{\pi}{2p}} \Gamma^{-1} \left( \frac{1}{p} \right) \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{p}-1} h(s) ds + (h, x) y, \quad p > \frac{1}{2}, \quad (0.2)$$

где  $x$  — произвольная функция из  $L_2(0, 1)$ ,  $y(t) = \Gamma^{-1}(\alpha) t^{\alpha-1}$  ( $\alpha > \frac{1}{2}$ )

а скобки обозначают скалярное произведение в  $L_2(0, 1)$ . Специальный выбор функции  $y$  обеспечивает то обстоятельство, что собственные векторы оператора  $A$  совпадают с функциями семейств вида (0.1).

Спектральные свойства конечномерных возмущений вольтерровых операторов изучались в цикле работ А. П. Хримова (см. [12] и библиографию там). Одна из основных задач, которые исследовались этим автором, состоит в описании класса функций, локально изображающихся равномерно сходящимися рядами по системе собственных векторов оператора. Отметим, что излагаемый в этой статье метод исследования операторов вида (0.2) основан на интегральных оценках норм резольвент (§ 1) и отличается от методов А. П. Хромова. Применяемые здесь операторные рассуждения позволяют не только решить задачу о безусловной базисности семейств (0.1), но и переосмыслить некоторые факты теории интегральных преобразований М. М. Джрбашяна [1] с операторной точки зрения, что дает возможность получить дальнейшие обобщения этой теории. В случае  $p=1$  предварительные результаты в этом направлении пригдены в заметке [13], а исследованию общего случая автор надеется посвятить отдельную публикацию.

Для упрощения выкладок в работе рассматривается случай, когда последовательность  $\Lambda$  не имеет кратных элементов. Однако, сформулированные здесь теоремы о базисности семейств (0.1) остаются в силе и тогда, когда кратности  $\lambda_k \in \Lambda$  ограничены в совокупности.

Работа состоит из четырех параграфов, содержание которых ясно из их названий. Результаты этой статьи частично ( $p=1$ ) анонсированы в [9].

Считаю своим приятным долгом выразить глубокую признательность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну и члену-корреспонденту АН Украинской ССР М. Г. Крейну за внимание к работе и поддержку.

2. Как уже отмечалось, на протяжении всей статьи мы существенно опираемся на многие факты теории М. М. Джрбашяна. Поэтому, для удобства читателя, сформулируем здесь ряд применяемых в дальнейшем теорем, тем более, что в этой работе построен дискретный аналог некоторых результатов этой теории. Как и в книге [1], запись  $(p, \mu) \in U$  будет означать, что совокупность параметров  $p, \mu$  удовлетворяет неравенствам  $p \geq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$ , а через  $L_{2, \mu}(0, \infty)$  будем обозначать пространство  $L_2(0, \infty)$  с мерой  $|y|^{2(\mu-1)} dy$ . Для сходимости элементов

последовательности  $|f_n|$  в классах  $L_{2,\mu}(0, \infty)$  примем обозначение:  
 $f(y) = \underset{(y)}{l.i.m.} f_n(y)$ .

Теорема А. [1, с. 207]. Пусть  $(\rho, \mu) \in U$  и  $\frac{\pi}{2\rho} \leq \varphi \leq 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$ .

Если  $f(x)$  — произвольная функция из класса  $L_2(0, \infty)$ , то

1. Формула

$$g_\varphi(y) = y^{1-\mu} \frac{d}{dy} \left\{ y^\mu \int_0^\infty E_\rho(e^{i\varphi} y^{\frac{1}{\rho}} x^{\frac{1}{\rho}}; \mu+1) x^{\mu-1} f(x) dx \right\}, \quad y > 0$$

почти всюду на  $(0, \infty)$  определяет функцию  $g_\varphi \in L_{2,\mu}(0, \infty)$ , причем

$$\int_0^\infty |g_\varphi(y)|^2 y^{2(\mu-1)} dy \leq M_\mu^2 \int_0^\infty |f(x)|^2 dx, \quad \frac{\pi}{2\rho} \leq \varphi \leq 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}.$$

2. Если обозначить

$$g_\varphi(y, \sigma) = \int_0^\sigma E_\rho(e^{i\varphi} y^{\frac{1}{\rho}} x^{\frac{1}{\rho}}; \mu) x^{\mu-1} f(x) dx, \quad 0 < \sigma < \infty,$$

то  $g_\varphi(y) = \underset{\sigma \rightarrow \infty}{(y)} l.i.m. g_\varphi(y, \sigma)$ .

3. Если  $\rho > \frac{1}{2}$ , то для значений  $\frac{\pi}{2\rho} < \varphi < 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$ ,  $0 < y < \infty$  функция  $g_\varphi(y)$  представима в виде

$$g_\varphi(y) = \int_0^\infty E_\rho(e^{i\varphi} y^{\frac{1}{\rho}} x^{\frac{1}{\rho}}; \mu) x^{\mu-1} f(x) dx,$$

причем интеграл справа равномерно и абсолютно сходится в любой ограниченной и замкнутой части указанной области.

4. Если  $\rho > \frac{1}{2}$ , то функция

$$F(z) = \int_0^\infty E_\rho(zx^{\frac{1}{\rho}}; \mu) x^{\mu-1} f(x) dx$$

голоморфна в области  $\frac{\pi}{2\rho} < |\arg z| \leq \pi$ ,  $0 < |z| < \infty$  и удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty |F(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr \leq M_\mu^2 \int_0^\infty |f(x)|^2 dx, \quad \omega = 2\mu\rho - \rho - 1$$

для всех  $\frac{\pi}{2\rho} < \varphi < 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$ .

В следующей теореме дается формула обращения взвешенного преобразования Фурье с помощью ядер типа Миттаг—Леффлера.

Теорема В. [1, с. 219]. Пусть  $(\rho, \mu) \in U$  и  $g(y)$  — произвольная функция из класса  $L_{2, \mu}(0, \infty)$ . Обозначим

$$f(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_0^\sigma e^{-ixy} g(y) y^{\mu-1} dy, \quad \sigma > 0.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Существует функция  $f(x)$  из класса  $L_2(-\infty, \infty)$  такая, что

$$f(x) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} f(x, \sigma), \quad -\infty < x < \infty.$$

Обратно, функции

$$g(y, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_{-\sigma}^\sigma E_\rho((ix)^{\frac{1}{\rho}} y^{\frac{1}{\rho}}; \mu) (ix)^{\mu-1} f(x) dx$$

при  $\sigma \rightarrow +\infty$  сходятся к функции  $g(y)$  в смысле:  $g(y) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} g(y, \sigma)$  <sup>(1)</sup>

2. Функции  $g(y)$  и  $f(x)$  связаны формулами

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{e^{-ixy} - 1}{-iy} g(y) y^{\mu-1} dy, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$g(y) = \frac{y^{1-\mu}}{\sqrt{2\pi\rho}} \frac{d}{dy} \left\{ y^\mu \int_{-\infty}^{+\infty} E_\rho((ix)^{\frac{1}{\rho}} y^{\frac{1}{\rho}}; \mu+1) (ix)^{\mu-1} f(x) dx \right\}, \quad y > 0.$$

которые имеют место почти всюду на соответствующих интервалах.

Прежде чем сформулировать следующий результат, введем необходимые обозначения и определения. Пусть  $\rho \geq \frac{1}{2}$  — произвольное, но фиксированное число,  $[2\rho]$  — целая часть  $2\rho$ , а натуральное число  $x$  удовлетворяет условию  $x \geq [2\rho] - 1$ . Пусть совокупность чисел  $\{v_0, v_1, \dots, v_{r+1}\}$  удовлетворяет следующим условиям:

$$-\pi < v_0 < v_1 < \dots < v_x \leq \pi < v_{x+1} + 2\pi, \quad \max_{0 \leq k \leq x} \{v_{k+1} - v_k\} = \frac{\pi}{\rho}.$$

Из этой совокупности чисел образуем последовательность пар

$$\{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_x, v_{x+1})\}, \quad (0.3)$$

а затем, сохраняя порядок их взаимного следования, выделим из (0.3) все те пары  $\{(v_k, v_{k+1})\}_0^p$ , для которых выполняется равенство

$$v_{r_k+1} - v_{r_k} = \frac{\pi}{\rho} \quad (k=0, 1, \dots, p).$$

Обозначим еще

$$\theta_k = \frac{1}{2} \{v_{r_k} + v_{r_{k+1}}\}, \quad k=0, 1, \dots, p.$$

Наконец, полагая  $\omega \in (-1, 1)$  и  $\sigma_k \geq 0$  ( $k=0, 1, \dots, p$ ) с совокупностью чисел  $\{v_0, v_1, \dots, v_{x+1}\}$  ассоциируем класс  $W_\sigma^p(\omega; \{v_k\}; \{\sigma_k\})$  целых функций  $f(z)$  порядка  $\rho$  и нормального типа  $\leq \sigma$ , удовлетворяющих следующим условиям:

$$\int_0^\infty |f(re^{i\theta_k})|^2 r^\omega dr < \infty, \quad k=0, 1, \dots, x; \quad h(-\theta_k; f) \leq \sigma_k < \sigma, \quad k=0, 1, \dots, p$$

где  $h(\theta; f)$  — индикатор функции  $f$ . Следующая теорема содержит в себе классическую теорему Винера—Пэли в том случае, когда  $\rho=1$ ,  $\omega=0$ ,  $v_0=0$ ,  $v_1=\pi$ .

Теорема С. [1, с. 366]. Класс  $W_\sigma^p(\omega; \{v_k\}; \{\sigma_k\})$  совпадает с множеством функций  $f(z)$ , допускающих представление

$$f(z) = \sum_{k=0}^p \int_0^{\sigma_k} E_\rho(e^{i\theta_k} z \tau^{\frac{1}{\rho}}; \mu) \varphi_k(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau,$$

где  $\mu = \frac{\omega + \rho + 1}{2\rho}$  и  $\varphi_k \in L_2(0, \sigma_k)$  ( $k=0, 1, \dots, p$ ). Функции  $\varphi_k(\tau)$  единственным образом почти всюду определяются из формул

$$\frac{i}{\sqrt{2\pi\rho}} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}\mu} \Phi_{r_{k+1}}(-\tau) - e^{i\frac{\pi}{2}\mu} \Phi_{r_k}(\tau) \right\} = \begin{cases} \varphi_k(\tau), & \tau \in (0, \sigma_k) \\ 0, & \tau \in (\sigma_k, \infty), \end{cases}$$

где почти всюду на полуоси

$$\Phi_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\tau} \int_0^\infty f(e^{-i\theta_k} t^{\frac{1}{\rho}}) \frac{e^{-i\tau t} - 1}{-it} t^{\mu-1} dt, \quad k=0, 1, \dots, x.$$

Следующий результат тесно связан с предыдущей теоремой. Обозначим через  $A_\sigma^2\left(\omega; \pm \frac{\pi}{2\rho}\right)$  класс целых функций  $f(z)$  порядка  $\rho \geq \frac{1}{2}$  и типа  $\leq \sigma$ , удовлетворяющих условию

$$\int_0^\infty |f(re^{-i\theta})|^2 r^\omega dr < \infty, \quad \frac{\pi}{2\rho} \leq |\theta| \leq \pi,$$

где  $\omega \in (-1, 1)$  — заданное число. Имеет место

Теорема D. [1, с. 376]. Класс  $A_\sigma^2\left(\omega; \pm \frac{\pi}{2\rho}\right)$  совпадает с множеством функций  $f(z)$ , допускающих представление

$$f(z) = \int_0^\pi E_\rho(z\tau^{\frac{1}{\rho}}; \mu) \varphi(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau,$$

где  $\mu = \frac{\omega + \rho + 1}{2\rho}$ ,  $\varphi \in L_2(0, \sigma)$ . Функция  $\varphi(\tau)$  единственна и почти всюду определяется формулой

$$\frac{i}{2\pi\rho} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}\mu} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} f(e^{-i\frac{\pi}{2\rho}} v^{\frac{1}{\rho}}) \frac{e^{i\tau v} - 1}{iv} v^{\mu-1} dv - \right. \\ \left. - e^{i\frac{\pi}{2}\mu} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} f(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} v^{\frac{1}{\rho}}) \frac{e^{-i\tau v} - 1}{-iv} v^{\mu-1} dv \right\} = \begin{cases} \varphi(\tau), & \tau \in (0, \sigma) \\ 0, & \tau \in (\sigma, \infty) \end{cases}$$

### § 1. Интегральные оценки норм резольвент на правильной системе лучей

Если ввести обозначение

$$(Bf)(t) = e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \Gamma^{-1} \left( \frac{1}{\rho} \right) \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{\rho}-1} f(s) ds, \quad f \in L_2(0, 1),$$

то резольвента оператора  $A$  запишется в виде

$$(A - \lambda I)^{-1} h = B(I - \lambda B)^{-1} h + y_{\lambda}((I - \lambda B)^{-1} h, x) \varphi^{-1}(\lambda),$$

где  $y_{\lambda} = (I - \lambda B)^{-1} y$ , а целая функция  $\varphi(\lambda)$  определяется равенством:

$$\varphi(\lambda) = 1 - \lambda((I - \lambda B)^{-1} y, x).$$

Функция  $y_{\lambda}(t)$ , являясь решением интегрального уравнения

$$y_{\lambda}(t) = \Gamma^{-1}(\alpha) t^{\alpha-1} + e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \Gamma^{-1} \left( \frac{1}{\rho} \right) \lambda \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{\rho}-1} y_{\lambda}(s) ds, \quad \alpha > \frac{1}{2}, \quad \rho > 0,$$

вычисляется по формуле [1, с. 123]:

$$y_{\lambda}(t) = \Gamma^{-1}(\alpha) t^{\alpha-1} + e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \Gamma^{-1}(\alpha) \lambda \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{\rho}-1} E_{\rho} \left( e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda (t-s)^{\frac{1}{\rho}}; \right. \\ \left. \frac{1}{\rho} \right) s^{\alpha-1} ds = t^{\alpha-1} E_{\rho} \left( e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda t^{\frac{1}{\rho}}; \alpha \right).$$

Таким образом, спектр оператора  $A$  совпадает с множеством  $\Lambda$  корней функции

$$\varphi(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^1 t^{\alpha-1} E_{\rho} \left( e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda t^{\frac{1}{\rho}}; \alpha \right) \overline{x(t)} dt,$$

а соответствующие собственные векторы имеют вид

$$y_{\lambda_k}(t) = t^{\alpha-1} E_{\rho} \left( e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda_k t^{\frac{1}{\rho}}; \alpha \right), \quad \lambda_k \in \Lambda.$$

В дальнейшем часто используется равенство

$$((I - \lambda B)^{-1} (I - \mu B)^{-1} y, x) = (\varphi(\lambda) - \varphi(\mu))(\mu - \lambda)^{-1}, \quad \lambda, \mu \in C, \quad (1.1),$$

которое легко вытекает из соотношения Гильберта для резольвент. Оператор  $A$  изучается в предположении  $\rho \geq \frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$ . В работе будет доказано, что ограничение на параметр  $\alpha$  появляется естественным образом в задаче о базисности собственных функций оператора  $A$  (§ 4). Для значений  $\rho > \frac{1}{2}$  через  $\gamma_\rho$  обозначим угол с вершиной в начале координат, одна сторона которого совпадает с положительным лучом, а аргументы точек второй стороны равны  $-\frac{\pi}{\rho}$ ; при  $\rho = \frac{1}{2}$  под контуром  $\gamma_\rho$  понимаем положительный луч. Введем в рассмотрение контур  $\Gamma_\rho$ , который совпадает с  $\gamma_\rho$  для  $\rho \in \left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$ , а при  $\rho > 1$  получается из  $\gamma_\rho$  присоединением  $n$  лучей, исходящих из начала координат и лежащих в дополнительном угле раствора  $2\pi - \frac{\pi}{\rho}$ . При этом должно выполняться условие: каждый из  $n+1$  углов, на которые разбивается дополнительный угол, имеет раствор  $< \frac{\pi}{\rho}$ . Например, можно считать, что  $n = [2\rho] - 1$  и, стало быть, контур  $\Gamma_\rho$  ( $\rho > 1$ ) в этом случае состоит из  $[2\rho] + 1$  лучей. Условимся угол в контуре  $\gamma_\rho$  называть главным углом. Далее, будем говорить, что функция  $|\lambda|^{-\omega} |\varphi(\lambda)|^2$  ( $\omega = \rho + 1 - 2\rho\alpha$ ) удовлетворяет  $A_{\Gamma_\rho}^2$ -условию, если

$$\sup_{z \in \Gamma_\rho} \sup_{r > 0} \left\{ r^{-1} \int_{B(z, r) \cap \Gamma_\rho} |\lambda|^{-\omega} |\varphi(\lambda)|^2 |d\lambda| \cdot r^{-1} \int_{B(z, r) \cap \Gamma_\rho} |\lambda|^\omega |\varphi(\lambda)|^{-2} |d\lambda| \right\} < \infty, \quad (A_{\Gamma_\rho}^2)$$

где  $B(z, r)$  обозначает круг радиуса  $r$  с центром в точке  $z$ . Отметим, что при  $\rho = 1$  это условие совпадает с  $A^2$ -условием Макенхаупта [14, с. 253]. Все эти определения и обозначения мы сохраним на протяжении всей статьи. В формулируемой ниже теореме раскрывается операторный смысл условия.

**Теорема 1.1.** Пусть  $\rho \geq \frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$ . Тогда следующие требования эквивалентны:

1) Для всех  $h \in L_2(0, 1)$  выполнена оценка

$$\int_{\Gamma_\rho} |\lambda|^\omega \left| \frac{(I - \lambda B)^{-1} h, x}{\varphi(\lambda)} \right|^2 |d\lambda| \leq M(\rho, \alpha) \|h\|^2. \quad (1.2)$$

2) Функция  $|\lambda|^{-\omega} |\varphi(\lambda)|^2$  удовлетворяет  $A_{\Gamma_\rho}^2$ -условию,  $\omega = \rho + 1 - 2\rho\alpha$ .

**Доказательство.** Рассмотрим случай  $\rho > 1$ , когда контур  $\Gamma_\rho$  устроен более сложно. Обозначим через  $Q$  угол, образованный двумя любыми лучами контура  $\Gamma_\rho$  и для любой функции  $f \in L_2(Q)$  рассмотрим интеграл

$$h(t) = \int_Q t^{\alpha-1} E_p \left( e^{i \frac{\pi}{2p}} \lambda t^{\frac{1}{p}}; \alpha \right) |\lambda|^{-\frac{\alpha}{2}} f(\lambda) d\lambda, \quad t \in [0, 1], \quad (1.3)$$

причем направление обхода контура  $Q$  безразлично. Покажем, что  $h \in L_2(0, 1)$ , а интеграл (1.3) сходится в метрике пространства  $L_2(0, 1)$ . Для этого перепишем  $h(t)$  в виде

$$h(t) = e^{i\varphi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} E_p \left( e^{i \left( \frac{\pi}{2p} + \varphi \right)} r t^{\frac{1}{p}}; \alpha \right) r^{-\frac{\alpha}{2}} f(re^{i\varphi}) dr - \\ - e^{i\psi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} E_p \left( e^{i \left( \frac{\pi}{2p} + \psi \right)} r t^{\frac{1}{p}}; \alpha \right) r^{-\frac{\alpha}{2}} f(re^{i\psi}) dr,$$

где  $\varphi, \psi \in \left[ 0, 2\pi - \frac{\pi}{p} \right]$ . После замены  $r = u^{1/p}$  найдем

$$h(t) = e^{i\varphi} t^{\alpha-1} \int_0^\infty E_p \left( e^{i\varphi_1} u^{1/p} t^{1/p}; \alpha \right) u^{\alpha-1} u^\gamma f(u^{1/p} e^{i\varphi}) du - \\ - e^{i\psi} t^{\alpha-1} \int_0^\infty E_p \left( e^{i\psi_1} u^{1/p} t^{1/p}; \alpha \right) u^{\alpha-1} u^\gamma f(u^{1/p} e^{i\psi}) du, \quad \gamma = \frac{1-p}{2},$$

причем  $\frac{\pi}{2p} \leq \varphi_1, \psi_1 \leq 2\pi - \frac{\pi}{p}$ . Поэтому, на основании теоремы А, имеет место оценка

$$\int_0^1 |h(t)|^2 dt \leq M \left\{ \int_0^\infty |f(u^{1/p} e^{i\varphi})|^2 u^{2\gamma} du + \int_0^\infty |f(u^{1/p} e^{i\psi})|^2 u^{2\gamma} du \right\} \leq \\ \leq M_1 \int_Q |f(\lambda)|^2 |d\lambda|$$

и, стало быть, несобственный интеграл (1.3) сходится в метрике  $L_2(0, 1)$ .

Итак, если имеет место (1.2), то тем более

$$\int_Q |\mu|^m \varphi^{-1}(\mu) (I - \mu B)^{-1} h, x)^2 |d\mu| \leq M |h|^2$$

и мы можем здесь в качестве  $h$  взять функцию, определенную равенством (1.3). Вспоминая равенство (1.1) и обозначения  $y_\lambda(t)$ , получим

$$((I - \mu B)^{-1} h, x) = \left( (I - \mu B)^{-1} \int_Q y_\lambda(t) |\lambda|^{-\frac{\alpha}{2}} f(\lambda) d\lambda, x \right) = \\ = \int_Q ((I - \mu B)^{-1} y_\lambda(t), x) |\lambda|^{-\frac{\alpha}{2}} f(\lambda) d\lambda = \int_Q \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)}{\mu - \lambda} |\lambda|^{-\frac{\alpha}{2}} f(\lambda) d\lambda$$

Таким образом

$$\int_Q |\mu|^{-\alpha} |\varphi^{-1}(\mu)| \int_Q \frac{|\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)|}{|\mu - \lambda|} |\lambda|^{-\frac{\alpha}{2}} |f(\lambda)|^2 |d\lambda| |d\mu| \leq M |h|^2 \leq K \int_Q |f(\lambda)|^2 |d\lambda|$$

для любой функции  $f \in L_2(Q)$ . Перепишем это неравенство в виде

$$\int_Q \|\mu\|^{\frac{\alpha}{2}} \int_Q \frac{|\lambda|^{-\frac{\alpha}{2}} f(\lambda)}{|\mu - \lambda|} d\lambda - |\mu|^{-\frac{\alpha}{2}} \varphi^{-1}(\mu) \int_Q \frac{|\lambda|^{-\frac{\alpha}{2}} \varphi(\lambda) f(\lambda)}{|\mu - \lambda|} d\lambda|^2 |d\mu| \leq K \int_Q |f(\lambda)|^2 |d\lambda|.$$

В силу условий теоремы  $\omega \in (-1, 1)$  и поэтому первое из фигурирующих здесь слагаемых является ограниченным оператором в пространстве  $L_2(Q)$  [15, с. 89]. Следовательно, из последнего неравенства вытекает ограниченность второго слагаемого в  $L_2(Q)$  и, стало быть, выполнено условие [15, с. 89]:

$$\sup_{z \in Q} \sup_{r > 0} \left\{ r^{-1} \int_{E(z, r) \cap Q} |\lambda|^{-\alpha} |\varphi(\lambda)| |d\lambda| r^{-1} \int_{E(z, r) \cap Q} |\lambda|^{-\alpha} |\varphi(\lambda)|^{-2} |d\lambda| \right\} < \infty \quad (1.4)$$

для каждого угла  $Q$ . Пусть контур  $\Gamma_p$  состоит из объединения лучей  $l_j (1 \leq j \leq [2p] + 1)$ , а  $L_{ij}$  обозначает угол, составленный из лучей  $l_i$  и  $l_j$ . Если  $z \in \Gamma_p$ , то

$$\begin{aligned} & r^{-1} \int_{B(z, r) \cap \Gamma_p} |\lambda|^{-\alpha} |\varphi(\lambda)|^2 |d\lambda| r^{-1} \int_{B(z, r) \cap \Gamma_p} |\lambda|^{-\alpha} |\varphi(\lambda)|^{-2} |d\lambda| = \\ &= \sum_{i, j} r^{-1} \int_{B(z, r) \cap l_i} |\lambda|^{-\alpha} |\varphi(\lambda)|^2 |d\lambda| r^{-1} \int_{B(z, r) \cap l_j} |\lambda|^{-\alpha} |\varphi(\lambda)|^{-2} |d\lambda| \leq \\ &\leq \sum_{i, j} r^{-1} \int_{B(z, r) \cap L_{ij}} |\lambda|^{-\alpha} |\varphi(\lambda)|^2 |d\lambda| r^{-1} \int_{L(z, r) \cap L_{ij}} |\lambda|^{-\alpha} |\varphi(\lambda)|^{-2} |d\lambda|. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и соотношений (1.4) вытекает наличие  $A_{\Gamma_p}^2$ -условия, то есть второе требование теоремы выполнено.

Обратно, выполнение  $A_{\Gamma_p}^2$ -условия влечет наличие неравенств (1.4), из которых, обращая приведенные ранее рассуждения, приходим к оценкам

$$\int_Q |\mu|^{-\alpha} |\varphi^{-1}(\mu)| ((I - \mu B)^{-1} h, x)^2 |d\mu| \leq K \int_Q |f(\mu)|^2 |d\mu|, \quad (1.5)$$

где  $h(t)$  задается равенством (1.3), а  $f$  — произвольная функция из  $L_2(Q)$ . Если в качестве  $Q$  взять угол, образованный некоторым лучом  $l$  контура  $\Gamma_p$  и положительным лучом, то для функции  $f_1$ , сосредоточенной на положительном луче, из (1.5) выводим

$$\int_l |\mu|^{-\alpha} |\varphi^{-1}(\mu)| ((I - \mu B)^{-1} h_1, x)^2 |d\mu| \leq K \int_0^\infty |f_1(r)|^2 dr,$$

где  $h_1(t) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} rt^{\frac{1}{\rho}}; \alpha) r^{-\frac{\alpha}{2}} f_1(r) dr$ . Аналогично, если одна из сторон угла  $Q$  совпадает со второй стороной главного угла  $\gamma_\rho$ , то

$$\int_I |\mu|^\alpha |\varphi^{-1}(\mu) ((I - \mu B)^{-1} h_2, x)|^2 |d\mu| \leq K \int_0^\infty |f_2(re^{-i\frac{\pi}{\rho}})|^2 dr,$$

причем  $h_2(t) = e^{-i\frac{\pi}{\rho}} \int_0^\infty t^{\alpha-1} E_\rho(e^{-i\frac{\pi}{2\rho}} rt^{\frac{1}{\rho}}; \alpha) r^{-\frac{\alpha}{2}} f_2(re^{-i\frac{\pi}{\rho}}) dr$ . Подбирая константы  $\alpha_1, \alpha_2$  соответствующим образом, функцию  $\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2$  запишем в виде:

$$h = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 = \int_{\gamma_\rho} t^{\alpha-1} E_\rho(e^{-i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda t^{\frac{1}{\rho}}; \alpha) \lambda^{-\frac{\alpha}{2}} f(\lambda) d\lambda, \quad t \in [0, 1],$$

где  $f$ , составленная из функций  $f_1, f_2$ , пробегает все пространство  $L_2(\gamma_\rho)$ . Если считать, что  $\arg y^{\frac{1}{\rho}} = -\frac{\pi}{\rho}$  для  $y < 0$ , то после замены  $\lambda = y^{\frac{1}{\rho}}$  ( $y \in R$ ) получим

$$h(t) = \rho^{-1} t^{\alpha-1} \int_R E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} y^{\frac{1}{\rho}} x^{\frac{1}{\rho}}; \alpha) (iy)^{\alpha-1} g(y) dy,$$

$$g(y) = (iy)^{1-\alpha} y^\tau f(y^{\frac{1}{\rho}}), \quad \tau = \frac{1-\rho}{2\rho}.$$

Из двух последних неравенств заключаем, что

$$\begin{aligned} & \int_I |\mu|^\alpha |\varphi^{-1}(\mu) ((I - \mu B)^{-1} h, x)|^2 |d\mu| \leq K_1 \left\{ \int_0^\infty |f_1(r)|^2 dr + \right. \\ & \left. + \int_0^\infty |f_2(re^{-i\frac{\pi}{\rho}})|^2 dr \right\} = K_1 \int_{\gamma_\rho} |f(\lambda)|^2 |d\lambda| = K_2 \int_R |y|^{2\tau} |f(y^{\frac{1}{\rho}})|^2 dy = \\ & = K_3 \int_R |g(y)|^2 dy, \end{aligned} \quad (1.6)$$

причем функция  $g$  пробегает все пространство  $L_2(R)$ . Теперь используем теорему В об обращении преобразования Фурье с помощью ядер Миттаг—Леффлера. Для этого, положив в формуле для  $h(t)$

$$g(y) = \int_0^1 e^{-ixy} \Psi(x) dx, \quad \Psi \in L_2(0, 1),$$

найдем, что  $h = 2\pi\Psi$  и  $\int_R |g(y)|^2 dy = 2\pi \int_0^1 |\Psi(x)|^2 dx$ . Это означает, что в (1.6) функция  $h$  пробегает все пространство  $L_2(0,1)$ , а также

$$\int_I |\mu|^\omega |\varphi^{-1}(\mu) ((I - \mu B)^{-1} h, x)|^2 |d\mu| \leq M \int_0^1 |h(t)|^2 dt,$$

где  $I$  — произвольный луч контура  $\Gamma_\rho$ , который не совпадает со сторонами угла  $\gamma_\rho$ . Далее, если в (1.5) считать, что  $Q = \gamma_\rho$ , то с помощью приведенных выше рассуждений, снова придем к оценке

$$\int_{\gamma_\rho} |\mu|^\omega |\varphi^{-1}(\mu) ((I - \mu B)^{-1} h, x)|^2 |d\mu| \leq M \|h\|^2.$$

Соединяя это со сказанным ранее, заключаем, что выполнено первое требование теоремы. При  $\rho \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$  доказательство не требует привлечения новых соображений и проще изложенного выше. Теорема доказана.

**Замечание 1.1.** С помощью незначительной модификации приведенных рассуждений можно получить оценки вида (1.2) и на более сложных контурах. В частности, при  $\rho = \frac{1}{2}$  теорема 1.1 остается в силе,

если вместо контура  $\Gamma_\rho$  взять параболу, задаваемую уравнением  $z(t) = (t + ia)^2$ ,  $t \in R$ ,  $a > 0$ . Другими словами, оценка из теоремы 1.1 ( $\rho = \frac{1}{2}$ ) отвечает тому крайнему случаю, когда эта парабола вырождается в положительный луч.

**Замечание 1.2.** Отметим связь оценок типа (1.2) с задачей о разрешимости некоторых классов линейных дифференциальных уравнений, порождаемых оператором  $A$ . Речь идет об условиях, при которых  $A$  является генератором семейства  $T^s$  ограниченных в пространстве  $L_2(0,1)$  операторов обобщенного сдвига [16]. Например, в случае  $\rho = 1$  некоторые результаты в этом направлении содержатся в [13].

## § 2. Теорема о полноте корневых подпространств

Напомним, что оператор называется полным, если замыкание линейной оболочки его корневых подпространств совпадает со всем пространством.

Функция  $\varphi(\lambda)$ , чьи корни совпадают со спектром оператора  $A$ , является целой функцией порядка  $\rho$  и нормального типа. Через  $h_\varphi(\theta)$  обозначим ее индикатор

$$h_\varphi(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |\varphi(re^{i\theta})|}{r^\rho}, \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

В задаче о полноте важную роль играет рост  $\varphi(\lambda)$  внутри главного угла  $\gamma_\rho$ , то есть величина  $h_\varphi\left(-\frac{\pi}{2\rho}\right)$ . Если  $\rho = 1$ , то существуют как

бы два главных угла (верхняя и нижняя полуплоскость) и в этом случае будем использовать также значение  $h_p\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

**Теорема 2.1.** Пусть  $\rho > \frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$ , функция  $\lambda|^{-\alpha}|\varphi(\lambda)|^2$  ( $\omega = \rho + 1 - 2\alpha$ ) удовлетворяет  $A_{\Gamma_p}^2$ -условию,  $h_p\left(-\frac{\pi}{2\rho}\right) = 1$ . Если  $\rho \neq 1$ , то операторы  $A$  и  $A^*$  полны одновременно в пространстве  $L_2(0,1)$ . В случае  $\rho = 1$  теорема остается в силе, если добавить условие  $h_p\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

**Доказательство.** Из соотношения (1.1) вытекает, что если  $\lambda_k \in \Lambda$ , то

$$\varphi(\lambda) = (\lambda_k - \lambda) \int_0^1 u^{\alpha-1} E_p\left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} i u^{\frac{1}{\rho}}; \alpha\right) \overline{x_k(u)} du = (\lambda_k - \lambda) \psi(\lambda),$$

где  $x_k = (I - \bar{\lambda}_k B^*)^{-1} x$ . Покажем, что  $\psi(\lambda)$  — функция вполне регулярного роста внутри угла  $\gamma_p$ . Для этого рассмотрим функцию  $\psi_p(\lambda) = \psi(\lambda^{1/\rho})$ , которая голоморфна в нижней полуплоскости и имеет там порядок роста 1. Поскольку для вещественных  $x$

$$\psi_p(x) = \int_0^1 E_p\left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} x^{\frac{1}{\rho}} u^{\frac{1}{\rho}}; \alpha\right) u^{\alpha-1} \overline{x_k(u)} du, \quad x_k \in L_2(0,1),$$

то из теоремы А выводим, что

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^{2(\alpha-1)} |\psi_p(x)|^2 dx < \infty$$

и, стало быть

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log_+ |\psi_p(x)|}{1+x^2} dx < \infty. \quad (2.1)$$

Согласно теореме М. Картрайт,  $\psi_p(x)$  — вполне регулярного роста в нижней полуплоскости [17, с. 315]. Отметим, что при значениях параметра  $\rho = \frac{1}{2}$ , 1 функция  $\psi_p(\lambda)$  является целой, конечной степени и вполне регулярного роста во всей плоскости.

Перейдем к доказательству полноты оператора  $A^*$ . Для упрощения рассуждений будем считать, что корневые подпространства совпадают с собственными, поскольку эти рассуждения остаются в силе и в случае кратных корней функции  $\varphi(\lambda)$ . Из условия  $(A_{\Gamma_p}^2)$  и теоремы 1.1 вытекает наличие оценки

$$\int_{\Gamma_p} |\lambda|^\omega |\varphi^{-1}(\lambda)| ((I - \lambda B)^{-1} h, x)^2 |d\lambda| \leq M \|h\|^2, \quad \omega \in (-1, 1).$$

Если оператор  $A^*$  не полон, то найдется такой вектор  $h_0 \neq 0$ , что функция

$$F(\lambda) = ((I - \lambda B)^{-1} h_0, x) \varphi^{-1}(\lambda)$$

является целой, порядка не выше  $\rho$ . В этом легко убедиться, если учесть, что собственные векторы оператора  $A^*$  имеют вид

$$x_{\lambda_k} = (I - \lambda_k B^*)^{-1} x, \lambda_k \in \Lambda.$$

Следовательно,  $F(\lambda)$  удовлетворяет условию

$$\int_{\Gamma_p} |\lambda|^a |F(\lambda)|^2 |d\lambda| < \infty. \quad (2.2)$$

Выведем отсюда, что  $F(\lambda) \equiv 0$ . Рассмотрим сначала случай  $\rho = \frac{1}{2}$ , 1.

В первом случае функция  $\varphi(\lambda^2)$  является целой, конечной степени и вполне регулярного роста, причем из (2.1) и условия  $h_{\mp}(-\pi) = 1$  вытекает, что ее индикаторная диаграмма совпадает с отрезком  $[-i, i]$ . Во втором случае  $\varphi(\lambda)$  обладает аналогичными свойствами, а ее индикаторная диаграмма равна отрезку  $[-i, 0]$ . Легко проверяется, что при  $\rho = \frac{1}{2}$  индикаторная диаграмма функции  $((I - \lambda^2 B)^{-1} h_0, x)$  содер-

жится в отрезке  $[-i, i]$ . Поэтому целая функция  $F(\lambda^2)$  имеет нулевую степень. Соединяя это с соотношением (2.2), которое в этом случае выглядит следующим образом:

$$\int_R |x|^{4-2a} |F(x^2)|^2 dx < \infty, \quad a \in \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right),$$

закключаем, что  $F(\lambda^2) \equiv 0$ . Повторяя дословно эти же рассуждения, приходим к выводу, что  $F(\lambda) \equiv 0$  и в случае  $\rho = 1$ . Перейдем к общему случаю. Если порядок  $F$  равен  $\rho_0 < \rho$ , то рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \int_0^z \frac{F(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)} d\lambda,$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — в числе нулей функции  $F$  (случай, когда  $F$  имеет менее двух нулей разбирается тривиально). Из неравенства Коши—Шварца и оценки (2.2) немедленно вытекает, что на каждом луче контура  $\Gamma_p$  функция  $\Phi(z)$  ограничена. Поскольку ее порядок равен  $\rho_0$ , то учитывая строение контура  $\Gamma_p$ , с помощью теоремы Фрагмена—Линделёфа выводим, что  $\Phi(z) \equiv C$  и, стало быть,  $F(\lambda) \equiv 0$ .

И, наконец, пусть порядок  $F$  равен  $\rho$ . Пусть  $x_0, x_1, \dots, x_n$  — убывающая последовательность чисел из интервала  $[-\pi, \pi)$ , причем  $x_i = \arg z_i$ , если  $z_i \in l_i$ , где  $l_i$  — луч контура  $\Gamma_p$ . Таким образом, при такой нумерации лучей,  $l_0$  — ближайший к отрицательной полуоси луч контура  $\Gamma_p$ . Совокупность чисел  $v_i = -x_i$  удовлетворяет условиям:

$$-\pi < v_0 < v_1 < \dots < v_n \leq \pi < v_0 + 2\pi$$

и для единственной пары последовательных чисел  $(0, \frac{\pi}{\rho})$ , расстояние между ними равно  $\frac{\pi}{\rho}$ . Далее, если  $h_F(-\frac{\pi}{2\rho}) < 0$ , то прибавляя к  $\Gamma_\rho$  еще луч с аргументом  $-\frac{\pi}{2\rho}$ , снова с помощью теоремы Фрагмена—Линделефа получим, что  $F(\lambda) \equiv 0$ . Итак,  $h_F(-\frac{\pi}{2\rho}) = \sigma \geq 0$  и условие (2.2) запишем в виде

$$\int_0^\infty |F(re^{-i\varphi_k})|^2 r^\omega dr < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad \omega \in (-1, 1).$$

Из теоремы С вытекает, что

$$F(\lambda) = \int_0^1 E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} i u^{\frac{1}{\rho}}; \mu) x(u) u^{\omega-1} du,$$

где  $x \in L_2(0, 1)$ ,  $\mu = (2\rho)^{-1}(\omega + \rho + 1)$ . С другой стороны, поскольку  $\varphi(\lambda)$  — вполне регулярного роста внутри главного угла, то

$$h_\sigma(-\frac{\pi}{2\rho}) + h_F(-\frac{\pi}{2\rho}) = h_\sigma(-\frac{\pi}{2\rho}), \quad G(\lambda) = ((I - \lambda B)^{-1} h_0, x).$$

Из свойств резольвенты  $(I - \lambda B)^{-1}$  выводим, что  $h_\sigma(-\frac{\pi}{2\rho}) \leq 1$  и, стало быть,  $\sigma = 0$ , то есть  $F(\lambda) \equiv 0$ .

Итак, мы доказали, что  $((I - \lambda B)^{-1} h_0, x) = 0$  для всех  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Если  $x(t) \equiv 0$  в некоторой полуокрестности 1, то тип функции  $\varphi(\lambda)$  был бы меньше 1, что противоречит условию теоремы. Последнее означает цикличность вектора  $x$  для оператора  $B^*$  [18, с. 476] и, следовательно, множество  $x_\mu = (I - \mu B^*)^{-1} x$  ( $\mu \in \mathbb{C}$ ) всюду плотно в  $L_2(0, 1)$ . Таким образом,  $h_0 = 0$ , что и доказывает полноту оператора  $A^*$ .

Обратимся теперь к доказательству полноты оператора  $A$ . Если оператор не полон, то обозначим через  $N$  ортогональное дополнение к замыканию линейной оболочки корневых подпространств оператора  $A$ . Для каждого  $h \in N$  функция  $(y_\lambda, h) \varphi^{-1}(\lambda)$  является целой, где, как обычно,  $y_\lambda(t) = t^{\alpha-1} E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda t^{\frac{1}{\rho}}; \alpha)$ . Из асимптотических формул для функций типа Миттаг—Леффлера [1, с. 133] вытекает, что справедлива оценка  $\|y_\lambda\| \leq K |\lambda|^\rho (1-\varepsilon)$ , если  $\lambda \rightarrow \infty$ , оставаясь на контуре  $\Gamma_\rho$  (см. неравенство (4.2)). Обозначая через  $\Gamma_\rho^0$  контур  $\Gamma_\rho$  с выброшенной окрестностью нуля, рассмотрим интеграл

$$\int_{\Gamma_\rho^0} |\lambda|^{1-\rho} |\varphi^{-1}(\lambda)(y_\lambda, h)((I - \lambda B)^{-1} h_1, x)|^2 |d\lambda| \leq$$

$$\begin{aligned} & \leq \|h\|^2 \int_{\Gamma_p^0} |\lambda|^{1-\rho} \|y_\lambda\|^2 |\varphi^{-1}(\lambda)| |(I-\lambda B)^{-1} h_1, x)|^2 |d\lambda| \leq \\ & \leq K \|h\|^2 \int_{\Gamma_p^0} |\lambda|^\omega |\varphi^{-1}(\lambda)| |(I-\lambda B)^{-1} h_1, x)|^2 |d\lambda| \leq K_1 \|h\| \|h_1\|^2 \end{aligned}$$

для любых  $h, h_1 \in L_2(0, 1)$ . Пусть  $\rho$  обозначает наименьшее целое неотрицательное число, для которого  $\rho - 1 + \omega < 2\rho$ , а  $P(\lambda)$  — произвольный полином степени  $\rho$ , корни которого не лежат на  $\Gamma_p$ . Полагая  $h_1 = y_\mu$ , получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_p^0} |\lambda|^\omega |P^{-1}(\lambda)| |\varphi^{-1}(\lambda)| |(I-\lambda B)^{-1} y_\mu, x)|^2 |(y_\lambda, h)|^2 |d\lambda| \leq \\ & \leq L_1 \int_{\Gamma_p^0} |\lambda|^{1-\rho} |\varphi^{-1}(\lambda)| |(y_\lambda, h)|^2 |(I-\lambda B)^{-1} y_\mu, x)|^2 |d\lambda| \leq L_2(\mu). \end{aligned}$$

Последнее неравенство означает, что функция

$$\Phi(\lambda) = P^{-1}(\lambda) \varphi^{-1}(\lambda) (y_\lambda, h) ((I-\lambda B)^{-1} y_\mu, x)$$

принадлежит пространству  $L_2^\infty(\Gamma_p^0)$ . Фиксируя  $\mu \in \bar{\Gamma}_p$ , с учетом (1.1) найдем

$$\Phi(\lambda) = \frac{(y_\lambda, h)}{P(\lambda)(\mu - \lambda)} - \varphi(\mu) \frac{(y_\lambda, h)}{P(\lambda)(\mu - \lambda)\varphi(\lambda)}.$$

Первое слагаемое в этом равенстве принадлежит  $L_2^\infty(\Gamma_p^0)$ . Этот факт нетрудно вывести из определения числа  $\rho$ , четвертого пункта теоремы А и оценки

$$\int_{\Gamma_p^0} |\lambda|^\omega |P^{-1}(\lambda)| (\mu - \lambda)^{-1} |(y_\lambda, h)|^2 |d\lambda| \leq K \int_{\Gamma_p^0} |\lambda|^{-\omega} |y_\lambda, h)|^2 |d\lambda| \leq K_1 \|h\|^2.$$

Отсюда следует, что второе слагаемое также принадлежит  $L_2^\infty(\Gamma_p^0)$ , а значит, и

$$\Phi_1(\lambda) \stackrel{\text{df}}{=} Q^{-1}(\lambda) \varphi^{-1}(\lambda) (y_\lambda, h) \in L_2(\Gamma_p), \quad Q(\lambda) = P(\lambda)(\mu - \lambda). \quad (2.3)$$

Пусть теперь  $h \in N$ , а корни  $Q$  выбраны из числа корней функции  $(y_\lambda, h)$ , которые не входят в  $\Lambda$ . Тогда  $\Phi_1$  является целой функцией порядка не выше  $\rho$  и к ней применимы рассуждения, использованные при доказательстве полноты оператора  $A^*$ . Следовательно,  $(y_\lambda, h) \equiv 0$  и, значит,  $h = 0$ . Осталось рассмотреть тот случай, когда функция  $(y_\lambda, h)$  не имеет достаточного количества посторонних корней. Другими словами, существуют такие полиномы  $f, g$ , что

$$(y_\lambda, h) \varphi^{-1}(\lambda) = f(\lambda) \exp\{g(\lambda)\}, \quad \deg f < \deg Q, \quad \deg g \leq [\rho], \quad (2.4)$$

где символом  $\deg$  обозначается степень полинома. Покажем, что всегда  $\deg g = 0$ . Действительно, из (2.3) находим

$$f(\lambda) Q^{-1}(\lambda) \exp |g(\lambda)| \in L_2^{\infty}(\Gamma_p) \quad (2.5)$$

и, следовательно, в случае  $p = 1$  полином  $g(i) = ia$  ( $a \in R$ ). Если  $a \neq 0$ , то это противоречит (2.4), поскольку индикаторная диаграмма  $(y, h)$  получается из отрезка  $[-i, 0]$  сдвижкой на  $|a|$  единиц. При  $p > 1$ , из (2.5) с помощью принципа Фрагмена—Линделёфа получаем, что и в этом случае степень  $g$  равна 0.

Таким образом, возвращаясь к (2.4), заключаем, что для каждого  $h \in N$  найдется такой полином  $f_h(\lambda)$ , что

$$(y, h) = f_h(\lambda) \varphi(\lambda),$$

причем степени полиномов  $f_h$  ограничены числом  $\deg Q = p + 1$ . Поскольку справедливы равенства

$$(y, \sum c_k h_k) = (\sum c_k f_{h_k}(\lambda)) \varphi(\lambda), \quad h_k \in N,$$

то  $\dim N \leq p + 1$ . С другой стороны, подпространство  $N$  инвариантно относительно оператора  $A^{*-1}$  и ввиду своей конечномерности содержит собственный вектор оператора  $A^*$ , что невозможно. Полученное противоречие доказывает полноту оператора  $A$ .

С помощью изложенных рассуждений можно получать и более общие теоремы о полноте операторов рассматриваемого класса. Здесь же приведен простейший результат в этом направлении, который используется в дальнейшем. Но даже его интересно сравнить с известным признаком Карлемана [19, с. 227] полноты операторов из идеалов Неймана—Шэттена. Теорема 2.1 усиливает признак в двух направлениях: позволяет углу между лучами  $\Gamma_p$  равняться  $\frac{\pi}{p}$  и накладывает более тонкое ограничение на поведение резольвенты вдоль лучей контура  $\Gamma_c$ .

### § 3. Базисность рациональных дробей в некоторых весовых пространствах

Для каждого  $p \geq \frac{1}{2}$  обозначим через  $L_2^{\infty}(\gamma_p)$  гильбертово пространство функций  $f(\lambda)$ , заданных на контуре  $\gamma_p$ , для которых конечна величина

$$\|f\|_{L_2^{\infty}}^2 = \int_{\gamma_p} |\lambda|^{\infty} |f(\lambda)|^2 |d\lambda| < \infty.$$

Напомним, что при  $p = \frac{1}{2}$  контур  $\gamma_p$  представляет собой положительный луч, который при интегрировании проходится в одном направлении. Для дальнейшего продвижения в исследовании операторов рассматриваемого класса, необходимо решить задачу о безусловной базисности в замыкании своей линейной оболочки семейства рациональных дробей

$$\{f_k(\lambda) : \lambda_k \in \Lambda\}, \quad f_k(\lambda) = (\lambda_k - \lambda)^{-1}$$

в пространствах  $L_2(\gamma_p)$ . Поскольку внутри угла  $\gamma_p$  аргумент отсчитывается от положительного луча по часовой стрелке, то  $\lambda^p$  отображает область  $\gamma_p$  (при  $p = \frac{1}{2}$  — плоскость без положительного луча) на нижнюю полуплоскость. Для множества  $\Lambda$ , лежащего внутри области  $\gamma_p$ , будем обозначение

$$\Lambda^p = \{\lambda_k^p : \lambda_k \in \Lambda\}.$$

При  $p > \frac{1}{2}$  следующий результат содержится в более общих теоремах работ [20—22]. Мы приводим его здесь с новым, более кратким доказательством, которое опирается на простые вычисления.

**Теорема 3.1.** Пусть  $p \geq \frac{1}{2}$ , а множество  $\Lambda$  лежит внутри области  $\gamma_p$ . Тогда семейство рациональных дробей  $\{f_k(\lambda)\}$  образует безусловный базис замыкания своей линейной оболочки в пространстве  $L_2^w(\gamma_p)$ , если и только если последовательность  $\Lambda^p$  удовлетворяет условию Карлесона:

$$\inf_n \prod_{k \neq n} |z_n - z_k| |z_n - \bar{z}_k|^{-1} > 0, \quad \Lambda^p = \{z_k\}.$$

**Доказательство.** Речь идет о необходимых и достаточных условиях справедливости двусторонней оценки

$$\| \sum c_k f_k \|_2^2 \asymp \sum |c_k|^2 W_k^2, \quad (3.1)$$

где  $c_k$  — произвольные комплексные числа, а суммирование распространяется на любое конечное подмножество индексов. Пусть сначала  $p > \frac{1}{2}$ .

Считая, что при  $t < 0$  справедливо равенство  $\arg t^{1/p} = -\frac{\pi}{p}$ , сделаем замену

$$\| \sum c f_k \|_2^2 = p^{-1} \int_R |\sum c_k t^{1/p} (\lambda_k - t^{1/p})^{-1}|^2 dt, \quad \tau = \frac{\omega}{2p} + \frac{1-p}{2p}.$$

Простые вычисления показывают, что

$$P(\sum c_k t^{1/p} (\lambda_k - t^{1/p})^{-1}) = p \sum c_k \cdot \lambda_k^{-\frac{m}{2}} \cdot \lambda_k^{\frac{p-1}{2}} (\lambda_k^2 - t)^{-1},$$

где  $P$  — проектор Рисса на класс Харди  $H_+^2$  (в верхней полуплоскости). Таким образом, имеет место неравенство

$$\int_R |\sum c_k \lambda_k^{-\frac{m}{2}} \lambda_k^{\frac{p-1}{2}} (\lambda_k^2 - t)^{-1}|^2 dt \leq M \int_R |\sum c_k t^{1/p} (\lambda_k - t^{1/p})^{-1}|^2 dt. \quad (3.2)$$

С другой стороны, используя формулы Сохоцкого, в результате несложных вычислений, найдем

$$\sum c_k \rho^{-1} \lambda_k^{\nu p} \frac{z}{z - \lambda_k} = \frac{1}{2} \sum c_k \frac{z^{\frac{p-1}{2}}}{z^p - \lambda_k^p} - \frac{z^{\frac{\omega}{2}}}{2\pi i} \int_{\Gamma_p} \frac{\lambda^{-\frac{\omega}{2}}}{z - \lambda} \sum c_k \frac{\lambda^{\frac{p-1}{2}}}{\lambda^p - \lambda_k^p} d\lambda,$$

где  $\nu = -\frac{\omega}{2\rho} + \frac{1-\rho}{2\rho}$ . Как уже отмечалось, фигурирующий здесь интегральный оператор ограничен в пространстве  $L_2(\Gamma_p)$  (§ 1) и если ввести обозначение  $c_k \lambda_k^{\nu p} = a_k$ , то приходим к оценке

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_p} |\sum a_k z^{\frac{\omega}{2}} (z - \lambda_k)^{-1}|^2 dz &\leq K \int_{\Gamma_p} |\sum c_k \lambda_k^{-\nu p} \lambda_k^{\frac{p-1}{2}} (\lambda_k^p - \lambda_k^p)^{-1}|^2 |d\lambda| = \\ &= K_1 \int_R |\sum a_k \lambda_k^{\frac{\omega}{2}} \lambda_k^{\frac{p-1}{2}} (\lambda_k^p - t)^{-1}|^2 dt. \end{aligned}$$

Соединяя это неравенство с (3.2), получим

$$\|\sum c_k f_k\|_{\omega}^2 \asymp \int_R |\sum c_k \lambda_k^{\frac{\omega}{2}} \lambda_k^{\frac{p-1}{2}} (\lambda_k^p - t)^{-1}|^2 dt.$$

Отсюда вытекает, что (3.1) равносильно двустороннему неравенству

$$\int_R |\sum a_k (\lambda_k^p - t)^{-1}|^2 dt \asymp \sum |a_k|^2 \int_R |\lambda_k^p - t|^{-2} dt,$$

из которого и вытекает требуемое [23].

В случае  $\rho = \frac{1}{2}$  имеем

$$\|\sum c_k f_k\|_{\omega}^2 = \int_R |t|^{2\beta} |\sum c_k (z_k^2 - t^2)^{-1}|^2 dt, \quad \beta = \omega + \frac{1}{2}, \quad z_k \in \Lambda^{\frac{1}{2}}$$

и поэтому снова с помощью проектирования на  $H_+^2$  приходим к неравенству

$$\int_R |\sum c_k z_k^{-3-1} (t - z_k)^{-1}|^2 dt \leq M \|\sum c_k f_k\|_{\omega}^2. \quad (3.3)$$

Далее, нетрудно проверить, что оператор

$$(Tf)(x) = \lim_{\lambda \rightarrow x} \lambda^{\omega + \frac{1}{2}} \frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{t^{-\omega + \frac{1}{2}}}{t^2 - \lambda^2} f(t) dt, \quad \lambda = x + iy, \quad y < 0$$

непрерывен в метрике пространства  $L_2(R)$ . В результате простых вычислений получим

$$T(\sum c_k (z_k - t)^{-1}) = \frac{1}{2} \sum c_k (t - z_k)^{-1} - \sum c_k z_k^{1-3} t^3 (z_k^2 - t^2)^{-1}$$

и, стало быть, справедлива оценка

$$\left| \sum c_k f_k \right| \leq M_1 \int_R \left| \sum c_k z_k^{\frac{1}{p}-1} (t - z_k)^{-1} \right|^2 dt.$$

Соединяя ее с (3.3) снова приходим к нужному заключению. Теорема доказана.

Если последовательность  $\Lambda$  лежит вне угла  $\gamma_\rho$  и, следовательно,  $0 < \arg \lambda_k < 2\pi - \frac{\pi}{\rho}$ ,  $\lambda_k \in \Lambda$ , то применяя предыдущую теорему к дополнительному углу раствора  $\frac{\pi}{\rho} = 2\pi - \frac{\pi}{\rho}$  приходим к следующему результату.

**Следствие.** Если  $\rho > \frac{1}{2}$  и последовательность  $\Lambda$  лежит вне угла  $\gamma_\rho$ , то семейство  $\{f_k(\lambda)\}$  образует безусловный базис замыкания своей оболочки в  $L_2^m(\gamma_\rho)$  тогда и только тогда, когда последовательность  $\Lambda^\beta$  ( $\beta = \rho(2\rho - 1)^{-1}$ ) удовлетворяет условию Карлсона.

Заканчивая параграф отметим, что изложенное здесь доказательство почти дословно переносится на тот случай, когда вес  $|z|^\omega$  ( $-1 < \omega < 1$ ) пространства  $L_2$  заменен произвольным весом Макенхаупта на контуре  $\gamma_\rho$ . Таким образом, теорема 3.1 остается в силе и в этом случае.

#### § 4. Безусловная базисность семейств функций типа Миттаг—Леффлера и интерполяция целыми функциями конечного порядка

В этом параграфе будут установлены необходимые и достаточные условия, при которых семейства функций

$$y_{\lambda_k}(t) = t^{\alpha-1} E_\rho \left( e^{i \frac{\pi}{2\rho} \lambda_k t^{\frac{1}{\rho}}}; \alpha \right), \lambda_k \in \Lambda, \rho > \frac{1}{2} \quad (4.1)$$

образуют безусловные базисы пространства  $L_2(0,1)$ . Кроме введенных в предыдущих параграфах определений и обозначений будем пользоваться также следующими. В дальнейшем через  $A_\sigma^\beta \left( \beta; 0; -\frac{\pi}{\rho} \right)$  обозначается класс целых функций  $f(\lambda)$  порядка  $\rho \geq \frac{1}{2}$  и типа  $\leq \sigma$ , удовлетворяющих условию

$$\int_0^\infty |f(re^{i\theta})|^2 r^\beta dr < \infty, \theta \in \left[ 0, 2\pi - \frac{\pi}{\rho} \right],$$

где  $\beta \in (-1, 1)$  — заданное число. Далее, для каждого  $\delta > 0$  обозначим через  $G_\delta$  область комплексной плоскости, состоящую из объеди-

нения дополнительного угла контура  $\Gamma_p$  (раствора  $2\pi - \frac{\pi}{p}$ ) и части главного угла  $\gamma_p$ , которая выделяется неравенством  $|\operatorname{Im} \lambda^p| < \delta$ , причем  $\lambda^p$  отображает внутренность  $\gamma_p$  на нижнюю полуплоскость. Таким образом, при  $p = \frac{1}{2}$  область  $G_\delta$  представляет собой внутренность соответствующей параболы. Кроме того, при изучении систем (4.1), не умаляя общности, будем считать что  $0 \in \Lambda$ . Связь с предыдущими рассмотрениями устанавливается посредством следующей теоремы.

**Теорема 4.1.** Пусть семейство (4.1) образует безусловный базис пространства  $L_2(0,1)$ , причем  $\Lambda \subset G_\delta$  при некотором  $\delta > 0$ . Тогда

1) Существует оператор  $A$  вида (0.2), для которого функции  $y_{\lambda_k}$  являются собственными и  $\sigma(A) = \Lambda$ .

2) Справедливо неравенство  $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$ .

3). Элементы последовательности  $\Lambda$  суть простые нули целой функции  $\varphi(\lambda)$ , для которой

$$\lambda^{-1}(\varphi(\lambda) - \varphi(0)) \in \mathcal{H}_1^2\left(-\omega; 0; -\frac{\pi}{p}\right), \quad \omega = p + 1 - 2px.$$

4). Функция  $\varphi(\lambda)$  из предыдущего пункта однозначно определяется условием нормировки  $\varphi(0) = 1$ .

**Доказательство.** Если семейство  $\{y_{\lambda_k}\}$  образует базис, то последовательность  $\lambda_k^{-1}$  ограничена и поэтому существует ограниченный оператор, обозначаемый через  $A^{-1}$ , для которого

$$A^{-1} y_{\lambda_k} = \lambda_k^{-1} y_{\lambda_k}, \quad \lambda_k \in \Lambda.$$

Оператор  $A^{-1}$  будем искать в виде

$$(A^{-1} h)(t) = e^{i \frac{\pi}{2p}} \Gamma^{-1} \left( \frac{1}{p} \right) \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{p}-1} h(s) ds + (Vh)(t).$$

Из элементарных соотношений для функций типа Миттаг—Леффлера [1, с. 118] вытекает, что оператор  $V$  одномерный, причем

$$(Vy_{\lambda_k})(t) = \Gamma^{-1}(\alpha) \lambda_k^{-1} t^{\alpha-1}, \quad \lambda_k \in \Lambda.$$

Следовательно,  $\alpha > \frac{1}{2}$  и существует такой вектор  $x \in L_2(0,1)$ , что

$$(Vh)(t) = (h, x) y, \quad y(t) = \Gamma^{-1}(\alpha) t^{\alpha-1},$$

то есть утверждение 1) доказано. Поэтому (§ 1) последовательность  $\Lambda$  совпадает с множеством корней функции

$$\varphi(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^1 t^{\alpha-1} E_p(e^{i \frac{\pi}{2p}} \lambda t^{\frac{1}{p}}; \alpha) \overline{x(t)} dt,$$

которые простые, поскольку кратный нуль порождает корневое подпространство, что невозможно в случае базисности собственных векторов. Далее, если  $\Lambda \subset G_1$ , то при  $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$  справедлива оценка

$$\|y_{\lambda_k}\| \leq M |\lambda_k|^{p(1-\alpha)}, \quad \lambda_k \in \Lambda, \quad p \geq \frac{1}{2}, \quad (4.2)$$

для доказательства которой применяются асимптотические формулы для функций типа Миттаг—Леффлера [1, с. 133]. Например, для  $p > \frac{1}{2}$ , в одном из возможных случаев, найдем

$$\begin{aligned} \|y_{\lambda}\|^2 &= \int_{\{|\lambda t|^p < 1\}} |y_{\lambda}(t)|^2 dt + \int_{\{|\lambda t|^p > 1\}} |y_{\lambda}(t)|^2 dt \leq \\ &\leq |\lambda|^{2p(1-\alpha)} \left\{ M_1 |\lambda|^{-p} \int_0^{|\lambda|} u^{-\omega} (1+u)^{-2} du + M_2 + M_3 |\lambda|^{-p} \right\}, \end{aligned}$$

где  $\omega = p + 1 - 2p\alpha$ . Поскольку  $\alpha$  изменяется в указанных пределах, то из полученного неравенства вытекает (4.2).

Докажем теперь, что при  $\alpha \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$  семейство  $\{y_{\lambda_k}\}$  не может быть безусловным базисом пространства  $L_2(0,1)$ . Действительно, в случае базисности собственных векторов оператора  $A$  для сингулярных чисел [24, с. 46] оператора

$$A^{-1}h = Bh + (h, x)y$$

справедливо соотношение  $s_k(A^{-1}) \asymp |\lambda_k|^{-1}$ , где  $\{\lambda_k\}$  — правильно занумерованный спектр  $A$  (корни функции  $\varphi$ ). С другой стороны, поскольку  $A^{-1}$  есть одномерное возмущение  $B$ , то [24, с. 49]:  $s_{k+1}(B) \leq s_k(A^{-1}) \leq s_{k-1}(B)$ . Так как  $s_k(B) \asymp k^{1/p}$  [18, с. 480], то в итоге получаем  $|\lambda_k| \asymp k^{1/2}$ . Далее, из формулы для  $\varphi(\lambda)$  следует, что  $|(x, y_{\lambda_k})| = |\lambda_k|^{-1}$  и, стало быть, сходится ряд

$$\sum |\lambda_k|^{-2} \|y_{\lambda_k}\|^{-2} < \infty.$$

Используя оценку (4.2) при  $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$ , получаем сходимость ряда с общим членом  $k^{-1}$ . Если же  $\alpha > \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$ , то существует такое  $\beta > 0$ , что [1, с. 120]:

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}(\beta) \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_p(e^{t^{\frac{\pi}{2p}} \lambda_k s^{\frac{1}{p}}}; \mu) s^{\mu-1} ds &= t^{\alpha-1} E_p(e^{t^{\frac{\pi}{2p}} \lambda_k t^{\frac{1}{p}}}, \alpha), \\ \mu &= \frac{1}{2} + \frac{1}{p} \end{aligned}$$

и, следовательно, снова  $\|y_k\| \leq M_1 |\lambda_k|^{\rho(1-\mu)}$ , ввиду ограниченности в  $L_2(0,1)$  оператора дробного интегрирования. Поэтому и в этом случае предыдущие рассуждения приводит к противоречию.

Теперь уже утверждение 3) вытекает из 2) и теоремы D. И, наконец, последнее утверждение теоремы непосредственно следует из параметрического представления функций класса  $A_1^2\left(-\omega; 0; -\frac{\pi}{\rho}\right)$ , которое вытекает из теоремы D и того факта, что оператор  $A^{-1}$  полностью определяется своими значениями на базисе. Теорема доказана.

**Замечание 4.1.** Функцию  $\varphi(\lambda)$ , нормированную условием  $\varphi(0) = 1$ , будем называть порождающей функцией семейства (4.1), и решение задачи о базисности будет сформулировано в терминах именно этой функции.

**Замечание 4.2.** Те же рассуждения, что и при доказательстве (4.2) приводят к двусторонней оценке

$$\|y_k\| \asymp |\lambda_k|^{\rho(1-\mu)}, \quad (4.3)$$

если  $\lambda \rightarrow \infty$ , оставаясь на сторонах угла  $\gamma_\rho$ .

Продолжим теперь перечень необходимых условий базисности, сосредоточив, для определенности, все усилия на том важном случае, когда  $\Lambda$  лежит внутри главного угла  $\gamma_\rho$  и удовлетворяет требованию

$$0 < \delta < |\operatorname{Im} \lambda_k^\rho| < \Delta \quad (4.4)$$

при некоторых  $\delta, \Delta$ .

**Лемма 4.1.** Если семейство  $\{y_k\}$  образует безусловный базис  $L_2(0,1)$ , а  $\Lambda$  удовлетворяет (4.4), то на каком-нибудь контуре  $\Gamma$ , функция  $|\lambda|^{-\omega} |\varphi(\lambda)|^2$  ( $\omega = \rho + 1 - 2\rho\alpha$ ) удовлетворяет условию  $(A_\Gamma^2)$ .

**Доказательство.** Предварительно докажем справедливость оценки

$$\left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) |u|^2 \left( \frac{1}{\rho} - 1 \right) \|B(I - u^{\frac{1}{\rho}} B)^{-1} h\|^2 du \leq M \|h\|^2, \quad \rho \geq \frac{1}{2} \quad (4.5)$$

для всех  $h \in L_2(0,1)$  и некоторого  $\varepsilon > 0$ . Действительно, элементарные вычисления дают

$$B(I - u^{\frac{1}{\rho}} B)^{-1} h = e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \int_0^t s^{\frac{1}{\rho}-1} E_\rho\left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} u^{\frac{1}{\rho}} s^{\frac{1}{\rho}}; \frac{1}{\rho}\right) h(t-s) ds$$

и поэтому для любого ортонормированного базиса  $\{e_k\}$  пространства  $L_2(0,1)$  получим

$$\begin{aligned} \|B(I - u^{\frac{1}{\rho}} B)^{-1} h\|^2 &= \sum_k |(B(I - u^{\frac{1}{\rho}} B)^{-1} h, e_k)|^2 = \\ &= \sum_k \left| \left( s^{\frac{1}{\rho}-1} E_\rho\left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} u^{\frac{1}{\rho}} s^{\frac{1}{\rho}}; \frac{1}{\rho}\right), (Q^* e_k)(s) \right) \right|^2, \end{aligned}$$

где  $(Qf)(t) = \int_0^t f(s) h(t-s) ds$ . Следовательно, если  $\rho$  изменяется в пределах  $\left[\frac{1}{2}, 2\right)$ , то можно воспользоваться свойствами преобразования М. М. Джрбашяна, о которых говорится в теореме А:

$$\int_R u^{2\left(\frac{1}{\rho}-1\right)} \|B(I-u^\rho B)^{-1}h\|^2 du = \sum_k \int_R |u|^{2\left(\frac{1}{\rho}-1\right)} \times \\ \times \left| \left( s^{\frac{1}{\rho}-1} E_\rho \left( e^{i\frac{\pi}{2\rho}} u^{\frac{1}{\rho}} s^{\frac{1}{\rho}}; \frac{1}{\rho} \right), (Q^* e_k)(s) \right) \right|^2 du \leq \\ \leq M \sum_k \int_0^1 \|(Q^* e_k)(s)\|^2 ds \leq M_1 \|h\|^2.$$

поскольку оператор  $Q$  является оператором Гильберта—Шмидта и, стало быть, его абсолютная норма оценивается через норму  $h$  [24]. Для доказательства (4.5) при прочих значениях  $\rho$  необходимо воспользоваться асимптотическими формулами [1, с. 133], с помощью которых доказательство сводится к оценке

$$\left( \int_R \left| \int_0^t e^{i u s} f(t-s) ds \right|^2 du \right)^{1/2} \leq K \|f\|, f \in L_2(0,1),$$

которая уже доказана ( $\rho=1$ ).

Итак, в случае базисности рассматриваемой системы, существует подходящий оператор  $A$ , причем, в виду наличия разложений

$$h = \sum_{\lambda_k \in \Lambda} a_k y_{\lambda_k}, \quad \|h\|^2 \asymp \sum_{\lambda_k \in \Lambda} |a_k|^2 \|y_{\lambda_k}\|^2, \quad h \in L_2(0,1)$$

справедливо неравенство

$$\int_{\gamma_\rho^0} |\lambda|^{1-\rho} \|(A - \lambda I)^{-1} h\|^2 |d\lambda| \leq K \sum |a_k|^2 \|y_{\lambda_k}\|^2 \int_{\gamma_\rho^0} |\lambda|^{1-\rho} |\lambda_k - \lambda|^{-2} |d\lambda|,$$

где  $\gamma_\rho^0$  — контур  $\gamma_\rho$  с выброшенной окрестностью нуля. Несложные вычисления, которые мы опускаем, показывают, что требование

$$\int_{\gamma_\rho^0} |\lambda|^{1-\rho} |\lambda_k - \lambda|^{-2} |d\lambda| < C, \quad \lambda_k \in \Lambda$$

равносильно условию  $|\operatorname{Im} \lambda_k| > \delta > 0$  для всех  $\lambda_k \in \Lambda$ . Возвращаясь к предыдущему неравенству, получим

$$\int_{\gamma_\rho^0} |\lambda|^{1-\rho} \|(A - \lambda I)^{-1} h\|^2 |d\lambda| \leq L \|h\|^2$$

для всех  $h \in L_2(0,1)$ . После замены переменной (4,5) запишем в виде

$$\int_{\gamma_p^0} |\lambda|^{1-p} \|B(I - \lambda B)^{-1} h\|^2 |d\lambda| \leq M \|h\|^2.$$

Учитывая вид резольвенты оператора  $A$  (§ 1), а также соотношение (4,3), из двух последних неравенств выводим

$$\int_{\gamma_p^0} |\lambda|^m \varphi^{-1}(\lambda) |(I - \lambda B)^{-1} h, x|^2 |d\lambda| \leq M_1 \|h\|^2, \quad h \in L_2(0,1),$$

причем здесь контур  $\gamma_p^0$  уже можно заменить на  $\gamma_p$ . Пусть теперь  $\Gamma$  обозначает какой-нибудь луч  $\Gamma_\rho$  ( $\rho > 1$ ). Покажем, что

$$\int_{\Gamma} |\lambda|^m |\varphi^{-1}(\lambda) ((I - \lambda B)^{-1} h, x)|^2 |d\lambda| \leq L \int_{\gamma_p} |\lambda|^m |\varphi^{-1}(\lambda) ((I - \lambda B)^{-1} h, x)|^2 |d\lambda|,$$

для всех  $h \in L_2(0,1)$ . Поскольку это неравенство достаточно доказать для плотного множества, то выбирая в качестве такого множества совокупность всех конечных сумм вида  $h = \sum c_k y_{\lambda_k}$ , с учетом (1.1) найдем

$$\varphi^{-1}(\lambda) ((I - \lambda B)^{-1} h, x) = \varphi^{-1}(\lambda) \sum c_k \varphi(\lambda) (\lambda_k - \lambda)^{-1} = \sum c_k (\lambda_k - \lambda)^{-1}.$$

Поэтому выражение, стоящее справа, запишем в виде

$$\int_{\gamma_p} |\lambda|^m \left| \sum c_k (\lambda_k - \lambda)^{-1} \right|^2 |d\lambda| = \beta^{-1} \int_R \left| \sum c_k t^\tau (\lambda_k - t^{1/\beta})^{-1} \right|^2 dt, \quad \tau = \frac{m}{2\beta} + \frac{1-\beta}{2\beta},$$

где число  $\beta$  определяется равенством  $\pi\beta^{-1} = 2\pi - \frac{\pi}{\rho}$ . Так как функция

$$f(t) = \sum c_k t^\tau (\lambda_k - t^{1/\beta})^{-1}$$

принадлежит классу Харди  $H_+^2$ , то справедливо неравенство [25–26]

$$\int_0^\infty |f(re^{i\varphi})|^2 dr \leq L_1 \int_R |f(t)|^2 dt, \quad 0 < \varphi < \pi.$$

Возвращаясь здесь к переменной  $\lambda$ , получим

$$\int_{\Gamma} |\lambda|^m \left| \sum c_k (\lambda_k - \lambda)^{-1} \right|^2 |d\lambda| \leq L \int_{\gamma_p} |\lambda|^m \left| \sum c_k (\lambda_k - \lambda)^{-1} \right|^2 |d\lambda|,$$

что и доказывает нужное неравенство. Таким образом, если принять во внимание все сказанное выше, то приходим к выводу, что имеет место оценка (1.2) и утверждение леммы следует из теоремы 1.1.

**Лемма 4.2.** Пусть семейство  $\{y_{\lambda_k}\}$  образует безусловный базис  $L_2(0,1)$  и выполнено условие (4.4). Тогда последовательность  $\Lambda'$  отделима:

$$\inf_{k \neq j} |z_k - z_j| > 0, \{z_k\} = \Lambda^p.$$

Доказательство. Предположим сначала, что  $\rho > \frac{1}{2}$  и докажем справедливость равенства

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_p} y_{\lambda}(t) e^{-\lambda t} (\lambda - \lambda_k)^{-1} d\lambda = e^{-\lambda_k t} y_{\lambda_k}(t), \quad t \in [0, 1], \quad (4.6)$$

где контур обходится так, что внутренность  $\gamma_p$  остается справа. Прежде всего отметим, что фигурирующий здесь интеграл сходится в метрике  $L_2(0, 1)$ . Действительно, из теоремы 4.1 заключаем, что применима теорема А, согласно которой

$$\left\| \int_{\gamma_p} y_{\lambda}(t) f(\lambda) d\lambda \right\|_{L_2(0,1)}^2 \leq M \int_{\gamma_p} |f(\lambda)|^2 |\lambda|^{\omega} |d\lambda|, \quad \omega = \rho + 1 - 2\rho\alpha. \quad (4.7)$$

Поскольку оператор дробного интегрирования, рассмотренный в  $L_2(0, 1)$ , не имеет ядра, то для доказательства (4.6) достаточно доказать равенство, которое получается из (4.6) применением к обеим его частям этого оператора. Другими словами, достаточно доказать, что

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_p} t^{\gamma-1} E_{\rho}(e^{\frac{i\pi}{2\rho}} \lambda t^{\frac{1}{\rho}}; \gamma) e^{-\lambda t} (\lambda - \lambda_k)^{-1} d\lambda = e^{-\lambda_k t} t^{\gamma-1} E_{\rho}(e^{\frac{i\pi}{2\rho}} \lambda_k t^{\frac{1}{\rho}}; \gamma),$$

где  $\gamma = \alpha + \beta$ , а параметр  $\beta$  выбран так, чтобы  $\gamma > 1$ . Но доказательство этого равенства не представляет труда, поскольку теперь

$$|E_{\rho}(e^{\frac{i\pi}{2\rho}} \lambda t^{\frac{1}{\rho}}; \gamma) e^{-\lambda t}| \rightarrow 0, \quad t > 0$$

равномерно по  $\lambda$  внутри угла  $\gamma_p$  и можно воспользоваться формулами теории вычетов. Если теперь в (4.7) положить  $f(\lambda) = \sum c_k (\lambda - \lambda_k)^{-1} e^{-\lambda t}$ , то с учетом (4.6) найдем

$$\left\| \sum c_k e^{-\lambda_k t} y_{\lambda_k} \right\|^2 \leq M \int_{\gamma_p} |\lambda|^{\omega} \left| \sum c_k (\lambda - \lambda_k)^{-1} \right|^2 |d\lambda|. \quad (4.8)$$

С другой стороны, из предыдущей леммы и теоремы 1.1 вытекает наличие оценки (1.2) для оператора А, чьи собственные векторы суть функции рассматриваемой системы. Если рассмотреть (1.2) на конечных суммах  $h = \sum c_k y_{\lambda_k}$ , то приходим к оценке

$$\int_{\gamma_p} |\lambda|^{\omega} \left| \sum c_k (\lambda - \lambda_k)^{-1} \right|^2 |d\lambda| \leq L \left\| \sum c_k y_{\lambda_k} \right\|^2. \quad (4.9)$$

Поэтому в случае базисности  $\{y_{\lambda_k}\}$ , с учетом (4.4), находим

$$\int_{\Gamma_p} |\lambda|^\omega \left| \sum c_k (\lambda - \lambda_k)^{-1/2} \right|^2 |d\lambda| \asymp \sum |c_k|^2 \int_{\Gamma_p} |\lambda|^\omega |\lambda - \lambda_k|^{-1} |d\lambda|$$

и остается воспользоваться теоремой 3.1. Заметим, что в силу (4.4) условие Карлесона равносильно евклидовой отделимости последовательности  $\Lambda^p$ .

Если  $\rho = \frac{1}{2}$ , то принимая во внимание интегральное представление [1, с. 129], получим

$$y_{\lambda_k}(t) = e z_k^{1-\alpha} e^{i z_k t} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \left( x t + \frac{\pi}{2} (1-\alpha) \right)}{x^2 - z_k^2} x^{2-\alpha} dx, \quad |\varepsilon| = 1, \quad \{z_k\} = \Lambda^{\frac{1}{2}}.$$

Из этого соотношения, опираясь на свойства преобразования Фурье, выводим неравенство

$$\begin{aligned} \left\| \sum c_k y_{\lambda_k} \right\|^2 &\leq M \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum c_k z_k^{1-\alpha} e^{i z_k t} \right|^2 dt + \int_R \left| \sum c_k x^{2-\alpha} (x^2 - z_k^2)^{-1/2} \right|^2 dx \right\} < \\ &\leq M_1 \left\{ \int_R \left| \sum c_k z_k^{1-\alpha} e^{i z_k (t - z_k)^{-1/2}} \right|^2 dt + \int_R \left| \sum c_k x^{2-\alpha} (x^2 - z_k^2)^{-1/2} \right|^2 dx \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку в рассматриваемом случае  $\omega = \frac{3}{2} - \alpha$ , то можно воспользоваться оценкой (3.3). Окончательно находим:

$$\left\| \sum c_k y_{\lambda_k} \right\|^2 \leq M_1 \int_0^\infty \left( \left| \sum c_k a_k (\lambda_k - t)^{-1/2} \right|^2 + \left| \sum c_k (\lambda_k - t)^{-1/2} \right|^2 \right) dt, \quad a_k = e^{i z_k}. \quad (4.10)$$

Соединяя это неравенство с (4.9) при  $\rho = \frac{1}{2}$ , снова заключаем, что в случае базисности семейства  $\{y_{\lambda_k}\}$  последовательность  $\Lambda^{1/2}$  отделима. Лемма доказана.

**Лемма 4.3.** Если семейство  $\{y_{\lambda_k}\}$  образует безусловный базис  $L_2(0,1)$ , то  $h_\varphi\left(-\frac{\pi}{2\rho}\right) = 1$  (если  $\rho=1$ , то также  $h_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ), где  $\Lambda^{1/2}$  — индикатор, порождающей функции этого семейства.

**Доказательство.** Рассмотрим снова подходящий оператор

$$A^{-1}h = Bh + (h, x)y,$$

существование которого гарантируется теоремой 4.1. В результате несложных оценок, приходим к выводу, что в случае  $h_\varphi\left(-\frac{\pi}{2\rho}\right) < 1$  функция  $x(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0$ , если  $t \in (t_0, 1)$ . Тогда подпространство

$$L = \{h \in L_2(0,1): h(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0, t \in [0, t_0]\}$$

инвариантно относительно оператора  $A^{-1}$  и на нем индуцируется вольтерров оператор  $A^{-1}/L = B/L$ . Последнее несовместимо с базисностью собственных векторов оператора  $A$ . Отметим также, что дополнительное условие  $h_{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  также может быть доказано с помощью операторных рассуждений.

После проведенной подготовительной работы, обратимся теперь к задаче о базисности семейств функций типа Миттаг—Леффлера.

**Теорема 4.2.** Пусть  $\rho \geq \frac{1}{2}$ , последовательность  $\Lambda$  удовлетворяет условию (4.4). Тогда семейство функций

$$\{t^{\alpha-1} E_{\rho}(e^{-\lambda_k t}; \alpha) : \lambda_k \in \Lambda\}$$

образует безусловный базис пространства  $L_2(0,1)$  в том и только том случае, когда выполнена совокупность требований:

- 1).  $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$ .
- 2). Элементы  $\Lambda$  суть простые корни целой функции  $\varphi(\lambda)$ , тип которой равен 1 при порядке  $\rho$ .
- 3). Функция  $|\lambda|^{-\omega} |\varphi(\lambda)|^2$  ( $\omega = \rho + 1 - 2\alpha$ ) удовлетворяет  $A_{\rho}$  условию на каком-нибудь контуре  $\Gamma_{\rho}$ .
- 4).  $h_{\pi}\left(-\frac{\pi}{2\rho}\right) = 1$ , а в случае  $\rho = 1$ , то также  $h_{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .
- 5). Последовательность  $\Lambda^{\rho}$  отделима:

$$\inf_{k \neq j} |z_k - z_j| > 0, \quad \Lambda^{\rho} = \{z_k\}.$$

**Доказательство.** Осталось доказать достаточность перечисленных условий. Пусть  $l_k$  — какой-нибудь луч контура  $\Gamma_{\rho}$ . Из требования 3) вытекает, что

$$\sup \left\{ |J|^{-1} \int_J t^{-\omega} |\varphi(te^{ix_k})|^2 dt |J|^{-1} \int_J t^{\omega} |\varphi(te^{ix_k})|^2 dt \right\} < \infty,$$

где  $J$  — произвольный интервал полуоси  $R_+$ , а  $x_k$  — аргумент точек луча  $l_k$ . Отсюда, в свою очередь, выводим [15, с. 46]

$$\int_0^{\infty} t^{-\omega} \frac{|\varphi(te^{ix_k})|^2}{1+t^2} dt < \infty, \quad k=0,1,\dots,n.$$

Если вспомнить, что порождающую функцию мы нормируем условием  $\varphi(0) = 1$ , то последние соотношения равносильны требованиям

$$\int_0^{\infty} t^{-\omega} \left| \frac{\varphi(te^{ix_k}) - 1}{t} \right|^2 dt < \infty, \quad k=0,1,\dots,n, \quad \omega \in (-1,1).$$

Учитывая строение контура  $\Gamma_\rho$ , применим к функции  $\psi(\lambda) = \lambda^{-1}(1 - \varphi(\lambda))$  теорему С о параметрическом представлении целых функций, удовлетворяющих интегральным условиям на системе лучей. Таким образом, с учетом четвертого условия теоремы, получаем интегральное представление для порождающей функции:

$$\varphi(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^1 E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda t^{\frac{1}{\rho}}; \alpha) t^{\alpha-1} \overline{x(t)} dt, \quad x \in L_2(0,1),$$

где  $\alpha = (2\rho)^{-1}(1 + \rho - \omega)$ . Далее, в пространстве  $L_2(0,1)$  рассмотрим оператор

$$(A^{-1}h)(t) = e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\right) \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{\rho}-1} h(s) ds + (h, x) y, \quad y(t) = \Gamma^{-1}(\alpha) t^{\alpha-1}.$$

Теперь функции рассматриваемой системы совпадают с собственными векторами оператора  $A$ , а его спектр — с последовательностью  $\Lambda$ . Из теоремы 1.1 вытекает наличие оценки (1.2) и, стало быть, оценки (4.9). Соединяя это с неравенством (4.8), а при  $\rho = \frac{1}{2}$  — с (4.10), на основании результатов § 3, приходим к соотношениям

$$\|\sum c_k y_{\lambda_k}\|^2 \asymp \sum |c_k|^2 \|y_{\lambda_k}\|^2.$$

Заметим, наконец, что полнота рассматриваемого семейства следует из теоремы 2.1. Теорема доказана.

Теперь мы в состоянии дополнить теорему 4.1 следующим предложением.

**Предложение 4.1.** Для каждого набора параметров  $\rho, \alpha$ , удовлетворяющего неравенствам  $\rho \geq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$ , существует безусловный базис  $L_2(0,1)$ , составленный из функции Миттаг—Леффлера.

В самом деле, в качестве порождающей функции возьмем

$$\varphi(\lambda) = 1 - \lambda a^{-1} E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda; \alpha + \beta), \quad \beta = \rho^{-1}(1 + \rho - \alpha\rho), \quad a \in \mathbb{C},$$

которой отвечает выбор функции  $x(t) = a^{-1} \Gamma^{-1}(\beta) (1-t)^{\beta-1}$ , принадлежащей  $L_2(0,1)$ . Выбирая  $a$  должным образом можно добиться выполнения всех условий теоремы 4.2. Заметим, что возможное появление кратных корней не препятствует применению этой теоремы, поскольку их может быть лишь конечное число.

В работе [5] рассматривался также вопрос о базисности более общих семейств функций  $\{Y_{\lambda_k}(t)\}$ , где

$$Y_{\lambda_k}(t) = \sum_{j=1}^n c_j t^{a_j-1} E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda_k t^{\frac{1}{\rho}}; a_j), \quad a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n.$$

Используя элементарные свойства функций типа Миттаг—Леффлера, нетрудно доказать, что это семейство образует безусловный базис простран-

ства  $L_2(0, 1)$  в том и только том случае, когда этим же свойством обладает система

$$\{t^{\alpha_1-1} E_p(e^{i\frac{\pi}{2p}} \lambda_k t^{\frac{1}{p}}; \alpha_1); \lambda_k \in \Lambda\}.$$

Таким образом, теорема 4.2 дает ответ и на этот вопрос.

Можно рассмотреть также и тот случай, когда  $\Lambda$  лежит вне главного угла  $\gamma_p \left( \rho > \frac{1}{2} \right)$  и удовлетворяет требованию

$$|\operatorname{Im} \lambda_k^2| > \delta > 0, \lambda_k \in \Lambda, \quad (4.11)$$

где  $\lambda^p$  определена на плоскости с разрезом по мнимой положительной полуоси и выделена условием  $\arg \lambda^p = 0$ , если  $\lambda > 0$ . Поскольку решение этой задачи не требует принципиально новых соображений, то здесь сформулирован лишь конечный результат. В приведенной ниже теореме условие  $(A_{\gamma_p}^2)$  означает то же, что и  $(A_{\Gamma_p}^2)$  с заменой  $\Gamma_p$  на  $\gamma_p$  (§ 1).

**Теорема 4.2'.** Пусть  $\rho > \frac{1}{2}$ , а  $\Lambda$  удовлетворяет условию (4.11). Тогда семейство функций типа Миттаг—Леффлера образует безусловный базис пространства  $L_2(0, 1)$  тогда и только тогда, когда выполнено требование 1) теоремы 4.2, а также:

2'). Элементы  $\Lambda$  суть простые корни целой функции  $\varphi(\lambda)$  порядка  $\rho$  и нормального типа, для которой

$$\lambda^{-1} (1 - \varphi(\lambda)) \in A_1^2 \left( -\omega; 0; -\frac{\pi}{\rho} \right), \quad \omega = \rho + 1 - 2\rho\alpha.$$

$$3'). \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |\varphi(re^{i\frac{\pi}{2p}})|}{r^\rho} = 1, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |\varphi(re^{i\gamma})|}{r^\beta} = 0,$$

$$\beta = \rho(2\rho - 1)^{-1}, \quad \gamma = \pi - \frac{\pi}{2\rho}.$$

4'). Функция  $|\lambda|^{-\omega} |\varphi(\lambda)|^2$  удовлетворяет  $A_{\gamma_p}^2$ -условию.

5'). Последовательность  $\Lambda^3$  удовлетворяет условию Карлесона.

Отметим, что последовательность  $\Lambda^3$  из условия 5') имеет тот же смысл, что и в рассмотренных § 3.

Остановимся на тех случаях, когда рассматриваемые функции выражаются через элементарные:

$$E_1(it; 1) = e^{it}, \quad E_{1/2}(-it^2; 1) = \cos \sqrt{it}, \quad t E_{1/2}(-it^2; 2) = \frac{\sin \sqrt{it}}{\sqrt{it}}.$$

Сформулированные теоремы содержат в себе критерий базисности в смысле Рисса семейств экспонент, но не дают ответа на аналогичный вопрос для косинусов и синусов. Рассмотрим, например, задачу о базисности по Рис-

су семейства  $\{\cos \sqrt{\lambda_k} t : \lambda_k \in \Lambda\}$ . Из условия почти нормируемости  $\|\cos \sqrt{\lambda_k} t\| \asymp 1$  вытекает, что последовательность  $\Lambda$  должна лежать внутри некоторой  $\Delta_a$ , которая задается уравнением  $z(t) = (t + ia)^2$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Поэтому для решения этой задачи применяется оценка вида (1.2) на контуре  $\Delta_a$  (см. Замечание 1.1), а в остальном все рассуждения остаются практически неизменными. Заметим еще, что в этом случае получается простая формула для оператора  $A$ , собственные функции которого совпадают с заданной системой косинусов:

$$Ay = -y'', \quad (4.12)$$

а его область определения состоит из функций пространства Соболева  $W_2^2(0,1)$ , выделяемых условиями:

$$y'(0) = 0, \quad \hat{\varphi}(y) = 0, \quad (4.13)$$

где  $\hat{\varphi}$  — линейный ограниченный функционал в  $W_2^2(0,1)$ . При этом, никакая линейная комбинация функционалов  $\delta'(t)$  ( $\delta$  — функция Дирака) и  $\hat{\varphi}$  не продолжаются до ограниченного функционала в  $L_2(0,1)$ , а для порождающей функции  $\varphi$  семейства  $\{\cos \sqrt{\lambda_k} t : \lambda_k \in \Lambda\}$  имеет место представление

$$\varphi(\lambda) = \hat{\varphi}(\cos \sqrt{\lambda} t).$$

Решение рассматриваемой задачи дает

**Теорема 4.3.** *Собственные функции оператора (4.12)—(4.13) образуют базис Рисса пространства  $L_2(0,1)$  в том и только том случае, когда:*

1).  $\varphi(\lambda)$  имеет простые корни, а последовательность  $\Lambda^{1/2}$  удовлетворяет условиям:

$$b = \sup_{z_k} |\operatorname{Im} z_k| < \infty, \quad \inf_{k \neq j} |z_k - z_j| > 0, \quad \inf_{k, j} |z_k + z_j| > 0, \quad \Lambda^{1/2} = \{z_k\}.$$

2).  $h_\varphi(-\pi) = 1$ .

3). На каком-нибудь контуре  $\Delta_a$  ( $a > b$ ) функция  $|\lambda|^{-\frac{1}{2}} |\varphi(\lambda)|^2$  удовлетворяет условию  $(A_{\Delta_a}^2)$ .

**Замечание 4.3.** Сформулированная теорема остается в силе и для общих операторов Штурма—Лиувилля в пространстве  $L_2(0,1)$ :

$$Ly = -y'' + qy, \quad y'(0) = \theta y(0), \quad \hat{\varphi}(y) = 0, \quad \theta \in \mathbb{C},$$

где функционал  $\hat{\varphi}$  имеет прежний смысл. Это объясняется тем, что при известных ограничениях на потенциал  $q$  [27], существуют операторы преобразования, переводящие решение уравнения

$$Ly(t, \lambda) = \lambda y(t, \lambda), \quad y'(0, \lambda) = \theta, \quad y(0, \lambda) = 1$$

в функцию  $\cos \sqrt{\lambda} t$ . Таким образом, система собственных векторов оператора  $L$  образует базис Рисса, если и только если функция  $\varphi(\lambda) = \hat{\varphi}(y(t, \lambda))$  удовлетворяет условиям теоремы 4.3. Этот резуль-

тат, в качестве частного случая  $\hat{\varphi} = \hat{z}(t-1) + \tau \hat{z}'(t-1)$  содержит известную теорему о базисности оператора Штурма-Лиувилля с разделенными граничными условиями [27, с. 50].

Заканчивая статью, сформулируем интерполяционные следствия доказанных ранее теорем. Связь между задачами базисности и интерполяции отмечалась многими авторами. В нашей ситуации общие принципы такой связи основаны на свойствах преобразований М. М. Джрбашяна с ядрами Миттаг—Леффлера (см. Введение) и изложены в [7—8, 28]. Поэтому здесь будут сформулированы только окончательные результаты.

Через  $l^2\{b_k\}$  будем обозначать пространство последовательностей  $\{c_k\}_1^\infty$  с нормой  $\|c_k\|^2 = \sum |c_k|^2 b_k$ ,  $b_k > 0$ . Далее, снабдим класс функций  $A_1^2\left(-\omega; 0; -\frac{\pi}{\rho}\right)$  нормой

$$\|f\|^2 = \sup_{\theta} \int_0^{\infty} |f(re^{i\theta})|^2 r^{-\omega} dr, \quad \theta \in \left[0, 2\pi - \frac{\pi}{\rho}\right]$$

и рассмотрим на нем оператор

$$J_{\Lambda} f = \{f(\lambda_k) : \lambda_k \in \Lambda\},$$

где  $\Lambda = \{\lambda_k\}_1^\infty$  — фиксированная последовательность комплексных чисел, занумерованная в порядке неубывания модулей. Имеет место

**Теорема 4.4.** Следующие условия эквивалентны:

1). Последовательность  $\Lambda$  удовлетворяет требованиям теоремы 4.2.

2). Оператор  $J_{\Lambda}$  непрерывно отображает пространство  $A_1^2\left(-\omega; 0; -\frac{\pi}{\rho}\right)$  на пространство  $l^2\{b_k\}$  с весом

$$b_k = k^{2(\alpha-1)}, \quad \alpha = (2\rho)^{-1}(1 + \rho - \omega), \quad k \geq 1.$$

Отметим, что решение соответствующей интерполяционной задачи

$$f(\lambda_k) = c_k, \quad \{c_k\} \in l^2\{b_k\}$$

дается рядом

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\varphi(\lambda)}{\varphi'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)},$$

который сходится как по норме класса  $A_1^2\left(-\omega; 0; -\frac{\pi}{\rho}\right)$ , так и равномерно на всех компактах плоскости. Функция  $\varphi$  имеет здесь тот же смысл, что и в теореме 4.2. Совершенно ясно, что аналогичное интерполяционное следствие может быть выведено также из теоремы 4.2'.

Некоторые частные случаи рассмотренных интерполяционных задач изучались в работах [4, 7—8, 28—29], в которых рассматривались также задачи с интерполяционными данными из весовых пространств  $l_p$ .

Գ. Մ. ԳՈՒԲՐԵՆԿԻ. Միատագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների բազիսությունը, Զբոսայտի ձևափոխությունները և Կոշի տիպի ինտեգրալների որոշ կշռային զննահատականեր (ամփոփում)

Հոդվածում գտնված է

$$\{t^{a-1} E_{\rho}(e^{i \frac{\pi}{2\rho}} \lambda_k t^{\frac{1}{\rho}}; a) : \lambda_k \in \Lambda\}, \rho \geq \frac{1}{2}, a > \frac{1}{2}$$

տեսքի ֆունկցիոնալ բնտանիքների անպայման բազիսության հաստատելը  $L_2(0, 1)$  տարածությունում: Այստեղ  $E_{\rho}(z; a)$  ամբողջ ֆունկցիան որոշված է.

$$E_{\rho}(z; a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(a + k\rho^{-1})}$$

շարքով: Պատասխանը տրված է  $\rho$  կարգի մի ամբողջ ֆունկցիայի տերմիններով, որի զրո-ները համընկնում են  $\Lambda$  բազմության հետ: (Մնորդ ֆունկցիա): Հետազոտված են նաև մի շարք հարակից խնդիրներ՝ ուսցիոնալ ֆունկցիաների բազիսությունը կշռային տարածությունում, ինտերպոլացիան վերլավոր կարգի ամբողջ ֆունկցիաների միջոցով և այլն:

G. M. GUBREEV, *Basisity of the families of Mittag-Leffler type functions, Djbashian transforms and weight estimates of Cauchy type integrals* (summary)

In the paper the criteria of nonconditional basisity in the space  $L_2(0, 1)$  of the families of the functions

$$\{t^{a-1} E_{\rho}(e^{i \frac{\pi}{2\rho}} \lambda_k t^{\frac{1}{\rho}}; a) : \lambda_k \in \Lambda\}, \rho \geq \frac{1}{2}, a > \frac{1}{2}$$

is obtained. Here the entire function  $E_{\rho}(z; a)$  is determined by the series

$$E_{\rho}(z; a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(a + k\rho^{-1})}.$$

The answer is given in the terms of an entire function of order  $\rho$ , whose zeros coincide with the set  $\Lambda$  (generative function). A series of connected problems is investigated: the basisity of rational functions in the weighted space, the interpolation by the entire functions of finite order and others.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
2. N. Wiener. On the closure of certain assemblages of trigonometric functions, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 13, 1927, 27.
3. Н. Винер, Р. Пэли. Преобразование Фурье в комплексной области, М., «Наука», 1964.
4. S. V. Hruščov, N. K. Nikol'skij, B. S. Pavlov. Unconditional base of exponentials and of reproducing kernels, Lecture Notes in Math., 864, 1981, 214—335.
5. М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсисян. Разложения по специальным биортогональным системам и краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка, ДАН СССР, 132, №4, 1960, 747—750, Труды Моск. матем. об-ва, 10, 1961, 89—179.
6. М. М. Джрбашян. Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма—Лиувилля, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», V, № 2, 1970, 71—96.

7. С. Г. Рафаелян. О базисности некоторых систем целых функций, ДАН Арм.ССР, 70, № 4, 1980, 198—204.
8. С. Г. Рафаелян. Базисность некоторых биортогональных систем в  $L_2$  ( $-\sigma, \sigma$ ) с весом, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIX, № 3, 1984, 207—218.
9. Г. М. Губреев. Базисность семейств функций типа Минтаг—Леффлера, преобразования Джрбашяна и условие Макенхаупта, Функц. анализ и его прилож., 21, вып. 3, 1987.
10. Б. С. Павлов. Базисность систем экспонент и условие Макенхаупта, ДАН СССР, 247, № 1, 1979, 37—40.
11. Б. С. Павлов. Спектральный анализ дифференциального оператора с «размазанным» граничным условием, Проблемы матем. физики, АГУ, вып. 6, 1973, 101—119.
12. А. П. Хромов. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов, Матем. заметки, 16, № 4, 1974, 669—680.
13. Г. М. Губреев. Обобщенные преобразования Джрбашяна и их применения, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XXI, № 3, 1986, 306—310.
14. Дж. Гарнетт. Ограниченные аналитические функции, М., «Мир», 1984.
15. Е. М. Динькин, Б. П. Осиленкер. Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения, Итоги науки и техники, матем. анализ, 21, 1983, 42—129.
16. Б. М. Левитан. Теория операторов обобщенного сдвига, М., «Наука», 1973.
17. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., ГИТТЛ, 1956.
18. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, М., «Наука», 1967.
19. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. Линейные операторы, т. 2, М., «Мир», 1966.
20. В. М. Мартirosян. Базисность некоторых систем аналитических функций и решение интерполяционной задачи в области угла, ДАН Арм.ССР, LXIII, № 5, 1976, 278—283.
21. В. М. Мартirosян. Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIII, № 5—6, 1978, 490—531.
22. В. М. Мартirosян. Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в  $H_p[\alpha; \omega]$ , ДАН СССР, 245, № 1, 1979, 24—27.
23. М. М. Джрбашян. Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах  $H_p$  в полуплоскости, Изв. АН СССР, сер. матем., 42, № 6, 1978, 1322—1383.
24. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., «Наука», 1965.
25. М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян. Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 475—480; Сиб. матем. ж., 1, № 3, 1960, 383—426.
26. С. А. Акопян. Теорема о двух постоянных для функций класса  $H_p$ , Изв. АН Арм.ССР, «Математика», VIII, № 1, 1973, 384—409.
27. В. А. Марченко. Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения, Киев, «Наукова думка», 1977.
28. М. М. Джрбашян. Интерполяционные и спектральные разложения, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIX, № 2, 1984, 81—181.
29. Б. Я. Левин. Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа, Матем. физика и функц. анализ, ФТИНТ АН УССР, № 1, 1969, 136—146.

УДК 519.24

Ю. А. КУТОЯНЦ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С МАЛЫМ ШУМОМ

## § 1. Введение

Пусть  $X_*(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  решение стохастического дифференциального уравнения

$$dX_*(t) = b(X_*(t))dt + \varepsilon dw(t), \quad X_*(0) = x_0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.1)$$

где  $w(\cdot)$  — винеровский процесс,  $\varepsilon \in (0, 1]$ ,  $b(\cdot)$  — коэффициент сноса [1]. Нас будут интересовать задачи, связанные с восстановлением функции  $b(\cdot)$  по наблюдениям  $X_*(\cdot)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . К такой схеме приходят, например, в ситуации, когда на динамическую систему

$$\frac{dX_0(t)}{dt} = b(X_0(t)), \quad X_0(0) = x_0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.2)$$

действует «малый» белый гауссовский шум и правая часть этого уравнения наблюдателю не известна.

Всюду далее мы предполагаем, что функция  $b(\cdot)$  удовлетворяет условию

$$L: |b(x) - b(y)| \leq L|x - y|, \quad |b(x)| \leq L(1 + |x|),$$

обеспечивающему существование и единственность сильного решения уравнения (1.1) и эквивалентность меры  $P_\varepsilon^*$ , наведенной наблюдениями  $X_*(\cdot)$  в измеримом пространстве  $(C[0, T], B[0, T])$ , мере  $P^{(*)}$ , отвечающей в этом же пространстве процессу  $x_0 + \varepsilon w(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  [1].

В случае, когда функция  $b(\cdot)$  известна с точностью до значения конечномерного параметра:  $b(x) = b(\theta, x)$ ,  $\theta \in \Theta \subset R^k$  задача идентификации сводилась к оцениванию этого параметра. Известно, что в условиях гладкости  $b(\theta, x)$  по  $\theta$  и  $x$ , оценка максимального правдоподобия  $\hat{\theta}_n$  и широкий класс байесовских оценок  $\tilde{\theta}_n$  состоятельны, асимптотически нормальны и асимптотически эффективны ([2], теоремы 3.4.3 и 3.4.8). В частности, ОМП

$$L_\theta[(\hat{\theta}_n - \theta)\varepsilon^{-1}] \Rightarrow N(0, I(\theta)^{-1}), \quad (1.3)$$

где матрица

$$I(\theta)_{ij} = \int_0^T \frac{\partial b(\theta, X_0(t))}{\partial \theta^{(i)}} \frac{\partial b(\theta, X_0(t))}{\partial \theta^{(j)}} dt. \quad (1.4)$$

В случае же, когда только известно, что  $b(\cdot)$  удовлетворяет условию  $L$ , строятся непараметрические оценки  $\hat{b}_\varepsilon(x)$  функции  $b(x)$ , доказываются ограниченность риска [3]

$$E_b(\hat{b}_\varepsilon(x) - b(x))^2 \varepsilon^{-1/5}$$

и неулучшаемость этой скорости сходимости.

В настоящей работе считаем, что процесс  $X_t(\cdot)$  удовлетворяет уравнению (1.1) и наблюдателю требуется подобрать функцию  $S(\theta^*, x)$ , „близкую“ к  $b(\cdot)$  из некоторой параметрической модели  $\{S(\theta, x), \theta \in \Theta\}$ , где  $S(\cdot, \cdot)$  — известная функция, множество  $\Theta = (\alpha, \beta)$ ,  $|\alpha| + |\beta| < \infty$ . Существует несколько ситуаций, приводящих к этой задаче.

А. Функция  $b(\cdot)$  имеет достаточно громоздкий вид и требуется ее заменить некоторой более простой функцией из параметрического семейства, наиболее близкой к  $b(\cdot)$  в  $L_2[0, T]$ -метрике; но минимизация функционала

$$\|b(\cdot) - S(\theta, \cdot)\|^2 = \int_0^T [b(X_0(t)) - S(\theta, X_0(t))]^2 dt$$

по  $\theta$  затруднена из-за необходимости вычислять  $b(\cdot)$ .

Б. Наблюдатель предполагает, что процесс  $X_t(\cdot)$  удовлетворяет уравнению

$$dX_t(t) = S(\theta, X_t(t)) dt + \varepsilon dw(t), \quad X_t(0) = x_0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.5)$$

(хотя на самом деле имеет место (1.1)) и решает задачу оценивания  $\theta$  по наблюдениям  $X_t(\cdot)$ .

В. Как и в А, но функция  $b(\cdot)$  зависит от некоторого параметра:  $b(x) = b(\mu, x)$ ,  $\mu \in M$  и требуется в рамках некоторого параметрического семейства  $\{S(\theta, x), \theta \in \Theta\}$  проследить связь  $\theta = \theta(\mu)$  или  $\mu = \mu(\theta)$ .

Во всех ситуациях нас будут интересовать асимптотические свойства оценки максимального правдоподобия (ОМП)  $\hat{\theta}_\varepsilon$ , построенной по наблюдениям (1.1) в предположении, что имеют место наблюдения (1.5). Точнее обозначим  $L_\varepsilon(\theta, X_\varepsilon)$  производную Радоны-Никодима меры  $P_\theta^{(\varepsilon)}$ , введенной процессом (1.5) по мере  $P^{(\varepsilon)}$  [1]:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(\theta, X_\varepsilon) = \exp \left\{ \varepsilon^{-2} \int_0^T S(\theta, X_\varepsilon(t)) dX_\varepsilon(t) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T S(\theta, X_\varepsilon(t))^2 dt \right\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

и подставим в это выражение  $X_\varepsilon(\cdot)$  из (1.1), тогда

$$\ln L_\varepsilon(\theta, X_\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int_0^T S(\theta, X_\varepsilon(t)) dw(t) -$$

$$-\frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T [S(\theta, X_\varepsilon(t)) - 2b(X_\varepsilon(t))] S(\theta, X_\varepsilon(t)) dt.$$

ОМП  $\hat{\theta}_\varepsilon$  определим с помощью соотношения

$$\hat{\theta}_\varepsilon = \arg \max L_\varepsilon(\theta, X_\varepsilon) \quad (1.7)$$

и изучим ее свойства при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Ниже доказывается сходимость

$$\hat{\theta}_\varepsilon \rightarrow \theta^* = \arg \min_0^T \int_0^T [S(\theta, X_0(t)) - b(X_0(t))]^2 dt$$

(лемма 3.1) и асимптотическая нормальность величины  $(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta^*)\varepsilon^{-1}$  (теорема 3.1).

В доказательствах используется следующее неравенство:

$$|X_\varepsilon(t) - X_0(t)| \leq \varepsilon e^{Lt} \sup_{0 \leq s \leq t} |w(s)|, \quad (1.8)$$

справедливое с вероятностью 1 при условии  $L$  (см., например, [2], лемма 3.4.4).

В работе [6] решалась аналогичная задача в случае, когда наблюдаемый процесс обладает эргодическими свойствами. Там установлена соответствующая состоятельность ОМП  $\hat{\theta}_T$  и асимптотическая нормальность величины  $T^{1/2}(\hat{\theta}_T - \theta)$  при  $T \rightarrow \infty$ .

## § 2. Вспомогательные результаты

Нам понадобятся вероятности больших отклонений максимума стохастического интеграла

$$\zeta_\varepsilon(\theta) = \int_0^T f(\theta, X_\varepsilon(t)) dw(t),$$

зависящего от параметра  $\theta \in [A, B]$ . Разумеется, предполагается, что

$$P_b^{(a)} \left\{ \int_0^T f(\theta, X_\varepsilon(t))^2 dt < \infty \right\} = 1.$$

Оценим сначала вероятность приращений процесса  $\zeta_\varepsilon(\theta)$ ,  $\theta \in [A, B]$ . Обозначим  $M'_{x,0}$  класс функций  $f(\theta, x)$ , имеющих  $j$  производных по  $\theta$  и  $x$  и удовлетворяющих неравенствам

$$\left| \frac{\partial^l f(\theta, x)}{\partial \theta^r \partial x^{l-r}} \right| \leq L_1 (1 + |x|), \quad l = 0, 1, \dots, j, \quad 0 \leq r \leq l. \quad (2.1)$$

Если  $f(\theta, x) = g(x)$ , то будем писать  $g(\cdot) \in M'_{x,0}$ .

Лемма 2.1. Пусть  $f(\theta, x) \in M_0^1$ , тогда найдутся такие  $K^* > 0$  и  $\gamma^* > 0$ , что

$$P_b^{(s)}\{\zeta_s(\theta + h) - \zeta_s(\theta) > N\} \leq K^* \exp\{-\gamma^* N h^{-1}\}. \quad (2.2)$$

Доказательство. Ниже  $\gamma$  — некоторое положительное число, значение которого выберем позже и принято обозначение  $\Delta f = h^{-1} \times \times [f(\theta + h, X_s(t)) - f(\theta, X_s(t))]$ ,  $h > 0$ . Кроме того, индексы у вероятности  $P_b^{(s)}$  и переменную  $t$  в подынтегральных выражениях будем опускать. Имеет

$$\begin{aligned} P_b^{(s)}\{\zeta_s(\theta + h) - \zeta_s(\theta) > N\} &= P\left\{\int_0^T \gamma \Delta f d\omega > N\gamma h^{-1}\right\} \leq \\ &\leq P\left\{\int_0^T \gamma \Delta f d\omega - \frac{1}{2} \int_0^T (\gamma \Delta f)^2 dt > \frac{1}{2} N\gamma h^{-1}\right\} + \\ &+ P\left\{\int_0^T (\gamma \Delta f)^2 dt > N\gamma h^{-1}\right\} \leq \exp\left\{-\frac{1}{2} N\gamma h^{-1}\right\}, \\ &E \exp\left\{\int_0^T (\gamma \Delta f) d\omega - \frac{1}{2} \int_0^T (\gamma \Delta f)^2 dt\right\} + \\ &+ \exp\left\{-N h^{-1}\right\} \cdot E \exp\left\{\gamma \int_0^T (\Delta f)^2 dt\right\} \leq \\ &\leq \exp\left\{-\frac{1}{2} N\gamma h^{-1}\right\} + \exp\{-N h^{-1}\} \times \\ &\times E \exp\left\{\gamma \int_0^T L^2 (1 + |X_s(t)|)^2 dt\right\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Выше мы воспользовались неравенством Чебышева, ограниченностью единиц математического ожидания мартингальной экспоненты [1] и условием (2.1).

Для  $X_s(t)$  имеем соотношения

$$\begin{aligned} |X_s(t)| &\leq x_0 + \int_0^t |b(X_s(s))| ds + \varepsilon |\omega(t)| \leq \\ &\leq x_0 + LT + L \int_0^t |X_s(s)| ds + \varepsilon \eta_T, \end{aligned}$$

где  $\eta_T = \sup_{0 \leq t \leq T} |\omega(t)|$ . Откуда, согласно лемме 4.15 [1] получаем

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |X_s(t)| \leq (x_0 + LT + \varepsilon \eta_T) e^{LT}.$$

Это позволяет для последнего математического ожидания в (2.3) провести следующие оценки:

$$\begin{aligned} E \exp \left\{ 2\gamma L^2 T + 2\gamma L^2 \int_0^T |X_1(t)|^2 dt \right\} &\leq \\ &\leq \exp \{ 2\gamma L^2 T \} \cdot E \exp \left\{ 2\gamma L^2 T \sup_{0 \leq t \leq T} |X_1(t)|^2 \right\} \leq \\ &\leq \exp \{ 2\gamma L^2 T + 4\gamma L^2 T (x_0 + LT)^2 e^{LT} \} \times \\ &\times E \exp \{ 4\gamma L^2 T e^{2LT} \varepsilon^2 \eta_T^2 \}. \end{aligned}$$

Для оценки последнего математического ожидания воспользуемся известными неравенствами:

$$Q(x) = P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |w(t)| > x \right\} \leq 4P \{ w(T) > x \},$$

$$P \{ w(T) > x \} \leq \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \frac{1}{x} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2T} \right\}.$$

Откуда, для любого  $a < \frac{1}{2T}$  имеем

$$\begin{aligned} E e^{a\eta_T^2} &= \int_0^\infty e^{ax^2} dP \{ \eta_T \leq x \} = - \int_0^\infty e^{ax^2} dQ(x) = \\ &= 1 + 2a \int_0^\infty e^{ax^2} x Q(x) dx < 1 + 8a \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \times \\ &\times \int_0^\infty \exp \left\{ -\left( \frac{1}{2T} - a \right) x^2 \right\} dx = 1 + \frac{4aT}{\sqrt{1-2aT}}. \end{aligned}$$

Параметр  $\gamma$  выберем из условия  $a < (2T)^{-1}$  и с учетом  $\varepsilon \in (0, 1]$  положим  $\gamma = (9T^2 L^2)^{-1} \exp(-2LT)$ , что приводит к оценке

$$E \exp(a\eta_T^2) \leq 1 + \frac{16\varepsilon^2}{9 \sqrt{1 - \frac{8}{9}\varepsilon^2}} < 1 + 5\frac{1}{3}.$$

Следовательно

$$P \{ \zeta_n(\theta+h) - \zeta_n(\theta) > N \} \leq \exp \left( -\frac{1}{2} N h^{-1} \gamma \right) + K \exp(-N h^{-1}), \quad (2.4)$$

где

$$K = \exp \left\{ \frac{2}{9T} e^{-2LT} + \frac{4}{9T} (x_0 + LT)^2 \right\}.$$

Положим теперь  $\gamma^* = \min(\gamma, 1)$  и из неравенства (2.4) получим (2.2) с  $K^* = K + 1$ .

Далее нам понадобится следующая лемма М. В. Бурнашева [7].

Лемма 2.2. Пусть  $\zeta(\theta)$ ,  $\theta \in [A, B]$  — непрерывный случайный процесс, удовлетворяющий условию: существуют неотрицательная функция  $g(h)$  и функция  $q(C, h)$ ,  $h \geq 0$  такие, что

$$P\{\zeta(\theta + h) - \zeta(\theta) > Cg(h)\} \leq q(C, h) \quad (2.5)$$

и

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} q(2^{-n}) < \infty, \quad (2.6)$$

$$H(C) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} q(C, 2^{-n}) < \infty. \quad (2.7)$$

Тогда

$$P\left\{\sup_{A \leq \theta < B} [\zeta(\theta) - \zeta(A)] > N\right\} \leq H\left(\frac{A}{M(B-A)}\right). \quad (2.8)$$

С помощью этой леммы и леммы 2.1 оценим вероятность больших отклонений супремума процесса  $\zeta_*(\cdot)$ .

Лемма 2.3. В условиях леммы 2.1 справедливо неравенство

$$P_b^{(*)}\left\{\sup_{A \leq \theta < B} [\zeta_*(\theta) - \zeta_*(A)] > N\right\} \leq 8K^* \exp\left\{-\frac{\gamma^* N}{2(B-A)}\right\}. \quad (2.9)$$

Доказательство. Пусть функция  $g(\cdot)$  удовлетворяет условию (2.6). Примем обозначение

$$l_n = N2^{n-1} g(2^{-n}) M^{-1} (B-A)^{-1} \gamma^*,$$

тогда согласно (2.8)

$$P\left\{\sup_{A \leq \theta < B} [\zeta_*(\theta) - \zeta_*(A)] > N\right\} \leq \frac{1}{2} K^* \sum_{n=1}^{\infty} 2^n e^{-l_n}. \quad (2.10)$$

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\Lambda(l) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n e^{-l_n} \quad (l = (l_1, l_2, \dots)) \quad (2.11)$$

при ограничении

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} l_n = N^* \equiv \frac{\gamma^*}{2} N (B-A)^{-1}. \quad (2.12)$$

Методом множителей Лагранжа получаем  $l_n^* = \lambda + 2n \ln 2$ , что при подстановке в (2.12) дает

$$\lambda + 2 \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} n 2^{-n} = N^*.$$

Вычисляя сумму, приходим к значению  $\lambda = N^* - 4 \ln 2$ . Следовательно,  $l_n^* = N^* - 4 \ln 2 + 2n \ln 2$  и после подстановки в (2.11) получаем  $\Lambda(l^*) = \exp(-N^* + 4 \ln 2)$ , что, в свою очередь, в силу (2.10), приводит к требуемому неравенству (2.9).

## § 3. Разложение ОМП

Рассмотрим задачу оценки параметра  $\theta$  по наблюдениям  $X_t(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  с дифференциалом

$$dX_t(t) = b(X_t(t)) dt + \varepsilon dw(t), \quad X_t(0) = x_0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.1)$$

Наблюдатель считает, что  $X_t(\cdot)$  удовлетворяет уравнению (1.5); строит отношение правдоподобия (1.6) и с помощью (1.7) находит ОМП

$\hat{\theta}_t$ . Мы будем интересоваться свойствами ОМП при малых  $\varepsilon$ .

Введем обозначения:  $\theta_u = \theta^* + u$ ,

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_0^T [S(\theta_u, X_0(t)) - S(\theta^*, X_0(t))] \times \\ &\times [S(\theta_u, X_0(t)) + S(\theta^*, X_0(t)) - 2b(X_0(t))] dt = \\ &= G(\theta_u) - \int_0^T [S(\theta^*, X_0(t)) - b(X_0(t))]^2 dt, \\ G(\theta) &= \int_0^T [S(X_0(t)) - b'(X_0(t))]^2 dt, \end{aligned}$$

$$Z_t(u) = \frac{dP_{\theta^*}^{(\varepsilon)}|_u}{dP_{\theta^*}^{(\varepsilon)}}(X_t), \quad u \in (\alpha - \theta^*, \beta - \theta^*)$$

и докажем следующую лемму, которая „локализует“ задачу.

**Лемма 3.1.** Пусть функции  $S(\theta, \cdot)$  и  $b(\cdot)$  удовлетворяют условию  $L$ , функция  $G(\theta)$  имеет единственный минимум, функция  $S(\cdot, x)$  имеет две непрерывные производные по  $\theta$  в окрестности точки  $\theta^*$ , принадлежащие  $M_x^0$  и  $F''(0) > 0$ . Тогда найдутся такие  $\varepsilon_0, C, c$ , что при всех  $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$P_b^{(\varepsilon)}\{|\hat{\theta}_t - \theta| > \nu\} \leq C \exp\{-c\varepsilon^{-(1-2\delta)}\}, \quad (3.2)$$

где  $\nu = \varepsilon^\delta$ ,  $\delta \in (0, 1/2)$ .

**Доказательство.** Из определения (1.7) и «правила цепи» для мер имеем

$$\hat{\theta}_t = \arg \max L_t(\theta, X_t) = \theta^* + \arg \max Z_t(u).$$

Следовательно

$$\begin{aligned} P_b^{(\varepsilon)}\{|\hat{\theta}_t - \theta^*| \geq \nu\} &\leq P_b^{(\varepsilon)}\left\{\sup_{|u| > \nu} Z_t(u) > 1\right\} = \\ &= P\left\{\sup_{|u| > \nu} \left[\int_0^T [S(\theta_u, X_t) - S(\theta^*, X_t)] dw - \right.\right. \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T [S(\theta_u, X_t) - S(\theta^*, X_t)] \cdot [S(\theta_u, X_t) + S(\theta^*, X_t) - 2b(X_t)] dt > 0. \quad (3.3)$$

Последний интеграл в этом выражении обозначим  $F(u, \varepsilon)$ . Очевидно  $F(u) = F(u, 0)$ . Известно (см., например, [2]), что

$$|S(\theta_u, X_t(t)) - S(\theta_u, X_0(t))| \leq L |X_t(t) - X_0(t)| \leq L \varepsilon e^{LT} \sup_{0 \leq t \leq T} |w(t)|$$

и

$$|S(\theta_u, X_t(t))| \leq L(1 + |X_t(t)|) \leq L(1 + \sup_{0 \leq t \leq T} |X_0(t)| + \varepsilon e^{LT} \sup_{0 \leq t \leq T} |w(t)|).$$

С помощью этих неравенств получаем соотношение

$$|F(u, \varepsilon) - F(u)| \leq B_1 \varepsilon \eta_T + B_2 \varepsilon^2 \eta_T^2,$$

с некоторыми постоянными  $B_1 > 0$  и  $B_2 > 0$ .

В сделанных предположениях

$$\lim_{u \rightarrow 0} u^{-2} F(u) = \int_0^T [\dot{S}(\theta^*, X_0(t))^2 +$$

$$+ \dot{S}(\theta^*, X_0(t)) (S(\theta^*, X_0(t)) - b(X_0(t))) dt = F''(0) > 0.$$

Кроме того, функция  $F(u) = G(\theta_u) - \min G(\theta) > 0$  при всех  $u \neq 0$ , в силу единственности минимума  $G(\cdot)$ . Следовательно, существует такое  $\kappa > 0$ , что при всех  $u \in (\alpha - \theta^*, \beta - \theta^*)$   $F(u) \geq \kappa u^2$ . Введем мно-

жество  $H_0 = \{\omega : \sup_{0 \leq t \leq T} |w(t)| < \varepsilon^{-1/3}\}$  и постоянную  $\varepsilon_0 = \inf \left\{ \varepsilon : B_1 \varepsilon^{1/2} + B_2 \varepsilon < \frac{1}{2} \kappa \varepsilon^{-1} \right\}$ .

Тогда при всех  $\varepsilon < \varepsilon_0$  на этом множестве

$$\inf_{|u| > \nu} \frac{1}{\varepsilon} F(u, \varepsilon) \geq \inf_{|u| > \nu} \frac{1}{\varepsilon} F(u) - \frac{1}{2} \nu^2 \kappa \varepsilon^{-1} > \geq \kappa \nu^2 \varepsilon^{-1} - \frac{1}{2} \kappa \nu^2 \varepsilon^{-1} = \frac{1}{2} \kappa \nu^2 \varepsilon^{-1}.$$

Далее, обозначим  $\Delta S = S(\theta_u, X_t(t)) - S(\theta^*, X_t(t))$ , тогда

$$P_b^{(*)} \{ |\hat{\theta}_* - \theta^*| \geq \nu \} \leq P \left\{ \sup_{|u| > \nu} \left| \int_0^T \Delta S dw - \frac{1}{2\varepsilon} F(u, \varepsilon) \right| > 0, H_0 \right\} + P \{ |\hat{\theta}_* - \theta^*| \geq \nu, \bar{H}_0 \} <.$$

$$\leq P \left\{ \sup_{|u| > \nu} \int_0^T \Delta S dw > \frac{1}{2} \nu^2 \varepsilon^{-1} x, H_0 \right\} + P \{ \bar{H}_0 \}.$$

Для дополнения  $H_0$  имеем оценку

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |w(t)| > \varepsilon^{-1/2} \right\} < 2 \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^{-1}}{2T} \right\}. \quad (3.4)$$

Ниже мы воспользуемся леммами 2.1 и 2.3. Сначала запишем

$$\begin{aligned} P_b^{(u)} \left\{ \sup_{|u| > \nu} \int_0^T \Delta S dw > \frac{1}{2} \nu^2 \varepsilon^{-1} x \right\} &\leq \\ &\leq P \left\{ \sup_{\alpha - \theta^* \leq u < -\nu} \int_0^T \Delta S dw > \frac{1}{2} \nu^2 \varepsilon^{-1} x \right\} + \\ &+ P \left\{ \sup_{\nu < u < \beta - \theta^*} \int_0^T \Delta S dw > \frac{1}{2} \nu^2 \varepsilon^{-1} x \right\}. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} P_b^{(u)} \left\{ \sup_{\nu < u < \beta - \theta^*} \int_0^T \Delta S dw > \frac{1}{2} \nu^2 \varepsilon^{-1} x \right\} &\leq \\ &\leq P \left\{ \sup_{\nu < u < \beta - \theta^*} \int_0^T [S(\theta^* + u, X_t) - S(\theta^* + \nu, X_t)] dw > \right. \\ &> \frac{1}{4} x \nu^2 \varepsilon^{-1} \left. \right\} + P \left\{ \int_0^T [S(\theta^*, X_t) - S(\theta^* + \nu, X_t)] dw > \frac{1}{4} x \nu^2 \varepsilon^{-1} \right\} \leq \\ &\leq 8K^* \exp \left\{ -\frac{\gamma^* \nu^2 \varepsilon^{-1} x}{8(\beta - \theta^* - \nu)} \right\} + K^* \exp \left\{ -\frac{\gamma^*}{4} \nu \varepsilon^{-1} x \right\}. \end{aligned}$$

Аналогичное неравенство имеем и при  $u \in (\alpha - \theta^*, -\nu)$ .

Объединяя полученные неравенства, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} P_b^{(u)} \{ |\hat{\theta}_t - \theta^*| > \nu \} &\leq 2 \exp \{ -(2T\varepsilon)^{-1} \} + \\ &+ 16K^* \exp \left\{ -\frac{\gamma^* \nu^2 \varepsilon^{-1} x}{8(\beta - \alpha)} \right\} + 2K^* \exp \left\{ -\frac{\gamma^*}{4} \nu \varepsilon^{-1} x \right\}, \end{aligned}$$

справедливом при  $\varepsilon < \varepsilon_0$ . Из вида правой части этого неравенства следует, что найдутся такие постоянные  $\varepsilon_0$ ,  $C$  и  $c$ , что при всех  $\varepsilon < \varepsilon_0$  справедливо неравенство (3.2).

**Теорема 3.1.** Пусть выполнены условия  $L$ , функция  $S(\theta, x) \in M_{\theta, x}^1$  и  $b(x) \in M_x^1$ , функция  $G(\theta)$  имеет единственный минимум  $\theta^* \in (\alpha, \beta)$  и  $G(\theta^*) > 0$ , тогда ОМП  $\hat{\theta}_t$  при  $\varepsilon < \varepsilon^*$  допускает представление

$$\hat{\theta}_s = \theta^* + \varepsilon \{ \xi(\theta^*) + \psi \varepsilon^{1/2} \} \chi_{\{H\}} + \zeta \chi_{\{\bar{H}\}}, \quad (3.5)$$

где  $\xi(\theta^*)$  — гауссовская случайная величина,  $|\psi| < 1$ , а для случайной величины  $\xi$  и дополнения множества  $H$  справедливы оценки: при  $x \gg \nu$

$$P_b^{(s)} \{ |\cdot| > x \} \leq K_1 \exp \{ -k_1 \varepsilon^{-\gamma_1} \}, \quad (3.6)$$

$$P_b^{(s)} \{ \bar{H} \} \leq K_2 \exp \{ -k_2 \varepsilon^{-\gamma_2} \},$$

причем постоянные  $\varepsilon^*$ ,  $K_1$ ,  $k_1$ ,  $\gamma_1$  могут быть явно выписаны.

Доказательство. Уравнение максимального правдоподобия (УМП)

$$\frac{d}{d\theta} L_s(\theta, X_s) = 0$$

запишем в виде

$$\varepsilon \int_0^T \dot{S}(\theta_u, X_s) dw - \int_0^T \dot{S}(\theta_u, X_s) [S(\theta_u, X_s) - b(X_s)] dt = 0.$$

Одно из решений этого уравнения и есть ОМП  $\hat{\theta}_s = \theta^* + \hat{u}_s$ .

Введем множество

$$H_1 = \{ \omega : \sup_{|u| > \nu} Z_s(u) < 1 \},$$

вероятность дополнения которого оценена в лемме 3.1. Как и ранее,  $\nu = \varepsilon^{\delta}$ , где  $\delta \in (0, 1/2)$ .

Выясним сначала условия единственности решения УМП, а затем воспользуемся формулой Тейлора для неявно заданной функции  $\hat{u}_s = u(\varepsilon)$ , как это было сделано в работе [4]. Обозначим левую часть УМП через  $R(u, \varepsilon)$ .

Уравнение

$$R(u, \varepsilon) = 0, \quad u \in (-\nu, \nu) \quad (3.7)$$

будет иметь единственное решение, если

$$R(-\nu, \varepsilon) > 0, \quad R(\nu, \varepsilon) < 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial R(u, \varepsilon)}{\partial u} < -c,$$

где  $c$  — некоторая положительная постоянная. Ниже мы введем множество  $H_2$ , гарантирующее выполнение условий (3.8).

Имеем

$$\frac{\partial R(u, \varepsilon)}{\partial u} = \varepsilon \int_0^T \dot{S}(\theta_u, X_s) dw - \left\{ \int_0^T \dot{S}(\theta_u, X_s) \times \right.$$

$$\times [S(\theta_u, X_*) - b(X_*)] dt + \int_0^T \dot{S}(\theta_u, X_*)^2 dt \Big\}.$$

Выражение в фигурных скобках обозначим  $F(u, \varepsilon)$ . Очевидно  $F(u, 0) = F(u)$ .

Элементарные неравенства позволяют записать

$$\begin{aligned} |F(u, \varepsilon) - F(u, 0)| &\leq \left| \int_0^T \dot{S}(\theta_u, X_*)^2 - \dot{S}(\theta_u, X_0)^2 dt \right| + \\ &+ \left| \int_0^T (\dot{S}(\theta_u, X_*) \cdot [S(\theta_u, X_*) - b(X_*)] - \right. \\ &\quad \left. - \dot{S}(\theta_u, X_0) [S(\theta_u, X_0) - b(X_0)]) dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^T |\dot{S}(\theta_u, X_*) - \dot{S}(\theta_u, X_0)| \cdot |\dot{S}(\theta_u, X_*) + \dot{S}(\theta_u, X_0)| dt + \\ &+ \int_0^T |\dot{S}(\theta_u, X_*) - \dot{S}(\theta_u, X_0)| \cdot |S(\theta_u, X_*) - b(X_*)| dt + \\ &+ \int_0^T |\dot{S}(\theta_u, X_0)| (|S(\theta_u, X_*) - S(\theta_u, X_0)| + |b(X_*) - b(X_0)|) dt. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Имеем

$$\begin{aligned} |\dot{S}(\theta_u, X_*) - \dot{S}(\theta_u, X_0)| &= |\dot{S}'(\theta_u, \tilde{X}_*)| \times \\ &\times |X_*(t) - X_0(t)| \leq L(1 + |X_*(t)|) \varepsilon e^{LT} \eta_T \leq D_1 \varepsilon \eta_T + D_2 \varepsilon^2 \eta_T^2. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \int_0^T |\dot{S}(\theta_u, X_*) - \dot{S}(\theta_u, X_0)| \cdot |\dot{S}(\theta_u, X_*) + \dot{S}(\theta_u, X_0)| dt &\leq \\ &\leq (D_1 T \varepsilon \eta_T + D_2 T \varepsilon^2 \eta_T^2) (D_3 + D_4 \varepsilon \eta_T). \end{aligned}$$

Далее, аналогично получаем

$$|\dot{S}(\theta_u, X_*) - \dot{S}(\theta_u, X_0)| \leq D_5 \varepsilon \eta_T + D_6 \varepsilon^2 \eta_T^2$$

и, наконец,

$$|S(\theta_u, X_*) - S(\theta_u, X_0)| + |b(X_*) - b(X_0)| \leq 2L |X_*(t) - X_0(t)|.$$

Подставляя полученные оценки в (3.9), приходим к неравенству

$$|F(u, \varepsilon) - F(u)| \leq \sum_{j=1}^3 d_j \varepsilon^j \eta_T^j, \quad d_j > 0.$$

Далее, из гладкости функции  $S(\theta, \cdot)$  следует неравенство

$$\sup_{|u| < \nu} |F(u) - I(\theta^*)| \leq d_4 \nu, \quad F''(0) = I(\theta^*).$$

Введем множество

$$H_2 = \left\{ \omega : \begin{aligned} & \sup_{|u| < \nu} \int_0^T \dot{S}(\theta_u, X_1) d\omega < \frac{1}{4} I(\theta^*) \varepsilon^{-1}, \\ & \sup_{0 \leq t \leq T} |\omega(t)| \leq \varepsilon^{-1/2} \end{aligned} \right.$$

и постоянную

$$\varepsilon_1 = \inf \left\{ \varepsilon : \sum_{j=1}^3 d_j \varepsilon^{1/2} + d_4 \varepsilon^3 < \frac{1}{4} I(\theta^*) \right\}.$$

Тогда на множестве  $H_2$  при  $\varepsilon < \varepsilon_1$

$$\frac{\partial R(u, \varepsilon)}{\partial u} \leq -\frac{1}{2} I(\theta^*). \quad (3.10)$$

Введем еще множество

$$H_3 = \left\{ \omega : \int_0^T \dot{S}(\theta^*, X_1) d\omega < \frac{\nu}{8} I(\theta^*) \varepsilon^{-1} \right\}$$

и заметим, что в силу  $\dot{G}(\theta^*) = 0$ , имеем

$$|F(0, \varepsilon)| = |F(0, \varepsilon) - \dot{G}(\theta^*)| \leq d_5 \varepsilon \eta_T + d_6 \varepsilon^2 \eta_T^2.$$

На множестве  $H_2$  последнее выражение меньше  $d_5 \varepsilon^{1/2} + d_6 \varepsilon$ . Следовательно, если ввести

$$\varepsilon_2 = \inf \left\{ \varepsilon : d_5 \varepsilon^{1/2} + d_6 \varepsilon < \frac{\nu}{8} I(\theta^*) \right\}$$

и обозначить  $\varepsilon^* = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , то при  $\varepsilon < \varepsilon^*$

$$R(\nu, \varepsilon) = R(0, \varepsilon) + \int_0^\nu \frac{\partial R}{\partial u} du < \frac{\nu}{4} I(\theta^*) - \frac{\nu}{2} I(\theta^*) = -\frac{\nu}{4} I(\theta^*).$$

Аналогично получаем  $R(-\nu, \varepsilon) \geq \frac{\nu}{4} I(\theta^*)$ . Тем самым, соотноше-

ния (3.8) получены на множестве  $H^* = \bigcap_{j=1}^3 H_j$  и на  $H^*$  уравнение (3.7)

имеет единственное решение  $u_\varepsilon = u(\varepsilon)$ .

Уравнение (3.7) задает неявную функцию  $u = u(\varepsilon)$ . По правилу дифференцирования неявных функций выпишем первые два члена разложения. Заметим, что при  $\varepsilon = 0$  в силу единственности минимума функции  $G(\cdot)$  получаем  $u(0) = 0$ . Далее

$$\begin{aligned} \frac{du}{dz} \Big|_{z=0} &= I(\theta^*)^{-1} \left\{ \int_0^T \dot{S}(\theta^*, X_0) d\omega(t) - \right. \\ &- \int_0^T \dot{S}'(\theta^*, X_0) [S(\theta^*, X_0) - b(X_0)] + \dot{S}(\theta^*, X_0) \times \\ &\times [S'(\theta^*, X_0) - b'(X_0)] X_0^{(1)}(t) dt \Big\} \equiv \xi(\theta^*), \\ dX_0^{(1)}(t) &= b'(X_0(t)) X_0^{(1)}(t) dt + d\omega(t), \quad X_0^{(1)}(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Следовательно, на множестве  $H^*$

$$u(z) = \xi(\theta^*) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 u''(\bar{z}), \quad \bar{z} \in (0, \varepsilon),$$

где

$$u''(z) = (R_u')^{-3} \{ R_{uu}'' R_u' R_u' - R_{uu}'' (\bar{R}_u')^2 - R_u'' (R_u')^2 \}.$$

Вводим еще множество

$$H_i = \{ \omega : \sup_{|u| \leq i} |u''(\bar{z})| \leq 2\varepsilon^{-1/2} \}.$$

Тем самым на  $H = \bigcap_{j=1}^4 H_j$  имеем представление  $\hat{\theta}_\varepsilon = \theta^* + \varepsilon \xi(\theta^*) + \varepsilon^{1/2} \psi$ , где  $|\psi| \leq 1$ .

Осталось оценить вероятность дополнения множества  $\hat{H}$ . Вероятность дополнения  $H_1$  оценена в лемме 3.1. Вероятность первого неравенства в определении  $H_2$  оценивается с помощью леммы 2.3, а второго — оценивается с помощью (3.4). Вероятность дополнения  $H_3$  также оценивается по лемме 2.3, дополнения  $H_4$  — аналогично тому, как это было сделано в работе [4]

#### § 4. Сходимость функций распределения и моментов

Разложение ОМП (3.5) позволяет получить первые члены разложения ОМП. Действительно, согласно теореме 3.1

$$\begin{aligned} P_b^{(n)} \{ \varepsilon^{-1} (\hat{\theta}_\varepsilon - \theta^*) < x \} &= P \{ \varepsilon^{-1} (\hat{\theta}_\varepsilon - \theta^*) < x, H \} + \\ &+ P \{ \varepsilon^{-1} (\hat{\theta}_\varepsilon - \theta^*) < x, \bar{H} \} \leq P \{ \xi(\theta^*) + \varepsilon^{1/2} \psi < x, H \} + \\ &+ P \{ \bar{H} \} \leq P \{ \xi(\theta^*) < x + \sqrt{\varepsilon} \} + P \{ \bar{H} \} \leq \\ &\leq \Phi_\xi(x + \sqrt{\varepsilon}) + K_2 \exp \{ -k_2 \varepsilon^{-1/4} \} \rightarrow \Phi_\xi(x), \end{aligned}$$

где  $\Phi_\xi(\cdot)$  — функция распределения гауссовской случайной величины  $\xi(\theta^*)$ , определенной в (3.11).

Аналогично получаем и оценку снизу для этой вероятности:

$$\begin{aligned} P_b^{(n)} \{ \varepsilon^{-1} (\hat{\theta}_\varepsilon - \theta^*) < x \} &\geq P \{ \xi(\theta^*) + \sqrt{\varepsilon} \psi < x, H \} \geq \\ &\geq P \{ \xi(\theta^*) < x - \sqrt{\varepsilon} \} - P \{ \bar{H} \} \geq \end{aligned}$$

$$\geq \Phi_\varepsilon(x - \sqrt{\varepsilon}) - K_2 \exp\{-k_2 \varepsilon^{-1/2}\} \rightarrow \Phi_\varepsilon(x)$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Тем самым доказана

**Теорема 4.2.** Пусть выполнены условия теоремы 3.1, тогда при  $\varepsilon < \varepsilon^*$  имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(x - \sqrt{\varepsilon}) - K_2 \exp\{-k_2 \varepsilon^{-1/2}\} &\leq P_b^{(\varepsilon)}\{\varepsilon^{-1}(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta^*) < x\} \leq \\ &\leq \Phi_\varepsilon(x + \sqrt{\varepsilon}) + K_2 \exp\{-k_2 \varepsilon^{-1/2}\}. \end{aligned}$$

Из этой теоремы, в частности, следует асимптотическая нормальность ОМП.

Докажем сходимость моментов: для любого  $p \geq 1$

$$\begin{aligned} E_b|\varepsilon^{-1}(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta^*)|^p &= E_b|\varepsilon^{-1}(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta^*)|^p \chi_{\{H\}} + \\ &+ E_b|\varepsilon^{-1}(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta^*)|^p \chi_{\{\bar{H}\}} = E|\xi(\theta^*)|^p + \varepsilon^{1/2} \psi^p \chi_{\{H\}} + \\ &+ E\left|\frac{\zeta}{\varepsilon}\right|^p \chi_{\{\bar{H}\}} \leq M_p + \int_{\bar{H}} \left|\frac{\zeta}{\varepsilon}\right|^p dP_b^{(\varepsilon)}, \quad (M_p = E|\xi(\theta^*)|^p + o(\varepsilon^{1/2})). \end{aligned}$$

Для последнего слагаемого имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \int_{\bar{H}} |\zeta \varepsilon^{-1}|^p dP_b^{(\varepsilon)} &= \int_{|\zeta| < \nu, \bar{H}} |\zeta \varepsilon^{-1}|^p dP_b^{(\varepsilon)} + \\ &+ \int_{|\zeta| > \nu, \bar{H}} |\zeta \varepsilon^{-1}|^p dP_b^{(\varepsilon)} \leq |\nu \varepsilon^{-1}|^p \cdot P(\bar{H}) + \left(\frac{\beta - \alpha}{\varepsilon}\right)^p \times \\ &\times P\{|\zeta| > \nu, \bar{H}\} \leq |\nu \varepsilon^{-1}|^p k_2 \exp\{-k_2 \varepsilon^{-1/2}\} + \left|\frac{\beta - \alpha}{\varepsilon}\right| k_1 \exp\{-k_1 \varepsilon^{-1/2}\}. \end{aligned}$$

Аналогично получаем и оценку снизу для этого интеграла. Объединяя их, приходим к неравенствам, из которых следует сходимость

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_b|\varepsilon^{-1}(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta^*)|^p = E|\xi(\theta^*)|^p.$$

## § 5. Заключительные замечания

Заметим, что если наблюдатель выбрал такое семейство  $\{S(\theta, x), \theta \in \Theta\}$ , что при некотором  $\theta_0$  имеем  $S(\theta_0, x) = b(x)$ , то  $\theta^* = \theta_0$  и получаем обычную задачу оценки параметра диффузионного процесса (см., например, [3], теорема 3.4.3).

Специально подчеркнем, что основной результат — теорема 3.1 носит «не асимптотический» характер. Все постоянные, случайные величины и множества, входящие в формулировку, могут быть явно вычислены или выписаны.

Представляет интерес описание свойств байесовских оценок и ОМП, когда функция  $G(\theta)$  имеет несколько совпадающих по величине миниму-

мов. ОМП, по-видимому, с разными вероятностями будет сходиться к каждому из них.

Не представляет принципиальных трудностей получение первых  $k > 1$  членов в разложении ОМП по степеням  $\varepsilon$ . Справедлива

**Теорема 5.1.** Пусть функция  $S(\theta, x)$  имеет  $k+3$  ограниченных производных по  $\theta$  и  $x$ , а функция  $b(x) - k+3$  ограниченных производных по  $x$ , и функция  $G(\theta)$  имеет единственный минимум в точке  $\theta^* \in (\alpha, \beta)$ , причем  $G(\theta^*) > 0$ , тогда для ОМП справедливо представление

$$\hat{\theta}_\varepsilon = \theta^* + \left\{ \sum_{j=1}^k \varepsilon^j \psi_j + \varepsilon^{k+1/2} \psi_{k+1} \right\} \chi_{(A)} + \varepsilon^k \chi_{(\bar{A})},$$

а для  $\zeta$  и  $A$  имеют место соотношения (3.6).

Доказательство ничего нового по сравнению с [4] и приведенным здесь доказательством теоремы 3.1 не содержит, поэтому мы его опускаем.

Условия теоремы 3.1 могут быть ослаблены в следующую сторону. Вместо условия (2.1) в определении класса  $M'_{\theta, x}$  можно в правой части писать  $L_m(1 + |x|^m)$ ,  $m \geq 1$ . В доказательстве это отразится на ухудшении скорости убывания в показателях экспонент (3.6).

**Пример.** Пусть имеется возможность реализовывать только линейные системы вида

$$dX_\varepsilon(t) = \theta X_\varepsilon(t) dt + \varepsilon dw(t), \quad X_\varepsilon(0) = x_0 \neq 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

а исходное уравнение

$$dX_\varepsilon(t) = \sin(X_\varepsilon(t)) dt + \varepsilon dw(t), \quad X_\varepsilon(0) = x_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

тогда ОМП  $\hat{\theta}_\varepsilon$  „выбирает“ при  $\varepsilon \rightarrow 0$  значение

$$\theta^* = \frac{1}{2} (X_0(T)^2 - x_0^2) \left( \int_0^T X_0(t)^2 dt \right)^{-1},$$

где  $X_0(t)$  — решение уравнения

$$\frac{dX_0(t)}{dt} = \sin X_0(t), \quad X_0(0) = x_0.$$

Ереванский государственный  
университет

Поступила 28. III. 1986

ՏՈՒԻ. Ա. ԿՈՒՏՈՅԱՆՑ. Փոքր աղմուկով դիֆուզիական համակարգերի եույնականացման մեկ խնդրի մասին (ամփոփում)

Դիտարկվում է փոքր դիֆուզիայով դիֆուզիոն պրոցեսի համար մոդելի ընտրման խնդիր: Մաքսիմալ էջմարտանմանության մեթոդը Թույլ է տալիս ընտրել շեղման գործակցով պարամետրական մոդել, որը  $L_2$ -ի իմաստով մոտ է սկզբնական մոդելի շեղման գործակցին: Ապացուցվում է մաքսիմալ էջմարտանմանության գնահատականի ռեակայանությունը, ասիմպտոտիկ նորմալությունը և մոմենտների գուգամիտությունը, երբ դիֆուզիայի գործակիցը ձգտում է զրոյի:

Y. A. KUTOYANTS. *On a problem of dynamical systems with small noise identification* (summary)

The problem of choice of a model for a diffusion process with small diffusion coefficient is considered. The maximum likelihood method allows to choose a parametric model with trend coefficient which is close to the trend coefficient of the original process in  $L_2$ -sense. The consistency and asymptotic normality of the maximum likelihood estimate are proved and the convergence of the moments is established as the diffusion coefficient tends to zero.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. Статистика случайных процессов, М., «Наука», 1974.
2. Yu. A. Kutoyants. Parameter estimation for stochastic process, Berlin, Heldermann 1984, 207 p.
3. Yu. A. Kutoyants. On nonparametric estimation of trend coefficients in a diffusion, process, in „Statistics and control of stochastic process“ Ed.N. V. Krylov, R. Sh. Liptser, A. A. Novikov, New York, Optimization software, 1985.
4. Ю. А. Кутоянц. Разложение оценки максимального правдоподобия по степеням диффузии, Теор. вероят. и ее примен., 29, № 3, 1984, 452—463.
5. М. В. Бурнашев. Асимптотическое разложение оценок параметра сигнала в белом гауссовском шуме, Матем. сб., 104, № 2, 1977, 179—206.
6. I. W. McKean. Estimation for diffusion processes under misspecified models. J. Appl. Prob., 21, 1984, 511—520.
7. М. В. Бурнашев. Об оценке максимального правдоподобия параметра сигнала в белом гауссовском шуме, Проблемы передачи информации, 4, 1975, 55—69.

УДК 517.95

А. С. АГАБАБЯН

# ОБ ОЦЕНКЕ СНИЗУ НАИМЕНЬШЕГО ПО МОДУЛЮ СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ СЕМИЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

1°. Рассмотрим дифференциальный оператор с переменными коэффициентами

$$P(x, D) = \sum_{(\mu, \alpha) \leq 2} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} \quad (1)$$

в произвольной области  $\Omega \subset R^n$ , где  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ ,  $\mu_i = \frac{1}{m_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$  — вектор с целыми положительными компонентами,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  — мультииндекс (т. е. вектор с целыми неотрицательными компонентами),  $(\mu, \alpha) = \mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2 + \dots + \mu_n \alpha_n$ .

Определение 1. Оператор (1) называется *семиэллиптическим* в  $\Omega$ , если характеристический многочлен

$$P^0(x, \xi) = \sum_{(\mu, \alpha) = 2} a_{\alpha}(x) \xi^{\alpha},$$

соответствующий главной части

$$P^0(x, D) = \sum_{(\mu, \alpha) = 2} a_{\alpha}(x) D^{\alpha}$$

оператора  $P(x, D)$ , не обращается в нуль при  $|\xi| \neq 0$  и  $x \in \Omega$ , т. е.

$$P^0(x, \xi) \neq 0 \text{ при } |\xi| \neq 0, x \in \Omega.$$

Мы рассматриваем вопрос об оценке снизу наименьшего по модулю собственного значения задачи Дирихле для операторов вида (1) в произвольной области  $\Omega \subset R^n$  в предположении, что

$$\operatorname{Re}(Pu, u) > c_0 \|u\|_m^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega), \quad (2)$$

где  $c_0 = \operatorname{const} > 0$ ,  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $L_2(\Omega)$ ,  $\|u\|_m^2 = \int_{\Omega} \sum_{(\mu, \alpha) = 1} |D^{\alpha} u|^2 dx$ .

В заметке основным предположением на оператор  $P(x, D)$  будет условие (2). Можно доказать, что произвольный семиэллиптический оператор (1) с достаточно большим коэффициентом  $a_0(x)$  при функции  $u$  удовлетворяет условию (2) (в случае, когда оператор эллиптический, см. [1], [14], [15], для семиэллиптического оператора это неравенство можно доказать аналогично). Полученные здесь оценки собственных значений за-

висят от  $\mu$ -радиуса области  $\Omega$  (см. определение 2) и числа  $k$  компонент связности дополнения области  $\Omega$  при условии  $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n} \leq 2$ .

Оценка такого рода при  $n = 2$  для уравнения Лапласа получена в работе Р. Оссермана [2] и имеет следующий вид:  $|\Lambda| \geq c(k\rho)^{-2}$ , где  $c$  — некоторая постоянная,  $k$  — количество компонент связности  $R^n \setminus \Omega$ ,  $\rho$  — внутренний диаметр области  $\Omega$  (внутренний диаметр области  $\Omega$  — это точная верхняя грань диаметров шаров, которые целиком лежат в  $\Omega$ ). При этом в [2] построен пример области, для которой  $|\Lambda| \leq c_1(\sqrt{k}\rho)^{-2}$ . Далее, для уравнения Лапласа при  $n = 2$  М. Тейлор [3] получил улучшение оценки Оссермана:  $|\Lambda| \geq c(\sqrt{k}\rho)^{-2}$ . Сопоставление результатов, полученных в [2] и [3], показывает неулучшаемость оценки М. Тейлора. Оценка собственного значения эллиптического оператора  $2l$ -го порядка для односвязной области  $\Omega$  получена В. А. Кондратьевым [4] и В. Хейманом [5]. Оценка такого типа при  $2l < n$  неверна. Именно, В. А. Кондратьевым в [4] показано существование односвязной области со сколь угодно малым диаметром, для которой  $\Lambda = 1$ . В случае, когда  $R^n \setminus \Omega$  имеет  $k_1$  связных компонент, диаметр которых не превосходит  $2\rho$ , для эллиптического оператора  $2l$ -го порядка в работе Ю. В. Егорова и В. А. Кондратьева [1] получена оценка  $|\Lambda| \geq c(k^{1/n}\rho)^{-2l}$ , где  $k = \max(1, k_1)$ .

Понятие семиэллиптического оператора естественным образом обобщает понятие эллиптического оператора. Семиэллиптические операторы и связанные с ними анизотропные классы изучены многими авторами. Отметим только работы [7—13], где можно найти обширную литературу.

Цель настоящей заметки — получение оценки снизу собственных значений задачи Дирихле для семиэллиптического оператора, удовлетворяющего неравенству (2).

При  $m_1 = m_2 = \dots = m_n$  семиэллиптический оператор является эллиптическим, и поэтому полученные в настоящей заметке оценки обобщают соответствующие оценки, полученные Ю. В. Егоровым и В. А. Кондратьевым в [1].

2°. Итак, рассмотрим вопрос об оценке снизу наименьшего по модулю собственного значения задачи Дирихле для семиэллиптического в  $\Omega$  оператора, удовлетворяющего условию (2). Под решением задачи Дирихле здесь понимается обобщенное решение из пространства  $\dot{H}_m$ , где  $\dot{H}_m$  — замыкание множества функций  $C_0^\infty(\Omega)$  в норме

$$\| \cdot \|_{W_2^m} = \left( \int_{\Omega} \sum_{(\mu, \alpha) \leq l} |D^\alpha \cdot|^2 dx \right)^{1/2},$$

т. е. изучается вопрос об оценке снизу наименьшего по модулю собственного значения следующей задачи:

$$\begin{cases} Pu = \Lambda u, \\ u \in \dot{H}_m. \end{cases} \quad (3)$$

$$(4)$$

**Определение 2.** Пусть  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  — вектор с положительными компонентами,  $v$ -радиусом  $r(v, \Omega)$  области  $\Omega$  назовем верхнюю грань тех чисел  $\rho > 0$ , для которых эллипсоид

$$M(\rho) = \left\{ x, x \in R^n, \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\rho^{2v_i}} = 1 \right\}$$

параллельным переносом можно поместить внутрь области  $\Omega$ .

Пусть  $r = r(\mu, \Omega)$ . Обозначим через  $k_1$  количество тех компонент связности из  $K^n \setminus \Omega$ , которые можно с помощью сдвигов, параллельных координатным осям, поместить внутрь эллипсоида с полуосями  $(2r^{\mu_1}, 2r^{\mu_2}, \dots, 2r^{\mu_n})$  (если таких компонент не существует, то положим  $k_1 = 1$ ). Обозначим  $k_0^{1/2d} = [3k_1^{1/2d}]$ , где  $d$  — наименьшее общее кратное чисел  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Мы получим оценку снизу собственного значения задачи (3) — (4), зависящего от  $\mu$ -радиуса области  $\Omega$  и числа  $k_0$ .

**Теорема 1.** Пусть  $P(x, D)$  — семиэллиптический оператор, удовлетворяющий условию (2),  $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n} = 2$ ,  $r$  —  $\mu$ -радиус области  $\Omega$ ,  $\Lambda$  — собственное значение задачи (3) — (4). Тогда существует число  $c = c(c_0, n) > 0$  такое, что

$$|\Lambda| \geq \frac{c}{r^2 k_0}.$$

**Доказательство.** В основном мы будем следовать методу доказательства оценки собственных значений для эллиптических операторов из работы [1].

Пусть  $u$  — нетривиальное решение уравнения  $Pu = \Lambda u$ . Поскольку оператор  $P(x, D)$  удовлетворяет условию (2), то

$$\operatorname{Re}(Pu, u) = \operatorname{Re} \Lambda (u, u) \geq c_0 \|u\|_m^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega),$$

т. е.

$$c_0 \|u\|_m^2 \leq |\Lambda| \|u\|_0^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega). \quad (5)$$

Сделаем преобразование координат

$$x_i = y_i (r \sqrt{k_0})^{\mu_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

тогда (5) принимает вид

$$c_0 \|u\|_m^2 \leq (r \sqrt{k_0})^2 |\Lambda| \|u\|_0^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega'),$$

где  $\Omega'$  — образ  $\Omega$  при преобразовании (6).

Если нам удастся показать существование постоянной  $A = A(n)$  такой, что

$$\|u\|_0^2 \leq A \|u\|_m^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega'), \quad (7)$$

то мы получим неравенство

$$c_0 \|u\|_m^2 \leq |\Lambda| r^2 k_0 A \|u\|_m^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega'),$$

т. е. для собственного значения получим оценку

$$|\Delta| \geq \frac{c_0}{Ar^2k_0} = \frac{c}{r^2k_0},$$

доказывающую теорему 1.

Теперь докажем неравенство (7). Разобьем  $R^n$  на конгруэнтные друг другу кубы с ребрами, параллельными координатным осям, с длиной 8 единиц. Пусть  $\Pi$  — один из этих кубов. Разобьем  $\Pi$  на  $k_0$  штук конгруэнтных прямоугольных параллелепипедов следующим образом: то ребро

$\Pi$ , которое параллельно оси  $i$ , разобьем на  $k_0^{\frac{1}{2}\mu_i}$  равные части (заме- тим, что число  $k_0$  выбрано так, что  $k_0^{\frac{1}{2}\mu_i}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) — целые чис-

ла). Длина  $i$ -ого ребра каждого параллелепипеда равна  $8k_0^{-\frac{1}{2}\mu_i}$ . Таким образом, мы разбили куб  $\Pi$  на  $k_0$  конгруэнтных параллелепипедов. Пусть  $\Pi'$  — один из этих параллелепипедов. Возьмем параллелепипед  $\Pi''$ , концентричный  $\Pi'$ , ребра которого параллельны ребрам  $\Pi'$  и дли на любого ребра равна половине длины соответствующего ребра  $\Pi$ ,

Так как длина  $i$ -ого ребра  $\Pi''$  равна  $4k_0^{-\frac{1}{2}\mu_i}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  и, как

легко подсчитать,  $\mu$ -радиус области  $\Omega'$ :  $r(\mu, \Omega') = k_0^{-\frac{1}{2}}$ , то в  $\Pi''$  существует точка, которая принадлежит  $R^n \setminus \Omega'$ . Так как по условию  $R^n \setminus \Omega'$  имеет не более чем  $k_1$  связных компонент, каждую из кото- рых можно параллельным переносом вставить во внутрь эллипсоида с

полуосями  $(2k_0^{-\frac{1}{2}\mu_1}, 2k_0^{-\frac{1}{2}\mu_2}, \dots, 2k_0^{-\frac{1}{2}\mu_n})$ , то по крайней мере для  $k_0 - k_1$  штук параллелепипедов  $\Pi_j$  ( $i=1, 2, \dots, k_0 - k_1$ ) найдутся связ- ные компоненты множества  $R^n \setminus \Omega'$ , имеющие общие точки с  $\Pi_j$  ( $j=1, 2, \dots, k_0 - k_1$ ) и такие, что их можно параллельным переносом поместить так, чтобы они имели предельные точки одновременно на границах параллелепипедов  $\Pi_j$  и  $\Pi_j$ ,  $j=1, 2, \dots, k_0 - k_1$ .

Обозначим через  $\Gamma = \Gamma_{j_0}$ ,  $j_0 \in \{1, 2, \dots, k_0 - k_1\}$  ту часть одной из таких компонент связности, которая находится в  $\Pi_{j_0}$ . Проекцию  $\Gamma_{j_0}$  на координатную ось  $y_q$  ( $1 \leq q \leq n$ ) обозначим через  $\gamma_{j_0q}$ . Ясно, что

$$|\gamma_{j_0q}| \geq 2k_0^{-\frac{1}{2}\mu_q}.$$

Рассмотрим гиперплоскость  $y_q = t$  ( $t \in \gamma_{j_0q}$ ) и положим  $\Pi'_{j_0t} = \Pi_{j_0} \cap (y_q = t)$ . Очевидно, что  $\Pi'_{j_0t}$  —  $(n-1)$ -мерный прямоугольный параллелепипед, имеющий по крайней мере одну общую точку  $y_0$  с множеством  $\Gamma$ . По определению множества  $\Gamma$ ,  $u(y_0) = 0$ .

По теореме вложения анизотропного пространства  $H_\infty(\Omega) \equiv W_2^m(\Omega)$  (см. [6], теорема 10.4) из условия  $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_{q-1}} +$

$+\frac{1}{m_{q+1}}+\dots+\frac{1}{m_n}<2$ , следует существование постоянных  $c_1>0$ ,  $h_0>0$  таких, что для любого  $h:0<h<h_0$  и для всех  $y\in\Pi'_{j,t}$ ,  $v\in W_2^m(\Pi'_{j,t})$

$$|v(y)|^2\leq c_1 h^{2(1-s_q)}\sum_{l=1}^n \|D_l^{m_l} v\|_{\Pi'_{j,t}}^2 + c_1 h^{-2s_q} \|v\|_{0,\Pi'_{j,t}}^2, \quad (8)$$

где

$$s_q = \frac{1}{2m_1} + \dots + \frac{1}{2m_{q-1}} + \frac{1}{2m_{q+1}} + \dots + \frac{1}{2m_n} = \\ = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \mu_l - \frac{\mu_q}{2} = 1 - \frac{\mu_q}{2} < 1.$$

Здесь можно взять  $h = \frac{1}{2} h_0$ , а

$$h_0 = \min_{\substack{1\leq l\leq n \\ l\neq q}} \left( \frac{8}{\frac{1}{2}\mu_l} \right)^{m_l} = \frac{8^{m_l}}{\sqrt{k_0}}, \quad m_l = \min_{\substack{1\leq l\leq n \\ l\neq q}} |m_l|.$$

Такой выбор числа  $h_0$  возможен в силу того, что в теореме 10.4 [6] число  $h_0$  в неравенстве (8) выбирается так, чтобы параллелепипед  $\Pi'_{j,t}$  удовлетворял условию  $m$ -рога с радиусом  $h_0$ .

Пользуясь этим, из неравенства (8) и из условий  $|\gamma_{j,q}| \geq 4k_0^{-\frac{1}{2}\mu_q}$ ,  $u(y_0)=0$ , аналогичным образом, как это сделано в [1], получим неравенство (7), доказывающее теорему 1.

3°. Теорема 2. Пусть  $P(x, D)$  — семиллиптический оператор, удовлетворяющий условию (2),  $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n} < 2$ ,  $r = r(\mu, \Omega)$  —  $\mu$ -радиус области  $\Omega$ ,  $\Lambda$  — собственное значение задачи (3)–(4). Тогда существует число  $c = c(c_0, n) > 0$  такое, что  $|\Lambda| \geq \frac{c}{r^2}$ .

Доказательство. Пусть  $u$  — нетривиальное решение уравнения  $Pu = \Lambda u$ . Рассуждая как при доказательстве теоремы 1, получим неравенство

$$c_0 \|u\|_m^2 \leq |\Lambda| \|u\|_0^2. \quad (9)$$

Сделаем преобразование координат

$$x_l = y_l r^{\mu_l}, \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Тогда (9) принимает вид

$$c_0 \|u\|_m^2 \leq r^2 |\Lambda| \|u\|_0^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega');$$

где  $\Omega'$  — образ  $\Omega$  при преобразовании (10).

Если мы докажем существование постоянной  $A = A(n) > 0$  такой, что

$$\|u\|_0^2 \leq A \|u\|_m^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega'), \quad (11)$$

то получим неравенство

$$c_0 \|u\|_m^2 \leq |\Delta| r^2 A \|u\|_m^2,$$

откуда, в свою очередь, будет следовать неравенство

$$|\Delta| > \frac{c_0}{Ar^2} = \frac{c}{r^2},$$

доказывающее теорему 2.

Теперь докажем неравенство (11). Разобьем  $R^n$  на непересекающиеся кубы с ребрами, которые имеют длину, равную 2 и параллельны координатным осям. Пусть  $\Pi$ —один из этих кубов. По теореме вложения (см. [6],

теорема 10.4) в рассматриваемом случае из условия  $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots +$

$+\frac{1}{m_n} < 2$  следует существование постоянной  $c_1 > 0$  такой, что для

всех  $y \in \Pi$  и  $v(y) \in W_2^m(\Pi)$ :

$$|v(y)|^2 \leq c_1 \sum_{i=1}^n \|D_i^{m_i} v\|_{0,\Pi}^2 + c_1 \|v\|_{0,\Pi}^2.$$

Так как длина ребра куба  $\Pi$  равна 2, а из преобразований (10) следует, что  $\mu$ -радиус области  $\Omega'$  равен 1, то в  $\Pi$  существует точка  $y \in R^n \setminus \Omega'$ , т. е.  $u(y) = 0$ .

Из этих рассуждений аналогично теореме 2 [1] получим неравенство (11).

Ереванский государственный  
университет

Поступила 19. XII. 1985

Ա. Ս. Աղաբաջյան. Սեմիէլիպտիկ օպերատորի մոդուլով ամենափոքր սեփական արժեքի գնահատականը (ամփոփում)

$\Omega \subset R^n$  կամայական տիրույթում ստացված է ընդհանուր տեսքի սեմիէլիպտիկ օպերատորների համար Դիրիխլեի խնդրի մոդուլով ամենափոքր սեփական արժեքի գնահատականը: Այդ գնահատականը կախված է  $\Omega$  տիրույթի  $\mu$ -շառավղից և  $R^n \setminus \Omega$ -ի կապակցվածության կոմպոնենտների քանակից, որտեղ  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  դրական կոմպոնենտներով վեկտոր է կապված դիտարկվող օպերատորի հետ: Ստացված թեորեմները ընդհանրացնում են Յու. Վ. Եգորովի և Վ. Ա. Կոնդրատևի, Մ. Թեյլորի, Վ. Ա. Կոնդրատևի, Վ. Հեյմանի, Ռ. Օսսերմանի հայտերի թեորեմները:

A. S. AGHABAZIAN. The estimation of the smallest eigenvalue of a semi-elliptic operator (summary)

In an arbitrary domain  $\Omega \subset R^n$  we obtain the estimate for the smallest eigenvalue for Dirichlet problem for semi-elliptic operators in general form. The estimate depends on  $\mu$ -radius of the domain  $\Omega$  and the number of the connected components of  $R^n \setminus \Omega$ , where  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  is a vector with positive components connected with the operator. In question the obtained theorems generalize the results of Ju. V. Egorov's and V. A. Condratiev's, M. Taylor's, V. A. Condratiev's, W. Hayman's, R. Osserman's.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев. Об оценке наименьшего собственного значения для эллиптического оператора, Диф. уравнения, XX, № 8, 1984, 1397—1403.
2. R. Osserman. A note on Hayman's theorem on the bass note of a drum, Comment. Math. Helvet, 52, № 4, 1977, 545—555.
3. M. E. Taylor. Estimate on the fundamental frequency of a drum, Duke Math. Journal, 46, № 2, 1977, 447—453.
4. В. А. Кондратьев. О разрешимости первой краевой задачи для сильно эллиптических уравнений, Тр. ММО, т. 16, 1967, 293—318.
5. W. K. Hayman. Some bounds for principal frequency, Applicable Analysis, 7, 1978, 247—254.
6. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., «Наука», 1975, 480 с.
7. L. Cattabriga. Uno spazio funzionale connesso ad una classe di operatori ipoelliptici, Inst. Naz. di Alta Math. Symposia Mat., Bologna, vol. VIII, 1971, 547—558.
8. Friberg Idun. Multi-quasielliptic polynomials, Annali della scuola Normale super-di Pisa, serie III, XXI, 1967, 239—260.
9. Х. Трибель. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы, пер. с англ., М., «Мир», 1980, 664 с.
10. С. В. Успенский, Г. В. Демиденко, В. Г. Перепелкин. Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям, Новосибирск, «Наука», 1984, 223 с.
11. В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян. О функциональной размерности пространства решений гипоэллиптических уравнений, Мат. сборник, 115 (157), № 4 (8), 1981, 614—631.
12. Г. А. Карапетян. Решение полуэллиптических уравнений в полупространстве, ДАН Арм.ССР, 75, № 5, 1982, 200—204.
13. А. А. Давтян. Граничные задачи для одного класса семиэллиптических псевдодифференциальных уравнений в пространствах Соболева—Ливуилля с квазиоднородной нормой, Изв. АН Арм.ССР, XX, № 3, 1985, 182—193.
14. О. А. Ладыженская. Краевые задачи математической физики, М., «Наука», 1973, 407 с.
15. L. Garding. Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations Math. Scand 1, 1953, 55—72.

УДК 517.51

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

В. А. СКВОРЦОВ

# ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО РЯДА ХААРА

Основной целью данной статьи является доказательство следующего утверждения.

**Теорема.** Пусть двойной ряд по системе Хаара

$$\sum_{n, m=1}^{\infty} a_{n, m} \chi_{n, m}(x, y) \quad (1)$$

сходится (по прямоугольникам) всюду, кроме некоторого счетного множества  $E$ , к конечной функции  $f(x, y)$ , интегрируемой по Перрону на единичном квадрате, и пусть в точках  $(x, y)$  множества  $E$  выполнено соотношение

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ l \rightarrow \infty}} \frac{a_{n_k, m_l}}{\chi_{n_k, m_l}(x, y)} = 0, \quad (2)$$

где  $n_k, m_l$  — все те номера, при которых замыкания носителей функций  $\chi_{n_k, m_l}$  содержат рассматриваемую точку  $(x, y)$ . Тогда ряд (1) является рядом Фурье—Перрона функции  $f(x, y)$ .!

В нашей работе [1] доказана аналогичная теорема для ряда (1), который всюду удовлетворяет другому условию (номера  $n_k, m_l$  — те же, что и в условии (2)):

$$\lim_{k+l \rightarrow \infty} \frac{a_{n_k, m_l}}{\chi_{n_k, m_l}(x, y)} = 0. \quad (3)$$

При этом в этой последней теореме исключительным множеством может быть любое  $U$ -множество и, значит, в частности, любое счетное множество.

Мы докажем теорему данной статьи сведением ее к упомянутой теореме работы [1]. Для этого достаточно доказать, что в условиях нашей теоремы всюду выполняется (3), для чего, в свою очередь, достаточно доказать следующую лемму.

**Лемма 1.** Пусть ряд (1) сходится по прямоугольникам во всех точках некоторого креста  $(a \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times b)$ ,  $0 \leq a \leq 1$ ,  $0 \leq b \leq 1$ , кроме, быть может, точек некоторого счетного множества  $E$ , где однако выполняется соотношение (2). Тогда в точке  $(a, b)$  выполняется (3).

При доказательстве леммы мы воспользуемся методом работ [1] и [2].

Заметим, что из сходимости ряда (1) в некоторой точке следует вы-

полнение в той же точке соотношения (2), так что можно считать, что (2) выполняется всюду. Отметим также, что если в (3) оба индекса  $n_k$  и  $m_l$  стремятся к  $\infty$ , то справедливость (3) следует из (2), записанного для точки  $(a, b)$ .

Итак, остается доказать (3) в предположении, что одна из последовательностей  $\{n_k\}$  и  $\{m_l\}$  ограничена.

Пусть, например, ограничена последовательность  $\{m_l\}$  и пусть в этих предположениях (3) не выполняется. Тогда найдется подпоследовательность  $\{n_{k_l}\}$ ,  $k_l \nearrow \infty$ , такая, что для некоторого фиксированного номера  $m_l$  выполняются неравенства

$$\frac{a_{n_{k_l}, m_l}}{\gamma_{n_{k_l}, m_l}(a, b)} > C > 0 \text{ при всех } k_l.$$

С учетом значения функций  $\gamma_{n, m}$  это означает, что

$$|a_{n_{k_l}, m_l} \gamma_{n_{k_l}, m_l}(a, b)| > C \cdot 2^{k_l-1} 2^{l-1} \text{ при всех } k_l. \quad (4)$$

Двоичные интервалы  $(i/2^n, i+1/2^n) \times (j/2^m, j+1/2^m) \equiv \Delta_n \times \Delta_m \equiv \Delta_{n, m}$  будем называть интервалами ранга  $(n, m)$ . Пусть  $\Delta_{k_l-1, l-1}$  — интервал, являющийся носителем функции  $\gamma_{n_{k_l}, m_l}$ . Для  $\Delta_{k_l-1}$  найдется интервал  $\Delta_{k_l}$  ранга, на единицу большего такой, что  $a \in \bar{\Delta}_{k_l}$ . Разрезая при необходимости последовательность  $\{k_l\}$  можно считать, что последовательность  $\{\Delta_{k_l}\}$  вложена и  $a = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bar{\Delta}_{k_l}$ .

Ниже будем обозначать постоянное значение, принимаемое какой-либо функцией  $f$  на интервале  $\Delta$  через  $\bar{f}(\Delta)$ .

Рассмотрим многочлены по системе Хаара вида

$$\begin{aligned} P_j^l(x, y) &= S_{n_{k_l}, 2^l}(x, y) - S_{n_{k_l}-1, 2^l}(x, y) = \\ &= \sum_{s=1}^{2^l} a_{n_{k_l}, s} \gamma_{n_{k_l}, s}(x, y) = \gamma_{n_{k_l}}(x) \sum_{s=1}^{2^l} a_{n_{k_l}, s} \gamma_s(y). \end{aligned} \quad (5)$$

Для одного из интервалов ранга  $(k_l, l)$ , составляющих интервал  $\Delta_{k_l, l-1}$ , величины  $P_{l-1}^l(\Delta_{k_l, l-1})$  и  $a_{n_{k_l}, m_l} \gamma_{n_{k_l}, m_l}(\Delta_{k_l, l})$  имеют один и тот же знак. Поэтому, учитывая (4), получим

$$|P_j^l(\Delta_{k_l, l})| = |P_{l-1}^l(\Delta_{k_l, l-1}) + a_{n_{k_l}, m_l} \gamma_{n_{k_l}, m_l}(\Delta_{k_l, l})| > C 2^{l-1} 2^{k_l-1}. \quad (6)$$

Вновь при необходимости разрезая последовательность  $\{k_l\}$ , можно считать, что для всех  $l$  интервалы  $\Delta_{k_l, l}$  имеют на ось  $y$  общую проекцию  $\Delta_l$ .

Следующий этап построения выделим в самостоятельную лемму.

**Лемма 2.** Пусть в принятых выше обозначениях для некоторой последовательности  $\{\Delta_{k_l, l_0}\}$  вложенных интервалов  $(k_l \nearrow \infty)$  с общей проекцией  $\Delta_{l_0}$  на ось  $y$ , являющихся интервалами постоянства функций  $\gamma_{n_{k_l}, m_{l_0}}$ , для сумм  $P_{j_0}^l$ , построенных из членов рас-

смаатриваемого ряда (1), удовлетворяющего всем условиям теоремы, справедливо при некотором  $A > 0$  неравенство

$$|P_{j_i}^i(\Delta_{k_{i_p}, j_i})| > A 2^{k_i}, \quad i=1, 2, \dots \quad (7)$$

Тогда для любого  $B$ ,  $0 < B < A$ , найдется при некотором  $j_1 > j_0$  два непересекающихся интервала  $\Delta_{j_1}$  и  $\bar{\Delta}_{j_1}$ ,  $\Delta_{j_1} \cup \bar{\Delta}_{j_1} \subset \Delta_{j_0}$  и подпоследовательность  $\{k_{i_p}\}$  последовательности  $\{k_i\}$  такая, что для интервалов  $\Delta_{k_{i_p}, j_1} = \Delta_{k_{i_p}} \times \Delta_{j_1}$  и  $\bar{\Delta}_{k_{i_p}, j_1} = \Delta_{k_{i_p}} \times \bar{\Delta}_{j_1}$  справедливы неравенства

$$|P_{j_1}^{i_p}(\Delta_{k_{i_p}, j_1})| > B 2^{k_{i_p}}, \quad |P_{j_1}^{i_p}(\bar{\Delta}_{k_{i_p}, j_1})| > B 2^{k_{i_p}}$$

при всех  $i_p$ ,  $i_1 < i_2 < \dots < i_p < \dots$ .

Рассмотрим  $P_j^i$  при фиксированном  $i$  (см. (5)). Найдется последовательность вложенных интервалов  $\{\Delta_{k_i, j}^+\}_{j=j_0}^\infty$  таких, что  $\{|P_j^i(\Delta_{k_i, j}^+)|\}$  монотонно не убывает. Проекция этих интервалов на ось  $y$  стягиваются к точке  $y_i$ . Выделив при необходимости подпоследовательность, можем считать, что существует  $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = y'$ , причем  $y_i$  находятся по одну сторону от  $y'$ . Каждому  $\Delta_{k_i, j}^+$  соответствует интервал  $\bar{\Delta}_{k_i, j}$  того же ранга, такой, что в сумме они образуют интервал ранга  $(k_i, j-1)$ .

Возьмем и зафиксируем произвольное  $B < A$ ,  $B > 0$ . Пусть  $j_1$  такой номер, что

$$|P_j^i(\Delta_{k_i, j}^-)| \leq B 2^{k_i} \text{ при } j_0 < j < j_1 \text{ и } |P_{j_1}^i(\Delta_{k_i, j_1}^-)| > B 2^{k_i}. \quad (8)$$

Тогда из (5), (7) и первого из неравенств (8) следует, что

$$|a_{n_{k_i}, m_j} \chi_{n_{k_i}, m_j}(\Delta_{k_i, j}^+)| > (A-B) 2^{k_i} \cdot 2^{j-j_0} \text{ при } j_0 < j < j_1. \quad (9)$$

Допустим, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} j_i = \infty. \quad (10)$$

Зафиксировав натуральное  $t$ , в силу условия, наложенного на подпоследовательность  $\{y_i\}$ , при некотором  $i(t)$  для всех  $i > i(t)$  выполнено соотношение

$$(a, y') \in \bar{\Delta}_{k_{i(t)}, t}^+. \quad (11)$$

В силу (10) найдется сколь угодно большой номер  $i' > i(t)$ , для которого  $j_{i'} > t$ . Значит, для него верно (9) при  $j = t$ . С учетом (11), (9) и возможной принадлежности точки  $(a, y')$  лишь границе интервала  $\Delta_{k_{i'}, t}^+$ , получаем, что

$$|a_{n_{k_{i'}}, m_t} \chi_{n_{k_{i'}}, m_t}(a, y')| \geq \frac{(A-B)}{4} 2^{k_{i'}} \cdot 2^{t-j_0}.$$

Так как здесь  $t$ , а затем и  $k_i$  можно взять сколь угодно большими, то отсюда видно, что в точке  $(a, y')$  нарушается (2). Тем самым (10) невозможно, т. е. последовательность  $\{j_i\}$  ограничена.

Отсюда вытекает, что найдется подпоследовательность  $\{j_{i_p}\}$  такая, что  $j_{i_p} = \bar{j}$  ( $i_1 < i_2 < \dots < i_p < \dots$ ) и все интервалы  $\Delta_{i_p}^+, \bar{j}$  имеют общую проекцию  $\Delta_{\bar{j}}$  на ось  $y$ . Тем самым, взяв  $\bar{j}$  за  $j_1$  в формулировке леммы, получаем, что последовательность интервалов  $[\Delta_{i_p}^+, \bar{j}]$  и  $[\Delta_{i_p}^-, \bar{j}]$  является искомой. Лемма 2 доказана.

Возвращаясь к доказательству леммы 1, рассмотрим последовательность  $C\mathcal{I}^{l-2} \equiv C_0 > C_1 > \dots > C_n > \dots > C_0/2$ . Применяя лемму 2 сначала при  $A = C_0$ ,  $B = C_1$  (см. (6)), затем к полученным последовательностям интервалов при  $A = C_1$ ,  $B = C_2$  и т. д., мы в результате многократного применения леммы 2 найдем двоично-иррациональную координату  $y'$  такую, что  $(a, y') \notin E$ , и в то же время в ней при некоторых сколь угодно больших  $i$  и  $j$

$$P_j^i(a, y') \geq \frac{C_0}{4} 2^{k_i}.$$

(Мы учли, что  $a$  может быть двоично-рациональной точкой). Но в силу (5) это противоречит сходимости ряда (1) в точке  $(a, y')$ . Лемма 1, а тем самым и теорема полностью доказаны.

Отметим, что результат переносится на кратные ряды Хаара любой размерности.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступила 20. II. 1987

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Скворцов. О множествах единственности для многомерных рядов Хаара, Мат. заметки, 14, № 6, 1973, 789—797.
2. В. А. Скворцов. О коэффициентах сходящихся кратных рядов Хаара и Уолша, Вестник МГУ, серия матем., № 6, 1973, 77—79.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.53

Г. М. АЙРАПЕТЯН

О ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ  
НЕПОЛНЫМИ СИСТЕМАМИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ  
С ФИКСИРОВАННЫМИ ПОЛЮСАМИ

1. Пусть  $Z = \{z_k\}_1^\infty$  ( $0 \leq |z_k| < 1$ ) — произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию Бляшке

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < \infty, \quad (1)$$

а  $B(z)$  — функция Бляшке с нулями  $z_k$  ( $k=1, 2, \dots$ )

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \frac{|z_k|}{z_k}.$$

Пусть, далее,  $H^p$  ( $0 < p \leq \infty$ ) — класс Харди с нормой

$$\|f\|_p = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}$$

при  $0 < p < \infty$  и  $\|f\|_{\infty} = \sup_{|z| < 1} |f(z)|$ , при  $p = \infty$ .

Следуя работе [1] М. М. Джрбашяна обозначим через  $\lambda_p \{Z\}$  ( $0 < p \leq \infty$ ) класс функций, определенных вне точек единичной окружности  $|z| = 1$  и удовлетворяющих условиям:

1)  $f(z) \in H^p$ , при  $|z| < 1$ .

2)  $f(z) = \frac{1}{z} B(z) \bar{f}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$ , при  $|z| > 1$  и  $\bar{f}(z) \in H^p$ .

3) Угловые граничные значения функции  $f(z)$  изнутри и извне окружности  $|z| = 1$  почти всюду совпадают.

Следующие утверждения относительно классов  $\lambda_p \{Z\}$  доказаны в работах [2], [3], [4].

1°. При  $1 \leq p < \infty$   $\lambda_p \{Z\}$  совпадает с замыканием линейной оболочки системы

$$r_k(z) = \frac{1 - |z_k|^2}{1 - \bar{z}_k z} \quad (k=1, 2, \dots)$$

по метрике  $H^p$ .

2°. Если  $f(z) \in \lambda_p \{Z\}$  и  $f(z_k) = 0$  ( $k=1, 2, \dots$ ), то  $f(z) \equiv 0$ .

3° Класс  $\lambda_p \{Z\}$  ( $1 \leq p < \infty$ ) совпадает с подклассом функций  $H^p$ , удовлетворяющих условию

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \equiv 0, \quad |z| < 1. \quad (2)$$

Для дальнейших исследований классов  $\lambda_p \{Z\}$  М. М. Джрбашьяном, на семинаре по теории функций комплексного переменного, была поставлена задача об исследовании граничных свойств функций класса  $\lambda_p \{Z\}$  в зависимости от расположения точек  $z_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) в единичном круге.

В настоящей работе доказаны следующие утверждения.

А. Если последовательность  $Z = \{z_k\}_1^\infty$  удовлетворяет равномерному условию Фростмана

$$\sup_{0 < \theta < 2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - |z_k|^2}{|1 - \overline{z_k} e^{i\theta}|^2} < \infty, \quad (3)$$

то любая функция из класса  $\lambda_p \{Z\}$  имеет радиальные предельные значения во всех точках единичной окружности.

В. Если последовательность  $Z = \{z_k\}_1^\infty$  удовлетворяет условию (3), а также условию Ньюмана

$$\sup \left\{ \frac{1 - |z_{k+1}|}{1 - |z_k|}; k = 1, 2, \dots \right\} = q < 1, \quad (4)$$

то ряд Фурье любой функции  $f(z) \in \lambda_p \{Z\}$  сходится в каждой точке единичной окружности.

Относительно утверждения В отметим, что аналогичный результат для произведения Бляшке был установлен в работе [5].

Пусть  $f(z) \in \lambda_p \{Z\}$  и  $\tilde{f}(z)$  — ассоциированная с нею функция согласно определению класса  $\lambda_p \{Z\}$ . Из утверждения 3° непосредственно следует

Лемма 1. Если  $f(z) \in \lambda_p \{Z\}$ , то  $\tilde{f}(z) \in \lambda_p \{\bar{Z}\}$ , где  $\bar{Z} = \{\bar{z}_k\}_1^\infty$ .

2. Будем говорить, что последовательность  $Z = \{z_k\}_1^\infty$  удовлетворяет условию Ньюмана-Карлесона, если

$$\inf_k \prod_{j \neq k} \left| \frac{z_j - \bar{z}_k}{1 - \bar{z}_j z_k} \right| = \delta > 0. \quad (5)$$

Имеет место

Лемма 2. Пусть последовательность  $\{z_k\}_1^\infty$  удовлетворяет равномерному условию Фростмана (3). Тогда ее можно разложить на конечное число попарно непересекающихся последовательностей, каждая из которых удовлетворяет условию Ньюмана-Карлесона.

Доказательство. Для любого множества  $E$  из единичного круга  $\mu(E) = \sum (1 - |z_k|)$ ,  $z_k \in E$ .

Так как для любой функции  $f(z) \in H^p$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(z_k)| (1 - |z_k|) \leq \int_{|\zeta|=1} |f(\zeta)| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - |z_k|}{|1 - \bar{z}_k \zeta|} |d\zeta| \leq C \|f\|_p,$$

то  $\mu(E)$  есть карлесона мера (см., например, [6]).

Хорошо известно (см. [7], стр. 312), что точечная карлесона мера либо удовлетворяет условию (5), либо состоит из конечного числа попарно непересекающихся последовательностей, каждая из которых удовлетворяет условию (5).

Пусть теперь последовательность  $\{z_k\}_1^\infty$  разложена на подпоследовательности согласно лемме 2. Обозначим эти последовательности через  $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ . Дополнения этих последовательностей до полной последовательности  $Z$  обозначим через  $\bar{Z}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ).

Лемма 3. Пусть  $f(z) \in \lambda_\infty \{Z\}$ . Тогда

$$f(z) = f_1(z) + B_1(z) (f_2(z) + B_2(z) (f_3(z) + \dots + B_m(z) f_m(z))) \dots,$$

где  $B_k(z)$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) — функция Бляшке для последовательности  $Z_k$ , а  $f_k(z) \in \lambda_\infty \{Z_k\}$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ).

Доказательство. Положим

$$f_1(z) = f(z) - B_1(z) \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_1(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \quad (6)$$

Так как последовательность  $\{z_k\}_1^\infty$  удовлетворяет условию (3), то (см. [8], [5])

$$\tilde{f}_1(z) = \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_1(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \in H^\infty.$$

Потому  $f_1(z) \in H^\infty$  и

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{f_1(\zeta)}{B_1(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \equiv 0, \text{ при } |z| < 1.$$

Следовательно,  $f_1(z) \in \lambda_\infty \{Z_1\}$ .

Из (6) также имеем

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{\tilde{f}_1(\zeta)}{\tilde{B}_1(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta) - f_1(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \equiv 0,$$

где  $\tilde{B}_1(z)$  — произведение Бляшке с нулями из последовательности  $\bar{Z}_1$ . Поэтому  $\tilde{f}_1(z) \in \lambda_\infty \{\bar{Z}_1\}$ . Повторяя эти рассуждения для функции  $\tilde{f}_1(z)$  относительно остальных последовательностей  $\bar{Z}_k$  ( $k > 2$ ), получаем доказательство леммы.

3. Как известно, если последовательность  $\{z_k\}_1^\infty$  удовлетворяет условию (1), то последовательность  $\{r_k(z)\}_1^\infty$  обладает биортогональной системой. В работе [9] построен аналитический аппарат для определения биортогональных систем  $\Delta_k(z)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), когда кратности чисел  $z_k$  являются произвольными числами. В частном случае, когда кратности чисел  $z_k$  равны единице, имеем

$$\Omega_k(z) = \frac{B(z) (1 - |z_k|^2)^{-1}}{(z - z_k) B'(z_k)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

**Лемма 4.** Пусть последовательность  $Z = \{z_k\}_1^\infty$  удовлетворяет условиям (3) и (5), тогда любая функция  $f(z) \in \lambda_- \{Z\}$  имеет радиальное предельное значение в каждой точке единичной окружности.

**Доказательство.** Так как последовательность  $Z = \{z_k\}_1^\infty$  удовлетворяет условию (5), то функцию  $\bar{f}(z)$  можно представить в виде (см. [7])

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{f}(z_k)}{\Delta_k} \cdot \frac{1 - |z_k|^2}{1 - \bar{z}_k z},$$

где

$$\Delta_k = \prod_{j \neq k} \frac{z_j - z_k}{1 - \bar{z}_j z_k} \frac{|z_j|}{z_j}, \quad |\Delta_k| > \delta > 0, \quad (k=1, 2, \dots). \quad (7)$$

На радиусе  $z = re^{i\theta_0}$  ( $0 < r < 1$ ) имеем

$$f(re^{i\theta_0}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{f}(z_k)(1 - |z_k|^2)}{\Delta_k(1 - \bar{z}_k re^{i\theta_0})}. \quad (8)$$

Но справедлива оценка

$$\frac{1 - |z_k|^2}{|1 - \bar{z}_k re^{i\theta_0}|} \leq 2 \frac{1 - |z_k|^2}{|1 - \bar{z}_k e^{i\theta_0}|}.$$

Поэтому функциональный ряд (8) мажорируется сходящимся числовым рядом. Следовательно, функция  $f(z)$  в точке  $e^{i\theta_0}$  имеет радиальное предельное значение.

**Теорема 1.** Пусть  $f(z) \in \lambda_- \{Z\}$  и  $Z = \{z_k\}_1^\infty$  удовлетворяет условию (4). Тогда в каждой точке единичной окружности функция  $f(z)$  имеет радиальное предельное значение.

**Доказательство.** Так как последовательность  $\{z_k\}_1^\infty$  удовлетворяет условию (3), то по теореме Фростмана [10] функции  $B_k(z)$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) имеют радиальные предельные значения в каждой точке единичной окружности. Поэтому доказательство теоремы следует из лемм 2 и 3.

4. Пусть теперь последовательность  $Z = \{z_k\}_1^\infty$  удовлетворяет условию (4). Докажем лемму.

**Лемма 5.** Если  $f(z) \in \lambda_- \{Z\}$ , то для коэффициентов Фурье  $\hat{f}(n)$  функции  $f(z)$  будем иметь

$$\hat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n=1, 2, \dots). \quad (9)$$

**Доказательство.** Из (4) следует, что последовательность  $\{z_k\}_1^\infty$  удовлетворяет также условию (5) (см. [11]), следовательно,  $\bar{f}(z)$  можно представить в виде

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{f}(z_k)}{\Delta_k} \cdot \frac{1 - |z_k|^2}{1 - \bar{z}_k z}, \quad (10)$$

где числа  $\Delta_k$  определяются из (7).

Дифференцируя равенство (9), будем иметь

$$f^{(n)}(z) = n! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{f}(\bar{z}_k)}{\Delta_k} \cdot \frac{(1 - |z_k|^2) \bar{z}_k^n}{(1 - \bar{z}_k z)^{n+1}}$$

и поэтому, учитывая лемму 11 из [12], получим

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(n)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{f}(\bar{z}_k)}{\Delta_k} (1 - |z_k|^2) \bar{z}_k^n \right| \leq \\ &\leq \frac{M}{\delta} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|^2) |z_k|^n = O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

**Теорема 2.** Пусть  $f(z) \in \lambda_{-}[Z]$  и последовательность  $\{z_k\}_1^{\infty}$  удовлетворяет условиям (3) и (4). Тогда ряд Фурье функции  $f(z)$  сходится в каждой точке единичной окружности.

**Доказательство.** Так как по теореме 1 функция  $f(z)$  имеет радиальное предельное значение в каждой точке единичной окружности, то утверждение теоремы следует из леммы 5 и из теоремы Литтльвуда [13].

Ереванский политехнический  
институт им. К. Маркса

Поступила 9.IV.1987

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. Разложение по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 2, № 1, 1967, 3—51.
2. Г. Ц. Тумаркин. Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 4, № 1, 1969, 9—31.
3. Г. М. Айрапетян. О базисе рациональных функций в подпространствах классов  $H^p$  ( $1 < p < \infty$ ), Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 6, 1973, 439—450.
4. А. Б. Александров. Инвариантные подпространства оператора обратного сдвига в пространстве  $H^p$  ( $p \in (0, 1)$ ), ЛОМИ, 92, 1979.
5. S. V. Hrušcov, S. A. Vinogradov. Inner functions and multipliers of Cauchy type integrals, LOMI, preprints, E—I—80, Leningrad, 1980.
6. P. L. Duren. Theory of  $H^p$  spaces, NY—London, 1970.
7. Дж. Гарнет. Ограниченные аналитические функции, М., 1984.
8. Г. М. Айрапетян. Об интерполяции в подклассах  $H^1$  и  $H^{\infty}$  и некоторые вопросы, связанные с интегралом Коши, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XIII, 5—6, 1978, 448—459.
9. М. М. Джрбашян. Биортогональные системы рациональных функций и представление ядра Коши, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 5, 1973, 384—409.
10. Э. Коллингвуд, А. Ловатер. Теория предельных множеств, М., 1971.
11. К. Гoffman. Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963.
12. С. А. Виноградов, В. П. Хавин. Свободная интерполяция в  $H^p$  и в некоторых других классах функций, 1, ЛОМИ, 56, 1976, 12—58.
13. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, М., 1965.

## ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

|                                                                                                                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Ի. Հ. Խաչատրյան, Ս. Ա. Հափորյան. Միտտագ-Լեֆլերի կորիզներով ինտեգրալ ձևափոխությանը ներկայացվող ֆունկցիաների քվադրանալիտիկ դասեր . . . . .                        | 199 |
| Ա. Է. Զրբաշյան, Ա. Հ. Կարապետյան. Ինտեգրալ անհավասարություններ համալուծ պլուրիհարմոնիկ ֆունկցիաների միջև բազմաչափ տիրույթներում . . . . .                       | 216 |
| Գ. Մ. Գուրբեն. Միտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների ընտանիքների բազիսությունը, Զրբաշյանի ձևափոխությունները և Կոշիի տիպի ինտեգրալների կշռային գնահատականներ . . . . . | 237 |
| Յու. Ա. Կուտոյանց. Փոքր աղմուկով դինամիկական համակարգերի նույնականացման մեկ խնդրի մասին . . . . .                                                               | 270 |
| Ա. Ս. Աղաբաբյան. Մեմիելիպտիկ օպերատորի մոդուլով ամենափոքր սեփական արժեքի գնահատականը . . . . .                                                                  | 286 |

## ՀԱՄԱՌՈՑ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

|                                                                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Վ. Ա. Սկվարցով. Բազմաչափ Հաարի շարքի միակության վերաբերյալ մի թևորեմի մասին . . . . .                                             | 293 |
| Հ. Մ. Հայրապետյան. Սեռոված բեռներով ուղիղաձիգ կոտորակների ոչ լրիվ համակարգով ծնվող ֆունկցիաների եզրային արժեքների մասին . . . . . | 297 |

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                            |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| И. О. Хачатрян, С. А. Акопян. Квазианалитические классы функций, представимых интегралами с ядрами Миттаг—Леффлера . . . . .               | 199 |
| А. Э. Зрбашян, А. О. Карапетян. Интегральные неравенства между сопряжениями плюригармоническими функциями в многомерных областях . . . . . | 216 |
| Г. М. Губреев. Базисность семейств функций типа Маттаг—Леффлера, преобразования Зрбашяна и весовые оценки интегралов типа Коши . . . . .   | 237 |
| Ю. А. Кутоянц. Об одной задаче идентификации динамических систем с малым шумом . . . . .                                                   | 270 |
| А. С. Агабабян. Об оценке снизу наименьшего по модулю собственного значения семиналлиптического оператора . . . . .                        | 286 |

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

|                                                                                                                                         |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| В. А. Скворцов. Об одной теореме единственности для многомерного ряда Хаара . . . . .                                                   | 293 |
| Г. М. Айрапетян. О граничных значениях функций, порожденных неполными системами рациональных дробей с фиксированными полюсами . . . . . | 297 |

## C O N T E N T S

|                                                                                                                                                       |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>I. H. Khachatryan, S. A. Hakobyan.</i> Quasianalytical classes of functions representable by integrals with Mittag—Leffler kernels . . . . .       | 199 |
| <i>A. E. Djrbashian, A. H. Karapetian.</i> Integral inequalities between conjugate pluriharmonic functions in multidimensional domains . . . . .      | 216 |
| <i>G. M. Gubreev.</i> Basisity of systems of Mittag—Leffler type, the Djrbashian transforms and weighted estimate for Cauchy type integrals . . . . . | 237 |
| <i>Y. A. Katoyants.</i> On a problem of dynamical systems with small noise identification . . . . .                                                   | 270 |
| <i>A. S. Aghababian.</i> The estimation of the slammost eigenvalue of semielliptic operator . . . . .                                                 | 286 |

## SHORT COMMUNICATIONS

|                                                                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>V. A. Skvortsov.</i> On a uniqueness theorem for multidimensional Haar series                                        | 293 |
| <i>H. M. Atrapetian.</i> On boundary values of functions generated by incomplete system of rational fractions . . . . . | 297 |