ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը։ Հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված բիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке), а кратких сообщений—не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

ԳԻՆԸ 1 Ռ. 20 Կ.
ЦЕНА 1 Р. 20 К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contribttors who desire to have their articles published in the proceedings zvestia of the Academy of Sciences of the Armenien S.S.R., series "Matomatika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication,

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furhished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initals and name, the title of the book, the place of publication, the publisher tbe date muse be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to indicated by a numeral in square brackets properey inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article shoule contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitied ot twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXII, № 5, 1987 Математика

УДК 517.98

В. В. ВОСКАНЯН

ОБ ОДНОЙ КОНСТАНТЕ, СВЯЗАННОЙ С ПАРОЙ КОНЕЧНОМЕРНЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

1. Введение

Пусть X и Y—банаховы пространства. Для каждой такой пары пространств определим число $v(X, Y)$ следующим образом.

Рассмотрим векторное пространство K линейных конечномерных операторов из дуального к X пространства X' в Y, действующих по формуле

$$u: x' \to \sum_i x'(x_i)\, y_i,\ x' \in X'\ (x_i \in X,\ y_i \in Y), \tag{*}$$

и на нем—конечно-ядерную $\|u\|_\wedge$ и обычную операторную $\|u\|_\vee$ нормы.

Напомним, что конечно-ядерная норма оператора $u \in K$ определяется следующим образом:

$$\|u\|_\wedge = \inf \sum_i \|x_i\| \, \|y_i\|, \tag{1}$$

где нижняя грань берется по всевозможным конечным представлениям вида (*) оператора u.

Положим по определению

$$v(X, Y) = \inf_{u \in K \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_\vee}{\|u\|_\wedge}. \tag{2}$$

Сравнительно недавно была решена следующая известная проблема Гротендика [1, § 4, *п*. 5]: Для всяких ли двух бесконечномерных пространств X и Y справедливо равенство $v(X, Y) = ?$ Ж. Пизье в [2] привел пример такого бесконечномерного пространства X, для которого $v(X, X) \neq 0$. В связи с этим представляется интересной характеризация константы $v(X, Y)$ для пары конечномерных пространств X и Y. В этом случае K есть пространство $L(X', Y)$ всех линейных операторов $X' \to Y$.

В настоящей работе обсуждается задача нахождения константы $v(X, Y)$ и экстремального в (2) элемента u для пары полиэдральных конечномерных пространств X и Y. Техника крайних точек позволяет в теоремах 1—5 свести вычисления норм к конечномерным задачам, связанным с матрицами.

2. Основные определения

Всюду в дальнейшем X и Y будут обозначать вещественные нормированные конечномерные пространства. В этом случае векторное пространство $K = L(X', Y)$ может быть отождествлено с алгебраическим тензорным произведением: $K = X \otimes Y$. Напомним, что $X \otimes Y$ есть векторное пространство всевозможных конечных формальных сумм вида $\sum_i x_i \otimes y_i$, $x_i \in X$, $y_i \in Y$, с соответствующей факторизацией, а оператор, соотносящийся элементу $u = \sum_i x_i \otimes y_i$, действует по формуле $u: x' \to \sum_i x'(x_i)\, y_i$, $x' \in X'$.

Таким образом, на языке тензорных произведений конечно-ядерная норма, называемая проективной нормой, элемента $u \in K$ определится по формуле (1), где нижняя грань берется по всевозможным представлениям $u = \sum_i x_i \otimes y_i$ элемента u.

Имеется и другое равносильное определение (см. [3]) проективной нормы элемента $u = \sum_i x_i \otimes y_i \in K$:

$$\|u\|_\Lambda = \sup |\sum_i T x_i (y_i)|, \tag{1*}$$

где верхняя грань берется по всевозможным линейным операторам $T: X \to Y'$ с нормой $\|T\| \leqslant 1$.

Обычная операторная, или инъективная норма элемента $u \in K$ запишется в виде

$$\|u\|_\vee = \sup |\sum_i x'(x_i)\, y'(y_i)|, \tag{3}$$

где верхняя грань берется по всевозможным функционалам $x' \in S(X')$ и $y' \in S(Y')$ ($S(X')$ и $S(Y')$—соответственно единичные шары в дуальных к X и Y пространствах X' и Y').

Напомним, что конечномерное нормированное пространство называется полиэдральным, если его единичный шар $S(X) = \{x: \|x\| \leqslant 1\}$ есть многогранник, т. е. является выпуклой оболочкой конечного числа точек.

3. Некоторые свойства тензорных произведений конечномерных полиэдральных пространств, связанные с вычислением норм

Пусть X и Y—полиэдральные пространства, $\dim X = n$, $\dim Y = m$. Обозначим множества крайних точек (вершин) единичных шаров этих пространств через $\operatorname{ext} S(X) = \{\pm e_1, \cdots, \pm e_r\}$ и $\operatorname{ext} S(Y) = \{\pm k_1, \cdots, \cdots, \pm k_s\}$, соответственно.

Теорема 1 (*о наилучшем представлении*). *Пусть u — некоторый элемент тензорного произведения $X \otimes Y$. Тогда существует его представление вида*

$$u = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} c_{ij}\, e_i \otimes k_j, \tag{4}$$

причем наилучшее в смысле (1), *т. е. такое, что*

$$\|u\|_\Lambda = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} |c_{ij}|\, \|e_i\| \|k_j\| = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} |c_{ij}|. \tag{5}$$

Действительно, согласно определению (1), существует некоторая последовательность представлений

$$u = u^p = \sum_{\tau=1}^{n_p} x_\tau^p \otimes y_\tau^p \tag{6}$$

такая, что

$$\|u\|_\Lambda = \lim_{p\to\infty} \sum_{\tau=1}^{n_p} \|x_\tau^p\| \, \|y_\tau^p\|. \tag{7}$$

Имеем

$$\frac{x_\tau^p}{\|x_\tau^p\|} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^+ (p, \tau)\, e_i + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^- (p, \tau)\, (-e_i) \tag{8}$$

и

$$\frac{y_\tau^p}{\|y_\tau^p\|} = \sum_{j=1}^{s} \beta_j^+ (p, \tau)\, k_j + \sum_{j=1}^{s} \beta_j^- (p, \tau)(-k_j), \tag{9}$$

где все коэффициенты $\alpha_i^+ (p, \tau)$, $\alpha_i^- (p, \tau)$, $\beta_j^+ (p, \tau)$, $\beta_j^- (p, \tau)$ неотрицательны и

$$\sum_{i=1}^{r} (\alpha_i^+ (p, \tau) + \alpha_i^- (p, \tau)) = 1 = \sum_{j=1}^{s} (\beta_j^+ (p, \tau) + \beta_j^- (p, \tau)). \tag{10}$$

Из соотношений (6), (8), (9) и (10) следует, что

$$u = u^p = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} c_{ij}^p\, e_i \otimes k_j, \tag{11}$$

где

$$c_{ij}^p = \sum_{\tau=1}^{n_p} [\alpha_i^+ (p, \tau) - \alpha_i^- (p, \tau)][\beta_j^+ (p, \tau) - \beta_j^- (p, \tau)]\, \|x_\tau^p\| \, \|y_\tau^p\|. \tag{12}$$

Отсюда, учитывая (10), получаем

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} |c_{ij}^p| \leqslant \sum_{\tau=1}^{n_p} \|x_\tau^p\| \, \|y_\tau^p\|. \tag{13}$$

Следовательно, для любых i и j, ввиду (7), последовательность $(c_{ij}^p)_{p=1}^{\infty}$ ограничена и содержит сходящуюся подпоследовательность. Не меняя обозначений можно считать, что $c_{ij}^p \to c_{ij}$ при $p \to \infty$. Обозначим $u_0 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} c_{ij}\, e_i \otimes k_j$. Из (11) следует, что $\forall x' \in X'$ $u_0(x') = \lim u^p(x') = u(x')$, и значит, $u = u_0 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} c_{ij}\, e_i \otimes k_j$. Но тогда по определению (1) $\|u\|_\Lambda \leqslant \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} |c_{ij}|$. Противоположное неравенство вытекает из соотношений (13) и (7), ч. т. д.

Изучим линейную зависимость между крайними точками шара $S(X)$. Так как их число есть $2r$, где $r \geqslant n = \dim X$, то существуют числа $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, r-n$; $j = 1, \cdots, r$, такие, что

$$\begin{array}{c} \alpha_{11}\, e_1 + \cdots + \alpha_{1r}\, e_r = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{r-n,1}\, e_1 + \cdots + \alpha_{r-n,r}\, e_r = 0 \end{array} \tag{14}$$

и ранг матрицы зависимости $A=\{\alpha_{ij}\}$ максимален.

Утверждение 1. *Система зависимости* (14) *полностью, т. е. с точностью до (линейной) изометрии, описывает пространство X (предполагается всегда, что $rg A = r-n$).*

Действительно, если $Z=JX$, где J есть изометрия некоторого нормированного пространства Z и пространства X, то крайними точками единичного шара $S(Z)$ пространства Z будут точки $\pm z_i = \pm Je_i$, т. к. каждая изометрия переводит крайние точки единичного шара в крайние точки единичного шара образа. Применив оператор J к обеим частям равенств (14), получим, что и векторы z_i удовлетворяют уравнениям (14).

Обратно, пусть Z— нормированное пространство размерности n такое, что крайние точки $\pm z_i$,[1] $i=1,\cdots,r$, его единичного шара $S(Z)$ удовлетворяют уравнениям (14). Пусть максимальный не равный нулю минор матрицы A есть $|\alpha_{kl}|_{k=1}^{r-n}{}_{l=1}^{r-n}$. Определим линейный оператор $J: X\to Z$ равенствами $Je_i=z_i$, $i=r-n+1,\cdots,r$. Применив оператор J к обеим частям равенств (14), получим

$$\begin{gathered}\alpha_{11}\, Je_1+\cdots+\alpha_{1,r-n}\, Je_{r-n}+\alpha_{1,r-n+1}\, z_{r-n+1}+\cdots+\alpha_{1r}\, z_r=0\\ \cdots\\ \alpha_{r-n,1}\, Je_1+\cdots+\alpha_{r-n,r-n} Je_{r-n}+\alpha_{r-n,r-n+1}\, z_{r-n+1}+\cdots+\alpha_{r-n,r}\, z_r=0.\end{gathered}$$

Так как векторы z_i, $i=1,\cdots,r$ удовлетворяют соотношеням (14) и указанный минор не равен нулю, то $Je_i=z_i$ и для $i=1,\cdots,r-n$. Поэтому J—изометрия, ч. т. д.

4. Вычисление проективной и инъективной норм элемента, использующее его матричное представление

Пусть X—пространство, описанное в предыдущем пункте, с системой зависимости (14), $A=\{\alpha_{ij}\}$. И пусть Y—некоторое m-мерное полиэдральное пространство такое, что вершины $\{\pm k_j\}_{j=1}^{s}$ шара $S(Y)$ удовлетворяют уравнениям зависимости

$$\begin{gathered}\beta_{11}\, k_1+\cdots+\beta_{1s}\, k_s=0\\ \cdots\\ \beta_{s-m,1}\, k_1+\cdots+\beta_{s-m,s}\, k_s=0\end{gathered}\tag{14'}$$

с матрицей зависимости $B=\{\beta_{ij}\}$.

Выясним, как с помощью соотношений (14) и (14′) можно вычислять Λ-и V-нормы произвольного элемента.

По теореме 1 для всякого $u\in X\otimes Y$ существует его наилучшее представление

$$u=\sum_{i,j} c_{ij}\, e_i\otimes k_j,\tag{15}$$

где

$$\|u\|_\Lambda=\sum_{i,j}|c_{ij}|.\tag{16}$$

Разумеется, не всякое представление через крайние точки вида (15) является наилучшим. Выясним, при каких же коэффициентах c_{ij}

для элемента (15) верно равенство (16). Для этого используем эквивалентное определение (1*) нормы $\|u\|_\Lambda$:

$$\|u\|_\Lambda = \sup_{\|T\|=1} \left|\sum_{i,j} c_{ij}\, T e_i(k_j)\right|. \tag{17}$$

Из соображений конечномерности следует, что существует такой линейный оператор $T_0: X \to Y'$, что

$$\|T_0\| = 1 \text{ и } \|u\|_\Lambda = \sum_{i,j} c_{ij}\, T_0 e_i(k_j). \tag{18}$$

Таким образом, если представление (15) наилучшее, то из (15), (16), (18) следует, что

$$T_0 e_i(k_j) = \operatorname{sgn} c_{ij}, \text{ если } c_{ij} \neq 0, \tag{19}$$

$$\text{и } |T_0 e_i(k_j)| \leqslant 1 \text{ для всех } i, j: 1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant s. \tag{20}$$

С другой стороны, если T_0—произвольный оператор из X в Y', удовлетворяющий (20), а числа c_{ij} таковы, что выполнено (19), то во-первых, легко понять, что $\|T_0\| = 1$, и во-вторых,

$$\|u\|_\Lambda = \sup_{\|T\| \leqslant 1} \left|\sum_{i,j} c_{ij}\, T e_i(k_j)\right| \leqslant \sum_{i,j} |c_{ij}| = \sum_{i,j} c_{ij}\, T_0 e_i(k_j) \leqslant \|u\|_\Lambda.$$

Поэтому коэффициенты c_{ij} дают наилучшее представление элемента u и T_0—оператор, дающий верхнюю грань в (17).
Итак, всевозможные наборы $\{c_{ij}\}$, задающие наилучшие представления соответствующих элементов, можно описать следующим образом.

Рассматриваются всевозможные операторы $T: X \to Y'$, $\|T\| = 1$, и по каждому из них строятся матрицы $\|c_{ij}\|$ следующим образом: $c_{ij} = 0$, если $|T e_i(k_j)| < 1$, если же $|T e_i(k_j)| = 1$, то $\operatorname{sgn} c_{ij} = T e_i(k_j)$, а модули $|c_{ij}|$ произвольны.
Пусть теперь $T: X \to Y'$, $\|T\| = 1$ —некоторый оператор. Обозначим

$$\varphi_{ij} = T e_i(k_j). \tag{21}$$

Применив оператор T к обеим частям равенств (14), а затем применив полученные функционалы к каждому вектору k_j, получим

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_{ki}\, \varphi_{ij} = 0,\ j = 1, \cdots, s;\ k = 1, \cdots, r-n, \tag{22}$$

или в матричной форме: $A\Phi = 0$, где $\Phi = \|\varphi_{ij}\|$.

Аналогично, применив функционалы Te_i к обеим частям равенств (14′), будем иметь в силу (21)

$$\sum_{j=1}^{s} \beta_{pj}\, \varphi_{ij} = 0,\ i = 1, \cdots, r;\ p = 1, \cdots, s-m, \tag{23}$$

или в матричной форме $\Phi B^* = 0$, где B^*—матрица, транспонированная к B.

Заметим еще, что условие $\|T\| = 1$ влечет в силу (21) соотношения

$$\forall i,\ \forall j\ |\varphi_{ij}| \leqslant 1 \text{ и } \exists\, i_0, j_0: |\varphi_{i_0 j_0}| = 1, \tag{24}$$

или $\|\Phi\|_\infty = 1$, рассматривая Φ как элемент rs-мерного пространства.

Пусть теперь $\{\varphi_{ij}\}_{i=1,\ j=1}^{r\quad s}$—произвольная матрица, удовлетворяющая соотношениям (22)—(24). Покажем, что существует такой оператор $T: X \to Y'$, $\|T\| = 1$, что выполнены равенства (21). Действительно, допустим, для определенности, что у матриц $\{\alpha_{ki}\}$ и $\{\beta_{pj}\}$ не равны нулю, соответственно, миноры $|\alpha_{ki}|_{k=1,\ i=1}^{r-n\ r-n}$ и $|\beta_{pj}|_{p=1,\ j=1}^{s-m\ s-m}$. Тогда соотношения (21), выписанные для индексов $i = r-n+1, \cdots, r$ и $j = s-m+1, \cdots, s$, уже однозначно определят некоторый оператор $T: X \to Y'$. Применим этот оператор к обеим частям равенств (14) и далее, полученное—к элементам $k_{s-m+1}, \cdots, k_s$. Из полученных систем числа $Te_i(k_j)$, $i = 1, \cdots, r-n$; $j = s-m+1, \cdots, s$, однозначно выразятся через $Te_i(k_j) = \varphi_{ij}$, $i = r-n+1, \cdots, r$; $j = s-m+1, \cdots, s$. В силу (22) $Te_i(k_j) = \varphi_{ij}$ для индексов $i = 1, \cdots, r$; $j = s-m+1, \cdots, s$. Применив, далее, функционалы Te_i к обеим частям равенств (14'), в силу аналогичных соображений получим равенства (21) для всех оставшихся индексов.

Введем для краткости записи следующие обозначения для матриц.

$$\text{Если } C = \{c_{ij}\}, \text{ то } |C| = \{|c_{ij}|\},\ \|C\|_1 = \sum_{ij} |c_{ij}|.$$

Если матрица $\Phi = \{\varphi_{ij}\}$—тех же размерностей, что и C, то $C \times \Phi = \{c_{ij}\ \varphi_{ij}\}$—матрица поэлементного произведения.

Суммируя все сказанное, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть A и B—матрицы зависимости пространств X и Y, соответственно. Тогда для каждого элемента $u \in X \otimes Y$ существуют матрицы $\Phi = \{\varphi_{ij}\}$ и $C = \{c_{ij}\}$, $i = 1, \cdots, r$; $j = 1, \cdots, s$, удовлетворяющие условиям*

$$A\Phi = 0,\ \Phi B^* = 0,\ \|\Phi\|_\infty = 1,\ C \times \Phi = |C|, \tag{25}$$

так что $u = \sum_{i,j} c_{ij}\, e_i \otimes k_j$ и $\|u\|_\wedge = \|C\|_1$.

Обратно, если Φ и C—произвольные матрицы, удовлетворяющие условиям (25), то для элемента $u = \sum_{i,j} c_{ij}\, e_i \otimes k_j$ верно равенство $\|u\|_\wedge = \|C\|_1$.

Перейдем теперь к рассмотрению V-нормы.

Теорема 3. *Пусть $u = \sum_{i,j} c_{ij}\, e_i \otimes k_j \in X \otimes Y$. Тогда $\|u\|_\vee = \max |\sum_{i,j} c_{ij}\, x'(e_i)\, y'(k_j)|$, где верхняя грань взята по всем функционалам $x' \in \operatorname{ext} S(X')$ и $y' \in \operatorname{ext} S(Y')$.*

Действительно, функция

$$g(x', y') = |\sum_{i,j} c_{ij}\, x'(e_i)\, y'(k_j)|,$$

определенная на компакте $S(X') \times S(Y')$ выпукла по каждой переменной x' и y'. Поэтому верхняя грань по каждой из них достигается на множестве крайних точек, откуда

$$\|u\|_\vee = \sup_{x'\in S(X'),\ y'\in S(Y')} g(x', y') = \max_{x'\in S(X')} \max_{y'\in S(Y')} g(x', y') =$$

$$= \max_{x'\in \operatorname{ext} S(X')} \max_{y'\in \operatorname{ext} S(Y')} g(x', y') = \max_{x'\in \operatorname{ext} S(X'),\ y'\in \operatorname{ext} S(Y')} g(x', y'),$$ ч. т. д.

Из геометрических соображений очевидно следующее

Утверждение 2. *Пространство X', сопряженное к X, также полиэдрально. Вершинами единичного шара $S(X')$ являются функционалы, определяемые $n-1$-мерными гранями многогранника $S(X)$, т. е. такие функционалы e', чьи гиперплоскости уровня 1, т. е. множества $\{x\in X: e'(x)=1\}$ проходят через $n-1$-мерные грани шара $S(X)$.*

Так как всякая $n-1$-мерная грань содержит, как минимум, n вершин шара $S(X)$, то каждая крайняя точка $e'\in \operatorname{ext} S(X')$ характеризуется условием:

$$e'\in X',\ |e'(e_i)|\leqslant 1,\ i=1,\cdots,r$$

и (26)

$$|e'(e_{i_1})| = |e'(e_{i_2})| = \cdots = |e'(e_{i_n})| = 1$$

для некоторых отличных друг от друга индексов $i_1,\cdots, i_n$.

Возьмем теперь некоторый функционал $e'\in \operatorname{ext} S(X')$ и применим его к обеим частям равенств (14). Обозначив вектор

$$(e'(e_1),\cdots, e'(e_r)) = (d_1,\cdots, d_r) = d,$$

получим условие $Ad=0$. Легко понять, используя (26), что имеет место следующее

Утверждение 3. *Для того, чтобы вектор $d=(d_1,\cdots,d_r)$ порождался некоторой крайней точкой $e'\in \operatorname{ext} S(X')$ по формуле $e'(e_i)=d_i$, $i=1,\cdots,r$, необходимо и достаточно, чтобы $Ad=0$, $\|d\|_\infty=1$ и, как минимум, n координат вектора d были равны по модулю 1.*

Аналогичные рассуждения для пространства Y вместе с теоремой 3 приводят нас к следующему факту.

Теорема 4. *Пусть $u=\sum_{i,j} c_{ij}\, e_i\otimes k_j$ — некоторый элемент из $X\otimes Y$. Тогда $\|u\|_\vee = \max|\sum_{i,j} c_{ij}\, d_i h_i|$, где верхняя грань берется по всевозможным векторам $d=(d_1,\cdots,d_r)$ и $h=(h_1,\cdots,h_s)$, удовлетворяющим условиям $Ad=0$, $Bh=0$, $\|d\|_\infty=\|h\|_\infty=1$ и самое меньшее n координат у d и m координат у h равны по модулю 1.*

Таким образом, для нахождения константы

$$v(X, Y) = \inf\{\|u\|_\vee / \|u\|_\wedge;\ u\in (X\otimes Y)\setminus\{0\}\}$$

можно использовать теоремы 2 и 4, и ввиду однородности ее формулы по u, получается

Теорема 5. *Справедливо равенство*

$$v(X, Y) = \inf_C \max_{d,h} |\sum_{i,j} c_{ij}\, d_i h_j|, \tag{27}$$

где верхняя грань берется по векторам, указанным в теореме 4, а нижняя грань—по матрицам C, $\|C\|_1=1$, для которых найдется матрица Φ со свойствами (25).

Отметим, что с помощью теорем 1 и 5, например, для случая, когда $X=l_1^n$(n-мерный аналог вещественного пространства l_1,a) $Y=l_\infty^m$(m-мерный аналог вещественного пространства l_∞). нетрудно получить

Следствие. $$v(l_1^n, l_\infty^m)=\frac{1}{\min(n, m)}=\frac{\|u_0\|_V}{\|u_0\|_\Lambda},$$

где элемент $u_0\in l_1^n\otimes l_\infty^m$ *имеет вид* $u_0=\sum\limits_{i=1}^{\min(n,m)} b_i\otimes\tilde{b}_i$, *где через* b_i *и* $\tilde{b}_i$ *обозначены i-ые элементы канонического базиса, соответственно, в n-и m-мерном арифметическом пространстве.*

В заключение укажем, что формула (27) может быть использована и для оценки константы $v(X, Y)$ при произвольном выборе вещественных нормированных пространств X и Y заданной конечной размерности, что следует из возможности аппроксимации их единичных шаров выпуклыми многогранниками.

Ереванский государственный
университет

Поступила 21. VIII. 1985

Վ. Վ. ՈՍԿԱՆՅԱՆ. Վերջավոր չափանի բանախյան տարածությունների զույգի հետ կապված մի հաստատունի մասին (ամփոփում)

X և Y բանախյան տարածությունների ամեն մի զույգի հետ բնական կերպով կապված է $v(X, Y)=\inf(\|u\|_V/\|u\|_\Lambda)$ հաստատունը, որտեղ ստորին եզրը վերցվում է ըստ $X\otimes Y$ տենզորական արտադրյալի բոլոր ոչ զրոյական էլեմենտների, իսկ $\|u\|_V$ և $\|u\|_\Lambda$ նշանակում են համապատասխանաբար էլեմենտի ինյեկտիվ և պրոյեկտիվ նորմերը։

Հոդվածում հետազոտվում է $v(X, Y)$ հաստատունը X և Y իրական վերջավոր չափանի նորմավորված պոլիեդրալ տարածությունների զույգի համար։ Ծայրային կետերի տեխնիկան թույլ է տալիս նորմերի հաշվումը բերել մատրիցների հետ կապված ակներև էքստրեմալ խնդիրների։

V. V. VOSKANIAN. *On a constant associated with pair of finite dimensional Banach spaces* (summary)

With every pair of Banach spaces X and Y we associated a constant $v(X, Y)=\inf(\|u\|_V/\|u\|_\Lambda)$ where the infimum is taken over all non-zero elements of the tensor product $X\otimes Y$, $\|u\|_V$ and $\|u\|_\Lambda$ denote correspondingly the injective and projective norms of the element u.

In the article the constant $v(X, Y)$ is studied for the pair of real finite dimensional normed polyhedral spaces X and Y. Extremal points technique permits to reduce the calculation of the norms to extremal problems associated with matrices.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Grothendieck.* Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Memoirs Amer. Math. Soc., 16, 1955.
2. *G. Pisier.* Counterexamples to a conjecture of Grothendieck. Acta Math., 151, № 3—4, 1983, 181—208.
3. *R. Schatten.* A theory of cross—spaces, Princeton, 1950.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXII, № 5, 1987 Математика

УДК 519. 212.3

Р. Г. АРАМЯН

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

В работе Р. В. Амбарцумяна [1] было указано на существование т. н. $\sin^2$-представлений функций ширины выпуклых тел в R^3 и была поставлена задача их систематического изучения.

Пусть $H(\xi)$—ширина некоторого выпуклого тела в направлении $\xi \in S^{-2}$. Существует представление

$$H(\xi)=\int\limits_{S^2\times S^1} \sin^2 \alpha(\xi,\ \Omega,\ \Phi)\ m\,(d\Omega,\ d\Phi). \tag{1}$$

Здесь S^i—единичная сфера в R^{i+1}, $i=1,\ 2$, $\Omega \in S^2$, $\Phi \in S^1$, m есть некоторая мера на произведении $S^2 \times S^1$. Угол α определяется с помощью следующего геометрического построения. Каждой $(\Omega,\ \Phi) \in S^2 \times S^1$ соответствует проходящая через 0 плоскость $e(\Omega,\ \Phi)$: последняя содержит Ω и повернута вокруг неё на угол Φ. Через e_ξ обозначим плоскость, нормальную к пространственному направлению ξ. По определению $\alpha(\xi,\ \Omega,\ \Phi)$ есть угол между Ω и следом e_ξ на $e(\Omega,\ \Phi)$. В [1] было указано некоторое „стандартное" $\sin^2$-представление для многогранников и отсюда было выведено существование (1) для произвольных выпуклых тел в R^3. В [2] было получено одно конкретное $\sin^2$-представление для гладких выпуклых телл. Однако представление (1) не единственно (для данного H существует много мер m). В настоящей работе находится вид меры m, которая получается при некоторой стохастической аппроксимации выпуклого тела K. Стохастическая аппроксимация, которую мы рассматриваем, состоит в следующем. На тело K независимо друг от друга бросаются n точек с одним и тем же распределением $\mathbf{P}$. Для случайного выпуклого многогранника, натянутого на эти точки, выписывается „стандартное" $\sin^2$-представление, предложенное в [1]. Это представление усредняется относительно последовательности бросаемых точек и рассматривается поведение усредненного представления при $n \to \infty$. В настоящей статье показано, что в пределе получаем $\sin^2$—представление функции ширины тела K, и что это представление не зависит от $\mathbf{P}$ при выборе $\mathbf{P}$ в некотором широком классе. Найдена плотность меры m в предельном представлении в терминах нормальных кривизн поверхности K.

1. *Случай равномерного распределения по площади.* Рассмотрим компактное выпуклое тело K (с непустой внутренностью) в R^3, имеющее дважды непрерывно дифференцируемую границу ∂K. Предположим, что во всех точках ∂K гауссова кривизна $k_1\ k_2$ положительна. Тогда сферическое отображение поверхности dK на еди-

ничную сферу S^2 (которое сопоставляет каждой точке $P^* \in \partial K$ конец отложенного от 0 единичного вектора внешней нормали к касательной плоскости в точке P^*) является гомеоморфизмом. На S^2 независимо друг от друга бросим n течек $P_1, \cdots, P_n$ с одним и тем же распределением $dP_i = f(\omega)\, d\omega$, $i = 1, 2, \cdots, n$ где $f(\omega)$—плотность распределения, непрерывная функция и $f(\omega) > 0$, $d\omega$—элемент лебеговой меры на S^2.

Точкам $P_1, \cdots, P_n$ по отображению, обратному к сферическому отображению, соответствуют точки $\overset{*}{P}_1, \cdots, \overset{*}{P}_n$ на ∂K. Согласно [1] функция ширины $H_{P_1, \ldots, P_n}(\xi)$ случайного многогранника с вершинами $\{\overset{*}{P}_1, \cdots, \overset{*}{P}_n\}$ представима в виде

$$H_{P_1, \ldots, P_n}(\xi) = (2\pi)^{-1} \sum_{\substack{i, j = 1 \\ i \neq j}} I_B(i, j) \int_{A_{ij}} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{ij}, \Phi)\, \overset{*}{l}_{ij}\, d\Phi. \tag{2}$$

Здесь $\xi, \Omega_{ij} \in S^2$, $\Phi \in S^1$, $\overset{*}{l}_{ij} = |\overset{*}{P}_i, \overset{*}{P}_j|$, Ω_{ij}—направление $\overline{\overset{*}{P}_i \overset{*}{P}_j}$, A_{ij}—внешний двугранный угол ребра $\overset{*}{P}_i \overset{*}{P}_j$, B—множество всех пар (i, j), которым соответствуют ребра. После усреднения по последовательности $(P_1, \cdots, P_n)$ и из соображений симметрии получаем

$$\int_{(S^2)^n} H_{P_1 \ldots P_n}(\xi)\, dP_1 \cdots dP_n = (2\pi)^{-1} C_n^2 \int_{(S^2)^n} \times$$

$$\times \left[\int_{A_{12}} I_B(1, 2) \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{12}, \Phi)\, \overset{*}{l}_{1,2}\, d\Phi \right] dP_1 \cdots dP_n. \tag{3}$$

Принимая точку P_1 за полюс, точку P_2 можно описать сферическими координатами (φ, ν) относительно P_1:

$$dP_2 = f(\omega)\, d\omega = f(\varphi, \nu) \sin \nu\, d\nu\, d\varphi = f(\varphi, l)\, ld\, ld\varphi, \text{ где } l = |P_1 P_2|.$$

Так как $f(\omega) > 0$ и $\int_{S^2} f(\omega)\, d\omega = 1$, то в пределе (при $n \to \infty$) в левой части (3) получим функцию ширины H тела K. Имеем

$$H(\xi) = \lim_{n \to \infty} C_n^2 \int_{(S^2)^2} \left[\int_{(S^2)^{n-2}} \left[\int_{A_{12}} I_B(1, 2) \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{\varphi l}, \Phi)\, d\Phi \right] \times \right.$$

$$\left. \times\, dP_3 \cdots dP_n \right] f(\omega)\, f(\varphi, l)\, l^* l\, d\omega\, d\varphi\, dl, \tag{4}$$

здесь $\Omega_{\varphi l}$—направление $\overrightarrow{\overset{*}{P}_1 \overset{*}{P}_2}$, где $\overset{*}{P}_1$ точка на ∂K с нормалью ω. $\overset{*}{P}_2$—точка на ∂K, нормаль которой имеет (φ, l) сферические координаты относительно ω, $l^* = \overset{*}{l}_{1,2}$. Пусть $e(\Omega_{\varphi l}, \Phi)$—плоскость, которая проходит через $\Omega_{\varphi l}$ (проходит через $\overset{*}{P}_1$ и $\overset{*}{P}_2$) и повернута вокруг $\Omega_{\varphi l}$ на угол Φ. За $e(\Omega_{\varphi l}, 0)$ примем плоскость, которая перпендикулярна плоскости, проходящей через ω и $\Omega_{\varphi l}$.

Сначала рассмотрим случай равномерного распределения, т. е. случай, когда $f(\omega)=(S_0\, C(\omega))^{-1}$, где $C(\omega)=k_1(\omega)\, k_2(\omega)$—гауссовая кривизна в точке на ∂K с нормалью ω, S_0—площадь ∂K. Плоскость $e(\Omega_{\varphi l}, \Phi)$ разбивает ∂K на две части. Пусть $S(\Phi, l)$—площадь малой (по площади) части $\partial K_1(\Phi, l)$ (см. рис. 1).

$S(\Phi, l)$ зависит также от ω и φ.

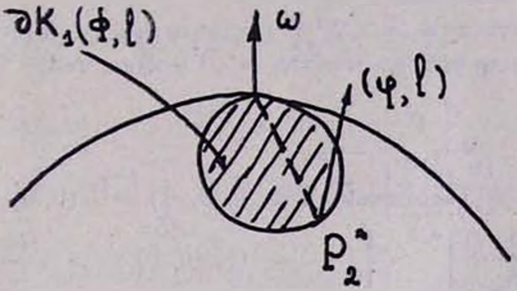

Рис. 1.

Во внутреннем интеграле (4) применяя теорему Фубини, получим

$$H(\xi)=(2\pi)^{-l}\lim_{n\to\infty} C_n^2 \int\limits_{(S^2)^2} \Bigg[\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\left(1-\frac{S(\Phi, l)}{S_0}\right)^{n-2}+\left(\frac{S(\Phi, l)}{S_0}\right)^{n-2}\right]\times$$
$$\times \sin^2\alpha(\xi, \Omega_{\varphi l}, \Phi)\, d\Phi\Bigg] \frac{l^*l\, d\omega\, d\varphi\, dl}{S_0^2\, C(\omega)\, C(\varphi, l)}. \tag{5}$$

В больших скобках (4) записана вероятность того, что $P_1^*P_2^*$ будет ребром и $e(\Omega_{\varphi l}, \Phi)$ принадлежит внешнему двугранному углу ребра $P_1^*P_2^*$(см. 1)).

Поскольку $\dfrac{S(\Phi, l)}{S_0}<\dfrac{1}{2}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \Bigg| C_n^2 \int\limits_{(S^2)^2} \Bigg[\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{S(\Phi, l)}{S_0}\right)^{n-2} \sin^2\alpha(\xi, \Omega_{\varphi l}, \Phi)\, d\Phi\Bigg]\times$$
$$\times \frac{l^*l\, d\omega\, d\varphi\, dl}{(S_0)^2\, C(\omega)\, C(\varphi, l)}\Bigg| \leqslant \lim_{n\to\infty} A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} C_n^2=0.$$

Аналогичным образом можно доказать, что область изменения Φ и l можно взять сколь угодно малой.

Таким образом

$$H(\xi)=(2\pi)^{-1}\lim_{n\to\infty} C_n^2 \int\limits_{S^2\times S^1} \Bigg[\int\limits_0^{l_0} \int\limits_{-\Phi_0}^{\Phi_0} \left(1-\frac{S(\Phi, l)}{S_0}\right)^{n-2}\times$$
$$\times \frac{l^*l \sin^2\alpha(\xi, \Omega_{\varphi l}, \Phi)}{C(\varphi, l)}\, dl\, d\Phi\Bigg] \frac{d\omega\, d\varphi}{S_0^2\, C(\omega)}, \tag{6}$$

где l_0 и Φ_0—сколь угодно малые фиксированные числа. Из регулярности поверхности ∂K имеем разложение Тейлора.

$$S(\Phi, l) = S_l^{\cdot}(0, 0)\, l + S_{\Phi}^{\cdot}(0, 0)\,\Phi + S_{ll}^{\cdot\cdot}(0, 0)\cdot\frac{l^2}{2} + S_{l\Phi}^{\cdot\cdot}(0, 0)\, l\Phi +$$

$$+ S_{\Phi\Phi}^{\cdot\cdot}(0, 0)\,\frac{\Phi^2}{2} + R(\Phi, l)\,(l^2 + \Phi^{-2}), \tag{7}$$

где $R(\Phi, l) \to 0$ при $l^2 + \Phi^2 \to 0$. Здесь все функции непрерывно зависят как от l и Φ, так и от ω и φ.

Из компактности $S^2 \times S^1$ и непрерывности $R(\Phi, l)$ относительно l, Φ, ω, φ для сколь угодно малого $a > 0$ можно найти l_0 и Φ_0, такие, что

$$R(\Phi, l) \geqslant -\frac{a}{2S_0}\,l^2 - \frac{a}{2S_0}\,\Phi^2 \text{ на } S^2 \times S^1 \times [0, l_0] \times [-\Phi_0, \Phi_0].$$

В параграфе 3 докажем, что $S_{\Phi}^{\cdot}(0, 0) = S_l^{\cdot}(0, 0) = 0$, так что имеем:

$$\left[1 - \frac{S(\Phi, l)}{S_0}\right]^{n-2} \leqslant \left[1 - \frac{l^2}{2S_0}\left(S_{ll}^{\cdot\cdot}(0, 0) - a\right) - \frac{l\Phi}{S_0}\, S_{l\Phi}^{\cdot\cdot}(0, 0) -\right.$$

$$\left. - \frac{\Phi^2}{2S_0}\left(S_{\Phi\Phi}^{\cdot\cdot}(0, 0) - a\right)\right]^{n-2}. \tag{8}$$

В (6) перейдя к переменным

$$\alpha = l\sqrt{n}, \quad \beta = \Phi\sqrt{n},$$

получим

$$H(\xi) = (2\pi)^{-1} \lim_{n\to\infty} C_n^2 \int\limits_{S^2\times S^1}\left[\int\limits_0^{l_0\sqrt{n}} \int\limits_{-\Phi_0\sqrt{n}}^{\Phi_0\sqrt{n}} \left(1 - \frac{S\left(\frac{\beta}{\sqrt{n}}, \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)}{S_0}\right)^{n-2} \times\right.$$

$$\left.\times \frac{\alpha\left(\alpha b + o\left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}\right)}{n^2 C\left(\varphi, \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)} \sin^2\alpha\left(\xi, \Omega_{\varphi\frac{\alpha}{\sqrt{n}}}, \frac{\beta}{\sqrt{n}}\right) d\alpha\, d\beta\right] \frac{d\omega\, d\varphi}{S_0^2\, C(\omega)}, \tag{9}$$

здесь $l^* = lb(\omega, \varphi) + o(l)$.

Из (8) и того, что при всех n и $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^{-x}$ легко видеть, что мажорантой у нас будет следующая функция:

$$A_2 e^{-\frac{\alpha^2}{2S_0}\left(S_{ll}^{\cdot\cdot}(0, 0) - a\right) - \frac{\alpha\beta}{S_0} S_{l\Phi}^{\cdot\cdot}(0, 0) - \frac{\beta^2}{2S_0}\left(S_{\Phi\Phi}^{\cdot\cdot}(0, 0) - a\right)} \cdot \alpha^2,$$

которая при малых a имеет конечный интеграл (в параграфе 3 увидим, что $S_{ll}^{\cdot\cdot}(0, 0) > 0$ и $S_{\Phi\Phi}^{\cdot\cdot}(0, 0) > 0$ непрерывны по ω и φ и подсчитаем этот интеграл).

Следовательно, в (9) можно заменить предел и интегралы местами. Используя

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = e^{-x}$, где $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$,

2. $\sin^2\alpha\left(\xi, \Omega_{\varphi\frac{\alpha}{\sqrt{n}}}, \frac{\beta}{\sqrt{n}}\right) \to \sin^2\alpha(\xi, \omega, \varphi_1)$ почти везде при $n \to \infty$, где $\alpha(\xi, \omega, \varphi_1)$—угол между направлением φ_1 на плоскости e_ω и пересечением e_ξ плоскостью e_ω, окончательно получим

$$H(\xi) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{S^2 \times S^1} \sin^2\alpha(\xi, \omega, \varphi_1) \left[\frac{b(\omega, \varphi)}{2 S_0^2 C^2(\omega)} \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2S_0} S''_{ll}(0,0) - \frac{\alpha\beta}{S_0} S''_{l\Phi}(0,0) - \frac{\beta^2}{2S_0} S''_{\Phi\Phi}(0,0)} \alpha^2 \, d\alpha \, d\beta \right] d\omega \, d\varphi,$$

или

$$H(\xi) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{S^2 \times S^1} \sin^2\alpha(\xi, \omega, \varphi_1) \left[\frac{b(\omega, \varphi)}{2 C^2(\omega)} \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2} S''_{ll}(0,0) - \alpha\beta S''_{l\Phi}(0,0) - \frac{\beta^2}{2} S''_{\Phi\Phi}(0,0)} \alpha^2 \, d\alpha \, d\beta \right] d\omega \, d\varphi, \tag{10}$$

где $b(\omega, \varphi) = \lim\limits_{l \to \infty} \frac{l^*(\omega, \varphi)}{l(\omega, \varphi)}$.

В параграфе 3 мы получим зависимость φ_1 от φ и в окончательном результате проведем замену переменного.

2. Случай общей плотности $f(\omega) > 0$.

Теорема 1. *Мера (плотность) $\sin^2$-представления функции ширины $H(\xi)$ выпуклого тела K, получаемая при стохастической аппроксимации тела K, не зависит от распределения бросаемых точек (от $f(\omega)$).*

Доказательство. Во внутреннем интеграле (4), применяя теорему Фубини, получим

$$H(\xi) = (2\pi)^{-1} \lim_{n \to \infty} C_n^2 \int\limits_{S^2 \times S^1} \left[\int \sin^2\alpha(\xi, \Omega_{\varphi l}, \Phi) \times \right.$$

$$\left. \times [(1 - \mathrm{P}(\Phi, l))^{n-2} + \mathrm{P}(\Phi, l)^{n-2}] \, l^* l \, f(\varphi, l) \, dl \, d\Phi \right] f(\omega) \, d\omega \, d\varphi.$$

Здесь $\mathrm{P}(\Phi, l)$—вероятность того, что P^* попадает на $\partial K_1(\Phi, l)$. Здесь таким же образом, как в 1-ом параграфе, можно доказать, что

$$H(\xi) = (2\pi)^{-1} \lim_{n \to \infty} C_n^2 \int\limits_{S^2 \times S^1} \left[\int\limits_0^{l_0} \int\limits_{-\Phi_0}^{\Phi_0} \sin^2\alpha(\xi, \Omega_{\varphi l}, \Phi)(1 - \mathrm{P}(\Phi, l))^{n-2} \times \right.$$

$$\left. \times \, l^* l \, f(\varphi, l) \, dl \, d\Phi \right] f(\omega) \, d\omega \, d\varphi, \tag{11}$$

где l_0 и Φ_0—сколь угодно малые положительные числа. Так как $f(\omega) = \frac{f_1(\omega)}{C(\omega)}$, где $f_1(\omega) = f(\omega) \, C(\omega)$, а $C(\omega)$—гауссовая кривизна, то по теореме о среднем имеем

$$P(\Phi, l) = S(\Phi, l)\cdot f_1(\omega_{\Phi l}).$$

Здесь $\omega_{\Phi l}$—некоторая точка из сферического образа $\partial K_1(\Phi, l)$. Подставляя выражение для $P(\Phi, l)$ в (11) и перейдя к $\alpha = l\sqrt{n}$, $\beta = \Phi\sqrt{n}$, получим

$$H(\xi) = (2\pi)^{-1} \lim_{n\to\infty} C_n^2 \int\limits_{S^2\times S^1} \Bigg[\int\limits_0^{\sqrt{n}\, l_0} \int\limits_{-\sqrt{n}\,\Phi_0}^{\sqrt{n}\,\Phi_0} \sin^2\alpha\left(\xi,\ \Omega_{\frac{\alpha}{\sqrt{n}}},\ \frac{\beta}{\sqrt{n}}\right) \times$$

$$\times \left[1 - f_1\left(\omega_{\frac{\beta}{\sqrt{n}}, \frac{\alpha}{\sqrt{n}}}\right) \times \left(\frac{\alpha^2}{2n} S''_{ll}(O, O) + \frac{\alpha\beta}{n} S''_{l\Phi}(O, O) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\beta^2}{2n} S''_{\Phi\Phi}(O, O) + R\left(\frac{\beta}{\sqrt{n}}, \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)\right)\right]^{n-2} \frac{\alpha\left(\alpha b + o\left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}\right)}{n^2 C\left(\varphi, \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)} \times$$

$$\times f_1\left(\varphi, \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right) d\alpha\, d\beta \Bigg] \frac{f_1(\omega)}{C(\omega)}\, d\omega\, d\varphi. \tag{12}$$

Из непрерывности и положительности f_1 следует, что $f_1(\omega) > M > 0$. Следовательно

$$[1 - P(\Phi, l)]^{n-2} \leqslant [1 - M\, S(\Phi, l)]^{n-2}.$$

Отсюда, из (8) и (7) следует, что и в этом случае существует мажоранта с конечным интегралом, которая имеет вид (см. теорему 1)

$$A_1 e^{-\frac{M\alpha^2}{2}\left(S''_{ll}(O, O) - a\right) - M\alpha\beta S''_{l\Phi}(O, O) - \frac{M\beta^2}{2}\left(S''_{\Phi\Phi}(O, O) - a\right)} \cdot \alpha^2.$$

Меняя местами предел и интеграл в (12), получим

$$H(\xi) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{S^2\times S^1} \sin^2\alpha(\xi, \omega, \varphi_1) \Bigg[\frac{f_1^2(\omega)\, b(\omega, \varphi)}{2C^2(\omega)} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{f_1(\omega)\alpha^2}{2} S''_{ll}(0, 0) - f_1(\omega)\alpha\beta S''_{l\Phi}(0, 0) - \frac{f_1(\omega)\beta^2}{2} S''_{\Phi\Phi}(0, 0)} \cdot \alpha^2\, d\alpha\, d\beta \Bigg] d\omega\, d\varphi; \tag{13}$$

так как при $n\to\infty$ сферический образ $\partial K_1\left(\frac{\beta}{\sqrt{n}}, \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)$ стягивается к ω, то из непрерывности $f_1(\omega)$ следует, что

$$f_1\left(\omega_{\frac{\beta}{\sqrt{n}}\frac{\alpha}{\sqrt{n}}}\right) \to f_1(\omega).$$

После следующей $\sqrt{f_1(\omega)}\ \alpha = \alpha_1$ и $\sqrt{f_1(\omega)}\ \beta = \beta_1$ замены переменных в (13) получим (10), что и надо было доказать.

3. Вычисление плотности, полученной предельной меры в терминах нормальных кривизн поверхности. Из (10) видно, что эта предельная плотность, которую мы обозначим через $g(\omega, \varphi)$, равна

$$g(\omega, \varphi) = \frac{b(\omega, u)}{2c^2(\omega)} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}\dot{S}_{ll}(O,O) - \alpha\beta \dot{S}_{l\Phi}(O,O) - \frac{\beta^2}{2}\dot{S}_{\Phi\Phi}(O,O)} \cdot \alpha^2 \, d\alpha \, d\beta.$$

Следовательно, нужно вычислить $\dot{S}_{ll}(O, O)$, $\dot{S}_{l\Phi}(O, O)$, $\dot{S}_{\Phi\Phi}(O, O)$ в терминах нормальных кривизн ∂K в точке $P^*(\omega)$ (точка с нормалью ω на ∂K).

Лемма 1. $\dot{S}_{ll}(O, O)$, $\dot{S}_{l\Phi}(O, O)$, $\dot{S}_{\Phi\Phi}(O, O)$ *зависят только от значений производных не выше второго порядка поверхности* ∂K *в точке* $P^*(\omega)$.

Доказательство. В некоторой окрестности $P^*(\omega)$, ∂K можно представить в $z = z(x, y)$ параметрической форме, где x и y меняются в касательной плоскости e_0 в $P^*(\omega)$; $z(x, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Для вычисления $\dot{S}_{\Phi\Phi}(O, O)$ нужно найти $S(\Phi, O)$, то есть площадь $\partial K_1(\Phi, O)$, отсекаемую плоскостью $e(\varphi, \Phi)$, проходящий через направление φ на e_0 и имеющей поворот Φ. Уравнение $e(\varphi, \Phi)$ будет

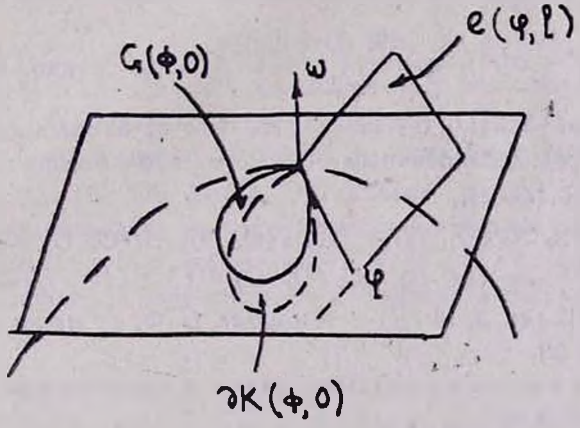

Рис. 2.

$$x \sin\Phi \sin\varphi - y \sin\Phi \cos\varphi = -z \cos\Phi.$$

В следующей лемме докажем, что $\dot{S}_{\Phi\Phi}(O, O) = (S_p)^{\cdot}_{\Phi\Phi}(O, O)$, $\dot{S}_{\Phi}(O, O) = (S_p)^{\cdot}_{\Phi}(O, O)$, где $S_p(\Phi, l)$ — площадь $G(\Phi, l)$ проекции $\partial K_1(\Phi, l)$ на e_0 (рис. 2). $G(\Phi, 0)$ ограничена кривой

$$(x \sin\varphi - y \cos\varphi) \operatorname{tg}\Phi = -z''_{xx}(O, O)\frac{x^2}{2} z''_{yy}(O, O)\frac{y^2}{2} - R(x, y),$$

где $R(x, y) = o(x^2 + y^2)$ (оси x и y направлены по главным направлениям). Перейдя к $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$ полярным координатам на e_0, имеем

$$r\,\mathrm{tg}\,\Phi \sin(\varphi - \alpha) = -r^2\left(z''_{xx}(O, O)\frac{\cos^2\alpha}{2} + z''_{yy}(O, O)\frac{\sin^2\alpha}{2}\right) - R(r, \alpha). \tag{14}$$

По известной формуле имеем, что

$$S_p(\Phi, O) = \int_{-(\pi-\varphi)}^{\varphi} \frac{r^2(\alpha, \Phi)}{2}\, d\alpha,$$

где $r(\alpha, \Phi)$—решение (14). Отсюда

$$(S_p)'_\Phi(\Phi, O) = \int_{-(\pi-\varphi)}^{\varphi} r(\alpha, \Phi)\, r'_\Phi(\alpha, \Phi)\, d\alpha.$$

Следовательно $(S_p)'_\Phi(O, O) = O$, так как $r(\alpha, O) \equiv O$. (15)

Дифференцируя еще раз, получим

$$(S_p)''_{\Phi\Phi}(O, O) = \int_{-(\pi-\varphi)}^{\varphi} (r'_\Phi(\alpha, O))^2\, d\alpha,$$

$r'_\Phi(\alpha, O)$ найдем дифференцированием (14) относительно Φ.

$$\sin^2(\varphi - \alpha) = r'_\Phi(\alpha, O)\left(z''_{xx}\frac{\cos^2\alpha}{2} + z''_{yy}\frac{\sin^2\alpha}{2}\right) + \left(\frac{R}{r}\right)'_{r=0} \cdot r'_\Phi(\alpha, O).$$

Но так как $R = o(r^2)$, то $\left(\frac{R}{r}\right)'_{r=0} = O$. Отсюда видно, что $r'_\Phi(\alpha, 0)$, а, следовательно, $S''_{\Phi\Phi}(O, O)$ зависит только от вторых производных ∂K в точке $P^*(\omega)$. Аналогичным образом это можно доказать для $S''_{l\Phi}(O, O)$ и $S''_{ll}(O, O)$.

Лемма 2. *$S'_\Phi(O, O) = (S_p)'_\Phi(O, O)$, $S'_l(O, O) = (S_p)'_l(O, O)$, $S''_{\Phi\Phi}(O, O) = (S_p)''_{\Phi\Phi}(O, O)$, $S''_{l\Phi}(O, O) = (S_p)''_{l\Phi}(O, O) = S''_{ll}(O, O) = (S_p)''_{ll}(O, O)$, где $S_p(\Phi, l)$ — площадь $G(\Phi, l)$ проекции $\partial K_1(\Phi, l)$ на e_0* (см. рис. 2).

Доказательство. (Пользуемся обозначениями леммы 1). Докажем сначала, что

$$S'_\Phi(O, O) = (S_p)'_\Phi(O, O), \quad S''_{\Phi\Phi}(O, O) = (S_p)''_{\Phi\Phi}(O, O).$$

Из дифференциальной геометрии известно, что

$$S(\Phi, l) = \int_{G(\Phi, l)} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\, dy = \int_{G(\Phi, l)} g_1(x, y)\, dx\, dy.$$

По теореме о среднем имеем

$$S(\Phi + \Delta\Phi, O) - S(\Phi, O) = \int_{G(\Phi+\Delta\Phi, O)\setminus G(\Phi, O)} g_1(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \Delta S_p(\Phi, O)\, g_1((x, y)_{\Delta\Phi}),$$

где $(x, y)_{\Delta\Phi} \in G(\Phi + \Delta\Phi, O) \setminus G(\Phi, O)$ (см. рис. 3).

Следовательно

$$S_\Phi^{\bullet}(\Phi, O) = (S_p)_\Phi^{\bullet}(\Phi, O)\cdot \lim_{\Delta\Phi\to 0} g_1((x, y)_{\Delta\Phi}) = (S_p)_\Phi^{\bullet}(\Phi, O)\cdot g_1((x, y)_\Phi),$$

так как можно доказать, что $\lim\limits_{\Delta\Phi\to 0} g_1((x, y)_{\Delta\Phi})$ равен значению g_1 в некоторой точке $(x, y)_\Phi \in \partial G(\Phi, O)$.

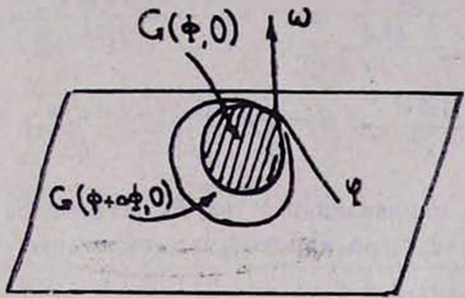

Рис. 3.

Отсюда и из (15) имеем, что $S_\Phi^{\bullet}(O, O) = (S_p)_\Phi^{\bullet}(O, O) = O$.
Из этого уже следует, что

$$S_{\Phi\Phi}^{\bullet}(O, O) = \lim_{\Phi\to 0}\frac{S_\Phi^{\bullet}(\Phi, O)}{\Phi} = \lim_{\Phi\to O}\frac{(S_p)_\Phi^{\bullet}(\Phi, O)}{\Phi}\cdot\lim_{\Phi\to O} g_1((x, y)_\Phi) =$$
$$= (S_p)_{\Phi\Phi}^{\bullet}(O, O),$$

поскольку при $\Phi\to O$ вся граница $\partial G(\Phi, O)$ стягивается к точке $P^*(\omega)$, а $g_1(x, y)$ — непрерывная функция ($g_1(O, O) = 1$).
Аналогичным образом можно доказать и остальные равенства. Так как $S_{\Phi\Phi}^{\bullet}(O, O)$, $S_{l\Phi}^{\bullet}(O, O)$, $S_{ll}^{\bullet}(O, O)$ зависят лишь от производных не выше второго порядка, то мы можем их вычислить для соприкасающего параболоида U поверхности ∂K в точке $P^*(\omega)$. Его уравнение при подходящем выборе системы координат имеет вид

$$z(x, y) = -\frac{k_1}{2}x^2 - \frac{k^2}{2}y^2. \tag{16}$$

Точка $P^*(\omega)$ совпадает при этом с началом координат, а k_1 и k_2 — нормальные кривизны ∂K в $P^*(\omega)$ по главным направлениям. (Оси x и y направим через эти главные направления), z имеет направление ω. Всё в дальнейшем будем рассматривать относительно этого репера. Теперь поступаем следующим образом. Находим точку $P_2^{\bullet}$ на U, нормаль в которой имеет сферические координаты (φ, l) относительно оси параболоида U. Проведем через $P^*(\omega)$ $P_2^{\bullet}$ плоскость $e(\Omega_{\varphi l}, \Phi)$. Находим проекцию пересечения $e(\Omega_{\varphi l}, \Phi)$ и U на касательную плоскость и вычисляем площадь, ограниченную этой проекцией. В точке (x, y) нормаль U есть $(k_1x, k_2y, 1)$. Из соответсвующего условия находим координаты $P_2^{\bullet}$:

$$P_2^{\bullet} = \left(\frac{\operatorname{tg}\nu\cos\varphi}{k_1}, \frac{\operatorname{tg}\nu\sin\varphi}{k_2}, -\frac{\operatorname{tg}^2\nu\, r(\varphi)}{2}\right), \tag{17}$$

где $v(\varphi)=\frac{\cos^2\varphi}{k_1}+\frac{\sin^2\varphi}{k_2}$ —радиус нормальнний кривизны ∂K или U в направлении φ (φ измеряем от 1-го главного направления). Для сферических координат (ν', φ') вектора $\overrightarrow{P^*(\omega)\, P_2^*}$ получим

$$\cos\varphi'=\frac{\cos\varphi}{k_1 A},\ \sin\varphi'=\frac{\sin\varphi}{k^2 A},\ \cos\nu'=-\frac{\operatorname{tg}\nu\, r(\varphi)}{2B},\ \sin\nu'=\frac{A}{B}, \tag{18}$$

где

$$A=\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{k_1^2}+\frac{\sin^2\varphi}{k_2^2}},\quad B=\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{k_1^2}+\frac{\sin^2\varphi}{k_2^2}+\frac{\operatorname{tg}^2\nu\cdot r^2(\varphi)}{4}}.$$

Единичный вектор в направлении $\overrightarrow{P^*(\omega)\, P_2^*}$ стремится к единичному вектору в направлении φ_1 на нлоскости с нормалью ω при $\nu\to 0$ (см. (10)).

Из этого и из (17) получаем, что

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\operatorname{tg}\varphi'=\operatorname{tg}\varphi\cdot\frac{k_1}{k_2} \tag{19}$$

(здесь мы имеем право вычислить φ_1 для соприкасающего параболоида). Если имеем направление $\Omega=(\varphi', \nu')$, то плоскость $e(\Omega, \Phi)$ имеет следующее уравнение:

$$x(\sin\Phi\sin\varphi'-\cos\Phi\cos\varphi'\cos\nu')+y(\sin\Phi\cos\varphi'-\cos\Phi\sin\varphi'\cos\nu')=$$
$$=-z\sin\nu'\cos\Phi.$$

Следовательно, проекция пересечения $e(\Omega, \Phi)$ и U имеет уравнение

$$x\left(\operatorname{tg}\Phi\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi}-\cos\varphi'\operatorname{ctg}\nu'\right)+y\left(-\operatorname{tg}\Phi\frac{\cos\varphi'}{\cos\varphi}-\sin\varphi'\operatorname{ctg}\nu'\right)=$$
$$=\frac{k_1x^2}{2}+\frac{k_2y^2}{2}.$$

Из этого и из (18) получим, что площадь равна

$$S_p(\Phi, l)=\frac{\pi}{\sqrt{k_1k_2}}\left[\frac{1}{k_1}\left(\frac{\operatorname{tg}\Phi\cdot\sin\varphi\cdot B}{k_2A^2}+\frac{\cos\varphi\operatorname{tg}\nu\, r(\varphi)}{2k_1A^2}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{k_2}\left(\frac{\operatorname{tg}\Phi\cdot\cos\varphi\cdot B}{k_1A^2}-\frac{\sin\varphi\operatorname{tg}\nu\, r(\varphi)}{2k_2A^2}\right)^2\right],$$

где $l=2\sin\nu/2$. Отсюда и из леммы 2 получим

$$S_{ll}^{\cdot}(O, O)=(S_p)_{ll}^{\cdot}(O, O)=\frac{\pi\cdot r^2(\varphi)}{2\sqrt{k_1k_2}\,A^4}\left(\frac{\cos^2\varphi}{k_1^3}+\frac{\sin^2\varphi}{k_2^3}\right)=2a_1,$$

$$S_{l\Phi}^{\cdot}(O, O)=(S_p)_{l\Phi}^{\cdot}(O, O)=\frac{\pi\sin\varphi\cos\varphi\cdot(k_2-k_1)}{A^3(k_1k_2)^{5/2}}=a_0, \tag{20}$$

$$S_{\Phi\Phi}^{\cdot}(O, O)=(S_p)_{\Phi\Phi}^{\cdot}(O, O)=\frac{2\pi\, r(\varphi)}{A^2(k_1k_2)^{3/2}}=2a_2.$$

Соответствующий интеграл из (10) равен

$$\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a_1\alpha^2 - a_0\alpha\beta - a_2\beta^2}\alpha^2\, d\alpha\, d\beta = \frac{\pi}{4\sqrt{a_2}\left(a_1 - \frac{a_0^2}{4a_2}\right)^{3/2}}. \tag{21}$$

Из (17) для $b(\omega, \varphi)$ получим (см. 10))

$$b(\omega, \varphi) = \lim_{l\to 0}\frac{l^*}{l} = \lim_{l\to 0}\frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2\nu\frac{\cos^2\varphi}{k_1^2} + \operatorname{tg}^2\nu\frac{\sin^2\varphi}{k_2^2} + \operatorname{tg}^4\nu\frac{r^2(\varphi)}{4}}}{2\sin\nu/2} =$$

$$= \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{k_1^2} + \frac{\sin^2\varphi}{k_2^2}} = A. \tag{22}$$

Из (10), (18), (20), (21), (22) получаем

$$g(\omega, \varphi) = \frac{k_2^2(\omega)\cos^2\varphi + k_1^2(\omega)\sin^2\varphi}{\pi\sqrt{k_1(\omega)\,k_2(\omega)}\,(k_2(\omega)\cos^2\varphi + k_1(\omega)\sin^2\varphi)^2},$$

здесь φ измеряется от первого главного направления. Подставляя это выражение в (10) и заменяя переменную φ_1 из (19), окончательно получаем

$$H(\xi) = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{S^2\times S^1}\sin^2\alpha(\xi, \omega, \varphi)\frac{\sqrt{k_1(\omega)\,k_2(\omega)}}{k^2(\omega, \varphi)}\,d\omega\, d\varphi. \tag{23}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. *Функция ширины $H(\xi)$ выпуклого тела K имеет представление*

$$H(\xi) = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{S^2\times S^1}\sin^2\alpha(\xi, \omega, \varphi)\frac{\sqrt{k_1(\omega)\,k_2(\omega)}}{k^2(\omega, \varphi)}\,d\omega\, d\varphi, \tag{24}$$

где $k_i(\omega)$, $i = 1, 2$—главные нормальные кривизны поверхности ∂K в точке с нормалью ω, $k(\omega, \varphi)$—нормальная кривизна в направлении φ в этой же точке, α—угол между направлением φ на плоскости e_ω и следом на ней плоскости e_ξ, φ—измеряем от первого главного направления.

Формулу (24) можно записать и в дуальных относительно (ω, φ) координатах (Ω, Φ) (см. [1]).

Следствие 1. После интегрирования по $d\varphi$ в (24) получаем формулу, впервые найденную другим методом в [2]:

$$H(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S^2}\frac{\sin^2\alpha}{k_1} + \frac{\cos^2\alpha}{k_2}\,d\omega,$$

здесь α угол между первым главным направлением в касательной плоскости ∂K в точке с нормалью ω и пересечением этой касательной плоскости с плоскостью e_ξ.

Следствие 2. После интегрирования обеих частей (24) по $d\xi$ (элемент площади на S^2), получаем формулу Минковского

$$\mu_{\text{инв.}}(\{e\in E: e\cap K\neq\varnothing\}) = \frac{1}{2}\int\limits_{S^2}\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\,d\omega.$$

Здесь E—пространство плоскостей в R^3, $\mu_{\text{инв.}}$—инвариантная мера в E.

Следствие 3. Пусть μ—трансляционно-инвариантная мера на E (пространство плоскостей в R^3), с элементом $d\mu = m(d\xi) \times dp$. После интегрирования обеих частей (24) по $m(d\xi)$ (четная мера на S^2), получаем

$$\mu(\{e \in E : e \cap K \neq \varnothing\}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^2 \times S^1} \rho(f(\omega, \varphi)) \frac{\sqrt{k_1(\omega) k_2(\omega)}}{k^2(\omega, \varphi)} d\omega \, d\varphi.$$

Здесь $f(\omega, \varphi)$—плоскость e_ω с направлением φ на ней (называется флагом (см. [1]), $\rho(f(\omega, \varphi))$—веджевая плотность μ в пространстве флагов (см. [1]):

$$\rho(f(\omega, \varphi)) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^2} \sin^2 \alpha(\xi, \omega, \varphi) \, m(d\xi).$$

Автор выражает глубокую благодарность Р. В Амбарцумяну за постановку задачи и ценные советы.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 28. VI. 1986

Ռ. Հ. ԱՐԱՄՅԱՆ Ուռուցիկ մարմինների պատահական մոտարկման մասին *(ամփոփում)*

Ռ. Վ. Համբարձումյանի [1] աշխատանքում, ցույց է տրված ուռուցիկ մարմինների լայնքի ֆունկցիաների համար այսպես կոչված $\sin^2$*-ներկայացման գոյությունը։ Այս աշխատանքում ապացուցված է, որ ուռուցիկ մարմիններին պատահական բազմանիստով մոտարկման դեպքում ստանում ենք նրանց լայնքի ֆունկցիաների* $\sin^2$*-ներկայացումը։ Այդ ներկայացումը կախված չէ մոտարկման պարամետրերից (նայիր թեորեմ 2)։ Վերջում գտնված է այդ ներկայացման խտության տեսքը մակերևույթի նորմալ կորությունների տերմիններով։*

R. G. ARAMIAN *About stochastic approximation of convex bodies* (summary)

Ir [1] R. V. Ambartzumian [introduced the so called $\sin^2$-representations of with functions of convex bodies. In this paper we .erive a $\sin^2$-representation using a stochastic approximation of convex bodies. This representation does not depend on the parametrs of approximation and is expressed in terms of the surface curvature.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. U. Ambartzumian.* Combinatorial Integral Geometry, Metrics and Zonoids, Acta Applicandae Matematice, 9, 1987.
2. *Г. Ю. Панина.* Выпуклые тела и трансляционно-инвариантные меры, в кн. Зап. научн. семинаров Ленинград. отд. Мат. ин-та АН СССР, т. 157, 1986.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 5, 1987 Математика

УДК 517.968

А. С. ЛАЛАЯН, А. Б. НЕРСЕСЯН

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ПАРЫ КУСОЧНО-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Введение

В работе [1] была предложена следующая дискретно-континуальная система Винера-Хопфа ($x \geqslant 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$)

$$
\begin{gathered}
y(x) = \int\limits_0^\infty K_{11}(x-t)\, y(t)\, dt + \sum_{j=0}^{\infty} K_{12}(x-j)\, y_j + f(x), \\
\int\limits_0^\infty K_{21}(n-t)\, y(t)\, dt + \sum_{j=0}^{\infty} K_{22}(n-j)\, y_j = b_n
\end{gathered}
\tag{1}
$$

относительно неизвестной функции $y(x)$ $(x > 0)$ и последовательности $\{y_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

При естественных ограничениях (см. [1]) задача эта сводится к следующей задаче сопряжения для двух пар функций $y^{\pm}(t)$, $z^{\pm}(\tau)$, аналитических, соответственно, в верхней (нижней) полуплоскости $(\operatorname{Im} t \gtrless 0)$ и внутри (вне) единичного круга $(|\tau| \gtrless 1)$ (знак преобразований Фурье для простоты опущен)

$$
\begin{gathered}
[K_{11}(t) - 1]\, y^+(t) + K_{12}(t)\, z^+(e^{it}) = y^-(t) + f(t), \\
\sum_{n=-\infty}^{\infty} K_{21}(t + 2\pi n)\, y^+(t + 2\pi n) + K_{22}(e^{it})\, z^+(e^{it}) = z^-(e^{it}) + b(e^{it}).
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Решение системы (2) в общем случае — задача не менее трудная, чем факторизация матрицы-функции 2×2. В [1] были указаны простейшие случаи явной разрешимости этой системы. Основную роль при этом (обеспечивающую нетеровость задачи (2)) играли условия

$$
\begin{gathered}
\Delta_1(t) \overset{\text{def}}{=} K_{11}(t) - 1 \neq 0, \quad (-\infty \leqslant t \leqslant \infty), \\
\Delta_2(e^{it}) \overset{\text{def}}{=} K_{22}(e^{it}) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K_{12}(t + 2\pi n)\, K_{21}(t + 2\pi n)}{K_{11}(t + 2\pi n) - 1} \neq 0 \; (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Ниже задача (2) полностью исследуется в предположении рациональности некоторой функции (см. ниже условие (1.4)), но при допущении обращения в нуль функции $\Delta_1(t)$ (что влечет за собой, вообще говоря, наличие особенностей у $\Delta_2(e^{it})$).

§ 1. Постановка задачи и основные результаты

1.1. Рассматривается следующая однородная краевая задача (2) для двух пар функций, $y^{\pm}(t)$ и $z^{\pm}(\tau)$, аналитических, соответственно, в верхней (нижней) полуплоскости переменной t и внутри (вне) единичного круга переменной $\tau = e^{it}$

$$
\begin{aligned}
&[K_{11}(t)-1]\, y^{+}(t) + K_{12}(t)\, z^{+}(e^{it}) = y^{-}(t),\\
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} K_{21}(t+2\pi n)\, y^{+}(t+2\pi n) + K_{22}(e^{it})\, z^{+}(e^{it}) = z^{-}(e^{it}).
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Функции $K_{11}(t)$, $K_{12}(t)$, $K_{21}(t)$ удовлетворяют условию Гельдера на $R=(-\infty,\infty)$ и обращаются на бесконечности в нуль. Функция $K_{22}(\tau)$ удовлетворяет условию Гельдера на единичной окружности Γ. Решения задачи ищутся в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера соответственно на R и Γ и обращающихся на бесконечности в нуль.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что

1.

$$K_{11}(t)-1=[K^{11}(t)-1]\prod_{s=1}^{\nu}\left(\frac{t-t_s}{t+i}\right)^{p_s^{11}}, \tag{1.2}$$

где p_s^{11} — целые $\geqslant 0$, $\sum\limits_{s=1}^{\nu} p_s^{11}=p$; $K^{11}(t)-1\neq 0\,(-\infty\leqslant t\leqslant\infty)$.

2.

$$K_{12}(t)=K^{12}(t)\prod_{s=1}^{\nu}\left(\frac{t-t_s}{t+i}\right)^{p_s^{12}}, \tag{1.3}$$

где p_s^{12} — целые $\geqslant 0$, $K^{12}(t_s)\neq 0$.

Функции $K^{11}(t)$, $K^{12}(t)$ удовлетворяют условию Гельдера на R.

3. Имеет место представление

$$\frac{K_{12}(t)}{K_{11}(t)-1}\prod_{s=1}^{\nu}(t-t_s)^{d_s}=\frac{K^{+}(t)}{\prod\limits_{j=1}^{\mu}(t-z_j^{+})^{q_j}}, \tag{1.4}$$

где

$$K^{+}(z_j^{+})\neq 0,\ d_s=p_s^{11}-h_s,\ h_s=\min(p_s^{11},\ p_s^{12}),\ \sum_{s=1}^{\nu}h_s=h,\ \sum_{s=1}^{\nu}d_s=d,$$

z_j^{+} — фиксированные точки верхней полуплоскости, q_j — целые $\geqslant 0$.

Функция $K^{+}(t)$ аналитична в верхней полуплоскости, за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки, в которой ее порядок равен $k_{12}-d-q$ (где k_{12} — порядок на бесконечности функции $K_{12}(t)$), и удовлетворяет условию Гельдера во всех конечных t, принадлежащих R.

Замечание 1. Для тех точек t_s, для которых $d_s>0$, в соответствии с (1.2) и (1.3), $K^{+}(t_s)\neq 0$.

Учитывая (1.2), приходим к следующему общему представлению функции $\Delta_2(e^{it})$ (см. (3))

$$\Delta_2(e^{it}) = \Delta_0(e^{it}) \cdot \frac{\prod\limits_{k=1}^{b} (e^{it} - \tau_k)^{l_k}}{\prod\limits_{s=1}^{\nu} (e^{it} - e^{it_s})^{m_s}}, \tag{1.5}$$

где $l_k \geqslant 0$ — целые, $\sum\limits_{k=1}^{b} l_k = L$; $m_s > 0$ — целые, $\sum\limits_{s=1}^{\nu} m_s = m$; $\Delta_0(e^{it}) \neq 0, \infty$; $e^{it_s} \neq \tau_k \in \Gamma$ $(k = 1, 2, \cdots, b;\ s = 1, 2, \cdots, \nu)$.

Из вышеприведенных условий следует, что $\Delta_0(e^{it})$ удовлетворяет условию Гельдера на Г.

1.2. Факторизация функций $[K^{11}(t) - 1]^{-1}$ и $\Delta_0^{-1}(e^{it})$ приводит к следующему для них представлению ([2]):

$$[K^{11}(t) - 1]^{-1} = \frac{X_1^+(t)}{X_1^-(t)}, \tag{1.6}$$

где

$$X_1^+(z) = \exp \Gamma^+(z), \quad X_1^-(z) = \left(\frac{z - i}{z + i}\right)^{-\varkappa_1} \exp \Gamma^-(z),$$

$$\Gamma_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln \left[\left(\frac{t - i}{t + i}\right)^{-\varkappa_1} [K^{11}(t) - 1]^{-1}\right] \frac{dt}{t - z},$$

$$\varkappa_1 = \operatorname{ind} [K^{11}(t) - 1]^{-1}, \quad (-\infty \leqslant t \leqslant \infty),$$

$$\Delta_0^{-1}(e^{it}) = \frac{X_2^+(e^{it})}{X_2^-(e^{it})}, \tag{1.7}$$

где

$$X_2^+(z) = \exp \Gamma_2^+(z), \quad X_2^-(z) = z^{-\varkappa_2} \exp \Gamma_2^-(z),$$

$$\Gamma_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \ln [\tau^{-\varkappa_2} \Delta_0^{-1}(\tau)] \frac{d\tau}{\tau - z}, \quad \varkappa_2 = \operatorname{ind} \Delta_0^{-1}(e^{it}) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Замечание 2. В частном случае, когда $m = L = p = 0$,

$$\varkappa_1 = \operatorname{ind} [K_{11}(t) - 1]^{-1} \quad (-\infty < t \leqslant \infty),$$

$$\varkappa_2 = \operatorname{ind} \Delta_2^{-1}(e^{it}) \quad (0 \leqslant t < 2\pi).$$

Пусть

$$\prod_{s=1}^{\nu} (t - t_s)^{d_s} = \prod_{s=1}^{\nu} (t - t_s)^{c_s} \prod_{s=1}^{\nu} (t - t_s)^{r_s}, \tag{1.8}$$

$$c_s > 0, \ r_s \geqslant 0; \ \sum_{s=1}^{\nu} c_s = c, \ \sum_{s=1}^{\nu} r_s = r, \ r_s \leqslant m_s.$$

Функция $\prod\limits_{s=1}^{\nu} (e^{it} - e^{it_s})^{m_s} (t - t_s)^{-r_s}$ на R не имеет полюсов.

Потребуем, наконец, выполнения следующих условий дифференцируемости

d_1. Функции $K^{11}(t)$, $K_{12}(t)$, $K_{21}(t)$ в точках $-i\ln\tau_k$ $(k=1, 2, \cdots, b)$, $t_s+2\pi n$ $(s=1, 2, \cdots, \nu;\ n=k=0,\ \pm1, \pm2, \cdots)$ дифференцируемы, соответственно, l_k-1 и $m+d_s-1$ раз.

d_2. Функция $K_{12}(t)[K_{11}(t)-1]^{-1}\prod\limits_{s=1}^{\nu}(t-t_s)^{d_s}$ в точках t_s $(s=1, 2, \cdots, \nu)$ дифференцируема, соответственно, d_s-1 раз.

d_3. Функция $K_{22}(\tau)$ в точках τ_k $(k=1, 2, \cdots, b)$, $\tau=e^{it_s}$ $(s=1, 2, \cdots \nu)$ дифференцируема, соответственно, l_k-1 и $m+d_s-1$ раз.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1.2), (1.3), (1.4) *и* d_1, d_2, d_3. *Тогда число линейно независимых решений задачи* (1.1), *удовлетворяющих поставленным условиям, выражается следующими формулами**:

а) *при* $\varkappa_2-L>0$, $N=(\varkappa_2-L-p-\operatorname{rang}A+r+\max\{\varkappa_1, -q+h\})\times$ $\times H(\varkappa_2-L-p-\operatorname{rang}A+r+\max\{\varkappa_1, -q+h\})$,

б) *при* $\varkappa_2-L\leqslant0$, $N=\varkappa_1+q-h-\operatorname{rang}B-\operatorname{rang}D-\operatorname{rang}E$, *матрицы* A, B, D, E *приводятся ниже* (см. (2.15), (2.22), (2.23), (2.24)).

Теорема 2. *Пусть* $m=L=p=0$ (*см замечание* 2). *Тогда в условиях теоремы* 1 *задача* (1.1) *нетерова, ее индекс* $\varkappa$ *равен* $\varkappa_1+\varkappa_2$ *и, следовательно* (*см. теорему* 1), *можно вычислить количество условий разрешимости неоднородной задачи.*

§ 2. Доказательство теоремы 1

2.1. Подстановка (1.2) и (1.3) в первое уравнение задачи (1.1) дает

$$[K^{11}(t)-1]\prod_{s=1}^{\nu}\left(\frac{t-t_s}{t+i}\right)^{p^{11}} y^+(t)+K^{12}(t)\prod_{s=1}^{\nu}\left(\frac{t-t_s}{t+i}\right)^{p^{12}} z^+(e^{it})=y^-(t). \tag{2.1}$$

Так как левая часть (2.1) в точках t_s $(s=1, 2, \ldots, \nu)$ имеет нули порядков не ниже h_s, то необходимо

$$y^-(t)=y_1^-(t)\prod_{s=1}^{\nu}\left(\frac{t-t_s}{t-i}\right)^{h_s}. \tag{2.2}$$

Отсюда, учитывая (1.4), получаем

$$\frac{\prod\limits_{s=1}^{\nu}(t-t_s)^{a_s}}{(t+i)^p}(t-i)^h\, y^+(t)+\frac{K^+(t)\,(t-i)^h}{(t+i)^p\prod\limits_{j=1}^{\mu}(t-z_j^+)^{q_j}}\, z^+(e^{it})=$$

$$=[K^{11}(t)-1]^{-1}\, y_1^-(t). \tag{2.3}$$

После факторизации функции $[K^{11}(t)-1]^{-1}$ и использования обобщенной теоремы Лиувилля ([2]), имеем

* Здесь и далее $H(t)$—функция Хевисайда.

$$\frac{(t-i)^h \prod\limits_{s=1}^{\nu}(t-t_s)^{d_s} y^+(t)}{X_1^+(t)(t+i)^p} + \frac{K^+(t)(t-i)^h z^-(e^{it})}{X_1^+(t)(t+i)^p \prod\limits_{j=1}^{\mu}(t-z_j^+)^{q_j}} = \frac{y_1^-(t)}{X_1^-(t)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{P_{\varkappa_1+q-1}(t)}{(t+i)^{\varkappa_1} \prod\limits_{j=1}^{\mu}(t-z_j^+)^{q_j}}, & \varkappa_1 > 0 \\ \dfrac{P_{q-1}(t)}{\prod\limits_{j=1}^{\mu}(t-z_j^+)^{q_j}}, & \varkappa_1 < 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

где $P_{\varkappa_1+q-1}(t)$, $P_{q-1}(t)$—полиномы степеней, соответственно, не выше $\varkappa_1+q-1$ и $q-1$ с произвольными коэффициентами. В случае $\varkappa_1<0$ для аналитичности функции $y_1^-(t)$ в нижней полуплоскости необходимо, чтобы $P_{q-1}(t)=(t+i)^{-\varkappa_1}P_{\varkappa_1+q-1}(t)$. Таким образом, в обоих случаях в (2.4) мы имеем одинаковые правые части. Отсюда следует представление для функции $y^+(t)$ через функцию $z^+(e^{it})$

$$y^+(t) = \frac{1}{\left[\prod\limits_{s=1}^{\nu}(t-t_s)^{d_s}\right]\left[\prod\limits_{j=1}^{\mu}(t-z_j^+)^{q_j}\right]} \cdot \left\{ \frac{X_1^+(t) P_{\varkappa_1+q-1}(t)}{(t+i)^{\varkappa_1-p}(t-i)^h} - \right.$$

$$\left. - K^+(t) z^+(e^{it}) \right\}. \tag{2.5}$$

Для аналитичности функции $y^+(t)$ в верхней полуплоскости необходимо, чтобы $P_{\varkappa_1+q-1}(t)=(t-i)^h P_{\varkappa_1+q-h-1}(t)$, откуда

$$y^+(t) = \frac{1}{\left[\prod\limits_{s=1}^{\nu}(t-t_s)^{d_s}\right]\left[\prod\limits_{j=1}^{\mu}(t-z_j^+)^{q_j}\right]} \left\{ \frac{X_1^+(t) P_{\varkappa_1+q-h-1}(t)}{(t+i)^{\varkappa_1-p}} - \right.$$

$$\left. - K^+(t) z^+(e^{it}) \right\}, \tag{2.6}$$

причем, если $\varkappa_1+q-h-1<0$, следует положить $P_{\varkappa_1+q-h-1}(t)\equiv 0$.

Подстановка (2.6) во второе уравнение задачи (1.1) приводит к краевой задаче Римана на Γ

$$\Delta_2(e^{it}) z^+(e^{it}) = z^-(e^{it}) - \sum_{\alpha=0}^{\varkappa_1+q-h-1} \theta_\alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_\alpha(t+2\pi n), \tag{2.7}$$

θ_α — коэффициенты полинома $P_{\varkappa_1+q-h-1}(t)$,

$$g_\alpha(t) = \frac{K_{21}(t) X_1^+(t) t^\alpha}{\left[\prod\limits_{s=1}^{\nu}(t-t_s)^{d_s}\right]\left[\prod\limits_{j=1}^{\mu}(t-z_j^+)^{q_j}\right](t+i)^{\varkappa_1-p}} \tag{2.8}$$

$(\alpha=0, 1, \cdots, \varkappa_1+q-h-1)$.

Отсюда с учетом (1.5)

$$z^+(e^{it}) = \Delta_0^{-1}(e^{it}) \frac{\prod\limits_{s=1}^{\nu}(e^{it}-e^{it_s})^{m_s}}{\prod\limits_{k=1}^{b}(e^{it}-\tau_k)^{l_k}} z^-(e^{it}) - \sum_{a=0}^{\varkappa_1+q-h-1} \theta_a \varphi_a(e^{it}), \quad (2.9)$$

где

$$\varphi_a(e^{it}) = \Delta_2^{-1}(e^{it}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_a(t+2\pi n). \quad (2.10)$$

Функции $\varphi_a(e^{it})$ в точках $e^{it}=\tau_k$ $(k=1, 2, \cdots, b)$, вообще говоря, обращаются в бесконечность порядков не выше l_k, соответственно. Поэтому краевое условие (2.9) может быть удовлетворено конечными на Γ функциями $z^+(\tau)$, $z^-(\tau)$ ([2]).

Функции $\prod\limits_{k=1}^{b}(e^{it}-\tau_k)^{l_k} \varphi_a(e^{it}) [X_2^+(e^{it})]^{-1}$ будут интегрируемы на Γ, причем

$$\prod_{k=1}^{b}(e^{it}-\tau_k)^{l_k} \frac{\varphi_a(e^{it})}{X_2^+(e^{it})} = \psi_a^+(e^{it}) - \psi_a^-(e^{it}), \quad (2.11)$$

где

$$\psi_a(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \prod_{k=1}^{b}(\tau-\tau_k)^{l_k} \frac{\varphi_a(\tau)}{X_2^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau-z}. \quad (2.12)$$

В силу условий d_1, d_2, d_3, функции $\Delta_0^{-1}(e^{it})$, $\varphi_a(\tau) \prod\limits_{k=1}^{b}(\tau-\tau_k)^{l_k}$ и, следовательно, функции $\psi_a^{\pm}(\tau)$ в точках τ_k, e^{it_s} единичной окружности будут обладать производными порядков, соответственно, l_k-1, $m-1$ Следовательно, функции $z^+(\tau)$, $z^-(\tau)$, удовлетворяющие краевому условию (2.7) при условии, что $z^-(\tau)$ обращается на бесконечности в нуль, определяются следующими формулами ([2]):

$$\begin{aligned} z^+(z) &= \sum_{a=0}^{\varkappa_1+q-h-1} \theta_a Y_a^+(z) + X_2^+(z) \prod_{s=1}^{\nu}(z-e^{it_s})^{m_s} Q_{\varkappa_2-L-1}(z), \\ z^-(z) &= \sum_{a=0}^{\varkappa_1+q-h-1} \theta_a Y_a^-(z) + X_2^-(z) \prod_{k=1}^{b}(z-\tau_k)^{l_k} Q_{\varkappa_2-L-1}(z), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $Q_{\varkappa_2-L-1}(z)$ — полином степени не выше $\varkappa_2-L-1$ с произвольными коэффициентами, $\sum\limits_{a=0}^{\varkappa_1+q-h-1} \theta_a Y(z)$ — общий вид канонической функции неоднородной задачи ([2]), линейно зависящей от $\varkappa_1+q-h$ произвольных постоянных.

2.2. Подстановка (2.13) в (2.5) приводит к представлению для функции $y^+(t)$, не зависящему от $z^+(e^{it})$

$$y^+(t) = \frac{1}{\left[\prod\limits_{s=1}^{\nu}(t-t_s)^{d_s}\right]\left[\prod\limits_{j=1}^{\mu}(t-z_j^+)^{q_j}\right]} \times$$

$$\times\left\{f^+(t)\sum_{a=0}^{\varkappa_1+q-h-1}\theta_a\chi_a^+(t)-K^+(t)X_2^+(e^{it})\cdot\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{s=1}^{\nu}(e^{it}-e^{it_s})^{m_s}Q_{\varkappa_2-L-1}(e^{it})\right\},\qquad(2.14)$$

где

$$f^+(t)\equiv X_1^+(t)(t+i)^{-\varkappa_1+p}-K^+(t),\ \chi_a^+(t)\equiv t^a-Y_a^+(e^{it}).$$

Для ограниченности функции $y^+(t)$ в точках t_s $(s=1,2,\cdots,\nu)$ и аналитичности в точках z_j^+ $(j=1,2,\cdots,\mu)$ необходимо:

а) наложить на функцию $\left[f^+(t)\sum_{a=0}^{\varkappa_1+q-h-1}\theta_a\chi_a^+(t)\right]$ r условий обращения в точках t_s в нули порядков, соответственно, r_s:

$$\frac{d^{\alpha_s-1}}{dt^{\alpha_s-1}}\left[f^+(t)\sum_{a=0}^{\varkappa_1+q-h-1}\theta_a\chi_a^+(t)\right]_{t=t_s}=0,\qquad(2.15)$$

$$(\alpha_s=1,2,\cdots,r_s;\ s=1,2,\cdots,\nu).$$

Если A — матрица преобразования (2.15), то $\dim\operatorname{Ker}A=\varkappa_1+q-h-$ $-\operatorname{ranq}A$.

б) На функцию

$$F(t)\equiv\frac{f^+(t)\sum_{a=0}^{\varkappa_1+q-h-1}\theta_a\chi_a^+(t)}{K^+(t)\cdot X_2^+(e^{it})\prod_{s=1}^{\nu}(e^{it}-e^{it_s})^{m_s}}-Q_{\varkappa_2-L-1}(e^{it}),\qquad(2.16)$$

линейно зависящую от $(\varkappa_1+q-h)H(\varkappa_1+q-h)-\operatorname{rang}A+\varkappa_2-L$ произвольных постоянных, и, в силу замечания 1 и условий (1.4), (1.8), (2.15) $\neq\infty$ в точках t_s (если $c_s>0$) и z_j^+ $(s=1,2,\cdots,\nu;\ j=1,2,\cdots,\mu)$, необходимо наложить $c+q=p-h-r+q$ условий обращения в точках t_s, z_j^+ в нули порядков, соответственно, c_s, q_j:

$$\frac{d^{\beta_s-1}}{dt^{\beta_s-1}}[F(t)]_{t=t_s}=0,$$

$$\frac{d^{\gamma_j-1}}{dz^{\gamma_j-1}}[F(z)]_{z=z_j^+}=0\qquad(2.17)$$

$(\beta_s=1,2,\cdots,c_s;\ \gamma_j=1,2,\cdots,q_j)$.

В силу условий d_1, d_2, d_3 все операции дифференцирования имеют смысл. В случае, когда $\varkappa_2-L\geqslant p-h-r+q$, в силу общих свойств определителя Вандермонда, в записи условий (2.17) существуют не менее $p-h-r+q$ линейно независимых столбцов. Следовательно, число линейно независимых постоянных, определяющих функцию $y^+(t)$, в данном случае равно

$$(\varkappa_2-L-p-q-\operatorname{rang}A+h+r+(\varkappa_1+q-h)H(\varkappa_1+q-h))\times$$

$$\times H(\varkappa_2-L-p-q-\operatorname{rang}A+h+r+(\varkappa_1+q-h)H(\varkappa_1+q-h))=$$

$$=(\varkappa_2-L-p-\operatorname{rang}A+r+\max\{\varkappa_1,-q+h\})H(\varkappa_2-L-p-\operatorname{rang}A+$$

$$+r+\max\{\varkappa_1,-q+h\}).\qquad(2.18)$$

2.3. Для случая, когда $0 < \varkappa_2 - L < p - h - r + q$, предварительно докажем следующее

Предложение 1. *Пусть $\varkappa_2 - L > 0$ и выполнены условия* (1.2), (1.3), (1.4) *и* d_1, d_2, d_3. *Тогда, если число линейно независимых решений задачи* (1.1) *есть* N, *то число линейно независимых решений задачи*

$$
\begin{gathered}
[K_{11}(t)-1]\, y^{+}(t)+K_{12}(t)\, z^{+}(e^{it})=y^{-}(t), \\
\sum_{n=-\infty}^{\infty} K_{21}(t+2\pi n)\, y^{+}(t+2\pi n)+K_{22}(e^{it})\, z^{+}(e^{it})=e^{-it} z^{-}(e^{it}),
\end{gathered} \tag{2.19}
$$

равно $(N-1)\, H(N-1)$.

▲ Обозначая в задаче (2.19) $e^{-it} z^{-}(e^{it}) \equiv Z^{-}(e^{it})$, придем к задаче (1.1). Однако в этом случае на произвольные постоянные наложится одно условие, исходящее из следующего требования: $[zZ^{-}(z)]_{z=\infty}=0$, уменьшающего на единицу число линейно независимых постоянных. Для случая $\varkappa_2 - L < 0$ предложение не в силе, т. к. в случае разрешимости задачи (1.1) (см. [2]), функция $Z^{-}(z)$, являющаяся ее решением, может иметь на бесконечности нуль порядка выше первого (в отличии от предыдущего случая) ▼

Пусть $0 < \varkappa_2 - L < p - h - r + q$, причем $p - h - r + q - \varkappa_2 + L = \varkappa_0$ Рассмотрим краевое условие

$$
\begin{gathered}
[K_{11}(t)-1]\, y^{+}(t)+K_{12}(t)\, z^{+}(e^{it})=y^{-}(t), \\
\sum_{n=-\infty}^{\infty} K_{21}(t+2\pi n)\, y^{+}(t+2\pi n)+K_{22}(e^{it})\, z^{+}(e^{it})=e^{i\varkappa_0 t}\cdot z^{-}(e^{it}),
\end{gathered} \tag{2.20}
$$

эквивалентное следующему:

$$
\begin{gathered}
[K_{11}(t)-1]\, y^{+}(t)+K_{12}(t)\, z^{+}(e^{it})=y^{-}(t), \\
e^{-i\varkappa_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_{21}(t+2\pi n)\, y^{+}(t+2\pi n)+e^{-i\varkappa_0 t} K_{22}(e^{it})\, z^{+}(e^{it})=z^{-}(e^{it}).
\end{gathered} \tag{2.21}
$$

Индекс приведенной задачи на Γ (см. (1.7)) для краевого условия (2.21) равен $\varkappa_2 + \varkappa_0$. Так как $\varkappa_2 + \varkappa_0 - L = p - h - r + q$, то задача (2.20) имеет

$$
\begin{gathered}
(\varkappa_2+\varkappa_0-L-p-\operatorname{rang} A+r+\max\{\varkappa_1, -q+h\})\, H(\varkappa_2+\varkappa_0-L-p- \\
-\operatorname{rang} A+r+\max\{\varkappa_1, -q+h\})
\end{gathered}
$$

линейно независимых решений. Воспользовавшись результатом предложения 1, заключаем, что и в этом случае задача (1.1) имеет число линейно независимых решений, даваемое формулой (2.18).

В случае, если $\varkappa_2 - L \leqslant 0$, в (2.13) следует положить $Q_{\varkappa_2-L-1}(e^{it}) \equiv 0$. Функции $Y_a^{-}(z)$ $(a = 0, 1, \cdots, \varkappa_1 + q - h - 1)$ на бесконечности, вообще говоря, будут иметь полюс порядка не выше $L - \varkappa_2 - 1$ ([2]). Пусть главные части разложения функций $Y_a^{-}(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки есть $\sum_{n=0}^{L-\varkappa_2-1} b_{n\alpha} z^n$. Пусть B — матрица коэффициентов $b_{n\alpha}$ ($n=0, 1, \cdots, L-\varkappa_2-1$; $\alpha=0, 1, \cdots, \varkappa_1+q-h-1$). Для аналитичности функции $z^-(z)$ вне Γ необходимо условие

$$\Theta \cdot B = 0, \tag{2.22}$$

где $\Theta=(\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{\varkappa_1+q-h-1})$. Отсюда $\dim \operatorname{Ker} B = \varkappa_1 + q - h - \operatorname{rang} B$.

Для ограниченности функции $y^+(z)$ в точках t_s и аналитичности в точках z_j^+ необходимо

$$\frac{d^{\delta_s-1}}{dt^{\delta_s-1}}\Big[f^+(t)\sum_{\alpha=0}^{\varkappa_1+q-h-1}\theta_\alpha \chi_\alpha^+(t)\Big]_{t=t_s}=0 \tag{2.23}$$

($\delta_s^{ll}=1, 2, \cdots, d_s$; $s=1, 2, \cdots, \nu$),

$$\frac{d^{\gamma_j-1}}{dz^{\gamma_j-1}}\Big[f^+(z)\sum_{\alpha=0}^{\varkappa_1+q-h-1}\theta_\alpha \chi_\alpha^+(z)\Big]_{z=z_j^+}=0. \tag{2.24}$$

($\gamma_j=1, 2, \cdots, q_j$; $j=1, 2, \cdots, \mu$).

Все операции дифференцирования обоснованы, благодаря условиям d_1, d_2, d_3. Отсюда, если D — матрица преобразования (2.23), E—матрица преобразования (2.24), то

$$N=\varkappa_1+q-h-\operatorname{rang} B-\operatorname{rang} D-\operatorname{rang} E. \tag{2.25}$$

Теорема 1 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 2

По определению $\varkappa = N - N'$, где N' — есть суммарное число условий на функции $f(t)$, $b(e^{it})$ для разрешимости неоднородной задачи (2) в классе функций, исчезающих на бесконечности. Рассмотрим отдельно каждый из четырех возможных вариантов.

3.1. $\varkappa_1>0$, $\varkappa_2>0$. В этом случае, в соответствии с теоремой 1, $N=\varkappa_1+\varkappa_2$, а неоднородная задача разрешима безусловно, т. е. $N'=0$. Отсюда $\varkappa=\varkappa_1+\varkappa_2$.

3.2. $\varkappa_1>0$, $\varkappa_2<0$. В соответствии с теоремой 1 в этом случае $N=\varkappa_1+q-\operatorname{rang} B-\operatorname{rang} E$.

В случае неоднородной задачи

$$y^+(t)=X_1^+(t)\,\psi^+(t)+\frac{1}{\prod_{j=1}^{\mu}(t-z_j^+)^{q_j}}\times$$

$$\times\left\{\frac{X_1^+(t)\,P_{\varkappa_1+q-1}(t)}{(t+i)^{\varkappa_1}}-K^+(t)\,z^+(e^{it})\right\}, \tag{3.1}$$

$$z^+(e^{it})=\Delta_2^{-1}(e^{it})z^-(e^{it})-\sum_{\alpha=0}^{\varkappa_1+q-1}\theta_\alpha\varphi_\alpha(e^{it})+\lambda(e^{it}), \tag{3.2}$$

где

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{X_1^-(t)}\frac{dt}{t-z};\ \lambda(e^{it})=-\Delta_2^{-1}(e^{it})\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}K_{21}(t+2\pi n)X_1^+(t+2\pi n)\psi^+(t+2\pi n).$$

Если в окрестности бесконечно удаленной точки $\lambda_1^-(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n z^{-n}$, где

$$\lambda_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\lambda(\tau)}{X_2^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z},$$

то условиями разрешимости задачи (3.2), аналогично выводу (2.22) будут

$$\theta\cdot B=\lambda, \tag{3.3}$$

где $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{L-\varkappa_2-1})$.

Для разрешимости системы (3.3) необходимо, чтобы свободный член удовлетворял $l-\varkappa_2-\operatorname{rang}B$ условиям; для существования же функции $y^+(z)$ необходимо наложить на свободный член еще $q-\operatorname{rang}E$ условий. Следовательно, $N'=-\varkappa_2-\operatorname{rang}B+q-\operatorname{rang}E$. Отсюда $\varkappa=\varkappa_1+\varkappa_2$.

3.3 $\varkappa_1<0$, $\varkappa_2\geqslant 0$. В соответствии с теоремой 1 в этом случае

$$N=(\varkappa_2+\max\{\varkappa_1,-q\})H(\varkappa_2+\max\{\varkappa_1,-q\}).$$

В случае неоднородной задачи

$$y^+(t)=X_1^+(t)\psi^+(t)+\frac{1}{\prod_{j=1}^{\mu}(t-z_j^+)^{q_j}}\{X_1^+(t)P_{q-1}(t)-K^+(t)z^+(e^{it})\}, \tag{3.4}$$

$$y^-(t)=X_1^-(t)\left[\psi^-(t)+\frac{P_{q-1}(t)}{\prod_{j=1}^{\mu}(t-z_j^+)^{q_j}}\right]. \tag{3.5}$$

Неоднородная задача на Γ (3.2) разрешима безусловно, поэтому условия на свободный член основаны на существовании функций $y^+(z)$, $y^-(z)$. Функция $X_1^-(z)$ в точке $-i$ имеет полюс порядка $-\varkappa_1$. Пусть в окрестности точки $-i$

$$\psi^-(z)\cdot\prod_{j=1}^{\mu}(z-z_j^+)^{q_j}=-\sum_{n=0}^{\infty}k_n(z+i)^n.$$

Условиями существования функции $y^-(z)$ будут

$$\frac{d^n}{dz^n}P_{q-1}(z)=k_n \tag{3.6}$$

$$(n=0,1,\cdots,-\varkappa_1-1).$$

Пусть K—матрица преобразования (3.6), причем

$$\operatorname{rang}K=\min\{-\varkappa_1,q\}. \tag{3.7}$$

а) Если $q < -\varkappa_1$, то $N=(\varkappa_2-q)H(\varkappa_2-q)$.

Для существования функции $y^-(z)$ свободный член должен удовлетворять $-\varkappa_1-q$ условиям, причем коэффициенты θ_α ($\alpha=0, 1, \cdots, q-1$) полинома $P_{q-1}(t)$ в этом случае определены однозначно.

Для существования функции $y^+(z)$ необходимо на $\varkappa_2$ произвольных постоянных полинома $Q_{\varkappa_2-1}(e^{it})$ (см. (2.13)) наложить $(q-\varkappa_2)\cdot H(q-\varkappa_2)$ условий обращения в нули порядков q_j ($j=1, 2, \cdots, \mu$) в точках z_j^+ функции $X_1^+(z)P_{q-1}(z)-K^+(z)z^-(e^{iz})$ (см. 3.4)). Следовательно $N'=-\varkappa_1-q+(q-\varkappa_2)H(q-\varkappa_2)$. Отсюда $\varkappa=\varkappa_1+q+(\varkappa_2-q)\,[H(\varkappa_2-q)+H(q-\varkappa_2)]=\varkappa_1+\varkappa_2$.

б) Если $-\varkappa_1 \leqslant q$, то функция $y^-(z)$ существует безусловно и $N'=(\varkappa_1+\varkappa_2)H(\varkappa_1+\varkappa_2)$. Обеспечение существования функции $y^-(z)$ уменьшает число произвольных постоянных полинома $P_{q-1}(z)$ до величины $\varkappa_1+q$. К ним прибавляется еще $\varkappa_2$ произвольных постоянных, появляющихся при решении задачи на (3.2) Г.

Для существования функции $y^+(z)$ необходимо удовлетворить следующим q условиям:

а) в случае однородной задачи

$$\frac{d^{\gamma_j-1}}{dz^{\gamma_j-1}}\left[X_1^+(z)P_{q-1}(z)-K^+(z)z^-(e^{iz})\right]_{z=z_j^+}=0, \tag{3.8}$$

б) в случае неоднородной задачи

$$\frac{d^{\gamma_j-1}}{dz^{\gamma_j-1}}\left[X_1^+(z)P_{q-1}(z)-K^+(z)z^-(e^{iz})\right]_{z=z_j^+}=\omega(\gamma_j,\ z_j^+) \tag{3.9}$$

$$(\gamma_j=1,\ 2, \cdots,\ q_j;\ j=1, 2, \cdots, \mu),$$

где значения $\omega(\gamma_j,\ z_j^+)$ нетрудно выписать.

Пусть W — матрица преобразования (3.8). Тогда $N=\varkappa_1+\varkappa_2+q-\mathrm{rang}\,W$, $N'=q-\mathrm{rang}\,W$, следовательно, $\varkappa=\varkappa_1+\varkappa_2$. Остается показать, что в данном случае $\varkappa_1+\varkappa_2+q-\mathrm{rang}\,W=(\varkappa_1+\varkappa_2)H(\varkappa_1+\varkappa_2)$.

Имеем

$$\mathrm{rang}\,W=\varkappa_1+\varkappa_2+q-N\leqslant q. \tag{3.10}$$

Если $\varkappa_2 > q$, то, в соответствии с (3.10), $\mathrm{rang}\,W=q$. Если $q > \varkappa_2 > -\varkappa_1$, то $N\neq 0$, откуда, в соответствии с предложением 1, $\mathrm{rang}\,W=q$. Если $\varkappa_2=-\varkappa_1$, то $\mathrm{rang}\,W=q$, $N=0$. Пусть $\varkappa_2 < -\varkappa_1$. В соответствии с предложением 1, $N=0$. Отсюда $\mathrm{rang}\,W=\varkappa_1+\varkappa_2+q$.

Таким образом

$$\varkappa_1+\varkappa_2+q-\mathrm{rang}\,W=\begin{cases}\varkappa_1+\varkappa_2, & \text{если } \varkappa_2\geqslant-\varkappa_1\\ 0, & \text{если } \varkappa_2<-\varkappa_1,\end{cases}$$

что и требовалось доказать.

3.4. Случай, когда $\varkappa_1 < 0$, $\varkappa_2 < 0$ является композицией случаев 3.2 и 3.3, рассматривается вполне аналогично и также приводит к результату $\varkappa=\varkappa_1+\varkappa_2$. Этим завершается доказательство теоремы 2.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 14. V. 1986

Ա. Ս. ԼԱԼԱՅԱՆ, Հ. Բ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ. Կտոր առ կտոր-անալիտիկ ֆունկցիաների զույգի համար համալուծման մի խնդրի լուծելիության պայմանները *(ամփոփում)*

Ներկայացվող հոդվածում հետազոտվում է համալուծման խնդիրը կտոր առ կտոր անալիտիկ ֆունկցիաների համար (անվերջ ուղղի և միավոր շրջանագծի վրա) ենթադրելով որոշակի ֆունկցիայի ռացիոնալությունը և մյուսի զրոյի վերածվելը։

Դուրս են բերվում ընդհանուր դեպքում խնդրի գծորեն անկախ լուծումների թվի համար բանաձևեր և ապացուցվում է նյոտերի պայմանի տեղի ունենալը որոշակի պայմանների դեպքում։

A. S. LALAJAN, A. B. NERSESIAN. *Solvability conditions for the conjugation problem for a pair of piecewite-analytic functions* (summary)

The paper studies the problem of conjugation for a pair of piecewite-analytic functions on the infinite line and the unit sphere. We derive formulas for the number of linearly independent solutions and show that under some conditions the problem is noetherian.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Б. Нерсесян.* Разрешимость некоторых уравнений и задачи сопряжения со сдвигом, Республиканская научно-практическая конференция по методике преподавания математики и механики в ВУЗе (24—27 мая 1983 года), Тезисы докладов, 40—42.
2. *Ф. Д. Гахов.* Кравые задачи, Физматгиз, М., 1963.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXII, № 5, 1987 Математика

УДК 517.53

А. М. ДЖРБАШЯН

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КЛАССОВ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ЦУДЗИ

Введение

В настоящей статье установлены канонические факторизации широких классов мероморфных в полуплоскости функций, характеристики Цудзи которых могут иметь степенной рост. Для изъяснения сути работы необходим краткий обзор ряда известных результатов, часть которых лежит в ее основе.

1. Условие ограниченности характеристической функции Неванлинны $T(r, f)$ $(0<r<1)$ для мероморфной в круге $D=\{z:|z|<1\}$ функции $f(z)$ определяет класс N Неванлинны функций ограниченного вида в круге. Как хорошо известно, Неванлинна [1] установил параметрическое представление класса N, записывающееся в виде произведения дроби двух функций Бляшке и экспоненты от интеграла Шварца с мерой ограниченной вариации.

Б. Я. Левиным [2] (см. также [3], гл. IV, § 2), при решении задач единственности аналитических в полуплоскости функций, был установлен аналог формулы Иенсена-Неванлинны для полуплоскости.

Цудзи [4] получил сферический аналог формулы Б. Я. Левина и, введя соответствующие сферические характеристики для полуплоскости, установил аналоги первой и второй основных теорем теории распределения значений для функций, мероморфных в полуплоскости. При этом, для характеристик, порождающихся самой формулой Б. Я. Левина, которые также принято называть характеристиками Цудзи, справедливы аналогичные результаты [5] (гл. I, § 5). Указанные два типа характеристик Цудзи имеют эквивалентный рост. В работе [4] Цудзи также доказал, что если для мероморфной в замкнутой полуплоскости функции ограничена его характеристика, то она ограниченного вида, т. е. представляется в виде частного от двух аналитических и ограниченных в полуплоскости функций.

По сути дела, более подробный результат о классах аналитических в полуплоскости функций, для которых ограничена характеристика Цудзи, был получен значительно ранее В. И. Крыловым [6]. Им были установлены параметрические представления классов $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}_m$ аналитических в верхней полуплоскости функций, для которых, соответственно

$$\sup_{y>0}\int_{-\infty}^{+\infty}\log^+|f(x+iy)|\,dx<+\infty, \text{ или } \sup_{y>0}\int_{-\infty}^{+\infty}|\log|f(x+iy)||\,dx<+\infty. \tag{1}$$

После отображения $w = iz^{-1}$ класс **N** В. И. Крылова переходит в класс аналитических в правой полуплоскости функций, для которых ограничен специальный случай характеристики роста Цудзи, когда интеграл взят по всей касательной к мнимой оси окружности. При этом, классы **N** и $\mathbf{N}_m$ — суть строгие подмножества класса функций ограниченного вида в верхней полуплоскости. Следует отметить, однако, что характеристические функции как таковые В. И. Крыловым не были рассмотрены.

2. Результат Неванлинны о параметрическом представлении класса N мероморфных функций ограниченного вида в единичном круге **D** нашел существенное развитие в работах М. М. Джрбашяна [7], [8], [9]. В своей ранней работе [7] (см. также [8] — суть ее развернутое изложение) М. М. Джрбашян установил канонические факторизации новых, широких классов $N_\alpha^*(-1<\alpha<+\infty)$ мероморфных в круге функций, для которых характертстика Неванлинны может иметь степенной рост. Класс $N_\alpha^*(-1<\alpha<+\infty)$ — это множество тех мероморфных в круге **D** функций $f(z)$, для которых

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha T(r, f)\,dr < +\infty. \qquad (2$$

В основе настоящей статьи лежат сформулированные в приведенных ниже теоремах I и II результаты работы [7] М. М. Джрбашяна.

Теорема I. 1°. *Пусть $\zeta \in \mathbf{D}$ — любая точка. Тогда при любом $\alpha\,(-1<\alpha<+\infty)$ функция*

$$A_\alpha(z,\zeta) \equiv \exp\{-\Omega_\alpha(z,\zeta)\} \equiv \exp\left\{-\int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^{1+\alpha}}{(1-z\zeta^{-1}t)^{2+\alpha}}\frac{dt}{t}\right\} \qquad (3)$$

аналитична в **D** *и имеет нуль, притом первого порядка, только в точке $z=\zeta$.*

2°. *Пусть $f(z) \in N_\alpha^*(-1<\alpha<+\infty)$ $(f(z)\not\equiv 0)$ — любая функция, а $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$ — ее нули и полюсы, отличные от $z=0$. Тогда*

$$\iint_{\mathbf{D}} (1-|\zeta|^2)^\alpha |\log|f(\zeta)||\,d\sigma(\zeta) < +\infty$$

($d\sigma(\zeta)$ — элемент площади), и, одновременно, вместе с рядами

$$\sum_\mu (1-|a_\mu|)^{2+\alpha}, \quad \sum_\nu (1-|b_\nu|)^{2+\alpha}$$

равномерно сходятся бесконечные произведения

$$\pi_\alpha(z, \{a_\mu\}) = \prod_\mu A_\alpha(z, a_\mu), \quad \pi_\alpha(z, \{b_\nu\}) = \prod_\nu A_\alpha(z, b_\nu).$$

Отметим, что эти произведения при натуральных значениях α были позже рассмотрены также Цудзи [10] (гл. V). Далее, при $\alpha=0$ произведение π_α, по существу, переходит в произведение Бляшке.

Теорема II. *Любая функция $f(z) \in N_\alpha^*(-1<\alpha<+\infty)$ допускает факторизацию вида*

$$f(z)=\frac{K_\alpha}{C_\lambda}\,z^\lambda\,\frac{\pi_\alpha(z,\{a_\mu\})}{\pi_\alpha(z,\{b_\nu\})}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{2(\alpha+1)}{\pi}\iint\limits_D(1-|\zeta|^2)^\alpha\,\frac{\log|f(\zeta)|}{(1-z\overline{\zeta})^{\alpha+2}}\,d\sigma(\zeta)\right\};\ |z|<1, \tag{4}$$

где C_λ — первый ненулевой коэффициент разложения Лорана функции $f(z)$ в окрестности начала координат, а K_α — константа, зависящая лишь от α и λ (причем $K_\alpha=1$ при $\lambda=0$).

Как нетрудно заметить, в определении класса N_α^* $(-1<\alpha<+\infty)$ заложена структура оператора дробного интегрирования Римана-Лиувилля. Как хорошо известно, в дальнейшем, с усовершенствованием методов исследования и с применением этого оператора М. М. Джрбашяном [9] (гл. IX) была построена новая, более совершенная теория параметрических представлений несколько иных классов N_α $(-1<\alpha<+\infty)$ мероморфных в круге функций, для которых ограничена новая характеристическая функция сложной структуры. Однако ранние результаты М. М. Джрбашяна остаются ценными и актуальными в силу их простоты в приложениях. В связи с этим следует отметить работы Ф. А. Шамояна [11], [12], где сначала установлены параметрические представления для классов N_α^* $(-1<\alpha<+\infty)$, а затем найдены их существенные приложения в описании идеалов алгебр аналитических в круге функций с ограничением на рост вблизи границы круга.

3. Рассматривая задачи представимости мероморфных в полуплоскости функций, совершенно естественно, как и в круге, дать возможность функции для более быстрого роста и, тем самым, рассматривать по возможности более широкие классы мероморфных функций.

В работе автора [13] были установлены зависящие от непрерывного параметра $\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ семейства формул типа Карлемана и Б. Я. Левина, введены семейства характеристик типа характеристик Неванлинны для угла и характеристик Цудзи. Эти результаты позволили там же получить новые факторизации для аналитических в замкнутой полуплоскости функций любого конечного порядка, а также параметрические представления новых классов, типа В. И. Крылова, функций, аналитических в полуплоскости. Построение этой теории существенным образом опиралось на свойства оператора интегродифференцирования Вейля, а также на свойства исследованных автором [14], [15] произведений типа Бляшке для полуплоскости.

Данная статья посвящена установлению полуплоскостных аналогов ранних результатов М. М. Джрбашяна [7] и связанных с ними результатов Ф. А. Шамояна [11]. Следует отметить, что, не совпадая с классами функций из [13], рассмотренные в статье классы мероморфных функций обладают существенно более простой структурой.

В §§ 1, 2 на основе теоремы II, посредством применения специального метода отображения с последующим предельным переходом, получены зависящие от непрерывного параметра $\alpha(1\leqslant\alpha<+\infty)$ семейства формул типа Б. Я.Левина (теорема 1.1) и характеристик типа Цудзи (п. 1.4). Затем, тем же путем установлены канонические факторизации для классов типа В. И. Крылова мероморфных в полуплоскости функций, для которых характеристика Цудзи может иметь степенной рост (теорема 2.2). В полученных канонических факторизациях участвуют рассмотренные автором совместно с Г. В. Микаеляном [16] произведения типа Бляшке для полуплоскости.

Следует отметить, что аналогичный метод отображения с последующим предельным переходом был применен также в недавней работе [17] М. М. Джрбашяна и А. Э. Джрбашяна, где были установлены интегральные представления аналитических в верхней полуплоскости $G^{(+)}$ функций, принадлежащих $L^p(G^{(+)}, y^\alpha dxdy)$ $(-1 < \alpha < +\infty,\ 1 \leqslant p < +\infty)$.

В § 3 установлены полуплоскостные аналоги результатов работы [11] Ф. А. Шамояна. В частности, установлены (в лемме 3.1) оценки типа Цудзи (см. [10], теорему V.25) для произведений типа Бляшке из [16]. Леммы § 3 вместе с теоремой 2.2 дают возможность установить в конце статьи теорему 3.1 завершенного характера — о параметрических представлениях рассмотренных в § 2 классов мероморфных в полуплоскости функций.

§ 1. Формулы типа Б. Я. Левина и характеристики типа Цудзи

1.1. Пусть функция $F(w)$ мероморфна в нижней полуплоскости $G^{(-)} = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$ и при любом $\rho \in (-\infty, 0)$ в полуплоскости $G_\rho^{(-)} = \{w : \operatorname{Im} w < \rho\}$ содержится не более чем конечное число ее нулей a_μ и полюсов b_ν. Будем полагать, что $\rho \in (-\infty, 0)$ фиксировано и $R > \max\limits_{\mu, \nu} \{|\operatorname{Im} a_\mu|, |\operatorname{Im} b_\nu|\}$. Отображение $z = [w + i(R - \rho)]/R = (w - i\rho)/R + i$ переводит круг $|w + i(R-\rho)| \leqslant R$ в единичный. С другой стороны, в этом круге содержится не более чем конечное число нулей и полюсов функции $F(w)$, и они могут лежать лишь выше ее центра. Поэтому функция

$$f(z) \equiv F(w);\quad z = (w - i\rho)/R + i$$

мероморфна в замкнутом единичном круге и имеет там не более чем конечное число нулей $a_\mu^* = (a_\mu - i\rho)/R + i$ и полюсов $b_\nu^* = (b_\nu - i\rho)/R + i$, которые могут лежать в верхней полуплоскости.

Для функции $f(z)$, очевидно, справедлива формула (4) теоремы II при любом $\alpha > -1$. Причем в ней, как легко заметить, $\lambda = 0$, $K_\lambda = 1$, а $C_\lambda = C_0 = f(0)$. Заменим в этой формуле α на $\alpha - 1$ и вернемся к функции $F(w)$. Тогда, ввиду того, что при $\zeta \in O(R, \rho) = \{w : |w + i(R - \rho)| < R\}$ имеем

$$1 - \left|\frac{\zeta - i\rho}{R} + i\right|^2 = 2\frac{|\operatorname{Im}\zeta - \rho|}{R} - \frac{|\zeta - i\rho|^2}{R^2} \in (0, 1], \tag{1.1}$$

$$1 - \left(\frac{w - i\rho}{R} + i\right)\left(\frac{\overline{\zeta} + i\rho}{R} - i\right) = \frac{1}{R}\left[i(w - \overline{\zeta} - 2i\rho) - \frac{(w - i\rho)(\overline{\zeta} + i\rho)}{R}\right], \tag{1.1'}$$

приходим к представлению вида

$$\log F(w)=\frac{\alpha 2^{\alpha}}{\pi}\iint\limits_{O(R,\,\rho)}\left(1-\frac{|\zeta-i\rho|^{2}}{2R|\operatorname{Im}\zeta-\rho|}\right)^{\alpha-1}\times$$

$$\times\frac{|\operatorname{Im}\zeta-\rho|^{\alpha-1}\log|F(\zeta)|}{\left[i(w-\bar{\zeta}-2i\rho)-\dfrac{(w-i\rho)\,(\bar{\zeta}+i\rho)}{R}\right]^{1+\alpha}}\,d\sigma(\zeta)-$$

$$-\sum_{a_{\mu}\in O(R,\,\rho)}\Omega_{\alpha}\left(\frac{w-i\rho}{R}+i,\ \frac{a_{\mu}-i\rho}{R}+i\right)+$$

$$+\sum_{b_{\nu}\in O(R,\,\rho)}\Omega_{\alpha}\left(\frac{w-i\rho}{R}+i,\ \frac{b_{\nu}-i\rho}{R}+i\right)-$$

$$-\log F(-i(R-\rho));\ w\in O(R,\rho),\ 0\leqslant\alpha<+\infty. \tag{1.2}$$

Для дальнейших целей важна также следующая формула, непосредственно вытекающая из (3):

$$\Omega_{\alpha}\left(0,\ \frac{s-i\rho}{R}+i\right)=\frac{2^{1+\alpha}}{R^{1+\alpha}}|\operatorname{Im}s-\rho|^{1+\alpha}\int\limits_{0}^{1-|s-i\rho|^{2}/2R|\operatorname{Im}s-\rho|}\frac{\tau^{\alpha}\,d\tau}{1-\dfrac{2}{R}|\operatorname{Im}s-\rho|\tau}=$$

$$=(2R^{-1})^{1+\alpha}|\operatorname{Im}s-\rho|^{1+\alpha}I_{\alpha}(s,\rho,R);\ 0<\alpha<+\infty. \tag{1.3}$$

1.2. Для установления формулы типа Б. Я. Левина необходимы следующие предварительные леммы.

Лемма 1.1. *Пусть $\varphi(t)\geqslant 0$ — измеримая функция на оси $0<t<+\infty$. Тогда при любом α $(1\leqslant\alpha<+\infty)$ имеет место равенство*

$$\int\limits_{0}^{+\infty}t^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt=\sup_{\varepsilon>0}\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}(t-\varepsilon)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt.$$

Доказательство. Во-первых, очевидно, что правая часть требуемого равенства не больше, чем его левая часть. Во-вторых, как нетрудно убедиться, для любой последовательности $\varepsilon_n\downarrow 0$ правый интеграл, монотонно возрастая, стремится к левому.

Лемма 1.2. *Пусть $\psi(\zeta)$ — измеримая функция в полуплоскости $G_{\rho}^{(-)}$ $(-\infty<\rho<0)$ и при данном α $(1\leqslant\alpha<+\infty)$*

$$\iint\limits_{G_{\rho}^{(-)}}|\operatorname{Im}\zeta-\rho|^{\alpha-1}|\psi(\zeta)|\,d\sigma(\zeta)<+\infty.$$

Тогда

$$\lim_{R\to+\infty}\iint\limits_{O(R,\,\rho)}\left(1-\frac{|\zeta-i\rho|^{2}}{2R|\operatorname{Im}\zeta-\rho|}\right)^{\alpha-1}|\operatorname{Im}\zeta-\rho|^{\alpha-1}\psi(\zeta)\,d\sigma(\zeta)=$$

$$=\iint\limits_{G_{\rho}^{(-)}}|\operatorname{Im}\zeta-\rho|^{\alpha-1}\psi(\zeta)\,d\sigma(\zeta).$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$P_{\alpha,\rho}(\zeta, R) \equiv \begin{cases} \left(1 - \dfrac{|\zeta - i\rho|^2}{2R\,|\operatorname{Im}\zeta - \rho|}\right)^{\alpha-1} - 1 & \text{при } \zeta \in O(R, \rho)' \\ -1 \quad \text{при } \zeta \in O(R, \rho). \end{cases}$$

Тогда, очевидно, утверждение леммы будет эквивалентно соотношению

$$\lim_{R\to+\infty} \iint\limits_{G_\rho^{(-)}} P_{\alpha,\rho}(\zeta, R)\,|\operatorname{Im}\zeta - \rho|^{\alpha-1}\,\psi(\zeta)\,d\sigma(\zeta) = 0. \tag{1.4}$$

Для доказательства этого соотношения заметим, что $|P_{\alpha,\rho}(\zeta, R)| \leqslant 1$ при $\zeta \in G_\rho^{(-)}$. С другой стороны, для любого фиксированного $\zeta \in G_\rho^{(-)}$ имеем $\lim\limits_{R\to+\infty} P_{\alpha,\rho}(\zeta, R) = 0$. Поэтому, в силу теоремы Лебега, при $R \to +\infty$ стремится к нулю интеграл в (1.4), и лемма доказана.

Теорема 1.1. *Пусть $F(w)$ — мероморфная в нижней полуплоскости $G^{(-)} = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$ функция, имеющая при любом $\rho \in (-\infty, 0)$ не более чем конечное число нулей a_μ и полюсов b_ν в полуплоскости $G_\rho^{(-)} = \{w : \operatorname{Im} w < \rho\}$. Далее, пусть при данном $\alpha\,(1 \leqslant \alpha < +\infty)$ выполнено условие*

$$\iint\limits_{G^{(-)}} |\operatorname{Im}\zeta|^{\alpha-1}\,|\log|F(\zeta)||\,d\sigma(\zeta) < +\infty. \tag{1.5}$$

Тогда при любом $\rho \in (-\infty, 0)$ справедлива формула

$$0 = \frac{\alpha}{2\pi} \iint\limits_{G_\rho^{(-)}} |\operatorname{Im}\zeta - \rho|^{\alpha-1} \log|F(\zeta)|\,d\sigma(\zeta) -$$

$$-\frac{1}{1+\alpha} \sum_{a_\mu \in G_\rho^{(-)}} |\operatorname{Im} a_\mu - \rho|^{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha} \sum_{b_\nu \in G_\rho^{(-)}} |\operatorname{Im} b_\nu - \rho|^{1+\alpha} -$$

$$-2^{-\alpha} \lim_{t\to+\infty} t^{1+\alpha} \log|F(-it)|, \tag{1.6}$$

где последний предел существует и конечен.

Доказательство. В силу леммы 1.1, (1.5) обеспечивает выполнение условий леммы 1.2 для функции $\psi(\zeta) \equiv \log|F(\zeta)|$. Следовательно, при $R \to +\infty$ интеграл в формуле (1.2) с $w = -i(R - \rho)$ стремится к интегралу формулы (1.6). Теперь заметим, что как очевидно из (1.3), при любых фиксированных $\rho < 0$ и $s \in G_\rho^{(-)}$ имеем $\lim\limits_{R\to+\infty} I_\alpha(s, \rho, R) = (1 + \alpha)^{-1}$. Поэтому, ввиду конечности сумм в формуле (1.2) (с $w = -i(R - \rho)$), предельный переход $R \to +\infty$ преобразует их к суммам (1.6). Существование и конечность последнего предела обеспечивается существованием и конечностью остальных пределов.

1.3. В теореме этого пункта приведен специальный случай формулы Б. Я. Левина. Ее утверждение нетрудно получить из теоремы XX работы

В. И. Крылова [6] при помощи предельного перехода. Затем приведены соответствующие характеристики Цудзи.

Теорема 1.2. *Пусть функция $F(w)$ мероморфна в полуплоскости $G^{(-)}$, а $\{a_\mu\}\subset G^{(-)}$ и $\{b_\nu\}\subset G^{(-)}$ — соответственно нули и полюсы этой функции. Тогда, если при любом $\rho<0$ в полуплоскости $G_\rho^{(-)}$ лежит не более чем конечное число точек b_ν, и $\Phi(w)\equiv F(w+ + i\rho)\in \mathbf{N}_m$, то справедлива формула*

$$\sum_{a_\mu\in G_\rho^{(-)}}|\mathrm{Im}\, a_\mu-\rho|-\sum_{b_\nu\in G_\rho^{(-)}}|\mathrm{Im}\, b_\nu-\rho|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\log|F(u+i\rho)|\,du-\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}t\log|F(-it)|\ (-\infty<\rho<0), \qquad (1.7)$$

где последний предел существует и конечен.

Предположим теперь, что $\mathbf{n}(t, F)$ — количество полюсов b_ν функции $F(w)$, лежащих в полуплоскости $G_t^{(-)}$ и рассмотрим функции

$$\mathbf{N}(\rho, F)=\sum_{b_\nu\in G_\rho^{(-)}}|\mathrm{Im}\, b_\nu-\rho|=\int_{-\infty}^{\rho}(\rho-t)\,d\mathbf{n}(t, F),$$

$$\mathbf{N}(\rho, F^{-1})=\sum_{a_\mu\in G_\rho^{(-)}}|\mathrm{Im}\, a_\mu-\rho|=\int_{-\infty}^{\rho}(\rho-t)\,d\mathbf{n}(t, F^{-1}), \qquad (1.8)$$

$$\mathbf{m}(\rho, F^{\pm1})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\log^{\pm}|F(u+i\rho)|\,du, \qquad (1.9)$$

$$\mathbf{L}(\rho, F^{\pm1})=\mathbf{m}(\rho, F^{\pm1})+\mathbf{N}(\rho, F^{\pm1}). \qquad (1.10)$$

Заметим, что эти функции являются инверсиями специального случая характеристик Цудзи, рассмотренных в [5] (гл. I, § 5). При этом, формула Б. Я. Левина (1.7) переходит в соотношение равновесия вида

$$\mathbf{L}(\rho, F)=\mathbf{L}(\rho, F^{-1})+C_F\ (-\infty<\rho<0). \qquad (1.11)$$

1.4. В этом пункте из формул (1.6) типа Б. Я. Левина будет выведено зависящее от непрерывного параметра $\alpha(1\leqslant\alpha<+\infty)$ семейство характеристик типа Цудзи. Для этого сначала заметим, что

$$\frac{\alpha}{2\pi}\iint_{G_\rho^{(-)}}|\mathrm{Im}\,\zeta-\rho|^{\alpha-1}\log|F(\zeta)|\,d\sigma(\zeta)=\alpha[\mathbf{m}_\alpha(\rho, F)-\mathbf{m}_\alpha(\rho, F)^{-1})],$$

где функции $\mathbf{m}_\alpha$ — суть усреднения характеристик Цудзи (1.9):

$$\mathbf{m}_\alpha(\rho, F^{\pm1})=\int_{-\infty}^{\rho}(\rho-t)^{\alpha-1}\,\mathbf{m}(t, F^{\pm1})\,dt.$$

Далее, легко видеть, что

$$\sum_{b_\nu \in G_\rho^{(-)}} |\mathrm{Im}\, b_\nu - \rho|^{1+\alpha} = \int_{-\infty}^{\rho} (\rho - t)^\alpha \, d\mathbf{N}(t, F).$$

Поэтому, интегрированием по частям получаем

$$\frac{1}{1+\alpha} \sum_{b_\nu \in G_\rho^{(-)}} |\mathrm{Im}\, b_\nu - \rho|^{1+\alpha} = \alpha \mathbf{N}_\alpha(\rho, F),$$

где

$$\mathbf{N}_\alpha(\rho, F) = \frac{1}{1+\alpha} \int_{-\infty}^{\rho} (\rho - t)^{\alpha-1} \mathbf{N}(t, F)\, dt.$$

Аналогично, для нулей функции $F(w)$ имеем

$$\frac{1}{1+\alpha} \sum_{a_\mu \in G_\rho^{(-)}} |\mathrm{Im}\, a_\mu - \rho|^{1+\alpha} = \alpha \mathbf{N}_\alpha(\rho, F^{-1}).$$

В силу введенных обозначений формула (1.6) запишется в виде

$$\mathbf{m}_\alpha(\rho, F) + \mathbf{N}_\alpha(\rho, F) = \mathbf{m}_\alpha(\rho, F^{-1}) + \mathbf{N}_\alpha(\rho, F^{-1}) + C_\alpha(F) \quad (\rho < 0),$$

где $C_\alpha(F) \in (-\infty, +\infty)$ — постоянная, или, что то же самое, в виде соотношения равновесия

$$\mathbf{L}_\alpha(\rho, F) = \mathbf{L}_\alpha(\rho, F^{-1}) + C_\alpha(F) \quad (-\infty < \rho < 0), \tag{1.12}$$

где $\mathbf{L}_\alpha$ — характеристики типа Цудзи, являющиеся их усреднениями —

$$\mathbf{L}_\alpha(\rho, F^{\pm 1}) = \int_{-\infty}^{\rho} (\rho - t)^{\alpha-1} \left[\mathbf{m}(t, F^{\pm 1}) + \frac{1}{1+\alpha} \mathbf{N}(t, F^{\pm 1})\right] dt. \tag{1.13}$$

1.5. Общеизвестно, что для любой функции $f(z) \not\equiv 0, \infty$, мероморфной в единичном круге, имеет место соотношение равновесия вида $T(r, f) = T(r, f^{-1}) + C(f)$ $(0 < r < 1)$, где T — характеристика Неванлинны. В силу этого соотношения условие (2), определяющее классы N_α^* М. М. Джрбашяна, эквивалентно условию

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha [T(r, f) + T(r, f^{-1})]\, dr < +\infty; \quad -1 < \alpha < +\infty,$$

или, если $0 \leqslant \alpha < +\infty$, условию $\sup\limits_{0<r<1} [T_\alpha(r, f) + T_\alpha(r, f^{-1})] < +\infty$, где T_α — характеристика типа Неванлинны следующего вида —

$$T_\alpha(r, f) = \int_0^r (r - t)^\alpha \, T(t, f)\, dt.$$

Однако ясно, что не для всех функций, мероморфных в полуплоскости $G^{(-)}$, выполнено соотношение равновесия (1.10) между характеристиками Цудзи. Поэтому прямыми аналогами классов N_α^* М. М. Джрбашяна следует считать классы мероморфных в $G^{(-)}$ функций $F(w)$, для которых

$$\int_{-\infty}^{0} |t|^{\alpha-1} [\mathbf{L}(t, F) + \mathbf{L}(t, F^{-1})]\, dt < +\infty; \; 0 < \alpha < +\infty. \tag{1.14}$$

Отметим, что при $1 \leqslant \alpha < +\infty$, в силу леммы 1.1, это условие эквивалентно условию

$$\sup_{-\infty < \rho < 0} [\mathbf{L}_\alpha(\rho, F) + \mathbf{L}_\alpha(\rho, F^{-1})] < +\infty.$$

Нетрудно убедиться также в том, что (1.14) одновременно эквивалентно условиям теоремы 1.1, при выполнении которых справедливы формулы типа Б. Я. Левина (1.6), а также соотношения равновесия (1.12) для вновь введенных характеристик типа Цудзи.

§ 2. Канонические факторизации классов мероморфных в полуплоскости функций

В этом параграфе путем последовательных предельных переходов $R \uparrow \infty$ и $\rho \uparrow 0$ в формуле (1.2) будут установлены канонические факторизации новых, широких классов типа В. И. Крылова функций, мероморфных в полуплоскости.

Определение 1. Будем говорить, что мероморфная в нижней полуплоскости $G^{(-)}$ функция $F(w)$ принадлежит классу $\mathbf{N}^m_{\alpha,\beta}$ $(0 < \alpha < +\infty,\ 0 \leqslant \beta < 1 + \alpha)$, если

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{|t|^{\alpha-1}}{1+|t|^\beta} [\mathbf{L}(t, F) + \mathbf{L}(t, F^{-1})]\, dt < +\infty. \tag{2.1}$$

Очевидны включения

$$\mathbf{N}^m_{\alpha,\beta_1} \subseteq \mathbf{N}^m_{\alpha,\beta_2} (0 < \alpha < +\infty,\ 0 \leqslant \beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant 1 + \alpha), \tag{2.2}$$

$$\mathbf{N}^m_{\alpha,\beta} \subseteq \mathbf{N}^m_{\alpha+\delta,\beta+\delta} (0 < \alpha < +\infty,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1 + \alpha,\ 0 < \delta < +\infty). \tag{2.2'}$$

Следует особо отметить, что предельные переходы $R \uparrow \infty$ и $\rho \uparrow 0$ в формуле (1.2) оправданы, в частности, как мы убедимся ниже, для функций классов $\mathbf{N}^m_{\alpha,0}$, являющихся, как было отмечено выше, естественными аналогами классов N_α^* М. М. Джрбашяна. Однако, при этом возникают существенные затруднения в случае, когда $0 < \alpha < 1$. Оказалось однако, что легче установить канонические факторизации непосредственно для функций из наиболее широких классов $\mathbf{N}^m_{\alpha,1+\alpha}$ $(0 < \alpha < +\infty)$.

2.1. Для дальнейшего изложения необходима следующая

Лемма 2.1. *Пусть* $F(w) \in \mathbf{N}^m_{\alpha,\beta}$ $(0 < \alpha < +\infty,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1 + \alpha)$. *Тогда нули* $\{a_\mu\} \subset G^{(-)}$ *и полюсы* $\{b_\nu\} \subset G^{(-)}$ *этой функции таковы, что*

$$\sum_\mu |\mathrm{Im}\, a_\mu|^{1+\alpha} < +\infty, \quad \sum_\nu |\mathrm{Im}\, b_\nu|^{1+\alpha} < +\infty. \tag{2.3}$$

Одновременно

$$\iint\limits_{G^{(-)}} \frac{|\operatorname{Im}\zeta|^{\alpha-1}}{1+|\operatorname{Im}\zeta|^{\beta}} |\log|F(\zeta)|| \, d\sigma(\zeta) < +\infty. \tag{2.4}$$

Доказательство. Сходимость интеграла (2.4) непосредственно следует из (2.1). Для доказательства сходимости сумм (2.3) заметим, что, как также непосредственно следует из (2.1)

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{|t|^{\alpha-1}}{1+|t|^{\beta}} \mathrm{N}(t, F^{\pm 1}) dt < +\infty. \tag{2.5}$$

Сходимость одного из этих интегралов обеспечивает сходимость первой из сумм (2.3), а сходимость другого—сходимость второй суммы. Докажем, например, сходимость первой суммы. Во-первых, если бы при некотором $\rho_0 < 0$ в $G_{\rho_0}^{(-)}$ содержалось бесконечное число нулей a_μ функции $F(w)$, то для любого $t\,(\rho_0/2 < t < 0)$ имели бы

$$\mathrm{N}(t, F^{-1}) = \sum_{a_\mu \in G_t^{(-)}} (|\operatorname{Im} a_\mu| - |t|) \geqslant \sum_{a_\mu \in G_t^{(-)}} (|\operatorname{Im} a_\mu| - |\rho_0|/2) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{a_\mu \in G_{\rho_0}^{(-)}} (|\operatorname{Im} a_\mu| - |\rho_0|/2) \geqslant \sum_{a_\mu \in G_{\rho_0}^{(-)}} (|\rho_0| - |\rho_0|/2) = +\infty.$$

Это противоречит (2.5). Тем самым, $\max\limits_{\mu} \{|\operatorname{Im} a_\mu|\} = m_0 < +\infty$, и, как нетрудно убедиться

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{|t|^{\alpha-1}}{1+|t|^{\beta}} \mathrm{N}(t, F^{-1})\, dt \geqslant \{\alpha(1+\alpha)\,(1+m_0^{\beta})\}^{-1} \sum_{\mu} |\operatorname{Im} a_\mu|^{1+\alpha}.$$

2.2. В этом пункте путем предельного перехода $R \uparrow \infty$ в формуле (1.2) для функций классов $\mathrm{N}^{m}_{\alpha, 1+\alpha}$ устанавливается семейство формул, являющихся естественными аналогами формул типа Иенсена-Неванлинны для круга, открытых в ранней работе М. М. Джрбашяна [7] (см. также [8]). Как в установленном в этом пункте семействе формул, так и в установленных затем канонических факторизациях классов $\mathrm{N}^{m}_{\alpha, \beta}$ участвуют произведения типа Бляшке для полуплоскости, рассмотренные в работе [16]. Элементарные факторы этих произведений имеют вид

$$a_\alpha(w, \zeta) \equiv \exp\left\{-\int\limits_{0}^{2|\operatorname{Im}\zeta|} \frac{\tau^{\alpha}\, d\tau}{[\tau + i(w-\zeta)]^{1+\alpha}}\right\}. \tag{2.6}$$

Отметим, что при любых фиксированных $\zeta \in G^{(-)}$ и $\alpha\,(-1 < \alpha < +\infty)$ функция $a_\alpha(w, \zeta)$ аналитична в $G^{(-)}$ и имеет нуль, притом первого порядка, только в точке $w = \zeta$. При этом, условие сходимости произведения

$$B_\alpha(w, \{w_k\}) \equiv \prod_k a_\alpha(w, w_k) \quad (\{w_k\} \subset G^{(-)}, \ -1 < \alpha < +\infty) \tag{2.7}$$

имеет вид

$$\sum_k |\mathrm{Im}\, w_k|^{1+\alpha} < +\infty. \tag{2.8}$$

Докажем еще две предварительные леммы.

Лемма 2.2. *Пусть w и s — фиксированные точки из $G_\rho^{(-)}$* ($\rho \leqslant 0$). *Тогда при любом α $(-1<\alpha<+\infty)$ справедливо соотношение*

$$\lim_{R\to+\infty} \Omega_\alpha\left(\frac{w-i\rho}{R}+i,\ \frac{s-i\rho}{R}+i\right) = -\log a_\alpha(w-i\rho,\ s-i\rho). \tag{2.9}$$

Доказательство. Пусть $z, \zeta \in G^{(-)}$ — любые фиксированные, а $R>0$ настолько большое, что $|z+iR|<R$ и $|\zeta+iR|<R$. Тогда по (3)

$$\Omega_\alpha\left(\frac{z}{R}+i,\ \frac{\zeta}{R}+i\right) = \int\limits_{\left|\frac{\zeta}{R}+i\right|^2}^{1} \frac{(1-t)^\alpha}{\left(1-\dfrac{z+iR}{\zeta+iR}\,t\right)^{1+\alpha}}\,\frac{dt}{t}.$$

Воспользуемся теперь равенством (1.1) и после замены переменной интегрирования $\tau = R(1-t)$ убедимся в том, что

$$\lim_{R\to+\infty} \Omega_\alpha\left(\frac{z}{R}+i,\ \frac{\zeta}{R}+i\right) = \int\limits_0^{2|\mathrm{Im}\,\zeta|} \frac{\tau^\alpha d\tau}{[\tau+i(z-\zeta)]^{1+\alpha}}.$$

Ввиду (2.6), это соотношение после замены $z=w-i\rho$, $\zeta=s-i\rho$ переходит в утверждение леммы.

Лемма 2.3. *Пусть $F(w)\in \mathrm{N}^m_{\alpha,1+\alpha}$ $(1\leqslant\alpha<+\infty)$. Тогда при любых $\rho<0$ и $w\in G_\rho^{(-)}$ справедливо соотношение*

$$\lim_{R\to+\infty} \iint\limits_{O(R,\rho)} \left(1-\frac{|\zeta-i\rho|^2}{2R|\mathrm{Im}\,\zeta-\rho|}\right)^{\alpha-1} \times$$

$$\times \frac{|\mathrm{Im}\,\zeta-\rho|^{\alpha-1}\log|F(\zeta)|}{\left[i(w-\overline{\zeta}-2i\rho)-\dfrac{(w-i\rho)(\overline{\zeta}+i\rho)}{R}\right]^{1+\alpha}}\,d\sigma(\zeta) =$$

$$= \iint\limits_{G_\rho^{(-)}} |\mathrm{Im}\,\zeta-\rho|^{\alpha-1}\,\frac{\log|F(\zeta)|}{[i(w-\overline{\zeta}-2i\rho)]^{1+\alpha}}\,d\sigma(\zeta). \tag{2.10}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию $\Psi_{\alpha,\rho}(w, \zeta, R)$, полагая

$$\Psi_{\alpha,\rho}(w,\zeta,R) = \frac{\left(1-\dfrac{|\zeta-i\rho|^2}{2R|\mathrm{Im}\,\zeta-\rho|}\right)^{\alpha-1}}{\left[i(w-\overline{\zeta}-2i\rho)-\dfrac{(w-i\rho)(\overline{\zeta}+i\rho)}{R}\right]^{1+\alpha}} -$$

$$-\frac{1}{[i(w-\overline{\zeta}-2i\rho)]^{1+\alpha}} \quad \text{при } \zeta\in O(R,\rho),$$

$$\Psi_{\alpha,\rho}(w, \zeta, R) = -\frac{1}{[i(w-\bar{\zeta}-2i\rho)]^{1+\alpha}} \quad \text{при } \zeta \overline{\in} O(R, \rho).$$

Очевидно, что (2.10) равносильно соотношению

$$\lim_{R\to+\infty} \iint\limits_{G_\rho^{(-)}} \Psi_{\alpha,\rho}(w, \zeta, R)\,|\mathrm{Im}\,\zeta-\rho|^{\alpha-1}\log|F(\zeta)|\,d\sigma(\zeta) = 0. \tag{2.11}$$

С целью доказательства последнего оценим функцию $\Psi_{\alpha,\rho}(w, \zeta, R)$, полагая, что $R > 2|w-i\rho|^2/|\mathrm{Im}\,w-\rho|$, а точка $w \in G_\rho^{(-)}$ фиксирована. Если $\zeta \in O(R, \rho)$, то, очевидно

$$|\Psi_{\alpha,\rho}(w, \zeta, R)| \leqslant |(w-i\rho)-\overline{(\zeta-i\rho)}|^{-(1+\alpha)}\Bigg\{1+$$

$$+\left(1-\frac{|\zeta-i\rho|^2}{2R\,|\mathrm{Im}\,\zeta-\rho|}\right)^{\alpha-1}\left[1-\frac{1}{R}\left|\frac{(w-i\rho)\,\overline{(\zeta-i\rho)}}{(w-i\rho)-\overline{(\zeta-i\rho)}}\right|\right]^{-(1+\alpha)}\Bigg\}.$$

Однако $\mathrm{Im}\,(w-i\rho)<0$ и $\mathrm{Im}\,(\zeta-i\rho)<0$. Поэтому, как легко видеть,

$$\left|\frac{(w-i\rho)\,\overline{(\zeta-i\rho)}}{(w-i\rho)-\overline{(\zeta-i\rho)}}\right| = \left|\frac{1}{w-i\rho}-\frac{1}{\overline{\zeta-i\rho}}\right|^{-1} < \left(\mathrm{Im}\,\frac{1}{w-i\rho}\right)^{-1} < \frac{R}{2}.$$

Далее, так как $|(w-i\rho)-\overline{(\zeta-i\rho)}| > |\mathrm{Im}\,w-\rho|+|\mathrm{Im}\,\zeta-\rho|$, то ввиду включения (1.1) при фиксированных $\rho<0$ и $w \in G_\rho^{(-)}$, любых $R > 2|w-i\rho|^2/|\mathrm{Im}\,w-\rho|$ и $\zeta \in O(R, \rho)$ справедлива оценка

$$|\Psi_{\alpha,\rho}(w, \zeta, R)| < \frac{1+2^{1+\alpha}}{(|\mathrm{Im}\,w-\rho|+|\mathrm{Im}\,\zeta-\rho|)^{1+\alpha}}.$$

Нетрудно заметить, что в силу определения функции $\Psi_{\alpha,\rho}(w, \zeta, R)$ эта оценка сохраняет силу и в случае, когда $\zeta \in G_\rho^{(-)} \setminus O(R, \rho)$. Воспользовавшись теперь неравенствами

$$\frac{1}{(a+b)^{1+\alpha}} < \frac{1}{a^{1+\alpha}+b^{1+\alpha}} \leqslant \frac{\max\{1, a^{-(1+\alpha)}\}}{1+b^{1+\alpha}} \quad (a, b>0;\ 1<\alpha<+\infty),$$

$$\frac{1}{1+(x-a)^{1+\alpha}} < \frac{1+(1+a)^{1+\alpha}}{1+x^{1+\alpha}} \quad (0<a\leqslant x<+\infty,\ 1\leqslant\alpha<+\infty),$$

окончательно приходим к оценке

$$|\Psi_{\alpha,\rho}(w, \zeta, R)| < \frac{C_{\alpha,\rho}(w)[1+(1+|\rho|)^{1+\alpha}]}{1+|\mathrm{Im}\,\zeta|^{1+\alpha}},$$

где $C_{\alpha,\rho}(w) = (1+2^{1+\alpha})\max\{1, |\mathrm{Im}\,w-\rho|^{-(1+\alpha)}\}$.

В силу последней оценки, сходимости интеграла (2.4) (с $p=1+\alpha$) и леммы 1.1, подынтегральная функция в (2.11) имеет не зависящую от $R>2|w-i\rho|^2/|\mathrm{Im}\,w-\rho|$ суммируемую мажоранту. С другой стороны, ясно, что $\lim\limits_{R\to+\infty}\Psi_{\alpha,\rho}(w, \zeta, R)=0$ при любых фиксированных $\rho<0$ и $w, \zeta \in G_\rho^{(-)}$. Поэтому, в силу теоремы Лебега справедливо соотношение (2.11), и, тем самым, лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть* $F(w) \in N^{m}_{\alpha,1+\alpha}$ $(1 \leqslant \alpha < +\infty)$. *Тогда при любом* $\rho < 0$ *справедливо представление*

$$\log F(w) = \frac{\alpha 2^{\alpha}}{\pi} \iint\limits_{G_{\rho}^{(-)}} |\operatorname{Im} \zeta - \rho|^{\alpha-1} \frac{\log |F(\zeta)|}{[i(w - \bar{\zeta} - 2i\rho)]^{1+\alpha}} d\sigma(\zeta) +$$

$$+ \sum_{a_{\mu} \in G_{\rho}^{(-)}} \log a_{\alpha}(w - i\rho, a_{\mu} - i\rho) - \sum_{b_{\nu} \in G_{\rho}^{(-)}} \log a_{\alpha}(w - i\rho, b_{\nu} - i\rho) -$$

$$- \log |\lim_{t \to +\infty} F(-it)|; \quad w \in G_{\rho}^{(-)}, \tag{2.12}$$

где $\{a_{\mu}\}$ *и* $\{b_{\nu}\}$ — *суть нули и функции* $F(w)$, *а предел в скобках существует, конечен и не равен нулю.*

Доказательство очевидным образом следует из формулы (1.2) и соотношений (2.9), (2.10).

Для доказательства основной теоремы параграфа необходимы еще три леммы.

Лемма 2.4. *Пусть последовательность* $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ *при данном* $\alpha(-1 < \alpha < +\infty)$ *удовлетворяет условию* (2.8). *Тогда при любом* $w \in G^{(-)}$, *не принадлежащем отрезкам* $l_k = \{w : \operatorname{Re} w = \operatorname{Re} w_k,$ $\operatorname{Im} w_k \leqslant \operatorname{Im} w < 0\}$ $(k \geqslant 1)$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{\rho \to -0} \sum_{w_k \in G_{\rho}^{(-)}} \log a_{\alpha}(w - i\rho, w_k - i\rho) = \sum_{k} \log a_{\alpha}(w, w_k). \tag{2.13}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $\operatorname{Im} w \leqslant -4m_0$, где $m_0 = \max_k |\operatorname{Im} w_k|$. Очевидно

$$\left| \sum_{w_k \in G_{\rho}^{(-)}} \log a_{\alpha}(w - i\rho, w_k - i\rho) - \sum_{k} \log a_{\alpha}(w, w_k) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{w_k \in G_{\rho}^{(-)}} |\log a_{\alpha}(w - i\rho, w_k - i\rho) - \log a_{\alpha}(w, w_k)| +$$

$$+ \sum_{\rho < \operatorname{Im} w_k < 0} |\log a_{\alpha}(w, w_k)| \equiv S_1 + S_2.$$

В силу сходимости последнего ряда (см. [16], теорему 1.2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\rho_1 < 0$, что

$$S_2 < \varepsilon/2, \text{ при } \rho_1 < \rho < 0. \tag{2.14}$$

Оценим теперь сумму S_1, заметив, что ввиду (2.6)

$$S_1 \leqslant \sum_{\operatorname{Im} w_k < \rho} \int\limits_{2(|\operatorname{Im} w_k| - |\rho|)}^{2|\operatorname{Im} w_k|} \frac{\tau^{\alpha} d\tau}{|\tau + i(w - w_k)|^{1+\alpha}}.$$

При этом, здесь $|w - w_k| - \tau \geqslant m_0$, так как $|w - w_k| \geqslant 3m_0$, а $0 \leqslant \tau \leqslant 2m_0$. Воспользовавшись этим, получим

$$S_1 < \frac{2^{1+\alpha}}{(1+\alpha)\, m_0^{1+\alpha}} \left\{ \sum_{\operatorname{Im} w_k < \rho} |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha} - \sum_{\operatorname{Im} w_k < \rho} (|\operatorname{Im} w_k| - |\rho|)^{1+\alpha} \right\}.$$

Однако, при выполнении условия (2.8), как нетрудно убедиться

$$\lim_{\rho \to -0} \sum_{\operatorname{Im} w_k < \rho} (|\operatorname{Im} w_k| - |\rho|)^{1+\alpha} = \sum_k |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha}.$$

К тому же пределу стремится и первое слагаемое в фигурных скобках. Поэтому существует такое $\rho_2 < 0$, что $S_1 < \varepsilon/2$ при $\rho_2 < \rho < 0$. Отсюда и из (2.14) следует соотношение (2.13) для любого $w \in G^{(-)}$, такого, что $\operatorname{Im} w \leqslant -4 m_0$. Заметим теперь, что если последовательность $\{w_k\}$ конечна, то соотношение (2.13) справедливо для всех $w \in G^{(-)} \setminus \bigcup_k \{l_k\}$. Следовательно, это соотношение справедливо вне множества $\bigcup_k \{l_k\}$ и в случае бесконечной последовательности $\{w_k\}$.

Лемма 2.5. *Пусть* $F(w) \in N^m_{\cdot,1+\alpha}$ $(1 \leqslant \alpha < +\infty)$. *Тогда*

$$\lim_{\rho \to -0} \iint_{G_\rho^{(-)}} |\operatorname{Im} \zeta - \rho|^{\alpha-1} \frac{\log |F(\zeta)|}{[i(w - \bar\zeta - 2i\rho)]^{1+\alpha}} d\sigma(\zeta) =$$

$$= \iint_{G^{(-)}} |\operatorname{Im} \zeta|^{\alpha-1} \frac{\log |F(\zeta)|}{[i(w - \bar\zeta)]^{1+\alpha}} d\sigma(\zeta); \quad w \in G^{(-)}. \tag{2.15}$$

Доказательство вполне аналогично доказательству леммы 2.3.

Лемма 2.6. *Пусть последовательность* $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ *удовлетворяет условию* (2.8) *при данном* α $(-1 < \alpha < +\infty)$. *Тогда функция*

$$\log B_\gamma(w, \{w_k\}) \equiv -\sum_k \int_0^{2|\operatorname{Im} w_k|} \frac{\tau^\gamma \, d\tau}{[\tau + i(w - w_k)]^{1+\gamma}} \tag{2.16}$$

при любом фиксированном $w \in G^{(-)}$, *таком, что* $\operatorname{Im} w \leqslant -4 m_0$ $(m_0 = \max\{1, \max_k |\operatorname{Im} w_k|\})$, *непрерывна по параметру* γ *на отрезке* $[\alpha, +\infty)$.

Доказательство. Ясно, что каждое слагаемое ряда (2.16) обладает требуемым свойством. Поэтому для доказательства леммы достаточно убедиться в абсолютной и равномерной сходимости этого ряда в любом сегменте $[\alpha, \beta] \subset [\alpha, +\infty)$. С этой целью предположим, что $[\alpha, \beta]$ — любой такой сегмент и $\gamma \in [\alpha, \beta]$ — любая точка. Тогда очевидно, $|\tau + i(w - w_k)|^{1+\gamma} \geqslant m_0^{1+\alpha}$, и, следовательно, при $0 < |\operatorname{Im} w_k| < 1/2$

$$\left| \int_0^{2|\operatorname{Im} w_k|} \frac{\tau^\gamma \, d\tau}{[\tau + i(w - w_k)]^{1+\gamma}} \right| \leqslant \frac{2^{1+\alpha}}{(1+\alpha)\, m_0^{1+\alpha}} |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha}.$$

2.4. Докажем основную теорему параграфа о канонических факторизациях функций классов $N^m_{\alpha,\beta}$ $(0 < \alpha < +\infty,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1 + \alpha)$.

Теорема 2.2. *Пусть $F(w)\in N^{m}_{\alpha,1+\alpha}$ $(0<\alpha<+\infty)$. Тогда справедливо представление*

$$F(w)\equiv C_F\frac{B_\alpha(w,\{a_\mu\})}{B_\alpha(w,\{b_\nu\})}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{\alpha 2^\alpha}{\pi}e^{-i\frac{\pi}{2}(1+\alpha)}\iint\limits_{G^{(-)}}|\mathrm{Im}\,\zeta|^{\alpha-1}\frac{\log|F(\zeta)|}{(w-\overline{\zeta})^{1+\alpha}}\,d\sigma(\zeta)\right\};\quad w\in G^{(-)},\qquad(2.17)$$

где B_α — сходящиеся произведения типа Бляшке, составленные по нулям и полюсам функции $F(w)$, а $C_F=\lim\limits_{t\to+\infty}[F(-it)]^{-1}$. При этом, этот предел существует, конечен и не равен нулю.

Доказательство удобно провести в два этапа.

а) Пусть $1\leqslant\alpha<+\infty$. Тогда к представлению (2.17) приходим предельным переходом $\rho\uparrow 0$ в формуле (2.12), в силу соотношений (2.15), (2.13) и единственности аналитической функции.

б) Пусть $0<\alpha<+1$. Тогда, ввиду (2.2′), $F(w)\in N^{m}_{\gamma,1+\gamma}$ при любом $\gamma>\alpha$. Следовательно, для этой функции справедливо представление (2.17) при $\alpha\equiv\gamma>1$. Зафиксируем теперь любое $w\in G^{(-)}$ такое, что $\mathrm{Im}\,w\leqslant-4m_1$ $(m_1=\max\limits_{\mu,\nu}\{|\mathrm{Im}\,a_\mu|,|\mathrm{Im}\,b_\nu|\})$. Тогда правая часть (2.17) (с $\alpha\equiv\gamma\geqslant1$) тождественная постоянная по γ. С другой стороны, в силу леммы 2.6, ее сомножители — непрерывные по γ $(\alpha\leqslant\gamma<+\infty)$ функции. Поэтому справедлива формула (2.17).

Замечание 1. В силу включения (2.2), факторизацию вида (2.17) допускает любая функция из $N^{m}_{\alpha,\beta}$ $(0<\alpha<+\infty,\ 0\leqslant\beta\leqslant1+\alpha)$.

Замечание 2. Как нетрудно заметить, примененное в пункте б) доказательства теоремы 2.2 рассуждение дает возможность распространить на случай $0<\rho<1$ также формулу (2.12) теоремы 2.1.

2.5. Установим оценку для экспоненциального множителя в (2.17).

Лемма 2.7. *Пусть $F(w)\in N^{m}_{\alpha,\beta}$ $(0<\alpha<+\infty,\ 0\leqslant\beta\leqslant1+\alpha)$. Тогда при любом $w\in G^{(-)}$ справедлива оценка*

$$\left|\frac{\alpha 2^\alpha}{\pi}\iint\limits_{G^{(-)}}|\mathrm{Im}\,\zeta|^{\alpha-1}\frac{\log|F(\zeta)|}{[i(w-\overline{\zeta})]^{1+\alpha}}\,d\sigma(\zeta)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha 2^{\alpha+|\beta-1|}}{\pi}\frac{1+|\mathrm{Im}\,w|^\beta}{|\mathrm{Im}\,w|^{1+\alpha}}\iint\limits_{G^{(-)}}\frac{|\mathrm{Im}\,\zeta|^{\alpha-1}}{1+|\mathrm{Im}\,\zeta|^\beta}\,|\log|F(\zeta)||\,d\sigma(\zeta).\qquad(2.18)$$

Доказательство. Пусть $w,\zeta\in G^{(-)}$. Тогда, очевидно, $|w-\overline{\zeta}|\geqslant|\mathrm{Im}\,w|+|\mathrm{Im}\,\zeta|$. Следовательно, воспользовавшись неравенствами $a+b>a(1+b)/(1+a)$ $(a,b>0)$, $1\leqslant(1+x)^\beta/(1+x^\beta)\leqslant2^{\beta-1}$ $(x\geqslant0,\ \beta\geqslant0)$, получим

$$\frac{1}{|w-\overline{\zeta}|^{1+\alpha}}\leqslant2^{|\beta-1|}\frac{1+|\mathrm{Im}\,w|^\beta}{|\mathrm{Im}\,w|^{1+\alpha}}\,\frac{1}{1+|\mathrm{Im}\,\zeta|^\beta}.$$

Отсюда непосредственно следует оценка (2.18).

Замечание. Если последовательность $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ удовлетворяет условию (2.8) при некотором $\alpha\ (-1 < \alpha < +\infty)$, то, как нетрудно убедиться, при $\operatorname{Im} w < -5 \max_k |\operatorname{Im} w_k|$ справедлива оценка

$$|\log|B_\alpha(w, \{w_k\})|| \leqslant \frac{8^{1+\alpha}}{1+\alpha}\left\{\sum_k |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha}\right\} |\operatorname{Im} w|^{-1-\alpha}. \tag{2.19}$$

Отсюда, из (1.18) и факторизации (2.17) следует, что для любого $F(w) \in \mathrm{N}^m_{\alpha,\beta}$ $(0 < \alpha < +\infty,\ 0 \leqslant \beta < 1 + \alpha)$ имеем $\lim\limits_{t\to+\infty} F(-it) = \pm 1$. Тем самым, при $0 \leqslant \beta < 1 + \alpha$ равняется 1 или -1 множитель C_F канонической факторизации (2.17).

2.6. Условие (2.1), при выполнении которого мероморфная в $G^{(-)}$ функция $F(w)$ принадлежит классу $\mathrm{N}^m_{\alpha,\beta}$ $(0 < \alpha < +\infty,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1 + \alpha)$, накладывает ограничение как на характеристику роста $\mathrm{L}(t, F)$ этой функции, так и на характеристику ее убывания $\mathrm{L}(t, F^{-1})$. В отличие от этого, в данном пункте рассмотрены классы аналитических в $G^{(-)}$ функций, в определении которых накладываются ограничения лишь на характеристику роста.

Определение 2. Будем говорить, что аналитическая в полуплоскости $G^{(-)}$ функция $F(w)$ принадлежит классу $\mathrm{N}^{(1)}_\alpha$ $(0 < \alpha < +\infty)$, если при любом $\rho < 0$

$$\sup_{v<\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} |\log|F(u+iv)||\, du < +\infty,$$

и, одновременно

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{|t|^{\alpha-1}}{1+|t|^{1+\alpha}} \mathrm{L}(t, F)\, dt \equiv \int_{-\infty}^{0} \frac{|t|^{\alpha-1}}{1+|t|^{1+\alpha}}\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} \log^+ |F(u+it)|\, du < +\infty.$$

Поскольку для любой функции $F(w) \in \mathrm{N}^{(1)}_\alpha$ $(0 < \alpha < +\infty)$, в силу теоремы 1.2 имеет место формула Б. Я. Левина (1.7), и, следовательно соотношение равновесия (1.11), то очевидно включение

$$\mathrm{N}^{(1)}_\alpha \subseteq \mathrm{N}^m_{\alpha, 1+\alpha}\ (0 < \alpha < \infty).$$

Следовательно, для функций из вновь введенных классов справедливы утверждения леммы 2.1, а также каноническая факторизация теоремы 2.2.

§ 3. Параметрические представления классов $\mathrm{N}^m_{\alpha,\beta}$

В этом параграфе исследуются вопросы принадлежности сомножителей канонической факторизации (2.17) классам $\mathrm{N}^m_{\alpha,\beta}$ $(0 < \alpha < +\infty,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1 + \alpha)$, на основе чего удается установить параметрические представления этих классов в случае, когда $0 \leqslant \beta < \alpha$.

3.1. Докажем сначала оценку, нужную для дальнейшего изложения.

Лемма 3.1. *Пусть последовательность* $\{w_k\}\subset G^{(-)}$ *такова, что при данном* $\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$ *выполнено условие* (2.8). *Тогда справедлива оценка*

$$\log|B_\alpha(w,\ \{w_k\})|\leqslant C_\alpha\sum_k\frac{|\operatorname{Im}w_k|^{1+\alpha}}{|w-\bar w_k|^{1+\alpha}};\quad w\in G^{(-)},\tag{3.1}$$

где $C_\alpha\in(0,\ +\infty)$ — *постоянная, зависящая лишь от* α.

Доказательство. Легко заметить, что для установления оценки (3.1) достаточно доказать справедливость такой оценки для одного фактора произведения B_α. С этой целью предположим, что $\zeta=\xi+i\eta\in G^{(-)}$ — любое и рассмотрим в отдельности два случая.

а) Пусть $2|\eta|/|w-\bar\zeta|>1/5$. Воспользуемся рекуррентной формулой

$$a_\alpha(w,\zeta)=a_{\alpha-p}(w,\zeta)\exp\left\{\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{\alpha-p+n}\left(\frac{2i\eta}{w-\bar\zeta}\right)^{\alpha-p+n}\right\}\tag{3.2}$$

(где $p\geqslant 0$ целое и $p-1<\alpha\leqslant p$). Отметим, что эту формулу легко получить из (2.6) интегрированием по частям, и она по существу приведена в [16]. Из (3.2) следует, что при целых $\alpha=p>0$

$$\log|a_p(w,\ \zeta)|\leqslant\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}\left(\frac{2|\eta|}{|w-\bar\zeta|}\right)^n.$$

Однако в рассматриваемом случае

$$5^{1+p}\left(\frac{2|\eta|}{|w-\bar\zeta|}\right)^{1+p}\geqslant 5^n\left(\frac{2|\eta|}{|w-\bar\zeta|}\right)^n>\left(\frac{2|\eta|}{|w-\bar\zeta|}\right)^n(1\leqslant n\leqslant p).$$

Поэтому

$$\log|a_p(w,\ \zeta)|<p\cdot 10^{1+p}\left(\frac{|\eta|}{|w-\bar\zeta|}\right)^{1+p};\quad p=0,1,2,\cdots.\tag{3.3}$$

Пусть теперь $\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$ не целое. Тогда из (3.2) следует оценка

$$\log|a_\alpha(w,\ \zeta)|\leqslant\log|a_\delta(w,\ \zeta)|+C'_\alpha\left(\frac{|\eta|}{|w-\bar\zeta|}\right)^{1+\alpha},\tag{3.4}$$

где $\delta=\alpha-p\in(-1,\ 0)$. Оценим теперь $\log|a_\delta(w,\zeta)|$. Для этого произведем замену переменной интегрирования $t=\tau/i(w-\zeta)$ в (2.6) и, воспользовавшись тем, что при $\operatorname{Im}w<\eta$ и $\operatorname{Re}w=\xi$ имеем $i(w-\zeta)=-\operatorname{Im}w+\eta>0$, в силу единственности аналитической функции получим

$$\log|a_\delta(w,\zeta)|=-\operatorname{Re}\int_0^{\frac{2|\eta|}{i(w-\zeta)}}\frac{t^\delta\,dt}{(1+t)^{1+\delta}}.$$

Если $2|\eta|/|w-\zeta|\leqslant 3$, то, очевидно

$$|\log|a_\delta(w,\ \zeta)||\leqslant\int_0^3\frac{x^\delta\,dx}{|1-x|^{\delta+1}}=C_\delta<+\infty.\tag{3.5}$$

Если же $2\,|\eta|/|w-\zeta|>3$, то опять по единственности аналитической функции приходим к неравенству

$$\log|a_\delta(w,\zeta)|\leqslant C_\delta-\operatorname{Re}\int\limits_{3\frac{|w-\zeta|}{i(w-\zeta)}}^{\frac{2|\eta|}{i(w-\zeta)}}\left(1-\frac{1}{1+t}\right)^{1+\delta}\frac{d|t|}{|t|}.$$

Однако здесь $3\leqslant|t|\leqslant 2|\eta|/|w-\zeta|$. Поэтому $|1+t|\geqslant 2$, и

$$\operatorname{Re}\left(1-\frac{1}{1+t}\right)^{1+\delta}=\left|1-\frac{1}{1+t}\right|^{1+\delta}\cos\left[(1+\delta)\arg\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\right]>\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Следовательно

$$\log|a_\delta(w,\zeta)|\leqslant C_\delta-\frac{\sqrt{3}}{4}\int\limits_3^{\frac{2|\eta|}{|w-\zeta|}}\frac{dx}{x}<C_\delta.$$

Отсюда и из (3.5) следует, что в рассматриваемом случае $\log|a_\delta(w,\zeta)|\leqslant C_\delta$. А это, в свою очередь, вместе с (3.4) и (3.3) приводит к оценке

$$\log|a_\alpha(w,\zeta)|\leqslant C'_\alpha\left(\frac{|\eta|}{|w-\overline{\zeta}|}\right)^{1+\alpha}\left(\frac{2|\eta|}{|w-\overline{\zeta}|}>\frac{1}{5},\ -1<\alpha<+\infty\right). \qquad (3.6)$$

б) Пусть $2\,|\eta|/|w-\overline{\zeta}|\leqslant 1/5$. Тогда нетрудно видеть, что

$$\left|\frac{w-\zeta}{w-\overline{\zeta}}\right|^2=1-\frac{4\,\eta\operatorname{Im}w}{|w-\overline{\zeta}|^2}\quad\text{и}\quad\frac{2\,|\operatorname{Im}w|}{|w-\overline{\zeta}|}<\frac{2|\eta|}{|w-\overline{\zeta}|}+2.$$

Поэтому

$$\left|\frac{w-\zeta}{w-\overline{\zeta}}\right|^2\geqslant 1-\frac{1}{5}\,\frac{2\,|\operatorname{Im}w|}{|w-\overline{\zeta}|}>1-\frac{1}{5}\left(\frac{2|\eta|}{|w-\overline{\zeta}|}+2\right)\geqslant\frac{14}{25},$$

и, следовательно, при любом $x\in[0,1]$

$$\left|\frac{w-\zeta}{w-\overline{\zeta}}-\frac{2i|\eta|x}{w-\overline{\zeta}}\right|\geqslant\left|\frac{w-\zeta}{w-\overline{\zeta}}\right|-\frac{2|\eta|}{|w-\overline{\zeta}|}\geqslant\frac{\sqrt{14}}{5}-\frac{1}{5}>\frac{1}{2}.$$

Воспользовавшись этим, получаем, что при любом α $(-1<\alpha<+\infty)$

$$|\log|a_\alpha(w,\zeta)||\leqslant\frac{4^{1+\alpha}}{1+\alpha}\left(\frac{|\eta|}{|w-\overline{\zeta}|}\right)^{1+\alpha}.$$

Отсюда и из (3.6) следует оценка

$$\log|a_\alpha(w,\zeta)|\leqslant C_\alpha\left(\frac{|\eta|}{|w-\overline{\zeta}|}\right)^{1+\alpha};\ w,\zeta\in G^{(-)},\ -1<\alpha<+\infty,$$

где $C_\alpha\in(0,+\infty)$ — постоянная, зависящая лишь от α. Переход же к оценке (3.1) леммы не представляет труда.

3.2. В этом пункте наряду с исследованием вопроса о принадлежности произведений B_α классам $\mathbf{N}^m_{\alpha,\beta}$ дается полная характеристика плотности нулей и полюсов функций этих классов. Для этих целей необходима следующая предварительная

Лемма 3.2. *Пусть последовательность $\{w_k\}\subset G^{(-)}$ такова, что при данном $\alpha\,(0<\alpha<+\infty)$ выполнено условие* (2.8). *Тогда для произведения $B_\alpha(w, \{w_k\})$ справедливо соотношение равновесия*

$$\mathrm{L}(\rho, B_\alpha)=\mathrm{L}(\rho, B_\alpha^{-1});\ -\infty<\rho<0. \tag{3.7}$$

Доказательство. Сначала убедимся в том, что при любом $\rho<0$

$$\sup_{v<\rho}\int_{-\infty}^{+\infty}|\log|B_\alpha(u+iv, \{w_k\})||\,du<+\infty. \tag{3.8}$$

Для этого зафиксировав $\rho<0$, выберем натуральное $N_\rho\geqslant 1$ так, чтобы $|\mathrm{Im}\,w_k|<|\rho|/2$ при $k\geqslant N_\rho+1$. Очевидно

$$|\log|B_\alpha(w, \{w_k\})||\leqslant\left(\sum_{k=1}^{N_\rho}+\sum_{k=N_\rho+1}^{\infty}\right)|\log|a_\alpha(w, w_k)||. \tag{3.9}$$

Если $k\geqslant N_\rho+1$, то при $v<\rho$ имеем $|u+iv-\overline{w}_k|\geqslant|v|+|\mathrm{Im}\,w_k|>$ $>2|\mathrm{Im}\,w_k|+|\rho|/2$. Поэтому, ввиду (2.6)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\log|a_\alpha(u+iv, w_k)||\,du\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha}|\mathrm{Im}\,w_k|^{1+\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{[|u+i(|v|+|\mathrm{Im}\,w_k|)|-2|\mathrm{Im}\,w_k|]^{1+\alpha}}.$$

Оценивая последний интеграл отдельно при $|u|>2|\rho|$ и $|u|<2|\rho|$ приходим к неравенству

$$\sup_{v<\rho}\sum_{k=N_\rho+1}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big|\log|a_\alpha(u+iv, w_k)|\Big|\,du\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^{3+\alpha}}{1+\alpha}|\rho|^{-\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}+2^{1+\alpha}\right)\sum_{k=N_\rho+1}^{\infty}|\mathrm{Im}\,w_k|^{1+\alpha}<+\infty. \tag{3.10}$$

Пусть теперь $v<\rho$ и $k\,(1\leqslant k\leqslant N_\rho)$ фиксировано. Тогда, обозначив $m_0=\max\limits_k|\mathrm{Im}\,w_k|$, будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Big|\log|a_\alpha(u+iv, w_k)|\Big|\,du\leqslant\int_{|u|>4m_0}du\int_0^{2|\mathrm{Im}\,w_k|}\frac{\tau^\alpha d\tau}{|\tau+|v|+|\mathrm{Im}\,w_k|+iu|^{1+\alpha}}+$$

$$+\int_{|u|<4m_0}\Big|\log|a_\alpha(u+iv, i\,\mathrm{Im}\,w_k)|\Big|\,du\equiv I_1+I_2. \tag{3.11}$$

Однако, как нетрудно убедиться

$$I_1<\frac{2^{2+\alpha}m_0^{1+\alpha}}{\alpha(1+\alpha)}. \tag{3.12}$$

С другой стороны, $I_2=\Psi_{\alpha,k}(v)$ — непрерывная по $v\in(-\infty, 0)$ функция. Причем, в силу (2.19), $\lim_{v\to-\infty}\Psi_{\alpha,k}(v)=0$. Поэтому $I_2\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant N_\rho}\times$ $\times\max_{-\infty<v<\rho}\Psi_{\alpha,k}(v)<+\infty$. Отсюда, из (3.11), (3.12), (3.10) и (3.9) следует соотношение (3.8). Остается заметить, что в силу (3.8) функция B_α удовлетворяет условиям теоремы 1.2 и, тем самым, для нее справедливы формулы (1.7) и соотношение равновесия (1.11), которое, в силу оценки (2.19), запишется в виде (3.7).

Лемма 3.3 *Пусть* $\{w_k\}\subset G^{(-)}$ — *произвольная последовательность. Тогда*

1°. *Если при некотором* $\alpha\,(0<\alpha<+\infty)$ *выполнено условие* (2.8), *то при любом* $\alpha_0>\alpha$ *имеем* $B_{\alpha_0}(w, \{w_k\})\subset\mathrm{N}^m_{\alpha,0}$.

2°. *Если при некотором* $\alpha\,(0<\alpha<+\infty)$

$$\sum_k|\operatorname{Im}w_k|^{1+\alpha}\log\frac{1}{|\operatorname{Im}w_k|}<+\infty,$$

то при любом $\beta>0$ *имеем* $B_\alpha(w, \{w_k\})\in\mathrm{N}^m_{\alpha,\beta}$.

Доказательство. 1°. Пусть $\alpha_0>\alpha$ любое. Тогда, в силу (3.2)

$$\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\log^+|B_{\alpha_0}(u-it, \{w_k\})|du\leqslant$$

$$\leqslant C_\alpha\sum_k|\operatorname{Im}w_k|^{1+\alpha_0}\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}I_{\alpha_0,k}(t)\,dt, \tag{3.13}$$

где, как нетрудно видеть,

$$I_{\alpha_0,k}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{[(t+|\operatorname{Im}w_k|)^2+x^2]^{\frac{1+\alpha_0}{2}}}=\frac{C_1}{(t+|\operatorname{Im}w_k|)^{\alpha_0}}, \tag{3.13'}$$

а $C_1\in(0, +\infty)$ — постоянная. Поэтому

$$\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}I_{\alpha_0,k}(t)\,dt=C_2|\operatorname{Im}w_k|^{\alpha-\alpha_0},$$

где $C_2\in(0, +\infty)$ также постоянная. Следовательно

$$\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}\,\mathrm{L}(-t, B_{\alpha_0})\,dt\leqslant C_\alpha\,C_2\sum_k|\operatorname{Im}w_k|^{1+\alpha}<+\infty.$$

Отсюда и из (3.7) очевидно, что, $B_{\alpha_0}(w, \{w_k\})\in\mathrm{N}^m_{\alpha,0}$.

2°. Пусть $\beta>0$ любое. Тогда, в силу (3.1) и (3.13) — (3.13')

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t^\beta}\mathrm{L}(-t, B_\alpha)\,dt\leqslant C_\alpha C_1\sum_k|\operatorname{Im}w_k|^{1+\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t^\beta}\frac{dt}{(t+|\operatorname{Im}w_k|)^\alpha}\cdot$$

Далее, оценивая подынтегральную функцию последнего интеграла отдельно для $0<t<1$ и $1<t<+\infty$, приходим к неравенству

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t^{\gamma}}L(-t,B_\gamma)\,dt<C_\gamma C_1\sum_k|\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha}\left\{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\left|\log\frac{1}{|\operatorname{Im} w_k|}\right|\right\},$$

которое вместе с (3.7) обеспечивает включение $B_\alpha(w,\{w_k\})\in N^m_{\alpha,\beta}$.

Замечание. Утверждение 1° доказанной леммы вместе с леммой 2.1 устанавливают, что полной характеристикой плотности нулей и полюсов функций классов $N^m_{\alpha,\beta}$ $(0<\alpha<+\infty,\ 0\leqslant\beta\leqslant 1+\alpha)$ является условие (2.3).

Лемма 3.4. *При любом* $\alpha\,(0<\alpha<+\infty)$ *можно подобрать последовательность* $\{w_k\}_1^\infty\subset G^{(-)}$, *удовлетворяющую условию* (2.8), *такую, чтобы* $B_\alpha(w,\{w_k\}_1^\infty)\,\overline{\in}\,N^m_{\alpha,1+\alpha}$.

Доказательство. Пусть последовательность $\{w_k\}_1^\infty\equiv\{-ir_k\}_1^\infty$ $(0<r_k<r)$ лежит на мнимой оси и такова, что одновременно

$$\sum_{k=1}^\infty r_k^{1+\alpha}<+\infty,\ \text{но}\ \sum_{k=1}^\infty r_k^{1+\alpha}\log\frac{1}{r_k}=+\infty.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$G_\alpha(w)\equiv\frac{B_{\alpha+1}(w,\{w_k\})}{B_\alpha(w,\{w_k\})}\quad(w=re^{i\theta},\ -\pi<\theta<0).$$

Поскольку в силу рекуррентной формулы (3.2)

$$g_\alpha(w,w_k)\equiv\frac{a_{\alpha+1}(w,w_k)}{a_\alpha(w,w_k)}=\exp\left\{\frac{1}{1+\alpha}\left(\frac{2r_k}{iw-r_k}\right)^{1+\alpha}\right\},$$

то

$$\log|g_\alpha(re^{i\theta},-ir_k)|=\frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha}\,\frac{r_k^{1+\alpha}\cos\left[(1+\alpha)\operatorname{arctg}\left(\frac{r\cos\theta}{r|\sin\theta|+r_k}\right)\right]}{\left|re^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}+r_k\right|^{1+\alpha}}.$$

Поэтому справедливо также представление

$$\log|G_\alpha(re^{i\theta})|=\frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha}\int_{-1}^{0}\frac{|t|^{1+\alpha}\cos\left[(1+\alpha)\operatorname{arctg}\left(\frac{r\cos\theta}{r|\sin\theta|+|t|}\right)\right]}{\left|re^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}-t\right|^{1+\alpha}}\,dn(t),$$

где $n(t)$ — количество тех чисел r_k, для которых $-r_k<t\in(-1,0)$.

Заметим теперь, что

$$\cos\left[(1+\alpha)\operatorname{arctg}\left(\frac{r\cos\theta}{r|\sin\theta|+|t|}\right)\right]>\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{при}\ \left|\theta+\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\pi}{4(1+\alpha)}.$$

Следовательно, как нетрудно убедиться

$$I=\iint\limits_{G^{(-)}} \frac{|\mathrm{Im}\,\zeta|^{\alpha-1}}{1+|\mathrm{Im}\,\zeta|^{\alpha+1}}\log^{+}|G_\alpha(\zeta)|\,d\sigma(\zeta)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{2^\alpha}{1+\alpha}C_\alpha\int\limits_{-\pi/4(1+\alpha)}^{\pi/4(1+\alpha)}d\theta\int\limits_0^1 r^\alpha\left\{\int\limits_{-1}^{0}\frac{|t|^{1+\alpha}\,dn(t)}{|re^{i\theta}-t|^{1+\alpha}}\right\}dr,$$

где $C_\alpha=\min\left\{\left|\cos\frac{\pi}{4(1+\alpha)}\right|^{\alpha-1},\ 1\right\}$. Как нетрудно проверить, отсюда следует, что

$$I\geqslant\frac{\pi C_\alpha}{4(1+\alpha)^2}\int\limits_{-1}^{0}|t|^{1+\alpha}\log\frac{1}{|t|}\,dn(t)=+\infty.$$

Тем самым $G_\alpha(w)\overline{\in}\mathbf{N}^m_{\alpha,\,1+\alpha}$, и так как в силу утверждения 1° леммы 3.3 $B_{\alpha+1}(w,\ \{w_k\}_1^\infty)\in\mathbf{N}^m_{\alpha,\,1+\alpha}$, то $B_\alpha(w,\ \{w_k\}_1^\infty)\overline{\in}\mathbf{N}^m_{\alpha,\,1+\alpha}$.

3.3. Перейдем к доказательству основной теоремы параграфа о параметрических представлениях классов $\mathbf{N}^m_{\alpha,\,\beta}$.

Теорема 3.1. *Класс $\mathbf{N}^m_{\alpha,\,\beta}\,(0<\alpha<+\infty,\ 0\leqslant\beta<\alpha)$ совпадает с множеством функций, допускающих при каком-либо $\alpha_0>\alpha$ представление вида*

$$F(w)=C\,\frac{B_{\alpha_0}(w,\ \{a_\mu\})}{B_{\alpha_0}(w,\ \{b_\nu\})}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{\alpha_0\,2^{\alpha_0}}{\pi}\,e^{-i\frac{\pi}{2}(1+\alpha_0)}\iint\limits_{G^{(-)}}\frac{|\mathrm{Im}\,\zeta|^{\alpha_0-1}}{(w-\overline{\zeta})^{1+\alpha_0}}\,d\mu(\zeta)\right\};\ w\in G^{(-)}, \tag{3.14}$$

где B_α — сходящиеся произведения типа Бляшке с нулями в точках каких-либо последовательностей $\{a_\mu\}$, $\{b_\nu\}\subset G^{(-)}$, подчиненных условию (2.3). $C=\pm1$, а $\mu(\zeta)\equiv\mu_{\alpha_0}(\zeta)$*— комплексная функция ограниченной вариации на каждом компакте из $G^{(-)}$, подчиненная условию*

$$\iint\limits_{G^{(-)}}\frac{|\mathrm{Im}\,\zeta|^{\alpha-1}}{1+|\mathrm{Im}\,\zeta|^{\beta}}\,|d\mu(\zeta)|<+\infty. \tag{3.15}$$

Доказательство. Пусть $F(w)\in\mathbf{N}^m_{\alpha,\,\beta}\,(0<\alpha<+\infty,\ 0\leqslant\beta<\alpha)$. Тогда, в силу 2.1, нули $\{a_\mu\}$ и полюсы $\{b_\nu\}$ этой функции подчинены условию (2.3). Одновременно, сходится интеграл (2.4). Далее, ввиду включений (2.2) — (2.2′), $\mathbf{N}^m_{\alpha,\,\beta}\subseteq\mathbf{N}^m_{\alpha,\,1+\alpha}\subseteq\mathbf{N}^m_{\alpha_0,\,1+\alpha_0}\,(\alpha_0>\alpha)$, и поэтому, учитывая теорему 2.2 и замечание к лемме 2.7, приходим к заключению, что $F(w)$ допускает представление (3.14) — (3.15), каково бы ни было $\alpha_0>\alpha$, причем с $d\mu(\zeta)\equiv\log|F(\zeta)|\,d\sigma(\zeta)$.

Докажем теперь обратную часть теоремы. Для чего, во-первых заметим, что в силу утверждения 1° леммы 3.3 классу $\mathbf{N}^m_{\alpha,\,\beta}$ принадлежат произведения типа Бляшке B_α факторизации (3.14). Поэтому достаточно убедиться в том, что также

$$\varphi(w) \equiv \exp\left\{\frac{\alpha_0 2^{\alpha_0}}{\pi} \iint\limits_{G^{(-)}} \frac{|\operatorname{Im}\zeta|^{\alpha_0-1}}{[i(w-\bar{\zeta})]^{1+\alpha_0}} d\mu(\zeta)\right\} \in N^{\infty}_{\alpha,\beta}. \tag{3.16}$$

Записав неравенство

$$A = \iint\limits_{G^{(-)}} \frac{|\operatorname{Im} w|^{\alpha-1}}{1+|\operatorname{Im} w|^{\beta}} \log^{+}|\varphi(w)|\, d\sigma(w) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha_0 2^{\alpha_0}}{\pi} \iint\limits_{G^{(-)}} |\operatorname{Im}\zeta|^{\alpha_0-1} I(\alpha, \alpha_0, \beta, \zeta)\, |d\mu(\zeta)|, \tag{3.17}$$

где

$$I(\alpha, \alpha_0, \beta, \zeta) = \iint\limits_{G^{(-)}} \frac{|\operatorname{Im} w|^{\alpha-1}}{1+|\operatorname{Im} w|^{\beta}} \frac{d\sigma(w)}{|w-\bar{\zeta}|^{1+\alpha_0}}. \tag{3.17'}$$

Для оценки последнего интеграла заметим, что при любом $a > 0$ имеем

$$J(\alpha, \alpha_0, \beta, a) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}\,dt}{(1+t^{\beta})(t+a)^{\alpha_0}} \leqslant a^{\alpha-\alpha_0} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{1+x^{\alpha_0}} = C_1 a^{\alpha-\alpha_0}. \tag{3.18}$$

Далее, при $a > 1$, как нетрудно убедиться

$$\int_0^{a} \frac{t^{\alpha-1}\,dt}{(1+t^{\beta})(t+a)^{\alpha_0}} < \frac{a^{\alpha-\alpha_0-\beta}}{\alpha-\beta}$$

и, одновременно,

$$\int_a^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}\,dt}{(1+t^{\beta})(t+a)^{\alpha_0}} < \frac{a^{\alpha-\alpha_0-\beta}}{\alpha_0-\alpha+\beta}.$$

Поэтому, при $a > 1$ имеем

$$J(\alpha, \alpha_0, \beta, a) < \frac{\alpha_0}{(\alpha-\beta)(\alpha_0-\alpha+\beta)} a^{\alpha-\alpha_0-\beta} \equiv C_2 a^{\alpha-\alpha_0-\beta}.$$

В силу непрерывности функции $g(a) \equiv J(\alpha, \alpha_0, \beta, a)$ на $(0, +\infty)$ из последней оценки и из (3.18) заключаем, что

$$J(\alpha, \alpha_0, \beta, a) \leqslant C_3 \frac{a^{\alpha-\alpha_0}}{1+a^{\beta}} \quad (0 < a < +\infty), \tag{3.19}$$

где $C_3 \in (0, +\infty)$ — постоянная.

Вернемся к доказательству включения (3.16), или, что то же самое, доказательству ограниченности правой части (3.17). Очевидно, что если $\zeta = \xi + i\eta$ $(\eta < 0)$, то в силу последней оценки

$$I(\alpha, \alpha_0, \beta, \zeta) \leqslant C_4 \frac{|\eta|^{\alpha-\alpha_0}}{1+|\eta|^{\beta}},$$

где $C_4 \in (0, +\infty)$ — постоянная. Поэтому при некоторой постоянной $C_5 \in (0, +\infty)$ будем иметь

$$A \leqslant C_5 \iint\limits_{G^{(-)}} \frac{|\operatorname{Im}\zeta|^{\alpha-1}}{1+|\operatorname{Im}\zeta|^{\beta}}\,|d\mu(\zeta)| < +\infty.$$

3.4. Покажем, что классы $N^{m}_{\alpha,\beta}$ $(0<\alpha<+\infty)$ при $\alpha<\beta\leqslant 1+\alpha$ не имеют параметрических представлений вида (3.14)—(3.15). С этой целью для любых таких α, β и любого $\alpha_0>\alpha$ рассмотрим меру

$$d\mu_{\alpha_0}(\zeta) = C_{\alpha_0}\frac{|\eta|^{(\beta-\alpha)/2}}{1+\xi^2}\,d\xi d\eta\left(\zeta=\xi+i\eta,\ C_{\alpha_0}=\frac{2^{-\alpha_0}\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma\left(\alpha_0+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}\right).$$

Очевидно, что эта мера удовлетворяет условию (3.15). Докажем, что несмотря на это

$$F(w)\equiv\exp\left\{\frac{\alpha_0 2^{\alpha_0}}{\pi}\iint\limits_{G^{(-)}}\frac{|\operatorname{Im}\zeta|^{\alpha_0-1}}{[i(w-\overline{\zeta})]^{1+\alpha_0}}\,d\mu_{\alpha_0}(\zeta)\right\}\overline{\in} N^{m}_{\alpha,\beta}, \tag{3.20}$$

отметив, что интеграл в экспоненте абсолютно и равномерно сходится внутри $G^{(-)}$, и тем самым, функция

$$G(w)\equiv\frac{\alpha_0 2^{\alpha_0}}{\pi}\iint\limits_{G^{(-)}}\frac{|\operatorname{Im}\zeta|^{\alpha_0-1}}{[i(w-\overline{\zeta})]^{1+\alpha_0}}\,d\mu_{\alpha_0}(\zeta)$$

аналитична в $G^{(-)}$.

Как нетрудно видеть

$$G(w)=\frac{\alpha_0 2^{\alpha_0}}{\pi}C_{\alpha_0}\int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha_0+\frac{\beta-\alpha}{2}-1} I_{\alpha_0}(w-it)\,dt, \tag{3.21}$$

где

$$I_{\alpha_0}(w-it)\equiv\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi}{[i[(w-it)-\xi]]^{1+\alpha_0}(1+\xi^2)}.$$

Последний интеграл вычисляется стандартными методами теории вычетов. А именно, обозначив $w-it=s$ $(s\in G^{(-)})$, будем иметь

$$I_{\alpha_0}(s)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{[i(s-x)]^{1+\alpha_0}(1+x^2)}\equiv\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi_s(x)\,dx,$$

где функция $\Phi_s(z)=\{[i(s-z)]^{1+\alpha_0}(1+z^2)\}^{-1}$ аналитична в плоскости z с разрезом по лучу $\{z:\operatorname{Re}z=\operatorname{Re}s,\ \operatorname{Im}z\leqslant\operatorname{Im}s\}\subset G^{(-)}$ и имеет простые полюсы в точках $z=\pm i$. Далее, вычислив интеграл от этой функции по контуру $\Gamma_R=\{Re^{i\theta}:0<\theta<\pi\}\cup[-R,R]$ и устремив $R\to+\infty$, получаем

$$I_{\alpha_0}(s)=\pi(1+is)^{-1-\alpha_0}.$$

Подставим это последнее выражение в (3.21) и, воспользовавшись общеизвестной формулой для бэта-функции Эйлера, получим

$$G(w)=(1+iw)^{\frac{\beta-\alpha}{2}-1}.$$

Следовательно, при $w=u+iv\in G^{(-)}$ имеем

$$F(w)=\exp\left\{(1+iw)^{\frac{\beta-\alpha}{2}-1}\right\}$$

и

$$\log|F(w)|=|1+iw|^{\frac{\beta-\alpha}{2}-1}\cos\left[\left(1-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{v}{1+|v|}\right)\right].$$

При этом, поскольку $1/2\leqslant 1-(\beta-\alpha)/2<1$, то $\log|F(w)|>0$. Поэтому, как нетрудно убедиться, для любого $t<0$

$$\mathrm{L}(t,F)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\log^{+}|F(u+it)|\,du\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\cos\left[\left(1-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{[(1+|t|)^{2}+u^{2}]^{\frac{1}{2}-\frac{\beta-\alpha}{4}}}=+\infty,$$

и, тем самым, выполнено (3.20).

Таким образом, построен контрпример, показывающий, что классы $N^{m}_{\alpha,\beta}$ $(0<\alpha<+\infty)$ в случае, когда $\alpha<\beta\leqslant 1+\alpha$ не имеют параметрического представления вида (3.14)—(3.15), которое, как было установлено в теореме 3.1, имеет место, когда $0\leqslant\beta<\alpha$. Случай $\beta=\alpha$ остается открытым. Однако автор предполагает, что и в этом случае вопрос должен иметь отрицательный ответ.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 22. IV. 1986

Ա. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Ցուծիի անսահմանափակ բնութագրիչ ունեցող մերոմորֆ ֆունկցիաների դասերի պարամետրական ներկայացումներ *(ամփոփում)*

Հոդվածում Մ. Մ. Ջրբաշյանի 1945 թ. հայտնի արդյունքների [9] հիման վրա և արտապատկերմանը հաջորդող սահմանային անցման հատուկ մեթոդի կիրառման միջոցով ստացված են Բ. Յա. Լևինի տիպի նոր բանաձևեր և Ցուծիի տիպի նոր բնութագրիչներ։

Նույն ճանապարհով ստացված է վերը նշվածների հետ ասոցացված հետևյալ արդյունքը՝ $G^{(-)}=\{w:\mathrm{Im}\,w<0\}$ *կիսահարթությունում մերոմորֆ ֆունկցիաների Վ. Ի. Կռիլովի տիպի* $N^{m}_{\alpha,\beta}$ $(0<\alpha<+\infty,\ 0<\beta<1+\alpha)$ *դասերի կանոնական ֆակտորիզացիաները։ Պետք է նշել, որ եթե* $F(w)\in N^{m}_{\alpha,\beta}$ $(0<\alpha<+\infty,\ 0<\beta\leqslant 1+\alpha)$ *և* $\{b_\nu\}\subset G^{(-)}$ *-նրա բևեռներն են, ապա այդ ֆունկցիայի*

$$\mathrm{L}(t,F)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\log^{+}|F(u+it)|\,du+\sum_{\mathrm{Im}\,b_\nu<t}(|\mathrm{Im}\,b_\nu|-|t|)\quad(t<0)$$

Ցուծիի բնութագրիչը, ընդհանրապես ասած, կարող է լինել անսահմանափակ, քանի որ $N^{m}_{\alpha,\beta}$*-ը սահմանված է որպես* $G^{(-)}$*-ում մերոմորֆ այն ֆունկցիաների դասը, որոնց համար*

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{|t|^{\alpha-1}}{1+|t|^{\beta}} [\mathbf{L}(t, F) + \mathbf{L}(t, F^{-1})]\, dt < +\infty.$$

$\mathrm{N}^{m}_{\alpha,\beta}$ $(0 < \alpha < +\infty)$ դասերի համար, այն դեպքում, երբ $0 < \beta < \alpha$, ստացված են նաև պարամետրական ներկայացումներ։ Իսկ $\alpha < \beta < 1+\alpha$ դեպքի համար կառուցված է կոնտրօրինակ, որը ցույց է տալիս, որ այդ դասերը նույնատիպ պարամետրական ներկայացում չունեն։

A. M. DJRBASHIAN. *Parmetrical representations of some classes of meromorphic functions with unbounded Tsuji characteristics* (summary)

On the basis of M. M. Djrbashian's results new E. Ya. Levin type formulae are found and Tsuji type characteristics introduced.

Also the canonical factorizations of V. I. Krilov type classes $\mathrm{N}^{m}_{\alpha,\beta}$ $(0<\alpha<+\infty,\ 0 < \beta < 1 + \alpha)$ of meromorphic functions $F(w)$ in the lower half-plane $G^{(-)}$ are found They have unbounded Tsuji characteristics of the form

$$\mathbf{L}(t, F) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \log^{+} |F(u+it)|\, du + \sum_{\operatorname{Im} b_{\nu} < t} (|\operatorname{Im} b_{\nu}| - |t|) \quad (t < 0)$$

($\{b_{\nu}\} \subset G^{(-)}$ are the poles of $F(w)$ numbered according to their multiplicity). Note that the classes $\mathrm{N}^{m}_{\alpha,\beta}$ are the sets of those functions $F(w)$ meromorphic in $G^{(-)}$, for which

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{|t|^{\alpha-1}}{1+|t|^{\beta}} [\mathbf{L}(t, F) + \mathbf{L}(t, F^{-1})]\, dt < +\infty.$$

In the case $\beta = 0$ this condition coincides with the condition of boundedness of Tsuji type characteristics.

In the case $0 < \beta < \alpha$ the parametrical representations of the classes $\mathrm{N}^{m}_{\alpha,\beta}$ $(0 < \alpha < +\infty)$ are established. For $\alpha < \beta < 1 + \alpha$ an example is constructed which show that in this case these classes do not allow parametrical representations of the same type.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М., ГИТТЛ, 1941.
2. *Б. Я. Левин.* О функциях, голоморфных в полуплоскости, Труды Одесского державного ун-та, т. 3, 1941, 5—14.
3. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, М., ГИТТЛ, 1956.
4. *M. Tsuji.* On Borel's directions of meromorphic functions of finite order, Tôhoku Math. J., v. 2, № 2, 1950, 97—112.
5. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский.* Распределение значений мероморфных функций, М., «Наука», 1970.
6. *В. И. Крылов.* О функциях, регулярных в полуплоскости, Мат. сб., т. 6 (48), № 1, 1939, 95—138.
7. *М. М. Джрбашян.* О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН АрмССР, т. 3, № 1, 1945, 3—9.
8. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. ин-та матем и мех. АН АрмССР, вып. 2, 1948, 3—55.
9. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.

10. *M. Tsuji.* Potential theory in modern funclion theory, Tokyo, 1975.
11. *Ф. А. Шамоян.* Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIII, №№ 5—6, 1978. 405—422.
12. *Ф. А. Шамоян.* Факторизация, интегральные представления и идеалы аналитических функций, автореферат дис. на соискание уч. степ. доктора физ.-мат. наук, Ленинград. 1983.
13. *А. М. Джрбашян.* Соотношения равновесия и факторизационные теоремы для мероморфных в полуплоскости функций, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XXI. № 3, 1986. 213—279.
14. *А. М. Джрбашян.* Функции типа Бляшке для полуплоскости, ДАН СССР, 246, № 6, 1979, 1295—1298.
15. *А. М. Джрбашян.* Функции типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVIII, № 6, 1983, 409—440.
16. *А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян.* Построение и основные свойства одного семейства функций типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XV, № 6, 1980, 461—474.
17. *М. М. Джрбашян, А. Э. Джрбашян.* Интегральное представление некоторых классов аналитических в полуплоскости функций, ДАН СССР, 285, № 3, 1985, 547—550.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXII, № 5, 1987 Математика

УДК 519.218.5

Г. Ю. ПАНИНА

ВЫПУКЛЫЕ ТЕЛА И ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ В $\mathbf{R}^n$

В данной статье рассматривается следующая задача. Пусть K — выпуклое тело в $\mathbf{R}^n$, E — множество плоскостей размерности k в $\mathbf{R}^n$ $(1< k < n)$, μ — трансляционно-инвариантная мера на E. Пусть $[k] = \{e \in E : e \cap K \neq \varnothing\}$. Требуется вычислить $\mu([K])$ в терминах кривизны тела K.

Решение соответствующей задачи для случая $n = 3$, $k = 2$ было получено автором в [2], см. также [3].

Получена также формула для площади проекции тела на произвольную плоскость любой размерности в $\mathbf{R}^n$ (см. следствие 1).

Автор выражает искреннюю благодарность Р. В. Амбарцумяну за постоянное внимание.

§ 1. Многомерная веджевая плотность

Мера μ^*. Пусть E_0 — пространство плоскостей размерности k, проходящих через 0. Каждая k-мерная плоскость e однозначно задается расстоянием p (со знаком) от начала координат и параллельной e плоскостью $e_0 \in E_0$. Нетрудно показать, что если μ — трансляционно-инвариантная мера на E, то существует единственная мера μ^* на E, такая, что

$$d\mu(e) = d\mu^*(e_0) \times dp.$$

Внешние углы. Пусть $K \subset \mathbf{R}^k$ — выпуклый многогранник, Ω^{k-1} — единичная сфера в $\mathbf{R}^k$. Будем называть внешним углом многогранника K при его вершине A множество на Ω^{k-1} всех концов нормалей касательных гиперплоскостей к телу K, отложенных от начала координат. Это множество будем обозначать через $\angle A$. Очевидно, $\angle A$ является сферическим многогранником. Величиной $\angle A$ будем называть его сферическую площадь на Ω^{k-1} и обозначать $|\angle A|$.

Поскольку совокупность $\angle A_i$, где A_i пробегает множество всех вершин K, есть разбиение Ω^{k-1}, то

$$\sum_{A_i - \text{вершина } K} |\angle A_i| = S_{k-1} - \text{площадь } \Omega^{k-1}. \tag{1.1}$$

Меры $\mu([k])$ для многогранников. Пусть E — множество плоскостей размерности k в $\mathbf{R}^n$, μ — трансляционно-инвариантная локально финитная мера на E, $k \subset \mathbf{R}^n$ — выпуклый многогранник (вершины которого находятся в общем положении). Пусть

$$[k]=\{e\in E: e\cap k\neq\varnothing\}.$$

Тогда

$$\mu([k])=\int\limits_{[k]} d\mu(e)=\frac{1}{S_{k-1}}\int\limits_{[k]} S_{k-1}\, d\mu(e).$$

Каждая плоскость $e\in[k]$ дает при пересечении с k выпуклый многогранник размерности k.

Обозначим его внешние углы при вершинах через $\angle A_i(e\cap K)$ и применим (1.1)

$$\mu([K])=\frac{1}{S_{k-1}}\int\limits_{[K]}\sum_i|\angle A_i(e\cap K)|\, d\mu(e)=(*)$$

Заметим, что вершинами многогранника $e\cap k$ служат точки пересечения e с $(n-k)$-мерными ребрами K, а $(K-1)$-мерные грани, примыкяющие к вершинам $e\cap K$ суть пересечения с гиперплоскими ранями K, примыкающими к соответственному $(n-k)$-мерному ребруу (таких граней k штук).

Обозначим через ν_i $(n-k)$-мерные ребра K, а через w_i—совокупность, состоящую из ребра ν_i, примыкающих к нему k штук гиперплоских граней $e_{i_1},\cdots,e_{i_k}$ и выделенной части пространства между этими гиперплоскостями, содержащей K. Такие w_i мы будем называть веджами.

Для $e\in[K]$ через $\angle(e\cap w_i)$ обозначим внешний угол, соответствующий вершине $e\cap\nu_i$ многогранника $e\cap K$.

Тогда

$$\mu([K])=\frac{1}{S_{k-1}}\sum_{w_i\text{ —ВЕДЖ } K}\int\limits_{[\nu_i]}|\angle(e\cap w_i)|\, d\mu(e).$$

Зафиксируем теперь W и рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{[\nu]}|\angle(e\cap w)|\, d\mu(e)=(**).$$

Отметим, что (**) прямо пропорционально $|\nu|$-площади ребра ν; в силу трансляционной инвариантности меры μ. Обозначая через $\bar{\nu}$ параллельное ν ребро, имеющее единичную площадь, получаем

$$(**)=|\nu|\int\limits_{[\bar{\nu}]}|\angle(e\cap w)|\, d\mu(e):$$

Для веджа w построим единичную сферу Ω^{k-1}, лежащую в плоскости $\nu^\perp$ размерности k ($\nu^\perp$—ортогональная к ν плоскость). Рассмотрим множество $\Phi(w)\subset\Omega^{k-1}$ концов нормалей всех гиперплоскостей, которые содержат ν и не пересекаются с внутренностью K. Иными словами, $\Psi(w)$—внешний угол $K\cap\nu^\perp$ при вершине $\nu\cap\nu^\perp$.

Множество $\Phi(w)$ — сферический тетраэдр с вершинами, соответствующими нормалями гиперплоскостей, образующих ведж — $e_1, \ldots, e_k$.

Заметим, что интеграл

$$\int\limits_{[\nu]} |\angle e \cap W)|\, d\mu(e)$$

аддитивен по отношению к объединению $\Phi(W)$, т. е. если веджи W_1 и W_2 таковы, что они имеют общее с W ребро ν

$$\Phi(W_1) \cup \Phi(W_2) = \Phi(W),$$

$$\operatorname{Int} \Phi(W_1) \cap \operatorname{Int} \Phi(W_2) = \varnothing,$$

то

$$\int\limits_{[\nu]} |\angle (e \cap W_1)|\, d\mu(e) + \int\limits_{[\nu]} |\angle (e \cap W_2)|\, d\mu(e) = \int\limits_{[\nu]} |\angle (e \cap W)|\, d\mu(e),$$

поскольку подынтегральные выражения аддитивны.

Будем называть *флагом* пару $f =$ (плоскость размерности $n-k$, гиперплоскость, содержащая эту плоскость).

Обозначим: (ν) — плоскость, натянутая на ребро ν, $e(\omega)$ — гиперплоскость с нормалью $\omega \in \Omega^{k-1}$, $d\omega$—элемент площади на Ω^{k-1}.

Факт аддитивности позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 1.1. *Существует функция $\rho(f)$, заданная на множестве флагов, такая, что для любого веджа W*

$$\int\limits_{[\nu]} |\angle (e \cap W)|\, d\mu(e) = \int\limits_{\Phi(W)} \rho(f(\nu), e(\omega))\, d\omega.$$

При этом $\rho(f)$ вычисляется по мере μ следующим образом:

$$\rho(f((\nu), e_0)) = \int\limits_{E} \frac{\sin^2\alpha(\nu, e_0, e)}{\cos^{k-2}\beta(e_0, e)}\, d\mu^*(e),$$

где $\beta(e_0, e)$—угол между e_0 и e, $\alpha(\nu, e_0, e)$—угол между ν и $e_0 \cap e$.

Функцию ρ будем называть веджевой плотностью меры μ.

Доказательство. Найдем явное выражение для ρ. Пусть ведж $W(t)$ с фиксированным ребром ν единичной площади таков, что образы его граней на Ω^{k-1} образуют сферический тетраэдр с одной вершиной ω, не зависящей от t и с объемом, равным t. Тогда

$$\rho(f((\nu), e(\omega))) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int\limits_{[\nu]} |\angle (e \cap W(t))|\, d\mu(e) =$$

$$= \int\limits_{[\nu]} \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} |(e \cap W(t))|\, d\mu(e) = \int\limits_{E_1} \frac{\sin^2\alpha(\nu, e(\omega), e)}{\cos^{k-2}\beta(e(\omega), e)}\, d\mu^*(e).\right.$$

Вычисления, приводящие к последнему равенству, опущены.

Таким образом, также доказана

Теорема 1.2. *Для многогранника* $K \subset \mathbf{R}^n$

$$\mu([K]) = \frac{1}{S_{k-1}} \sum_{W_l \text{ — веджи } K} F(W_l),$$

где

$$F(W_l) = \int_{[\nu_l]} |\angle (e \cap W_l)| \, d\mu(e) = |\nu_l| \int_{\Phi(W_l)} \rho(f((\nu_l), e(\omega))) \, d\omega,$$

(W_l—ведж K с ребром ν_l).

§ 2. $\mu([K])$ для гладких тел

Пусть $K \subset \mathbf{R}^n$ — выпуклое тело класса C^2-гладкости с опорной функцией H. Пусть $s \in \partial K$, u—нормаль ∂K в точке s, ds—элемент площади на ∂K, $k_i(s)$—главные кривизны ∂K в точке s, $R_i(u) = \frac{1}{k(s)}$ —главные радиусы кривизны ∂K в точке s.

Для $(i_1, \cdots, i_{n-k}) \subset \{1, \cdots, n-1\}$ $f(s; i_1, \cdots, i_{n-k})$—флаг с гиперплоскостью с нормалью u и с ребром, натянутым на главные направления с номерами $i_1, \cdots, i_{n-k}$ в точке s.

Теорема 2.1. *Для выпуклого тела класса C^2-гладкости:*

$$\mu([K]) = \frac{1}{S_{k-1}} \int_{\partial K} \sum_{(i_1, \cdots, i_{n-k}) \subset \{1, \cdots, n-1\}} \overline{|\; j \in \{i_1, \cdots, i_{n-k}\} \;|} \, k_j(s) \, \rho(f(s; i_1, \cdots, i_{n-k})) \, ds =$$

$$= \frac{1}{S_{k-1}} \int_{\Omega^{n-1}} \sum_{(i_1, \cdots, i_{n_1-k})} \prod_{j=1}^{n-k} R_{i_j}(u) \, \rho(f(s; i_1, \cdots, i_{n-k})) \, du.$$

Доказательство. Докажем предварительно три леммы. С помощью леммы 2.1 мы получим приближение тела K такими гладкими телами, для которых теорема 2.1 выполнена с точностью до бесконечно малого слагаемого.

С помощью лемм 2.2 и 2.3 мы приведем выражение $\mu([K])$ к такому виду, что станет возможным предельный переход.

Лемма 2.1 *Для выпуклого тела K класса C^2-гладкости и для любого $m \in \mathbf{N}$ существует K_m-выпуклое тело в $\mathbf{R}^n$ такое, что*

1) $|H_m(\omega) - H(\omega)| < \frac{2}{m}$, *при* $\omega \in \Omega^{n-1}$,

2) *H_m непрерывно дифференцируема $2n$ раз,*

3)

$$\mu([K_m]) = \frac{1}{S_{k-1}} \int_{\partial K_m} \sum_{(i_1, \cdots, i_{n-k})} \overline{|\; j \in \{i_1, \cdots, i_{n-k}\} \;|} \, k_{m_j}(s_m) \, \rho(f) \, s_m;$$

$$i_1, \cdots, i_{n-k})) \, ds_m + o\left(\frac{1}{m}\right),$$

при $m \to \infty$.

Здесь и далее все обозначения с индексом m соответствуют телу K_m.

Доказательство. Для каждого $m \in \mathbf{N}$ приблизим K многогранником K_m' так, чтобы $|H(\omega) - H_m'(\omega)| < \dfrac{1}{2m}$.

Рассмотрим далее сумму по Минковскому многогранника K_m' и n-мерного шара радиуса $\dfrac{1}{m}$:

$$K_m = K_m' + \frac{1}{m} B_n.$$

Граница K_m разбивается на области следующим образом. Для каждой грани K_m' произвольной размерности найдем все точки границы K_m, касательные гиперплоскости к которым имеют те же нормали, что и при гиперплоскости, пересекающиеся с K_m' ровно по этой грани.

В малых окрестностях границ этими областями чуть сгладим ∂K_m, добившись дважды непрерывно дифференцируемой функции H_m'.

Пусть $k_{m_l}'(s_m')$, $f(s_m'; i_1, \cdots, i_{n-k})$ — обозначения для кривизны и флагов тела K_m', соответствующие обозначениям для K.

Рассмотрим теперь

$$\int\limits_{\partial K_m'} \sum_{\substack{(i_1, \cdots, i_{n-k}) \subseteq \\ \{1, \ldots, n-1\}}} \overline{\prod_{j \in \{i_1, \cdots, i_{n-k}\}}} k_{m_j}'(s_m') \, \rho(f(s_m'; i_1, \cdots, i_{n-k})) \, ds_m'.$$

Этот интеграл по области, соответствующей какой-нибудь грани, отличен от $O\left(\dfrac{1}{m}\right)$ при $m \to \infty$ тогда и только тогда, когда размерность этой грани равна $n-k$. Действительно, если размерность грани больше $n-k$, то произведение кривизн Πk_j всегда равно нулю, а если размерность меньше $n-k$, то мала область интегрирования $\Big($точнее: для l-мерной грани порядок интегрируемой функции — m^{n-k}, а размер области интегрирования порядка $\dfrac{1}{m^e}\Big)$.

Для $n-k$-мерной грани ν_{l_m} интеграл по соответствующей области $>\nu_{l_m}<$ равен, легко видеть,

$$\int\limits_{>\nu_{l_m}<} m^{n-k} \rho(f(s_m'; (\nu_{l_m}))) \, ds_m' = F(\omega_{l_m}),$$

где ω_{l_m} — ведж K_m' при ребре ν_{l_m}.

Далее, в пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций h на Ω^{n-1} введем следующую метрику:

$$\|h\| = \sup_{\Omega^{n-1}} h + \sup_{\Omega^{n-1},\, \alpha,\, \beta} h_{\alpha\beta},$$

где $h_{\alpha\beta}$—вторая производная h в направлениях α, β.
Как известно, $2n$ раз дифференцируемые функции h образуют всюду плотное множество относительно этой метрики.

Опорные функции выпуклых тел с ненулевыми кривизнами образуют открытое множество. Следовательно, $2n$ раз дифференцируемыми опорными функциями выпуклых тел с ненулевыми кривизнами можно приблизить опорную функцию любого выпуклого тела класса C^2-гладкости, в частности, H'_m.

Сделаем это приближение. Пусть для каждого m H_m — опорная функция K_m, дифференцируемая $2n$ раз.

$$\|H_m - H'_m\| < \frac{1}{2m}\ .$$

Тогда

$$|H_m(\omega) - H(\omega)| < \frac{2}{m}, \text{ при } \omega \in \Omega^{n-1},$$

$$\mu([K_m]) = O\left(\frac{1}{m}\right) + \mu([k'_m]) = O\left(\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{S_{k-1}} \sum_{w_{i_m} - \text{вершины } K'_m} F(w_{i_m}) =$$

$$= O\left(\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{S_{k-1}} \int\limits_{\partial K'_m} \sum_{(i_1, \dots, i_{n-k})} \overline{\prod_{j \in \{i_1, \dots, i_{n-k}\}}} k'_{j_m}(s'_m)\, \rho(f(s'_m; i_1, \cdots, i_{n-k}))\, ds'_m = O\left(\frac{1}{m}\right) +$$

$$+ \frac{1}{S_{k-1}} \int\limits_{\partial K_m} \sum_{(i_1, \dots, i_{n-k})} \overline{\prod_{j \in \{i_1, \dots, i_{n-k}\}}} k_{j_m}(s_m)\, \rho(f(s_m; i_1, \cdots, i_{n-k}))\, ds_m.$$

Лемма 2.1 доказана.

Пусть для тела K с опорной функцией H $R_i = 1/k_i$—главные радиусы кривизны ∂K в точке s. $\{v_i\}_{i=1}^{n-1}$— ортонормированный базис касательной гиперплоскости к ∂K в точке s, соответствующий главным направлениям.

Как известно, $R_i(s) = H(s) + H'_i(s)$, где $H'_i(s)$ — вторая производная H в точке s в направлении v_i.

Пусть ν' — произвольная $(n—k)$-мерная плоскость, лежащая в касательной гиперплоскости в точке s; $x_1, \dots, x_{n-k}$ — декартова система координат в ν'.

Обозначим

$$|H|(\nu')=\det\begin{pmatrix} H+H_{x_1}^{2} & H_{x_1x_2} & \cdots & H_{x_1x_{n-k}} \\ \vdots & & & \\ H_{x_{n-k}x_1} & \cdot & \cdot & H+H_{x_{n-k}}^{2}\end{pmatrix}.$$

Пусть $\nu(i_1,\cdots,i_{n-k})$ — плоскость, натянутая на вектора $v_{i_1},\cdots,v_{i_{n-k}}$. Имеет место

Лемма 2.2

$$|H|(\nu')=\sum_{\substack{(i_1,\cdots i_{n-k})\subset\\ \subset\{1,\cdots,n-1\}}} H(\nu(i_1,\cdots,i_{n-k}))\cos^2(\nu',\nu(i_1,\cdots,i_{n-k})).$$

Доказательство. В силу аддитивности достаточно рассмотреть случай

$$R_{n-k+1},\cdots,R_{n-1}=0.$$

Обозначим через $\bar v_i$ проекции v_i на ν'. На ν' в базисе $\{\bar v_i\}_{i=1}^{n-k}$ матрица для производных H выглядит так:

$$\begin{pmatrix} R_1 & 0 & \cdot\cdot\cdot & 0 \\ 0 & R_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdot\cdot\cdot & R_{n-k}\end{pmatrix}.$$

Для вычисления $|H|(\nu')$ теперь надо перейти к ортонормированной системе координат в ν'. При этом определитель этой матрицы умножится на квадрат определителя матрицы перехода к ортонормированной системе координат, т. е. на $\cos^2(\nu',\nu(1,\dots,n-k))$. Получим

$$|H|(\nu')=R_1\cdots R_{n-k}\cos^2(\nu',\nu(1,\cdots,n-k)),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2.3. *Для тела K класса C^2-гладкости с ненулевыми кривизнами существуют такие константы $A\neq 0$, D, зависящие лишь от n и k, что для фиксированного $s\in dK$*

$$\sum_{\substack{(i_1,\cdots i_{n-k})\subset\\ \subset\{1,\cdots,n-1\}}} |H|(i_1,\cdots,i_{n-k})\,\rho(f(s;i_1,\cdots,i_{n-k}))=$$

$$=\frac{1}{A}\int\limits_{E_0}\rho(f(s,\nu'))\,|H|(\nu')d\nu'-D\int\limits_{E_0}\frac{d\mu^k(e)}{\cos^{k-2}(e,\widehat{\ }s)}R_1,\cdots,R_{n-1},$$

где интегрирование в первом интеграле ведется по множеству $(n-k)$-мерных плоскостей, проходящих через начало координат и лежащих в касательной гиперплоскости к телу K в точке s. $d\nu'$ — элемент стандартной инвариантной меры на этом множестве (см. [1]).

Доказательство. Зафиксируем $e\in E$. Пусть ν — одна из $(n-k)$-мерных плоскостей, натянутая на главные направления ∂K в фиксированной точке s. Обозначим касательную гиперплоскость к ∂K через (s).

Пусть α—угол между ν и $(s)\cap e$, α'—угол между ν' и $(s)\cap e$, ε—угол между ν и ν', $v_1, \cdots, v_{n-k}$—ортонормированный базис ν. $v_1', \cdots, v_{n-k}'$—ортонормированный базис ν', $v_1', \cdots, v_{n-1}'$—ортонормированный базис (s), ε_{ij}—угол между v_i и v_j'. α_i—угол между v_i' и $(s)\cap e$, α_j''—угол между v_i' и $(s)\cap e$, φ_{ij}—угол между проекциями v_i и v_j на $(s)\cap e$, ψ_{ij}—угол между v_i' и трехмерной плоскостью P_{ij}, содержащей вектора v_i, прокцию v_i на $(s)\cap e$ и проекцию v_j' на $(s)\cap e$. α_{ij}''—угол между проекцией v_j' на P_{ij} и проекцией v_j' на $(s)\cap e$.

На рисунке 2.1 все эти углы изображены на сфере.

Нам потребуются следующие соотношения:

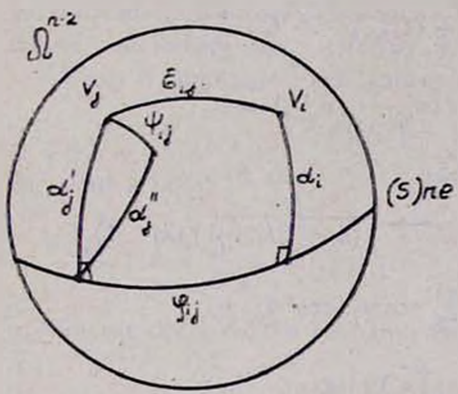

Рис. 2.1

$$\sum_{i=1}^{n-k} \cos^2\alpha_i = \cos^2\alpha, \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n-k} \cos^2\alpha_j' = \cos^2\alpha', \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \cos^2\alpha_j' = k-1, \tag{2.3}$$

$$\sum_{i,\, j\in\{1,\cdots,\, n-k\}} \cos^2\varepsilon_{ij} = \cos^2\varepsilon + \overline{n-2k+1}, \tag{2.4}$$

Здесь $\bar{a} = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$\sum_{i=1}^{n-k} \sum_{j=1}^{n-1} \cos^2\varepsilon_{ij} = n-k, \tag{2.5}$$

$$\cos^2\varepsilon_{ij} = \cos^2\psi_{ij} + (\sin\alpha \sin\alpha_j'' + \cos\varphi_{ij} \cos\alpha_i \cos\alpha_j'')^2. \tag{2.6}$$

Пусть далее $(m_1, \cdots, m_{n-k}) \subset \{1, \cdots, n-1\}$. Через $\nu'(m_1, \cdots, m_{n-k})$ обозначим $n-k$-мерную плоскость, натянутую на $\{v_{m_i}\}$. Пусть. $\alpha'(m_1, \cdots, m_{n-k})$ и $\varepsilon(m_1, \cdots, m_{n-k})$—углы, образованные $\nu'(m_1, \cdots, m_{n-k})$ с $(s)\cap e$ и ν соответственно.

Таким образом, с каждым ортонормированным базисом $v_1' \cdots v_{n-1}'$ гиперплоскости (s) мы связали C_{n-1}^{n-k} плоскостей $\nu'(m_1, \cdots, m_{n-k})$ для всех наборов индексов (m_i). Вместо того, чтобы интегрировать по всем положениям ν', будем интегрировать по инвариантной мере на множестве всех ортонормированых базисов (s) (такая мера существует и единственна, см. [1], ее мы обозначим через $d(v_1', \cdots, v_{n-1}')$) сумму значений подынтегральной функции взятых для всех связанных с базисом $v_1', \cdots, v_{n-1}'$.

Проделаем это.

$$\int \cos^2\varepsilon \sin^2\alpha' \, d\nu' =$$

(с—некоторая константа)

$$= C\int \sum_{\substack{(m_1,\cdots,m_{n-k})\subset\\ \{1,\cdots,n-1\}}} \cos^2\varepsilon(m_1,\cdots,m_{n-k})\sin^2\alpha'(m_1,\cdots,m_{n-k})\,d(v_1',\ldots,v_{n-1}')=$$

представим $\cos^2\varepsilon$ и $\sin^2\alpha'$ в виде сумм (см. (2.4), (2.2))

$$= C\int \sum_{(m_1,\cdots,m_{n-k})} \left(\sum_{i,j}^{n-k} \cos^2\varepsilon_{im_i} - \overline{(n-2k+1)}\right)\left(1-\sum_{l=1}^{n-k}\cos^2\alpha'_{m_l}\right)\times$$

раскроем скобки

$$\times\, d(v_1',\cdots,v_{n-1}') = C\int\Big[-C_{n-1}^{n-k}\overline{(n-2k+1)}+$$

$$+C_{n-2}^{n-k-1}\overline{(n-2k+1)}\sum_{e}\cos^2\alpha_e'+C_{n-2}^{n-k-1}\sum_{i,j}\cos^2\varepsilon_{ij}+$$

$$+C_{n-3}^{n-k-2}\sum_{i,j,e}\cos^2\varepsilon_{ij}\cos^2\alpha_e'+(C_{n-2}^{n-k-1}-C_{n-3}^{n-k-2})\times$$

$$\times\sum_{i,j}\cos^2\varepsilon_{ij}\cos^2\alpha_j'\Big]\,d(v_1',\cdots,v_{n-1}')=$$

воспользуемся (2.3), (2.6) и (2.5)

$$= C\int\Big[-C_{n-1}^{n-k}\overline{(n-2k+1)}+C_{n-2}^{n-k-1}\overline{(n-2k+1)}(k-1)+$$

$$+(C_{n-2}^{n-k-1}-C_{n-3}^{n-k-2})\sum_{i,j}\cos^2\alpha_j'(\cos^2\psi_{ij}+$$

$$+(\sin\alpha_i\sin\alpha_j'+\cos\varphi_{ij}\cos\alpha_i\cos\alpha_j')^2)\Big]\,d(v_1',\cdots,v_{n-1}')=$$

сумму постоянных членов обозначим для краткости через $C(n,k)$

$$= C\int\Big[C(n,k)+(C_{n-2}^{n-k-1}-C_{n-3}^{n-k-2})\sum_{i,j}(\cos^2\alpha_j'\cos\varphi_{ij}+$$

$$+\cos^2\alpha_j'\sin^2\alpha_i\sin^2\alpha_j'+\cos^2\alpha_j'\cos^2\varphi_{ij}\cos^2\alpha_i\cos^2\alpha_j')\Big]\,d(v_1',\cdots,v_{n-1}')=$$

Произведем интегрирование. Получим выражение следующего вида, где A, B, A', B'—постоянные, зависящие лишь от n и k. Их точные значения нам не нужны, хотя их можно вычислить.

$$= A'\sum_{i}\sin^2\alpha_i+B' = A\sin^2\alpha+B,$$

Итак,

$$\sin^2\alpha(\nu)=\frac{1}{A}\int\cos^2\varepsilon\sin\alpha'\,d\nu'-\frac{B}{A},$$

откуда следует

$$\frac{\sin^2\alpha(\nu)}{\cos^{k-2}(e,\widehat{\ }(s))}=\frac{1}{A}\int\frac{\sin^2\alpha'\cos^2\varepsilon}{\cos^{k-2}(e,\widehat{\ }(s))}\,d\nu'-\frac{B}{A}\int\frac{1}{\cos^{k-2}(e,\widehat{\ }(s))}$$

Проинтегрируем по $d\mu^*(e)$, получим

$$\rho(f(s,\nu))=\frac{1}{A}\int\cos^2\varepsilon(\nu,\widehat{\ }\nu')\,\rho(f(s,\nu'))\,d\nu'-\frac{B}{A}\int\frac{d\mu^*(e)}{\cos^{k-2}(e,\widehat{\ }(s))}.$$

Запишем это равенство для всех ν — $(n-k)$-мерных плоскостей, натянутых на главные направлении ∂K в точке s, умножим это равенство на $|H|(\nu)$ и просуммируем по всем ν. При этом воспользуемся леммой 2.2. Получим

$$\sum_{(i_1,\dots,i_{n-k})} |H|(i_1,\cdots,i_{n-k})\,\rho(f(s;i_1,\cdots,i_{n-k}))=$$

$$=\frac{1}{A}\int\rho(f(s,\nu'))\,|H|(\nu')\,d\nu'-\frac{B}{A}\int\frac{d\mu^*(e)}{\cos^{k-2}(e,\widehat{\ }(s))}R_1\cdots R_{n-1},$$

что и требовалось доказать.

Теперь приступим к доказательству самой теоремы 2.1. Предположим, что веджевая плотность ρ $2n$ раз непрерывно дифференцируема (для этого достаточно, чтобы мера μ обладала $2n$ раз дифференцируемой плотностью). Будем доказывать нашу теорему пока только для таких гладких ρ.

Тело K приблизим последовательностью тел K_m из леммы 2.1. Тогда

$$\mu([K])=\lim_{m\to\infty}\mu([K_m])=$$

по лемме 2.1.

$$=\frac{1}{S_{k-1}}\lim_{m\to\infty}\int\limits_{\partial K_m}\sum_{(i_1,\dots,i_{n-k})}\prod_{j\in\{i_e\}}k_{i_m}(s_m)\,\rho(f(s_m;i,\cdots,i_{n-k}))\,ds_m=$$

перейдем к сферическим координатам

$$=\frac{1}{S_{k-1}}\lim_{m\to\infty}\int\limits_{\Omega^{n-1}}\sum_{(i_1,\dots,i_{n-k})}\prod_{j=1}^{n-k}R_{i_j}\,m(\omega)\,\rho(f(\omega;i_1,\cdots,i_{n-k}))\,d\omega=$$

воспользуемся леммой 2.2.

$$=\frac{1}{S_{k-1}}\lim_{m\to\infty}\Bigg[\frac{1}{A}\int\int\rho(f(\omega,\nu'))\,|H_m|(\nu')\,d\nu'\,d\omega-$$

$$-D\int\int\frac{d\mu^*(e)}{\cos^{k-1}(e,\widehat{\ }\omega)}R_{1_m}\cdots R_{n-1_m}\,d\omega\Bigg]=(*)$$

$R_{1_m}\cdots R_{n-1_m}$ и $|H|(\nu')$ есть по определению суммы произведений $n-1$ штук линейных дифференциальных операторов от H_m. Нам извсётно (см. лемму 2.1), что имеет место равномерная сходимость $H_m\rightrightarrows H$ на Ω^{n-1}.

Докажем, что из этого следует слабая сходимость $|H_m|$ к $|H|$, а именно:
для $2n$ раз дифференцируемых H_m и f верно

$$\int|H_m|f\to\int|H|f;\quad\text{при}\quad m\to\infty;$$

Если A — линейный дифференциальный оператор, то

$$\int A(H_m)f=\int H_mA^*(f)\xrightarrow{m\to\infty}\int HA^*(f)=\int A(H)f$$

(здесь A^* — сопряженный к A оператор).

Произведения линейных дифференциальных операторов от функции H_m тоже слабо сходятся к соответствующему оператору, взятому от H. Докажем это по индукции.

Пусть $A_1, \ldots, A_p, A_{p+1}$ — линейные дифференциальные операторы. Пусть требуемое доказано для $A_1, \ldots, A_p$.

Тогда

$$\int A_1(H_m)\cdots A_{p+1}(H_m)f=\int H_m A^*_{p+1}[A_1(H_m)\cdots A_p(H_m)f]-$$

$$-\int H A^*_{p+1}[A_1(H_m)\cdots A_p(H_m)f]+\int H A^*_{p+1}[A_1(H_m)\cdots A_p(H_m)f]\to$$

$$\xrightarrow{m\to\infty} 0+\int A_1(H)\cdots A_{p+1}(H)f.$$

Слабая сходимость $|H_m|(\nu')$ и $R_{1_m}\cdots R_{n-1_m}$ доказана.

Значит $(^*)=$

$$=\frac{1}{S_{k-1}}\left[\frac{1}{A}\int\int\rho(f(\omega,\nu'))\,|H|(\nu')\,d\nu'\,d\omega-D\times\right.$$

$$\left.\times\int\int\frac{d\mu^*(e)}{\cos^{k-2}(e,\hat{\ }\omega)}R_1\cdots R_{n-1}\,d\omega\right]=$$

$$=\frac{1}{S_{k-1}}\int\limits_{\Omega^{n-1}}\sum_{(i_1,\cdots,i_{n-k})}\prod_{j=1}^{n-k}R_{i_j}(\omega)\,\rho(f(\omega;\,i_1,\cdots,i_{n-k}))\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{S_{k-1}}\int\limits_{\partial K}\sum_{(i_1,\cdots,i_{n-k})}\prod_{j\in\{i_e\}}k_j(s)\,\rho(f(s;\,i_1,\cdots,i_{n-k}))\,ds.$$

Таким образом, теорема доказана для гладких функций ρ. Но меры, порождающие гладкие веждевые плотности ρ, образуют плотное множество в слабой топологии среди всех мер. А значит, приближая меру μ гладкими, мы получим утверждение теоремы 2.1 для произвольных мер.

Следствие 1. Пусть мера μ такова, что $\mu^*=\delta_\xi$ — дельта-мера, сосредоточенная на k-мерной плоскости $\xi\in E_0$.

Тогда $\mu([K])$ есть площадь $S_\xi(K)$ проекции K на $n-k$-мерную плоскость, ортогональную ξ.

$$S_\xi(K)=\frac{1}{S_{k-1}}\int\limits_{\Omega^{n-1}}\sum_{(i_1,\cdots,i_{n-k})}\prod_{j=1}^{n-k}R_{i_j}(\omega)\,\frac{\sin^2(\xi\cap\omega;\hat{\ }\nu(i_1,\cdots,i_{n-k}))}{\cos^{k-2}((\xi,\hat{\ }\omega)}\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{S_{k-1}}\int\limits_{\partial K}\sum_{(i_1,\cdots,i_{n-k})}\prod_{j\in\{i_e\}}k_{i_j}(s)\,\frac{\sin^2(\xi\cap(s);\hat{\ }\nu(i_1,\cdots,i_{n-k}))}{\cos^{k-2}((s),\hat{\ }\xi)}\,ds.$$

В случае $k=2$ $\cos^{k-2}(\xi,\hat{\ }(s))=1$, и мы получаем $\sin^2$-представление площади проекции тела K на $(n-2)$-мерную плоскость.

Следствие 2. Если $\mu=\mu_{\text{инв}}$ — инвариантная мера на E, то $\rho(f)\equiv\rho$ — константа и

$$\mu_{\text{инв}}([K]) = \frac{\rho}{S_{k-1}} \int\limits_{\partial K} \Phi^{n-k-1}(k_1, \cdots, k_{n-1})\, ds,$$

где Φ^{n-k-1} — симметрический многочлен степени $n-k-1$.

Ленинградское отделение МИАН СССР
им. В. А. Стеклова

Поступила 22. VII. 1986

Գ. Յ. ՊԱՆԻՆԱ, Ուռուցիկ մարմինները և տեղափոխելի ինվարիանտ չափերը R^n-ում *(ամփոփում)*

Այս աշխատանքում հաշվարկված է R^n-տարածության k-չափանի այնպիսի հարթությունների բազմության տեղափոխելի-ինվարիանտ չափը, որոնք հատում են K ուռուցիկ մարմինը։
Այդ չափը արտահայտված է K-ի սահմանի կորության և այսպես կոչված վերջային խաչաձև չափի տերմիններով։

G. Y. PANINA. *Convex bodies and translation-invariant measures in R^n* (summary)

Translation invariant measures in the space of k-dimensional planes in R^n are considered. Measures of the set of planes intersecting a convex body K are calculated in terms of surface curvature of K and the so-called wedge densities.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Сантало.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности, «Наука», 1983.
2. *Г. Ю. Панина.* Выпуклые тела и трансляционно-инвариантные меры, в кн. Зап. науч. семинаров Ленинград. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1986.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 5, 1987 Математика

УДК 517.53

А. Б. АЛЕКСАНДРОВ

КРАТНОСТЬ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВНУТРЕННИХ ФУНКЦИЙ

Голоморфная в единичном круге $\mathbf{D}$ функция I называется *внутренней*, если $|I| \leqslant 1$ всюду и $|\lim_{r \to 1} I(r\zeta)| = 1$ почти всюду на единичной окружности $\mathbf{T}$. Если функция I непрерывна вплоть до границы круга $\mathbf{D}$, то (как хорошо известно) I есть конечное произведение Бляшке, т. е.

$$I(z) = \xi \prod_{j=1}^{n} \frac{a_j - z}{1 - \bar{a}_j z},$$

где $\xi \in \mathbf{T}$, $a_j \in \mathbf{D}$. В этом случае легко показать, что $\operatorname{card}(I^{-1}(\zeta)) = n$ для всех $\zeta \in \mathbf{T}$ $(n \geqslant 1)$. Таким образом, кратность каждого граничного значения конечного произведения Бляшке I равна n $(n \geqslant 1)$. В этой работе мы введем понятие кратности граничного значения для произвольной внутренней функции. Мы увидим, что если внутренняя функция I не является конечным произведением Бляшке, т. е. имеет особенности на окружности $\mathbf{T}$, то каждое значение ζ, $\zeta \in \mathbf{T}$, функция I принимает (в некотором смысле) счетное или континуальное число раз. Хорошо известно, что в этом случае функция I почти каждое значение w, $w \in \mathbf{D}$, принимает счетное число раз (см., например, [1]). Оказывается, что аналогичным свойством*) для своих граничных значений функция I обладает, только если её производная I' имеет конечные угловые граничные значения почти всюду на окружности $\mathbf{T}$.

Аппарат, который мы используем для введения понятия кратности граничного значения внутренней функции, оказывается полезным и в других вопросах граничного поведения внутренних функций. Так, например, с его помощью мы доказываем, что для любой внутренней функции I кривая $\{I(r\zeta)\}_{0<r<1}$ не может «сильно» касаться* окружности $\mathbf{T}$.

На протяжении всей статьи буква I будет обозначать аналитическую в единичном круге $\mathbf{D}$ функцию такую, что $I(\mathbf{D}) \subset \mathbf{D}$. Граничные значения функции I, которые существуют почти всюду на $\mathbf{T}$ в силу теоремы П. Фату (см., например, [1] или [2]), мы будем обозначать той же буквой I. С каждым числом $\alpha \in \mathbf{T}$ свяжем конечную положительную борелевскую меру τ_α (см., например, [3], стр. 270) на окружности $\mathbf{T}$, однозначно определяемую равенством

---

* Точные формулировки приведены ниже (теоремы 1 и 2).

$$\operatorname{Re}\frac{\alpha+I(z)}{\alpha-I(z)}=\int\limits_{T}\operatorname{Re}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\tau_{\alpha}(\zeta)\quad(z\in D).$$

Ясно, что отображение $\alpha\to\tau_\alpha$ действует непрерывно из окружности T в пространство всех конечных борелевских* мер $M(T)$, снабжённое топологией $\sigma(M(T), C(T))$, где $C(T)$ — пространство всех непрерывных на окружности T функций. Каждая мера τ_α обладает лебеговским разложением

$$\tau_\alpha=\sigma_\alpha+h_\alpha\cdot m,$$

где σ_α — сингулярная мера, $h_\alpha\in L^1=L^1(T)$, а m — нормированная мера Лебега на T. Легко видеть, что $h_\alpha=\operatorname{Re}\frac{\alpha+I}{\alpha-I}$ почти всюду на T. Положим $\sum=\{\zeta\in T:|I(\zeta)|=1\}$. Множество $\sum$ определяется с точностью до множества нулевой меры (mod 0). Символом 1_E будем обозначать характеристическую функцию множества E.

Пользуясь случаем, автор выражает благодарность С. В. Хрущеву за полезные обсуждения.

1. Все основные результаты статьи основаны на следующем простом утверждении.

Предложение 1. *Равенства*

$$m=\int\limits_{T}\tau_\alpha\,dm(\alpha),\tag{1}$$

$$1_\Sigma\cdot m=\int\limits_{T}\sigma_\alpha\,dm(\alpha)\tag{2}$$

имеют место в следующем слабом смысле: если f — суммируемая по мере Лебега m функция, то она же суммируема по мерам σ_α, τ_α при почти всех $\alpha\in T$ и

$$\int\limits_{T}f\,dm=\int\limits_{T}\Big(\int\limits_{T}f\,d\tau_\alpha\Big)\,dm(\alpha),\tag{1'}$$

$$\int\limits_{\Sigma}f\,dm=\int\limits_{T}\Big(\int\limits_{T}f\,d\sigma_\alpha\Big)dm(\alpha).\tag{2'}$$

Доказательство. Легко проверить следующее равенство

$$\int\limits_{T}z^{-n}\,d\tau_\alpha(z)=\begin{cases}\sum\limits_{k>0}\bar\alpha^{k}\int\limits_{T}I^{k}(z)\,z^{-n}\,dm(z), & n>1\\[2ex] \operatorname{Re}\dfrac{\alpha+I(0)}{\alpha-I(0)}, & n=0.\end{cases}$$

Теперь ясно, что

$$\int\limits_{T}\Big(\int\limits_{T}z^{-n}\,d\tau_\alpha(z)\Big)dm(\alpha)=\int\limits_{T}z^{-n}\,dm(z)\tag{1''}$$

* В дальнейшем каждую комплексную меру $\mu\in M(T)$ будем считать пополненной.

для всех $n \geqslant 0$. Поскольку $z^n = \overline{z^{-n}}$ всюду на $\mathbf{T}$, равенство (1″) имеет место для всех целых n. Отсюда вытекает равенство (1′) для всех $f \in C(\mathbf{T})$. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла позволяет распространить равенство (1′) на все ограниченные борелевские функции. Чтобы доказать равенство (1′) в полном объёме, осталось проверить, что если E—измеримое по Лебегу множество, $E \subset \mathbf{T}$, $mE = 0$, то множество E измеримо по мере τ_α и $\tau_\alpha E = 0$ при почти всех $\alpha \in \mathbf{T}$. Для этого рассмотрим борелевское множество $\widetilde{E}$ такое, что $\widetilde{E} \supset E$ и $m\widetilde{E} = 0$. Тогда равенство (1′) для функции $1_{\widetilde{E}}$ влечёт: $\tau_\alpha(\widetilde{E}) = 0$ при почти всех $\alpha \in \mathbf{T}$, откуда $\tau_\alpha E = 0$ при почти всех $\alpha \in \mathbf{T}$. Докажем теперь равенство (2′). Имеем

$$\int\left(\int f\, d\sigma_\alpha\right) dm(\alpha) = \int\left(\int f\, d\tau_\alpha\right) dm(\alpha) - \int\left(\int f \operatorname{Re}\frac{\alpha + I}{\alpha - I}\, dm\right) dm(\alpha) =$$

$$= \int f\, dm - \int f\left(\int \operatorname{Re}\frac{\alpha + I}{\alpha - I}\, dm(\alpha)\right) dm = \int_\Sigma f\, dm.$$

2. Сделаем несколько замечаний по поводу случая, когда I—внутренняя функция, $I(0) = 0$. В этом случае $\sigma_\alpha = \tau_\alpha$—вероятностная мера при всех $\alpha \in \mathbf{T}$. Рассмотрим оператор $T: L^1 \to L^1$

$$(Tf)(\alpha) = \int f\, d\sigma_\alpha.$$

Ясно, что T—абсолютное сжатие, т. е. оператор T является сжатием в пространствах L^1 и L^∞, а значит, и во всех пространствах L^p с $p \in [1, +\infty]$.

Пусть $\mathbf{F}$—наименьшая σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств окружности $\mathbf{T}$ (содержащая все множества нулевой меры Лебега), относительно которой измерима функция I. Отметим, что $(Tf)(I)$ есть условное математическое ожидание случайной величины $f \in L^1$ относительно σ-алгебры $\mathbf{E}$, т. е.

$$\int_\Delta (Tf)(I)\, dm = \int_\Delta f\, dm$$

для любого $\mathbf{F}$-измеримого множества Δ.

Оператор T переводит тригонометрические полиномы степени не выше n в тригонометрические полиномы степени не выше n. Следовательно, оператор T действует во всяком пространстве функций, допускающем описание в терминах скорости приближения в L^p-метрике $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ тригонометрическими многочленами степени не выше n. В частности, $T(B^s_{pq}) \subset B^s_{pq}$ $(p \geqslant 1,\ q > 0, s > 0)$. Здесь B^s_{pq} обозначает класс О. В. Бесова (см., например, [4]).

Кроме того, оператор T рациональные функции с полюсами в $r\mathbf{D}$ (соотв., в $\hat{\mathbf{C}} \setminus \frac{1}{r}\mathbf{D}$) переводит в рациональные функции с полюсами в $r\mathrm{D}$ $\left(\text{соотв., в } \hat{\mathbf{C}} \setminus \frac{1}{r}\mathrm{D}\right)$ при всех $r \in (0, 1)$.

Отметим еще, что оператор T коммутирует с проектором М. Рисса. Отсюда и из включений $TL^\infty \subset L^\infty$, $TC \subset C$ вытекает, что $T(BMO) \subset BMO$, $T(VMO) \subset VMO$. Здесь BMO (соотв. VMO) обозначает пространство всех функций с ограниченным (исчезающим) средним колебанием. Точное определение пространств BMO и VMO тоже можно найти в обзоре [4].

3. Пусть $\zeta \in \mathrm{T}$ и $r \in (0, 1)$. Обозначим через $\Gamma(\zeta, r)$ внутренность выпуклой оболочки точки ζ и круга $r\mathrm{D}$, а через $K(\zeta, r)$—открытый круг радиуса r, касающийся окружности T в точке ζ.

Пусть f—отображение из круга D в хаусдорфово пространство X. Говорят, что отображение f имеет угловой предел $x \in X$ в точке $\zeta \in \mathrm{T}$, если $\lim\limits_{\zeta} f | \Gamma(\zeta, r) = x$ для всех $r \in (0, 1)$. В этом случае мы будем писать $\Gamma\text{—}\lim\limits_{\zeta} f = x$. Хорошо известная теорема П. Фату (см. [1] и [2]) утверждает, что любая ограниченная аналитическая в D функция имеет угловые пределы почти всюду на T. Мы покажем, что для аналитических в D функций f таких, что $f(\mathrm{D}) \subset \mathrm{D}$, имеет место более сильное утверждение. Обозначим через B замкнутый единичный круг ($B = \overline{\mathrm{D}}$), снабженный следующей усиленной топологией U. Множество $U \subset B$ назовем открытым ($u \in \mathrm{U}$), если пересечение $U \cap \mathrm{D}$ открыто в обычном смысле и для любой точки $\zeta \in \mathrm{T} \cap U$ найдется число $r \in (0, 1)$ такое, что $K(\zeta, r) \subset U$. Будем говорить, что комплексное число α является сильным угловым пределом функции $f: \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ в точке $\zeta \in \mathrm{T}$, если $\Gamma\text{—}\lim\limits_{\zeta} \tilde{f} = \alpha$, где $\tilde{f}$—функция f, рассматриваемая как отображение из D в B. В этом случае будем писать $f_*(\zeta) = \alpha$. Отметим, что если $\alpha \in \mathrm{T}$, то равенство $f_*(\zeta) = \alpha$ равносильно равенству

$$\Gamma\text{—}\lim_{\zeta} \operatorname{Re} \frac{\alpha + f}{\alpha - f} = +\infty.$$

Ясно, что если функция f непрерывна, то функция f_* измерима по Борелю и, следовательно, определена на борелевском множестве.

4. Теорема 1. *Функция f_* определена почти всюду на окружности* T.

Прежде чем доказывать теорему, введем несколько обозначений и докажем некоторые вспомогательные утверждения. Положим $E = f_*^{-1}(\mathrm{T})$, $E_\alpha = f_*^{-1}(\alpha)$. Множества E и E_α—боролевские, поскольку функция f_* измерима по Борелю.

Нам понадобится следующая хорошо известная лемма, которую мы приводим без доказательства.

Лемма 1. *Пусть u — интеграл Пуассона положительной меры $\mu \in M(\mathrm{T})$. Тогда ее сингулярная часть сосредоточена на множестве*

$$\{\zeta \in \mathrm{T} : \Gamma\text{—}\lim_{\zeta} u = +\infty\}.$$

Следствие 1. $\sigma_\alpha(\mathbf{T}\setminus E_\alpha)=0$ *при всех* $\alpha\in\mathbf{T}$.

Следствие 2. *Пусть A — измеримое по Лебегу подмножество окружности* $\mathbf{T}$. *Тогда* $m(\Sigma\setminus A)=0$ *в том и только в том случае, когда* $\sigma_\alpha(A)=\sigma_\alpha(\mathbf{T})$ (*или, что то же самое*, $\sigma_\alpha(A\cap E_\alpha)=\sigma_\alpha(\mathbf{T})$) *при почти всех* $\alpha\in\mathbf{T}$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться предложением 1 и следствием 1.

Доказательство теоремы 1. Достаточно воспользоваться следствиями 1 и 2.

Предложение 2. *Пусть $\tilde{I}$ — измеримая функция, совпадающая почти всюду на окружности* $\mathbf{T}$ *с функцией I*, т. е. $\tilde{I}(\zeta)=\lim\limits_{r\to1-}I(r\zeta)$ *при почти всех* $\zeta\in\mathbf{T}$. *Тогда* $\sigma_\alpha(\tilde{I}^{-1}(\alpha))=\sigma_\alpha(\mathbf{T})$ *при почти всех* $\alpha\in\mathbf{T}$.

Доказательство. Из следствия 1 вытекает равенство $\int I_* \,d\sigma_\alpha = \alpha\sigma_\alpha(\mathbf{T})$ при всех $\alpha\in\mathbf{T}$. Поэтому в силу следствия 2

$$\int \tilde{I}\cdot\alpha^{-1}\,d\sigma_\alpha=\sigma_\alpha(\mathbf{T}) \tag{3}$$

при почти всех $\alpha\in\mathbf{T}$. Если $|\tilde{I}|\leqslant1$ σ_α-почти всюду, то равенство (3) влечет $\sigma_\alpha(\tilde{I}^{-1}(\alpha))=\sigma_\alpha(\mathbf{T})$. Осталось заметить, что $|\tilde{I}|\leqslant1$ σ_α-почти всюду при почти всех $\alpha\in\mathbf{T}$ в силу следствия 2.

С каждой мерой $\mu\in M(\mathbf{T})$ свяжем мощность $\Phi(\mu)$, определенную равенством

$$\Phi(\mu)=\min\{\mathrm{Card}\,(A):|\mu|(\mathbf{T}\setminus A)=0\}.$$

Другими словами, $\Phi(\mu)$ — мощность континуума, если мера μ не является дискретной; и $\Phi(\mu)$ есть мощность множества нагрузок меры μ, если мера μ дискретна. Из предложения 2 сразу вытекает следующее

Следствие. *В условиях предложения* 2

$$\Phi(\sigma_\alpha)\leqslant\mathrm{Card}\,(\tilde{I}^{-1}(\alpha)) \tag{4}$$

при почти всех $\alpha\in\mathbf{T}$.

Нетрудно показать, что функцию $\tilde{I}$ можно выбрать так, чтобы неравенство (4) превратилось в равенство сразу при всех $\alpha\in\mathbf{T}$. В дальнейшем $\Phi(\sigma_\alpha)$ будем называть кратностью значения α функции I.

5. С каждой функцией I свяжем ее угловую производную DI. Для этого обозначим через Σ° множество всех точек $\zeta\in\mathbf{T}$ таких, что $\lim\limits_{r\to1-}I(r\zeta)\in\mathbf{T}$

$$(DI)(\zeta)=\begin{cases}\lim\limits_{r\to1-}\dfrac{\zeta\cdot I'(r\zeta)}{I(r\zeta)}, & \text{если предел существует и } \zeta\in\Sigma^\circ\\ +\infty, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Известно, что

$$(DI)(\zeta)=\Gamma\text{—}\lim_{\zeta}\frac{1-|I(z)|}{1-|z|}$$

при всех $\zeta \in \mathbf{T}$. Кроме того, если $(DI)(\zeta) < +\infty$, то $\Gamma\text{—}\lim\limits_{\zeta} \frac{I'(z)\,z}{I(z)} = (DI)(\zeta)$. Все эти утверждения об угловой производной можно найти в монографии [5].

Положим $E' = \{\zeta \in \mathbf{T} : (DI)(\zeta) < +\infty\}$.

Предложение 3. $E' \subset E$.

Доказательство. Пусть $\zeta \in E'$. Положим $\alpha = \lim\limits_{r\to 1-} I(r\zeta)$.

Проверим, что $I_*(\zeta) = \alpha$, т. е.

$$\Gamma\text{—}\lim_{\zeta} \operatorname{Re} \frac{1+\bar{\alpha} I(z)}{1-\bar{\alpha} I(z)} = +\infty.$$

Имеем

$$\operatorname{Re} \frac{1+\bar{\alpha} I(z)}{1-\bar{\alpha} I(z)} = \frac{1-|I(z)|^2}{|1-\bar{\alpha} I(z)|^2} \sim \frac{2(1-|z|)}{|z-\alpha|^2 (DI)(\zeta)} \to +\infty$$

при $z \to \zeta$ $(z \in \Gamma(\zeta, r))$.

Предложение 4. *Если* $\zeta \in E$, *то*

$$(DI)(\zeta) = \begin{cases} |I_*(\zeta)-\alpha|^2 \displaystyle\int \frac{d\tau_\alpha(\xi)}{|\xi-\zeta|^2}, & I_*(\zeta) \neq \alpha \\ \dfrac{1}{\sigma_\alpha(\{\zeta\})}, & I_*(\zeta) = \alpha \end{cases}$$

при всех $\alpha \in \mathbf{T}$.

Если же $\zeta \bar{\in} E$, *то* $(DI)(\zeta) = \displaystyle\int \frac{d\tau_\alpha(\xi)}{|\xi-\zeta|^2} = +\infty$ *и* $\sigma_\alpha(\{\zeta\}) = 0$ *при всех* $\alpha \in \mathbf{T}$.

Доказательство. Из определения меры τ_α вытекает равенство

$$\int_{\mathbf{T}} \frac{1-r^2}{|\xi - r\zeta|^2}\, d\tau_\alpha(\xi) = \frac{1-|I(r\zeta)|^2}{|\alpha - I(r\zeta)|^2} \quad (\zeta \in \mathbf{T},\ r \in (0,1)), \tag{5}$$

которое сразу дает первое утверждение. Докажем теперь второе утверждение. Предположим, что $\displaystyle\int_{\mathbf{T}} \frac{d\tau_\alpha(\xi)}{|\xi-\zeta|^2} < +\infty$. Тогда в силу (5) существует число M такое, что

$$\frac{1-|I(r\zeta)|^2}{|\alpha - I(r\zeta)|^2} \leqslant M(1-r^2)$$

при всех $r \in (0, 1)$. Следовательно

$$(DI)(\zeta) = \lim_{r\to 1-} \frac{1-|I(r\zeta)|}{1-r} \leqslant \varlimsup_{r\to 1-} \sup \frac{8(1-|I(r\zeta)|^2)}{(1-r^2)|\alpha - I(r\zeta)|^2} \leqslant 8M < +\infty.$$

Предположим теперь, что $\sigma_\alpha(\{\zeta\}) > 0$. Тогда

$$\lim_{r\to 1-} \frac{1-|I(r\zeta)|^2}{|\alpha - I(r\zeta)|^2}(1-r) > 0.$$

Следовательно

$$(DI)(\zeta) = \lim_{r\to 1-} \frac{1-|I(r\zeta)|}{1-r} \leqslant \varlimsup_{r\to 1-} \sup \frac{|a-I(r\zeta)|}{1-r} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \varlimsup_{r\to 1-} \sup \frac{|a-I(r\zeta)|^2}{(1-r)(1-|I(r\zeta)|^2)} < +\infty$$

и мы снова получаем противоречие с предположением $\zeta \overline{\in} E$.

Следствие 1. *$E' \cap E_a = \{\zeta \in T : \sigma_a(\{\zeta\}) > 0\}$ при всех $a \in \mathbb{T}$.*

Следствие 2. *Кратность значения $a \in \mathbb{T}$ функции I не более, чем счетна тогда и только тогда, когда $\sigma_a(E') = \sigma_a(\mathbb{T})$.*

Следствие 3. *Пусть $\{\mu_n\}_{n\geqslant 1}$ —суммируемая последовательность положительных чисел, для которой $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mu_n^{1/2} = +\infty$. Тогда существует внутренняя функция I такая, что мера σ_1 имеет вид $\sigma_1 = \sum\limits_{n\geqslant 1} \mu_n \delta_{\zeta_n}$, где δ_ζ—δ-мера, сосредоточенная в точке ζ, $\zeta_n \neq \zeta_k$ при $n \neq k$, а все остальные меры σ_a $(a \neq 1)$ непрерывны.*

Доказательство. Рассмотрим покрытие окружности $\mathbb{T}$ последовательностью дуг $\{\Delta_n\}_{n\geqslant 1}$, имеющее бесконечную кратность в каждой точке $\zeta \in T$ и такое, что $m(\Delta_n) = \mu_n^{1/2}$. Пусть ζ_n—середина дуги Δ_n. При этом легко добиться, чтобы $\zeta_n \neq \zeta_k$ при $n \neq k$. Положим $\mu = \sum\limits_{n\geqslant 1} \mu_n \delta_{\zeta_n}$. Ясно, что $\dfrac{\mu_n}{|\zeta_n - \xi|^2} > \dfrac{1}{4}$, если $\xi \in \Delta_n$. Отсюда вытекает, что $\displaystyle\int \frac{d\mu(\xi)}{|\zeta-\xi|^2} = +\infty$ при всех $\zeta \in \mathbb{T}$. Нужная нам функция I однозначно определяется равенством

$$\frac{1+I(z)}{1-I(z)} = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, d\mu(\zeta).$$

Функцию I будем называть *счетнократной*, если почти каждое ее значение $a \in \mathbb{T}$ имеет не более, чем счетную кратность, т. е. если мера σ_a дискретна при почти всех $a \in \mathbb{T}$. Функцию I будем называть *континуумкратной*, если почти каждое значение $a \in \mathbb{T}$ имеет континуальную кратность, т. е. если мера σ_a имеет ненулевую непрерывную часть при почти всех $a \in \mathbb{T}$.

Теорема 2. *Функция I счетнократна в том и только в том случае, когда $DI < +\infty$ почти всюду на $\sum$.*

Доказательство. В силу следствия 2 леммы 1 $DI < +\infty$ почти всюду на $\sum$ в том и только в том случае, когда $\sigma_a(E') = \sigma_a(\mathbb{T})$ при почти всех $a \in \mathbb{T}$. Последнее согласно следствию 2 предложения 4 означает, что функция I счетнократна.

Отметим, что DI выражается явным образом через параметры внешне-внутренней факторизации функции I (см. [6]). Таким образом, свойство счетнократности функции I тоже явно выражается через эти параметры.

Теорема 3. *Если $DI = +\infty$ почти всюду на некоторой открытой дуге Δ, $\Delta \subset \sum \pmod 0$, $\Delta \neq \varnothing$, то функция I континуумкратна.*

Доказательство. Если $\sigma_\alpha(\Delta)=0$ при некотором $\alpha\in\mathrm{T}$, то $\tau_\alpha(\Delta)=0$, поскольку $\Delta\subset\sum$ (mod 0). Поэтому в этом случае функция $\frac{\alpha+I}{\alpha-I}$ (а значит, и функция I) допускает аналитическое продолжение через дугу Δ и мы приходим к противоречию с условием $DI=+\infty$ почти всюду на Δ. Следовательно, $\sigma_\alpha(\Delta)>0$ при всех $\alpha\in\mathrm{T}$. Из условий теоремы вытекает, что $\sigma_\alpha(E'\cap\Delta)=0$ при почти всех $\alpha\in\mathrm{T}$, откуда $\sigma_\alpha(E')\leqslant\sigma_\alpha(\mathrm{T})\setminus\sigma_\alpha(\Delta)<\sigma_\alpha(\mathrm{T})$ при почти всех $\alpha\in\mathrm{T}$.

6. Остановимся теперь более подробно на случае, когда I—внутренняя функция, т. е. $\sum=\mathrm{T}$ (mod 0).

Предложение 5. *Если кратность одного значения внутренней функции I конечна, то I — конечное произведение Бляшке.*

Доказательство. Если кратность значения α конечна, то $\frac{\alpha+I}{\alpha-I}$ —рациональная функция, т. е. I—конечное произведение Бляшке.

Следствие. *Пусть $\tilde I$ — измеримая функция, совпадающая почти всюду на окружности T с внутренней функцией I. Тогда если I не является конечным произведением Бляшке, то множество $\tilde I^{-1}(\alpha)$ бесконечно при почти всех $\alpha\in\mathrm{T}$.*

Следующее предложение показывает, что теорема 3 перестает быть справедливой даже для внутренних функций I, если предположить только, что $m\{\zeta\in\mathrm{T}:(DI)(\zeta)=+\infty\}>0$.

Предложение 6. *Существует внутренняя функция I, не являющаяся счетнократной, у которой каждое значение $\alpha\in P$ имеет счетную кратность для некоторой открытой дуги $P\subset\mathrm{T}$, $P\neq\varnothing$. В частности, функция I не является ни счетнократной, ни континуум кратной.*

Набросок доказательства. Возьмем замкнутое нигде не плотное множество $F\subset\mathrm{T}$ положительной меры с системой дополнительных интервалов $\{\Delta_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, обладающей следующим свойством*: множество $\{\zeta\in\Gamma:\tilde\Delta_\gamma\ni\zeta\}$ бесконечно для всех $\zeta\in F$, где $\tilde\Delta_\gamma$—дуга с той же серединой, что и Δ_γ, но имеющая длину $(m(\Delta_\gamma))^{2/3}$. Рассмотрим функцию $\varphi\in\Lambda_{1/3}(\mathrm{T})$ такую, что $\varphi\geqslant0$, $\operatorname{supp}\varphi\cdot\mathbf{1}_{\Delta_\gamma}\subset\frac12\Delta_\gamma$ и $\int_{\Delta_\gamma}\varphi>c(m(\Delta_\gamma))^{4/3}$. Здесь $\frac12\Delta_\gamma$ обозначает дугу с той же серединой, что и Δ_γ, но вдвое меньшей длины. Легко проверить, что

$$\int_{\mathrm{T}}\frac{\varphi(\zeta)}{|\zeta-\xi|^2}\,dm(\zeta)=+\infty$$

---

* Такое множество F нетрудно выбрать среди множеств канторовского типа.

для всех $\xi\in F$. Положим

$$g_\gamma(\xi)=\int\limits_{\Delta_\gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{|\zeta-\xi|^2}\,dm(\zeta)\quad(\xi\in F),$$

$$f_\gamma(z)=\int\limits_{\Delta_\gamma}\varphi(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,dm(\zeta)\quad(z\in\mathbb{D}),$$

$$f(z)=\sum_{\gamma\in\Gamma}f_\gamma(z)=\int\limits_{\mathbb{T}}\varphi(\zeta)\,\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,dm(\zeta).$$

Ясно, что функции f и f_γ принадлежат диск-алгебре, поскольку $\varphi\in\Lambda_{1/3}$. Аппроксимируя функцию φ_γ линейными комбинациями δ-мер, найдем дискретную положительную меру μ_γ с конечным числом нагрузок такую, что $\operatorname{supp}\mu_\gamma\subset\frac{1}{2}\Delta_\gamma$, $\|\mu_\gamma\|<\int\limits_{\Delta_\gamma}\varphi\,dm$, $\int\frac{d\mu_\gamma(\zeta)}{|\zeta-\xi|^2}>\frac{1}{2}g_\gamma(\xi)$ для всех $\xi\in F$

и

$$\left|f_\gamma(r\xi)-\int\limits_{\Delta_\gamma}\frac{\zeta+r\xi}{\zeta+r\xi}\,d\mu_\gamma(\zeta)\right|<\varepsilon_\gamma$$

для всех $\xi\in F$ и всех $r\in(0,1)$, где $\{\varepsilon_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — суммируемое семейство положительных чисел. Рассмотрим меру $\mu=\sum_{\gamma\in\Gamma}\mu_\gamma$. Она обладает следующими свойствами:

а) $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta-\xi|^2}=+\infty$ для всех $\xi\in F$,

б) $\displaystyle\int\frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta-\xi|^2}<+\infty$, если $\xi\notin F$ и $\mu(\{\xi\})=0$,

в) $\displaystyle\operatorname*{vrai\,sup}_{\xi\in F}\left|\int\frac{\zeta+\xi}{\zeta-\xi}\,d\mu(\zeta)\right|<+\infty$.

Рассмотрим внутреннюю функцию I, определенную равенством

$$\frac{1+I(z)}{1-I(z)}=\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\mu(\zeta).$$

Эта функция обладает всеми нужными нам свойствами.

7. Остановимся более подробно на случае счетнократной внутренней функции. Отметим, что такие функции представляют интерес также в связи с теоремой Д. Кларка (см. [7] и [3]), из которой вытекает следующее утверждение.

Если I — счетнократная внутренняя функция, то пространство $K_I=H^2\ominus IH^2$ имеет ортогональный базис, состоящий из воспроизводящих ядер $\{k_I(z,\lambda):\lambda\in\Lambda\subset\mathbb{T}\}$, где $k_I(z,\lambda)=\dfrac{1-\overline{I(\lambda)}I(z)}{1-\bar\lambda z}$.

Таким образом, теорема 2 дает много примеров внутренних фнкций I, обладающих этим свойством. Однако, в силу следствия 3 предложения 4 и той же теоремы Д. Кларка она не дает всех таких примеров.

Пусть H^p обозначает обычный класс Харди (см., например, [2]). Обозначим через $H^{p,\infty}$ пространство всех функций $f \in H^{p,2}$ таких, что $m\{\zeta \in \mathbf{T} : |f(\zeta)| > A\} = O(A^{-p})$. Символом $H_0^{p,\infty}$ будем обозначать пространство всех $f \in H^{p,\infty}$ таких, что $m\{\zeta \in \mathbf{T} : |f(\zeta)| > A\} = o(A^{-p}(A \to +\infty))$.

Теорема 4. *Пусть $\{a_n\}_{n\geq1}$—последовательность точек единичного круга $\mathbf{D}$ такая, что $\sum\limits_{n\geq1}(1-|a_n|)^{1/2} < +\infty$. Тогда произведение Бляшке, построенное по последовательности нулей $\{a_n\}_{n\geq1}$, счетнократно и $B' \in H_0^{1/2,\infty}$.*

Доказательство. Из результатов работы [6] следует, что достаточно доказать, что $(DB)(\zeta) = \sum\limits_{n\geq1} \frac{1-|a_n|^2}{|1-\bar{a}_n\zeta|^2} \in L_0^{1/2,\infty}$, т. е. $m\{\zeta \in \mathbf{T} : (DB)(\zeta) > A\} = o(A^{-1/2})(A \to +\infty)$. Известно, что пространство $L_0^{1/2,\infty}$ является 1/2-выпуклым (см. [8] и [9]). Отсюда сразу вытекает, что $DB \in L_0^{1/2,\infty}$, поскольку $\left\| \frac{1}{|1-\bar{a}_n\zeta|^2} \right\|_{L_0^{1/2,\infty}} \leqslant C$ и $\sum\limits_{n\geq1}(1-|a_n|)^{1/2} < +\infty$.

Отметим, что близкие к теореме 4 результаты имеются в работах [6], [10], [11].

Следствие (П. Ахерн—Д. Кларк [12]). *В условиях теоремы 4 функция $\frac{B-a}{1-\bar{a}B}$ является произведением Бляшке при всех $a \in \mathbf{D}$.*

Доказательство. Пусть $I = \exp F = \exp\left(\int\limits_{\mathbf{T}} \frac{z+\zeta}{z-\zeta}\, d\mu(\zeta)\right)$ — сингулярный сомножитель функции $\frac{B-a}{1-\bar{a}B}$. Тогда из теоремы 4 и результатов работы [6] вытекает, что $I' \in H_0^{1/2,\infty}$. Следовательно, $F' \in H_0^{1/2,\infty}$. Отсюда получаем, что $F \in H_0^{1,\infty}$ (простое доказательство этого факта можно извлечь из [13], стр. 55—56), а тогда $\mu \equiv 0$ (см. [14] или [13]) и мы приходим к противоречию.

Теорема 5. *Пусть $\{r_n\}_{n\geq1}$—последовательность точек промежутка $[0, 1)$ такая, что $\sum\limits_{n\geq1}(1-r_n) < +\infty$ и $\sum\limits_{n\geq1}(1-r_n)^{1/2} = +\infty$; F—замкнутое подмножество окружности $\mathbf{T}$. Тогда существует произведение Бляшке B с последовательностью нулей $\{a_n\}_{n\geq1}$ ($|a_n| = r_n$) такое, что $F = \{\zeta \in \mathbf{T} : (DB)(\zeta) = +\infty\}$.*

Доказательство. Пусть сначала $F = \varnothing$. Нетрудно построить последовательность точек $\{\zeta_n\}_{n\geq1}$ множества F и строго возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_j\}_{j\geq1}$ так, чтобы

$$F = \bigcap_{j\geq 1} \bigcup_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} D(\zeta_k, (1-r_k)^{1/2}),$$

где $n=0$, $D(\zeta, a) \overset{\mathrm{dif}}{=} \{\xi\in \mathbf{T} : |\xi - \zeta| < a\}$. Положим $a_n = r_n \zeta_n$. Ясно, что F—множество всех предельных точек последовательности $\{a_n\}_{n\geq 1}$. Поэтому $(DB)(\zeta) < +\infty$, если $\zeta \overline{\in} F$. Заметим, что если $\xi \in D(\zeta_n, (1-r_n)^{1/2})$, то $\dfrac{1-|a_n|^2}{|a_n - \xi|^2} > 1$. Отсюда вытекает, что $(DB)(\xi) = +\infty$, если $\xi \in F$.

Если $F = \varnothing$, то возьмем последовательность положительных чисел $\{t_n\}_{n\geq 1}$ такую, что $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1-r_n}{t_n^2} < +\infty$, $t_n \to 0$. Тогда в качестве a_n можно взять $r_n e^{it_n}$.

8. Пусть μ—конечная борелевская мера на окружности $\mathbf{T}$. Положим

$$\|\mu\|_p = \begin{cases} \left(\sum\limits_{\zeta\in\mathbf{T}} |\mu(\{\zeta\})|^p\right)^{1/p}, & \text{если } \mu\text{-дискретна} \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

С каждой внутренней функцией I свяжем функцию Φ_p, определенную формулой $\Phi_p(\alpha) = \|\sigma_\alpha\|_p$.

Теорема 6. *Пусть I—внутренняя функция,* $0 < p < 1$. *Тогда $I' \in H^{1-p}$ в том и только в том случае, когда $\Phi_p \in L^p$, при этом $\|I'\|_{H^{1-p}}^{1-p} = \|\Phi_p\|_{L^p}^p$.*

Доказательство. Можно считать, что I—счетнократна. Известно (см. [6]), что $I' \in H^{1-p}$ в том и только в том случае, когда $DI \in L^{1-p}$. Из предложения 1 вытекает следующее равенство:

$$\int (DI)^{1-p}\, dm = \int\left(\int (DI)^{1-p}\, d\sigma_\alpha\right) dm(\alpha).$$

В силу предложения 4

$$\int (DI)^{1-p}\, d\sigma_\alpha = \sum_{I_\alpha(\zeta)=\alpha} ((DI)(\zeta))^{-p} = \|\sigma_\alpha\|_p^p,$$

если мера σ_α-дискретна. Из этих двух равенств получаем:

$$\|I'\|_{H^{1-p}}^{1-p} = \|\Phi_p\|_{L^p}^p.$$

Замечание. Доказательство теоремы показывает, что если $I(0)=0$, то $T((DI)^{1-p}) = \Phi_p^p$.

Следствие. *Пусть I— внутренняя функция. Если $I' \in H^{1-p}$, то $\Phi_p < +\infty$ почти всюду на* $\mathbf{T}$.

Следующее утверждение „почти обращает“ это следствие при $p = \dfrac{1}{2}$.

Теорема 7. *Если* $\Phi_{1/2}(\alpha) < +\infty$ *при некотором* $\alpha \in \mathrm{T}$, *то* $I' \in H^{1/2,\infty}$ *и, следовательно, в силу теоремы 6* $\Phi_p < +\infty$ *почти всюду на* T *при всех* $p > \frac{1}{2}$.

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{Re}\,\frac{\alpha + I(z)}{\alpha - I(z)} = \int \mathrm{Re}\,\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\sigma_\alpha(\zeta) \quad (z \in \mathrm{D}),$$

откуда

$$I'(z) = \frac{(\alpha - I(z))^2}{\alpha} \int \frac{\zeta}{(\zeta - z)^2}\, d\sigma_\alpha(\zeta) \quad (z \in \mathrm{D}).$$

Отсюда вытекает, что

$$(DI)(\xi) \leqslant 4 \int \frac{d\sigma_\alpha(\zeta)}{|\zeta - \xi|^2} \quad (\xi \in \mathrm{T}).$$

Осталось заметить, что функция, стоящая в правой части неравенства, принадлежит пространству $L^{1/2,\infty}$ (см. [8] и [9]).

9. В заключение рассмотрим класс всех внутренних функций I таких, что $DI = +\infty$ почти всюду на T. Мы увидим, что такие внутренние функции устроены в некотором смысле так же, как и многомерные внутренние функции.

Измеримые функции f_1 и f_2, заданные, соответственно, на вероятностных пространствах (x_1, μ_1), (x_2, μ_2) будем называть эквивалентными, если существует изоморфизм (mod 0) φ первого вероятностного пространства на второе такой, что $f_2 \circ \varphi = f_1$ почти всюду.

Рассмотрим функцию $z_1 : \mathrm{T} \times \mathrm{T} \to \mathrm{T}$, $z_1(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_1$.

Теорема 8. *Внутренняя функция* I *эквивалентна функции* z_1 *в том и только в том случае, когда* $I(0) = 0$ *и* $DI = +\infty$ *п.в. на* T.

Доказательство. Внутренняя функция I является эндоморфизмом (т. е. сохраняет меру) тогда и только тогда, когда $I(0) = 0$. Из результатов работы В. А. Рохлина [15] вытекает, что гомоморфизм I эквивалентен гомоморфизму z_1 в том и только в том случае, когда мера σ_α является непрерывной при почти всех $\alpha \in \mathrm{T}$, т. е. когда $DI = +\infty$ почти всюду на T в силу предложения 4 и следствия 2 леммы 1.

С каждой голоморфной функцией I, $|I| < 1$, в полидиске (или шаре) можно аналогично связать семейства мер $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{T}}$ и $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{T}}$. Например, можно положить $\tau_\alpha = \lim\limits_{r \to 1} \mathrm{Re}\,\dfrac{\alpha + I(rz)}{\alpha - I(rz)}$ (в слабой топологии пространства мер на торе (сфере)), а в качестве σ_α взять сингулярную часть меры τ_α. При этом будет иметь место естественный аналог предложения 1.

Предложение 5. *В многомерном случае все меры* τ_α *(а значит, и* σ_α*) непрерывны.*

Доказательство. Ясно, что

$$\left|\frac{\alpha + I(z)}{\alpha - I(z)}\right| = O\left(\frac{1}{1 - p(z)}\right), \tag{6}$$

где p — функционал Минковского полидиска (шара). С другой стороны, если бы $\tau_a(\{\zeta\}) > 0$ при некотором ζ, то

$$\left|\frac{a + I(r\zeta)}{a - I(r\zeta)}\right| \geqslant \frac{C}{(1-r)^d} = \frac{C}{(1-p(r\zeta))^d}, \tag{7}$$

где d — комплексная размерность области задания функции I. Осталось заметить, что оценки (6) и (7) противоречат друг другу, если $d > 1$.

Используя предложение 5, аналогично теореме 8 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 9. *Пусть I — внутренняя функция в полидиске (или шаре) комплексной размерности $d \geqslant 2$. Тогда функция I эквивалентна функции z_1 в том и только в том случае, когда $I(0) = 0$.*

Замечание. Теорема 9 имеет место не только для полидиска и шара, но и для любой области Ω, $\Omega \neq D$, являющейся конечным декартовым произведением классических областей. Все необходимые сведения о классических областях можно найти в [16].

Ленинградский государственный
университет

Поступила 30. VII. 1984

Ա. Բ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎ. Ներքին ֆունկցիաների եզրային արժեքների պատիկությունը (*ամփոփում*)

Աշխատանքում ներմուծված է ներքին ֆունկցիաների եզրային արժեքների պատիկության հասկացությունը։ Ցույց է տրվում, որ Բլյաշկեի վերջավոր արտադրյալից տարբեր միջին ֆունկցիան ընդունում է կամայական $\alpha \in C$, $|\alpha| = 1$ արժեք կամ հաշվելի, կամ էլ կոնտինուալ անգամ։ Եզրային արժեքների պատիկության հասկացության ներմուծման համար գործածվող ապարատը օգտակար է նաև լինում ներքին ֆունկցիաների եզրային վարքի ուրիշ հարցերում։

A. B. ALEKSANDROV. *Multiplicity of boundary values of inner functions* (summary)

A concept of multiplicity of boundary values is introduced for inner functions. It is proved that every value $\alpha \in C$, $|\alpha|=1$, of an inner function has countable or continual multiplicity. The technique used to define the notion of multiplicity admits an application to some other problems concerning the boundary behaviour of inner functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Э. Коллингвуд, А. Ловатер.* Теория предельных множеств, М., «Мир», 1971.
2. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., ИЛ, 1963.
3. *S. V. Hruščev, N. K. Nikol'skii, B. S. Pavlov.* Unconditional bases of exponentials and of reproducing kernels, Lect. Notes Math., v. 864. 1981, 214—335.
4. *В. В. Пеллер, С. В. Хрущев.* Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы, УМН, 37, вып. 1 (223), 53—124.
5. *C. Caratheodory.* Funktionen theorie. Band 1, 2, Verlag, Birkhäuser Basel, 1950.
6. *R. R. Ahern. D. N. Clark.* On inner functions with H^p-derivate, Mich. Math. J., v. 21, № 2, 1974, 115—128.
7. *D. Clark.* One dimensional perturbutions of restricted shifts, J. anal. math., v. 25, 1972, 169—191.
8. *N. J. Kalton.* Linear operators on L_p for $0<p<1$, Trans. Amer. Math. Soc., v. 259, № 2, 1980, 319—355.
9. *L. Carleson.* On a class of meromorphic functions and its associated exceptional sets, Uppsala, 1950.

10. *C. N. Linden.* H^p-derivatives of Blaschke products, Mich. Math. J., v. 23, № 1, 1976, 43—51.

11. D. *Protas.* Blaschke product with derivative in H^p and B^p, Mich. Math, J., v. 20, № 4, 1974, 393—396.

12. *P. R. Ahern, D. N. Clark.* On inner functions with B^p derivative, Mich Math. J., v. 23, № 2, 1976, 107—118.

13. *A. B. Aleksandrov.* Essays on non—locally convex Hardy classes, Lect. Notes Math., v. 864, 1981, 1—89.

14. *А. Б. Александров.* Об A-интегрируемости граничных значений гармонических функций, Матем. заметки, 30, № 1, 1981, 59—72.

15. *В. А. Рохлин.* Об основных понятиях теории меры, Матем. сб., 25, № 1, 1949, 107—150.

16. *Хуа Ло-кен.* Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях, М., ИЛ, 1959.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXII, № 5, 1987 Математика

УДК 517.95

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Р. Л. ШАХБАГЯН

ОБЩАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

В статье исследуется начально-краевая задача для одного класса бесконечномерных параболических операторов высокого порядка с неоднородными данными в цилиндрической области, основанием которой является CL-многообразие с краем. Настоящая статья является продолжением исследований автора, посвященным изучению краевых задач на гильбертовых многообразиях с краем, изложенных в работах [1]—[3]. В связи с этим, здесь будут лишь вкратце описаны классы символов рассматриваемых операторов и соответствующие функциональные пространства.

Пусть $M - CL$-многообразие с краем ∂M (определение см. [1]). В цилиндрической области $\Omega_+ = M \times R^1_+$, $R^1_+ = \{t \in R^1, t > 0\}$ рассмотрим параболический оператор вида

$$\hat{P}\left(x, \xi, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{j=0}^{2m} a_j(x)\, \hat{P}_j\left(x, \xi, \frac{\partial}{\partial t}\right), \tag{1}$$

с главной частью

$$\hat{P}_0\left(x, \xi, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{A}(x, \xi)\right)^m, \tag{2}$$

где $A(x, \xi, \lambda) \overset{\text{def}}{=} A(x, \xi) + \lambda$ — эллиптический символ второго порядка, принадлежащий классу $\mathrm{E}(M)$ ([3]).

Операторы $\hat{P}_j$ имеют следующий вид:

$$\hat{P}_j\left(x, \xi, \frac{\partial}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{A}_j(x, \xi)\right)^{2m-j}, \; j = \overline{1, 2m}, \tag{3}$$

где символы $P_j(x, \xi, \lambda)$ имеют локальные представления вида

$$P_j(x, \xi, \lambda) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(j)}(x)\, \xi_k + c_0^{(j)}(x) + \lambda\right)^{2m-j} {}^*.$$

---

* На самом деле можно рассмотреть главный символ более общего вида, а именно

$$\hat{P}_0 = \prod_{k=1}^{l}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{A}_k\right)^{m_k}, \quad \sum_{k=1}^{l} m_k = m,$$

при этом все результаты сохраняются, технически лишь несколько усложняются доказательства утверждений.

Коэффициенты $a_j(x)$, $c_k^{(l)}(x)$ — бесконечно гладкие функции, заданные на M и принадлежащие пространству $CL^{\infty}(M)$.

На боковой поверхности $\Omega'_+ = \partial M \times R^1_+$ рассматриваются операторы

$$\widehat{B}_j\left(x', \xi, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{k=0}^{n_j} b_{j,k}(x')\widehat{N}_{j,k}\left(x', \xi, \frac{\partial}{\partial t}\right), \tag{4}$$

где

$$\widehat{N}_{j,k}\left(x', \xi, \frac{\partial}{\partial t}\right) \doteq \left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{L}_{j,k}(x', \xi)\right)^{n_j-k},$$

а символы $N_{j,k}(x', \xi, \lambda)$ имеют локальные представления вида

$$N_{j;k}(x, \xi', \lambda) = \left(\sum_{l=1}^{n} b_{j,k}^{(l)}(x')\, \xi_l + b_{j,k}^{(0)}(x') + \lambda\right)^{n_j-k}.$$

Предполагается, что символы $B_j(x', \xi, \lambda)$ принадлежат пространству $\mathbf{B}(\partial M)$ (определение см. [3]) граничных символов и их порядки — $\operatorname{ord} \widehat{B}_j = n_j < 2m$, $j = 1, 2, \cdots, m$.

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\widehat{P}\left(x, \xi, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t) = f(x, t), \ (x, t) \in \Omega_+, \tag{5}$$

$$\widehat{B}_j\left(x', \xi, \frac{\partial}{\partial t}\right) u\Big|_{\Omega'_+} = g_j(x', t), \ j = \overline{1, m}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = \varphi_k(x), \ x \in M, \ k = \overline{0, m-1}. \tag{7}$$

Очевидно, что для разрешимости задачи (5)—(7) необходимо, чтобы правые части уравнений на гиперплоскости $t=0$ удовлетворяли определенным условиям согласованности. Приведем достаточное условие согласованности, которое будет считаться выполненным при изучении разрешимости сформулированной выше смешанной задачи.

С этой целью введем функциональные пространства $\Lambda CL(M, \gamma)$ и $\Lambda CL^0(M, \gamma)$ (ср. [2]).

Пусть функция $h(t)$, тождественно равная нулю при $t < 0$, удовлетворянт условию $e^{-\gamma t} h \in L_1(R^1)$, Обозначим ее преобразование Лапласа через

$$\bar{h}(\lambda) = \Lambda_{t\to\lambda} h(t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} h(t)\, dt,$$

где $\lambda \in \mathbf{C}_\gamma = \{\lambda \in \mathbf{C}, \operatorname{Re}\lambda \geqslant \gamma\}$.

П р о с т р а н с т в о $\Lambda CL(M, \gamma)$ состоит из функций $h(x, \lambda)$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) при любом $\lambda_0 \in \mathbf{C}_\gamma$ $h(x, \lambda_0) \in CL^0(M)$,

в) она аналитична по λ со значениями в $CL^0(M)$ и стремится к нулю при $\lambda \to \infty$ в $\mathbf{C}_\gamma$, Пространство $\Lambda CL^{0}(M, \gamma)$, по определению, есть подпространство $\Lambda CL(M, \gamma)$, определенное условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\sigma + i\tau|^{m} \|h(x, \sigma + i\tau)\|_{C(M)} d\tau < K < +\infty,$$

где $K > 0$ — постоянная, не зависящая от σ.

Аналогично вводится пространство $\Lambda CL(\partial M, \gamma)$ (см. [2]).

Условие согласованности. Существует функция $u_0(x, t)$, определенная на Ω_+, такая, что

а) ее преобразование Лапласа

$$\tilde{u}_0(x, \lambda) = \Lambda_{t\to\lambda} u_0(x, t) \in \Lambda CL(M, \gamma), \tag{8}$$

в)

$$\left.\frac{\partial^k u_0}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k(x), \ k = \overline{0, m-1}, \tag{9}$$

с) положим

$$\hat{P} u_0(x, t) = f_0(x, t) \ (x, t) \in \Omega_+, \tag{10}$$

$$\left.\hat{B}_j u_0\right|_{\Omega'_+} = g_j^0(x', t), \ j = 1, 2, \cdots, m. \tag{11}$$

Требуется, чтобы после продолжения функций $f - f_0$ и $g_j - g_j^0$ нулем при $t < 0$ их преобразования Лапласа по t удовлетворяли условиям:

$$\tilde{f} - \tilde{f}_0 = \Lambda_{t\to\lambda}(f - f_0) \in \Lambda CL^0(M, \gamma), \tag{12}$$

$$\tilde{g}_j - \tilde{g}_j^0 = \Lambda_{t\to\lambda}(g_j - g_j^0) \in \Lambda CL^0(\partial M, \gamma). \tag{13}$$

Это условие означает, что «исправленные» правые части (после вычитания u_0 из u) были бы согласованы с нулем.

Замечание. Необходимость согласованности правых частей для разрешимости задачи очевидна, поскольку, если u — решение задачи (5)—(7), то в условии согласованности можно положить $u_0 = u$.

Основной результат работы будет основан на теореме о разрешимости соответствующей смешанной параболической задачи с однородными данными, доказанной в [3] (см. также [2]). Приведем ее формулировку.

Теорема А. ([3], гл. III, теорема 2.1). Пусть символы операторов $\hat{P}$ и $\hat{B}_j$ принадлежат, соответственно, классам $\mathbf{E}(M)$ и $\mathbf{B}(\partial M)$ и локально удовлетворяют условию типа Лопатинского:

$$\det \left\| B^0_{j,\alpha}\left(x', -i\frac{d}{dx_1}, \xi', \lambda\right) \omega_k|_{x_1=0} \right\|_{j,k=1}^{m} \neq 0$$

при любых α таких, что $U_\alpha \cap \partial M \neq \varnothing$ (U_α — координатное покрытие многообразия M) и $x' \in \chi_\alpha(U_\alpha)$ ($\{\chi_\alpha\}$ — система локальных карт), $|\xi'| + |\lambda| \neq 0$, $\{\omega_k(x', x_1, \xi', \lambda)\}_{k=1}^{m}$ — базис в пространстве устойчивых ешений уравнения

$$P_{0,\varepsilon}\left(0,\ x',\ -i\frac{d}{dx_1},\ \xi',\ \lambda\right)v=0,$$

а $\overset{\frown}{B}{}^0_{j,\varepsilon}$ — слагаемые представления главного символа оператора $\overset{\frown}{B}_j$.

Пусть, далее, $\tilde{f}=\Lambda_{r\to\lambda}f\in\Lambda CL^0(M,\gamma)$, $\tilde{g}_j\in\Lambda CL^0(\partial M,\ \gamma)$ — произвольно заданные функции, а число γ достаточно велико. Тогда задача (5)—(7) с $\varphi_k(x)\equiv 0$, $k=\overline{0,\ m-1}$ однозначно разрешима, при этом для обратного оператора $\mathfrak{M}^{-1}$ задачи имеет место априорная оценка

$$\left\|\mathfrak{M}^{-1}(\tilde{f},\ \tilde{g}_1,\cdots,\ \tilde{g}_m)\right\|_{C(M)}\leqslant K|\mathrm{Re}\,\lambda|^{-\varepsilon}\left(\|\tilde{f}\|_{C(M)}+\sum_{j=1}^{m}\|\tilde{g}_j\|_{C(\partial M)}\right),\tag{14}$$

где $K>0$ — постоянная, не зависящая от $\tilde{f},\ \tilde{g}_1,\cdots,\ \tilde{g}_m$, а $\varepsilon>0$ — некоторое число.

Основной результат настоящей статьи содержится в следующей теореме.

Теорема. *Пусть операторы $\overset{\frown}{P}$ и $\overset{\frown}{B}_j$ удовлетворяют условиям теоремы A и выполнено условие согласованности. Тогда при достаточно больших γ задача (5)—(7) однозначно разрешима в пространстве $\Lambda CL(M,\ \gamma)$ при любых правых частях $f,\ g_j,\ \varphi_k$, для которых $\tilde{f}\in\Lambda CL(M,\ \gamma)$, $\tilde{g}_j\in\Lambda CL(\partial M,\ \gamma)$, $\varphi_k\in CL^0(M)$.*

Имеет место оценка

$$\|\tilde{u}\|_{C(M)}\leqslant K\left(\|\tilde{f}\|_{C(M)}+\sum_{j=1}^{m}\|\tilde{g}_j\|_{C(\partial M)}+\sum_{k=0}^{m-1}\|\varphi_k\|_{C(M)}\right),$$

где $K>0$ — константа, не зависящая от $\tilde{f},\ \tilde{g}_j,\ \varphi_k$.

Доказательство. Пусть u_0 — функция, фигурирующая в условии согласованности. Докажем сначала существование решения. С этой целью рассмотрим следующую параболическую задачу:

$$\overset{\frown}{P}v(x,\ t)=f(x,\ t)-f_0(x,\ t),\ (x,t)\in\Omega_+,$$

$$\overset{\frown}{B}_jv\Big|_{\Omega'_+}=g_j(x',\ t)-g_j^0(x',\ t),\ j=1,\ 2,\cdots,\ m,$$

$$\left.\frac{\partial^k v}{\partial t^k}\right|_{t=0}=0,\ k=0,\ 1,\cdots,\ m-1,\ x\in M.$$

Поскольку $\tilde{f}-\tilde{f}_0\in\Lambda CL^0(M,\ \gamma)$, $\tilde{g}_j-\tilde{g}_j^0\in\Lambda CL^0(\partial M,\ \gamma)$, то по теореме A эта задача имеет единственное решение. Обозначим через $u=u_0+v$. Тогда очевидно, что функция $u(x,\ t)$ является решением исходной задачи и существование решения доказано.

Единственность решения будет следовать из априорной оценки. Докажем ее. Легко видеть, что по заданным $\varphi_0(x),\ldots,\varphi_{m-1}(x)$, фигурирующим в условии теоремы, можно построить функцию $u_1(x,\ t)$, заданную на Ω_+ и удовлетворяющую условиям

$$\left.\frac{\partial^k u_1}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k(x),\ \ k=\overline{0,\ m-1},\ \ x\in M, \tag{9'}$$

при этом $\widetilde{u}_1 \in \Lambda CL(M,\ \gamma)$.

Действительно, в качестве u_1 можно взять

$$u_1(x,\ t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!}\varphi_k(x).$$

Отсюда очевидным образом получим оценку

$$\|\widetilde{u}_1\|_{C(M)} \leqslant K_1 \sum_{k=0}^{m-1} \|\varphi_k\|_{C(M)}, \tag{15}$$

где $K_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от $\varphi_0,\ \varphi_1, \cdots,\ \varphi_{m-1}$.

Заметим, далее, что функция $u_0(x,\ t)$ удовлетворяет условиям (9) и $\widetilde{u}_0 \in \Lambda CL(M,\ \gamma)$. Отсюда следует, что

$$\left.\frac{\partial^k (u_1 - u_0)}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0,\ \ k=0,\ 1, \cdots,\ m-1,$$

то есть $\Lambda_{t\to\lambda}(u_1 - u_0) \in \Lambda CL^0(M,\ \gamma)$. Рассмотрим

$$\widehat{P}(u_1 - u_0) \text{ и } \left.\widehat{B}_j(u_1 - u_0)\right|_{\Omega_+},\ \ j=\overline{1,\ m}.$$

В силу предложения 1.1 главы III [3] $\Lambda_{t\to\lambda}\widehat{P}(u_1 - u_0) \in \Lambda CL^0(M,\ \gamma)$ и $\Lambda_{t\to\lambda}\widehat{B}_j(u_1 - u_0) \in \Lambda CL^0(\partial M,\ \gamma)$.

Таким образом, не нарушая условий согласованности, можно в них заменить функцию u_0 на u_1, при этом для функции u_1 (в отличие от u_0) имеется оценка вида (15).

Пусть теперь $u(x,\ t)$ — какое-либо решение задачи (5)—(7). Тогда функция $u - u_1$ удовлетворяет однородным начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^k (u - u_1)}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0,\ \ k=\overline{0,\ m-1},\ \ x\in M$$

и, следовательно, $u - u_1 \in \Lambda CL^0(M,\ \gamma)$.

Применяя к ней теорему A, получим, что при достаточно больших γ однозначно разрешима задача

$$\widehat{P}(u - u_1) = f - f_1,\ \ (x,\ t)\in\Omega_+,$$

$$\left.\widehat{B}_j(u - u_1)\right|_{\Omega_+} = g_j - g_j^1,\ j=1,\ 2, \cdots,\ m,$$

$$\left.\frac{\partial^k (u - u_1)}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0,$$

где введены следующие обозначения: $f_1 = \widehat{P}u_1$, $\widehat{B}_j u_1 = g_j^1$. Теперь, в силу оценки (14), имеем

$$\|\widetilde{u} - \widetilde{u}_1\|_{C(M)} \leqslant K_2\left(\|\widetilde{f} - \widetilde{f}_1\|_{C(M)} + \sum_{j=1}^{m} \|\widetilde{g}_j - \widetilde{g}_j^1\|_{C(M)}\right). \tag{16}$$

Учитывая ограниченность операторов $\widehat{P}$ и $\widehat{B}_j$ в соответствующих пространствах (см. [3], теоремы 3.1 и 4.1), получаем следующую оценку:

$$\|\Lambda_{l-\lambda}\widehat{P}u_1\|_{C(M)}+\sum_{j=1}^{m}\|\Lambda_{l-\lambda}\widehat{B}_j u_1\Big|_{\Omega_+}\|_{C(\partial M)}= \tag{17}$$

$$=\|\tilde{f}_1\|_{C(M)}+\sum_{j=1}^{m}\|\tilde{g}_j^1\|_{C(\partial M)}\leqslant K_3\|\tilde{u}_1\|_{C(M)},$$

где $K_3>0$ — постоянная, не зависящая от $\tilde{u}_1$.

Пользуясь теперь неравенствами (15), (16), для решения задачи (5)—(7) получаем оценку

$$\|\tilde{u}\|_{C(M)}\leqslant\|\tilde{u}-\tilde{u}_1\|_{C(M)}+\|\tilde{u}_1\|_{C(M)}\leqslant$$

$$\leqslant K_4\Big(\|\tilde{f}-\tilde{f}_1\|_{C(M)}+\sum_{j=1}^{m}\|\tilde{g}_j-\tilde{g}_j^1\|_{C(\partial M)}+\sum_{k=0}^{m-1}\|\varphi_k\|_{C(M)}\Big).$$

Из последнего неравенства, а также оценок (17) и (15), окончательно получаем

$$\|\tilde{u}\|_{C(M)}\leqslant K_4\Big(\|\tilde{f}\|_{C(M)}+\|\tilde{f}_1\|_{C(M)}+\sum_{j=1}^{m}\|\tilde{g}_j\|_{C(\partial M)}+\sum_{j=1}^{m}\|\tilde{g}_j^1\|_{C(\partial M)}+$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1}\|\varphi_k\|_{C(M)}\Big)\leqslant K_5\Big(\|\tilde{f}\|_{C(M)}+\sum_{j=1}^{m}\|\tilde{g}_j\|_{C(\partial M)}+\sum_{k=0}^{m-1}\|\varphi_k\|_{C(M)}\Big), \tag{18}$$

где $K_5>0$ — константа, не зависящая от $\tilde{f}$, $\tilde{g}_j$ и φ_k.

Из (18) очевидным образом следует единственность решения. Теорема доказана.

Замечание. В ходе доказательства теоремы, на самом деле, был получен эффективный критерий согласованности. Он заключается в следующем: по начальным значениям $\varphi_k\in CL^0(M)$, $k=\overline{0, m-1}$ строим их продолжение $u_0(x, t)$ в Ω_+, $\tilde{u}_0\in\Lambda CL(M,\gamma)$ описанным в теореме способом. Условия (12), (13) для этого продолжения и будет критерием согласованности.

Ереванский государственный
университет,
Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 2.IX.1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Л. Шахбагян.* Общая краевая задача для эллиптических операторов высокого порядка на бесконечномерных многообразиях с краем. Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XIX, № 1, 1984, 3—18.
2. *Р. Л. Шахбагян.* Начально-краевая задача для параболических уравнений высокого порядка с бесконечным числом независимых переменных. Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XX, № 1, 1985, 26—40.
3. *Р. Л. Шахбагян.* Докторская диссертация, Тбилиси, 1985.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXII, № 5, 1987 Математика

УДК 517.51

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Г. А. КАРАГУЛЯН

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

В работах Б. С. Кашина [1] и К. Тандори [2] доказана, соответственно, следующие теоремы.

Теорема A ([1]). Существует ортонормированная система (ОНС) $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ с точным множителем Вейля $\log^2 n$ такая, что $|\psi_n(x)|\equiv 1$ $n=1, 2,\cdots$.

Теорема B ([2]). Если последовательность чисел $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что при всевозможных ОНС $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ с $|\psi_n(x)|\equiv 1$, $n=1, 2,\cdots$, ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x) \tag{1}$$

сходятся почти всюду (п. в.), то сходятся также все ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \tag{2}$$

где $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ОНС с условием $|\varphi_n(x)|\leqslant M$, $n=1, 2,\cdots$,

В настоящей работе доказывается

Теорема. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x\in(0, 1)$ *ОНС с условием*

$$|\varphi(x)|\leqslant M,\ n=1, 2,\cdots. \tag{3}$$

Тогда существует ОНС $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *с*

$$|\psi_n(x)|\equiv 1,\ n=1, 2,\cdots, \tag{4}$$

такая, что для любой последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, *с* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2<\infty$ *множества сходимости рядов* (1) *и* (2) *совпадают п. в.*

Очевидно, что из этой теоремы следует теорема B. Из нее следует также теорема A, если учесть ранее известный результат Д. Е. Меньшова (см. [3]), о существовании ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ с $|\varphi_n(x)|\leqslant M$, $n=1, 2,\cdots$, имеющая $\log^2 n$ в качестве точного множителя Вейля.

Доказательство следующей леммы основано на идеях работ Б. С. Кашина и К. Тандори.

Лемма. *Пусть* $\varepsilon>0$ *и* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{n}$, $x\in(0, 1)$ *есть ОНС с* $|\varphi_k(x)|\leqslant M$, $1, 2,\cdots, n$. *Тогда для любого фиксированного натурального числа* $N>1$ *существуют ОНС* $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{n}$ *и номера* $N=m_0<$ $<m_1<\cdots<m_n$ *такие, что*

$$\left\|2M\psi_k-\varphi_k-\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} c_i\chi_i\right\|_2<\varepsilon,\ k=1,2,\cdots,n, \tag{5}$$

$$|\psi_k(x)|\equiv 1,\ k=1,2,\cdots,n, \tag{6}$$

где $\{\chi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — системеа Хаара, а $\{c_i\}_{i=N+1}^{m_n}$ — некоторые числа.

Доказательство. Приближая функции $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ кусочно-постоянными функциями, а затем применив метод ортогонализации Шмидта, легко убедиться, что для любого $\varepsilon>0$ можно найти ОНС $\{\tilde\varphi_k\}_{k=1}^n$, функции которой постоянны на интервалах $(b_j^{(0)}, b_{j+1}^{(0)}), j=0,1,\cdots, l_0-1$, $0=b_0^{(0)}<b_1^{(0)}<\cdots<b_{l_0}^{(0)}=1$ такие, что

$$\|\varphi_k-\tilde\varphi_k\|_2<\varepsilon,\ \|\tilde\varphi_k\|_\infty<2M,\ k=1,2,\cdots,n. \tag{7}$$

Определим ОНС $\{\psi_k\}_{k=1}^n$ с требованиями леммы по индукции. Пусть $(a_j^{(0)}, a_{j+1}^{(0)}),\ j=1,\cdots,p_0$ — некоторые интервалы с условиями $\{a_j^{(0)}\}_{j=0}^{p_0}\supset\{b_j^{(0)}\}_{j=0}^{l_0}$ и $\max\limits_{0<j<p_0}|a_{j+1}^{(0)}-a_j^{(0)}|<\delta_1$, где $\delta_1>0$ выберем позже. В силу (7), легко убедиться, что при каждом $j=0,1,\cdots,p_0-1$ можно выбрать число $\xi_j^{(1)}\in(a_j^{(0)}, a_{j+1}^{(0)})$ так, что функции $2M\operatorname{sign}(x-\xi_j^{(1)})$ и $\tilde\psi_k(x)$ имели одинаковые интегралы на $(a_j^{(0)}, a_{j+1}^{(0)})$. Тогда, обозначив

$$\psi_1(x)=\sum_{j=1}^{p_0-1}\chi_{\left(a_j^{(0)},\,a_{j+1}^{(0)}\right)}(x)\operatorname{sign}(x-\xi_j^{(1)})$$

очевидно имеем, что $\psi_1(x)$ ортогональны ко всем функциям $\tilde\varphi_2, \tilde\varphi_3,\cdots, \tilde\varphi_n$, выполняются (6) и равенство

$$\int\limits_{a_j^{(0)}}^{a_{j+1}^{(0)}}(2M\psi_1(x)-\tilde\varphi_1(x))\,dx=0,\ j=0,1,\cdots,p_0-1.$$

Отсюда из соображений слабой сходимости в $L^2(0,1)$, выбирая $\delta_1>0$ достаточно малым, а затем $m_1>m_0$ достаточно большим, можно убедиться, что выполняются условия (5) и (6) при $k=1$.

Пусть теперь определены $\psi_1, \psi_2,\cdots,\psi_t$ с условиями (5) и (6) при $k=1,2,\cdots,t$ такие, что $\{\psi_i\}_{i=1}^t\cup\{\tilde\varphi_i\}_{i=t+1}^n$ есть ОНС, функции которой постоянны на интервалах $(b_j^{(t)}, b_{j+1}^{(t)}),\ j=0,1,\cdots,l_1-1$, $0=b_0^{(t)}<b_1^{(t)}<\cdots<b_{l_t}^{(t)}=1$. Аналогично, как это было сделано в начале индукции, можно найти функцию $\psi_{t+1}(x)$ с условиями (5) и (6) при $k=t+1$, ортогональную ко всем функциям $\{\psi_i\}_{i=1}^t\cap\{\tilde\varphi_i\}_{i=t+2}^n$.

Этим завершается доказательство леммы.

Доказательство теоремы. Согласно теореме Меньшова-Марцинкевича (см. [4], стр. 317), найдутся номера $0=n_1<n_2<n_3<\ldots$ такие, что все ряды (2) при $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_n^2<\infty$ сходятся п. в. по номерам

$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Последовательно применив доказанную лемму, можно найти систему $\{\tilde{\psi}_i\}_{i=1}^{\infty}$ такую, что для любого $k=1, 2,\cdots \{\psi_i\}_{i=n_k+1}^{n_{k+1}}$ является ортогональной системой и

$$\left\| 2M\bar{\psi}_k-\varphi_k-\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} c_i\chi_i\right\|_2<\frac{1}{2^k},\quad 0=m_1<m_2<m_3<\cdots, \tag{8}$$

$$|\tilde{\psi}_k(x)|\equiv 1,\ k=1, 2,\cdots. \tag{9}$$

В дальнейших рассуждениях используется следующая теорема ортогонализации Хобби-Райса (см. [4], стр. 263): если $f_i\in L^2(0, 1)$, $i=1, 2,\cdots, m$, некоторые функции, то существует функция $\varepsilon(x)$, с $|\varepsilon(x)|\equiv 1$, ортогональная ко всем этим функциям.

Используя эту теорему счетное число раз, легко убедиться, что можно последовательно выбрать функции $\varepsilon_1(x)\equiv 1$, $\varepsilon_2(x)$, $\varepsilon_3(x),\cdots$ вместе с номерами $0=N_0<N_1<N_2<\cdots$ такие, что $|\varepsilon_k(x)|\equiv 1$, $k=1, 2,\cdots$, и при любом $k=1, 2,\cdots$, выполняются соотношения

$$\int_0^1 \varepsilon_k(x)\tilde{\psi}_i(x)\varepsilon_s(x)\tilde{\psi}_l(x)\,dx=0, \tag{10}$$

$$\int_0^1 \varepsilon_k(x)\bar{\psi}_i(x)\chi_l(x)\,dx=0,\ 1\leqslant l\leqslant N_k, \tag{11}$$

$$\left\| \varepsilon_k\bar{\psi}_i-\sum_{l=N_{k-1}+1}^{\infty}\chi_l\int_0^1 \varepsilon_k(y)\bar{\psi}_i(y)\chi_l(y)\,dy\right\|_2<\frac{1}{2^k} \tag{12}$$

при $n_k<i\leqslant n_{k+1}$, $n_s<l\leqslant n_{s+1}$, $s<k$, $k=1, 2,\cdots$.

Действительно, выбор $\varepsilon_1(x)$ и N_1 с условиями (10) — (12) при $k=1$ тривиален. Если же выбраны $\varepsilon_i(x)$, N_i, $i=1, 2,\cdots, \nu$, используя вышеупомянутую теорему ортогонализации, можно выбрать $\varepsilon_{\nu+1}(x)$ с $|\varepsilon_{\nu+1}(x)|\equiv 1$ такую, чтобы выполнялись равенства (10) и (11) при $k=\nu+1$. Затем, выбирая $N_{\nu+1}$ достаточно большим, можно добиться условия (12) при $k=\nu+1$. Обозначив

$$\psi_i(x)=\varepsilon_k(x)\tilde{\psi}_i(x),\ \text{при}\ n_{k-1}<i\leqslant n_k, \tag{13}$$

докажем, что $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы. В силу ортогональности системы $\{\psi_i\}_{i=n_k+1}^{n_{k+1}}$, $k=1, 2,\cdots$, с учетом (10) и (13), имеем, что $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ является ортонормированной системой с условием (4) (см. (9), (13)).

Пусть теперь фиксирована последовательность $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ с $\sum_{i=2}^{\infty}a_i^2<\infty$. Из (8) и (13) имеем

$$\max_{n_k<p<n_{k+1}}\left|\sum_{i=n_k+1}^{p} a_i\psi_i(x)\right| = \max_{n_k<p<n_{k+1}}\left|\sum_{i=n_k+1}^{p} a_i\tilde{\psi}_i(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2M}\max_{n_k<p<n_{k+1}}\left|\sum_{i=n_k+1}^{p} a_i\varphi_i(x)\right| +$$

$$+\frac{1}{2M}\max_{n_k<p<n_{k+1}}\left|\sum_{i=n_k+1}^{p} a_i\sum_{j=m_i+1}^{m_i+1} c_j\chi_j(x)\right| + \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}}|a_i|\,|\alpha_i(x)|$$

и

$$\max_{n_k<p<n_{k+1}}\left|\sum_{i=n_k+1}^{p} a_i\psi_i(x)\right| \geqslant \frac{1}{2M}\max_{n_k<p<n_{k+1}}\left|\sum_{i=1}^{p} a_i\varphi_i(x)\right| -$$

$$-\frac{1}{2M}\max_{n_k<p<n_{k+1}}\left|\sum_{i=n_k+1}^{p} a_i\sum_{j=m_i+1}^{m_i+1} c_j\chi_j(x)\right| - \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}}|a_i|\,|\alpha_i(x)|,$$

где $\|\alpha_i\|_2 \leqslant \frac{1}{2^i}$, $i = 1, 2, \cdots$.

Из последних неравенств, учитывая также тот факт, что система Хаара $\{\chi_i\}_{i=1}^{\infty}$ является системой сходимости, следует что п. в. выполняется соотношение

$$\lim_{k\to\infty}\left(\max_{n_k<p<n_{k+1}}\left|\sum_{i=n_k+1}^{p} a_i\psi^i(x)\right| - \max_{n_k<p<n_{k+1}}\left|\sum_{i=n_k+1}^{p} a_i\varphi_i(x)\right|\right)=0. \quad (14)$$

С другой стороны, учитывая (11), (12) и (13), легко убедиться, что ряды (1) сходятся п. в. теми же номерами $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, по которым сходятся ряды (2). Отсюда, используя также соотношение (14), получаем, что множества сходимости рядов (1) и (2) при $\sum_{i=2}^{\infty} a_i^2 < \infty$ совпадают п. в.

Теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 17. XI. 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *B. S. Kashin*. On Weyl's multipliers for almost everywhere convergence of orthonormal series, Anal. Math., v. 2, № 4, 1976, 249—266.
2. *K. Tandori*. Uber beschränkte orthormierte sisteme, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., v. 31, № 3—4, 1978, 279—285.
3. *Д. Е. Меньшов*. Ряды по ортогональным функциям, ограниченным в совокупности, ДАН СССР, т. 15, 1937, 295—300.
4. *Б. С. Кашин, А. А. Саакян*. Ортогональные ряды, М., «Наука», 1984.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՀԱՄԱՌՈՏ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

СОДЕРЖАНИЕ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

CONTENTS

Short communications