ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ
Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ
Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳՆԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱՂՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Գործադիր խմբագիր Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
зам. главного редактора
Р. В. АМБАРЦУМЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН
А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН
зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке), а кратких сообщений—не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

ԳԻՆԸ
ЦЕНА 1 Ռ. 20 Կ.
P.. K.

1987-

Индекс 77735

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. A. ALEXANDRIAN
associate editor
R. V. AMBARTZUMIAN
N. U. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKIĬ

exacutive secretary M. A. Hovhannesien

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contribttors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenien S.S.R., series "Matomatika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication,

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initals and name, the title of the book, the place of publication, the publisher tbe date muse be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to indicated by a numeral in square brackets properey inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article shoule contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitled ot twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 3, 1987 Математика

УДК 517.9

А. А. ВАГАРШАКЯН

ОБ ОДНОМ НОВОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УСЕЧЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА—ХОПФА

Настоящая статья посвящена исследованию интегрального уравнения

$$\int_0^a k(x-t)f(t)\,dt = g(x),\ 0<x<a<\infty. \tag{1}$$

Эти уравнения отличаются от хорошо известных уравнений Винера—Хопфа тем, что верхний предел в интеграле — конечное число. Отмеченное обстоятельство существенно осложняет исследование уравнения (1), так как классический метод факторизации, позволяющий во многих случаях эффективно решить уравнение Винера—Хопфа, в этом случае не проходит.

Рамки настоящей статьи не позволяют остановиться на важном значении этих уравнений для ряда задач физики и техники, а также на существующих методах их решения. Достаточно полный обзор об уравнениях (1) можно найти в работе Л. А. Сахновича [1].

В настоящей статье предлагается новый метод решения уравнения (1). Статья состоит из пяти параграфов. В первом параграфе излагается сущность предложенного метода, который, в общих чертах, основан на возможности представления ядра $k(x)$ в виде ряда

$$k(x)=\sum a_k e^{i\lambda_k x},\ -a<x<a, \tag{2}$$

где система $\{e^{i\lambda_k x}\}$ имеет конечный дефект (см. определение в § 1). Во втором и третьем параграфах исследуется вопрос о конечности дефекта системы $\{e^{i\lambda_k x}\}$ в интересующих нас пространствах функций. В четвертом параграфе приведены достаточные условия, обеспечивающие представление ядра $k(x)$ в виде ряда (2). В последнем параграфе на конкретном уравнении вида (1) иллюстрируется предложенный метод.

1°. Обозначим через $B_2^\sigma(a,b)$, $0<\sigma<1$, пространство Бесова, состоящее из тех функций $f(x)$, $a<x<b$, для которых сходится интеграл

$$\|f\|^2_{B_2^\sigma}=\int_a^b |f(x)|^2\,dx+\int_a^b\int_a^b \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+2\sigma}}\,dx\,dy<\infty.$$

Определение. Система $\{e^{i\lambda_k x}\}$ имеет конечный дефект в пространстве $B_2^\sigma(a,b)$, если прибавляя или отнимая из этой системе конечное число функций получаем полную и минимальную систему в

$B_2^{\sigma}(a, b)$. Дефектом этой системы в $B_2^{\sigma}(a, b)$ назовем число $n(\sigma)$, равное количеству прибавляемых функций, если придется прибавить, и равное количеству отнимаемых функций с обратным знаком, если придется отнять.

Пусть $k(x)$ допускает представление (2). Рассмотрим уравнение (1) с правой частью $g(x) \in B_2^{\sigma}(0, a)$ и с искомой функцией $f(x) \in B_2^{\mu}(0, a)$. В зависимости от того, какие конечные дефекты имеет система $\{e^{i\lambda_k x}\}$ в пространствах $B_2^{\sigma}(0, a)$ и $B_2^{\mu}(0, a)$, возможны различные утверждения относительно разрешимости уравнения (1). В приведенной ниже теореме рассматривается случай, когда $n(\sigma) = 0$.

Теорема 1. *Пусть $k(x)$ допускает представление*

$$k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\lambda_k x}, \quad -a < x < a, \quad a_k \neq 0,$$

где ряд сходится в $L_1(-a, a)$, а система $\{e^{i\lambda_k x}\}_{k=1}^{\infty}$ имеет конечный дефект $n(\mu)$ в пространстве $B_2^{\mu}(0, a)$ и нулевой дефект в $B_2^{\sigma}(0, a)$.

Тогда

1. *Если $n(\mu) = 0$, то при условии сходимости в $B_2^{\mu}(0, a)$ ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k^*(x)}{a_k} \int_0^a h_k(t)\, g(t)\, dt \tag{3}$$

для функции $g(x) \in B_2^{\sigma}(0, a)$, где $\{h_k(x)\}_1^{\infty}$ и $\{h_k^*(x)\}_1^{\infty}$ системы, биортогональные к $\{e^{i\lambda_k x}\}_1^{\infty}$ и $\{e^{-i\lambda_k x}\}_1^{\infty}$, уравнение (1) имеет единственное решение $f(x) \in B_2^{\mu}(0, a)$, которое представляется в виде ряда (3).

2. *Если $n(\mu) < 0$, то при условии сходимости в $B_2^{\mu}(0, a)$ ряда*

$$\sum_{k=1-n(\mu)}^{\infty} \frac{h_k^*(x)}{a_k} \int_0^a h_k(t)\, g(t)\, dt \tag{4}$$

для $g(x) \in B_2^{\sigma}(0, a)$, где $\{h_k(x)\}_1^{\infty}$ и $\{h_k^*(x)\}_{1-n(\mu)}^{\infty}$ системы, биортогональные к $\{e^{i\lambda_k x}\}_1^{\infty}$ и $\{e^{-i\lambda_k x}\}_{1-n(\mu)}^{\infty}$, уравнение (1) имеет единственное решение $f(x) \in B_2^{\mu}(0, a)$, если

$$\int_0^a e^{-i\lambda_j x} \left(\sum_{k=1-n(\mu)}^{\infty} \frac{h_k^*(x)}{a_k} \int_0^a h_k(t)\, g(t)\, dt \right) dx =$$

$$= \frac{1}{a_j} \int_0^a h_j(x)\, g(x)\, dx, \quad j = 1, \cdots, -n(\mu).$$

Это решение представляется в виде ряда (4).

3. *Если* $n(\mu) > 0$, *то при условии сходимости в* $B_2^{\mu}(0, a)$ *ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k^*(x)}{a_k} \int_0^a h_k(t)\, g(t)\, dt$$

для $g(x) \in B_2^{\sigma}(0, a)$, *где* $\{h_k(x)\}_1^{\infty}$ *и* $\{h_k^*(x)\}_{k=-n(\mu)}^{\infty}$ *—системы, биортогональные к* $\{e^{i\lambda_k x}\}_1^{\infty}$ *и* $\{e^{-i\lambda_k x}\}_1^{\infty} \cup \{e^{-i\mu_j x}\}_{-n(\mu)}^{-1}$ *уравнение (1) имеет решение* $B_2^{\mu}(0, a)$, *которое допускает представление*

$$f(x) = \sum_{j=-n(\mu)}^{-1} x_j h_j^*(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k^*(x)}{a_k} \int_0^a h_k(t)\, g(t)\, dt,$$

где x_k *— произвольные числа.*

Доказательство. Уравнение (1) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\lambda_k x} \int_0^a e^{-i\lambda_k t} f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} e^{i\lambda_k x} \int_0^a h_k(t)\, g(t)\, dt,$$

где $\{h_k(x)\}_1^{\infty}$ — система, биортогональная к $\{e^{i\lambda_k x}\}_1^{\infty}$.

Так как $n(\sigma) = 0$, то

$$a_k \int_0^a e^{-i\lambda_k x} f(t)\, dt = \int_0^a h_k(t)\, g(t)\, dt, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{5}$$

В случае, когда $n(\mu) = 0$, проблема моментов (5) имеет в $f(t) \in B_2^{\mu}(0, a)$ единственное решение, допускающее представление

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k^*(x)}{a_k} \int_0^a h_k(t)\, g(t)\, dt,$$

где $\{h_k^*(x)\}_1^{\infty}$ —система, биортогональная к $\{e^{-i\lambda_k x}\}_1^{\infty}$ при условии, что ряд (3) сходится в $B_2^{\mu}(0, a)$.

В случае, когда $n(\mu) < 0$, проблема моментов (5) переопределена. Моментами функции $g(t)$ при $k = 1 - n(\mu), \cdots$ мы строим $f(t)$ по формуле

$$f(x) = \sum_{k=1-n(\mu)}^{\infty} \frac{h_k^*(x)}{a_k} \int_0^a h_k(t)\, g(t)\, dt,$$

где $\{h_k^*(x)\}_{1-n(\mu)}^{\infty}$—система, биортогональная к $\{e^{-i\lambda_k x}\}_{1-n(\mu)}^{\infty}$.

Подставляя выражение для $f(x)$ в (5) при $k = 1, \cdots, -n(\mu)$ получаем условия на правую часть.

В случае, когда $n(\mu) > 0$ моменты (5) не достаточны для однозначного определения функции $f(x)$. К системе $\{e^{-i\lambda_k x}\}_1^{\infty}$ мы добавляем $n(\mu)$ функций $\{e^{-i\mu_j x}\}_{-n(\mu)}^{-1}$. Обозначим через $\{h_k^*(x)\}_{-n(\mu)}^{\infty}$ систему, биортогональную к $\{e^{-i\lambda_k x}\}_1^{\infty} \cup \{e^{-i\mu_j x}\}_{-n(\mu)}^{-1}$. Тогда общее решение проблемы моментов (5) допускает представление

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{-1} x_k h_k^*(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k^*(x)}{a_k} \int_0^a h_k(t)\, g(t)\, dt,$$

где x_k — произвольные числа.

Замечание. Нетрудно усмотреть, что изложенный выше метод решения уравнения (1) проходит также и в тех случаях, когда система $\{e^{i\lambda_k x}\}_1^\infty$ имеет произвольные конечные дефекты в пространствах $B_2^1(0, a)$ и $B_2^\sigma(0, a)$.

2°. В настоящем параграфе собраны вспомогательные леммы, необходимые для получения основных результатов третьего параграфа.

Лемма 1. *Пусть* $\lambda_{-n}, \cdots, \lambda_0, \cdots, \lambda_n$ *— последовательность комплексных чисел. Тогда для любых* $c_{-n}, \cdots, c_0, \cdots, c_n$ *имеет место оценка*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\lambda_k x} \right|^2 dx \leqslant 3 \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \frac{|\lambda_k - k|^2 + 1}{1 + |\operatorname{Im} \lambda_k|} e^{2|\operatorname{Im} \lambda_k|\pi}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\lambda_k x} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_0^x \sum_{k=-n}^{n} (\lambda_k - k)\, c_k e^{i(\lambda_k - k)t + ikx} dt \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для второго слагаемого имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_0^x \sum_{k=-n}^{n} (\lambda_k - k)\, c_k e^{i(\lambda_k - k)t + ikx} dt \right|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \int_0^x \left| \sum_{k=-n}^{n} (\lambda_k - k)\, c_k e^{i(\lambda_k - k)t + ikx} \right|^2 dt\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-n}^{n} (\lambda_k - k)\, c_k e^{i(\lambda_k - k)t + ikx} \right|^2 dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \pi \sum_{k=-n}^{n} |\lambda_k - k|^2 |c_k|^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2\operatorname{Im} \lambda_k t} dt \leqslant \frac{\pi}{2} \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \frac{|\lambda_k - k|^2 + 1}{1 + |\operatorname{Im} \lambda_k|} e^{2|\operatorname{Im} \lambda_k|\pi}.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем встречаются такие λ_k, которые являются нулями некоторой целой функции вида

$$L(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} g(t)\, dt, \tag{6}$$

где $g(t) \in L_1(-\pi, \pi)$. Введем обозначение

$$h_n(x) = -ie^{-i\lambda_n x} \int_{-\pi}^{x} e^{i\lambda_n t} g(t)\, dt, \quad -\pi < x < \pi.$$

Легко проверить, что если нули $L(z)$ являются простыми, то

$$\frac{1}{L'(\lambda_n)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda_m x} h_n(x)\, dx = \delta_{n,m},$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронеккера. Более подробно о системе функций $h_n(x)$ можно прочесть в книге А. Ф. Леонтьева [2].

Лемма 2. *Пусть* λ_n — *нули целой функции* (6), *где* $g(t) \in L_1(-\pi, \pi)$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 |L'(\lambda_k)|^2 e^{-4\pi|\operatorname{Im}\lambda_k|} \frac{|\operatorname{Im}\lambda_k|+1}{|\lambda_k - k|^2+1} \leqslant M \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\lambda_k x} \right|^2 dx,$$

где M — *постоянное число.*

Доказательство. Для краткости, положим

$$Q(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\lambda_k x}.$$

Тогда для любых комплексных чисел d_k, $-n \leqslant k \leqslant n$ имеем

$$\left| \sum_{k=-n}^{n} c_k d_k \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} Q(x) \left(\sum_{k=-n}^{n} \frac{d_k}{L'(\lambda_k)} h_k(x) \right) dx \right| =$$

$$= \left| -i \int_{-\pi}^{\pi} Q(x) \int_{-\pi}^{x} \left(\sum_{k=-n}^{n} \frac{d_k}{L'(\lambda_k)} e^{i\lambda_k (t-x)} \right) g(t)\, dt\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \int_{t}^{\pi} \left(\left| \sum_{k=-n}^{n} \frac{d_k}{L'(\lambda_k)} e^{i\lambda_k (t-x)} \right) Q(x)\, dx\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)| \left(\int_{t}^{\pi} \left| \sum_{k=-n}^{n} \frac{d_k}{L'(\lambda_k)} e^{i\lambda_k (t-x)} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \left(\int_{-\pi}^{\pi} |Q(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)| dx \left(\int_{-\pi}^{\pi} |Q(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-2\pi}^{0} \left| \sum_{k=-n}^{n} \frac{d_k}{L'(\lambda_k)} e^{i\lambda_k y} \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|\, dt \left(\int_{-\pi}^{\pi} |Q(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-n}^{n} \frac{d_k e^{-i\lambda_k \pi}}{L'(\lambda_k)} e^{i\lambda_k y} \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Воспользовавшись леммой 1, имеем

$$\left|\sum_{k=-n}^{n} c_k d_k\right|^2 \leqslant M \int_{-\pi}^{\pi} |Q(x)|^2 dx \left(\sum_{k=-n}^{n} |d_k|^2 \left(\frac{(|\lambda_k - k|^2 + 1)\, e^{4\pi |\operatorname{Im} \lambda_k|}}{(1 + |\operatorname{Im} \lambda_k|)(L'(\lambda_k))^2} \right) \right).$$

Подставляя

$$d_k = \overline{c_k}\, |L'(\lambda_k)|^2\, e^{-4\pi |\operatorname{Im} \lambda_k|} \frac{1 + |\operatorname{Im} \lambda_k|}{|\lambda_k - k|^2 + 1},$$

получим

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 |L'(\lambda_k)|^2\, e^{-4\pi |\operatorname{Im} \lambda_k|} \frac{1 + |\operatorname{Im} \lambda_k|}{|\lambda_k - k|^2 + 1} \leqslant M \int_{-\pi}^{\pi} |Q(x)|^2 dx.$$

Лемма 3. *Пусть $g(x)$, $-a < x < a$, допускает представление*

$$g(x) = \frac{A}{(a+x)^{\alpha}} + \frac{B}{(a-x)^{\beta}} + g_0(x),$$

где $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, A и B—отличные от нуля числа и

$$\int_{-a}^{a} \left| g_0(x) - \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} g_0(t)\, dt \right| dx = o\left(\delta^{1-\min\{\alpha, \beta\}}\right).$$

Тогда

$$L(z) = \int_{-a}^{a} e^{izt}\, g(t)\, dt$$

является целой функцией экспоненциального типа a. Ее индикаторная диаграмма в направлении оси $0Y$—отрезок длины $2a$. Нули λ_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ функции $L(z)$ для достаточно больших n простые и имеют асимптотику

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{a} - \frac{\pi}{2a}\left(1 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + i\frac{\beta-\alpha}{2a} \ln \frac{\pi n}{a} + \frac{i}{2a} \ln \frac{B\Gamma(1-\beta)}{A\Gamma(1-\alpha)} + o(1),$$

при $n = 1, 2, \cdots$

и

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{a} + \frac{\pi}{2a}\left(1 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + i\frac{\beta-\alpha}{2a} \ln \frac{\pi |n|}{a} + \frac{i}{2a} \ln \frac{B\Gamma(1-\beta)}{A\Gamma(1-\alpha)} + o(1),$$

при $n = -1, -2, \cdots$

Функция $L(z)$ допускает оценки

$$M(1 + |x|)^{\max\{\alpha, \beta\} - 1} \geqslant |L(x)| \geqslant N(1 + |x|)^{\max\{\alpha, \beta\} - 1}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$|L'(\lambda_n)| \geqslant N |n|^{\frac{\alpha+\beta}{2} - 1}.$$

Отметим, что результаты, аналогичные утверждениям леммы 3, в случае, когда $\alpha = \beta$, содержатся в работе А. М. Седлецкого [2].

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$L_0(z) = \int_{-a}^{a} e^{izt} g_0(t)\, dt.$$

Имеем

$$|L_0(x+iy)| = \left| \int_{-a}^{a} e^{ixt-yt}\, g_0(t)\, dt \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-a+2\frac{ka}{n}}^{-a+2\frac{k+1}{n}a} e^{ixt-yt}\, g_0(t)\, dt \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_{-a}^{-a+2\frac{a}{n}} e^{ixt+2i\frac{ka}{n}\left(x-\frac{\pi n}{2a}\right)-y\left(t+2\frac{ak}{n}\right)}\, g_0\left(t+2\frac{ka}{n}\right) dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \int_{-a}^{-a+2\frac{a}{n}} e^{ixt} \left(e^{4i\frac{ka}{n}\left(x-\frac{\pi n}{2a}\right)-y\left(t+4\frac{ak}{n}\right)}\, g_0\left(t+4\frac{ka}{n}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - e^{2i\frac{2k+1}{n}a\left(x-\frac{\pi n}{2a}\right)-y\left(t+2\frac{a(2k+1)}{n}\right)} \right) g_0\left(t+2\frac{2k+1}{n}a\right) \right) dt \Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \int_{-a}^{-a+2\frac{a}{n}} \left| e^{4i\frac{ka}{n}\left(x-\frac{\pi n}{2a}\right)-y\left(t+4\frac{ak}{n}\right)} - e^{2i\frac{2k+1}{n}a\left(x-\frac{\pi n}{2a}\right)-y\left(t+2\frac{a(2k+1)}{n}\right)} \right| \cdot$$

$$\cdot \left| g_0\left(t+4\frac{ka}{n}\right) \right| dt + \int_{-a}^{-a+2\frac{a}{n}} \left| g_0\left(t+2\frac{2k+1}{n}a\right) - \right.$$

$$\left. - g_0\left(t+4\frac{ka}{n}\right) \right| e^{-y\left(t+2a\frac{2k+1}{n}\right)}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant e^{a|y|} \int_{-a}^{a} |g_0(t)|\, dt \left| 1 - e^{2i\frac{a}{n}\left(x-\frac{\pi n}{2a}\right)-\frac{ya}{n}} \right| +$$

$$+ e^{a|y|} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \int_{-a}^{-a+2\frac{a}{n}} \left| g_0\left(t+4\frac{ka}{n}+\frac{2a}{n}\right) - g_0\left(t+4\frac{ka}{n}\right) \right| dt.$$

Выбирая число $n = \left[\frac{2ax}{\pi}\right]$, при $|y| \leqslant |x|$ имеем

$$|L_0(x+iy)| \leqslant A\frac{e^{a|y|}}{n} + e^{a|y|} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \int_{-a}^{-a+2\frac{a}{n}} \left| g_0\left(t+4\frac{ka}{n}+\frac{2a}{n}\right) - \right.$$

$$\left. - g_0\left(t+4\frac{ka}{n}\right) \right| dt.$$

Следовательно

$$|L_0(x+iy)| \leqslant A\frac{e^{a|y|}}{|x|} + B\frac{e^{a|y|}}{|x|^{1-\min\{\alpha,\beta\}}}$$

в области $\left\{ z;\ |\mathrm{Im}\, z| < \frac{|\alpha-\beta|}{2a}\ln|\mathrm{Re}\, z| + c \right\}$

имеет место оценка

$$|L_0(x+iy)| \leqslant M|x|^{\min\{\alpha,\beta\}+\frac{|\alpha-\beta|}{2}-1},$$

а на действительной оси имеем

$$|L_0(x)| \leqslant M|x|^{\min\{\alpha,\beta\}-1}.$$

Теперь рассмотрим функцию

$$\int_0^a \frac{e^{-izt}}{t^\beta}dt = \int_0^a \frac{e^{-ixt+yt}}{t^\beta}dt = \int_0^a \frac{e^{-ixt}}{t^\beta}dt + \int_0^a \frac{e^{yt}-1}{t^\beta}e^{-ixt}dt =$$

$$= x^{\beta-1}\int_0^\infty \frac{e^{-it}}{t^\beta}dt + \int_0^a \frac{e^{yt}-1}{t^\beta}e^{-ixt}dt - \int_a^\infty \frac{e^{-ixt}}{t^\beta}dt,$$

где $z = x+iy$, $x>0$. Имеет место оценка

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ixt}}{t^\beta}dt = O\left(\frac{1}{x}\right),\ x\to\infty.$$

Далее, при $|y| < \frac{|\beta-\alpha|}{2a}\ln|x| + c$ имеем

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \int_{-a}^{-a+2\frac{a}{n}} \left| \frac{e^{y\left(t+4\frac{ka}{n}+\frac{2a}{n}\right)}-1}{\left(t+4\frac{ka}{n}+\frac{2a}{n}\right)^\beta} - \frac{e^{y\left(t+4\frac{ka}{n}\right)}-1}{\left(t+4\frac{ka}{n}\right)^\beta} \right| dt \leqslant \frac{M}{|x|^{1-\frac{|\alpha-\beta|}{2}}},$$

где $n = \left[\frac{2ax}{\pi}\right]$. Следовательно, для функции $L(z)$ в области $x>0$ и $|y| < \frac{|\beta-\alpha|}{2a}\ln x + c$ получаем асимптотику

$$L(x+iy) = A\,ix^{\alpha-1}\,e^{-iza+\frac{\pi}{2}(1-\alpha)i}\,\Gamma(1-\alpha) -$$

$$- B\,ix^{\beta-1}\,e^{iza+\frac{\pi}{2}(1-\beta)i}\,\Gamma(1-\beta) + o\left(x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}\right).$$

Аналогичным образом в области $x<0$ и $|y| < \frac{|x-\beta|}{2a}\ln|x| + c$ можно получить оценку

$$L(x+iy) = -Ai(-x)^{\alpha-1}\,e^{-iza+\frac{\pi}{2}(1-\alpha)i}\,\Gamma(1-\alpha) +$$

$$+ Bi(-x)^{\beta-1} e^{iza-\frac{\pi}{2}(1-\beta)i}\Gamma(1-\beta)+o\left(|x|^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right)}\right).$$

Из этих оценок следует, что на десйтвительной оси имеет место неравенство

$$A|x|^{\max\{\alpha,\beta\}-1}\geqslant|L(x)|\geqslant B|x|^{\max\{\alpha,\beta\}-1},\quad |x|>1.$$

Далее, при $|y|<\frac{|\alpha-\beta|}{2a}\ln|x|+c$ и $x>0$ имеем

$$L(x+iy)=\frac{2e^{\frac{\pi i(\alpha-\beta)}{4}}}{x^{1-\frac{\alpha+\beta}{2}}(A\Gamma(1-\alpha)B\Gamma(1-\beta))^{\frac{1}{2}}}\sin\left(za+\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-i\frac{\beta-\alpha}{2}\ln x-\frac{i}{2}\ln\frac{B\Gamma(1-\beta)}{A\Gamma(1-\alpha)}\right)+o\left(x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}\right),\qquad(7)$$

а при $x<0$ имеем

$$L(x+iy)=\frac{2e^{-\frac{\pi i(\alpha-\beta)}{4}}}{(-x)^{1-\frac{\alpha+\beta}{2}}(A\Gamma(1-\alpha)B\Gamma(1-\beta))^{\frac{1}{2}}}\sin\left(za-\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-i\frac{\beta-\alpha}{2}\ln(-x)-\frac{i}{2}\ln\frac{B\Gamma(1-\beta)}{A\Gamma(1-\alpha)}\right)+o\left(x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}\right).$$

Из этих оценок следует, что нули целой функции $L(z)$, лежащие в области $|y|<\frac{|\alpha-\beta|}{2a}\ln|x|+c$ имеют требуемую асимптотику,

Теперь докажем, что $L(z)$ не имеет других нулей. С этой целью рассмотрим функцию

$$F(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right)\left(1-\frac{z}{\lambda_{-n}}\right).$$

Это — целая функция экспоненциального типа a. Индикаторная диаграмма по мнимой оси имеет длину $2a$. Оценим эту функцию снизу на действительной оси. Введем функцию

$$F_0(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\left(1-\frac{z}{a_{-n}}\right),$$

где $a_n=\operatorname{Re}\lambda_n$. Предположим, что $x>1$ и $|a_n|>x$. Тогда имеем

$$\left|1-\frac{x}{\lambda_n}\right|^2=\left|1-\frac{x}{a_n+ib_n}\right|^2=\frac{(a_n-x)^2+b_n^2}{a_n^2+b_n^2}>$$

$$\geqslant\frac{(a_n-x)^2+\left(\frac{\beta-\alpha}{2a}\right)^2\ln^2\frac{\pi|a_n|}{a}}{a_n^2+b_n^2}>\frac{a_n^2}{a_n^2+b_n^2}\cdot\frac{(a_n-x)^2+\left(\frac{\beta-\alpha}{2a}\right)^2\ln^2\frac{\pi|a_n|}{a}}{a_n^2}=$$

$$=\left(1+\frac{b_n^2}{a_n^2}\right)^{-1}\left|1-\frac{x+i\frac{\beta-\alpha}{2a}\ln\frac{\pi x}{a}}{a_n}\right|^2.$$

Здесь мы воспользовались неравенством

$$|\operatorname{Im}\lambda_n|=|b_n|\geqslant\frac{|\beta-\alpha|}{2a}\ln\frac{\pi|a_n|}{a}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $x>1$, $|a_n|<x$. Заметим, что имеет место неравенство

$$\frac{(a_n-x)^2+b_n^2}{(a_n-x)^2+\left(\frac{\beta-\alpha}{2a}\right)^2\ln^2\frac{\pi x}{a}}\geqslant\frac{x^2+b_n^2}{x^2+\left(\frac{\beta-\alpha}{2ax}\right)^2\ln^2\frac{\pi x}{a}},\quad |a_n|<x.$$

Так как $x^{-2}\ln^2\frac{\pi x}{a}\geqslant|a_n|^2\ln^{-2}\frac{\pi|a_n|}{a}$, то

$$\frac{1+\left(\frac{\beta-\alpha}{2ax}\right)^2\ln^2\frac{\pi|a_n|}{a}}{1+\left(\frac{\beta-\alpha}{2ax}\right)^2\ln^2\frac{\pi x}{a}}\geqslant\frac{1+\left(\frac{\beta-\alpha}{2ax}\right)^2\ln^2\frac{\pi|a_n|}{a}}{1+\left(\frac{\beta-\alpha}{2a\,a_n}\right)^2\ln^2\frac{\pi|a_n|}{a}}.$$

Следовательно

$$\frac{x^2+b_n^2}{x^2+\left(\frac{\beta-\alpha}{2a}\right)^2\ln^2\frac{\pi x}{a}}\geqslant\frac{1+\left(\frac{\beta-\alpha}{2ax}\right)^2\ln^2\frac{\pi|a_n|}{a}}{1+\left(\frac{\beta-\alpha}{2ax}\right)^2\ln^2\frac{\pi x}{a}}\geqslant$$

$$\geqslant\left(1+\left(\frac{\beta-\alpha}{2a\,a_n}\right)^2\ln^2\frac{\pi|a_n|}{a}\right)^{-1}.$$

Окончательно приходим к следующей оценке:

$$\left|1-\frac{x}{a_n+ib_n}\right|^2=\frac{(a_n-x)^2+b_n^2}{a_n^2+b_n^2}\geqslant\frac{(a_n-x)^2+\left(\frac{\beta-\alpha}{2a}\right)^2\ln^2\frac{\pi x}{a}}{(a_n^2+b_n^2)\left(1+\left(\frac{\beta-\alpha}{2a\,a_n}\right)^2\ln^2\frac{\pi|a_n|}{a}\right)}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{(a_n-x)^2+\left(\frac{\beta-\alpha}{2a}\right)^2\ln^2\frac{\pi x}{a}}{a_n^2}\left(1+\left(\frac{\beta-\alpha}{2a\,a_n}\right)^2\ln^2\frac{\pi|a_n|}{a}\right)^{-1}\left(1+\frac{b_n^2}{a_n^2}\right)^{-1}.$$

Из полученных оценок следует неравенство

$$|F(x)|\geqslant M\left|F_0\left(x+i\frac{\beta-\alpha}{2a}\ln\frac{\pi x}{a}\right)\right|,\quad x>1,$$

где M — некоторое число. Известно, см. [3], что имеет место оценка

$$|F_0(z)|\geqslant\frac{A}{(1+|z|)^{\frac{\pi}{a}(2-\alpha-\beta)+5}}$$

при $|\operatorname{Im} z| \geqslant 1$. Следовательно

$$|F(x)| \geqslant \frac{B}{(1+|x|)^{\frac{\pi}{a}(2-\alpha-\beta)+6}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Теперь рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \frac{L(z)}{F(z)}.$$

Заметим, что $\Phi(z)$ — целая функция нулевой степени и на вещественной оси допускает оценку

$$|\Phi(x)| \leqslant M(1+|x|)^m, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Следовательно, $\Phi(z)$ может иметь только конечное число нулей.

Из оценок (7) следует последнее утверждение леммы.

3°. Здесь мы рассматриваем вопросы полноты и минимальности системы $\{e^{i\lambda_k x}\}$ в пространстве Бесова $B_2^\sigma(-\pi, \pi)$. Отметим, что аналогичные результаты в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ хорошо известны (см. Б. Я. Левин [4]).

Приведенный ниже результат является обобщением теоремы Н. Винера, Р. Пэли [3].

Теорема 2. *Класс целых функций, удовлетворяющих условиям:*

1. $|F(z)| \leqslant M e^{\pi|z|}$;

2. *при* $0 < \sigma < \frac{1}{2}$ *сходится интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 (1+x^2)^\sigma \, dx < \infty,$$

а при $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ *сходится интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| F(x) - \alpha \frac{\sin \pi x}{x} - \beta \frac{\pi x \cos \pi x - \sin \pi x}{x^2} \right|^2 (1+x^2)^\sigma \, dx < \infty,$$

где α *и* β *— некоторые числа, совпадает с классом функций, допускающих представление*

$$F(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} f(t) \, dt, \tag{8}$$

где $f(t) \in B_2^\sigma(-\pi, \pi)$,

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $0 < \sigma < \frac{1}{2}$. В силу теоремы Н. Винера и Р. Пэли, целая функция $F(z)$, удовлетворяющая условиям 1 и 2, допускает представление (8), где $f(t) \in L_2(-\pi, \pi)$. Заметим, что

$$\|f\|^2_{B_2^\sigma} \asymp \int_0^1 \|e^{ixt} f(t)\|^2_{B_2^\sigma}\, dx \asymp \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |F(n+x)|^2\, dx\,(1+n^2)^\sigma \asymp$$

$$\asymp \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 (1+x^2)^\sigma\, dx.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. В этом случае $f(t)$ — непрерывная функция. Введем новую функцию

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) - \dfrac{f(\pi)+f(-\pi)}{2} - \dfrac{f(\pi)-f(-\pi)}{2}\cdot\dfrac{t}{\pi}, & -\pi < t < \pi \\ 0, & |t| > \pi. \end{cases}$$

Для этой функции имеем

$$\|f_0\|^2_{B_2^\sigma} \asymp \int_{-\infty}^{\infty} |F_0(x)|^2 (1+x^2)^\sigma\, dx, \qquad (9)$$

где

$$F_0(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} f_0(t)\, dt.$$

Конечность интеграла (9) равносильна условию (2).

Теорема 3. *Для того, чтобы система* $\{e^{i\lambda_k x}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ *была минимальной в пространстве* $B_2^\sigma(-\pi, \pi)$, $0 < \sigma < 1$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала целая функция* $\varphi(z)$ *конечной степени не больше* π, *обращающаяся в нуль во всех точках* λ_k *и такая, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 (1+x^2)^{-1-\sigma}\, dx < \infty.$$

Доказательство. Минимальность $\{e^{i\lambda_k x}\}$ равносильна существованию биортогональной к ней системы функций. Пусть существует биортогональная система $\{h_n(x)\} \subset (B_2^\sigma)^*$. Тогда функция

$$\varphi(z) = (z-\lambda_0) \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} h_0(t)\, dt$$

удовлетворяет условиям леммы.

Теперь предположим, что существует функция $\varphi(z)$, удовлетворяющая условиям теоремы. Обозначим через $h_k(x)$ обобщенную функцию, преобразование Фурье которой совпадает с функцией $\frac{\varphi(z)}{z-\lambda_k}$.

Заметим, что supp $h_k \subseteq [-\pi, \pi]$ и $h_k(x) \in (B_2^\sigma)^*$. Следовательно, $\{h_k(x)\}$ является биортогональной к $\{e^{i\lambda_k x}\}$ системой.

Теорема 4. *Пусть* $\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ *— множество корней целой функции* $\varphi(\lambda)$ *конечной степени с индикаторной диаграммой, ширина которой не меньше* 2π *в направлении оси* OY *и*

$$|\varphi(x)| \geqslant \frac{A}{(1+|x|)^\gamma}, \quad -\infty < x < \infty,$$

где $\gamma < \frac{1}{2} - \sigma$, $0 < \sigma < 1$. *Тогда система* $\{e^{i\lambda_k x}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ *полна в* $B_\sigma^2(-\pi, \pi)$.

Доказательство. Пусть система $\{e^{i\lambda_k x}\}$ не полна в $B_2^\sigma(-\pi, \pi)$. Тогда существует нетривиальная целая функция $f(\lambda)$, обращающаяся в нуль в точках λ_k и допускающая представление

$$f(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\, \psi(t)\, dt,$$

где $\psi(t) \in (B_2^\sigma)^*$. Из этого представления следует оценка

$$|f(\lambda)| \leqslant \|e^{i\lambda x}\|_{B_2^\sigma} \|\psi\|_{(B_2^\sigma)^*} \leqslant M\, e^{\pi |Im\lambda|} (1 + |\mathrm{Re}\lambda|)^\sigma.$$

Следовательно

$$F(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)}$$

является целой функцией нулевой степени и на действительной оси имеем

$$|F(x)| \leqslant M(1 + |x|)^{\sigma+\gamma},$$

Заметим, что $F(\lambda)$ не может быть постоянной функцией. Действительно, тогда $\varphi(x) = cf(x)$ и мы приходим к противоречию с условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 (1+x^2)^{-\sigma} dx < \infty.$$

Если $F(z)$ имеет хотя бы один нуль z_0, то $\frac{F(z)}{z - z_0}$ является целой функцией нулевой степени и по действительной оси стремится к нулю. Следовательно, $F(z) \equiv 0$. Поэтому $\psi(t) \equiv 0$.

4°. В настоящем параграфе исследуется вопрос о возможности представления ядра $k(x)$ в виде ряда (2).

Лемма 4. *Пусть* $g(x)$ *удовлетворяет условиям леммы* 3 *и* $f(x) \in B_2^\sigma(-\pi, \pi)$, *где* $0 < \sigma < 1$, *и*

$$-\frac{1}{2} + \max\{\alpha, \beta\} < \sigma \leqslant \frac{1}{2} + \max\{\alpha, \beta\}.$$

Если

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx = 0,$$

то $f(x)$ *принадлежит замыканию линейной оболочки системы* $\{e^{i\lambda_k x}\}$ *по норме пространства* $B_2^{\sigma}(-\pi, \pi)$, *где* λ_k—*нули функции* $L(z)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что коразмерность замыкания линейной оболочки системы $\{e^{i\lambda_k x}\}$ равна единице.

Из леммы 3 следует, что сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |L(x)|^2 (1+x^2)^{-\sigma} dx < \infty$$

и расходится

$$\int_{-\infty}^{\infty} |L(x)|^2 (1+x^2)^{1-\sigma} dx = \infty.$$

Следовательно, в силу теорем 3 и 4 система $\{e^{i\lambda_k x}\}$ не полна в $B_2^{\sigma}(-\pi, \pi)$ и становится полной при добавлении одной функции вида $e^{i\lambda x}$.

Лемма 5. *Пусть* $g(x)$ *удовлетворяет условиям леммы* 3, *а* $k(x) \in L_2(-2\pi, 2\pi)$ *и* $k(x) \in B_2^{\sigma}(-\pi, \pi)$, *где*

$$\max\left\{-\frac{1}{2}+\alpha;\ -\frac{1}{2}+\beta;\ 1+2\left|\alpha-\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right|\right\} < \sigma < \frac{1}{2}+\max\{\alpha,\ \beta\}.$$

Если

$$\int_{-\pi}^{\pi} k(x-t)\, g(t)\, dt = 0, \quad -\pi < x < \pi,$$

то $k(x)$ *принадлежит замыканию линейной оболочки системы* $\{e^{i\lambda_k x}\}$ *в пространстве* $L_2(-2\pi, 2\pi)$, *где* λ_k—*нули* $L(z)$.

Доказательство. Из равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} k(-t)\, g(t)\, dt = 0$$

и в силу леммы 4, существует последовательность квазиполиномов $Q_n(x)$ по системе $\{e^{i\lambda_k x}\}$, которая в $B_2^{\sigma}(-\pi, \pi)$ стремится к $k(-x)$. Докажем, что $Q_n(x)$ фундаментальна в пространстве $L_2(-2\pi, 2\pi)$. Действительно, пусть

$$Q(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{i\lambda_k x}$$

— некоторый квазиполином. В силу леммы 2 имеем

$$M\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|Q(x)-Q(y)|^2}{|x-y|^{1+2\sigma}}\,dx\,dy \geqslant$$

$$\geqslant \int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{k=-m}^{m}|c_k|^2\frac{|k|^{\alpha+\beta-2|\alpha-\beta|-2}}{\ln|k|}\frac{|1-e^{it\lambda_k}|^2}{|t|^{1+2\sigma}}\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=-m}^{m}|c_k|^2\,|k|^{2\sigma+\alpha+\beta-2|\alpha-\beta|-2}\ln^{-2-2\sigma}|k|.$$

С другой стороны, в силу леммы 1, имеем

$$\int_{-2\pi}^{2\pi}|Q(x)|^2\,dx = 2\int_{-\pi}^{\pi}|Q(2x)|^2\,dx \leqslant M\sum_{k=-m}^{m}|c_k|^2|k|^{2|\beta-\alpha|}\ln|k|.$$

Так как $1+2|\alpha-\beta|-\frac{\alpha+\beta}{2}<\sigma$, то

$$\int_{-2\pi}^{2\pi}|Q(x)|^2\,dx \leqslant M\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|Q(x)-Q(y)|^2}{|x-y|^{1+2\sigma}}\,dx\,dy.$$

Таким образом, $Q_n(x)$ фундаментальна в $L_2(-2\pi, 2\pi)$. Её предел обозначим через $R(x)$, $-2\pi<x<2\pi$. Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi}(k(x-t)-R(x-t))\,g(t)\,dt=0,\quad -\pi<x<\pi. \tag{10}$$

Заметим, что для любого фиксированного x, $-\pi<x<\pi$, функция $k(x-t)-R(x-t)$, $-\pi<t<\pi$ ортогональна всем функциям системы $\{e^{i\lambda_k t}\}$ и имеет место (10). Следовательно, в силу леммы 4, $k(x-t)-R(x-t)\equiv 0$.

Теорема 5. *Пусть* $k(x)\in L_2(-2\pi, 2\pi)$, $k(x)\in B_2^{\sigma}(-\pi, \pi)$, $0<\sigma<1$ *и для некоторых* $\mu_1,\cdots,\mu_m$ *и* $a_1,\cdots,a_m$ *уравнение*

$$\int_{-\pi}^{\pi}k(x-t)\,g(t)\,dt=a_1e^{-i\mu_1x}+\cdots+a_me^{i\mu_mx},\quad -\pi<x<\pi,$$

имеет решение, допускающее представление

$$g(x)=\frac{A}{(\pi+x)^{\alpha}}+\frac{B}{(\pi-x)^{\beta}}+g_0(x),\quad -\pi<x<\pi,$$

где $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, A *и* B *—отличные от нуля числа и*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|g_0(x)-\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta}g_0(t)\,dt\right|dx=o(\delta^{1-\min\{\alpha,\beta\}}).$$

Предположим, что имеют место неравенства

$$\max\left\{-\frac{1}{2}+\alpha;\ -\frac{1}{2}+\beta;\ 1+2|\alpha-\beta|-\frac{\alpha+\beta}{2}\right\}<\sigma<\frac{1}{2}+\max\{\alpha,\ \beta\}.$$

Тогда $k(x)$ допускает представление

$$k(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\lambda_n x},$$

где ряд сходится в смысле $L_2(-2\pi,\ 2\pi)$, а λ_n — нули мероморфной функции

$$\frac{\prod_{j=1}^{m}\left(1+\frac{z}{|\mu_j}\right)\int_{-\pi}^{\pi} e^{izt}\,g(t)\,dt}{i\int_{-\pi}^{\pi} k(x)\,e^{-izx}\int_{-\pi}^{x} e^{izt}\,g(t)\,dt\,dx+\sum_{j=1}^{m}\frac{a_j\,L(-|\mu_j)}{(|\mu_j+z)\,L'(|\mu_j)}},$$

причем дефект системы $\{e^{i\lambda_k x}\}$ в пространстве $B_2^{\sigma}(-\pi,\ \pi)$ больше $-\infty$.

Доказательство. Заметим, что все нули функции $L(z)$, кроме конечного числа, простые. Если $L(z)$ не обращается в нуль в точках $|\mu_1,\cdots,|\mu_m$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(k(x-t)-\sum_{j=1}^{m}\frac{a_j}{L'(|\mu_j)}\,e^{-i|\mu_j(x-t)}\right)g(t)\,dt=0,\quad -\pi<x<\pi.$$

В случае, когда $L(|\mu_j)=0,\ L'(|\mu_j)=0,\cdots,\ L^{(k)}(|\mu_j)=0,\ L^{(k+1)}(|\mu_j)\neq 0$, можно написать

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(k(x-t)-\frac{a_k(-i)^{k+1}}{L^{(k+1)}(|\mu_j)}(x-t)^{k+1}\,e^{-i|\mu_j(x-t)}\right)g(t)\,dt=\sum_{n\neq j}a_n\,e^{-i|\mu_n x}.$$

Для простоты изложения предположим, что $L(|\mu_j)\neq 0$. В силу леммы 5 имеем

$$k(x)-\sum_{j=1}^{m}\frac{a_j}{L'(|\mu_j)}\,e^{-i|\mu_j x}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\,e^{i\lambda_k x},\quad -2\pi<x<2\pi,$$

где ряд в правой части сходится в $L_2(-2\pi,\ 2\pi)$, а коэффициенты c_k определяются формулой

$$c_k=\frac{1}{L'(\lambda_k)}\int_{-\pi}^{\pi}\left(k(x)-\sum_{j=1}^{m}\frac{a_j}{L'(|\mu_j)}\,e^{-i|\mu_j x}\right)h_k(x)\,dx.$$

Здесь $\{h_k(x)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ — система, биортогональная к $\{e^{i\lambda_k x}\}$ и, как хорошо известно, см. [2], допускает представление:

$$h_k(x) = -ie^{-i\lambda_k x}\int_{-\pi}^{x} e^{i\lambda_k t}\, g(t)\, dt.$$

Следовательно, для коэффициентов c_k имеем

$$c_k = -\frac{i}{L'(\lambda_k)}\left(\int_{-\pi}^{\pi} k(x)\, e^{-i\lambda_k x}\int_{-\pi}^{x} e^{i\lambda_k t}\, g(t)\, dt + \sum_{j=1}^{n}\frac{a_j L(-\mu_j)}{iL(\mu_j)(\mu_j+\lambda_k)}\right).$$

Теорема доказана.

5°. В настоящем параграфе рассматривается следующее уравнение:

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\frac{\sigma}{2}(\pi-|x-t|)}{\sin^{\sigma}|x-t|}\operatorname{sign}(x-t)\, f(t)\, dt = g(x),\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\quad 0<\sigma<1.$$

Его ядро

$$k(x) = \frac{\sin\frac{\sigma}{2}(\pi-|x|)}{\sin^{\sigma}|x|}\operatorname{sign}x,\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi,$$

в случае, когда $0<x\leqslant\pi$, допускает представление

$$k(x) = \frac{\sin\frac{\sigma}{2}(\pi-x)}{\sin^{\sigma}x} = (2i)^{\sigma-1}\frac{e^{i\frac{\sigma}{2}(\pi-x)} - e^{-i\frac{\sigma}{2}(\pi-x)}}{(e^{ix}-e^{-ix})^{\sigma}} =$$

$$= (2i)^{\sigma-1}\left(\frac{e^{i\frac{\sigma}{2}(\pi-x)+i\sigma x}}{(e^{2ix}-1)^{\sigma}} - \frac{e^{-i\frac{\sigma}{2}(\pi-x)-i\sigma x}}{(1-e^{-2ix})^{\sigma}}\right) =$$

$$= -i2^{\sigma-1}\left(\frac{e^{i\frac{\sigma}{2}x}}{(1-e^{2ix})^{\sigma}} - \frac{e^{-i\frac{\sigma}{2}x}}{(1-e^{-2ix})^{\sigma}}\right).$$

При отрицательных значениях аргумента, $-\pi\leqslant x<0$, имеем

$$k(x) = -\frac{\sin\frac{\sigma}{2}(\pi+x)}{\sin^{\sigma}(-x)} = -(2i)^{\sigma-1}\frac{e^{i\frac{\sigma}{2}(\pi+x)} - e^{-i\frac{\sigma}{2}(\pi+x)}}{(e^{-ix}-e^{ix})^{\sigma}} =$$

$$= (2i)^{\sigma-1}\left(\frac{e^{-i\frac{\sigma}{2}(\pi+x)+i\sigma x}}{(1-e^{2ix})^{\sigma}} - \frac{e^{i\frac{\sigma}{2}(\pi+x)-i\sigma x}}{(e^{-2ix}-1)^{\sigma}}\right) =$$

$$= -i2^{\sigma-1}\left(\frac{e^{i\frac{\sigma}{2}x}}{(1-e^{2ix})^{\sigma}} - \frac{e^{i\frac{\sigma}{2}x}}{(1-e^{-2ix})^{\sigma}}\right).$$

Следовательно, на всем интервале $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ ядро $k(x)$ допускает представление:

Академия наук Армянской ССР Фундаментальная библиотека

$$k(x) = i2^{\sigma-1} \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{\Gamma(\sigma-n)}{\Gamma(1-n)\,\Gamma(\sigma)} e^{2ixn - i\frac{\sigma}{2}x} -$$

$$- i2^{\sigma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\sigma+n)}{\Gamma(1+n)\,\Gamma(\sigma)} e^{2ixn + i\frac{\sigma}{2}x}.$$

Пусть $f(t) \in L_2(0, \pi)$. Тогда

$$\int_0^\pi k(x-t)\, f(t)\, dt = i2^{\sigma-1} e^{-i\frac{\sigma}{2}x} \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{\Gamma(\sigma-n)}{\Gamma(1-n)\,\Gamma(\sigma)} e^{2inx} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\pi e^{-2itn + i\frac{\sigma}{2}t} f(t)\, dt - i2^{\sigma-1} e^{i\frac{\sigma}{2}x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\sigma+n)}{\Gamma(1+n)\,\Gamma(\sigma)} e^{2inx} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\pi e^{-2itn - i\frac{\sigma}{2}t} f(t)\, dt.$$

Учитывая асимптотику $\dfrac{\Gamma(\sigma+n)}{\Gamma(1+n)} \sim n^{\sigma-1}$, имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \left| \int_0^\pi e^{-2itn + i\frac{\sigma}{2}t} f(t)\, dt \right|^2 \left(\frac{\Gamma(\sigma-n)}{\Gamma(1-n)\,\Gamma(\sigma)} \right)^2 |n|^{2(1-\sigma)} < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^\pi e^{-2itn - i\frac{\sigma}{2}t} f(t)\, dt \right|^2 \left(\frac{\Gamma(\sigma+n)}{\Gamma(1+n)\,\Gamma(\sigma)} \right)^2 n^{2(1-\sigma)} < \infty.$$

Следовательно

$$g(x) = \int_0^\pi k(x-t)\, f(t)\, dt \in B_2^{1-\sigma}(0, \pi).$$

Заметим, что

$$\left| \left(2n - \frac{\sigma}{2}\right) - 2n \right| \leqslant \frac{\sigma}{2} < \frac{1}{2}, \quad n = -1, -2, \cdots$$

и

$$\left| \left(2n + \frac{\sigma}{2}\right) - 2n \right| \leqslant \frac{\sigma}{2} < \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Следовательно, система (в силу теоремы Левинсона)

$$\{e^{2ixn - i\frac{\sigma}{2}x}\}_{n=-\infty}^{-1} \cup \{e^{2ixn + i\frac{\sigma}{2}x}\}_{n=0}^{\infty} \tag{11}$$

полна и минимальна в $L_2(0, \pi)$. Из соотношения

$$\left|\frac{1-\left(\frac{2x}{\sigma}\right)^2}{\Gamma\left(1+\frac{x}{2}+\frac{\sigma}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}+\frac{\sigma}{4}\right)}\right| \sim |x|^{1-\frac{\sigma}{2}},\ |x|\to\infty,$$

в силу теорем 3 и 4, следует, что система

$$\{e^{2ilnx-i\frac{\sigma}{2}x}\}_{n=-\infty}^{0} \cup \{e^{2ilnx+i\frac{\sigma}{2}x}\}_{n=0}^{\infty} \qquad (12)$$

полна и минимальна в $B_2^{1-\sigma}(0,\pi)$. Следовательно, $g(x)\in B_2^{1-\sigma}(0,\pi)$ можно разложить в ряд

$$g(x)=\sum_{n=-\infty}^{0} a_n e^{2ilnx-i\frac{\sigma}{2}x}+\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{2ilnx+i\frac{\sigma}{2}x}.$$

Тогда наше уравнение примет следующий вид:

$$i2^{\sigma-1}\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{\Gamma(\sigma-n)}{\Gamma(1-n)\Gamma(\sigma)}e^{2ilnx-i\frac{\sigma}{2}x}\int_0^{\pi}e^{-2ilnt+i\frac{\sigma}{2}t}f(t)\,dt-$$

$$-i2^{\sigma-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\sigma+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(\sigma)}e^{2ilnx+i\frac{\sigma}{2}x}\int_0^{\pi}e^{-2ilnt-i\frac{\sigma}{2}t}f(t)\,dt=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{0}a_n e^{2ilnx-i\frac{\sigma}{2}x}+\sum_{n=0}^{\infty}b_n e^{2ilnx+i\frac{\sigma}{2}x}.$$

В силу минимальности системы (12) в $B_2^{1-\sigma}(0,\pi)$ имеем

$$a_n=i2^{\sigma-1}\frac{\Gamma(\sigma-n)}{\Gamma(1-n)\Gamma(\sigma)}\int_0^{\pi}e^{-2ilnt+i\frac{\sigma}{2}t}f(t)\,dt,\ n=0,-1,\cdots,$$

$$b_n=-i2^{\sigma-1}\frac{\Gamma(\sigma+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(\sigma)}\int_0^{\pi}e^{-2ilnt-i\frac{\sigma}{2}t}f(t)\,dt,\ n=0,1,\cdots.$$

Из этих соотношений и в силу полноты системы (11) в $L_2(0,\pi)$ следует, что наше уравнение имеет единственное решение в $L_2(0,\pi)$.

Воспользовавшись формулой Рамануджана [6], стр. 245

$$\int_0^{\pi}e^{izt}\sin^{\alpha}t\,dt=\frac{\pi\Gamma(1+\alpha)e^{i\frac{\pi z}{2}}}{2^{\alpha}\Gamma\left(1+\frac{z}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{z}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)},\ \alpha>-1.$$

можно построить системы, биортогональные к системам (11) и (12). Сначала рассмотрим систему (11). Заметим, что функция

$$h_n(x)=-\left(\frac{d}{dx}+i\frac{\sigma}{2}\right)\int_0^{x}e^{-i\left(2n+\frac{\sigma}{2}\right)(x-t)}\sin^{\frac{\sigma}{2}}t\,dt,\ n\geqslant 0$$

ортогональна всем функциям системы (11), кроме $e^{i\left(2n+\frac{\sigma}{2}\right)x}$, причем

$$\int_0^{\pi} e^{i\left(2n+\frac{\sigma}{2}\right)x} h_n(x)\,dx = \frac{\pi\Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)n!}{2^{\sigma/2}\Gamma\left(1+n+\frac{\sigma}{2}\right)} e^{i\frac{\pi\sigma}{4}},\ n\geqslant 0.$$

Функция

$$h_n(x) = -\left(\frac{d}{dx}+i\frac{\sigma}{2}\right)\int_0^x e^{-i\left(2n-\frac{\sigma}{2}\right)(x-t)} \sin^{\frac{\sigma}{2}} t\,dt,\ n<0$$

ортогональна всем функциям системы (11), кроме $e^{i\left(2n-\frac{\sigma}{2}\right)x}$, причем

$$\int_0^{\pi} e^{i\left(2n-\frac{\sigma}{2}\right)x} h_n(x)\,dx = \frac{\pi\Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)(n-1)!}{2^{\sigma/2}\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}-n\right)} e^{-i\frac{\pi\sigma}{4}},\ n<0.$$

Теперь рассмотрим систему (12). Заметим, что при $n\geqslant 0$ функция

$$h_n^+(x) = -i\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\sigma^2}{4}\right)\int_0^x e^{-i\left(2n+\frac{\sigma}{2}\right)(x-t)} \sin^{\frac{\sigma}{2}} t\,dt,\ n\geqslant 0$$

ортогональна всем функциям системы (12), кроме $e^{i\left(2n+\frac{\sigma}{2}\right)x}$, причем

$$\int_0^{\pi} e^{i\left(2n+\frac{\sigma}{2}\right)x} h_n^+(x)\,dx = \frac{2\pi\Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)n!}{2^{\sigma/2}\Gamma\left(n+\frac{\sigma}{2}\right)} e^{i\frac{\pi\sigma}{4}},\ n\geqslant 0.$$

Аналогично, при $n\geqslant 0$ имеем

$$h_n^-(x) = -i\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\sigma^2}{4}\right)\int_0^x e^{-i\left(2n-\frac{\sigma}{2}\right)(x-t)} \sin^{\frac{\sigma}{2}} t\,dt,\ n\leqslant 0$$

и

$$\int_0^{\pi} e^{i\left(2n-\frac{\sigma}{2}\right)x} h_n^-(x)\,dx = -\frac{2\pi\Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)(-n)!}{2^{\sigma/2}\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}-n\right)} e^{-i\frac{\pi\sigma}{4}},\ n\leqslant 0.$$

Далее, имеем

$$b_n = \frac{2^{\sigma/2}\Gamma\left(n+\frac{\sigma}{2}\right)}{2\pi\Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)n!} e^{-i\frac{\pi\sigma}{4}} \int_0^{\pi} h_n^+(x)\,g(x)\,dx,\ n\geqslant 0,$$

$$a_n = -\frac{2^{\sigma/2}\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}-n\right)}{2\pi\Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)(-n)!}\, e^{i\frac{\pi\sigma}{4}} \int_0^{\pi} h_n^-(x)\, g(x)\, dx,\quad n \leqslant 0.$$

Следовательно, при $n \leqslant 0$ имеем

$$\int_0^{\pi} e^{-i\left(2n-\frac{\sigma}{2}\right)t} f(t)\, dt = -\frac{\Gamma(\sigma)\,\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}-n\right)}{2^{\sigma/2}\,\pi i\,\Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma(\sigma-n)}\, e^{i\frac{\pi\sigma}{4}} \int_0^{\pi} h_n^-(x)\, g(x)\, dx.$$

Аналогично, при $n \geqslant 0$

$$\int_0^{\pi} e^{-i\left(2n+\frac{\sigma}{2}\right)t} f(t)\, dt = -\frac{\Gamma(\sigma)\,\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}+n\right)}{2^{\sigma/2}\,\pi i\,\Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma(\sigma+n)}\, e^{-i\frac{\pi\sigma}{4}} \int_0^{\pi} h_n^+(x)\, g(x)\, dx$$

Окончательно для $f(t)$ мы получаем формулу:

$$\overline{f(x)} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2^{\sigma/2}\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}-n\right)}{\pi\Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)(-n-1)!}\, e^{i\frac{\pi\sigma}{4}} h_n(x) \int_0^{\pi} e^{i\left(2n-\frac{\sigma}{2}\right)t} \overline{f(t)}\, dt +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\sigma/2}\Gamma\left(1+n+\frac{\sigma}{2}\right)}{\pi\Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)n!}\, e^{-i\frac{\pi\sigma}{4}} h_n(x) \int_0^{\pi} e^{i\left(2n+\frac{\sigma}{2}\right)t} \overline{f(t)}\, dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{\Gamma(\sigma)\,\Gamma^2\left(\frac{\sigma}{2}-n\right)}{\pi^2 i\,\Gamma^2\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma(\sigma-n)(-n-1)!} h_n(x) \overline{\int_0^{\pi} h_n^-(t)\, g(t)\, dt} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1+n+\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma(\sigma)}{\pi^2 i\,\Gamma^2\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma(\sigma+n)\,n!} h_n(x) \overline{\int_0^{\pi} h_n^+(t)\, g(t)\, dt}.$$

Следовательно

$$f(x) = -\frac{\Gamma(\sigma)}{\pi^2 i\,\Gamma^2\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)} \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{\Gamma^2\left(\frac{\sigma}{2}-n\right)}{\Gamma(\sigma-n)(-n-1)!} \left(i\frac{\sigma}{2} - \frac{d}{dx} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{x} e^{i\left(2n-\frac{\sigma}{2}\right)(x-t)} \sin^{\frac{\sigma}{2}} t\, dt. \right.$$

$$\cdot \int_0^{\pi} \left[\left(-i \frac{d^2}{dy^2} - i \frac{\sigma^2}{4} \right) \int_0^{y} e^{-i\left(2n - \frac{\sigma}{2}\right)(y-s)} \sin^{\frac{\sigma}{2}} s \, ds \right] g(y) \, dy +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1+n+\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{\sigma}{2}\right)}{\Gamma(\sigma+n)\, n!} \left(i \frac{\sigma}{2} - \frac{d}{dx} \right) \int_0^{x} e^{i\left(2n+\frac{\sigma}{2}\right)(x-t)} \sin^{\frac{\sigma}{2}} t \, dt \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\pi} g(y) \left(-i \frac{d^2}{dy^2} - i \frac{\sigma^2}{4} \right) \int_0^{y} e^{-i\left(2n+\frac{\sigma}{2}\right)(y-s)} \sin^{\frac{\sigma}{2}} s \, dy \, ds =$$

$$= \frac{\Gamma(\sigma)}{\pi^2 \Gamma^2\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)} \left(i \frac{\sigma}{2} - \frac{d}{dx} \right) \int_0^{x} \sin^{\frac{\sigma}{2}} t \cdot \int_0^{\pi} g(y) \left(\frac{d^2}{dy^2} + \frac{\sigma^2}{4} \right) \int_0^{y} \sin^{\frac{\sigma}{2}} s \cdot$$

$$\cdot \left(e^{-i\frac{\sigma}{2}(x+s-y-t)} \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{\Gamma^2\left(\frac{\sigma}{2}-n\right)}{\Gamma(\sigma-n)(-n-1)!} e^{2in(x+s-y-t)} + \right.$$

$$\left. + e^{i\frac{\sigma}{2}(x+s-y-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1+n+\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{\sigma}{2}\right)}{\Gamma(\sigma+n)\, n!} e^{2in(x+s-y-t)} \right) ds \, dy \, dt.$$

Воспользовавшись интегральным представлением для гипергеометрической функции, получим

$$f(x) = \frac{\Gamma(\sigma)}{\pi^2 \Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)} \left(i \frac{\sigma}{2} - \frac{d}{dx} \right) \int_0^{\pi} g(y) \left(\frac{\sigma^2}{4} - \frac{d^2}{dy^2} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\int_0^{x} \int_0^{y} \int_0^{1} \frac{\sin^{\frac{\sigma}{2}} t \sin^{\frac{\sigma}{2}} s}{(u-u^2)^{1-\frac{\sigma}{2}}} \left(\frac{u\, e^{-i\left(2+\frac{\sigma}{2}\right)(x+s-y-t)}}{(1-u\, e^{-2i(x+s-y-t)})^{1+\frac{\sigma}{2}}} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{e^{i\frac{\sigma}{2}(x+s-y-t)}}{(1-u\, e^{2i(x+s-y-t)})^{1+\frac{\sigma}{2}}} \right) ds \, dt \, du. \right.$$

На правую часть следует наложить ограничение

$$\frac{\Gamma(\sigma)\, 2^{\frac{\sigma}{2}} i}{\pi \Gamma^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)} \int_0^{\pi} e^{i\frac{\sigma}{2}x} \left(\frac{d}{dx} - i\frac{\sigma}{2} \right) \int_0^{\pi} g(y) \left(\frac{d^2}{dy^2} + \frac{\sigma^2}{4} \right) \left(\int_0^{x} \int_0^{y} \int_0^{1} \frac{\sin^{\frac{\sigma}{2}} t \sin^{\frac{\sigma}{2}} s}{(u-u^2)^{1-\frac{\sigma}{2}}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\frac{u\, e^{-i\left(2+\frac{\sigma}{2}\right)(x+s-y-t)}}{(1-ue^{-2i(x+s-y-t)})^{1+\frac{\sigma}{2}}} + \frac{e^{i\frac{\sigma}{2}(x+s-y-t)}}{(1-ue^{2i(x+s-y-t)})^{1+\frac{\sigma}{2}}} \right) ds \, dt \, du \, dy =$$

$$= \frac{\sigma}{2} \int_0^{\pi} \left(\sin^{\frac{\sigma}{2}} y - i \frac{\cos y}{\sin^{1-\frac{\sigma}{2}} y} \right) g(y)\, dy.$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 19. XI. 1985

Ա. Ա. ՎԱՂԱՐՇԱԿՅԱՆ. *Վիներ–Հոպֆի խուզված հավասարումների լուծման մի նոր մեթոդի մասին (համփոփում)*

Հոդվածում առաջարկվում է Վիներ-Հոպֆի խուզված հավասարումների լուծման մի նոր մեթոդ։ Քննարկվում է այդ մեթոդը կիրառելու հնարավորության հարցը։ Վերջին պարագրաֆում, կոնկրետ օրինակի վրա, ցույց է տրվում, թե ինչպես այդ մեթոդի օգնությամբ կարելի է բերել լուծումը ներկայացնող կոնկրետ բանաձևերի։

A. A. VAGHARSHAKIAN. *On a new method of solving the truncated Wiener—Hopf equations* (summary)

A method for solving the truncated Wiener—Hopf equations is proposed and discussed. The last section contains an example where the method yields explicit formulae for the solution.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. А. Сахнович.* Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке, УМН, 35, вып. 4 (214), 1980, 69—129.
2. *А. М. Седлецкий.* Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси, УМН, 37, вып. 5 (227), 1982, 51—95.
3. *Н. Винер, Р. Пэли.* Преобразование Фурье в комплексной области, Изд-во «Наука», М., 1964.
4. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1956.
5. *А. Ф. Леонтьев.* Ряды экспонент, Изд-во «Наука», М., 1976.
6. *Е. Титчмарш.* Введение в теорию интегралов Фурье, М., 1948.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXII, № 3, 1987 Математика

УДК 517. 53/57

Г. М. АЙРАПЕТЯН

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ СО СМЕЩЕНИЕМ В КЛАССЕ L^1

1°. Пусть G^+—некоторая область на комплексной плоскости, ограниченная простым замкнутым контуром Ляпунова Γ, а G^-—дополнение множества $G^+ \cup \Gamma$.

Обозначим через $H(\Omega)$ класс функций, определенных на множестве Ω и удовлетворяющих условию Гельдера.

Пусть, далее, $\alpha(t)$—заданная на Γ непрерывная функция, которая удовлетворяет следующим условиям.

а) $\alpha(t)$—взаимнооднозначно отображает Γ на себя, сохраняя ориентацию;

б) производная $\alpha'(t) = d\alpha(t)/dt$ отлична от нуля для всех $t \in \Gamma$ и принадлежит классу $H(\Gamma)$.

Как известно (см. монографию Н. И. Мусхелишвили [1]), граничной задачей сопряжения со смещением называется следующая задача.

Найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$ с линией скачков Γ, имеющую конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^+(\alpha(t)) - D(t)\,\Phi^-(t) = f(t) \quad \text{на } \Gamma, \tag{1}$$

где $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$—сужения функции $\Phi(z)$, соответственно, на G^+ и G^-, $D(t)$ и $f(t)$—некоторые функции, заданные на Γ, а $\alpha(t)$ удовлетворяет вышеуказанным условиям а) и б).

В случае, когда $f(t)$ и $D(t)$ из класса $H(\Gamma)$ и $D(t) \neq 0$, эта задача полностью исследована в работе Д. А. Кваселава [2] (см. также [1]). Там же установлено, что эта задача разрешима в классе функций $\Phi(z)$ таких, что $\Phi^+(z) \in H(G^+ \cup \Gamma)$ и $\Phi^-(z)$ есть сумма функций, одна из которых принадлежит классу $H(G^- \cup \Gamma)$, а другая — некоторый полином.

В случае, когда $f(t) \in L^p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$, задача рассмотрена в работе И. Б. Симоненко [3]. Им установлено, что решение этой задачи можно представить в виде интеграла типа Коши от функций из класса $L^p(\Gamma)$.

Краевые задачи со сдвигом Карлемана в классах $H(\Gamma)$ исследованы в работе Д. А. Кваселава [4].

Более общие краевые задачи в классах $L^p(1 < p < \infty)$ и $H(\Gamma)$ со сдвигом Карлемана исследованы Г. С. Литвинчуком и его учениками. Подробные результаты в этом направлении изложены в монографии [5].

2° В настоящей работе рассматривается задача (1) в том случае, когда $f(t) \in L^p(\Gamma)$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Для формулировки задачи введем некоторые обозначения. Пусть D^+ — единичный круг на комплексной плоскости, T — единичная окружность, а D^- — область $|z| > 1$. Обозначим через $\zeta = \omega(z)$ и $\zeta = \mu(z)$ $(\mu(\infty) = \infty)$ функции, конформно отображающие области D^+ и D^-, соответственно, на G^+ и G^-. Для любого r $(0 < r < 1)$ положим

$$\lambda_r(z) = \omega(r\omega^{-1}(z)), \quad \text{при} \quad z \in G^+,$$

$$\lambda_{r^{-1}}(z) = \mu(r^{-1}\mu^{-1})(z)\}, \quad \text{при} \quad z \in G^-.$$

Через $K^p(\Gamma)$ обозначим класс функций, голоморфных в $G^+ \cap G^-$ и представимых в виде

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_1(t)}{t-z}\,dt, \text{ при } z \in G^+,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_2(t)}{t-z}\,dt + P(z), \text{ при } z \in G^-,$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ принадлежат классу $L^p(\Gamma)$, а $P(z)$ — произвольный полином.

Теперь под задачей сопряжения со смещением в $L^p(\Gamma)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ будем понимать следующую задачу.

Задача А. Найти голоморфную в $G^+ \cup G^-$ функцию $\Phi(z)$, обращающуюся в нуль на бесконечности по граничному условию

$$\lim_{r \to 1-0} \|\Phi^+(\lambda_r(\alpha(t))) - D(t)\,\Phi^-(\lambda_{r^{-1}}(t)) - f(t)\|_p = 0, \qquad (2)$$

где $f(t) \in L^p(\Gamma)$, а $\|\ \|_p$ — норма в пространстве $L^p(\Gamma)$.

При решении задачи сопряжения в классах $L^p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ важную роль играет тот факт, что интеграл типа Коши порождает ограниченный оператор в $L^p(\Gamma)$. Аналогичное утверждение верно и для пространств $H^\mu(\Gamma)$ при $\mu \in (0, 1]$.

В случае $p = 1$ это утверждение неверно. При $f \in L^1(\Gamma)$ решение граничной задачи сопряжения также записывается в виде интеграла типа Коши, однако его граничные значения не всегда принадлежат классу $L^1(\Gamma)$. Поэтому в этом случае меняется и постановка задачи и метод исследования. При помощи интеграла типа Коши строятся другие интегральные операторы, которые уже являются ограниченными в $L^1(\Gamma)$.

В настоящей работе описываются все решения задачи A, когда функции $\alpha'(\zeta)$, $\omega'(\zeta)$ и $\mu'(\zeta)$ удовлетворяют условию Липшица, а функция $D(t)$ принадлежит классу $H(\Gamma)$ и $D(t) \neq 0$. Доказывается также, что все решения этой задачи принадлежат классу $K^p(\Gamma)$. В случае $f(t) \in L^p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ или $f(t) \in H(\Gamma)$, полученные результаты сов-

падают с известными результатами, несмотря на то, что постановка (2) является более общей.

§ 1. Предварительные сведения и леммы

1.1. Рассмотрим в классе $L^p(\Gamma)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ уравнение Фредгольмова типа

$$K\varphi \equiv \varphi(\tau) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma k(\tau, t)\,\varphi(t)\,dt = g(\tau), \tag{4}$$

где $g(\tau) \in L^p(\Gamma)$ и ядро $k(\tau, t)$ имеет вид

$$k(\tau, t) = \frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}. \tag{5}$$

Лемма 1. *Уравнение* (4) *однозначно различимо в классе* $L^p(\Gamma)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ *и имеет место оценка*

$$\|\varphi\|_p \leqslant C_p \|g\|_p, \tag{6}$$

где C_p *—постоянная, не зависящая от* $g(t)$.

Доказательство. Так как $\alpha(t)$ удовлетворяет условиям а) и б), то легко проверить, что ядро $k(\tau, t)$ можно представить в виде

$$k(\tau, t) = \frac{k_0(\tau, t)}{|\tau - t|^\lambda}, \qquad 0 < \lambda < 1,$$

где $k_0(\tau, t) \in H(\Gamma)$. Известно, что при $g \in H(\Gamma)$ уравнение (4) однозначно разрешимо в классе $H(\Gamma)$. Ясно, что при $g(t) \equiv 0$ любое решение задачи (4) принадлежит классу $H(\Gamma)$. Из однозначной разрешимости этого уравнения в $H(\Gamma)$ следует, что в этом случае $\varphi(t) \equiv 0$. Поэтому уравнение (4) однозначно разрешимо в $L^p(\Gamma)$.

Из теории уравнений Фредгольма известно, что решение уравнения (4) имеет вид

$$\varphi(\tau) = g(\tau) + \int_\Gamma \gamma(\tau, t)\,g(t)\,dt, \tag{7}$$

где ядро $\gamma(\tau, t)$ имеет представление вида

$$\gamma(\tau, t) = \frac{\gamma_0(\tau, t)}{|\tau - t|^\lambda} \quad (0 < \lambda < 1), \quad \gamma_0(\tau, t) \in H(\Gamma).$$

Теперь из формулы (7) непосредственно следует оценка (6).

Лемма 2. *Пусть* $\Phi(z) \in K^p(\Gamma)$, *а* $\psi(z)$ *—некоторая голоморфная функция на* G^+, *принадлежащая классу* $H(G^+ \cup \Gamma)$. *Тогда справедливы следующие соотношения*:

$$\lim_{r \to 1-0} \int_\Gamma |\Phi^+(\lambda_r(t))\,\psi(\lambda_r(t)) - \Phi^+(\lambda_r(t)\,\psi(t)|^p\,|dt| = 0,$$

$$\lim_{r \to 1-0} \int_\Gamma |\Phi^+(\lambda_r(\alpha(t)))\,\psi(\lambda_r(\alpha(t))) - \Phi^+(\lambda_r(\alpha(t)))\,\psi(\alpha(t))|^p\,|dt| = 0. \tag{8}$$

Доказательство. Так как $\Phi(z) \in K^p(\Gamma)$, то существует $f_1(t) \in L^p(\Gamma)$ такая, что

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_1(t)}{t-z}\, dt.$$

Следовательно

$$\int_\Gamma |\Phi^+(\lambda_r(\tau))|^p |d\tau| = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \left| \int_\Gamma \frac{f_1(t)}{t-\lambda_r(\tau)}\, dt \right|^p |d\tau| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \int_\Gamma |f(t)|^p \int_\Gamma \frac{|d\tau|}{|t-\lambda_r(\tau)|} |dt|. \tag{9}$$

Так как якобиан преобразования $\tau = \omega(\zeta)$ отличен от нуля, то

$$|\omega(\zeta) - \omega(r\xi)| \geqslant c\,|\zeta - r\xi|.$$

Делая замену переменной $\tau = \omega(\zeta)$, получим

$$\int_\Gamma \frac{|d\tau|}{|t-\lambda_r(\tau)|} = \int_T \frac{|\omega'(\zeta)|\,|d\zeta|}{|\omega(\xi)-\omega(r\zeta)|} \leqslant C_2 \int_T \frac{|d\zeta|}{|\xi - r\zeta|} = C_2 \ln \frac{1}{1-r}.$$

Следовательно

$$\int_\Gamma |\Phi^+(\lambda_r(\tau))|^p |d\tau| \leqslant A \ln \frac{1}{1-r}.$$

Теперь, так как $\psi(z) \in H(G^+ \cup \Gamma)$, то существует число $\delta > 0$ такое, что

$$|\psi(\lambda_r(t)) - \psi(t)| < A_1 (1-r)^\delta.$$

Сопоставляя эти неравенства, получим

$$\int_\Gamma |\Phi^+(\lambda_r(t))\,\psi(\lambda_r(t)) - \Phi^+(\lambda_r(t))\,\psi(t)|^p |dt| \leqslant C(1-r)^\delta \ln \frac{1}{1-r}.$$

Тем самым, первое соотношение леммы доказано. Второе соотношение следует из первого, если заменить t на $\alpha(t)$.

1.2. Приведем некоторые сведения из теории классов E^p — Смирнова (см. [6]). Как известно, голоморфная в G^+ функция $F(z)$ принадлежит классу E^p $(0 < p < \infty)$ (или $E^p(G^+)$), если

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |F(\omega(re^{i\theta}))|^p |\omega'(re^{i\theta})|\, d\theta < \infty.$$

Хорошо известно, что функции класса $E^p(G^+)$ при $1 \leqslant p < \infty$ можно представить в виде интеграла типа Коши от некоторой функции из класса $L^p(\Gamma)$.

Соответственно, будем говорить, что $F_1(z) \in E^p(G^-)$, если $F_1(z)$ аналитична в G^- и

$$\lim_{r\to 1+0}\int_{-\pi}^{\pi}|F_1(\mu(re^{i\theta}))|^p\,|\mu'(re^{i\theta})|\,d\theta<\infty.$$

Функции класса $E^p(G^-)$ при $1\leqslant p<\infty$ также можно представить в виде интеграла типа Коши, если $F_1(\infty)=0$.

Лемма 3. *Пусть $Y(z)$—голоморфная на $G^+\cup G^-$ функция, удовлетворяющая условиям:*

а) *$Y(z)$ имеет конечный порядок на бесконечности.*

б) $Y^+(z)\in H(G^+\cup\Gamma)$, $Y^-(z)=Y_1^-(z)+Q(z)$,

где $Q(z)$—главная часть функции $Y(z)$ на бесконечности, а $Y_1^-(z)\in H(G^-\cup\Gamma)$.

Тогда для любой функции $\Phi(z)\in K^p(\Gamma)$, $Y(z)\Phi(z)\in K^p(\Gamma)$.

Доказательство. Так как $\Phi(z)\in K^p(\Gamma)$, то

$$\Phi^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f_1(t)}{t-z}\,dt,\quad z\in G^+,$$

$$\Phi^-(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f_2(t)}{t-z}\,dt+P(z),\quad z\in G^-,$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)\in L^p(\Gamma)$, а $P(z)$—главная часть функции $\Phi(z)$ на бесконечности. Положим $F(z)=Y(z)\Phi(z)$, будем иметь $F^+(z)=Y^+(z)\Phi^+(z)$, $F^-(z)=Y^-(z)\Phi^-(z)$. Рассмотрим равенство

$$\frac{Y^+(z)}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f_1(t)}{t-z}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{Y^+(t)f_1(t)}{t-z}\,dt-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{Y^+(t)-Y^+(z)}{t-z}f_1(t)\,dt.\qquad(10)$$

Так как $Y^+(t)f_1(t)\in L^p(\Gamma)$, то нужно доказать, что второе слагаемое в (10) можно представить в виде интеграла типа Коши. Но используя неравенство

$$\left|\frac{Y^+(t)-Y^+(z)}{t-z}\right|\leqslant\frac{C}{|t-z|^\lambda}\ (0<\lambda<1),$$

легко проверить, что второе слагаемое в (10) принадлежит классу $E^p(G^+)$ и, следовательно, $Y^+(z)\Phi^+(z)$ есть интеграл типа Коши от некоторой функции из класса $L^p(\Gamma)$.

Аналогичное утверждение можно доказать и для функции $F^-(z)$.

§ 2. Некоторые свойства решения задачи A

2.1. Приведем некоторые сведения из теории граничных задач со смещением (см. [1]), когда правая часть принадлежит классу $H(\Gamma)$. Однородная граничная задача тогда принимает следующий вид:

$$\Phi^+(\alpha(t)) - D(t)\,\Phi^-(t) = 0, \quad t \in \Gamma. \tag{11}$$

Хорошо известно, что при решении граничной задачи (1) важную роль играет каноническое решение соответствующей однородной задачи (11). Оно определяется по формуле

$$X(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\chi(\beta(t))}{t-z}\,dt\right\}, \quad \text{при} \quad z \in G^+,$$

$$X(z) = z^{-\varkappa}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\chi(t)}{t-z}\,dt\right\}, \quad \text{при} \quad z \in G^-,$$

где $\varkappa$—индекс функции $D(t)$, $\chi(t)$—решение уравнения $K\chi = \ln[t^{-\varkappa}D(t)]$, а $\beta(t)$—функция обратная $\alpha(t)$.

Общее решение граничной задачи (1), имеющее конечный порядок на бесконечности, дается формулой

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\beta(t))}{t-z}\,dt, \quad \text{при} \quad z \in G^+,$$

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi t}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt + X(z)\,P(z), \text{ при } z \in G^-, \tag{12}$$

где $P(z)$ — произвольный полином, $X(z)$ — каноническое решение, а $\varphi(t)$ — решение интегрального уравнения

$$K\varphi = P(t) + \frac{f(t)}{X^+(\alpha(t))}.$$

2.2. Теорема. 1. *Если* $\Phi(z)$*—решение задачи* A *и* $f(t) \in L^p(\Gamma)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, *то* $\Phi(z) \in K^p(\Gamma)$.

Доказательство. Пусть $f_r(t)$—последовательность функций из $H(\Gamma)$ такая, что $|f_r(t) - f(t)|_p \to 0$, при $r \to 1-0$. Задачу A можно записать в следующем виде:

$$\lim_{r\to 1-0}\int_\Gamma |\Phi^+(\lambda_r(\alpha(t))) - D(t)\Phi^-(\lambda_r^{-1}(t)) - f_r(t)|^p\,|dt| = 0. \tag{13}$$

Обозначив

$$F_r(t) = \Phi_r^+(\alpha(t)) - D(t)\,\Phi_r^-(t) - f_r(t),$$

где

$$\Phi_r^+(z) = \Phi^+(\lambda_r(z)), \quad \Phi_r^-(z) = \Phi^-(\lambda_r^{-1}(z)),$$

получим уравнение относительно $\Phi_r^+(z)$ и $\Phi_r^-(z)$:

$$\Phi_r(\alpha(t)) - D(t)\,\Phi_r^-(t) = F_r(t) - f_r(t). \tag{14}$$

Так как $F_r(t) - f_r(t) \in H$ на Γ, то согласно (12) решение этого уравнения записывается так:

$$\Phi_r^+(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\psi_r(\beta(t))}{t-z}\,dt, \tag{15}$$

$$\Phi_r^-(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\psi_r(t)}{t-z}\,dt+X(z)\,P_r(z), \tag{15}$$

где $X(z)$—каноническое решение задачи (11), $P_r(z)$—главная часть функции $\Phi_r(z)\,(X(z))^{-1}$ на бесконечности, а $\psi_r(t)$—решение уравнения

$$K\psi=P_r(t)-\frac{F_r(t)-f_r(t)}{X^+(\alpha(t))}.$$

Обозначив главную часть функции $\Phi(z)\,(X(z))^{-1}$ на бесконечности через $P(z)$, будем иметь

$$\lim_{r\to 1-0}\|P_r-P\|_p=0$$

и, следовательно

$$P_r(t)-\frac{F_r(t)-f_r(t)}{X^+(\alpha(t))}\to P(t)-\frac{f(t)}{X^+(\alpha(t))},\ \text{при } r\to 1-0$$

по метрике $L^p(\Gamma)$. Пусть $\psi(t)$ — решение уравнения

$$K\psi=P(t)-\frac{f(t)}{X^+(\alpha(t))}.$$

Из леммы 1 при $r\to 1-0$ имеем

$$\|\psi_r(t)-\psi(t)\|_p\to 0.$$

Теперь, устремив r к 1—0, из (15) получаем

$$\Phi^+(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\psi(\beta(t))}{t-z}\,dt,$$

$$\Phi^-(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\psi(t)}{t-z}\,dt+X(z)\,P(z). \tag{16}$$

Применяя лемму 3, завершаем доказательство теоремы.

Из доказательства теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть* $f(t)\in H(\Gamma)$. *Тогда решение граничной задачи A, имеющее конечный порядок на бесконечности, дается формулой* (16), *где* $\psi(t)\in H(\Gamma)$.

Для случая, когда $D(t)\equiv 1$, справедлива

Теорема 3. *Если голоморфная в* $G^+\,UG^-$ *и равная нулю на бесконечности функция* $\Phi(z)$ *удовлетворяет граничному условию*

$$\lim_{r\to 1-0}\int_\Gamma|\Phi^+(\lambda_r(\sigma(t)))-\Phi^-(\lambda r^{-1}(t))|^p\,|dt|=0,$$

то $\Phi(z)\equiv 0$.

§ 3. Исследование задачи A

3.1. Пусть $t=\lambda(u)$, $(u_0\leqslant u\leqslant u_1)$—параметрическое уравнение границы Г. В дальнейшем будем предполагать, что функции $\lambda(u)$ и

$\alpha(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы по переменной $u \in [u_0, u_1]$. Из этого свойства функции $\lambda(u)$ будет следовать, в частности, что функции $\omega(\zeta)$ и $\mu(\zeta)$ удовлетворяют условиям

$$|\omega(\zeta_1) - \omega(\zeta_2)| < A|\zeta_1 - \zeta_2|, \quad |\mu(\zeta_1) - \mu(\zeta_2)| < A|\zeta_1 - \zeta_2|,$$

где $\zeta_1, \zeta_2 \in T$—произвольные точки, а A—некоторая постоянная.

Для любого $\zeta \in T$ положим $\tilde{\alpha}(\zeta) = \omega^{-1}(\alpha(\omega(\zeta)))$ и $\tilde{\mu}(\zeta) = \mu^{-1}(\omega(\zeta))$. Учитывая свойства функций $\alpha(t)$, $\omega(\zeta)$ и $\mu(\zeta)$, легко проверить, что $\tilde{\alpha}(\zeta)$ удовлетворяет условиям:

а) $\tilde{\alpha}(\zeta)$ взаимнооднозначно отображает T на себя, сохраняя ориентацию;

б) производная $\tilde{\alpha}'(\zeta) = d\tilde{\alpha}(\zeta)/d\zeta$ отлична от нуля и

$$|\tilde{\alpha}'(\zeta_1) - \tilde{\alpha}'(\zeta_2)| < C|\zeta_1 - \zeta_2|,$$

где C—некоторая постоянная. Аналогичные условия справедливы для $\tilde{\beta}(\zeta)$.

Лемма 4. *Для произвольных точек $\zeta, \xi \in T$ справедливы неравенства*

$$|\tilde{\alpha}(\zeta) - r\tilde{\alpha}(\xi)| > c|\zeta - r\xi|,$$

$$|\tilde{\beta}(\zeta) - r\tilde{\beta}(\xi)| > c|\zeta - r\xi|,$$

где c не зависит от r.

Доказательство. Пусть r и θ — полярные координаты точки z. Рассмотрим отображение $\zeta = r\lambda(\theta)$, где $\lambda(\theta) = \tilde{\alpha}(e^{i\theta})$. Обозначив через $\lambda_1(\theta)$ и $\lambda_2(\theta)$ действительные и мнимые части функции $\lambda(\theta)$, для якобиана отображения $\zeta = r\lambda(\theta) = r\lambda_1(\theta) + ir\lambda_2(\theta)$ получим выражение

$$J(r, \theta) = r(\lambda_1(\theta)\lambda_2'(\theta) - \lambda_1'(\theta)\lambda_2(\theta)). \tag{17}$$

Так как $\lambda_1^2(\theta) + \lambda_2^2(\theta) = 1$, то

$$\lambda_1(\theta)\lambda_1'(\theta) + \lambda_2(\theta)\lambda_2'(\theta) = 0. \tag{18}$$

Учитывая теперь, что $\lambda'(\theta) = \lambda_1'(\theta) + i\lambda_2'(\theta) \neq 0$, из (18) будем иметь, что якобиан $J(r, \theta)$ нашего отображения отличен от нуля. Следовательно, первое неравенство леммы доказано. Второе неравенство доказывается аналогично.

Теперь для любых $\zeta, \xi \in T$ обозначим

$$H_r(\zeta; \xi) = \frac{\omega'(\tilde{\alpha}(\zeta))\,\tilde{\alpha}'(\zeta)}{\omega(\tilde{\alpha}(\zeta)) - \omega(r\tilde{\alpha}(\xi))} - \frac{\mu'(\tilde{\beta}(\zeta))\,\tilde{\beta}'(\zeta)}{\mu(\tilde{\beta}(\zeta)) - \mu(r^{-1}\tilde{\beta}(\xi))}.$$

Лемма 5. *Для любого ζ и $\xi \in T$ справедлива оценка*

$$|H_r(\zeta; \xi)| \leqslant C\left(\frac{1 - r^2}{|\zeta - r\xi|^2} + 1\right), \tag{19}$$

где C не зависит от r.

Доказательство. Для любого r $(0 < r < 1)$ положим

$$S_r(\zeta;\ \xi) = \frac{\omega'(\tilde{\alpha}(\zeta))\,\bar{\alpha}'(\zeta)}{\omega(\tilde{\alpha}(\zeta)) - \omega(r\bar{\alpha}(\xi))} - \frac{1}{\zeta - r\xi},$$

$$\bar{S}_r(\zeta;\ \xi) = \frac{\mu'(\bar{\beta}(\zeta))\,\tilde{\beta}'(\zeta)}{\mu(\bar{\beta}(\zeta)) - \mu(r^{-1}\tilde{\beta}(\xi))} - \frac{1}{\zeta - r^{-1}\xi}.$$

Преобразуя функцию $S_r(\zeta;\ \xi)$, будем иметь

$$S_r(\zeta;\ \xi) =$$

$$= \frac{(\zeta - \xi)\,[\omega(\bar{\alpha}(\zeta))]' - \xi(1-r)\,[\omega(\tilde{\alpha}(\zeta))]' - [\omega(\tilde{\alpha}(\zeta)) - \omega(r\bar{\alpha}(\xi))]}{[\omega(\tilde{\alpha}(\zeta)) - \omega(r\tilde{\alpha}(\xi))](\zeta - r\xi)}.$$

Числитель этого выражения запишем в следующем виде:

$$J_r(\zeta;\ \xi) = \int_{\xi}^{\zeta} \{[\omega(\tilde{\alpha}(\zeta))]' - [\omega(\bar{\alpha}(\lambda))]'\}\,d\lambda -$$

$$- \xi(1-r)\,[\omega(\bar{\alpha}(\zeta))]' + [\omega(\bar{\alpha}(\xi)) - \omega(r\tilde{\alpha}(\xi))].$$

Ясно, что

$$\left|\int_{\xi}^{\zeta} \{[\omega(\tilde{\alpha}(\zeta))]' - [\omega(\bar{\alpha}(\lambda))]'\}\,d\lambda\right| \leqslant C_1|\zeta - \xi|^2$$

и

$$|\omega(\tilde{\alpha}(\xi)) - \omega(r\tilde{\alpha}(\xi))| \leqslant C_2(1 - r^2),$$

где C_1 и C_2 — постоянные, не зависящие от r. Следовательно

$$|J_r(\zeta;\ \xi)| \leqslant A(|\zeta - \xi|^2 + (1 - r^2)) \leqslant B(|\zeta - r\xi|^2 + (1 - r^2)). \qquad (20$$

Теперь, так как якобиан отображения $\omega(z)$ отличен от нуля, то из леммы 4 будем иметь

$$|\omega(\bar{\alpha}(\zeta)) - \omega(r\tilde{\alpha}(\xi))| \geqslant c_3|\bar{\alpha}(\zeta) - r\tilde{\alpha}(\xi)| > c_4|\zeta - r\xi|,$$

так что

$$|S_r(\zeta;\ \xi)| < C\left(\frac{1 - r^2}{|\zeta - r\xi|^2} + 1\right). \qquad (21)$$

Аналогичным образом можно доказать, что оценка (21) верна и для функции $\bar{S}_r(\zeta;\ \xi)$.

Теперь доказательство леммы следует из равенств

$$H_r(\zeta;\ \xi) = S_r(\zeta;\ \xi) + \bar{S}_r(\zeta;\ \xi) + \frac{1}{\zeta - r\xi} - \frac{1}{\zeta - r^{-1}\xi},$$

$$\left|\frac{1}{\zeta - r\xi} - \frac{1}{\zeta - r^{-1}\xi}\right| = \frac{1-r^2}{|\zeta - r\xi|^2}.$$

Лемма 6. *Для любой функции $f(\zeta) \in L^p(\Gamma)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ имеет место неравенство*

$$\int_T \left| \int_T H_r(\zeta; \xi) f(\zeta)\, d\zeta \right|^p |d\xi| \leqslant A \|f\|_p^p,$$

где A не зависит от r.

Доказательство. Согласно оценке (19) имеем

$$\int_T \left| \int_T H_r(\zeta; \xi) f(\zeta)\, d\zeta \right|^p |d\xi| \leqslant C \|f\|_p^p +$$

$$+ C \int_T \left(\int_T \frac{1-r^2}{|\zeta - r\xi|^2} |f(\zeta)|\, |d\zeta| \right)^p |d\xi|.$$

Теперь остается учесть (см., напр., [7]), что для любого p $(1 \leqslant p < \infty)$

$$\int_T \left(\int_T \frac{1-r^2}{|\zeta - r\xi|^2} |f(\zeta)|\, |d\zeta| \right)^p |d\xi| \leqslant B \|f\|_p^p,$$

где B — постоянная, не зависящая от r.

3.2. Рассмотрим задачу A, когда $D(t) \equiv 1$:

$$\lim_{r \to 1-0} \|\Phi^+(\lambda_r(\alpha(t))) - \Phi^-(\lambda_r^{-1}(t)) - f(t)\|^p = 0. \tag{22}$$

Лемма 7. *Пусть $f(t) \in L^p(\Gamma)$. Тогда решение граничной задачи (22), равное нулю на бесконечности, имеет вид*

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\psi(\beta(t))}{t - z}\, dt,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\psi(t)}{t - z}\, dt, \tag{23}$$

где $\psi(t)$ — решение уравнения $K\psi = f(t)$, а $\beta(t)$ — функция, обратная $\alpha(t)$.

Доказательство. Единственность решения задачи (22) следует из теоремы 3. Пусть теперь $f_n(t) \in H(\Gamma)$ и $f_n(t) \to f(t)$ по метрике $L^p(\Gamma)$. Для каждой функции $f_n(t)$ рассмотрим граничную задачу

$$\Phi^+(\alpha(t)) - \Phi^-(t) = f_n(t). \tag{24}$$

Решение этой задачи, согласно (12), имеет вид

$$\Phi_n^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\psi_n(\beta(t))}{t - z}\, dt,$$

$$\Phi^-(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\psi_n(t)}{t-z}\,dt,$$

где $\psi_n(t)$—решение уравнения $K\psi=f_n(t)$.

Из (23) имеем

$$\Phi^+(\lambda_r(\alpha(t)))-\Phi^-(\lambda_r^{-1}(t))=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\psi(\beta(\tau))}{\tau-\lambda_r(\alpha(t))}\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\psi(\tau)}{\tau-\lambda_r^{-1}(t)}\,d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\lambda_r(\alpha(t))}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\tau-\lambda_r^{-1}(t)}\right]\psi(\tau)\,d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left[\frac{\omega'(\widetilde{\alpha}(\zeta))\,\widetilde{\alpha}'(\zeta)}{\omega(\widetilde{\alpha}(\zeta))-\lambda_r(\alpha(t))}-\right.$$

$$\left.-\frac{\omega'(\zeta)}{\omega(\zeta)-\lambda_r^{-1}(t)}\right]\psi(\omega(\zeta))\,d\zeta.$$

Следовательно

$$\int_\Gamma |\Phi^+(\lambda_r(\alpha(t)))-\Phi^-(\lambda_r^{-1}(t)-f(t)|^p\,|dt|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_\gamma\left|\int_\gamma H_r(\zeta;\xi)\,\psi(\omega(\zeta))\,d\zeta-f(\omega(\xi))\right|^p|\omega'(\xi)|\,|d\xi|\leqslant$$

$$\leqslant A\Bigg(\int_\gamma\left|\int_\gamma H_r(\zeta;\xi)\,[\psi(\omega(\zeta))-\psi_n(\omega(\zeta))]\,d\zeta\right|^p|\omega'(\xi)|\,|d\xi|+$$

$$+\int_\gamma\left|\int_\gamma H_r(\zeta;\xi)\,\psi_n(\omega(\zeta))\,d\zeta-f_n(\omega(\xi))\right|\,|\omega'(\xi)|\,|d\xi|+$$

$$+\int_\gamma|f_n(\omega(\xi))-f(\omega(\xi))\Big|^p|\omega'(\xi)|\,|d\xi|\Bigg).\qquad(25)$$

Применяя лемму 6 из (25), получим

$$\int_\Gamma|\Phi^+(\lambda_r(\alpha(t)))-\Phi^-(\lambda_r^{-1}(t))-f(t)|^p\,|dt|\leqslant$$

$$\leqslant C\Big(\|\psi_n-\psi\|_p^p+\|f_n-f\|_p^p+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_\gamma\left|\int_\gamma H_r(\zeta;\xi)\,\psi_n(\omega(\zeta))\,d\zeta-f_n(\omega(\xi))\right|^p|\omega'(\xi)|\,|d\xi|\Big).\qquad(26)$$

Так как функция $f_n(t)$ из класса Гельдера, то

$$\Phi_n^+(\lambda_r(\alpha(t)))-\Phi_n^-(\lambda_r^{-1}(t))-f_n(t)\to 0,\ \text{при}\ r\to 1-0,$$

равномерно на Г. Следовательно

$$\int_T H_r(\zeta; \xi)\, \psi_n(\omega(\zeta))\, d\zeta - f_n(\omega(\xi)) \to 0, \text{ при } r \to 1-0$$

равномерно на T. Тем самым последнее слагаемое в (26) стремится к нулю, когда $r \to 1-0$. Учитывая теперь лемму 1, завершаем доказательство леммы.

Из леммы 7 следует

Лемма 8. *Для того, чтобы задача* (22) *имела решение в классе функций, удовлетворяющих условию*

$$|\Phi(z)| < \text{const}\ |z|^{-n}, \quad n > 1, \quad z \to \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int_\Gamma \psi(t)\, t^k\, dt = 0, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, (n-2),$$

где $\psi(t)$*—решение уравнения* $K\psi = f(t)$.

3.3. Для каждого целого k обозначим через $\Phi_k(z)$ решение граничной задачи

$$\lim_{r \to 1-0} \|\Phi^+(\lambda_r(a(t))) - \Phi^-(\lambda_{r-1}(t)) - t^k\|_p = 0,$$

равное нулю на бесконечности. Очевидно, что любая конечная система функций $\Phi_k(z)$ линейно независима.

Из леммы 7 следует также

Лемма 9. *Общее решение задачи* (22) *в классе функций, удовлетворящих условию*

$$|\Phi^-(z)| \leqslant \text{const}\,|z|^n \quad (n \geqslant -1),$$

при $z \to \infty$, *можно представить в виде*

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\psi(\beta(t))}{t - z}\, dt + \sum_{k=0}^{n} c_k\, \Phi_k^+(z),$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\psi(t)}{t - z}\, dt + \sum_{k=0}^{n} c_k\, (z^k + \Phi_k^-(z)),$$

где $\psi(t)$*—решение уравнения* $K\psi = f(t)$, *а* $c_0, c_1, \cdots, c_n$*—произвольные комплексные числа.*

Доказательство. Представим $\Phi(z)$ в виде $\Phi^-(z) = \Psi^-(z) + P(z)$, где $P(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$, а $\Psi^-(z)$, аналитичнав G^- и $\Psi^-(\infty) = 0$. Тогда задачу (22) можно представить в виде

$$\lim_{r \to 1-0} \|\Phi^+(\lambda_r(a(t))) - \psi^-(\lambda r^{-1}(t)) - (f(t) + P(t))\|_p = 0.$$

Теперь остается применить лемму 7.

3.4. Пусть теперь

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} \Big[\operatorname{Arg} D(t) \Big]_\Gamma$$

есть индекс функции $D(t)$. Положим $D_0(t)=t^{-\varkappa}D(t)$. Так как индекс функции $D_0(t)$ равен нулю, то каноничечкое решение задачи

$$\Phi^+(\alpha(t))-D_0(t)\,\Phi^-(t)=0$$

имеет вид

$$X_0^+(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\chi(\beta(t))}{t-z}\,dt\right\},$$

$$X_0^-(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\chi(t)}{t-z}\,dt\right\}. \tag{27}$$

где $\chi(t)$—решение уравнения $K\chi=\ln D_0(t)$. Так как

$$D_0(t)=\frac{X_0^+(\alpha(t))}{X_0^-(t)},$$

то задачу A можем представить в виде

$$\lim_{r\to1-0}\left\|\Phi^+(\lambda_r(\alpha(t)))-t^{\varkappa}\frac{X_0^+(\alpha(t))}{X_0^-(t)}\,\Phi^-(\lambda_r^{-1}(t))-f(t)\right\|_p=0. \tag{28}$$

Теперь, учитывая теорему 1 и лемму 2, (28) запишем в виде

$$\lim_{r\to1-0}\left\|\frac{\Phi^+(\lambda_r(\alpha(t)))}{X_0^+(\lambda_r(\alpha(t)))}-\frac{t^{\varkappa}\Phi^-(\lambda_r^{-1}(t))}{X_0^-(\lambda_r^{-1}(t))}-\frac{f(t)}{X_0^+(\alpha(t))}\right\|_p=0. \tag{29}$$

Положим

$$F^+(z)=\frac{\Phi^+(z)}{X_0^+(z)},\quad F^-(z)=\frac{z^{\varkappa}\Phi^-(z)}{X_0^-(z)}. \tag{30}$$

Будем иметь

$$\lim_{r\to1-0}\left\|F^+(\lambda_r(\alpha(t)))-F^-(\lambda_r^{-1}(t))-\frac{f(t)}{X_0^+(\alpha(t))}\right\|_p=0. \tag{31}$$

Пусть теперь $\psi(t)$—решение уравнения $K\psi=f(t)\,[X_0(\alpha(t))]^{-1}$.

Имеет место следующая

Теорема 4. *Общее решение задачи A, равное нулю на бесконечности, в зависимости от индекса функции $D(t)$, можно представить в виде*

1) *если* $\varkappa\geqslant0$, *то*

$$\Phi^+(z)=\frac{X_0(z)}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\psi(\beta(t))}{t-z}\,dt+X_0(z)\sum_{k=0}^{\varkappa-1}c_k\Phi_k^+(z),$$

$$\Phi^-(z)=\frac{X_0(z)}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\psi(t)}{t-z}\,dt+X_0(z)\sum_{k=0}^{\varkappa-1}c_k(z^k+\Phi_k^-(z)), \tag{32}$$

где $c_0, c_1, \cdots, c_{\varkappa-1}$ — *произвольные комплексные числа при* $\varkappa\geqslant1$ *и* $\varkappa c_0=c_1=\cdots=c_{\varkappa-1}=0$ *при* $\varkappa=0$.

2) *если* $\varkappa\leqslant-1$, *то задача имеет решение тогда и только тогда, когда*

$$\int_\Gamma \psi(t)\, t^k\, dt = 0,\quad k = 0, 1, 2, \cdots, -(\varkappa+1),$$

при этом решение определяется по формуле (32), *если положить* $c_0 = c_1 = \cdots = c_{\varkappa-1} = 0$.

Доказательство. Пусть $\varkappa \geqslant 0$, тогда

$$|F^-(z)| < \text{const}\,|z|^{\varkappa-1} \qquad (z \to \infty).$$

Применяя лемму 7 из (31) будем иметь

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\psi(\beta(t))}{t-z}\,dt + \sum_{k=0}^{\varkappa-1} c_k \Phi_k(z),$$

$$F^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\psi(t)}{t-z}\,dt + \sum_{k=0}^{\varkappa-1} c_k (z^k + \Phi_k(z)).$$

Учитывая (30), получим формулу (32).

Второе утверждение теоремы следует из леммы 6.

В заключение отметим, что если в граничном условии (2) сходимость по метрике L^p заменить равномерной сходимостью, то можно доказать, что аналогичные результаты справедливы и в классе $C(\Gamma)$ непрерывных функций.

К данной тематике мое внимание привлек проф. Н. Е. Товмасян. Я выражаю ему свою искреннюю признательность за это, а также за постоянное внимание к работе.

Ереванский политехнический
институт имени К. Маркса

Поступила 26. VI. 1985

Հ. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. Շեղումով համալուծման եզրային խնդիրը L^1 դասում *(ամփոփում)*

Աշխատանքում, ընդհանրացնելով շեղումով համալուծման խնդիրների եզրային պայմանները, դիտարկվում է այդ խնդիրը այն դեպքում, երբ աջ մասը պատկանում է L^1 դասին։

Նկարագրվում է բոլոր լուծումները և ցույց է տրվում, որ նրանք գրվում են L դասի ֆունկցիաներից Կոշու տիպի ինտեգրալով։

G. M. AIRAPETIAN. *On the boundary problem of the conjugation with shift in the class* L^1 (summary)

In the paper the problem of the conjugation with shift is considered in the case, when the right side belongs to the class L^1.

All solutions are described and it is shown that they can be represented by the integral of Cauchy type from the functions of L^1 class.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968.
2. *Д. А. Квеселава.* Некоторые граничные задачи теории функций, Труды мат. ин-та АН Груз.ССР, 16, 1948, 39—80.

3. *И. Б. Симоненко.* Краевые задачи Римана и Римана—Газемана с непрерывными коэффициентами, Исследование по совр. пробл. теории функций комплексного переменного, М., Физматгиз, 1961, 380—389.
4. *Д. А. Квеселава.* Решение одной граничной задачи Т. Карлемана, ДАН СССР, 55, № 8, 1947, 683—686.
5. *Г. С. Литвинчук.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, М., «Наука», 1977.
6. *Г. М. Голузин.* Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1966.
7. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., 1977.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 3, 1987 Математика

УДК 517.927.21

Н. Е. ТОВМАСЯН

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА

Введение

Рассматривается следующая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u,\ t>0,\ x\in\mathbf{R}^1, \tag{1}$$

где $A(\sigma)$ — квадратная матрица порядка m, элементы которой — полиномы действительной переменной $\sigma\in\mathbf{R}^1$, $u(x,\ t)=(u_1(x,\ t),\ u_2(x,\ t),\cdots\cdots,\ u_m(x,\ t))$ — искомая вектор-функция.

Определение 1. Будем говорить, что заданная в области $t\geqslant 0$, $x\in\mathbf{R}^1$ функция $u(x,\ t)$ принадлежит классу M, если она бесконечно дифференцируема в этой области и удовлетворяет оценкам

$$\left|\frac{\partial^k u(x,\ t)}{\partial t^k}\right|\leqslant C_{k1}(1+t)^{c_{k2}}(1+|x|)^{c_{k3}};\ k=0,\ 1,\ t\geqslant 0,\ x\in\mathbf{R}^1, \tag{2}$$

где C_{k1}, c_{k2}, c_{k3} — положительные постоянные, зависящие от $u(x,\ t)$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $u(x,\ t)\in M_j$, если она принадлежит классу M и в оценке (2) $c_{03}=j$, т. е.

$$|u(x,\ t)|\leqslant C_1(1+t)^{c_2}(1+|x|)^j,\ t\geqslant 0,\ x\in\mathbf{R}^1, \tag{3}$$

где C_1 и c_2 — постоянные, зависящие от функции $u(x,\ t)$.

Определение 3. Заданная в $\mathbf{R}^1$ функция $f(x)$ принадлежит классу N_j, если она бесконечно дифференцируема и удовлетворяет оценкам

$$|f^{(k)}(x)|\leqslant C_k(1+|x|)^j,\ x\in\mathbf{R}^1,\ k=0,\ 1,\cdots, \tag{4}$$

где C_k — некоторые постоянные, зависящие от $f(x)$.

Пусть S — класс бесконечно дифференцируемых и быстро убывающих функций в $\mathbf{R}^1$, а S' — пространство линейных непрерывных функционалов в S.

Обозначим через $F[M]$ образ множества функций $u(x,\ t)\in M$ при преобразовании Фурье по переменной x (при этом функцию $u(x,\ t)$ при любом фиксированном $t\geqslant 0$ рассматриваем как обобщенную функцию). Аналогично определяются классы функционалов $F[M_j]$ и $F[N_j]$.

Делая преобразование Фурье по переменной x в системе (1), получим

$$\frac{dv(\sigma, t)}{dt} = A(\sigma) v(\sigma, t), t > 0, \sigma \in \mathbf{R}^1, \tag{5}$$

где $v = F[u(x, t)]$.

Здесь и в дальнейшем под $F[u(x, t)]$ и $F^{-1}[u(x, t)]$ понимается преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье функции $u(x, t)$ (как обобщенной функции) по переменной x. Под решением уравнения (5) понимается функционал $v(\sigma, t)$, зависящий от t как от параметра и принадлежащий классу $F[M]$. В уравнении (5) производная по t понимается в слабом смысле, а по x — в обобщенном смысле

Определение 4. Пусть G — открытое множество или отрезок в $\mathbf{R}^1$. Будем говорить, что

$$v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t), \sigma \in G, t > 0,$$

если при любом фиксированном $t > 0$ функционалы $v_1(\sigma, t)$ и $v_2(\sigma, t)$ определены и равны над множеством функций $C_0^\infty(G)$.

Пусть E — единичная m-мерная матрица, $\lambda_1(\sigma), \lambda_2(\sigma), \cdots, \lambda_m(\sigma)$ — корни характеристического уравнения

$$\det[E\lambda - A(\sigma)] = 0, \ \operatorname{Re}\lambda_1(\sigma) \leqslant \operatorname{Re}\lambda_2(\sigma) \leqslant \cdots \leqslant \operatorname{Re}\lambda_m(\sigma). \tag{6}$$

(Корень берется столько раз, какова его кратность).

Обозначим через $\rho(\sigma)$ — число корней уравнения (6) с $\operatorname{Re}\lambda(\sigma) < 0$.

Мы будем предполагать

1) $\rho(\sigma) = r$ всюду, кроме конечного числа точек $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_q$, т. е. система (1) регулярна с показателем регулярности r;

2) в окрестности точек $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_q$ корни $\lambda_1(\sigma), \cdots, \lambda_r(\sigma)$ отделены от корней $\lambda_{r+1}(\sigma), \cdots, \lambda_m(\sigma)$. Это означает, что можно указать непересекающиеся области G_{1k} и G_{2k} такие, что при $|\sigma - \sigma_k| \leqslant \varepsilon$ корни $\lambda_1(\sigma), \cdots, \lambda_r(\sigma)$ принадлежат области G_{1k}, а $\lambda_{r+1}(\sigma), \cdots, \lambda_m(\sigma)$ принадлежат G_{2k} $(k = 1, 2, \cdots, q)$. Здесь и в дальнейшем ε — достаточно малое положительное число.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача А. Найти решение системы (1) в классе M, удовлетворяющее граничному условию

$$Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, 0) = f(x), \ x \in \mathbf{R}^1, \tag{7}$$

где $Q(\sigma)$ матрица размерности $r \times m$, элементы которой — полиномы по переменной $\sigma \in \mathbf{R}^1$, $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$ — заданная вектор-функция из класса N_{j_0}.

Под решением задачи A понимается классическое решение. Делая преобразование Фурье по x в граничном условии (7), получаем

$$Q(\sigma) v(\sigma, 0) = g(\sigma), \tag{8}$$

где $g(\sigma) = F[f(x)]$.

Определение 5. Будем говорить, что задача A в точке $\sigma_0 \in \mathbf{R}^1$ удовлетворяет условию Лопатинского, если однородная задача (5), (8) ($g \equiv 0$) при $\sigma = \sigma_0$ имеет только нулевое решение в классе обычных функций, растущих по t не быстрее полинома.

Обозначим

$$P^+(\sigma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+(\sigma)} (E\lambda - A(\sigma))^{-1}\, d\lambda;\quad P^+_{\sigma_k}(\sigma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+(\sigma_k)} (E\lambda - A(\sigma))^{-1}\, d\lambda, \qquad (9)$$

$k = 1, 2, \cdots, q$, где $\gamma^+(\sigma)$ — замкнутый контур в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$, охватывающий все корни характеристического уравнения (6) с $\operatorname{Re}\lambda(\sigma) > 0$. Отметим, что матрица $P^+(\sigma)$ бесконечно дифференцируема при $\sigma \neq \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_q$, а $P^+_{\sigma_k}(\sigma)$ — бесконечно дифференцируема в окрестности точки σ_k.

Условие Лопатинского в точке σ эквивалентно условию [7]

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} P^+(\sigma) \\ Q(\sigma) \end{bmatrix} = m. \qquad (10)$$

В точках $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_q$ это условие заведомо нарушается. В дальнейшем предполагается, что условие Лопатинского выполняется всюду, кроме конечного числа точек $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ($n \geqslant q$), то есть

$$\operatorname{rang}\begin{vmatrix} P^+(\sigma) \\ Q(\sigma) \end{vmatrix} = m \text{ при } \sigma \in \mathbf{R}^1,\ \sigma \neq \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n. \qquad (11)$$

В случае, когда условие Лопатинского выполняется всюду, задача A в классе M и в более общих классах рассмотрена в работах [1], [2] и доказано существование и единственность решения этой задачи.

Задача A для однородного эллиптического уравнения высокого порядка с однородными граничными условиями в классе бесконечно дифференцируемых функций определенного роста рассмотрена в монографии [3].

При выполнении условия дополнительности, доказаны существование и единственность решения этой задачи.

Задача A в классе обобщенных функций $u(x, t)$, для которых $F[u(x, t)]$ и $F[f(x)]$ — обычные функции, растущие не быстрее полинома по x и по t, рассмотрена в работах [4]—[6]. В этом классе доказана единственность решения этой задачи и получены необходимые и достаточные условия на $g(\sigma) = F[f(x)]$ для разрешимости неоднородной задачи. В случае, когда $p(\sigma) = r$ всюду задача A в классе M рассмотрена в работе [7]. Доказано, что однородная задача A имеет конечное число линейно независимых решений, а неоднородная задача всегда разрешима.

Ясно, что $M_j \subset M_k$ при $j < k$. Целью данной работы является указать минимальный класс M_j, в котором задача A имеет решение для любой функции $f(x) \in N_{j_0}$, т. е. указать точную связь между ростом $f(x)$ и допустимым ростом $u(x, t)$, при котором задача A всегда разрешима.

В работе получена формула числа линейно независимых решений однородной задачи A в классе M_j, которое стремится к бесконечности при

$q \neq 0$ и $j \to +\infty$. Это означает, что при наличии нерегулярных точек естественно ставить задачу A в классах M_j.

Задача A рассматривается также для граничных данных $f(x) \in S$. Получены необходимые и достаточные условия ортогональности на $f(x)$; при которых эта задача имеет решение в заданном классе M_j (при любом $j \geqslant -1$). Начиная с некоторого j эти условия отсутствуют, а для остальных j число этих условий конечно и зависит как от пространства M_j, так и от коэффициентов системы (1) и граничного условия (7).

В работе указаны классы $M(-\infty)$ и $M(+\infty)$, в которых задача имеет и притом единственное решение для любой вектор-функции $f \in S$ и предлагается метод ее решения.

§ 1. Некоторые вспомогательные предложения

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dv}{dt} - Av = 0, \quad t > 0, \tag{12}$$

где A — постоянная квадратная матрица порядка m, $v = (v_1, \ldots, v_m)$ — искомое решение.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ — различные корни характеристического уравнения

$$\det [E\lambda - A] = 0, \tag{13}$$

а $k_1, k_2, \cdots, k_l$ — их кратности, $k_1 + k_2 + \cdots + k_l = m$.

Имеет место следующая

Лемма 1. *Для того, чтобы решение $v(t)$ системы (12) имело вид*

$$v(t) = \sum_{k=\nu+1}^{l} p_k(t)\, e^{\lambda_k t}, \tag{14}$$

необходимо и достаточно, чтобы начальное значение $v(0)$ удовлетворяло условию

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} (E\lambda - A)^{-1}\, d\lambda\, v(0) = 0, \tag{15}$$

где $p_k(t)$ — m-мерная вектор-функция с полиномиальными элементами, а γ_1 — замкнутый контур, охватывающий из корней характеристического уравнения (13) только $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu$.

Доказательство. Необходимость. Пусть решение $v(t)$ системы (12) представляется в виде (14), а $w(\lambda)$ — преобразование Лапласа этого решения. Совершая в (12) преобразование Лапласа, получим

$$w(\lambda) = (E\lambda - A)^{-1} v(0). \tag{16}$$

Из (14) следует, что $w(\lambda)$ аналитична всюду в комплексной плоскости λ, кроме, быть может, точек $\lambda_{\nu+1}, \cdots, \lambda_l$ и $w(\lambda) \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Поэтому [10]

$$v(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} w(\lambda)\, e^{\lambda t}\, d\lambda, \tag{17}$$

где γ_2 — произвольный замкнутый контур, охватывающий из точек $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\rho$ только $\lambda_{\rho+1}, \cdots, \lambda_l$. Тогда из (16) и (17) имеем

$$v(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} e^{\lambda t}(E\lambda - A)^{-1}\, d\lambda\, v(0). \tag{18}$$

Подставляя в (18) $t = 0$, получим

$$v(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} (E\lambda - A)^{-1}\, d\lambda\, v(0). \tag{19}$$

Известно, что (см. [8], стр. 41)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1+\gamma_2} (E\lambda - A)^{-1}\, d\lambda = E. \tag{20}$$

Используя формулу (20), условие (19) можно записать в виде (15).

Достаточность. Пусть $v(t)$ — решение системы (1) и $v(0)$ удовлетворяет условию (15). Рассмотрим вектор-функцию

$$\omega(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} e^{\lambda t}(E\lambda - A)^{-1}\, d\lambda\, v(0). \tag{21}$$

Легко проверить, что $\omega(t)$ является решением системы (12) и согласно условию (15) и формуле (20), $\omega(0) = v(0)$. Из единственности решения задачи Коши следует, что $v(t) = \omega(t)$. Вычисляя контурный интеграл (21) по теореме о вычетах убедимся, что решение $v(t)$ имеет вид (14).

Лемма 2. *Пусть γ_1 — замкнутый контур в комплексной плоскости λ и* $\det[E\lambda - A] \neq 0$ *при* $\lambda \in \gamma_1$. *Тогда*

$$\operatorname{rang}\int_{\gamma_1} (E\lambda - A)^{-1}\, d\lambda = m_0,$$

где m_0 — число корней характеристического уравнения (13), охваченных контуром γ_1 (корни считаются столько раз, какова их кратность).

Доказательство. Известно, что система (12) имеет $k_{\rho+1} + \cdots + k_l$ линейно независимых решений вида (14). Из леммы 1 непосредственно следует, что система (15) относительно $v(0)$ имеет такое же число линейно независимых решений. Следовательно, ранг матрицы системы (15) равен $n - (k_{\rho+1} + \cdots + k_l) = k_1 + k_2 + \cdots + k_\rho = m_0$. Лемма доказана.

Пусть

$$\exp\{At\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}, \quad -\infty < t < +\infty, \tag{22}$$

где A — квадратная матрица n-го порядка, $A^0 = E$.

Известно, что ([8], стр. 41)

$$\exp\{At\} = \int_{\gamma} e^{\lambda t}(E\lambda - A)^{-1}\,d\lambda \quad (-\infty < t < +\infty), \tag{23}$$

$$\exp\{At\}\cdot\exp\{A\tau\} = \exp\{A(t+\tau)\}, \tag{24}$$

$$\frac{d}{dt}\exp\{At\} = A\exp\{At\}, \tag{25}$$

где γ — замкнутый контур в комплексной плоскости λ, охватывающий все корни характеристического уравнения (13).

Лемма 3. *Если* $v(\sigma, t) \in F[M]$ *— решение системы* (5), *то*

$$P^{+}(\sigma)\,v(\sigma, 0) = 0, \quad \sigma \in \mathbf{R}^1, \quad \sigma \neq \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_q, \tag{26}$$

$$P^{+}_{\sigma_k}(\sigma)\,v(\sigma, 0) = 0, \text{ при } |\sigma - \sigma_k| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \cdots, q. \tag{27}$$

Доказательство. Напомним, что $\sigma_1, \cdots, \sigma_q$ — нерегулярные точки системы (1), а $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ $(n > q)$ — точки, где нарушается условие Лопатинского для задачи A. Пусть $v(\sigma, t) \in F[M]$ — решение системы (5). Используя формулы (24) и (25), получим

$$\frac{d}{dt}[\exp\{-A(\sigma)t\}\,v(\sigma, t)] = 0, \text{ при } t > 0, \ \sigma \in \mathbf{R}^1. \tag{28}$$

Отсюда имеем

$$\exp\{-A(\sigma)t\}\,v(\sigma, t) = L, \ t > 0, \ \sigma \in \mathbf{R}^1, \tag{29}$$

где L — функционал, не зависящий от t.

В (29), переходя к пределу при $t \to 0$, получим

$$L = v(\sigma, 0), \ \sigma \in \mathbf{R}^1. \tag{30}$$

Далее, умножая обе части (29) на $\exp\{A(\sigma)t\}$ и используя равенство (30), получим

$$v(\sigma, t) = \exp\{A(\sigma)t\}\,v(\sigma, 0), \ t > 0, \ \sigma \in \mathbf{R}^1. \tag{31}$$

Отсюда, в частности, имеем

$$v(\sigma, 0) = \exp\{-A(\sigma)t\}\,v(\sigma, t). \tag{32}$$

Заменяя t на $-t$ и A на $A(\sigma)$ в (23), получим

$$\exp\{-A(\sigma)t\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(\sigma)} e^{-\lambda t}(E\lambda - A(\sigma))^{-1}\,d\lambda, \tag{33}$$

где $\gamma(\sigma)$ — замкнутый контур, охватывающий все корни характеристического уравнения (6).

Отсюда и из формулы (2.4) монографии [8] (стр. 30) получим

$$P^{+}(\sigma)\cdot\exp\{-A(\sigma)t\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^{+}(\sigma)} e^{-\lambda t}(E\lambda - A(\sigma))^{-1}\,d\lambda; \ \sigma \in \mathbf{R}^1, \tag{34}$$

$$P^{+}_{\sigma_k}(\sigma)\cdot\exp\{-A(\sigma)t\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^{+}(\sigma_k)} e^{-\lambda t}(E\lambda - A(\sigma))^{-1}\,d\lambda; \ |\sigma - \sigma_k| < \varepsilon. \tag{35}$$

Из (34) следует, что матрица $t^N_{-} P^{+}(\sigma)\cdot\exp\{-A(\sigma)t\}$ и ее производные по σ равномерно стремятся к нулю при $t\to+\infty$ в малой окрестности любой точки $\sigma_0\neq\sigma_1,\cdots,\sigma_q$. Аналогичное утверждение верно и для матрицы $t^N P^{+}_{\sigma_k}\cdot\exp\{-A(\sigma)t\}$ в окрестности точек σ_k $(k=1,2,\cdots,q)$ (N — произвольное число).

Умножая обе части (32) на матрицу $P^{+}(\sigma)$, получим

$$P^{+}(\sigma)v(\sigma,0)=P^{+}(\sigma)\exp\{-A(\sigma)t\}v(\sigma,t);\ t>0,\ \sigma\in\mathbf{R}^1,\ \sigma\neq\sigma_1,\cdots,\sigma_q. \tag{36}$$

Переходя к пределу при $t\to+\infty$ в (36) и имея в виду, что $v(\sigma,t)\in F[M]$, получим равенство (26). Равенство (27) доказывается аналогично.

Лемма 4. *Если выполнено условие* (11), *то*

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix}P^{+}_{\sigma_k}(\sigma)\\ Q(\sigma)\end{bmatrix}=r+m-\rho(\sigma_k).\ \text{при}\ \begin{matrix}0<|\sigma-\sigma_k|\leqslant\varepsilon,\\ k=1,2,\cdots,n.\end{matrix} \tag{37}$$

Доказательство. Из леммы 2 следует, что

$$\operatorname{rang}P^{+}_{\sigma_k}(\sigma)=m-\rho(\sigma_k),\ \text{при}\ |\sigma-\sigma_k|\leqslant\varepsilon,\ k=1,2,\cdots,q, \tag{38}$$

$$\operatorname{rang}P^{+}(\sigma)=m-\rho(\sigma)\ \text{при}\ \sigma\in\mathbf{R}^1, \tag{39}$$

$$\operatorname{rang}[P^{+}(\sigma)-P^{+}_{\sigma_k}(\sigma)]=\rho(\sigma_k)-\rho(\sigma),\ \text{при}\ |\sigma-\sigma_k|\leqslant\varepsilon \tag{40}$$

$(k=1,2,\cdots,n)$.

По предположению $\rho(\sigma)=r$ при $\sigma\neq\sigma_1,\cdots,\sigma_q$.

Ясно, что

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix}P^{+}(\sigma)\\ Q(\sigma)\end{bmatrix}\leqslant\operatorname{rang}\begin{bmatrix}P^{+}(\sigma)-P^{+}_{\sigma_k}(\sigma)\\ P^{+}_{\sigma_k}(\sigma)\\ Q(\sigma)\end{bmatrix}. \tag{41}$$

Так как при $\sigma\neq\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ левая часть неравенства (41) равна m (по условию), то правая часть этого неравенства равна m при $\sigma\neq\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$. Отсюда и из равенств (38) и (40) получим утверждение этой леммы.

Пусть $\Delta_k(\sigma)$ — матрицы размерности $\rho_0\times m$ $(\rho_0\leqslant m)$, элементы которой — аналитические функции в окрестности точки $\sigma=\sigma_k$, причем

$$\operatorname{rang}\Delta_k(\sigma)=\rho_0;\ \text{при}\ 0<|\sigma-\sigma_k|\leqslant\varepsilon, \tag{42}$$

а $\operatorname{rang}\Delta_k(\sigma_k)\leqslant\rho_0$. Обозначим через n_0 наименьший порядок нуля в точке $\sigma=\sigma_k$ всевозможных миноров порядка ρ_0 матрицы $\Delta_k(\sigma)$. Для матрицы $\Delta_k(\sigma)$ имеет место следующая

Лемма 5. *В окрестности точки σ_k существует невырожденная аналитическая квадратная матрица $\alpha_k(\sigma)$ порядка ρ_0 такая, что*

$$\alpha_k(\sigma)\Delta_k(\sigma)=\operatorname{diag}[(\sigma-\sigma_k)^{n_1},(\sigma-\sigma_k)^{n_2},\cdots,(\sigma-\sigma_k)^{n_{\rho_0}}]B_k(\sigma), \tag{43}$$

при $|\sigma - \sigma_k| \leqslant \varepsilon$, *где* $n_1, n_2, \cdots, n_{\rho_0}$ — *неотрицательные целые числа,* $n_1 + n_2 + \cdots + n_{\rho_0} = n_0$, $B_k(\sigma)$ — *прямоугольная матрица размерности* $\rho_0 \times m$ *с аналитическими элементами в окрестности точки* σ_k, *удовлетворяющая условию*

$$\operatorname{rang} B_k(\sigma_k) = \rho_0.$$

Эта лемма доказана в диссертационной работе [9], доказательство приводится методом последовательного исключения (методом Гаусса). В случае, когда $\Delta_k(\sigma_k) = \rho_0$ числа $n_1 = n_2 = \cdots = n_{\rho_0} = 0$.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача B. Найти решение $v(\sigma) = (v_1(\sigma), \cdots, v_m(\sigma))$ системы

$$\Delta_k(\sigma)\, v(\sigma) = 0, \tag{44}$$

принадлежащее классу $F[N_j]$ и сосредоточенное в точке σ_k (j — целое неотрицательное число), где $\Delta_k(\sigma)$ — матрица, указанная в лемме 5.

Лемма 6. *Число линейно независимых решений задачи B равно*

$$\sum_{k=1}^{\rho_0} \mu_k + (j+1)(m - \rho_0), \quad \text{где} \quad \mu_k = \min\{n_k, j+1\},$$

$n_i (i = 0, 1, \cdots, \rho_0)$ — *целые числа, входящие в формулировку леммы 5. В частности, из этой формулы следует, что если* $j \geqslant n_0 - 1$, *то число линейно независимых решений однородной задачи* B *равно* $n_0 + (j+1)(m - \rho_0)$.

Доказательство. Пусть $\alpha_k(\sigma)$ — матрица, построенная в лемме 5. Умножая обе части (44) на $\alpha_k(\sigma)$ и учитывая равенство (43), получим

$$(\sigma - \sigma_k)^{n_1} w_1 = 0, \ (\sigma - \sigma_k)^{n_2} w_2 = 0, \cdots, \ (\sigma - \sigma_k)^{n_{\rho_0}} w_{\rho_0} = 0,$$

где

$$w \equiv (w_1, w_2, \cdots, w_{\rho_0}) = B_k(\sigma)\, v(\sigma). \tag{45}$$

Общее решение уравнения $(\sigma - \sigma_k)^{n_p} w_p = 0$ определяется формулой [4]:

$$w_p^s = \sum_{s=0}^{n_p - 1} c_{ps}\, \delta^{(s)}(\sigma - \sigma_k), \tag{46}$$

где $\delta(\sigma - \sigma_k)$ — дельта-функция Дирака.

Так как функционалы $w_p \in F[N_j]$, то из (46) следует, что коэффициенты $c_{ps} = 0$ при $s > j$, т. е.

$$w_p = \sum_{s=0}^{\mu_p - 1} c_{ps}\, \delta^{(s)}(\sigma - \sigma_k),$$

где c_{ps} — произвольные постоянные.

Уравнение (45) относительно $v(\sigma)$ при заданном w решаем следующим образом. Так как $\operatorname{rang} B_k(\sigma_k) = \rho_0$, то в окрестности σ_k существует ρ_0 линейно независимых столбцов матрицы $B_k(\sigma)$. Пусть, для определенности, первые ρ_0 столбцов линейно независимы, тогда уравнение (45) решается относительно $v_1(\sigma), v_2(\sigma), \cdots, v_{\rho_0}(\sigma)$, а остальные $v_k(\sigma)$ $(k = \rho_0 + 1, \cdots, m)$ берутся произвольными функционалами из

$F[N_j]$, сосредоточенными в точке σ_k. Такими функционалами являются линейные комбинации $\delta(\sigma-\sigma_k)$, $\delta'(\sigma-\sigma_k),\cdots,\delta^{(j)}(\sigma-\sigma_k)$.

Таким образом, получили, что задача B имеет

$$\nu=\sum_{i=1}^{p_0}\mu_i+(j+1)(m-p_0) \tag{47}$$

линейно независимых решений.

Замечание 1. Если j — нецелое, неотрицательное число, то в формуле (47) число j нужно заменить на $[j]$, где $[j]$—целая часть j. Если $j<0$, то задача B не имеет нетривиальных решений.

Рассмотрим уравнение

$$(\sigma-\sigma_0)^l w=\rho(\sigma),\ \sigma\in\mathbf{R}^1, \tag{48}$$

где $\rho(\sigma)\in S$, l — натуральное число, а $w(\sigma)$ — искомое решение из класса S'.

Уравнение (48) в классе $F[N_{l-1}]$ всегда имеет решение.

Лемма 7. *Для того, чтобы уравнение* (48) *в классе* $F[N_j]$ (*в классе* $E[M_j]$) *при* $-1\leqslant j<l-1$ *имело решение, необходимо и достаточно, чтобы функция* $\rho(\sigma)$ *удовлетворяла условиям*

$$\rho^{(k)}(\sigma_0)=0,\ k=0,\ 1,\cdots,\ l-[j]-2. \tag{49}$$

Доказательство леммы 7 очевидно.

§ 2. Исследование однородной задачи A

Однородная задача A в классе M_j, как было показано во введении, эквивалентна следующей задаче.

Задача С. В классе $F[M_j]$ найти решение $v(\sigma,\ t)$ системы

$$\frac{dv}{dt}=A(\sigma)v,\ t>0,\ \sigma\in\mathbf{R}^1, \tag{50}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$Q(\sigma)v(\sigma,\ 0)=0,\ \sigma\in\mathbf{R}^1. \tag{51}$$

Покажем, что задача С имеет конечное число линейно независимых решений и укажем метод построения всех решений. Пусть сначала j — целое неотрицательное число.

Из (26) и (51), учитывая условие (11), получим

$$v(\sigma,\ 0)=0,\ \text{при}\ \sigma\in\mathbf{R}^1,\ \sigma\neq\sigma_1,\ \sigma_2,\cdots,\ \sigma_n.$$

Следовательно, если $v(\sigma,\ t)$ — решение задачи С, то $v(\sigma,\ 0)$ можно представить в виде

$$v(\sigma,\ 0)=\overset{1}{v}(\sigma,\ 0)+\overset{2}{v}(\sigma,\ 0)+\cdots+\overset{n}{v}(\sigma,\ 0); \tag{52}$$

где $\overset{k}{v}(\sigma,\ 0)$—вектор-функция из класса $F[M_j]$, сосредоточенный в точке σ_k $(k=1,\ 2,\cdots,\ n)$.

Из условий (27) и (51) следует, что вектор-функционал $\overset{k}{v}(\sigma, 0)$ $k=(1, 2, \cdots, n)$ удовлетворяет следующей системе:

$$\begin{cases} P^{+}_{\sigma_k}(\sigma)\overset{k}{v}(\sigma, 0)=0 \\ Q(\sigma)\overset{k}{v}(\sigma, 0)=0, \quad |\sigma-\sigma_k|\leqslant\varepsilon, \ k=1, 2, \cdots, n. \end{cases} \tag{53}$$

Теперь укажем метод решения системы (53). Из равенства (38) следует, что матрица $P^{+}_{\sigma_k}(\sigma)$ $(k=1, 2, \cdots, q)$ в окрестности точки σ_k имеет $m-\rho(\sigma_k)$ линейно независимых строк. Пусть $\Delta_k(\sigma)$ $(k=1, 2, \cdots, q)$ — матрица размерности $(m-\rho(\sigma_k)+r)\times m$, состоящая из линейно независимых строк матрицы $P^{+}_{\sigma_k}(\sigma)$ в окрестности σ^k и строк матрицы $Q(\sigma)$. Согласно лемме 4

$$\operatorname{rang}\Delta_k(\sigma)=m-\rho(\sigma_k)+r, \text{ при } 0<|\sigma-\sigma_k|\leqslant\varepsilon, \ k=1, 2, \cdots, n.$$

Ясно, что система (53) эквивалентна системе $\Delta_k(\sigma)\overset{k}{v}(\sigma, 0)=0$. Таким образом, задачу C привели к задаче B, которая исследована в § 1. Пусть l_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ — число линейно независимых решений системы (53) в классе $F[N_j]$, сосредоточенных в точке σ_k. Согласно лемме 6 эти числа конечны.

Подставляя найденные решения системы (53) в формулу (52), получим

$$v(\sigma, 0)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{l_k}c_{ks}\overset{k}{w}_s(\sigma), \tag{54}$$

где $\overset{k}{w}_s(\sigma)$ $(s=1, \cdots, l_k)$ — линейно независимые решения системы (53), c_{ks} — произвольные постоянные, $\overset{k}{w}(\sigma)\in F[N_j]$.

Ясно, что функции $\overset{k}{w}_s(s=1, 2, \cdots, l_k, \ k=1, 2, \cdots, n)$ в совокупности также линейно независимы.

Подставляя $v(\sigma, 0)$ из (54) в (31), получим

$$v(\sigma, t)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{l_k}c_{ks}\exp[A(\sigma)t]\overset{k}{w}_s(\sigma). \tag{55}$$

Обозначим через $P^{-}(\sigma)$ и $P^{-}_{\sigma_k}(\sigma)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ матрицы

$$P^{-}(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^{-}(\sigma)}(E\lambda-A(\sigma))^{-1}d\lambda, \quad P^{-}_{\sigma_k}(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^{-}(\sigma_k)}(E\lambda-A(\sigma))^{-1}d\lambda,$$

где $\gamma^{-}(\sigma)$ — замкнутый контур в комплексной плоскости λ, охватывающий все корни уравнения (6) с $\operatorname{Re}\lambda\leqslant 0$ и не охватывающий остальные корни.

Подставляя в (33) $t=0$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(\sigma)}(E\lambda-A(\sigma))^{-1}d\lambda=E. \tag{56}$$

Аналогично, из формул (34) и (35) получим

$$P^{-}(\sigma)\exp\{A(\sigma)t\}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^{-}(\sigma)}e^{\lambda t}(E\lambda-A(\sigma))^{-1}d\lambda, \tag{57}$$

$$P^{-}_{\sigma_k}(\sigma)\exp\{A(\sigma)t\}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^{-}(\sigma_k)}e^{\lambda t}(E\lambda-A(\sigma))^{-1}d\lambda. \tag{58}$$

Из (56), в частности, следует, что

$$P^{+}_{\sigma_k}(\sigma)+P^{-}_{\sigma_k}(\sigma)=E, \quad \text{при} \quad |\sigma-\sigma_k|\leqslant\varepsilon. \tag{59}$$

Так как функционал $\overset{k}{w}_s(\sigma)$ удовлетворяет условию (53) и сосредоточен в точке σ_k, то, учитывая соотношение (59), решение (55) можно записать в виде

$$v(\sigma,\ t)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{l_k}c_{ks}P^{-}_{\sigma_k}(\sigma)\cdot\exp\{A(\sigma)t\}\overset{k}{w}(\sigma). \tag{60}$$

Поскольку $\overset{k}{w}_s(\sigma)\in F[N_j]$ и сосредоточен в точке σ_k, то

$$\overset{k}{w}_s(\sigma)=\sum_{l=0}^{j}c_{ksl}\,\delta^{(l)}(\sigma-\sigma_k), \tag{61}$$

где c_{ksl} — некоторые постоянные m-мерные векторы. Отсюда и из (60) следует, что функционал $v(\sigma,\ t)$ имеет вид

$$v(\sigma,\ t)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{l_k}\sum_{l=0}^{j}a_{ksl}(t)\,\delta^{(l)}(\sigma-\sigma_k), \tag{62}$$

где $a_{ksl}(t)$—вектор-функция, компоненты которой линейно выражаются через производные по σ до порядка j элементов матрицы $P^{-}_{\sigma_k}(\sigma)\exp$ $\exp\{A(\sigma)t\}$ в точке σ_k $(k=1,\ 2,\cdots,\ n)$.

Вычисляя интеграл (58) по теореме о вычетах, убедимся, что $a_{ksl}(t)$ и их производные растут не быстрее полинома при $t\to+\infty$. Следовательно, вектор-функционал $v(\sigma,\ t)$, определенный формулой (55), принадлежит классу $F[M_j]$ при произвольных постоянных c_{ks} Совершая в (62) обратное преобразование Фурье по переменным σ получим

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{l_k}\sum_{l=0}^{j}a_{ksl}(t)(ix)^{l}\exp\{-i\sigma_k t\}, \tag{63}$$

которое является общим решением однородной задачи A в классе M_j. Таким образом, доказана

Теорема 1. *Однородная задача A в классе M_j имеет $\nu=l_1+l_2+\cdots+l_n$ линейно независимых решений, где $l_1,\ l_2,\cdots,\ l_n$ — целые числа, определенные выше.*

Замечание 2. Если $j<0$, то однородная задача в классе M_j не имеет нетривиальных решений. Если же j — положительное нецелое число, то пространство решений однородной задачи A в классах M_j и $M_{[j]}$ совпадают.

§ 3. Исследование неоднородной задачи A

Обозначим

$$P_r^+(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r^+(\sigma)}(E\lambda-A(\sigma))^{-1}\,d\lambda;\quad P_r^-(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r^-(\sigma)}(E\lambda-A(\sigma))^{-1}\,d\lambda,$$

где $\gamma_r^+(\sigma)$ и $\gamma_r^-(\sigma)$ — простые замкнутые контуры в комплексной плоскости λ, такие, что 1) они не пересекаются и не содержатся один внутри другого, 2) контур $\gamma_r^-(\sigma)$ охватывает корни $\lambda_1(\sigma)$, $\lambda_2(\sigma)$, $\cdots$ $\cdots$, $\lambda_r(\sigma)$, а контур $\gamma_r^+(\sigma)$ охватывает корни $\lambda_{r+1}(\sigma),\cdots,\lambda_m(\sigma)$ уравнения (6).

При наших предположениях на корни характеристического уравнения (6) матрицы $P_r^+(\sigma)$ и $P_r^-(\sigma)$ бесконечно дифференцируемы и

$$P_r^+(\sigma)+P_r^-(\sigma)=E,\quad \sigma\in R^1,$$
$$P_r^+(\sigma)=P^+(\sigma),\ P_r^-(\sigma)=P^-(\sigma),\ \text{при}\ \sigma\neq\sigma_1,\cdots,\sigma_q. \tag{64}$$

Рассмотрим следующую задачу

Задача D. Найти решение $v(\sigma)=(v,\ (\sigma),\ldots,v_m(\sigma))$ системы

$$P_r^+(\sigma)v=0, \tag{65}$$

$$Q(\sigma)v=g(\sigma), \tag{66}$$

принадлежащее классу $F[N]$, где $N=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}N_k$, $g=F[f(x)]$, $f\in N_{i_0}$.

Теорема 2. *Если $v(\sigma)$ является решением задачи D в классе $F(N_j)$, то*

$$u(x,\ t)=F^{-1}[\exp\{A(\sigma)t\}P_r^-(\sigma)v(\sigma)] \tag{67}$$

есть частное решение задачи A, принадлежащее классу M_j.

Доказательство. Теорему докажем для случая, когда $q=1$, $n=1$, то есть условие Лопатинского выполняется всюду, кроме точки $\sigma=\sigma_1$; $\rho(\sigma)=r$ при $\sigma\neq\sigma_1$ и $\rho(\sigma_1)>r$. Общий случай доказывается аналогично. Пусть

$$w(\sigma,\ t)=\exp\{A(\sigma)t\}P_r^-(\sigma)v(\sigma);\ t>0. \tag{68}$$

Ясно, что $w(\sigma,\ t)$ удовлетворяет системе (5). Из (64)—(66) следует, что $w(\sigma,\ t)$ удовлетворяет также граничному условию (8). Докажем, что $w(\sigma,\ t)\in F[M_j]$.

Из (57) и (68) имеем

$$w(\sigma,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r^-(\sigma)}e^{\lambda t}(E\lambda-A(\sigma))^{-1}\,d\lambda\,v(\sigma), \tag{69}$$

В работе [7] доказано, что если $v(\sigma)\in F[N_j]$, то функционал (69): $w(\sigma,\ t)\in F[M_j]$. Следовательно, функция $u(x,\ t)$, определенная формулой (67), принадлежит классу M_j, что и требовалось доказать.

Теперь выясним следующий вопрос: в каком классе $F[M_j]$ система (65)—(66) имеет решение? Согласно лемме 2 $\operatorname{rang} P_r^+(\sigma) = m - r$. Обозначим $\Delta_k(\sigma)$ матрицу, строки которой составлены из строк матрицы $Q(\sigma)$ и линейно независимых строк матрицы $P_r^+(\sigma)$ в окрестности точки σ_k ($k=1, 2, \cdots, n$), где σ_k — точки, в которых нарушается условие Лопатинского.

Пусть β_k — кратность нуля σ_k функции $\det \Delta_k(\sigma)$. Согласно лемме 5 в окрестности точки σ_k существует невырожденная квадратная матрица $\alpha_k(\sigma)$ порядка m такая, что

$$\alpha_k(\sigma)\Delta_k(\sigma) = \operatorname{diag}[(\sigma-\sigma_k)^{\gamma_{k1}}, \cdots, (\sigma-\sigma_k)^{\gamma_{km}}] B_k(\sigma) \qquad (70)$$

при $|\sigma - \sigma_k| < \varepsilon$, где $\gamma_{k1}, \cdots, \gamma_{km}$ — неотрицательные целые числа $\gamma_{k1} + \cdots + \gamma_{km} = \beta_k$, $B_k(\sigma)$ — невырожденная квадратная матрица порядка m с аналитическими коэффициентами. Обозначим через

$$\beta_0 = \max\{\gamma_{ks},\ k=1, 2, \cdots, n,\ s=1, \cdots, m\}. \qquad (71)$$

В работе [7] показано, что если $g \in F[N_{j_0}]$, то задача (65)—(66) имеет решение в классе $F[N_{j_0+\beta_0}]$ и указан метод построения всех решений в этом классе.

Из формулы общего решения задачи (65)—(66) в классе $F[N_{j_0+\beta_0}]$, полученной в работе [7], следует, что всегда можно указать функционал $g(\sigma) \in F[N_{j_0}]$, для которого эта задача не имеет решения в классе $F[N_k]$ при любом $k < j_0 + \beta_0$, то есть класс $F[N_{j_0+\beta_0}]$ является минимальным классом, в котором существует решение задачи (65)—(66) для любого функционала $g \in F[N_{j_0}]$.

Отсюда и из теоремы 1 следует

Теорема 3. *Если $f(x) \in N_{j_0}$, то неоднородная задача A имеет решение в классе $M_{j_0+\beta_0}$.*

Теперь покажем, что этот класс тоже является минимальным, в котором существует решение задачи A при любой $f \in N_{j_0}$.

Сначала докажем это утверждение для случая, когда j_0 — нецелое положительное число.

Согласно вышесказанному, существует вектор-функция $f(x) \in N_{j_0}$ такая, что задача (65)—(66) имеет решение $v(\sigma)$, принадлежащее классу $F[M_{j_0+\beta_0}]$, но не принадлежащее $F[M_k]$ при любом $k < j_0 + \beta_0$.

Пусть $u_0(x, t)$ — вектор-функция, определенная через $v(\sigma)$ по формуле (67). Ясно, что $u_0(x, t) \in M_{j_0+\beta_0}$, но не принадлежит M_k при $k < j_0 + \beta_0$ (так как $u_0(x, 0) \overline{\in} M_k$) при $k < j_0 + \beta_0$).

Любое решение задачи A, принадлежащее классу $M_{j_0+\beta_0}$, представляется в виде

$$u(x, t) = u_0(x, t) + w(x, t), \qquad (72)$$

где $w(x, t)$ — общее решение однородной задачи A в этом классе.

Из замечания 2 следует, что $w(x, t) \in M_{[j_0]+\beta_0}$. Отсюда и из формулы (72) непосредственно следует, что при указанной выше вектор-функции $f(x)$, все решения задачи A не принадлежат классу M_k при $k < j_0 + \beta_0$. При j целом доказательство проводится аналогично.

§ 4. Исследование задачи A при $f \in S$

Обозначим через $M(-\infty)$ класс функций $u(x, t)$ из M, удовлетворяющих условию

$$\lim_{x \to -\infty} u(x, t) = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{73}$$

Аналогично определяется класс функций $N(-\infty)$, где $N = \bigcup_{j=0}^{\infty} N_j$.

В этом параграфе исследуется задача A в классе $M(-\infty)$, когда $f(x) \in S$. Требования относительно коэффициентов системы и граничного условия те же, что и в предыдущих параграфах.

Предварительно рассмотрим следующую задачу.

Задача D_0. Найти решение системы (65)—(66), принадлежащее классу $F[N(-\infty)]$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Если $g(\sigma) \in S$, то задача D_0 имеет, и притом единственное, решение.*

Доказательство. Для простоты изложения приведем доказательство при $q = 1$, $n = 1$, $\sigma_1 = 0$. Общий случай доказывается аналогично.

Пусть сначала $g(\sigma) \in S$ и $g(\sigma) = 0$ в окрестности точки $\sigma_1 = 0$. Тогда система (65)—(66) имеет решение в классе S [7].

Пусть теперь $g(\sigma) \in S$ и носитель $g(\sigma)$ находится в окрестности точки $\sigma_1 = 0$. Пусть, далее, $\alpha_1(\sigma)$, $\Delta_1(\sigma)$ и $B_1(\sigma)$ — матрицы, построенные в § 3 (см. равенство (70)). Система (65)—(66) эквивалентна системе

$$\Delta_1(\sigma)\, v = \omega(\sigma), \tag{74}$$

где $\omega(\sigma) = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{m-r}, g_1(\sigma), \cdots, g_r(\sigma))$.

Умножая обе части (74) на $\alpha_1(\sigma)$ и имея в виду равенство (70) при $k_1 = 1$, получим

$$\sigma^{\gamma_{11}} w_1 = p_{11}(\sigma), \ \sigma^{\gamma_{12}} w_2 = p_{12}(\sigma), \cdots, \ \sigma^{\gamma_{1m}} w_m = p_{1m}(\sigma), \tag{75}$$

где

$$w \equiv (w_1, w_2, \cdots, w_m) = B_1(\sigma)\, v, \ (p_{11}(\sigma), \cdots, p_{1m}(\sigma)) = \alpha_1(\sigma)\, \omega(\sigma). \tag{76}$$

Делая обратное преобразование Фурье в (75), имеем

$$(i)^{\gamma_{1k}} \frac{d^{\gamma_{1k}} u_k}{dx^{\gamma_{1k}}} = f_k(x); \ k = 1, 2, \cdots, m, \tag{77}$$

где

$$f_k(x) = F^{-1}[p_{1k}(\sigma)], \quad u_k(x) = F^{-1}[w_k(\sigma)].$$

Ясно, что $f_k(x) \in S$. Частное решение уравнения (77) дается формулой

$$u_k(x) = \frac{(-i)^{\gamma_{1k}}}{(\gamma_{1k}-1)!} \int_{-\infty}^{x} (x - \tau)^{\gamma_{1k}-1} f_k(\tau)\, d\tau. \tag{78}$$

Легко показать, что $u_k(x) \in N(-\infty)$, поэтому

$$w_k(\sigma) = F[u_k(x)] \in F[N(-\infty)];\ w \in F[N(-\infty)].$$

Так как носитель вектор-функции $g(\sigma)$ находится в окрестности точки $\sigma_1 = 0$ и функционалы $w_1, w_2, \cdots, w_m$ удовлетворяют уравнению (75), то носители этих функционалов также находятся в этой окрестности. Из (76) имеем $v = B_2(\sigma) w$, где $B_2(\sigma) \in C_0^\infty$ и в окрестности нуля совпадают с $B_1^{-1}(\sigma)$, следовательно $v \in F[N(-\infty)]$.

Поскольку любую функцию $g(\sigma) \in S$ можно представить в виде суммы двух функций, обладающих вышеуказанными свойствами, то задача D_0 для любой функции $g(\sigma) \in S$ имеет решение. Теперь покажем, что однородная задача D_0 имеет только нулевое решение.

Так как по предположению

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} P_r^+(\sigma) \\ Q(\sigma) \end{bmatrix} = m, \quad \text{при } \sigma \neq 0, \tag{79}$$

то решение однородной задачи (65)—(66) сосредоточено в этой точке, поэтому обратное преобразование Фурье этого решения является вектор-функцией с полиномиальными элементами. Следовательно, однородная задача D_0 не имеет нетривиальных решений.

Из формулы (72), в частности, следует, что решение задачи D_0 принадлежит классу $F[N_{\beta_0-1}]$, где β_0 определяется формулой (71). Отсюда, применяя теорему 2, получим, что при $f(x) \in S$ неоднородная задача A в классе M_{β_0-1} всегда имеет решение. Имеет место следующая

Теорема 5. *Если $f(x) \in S$, то задача A в классе $M(-\infty)$ имеет решение и оно единственно. Это решение принадлежит классу M_{β_0-1}.*

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи A, определяемое формулой (67), где $v(\sigma)$ — решение задачи D_0. Легко проверить, что это решение принадлежит классу $M(-\infty)$. Как показано выше, это решение принадлежит также классу M_{β_0-1}.

Единственность решения задачи A в классе $M(-\infty)$ доказывается так же как и единственность решения задачи D_0, при этом используется представление (63).

Если $-1 \leqslant k < \beta_0 - 1$, $f \in S$, то для существования решения задачи A в классе M_k необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ удовлетворяла конечному числу условий ортогональности.

Следующие две теоремы позволяют нам выписать эти необходимые и достаточные условия разрешимости. Для формулировки этих теорем мы введем некоторые обозначения.

Пусть $\alpha_k(\sigma)$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ — матрицы, а γ_{kl} $(k = 1, 2, \cdots, n,$ $l = 1, 2, \cdots m)$ — целые неотрицательные числа, входящие в представление (70). Пусть, далее, $g(\sigma) = (g_1(\sigma), \cdots, g_m(\sigma))$ — правая часть уравнения (66), $w(\sigma)$ — вектор-столбец с компонентами $(\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{m-r},$

$g_1(\sigma), \cdots, g_r(\sigma))$, а $(p_{k1}(\sigma), \cdots, p_{km}(\sigma))$ — вектор-функция $\alpha_k(\sigma) w(\sigma)$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$. $\nu_{kl,j} = \gamma_{kl} - [j] - 2$.

Теорема 6. *Если $g(\sigma) \in S$ и $-1 \leqslant j < \beta_0 - 1$, то для того, чтобы решение задачи D_0 принадлежало классу $F[N_j]$ (классу $F[M_j]$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$p_{kl}^{(\mu)}(\sigma_k) = 0, \ \mu = 0, 1, \cdots, \nu_{kl,j}; \ l = 1, 2, \cdots, m, \ k = 1, 2, \cdots, n. \quad (80)$$

Если для некоторых k и l число $\gamma_{kl} - [j] - 2$ отрицательно, то для таких индексов условия (80) *отсутствуют.*

Теорема 6 при $q = 1$, $n = 1$, $\sigma_1 = 0$ непосредственно следует из системы уравнений (75), к которой приведена система (65)—(66), и леммы 7. Общий случай доказывается аналогично.

Доказывается также, что условия (80) на вектор-функцию $g(\sigma)$ в совокупности линейно независимы, то есть никакое из них не следует из остальных.

Теорема 7. *Если $f \in S$ и $-1 \leqslant j \leqslant \beta_0 - 1$, то для того, чтобы задача A имела решение в классе M_j, необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $f(x)$ удовлетворяла условиям* (80), *где $g(\sigma) = F[f]$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть задача A в классе M_j имеет решение $w(x, t)$, и пусть $u(x, t)$ — решение задачи A в классе $M(-\infty)$, которое определяется формулой (67), где $v(\sigma)$ — решение задачи D_0. Как указано выше, $u(x, t) \in M_{\beta_0 - 1}$.

Ясно, что $u_0(x, t) = w(x, t) - u(x, t)$ — решение однородной задачи A в классе $M_{\beta_0 - 1}$. Поэтому, согласно формуле (63), оно представляется в виде

$$w(x, t) - u(x, t) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{l=0}^{\beta_0 - 1} c_{sl}(t) x^l \cdot \exp[-i\sigma_s t], \quad (81)$$

где $c_{sl}(t)$ — некоторые m-мерные вектор-функции, которые вместе с производными растут не быстрее полинома при $t \to +\infty$.

Так как $w(x, t) \in M_j$ и $u(-\infty, t) = 0$, то из (81) имеем $c_{sl}(t) = 0$ при $l > j$, то есть правая часть равенства (81) принадлежит классу M_j. Следовательно, $u(x, t)$ также принадлежит этому классу. Отсюда и из (67) следует, что $v(\sigma) = F[u(x, 0)) \in F[M_j]$, то есть решение задачи D_0 принадлежит классу $F(M_j]$, а для этого (согласно теореме 6) необходимо выполнение условий (80).

Достаточность. Пусть выполнено условие (80). Тогда по теореме 6 решение задачи D_0 принадлежит классу $F[N_j]$. Из теоремы 2 следует, что задача A также имеет решение в классе M_j. Теорема доказана.

Результаты этого параграфа остаются в силе, если условие (73) заменить условием $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x, t) = 0$.

Пусть $f(x) \in S$. Тогда имеет место

Теорема 8. *Задача A с дополнительным условием*

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x, t) = 0$$

имеет решение тогда и только тогда, когда вектор-функция $g(\sigma)$ *удовлетворяет условиям* (80) *при* $j=-1$ $(g(\sigma)=F[f_1])$.

Теорема 8 доказывается аналогично теореме 7.

§ 5. Примеры

Рассмотрим следующую задачу:

Найти в классе M решение эллиптического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a\frac{\partial u}{\partial t}+b\frac{\partial u}{\partial x}+cu=0, \tag{82}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t}+Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=f(x), \quad \text{при } t=0, \tag{83}$$

где $f(x)\in N_{l_0}$, $P(\sigma)$, $Q(\sigma)$ — полиномы, $x\in R^1$, $t\geqslant 0$, a, b, c — действительные постоянные.

Делая преобразование Фурье по переменной x в уравнении (82) и граничном условии (83), получим

$$\frac{d^2v}{dt^2}+a\frac{dv}{dt}-(\sigma^2+bi\sigma-c)v=0, \tag{84}$$

$$P(-i\sigma)\frac{dv(\sigma,0)}{dt}+Q(-i\sigma)v=g, \tag{85}$$

где $v=F[u]$; $g=F[f]$.

Характеристическим уравнением, соответствующим уравнению (84), является

$$\lambda^2+a\lambda-(\sigma^2+bi\sigma-c)=0. \tag{86}$$

Из (86) следует, что уравнение (82) удовлетворяет условиям 1) и 2) задачи A, если а) либо $c<0$, б) либо $c=0$ и $a\neq 0$. При выполнении условий а) и б) условие Лопатинского выполняется всюду, кроме конечного числа точек.

Пусть $\omega(\sigma)=P(-i\sigma)\lambda_1(\sigma)+Q(-i\sigma)$, где $\lambda_1(\sigma)=-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+\sigma^2+bi\sigma-c}$

(под квадратным корнем понимается то значение, действительная часть которого больше или равна нулю).

Легко показать, что при выполнении условий а) и б) функция $\omega(\sigma)$ аналитична по действительной переменной σ и имеет конечное число действительных нулей. Обозначим через $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ действительные нули функции $\omega(\sigma)$, отличные от $\sigma=0$; $l_1, l_2, \cdots, l_n$ — их кратности, $\mu_{jk}=\min\{l_k, [j]+1\}$. Пусть n_0 — наименьший порядок нуля точки $\sigma=0$ функций $P(-i\sigma)$ и $Q(-i\sigma)$.

Из теоремы 1 вытекают следующие два утверждения:

Следствие 1. Если $c=0$ и $a>0$, то однородная задача (82)—(83) в классе M_j имеет

$$\min\{n_0;\ [j]+1\}+\sum_{k=1}^{m}\mu_{jk}+1$$

линейно независимых решений.

Следствие 2. Если $c<0$ или $c=0$, $a<0$, то однородная задача (82), (83) в классе M_j имеет $\alpha=\sum_{k=1}^{m}\mu_{jk}+\mu_{j_0}$ линейно независимых решений, где $\mu_{j_0}=\min\{l_0, [j]+1\}$, l_0 — порядок нуля точки $\sigma_0=0$ функции $\omega(\sigma)$, (если $\omega(0)\neq 0$, то $l_0=0$).

Из теоремы 3 получаем

Следствие 3. Если $c<0$ или $c=0$ и $a\neq 0$, то неоднородная задача (82), (83) в классе $M_{j_0+\beta_0}$ всегде имеет решение, где $\beta_0=\max\{l_0, l_1, \cdots, l_n\}$.

Пусть теперь $f(x)\in S$. Тогда из теорем 5 и 7 вытекают следующие утверждения.

Следствие 4. Неоднородная задача (82), (83) в классе $M(-\infty)$ имеет, и притом единственное, решение, принадлежащее классу M_{β_0-1}.

Следствие 5. Для того, чтобы задача (82), (83) в классе M_j при $-1<j<\beta_0-1$ имела решение, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ удовлетворяла условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, x^q e^{-i\sigma_k x}\, dx=0;\quad q=0, 1, \cdots, l_k-[j]-2;\quad k=0, 1, \cdots, n. \tag{87}$$

Если $l_k-[j]-2<0$, то для таких k условие (87) отсутствует.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 24. X. 1985

Ն. Ե. ԹՈՎՄԱՍՅԱՆ. Եզրային խնդիրներ մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների համար կիսահարթությունում, բազմանդամային աճ ունեցող ֆունկցիաների դասերում (*ամփոփում*)

Դիտարկվում է

$$\frac{\partial u}{\partial t}=A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u,\ t>0,\ x\in R^1 \tag{1}$$

դիֆերենցիալ հավասարումը

$$Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, 0)=f(x),\ x\in R^1 \tag{2}$$

եզրային պայմանով.

Ենթադրվում է, որ (1), (2) խնդիրը բավարարում է Լոպատինսկու պայմանին ամենուրեք, բացի վերջավոր թվով կետերից։

Աշխատանքում ցույց է տրված $f(x)$-ի աճի և $u(x, t)$-ի թույլատրելի աճի միջև եղած ճշգրիտ կապը, որի դեպքում դիտարկված խնդիրը լուծելի է։ Ստացված է անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ $f(x)$-ի վրա, որի դեպքում այդ խնդիրը ունի լուծում տրված բազմանդամային աճ ունեցող ֆունկցիաների դասում։

N. E. TOVMASIAN. *Boundary value problem for a system of partial differential equations on the half of plane in a class of functions of polynomial growth* (summary)

The system of differential equations

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u,\ t>0,\ x\in R^1$$

and the boundary conditions

$$Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,\ 0) = f(x),\ x\in R^1$$

are considered.

It is supposed that the problem (1), (2) satusfies Lopatinski condition everywhere outside a finite set of points. An exact relation between the growth of $f(x)$ and the growth of $u(x,\ t)$ is established under which the problem (1), (2) is solvable.

The necessary and sufficient orthogonality conditions on $f(x)$ guarantee a solution in the class of functions with prescribed growth.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. В. Дикополов.* О краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве. Мат. сб., 1962, 59 (101), № 2, 215—228.
2. *А. Л. Павлов.* Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве, Мат. сб., 1977, 103 (145). № 3 (7), 367—391.
3. *С. Агмон, С. Дуглис, А. Ниренберг.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, М., ИЛ, 1962.
4. *Г. Е. Шилов.* Математический анализ. Второй спец. курс, М., «Наука», 1965, 327.
5. *Г. В. Дикополов, Г. Е. Шилов.* О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве, Изв. АН СССР, «Математика» 1960, 24, 369—380.
6. *В. П. Паламодов.* Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, М., «Наука», 1967.
7. *Н. Е. Товмасян.* Общая граничная задача для системы дифференциальных уравнений в полуплоскости с нарушением условия Я. Б. Лопатинского, Дифф. уравн., 1984, 20, № 1, 141—152.
8. *Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., «Наука», 1970, 534.
9. *Т. М. Кошелева.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными с постоянными коэффициентами в полуплоскости в классах обобщенных функций, кандидатская диссертация, 1983.
10. *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат.* Методы теории функций комплексного переменного, М., «Наука», 1973, 736.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 3, 1987 Математика

УДК 519.248

Д. Г. МАРТИРОСЯН

ТЕОРЕМЫ О ПОЛОСКАХ В МОДЕЛИ КЛАССИЧЕСКОГО ИЗИНГОВСКОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА

Введение. Формулировка основных результатов

В работе изучаются некоторые асимптотические свойства распределения Гиббса в больших объемах в модели классического изинговского ферромагнетика. Единственность гиббсовского состояния в этой модели при ненулевом значении внешнего поля была доказана Рюэлем в [1]. При достаточно низких температурах и положительном внешнем поле структура и свойства распределения Гиббса с $(+1)$ граничными условиями изучены достаточно полно как при помощи корреляционных неравенств Гриффитса, так и с использованием другого подхода [3]. При тех же значениях параметров для распределения Гиббса в конечном объеме с (-1) граничными условиями образуется так называемая полоска — связная компонента точек решетки, примыкающая к границе данного объема, в которых поле принимает значение (-1) (см. [2]). Цель настоящей работы — выяснить степень проникновения полоски внутрь данного объема. Точнее, ставится задача оценки того, что данный частичный объем (куб) остается вне полоски. Результаты сформулированы в виде теорем 1, 2 («теоремы о полоске»).

Отметим, что в ряде работ утверждения типа теорем о полоске использовались для доказательства единственности гиббсовских состояний. В работах Добрушина, Печерского [4], Терлецкого [5], Малышева и др. [6], а также в работах Малышева, Николаева [7] и автора [8] были получены результаты, аналогичные нашим теоремам о полоске, и на их основе изучались вопросы единственности гиббсовских состояний и некоторые другие близкие вопросы в решетчатых моделях статистической физики.

Путем некоторого усложнения техники результаты настоящей работы могут быть перенесены на случай более общих моделей (например, возмущенной модели Изинга, рассмотренной в работе Пиротова, Синая [9] и др.). Для некоторых из этих моделей более слабые теоремы о полоске были доказаны ранее в диссертационной работе автора [10].

Доказательства обеих теорем достаточно близки, однако доказательство теоремы 1 содержит дополнительные построения. Поэтому мы ограничимся полным доказательством теоремы 1 с указанием изменений, которые необходимо внести в это доказательство для получения теоремы 2. Последняя была анонсирована в [11].

В одной из ближайших публикаций будут приведены доказательства неулучшаемости оценок (с точностью до постоянной), установленных в

теоремах 1 и 2, а также некоторые следствия этих теорем.

Перейдем к определениям.

Пусть Z^1—множество целых чисел. Через Z^ν будем обозначать ν-мерную целочисленную решетку, то есть $Z^\nu = \{x = (x_1, \cdots, x_\nu) | x_1 \in Z^1, \cdots, x_\nu \in Z^1\}$. Расстояние между двумя точками решетки $x, y \in Z^\nu$, $x = (x_1, \cdots, x_\nu)$, $y = (y_1, \cdots, y_\nu)$ положим равным

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\nu} |x_i - y_i|,$$

а расстояние между множествами A_1 и A_2, $A_1 \subseteq Z^\nu$, $A_2 \subseteq Z^\nu$ определим как $d(A_1, A_2) = \inf_{x \in A_1,\ y \in A_2} d(x, y)$.

Через $(Z^*)^\nu$ будем обозначать двойственную к Z^ν решетку $(Z^*)^\nu = \left\{x = \left(x_1 + \frac{1}{2}, \cdots, x_\nu + \frac{1}{2}\right) \middle| x_1 \in Z^1, \cdots, x_\nu \in Z^1\right\}$.

Введем ряд обозначений, которых будем придерживаться на протяжении всей работы.

Для произвольного множества A через $|A|$ будет обозначаться число его элементов. Если $A \subset Z^\nu$, то A^c будет обозначать дополнение A в Z^ν. Далее, для $A \subseteq Z^\nu$ через ∂A и $\partial_1 A$ будем обозначать следующие множества:

$$\partial A = \{x \in A | \text{ существует } y \in A^c \text{ такое, что } d(x, y) = 1\},$$

$$\partial_1 A = \{x \in A^c | \text{ существует } y \in A \text{ такое, что } d(x, y) = 1\}.$$

Для целого положительного i через V_i обозначается специальный куб на решетке Z^ν вида

$$V_i = \{(x_1, \cdots, x_\nu) \in Z^\nu | \max_{1 \leqslant j \leqslant \nu} |x_j| \leqslant i\},$$

а через T_i—i-ый „слой“ решетки Z^ν:

$$T_i = \{(x_1, \cdots, x_\nu) \in Z^\nu | \max_{1 \leqslant j \leqslant \nu} |x_j| = i\}.$$

Куб V_i будем называть i-ым стандартным кубом,

Перейдем к определению распределения Гиббса [12], [13],

Пусть $S = \{+1, -1\}$. Отображение $\varphi : Z^\nu \to S$ будем называть конфигурацией, а ограничение конфигурации φ на множество $V \subset Z^\nu$ будем называть конфигурацией на V, обозначая ее через $\varphi(V)$. Множество всех конфигураций на V будет обозначаться через $\mathfrak{M}(V)$.

Пусть $V \subset Z^\nu$, $|V| < \infty$—конечное множество, и пусть $\varphi(V)$ и $\varphi(V^c)$—конфигурации на V и V^c соответственно. Введем гамильтониан $H(\varphi(V) | \varphi(V^c))$ модели классического изинговского ферромагнетика, полагая

$$H(\varphi(V)|\varphi(V^c)) = -\mu\sum_{x\in V}\varphi(x) - \frac{1}{2}\sum_{\substack{<x,y>\\ x\in V,\ y\in V}}\varphi(x)\varphi(y) - \frac{1}{2}\sum_{\substack{<x,y>\\ x\in V,\ y\in\overline{V}}}\varphi(x)\varphi(y), \tag{1}$$

где суммирование производится по всем таким парам $<x, y>$, что $d(x, y)=1$. Здесь $\mu\in R^1$—химический потенциал.

Пусть $V\subseteq \mathbf{Z}^\nu$, $|V|<\infty$ и $\varphi(V^c)\in\mathfrak{M}(V^c)$—конфигурация на V^c. Распределением Гиббса на множестве V, отвечающим гамильтониану (1), граничным условиям $\varphi(V^c)$ и параметрам $\beta>0$—обратной температуре, и $\mu\in R^1$, называется распределение вероятностей на $\mathfrak{M}(V)$, задаваемое формулой

$$q_V(\varphi(V)|\varphi(V^c)) = \frac{\exp\{-\beta H(\varphi(V)|\varphi(V^c))\}}{\Xi(V, \beta, \varphi(V^c))}, \tag{2}$$

где $\Xi(V, \beta, \varphi(V^c))$—нормирующий множитель. Величину $h=\beta\mu$ будем называть внешним полем.

Нетрудно видеть, что если граничные условия $\varphi_0(V^c)$ и $\varphi_1(V^c)$ совпадают на $\partial_1 V$, $\varphi_0(\partial_1 V)=\varphi_1(\partial_1 V)$, то отвечающие им распределения Гиббса на $\mathfrak{M}(V)$ также совпадают. Пользуясь этим введем следующее удобное с геометрической точки зрения соглашение. Именно, всюду в дальнейшем, не нарушая общности рассуждения, от граничных условий $\varphi(V^c)$ будем требовать, чтобы $\varphi(x)=-1$ для всех $x\in V\cup\partial_1 V$.

В приводимом ниже понятии контура будем придерживаться в основном известных определений (см., например, [14]).

Через $W(x)$ будем обозначать единичный замкнутый куб в R^ν с центром в точке $x\in\mathbf{Z}^\nu$. Очевидно, вершины куба $W(x)$ лежат на двойственной решетке $(\mathbf{Z}^*)^\nu$. Для точек $x, y\in\mathbf{Z}^\nu$ таких, что $d(x, y)=1$, множество $W(x)\cap W(y)$ будем называть гранью (решетки $(\mathbf{Z}^*)^\nu$), разделяющей точки x и y.

Пусть φ—такая конфигурация, что $\{x\in\mathbf{Z}^\nu\mid \varphi(x)=+1\}$ — конечное множество. Объединение граней, разделяющих точки x и y такие, что $d(x, y)=1$ и $\varphi(x)\varphi(y)=-1$, называется границей конфигурации φ.

Пусть $G=\{g_1,\cdots, g_m\}$ — множество всех граней решетки $(\mathbf{Z}^*)^\nu$ содержащихся в границе конфигурации φ. Множество $R^\nu\setminus\{g_1\cup\cdots\cup g_m\}$ разбивается на связные (в R^ν) компоненты, которые обозначим через $O_1,\cdots, O_s$. В точности одна из этих компонент неограничена. Для определенности предположим, что через O_1 обозначена неограниченная компонента. Граница (в R^ν) O_1 называется внешней границей конфигурации φ. Внешняя граница конфигурации φ содержится в границе конфигурации φ.

Для простоты будет считать, что множество $G=\{g_1,\cdots, g_m\}$ перенумеровано таким образом, что $G^{(\mathrm{ext})}=\{g_1,\cdots, g_{m'}\}$, $m'\leqslant m$—множество всех граней $(\mathbf{Z}^*)^\nu$, содержащихся во внешней границе конфигу-

рации φ. Далее, пусть $O_1, O_2, \cdots, O_s$—связные (в R^*) компоненты множества $R^* \setminus (g_1 \cup \cdots \cup g_m)$. Граница (в R^*) множества O_i, $i \geqslant 2$ называется внешним контуром конфигурации φ. Аналогичным образом выделяются контуры из множества оставшихся граней. Продолжая этот процесс до исчерпания, мы получим разбиение границы конфигурации φ на контуры.

Контуры будут обозначаться в дальнейшем буквами γ или Γ, в зависимости от свойств конфигурации φ. Именно, пусть γ (или Γ) — —контур конфигурации φ. Дополнение к этому контуру (в R^*) разбивается на две связные компоненты O' и O'', где O'—ограниченная, а O''—неограниченная компонента. Множество $O' \cap Z^*$ называется внутренностью данного контура. На протяжении всей работы обозначение γ будет использоваться для контуров, у которых $\varphi(x) = -1$ при всех $x \in \partial(O' \cap Z^*)$, а обозначение Γ—для контуров, у которых $\varphi(x) = +1$ при всех $x \in \partial(O' \cap Z^*)$. Иными словами, через γ будут обозначаться контуры, к которым изнутри примыкают частицы со спином (-1), а через Γ—контуры, к которым изнутри примыкают частицы со спином $(+1)$.

Через $\mathrm{int}(\Gamma)$ (соответственно $\mathrm{int}(\gamma)$) будет обозначаться внутренность контура, через $|\Gamma|$ (соответственно $|\gamma|$)—число граней $(Z^*)^*$, входящих в контур.

Пусть $V \subset Z^*$, и пусть $\varphi(V)$ и $\varphi(V^c)$—конфигурации на множествах V и V^c соответственно. Конфигурацию φ на Z^*, ограничения которой на множества V и V^c совпадают с конфигурациями $\varphi(V)$ и $\varphi(V^c)$, соответственно, будем обозначать через $(\varphi(V), \varphi(V^c))$.

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть V_i, $i = 1, 2, \cdots$ —i-ый стандартный куб решетки Z^* $(\nu \geqslant 2)$, и пусть $\varphi_i(V_i^c)$, $i = 1, 2, \cdots$ —произвольная последовательность граничных условий (в соответствии с принятым соглашением φ_i является конфигурацией на V_i^c, подчиненной условию: $\varphi_i(x) = -1$ для всех $x \in V_{i+1}$). Найдутся $\beta_0 > 0$ и функция $c(\beta) > 0$, определенная при всех $\beta \geqslant \beta_0$ такие, что если β и последовательность $h_1, h_2, \cdots$ удовлетворяют соотношениям $\beta > \beta_0$ и $h_i \geqslant \dfrac{c(\beta)}{i}$, то для распределения Гиббса на множестве V_i, отвечающего параметрам β, h_i и граничным условиям $\varphi_i(V_i^c)$, справедливо следующее утверждение. Вероятность множества всех тех конфигураций $\varphi(V_i) \in \mathfrak{M}(V_i)$, для которых в расположении контуров конфигурации $(\varphi(V_i), \varphi_i(V_i^c))$ имеется (внешний) контур Γ, внутренность которого, $\mathrm{int}(\Gamma)$, содержит стандартный куб $V_{\left[\frac{i}{6}\right]}$, стремится к 1 при $i \to \infty$ равномерно по всем граничным условиям.*

Имеет место также следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть V_l и φ_l (V_l^c) $(i=1, 2, \cdots)$ удовлетворяют условиям предыдущей теоремы. Существует $\beta_0>0$ такое, что для любых $\beta>\beta_0$ и $h>0$ можно найти $c(\beta, h)>0$ так, что для распределения Гиббса на множестве V_l, отвечающего параметрам $\beta\geqslant\beta_0$, $h>0$ и граничным условиям $\varphi_l(V_l^c)$, справедливо следующее утверждение. Вероятность множества всех тех конфигураций $\varphi(V_l)\in\mathfrak{M}(V_l)$, для которых в расположении контуров конфигурации $(\varphi(V_l), \varphi_l(V_l^c))$ имеется (внешний) контур Γ, внутренность которого, $\mathrm{int}(\Gamma)$, содержит стандартный куб $V_{l-[c(\beta, h)\ln l]}$, стремится к 1 при $l\to\infty$ равномерно по всем граничным условиям.*

§ 1. Вспомогательные леммы

Из рассмотрений работы Р. А. Минлоса и Я. Г. Синая ([3], стр. 233) нетрудно выделить следующее предложение, используемое нами в дальнейшем.

Лемма 1.1 *Найдется $\beta_0>0$ такое, что для распределения Гиббса на множестве $V\subset\mathbf{Z}^\nu$, $|V|<\infty$, отвечающего параметрам $\beta\geqslant\beta_0$ и $h\geqslant 0$ и граничным условиям $\varphi(x)=+1$ при всех $x\in\partial_1 V$, справедливо следующее утверждение. Для любого целого положительного m вероятность того, что Γ является внешним в V контуром конфигурации φ, и набор всех внешних в $\mathrm{int}(\Gamma)$ контуров $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_s\}$ конфигурации φ удовлетворяет условию*

$$|\mathrm{int}(\Gamma)|-\sum_{j=1}^{s}|\mathrm{int}(\gamma_j)|=m,$$

не превосходит $\exp\{-\beta|\Gamma|-hm\}$.

Определение 1.1 Множество $A\subseteq\mathbf{Z}^\nu$ называется связным (на решетке $\mathbf{Z}^\nu$), если для любых $x, y\in A$ найдется последовательность $x_1, \cdots, x_m$ такая, что $x_l\in A$ для всех $i=1, \cdots, m$, $d(x_l, x_{l+1})=1$ при всех $i=1, \cdots, m-1$ и $x_1=x$, $x_m=y$.

Определение 1.2 Пусть $A\subset\mathbf{Z}^\nu$. Мы скажем, что

$$A=A_1\cup\cdots\cup A_s \qquad (A_j\subseteq\mathbf{Z}^\nu,\ j=1, \cdots, s) \tag{1.1}$$

является разбиением множества A на связные компоненты, если каждое из множеств A_j, $j=1, \cdots, s$ является связным множеством и $d(A_i, A_j)\geqslant 2$ при $i\neq j$.

Определение 1.3. Пусть $A\subseteq\mathbf{Z}^\nu$, $B\subseteq\mathbf{Z}^\nu$. Будем говорить, что множество A примыкает к множеству B, если для любого $x\in A$ найдется последовательность $x_1, \cdots, x_m$ такая, что $x_l\in A$ при всех $i=1, \cdots, m$; $d(x_l, x_{l+1})=1$ при всех $i=1, \cdots, m-1$ и $x_1=x$, $x_m\in B$.

Лемма 1.2 *Найдется постоянная $c(\nu)$, зависящая только от размерности решетки ν такая, что число связных множеств с фиксированным числом элементов a, содержащих фиксированную точку $x_0\in\mathbf{Z}^\nu$, не превосходит* $\exp\{c(\nu)a\}$. *Эта же оценка выполне-*

на для числа контуров γ *(или* Γ*) с фиксированным* $|\gamma| = a$*, проходящих через фиксированную точку* $x_0 \in (\mathbf{Z}^*)'$.

Лемма 1.3. *Найдется постоянная* $c(\nu)$*, зависящая только от размерности решетки* ν *такая, что для любого фиксированного* $B \subseteq \mathbf{Z}^*$ *число множеств* A*, примыкающих к множеству* B *и имеющих фиксированное число элементов* a ($|A| = a$)*, не превосходит* $\exp\{c(\nu)(a + |B|)\}$.

Утверждения типа лемм 1.2 и 1.3 встречаются во многих работах, использующих технику кластерных разложений. Доказательства этих лемм достаточно просты, поэтому мы опускаем их. В дальнейшем достаточны несколько более грубые оценки, поэтому мы будем для простоты считать, что постоянные $c(\nu)$ из формулировок лемм 1.2 и 1.3 совпадают.

§ 2. Геометрические построения

Пусть φ—конфигурация. Мы считаем, что $\{x \mid \varphi(x) = +1\}$ — конечное множество, и через V_{l_1} обозначаем стандартный куб, содержащий это множество. Пусть, далее, V_{l_2}—стандартный куб такой, что $V_{l_1} \subset V_{l_2}$. Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что конфигурация φ и кубы V_{l_1}, V_{l_2} фиксированы.

Для любых целых положительных k_1 и k_2, $k_1 \leqslant k_2$, через $[k_1, k_2]$ будем обозначать отрезок натурального ряда, т. е. множество всех целых чисел k, удовлетворяющих условию $k_1 \leqslant k \leqslant k_2$.

Определение 2.1. Отображение $\omega : [k_1, k_2] \to \mathbf{Z}^*$ будем называть φ-путем в $\mathbf{Z}^*$ (или просто путем), если $\varphi(\omega(k)) = -1$ для всех $k \in [k_1, k_2]$, и $d(\omega(k), \omega(k+1)) = 1$ для всех $k \in [k_1, k_2 - 1]$. $\omega(k_1)$ и $\omega(k_2)$ будем называть, соответственно, начальной и конечной точками пути ω. Мы скажем, что точку $x \in \mathbf{Z}^*$ можно соединить с точкой $y \in \mathbf{Z}^*$, если существует φ-путь $\omega : [k_1, k_2] \to \mathbf{Z}^*$ такой, что $\omega(k_1) = x$, $\omega(k_2) = y$.

Пусть $\omega : [k_1, k_2] \to \mathbf{Z}^*$—$\varphi$-путь, и пусть m_1 и m_2 таковы, что $k_1 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant k_2$. Отрезком $[m_1, m_2]$ пути ω будем называть путь $\omega' : [m_1, m_2] \to \mathbf{Z}^*$ такой, что $\omega'(m) = \omega(m)$ для всех $m \in [m_1, m_2]$.

Далее, пути $\omega : [k_1, k_2] \to \mathbf{Z}^*$ и $\omega' : [m_1, m_2] \to \mathbf{Z}^*$ будем называть эквивалентными путями, если $m_2 - m_1 = k_2 - k_1$ и $\omega'(m) = \omega(k_1 + m - m_1)$ для всех $m \in [m_1, m_2]$.

Путь $\omega : [k_1, k_2] \to \mathbf{Z}^*$ будем называть объединением путей $\omega_1 : [m_1, m_2] \to \mathbf{Z}^*$ и $\omega_2 : [p_1, p_2] \to \mathbf{Z}^*$, если существует такое k_0, $k_1 \leqslant k_0 \leqslant k_2$, что путь ω_1 эквивалентен отрезку $[k_1, k_0]$ пути ω, а путь ω_2 эквивалентен отрезку $[k_0, k_2]$ пути ω.

Определение 2.2.1. Мы скажем, что точка $x \in \mathbf{Z}^*$ является i-правильно расположенной точкой конфигурации φ, если $x \in T_i$ и существует φ-путь $\omega : [1, s] \to \mathbf{Z}^*$ такой, что $\omega(1) = x$, $\omega(s) \overline{\in} V_{i_2}$ и $\omega(k) \overline{\in} V_{i-1}$ для всех $k \in [1, s]$.

Определение 2.2.2. Мы скажем, что точка $x \in \mathbf{Z}^*$ является строго i-правильно расположенной точкой конфигурации φ, если $x \in T_i$

и существует φ-путь $\omega:[1, s]\to Z'$ такой, что $\omega(1)=x$, $\omega(s)\overline{\in} V_{l_1}$ и $\omega(k)\overline{\in} V_{l-1}$ для всех $k\in[2, s]$.

Всюду в дальнейшем через $U(l_1, \varphi)$ будем обозначать множество всех тех $x\in V_{l_1}$, для которых существует φ-путь $\omega:[1, s]\to Z'$ такой что $\omega(1)=x$, $\omega(s)\overline{\in} V_{l_1}$. Множество $U(l_1, \varphi)$ будем называть неустойчивым ядром конфигурации φ.

Определение 2.3. Пусть $x\in U(l_1, \varphi)$, i—целое число, $i>l_1$, и пусть $\omega:[1, s]\to Z'$—такой φ-путь, что $\omega(1)=x$. Мы скажем, что φ-путь ω является i-правильным в Z', если из условия $\omega(k)\overline{\in} V_l$ вытекает, что ни одна из точек множества $[\omega(k'), k'\leqslant k]$ не является i-правильно расположенной точкой конфигурации φ.

Определение 2.4. (Построение множеств $M_l(\varphi), K_l(\varphi), L_l(\varphi)$). Пусть $x\in U(l_1, \varphi)$. К множеству $M_l(x, \varphi)$ отнесем все те точки $y\in Z'$, для которых можно найти i-правильный φ-путь $\omega:[1, s]\to Z'$ такой, что $\omega(1)=x$, $\omega(s)=y$. Определим $K_l(x, \varphi)$ как множество всех i-правильно расположенных точек множества $M_l(x, \varphi)$, а $L_l(x, \varphi)$ — как множество всех строго i-правильно расположенных точек множества $M_l(x, \varphi)$. Положим также

$$M_l(\varphi)=\bigcup_{x\in U(l_1, \varphi)} M_l(x, \varphi), \tag{2.1}$$

$$K_l(\varphi)=\bigcup_{x\in U(l_1, \varphi)} K_l(x, \varphi), \tag{2.2}$$

$$L_l(\varphi)=\bigcup_{x\in U(l_1, \varphi)} L_l(x, \varphi). \tag{2.3}$$

Лемма 2.1. *Имеет место включение*

$$M_l(x, \varphi)\subset M_{l+1}(x, \varphi). \tag{2.4}$$

Доказательство. Предположим противное. Пусть $y\in M_l(x, y)$, $y\overline{\in} M_{l+1}(x, \varphi)$. Из условия $y\in M_l(x, \varphi)$ вытекает существование i-правильного φ-пути $\omega_0:[1, s]\to Z'$ такого, что $\omega_0(1)=x$, $\omega_0(s)=y$. Поскольку $y\overline{\in} M_{l+1}(x, \varphi)$, то путь ω_0 не является $(i+1)$-правильным путем. Следовательно, найдется такое k, $1\leqslant k\leqslant s$, что $\omega(k)\overline{\in} V_{l+1}$. Обозначая через k_2 наименьшее из всех таких чисел, мы получаем, что $\omega_0(k_2)\overline{\in} V_{l+1}$, а $\omega_0(k)\in V_{l+1}$ для всех k таких, что $1\leqslant k\leqslant k_2$. Снова воспользуемся тем, что $y\overline{\in} M_{l+1}(x, \varphi)$, и выберем k_2 так, что $1<k_2<k_2$ и $\omega(k_2)$ является строго $(i+1)$-правильно расположенной точкой конфигурации φ. Поскольку $\omega(1)\in V_{l_1}$, $\omega(k_2)\in T_{l+1}$, то очевидно, найдется k, $1\leqslant k<k_2$ такое, что $\omega_0(k)\in T_l$. Выбирая в качестве k_1 наибольшее из всех таких k, получим, что $\omega_0(k_1)\in T_l$ и $\omega_0(k)\in T_{l+1}$ для всех k, удовлетворяющих условию $k_1<k<k_2$. Обозначим через ω_1 отрезок $[k_1, k_2]$ пути ω_0. Воспользовавшись тем, что $\omega_0(k_2)$ является строго $(i+1)$-правильно расположенной точкой конфигурации φ, построим φ-путь $\omega_2:[1, s]\to Z'$ такой, что $\omega_2(1)=\omega_0(k_2)$, $\omega_2(s')\overline{\in} V_{l_1}$ и $\omega_2(k')\overline{\in} V_{l+1}$ при всех $k'\in[2, s']$. Легко проверяется, что φ-путь $\omega_3:[1, s]\to Z'$, являющийся объединением путей ω_1 и ω_2, обладает следующими свойствами: $\omega_3(1)=\omega_0(k_1)\in T_l$, $\omega_3(k'')\overline{\in} V_l$ при всех $k''\in[2, s'']$.

Следовательно, $\omega_0(k_1)$ является строго i-правильно расположенной точкой конфигурации φ. Отсюда и из того, что $\omega_0(k_1) \overline{\in} V_i$, вытекает, что ω_0 не является i-правильным путем. Полученное противоречие доказывает требуемое включение.

Лемма 2.2. *Имеют место включения*

$$L_i(x, \varphi) \subseteq K_i(x, \varphi) \subset M_i(x, \varphi) \setminus M_{i-1}(x, \varphi). \tag{2.5}$$

Доказательство. Включение $L_i(x, \varphi) \subseteq K_i(x, \varphi)$ вытекает из того, что любая строго i-правильно расположенная точка конфигурации φ является одновременно i-правильно расположенной точкой конфигурации φ, и из определения множеств L_i и K_i. Далее, поскольку $K_i(x, \varphi) \subset M_i(x, \varphi)$, то для доказательства включения $K_i(x, \varphi) \subset M_i(x, \varphi) \setminus M_{i-1}(x, \varphi)$ достаточно показать, что если $y \in K_i(x, \varphi)$, то $y \overline{\in} M_{i-1}(x, \varphi)$. В самом деле, предположим противное, и пусть существует y такое, что $y \in K_i(x, \varphi) \cap M_{i-1}(x, \varphi)$. Воспользуемся условием $y \in M_{i-1}(x, \varphi)$ и построим $(i-1)$-правильный φ-путь $\omega : [1, s] \to \mathbf{Z}^\nu$, соединяющий точку $x = \omega(1)$ с точкой $y = \omega(s)$. Из условий $x = \omega(1) \in V_{i_1}$ и $y = \omega(s) \in K_i(x, \varphi) \subset T_i$ вытекает существование такого k, $1 < k < s$, что $\omega(k) \in T_{i-1}$. Через k_1 обозначим наибольшее из всех таких чисел. В силу выбора k_1 весь отрезок $[k_1 + 1, s]$ пути ω лежит вне V_{i-1}, и поскольку $y = \omega(s)$ является i-правильно расположенной точкой конфигурации φ, то отсюда вытекает, что $\omega(k_1)$ является строго $(i-1)$-правильно расположенной точкой конфигурации φ. Учитывая также, что $\omega(s) \overline{\in} V_{i-1}$, мы получаем отсюда, что ω не является $(i-1)$-правильным путем. Полученное противоречие доказывает лемму.

§ 3. Доказательство основной теоремы

Для удобства доказательство основной теоремы (теоремы 1) разбито на отдельные пункты. Нам потребуется ряд дополнительных построений, которые приводятся в пунктах 3.1—3.7.

В этом параграфе для краткости записи мы будем пользоваться обозначением $q_p(\cdot)$ для распределения Гиббса на стандартном кубе V_p, отвечающего параметрам $\beta > 0$, $h > 0$ и граничным условиям $\varphi_p(V_p^c)$. Через n и n_0 будем обозначать целые числа, определяемые посредством соотношений $n = \left\lfloor \frac{p}{6} \right\rfloor$, $p = 6n + n_0$ $(0 \leqslant n_0 \leqslant 5)$. Далее, в силу принятого соглашения конфигурация $\varphi = (\varphi(V_p), \varphi(V_p^c))$, где $\varphi(V_p)$ — произвольная конфигурация на V_p, а $\varphi_p(V_p^c)$ — граничное условие вне V_p, обладает свойством $\{x \in \mathbf{Z}^\nu \mid \varphi(x) = +1\} \subseteq V_{p+1}$. Поэтому мы можем воспользоваться рассмотрениями предыдущего параграфа с $l_2 = p + 1$ и с $l_1 = n$. Через $\mathfrak{M}_0(p)$ обозначим множество всех тех конфигураций $\varphi(V_p) \in \mathfrak{M}(V_p)$, для которых в расположении контуров конфигурации $(\varphi(V_p), \varphi_p(V_p^c))$ не существует контура Γ такого, что $\operatorname{int}(\Gamma) \supset V_n \left(n = \left\lfloor \frac{p}{6} \right\rfloor \right)$. Мы покажем, что $\lim\limits_{p \to \infty} q_p(\mathfrak{M}_0(p)) = 0$. Это ут-

верждение эквивалентно утверждению теоремы 1.

3.1. Предварительное построение.

Предложение 3.1. *Существует* $\beta_0 > 0$ *такое, что при всех* $\beta > \beta_0$ *имеет место следующее утверждение. Найдется постоянная* $c_0(\beta)$ *такая, что вероятность* q_p *множества всех конфигураций* $\varphi \in \mathfrak{M}_0(p)$, *у которых в расположении контуров имеется контур* γ, *удовлетворяющий условию* $|\gamma| \geqslant c_0(\beta) \ln |V_p|$, *стремится к нулю при* $p \to \infty$ *равномерно по всем граничным условиям.*

Доказательство. Через $\mathfrak{M}_0(\gamma)$ обозначим множество всех конфигураций $\varphi \in \mathfrak{M}_0(p)$, содержащих данный контур γ ($|\gamma| > c_0(\beta) \ln |V_p|$). Поскольку $\varphi(x) = +1$ для всех $x \in \partial_1 \mathrm{int}(\gamma)$, и $\varphi(x) = -1$ для всех $x \overline{\in} V_{p+1}$, то существует контур Γ такой, что его внутренность, $\mathrm{int}(\Gamma)$, содержит контур γ, $\gamma \subset \mathrm{int}(\Gamma)$. Контур Γ назовем γ-минимальным, если $\mathrm{int}(\Gamma) \supset \gamma$ и не существует контура $\Gamma' \neq \Gamma$ такого, что $\mathrm{int}(\Gamma) \supset \mathrm{int}(\Gamma') \supset \gamma$. Легко видеть, что если $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$, то события, состоящие в том, что Γ_1, и соответственно Γ_2, являются γ-минимальными контурами, несовместимы. Поэтому, если через $q_p(\gamma)$ (соответственно $q_p(\Gamma)$) обозначить вероятность того, что γ (соответственно Γ)—контур конфигурации φ, а через $q_p(\gamma \mid \Gamma)$—условную вероятность того, что γ—контур конфигурации φ, при условии, что Γ является γ-минимальным контуром конфигурации φ, получим

$$q_p(\gamma) = \sum_{\Gamma} q_p(\gamma \mid \Gamma)\, q_p(\Gamma)$$

и

$$\sum_{\Gamma} q_p(\Gamma) \leqslant 1,$$

где в обеих формулах суммирование производится по всем γ-минимальным контурам Γ. Далее, из леммы 1.1 вытекает оценка

$$q(\gamma \mid \Gamma) \leqslant \exp\{-\beta |\gamma|\}.$$

Из трех последних соотношений, очевидно, следует

$$q_p(\gamma) \leqslant \exp\{-\beta |\gamma|\}.$$

Из установленного только что неравенства Пайерлса утверждение предложения 3.1 можно получить по общепринятой схеме. А именно, число контуров с данным $|\gamma| = r$, проходящих через фиксированную точку, не превосходит $\exp\{c_1 r\}$, а число способов выбора этой точки не превосходит $|V_p|$, и поэтому вероятность того, что в расположении контуров найдется контур γ с $|\gamma| \geqslant c_0(\beta) \ln |V_p|$, не превосходит (при $\beta > c_1$)

$$|V_p| \sum_{r \geqslant c_0(\beta) \ln |V_p|} \exp\{(c_1 - \beta) r\} \leqslant \frac{|V_p|}{1 - \exp(c_1 - \beta)} \exp\{-(\beta - c_1)\, c_0(\beta) \ln |V_p|\}.$$

Выбирая $c_0(\beta) > \dfrac{1}{\beta - c_1}$, получим утверждение предложения 3.1.

Определение 3.1. Через $\mathfrak{M}(p)$ обозначим множество тех конфигураций $\varphi \in \mathfrak{M}_0(p)$, у которых в расположении контуров не существует контура γ, удовлетворяющего условию $|\gamma| \geqslant c_0(\beta) \ln |V_p|$.

Замечание 3.1. В силу предложения 3.1 для доказательства основной теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{p\to\infty} q_p\{\mathfrak{M}(p)\}=0.$$

3.2. Разбиение множества $\mathfrak{M}(p)$ на классы. Пусть $\varphi\in\mathfrak{M}(p)$, $p=6n+n_0$, где $0\leqslant n_0\leqslant 5$, и пусть i, l, k—целые положительные числа, причем $2n\leqslant i<6n$. Построим классы $\mathfrak{M}_p(i;\ l,\ k)$ (вообще говоря, пересекающиеся) конфигураций следующим образом Пусть $c_2>0$ и $c_3>0$ — действительные числа. Мы скажем, что $\varphi\in\mathfrak{M}_p(i;\ l,\ k)$, если

$$2n\leqslant i<4n,$$

$$|M_{l+2}(\varphi)\setminus M_l(\varphi)|\leqslant c_2|M_l(\varphi)|^{\frac{\nu-1}{\nu}},\qquad(3.1)$$

$$|L_{l+1}(\varphi)|=l,\ |K_{l+2}(\varphi)|=k,$$

или

$$4n\leqslant i<6n$$

$$|M_{l+2}(\varphi)\setminus M_l(\varphi)|\leqslant\frac{c_3}{n}|M_l(\varphi)|,\qquad(3.2)$$

$$|L_{l+1}(\varphi)|=l,\ |K_{l+2}(\varphi)|=k.$$

3.3 Предложение 3.3. *Для любого $c_2>0$ найдутся $c_3>0$ и целое число $p_0>0$ такие, что для всех $p\geqslant p_0$.*

$$\mathfrak{M}(p)\subset\bigcup_{\substack{2n\leqslant i<6n\\ k>0,\ l>0}}\mathfrak{M}_p(i;\ k,\ l),\quad p=6n+n_0,\ 0\leqslant n_0<5.\qquad(3.3)$$

Доказательство. Зафиксируем конфигурацию $\varphi\in\mathfrak{M}(p)$ и введем обозначение $m_r=|M_{2n+2r}(\varphi)|$, $r=0,\ 1,\cdots,\ 2n$. Заметим, что в силу (2.4) $m_{r+1}-m_r=|M_{2n+2r+2}(\varphi)\setminus M_{2n+2r}(\varphi)|$. Предположим теперь, что для данного $c_2>0$ условие (3.1) не имеет места ни при каком i, $2n\leqslant i<4n$. Тогда при всех r, $0\leqslant r\leqslant n$

$$m_{r+1}-m_r\geqslant c_2\,m_r^{\frac{\nu-1}{\nu}}.\qquad(3.4)$$

Положим $c=\dfrac{2^\nu-1}{c_2}$, $p_0=6\left(1+\left[\dfrac{1}{c^\nu}\right]\right)$ и покажем, пользуясь индукцией по r, что $m_r\geqslant\dfrac{r^\nu}{c^\nu}$. В самом деле, если $p\geqslant p_0$, то $m_1\geqslant$ $\geqslant|M_{2n}(\varphi)|>n>\dfrac{p_0}{6}>\dfrac{1}{c^\nu}$. Предполагая, что при некотором r, $0<r\leqslant$ $\leqslant n-1$ выполняется неравенство $m_r\geqslant\dfrac{r^\nu}{c^\nu}$, мы получаем из (3.4), что

$$m_{r+1}>m_r+c_2\,m_r^{\frac{\nu-1}{\nu}}\geqslant\frac{r^\nu}{c^\nu}+c_2\frac{r^{\nu-1}}{c^{\nu-1}}=\frac{r^\nu+(2^\nu-1)\,r^{\nu-1}}{c^\nu}>\frac{(r+1)^\nu}{c^\nu}.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что $m_n>\dfrac{n^\nu}{c^\nu}$. Учитывая также, что

$m_{2n} = |M_{6n}(\varphi)| \leqslant |V_{6n}| < (12n)^{\nu}$, мы получаем

$$\prod_{j=n}^{2n-1} \frac{m_{j+1}}{m_j} = \frac{m_{2n}}{m_n} < (12c)^{\nu}. \tag{3.5}$$

Выберем j_0, $n \leqslant j_0 < 2n$ так, чтобы $\frac{m_{j_0+1}}{m_{j_0}} = \min\limits_{n \leqslant j < 2n} \frac{m_{j+1}}{m_j}$. Из (3.5) вытекает, что

$$\left(\frac{m_{j_0+1}}{m_{j_0}}\right)^n < (12c)^{\nu}.$$

Поэтому, как нетрудно видеть

$$\frac{1}{2} \frac{m_{j_0+1} - m_{j_0}}{m_{j_0}} \leqslant \ln \frac{m_{j_0+1}}{m_{j_0}} < \frac{\nu \ln (12c)}{n}. \tag{3.6}$$

Полагая $c_3 = 2\nu \ln (12c)$, мы получаем из (3.6) следующее неравенство:

$$|M_{i_0+2}(\varphi) \setminus M_{i_0}(\varphi)| \leqslant \frac{c_3}{n} |M_{i_0}(\varphi)|, \quad i_0 = 2n + 2j_0.$$

Предложение 3.3 доказано.

3.4. Преобразование пространства конфигураций $\mathfrak{M}_p(i;\ k,\ l)$. Пусть $\varphi \in \mathfrak{M}_p(i;\ l,\ k)$. Определим преобразование $f_i^{l,\ k}$: $\mathfrak{M}_p(i;\ k,\ l) \to \mathfrak{M}(V_p)$ следующим образом:

$$\psi(x) = f(\varphi)(x) = \begin{cases} +1, \text{ если } x \in L_{i+1}(\varphi) \\ \varphi(x) \text{—в противном случае.} \end{cases}$$

3.5. Расширение множеств $M_i(\varphi)$. Пусть $\varphi \in \mathfrak{M}_p(i;\ l,\ k)$ и $\psi = f_i^{l,\ k}(\varphi)$.

Определение 3.5. Построим множество $\tilde{M}_i(\varphi)$ следующим образом. Мы скажем, что $z \in \tilde{M}_i(\varphi)$, если существуют $y \in M_i(\varphi)$ и ψ-путь ω такой, что y и z являются, соответственно, начальной и конечной точками пути ω.

Замечание 3.5. Если $y \in M_i(\varphi)$, то $y \overline{\in} M_{i+1}(\varphi) \setminus M_i(\varphi)$ и в силу (2.5) $y \overline{\in} L_{i+1}(\varphi)$. Поэтому из определения преобразования f вытекает, что $\varphi(y) = \psi(y)$ для всех $y \in M_i(\varphi)$, и поскольку $\varphi(y) = -1$ для всех $y \in M_i(\varphi)$, то и $\psi(y) = -1$ для всех $y \in M_i(\bar{\varphi})$.

Предложение 3.5. $M_i(\varphi) \subseteq \tilde{M}_i(\varphi) \subseteq M_{i+1}(\varphi)$.

Доказательство. Включение $M_i(\varphi) \subseteq \tilde{M}_i(\varphi)$ вытекает из замечания 3.5 и определения $\tilde{M}_i(\varphi)$. Для доказательства включения $\tilde{M}_i(\varphi) \subseteq M_{i+1}(\varphi)$ предположим противное, и пусть $z \in \tilde{M}_i(\varphi)$, $z \overline{\in} M_{i+1}(\varphi)$. Воспользовавшись условием $z \in \tilde{M}_i(\varphi)$, найдем точку $y \in M_i(\varphi)$ и ψ-путь $\omega : [1,\ s] \to Z^{\nu}$ такой, что $\omega(1) = y$, $\omega(s) = z$. Предположим, что y принадлежит неустойчивому ядру конфигурации φ. Это предположение не нарушает общности рассуждений, поскольку в силу заме-

чания 3.5. $\psi(x) = -1$ для всех $x \in M_l(\varphi)$, и следовательно, точка y может быть соединена с некоторой точкой $x \in U(n, \varphi)$ ψ-путем). Далее, из определения преобразования f вытекает, что путь ω является также φ-путем. Отсюда и из условия $z \overline{\in} M_{l+1}(\varphi)$ следует существование таких чисел s', s'', что $1 \leqslant s' < s'' < s$, $\omega(s'') \overline{\in} V_{l+1}$ и $\omega(s')$ является строго $(i+1)$-правильно расположенной точкой конфигурации φ. Следовательно, $\omega(s') \in L_{l+1}(\varphi)$, и поэтому $\psi(\omega(s')) = +1$, откуда вытекает, что ω не является ψ-путем. Полученное противоречие доказывает требуемое включение.

3.6. Предложение 3.6. *Пусть* $\varphi \in \mathfrak{M}_p(i; k, l)$, *и пусть*

$$K_{l+2}(\varphi) = K_{l+2}^{(1)}(\varphi) \cup \cdots \cup K_{l+2}^{(m)}(\varphi)$$

разбиение множества $K_{l+2}(\varphi)$ *на связные компоненты. Тогда*

3.6.1. *Для любого* j, $1 \leqslant j \leqslant m$

$$d(K_{l+2}^{(j)}(\varphi),\ L_{l+1}(\varphi)) = 1.$$

3.6.2. *Для любой связной компоненты* $\tilde{M}_l^{(0)}$ *множества* $\bar{M}_l(\varphi)$ найдется такое j, $1 \leqslant j \leqslant m$, что

$$d(\tilde{M}_j^{(0)}(\varphi),\ K_{j+2}^{(j)}(\varphi)) = 2.$$

Доказательство 3.6.1. Пусть $y \in K_{l+2}^{(j)}(\varphi)$. В силу определения $K_{l+2}(\varphi)$ точка y является $(i+2)$-правильно расположенной точкой конфигурации φ, и кроме того, существует точка $x \in U(n, \varphi)$ и $(i+2)$-правильный φ-путь $\omega : [1, s] \to Z'$ такой, что $\omega(1) = x$, $\omega(s) = y$. Выберем $s' \in [1, s]$ так, что $\omega(t) \in T_{l+2}$ для всех $t \in [s', s]$ и $\omega(s'-1) \overline{\in} \overline{\in} T_{l+2}$ (Заметим, что при этом все точки $\omega(t)$, $t \in [s', s]$, принадлежат множеству $K_{l+2}^{(j)}(\varphi)$). Докажем, что $\omega(s'-1) \in V_{l-1}$. В самом деле, предположим противное, и пусть $\omega(s'-1) \overline{\in} V_{l+1}$. Поскольку $\omega(s'-1) \overline{\in} \overline{\in} T_{l+2}$, то отсюда следует, что $\omega(s'-1) \overline{\in} V_{l+2}$. Выберем $s'' \in [1, s'-1]$ таким образом, чтобы $\omega(t) \overline{\in} V_{l+2}$ для всех $t \in [s'', s'-1]$ и $\omega(s''-1) \in V_{l+2}$. Тогда, поскольку y является $(i+2)$-правильно расположенной точкой конфигурации φ, $\omega(t) \overline{\in} V_{l+1}$ для всех $t \in [s''-1, s]$, то $\omega(s''-1)$ также является $(i+2)$-правильно расположенной точкой конфигурации φ, и так как $\omega(s'') \in T_{l+2}$, то отсюда вытекает, что φ-путь ω не является $(i+2)$-правильным путем конфигурации φ. Полученное противоречие доказывает, что $\omega(s'-1) \in V_{l+1}$. Отсюда, воспользовавшись тем, что y является $(i+2)$-правильно расположенной точкой конфигурации φ, и $\omega(t) \in T_{l+2}$ для всех $t \in [s', s]$, мы получим, что $\omega(s'-1)$ является строго $(i+1)$-правильно расположенной точкой конфигурации φ, то есть $\omega(s'-1) \in L_{l+1}(\varphi)$. Отсюда, учитывая, что $d(\omega(s'-1), \omega(s')) = 1$ и $\omega(s') \in K_{l+2}^{(j)}(\varphi)$, мы получаем утверждение 3.6.1.

Доказательство 3.6.2. Рассмотрим произвольную связную компоненту $\tilde{M}_l^{(0)}(\varphi)$ множества $\bar{M}_l(\varphi)$, и пусть $x \in \tilde{M}_l^{(0)}(\varphi) \cap U(n, \varphi)$. Очевидно, $\tilde{M}_l^{(0)}(\varphi) = \bar{M}_l(x, \varphi)$. Пусть $z \in M_{l+1}(x, \varphi) \cap L_{l+1}(\varphi)$. Постро-

им $(i+1)$-правильный φ-путь $\omega:[1, s]\to Z^*$, $\omega(1)=x$, $\omega(s)=z$. Обозначим $S_{l+1}(\omega)=|t\in[1, s]:\omega(t)\in L_{l+1}(\varphi)|$, и пусть s' —наименьшее число из $S_{l+1}(\omega)$. Тогда $\omega(t)\overline{\in} L_{l+1}(\varphi)$ для всех $t\in[1, s'-1]$, и следовательно, если $\psi=f_i^{*,\,l}(\varphi)$, то $\psi(\omega(t))=-1$ для всех $t\in[1, s'-1]$. Таким образом, $\omega(s'-1)\in\widetilde{M}_l(x, \varphi)$. Далее, поскольку $\omega(s')\in L_{l+1}(\varphi)$, то $\omega(s')$ является строго $(i+1)$-правильно расположенной точкой конфигурации φ. Поэтому, если мы выберем точку $y\in T_{l+2}$ таким образом, что $d(\omega(s'), y)=1$, то точка y будет $(i+2)$-правильно расположенной точкой конфигурации φ. Следовательно, $y\in K_{l+2}^{(j)}$ для некоторого $j, v, 1\leqslant j\leqslant m$. Учитывая также, что $d(y, \omega(s'-1))=2$, мы получаем отсюда утверждение 3.6.2.

3.7. Построение множеств $\bar{K}_l(\varphi)$, $\bar{L}_l(\varphi)$ и преобразования $\tilde{f}_l$.

Пусть $\varphi\in\mathfrak{M}_p(i; k, l)$, и пусть

$$\bar{M}_l(\varphi)=\bar{M}_l^{(1)}(\varphi)\cup\cdots\cup\bar{M}_l^{(m_0)}(\varphi),$$
$$L_{l+1}(\varphi)=L_{l+1}^{(1)}(\varphi)\cup\cdots\cup L_{l+1}^{(m_1)}(\varphi),$$
$$K_{l+2}(\varphi)=K_{l+2}^{(1)}(\varphi)\cup\cdots\cup K_{l+2}^{(m_2)}(\varphi)$$

разбиение множеетв $\bar{M}_l(\varphi)$, $L_{l+1}(\varphi)$ и $K_{l+2}(\varphi)$ на связные компоненты. Выделим подмножества индексов $J_1\subseteq\{1,\cdots, m_1\}$ и $J_2\subseteq\{1,\cdots, m_2\}$ следующим образом: $j_2\in J_2$, если существует $j_0\in\{1,\cdots, m_0\}$ такое, что $d(\bar{M}_l^{(j_0)}, K_{l+2}^{(j_2)})\leqslant 2$, $j_1\in J_1$, если существует $j_2\in J_2$ такое, что $d(K_{l+2}^{(j_2)}, L_{l+1}^{(j_1)})=1$.

Определение 3.7.1. $\bar{K}_{l+2}(\varphi)=\bigcup\limits_{j_1\in J_1}K_{l+2}^{(j_1)}(\varphi)$ $(\tilde{K}_{l+2}(\varphi)\subset K_{l+2}(\varphi))$.

Определение 3.7.2. $\bar{L}_{l+1}(\varphi)=\bigcup\limits_{j_1\in J_1}L_{l+1}^{(j_1)}(\varphi)$ $(\tilde{L}_{l+1}(\varphi)\subseteq L_{l+1}(\varphi))$.

Определение 3.7.3. Пусть $c_2>0$, $c_3>0$. Мы скажем, что конфигурация φ принадлежит классу $\widetilde{\mathfrak{M}}_p(i; \bar{k}, \bar{l})$, если

$$2n\leqslant i<4n,$$
$$|\tilde{L}_{l+1}(\varphi)\cup\tilde{K}_{l+2}(\varphi)|\leqslant c_2|\bar{M}_l(\varphi)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}, \tag{3.7}$$
$$|\tilde{L}_{l+1}(\varphi)|=\tilde{l},\ |\tilde{K}_{l+2}(\varphi)|=\tilde{k}$$

или

$$4n\leqslant i<6n,$$
$$|\tilde{L}_{l+1}(\varphi)\cup\tilde{K}_{l+2}(\varphi)|\leqslant\frac{c_3}{n}|\bar{M}_l(\varphi)|, \tag{3.8}$$
$$|\tilde{L}_{l+1}(\varphi)|=\tilde{l},\ |\tilde{K}_{l+2}(\varphi)|=\tilde{k}.$$

Замечание 3.7.3. Из формул (3.1), (3.2), (2.5), предложения 3.5 и того, что $\bar{L}_{l+1}(\varphi) \subseteq L_{l+1}(\varphi)$, $\bar{K}_{l+2}(\varphi) \subseteq K_{l+2}(\varphi)$, и $\bar{M}_l(\varphi) \subset M_l(\varphi)$, вытекает, что

$$\mathfrak{M}(p) \subset \bigcup_{\substack{2n<l<Gn \\ \bar{k},\ \bar{l}}} \bar{\mathfrak{M}}_p(i;\ \bar{k},\ \bar{l}) \tag{3.9}$$

с теми же c_2 и c_3, что и в пункте 3.3.

Определение 3.7.4. Пусть $\varphi \in \tilde{\mathfrak{M}}_p(i;\ \tilde{k},\ \tilde{l})$. Определим преобразование $\tilde{f}_l^{\tilde{k},\tilde{l}} : \tilde{\mathfrak{M}}_p(i;\ \tilde{k},\ \tilde{l}) \to \mathfrak{M}(V_p)$ следующим образом:

$$\tilde{\psi}(x) = \tilde{f}(\varphi)(x) = \begin{cases} +1, \text{ если } x \in \tilde{L}_{l+1}(\varphi) \\ \varphi(x) \text{ — в противном случае.} \end{cases} \tag{3.10}$$

3.8. Предложение 3.8. *Пусть* $\varphi \in \mathfrak{M}_p(i;\ k,\ l)$, *и пусть* $\tilde{\psi} = \tilde{f}_l(\varphi)$. *Тогда* $\tilde{\psi}(\varphi) = -1$ *для всех* $y \in \tilde{M}_l(\varphi)$, *и* $\tilde{\psi}(y) = +1$ *для всех* $y \in \partial_1 \tilde{M}_l(\varphi)$.

Доказательство. Пусть $\psi_l(\varphi)$, $\tilde{\psi} = \tilde{f}_l(\varphi)$. Заметим, что из условия $\bar{L}_{l+1}(\varphi) \subseteq L_{l+1}(\varphi)$ и определения преобразований f_l и $\tilde{f}_l$ вытекает, что если $\psi(z) = -1$ для некоторого $z \in Z^v$, то и $\tilde{\psi}(z) = -1$. В самом деле, условие $\psi(z) = -1$ влечет условие $z \overline{\in} L_{l+1}(\varphi)$, откуда следует, что $z \overline{\in} \bar{L}_{l+1}(\varphi)$, и следовательно, $\tilde{\psi}(z) = -1$. Так как $\psi(z) = -1$ для всех $z \in \tilde{M}_l(\varphi)$, то из этого замечания вытекает, что $\tilde{\psi}(z) = -1$ для всех $z \in \tilde{M}_l(\varphi)$, что доказывает первую часть предложения 3.8.

Заметим далее, что в силу определения $\tilde{M}_l(\varphi)$ (см. пункт 3.5) $\psi(z) = +1$ для всех $y \in \partial_1 \tilde{M}_l(\varphi)$. Предположим, что $\tilde{\psi}(y_1) = -1$ для некоторого $y_1 \in \partial_1 \tilde{M}_l(\varphi)$. Тогда $\tilde{\psi}(y_1) \neq \psi(y_1)$, и следовательно, $y_1 \in L_{l+1}(\varphi) \setminus \tilde{L}_{l+1}(\varphi)$. Поэтому y_1 является строго $(i+1)$-правильно расположенной точкой конфигурации φ. Отсюда следует, что если точка y_2 удовлетворяет условиям $d(y_1, y_2) = 1$, $y_2 \in T_{l+2}$, то y_2 является $(i+2)$-правильно расположенной точкой конфигурации φ. Далее, воспользовавшись условием $y_1 \in \partial_1 \tilde{M}_l(\varphi)$, выберем точку $y_0 \in \tilde{M}_l(\varphi)$ такую, что $d(y_0, y_1) = 1$. Таким образом, мы построили три точки y_0, y_1, y_2 такие, что $y_0 \in \tilde{M}_l(\varphi)$, $y_1 \in L_{l+1}(\varphi)$, $y_2 \in K_{l+2}(\varphi)$, и $d(y_0, y_2) = 2$, $d(y_2, y_1) = 1$. Отсюда и из определеяий пункта 3.7 вытекает, что $y_1 \in \bar{L}_{l+1}(\varphi)$, и следовательно $\tilde{\psi}(y_1) = +1$.

3.9. Оценка для вероятности множества $\mathfrak{M}_p(i;\ k,\ l)$. В этом пункте приводятся простые оценки для вероятности множеств

$\mathfrak{M}_p(i;\ k,\ l)$, которые играют важную роль в дальнейшем. Поскольку мы предположили, что $h \geqslant 0$, то в силу определения преобразования $\tilde{f}_l^{k,l}$ для любой конфигурации $\varphi(\mathfrak{M}_p(i;\ k,\ l))$

$$q_p(\varphi) \leqslant \exp\{\nu\beta l\}\ q_p(\bar{f}_l(\varphi)).$$

Поэтому

$$q_p(\bar{\mathfrak{M}}_p(i;\ \bar{k},\ \bar{l})) \leqslant \exp\{\nu\beta\bar{l}\} \sum_{\varphi\in\bar{\mathfrak{M}}_p(i;\bar{k},\ \bar{l})} q_p(\bar{f}_l(\varphi)) =$$

$$= \exp\{\nu\beta\bar{l}\} \sum_{\psi\in\bar{f}_l(\bar{\mathfrak{M}}_p(i;\ \bar{k},\ \bar{l}))} \{\varphi\in\bar{\mathfrak{M}}_p(i;\ \bar{k},\ \bar{l})|\ \bar{f}_l(\varphi)=\psi\}|\ q_p(\psi), \tag{3.11}$$

где через $|\{\varphi\in\bar{\mathfrak{M}}_p(i;\ \bar{k},\ \bar{l})|\ \bar{f}_l(\varphi)=\psi\}|$ обозначено число конфигураций φ, которые переходят в данную конфигурацию ψ при применении преобразования $\bar{f}$.

3.10. Описание множества $\tilde{f}_l(\bar{\mathfrak{M}}_p(i;\ \bar{k},\ \bar{l}))$. Пусть $\varphi\in\mathfrak{M}_p(i;\ k,\ l)$, $2n\leqslant i<6n$, и $\psi=f_l(\varphi)$, $\tilde{\psi}=\tilde{f}_l(\varphi)$, $p=6n+n_0\ (0\leqslant n_0<5)$. В соответствии с принятым соглашением $\varphi(z)=\psi(z)=\tilde{\psi}(z)=-1$ для всех $z\in V_{p+1}$. Поэтому можно ввести внешние контуры, отвечающие конфигурации $\tilde{\psi}$.

Предложение 3.10.1. *В расположении внешних контуров, отвечающих конфигурации $\tilde{\psi}$, найдется контур, обозначаемый далее через Γ_0, такой, что его внутренность* $\operatorname{int}(\Gamma_0)$ *содержит стандартный куб* V_n, $\operatorname{int}(\Gamma_0)\supset V_n$.

Доказательство. В силу условия $\varphi(z)=\tilde{\psi}(z)=\psi(z)=-1$ для $z\in V_{p+1}$ в разложении множества $\{z|\ \tilde{\psi}(z)=-1\}$ на связные компоненты найдется в точности одна бесконечная компонента, которую мы обозначим через A. Через $A_0, A_1, \cdots, A_k$ обозначим связные компоненты множества $Z^\nu\setminus A$. Эти $A_0, A_1, \cdots, A_k$ являются внутренностями внешних контуров $\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_k$ конфигурации $\tilde{\psi}$ ($A_i=\operatorname{int}(\Gamma_i)$, $i=1, \cdots, k$). Если A не пересекается с V_n, то V_n целиком лежит в одной из компонент $A_0, \cdots, A_k$ (Здесь через A_0 обозначена та связная компонента, которая целиком содержит V_n, $V_n\subseteq A_0=\operatorname{int}(\Gamma_0)$). Поэтому достаточно обнаружить, что A не пересекается с V_n. В самом деле, предположим противное и пусть $x\in A\cap V_n$. Пользуясь связностью A и тем, что $\tilde{\psi}(z)=-1$ для всех $z\in A$, найдем $\tilde{\psi}$-путь ω: $:[1,\ s]\to Z^\nu$ такой, что $\omega(1)=x$, $\omega(s)\in V_{p+1}$. Из определения преобразования $\bar{f}_l$ вытекает, что ω является также p-путем. Выделим подмножество индексов J, $J\subset\{1, \cdots, s\}$, для которых $\omega(j)$, $j\in J$ являются

строго $(i+1)$-правильно расположенными точками конфигурации φ. Заметим, что множество J не пусто. Для доказательства этого воспользуемся условием $\omega(1)=x\in V_n$, $\omega(s)\overline{\in} V_{p+1}$ и через j_0 обозначим наибольший элемент множества $\{1,\cdots, s\}$, для которого $\omega(j_0)\in V_{l+1}$. Тогда $\omega(j')\overline{\in} V_{l+1}$ для всех j', $j_0<j'\leqslant s$ и, следовательно, $\omega(j_0)$ является строго $(i+1)$-правильно расположенной точкой конфигурации φ, т. е. в самом деле $J\neq\varnothing$, ибо $j_0\in J$. Пусть j_1—наименьший элемент множества J. В силу выбора j_1 отрезок $[1, j_1]$ пути ω является $(i+1)$-правильным φ-путем. Следовательно, $\psi(\omega(j_1))=\tilde{\psi}(\omega(j_1))=+1$, что противоречит тому, что ω является $\tilde{\psi}$-путем. Полученное противоречие показывает, что A не пересекается с V_n. Предложение 3.10.1 доказано.

Замечание 3.10.1. $\tilde{M}_l(\varphi)\subset\operatorname{int}(\Gamma_0)$.

Доказательство. Как было показано в пункте 3.8, $\tilde{\psi}(y)=-1$ для всех $y\in\tilde{M}_l(\varphi)$. Поэтому всякая связная компонента множества $\tilde{M}_l(\varphi)$ может либо целиком лежать в $\operatorname{int}(\Gamma_0)$, либо целиком вне $\operatorname{int}(\Gamma_0)$. Учитывая, что каждая из этих связных компонент имеет непустое пересечение с V_n, и $V_n\subset\operatorname{int}(\Gamma_0)$, мы получим требуемое утверждение.

Перейдем к описанию свойств конфигурации $\tilde{\psi}$ на множестве $\operatorname{int}(\Gamma_0)$.

Предложение 3.10.2. *Пусть $c_2>0$—произвольно, а c_3 выбрано таким образом, что имеет место утверждение предложения* 3.2. *Тогда*

а) *В расположении внешних контуров на множестве* $\operatorname{int}(\Gamma_0)$, *отвечающих конфигурации* $\tilde{\psi}$, *найдется контур* γ, *внутренность которого,* $\operatorname{int}(\gamma)$, *имеет непустое пересечение как с* V_n, *так и с* $(V_{2n})^c$.

в) *Пусть* $\varphi\in\mathfrak{M}_p(i;\bar{k},\bar{l})$ *с* $2n\leqslant i<4n$, *и пусть* $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_m\}$—*набор всех тех внешних контуров конфигурации* $\tilde{\psi}$ *на множестве* $\operatorname{int}(\Gamma_0)$, *внутренности которых,* $\operatorname{int}(\gamma_j)$, $j=1,\cdots,m$, *имеют непустое пересечение как с* V_n, *так и с* $(V_{2n})^c$. *Тогда*

$$\sum_{j=1}^{m}|\gamma_j|>|\tilde{M}_l(\varphi)|^{\nu-1}\geqslant c_3(|\bar{K}_{l+2}(\varphi)|+|\bar{L}_{l+1}(\varphi)|). \tag{3.12}$$

Доказательство. а) Пусть

$$\tilde{M}_l(\varphi)=\tilde{M}_l^{(1)}(\varphi)\cup\cdots\cup\tilde{M}_l^{(m)}(\varphi)$$

разложение множества $\tilde{M}_l(\varphi)$ на связные компоненты. В соответствии с предложением пункта 3.8 $\psi(y)=-1$ для всех $y\in\tilde{M}_l^{(j)}(\varphi)$ и $\tilde{\psi}(y)=+1$ для всех $y\in\partial_1\tilde{M}_l^{(j)}(\varphi)$. Поэтому множества $\tilde{M}_l^{(j)}(\varphi)$ и $\partial_1\tilde{M}_l^{(j)}(\varphi)$ разделяются контурами конфигурации $\tilde{\psi}$, один из которых (внешний),

обозначаемый далее через γ_j, удовлетворяет условию

$$\bar{M}_l^{(j)}(\varphi) \subseteq \operatorname{int}(\gamma_j) \subset \operatorname{int}(\Gamma_0),\ j=1,\cdots,m. \tag{3.13}$$

Пользуясь предложением 3.6.2, для каждого $\bar{M}_l^{(j)}(\varphi)$ найдем связную компоненту $\tilde{K}_{l+2}^{(j)}$ множества $\tilde{K}_{l+2}(\varphi)$ такую, что $d(\bar{M}_l^{(j)}(\varphi), \tilde{K}_{l+2}^{(j)}(\varphi))=2$. Отсюда, с учетом включений $\bar{M}_l^{(j)}(\varphi) \subset \operatorname{int}(\Gamma_0)$ и $\tilde{K}_{l+2}^{(j)}(\varphi) \subset (\operatorname{int}(\Gamma_0))^c$ вытекает, что γ_j являются внешними контурами конфигурации $\bar{\psi}$ на множестве $\operatorname{int}(\Gamma_0)$.

b) Если хотя бы при одном $j=1,\cdots,m$, $|\gamma_j| \geqslant |\bar{M}_l(\varphi)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}$, то неравенство (3.12) выполнено очевидным образом. Поэтому предположим, что $|\gamma_j| \leqslant |\bar{M}_\gamma(\varphi)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}$ при всех $j=1,\cdots,m$. Воспользовавшись изопериметрическим неравенством $|\gamma| \geqslant 2\nu\,|\operatorname{int}(\gamma)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}$, справедливым для любого контура γ, получим

$$\sum_{j=1}^{m} |\gamma_j| = \sum_{j=1}^{m} |\gamma_j|^{\frac{\nu}{\nu-1}} |\gamma_j|^{-\frac{1}{\nu-1}} \geqslant |\bar{M}_l|^{-\frac{1}{\nu}} \sum_{j=1}^{m} |\gamma_j|^{\frac{\nu}{\nu-1}} \geqslant$$

$$\geqslant (2\nu)^{\frac{\nu}{\nu-1}} |\bar{M}_l|^{-\frac{1}{\nu}} \sum_{j=1}^{m} |\operatorname{int}(\gamma_j)| \geqslant |\bar{M}_l(\varphi)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}.$$

Здесь ν—размерность решетки Z^ν. Предложение 3.10.2 полностью доказано.

Ниже нам понадобится следующее простое

Замечание 3.10.2. Контур γ, внутренность которого имеет непустое пересечение как с V_n, так и с $(V_{2n})^c$, удовлетворяет условию $|\gamma| \geqslant n$

Доказательство. Если $\operatorname{int}(\gamma)$ не содержит целиком слой T_r ни при каком r, $n \leqslant r < 2n$, то в любом из слоев T_r, $r=n, n+1, \cdots, 2n-1$, найдутся две точки x, y, $d(x, y)=1$, такие, что $x \in \operatorname{int}(\gamma)$, $y \overline{\in} \operatorname{int}(\gamma)$, и грань, разделяющая эти две точки, принадлежит γ. Поскольку число таких слоев не меньше n, то и $|\gamma| \geqslant n$. Пусть теперь $T_r \subset \operatorname{int}(\gamma)$ для некоторого r, $n \leqslant r < 2n$. Через $T_r^{(up)}$ обозначим множество точек T_r вида

$$T_r^{(up)} = \{y=(x_1,\cdots,x_\nu) \in Z^\nu \mid x_1=r,\ |x_2|<r, \cdots, |x_\nu|<r\}$$

и для $y_0=(x_1^{(0)},\cdots,x_\nu^{(0)}) \in T_r^{(up)}$ через $T_r^{\perp}(y_0)$ обозначим множество

$$T_r^{\perp}(y_0) = \{z=(x_1,\cdots,x_\nu) \in Z^\nu \mid x_1 \geqslant r,\ x_2=x_2^{(0)}, \cdots, x_\nu=x_\nu^{(0)}\}.$$

Из ограниченности $\operatorname{int}(\gamma)$ и того, что $T_r \subset \operatorname{int}(\gamma)$, вытекает, что для любой точки $y \in T_r^{(up)}$ можно найти такие точки z_1, $z_2 \in T_r^{\perp}(y)$, что $d(z_1, z_2) \in T_r^{\perp}(y)$, что $d(z_1, z_2)=1$, $z_1 \in \operatorname{int}(\gamma)$, $z_2 \overline{\in} \operatorname{int}(\gamma)$. Точки z_1 и z_2 разделяются гранью контура γ. Таким образом, каждой точке $y \in T_r^{(up)}$ сопоставляется грань контура γ, и следовательно, $|\gamma| > |T_r^{(up)}| \geqslant n^{\nu-1} \geqslant n$.

3.11. Оценки. Наконец, пользуясь формулой (3.11), оценим вероятность множества $\bar{\mathfrak{M}}_p(i; \tilde{k}, \tilde{l})$.

Предложение 3.11.1 *Пусть* $\varphi \in \bar{\mathfrak{M}}_p(i; \tilde{k}, \tilde{l})$, *и пусть* M' — *связная компонента множества* $\{x | \varphi(x) = -1\}$, *имеющая непустое пересечение как с* V_n, *так и с* $(V_{2n})^c$. *Тогда* M' *неограничено.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть M' — ограниченное множество. Обозначим через γ' контур, ограничивающий множество M'. Из замечания 3.10.2 вытекает, что $|\gamma'| > n$. Но все конфигурации, удовлетворяющие этому условию, были ранее исключены нами из рассмотрения (см. пункт 3.1), следовательно $\varphi \bar{\in} \bar{\mathfrak{M}}_p(i; \tilde{k}, \tilde{l})$. Полученное противоречие доказывает неограниченность множества M'.

3.11.2 Зафиксируем конфигурацию $\tilde{\psi} \in \tilde{f}_l(\bar{\mathfrak{M}}_p(i; \tilde{k}, \tilde{l}))$ и оценим $|\{\varphi \in \bar{\mathfrak{M}}_p(i; \tilde{k}, \tilde{l}) | \tilde{f}_l(\varphi) = \tilde{\psi}\}|$.

При этом мы будем пользоваться описанием свойств конфигурации $\tilde{\psi}$, приведенным в 3.10. Зная конфигурацию $\tilde{\psi}$, можно единственным способом восстановить множества $M_l^{(j)}(\varphi)$, пользуясь следующим алгоритмом.

В расположении внешних контуров, отвечающих конфигурации $\tilde{\psi}$, выберем тот контур Γ_0 (см. 3.10.1), внутренность которого, $\mathrm{int}(\Gamma_0)$, содержит куб V_n. Рассмотрим, далее, ограничение конфигурации $\tilde{\psi}$ на $\mathrm{int}(\Gamma_0)$ и в $\mathrm{int}(\Gamma_0)$ выделим все внешние контуры $\gamma_1, \cdots, \gamma_m$, внутренность которых, $\mathrm{int}(\gamma_j)$, имеет непустое пересечение как с V_n, так и с $(V_{2n})^c$. В каждом из множеств $\mathrm{int}(\gamma_j)$, $j=1, \cdots, m$, в свою очередь, выделим связную компоненту множества $\{x \in Z^* | \tilde{\psi}(x) = -1\}$, примыкающую к $\partial_1 \mathrm{int}(\gamma_j)$.

Заметим, что если $\varphi \in \bar{\mathfrak{M}}_p(i; \tilde{k}, \tilde{l})$ и $\tilde{f}_l(\varphi) = \tilde{\psi}$, то в силу определения преобразования $\tilde{f}$, $\varphi(x) = -1$ для всех $x \in M_l^{(j)}(\varphi)$. Поэтому, как вытекает из предложения 3.11.1, $M_l^{(j)}(\varphi) \subset M'$, где M' — неограниченная связная компонента множества $\{x \in Z^* | \varphi(x) = -1\}$. Отсюда и из определения $M_l^{(j)}(\varphi)$ вытекает, что предложенный выше алгоритм позволяет по конфигурации $\tilde{\psi}$ единственным образом восстановить множества $M_l^{(j)}(\varphi)$.

Далее, связная компонента $K^{(0)}$ множества $(i+2)$-правильно расположенных точек конфигурации $\tilde{\psi}$, в силу 3.7.2, может лежать в $\bar{K}_{l+2}(\varphi)$ только в том случае, если $d(K^{(0)}, M_l^{(j)}(\varphi)) = 2$ для некоторого j $(j=1, \cdots, m)$. Считая, что все точки Z^* занумерованы некоторым способом (например, в лексикографическом порядке), выберем среди точек $x \in K^{(0)}$, удовлетворяющих условию $d(x, M_l^{(j)}(\varphi)) = 2$, пер-

вую точку, и обозначим ее через x_0. Аналогичным образом в $M_i^{(j)}(\varphi)$ выберем первую точку, удовлетворяющую условию $d(x_0, y_0)=2$, и пусть $z_0 \in Z^v$—первая точка, удовлетворяющая условиям $d(x_0, z_0)=1$, $d(y_0, z_0)=1$. Заметим, что $\tilde{\psi}(x_0)=\bar{\psi}(z_0)=-1$ и $\dot{\psi}(y_0)=+1$, и поскольку $z_0 \in M_i^{(j)}(\varphi)$, $y_0 \overline{\in} M_i^{(j)}(\varphi)$, то точки y_0 и z_0 разделяются гранью контура γ_j. Таким образом, каждой связной компоненте $K^{(0)}$ ставится в соответствие некоторая грань из $\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_m$, при этом, как нетрудно видеть, это отображение инъективно. Отсюда вытекает, что поскольку $\tilde{K}_{l+2}(\varphi)$ является объединением связных компонент указанного типа, то число возможных способов выбора $\tilde{K}_{l+2}(\varphi)$ не превосходит $2^{|\gamma_1|+\cdots+|\gamma_m|}$.

Наконец, поскольку $\tilde{L}_{l+1}(\varphi)$ примыкает к $\tilde{K}_{l+2}(\varphi)$, то используя лемму 1.4, мы получаем, что при фиксированных $\tilde{K}_{l+2}(\varphi)$ и $\tilde{l}=|\tilde{L}_{l+1}(\varphi)|$ число возможных способов выбора $L_{l+1}(\varphi)$ не превосходит $\exp\{c_1(\tilde{l}+|\tilde{K}_{l+2}(\varphi)|)\}$.

Собирая вместе полученные оценки, будем иметь окончательно

$$|\varphi \in \mathfrak{M}_p(i; \tilde{k}, \tilde{l})|\tilde{f}_l(\varphi)=\tilde{\psi}\}| \leqslant \exp\{c_1(\tilde{l}+\tilde{k})+\ln 2(|\gamma_1|+\cdots+|\gamma_m|)\}. \quad (3.14)$$

3.11.3. Оценка вероятности $q_p(\tilde{\psi})$. Зафиксируем i, $\tilde{k}$ и $\tilde{l}$ $(2n \leqslant i < 6n)$. Как и в 3.10, для конфигурации $\tilde{\psi} \in \mathfrak{M}_p(i; \tilde{k}, \tilde{l})$ через $\Gamma_0(\tilde{\psi})$ обозначим внешний контур конфигурации $\tilde{\psi}$, удовлетворяющий условию $\operatorname{int}(\Gamma_0) \supset V_n$, а через $\gamma_1(\tilde{\psi}), \cdots, \gamma_m(\tilde{\psi})$, $m \geqslant 1$, внешние на $\operatorname{int}(\Gamma(\tilde{\psi}))$ контуры конфигурации $\tilde{\psi}$, имеющие непустое пересечение как с V_n, так и с $(V_{2n})^c$.

Введем следующие обозначения:

$$N(\tilde{\psi})=\exp\{c_1(\tilde{l}+\tilde{\kappa})+\ln 2\,(|\gamma_1|+\cdots+|\gamma_m|),$$

$q(\tilde{\psi}(\operatorname{int}\Gamma_0)|\tilde{\psi}(\operatorname{int}\Gamma_0)^c)$—вычисленная в соответствии с (2) условная гиббсовская вероятность конфигурации $\tilde{\psi}(\operatorname{int}\Gamma_0)$, при условии, что фиксировано значение гиббсовского поля вне $\operatorname{int}(\Gamma_0)$. $A(\Gamma_0)$—множество всех тех конфигураций $\tilde{\psi} \in \tilde{f}_l \mathfrak{M}_p(i; \tilde{k}, \tilde{l})$, для которых данный контур $\Gamma_0(\operatorname{int}\Gamma_0 \supset V_n)$ является внешним контуром.

$A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$—множество всех конфигураций $\tilde{\psi} \in A(\Gamma_0)$, для которых внешними на $\operatorname{int}(\Gamma_0)$ контурами, пересекающимися с V_n и с $(V_{2n})^c$, являются данные контуры $\gamma_1, \cdots, \gamma_m$. Для данных целых положительных $u_1, \cdots, u_m$ через $A_{\Gamma_0}(\gamma_1 \cdots, \gamma_m, u_1, \cdots, u_m)$ обозначим множество

всех конфигураций $\tilde{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$, для которых $|M_i^{(1)}(\tilde{\psi})| = u_1, \cdots, |M_i^{(m)}(\tilde{\psi})| = u_m$.

Выражение

$$\sum_{\tilde{\psi} \in \tilde{I}_i \tilde{\mathfrak{M}}_p(l;\, \tilde{k},\, \tilde{l})} N(\tilde{\psi})\, q_p(\tilde{\psi}) \tag{3.15}$$

будем оценивать отдельно в случае $2n \leqslant i < 4n$ и в случае $4n \leqslant i < 6n$.

Пусть $2n \leqslant i < 4n$. Используя лемму 1.1, получим

$$\sum_{\tilde{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)} N(\tilde{\psi})\, q_p(\tilde{\psi}) \leqslant \tag{3.16}$$

$$\leqslant \sum_{\tilde{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)} N(\tilde{\psi})\, q_p\{\tilde{\psi}((\operatorname{int}\Gamma_0)^c)|\, q\,\{\tilde{\psi}(\operatorname{int}\Gamma_0)|\tilde{\psi}(\operatorname{int}\Gamma_0)^c)\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\tilde{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)} \exp\left\{c_1(\tilde{l} + \tilde{k}) + (\ln 2 - 2\beta)\left(\sum_{j=1}^{m} |\gamma_j|\right)\right\} q_p\{\tilde{\psi}(\operatorname{int}\Gamma_0)^c)\}.$$

Отсюда и из (3.12) очевидным образом вытекает следующая оценка, справедливая для всех $\delta > 0$

$$\sum_{\tilde{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)} N(\tilde{\psi})\, q_p(\tilde{\psi}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\tilde{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)} \exp\left\{-\delta(\tilde{l} + \tilde{k}) + \left(\frac{c_1 + \delta}{c_2} + \ln 2 - 2\beta\right) \times \right. \tag{3.17}$$

$$\left. \times \sum_{j=1}^{m} |\gamma_j|\right\} q_p\{\tilde{\psi}(\operatorname{int}\Gamma_0)^c)\}.$$

Пусть теперь $4n \leqslant i < 6n$. Заметим, что

$$\sum_{\tilde{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)} N(\tilde{\psi})\, q_p(\tilde{\psi}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{u_1, \cdots u_m} \sum_{\tilde{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m;\, u_1, \cdots, u_m)} N(\tilde{\psi})\, q_p(\tilde{\psi}). \tag{3.18}$$

Для внутренней суммы в правой части (3.18) имеем

$$\sum_{\tilde{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m;\, u_1, \cdots, u_m)} N(\tilde{\psi})\, q_p(\tilde{\psi}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\tilde{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m;\, u_1, \cdots, u_m)} \exp\left\{c_1(\tilde{l} + \tilde{k}) + (\ln 2 - 2\beta) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{j=1}^{m} |\gamma_j| - h \sum_{j=1}^{m} h_j\right\} q_p\{\tilde{\psi}(\operatorname{int}\Gamma_0)^c)\}, \tag{3.19}$$

где h—внешнее поле. Пусть $h \geqslant \frac{c_4}{n}$, где значение c_4 будет указано

позже. Тогда, поскольку $u_1+\cdots+u_m=|\bar{M}_l(\bar{\psi})|$ и $|\bar{M}_l(\tilde{\psi})|$ удовлетворяет неравенству (3.8), то из формулы (3.19) вытекает следующее неравенство:

$$\sum_{\bar{\psi}\in A_{\Gamma_0}(\gamma_1,\cdots,\gamma_m;\,u_1,\cdots,u_m)} N(\bar{\psi})\,q_p(\bar{\psi}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\tilde{\psi}\in A_{\Gamma_0}(\gamma_1,\cdots,\gamma_m;\,u_1,\cdots,u_m)} \exp\left\{\left(c_1-\frac{c_4}{c_2}\right)(\tilde{k}+\tilde{l})+\right.$$

$$\left.+(\ln 2-2\beta)\sum_{j=1}^{m}|\gamma_j|\right\} q_p\{\tilde{\psi}((\operatorname{int}\Gamma_0)^c)\}. \tag{3.20}$$

Но $0<u_j=|M_l^{(j)}(\tilde{\psi})|\leqslant|V_{p+1}|$. Поэтому (3.18) и (3.20) приводят к оценке

$$\sum_{\bar{\psi}\in A_{\Gamma_0}(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)} N(\bar{\psi})\,q_p(\bar{\psi}) \leqslant$$

$$\leqslant |V_{p+1}|^m \sum_{\tilde{\psi}\in A_{\Gamma_0}(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)} \exp\left\{\left(c_1-\frac{c_4}{c_2}\right)(\tilde{k}+\tilde{l})+\right.$$

$$\left.+(\ln 2-2\beta)\sum_{j=1}^{m}|\gamma_j|\right\} q_p\{\tilde{\psi}((\operatorname{int}\Gamma_0)^c)\}. \tag{3.21}$$

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{\bar{\psi}\in A(\Gamma_0)} N(\bar{\psi})\,q_p(\bar{\psi}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m\geqslant 1}\frac{1}{m!}\sum_{\{\gamma_1,\cdots,\gamma_m\}}{}' \sum_{\tilde{\psi}\in A_{\Gamma_0}(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)} N(\tilde{\psi})\,q_p(\tilde{\psi}), \tag{3.22}$$

где сумма со штрихом в правой части (3.22) означает, что суммирование производится уже по упорядоченным наборам контуров. Для данного v число контуров γ, удовлетворяющих условию $|\gamma|=v$ и проходящих через данную точку, не превосходит $\exp\{c_1 v\}$ в соответствии с леммой 1.2, а число способов выбора этой точки не превосходит $|V_{p+1}|$. Учитывая также, что $v_j=|\gamma_j|\geqslant n$ для любого $j=1,\cdots,m$ и подставляя полученную в (3.17) оценку в правую часть (3.22), получим

$$\sum_{\tilde{\psi}\in A(\Gamma_0)} N(\tilde{\psi})\,q_p(\tilde{\psi}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m\geqslant 1}\frac{|V_{p+1}|^m}{m!}\left(\sum_{v\geqslant n}\exp\left\{\left(c_1+\frac{c_1+\delta}{c_2}+\ln 2-2\beta\right)v\right\}\right)^m \times$$

$$\times \sum_{\tilde{\psi}\in A(\Gamma_0)} \exp\{-\delta(\tilde{k}+\tilde{l})\}\,q_p\{\tilde{\psi}((\operatorname{int}\Gamma_0)^c)\}. \tag{3.23}$$

вслучае $2n \leqslant i < 4n$. Аналогичным образом для $4n \leqslant i < 6n$ из (3.21), и (3.22) получаем оценку

$$\sum_{\tilde{\psi} \in A(\Gamma_0)} N(\tilde{\psi})\, q_p(\tilde{\psi}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m \geqslant 1} \frac{|V_{p+1}|^{2m}}{m!} \Big(\sum_{v \geqslant n} \exp\{(c_1 + \ln 2 - 2\beta)\, v\}\Big)^m \times$$

$$\times \sum_{\bar{\psi} \in A(\Gamma_1)} \exp\left\{\left(c_1 - \frac{c_4}{c_3}\right)(\tilde{k} + \tilde{l})\right\} q_p\{\bar{\psi}((\operatorname{int}\Gamma_0)^c)\}. \qquad (3.24)$$

Для того, чтобы первые множители в правых частях неравенств (3.23) и (3.24) имели смысл, то есть чтобы соответствующие ряды (очевидно, геометрические прогрессии) сходились, достаточно, как легко видеть, лишь одного условия

$$\delta_1 = 2\beta - c_1 - \ln 2 - \frac{c_1 + \delta}{c_2} > 0. \qquad (3.25)$$

Положим также

$$\delta_2 = \min\left(\delta,\ \frac{c_4}{c_3} - c_1\right). \qquad (3.26)$$

Тогда, поскольку $|V_{p+1}|^m \leqslant |V_{p+1}|^{2m}$ и $\exp\{(c_1 + \ln 2 - 2\beta)\, v\} \leqslant$ $\leqslant \exp\left\{\left(c_1 + \frac{c_1 + \delta}{c_2} + \ln 2 - 2\beta\right) v\right\} = \exp\{-\delta_1 v\}$, то левые части (3.23) и (3.24) уже при всех i, $2n < i < 6n$, допускают единую оценку

$$\sum_{\bar{\psi} \in A(\Gamma_0)} N(\bar{\psi})\, q_p(\tilde{\psi}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m \geqslant 1} \frac{|V_{p+1}|^{2m}}{m!} \Big[\sum_{v \geqslant n} \exp(-\delta_1 v)\Big]^m \times$$

$$\times \sum_{\tilde{\psi} \in A(\Gamma_0)} \exp\{-\delta_2(\bar{k} + \tilde{l})\}\, q_p\{\tilde{\psi}((\operatorname{int}\Gamma_0)^c)\}. \qquad (3.27)$$

Имеем

$$\sum_{m \geqslant 1} \frac{|V_{p+1}|^{2m}}{m!} \left[\sum_{v \geqslant n} \exp(-\delta_1 v)\right]^m = \sum_{v \geqslant n} \frac{|V_{p+1}|}{m!} \left[\frac{\exp(-\delta_1 n)}{1 - (\exp(-\delta_1)}\right]^m =$$

$$= \exp\left[|V_{p+1}|^2 \frac{\exp(-\delta_1 n)}{1 - \exp(-\delta_1)}\right] - 1.$$

С другой стороны

$$\lim_{p \to \infty} |V_{p+1}|^2 \frac{\exp\left(-\frac{\delta_1}{2} n\right)}{1 - \exp(-\delta_1)} = 0, \qquad (3.28)$$

поскольку $|V_{p+1}| \leqslant (3p)^3$ и $n = \left[\frac{p}{6}\right]$. Поэтому для достаточно больших p

$$\sum_{m\geqslant 1}\frac{|V_{p+1}|^{2m}}{m!}\left[\sum_{v>n}\exp\left(-\delta_1 v\right)\right]^m\leqslant\exp\left(-\frac{\delta_1}{2}n\right).$$

Теперь из (3.27) следует

$$\sum_{\tilde{\psi}\in A(\Gamma_0)}N(\tilde{\psi})\,q_p(\tilde{\psi})\leqslant\exp\left\{-\frac{\delta_1}{2}n-\delta_2(\tilde{k}+\tilde{l})\right\}\sum_{\bar{\psi}\in A(\Gamma_0)}q_p\{\bar{\psi}((\operatorname{int}\Gamma_0)^c)\}. \tag{3.29}$$

Далее, для любых двух пар $(\Gamma_0', \bar{\psi}'((\operatorname{int}\Gamma_0')^c))$ и $(\Gamma_0'', \bar{\psi}''((\operatorname{int}\Gamma_0'')^c))$ события $\{\tilde{\psi}\,|\,\bar{\psi}((\operatorname{int}\Gamma_0')^c)=\bar{\psi}'((\operatorname{int}\Gamma_0')^c)\}$ и $\{\tilde{\psi}\,|\,\bar{\psi}((\operatorname{int}\Gamma_0'')^c)=\bar{\psi}''((\operatorname{int}\Gamma_0'')^c)\}$ несовместимы, если только $\Gamma_0''\neq\Gamma_0'$ или $\bar{\psi}'((\operatorname{int}\Gamma_0')^c)\neq\bar{\psi}''((\operatorname{int}\Gamma_0'')^c)$ при $\Gamma_0'=\Gamma_0''$. Поэтому

$$\sum_{\Gamma_0:\operatorname{int}\Gamma_0\supset V_n}\sum_{\tilde{\psi}\in A(\Gamma_0)}q_p\{\tilde{\psi}((\operatorname{int}\Gamma_0)^c)\}\leqslant 1. \tag{3.30}$$

С другой стороны

$$\sum_{\tilde{\psi}\in\mathfrak{M}_p(i;\tilde{k},\tilde{l})}N(\tilde{\psi})\,q_p(\tilde{\psi})\leqslant\sum_{\Gamma_0:\operatorname{Int}(\Gamma_0)\supset V_n}\sum_{\bar{\psi}\in A(\Gamma_0)}N(\tilde{\psi})\,q_p(\tilde{\psi}) \tag{3.31}$$

и поэтому из (3.29), (3.30) и (3.31) следует

$$\sum_{\bar{\psi}\in\bar{J}_l\tilde{\mathfrak{M}}_p(i;\tilde{k},\tilde{l})}\leqslant\sum_{\Gamma_0:\operatorname{Int}(\Gamma_0)\supset V_n}\exp\left\{-\frac{\delta_1}{2}n-\delta_2(\tilde{k}+\tilde{l})\right\}\times$$

$$\times\sum_{\tilde{\psi}\in A(\Gamma_0)}q_p\{\bar{\psi}((\operatorname{int}\Gamma_0)^c)\}\leqslant\exp\left\{-\frac{\delta_1}{2}n-\delta_2(\tilde{k}+\tilde{l})\right\}. \tag{3.32}$$

Пользуясь определением $N(\bar{\psi})$, приведенным в начале этого пункта, а также формулами (3.11), (3.14) и (3.31), получим

$$q_p\{\tilde{\mathfrak{M}}_p(i;\tilde{k},\tilde{l})\}\leqslant\exp\{\nu\beta\tilde{l}\}\sum_{\tilde{\psi}\in\bar{J}_l\tilde{\mathfrak{M}}_p(i;\tilde{k},\tilde{l})}N(\bar{\psi})\,q_p(\bar{\psi})\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left\{-\frac{\delta_1}{2}n-\delta_2\tilde{k}-(\delta_2-\nu\beta)\tilde{l}\right\}. \tag{3.33}$$

Предположим, что

$$\delta_2-\nu\beta>0. \tag{3.34}$$

Тогда из замечания 3.7.3 и формулы (3.33) с учетом неравенств $\tilde{k}\leqslant|T_{l+2}|$, $\tilde{l}\leqslant|T_{l+2}|$ (см. определение множеств $\tilde{K}$ и $\tilde{L}$), получаем

$$q_p\{\mathfrak{M}(p)\}\leqslant\sum_{l=2n}^{6n}\sum_{\tilde{l}<|T_{l+2}|}\sum_{\tilde{k}<|T_{l+2}|}q_p\{\tilde{\mathfrak{M}}_p(i;\tilde{k},\tilde{l})\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{l=2n}^{6n}\sum_{\tilde{k}<|T_{l+2}|}\sum_{\tilde{l}<|T_{l+1}|}\exp\left\{-\frac{\delta_1}{2}n\right\}\leqslant|V_{p+1}|^2\exp\left(-\frac{\delta_1}{2}n\right) \tag{3.35}$$

для достаточно больших p.

3.12. Выбор постоянных. Для завершения доказательства основной теоремы остается указать те значения параметров β и $c(\beta, \nu)$, для которых выполняются все оценки, использованные в приведенном выше доказательстве. Положим

$$2\beta_0 = c_1 + \ln 2. \tag{3.36}$$

Здесь c_1 — комбинаторная постоянная из формулировки лемм 1.2 и 1.3, зависящая только от размерности решетки ν. Далее, условие (3.34) вместе с определением (3.26) распадается на два условия

$$\delta - \nu\beta \geqslant 0, \tag{3.37}$$

$$\frac{c_4}{c_3} - c_1 - \nu\beta \geqslant 0. \tag{3.38}$$

Условию (3.37) можно удовлетворить, выбрав $\delta = \nu\beta$. Тогда из (3.25) и (3.36) вытекает, что c_2 должно удовлетворять условию (при $\beta > \beta_0$)

$$c_2(\nu, \beta) > \frac{c_1 + \nu\beta}{2(\beta - \beta_0)}. \tag{3.39}$$

В соответствии с предложением 3.4 выберем

$$c_3(\nu, \beta) = 2^\nu \ln\left\{12\frac{2^\nu - 1}{c_2(\nu, \beta)}\right\}.$$

Из условия (3.38) вытекает, что c_4 можно положить равным

$$c_4(\nu, \beta) = (c_1(\nu) + \beta\nu)\, c_3(\nu, \beta).$$

Окончательно получаем, что если значения параметров β и c выбраны так, что $\beta > \beta_0$ и $c > c_4(\nu, \beta)$, то имеет место оценка (3.35), а ввиду (3.28) и утверждение основной теоремы.

§ 4. Замечания к доказательству теоремы 2

Большая часть рассуждений, приведенных при доказательстве основной теоремы, может быть использована и для обоснования теоремы 2. Мы ограничимся указанием наиболее важных изменений в этих рассуждениях для получения теоремы 2.

Рассмотрим распределение Гиббса на стандартном кубе V_p, отвечающее параметрам β, $h > 0$ и граничным условиям $\varphi_p((V_p)^c)$, где в отличие от основной теоремы предполагается, что внешнее поле h фиксировано. l_1 и l_2 из § 2 следует выбрать так, чтобы $l_2 = p + 1$ и $l_1 = p - 4[c' \ln |V_p|]$, где постоянную c' можно определить путем некоторого подсчета, аналогичного приведенному в основном тексте. Через $\mathfrak{M}_0'(p)$ обозначим множество всех тех конфигураций $\varphi(V_p) \in \mathfrak{M}(V_p)$, для которых в расположении контуров конфигурации $(\varphi(V_p), \varphi_p(V_p^c))$ не существует контура Γ такого, что $\mathrm{int}(\Gamma) \supset V_{l_1}$. Пусть, далее, $\mathfrak{M}'(p)$ обозначает множество тех конфигураций $\varphi \in \mathfrak{M}_0'(p)$, у которых в расположении контуров не существует контура γ, удовлетворяющего

условию $|\gamma| > c_0(\beta) \ln |V_p|$. В силу предложения 3.1 и определения $\mathfrak{M}_0'(p)$ для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что

$$\lim_{p\to\infty} q_p \{\mathfrak{M}'(p)\} = 0.$$

Положим $n_0 = p - 2[c' \ln |V_p|]$ и введем обозначение $m_r' = |M_{n_0+2r}(\varphi)|$, $r = 0, 1, \cdots, [c' \ln |V_p|]$. Очевидно, $1 \leqslant m_r' \leqslant |V_{p+1}|$ для всех $r = 0, 1, \cdots, [c' \ln |V_p|]$. Следовательно

$$\prod_{j=1}^{[c' \ln |V_p|]} \frac{m'_{j+1}}{m'_j} \leqslant |V_p|.$$

Из этой формулы по аналогии с формулой (3.6) вытекает существование такого j_0, $0 \leqslant j_0 < [c' \ln |V_p|]$, что

$$\frac{m'_{j_0+1} - m'_{j_0}}{m'_{j_0}} \leqslant \frac{2 \ln |V_p|}{[c' \ln |V_p|]} < \frac{4}{c'},$$

откуда вытекает формула

$$|M'_{i_0+2}(\varphi) \setminus M'_{i_0}(\varphi)| \leqslant \frac{4}{c'} |M'_{i_0}(\varphi)|, \; i_0 = n_0 + 2j_0.$$

Пользуясь ею, можно определить разбиение множества всех конфигураций $\varphi \in \mathfrak{M}'(p)$ на классы следующим образом. Мы скажем, что $\varphi \in \mathfrak{M}_p'(i; k, l)$, если

$$n_0 \leqslant i \leqslant p,$$

$$|M'_{i+2}(\varphi) \setminus M'_i(\varphi)| \leqslant \frac{4}{c'} |M'_i(\varphi)|,$$

$$|L'_{i+1}(\varphi)| = l, \; |K'_{i+2}(\varphi)| = k.$$

Несложный анализ доказательства основной теоремы показывает, что та часть построений, которая относится к случаю $2n \leqslant i < 4n$, оказывается уже излишней. Остальные же построения и оценки по существу пригодны и в рассматриваемом случае с незначительными изменениями чисто технического характера.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 15. XI. 1985

Դ. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Դասական իզինգյան ֆեռոմագնետիկ մոդելներում շերտերի մասին թեորեմներ *(ամփոփում)*

Ուսումնասիրված է Այզինգի (−1) եզրային պայմաններով գիբսյան բաշխումները V_n խորանարդի վրա (որտեղ V_n-ը կոորդինատների սկզբնակետում կենտրոն ունեցող և $(2n+1)$ երկարության կողմով Z^ν, $\nu>2$ ցանցի խորանարդն է) β հակադարձ ջերմաստիճանի մեծ ($\beta>\beta_0$) արժեքների և h_n արտաքին դաշտի դրական արժեքների համար։ Ապացուցված է, որ երբ $n\to\infty$ 1-ին ձգտող հավանականությամբ տեղի ունի հետևյալ պնդումը։ Գոյություն ունի $c>0$ հաստատուն, որ եթե h_n-երը բավարարում են $h_n > \frac{c}{n}$ պայմանին, ապա կգտնվի այնպիսի արտաքին կոնտուր Γ, որ Γ-ի ներքին տիրույթը՝ int(Γ)-ն, պա-

բուն ակում է $V_{\left[\frac{n}{6}\right]}$ խորանարդը: Ավելին, եթե h_n-ը կախված չէ n-ից, $h_n \equiv h > 0$, ապա կգտնվի այնպիսի արտաքին կոնտուր Γ, որի ներքին սկզբույթը՝ $int(\Gamma)$-ն պարունակում է $V_{n-[c_0(\beta, h)\ln n]}$ խորանարդը, որտեղ $c_0(\beta, h)$ կախված է միայն β-ից և h-ից:

D. H. MARTIROSIAN. *Theorems about the stripes in classical Ising ferromagnet* (summary)

We study some properties of the Gibbs states in classical Ising ferromagnet on V_n, (the „standard" cube of the lattice Z^ν, $\nu \geqslant 2$, centered at the origin with the side length $(2n+1)$) with (-1) boundary conditions, large enough values of inverse temperatures β ($\beta > \beta_0$) and positive values of external field h_n. We prove that with probabilities tending to 1 as $n \to \infty$ there exists a constant $c > 0$ such that if $h_n > \frac{c}{n}$ then an external contour exists such that $V_{\left[\frac{n}{6}\right]} \subseteq int\,\Gamma$. Moreover, if h_n does not depend on n, $h_n \equiv h > 0$, then such external contour Γ can be found that $int(\Gamma)$ contains the cube $V_{n-[c_0(\beta, h)\ln n]}$, where the $c_0(\beta, h) > 0$ depend only on β and h.

ЛИТЕРАТУРА

1. *D. Ruelle.* On the use of „small external fields" in the problem of symmetry breakdown in statistical mechanics, Annals of Physics, v. 69, № 2, 1972, 364—374.
2. *А. Наср.* Гиббсовские случайные поля для модели Изинга, Труды ММО, т. 32, 1975, 187—210.
3. *Р. А. Минлос, Я. Г. Синай.* Новые результаты о фазовых переходах 1-го рода в моделях решеточного газа, Труды ММО, т. 17, 1967, 213—243.
4. *R. L. Dobrushin, E. A. Pecherski.* Uniqueness conditions for finitely dependent random fields, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 27. Random Fields, Esztergom, Hungary, 1979, 223—261.
5. *Ю. А. Терлецкий.* Гиббсовские случайные поля в низкотемпературной области, ДАН СССР, 246, № 3, 1979, 540—544.
6. *В. А. Малышев, Р. А. Минлос, Е. Н. Петрова, Ю. А. Терлецкий.* Обобщенные контурные модели. Итоги науки и техники. Теория вероятностей, математическая статистика, теоретическая кибернетика, М., Винити, т. 19, 1982, 3—54.
7. *V. A. Malushev. I. A. Nickolaev.* Uniqueness of Gibbs Fields via Cluster Expansions, Journal of Stat. Phys., v. 35, № 3/4, 1984, 375—379.
8. *Д. Г. Мартиросян.* Единственность гиббсовских состояний в решетчатых моделях с одним основным состоянием, Теор. и матем. физика, 63, № 2, 1985, 280—290.
9. *С. А. Пирогов, Я. Г. Синай.* Фазовые переходы первого рода для малых возмущений модели Изинга, Функц. анализ и его прилож., т. 8, вып. 1, 1974, 25—31.
10. *Д. Г. Мартиросян.* Некоторые вопросы описания предельных гиббсовских состояний, Кандидатская диссертация, М., МГУ, 1976, 62—67.
11. *Д. Г. Мартиросян.* Одна предельная теорема для гиббсовских случайных полей, Вторая Вильнюсская конференция по теории вероятн. и матем. статистике, Тезисы докладов, т. 2, 1977, 17—18.
12. *Р. Л. Добрушин.* Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием, Функц. анализ и его прил., т. 2, вып. 4, 1968, 31—43.
13. *O. E. Lanford, D. Ruelle.* Observables at Infinity and States with Short Range Correlations in Statistical Mechanics, Commun. in Math. Phys., v. 13, 1968, 194—215.
14. *Я. Г. Синай.* Теория фазовых переходов, М., «Наука», 1980.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXII, № 3, 1987 Математика

УДК 517.9

Т. С. ИВАНЧЕНКО, Л. А. САХНОВИЧ

ОПЕРАТОРНЫЕ ТОЖДЕСТВА В ТЕОРИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Предлагаемый в статье подход к исследованию интерполяционных задач исходит из рассмотрения операторного тождества [1]. Операторное тождество ОТ порождает вполне определенную интерполяционную задачу. Далее, следуя В. П. Потапову [2], мы интерполяционной задаче сопоставляем соответствующее ей неравенство, которое в явном виде строится по ОТ. Такой подход (сочетание ОТ и неравенства) позволяет четко описать класс исследуемых задач и при соответствующих условиях дать единообразное их решение.

Постановка задачи. Пусть заданы гильбертовы пространства H, G, G_1, причем

$$G = G_1 \oplus G_1, \ \dim G_1 < \infty. \tag{1}$$

Пусть далее операторы A, Π, J, S связаны ОТ:

$$S - ASA^* = \Pi J \Pi^*, \tag{2}$$

где A, $S \in [H, H]$; $\Pi \in [G, H]$; $\Pi^* \in [H, G]$; $J \in [G, G]$. (Через $[H_1, H_2]$ обозначается класс линейных ограниченных операторов, действующих из H_1 в H_2).

Оператору Π и разложению (1) соответствует представление $\Pi = [\Pi_1, \Pi_2]$, где $\Pi_1, \Pi_2 \in [G_1; H]$. Предположим дополнительно, что блочное представление J, порожденное разложением (1), имеет вид

$$J = \begin{bmatrix} 0 & E_1 \\ E_1 & 0 \end{bmatrix}, \ E_1 \in [G_1, G_1]. \tag{3}$$

Через N обозначим класс операторов из $[H, H]$, спектр которых состоит из конечного или счетного множества точек. Будем считать, что $A \in N$.

Пусть $\sigma(\varphi)$ — неубывающая оператор-функция со значениями в классе $[G_1, G_1]$. Через $\mathbf{E}$ обозначим совокупность $\sigma(\varphi)$, для которых в слабом смысле сходятся интегралы

$$S_\sigma = \int_{-\pi}^{\pi} (E - e^{i\varphi} A)^{-1} \Pi_2 \, d\sigma(\varphi) \, \Pi_2^* (E - e^{-i\varphi} A^*)^{-1}, \tag{4}$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma(\varphi). \tag{5}$$

Пусть $\sigma(\varphi) \in \mathbf{E}$, тогда из (4)—(5) следует слабая сходимость интеграла

$$\Pi_{1,\sigma} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (E + e^{i\varphi} A)(E - e^{i\varphi})^{-1} \Pi_2 \, d\sigma(\varphi). \tag{6}$$

Введем оператор

$$\Pi_1 = \Pi_{1,\sigma} + i\Pi_2 \alpha \quad (\alpha = \alpha^*). \tag{7}$$

Сформулируем теперь интерполяционную задачу, порождаемую ОТ (2):

Описать множество $\sigma(\varphi) \in \mathbf{E}$ и $\alpha = \alpha^*$ таких, что операторы S и Π_1, связанные ОТ (2), допускают представления

$$S = S_\sigma, \quad \Pi_1 = \tilde{\Pi}_1. \tag{8}$$

В дальнейшем нам понадобится

Лемма 1. *Если $A \in N$ и $\sigma(\varphi) \in \mathbf{E}$, то оператор S_σ удовлетворяет ОТ*

$$S_\sigma - AS_\sigma A^* = \tilde{\Pi} J \tilde{\Pi}^*, \text{ где } \tilde{\Pi} = [\tilde{\Pi}_1, \Pi_2].$$

В справедливости леммы убеждаемся непосредственной подстановкой. Обозначим через $\mathbf{K}$ класс операторов A, для которых уравнение

$$S - ASA^* = 0$$

имеет только тривиальное решение $S = 0$, принадлежащее $[H, H]$.

Замечание 1. Из $S - ASA^* = 0$ следует, что $S - A^n S A^{*n} = 0$. Поэтому, если A является сжатием ($\|A\| \leqslant 1$) и A^{*n} сильно сходится к нулю при $n \to \infty$, то $A \in \mathbf{K}$.

Следствие 1. Если $A \in \mathbf{K}$ и $\Pi_1 = \tilde{\Pi}_1$, то $S = S_\sigma$. Взаимную связь представлений (8) выясняет также

Лемма 2. *Если $\Pi_2 g \neq 0$ при $g \neq 0$*, то из представления $S = S_\sigma$ следует $\Pi_1 = \Pi_{1,\sigma} + i\Pi_2 \alpha$.

Рассмотрим теперь класс $\mathbf{R}$, состоящий из аналитических при $|\zeta| \neq 1$ оператор-функций $F(\zeta)$, со значениями в $[G_1, G_1]$, удовлетворяющих условиям

$$F(\zeta) = -F^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right); \quad \frac{F^*(\zeta) + F(\zeta)}{1 - \zeta\bar{\zeta}} \geqslant 0.$$

Если $F(\zeta) \in \mathbf{R}$, то существует такая неубывающая оператор-функция $\sigma(\varphi)$ со значениями в $[G_1, G_1]$, что интеграл, стоящий в правой части (5), сходится и справедливо представление

$$F(\zeta) = -i\alpha + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\varphi} - \zeta}{e^{i\varphi} + \zeta} \, d\sigma(\varphi), \quad \alpha = \alpha^*. \tag{9}$$

Обозначим через $\mathbf{D}$ совокупность чисел таких, что $|\zeta| \neq 1$ и $\left(-\frac{1}{\zeta}\right)$ не принадлежит спектру оператора A. В терминах ОТ запишем абстрактное неравенство В. П. Потапова

$$L(\zeta)=\begin{bmatrix} S & B(\zeta) \\ B^*(\zeta) & C(\zeta) \end{bmatrix}\geqslant 0, \quad \zeta\in\mathbf{D}, \tag{10}$$

где $B(\zeta)=(E+\zeta A)^{-1}[\Pi_1+\Pi_2F(\zeta)]$, $C(\zeta)=\dfrac{F(\zeta)+F^*(\zeta)}{1-\bar\zeta\zeta}$. (11)

Оператор $L(\zeta)$ действует в пространстве $H\oplus G_1$.

Теорема 1. *Пусть* $A\in N$ *и* $\sigma(\varphi)\in\mathbf{E}$. *Тогда оператор-функция* $F(\zeta)$, *определенная равенством* (9), *удовлетворяет неравенству*

$$\widetilde{L}(\zeta)=\begin{bmatrix} \widetilde{S} & \widetilde{B}(\zeta) \\ \widetilde{B}^*(\zeta) & C(\zeta) \end{bmatrix}\geqslant 0, \tag{12}$$

где

$$\widetilde{B}(\zeta)=(E+\zeta A)^{-1}[\Pi_1+\Pi_2F(\zeta)], \quad \widetilde{S}=S_0.$$

Для доказательства теоремы рассмотрим пространство H, состоящее из векторов g_φ со значениями из G_1 и скалярным произведением

$$[g_\varphi;\ g_\psi]=\int_{-\pi}^{\pi}(d\sigma(\varphi)\,g_\varphi,\ g_\varphi).$$

Введем в рассмотрение вектора

$$g_\varphi=\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}+\zeta}g \ \text{ и } \ f_\varphi=\Pi_2^*(E-e^{-i\varphi}A^*)^{-1}f \quad (g\in G_1,\ f\in H).$$

Тогда нетрудно проверить непосредственной подстановкой равенство

$$\left(\begin{bmatrix} \widetilde{S} & \widetilde{B}(\zeta) \\ \widetilde{B}^*(\zeta) & C(\zeta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}\right)=[f_\varphi+g_\varphi,\ f_\varphi+g_\varphi],$$

откуда следует (12).

Введем класс операторов N_0, состоящий из операторов $A\in N$ таких, что их соотношения

$$\|(E+\zeta A)^{-1}f\|=\frac{1}{(1-|\zeta|)}\cdot 0(1), \quad |\zeta|\neq 1$$

следует равенство $f=0$.

Замечание 2. Оператор $A\in N_0$, если выполняется одно из следующих требований:

1. $A\in N$ и при некотором $\delta>0$ спектр A лежит в области

$$|1-|\zeta||\geqslant\delta.$$

2. Спектр оператора A сосредоточен в точке ζ_0 ($|\zeta_0|=1$) и при некотором $\rho>0$ выполняется

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\,[\ln M(r)]/r^\rho<\infty, \quad M(r)=\max_{0<\theta<2\pi}\|[E-(A-\zeta_0E)z]^{-1}\|, \ z=re^{i\theta}.$$

Теорема 2. *Пусть* $A \in N_0$ *и неравенство* (10) *имеет решение вида* (9), *причем* $\sigma(\varphi) < \mathbf{E}$. *Тогда справедливо равенство* $\Pi_1 = \overline{\Pi}_1$.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что оператор-функция

$$F_\sigma(\zeta) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\varphi} - \zeta}{e^{i\varphi} + \zeta}\, d\sigma(\varphi) \quad (\varkappa = 0) \tag{13}$$

удовлетворяет неравенству

$$L_\sigma(\zeta) = \begin{bmatrix} S_\sigma & B_\sigma(\zeta) \\ B_\sigma^*(\zeta) & C_\sigma(\zeta) \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad \zeta \in \mathbf{D}, \tag{14}$$

$$B_\sigma(\zeta) = (E + \zeta A)^{-1}\,[\Pi_{1,\sigma} + \Pi_2 F_\sigma(\zeta)];\ C_\sigma(\zeta) = \frac{F_\sigma(\zeta) + F_\sigma^*(\zeta)}{1 - \zeta\bar{\zeta}}.$$

Из неравенств (10) и (14) вытекает

$$\|B(\zeta)g\|^2 \leqslant \|S\|(C(\zeta)g,\ g);\ \|B_\sigma(\zeta)g\|^2 \leqslant \|S_\sigma\|\cdot(C_\sigma(\zeta)g,\ g). \tag{15}$$

Так как при некотором M верно неравенство

$$(C(\zeta)g,\ g) \leqslant \frac{M}{|1-|\zeta||^2}, \quad |\zeta| \neq 1,$$

то, учитывая (15), имеем

$$\|B(\zeta)g\| = \frac{1}{|1-|\zeta||}\cdot O(1), \quad \|B_\sigma(\zeta)g\| = \frac{1}{|1-|\zeta||}\cdot O(1).$$

Значит, справедливо соотношение

$$\|[B(\zeta) - B_\sigma(\zeta)]g\| = \|(E+\zeta A)^{-1}[\Pi_1 - i\Pi_2\alpha - \Pi_{1,\sigma}]g\| = \frac{1}{|1-|\zeta||}\cdot O(1).$$

Последнее равенство для $A \in N_0$ возможно только в том случае, когда

$$\Pi_1 = \Pi_{1,\sigma} + i\Pi_2\alpha, \text{ т. е. } \Pi_1 = \overline{\Pi}_1.$$

Следствие 2. Если выполняются условия теоремы 2 и $A \in \mathbf{K}$, то справедливы равенства

$$\Pi_1 = \widetilde{\Pi}_1;\ S = S_\sigma.$$

Следствие 2 вытекает из теоремы 2 и следствия 1. Для исследования случая $A \overline{\in} \mathbf{K}$ воспользуемся преобразованным неравенством (ПН), которое для ряда важных случаев было построено в работах [3.IV]. В терминах ОТ мы запишем ПН в общей ситуации.

Введем обозначения

$$\mathbf{L}_0(\zeta) = (\zeta_0 - \zeta)(E + \zeta A)^{-1}(E + A\zeta_1);\ \mathbf{L}_k(\zeta) = (\zeta_0 - \zeta)(E + \zeta A)^{-1}\Pi_k, \tag{16}$$

где $|\zeta_0| = 1$, $k = 1, 2$.

$$L_\Pi(\zeta)=\left[\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline -\dfrac{1}{1-\zeta\bar{\zeta}_0}\mathbf{L}_0\left(\dfrac{1}{\bar{\zeta}}\right) & \mathbf{L}_2\left(\dfrac{1}{\bar{\zeta}}\right) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} S & B(\zeta) \\ \hline B^*(\zeta) & C(\zeta) \end{array}\right]\times$$

$$\times\left[\begin{array}{c|c} E & -\dfrac{1}{1-\zeta\bar{\zeta}_0}\mathbf{L}_0^*\left(\dfrac{1}{\bar{\zeta}}\right) \\ \hline 0 & \mathbf{L}_2^*\left(\dfrac{1}{\bar{\zeta}}\right) \end{array}\right]. \tag{17}$$

Оператор $L_\Pi(\zeta)$ действует в пространстве $H\oplus H$ и может быть записан в виде

$$L_\Pi(\zeta)=\left[\begin{array}{cc} S & B_\Pi(\zeta) \\ B_\Pi^*(\zeta) & C_\Pi(\zeta) \end{array}\right],\ \zeta\in\mathbf{D}, \quad (\Pi H) \tag{18}$$

где

$$B_\Pi(\zeta)=-\frac{1}{1-\zeta\bar{\zeta}_0}S\mathbf{L}_0^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)+B(\zeta)\mathbf{L}_2\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right), \tag{19}$$

$$C_\Pi(\zeta)=\frac{1}{|1-\zeta\bar{\zeta}_0|^2}\mathbf{L}_0\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)S\mathbf{L}_0^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)-\frac{1}{1-\zeta\bar{\zeta}_0}\mathbf{L}_2\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)B^*(\zeta)\mathbf{L}_0^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)- \tag{20}$$

$$-\frac{1}{1-\bar{\zeta}\zeta_0}\mathbf{L}_0\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)B(\zeta)\mathbf{L}_2^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)+\mathbf{L}_2\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)C(\zeta)\mathbf{L}_2^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right).$$

Из (17) следует, что любое решение $F(\zeta)$ неравенства (10) является также решением неравенства

$$L_\Pi(\zeta)\geqslant 0,\quad \zeta\in\mathbf{D}. \tag{21}$$

Учитывая операторное тождество (2), выводим

$$\zeta_0 S\mathbf{L}_0^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)+\bar{\zeta}_0\mathbf{L}_0(\zeta)S=\mathbf{L}_1(\zeta)\mathbf{L}_2^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)+\mathbf{L}_2(\zeta)\mathbf{L}_1^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right). \tag{22}$$

Согласно (16) имеем

$$\mathbf{L}_0(\zeta)\mathbf{L}_k(\lambda)=(\zeta_0-\zeta)(\zeta_0-\lambda)\frac{\mathbf{L}_k(\zeta)-\mathbf{L}_k(\lambda)}{\lambda-\zeta}\quad (k=0,\ 1,\ 2).$$

Из (21) и последнего равенства следует

$$\mathbf{L}_0\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)S\mathbf{L}_0^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\zeta_0=\frac{(1-S\bar{\zeta}_0)(\zeta_0-\zeta)}{1-\zeta\bar{\zeta}}\left[-\bar{\zeta}_0\mathbf{L}_0\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)S-\zeta_0 S\mathbf{L}_0^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)+\right.$$

$$\left.+\mathbf{L}_1\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\mathbf{L}_2^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)+\mathbf{L}_2\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\mathbf{L}_1^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\right]. \tag{23}$$

Из (21), (24) и формулы

$$\mathbf{L}_0\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)B(\zeta)=\frac{1-\bar{\zeta}\zeta_0}{1-\bar{\zeta}\zeta}\left[\left(\mathbf{L}_1\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)-\mathbf{L}(\zeta)\right)+\left(\mathbf{L}_2\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)-\mathbf{L}_2(\zeta)\right)F(\zeta)\right]$$

выводим важное для дальнейшего равенство

$$C_\Pi(\zeta) = \frac{(\zeta_0 - \zeta) B_\Pi(\zeta) + (\bar{\zeta}_0 - \bar{\zeta}) B_\Pi^*(\zeta)}{1 - \zeta\bar{\zeta}}. \tag{24}$$

С одной стороны, ПН (18) приводит нас к оценке

$$\|B_\Pi(\zeta) f\|^2 \leqslant \|S\| \cdot (C(\zeta) f, f).$$

С другой стороны, согласно (24) имеем

$$(C_\Pi(\zeta) f, f) \leqslant \frac{2|\zeta_0 - \zeta|}{|1 - |\zeta|^2|} \cdot \|B_\Pi(\zeta) f\| \cdot \|f\|,$$

откуда окончательно получаем

$$\|B_\Pi(\zeta) f\| \leqslant \frac{M|\zeta_0 - \zeta|}{|1 - |\zeta|^2|} \|f\|, \tag{25}$$

где M не зависит от ζ.

Следовательно, из (24), (25) вытекает

$$(\zeta_0 - \zeta) B_\Pi(\zeta) = -i\alpha_\Pi + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\varphi} - z}{e^{i\varphi} + z} d\sigma_\Pi(\varphi), \quad \alpha_\Pi = \alpha_\Pi^*, \tag{26}$$

где $\sigma_\Pi(\varphi)$ — неубывающая оператор-функция со значениями в классе $[H, H]$. Пусть дуга единичной окружности $[\alpha, \beta]$ не содержит особых точек. Пользуясь формулой обращения, из (19) и (26) получаем

$$\int_\alpha^\beta d\sigma_\Pi(\varphi) = \int_\alpha^\beta |(\zeta_0 - e^{i\varphi})|^2 (E - e^{i\varphi} A)^{-1} \Pi_2 d\sigma(\varphi) \Pi_2^* (E - e^{-i\varphi} A^*)^{-1}. \tag{27}$$

Кроме того, имеет место оценка

$$\int_{-\pi}^{\pi} (d\sigma_\Pi(\varphi) f, f) \leqslant M\|f\|^2, \tag{28}$$

которая следует из (25), (26).

Учитывая произвольность ζ_0, из (27) и (28) выводим, что верна

Теорема 3. *Если $F(\zeta)$ класса* **R** *является решением неравенства* (10), *то соответствующая оператор-функция $\sigma(\varphi)$ принадлежит классу* **E**.

Теорема 4. *Пусть $A \in N_0$ и неравенство* (10) *имеет решение $F(\zeta)$ вида* (9). *Тогда справедливы равенства*

$$\Pi_1 = \Pi_2, \quad S = \bar{S}. \tag{29}$$

Доказательство. Первое равенство вытекает из теорем 2 и 3. Для доказательства второго рассмотрим неравенство

$$\tilde{L}_\Pi(S) = \begin{bmatrix} \tilde{S} & \tilde{B}_\Pi(\zeta) \\ \tilde{B}^*(\zeta) & C_\Pi(\zeta) \end{bmatrix} > 0, \tag{30}$$

где

$$\bar{B}_n(\zeta) = -\frac{1}{1-\zeta\bar{\zeta}_0}\bar{S}\mathbf{L}_0^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) + \tilde{B}(\zeta)\mathbf{L}_2^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right).$$

(Неравенство (30) строится по неравенству (12) согласно тому же правилу, что и неравенство (17)).

Аналогично (25) выводится оценка

$$\|\bar{B}_n(\zeta) f\| \leqslant \frac{M|\zeta_0-\zeta|}{|1-|\zeta|^2|}.$$

Тогда верно соотношение

$$\left\|(S-\bar{S})\mathbf{L}_0^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)f\right\| \leqslant \frac{M|\zeta_0-\zeta|^2}{|1-|\zeta|^2|}\cdot\|f\|$$

или

$$\|\mathbf{L}_0(\zeta)(S-\bar{S})f\| \leqslant \frac{M|1-\bar{\zeta}\zeta_0|}{|1-|\zeta|^2|}\|f\|.$$

Воспользовавшись равенством (16), получим

$$|\zeta_0-\zeta|\cdot\|(E+\zeta A)^{-1}(E+\zeta_0 A)(S-\tilde{S})f\| < \frac{M|1-\bar{\zeta}\zeta_0|^2}{|1-|\zeta|^2|}\|f\|.$$

Откуда

$$\|(E+\zeta A)^{-1}(E+\zeta_0 A)(S-\tilde{S})f\| \leqslant \frac{M|\zeta-\zeta_0|}{|1-|\zeta|^2|}\|f\|.$$

Так как A принадлежит N_0, то приходим к равенству

$$(E+\zeta_0 A)(S-\tilde{S})f = 0.$$

Из произвольности ζ_0 следует (29).

Итак, в теоремах 1—4 доказана возможность сведения исследования поставленной интерполяционной проблемы к решению соответствующего ей неравенства (10) или неравенства (18). Найдем описание решений неравенства (10). Тем самым будет определено и множество решений неравенства (18), так как совокупности решений неравенств (10) и (18) совпадают.

Пусть $\Phi(\zeta)$ — мероморфная в единичном круге оператор-функция, действующая из G_1 в G. Рассмотрим неравенство (10), положив

$$B(\zeta) = (A\zeta+E)^{-1}\Pi J\Phi(\zeta);\quad C(\zeta) = \frac{\Phi^*(\zeta)J\Phi(\zeta)}{1-\zeta\bar{\zeta}}. \tag{31}$$

Заметим, что формулы (31) и (11) совпадают, если

$$\Phi(\zeta) = \operatorname{col}[F(\zeta), E].$$

Теорема 5. *Пусть оператор S ограничен вместе с обратным, положителен и удовлетворяет соотношению* (2); *оператор $(E+\zeta_0 A)$ обратим* ($|\zeta_0| = 1$). *Тогда для того, чтобы оператор-функция $\Phi(\zeta)$ являлась решением неравенства* (10), (31), *необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление*

$$\Phi(\zeta) = \mathbf{A}(\zeta) P(\zeta), \tag{32}$$

где

$$\mathbf{A}(\zeta) = E + (\zeta_0 - \zeta)\,\Pi^* (E\bar{\zeta} + A^*)^{-1} S^{-1} (E + \zeta_0 A)^{-1}\,\Pi J, \tag{33}$$

а $P(\zeta)$ — аналитическая в единичном круге оператор-функция со значениями из класса $[G_1; G]$, обладающая J-свойством

$$P^*(\zeta) J P(\zeta) \geqslant 0, \quad |\zeta| < 1. \tag{34}$$

Доказательство необходимости следует из рассмотрения J-формы оператор-функции $\mathbf{A}^{-1}(\zeta)$ $\left(\mathbf{A}^{-1}(\zeta) = J\mathbf{A}^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)J\right)$

$$J - \mathbf{A}^{*-1}(\zeta) J \mathbf{A}^{-1}(\zeta) = (1 - \zeta\bar{\zeta})\, J\Pi^* (\bar{\zeta} A^* + E)^{-1} S^{-1} (E + \zeta A)^{-1}\,\Pi J. \tag{35}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что неравенство (10), (31), эквивалентное по лемме о неотрицательной блок-матрице неравенству

$$C(\zeta) - B^*(\zeta) S^{-1} B(\zeta) \geqslant 0, \quad \zeta \in \mathbf{D},$$

с помощью оператор-функции $\mathbf{A}^{-1}(\zeta)$ записывается в виде

$$\Phi^*(\zeta)\, \mathbf{A}^{-1^*}(\zeta)\, J \mathbf{A}^{-1}(\zeta)\, \Phi(\zeta) \geqslant 0. \tag{36}$$

Откуда следует, что решение $\Phi(\zeta)$ неравенства (10), (31) допускает представление (32).

Пусть теперь $\mathbf{P}(\zeta)$ — произвольная аналитическая в единичном круге оператор-функция, обладающая J-свойством (34). Определим оператор-функцию $\Phi(\zeta)$ равенством

$$\Phi(\zeta) = \mathbf{A}(\zeta)\, \mathbf{P}(\zeta).$$

Тогда в силу обратимости оператор-функции $\mathbf{A}(\zeta)$ получим

$$\mathbf{P}(\zeta) = \mathbf{A}^{-1}(\zeta)\, \Phi(\zeta).$$

Из неравенства (34) следует

$$\Phi^*(\zeta)\, \mathbf{A}^{-1^*}(\zeta)\, J \mathbf{A}^{-1}(\zeta)\, \Phi(\zeta) \geqslant 0,$$

которое, согласно доказанному выше, эквивалентно неравенству (10), (31). Поэтому оператор-функция $\Phi(\zeta)$, определенная равенством (32), является решением исследуемого неравенства.

Чтобы решить неравенство (10), (11), перейдем к парам 2, 4, 5 мероморфных в единичном круге оператор-функций $\mathbf{R}(\zeta)$, $\mathbf{Q}(\zeta)$ со значениями в классе $[G_1, G_1]$.

Пару $\operatorname{col}[\mathbf{R}(\zeta), \mathbf{Q}(\zeta)]$ будем называть особенной, если для каждой точки голоморфности σ оператор-функций $\mathbf{R}(\zeta)$, $\mathbf{Q}(\zeta)$ существует такой элемент $e \in G_1$, что

$$([\mathbf{R}^*(\zeta)\, \mathbf{R}(\zeta) + \mathbf{Q}^*(\zeta)\, \mathbf{Q}(\zeta)]\, e,\ e) = 0; \quad e \neq 0.$$

Пары $\operatorname{col}[\mathbf{R}(\zeta), \mathbf{Q}(\zeta)]$ и $\operatorname{col}[r(\zeta), q(\zeta)]$ называются эквивалентными, если существует обратимая мероморфная оператор-функция $T(\zeta)$, такая, что

$$\operatorname{col}[r(\zeta), q(\zeta)] = T(\zeta) \cdot \operatorname{col}[\mathbf{R}(\zeta), \mathbf{Q}(\zeta)].$$

Будем говорить, что пара $\operatorname{col}[\mathbf{R}(\zeta), \mathbf{Q}(\zeta)]$ обладает J-свойством, если

$$[\mathbf{R}^*(\zeta), \mathbf{Q}^*(\zeta)] J \operatorname{col}[\mathbf{R}(\zeta), \mathbf{Q}(\zeta)] \geqslant 0.$$

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 5 и $\Pi g \neq 0$, если $g \neq 0$. Тогда для того, чтобы оператор-функция $F(\zeta)$ являлась решением неравенства (10), (11), необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление*

$$F(\zeta) = [a(\zeta)\mathbf{R}(\zeta) + b(\zeta)\mathbf{Q}(\zeta)][c(\zeta)\mathbf{R}(\zeta) + d(\zeta)\mathbf{Q}(\zeta)],$$

где матрица коэффициентов

$$\begin{bmatrix} a(\zeta) & b(\zeta) \\ c(\zeta) & d(\zeta) \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\zeta) = E + (\zeta_0 - \zeta)\Pi^*(E\zeta + A^*)^{-1} S^{-1}(E + \zeta_0 A)^{-1}\Pi J;$$

$\operatorname{col}[\mathbf{R}(\zeta), \mathbf{Q}(\zeta)]$ — неособенная пара, обладающая J-свойством.

Необходимость вытекает из соответствующего доказательства теоремы 5.

Для доказательства достаточности рассмотрим произвольную неособенную пару $\operatorname{col}[\mathbf{R}(\zeta), \mathbf{Q}(\zeta)]$, обладающую J-свойством. Определим пару

$$\operatorname{col}[u(\zeta), v(\zeta)] = \mathbf{A}(\zeta) \operatorname{col}[\mathbf{R}(\zeta), \mathbf{Q}(\zeta)]. \tag{37}$$

Убедимся, что $v(\zeta)$ — обратимая оператор-функция. Действительно, положив противное, получим: для каждой точки голоморфности ζ оператор-функции $v(\zeta)$ существует такой элемент $e = e(\zeta) \neq 0$, что $v(\zeta)e = 0$. Так как пара $\operatorname{col}[\mathbf{R}(\zeta), \mathbf{Q}(\zeta)]$ обладает J-свойством, то с учетом равенства (37) имеем

$$[\mathbf{R}^*(\zeta), \mathbf{Q}^*(\zeta)] J \operatorname{col}[\mathbf{R}(\zeta), \mathbf{Q}(\zeta)]\, e, e) =$$
$$= ([u^*(\zeta), v^*(\zeta)]\mathbf{A}^{-1^*}(\zeta) J \mathbf{A}^{-1}(\zeta) \operatorname{col}[u(\zeta), v(\zeta)]\, e, e) =$$
$$= -(u^*(\zeta)\alpha(\zeta)u(\zeta)e, e), \tag{33}$$

где $\alpha(\zeta)$ — левый верхний блок разбиения J-формы оператор-функции $\mathbf{A}^{-1^*}(\zeta)$ на блоки в соответствии с (3)

$$J - \mathbf{A}^{-1^*}(\zeta) J \mathbf{A}^{-1}(\zeta) = \begin{bmatrix} \alpha(\zeta) & \beta(\zeta) \\ \beta^*(\zeta) & \gamma(\zeta) \end{bmatrix},$$

ζ — некоторая фиксированная точка голоморфности $v(\zeta)$.

Так как из (35) и условий теоремы следует, что $\alpha(\zeta) > 0$ при $|\zeta| < 1$, то из (38) получаем, что в рассматриваемой точке ζ ($|\zeta| < 1$) имеет место равенство $u(\zeta)e = 0$. Значит пара $\operatorname{col}[u(\zeta), v(\zeta)]$, а поэтому и эквивалентная ей пара $\operatorname{col}[\mathbf{R}(\zeta), \mathbf{Q}(\zeta)]$ вырождены, что противоречит условию.

Итак, доказано, что оператор-функция $v(\zeta)$ обратима. Дальнейшее доказательство следует из теоремы 5.

Пример. 1. Тригонометрическая проблема моментов. Пусть заданы операторы

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & E & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E & 0 \end{bmatrix};\quad S=$$

$$=\begin{bmatrix} C_0+C_0^* & C_1^* & \cdots & C_n^* \\ C_1 & C_0+C_0^* & \cdots & C_{n-1}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_n & C_{n-1} & \cdots & C_0+C_0^* \end{bmatrix};\quad J=\begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix};\qquad (39)$$

$\Pi=[\Pi_1,\ \Pi_2]$; $\Pi_1=\operatorname{col}[C_0,\ C_1,\cdots,\ C_n]$; $\Pi_2=\operatorname{col}[E,\ 0,\cdots,\ 0]$,

где $C_0,\ C_1,\cdots,\ C_n$ — квадратные матрицы m-го порядка.

Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости ОТ (2). Представления (8) эквивалентны равенствам:

$$C_0=i\alpha+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}d\sigma(\varphi),\quad C_k=\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik\varphi}\,d\sigma(\varphi),\quad 1\leqslant k\leqslant n,\qquad (40)$$

где $\alpha=\alpha^*$, $\sigma(\varphi)\in\mathbf{E}$. Заметим, что в данном примере принадлежность монотонно возрастающей оператор-функции $\sigma(\varphi)$ классу $\mathbf{E}$ эквивалентна сходимости интеграла (5). В силу (40) рассматриваемая интерполяционная задача совпадает с усеченной тригонометрической проблемой моментов. Из теорем 3, 4 вытекает

Теорема 7. *Множество* $\alpha=\alpha^*$, $\sigma(\varphi)\in\mathbf{E}$, *дающих решение усеченной тригонометрической проблемы* (40), *совпадает с множеством* α, $\sigma(\varphi)$, *порожденных при помощи формулы* (9) *классом* $F(\zeta)$, *удовлетворяющих неравенству* (10) *рассматриваемой задачи.*

Замечание 2. Если $S>0$, то неравенство (10) примера 1 решается эффективно (теорема 6). В этом случае приходим к известным результатам ([6], при $m=1$ и [4, 7], при $m\geqslant 1$).

Пример 2. В ряде задач исследуемый оператор S удовлетворяет тождеству (см. [1, 8])

$$A_0S-SA_0^*=i\Pi_0J\Pi_0^*,\qquad (41)$$

где A_0, $S\in[H,\ H]$, $\Pi_0\in[H,\ G]$, а J имеет вид (3). Легко придать ОТ (41) форму (2). В самом деле, выберем μ_0 так, чтобы точка $-i\mu_0$ не принадлежала спектру A_0. Положим далее

$$A=(A_0-i\mu_0E)\,(A_0+i\mu_0E)^{-1}.\qquad (42)$$

Тогда оператор $E-A$ обратим и справедливо равенство

$$A_0=i\mu_0(E+A)\,(E-A)^{-1}.\qquad (43)$$

Учитывая (41) и (43), получаем ОТ (2), где

$$\Pi=\frac{1}{\sqrt{2\mu_0}}(E-A)\,\Pi_0.\qquad (44)$$

Одесский институт народного хозяйства,
Одесский электротехнический институт
связи им. А. С. Попова

Поступила 28. IV. 1984

Տ. Ս. ԻՎԱՆՉԵՆԿՈ, Լ. Ա. ՍԱԽՆՈՎԻՉ. Օպերատորային նույնություններ ինտերպոլյացիոն խնդիրների տեսության մեջ (ամփոփում)

Հոդվածում առաջարկված է մեթոդ, որը թույլ է տալիս միասնական լուծել մի շարք ինտերպոլյացիոն խնդիրներ։ Մեթոդում էապես օգտագործվում են Վ. Պոտապովի արդյունքները և օպերատորային նույնությունները։

T. S. IVANCENKO, L. A. SAHNOVIC. *Operator ind·ntities in interpolation problems* (summary)

In this article we propose a method which permits a unified treatment of various interpolation problems.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. А. Сахнович.* О подобии операторов, ДАН СССР, 1971, 200, № 3, 541—544.
2. *И. В. Ковалишина, В. П. Потапов.* Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны—Пика, ДАН Арм.ССР, 1974, 59, № 1, 17—21.
3. *В. Э. Кацнельсон.* Континуальные аналоги теории Гамбургера—Неванлинны и основные матричные неравенства классических задач, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Харьков, I — 1981, вып. 36, 31—48; II — 1982, вып. 37, 31—48; III—1983, вып. 39, 30—41; IV—1984, вып. 40, 79—90.
4. *А. А. Нудельман.* Об одной новой проблеме типа проблемы моментов, ДАН СССР, 1977, 233, № 5, 792—795.
5. *И. В. Ковалишина.* J-растягивающие матрицы—функции в задаче Кара Теодори, ДАН Арм.ССР, 1974, 59, № 3, 129—135.
6. *Н. И. Ахиезер.* Классическая проблема моментов, ГИФМЛ, М., 1961.
7. *Л. А. Сахнович.* О подобии операторов, Сиб. матем. журнал, 1972, 13, № 4, 868—883.
8. *Л. А. Сахнович.* Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке, УМН, 1980, 35, вып. 4, 69—129.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 3, 1987 Математика

УДК 517.98

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А. К. МАТЕВОСЯН

О РАЗЛОЖЕНИИ ПО МАТРИЧНЫМ ЭЛЕМЕНТАМ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ОПЕРАТОРОВ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА

1°. В настоящей работе обобщаются на случай самого общего типа операторов сдвига — некоммутативные операторы обобщенного сдвига,— теоремы Петера—Вейля [1] (о полноте матричных элементов неприводимых линейных представлений топологической группы), Бохнера [2] и Колмогорова—Крамера [3] (о представлении положительно определенной на группе функции и однородного случайного процесса). Для случая коммутативных операторов обобщенного сдвига теорема Бохнера получена Б. М. Левитаном [4], а для случая сдвигов на некоммутативной группе аналоги теорем Бохнера и Колмогорова-Крамера получены А. М. Ягломом [5].

Пусть Ω — топологическое пространство, m — мера на Ω, $C(\Omega)$ — совокупность непрерывных в топологии Ω комплекснозначных функций, $L^2_m(\Omega)$ — сопокупность комплекснозначных функций, имеющих интегрируемый квадрат модуля по мере m. Пусть теперь на функциях $f(t)\in C(\Omega)$ определено семейство операторов A^s, зависящих от элемента $s\in\Omega$ как от параметра, то есть каждой функции $f(t)$ ставится в соответствие функция двух переменных $A^s_t f(t)$, где нижний индекс t подчеркивает что оператор A^s применяется к функции $f(t)$, как к функции от переменной t. Пусть операторы A^s удовлетворяют так называемым условиям обобщенного сдвига [6]:

1. линейность,

2. существование верхнего нейтрального элемента, то есть такого элемента $s_0\in\Omega$, что $A^{s_0}=I$, где I — единичный оператор,

3. ассоциативность — для любой функции $f\in C(\Omega)$ и любых точек s, r, $t\in\Omega$ выполняется равенство

$$A^r_s A^s_t f(t) = A^s_t A^r_t f(t),$$

4. непрерывность функции $A^s_t f(t)$ по совокупности переменных.

Семейство таких операторов называется операторами обобщенного сдвига (о.о.с.), они были введены и изучены Б. М. Левитаном [6, 7]. Если кроме условий 1—4 выполняется также условие

5. для любой функции $f\in C(\Omega)$ и любых точек s, r, $t\in\Omega$

$$A^s_t A^r_t f(t) = A^r_t A^s_t f(t),$$

то о.о.с. называются коммутативными. Двойственным к о.о.с. называется оператор

$$R_s^t f(s) = A_t^s f(t),$$

который также является о.о.с. Семейство сопряженных операторов определяется, как обычно, из равенства

$$\int_\Omega A_t^s f(t)\,\overline{g(t)}\,dm(t) = \int_\Omega f(t)\,\overline{\tilde{A}_t^s g(t)}\,dm(t).$$

Ниже символы m и Ω в интегралах будем опускать.

Линейным представлением о.о.с. A^t называется матрица $E(t) = \{e_{ij}(t)\}_{i,j=1}^n$ такая, что для произвольных точек s, $t \in \Omega$ выполняется равенство

$$A_t^s E(t) = E(s) \cdot E(t).$$

Элементы $n_{ij}(t)$ матрицы $E(t)$ как функции от t называются матричными элементами линейного представления $E(t)$, порядок n матрицы $E(t)$ называется степенью представления.

Пусть существует мера m, относительно которой сопряженные операторы $\tilde{A}^s$ и $\tilde{R}^s$ удовлетворяют следующим условиям (см. [6], стр. 28): для любой функции $f \in C(\Omega) \cap L_m^2(\Omega)$ и любых точек s, r, $t \in (\Omega)$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_s^r A_t^s f(t) &= A_t^s \tilde{A}_t^r f(t), \\ \tilde{R}_s^r A_t^s f(t) &= \tilde{A}_t^r A_t^s f(t). \end{aligned} \tag{1}$$

О.о.с., удовлетворяющие (1), будем называть регулярными.

Примерами о.о.с. являются операторы сдвига на тополотической группе и обобщенные сдвиги Дельсарта [6]. В том случае, когда m есть двусторонне инвариантная мера Хаара, операторы сдвига на топологической группе являются регулярными. В п. 2 будет приведена общая конструкция некоммутативных регулярных о.о.с. на дискретном пространстве, существенно более общих, чем операторы сдвига на дискретной некоммутативной группе.

Условия регулярности (1) играют существенную роль при построении теории линейных представлений для о.о.с. (см. § 5—§ 7 [6]). Наложение этих же условий позволяет обобщить на случай некоммутативных о.о.с. теорему Петера-Вейля. Далее предполагается, что пространство Ω бикомпактно, а полная мера пространства $m(\Omega)$ конечна.

Теорема 1. *Пусть* $E^\nu(t) = \{e_{ij}^\nu(t)\}_{i,j=1}^{n_\nu}$, $\nu \in N$, — *полная система попарно неэквивалентных неприводимых представлений регулярного о. о. с., тогда функции*

$$e_{ij}^\nu(t),\ i, j = 1, 2, \cdots, n_\nu,\ \nu \in N,$$

образуют полную ортогональную систему в пространстве $L_m^2(\Omega)$.

Доказательство аналогично приведенному в [1].

2°. Перейдем к каноническим представлениям обобщенных положительно определенных функций и однородных случайных процессов.

Функция $p(t) \in C(\mathcal{Q})$ называется положительно определенной относительно операций сдвига A^s, если

$$\sum_{j,k=1}^{n} \widetilde{A}_{t_j}^{t_k} p(t_j)\, z_j \bar{z}_k > 0 \qquad (2)$$

для любых точек $t_1, \cdots, t_n \in \mathcal{Q}$ и любых комплексных чисел $z_1, \cdots, z_n$ [4]. В дальнейшем для краткости выражение „относительно операций сдвига A^s" будем опускать. Из (2) следует, что оператор, задаваемый ядром $\widetilde{A}_t^s p(t)$, положительно определен и поэтому является самосопряженным, то есть

$$\widetilde{A}_t^s p(t) = \overline{\widetilde{A}_t^s p(s)}.$$

Таким образом, каждая положительно определенная функция $p(t)$ задает случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним и ковариационной функцией $E\xi(t)\overline{\xi(s)} = \widetilde{A}_t^s p(t)$.

Предложение 1. *Интегральный оператор K, порожденный ядром $K(t, s) = \widetilde{A}_t^s p(t)$, где $p(t)$ — положительно определенная функция, перестановочен с о. о. с. A^s.*

Доказательство. Из (2) и по определению сопряженного оператора

$$Kf(t) = \int \overline{\widetilde{A}_s^t p(s)}\, f(s)\, ds = \int \overline{p(s)}\, A_s^t f(s)\, ds,$$

тогда в силу ассоциативности о.о.с.

$$A_t^r[Kf(t)] = \int \overline{p(s)}\, A_t^r A_s^t f(s)\, ds = \int \overline{p(s)}\, A_s^t A_s^r f(s)\, ds =$$

$$= \int \overline{\widetilde{A}_s^t p(s)}\, A_s^r f(s)\, ds = K[A^s f](t).$$

По предложению I случайные процессы с нулевым средним и ковариационной функцией вида $\widetilde{A}_t^s p(t)$, где $p(t)$ — положительно определенная функция, будем называть однородными относительно о.о.с. A^s. Такими являются и однородные в классическом смысле процессы [5].

Теорема 2. *Положительно определенная функция $p(t)$ представима в виде*

$$p(t) = \sum_{\nu} Tr(E^{\nu}(t) B^{\nu}), \qquad (3)$$

где B^{ν} — положительно определенные матрицы.

Доказательство. По теореме Мерсера функция $\widetilde{A}_t^s p(t)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд

$$\widetilde{A}_t^s p(t) = \sum_{i} \lambda_i \varphi_i(t) \overline{\varphi_i(s)}, \qquad (4)$$

где $\varphi_l(t)$ — последовательность ортонормированных собственных функций, а $\lambda_l > 0$ — последовательность соответствующих собственных значений ядра $\bar{A}_t^s p(t)$. Подставляя сюда значения для собственных функций, соответствующих равным собственным значениям λ_ν с кратностью n_ν, выраженные через матричные элементы линейных представлений о. о. с. A^s [6], получим

$$\bar{A}_t^s p(t) = \sum_\nu \lambda_\nu \sum_{j,k=1}^{n_\nu} \varphi_j^\nu(s_0)\,\overline{\varphi_k^\nu(s_0)}\,\bar{A}_t^s e_{kj}(t),$$

где s_0 — верхний нейтральный элемент для о. о. с. Из линейности операторов A^s следует

$$\bar{A}_t^s p(t) = \bar{A}_t^s\Big[\sum_\nu Tr(E^\nu(t)\,B^\nu)\Big],$$

где Tr — символ следа матрицы, а

$$B^\nu = \|\lambda_\nu \varphi_j^\nu(s_0)\,\overline{\varphi_k^\nu(s_0)}\|_{j,k=1}^{n_\nu}.$$

Так как s_0 является верхним нейтральным элементом для сопряженных о.о.с. также, то

$$p(t) = \sum_\nu Tr(E^\nu(t)\,B^\nu).$$

Положительная определенность матриц B^ν следует из равенства:

$$\sum_{j,k=1}^{n_\nu} b_{j,k}^\nu z_j \bar{z}_k = \Big|\sum_{j=1}^{n_\nu} \sqrt{\lambda_j}\,\varphi_j^\nu(s_0)\,z_j\Big|^2 \geqslant 0.$$

Обратно, если функция представима в виде (3) с положительно определенными матрицами-коэффициентами B^ν, то она положительно определена. Теорема доказана.

Перейдем к каноническим представлениям однородных случайных процессов. Поскольку сходимость ряда (4) обеспечивает выполнение условий теоремы Карунена (см. [3]), то существует такой процесс $\zeta(i)$ с некоррелированными приращениями, что

$$\xi(t) = \sum_i \zeta(i)\,\varphi_i(t).$$

Отсюда аналогично предыдущему можно получить

$$\xi(t) = \sum_\nu Tr(E^\nu(t)\,Z^\nu).$$

Тогда ковариационная функция процесса $\xi(t)$

$$E\xi(t)\overline{\xi(s)} = \sum_{\nu,\mu}\sum_{i,j=1}^{n_\nu}\sum_{p,q=1}^{n_\mu} E(Z_{ij}^\nu \overline{Z_{pq}^\mu})\,e_{ij}^\nu(t)\,\overline{e_{pq}^\mu(s)},$$

с другой стороны эта же функция равна

$$\bar{A}_t^s p(t) = \sum_\nu \sum_{i,j=1}^{n_\nu} b_{ij}^\nu \sum_{r=1}^{n_\nu} e_{rj}^\nu(t)\,\overline{e_{ri}^\nu(s)}.$$

Приравнивая полученные выражения и учитывая ортогональность матричных элементов представлений $E^{\cdot}(s)$, получаем

$$E(Z^{\nu}_{ij}\overline{Z^{\mu}_{pq}}) = \begin{cases} b^{\nu}_{ip}, & \text{когда } \nu = \mu,\ j = q, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

или

$$E(Z^{\nu}_{ij}\overline{Z^{\mu}_{pq}}) = b^{\nu}_{ip}\,\delta_{\nu,\mu}\,\delta_{j,q}, \tag{5}$$

что по существу совпадает с «условием ортогональности», приведенным в [5]. Таким образом, доказана

Теорема 3. *Однородный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним и ковариационной функцией $\overline{A^{s}_{i}}\,p(t)$ представим в виде*

$$\xi(t) = \sum_{\nu} Tr(E^{\nu}(t)\,Z^{\nu}), \tag{6}$$

где матрицы Z^{ν} удовлетворяют условию (5).

3°. Пусть K_N—N-мерное линейное пространство с обычным скалярным произведением элементов x и $y \in K_N$, $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{N}$ — некоторый ортогональный базис в K_N, а $n_1, \cdots, n_k \geqslant 1$—некоторые целые, для которых $n_1^2 + \cdots + n_k^2 = N$. Разобьем множество функций базиса на подмножества из $n_1^2, \cdots, n_k^2$ функций. Расположим функции i-го подмножества в виде кубической матрицы $E^{(i)}$ размера $n_i \times n_i \times N$ с элементами

$$e^{(i)}_{kj}(t) = \varphi^{(i)}_{(k-1)n_i+j}(t),$$

$$k,\ j = 1,\ 2, \cdots,\ n_i,\quad t = 1,\ 2, \cdots,\ N,$$

где $\varphi^{(i)}_{n}(t)$ — функции i-го подмножества. Произведение u-го и v-го сечений $D(u)$ и $D(v)$ блочно-диагональной кубической матрицы

$$D = \operatorname{diag}(E^{(1)}, \cdots,\ E^{(k)})$$

будет иметь блочно-диагональный вид с блоками тех же размеров $n_i \times n_i$, и в силу ортогональности функций $\varphi_n(t)$ найдутся такие единственные коэффициенты a^{s}_{vu}, что

$$\sum_{r=1}^{N} d_{ir}(u)\,d_{rj}(v) = \sum_{s=1}^{N} a^{s}_{vu}\,p_{ij}(s).$$

Кубическая матрица $\{a^{s}_{vu}\}$ размера $N \times N \times N$ задает семейство операторов, которые линейно распространяются с базисных элементов на все пространство K_N. Обозначим построенные операторы через A^{u}:

$$A^{u}_{v}\,d_{ij}(v) = \sum_{r=1}^{N} d_{ir}(u)\,d_{rj}(v) \tag{7}$$

и предположим, что существует такое целое $1 \leqslant s_0 \leqslant N$, что

$$D(s_0) = I.$$

Приведем некоторые свойства построенного семейства операторов.

1. Операторы A^{u} линейны по определению.

2. В семействе операторов существует единичный A^{e}.

3. В матричном виде действие оператора A^{u} можно записать как

$$A_v^u D(v) = D(u) \cdot D(v),$$

и так как умножение матриц ассоциативно, операторы A^{u} линейны, а матричные элементы составляют базис в K_N, то для любой функции f из K_N выполняется равенство

$$A_i^s A_i^r f(t) = A_i^r A_i^s f(t),$$

то есть операторы A^{u} ассоциативны.

4. В общем случае операторы A^{u} не коммутируют. Коммутативность заведомо будет иметь место в случае $n_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

5. Из определения сопряженного оператора в конечномерном пространстве следует

$$A_v^u d_{ik}(v) = \sum_{j=1}^{N} \overline{d_{jl}(u)}\, d_{jk}(v),$$

или в матричной форме

$$\tilde{A}_v^u D(v) = D^*(u)\, D(v).$$

6. Операторы A^{u} удовлетворяют условию (1). Действительно,

$$A_i^r \tilde{A}_i^s D(t) = A_i^r D^*(s) D(t) = D^*(s) D(r) D(t),$$

а

$$\tilde{A}_r^s A_i^r D(t) = \tilde{A}_r^s D(r) D(t) = D^*(s) D(r) D(t).$$

Вторая часть условия (1) проверяется аналогично.

Приведенные свойства 1—3 являются алгебраическими условиями обобщенного сдвига, и, таким образом, конструктивно задан широкий класс некоммутативных регулярных о.о.с., более общий, чем сдвиги на дискретной некоммутативной группе. Диагональные блоки $E^{r}(t)$ матрицы $D(t)$ являются при этом линейными представлениями о.о.с.

Вычислительный центр
АН Армянской ССР и ЕГУ

Поступила 28. I. 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Я. Виленкин.* Специальные функции и теория представлений групп, М., «Наука», 1965.
2. *И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов.* Коммутативные нормированные кольца, М., ГИЗ ФМЛ, 1960.
3. *У. Гренандер.* Случайные процессы и статистические выводы, М., ИЛ, 1961.
4. *Б. М. Левитан.* Теорема о представлении положительно определенных функций для обобщенной операции сдвига, ДАН СССР, 47, № 3, 1945, 163—165.
5. *А. М. Яглом.* Положительно-определенные функции и однородные случайные поля на группах и однородных пространствах, ДАН СССР, 135, № 6, 1960, 1342—1345.
6. *Б. М. Левитан.* Теория операторов обобщенного сдвига, М., «Наука», 1973.
7. *Б. М. Левитан.* Нормированные кольца, порожденные обобщенной операцией сдвига, ДАН СССР, 47, № 1, 1945, 3—6.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ա. Ա. Վաղարշակյան. *Վիներ-Հոպֆի խուզված հավասարումների լուծման մի նոր մեթոդի մասին* 215
Հ. Մ. Հայրապետյան. *Շեղումով համալուծման եզրային խնդիրը L^1 դասում* . . 238
Ն. Ե. Թովմասյան. *Եզրային խնդիրներ մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների համար կիսահարթությունում, բազմանդամային արագություն ունեցող ֆունկցիաների դասում* 253
Դ. Հ. Մարտիրոսյան. *Դասական իզինգյան ֆերոմագնետիկ մոդելներում շերտերի մասին թեորեմներ* 272
Տ. Ս. Իվանչենկո, Լ. Ա. Սախնովիչ. *Օպերատորային նույնություններ ինտերպոլյացիոն խնդիրների տեսության մեջ* 298

Համառոտ հաղորդումներ

Ա. Կ. Մաթևոսյան. *Ընդհանրացված տեղաշարժի օպերատորների գծային ներկայացումների մատրիցային տարրերի միջոցով վերլուծության մասին* 309

СОДЕРЖАНИЕ

А. А. Вагаршакян. Об одном новом методе решения усеченных уравнений Винера—Хопфа 215
Г. М. Айрапетян. Граничная задача сопряжения со смещением в классе L^1 . . 238
Н. Е. Товмасян. Краевые задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных в полуплоскости в классе функций полиномиального роста 253
Д. Г. Мартиросян. Теоремы о полосках в модели классического изинговского ферромагнетика 272
Т. С. Иванченко, Л. А. Сахнович. Операторные тождества в теории интерполяционных задач 298

Краткие сообщения

А. К. Матевосян. О разложении по матричным элементам линейных представлений операторов обобщенного сдвига 309

CONTENTS

A. A. Vagharshakian. On a new method of solving the truncated Wiener-Hopf equations 215
G. M. Airapetian. On the boundary problem of the conjugation with shift in the class L^1 238
N. E. Tovmasian. Boundary value problem for a system of partial differential equations on the half of plane in a class of functions of polynomial growth 253
D. H. Martirosian. Theorems about the stripes in classical Ising ferromagnet 272
T. S. Ivancenko, L. A. Sahnovic. Operator indentities in interpolation problems 298

Short communications

A. K. Matevosian. On expansion by system of matrix elements of representations of generalized displacement operators 309