ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке), а кратких сообщений—не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны; для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

Ռ ՄԵ
1988.

Գինը 1 ռ. 20 կ.
ЦЕНА 1 Р. 20 К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contribttors who desire to have their articles published in the proceedings zvestia of the Academy of Sciences of the Armenien S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:]

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initals and name, the title of the book, the place of publication, the publisher tbe date muse be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to indicated by a numeral in square brackets properey inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article shoule contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitied ot twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 1, 1988 Математика

УДК 517.956

Г. Р. ОГАНЕСЯН

О ВЕСОВЫХ ЗАДАЧАХ КОШИ И ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ НА ГРАНИЦЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 1. Введение

1°. Постановка задачи. Пусть $q(t)$ — положительная функция класса $C^2(]0, T])$, $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ — оператор Лапласа, $\Omega = \{(t, x), t \in]0, T[, x \in R^n\}$, $\Omega_T = \{(t, x), t = T, x \in R^n\}$.

Для сингулярного эллиптического уравнения

$$[\partial_t^2 + \Delta - q(t)]u = f(t, x), \quad q(+0) = \infty, \quad (t, x) \in \Omega, \tag{1.1}$$

краевая задача с данными Дирихле на границе $\partial\Omega$ полосы Ω в классе дважды непрерывно дифференцируемых внутри и непрерывных вплоть до границы функций, вообще говоря, неразрешима, так как однозначно разрешима задача Дирихле с краевыми условиями на части Ω_T границы ([1]).

Для сингулярного гиперболического уравнения ($a(t)$ — комплекснозначная функция)

$$[\partial_t^2 - \Delta + a(t)]u = f(t, x), \quad |a(+0)| = \infty, \quad (t, x) \in \Omega, \tag{1.2}$$

решение обычной задачи Коши с данными на гиперплоскости $t=0$ неединственно. Например, при $a = -\frac{2}{t^2}$ нетривиальным решением однородной задачи Коши в Ω является функция $u = t^2$.

В подобных ситуациях в книгах [2], [3] и статьях [4]—[10], [16] рассматривались весовые постановки задач Дирихле и Коши в классах неограниченных (на сингулярной части границы) функций.

В настоящей статье предлагается новая постановка начальной и краевой задач, обобщающая известные весовые постановки. При этом краевые условия задаются (в терминах преобразования Фурье искомого решения (сравнить с [11])) в кокасательном расслоении $T^*\Omega$, а затем опускаются на $\partial\Omega$.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор вида

$$L = L(t, \partial_t, D) = \partial_t^m + \sum_{k=0}^{m-2} A_k(t, D)\partial_t^k, \tag{1.3}$$

где $D = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, а $A_k(t, D)$ — произвольные линейные дифференциальные операторы (вообще говоря, бесконечного порядка), с коэффициентами, непрерывно зависящими от t в $]0, T]$, символы которых — целые аналитические функции от $\xi \in (R^n)'$ при фиксированном $t \in]0, T]$.

Обозначим через $\varphi(t, \xi) = [\varphi_1(t, \xi), \cdots, \varphi_m(t, \xi)]$ фундаментальную систему решений (ф. с. р.) уравнения

$$\hat{L}\hat{u}(t, \xi) \equiv \left[\partial_t^m + \sum_{k=0}^{m-2} A_k(t, \xi)\partial_t^k\right]\hat{u}(t, \xi) = 0, \tag{1.4}$$

полученного из (1.3) применением x-преобразования Фурье. Общее решение (1.4) запишется в виде

$$\hat{u}(t, \xi) = \sum_{k=1}^{m} c_k(\xi)\varphi_k(t, \xi). \tag{1.5}$$

Дифференцируя это представление j раз по t $(j=0, 1, \cdots, m-1)$ и разрешая полученную систему уравнений относительно функций $c_k(\xi)$, получим

$$c_k(\xi) = O_k(\hat{u}), \ k = 1, \cdots, m, \tag{1.6}$$

где

$$O_k(\hat{u}) = \frac{1}{W(\varphi)} \cdot W(\varphi_1, \cdots, \varphi_{k-1}, \hat{u}, \varphi_{k+1}, \cdots, \varphi_m), \tag{1.7}$$

$$O_\varphi(\hat{u}) = (O_1(\hat{u}), \cdots, O_m(\hat{u})),$$

а вронскиан

$$W(\varphi) = W(\varphi_1, \cdots, \varphi_m) = \det \|\partial_t^{k-1}\varphi_j\|_{k, j=1}^m$$

не зависит от ξ и не обращается в нуль (такая ф. с. р. существует в силу формулы Лиувилля и вида уравнения (1.4)).

Если задать данные Коши при $t = +0$ в $T^*\Omega$ в виде

$$\lim_{t \to +0} O_\varphi(\hat{u}) = \hat{g}(\xi), \tag{1.8}$$

где $\hat{g}(\xi)$ — произвольные заданные вектор-функции, то $\hat{u}$ определяется однозначно (из (1.5), (1.6)) по формуле

$$\hat{u}(t, \xi) = \sum_{k=1}^{m} \hat{g}_k(\xi)\varphi_k(t, \xi). \tag{1.9}$$

З а м е ч а н и е 1.1. Из (1.9) следует инвариантность постановки задачи (1.8) относительно мультипликативного преобразования $\hat{u} \to b(t)\hat{u}$, $b(t)$ — функция класса $C^m(]0, T])$, которая может иметь особенность при $t = 0$, и замены переменной $\tau = w(t)$, $w(t) \in C^m(]0, T])$, которая может быть вырожденной при $t = 0$.

З а м е ч а н и е 1.2. Если $\psi(t, \xi)$, $\varphi(t, \xi)$ — две ф. с. р. уравнения (1.4), принадлежащие классу $C^m(]0, T], A)$ (здесь $A = A(R^n_\xi)$ — класс целых аналитических функций), то данные $O_\varphi(\hat{u})$ взаимно однозначно определяют данные $O_\psi(\hat{u})$, точнее существует целая аналитическая невырожденная матрица $F(\xi)$ такая, что

$$\psi(t, \xi) = F(\xi)\,\varphi(t, \xi) \text{ и } O_\varphi(\hat{u}) = {}^{tr}F(\xi)\,O_\psi(\hat{u}).$$

При этом операторы O_φ, $O_\psi : u \mapsto g(x)$ эквивалентны т. е. коммутативна диаграмма (пространства $H^{\pm\infty}$ определяются ниже в п. 2)

$$\begin{array}{ccc} & (\operatorname{Ker} L) \cap C^m(]0, T[, H^{\pm\infty}) & \\ O_\psi \downarrow & & \downarrow O_\varphi \\ \prod\limits_{j=1}^{m} H^{\pm\infty} & \xrightarrow{{}^{tr}F(D)} & \prod\limits_{j=1}^{m} H^{\pm\infty}. \end{array}$$

Замечание 1.3. Имея в виду упрощение оператора $O(u)$ в дальнейшем, полезно отметить, что его изменение на бесконечно малую (при $t \to 0$) величину не влияет на постановку задачи (1.8).

2°. Теорема Коши — Ковалевской для уравнений с особенностью. Пусть $a(\xi)$ — целая аналитическая функция вида

$$a(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \xi^\alpha, \quad a_\alpha \geqslant 0, \tag{1.10}$$

где α — мультииндекс, $\xi \in (R^n)'$.

Следуя Ю. А. Дубинскому [13] определим пространство H^∞ как множество комплекснозначных функций $f(x) \in L_2(R^n)$ таких, что для любых функций вида (1.10) конечен интеграл

$$\int a(\xi)\,|\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi < \infty. \tag{1.11}$$

Через $H^{-\infty}$ обозначим совокупность всех линейных непрерывных функционалов, определенных на основном пространстве H^∞.

Пространства $H^{\pm\infty}$ инвариантны относительно дифференциальных операторов бесконечного порядка $B(D)$ с аналитическими в $(R^n)'$ символами (см. [13]). По предположению $A_k(t, \xi) \in C(]0, T], A)$, поэтому из теории обыкновенных дифференциальных уравнений имеем $\varphi_j(t, \xi) \in C^m(]0, T], A)$. Сопоставим каждой функции $\varphi_j(t, \xi)$ дифференциальный оператор бесконечного порядка

$$\varphi_j(t, D)\,f(x) = \int e^{ix\xi}\,\varphi_j(t, \xi)\,\hat{f}(\xi)\,d\xi, \quad f \in H^\infty,$$

который действует непрерывно в H^∞. Выберем ф. с. р. $\varphi(t, \xi)$ так, чтобы вронскиан $W(\varphi)$ не зависел от ξ.

Обозначим через $O(u) = (O_1(u), \cdots, O_m(u))$ начальный оператор, определяемый формулами

$$O_k(u) = \frac{1}{W(\varphi)}\, W(\varphi_1, D), \cdots, \varphi_{k-1}(t, D), \overset{1}{u}, \varphi_{k+1}(t, D), \cdots, \varphi_m(t, D)),$$

$$k = 1, \cdots, m, \tag{1.12}$$

здесь единица над u — обозначение Фейнмана—Маслова, например, $\overset{1}{u}\,\overset{2}{B}(D)\,\overset{3}{A}(D) = A(D)\,B(D)\,u$.

Теорема 1. *Для любых* $g(x)\in\prod_{j=1}^{m}H^{\infty}$ $\left(\text{или } g(x)\in\prod_{j=1}^{m}H^{-\infty}\right)$ *существует единственное решение* $u\in C^{m}(]0,\ T],\ H^{\infty})$ $(u\in C^{m}(]0,\ T],\ H^{\infty})$ *задачи Коши*

$$Lu=0,\ (t,\ x)\in\Omega, \tag{1.13}$$

$$\lim_{t\to+0} O(u)=g(x)=(g_1(x),\cdots,\ g_m(x)). \tag{1.14}$$

Пример 1.1. Единственное решение задачи Коши $(m=1)$

$$u_t-\lambda'(t)u_x+a'(t)u(t,\ x)=0,\ t>0,\ x\in R^1,$$

$$\lim_{t\to+0} O(u)=g(x)\in H^{\infty},$$

$$O(u)=[\exp(a(t)-i\lambda(t)D)]\,u(t,\ x),\quad D=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x},$$

имеет вид $u=g(x+\lambda(t))\exp[-a(t)]$. Отметим, что эта задача имеет смысл, даже если функции $a'(t)$, $\lambda'(t)$ имеют при $t=0$ неинтегрируемые особенности, например $a(t)=t^{-5}$, $\lambda(t)=it^{-6}$. Если $a'(t)$, $\lambda'(t)\in$ $\in L_1[0,\ T]$, то разность $O(u)-u$ стремится к нулю при $t\to 0$ и мы получаем обычную задачу Коши (см. замечание 1.3 пункта 1).

Теорема 1 малоэффективна, так как для постановки задачи (1.14) необходимо знать ф. с. р. двойственного уравнения. Следует ожидать, что в тех случаях, когда известна двойная асимптотика ф. с. р. при $t\to 0$ и $\xi\to\infty$, постановку задачи (1.14) можно упростить. Мы осуществим этот план для эллиптического уравнения с особенностью, заменив задачу Коши весовой задачей Дирихле (см. п. 3°).

3°. Эллиптический случай. Весовая задача Дирихле. Рассмотрим уравнение (1.1). Пусть $q(t)$ — вещественная, положительная функция класса $C^2(]0,\ T])$ такая, что выполнены следующие условия:

$$q_0=\inf_{t\in]0,\ T]}|q(t)|>0, \tag{1.15}$$

$$\rho_0=\int_0^T\left(\frac{|q''(\tau)|}{8q^{3/2}}+\frac{5|q'(\tau)|^2}{32q^{5/2}}\right)d\tau<\infty, \tag{1.16}$$

$$|q'(t)q^{-\frac{3}{2}}(t)|<4\gamma_0,\quad \gamma_0=\frac{2}{(2e^{2\rho_0}-1)^2}-1, \tag{1.17}$$

$$\int_0^T\sqrt{q(s)}\,ds=\infty \tag{1.18}$$

Введем вспомогательные весовые функции

$$\mu_k(t)=q^{\frac{1}{4}-\frac{k}{2}}(t)d(t),\quad d(t)=\exp\int_T^t\sqrt{q(\tau)}\,d\tau, \tag{1.19}$$

пространство $Q(H^s)$ — пополнение $C^\infty(\Omega)$-функций по норме

$$|u|_Q^2 = \sup_{t\in]0,\,T]} \sum_{k=0}^{2} \mu_k^2(t) \|\partial_t^k u\|_{s-\alpha}^2, \tag{1.20}$$

и пространство $B(H^s)$ — пополнение $C^\infty(R_+^{n+1})$-функций по норме

$$|u|_B^2 = \sup_{t\in]0,\,\infty[} \sum_{k=0}^{2} \sigma_k^2(t) \|\partial_t^k u\|_{s-\alpha}^2, \tag{1.21}$$

здесь $\|\cdot\|_s$ — норма пространства Соболева $H^s = H^s(R_x^n)$,

$$\alpha = \begin{cases} 0, & k=0, \\ \frac{1}{2}, & k=1, \\ \frac{3}{2}, & k=2, \end{cases} \qquad \sigma_k(t) = \begin{cases} \mu_k(t), & t\leqslant T, \\ 1, & t>T. \end{cases} \tag{1.22}$$

Теорема 2. *В условиях* (1.15)—(1.18) *весовая задача Дирихле*

$$u_{tt} + \Delta u = q(t)\,u + f(t,\,x),\ (t,\,x)\in\Omega, \tag{1.1}$$

$$\lim_{t\to+0} \|\mu_0(t)\,u(t,\,x) - \Phi_1(x)\| = 0, \tag{1.23}$$

$$\lim_{t\to T-0} \|u(t,\,x) - \Phi_2(x)\| = 0, \tag{1.24}$$

при

$$\Phi_1\in H^s,\ \Phi_2\in H^{s+\frac{1}{2}},\ f(t,\,x)\,q^{-\frac{1}{4}}(t)\in C([0,\,T],\,H^s),\ s\geqslant \frac{3}{2}$$

имеет единственное решение $u\in Q(H^s)$ *причем справедливы оценки*

$$|u|_Q^2 \leqslant c\left\{\|\Phi_1\|_s^2 + \|\Phi_2\|_{s+\frac{1}{2}}^2 + \int_0^T \frac{\|f(\tau,\,x)\|_s^2}{\sqrt{q(\tau)}}\,d\tau + \sup_{t\in]0,\,T]}\left[\frac{d^2(t)\|f\|_s^2}{q^{3/2}(t)}\right]\right\}, \tag{1.25}$$

где постоянная c *зависит только от* q_0 *и* ρ_0 (см. (1.15) *и* (1.16)).

Замечание 1.4. Если $f\equiv 0$, то $4\gamma_0$ в (1.17) можно заменить произвольной постоянной.

Рассмотрим задачу Дирихле для однородного уравнения (1.1) в полупространстве $R_+^{n+1} = \{(t,\,x),\ t>0,\ x\in R^n\}$. Пусть $q(t)$ — вещественная, положительная функция класса $C^2(]0,\,\infty[)$, удовлетворяющая для некоторого $T>0$ условиям (1.15), (1.16) и

$$\int_T^\infty |q(\tau)|\,d\tau \leqslant M < \infty, \tag{1.26}$$

$$q'(t)\,q^{-\frac{3}{2}}(t) < N < \infty,\ t\in]0,\,T], \tag{1.27}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{dt}{\sqrt{q(t)}} \geqslant \sqrt{\frac{8}{q_0}}. \tag{1.28}$$

Теорема 3. *В условиях* (1.15), (1.16), (1.26)—(1.28) *весовая задача Дирихле*

$$u_{tt}+\Delta u=q(t)u,\ q(0)=\infty,\ (t,x)\in R_+^{n+1},$$
$$\lim_{t\to+0}\|\mu_0(t)u(t,x)-\Phi(x)\|=0, \tag{1.29}$$

имеет единственное решение, причем справедливы оценки

$$|u|_B\leqslant c\|\Phi\|_s, \tag{1.30}$$

где постоянная с зависит только от q_0, M, N.

Пример 1.2. Если ρ, δ, σ — положительные постоянные и $p>2$, $\delta>2$, то функции

$$\frac{\rho}{t^\delta},\ \frac{\rho}{t^2}|\ln t|^p,\ \exp\left(\frac{\rho}{t^\sigma}\right)$$

удовлетворяют условиям (1.5)—(1.18) теоремы 2.

Пример 1.3. Функция

$$q(t)=\rho t^{-2\delta}(1+t^\gamma)^2,\ \delta>1,\ \frac{1}{2}<\delta-\gamma<1,\ \rho>0$$

удовлетворяет условиям (1.15), (1.16), (1.26)—(1.28) теоремы 3.

Пример 1.4. Уравнение

$$u_{tt}+\lambda^2(t)u_{xx}=q_1(t)u+\sigma_1(t)\Lambda u+b(t)u_t+f(t,x), \tag{1.31}$$

$\lambda(0)=0$. $b(0)=q_1(0)=\infty$, Λ — п. д. о. с символом $<\xi>=\sqrt{1+|\xi|^2}$, преобразованием

$$\tau=\int_0^t\lambda(s)ds,\ u=\mu(t)w(\tau,x)\ \mu(t)=\lambda^{-\frac{1}{2}}(t)\exp\left\{\int_a^t\left(\frac{b(s)}{2}\right)ds\right\}$$

сводится к уравнению

$$w_{\tau\tau}+w_{xx}=\sigma(t)\Lambda w+q(t)w+\frac{f(t,x)}{\mu\lambda^2(t)}, \tag{1.32}$$

или, применением x-преобразования Фурье к уравнению

$$\hat{w}_{\tau\tau}=Q\hat{w}+\frac{\hat{f}}{\mu\lambda^2},\ Q=|\xi|^2+\sigma(t)<\xi>+q(t),$$

где

$$\sigma(t)=\frac{\sigma_1(t)}{\lambda^2(t)},\ q(t)=\lambda^{-2}\left(q_1+\frac{b^2}{4}-\frac{b_t}{2}+\frac{\lambda_{tt}}{2\lambda}-\frac{3\lambda_t^2}{4\lambda^2}\right).$$

К уравнению (1.32) при $\sigma\equiv0$ применимы теоремы 2, 3. При $\sigma\geqslant0$ и некоторых дополнительных условиях для уравнения (1.32) можно доказать аналоги теорем 2, 3.

Замечание 1.5. Если функция $p(t,x)$ подчинена $q(t)$, т. е. выполнено условие

$$\|p\|_s^2<q_0\cdot q(t)\cdot d^2(t), \tag{1.33}$$

то теорема 2 остается справедливой и для уравнения

$$[\partial_t^2 + \Delta - q(t) - p(t, x)]u = f(t, x), \text{ при малом } T. \quad (1.34)$$

Замечание 1.6. Пусть функция $q(t) + b(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Для того, чтобы решение весовой задачи Дирихле для возмущенного уравнения

$$u_{tt} + \Delta u = [q(t) + b(t)]u(t, x), \ q(0) = \infty, \ t, x) \in \Omega, \quad (1.35)$$

$\lim\limits_{t\to+0} \mu_0 u = \Phi_1(x)$, $\lim\limits_{t\to T-0} u = \Phi_2(x)$ (поточечная сходимость) было единственным необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t\to 0} \sqrt[4]{\frac{q(t)}{q(t)+b(t)}} \exp \int\limits_t^T \frac{b(\tau)\, d\tau}{\sqrt{q(\tau)} + \sqrt{q(\tau)+b(\tau)}} \neq 0. \quad (1.36)$$

Например, для функций $q = t^{-4}$, $b = -t^{-3}$, $t^{-3}/\ln t$ условие (1.36) нарушено, а для функций $q = t^{-4}$, $b = t^{-3}$, $t^{-3}/\ln^2 t$ выполнено.

Замечание 1.7. Если $q(t) \in L_1[0, T]$, то для уравнения (1.1) корректна обычная задача Дирихле (без веса).

§ 2. Доказательство теоремы

Доказательство теоремы 1 проводится аналогично доказательству соответствующей теоремы из [13] (см. § 5).

I случай: $g(x) \in \prod\limits_{j=1}^m H^\infty$. Так как решение u начальной задачи (1.13), (1.14) мы ищем в классе $C^m(]0, T], H^\infty)$, то существует x-преобразование Фурье решения $\hat{u}(t, \xi) \in C^m(]0, T], L_{2\text{comp}}(R_x^n))$. Далее из (1.5), (1.6), (1.14) получаем явную формулу для решения

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(t, D) g_j(x). \quad (2.1)$$

Если $g \in \prod\limits_{j=1}^m H^{\pm\infty}$, то эта формула имеет смысл (так как $\varphi_j(t, \xi) \in$ $\in C^m(]0, T], A)$, то $\varphi_j(t, D)\colon H^{\pm\infty} \to H^{\pm\infty}$). Непосредственно проверяется, что функция (2.1) удовлетворяет уравнению $Lu = 0$. Начальные условия (1.14) следуют из операторного тождества

$$O(u) = O\left(\sum_{j=1}^m \varphi_j(t, D) g_j(x)\right) = g(x). \quad (2.2)$$

Итак теорема существования в этом случае доказана.

Единственность решения при фиксированной ф. с. р. очевидна.

II случай: $g(x) \in \prod\limits_{j=1}^m H^{-\infty}$. Покажем, что и в этом случае решение задачи (1.13), (1.14) опять задается формулой (2.1), имеющей смысл и в этом случае. Начальные условия следуют из тождества (2.2). Действие оператора $A(t, D)$ в $H^{-\infty}$ определяется формулой

$$\langle A(t, D)u, v\rangle = \langle u, A(t, -D)v\rangle, \; u(x)\in H^{-\infty}, \; v(x)\in H^{\infty}, \quad (2.3)$$

поэтому для любой функции $v(x)\in H^{\infty}$, в силу $\varphi_j(t, \xi)\in \operatorname{Ker}\widetilde{L}$, имеем

$$\langle Lu, v\rangle = \sum_{j=1}^{m}\langle \partial_t\varphi_j(t, D) + \sum_{k=0}^{m-2}A_k(t, D)\,\partial_t^k\varphi_j(t, D)\Big|\Phi_j(x), v\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\langle \Phi_j(x), \Big|\partial_t^m\varphi_j(t, -D) + \sum_{k=0}^{m-2}A_k(t, -D)\,\partial_t^k\varphi_j(t, -D)\Big| v\rangle = 0,$$

откуда следует, что $Lu=0$. Для доказательства единственности заметим, что из предположения $u(\cdot, x)$, $\Phi(x)\in H^{-\infty}$ следует существование x-преобрзазований Фурье этих функций $\widehat{u}(\cdot, \xi), \widehat{\Phi}(\xi)\in$ $\in L_{2\,loc}(R^n_\xi)$ и уравнение $Lu=0$ эквивалентно уравнению $\widehat{L}\widehat{u}=0$, из которого следует единственность, ввиду формул (1.5), (1.6).

Доказательство замечания 1.1 Инвариантность оператора $O(u)$ относительно преобразования $\varphi\to b(t)\varphi$, $u(t, x)\to b(t)u$ следует из формулы $O_{b\varphi}(\widehat{bu}) = O_\varphi(\widehat{u})$, которая, в свою очередь, следует из свойства вронскиана $W(b\varphi_1, \cdots, b\varphi_m) = b^m(t)\,W(\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$.

Преобразованием $\tau = w(t)$, $w_t'\neq 0$ при $t\in\,]0, T]$ ф. с. р. $\varphi(t, \xi)$ преобразуется в ф. с. р. $\psi(\tau, \xi)\equiv\varphi(w^{-1}(\tau), \xi)$. Пусть $\widehat{v}(\tau, \xi) = \widehat{u}\times$ $\times(w^{-1}(\tau), \xi)$. Инвариатность оператора $O_\varphi(\widehat{v})$ следует из соотношения $O_\varphi(\widehat{u}) = O_\psi(\widehat{v})$ (здесь $W(\psi) = \det\|\partial_\tau^{k-1}\psi_j\|_{k, j=1}^m$).

Доказательство замечания 1.2. Так как φ и ψ—ф. с. р. уравнения $\widehat{L}\widehat{u}=0$, то существует невырожденная матрица $F(\xi)$ такая, что $\psi(t, \xi) = F(\xi)\,\varphi(t, \xi)$. Дифференцируя это равенство $s-1$ раз по t, получим систему $\partial_t^{s-1}\psi_k = F_{kj}(\xi)\,\partial_t^{s-1}\varphi_j$, $s, k, j=1,\cdots, m$, из которой получаем явное выражение для матрицы $F(\xi)$:

$$F_{kj}(\xi) = \frac{1}{W(\varphi)}\,W(\varphi_1, \cdots, \varphi_{j-1}, \psi_k, \varphi_{j+1}, \cdots, \varphi_m), \; k, j=1,\cdots, m. \quad (2.4)$$

Из этой формулы следует аналитичность $F(\xi)$ при $m\geqslant 2$ и $\xi\in(R^n)'$.

При $m=1$ скалярная функция $F(\xi)$ находится из соотношения

$$F(\xi) = \frac{\psi(t, \xi)}{\varphi(t, \xi)} = \frac{\psi(\tau, \xi)}{\varphi(\tau, \xi)}, \; t, \tau\in\,]0, T].$$

Если при $\xi=\xi_0$ аналитичность $F(\xi)$ нарушается, то $\varphi(t, \xi_0)=0$ для всех $t\in\,]0, T]$, что невозможно, так как $\varphi(t, \xi)$ — ф. с. р..

Остальная часть замечания 1.2 слудует из формул

$$W(\psi) = (\det F)\cdot W(\varphi),$$

$$O_\varphi(\widehat{u}) = ({}^{tr}F)\cdot O_\psi(\widehat{u}),$$

§ 3. ВКБ-оценки. Доказательство теоремы 2

Применяя к уравнению (1.1) x-преобразование Фурье

$$\hat{u}(t, \xi) = \int e^{-ix\xi} u(t, x)\, dx,$$

получим вспомогательное обыкновенное дифференциальное уравнение с параметром ξ:

$$\hat{u}_{tt} - Q(t, \xi)\hat{u} = \hat{f}(t, \xi), \ t \in]0, T[, \tag{3.1}$$

$$Q(t, \xi) = |\xi|^2 + q(t), \ |\xi|^2 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2. \tag{3.2}$$

Пусть функция $Q(t)$ комплекснозначна, дважды непрерывно дифференцируема на $]0, T]$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$Q(t) \neq 0, \ t \in]0, T], \tag{3.3}$$

существует ветвь корня $\sqrt{Q}$ класса $C^2(]0, T])$, такая, что

$$\operatorname{Re}\sqrt{Q} > 0. \tag{3.4}$$

Ввведем обозначения

$$S(t, T) = \int_t^T \sqrt{Q(\tau)}\, d\tau, \ \rho(t, T) = \left| \int_t^T \left| \frac{Q_{\tau\tau}}{8Q^{3/2}} - \frac{5Q_\tau^2}{32Q^{5/2}} \right| (\tau)\, d\tau \right|, \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered} \delta_1(t, T) = 2[-1 + \exp\{\rho(t, T)\}], \\ \delta_2(t, T) = \delta_1(t, T) + \left| \frac{Q_t}{4Q^{3/2}}(t) \right| \cdot [1 + \delta_1(t, T)], \end{gathered} \tag{3.6}$$

$$\begin{gathered} \psi_1^0(t) = Q^{-\frac{1}{4}}(t) \exp\{-S(t, T)\}, \\ \psi_2^0(t) = Q^{-\frac{1}{4}}(t) \exp\{S(t, T)\}. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Хорошо известна следующая (см., например, [12])

Лемма 3.1. *В условиях* (3.3)—(3.4) *и*

$$\rho(0, t) < \infty, \ \rho(t, T) < \infty, \ t \in]0, T[, \tag{3.8}$$

уравнение $\psi''(t) = Q(t)\psi$ *имеет решения* $\psi_{1,2}(t)$ *такие, что при* $t \in]0, T]$, $j = 1, 2$ *справедливы ВКБ-оценки*:

$$\left| \frac{\psi_j(t)}{\psi_j^0(t)} - 1 \right| \leqslant \delta_1(t, T\delta_{j2}), \ \left| \frac{\psi_{jt}(t)}{\sqrt{Q}\psi_j^0(t)} - (-1)^j \right| \leqslant \delta_2(t, T\delta_{j2}), \tag{3.9}$$

здесь δ_{jk} — символ Кронеккера.

Замечание 3.1. Функции $\psi_{1,2}(t)$, существование которых утверждается в лемме 3.1, линейно независимы, если

$$\left| \frac{Q_t}{4Q^{3/2}}(t) \right| < \gamma_0, \ t \in]0, T], \tag{3.10}$$

где постоянная γ_0 определяется формулой (1.17) с заменой $q(t)$ на $Q(t)$.

Условия (3.8) леммы 3.1 можно огрубить, потребовав выполнения условия (1.16), так как $\rho(0, t) \leqslant \rho_0$, $\rho(t, T) \leqslant \rho_0$.

Итак, в условиях (1.15)—(1.17) к уравнению

$$[\partial_t^2 - |\xi|^2 - q(t)]\varphi(t, \xi) = 0 \tag{3.11}$$

можно применить лемму 3.1, из которой следует существование ф. с. р. $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ уравнения (3.11) такой, что имеют место оценки

$$\left|\frac{\varphi_j(t, \xi)}{\varphi_j^0(t, \xi)} - 1\right| \leqslant \delta_1(t, T\delta_{j2}), \quad \left|\frac{\varphi_{jt}}{\varphi_j^0\sqrt{Q}} - (-1)^j\right| \leqslant \delta_2(t, T\delta_{j2}), \; j=1, 2; \tag{3.12}$$

здесь в отличие от (3.7), мы используем регуляризованные ВКБ-решения уравнения (3.11):

$$\varphi_{1,2}^0(t, \xi) = Q^{-\frac{1}{4}}(t, \xi) \exp\left\{\pm\int_t^T \sqrt{q(s)}\,ds \pm \int_0^t [\sqrt{q(s)} - \sqrt{Q(s, \xi)}]\,ds\right\}. \tag{3.13}$$

Общее решение уравнения (3.1) можно записать в виде

$$u(t, \xi) = C_1(\xi)\varphi_1(t, \xi) + C_2(\xi)\varphi_2(t, \xi) + \hat{V}(t, \xi), \tag{3.14}$$

$$\hat{V}(t, \xi) = \frac{1}{W(\varphi_2, \varphi_1)}\left[\varphi_1(t, \xi)\int_0^t \varphi_2 \hat{f}(\tau, \xi)\,d\tau + \varphi_2(t, \xi)\int_t^T \varphi_1 \hat{f}(\tau, \xi)\,d\tau\right]. \tag{3.15}$$

Из условия (1.18) следует, что

$$\lim_{t\to+0} \mu_0(t)\varphi_1^0(t, \xi) = 1, \quad \lim_{t\to+0} \mu_0(t)\,\varphi_2^0(t, \xi) = 0 \tag{3.16}$$

и (ввиду (3.12))

$$\lim_{t\to0} \mu_0(t)\varphi_1(t, \xi) = 1, \quad \lim_{t\to+0} \mu_0(t)\varphi_2(t, \xi) = 0. \tag{3.17}$$

Поэтому при условии

$$f(t, x)\,q^{-\frac{1}{4}}(t) \in C([0, T], H^s), \quad W(\varphi_1, \varphi_2) = 1 \tag{3.18}$$

подставляя (3.14) в краевые условия (1.23), (1.24) формально получим соотношения

$$\lim_{t\to+0} \mu_0(t)\,\hat{u}(t, \xi) = C_1(\xi) = \hat{\Phi}_1(\xi),$$

$$\hat{u}(T, \xi) = \left[C_1(\xi) - \int_0^T \varphi_2 \hat{f}(\tau, \xi)\,d\tau\right]\varphi_1(T, \xi) + C_2(\xi)\varphi_2(T, \xi) = \hat{\Phi}_2(\xi),$$

из которых находим функции $C_{1,2}(\xi)$. Подставив полученные формулы в (3.14) и дифференцируя k раз по t, получим ($k = 0, 1, 2$)

$$\partial_t^k \hat{u} = \hat{\Phi}_1 \partial_t^k \varphi_1 + \partial_t^k \hat{V} + \frac{\partial_t^k \varphi_2(t, \xi)}{\varphi_2(T, \xi)}\left[\hat{\Phi}_2 + \varphi_1(T, \xi)\left(\int_0^T \varphi_2 \hat{f}\,d\tau - \hat{\Phi}_1\right)\right], \tag{3.19}$$

где, ввиду (3.15)

$$\hat{V}_t = \frac{1}{W(\varphi_2, \varphi_1)} \left[\varphi_{1t}(t, \xi) \int_0^t \varphi_2 \hat{f}(\tau, \xi)\, d\tau + \varphi_{2t}(t, \xi) \int_t^T \varphi_1 \hat{f}(\tau, \xi)\, d\tau \right], \quad (3.20)$$

$$\hat{V}_{tt} = Q(t, \xi)\, \hat{V} + \hat{f}(t, \xi).$$

Перейдем к получению коэрцитивных оценок.

Обозначив

$$<\xi> = \sqrt{1 + \frac{|\xi|^2}{q_0}}, \ \lambda_0(\tau, t) = \exp\left\{ - \left| \int_\tau^t \sqrt{q(s)}\, ds \right| \right\} \quad (3.21)$$

ввиду (1.15), получаем

$$\max\{q_0 <\xi>^2, \ q(t)\} \leqslant Q(t, \xi) \leqslant q(t) <\xi>^2, \quad (3.22)$$

$$Q^{\frac{k}{2} - \frac{1}{4}}(t, \xi) \leqslant q^{\frac{k}{2} - \frac{1}{4}}(t) <\xi>^{\alpha}, \ k = 0, 1, 2. \quad (3.23)$$

Из ВКБ-оценок (3.12) получаем при $k = 0, 1, 2$

$$\partial_t^k \varphi_1(t, \xi) \ll Q^{\frac{k}{2}} \varphi_1^0 \ll \frac{Q^{\frac{k}{2} - \frac{1}{4}}}{d(t)} \exp\left\{ \int_0^t (\sqrt{q} - \sqrt{Q})\, ds \right\} \ll \frac{<\xi>^{\alpha}}{\mu_k(t)}^{*}. \quad (3.24)$$

Далее при $t < \tau < T$, $k = 0, 1, 2$ имеем оценки

$$\varphi_2(\tau, \xi)\, \partial_t^k \varphi_2(t, \xi) \ll \frac{\lambda_0(\tau, t) <\xi>^{\alpha} q^{\frac{k}{4} - \frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{Q(\tau)}}, \quad (3.25)$$

а при $0 < \tau < t$ — оценки

$$\varphi_2(\tau, \xi)\, \partial_t^k \varphi_1(t, \xi) \ll \frac{\lambda_0(\tau, t) <\xi>^{\alpha}}{\sqrt[4]{Q(\tau)}} \cdot q^{\frac{k}{4} - \frac{1}{2}}. \quad (3.26)$$

Далее из (3.12) имеем $\varphi_2(T, \xi) = \varphi_2^0(T, \xi)$, поэтому

$$\frac{\partial_t^k \varphi_2(t, \xi)}{\varphi_2(T, \xi)} \ll Q^{\frac{1}{4}}(T, \xi)\, Q^{\frac{k}{2} - \frac{1}{4}}(t, \xi) \exp \int_T^t \sqrt{Q(s)}\, ds \ll d(t) \times$$

$$\times <\xi>^{k} q^{\frac{k}{2} - \frac{1}{4}}. \quad (3.27)$$

Из оценок (3.22)—(3.27) и представления (3.19) получаем при $t \in]0, T]$ оценки ($k = 0, 1, 2$)

$$\begin{aligned} \mu_k(t)\, \partial_t^k \hat{u} \ll |\hat{\Phi}_1| \cdot <\xi>^{\alpha} + d^2(t) <\xi>^{k} |\hat{\Phi}_2| + \\ + d(t)\, \delta_{k2} \cdot |\hat{f}(t, \xi)| \cdot q^{-\frac{1}{4}}(t) + d(t) <\xi>^{\alpha} \int_0^T \frac{|\hat{f}(\tau, \xi)|}{\sqrt[4]{q(\tau)}}\, d\tau, \end{aligned} \quad (3.28)$$

из которых применением формулы Планшереля получаем априорные оценки

---

* Для функций $f(x)$, $g(x)$ на пространстве X мы пишем, следуя И. М. Виноградову, $f \ll g$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что $|f(x)| < C\, |g(x)|$ для всех $x \in X$.

$$
\mu_k^2(t)\,\|\partial_t^k u\|^2_{s-\alpha} \ll \|\Phi_1\|_s^2 + d^1(t)\,\|\Phi_2\|^2_{k-\alpha+s} + \tag{3.29}
$$

$$
+ d^2(t)\int_0^T \frac{\|f(\tau, x)\|_s^2}{\sqrt{q(\tau)}}\,d\tau + \frac{d^2(t)}{q^{3/2}(t)}\,\delta_{k2}\|f(t, x)\|^2_{s-\frac{3}{2}},
$$

из которых следует оценка (1.25) и утверждение единственности решения.

Докажем существование решения задачи (1.1), (1.23), (1.24). Из формулы (3.19), применяя обратное преобразование Фурье, получаем формальную формулу для решения искомой задачи:

$$
u(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}\Big\{ \widehat{V}(t, \xi) + \widehat{\Phi}_1(\xi)\,\varphi_1(t, \xi) + \tag{3.30}
$$

$$
+ \frac{\varphi_2(t, \xi)}{\varphi_2(T, \xi)}\Big| \widehat{\Phi}_2(\xi) + \varphi_1(T, \xi)\Big(\int_0^T \varphi_2 \widehat{f}(\tau, \xi)\,d\tau - \widehat{\Phi}_1(\xi)\Big)\Big|\Big\}\,d\xi.
$$

Если $\Phi_{1,2} \in C_0^\infty(R^n_x)$, $f(t, x)\,q^{-\frac{1}{4}}(t) \in C([0, T], C_0^\infty)$, то эта формула имеет смысл и является решением задачи (1.1), (1.23), (1.24). Действительно, в силу теоремы Пэли—Винера, интегралы в (3.30) сходятся, уравнение (1.1) проверяется непосредственной подстановкой, а проверка начальных условий следует из формулы Планшереля и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Например,

$$
\lim_{t \to +0} \|\mu_0 u - \Phi_1\|^2 = \lim_{t \to +0} \|\mu_0 \widehat{u} - \widehat{\Phi}_1\|^2 = 0.
$$

Если же $\Phi_1 \in H^s$, $\Phi_2 \in H^{s+\frac{1}{2}}$, $f q^{-\frac{1}{4}} \in C([0, T], H^s)$, то приближая эти функции $C_0^\infty(R^n_x)$-функциями, существование решения искомой задачи получаем предельным переходом в оценке (1.25).

§ 4. Доказательство теоремы 3

Асимптотическое поведение ф. с. р. уравнения

$$
\widehat{u}_{tt} = (q(t) + |\xi|^2)\,\widehat{u}(t, \xi) \tag{4.1}
$$

при больших t описывается следующей леммой (см. [14], с. 450):

Лемма 4.1. *Пусть в уравнении* (4.1) $|\xi| > 0$ *и* $q(t)$ — *вещественная непрерывная функция, определенная при больших* t *и удовлетворяющая условию*

$$
\int_T^\infty |q(\tau)|\,d\tau \leqslant M < \infty \tag{4.2}
$$

для некоторого $T > 0$. *Тогда уравнение* (4.1) *имеет решения* $u_0(t)$, $u_1(t)$ *такие, что равномерно по* $|\xi|$

$$\lim_{t\to\infty} (u_0 - \exp(-t|\xi|)) = \lim_{t\to\infty} [u_0'(t) + |\xi| \exp(-t|\xi|)] = 0,$$
$$\lim_{t\to\infty} [u_1 - \exp(t|\xi|)] = \lim_{t\to\infty} [u_1'(t) - |\xi| \exp(t|\xi|)] = 0. \tag{43}$$

Отметим, что условие (4.2) леммы 4.1 можно ослабить (см. [14]).

В условиях теоремы 3, общее решение уравнения (4.1) (растущее при $\xi\to\infty$ не быстрее полинома) запишется в виде

$$\hat{u}(t, \xi) = \begin{cases} C_1(\xi)\varphi_1(t, \xi) - C_2(\xi)\varphi_2(t, \xi), & t < T, \\ C_3(\xi)\psi(t, \xi), & t > T, \end{cases} \tag{4.4}$$

где

$$\lim_{t\to\infty} [\psi - 2\exp(-t|\xi|)] = \lim_{t\to\infty} [\psi_t + 2|\xi| \exp(-t|\xi|)] = 0, \tag{4.5}$$

а $\varphi_1(t, \xi)$, $\varphi_2(t, \xi)$ удовлетворяют оценкам (3.12). Так как решение $\hat{u}(t, \xi)$ должно быть дважды непрерывно дифференцируемым по t, то получаем следующие условия склейки при $t = T$:

$$\begin{aligned} &C_1(\xi)\varphi_1(T, \xi) - C_2(\xi)\varphi_2(T, \xi) = C_3(\xi)\psi(T, \xi), \\ &C_1(\xi)\varphi_{1t}(T, \xi) - C_2(\xi)\varphi_{2t}(T, \xi) = C_3(\xi)\psi_t(T, \xi), \\ &C_1(\xi)\varphi_{1tt}(T, \xi) - C_2(\xi)\varphi_{2tt}(T, \xi) = C_3(\xi)\psi_{tt}(T, \xi). \end{aligned} \tag{4.6}$$

В силу того, что функции ψ, φ_1, φ_2 удовлетворяют уравнению (4.1) и $q(T) > 0$, третье из соотношений (4.6) вытекает из первого. Из первых двух соотношений (4.6) получаем

$$C_2(\xi) = \frac{\psi\varphi_{1t} - \psi_t\varphi_1}{\psi\varphi_{2t} - \psi_t\varphi_2} C_1 = \frac{W(\psi, \varphi_1)}{W(\psi, \varphi_2)} C_1(\xi), \quad C_3(\xi) = \frac{W(\varphi_1, \varphi_2)}{W(\psi, \varphi_2)} C_1(\xi). \tag{4.7}$$

Итак, общее решение уравнения (4.1) ($C_1(\xi)$ мы заменили на $\hat{\Phi}(\xi)$) имеет вид

$$\hat{u}(t, \xi) = \begin{cases} \left[\varphi_1(t, \xi) - \dfrac{W(\psi, \varphi_1)}{W(\psi, \varphi_2)} \varphi_2(t, \xi)\right] \hat{\Phi}(\xi), & t \leqslant T, \\ \dfrac{W(\varphi_1, \varphi_2)}{W(\psi, \varphi_2)} \hat{\Phi}(\xi)\psi(t, \xi), & t \geqslant T. \end{cases} \tag{4.8}$$

Перейдем к получению априорных оценок. Оценим вронскиан $W(\psi, \varphi_2)$ снизу при больших $|\xi|$. Выбрав T достаточно большим, из (4.5) имеем

$$\psi(t, \xi) \geqslant \exp(-t|\xi|), \quad -\psi_t(t, \xi) \geqslant |\xi| \exp(-t|\xi|), \quad t \in [T, \infty[. \tag{4.9}$$

Далее из (3.12)

$$\varphi_2(T, \xi) = \varphi_2^0(T, \xi) \geqslant q^{-\frac{1}{4}}(T) <\xi>^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\int_0^T \frac{|\xi|^2\, dt}{\sqrt{q} + \sqrt{Q}}\right), \tag{4.10}$$

$$\frac{\varphi_{2t}(T, \xi)}{\varphi_2^0(T, \xi)\sqrt{Q(T, \xi)}} - 1 \geqslant -\frac{|Q_t|}{4Q^{3/2}}(T, \xi). \tag{4.11}$$

Из условия (1.28) следует при $|\xi| > \sqrt{q_0}$ оценка

$$\int_0^T \frac{|\xi|\,dt}{\sqrt{Q}+\sqrt{q}} = \int_0^T \frac{2|\xi|}{1+\sqrt{1+\frac{1}{q}|\xi|^2}}\,\frac{dt}{2\sqrt{q}} > \sqrt{\frac{a_0}{8}}\int_0^T \frac{dt}{\sqrt{q(t)}} > T,$$

поэтому

$$W(\psi,\varphi_2)|_{t=T} \geqslant \varphi_2^0(T,\xi)\,e^{-T|\xi|}\left[\sqrt{Q(T,\xi)} - \frac{|Q_t|}{4Q}(T,\xi)+|\xi|\right] \geqslant \tag{4.12}$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{|\xi|}}{2}\exp\left\{|\xi|\left(\int_0^T \frac{|\xi|\,dt}{\sqrt{Q}+\sqrt{q}} - T\right)\right\} \geqslant \frac{\sqrt{<\xi>}}{2}.$$

Докажем оценку

$$|W(\psi,\varphi_2)| \geqslant c > 0, \text{ при } |\xi| < \eta, \tag{4.13}$$

где η — достаточно большая постоянная. При фиксированном $\xi = \xi_0$ вронскиан $W(\psi, \varphi_2) \neq 0$, иначе существовало бы $b(\xi_0)$ такое, что $\psi(t, \xi_0) = b(\xi_0)\,\varphi_2(t, \xi_0)$, а это означало бы существование решения $\psi(t, \xi)$, равного $+0$ при $t = +0$ и $t = +\infty$ ($\psi \to 0$ при $t \to \infty$ и $\varphi_2 \to +0$ при $t \to 0$) и поэтому имеющего локальный положительный максимум, что ввиду условия $Q(t) = \psi_{tt}/\psi > 0$ невозможно. Тогда $|W(\psi, \varphi_2)| > 0$ и в некоторой окрестности ξ_0. Неравенство $|W(\psi, \varphi_2)| \geqslant c$ можно распространить на весь компакт $|\xi| \leqslant \eta$, покрыв его малыми окрестностями, в каждом из которых справедливо это неравенство.

Объединив (4.12) и (4.13), мы получаем

$$|W(\psi,\varphi_2)| \geqslant c\sqrt{<\xi>}. \tag{4.14}$$

Аналогично неравенству (4.12) доказываются оценки:

$$|W(\psi,\varphi_1)|_{t=T} \ll \sqrt{<\xi>}\exp\left\{\int_0^T(\sqrt{q}-\sqrt{Q})\,d\tau - T|\xi|\right\}, \tag{4.15}$$

$$|W(\varphi_1,\varphi_2)|_{t=T} \ll \frac{1}{<\xi>^{\frac{3}{2}}}, \tag{4.16}$$

$$\partial_t^k \varphi_2(t,\xi) \ll \frac{d^2(t)}{\mu_k(t)}<\xi>^{\alpha}\exp\left\{\int_0^T(\sqrt{Q}-\sqrt{q})\,d\tau\right\}. \tag{4.17}$$

Дифференцируя решение (4.8) k раз по t, получаем, с учетом (4.5), (4.14)—(4.17), (3.24) при $k = 0, 1, 2$, оценки

$$\partial_t^k \hat{u} \ll \begin{cases}\left[\exp\left(\int_0^t(\sqrt{q}-\sqrt{Q})\,d\tau\right)+d^2(t)\exp(-T|\xi|)\right]\dfrac{<\xi>^{\alpha}|\hat{\Phi}(|\xi|)}{\mu_k(t)}, & t \leqslant T,\\[2ex] |\hat{\Phi}(\xi)|<\xi>^{-\frac{7}{2}}\exp(-t|\xi|), & t > T.\end{cases} \tag{4.18}$$

Выбрасывая фигурирующие здесь экспоненты, получаем:

$$\sigma_k^2(t)\,|\partial_t^k \widehat{u}(t,\xi)|^2 \ll |\widehat{\Phi}(\xi)| < \xi >^{2\alpha},\quad t\in\,]0,\infty[, \tag{4.19}$$

откуда и следует оценка (1.30) (интегрированием по ξ и применением формулы Планшереля).

Окончание доказательства теоремы 3 мы опускаем, так как оно аналогично доказательству теоремы 2.

Замечание 4.1. Полученные нами оценки (1.30) грубее обычных коэрцитивных оценок для эллиптических операторов (в нашей оценке (1.30) есть потеря гладкости $\frac{1}{2}$ по сравнению с обычными оценками для классической задачи Дирихле в полупространстве).

Чтобы получить более тонкие оценки, чем (1.30) необходимо заменить условие (1.28) более жестким условием

$$\sqrt{\frac{q_0}{2}}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{q(\tau)}} \geqslant ct^\beta,\ t\in\,]0,T],\ \beta\geqslant 1. \tag{4.20}$$

Тогда из (4.18) получаем при $t\in\,]0,\infty[$, $k=0,1,2$ оценки

$$\sigma_k(t)\,\partial_t^k \widehat{u} \ll |\widehat{\Phi}(\xi)| < \xi >^\alpha \left[\exp\left(-\frac{c}{2}|\xi|t^\beta\right)+\exp(-t|\xi|)\right], \tag{4.21}$$

из которых, ввиду формулы

$$\int_0^\infty \tau^{\alpha-1} e^{-\beta\tau}\,d\tau = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha},$$

получаем

$$\int_0^\infty \sigma_k^2(t)\,|\partial_t^k \widehat{u}|^2\,dt \ll |\widehat{\Phi}(\xi)|^2 < \xi >^{2\alpha-\frac{1}{\beta}}, \tag{4.22}$$

или, интегрированием по ξ и применением формулы Планшереля, получаем обещанную более тонкую, чем (1.30) оценку

$$\sum_{k=0}^2 \int_0^\infty \sigma_k^2(t)\,\|\partial_t^k u\|^2_{s-\alpha+\frac{1}{2\beta}}\,dt \ll \|\Phi\|_s^2. \tag{4.23}$$

Доказательство замечания 1.5. Заменив в оценках (1.25) $f(t,x)$ на $f(t,x)+p(t,x)\,u(t,x)$ получаем оценку

$$\sum_{k=0}^2 \mu_k^2(t)\,\|\partial_t^k u\|^2_{s-\alpha} \ll \|\Phi_1\|_s^2 + \|\Phi_2\|^2_{s+\frac{1}{2}} + \int_0^T \frac{\|f+pu\|_s^2}{\sqrt{q(\tau)}}\,d\tau +$$

$$+\sup_{]0,T]}\left[\frac{d^2(t)}{q^{3/2}(t)}\left(\|f\|^2_{s-\frac{3}{2}}+\|pu\|^2_{s-\frac{3}{2}}\right)\right],$$

из которой, в условии (1.33), применением леммы Гронуолла получаем оценку (1.25) для уравнения (1.34).

Теорема единственности для уравнения (1.34) следует из неравенства (1.25), а теорему существования мы докажем методом последовательных приближений:

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \quad u_0 = \omega_0,$$

$$[\partial_t^2 + \Delta - q(t)]\,\omega_0 = f(t, x),$$

$$[\partial_t^2 + \Delta - q(t)]\,\omega_n = p\omega_{n-1} + f(t, x),$$

здесь вспомогательные функции

$$u_n = \omega_n - \omega_{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

удовлетворяют уравнениям

$$[\partial_t^2 + \Delta - q(t)]\,u_n = pu_{n-1}$$

с нулевыми данными Дирихле (1.23), (1.24).

Из оценок (3.29) при $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ имеем

$$\sum_{k=0}^{2} \| q^{\frac{1}{4} - \frac{k}{2}} \partial_t^k u_{n+1} \|_{s-k}^2 \ll \frac{\|pu_n\|_s^2}{q^{3/2}} + \int_0^T \frac{\|pu_n\|_s^2}{\sqrt{(q(\tau)}}\, d\tau, \tag{4.24}$$

а при $k=0$ имеем (интегрированием (3.29) при $k=0$):

$$\int_0^T \|\mu_0 u_0\|_s^2\, dt \leqslant cT \left[\|\Phi_1\|_s^2 + \|\Phi_2\|_s^2 + \int_0^T \frac{\|f(\tau, x)\|_s^2}{\sqrt{q(\tau)}}\, d\tau \right]. \tag{4.25}$$

Далее, ввиду (1.33)

$$\frac{\|pu_n\|_s^2}{q_0 \sqrt{q}} \leqslant \sqrt{q(t)}\, \|u_n\|_s^2 < c \int_0^T \frac{\|pu_{n-1}\|_s^2}{\sqrt{q(\tau)}}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c^{n-1} q_0^{n-1} T^{n-2} \int_0^T \sqrt{q(\tau)}\, \|u_1\|_s^2\, d\tau \leqslant c^n q_0^n T^{n-1} \int_0^T \|\mu_0 u_0\|_s^2\, d\tau, \tag{4.26}$$

и при $T < \dfrac{1}{cq_0}$ сходимость ряда $u = \sum_0^{\infty} u_n$ следует из оценок

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2} \mu_k^2(t) \|\partial_t^k u_n\|_s^2 \leqslant c_1 d^2(t) \left[\|\Phi_1\|_s^2 + \|\Phi_2\|_s^2 + \int_0^T \frac{\|f(\tau, x)\|_s^2}{\sqrt{q(\tau)}}\, d\tau \right] \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} (cq_0 T)^n. \tag{4.27}$$

Доказательство замечания 1.6. Если функция $q(t) + b(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то общее решение уравнения (1.35) имеет вид осциллирующего интеграла (см. формулу (3.30)):

$$u(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} \left[\widehat{\Phi}_1(\xi)\, \varphi_1(t, \xi) + (\widehat{\Phi}_2(\xi) - \right.$$

$$\left. - \varphi_1(T, \xi)\, \widehat{\Phi}_1(\xi))\, \frac{\varphi_2(t, \xi)}{\varphi_2(T, \xi)} \right] d\xi, \tag{4.28}$$

где функции φ_1, φ_2 удовлетворяют оценкам (3.12) с заменой $q(t)$ на $q(t) + b(t)$. Обозначив

$$\mu_b(t) = (q + b)^{\frac{1}{4}} \exp\left\{ \int_T^t \sqrt{q + b}\,(\tau)\, d\tau \right\}, \tag{4.29}$$

имеем (см. (3.17)):

$$\lim_{t \to 0} \mu_b \varphi_1 = 1, \quad \lim_{t \to 0} \mu_b \varphi_2 = 0, \tag{4.30}$$

откуда применением теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем начальное условие

$$\lim_{t \to 0} [\mu_b(t)\, u(t, x)] = \Phi_1(x). \tag{4.31}$$

Если произвольная функция $\mu(t)$ такова, что существует предел $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\mu(t)}{\mu_b(t)}$, то имеет смысл начальное условие

$$\lim_{t \to 0} [\mu(t)\, u(t, x)] = \Phi_1(x), \tag{4.32}$$

причем для единственности решения задачи (1.1), (4.32), т. е. для того, чтобы

$$\text{из } \lim_{t \to 0} \mu u = 0 \text{ следовало } \Phi(x) = 0 \tag{4.33}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mu(t)}{\mu_b(t)} \neq 0. \tag{4.34}$$

Действительно, это утверждение следует из соотношения

$$0 = \lim_{t \to 0} \mu u = (\lim_{t \to 0} \mu_b u) \left(\lim_{t \to 0} \frac{\mu}{\mu_b} \right) = \Phi(x) \lim \frac{\mu}{\mu_b}\, .$$

В частности, если в качестве $\mu(t)$ выбрать весовую функцию $\mu_0 = q^{\frac{1}{4}}(t) \exp \int_T^t \sqrt{q(s)}\, ds$ невозмущенного уравнения $u_{tt} + \Delta u = q(t)\, u$, то условие (4.34) принимает вид (1.36).

В качестве примера, иллюстрирующего теорему 2, приведем решение краевой задачи

$$u_{tt} + u_{xx} = q(t)\, u, \; 0 < t < T, \; 0 < x < l, \; q(0) = \infty, \tag{4.35}$$

$$u(0; t) = u(\pi, t) = 0 \tag{4.36}$$

$$\lim_{t \to 0} \mu_0(t)\, u = f_1(x), \quad u(T, x) = f_2(x), \; x \in [0, l],$$

$$\mu_0(t) \equiv q^{\frac{1}{4}}(t) \exp \int_T^t \sqrt{q(s)}\, ds.$$

Методом разделения перемнных находим решение

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k v_k(t) + b_k w_k(t)] \sin kx$$

краевой задачи (4.35), (4.36). Здесь v_k, $w_k(t)$ — линейно независимые решения обыкновенных дифференциальных уравнений

$$v''(t) + q_k v(t) = 0, \quad q_k(t) \equiv q(t) + k^2.$$

В условиях ВКБ-леммы (см. [14], с. 450):

$$q(t) > 0, \; q(t) \in C^2\,]0, T], \; q^{-\frac{1}{4}}(q^{-\frac{1}{4}})'' \in L_1[0, T], \; \int_0^T \sqrt{q(s)}\, ds = \infty,$$

имеем

$$v_k(t) = [1 + \varepsilon_1(t)]\, q_k^{-\frac{1}{4}} \exp \int_T^t \sqrt{q_k(s)}\, ds, \quad \lim_{t \to 0} \varepsilon_j(t) = 0, \; j = 1, 2,$$

$$w_k(t) = [1 + \varepsilon_2(t)]\, q_k^{-\frac{1}{4}} \exp \left\{ \int_t^T \sqrt{q_k(s)}\, ds + \int_0^T (\sqrt{q} - \sqrt{q_k})\, ds \right\}.$$

Нетрудно показать, что при фиксированных k

$$\lim_{t \to 0} \mu v_k = 0, \quad \lim_{t \to 0} (w_k \cdot \mu) = 1.$$

Выбирая решения v_k, w_k так, чтобы $v_k(T) = 1$, $w_k(T) = 0$, из начальных условий

$$\lim_{t \to 0} \mu u = \sum_1^{\infty} b_k \sin kx = f_1(x), \quad u(T, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx = f_2(x),$$

найдем обычным способом коэффициенты a_k, b_k. Отметим, что ввиду $w_k(0) = \infty$ решение $u(t, x)$ при $t \to 0$ будет неограниченным.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 19.XII.1985

Գ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Կոշու կշռային և Դիրիխլեի խնդիրների մասին եզրին եզակիություն ունեցող մասնակի ածանցյալներով հավասարումների համար (*ամփոփում*)

Վերնագրում նշված հավասարումների համար կշռային Կոշու տվյալներով խնդրի համար ապացուցվում են Կոշի-Կովալևսկայայի տիպի թեորեմներ։

Էլիպտական հավասարման համար ապացուցվում է կշռային Դիրիխլեի խնդրի միարժեք լուծելիությունը և կոէրցիտիվ գնահատականները։

G. R. OGANESIAN. *Weighted Cauchy and Dirichlet probems for the singular differential equations* (summary)

In the paper versions of Cauchy—Kovalevskaya theorem for weighted initial value problems are proved.

For elliptic equation $u_{tt} + \Delta u = q(t)u$, $q(+0) = \infty$ in the domain $0 < t < T$, $x \in R^n$ the correctness of Dirichlet problem $\lim_{t \to 0} \{\mu(t)\, u(t, x)\} = \Phi_1(x)$, $u(T, x) = \Phi_2(x)$, $\mu = q^{1/4}(t) \exp \int_T^t \sqrt{q(s)}\, ds$ is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. В. Келдыш.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области, ДАН СССР, 77, № 2, 1951, 181—183.
2. *А. В. Бицадзе.* Уравнения смешанного типа, М., ВИНИТИ, 1959.
3. *С. А. Терсенов.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе, Новосибирск, НГУ, 1973.
4. *О. А. Олейник.* Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области, ДАН СССР, 87, № 6, 1952, 885—888.
5. *С. Г. Михлин.* Вырождающиеся эллиптические уравнения, Вестник ЛГУ, 3, № 8, 1954, 19—48.
6. *М. И. Вишик.* Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области, Мат. сб., 35 (77), № 3, 1954, 513—568.
7. *А. Б. Нерсесян.* Задача Коши для симметрической гиперболической системы, вырождающейся на начальной гиперплоскости, ДАН СССР, 196, № 2, 1971, 289—292.
8. *А. С. Калашников.* О некоторых задачах для линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами во всем пространстве и для одного класса вырождающихся уравнений в полупространстве, Мат. сб., 85 (127), № 2, 1971, 189—200.
9. *И. А. Киприянов.* Об одном классе сингулярных эллиптических операторов, Дифференц. уравнения, 7, № 11, 1971, 2066—2077.
10. *Г. Р. Оганесян.* О начальной задаче с заданными вронскианами, Изв. АН АрмССР, сер. матем., 15, № 4, 1980, 292—309.
11. *Г. В. Дикополов, Г. Е. Шилов.* О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве, Изв. АН СССР, сер. матем., 24, 1960. 369—380.
12. *М. В. Федорюк.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, М. «Наука», 1983.
13. *Ю. А. Дубинский.* Алгебра псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами и ее приложения к математической физике, УМН, 37, № 5, 1982, 97—137.
14. *Ф. Хартман.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., «Мир», 1970.
15. *A. Weinstein.* The singular solutions and the Cauchy problem for generalized Tricomi equations, Commun. pure and appl. math., VII, № 1, 105—116, 1954.
16. *H. Tahara.* Singular hyperbolic systems. III. On the Cauchy problem for fuchsian hyperbolic partial diff. equations, J. Fac. Sci. Univ, Tokyo, sec. 1A, v. 27, № 3, 1980, 465—507.
17. *F. Treves.* On the theory of linear partial diff. operators with analitic coefficients. Trans. Amer. Math. Soc., 137, 1969, 1—20.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 1, 1988 Математика

УДК 517.95

Г. А. КАРАПЕТЯН

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Рассматривается квазилинейный дифференциальный оператор дивергентного вида с младшими членами

$$Pu = \sum_{\alpha\in\varepsilon} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha (x, u(x), \cdots, D^{\gamma^1} u, \cdots, D^{\gamma^N} u) +$$

$$+ g_1(x, u) + g_2(x, u, \cdots, D^{\beta^1} u, \cdots, D^{\beta^M} u), \tag{0.1}$$

где $\varepsilon = \{\gamma^1, \cdots, \gamma^N\}$ — конечный набор мультииндексов, мультииндексы $\beta^1, \cdots, \beta^M$ в каком-то смысле „подчиняются“ мультииндексам $\{\gamma^1, \cdots, \gamma^N\}$, $x \in \Omega$, $\Omega \subset E_n$, вообще говоря, неограниченная область. Изучается вопрос о существовании (в некоторых случаях и единственности) слабого решения первой краевой задачи для уравнения $Pu = f$ в банаховых пространствах, порожденных оператором P. Пространства такого типа изучены С. М. Никольским (см., например, [1]). Подобные задачи для общих регулярных уравнений, без выделенных младших членов, изучались в работах [2], [3], а при наличии выделенных младших членов для эллиптичечких уравнений — в работах [4], [5], [6]. В настоящей заметке доказывается существование решения уравнеиия $Pu = f$ при более слабых ограничениях на коэффициенты исследуемого оператора, чем в работах [2], [3] и для более общих операторов, чем в [5], [6]. Тем самым настоящая работа является развитием и продолжением работ [2], [3], [5], [6].

Определение 0.1. Характеристическим многогранником (х. м.) для набора мультииндексов ε назовем наименьший выпуклый многогранник $\mathrm{N} = \mathrm{N}(\varepsilon)$ в E_n, содержащий все точки набора ε.

Определение 0.2. Многогранник N назовем полным, если N имеет вершину в начале координат и отличные от нее на каждой оси координат Z_n^+, где через Z_n^+ обозначено множество n-мерных мультииндексов, т. е. векторов с целыми неотрицательными компонентами.

Определение 0.3. Полный многогранник N назовем правильным, если оператор проектирования на координатные гиперплоскости любых измерений не выводит точки N.

Определение 0.4. Полный многогранник N назовем вполне правильным (в. п.), если внешние нормали $(n-1)$-мерных некоординатных граней N имеют лишь положительные координаты. Очевидно, что в. п. многогранник является правильным. Внутренность многогранника N обозначим через $\mathrm{N}^{(0)}$ и положим $\partial' \mathrm{N} = \mathrm{N} \setminus \mathrm{N}^{(0)}$.

Уточним теперь вид оператора (0.1). Пусть

$$Pu = Au + g_1(x, u) + g_2(x, u, D(u), \cdots, D^{\beta} u),$$

где

$$Au = \sum_{\alpha \in N} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} A_{\alpha}(x, u, D^{\gamma^1} u, \cdots, D^{\gamma^N} u),$$

$\beta \in N^{(0)}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $D^{\alpha} u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$ — обобщенные производные по С. Л. Соболеву. Далее ради кратности записи будем писать $A_{\alpha}(x, D(u))$ вместо $A_{\alpha}(x, u(x), Du, \cdots, D^{\gamma^1} u, \cdots, D^{\gamma^N} u)$.

Пусть х. м. N содержат мультииндексы $\alpha^1, \cdots, \alpha^N$. Положим $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_s)$, где ξ_i соответствует производным $D^{\alpha^i} u$ $(i = 1, \cdots, s)$, $\xi = (\eta, \zeta)$, где η соответствует производным D^{α} при $\alpha \in N^{(0)}$, ζ — производным D^{α} при $\alpha \in \partial' N$, $R_s = R_{s_1} \times R_{s_2}$, $\eta \in R_{s_2}$, $\zeta \in R_{s_1}$. Опишем банахово пространство, в котором будем изучать оператор (0.1). Пусть N — правильный х. м. набора ε. Обозначим через $W_p^N(\Omega)$ множество функций u, для которых $D^{\alpha} u \in L_p(\Omega)$ для всех $\alpha \in N$. Норму в пространстве $W_p^N(\Omega)$ введем по формуле

$$\|u\|_N = \sum_{\alpha \in N} \|D^{\alpha} u\|_{L_p(\Omega)}. \tag{0.2}$$

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega)$ замыкание множества $C_0^{\infty}(\Omega)$ по норме (0.2).

Определение 0.5. Пусть X и Y — нормированные пространства. Отображение $T: X \to Y$ называется деминепрерывным, если для любой последовательности $x_n \in X$, $x_n \to x_0$, $T(x_n \to T(x_0)$ (слабо сходится).

Отображение $T: X \to Y$ называется хеминепрерывным, если для всех

$$x, \omega \in X, \; T(x + t\omega) \to T(x), \text{ при } t \to 0.$$

Очевидно, что деминепрерывное отображение хеминепрерывно.

Определение 0.6. Отображение $T: X \to X^*$ называется коэрцитивным, если

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{(T(x), x)}{\|x\|} = +\infty.$$

Определение 0.7. Отображение $T: X \to X^*$ называется монотонным, если $(x - y, T(x) - T(y)) \geqslant 0$, $\forall x, y \in X$. Отображение T называется псевдомонотонным, если для произвольной последовательности $\{u_j\} \subset X$ такой, что $u_j \to u$, $T(u_j) - y$ в X^* и $\overline{\lim_{j \to \infty}} (T(u_j), u_j - u) \leqslant 0$ следует, что $y = T(u)$ и при $j \to \infty$ $(T(u_j), u_j - u) \to 0$.

Ниже будет показано, что хеминепрерывный монотонный оператор является псевдомонотонным (см. лемму 1.2).

§ 1. Квазилинейные регулярные операторы

Пусть $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Обозначим через

$$a(u, v) = \sum_{\alpha \in \mathrm{N}} \int_\Omega A_\alpha(x, D(u))\, D^\alpha v dx +$$
$$+ \int_\Omega g_1(x, u)\, v dx + \int_\Omega g_2(x, D(u)\, v dx \tag{1.1}$$

нелинейную форму Дирихле, отвечающую оператору (0.1).

Определение 1.1. *Пусть* $f \in (\overset{\circ}{W}{}_p^{\mathrm{N}}(\Omega))^*$. *Будем говорить, что функция* $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^{\mathrm{N}}(\Omega)$ *является слабым решением задачи Дирихле для уравнения* $Pu = f$ *с нулевыми начальными условиями, если*

$$a(u, v) = (f, v), \ \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.2}$$

Замечание. *В определении* 1.1 *вместо* $C_0^\infty(\Omega)$ *можно взять* $\overset{\circ}{W}{}_p^{\mathrm{N}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Ограничения на оператор A. Пусть оператор A удовлетворяет соотношениям:

A_0) Для любого $\alpha \in \mathrm{N}$, $A_\alpha(x, \xi): \Omega \times R_s \to R_1$ удовлетворяет условиям Каратеодори, т. е. для любого фиксированного $\xi \in R_s$ $A_\alpha(x, \xi)$ измеримо по x и непрерывно по ξ для любого фиксированного x.

A_1) Существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$|A_\alpha(x, \xi)| \leqslant C(|\xi|^{p-1} + |K(x, \xi)|, \ \forall x \in \Omega, \ \xi \in R_s, \ \alpha \in \mathrm{N}, \tag{1.3}$$

где $K(x, \xi)$ — измеримая функция, удовлетворяющая условию: если $\|u\|_{\mathrm{N}} \leqslant C_1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то существует постоянная $C_2 = C_2(C_1)$ такая, что

$$\int_\Omega |K(x, u, D^{\gamma_1} u, \cdots, D^{\gamma^N} u)|^q dx \leqslant C_2. \tag{1.4}$$

A_2) Оператор A коэрцитивен в $\overset{\circ}{W}{}_p^{\mathrm{N}}(\Omega)$.

A_3) Существует функция $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ и непрерывная по ρ при $R > 0$ функция $F(R, \rho)$, $\lim\limits_{\xi \to 0} \frac{F(R, \xi\rho)}{\xi} \to 0$ такая, что для любого $R > 0$ и $u, v \in \overset{\circ}{W}{}_p^{\mathrm{N}}(\Omega)$, $\|u\|_{\mathrm{N}} \leqslant R$, $\|v\|_{\mathrm{N}} \leqslant R$ справедливо соотношение

$$(A(u) - A(v), u - v) \geqslant -F(R, \|(u - v)\Psi\|_{\mathrm{N}(0)}). \tag{1.5}$$

Ограничения на g_1, g_2.

G_1) Для любых $x \in \Omega$, $\eta \in R_{s_1}$, $t \in R_1$

$$g_1(x, t) = p_1(x, t) + r_1(x, t), \tag{1.6}$$

$$g_2(x, \eta) = p_2(x, \eta) + r_2(x, \eta), \tag{1.7}$$

где $p_1, p_2, r_1, r_2, g_1, g_2$ удовлетворяют условию Каратеодори и

$$p_1(x, t)\,t \geqslant 0, \quad |r_1(x, t)| \leqslant h_1(x), \tag{1.8}$$

$$p_2(x, \eta)\,\eta_1 \geqslant 0, \quad |r_2(x, \eta)| \leqslant h_2(x), \tag{1.9}$$

а $h_1, h_2 \in L^q(\Omega) \cap L^1(\Omega)$.

Обозначим

$$g^*_{1,s}(x) = \sup_{|t|<s} |g_1(x, t)|, \quad g^*_{2,s}(x) = \sup_{|\eta|<s} |g_2(x, \eta)|.$$

G_2) $g^*_{1,s}, g^*_{2,s} \in L^1(\Omega)$ для любого $s: 0 \leqslant s < \infty$.

G_3) Если $\|u\|_{\mathrm{N}} \leqslant C_1$, $u \in \overset{\circ}{W}{}^{\mathrm{N}}_p(\Omega)$, то с некоторой постоянной $C_2 = C_2(C_1)$

$$\int_\Omega |g_2(x, u, \cdots, D^3 u)|\,|D^\alpha u(x)|\,dx \leqslant C_2, \quad \forall \alpha \in \mathrm{N}^{(0)}.$$

Ω_1) Область Ω удовлетворяет условию теорем вложения Соболева. В работе [1] С. М. Никольского выделены те граничные значения функций $f \in W^{\mathrm{N}}_p(\Omega)$, которые устойчиво оцениваются через норму $\|f\|_{\mathrm{N}}$. Точнее, в [1] выделено множество мультииндексов $\Lambda = \{\alpha\}$ (скелет) такое, что $D^\alpha f$ имеет след. Пусть область Ω, числа p, n и многогранник N удовлетворяют следующим условиям:

$$\Omega_2) \quad \overset{\circ}{W}{}^{\mathrm{N}}_p(\Omega) = \mathfrak{M} = \{f;\ D^\alpha f|_{\partial\Omega} = 0,\ \alpha \in \Lambda\}.$$

(Д. У) (Дополнительное условие) $W^{\mathrm{N}}_p(E_n) \subset C(E_n)$.

Предложение 1.1. *При условиях* Ω_1), Ω_2) *и (Д. У) для каждой функции* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{\mathrm{N}}_p(\Omega)$ *существует постоянная* $C > 0$ *и последовательность* $w_n \in \overset{\circ}{W}{}^{\mathrm{N}}_p(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *такие, что* $w_n \to u$ *в* $W^{\mathrm{N}}_p(\Omega)$ *и* $|w_n(x)| \leqslant C|u(x)|$ *на* Ω.

Доказательство. Сперва покажем, что для любой функции $u \in W^{\mathrm{N}}_p(E_n)$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует функция $w \in W^{\mathrm{N}}_p(E_n)$, $0 \leqslant w \leqslant 1$, $x \in E_n$ такая, что $(1-w)u \in W^{\mathrm{N}}_p(E_n) \cap L^\infty(E_n)$ и $\|wu\|_{\mathrm{N}} < \varepsilon$. Из (Д. У.) следует, что, если $u \in W^{\mathrm{N}}_p(E_n)$, то $u \in C(E_n) \cap L^\infty(E_n)$. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ существует число N такое, что $\|u\|_{\mathrm{N},\,(|x|>N)} < \varepsilon$.

Пусть $w \in C_0^\infty(E_n)$, $0 \leqslant w(x) \leqslant 1$, $w(x) = 0$ при $|x| \leqslant N$, $|x| \geqslant 2N$. Тогда, очевидно, $w \in W^{\mathrm{N}}_p(E_n)$, $\|wu\|_{\mathrm{N}} < \varepsilon$ и $|w(x)u(x)| \leqslant |u(x)|$. Следовательно, существует последовательность $w_n \in W^{\mathrm{N}}_p(E_n) \cap L^\infty(E_n)$ такая, что $w_n \to u$ в $W^{\mathrm{N}}_p(E_n)$ и $|w_n(x)| \leqslant C|u(x)|$.

Пусть теперь $u \in \overset{\circ}{W}{}^{\mathrm{N}}_p(\Omega)$. Из условия Ω_2 следует, что функцию u можно считать продолженной нулем на все пространство E_n, т. е. можно считать, что $u \in W^{\mathrm{N}}_p(E_n)$. Построим последовательность $\{w_j\}$ так, чтобы $(1-w_j)u \to u$ в $W^{\mathrm{N}}_p(\Omega)$. Тогда $(1-w_j)u \in W^{\mathrm{N}}_p(E_n) \cap L^\infty(E_n)$ и $|(1-w_j)u| \leqslant C|u(x)|$. Остается показать, что $(1-w_j)u \in \overset{\circ}{W}{}^{\mathrm{N}}_p(\Omega)$. Так как $u \in \overset{\circ}{W}{}^{\mathrm{N}}_p(\Omega)$, то из условия Ω_2) следует, что

$D^\alpha u|_{\partial\Omega}=0$, $\alpha\in\Lambda$. Отсюда по формуле Лейбница, с учетом правильности многогранника $\mathbf{N}$, получаем, что при $\alpha\in\Lambda$ $D^\alpha((1-\omega_j)u)|_{\partial\Omega}=0$. Предложение 1.1 доказано. Основным результатом настоящего пункта является

Теорема 1.1. *Если выполнены условия $A_0)-A_3)$, $G_1)-G_3)$, $\Omega_1)-\Omega_2)$, (Д. У), то для любого элемента $f\in(\overset{\circ}{W}{}_p^{\mathbf{N}}(\Omega))^*$ существует функция $u\in\overset{\circ}{W}{}_p^{\mathbf{N}}(\Omega)$, являющаяся слабым решением уривнения*

$$Pu=f, \tag{1.10}$$

такая, что $g_1(x,u)$, $g_2(x,u),\cdots$, $D^\beta u)$, $u[g_1(x,u)+g_2(x,D(u))\in$ $\in L^1(\Omega)$ и $(P(D)u,u)=(f,u)$.

При доказательстве используются следующие вспомогательные предложения.

Теорема 1.2. *(Г. Бревис [7]). Пусть X — рефлексивное банахово пространство, $A:X\to X^*$ — коэрцитивный ограниченный и непрерывный в конечномерных пространствах псевдомонотонный оператор. Тогда для любого $f\in X^*$ уравнение $Au=f$ имеет хотя ы одно ршениз $u\in X$. Эта теорема является аналагом соответствующей теоргмы для монотонных операторов (см., например, [8] т. 29.2).*

Лемма 1.1. *Если последовательность $\{u_n\}\subset\overset{\circ}{W}{}_p^{\mathbf{N}}(\Omega)$ слабо сходится к $u\in\overset{\circ}{W}{}_p^{\mathbf{N}}(\Omega)$, то существует подпоследовательность $\{u_n'\}$ последовательности $\{u_n\}$ такая, что для любого $\alpha\in\mathbf{N}^{(0)}$ $D^\alpha u_n'\to D^\alpha u$ почти всюду* (см. [3], лемма 1.3).

Лемма 1.2. *Пусть оператор $A:\overset{\circ}{W}{}_p^{\mathbf{N}}(\Omega)\to(\overset{\circ}{W}{}_p^{\mathbf{N}}(\Omega))^*$ хеминепрерывен и удовлетворяет условию $A_3)$, тогда A является псевдомонотонным оператором.*

Доказательство. Сначала покажем, что если $u_j\to u$ и

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}(A(u_j),\ u_j-u)\leqslant 0,$$

то для произвольного элемента $v\in\overset{\circ}{W}{}_p^{\mathbf{N}}(\Omega)$

$$(A(u),\ u-v)\leqslant\underline{\lim}\,(A(u_j),\ u_j-u).$$

Так как $u_j\to u$, то существует число $R>0$ такое, что $\|u_j\|_{\mathbf{N}}\leqslant R$ $\|u\|_{\mathbf{N}}\leqslant R$. Следовательно, из условия $A_3)$ имеем

$$(A(u_j)-A(u),\ u_j-u)\geqslant -F(R,\ \|(u_j-u)\Psi\|_{\mathbf{N}(0)}),$$

$$(A(u),\ u_j-u)\leqslant(A(u_j),\ u_j-u)+F(R,\ \|u_j-u)\Psi\|_{\mathbf{N}(0)}). \tag{1.11}$$

В силу того, что $\overset{\circ}{W}{}_p^{\mathbf{N}(0)}(\Omega)\subset W_p^{\mathbf{N}}(\Omega)$ (см. [3], лемму 1.3), то существует подпоследовательность $\{u_j'\}$ последовательности u_j такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\|(u_n'-u)\Psi\|_{\mathbf{N}(0)}=0.$$

Поэтому из определения функции F (см. условие A_3). следует, что

$$F(R, \|(u_j' - u)\Psi\|_{N(0)}) \to 0. \tag{1.12}$$

С другой стороны, так как $u_j' \to u$ и $(A(u), u_j' - u) \to 0$, то из соотношений (1.11) и (1.12) вытекает, что

$$\lim_{j\to\infty} (A(u_j'), u_j' - u) = 0. \tag{1.13}$$

Докажем, что соотношение (1.13) справедливо и для последовательности $\{u_j\}$. Допустив противное, получим, что из предложения

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} (A(u_j), u_j - u) \leqslant 0$$

следует

$$\lim_{j\to\infty} (A(u_j^*), u_j^* - u) = -d, \ 0 < d < \infty \tag{1.14}$$

для некоторой последовательности $\{u_j^*\}$.

Применяя соотношения (1.11), (1.12) для последовательности $u_j^* \to u$ получим, что для последовательности $\{u_j^{**}\} \subset \{u_j^*\}$ будет выполняться соотношение

$$\lim_{j\to\infty} (A(u_j^{**}), u_j^{**} - u) = 0,$$

противоречащее (1.14).

Следовательно

$$\lim_{j\to\infty} (A(u_j), u_j - u) = 0. \tag{1.15}$$

Заметим, что если оператор A хеминепрерывен, то отображение $t \in [0,1] \to A(u - tu + tv), u - v)$ непрерывно для произвольных $u, v \in X$. Воспользуемся теперь условием (1.5), положив $\omega = (1-t)u + tv$, $t \in [0,1]$, $v \in \mathring{W}_p^N(\Omega)$. Имеем

$$(A(u_j), u_j - u) + (A(u_j), tu - tv) - (A(u + tv - tu),$$
$$(u_j - u + tu - tv)) \geqslant -F(R, \|(u_j - u + tu - tv)\Psi\|_{N(0)}).$$

Отсюда и из (1.15) получим при $j \to \infty$

$$t(A(u - tu + tv), u - v) - F(R, \|t(u - v)\Psi\|_{N(0)}) \leqslant t \underline{\lim_{j\to\infty}} (A(u_j), u - v.)$$

Деля обе части последнего неравенства на t и считая, что $t \to 0$ получим

$$(A(u), u - v) \leqslant \underline{\lim_{j\to\infty}} (A(u_j), u - v).$$

С другой стороны, так как

$$(A(u_j), u_j - v) = (A(u_j), u_j - u) + (A(u_j), u - v),$$

то из (1.15) имеем

$$\underline{\lim_{j\to\infty}} (A(u_j), u_j - v) = \underline{\lim_{j\to\infty}} (A(u_j), (u - v)$$

и

$$(A(u), u - v) \leqslant \underline{\lim_{j\to\infty}} (A(u_j), u_j - v).$$

Если теперь $A(u_j) \to f$ в $(\overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega))^*$, то

$$\varliminf_{j\to\infty}(A(u_j),\ u_j - v) = \varliminf_{j\to\infty}(A(u_j),\ u - v) = (f,\ u - v)$$

и поэтому

$$(A(u),\ u - v) \leqslant (f,\ u - v),\ \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega).$$

Пусть $v = u - u_1$, $u_1 \in \overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega)$. Тогда $(A(u),\ u_1) \leqslant (f,\ u_1)$, а при $v = u + u_1$, $(A(u),\ u_1) \geqslant (f, u_1)$. Следовательно $A(u) = f$ в $(\overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega))^*$. Лемма 1.2 доказана.

Пусть $u,\ v \in \overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega)$

$$a(u,\ v) = \int\limits_\Omega \sum_{\alpha\in N} A_\alpha(x,\ D(u))\, D^\alpha v\, dx$$

— форма Дирихле, отвечающая оператору A.

Очевидно, что для фиксированной u $a(u,\ \cdot)$ является линейным, ограниченным функционалом. Определим оператор $T: \overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega) \to (\overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega))^*$ формулой $T(u) = a(u,\ \cdot)$.

Из условия A_1) следует, что $T(u)$ — ограниченный оператор.

Действительно, пусть $C > 0$ и $M = \{u \in \overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega), \|u\| \leqslant C\}$. Рассмотрим оператор $T(u)$ на множестве M

$$(T(u),\ v) = a(u,\ v) = \sum_{\alpha\in N}\int\limits_\Omega A_\alpha(x,\ D(u))\, D^\alpha v\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_1\Big(\sum_{\alpha\in N}\int\limits_\Omega\Big(\sum_{\beta\in N}|D^\beta u|^{p/q}|D^\alpha v|\Big)dx + \sum_{\alpha\in N}\int\limits_\Omega|K(x,\ D(u))||D^\alpha v|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant C_1\Big(\sum_{\alpha,\ \beta\in N}\|D^\beta u\|_{L_p(\Omega)}\cdot\|D^\alpha v\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{\alpha\in N}\int\limits_\Omega|K(x,\ D(u))|^q\,dx\,\cdot$$

$$\cdot\int\limits_\Omega|D^\alpha v|^p\,dx \leqslant C_2\|v\|_N.$$

Покажем, что $T(u)$ — непрерывное отображение в конечномерных пространствах $V_n = \{u_1, \cdots, u_n\}$, т. е. покажем, что если $u^k = C_1^k u_1^k + \cdots + C_n^k u_n^k$ и $C_1^k \to C_1^0, \cdots, C_n^k \to C_n^0$, при $k \to \infty$ и $u^0 = C_1^0 u_1 + \cdots + C_n^0 u_n$, то $T(u_k) \to T(u_0)$ в V_n^*. Имеем

$$a(u^k,\ v) - a(u^0,\ v) = \int\limits_\Omega\sum_{\alpha\in N}(A_\alpha(x,\ D(u^k)) - A_\alpha(x,\ D(u^0)))\cdot D^\alpha v\,dx.$$

Из условия Каратеодори следует, что

$$A_\alpha(x,\ D(u^k))^q \to A_\alpha(x,\ D(u^0))^q,$$

а согласно условию A_1)

$$\int_{\Omega} |A_{\alpha}(x, D(u^0))|^q \, dx \leqslant \|u^0\|_N + \int_{\Omega} |K(x, D(u^0))|^q \, dx \leqslant C_2.$$

Применяя теорему Лебега получим, что оператор T непрерывен в конечномерных пространствах, следовательно T хеминепрерывен. Из леммы 1.2 получим, что T — псевдомонотонный оператор, а из условия A_2) следует его коэрцитивность. Таким образом, оператор T удовлетворяет условиям теоремы 1.2 (Брезиса).

Оценим члены g_1, g_2. Пусть $n \in N$, положим

$$g_{1,n}(x, t) = \varkappa_n(x) p_1^n(x, t) + r_1(x, t),$$

$$g_{2,n}(x, t) = \varkappa_n(x) p_2^n(x, t) + r_2(x, t),$$

где $\varkappa_n(x)$ — характертеристическая функция области $\Omega_1 = \{x \in \Omega, |x| \leqslant n\}$, а

$$p_1^n(x, t) = \begin{cases} p_1(x, t), & |p_1(x, t)| \leqslant n \\ n \dfrac{p_1(x, t)}{|p_1(x, t)|}, & |p_1(x, t)| > n, \end{cases}$$

$$p_2^n(x, \eta) = \begin{cases} p_2(x, \eta), & |p_2(x, \eta)| \leqslant n \\ n \dfrac{p_2(x, \eta)}{|p_2(x, \eta)|}, & |p_2(x, \eta)| > n. \end{cases}$$

Опраделим следующие формы Дирихле:

$$b_n(u, v) = \int_{\Omega} [g_{1,n}(x, u(x)) + g_{2,n}(x, D(u))] \, v(x) \, dx.$$

Из определения функций $g_{1,n}$ и $g_{2,n}$ следует, что при фиксированной $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega)$ $b_n(u, v)$ — линейный ограниченный оператор, т. е. существует постоянная $C = C(n, u)$ такая, что

$$|b_n(u, v)| \leqslant C \|v\|_N, \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega).$$

Определим оператор $S_n : \overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega) \to (\overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega))^*$ формулой

$$(S_n(u), v) = b_n(u, v).$$

Лемма 1.3. *Если $D^{\alpha} u_n \to D^{\alpha} u$ п. в. для всех $\alpha \in \mathbf{N}^{(0)}$, то $S_n(u_j) \to S_n(u)$ в $L^q(\Omega)$.*

Доказательство. Имеем

$$|g_{1,n}(u_j) + g_{2,n}(u_j) - g_{1,n}(u) - g_{2,n}(u)|^q \leqslant$$

$$\leqslant |g_{1,n}(u_j)|^q + |g_{2,n}(u_j)|^q + |g_{1,n}(u)|^q + |g_{2,n}(u)|^q.$$

С другой стороны, из условия G_1) следует, что

$$|g_{1,n}(u)|^q \leqslant |\varkappa_n(x)|^q \, |p^n(x, u)|^q + |r_1(x, u)|^q \leqslant$$

$$\leqslant n^q |\varkappa_n(x)|^q + |h_1(x)|^q \leqslant G_1(x) \in L^1(\Omega),$$

$$|g_{2,n}(x, D(u)|^q \leqslant |\varkappa_n(x)|^q \, |p_2^n(x, D(u)|^q + |r_2(x, D(u)|^q \leqslant$$

$$\leqslant n^q |\varkappa_n(x)|^q + |h_2(x)|^q \leqslant G_2(x) \in L^1(\Omega).$$

Так как для всех $\alpha \in \mathbf{N}^{(0)}$ $D^\alpha u_j(x) \to D^\alpha u_0(x)$ п. в., то из условия Каратеодори следует, что при $j \to \infty$

$$|g_{1,n}(x, u_j) + g_{2,n}(x, D(u_j)) - g_{1,n}(x, u) - g_{2,n}(x, D(u))|^q \to 0.$$

Применяя теорему Лебега отсюда получим, что $S_n(u_j) \to S_n(u)$ в $L^q(\Omega)$. Лемма 1.3 доказана.

Из доказательства леммы непосредственно вытекает

Следствие 1.1. *Для любого $n \in N$ оператор S_n ограничен.*

Лемма 1.4 *Для произвольного $n \in N$ операторы S_n, $S_n + T$ псевдомонотонны.*

Доказательство. Докажем псевдомонотонность оператора S_n. Пусть $u_j \to u$ в $W_p^{\mathbf{N}}(\Omega)$. Тогда из вложения $W_p^{\mathbf{N}}(\Omega) \subset W_p^{\mathbf{N}^{(0)}}(\Omega)$ следует, что для всех $\alpha \in \mathbf{N}^{(0)}$ и некоторой подпоследовательности $\{u_j'\} \subset \subset \{u_j\}$, $D_j^\alpha u_j \to D^\alpha u$ п. в. Таким образом, выполняются условия леммы 1.3. Следовательно, $S_n(u_j') \to S_n(u)$ в $L^q(\Omega)$.

Из неравенства Гёльдера получим, что $(S_n(u_j'), u_j' - u) \to 0$ при $j \to \infty$.

Пусть теперь $S_n(u_j) \to y$. Так как $S_n(u_j') \to S_n(u)$, то остается доказать, что если $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}(S_n(u_j), u_j - u) \leqslant 0$, то $\lim\limits_{j\to\infty}(S_n(u_j), u - u_j) \to 0$. Предположим противное, т. е. пусть для некоторой подпоследовательности $\{u_j^*\} \subset \{u_j\}$

$$(S_n(u_j^*), u_j^* - u) \leqslant -\varepsilon_0, \ \varepsilon_0 > 0. \tag{1.16}$$

Так как $u_j^* \to u$, то повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве леммы 1.1, получим, что для подпоследовательности $\{u_j^{**}\} \subset \subset \{u_j^*\}$

$$(S_n(u_j^{**}), u_j^{**} - u) \to 0.$$

Это противоречие с (1.16) и доказывает псевдомонотонность операторов $S_n (n \in N)$. Докажем псевдомонотонность оператора $T + S_n$. Если $u_j \to u$, то для некоторой подпоследовательности $\{u_j'\} \subset \{u_j\}$ и для всех $\alpha \in \mathbf{N}^{(0)}$ $D^\alpha u_j'(x) \to D^\alpha u(x)$ п. в., а из леммы 1.3 следует, что при $j \to \infty$

$$(S_n(u_j'), u_j' - u) \to 0. \tag{1.17}$$

Пусть $(S_n + T)(u_j) \to y$. Так как $S_n(u_j') \to S_n(u)$, то $T(u_j') \to y_1$. Докажем, что $y_1 = T(u)$. Как и при доказательстве леммы 1.3 из соотношения $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}((S_n + T)(u_j), u_j - u) \leqslant 0$ следует, что

$$((S_n + T)(u_j) - (S_n + T)(u), u_j - u) \geqslant$$
$$\geqslant (S_n(u_j) - S(u), u_j - u) - F(R, \|u_j - u)\Psi\|_{\mathbf{N}(0)}),$$
$$\lim_{j\to\infty}((S_n + T)(u_j), u_j - u) = 0.$$

Отсюда и из (1.17) имеем $\lim\limits_{j\to\infty}(T(u_j'), u_j' - u) = 0$.

Используя псевдомонотонность оператора T, отсюда получим $y_1 = T(u)$. Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Если* $\{u_j\} \subset \overset{\circ}{W}{}^N_p(\Omega)$, $u_j \to u$ *в* $\overset{\circ}{W}{}^N_p(\Omega)$ *и*

$$\int_\Omega |g_{1,j}(\cdot, u_j)||u_j|\, dx < C_1,$$

$$\sum_{\alpha \in N(0)} \int_\Omega |g_{2,j}(\cdot, D(u_j))|\, |D^\alpha u_j|\, dx < C_2,$$

то $u[g_1(\cdot, u) + g_2(\cdot, D(u))] \in L^1(\Omega)$ *и*

$$g_{1,j}(\cdot, u_j) + g_{2,j}(\cdot, D(u_j)) \xrightarrow{L^1} g_1(\cdot, u) + g_2(\cdot, D(u)).$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 4 работы [6] (с применением леммы 1.1 настоящей заметки).

Лемма 1.6. *Оператор* $T + S_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ *коэрцитивен.*

Доказательство. Имеем

$$b_n(u, u) = \int_\Omega [g_{1,n}(x, u) + g_{2,n}(x, D(u))]\, u(x)\, dx =$$

$$= \int_\Omega \varkappa_n(x)\, [p_1^n(x, u) + p_2^n(x, D(u))]\, u(x)\, dx +$$

$$+ \int_\Omega [r_1(x, u) + r_2(x, D(u))]\, u(x)\, dx.$$

Из определения функций $p_i^n(x, u)$ $(i = 1, 2)$ и условия $G_2)$ имеем $\varkappa_n(x)\, p_1^n(x, u) \geqslant 0$, $\varkappa_n(x)\, p_2^n(x, D(u))\, u(x) \geqslant 0$.

Следовательно

$$b_n(u, u) \geqslant -\left| \int_\Omega [r_1(x, u) + r_2(x, D(u))]\, u(x)\, dx \right| \geqslant$$
$$\geqslant -C(\|h_1\|_{L_q(\Omega)} + \|h_2\|_{L_q(\Omega)})\, \|u\|_{L_p(\Omega)}. \tag{1.18}$$

Если теперь $\|u\|_N \to \infty$, то

$$\frac{((T + S_n)(u), u)}{\|u\|_N} = \frac{(T(u), u)}{\|u\|_N} + \frac{(S_n(u), u)}{\|u\|_N} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(T(u), u)}{\|u\|_N} - \frac{C(\|h_1\|_{L_q(\Omega)} + \|h_2\|_{L_q(\Omega)})}{\|u\|_N} \|u\|_{L_p(\Omega)} \to +\infty,$$

что и доказывает коэрцитивность оператора $T + S_n$.

Доказательство теоремы 1.1. Из лемм 1.2—1.6 следует, что операторы $T + S_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ удовлетворяют условиям теоремы Брезиса и, следовательно, для любого $f \in (\overset{\circ}{W}{}^N_p(\Omega))^*$ существует функция $u_j \in \overset{\circ}{W}{}^N_p(\Omega)$ такая, что

$$(T(u_j), v) + (S_j(u_j), v) = (f, v), \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^N_p(\Omega). \tag{1.19}$$

Докажем сначала, что последовательность $\{u_j\}$ ограничена. Пусть это не так. Тогда из леммы 1.6 имсем, что при $\|u_j\|_N \to \infty$

$$\frac{(f, u_j)}{\|u_j\|_N} = \frac{((T+S_j)(u_j), u_j)}{\|u_j\|_N} \to \infty.$$

С другой стороны

$$\frac{(f, u_j)}{\|u_j\|_N} \leqslant \frac{\|f\|_{L_q(\Omega)} \|u_j\|_N}{\|u_j\|_N} < \infty.$$

Полученное противоречие доказывает ограниченность последовательности $\{u_j\}$.

Из рефлексивности пространства $\overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega)$ и ограниченности оператора T следует существование подпоследовательности последовательности $\{u_j\}$ (которую также обозначим через $\{u_j\}$, такая, что $u_j \to u$, $T(u_j) \to y$ в $\overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega)$. Из ограниченности последовательностей $\{u_j\}$, $\{T(u_j)\}$: $\|u_j\| \leqslant C_1$, $\|T(u_j)\| \leqslant C_2$, из условия (1.19) и из соотношения

$$\int_\Omega [|r_1(\cdot, u_j)| + |r_2(\cdot, D(u_j))|]\, |u_j|\, dx < C_2$$

следует, что

$$\int_\Omega [|g_{1,j}(\cdot, u_j)| + |g_{2,j}(\cdot, D(u_j))|]\, |u_j|\, dx \leqslant C_1 \|f\| + C_1 \cdot C_2 + C_3 = C < \infty,$$

Далее из условия $G_3)$ имеем

$$\sum_{\alpha \in N \setminus 0} \int_\Omega |g_{2,j}(\cdot, D(u_j))|\, |D^\alpha u_j|\, dx \leqslant C.$$

Отсюда и из леммы 1.5 следует, что $u[g_1(\cdot, u) + g_2(\cdot, D(u)) \in L^1(\Omega)$ и для любого $v \in \overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$

$$(g_{1,j}(\cdot, u_j) + g_{2,j}(\cdot, D(u_j)))\, v \xrightarrow{L^1} (g_1(\cdot, u) + g_2(\cdot, D(u)))\, v.$$

Переходя к пределу в (1.19) получим

$$(y, v) + \int_\Omega (g_1(\cdot, u) + g_2(\cdot, D(u)))\, v(x)\, dx = (f, v),$$

$$\forall v \in \overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \qquad (1.20)$$

Докажем, что $y = T(u)$. Используем псевдомонотонность оператора T, имеем

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} (T(u_j), u_j - u) = \overline{\lim_{j\to\infty}} ((f - S_j)(u_j), u_j) -$$

$$- (T(u_j), u) = \overline{\lim_{j\to\infty}} ((f - S_j)(u_j), u_j) - (y, u) \leqslant$$

$$\leqslant (f - y, u) - \underline{\lim_{j\to\infty}} (S_j(u_j), u_j).$$

Отсюда по лемме Фату получим

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} (T(u_j), u_j - u) \leqslant (f - y, u) - \int_\Omega [g_1(\cdot, u) + g_2(\cdot, D(u))]\, u(x)\, dx.$$

Учитывая равенство (1.20) для всех $w \in \overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ имеем

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} (T(u_j), u_j - u) \leqslant (f - y, u - w) + \int_\Omega [g_1(\cdot, u) + g_2(\cdot, D(u))]\, (w - u)\, dx.$$

Используя замечание 1.1, построим $w_j \in \overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ такие, что $w_j \to u$ в $\overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega)$, $|w_j(x)| \leqslant C|u(x)|$. Тогда $(f - y, u - w_j) \to 0$ и

$$\int_\Omega [g_1(\cdot, u) + g_2(\cdot, D(u))]\, w_j(x)\, dx \to \int_\Omega [g_1(\cdot, u) + g_2(\cdot, D(u))]\, u(x)\, dx.$$

Последнее соотношение следует из того, что п. в. $(g_1(\cdot, u) + g_2(D(u)))\, u \in L_1(\Omega)$ и из теоремы Лебега. В результате имеем $\overline{\lim} (T(u_j), u_j - u) \leqslant 0$. Отсюда и из псевдомонотонности оператора T следует, что

$$y = T(u) \text{ и } (T(u_j), u_j - u) \to 0.$$

Подставляя в (1.20) $v = w_j$ и устремляя $j \to \infty$, получим, что $(P(u), u) = (f, u)$. Теорема доказана.

Теорема 1.3. *Если регулярный оператор A удовлетворяет условию A_1) (см. [2], опр. 3), т. е. для некоторой постоянной $C > 0$ и для всех $u, v \in \overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega)$*

$$\sum_{\alpha \in N} \int_\Omega (A_\alpha(x, D(u)) - A_\alpha(x, D(v)))\, D^\alpha(u - v)\, dx \geqslant C\|u - v\|_N^p \tag{1.21}$$

и, кроме того, выполняются условия G_1), G_2), Ω_1), Ω_2), (Д. У), $g_2(x, \eta) = 0$,

$$g_1(x, t_1) \geqslant g_1(x, t_2), \quad t_1 \geqslant t_2, \tag{1.22}$$

то для любого $f \in (\overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega))^*$ уравнение $Pu = f$ имеет единственное слабое решение из класса $\overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega)$.

Доказательство. Из условий (1.21), (1.22) следует, что $P = A + g_1(x, u)$ — строго монотонный и коэрцитивный оператор. Так как выполняются все условия теоремы 1.1, то существование слабого решения доказано. Единственность следует из строгой монотонности оператора P. Теорема доказана.

§ 2. Анизотропные потенциалы и некоторые их свойства

Пусть $\nu_1, \cdots, \nu_n \in N$, ν_i — четные числа. Положим $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n) = 2\left(\frac{1}{\nu_1}, \cdots, \frac{1}{\nu_n}\right)$, μ-расстоянием чисел $x, y \in E_n$ называется число (см. [10])

$$\rho_\mu(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^{\nu_i}\right)^{1/2}.$$

Анизотропным потенциалом называется выражение

$$I_{\mu, \alpha}(f) = \int_{E_n} \frac{f(y)}{(\rho_\mu(x, y))^{|\mu| - \alpha}} dy, \quad 0 < \alpha < |\mu|. \tag{2.1}$$

При $\mu_i = 1$, $i = 1, \cdots, n$ интеграл (2.1) совпадает с классическим потенциалом Рисса с точностью до постоянного множителя. Для локально интегрируемой функции f обозначим через $M(f)(x)$ максимальную функцию Харди—Литтльвуда

$$M(f)(x) \sup_{r>0} r^{-|\mu|} \int_{\rho_\mu(y) < r} |f(x + y)| \, dy.$$

Известны следующие свойства максимальной функции $M(f)(x)$ (см., например, [11], 1.1.3).

Теорема 2.1. *Пусть функция f определена на E_n. Тогда а) если $f \in L_p(E_n)$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то функция $M(f)$ почти всюду конечна, б) если $f \in L_p(E_n)$, где $1 < p \leqslant \infty$, то $M(f) \in L_p(E_n)$ и*

$$\|M(f)\|_p \leqslant A_p \|f\|_p, \tag{2.2}$$

где A_p зависит от p и размерности n.

Анизотропные потенциалы в основном обладают теми же свойствами, что и потенциалы Рисса (см. [10]—[13]).

Теорема 2.2 (см. [10], стр. 32). *Если $0 < \alpha < |\mu|$, $1 < p < q < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{|\mu|}$, то для любого $f \in L_p$ $I_{\mu, \alpha}(f) \in L_q$ и имеет место неравенство*

$$\|I_{\mu, \alpha}(f)\|_q \leqslant A \|f\|_p, \tag{2.3}$$

где постоянная A не зависит от f.

Следующая теорема, установленная В. А. Солонниковым [14], является обобщением теоремы Е. Гальярдо [15], Л. Ниренберга [16] на анизотропный случай.

Теорема 2.3. *Пусть $f \geqslant 0$, $0 < \alpha < |\mu|$, $0 < \theta < 1$, $1 < p < \infty$, $p < q \leqslant \infty$, $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$. Тогда*

$$\|I_{\mu, \alpha\theta}(f)\|_r \leqslant C \|f\|_p^{1-\theta} \|I_{\mu, \alpha}(f)\|_q^\theta. \tag{2.4}$$

Аналогично работе [12] можно доказать обобщенный вариант неравенства (2.4).

Теорема 2.4. *Пусть* $f > 0$, $0 < \alpha < |\mu|$, $0 < \theta < 1$, $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $\theta < t < \theta + (1-\theta)p$, $\frac{1}{r} = \frac{t-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$. *Тогда*

$$\|I_{\mu,\alpha\theta}(f^t)\|_r \leqslant A\|f\|_p^{t-\theta}\|I_{\mu,\alpha}(f)\|_q^{\theta}. \tag{2.5}$$

Теорема 2.3 является частным случаем теоремы 2.4, соответствующим значению $t = 1$.

§ 3. Дополнение

В этом параграфе покажем, что если $\mathrm{N} = \{\alpha;\ (\alpha, \mu) \leqslant m\}$, где μ — некоторый вектор, m — произвольное целое число, то теорема 1.1 верна без условия (Д. У), т. е. для любого $p > 1$. Для этого нам понадобится доказать аналог замечания 1.1. Будем различать два случая:

а) Пусть μ, p, m такие, что $pm > |\mu|$. Тогда (см. [10], 10.4) $W_p^{\mathrm{N}}(E_n) \subset C(E_n)$ и условие (Д. У) выполняется.

б) $pm \leqslant |\mu|$, тогда имеют место все результаты § 2.

Для доказательства замечания 1.1 нам понадобится обобщенный вариант теоремы Хедберга (см. [13]).

Теорема 3.1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $mp \leqslant |\mu|$. *Тогда для любого* $u \in W_p^{\mathrm{N}}(E_n)$ *и* $\varepsilon > 0$ *можно найти функцию* $w \in W_p^{\mathrm{N}}(E_n)$, $0 \leqslant w \leqslant 1$ *такую, что* $(1-w)u \in W_p^{\mathrm{N}}(E_n) \cap L^\infty(E_n)$ *и* $\|wu\|_{\mathrm{N}} < \varepsilon$.

Доказательство. Из результатов книги [17], гл. 9 (см. также [18]) следует, что любую функцию $u \in W_p^{\mathrm{N}}(E_n)$, $\mathrm{N} = \{\alpha;\ (\alpha, \mu) \leqslant m\}$ можно представить в виде

$$I_{\mu,m}(g)(x) = u(x) = \int \frac{g(y)}{\rho_\mu(x, y)^{|\mu|-m}}\, dy, \quad g \in L^p,$$

$$\|g\|_{L_p} \leqslant C\|u\|_{\mathrm{N}}.$$

Пусть $\lambda > 0$ — произвольное число. Обозначим через

$$G_\lambda = \left\{x;\ I_{\mu,m}(|g|)(x) > \frac{1}{\lambda}\right\}, \quad \Phi_\lambda(x) = \lambda \cdot I_{\mu,m}(|g|)(x).$$

Следовательно, $\Phi_\lambda(x) \geqslant 1$ при $x \in G_\lambda$. Пусть $H(t) \in C^\infty(R_1)$ такая, что $H(t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{1}{2}, \\ 1, & t > 1 \end{cases}$, $0 \leqslant H(t) \leqslant 1$. Положим $w_\lambda = H \circ \Phi_\lambda$. Очевидно, что $(1 - w_\lambda(x))u(x) \leqslant \lambda^{-1}$, поэтому $(1 - w_\lambda)u \in L^\infty(E_n)$. Остается показать, что при $\lambda \to 0$

$$\|w_\lambda u\|_{\mathrm{N}} \to 0. \tag{3.1}$$

Так как норма $\|u\|_{\mathrm{N}}$ эквивалентна норме

$$\|u\|_p + \sum_{i=1}^{n} \|D_i^{l_i} u\|_{L_p}, \tag{3.2}$$

где $l^i=(0,\cdots,l_i,\cdots,0)$, $(l^i,\mu)=m$, $i=1,\cdots,n$, то достаточно показать оценку (3.1) для нормы (3.2).

Так как $w_\lambda(x)\to 0$ почти всюду при $\lambda\to 0$ и $0\leqslant w_\lambda(x)\leqslant 1$, то из теоремы Лебега непосредственно следует, что $\|w_\lambda u\|_{L_p}\to 0$, при $\lambda\to 0$. Оценим производные $D_i^{l^i}(w_\lambda u)$, $i=1,\cdots,n$. Из формулы Лейбница для любого i: $i=1,\cdots,n$ имеем

$$D_i^{l^i}(uw_\lambda)=\sum_j C_j D_i^j(w_\lambda)D_i^{l^i-j}u.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Для $j=0$ уже доказано, что $\|w_\lambda D^\alpha u\|_p\to 0$, когда $\lambda\to 0$. Пусть теперь $j>0$. Так как $w_\lambda(x)\equiv 1$ на G_λ, то $D_i^j w_\lambda\equiv 0$ на G_λ, следовательно остаются интегралы CG_λ.

Применяя неравенство (2.4) для производной $D_i^j u$, $i=1,\cdots,n$ $(j=0,1,\cdots,l^i-1)$, имеем

$$|D_i^{l^i-k}u(x)|\leqslant C\,I_{\mu,k\cdot\mu_i}|g|(x)\leqslant C(M(|g|)(x))^{1-\frac{k\mu_i}{m}}\times$$
$$\times I_{\mu,m}(|g|)(x)^{\frac{k\mu_i}{m}}\leqslant C(M|(g)|)(x)^{1-\frac{k\mu_i}{m}}\lambda^{-\frac{k\mu_i}{m}}$$

вне G_λ.

Если $k<l^i$, то для производной $D_i^k\Phi_\lambda(x)$ вне G_λ получим

$$|D_i^k\Phi_\lambda(x)|=|\lambda D_i^k(I_{\mu,m}(|g|))|\leqslant C\lambda I_{\mu,m-k\mu_i}(|g|)\leqslant$$
$$\leqslant C\lambda M(|g|)(x)^{\frac{k\mu_i}{m}}(I_{\mu,m}|g|)^{1-\frac{k\mu_i}{m}}\leqslant CM(|g|)(x)^{\frac{k\mu_i}{m}}\lambda^{\frac{k\mu_i}{m}}. \tag{3.3}$$

Для оценки $D_i^k(H\circ\Phi(x))$ имеем

$$D_i^k(H\circ\Phi(x))=\sum_{j=1}^k H^{(j)}(\Phi(x))\sum_{r_1+\cdots+r_j=k}C_r D_i^{r_1}\Phi(x)\cdots D_i^{r_j}\Phi(x).$$

Отсюда и из оценки (3.3) получим

$$D_i^k(H\circ\Phi(x))\leqslant\sum_{j=1}^k\sum_{r_1+\cdots+r_j=k}C(M(g)(x))^{\frac{r_1\mu_i}{m}+\cdots+\frac{r_j\mu_i}{m}}\times$$
$$\times\lambda^{\frac{r_1\mu_i+\cdots+r_j\mu_i}{m}}\leqslant CM(g)(x)^{\frac{k\mu_i}{m}}\lambda^{\frac{k\mu_i}{m}}.$$

Для производной $k=l_i$ имеем

$$D_i^{l^i}(H\circ\Phi(x))=H^{(1)}(\Phi(x))D_i^{l^i}\Phi(x)+$$
$$+\sum_{k=2}^{l_i}H^{(k)}\Phi(x))\sum_{r_1+\cdots+r_k=l_i}C_r D_i^{r_1}\Phi(x)\cdots D_i^{r_k}\Phi(x),$$
$$|D_i^{l_i}(H\circ\Phi(x))|\leqslant C(\lambda M(g)(x)+D_i^{l_i}\Phi(x))\leqslant$$
$$\leqslant C\lambda(M(g)(x)+D_i^{l_i}I_{\mu,m}|g|(x)),$$

Окончательно для любого $i: i=1, \cdots, n$ получим а). При $0<k<l_i$

$$|D_i^k w_\lambda(x)|\,|D_i^{l_i-k} u(x)| \leqslant CM(g)(x)^{\frac{k\mu_i}{m}} \lambda^{\frac{k\mu_i}{m}} \times$$

$$\times M(g)(x)^{1-\frac{k\mu_i}{m}} \lambda^{-\frac{k\mu_i}{m}} \leqslant CM(g)(x). \tag{3.4}$$

б) При $k=l_i$

$$|D_i^{l_i} w_\lambda(x)|\,|u(x)| \leqslant C(M(g)(x) + D_i^{l_i} I_{\mu,m}|g|(x)). \tag{3.5}$$

Из свойств функций $M(g)(x)$ и $u \in W_p^N$ следует, что функции, стоящие в правой части неравенств (3.4), (3.5) принадлежат L^p, следовательно $D_i^{l_i}(w_\lambda u) \in L^p$. Так как $D_i^{l_i}(w_\lambda u)(x) \to 0$ п. в. при $\lambda \to 0$, то по теореме Лебега при $\lambda \to 0$ получим

$$\sum_{i=1}^n \|D_i^{l_i}(w_\lambda v)\|_{L_p} \to 0.$$

Теорема доказана.

Ереванский государственный университет

Поступила 26.II.1985

Գ. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ. Եզրային խնդիր ոչ գծային ռեգուլյար հավասարումների համար անսահմանափակ տիրույթներում *(ամփոփում)*

Աշխատանքը հանդիսանում է [3] և [6] աշխատանքների ընդհանրացումը։ Եթե մինչ այս ռեգուլյար ոչ գծային հավասարումների լուծումների ուսումնասիրության ժամանակ սահմանափակումները դրվում էին գործակիցների վրա համախմբության իմաստով, ապա այստեղ առանձնացվում են «ավագ» անդամները և «կրտսեր» անդամները։ «Կրտսեր» անդամների վրա դրվում են անհամեմատ ավելի թույլ պայմաններ, քան «ավագ» անդամների վրա։ Այս պայմանների դեպքում ոչ գծային ռեգուլյար հավասարումների Դիրիխլեի խնդրի համար ապացուցվում է գոյության (որոշ դեպքում նաև միակության) թեորեմներ անսահմանափակ տիրույթներում։

G. A. KARAPETIAN. *Boundary value problem for non-linear regular equations in unbounded domains* (summary)

The article is a generalization of the articles [3] and [6]. For a regular equation the "higher" coefficients and "lower" coefficients are defined. On the "lower" coefficients weaker conditions are imposed than on "higher" coefficients.

Under these conditions theorems of existence (in some cases with uniqueness) are proved for Dirichlet problem for non-linear regular equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. *М. Никольский*. Об устойчивых граничных значениях дифференцируемой функции многих переменных, Мат. сб., 61(103), № 2, 1963, 224—252.
2. *Г. Г. Казарян*. Вариационная краевая задача для квазилинейных уравнений регулярного и нерегулярного типов, Диф. ур., № 6, 1983, 1007—1018.
3. *Г. Г. Казарян, Г. А. Карапетян*. О сходимости галеркинских приближений к решению задачи Дирихле для некоторых общих уравнений, Мат. сб., 124, № 3, 1984, 291—306.
4. *F. E. Browder*. Pceudo-monotone operators and nonelliptic boundary value problem on unbounded domains, Proc. Nat. Acad. Sci, 74, 1977, 2559—2611.

5. *J. R. Webb.* Boundary value problem for strongly nonlinear elliptic Equations, J. of the London Math. Sceiaty, 21, 1980, 123—131.
6. *F. H. Michael.* An elliptic boundary value problem for nonlinear equations in unbounded domains, Annales Univ. Sci. Budapest, Secto Math, 26, 1983, 125—139.
7. *H. Brèzis.* Equations et inequations non linéaires dans les spacet vectoriels en dualité, Ann Inst. Fourier (Grenoble), 18, 1968, 115—175.
8. *М. М. Вайнберг.* Функциональный анализ, М., «Просвещение», 1979.
9. *F. E. Browder* Existence theory for boundary value problems for quasilinear elliptic systems withe strongly nonlinear lower order terms, Proceedings Symposia in Pure Math., 23 (American Soc. Providence, R. I 1971), 269—286.
10. *O. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский.* Интегральное представление функций и теоремы вложения, М., «Мир», 1975.
11. *И. Стейн,* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М., «Мир», 1973.
12. *L. I. Hedberg.* On certain convolutions inequalities, Proc. Amer. Mat: Soc., 36, 1972, 505—510.
13. *L. I. Hedberd.* Two approximation problem in functions spaces, Ack. Math., 16, 1978, 51—81.
14. *В. А. Солонников.* О некоторых неравенствах для функций из классов $W_p(E_n)$. Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, 27, 1972, 194—210.
15. *E. Gagliardo.* Ulterori proprietà di alcune classi di funzconi in piû variabili, Recerch di Math., 8, 1959, 24—51.
16. *L. Nirenberg.* On elliptic partial differential equations, Ann. Scuola Norm. Supdi. Pisa, ser, III, 13, Fasc. II, 1959, 115—162.
17. *С. М. Никольский.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., «Наука», 1977.
18. *П. И. Лизоркин.* Обобщенные лиувиллевские дифференцирования и функциональные пространства L_{pr} Мат. сб., 50, № 3, 1963.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIII, № 1, 1988 Математика

УДК 517.43; 518.22

С. М. ОГАНЕСЯН

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА В ПРОСТРАНСТВЕ $L_p(S)$ И ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ $W_p^r(S)$ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ ФИНИТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

1°. Пусть R_n, $n \geq 2$, — n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$; $S \subset R_n$ — ограниченное открытое множество; $\bar{S}$ и ∂S, соответственно, замыкание и граница S; $L_p(S)$ — банахово пространство функций с суммируемой p-ой степенью; $W_p^r(S)$ — пространство Соболева, которое состоит из функций, имеющих обобщенные производные до порядка r включительно и суммируемые со степенью p; $C_0^\infty(S)$ — множество бесконечно дифференцируемых финитных функций в S; $C^\infty(S)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций в S; $\overset{\circ}{W}{}_p^r(S)$ — собственное подпространство $W_p^r(S)$, полученное замыканием $C_0^\infty(S)$ в норме $W_p^r(S)$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right.$ — символ обобщенной производной); условие $\partial S \in C^r$ — граница множества S принадлежит классу C^r $(0 \leq r \leq \infty)$; S_j, $j = \overline{1, m}$ — ограниченные компоненты связности множества $S_1 = R_n \setminus \bar{S}$ (для односвязного S множества $S_j = \varnothing$); $D(\cdot)$ и $R(\cdot)$ — соответственно области определения и значения некоторого оператора.

Для удобства изложения вместо $L_p(S)$ будем писать также L_p.

Пусть распределение плотности σ в множестве S принадлежит пространству $L_p(S)$. Потенциал плотности $\sigma \in L_p(S)$ вычисляется по формуле

$$V_p(x) = V_p\sigma = f_n \int_S J(x-y)\, \sigma(y)\, dy, \quad x \in R_n,$$

где $f_n = \begin{cases} (n-2)\, \omega_n f, & n \geq 3 \\ 4\pi f, & n = 2; \end{cases}$

f — универсальная гравитационная постоянная; ω_n — площадь поверхности единичной сферы в R_n; $J(\cdot)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа, равное

$$J(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\, \omega_n\, |x|_0^{n-2}}, & n \geq 3, \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln |x|_0, & n = 2; \end{cases} \quad |x|_0 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Пусть операторы V_{pe} и V_{pi} — соответственно внешний и внутренний потенциалы плотности $\sigma \in V_p(S)$, т. е. $V_{pe}\sigma = V_p\sigma | x \in S_1$ и $V_{pi} = V_p\sigma | x \in S$; $N(S, p) = \{\sigma \in L_p(S) : V_{pe}\sigma = 0\}$ — ядро оператора V_{pe}; $H(S, p) = \{\sigma \in L_p(S) : \Delta\sigma(x) = 0, \ x \in S\}$ — подпространство гармонических функций в $L_p(S)$.

Сформулируем линейную обратную задачу теории потенциала: требуется восстановить плотность σ по заданному внешнему потенциалу $v(x)$ при фиксированном множестве S, т. е. необходимо решить операторное уравнение I рода

$$V_{pe}\sigma = v(x), \ x \in S_1. \tag{1}$$

Так как функция $v(x)$ является гармонической на множестве S_1, то ее достаточно задавать на некотором множестве единственности $Q \subset S_1$. Поэтому при решении практических геофизических задач вместо уравнения (1) исследуется уравнение

$$\dot{V}_{pe}\sigma = v(x), \ x \in Q, \tag{2}$$

где $v(x) \in L_p(Q)$.

2°. В последние годы интенсивно развиваются методы поиска общего решения задач (1) и (2) в классе распределения плотностей в различных функциональных пространствах [1—16]. Основные результаты работ [1—16] почти идентичны, получены, как правило, независимо и доказаны для гильбертового пространства $L_2(S)$.

Отличия связаны с условиями, накладываемыми на дифференциальные свойства границы ∂S. Многие из результатов для $L_2(S)$ с незначительными изменениями верны и для пространства $L_p(S)$, $1 < p < \infty$ [10].

Сформулируем основные результаты работ [1—16] в виде теорем.

Теорема 1. *Подпространство плотностей $N(S, p)$ задается при помощи равенств*

$$N(S, p) = \overline{\Delta \overset{\infty}{C_0}(S)} = \Delta \overset{\circ}{W}{}^2_p(S), \tag{3}$$

где $\overline{\Delta C_0^\infty(S)}$ — замыкание области значения оператора Лапласа, определенного на множестве $C_0^\infty(S)$, в норме пространства $L_p(S)$.

Всюду в дальнейшем, если из соответствующих формул понятно в какой норме замыкается множество, это специально не будет указываться.

Равенства (3) установлены в работах В. Н. Страхова [5, 6] для односвязной области S с границей $\partial S \in C^2$, в работе Н. Вэка [1] для жордановой области S, удовлетворяющей условию конуса, в работах Маргулиса [9—12] — для множества S с границей $\partial S \in C$. В работе [14] показано, что равенство (3) можно записать в виде $N(S, p) = R(\overset{*}{\Delta}_q)$, где $\overset{*}{\Delta}_q$ — оператор, сопряженный к оператору Лапласа $\Delta : L_q(S) \to L_q(S)$ (Δ_q), $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, т. е. оператор $\overset{*}{\Delta}_q$ совпадает с сужением оператора Δ_p на множество $\overset{\circ}{W}{}^{21}_p(S)$.

Теорема 2. *Для пространства $L_2(S)$ справедливо ортогональное разложение*

$$L_2(S) = N(S, 2) \oplus H(S, 2). \tag{4}$$

Для односвязной области S с границей $\partial S \in C^\infty$ теорема 2 фактически доказана П. С. Новиковым [17]. Равенство (4) установлены в работе [13] для односвязной области S с гладкой границей, в работах Н. Вэка [1] и Ф. Сансо [7] для жордановой области S, удовлетворяющей условию конуса, и в работах [9—12]—для множества с границей $\partial S \in C$.

Для пространства $L_p(S)$, $1 < p < \infty$, аналог условия ортогональности записывается при помощи равенства [11]

$$N(S, p)^\perp = H(S, q), \tag{5}$$

где $N(S, p)^\perp$ — совокупность всех непрерывных линейных функционалов на $L_p(S)$, обращающихся тождественно в нуль на $N(S, p)$.

Таким образом, при $n = 2$ общее решение задачи (1) или (2) представимо в виде

$$\bar{\sigma} = \sigma_{\text{гар}} + \Delta \varphi, \tag{6}$$

где $\sigma_{\text{гар}} \in H(S, 2)$—нормальное решение уравнения (1) или (2), φ—произвольная функция из подпространства $\mathring{W}_p^r(S)$.

Более подробно история вопроса построения тел с нулевым внешним потенциалом приведена в работе [16].

Обозначим через $\tilde{f}$ продолжение функции f, определенной на множестве S, на все пространства R_n вида

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in S; \\ 0, & x \in R_n \setminus S. \end{cases}$$

В этих обозначениях [18, 19] $\dot{W}_p^r(S) = \{f \in W_p^r(S);\ \tilde{f} \in W_p^r(R_n)\}$ — множество функций из пространства $W_p^r(S)$, продолженные нулем с сохранением класса.

Во многих вопросах [18—22], в частности для нахождения $\sigma_{\text{гар}}$]10, 14], важное значение имеет установление условий на границу ∂S множества S, при которых справедливо равенство

$$\mathring{W}_p^r(S) = \dot{W}_p^r(S). \tag{7}$$

Равенство (7) для области S с регулярной границей ∂S установлены С. Л. Соболевым [21, 22] и С. М. Никольским [20]. В работе Г. Г. Казаряна [18] равенство (7) доказано для области S, допускающей локальный сдвиг. При $p > n$ равенство (7) доказано В. И. Буренковым [19] для неограниченного S с границей $\partial S = \partial \bar{S}$.

Для решения рассматриваемых в статье вопросов введем

Определение. 1. Пространство $L_p(S)$ разложимо в полупрямую сумму, если для подпространства $K \subset L_p(S)$ существует такое замкнутое множество F, что $K \cap F$ равно нулевому элементу и алгебраическая сумма K и F совпадает с $L_p(S)$.

Разложение пространства $L_p(S)$ в полупрямую сумму обозначим следующим образом: $L_p(S) = K \oplus F$.

Пусть линейный непрерывный оператор $A: L_{p_1}(S) \to L_{p_1}(Q)$, $N_A = \{\sigma : A\sigma = 0\}$; $A^*: L_{q_1}(Q) \to L_{q_1}(S)$ — оператор, сопряженный к A, $N_{A^*} = \{\varphi : A^*\varphi = 0\}$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\min \frac{1}{p_1} \|\sigma - \sigma_0\|_{L_{p_1}}^{p_1} \tag{10}$$

при ограничении

$$A\sigma = b, \tag{11}$$

где $\|\cdot\|_{L_{p_1}}$ — норма некоторого элемента из L_{p_1}, σ_0 — фиксированный элемент, b — заданный элемент.

Если при заданном b уравнение (11) разрешимо, то задача (10) (11), в силу равномерной выпуклости пространства $L_p(S)$, $1 < p < \infty$, имеет единственное решение $\bar{\sigma}$, которое совпадает с обобщенным нормальным решением уравнени (11) по А. Н. Тихонову [23, 24].

Настоящая статья посвящена доказательству теорем 1 и 2, равенств (5)—(7) в пространстве $L_p(S)$, $1 < p < \infty$, для ограниченного открытого множества S с границей ∂S, удовлетворяющей условиям: $\partial S = \partial \bar{S}$ и $\mathrm{mes}\, \partial S = 0$ (n-мерная лебегова мера). В связи с этим возникла необходимость в параграфе 1 обобщить теорию двойственного метода решения линейной некорректной задачи для гильбертового пространства, разработанную в работах [25—27, 14], на случай банахового пространства $L_p(S)$, $1 < p < \infty$.

На основании этого обобщения построен устойчивый алгоритм нахождения элемента $\bar{\sigma}$. Показано, что для любого подпространства K пространство $L_p(S)$ разложимо в специальную полупрямую сумму и множество нормальных решений уравнения (11) совпадает с множеством

$$\overline{|A^*\varphi|^{q_1-2}\, A^*\varphi},$$

где $|\cdot|$ — символ абсолютной величины. Далее в параграфе 2 для множества S с границей

$$\partial S = \partial \bar{S}; \ \mathrm{mes}\, \partial S = 0 \tag{12}$$

доказывается, что не существует гармонической функции, имеющей нулевой внешний потенциал.

Используя результаты параграфов 1 и 2 в § 3 доказываются выше перечисленные теоремы и равенства. Далее показано, что пересечение $D(\Delta)$ и $N(S, p)$ принадлежит пространству $W_p^{-2}(S)$.

Для множества S с границей ∂S, принадлежащей классу Липшица, разработан алгоритм построения тел с нулевым внешним потенциалом.

§ 1. Двойственный метод решения линейной некорректной задачи в пространстве $L_p(S)$. Разложение $L_p(S)$ в специальную полупрямую сумму

1°. Для решения задачи (10), (11) двойственным методом рассмотрим следующий функционал Лагранжа [28]:

$$L[\sigma, \varphi] = \frac{1}{p_1} \|\sigma - \sigma_0\|^{p_1}_{L_{p_1}} - \langle A\sigma - b, \varphi \rangle, \tag{13}$$

где $\varphi \in L_{q_1}$, $\langle\ ,\ \rangle$ — каноническое спаривание пары сопряженных пространств.

Так как пространство L_{p_1} равномерно выпукло, то для любого b и фиксированного φ существует единственный элемент σ_φ, минимизирующий функционал Лагранжа по переменной σ, который является решением уравнения [24, 28, 29]

$$|\sigma - \sigma_0|^{p_1-2} (\sigma - \sigma_0) = A^*\varphi. \tag{14}$$

Так как для функции $y_1 = |x_1|^{p-2} \cdot x_1$ при $1 < p < \infty$ существует обратная функция $x_1 = |y_1|^{q-\frac{1}{2}} y_1$, то на основании уравнения (14) и свойств градиента нормы в банаховом пространстве [29] легко можно показать, что целевой функционал двойственной задачи к задаче (10), (11)

$$\psi(\varphi) = \min_{\sigma \in L_{p_1}} L[\sigma, \varphi] = -\frac{1}{q_1} \|A^*\varphi\|^{q_1}_{L_{p_1}} + \langle b, \varphi \rangle - \langle \sigma_0, A^*\varphi \rangle. \tag{15}$$

Двойственная задача к задаче (10), (11) заключается в нахождении

$$\max_{\varphi \in L_{q_1}} t(\varphi). \tag{16}$$

Пусть задача (10), (11) разрешима, тогда имеет место

Теорема 3. *Для разрешимости задачи* (16) *необходимо и достаточно выполнения равенства*

$$\bar{\sigma} - \sigma_0 = |A^*\bar{\varphi}^*|^{q_1-2} A^* \bar{\varphi}^*, \tag{17}$$

где $\bar{\varphi}^*$ — *любое решение уравнения*

$$A(|A^*\varphi|^{q_1-2} A^*\varphi + \sigma_0) = b. \tag{18}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть задача (16) разрешима. Тогда любое решение задачи (16) удовлетворяет уравнению (18), для обобщенного нормального решения $\bar{\sigma}$ задачи (10), (11) справедливо равенство

$$|\bar{\sigma} - \sigma_0|^{p_1-2} (\bar{\sigma} - \sigma_0) = A^*\bar{\varphi}^*, \tag{19}$$

а элемент $\tilde{\sigma} = \sigma_0 + |A^* \bar{\varphi}^*|^{q_1-2} A^* \bar{\varphi}$ является решением уравнения (11).

Известно [29], что если $\sigma \neq 0$, то $\operatorname{grad} \|\sigma\|_{L_{p_1}} = \|\sigma\|^{1-p_1} \cdot |\sigma|^{p_1-2}$ и $\|\operatorname{grad} \|\sigma\|_{L_{p_1}}\| = 1$. Поэтому норма $\||\bar{\sigma} - \sigma_0|^{p_1-2} (\bar{\sigma} - \sigma_0)\| = \|\bar{\sigma} - \sigma_0\|^{p_1-1}_{L_{p_1}}$. На основании равенства (19) $\|\bar{\sigma} - \sigma_0\|^{p_1-1}_{L_{p_1}} = \|A^* \bar{\varphi}^*\|_{L_{p_1}}$ или $\|\bar{\sigma} - \sigma_0\|_{L_{p_1}} = \|A^*\bar{\varphi}^*\|^{q_1-1}_{L_{p_1}}$. Аналогично $\|\tilde{\sigma} - \sigma_0\| = \|A^*\bar{\varphi}^*\|^{q_1-1}_{L_{q_1}}$, т. е $\|\tilde{\sigma} - \sigma_0\|_{L_{p_1}} = \|\bar{\sigma} - \sigma_0\|_{L_{p_1}}$.

Так как задача (10), (11) разрешима однозначно, $\tilde{\sigma}$ является решением уравнения (11), то из равенства $\|\tilde{\sigma} - \sigma_0\| = \|\bar{\sigma} - \sigma_0\|$ следует совпадение элементов $\bar{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}$ и справедливость соотношения (17).

Достаточность. Так как уравнение (18) есть градиент функционала (15) приравненный к нулю, то достаточность условия (17) для разрешимости задачи (16) очевидна. Теорема 3 доказана.

Следствие 1. *Если уравнение* (11) *нормально разрешимо, то задачи* (10), (11) *и* (16) *разрешимы одновременно и их решения удовлетворяют равенствам* (17), (19).

Принимая в равенствах (17) — (19) оператор A, совпадающий с единичным, $\sigma_0 \equiv 0$ на основании следствия 1, результатов Ф. Браудера и Е. И. Линькова [29, с, 314] и свойств функции $y_1 = |x_1|^{p-2} x_1$, $1 < p < \infty$, нетрудно показать, что справедлива

Теорема 4. *Градиент функционала* $\frac{1}{p} \|\sigma\|^p_{L_p}$, $1 < p < \infty$, *является гомеоморфизмом* L_p *на* L_q, *обратный к нему оператор совпадает с градиентом функционала* $\frac{1}{q} \|\varphi\|^q_{L_q}$.

Известно [30], что в равномерно выпуклых пространствах оператор метрического проектирования на замкнутое выпуклое множество является корректным в смысле Адамара. Поэтому на основании определения 1, теорем 3 и 4 имеет место

Следствие 2. *Для любого подпространства* $K \subset L_p$, *элементы метрические проекции которых на* K *совпадают с нулевым элементом, образуют замкнутое множество* $F = \frac{1}{q} \operatorname{grad} \|\varphi\|^q_{L_q} = |\varphi|^{q-2} \varphi$, *где элементы* φ *принадлежат множеству* $K^{\perp}$, *и пространство* $L_p(S)$ *разложимо в полупрямую сумму*

$$L_p(S) = K \dotplus F = K \dotplus |\varphi|^{q-2} \varphi, \; \varphi \in K^{\perp}. \tag{20}$$

Следствие 3. *Для пространств* L_{p_1} *и* L_{q_1} *имеют место представления в виде специальной полупрямой суммы*

$$L_{p_1} = N_A \dotplus \overline{|A^* \varphi|^{q_1-2} A^* \varphi} = N_A \dotplus F_1, \; \varphi \in L_{q_2}, \tag{21}$$

$$L_{q_2} = N_{A^*} \dotplus \overline{|A\sigma|^{p_2-2} A\sigma} = N_{A^*} \dotplus F_2, \; \sigma \in L_{p_1}. \tag{22}$$

Замечание 1. Для любого $b \in R(A)$ нормальное решение уравнения (11) принадлежит множеству $F_1 = \overline{|A^* \varphi|^{q_1-2} \cdot A^* \varphi}$. При $p_1 = q_2 = 2$ равенства (21), (22) являются ортогональными разложениями в прямую сумму для гильбертового пространства $L_2(S)$.

2°. Известно [23, 24], что нахождение решения задачи (10), (11) элемента $\bar{\sigma}$ является некорректной задачей. Построим регуляризующий алгоритм двойственного метода нахождения элемента $\bar{\sigma}$. Для этого проведем такое расширение понятия решения задачи (16), чтобы она была разрешима одновременно с разрешимостью задачи (10), (11). Пусть φ_0—произвольный элемент пространства L_{q_2}.

Определение 2. Задача (16) разрешима в обобщенном смысле, если существует такая последовательность $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in F_2 + \varphi_0$, что последовательность $\sigma_n = \{\sigma_0 + |A^*\varphi_n|^{q_1-2} A^*\varphi_n\}$ сходится в норме L_{p_1} к элементу $\bar{\sigma}$.

Из определения 2, теоремы 4 и разложения (21) следует, что если задача (16) разрешима в обобщенном смысле, то $\{A^*\varphi_n\}$ сходится в норме пространства L_{q_1}.

Для построения последовательности $\{\varphi_n\}$, удовлетворяющей определению 2, рассмотрим следующие параметрические функционалы Тихонова и Лагранжа [26, 30, 14]:

$$T^{\alpha}[\sigma] = \frac{1}{p_2}\|A\sigma - b\|^{p_2}_{L_{p_2}} + \alpha_1 \frac{1}{p_1}\|\sigma - \sigma_0\|^{p_1}_{L_{p_1}} - \alpha_1 < \sigma, A^*\varphi_0>; \quad (23)$$

$$T^{\alpha}_{gb}[\varphi] = \frac{1}{q_1}\|A^*\varphi\|^{q_1}_{L_{q_1}} - <b, \varphi> + <\sigma_0, A^*\varphi> + \alpha\cdot\frac{1}{q_2}\|\varphi - \varphi_0\|^{q_2}_{L_{q_2}}\cdot \quad (24)$$

$$L^{\alpha}[\sigma, \varphi] = \frac{1}{p_1}\|\sigma - \sigma_0\|^{p_1}_{L_{p_1}} - <A\sigma - b, \varphi> - \alpha\frac{1}{q_2}\|\varphi - \varphi_0\|^{q_2}_{L_{q_2}}, \quad (25)$$

где $\alpha_1, \alpha > 0$—параметр регуляризации.

Функционалы (23)—(25) связаны, соответственно, с задачами 10), (11), (15) и (13).

В силу равномерной выпуклости пространств L_{p_1}, L_{p_2}, L_{q_1}, L_{q_2} имеем [24, с 126], что для любых α_1, $\alpha > 0$ и b существуют:

а) единственные элементы σ^{α_1} и φ^{α}, минимизирующие соответственно функционалы Тихонова (23) и (24), которые являются решениями уравнений

$$A^*(|A\sigma - b|^{p_2-2}(A\sigma - b)) + \alpha_1|\sigma - \sigma_0|^{p_1-2}(\sigma - \sigma_0) = \alpha_1 A^*\varphi_0, \quad (26)$$

$$A(|A^*\varphi|^{q_1-2}A^*\varphi + \sigma_0) + \alpha|\varphi - \varphi_0|^{q_2-2}(\varphi - \varphi_0) = b; \quad (27)$$

б) единственная седловая точка $(\sigma^{\alpha}, \bar{\varphi}^{\alpha})$ функционала Лагранжа 25), элементы которого удовлетворяют системе уравнений Эйлера

$$\begin{cases} |\sigma - \sigma_0|^{p_1-2}(\sigma - \sigma_0) = A^*\varphi, & (28)\\ A\sigma + \alpha|\varphi - \varphi_0|^{q_2-2}(\varphi - \varphi_0) = b. & (29)\end{cases}$$

Из анализа уравнений (26)—(29), теоремы 4 и равенств (19), (20) видно, что при $\alpha_1 = \alpha^{p_2-1}$, $\sigma^{\alpha_1} = \sigma^{\alpha}$, $\varphi^{\alpha} = \bar{\varphi}^{\alpha}$,

$$\varphi^{\alpha} - \varphi_0 = -\frac{1}{\alpha^{p_2-1}}|A\sigma^{\alpha} - b|^{p_2-2}(A\sigma^{\alpha} - b). \quad (30)$$

$$\sigma^{\alpha} - \sigma_0 = |A^*\varphi^{\alpha}|^{q_1-2}A^*\varphi^{\alpha}. \quad (31)$$

Пусть $U_1 = \sigma_0 + F_1$ и $U_2 = \varphi_0 + F_2$.

Теорема 5. *Если при заданном b уравнение* (11) *разрешимо, то при $\alpha_1 \to 0$ последовательность $\{\sigma^{\alpha_1}\}$ сходится к $\bar{\sigma}$ в норме L_{p_1}. Задача* (16) *разрешима в обобщенном смысле одновременно с разрешимостью задачи (10), (11).*

Доказательство. Пусть уравнение (11) разрешимо. Из равенств (30) и (31) следует, что для любых α_1, $\alpha > 0$ элементы σ^{α_1} и φ^{α} принадлежат, соответственно, замкнутым множествам U_1 и U_2. Так как U_1 является множеством единственности для задачи (11), то на основании работы [24] при α_1, $\alpha \to 0$ имеет место сходимость $\{\sigma^{\alpha_1}\}$ к элементу $\bar{\sigma}$ в норме L_p, и разрешимость задачи (16) в обобщенном смысле. Теорема 5 доказана.

Регуляризующий алгоритм двойственного метода нахождения приближения элемента $\bar{\sigma}$ состоит из трех этапов:

1. Определении последовательности $\{\varphi^{\alpha_n}\}$ путем решения (27) $(\alpha_n \to 0)$.

2. Вычислении $\{\sigma^{\alpha_l}\}$ по формуле (31).

3. Отбор σ^{α_n} по критерию незязки [23].

Преимущество двойственного метода нахождения приближения элемента $\bar{\sigma}$ при решении практических обратных задач геофизики (теории потенциала) по сравнению с другими известными методами [23, 24] заключается в том, что двойственный метод позволяет при помощи декомпозиции исходной задачи на две подзадачи уменьшить размерность решаемой задачи на единицу. Этим определяется большое практическое удобство двойственного метода при его реализации на ЭВМ [27].

З а м е ч а н и е 2. Результаты параграфа 1 остаются в силе для пары рефлексивных локально выпуклых пространств B_1 и B_2, которые вместе со своими сопряжениыми являются рефлексивными локально выпуклыми пространствами Ефимова—Стечкина.

§ 2. Доказательства основных теорем

1°. Более детальная конкретизация равенств (17)—(22) для задачи (10), (2) требует установления справедливости результатов, которые являются важными в работе.

Пусть для множества S выполняются условия (12). Тогда имеет место

Т е о р е м а С. *Если гармоническая функция* $\sigma_\Gamma \in L_p(S)$, $1 < p < \infty$, *имеет нулевой внешний потенциал, то* $\Delta\tilde{\sigma}_\Gamma$ *является обобщенной функцией, носитель которой сосредоточен на* ∂S.

Д о к а з а т е л ь с в о. Воспользуемся способом фиктивных областей [31, 32]. Пусть ограниченная область S' с $\partial S' \in C^\infty$ полностью содержит множество S, т. е. $\bar{S} \subset S'$, и $\forall j$, $j = \overline{1, m}$ множество $S_j \setminus S'$ есть область.

В силу условий, наложенных на S', имеем [22], что для $\sigma \in N(S, p)$ потенциал $V_p(x)$ в области S' принадлежит подпространству $\mathring{W}_p^2(S')$ и $\Delta V(x) = -f_n\,\tilde{\sigma}(x)$, $x \in R_n$.

Известно [22, 10], что потенциал и его первые частные производные гармонической функции являются непрерывными функциями на всем пространстве R_n. Так как $\partial S = \partial\bar{S}$ и $\operatorname{mes} \partial S = 0$, то потенциал V_p и его первые частные производные всюду на ∂S равен нулю. Сужение функции $\bar{\sigma}_\Gamma$ на область S' обозначим через $\bar{\sigma}_{\Gamma 1}$. Очевидно, что потенциалы $\tilde{\sigma}_\Gamma$ и $\tilde{\sigma}_{\Gamma 1}$ совпадают и $\bar{\sigma}_{\Gamma 1} \in N(S', p)$.

На основании теоремы 1, в силу условия $\partial S' \in C^\infty$, в области S' существует последовательность бесконечно дифференцируемых финитных функций $\varphi_k \in C_0^\infty(S')$, которые сходятся в норме $L_p(S')$ к функции $\tilde{\sigma}_{\Gamma 1}$ и имеют нулевой внешний потенциал, т. е.

$$\{\varphi_k\} \xrightarrow{L_p(S')\sim} \sigma_{\Gamma 1}, \quad \forall_k\ \varphi_k \in N(S', p) \cap C_0^\infty(S').$$

Пусть V_{plk} — внутренний потенциал функции φ_k. Очевидно, что $V_{plk} \in C_0^\infty(S')$ и последовательность $\{V_{plk}\} \to V_p(x)$ в норме пространства $\mathring{W}_p^2(S')$. На основании работ [13, 14] имеем, что V_{plk} является решением задачи

$$\Delta^2 V(x) = -f_n \Delta \varphi_k, \quad x \in S' \tag{32}$$

при граничных условиях

$$V\Big|_{\partial S'} = \frac{\partial V}{\partial n}\Big|_{\partial S'} = 0, \tag{33}$$

где $\Delta^2 = \Delta(\Delta)$ — бигармонический оператор.
Следовательно для произвольного $\psi \in C_0^\infty(S)$ имеем

$$\int\limits_{S'} \Delta^2 V_{plk} \psi\, dx = \int\limits_{S'} V_{plk} \Delta^2 \psi\, dx = -f_n \int\limits_{S'} \varphi_k \Delta \psi\, dx. \tag{34}$$

Так как последовательности $\{V_{plk}\}$ и $\{\varphi_k\}$ сходятся, соответственно, к $V_p(x)$ и $\tilde{\sigma}_{\Gamma 1}$, то для любого $\psi \in C_0^\infty(S')$ [22, с. 77]

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{S'} \Delta^2 V_{plk} \psi\, dx = \int\limits_{S'} V_p(x) \Delta^2 \psi\, dx = -f_n \int\limits_{S'} \tilde{\sigma}_{\Gamma 1} \Delta \psi\, dx. \tag{35}$$

Из сходимости $\{V_{plk}\}$ к $V_p(x)$ и равенств (35) следует:
а) $\{\Delta^2 V_{plk}\}$ сходится к обобщенной функции F, носитель которой сосредоточен на ∂S, т. е. $\operatorname{supp} F \subset \partial S$;
б) функция $V_p(x) \in \mathring{W}_p^2(S')$ является единственным решением задачи (32), (33) с правой частью F [22, с. 567], т. е.

$$\int\limits_{S'} \Delta^2 V_p \psi\, dx = \int\limits_{S'} F \cdot \psi\, dx = -f_n \int\limits_{S'} \tilde{\sigma}_{\Gamma 1} \Delta \psi\, dx. \tag{36}$$

Очевидно, что обобщенная функция $F = \Delta \tilde{\sigma}_\Gamma$. Теорема доказана.

На основании теоремы 6 при $p = 2$ справедливо

Следствие. 4. *Если* $\sigma_\Gamma \in N(S, 2)$, *то* $\sigma_\Gamma \equiv 0$.

Доказательство. Так как скалярное произведение в $L_2(S)$ является непрерывной функцией, то на основании соотношений (3), равенства (35) и (36) верны и для любого $\psi \in \mathring{W}_2^2(S')$. Следовательно, обобщенная функция $F=\Delta\tilde{\sigma}_\Gamma$ принадлежит сопряженному к $\overset{\circ}{W}{}^2_2(S')$ пространству, т. е. $F\in W_2^{-2}(S')$ [22].

Подставим в равенство (36) $\psi=V_p$. Учитывая известное представление об обобщенных функциях из пространства $W_2^{-2}(S')$, а также, что $\operatorname{supp} F\subset\partial S$ и непрерывные функции $V_p(x)$ и его первые частные производные всюду на ∂S равны нулю, получим равенства $\int\limits_{S'} F\cdot V_p\,dx=$

$=-f_n\int\limits_S \sigma_\Gamma^n\,dx=0$, т. е. функция σ_Γ тождественно равна нулю.

Замечание 3. Для $n=2,3$ следствие 4 установлено в работе [16].

§ 3. Описания множества нормальных решений и подпространства $N(S, p)$ линейной обратной задачи теории потенциала. Дифференциальные свойства плотностей с нулевым внешним потенциалом

1°. Так как оператор задачи (2) $V_{pe}: L_p(S)\to L_p(Q)$ является ограниченным [6, 14], то для V_{pe} существует сопряженный оператор $V^*_{pe}: L_q(Q)\to L_q(S)$, который задается при помощи соотношения

$$V^*_{pe}\varphi=f_n\int\limits_Q J(x-y)\,\varphi(x)\,dx,\ y\in S,\ \varphi\in L_q(Q) \tag{37}$$

и $R(V^*_{pe})\subset H(S,\ q)$.

Следовательно, разложение (20) для задачи (10), (2) примет вид

$$L_p(S)=N(S,\ p)\oplus\overline{|V^*_{pe}\varphi|^{q-2}\,V^*_{pe}\varphi|},\ \varphi\in L_q(Q), \tag{38}$$

где замкнутое множество $\overline{|V^*_{pe}\varphi|^{q-2}\,V^*_{pe}\varphi}$ совпадает с множеством нормальных решений уравнения (2). Отметим еще раз, что $N(S,\ p)^\perp=\overline{V^*_{pe}\varphi}$.

Двойственное соотношение к разложению (38) в пространстве $L_q(S)$ следующее:

$$L_q(S)=|N(S,\ p)|^{p-2}\cdot N(S, p)\oplus\overline{V^*_{pe}\varphi}. \tag{39}$$

Меняя местами индексы p и q, получим

$$L_p(S)=|N(S,\ q)|^{q-2}\ N(S,\ q)\oplus\overline{V^*_{pn}\varphi}. \tag{40}$$

Известно [10, 22], что для множества S справедливы включения

$$\Delta\,C_0^\infty(S)\subset\Delta\overset{\circ}{W}{}^2_p(S)\subset\Delta\overset{\circ}{W}{}^2_p(S)\subset N(S,\ p) \tag{41}$$

и равенство

$$[\overline{\Delta_p C_0^\infty}]^\perp=H(S,\ q). \tag{42}$$

Для неограниченного замкнутого всюду разрешимого оператора Δ_p соотношение (20) также справедливо и на основании равенства (42) имеют место разложения

$$L_q(S) = \overline{\Delta_p C_0^\infty}|^{p-2}\, \overline{\Delta_p C_0^\infty} \dotplus H(S, q), \tag{43}$$

$$L_p(S) = \overline{\Delta_p C_0^\infty} \dotplus H(S, q)|^{q-2} H(S, q) \tag{44}$$

и

$$L_p(S) = H(S, p) \dotplus \overline{\Delta_q\, C_0^\infty}|^{q-2}\, \overline{\Delta_q\, C_0^\infty}. \tag{45}$$

Справедливость теорем 1 и 2, равенств (5), (6) для множества S, удовлетворяющего условиям (12), в пространстве $L_p(S)$, $1<p<\infty$ устанавливается на основании следующих рассуждений. Из следствия 4 и ортогонального разложения в прямую сумму $L_2(S)=H(S, 2) \oplus \overline{\Delta_2\, C_0^\infty} = \overline{\dot{V}_{2e}\, \varphi} \oplus N(S, 2)$ непосредственно следуют равенства $H(S, 2)=\overline{\dot{V}_{2e}\, \varphi}$ и $N(S, 2) = \overline{\Delta_2 C_0^\infty}(S)$. Учитывая [33, с. 78] тождественное вложение $L_p(S)$ в $L_k(S)$ при $p>k\geqslant 1$ получим, что для $p>2$

$$H(S, p) = \overline{\dot{V}_{qe}\, \varphi} \tag{46}$$

и

$$N(S, p) = \overline{\Delta_p\, C_0^\infty}(S). \tag{47}$$

Из рефлексивности пространств $L_p(S)$, $1<p<\infty$ и равенств (39)—(42), (44), (45) следует, что соотношения (46) и (47) имеют место и для $1<p<2$.

Из равенства (46) вытекает

Следствие 5. *Множество гармонических функций в $\overline{S}$ всюду плотно в $H(S, p)$, $1<p<\infty$.*

Из равенств (47) и (36) следует, что следствие 4 справедливо и для $1<p<\infty$.

Теорема 7. *Для множества S, удовлетворяющего условиям* (12) *при $2\leqslant r<\infty$ и $1<p<\infty$, имеет место равенство* (7).

Доказательство. На основании следствия 4 и включений (41) справедливо равенство

$$\Delta\, \dot{W}_p^2(S) = \Delta\, \dot{W}_p^2(S) = \Delta\, \overline{C_0^\infty}(S). \tag{48}$$

Следовательно, элементы $\dot{W}_p^2(S)$ и $\dot{W}_p^2(S)$, для которых выполняется равенство (48), отличаются друг от друга на гармоническую функцию $V_p \in \dot{W}_p^2(S)$. Известно [9], что функции из $\dot{W}_p^2(S)$ являются внутренними потенциалами элемента $\sigma \in \Delta\, \dot{W}_p^2(S)$.

Так как функция $V_p \in \dot{W}_p^2(S)$ является гармонической на множестве S, то $\sigma = \Delta\, V_p \equiv 0$ и $\sigma \equiv 0$. Следовательно $\dot{W}_p^2(S) = \dot{W}_p^2(S)$. Из включения $\dot{W}_p^{r_1}(S) \subset \dot{W}_p^{r_2}(S)$, $r_1 > r_2$, следует справедливость равенства (7) для $2\leqslant r<\infty$. Теорема доказана.

На основании теоремы 4 и равенств (38), (44) для множества с $\partial S = \partial \overline{S}$ и $\operatorname{mes} \partial S = 0$ справедливо

Следствие 6. *Множество нормальных решений уравнения (2) совпадает с множеством* $|H(S, q)|^{q-2} H(S, q)$. *Нормальные решения уравнения (2) являются бесконечно дифференцируемыми функциями за исключением нулевых точек.*

Замечание 4. Следствие 6 для множества S с $\partial S \in C$ установлено в работе [12].

Для множества S, удовлетворяющего условиям (12), равенства (38) и (40) принимают вид

$$L_p(S) = \Delta \mathring{W}_p^2(S) \oplus |H(S, q)|^{q-2} H(S, q) \tag{49}$$

и

$$L_p(S) = H(S, p) \oplus |\Delta \mathring{W}_q^2(S)|^{q-2} \Delta \mathring{W}_q^2(S). \tag{50}$$

Замечание 5. На основании работы [12] для неограниченного открытого множества S, удовлетворяющего условиям (12), расположенного в полупространстве $x_n > 0$, следствие 4, а вместе с ним и равенства (5)—(7). (49), (50) остаются в силе с заменой пространства $W_p^r(S)$ на пространство $L_p^r(S)$ [21, 22].

2°. Для исследования дифференциальных свойств функций $\sigma \in N(S, p)$ сформулируем следующую задачу: требуется по заданному $b \in L_p(S)$ определить на множестве S такую функцию $\sigma \in \mathring{W}_p^2(S)$, которая удовлетворяет системе уравнений

$$\Delta \sigma = b, \tag{51}$$

$$V_{pe}\sigma = 0, \quad b \in L_p(S), \quad \sigma \in \mathring{W}_p^2(S). \tag{52}$$

Так как для произвольного $b \in L_p(S)$ уравнение (51) имеет решение, принадлежащее пространству $W_p^2(S)$ [22, с. 239], аналоги разложения (49) и (50) имеют место и для пространства $W_p^2(S)$, то на основании равенства (3) легко следует

Теорема 8. *Для любого* $b \in L_p(S)$ *существует единственное решение* σ_0 *задачи* (51), (52) *принадлежащее пространству* $W_p^2(S)$, *которое определяется из системы уравнений*

$$\sigma = -\frac{1}{f_n} \Delta \varphi, \tag{53}$$

$$\Delta \sigma = b, \tag{54}$$

где $\varphi \in \mathring{W}_p^2(S)$.

Потенциал функции $\bar{\sigma}_0 \in N(S, p)$ — элемент $\bar{\varphi}_0 \in \mathring{W}_p^2(S) \cap W_p^4(S)$, на основании равенств (53), (54), определяется из уравнения

$$\Delta_p \Delta_q^{*} \varphi = -f_n b, \tag{55}$$

которое при $n = 2$ подобно уравнению изгиба тонкой пластинки с защемленным краем [32, 34]. Когда граница множества S принадлежит классу Липшица, уравнение (55) принимает естественный вид

$$\Delta^2 \varphi = -f_n b \tag{56}$$

при граничных условиях

$$\varphi\Big|_{\partial S} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{\partial S} = 0. \tag{57}$$

На основании задачи (56), (57) в работах [13—15] разработан регуляризующий однопараметрический алгоритм эквивалентного перераспределения масс с нулевым внешним потенциалом.

Рассмотрим задачу

$$\min \frac{1}{p} \|\sigma\|^p_{L_p} \tag{58}$$

при ограничении

$$\Delta \sigma = b, \tag{59}$$

где $b \in L_p(S)$.

Из равенств (43) следует, что множество нормальных решений задачи (58), (59) совпадает с множеством $|\overline{\Delta_q C_0^\infty}|^{q-2}\, \overline{\Delta_q C_0^\infty} \cap D(\Delta_p)$.

Из равенств (49), (50) следует, что при $p=2$ задачи (51), (52) и (58), (59) эквивалентны [13, 14].

В заключение автор выражает искреннюю благодарность член-корр. АН УССР В. И. Старостенко, А. С. Маргулису и участникам семинара кафедры численного анализа ЕГУ под руководством проф. Г. Г. Казаряна за дискуссии по статье, которые были чрезвычайно плодотворными и полезными.

Институт геофизики и инженерной
сейсмологии АН Армянской ССР

Поступила 17. V. 1985

Ա. Մ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Պոտենցիալի տեսության հակադարձ խնդիրը $L_p(S)$ տարածության մեջ և $W_p^r(S)$ էլեմենտների մոտարկումը անվերջ դիֆերենցելի ֆինիտ ֆունկցիաներով (ամփոփում)

Դիցուք S-ը սահմանափակ բաց բազմություն է R_n, $n \geq 2$, էվկլիդյան տարածության վրա ∂S սահմանով, որը բավարարում է $\partial S = \partial \overline{S}$ և $\operatorname{mes} \partial S = 0$ (n-չափանի Լեբեգի չափականություն) պայմաններին։ Պոտենցիալի տեսության գծային հակադարձ խնդրի համար, միագումարվող p-րդ աստիճանի ֆունկցիաների $L_p(S)$, $1 < p < \infty$, բանախյան տարածության մեջ, տրված են $F(S, p)$ նորմալ լուծումների բազմության և զրոյական արտաքին պոտենցիալ ունեցող ֆունկցիաների $N(S, p)$ ենթատարածության պարզ նկարագրերը։ Ցույց է տրված, որ $N(S, p)$ ենթատարածությունը համընկնում է անվերջ դիֆերենցելի ֆինիտ $C_0^\infty(S)$ ֆունկցիաների բազմության վրա որոշված Լապլասի Δ օպերատորի արժեքների տիրույթի փակման հետ $L_p(S)$ տարածության նորմայով՝ այսինքն $N(S, p) = \overline{\Delta C_0^\infty}(S)$: Այս հավասարության ապացույցը հիմնված է հետևյալ երկու փաստերի վրա: $L_p(S)$ տարածության վերածումը $N(S, p)$ ենթատարածության և $F(S, p)$ փակ բազմության հատուկ կիսաուղիղ գումարի։

2) S բազմության վրա գոյություն չունի զրոյական արտաքին պոտենցիալ ունեցող հարմոնիկ ֆունկցիա։ Ցույց է տրված, որ Սոբոլևի $W_p^r(S)$ տարածության դասի պահպանմամբ զրոյական շարունակություն ստացած ֆունկցիաների $\dot{W}_p^r(S)$ բազմությունը $2 < r < \infty$ դեպքում համընկնում է $C_0^\infty(S)$ բազմության փակման հետ $W_p^r(S)$ նորմայով, այսինքն՝ $\dot{W}_p^r(S) = \mathring{W}_p^r(S)$, $2 < r < \infty$.

S. M. HOVHANESIAN. *The converse problem of the potential theory in the space $L_p(S)$ and approximation of elements from $W_p^{\prime}(S)$ by the continuously differentiable finite functions* (summary)

Let S be a bounded open set in the Euclidean space R_n, $n > 2$, with boundary ∂S, satisfying the conditions $\partial S = \partial \bar{S}$ and mes $\partial S = 0$ (n-dimensional Lebesgue measure). For a linear converse problem of the potential theory in the Banach space $L_p(S)$, $1 < p < \infty$ and functions with summable p-th degree a comprehensive descriptions of the set of normal solutions $F(S, p)$ and of the subspace of functions $N(S, p)$ which have a zero outer potential. It is shown, that the subspace $N(S, p)$ coincides with the closure of the range of the Laplacian Δ, which is defined on the infinitely differentiable finite functions $C_0^{\infty}(S)$ with the norm of the space $L_p(S)$, i. e. $N(S, p) = \overline{\Delta C_0^{\infty}(S)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. Weck*. Inverse Probleme der Potentialtheorie, Appl. analys, v. 2, № 2, 1972 195—204.
2. *А. А. Великович, Я. Б. Зельдович*. Об одном подходе к решению обратной задачи теории потенциала, ДАН СССР, 212, № 3, 1973, 550—583.
3. *А. И. Корбунов*. О построении решения обратной задачи гравиразведки в классе распределений плотностей, ДАН УССР, сер. Б., № 12, 1977, 1078—1080.
4. *А. И. Кобрунов*. К вопросу об интерпретации аномальных гравитационных полей методом оптимизации (трехмерная задача), Изв. АН СССР, Физика Земли, № 10, 1979, 67—76.
5. *В. Н. Страхов*. Об общих решениях обратных задач гравиметрии и магнитометрии, Изв. высш. учеб. завед., Геология и разведка, № 4, 1978, 104—117.
6. *В. Н. Страхов*. Эквивалентность в обратных задачах гравиметрии и возможности ее практического использования при интерпретации гравитационных аномалий I, II, Изв. АН СССР, Физика Земли, № 2, 1980, 44—64, № 9, 1980, 38—69.
7. *В. Г. Чередниченко*. К вопросу об определении плотности тела по заданному потенциалу, ДАН УССР, 240, № 5, 1032—1035.
8. *F. Sanco*. Internal collocation, Atti. Accad. Nazion. dei Lincei, Memorie, Ser. VII-XVI, Ser. 1ª, Fasc. 1, 1980, 52p.
9. *А. С. Маргулис*. Гармонические плотности и обратные задачи потенциала, В кн.: Теория и методика интерпретации гравимагнитных полей, «Наукова Думка», К., 1981, 130—136.
10. *А. С. Маргулис*. К теории потенциала в классах $L_p(\Omega)$, Изв. высш. учеб. завед., Математика, № 1 (236), 1982, 33—41.
11. *А. С. Маргулис*. Теория потенциала для плотностей класса L_p и ее применение к обратным задачам гравиметрии, В кн.: Теория и практика интерпретаций гравитационных и магнитных аномалий в СССР, «Наукова Думка», К., 1983, 188—197.
12. *А. С. Маргулис*. Рудные и структурные обратные задачи гравиметрии. Нормальные решения и их приложения, Автореф. дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. ИФЗ АН СССР, М., 1984, 18.
13. *С. М. Оганесян*. Решение обратной задачи гравиметри в классе $L_2(S)$ распределения плотностей, ДАН УССР, сер. Б, № 6, 1981, 39—43.
14. *С. М. Оганесян*. Решение линейных некорректных задач гравиметрии двойственным методом, ДАН УССР, сер. Б, № 9, 1982, 13—18.
15. *С. М. Оганесян, В. И. Старостенко*. L—псевдорешения и их использование для построения тел с нулевым внешним гравитационным полем. Изв. АН СССР. Физика Земли, № 2, 1984, 51—62.

16. *С. М. Оганесян, В. И. Старостенко.* Тела нулевого гравитационного потенциала: о забытых работах и современном состоянии теории. Изв. АН СССР. Физика Земли, № 3, 1985, 49—62.

17. *П. С. Новиков.* О единственности решения обратной задачи потенциала. ДАН УССР, 18, № 3, 1938, 165—168.

18. *Г. Г. Казарян.* О плотности гладких финитных функций в $\overset{cr}{W_p}(\Omega)$ Матем. заметки, 2, № 1, 1967, 45—52.

19. *В. И. Буренков.* О приближени функций из пространства $\overset{r}{W_p}(\Omega)$ финитными функциями для произвольного открытого множества Ω. Труды МИ АН СССР, 131, 1974, 51—63.

20. *С. М. Никольский.* Об устойчивых граничных значениях дифференцируемой функции многих переменных, Матем. сб., 61, № 2, 1963, 224—252.

21. *С. Л. Соболев.* Плотность финитных функций в $L_p^m(E^n)$. Сибирский матем. журн., 4, № 3, 1963, 673—682.

22. *С. Л. Соболев.* Введение в теорию кубатурных формул. «Наука», М., 1974, 808.

23. *А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин.* Методы решения некорректных задач, «Наука», М., 1979, 288.

24. *О. А. Лисковец.* Вариационные методы решения неустойчивых задач, «Наука и техника», Минск, 1981, 346.

25. *В. П. Маслов.* Существование решения некорректной задачи эквивалентной сходимости регуляризационного процесса, УМН, 23, вып. 3, 1968, 183—184.

26. *С. М. Оганесян, В. И. Старостенко.* Двойственный метод решения линейной некорректной задачи, использующий параметрический модифицированный функционал Лагранжа и вариационный способ А. Н. Тихонова, ДАН СССР, 263, № 2, 1982, 297—301.

27. *С. М. Оганесян, В. И. Старостенко, М. Г. Оганесян.* Двойственный метод решения линейных некорректных задач геофизики, Изв. АН СССР, Физика Земли, № 6, 1984, 64—78.

28. *В. И. Тихомиров.* Некоторые вопросы теории приближений, Изд-во МГУ, М., 1976, 304.

29. *М. М. Вайнберг,* Вариационный метод и метод монотонных операторов, «Наука», М., 1972, 416.

30. *В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения, «Наука», М., 1978, 208.

31. *Г. И. Марчук.* Методы вычислительной математики, «Наука», М., 1977, 456.

32. *Л. А. Оганесян, Л. А. Руховец.* Вариционно-разностные методы решения эллиптических уравнений, Изд-во АН АрмССР, Ер., 1979, 236.

33. *В. А. Треногин.* Функциональный анализ, «Наука», М., 1980, 496.

34. *С. П. Тимощенко, С. Войновский-Кригер.* Пластинки и оболочки, ГЦ ФМП, М., 1963, 636.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 1, 1988 Математика

УДК 517.956.223

В. В. АСАТРЯН

ОСНОВНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Введение

В настоящей работе рассматриваются основные краевые задачи для уравнения

$$\Delta u(x, y, t) + a(x, y, t)\, u_x + b(x, y, t)\, u_y + \\ + d(x, y, t)\, u_t + c(x, y, t)\, u = 0, \; t > 0, \tag{1}$$

в полупространстве $t \geqslant 0$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ — оператор Лапласа. Коэффициенты $a(x, y, t)$, $b(x, y, t)$ $c(x, y, t)$, $d(x, y, t)$ предполагаются непрерывными при $t \geqslant 0$, непрерывно-дифференцируемыми при $t > 0$ и становятся постоянными вне некоторого полушара Ω_0 (Ω : : $x^2 + y^2 + t^2 \leqslant R_0^2$, $t > 0$) достаточно большого радиуса R_0, т. е. $a(x, y, t) = a_0$, $b(x, y, t) = b_0$, $c(x, y, t) = c_0$, $d(x, y, t) = d_0$, при $x^2 + y^2 + t^2 > R_0^2$ $(t > 0)$, где a_0, b_0, c_0, d_0 — постоянные числа. Через S_0 обозначим круг $x^2 + y^2 \leqslant R_0^2$.

Наряду с уравнением (1) будем рассматривать два типа краевых условий:

$$u(x, y, 0) = f(x, y) \tag{2}$$

для первой краевой задачи (задача Дирихле) и

$$\frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} - \alpha(x, y)\, u(x, y, 0) = f_1(x, y) \tag{3}$$

—для третьей краевой задачи (при $\alpha(x, y) \equiv 0$ получим вторую краеву задачу). Функции $f(x, y)$, $f_1(x, y)$ и $\alpha(x, y)$ предполагаются непрерывными на плоскости $t = 0$, причем $\alpha(x, y) = \alpha_0$ при $x^2 + y^2 \geqslant R_0^2$, где α_0—постоянное число.

В случае постоянных коэффициентов a, b, c, d, α вышеуказанные краевые задачи рассмотрены в работах [1] — [4] в разных классах функций, имеющих рост на бесконечности не более полиномиального. В этих работах доказано, что однородная задача имеет конечное число решений, а неоднородная задача всегда разрешима. В настоящей работе исследуются эти задачи, когда коэффициенты уравнения (1) и краевого условия (3) переменные, а решение ищется в классе функций экспоненциального роста в бесконечности (f и f_1 также имеют экспоненциальный рост).

Будем говорить, что функция $u(x, y, t)$ принадлежит классу A^m $(m > 0)$, если $u \in C^2(t > 0) \cap C(t \geqslant 0)$ и имеет оценку на бесконечности

$$|u(x, y, t)| \leqslant \text{Cons} \cdot e^{(m-\varepsilon)r} \tag{A}$$

для некоторого $0 < \varepsilon < m$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + t^2}$. Подкласс класса A^m, определенный дополнительными условиями $u \in C^1(t \geqslant 0)$ и

$$\left|\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}\right| \leqslant \text{Const} \cdot e^{(m-\varepsilon)r} \tag{Б}$$

обозначим через B^m. Здесь и в дальнейшем через „Const" будут обозначены некоторые положительные постоянные.

Решения краевых задач (1), (2) и (1), (3) будем искать, соответственно, в классах A^m и B^m. Число m уточним ниже.

Пусть $c_0 < 0$. Обозначим $c_0 = -\lambda_0^2$ $(\lambda_0 > 0)$,

$$\mu_0 = \begin{cases} \lambda_0, \text{ при } \alpha_0 \geqslant \lambda_0, \\ \sqrt{\lambda_0^2 - \alpha_0^2}, \text{ при } -\lambda_0 < \alpha_0 < \lambda_0. \end{cases}$$

Предположим, что $f(x, y)$ и $f_1(x, y)$ имеют оценки на бесконечности:

$$|f(x, y)| \leqslant \text{Const} \cdot e^{(\lambda_0-\varepsilon) r_0}, \tag{4}$$

$$|f_1(x, y)| \leqslant \text{Const} \cdot e^{(\mu_0-\varepsilon) r_0}, \tag{5}$$

где $r_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Основные результаты статьи следующие:

Теорема 1. а) *Если* $a_0 = b_0 = d_0 = 0$, $c(x, y, t) \leqslant 0$, *то краевая задача* (1), (2) *имеет, и притом единственное, решение в классе* A^{λ_0} *для любой непрерывной* $f(x, y)$, *удовлетворяющей условию* (4):

б) *в условиях пункта* а) *решение краевой задачи* (1), (2) *из класса* A^{λ_0} *непрерывно зависит от граничной функции* $f(x, y)$;

в) *если* $a_0 = b_0 = d_0 = 0$, $c_0 < 0$, *то краевая задача* (1), (2) *фредгольмова в классе* A^{λ_0}.

Теорема 2. а) *Если* $a_0 = b_0 = d_0 = 0$, $c(x, y, t) \leqslant 0$, $c_0 < 0$, $\alpha(x, y) \geqslant 0$, *то краевая задача* (1), (3) *имеет, и притом единственное, решение в классе* B^{μ_0} *для любой непрерывной* $f_1(x, y)$, *удовлетворяющей условию* (5);

б) *в условиях пункта* а) *решение краевой задачи* (1), (3) *из класса* B^{μ_0} *непрерывно зависит от граничной функции* $f_1(x, y)$;

в) *если* $a_0 = b_0 = d_0 = 0$, $c_0 < 0$, $-\lambda_0 < \alpha_0$, *то краевая задача* (1), (3) *фредгольмова в классе* B^{μ_0}.

Работа состоит из двух параграфов. В § 1 приводится доказательство теоремы 1. В § 2 исследуется краевая задача (1), (3).

Изучение краевых задач (1), (2) и (1), (3) в общем случае сводится к случаю $a_0 = b_0 = d_0 = 0$ с соответствующими изменениями в классах.

§ 1. Изучение краевой задачи (1), (2)

Рассмотрим уравнение (λ—положительная постоянная)

$$\Delta u(x, y, t) - \lambda^2 u(x, y, t) = g(x, y, t), \ t > 0. \qquad (6)$$

В [5] доказывается, что решение краевой задачи (2), (6) для ограниченных $f(x, y)$ и $g(x, y, t)$ дается формулой

$$u(x, y, t) = u^*(x, y, t) + w(x, y, t), \qquad (7)$$

где

$$u^*(x, y, t) = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\zeta>0} g(\xi, \eta, \zeta) \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(t-\zeta)^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(t-\zeta)^2}} d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

а

$$w(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [f(\xi, \eta) - u^*(\xi, \eta, 0)] \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+t^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+t^2}} \right] d\xi\, d\eta.$$

Аналогично, как в [5], можно доказать, что и при f, g, удовлетворяющих условиям $|f(x, y)| \leqslant \mathrm{Const}\cdot e^{(\lambda-\varepsilon) r_0}$ и $|g(x, y, t)| \leqslant \mathrm{Const} \times \times e^{(\lambda-\varepsilon) r}$, формула (7) определяет частное решение задачи (2), (6). Убедимся, что краевая задача (2), (6) не имеет других решений в классе A^λ, кроме (7). Для этого надо доказать, что однородная краевая задача

$$\Delta u(x, y, t) - \lambda^2 u(x, y, t) = 0, \ t > 0, \qquad (8)$$

$$u(x, y, 0) = 0 \qquad (9)$$

не имеет нетравиальных решений в классе A^λ.

Лемма 1. *Краевая задача* (8), (9) *не имеет нетривиальных решений в классе* A^λ.

Доказательство. Предположим, что решение $u(x, y, t)$ задачи (8), (9) продолжено в полупространство $t < 0$ нечетным образом $u(x, y, -t) = -u(x, y, t)$ и рассмотрим уравнение (8) во всем пространстве. Тогда продолженное решение тоже будет из класса A^λ. Из [6] следует, что в этих условиях

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant M\cdot e^{(\lambda-\varepsilon) r}; \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant M\cdot e^{(\lambda-\varepsilon) r}, \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| \leqslant M\cdot e^{(\lambda-\varepsilon) r}, \qquad (10)$$

где M — некоторая положительная постоянная.

Обозначим через S_R сферу достаточно большого радиуса R с центром в начале координат. Для произвольной точки (x_0, y_0, t_0) из шара $x^2 + y^2 + t^2 \leqslant R^2$ будем иметь по формуле Грина

$$u(x_0, y_0, t_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_R} \left[u(x, y, t) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-\lambda r^*}}{r^*}\right) - \frac{e^{-\lambda r^*}}{r^*}\frac{\partial}{\partial n} u(x, y, t) \right] dS_R, \qquad (11)$$

где $(x, y, t) \in S_R$, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к сфере S_R.

$$r^* = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (t-t_0)^2}.$$

Справедливы следующие очевидные неравенства

$$R - r_0^* < r^* < R + r_0^*, \quad -\lambda r^* < -\lambda R + \lambda r_0^*,$$

где $r_0^* = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + t_0^2}$. Учитывая еще (10), из (11) получим следующую оценку для $u(x_0, y_0, t_0)$:

$$|u(x_0, y_0, t_0)| \leqslant \mathrm{Const} \cdot e^{(\lambda-\varepsilon)R} \cdot e^{-\lambda R} \cdot e^{\lambda r_0^*} \frac{(\lambda+1)(R+r_0^*)+1}{(R-r_0^*)^2} \times$$

$$\times 2\pi R^2 \to 0, \quad R \to \infty.$$

Следовательно, $u(x_0, y_0, t_0) = 0$, Лемма 1 доказана.

Из формулы (7) и леммы 1 следует

Теорема 3. *Краевая задача* (2), (6) *имеет, и притом единственное, решение в классе* A^λ. *Это решение определяется формулой* (7).

Можно показать, что при расширении класса A^λ (в смысле роста) единственность нарушается. Действительно, наряду с $u \equiv 0$ решением краевой задачи (8), (9) является и функция $u = C(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t})$, где C — произвольная постоянная.

Доказательство теоремы 1. Пусть $a_0 = b_0 = d_0 = 0$. Представляя уравнение (1) в виде

$$\Delta u - \lambda_0^2 u = -a(x, y, t)\, u_x - b(x, y, t)\, u_y -$$

$$- d(x, y, t)\, u_t + [c_0 - c(x, y, t)]\, u, \quad t > 0, \tag{12}$$

считая правую часть в (12) известной и пользуясь формулой (7) после простых преобразований (интегрирование по частям и изменение порядка интегрирования) краевая задача (1), (2) приводится к эквивалентному интегральному уравнению

$$u(x, y, t) = \iiint\limits_{\zeta > 0} K(\xi, \eta, \zeta, x, y, t)\, u(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta +$$

$$+ \iint\limits_{\zeta = 0} P(\xi, \eta, x, y, t)\, u(\xi, \eta, 0)\, d\xi\, d\eta + F(x, y, t), \tag{13}$$

где ядра K и P стремятся к нулю, соответственно, при $r \to \infty$ и $r_0 \to \infty$, причем $K(\xi, \eta, \zeta, x, y, t) \equiv 0$ при $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geqslant R_0^2$, $\zeta \geqslant 0$, $P(\xi, \eta, x, y, t) \equiv 0$ при $\xi^3 + \eta^2 \geqslant R_0^2$,

$$F(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{e^{-\lambda_0 \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + t^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + t^2}} \right] d\xi\, d\eta.$$

Учитывая последнее свойство ядер K и P, интегральное уравнение (13) можно представить в виде

$$u(x, y, t)=\iiint_{\Omega_0} K(\xi, \eta, \zeta, x, y, t)\, u(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta +$$

$$+\iint_{S_0} P(\xi, \eta, x, y, t)\, u(\xi, \eta, 0)\, d\xi\, d\eta + F(x, y, t). \qquad (14)$$

Подставляя в (14) $t=0$, получим

$$u(x, y, 0)=\iiint_{\Omega_0} K(\xi, \eta, \zeta, x, y, t)\, u(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta +$$

$$+\iint_{S_0} P(\xi, \eta, x, y, 0)\, u(\xi, \eta, 0)\, d\xi\, d\eta + F(x, y, 0). \qquad (15)$$

Рассмотрим систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\psi(x, y, t)=\iiint_{\Omega_0} K(\xi, \eta, \zeta, x, y, t)\, \psi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta +$$

$$+\iint_{S_0} P(\xi, \eta, x, y, t)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + F(x, y, t), \ (x, y, t)\in \Omega_0, \qquad (16)$$

$$\varphi(x, y)=\iiint_{\Omega_0} K(\xi, \eta, \zeta, x, y, 0)\, \psi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta +$$

$$+\iint_{S_0} P(\xi, \eta, x, y, 0)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + F(x, y, 0), \ (x, y)\in S_0. \qquad (17)$$

Лемма 2. *Уравнение* (14) *эквивалентно системе* (16), (17).

Доказательство. Пусть $\{\psi, \varphi\}$—некоторое решение системы (16), (17). Тогда функция $u(x, y, t)$, где

$$u(x, y, t)=\begin{cases}\psi(x, y, t), \text{ при } (x, y, t)\in\Omega_0,\\ \displaystyle\iiint_{\Omega_0} K(\xi, \eta, \zeta, x, y, t)\, \psi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta +\end{cases}$$

$$+\iint_{S_0} P(\xi, \eta, x, y, t)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + F(x, y, t), \text{ при } (x, y, t)\,\overline{\in}\,\Omega_0 \qquad (18)$$

будет удовлетворять уравнению (14). Для $(x, y, t)\in\Omega_0$ это очевидно. Если $(x, y, t)\,\overline{\in}\,\Omega_0$, то подставляя $u(x, y, t)$ и $u(x, y, 0)$ из (18) в (14), получим тождество.

Обратно, пусть $u(x, y, t)$ — решение уравнения (14). Согласно (14) и (15) функции $\psi(x, y, t)=u(x, y, t)$ при $(x, y, t)\in\Omega_0$, $\varphi(x, y)=$ $=u(x, y, 0)$ при $(x, y)\in S_0$ будут удовлетворять системе (16), (17). Лемма 2 доказана.

Ниже будет доказано, что $u(x, y, t)$ из (18) принадлежит классу A^{λ_0}. Имея в виду еще эквивалентность краевой задачи (1), (2) и интегрального уравнения (14), из леммы 2 следует

Лемма 3. *Краевая задача* (1), (2) *и система интегральных уравнений Фредгольма второго рода* (16), (17) *эквивалентны.*

Лемма 4. *Если* $a_0 = b_0 = d_0 = 0$, $c(x, y, t) \leqslant 0$, *то система* (16), (17) *однозначно разрешима.*

Доказательство. Поскольку система (16), (17) фредгольмова, достаточно доказать, что однородная система (16), (17) имеет только нулевое решение.

Пусть $\{\psi, \varphi\}$ — любое решение однородной системы (16), (17). Тогда $u(x, y, t)$ из (18) при $F \equiv 0$ будет решением однородной краевой задачи (1), (2). Из свойств ядер K и P следует, что $u \to 0$ при $r \to \infty$. Для таких $u(x, y, t)$ принцип максимума применим относительно решения однородной краевой задачи (1), (2). Согласно этому принципу $u(x, y, t) \equiv 0$. Из (18) и (17) следует, что $\psi(x, y, t) = u(x, y, t)$ при $(x, y, t) \in \Omega_0$ и $\varphi(x, y) = u(x, y, 0)$ при $(x, y) \in S_0$. Следовательно, $\psi(x, y, t) \equiv 0$, $\varphi(x, y) \equiv 0$. Лемма 4 доказана.

Из леммы 4 следует доказательство части а) теоремы 1. Докажем часть в) теоремы 1.

Пусть $c(x, y, t) = c_0 < 0$ в окрестности бесконечно удаленной точки, а в конечной части полупространства $t > 0$ может быть и положительной. Тогда однородная система (16), (17) $(F \equiv 0)$ имеет конечное число линейно независимых решений и столько же условий разрешимости. Из эквивалентности краевой задачи (1), (2) и системы (16), (17) следует, что задача (1), (2) также фредгольмова, причем число линейно независимых решений однородной краевой задачи (1), (2) и однородной системы (16), (17) равны.

Можно показать, что условия разрешимости неоднородной краевой задачи (1), (2) имеют вид

$$\iint\limits_{t=0} f(x, y) \left.\frac{\partial W_j}{\partial t}\right|_{t=0} dx\, dy = 0, \; j = 1, 2, \cdots, k,$$

где $W_1, W_2, \cdots, W_k$ — полная систима линейно независимых решений однородной краевой задачи (1), (2).

Для доказательства части б) теоремы 1 введем нормы $f(x, y)$ и $u(x, y, t)$ по формулам

$$\|f\| = \sup_{t=0} (|f| \cdot e^{-(\lambda_0 - \varepsilon) r_0}); \; \|u\| = \sup_{t>0} (|u| \cdot e^{-(\lambda_0 - \varepsilon) r}).$$

Очевидно, что $|u(x, y, t)| \leqslant \|u\| \cdot e^{(\lambda_0 - \varepsilon) r}$.

Лемма 5. *Решение краевой задачи* (1), (2) *из класса* A^{λ_0} *удовлетворяет неравенству*

$$\|u\| \leqslant \text{Const} \cdot \|f\|. \tag{19}$$

Доказательство. Из (18) видно, что неравенство (19) достаточно доказать для функции $F(x, y, t)$. После замены переменных интегрирования в выражении $F(x, y, t)$ по формулам $\xi - x = \xi_1$, $\eta - y = \eta_1$, получим

$$F(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi + x, \eta + y)\left(\frac{\lambda_0 t}{\rho^2} + \frac{t}{\rho^3}\right) e^{-\lambda_0\rho}\, d\xi\, d\eta,$$

где $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + t^2}$. Полагая $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, будем иметь

$$|f(\xi + x, \eta + y)| \leqslant \|f\| \cdot e^{(\lambda_0 - \varepsilon)(r_1 + r_2)}. \tag{20}$$

Из (20) следует

$$|F(x, y, t)| \leqslant \|f\| \cdot e^{(\lambda_0 - \varepsilon) r_1} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\lambda_0 - \varepsilon) r_2}\left(\frac{t}{\rho^3} + \frac{\lambda_0 t}{\rho^2}\right) e^{-\lambda_0\rho}\, d\xi\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{Const}\cdot \|f\| \cdot e^{(\lambda_0 - \varepsilon) r_1} \leqslant \mathrm{Const}\cdot\|f\|\cdot e^{(\lambda_0 - \varepsilon) r}. \tag{21}$$

Из (21) следует неравенство (19) и принадлежность функций $u(x, y, t)$ из (18) классу A^{λ_0}. Теорема 1 полностью доказана.

Рассмотрим теперь общий случай краевой задачи (1), (2). Введением новой неизвестной функции $T(x, y, t)$ по формуле

$$u(x, y, t) = e^{-\frac{1}{2}(a_0 x + b_0 y + d_0 t)}\, T(x, y, t) \tag{22}$$

приходим к новой краевой задаче

$$\Delta T + \tilde{a}(x, y, t)\, T_x + \tilde{b}(x, y, t)\, T_y + \tilde{d}(x, y, t)\, T_t + \tilde{c}(x, y, t)\, T = 0, \tag{23}$$

$$T(x, y, 0) = \tilde{f}(x, y), \tag{24}$$

где $\tilde{a}(x, y, t) = a(x, y, t) - a_0$; $\tilde{b}(x, y, t) = b(x, y, t) - b_0$;

$$\tilde{d}(x, y, t) = d(x, y, t) - d_0,$$

$$\tilde{c}(x, y, t) = c(x, y, t) - \frac{1}{4}[a_0 a(x, y, t) + b_0 b(x, y, t) + d_0 d(x, y, t)],$$

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, y)\cdot e^{\frac{1}{2}(a_0 x + b_0 y)},$$

$\tilde{c}_0 = -\tilde{\lambda}_0^2 = c_0 - \frac{1}{4}(a_0^2 + b_0^2 + d_0^2) < 0$, если $c_0 < 0$, где $\tilde{c}$ — значение $\tilde{c}(x, y, t)$ вне Ω_0.

Ясно, что задача (23), (24) аналогична задаче (1), (2) в случае $a_0 = b_0 = d_0 = 0$. Если $u(x, y, t) \in A^{m_0}$, где

$$m_0 = \sqrt{-c_0 + \frac{1}{4}(a_0^2 + b_0^2 + d_0^2)} - \frac{1}{2}\sqrt{a_0^2 + b_0^2 + d_0^2}.$$

то из (22) следует, что

$$|T(x, y, t)| \leqslant \mathrm{Const} \cdot e^{(m_0-\varepsilon) r} \cdot e^{\frac{1}{2}\sqrt{a_0^2+b_0^2+d_0^2}} = \mathrm{Const} \cdot e^{(\bar{\lambda}_0-\varepsilon) r}.$$

Пусть $c(x, y, t) \equiv 0$, но $a^2(x, y, t) + b^2(x, y, t) + d^2(x, y, t) \neq 0$. Если $f \to 0$, то нетрудно доказать единственность решения краевой задачи (1), (2) в классе функций, стремящихся к нулю при $r \to \infty$. Следует применить принцип максимума.

§ 2. Исследование краевой задачи (1), (3)

При изучении краевой задачи (1), (3) ключевую роль играет следующая краевая задача:

$$\Delta u(x, y, t) - \lambda^2 u(x, y, t) = 0; \ t > 0; \tag{25}$$

$$\frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} - \alpha u(x, y, 0) = H(x, y); \tag{26}$$

где λ, α—постоянные ($\lambda > 0$).

Пусть

$$\mu = \begin{cases} \lambda, & \text{при } \alpha \geqslant \lambda, \\ \sqrt{\lambda^2-\alpha^2}, & \text{при } -\lambda < \alpha < \lambda. \end{cases}$$

Краевую задачу (25), (26) рассмотрим в классе B^{μ}. $H(x, y)$ предполагается непрерывной и удовлетворяющей оценке

$$|H(x, y)| \leqslant \mathrm{Const} \cdot e^{(\mu-\varepsilon) r_0}. \tag{27}$$

Справедлива следующая

Теорема 4. *Если $\lambda > 0$, $\alpha > -\lambda$, то краевая задача* (25), (26) *имеет, и притом единственное, решение в классе* B^{μ} *для любой непрерывной функции* $H(x, y)$, *удовлетворяющей оценке* (27).

Доказательство. Введением новой неизвестной функции по формуле

$$V(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} - \alpha u(x, y, t) \tag{28}$$

из краевой задачи (25), (26) переходим к краевой задаче

$$\Delta V(x, y, t) - \lambda^2 V(x, y, t) = 0; \ t > 0; \tag{29}$$

$$V(x, y, 0) = H(x, y). \tag{30}$$

Поскольку $u \in \mathrm{B}^{\mu}$, то из (28) следует, что $V \in \mathrm{A}^{\mu}$. Для таких $V(x, y, t)$ краевая задача (29), (30) имеет единственное решение, которое дается формулой (7) при $g(x, y, t) \equiv 0$.

Пусть $V(x, y, t)$—решение краевой задачи (29), (30). Из соотношения (28) определим $u(x, y, t)$:

$$u(x, y, t) = \begin{cases} C(x, y)e^{\alpha t} - e^{\alpha t}\int\limits_{t}^{+\infty} e^{-\alpha\tau} V(x, y, \tau)\, d\tau, \text{ при } \alpha \geqslant \lambda, & (31а) \\ C(x, y)e^{\alpha t} + e^{\alpha t}\int\limits_{0}^{t} e^{-\alpha\tau} V(x, y, \tau)\, d\tau, \text{ при } -\lambda < \alpha < \lambda, & (31б) \end{cases}$$

где $c(x, y)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция. Отдельно рассмотрим два случая.

Случай $\alpha \geqslant \lambda$ $(\mu = \lambda)$. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция

$$u_0(x, y, t) = -e^{\alpha t}\int\limits_{t}^{+\infty} e^{-\alpha t} V(x, y, \tau)\, d\tau$$

является решением краевой задачи (25), (26). Она будет из класса B^{λ}, так как

$$|u_0(x, y, t)| \leqslant \text{Const}\cdot e^{\alpha t}\cdot\int\limits_{t}^{+\infty} e^{-\alpha\tau + (\lambda-\varepsilon)\sqrt{x^2+y^2+\tau^2}}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \text{Const}\cdot e^{\alpha t}\int\limits_{t}^{+\infty} e^{(\lambda-\alpha-\varepsilon)\tau}\cdot e^{(\lambda-\varepsilon)[\sqrt{x^2+y^2+\tau^2}-\tau]}\, d\tau \leqslant \text{Const}\cdot e^{(\lambda-\varepsilon)r}.$$

Для $\dfrac{\partial u_0}{\partial t}$ оценка (В) доказывается аналогично. Следовательно, $u(x, y, t)$, определенная формулой (31а), принадлежит классу B^{λ}, если $C(x, y)\cdot e^{\lambda t}$ принадлежит этому классу, что возможно тогда и только тогда, когда $C(x, y) \equiv 0$.

Таким образом, в случае $\alpha \geqslant \lambda$ краевая задача (25), (26) имеет решение и оно единственно. Это решение определяется формулой (31а) при $C(x, y) \equiv 0$.

Случай $-\lambda < \alpha < \lambda$ $(\mu = \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2})$. В этом случае предполагается дополнительно, что первые производные $H(x, y)$ также удовлетворяют оценке (27) и в окрестности любой точки удовлетворяют условию Гёльдера.

Для того, чтобы $u(x, y, t)$ из (31б) удовлетворяла уравнению (25), необходимо и достаточно, чтобы $C(x, y)$ удовлетворяла уравнению

$$\Delta C(x, y) - (\lambda^2 - \alpha^2)\, C(x, y) = -[\beta(x, y) + \alpha\gamma(x, y)],\ (x, y) \in R^2, \quad (32)$$

где $\beta(x, y) = \left.\dfrac{\partial V(x, y, t)}{\partial t}\right|_{t=0}$, $\gamma(x, y) = (V(x, y, 0)$. При сделанных предположениях на $H(x, y)$ функции $\beta(x, y)$ и $\gamma(x, y)$ удовлетворяют условию Гёльдера в окрестности любой точки и оценке (27). Так как $u(x, y)$ из (31б) должна быть из класса B^{μ}, то должно выполняться условие

$$|u(x, y, 0)| = |C(x, y)| \leqslant \mathrm{Const} \cdot e^{\sqrt{(\lambda^2-\mu^2-\varepsilon)}\, r_0} . \qquad (33)$$

Известно [7], что уравнение (32) имеет решение, которое дается формулой

$$C(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ [\beta(\xi, \eta) + \alpha\gamma(\xi, \eta)] \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\mu\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\cdot t}}{\sqrt{t^2-1}}\, dt \right\} d\xi\, d\eta. \qquad (34)$$

Докажем, что $u(x, y, t)$, определенная формулой (31б), принадлежит классу B^{μ} ($C(x, y)$ задается формулой (34)).

Поскольку $C(x, y)$ и $V(x, y, t)$ принадлежат классу B^{μ}, то каждое слагаемое правой части (31б) принадлежит классу A^{λ}. Следовательно, $u(x, y, t)$, определенная формулой (31б), также принадлежит классу A^{λ}, т. е. $u(x, y, t)$ является решением задачи Дирихле для уравнения (25) в классе A^{λ} с граничным значением $u(x, y, t) = C(x, y)$ из класса A^{μ}. Из результатов § 1 следует, что это решение принадлежит также классу B^{μ}. Единственность решения уравнения (32) из класса B^{μ} доказывается аналогично лемме 1.

Можно показать, что при $\alpha = -\lambda$ единственность нарушается. Действительно, при $\alpha = -\lambda$, наряду с $u \equiv 0$, решением однородной краевой задачи (25), (26) является еще функция $u = C \cdot e^{-\lambda t}$, где C — произвольная постоянная. Таким образом, при $\alpha = -\lambda$ нет единственности даже в классе ограниченных функций.

Повторяя схему доказательства теоремы 1 и имея в виду теорему 4 и формулы (31), (34), нетрудно доказать теорему 2.

Замечание. Можно было получить все результаты этой статьи, заменяя условия (А) и (В) соответственно условиями

$$|u(x, y, t)| \leqslant \mathrm{Const} \cdot \frac{e^{mr}}{r^{3+p}} . \qquad (\mathrm{A}')$$

$$\left| \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right| \leqslant \mathrm{Const} \cdot \frac{e^{mr}}{r^{3+p}} , \qquad (\mathrm{Б}')$$

где p — произвольное положительное число.

Пользуясь случаем, выражаю благодарность профессору Н. Е. Товмасяну за постановку задачи и внимание к работе.

Кироваканский филиал
Ереванского политехнического
института им. К. Маркса

Поступила 21. XI. 1985
и 17. VI. 1987.

Վ. Վ. ԱՍԱՏՐՅԱՆ. Հիմնական եզրային խնդիրները երկրորդ կարգի փոփոխական գործակիցներով էլիպտիկ հավասարումների համար կիսատարածությունում *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտարկվում են առաջին-երրորդ եզրային խնդիրները

$$\Delta u + a(x, y, t)\, u_x + b(x, y, t)\, u_y + d(x, y, t)\, u_t + c(x, y, t)\, u = 0$$

հավասարման համար $t>0$ կիսատարածությունում: Ենթադրվում է, որ հավասարման գործակիցները անընդհատ դիֆերենցելի են $t>0$ կիսատարածությունում և հաստատուն են անվերջ հեռու կետի շրջակայքում:

Եզրային խնդիրների լուծումները փնտրվում են էքսպոնենցիալ աճ ունեցող ֆունկցիաների դասում: Ապացուցվում են լուծման գոյության և միակության թեորեմներ: Եզրային խնդիրների լուծումը բերվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի լուծմանը:

V. V. ASATRIAN. *Basic boundarg-value problems for elliptic equations of second order with variable coefficients in half-space* (summary)

In the paper the boundary-value problems I—III for the equation

$$\Delta u + a(x, y, t)\, u_x + b(x, y, t)\, u_y + d(x, y, t)\, u_t + c(x, y, t)\, u = 0$$

is considered in the half-space $t > 0$. It is assumed that the coefficients of equctions are continuously differentiable in the half-space $t > 0$ and become constant in the vinicity of the infinite point.

The solutions are found in the class of functions which have exponential increase by reduction to systems of Fredholm equations of second kind.

Theorems of existence and uniqueness of the solution are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Е. Шилов.* Математический анализ. Второй специальный курс, М., «Наука», 1965.
2. *В. П. Паламодов.* О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных и полупространстве, Изв. АН СССР, Математика, 24, 1960, 381—386.
3. *А. Л. Павлов.* Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве, Мат. сб., 103 (145), № 3(7), 1977, 367—391.
4. *Н. Е. Товмасян.* Общая граничная задача для систем дифференциальных уравнений в полуплоскости с нарушением условия Я. Б. Лопатинского, Дифференциальные уравнения, 20, № 1, 1984, 132—141.
5. *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский.* Уравнения математической физики, М., «Наука», 1966.
6. *Н. Е. Товмасян.* Об устранимых особых точках эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости, Мат сб., 108 (150), № 1, 1979, 22—31.
7. *А. В. Бицадзе.* Уравнения математической физики, М., «Наука», 1976.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 1, 1988 Математика

УДК 517.95

О. В. ОДИНОКОВ

О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С ГЛАДКИМИ СИМВОЛАМИ

Введение

Рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A(t, z, D)\, u = h(t, z), \ |t| \leqslant T, \ z \in \mathbf{C}^n, \tag{1}$$

$$u(0, z) = \varphi(z), \ z \in \mathbf{C}^n, \tag{2}$$

где $A(t, z, D)$ оператор, формальный символ которого $A(t, z, \xi)$ есть бесконечно дифференцируемая функция по $\xi \in \mathbf{R}^n$, $D = i\frac{\partial}{\partial z} \equiv \left(i\frac{\partial}{\partial z_1}, \cdots, i\frac{\partial}{\partial z_n}\right)$. Таким образом, символу $A(t, z, \xi)$ можно сопоставить, вообще говоря, лишь формальный ряд Тейлора по ξ. Однако именно с помощью этого ряда определяется действие оператора $A(t, z, D)$

В § 1 вводится основное пространство E_q, которое, при определенных условиях, оператор $A(t, z, D)$ непрерывно отображает в себя.

В § 2 доказывается основная теорема о корректности задачи (1), (2) в классах E_q.

Некоторые выкладки вынесены в Дополнение.

Отметим, что корректность задачи (1), (2) в классах экспоненциальных функций для операторов с аналитическими символами установлена Дубинским Ю. А. [1]. В специальных классах функций, являющихся подпространствами E_q, задача рассматривалась С. Стейнбергом [2].

§ 1. Основное пространство E_q

Пусть $0<q<1$, $R>0$ — некоторые числа. Рассмотрим пространство целых функций

$$E_{q,R} = \{u(z): \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^1, \ \sup_{z \in \mathbf{C}^n} |u(z)|\, e^{-R|z|^q} < \infty\}$$

или, другими словами, пространство целых функций, удовлетворяющих неравенству

$$|u(z)| \leqslant C e^{R|z|^q},$$

где C — константа (зависящая от u), $|z|^q = |z_1|^q + \cdots + |z_n|^q$.

В $E_{q,R}$ введём норму

$$\|u\|_{E_{q,R}} = \sup |u(z)|\, e^{-R|z|^q}, \quad z \in \mathbf{C}^n.$$

Нетрудно видеть, что имеют место следующие свойства пространств $E_{q,R}$.

1) $E_{q,R}$ — банахово пространство;

2) при $R_1 \leqslant R_2$, $E_{q,R_1} \subset E_{q,R_2}$ и $R_1 < R_2$ это вложение компактно.

Определим пространство E_q как индуктивный предел пространств $E_{q,R}$, то есть

$$E_q = \operatorname*{limind}_{R\to\infty} E_{q,R}.$$

Ввиду свойств пространств $E_{q,R}$ и известных свойств регулярных индуктивных пределов ([3], [4]) сходимость в E_q определяется следующим образом. Последовательность $u_\nu(z) \to u(z)$ в E_q, если выполняются условия:

1) существует число R такое, что все $u_\nu \in E_{q,R}$ и равномерно ограничены, то есть $\|u_\nu\|_{E_{q,R}} \leqslant M$, где $M > 0$, $\nu = 1, 2, \cdots$;

2) $u_\nu \to u$ локально равномерно (на компактах).

Приведем несколько примеров функций из пространства E_q.

Пример 1. Пусть $q = m/n < 1$—рациональное число, причем m и n взаимно простые целые числа ($n \neq 0$).

Рассмотрим функцию экспоненциального типа

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\exp \frac{i2\pi m}{n} k\right) z.$$

Нетрудно видеть, что свойства этой функции таковы, что $\varphi(z) = f(z^q)$ есть целая функция из пространства E_q, более точно, из пространства $E_{q,1}$.

Пример 2. Пусть $0 < q < 1$. Рассмотрим функцию, представленную рядом Тейлора

$$\varphi(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha z^\alpha \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{r^\alpha z^\alpha}{(\alpha!)^{1/q}}.$$

Здесь α—мультииндекс, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \cdot \cdots \cdot \alpha_n!$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot z_n^{\alpha_n}$, $r = (r_1, \cdots, r_n) \in \mathbf{C}^n$, $r^\alpha = r_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot r_n^{\alpha_n}$.

Поскольку при $\gamma > 1$ и $a_1 \geqslant 0, \cdots, a_j \geqslant 0$

$$a_1^\gamma + \cdots + a_j^\gamma < (a_1 + \cdots + a_j)^\gamma, \quad j = 1, 2, \cdots,$$

то

$$|\varphi(z)| \leqslant \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{|r_1|^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot |r_n|^{\alpha_n} \cdot |z_1|^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot |z_n|^{\alpha_n}}{(\alpha!)^{1/q}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{|r_1|^{q\alpha_1} \cdot \cdots \cdot |r_n|^{q\alpha_n} \cdot |z_1|^{q\alpha_1} \cdot \cdots \cdot |z_n|^{q\alpha_n}}{\alpha!}\right)^{1/q} = \exp(|r|^q |z|^q / q).$$

Таким образом, $\varphi(z) \in E_q$, точнее $\varphi(z) \in E_{q,R}$, где $R = \dfrac{|r|^q}{q}$.

Докажем сейчас несколько фактов, которые имеют место для пространств E_q и которые понадобятся для доказательства теоремы о корректности задачи Коши.

Лемма 1 (основная). *Пусть* $\varphi(z) \in E_{q,R}$, *тогда для любого* $\gamma \in [0, 1-q]$ *справедливо неравенство*

$$|D^\alpha \varphi(z)| \leqslant K(\alpha) \cdot \frac{1}{\prod\limits_{l=1}^{n} (1+|z_l|)^{\gamma \alpha_l}} \cdot C \cdot e^{R|z|^q} \cdot \frac{1}{(\alpha!)^{\frac{1-\gamma}{q}-1}},$$

$$\text{где } z \in \mathbf{C}^n,\ K(\alpha) = \mathrm{const} \cdot \left(R^{\frac{1-\gamma}{q}}\right)^{|\alpha|} \prod_{l=1}^{n} \left(\sqrt{\alpha_l}\right)^{\frac{1-\gamma}{q}}.$$

Доказательство леммы вынесено в Дополнение.

Пространство E_q можно описать в терминах коэффициентов Тейлора.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi(z)$—*целая функция и*

$$\varphi(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha z^\alpha.$$

Тогда для того, чтобы $\varphi(z) \in E_q$, *необходимо и достаточно, чтобы нашлась константа* R, *для которой*

$$|a_\alpha| \leqslant \frac{R^{|\alpha|}}{(\alpha!)^{1/q}}.$$

Доказательство. Необходимость следует из леммы 1, если положить $\gamma = 0$ и $z = 0$.

Докажем достаточность. Пусть существует R такое, что

$$|a_\alpha| \leqslant \frac{R^{|\alpha|}}{(\alpha!)^{1/q}}.$$

Тогда

$$\left|\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha z^\alpha\right| \leqslant \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{R^{|\alpha|} \cdot |z_1|^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot |z_n|^{\alpha_n}}{(\alpha!)^{1/q}} \leqslant \left(\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{R^{|\alpha| q} \cdot |z_1|^{q\alpha_1} \cdot \ldots \cdot |z_n|^{q\alpha_n}}{\alpha!}\right)^{1/q} =$$

$$= \exp(R^{qn} \cdot |z|^q / q).$$

Таким образом, лемма 2 доказана.

§ 2. Операторы с гладкими символами. Задача Коши

Пусть $A(z, \xi)$—аналитическая функция по z и бесконечно дифференцируемая функция по ξ, $z \in \mathbf{C}^n$, $\xi \in \mathbf{R}^n$. Функции $A(z, \xi)$ можно сопоставить (вообще говоря формальный) ряд Тейлора в точке $\xi = 0$

$$A(z, \xi) \sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha(z) \xi^\alpha$$

и, следовательно, пока тоже формальный дифференциальный оператор

$$A(z, D) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha(z) D^\alpha \cdot$$

Покажем, что при некоторых условиях оператор $A(z, D)$ действует в пространстве E_q неформально.

Условие А). Скажем, что функция $A(z, \xi)$ удовлетворяет условию А), если при всех $z \in \mathbf{C}^n$ выполнены неравенства

$$|a_\alpha(z)| \leqslant P \prod_{l=1}^{n} (1 + |z_l|)^{\theta \alpha_l} (\alpha!)^\beta,$$

где $0 \leqslant \theta < \gamma \leqslant 1 - q$, $0 < \beta < \frac{1-\gamma}{q} - 1$, $0 < q < 1$ — некоторые числа, $P > 0$ — постоянная.

Определим действие оператора $A(z, D)$ на функцию $u(z)$ следующим образом:

$$A(z, D) u(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha(z) \cdot D^\alpha u(z).$$

Лемма 3. $A(z, D): E_{q,R} \to E_{q,R}$ *и это отображение непрерывно.*

Доказательство. Из леммы 1 и условия А) непосредственно следует:

$$|A(z, D) u(z)| = \left| \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha(z) D^\alpha u(z) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} P \cdot \prod_{l=1}^{n} (1 + |z_l|)^{\theta \alpha_l} (\alpha!)^\beta \cdot K(\alpha) \cdot \frac{1}{\prod_{l=1}^{n} (1 + |z_l|)^{\gamma \alpha_l}} \cdot e^{R|z|^q} \times$$

$$\times \frac{1}{(\alpha!)^{\frac{1-\gamma}{q} - 1}} \cdot \|u\|_{E_{q,R}} \leqslant \|u\|_{E_{q,R}} \cdot e^{R|z|^q} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} P \cdot \frac{1}{(\alpha!)^{\frac{1-\gamma}{q} - 1 - \beta}} \cdot$$

Очевидно числовой ряд сходится. Отсюда

$$\|A(z, D) u(z)\|_{E_{q,R}} \leqslant C \cdot \|u(z)\|_{E_{q,R}}, \quad C > 0,$$

то есть отображение непрерывно. Лемма доказана.

Пусть $Q_T = \{|t| \leqslant T\}$. Введем пространства $O(Q_T; E_q)$ и $O(Q_T; E_{q,R})$. Именно, обозначим через $O(Q_T; E_q)$ совокупность функций $u(t, z)$, аналитических по t в Q_T и таких, что для каждого фиксированного t функция $u(t, z) \in E_q$. Аналогично вводится пространство $O(Q_T; E_{q,R})$.

Заметим, что $O(Q_T; E_{q,R})$ — банахово пространство с нормой

$$\|u\| = \sup_{|t| \leqslant T} \sup_{z \in \mathbf{C}^n} |u| \cdot e^{-R|z|^q},$$

$$O(Q_T; E_q) = \operatorname*{limind}_{R \to \infty} O(Q_T; E_{q,R}).$$

Обратимся теперь к оператору $A(t, z, D)$. Пусть функция $A(t, z, \xi)$ аналитична по t и z и бесконечно дифференцируема по ξ. Тогда ей можно сопоставить формальный ряд Тейлора по ξ:

$$A(t, z, \xi) \sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha(t, z)\, \xi^\alpha.$$

Допустим, что функция $A(t, z, \xi)$ удовлетворяет условию A):

$$|a_\alpha(t, z)| \leqslant P \prod_{l=1}^{n} (1 + |z_l|)^{q\alpha_l} (\alpha!)^\beta.$$

Тогда действие оператора $A(t, z, D)$ на функцию $u(t, z) \in O(Q_T; E_q)$ определяется следующим образом:

$$A(t, z, D)\, u(t, z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha(t, z)\, D^\alpha u(t, z).$$

Из лемм 1 и 3 и условия A) следует, что

$$A(t, z, D): O(Q_T; E_{q,R}) \to O(Q_T; E_{q,R})$$

для любого $R>0$, и это отображение непрерывно. Более того, это верно и для отображения

$$A(t, z, D): O(Q_T; E_q) \to O(Q_T; E_q).$$

Дадим следующее

Определение. Задача (1), (2) корректна в классе $E_{q,R}$, если существует число δ $(0 < \delta \leqslant T)$ такое, что для любой функции $\varphi(z) \in E_{q,R}$ и для любой функции $h(t, z) \in O(Q_\delta; E_{q,R})$ существует и единственно решение $u(t, z) \in O(Q_\delta; E_{q,R})$.

Аналогично определяется корректность задачи (1), (2) в классе E_q.

Теорема. *Если выполнено условие A) на символ оператора $A(t, z, \xi)$ то задачи* (1), (2) *корректна в классе $E_{q,R}$.*

Доказательство. Задача (1), (2) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(t, z) = \varphi(z) + \int_0^t A(\tau, z, D)\, u(\tau, z)\, d\tau + \int_0^t h(\tau, z)\, d\tau, \tag{3}$$

где интегрирование производится, например, по отрезку, соединяющему точки 0 и t.

Воспользуемся методом последовательных приближений. Построим последовательность функций

$$u_k = \varphi(z) + \int_0^t A(\tau, z, D)\, u_{k-1}\, d\tau + \int_0^t h(\tau, z)\, d\tau,$$

$$u_0 = \varphi(z) + \int_0^t h(\tau, z)\, d\tau.$$

Покажем, что $u_k \to u$ в $O(Q_\delta;\ E_{q,R})$, где δ укажем ниже. По условию $\varphi(z) \in E_{q,R}$ и $h \in O(Q_\delta;\ E_{q,R})$. Тогда в силу предыдущего, очевидно, что все $u_k \in O(Q_\delta;\ E_{q,R})$. Далее

$$u_{k+1} - u_k = \int\limits_0^t A(\tau, z, D)(u_k - u_{k-1})\, d\tau \equiv B(u_k - u_{k-1}).$$

Используя лемму 1 и условие A), получим оценку для нормы интегрального оператора B в $O(Q_T;\ E_{q,R})$. Зафиксируем t, тогда

$$|u_{k+1} - u_k| < \int\limits_0^t \sum_{|\alpha|=0}^{m} |a_\alpha(\tau, z)| \cdot \frac{1}{\prod\limits_{l=1}^{n} (1 + |z_l|)^{\alpha_l \gamma}} \cdot e^{R|z|^q} (\alpha!)^{1 - \frac{1-\gamma}{q}} \times$$

$$\times K(\alpha) \cdot \|u_k - u_{k-1}\|\, d\tau \leqslant \|u_k - u_{k-1}\| \cdot e^{R|z|^q} \cdot Q(A, \gamma, q) \cdot |t|.$$

Здесь

$$Q(A, \alpha, q) = \sup_{|t| < T} \sum_{|\alpha|=0}^{m} |a_\alpha(t, z)| \cdot \frac{1}{\prod\limits_{l=1}^{n} (1 + |z_l|)^{\alpha_l \gamma}} \cdot (\alpha!)^{1 - \frac{1-\gamma}{q}} \cdot K(\alpha).$$

Конечность этой величины устанавливается также как в доказательстве леммы 3. Таким образом, если выберем $\delta = \min(T,\ Q^{-1})$, то для $|t| < \delta$ получим

$$\|u_{k+1} - u_k\| \leqslant \rho \|u_k - u_{k-1}\|,\ \rho < 1,$$

то есть норма интегрального оператора B меньше 1, и процесс последовательных приближений сходится в $O(Q_\delta;\ E_{q,R})$ к некоторой функции u, которая удовлетворяет интегральному уравнению (3), а следовательно и задаче (1), (2). Теорема доказана.

Легко видеть, что справедливо

Следствие. *Если выполнено условие A) на символ оператора $A(t, z, \xi)$, то задача (1), (2) корректна в классе E_q.*

Дополнение

Здесь приведем доказательство леммы 1.

Лемма 1. *Пусть $\varphi(z) \in E_{q,R}$, тогда для любого $\gamma \in [0, 1-q]$ справедливо неравенство*

$$|D^\alpha \varphi(z)| \leqslant K(\alpha) \frac{1}{\prod\limits_{l=1}^{n} (1 + |z_l|)^{\gamma \alpha_l}} \cdot e^{R|z|^q} \cdot C \cdot (\alpha!)^{1 - \frac{1-\gamma}{q}},$$

$$z \in \mathbf{C}^n,\ K(\alpha) = \mathrm{const} \cdot (R^{\frac{1-\gamma}{q}})^{|\alpha|} \cdot \prod_{l=1}^{n} (\sqrt{\alpha_l})^{\frac{1-\gamma}{q}}.$$

Доказательство. Поскольку $\varphi(z)$ — целая функция, то по формуле Коши

$$D^\alpha \varphi(z) = \frac{\alpha!}{(2\pi)^n} \int\limits_{|\zeta - z| = a} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{\alpha+1}} d\zeta,$$

где $a = (a_1, \cdots, a_n)$, $a_1 > 0, \cdots, a_n > 0$—произвольные, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$—мультииндекс, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, $|\zeta - z| = a$ означает $|\zeta_1 - z_1| = a_1, \cdots, |\zeta_n - z_n| = a_n$, $(\zeta - z)^{\alpha+1} = (\zeta_1 - z_1)^{\alpha_1+1} \cdots (\zeta_n - z_n)^{\alpha_n+1}$, $d\zeta = d\zeta_1 \cdots d\zeta_n$. Отсюда получаем, что

$$|D^\alpha \varphi(z)| \leqslant \frac{\alpha!}{(2\pi)^n} \cdot \int\limits_{|\zeta - z| = a} \frac{C \cdot e^{R|\zeta|^q}}{\prod\limits_{l=1}^{n} |\zeta_l - z_l|^{\alpha_l + 1}} |d\zeta| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha!}{(2\pi)^n} \cdot C \cdot e^{R \sum\limits_{l=1}^{n} (|z_l| + a_l)^q} \cdot \frac{1}{\prod\limits_{l=1}^{n} a_l^{\alpha_l+1}} \cdot \prod\limits_{l=1}^{n} 2\pi a_l =$$

$$= \alpha! \cdot C \cdot \exp\left(R \sum_{l=1}^{n} (|z_l| + a_l)^q\right) \cdot \frac{1}{\prod\limits_{l=1}^{n} a_l^{\alpha_l}}.$$

Положим $(|z_l| + a_l)^q = |z_l|^q + \varepsilon_l$, где $\varepsilon_l > 0$ произвольны. Тогда приходим к неравенству

$$|D^\alpha \varphi(z)| \leqslant \alpha! \cdot C \cdot e^{R|z|^q} \cdot \frac{1}{\prod\limits_{l=1}^{n} (1 + |z_l|)^{\gamma\alpha_l}} \cdot \prod_{l=1}^{n} \frac{(1 + |z_l|)^{\gamma\alpha_l} \cdot e^{R\varepsilon_l}}{((|z_l|^q + \varepsilon_l)^{1/q} - |z_l|)^{\alpha_l}},$$

где $0 < \gamma < 1 - q$.

Каждый из сомножителей под знаком произведения можно максимизировать по $|z_l|$, от этого неравенство только усилится. Далее, поскольку левая часть не зависит от ε_l, то соответствующие сомножители можно минимизировать по ε_l. Произведем выкладки для одного из сомножителей, поскольку вид у них одинаков. Опустим при этом индексы для удобства написания. Отметим, что дальнейшие выкладки элементарны, однако, как нам представляется, нетривиальны, поэтому мы их приводим полностью.

Итак, найдем $\sup\limits_{|z|} \frac{(1 + |z|)^\gamma}{(|z|^q + \varepsilon)^{1/q} - |z|}$, вернее оценим этот супремум сверху. Будем обозначать $|z| = \rho$. Ясно, что

$$\frac{(1+\rho)^\gamma}{(\rho^q + \varepsilon)^{1/q} - \rho} \to 0, \text{ при } \rho \to \infty \text{ и}$$

$$\frac{(1+\rho)^\gamma}{(\rho^q + \varepsilon)^{1/q} - \rho} \to 1/\varepsilon^{1/q}, \text{ при } \rho \to 0,$$

следовательно искомая верхняя грань конечна (для фиксированного ε), если $0 < \gamma < 1 - q$. Далее очевидно.

$$\frac{(1+\rho)^{\gamma}}{(\rho^{q}+\varepsilon)^{1/q}-\rho}<\frac{1}{(\rho^{q}+\varepsilon)^{1/q}-\rho}+\frac{\rho^{\gamma}}{(\rho^{q}+\varepsilon)^{1/q}-\rho}\leqslant$$

$$\leqslant 1/\varepsilon^{1/q}+\frac{\rho^{\gamma}}{(\rho^{q}+\varepsilon)^{1/q}-\rho}.$$

Исследуем производную второго слагаемого. Ее числитель равен

$$\gamma\rho^{\gamma-1}\left((\rho^{q}+\varepsilon)^{1/q}-\rho\right)-\rho^{\gamma}\left(\frac{1}{\rho}(\rho^{q}+\varepsilon)^{1/q-1}\cdot q\rho^{q-1}-1\right)=$$

$$=\gamma\rho^{\gamma}\left(\left(1+\frac{\varepsilon}{\rho^{q}}\right)^{1/q}-1\right)-\rho^{\gamma}\left(\left(1+\frac{\varepsilon}{\rho^{q}}\right)^{1/q-1}-1\right).$$

Будем искать вещественные корни этого выражения. Обозначим $\left(1+\frac{\varepsilon}{\rho^{q}}\right)^{\frac{1-q}{q}}=b$. Тогда

$$\gamma\left(b^{\frac{1}{1-q}}-1\right)-(b-1)=0. \tag{D.1}$$

Один корень $b=1$. Для нахождения другого корня введем параметр p следующим образом:

$$\left| \begin{array}{l} b^{\frac{1}{1-q}}-1=\dfrac{p}{\gamma}, \\ b-1=p. \end{array} \right. ;$$

Это соответствует специальному представлению параметра γ в виде

$$\gamma=\frac{p}{(p+1)^{1/(1-q)}-1},\quad p>0.$$

При этом уравнение $(D.1)$ будет иметь корень $b=p+1$. Нетрудно провести исследование асимптотики и производной по p выражения для γ и показать, что такое представление параметра корректно, то есть, что

$$0<\frac{p}{(p+1)^{1/(1-q)}-1}<1-q,\ p>0.$$

Докажем, что других вещественных корней у (D.1) нет. Производная левой части по b

$$\gamma\left(\frac{1}{1-q}b^{1/(1-q)-1}\right)-1=0$$

в точке $b_0=\left(\frac{1-q}{\gamma}\right)^{\frac{1-q}{q}}$.

Нетрудно проверить, что $1<b_0<p+1$. В точке b_0 производная левой части $(D.1)$ меняет знак с минуса на плюс, тогда как при $b<b_0$ она отрицательна, а при $b>b_0$—положительна.

Следовательно, других вещественных корней, кроме $b=1$ и $b=p+1$ у $(D.1)$ нет.

Корень $b=1$ соответствует формально $\rho=\infty$, но при $\rho\to\infty$

$$\frac{\rho^{\gamma}}{(\rho^{q}+\varepsilon)^{1/q}-\rho}\to 0.$$

Рассмотрим $b=p+1$, при этом

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{\rho^{q}}\right)^{\frac{1-q}{q}}=p+1,$$

$$\rho_0=\left(\frac{\varepsilon}{(p+1)^{q/(1-q)}-1}\right)^{1/q}=C_1(q,\ p)\cdot\varepsilon^{1/q},$$

$$\left.\frac{\rho^{\gamma}}{(\rho^{q}+\varepsilon)^{1/q}-\rho}\right|_{\rho=\rho_0}=\varepsilon^{\frac{\gamma-1}{q}}\cdot C_2(q,\ p).$$

Окончательно получаем

$$\frac{(1+\rho)^{\gamma}}{(\rho^{q}+\varepsilon)^{1/q}-\rho}\leqslant\frac{1}{\varepsilon^{1/q}}+\frac{1}{\varepsilon^{(1-\gamma)/q}}C_2(q,\ p).$$

Будем теперь минимизировать по ε выражение

$$e^{R\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon^{1/q}}+\frac{1}{\varepsilon^{(1-\gamma)/q}}C_2(q,\ p)\right)^{\alpha_l}.$$

I случай. ($\varepsilon\leqslant 1$). Тогда $\frac{1}{\varepsilon^{1/q}}\geqslant\frac{1}{\varepsilon^{(1-\gamma)/q}}$, и, следовательно, искомый минимум ограничен сверху выражением

$$\min_{\varepsilon} e^{R\varepsilon}\cdot\frac{C_3}{\varepsilon^{\alpha_l/q}}.$$

При достаточно большом α_l это выражение убывает при $\varepsilon\leqslant 1$ и достигает минимума при $\varepsilon=1$, который равен $e^{R}\cdot C_3$.

II случай. ($\varepsilon>1$). Тогда $\frac{1}{\varepsilon^{1/q}}<\frac{1}{\varepsilon^{(1-\gamma)/q}}$, и, следовательно, искомый минимум ограничен сверху выражением

$$\min_{\varepsilon}\exp(R\varepsilon)\cdot 1/\varepsilon^{(1-\gamma)\alpha_l/q}.$$

Найдя нуль производной, получим значение этого минимума:

$$\left(\frac{e^{\alpha_l}}{\alpha_l^{\alpha_l}}\right)^{\frac{1-\gamma}{q}}\left(\frac{qR}{1-\gamma}\right)^{\frac{1-\gamma}{q}\alpha_l}\cdot C_3.$$

Видно, что для достаточно больших α_l это выражение меньше $e^{R}\cdot C_3$. Его и примем в качестве искомой оценки. По формуле Стирлинга окончательно получаем

$$|D^{\gamma}\varphi(z)|<C\cdot K(\alpha)\cdot e^{R|z|^{q}}\frac{1}{\prod\limits_{l=1}^{n}(1+|z_l|)^{\gamma\alpha_l}}\cdot\left(\frac{1}{\alpha!}\right)^{\frac{1-\gamma}{q}-1},$$

$$K(\alpha) = \text{const} \cdot \prod_{l=1}^{n} \left(\frac{qR}{1-\gamma}\right)^{\frac{1-\gamma}{q}\alpha_l} \cdot (\sqrt{\alpha_l})^{\frac{1-\gamma}{q}}.$$

Лемма 1 доказана.

Московский энергетический институт

Поступила 20. XII 1986

Օ. Վ. ՕԴԻՆՈԿՈՎ. Հարթ սիմվոլով օպերատորների համար Կոշու խնդրի կոռեկտության մասին *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է հետևյալ Կոշու խնդիրը՝

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A(t, z, D)\, u(t, z) = h(t, z),\ |t| \leqslant T,\ z \in \mathbf{C}^n, \tag{1}$$

$$u(0, z) = \varphi(z),\ z \in \mathbf{C}^n, \tag{2}$$

որտեղ $A(t, z, D)$*-ն օպերատոր է, որի* $A(t, z, \xi)$ *սիմվոլը անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիա է ըստ* $\xi \in R^n$*-ի*

$$D = \left(i\frac{\partial}{\partial z_1}, \cdots, i\frac{\partial}{\partial z_n}\right):$$

Կոռեկտությունը դիտարկվում է ֆունկցիաների հետևյալ դասերում՝

$$E_{q,R} = \{u(z): \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^1;\ |u(z)| \leqslant \mathbf{C}(u)\, e^{R|z|^q},\ R > 0,\ 0 < q < 1\},$$

$$E_q = \lim_{R\to\infty} \text{ind}\, E_{q,R}:$$

Ապացուցվում է թեորեմ (1), (2) խնդրի կոռեկտության մասին, երբ օպերատորի սիմվոլի վրա դրված են որոշակի պայմաններ։

O. V. ODINOKOV. *On correctness of the Cauchy problem for the operators with smooth symbols* (summary)

In this paper the following Cauchy problem is studied:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A(t, z, D)\, u(t, z) = h(t, z),\ |t| \leqslant T,\ z \in \mathbf{C}^n, \tag{1}$$

$$u(0, z) = \varphi(z),\ z \in \mathbf{C}^n, \tag{2}$$

where the symbol $A(t, z, \xi)$ of the operator is an infinite differential function in $\xi \in R^n$. The theorem about correctness (that is on the existence and uniqueness of a solution) of the problem (1), (2) in the classes $E_{q,R}$ and E_q of the entire functions is proved. The $E_{q,R}$ and E_q are defined as:

$$E_{q,R} = \{u(z): \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^1,\ \sup_{z \in C^1} |u(z)|\, e^{-R|z|^q} < \infty,$$

$$0 < q < 1,\ R > 0\};$$

$$E_q = \lim_{R\to\infty} \text{ind}\, R_{q,R}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. А. Дубинский.* Алгебра псевдодифференциальных оператоорв с комплексными аргументами и ее приложения, Товременные проблемы математики (Итоги науки и техники, ВИНИТИ АН СССР), 1986, т. 29, 109—150.
2. *S. Steinberg.* The Cauchy problem for differential equations of infinite order, Journal of Differential Equations, 9, 1971, 591—607.
3. *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов,* Функциональный анализ, М., «Наука», 1984.
4. *А. Робертсон, В. Робертсон.* Топологические векторные пространства, М., «Мир», 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 1, 1988 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.21

Е. А. АРУТЮНЯН

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОМ РАЗЛИЧЕНИИ ГИПОТЕЗ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕПИ МАРКОВА

1° Введение. Применения теоретико-информационных методов в математической статистике отражены в книге С. Кульбака [1]. В статье Р. Л. Добрушина, М. С. Пинскера, А. Н. Ширяева [2] содержится ряд перспективных постановок задач на эту тему. В работе Р. Блейхута [3] результаты теории проверки статистических гипотез используются при решении теоретико-информационных задач.

Здесь мы приведем одну иллюстрацию полезности применения комбинаторных методов, развитых в последние годы в теории информации [4], при изучении свойств асимптотически оптимального тестирования простых статистических гипотез в случае последовательности испытаний, связанных в цепь Маркова. Наша цель—нахождение функциональной зависимости показателей экспоненциального убывания вероятностей ошибок первого α_n и второго β_n рода оптимальных критериев при бесконечном возрастании числа испытаний $n+1$. Для разных случаев независимых наблюдений эта функциональная зависимость получена в различной аналитической форме в работах [5—9]. Близкие задачи нашли отражение в книге А. А. Боровкова [10]. В статье И. Чисара и Д. Лонго [6] прослеживается параллель решения вышеуказанной задачи и задачи оптимального кодирования источников и отмечается, в частности, идейная близость с методом, положенным в [11] в основу построения границы сферической упаковки экспоненты оптимальной вероятности ошибки при передаче информации с заданной скоростью по каналу без памяти. В недавней работе С. Натараяна [12] для конечной цепи Маркова со строго положительными переходными вероятностями доказана теорема о больших уклонениях, и с ее помощью получена интересующая нас зависимость. В настоящей работе рассмотрен гораздо более общий класс конечных стационарных цепей Маркова, к тому же весьма просты комбинаторные доказательства, не использующие теорем о больших уклонениях.

2°. Формулировка результатов. Пусть $x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$ $x_i \in X = \{1, \cdots, M\}$ наблюденные состояния простой стационарной цепи Маркова с конечным числом M состояний. Относительно матрицы переходных вероятностей цепи имеются две конкурирующие гипотезы: $P_1 = \{p_1(j/i)\}$, $P_2 = \{p_2(j/i)\}$. В обоих случаях имеются [13] соответствующие стационарные распределения $Q_1 = \{q_1(i)\}$ и $Q_2 = \{q_2(i)\}$ (не обязательно единственные), т. е.

$$\sum_i q_k(i)\, p_k(j/i) = q_k^*(j), \quad \sum_i q_k(i) = 1, \quad k=1,\ 2;\ j=1,\cdots,\ M.$$

На основе наблюденной траектории $\mathbf{x}=(x_0,\ x_1,\cdots,\ x_n)$ длины $n+1$ необходимо принять решение о верности первой или второй гипотезы. Обозначим $\alpha(\varphi_n)$ вероятность ошибки первого рода теста $\varphi_n(x)$, т. е. вероятность отвергнуть первую гипотезу, при условии, что в действительности она верна. Соответственно, пусть $\beta(\varphi_n)$ — вероятность ошибки второго рода. Последовательность тестов $\varphi_n(x)$ называется 6] логарифмически асимптотически оптимальной, если при заданном

$$E_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}} - \frac{1}{n}\log \alpha(\varphi_n)^*$$

предел

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} - \frac{1}{n}\log \beta(\varphi_n)$$

принимает свое наибольшее значение, обозначаемое $E_2(E_1)$. По аналогии с введенным в теории информации К. Шенноном понятием, естественно, функцию $E_2(E_1)$ также назвать „функцией надежности".

Пусть $P=\{p(j/i)\}$—матрица переходных вероятностей некоторой стационарной цепи Маркова с тем же множеством состояний X и $Q=\{q(i)\}$ — соответствующее стационарное распределение. Обозначим $K(Q\circ P,\ Q_k\circ P_k)$ информацию Кульбака-Лейблера распределения $Q\circ P=\{q(i)\,p(j/i)\}$ относительно распределения $Q_k\circ P_k=\{q_k(i)\,p_k(j/i)\}$,] $k=1,2$, $K(Q\circ P,\ Q_k\circ P_k)=\sum_{i,j} q(i)\,p(j/i)\,[\log q(i)\,p(j/i)-\log q_k(i)\,p_k(j/i)]=$

$= K(Q,\ Q_k)+K(Q\circ P,\ Q\circ P_k)$,

где

$$K(Q,\ Q_k) = \sum_i q(i)\,(\log q(i) - \log q_k(i)).$$

Теорема. *При любом* $E_1>0$

$$E_2(E_1) = \inf_Q \inf_P \{K(Q\circ P,\ Q\circ P_2) : K(Q\circ P,\ Q\circ P_1)\leqslant E_1,$$

для хотя бы одного Q_1, $K(Q,\ Q_1)<\infty\}$.

Отметим свойства функции надежности, вытекающие из теоремы.

С1. Если $\inf_{Q_1} K(Q_1\circ P_1,\ Q_1\circ P_2)<\infty$, то $E_2(E_1)<\lim_{E_1\downarrow 0} E_2(E_1) = \inf_{Q_1} K(Q_1\circ P_1,\ Q_1\circ P_2)$.

С2. $E_2(E_1)$ монотонно убывает по E_1, при $E_1>\inf_Q \inf_P\{K(Q\circ P,\ Q\circ P_1) : K(Q\circ P,\ Q\circ P_2)<\infty\}$, а при меньших E_1 имеем $E_2(E_1)=\infty$.

С3. При $E_1>\inf_{Q_2} K(Q_2\circ P_2,\ Q_2\circ P_1)$ имеем $E_2(E_1)=0$. Однако если $\inf_{Q_2} K(Q_2\circ P_2,\ Q_2\circ P_1)=\infty$, то $E_2(E_1)>0$ при сколь угодно больших E_1.

С4. В частном случае, когда матрицы P_1 и P_2 имеют строго положительные компоненты, стационарные распределения Q_1 и Q_2 единственны и строго положительны, а функция $E_2(E_1)$ получает вид

* В этой статье log и exp имеют основанием e.

$$E_2(E_1)=\min_P \{K(Q\circ P,\ Q\circ P_2):K(Q\circ P,\ Q\circ P_1)\leqslant E_1\},$$

причем P также матрица с положительными компонентами, а Q—соответствующее ей единственное стационарное распределение. Это результат из [12].

3°. Доказательство теоремы состоит из двух частей. В первой — путем построения соответствующей последовательности тестов доказывается, что $E_2(E_1)$ не меньше выражения указанного в теореме. Во второй — доказывается, что $E_2(E_1)$ не может быть больше этого выражения.

Назовем совместным типом вектора $\mathbf{x}=(x_0,\ x_1,\cdots,\ x_n)$ набор относительных частот $\{N(i,\ j)\,n^{-1}\}$ одновременного появления в векторе на соседних местах состояний i и j. Обозначим $T_{Q\circ P}$ множество векторов из X^{n+1}, которые имеют тип

$$N(i,\ j)=nq(i)\,p(j/i),\ i,\ j\in X.$$

Заметим, что если вектор $x\in T_{Q\circ P}$, то

$$\sum_j N(i,\ j)=nq(i),\ i\in X,$$

$$\sum_i N(i,\ j)=nq'(j),\ j\in X,$$

причем в соответствии с определением $N(i,\ j)$ получаем, что

$$|nq(i)-nq'(i)|\leqslant 1,\ i\in X,$$

поэтому в пределе при $n\to\infty$ распределение $Q=\{q(i)\}$ можно считать стационарным для $P=\{p(j/i)\}$:

$$\sum_i q(i)\,p(j/i)=q(j),\ j\in X.$$

Тест $\varphi_n(x)$ можно задать, задав множество $B(E_1)$, т. е. ту часть пространства X^{n+1}, в которой принимается гипотеза P_1. Асимптотически оптимальным окажется тест, у которого $B(E_1)=\bigcup T_{Q\circ P}$

$$Q,\ P: K(Q\circ P,\ Q\circ P_1)<E_1,\ \exists Q_1,\ K(Q,\ Q_1)<\infty.$$

Заметим теперь, что при $k=1,\ 2$, и $\mathbf{x}\in T_{Q\circ P}$

$$Q_k\circ P_k(\mathbf{x})=q_k(x_1)\prod_{ij}p_k(j/i)^{nq(i)\,p(j/i)}.$$

Отсюда, если $Q_k\circ P_k(\mathbf{x})>0$, то мера $Q\circ P$ абсолютно непрерывна относительно меры $Q_k\circ P_k$. Наоборот, если $Q_k\circ P_k(\mathbf{x})=0$, то мера $Q\circ P$ не является абсолютно непрерывной относительно меры $Q_k\circ P_k$ и в этом случае

$$K(Q\circ P,\ Q_k\circ P_k)=\infty,$$

но так как

$$K(Q\circ P,\ Q_k\circ P_k)=K(Q\circ P,\ Q\circ P_k)+K(Q,\ Q_k),$$

то бесконечности равно по крайней мере одно из слагаемых.

Заметим также, что если $Q\circ P$ абсолютно непрерывна относительно $Q_k\circ P_k$, то

$$Q_k \circ P_k\,(T_{Q \circ P}) = \exp\{-n\,K(Q \circ P,\ Q \circ P_k) + o(1))\},$$

где $o(1) = \max\,|(\max|n^{-1}\log q_k(i)| : q_k(i) > 0),$

$$(\max_i |n^{-1}\log q(i)| : q(i) > 0)| \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Действительно, это нетрудно проверить, учитывая что число $|T_{Q \circ P}|$ векторов в $T_{Q \circ P}$ равно $\exp\{-n \sum_{ij} q(i)\,p(j/i)\log p(j/i) + o(1)\}$ (сравнить с [4]).

Теперь наша цель определить $\alpha(\varphi_n) = \max_{Q_1} Q_1 \circ P_1(\overline{B(E_1)})$. Учитывая, что число разных типов $Q \circ P$ не превышает $(n+1)^{|x|^2}$, получаем

$$\alpha(\varphi_n) \leqslant \exp\{-n(E_1 + o(1))\}.$$

Одновременно, как легко убедиться

$$\beta(\varphi_n) = \max_{Q_2} Q_2 \circ P_2(B(E_1)) \leqslant \exp\{-n[\max_{Q,\,P}|K(Q \circ P,\ Q \circ P_2):$$

$$: K(Q \circ P,\ Q \circ P_1) \leqslant E_1,\ \forall Q_1,\ K(Q,\ Q_1) < \infty\} + o(1)]\}.$$

То есть предложенный тест обладает требуемыми показателями экспонент вероятностей ошибок.

Легко убедиться, что теорема верна и при $E_1 = \infty$, т. е. при $\alpha(\varphi_n) = 0$.

Переходя ко второй части доказательства, отметим, что при $\mathbf{x} \in T_{Q \circ P}$ любая вероятность $Q_k \circ P_k(\mathbf{x})$ постоянна. Отсюда легко следует, чт для оптимального теста задающее его множество $B'(E_1)$ либо содержит каждое множество $T_{Q \circ P}$ целиком, либо вовсе не содержит $\mathbf{x}$-ов этого типа. Теперь нетрудно заключить, что единственной логарифмически асимптотически оптимальной является взятая нами последовательность тестов, задаваемых множествами $B(E_1)$.

4°. Замечания. 1. Результат теоремы легко может быть обобщен на случай цепи Маркова произвольного порядка $r > 1$, в этом случае начальные распределения Q будут r-мерными, а тесты осно вываются на траекториях $(x_{-r+1}, x_{-r+2}, \cdots, x_0, x_1, \cdots, x_n)$.

2. Критерий, задаваемый с помощью множества $B(E_1)$, является универсальным (робастным), т. к. он не зависит от альтернативной гипотезы P_2.

Ереванский государственный
университет

Поступила 30. X. 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Кульбак*. Теория информации и статистика. М., «Наука», 1967.
2. *Р. Л. Добрушин, М. С. Пинскер, А. Н. Ширяев*. Применение понятия энтропии в проблемах обнаружения сигнала на фоне шума, Литовск. матем. сб., т. III, № 1, 1963, 107—122.
3. *R. Blahut*. Hypothesis testing and information theory, IEEE Trans. on Inform. theory, IT—20, 1974, 405—417.
4. *И. Чисар, Я. Кёрнер*. Теория информации. Теоремы кодирования для дискретных систем без памяти. М., «Мир», 1985.
5. *W. Hoeffding*. Asymptotically optimal tests for multinomial distributions, Ann. of Math. Statist., v. 36, 1965, 369—401.

6. *I. Csiszar, G. Longo.* On the error exponent for source coding and for testing simple statistical hypotheses, Studia Sc. Math., Hungarica, 6, 1971, 181—191.
7. *G. Tusnady,* On asymptotically optimal tests,. The Ann. of Statist., 5, № 2, 1977, 385—393.
8. *G. Longo, A. Sgarro,* The error exponent for the testing of simple statistical hypothesses: A combinatorial apporoach, J. of Combinatorisc, Inform. and System Sci., 5, № 1, 1980. 58—67.
9. *L. Birgé.* Vitesses maximales de decroissance des erreurs et tests optimaux associes, Z. Wahrsch. verw. Gebiete, 55, 1981, 261—273.
10. *А. А. Боровков.* Математическая статистика. Оценки параметров. Проверка гипотез, М., «Наука», 1984.
11. *Е. А. Арутюнян.* Оценки экспоненты вероятности ошибки для полунепрерывного канала без памяти, Пробл. передачи инф., 4, № 4, 1968, 37—48.
12. *S. Natarajan,* Large deviations, hypothesses testing and source coding for finite Markov chains, IEEE Trans. on Inform. th., IT—31, № 3, 1985, 360—365.
13. *Д. Л. Дуб.* Вероятностные процессы, М., ИЛ, 1956.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 1, 1988 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.53

А. Е. АВЕТИСЯН

О ПОЛНОТЕ И МИНИМАЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ $\{E_\rho(\lambda_k z;\ \mu)\}_1^\infty$

В настоящей заметке приводятся теоремы о полноте и минимальности системы функций $\{E_\rho(\lambda_k z;\ \mu)\}_1^\infty$, порожденной целой функцией типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z;\ \mu)=\sum_0^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})}$$

в пространстве L^2 на конечных отрезках. Предполагается, что $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — последовательность различных комплексных чисел с единственной точкой сгущения в бесконечности. Приводимые теоремы аналогичны известным теоремам Винера-Пэли [1] и Б. Я. Левина (см. [2], приложение III). При установлении результатов мы пользуемся методами, развитыми в вышеуказанных работах. Мы существенно опираемся также на теорию М. М. Джрбашяна (см. [3[, глава VI) о параметрическом представлении определенных классов целых функций конечного роста.

1°. **Минимальность системы** $\{E_\rho(\lambda_k z;\ \mu)\}_1^\infty$

Теорема 1. *Для того, чтобы система функций* $\{E_\rho(\lambda_k x;\ \mu)\}_1^\infty$, $\left(\rho>\frac{1}{2},\ \mu=\frac{\rho+1}{2\rho}\right)$ *была минимальной в* $L^2(0,\ \sigma^{1/\rho})$, $(\sigma>0)$ *необходимо и достаточно, чтобы существовала целая функция* $f(z)$ *порядка* ρ, *типа* $\sigma_1<\sigma$, *обращающаяся в нуль во всех точках* λ_k *и: такая, что*

$$\sup_{\frac{\pi}{2\rho}<|\varphi|<\pi}\left\{\int_0^\infty \frac{|f(re^{i\varphi})|^2}{1+r^2}\,dr\right\}<+\infty. \tag{1}$$

Доказательство. Допустим, что такая функция $f(z)$ существует. Пусть λ_k—корень $f(z)$ кратности s_k $(s_k\geqslant 1)$. Тогда все функции

$$G_k(z)=\frac{s_k\,!f(z)}{f^{(s_k)}(\lambda_k)\,(z-\lambda_k)^{s_k}}\quad (k=1,2,3,\cdots)$$

принадлежат классу $B^2_{\rho,\sigma}$, т. е. $G_k(z)$—целые функции порядка ρ типа $\leqslant\sigma$ и удовлетворяют условию

$$\sup_{\frac{\pi}{2\rho}<|\varphi|<\pi}\left\{\int_0^\infty |G_k(re^{i\varphi})|^2\,dr\right\}<+\infty.$$

По теореме М. М. Джрбашяна $G_k(z)$ имеет представление

$$G_k(z)=\int\limits_0^{\sigma^{1/\rho}} E_\rho(zx;\ \mu)\, h_k(x)\, dx,\ \ h_k(x)\in L^2(0,\ \sigma^{1/\rho}).$$

Очевидно $G_k(\lambda_j)=0$ при $j\neq k$ и $G_k(\lambda_k)=1$, так что системы $\{E_\rho(\lambda_j x;\ \mu)\}_1^\infty$ и $\{h_k(x)\}_1^\infty$ биортогональны на $(0,\ \sigma^{1/\rho})$. Из стремления к нулю в $L^2(0,\ \sigma^{1/\rho})$ последовательности сумм $\Phi_n=\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^{(n)} E_\rho(\lambda_j x;\ \mu)$ следует соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} a_j^{(n)}=0$ и необходимость условий доказана.

Если же система минимальна, то существует функционал, который задается некоторой функцией $g(x)\in L^2(0,\ \sigma^{1/\rho})$ и который равен единице, например, на $E_\rho(\lambda_1 x;\ \mu)$ и обращается в нуль на всех функциях $E_\rho(\lambda_k x;\ \mu)$ $(k=2,\ 3,\cdots)$. Имеем

$$\int\limits_0^{\sigma^{1/\rho}} E_\rho(\lambda_k x;\ \mu)\, g(x)\, dx=\begin{cases}0, & k\neq 1\\ 1, & k=1.\end{cases}$$

Целая функция порядка ρ и типа $\sigma_1\leqslant\sigma$

$$f(z)=(z-\lambda_1)\int\limits_0^{\sigma^{1/\rho}} E_\rho(zx;\ \mu)\, g(x)\, dx$$

обращается в нуль во всех точках $\lambda_k\ (k=1,\ 2,\cdots)$ и по теореме М. М. Джрбашяна $\dfrac{f(z)}{z-\lambda_1}\in B^2_{\rho,\sigma}$. Это означает, что $f(z)$ удовлетворяет условию (1). Теорема доказана.

Аналогично доказываются следующие теоремы.

Теорема 2. *Для того, чтобы система функций* $\{E_\rho(i\lambda_k x;\ \mu)\}_1^\infty$ $\left(\rho\geqslant 1,\ \mu=\dfrac{\rho+1}{2\rho}\right)$ *была минимальной в* $L^2(-\sigma^{1/\rho},\ \sigma^{1/\rho})$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала целая функция* $f(z)$ *порядка* ρ *и типа* $\sigma_1\leqslant\sigma$, *обращающаяся в нуль во всех точках* λ_k *и такая, что*

$$\sup_{\substack{|\varphi|<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\\ |\varphi-\pi|<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}}}\left\{\int\limits_0^\infty \frac{|f(re^{i\varphi})|^2}{1+r^2}\, dr\right\}<+\infty.$$

Обозначим через Γ_σ совокупность двух отрезков: $\arg z=\pm\dfrac{\pi}{2\rho}$, $0\leqslant|z|\leqslant\sigma^{1/\rho}$.

Теорема 3. *Для того, чтобы система функций* $\{E_\rho(\lambda_k z;\ \mu)\}_1^\infty$ $\left(\rho\geqslant 1,\ \mu=\dfrac{\rho+1}{2\rho}\right)$ *была минимальной в* $L^2(\Gamma_\sigma)$, *необходимо и доста* *точно, чтобы существовала целая функция $f(z)$ порядка ρ и типа $\sigma_1 \leqslant \sigma$, обращающаяся в нуль во всех точках λ_k и такая, что*

$$\sup_{\substack{\frac{\pi}{\rho}<|\varphi|<\pi \\ \varphi=0}} \left\{ \int_0^\infty \frac{|f(re^{i\varphi})|^2}{1+r^2}\, dr \right\} < +\infty.$$

Замечание. При $\rho = 1$ (тогда и $\mu = 1$), $E_\rho(i\lambda_k x; \mu) = e^{i\lambda_k x}$ и теорема 2 (по существу и теорема 3) совпадает с теоремой Винера-Пэли.

2°. Полнота и минимальность системы $\{E_\rho(\lambda_k z; \mu)\}_1^\infty$.

Теорема 4. *Для того, чтобы система $\{E_\rho(\lambda_n x; \mu)\}_1^\infty$, $\left(\rho > 1,\ \mu = \frac{\rho+1}{2\rho}\right)$ была полной и минимальной в $L^2(0, \sigma^{1/\rho})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1°. *Существует целая функция $\varphi(\lambda)$ порядка ρ и конечного типа, имеющая простые нули только в точках λ_k,*

2°. $h_\varphi(0) = \sigma$,

3°. $$\sup_{\frac{\pi}{2\rho}<|\varphi|<\pi} \left\{ \int_0^\infty \frac{|\varphi(re^{i\varphi})|^2}{1+r^2}\, dr \right\} < +\infty,$$

4°. *Если $\chi(\lambda)$—какая-нибудь целая функция порядка ρ и нулевого типа, то $\varphi(\lambda)\chi(\lambda) \overline{\in} B^2_{\rho,\sigma}$.*

Доказательство. Необходимость. Допустим, что система полна и минимальна. По теореме 1 существует целая функция $\varphi(\lambda)$ порядка ρ и типа $\sigma_1 \leqslant \sigma$, которая обращается в нуль во всех точках λ_k и удовлетворяет условию 3°. При $\rho > 1$ отсюда вытекает, что $\varphi(\lambda)$— целая функция вполне регулярного роста с индикатором

$$h_\varphi(\theta) = \begin{cases} \sigma_1 \cos\rho\theta, & \text{при } |\theta| < \frac{\pi}{2\rho} \\ 0\ , & \text{при } \frac{\pi}{2\rho} \leqslant |\theta| \leqslant \pi. \end{cases} \tag{2}$$

Докажем, что $h_\varphi(0) = \sigma$. Допустим противное: $h(\varphi) = \sigma_1 < \sigma$. Рассмотрим функцию

$$\psi(\lambda) = \varphi(\lambda) \cdot E_\rho\left(\lambda(\sigma - \sigma_1)^{1/\rho};\ 1 + \frac{1}{\rho}\right). \tag{3}$$

Целая функция $\Phi(\lambda) = E_\rho\left(\lambda(\sigma - \sigma_1)^{1/\rho}; 1 + \frac{1}{\rho}\right)$ имеет вполне регулярный рост и

$$h_\Phi(0) = \begin{cases} (\sigma - \sigma_1)\cos\rho\theta, & \text{при } |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2\rho} \\ 0\ , & \text{при } \frac{\pi}{2\rho} \leqslant |\theta| \leqslant \pi. \end{cases} \tag{4}$$

Кроме того, в замкнутой угловой области $|\arg\lambda| \geq \frac{\pi}{2\rho}$ $\Phi(\lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$.

Отсюда и из 3°, (2), (3), (4) следует, что $\psi(\lambda) \in B^2_{\rho,\sigma}$. По теореме М. М. Джрбашяна она имеет представление

$$\psi(\lambda) = \int_0^{\sigma^{1/\rho}} E_\rho(\lambda x;\ \mu)\, u(x)\, dx, \quad u(x) \in L^2(0,\ \sigma^{1/\rho}). \tag{5}$$

Очевидно $\psi(\lambda_k) = 0$ $(k=1,\ 2,\cdots)$ и значит система $\{E_\rho(\lambda_k x;\ \mu)\}_1^\infty$ не полна в $L^2(0,\ \sigma^{1/\rho})$. Противоречие показывает, что $h_\varphi(0) = \sigma$.

Функция $\varphi(\lambda)$ не имеет корней, отличных от $\lambda_k (K=1, 2,\cdots)$. В противном случае целая функция $\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda-\mu}$ (где μ—отличный от всех λ_k корень $\varphi(\lambda)$) принадлежала бы классу $B^2_{\rho,\sigma}$ и по теореме М. М. Джрбашяна имела бы представление типа (5), что противоречит полноте системы $\{E_\rho(\lambda_k x;\ \mu)\}_1^\infty$. Докажем, наконец, 4°. Если при некоторой функции $\chi(\lambda)$, порядка ρ и типа 0 $\varphi(\lambda)\ \chi(\lambda) \in B^2_{\rho,\sigma}$, то добавив к полной в $L^2(0,\ \sigma^{1/\rho})$ системе $\{E_\rho(\lambda_\nu x;\ \mu)\}_1^\infty$ новые функции $E_\rho(\mu_k x;\ \mu)$, где μ_k нули функции $\chi(\lambda)$, мы получим неполную систему. Это невозможно. Значит такой функции $\chi(\lambda)$ нет.

Достаточность. Из условий 1°—3° следует минимальность системы $\{E_\rho(\lambda_k x;\ \mu)\}_1^\infty$. При $\rho > 1$, как и выше, имеем, что $\varphi(\lambda)$—вполне регулярного роста и

$$h_\varphi(\theta) = \begin{cases} \sigma\cos\rho\theta, \text{ при } |\theta| \leq \frac{\pi}{2\rho} \\ 0\quad, \text{ при } \frac{\pi}{2\rho} \leq |\theta| \leq \pi. \end{cases} \tag{6}$$

Если система не полна в $L^2(0,\ \sigma^{1/\rho})$, то существует целая функция $f(\lambda)$, $f(\lambda_k) = 0$ и

$$f(\lambda) = \int_0^{\sigma^{1/\rho}} E_\rho(\lambda x;\ \mu)\, g(x)\, dx, \quad g(x) \in L^2(0,\ \sigma^{1/\rho}).$$

$f(\lambda)$ также имеет вполне регулярный рост. Ее индикатор выражается формулой

$$h_f(\theta) = \begin{cases} \sigma_1\cos\rho\theta, \text{ при } |\theta| \leq \frac{\pi}{2\rho}\ (\sigma_1 < \sigma) \\ 0\quad, \text{ при } \frac{\pi}{2\rho} \leq |\theta| \leq \pi. \end{cases} \tag{7}$$

Составим функцию

$$\chi(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)}. \tag{8}$$

Она очевидно целая и порядка ρ. Из (8), (6) и (7) следует, что она нулевого типа. С другой стороны, $\varphi(\lambda)\chi(\lambda)=f(\lambda)\in B^2_{\rho,\sigma}$. Это противоречит условию 4°. Значит система полна и минимальна. Теорема доказана.

Для формулировки следующих теорем дадим определения [3]:

Определение 1. *$F(z)$ принадлежит классу $W^2_{\rho,\sigma}$, если она целая, порядка $\rho\geqslant 1$, типа $\leqslant\sigma$ и удовлетворяет условию*

$$\sup_{\substack{|\theta|<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\\ |\theta-\pi|<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}}}\left\{\int_0^\infty |F(re^{i\theta})|^2\,dr\right\}<+\infty.$$

Определение 2. *$F(z)$ принадлежит классу $B^2_{\rho,\sigma}(\Gamma)$, если она целая, порядка $\rho\geqslant 1$, типа $\leqslant\sigma$, и удовлетворяет условию*

$$\sup_{\substack{\frac{\pi}{\rho}<|\theta|<\pi\\ \theta=0}}\left\{\int_0^\infty |F(re^{i\theta})|^2\,dr\right\}<+\infty.$$

Теорема 5. *Для того, чтобы система $\{E_\rho(i\lambda_k x;\ \mu)\}_1^\infty$ $\left(\rho>2,\ \mu=\frac{\rho+1}{2\rho}\right)$ была полной и минимальной в $L^2(-\sigma^{1/\rho},\ \sigma^{1/\rho})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1°. Существует целая функция $\varphi(\lambda)$ порядка ρ и конечного типа, имеющая простые нули только в точках λ_k,

2°. $h_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=h_\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sigma,$

3°. $$\sup_{\substack{|\theta|<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\\ |\theta-\pi|<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}}}\left\{\int_0^\infty \frac{|\varphi(re^{i\theta})|^2}{1+r^2}\,dr\right\}<+\infty.$$

4°. Если $\chi(\lambda)$—какая-нибудь целая функция порядка ρ и нулевого типа, то $\varphi(\lambda)\chi(\lambda)\overline{\in} W^2_{\rho,\sigma}$.

Теорема 6. *Для того, чтобы система $\{E_\rho(\lambda_k z;\ \mu)\}_1^\infty$ $\left(\rho>\frac{3}{2},\ \mu=\frac{\rho+1}{2\rho}\right)$ была полной и минимальной в $L^2(\Gamma_\sigma)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1°. Существует целая функция $\varphi(\lambda)$ порядка ρ и конечного типа, имеющая простые нули только в точках λ_k,

2°. $h_\varphi\left(\frac{\pi}{2\rho}\right)=h_\varphi\left(-\frac{\pi}{2\rho}\right)=\sigma,$

$$3^\circ. \quad \sup_{\substack{\frac{\pi}{\rho}<|\theta|\le\pi \\ \theta=0}} \left\{ \int_0^\infty \frac{|\varphi(re^{i\theta})|^2}{1+r^2}\,dr \right\} < +\infty,$$

4°. *Если* $\chi(\lambda)$ — *целая функция порядка* ρ *и нулевого типа, то* $\varphi(\lambda)\,\chi(\lambda)\,\overline{\in}\,B^2_{\rho,\sigma}$.

Доказательства теорем 5 и 6 проводятся по той же схеме, что и доказательство теоремы 4. Здесь надо пользоваться теоремами 2 и 3 и теоремами М. М. Джрбашяна о параметрическом представлении классов $W^2_{\rho,\sigma}$ и $B^2_{\rho,\sigma}(\Gamma)$.

Ереванский институт
народного хозяйства

Поступила 20. II. 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Винер, Пэли.* Преобразование Фурье в комплексной области, Физматгиз, М., 1964.
2. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1956.
3. *М. М. Джрабшян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., «Наука», 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIII, № 1, 1988 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.98

А. Б. НЕРСЕСЯН, М. Г. САДАКАШВИЛИ

О НЕТЕРОВОСТИ ДИСКРЕТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА-ХОПФА

Как известно, равномерная дискретизация с «шагом» постоянной длины уравнения Винера-Хопфа приводит к бесконечной алгебраической системе с теплицевой матрицей. В матричном случае имеется возможность выбрать для различных уравнений различный «шаг» дискретизации. При этом возникают интересные уравнения неисследованного, насколько нам известно, типа. Ниже изучается полученная таким способом система двух уравнений, предложенная в [1].

1°. Поставим вопрос о нормальной разрешимости системы

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{\infty} K_{11}(n-j)\, y_j + \sum\limits_{j=0}^{\infty} K_{12}(n-mj)\, z_j = a_n \\ \sum\limits_{j=0}^{\infty} K_{21}(mn-j)\, y_j + \sum\limits_{j=0}^{\infty} K_{22}(n-j)\, z_j = b_n \end{cases} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots), \tag{1}$$

где $m \geqslant 2$—целое

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} |K_{ij}(s)| < +\infty;\ i,\ j=1,\ 2, \tag{2}$$

а заданные последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и искомые последовательности $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\cdots)$ —из l_1 (абсолютно суммируемы).

С целью сведения задачи (1) к краевой задаче для аналитических функций применим дискретное преобразование Фурье (обозначаемое знаком $\widehat{\ }$)

$$\begin{cases} \widehat{K}_{11}(\eta)\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} \eta^j\, y_j\right) + \widehat{K}_{12}(\eta)\, z^+(\eta^m) = y^-(\eta) + \widehat{a}(\eta) \\ \sum\limits_{j=0}^{\infty} y_j \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \eta^n K_{21}(mn-j) + \widehat{K}_{22}(\eta)\, z^+(\eta) = z^-(\eta) + \widehat{b}(\eta). \end{cases} \tag{3}$$

Здесь знаком $+$ $(-)$ обозначены функции, аналитические внутри (вне) единичного круга и непрерывные вплоть до границы.

Нетрудно убедиться, что система (3) переписывается в виде *

---

* Здесь и далее знак преобразования Фурье опускается, поскольку задача сводится к решению системы (4).

$$\begin{cases} K_{11}(\eta)\sum\limits_{r=0}^{m-1}\eta^r\, y_r^+(\eta) + K_{12}(\eta)\, z^+(\eta^m) = y^-(\eta) + a(\eta) \\ \sum\limits_{r=0}^{m-1} K_{21}^r(\eta)\, y_r^+(\eta) + K_{22}(\eta)\, z^+(\eta) = z^-(\eta) + b(\eta), \end{cases} \tag{4}$$

где

$$K_{21}^r(\eta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_{21}(mn-r)\,\eta^n,\ \ y_r^+(\eta) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} y_{mn-r}\,\eta^n \ \ (r=0,\ 1,\cdots,\ m-1). \tag{5}$$

Поскольку $y^+(\eta) = \sum \eta^r\, y_r^+(\eta^m)$, то естественно выразить y_r^+ непосредственно через y^+. Обозначив $\varepsilon_p = \exp\{2\pi i\, p/m\}$ ($\varepsilon_p^m = 1$, $p = 0,\ 1,\ \cdots,\ m-1$) убеждаемся, что вопрос сводится к обращению матрицы Вандермонда. В итоге приходим к краевой задаче со сдвигами относительно двух пар функций $y^\pm$ и $z^\pm$

$$\begin{cases} K_{11}(\eta)\, y^+(\eta) + K_{12}(\eta)\, z^+(\eta^m) = y^-(\eta) + a(\eta) \\ \sum\limits_{p=0}^{m-1} Q_p(\eta)\, y^+(\varepsilon_p\eta) + K_{22}(\eta^m)\, z^+(\eta^m) = z^-(\eta^m) + b(\eta^m). \end{cases} \tag{6}$$

Нетрудно убедиться, что $Q_k(\eta) = Q_0(\varepsilon_k\eta)$ $(k=0,\ 1,\cdots,\ m-1)$ Покажем, что можно брать $Q_0(\eta) = m^{-1} K_{21}(\eta)$.

Действительно

$$K_{21}^r(\eta^m) = \eta^r \sum_{p=0}^{m-1} (\varepsilon_p)^r\, Q_0(\varepsilon_p\eta) = m^{-1}\eta^r \sum_{p=0}^{m-1} (\varepsilon_p)^r\, K_{21}(\varepsilon_p\eta) = \tag{7}$$

$$= m^{-1}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\eta^{q+r} K_{21}(q) \sum_{p=0}^{m-1}\varepsilon_{(p+q)\,r} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty}\eta^{sm}\, K_{21}(sm-r).$$

Таким образом, приходим к следующему окончательному виду краевой задачи

$$\begin{gathered} K_{11}(\eta)\, y^+(\eta) + K_{12}(\eta)\, z^+(\eta) = y^-(\eta) + a(\eta), \\ m^{-1}\sum_{p=0}^{m-1} K_{21}(\varepsilon_p\eta)\, y^+(\varepsilon_p\eta) + K_{22}(\eta^m)\, z^+(\eta) = z^-(\eta) + b(\eta^m), \end{gathered} \tag{8}$$

с дополнительным условием

$$z^\pm(\eta) = z_1^\pm(\eta^m). \tag{9}$$

2°. Решение $\{y^\pm,\ z^\pm\}$ задачи (8), вообще говоря, не обязано удовлетворять условию (9) $z^\pm(\eta) = z_1^\pm(\eta^m)$, что может нарушить эквивалентность задач (1) и (8). Достаточные условия эквивалентности содержит

Лемма. *Пусть выполнены условия*

$$K_{22}(\eta) \neq 0,\ \operatorname{ind} K_{22}(\eta) = \operatorname{var}\arg K_{22}(\eta) \leqslant 0\ \ (|\eta| = 1). \tag{10}$$

Тогда любое решение $\{y^\pm(\eta),\ z^\pm(\eta)\}$ задачи (8) удовлетворяет условию (9).

▲ Во втором уравнении системы (8) заменим η на $\varepsilon_1\eta$ и вычтем из исходного. В результате получим

$$K_{22}(\eta^m)\{z^+(\eta) - z^+(\varepsilon_1\eta)\} = z^-(\eta) - z^-(\varepsilon_1\eta). \qquad (11)$$

Из условия (10) следует (см. [2]), что $z^\pm(\eta) = z^\pm(\varepsilon_1\eta)$. Аналогично получим, что $z^\pm(\eta) = z^\pm(\varepsilon_p\eta)$, $p = 0, 1, \cdots, m-1$, откуда и следует условие (9). ▼

Систему (8) сведем стандартным методом (см. [2]) к системе сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана

$$(\mathbf{K}\varphi)(t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{m-1}\left\{A_k(t)\,\varphi(\varepsilon_k t) + \frac{1}{\pi i}B_k(t)\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-\varepsilon_k t}\right\} = g(t). \qquad (12)$$

Здесь $|t| = 1$ и

$$A_0(t) = \begin{vmatrix} 1+K_{11}(t) & K_{12}(t) \\ m^{-1}K_{21}(t) & 1+K_{22}(t^m)\end{vmatrix}, \quad B_0(t) = A_0(t) - 2E,$$

$$A_k(t) = B_k(t) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ m^{-1}K_{21}(\varepsilon_k t) & 0\end{vmatrix} \qquad (13)$$

$$(k = 1, 2, \cdots, m-1).$$

В общепринятых обозначениях (см. [2]) оператор $\mathbf{K}$ имеет вид

$$\mathbf{K} = \sum_{k=0}^{m-1}\{A_k(t)\,w^k + B_k(t)\,w^k S\}, \qquad (14)$$

где S—оператор сингулярного интегрирования на единичной окружности, а w — оператор карлемановского сдвига $w_\varphi = \varphi(\varepsilon_1 t)$, $|t| = 1$.

3°. Основным результатом работы является

Теорема. *Пусть* $A_{22}(\eta) \neq 0$, $\operatorname{ind} K_{22}(\eta) \leq 0$ и

$$\Delta(t) \overset{\text{det}}{=} m\,K_{22}(t^m)\prod_{p=0}^{m-1}K_{11}(\varepsilon_p t) -$$

$$- \sum_{p=0}^{m-1}K_{21}(\varepsilon_p t)\,K_{12}(\varepsilon_p t)\prod_{s=1}^{m-1}K_{11}(\varepsilon_{p+s} t) \neq 0, \quad |t| = 1. \qquad (15)$$

Тогда задача (1) *нетерова и ее индекс вычисляется по формуле*

$$\varkappa = -(2\pi)^{-1}\operatorname{var}\arg\Delta(t), \quad |t| = 1. \qquad (16)$$

▲ Нётеровость оператора K эквивалентна соотношению $\sigma K(t, j) \neq 0$, $|t| = 1$; $j = \pm 1$, где σK — символ оператора $\mathbf{K}$ (см. [2], гл. II, § 7). В случае, когда оператор имеет вид (14), несложные вычисления приводят к соотношениям

$$\operatorname{def}\sigma\mathbf{K}(t, -1) = 4^m, \quad \det\sigma K(t, +1) = \Delta(t). \qquad (17)$$

Остается применить теорию (гл. II книги [2]) и учесть доказанную выше лемму. ▲

Замечание, В случае $K_{11}(t) \neq 0$ ($|t| = 1$) формула (16) принимает следующий вид:

$$2\pi\varkappa = m \operatorname{var} \arg K_{11}(t) +$$
$$+ \operatorname{var} \arg \left\{ \sum_{p=0}^{m-1} \left[K_{22}(t^m) - \frac{K_{12}(\varepsilon_p t) K_{21}(\varepsilon_p t)}{K_{11}(\varepsilon_p t)} \right] \right\}, \ |t| = 1. \quad (18)$$

В заключение выражаем признательность Г. С. Литвинчуку за плодотворные обсуждения.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 2. IX. 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Б. Нерсесян*. Разрешимость некоторых уравнений и задачи сопряжения со сдвигом. Республиканская научно-практическая конференция по методике преподавания математики и механики в вузе .Тезисы докладов, Ереван, 1983, 40—42.
2. *Г. С. Литвинчук*. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, «Наука», М., 1977.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 1, 1988 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.547

А. О. КАРАПЕТЯН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ТРУБЧАТЫХ ОБЛАСТЯХ

1(а). Хорошо известна классическая теорема Пэли и Винера о параметрическом представлении класса Харди H^2 в полуплоскости [1, 2]. В дальнейшем в работах ряда авторов были даны обобщения этого результата, не требующие, однако, привлечения каких-либо существенно новых идей или конструкций. В то же время в работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна [3] и в монографии М. М. Джрбашяна [4] на основе далеко продвинутой теории гармонического анализа в комплексной области—теории интегральных преобразований с ядрами Миттаг-Леффлера, были получены существенно новые результаты типа теоремы Пэли-Винера.

В работе С. Г. Гиндикина [5] для многомерных областей Зигеля впервые была поставлена и решена задача получения параметрических интегральных представлений типа Пэли-Винера для классов квадратично интегрируемых по области голоморфных функций. В этой же работе на основе полученных интегральных представлений были построены воспроизводящие ядра для голоморфных в областях Зигеля функций из пространства L^2 без веса.

В дальнейшем исследования в этом направлении получили новое развитие в работах ряда авторов (см. [6, 7], [8]).

(б) Введем некоторые обозначения. При произвольном $n \geqslant 1$ обозначим через $\mathbf{C}^n$ и $\mathbf{R}^n$ n-мерные координатные пространства, соответственно, комплексных и действительных чисел. При этом $\mathbf{R}^n$ естественным образом отождествляется с подпространством в $\mathbf{C}^n$. Если $z = (z_k)_1^n \in \mathbf{C}^n$, то положим

$$\bar{z} = (\bar{z}_k)_1^n \in \mathbf{C}^n, \; z = x + iy \in \mathbf{C}^n, \tag{1}$$

где $x = (x_k)_1^n \in \mathbf{R}^n$, $y = (y_k)_1^n \in \mathbf{R}^n$, $z_k = x_k + iy_k \; (1 \leqslant k \leqslant n)$. Если $x = (x_k)_1^n \in \mathbf{R}^n$, то $dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ будет обозначать элемент объема в $\mathbf{R}^n$.

Далее пусть $0 < p < \infty$, $0 < s < +\infty$, B — область в $\mathbf{R}^n$, $T_B = \{z = x + iy \in \mathbf{C}^n, \; y \in B\}$ — трубчатая область в $\mathbf{C}^n$ с основанием B. Если $\gamma(y) > 0$, $y \in B$ — произвольная непрерывная функция, то обозначим через $H^p_{s,\gamma}(T_B)$ пространство голоморфных в T_B функций f, удовлетворяющих условию

$$M^p_{s,\gamma}(f) = \int\limits_B \left\{ \int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(x+iy)|^p dx \right\}^s \cdot \gamma(y)\, dy < +\infty. \tag{2}$$

В данной работе для пространств $H^p_{s,\gamma}(T_B)$ устанавливаются интегральные представления типа Пэли—Винера. Основываясь на них и используя методы, развитые в [5], для конкретной трубчатой области строятся воспроизводящие ядра.

2(а). Всюду дальше через C будем обозначать положительные (вообще говоря, различные) константы.

Хорошо известно [9], что для произвольной функции f из пространства $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, можно определить преобразование Фурье $\hat{f}$. При этом верно следующее предложение [9].

Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant 2$, $2 \leqslant q \leqslant \infty$, $1/p + 1/q = 1$. 1°. *Для каждой функции* $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ *выполняется неравенство*

$$\|\hat{f}\|_q \leqslant C \cdot \|f\|_p, \quad C = C(n, p, q). \tag{3}$$

2°. *Если* $g_1, g_2 \in L^p(\mathbf{R}^n)$, *то*

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} g_1(x) \cdot \hat{g}_2(x)\, dx = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \hat{g}_1(x) \cdot g_2(x)\, dx. \tag{4}$$

(б) Для введенных выше пространств справедлив следующий аналог теоремы Пэли—Винера.

Теорема 2. *Пусть* B — *область в* $\mathbf{R}^n$, $\gamma(y) > 0$, $y \in B$ — *непрерывная функция и* $1 \leqslant p \leqslant 2$, $0 < s < \infty$. *Тогда каждая функция* $f \in H^p_{s,\gamma}(T_B)$ *допускает интегральное представление вида*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int\limits_{\mathbf{R}^n} F(t) \cdot e^{i\langle z, t\rangle} dt, \quad z \in T_B, \tag{5}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *суть скалярное произведение в* $\mathbf{C}^n$, *а* $F(t)$, $t \in \mathbf{R}^n$ — *измеримая функция, удовлетворяющая условию*

1°. *Если* $p = 1$, *то*

$$\sup_{t \in \mathbf{R}^n} \{ |F(t)|^s \cdot \gamma^*_B(s \cdot t) \} \leqslant C \cdot M^1_{s,\gamma}(f) < +\infty, \tag{6}$$

$$\gamma^*_B(s \cdot t) \equiv \int\limits_B \gamma(y) \cdot e^{-\langle s \cdot t, y\rangle} dy, \quad t \in \mathbf{R}^n. \tag{7}$$

2°. *Если* $1 < p \leqslant 2$ $(q = p/(p-1))$, *то*

$$\int\limits_B \left\{ \int\limits_{\mathbf{R}^n} |F(t)|^q \cdot e^{-q\langle y, t\rangle} dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \gamma(y)\, dy \leqslant C \cdot M^p_{s,\gamma}(f) < +\infty. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $f \in H^p_{s,\gamma}(T_B)$. Не ограничивая общности можем предположить, что для любого $N \geqslant 0$ и произвольного компакта $K \subset B$

$$\sup_{y \in R} \{|x|^N \cdot |f_y(x)|\} \to 0, \text{ при } |x| \to +\infty, \tag{9}$$

где $f_y(x) \equiv f(x+iy)$, $x \in \mathbf{R}^n$. Зафиксируем произвольные точки $y_1, y_2 \in B$ и соединим их кривой $\omega(\tau)$, $\tau \in [0; 1]$, целиком лежащей в B. Затем при фиксированном $t \in \mathbf{R}^n$ положим

$$\eta_t(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot f(z) \cdot e^{-i<z, t>} dz \tag{10}$$

и при $R \in 0; +\infty)$ рассмотрим многообразие в $\mathbf{C}^n$:

$$\Omega_R = \{z = x + iy \in \mathbf{C}^n: |x| \leqslant R;\ y = \omega(\tau),\ \tau \in [0; 1]\}. \tag{11}$$

По теореме Стокса в силу голоморфности f в T_B и имеем

$$\int_{\partial\Omega_R} \eta_t(z) = 0. \tag{12}$$

Устремляя в (12) $R \to +\infty$ и принимая во внимание (9), приходим к равенству

$$\hat{f}_{y_1}(t) \cdot e^{<y_1, t>} = \hat{f}_{y_2}(t) \cdot e^{<y_2, t>}\ (t \in \mathbf{R}^n), \tag{13}$$

которое влечет существование измеримой функции $F(t)$, $t \in \mathbf{R}^n$ такой, что

$$\hat{f}_y(t) = F(t) \cdot e^{-<y, t>},\ y \in B. \tag{14}$$

Применяя к (14) теорему 1 (1°), мы получим (6) и (8). Наконец, (5) следует из (14) и (6), (8).

3 (a). Для произвольного $z = (z_k)_1^n \in \mathbf{C}^n$ положим $z' = (z_k)_2^n \in \mathbf{C}^{n-1}$, так что $z = (z_1, z')$. Если $z, w \in \mathbf{C}^n$, то естественно положить $<z', w'> = \sum_{k=2}^{n} z_k \cdot \overline{w}_k$, $|z'| = \sqrt{<z', z'>}$.

При произвольном $n \geqslant 1$ будем рассматривать область

$$G_n = \{y = (y_1, y') \in \mathbf{R}^n,\ y_1 > |y'|^2\} \tag{15}$$

и соответствующую ей трубчатую область

$$\tilde{\Omega}_n = T_{G_n} = \{z = x + iy \in \mathbf{C}^n,\ y \in G_n\}. \tag{16}$$

Всюду дальше предполагается, что $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0; +\infty)$ — положительная непрерывная функция, обладающая следующими свойствами:

$$\begin{gathered} \lim_{\tau \to +\infty} \tau^{-1} \cdot \ln \varphi(\tau) = 0, \\ \varphi \in L^1(0; R) \text{ при любом } R \in (0; +\infty). \end{gathered} \tag{17}$$

Далее будем полагать

$$\gamma(y) \equiv \varphi(y_1 - |y'|^2),\ y = (y_1, y') \in G_n \tag{18}$$

и кратко записывать это соотношение так: $\gamma \dashv \varphi$.

Наконец, в полном соответствии с (7) введем обозначение

$$\gamma^*_{\Omega_n}(t) \equiv \int_{\Omega^*_n} \gamma(y)\cdot \exp\{-<y, t>\}\, dy, \quad t \in \mathbf{R}^n. \tag{19}$$

(б) Введем следующее обозначение:

$$\Phi_{\Omega_n}(z, w) = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{R}^{n-1}} \frac{\exp\{i(z_1-\overline{w}_1)t_1 + i<z'-\overline{w}', t'>\}}{\gamma^*_{\Omega_n}(2t_1, 2t')}\, dt_1 dt', \tag{20}$$

$$z, w \in \widetilde{\Omega}_n.$$

Кроме того, для любых $z \in \widetilde{\Omega}_n$ и $v \in G_n$ положим

$$K_{z,v}(t_1, t') = \begin{cases} 0, & t_1 < 0,\ t' \in \mathbf{R}^{n-1} \\ (2\pi)^{n/2}\dfrac{\exp\{i(z_1+iv_1)t_1 + i<z'+iv', t'>\}}{\gamma^*_{\Omega_n}(2t_1, 2t')}, & t_1 > 0,\ t' \in \mathbf{R}^{n-1}. \end{cases} \tag{21}$$

Так как $\gamma \prec \varphi$, то в силу соотношений (17) верна

Лемма 1. 1°. *Интеграл* (20) *абсолютно сходится при любых* $z, w \in \widetilde{\Omega}_n$.

2°. *Ядро* $\Phi_{\Omega_n}(z, w)$ *голоморфно по* $z \in \widetilde{\Omega}_n$ *и антиголоморфно по* $w \in \widetilde{\Omega}_n$.

3°. *При любых* $z \in \widetilde{\Omega}_n$ *и* $v \in G_n$: $K_{z,v}(t) \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $0 < p < \infty$, *причем*

$$\widehat{K}_{z,v}(u) = \Phi_{\Omega_n}(z, u+iv), \quad u \in \mathbf{R}^n. \tag{22}$$

(в) Справедлив следующий основной результат.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0; +\infty)$ — *произвольная положительная непрерывная функция, обладающая свойствами* (17), $\gamma \prec \varphi$, $1 < p \leqslant 2$ *и положительное число* s *удовлетворяет одному из следующих условий*:

(а) $1/p \leqslant s \leqslant 2/p$,

(б) $1/p \leqslant s < 1/(p-1)$, *но при этом*

$$\varphi(2\tau) \leqslant C\cdot\varphi(\tau), \quad \tau \in (0; +\infty). \tag{23}$$

Тогда каждая функция $f \in H^p_{s,\gamma}(\widetilde{\Omega}_n)$ *допускает интегральное представление*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\widetilde{\Omega}_n} f(w)\cdot\Phi_{\Omega_n}(z, w)\cdot\gamma(v)\, du\, dv, \quad z \in \widetilde{\Omega}_n \tag{24}$$

$$(w = u + iv \in \widetilde{\Omega}_n).$$

Доказательство. Соотношения (17) и теорема 2 (при $B = G_n \subset \mathbf{R}^n$) влекут существование измеримой на $\mathbf{R}^n$ функции F, $F(t_1, t') = 0$

при $t_1<0$, $t'\in\mathbb{R}^{n-1}$, удовлетворяющей (6) при $p=1$ и (8) при $1<p\leqslant 2$, и такой, что

$$f(z)\equiv\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\cdot\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}F(t_1,t')\cdot e^{iz_1t_1+i<z',t'>}\,dt_1dt',\qquad(25)$$

$$z=(z_1,\ z')\in\overline{\Omega}_n.$$

При этом для почти всех $y=(y_1,\ y')\in G_n$ справедлива формула

$$\hat{f}_y(t_1,t')=\begin{cases}0, & t_1<0,\ t'\in\mathbb{R}\\ F(t_1,\ t')\cdot e^{-y_1t_1-<y',t'>}, & t_1>0,\ t'\in\mathbb{R}^{n-1}.\end{cases}\qquad(26)$$

Зафиксируем произвольное $z\in\overline{\Omega}_n$ и обозначим через $I(z)$ интеграл (24), абсолютно сходящийся в силу исходных предложений относительно функции φ и параметров p и s. Нам необходимо установить равенство $I(z)=f(z)$. Комбинируя лемму 1 (3°), теорему 1 (2°), (26) и (25), приходим к следующей цепочке равенств:

$$I(z)=\frac{1}{(2\pi)^n}\cdot\int\limits_{O_n}\gamma(v)\int\limits_{\mathbb{R}^n}f_v(u)\cdot\Phi_{O_n}(z,\ u+iv)\,dudv=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\cdot\int\limits_{O_n}\gamma(v)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat{f}_v(t)\cdot K_{z,v}(t)\,dt\,dv=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}F(t_1,\ t')\cdot\frac{e^{i<z,t>}}{\gamma_{O_n}(2t)}\int\limits_{O_n}\gamma(v)\cdot e^{-2<v,t>}dvdt=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\cdot\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}F(t_1,\ t')\cdot e^{i<z,t>}\,dt=f(z).$$

Таким образом, теорема доказана.

В заключение выражаю благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задач и руководство.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 16.I.1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. E. A. C. Paley, N. Wiener.* Fourier Transforms in the Complex Domain, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 19, Amer. Math. Soc., New York, 1934.
2. *Н. Винер, Р. Пэли.* Преобразование Фурье в комплексной области, М., «Наука», 1964.
3. *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян.* Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла. ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460.
4. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
5. *С. Г. Гиндикин.* Анализ в однородных областях, УМН, 19, № 4, 1964, 3—92.

6. *М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян*. Интегральные представления некоторых классов функций, голоморфных в полосе или в полуплоскости, ДАН СССР, 283, № 5, 1985, 1054—1056.

7. *M. M. Dzhrbashyan, V. M. Martirosyan*. Integral representations for some classes of functions holomorphic in a strip or in a half-plane, Analysis Mathematica, 12, № 3, 1986, 191—212.

8. *T. G. Cenchev*. Paley—Wiener type theorems for functions in Bergman Spaces over tube domains, J. Math. Anal. Appl., 118, № 2, 1986, 496—501.

9. *И. Стейн, Г. Вейс*. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М., «Мир», 1974.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 1, 1988 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.218.5

Р. Г. АРАМЯН

ФЛАГ-ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И МЕРЫ КРИВИЗНЫ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

В работе Р. В. Амбарцумяна [1] было указано на существование т. н. $\sin^2$-представлений функций ширины выпуклых тел в R^3. Пусть $H(\xi)$—ширина некоторого выпуклого тела K в направлении $\xi \in S^2$. Существует представление

$$H(\xi) = \int\limits_{S^2 \times S^1} \sin^2 \alpha (\xi, \Omega, \Phi)\, m(d\Omega, d\Phi). \tag{1}$$

Здесь S^i — единичная сфера в R^i, $i=1, 2$, $\Omega \in S^2$, $\Phi \in S^1$, m — некоторая мера на произведении $S^2 \times S^1$. Угол α определяется с помощью следующего геометрического построения. Каждой $(\Omega, \Phi) \in S^2 \times S^1$ соответствует проходящая через O плоскость $e(\Omega, \Phi)$: последняя содержит Ω и повернута вокруг Ω на угол Φ. Через e_ξ обозначим плоскость, нормальную к $\xi \in S^2$. По определению $\alpha(\xi, \Omega, \Phi)$ — угол между Ω и следом e_ξ на $e(\Omega, \Phi)$. Если K — выпуклый многогранник, то (1) можно полагать

$$m(d\Omega, d\Phi) = (2\pi)^{-1} \sum_{l_i \in K} |l_i|\, \delta_{\Omega_i}(d\Omega) \times I_{A_i}(d\Phi) = m_K. \tag{2}$$

Здесь l_i — ребра K, $\Omega_i \in S^2$ — направление l_i, A_i — внешний двугранный угол l_i, сумма берется по всем ребрам. Эта мера называется „стандартной мерой“. Меры в (1) рассмотрим в дуальных относительно (Ω, Φ) координатах $(\omega, \varphi) \in S^2 \times S^1$, где ω — нормаль $e(\Omega, \Phi)$, φ — направление Ω на $e(\Omega, \Phi)$. Пусть m представляет собой слабый предел стандартных мер многогранников, сходящихся (по Хаусдорфу) к гладкому выпуклому телу K. В таком случае при подстановке m в (1) получаем функцию ширины тела K. В настоящей работе доказано, что мера $m_\varphi(\cdot) = m(\cdot, S^1)$ (проекция m по φ) совпадает с мерой кривизны тела K. Аналогичное утверждение доказано в случае т. н. стохастической аппроксимации гладкого выпуклого тела. Отметим, что данное тело K может допускать представление (1) с различными мерами m.

1.° Сначала напомним определение меры кривизны данного выпуклого тела $K \subset R^3$ (см. [2]). Обозначим через

$$A_\varepsilon(K, Q) = \{x \in R^3,\ p(K, x) \in Q,\ \|x - p(K, x)\| < \varepsilon\},$$

где $Q \subset R^3$ — борелевское множество, $\varepsilon > 0$, $p(K, x)$ — проекция x на K. Тогда имеет место

$$V(A_\varepsilon(K, Q)) = \sum_{j=0}^{3} \varepsilon^{3-j} q_{3-j} \Psi_j(K, Q),$$

где V — мера Лебега в R^3, q_j — j-мерный объем единичного шара в R^j. Согласно [2] счетно-аддитивная функция относительно Q, $\Psi_j(K, Q)$, $j = \overline{0, 3}$ называется мерой кривизны тела K. Мера кривизны имеет следующие свойства [2].

а) $\Psi_j(K, Q)$, $j = 0, 1, 2$ сконцентрирована на ∂K. Следовательно для гладких K определена мера $\Psi_j(K, \Gamma^{-1}(\cdot))$, $j = 0, 1, 2$ на S^2, где Γ^{-1} — отображение, обратное к сферическому отображению ∂K на S^2.

б) Если $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = K$ (предел по Хаусдорфу), где K_n и K — выпуклые тела, то $\Psi_j(K_n, \cdot) \Rightarrow \Psi_j(K, \cdot)$ (слабая сходимость мер).

в) Если K — выпуклый многогранник, то

$$\Psi_1(K, Q) = (2\pi)^{-1} \sum_{l_i \subset K} |l_i \cap Q| |\alpha_i|, \tag{3}$$

где l_i — ребра K, $|\alpha_i|$ — величина внешнего двугранного угла ребра l_i

Теорема 1. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = K$ (по Хаусдорфу), где K_n — выпуклые многогранники, K — гладкое выпуклое тело. Если m_{K_n} (см (2)) слабо сходится к мере m ($m_{K_n} \Rightarrow m$), то*

$$m_\varphi(B) = \Psi_1(K, \Gamma^{-1} B))), \tag{4}$$

где $B \subset S^2$ — борелевское множество, $m_\varphi(B) = m(B, S^1)$ — проекция m по φ.

Сначала докажем одну лемму. Пусть D — единичный шар с центром O в R^3, $K - D = \{z \in R^3 : z + D \subset K\}$ — внутреннее параллельное множество тела K.

Лемма 1. *Пусть K — гладкое выпуклое тело и $P_0 \in K^0$ (внутренность K). Тогда для любого $\delta > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой $P \in (K + \varepsilon D) \setminus (K - \varepsilon D)$ и для любой, проходящей через P и не пересекающей $K - \varepsilon D$ плоскости e, имеет место*

$$d_0(\vec{n}(e), \vec{n}(x)) < \delta, \tag{5}$$

где $x = [P_0P) \cap \partial K$ ($[P_0P)$ — луч, исходящий из P_0), $\vec{n}(e)$ — нормаль к e, $\vec{n}(x)$ — нормаль к ∂K в точке x, d_0 — расстояние между соответствующими точками на S^2.

Доказательство. Допустим противное, т. е. существует $\delta_0 > 0$ и последовательность $(P_m, \vec{n}(e_m))$, где $P_m \in e_m$ $P_m \in \left(K + \frac{1}{m} D\right) \setminus \left(K - \frac{1}{m} D\right)$ и $e_m \cap \left(K - \frac{1}{m} D\right)$, для которой $d_0(\vec{n}(e_m), \vec{n}(x_m)) > \delta_0$. Здесь $x_m = [P_0, P_m) \cap \partial K$. Так как соответствующие пространства компактны, то из $(\mathrm{P}_m, \bar{n}(e_m))$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Ясно, что пределом этой последовательности будет $(\mathrm{P}, \vec{n}(e))$, где $\mathrm{P}\in\partial K$, а $\vec{n}(e)$ — нормаль ∂K в точке P. d_0 непрерывна, следовательно $0=d_0(\vec{n}(e), \vec{n}(e))>\delta_0>0$. Полученное противоречие доказывает лемму 1.

Доказательство теоремы 1. Утверждение (4) равносильно тому, что для всех непрерывных и ограниченных функций $f(\omega)$ на R^2 имеет место

$$\int\limits_{S^2} f(\omega)\, m_\varphi(d\omega) = \int\limits_{S^2} f(\omega)\, \Psi_1(K, \Gamma^{-1}(d\omega)). \qquad (6)$$

Из $m_{K_n}\Rightarrow m$ следует, что

$$(m_{K_n})_\varphi \Rightarrow m_\varphi. \qquad (7)$$

Из (2) получаем, что m_{Kn} в координатах (ω, φ) имеет вид

$$m_{K_n}=(2\pi)^{-1}\sum_{l_i\in K_n}|l_i|\,\mu_{\alpha_i}(d\omega)\times\delta_{\varphi_i}(d\varphi).$$

Здесь α_i—дуга соответствующей нормалям опорных плоскостей K_n, проходящих через его ребра l_i, $\mu_{\alpha_i}(d\omega)$ — мера на S^2, концентрированная на α_i и распределена равномерно на ней. Сумма берется по всем ребрам l_i многогранника K_n. Следовательно

$$(m_{K_n})_\varphi=(2\pi)^{-1}\sum_{l_i\in K_n}|l_i|\,\mu_{\alpha_i}(d\omega). \qquad (8)$$

По (7), (8) и по теореме о среднем имеем

$$\int\limits_{S^2} f(\omega)\, m_\varphi(d\omega)=\lim_{n\to\infty}(2\pi)^{-1}\int\limits_{S^2} f(\omega)\sum_{l_i\in K_n}|l_i|\,\mu_{\alpha_i}(d\omega)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(2\pi)^{-1}\sum_{l_i\in K_n}|l_i|\,|\alpha_i|\,f(\omega_i^*), \qquad (9)$$

где $|\alpha_i|$ — величина дуги α_i, ω_i^* — нормаль некоторой опорной плоскости K_n, проходящей через l_i.

Пусть $D_0\subset K$ — некоторый шар с центром $\mathrm{P}_0\in K$. Определим непрерывную и ограниченную функцию F в R^3 следующим образом.

1. Если $\mathrm{P}\in\partial K$, то $F(\mathrm{P})=f(\Gamma(\mathrm{P}))$.

2. Если $\mathrm{P}\in R^3\setminus D_0$, то $F(\mathrm{P})=F([\mathrm{P}_0\mathrm{P})\cap\partial K)$, $(\mathrm{P}_0\mathrm{P})$ — луч, выходящий из P_0).

3. Внутри D_0 F определим произвольно с сохранением непрерывности. Согласно свойствам меры кривизны, по теореме о среднем имеем

$$\int\limits_{S^2} f(\omega)\,\Psi_1(K, \Gamma^{-1}(d\omega)) = \int\limits_{\partial K} F(\mathrm{P})\,d\Psi_1(K, \cdot) = \int\limits_{R^3} F(\mathrm{P})\,d\Psi_1(K, \cdot) =$$

(10)

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{R^1} F(\mathrm{P})\,d\Psi_1(K_n,\cdot)=\lim_{n\to\infty}(2\pi)^{-1}\sum_{l_i\in K_n}|l_i|\,|\alpha_i|\,F(\mathrm{P}_i^*),$$

где P_i^* — некоторая точка на ребре l_i многогранника K_n.

Рассмотрим разность

$$|(2\pi)^{-1}\sum_{l_i\in K_n}|l_i|\,|\alpha_i|\,f(\omega_i^*)-(2\pi)^{-1}\sum_{l_i\in K_n}|l_i|\,|\alpha_i|\,F(\mathrm{P}_i^*)|\leqslant$$

$$\leqslant(2\pi)^{-1}\sum_{l_i\in K_n}|l_i|\,|\alpha_i|\,|f(\omega_i^*)-F(\mathrm{P}_i^*)| \tag{11}$$

$\{K_n\}$ — равномерно ограничена, следовательно $\sum_{l_i\in K_n}|l_i|\,|\alpha_i|<C.$

По определению $F(\mathrm{P}_i^*)=f(\vec{n}([\mathrm{P}_0\mathrm{P}_i^*)\cap\partial K)$, где $\vec{n}([\mathrm{P}_0\mathrm{P}_i^*)\cap\partial K)$—нормаль к ∂K в точке $[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_i^*)\cap\partial K$.

Из равномерной непрерывности f заключаем, что для даниого $\rho>0$ существует $\delta>0$ такое, что $|f(\omega_i^*)-F(\mathrm{P}_i^*)|<\rho$, если

$$d_0(\omega_i^*,\ \vec{n}([\mathrm{P}_0\mathrm{P}_i^*)\cap\partial K))<\delta. \tag{12}$$

По лемме 1 существует $\varepsilon>0$ такое, что

$$d_0(\omega_i^*,\ \vec{n}([\mathrm{P}_0\mathrm{P}_i^*)\cap\partial K)<\delta,\ \text{если}\ \mathrm{P}_i^*\in(K+\varepsilon D)\setminus(K-\varepsilon D) \tag{13}$$

и $(\mathrm{P}_i^*,\ \omega_i^*)$ удовлетворяет условию леммы 1.

Из $\lim K_n=K$ следует, что существует $N>0$ такое, что при $n>N$

$$K-\varepsilon D\subset K_n\subset K+\varepsilon D, \tag{14}$$

Следовательно, по (12), (13), (14) для любого $\rho>0$ существует N такое, что при $n>N$

$$(2\pi)^{-1}\sum_{l_i\in K_n}|l_i|\,|\alpha_i|\,|f(\omega_i^*)-F(\mathrm{P}_i^*)|<(2\pi)^{-1}\rho C. \tag{15}$$

Окончательно из (9) (10), (11), (15) получаем (6), что и доказывает теорему 1.

2.° Стохастическая аппроксимация. Пусть K — выпуклое тело, и M_n—последовательность случайных выпуклых многогранников (п. с. в. м.)

Определение. (п. с. в. м.) M_n стохастически аппроксимирует тело K, если

$$\lim_{n\to\infty}Ed(M_n,\ K)=0,$$

где b—метрика Хаусдорфа, E—математическое ожидание.

Теорема 2. *Пусть K — гладкое выпуклое тело и (п. с. в. м.) M_n стохаутически аппроксимирует K. Если $Em_{M_n}\Rightarrow m$, то*

$$m_\varphi(B)=\Psi_1(K,\ \Gamma^{-1}(B)),$$

где E — математическое ожидание, $B\subset S^2$ — борелевское множество' m_φ — проекция m по φ.

В [3] была рассмотрена стохастическая аппроксимация гладкого выпуклого тела K с помощью (п. с. в. м.), натянутых на независимо брошенные на ∂K точки. В [3] было установлено, что при такой аппроксимации

$$E_{M_n} \Rightarrow m,$$

где m имеет плотность $\frac{\sqrt{k_1(\omega)\, k_2(\omega)}}{k^2(\omega,\ \varphi)}\, d\omega d\varphi$. Здесь $k_i(\omega)$—главные нормальные кривизны ∂K в точке с нормалью ω, $k(\omega,\ \varphi)$ — нормальная кривизна в направлении φ в той же точке. Отсюда ввиду теоремы 2 получаем

$$\Psi_1(K,\ \Gamma^{-1}(d\omega)) = \left(\frac{1}{k_1(\omega)} + \frac{1}{k_2(\omega)}\right) d\omega.$$

Автор выражает глубокую благодарность Р. В. Амбарцумяну за постановку задачи и ценные советы.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 29.XII.1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. V. Ambartzumian*. Combinatorial Integral Geometry, Metrics and Zonoids, Acta Applicandae Matematice, 9, 1987.
2. *H. Federer*. Curvature measures, Trans. Amer. Math. Soc., 93, 1959, 418—491.
3. *Р. Г. Арамян*. О стохастической аппроксимации выпуклых тел, Изв. АН АрмССР, «Математика», XXII, № 5, 1987, 427—438.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Համառոտ հաղորդումներ

СОДЕРЖАНИЕ

Краткие сообщения

CONTENTS

Short communications