

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.

Выходит 6 раз в год

на русском и английском языках.

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԴԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ԶՐՐԱՇԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԻՔՍԱՆԴՐՅԱՆ

գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ

Ա. Ա. ԽԱԱԼՅԱՆ

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ

Ա. Ռ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

Ռ. Լ. ՇԱՀՐԱՎՅԱՆ

գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու ֆաբտուլար Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀՆԴԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ:

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն զրամեքենագրված, երկու օրինակով՝ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով:

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով:

3. Մեկատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն հնոքատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ հնոքատառերը՝ երկու գծիկով վերևում:

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ավիթաձև գծով:

4. Գծադրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում:

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը:

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

6. Երբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված բոլոր լին շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում:

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չգրադվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը:

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր:

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ: Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա:

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и ивритском языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН

зам. главного редактора

Р. В. АМБАРЦУМЯН

Н. У. АРАКЕЛЯН

И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ

С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН

А. А. ТАЛАЛЯН

Р. Л. ШАХБАГЯН

зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке), а кратких сообщений — не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редакколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название места издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переперстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. A. ALEXANDRIAN

associate editor

R. V. AMBARTZUMIAN

N. U. ARAKELIAN

S. N. MERGELIAN

A. B. NERSESIAN

A. A. TALALIAN

R. L. SHAKHBAGIAN

associate editor

I. D. ZASLAVSKI

executive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings *zvestia* of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series "Matematika"

Academy of Sciences of Armenian SSR

24-b, Marshal Bagramian Ave.

Yerevan, Armenian SSR, USSR

УДК 517.95

Г. Г. КАЗАРЯН, В. Н. МАРКАРЯН

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ НЕГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДАННЫМ НОСИТЕЛЕМ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТИ

После введения Л. Хёрмандером понятия гипоеллиптичности дифференциального оператора усилия многих математиков были направлены к изучению поведения решений гипоеллиптических уравнений. Были получены как внутренние оценки для решений того или иного класса гипоеллиптических (и, в частности, эллиптических) уравнений, так и оценки вблизи границы изучаемой области. Часть этих результатов была подытожена в книгах [1]—[3]. В дальнейшем Я. С. Бугровым в [4] был построен пример негипоеллиптического уравнения, решения которого оказались бесконечно дифференцируемыми, как только они суммируемы с квадратом вместе с некоторыми (вполне определенными) их частными производными. Далее В. И. Буренков в [5] нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы решения, вообще говоря, негипоеллиптического уравнения $P(D)u = 0$, удовлетворяющие определенным условиям, были бесконечно дифференцируемыми. Эти условия носят алгебраический характер и, если оператор $P(D)$ является гипоеллиптическим, совпадают с известными алгебраическими условиями гипоеллиптичности, найденными Л. Хёрмандером.

Общая закономерность, наблюдающаяся в алгебраических условиях гипоеллиптичности и условиях на поведение дифференциальных многочленов для того, чтобы соответствующие решения дифференциального уравнения были гладкими, побудили нас в работе [6] ввести понятие носителя гипоеллиптичности и числа гипоеллиптичности для линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Оказалось, что эта численная характеристика делит дифференциальные операторы на разные классы. При этом разделение гиперболические по Л. Гордингу (и, тем самым, гиперболические по И. Г. Петровскому) и гипоеллиптические по Л. Хёрмандеру операторы занимают крайние позиции. В [6] было доказано, что для гиперболического оператора $P(D) = P(D_1, \dots, D_n)$ носитель гипоеллиптичности есть пустое множество, в то время как для гипоеллиптических операторов $P(D)$ носитель гипоеллиптичности совпадает с множеством $\{1, \dots, n\}$. Там же изучены носители (и числа) гипоеллиптичности некоторых классов обобщенно-однородных операторов и доказаны некоторые групповые свойства носителя гипоеллиптичности.

Настоящая работа является продолжением заметки [6]. Здесь мы описываем классы общих дифференциальных операторов с одинаковыми носителями гипоеллиптичности, находим алгебраические ограничения на те «младшие члены», добавление которых к данному оператору не меняет

его носители гиповаллиптичности и, опираясь на эти результаты и на результаты работы [6], получаем внутренние оценки для решений уравнения $P(D)u = 0$ с данным носителем гиповаллиптичности оператора $P(D)$. Результаты последнего пункта дополняют соответствующие результаты Л. Хёрмандера, В. И. Буренкова и других авторов.

По поводу определений и обозначений, используемых в настоящей работе, мы отсылаем читателя к [6]. Здесь мы будем в полной мере пользоваться терминологией [6], в отдельных случаях не упоминая об этом.

§ 1. Носители гиповаллиптичности общих дифференциальных операторов

Прежде чем перейти к нахождению носителя (и числа) гиповаллиптичности общих дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, докажем несколько вспомогательных предложений, являющихся обобщениями лемм 3 и 4 работы [7].

Лемма 1.1. Пусть a, b, c, d, e — неотрицательные числа. Для того, чтобы при произвольном $y \in [0, 1]$

$$\frac{x^a \cdot y^b}{x^c \cdot y^d + x^e} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty \quad (1.1)$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\delta \geq 0$

$$a - \delta b < \max \{e, c - \delta d\}. \quad (1.2)$$

Доказательство. Докажем необходимость условия (1.2). Пусть, наоборот, при выполнении соотношения (1.1), условие (1.2) нарушается. Это значит, что для некоторого $\delta_0 \geq 0$

$$a - \delta_0 b \geq \max \{e, c - \delta_0 d\}. \quad (1.3)$$

Пусть $y = x^{-\delta_0}$, тогда из условия (1.3) следует, что при всех $x > 1$

$$\frac{x^a \cdot y^b}{x^c \cdot y^d + x^e} = \frac{x^{a - b \cdot \delta_0}}{x^{c - d \cdot \delta_0} + x^e} > \frac{1}{2},$$

что противоречит (1.1) и доказывает необходимость условия (1.2).

Достаточность. Пусть при выполнении условия (1.2) существует последовательность пар $\{x_j, y_j\}$, $x_j \rightarrow \infty$, $y_j \in [0, 1]$ и число $\kappa > 0$ такие, что для всех $j = 1, 2, \dots$

$$x_j^a \cdot y_j^b / (x_j^c \cdot y_j^d + x_j^e) > \kappa. \quad (1.4)$$

Изучим в отдельности следующие два возможных случая:

- 1) $y_j = o(x_j^{-\delta})$ для любого $\delta \geq 0$,
- 2) существуют числа $\delta_1 \geq \delta_0 \geq 0$, $\sigma_1 \geq \sigma_0 > 0$ и подпоследовательность последовательности $\{x_j, y_j\}$ (которую также обозначим через $\{x_j, y_j\}$) такие, что

$$\sigma_0 \cdot x_j^{-\delta_0} \leq y_j \leq \sigma_1 x_j^{-\delta_1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Если в случае 1) $b = 0$, то из (1.2) следует, что

$a < \max \{e, c - d\delta\}$ для всех $\delta > 0$, т. е. $a < \max \{e, c\}$ при $d = 0$ и $a < e$ при $d \neq 0$, поэтому $x_j^a / (x_j^c \cdot y_j^d + x_j^e) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, что противоречит (1.4). Если же $b \neq 0$, то при $\delta = a/b$ имеем $y_j = o(x_j^{a/b})$, $j \rightarrow \infty$

$$\frac{x_j^a \cdot y_j^b}{x_j^c \cdot y_j^d + x_j^e} \leq \frac{x_j^a \cdot o(x_j^{-a})}{x_j^e} \rightarrow 0,$$

что противоречит (1.4).

Случай 2). Очевидно, что в этом случае разность $\delta_1 - \delta_0$ можно считать меньше любого наперед заданного числа $2\varepsilon > 0$, т. е. существует число $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \geq 0$ такое, что при $j = 1, 2, \dots$

$$\sigma_0 x_j^{-(i_2+1)} \leq y_j \leq \sigma_1 \cdot x_j^{-(i_2-1)}. \quad (1.5)$$

Выберем число $\varepsilon > 0$ так, чтобы вместе с условием (1.2) выполнялось еще условие

$$a - (\delta_2 - \varepsilon) b < \max \{e, c - (\delta_2 + \varepsilon) d\}.$$

Из этого условия и неравенства (1.5) получаем, что при $j \rightarrow \infty$

$$\frac{x_j^a \cdot y_j^b}{x_j^c \cdot y_j^d + x_j^e} \leq \frac{\sigma_1^b \cdot x_j^{a - (i_2+1)d}}{\sigma_0^d \cdot x_j^{c - (i_2+1)d} + x_j^e} \rightarrow 0,$$

что противоречит (1.4) и доказывает лемму 1.1.

Лемма 1.2. Пусть a, b_s, c, d_s, e ($s = 1, 2, \dots$) — произвольные неотрицательные числа, при этом последовательности $\{b_s\}$ и $\{d_s\}$ ограничены. Для того, чтобы при $x \rightarrow \infty$ и произвольном $y \in [0, 1]$

$$x^a \cdot y^{b_s} / (x^c \cdot y^{d_s} + x^e) \rightarrow 0 \quad (1.6)$$

равномерно по s , необходимо и достаточно существование числа $\varepsilon > 0$ такого, что при всех $s = 1, 2, \dots, \delta \geq 0$

$$a - b_s \delta < \max \{e, c - \delta_s d_s\} - \varepsilon. \quad (1.7)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть при выполнении соотношения (1.6)

$$\varepsilon_s = a - b_s \delta_s - \max \{e, c - \delta_s d_s\} \rightarrow 0$$

при $s \rightarrow \infty$ для некоторой последовательности чисел $\delta_s \geq 0, s = 1, 2, \dots$. Положим $x_s = \varepsilon_s^{-1}, y_s = \varepsilon_s^{\delta_s}$, тогда имеем при $s = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \frac{x_s^a \cdot y_s^{b_s}}{x_s^c \cdot y_s^{d_s} + x_s^e} &= \frac{\varepsilon_s^{-a+b_s \delta_s}}{\varepsilon_s^{-c+d_s \delta_s} + \varepsilon_s^{-e}} = \\ &= [\varepsilon_s^{a-e-(\delta_s-d_s)\delta_s} + \varepsilon_s^{a-b_s \delta_s-e}]^{-1} \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Это противоречит (1.6) и доказывает необходимость условия (1.7) для выполнения (1.6).

Достаточность доказывается аналогично соответствующей части леммы 1.1 (см. также доказательство леммы 1.3). Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. Пусть $a_s, b_s, c_s, d_s, s = 1, 2, \dots$ — ограниченные последовательности неотрицательных чисел. Для того, чтобы при $x \rightarrow \infty$ и произвольном $t \in [0, x]$

$$f_s(t, x) \equiv x^{a_s} t^{b_s} / (x^{c_s} t^{d_s} + x^{e_s}) \rightarrow 0 \quad (1.8)$$

равномерно по s , необходимо и достаточно, чтобы существовало число $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $\delta \leq 1$ и $s = 1, 2, \dots$

$$a_s + \delta b_s < \max \{e_s, c_s + \delta d_s\} - \varepsilon. \quad (1.9)$$

Доказательство необходимости получается повторением первой части доказательства леммы 1.2 с подстановкой $x_s = \varepsilon_s^{-1}$, $t_s = \varepsilon_s^{a_s}$, $s = 1, 2, \dots$.

Достаточность. Пусть при выполнении условия (1.9) существует последовательность пар чисел $\{x_s, t_s\}$ и число $x > 0$ такие, что $t_s \in [0, x_s]$, $x_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и $f_s(t_s, x_s) \geq x$, $s = 1, 2, \dots$.

Изучим в отдельности следующие два возможных случая:

1) $t_s = o(x_s^{\delta})$ для любого $\delta \leq 1$,

2) существуют числа $0 \leq \delta_0 \leq \delta_1 \leq 1$, $0 < \delta_0 < \delta_1$ и подпоследовательность последовательности $\{x_s, t_s\}$ (которую также обозначим через $\{x_s, t_s\}$) такие, что

$$\sigma_0 \cdot x_s^{\delta_0} \leq t_s \leq \sigma_1 \cdot x_s^{\delta_1}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (1.10)$$

Если в случае 1) $b_s = 0$ ($s = 1, 2, \dots$), то из (1.9) следует, что $a_s < \max \{e_s, c_s + \delta d_s\} - \varepsilon$ для всех $\delta \leq 1$ и $s = 1, 2, \dots$, т. е. $a_s < \max \{e_s, c_s\} - \varepsilon$ при $d_s = 0$ и $a_s < e_s$ при $d_s \neq 0$ ($s = 1, 2, \dots$). Поэтому $f(t_s, x_s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, что противоречит предположению $f_s(t_s, x_s) \geq x > 0$ ($s = 1, 2, \dots$).

Если же в случае 1) $b_s \neq 0$ для бесконечного числа значений s , то взяв $\delta_s = -\frac{a_s}{b_s}$, получаем при $t_s = o(x_s^{\delta_s})$, $s \rightarrow \infty$

$$f_s(t_s, x_s) \leq x_s^{a_s} \cdot o(x_s^{-a_s}) / x_s^{e_s} \rightarrow 0.$$

В случае 2) можно считать, что $\delta_1 - \delta_0 < \varepsilon_0$ для любого наперед заданного числа $\varepsilon_0 > 0$. Пусть число ε_0 удовлетворяет условию

$$\varepsilon_0 \leq \max \left\{ \frac{\varepsilon}{2b}, \frac{\varepsilon}{2d} \right\},$$

где $b = \max b_s$, $d = \max d_s$. Тогда неравенство (1.10) запишется в виде

$$\sigma_0 \cdot x_s^{\delta_0 - \varepsilon_0} \leq t_s \leq \sigma_1 \cdot x_s^{\delta_1 + \varepsilon_0}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (1.11)$$

для некоторого числа $0 \leq \delta_s \leq 1$.

Из неравенства (1.11) и определения чисел ε_0, b, d следует, что при $s \rightarrow \infty$

$$f_s(t_s, x_s) \leq \frac{\sigma_1^{b_s} \cdot x_s^{a_s + b_s(\delta_s + \varepsilon_0)}}{\sigma_0^{d_s} \cdot x_s^{c_s + d_s(\delta_s - \varepsilon_0)} + x_s^{e_s}} \leq \frac{A \cdot x_s^{a_s + b_s \delta_s + \frac{\varepsilon}{2}}}{B \cdot x_s^{c_s + d_s \delta_s + \frac{\varepsilon}{2}} + x_s^{e_s}}, \quad (1.12)$$

где $A = \max [1, \sigma_s^b]$, $B = \min [1, \sigma_0^{d_s}]$.

Соотношения (1.9) и (1.12) вместе показывают, что при $s \rightarrow \infty$ $f_s(t_s, x_s) \rightarrow 0$. Это противоречит нашему предположению и доказывает лемму 1.3.

Лемма 1.4. Пусть $c > a \geq 0$, $c > e \geq 0$, $\{b_s\}$ и $\{d_s\}$ — ограниченные последовательности неотрицательных чисел.

Для того, чтобы при $x \rightarrow \infty$ и произвольном $y \in [0, 1]$ выполнялось соотношение (1.6) равномерно по s , необходимо и достаточно условие

$$\inf_s \frac{b_s}{d_s} > 1 - \frac{c-a}{c-e}. \quad (1.13)$$

Доказательство. Положим $y = t \cdot x^{-1}$, тогда соотношение (1.6) эквивалентно тому, что при $x \rightarrow \infty$ и произвольном $t \in [0, x]$

$$x^{a-b_s} \cdot t^{b_s} / (x^{c-d_s} \cdot t^{d_s} + x^e) \rightarrow 0 \quad (1.14)$$

равномерно по s .

В силу леммы 1.3 для выполнения (1.14) необходимо и достаточно условие

$$a - b_s + \delta b_s < \max [e, c - d_s + \delta d_s] - e \quad (1.15)$$

для всех $s = 1, 2, \dots$, $\delta \leq 1$ и для некоторого числа $\varepsilon > 0$.

С другой стороны, простыми выкладками легко показать, что для справедливости неравенства (1.15) при всех $0 \leq \delta \leq 1$ необходимо и достаточно, чтобы (1.15) выполнялось лишь для тех δ_s ($s = 1, 2, \dots$), для которых $c - d_s + \delta_s d_s = e$. Для указанных значений δ_s неравенство (1.15) эквивалентно неравенству

$$a - e + (e - c) \frac{b_s}{d_s} < -e, \quad s = 1, 2, \dots,$$

или, что то же самое, неравенству

$$(c - e) \left(1 - \frac{b_s}{d_s}\right) < c - a - e, \quad s = 1, 2, \dots$$

Так как $c > e$, то отсюда получаем для всех $s = 1, 2, \dots$

$$\frac{b_s}{d_s} > 1 - \frac{c-a}{c-e} + \frac{e}{c-e}$$

и тогда

$$\inf_s \frac{b_s}{d_s} > 1 - \frac{c-a}{c-e} + \frac{e}{c-e} > 1 - \frac{c-a}{c-e}.$$

Лемма 1.4 доказана.

Пусть $R(t)$ — μ -однородный многочлен ($\mu > 0$, $j = 1, \dots, n$), A — множество n -мерных векторов $a = (a_1, \dots, a_n)$ с компонентами из множества $\{-1, 0, 1\}$, Λ^+ — множество единичных векторов $\lambda \in R_n$ с неотрицательными компонентами, $\Sigma(R) = \{\eta; \eta \in R_n^{(0)}, \|\eta\| = 1, R(\eta) = 0\}$, где

$$|\eta, H| = \left[\sum_{j=1}^n |\eta_j|^{2/p_j} \right]^{1/2}.$$

Пусть $a \in A$, $\lambda \in \Lambda^+$, $\eta \in \Sigma(R)$, положим

$$\Delta(\eta, a, \lambda, R) = \min \{d : d \geq 0,$$

$$\sum_{(j, a) = d} \frac{D_a^* R(\eta)}{a!} = \sum_{(j, a) = d} D^* R(\eta) \cdot \frac{a^*}{a!} \neq 0\},$$

$$\Delta_j(\eta, a, \lambda) = \Delta(\eta, a, \lambda, D_j R), \quad j = 1, \dots, n.$$

Обозначим через $\bar{\Lambda}_l^k$ замыкание множества единичных нормалей грани N_l^k х. м. N многочлена $P(\xi)$. Для вектора $\mu \in \bar{\Lambda}_l^k$ представим многочлен $P(\xi)$ в виде

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M(\mu)} P_{d_j}(\xi) = \sum_{j=0}^{M(\mu)} \sum_{(\lambda, \sigma) = d_j} \gamma_\lambda \xi^\sigma, \quad (1.16)$$

где $d_j = d_j(\mu)$ ($j = 0, \dots, M(\mu)$), $d_0 > d_1 > \dots > d_M \geq 0$,

$$P_{d,(\mu)}(\xi) \equiv P^{l,k}(\xi) \text{ для любого } \mu \in \bar{\Lambda}_l^k.$$

Основным результатом настоящего параграфа является

Теорема 1.1. Пусть х. м. N оператора $P(D)$ с постоянными вещественными коэффициентами вполне правилен. Пусть регулярны все в. п. грани N за исключением единственной в. п. нерегулярной грани N_l^m . Пусть еще $\sum (P_{d_i}) \cap \sum (P_{d_i}) = \emptyset$ для всех $\mu \in \bar{\Lambda}_l^m$.

Для того, чтобы $H(P) \supset \{1, \dots, k\}$ ($h(P) \geq k$) необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих условий:

1) для каждой точки $\eta \in \Sigma(P_{d_i})$ существует окрестность $U(\eta)$ такая, что

$$P_{d_i}(\xi) \cdot P_{d_i}(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in U(\eta), \quad (1.17)$$

2) при всех $\eta \in \Sigma(P_{d_i})$, $a \in A$, $\mu \in \bar{\Lambda}_l^m$

$$\min_{\lambda \in \Lambda^+} \frac{\Delta_l(\eta, a, \lambda)}{\Delta(\eta, a, \lambda)} > 1 - \frac{\mu_l}{d_0 - d_1}, \quad i = 1, \dots, k, \quad (1.18)$$

где $\Delta(\eta, a, \lambda) = \Delta(\eta, a, \lambda, P_{d_i})$, $\Delta_j(\eta, a, \lambda) = \Delta(\eta, d, \lambda, D_j P_{d_i})$, $j = 1, \dots, k$.

Замечание. Эта теорема является k -мерным аналогом ряда известных результатов для гипоеллиптических операторов. При $k = n$ она дает критерий гипоеллиптичности, обобщающий известные критерии гипоеллиптичности для нерегулярных операторов (см., например, [8]—[10]). При доказательстве мы будем пользоваться методами работ [11], [7], [8].

Доказательство. Необходимость условия 1). Пусть для оператора $P(D)$ с числом гипоеллиптичности $h(P) \geq k$ ($H(P) \supset \{1, \dots, k\}$), существуют точка $\eta \in \Sigma(P_{d_i})$, вектор $\mu \in \bar{\Lambda}_l^m$ и последовательность точек $\{\eta^s\}$, $\eta^s \rightarrow \eta$ такие, что

$$P_{d_i}(\eta_s) \cdot P_{d_i}(\eta^s) < 0, \quad s = 1, 2, \dots \quad (1.19)$$

Легко показать, что существование последовательности $\{\eta^s\}$, удовлетворяющей условию (1.19), влечет существование последовательности $\{\xi^s\}$ такой, что $\xi^s \rightarrow \infty$ и $P(\xi^s) = 0$, $s = 1, 2, \dots$.

Пусть $e^j = (0, \dots, e_j, \dots, 0)$ ($j = 1, \dots, n$) — вершина вполне правильного многогранника N , тогда $D^{e^j} P(\xi) = \gamma_{e^j} \cdot e_j! \neq 0$ и на последовательности $\{\xi^s\}$ при $s \rightarrow \infty$ и $j = 1, \dots, n$

$$|D^{e^j} P(\xi^s)| / (1 + |P(\xi^s)|) = |D^{e^j} P(\xi^s)| \rightarrow 0.$$

Это показывает, что $j \notin H(P)$ ($j = 1, \dots, n$), т. е. мы доказали больше, что $H(P) = \emptyset$.

Докажем необходимость условия 2). Сначала предположим, что для некоторых векторов $\eta \in \Sigma(P_a)$, $\mu \in \bar{\Lambda}_I^m$, $\lambda \in \Lambda^+$, $a \in A$ и некоторого индекса $i: 1 \leq i \leq n$ (пусть для определенности $i = 1$)

$$\frac{\Delta_1(\eta, a, \lambda)}{\Delta(\eta, a, \lambda)} \leq 1 - \frac{\mu_1}{d_0 - d_1}. \quad (1.20)$$

Пусть $t > 0$, положим

$$\rho = t^{\frac{d_0 - d_1}{\Delta(\mu, a, \lambda)}}, \quad \xi = t^\mu (\eta + \rho^{-\lambda} a).$$

Тогда, применяя формулу Тейлора, получим для достаточно больших t и для некоторых постоянных $\chi_0 > 0$, $\chi_1 > 0$

$$\begin{aligned} P_{d_0}(\xi) &= t^{d_0} \cdot P_{d_0}(\eta + \rho^{-\lambda} a) = \\ &= t^{d_0} \cdot \sum_{(\lambda, a) \in \Delta(\mu, a, \lambda)} \frac{D_a^* P_{d_0}(\eta)}{a!} \rho^{-\Delta(\eta, a, \lambda)} + o(t^{d_1}) \leq \chi_0 \cdot t^{d_1}, \\ D_1 P_{d_0}(\xi) &\geq \chi_1 \cdot t \end{aligned}$$

где мы положили $D_a^* R = a^* D^* R \equiv a_1^{*1} \dots a_n^{*n} D^* R$.

Отсюда и из простых геометрических соображений следует, что при некоторых постоянных $\chi_2 > 0$, $\chi_3 > 0$ и достаточно больших t

$$\begin{aligned} |P(\xi)| &\leq \chi_2 \cdot t^{d_1}, \\ |D_1 P(\xi)| &\geq \chi_3 \cdot t \end{aligned}$$

Из предположения (1.20) и последних двух неравенств следует, что при $t \rightarrow \infty$, т. е. при $\xi \rightarrow \infty$

$$|D_1 P(\xi)| / (1 + |P(\xi)|) \rightarrow 0,$$

что противоречит тому, что $1 \in H(P)$.

Итак, остается рассмотреть случай, когда для всех точек $\eta \in \Sigma(P_a)$ и всех векторов $\mu \in \bar{\Lambda}_I^m$, $\lambda \in \Lambda^+$, $a \in A$

$$\frac{\Delta_i(\eta, a, \lambda)}{\Delta(\eta, a, \lambda)} > 1 - \frac{\mu_i}{d_0 - d_1}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Докажем, наконец, необходимость условия (1.18) для $P \in \Gamma(k, n)$.

Пусть при выполнении этого условия и $P \in \Gamma(k, n)$ существуют точка $\eta \in \Sigma(P_d)$, векторы $\alpha \in A$, $\mu \in \bar{\Lambda}_1^m$, индекс $i_0: 1 \leq i_0 \leq k$ (будем для определенности считать, что $i_0 = 1$) и последовательность $\{\lambda^s\}$, $\lambda^s \in \Lambda^+$, $s = 1, 2, \dots$ такие, что при $s \rightarrow \infty$

$$\frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)} \equiv \frac{\Delta_1(\eta, \alpha, \lambda^s)}{\Delta(\eta, \alpha, \lambda^s)} \rightarrow 1 - \frac{\mu_1}{d_0 - d_1}. \quad (1.21)$$

Положим для $s = 1, 2, \dots$

$$t_s = \left[\mu_1 - (d_0 - d_1) \left(1 - \frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)} \right) \right]^{-1},$$

$$\rho_s = t_s^{\frac{d_0 - d_1}{\Delta(s)}}, \quad \xi^s = t_s^{\mu_1} (\eta + \rho_s^{-\lambda^s} \alpha).$$

Из условия (1.21) и из того, что $\eta \in R_n^{(0)}$ следует, что $t_s \rightarrow \infty$, $\xi^s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$.

Так как $P_d(\xi)$ — μ -однородный многочлен порядка $d_0 > 0$, то на последовательности $\{\xi^s\}$ имеем

$$P_d(\xi^s) = t_s^{d_0} \cdot P_d(\eta + \alpha \cdot \rho_s^{-\lambda^s}).$$

Применив формулу Тейлора, отсюда получим

$$\begin{aligned} P_d(\xi^s) &= t_s^{d_0} \cdot \sum_{(\lambda^s, \alpha) = \Delta(s)} \frac{D_\alpha^s P_d(\eta)}{\alpha!} \cdot \rho_s^{-\lambda^s} + o(t^{d_1}) = \\ &= t_s^{d_1} \cdot \sum_{(\lambda^s, \alpha) = \Delta(s)} \frac{D_\alpha^s P_d(\eta)}{\alpha!} + o(t^{d_1}). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Поскольку множество $A(\eta) = \{\alpha; \alpha \in Z_n^+, D_\alpha^s P_d(\eta) \neq 0\}$ конечно, то не умаляя общности, можно считать, что сумма в правой части (1.22) распространяется по некоторому фиксированному множеству $A_0 \subset A$. Тогда из (1.22) получаем

$$P_d(\xi) = t_s^{d_1} \cdot \sum_{\alpha \in A_0} \frac{D_\alpha^s P_d(\eta)}{\alpha!} + o(t^{d_1}). \quad (1.23)$$

Но по определению множества A_0 и чисел $\Delta(s)$

$$\sum_{\alpha \in A_0} \frac{D_\alpha^s P_d(\eta)}{\alpha!} = \sigma_0 \neq 0.$$

Отсюда и из представления (1.23) получаем, что для достаточно больших s

$$\frac{\sigma_0}{2} \cdot t_s^{d_1} \leq |P_d(\xi^s)| \leq \sigma_0 \cdot t_s^{d_1}. \quad (1.24)$$

Поступая аналогично с многочленом $D_1 P_d(\xi)$, получим для некоторой подпоследовательности $\{\xi^s\}$ (которую также обозначим через $\{\xi^s\}$) и некоторой постоянной $\tau_1 > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{2} \cdot t_s^{d_0 - \mu_1 - (d_0 - d_1) \frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)}} &\leq |D_1 P_{d_0}(\xi^s)| \leq \\ &\leq \sigma_1 \cdot t_s^{d_0 - \mu_1 - (d_0 - d_1) \frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)}}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

С другой стороны, из простых геометрических соображений легко следует существование постоянных $\sigma_2 \geq 0$, $\sigma_3 \geq 0$ таких, что при $s \rightarrow \infty$

$$|P(\xi^s) - P_{d_0}(\xi^s)| \leq \sigma_2 \cdot t_s^{d_1}, \quad (1.26)$$

$$|D_1 P(\xi^s) - D_1 P_{d_0}(\xi^s)| \leq \sigma_3 \cdot t_s^{d_1 - \mu_1}. \quad (1.27)$$

Из предположения (1.21) и из неравенств (1.25), (1.27) получаем, что для достаточно больших s

$$|D_1 P(\xi^s)| > \frac{\sigma_1}{4} \cdot t_s^{d_0 - \mu_1 - (d_0 - d_1) \frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)}}.$$

Для многочлена $P(\xi)$ аналогично из (1.24), (1.26) получим

$$|P(\xi^s)| \leq \sigma_4 \cdot t_s^{d_1},$$

где $\sigma_4 \geq 2\sigma_0 + \sigma_2$. Из последних двух соотношений и того, что $t_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, получаем

$$\frac{|D_1 P(\xi^s)|}{1 + |P(\xi^s)|} \geq \sigma \cdot t_s^{(d_0 - d_1) \left[1 - \frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)}\right] - \mu_1} = \sigma \cdot t_s^{-\frac{1}{t_s}} \rightarrow \sigma \neq 0.$$

Это означает, что $1 \notin H(P)$. Необходимость условия 2) доказана.

Достаточность. Доказательство ведем от противного. Пусть при выполнении условий 1), 2) теоремы существуют индекс $i_0: 1 \leq i_0 \leq k$ (предположим для определенности, что $i_0 = 1$), последовательность $\{\xi^s\}$, $\xi^s \rightarrow \infty$ и постоянная $x_0 > 0$ такие, что

$$|D_1 P(\xi^s)| / (1 + |P(\xi^s)|) \geq x_0, \quad s = 1, 2, \dots \quad (1.28)$$

Если при $s \rightarrow \infty$ $\xi^s / \|\xi^s\|, \mu_j^{\mu} \rightarrow \eta \in \Sigma(P_{d_0})$, то противоречие с (1.28) получается аналогичными рассуждениями, проводимыми при доказательстве случая 1) леммы 1.1 работы [8]. Поэтому будем считать, что $\xi^s / \|\xi^s\|, \mu_j^{\mu} \rightarrow \eta$, при этом $\eta \in \Sigma(P_{d_0})$.

Представим последовательность $\{\xi^s\}$ в виде

$$\begin{aligned} \xi^s &= \|\xi^s\| \cdot \mu_j^{\mu} \cdot \eta + (\xi^s - \|\xi^s\| \cdot \mu_j^{\mu} \cdot \eta) = \\ &= \|\xi^s\| \cdot \mu_j^{\mu} \left(\eta + \frac{\xi^s - \|\xi^s\| \cdot \mu_j^{\mu} \cdot \eta}{\|\xi^s\| \cdot \mu_j^{\mu}} \right) \end{aligned}$$

и положим для $s = 1, 2, \dots; i = 1, \dots, n$

$$\tau_i^s = \|\xi_i^s - \|\xi^s\| \cdot \mu_j^{\mu} \cdot \eta_i\| \cdot \|\xi^s\| \cdot \mu_j^{\mu} \cdot \eta_i,$$

$$\rho_s = \exp \left[\sum_{i=1}^n (\ln \tau_i^s)^2 \right]^{1/2},$$

$$\lambda_i^s = \frac{\ln \tau_i^s}{\ln \rho_s}, \quad a_i^s = \operatorname{sign} (\xi_i^s - \|\xi^s, \mu^{d_1} \cdot \eta_i^s).$$

Из введенных обозначений следует, что $a^s \in A$, $\lambda^s \in \Lambda^+$, при этом

$$\tau_i^s = \rho_s^{-\lambda_i^s}, \quad \xi^s = \|\xi^s, \mu^{d_1} (\tau_i + \rho_s^{-\lambda^s} \cdot a^s).$$

Из условия 1) теоремы и того, что $\sum (P_{d_i}) \cap \sum (P_{d_i}) = \emptyset$ следует, что для последовательности $\{\xi^s\}$ существует постоянная $x_1 > 0$ такая, что

$$\frac{|D_1 P(\xi^s)|}{1 + |P(\xi^s)|} \leq x_1 \frac{\|\xi^s, \mu^{d_0 - d_1} \cdot \rho_s^{-\Delta_1(s)} + o(\|\xi^s, \mu^{d_1}\|)}{\|\xi^s, \mu^{d_0} \cdot \rho_s^{-\Delta(s)} + \|\xi^s, \mu^{d_1}\|} \quad (1.29)$$

Применив здесь лемму 1.4 при $x = \|\xi^s, \mu\|$, $t = \rho_s^{-1}$, с учетом условия 2) теоремы, получим, что при $s \rightarrow \infty$ правая часть (1.29) стремится к нулю. Тогда неравенство (1.29) противоречит (1.28) и доказывает часть теоремы, относящейся к достаточности.

Теорема 1.1. доказана.

§ 2. Добавление младших членов, сохраняющих число гиповаллиптичности

В этом пункте мы устанавливаем алгебраические условия сравнения (неполной) силы дифференциальных операторов с оператором, имеющим данный носитель гиповаллиптичности и условия на «младшие члены», добавление которых не меняет числа гиповаллиптичности данного оператора.

Для гиповаллиптических операторов аналогичные вопросы исследованы многими авторами. Отметим, в частности, работы [3], [8]—[10], непосредственно примыкающие к данной работе. В частности Л. Хёрмандером доказано, что если $Q \prec P$, то для любого комплексного числа a $P \prec P + aQ \prec P$, при этом из гиповаллиптичности оператора $P(D)$ следует гиповаллиптичность операторов $R_a(D) = P(D) + aQ(D)$. В заметках [9], [10] получены некоторые уточнения этих результатов на языке сравнения мощности операторов.

Сначала введем одно понятие, являющееся аналогом понятия сравнения силы операторов по Л. Хёрмандеру для пространства $Z_{n,k}^+$.

Определение 2.1. Мы скажем, что многочлен $P(\xi) = P(\xi', \xi'')$ сильнее многочлена $Q(\xi) = Q(\xi', \xi'')$ относительно $Z_{n,k}^+$ и запишем $Q \prec^{(k)} P$, если для некоторой постоянной $c > 0$

$$\bar{Q}(\xi, k) \leq c \cdot \bar{P}(\xi, k) \quad \forall \xi \in R_n,$$

(определение $\bar{R}(\xi, k)$ см. в § 3 работы [6]).

Если $Q \prec^{(k)} P \prec^{(k)} Q$, то скажем, что операторы $P(D)$ и $Q(D)$ имеют одинаковую силу относительно $Z_{n,k}^+$ или одинаковую k -силу.

Пусть $R(D)$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, введем другой аналог функции Л. Хёрмандера

$$\bar{R}(\xi, t, k) = \left[\sum_{\alpha \in Z_{n,k}^+} |D^\alpha R(\xi)|^2 \cdot t^{2|\alpha|} \right]^{1/2}.$$

Заметим, что если за множество A в лемме 3.1 работы [6] брать единичный шар в R_k , то неравенство (3.1) из [6] можно переписать в виде

$$c^{-1} \tilde{P}(\xi, t, k) \leq \sup_{|\theta| < t} |P(\xi' + \theta, \xi'')| \leq c \cdot \tilde{P}(\xi, t, k). \quad (2.1)$$

Лемма 2.1. Для выполнения соотношения $Q \rightarrow (k)P$ необходимо и достаточно выполнения одного из следующих эквивалентных условий (при $k = n$, см. [3], теорема 3.3.2).

а) Существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$|Q(\xi)| \leq c \cdot \tilde{P}(\xi, k) \quad \forall \xi \in R_n. \quad (2.2)$$

б) Существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$\tilde{Q}(\xi, t, k) \leq c \cdot \tilde{P}(\xi, t, k) \quad \forall \xi \in R_n, t \geq 1. \quad (2.3)$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что из а) следует б). Из (2.1)—(2.2) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\xi, t, k) &\leq c_1 \sup_{|\theta| < t} |Q(\xi' + \theta, \xi'')| \leq c_2 \sup_{|\theta| < t+1} |P(\xi' + \theta, \xi'')| \leq \\ &\leq c_3 \sup_{|\theta| < t} \sup_{|\eta'| < 1} |P(\xi' + \eta' + \theta, \xi'')| \leq c_3 \sup_{|\theta| < t+1} |p(\xi' + \theta, \xi'')| \leq \\ &\leq c_3 \cdot \tilde{P}(\xi, t+1, k) \leq c_4 \tilde{P}(\xi, t, k). \end{aligned}$$

Неравенство (2.3) и, тем самым, лемма 2.1 доказаны.

Теорема 2.1. Если $P \in \Gamma(k, n)$, а оператор $Q(D)$ имеет одинаковую с $P(D)$ k -силу, то $Q \in \Gamma(k, n)$.

Доказательству этой теоремы предположим некоторые вспомогательные предложения. Дадим, прежде всего, аналог понятия доминирования дифференциальных операторов по Л. Хёрмандеру.

Определение 2.2. Мы скажем, что оператор $P(D)$ доминирует над оператором $Q(D)$ относительно $Z_{n,k}^+$ и запишем $Q \rightarrow (k)P$, если

$$\sup_{\xi} \frac{\tilde{Q}(\xi, t, k)}{\tilde{P}(\xi, t, k)} \rightarrow 0, \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Лемма 2.2. Для $Q \rightarrow (k)P$ достаточно условие (при $k = n$ см. [3], теорема 3.3.3)

$$\inf_t \sup_{\xi} \frac{Q(\xi)}{\tilde{P}(\xi, t, k)} = 0. \quad (2.4)$$

Доказательство. Для $s \geq 0$ положим

$$\sigma(s) = \sup_{\xi} \frac{Q(\xi)}{\tilde{P}(\xi, s, k)}.$$

В силу неравенства (2.1) существуют постоянные $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ такие, что для всех $\xi \in R_n$, $\theta' = (\theta_1, \dots, \theta_k, 0, \dots, 0)$, $t > 0$

$$\begin{aligned} \bar{Q}(\xi, t, k) &\leq c_1 \sup_{|\theta'| < t} |P(\xi + \theta')| \leq c_1 \cdot \sigma(s) \cdot \sup_{|\theta'| < k} \bar{P}(\xi + \theta', s, k) \leq \\ &\leq c_2 \cdot \sigma(s) \cdot \sup_{|\theta'| < t+s} |P(\xi + \theta')| \leq c_2 \cdot \sigma(s) \cdot \bar{P}(\xi, t+s, k) \leq \\ &\leq c_2 \cdot \sigma(s) \left(1 + \frac{s}{t}\right)^M \cdot \bar{P}(\xi, t, k), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $M = \deg_{\xi} P(\xi)$.

Из неравенства (2.5) получаем для всех $s \geq 0$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left(\sup_{\xi} \frac{\bar{Q}(\xi, t, k)}{\bar{P}(\xi, t, k)} \right) \leq c_2 \cdot \sigma(s). \quad (2.6)$$

Так как по условию $\inf \sigma(s) = 0$, то из неравенства (2.6) следует, что $Q \rightarrow \rightarrow^{(k)} P$. Этим лемма 2.2. доказана.

Пусть $P(D)$ и $Q(D)$ — дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами и $\varepsilon > 0$, обозначим

$$\bar{P}'(\xi, k) = \left[\sum_{D \in E_{n,k}^+} |D^{\alpha} P(\xi)|^2 \right]^{1/2},$$

$$A_{\varepsilon} = \{\xi; \xi \in R_n, |Q(\xi)|/|P(\xi)| \geq \varepsilon\}.$$

Лемма 2.3. Для $Q \rightarrow \rightarrow^{(k)} P$ необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ отношение $|Q(\xi)|/\bar{P}'(\xi, k)$ было ограниченным на A_{ε} .

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 5 работы [9] с надлежащей модификацией.

Лемма 2.4. а) Если $|Q(\xi)|/(1 + |P(\xi)|) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$, то $Q \rightarrow \rightarrow^{(k)} P$ для любого $k: 1 \leq k \leq n$.

б) Оператор $P(D)$ принадлежит классу $\Gamma(k, n)$ тогда и только тогда, когда из условия $Q \rightarrow \rightarrow^{(k)} P$ следует, что $|Q(\xi)|/(1 + |P(\xi)|) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пункт а) очевиден. Докажем пункт б). Пусть $Q \rightarrow \rightarrow^{(k)} P$ и $P \in \Gamma(k, n)$. Докажем, что $\sigma(\xi) = |Q(\xi)|/(1 + |P(\xi)|) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$. Допустим обратное, что для некоторой последовательности $\xi^s \rightarrow \infty$, $\sigma(\xi^s) \geq \delta > 0$. Тогда, с одной стороны, для любой последовательности $t \rightarrow \infty$

$$\frac{|Q(\xi)|}{\bar{P}(\xi, t, k)} \geq \frac{|Q(\xi)|}{|P(\xi)| + t^M \cdot \bar{P}'(\xi, k)} = \frac{|Q(\xi)|}{|P(\xi)|} \cdot \frac{1}{1 + t^M \cdot \kappa(\xi)},$$

где $M = \deg_{\xi} P$, $\kappa(\xi) = \bar{P}'(\xi, k)/|P(\xi)| \rightarrow 0$, $t > 0$;

с другой стороны, для последовательности $\xi = \xi^s$, $t = [\kappa(\xi^s)]^{-1} \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{|Q(\xi^s)|}{|P(\xi^s)|} \cdot \frac{1}{1 + t_s^M \cdot \kappa(\xi^s)} \geq \frac{\delta}{2} > 0.$$

Полученные соотношения вместе противоречат предположению $Q \rightarrow \rightarrow^{(k)} P$ и доказывают необходимость условия б).

Достаточность условия б) для многочлена $P \in \Gamma(k, n)$ следует из очевидного замечания, что для любого многочлена $P(\xi)$ и любого мультииндекса $0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+$ $D^\alpha P \rightarrow \rightarrow^{(k)} P$.

Лемма 2.4 доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Заметим сначала, что если $Q \rightarrow \rightarrow^{(k)} P$, то для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+$, $\alpha \neq 0$ $D^\alpha Q \rightarrow \rightarrow^{(k)} P$. Отсюда, из того, что по условию теоремы $P \in \Gamma(k, n)$ и из леммы 2.4 следует существование постоянной $c_1 > 0$ такой, что $\forall \xi \in R_n$

$$c_1^{-1} (|P(\xi)| + 1) \leq \tilde{P}(\xi, k) \leq c_1 (|P(\xi)| + 1).$$

Еще раз применяя приведенное замечание и лемму 2.4 получаем, что при $1 \leq j \leq k$, $\xi \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{|D_j Q(\xi)|}{1 + |Q(\xi)|} &= \frac{|D_j Q(\xi)|}{1 + |P(\xi)|} \cdot \frac{1 + |P(\xi)|}{1 + |Q(\xi)|} \leq \\ &\leq c_2 \frac{|D_j Q(\xi)|}{1 + |P(\xi)|} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Это доказывает, что $Q \in \Gamma(k, n)$. Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. Если $P \in \Gamma(k, n)$ и $Q \rightarrow \rightarrow^{(k)} P$, то для любого комплексного числа α $P + \alpha Q \in \Gamma(k, n)$.

Доказательство. Из условия теоремы и леммы 2.4 имеем для любого $i = 1, \dots, k$

$$\frac{|D_i [P(\xi) + \alpha Q(\xi)]|}{1 + |P(\xi) + \alpha Q(\xi)|} \leq \frac{\frac{|D_i P(\xi)|}{1 + |P(\xi)|} + |\alpha| \cdot \frac{|D_i Q(\xi)|}{1 + |P(\xi)|}}{1 - |\alpha| \cdot \frac{|Q(\xi)|}{1 + |P(\xi)|}} \rightarrow 0.$$

Теорема 2.2. доказана.

Для операторов с вещественными коэффициентами справедлива и обратная

Теорема 2.3. Если для операторов $P(D)$ и $Q(D)$ с вещественными коэффициентами $\deg_{\xi_i} Q \leq \deg_{\xi_i} P$ и для любого вещественного α $P + \alpha Q \in \Gamma(k, n)$, то $Q \rightarrow \rightarrow^{(k)} P$.

Доказательство ведется аналогично доказательству теоремы 3 работе [9] с надлежащей модификацией.

Теорема 2.4. Если операторы $P(D)$ и $Q(D)$ с вещественными коэффициентами таковы, что $\deg_{\xi_i} Q < \deg_{\xi_i} P$, $P \in \Gamma(k, n)$, $P + Q \in \Gamma(k, n)$, $1 \leq k \leq n$, то для каждого $\alpha \in (0, 1)$

а) существует постоянная $c = c(\alpha) > 0$ такая, что $\forall \xi \in R_n$

$$1 + |P(\xi) + \alpha Q(\xi)| \geq c [|P(\xi)| + |Q(\xi)|]. \quad (2.7)$$

б) $\downarrow P + aQ \in \Gamma(k, n)$.

Доказательство пункта (а). Заметим сначала, что если $h(P) > 0$ (т. е. $k \geq 1$), то $P(\xi) \neq 0$ для достаточно больших $|\xi|$. Таким образом, не умаляя общности можно считать, что $P(\xi) \neq 0$ при $\xi \in R_n$.

Разобьем множество R_n на следующие два подмножества:

$$D_1 = \{\xi \in R_n; |Q(\xi)/P(\xi)| \geq 1\}, D_2 = R_n \setminus D_1.$$

Пусть $M \geq 0$, обозначим через $S(M)$ шар в R_n с центром в начале координат и радиуса M . Если при некотором $M > 0$ $D_1 \subset S(M)$, то неравенство (2.7) доказывается просто. Если же множество D_1 не ограничено, то докажем, что для некоторого числа $M_0 > 0$

$$Q(\xi)/P(\xi) \geq 1 \quad \forall \xi \in D_1 \setminus S(M_0). \quad (2.8)$$

Предполагая обратное, получим, что для некоторой последовательности $\{\xi^s\}, \xi^s \in D_1, \xi^s \rightarrow \infty$

$$Q(\xi^s)/P(\xi^s) \leq -1. \quad (2.9)$$

Так как по условию теоремы $\deg_{\xi} Q < \deg_{\xi} P$, то существует стремящаяся к бесконечности последовательность $\{\eta^s\}$ такая, что $Q(\eta^s)/P(\eta^s) \rightarrow 0$. Отсюда и из (2.9) следует существование последовательности $\{\tau^s\}, \tau^s \rightarrow \infty$ такой, что $Q(\tau^s)/P(\tau^s) = -1$, т. е. $Q(\tau^s) + P(\tau^s) = 0, s = 1, 2, \dots$. Это противоречит тому, что $P + Q \in \Gamma(k, n)$ и $k \geq 1$.

Итак, мы доказали, что если множество D_1 не ограничено, то справедливо (2.8) для некоторого $M_0 > 0$. В частности, из (2.8) следует, что при $\xi \in D_1 \setminus S(M_0)$ многочлены $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ имеют одинаковый знак. Поэтому при $0 < a < 1$ и $\xi \in D_1 \setminus S(M_0)$

$$|P(\xi) + aQ(\xi)| = |P(\xi)| + a|Q(\xi)| \geq a(|P(\xi)| + |Q(\xi)|). \quad (2.10)$$

Для множества D_2 имеем

$$\begin{aligned} |P(\xi) + aQ(\xi)| &= |P(\xi)| \left| 1 + a \frac{Q(\xi)}{P(\xi)} \right| \geq \\ &> (1-a) \cdot |P(\xi)| > \frac{1}{2} (1-a) (|P(\xi)| + |Q(\xi)|). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Так как при $\xi \in S(M_0)$ выражение $|P(\xi)| + |Q(\xi)|$ ограничено, то неравенства (2.10) и (2.11) вместе доказывают неравенство (2.7).

Доказательство пункта б). По уже доказанной части теоремы имеем при $j = 1, \dots, k, 0 < 1$ и $\xi \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{|D_j[P(\xi) + aQ(\xi)]|}{1 + |P(\xi) + aQ(\xi)|} &\leq c^{-1}(a) \frac{a \cdot D_j[P(\xi) + Q(\xi)] + (1-a) \cdot |D_j P(\xi)|}{1 + |P(\xi)| + |Q(\xi)|} \\ &\leq c^{-1}(a) \left[\frac{a |D_j[P(\xi) + Q(\xi)]|}{1 + |P(\xi) + Q(\xi)|} + \frac{(1-a) \cdot |D_j P(\xi)|}{1 + |P(\xi)|} \right] \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Это доказывает пункт б). Теорема 2.4. доказана.

§ 3. Оценки решений дифференциальных уравнений в классах Жевре

Пусть $1 \leq k \leq n$, Ω_k — область из E_k , $\Omega = \Omega_k \times E_{n-k}$. Обозначим через $L_2(\Omega, k)$ множество функций $u \in L_2(\Omega)$, для которых $\text{supp } u \subset K \times E_{n-k}$, где $K \subset \Omega_k$ компакт. Как и в § 3 работы [6] для многочлена $P(\xi) = P(\xi', \xi'')$ положим

$$\Sigma(P, k) = \{(\tau', \xi''), \tau' \in C_k, \xi'' \in R_{n-k}, P(\tau', \xi'') = 0\}$$

и пусть $\rho(\xi) = \rho(P, k, \xi)$ — расстояние точки $\xi \in R_n$ от множества $\Sigma(P, k)$.

Лемма 3.1. Существует постоянная $c > 0$ такая, что неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \neq a \in Z_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|a|} \cdot \|[1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^s \cdot P^{(a)}(\xi) \cdot \widehat{\varphi}(\xi)\|_{L_2}^2 \leq \\ & \leq c \sum_{a \in Z_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|a|} \cdot \|[1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^{s-1} \cdot P^{(a)}(\xi) \cdot \widehat{\varphi}(\xi)\|_{L_2}^2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

имеет место для любого $\varepsilon > 0$, натурального числа s и всех функций $\varphi \in L_2(\Omega, k)$. Здесь $\widehat{\varphi} = F[\varphi]$ — преобразование Фурье функции φ (в смысле главного значения).

Доказательство. Сначала докажем существование постоянной $c > 0$ такой, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \neq a \in Z_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|a|} [1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^2 \cdot |P^{(a)}(\xi)|^2 \leq \\ & \leq c \sum_{a \in Z_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|a|} \cdot |P^{(a)}(\xi)|^2 \quad \forall \xi \in R_n. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для фиксированного числа $\varepsilon > 0$ разобьем множество точек R_n на следующие два подмножества $D_1(\varepsilon) = \{\xi, \xi \in R_n, \varepsilon \cdot \rho(\xi) \leq 1\}$, $D_2(\varepsilon) = R_n \setminus D_1(\varepsilon)$. Для точек $\xi \in D_1(\varepsilon)$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \neq a \in Z_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|a|} \cdot [1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^2 \cdot |P^{(a)}(\xi)|^2 \leq \\ & \leq 4 \cdot \sum_{a \in Z_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|a|} \cdot |P^{(a)}(\xi)|^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Пусть теперь $\xi \in D_2(\varepsilon)$, тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \neq a \in Z_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|a|} [1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^2 \cdot |P^{(a)}(\xi)|^2 \leq \\ & \leq 4 \cdot \sum_{0 \neq a \in Z_{n,k}^+} \varepsilon^{-2(|a|-1)} \cdot \rho^2(\xi) \cdot |P^{(a)}(\xi)|^2 \leq \\ & \leq 4 \cdot \sum_{0 \neq a \in Z_{n,k}^+} [\rho(\xi)]^{2|a|} \cdot |F^{(a)}(\xi)|^2 = \\ & = 4 \cdot |P(\xi)|^2 \cdot \sum_{0 \neq a \in Z_{n,k}^+} [\rho(\xi)]^{2|a|} \cdot \left| \frac{P^{(a)}(\xi)}{P(\xi)} \right|^2. \end{aligned}$$

Из леммы 3.2 работы [6] следует, что для любого $0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+$

$$\rho(\xi) \cdot \left| \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/|\alpha|} \leq C.$$

Из последних двух соотношений получаем для всех $\xi \in D_\varepsilon(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2 \cdot |\alpha|} \cdot [1 + \varepsilon \rho(\xi)]^s \cdot |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 &< \\ &\leq c_1 |P(\xi)|^2 \leq c_1 \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2 \cdot |\alpha|} \cdot |P^{(\alpha)}(\xi)|^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где постоянная c_1 зависит лишь от n, k и порядка многочлена $P(\xi)$. Неравенства (3.3)–(3.4) вместе доказывают (3.2) при $C = \max \{c_1, 4\}$.

Умножая обе части неравенства (3.2) на $[1 + \varepsilon \rho(\xi)]^{2(s-1)} \cdot \widehat{\varphi}(\xi)^2$ и интегрируя по R_n получим неравенство (3.1). Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. Пусть $Q(D)$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $\Omega = \Omega_k \times E_{n-k}$, $\Omega_k \subset E_k$, $u \in C^\infty(\Omega)$, $f(x') \cdot u(x) \in L_2(\Omega)$ для произвольной функции $f(x') \in C_0^\infty(\Omega_k)$. Тогда, если $Q(\xi) \cdot F[u \cdot \psi](\xi) \in L_2(R_n)$ для функции $\psi(x') \in C_0^\infty(\Omega_k)$, то $Q(D) \times (u \cdot \psi) \in L_2(\Omega)$, притом $F[Q(D)(u \cdot \psi)] = Q(\xi) \cdot F[u \cdot \psi]$ в среднем.

Доказательство. Положим $V(x) = F^{-1}[Q(\xi) \cdot F[u \cdot \psi](\xi)]$. Так как по условию теоремы $Q(\xi) \cdot F[u \cdot \psi](\xi) \in L_2$, то $Q \cdot F[u \cdot \psi] \in S'$, значит $V \in S'$, где S' — пространство медленно растущих распределений. Пусть $\varphi \in S$, где S — пространство быстро убывающих гладких функций. Имеем

$$\begin{aligned} \langle F[Q(D)(u \cdot \psi)] - Q(\xi) \cdot F[u \cdot \psi], \varphi \rangle &= \langle Q(D)(u \cdot \psi), F[\varphi] \rangle - \\ - \langle Q(\xi) \cdot F[u \cdot \psi], \varphi \rangle &= \langle u \cdot \psi, Q(-D)F[\varphi] \rangle - \langle Q(\xi) \cdot F[u \cdot \psi], \varphi \rangle = \\ = \langle u \cdot \psi, F[Q(\xi) \cdot \varphi] \rangle - \langle Q(\xi) \cdot F[u \cdot \psi], \varphi \rangle &= \langle F[u \cdot \psi], \\ Q(\xi) \varphi \rangle - \langle Q(\xi) \cdot F[u \cdot \psi], \varphi \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Так как S плотно в L_2 и $Q \cdot F[u \cdot \psi] \in L_2$, то это доказывает лемму 3.2.

Пусть $P \in \Gamma(k, n)$, $\Omega = \Omega_k \times E_{n-k}$, $\Omega_k \subset E_k$. Обозначим через $\mathcal{W}(P, \Omega, k)$ множество функций $\{u\}$, для которых $\varphi(x') \cdot P^{(\alpha)}(D) u \in L_2(\Omega)$ для всех функций $\varphi(x') \in C_0^\infty(\Omega_k)$ и всех мультииндексов $\alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+$.

Лемма 3.3. Пусть $S_\varepsilon = \{x = (x', x'') \in E_k \times E_{n-k}, |x'| < \varepsilon\}$, $P \in \Gamma(k, n)$, $u \in \mathcal{W}$, $P(D)u = 0$, $\varphi(x') \in C_0^\infty(|x'| < 1)$. Существует число $C > 0$, не зависящее от ε и такое, что для любого $s = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2 \cdot |\alpha|} \cdot \|[1 + \varepsilon \rho(\xi)]^s \cdot P^{(\alpha)}(\xi) \cdot F[\varphi \cdot u]\|_{L_2(R_n)}^2 &\leq \\ \leq C \cdot \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2 \cdot |\alpha|} \int_{S_\varepsilon} |P^{(\alpha)}(D) u(x)|^2 dx, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\varphi'(x') = \varphi\left(\frac{x'}{z}\right)$.

Доказательство будем вести индукцией по s . Пусть $s = 0$. Из равенства Парсевалю и леммы 4.4.2 работы [3] имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|\alpha|} \cdot \|P^{(\alpha)}(\xi) \cdot F[\varphi^* u]\|_{L_2(R_n)}^2 = \\ &= \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|\alpha|} \cdot \|F[P^{(\alpha)} D(\varphi^* u)]\|_{L_2(R_n)}^2 = \\ &= \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|\alpha|} \cdot \|P^{(\alpha)}(D)(\varphi^* u)\|_{L_2(S_k)}^2 = \\ &= \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|\alpha|} \cdot \left\| \sum_{\beta \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \frac{D^\beta \varphi^*}{\beta!} \cdot P^{(\alpha+\beta)}(D) u \right\|_{L_2(S_k)}^2 = \\ &= \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \left\| \sum_{\beta \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \frac{\varepsilon^{|\beta|} \cdot D^\beta \varphi^*}{\beta!} \varepsilon^{-|\alpha+\beta|} \cdot P^{(\alpha+\beta)}(D) u \right\|_{L_2(S_k)}^2 \leq \\ &\leq c_1 \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \sup_{|x'| < 1} \frac{\varepsilon^{|\beta|} \cdot D^\beta \varphi^*(x')}{\beta!} \cdot \varepsilon^{-|\alpha+\beta|} \cdot \|P^{(\alpha+\beta)}(D) u\|_{L_2(S_k)}^2 \leq \\ &< c_2 \sum_{0 \neq \gamma \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|\gamma|} \cdot \|P^{(\gamma)}(D) u\|_{L_2(S_k)}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (3.5) при $s = 0$ доказано. Пусть неравенство (3.5) доказано при $s \leq s_0 - 1$, докажем его для $s = s_0$.

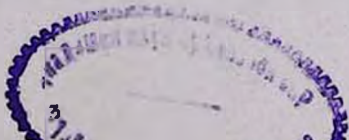
Применяя лемму 3.1, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|\alpha|} \cdot \| [1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^{s_0} \cdot P^{(\alpha)}(\xi) \cdot F[\varphi^* u] \|_{L_2(R_n)}^2 \leq \\ &\leq c_3 \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|\alpha|} \cdot \| [1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^{s_0-1} P^{(\alpha)}(\xi) \cdot F[\varphi^* u] \|_{L_2(R_n)}^2 \leq \\ &\leq c_4 \left\{ \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|\alpha|} \cdot \int_{S_k} |P^{(\alpha)}(D) u(x)|^2 dx + \right. \\ &\quad \left. + \| [1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^{s_0-1} \cdot P(\xi) \cdot F[\varphi^* u] \|_{L_2(R_n)}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для завершения доказательства оценим последнее слагаемое правой части неравенства (3.6). В силу того, что функция u удовлетворяет уравнению $P(D)u = 0$ в полосе S_k , имеем

$$P(D)(\varphi^* u) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \frac{D^\alpha \varphi^*}{\alpha!} P^{(\alpha)}(D) u.$$

Пусть $\psi(x') \in C^\infty$ ($|x'| < 1$), $\psi(x') = 1$ при $x' \in \text{supp } \varphi$. Еще раз, применяя лемму 4.4.2 работы [3] и лемму 3.2 настоящей работы, отсюда получаем



$$\begin{aligned}
& \| [1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^{s_0-1} \cdot P(\xi) \cdot F[\varphi^* u] \|_{L_s(R_n)} = \\
& = [1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^{s_0-1} \cdot \sum_{0 \neq a \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \frac{1}{a!} F[D^a \varphi^* \cdot P^{(a)}(D) u] \|_{L_s(R_n)} = \\
& = \| [1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^{s_0-1} \cdot \sum_{0 \neq a \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \frac{1}{a!} F[D^a \varphi^* \cdot P^{(a)}(D) (u \cdot \psi^*)] \|_{L_s(R_n)} \leq \\
& \leq c_5 \sum_{0 \neq a \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \| [1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^{s_0-1} \cdot F[D^a \varphi^* \cdot P^{(a)}(D) (u \cdot \psi^*)] \|_{L_s(R_n)} \leq \\
& \leq c_5 \sum_{0 \neq a \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \| [1 + \varepsilon \cdot |\eta'| + \varepsilon \cdot \rho(\xi - \eta')]^{s_0-1} \times \\
& \times \int \eta^a \cdot F[\varphi^*](\eta') \cdot P^{(a)}(\xi - \eta') \cdot F[u \cdot \psi^*](\xi - \eta') d\eta' \|_{L_s(R_n)} \leq \\
& \leq c_6 \sum_{0 \neq a \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} c_{a, s_0-1} \cdot \varepsilon^{-|a|} \cdot \| [1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^{s_0-1} \cdot P^{(a)}(\xi) \cdot F[u \cdot \psi^*] \|_{L_s(R_n)}.
\end{aligned}$$

Так как по предположению индукции неравенство (3.5) верно при $s = s_0 - 1$, то из полученного соотношения и неравенства (3.6) следует неравенство (3.5) при $s = s_0$. Лемма 3.3 доказана.

Лемма 3.4. Пусть $u \in \mathcal{W}(P, S_\varepsilon, k)$ ($0 < \varepsilon < 1$) — решение уравнения $P(D)u = 0$, при этом для вектора $y \in E_n$ существуют положительные числа A и a такие, что

$$\|(y, \xi)\| \leq A [\rho(\xi) + 1]^a \quad \forall \xi \in R_n. \quad (3.7)$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^{2a} \cdot \sum_{0 \neq a \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2 \cdot |a|} \int_{S_{\varepsilon/2}} |P^{(a)}(D) \langle y, D \rangle u(x)|^2 dx \leq \\
& \leq A \cdot \sum_{0 \neq a \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2 \cdot |a|} \int_{S_\varepsilon} |P^{(a)}(D) u(x)|^2 dx. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 4.4.4 работы [3] с применением доказанной нами леммы 3.3.

Теорема 3.1. Пусть $P \in \Gamma(k, n)$, $\Omega = \Omega_k \times E_{n-k}$, где $\Omega_k \subset E_k$ — ограниченная область. Пусть для оператора $P(D)$ удовлетворяется условие (3.7) и $u \in \mathcal{W}(P, \Omega, k)$ — решение уравнения $P(D)u = 0$.

Существует постоянная $c > 0$, не зависящая от функции u и такая, что для произвольных положительных чисел δ и δ_1

$$\begin{aligned}
& \sum_{0 \neq a \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \delta^{-2 \cdot |a|} \int_{\Omega(\delta + \delta_1)} |P^{(a)}(D) \langle y, D \rangle u(x)|^2 dx \leq \\
& \leq c \cdot \delta^{-2a} \sum_{0 \neq a \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \int_{\Omega(\delta_1)} |P^{(a)}(D) u(x)|^2 dx, \quad (3.9)
\end{aligned}$$

где $\Omega^{(2)} = \{x; x \in \Omega, \text{dist}(x', \partial\Omega_k) > \delta\}$.

Доказательство. Пусть $z' \in \Omega_k \cap \Omega^{(1+\varepsilon)}$, $0 < \varepsilon < 1$.

Применив лемму 3.4 к функции $u(x + (z', 0))$, получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{2\alpha} \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|\alpha|} \int_{|x'-z'| < \frac{\varepsilon}{2}} \int_{R_{n-k}} |P^{(\alpha)}(D) \langle y, D \rangle u(x)|^2 \leq \\ & \leq A \cdot \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|\alpha|} \int_{|x'-z'| < \varepsilon R_{n-k}} |P^{(\alpha)}(D) u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Проинтегрировав обе части полученного соотношения по z' по области $\Omega_k \cap \Omega^{(1+\varepsilon)}$ и проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям теоремы 4.4.2 работы [3], мы получим доказательство теоремы при $\varepsilon = \min\{1, \delta/2\}$.

Лемма 3.5. Пусть $P \in \Gamma(k, n)$, существуют числа $M > 0$ и $\sigma > 0$ такие, что $|P(\xi)| \geq \sigma$ при $|\xi| > M$, функция $u \in W(P, \Omega, k)$ является решением уравнения $P(D)u = 0$, $y \in E_n$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_k)$. Тогда для любого $j = 0, 1, \dots$ $(\xi, y)^j F[u \cdot \varphi] \in L_2(R_n)$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{R_n} |(\xi, y)^j F[u \cdot \varphi]|^2 d\xi = \int_{|\xi| < M} |(\xi, y)^j F[u \cdot \varphi]|^2 d\xi + \\ & + \int_{|\xi| > M} |(\xi, y)^j F[u \cdot \varphi]|^2 d\xi \leq c_1 \int_{|\xi| < M} |F[u \cdot \varphi]|^2 d\xi + \\ & + \frac{1}{\sigma^2} \int_{|\xi| > M} |(\xi, y)^j P(\xi) \cdot F[u \cdot \varphi]|^2 d\xi \leq c_1 \cdot \|F[u \cdot \varphi]\|_{L_2}^2 + \\ & + \frac{1}{\sigma^2} \int_{R_n} |(\xi, y)^j \cdot P(\xi) \cdot F[u \cdot \varphi]|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Пусть $\psi \in C_0^\infty(\Omega_k)$, $\psi(x) = 1$ при $x \in \text{supp } \varphi$. Так как $\varphi \cdot P(D) \times (u \cdot \psi) = 0$, то

$$\begin{aligned} P(\xi) \cdot F[u \cdot \varphi] &= P(\xi) \cdot F[u \cdot \varphi \cdot \psi] = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{\alpha!} F[u \cdot \varphi] * (\xi^\alpha \cdot F[\psi]) = \\ &= \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{\alpha!} F[u \cdot \varphi] * (\xi^\alpha \cdot F[\varphi]). \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} & \int_{R_n} |(\xi, y)^j F[u \cdot \varphi]|^2 d\xi \leq c_1 \cdot \|F[u \cdot \varphi]\|_{L_2}^2 + \\ & + \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \frac{1}{\alpha!} \int_{R_n} |(y, \xi)^j \cdot P^{(\alpha)}(\xi) \cdot F[u \cdot \varphi] * (\xi^\alpha \cdot F[\varphi])|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Применяя здесь неравенство Юнга и замечая (см. [3], лемма 4.4.2), что для любого $\beta \in Z_{n,k}^+$ и произвольной $f \in C_0^\infty(\Omega_k)$

$$\int_{R_n} |(\xi')^\beta \cdot f(\xi')| d\xi' \leq c_\beta,$$

получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{R_n} |(\xi, y)' F[u \cdot \varphi]|^2 d\xi \leq c_1 \|F[u \cdot \varphi]\|_{L^2}^2 + \\ & + c_2 \sum_{l=0}^j \sum_{0 \neq \alpha \in Z_{n,k}^+} \int_{R_n} |(\xi, y)' P^{(\alpha)}(\xi) \cdot F[u \cdot \varphi]|^2 d\xi \end{aligned}$$

с некоторой постоянной $c_2 = c_2(j, \varphi) > 0$.

Для оценки второго слагаемого левой части полученного неравенства применим лемму 3.3 работы [6], из которой следует, что для натурального числа j существуют положительные постоянные $A_j = A_j(y)$, $a_j = a_j(y)$ такие, что

$$\sum_{l=0}^j |(\xi, y)'| \leq A_j (1 + \rho(\xi))^{a_j} \quad \forall \xi \in R_n.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{R_n} |(\xi, y)' F[u \cdot \varphi]|^2 d\xi \leq c_1 \|u \cdot \varphi\|_{L^2}^2 + \\ & + c_3(j, y) \sum_{0 \neq \alpha \in Z_{n,k}^+} \int_{R_n} |(1 + \rho(\xi))^{A_j} P^{(\alpha)}(\xi) \cdot F[u \cdot \varphi]|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Так как $u \in W(P, \Omega, k)$, то применяя лемму 3.3 отсюда получаем доказательство леммы 3.5.

Теорема 3.2. Пусть $P \in \Gamma(k, n)$, $x = (x', x'')$, $x' \in E_k$, $x'' \in E_{n-k}$, существуют числа $M > 0$ и $c > 0$ такие, что $|P(\xi)| > c$ при $|\xi| > M$. Если для некоторого ненулевого вектора $y \in E_n$ и некоторых положительных чисел A и a выполняется соотношение

$$|(y, \xi)| \leq A(1 + \rho(\xi))^a \quad \forall \xi \in R_n,$$

то существует число $\kappa > 0$ такое, что для всех решений $u \in W(P, \Omega, k)$ уравнения $P(D)u = 0$, для произвольных чисел r_1 и r_2 и для всех точек $x \in \Omega$, $|x'| \leq r_1$, $|x''| \leq r_2$

$$|< y, D >^j u(x)| \leq \kappa^j \cdot j^{a_j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Из теоремы пункта 7 работы [5] и леммы 3.5 настоящей работы следует, что при условиях теоремы 3.2 функции $v_j(x) = < y, D >^j u(x)$ ($j = 1, 2, \dots$) также принадлежат классу $W(P, \Omega, k)$ и удовлетворяют уравнению $P(D)v_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots$). Тогда применив неравенство (3.9) (см. теорему 3.1) к функциям $v_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots$), получим

$$\sum_{0 \leq |\alpha| \leq j} \delta^{-2|\alpha|} \int_{\Omega(j+1)^{-1}} |P^{(\alpha)}(D) \langle y, D \rangle^j u(x)|^2 dx \leq \\ \leq c_j \delta^{-2aj}. \sum_{0 \leq |\alpha| \leq j} \delta^{-2|\alpha|} \int_{\Omega(j)} |P^{(\alpha)}(D) u(x)|^2 dx. \quad (3.10)$$

Выберем число δ_1 так, чтобы для множества $\tilde{K} = \{x: x \in E_n, |x'| \leq r_1\} \cap \tilde{\Omega}^{(j_1)}$. Пусть $\delta = \delta_1 / (j+1)$. Применив лемму 3.5, из (3.10) и того, что $u \in W(P, \Omega, k)$, получим с некоторой постоянной $C_2 > 0$

$$\int_{\Omega(j_1)} |\langle y, D \rangle^j u(x)|^2 dx \leq C_2 \cdot j^{2aj}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

Пусть теперь $\varphi \in C_0^\infty$, $G = \text{supp } \varphi \subset \Omega^{(j_1)}$, $\varphi(x) = 1$ при $x \in K = \{y, y \in E_n, |y'| \leq r_1, |y''| \leq r_2\}$. Тогда следующая легко проверяемая цепочка неравенств для $u \in C^\infty(E_n)$ вместе с неравенством (3.11) доказывает теорему:

$$\sup_{x \in K} |u(x)|^2 \leq \sup_{x \in G} |u(x) \cdot \varphi(x)|^2 \leq \\ \leq c_3 \sum_{|\beta| \leq n} \int_G |D^\beta u(x)|^2 dx \leq c_3 \sum_{|\beta| \leq n} \int_{\Omega(j_1)} |D^\beta u(x)|^2 dx.$$

Теорема 3.2 доказана.

Ереванский государственный
университет, ЕРНИИММ

Поступила 25. IX. 1984

Հ. Գ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Վ. Ն. ՄԱՐԳԱՐՅԱՆ Տված հիպոէլիպտիկութիւնը կրող ունեցող ոչ-հիպոէլիպտիկ նախադրումների լուծումների գնահատականներ (ամփոփում)

Ուսումնասիրվում են $P(D)u = 0$ հավասարումները, որտեղ $P(D)$ -ն ընդհանրապես ասած ոչ հիպոէլիպտիկ օպերատոր է, տված հիպոէլիպտիկության կրողով, Այդ հավասարման լուծումների համար ստացվում են իրենց բնութագրվող վերջնական ինտեգրալ անհավասարություններ, ծննդով ստացված ինտեգրալ անհավասարություններից, նկարագրվում են ժեմլրեի այն անհավասար դասերը, որոնց պատկանում են $P(D)u = 0$ հավասարման լուծումները, նկարագրվում են այն կրողներ անդամները, որոնց ավելացնելը չի փոխում տված օպերատորի հիպոէլիպտիկության կրողը:

G. G. KAZARIAN, V. N. MARKARIAN. Estimates for solutions of nonhypoelliptical equations with given hypoellipticity carrier (summary)

The paper considers equations $P(D)u = 0$, where $P(D) = P(D_1, \dots, D_n)$ is a linear differential operator with constant coefficients and given hypoellipticity carrier. We prove that the solutions belong to nonisotrope Jevre class, as well as find some integral estimates for the solutions. Also we describe the class of terms whose addition to the operator does not change its carrier.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Аимон, А. Дузис, Л. Ниренберг. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, М., ИЛ, 1962.
2. Л. Хёрмандер. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных, М., ИЛ, 1959.
3. Л. Хёрмандер. Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., «Мир», 1965, 379 с.
4. Я. С. Бузров. Теоремы вложения для некоторых функциональных классов, Труды МИАН СССР, 1965, т. 77, 45—64.
5. В. Н. Буренков. Аналог теоремы Хёрмандера о гипоеллиптичности для функций, стремящихся к нулю на бесконечности, Сб. докладов VII Советско-Чехословацкого семинара, Ереван, 1982, 63—67.
6. Г. Г. Казарян, В. Н. Маркарян. Носитель гипоеллиптичности линейных дифференциальных операторов, Изв. АН АрмССР, серия «Математика», XXI, № 5, 1986, 453—470.
7. Г. Г. Казарян. О добавлении младших членов к дифференциальным полиномам, Изв. АН АрмССР, IX, № 6, 1974, 473—485.
8. Г. Г. Казарян. Оценки дифференциальных операторов и гипоеллиптические операторы, Труды МИАН СССР, 140, 1976, 130—161.
9. Г. Г. Казарян, В. Н. Маркарян. Критерии гипоеллиптичности в терминах мощности и силы операторов, Труды МИАН СССР, 150, 1979, 128—142.
10. В. Н. Маркарян. Добавление младших членов, сохраняющих гипоеллиптичность оператора, Изв. АН АрмССР, сер. матем., т. XV, № 6, 1980, 443—460.
11. В. П. Михайлов. О поведении на бесконечности одного класса многочленов, Труды МИАН СССР, т. 91, 1967, 58—81.

УДА 517.946

Г. Р. ОГАНЕСЯН

О НАЧАЛЬНОЙ И СМЕШАННОЙ ЗАДАЧАХ С ЗАДАННЫМИ ВРОНСКИАНАМИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Введение. Постановка задачи

Начальная задача для сингулярного гиперболического уравнения

$$P u \equiv (\partial_t^2 - \Delta + a(t)) u = f(t, x), \quad |a(+0)| = \infty, \quad (t, x) \in G, \quad (1.1)$$

$G = \{(t, x), t \in]0, T[, x \in R^n\}$, $\Delta \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ — оператор Лапласа, с данными Коши на начальной гиперплоскости $t = 0$, вообще говоря, некорректна. Например, при $a = -\frac{2}{t^2}$ нетривиальным решением однородной задачи Коши является функция $u = t^2$.

В настоящей работе для уравнения (1.1) вместо обычных данных Коши предлагается задавать весовые начальные данные в кокасательном расслоении T^*G в виде

$$\lim_{t \rightarrow +0} \left\| \langle \xi \rangle^s \left(\frac{W(\hat{u} - \hat{x}, \varphi_j)}{W(\varphi_1, \varphi_2)} - \hat{\Phi}_j(\xi) \right) \right\| = 0, \quad j = 1, 2, \quad (1.2)$$

а затем изучать, когда эти данные можно упростить и опустить с T^*G на G . Здесь $\xi \in (R^n)'$, $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$, $\langle \xi \rangle = \sqrt{1 + |\xi|^2}$, $\|\cdot\|$ — норма пространства $L_2(R^n)$, $\hat{u}(t, \xi)$ — частичное преобразование Фурье по x решения $u(t, x)$ уравнения (1.1), $W(\hat{u}, \varphi) \equiv \hat{u} \varphi_1 - \hat{u}_1 \varphi$ — вронскиан, $\hat{\Phi}_j$ — произвольные начальные функции, $\hat{x}(t, \xi)$ — частное решение уравнения

$$\hat{P} \hat{u} \equiv (\partial_t^2 + |\xi|^2 + a(t)) \hat{u} \equiv \hat{f}(t, \xi), \quad (1.3)$$

а (φ_1, φ_2) — фундаментальная система решений (ф. с. р.) уравнения

$$\hat{P} \varphi(t, \xi) = 0, \quad (1.4)$$

е. вронскиан $W(\varphi_1, \varphi_2)$ не обращается в нуль на $]0, T[$ и не зависит от ξ .

Для уравнений и систем с регулярными (фуксовыми) особенностями в книгах [1], [2] и работах [3]—[6] рассматривались другие весовые постановки задач Коши. В работе [8] было предложено для уравнения (1.1) задавать при $t = +0$ отношения вронскианов

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{W(u(t, x), \beta_j(t))}{W(\beta_1, \beta_2)} = \Phi_j(x), \quad j = 1, 2, \quad (1.5)$$

где сходимость подразумевается поточечная, Φ_j — начальные функции, а (β_1, β_2) — ф. с. р. уравнения

$$(\partial_t^2 + a(t)) \beta(t) = 0. \quad (1.6)$$

Однако и эта постановка задачи не универсальна, т. к. уже для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (Э. П. Д.)

$$P_3 u \equiv \left(\partial_t^2 - \Delta - \frac{\rho}{t^2} \right) u = f(t, x), \quad \rho \in \mathbb{C} \quad (1.7)$$

приводит к однозначной разрешимости не для любых ρ (см. пример 3.1).

В настоящей работе указаны достаточные условия на $a(t)$, при выполнении которых имеют место однозначная разрешимость начальной задачи (1.1), (1.2) в $C^2(H^{q-2})$ (см. § 2, теорема 1) и оценки коэрцитивности. В условиях теоремы 1 данные (1.2) упрощаются, опускаются на G и принимают вид

$$\lim_{t \rightarrow +0} \left\| \frac{W(u(t, x), \beta_j(t))}{W(\varphi_1, \varphi_2)} - \Phi_j(x) \right\|_s = 0, \quad j = 1, 2, \quad (1.8)$$

здесь $\|\cdot\|_s$ — норма пространства Соболева $H^s \equiv W_2^s(R_+^n)$.

Если дополнительно к условиям теоремы 1 выполнено условие

$$\operatorname{Im} a(t) \equiv 0, \quad t \in]0, T], \quad (1.9)$$

то функции $\beta_j(t)$ в (1.8) можно заменить функциями Грина-Лиувилля уравнения (1.6) (см. замечание 2.1):

$$\gamma_{1,2}(t) = [a(t)]^{-\frac{1}{4}} \exp \left(\pm i \int_t^T \sqrt{a(\tau)} \, d\tau \right). \quad (1.10)$$

Теорема 1 из § 2 распространяется также на случай уравнения

$$(\partial_t^2 - \Delta + a(t) + b(t, x)) u = f(t, x), \quad (1.11)$$

когда $a(t)$ доминирует над $b(t, x)$ (см. условие (2.7) и замечание 2.3).

Постановка начальной задачи для уравнения (1.1) в форме (1.2) привлекательна тем, что она оказывается однозначно разрешимой для широкого класса функций с особенностью в нуле и инвариантна относительно мультипликативного преобразования решения (см. замечание 2.7). Отметим также, что если выполнено условие

$$\int_0^T |a(\tau)| \, d\tau < \infty, \quad (1.12)$$

то данные (1.2) преобразуются в обычные данные Коши (см. § 3).

Рассматривается также уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу (1.7), для которого условия теоремы 1 нарушаются. Для этого уравнения опущенные с T^*G на G данные (см. (2.12), (2.13)) существенно слож-

нее данных (1.8), а в оценках коэрдитивности, в отличие от теоремы 1, есть конечная потеря гладкости (см. замечание 2.9).

§ 2. Формулировка результатов

1°. Начальная задача. Пусть $L_2^s(R_+^n)$ —пространство функций $g(\xi)$ таких, что $\langle \xi \rangle^s g(\xi) \in L_2(R_+^n)$, $H^s \equiv W_2^s(R_+^n)$ —пространство Соболева, $C^m(H^s)$ —пространство m раз непрерывно дифференцируемых отображений интервала $[0, T]$ в H^s , $B^m_j(H^s)$ —пространство j раз ($j = 0, 1, \dots, m$) непрерывно дифференцируемых отображений интервала $[0, T]$ в H^{s-j} , а $B_a^2(H^s)$ —пополнение $C^\infty(G)$ -функций по норме

$$\sup_{t \in [0, T]} \left(\sum_{k=0}^2 |a(t)|^{\frac{1}{4} - \frac{k}{2}} \|\partial_t^k u\|_{s-k} \right).$$

Пусть $a(t)$ —комплекснозначная дважды непрерывно дифференцируемая на $[0, T]$ функция такая, что $|a(+0)| = \infty$ и

$$\operatorname{Re} a(t) \geq 0, \quad (2.1)$$

$$\int_0^T \frac{|\operatorname{Im} a(s)|}{V \operatorname{Re} a(s) + |a(s)|} ds \leq \operatorname{const} < \infty, \quad (2.2)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{a_t}{a^{3/2}}(t) = 0, \quad \frac{a_t^2}{a^{5/2}}(t), \quad \frac{a_{tt}}{a^{3/2}}(t) \in L_1[0, T]. \quad (2.3)$$

Теорема 1. В условиях (2.1)–(2.3) начальная задача (1.1), (1.8) при

$$\Phi_j \in H^s, \quad \frac{f}{\sqrt{|a(t)|}} \in C^0(H^s), \quad s = \max \left\{ q, s + \frac{5}{2} \right\}, \quad j = 1, 2, \quad q \geq 2, \quad (2.4)$$

имеет единственное решение $u(t, x) \in B^2(H^s)$, удовлетворяющее при $k = 0, 1, 2$ оценкам

$$|a(t)|^{\frac{1}{4} - \frac{k}{2}} \|\partial_t^k u\|_{q-k} \leq c \left\{ J_q(t) + \frac{\|f\|_{q-\frac{3}{2}}}{|a(t)|^{3/4}} \cdot \delta_{k2} \right\}, \quad (2.5)$$

где

$$J_q(t) \equiv \|\Phi_1\|_q + \|\Phi_2\|_q + \left(\int_0^t \frac{\|f(\tau)\|_q^2}{V|a(\tau)|} d\tau \right)^{\frac{1}{2}},$$

δ_j —символ Кронекера, c —постоянная, зависящая только от T и постоянной, фигурирующей в условии (2.2).

Замечание 2.1 Если вместо (2.2) выполнено условие (1.9), то теорема 1 остается справедливой и при замене данных (1.8) данными

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{W(u(t, x), \gamma_j(t))}{W(\varphi_1, \varphi_2)} - \Phi_j(x) \right\| = 0, \quad (2.6)$$

где функции $\gamma_j(t)$ определяются формулой (1.10).

Замечание 2.2. Если $-p, \delta, m$ — положительные постоянные, а $p < -2, \gamma > 2, 0 < T < 1$, то функции

$$-\frac{p}{t^2 |\ln t|^p}, -\frac{p}{t^1}, \exp\left(\frac{\delta}{t^a}\right), \exp \exp\left(\frac{\delta}{t^a}\right)$$

удовлетворяют условиям (2.3). Случай $a(t) = p \cdot t, \frac{p}{t |\ln t|^p}, \gamma < 1, p > 1$ неинтересны (см. (1.12)), а исключительный случай уравнения Э. П. Д. $\left(a = -\frac{p}{t^2}\right)$ рассмотрен ниже в теореме 2.

Замечание 2.3. Если

$$\frac{\|b(t)\|_k^2}{|a(t)|} < 1, \mu = \max(q, s), \quad (2.7)$$

то теорема 1 справедлива и для уравнения (1.11).

Условие (2.7) с $\mu = 0$ выполнено, например, если

$$a(t) = -\frac{p}{t^2}, b(t, x) = t^{-3} \exp\left(-\frac{x^2}{t^2}\right).$$

Замечание 2.4. Если $q > 5 + \left[\frac{n}{2}\right]$, то по теореме вложения Соболева, в условиях теоремы 1, получаем классическое решение $u \in C^2(G)$ задачи (1.1), (1.8).

Замечание 2.5. Наличие в оценках (2.5) множителя $|a(t)|^{\frac{k}{2} - \frac{1}{4}}$ означает, что $\|u\|_q \rightarrow 0, \|\rho_t^k u\|_{q-k} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow +0, k = 1, 2$. Отметим, что в условиях теоремы 1 имеем также $u \in B_a^2(H^q)$.

Замечание 2.6. Выбор ф. с. р. уравнения (1.4) неоднозначен, поэтому постановка начальной задачи в форме (1.2) неоднозначна. Неоднозначность данных (1.2) связана еще и с тем, что к начальным операторам

$$O_{\varphi_j}(u) \equiv \frac{W(\hat{u} - \hat{x}, \varphi_j)}{W(\varphi_1, \varphi_2)} \quad (2.8)$$

можно прибавлять произвольные бесконечно малые при $t \rightarrow +0$ величины, не изменяя при этом данных (1.2).

Решение уравнения (1.3) в форме

$$\hat{x}(t, \xi) = \hat{x}_\varphi(t, \xi) = \int_0^t G(t, \tau, \xi) \hat{f}(\tau, \xi) d\tau, \quad (2.9)$$

$$G(t, \tau, \xi) = \frac{\varphi_1(\tau, \xi) \varphi_2(t, \xi) - \varphi_1(t, \xi) \varphi_2(\tau, \xi)}{W(\varphi_1(\tau, \xi), \varphi_2(\tau, \xi))}, \quad (2.9')$$

не зависит от выбора ф. с. р. $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$, т. к. из $\psi = B\varphi, B \in GL_2(\mathbb{C})$

следует $\hat{x}_\varphi = \hat{x}_\psi$.

Определение 2.1. Начальные операторы O_φ и O_ψ и порожденные ими начальные задачи (см. (1.2)) мы будем называть эквивалентными, если они отличаются (по норме $L_2^s(R^n)$) на бесконечно малую при $t \rightarrow +0$ величину.

Замечание 2.7. Начальные условия (1.2) и операторы (2.8) инвариантны относительно мультипликативного преобразования решения уравнения (1.1):

$$u(t, x) \rightarrow v(t, x) \equiv b(x) u(t, x), \quad b(t) \in C^2([0, T]).$$

Действительно, применяя это преобразование из (1.1) получим

$$\left(\partial_t^2 - \Delta + a(t) + 2 \left(\frac{b_t}{b} \right)^2 - \frac{b_{tt}}{b} - \frac{2b_t}{b} \partial_t \right) v = bf.$$

При этом ф. с. р. уравнения (1.4) и функция $\hat{x}(t, \xi)$ умножаются на b и, в силу следующего свойства вронскианов $W(b\varphi_1, b\varphi_2) = b^2 W(\varphi_1, \varphi_2)$, начальные операторы при этом не меняются:

$$O_\varphi(\hat{u}) = O_{b\varphi}(b\hat{u}).$$

Рассмотрим уравнение Э.П.Д. Введем удобный параметр $v = \frac{\sqrt{1+4p}}{2}$ с выбором той ветви корня, для которой

$$\operatorname{Re} v \geq 0. \quad (2.10)$$

Обозначим через Z_+ (Z_-) множество целых, неотрицательных (неположительных) чисел, а через Z — множество целых чисел. Введем также следующие обозначения:

$$C_+ = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \geq 0\}, \quad R_+ = \{s \in \mathbb{R}, s \geq 0\}, \quad \dot{C}_+ = C_+ \setminus \{0\},$$

$$B = \left\{ k + \frac{1}{2}, k \in Z_+ \right\}, \quad m = [\operatorname{Re} v], \quad N = \left[\frac{\operatorname{Re} v - p}{2} - \frac{3}{4} \right], \quad (2.11)$$

[] — целая часть числа

$$f_m(t, x) \equiv t^{-m} \left(f(t, x) - \sum_{p=0}^{m-1} \frac{t^p}{p!} \partial_t^p f(0, x) \right),$$

$$\beta_1(t) \equiv t^{\frac{1}{2}+v}, \quad \beta_{2q}(t) = \frac{t^{2q+\frac{1}{2}-v}}{2q! (-4)^q (q-v) \cdots (1-v) (-v)}. \quad (2.11')$$

В § 7 мы покажем, что для уравнения (1.7) данные (1.2) упрощаются, опускаются на G и принимают вид

$$\lim_{t \rightarrow +0} W(u, \beta_1) = \Phi_1(x), \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \sum_{q=0}^m (-1)^q \left\{ W(\Delta^q u, \beta_{2q}) - \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{l+r=0}^N (-1)^{l+r} x_{lrpq} \times \right. \\ \left. \times t^{p+\frac{3}{2}-v} (t^2 \Delta)^{l+r+q} \partial_t^p f(0, x) \right\} = \Phi_2(x), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где пределы подразумеваются по норме H^s , а

$$x_{lrpq} \equiv \frac{(l+v-r)(r+l-q-\frac{p+v}{2}+\frac{3}{4})}{(2l+p+\frac{3}{2}+v)(2r+p+\frac{3}{2}-v)p!q!r!l! \Gamma(l+1+v)} \times \\ \times \frac{\Gamma(v) \Gamma^2(1-v)}{\Gamma(q+1-v)\Gamma(r+1-v)v(-4)^{l+r+q}}. \quad (2.14)$$

Последняя формула имеет смысл при $v \in \mathbb{C}_+ \setminus B$. Если $v=0$, то полагаем $x_{lrpq} \equiv 0$. Пусть

$$q_0 = \max(q + \operatorname{Re} v, 5\operatorname{Re} v + 5 + s), \quad \alpha = \begin{cases} 0, & k=0, \\ \frac{1}{4}, & k=1, \\ \frac{3}{4}, & k=2. \end{cases} \quad (2.15)$$

Теорема 2. Если $v \in \mathbb{C}_+ \setminus (B \cup Z_+)$, то начальная задача (1.7), (2.12), (2.13) при

$$\Phi_j(x), \partial_t^p f(0, x) \in H^q, f \in C^0(H^q), j=1, 2, p=0, 1, \dots, m-1, q \geq 2, \quad (2.16)$$

имеет единственное решение $u(t, x) \in B^3(H^q)$, удовлетворяющее при $k=0, 1, 2$ оценкам

$$\|\partial_t^k u(t)\|_{q-k} \leq c \{t^{-2\alpha - \operatorname{Re} v} I_{q+\operatorname{Re} v} + t^{-2\alpha} \|\Phi_2\|_q + \delta_{k2} \|f(t)\|_{q-2}\}, \quad (2.17),$$

$$I_q \equiv \|\Phi_1\|_q + \sum_{p=0}^{m-1} \|\partial_t^p f(0)\|_q + \left(\int_0^t \|f_m(\tau)\|_q^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}},$$

а постоянная c зависит только от v и T .

Замечание 2.8. Если

$$\partial_t^p f(0, x) \equiv 0, \quad p=0, 1, \dots, m-1, \quad (2.18)$$

то теорема 2 справедлива и при $v \in \mathbb{C}_+ \setminus Z_+$.

Замечание 2.9. Наличие в (2.17) потери гладкости, зависящей от $\operatorname{Re} v$, связано с тем, что функции $\varphi_j(t, \xi)$ из ядра оператора P_λ имеют степенной рост при $|\xi| \rightarrow \infty$ и фиксированном t из $]0, T[$ (см. (7.10)), в отличие от случая, рассмотренного в теореме 1 (см. (5.15)).

2°. Смешанная задача. Пусть Ω — открытая, ограниченная область в R_x^n с гладкой границей $\partial\Omega$, Q — цилиндр над Ω : $Q = \{(t, x) \in R^{n+1}, 0 < t < T, x \in \Omega\}$, Q_τ — сечение Q гиперплоскостью $t = \tau$, а ∂Q — боковая поверхность цилиндра Q . Если $U = Q$ или $U = Q_0$, то пространство Соболева $H^q(U)$, $q \in R_+$ определяется как пополнение бесконечно дифференцируемых в U функций f по норме

$$\|f\|_q, \|U\|_q = \left(\sum_{|\alpha| \leq q} \int_U |D^\alpha f|^2 dU \right)^{1/2} < \infty,$$

где $dU = dx_1 \cdots dx_n$, если $U = Q_0$ и $dU = dt dx_1 \cdots dx_n$, если $U = Q$. $H_0^1(Q_0)$ — пополнение бесконечно дифференцируемых в Q_0 функций с компактными носителями, содержащимися в Q_0 , по норме $H^1(Q_0)$.

Обозначим через $v_r(x)$ ортонормированные собственные функции, а λ_r^2 — собственные значения задачи Дирихле для оператора Лапласа

$$\Delta v_r = -\lambda_r^2 v_r, x \in \Omega, v_r|_{\partial\Omega} = 0, r = 1, 2, \dots, \quad (2.19)$$

$$0 < \lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \dots. \quad (2.20)$$

Введем функции $\varphi_{1r}, \varphi_{2r}$, образующие ф. с. р. уравнений

$$(\partial_t^2 + \lambda_r^2 + a(t)) \varphi(t) = 0, r = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.21)$$

т. е. вронскианы $W(\varphi_{1r}, \varphi_{2r})$ не обращаются в нуль на $[0, T]$ и не зависят от r . Пусть

$$f_r(t) = \int_{Q_t} f(t, x) v_r(x) dx \quad (2.22)$$

— коэффициенты Фурье функции f , а $x_r(t)$ — частные решения уравнений

$$(\partial_t^2 + \lambda_r^2 + a(t)) x(t) = f_r(t). \quad (2.23)$$

Аналогом начальных условий (1.2) для смешанной задачи являются данные

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{W(u_r - x_r, \varphi_{jr})}{W(\varphi_{1r}, \varphi_{2r})} = \Phi_{jr}, j = 1, 2, \quad (2.24)$$

где пределы понимаются в смысле l_2 . Обозначим

$$l = 2 \left\lfloor \frac{q+1}{2} \right\rfloor, \beta = 2 \left\lfloor \frac{q+m+2}{2} \right\rfloor, d = \max(q+m+1, [5 \operatorname{Re} v] + 6).$$

Теорема 3. В условиях (2.1)–(2.3) смешанная задача (1.1), (1.8) с $s = 0$ и однородным краевым условием

$$u|_{\partial Q} = 0, \quad (2.25)$$

при

$$\Phi_j \in H_0^1(Q_0) \cap H^{q+2}(Q_0), f \in H_0^1(Q_t) \cap H^{q+2}(Q_t), j=1, 2, q \in Z, q \geq 2, \quad (2.26)$$

имеет единственное решение $u(t, x) \in B^2(H^q(Q_t))$, причем при $t \in [0, T], k=0, 1, 2$ имеют место оценки

$$\|\partial_t^k u(t)\|_{q-k}^2 \leq c \{ \delta_{k,2} \|f(t)\|_{q-2}^2 + |a(t)|^{k-\frac{1}{2}} \|f(t)\|_1^2 \}, \quad (2.27)$$

где постоянная c зависит только от T и постоянной из (2.2).

Теорема 4. Если $v \in C_+ \setminus (B \cup Z_+)$, то смешанная задача (1.7) (2.12), (2.13) при

$$\Phi_1, \partial_t^p f(0) \in H_0^2(Q_0) \cap H^d(Q_0), \Phi_2 \in H_0^1 \cap H^d, \quad (2.28)$$

$$f \in C^0(H_0^2(Q_t)) \cap H^d(Q_t), q \in Z, q > 2,$$

имеет единственное решение $u \in B^2(H^1)$, удовлетворяющее оценкам

$$\| \partial_t^k u \|_{q-k}^2 \leq c \{ t^{-4k} \| \Phi \|_q^2 + t^{-4k-2 \operatorname{Re} \nu} \| f \|_{q+m+1}^2 + \delta_k \| f \|_{q-2}^2 \}, \quad (2.29)$$

где постоянная c зависит только от ν и T , $k=0, 1, 2$, $t \in]0, T[$.

§ 3. Примеры. Обсуждение результатов

Если для уравнения (1.1) выполнено условие (1.12), то энергетическим методом нетрудно доказать существование решений $\beta_{1,2}(t) \in C^2([0, T])$ задач Коши для уравнения (1.6) с данными

$$\beta_1(0) = 0, \beta_1'(0) = 1, \beta_2(0) = -1, \beta_2'(0) = 0.$$

Если выбрать в качестве ф. с. р. (β_1, β_2) эти решения, то задача (1.1), (1.2) станет эквивалентна задаче (1.1), (1.5), которая, в свою очередь эквивалентна обычной задаче Коши для (1.1), корректность которой хорошо известна.

Замечание 3.1. Если $\nu \in B$, т. е. $\rho = k(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}_+$ и $f \in C^\infty$ в окрестности начала координат, то для разрешимости (1.7) в классе C^∞ -функций необходимы следующие условия согласования (см. [7]):

$$f(0, x) = 0, \quad k = 1, \quad (3.1)$$

$$\left(\partial_t^{k-1} + \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2} \right]} \frac{(-1)^{j-1} (k-1)! (2k-2j-3)! \Delta^{2j+2}}{(2j+2)! (k-2j-3)! (2k-1)!} \partial_t^{2k-2j-3} \right) \times \\ \times f(0, x) = 0, \quad k \geq 2.$$

Отметим также, что хотя случай $\nu \in B$ не рассмотрен в теореме 2, аналогичная теорема может быть доказана и в этом случае.

Опишем области в одномерном комплексном пространстве $\mathbb{C}$ — области изменения параметра ρ — в которых начальное условие (2.13) можно упростить. Из формулы

$$\sqrt{a+ib} = \pm \left((\operatorname{sign} b) \sqrt{\frac{r+a}{2}} + i \sqrt{\frac{r-a}{2}} \right), \quad r = |a+ib|, \quad (3.2)$$

выбором соответствующей ветви корня имеем

$$\nu = \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ \sqrt{|1+4\rho| + 4 \operatorname{Re} \rho} + i \operatorname{sign}(\operatorname{Im} \rho) \sqrt{|1+4\rho| - 1 - 4 \operatorname{Re} \rho} \}. \quad (3.3)$$

Из этой формулы следует, что отображение $\nu \rightarrow \rho$, задаваемое формулой $\rho = \nu^2 - \frac{1}{4}$, полосу с выколотыми точками $0 \leq \operatorname{Re} \nu < 1$, $\nu \neq 0, 1, 2, \dots$ отображает во внутренность параболы с выколотыми точками

$$\operatorname{Re} \rho + \left(\frac{\operatorname{Im} \rho}{2} \right)^2 < l^2 - \frac{1}{4}, \quad \rho \neq k^2 - \frac{1}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Поэтому, если $0 \leq \operatorname{Re} \nu < 1$, то $m = 0$, $N = -1$ и в области Π_1 :

$$\operatorname{Re} \rho + \left(\frac{\operatorname{Im} \rho}{2} \right)^2 < \frac{3}{4}, \quad \rho \neq -\frac{1}{4}, \quad (3.4)$$

данные (2.12), (2.13) принимают вид „чистых“ вронскианов (см. (15)):

$$\lim_{t \rightarrow +0} W(u, \beta_j) = \Phi_j(x), \quad j=1, 2, \quad (3.5)$$

здесь $\beta_2(t) = -t^{\frac{1}{2}-\nu}$, $\beta_1(t) = t^{\frac{1}{2}+\nu}$.

Если же $1 \leq \operatorname{Re} \nu < 2$, $\nu \neq 1, \frac{3}{2}$, то $m=1$, $N=0$ и в области Π_2 :

$$\operatorname{Re} \rho + \left(\frac{\operatorname{Im} \rho}{2} \right)^2 > \frac{3}{4}, \quad \operatorname{Re} \rho + \left(\frac{\operatorname{Im} \rho}{4} \right)^2 < \frac{15}{4}, \quad \rho \neq \frac{3}{4}, 2, \quad (3.6)$$

данные (2.13) принимают вид

$$\lim_{t \rightarrow +0} (W(u, \beta_2) - W(\Delta u, \beta_{21}) - x_0 t^{\frac{3}{2}-\nu} f(0)) = \Phi_2(x), \quad (3.7)$$

где

$$\beta_{21} = \frac{t^{\frac{5}{2}-\nu}}{8\nu(1-\nu)}, \quad x_0 = \frac{1}{\nu(3-2\nu)}.$$

Пример 3.1. Общее решение уравнения

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) u = \frac{2u}{t^2}, \quad t \in]0, T[, \quad x \in R, \quad (3.8)$$

имеет вид

$$u(t, x) = \frac{g_1(t+x) + g_2(t-x)}{t} - g_1'(t+x) - g_2'(t-x), \quad (3.9)$$

где g_1, g_2 — произвольные дифференцируемые функции.

Непосредственным вычислением получаем

$$\lim_{t \rightarrow +0} W(u, \beta_2) = 3(g_1(x) + g_2(x)), \quad \beta_1 = t^2, \quad (3.10)$$

$$W(u, \beta_2) = - \frac{g_1'(t+x) + g_2'(t-x)}{3t}, \quad \beta_2 = - \frac{1}{3t}, \quad (3.11)$$

откуда следует, что $|W(u, \beta_2)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow +0$ и задача (3.8), (3.5) с „чистыми“ вронскианами неразрешима. Если данные ставить произвольно, но так, чтобы получились конечные пределы, например

$$\lim_{t \rightarrow +0} W(u, \beta_1) = \Phi_1(x), \quad \lim_{t \rightarrow +0} t W(u, \beta_2) = \Phi_2(x),$$

то и такая задача не всегда разрешима — необходимы условия согласования:

$$\Phi_1'(x) + g \Phi_2(x) = 0.$$

Из (3.6) следует, что уравнение (3.8) полагает в область Π_2 , несмотря на то, что $\nu = \frac{3}{2} \in B$ (соответствующее значение $\rho = 2$ не выбрасывается из области Π_2 в силу однородности (3.8) и замечания 2.8). По теореме I начальная задача (3.8), (2.12), (3.7) однозначно разрешима.

Непосредственным вычислением убеждаемся, что единственное решение уравнения (3.8) с начальными условиями

$$\lim_{t \rightarrow +0} W(u, t^2) = \Phi_1(x), \quad \Phi_1(x) \in C^2, \quad (3.12)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \left\{ W\left(u, -\frac{1}{3t}\right) + W\left(u_{xx}, \frac{1}{6t}\right) \right\} = \Phi_2(x), \quad (3.13)$$

имеет вид

$$u(t, x) = \frac{\Phi_1(x-t)}{3} + \frac{\Phi_1'(x-t)}{3t} + \int_{x-t}^{x+t} \frac{(x-y)^2 - t^2}{12t} (\Phi_1'''(y) - 9\Phi_2'(y)) dy, \quad (3.14)$$

аналогичный формуле Даламбера решения задачи Коши для волнового уравнения. Аналогичные формулы можно получить и для (1.7) при $p = k(k+1)$, $k \in Z_+$.

Пример 3.2. Уравнение

$$u_{tt} - t^{2m} u_{xx} = \frac{b}{t} u_t + \frac{p_1}{t^2} u, \quad m > -1, \quad (3.15)$$

заменой

$$\tau = \frac{t^{m+1}}{m+1}, \quad \omega(\tau, x) = u(t, x) t^{\frac{m-b}{2}}$$

сводится к уравнению Э. П. Д:

$$\omega_{\tau\tau} - \omega_{xx} = \frac{\rho}{\tau^2} \omega, \quad \rho = \frac{4\rho_1 + b(b+2) - m(m+2)}{4(m+1)^2}, \quad (3.16)$$

поэтому теорема 2 справедлива и для уравнения (3.15). В частности, при $m = \rho_1 = 0$ уравнение (3.15) принимает вид

$$u_{tt} - u_{xx} = \frac{b}{t} u_t. \quad (3.17)$$

Ф. с. р. ассоциированного уравнения $\left(\partial_t^2 - \frac{b}{t}\right)\beta = 0$ (сравнить с (1.6))

имеет вид

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \begin{cases} \frac{t^{b+1}}{b+1}, & b \neq -1, \\ \ln t, & b = -1, \end{cases} \quad W(\beta_1, \beta_2) = \begin{cases} t^b, & b \neq -1, \\ 1, & b = -1. \end{cases} \quad (3.18)$$

Повтому из $u \in C^\infty$ и $b \in Z_+$ следует, что в (4.2) $C_2 \equiv 0$ и задача (3.17) с начальным условием

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{W(u, \beta_2)}{W(\beta_1, \beta_2)} = u(+0, x) = \Phi_2(x) \quad (3.19)$$

однозначно разрешима в классе C^∞ -функций. Это согласуется с рзб о той [6], в которой доказана однозначная разрешимость задачи (3.17), (3.19) при $b \in Z_+$ в классе C^∞ -функций.

Если в (3.17) $b \in]-3, 1[$, то мы попадаем в область Π_1 , причем если $|b| < 1$, то из (3.18) задача (1.5) принимает вид

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{W(u, \beta_1)}{W(\beta_1, \beta_2)} = - \lim_{t \rightarrow +0} \frac{u_t}{t^\beta} = \Phi_1(x), \quad (3.20)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{W(u, \beta_2)}{W(\beta_1, \beta_2)} = u(+0, x) = \Phi_2(x),$$

и совпадает с весовой постановкой работ [1]—[4].

Если в (3.15) $\rho_1 = b = 0$ и $m > 0$, то опять попадаем в область Π_1 и данные (3.5) преобразованием $\omega = u \cdot t^{m/2}$ переходят в обычные данные Коши.

Пример 3.3. Для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + \frac{\beta}{t^\gamma} u = 0, \quad \beta \in R_+, \quad \gamma > 2, \quad (3.21)$$

выполнены все условия теоремы 1 и замечания 2.1. Если $\beta \in C \setminus R_+$, то нарушены условия (2.1), (2.2) теоремы 1.

§ 4. Формальный вывод начальных условий

Уравнение (1.1) применением преобразования Фурье

$$v(t, \xi) = \hat{u}(t, \xi) \equiv \int e^{-ix\xi} u(t, x) dx, \quad (4.1)$$

сводится к уравнению (1.3), общее решение которого имеет вид

$$v(t, \xi) = C_1(\xi) \varphi_1(t, \xi) + C_2(\xi) \varphi_2(t, \xi) + \hat{x}(t, \xi), \quad (4.2)$$

где $C_{1,2}(\xi)$ — произвольные функции, $\hat{x}$ — частное решение уравнения (1.3), а $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ — ф.с.р. уравнения (1.4), такая что

$$W(\varphi_1(t, \xi), \varphi_2(t, \xi)) \equiv 1. \quad (4.3)$$

Для уравнения (1.1) за счет выбора ф.с.р. всегда можно добиться выполнения условия (4.3), тогда как для более общих уравнений (см. пример 3.2) этого добиться невозможно. Для наших целей достаточно потребовать, чтобы $W(\varphi_1, \varphi_2)$ не зависело от ξ и не обращалось в нуль при $t \in]0, T]$.

Идея вронскианной постановки (1.2) начальной задачи для (1.1) возникает из следующих рассуждений. Дифференцируя по t представление (4.2) получаем систему

$$C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 = v - \hat{x}, \quad C_1 \varphi_{1t} + C_2 \varphi_{2t} = v_t - \hat{x}_t,$$

разрешая которую относительно C_1 и C_2 , получаем

$$C_1(\xi) = \frac{W(v - \hat{x}, \varphi_2)}{W(\varphi_1, \varphi_2)}, \quad C_2(\xi) = \frac{W(\varphi_1, v - \hat{x})}{W(\varphi_1, \varphi_2)}. \quad (4.4)$$

Из этих формул следует, что если задавать данные в виде (1.2), то

$$C_1(\xi) = \Phi_2(\xi), \quad C_2(\xi) = -\Phi_1(\xi), \quad (4.5)$$

и следует ожидать, что в такой постановке начальная задача для уравнения (1.1) будет однозначно разрешима в подходящих пространствах.

Замечание 4.1. Из представления (4.2) следует, что варьируя данные $\Phi_j(\xi)$ мы получим все решения уравнений (1.3) и (1.1), если прямое и обратное преобразование Фурье имеют смысл. Последнее следует из того, что в условиях теоремы 1 функции $\varphi_j(t, \xi)$ являются распределениями умеренного роста по ξ (см. лемму 5.2).

Применив к (4.2) обратное преобразование Фурье получим следующую формальную формулу для решения задачи (1.1), (1.2):

$$u(t, x) = \int e^{i\xi(x-y)} \left[\Phi_2(y) \varphi_1(t, \xi) - \Phi_1(y) \varphi_2(t, \xi) + \right. \\ \left. + \int_0^t G(t, \tau, \xi) f(\tau, y) d\tau \right] \frac{dy d\xi}{(2\pi)^n}. \quad (4.6)$$

Для обоснования (4.6) нам предстоит выяснить каким классам должны принадлежать функции f , Φ_1 , Φ_2 , чтобы решение (4.6) имело смысл и принадлежало пространству $C^2(H^n)$. Для этого нам понадобятся двойные асимптотики (при $|\xi| \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow +0$) функций $\varphi_j(t, \xi)$ из ядра оператора $\hat{P}$.

§ 5. Двойные асимптотики для ф. с. р.

Рассмотрим уравнение

$$\psi''(t) - Q(t) \psi(t) = 0, \quad t \in]0, T[. \quad (5.1)$$

Пусть функция $Q(t)$ комплекснозначна, дважды непрерывно дифференцируема на $]0, T[$ и удовлетворяет условиям

$$Q(t) \neq 0, \quad t \in]0, T[, \quad (5.2)$$

существует ветвь корня $\sqrt{Q}$ класса $C^2(]0, T[)$ такая, что

$$\operatorname{Re} \sqrt{Q} \leq 0, \quad t \in]0, T[. \quad (5.3)$$

Введем обозначения

$$S(t_0, t) = \int_{t_0}^t \sqrt{Q(\tau)} d\tau,$$

$$\rho(t_0, t) = \left| \int_{t_0}^t \left(\frac{Q_{\tau\tau}}{Q(\tau)} - \frac{5 Q_\tau^2}{4 Q^3} \right) \frac{1}{\sqrt{Q(\tau)}} \left| \frac{d\tau}{8} \right| \right|, \quad (5.4)$$

$$\delta_1(t_0, t) = 2(\exp\{\rho(t_0, t)\} - 1), \quad \delta_1(t) \equiv \delta_1(0, t).$$

$$\delta_2(t_0, t) = \delta_1(t_0, t) + (1 + \delta_1(t_0, t)) \left| \frac{Q_1}{4Q^{3/2}} \right|,$$

$$\psi_1^0(t) = [Q(t)]^{-\frac{1}{4}} \exp \{S(t, T)\},$$

$$\psi_2^0(t) = [Q(t)]^{-\frac{1}{4}} \exp \{-S(t, T)\}.$$

Хорошо известна (см., например, [9]) следующая

Лемма 5.1. В условиях (5.2), (5.3) и

$$\rho(0, t) < \infty, \quad t \in]0, T[, \quad (5.5)$$

$$\rho(t, T) < \infty, \quad t \in]0, T[, \quad (5.6)$$

уравнение (5.1) имеет решения $\psi_{1,2}(t)$ такие, что при $t \in]0, T[, i = 1, 2$

$$\left| \frac{\psi_j(t)}{\psi_j^0(t)} - 1 \right| \leq \delta_1(t, T\delta_{j2}), \quad \left| \frac{\psi_{ji}}{\sqrt{Q}\psi_j^0} - (-1)^j \right| < \delta_2(t, T\delta_{j2}). \quad (5.7)$$

Замечание 5.1. Если условия (5.3), (5.6) леммы 5.1 заменить условием

$$\operatorname{Re} \sqrt{Q(t)} \equiv 0, \quad (5.8)$$

то будут справедливы оценки (5.7) при $j=1$ и

$$\left| \frac{\psi_1}{\psi_1^0}(t) - 1 \right| \leq \delta_1(t), \quad \left| \frac{\psi_{2i}}{\sqrt{Q}\psi_1} - 1 \right| \leq \delta_2(t). \quad (5.9)$$

Замечание 5.2. Функции $\psi_{1,2}$, существование которых утверждается в лемме 5.1, будут линейно независимы, если

$$\lim_{t \rightarrow +0} \left| \frac{Q_1}{Q^{3/2}} \right| = \lim_{t \rightarrow +0} \rho(0, t) = 0. \quad (5.10)$$

Доказательство леммы 5.1 мы опускаем.

Полагая

$$Q = Q(t, \xi) \equiv -|\xi|^2 - a(t), \quad (5.11)$$

из формулы (3.2) выбором соответствующей ветви корня имеем

$$-\operatorname{Re} \sqrt{Q} = \operatorname{Im} \sqrt{|\xi|^2 + a} = \sqrt{\frac{|a + |\xi|^2| - \operatorname{Re} a - |\xi|^2}{2}},$$

откуда

$$0 \leq -\operatorname{Re} \sqrt{Q} \ll \frac{|\operatorname{Im} a(t)|}{\sqrt{\operatorname{Re} a(t) + |a(t)|}}^*, \quad (5.12)$$

на подмножестве

$$T_0^* = \{(t, x=0, \tau=0, \xi) = (t, \xi), t \in]0, T[, \xi \in (\mathbb{R}^n)'\}$$

касательного расслоения T^*G .

* Если f, g — функции на пространстве X , то следуя И. М. Виноградову, мы будем писать $f \ll g$, если существует постоянная $c > 0$ такая, что $|f(x)| \leq c|g(x)|$ для всех $x \in X$.

Из (1.1), (2.1) следует $|a(t)| \geq 1$ и оценки

$$|a(t)| + |\xi|^2 \ll Q(t, \xi) \ll |a(t)| < \xi^2. \quad (5.13)$$

Из (2.3) следует (5.10), откуда, в свою очередь, следует, что по $\varepsilon > 0$ можно выбрать $T > 0$ столь малым, что при $t \in]0, T[$, $j = 1, 2$ имеем $\delta_j(t) \leq \varepsilon$.

Лемма 5.2. В условиях теоремы 1 при $k = 0, 1, 2$, $j = 1, 2$ на T_0^* справедливы оценки

$$< \xi >^{2l} \ll |a(t)|^{\frac{1}{4} - \frac{k}{2}} |\partial_t^k \varphi_j(t, \xi)| \ll < \xi >^{2\sigma}, \quad (5.14)$$

$$|a(t)|^l \ll < \xi >^{\frac{1}{2} - k} |\partial_t^k \varphi_j(t, \xi)| \ll |a(t)|^{\sigma}, \quad (5.15)$$

здесь σ определяется формулой (2.15), а $l = -\delta_{0k}/4$.

Для ф. с. р. (β_1, β_2) уравнения (1.6) из леммы 5.1 при $Q = -a$ получаем на $]0, T[$ оценки

$$1 \ll |a(t)|^{\frac{1}{4} - \frac{k}{2}} |\partial_t^k \beta_j| \ll 1, \quad k = 0, 1, 2, \quad j = 1, 2. \quad (5.16)$$

Дифференцируя по t представление (4.2), ввиду (2.9) имеем

$$\partial_t^k v = \widehat{\Phi}_2 \partial_t^k \varphi_1 - \widehat{\Phi}_1 \partial_t^k \varphi_2 + \delta_{k2} \widehat{f} + \int_0^t [\partial_t^k G(t, \tau, \xi)] \widehat{f}(\tau, \xi) d\tau. \quad (5.17)$$

Из (2.9'), (4.3) и леммы 5.2 на T_0^* при $k = 0, 1, 2$ имеем

$$\partial_t^k G(t, \tau, \xi) \ll \left| \frac{a^{2k-1}(t)}{a(\tau)} \right|^{1/4} < \xi >^{2\sigma}, \quad (5.18)$$

$$\partial_t^k (G(t, \tau, \xi)) \ll |a(t)|^{\sigma} < \xi >^{k-1}. \quad (5.19)$$

Отсюда и из (5.17) получаем на T_0^* при $k = 0, 1, 2$ оценки

$$\partial_t^k v \ll \delta_{k2} |\widehat{f}| + |a|^{\frac{k}{2} - \frac{1}{4}} \left(|\widehat{\Phi}_1| + |\widehat{\Phi}_2| + \int_0^t \frac{|\widehat{f}(\tau, \xi)|}{\sqrt{|a(\tau)|}} d\tau \right) < \xi >^{2\sigma}, \quad (5.20)$$

$$\partial_t^k v \ll \delta_{k2} |\widehat{f}| + |a|^{\sigma} < \xi >^{k-1} \left(\sqrt{< \xi >} (|\widehat{\Phi}_1| + |\widehat{\Phi}_2|) + \int_0^t |\widehat{f}(\tau, \xi)| d\tau \right). \quad (5.21)$$

Из этих оценок и формулы Планшереля получаем при $k = 0, 1, 2$

$$|\partial_t^k u|_{q-2\sigma}^2 \ll \delta_{k2} \|f\|_{q-\frac{3}{2}}^2 + |a(t)|^{\frac{k}{2} - \frac{1}{2}} J_q^2(t), \quad (5.22)$$

$$|\partial_t^k u|_{q+1-k}^2 \ll \delta_{k2} \|f\|_{q+1-k}^2 + |a(t)|^{2\sigma} \bar{I}_q(t), \quad (5.23)$$

$$\bar{I}_q(t) \equiv \|\Phi_1\|_{q+\frac{1}{2}}^2 + \|\Phi_2\|_{q+\frac{1}{2}}^2 + \int_0^t \|f(\tau)\|_q^2 d\tau.$$

Оценки (2.5) вытекают из (5.22) и неравенства $2\sigma \leq k$.

§ 6. Упрощение начальных условий. Доказательство теоремы 1

Лемма 6.1. В условиях (2.1)–(2.4) справедливы оценки

$$|\langle \xi \rangle^s \frac{W(x, \varphi_j)}{W(\varphi_1, \varphi_2)}|^2 \ll \int_0^t |f(\tau)|_{s-\frac{1}{2}}^2 d\tau, \quad j=1, 2, \quad (6.1)$$

$$|\langle \xi \rangle^s W(v, \varphi_j - \beta_j)|^2 \ll t \int_{s+\frac{1}{2}}^2(t), \quad j=1, 2, \quad (6.2)$$

а если вместо (2.2) выполнено (1.9), то

$$|W(u, \beta_j - \gamma_j)|^2 \ll o(1) \int_{s+\frac{1}{2}}^2(t), \quad \text{при } t \rightarrow +0. \quad (6.3)$$

Доказательство. Оценки (6.1) следуют из (5.15) и формул ($j=1, 2$)

$$W(\varphi_j(t, \xi), G(t, \tau, \xi)) = \varphi_j(\tau) W'(\varphi_1, \varphi_2), \quad (6.4)$$

$$\frac{W(v, \varphi_j)}{W(\varphi_1, \varphi_2)} = \widehat{\varphi}_j + \frac{W(x, \varphi_j)}{W(\varphi_1, \varphi_2)} = \widehat{\varphi}_j - \int_0^t \varphi_j(\tau, \xi) \widehat{f}(\tau, \xi) d\tau. \quad (6.5)$$

Оценки (6.2) следуют из формул

$$\widehat{P}(\beta_j - \varphi_j) = |\xi|^2 \beta_j(t), \quad (6.6)$$

$$W(v, \beta_j - \varphi_j) = |\xi|^2 \int_0^t W'(G(t, \tau, \xi), v(t, \xi)) \beta_j(\tau) d\tau, \quad (6.7)$$

$$W'(G, v) \equiv Gv_t - G_tv.$$

Замечание 6.1. Из леммы 6.1 следует, что правые части оценок (6.1), (6.2) стремятся к нулю при $t \rightarrow +0$, поэтому данные (1.2) и (1.8) эквивалентны. Аналогично, в условии (1.9) эквивалентны данные (1.8) и (2.6).

Доказательство теоремы 1. Итак, в условиях (2.1)–(2.4) справедливы оценки (5.20), из которых следует, что v принадлежит пространству умеренных распределений по ξ и к (4.2) можно применить обратное преобразование Фурье, получив при этом единственное решение $u \in C^2(H^{q-2})$ (по формуле (4.6)) задачи (1.1), (1.2), которая, в силу замечания 6.1, эквивалентна задаче (1.1), (1.8). Замечание 2.1 следует из замечания 6.1.

Доказательство замечания 2.3. Заменой в формуле (5.17) $f(t, x) \rightarrow f(t, x) - b(t, x) u(t, x)$, в силу формулы Планшереля и (5.14), (5.18), имеем оценки

$$|u|_k^2 \ll |\alpha(t)|^{-\frac{1}{2}} \left(J_q^2(t) + \int_0^t \frac{|b(\tau)|_q^2}{V|\alpha(\tau)|} |u|_k^2(\tau) d\tau \right), \quad (6.8)$$

из которых, ввиду (2.7), применением леммы Гронуолла, можно выбрать последнее слагаемое правой части. Таким образом, из (5.17) получается оценка (2.5).

Покажем также, что при замене $f \rightarrow f - b$ и данные (1.2) не изменяются. Из (6.5) имеем

$$\begin{aligned} | \langle \xi \rangle^s (\hat{\Phi}_I - W(\hat{u}, \varphi)) |^2 &\ll \int_0^t \frac{|f(\tau)|^2}{V|a(\tau)|} d\tau + \\ &+ (|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2) \int_0^t \frac{|b(\tau)|^2}{|a(\tau)|} d\tau \rightarrow 0, \text{ при } t \rightarrow +0. \end{aligned}$$

§ 7. Уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу

Рассмотрим уравнение (1.7) при $\rho \in \mathbb{C}$, $(t, x) \in G$. Известно, что ф. с. р. уравнения

$$\hat{P}_\partial \varphi = \left(\partial_t^2 + |\xi|^2 - \frac{\rho}{t^2} \right) \varphi(t, \xi) = 0 \quad (7.1)$$

выписывается при $\nu \in \mathbb{C} \setminus Z$ через функции Бесселя (J_ν) первого рода

$$\begin{aligned} \varphi_1(t, \xi) &= \Gamma(\nu+1) \left| \frac{2}{\xi} \right|^\nu \sqrt{t} J_\nu(t|\xi|), \quad \nu \in \mathbb{C} \setminus Z_-, \\ \varphi_2(t, \xi) &= \frac{\Gamma(-\nu)}{2} \left| \frac{2}{\xi} \right|^\nu \sqrt{t} J_{-\nu}(t|\xi|), \quad \nu \in \mathbb{C} \setminus Z_+, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где Γ —гамма функция Эйлера, а постоянные подобраны таким образом, что выполнено условие (4.3).

Пользуясь известным разложением в ряд функции Бесселя для коэффициентов разложения

$$\varphi_j(t, \xi) = \sum_{q=0}^{\infty} \beta_{jq}(t) |\xi|^{2q}, \quad j=1, 2, \quad (7.3)$$

получаем формулы (2.11') и

$$\beta_{1q}(t) = \frac{t^{2q + \frac{1}{2} + \nu}}{(-4)^q q! (q+\nu) \cdots (2+\nu)(1+\nu)}, \quad q=0, 1, \dots \quad (7.4)$$

Если $\nu \in Z$, то вместо (7.3) возникают присоединенные степенные ряды

$$\sum_{q=0}^{\infty} (\beta_q(t) + \gamma_q(t) |\xi|^{2\nu} \ln |\xi|) |\xi|^{2q},$$

поэтому в начальных условиях (2.13) вместо целых степеней оператора Лапласа возникнут псевдодифференциальные операторы с символами $|\xi|^{2q+2\nu} \ln |\xi|$. Эти случаи здесь рассматриваться не будут, хотя аналог теоремы 2 справедлив и в этом случае.

Общее решение уравнения

$$\hat{P}_\partial v(t, \xi) = \hat{f}(t, \xi), \quad (7.5)$$

полученного применением к (1.7) преобразования Фурье, имеет вид

$$v(t, \xi) = \hat{\Phi}_2(\xi) \varphi_1(t, \xi) - \hat{\Phi}_1(\xi) \varphi_2(t, \xi) + v_0(t, \xi) + v_R(t, \xi), \quad (7.6)$$

где $\widehat{\Phi}_j(\xi)$ — произвольные функции, (φ_1, φ_2) — ф. с. р. уравнения (7.1), а v_0, v_R получаются регуляризацией частного решения неоднородного уравнения (7.5):

$$v_0(t, \xi) = \int_0^t G(t, \tau, \xi) \tau^m \widehat{f}_m(\tau, \xi) d\tau, \quad (7.7)$$

$$v_R(t, \xi) = \sum_{p=0}^{m-1} \left[\int \tau^p G(t, \tau, \xi) d\tau \right]_{\tau=t} \frac{\partial_t^p \widehat{f}(0, \xi)}{p!}, \quad (7.8)$$

где $G, \widehat{f}_m$ вычисляются по формулам (2.9'), (2.11).

Введем обозначения

$$t_1(\xi) = \frac{M}{\langle \xi \rangle}, \quad M — \text{большая постоянная,}$$

$$\omega_j = k - \frac{1}{2} + (-1)^j \operatorname{Re} \nu, \quad \lambda_{jk} = \max \left\{ 0, k - \frac{1}{2} + (-1)^j \operatorname{Re} \nu \right\}. \quad (7.9)$$

Лемма 7.1. При $\nu \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$, $(t, \xi) \in T_0^*$, $k = 0, 1, 2$, $j = 1, 2$ для ф. с. р. уравнения (7.1) справедливы оценки

$$\partial_t^k \varphi_j(t, \xi) \ll \begin{cases} t^{-\omega_j}, & t \leq t_1 \\ \langle \xi \rangle^{\omega_j}, & t \geq t_1 \end{cases} \quad (7.10)$$

$$\partial_t^k \varphi_j(t, \xi) \ll \left(\frac{\langle \xi \rangle}{t} \right)^{\lambda_{jk}}. \quad (7.11)$$

Доказательство. Оценки (7.10) при $t \geq t_1$ следуют из известных асимптотических формул для функций Бесселя, а при $t \leq t_1$ следуют из разложений (7.3). Оценки (7.11) вытекают из (7.10).

Лемма 7.2. При $\nu \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$, $(t, \xi) \in T_0^*$, $k = 0, 1, 2$ для функции Грина G справедливы оценки

$$\partial_t^k G \ll \begin{cases} \tau^{\frac{1}{2} - \operatorname{Re} \nu} t^{-\omega_1} + \tau^{\frac{1}{2} + \operatorname{Re} \nu} t^{-\omega_2}, & \tau \leq t \leq t_1, \\ \langle \xi \rangle^{\omega_2} \tau^{\frac{1}{2} + \operatorname{Re} \nu} + \langle \xi \rangle^{\omega_1} \tau^{\frac{1}{2} - \operatorname{Re} \nu}, & \tau \leq t_1 \leq t, \\ \langle \xi \rangle^{k-1}, & \tau \geq t_1, t \geq t_1, \end{cases} \quad (7.12)$$

$$\partial_t^k G(t, \tau, \xi) \ll \frac{1}{\tau^{\lambda_{20}}} \left(\frac{\langle \xi \rangle}{t} \right)^{\lambda_{2k}}. \quad (7.13)$$

Лемма 7.2 следует из леммы 7.1.

Из представления (7.6) и лемм 7.1, 7.2 при $\nu \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$, $(t, \xi) \in T_0^*$, $k = 0, 1, 2$ вытекают следующие оценки для решений задач (7.5), 1.2):

$$\partial_t^k v(t, \xi) \ll \partial_{k2} |\widehat{f}(t, \xi)| + \left(\frac{\langle \xi \rangle}{t} \right)^{\lambda_{1k}} |\widehat{\Phi}_2| + \left(\frac{\langle \xi \rangle}{t} \right)^{\lambda_{2k}} F, \quad (7.14)$$

$$P \equiv |\widehat{\Phi}_1(\xi)| + \sum_{p=0}^{m-1} \frac{|\partial_t^p \widehat{f}(0, \xi)|}{p!} + \left(\int |\widehat{f}_m(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}},$$

из которых следует

Лемма 7.3. При $v \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$, $t \in]0, T[$, $k=0, 1, 2$, $q \geq 0$ для решений задач (1.7), (1.2) справедливы оценки

$$|\partial_t^k u|_q^2 \ll t^{-2k} K_{q+\lambda_2 k} + t^{-2\lambda_1 k} |\Phi_{q+\lambda_1 k}|^2 + \delta_{k2} \|f\|_q^2, \quad (7.15)$$

$$|\partial_t^k u|_q^2 \ll t^{-4k-2\operatorname{Re} v} K_{q+k+\operatorname{Re} v} + t^{-4k} |\Phi_{q+k}|^2 + \delta_{k2} \|f\|_q^2, \quad (7.16)$$

здесь

$$K_q = |\Phi|_q^2 + \int_0^t \|f_m(\tau)\|_q^2 d\tau + \sum_{p=0}^{m-1} |\partial_t^p f(0)|_q^2. \quad (7.16')$$

Введем обозначения

$$\gamma_{lr} = \frac{l+r-v}{l+v-v},$$

$$\frac{(2l+p+\frac{3}{2}+v)(2r+p+\frac{3}{2}-v)r!l!(-4)^{r+l}(l+v)\cdots(1+v)(r-v)\cdots(1-v)v}{(2l+p+\frac{3}{2}+v)(2r+p+\frac{3}{2}-v)r!l!(-4)^{r+l}(l+v)\cdots(1+v)(r-v)\cdots(1-v)v},$$

$$I_N = \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{l+r=0}^N \frac{\gamma_{lr}}{p!} |t\xi|^2(r+l) t^{p+2} \partial_t^p \widehat{f}(0, \xi), \quad (7.17)$$

$$\widetilde{\Pi}_q = K_q + |\Phi_{q,2}|^2.$$

Лемма 7.4. В условиях теоремы 2 справедливы оценки

$$|\langle \xi \rangle^s W(v_0, \varphi_j)|^2 \ll o(1) \cdot \sup \|f_m(\tau)\|_q^2, \quad t \rightarrow +0, \quad j=1, 2, \quad (7.18)$$

$$|\langle \xi \rangle^s W(v_R, \varphi_1)|^2 \ll t^2 \sum_{p=0}^{m-1} |\partial_t^p f(0)|_q^2, \quad (7.19)$$

$$\left| \langle \xi \rangle^s W\left(v_R, \varphi_2 - \sum_{q=0}^m \beta_{2q} |\xi|^{2q}\right) \right|^2 \ll t^2 \sum_{p=0}^{m-1} |\partial_t^p f(0)|_{2m+s+\operatorname{Re} v+\frac{3}{2}}^2, \quad (7.20)$$

$$\left| \langle \xi \rangle^s W\left(v_R - I_N, \sum_{q=0}^m \beta_{2q} |\xi|^{2q}\right) \right|^2 \ll o(1) \sum_{p=0}^{m-1} |\partial_t^p f(0)|_{(m+N+\operatorname{Re} v)+s+3}^2, \quad (7.21)$$

$$|\langle \xi \rangle^s W(v, \varphi_1 - \beta_1)|^2 \ll t \widetilde{\Pi}_{3\operatorname{Re} v+s+\frac{5}{2}}, \quad (7.22)$$

$$\left| \langle \xi \rangle^s W\left(v, \varphi_2 - \sum_{q=0}^m \beta_{2q} |\xi|^{2q}\right) \right|^2 \ll t^{2(m+1-\operatorname{Re} v)} \widetilde{\Pi}_{2m+3\operatorname{Re} v+s+3}. \quad (7.23)$$

Доказательство. Оценки (7.18), (7.19) следуют из леммы 7.1 и формул

$$W(\varphi_j, v_0) = \int_0^t \tau^m \varphi_j(\tau, \xi) \widehat{f}_m(\tau, \xi) d\tau,$$

$$W(\varphi_j, v_R) = \sum_{p=0}^{m-1} \left[\int_{\tau=t} \tau^p \varphi_j(\tau, \xi) d\tau \right] \frac{\partial_t^p \widehat{f}(0)}{p!}.$$

Оценки (7.20) следуют из (2.9) и соотношений

$$\hat{P}_3 \beta_{jq} = |\xi|^2 \beta_{jq} - \beta_{j, q-1}, \quad q = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\hat{P}_3 \left(\sum_{q=0}^m \beta_{2q} |\xi|^{2q} - \varphi_3 \right) = |\xi|^{2m+2} \beta_{2m},$$

$$W(\tau_1, \varphi_3) W(G(t, \tau), G(t, y)) = W'(\varphi_3, \varphi_3) G(y, \tau),$$

$$W\left(v_R, \varphi_3 - \sum_{q=0}^m |\beta_{2q}|^{2q}\right) = \sum_{p=0}^{m-1} \frac{|\xi|^{2m+2}}{p!} \times \\ \times \left[\int \tau^p \int_0^t G(y, \tau) \beta_{2m}(y) dy d\tau \right]_{\tau=t} \partial_t^p \hat{f}(0, \xi).$$

Оценки (7.21) следуют из формул

$$\hat{P}_3 I_N = \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{l+r=0}^N \frac{\gamma_{lr}}{p!} |t\xi|^{2(r+l)} t^{p+2} \partial_t^p \hat{f}(0, \xi) \left[|\xi|^2 + \frac{\left(p+2l+2r+\frac{3}{2}\right)^2 - \gamma^2}{t^2} \right] =$$

$$= (1 + \tilde{\gamma} |t\xi|^{2N+2}) \sum_{p=0}^{m-1} \frac{\partial_t^p \hat{f}(0, \xi)}{p!} t^p,$$

$$\tilde{\gamma} = \gamma_{N0} + \dots + \gamma_{0N},$$

$$W\left(v_R - I_N, \sum_{q=0}^m \beta_{2q} |\xi|^{2q}\right) = \sum_{q=0}^m \sum_{p=0}^{m-1} \tilde{\gamma} |\xi|^{2q} \frac{\partial_t^p \hat{f}(0, \xi)}{p!} \times \\ \times \int_0^t |\tau\xi|^{2N+2} \tau^p W'(G(t, \tau), \beta_{2q}(\tau)) d\tau.$$

Наконец, оценки (7.22); (7.23) вытекают из формул

$$\beta_1 - \varphi_1 = |\xi|^2 \int_0^t G(t, \tau, \xi) \beta_1(\tau) d\tau,$$

$$W\left(v, \varphi_3 - \sum_{q=0}^m \beta_{2q} |\xi|^{2q}\right) = |\xi|^{2m+2} \int_0^t W(v(t, \xi), G(t, y, \xi)) \beta_{2m}(y) dy.$$

Справедлива формула

$$W\left(I_N, \sum_{q=0}^m \beta_{2q} |\xi|^{2q}\right) = t^{\frac{3}{2}-\gamma} \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{l+r=0}^N \sum_{q=0}^m |t\xi|^{2(r+l+q)} x_{lrpq} t^p \partial_t^p f(0, \xi). \quad (7.24)$$

Доказательство теоремы 2. Из леммы 7.4 следует, что правые части оценок (7.8)–(7.23) стремятся к нулю при $t \rightarrow +0$. Поэтому данные (1.2), в силу (7.24), эквивалентны данным (2.12), (2.13). Теорема 2 следует из этого замечания и леммы 7.3.

§ 8. Разрешимость смешанной задачи

Решение смешанной задачи для уравнения (1.1) мы построим методом разделения переменных. Разложим функцию $f(t, x)$ в ряд Фурье по собственным функциям $v_r(x)$ задачи Дирихле для оператора Лапласа (см. (2.19)):

$$f(t, x) = \sum_{r=1}^{\infty} f_r(t) v_r(x), \quad (8.1)$$

где коэффициенты Фурье f_r вычисляются по формулам (2.22).

Найдем решение уравнения (1.1), имеющее вид $u = u_r(t) v_r(x)$ и удовлетворяющее краевому условию (2.25). Для определения функций u_r и v_r стандартным способом получаем уравнения

$$\Delta v_r = -\lambda^2 v_r, \quad (8.2)$$

$$[\partial_t^2 + \lambda^2 + a(t)] u_r(t) = f_r(t), \quad (8.3)$$

из которых находим, что $\lambda = \lambda_r$ и

$$u_r(t) = A_r \varphi_{1r}(t) + B_r \varphi_{2r}(t) + x_r(t), \quad (8.4)$$

где A_r, B_r — произвольные постоянные, а

$$x_r(t) = \int_0^t G_r(t, \tau) f_r(\tau) d\tau, \quad (8.5)$$

$$G_r(t, \tau) = \frac{\varphi_{1r}(\tau) \varphi_{2r}(t) - \varphi_{1r}(t) \varphi_{2r}(\tau)}{W_r(\varphi_{1r}, \varphi_{2r})}. \quad (8.6)$$

Подставив (8.4) в начальные условия (2.24) получим $A_r = \Phi_{2r}$, $B_r = -\Phi_{1r}$, поэтому решение задачи (1.1), (2.24), (2.25) представляется в виде формальной суммы

$$u(t, x) = \sum_{r=1}^{\infty} [\Phi_{2r} \varphi_{1r}(t) - \Phi_{1r} \varphi_{2r}(t) + x_r(t)] v_r(x). \quad (8.7)$$

Доказательства теорем 3, 4 мы опускаем, т. к. они аналогичны доказательствам теорем 1, 2 с заменой $|\xi|$ на λ_r .

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 12. III. 1986

Գ. Ռ. ՂՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Տրված վոնսկիաներով սկզբնական և խառը խնդիրներ հիպերբոլական եավասարման համար (ամփոփում)

Վերնագրում նշված հավասարումների համար առաջարկվում է կոշու տվյալների փոխարեն սկզբնական սինդուլար հարթության վրա առը որոշակի վոնսկիաների Ապացուցվում է, որ նշված խնդիրը Սորուի դասերում ունի միակ լուծում:

G. R. OGANESIAN. On the initial value and mixed problems with given vronskyans for the second order singular hyperbolic equations (summary)

For the singular (on the initial hyperplane) second order hyperbolic equation $u u - \Delta u + a(t) u = f(t, x)$, $|a(+0)| = \infty$, $t \in]0, T[$, $x \in R^n$ the paper proposes to

consider initial value problem with vronskyans $\lim_{t \rightarrow 0} (u \varphi_{jt} - u_t \varphi_j) = \Phi_j(\xi)$, $j = 1, 2$

instead of the usual Cauchy data. Here $\tilde{u}(t, \xi)$ is the x -Fourier transformation of the solution $u(t, x)$, (φ_1, φ_2) is a fundamental system of solutions of the equation $\varphi_{tt} + (|\xi|^2 + a(t))\varphi = 0$.

Unique solvability of this problem is proved in the Sobolev spaces. Functions $\varphi_{1,2}$ in the initial vronskyans may be replaced by JWKB approximation $\gamma_{1,2} =$

$$= a^{-\frac{1}{4}}(t) \exp\left\{\pm i \int_t^s \sqrt{a(s)} ds\right\}, \text{ if certain conditions on } a(t) \text{ are satisfied.}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Бицадзе. Уравнения смешанного типа, М., ВИНТИ, 1959.
2. С. А. Терсенов. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе, Новосибирск, НГУ, 1973.
3. А. Б. Нерсисян. Задача Коши для симметрической гиперболической системы, вырождающейся на начальной гиперплоскости, ДАН СССР, 196, № 2, 1971, 289—292.
4. Ф. Т. Барановский. Задача Коши с видоизмененными начальными данными для обобщенного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу, Матем. сб., 120 (162), 1983, 147—163.
5. A. Weinstein. The singular solutions and the Cauchy problem for generalized Tricomi equations, Commun. pure and appl. math., VII, № 1, 1954, 105—116.
6. H. Tahara. Singular hyperbolic systems III. On the Cauchy problem for Fuchsian hyperbolic partial differential equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. A, 27, № 3, 1980, 465—507.
7. N. Hanges. Parametrices and local solvability for a class of singular hyperbolic operators, Commun. in part. diff. equat., 3, № 2, 1978, 105—152.
8. Г. Р. Оганесян. О начальной задаче с заданными вронскианами, Изв. АН АрмССР, сер. матем., 15, № 4, 1980, 292—309.
9. М. В. Федоряк. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, М., «Наука», 1983.
10. О. А. Ладыженская. Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., Гостехиздат, 1953.

УДК 517.444

С. С. КАЗАРЯН

НЕРАВЕНСТВА В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА ДЛЯ ОДНОЙ МАКСИМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

§ 1. Введение

В. Макенхаупт [1] для максимальной функции Харди—Литтльвуда, которая в пространстве R_n для интегрируемой по Лебегу функции f определяется следующим образом:

$$(Mf)(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy, \quad x \in R_n, \quad (1.1)$$

где Q — куб, стороны которого параллельны координатным осям, доказал следующую теорему.

Теорема А. Неравенство

$$\int_{R_n} [(Mf)(x)]^p \omega(x) dx \leq C \int_{R_n} |f(x)|^p \omega(x) dx, \quad 1 < p < \infty,$$

где $C > 0$ не зависит от f , имеет место тогда и только тогда, когда весовая, локально интегрируемая функция $\omega(x) > 0$ принадлежит классу A_p :

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq D \quad (1.2)$$

где $Q \subset R_n$ произвольный куб*.

Р. Керман и А. Торчинский [2] распространили результаты Б. Макенхаупта на классы Орлича. Несмотря на то, что необходимые определения и обозначения будут даны позже, приведем эту теорему:

Теорема Б. Пусть функция Юнга $\Phi(t)$ и ее дополнительная функция $\Psi(t)$ удовлетворяют Δ_2 условию. Тогда следующие условия эквивалентны:

$$(I) \quad \int_{R_n} \Phi(Mf)(x) \omega(x) dx \leq C \int_{R_n} \Phi(f(x)) \omega(x) dx, \quad (1.3)$$

где константа $C > 0$ не зависит от функции f ;

(II) локально интегрируемая, неотрицательная функция $\omega(x)$ принадлежит классу A_Φ :

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \xi \omega(x) dx \right) \varphi \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\xi \omega(x)} \right) dx \right) \leq K, \quad (1.4)$$

для всех кубов $Q \subset R_n$ и произвольных чисел $\xi > 0$;

ны координатным осям

* Всюду далее, когда говорим о кубах, подразумеваем, что их стороны параллель-

(III) $\omega(x)$ принадлежит классу $A_{p_0^+}$, где p_0^+ — нижний индекс функции Юнга $\Phi(t)$.

Для любой локально интегрируемой функции $W(x)$ введем связанную с ней максимальную функцию следующим образом:

$$(H_W f)(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} |W(x)| \int_Q \left| \frac{f(t)}{W(t)} \right| dt. \quad (1.5)$$

Легко видеть, что непрерывность максимального оператора в весовом пространстве $L_p(\omega)$, $p \geq 1$ эквивалентна непрерывности оператора $H_W(f)$ в пространстве L_p , где $\omega(x) = |W(x)|^p$. Но в пространстве Орлича уже невозможно подобные результаты непосредственно вывести друг из друга. В связи со сказанным необходимо отметить работу Юнг—Мин Чэна [3], в которой, получая многочисленные результаты для различных классических операторов, автор четко различает эти два случая.

В настоящей работе мы докажем интегральные неравенства для $H_W(f)$ при некоторых необходимых и достаточных условиях, налагаемых на функцию $W(x)$. Доказывается следующая

Теорема 1. Пусть функция Юнга $\Phi(t)$ и дополнительная к ней функция $\Psi(t)$ удовлетворяют Δ_2 условию. Пусть p_0^+ , p_1^+ — нижний и верхний индексы функции $\Phi(t)$ и, соответственно, q_0^+ , q_1^+ — нижний и верхний индексы функции $\Psi(t)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(а) локально интегрируемая функция $W(x)$ принадлежит классу B_Φ , т. е. для всех кубов $Q \subset R_n$ и произвольных чисел $\xi > 0$

$$\frac{1}{|Q|} \| \chi_Q W \|_{L_\Phi^\Phi} \left\| \frac{\chi_Q}{\xi W} \right\|_{L_\Psi^\Psi} \leq D_\Phi. \quad (1.6)$$

(б) $W(x)$ принадлежит классам $B_{p_0^+}$ и $B_{p_1^+}$, т. е. для всех кубов $Q \subset R_n$ справедливы, соответственно, неравенства

$$\frac{1}{|Q|} \| \chi_Q W \|_{L_{p_0^+}^{p_0^+}} \left\| \frac{\chi_Q}{W} \right\|_{L_{q_1^+}^{q_1^+}} \leq D_{p_0^+}, \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{|Q|} \| \chi_Q W \|_{L_{p_1^+}^{p_1^+}} \left\| \frac{\chi_Q}{W} \right\|_{L_{q_0^+}^{q_0^+}} \leq D_{p_1^+}.$$

(в) Существует некоторая константа $C_\Phi > 0$ такая, что

$$\| H_W(f) \|_{L_\Phi^\Phi} \leq C_\Phi \| f \|_{L_\Psi^\Psi}. \quad (1.8)$$

(г) Существует некоторая константа $C_\Phi > 0$ такая, что

$$\int_{R_n} \Phi((H_W(f))(x)) dx \leq C_\Phi \int_{R_n} \Phi(f(x)) dx. \quad (1.9)$$

(д) Существует некоторая константа $D_\Phi > 0$ такая, что для всех кубов $Q \subset R_n$ и произвольных чисел $\xi > 0$

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q S_\Phi(\xi |W(x)|) dx \varphi\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \Psi\left(\frac{1}{\xi |W(x)|}\right) dx\right) \leq D_\Phi, \quad (1.10)$$

где

$$S_\Phi(\lambda) = \inf_{t>0} \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)}.$$

(е) Справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|H_W(f)\|_{L^{p_0}} &\leq C_{p_0} \|f\|_{L^{p_0}}, \\ \|H_W(f)\|_{L^{p_1}} &\leq C_{p_1} \|f\|_{L^{p_1}}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Полученные результаты обобщают результат Б. Макенхаупта в другом направлении, в некотором смысле „параллельно“ работе [2].

Из полученных результатов выводятся различные следствия, касающиеся базисности в пространствах Орлича некоторых классических систем.

§ 2. Предварительные сведения и результаты

В настоящей работе через B, C, D будем обозначать различные константы. Чтобы подчеркнуть параметр, от которого зависит константа, иногда будем писать соответствующий индекс. Всюду ниже

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$$

функция Юнга ($\varphi(0) = 0$, $\varphi(\tau) > 0$, при $\tau > 0$, не убывает и непрерывна справа, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(\tau) = +\infty$).

Предположим, что $\Phi(t)$ удовлетворяет Δ_2 условию: $\Phi(2t) \leq B\Phi(t)$, которое эквивалентно более общему условию $\Phi(At) \leq B\Phi(t)$, $A > 1$.

Предположим также, что дополнительная к $\Phi(t)$ функция

$$\Psi(t) = \int_0^t \varphi^{-1}(\tau) d\tau,$$

где $\varphi^{-1}(\tau) = \sup \{S: \varphi(S) \leq \tau\}$ также удовлетворяет Δ_2 условию (см. [4], стр. 16—35).

Весовое пространство Орлича L_ω^Φ , где $\omega(x) \geq 0$ локально интегрируемая функция в R_n , есть пространство таких функций $u(x)$, что

$$\left| \int_{R_n} u(x) v(x) \omega(x) dx \right| < \infty$$

для любой $v(x)$ с

$$\int_{R_n} \Psi(v(x)) \omega(x) dx < \infty.$$

L^Φ — банахово пространство относительно нормы Орлича (для весовых функций все рассуждения аналогичны обычному случаю (см. [4], стр. 83))

$$\|f\|_{L^\Phi_\omega} = \sup_{v: \int_{R_n} \Psi(v(x)) \omega(x) dx < 1} \left\| \int_{R_n} f(x) v(x) \omega(x) dx \right\|. \quad (2.1)$$

Как и в обычном случае (см. [4], стр. 95—98) эта норма эквивалентна следующей норме Люксембурга:

$$\|f\|_{L^\Phi_\omega} = \inf_{\int_{R_n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{k}\right) \omega(x) dx < 1} k, \quad k > 0, \quad (2.2)$$

причем имеют место неравенства

$$\|f\|_{L^\Phi_\omega} \leq \|f\|_{L^\Psi_\omega} \leq 2 \|f\|_{L^\Phi_\omega}. \quad (2.3)$$

Для произвольного куба $Q \subset R_n$ будем обозначать через $L^\Phi_\omega(Q)$ пространство таких функций $u(x)$, что

$$\left| \int_Q u(x) v(x) \omega(x) dx \right| < \infty$$

для любой $v(x)$ с

$$\int_Q \Psi(v(x)) \omega(x) dx < \infty.$$

Если $\omega(x) = 1$, то получаем обычное пространство Орлича (см. [4], стр. 83).

Функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ будем называть эквивалентными, если существует константа C такая, что

$$C^{-1} f(t) \leq \varphi(t) \leq C f(t).$$

Мы будем использовать следующие свойства $\Phi(t)$ (см. [4], стр. 25, 37, 98):

$$C^{-1} t \varphi(t) \leq \Phi(t) \leq C t \varphi(t), \quad (2.4)$$

$$t < \Phi^{-1}(t) \Psi^{-1}(t) < 2t. \quad (2.5)$$

Если $u(x) \in L^\Psi_\omega$ и $v(x) \in L^\Phi_\omega$, то имеет место неравенство Гельдера

$$\left| \int_{R_n} u(x) v(x) \omega(x) dx \right| \leq \|u\|_{L^\Psi_\omega} \|v\|_{L^\Phi_\omega}. \quad (2.6)$$

В. Матусевска и В. Орлич [5] для исследования пространств Орлича L^Φ определили некоторые функции и связанную с ними пару индексов.

Для функции

$$\bar{S}_\Phi(\lambda) = \sup_{t>0} \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)} \quad (2.7)$$

справедлива следующая (см. [6], стр. 35)

Лемма А. Функция $\bar{S}_\Phi(\lambda)$ ограничена на каждом компактном множестве и существуют числа p_0 и p_1 ($p_0 \leq p_1$) такие что

$$\bar{S}_\Phi(\lambda) = O(\max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1})), \quad (2.8)$$

при $\lambda \rightarrow 0$ или $\lambda \rightarrow \infty$.

Если обозначить $p_0^* = \sup p_0$, $p_1^* = \inf p_1$, то

$$p_1^* = \inf_{1 < \lambda < \infty} \frac{\ln \bar{S}_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\ln \bar{S}_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda}, \quad (2.9)$$

$$p_0^* = \sup_{0 < \lambda < 1} \frac{\ln \bar{S}_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\ln \bar{S}_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda}.$$

Из леммы А вытекает, что при $p_0 < p_0^*$ и $p_1 > p_1^*$

$$\bar{S}_\Phi(\lambda) = o(\max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1})). \quad (2.10)$$

Из определения функции $\bar{S}(\lambda)$ следует, что существует константа $C > 0$ такая, что

$$\Phi(\lambda t) \leq C \max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1}) \Phi(t), \quad p_0 \leq p_1. \quad (2.11)$$

В этом случае, следуя [6], будем писать $\Phi \in \Lambda(p_0, p_1)$, или, чтобы зафиксировать константу, запишем $\Phi \in \Lambda(p_0, p_1, C)$. Если выполнено условие (2.10), то Φ имеет p_0^+ нижний тип и p_1^- верхний тип, что запишем в следующем виде: $\Phi \in \Lambda(p_0^+, p_1^-)$.

Определение 1. Положительная функция ρ называется псевдовогнутой, если существует эквивалентная ей вогнутая функция $F(t)$.

Имеют место следующие утверждения [6].

Лемма Б. Функция $\rho(t)$ псевдовогнута тогда и только тогда, когда $\rho \in \Lambda(0, 1)$, т. е.

$$\rho(\lambda t) \leq C \max(1, \lambda) \rho(t). \quad (2.12)$$

Множество тех функций ρ , для которых имеет место неравенство (2.12), обозначается через $\Upsilon(C)$. Множество функций ρ , для которых выполняется условие (2.10) при $p_0 = 0$ и $p_1 = 1$, обозначим через $\Upsilon^{+-}(C)$.

Лемма В. Если $\Phi \in \Lambda(p_0, p_1, C)$, то существует такая функция $\psi(t)$, эквивалентная $\Phi(t)$, что $\psi \in \Lambda(p_0, p_1, 1)$.

Лемма Г. Если $\Phi \in \Lambda(p_0, p_1)$ и $p_0 > 0$ то, $\Phi^{-1} \in \Lambda(p_1^{-1}, p_0^{-1})$.

Лемма Д. Пусть $\Phi(t) = t^{p_0} \sigma(t^{p_1 - p_0})$, $\Phi \in \Lambda(p_0, p_1, C)$ тогда и только тогда, когда $\sigma \in \Upsilon(C)$.

Лемма Е. Пусть $\Phi(t) = t^{p_0} \sigma(t^{p_1 - p_0})$ и $\Phi^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p_1}} \rho(t^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}})$. Для того, чтобы $\sigma(t) \in \Upsilon(C)$, необходимо и достаточно, чтобы $\rho(t) \in \Upsilon(C)$.

Заметим, что приведенные выше леммы справедливы также для положительной, непрерывной, строго возрастающей функции $\psi(t)$, определенной на положительной полупрямой и удовлетворяющей Δ_2 условию. Если

$$\bar{S}_\psi(\lambda) = O(\max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1})),$$

то будем говорить, что ψ имеет нижний тип p_0 и верхний тип p_1 .

$L_\psi^\psi(G)$ есть пространство таких функций $u(x)$, для которых

$$\int_G \psi\left(\frac{|u(x)|}{a}\right) d\mu < \infty, \quad a > 0.$$

Для $L_\psi^\psi(G)$ справедливо следующее утверждение [6]:

Лемма Ж. Если положительная, непрерывная, строго возрастающая функция $\psi(t)$ имеет конечный верхний и положительный нижний тип, то $L_\psi^\psi(G)$ является квазibanаховым пространством с квазинормой

$$\|u\|_{L_\psi^\psi(G)} = \inf \left\{ a > 0 / \int_G \psi\left(\frac{|u(x)|}{a}\right) d\mu \leq 1 \right\}.$$

Определение 2. Оператор T называется сублинейным, если

$$T(f_1 + f_2) \leq Tf_1 + Tf_2.$$

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие интерполяционные теоремы [6], [7].

Теорема В. Пусть $\psi_0(t)$ и $\psi_1(t)$ — положительные, непрерывные, строго возрастающие функции, имеющие конечный верхний и положительный нижний тип. Пусть T — линейный непрерывный оператор или сублинейный непрерывный оператор и такой, что имеют место следующие неравенства:

$$\|Tf\|_{L_{\psi_0}^{\psi_0}} \leq C_{\psi_0} \|f\|_{L_{\psi_0}^{\psi_0}},$$

$$\|Tf\|_{L_{\psi_1}^{\psi_1}} \leq C_{\psi_1} \|f\|_{L_{\psi_1}^{\psi_1}}.$$

Тогда если $\psi^{-1} = \psi_0^{-1} \rho(\psi_1^{-1}/\psi_0^{-1})$, где $\rho \in \Upsilon^{+-}(1)$, то существует константа C_Φ такая, что

$$\|Tf\|_{L_\psi^\psi} \leq C_\Phi \|f\|_{L_\psi^\psi}.$$

Теорема Г. Пусть T — сублинейный оператор, определенный на характеристических функциях χ_E , где E — подмножество R_n , имеющее конечную меру и $\omega(x)$ локально интегрируемая функция на R_n . Пусть T имеет обобщенный слабый тип (p_1, p_1) и (p_2, p_2) , $1 < p_1 < p_2 < \infty$ относительно $\omega(x)$, т. е.

$$\int_{T\chi_E > \lambda} \omega(x) dx \leq C \omega(E) \lambda^{-p_i}, \quad i=1, 2,$$

где константа C не зависит от множества E и $\lambda > 0$. Тогда

$$|Tf|_{L_p} \leq C_p |f|_{L_p},$$

где $p_1 < p < p_2$.

Отметим следующее полезное утверждение [2], которое относится к теореме Г.

Лемма 3. Пусть $\omega(x)$ — локально интегрируемая функция на R_n . Тогда для того, чтобы имело место

$$\int_{M_{\lambda E}^{>\lambda}} \omega(x) dx \leq C \omega(E) \lambda^{-p}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

где C не зависит от измеримого множества E и $\lambda > 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая константа $D > 0$, что для всех кубов Q , всех измеримых $E \subset Q$

$$\frac{|E|}{|Q|} \leq D \left(\frac{\omega(E)}{\omega(Q)} \right)^{1/p},$$

где $\omega(E) = \int_E \omega(x) dx$.

Приведем следующий результат, который также используется при доказательстве теоремы 1 [8].

Теорема Д. Пусть неотрицательная, локально интегрируемая функция $\omega(x)$ принадлежит классу (A_p) , где $1 < p < \infty$. Тогда «обратное неравенство Гельдера».

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q (\omega(x))^{1+\delta} dx \right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq C \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right)$$

выполняется для всякого куба Q с положительными постоянными C , δ не зависящими от Q .

В наших рассуждениях мы будем использовать функции:

$$S_{\Phi}(\lambda) = \inf_{t>0} \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)}; \quad h_{\Phi}(\lambda) = \sup_{t>0} \frac{\Phi^{-1}(t)}{\Phi^{-1}(\lambda t)}; \quad (2.13)$$

Для них справедливы следующие соотношения (см. [9]):

$$p_0^* = \sup_{1 < \lambda < \infty} \frac{\ln S_{\Phi}(\lambda)}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\ln S_{\Phi}(\lambda)}{\ln \lambda}, \quad (2.14)$$

$$p_1^* = \inf_{0 < \lambda < 1} \frac{\ln S_{\Phi}(\lambda)}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\ln S_{\Phi}(\lambda)}{\ln \lambda}$$

и

$$\frac{1}{p_0^*} = \inf_{0 < \lambda < 1} \left(-\frac{\ln h_{\Phi}(\lambda)}{\ln \lambda} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(-\frac{\ln h_{\Phi}(\lambda)}{\ln \lambda} \right), \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{p_1^*} = \sup_{1 < \lambda < \infty} \left(-\frac{\ln h_{\Phi}(\lambda)}{\ln \lambda} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln h_{\Phi}(\lambda)}{\ln \lambda} \right),$$

p_0^* и p_1^* называются нижним и верхним индексами функции $\Phi(t)$.

Из работы [10] следует, что если q_0^* и q_1^* — нижний и верхний индексы дополнительной к функции Юнга $\Phi(t)$ функции $\Psi(t)$, то

$$\frac{1}{p_0^*} + \frac{1}{q_1^*} = 1, \text{ соответственно, } \frac{1}{q_0^*} + \frac{1}{p_1^*} = 1. \quad (2.16)$$

§ 3. Доказательство теоремы 1

Эквивалентность утверждений (б) и (е) следует из теоремы А, учитывая условие (2.16).

Для доказательства импликации (е) $\Rightarrow$ (в) нам необходимы следующие леммы:

Лемма 1. Пусть $W(x)$ удовлетворяет условию B_p . Тогда существует такое число $\delta > 0$, что $W(x)$ удовлетворяет условиям $B_{p-\delta}$ и $B_{p+\delta}$.

Доказательство. Так как $W(x)$ удовлетворяет условию B_p (см. (1.17)), то ввиду того, что $|W(x)|^p$ удовлетворяет условию (A_p) , согласно теореме Д получаем, что существуют $r_1 > 1$ и C такие, что

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |W(x)|^{pr_1} dx \right)^{1/r_1} \leq C \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |W(x)|^p dx \right). \quad (3.1)$$

Обозначим через q и r_2 ($r_2 < q$) числа, сопряженные, соответственно, p и pr_1 . Применив неравенство Гельдера, находим

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |W(x)|^{-r_2} dx \right)^{1/r_2} \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |W(x)|^{-q} dx \right)^{1/q}. \quad (3.2)$$

Из (3.1) и (3.2) следует

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |W(x)|^{pr_1} dx \right)^{1/pr_1} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |W(x)|^{-r_2} dx \right)^{1/r_2} \leq C_1.$$

Тем самым получили, что существует такое число $\delta_1 > 0$, что $W(x)$ удовлетворяет условию $B_{p+\delta_1}$.

Опять используя „обратное неравенство Гельдера“ и неравенство Гельдера, из условия B_p получим, что для любого куба Q

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |W(x)|^{r_2'} dx \right)^{1/r_2'} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|W(x)|} \right)^{qr_1'} dx \right)^{1/qr_1'} \leq C_2,$$

где r_2' — число, сопряженное qr_1' и $r_1' > 1$. Отсюда следует существование такого числа δ_2 , что $W(x)$ удовлетворяет условию $B_{p-\delta_2}$.

Лемма 2. Пусть $\psi(t)$ — положительная, непрерывная, строго возрастающая функция на положительной полупрямой и $\psi(t) = t^{\bar{p}_0} \sigma(t^{\bar{p}_1 - \bar{p}_0})$. $\psi \in \Lambda(p_0^+, p_1^-, 1)$ тогда и только тогда, когда $\sigma \in \gamma^{+-}(1)$.

Доказательство. Необходимость. Допустим, что $\psi \in \Lambda(p_0^+, p_1^-, 1)$, тогда

$$\psi(\lambda t) = o(\max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1})) \psi(t), \quad p_0 \leq p_1, \quad \psi(t) \leq \max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1}) \psi(t).$$

Отсюда

$$\sigma((\lambda t)^{p_1-p_0}) = o(\max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1-p_0})) \sigma(t^{p_1-p_0}). \quad (3.3)$$

Положив

$$\mu = \lambda^{p_1-p_0}, \quad x = t^{p_1-p_0}, \quad (3.4)$$

из условия (3.3) получим $\sigma(\mu x) = o(\max(1, \mu)) \sigma(x)$. Аналогично имеем

$$\sigma(\mu x) \leq \max(1, \mu) \sigma(x).$$

Достаточность. Пусть теперь $\sigma \in \gamma^{+-}(1)$, т. е. $\sigma(\mu x) = o(\max(1, \mu)) \sigma(x)$, $\sigma(\mu x) \leq \max(1, \mu) \sigma(x)$. Из этих соотношений, переходя к первоначальным обозначениям (3.4), имеем

$$\sigma((\lambda t)^{p_1-p_0}) = o(\max(1, \lambda^{p_1-p_0})) \sigma(t^{p_1-p_0}),$$

$$\sigma((\lambda t)^{p_1-p_1}) \leq \max(1, \lambda^{p_1-p_0}) \sigma(t^{p_1-p_0}).$$

Следовательно, $\psi \in \Lambda(p_0^+, p_1^-, 1)$.

Лемма 3. Пусть $\psi(t)$ — непрерывная, строго возрастающая положительная функция на положительной полупрямой. Пусть

$\psi(t) = t^{p_0} \sigma(t^{p_1-p_0})$ и $\psi^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p_1}} \rho(t^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}})$. $\sigma(t) \in \gamma^{+-}(1)$ тогда и только тогда, когда $\rho(t) \in \gamma^{+-}(1)$.

Доказательство. Необходимость. Допустим, что $\sigma \in \gamma^{+-}(1)$, тогда в силу леммы 2

$$\psi(\lambda t) = o(\max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1})) \psi(t), \quad p_0 \leq p_1,$$

$$\psi(\lambda t) \leq \max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1}) \psi(t).$$

В случае, когда $\lambda > 1$, имеем

$$\psi(\lambda t) = o(\lambda^{p_1}) \psi(t), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Положив $t = \psi^{-1}(\mu x)$ и $\lambda = \mu^{-\frac{1}{p_1}}$, легко находим

$$\psi^{-1}(\mu x) = o(\mu^{\frac{1}{p_1}}) \psi^{-1}(x), \quad \mu \rightarrow 0+.$$

Аналогичные выкладки показывают, что

$$\psi^{-1}(\mu x) = o(\max(\mu^{\frac{1}{p_1}}, \mu^{\frac{1}{p_0}})) \psi^{-1}(x),$$

$$\psi^{-1}(\mu x) \leq \max(\mu^{\frac{1}{p_1}}, \mu^{\frac{1}{p_0}}) \psi^{-1}(x).$$

Отсюда на основании леммы 2 получаем, что $\rho \in \gamma^{+-}(1)$. Доказательство достаточности леммы аналогично.

Приступим к непосредственному доказательству импликации (е) $\Rightarrow$ (в). Из леммы 1, а также из эквивалентности утверждений (б) и (е) следует существование таких чисел $p_0 < p_0^*$ и $p_1 > p_1^*$, что

$$\|H_W f\|_{L^{p_0}} \leq C_{p_1} \|f\|_{L^{p_0^*}}, \quad \|H_W f\|_{L^{p_1}} \leq C_{p_1} \|f\|_{L^{p_1^*}}. \quad (3.5)$$

Так как p_0^+ и p_1^+ являются соответственно нижним и верхним индексами для Φ , то для выбранных p_0 и p_1 согласно (2.10) получаем $\Phi \in \Lambda(p_0^+, p_1^-, C)$. Тогда в силу леммы В существует непрерывная, строго возрастающая функция $\psi(t)$, эквивалентная $\Phi(t)$ такая, что $\psi \in \Lambda(p_0^+, p_1^-, 1)$. Из леммы 2 и 3 вытекает, что если $\psi^{-1}(t)$ представить в виде $\psi^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p_1}} \rho(t^{\frac{1}{p_0}} - \frac{1}{p_1})$, то $\rho \in \gamma^{+-}(1)$. Таким образом $\psi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы В, откуда и из (3.5) получаем

$$\|H_W f\|_{L_1^\psi} \leq C_\Phi \|f\|_{L_1^\Phi}. \quad (3.6)$$

Согласно неравенству Иенсена (см. [4], стр. 18) имеем

$$C\Phi(t) \leq \Phi(Ct), \quad C^{-1}\Phi(t) \geq \Phi\left(\frac{1}{C}t\right),$$

если $C > 1$. Отсюда и из эквивалентности функций Φ и ψ получаем, что для некоторого $C > 1$

$$\Phi\left(\frac{1}{C}t\right) \leq \psi(t) \leq \Phi(Ct). \quad (3.7)$$

Ввиду того, что

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_\xi^\psi} &= \inf \left\{ k > 0 / \int \psi\left(\frac{u(x)}{k}\right) \xi dx \leq 1 \right\}, \\ \frac{1}{C} \|u\|_{L_\xi^\Phi} &= \inf \left\{ k > 0 / \int \Phi\left(\frac{1}{C} \frac{u(x)}{k}\right) \xi dx \leq 1 \right\}, \end{aligned}$$

то согласно (3.7) получаем

$$\int \Phi\left(\frac{1}{C} \frac{u(x)}{k}\right) dx \leq \int \psi\left(\frac{u(x)}{k}\right) dx.$$

Следовательно

$$\frac{1}{C} \|u\|_{L_\xi^\Phi} \leq \|u\|_{L_\xi^\psi}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\|u\|_{L_\xi^\psi} \leq C \|u\|_{L_\xi^\Phi}.$$

Таким образом, отсюда и из (3.6) получаем

$$\|H_W f\|_{L_\xi^\Phi} \leq C_\Phi \|f\|_{L_\xi^\Phi}.$$

Импликация (е) $\Rightarrow$ (в) доказана.

Так как для любого $\xi > 0$ и произвольного куба $Q \subset R_n$

$$\frac{1}{|Q|} W(x) \chi_Q(x) \int_Q \left| \frac{f(y)}{W(y)} \right| \xi dy \leq H_{\xi W}(\chi_Q f, x),$$

то из условия (в) и неравенства (2.3) получаем

$$\frac{1}{|Q|} \|\chi_Q W\|_{L_\xi^\Phi} \int_Q \frac{1}{|W(y)|} |f(y)| \xi dy < C_\Phi \|f\|_{L_\xi^\Phi},$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{|Q|} \|\chi_Q W\|_{L_{\xi}^{(\Phi)}} \sup_{1/\Lambda_{\xi}^{(\Phi)}(Q) \leq \xi} \int_Q \frac{1}{|\xi W(y)|} |f(y)| \xi dy \leq C_{\Phi}.$$

Левая часть полученного неравенства равна левой части неравенства в условии (а). Импликация (в) $\Rightarrow$ (а) доказана.

Для вывода импликации (г) $\Rightarrow$ (а) будем использовать доказательство основного результата работы [2]. Мы можем выбрать такую функцию f , определенную на Q , где Q — произвольный куб в R_n , что $1/\Lambda_{\xi}^{(\Phi)}(Q) = 1$ и

$$\int_Q \left| \frac{f(x)}{\xi W(x)} \right| \xi dx = \left\| \frac{\chi_Q}{\xi W} \right\|_{L_{\xi}^{(\Psi)}}.$$

Потому для $x \in Q$

$$H_W(f, x) \geq \frac{1}{|Q|} \chi_Q(x) |W(x)| \left\| \frac{\chi_Q}{\xi W} \right\|_{L_{\xi}^{(\Psi)}}.$$

Следовательно, так как для выбранной функции f согласно определению нормы Люксембурга имеем

$$\int_{R_n} \Phi(f(x)) \xi dx = 1,$$

то из условия (г) получаем

$$\int_Q \Phi\left(\frac{1}{|Q|} |W(x)| \left\| \frac{\chi_Q}{\xi W} \right\|_{L_{\xi}^{(\Psi)}}\right) \xi dx \leq C_{\Phi}. \quad (3.8)$$

Из определения функции S_{Φ} (2.13) имеем

$$S_{\Phi}(|W(x)|) \Phi\left(\frac{1}{|Q|} \left\| \frac{\chi_Q}{\xi W} \right\|_{L_{\xi}^{(\Psi)}}\right) \leq \Phi\left(\frac{1}{|Q|} |W(x)| \left\| \frac{\chi_Q}{\xi W} \right\|_{L_{\xi}^{(\Psi)}}\right),$$

откуда и из (3.8) получаем неравенство

$$\Phi\left(\frac{1}{|Q|} \left\| \frac{\chi_Q}{\xi W} \right\|_{L_{\xi}^{(\Psi)}}\right) \leq \frac{C_{\Phi}}{\xi \int_Q S_{\Phi}(|W(x)|) dx}. \quad (3.9)$$

Используя соотношение (см. (2.13))

$$\Phi^{-1}(Ct) \leq h_{\Phi}\left(\frac{1}{C}\right) \Phi^{-1}(t),$$

из (3.9) находим, что

$$\frac{1}{|Q|} \left\| \frac{\chi_Q}{\xi W} \right\|_{L_{\xi}^{(\Psi)}} \leq D_{\Phi} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{\xi \int_Q S_{\Phi}(|W(x)|) dx}\right), \quad (3.10)$$

где $D_{\Phi} = h_{\Phi}\left(\frac{1}{C_{\Phi}}\right)$. Согласно определению нормы Люксембурга

$$\int_Q \Psi \left(\frac{1}{\xi |W(x)| \left\| \frac{\chi_Q}{\xi W} \right\|_{L(\Psi)}} \right) \xi dx = 1.$$

Отсюда, воспользовавшись неравенством (3.10), будем иметь

$$\int_Q \Psi \left(\frac{D_\Phi^{-1}}{\xi |W(x)| Q \Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi \int_Q \underline{S}_\Phi (|W(x)|) dx} \right)} \right) \xi dx \leq 1. \quad (3.11)$$

Основываясь на эквивалентности функций $\Psi(t)$ и $t\varphi^{-1}(t)$ (3.11) можем записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{D_\Phi^{-1}}{|Q| \Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi \int_Q \underline{S}_\Phi (|W(x)|) dx} \right)} \int_Q \varphi^{-1} \times \\ & \times \left(\frac{D_\Phi^{-1}}{\xi |Q| |W(x)| \Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi \int_Q \underline{S}_\Phi (|W(x)|) dx} \right)} \right) \frac{1}{|W(x)|} dx \leq D. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Так как функция

$$F(\xi) = \frac{D_\Phi^{-1}}{\xi |Q| \Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi \int_Q \underline{S}_\Phi (|W(x)|) dx} \right)}$$

непрерывна и, согласно неравенству (2.5), стремится, соответственно, к нулю и бесконечности, когда $\xi \rightarrow \infty$ и $\xi \rightarrow 0$, то существует такое значение $\xi_0 > 0$, что

$$\frac{D_\Phi^{-1}}{\xi_0 |Q| \Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi_0 \int_Q \underline{S}_\Phi (|W(x)|) dx} \right)} = 1. \quad (3.13)$$

В силу неравенства Юнга (2.5) из (3.13) получаем

$$\frac{D_\Phi^{-1} \int_Q \underline{S}_\Phi (|W(x)|) dx \cdot \Psi^{-1} \left(\frac{1}{\xi_0 \int_Q \underline{S}_\Phi (|W(x)|) dx} \right)}{2|Q|} \leq 1.$$

Отсюда

$$\Psi^{-1} \left(\frac{1}{\xi_0 \int_Q \underline{S}_\Phi (|W(x)|) dx} \right) \leq \frac{2 D_\Phi |Q|}{\int_Q \underline{S}_\Phi (|W(x)|) dx}.$$

Применив к обеим частям неравенства функцию Ψ , будем иметь

$$\left[\Psi \left(\frac{2 D_\Phi |Q|}{\int_Q \underline{S}_\Phi (|W(x)|) dx} \right) \int_Q \underline{S}_\Phi (|W(x)|) dx \right]^{-1} \leq \xi_0 \quad (3.14)$$

Используя оценку (3.14), из неравенства (3.12) и условия (3.13) имеем

$$\int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{|W(x)|} \right) \frac{1}{|W(x)|} dx \leq \frac{D}{\xi_0} \leq \\ \leq 2D \cdot D_\Phi \cdot D'_\Phi \cdot |Q| \cdot \varphi^{-1} \left(\frac{2D_\Phi \cdot |Q|}{\int_Q S_\Phi(|W(x)|) dx} \right).$$

Отсюда легко находим

$$\frac{1}{|Q|} \int S_\Phi(|W(x)|) dx \varphi \left(\frac{1}{|Q|} \int \Psi \left(\frac{1}{|W(x)|} \right) dx \right) \leq D'_\Phi.$$

Импликация (г) $\Rightarrow$ (д) доказана.

Для доказательства импликации (а) $\Rightarrow$ (д) заметим, что для любого куба $Q \subset R_n$ неравенство (3.8) сразу следует из условия (а). Откуда, точно таким же образом как и выше, приходим к неравенству (д).

Перейдем к доказательству импликации (д) $\Rightarrow$ (е).

Пусть Q — куб и E — некоторое измеримое подмножество Q , тогда из (2.3) и (2.6) имеем

$$\frac{|E|}{|Q|} \leq 2 \frac{1}{|Q|} \| \chi_E W \|_{L_\xi^{(\Phi)}} \left\| \frac{\chi_Q}{\xi W} \right\|_{L_\xi^{(\Psi)}}. \quad (3.15)$$

Покажем, что существует такое ξ' , для которого

$$\xi' \left\| \frac{\chi_Q}{\xi' W} \right\|_{L_\xi^{(\Psi)}} = 1. \quad (3.16)$$

В силу определения нормы Люксембурга и предложений, касающихся функции ψ , очевидно, что равенство (3.16) имеет место, если

$$\int_Q \Psi \left(\frac{1}{W(x)} \right) \xi' dx = 1.$$

Отсюда требуемое значение ξ' равно

$$\xi' = \frac{1}{\int_Q \Psi \left(\frac{1}{W(x)} \right) dx}.$$

Взяв $\xi = 1$ в условии (д) и используя (3.16), получим

$$\frac{1}{\xi' |Q|} \left(\int_Q S_\Phi(|W(x)|) \xi' dx \right) \varphi \left(\frac{1}{\xi' |Q|} \int_Q \Psi \left(\frac{1}{\xi' |W(x)| \left\| \frac{\chi_Q}{\xi W} \right\|_{L_\xi^{(\Psi)}}} \right) \xi' dx \right) \leq D'_\Phi,$$

откуда, воспользовавшись определением нормы Люксембурга и равенством (3.16), находим

$$\frac{1}{|Q|} \left\| \frac{\chi_Q}{\xi' W} \right\|_{L_\xi^{(\Psi)}} \varphi \left(\frac{1}{|Q|} \left\| \frac{\chi_Q}{\xi' W} \right\|_{L_\xi^{(\Psi)}} \right) \leq \frac{D'_\Phi}{\xi' \int_Q S_\Phi(|W(x)|) dx}. \quad (3.17)$$

Из определения h_Φ (см. (2.13)) и неравенств (2.4), (3.17) получим

$$\frac{1}{|Q|} \left\| \frac{\chi_Q}{\xi' W} \right\|_{L_{\xi'}^{(\gamma)}} \leq C_\Phi \Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi' \int_Q S_\Phi(|W(x)|) dx} \right), \quad (3.18)$$

где $C_\Phi = h_\Phi \left(\frac{1}{B_\Phi \cdot C} \right)$ (C — константа из равенства (2.4)). Очевидно имеем, что

$$\int_E \Phi \left(\frac{1}{\alpha} \right) \bar{S}_\Phi(|W(x)|) \xi' dx = 1, \quad (3.19)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi' \int_E \bar{S}_\Phi(|W(x)|) dx} \right)}. \quad (3.20)$$

Из (3.19), (3.20) согласно определению функции $\bar{S}_\Phi(\lambda)$ получаем

$$\int_E \Phi \left(\frac{(|W(x)|)}{\alpha} \right) \xi' dx \leq \int_E \Phi \left(\frac{1}{\alpha} \right) \bar{S}_\Phi(|W(x)|) \xi' dx = 1.$$

Следовательно

$$\| \chi_E W \|_{L_{\xi'}^{(\Phi)}} \leq \frac{1}{\Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi' \int_E \bar{S}_\Phi(|W(x)|) dx} \right)}. \quad (3.21)$$

Из неравенства (3.15) для $\xi = \xi'$ на основе (3.18) и (3.21) находим

$$\frac{|E|}{|Q|} \leq 2 C_\Phi \frac{\Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi' \int_Q S_\Phi(|W(x)|) dx} \right)}{\Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi' \int_E \bar{S}_\Phi(|W(x)|) dx} \right)}. \quad (3.22)$$

Если условие (д) выполняется для некоторой функции $W(x)$, то это же условие будет выполняться и для функции $\xi \gamma W(x)$ при любых положительных $\xi > 0$ и $\gamma > 0$. Следовательно, из справедливости (3.22) ввиду того, что C_Φ не зависит от функции $W(x)$, вытекает неравенство

$$\frac{|E|}{|Q|} \leq 2 C_\Phi \frac{\Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi \int_Q S_\Phi(\gamma \xi |W(x)|) dx} \right)}{\Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi' \int_E \bar{S}_\Phi(\gamma \xi |W(x)|) dx} \right)}. \quad (3.23)$$

Пусть $Q_N = \{x : W(x) \geq N\} \cap Q$ и $E_N = E \cap Q_N$. Выберем N настолько большим, чтобы интегралы

$$\int_{Q_N} \underline{S}_\Phi(|W(x)|) dx; \int_{E_{N_1}} \bar{S}_\Phi(|W(x)|) dx$$

были меньше наперед заданного числа $\delta > 0$.

Из условий (2.9) и (2.14), для произвольных положительных ξ_1 и ξ_2 мы можем выбрать такое $\xi > 0$, чтобы имели место неравенства

$$\xi^{\rho_0^*} |W^{\rho_0^*}(x)| \leq \bar{S}_\Phi(\xi W(x)) \leq \xi^{\rho_0^* - \xi_1} |W^{\rho_0^* - \xi_1}(x)|, \quad x \in E' = E \setminus E_{N_1}, \quad (3.24)$$

$$\xi^{\rho_1^* + \xi_2} |W^{\rho_1^* + \xi_2}(x)| \leq \underline{S}_\Phi(\xi W(x)) \leq \xi^{\rho_1^*} |W^{\rho_1^*}(x)|, \quad x \in Q' = Q \setminus Q_{N_1}.$$

Используя определения функций $S_\Phi(\lambda)$ и $\bar{S}_\Phi(\lambda)$, сразу получим

$$\begin{aligned} \underline{S}_\Phi(\gamma) \cdot \underline{S}_\Phi(\xi W(x)) &\leq \underline{S}_\Phi(\gamma \xi W(x)), \\ \bar{S}_\Phi(\gamma \xi W(x)) &\leq \bar{S}_\Phi(\gamma) \bar{S}_\Phi(\xi W(x)). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Из условий (3.23), (3.24) и (3.25), а также из монотонности $\Phi^{-1}(t)$ следует неравенство

$$\frac{|E|}{|Q|} \leq C_1 \frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\xi' \underline{S}_\Phi(\gamma) \xi^{\rho_1^* + \xi_2} \int_{Q'} |W(x)|^{\rho_1^* + \xi_2} dx}\right)}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\xi' \bar{S}_\Phi(\gamma) \xi^{\rho_0^* - \xi_1} \int_{E'} |W(x)|^{\rho_0^* - \xi_1} dx}\right)}. \quad (3.26)$$

Положим

$$t = \frac{1}{\xi' \bar{S}_\Phi(\gamma) \xi^{\rho_0^* - \xi_1} \int_{E'} |W(x)|^{\rho_0^* - \xi_1} dx}, \quad (3.27)$$

откуда

$$\xi^{\rho_1^* + \xi_2} = \frac{1}{(\xi')^{\frac{\rho_1^* - \rho_0^* - \xi_1 + \xi_2}{\rho_1^* - \xi_1}} \bar{S}_\Phi^{\frac{\rho_1^* - \rho_0^* - \xi_1}{\rho_1^* - \xi_1}}(\gamma) t^{\frac{\rho_1^* - \rho_0^* - \xi_1}{\rho_1^* - \xi_1}} \left(\int_{E'} |W(x)|^{\rho_0^* - \xi_1} dx \right)^{\frac{\rho_1^* + \xi_2}{\rho_0^* - \xi_1}}}. \quad (3.28)$$

Подставляя найденное выражение в (3.28) для ξ получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\xi' \underline{S}_\Phi(\gamma) \cdot \xi^{\rho_1^* + \xi_2} \int_{Q'} |W(x)|^{\rho_1^* + \xi_2} dx} = \\ &= \frac{(\xi' t)^{\frac{\rho_1^* - \rho_0^* - \xi_1 + \xi_2}{\rho_1^* - \xi_1}} \bar{S}_\Phi^{\frac{\rho_1^* - \rho_0^* - \xi_1}{\rho_1^* - \xi_1}}(\gamma) \left(\int_{E'} |W(x)|^{\rho_0^* - \xi_1} dx \right)^{\frac{\rho_1^* + \xi_2}{\rho_0^* - \xi_1}}}{\underline{S}_\Phi(\gamma) \int_{Q'} |W(x)|^{\rho_1^* + \xi_2} dx} \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая очевидное неравенство

$$\left(\int_{E'} |W(x)|^{p_0^* - \varepsilon_1} dx \right)^{\frac{1}{p_0^* - \varepsilon_1}} \leq \left(\int_{E'} |W(x)|^{p_1^* + \varepsilon_2} dx \right)^{\frac{1}{p_1^* + \varepsilon_2}} \quad (3.29)$$

и определение (2.13), из (3.16) находим

$$\frac{|E|}{|Q|} \leq C_1 \cdot h_\Phi \left(\frac{S_\Phi(\gamma)}{\frac{p_1^* + \varepsilon_2}{p_0^* - \varepsilon_1}(\gamma) \cdot (\xi' t)^{\frac{p_1^* - p_0^* + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{p_0^* - \varepsilon_1}}} \right) \frac{\Phi^{-1}(st)}{\Phi^{-1}(t)}, \quad (3.30)$$

где t определяется условием (3.27) и

$$S = \frac{\int_{E'} |W(x)|^{p_1^* + \varepsilon_2} dx}{\int_{Q'} |W(x)|^{p_1^* + \varepsilon_2} dx}. \quad (3.31)$$

Из определения множеств E' и Q' очевидно имеем, что $E' \subset Q'$. Поэтому число S , определяемое условием (3.31), строго меньше единицы. Из (2.13) и (2.15) следует, что существует такое значение t_0 , что

$$\frac{1}{2} \frac{\Phi^{-1}(St_0)}{\Phi^{-1}(t_0)} < \frac{1}{h_\Phi(S)} < S^{\frac{1}{p_0^*}}. \quad (3.32)$$

Так как при изменении γ от нуля до бесконечности функция $\bar{S}_\Phi(\gamma)$ также непрерывно изменяется от нуля до бесконечности, то в неравенстве (3.30) можно выбрать значение $\gamma = \gamma_0$ так, чтобы $t = t_0$.

Величины интегралов на множествах E_N и Q_N меньше δ , поэтому с помощью соответствующего выбора δ из (3.30) и (3.33) получим

$$\frac{|E|}{|Q|} \leq C_2 \left(\frac{\int_{E'} |W(x)|^{p_1^* + \varepsilon_2} dx}{\int_{Q'} |W(x)|^{p_1^* + \varepsilon_2} dx} \right)^{\frac{1}{p_0^*}}. \quad (3.33)$$

Из неравенства (3.29) следует, что

$$\begin{aligned} & \Phi^{-1} \left(\frac{(\xi' t)^{\frac{p_1^* - p_0^* + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{p_0^* - \varepsilon_1}} \bar{S}_\Phi \frac{p_1^* + \varepsilon_2}{p_0^* - \varepsilon_1}(\gamma) \int_{E'} \left(|W(x)|^{p_0^* - \varepsilon_1} dx \right)^{\frac{p_1^* + \varepsilon_2}{p_0^* - \varepsilon_1}}}{\bar{S}_\Phi(\gamma) \cdot \int_{Q'} |W(x)|^{p_0^* + \varepsilon_2} dx} \cdot t \right) \leq \\ & \leq h_\Phi \left(\frac{S_\Phi(\gamma)}{\frac{p_1^* + \varepsilon_2}{p_0^* - \varepsilon_1}(\gamma) \cdot (\xi' t)^{\frac{p_1^* - p_0^* + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{p_0^* - \varepsilon_1}}} \right) \cdot \frac{\Phi^{-1}(S' t)}{\Phi^{-1}(t)}. \end{aligned}$$

где

$$S = \left(\frac{\int_{E'} |W(x)|^{p_0^* - \varepsilon_1} dx}{\int_{Q'} |W(x)|^{p_0^* - \varepsilon_1} dx} \right)^{\frac{p_1^* + \varepsilon_2}{p_0^* - \varepsilon_1}}.$$

Аналогичные выкладки показывают, что

$$\frac{|E|}{|Q|} \leq C_3 \left(\frac{\int_E |W(x)|^{p_0^* - \varepsilon_1} dx}{\int_Q |W(x)|^{p_0^* - \varepsilon_1} dx} \right)^{\frac{p_1^* + \varepsilon_2}{p_0^* (p_0^* - \varepsilon_1)}}. \quad (3.34)$$

Таким образом, из (3.33) и (3.34), в силу интерполяционной теоремы Д и леммы 3, когда сублинейным оператором является максимальная функция Харди—Литтльвуда, получаем

$$\|H_W(f, x)\|_{L^{p_1^* + \varepsilon_2}} \leq D^* \|f\|_{L^{p_1^*}}, \quad \|H_W(f, x)\|_{L^{p_0^* - \varepsilon_1}} \leq D^* \|f\|_{L^{p_0^* - \varepsilon_1}}. \quad (3.35)$$

Из (3.35), в силу интерполяционной теоремы Рисса—Торина, следует утверждение (е).

Докажем импликацию (б) $\Rightarrow$ (г). Положим

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| > \lambda \\ 0, & \text{если } |f(x)| \leq \lambda, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| \leq \lambda \\ 0, & \text{если } |f(x)|' > \lambda. \end{cases}$$

Из условия (б) и леммы 1 следует, что существуют такие числа $r_1 < p_0^*$ и $r_2 > p_1^*$, что $|W(x)|^{r_1}$ удовлетворяет условию A_{r_1} . Поэтому в силу теоремы А имеем

$$\int_{R_n} |H_W(f_1, x)|^{r_1} dx \leq C_{r_1} \int_{R_n} |f_1(x)|^{r_1} dx,$$

$$\int_{R_n} |H_W(f_2, x)|^{r_2} dx \leq C_{r_2} \int_{R_n} |f_2(x)|^{r_2} dx.$$

Отсюда следует, что

$$\|H_W(\chi_Q f_1, x) > \lambda\| \leq C_{r_1} \frac{1}{\lambda^{r_1}} \int_Q |f_1(x)|^{r_1} dx,$$

$$\|H_W(\chi_Q f_2, x) > \lambda\| \leq C_{r_2} \frac{1}{\lambda^{r_2}} \int_Q |f_2(x)|^{r_2} dx. \quad (3.36)$$

Для интегрируемой по Лебегу функции f , используя (2.4), получаем

$$\int_Q \Phi(H_W(f, x)) dx \leq C \int_0^{\infty} \|H_W(f, x) > \lambda\| \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} d\lambda. \quad (3.37)$$

Так как

$$\{H_W(f, x) > \lambda\} \subset \left\{H_W(f, x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{H_W(f, x) > \frac{\lambda}{2}\right\},$$

то из (3.36) и (3.37) находим

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \|H_W(X_Q f, x) > \lambda\| \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} d\lambda \leq \\ & \leq 2^{r_1} C_{r_1} \int_Q |f(x)|^{r_1} \left(\int_0^{|f(x)|} (\Phi(\lambda)/\lambda^{r_1+1}) d\lambda \right) dx + \\ & + 2^{r_2} C_{r_2} \int_Q |f(x)|^{r_2} \left(\int_{|f(x)|}^{\infty} (\Phi(\lambda)/\lambda^{r_2+1}) d\lambda \right) dx. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Пусть $r = \frac{r_1 + p_0}{2}$ и $r' = \frac{r_2 + p_1}{2}$, тогда в силу неравенства (2.11), из (3.38) имеем

$$\begin{aligned} & \int_Q |f(x)|^{r_1} \left(\int_0^{|f(x)|} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^{r_1+1}} d\lambda \right) dx \leq \\ & \leq C \int_Q |f(x)|^{r_1-r'} \left(\int_0^{|f(x)|} \lambda^{r'-r_1-1} d\lambda \right) \Phi(|f(x)|) dx \leq C_r \int_Q \Phi(f(x)) dx. \end{aligned}$$

Подобным образом получаем, что

$$\int_Q |f(x)|^{r_2} \left(\int_{|f(x)|}^{\infty} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^{r_2+1}} d\lambda \right) dx \leq C_{r'} \int_Q \Phi(f(x)) dx.$$

Отсюда следует импликация (б) $\Rightarrow$ (г). Теорема доказана.

Представляет также интерес исследование следующей максимальной функции:

$$(H_W^* f)(x) = \sup_{\substack{x \in \Delta \\ \Delta \in I_{\Delta^n}}} \frac{1}{|\Delta|} |W(x)| \int_{\Delta} \left| \frac{f(t)}{W(t)} \right| dt,$$

где I_{Δ^n} — совокупность всех двоичных интервалов вида $\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$ ($1 \leq k \leq 2^n$, $n = 0, 1, \dots$) на отрезке $[0, 1]$.

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть функция Юнга $\Phi(t)$ и дополнительная к ней функция $\Psi(t)$ удовлетворяет Δ_2 условию. Пусть p_0^*, p_1^* — нижний и верхний индексы $\Phi(t)$ и соответственно, q_0^*, q_1^* — нижний и верхний индексы функции $\Psi(t)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны: (а) локально интегрируемая функция $W(x)$ принадлежит классу B_Φ , т. е. для всех $\Delta \in I_{\Delta^*}$ и произвольных чисел $\xi > 0$

$$\frac{1}{|\Delta|} \| \chi_\Delta W \|_{L_{\xi}^{\Phi}[0, 1]} \cdot \left\| \frac{\chi_\Delta}{\xi W} \right\|_{L_{\xi}^{\Psi}[0, 1]} \leq D_\Phi.$$

(б) $W(x)$ принадлежит классам $B_{p_0^*}$ и $B_{p_1^*}$, т. е. для всех $\Delta \in I_{\Delta^*}$ справедливы, соответственно, неравенство

$$\frac{1}{|\Delta|} \| \chi_\Delta W \|_{L_{p_0^*}^{\Phi}[0, 1]} \cdot \left\| \frac{\chi_\Delta}{W} \right\|_{L_{q_0^*}^{\Psi}[0, 1]} \leq D_{p_0^*},$$

$$\frac{1}{|\Delta|} \| \chi_\Delta W \|_{L_{p_1^*}^{\Phi}[0, 1]} \cdot \left\| \frac{\chi_\Delta}{|\Delta|} \right\|_{L_{q_1^*}^{\Psi}[0, 1]} \leq D_{p_1^*}.$$

(в) Существует константа $C_\Phi > 0$ такая, что

$$\| H_W(f) \|_{L_{\xi}^{\Phi}[0, 1]} \leq C_\Phi \| f \|_{L_{\xi}^{\Psi}[0, 1]}.$$

(г) Существует константа $C_\Phi > 0$ такая, что

$$\int_0^1 \Phi((H_W(f))(x)) dx \leq C_\Phi \int_0^1 \Phi(f(x)) dx.$$

(д) Существует константа D_Φ такая, что для всех $\Delta \in I_{\Delta^*}$ и произвольных чисел

$$\frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} S_\Phi(\xi |W(x)|) dx \varphi\left(\frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} \Psi\left(\frac{1}{\xi |W(x)|}\right) dx\right) \leq D_\Phi,$$

где

$$S_\Phi(\lambda) = \inf_{t > 0} \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)}.$$

(е) Справедливы неравенства

$$\| H_W(f) \|_{L_{p_0^*}^{\Phi}[0, 1]} \leq C_{p_0^*} \| f \|_{L_{q_0^*}^{\Psi}[0, 1]}, \quad \| H_W(f) \|_{L_{p_1^*}^{\Phi}[0, 1]} \leq C_{p_1^*} \| f \|_{L_{q_1^*}^{\Psi}[0, 1]}.$$

Автор благодарен члену-корреспонденту АН Арм. ССР А. А. Талалайну за внимание к работе и полезные обсуждения.

Институт геофизики
инженерной сейсмологии АН Арм.ССР

Поступила 12.XI.1985

II. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ ԱՆՏՈՎԱԾԱՐԱՐՈՒՄՆԵՐ ՕՐԼԻՉԻ տաղանթություններում մի մաքսիմալ ֆունկցիայի վերաբերյալ (ամփոփում)

R_n , $n \geq 1$ կլիկայան տաղանթությունում արված լոկալ ինտեգրելի $W(x)$ ֆունկցիայի նկատմամբ սահմանվում է հետևյալ մաքսիմալ ֆունկցիան

$$(HWf)(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} |W(x)| \int_Q \left| \frac{f(t)}{W(t)} \right| dt$$

բոլոր Q խորանարդների, որոնց կողմերը զուգահեռ են կոորդինատական առանցքներին: Աշխատանքում մասնավորաբար, դրսևած են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ $W(x)$ ֆունկցիայի վրա, որպեսզի տեղի ունենա հետևյալ անհավասարությունը

$$\int_{R_n} \Phi((HWf)(x)) dx \leq C_\Phi \int_{R_n} \Phi(f(x)) dx,$$

որտեղ $C_\Phi > 0$ կախված չէ f ֆունկցիայից և Φ -ն Δ_2 պայմանին բավարարող ծունգի ֆունկցիա է:

S. S. KAZARIAN. *Inequalities for a maximal function in Orlicz spaces (summary)*

For a given local integrable $W(x)$ function the following maximal function

$$(H_W f)(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} |W(x)| \int_Q \left| \frac{f(t)}{W(t)} \right| dt$$

is defined, where Q is a nondegenerate cube with sides parallel to the axes. Necessary and sufficient conditions on $W(x)$ are found yielding the inequality

$$\int_{R_n} \Phi((H_W f)(x)) dx \leq C_\Phi \int_{R_n} \Phi(f(x)) dx,$$

where $C_\Phi > 0$ is independent of f , Φ is a Young function which satisfies Δ_2 condition

ЛИТЕРАТУРА

1. Muckenhoupt. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, Trans. Amer. Math. Soc., 165, 1972, 207—226.
2. R. Kerman, A. Torchinsky. Integral inequalities with weights for the Hardy maximal function. Studia Math., 71, 1982, 277—284.
3. Y. Chen. Theorems of asymptotic approximations, Math. annalen, 140, 1960, 360—407.
4. М. А. Красносельский, Я. Б. Рутцукый. Выпуклые функции и пространства Орлича, М., Физматгиз, 1958.
5. W. Matuszewska, W. Orlicz. On certain properties of φ -functions, Bull. Acad. Polon. Sci., 8, 7, 1960, 439—443.
6. J. Gustavsson, J. Peetre. Interpolation of Orlicz spaces, Studia Math., 60, 1977, 33—59.
7. E. Stein, G. Weiss. An extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its applications, J. Math. Mech., 8, 1959, 263—264.
8. R. Coifman, C. Fefferman. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, Studia Math., 54, 1974, 221—237.
9. Е. Хилле, Р. Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы, М., ИЛ, 1962.
10. D. Boyd. Indices of functions spaces and their relationship to interpolation, Canad. J. Math., 21, 1969, 1245—1254.

УДК 517.53

И. В. ОСТРОВСКИЙ

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ М. М. ДЖРБАШЯНА

В работе [1] было получено новое интегральное представление для функций $E_p(z, \mu)$, $p > 1$, $-\infty < \mu < \infty$. Это представление имеет вид

$$E_p(z, \mu) = \int_0^{\infty} e^{z\tau} \Phi_{p, \mu}(\tau) d\tau,$$

где $\Phi_{p, \mu}$ — целая функция, определяемая абсолютно сходящимся при всех $s \in \mathbb{C}$ интегралом

$$\Phi_{p, \mu}(s) = \frac{p}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon, \beta)} \exp\{\zeta^p - s\zeta\} \zeta^{p(1-\mu)} d\zeta, \quad (1)$$

взятым по контуру $\gamma(\varepsilon, \beta)$, состоящему из двух лучей $L^{\pm}(\varepsilon, \beta) = \{\zeta : |\zeta| \geq \varepsilon, \arg \zeta = \pm \beta\}$ и дуги окружности $l(\varepsilon, \beta) = \{\zeta : |\zeta| = \varepsilon, |\arg \zeta| < \beta\}$, $0 < \varepsilon < \infty$, $\pi/(2p) < \beta \leq \pi/p$; направление обхода таково, что точка $\zeta = 0$ остается слева.

В [1] был установлен весьма тонкий факт: функция $\Phi_{p, \mu}$ неотрицательна на всем положительном луче тогда и только тогда, когда $\mu \geq 1/p$. Кроме того, в [1] был найден ряд других существенных свойств этой функции. Нас сейчас будут интересовать только свойства, относящиеся к асимптотическому поведению $\Phi_{p, \mu}$ при $|s| \rightarrow \infty$. Эти свойства могут быть подытожены в виде такой теоремы:

Теорема [1]. Функция $\Phi_{p, \mu}$ является целой функцией порядка λ и типа σ , где

$$\lambda = p/(p-1), \quad \sigma = (1-p^{-1})(1/p)^{1/(p-1)}, \quad (2)$$

а ее индикатор $h(\theta)$ удовлетворяет неравенству

$$h(0) \leq -\sigma \cos(\pi/(2p)). \quad (3)$$

В [1] на с. 494 отмечено: «... остается открытым вопрос о точности установленного нами неравенства (3), а также вопрос о выявлении явного вида функции $h(\theta)$ и тех точек отрезка $[-\pi, \pi]$, где достигается равенство в неравенстве $h(\theta) \leq \sigma$ ». Настоящая статья посвящена ответам на эти вопросы.

Теорема. Если выполнено одно из условий а) $1 < \lambda \leq 3/2$, б) $\lambda = 2$, а $2(1-p)$ является неотрицательным целым числом, то

$$h(\theta) = -\sigma \cos \lambda \theta, \quad |\theta| \leq \pi.$$

В остальных случаях

$$h(\vartheta) = \begin{cases} -\sigma \cos \lambda \vartheta, & |\vartheta| \leq 3\pi/(2\lambda), \\ 0, & 3\pi/(2\lambda) \leq |\vartheta| \leq \pi. \end{cases}$$

Таким образом, $h(0) = -\sigma$, а равенство в неравенстве $h(\vartheta) \leq \sigma$ достигается только в двух точках $\vartheta = \pm \pi/\lambda$.

Доказательство теоремы разобьем на ряд лемм.

Лемма 1. Справедливо равенство

$$h(0) = -\sigma. \quad (4)$$

Доказательство. Легко видеть, что при $s > 0$ представление (1) сохраняет силу и при $\beta = \pi/(2\rho)$. Положив в (1) $\beta = \pi/(2\rho)$, $\varepsilon = (1/\rho)^{1/(p-1)} s^{1/(p-1)}$, будем иметь

$$\Phi_{\rho, \mu}(s) = \frac{\rho}{2\pi i} \left\{ \int_{L^+(s, \beta)} + \int_{L^-(s, \beta)} + \int_{I(s, \beta)} \right\} = \frac{\rho}{2\pi i} |I_1 + I_2 + I_3|. \quad (5)$$

Очевидно

$$|I_1| + |I_2| \leq 2 \int_0^{\infty} \exp \{-st \cos(\pi/(2\rho))\} t^{p(1-\mu)} dt.$$

Отсюда следует, что, каково бы ни было $\delta \in (0, \cos(\pi/(2\rho)))$, при достаточно больших s имеем

$$\begin{aligned} |I_1| + |I_2| &\leq 2 \int_0^{\infty} \exp \{-st(\cos(\pi/(2\rho)) - \delta)\} dt = \\ &= 2(\cos(\pi/(2\rho)) - \delta)^{-1} \exp \left\{ -s^{\lambda} (1/\rho)^{1/(p-1)} (\cos(\pi/(2\rho)) - \delta) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Далее

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \int_{-\pi/(2\rho)}^{\pi/(2\rho)} \exp \{\varepsilon^p \cos \rho \varphi - s \varepsilon \cos \varphi\} \varepsilon^{p(1-\mu)} d\varphi = \\ &= \varepsilon^{p(1-\mu)} \int_{-\pi/(2\rho)}^{\pi/(2\rho)} \exp \left\{ s^{\lambda} (1/\rho)^{1/(p-1)} \left(\frac{1}{\rho} \cos \rho \varphi - \cos \varphi \right) \right\} d\varphi. \end{aligned}$$

Функция $(1/\rho) \cos \rho \varphi - \cos \varphi$ убывает на $[0, \pi/(2\rho)]$, поэтому ее максимум на $[-\pi/(2\rho), \pi/(2\rho)]$ достигается при $\varphi = 0$ и равен $\rho^{-1} - 1$. Учитывая (2), получаем

$$|I_3| \leq (1/\rho)^{p(1-\mu)/(p-1)} s^{p(1-\mu)/(p-1)} (\pi/\rho) \exp \{-\sigma s^{\lambda}\}. \quad (7)$$

Заметим, что $\cos(\pi/(2\rho)) > 1 - \rho^{-1}$. Поэтому число δ можно выбрать столь малым, что $(1/\rho)^{1/(p-1)} (\cos(\pi/(2\rho)) - \delta) > \sigma$. В силу этого из (6), (7) и (5) следует, что $h(0) \leq -\sigma$. Если бы было $h(0) < -\sigma$, то из известного свойства индикатора ([2], с. 84, з))

$$h(\vartheta) + h(\vartheta + \pi/\lambda) \geq 0 \quad (8)$$

вытекало бы, что $h(\pi/\lambda) > \sigma$, а это невозможно.

Лемма 2. Справедливо равенство

$$h(\vartheta) = -\sigma \cos \lambda \vartheta, \quad |\vartheta| \leq \pi/\lambda. \quad (9)$$

Доказательство. Из (4) и (8) следует, что точка $\vartheta = 0$ является точкой минимума для h . В силу свойства индикатора ([2], с. 78, е)) отсюда следует, что $h(\vartheta) \geq -\sigma \cos \lambda \vartheta$, $|\vartheta| \leq \pi/\lambda$. Функция $h_1(\vartheta) = h(\vartheta) + \sigma \cos \lambda \vartheta$ неотрицательна на отрезке $[-\pi/\lambda, \pi/\lambda]$ и обращается в нуль в точках $\pm \pi/\lambda$ и 0. Обозначим через $\vartheta_0 \in (0, \pi/\lambda)$ точку, где $h_1(\vartheta_0) = \max_{[0, \pi/\lambda]} h_1(\vartheta)$, и предположим, что $h_1(\vartheta_0) > 0$. Так как функция $h_1(\vartheta)$ является λ -тригонометрически выпуклой, то в силу уже упоминавшегося факта ([2], с. 78, е)) имеем

$$h_1(\vartheta) > h_1(\vartheta_0) \cos \lambda(\vartheta - \vartheta_0), \quad |\vartheta - \vartheta_0| \leq \pi/\lambda. \quad (10)$$

Так как $\vartheta_0 \in [0, \pi/\lambda)$, то (10) имеет место при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi/\lambda$. Поэтому из (10) следует, что $\cos \lambda \vartheta_0 \leq 0$ и $\cos(\pi/\lambda - \vartheta_0) \leq 0$, т. е. $\cos \lambda \vartheta_0 = 0$, $\vartheta_0 = \pi/(2\lambda)$. Таким образом, $h_1(\vartheta) \geq h_1(\vartheta_0) \sin \lambda \vartheta$ и $h(\vartheta) \geq h_1(\vartheta_0) \sin \lambda \vartheta - \sigma \cos \lambda \vartheta$ при $\vartheta \in [0, \pi/\lambda]$. Отсюда вытекает, что $\max_{[0, \pi/\lambda]} h(\vartheta) \geq \sqrt{h_1^2(\vartheta_0) + \sigma^2} > \sigma$, что невозможно.

Лемма 3. Если $1 < \lambda < 3/2$, то справедливо равенство

$$h(\vartheta) = -\sigma \cos \lambda \vartheta, \quad |\vartheta| \leq \pi. \quad (11)$$

Доказательство. Положим

$$g(z) = \int_1^{\infty} \exp\{-t^p + zt\} t^{p(1-\lambda)} dt.$$

В силу известных фактов (можно, например, воспользоваться теоремой 2.4.4 из [3], с. 54) функция g — целая порядка λ и типа σ , где λ и σ определены (2). Обозначим через $H(\vartheta)$ индикатор функции g . Покажем, что при условии $1 < \lambda \leq 3/2$ (которое эквивалентно $\rho \geq 3$) справедлива формула

$$H(\vartheta) = \begin{cases} \sigma \cos \lambda \vartheta, & |\vartheta| \leq \pi/(2\lambda), \end{cases} \quad (12')$$

$$[0, \pi/(2\lambda)] \leq |\vartheta| \leq \pi. \quad (12'')$$

Сначала отметим такие свойства функции H :

$$H(\vartheta) = 0, \quad \pi/2 \leq |\vartheta| \leq \pi, \quad (13)$$

$$H(\vartheta) \geq \sigma \cos \lambda \vartheta, \quad |\vartheta| \leq \pi/\lambda. \quad (14)$$

Первое следует из ограниченности функции g в полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$ и хорошо известных фактов об ограниченных аналитических функциях (см., напр., [2], с. 315). Второе вытекает из очевидного равенства $H(0) = \max_{[-\pi, \pi]} H(\vartheta) = \sigma$ и уже использовавшегося свойства индикаторов ([2], с. 78, е)). Заметим также, что функция H является четной и 2π -периодической.

Равенство (1) при $\varepsilon = 1$, $\beta = \pi/\rho$ можно записать в виде

$$\Phi_{\rho, \mu}(s) = \frac{\rho}{2\pi i} [e^{i\pi(1-\mu)} g(-se^{i\pi/\rho}) - e^{-i\pi(1-\mu)} g(-se^{-i\pi/\rho}) + g_1(s)],$$

где

$$g_1(s) = \int_{l(1, \pi/\rho)} \exp[\zeta^{\rho} - s\zeta] \zeta^{\rho(1-\mu)} d\zeta = O(e^{|s|}), \quad |s| \rightarrow \infty.$$

Используя связь между индикатором суммы целых функций и индикаторами слагаемых ([2], с. 73), видим, что справедливо неравенство

$$h(\vartheta) \leq \max \{H(\vartheta - \pi + \pi/\rho), H(\vartheta + \pi - \pi/\rho), 0\}, \quad (15)$$

которое обращается в равенство всюду, где одна из трех величин, стоящих в фигурных скобках, строго больше двух остальных. Учитывая, что $\pi - \pi/\rho = \pi/\lambda$, перепишем (15) в виде

$$h(\vartheta) \leq \max \{H(\vartheta - \pi/\lambda), H(\vartheta + \pi/\lambda), 0\}. \quad (16)$$

Положим $\vartheta = \pi/(2\lambda)$. В силу (9), (14) и (13) соответственно имеем $h(\pi/(2\lambda)) = 0$, $H(-\pi/(2\lambda)) \geq 0$, $H(3\pi/(2\lambda)) = 0$ (последнее вытекает из (13), так как $3\pi/(2\lambda) \in [\pi, 3\pi/2]$). Если бы было $H(-\pi/(2\lambda)) > 0$, то (16) обращалось бы в равенство, откуда следовало бы, что $h(\pi/(2\lambda)) > 0$, поэтому заключаем, что $H(-\pi/(2\lambda)) = 0$. Таким образом, функция H совпадает с тригонометрической функцией $\sigma \cos \lambda \vartheta$ на концах отрезка $[-\pi/(2\lambda), 0]$. В силу свойства индикатора ([2], с. 74, лемма 6), тогда на всем отрезке должно выполняться $H(\vartheta) \leq \sigma \cos \lambda \vartheta$. Учитывая (14), заключаем, что справедливо (12').

Остается еще доказать, что $H(\vartheta) = 0$ при $\pi/(2\lambda) < |\vartheta| < \pi/2$. Для этого заметим, что так как $\lambda \leq 3/2$, то длина отрезка $[\pi/(2\lambda), \pi/2]$ строго меньше π/λ . На концах этого отрезка имеем $H(\vartheta) = 0$, поэтому из свойства индикатора ([2], с. 74, лемма 6) следует, что $H(\vartheta) \leq 0$ на всем отрезке. Из того же свойства и (13) заключаем, что ни в одной точке отрезка неравенство не может оказаться строгим. Тем самым (12')--(12'') доказаны.

Из (12')--(12'') видно, что на интервале $(\pi/(2\lambda), \pi)$ имеем $H(\vartheta - \pi/\lambda) > H(\vartheta + \pi/\lambda) > 0$. Поэтому на указанном интервале в неравенстве (16) имеет место знак равенства и, следовательно, $h(\vartheta) = -\sigma \cos \lambda \vartheta$. Таким образом, (11) справедливо при $\pi/(2\lambda) \leq |\vartheta| \leq \pi$. Учитывая (9), убеждаемся в справедливости леммы.

Лемма 4. Если $\lambda > 3/2$, то

$$h(\vartheta) \leq 0, \quad 3\pi/(2\lambda) < |\vartheta| \leq \pi. \quad (17)$$

Доказательство. А) Рассмотрим сначала случай $3/2 < \lambda \leq 3$. Фиксируем $\vartheta \in (3\pi/(2\lambda), \pi]$. Легко убедиться, что тогда $\cos(\vartheta \pm 3\pi/(2\rho)) > 0$ и, следовательно, при $\arg s = \vartheta$ имеем $\operatorname{Re}(s \exp(\pm 3\pi i/(2\rho))) > 0$. Поэтому представление (1) сохраняет силу и при $\beta = 3\pi/(2\rho)$ (заметим, что из $\lambda \leq 3$ следует $\beta \leq \pi$). Таким образом, при $\arg s = \vartheta$ имеем

$$\Phi_{p, \mu}(s) = \frac{p}{2\pi i} \left\{ \int_{L^+(1, 3\pi/(2p))} + \int_{L^-(1, 3\pi/(2p))} + \int_{l(1, 3\pi/(2p))} \right\}.$$

Очевидно

$$\left| \int_{L^{\pm}(1, 3\pi/(2p))} \right| = \left| \int_1^{\infty} \exp \{ -it^p - s t e^{\pm 3\pi i/(2p)} \} t^{p(1-\mu)} dt \right| \leq \\ \leq \int_1^{\infty} \exp \{ -|s| t \cos(\theta \pm 3\pi/(2p)) \} t^{p(1-\mu)} dt = o(1), \quad |s| \rightarrow \infty,$$

$$\left| \int_{l(1, 3\pi/(2p))} \right| \leq (3\pi/p) e^{|s|}.$$

Отсюда следует, что $h(\theta) \leq 0$.

Б) Рассмотрим теперь случай $\lambda > 3$. Снова фиксируем $\theta \in (3\pi/(2\lambda), \pi]$. Тогда $\cos(\theta + 3\pi/(2p)) > 0$ (но, вообще говоря, не выполняется $\cos(\theta - 3\pi/(2p)) > 0$) и, следовательно при $\arg s = \theta$ имеем $\operatorname{Re}(s \exp \times (3\pi i/(2p))) > 0$. В рассматриваемом случае будет $\pi < 3\pi/(2p)$, $-\pi < -2\pi + 3\pi/(2p) < -\pi/(2p)$ и, как легко видеть, контур интегрирования $\gamma(\varepsilon, \beta)$ в (1) можно заменить контуром, состоящим из луча $L^-(1, 2\pi - 3\pi/(2p))$, дуги окружности $l = \{\zeta : |\zeta| = 1, -2\pi + 3\pi/(2p) \leq \arg \zeta \leq 3\pi/(2p)\}$ и луча $L^+(1, 3\pi/(2p))$ (лучи совпадают как множества, но проходятся в разных направлениях). Итак, имеем при $\arg s = \theta$

$$\Phi_{p, \mu}(s) = \frac{p}{2\pi i} \left\{ \int_{L^+(1, 3\pi/(2p))} + \int_{L^-(1, 2\pi - 3\pi/(2p))} + \int_l \right\} = \\ = \frac{p}{2\pi i} \{I_1 + I_2 + I_3\}.$$

Справедливы оценки

$$\left| \int_{L^+(1, 3\pi/(2p))} \right| \leq \int_1^{\infty} \exp \{ -|s| t \cos(\theta + 3\pi/(2p)) \} t^{p(1-\mu)} dt = \\ = o(1), \quad |s| \rightarrow \infty;$$

$$\left| \int_{L^-(1, 2\pi - 3\pi/(2p))} \right| \leq \int_1^{\infty} \exp \{ -t^p \sin 2\pi p - |s| t \times \\ \times \cos(\theta + 3\pi/(2p)) \} t^{p(1-\mu)} dt = o(1), \quad |s| \rightarrow \infty,$$

($\sin 2\pi p > 0$, так как $1 < p < 3/2$);

$$\left| \int_l \right| \leq 2\pi e^{|s|}.$$

Отсюда следует, что $h(\theta) \leq 0$.

Лемма 5. Если $\lambda > 3/2$, $\lambda \neq 2$, то

$$h(0) = 0, \quad 3\pi/(2\lambda) \leq |\theta| \leq \pi. \quad (18)$$

Утверждение сохраняет силу и при $\lambda = 2$, если $2(1-\mu)$ не является целым числом.

Доказательство. Предположим сначала дополнительно, что $\rho(1-\mu) > -1$. Заметим, что при $\lambda > 3/2$ будет $\pi/2 < \pi\rho/2 < 3\pi/2$, и можно записать представление (1) с $\varepsilon = 0$, $\beta = \pi/2$. Получим

$$\Phi_{\rho, \mu}(s) = \frac{\rho}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{|t|^2 e^{\frac{\pi i \rho}{2} \text{sign} t} + \frac{\pi i \rho}{2} (1-\mu) \text{sign} t - sti\} |t|^{\rho(1-\mu)} dt. \quad (19)$$

Отсюда видно, что функция $\Phi_{\rho, \mu}$ является преобразованием Фурье функции, которая может оказаться целой только в случае, когда $\rho = 2$ (заметим, что у нас сейчас $1 < \rho < 3$ и, кроме того, $2(1-\mu)$ является целым числом. Относительно функции $\Phi_{\rho, \mu}$ мы уже знаем, что $h(0) < 0$. Если бы, кроме этого, выполнялось также $h(\pi) < 0$, то преобразование Фурье функции $\Phi_{\rho, \mu}$ должно было бы быть целой функцией. Поскольку это исключено, то мы приходим к выводу, что $h(\pi) \geq 0$. Учитывая (17) и свойства индикаторов, убеждаемся в справедливости (18).

Освободимся от дополнительного ограничения $\rho(1-\mu) > -1$. Из (1) легко следует, что при $n = 1, 2, 3, \dots$

$$(-d/ds)^n \Phi_{\rho, \mu}(s) = \Phi_{\rho, \nu}(s), \quad (20)$$

где ν определяется равенством $n + \rho(1-\mu) = \rho(1-\nu)$. Ясно, что при достаточно большом n будем иметь $\rho(1-\nu) > -1$. Как известно (см., напр., [4]), при дифференцировании целой функции ее индикатор не увеличивается. Так как для $\Phi_{\rho, \nu}$ равенство (18) уже доказано, а для индикатора $\Phi_{\rho, \mu}$, во всяком случае, верно неравенство (17), то лемма доказана.

Лемма 6. Если $\lambda > 3/2$, $\lambda \neq 2$, то

$$h(\theta) = \begin{cases} -\sigma \cos \lambda \theta, & |\theta| \leq 3\pi/(2\lambda), \\ 0, & 3\pi/(2\lambda) \leq |\theta| \leq \pi. \end{cases} \quad (21)$$

Утверждение сохраняет силу и при $\lambda = 2$, если $2(1-\mu)$ не является целым числом.

Доказательство. В силу лемм 1 и 5 нуждается в доказательстве только равенство (21) при $\pi/\lambda < |\theta| < 3\pi/(2\lambda)$. Так как в точке $\theta = \pi/\lambda$ индикатор h достигает максимума, то в силу уже упоминавшегося свойства ([2], с. 78, е)) имеем $h(\theta) \geq -\sigma \cos \lambda \theta$ при $|\theta - \pi/\lambda| \leq \pi/\lambda$. С другой стороны, на концах отрезка $[\pi/\lambda, 3\pi/(2\lambda)]$ имеем, в силу лемм 1 и 5, $h(\theta) = -\sigma \cos \lambda \theta$ и поэтому ([2], с. 74, лемма б) на всем отрезке $h(\theta) \leq -\sigma \cos \lambda \theta$. Тем самым требуемое равенство доказано.

Лемма 7. Пусть $\lambda = 2$ и число $2(1-\mu)$ — целое. Если $2(1-\mu) \geq 0$, то

$$h(\theta) = -\frac{1}{4} \cos 2\theta, \quad |\theta| \leq \pi. \quad (22)$$

Если же $2(1-\mu) < 0$, то

$$h(\vartheta) = \begin{cases} -\frac{1}{4} \cos 2\vartheta, & |\vartheta| \leq 3\pi/4, \\ 0, & 3\pi/4 \leq |\vartheta| \leq \pi. \end{cases} \quad (23)$$

Доказательство. Пусть сначала $2(1-\mu) = 0$, $\mu = 1$. Тогда из (19) следует, что

$$\Phi_{2,1}(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-t^2 - sti\} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-s^2/4),$$

и справедливость (22) очевидна. Если $2(1-\mu) > 0$, то в силу (20) имеем $\Phi_{2,\mu} = (-d/ds)^{2(1-\mu)} \Phi_{2,1}$, и (22) тоже выполняется.

Пусть теперь $2(1-\mu) = -1$, $\mu = 3/2$. Тогда в силу (20) будет $\Phi_{2,1} = (-d/ds) \Phi_{2,3/2}$. Индикатор функции $\Phi_{2,3/2}$ в силу леммы 1 отрицателен при $\nu = 0$. Поэтому при действительных s имеем

$$\Phi_{2,3/2}(s) = \int_s^{\infty} \Phi_{2,1}(\tau) d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_s^{\infty} \exp(-\tau^2/4) d\tau.$$

Отсюда видно, что индикатор функции $\Phi_{2,3/2}$ равен 0 при $\vartheta = \pi$, и с помощью свойств индикатора получаем (23). Если $2(1-\mu) = -2$, $\mu = 2$, то из равенства $\Phi_{2,3/2} = (-d/ds) \Phi_{2,2}$ аналогичным образом зак-

лючаем, что $\Phi_{2,2}(s) = \int_s^{\infty} \Phi_{2,3/2}(\tau) d\tau$, и далее, что для индиктора функции $\Phi_{2,2}$ выполняется (23). Ясно, что справедливость (23) для любого целого отрицательного $2(1-\mu)$ получается по индукции.

Доказательство сформулированной нами теоремы тем самым закончено.

Физико-технический институт
низких температур АН УССР,
г. Харьков

Поступила 7. IV. 1987

Ի. Վ. ՕՍՏՐՈՎՍԿԻ. Մ. Մ. Զրբաշյանի մի հարցի վերաբերյալ (ամփոփում)
Հետևյալ հարցը դրվել է Մ. Մ. Զրբաշյանի կողմից՝ գտնել $\lambda = \rho/(p-1)$.

$k = (1-p^{-1})/(1/p)^{p-1}$ $\rho > 1$ -ի պահանջով

$$\Phi_{p,\mu}(s) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma\left(1-\mu + \frac{k+1}{p}\right) \sin\left(\frac{k+1}{p}\pi - \mu\right) s^k,$$

$-\infty < \mu < +\infty$, ամբողջ ֆունկցիայի $h(\nu)$ ինդիկատորը:

Այդ ֆունկցիան նրա կողմից ձևակերպվել է $E_p(x, \mu)$ ֆունկցիաների ինտեգրալ ներկայացումների կապակցությամբ:

Հոդվածում արվում է հետևյալ պատասխանը՝

$$h(\nu) = -\sigma \cos \lambda \nu, \quad |\nu| \leq \pi,$$

երբ տեղի ունի հետևյալ պայմաններից որևէ մեկը

—) $1 < \lambda < 3/2$ $\lambda=2$, $k=2$ $2(1-\mu)$ անդիսանում է ոչ բացասական ամբողջ թիվ: Մյուս դեպքերում

$$h(v) = \begin{cases} -\sigma \cos \lambda v, & |v| \leq \frac{3\pi}{2\lambda} \\ 0, & \frac{3\pi}{2\lambda} \leq |v| \leq \pi. \end{cases}$$

I. V. OSTROVSKII. *On a problem of M. M. Dzhrbashyan (summary)*

M. M. Dzhrbashyan posed the problem of finding the indicator $h(\theta)$ of the entire function

$$\Phi_{\rho, \mu}(s) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma\left(1 - \mu + \frac{k+1}{\rho}\right) \sin \pi \left(\frac{k+1}{\rho} - \mu\right) s^k$$

of the order $\lambda = \rho/(\rho-1)$ and of the type $\sigma = (1-\rho^{-1})(1/\rho)^{1/(\rho-1)}$, $\rho > 1$, $-\infty < \mu < \infty$. He introduced this function in connection with the integral representations of the functions $E_{\rho}(z, \mu)$. In the present paper the following answer to this problem is obtained:

If one of the following conditions is satisfied: a) $1 < \lambda < 3/2$, b) $\lambda=2$ and $2(1-\mu)$ is a non-negative integer, then

$$h(\vartheta) = -\sigma \cos \lambda \vartheta, \quad |\vartheta| \leq \pi.$$

In the remaining cases

$$h(\vartheta) = \begin{cases} -\sigma \cos \lambda \vartheta, & |\vartheta| \leq 3\pi/(2\lambda), \\ 0, & 3\pi/(2\lambda) \leq |\vartheta| \leq \pi. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, Р. А. Багян. Об интегральных представлениях и мерах, ассоциированных с функциями типа Миттаг—Леффлера, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 10, № 6, 1975, 483—508.
2. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., ГИТТЛ, 1956, 632 с.
3. Ю. В. Линник, И. В. Островский. Разложения случайных величин и векторов, М., «Наука», 1972, 480 с.
4. А. А. Гольдберг, И. В. Островский. О производных и первообразных целых функций вполне регулярного роста, Теория функций, функцион. анализ и их прил., 18, 1973, 70—81.

УДК 517.597

А. Э. ДЖРБАШЯН

КЛАССЫ A_p^α ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПОЛУПРОСТРАНСТВАХ И АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ М. РИССА

Введение

Рассмотрим в единичном круге D класс всех аналитических функций f , для которых кончен интеграл

$$\iint_D |f(z)|^p (1 - |z|)^\alpha dx dy, \quad 0 < p < \infty, \quad -1 < \alpha < \infty.$$

Эти классы, которые мы обозначим через A_p^α , были введены впервые и обстоятельно изучены в работах [1, 2] в середине 40-х годов. Изучению свойств этих пространств посвящена к настоящему времени обширная литература. Довольно полную библиографию можно найти в обзорной статье [3].

В последние годы интенсивно развивается и теория пространств A_p^α в многомерных комплексных областях. Здесь следует отметить работу [4], где впервые детально изучался вопрос об интегральном представлении пространств A_p^α (при $\alpha = 0$) в широком классе многомерных областей. Отметим в этой связи также работу [5]. См. также обзорную статью [6] и библиографию в [3] и [7].

Существенные трудности возникают при изучении пространств A_p^α гармонических функций в многомерных вещественных областях. Дело в том, что здесь не имеется аналога понятия представляющего ядра, которое играет важную роль в случае голоморфных функций.

По-видимому первой работой, где вводились классы A_p^α гармонических функций, была статья Р. Койфмана и Р. Рохберга [5]. Они рассматривали эти пространства в единичном шаре евклидова пространства R^n . Однако получить интегральные представления и доказать некоторые другие факты удалось только для целых значений параметра α . Общий случай был рассмотрен в [8]. Следует также отметить работу [9], где рассматривались классы гармонических функций несколько более общис, чем A_p^α в верхней полуплоскости.

В настоящей работе мы занимаемся изучением пространств и гармонических векторных полей класса A_p^α в полупространствах. При этом интегральное представление связано с целым параметром $m \geq 0$, который определенным образом зависит от параметров p и α . Конечно, было бы желательно иметь представление, зависящее от непрерывного параметра, как это удалось сделать в [8]. Однако это связано со значительными техническими трудностями, в частности с необходимостью привлечения понятий дробного дифференцирования и интегрирования, мало изученных в

случае полупространства. Кроме того, дальнейшие основные результаты ничего не теряют от этого.

В первом параграфе вводятся необходимые понятия и устанавливаются некоторые простейшие свойства классов A_p^n . Доказываются также основная теорема об интегральном представлении и теорема об ограниченности интегрального проектора, связанного с интегральным представлением.

Второй параграф посвящен изучению систем М. Рисса класса A_p^n , то есть векторных функций из этого класса, компоненты которых удовлетворяют многомерным уравнениям Коши—Римана. Здесь и возникают сопряженные гармонические функции и мы доказываем аналог теоремы М. Рисса, который справедлив при всех p , $0 < p < \infty$.

Отметим в заключение, что отправной точкой для нашей работы послужила статья Ф. Риччи и М. Тейблсона [9]. Точнее, наша теорема 1 фактически является приспособленным к нашему случаю вариантом их теоремы 3.1.

§ 1. Классы A_p^n в полупространствах

Обозначим через R_+^{n+1} верхнее полупространство в R^{n+1} : $R_+^{n+1} = \{x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in R^{n+1}: x_{n+1} > 0\}$, $x' = (x_1, \dots, x_n)$ — проекция точки $x \in R_+^{n+1}$ на R^n . Мера Лебега в R_+^{n+1} будет обозначаться через $dx = dx' dx_{n+1}$, где $dx' = dx_1 \dots dx_n$.

Для $0 < p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$ обозначим через $A_p^\alpha = A_p^\alpha(R_+^{n+1})$ класс всех гармонических в R_+^{n+1} функций, для которых

$$I|_{p, \alpha} = \left\{ \int_0^\infty \int_{R^n} |f(x', x_{n+1})|^p x_{n+1}^\alpha dx' dx_{n+1} \right\}^{1/p} < \infty.$$

Следующий результат — обобщение известного результата Харди и Литтльвуда, принадлежащее И. Стейну и Ч. Фефферману [10].

Лемма 1. Пусть функция f гармонична в некоторой области G пространства R^N , $N \geq 2$. Тогда, если B — некоторый шар с центром в точке $x \in R^N$, целиком лежащий в G , то для любого p , $0 < p < \infty$, существует константа $C = C_p$ такая, что

$$|f(x)|^p \leq \frac{C}{|B|} \int_B |f(y)|^p dy, \quad (1)$$

где $|B|$ — лебегова мера шара B .

В следующей лемме устанавливается порядок роста функции $f \in A_p^\alpha$ при подходе к граничному подпространству или бесконечности.

Лемма 2. Если $f \in A_p^\alpha$, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$, то справедлива оценка

$$|f(x)| \leq C I|_{p, \alpha}(x_{n+1})^{-(\alpha+n+1)/p}. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть $B_r(x)$ — шар с центром в точке $x \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ и радиуса $r = \frac{1}{2} x_{n+1}$. Тогда $B_r(x) \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$ и по лемме 1 для всех p , $0 < p < \infty$

$$|f(x)|^p \leq \frac{C}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y', y_{n+1})|^p dy' dy_{n+1}.$$

Заметим теперь, что при $y \in B_r(x)$, $y_{n+1} \asymp x_{n+1}$, поэтому будем иметь (учтем еще, что $|B_r(x)| = c x_{n+1}^n$)

$$|f(x)|^p x_{n+1}^n \leq C (x_{n+1})^{-n-1} \int_{B_r(x)} |f(y)|^p y_{n+1}^n dy \leq C |f(x)|^p x_{n+1}^{-n-1},$$

откуда сразу получаем наше утверждение.

Следствие 1. При $1 \leq p < \infty$ классы A_p^n являются банаховыми пространствами, а при $0 < p < 1$ — полными метрическими пространствами.

Следствие 2. Если $f \in A_p^n$ при тех же p и n и если $k \geq 1$ — целое число, то

$$\left| \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_{n+1}^k} \right| \leq C (x_{n+1})^{-(n+1)/p-k}.$$

Функции класса A_p^n не имеют граничных значений в обычном смысле (см., напр., [9] для случая полуплоскости). Следовательно, никакого представления типа Пуассона не может существовать. Тем не менее функции этого класса обладают интегральным представлением, достаточно удовлетворительным для изучения многих их свойств.

Напомним, что ядром Пуассона в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ называется функция

$$P(x) = P(x', x_{n+1}) = c_n \frac{x_{n+1}^{\frac{n+1}{2}}}{(|x'|^2 + x_{n+1}^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

где $c_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) / \pi^{\frac{n+1}{2}}$.

Для достаточно «хороших» гармонических функций в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ справедливо интегральное представление (о точных условиях см. [11])

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y', 0) P(x' - y', x_{n+1}) dy'.$$

Определим теперь ядро $Q^{(m)}$, заданное в $\mathbb{R}_+^{n+1} \times \mathbb{R}_+^{n+1}$ следующим образом ($m \geq 0$ — целое)

* Символ $A \asymp B$ означает, что существуют константы C_1 и C_2 такие, что выполняются неравенства $C_1 A \leq B \leq C_2 A$.

$$Q^{(m)}(x, y) = \frac{(-2)^{m+1}}{m!} \cdot \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_{n+1}^{m+1}} P(x' - y', x_{n+1} + y_{n+1}). \quad (3)$$

Полагаем для простоты $Q^{(0)} \equiv Q$.

Простое дифференцирование ядра Пуассона дает

$$Q(x, y) = c_n \frac{|x' - y'|^2 - n(x_{n+1} + y_{n+1})^2}{(|x' - y'|^2 + (x_{n+1} + y_{n+1})^2)^{\frac{n+3}{2}}},$$

и поэтому

$$|Q(x, y)| \leq \frac{C}{(|x' - y'|^2 + (x_{n+1} + y_{n+1})^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Дальнейшее дифференцирование показывает, что справедлива следующая

Лемма 3. Пусть m — неотрицательное целое число. Тогда справедлива оценка

$$|Q^{(m)}(x, y)| \leq \frac{C}{(|x' - y'|^2 + (x_{n+1} + y_{n+1})^2)^{\frac{n+1+m}{2}}}. \quad (4)$$

Теперь мы можем доказать теорему об интегральном представлении классов A_α^p .

Теорема 1. Пусть $f \in A_\alpha^p$, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$ и m — натуральное число, удовлетворяющее условию

$$m \geq \frac{\alpha + n + 1}{p} - n - 1; \quad 0 < p \leq 1; \quad m > \frac{\alpha + 1}{p} - 1, \quad 1 < p < \infty. \quad (5)$$

Тогда имеет место интегральное представление

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} f(y) Q^{(m)}(x, y) y_{n+1}^m dy. \quad (6)$$

Доказательство. Убедимся, во-первых, что интеграл (6) конечен. Пусть сначала $f \in A_\alpha^1$ и $m \geq \alpha$ — целое. Тогда воспользовавшись оценками леммы 3, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |f(y', y_{n+1})| |Q^{(m)}(x, y)| y_{n+1}^m dy' dy_{n+1} \leq \\ & \leq C \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |f(y)| \frac{y_{n+1}^m}{(x_{n+1} + y_{n+1})^{n+1+m}} dy' dy_{n+1} < \infty, \end{aligned}$$

так как $y_{n+1}^m / (x_{n+1} + y_{n+1})^{n+1+m} \leq C y_{n+1}^\alpha$, если $m \geq \alpha$, для любого фиксированного $x_{n+1} > 0$.

Если $1 < p < \infty$, то воспользовавшись неравенством Гёльдера получим, что при $m > \frac{1+\alpha}{p} - 1$ интеграл (6) конечен.

Наконец, если $0 < p < 1$, то применим вложение $A_p^s \subset A_1^s$ с $\beta = \frac{\alpha + n + 1}{p} - n - 1$. Это вложение можно получить буквальным повторением рассуждений предложения 2.2 из работы [9]. Следовательно, в этом случае интеграл (6) конечен при $m > \frac{\alpha + n + 1}{p} (n + 1)$.

Перейдем теперь к доказательству формулы (6).

Из оценок леммы 2 следует, что в любом подпространстве $x_{n+1} \geq c > 0$ в R_+^{n+1} функция $f \in A_p^s$ ограничена. Следовательно имеет место представление Пуассона

$$f(x', x_{n+1}) = \int_{R^n} P\left(x' - y', \frac{x_{n+1}}{2}\right) f\left(y', \frac{x_{n+1}}{2}\right) dy'.$$

Для произвольного $N > 0$ интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} & \int_{R^n} P\left(x' - y', \frac{x_{n+1}}{2}\right) f\left(y', \frac{x_{n+1}}{2}\right) dy' = \\ & = \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_{R^n} f\left(y', \frac{x_{n+1}}{2}\right) \int_0^N y_{n+1}^m \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_{n+1}^{m+1}} P\left(x' - y', y_{n+1} + \frac{x_{n+1}}{2}\right) \times \\ & \times dy_{n+1} dy' + f(x', N + x_{n+1}) + \dots + \frac{N^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x_{n+1}^m} f(x', N + x_{n+1}). \quad (7) \end{aligned}$$

Теперь воспользовавшись следствием 2 из леммы 2 мы видим, что все остаточные члены в правой части (7) стремятся к нулю при $N \rightarrow \infty$. Переходя к пределу окончательно получим

$$\begin{aligned} f(x', x_{n+1}) &= \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_{R^n} \int_0^\infty f\left(y', \frac{x_{n+1}}{2}\right) y_{n+1}^m \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_{n+1}^{m+1}} P\left(x' - y', y_{n+1} + \frac{x_{n+1}}{2}\right) dy_{n+1} dy' = \\ &= \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^\infty \int_{R^n} f\left(y', \frac{x_{n+1}}{2}\right) y_{n+1}^m \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_{n+1}^{m+1}} P\left(x' - y', y_{n+1} + \frac{x_{n+1}}{2}\right) dy' dy_{n+1} = \\ &= \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^\infty \int_{R^n} f\left(y', \frac{y_{n+1}}{2}\right) y_{n+1}^m \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_{n+1}^{m+1}} P\left(x' - y', y_{n+1} + \frac{y_{n+1}}{2} + x_{n+1}\right) dy' dy_{n+1} = \\ &= \frac{(-2)^{m+1}}{m!} \int_{R_+^{n+1}} f(y', y_{n+1}) y_{n+1}^m \times \\ & \times \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_{n+1}^{m+1}} P(x' - y', y_{n+1} + x_{n+1}) dy' dy_{n+1}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Обозначим через $L_a^p = L_a^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$, класс всех вещественных измеримых функций в $\mathbb{R}_+^{n+1}$, для которых конечна величина

$$\|g\|_{L_a^p}^p = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |g(x', x_{n+1})|^p x_{n+1}^\alpha dx' dx_{n+1}.$$

Ясно, что $A_a^p \subset L_a^p$.

Из рассуждений, приведенных в начале доказательства теоремы 1 следует, что интеграл в правой части (6) имеет смысл и для функций класса L_a^p , если $p \geq 1$ и выполнено условие (5). Если же $0 < p < 1$, то этот интеграл может вообще не иметь смысла.

Далее ясно, что функция

$$T_m g(x) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} g(y) Q^{(m)}(x, y) y_{n+1}^m dy \quad (8)$$

гармонична в $\mathbb{R}_+^{n+1}$. В следующей теореме описывается точный класс функций, куда действует оператор T_m .

Теорема 2. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$ и m — целое неотрицательное число, удовлетворяющее условию $m > \frac{1+\alpha}{p} - 1$. Тогда оператор T_m является непрерывным проектором из L_a^p в A_a^p .

Доказательство. Заметим, что если α — целое, то при $p = 1$ необходимо взять $m \geq \alpha + 1$, а при $p > 1$ можно взять и $m = \alpha$.

Пусть сначала $p = 1$ и $g \in L_a^1$, $m > \alpha$. Обозначим $f = T_m g$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |f(x', x_{n+1})| x_{n+1}^\alpha dx' dx_{n+1} \leq \\ & \leq \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} x_{n+1}^\alpha dx' dx_{n+1} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |g(y)| |Q^{(m)}(x, y)| y_{n+1}^m dy' dy_{n+1} = \\ & = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |g(y)| y_{n+1}^m dy' dy_{n+1} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |Q^{(m)}(x, y)| x_{n+1}^\alpha dx' dx_{n+1}. \quad (9) \end{aligned}$$

Но из оценок леммы 3 получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Q^{(m)}(x, y)| dx' \leq C(x_{n+1} + y_{n+1})^{-m-1}$$

и

$$\iint_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |Q^{(m)}(x, y)| x_{n+1}^\alpha dx' dx_{n+1} < \infty$$

$$\leq C \int_0^{\infty} \frac{x_{n+1}^{\alpha}}{(x_{n+1} + y_{n+1})^{m+1}} dx_{n+1} = C y_{n+1}^{\alpha-m}. \quad (10)$$

Подставив (10) в (9) получим требуемое неравенство.

Случай $1 < p < \infty$ основан на одной лемме Ф. Форелли и У. Рудина (см. [7]).

Лемма 4. Пусть μ — некоторая положительная мера, заданная на некоторой σ -алгебре подмножеств множества X . Предположим, что функция $K: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ измерима, $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, и пусть существует измеримая функция $g: X \rightarrow [0, \infty)$ и постоянные a и b такие, что

$$\int_X K(x, y) g(y)^{p'} d\mu(y) \leq (a g(x))^{p'} \quad (x \in X)$$

$$\int_X K(x, y) g(x)^p d\mu(x) \leq (b g(y))^p. \quad (y \in X).$$

Тогда равенство $Tf(x) = \int_X K(x, y) f(y) d\mu(y)$ определяет непрерывный оператор в $L^p(d\mu)$ с $\|T\| \leq ab$.

Воспользуемся этой леммой с $X = \mathbb{R}_+^{n+1}$, $d\mu(x) = x_{n+1}^{\alpha} dx$, $K(x, y) = |Q^{(m)}(x, y)| y_{n+1}^{m-\alpha}$ и $g(x) = x_{n+1}^{\delta}$, где δ — достаточно малое положительное число. Тогда доказательство второй части теоремы сведется к установлению неравенства типа

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |Q^{(m)}(x, y)| y_{n+1}^{m+p\delta} dy \leq C x_{n+1}^{p\delta}.$$

Это же неравенство мы уже доказали при выводе выше неравенства (10). Доказательство теоремы завершено.

§ 2. Гармонические векторные поля класса A_+^p

Пусть вектор-функция $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x), f_{n+1}(x))$ задана в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ и все ее компоненты принадлежат классу C^1 . Мы называем F гармоническим векторным полем (или системой М. Рисса), если удовлетворяется система уравнений Коши-Римана

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = 0, \\ \frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}, \quad 1 \leq j, k \leq n+1. \end{cases} \quad (11)$$

Это название оправдывается тем, что из условия (11) следует существование некоторой гармонической функции H в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ такой, что $F = \nabla H$ (см., напр., [12]). Отсюда в частности следует, что все компоненты f_j — гармонические функции.

Система функций

$$P_j(x) = c_n \frac{x_j}{(|x'|^2 + x_{n+1}^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad 1 \leq j \leq n+1,$$

где $P_{n+1} \equiv P$, образует гармоническое векторное поле (см. [11], § 4 главы 3. Это очень легко проверить и непосредственным вычислением). Кроме того функции P_j , $1 \leq j \leq n$ связаны с ядром Пуассона преобразованиями М. Рисса [11]). Это обстоятельство дало возможность И. Стейну и Г. Вейсу распространить теорию пространств Харди H^p на гармонические векторные поля в R_+^{n+1} ([11, 12]).

По аналогии с этим мы введем систему ядер $Q_j^{(m)}$, которые в совокупности с введенным ранее ядром $Q^{(m)}$ составляют систему Рисса. При помощи этих ядер окажется возможным построить теорию пространств A_α^p гармонических векторных полей в полупространстве.

Мы говорим, что гармоническое векторное поле $F = (f_1, \dots, f_{n+1})$ принадлежит классу A_α^p , если

$$\begin{aligned} \|F\|_{p, \alpha}^p &= \int_{R_+^{n+1}} |F(x)|^p x_{n+1}^\alpha dx = \\ &= \int_{R_+^{n+1}} \left(\sum_{j=1}^{n+1} |f_j(x)|^2 \right)^{p/2} x_{n+1}^\alpha dx < \infty. \end{aligned} \quad (12)$$

Обозначим (m -целое, $m \geq 0$)

$$Q_j^{(m)}(x, y) = \frac{(-2)^{m+1}}{m!} \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_{n+1}^{m+1}} P_j(x' - y'), \quad x_{n+1} + y_{n+1}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (13)$$

Ясно, что вектор-функция $Q_m(x, y) = (Q_1^{(m)}, \dots, Q_n^{(m)}, Q^{(m)})$ является системой Рисса по переменной x .

Так как производные ядер P_j , $1 \leq j \leq n$, имеют существенно тот же вид, что и производные ядра Пуассона P и удовлетворяют одинаковым с ним оценкам, то по аналогии с леммой 3 мы немедленно получим следующий результат.

Лемма 5. Для ядер $Q_j^{(m)}$ справедливы оценки ($1 \leq j \leq n$)

$$|Q_j^{(m)}(x, y)| \leq C (|x' - y'|^2 + (x_{n+1} + y_{n+1})^2)^{-\frac{n+1+m}{2}}. \quad (14)$$

Пусть теперь задана некоторая функция $f \in A_\alpha^p$, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$. Определим еще n функций по формулам

$$f_j(x', x_{n+1}) = \int_{R^n} f\left(y', \frac{x_{n+1}}{2}\right) P_j\left(x' - y', \frac{x_{n+1}}{2}\right) dy', \quad 1 \leq j \leq n. \quad (15)$$

Замечая, что функции f_j со всеми своими производными стремятся к нулю достаточно быстро при $x_{n+1} \rightarrow \infty$, мы, поступая так же, как при до-

казательстве теоремы 1, получим следующие формулы для выражения этих функций через ядра

$$f_j(x) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} f(y', y_{n+1}) y_{n+1}^m Q_j^{(m)}(x, y) dy' dy_{n+1}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (16)$$

где m удовлетворяет условиям (5) из теоремы 1.

Полученная таким образом вектор-функция $F = (f_1, \dots, f_n, f)$ является, очевидно, системой Рисса.

Верно и обратное: если $F = (f_1, \dots, f_n, f)$ есть гармоническое векторное поле, то все f_j , $1 \leq j \leq n$, связаны с f преобразованиями М. Рисса в любом подполупространстве $x_{n+1} > c > 0$ и, следовательно, выражаются формулами (15) (см. [11], гл. 3, теорема 3).

Нашей основной целью является доказательство того, что «оператор гармонического сопряжения», задаваемый формулами (16), непрерывен в A_α^p .

Для этого нам потребуются некоторые дополнительные факты. Первый из них — известное разложение Уитни. Мы сформулируем его применительно к нашему случаю.

Лемма 6. В $\mathbb{R}_+^{n+1}$ существует набор замкнутых кубов $\{\Delta_k\}_1^\infty$, со сторонами, параллельными координатным осям, такой, что

$$1) \bigcup_k \Delta_k = \mathbb{R}_+^{n+1};$$

2) Внутренности всех Δ_k попарно не пересекаются;

$$3) \text{diam } \Delta_k \leq \text{dist}(\Delta_k, C \mathbb{R}_+^{n+1}) \leq 4 \text{diam } \Delta_k;$$

4) Если Δ_k^* — куб с тем же центром, что и Δ_k , растянутый в $5/4$ раза, то система $\{\Delta_k^*\}_1^\infty$ образует конечное покрытие $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Точнее, любой куб Δ_k^* пересекается с не более чем 12^{n+1} кубами Δ_k .

Для доказательства см. [11], теорема 1 и предложения 1—3 главы 6. Заметим только, что в нашем случае это разбиение можно построить явно.

Лемма 7. Пусть Δ_k — некоторый куб из предыдущей леммы. Тогда, если f гармонична в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ и $x^{(k)}$ — центр куба Δ_k , то для всех p и α , $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$,

$$\max_{x \in \Delta_k} |f(x)|^p (x_{n+1}^{(k)})^\alpha < \frac{C}{|\Delta_k|} \int_{\Delta_k} |f(y)|^p y_{n+1}^\alpha dy, \quad (17)$$

где $x_{n+1}^{(k)}$ — $(n+1)$ -я координата точки $x^{(k)}$.

Доказательство. Пусть максимум достигается в некоторой точке $x \in \Delta_k$, и пусть $B(x)$ — наибольший шар с центром в точке x , содержащийся в Δ_k^* . Тогда по лемме 1

$$|f(x)|^p \leq \frac{C}{|B(x)|} \int_{B(x)} |f(y)|^p dy.$$

Но в силу условия 3) леммы 6, если $y \in B(x)$, то $y_{n+1} \asymp x_{n+1}^{(k)}$. Следовательно, учитывая, что $|B(x)| \asymp |\Delta_k| \asymp |\Delta_k|$, получаем утверждение леммы.

Теперь мы в состоянии доказать нашу основную теорему.

Теорема 3. Пусть $f \in A_{\alpha}^p$, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$. Тогда, если f_1 , $1 \leq j \leq n$, ее гармонически сопряженные функции в смысле уравнений (11) Коши-Римана, то все они принадлежат тому же классу A_{α}^p и

$$\|f_j\|_{p, \alpha} \leq C \|f\|_{p, \alpha}. \quad (18)$$

Доказательство. Случай $1 \leq p < \infty$ фактически следует из теоремы 2. Действительно, достаточно только вместо леммы 3 применить лемму 5 и мы точно так же, как и при доказательстве теоремы 2, получим неравенство (18).

Обратимся поэтому к случаю $0 < p < 1$. Здесь мы применяем тот же метод, который позволил Ф. А. Шамояну доказать аналогичный результат для гармонических в круге функций ([13]).

Пусть j фиксировано, $1 \leq j \leq n$ и

$$f_j(x) = \int_{R_+^{n+1}} f(y) Q_j^{(m)}(x, y) y_{n+1}^m dy. \quad (16)$$

Теперь применим разбиение R_+^{n+1} на кубы, описанное в лемме 6. Тогда, если учесть, что $0 < p < 1$, получим

$$\begin{aligned} \int_{R_+^{n+1}} |f_j(x)|^p x_{n+1}^{\alpha} dx &\leq \int_{R_+^{n+1}} x_{n+1}^{\alpha} \left| \int_{R_+^{n+1}} f(y) Q_j^{(m)}(x, y) y_{n+1}^m dy \right|^p dx = \\ &= \int_{R_+^{n+1}} x_{n+1}^{\alpha} \left| \sum_k \int_{\Delta_k} f(y) Q_j^{(m)}(x, y) y_{n+1}^m dy \right|^p dx \leq \\ &< \int_{R_+^{n+1}} x_{n+1}^{\alpha} \sum_k \left(\int_{\Delta_k} |f(y)| |Q_j^{(m)}(x, y)| y_{n+1}^m dy \right)^p dx \leq \\ &< C \int_{R_+^{n+1}} x_{n+1}^{\alpha} \left\{ \sum_k (y_{n+1}^{(k)})^{mp} |Q_j^{(m)}(x, y^{(k)})|^p \max_{\Delta_k} |f(y)|^p |\Delta_k|^p \right\} dx = \\ &= C \sum_k \max_{\Delta_k} |f(y)|^p |\Delta_k|^p (y_{n+1}^{(k)})^{mp} \int_{R_+^{n+1}} |Q_j^{(m)}(x, y^{(k)})|^p x_{n+1}^{\alpha} dx. \quad (19) \end{aligned}$$

Здесь, как и ранее, $y^{(k)}$ — центр куба Δ_k и $y_{n+1}^{(k)}$ — его $(n+1)$ -я координата. Далее, если выбрать m настолько большим, чтобы $(n+1+m)p > n+1$, получим, воспользовавшись оценками леммы 5,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |Q_j^{(m)}(x, y^{(k)})|^p x_{n+1}^a dx' dx_{n+1} \leq \\
& \leq C \int_0^{\infty} x_{n+1}^a dx_{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx'}{(|x' - y^{(k)}|^2 + (x_{n+1} + y_{n+1}^{(k)})^2)^{\frac{n+1+m}{2}p}} \leq \\
& \leq C \int_0^{\infty} \frac{x_{n+1}^a dx_{n+1}}{(x_{n+1} + y_{n+1}^{(k)})^{(n+1+m)p-n}} = C (y_{n+1}^{(k)})^{a-mp+(n+1)(1-p)}.
\end{aligned}$$

Повторно можно продолжить неравенство (19) и, учитывая что $|\Delta_k| \asymp (y_{n+1}^{(k)})^{n+1}$, получить в силу леммы 7

$$\begin{aligned}
W_{f,p,a} & \leq C \sum_k \max_{\Delta_k} |f(y)|^p |\Delta_k|^p (y_{n+1}^{(k)})^{a+(n+1)(1-p)} = \\
& = C \sum_k \max_{\Delta_k} |f(y)|^p (y_{n+1}^{(k)})^a |\Delta_k| \leq \\
& \leq C \sum_k \int_{\Delta_k} |f(y)|^p y_{n+1}^a dy \leq C \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |f(y)|^p y_{n+1}^a dy.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Заключительные замечания. Полученные результаты допускают обобщения в различных направлениях.

1) Можно рассматривать более общие пространства гармонических функций в $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Например, пространства со смешанной нормой или пространства с более общими весами. В любом случае все наши результаты останутся в силе, если только гарантировать, что функции этих классов стремятся к нулю со всеми своими производными достаточно быстро при $x_{n+1} \rightarrow \infty$.

2) Можно вместо гармонических векторных полей рассматривать вектор-функции, удовлетворяющие так называемым обобщенным уравнениям Коши—Римана (см. [12], гл. 6). Если эта система эллиптическая, то она эквивалентна системе Коши—Римана и мы приходим к тем же результатам.

При изложении, однако, мы сознательно избегали этих обобщений, чтобы в излишней общности не потерять существа дела.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 3. III. 1986

Ա. Է. ՋԻՐԲԱՇՅԱՆ. Կիսատարածություններում հարմոնիկ ֆունկցիաների դասեր և Մ. Ռիսսի բնութեմի անալոգը (ամփոփում)

Հոդվածում դիտարկվում են կիսատարածություններում հարմոնիկ ֆունկցիաների դասեր, որոնք ինտեգրելի են ըստ Լեբեգի չափի. $f \in A_{a,p}^p$, $0 < p < \infty$, $-1 < a < \infty$, $b \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})|^p x_{n+1}^a dm_{n+1}(x) < \infty.$$

Այդպիսի ֆունկցիաների համար, որոնք ընդհանրապես ասած չունեն եզրային արժեքներ, գտնվում է ինտեգրալ ներկայացում: Ապացուցվում է, որ այդ ներկայացման հետ կապված ինտեգրալ պրոյեկտորը սահմանափակ է կշռային L^p -ից A_α^p , եթե $1 \leq p < \infty$:

Հարմոնիկ ֆունկցիաների համակարգերի համար ապացուցվում է հարմոնիկ համալուծֆունկցիաների վերաբերյալ Մ. Ռիսսի թեորեմի անալոգը. եթե $f \in A_\alpha^p$ ապա նրա հարմոնիկ համալուծ $f_1, \dots, f_n$ ֆունկցիաները նույնպես պատկանում են այդ դասին և

$$\|f_j\|_{A_\alpha^p} \leq C \|f\|_{A_\alpha^p}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Ի տարբերություն կլասիկ դեպքի, այս անհավասարությունը ճիշտ է p -ի բոլոր արժեքների համար, $0 < p < \infty$:

A. E. DJRBASHIAN. A_α^p classes of harmonic functions in half-spaces and an analog of M. Riesz theorem (summary)

We consider classes of harmonic functions in half-spaces which are integrable with respect to the Lebesgue measure; $f \in A_\alpha^p$, $0 < p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$ if

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})|^p x_{n+1}^a dm_{n+1}(x) < \infty.$$

For these functions, which in general have no boundary values, we find an integral representation formula. We prove also that the integral operator connected with this representation is a bounded projection from weighted L^p to A_α^p for $1 < p < \infty$.

For systems of functions in A_α^p we prove an analog of M. Riesz theorem on conjugate harmonic functions; if $f \in A_\alpha^p$, then all its conjugate harmonic functions $f_1, \dots, f_n$ belong to the same class and

$$\|f_j\|_{A_\alpha^p} \leq C \|f\|_{A_\alpha^p}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

In contrast with the classical case this inequality holds for all values of p , $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. О представимости некоторых классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН АрмССР, 1945, 3, № 1, 3—9.
2. М. М. Джрбашян. К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН АрмССР, 1948, вып. 2, 3—40.
3. С. В. Шведенко. Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре, Итоги науки и техники, Мат. анализ, 1985, т. 23, 3—124.
4. С. Г. Гиндикин. Анализ в однородных областях, УМН, 1964, 19, № 4, 3—92.
5. R. R. Coifman R. Rochberg Representation theorems for holomorphic functions in L^p , Asterisque, 1980, v. 77, 11—66.
6. Г. М. Хенкин. Метод интегральных представлений в комплексном анализе, Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, фундаментальные направления, 1985, т. 7, 23—124.
7. У. Рудин. Теория функций в единичном шаре из C^n , М., «Мир», 1984,

8. А. Э. Джрбашян. Интегральные представления и непрерывные проекторы в некоторых пространствах гармонических функций, Мат. сб., 1983, 121 (163), № 2 (6), 259—271.
9. F. Ricci, M. Taibleson. Boundary values of harmonic functions in mixed norm spaces and their atomic structure, Annali Scuola Nor. Superiore—Pisa, 1983, Serie 6, v. 10, № 1, 1—54.
10. C. Fefferman., E. M. Stein. H^p spaces of several variables, Acta Math., 1972, v. 129, 137—193.
11. И. Стейн. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М., «Мир», 1973.
12. И. Стейн, Г. Вейс. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, М., «Мир», 1974.
13. Ф. А. Шамоян. Приложения интегральных представлений Джрбашяна к некоторым задачам анализа, ДАН СССР, 1981, 261, № 3, 557—562.

УДК 517.547

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

М. М. ДЖРБАШЯН, А. О. КАРАПЕТЯН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ОБЛАСТИ ЗИГЕЛЯ

В работах [1, 2] впервые были введены классы $H^p(\alpha)$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$, голоморфных функций в единичном круге, удовлетворяющих условию вида:

$$\int \int_{|\zeta| < 1} |f(\zeta)|^p \cdot (1 - |\zeta|^2)^\alpha du dv < +\infty^* \quad (1).$$

$$(\zeta = u + iv).$$

Одновременно было доказано, что любая функция класса $H^p(\alpha)$ допускает интегральное представление

$$f(z) = \frac{\alpha + 1}{\pi} \cdot \int \int_{|\zeta| < 1} \frac{f(\zeta) \cdot (1 - |\zeta|^2)^\alpha du dv}{(1 - z \cdot \bar{\zeta})^{2+\alpha}}, \quad |z| < 1 \quad (2).$$

$$(\zeta = u + iv).$$

Этот основной результат положил начало целой серии работ, посвященных интегральным представлениям определенных классов голоморфных функций. Прежде, чем дать краткий обзор этих исследований, введем некоторые обозначения.

Для произвольного $n > 1$ обозначим через C^n обычное n -мерное координатное пространство комплексных чисел. Если $z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n$, $w = (w_1, \dots, w_n) \in C^n$, то положим

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^n z_k \cdot \bar{w}_k, \quad |z| = \sqrt{\langle z, z \rangle}. \quad (3)$$

Для $0 < r < \infty$ введем следующее обозначение:

$$B_{n,r} = \{z \in C^n, |z| < r\}. \quad (4)$$

При $r = 1$ вместо $B_{n,1}$ будем писать просто B_n (единичный шар из C^n). Далее положим

$$P_+ = \{z \in C^1, \operatorname{Im} z > 0\}. \quad (5)$$

Для произвольного открытого множества $D \subset C^n$ обозначим через $H(D)$ пространство всех голоморфных в D функций. Через $m(z)$,

* В последние годы ряд авторов без серьезных научных оснований называют пространства $H^p(\alpha)$ пространствами Бергмана или весовыми пространствами Бергмана.

$z \in \mathbb{C}^n$, будем обозначать 2n-мерную меру Лебега в $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. Наконец, если $n \geq 1$ и $\alpha \in \mathbb{C}^1$, положим

$$c_{n, \alpha} = \frac{(\alpha + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha + n)}{\pi^n}. \quad (6)$$

Справедлива следующая

Теорема А. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$, $0 < r < \infty$, $f \in H(B_{n, r})$

и

$$\int_{B_{n, r}} |f(\zeta)|^p \cdot (r^2 - |\zeta|^2)^\alpha dm(\zeta) < +\infty. \quad (7)$$

Тогда

$$f(z) \equiv c_{n, \alpha} \cdot \int_{B_{n, r}} \frac{r^2 \cdot f(\zeta) \cdot (r^2 - |\zeta|^2)^\alpha dm(\zeta)}{(r^2 - \langle z, \zeta \rangle)^{n+1+\alpha}} \quad (z \in B_{n, r}). \quad (8)$$

Эта теорема при $n=1$, т. е. для круга $B_{1, r} = \{z \in \mathbb{C}^1, |z| < r\}$, непосредственно следует из приведенного выше интегрального представления (2), впервые установленного в работах [1, 2]. Впоследствии теорема была обобщена на случай $n > 1$ Форелли и Рудиным [3]. Отметим лишь, что в отличие от [3], для случая $n > 1$ теорема А может быть проще доказана методом, развитым в оригинальных работах [1, 2].

Естественным продолжением этих исследований явились попытки получения аналогов интегрального представления (8) для неограниченных областей. Основываясь на интегральном представлении (2), М. М. Джрбашян и А. Э. Джрбашян [4] тонким предельным переходом в первые строго доказали следующую теорему.

Теорема Б. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$, $f \in H(\Pi_+)$ и

$$\int_{\Pi_+} |f(w)|^p \cdot (Im w)^\alpha dm w < +\infty. \quad (9)$$

Тогда

$$f(w) \equiv - \frac{e^{-i \frac{\pi}{2} \alpha}}{\pi} \cdot 2^\alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot \int_{\Pi_+} \frac{f(w) \cdot (Im w)^\alpha dm(w)}{(w - \bar{w})^{2+\alpha}} \quad (w \in \Pi_+). \quad (10)$$

Нашей целью является распространение интегрального представления (10) на некоторые области из $\mathbb{C}^n$, являющиеся n-мерными аналогами верхней полуплоскости $\Pi_+ \subset \mathbb{C}^1$.

Для более широкого класса многомерных областей С. Г. Гиндикиным [5], а затем Койфманом и Рохбергом [6] были получены интегральные представления, аналогичные (10). Об этом более подробно будет сказано нами ниже.

1.1. Для произвольного $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ положим $z' = (z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$, так что $z = (z_1, z')$. Если $z, w \in \mathbb{C}^n$, то будем принимать следующие естественные обозначения:

$$\langle z', w' \rangle = \sum_{k=2}^n z_k \bar{w}_k, |z'| = \sqrt{\langle z', z' \rangle}. \quad (1.1)$$

Основным объектом нашего рассмотрения будет область Зигеля в $\mathbb{C}^n$:

$$\Omega_n = \{w = (w_1, w') \in \mathbb{C}^n, \operatorname{Im} w_1 > |w'|^2\}. \quad (1.2)$$

Отметим, что $\Omega_1 = \Pi_+ \subset \mathbb{C}^1$. Рассмотрим преобразования Кэли:]

$$\Phi: (z_1, \dots, z_n) \rightarrow \left(i \frac{1+z_1}{1-z_1}, i \frac{z_2}{1-z_1}, \dots, i \frac{z_n}{1-z_1} \right) \quad (z \in B_n), \quad (1.3)$$

$$\Phi^{-1}: (w_1, \dots, w_n) \rightarrow \left(\frac{w_1 - i}{w_1 + i}, \frac{2w_2}{w_1 + i}, \dots, \frac{2w_n}{w_1 + i} \right) \quad (w \in \Omega_n). \quad (1.4)$$

Хорошо известно, что Φ и Φ^{-1} осуществляют биголоморфный изоморфизм областей B_n и Ω_n . Через Δ и Δ^{-1} будем обозначать комплексные якобианы отображений Φ и Φ^{-1} , соответственно. Следующая лемма доказывается посредством довольно простых вычислений.

Лемма 1.1.

1. Для всех $n \geq 1$

$$\Delta(z) \equiv \frac{2 \cdot i^n}{(1-z_1)^{n+1}}, \quad \Delta^{-1}(w) \equiv \frac{2^n \cdot i}{(w_1 + i)^{n+1}}. \quad (1.5)$$

2. Если $w, w' \in \Omega_n$, то для $n > 1$

$$1 - \langle \Phi^{-1} w, \Phi^{-1} w' \rangle = \frac{2i(\bar{w}_1 - w_1) - 4\langle w', w' \rangle}{(w_1 + i) \cdot (\bar{w}_1 - i)}, \quad (1.6)$$

$$1 - |\Phi^{-1} w|^2 = \frac{4 \cdot (\operatorname{Im} w_1 - |w'|^2)}{(w_1 + i) \cdot (\bar{w}_1 - i)}. \quad (1.7)$$

Наряду с Ω_n будем рассматривать область

$$\tilde{\Omega}_n = \left\{ w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n, \operatorname{Im} w_1 > \sum_{k=2}^n (\operatorname{Im} w_k)^2 \right\}, \quad (1.8)$$

притом вновь $\tilde{\Omega}_1 = \Pi_+ \subset \mathbb{C}^1$. Можно показать (см. [5]), что существуют отображения, осуществляющие биголоморфный изоморфизм областей Ω_n и $\tilde{\Omega}_n$. Используя явный вид этих отображений, удастся перенести на случай области $\tilde{\Omega}_n$ многие факты, установленные для Ω_n .

1.2. Пусть D одна из областей $\Omega_n, \tilde{\Omega}_n$. Положим

$$K_L(w, w) = \begin{cases} \operatorname{Im} w_1 - |w'|^2, & w \in D, \text{ если } D = \Omega_n, \\ \operatorname{Im} w_1 - \sum_{k=2}^n (\operatorname{Im} w_k)^2, & w \in D, \text{ если } D = \tilde{\Omega}_n. \end{cases} \quad (1.9)$$

Кроме того, пусть $0 < p < \infty, -\infty < \alpha < \infty$. Для произвольной измеримой по Лебегу (вообще говоря, комплекснозначной) функции $f(w), w \in D$, положим

$$\|f\|_{p, \alpha} = \left(\int_D |f(\omega)|^p \cdot [K_D(\omega, \omega)]^\alpha dm(\omega) \right)^{1/p}. \quad (1.10)$$

Затем введем соответствующие пространства

$$L_\alpha^p(D) = \{f, \|f\|_{p, \alpha} < +\infty\}, \quad (1.11)$$

$$H_\alpha^p(D) = H(D) \cap L_\alpha^p(D). \quad (1.12)$$

2.1. Всюду дальше предполагается, что $1 < p < \infty$, $\alpha > -1$. Пусть $\beta \in \mathbb{C}^1$, тогда будем писать $\beta \vdash (p, \alpha)$, если

$$\operatorname{Re} \beta > \frac{\alpha + 1}{p} - 1 \quad (1 < p < \infty), \quad \operatorname{Re} \beta \geq 2 \quad (p = 1). \quad (2.1)$$

Лемма 2.1. Пусть $f \in L_\alpha^p(\Omega_n)$ и $\beta \vdash (p, \alpha)$. Тогда

$$F_\beta(\omega) \equiv \frac{f(\omega) \cdot (\operatorname{Im} \omega_1 - |\omega'|^2)^\beta}{(\bar{\omega}_1 - i)^{n+1+\beta}} \in L^1(\Omega_n). \quad (2.2)$$

Доказательство. Заметим, что при $\omega \in \Omega_n$

$$|F_\beta(\omega)| < \exp\{|\pi \cdot |\operatorname{Im} \beta||\} \cdot \tilde{F}_\beta(\omega), \quad (2.3)$$

где

$$\tilde{F}_\beta(\omega) = \frac{|f(\omega)| \cdot (\operatorname{Im} \omega_1 - |\omega'|^2)^{\operatorname{Re} \beta}}{|\bar{\omega}_1 - i|^{n+1+\operatorname{Re} \beta}} \quad (\omega \in \Omega_n). \quad (2.4)$$

Если $p = 1$, то при $\omega \in \Omega_n$

$$\tilde{F}_\beta(\omega) \leq |f(\omega)| \cdot (\operatorname{Im} \omega_1 - |\omega'|^2)^2 \in L^1(\Omega_n). \quad (2.5)$$

Если же $1 < p < \infty$, то положив $f = p/(p-1)$, по неравенству Гёльдера получаем

$$\int_{\Omega_n} \tilde{F}_\beta(\omega) dm(\omega) \leq \|f\|_{p, \alpha} \cdot I^{1/q}, \quad (2.6)$$

где

$$I = \int_{\Omega_n} \frac{(\operatorname{Im} \omega_1 - |\omega'|^2)^{\frac{p}{q} \left(\operatorname{Re} \beta - \frac{\alpha}{p} \right)}}{|\bar{\omega}_1 - i|^{p(n+1+\operatorname{Re} \beta)}} dm(\omega) < +\infty. \quad (2.7)$$

2.2. При произвольном $\beta \in \mathbb{C}^1$ рассмотрим следующий интегральный оператор:

$$\begin{aligned} T_\beta f(\omega) &= 2^{n-1+\beta} \cdot c_{n, \beta} \cdot \int_{\Omega_n} \frac{f(\omega) \cdot (\operatorname{Im} \omega_1 - |\omega'|^2)^\beta dm(\omega)}{[i(\bar{\omega}_1 - \omega_1) - 2 \langle \omega', \omega' \rangle]^{n+1+\beta}} = \\ &= \frac{4^{n+\beta} \cdot c_{n, \beta}}{(\omega_1 + i)^{n+1+\beta}} \int_{\Omega_n} G(\omega, \omega, \beta, f) dm(\omega), \quad \omega \in \Omega_n, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$G(\omega, \omega, \beta, f) = \frac{f(\omega) \cdot (\operatorname{Im} \omega_1 - |\omega'|^2)^\beta}{[1 - \langle \Phi^{-1} \omega, \Phi^{-1} \omega \rangle]^{n+1+\beta} \cdot (\bar{\omega}_1 - i)^{n+1+\beta}}. \quad (2.9)$$

($\omega, \omega \in \Omega_n, \beta \in \mathbb{C}^1$)

Из леммы 2.1 вытекает следующая

Лемма 2.2. Пусть $f \in L^p_2(\Omega_n)$ и $G(w, \omega, \beta, f)$ связана с f соотношениями (2.9).

1. Если $p=1$, компакт $K \subset \Omega_n$, $0 < A < \infty$, $\alpha < a$, то существует функция $\Psi \in L^1(\Omega_n)$ такая, что

$$|G(w, \omega, \beta, f)| \leq \Psi(\omega), \quad \omega \in \Omega_n \quad (2.10)$$

равномерно по $w \in K$ и $\beta \in \mathbb{C}^1$ с $|\operatorname{Im} \beta| \leq A$, $\alpha \leq \operatorname{Re} \beta \leq a$.

2. Если $1 < p < \infty$, компакт $K \subset \Omega_n$, $0 < A < \infty$, $(\alpha+1)/p - 1 < \alpha_1 < \alpha_2$, то существует функция $\Psi \in L^1(\Omega_n)$ такая, что

$$|G(w, \omega, \beta, f)| \leq \Psi(\omega), \quad \omega \in \Omega_n \quad (2.11)$$

равномерно по $w \in K$ и $\beta \in \mathbb{C}^1$ с $|\operatorname{Im} \beta| \leq A$, $\alpha_1 \leq \operatorname{Re} \beta \leq \alpha_2$.

Следствие (а). Пусть $f(\omega) \in L^p_2(\Omega_n)$ и $\beta \vdash (p, \alpha)$. Тогда $T_\beta f(w)$ голоморфна, как функция от $w \in \Omega_n$.

Следствие (б). Пусть $f(\omega) \in L^p_2(\Omega_n)$ и $w \in \Omega_n$. Если $1 < p < \infty$, то $T_\beta f(w)$, как функция от β , голоморфна в области $\operatorname{Re} \beta > (\alpha+1)/p - 1$. Если $p=1$, то $T_\beta f(w)$, как функция от β , голоморфна в области $\operatorname{Re} \beta > \alpha$ и непрерывна при $\operatorname{Re} \beta \geq \alpha$.

2.3. Справедлива основная

Теорема 2.1. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$, $f \in H^p_\alpha(\Omega_n)$ и $\beta \vdash (p, \alpha)$. Тогда

$$f(w) = T_\beta f(w), \quad w \in \Omega_n. \quad (2.12)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $w \in \Omega_n$ и положим $\beta_0 = \max \{0; (\alpha+1)/p - 1\}$. В силу следствия (б) из леммы 2.2 нам достаточно установить (2.12) лишь для вещественных $\beta > \beta_0$. Положим $z = \Phi^{-1} w \in B_n$ и выберем $r_0 \in (0; 1)$, так, чтобы $z \in B_{n,r}$ при $r_0 \leq r < 1$. При этом

$$w \in \Omega_{n,r} = \Phi(B_{n,r}), \quad r_0 \leq r < 1. \quad (2.13)$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$g(\zeta) = \frac{f(\Phi(\zeta))}{(1 - \zeta_1)^{\alpha+1+\beta}}, \quad \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in B_n. \quad (2.14)$$

Очевидно, $g \in H(B_n)$. Следовательно

$$\int_{B_{n,r}} |g(\zeta)|^p \cdot (r^2 - |\zeta|^2)^\beta d\tau(\zeta) < +\infty \quad (r_0 \leq r < 1). \quad (2.15)$$

Применим к функции g теорему А, затем учтем, что $z = \Phi^{-1} w$ и произведем замену переменной $\zeta = \Phi^{-1} \omega$, $\omega \in \Omega_{n,r}$. Тогда получим

$$f(w) \cdot (w_1 + i)^{\alpha+1+\beta} = c_{n,\beta} \cdot r^2 \cdot \int_{\Omega_n} F_r(\omega) d\tau(\omega) \quad (2.16)$$

($r_0 \leq r < 1$),

где

$$F_r(\omega) = \frac{f(\omega) \cdot (r^2 - |\Phi^{-1} \omega|^2)^\beta \cdot (w_1 + i)^{\alpha+1+\beta}}{(r^2 - \langle \Phi^{-1} \omega, \Phi^{-1} \omega \rangle)^{\alpha+1+\beta}} \cdot |\Delta^{-1}(\omega)|^2 \cdot \chi_{n,r}(\omega). \quad (2.17)$$

Здесь $\omega \in \Omega_n$, а $\chi_{n,r}$ — характеристическая функция множества $\Omega_{n,r}$. В (2.17) перейдем к пределу при $r \uparrow 1$ под знаком интеграла, воспользовавшись теоремой Лебега, возможность применения которой обеспечивается леммой 2.1. Затем полученное равенство преобразуем при помощи формул (1.5)—(1.7), в результате получим (2.12), и теорема доказана.

Еще раз отметим, что теорема 2.1 была доказана С. Г. Гиндикиным [5] для более широких классов областей Зингеля, но для значений параметров $p = 2$ и $\alpha = \beta = 0$.

В дальнейшем Койфман и Рохберг [6] установили аналогичный результат вновь для $p = 2$ и при $\alpha = \beta > -1$.

Наконец, отметим, что обе эти работы опираются на технику преобразований Фурье—Планшереля.

2.4. Для области $\bar{\Omega}_n$ можно ввести оператор $\tilde{T}_\beta$, являющийся аналогом T_β :

$$\tilde{T}_\beta \varphi(w) = 2^\beta \cdot c_{n,\beta} \cdot \int_{\bar{\Omega}_n} \frac{\varphi(\omega) \cdot \left[\operatorname{Im} \omega_1 - \sum_{k=2}^n (\operatorname{Im} \omega_k)^2 \right]^\beta dm(\omega)}{\left[i(\bar{\omega}_1 - w_1) + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n (\bar{\omega}_k - w_k)^2 \right]^{n+1+\beta}} \quad (w \in \bar{\Omega}_n) \quad (2.18)$$

Из теоремы 2.1 следует

Теорема 2.2. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$, $\varphi \in H_\alpha^p(\bar{\Omega}_n)$ и $\beta = (p, \alpha)$. Тогда

$$\varphi(w) \equiv \tilde{T}_\beta \varphi(w), \quad w \in \bar{\Omega}_n. \quad (2.19)$$

3. Рассмотрим при $t > -1$ и $c > 0$ следующее выражение:

$$J_{t,c}^n(w) = \int_{\bar{\Omega}_n} \frac{(\operatorname{Im} \omega_1 - |\omega'|^2)^t dm(\omega)}{|i(\bar{\omega}_1 - w_1) - 2\langle w', \omega' \rangle|^{n+1+t+c}} \quad (w \in \bar{\Omega}_n). \quad (3.1)$$

Лемма 3.1.

$$J_{t,c}^n(w) \equiv \frac{\operatorname{const}}{(\operatorname{Im} \omega_1 - |w'|^2)^c}, \quad w \in \bar{\Omega}_n, \quad (3.2)$$

где константа зависит лишь от n, t, c .

Доказательство леммы опускается, поскольку в работе [6] вычислены более общие интегралы, методами, развитыми в [5].

Теорема 3.1. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$ и комплексное число β выбрано так: $\operatorname{Re} \beta > (\alpha + 1)/p - 1$. Тогда T_β является непрерывным проектором $L_\alpha^p(\bar{\Omega}_n)$ на $H_\alpha^p(\bar{\Omega}_n)$.

Доказательство. Пусть $f \in L_\alpha^p(\bar{\Omega}_n)$, тогда $T_\beta f \in H(\bar{\Omega}_n)$ в силу следствия (а) из леммы 2.2. Кроме того

$$|T_\beta f(w)| \leq \operatorname{const} \cdot \int_{\bar{\Omega}_n} \frac{|f(\omega)| \cdot (\operatorname{Im} \omega_1 - |\omega'|^2)^{\operatorname{Re} \beta} dm(\omega)}{|i(\bar{\omega}_1 - w_1) - 2\langle w', \omega' \rangle|^{n+1+\operatorname{Re} \beta}}. \quad (3.3)$$

При $p = 1$ утверждение теоремы следует непосредственно из (3.3) и леммы 3.1. Если же $1 < p < \infty$, то положим $q = p/(p-1)$ и будем доказывать ограниченность оператора T^p в пространстве $L_\infty(\Omega_n)$ при помощи леммы Форелли—Рудина (см. [3]). Для этого положим

$$d\mu(w) = (\operatorname{Im} w_1 - |w'|^2)^\alpha dm(w), \quad (3.4)$$

$$Q(w, w') = \frac{(\operatorname{Im} w_1 - |w'|^2)^{\operatorname{Re} \beta - \alpha}}{i(w_1 - w_1') - 2 \langle w', w' \rangle |w'|^{\alpha+1 + \operatorname{Re} \beta}}. \quad (3.5)$$

Положительную функцию g , определенную в Ω_n , будем искать в виде: $g(w) = (\operatorname{Im} w_1 - |w'|^2)^{-\delta}$, $0 < \delta < \infty$, $w \in \Omega_n$. Тогда получаем, что δ должно подчиняться условиям вида

$$\operatorname{Re} \beta - \delta \cdot g > -1, \quad \alpha - \delta \cdot p > -1, \quad \operatorname{Re} \beta - \alpha + \delta \cdot p > 0. \quad (3.6)$$

В силу исходных предположений такой выбор положительного числа δ возможен и теорема доказана.

Замечание. При $1 < p < \infty$, $\alpha > -1$, $\beta > \alpha$ теорема 3.1 является частным случаем более общего утверждения (см. [6], лемма 2.8).

Справедлива также

Теорема 3.2. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$ и комплексное число β выбрано так: $\operatorname{Re} \beta > (\alpha + 1)/p - 1$. Тогда T_β является непрерывным проектором $L_\infty^p(\bar{\Omega}_n)$ на $H_\alpha^p(\bar{\Omega}_n)$.

Институт математики
АН Армянской ССР,
Ереванский государственный
университет

Поступила 13. IV. 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. О представимости некоторых классов мероморфных функций в единичном круге ДАН Арм.ССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
2. М. М. Джрбашян. К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. Ин-та матем. и механики АН Арм.ССР, вып. 2, 1948, 3—40.
3. F. Forelli, W. Rudin. Projections on spaces of holomorphic functions in balls, Indiana Univ. Math. J., 24, № 6, 1974, 593—602.
4. М. М. Джрбашян, А. Э. Джрбашян. Интегральное представление для некоторых классов аналитических функций в полуплоскости, ДАН СССР, 285, № 3, 1985, 547—550.
5. С. Г. Гиндикин. Анализ в однородных областях, УМН, 19, № 4, 1964, 3—92.
6. R. F. Coifman, R. Rochberg. Representations theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p , Astérisque, 77, 1980, 11—66.

УДК 517.51

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

В. М. МАНУКЯН

О НОСИТЕЛЯХ ФУНКЦИЙ, ОБРАЗУЮЩИХ ПОЛНУЮ ОРТОНОРМАЛЬНУЮ СИСТЕМУ

Как было показано Орличем в работе [1] (см., например, [2], стр. 174), для полной ортонормальной системы $\{\varphi_n(x)\}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(x)$ почти всюду расходится. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная ортонормальная система функций в пространстве $L^2[0, 1]$. Положим

$$E_n = \{x \mid x \in [0, 1], \varphi_n(x) \neq 0\}.$$

Из теоремы Орлича следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n = \infty. \quad (1)$$

Как известно существуют полные ортонормированные системы, для которых $\mu E_n \rightarrow 0$. Например, для системы Хаара $\mu E_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Возникает вопрос, что можно сказать о скорости убывания μE_n для полных ортонормированных систем, оставаясь конечно в рамках соотношения (1). Оказывается верно следующее утверждение.

Теорема. Для любой последовательности положительных чисел $\varepsilon_n (n=1, 2, \dots)$, удовлетворяющих условию $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = \infty$, существует в пространстве $L^2[0, 1]$ такая полная ортонормированная система функций $\{\varphi_n(x)\}$, что $\mu E_n \leq \varepsilon_n$, $n=1, 2, \dots$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая

Лемма. Если даны:

I. целое число $M > 0$,

II. ортонормированная система ступенчатых функций $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^N$ на отрезке $[0, 1]$, причем все эти функции постоянны на интервалах $\left(\frac{j-1}{M}, \frac{j}{M}\right)$, $(1 \leq j \leq M)$,

III. такая последовательность рациональных чисел $\sigma_i > 0$, что

$$\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \sigma_i = 1, \quad 0 = n_1 < n_2 < n_3 < \dots,$$

то систему $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^N$ можно дополнить ступенчатыми функциями $\varphi_{N+1}(x), \varphi_{N+2}(x), \dots, \varphi_N(x)$ таким образом, чтобы полученная

в результате этого система функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N'}$ удовлетворяла следующим условиям:

1° система $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N'}$ ортонормирована на отрезке $[0,1]$,

2° концы всех интервалов постоянств функций $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, N'$ — рациональные точки,

3° $\mu E_i = \tau_i$, $i = N+1, N+2, \dots, N'$,

4° характеристическую функцию любого интервала $\left(\frac{j-1}{M}, \frac{j}{M}\right)$, $(1 \leq j \leq M)$ можно получить при помощи линейных комбинаций функций $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, N'$).

Доказательство леммы. Составим матрицу $A = \{a_{ij}\}$, $(1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M)$, где a_{ij} — это значение функции $\varphi_i(x)$ на интервале $\left(\frac{j-1}{M}, \frac{j}{M}\right)$. Из условия II леммы следует, что произвольные две строки этой матрицы ортогональны, то есть

$$(a^{(i)}, a^{(i')}) = \sum_{j=1}^M a_{ij} a_{i'j} = 0. \quad (2)$$

Из этого, в свою очередь, следует, что

$$M > N. \quad (3)$$

Если $M = N$, то система $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^N$ является искомой.

Рассмотрим случай, когда $M > N$. Дополним матрицу A новыми строками

$$b^{(i)} = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{iM}), \quad i = 1, 2, \dots, M-N \quad (4)$$

до полной ортонормированной матрицы $\bar{A}$.

Функции $\varphi_{N+1}(x), \varphi_{N+2}(x), \dots, \varphi_{N'}(x)$ будем строить пачками. Опишем как строится первая пачка функций.

Возьмем числа $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ (см. условие III леммы), $N+1$ -ую строчку матрицы $\bar{A}$ $b^{(1)} = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1M})$ и построим функции $\bar{\varphi}_{N+1}(x)$, $= 1, 2, \dots, n_2$ следующим образом:

$$\bar{\varphi}_{N+1}(x) = \begin{cases} b_{11}, & \text{если } x \in \left(\frac{\sum_{j=1}^{i-1} \sigma_j}{M}, \frac{\sum_{j=1}^i \sigma_j}{M}\right), \\ \dots \dots \dots \\ b_{1i}, & \text{если } x \in \left(\frac{i-1 + \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_j}{M}, \frac{i-1 + \sum_{j=1}^i \sigma_j}{M}\right), \\ \dots \dots \dots \\ b_{1M}, & \text{если } x \in \left(\frac{M-1 + \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_j}{M}, \frac{M-1 + \sum_{j=1}^i \sigma_j}{M}\right), \\ 0 & \text{— в остальных точках.} \end{cases} \quad (5)$$

Функции, полученные в результате нормирования функций $\bar{\varphi}_{N+l}(x)$ ($l=1, 2, \dots, n_k$), в пространстве $L^2[0, 1]$ обозначим через $\varphi_{N+l}(x)$. Предположив, что уже построены первые $k-1$ пачек системы $\{\varphi_l(x)\}_{l=N+1}^{N'}$, т. е. функции $\varphi_{N+1}(x), \dots, \varphi_{N+n_k}(x), \dots, \varphi_{N+n_k}(x)$, для построения которых использованы строчки $b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(k-1)}$ матрицы $\bar{A}$ и числа $\{\sigma_l\}_{l=1}^{n_k}$, опишем как строится k -ая пачка. Она получается в результате нормирования в пространстве $L^2[0, 1]$ функций $\bar{\varphi}_{N+n_k+l}(x)$ $l=1, 2, \dots, (n_{k+1}-n_k)$, которые строятся следующим образом:

$$\bar{\varphi}_{N+n_k+l}(x) = \begin{cases} b_{kl}, & \text{если } x \in \left(\frac{\sum_{j=1}^{l-1} \sigma_{n_k+j}}{M}, \frac{\sum_{j=1}^l \sigma_{n_k+j}}{M} \right), \\ \dots \dots \dots \\ b_{ki}, & \text{если } x \in \left(\frac{i-1 + \sum_{j=1}^{l-1} \sigma_{n_k+j}}{M}, \frac{i-1 + \sum_{j=1}^l \sigma_{n_k+j}}{M} \right), \\ \dots \dots \dots \\ b_{kM}, & \text{если } x \in \left(\frac{M-1 + \sum_{j=1}^{l-1} \sigma_{n_k+j}}{M}, \frac{M-1 + \sum_{j=1}^l \sigma_{n_k+j}}{M} \right), \\ 0 & \text{— в остальных точках.} \end{cases} \quad (6)$$

Проверим, что построенная таким образом система $\{\varphi_l(x)\}_{l=N+1}^{N'}$ является искомой, то есть удовлетворяет условиям леммы.

Из построения функций $\bar{\varphi}_{N+l}(x)$ и из того, что $\sum_{l=n_k+1}^{n_{k+1}} \sigma_l = 1$ следует,

что на интервале $\left(\frac{i-1}{M}, \frac{i}{M}\right)$, $i=1, 2, \dots, M$

$$\sum_{l=1}^{n_{k+1}-n_k} \bar{\varphi}_{N+n_k+l}(x) = b_{ki}. \quad (7)$$

А так как матрица $\bar{A}$ по построению является полной ортонормированной, то из (7) следует, что при помощи линейных комбинаций функций $\varphi_l(x)$, $i=1, 2, \dots, N'$ можно получить характеристическую функцию произвольного интервала $\left(\frac{i-1}{M}, \frac{i}{M}\right)$, $i=1, 2, \dots, M$, т. е. построенная система удовлетворяет условию 4° леммы. Из остальных свойств нуждается в проверке только пункт 1°.

Если $1 \leq i \leq N$, $1 \leq i' \leq M-N$, то

$$\begin{aligned} (\varphi_i, \varphi_{N+i'}) &= \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_{N+i'}(x) dx = \sum_{j=1}^M \int_{\frac{j-1}{M}}^{\frac{j}{M}} \varphi_i(x) \varphi_{N+i'}(x) dx = \\ &= \sum_{j=1}^M a_{ij} b_{i',j} \frac{\sigma_j}{M} = 0. \end{aligned}$$

Если $1 \leq i \leq n_{k+1} - n_k$, $1 \leq i' \leq n_{k+1} - n_k$, $i \neq i'$, $k = 1, 2, \dots, M - N$ (т. е. берутся две разные функции из одной и той же пачки), то

$$(\varphi_{N+n_k+i}, \varphi_{N+n_k+i'}) = 0,$$

так как носители функций, принадлежащих одной и той же пачке не пересекаются.

Теперь рассмотрим случай, когда берутся функции из разных пачек. Нам нужно доказать, что

$$(\varphi_{N+n_k+i}, \varphi_{N+n_{k'}+i'}) = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим интервалы Δ_i , $i = 1, 2, \dots, M$, где

$$\Delta_i = \left(\frac{i-1 + \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_{n_k+j}}{M}, \frac{i-1 + \sum_{j=1}^i \sigma_{n_k+j}}{M} \right) \cap \left(\frac{i-1 + \sum_{j=1}^{i'-1} \sigma_{n_{k'}+j}}{M}, \frac{i-1 + \sum_{j=1}^{i'} \sigma_{n_{k'}+j}}{M} \right). \quad (9)$$

Легко заметить, что интервал Δ_i получается при помощи сдвига интервала Δ_1 вправо на величину $\frac{i-1}{M}$, значит

$$\mu \Delta_i = \mu \Delta_1, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (10)$$

Кроме того

$$\Delta_i \subset \left(\frac{i-1}{M}, \frac{i}{M} \right), \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (11)$$

Из соотношений (6), (9), (10), (11) и ортогональности строчек матрицы $\bar{A}$ следует справедливость соотношения (8). В самом деле

$$\begin{aligned} (\varphi_{N+n_k+i}, \varphi_{N+n_{k'}+i'}) &= \sum_{i=1}^M \int_{\frac{i-1}{M}}^{\frac{i}{M}} \varphi_{N+n_k+i}(x) \varphi_{N+n_{k'}+i'}(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^M \int_{\Delta_i} \varphi_{N+n_k+i}(x) \varphi_{N+n_{k'}+i'}(x) dx = \sum_{i=1}^M b_{ki} b_{k'i} \mu \Delta_i = \\ &= \mu \Delta_1 \sum_{i=1}^M b_{ki} b_{k'i} = 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Возьмем последовательность рациональных чисел σ_i , удовлетворяющих следующим условиям:

$$0 < \sigma_i \leq \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, \sigma_0 = 0, \quad \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \sigma_i = 1, \quad 0 = n_1 < n_2 < n_3 < \dots \quad (12)$$

Это всегда возможно, так как по условию теоремы $\varepsilon_i > 0$, $i = 1, 2, \dots$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = +\infty$. Первые n_2 функции построим следующим образом:

$$\varphi_l(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_l}}, & \text{если } x \in \left(\sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_i, \sum_{i=0}^l \varepsilon_i \right), \quad l=1, 2, \dots, n_2 \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Выберем натуральное число $M_1 > n_2$ таким образом, чтобы числа $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n_2}$ нацело делились на M_1 . (Это всегда возможно, т. к. числа σ_i рациональны). Для числа M_1 ортонормированной системы $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n_2}$ и чисел $\sigma_{n_2+1}, \sigma_{n_2+2}, \dots$, применив предыдущую лемму, получим ортонормированную систему функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{M_1}$. Так как по условию 2° леммы концы интервалов постоянства функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n_2}(x)$ рациональны, то можно выбрать натуральное число $M_2 > M_1$ так, что все функции $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{M_1}$ будут постоянны на интервалах $\left(\frac{i-1}{M_2}, \frac{i}{M_2} \right)$. Для чисел M_2 ортонормированной системы $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{M_1}$ и чисел $\sigma_{M_1+1}, \sigma_{M_1+2}, \dots$ опять применим лемму и т. д.

Получим искомую систему ортонормированных функций, полнота которой следует из условия 4° леммы.

Теорема доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступила 1. VII. 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Orlicz. Zur Theorie der Orthogonalreihen, Bull. Acad. Polonaise, 1927, 81—115.
2. С. Качмаж, Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов, М., Физматгиз, 1958.
3. В. Я. Козлов. О распределении положительных и отрицательных значений ортогональных и нормированных функций, образующих полную систему, Мат. сб., 23, 1948, 475—480.

Ր Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Յ Ո Ւ Ն

2. Գ. Ղազարյան, Վ. Ն. Մադրադյան <i>Տված հիպոէլիպտիկության կրող ունեցող ու-հիպոէլիպտիկ հավասարումների լուծումների գնահատականներ</i>	315
Գ. Ռ. Հովհաննիսյան. <i>Տրված վաղեմիկաներով սկզբնական և խառը խեղդերների հիպերբոլական հավասարումների հավասար</i>	337
Ս. Ս. Ղազարյան. <i>Անհավասարությունների Օրիշի տարածություններում մի մաքսիմալ ֆունկցիայի վերաբերյալ</i>	358
Ի. Վ. Օստրովսկի. <i>Մ. Մ. Զրբաշյանի մի հարցի վերաբերյալ</i>	378
Ա. Է. Զրբաշյան. <i>Կիսատարածություններում հարմարիկ ֆունկցիաների դասեր և Մ. Ռիսսի թեորեմի անալոգը</i>	386

ՀԱՄԱՌՈՏ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

Մ. Մ. Զրբաշյան, Ա. Հ. Կադապտյան. <i>Զիգելի տիրույթում անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ դասերի ինտեգրալ ներկայացումները</i>	399
Վ. Մ. Մառնիկյան. <i>Լրիվ օրթոնորմալորդած համակարգ կազմող ֆունկցիաների կրիչների մասին</i>	405

СОДЕРЖАНИЕ

Г. Г. Казарян, В. Н. Маркарян. <i>Оценки решений негиповоллиптических уравнений с данным носителем гиповоллиптичности</i>	315
Г. Р. Оганесян. <i>О начальной и смешанной задачах с заданными вронскианами для сингулярных гиперболических уравнений второго порядка</i>	337
С. С. Казарян. <i>Неравенства в пространствах Орлича для одной максимальной функции</i>	358
И. В. Островский. <i>Об одном вопросе М. М. Джрбашяна</i>	378
А. Э. Джрбашян. <i>Классы гармонических функций в полупространствах и аналог теоремы М. Рисса</i>	386

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян. <i>Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области Зигеля</i>	399
В. М. Манукян. <i>О носителях функций, образующих полную ортонормальную систему</i>	406

CONTENTS

G. G. Kazarian, V. N. Markarian. <i>Estimates for solutions of nonhypocoelliptical equations with given hypocoellipticity carrier</i>	315
G. R. Oganessian. <i>On the initial value and mixed problems with given vronskians for the second order singular hyperbolic equations</i>	337
S. S. Kazarian. <i>Inequalities for a maximal function in Orlicz spaces</i>	358
I. V. Ostrovskii. <i>On a problem of M. M. Dzhrbashyan</i>	378
A. E. Djrbashian. <i>A^p_α classes of harmonic functions in half-spaces and an analog of M. Riesz theorem</i>	386

Short communications

M. M. Dzhrbashyan, A. H. Karapetyan. <i>Integral representations for some classes of functions analytic in Siegel domain</i>	399
V. M. Manukyan. <i>On the supports of functions, conforming a complete orthonormal system</i>	406