ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24 բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке), а кратких сообщений—не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

ԳԻՆԸ 1 Ռ. 20 Կ.
ЦЕНА 1 Р.. 20 К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contribttors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenien S.S.R., series "Matomatika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initals and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date muse be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to indicated by a numeral in square brackets properey inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article shoule contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitied ot twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXII, № 2, 1987 Математика

УДК 517. 53

А. Е. АВЕТИСЯН

О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА, ОГРАНИЧЕННЫХ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТОЧЕК

§ 1. Введение

В 1931 г. Пойя [1] предложил теорему.

Теорема А. Пусть $f(z)$—целая функция первого порядка и нулевого типа, пусть далее она ограничена при целочисленных значениях аргумента $z=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Тогда $f(z)$ сводится к постоянной.

Картрайт [2] доказала более сильную теорему.

Теорема В. Пусть $f(z)$—целая функция порядка 1 и типа σ $(\sigma < \pi)$ и $|f(\pm n)| < A$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$, тогда на всей действительной оси

$$|f(x)| < kA,$$

где k зависит только от σ.

Условие $\sigma < \pi$ можно заменить более слабым условием $h\left(\frac{\pi}{2}\right)+ h\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 2\pi$. Аналогичную теорему Картрайт доказала для функций, аналитических в полуплоскости. Из теоремы Картрайт теорема A следует применением принципа Фрагмена-Линделефа.

Различным обобщениям теоремы Картрайт посвящены работы Ийера [3], Дуффина и Шеффера [4], Агмона [5], Б. Я. Левина [6] и других. Результаты, аналогичные теореме М. Картрайт, получены для функций, растущих на последовательности точек $\{a_k\}$. В частности связь между величинами

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln|F(r)|}{r^{\rho}}, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|F(a_k)|}{|a_k|^{\rho}} \tag{1.1}$$

исследована в работах В. Бернштейна [7], А. Пфлюгера [8], Н. Левинсона [9], Боаса [10], Б. Я. Левина [11] и других.

В настоящей работе мы получаем результаты указанных типов для некоторых классов целых функций порядка $\rho (1 < \rho < 2)$. При этом мы существенно опираемся на свойства целой функции

$$S_{\rho}(z; \mu) = \frac{E_{\rho}(iz; \mu) - E_{\rho}(-iz; \mu)}{2i} \left(E_{\rho}(z; \mu) = \sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma\left(\mu + \frac{n}{\rho}\right)}\right), \tag{1.2}$$

изученные впервые М. М. Джрбашяном и С. Г. Рафаеляном ([12], [13]). Эта функция является естественным обобщением функции $\sin z$. Легко видеть, что $S_1(z;\ 1) = \sin z$.

В первой части работы приводятся известные результаты относительно асимптотических свойств функции $S_\rho(z;\ \mu)$ и распределения ее нулей. Далее, совершенно так, как это сделано в [13], по нулям $\{\lambda_k\}$ функции $z^2 S_\rho\left(\sigma^{1/\rho} z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)$ строится система целых функций $\{\Omega_{\rho,k}(z;\ \mu)\}_0^\infty$. С помощью этой системы доказывается интерполяционная формула для целых функций порядка $\rho\ (1<\rho<2)$, ограниченных на последовательности $\{\lambda_k\}$. Предварительно для аналитических в угловых областях функций порядка ρ доказывается теорема о связи между величинами типа (1.1). В заключение, на основании полученной интерполяционной формулы, доказываются аналоги приведенных выше теорем Пойя и Картрайт.

§ 2. Вспомогательные результаты

1°. Относительно роста функции $S_\rho(z;\ \mu)$ и распределения ее нулей известны следующие результаты (см. [13]).

Лемма А. Пусть $\rho > 1$, $\mu \in (-\infty,\ \infty)$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2\rho},\ \frac{\pi}{\rho}\right)$. Тогда справедливы следующие оценки.

а) Если $\left|\,|\arg z| \pm \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \alpha$, то соответственно

$$|S_\rho(z;\ \mu)| \leqslant M_1(1+|z|^{\rho(1-\mu)}\, e^{\operatorname{Re}(\pm iz)^\rho} + \frac{M_2}{1+|z|}.$$

б) Если $\left|\,|\arg z| - \frac{\pi}{2}\right| \geqslant \alpha$, то

$$|S_\rho(z;\ \mu)| < \frac{M_2}{1+|z|},$$

где $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$ не зависят от z.

Лемма В. Все достаточно большие по модулю нули функции $S_\rho(z;\ \mu)\ (\rho > 1)$ простые. Справедливы асимптотические формулы

а) $\lambda_k^{(j)} = e^{i\theta_j}(2\pi k)^{1/\rho}\left\{1 + O\left(\frac{\ln k}{k}\right)\right\}\ (1 \leqslant j \leqslant 4)$,

где

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right),\quad \theta_2 = -\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right),\quad \theta_3 = \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\rho}\right),\quad \theta_4 = -\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\rho}\right).$$

б) $\arg \lambda_k^{(j)} = \theta_j + (1+\rho(1-\mu))\frac{\ln|\lambda_k|}{\rho|\lambda_k|^\rho} + O\left(\frac{\ln^3|\lambda_k|}{|\lambda_k|^{3\rho}}\right)$.

Отметим также, что нули функции $S_\rho(z;\ \mu)$ симметричны относительно действительной и мнимой осей.

Лемма С. Если $1 < \rho < 2$ и $\mu > 0$, то а) При $\operatorname{Im}\lambda_k > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \left| (i\lambda_k)^{2-\rho} S'_\rho(\lambda_k; \mu) \right| = \frac{-\rho}{\Gamma\left(\mu - \frac{1}{\rho}\right)}.$$

б) При $\operatorname{Im}\lambda_k < 0$

$$\lim_{k\to\infty} \left\{ (-i\lambda_k)^{2-\rho} S'_\rho(\lambda_k; \mu) \right\} = \frac{-\rho}{\Gamma\left(\mu - \frac{1}{\rho}\right)}.$$

Следствие. Существуют постоянные $C_\rho(\mu)$ и $N_\rho(\mu) > 0$, не зависящие от k, такие, что если $1 < \rho < 2$, то

$$|S'_\rho(\lambda_k; \mu)| \geqslant C_\rho(\mu)\, k^{1-\frac{2}{\rho}}, \quad k \geqslant N_\rho(\mu).$$

2°. Пусть $\{\lambda_k\}_0^\infty$ — последовательность всех нулей функции $z^2 S_\rho\left(\sigma^{1/\rho} z; 1 + \frac{1}{\rho}\right)$ $(0 = \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2)$. При этом каждый нуль записывается столько раз, какова его кратность. Для данного натурального $k \geqslant 0$ обозначим через $p_k \geqslant 1$ кратность появления числа λ_k в последовательности $\{\lambda_k\}_0^\infty$, а через $s_k \geqslant 1$—кратность появления числа λ_k в совокупности $\{\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$. Очевидно, что $1 \leqslant s_k \leqslant p_k < \infty$. Точно так же, как в [13], обозначим

$$\omega_k(z) = \frac{(z-\lambda_k)^{p_k}}{z^2 S_\rho\left(\sigma^{1/\rho} z; 1 + \frac{1}{\rho}\right)} \quad (|z - \lambda_k| < \delta_k),$$

$$\omega_k(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\lambda_k)(z-\lambda_k)^\nu, \quad a_\nu(\lambda_k) = \frac{\omega_k^{(\nu)}(\lambda_k)}{\nu!}.$$

Обозначим далее

$$q_k(z) = \sum_{\nu=0}^{p_k - s_k} a_\nu(\lambda_k)(z-\lambda_k)^\nu$$

и составим функции

$$\Omega_{\rho, k}\left(\sigma^{1/\rho} z; 1 + \frac{1}{\rho}\right) = \frac{(z-\lambda_k)^{s_k - 1} q_k(z)}{(s_k - 1)!\, \omega_k(z)} = \frac{z^2 S_\rho\left(\sigma^{1/\rho} z; 1 + \frac{1}{\rho}\right) q_k(z)}{(s_k - 1)!\, (z-\lambda_k)^{p_k - s_k + 1}}.$$

В частности, не трудно проверить, что

$$\Omega_{\rho, 0}\left(\sigma^{1/\rho} z; 1 + \frac{1}{\rho}\right) = \frac{S_\rho\left(\sigma^{1/\rho} z; 1 + \frac{1}{\rho}\right)}{z} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{S'_\rho\left(0; 1 + \frac{1}{\rho}\right)} - \frac{S''_\rho\left(0; 1 + \frac{1}{\rho}\right) z^2}{3! \left[S'_\rho\left(0; 1 + \frac{1}{\rho}\right) \right]^2} \right],$$

$$\Omega_{\rho,1}\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)=S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)\cdot\frac{1}{S_\rho'\left(0;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)},$$

$$\Omega_{\rho,2}\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)=\frac{z\,S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)}{2}\,\frac{1}{S_\rho'\left(0;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)}.$$

Легко видеть, что если λ_k—простой нуль, то $s_k=p_k=1$,

$$q_k(z)=\frac{1}{\lambda_k^2 S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho}\lambda_k;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)}$$ и значит

$$\Omega_{\rho,k}\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)=\frac{z^2 S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)}{\lambda_k^2 S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho}\lambda_k;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)(z-\lambda_k)}. \qquad (2.1)$$

И, наконец, как и в [13] легко проверяется, что целые функции $\Omega_{k,\rho}\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)$ обладают интерполяционными свойствами

$$\Omega_{\rho,k}^{(r)}\left(\sigma^{1/\rho}\lambda_\nu;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)=\begin{cases}0, & \lambda_\nu\neq\lambda_k,\ 0\leqslant r<p_\nu-1\\ 1, & \lambda_\nu=\lambda_k,\ r=s_k-1\\ 0, & \lambda_\nu=\lambda_k,\ r\neq s_k-1.\end{cases} \qquad (2.2)$$

3°. Пусть $\{c_k\}_0^\infty$—произвольная ограниченная последовательность комплексных чисел

$$|c_k|\leqslant M,\ k=0,\ 1,\ 2\cdots.$$

Рассмотрим ряд

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,\Omega_{\rho,k}\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right). \qquad (2.3)$$

Справедливо утверждение.

Лемма 1. *Ряд* (2.3) *сходится равномерно на любом компакте* (k) *комплексной плоскости и представляет целую функцию, удовлетворяющую условиям*

$$f^{(s_k-1)}(\lambda_k)=c_k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\cdots). \qquad (2.4)$$

Доказательство. Пусть сначала компакт (k) не содержит точек λ_k. Так как при больших $k\geqslant k_0$ λ_k—простые, то при больших m

$$\left|\sum_{k=m}^{n}c_k\,\Omega_{\rho,k}\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)\right|\leqslant M_1\max\left\{\left|z^2 S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)\right|\right\}\times$$

$$\times\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{|\lambda_k|^2\,|\lambda_k|^{\rho-2}\,|z-\lambda_k|}\leqslant M_2\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k^{1+\frac{1}{\rho}}}. \qquad (2.5)$$

Здесь мы воспользовались леммами B и C и следствием после леммы C.

Используя принцип максимума можно доказать, что оценка такого типа имеет место в любом круге $|z| \leqslant R$. Отсюда следует, что ряд (2.3) равномерно сходится в любом круге и значит его сумма представляет целую функцию. Утверждение (2.4) сразу следует из (2.2). Лемма доказана.

§ 3. Определение индикатора аналитической в угловой области функции по ее росту на последовательносях точек

Пусть $\{\nu_k\}_1^\infty$ — последовательность нулей функции $S_\rho(\sigma^{1/\rho}z;\ \mu)$, лежащих в первом квадранте. По лемме B

$$|\nu_k| \sim \left(\frac{2\pi k}{\sigma}\right)^{1/\rho}, \quad \arg \nu_k \to \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}.$$

Теорема 1. *Пусть* $1 < \rho < 2$ *и* $F(z)$ — *голоморфная функция в угловой области* $|\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{2\rho}$. *Предположим далее, что*

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{\ln|F(z)|}{|z|^\rho} < \infty$$

и

$$h\left(\pm\frac{\pi}{2\rho}\right) < \sigma \sin\frac{\pi\rho}{2}. \tag{3.1}$$

Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln |F(\nu_k)|}{|\nu_k|^\rho} = h_F\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}\right) \tag{3.2}$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|F(\bar{\nu}_k)|}{|\bar{\nu}_k|^\rho} = h_F\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\rho}\right), \tag{3.3}$$

если левые части (3.2), (3.3) *неотрицательны.*

Доказательство этой теоремы ведется по схеме, предложенной в работе [11] (стр. 272, теорема 16). Из асимптотических свойств функции $S_\rho(\sigma^{1/\rho}z;\ \mu)$ (см. [13]) следует, что ее индикатор выражается формулой

$$h_{S_\rho}(\theta) = \begin{cases} \sigma \cos\rho\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right), \text{ при} \left|\theta - \dfrac{\pi}{2}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2\rho} \\ \sigma \cos\rho\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right), \text{ при} \left|\theta + \dfrac{\pi}{2}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2\rho} \\ 0, \text{ при } |\theta| \leqslant \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2\rho} \text{ и } |\theta - \pi| \leqslant \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2\rho}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Деля функцию $S_\rho(\sigma^{1/\rho}z;\ \mu)$ на соответствующий полином, мы получим целую функцию $S_\rho^*(z)$, нули которой совпадают с нулями функции $S_\rho(\sigma^{1/\rho}z;\ \mu)$ и все они простые. Очевидно $S_\rho^*(z)$ имеет тот же самый индикатор.

Обозначим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|F(\nu_n)|}{|\nu_n|^\rho} = c. \qquad (3.5)$$

Выберем последовательность $\{\mu_n\}$

$$|\mu_1| < |\mu_2| < \cdots < |\mu_n| < \cdots, \ \arg\mu_n = \frac{\pi}{2\rho}, \ k = 1, 2 \cdots$$

с плотностью $\Delta > \dfrac{c}{2\pi \sin \dfrac{\pi\rho}{2}}$ при показателе ρ и построим функцию

$$V(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{\bar{\mu}_n^2}\right).$$

Это-целая функция порядка ρ и вполне регулярного роста. Из известных результатов Б. Я. Левина и А. Пфлюгера легко следует, что ее индикатор выражается формулой:

$$h_V(\theta) = \begin{cases} 2\pi\Delta\cos\rho\theta, \text{ при } |\theta| \leqslant \dfrac{\pi}{2\rho} \\ 2\pi\Delta\cos\rho(\theta - \pi), \text{ при } |\theta - \pi| < \dfrac{\pi}{2\rho} \\ 0, \text{ при } \left|\theta \pm \dfrac{\pi}{2}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2\rho}. \end{cases} \qquad (3.6)$$

Выберем положительное число ε из условия

$$\varepsilon < 2\pi\Delta\sin\frac{\pi\rho}{2} - c. \qquad (3.7)$$

Из (3.5) для достаточно больших n имеем

$$\ln|F(\nu_n)| < \left(c + \frac{\varepsilon}{2}\right)|\nu_n|^\rho. \qquad (3.8)$$

С другой стороны, целая функция $V(z)$—вполне регулярного роста и не имеет нулей на луче $\arg z = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2\rho}$, поэтому при достаточно больших n

$$\ln|V(\nu_n)| > \left[h_V\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}\right) - \frac{\varepsilon}{2}\right]|\nu_n|^\rho = \left[2\pi\Delta\sin\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right]|\nu_n|^\rho. \qquad (3.9)$$

Из (3.7), (3.8), (3.9) следует, что для больших n

$$\ln\left|\frac{F(\nu_n)}{V(\nu_n)}\right| < -\eta|\nu_n|^\rho \ (\eta > 0). \qquad (3.10)$$

Из леммы C имеем также

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln|S_\rho^{**}(\nu_n)|}{|\nu_n|^\rho} = 0. \qquad (3.11)$$

Из (3.10) и (3.11) вытекает, что ряд

$$\psi(z)=\sum_{1}^{\infty}\frac{F(\nu_n)}{V(\nu_n)\,S_\rho^{*'}(\nu_n)(z-\nu_n)}$$

равномерно сходится вне некоторых кружков, содержащих точки ν_n, и вне этих кружков при $z\to\infty$ функция $\psi(z)$ равномерно стремится к нулю.

Нетрудно убедиться, что функция

$$B(z)=\frac{F(z)}{V(z)\;S_\rho^*(z)}-\psi(z) \tag{3.12}$$

голоморфна в угловой области $|\arg z|<\frac{\pi}{2\rho}$ и внутри этого угла имеет нормальный тип при порядке ρ. Мы докажем, что функция $B(z)$ ограничена внутри угловой области $|\arg z|<\frac{\pi}{2\rho}-\delta$ $\left(0<\delta<\frac{\pi}{2\rho}\right)$. Для этого заметим, что $V(z)$ и $S_\rho^*(z)$—целые функции вполне регулярного роста и поэтому индикатор функции

$$\Phi(z)=\frac{F(z)}{V(z)\,S_\rho^*(z)}$$

в угловой области $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}<\arg z<\frac{\pi}{2\rho}$ равен

$$h_\Phi(\theta)=h_F(\theta)-2\pi\Delta\cos\rho\theta-\sigma\cos\rho\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right). \tag{3.13}$$

В указанной угловой области $\Phi(z)$, вообще говоря, не голоморфна ($S_\rho^*(z)$ может иметь нули), но можно говорить о ее индикаторе, так как для любого φ, $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}<\varphi<\frac{\pi}{2\rho}$ $\Phi(z)$ голоморфна в области $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}<\arg z\leqslant\varphi$, $|z|\geqslant r_0$ (r_0—достаточно большое число).

Из (3.1) и (3.13) следует, что для достаточно малого положительного δ $h_\Phi\left(\frac{\pi}{2\rho}-\delta\right)<0$. Значит $\Phi\left(re^{i\left(\frac{\pi}{2\rho}-\delta\right)}\right)\to 0$ при $r\to\infty$. Аналогично $\Phi\left(re^{-i\left(\frac{\pi}{2\rho}-\delta\right)}\right)\to 0$ при $r\to\infty$. На лучах $\arg z=\pm\left(\frac{\pi}{2\rho}-\delta\right)$ $\psi(z)$ также стремится к нулю. Поэтому в угловой области $|\arg z|\leqslant\leqslant\frac{\pi}{2\rho}-\delta$ $|B(z)|\leqslant M$.

Из (3.12) имеем

$$F(z)=[B(z)+\psi(z)]V(z)\cdot S_\rho^*(z).$$

Отсюда при $|\theta|<\frac{\pi}{2\rho}$ получаем $h_F(\theta)\leqslant h_V(\theta)+h_{S_\rho^*}(\theta)$. Полагая $\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}$, получим

$$h_F\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\right)\leqslant 2\pi\Delta\sin\frac{\pi\rho}{2}.$$

Но Δ можно взять сколь угодно близко к числу $\dfrac{c}{2\pi\sin\frac{\pi\rho}{2}}$, так что

$$h_F\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\right)\leqslant c. \tag{3.14}$$

Аналогично доказывается неравенство

$$h_F\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\rho}\right)\leqslant c. \tag{3.15}$$

Для завершения доказательства теоремы остается установить обратные к (3.14) и (3.15) неравенства. Докажем, например, что $h_F\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\right)> c$. Допустим противное:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|F(\nu_n)|}{|\nu_n|^\rho}=c>h_F\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\right),$$

$$c=h_F\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\right)+k\quad(k>0).$$

Из непрерывности $h_F(\theta)$ следует, что существует $\delta_1>0$ такое, что при $\left|\theta-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\rho}\right|<\delta_1$

$$c>h_F(\theta)+\frac{k}{2}. \tag{3.16}$$

Отсюда следует, что при $n>n_0$, $\arg\nu_k\in\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}-\delta_1,\ \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}+\delta_1\right)$ существует последовательность $n_l\to\infty$ такая, что при $\left|\theta-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\right)\right|<\delta_1$

$$|F(\nu_{n_l})|>e^{\left[h_F(\theta)+\frac{k}{4}\right]|\nu_{n_l}|^\rho}. \tag{3.17}$$

Если теперь $0<\varepsilon<\frac{k}{4}$, то по известным свойствам индикатора, существует r_0 такое, что при $r>r_0$

$$|F(re^{i\theta})|<e^{[h(\theta)+\varepsilon]r^\rho},\ \left|\theta-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\right)\right|<\delta_1.$$

Это противоречит (3.17). Теорема полностью доказана.

§ 4. Интерполяционная формула

Теорема 2. *Если $f(z)$—целая функция порядка ρ, $1<\rho<2$ и конечного типа*

$$h_f\left(\pm\frac{\pi}{2\rho}\right)<\sigma\sin\frac{\pi\rho}{2},\quad h_f\left(\pi\pm\frac{\pi}{2\rho}\right)<\sigma\sin\frac{\pi\rho}{2} \tag{4.1}$$

и

$$|f^{(S_k-1)}(\lambda_k)|\leqslant M, \tag{4.2}$$

то $f(z)$ разлагается в равномерно сходящийся на любом компакте интерполяционный ряд

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f^{(S_k-1)}(\lambda_k)\,\Omega_{\rho,k}\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right). \tag{4.3}$$

Отметим, что для класса $W_{\rho,\sigma}^{p,\infty}$ аналогичная теорема ранее была доказана С. Г. Рафаеляном [13].

Доказательство. Из теоремы 1 и из (4.2) следует, что

$$h_f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\rho}\right)\leqslant 0 \quad\text{и}\quad h_f\left(-\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{2\rho}\right)\leqslant 0.$$

Но имея в виду известное свойство индикатора $h(\theta)+h\left(\theta+\frac{\pi}{\rho}\right)\geqslant 0$, заключаем, что

$$h_f\left(\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{2\rho}\right)=0,\quad h_f\left(-\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{2\rho}\right)=0. \tag{4.4}$$

Отметим также, что при $|\theta|<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}$ и $|\theta-\pi|<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}$ $h_f(\theta)\leqslant 0$. Кроме того, из (4.1), (4.4) и из основного соотношения для индикатора (свойство тригонометрической ρ-выпуклости) следует, что при $\left|\theta\pm\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\pi}{2\rho}$

$$h_f(\theta)<h_{S_\rho}(\theta). \tag{4.5}$$

Функция

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f^{(S_k-1)}(\lambda_k)\,\Omega_{\rho,k}\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)$$

по лемме 1—целая, порядка ρ, конечного типа и очевидно с индикатором, не превышающим индикатор функции $S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)$. При этом

$$F^{(S_k-1)}(\lambda_k)=f^{(S_k-1)}(\lambda_k)\ (k=0,\,1\cdots). \tag{4.6}$$

Составим разность

$$\varphi(z)=f(z)-F(z), \tag{4.7}$$

$\varphi(z)$—целая функция не выше порядка ρ и типа σ, имеющая нули в точках λ_k одинаковой кратности с функцией $z^2S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)$. Поэтому функция

$$\Phi(z)=\frac{\varphi(z)}{z^2S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)}=\frac{f(z)-F(z)}{z^2S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)} \tag{4.8}$$

также целая и не выше порядка ρ и типа σ. Для краткости обозначим

$$\varphi_1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}+\delta \qquad \left(0<\delta<\frac{\pi}{2\rho}-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\varphi_2=\pi-\varphi_1,\ \varphi_3=\pi+\varphi_1,\ \varphi_4=-\varphi_1$$

и докажем, что $|\Phi(re^{i\varphi_k})|\leqslant L\ (k=1,2,3,4)$. Достаточно доказать такое неравенство для $r\geqslant r_0>0$. Для функции

$$\frac{f(z)}{z^2 S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho} z;\ 1+\dfrac{1}{\rho}\right)} \tag{4.9}$$

такое неравенство сразу следует из (4.5). Более того, из (4.5) следует, что на лучах φ_k эта функция стремится к нулю. Докажем, что на лучах φ_k стремится к нулю также функция

$$\frac{F(z)}{z^2 S_\rho\left(\sigma^{1/\rho} z;\ 1+\dfrac{1}{\rho}\right)}=\sum_{k=0}^{\infty} f^{(S_k-1)}(\lambda_k)\frac{q_k(z)}{(s_k-1)!\,(z-\lambda_k)^{p_k-s_k-1}}. \tag{4.10}$$

Так как $q_k(z)$—полином степени p_k-s_k, то каждый член ряда (4.10) стремится к нулю на лучах φ_k. С другой стороны, при $k\geqslant k_0$ нули λ_k—простые и достаточно доказать утверждение для функции

$$A(z)=\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{f(\lambda_k)}{\lambda_k^2 S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho}\lambda_k;\ 1+\dfrac{1}{\rho}\right)(z-\lambda_k)}. \tag{4.11}$$

Но по условию $|f(\lambda_k)|\leqslant M$. Имеем также

$$S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho}\lambda_k;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)\sim c_1\lambda_k^{\rho-2} \text{ (лемма } C\text{), так что}$$

$$|A(z)|\leqslant c_2\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_k|^\rho\ |z-\lambda_k|}. \tag{4.12}$$

Как было отмечено выше, нули λ_k симметричны относительно координатных осей, поэтому ряд (4.11) можно представить в виде четырех рядов, каждый из которых содержит нули только из одного квадранта. Пусть, как и в § 3, $\{\nu_k\}_1^\infty$—те λ_k, которые лежат в первом квадранте: $|\nu_k|\sim\left(\dfrac{2\pi k}{\sigma}\right)^{1/\rho}$, $\arg\nu_k\to\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2\rho}$. Докажем, что на лучах φ_k стремится к нулю функция

$$|A_1(z)|=\sum_{k_0+1}^{\infty}\frac{1}{|\nu_k|^\rho\,|z-\nu_k|}.$$

Можно считать, что при $k>k_0$ $\left|\arg\nu_k-\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2\rho}\right)\right|<\dfrac{\delta}{2}$.

Тогда при $\arg z=\varphi_1$, т. е. на луче φ_1

$$|z-\nu_k|\geqslant|z|^{1/2}\,|\nu_k|^{1/2}\sin\frac{\delta}{2}$$

и для $|A_1(z)|$ на луче φ_1 получаем оценку

$$|A_1(z)| \leqslant \sum_{k_0+1}^{\infty} \frac{1}{|\nu_k|^{\rho} |\nu_k|^{1/2} |z|^{1/2} \sin \frac{\delta}{2}} \leqslant$$

$$< \frac{c_3}{|z|^{1/2}} \sum_{k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{2\rho}}} < \frac{c_4}{|z|^{1/2}}.$$

Аналогичная оценка, очевидно, справедлива и для лучей φ_2, φ_3, φ_4. Совершенно так же можно получить оценки и для трех других рядов.

Таким образом, целая функция $\Phi(z)$ порядка ρ ограничена на лучах φ_k $(k=1, 2, 3, 4)$. При этом лучи φ_k разделяют всю плоскость на угловые области раствора, меньше чем $\frac{\pi}{\rho}$. По теореме Фрагмена-Линделефа $\Phi(z)$ ограничена на всей плоскости, и значит она постоянная. Но $\Phi(z)$ стремится к нулю на лучах $\varphi_k (k=1, 2, 3, 4)$. Отсюда следует, что $\Phi(z) = 0$. Это равносильно утверждению теоремы (4.3).

§ 5. Целые функции, ограниченные на последовательности $\{\lambda_k\}$

1°. Докажем теорему, которая является аналогом теоремы А. Пойя.

Теорема 3. *Если $f(z)$—целая функция порядка $\rho\,(1<\rho<2)$ и нулевого типа и*

$$|f(\lambda_k)| \leqslant M, \tag{5.1}$$

то

$$f(z) = \text{const}.$$

Доказательство. Ясно, что функция $[f(z)]^m$ при любом натуральном m также целая функция порядка ρ и нулевого типа. Далее заметим, что точек λ_k, в которых функция $z^2 S_\rho\left(\sigma^{1/2} z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)$ имеет кратные нули, конечное число. При этом кратности p_k нулей в этих точках ограничены одним и тем же числом $p_k \leqslant p$. Поэтому справедлива оценка

$$|\{[f(\lambda_k)]^m\}^{(S_k-1)}| < c_1 m^{p} M^m, \tag{5.2}$$

где постоянная c_1 зависит только от функции $f(z)$. Функция $[f(z)]^m$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и поэтому допускает разложение

$$[f(z)]^m = \sum_{k=0}^{\infty} \{[f(\lambda_k)]^m\}^{(s_k-1)} \Omega_{\rho,k}\left(\sigma^{1/\rho} z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right).$$

Отсюда, имея в виду (5.2), для любой фиксированной точки z получим

$$|f(z)]^m \leqslant c_1 m^{p} M^m \left| \sum_{k=0}^{\infty} \Omega_{\rho,k}\left(\sigma^{1/\rho} z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right) \right|$$

или

$$|f(z)| \leqslant c_1^{\frac{1}{m}} m^{\frac{\rho}{m}} M \left| \sum_{k=0}^{\infty} \Omega_{\rho,k}\left(\sigma^{1/\rho} z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)\right|^{\frac{1}{m}}.$$

Устремляя m к бесконечности, имеем

$$|f(z)| \leqslant M. \tag{5.3}$$

и значит $f(z) = \text{const}$.

Следствие. Если $f(z)$—целая функция порядка $\rho\,(1<\rho<2)$ нулевого типа и $f(\lambda_n) = o\,(n^{1/\rho})$ при $n \to \infty$, то $f(z)$—постоянная. Более общо, если $f(\lambda_n) = O\,(n^{m/\rho})$, то $f(z)$—полином степени не выше $[m]$.

Действительно, пусть $f(\lambda_n) = O\,(n^{m/\rho})$. По лемме В это означает, что $f(\lambda_n) = O\,(|\lambda_n|^m)$. Обозначим отрезок ряда Тейлора функции $f(z)$ степени $[m]$ через $p(z)$ и рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \frac{f(z) - p(z)}{z^{[m]+1}}.$$

Ясно, что $\Phi(z)$—целая функция порядка ρ нулевого типа и

$$|\Phi(\lambda_n)| \leqslant L.$$

По теореме 3 $\Phi(z) = c$. Но очевидно $\Phi(\lambda_n) \to 0$ при $n \to \infty$, значит $c = 0$, т. е. $f(z) = p(z)$.

Если же $f(\lambda_n) = o\,(n^{1/\rho})$ (т. е. $f(\lambda_n) = o\,(|\lambda_k|)$), то в предыдущих рассуждениях, взяв $m = 1$, получим, что $f(z)$—линейная функция. Но тогда соотношение $f(\lambda_n) = o\,(|\lambda_n|)$ возможно лишь тогда, когда $f(z) = \text{const}$.

2°. В этом пункте мы докажем теорему, аналогичную теореме В. Картрайт. Введем некоторые обозначения. При $0 < \delta < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}$ обозначим через $D_1^{(\rho)}(\delta)$ и $D_2^{(\rho)}(\delta)$ угловые области, определяющиеся, соответственно, из условий

$$|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} - \delta \quad \text{и} \quad |\arg z - \pi| \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} - \delta$$

и пусть $D^{(\rho)}(\delta) = D_1^{(\rho)}(\delta) + D_2^{(\rho)}(\delta)$. Положим также $D^{(\rho)} = D^{(\rho)}(0)$.

Теорема 4. *Пусть $f(z)$ — нечетная целая функция порядка $\rho\,(1<\rho<2)$, нормального типа и удовлетворяет условиям*

$$h_f\left(\pm\frac{\pi}{2\rho}\right) < \sigma \sin\frac{\pi\rho}{2}, \quad h_f\left(\pi \pm \frac{\pi}{2\rho}\right) < \sigma \sin\frac{\pi\rho}{2}, \tag{5.4}$$

$$|f(\lambda_k)| \leqslant M. \tag{5.5}$$

Тогда для любого $\delta \left(0 < \delta < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}\right)$, в области $D^{(\rho)}(\delta)$ имеет место

$$|f(z)| \leqslant M_{f,\delta}. \tag{5.6}$$

Доказательство. Так как кратных точек λ_k — конечное число и кратности равномерно ограничены сверху, то

$$|f^{(S_k-1)}(\lambda_k)| \leqslant M_1,$$

$f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и значит представима рядом (4.3). Нули λ_k функции $z^2 S_\rho\left(\sigma^{1/\rho} z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)$, начиная с некоторого номера ($k \geqslant m_0$), простые, поэтому можно представить $f(z)$ в виде (см. § 2, 2.1))

$$f(z)=\sum_{k=0}^{m_0-1} f^{(S_k-1)}(\lambda_k)\, \Omega_{\rho,k}\left(\sigma^{1/\rho} z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)+\sum_{k=m_0}^{\infty} f(\lambda_k)\, \Omega_{\rho,k}\left(\sigma^{1/\rho} z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)=$$

$$=f_1(z)+\sum_{k=m_0}^{\infty} f(\lambda_k)\frac{z^2 S_\rho\left(\sigma^{1/\rho} z_k; 1+\frac{1}{\rho}\right)}{\lambda_k^2 S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho}\lambda_k;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)(z-\lambda_k)}. \qquad (5.7)$$

Ясно, что $|f_1(z)|$ ограничена в области $D^{(\rho)}(\delta)$ (она ограничена даже в области $D^{(\rho)}$, так как в этой области ограничена каждая из функций $\Omega_{\rho,k}$, $k=0,\ 1,\cdots,(m-1)$). Остается доказать ограниченность (в области $D^{(\rho)}(\delta)$) функции

$$f_2(z)=\sum_{m_0}^{\infty} f(\lambda_k)\frac{z^2 S_\rho\left(\sigma^{1/\rho} z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)}{\lambda_k^2 S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho}\lambda_k;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)(z-\lambda_k)}. \qquad (5.8)$$

Для этого вспомним, что точки λ_k расположены симметрично относительно координатных осей. Как и раньше, пусть ν_k—те из точек λ_k, которые лежат в первом квадранте. Тогда множество $\{\lambda_k\}$ очевидно, распадается на четере множества: $\{\nu_k\}$, $\{-\nu_k\}$, $\{\bar{\nu}_k\}$, $\{-\bar{\nu}_k\}$. Ряд (5.8) распадается на четыре ряда. Имея в виду нечетность функции $f(z)$ (а также четность функци $S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho} z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)$), будем иметь

$$f_2(z)=z^2 S_\rho\left(\sigma^{1/\rho} z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)\left\{\sum_{m_0}^{\infty}\frac{f(\nu_k)}{\nu_k^2 S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho}\nu_k;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)}\left(\frac{1}{z-\nu_k}+\frac{1}{z+\nu_k}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{m_0}^{\infty}\frac{f(\bar{\nu}_k)}{\bar{\nu}_k^2 S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho}\bar{\nu}_k; 1+\frac{1}{\rho}\right)}\left(\frac{1}{z-\bar{\nu}_k}-\frac{1}{z+\bar{\nu}_k}\right)\right\}$$

или

$$f_2(z)=z S_\rho\left(\sigma^{1/\rho} z; 1+\frac{1}{\rho}\right)\left\{\sum_{m_0}^{\infty}\frac{2f(\nu_k)\,\nu_k\cdot z}{\nu_k^2 S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho}\nu_k;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)(z^2-\nu_k^2)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{m_0}^{\infty}\frac{2f(\bar{\nu}_k)\,\bar{\nu}_k\cdot z}{\bar{\nu}_k^2 S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho}\bar{\nu}_k;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)(z^2-\bar{\nu}_k^2)}\right\}= \qquad (5.9)$$

$$=z S_\rho\left(\sigma^{1/\rho} z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)[\Phi_1(z)+\Phi_2(z)].$$

Множитель $zS_\rho\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)$ ограничен в области $D^{(\rho)}(\delta)$ по лемме А. Докажем ограниченность в этой области функций $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$.

Можно считать, что при $k>m_0$ выполняется неравенство $\left(\text{ведь } \arg\nu_k\to\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\right)$

$$\left|\arg\nu_k-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\right)\right|<\frac{\delta}{2}. \tag{5.10}$$

Предположим, что $N>m_0$—достаточно большое натуральное число и z принадлежит области Δ_N:

$$\Delta_N=\left|\begin{array}{l} a(N-1)^{1/\rho}\leqslant|z|\leqslant aN^{1/\rho} \\ |\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}-\delta \end{array},\quad a=\left(\frac{2\pi}{\sigma}\right)^{1/\rho}\right|. \tag{5,11}$$

Оценим в этой области функцию $\Phi_1(z)$. Для этого запишем ее в форме

$$\Phi_1(z)=\sum_{m_0}^{2N}\frac{2f(\nu_k)\nu_k z}{\nu_k^2 S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho}\nu_k;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)(z^2-\nu_k^2)}+$$

$$+\sum_{2N+1}^{\infty}\frac{2f(\nu_k)\nu_k z}{\nu_k^2 S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho}\nu_k;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)(z^2-\nu_k^2)}=v_1(z)+v_2(z).$$

Имея в виду (5.5), (5.11) и леммы B и C, для функции $v_2(z)$ получим оценку

$$|v_2(z)|<A_1N^{1/\rho}\sum_{2N+1}^{\infty}\frac{k^{1/\rho}}{k\,|k^{2/\rho}-N^{2/\rho}|}\leqslant$$
$$\leqslant A_2N^{1/\rho}\sum_{2N+1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\frac{1}{\rho}}}\leqslant A_3\frac{N^{1/\rho}}{(2N+1)^{1/\rho}}\leqslant B_1. \tag{5.12}$$

Для оценки $v_1(z)$ заметим, что из (5.10) и (5.11) следует $|z-\nu_k|\geqslant|z|\sin\frac{\delta}{2}$. Имеем также неравенство $\frac{|z|}{|z+\nu_k|}<1$, и поэтому

$$|v_1(z)|\leqslant A_4\sum_{m_0}^{2N}\frac{k^{1/\rho}|z|}{k\,|z-\nu_k|\,|z+\nu_k|}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{A_5}{(N-1)^{1/\rho}}\sum_{m_0}^{2N}\frac{1}{k^{1-\frac{1}{\rho}}}\leqslant A_6\frac{(2N)^{1/\rho}}{(N-1)^{1/\rho}}\leqslant B_2. \tag{5.13}$$

Таким образом, в области Δ_N имеем $|\Phi_1(z)|\leqslant B_1+B_2$. Но так как B_1 и B_2 не зависят от N, то функция ограничена в области $D_1^{(\rho)}(\delta)$. Очевидно, оценка такого типа имеет место и в области $D_2^{(\rho)}(\delta)$.

Таким образом

$$|\Phi_1(z)| \leqslant B_3$$

в области $D^{(\rho)}(\delta)$. Совершенно аналогично доказывается, что в этой области $|\Phi_2(z)| \leqslant B_4$. Отсюда и из (5.9) следует ограниченность в $D^{(\rho)}(\delta)$ функции $f_2(z)$. Вместе с ограниченностью $f_1(z)$ это равносильно утверждению (5.6) теоремы. Теорема 4 доказана.

Замечание. Еще не доказано, но нам представляется вероятным, что можно в теореме 4 опускать условие нечетности функции $f(z)$ и что $f(z)$ ограничена во всей области $D^{(\rho)}$.

Ереванский институт
народного хозяйства

Поступила 1. X. 1985

Ա.Ե. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ. Կետերի մի հաջորդականության վրա սահմանափակ վերջավոր կարգի ամբողջ ֆունկցիաների մասին (ամփոփում)

Աշխատանքում ապացուցված է ինտերպոլյացիոն բանաձև ρ (1< ρ <2) կարգի ամբողջ ֆունկցիաների համար, որոնք սահմանափակ են կետերի որոշակի հաջորդականության վրա։ Այդ բանաձևի հիման վրա ստացված են Պոլյայի և Կարտրայտի հայտնի թեորեմների տիպի թեորեմներ ρ կարգի ամբողջ ֆունկցիաների համար։

A. E. AVETISIAN. *On entire functions of finite order bounded on a sequence of points* (summary)

An interpolation formula is proved for entire functions of order $\rho\,(1<\rho<2)$ which are bounded on a certain sequence of points. Basing upon this formula, Polya and Cartwrite type theorems are obtained for entire functions of order ρ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Polya. Jahresbericht der Deutscher Mathematiker Vereinigung, Bd 40, (1931), стр. 80, проблема 105.
2. *M. Cartwright.* On certain integral functions of order 1. Quarterly J. of Math. (Oxford ser.) 7, 1936, 46—55.
3. *V. G. Iyer.* On the order and type of integral functions bounded at a sequence of points, Annals of Math. v. 38, N. 2, 1937.
4. *R. J. Duffin and A. C. Schaeffer.* Power series wiht bounded coefficients, Amer J. Math., v. 67, 1945.
5. *S. Agmon.* Functions of exponential type in an angle and singularities of Taylor series, Trans Amer. Math. Soc., 70, 1951, 492—508.
6. *Б. Я. Левин.* Обобщение теоремы Картрайт, Изв. АН СССР, сер. мат., 21, 1957, 549—558.
7. *V. Bernstein.* Sur les proprietes caracteristiques des indicatrices de croissance, C. R., 202, 1936, 108—110.
8. *A. Pfluger.* Ueber das Anwachsen von Funktionen, die in einem Winkelraum regular und von Exponental typus sind, Compositio Math., 4, 1937, 367—372.
9. *N. Levinson.* Cap and density theorems, American Math. Soc. coll. Publications, New York, 1940.
10. *R. P. Boas.* Asymptotic properties of functions of exponential type, Duke Math. J., 20, 1953, 433—448.
11. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, М., 1956.
12. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
13. *С. Г. Рафаелян.* Канд. диссертация, Ереван, 1984.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 2, 1987 Математика

УДК 517.53

Ф. А. ШАМОЯН

ТЕПЛИЦЕВЫ ОПЕРАТОРЫ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И НОВАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КЛАССА *BMO*

Введение

Пусть $H^p (0 < p \leqslant +\infty)$ — класс Харди в единичном круге $D = \{\zeta \in C : |\zeta| < 1\}$. Если $f \in H^p$, то $f = J_f Q_f$, где J_f — внутренняя, а Q_f — внешняя части функции f (см. [1]). Сравнительно недавно выяснилось, что эта факторизация обладает следующим важным свойством: многие классы функций, аналитических в D и гладких вплоть до единичной окружности Γ, инвариантны относительно деления на внутренний множитель (т. е. вместе с f соответствующий класс содержит J^{-1}, где J — любой внутренний делитель функции J_f). Это свойство важно для описания замкнутых идеалов (инвариантных подпространств) в алгебрах (пространствах) аналитических функций.

Обзор о состоянии вопроса дан в [2] и [3].

Устойчивость многих классов функций относительно деления на внутренний множитель может быть выведена из того, что оператор Теплица $T_h : f \to P(\bar{h}f)$, где $h \in H^\infty$, а P — проектор М. Рисса, сохраняет гладкость функции, понимаемую в том или ином смысле (см. [4] и [5]). В работе [2], в частности, было доказано, что T_h действует в пространстве $H^p_n = \{f \in H^1 : f^{(n)} \in H^p\}$ каковы бы ни были целое $n \geqslant 0$, $p \in (1, +\infty)$ и функция $h \in H^\infty$ (H^p_n наделяется нормой

$$\|f\|_{H^p_n} = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \|f^{(k)}\|_{H^p}).$$

Доказательство, данное в [2], существенно опирается на теорему М. Рисса о непрерывности проектора P в $L^p(\Gamma)$ при $p \in (1, +\infty)$ и поэтому неприменимо к классу H^1_n (см. [1]).

В этой статье мы дадим полную характеристику тех $h \in L^1(\Gamma)$, для которых операторы T_h действуют в пространствах H^1_n и $BMOA_n$ (см. теорему 1). Установление этих результатов основано на новой характеристике голоморфных в круге функций с граничными значениями из классов BMO. Хорошо известно, что изучение указанных теплицевых операторов в пространствах голоморфных в круге функций и гладких вплоть до его границы, имеет и другие интересные приложения (см. [6], [7]). Одно из таких приложений к задачам наилучшего приближения приведено в § 2 (теорема 3). Часть результатов этой статьи ранее была анонсирована в работе [8].

§ 1. Теплицевы операторы в пространствах H^1_n и $BMOA_n$

Пусть f—суммируемая функция на единичной окружности Г, скажем, что f принадлежит классу BMO, если

$$\|f\|_{BMO} = \sup_I \left\{ \frac{1}{|I|} \int_I |f(t) - f_I|\, dt \right\} < +\infty,$$

где I—дуга на единичной окружности Г, $f_I = \frac{1}{|I|} \int_I f(t)\, dt$, $|I|$—длина дуги I.

Обозначим, далее, через $BMOA_n = BMO \cap H^1_n$, $BMOA = BMOA_0$, $\|f\|_{BMOA_n} = \max_{0<k<n} \|f^{(k)}\|_{BMO}$.

Исходя из результатов работы [10], легко установить, что

$$BMOA = \left\{ f \in H^1 : f(z) = \int_\Gamma \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} |d\xi|,\ \varphi \in L^\infty(\Gamma),\ z \in D \right\}. \tag{1}$$

При этом существует функция $\varphi \in L^\infty(\Gamma)$ в представлении (1) такая, что

$$\|f\|_{BMOA} \leqslant C \|\varphi\|_\infty, \tag{2}$$

где C не зависит от f и φ (см. [10]).

Классы BMO, введенные в работах [10], [11], в последнее время играют существенную роль в различных вопросах комплексного анализа (см., например, [7], [9], [17]).

В дальнейшем $X = H^1_n$ $(n \geqslant 1)$ или $X = BMOA_n$ $(n > 1)$. Основным результатом этого параграфа является

Теорема 1. *Пусть* $h \in L^1(\Gamma)$, $T_h(f) = P(\bar{h}f)$—*теплицев оператор с символом* h. *Тогда*

1. *Следующие утверждения равносильны*:

а) T_h *действует в пространстве* X,

б) h *допускает представление*

$$h = h_1 + h_2, \tag{3}$$

где $\bar{h}_1 \in X$, $h_2 \in H^\infty_0$. *Здесь* $H^\infty_0 = \{f \in H^\infty : f(0) = 0\}$.

2. *Если* h *допускает представление* (3), *то имеет место оценка*

$$\|T_h\| \leqslant C(n) (\|\bar{h}_1\|_X + \|h_2\|_\infty). \tag{4}$$

Если же $h_1 \equiv 0$, *то справедлива также обратная оценка*

$$\|h_2\|_\infty \leqslant \|T_{h_2}\|. \tag{5}$$

Замечание 1. Условие $n > 1$ в теореме существенно: утверждение б) $\Rightarrow$ а) очевидно не имеет места при $X = H^1$, $BMOA$. Это немедленно следует из представления

$$T_h(f) = M_{h_1}(f) + T_{h_2}(f),\ f \in X,$$

где $M_{h_1}(f)(z) = \bar{h}_1(z) f(z)$, $z \in D$.

поскольку M_{h_1} действует в X не при всех $\bar{h}_1 \in X$. Более того, когда $X = H^1$, $h \in H^\infty$, импликация б) $\Rightarrow$ а) снова перестает быть справедливой. Действительно, положим

$$h(z) = h_2(z) = \exp\left\{-\frac{1+z}{1-z}\right\},\ \varphi(z) = \log\frac{1}{1-z},\ z \in \mathrm{D},$$

где берется главная ветвь логарифма. Легко видеть, что $\varphi \in BMOA$. Используя двойственность между H^1 и $BMOA$ (см. [10]), заметим, что при ограниченности T_h функция $\varphi \cdot h$ должна принадлежать $BMOA$, а это не имеет места, поскольку

$$\sup_{z \in \mathrm{D}} \{(1 - |z|)\,|(h(z)\,\varphi(z))'|\} = +\infty.$$

Значит, функция $\varphi \cdot h$ не представима в виде (1).

Другие примеры подобного рода можно построить, используя результаты работ [12], [14]. Отметим, что такой же эффект для других пространств голоморфных в круге D функций впервые был обнаружен в работе [2].

Следствие. Если $f \in X$, $f = JF$, где J — внутренняя функция, а $F \in H^1$, то $F \in X$ и

$$\|F\|_X \leqslant C(n)\,\|f\|_X.$$

В самом деле, $F = \mathrm{T}_J(f)$. При $X = H^1_1$ это утверждение иным методом было доказано в [15].

Доказательство теоремы 1 основано на новой характеристике функций класса $BMOA$ в терминах старших производных, на наш взгляд, имеющих самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Пусть G — аналитическая функция в единичном круге* D, *n — натуральное число, тогда следующие утверждения равносильны*:

1. $G \in BMOA$,

2. $\displaystyle\int_{\mathrm{D}} |F^{(n)}_{(z)}|\,|G^{(n)}_{(z)}|\,(1-|z|)^{2n-1}\,d\sigma(z) \leqslant C(n,\ G)\,\|F\|_{H^1}$

какова бы ни была функция F класса H^1. Если G представима по формуле (1), *то $C(n,\ G) \leqslant C(n)\,\|\varphi\|_\infty$. Здесь σ обозначает плоскую меру Лебега.*

§ 2. Вывод теоремы 1 из теоремы 2

Сначала докажем импликацию а) $\Rightarrow$ б). Пусть T_h действует в пространстве X, тогда $\mathrm{T}_h(1) \in X$. Положим $h_1 \overset{\text{def}}{=} \overline{\mathrm{T}_h(1)}$. Очевидно, что функция $h_2 = h - h_1$ принадлежит классу H^1_0, где $H^1_0 = \{f \in H^1,\ f(0) = 0\}$. Докажем, что $h_2 \in H^\infty$. Имеем

$$\mathrm{T}_h(f)(z) = \overline{h_1(z)}\,f(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\,\overline{h_2(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\zeta,\ z \in \mathrm{D}.$$

По условию $\overline{h_1}\in X$, поскольку оператор умножения на $\overline{h_1}$ ограничен в пространстве X, то оператор T_{h_2} действует в пространстве X. Имеем

$$T_{h_2}(f)(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\,\overline{h_2(e^{i\theta})}\,e^{-ik\theta}\,d\theta\right)z^k. \qquad (6)$$

Пусть $f(z)=f_r(z)\overset{\text{def}}{=}\dfrac{C(r,\ n)}{1-rz}$, $z\in\mathrm{D}$, $r\in(0,\ 1)$, а постоянная $C(r,\ n)$ подобрана таким образом, чтобы $\|f_r\|_X=1$, при всех $r\in(0,\ 1)$. Вычислим коэффициенты разложения функции $g_r(z)=T_{h_2}(f_r)(z)$, $z\in\mathrm{D}$. Используя (6), найдем

$$a_k(g_r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_r(e^{i\theta})\,\overline{h_2(e^{i\theta})}\,e^{-ik\theta}\,d\theta=$$

$$=C(r,\ n)\,\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{h_2(\zeta)\,\zeta^k}{\zeta-r}\,d\zeta}=C(r,\ n)\,\overline{h_2(r)}\,r^k,$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\cdots.$$

Следовательно, $g_r(z)=\overline{h_2(r)}\,f_r(z)$, $z\in\mathrm{D}$. В то же время

$$\|T_{h_2}(f_r)\|_X=|h_2(r)|\,\|f_2\|_X=|h_2(r)|\leqslant\|T_{h_2}\|\,\|f_r\|_X=\|T_{h_2}\|.$$

Подбирая вместо функции $f_r(z)$ функцию $f_r(e^{i\theta}z)$, таким же образом получим

$$|h_2(re^{i\theta})|\leqslant\|T_h\|,\ \theta\in]-\pi,\ \pi],\ r\in(0,\ 1),$$

т. е. $\|h_2\|_\infty\leqslant\|T_h\|$. Таким образом, импликация $a)\Rightarrow$ б) и одновременно оценка (5) установлены.

Для доказательства б) $\Rightarrow a)$, не умаляя общности, можно предположить, что $h_1\equiv 0$, т. е. $h=h_2\in H^\infty$. Пусть сначала $X=H_n^1$ $(n\geqslant 1)$ и $f\in H_n^1$, $F=T_h(f)$. Прежде всего заметим, что достаточно доказать оценку (4) в том случае, когда f голоморфна в круге радиуса больше единицы.

Дейтвительно, пусть $f_k(z)=f\left(\left(1-\dfrac{1}{k}\right)z\right)$, $k=1,\ 2,\cdots$. Очевидно, что последовательность $\{f_k\}_1^\infty$ приближает функцию f в пространстве H_n^1. Положим

$$F_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f_k(\zeta)\,h(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\ z\in\mathrm{D}.$$

Если мы докажем, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}|F_k^{(n)}(e^{i\theta})|\,d\theta\leqslant C(n)\,\|h\|_\infty\,\|f\|_{H_n^1},$$

то

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F_k^{(n)}(re^{i\theta})|\, d\theta \leqslant C(n) \|h\|_\infty \|f_k\|_{H_n^1},\ 0 < r < 1.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве, $k \to +\infty$ получим нужное нам утверждение. Итак, будем предполагать, что f голоморфна в $\overline{D}$. Пусть $\psi \in L^\infty$ и такова, что $\|\psi\|_\infty = 1$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F^{(n)}(re^{i\theta})|\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} F^{(n)}(re^{i\theta}) \overline{\psi(e^{i\theta})}\, d\theta, \tag{7}$$

где, как и прежде, $F = T_h(f)$.

Используя вид F получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} F^{(n)}(re^{i\varphi}) \psi(e^{i\varphi})\, d\varphi =$$

$$= \frac{n!}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \overline{h(e^{i\theta})\ e^{in\theta} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\varphi})\, e^{i(n+1)\varphi}\, d\varphi}{(e^{i\varphi} - re^{i\theta})^{n+1}}}.$$

Положим

$$G(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\varphi})\, e^{i(n+1)\varphi}}{e^{i\varphi} - z}\, d\varphi,\ z \in D.$$

Теперь равенство (7) можно записать в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F^{(n)}(re^{i\theta})|\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \overline{e^{in\theta} h(e^{i\theta})\ G^{(n)}(re^{i\theta})\, d\theta}.$$

Проинтегрировав по частям, получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F^{(n)}(re^{i\theta})|\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(e^{i\theta})\, e^{in\theta})^{(n)}\, e^{in\theta}\ \overline{g_r\ (e^{i\theta})}\ d\theta,$$

где

$$g_r(z) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^z (z-t)^{n-1} h(t)\, t^n\ G^{(n)}(rt)\, dt.$$

Учитывая, что $g_r \in H^2$ и $g_r \to g_1 \overset{\text{def}}{=} g$ при $r \to 1-0$ в пространстве H^2, приходим к равенству

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F^{(n)}(re^{i\theta})|\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})}\, d\theta,$$

где

$$f_n(z) = (z^n f(z))^{(n)}\, z^n.$$

При условии теоремы

$$f_n \in H^1 \text{ и } \|f_n\|_{H_1} \leqslant C(n)\|f\|_{H^1_n}.$$

Далее, воспользовавшись условием $f_n^{(k)}(0)=0$, $k=0, 1,\cdots, n-1$, $g^{(k)}_{(0)}=0$, $k=0, 1,\cdots, 2n$, легко установить равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_n(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\,d\theta =$$

$$=\frac{2}{(2n-1)!}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}(f_n(re^{i\theta})(re^{i\theta})^n)^{(n)}\overline{g^{(n)}(re^{i\theta})e^{in\theta}}\,\overline{r^{-n}}(1-r^2)^{2n-1}\,rd\theta\,dr. \quad (8)$$

Учитывая вид функций f_n и g, а также равенство (8), окончательно получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi}|F^{(n)}(e^{i\theta})|\,d\theta < C(n)\|h\|_\infty \times$$

$$\times\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}|f_n^{(n)}(re^{i\theta})|G^{(n)}(re^{i\theta})|(1-r)^{2n-1}\,rdrd\theta.$$

По теореме 2 последний интеграл не превосходит const$\|f\|_{H^1_n}$. Таким образом, когда $X=H^1_n$, оценка (4) установлена.

Случай пространства $BMOA_n$. Пусть снова $F=\mathrm{T}_h(f)$, $f\in BMOA_n$, $h\in H^\infty$. Тогда, как и выше, для произвольного $\psi\in H^1$ имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi}F^{(n)}(re^{i\theta})\overline{\psi(e^{i\theta})}\,d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}f_n(e^{i\theta})\,\overline{G_r(e^{i\theta})\,d\theta},\ r\in(0,1),$$

где

$$G_r(z)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^z(z-t)^{n-1}h(t)\,t^n\,(\zeta^n\psi(\zeta))^{(n)}_{\zeta=rt}\,dt,$$

$$f_n(z)=(f(z)z^n)^{(n)}z^n,\ z\in\mathrm{D}.$$

Снова используя равенство (8), получаем

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}F^{(n)}(re^{i\theta})\overline{\psi(e^{i\theta})}\,d\theta\right|\leqslant C_1(n)\|h\|_\infty\int_{\mathrm{D}}|f^{(2n)}(\zeta)\|\psi^{(n)}(\zeta)|(1-|\zeta|)^{2n-1}\,d\sigma(\zeta).$$

Здесь $d\sigma$—плоская мера Лебега на D. По теореме 2

$$\int_{\mathrm{D}}|f^{(2n)}_{(\zeta)}|\,|\psi^{(n)}_{(\zeta)}|(1-|\zeta|)^{2n-1}\,d\sigma(\zeta)\leqslant C_2(n)\|f^n\|_{BMOA}\|\psi\|_{H^1}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\overline{F^{(n)}(re^{i\theta})}\,\psi(e^{i\theta})\,d\theta\right|\leqslant C_3\|h\|_\infty\|\psi\|_{H^1}\|f\|_{BMOA_n}.$$

По теореме Стейна-Феффермана [10] $F^{(n)} \in BMOA$ и

$$\|F^{(n)}\|_{BMOA} \leqslant \widetilde{C}(n) \|h\|_\infty \|f\|_{BMOA_n}.$$

Доказательство теоремы 1 завершено.

Замечание. Рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, показывают, что если X—некоторая банахова алгебра голоморфных в круге D функций, гладких вплоть до его границы, то описание тех функций $h \in L^1(\Gamma)$, для которых T_h действует в пространстве X, фактически сводится к доказательству ограниченности T_h в X при условии, что $h \in H^\infty$.

Приведем одно приложение теоремы 1. Пусть $W_n^p(\Gamma)$, $(1 \leqslant p < +\infty)$ класс Соболева на единичной окружности Г, $BMO_n = \{f : f^{(n)} \in BMO\}$. Пусть, далее, X означает один из вышеуказанных классов функций. Для $f \in X$ положим

$$\inf_{g \in H^1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta})|\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta}) - g_f(e^{i\theta})|\, d\theta,$$

g_f является метрической проекцией функции f на подпространство H^1. Будем ее обозначать через $P_0(f)$. Пусть $f \in X$. Естественным образом возникает следующая задача; можно ли утверждать, что $P_0(f)$ также принадлежит классу X? Аналогичная задача в других классах функций рассматривалась в работах [6], [7], [16].

Теорема 3. *Пусть $f \in X$ и $P(f) \in X$, где P—проектор М. Рисса, тогда $P_0(f) \in X$.*

Доказательство. Положим

$$\psi = f - P_0(f). \tag{9}$$

По известной теореме (см. [9]) существует функция $h \in H^\infty$, $\|h\|_\infty = 1$ такая, что $h(e^{i\theta})\psi(e^{i\theta}) = |\psi(e^{i\theta})|$ почти всюду на Г. Следовательно

$$\overline{h}^2(e^{i\theta})\overline{\psi}(e^{i\theta}) = \psi(e^{i\theta}) \tag{10}$$

почти всюду. Положим $P_- = I - P$, где I—единичный оператор. Ясно, что для доказательства теоремы достаточно установить, что $\psi \in X$. С этой целью заметим, что $P_-\psi \in X$. Действительно, из равенства (9) имеем $P_-\psi = P_- f$, а по условию теоремы $P_- f$ принадлежит классу X. Теперь установим принадлежность функции $P\psi$ классу X. Для этого используем равенство (10) и положим

$$\psi_1 = P\overline{\psi},\quad \psi_2 = P_-\overline{\psi}.$$

Из (9) вытекает, что $\psi_1 \in X \cap H^1$. В то же время, в силу теоремы 1 и результатов работы [2] получаем $P\psi = P\overline{h}^2\psi_1 \in X$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $X = BMO_n$ или $X = W_n^p(\Gamma)$, $(1 < p < +\infty)$. Тогда оператор наилучшего приближения действует в X, т. е. $P_0 X \subset X$.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Доказательство 2)$\Rightarrow$1). Не умаляя общности можно считать, что $G^{(k)}(0)=0$, $k=0, 1,\cdots, n-1$. Пусть $r\in(0, 1)$ и F регулярна на $D\cup\Gamma$. Тогда, используя равенство (8) и 2), получаем

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{i\theta})\overline{G(re^{i\theta})}\,d\theta\right|=\left|\int_{-\pi}^{\pi} F(re^{i\theta})\overline{G(e^{i\theta})}\,d\theta\right|\leqslant$$

$$\leqslant C(n)\int_{\mathrm{D}}|F^{(n)}(rz)|\,|G^{(n)}(z)|(1-|z|)^{2n-1}\,d\sigma(z)\leqslant$$

$$\leqslant C(n,G)\int_{-\pi}^{\pi}|F(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant C(n,G)\|F\|_{H^1}.$$

Из теоремы Стейна-Фефферманa о двойственности пространств BMO и H^1 легко вывести теперь, что

$$G(rz)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\psi_r(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z}\,d\theta,\quad z\in\mathrm{D},$$

где $\psi_r\in L^\infty(\Gamma)$, $\|\psi_r\|_\infty\leqslant AC(n, G)$, A—некоторое положительное число. Выбирая $r_j\uparrow 1$ так, что ψ_{r_j} $*$ слабо сходится в $L^\infty(\Gamma)$ к некоторой функции из $\psi\in L^\infty(\Gamma)$, мы убедимся в том, что $G\in BMOA$. Для дальнейшего нам будет нужна

Лемма. *Пусть H—такая неотрицательная и измеримая по Лебегу в D функция, что мера $H^2(z)(1-|z|)\,d\sigma(z)$ карлесонова, т. е.*

$$\int_{\Delta_l(\varphi)}H^2(\zeta)(1-|\zeta|)\,d\sigma(\zeta)<C(H)\,l,\quad 0<l<1,\quad \varphi\in[-\pi,\pi],$$

где $\Delta_l(\varphi)=\left\{\zeta:1-l<|\zeta|<1,\ |\arg\zeta-\varphi|<\dfrac{l}{2}\right\}$.

Тогда при любом натуральном p

$$\int_{\mathrm{D}}|F^{(p)}(\zeta)|\,H(\zeta)(1-|\zeta|)^p\,d\sigma(\zeta)\leqslant C(H,p)\|F\|_{H^1}$$

какова бы ни была функция $F\in H^1$.

Доказательство. Как известно, $F=f\cdot g$, где $f, g\in H^2$ и $\|F\|_{H^1}=\|f\|_{H^2}\|g\|_{H^2}$ (см. [1]). Из формулы Лейбница для производных произведения следует, что достаточно оценить

$$J=\int_{\mathrm{D}}|f^{(j)}(\zeta)\,g^{(p-j)}(\zeta)|\,H(\zeta)(1-|\zeta|)^p\,d\sigma(\zeta),\quad 0\leqslant j\leqslant p.$$

Ясно, что $p=\left(j+\dfrac{1}{2}\right)+\left(p-j-\dfrac{1}{2}\right)$ и

$$J^2 \leqslant \int_D |f^{(j)}(\zeta)|^2 H^2(\zeta)(1-|\zeta|)^{2j+1} d\sigma(\zeta) \cdot \int_D |g^{p-j}(\zeta)|^2 (1-|\zeta|)^{2(p-j)-1} d\sigma(\zeta) \overset{def}{=} J_1^2 \cdot J_2^2.$$

Рассмотрим меру $d\mu(\zeta) = (1-|\zeta|)^{2j+1} H^2(\zeta)\, d\sigma(\zeta)$. Имеем

$$\mu(\Delta_l(\varphi)) \leqslant l^{2j} \int_{\Delta_l(\varphi)} (1-|\zeta|) H^2(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \leqslant C(H)\, l^{2j+1}.$$

Из результатов работы [13]

$$J_1^2 \leqslant C_1(H) \|f\|^2_{H^2}.$$

В то же время очевидно, что

$$J_2^2 \leqslant C_2(p) \|g\|^2_{H^2}.$$

Следовательно, имеем

$$J \leqslant J_1 J_2 \leqslant C_1(p)\, C_2(p) \|f\|_{H^2} \|g\|_{H^2} = C(H, p) \|F\|_{H^1}.$$

Доказательство леммы закончено.

Завершим теперь доказательство теоремы 2. Проверим 1) $\Rightarrow$ 2). С каждой точкой $\tau \in D$ и с числом $\delta \in (0, 1)$ свяжем круг $d_\delta(\tau) = \{\zeta \in \mathbf{C} : |\zeta - \tau| \leqslant \delta(1-|\tau|)\}$, его границу обозначим через $\gamma(\tau, \delta)$. Если $F \in H^1$, то

$$F^{(n)}(\tau) G^{(n)}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(\tau, \delta)} \frac{F^{(n)}(\zeta)\, G^{(n)}(\zeta)}{\zeta - \tau} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\tau, \delta)} K(\zeta, \tau)\, G'(\zeta)\, d\zeta, \quad (11)$$

где $K(\zeta, \tau) = \dfrac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \left(\dfrac{F^{(n)}(\zeta)}{\zeta - \tau} \right)$.

Проинтегрируем равенство (11) по δ в пределах от $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{2}$. Переставив интегралы, получим

$$\frac{1}{4} F^{(n)}(\tau) G^{(n)}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_D K(\zeta, \tau)\, G'(\zeta)\, \chi_\tau(\zeta) \frac{\zeta - \tau}{|\zeta - \tau|} d\sigma(\zeta),$$

где $\chi_\tau = \chi_{R(\tau)} (1-|\tau|)^{-1}$, $R(\tau) = d\left(\tau, \frac{1}{2}\right) \setminus d\left(\tau, \frac{1}{4}\right)$

(χ_E—характеристическая функция множества E). Далее

$$L = \int_D |F^{(n)}(\tau)| |G^{(n)}(\tau)| (1-|\tau|)^{2n-1} d\sigma(\tau) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} \int_D |G'(\zeta)| \int_D |K(\zeta, \tau)|\, \chi_\tau(\zeta) (1-|\tau|)^{2n-1} d\sigma(\tau)\, d\sigma(\zeta).$$

Из формулы Лейбница и определения L теперь видно, что достаточно оценить интегралы

$$L_j = \int\limits_{D} |G'(\zeta)\, F^{(n+j)}(\zeta)| \int\limits_{D} \frac{(1-|\tau|)^{2n-2}}{|\tau-\zeta|^{n-j}}\, \chi_{R(\tau)}(\zeta)\, d\sigma(\tau)\, d\sigma(\zeta),\ 0 \leqslant j \leqslant n-1.$$

Но если $\zeta \in R(\tau)$, то $|\zeta - \tau| > \frac{(1-|\tau|)}{4}$, а $1-|\tau| \leqslant 2(1-|\zeta|) \leqslant$

$\leqslant 3(1-|\tau|)$ (следствие неравенства $\big||\zeta| - |\tau|\big| \leqslant \frac{1}{2}(1-|\tau|)$). Поэтому

$$L_j \leqslant C(n) \int\limits_{D} |G'(\zeta)\, F^{(n+j)}(\zeta)| \Big(\int\limits_{\frac{1-|\zeta|}{6} < |\tau-\zeta| < 1-|\zeta|} (1-|\tau|)^{n+j-2}\, d\sigma(\tau) \Big) d\sigma(\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{C}(n) \int\limits_{D} |F^{(n+j)}(\zeta)\, G'(\zeta)|(1-|\zeta|)^{n+j}\, d\sigma(\zeta).$$

Из леммы следует, что $L_j \leqslant C(n, G)\|F\|_{H^1}$, так как мера $|G'(\zeta)|^2 \cdot (1-|\zeta|)\, d\sigma(\zeta)$ карлесонова (см. [10]). Теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Поступила 10. IX. 1985

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ. *Տյոպլիցյան օպերատորներ անալիտիկ ֆունկցիաների մի քանի տարածություններում* և BMO *դասի նոր խարակտերիստիկան (ամփոփում)*

Հոդվածում տրվում է միավոր շրջանագծի վրա որոշված այն h հանրագումարելի ֆունկցիաների լրիվ խարակտերիստիկան, որոնց համար h սիմվոլին ունեցող տյոպլիցյան օպերատորները գործում են շրջանում անալիտիկ և փակ շրջանում ողորկ ֆունկցիաների մի քանի տարածություններում։ Տրվում է նաև BMO *դասերի բնութագրումը այդ դասին պատկանող ֆունկցիաների Կոշու տիպի ինտեգրալների ածանցյալների տերմիններով։*

F. A. SHAMOJAN. *The Teoplitz operators in some spaces of analytic functions and a new characterization of the classes BMO* (summary)

In the paper we give a description of all function $h \in L^1$, for which the Toeplitz operator with symbols h acts in the some space of analytic functions in the disc. A new characterization of the class *BMO* is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *К. Гофман*. Банаховы пространства аналитических функций, М., ИЛ, 1963.
2. *Ф. А. Шамоян*. Об ограниченности одного класса операторов, связанных с делимостью аналитических функций, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем. 8, 1973, 474—490.
3. *N. A. Shirokov*. Division and multiplication by inner functions in spaces of analytic functions smooth up to boundary. Complex analysis and spectral theory, Lecture Notes in Math., v. 864, Springer-Verlag, 1981, 413—439.
4. *В. П. Хавин*. О факторизации аналитических функций, гладких вплоть до границы, Записки научн. семинаров ЛОМИ, т. 22, 1971, 202—204.
5. *Ф. А. Шамоян*. Деление на внутреннюю функцию в некоторых пространствах функций, аналитических в круге, Записки научн. семинаров ЛОМИ, т. 22, 1971, 206—209.
6. *J. P. Kahane*. Best approximation in $L^1(T)$, Bull. Amer. Math. Soc., 80 : 5, 1974, 788—804.
7. *В. В. Пеллер, С. В. Хрущев*. Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы, УМН, 37, вып. 1 (223), 1982, 53—124.

8. *Ф. А. Шамоян.* Об одном классе теплицевых операторов, связанных с делимостью аналитических функций, Функц. анализ и прил., 13:1, 1979.

9. *Дж. Гарнет.* Ограниченные аналитические функции, М., «Мир», 1984.

10. *Ch. Fefferman, E. M. Stein.* H^p spaces of several variables, Acta Math., 129, 1972. 137—193.

11. *F. John,* Nirenberg. On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure Appl. Math., 14, 1961, 415—426.

12. *D. A. Stegenga.* Bounded Teoplitz operators on H^1 and application of the duality between H^1 and the functions of bounded mean oscilation, Amer. Math. J., v. 98, №. 3, 1976, 573—583.

13. *Ф. А. Шамоян.* Теоремы вложения и характеристика следов в пространствах $H^p(U^n)$, $(0 < p < +\infty)$, Мат. сб., 107 (149), № 3, 1978, 446, 462.

14. *S. V. Hruscev, S.* A. *Vinogradov.* Inner functions and multipliers of Cauchy type integrals, LOMI, Preprint E-1-80, Leningrad, 1980.

15. *С. А. Виноградов, Н. А. Широков.* О факторизации аналитических функций с производной из H^p, Записки научн. семинаров ЛОМИ, т. 22, 1971, 8—27.

16. *L. Carleson and S. Jacobs.* Best uniform approximation by analytic functions Ark. Mat., v. 10, 1972, 219—229.

17. *П. Кусис.* Введение в теорию пространств H^p с приложением доказательства Вольфа теоремы о короне, М., «Мир», 1984.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 2, 1987 Математика

УДК 517. 946

Ф. О. МАМИКОНЯН

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Известное неравенство Гронуолла и его различные обобщения играют важную роль при изучении многих вопросов теории дифференциальных и интегральных уравнений (см., например, [1] или [2]).

Предлагаемая работа посвящена одному такому обобщению неравенства Гронуолла. Пусть $I^n \equiv \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n, \ x_i \geqslant 0, \ i=1, 2, \cdots, n\}$, а $I \equiv I^1$. В классе непрерывных на I^n функций рассматривается интегральное неравенство

$$u(x) \leqslant f(x) + \mathrm{K}u + \mathrm{L}u + \mathrm{N}u, \quad x \in I^n, \tag{0,1}$$

где

$$\mathrm{K}u \equiv p(x) \int_0^x K(t)\, u(t)\, dt, \tag{0.2}$$

$$\mathrm{L}u \equiv q(x) \int_0^x l(t) \left(\int_0^t m(s)\, u(s)\, ds \right) dt, \tag{0.3}$$

$$\mathrm{N}u \equiv \sum_{k=1}^{p} r_k(x) \int_0^x n_k(t)\, \omega_k[u(t)]\, dt, \tag{0.4}$$

а $f(x)$, $p(x)$, $K(x)$, $g(x)$, $l(x)$, $m(x)$, $r_i(x)$, $n_i(x)$ и $\omega_i(x)$ $(i=1, 2, \cdots, p)$ — некоторые заданные на I^n и I функции.

Изучение нелинейных интегральных неравенств вида (0.1) неразрывно связано с исследованиями по качественной теории дифференциальных и интегродифференциальных уравнений и основополагающий результат здесь принадлежит I. Bihari [3] (случай $n=1$, $f(x) \equiv \mathrm{const}$, $\mathrm{K}u \equiv \mathrm{L}u \equiv 0$, $p=1$, $r_1(x) \equiv \mathrm{const}$). Из многочисленных работ, посвященных оценкам решений частных классов интегральных неравенств вида (0.1), к предлагаемой непосредственно примыкают работы G. Butler и T. Rogers [8], U. D. Dhongade и S. G. Deo [9], V. Singare [10]; цикл работ по оценкам решений таких неравенств имеет B. G. Pachpatte (см., например, [11] — [13]).

Такие неравенства изучались также в связи с исследованиями по устойчивости и асимптотическому поведению решений дифференциальных и интегродифференциальных уравнений: здесь можно упомянуть работы S. Grace и B. Lalli [14], R. Agarval [15], J. Tong [16], En Hao Yang [17].

В § 1 работы сформулированы основные результаты, в § 2 приводятся доказательства.

§ 1 Формулировка результатов

При изучении интегральных неравенств вида (0.1) важную роль играют два „промежуточных“ случая: линейный случай, когда $\mathbf{N}u \equiv 0$ и случай, когда $\mathbf{K}u \equiv \mathbf{L}u \equiv 0$. Рассмотрение общего случая часто различными способами можно свести к некоторой комбинации этих двух частных случаев.

Рассмотрим сначала линейный случай:

$$u(x) \leqslant f(x) + \mathbf{K}u + \mathbf{L}u, \quad x \in I^n, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ определяются, соответсвенно, выражениями (0.2) и (0.3). Обозначим

$$\widehat{\alpha}(x) \equiv \sup_{0 \leqslant s \leqslant x} \alpha(s) \tag{1.2}$$

для любой непрерывной на I^n функции $\alpha(x)$.

Теорема 1. *Пусть функции $f(x)$, $p(x)$, $K(x)$, $q(x)$, $l(x)$ и $m(x)$ непрерывны и неотрицательны на I^n.*

Тогда для любой удовлетворяющей неравенству (1.1) *непрерывной функции $u(x)$ имеет место оценка*

$$u(x) \leqslant \widehat{f}(x) \cdot \tau(x), \quad x \in I^n, \tag{1.3}$$

где

$$\tau(x) \equiv \exp\left\{\widehat{p}(x)\int_0^x K(t)\,dt\right\} \cdot \exp\left\{\widehat{q}(x)\int_0^x l(t)\left(\int_0^t m(s)\,ds\right)dt\right\}. \tag{1.4}$$

Если n—нечетное число, оценку (1.3) можно существенно уточнить. Для того, чтобы сформулировать соответствующий результат, введем, следуя [6], понятие мультипликативной степени m (m—натуральное число) функции. Пусть $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in I^n$ и $1 \leqslant k < m \leqslant n$, где k и m—натуральные числа. Обозначим $x^{m-k} \equiv (x_{k+1}, x_{k+2}, x_m)$.

Определение. Заданную на I^n функцию $h(x)$ назовем мультипликативной степени $m\,(1 \leqslant m \leqslant n)$ функцией, если существует последовательность целых чисел $p_0, p_1, \cdots, p_m$ $(0 = p_0 < p_1 < \cdots < p_{m-1} < < p_m = n)$ и функции $h_i(x^{p_i - p_{i-1}})$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ такие, что

$$h(x) = \prod_{i=1}^{m} h_i(x^{p_i - p_{i-1}}), \quad x \in I^n. \tag{1.5}$$

Имеет место

Теорема 2. *Пусть n—нечетное число, а функции $f(x)$, $p(x)$, $q(x)$, $l(x)$ и $m(x)$ непрерывны и неотрицательны на I^n. Пусть, далее, $K(x) \leqslant h(x)$ $(x \in I^n)$, где $h(x)$—мультипликативная степени $m\,(1 \leqslant m \leqslant n)$ функция, то есть допускает представление* (1.5).

Тогда, если функции h_i непрерывны и неотрицательны, соответственно на $I^{p_i - p_{i-1}}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$, то для любой удовлетво-

ряющей неравенству (1.1) *непрерывной функции* $u(x)$ *имеет место оценка* (1.3), *где*

$$(\tau x)\equiv I_m[p(x)\,\mu(x;\ h_1,\ h_2,\cdots,\ h_m)]\cdot J_0\left(2i\sqrt{\widehat{q}(x)\int_0^x l(t)\,dt\int_0^x m(t)\,dt}\right), \tag{1.6}$$

причем

$$\mu(x;\ h_1, h_2,\cdots, h_m)\equiv\prod_{i=1}^{m}\int_0^{x^{r_i}} h_i(\xi^{r_i})\,d\xi^{r_i} \tag{1.7}$$

$$(r_i=p_i-p_{i-1};\ d\xi^{r_i}\equiv d\xi_{p_{i-1}+1}\cdots d\xi_{p_i};\ i=1,\ 2,\cdots,\ m),$$

$$I_m(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau^k}{(k!)^m},$$

где $J_0(s)$ — *функция Бесселя нулевого порядка.*

Заметим, что в частных случаях оценку (1.3) можно получить при более слабых ограничениях: а именно, предполагая локальную интегрируемость с квадратом и неотрицательность на I^n функций, определяющих неравенство (1.1). Это, в частности, имеет место для нечетных n, если $p(x)\equiv q(x)\equiv 1$ (для случая $n=1$ соответствующий результат сформулирован в [5]) и для произвольного n, если $Lu\equiv 0$ (см. [6]).

В связи с оценкой (1.3) для нечетных n отметим также, что любая функция является мультипликативной степени 1 функцией. Поэтому полученная оценка имеет место для произвольной непрерывной и неотрицательной на I^n функции $K(x)$: только в этом случае $I_m(\tau)$ совпадает с экспонентой. С другой стороны, если функция $K(x)$ ограничена на I^n хотя бы по одной переменной x_i, она мажорируется сверху через мультипликативную степени 2 функцию. Если $K(x)$ вообще не зависит от некоторых переменных $x_{i_1}, x_{i_2},\cdots, x_{i_p}$ ($i_s\leqslant n,\ s=1,\cdots,\ p$), то она сама является мультипликативной степени p функцией. Что касается поведения функции $I_m(\tau)$ при $\tau\to+\infty$, то заметим, что

$$I_m(\tau)\leqslant C(m)\cdot\exp[m\,\tau^{1/m}],$$

где $C(m)=\sqrt{m}\cdot e^{-12m}$ (см. [6]) и, в частности, $I_2(\tau)=J_0(2i\sqrt{\tau})$, где $J_0(s)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Приведенные здесь оценки обобщают и уточняют полученные ранее результаты. Отметим, в частности, используемые часто в приложениях результаты B. G. Pachpatte [11] (случай $n=1$, $p(x)\equiv q(x)\equiv 1$, $K(x)\equiv l(x)$) и R. Agarval [15] (случай $n=1$, $p(x)\equiv q(x)\equiv 1$), результат которого следует из оценки (1.3) теоремы 1 при $n=1$. Например, для „модельного" случая, когда $p(x)\equiv q(x)\equiv 1$, $K(x)=k_0=\text{const}$, $l(x)=l_0=\text{const}$, $m(x)=m_0=\text{const}$, а $f(x)$ — неубывающая функция, полученный в [15] для $n=1$ результат гарантирует, что

$$u(x) \leqslant f(x) \cdot e^{k_0 x} \cdot e^{l_0 m_0 \frac{x^2}{2}},$$

в то время как из оценки (1.3) теоремы 2 следует

$$u(x) \leqslant f(x) \cdot e^{k_0 x} J_0 (2i \sqrt{l_0 \cdot m_0 \cdot x^2}),$$

что на порядок точнее.

Ряд работ (см., например, [12], [15]) посвящен обращению двумерных интегральных неравенств типа (1.1). Однако предложенные в этих работах оценки содержат функцию Римана некоторой определяемой интегральным неравенством краевой задачи, причем исследование поведения этой функции представляет собой задачу по крайней мере той же трудности, что и обращение самого интегрального неравенства. Предложенная здесь оценка (1.3) теоремы 1 позволяет, на наш взгляд, устранить этот недостаток.

Пусть теперь $\mathbf{K}u \equiv \mathbf{L}u \equiv 0$. В этом случае интегральное неравенство (0.1) примет вид

$$u(x) \leqslant f(x) + \mathbf{N}u, \quad x \in I^n, \tag{1.9}$$

где $\mathbf{N}$ определяется выражением (0.4).

Определение. Непрерывная на I функция $\varphi(x)$ называется субмультипликативной на I, если

$$\varphi(x \cdot y) \leqslant \varphi(x) \cdot \varphi(y) \tag{1.10}$$

для любых $x, y \in I$.

Функция $\varphi(x) = x^k$ $(k \geqslant 0)$, например, являетcя субмультипликативной на I.

Следуя [9] и [18] введем

Определение. Скажем, что непрерывная на I функция $\varphi(x)$ принадлежит классу $S_r(I)$, где r—действительное число, если

$$\alpha^{-1} \varphi(x) \leqslant \varphi(\alpha^{-1} \cdot x), \quad x \in I \tag{1.11}$$

для всех $\alpha \geqslant r$.

Легко проверить, например, что функция $\varphi(x) = x^k$ $(0 \leqslant k \leqslant 1)$ принадлежит классу $S_1(I)$. Имеет место

Теорема 3. *Пусть функции $f(x)$, $r_k(x)$ и $n_k(x)$ $(k=1, 2, \cdots, p)$ непрерывны и неотрицательны на I^n, причем $f(x) \neq 0$ на множестве $0 < x \leqslant \varepsilon$ для любого положительного ε. Пусть, кроме того, $\omega_k(x) \leqslant \varphi_k(x)$ $(x \in I,\ k = 1, 2, \cdots, p)$, где $\varphi_k(x)$ непрерывны, неотрицательны, не убывают на I, причем $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_s(x)$ $(0 \leqslant s \leqslant p)$ субмультипликативны на I, а $\varphi_{s+1}(x), \cdots, \varphi_p(x)$ принадлежат $S_\gamma(I)$, где $\gamma = f(0)$.*

Тогда для любой удовлетворяющей неравенству (1.9) непрерывной функции $u(x)$ имеет место оценка

$$u(x) \leqslant \widehat{f}(x) \prod_{k=1}^{s} Q_k(x) \prod_{k=s+1}^{p} G_k(x), \quad x \in I^n, \tag{1.12}$$

где

$$Q_k(x) \equiv \Phi_k^{-1}\Big\{\Phi_k(1) +$$

$$+ \frac{\widehat{r}_k(x)}{\widehat{f}(x)} \cdot \varphi_k[\widehat{f}(x)] \cdot \prod_{L=1}^{k-1} \varphi_k[Q_L(x)] \cdot \int_0^x n_k(t)\,dt\Big\} \quad (k = 1, 2 \cdots s), \tag{1.13}$$

$$G_k(x) \equiv \Phi_k^{-1}\Big\{\Phi_k(1) + \widehat{r}_k(x) \prod_{L=1}^{s} Q_L(x) \cdot \prod_{L=s+1}^{k-1} G_L(x) \cdot \int_0^x n_k(t)\,dt\Big\}, \tag{1.14}$$
$$(k = s+1, \cdots, p)$$

$\widehat{f}(x)$ *и* $\widehat{r}_k(x)$ $(k = 1, 2, \cdots, p)$ *определяется* (1.2), *а*

$$\Phi_k(u) \equiv \int_{u_k}^{u} \frac{ds}{\varphi_k(s)}, \quad (u \geqslant 0,\ u_k > 0,\ k = 1, 2, \cdots, p), \tag{1.15}$$

причем оценка имеет место по крайней мере для тех $x \in I^n$, ***для которых***

$$\Phi_k(1) + \frac{\widehat{r}_k(x)}{\widehat{f}(x)} \cdot \varphi_k[\widehat{f}(x)] \cdot \prod_{L=1}^{k-1} \varphi_k[Q_L(x)] \cdot \int_0^x n_k(t)dt \in \mathrm{Dom}(\Phi_k^{-1}) \tag{1.16}$$

для всех $k = 1, 2, \cdots, s$ ***и***

$$\Phi_k(1) + \widehat{r}_k(x) \cdot \prod_{L=1}^{s} Q_L(x) \cdot \prod_{L=s+1}^{k-1} G_L(x) \cdot \int_0^x n_k(t)\,dt \in \mathrm{Dom}(\Phi_k^{-1}) \tag{1.17}$$

для всех $k = s+1, s+2, \cdots, p$.

Заметим, что оценка (1.12) не зависит от выбора u_k в определении функции $\Phi_k(u)$ (1.15). Действительно, полагая в (1.15) $\overline{u}_k$ вместо u_k, получим

$$\overline{\Phi}_k(u) \equiv \int_{\overline{u}_k}^{u} \frac{ds}{\varphi_k(s)} = \Phi_k(u) - \delta_k, \text{ где } \delta_k \equiv \int_{u_k}^{\overline{u}_k} \frac{ds}{\varphi_k(s)},$$

откуда $\overline{\Phi}_k(1) = \Phi_k(1) - \delta_k$ $(k = 1, 2, \cdots, p)$. В свою очередь, $\overline{\Phi}_k^{-1}(x) = \Phi_k^{-1}(x + \delta_k)$, поэтому

$$\overline{\Phi}_k^{-1}\{\overline{\Phi}_k(1) + A\} = \overline{\Phi}_k^{-1}\{\Phi_k(1) - \delta_k + A\} = \Phi_k^{-1}\{\Phi_k(1) + A\},$$

что обеспечивает независимость $Q_k(x)$ и $G_k(x)$ $(k = 1, 2, \cdots, p)$, а следовательно, и оценки (1.12) от выбора u_k. Наиболее естественно положить $u_k = 0$ $(k = 1, 2, \cdots, p)$. Однако, легко видеть, что это можно сделать только в случае, когда $\Phi_k(u)$ имеет конечный предел при $u_k \to +0$. В противном случае такой выбор невозможен.

Если рассматривать важный для приложений случай, когда $\omega_k(x) = x^{r_k}$ $(k = 1, 2, \cdots, p)$, то несложный анализ показывает, что если $0 \leqslant r_k \leqslant 1$ для всех k, то оценку (1.12) можно применить, полагая как $s = p$, так и $s = 0$ (если только $f(0) \geqslant 1$), причем оценка будет иметь место для всех $x \in I^n$. Если же $r_k > 1$ для всех k, то оценка (1.12) применима только для $s = p$ и имеет место на некотором подмножестве I^n. В „промежуточном" случае, когда $0 \leqslant r_k \leqslant 1$ для $k = 1, 2, \cdots, s$ и $r_k > 1$ для $k = s + 1, s + 2, \cdots, p$ $(0 < s < p)$, оценка (1.12) имеет место на некотором подмножестве I^n.

Например, для интегрального неравенства

$$u(x) \leqslant f(x) + \int_0^x n_1(t)\, u^k(t)\, dt + \int_0^x n_2(t)\, u^m(t)\, dt, \; x \in I^n, \tag{1.18}$$

где $0 < k < 1$, $m > 1$, а $f(0) \geqslant 1$, имеем $r_1(x) \equiv r_2(x) \equiv 1$, $\omega_1(x) \equiv x^k$, $\omega_2(x) = x^m$ и, согласно (1.15)

$$\Phi_1(u) = \int_{u_1}^{u} \frac{ds}{s^k} = \frac{u^{1-k}}{1-k} - \frac{u_1^{1-k}}{1-k} = \frac{u^{1-k}}{1-k},$$

если положить $u_1 = 0$ (так как $0 < k < 1$), и

$$\Phi_2(u) = \int_{u_2}^{u} \frac{ds}{s^m} = \frac{u^{1-m}}{1-m} - \frac{u_2^{1-m}}{1-m} = \frac{1}{m-1}\left\{1 - \frac{1}{u^{m-1}}\right\},$$

если положить $u_2 = 1$ (так как $m > 1$). Тогда, согласно (1.12), (1.13) и (1.14), для любой удовлетворяющей неравенству (1.18) непрерывной функции $u(x)$ имеет место оценка

$$u(x) \leqslant \hat{f}(x) \cdot \left\{1 + (1-k) \cdot \int_0^x n_1(t)\, dt\right\}^{\frac{1}{1-k}} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{1 - (m-1)\, \hat{f}^{m-1}(x) \cdot \int_0^x n_2(t)\, dt}\right]^{\frac{1}{m-1}}$$

по крайней мере для тех $x \in I^n$, для которых

$$(m-1) \cdot \hat{f}^{m-1}(x) \cdot \int_0^x n_2(t)\, dt < 1. \tag{1.19}$$

Так как левая часть последнего неравенства обращается в нуль при $x = 0$, по непрерывности существует интервал $0 \leqslant x < a$, на котором выполнено условие (1.19).

Рассмотрим теперь общий случай интегрального неравенства (0.1). Используя полученные выше оценки, нетрудно показать, что имеет место

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия теоремы 3. Тогда для любой удовлетворяющей неравенству* (0.1) *непрерывной функции* $u(x)$ *имеет место оценка*

$$u(x) \leqslant \hat{f}(x) \cdot \tau(x) \cdot \prod_{k=1}^{s} \tilde{Q}_k(x) \cdot \prod_{k=s+1}^{p} \tilde{G}_k(x), \quad x \in I^n, \tag{1.20}$$

где $\tilde{Q}_k(x)$ *и* $\tilde{G}_k(x)$ *получаются соответственно из* (1.13) *и* (1.14) *заменой всюду* $\hat{f}(x)$ *на* $\hat{f}(x)\cdot\tau(x)$, *а* $\hat{r}_k(x)$ — *на* $\hat{r}_k(x)\cdot\tau(x)$ $(k=1, 2, \cdots, p)$, *причем* $\tau(x)$ *определяется выражением* (1.6), *если выполнены условия теоремы* 2 *и выражением* (1.4), *если выполнены условия теоремы* 1.

Заметим, что оценка (1.20) содержит как частные случаи полученные выше оценки (1.3) и (1.12). Она также обобщает и уточняет ряд полученных для частных случаев (в основном для одномерных неравенств) результатов (см., например, [11], [15] или [17]). Полученные оценки для решений интегрального неравенства (0.1) могут использоваться как для уточнения полученных ранее (см. [15] или [17]), так и для установления новых оценок поведения при $x \to +\infty$ решений широкого класса как одномерных, так и многомерных дифференциальных и интегродифференциальных уравнений.

§ 2. Доказательства

Докажем сформулированные выше утверждения.

Для доказательства утверждения теоремы 1 зафиксируем некоторую точку $x_0 \in I^n / \{0\}$ и рассмотрим на множестве $I^n_{x_0} \equiv \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in I^n,\ 0 \leqslant x \leqslant x_0\}$ интегральное уравнение

$$z(x) = \hat{f}(x_0) + \hat{p}(x_0) \int_0^x K(t)\, z(t)\, dt + \hat{q}(x_0) \int_0^x l(t) \left(\int_0^t m(s)\, z(s)\, ds \right) dt,$$

решение которого $z(x)$ является на $I^n_{x_0}$ неулучшаемой оценкой сверху для удовлетворяющих неравенству (1.1) функций (см., например, [4]), причем $\hat{f}(x_0)$, $\hat{p}(x_0)$ и $\hat{q}(x_0)$ определяются (1.2). Тогда

$$D_1 \cdots D_n z(x) = \hat{p}(x_0) \cdot K(x) \cdot z(x) + \hat{q}(x_0) \cdot l(x) \cdot \int_0^x m(t)\, z(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant z(x) \left\{ \hat{p}(x_0)\, K(x) + \hat{q}(x_0) \cdot l(x) \cdot \int_0^x m(t)\, dt \right\},$$

где $D_1 \cdots D_k \equiv D_k(D_1 \cdots D_{k-1})$ $(k=2, 3, \cdots, n)$, а $D_i \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Но так как

$$D_1 \cdots D_k z(x) \cdot D_{k+1} z(x) \geqslant 0 \quad (k=1, 2, \cdots, n-1)$$

$$D_1 \cdots D_k z(x) \big|_{x_{k+1}=0} = 0,$$

согласно [7] имеем

$$\ln z(x) \leqslant \ln z(x)|_{x_1=0} + \int_0^x \left\{\hat{p}(x_0)\cdot K(t) + \hat{q}(x_0)\cdot l(t)\cdot \int_0^t m(s)\,ds\right\} dt,\ x \in \Gamma_{x_0}^n$$

откуда, с учетом того, что $z(x)|_{x_1=0} = \hat{f}(x_0)$ и $u(x) \leqslant z(x)$ получаем, что

$$u(x) \leqslant \hat{f}(x_0)\cdot \exp\left\{\hat{p}(x_0)\cdot \int_0^x K(t)\,dt + \hat{q}(x_0)\int_0^x l(t)\left(\int_0^t m(s)\,ds\right)dt\right\} \equiv$$

$$\equiv Q(x_0, x),\ x \in \Gamma_{x_0}^n.$$

Так как искомая оценка верна и при $x = x_0$, имеем $u(x_0) \leqslant Q(x_0, x_0)$, откуда, ввиду произвольности выбора точки $x_0 \in I^n$, имеем $u(x) \leqslant \leqslant Q(x, x)$, что и составляет содержание оценки (1.3) с учетом (1.4). Теорема доказана.

Для доказательства утверждения теоремы 2 нам понадобится ряд вспомогательных утверждений. В классе локально интегрируемых с квадратом на I^n функций рассмотрим интегральные операторы

$$Au \equiv \int_0^x a(t)\,u(t)\,dt, \tag{2.1}$$

$$Bu \equiv \int_0^x b(t)\left(\int_0^t c(s)\,u(s)\,ds\right)dt. \tag{2.2}$$

Имеет место

Лемма 2.1 *Пусть* $e(x) \equiv 1$ *и функции* $a(x)$, $b(x)$ *и* $c(x)$ *локально интегрируемы с квадратом и неотрицательны на* I^n, *где* n*—нечетное число. Тогда для интегральных операторов* (2.1) *и* (2.2) *соотношения*

$$A(A^{m-1}e\cdot B^pe) + B(A^me\cdot B^{p-1}e) \leqslant A^me\cdot B^pe \tag{2.3}$$

имеют место для любых натуральных p *и* m.

Для доказательства утверждения леммы заметим, что

$$R_{m,p}\{A, B\} \equiv A(A^{m-1}e\cdot B^pe) + B(A^me\cdot B^{p-1}e) =$$

$$= \int_0^x a(t)\cdot A^{m-1}e(t)\cdot B^pe(t)\,dt + \int_0^x b(t)\left(\int_0^t c(s)\,A^me(s)\cdot B^{p-1}e(s)\,ds\right)dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^x a(t)\cdot A^{m-1}e(t)\cdot B^pe(t)\,dt + \int_0^x b(t)\cdot A^me(t)\left(\int_0^t c(s)\,B^{p-1}e(s)\,ds\right)dt.$$

Так как

$$A^m e(x) = \int_0^x a(t)\,A^{m-1}e(t)\,dt \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

имеем, что $D_1\cdots D_n A^m e(x) = a(x) A^{m-1} e(x)$ и $D_1\cdots D_k A^m e(x)|_{x_{k+1}=c} = 0$ $(k=1, 2, \cdots, n-1)$. Тогда, проинтегрировав по частям в первом слагаемом, получим

$$R_{m,p}\{A, B\} \leqslant \int\limits_0^x D_1\cdots D_n A^m e(t)\cdot B^p e(t)\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^x b(t)\cdot A^m e(t)\left(\int\limits_0^t c(s)\cdot B^{p-1} e(s)\, ds\right) dt =$$

$$= A^m e(x)\cdot B^p e(x) + (-1)^n \int\limits_0^x A^m e(t)\cdot D_1\cdots D_n B^p e(t)\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^x b(t)\cdot A^m e(t)\left(\int\limits_0^t e(s)\cdot B^{p-1} e(s)\, ds\right) dt = A^m e(x)\cdot B^p e(x) +$$

$$+ \int\limits_0^x A^m e(t)\left\{D_1\cdots D_n B^p e(t) - b(t)\int\limits_0^t c(s)\, B^{p-1} e(s)\, ds\right\} dt.$$

Но выражение в фигурных скобках равно нулю, так как по определению

$$B^p e(x) = \int\limits_0^x b(t)\left(\int\limits_0^t c(s)\, B^{p-1} e(s)\, ds\right) dt \quad (p=1, 2, \cdots).$$

Отсюда получаем, что $R_{m,p}\{A\ B\} \leqslant A^m e\cdot B^p e$, что и доказывает лемму.

Лемма 2.2. *В предположениях леммы 2.1 для интегральных операторов (2.1) и (2.2) соотношения*

$$(A+B)^m e \leqslant \sum_{i=0}^m A^{m-i} e\cdot B^i e$$

имеют место для любого натурального m.

Доказательство проведем по индукции. При $m=1$ оно очевидно. Пусть оно верно для $m=k$. Тогда

$$(A+B)^{k+1} e \equiv (A+B)[(A+B)^k e] = A[(A+B)^k e] + B[(A+B^k)\, e].$$

Ввиду изотонности операторов A и B и предположения индукции при $m=k$

$$(A+B)^{k+1} e \leqslant \sum_{i=0}^k A(A^{k-i} e\cdot B^i e) + \sum_{i=0}^k B(A^{k-i} e\cdot B^i e) =$$

$$= A^{k+1} e + \sum_{i=1}^k A(A^{k-i} e\cdot B^i e) + \sum_{i=0}^{k-1} B(A^{k-i} e\cdot B^i e) + B^{k+1} e.$$

Меняя индекс суммирования в первой сумме и делая замену $i=p-1$ во второй, получим

$$(A+B)^{k+1}e \leqslant A^{k+1}e+\sum_{p=1}^{k}A(A^{k-p}e\cdot B^{p}e)+\sum_{p=1}^{k}B(A^{k-p+1}e\cdot B^{p-1}e)+$$

$$+B^{k+1}e=A^{k+1}e+\sum_{p=1}^{k}\{A(A^{k-p}e\cdot B^{p}e)+B(A^{k-p+1}e\cdot B^{p-1}e)+B^{k+1}e.$$

Согласно утверждению леммы 2.1

$$A(A^{k-p}e\cdot B^{p}e)+B(A^{k-p+1}e\cdot B^{p}e)\leqslant A^{k-p}e\cdot B^{p}e \quad (p=1,\ 2,\cdots,\ k).$$

Тогда

$$(A+B)^{k+1}e<A^{k+1}e+\sum_{p=1}^{k}A^{k-p}e\cdot B^{p}e+B^{k+1}e=\sum_{p=0}^{k+1}A^{k-p}e\cdot B^{p}e,$$

то есть (2.4) верна для $m=k+1$, а следовательно и для любого натурального m. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть функции $f(x)$, $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ локально интегрируемы с квадратом и неотрицательны на I^n, где n—нечетное число. Пусть, кроме того, $z_1(x)$ и $z_2(x)$ являются определенными на I^n решениями, соответственно, интегральных уравнений*

$$u=1+Au, \tag{2.5}$$

$$v=1+Bv. \tag{2.6}$$

Тогда для определенного на I^n решения $z(x)$ интегрального уравнения

$$\omega(x)=f(x)+A\omega+B\omega \tag{2.7}$$

имеет место оценка

$$z(x)\leqslant \operatorname*{esssup}_{0<s<x} f(s)\cdot z_1(x)\cdot z_2(x) \tag{2.8}$$

почти всюду на I^n, если только $f(x)$ локально существенно ограничена на I^n.

Для доказательства утверждения леммы решение $z(x)$ интегрального уравнения (2.7) представим в виде ряда Неймана

$$z(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(A+B)^{k}f.$$

Так как $f(x)$ неотрицательна и локально существенно ограничена сверху на I^n, то

$$z(x)\leqslant \operatorname*{esssup}_{0<s<x} f(s)\cdot \sum_{k=0}^{\infty}(A+B)^{k}e,$$

где $e(x)\equiv 1$. Согласно утверждению леммы 2.2

$$z(x)\leqslant \operatorname*{esssup}_{0<s<x} f(s)\cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{k}A^{k-p}e\cdot B^{p}e\right)\cdot$$

С другой стороны, так как $z_1(x)$ и $z_2(x)$—определенные на I^n решения, соответственно интегральных уравнений (2.5) и (2.6),

$$z_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A^{k}e,\quad z_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}B^{k}e.$$

откуда, согласно формуле Коши для произведения абсолютно сходящихся рядов, получим

$$z(x) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{0<s<x} f(s) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{k} A^{k-p} e \cdot B^p e \right) \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{0<s<x} f(s) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A^k e \cdot \sum_{k=0}^{\infty} B^k e = \operatorname*{ess\,sup}_{0<s<x} f(s) \cdot z_1(x) \cdot z_2(x).$$

Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству утверждения теоремы 2. Зафиксируем точку $x_0 \in I^n / \{0\}$ и на множестве $I^n_{x_0} \equiv \{(x_1, \cdots, x_n) \in I^n,\ 0 \leqslant x \leqslant x_0\}$ рассмотрим интегральное уравнение

$$z(x) = f(x) + \hat{p}(x_0) \int_0^x K(t)\, z(t)\, dt + \hat{q}(x_0) \int_0^x l(t) \left(\int_0^t m(s)\, z(s)\, ds \right) dt, \tag{2.9}$$

решение которого является неулучшаемой на $I^n_{x_0}$ оценкой сверху для удовлетворяющих неравенству (1.1) функций (см., например, [4]), причем $\hat{p}(x_0)$ и $\hat{q}(x_0)$ определяются (1.2). Если положить $a(x) \equiv \hat{p}(x_0) \times K(x)$, $b(x) \equiv \hat{q}(x_0) \cdot e(x)$ и $c(x) \equiv m(x)$, то согласно лемме 2.3 для решения интегрального уравнения (2.9) имеет место оценка

$$z(x) \leqslant \hat{f}(x) \cdot z_1(x) \cdot z_2(x),\quad x \in I^n_{x_0}, \tag{2.10}$$

где $z_1(x)$ и $z_2(x)$, соответственно, решения интегральных уравнений

$$v(x) = 1 + \hat{p}(x_0) \int_0^x K(t)\, v(t)\, dt \tag{2.11}$$

$$\omega(x) = 1 + \hat{q}(x_0) \int_0^x l(t) \left(\int_0^t m(s)\, \omega(s)\, ds \right) dt \tag{2.12}$$

на множестве $I^1_{x_0}$, а $\hat{f}(x)$ определяется (1.2). Как это следует из утверждения теоремы 4 работы [6], для решения $z_1(x)$ интегрального уравнения (2.11) имеет место оценка

$$z_1(x) \leqslant I_m \{\hat{p}(x_0) \cdot \mu(x;\ h_1, h_2, \cdots h_m)\}, \tag{2.13}$$

где $I_m(\tau)$ и $\mu(x;\ h_1, h_2, \cdots, h_m)$ определяются, соответственно, выражениями (1.8) и (1.7). Что касается рассматриваемого на $I^n_{x_0}$ решения $z_2(x)$ интегрального уравнения (2.12), то

$$z_2(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \omega_p(x), \tag{2.14}$$

где

$$\omega_0(x) \equiv 1,$$

$$\omega_p(x) = \widehat{q}(x_0)\int\limits_0^x l(t)\left(\int\limits_0^t m(s)\cdot\omega_{p-1}(s)\,ds\right)dt \quad (p=1,\ 2,\cdots).$$

Покажем, что для $\omega_p(x)$ имеет место оценка

$$\omega_p(x) \leqslant \frac{[\widehat{q}(x_0)\cdot\beta(x)\cdot\gamma(x)]^p}{(p\,!)^2}\,(x \in I^n_{x_0},\ p=1,\ 2,\cdots), \tag{2.15}$$

где

$$\beta(x) \equiv \int\limits_0^x l(t)\,dt, \qquad \gamma(x) \equiv \int\limits_0^x m(t)\,dt.$$

Воспользуемся для этого методом математической индукции. При $p = 1$ имеем

$$\omega_1(x) \equiv \widehat{q}(x_0)\cdot\int\limits_0^x l(t)\left(\int\limits_0^t m(s)\cdot\omega_0(s)\,ds\right)dt = \widehat{q}(x) \times$$

$$\times \int\limits_0^x l(t)\left(\int\limits_0^t m(s)\,ds\right)dt \leqslant \widehat{q}(x_0)\cdot\int\limits_0^x l(t)\,dt \times$$

$$\times \int\limits_0^x m(t)\,dt = \widehat{q}(x_0)\cdot\beta(x)\cdot\gamma(x).$$

Пусть теперь (2.15) верна для $p = k$. Тогда

$$\omega_{k+1}(x) \equiv \widehat{q}(x_0)\int\limits_0^x l(t)\left(\int\limits_0^t m(s)\,\omega_k(s)\,ds\right)dt \leqslant$$

$$\leqslant \widehat{q}(x_0)\int\limits_0^x l(t)\left(\int\limits_0^t m(s)\cdot\frac{[q(x_0)\cdot\beta(s)\cdot\gamma(s)]^k}{(k\,!)^2}\,ds\right)dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{[\widehat{q}(x_0)]^{k+1}}{(k\,!)^2}\cdot\int\limits_0^x l(t)\cdot[\beta(t)]^k\,dt\cdot\int\limits_0^x m(s)\,[\gamma(s)]^k\,ds.$$

Но так как $D_1\cdots D_n\,\beta(x) = l(x)$, $D_1\cdots D_n\,\gamma(x) = m(x)$ и так как

$$\int\limits_0^x D_1\cdots D_n\,\beta(t)\cdot[\beta(t)]^k\,dt \leqslant \frac{[\beta(x)]^{k+1}}{k+1},$$

$$\int\limits_0^x D_1\cdots D_n\,\gamma(t)\cdot[\gamma(t)]^k\,dt \leqslant \frac{[\gamma(x)]^{k+1}}{k+1}$$

(см. [6], лемма 2), то

$$\omega_{k+1}(x) \leqslant \frac{[\hat{q}(x_0)]^{k+1}}{(k!)^2} \cdot \frac{[\beta(x)]^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{[\gamma(x)]^{k+1}}{k+1} = \frac{[\hat{q}(x_0)\cdot\beta(x)\cdot\gamma(x)]^{k+1}}{[(k+1)!]^2},$$

то есть оценка (2.15) верна для $p = k + 1$, а, следовательно, и для любого натурального p. Тогда, согласно (2.14)

$$z_2(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \omega_p(x) \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} \frac{[\hat{q}(x_0)\cdot\beta(x)\cdot\gamma(x)]^p}{(p!)^2} = J_0\left(2i\sqrt{\hat{q}(x_0)\cdot\beta(x)\cdot\gamma(x)}\right),$$

$$x \in I^n_{x_0},$$

где $J_0(s)$—функция Бесселя нулевого порядка. Отсюда, с учетом (2.13) и (2.10) и того, что $u(x) < z(x)$ на $I^n_{x_0}$, получаем

$$u(x) \leqslant \hat{f}(x)\cdot I_m[\hat{p}(x_0)\cdot\mu(x;\ h_1,\cdots,h_m)]\cdot J_0\left(2i\sqrt{\hat{q}(x_0)\cdot\beta(x)\cdot\gamma(x)}\right) \equiv$$

$$\equiv Q(x_0;\ x)$$

на множестве $I^n_{x_0}$ для любой удовлетворяющей неравенству (1.1) функции.

Так как эта оценка имеет место на всем $I^n_{x_0}$, она по непрерывности имеет место и в точке $x = x_0$: $u(x_0) \leqslant G(x_0, x_0)$, откуда, ввиду произвольности выбора точки $x_0 \in I^n$ и следует искомая оценка (1.3) теоремы 2 на всем I^n. Теорема доказана.

Доказательство утверждения теоремы 3 проведем в два этапа. Сначала рассмотрим «предельные» случаи, когда $s = p$ и $s = 0$, а затем рассмотрим случай $0 < s < p$.

Доказательство для случаев $s = p$ и $s = 0$ проведем по индукции. Пусть $p = 1$, то есть рассматривается неравенство

$$u(x) \leqslant f(x) + r_1(x) \int\limits_0^x n_1(t)\,\omega_1[u(t)]\,dt. \qquad (2.16)$$

Пусть $x_0 \in I^n / \{0\}$—произвольная точка. Тогда решение интегрального уравнения

$$z(x) = \hat{f}(x_0) + \hat{r}_1(x_0) \int\limits_0^x n_1(t)\cdot\omega_1[z(t)]\,dt,$$

где $\hat{f}(x_0)$ и $\hat{r}_1(x_0)$ определяются (1.2), будет неулучшаемой оценкой сверху на множестве $I^n_{x_0} \equiv \{x = (x_1,\cdots,x_n) \in I^n,\ 0 \leqslant x \leqslant x_0\}$ для удовлетворяющих неравенству (2.16) функций. Имеем

$$\frac{z(x)}{\hat{f}(x_0)} = 1 + \frac{\hat{r}_1(x_0)}{\hat{f}(x_0)} \int\limits_0^x n_1(t)\cdot\omega_1[z(t)]\,dt. \qquad (2.17)$$

Теперь рассмотрим отдельно случаи $s = p$, $s = 0$. Пусть сначала $s = p$. Тогда по условию $\omega_1(x) \leqslant \varphi_1(x)$, где $\varphi_1(x)$ субмультипликативна на I. С учетом этого из (2.17) имеем

$$\frac{z(x)}{\widehat{f}(x_0)} \leqslant 1 + \frac{\widehat{r}_1(x_0)}{\widehat{f}(x_0)} \cdot \int_0^x n_1(t)\cdot\varphi_1\left|\frac{z(t)}{\widehat{f}(x_0)}\cdot\widehat{f}(x_0)\right| dt \leqslant$$
$$\leqslant 1 + \frac{\widehat{r}_1(x_0)}{\widehat{f}(x_0)}\cdot\varphi_1[\widehat{f}(x_0)]\cdot\int_0^x n_1(t)\cdot\varphi_1\left[\frac{z(t)}{\widehat{f}(x_0)}\right] dt, \qquad x\in I^n_{x_0}. \tag{2.18}$$

Отсюда, используя оценку для решений многомерных интегральных неравенств вида (2.18) (см. [7], теорема 3), получим

$$\Phi_1\left[\frac{z(t)}{\widehat{f}(x_0)}\right] \leqslant \Phi_1(1) + \frac{\widehat{r}_1(x_0)}{\widehat{f}(x_0)}\cdot\varphi_1[\widehat{f}(x_0)]\cdot\int_0^x n_1(t)\,dt, \; x\in I^n_{x_0},$$

где $\Phi_1(u)$ определяется выражением (1.15). Рассматривая полученное неравенство в точке $x = x_0$ и учитывая произвольность выбора $x_0 \in I^n$, получаем

$$\Phi_1\left[\frac{z(t)}{\widehat{f}(x)}\right] \leqslant \Phi_1(1) + \frac{\widehat{r}_1(x)}{\widehat{f}(x)}\cdot\varphi_1[\widehat{f}(x_0)]\cdot\int_0^x n_1(t)\,dt \tag{2.19}$$

по крайней мере для тех $x\in I^n$, для которых выполнено условие (1.16) при $k=1$. Полученная оценка совпадает с (1.12) при $p=1$ (с учетом того, что $s=p$), так как обычно считается, что $\prod_{k=r+1}^{r} = 1$ для любого $r=0, 1, 2, \cdots$.

Рассмотрим теперь случай $s = 0$. Из (2.17) в этом случае следует, что

$$\frac{z(x)}{\widehat{f}(x_0)} \leqslant 1 + \widehat{r}_1(x_0)\cdot\int_0^x n_1(t)\cdot\frac{1}{\widehat{f}(x_0)}\cdot\varphi_1[z(t)]\,dt \leqslant$$
$$\leqslant 1 + \widehat{r}_1(x_0)\cdot\int_0^x n_1(t)\cdot\varphi_1\left[\frac{z(t)}{\widehat{f}(x_0)}\right] dt,$$

так как $\widehat{f}(x_0) \geqslant f(0) = \gamma$, а $\varphi_1(x)$ принадлежит $S_\gamma(I)$. Из полученного интегрального неравенства имеем

$$\Phi_1\left[\frac{z(x)}{\widehat{f}(x_0)}\right] \leqslant \Phi_1(1) + \widehat{r}_1(x_0)\cdot\int_0^x n_1(t)\,dt, \qquad x\in I^n_{x_0},$$

где $\Phi_1(u)$ определяется, как и выше, выражением (1.15). Отсюда приведенными выше рассуждениями получим, что

$$u(x) \leqslant \widehat{f}(x)\cdot\Phi_1^{-1}\left\{\Phi_1(1) + \widehat{r}_1(x)\cdot\int_0^x n_1(t)\,dt\right\}, \; x\in I^n \tag{2.20}$$

по крайней мере для тех $x \in I^n$, для которых выполнено условие (1.17), в котором положено $k = s + 1$ и $s = 0$. Полученная оценка совпадает с (1.12) при $p = 1$ в том случае, когда $s = 0$.

Таким образом, оценка (1.12) имеет место для $p = 1$ в обоих «предельных случаях»: $s = p$ и $s = 0$. Предположим, что она имеет место при $p = L$ также в обоих случаях, то есть когда $s = p$ и $s = 0$. Положим $p = L + 1$ и запишем неравенство (1.9) в виде

$$u(x) \leqslant g(x) + \sum_{k=1}^{L} r_k(x) \cdot \int_0^x h_k(t)\, \omega_k[u(t)]\, dt, \tag{2.21}$$

где

$$g(x) \equiv f(x) + r_{L+1}(x) \cdot \int_0^x n_{L+1}(t) \cdot \omega_{L+1}[u(t)]\, dt. \tag{2.22}$$

Здесь снова рассмотрим отдельно случаи $s = p$ и $s = 0$. Пусть сначала $s = p$. Тогда, по предположению индукции

$$u(x) \leqslant \hat{g}(x) \cdot \prod_{k=1}^{L} Q_k(x),$$

где $Q_k(x)$ ($k = 1, 2, \ldots, L$) определяются выражениями (1.13). Отсюда, используя (2.22), имеем

$$u(x) \leqslant \hat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^{L} Q_k(x) + \hat{r}_{L+1}(x) \cdot \prod_{k=1}^{L} Q_k(x) \cdot \int_0^x n_{L+1}(t) \cdot \omega_{L+1}[u(t)]\, dt.$$

Используя уже доказанную для случая одного слагаемого оценку (2.19), получаем

$$u(x) \leqslant \hat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^{L} Q_k(x) \cdot \Phi_{L+1}^{-1} \left\{ \Phi_{L+1}(1) + \right.$$

$$\left. + \frac{\hat{r}_{L+1} \prod\limits_{k=1}^{L} Q_k(x)}{\hat{f}(x) \cdot \prod\limits_{k=1}^{L} Q_k(x)} \cdot \varphi_{L+1}\left[\hat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^{L} Q_k(x)\right] \cdot \int_0^x n_{L+1}(t)\, dt \right\},$$

так как очевидно, что $\hat{Q}_k(x) = Q_k(x)$ ($k = 1, 2, \cdots, p$). Однако, так как функция $\varphi_{L+1}(x)$ субмультипликативна на I, имеем

$$\varphi_{L+1}[\hat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^{L} Q_k(x)] \leqslant \varphi_{L+1}[\hat{f}(x)] \cdot \varphi_{L+1}\left[\prod_{k=1}^{L} Q_k(x)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \varphi_{L+1}[\hat{f}(x)] \cdot \prod_{k=1}^{L} \varphi_{L+1}[Q_k(x)].$$

Тогда

$$u(x) \leqslant \hat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^{L} Q_k(x) \cdot \Phi_{L+1}^{-1}\Big\{\Phi_{L+1}(1)+$$

$$+\frac{\hat{r}_{L+1}(x)}{\hat{f}(x)} \cdot \varphi_{L+1}[\hat{f}(x)] \cdot \prod_{k=1}^{L} \varphi_{L+1}[Q_k(x)] \cdot \int_0^x n_{L+1}(t)\,dt\Big\} =$$

$$=\hat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^{L+1} Q_k(x),$$

если учесть, что $Q_{L+1}(x)$ определяется (1.13).

Таким образом, оценка (1.12) имеет место для $p = L+1$, а следовательно и для любого p, если рассматривается случай $s = p$.

Рассмотрим теперь случай $s = 0$. По предположению индукции из (2.21) следует, что

$$u(x) \leqslant \tilde{g}(x) \cdot \prod_{k=1}^{L} G_k(x),$$

так как $g(0) = f(0) = \gamma$, $\varphi_k(x)$ принадлежит классу $S_\gamma(l)$ для любого $k = 1, 2, \cdots, L$. Отсюда, согласно (2.22), имеем

$$u(x) \leqslant \hat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^{L} G_k(x) + \hat{r}_{L+1}(x) \cdot \prod_{k=1}^{L} G_k(x) \cdot \int_0^x n_{L+1}(t) \cdot \omega_{L+1}[u(t)]\,dt \equiv$$

$$\equiv \bar{f}(x) + \tilde{r}_{L+1}(x) \cdot \int_0^x n_{L+1}(t) \cdot \omega_{L+1}[u(t)]\,dt.$$

Используя уже доказанную для случая одного слагаемого оценку (2.20) и учитывая представление (1.14) для $G_{L+1}(x)$, получим

$$u(x) \leqslant \bar{f}(x) \cdot \Phi_{L+1}^{-1}\Big\{\Phi_{L+1}(1) + \bar{r}_{L+1}(x) \cdot \int_0^x n_{L+1}(t)\,dt\Big\} =$$

$$=\hat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^{L} G_k(x) \cdot \Phi_{L+1}^{-1}\Big\{\Phi_{L+1}(1) + \hat{r}_{L+1}(x) \cdot \prod_{k=1}^{L} G_k(x) \cdot \int_0^x n_{L+1}(t)\,dt\Big\} =$$

$$=\hat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^{L} G_k(x) \cdot G_{L+1}(x) = \hat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^{L+1} G_k(x),$$

так как $\hat{f}(0) = f(0) = \gamma$, а $\varphi_{L+1}(x)$ принадлежит $S_\gamma(l)$.

Таким образом ,оценка (1.12) имеет место к для $p = L+1$, а следовательно и для любого p и в случае $s = 0$. Следовательно, она верна для любого числа слагаемых в обоих «предельных» случаях: $s = p$ и $s = 0$.

Рассмотрим теперь случай $0 < s < p$. Перепишем неравенство (1.9) в виде

$$u(x) \leqslant f(x) + \sum_{k=1}^{s} r_k(x) \cdot \int_0^x n_k(t)\ \omega_k[u(t)]\,dt +$$

$$+ \sum_{k=s+1}^{p} r_k(x) \cdot \int_0^x n_k(t) \cdot \omega_k[u(t)]\,dt.$$

Если обозначить

$$h(x) \equiv f(x) + \sum_{k=s+1}^{p} r_k(x) \cdot \int_0^x n_k(t) \cdot \omega_k[u(t)]\,dt, \tag{2.23}$$

то искомое неравенство запишется в виде

$$u(x) < h(x) + \sum_{k=1}^{s} r_k(x) \cdot \int_0^x n_k(t) \cdot \omega_k[u(t)]\,dt.$$

Так как $\omega_k(x) \leqslant \varphi_k(x)$ $(x \in I,\ k=1, 2, \cdots, s)$, причем все $\varphi_k(x)$ субмультипликативны на I, согласно доказанному выше (см. случай $s=p$) имеем, что

$$u(x) \leqslant \hat{h}(x) \cdot \prod_{k=1}^{s} Q_k(x),$$

где $Q_k(x)$ $(k=1, 2, \cdots, s)$ определяются выражениями (1.13). Тогда, ввиду (2.23), получаем

$$u(x) \leqslant \hat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^{s} Q_k(x) + \sum_{k=s+1}^{p} \hat{r}_k(x) \cdot \prod_{L=1}^{s} Q_L(x) \cdot \int_0^x n_k(t)\ \omega_k[u(t)]\,dt =$$

$$= \bar{f}(x) \cdot \sum_{k=s+1}^{p} \bar{r}_k(x) \cdot \int_0^x n_k(t) \cdot \omega_k[u(t)]\,dt,$$

то есть интегральное неравенство вида (1.9), в котором $\omega_k(x) \leqslant \varphi_k(x)$ $(x \in I,\ k=s+1, \cdots, p)$, причем все $\varphi_k(x)$ принадлежат классу $S_\gamma(I)$, где $\gamma = f(0)$. Тогда, так как $\bar{f}(0) = f(0) = \gamma$, согласно доказанному выше (см. случай $s=0$) имеем

$$u(x) \leqslant \bar{f}(x) \cdot \prod_{k=s+1}^{p} \Phi_k^{-1}\left\{\Phi_k(1) + \bar{r}_k(x) \cdot \prod_{L=s+1}^{k-1} G_L(x) \cdot \int_0^x n_k(t)\,dt\right\} =$$

$$= \hat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^{s} Q_k(x) \cdot \prod_{k=s+1}^{p} \Phi_k^{-1}\left\{\Phi_k(1) + \hat{r}_k(x) \cdot \prod_{L=1}^{s} Q_L(x) \cdot \prod_{L=s+1}^{p} G_L(x) \times\right.$$

$$\left.\times \int_0^x n_k(t)\,dt\right\} = \hat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^{s} Q_k(x) \cdot \prod_{k=s+1}^{p} G_k(x),$$

если учесть, что $G_k(x)$ $(k = s+1, \ldots, p)$ определяются выражениями (1.14). Таким образом, оценка (1.12) верна и в случае $0 < s < p$. Теорема 3 доказана.

Для доказательства утверждения теоремы 4 перепишем интегральное неравенство (0.1) в виде

$$u(x) \leqslant g(x) + \mathrm{K}u + \mathrm{L}u, \quad x \in I^n, \tag{2.24}$$

где

$$g(x) \equiv f(x) + \sum_{k=1}^{p} r_k(x) \cdot \int_0^x n_k(t) \cdot \omega_k[u(t)]\, dt. \tag{2.25}$$

Для решений интегральных неравенств вида (2.24) из теорем 1 и 2 следует оценка

$$u(x) \leqslant \hat{g}(x) \cdot \tau(x), \quad x \in I^n, \tag{2.26}$$

где $\hat{g}(x)$ определяется (1.2), а $\tau(x)$ совпадает с выражением (1.4), если выполнены условия теоремы 1 и с выражением (1.6), если выполнены условия теоремы 2. Используя (2.25), из (2.26) легко получаем, что

$$u(x) < \hat{f}(x) \cdot \tau(x) + \sum_{k=1}^{p} \hat{r}_k(x) \cdot \tau(x) \cdot \int_0^x n_k(t)\, \omega_k[u(t)]\, dt. \tag{2.27}$$

Обращение интегральных неравенств вида (2.27) составляет содержание теоремы 3, откуда, в силу $\hat{f}(0) \cdot \tau(0) = \hat{f}(0) = f(0) = \gamma$, получаем для удовлетворяющих неравенству (0.1) непрерывных функций $u(x)$ оценку (1.20). При этом легко видеть, что $\hat{Q}_k(x)$ и $\hat{G}_k(x)$ получаются, соответственно, из (1.13) и (1.14) заменой всюду $\hat{f}(x)$ на $\hat{f}(x) \cdot \tau(x)$, а $\hat{r}_k(x)$—на $\hat{r}_k(x) \cdot \tau(x)$ $(k = 1, 2, \cdots, p)$.

Теорема доказана.

В заключение выражаю благодарность А. Б. Нерсесяну за внимание к работе.

Ереванский государственный университет

Поступила 1. X. 1985

Ֆ. Հ. ՄԱՄԻԿՈՆՅԱՆ. Որոշ դասի բազմաչափ ոչ գծային ինտեգրալ անհավասարումների լուծումների գնահատականներ *(ամփոփում)*

Աշխատանքը նվիրված է դիֆերենցիալ և ինտեգրոդիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների որակական ուսումնասիրման հետ կապված (0.1) տեսքի բազմաչափ ոչ գծային ինտեգրալ անհավասարումների լուծումների գնահատականներին։

Առաջարկած գնահատականները ամփոփում են և ճշգրտում մասնավոր դեպքերի համար (հիմնականում միաչափ) ստացած արդյունքները։

F H. MAMIKONIAN. *Estimates of solutions of some multidimensional nonlinear integral inequalities* (summary)

The paper is devoted to estimation of solutions of some multidimensional nonlinear integral inequalities connected with qualitative theory of differential and integrodifferential equations.

The estimates obtained improve and generalize some results known for special cases (mainly for onedimensional inequalities).

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. Walter*. Differential and Integral Inequalities. Springer, Berlin-Heidelberg--New York, 1970.
2. *V. Lakshmikantam, S. Leela*. Differential and Integral Inequalities, vols. 1 and 2, Academic Press, New York, 1969.
3. *I. Bihari*. A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problem of differential equations, Acta Math. Acad. Scient. Hung., v. 7, № 1, 1956, 81—93.
4. *Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк*. Об интегральных неравенствах, 1. Мат. сборник, 56 (98), № 3, 1962, 325—342.
5. *Ф. О. Мамиконян*. Об одном обобщении неравенства Гронуолла. Республиканская научно-практическая конференция преподавателей вузов по математике, Тезисы докладов, Ереван, 1981, 17—19.
6. *Ф. О. Мамиконян*. Об оценках решений некоторых многомерных интегральных неравенств, ДАН Арм.ССР, 73, № 3, 1981, 136—145.
7. *Ф. О. Мамиконян*. Обращение некоторых многомерных нелинейных операторных неравенств, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 20, № 5, 1985, 349—365.
8. *G. Butler, T. Rogers*. A generalization of a lemma of Bihari and applications to pointwise estimates for integral equations, Journal of Math. Anal. and Appl., v. 33, № 1, 1971, 77—81.
9. *U. D. Dhongade, S. G. Deo*. Some generalization of Bellman-Bihari integral inequalities, Journal of Math. Anal. and Appl., v. 44, № 1, 1973, 218—226.
10. *V. Singare*. Some integral inequalities in two independent variables. Mathematics Seminar Notes Kobe Univ., v. 10 № 2 2, 1982, 775—783.
11. *B. G. Pachpatte*. On some integral inequalities similar to Bellman-Bihari inequalities, Journal of Math. Anal. and Appl., v. 49, № 3, 1975, 794—802.
12. *B. G. Pachpatte, B. K. Bonge*. On nonlinear integral inequalities of the Wendroff type, Journal of Mafh. Anal. and Appl., v. 70. № 1, 1979, 161—169.
13. *B. G. Pachpatte*. On some fundamental partial integral inequalities, Journal of Math. Anal. and Appl., v. 73, № 1, 1980, 238—251.
14. *S. R. Grace, B. S. Lalli*. Asymptotic behaviour of certain second order integro--differential equations. Journal of Math. Anal. and Appl., v. 76.№ 1, 1980, 84—90.
15. *R. P. Agarval*. A note on Grace-Lall's paper, Journal of Math. Anal. and Appl. v. 86, № 2, 1982, 471—475.
16. *J. Tong*. The asymptotic behaviour of a class of nonlinear differential equations of second order, Proc. of the Amer. Math. Society, v. 84, № 2, 1982, 235—236.
17. *En Hao Yang*. Boundedness conditions for solutions of the differential equation $(a(t)x')' + f(t, x) = 0$, Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications v. 8, № 5, 1984, 541—547.
18. *P. R. Beesack*. On some Gronwall-type integral inequalities in n independent. variables, Journal of Math. Anal. and Appl., v. 100, № 2, 1984, 393—408.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXII, № 2, 1987 Математика

УДК 517.986

А. М. АКОПЯН

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ТОЧЕЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ И АВТОМОРФИЗМОВ НА АЛГЕБРАХ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Введение

В настоящей работе исследуются некоторые свойства точечных дифференцирований и автоморфизмов на алгебрах обобщенных аналитических функций, возникающих из рассмотрения произвольных полугрупп Γ_0 с делением (вместо полугруппы Z_+ целых неотрицательных чисел).

Пусть Γ — группа, порожденная полугруппой Γ_0 и $\hat{\Gamma}$ — ее компактная группа характеров. Согласно теореме двойственности Понтрягина, Γ отождествляется с группой характеров $\hat{\Gamma}$ соотношением $x \to \chi_x$, где $\chi_x(\alpha) = \alpha(x)$, $\alpha \in \hat{\Gamma}$.

Равномерная алгебра на $\hat{\Gamma}$, порожденная характерами χ_x, $x \in \Gamma_0$ будет в дальнейшем обозначаться через $A(\Gamma_0)$ (называемой алгеброй обобщенных аналитических функций в смысле Аренса—Зингера, [1]). Эта алгебра содержит в себе в качестве плотной подалгебры коммутативную банахову алгебру $l^1(\Gamma_0)$ (со сверткой в качестве произведения и нормой $\|f\| = \sum_{x \in \Gamma_0} |f(x)|$.

Простейший нетривиальный пример алгебры $A(\Gamma_0)$ — алгебра аналитических в единичном круге функций, непрерывных вплоть до границы; в этом случае $\Gamma_0 = Z_+$. В случае, когда Γ_0 — положительная часть некоторой подгруппы вещественных чисел, алгебра $A(\Gamma_0)$ изометрически изоморфна алгебре ограниченных аналитических почти периодических функций в верхней полуплоскости, см. [2].

Теория обобщенных аналитических функций берет свое начало с работы Аренса и Зингера [1], в которой впервые изучались аналитические почти периодические функции с позиций теории равномерных алгебр. За ней последовал цикл работ Аренса [2], [3], Гофмана [4] и других. В серии работ Хельсона и Лауденслагера [5—7] и Хельсона [8] дается относительно полное изложение основополагающих результатов в этом направлении (см. также монографию Гамелина [9], гл. VII).

В работе [1], в частности, показано, что пространствами максимальных идеалов алгебр $A(\Gamma_0)$ и $l^1(\Gamma_0)$ служит полугруппа $\mathrm{Hom}\,\Gamma_0$ гомоморфизмов Γ_0 в единичный круг, а границей Шилова — группа $\widehat{\Gamma}$ характеров группы Γ. Толчком к настоящей работе послужила статья Аренса [2], посвященная в основном автоморфизмам алгебры $A(\Gamma_0)$, а также точечным дифференцированиям на $A(\Gamma_0)$. Исследованию точечных дифференцирований на $l^1(\Gamma_0)$ и автоморфизмов $A(\Gamma_0)$ для определенных классов полугрупп и посвящена данная работа.

В § 1 вводится понятие квазимаксимальной полугруппы и исследуются некоторые ее свойства. Класс таких полугрупп включает в себя все максимальные полугруппы. Для квазимаксимальных полугрупп Γ_0 в R_+ и для любых максимальных дается описание полугруппы $\mathrm{Hom}\,\Gamma_0$ и, следовательно, пространств максимальных идеалов алгебр $A(\Gamma_0)$ и $l^1(\Gamma_0)$. Во втором параграфе результаты § 1 применяются для описания точечных дифференцирований на $l^1(\Gamma_0)$. Дифференцирования в точках, являющихся идемпотентами полугруппы $\mathrm{Hom}\,\Gamma_0$, описываются для произвольных полугрупп Γ_0. Описанию автоморфизмов $A(\Gamma_0)$ для некоторого класса полугрупп, содержащего в себе, в частности, и квазимаксимальные подполугруппы R_+, посвящен последний параграф статьи.

§ 1. Квазимаксимальные полугруппы

На протяжении всей статьи будем придерживаться следующих обозначений.

Через $\mathrm{Hom}\,\Gamma_0$ уже была обозначена полугруппа характеров Γ_0 т. е. гомоморфизмов Γ_0 в единичный круг.

Характер $p \in \mathrm{Hom}\,\Gamma_0$ называют положительным, если $p(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \Gamma_0$, идемпотентным, если $p^2 = p$.

Очевидно каждый идемпотентный характер положителен. Гомоморфизм $p \equiv 1$ будем называть тривиальным идемпотентом. Если G — максимальная группа в Γ_0, то через ρ_G будем обозначать идемпотент такой, что $\rho_G \equiv 1$ на G и $\rho_G \equiv 0$ на $\Gamma_0 \setminus G$. В случае, когда $G = \{0\}$, обозначим $\rho_0 = \rho_G$. Ясно, что множества всех идемпотентов и положительных характеров образуют полугруппы; их мы будем обозначать, соответственно, через $\mathrm{Ihom}\,\Gamma_0$ и $\mathrm{Phom}\,\Gamma_0$. В полугруппе $\mathrm{Ihom}\,\Gamma_0$ всегда имеются идемпотенты $p \equiv 1$ и ρ_G. Отметим, что если $p \in \mathrm{Phom}\,\Gamma_0$, то $p^u \in \mathrm{Phom}\,\Gamma_0$ при всех вещественных $u > 0$, где $p^u(x) = e^{u \ln p(x)}$, если $p(x) \neq 0$ и $p^u(x) = 0$ при $p(x) = 0$.

Для полугруппы Γ_0, содержащейся в одной и только одной максимальной полугруппе Γ_+ группы Γ, обозначим через $\nu(\Gamma_0)$ порядок максимальной группы, содержащейся в Γ_+. Напомним, что полугруппа Γ_0 называется максимальной, если любая полугруппа группы Γ, содержащая Γ_0, совпадает либо с Γ_0, либо с Γ. Для максимальных полугрупп Γ_0, условие $\nu(\Gamma_0) = 1$ равносильно тому, что в Γ_0 нет нетривиальной группы.

Заметим, что, если Γ_0—максимальная полугруппа, то $\Gamma = \Gamma_0 \cup (-\Gamma_0)$. Более того, если Γ_0 не содержит нетривиальной группы, то для любых $x, y \in \Gamma_0 \setminus \{0\}$ найдется такое целое $n > 0$, что $nx - y \in \Gamma_0$, т. е. Γ_0 задает полный архимедов порядок на группе Γ. Как хорошо известно, каждая такая группа изоморфна аддитивной подгруппе группы R вещественных чисел, причем образ Γ_0 при этом изоморфизме содержится в R_+. Поэтому, не умаляя общности, можно максимальные полугруппы Γ_0 с $\nu(\Gamma_0) = 1$ считать содержащимися в R_+. Кроме того, любая подгруппа R, отличная от группы Z целых чисел плотна в R в естественной топологии. В дальнейшем, если специально не оговаривается, будет предполагаться, что $\Gamma_0 \underline{\subset} Z_+$ (результаты для случая $\Gamma_0 \subseteq Z_+$ доказываются тривиально).

П р е д л о ж е н и е 1.1. *Пусть Γ_0 — максимальная полугруппа. Тогда:*

а) *полугруппа* $\operatorname{Ihom} \Gamma_0$ *содержит лишь один нетривиальный идемпотент;*

б) *для любых $p, q \in \operatorname{Phom} \Gamma_0 \setminus \operatorname{Ihom} \Gamma_0$ существует такое число $u > 0$, что $p^u = q$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — максимальная группа в Γ_0. Для любого $p \in \operatorname{Phom} \Gamma_0$ сужение $p/G = 1$; поэтому $\operatorname{Phom} \Gamma_0 = \operatorname{Phom} J_0$, а $\operatorname{Ihom} \Gamma_0 = \operatorname{Ihom} J_0$, где $J_0 = \Gamma_0/G$—фактор-полугруппа Γ_0 по G. Полугруппа J_0— максимальна (в фактор-группе Γ/G) и не содержит нетривиальной группы. Это очевидное замечание позволяет свести доказательство к случаю, когда в Γ_0 нет нетривиальной группы.

Тогда, в силу максимальности Γ_0, для любых $x, y \in \Gamma_0 \setminus \{0\}$ найдется такое целое $n > 0$, что $nx - y \in \Gamma_0$. Поэтому

$$p(nx) = p(nx - y)\, p(y) \tag{1.1}$$

для всех $p \in \operatorname{Phom} \Gamma_0$. Отсюда непосредственно следует, что если $p \in \operatorname{Phom} \Gamma_0$ отлично от ρ_0 и тождественной единицы, то $0 < p(x) < 1$ для всех $x \in \Gamma_0 \setminus \{0\}$ (т. е. ρ_0— единственный нетривиальный идемпотент; напомним, что $\rho_0(0) = 1$, $\rho_0(x) = 0$, $x \neq 0$). Продолжим p на всю группу, полагая $p(x) = [p(-x)]^{-1}$ для $x \in (-\Gamma_0)$. Тогда $\Phi(x) = -\ln p(x)$ определяет линейную монотонно возрастающую функцию на Γ. Легко показать, что каждая такая функция продолжается до линейной функции на R; поэтому найдется такое $u > 0$, что $\Phi(x) = ux$, т. е. $p(x) = e^{-ux}$ для всех $x \in \Gamma_0$. Предложение доказано.

О п р е д е л е н и е 1.1. Полугруппу Γ_0 назовем квазимаксимальной, если любая полугруппа группы Γ, содержащая Γ_0, совпадает либо с Γ, либо содержится в одной и только одной максимальной полугруппе группы Γ.

Ясно, что любая максимальная полугруппа — квазимаксимальна. Для некоторых квазимаксимальных полугрупп можно доказать аналог предложения 1.1. (предл. 1.2.).

Очевидно, что квазимаксимальная полугруппа может содержаться только в одной максимальной полугруппе. В частности, все подполугруппы Γ, отличные от Γ и содержащие Γ_0, лежат в одной и той же максимальной подполугруппе Γ.

Отметим, что в силу вышеприведенных замечаний, для квазимаксимальной полугруппы Γ_0 условие $\nu(\Gamma_0)=1$ равносильно тому, что Γ_0 изоморфна некоторой подполугруппе R_+. В дальнейшем, без ограничения общности, такие полугруппы будем рассматривать как полугруппы в R_+.

Предложение 1.2. *Пусть Γ_0— квазимаксимальная полугруппа и $\nu(\Gamma_0)=1$. Тогда*:

а) *полугруппа* $\mathrm{Ihom}\,\Gamma_0$ *состоит из* ρ_0 *и* $\rho\equiv 1$;

б) *для любых* p, $q\in \mathrm{Phom}\,\Gamma_0\setminus \mathrm{Ihom}\,\Gamma_0$ *существует* $u>0$ *такое, что* $p^u=q$.

Доказательство. Для $p\in \mathrm{Phom}\,\Gamma_0$ положим $J=\{x\in\Gamma_0:$ $:p(x)=0\}$ и обозначим через Γ_1 полугруппу, порожденную множеством $\Gamma_0\cup(-J)$. Поскольку полугруппа Γ_1 содержит нетривиальную группу, порожденную множеством J, то, в силу наших предположений, $\Gamma_1=\Gamma$. Тогда для любого $x\in\Gamma_0$ существуют такие $x_0\in\Gamma_0$ и $x_1\in J$, что $-x=x_0-x_1$, откуда $p(x_1)=p(x_0)\,p(x)$. Отсюда следует, что если p — идемпотент, то либо $p\equiv 1$, либо $p=\rho_0$. В случае же, когда $p\in \mathrm{Phom}\,\Gamma_0\setminus \mathrm{Ihom}\,\Gamma_0$, мы получаем, что $p(x)>0$ для всех $x\in\Gamma_0$.

Продолжим гомоморфизм $p\in \mathrm{Phom}\,\Gamma_0\setminus \mathrm{Ihom}\,\Gamma_0$ на всю группу Γ, полагая $p(x)=[p(-x)]^{-1}$ для $x\in(-\Gamma_0)$ и определим взаимно-однозначное отображение $\Phi:\Gamma\to R\times R$, задаваемое формулой $\Phi(x)=$ $=(x,\ -\ln p(x))$. Ясно, что образ $\Phi(\Gamma_0)$ полугруппы Γ_0, образующий, очевидно, подполугруппу в $R\times R$, содержится в первой четверти комплексной плоскости. Мы хотим показать, что $\Phi(\Gamma_0)$ расположена на некоторой прямой, проходящей через начало координат. Предположим противное. Понятно, что в этом случае каждая четверть комплексной плоскости будет содержать более чем одну точку из группы $\Phi(\Gamma)$. Следовательно, мы можем провести две такие прямые l_1 и l_2, проходящие через начало координат, что пересечение соответствующих им полуплоскостей Π_{l_1} и Π_{l_2}, целиком содержащих в себе $\Phi(\Gamma_0)$ с группой $\Phi(\Gamma)$ образуют две различные максимальные подполугруппы в $\Phi(\Gamma)$. Таким образом, прообразы множеств $\Pi_{l_1}\cap\Phi(\Gamma)$ и $\Pi_{l_2}\cap\Phi(\Gamma)$ дают нам две различные максимальные подполугруппы Γ, содержащие Γ_0, что противоречит квазимаксимальности Γ_0.

Итак, найдется такое $u>0$, что $-\ln p(x)=ux$, т. е. $p(x)=e^{-ux}$ для всех $x\in\Gamma_0$. Предложение доказано.

Учитывая теперь тот факт, что пространства $M_{A(\Gamma_0)}$ и $M_{l^1(\Gamma_0)}$ максимальных идеалов алгебр $A(\Gamma_0)$ и $l^1(\Gamma_0)$ совпадают с $\mathrm{Hom}\,\Gamma_0$ и, что для каждого характера $\zeta\in\mathrm{Hom}\,\Gamma_0$ имеется полярное разложение $\zeta=p\alpha$, где $p\in \mathrm{Phom}\,\Gamma_0$, а α — характер группы Γ (см. [1]), можем заключить, что предложения 1.1. и 1.2. дают описание пространств $M_{A(\Gamma_0)}$ и $M_{l^1(\Gamma_0)}$, соответственно, для произвольных максимальных полугрупп Γ_0 и квазимаксимальных полугрупп Γ_0 с $\nu(\Gamma_0)=1$. (Пространством M_A максимальных идеалов банаховой алгебры A называется совокупность всех нетривиальных гомоморфизмов A в поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел).

Следующее утверждение характеризует квазимаксимальные полугруппы в R_+.

Предложение 1.3. *Пусть Γ_0 — полугруппа неотрицательных действительных чисел. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *полугруппа Γ_0 — квазимаксимальна;*

б) *для каждого $x \in \Gamma$ найдется целое n, такое, что $nx \in \Gamma_0$;*

в) *для любых $x, y \in \Gamma_0 \setminus \{0\}$, либо $[x-y, \Gamma_0]=\Gamma$, либо $[y-x, \Gamma_0]=\Gamma$.*

Доказательство. Через $[x, \Gamma_0]$ мы обозначаем полугруппу, порожденную элементом $x \in \Gamma$ и полугруппой Γ_0. Положим также $\Gamma_+ = \Gamma \cap R_+$; очевидно, полугруппа Γ_+ — максимальна.

а) $\Rightarrow$ б). В силу квазимаксимальности Γ_0, для любого $x \in \Gamma_+ \setminus \Gamma_0$, $[-x, \Gamma_0] = \Gamma$. Следовательно, существуют $x_0 \in \Gamma_0$ и целое $n > 0$, такие, что $x = x_0 - nx$, откуда $(n+1)x \in \Gamma_0$.

б) $\Rightarrow$ в). Пусть x, $y \in \Gamma_0$ и $x - y \in \Gamma_+$. Для доказательства в) достаточно показать, что $(-\Gamma_0) \subset [y-x, \Gamma_0]$. По условию, $n(x-y) \in \Gamma_0$ при некотором целом n, откуда $x-y \in [y-x, \Gamma_0]$. Пусть $-z \in \Gamma_0$. Так как Γ_+ максимальна, то найдется такое целое $m > 0$, что $m(x-y) + z \in \Gamma_+$. Опять, ссылаясь на условие б), можем написать, что $\omega = k[m(x-y)+z] \in \Gamma_0$ при некотором целом $k > 0$, откуда $z = km(y-x) + \omega + (k-1)(-z) \in [y-x, \Gamma_0]$.

в) $\Rightarrow$ а). Пусть Γ_1 — подполугруппа Γ, содержащая Γ_0, но не содержащаяся в Γ_+. Тогда, если $x \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_+$, то по условию, $[x, \Gamma_0] = \Gamma$, т. е. $\Gamma_1 = \Gamma$. Предложение доказано.

В заключение этого параграфа рассмотрим несколько примеров.

(1). Пусть Γ — произвольная подгруппа R. Тогда $\Gamma_0 = \Gamma \cap \{x \in R_+ : x > u > 0\} \cup \{0\}$ — квазимаксимальная полугруппа.

(2). Любая полугруппа рациональных чисел квазимаксимальна.

(3). Примером полугруппы в R, не являющейся квазимаксимальной, служит полугруппа $\Gamma_\alpha = \{m + \alpha n : m, n \in \mathbf{Z}_+\}$, α — положительное иррациональное число.

Справедливость утверждений (1)—(3) легко проверяется непосредственно из условия б) предложения 1.3.

Рассмотрим несколько примеров полугрупп на плоскости.

(4). Полугруппа $\Gamma_0 = \mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z}_+$ не является квазимаксимальной. Действительно, каждая полугруппа $\Gamma_\alpha = \{(m, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : m + \alpha n \geq 0\}$, где α — иррациональное число, $\alpha > 0$, является максимальной, и Γ_0 лежит в каждой из них.

(5). Полугруппа $\Gamma_0 = \{(m, n) \in \mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z}$ при $m=0$, $n \geqslant 0\}$ — квазимаксимальна, порождает группу $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, причем $\nu(\Gamma_0) = \infty$. Полугруппа $\mathrm{Phom}\,\Gamma_0$ порождается характерами p_1, $p_1(m, n) = e^{-m}$ и p_2, $p_2(m, n) = 0$ при $m > 0$, $p_2(0, n) = e^{-n}$, причем $p_1 \neq p_2^u$ для всех $u > 0$. Нетривиальным идемпотентом, кроме ρ_0, служит также ρ_1, $\rho_1(m, n) = 0$ при $m > 0$, $\rho(0, n) = 1$. Пример (5) показывает, что утверждение предложения 1.2 в общем случае неверно.

§ 2. Точечные дифференцирования на алгебре $l^1(\Gamma_0)$

Напомним, что пространством максимальных идеалов алгебры $l^1(\Gamma_0)$ служит полугруппа Hom Γ_0. В связи с этим, удобно ассоциировать с функцией $f\in l^1(\Gamma_0)$ ряд

$$\tilde{f}(\zeta)=\sum_{x\in\Gamma_0} f(x)\,\zeta(x),$$

абсолютно сходящийся в Hom Γ_0.

Функция $\hat{f}$ представляет собой так называемое преобразование Гельфанда элемента f из $l^1(\Gamma_0)$. Алгебра $\widehat{l^1(\Gamma_0)}$ преобразований Гельфанда совпадает в точности с множеством сумм абсолютно сходящихся рядов $\sum\limits_{x\in\Gamma_0} c(x)\,\chi_x$ на компакте Hom Γ_0, $\sum\limits_{x\in\Gamma_0}|c(x)|<\infty$, где $\chi_x(\zeta)=\zeta(x)$, $\zeta\in$ Hom Γ_0, характеры χ_x, $x\in\Gamma_0$ будем называть базисными функциями алгебры $l^1(\Gamma_0)$.

Всюду в дальнейшем функцию $f\in l^1(\Gamma_0)$ будем отождествлять с ее преобразованием Гельфанда.

Непрерывный линейный функционал D на $l^1(\Gamma_0)$ называется точечным дифференцированием (в ζ), если существует гомоморфизм $\zeta\in$ Hom Γ_0 такой, что

$$D(fg)=f(\zeta)\,D(g)+g(\zeta)\,D(f),\quad f,\ g\in l^1(\Gamma_0).$$

Пусть $\zeta=p\alpha$ — полярное разложение гомоморфизма $\zeta\in$ Hom Γ_0, где $p\in$ Phom Γ_0, $\alpha\in\hat{\Gamma}$. Непосредственно проверяется, что функционал D_ζ, определенный формулой

$$D_\zeta(f)=D_\omega f(\alpha p^{1+\omega})_{\omega=0},\tag{2.1}$$

где $D_\omega(\cdot)/_{\omega=0}$ — обычная производная функции от комплексной переменной ω в точке $\omega=0$, задает точечное дифференцирование в ζ (для $u+iv\in C$, $u\geqslant 0$ положим $p^{u+iv}(x)=\exp[(u+iv)\ln p(x)]$, при $p(x)\neq 0$ и $p^{u+iv}(x)=0$, если $p(x)=0$).

Если p — не идемпотент, то существует $x\in\Gamma_0$ такой, что $0<p(x)<1$ и тогда $D_\zeta(\chi_x)=\zeta(x)\ln p(x)\neq 0$. Если же p — идемпотент, то функция $F(\omega)=f(\alpha p^{1+\omega})$, как функция от комплексной переменной ω, постоянна (а именно, $F(\omega)=\sum f(x)\,\alpha(x)$, где суммирование берется по тем $x\in\Gamma_0$, для которых $p(x)=1$), поэтому $F'(\omega)=0$, т. е. $D_\zeta(f)=0$, $f\in l^1(\Gamma_0)$. Таким образом, во всех точках $\zeta\in$ Hom Γ_0, для которых имеется хотя бы одно $x\in\Gamma_0$ такое, что $|\zeta(x)|\neq 0,\ 1$, существует точечное дифференцирование, и оно может быть задано формулой (2.1); однако, формула (2.1) не может задать точечное дифференцирование в точках, являющихся идемпотентами.

Очевидно, что для определения точечного дифференцирования на алгебре $l^1(\Gamma_0)$ достаточно определения ограниченного функционала D на базисных функциях χ_x, $x\in\Gamma_0$, удовлетворяющего условию

$$D(\chi_{x+y})=\zeta(x)\,D(\chi_y)+\zeta(y)\,D(\chi_x),\quad x,\ y\in\Gamma_0,\ \zeta\in \text{Hom }\Gamma_0.$$

В самом деле, пусть $|D(\chi_x)| \leqslant 1$ для всех $x \in \Gamma_0$. Тогда для $f \in l^1(\Gamma_0)$ можем определить

$$D(f) = \sum_{x \in \Gamma_0} f(x) D(\chi_x), \tag{2.2}$$

ибо ряд в правой части (2.2) абсолютно сходится и $|D(f)| \leqslant \|f\|$. Равенство $D(fg) = f(\zeta) D(g) + g(\zeta) D(f)$ проверяется непосредственно.

Обозначим через E_ζ множество всех точечных дифференцирований в заданной точке $\zeta \in \mathrm{Hom}\,\Gamma_0$. Оно является банаховым пространством в естественной норме функционала.

Следующее простое предложение позволяет сводить вопрос о размерности пространства E_ζ к случаю, когда $\zeta \in \mathrm{Phom}\,\Gamma_0$, т. е. ζ — положительный характер Γ_0.

Предложение 2.1. *Пространство E_ζ изометрически изоморфно пространству E_p, где p — положительный характер в полярном разложении ζ.*

Доказательство. Пусть $\zeta = p\alpha$ — полярное разложение гомоморфизма $\zeta \in \mathrm{Hom}\,\Gamma_0$. Каждому дифференцированию $D \in E_\zeta$ поставим в соответствие функционал D', действующий на базисных функциях χ_x, $x \in \Gamma_0$ по следующему правилу $D'(\chi_x) = \dfrac{D(\chi_x)}{\alpha(x)}$. Непосредственно проверяется, что $D' \in E_p$ и что соответствие $D \to D'$ задает изометрический изоморфизм между E_ζ и E_p.

Назовем гомоморфизмы $p_1, \cdots, p_n \in \mathrm{Phom}\,\Gamma_0 \setminus \mathrm{Ihom}\,\Gamma_0$ мультипликативно независимыми, если равенство $(p_1^{u_1} \cdots p_n^{u_n})(x) = 1$ выполняется для всех $x \in \Gamma_0$ с $(p_1 \cdots p_n)(x) \neq 0$, тогда и только тогда, когда $u_1 = \cdots = u_n = 0$.

Предложение 2.2. *Пусть $p_1, \cdots, p_n \in \mathrm{Phom}\,\Gamma_0 \setminus \mathrm{Ihom}\,\Gamma_0$ — мультипликативно независимы. Тогда для $p = p_1 \cdots p_n$, $\dim E_p \geqslant n$.*

Доказательство. Для каждого $j = \overline{1, n}$ функционал D_j, заданный формулой (2.1), определяет нетривиальное точечное дифференцирование в точке p.

Для всех $x \in \Gamma_0$ с $p_j(x) \neq 0$, $D_j(\chi_x) = p(x) \ln p_j(x)$. Если теперь $u_1, \cdots, u_n$ — такие, что $u_1 D_1 + \cdots + u_n D_n = 0$, то $u_1 \ln p_1(x) + \cdots + u_n \ln p_n(x) = 0$ для всех тех $x \in \Gamma_0$, для которых $p(x) \neq 0$. Тогда для таких x, $(p_1^{u_1} \cdots p_n^{u_n})(x) = 1$, откуда, по условию, все $u_j = 0$, что и требовалось доказать.

Опишем точечные дифференцирования в точках, являющихся идемпотентами полугруппы $\mathrm{Hom}\,\Gamma_0$ для произвольных полугрупп Γ_0.

Пусть $\rho \in \mathrm{Ihom}\,\Gamma_0$, обозначим через $J = \{y \in \Gamma_0 : \rho(y) = 1\}$ На $\mathrm{Ker}\,\rho = \{x \in \Gamma_0 : \rho(x) = 0\}$ введем следующее отношение эквивалентности: $x_1, x_2 \in \mathrm{Ker}\,\rho$ эквивалентны $(x_1 \sim x_2)$, если существуют такие $y_1, y_2 \in J$, что $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$. Класс эквивалентности, соответствующий элементу x, обозначим через $\tilde{x}$, $\tilde{x} = \{x' \in \mathrm{Ker}\,\rho : x' \sim x\}$.

Назовем элемент $x \in \mathrm{Ker}\,\rho$ минимальным в Γ_0 (относительно ρ), если x не эквивалентно суммам $x_1 + x_2$ при всех $x_1, x_2 \in \mathrm{Ker}\,\rho$. Множество всех минимальных элементов обозначим через J_ρ. Очевидно, что $x+y \in J$ для всех $y \in J$ и $x \in J_\rho$; обозначим $\widetilde{J}_\rho = \{\tilde{x} : x \in J_\rho\}$.

Теорема 2.3. *Пусть D^x—функция на $l^1(\Gamma_0)$, определенная для любого $\tilde{x} \in \widetilde{J}_\rho$ на базисных функциях следующим образом $D^x(\chi_y) = 1$, $y \in \tilde{x}$, $D^x(\chi_y) = 0$, $y \in \Gamma_0 \setminus \tilde{x}$. Тогда D^x для любого $\tilde{x} \in \widetilde{J}_\rho$ является точечным дифференцированием в ρ и множество всех таких дифференцирований образует базис в пространстве E_ρ. При этом* $\dim E_\rho = \operatorname{card} \widetilde{J}_\rho$.

Доказательство. То что D^x представляет собой точечное дифференцирование в ρ и семейство $\{D^x : \tilde{x} \in \widetilde{J}_\rho\}$ линейно независимо, проверяется непосредствнно.

Пусть теперь D — нетривиальное точечное дифференцирование в ρ. Для всех $x \in \Gamma_0 \setminus J_\rho$, $D(\chi_x) = 0$. В самом деле, если $x \in J$, то в силу ограниченности функционала D, из равенства $D(\chi_{nx}) = nD(\chi_x)$, верного при всех целых $n > 0$, следует, что $D(\chi_x) = 0$. Далее, для $x \in \operatorname{Ker} \rho \setminus J_\rho$ существуют такие x_1, $x_2 \in \operatorname{Ker} \rho$ и y, $y_1 \in J$, что $x+y = x_1 + x_2 + y_1$, поэтому $D(\chi_x) = D(\chi_{x_1+x_2}) = 0$.

Теперь, учитывая то, что $D(\chi_y) = D(\chi_x)$ для всех $y \in \tilde{x}$, легко видеть, что $D = \sum\limits_{\tilde{x} \in \widetilde{J}_\rho} c_x D^x$, где $c_x = D(\chi_x)$. Теорема доказана.

Пример. Пусть $\Gamma_0 = \{x \in R_+ : x \geqslant 1\} \cup \{0\}$. Множеством минимальных элементов для идемпонента ρ_0 ($\rho_0(0) = 1$, $\rho_0(x) = 0$, $x \neq 0$) служит отрезок $J_{\rho_0} = [1, 2)$, поэтому $\dim E_{\rho_0} = \infty$.

Перейдем к описанию точечных дифференцирований на $l^1(\Gamma_0)$ в точках $p \in \operatorname{Phom} \Gamma_0 \setminus \operatorname{Ihom} \Gamma_0$, в случае, когда Γ_0 — максимальная полугруппа.

Теорема 2.4. *Пусть Γ_0 — максимальная полугруппа. Тогда для любого $p \in \operatorname{Phom} \Gamma_0 \setminus \operatorname{Ihom} \Gamma_0$ пространство E_p одномерно.*

Доказательство. Пусть D — точечное дифференцирование в точке $p \in \operatorname{Phom} \Gamma_0 \setminus \operatorname{Ihom} \Gamma_0$. Так как Γ_0 — максимальна, то $p \neq 0$, и мы можем положить $D_0 = Dp^{-1}$. Непосредственно проверяется, что D_0 — аддитивная функция на Γ_0, и обратно, любая аддитивная функция D_0 на Γ_0 задает точечное дифференцирование $D = pD_0$ в p. В силу того, что D_0 разлагается в сумму $D_0 = D_1 + iD_2$ вещественных аддитивных функций D_j, $j = 1, 2$, то для описания пространства E_p достаточно описать вещественные аддитивные функции на Γ_0.

Если D_0 — положительно определенная аддитивная функция на Γ_0, то $\exp(-D_0) \in \operatorname{Phom} \Gamma_0$. Тогда по предложению 1.1., существует такое $u > 0$, что $\exp(-D_0) = p^u$, т. е. $D_0(x) = -u \ln p(x)$, $x \in \Gamma_0$. Таким образом, доказательство теоремы сводится к доказательству положительности любой вещественнозначной аддитивной функции на полугруппе Γ_0.

Если G — максимальная полугруппа в Γ_0, то фактор-полугруппа Γ_0/G изоморфна некоторой максимальной полугруппе R_0 в R_+.

С другой стороны, $D_0 \equiv 0$ на G. Действительно, так как $p \equiv 1$ на G, то $D_0(x) = D(\chi_x)$, $x \in G$, откуда $D(\chi_{nx}) = nD_0(x)$ при всех $x \in G$ и $n \in Z_+$. Справедливость тождества $D_0 \equiv 0$ на G следует из ограниченности функционала D.

Тогда при изоморфизме $\Gamma_0/G \to R_0$, функция D_0 перейдет в аддитивную функцию D_0 на R_0, что позволяет рассматривать Γ_0 как полугруппу в R_+.

Если $\Gamma_0 = Z_+$, то равенство $D_0(n) = nD_0(1)$, $n > 0$, влечет за собой положительность (или отрицательность) D_0.

Пусть Γ_0 плотна в R_+. Допустим, что D_0 не знакопостоянна. Тогда для любого $x \in \Gamma_0$ с $D_0(x) > 0$ существует $y < x$ такой, что $D_0(y) < 0$. В противном случае, существует такой x, что $D_0(y) > 0$ при всех $y \leqslant x$, и тогда, в силу того, что для каждого $z > x$ найдется такое $n > 0$, что $z - nx < x$, то $D_0(z) = D_0(z - nx) + D_0(nx) > 0$, т. е. D_0 — положительно определенная функция, вопреки допущению.

Положим $x_1 = x - y$, тогда $D_0(x_1) > D_0(x)$. Если теперь, $x_1, \cdots, x_n \in \Gamma_0$ выбраны таким образом, что $x > x_1 > \cdots > x_n$ и $D_0(x) < D_0(x_1) < \cdots < D_0(x_n)$, то пусть $x_{n+1} = x_n - y_n$, где $y_n \in \Gamma_0$, такой, что $D_0(y_n) < 0$. Итак, можно построить последовательность $x_n \in \Gamma_0$, $x_n \downarrow 0$ такую, что $D_0(x_n) > D_0(x)$ и $D_0(x_n) < D_0(x_{n+1})$ для всех $n \geqslant 1$. Выберем такую последовательность $\{x_{k_n}\} \subset \{x_n\}$, что $nx_{k_n} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $D_0(nx_{k_n}) > nD_0(x)$ и, имея в виду, что $p(nx_{k_n}) = e^{unx_{k_n}} \to \infty$ при $n \to \infty$, получаем, что $D(\chi_{nx_{k_n}}) = p(nx_{k_n}) D_0(nx_{k_n}) \to \infty$, при $n \to \infty$, что противоречит ограниченности функционала D. Это и доказывает теорему.

§ 3. Автоморфизмы алгебры $A(\Gamma_0)$

Пусть α — произвольный характер группы Γ и φ — автоморфизм полугруппы Γ_0. Гомеоморфизм

$$\zeta \to \alpha \cdot \zeta \circ \varphi, \quad \zeta \in \mathrm{Hom}\, \Gamma_0 \tag{3.1}$$

назовем вращением „обобщенного диска" Hom Γ_0.

Очевидно, что непрерывный линейный оператор V на алгебре $A(\Gamma_0)$, определенный на базисных функциях χ_x, $x \in \Gamma_0$ соотношением

$$V\chi_x = \alpha(x)\, \chi_{\varphi(x)}, \quad x \in \Gamma_0, \tag{3.2}$$

представляет собой автоморфизм алгебры $A(\Gamma_0)$ и

$$Vf(\zeta) = f(\alpha\zeta \circ \varphi), \quad f \in A(\Gamma_0) \tag{3.3}$$

(так же, как и в § 2, функцию $f \in A(\Gamma_0)$ отождествляем с ее преобразованием Гельфанда).

В данном параграфе покажем, что для широкого класса полугрупп Γ_0, автоморфизмы алгебры $A(\Gamma_0)$ исчерпываются вращениями Hom Γ_0, т. е. задаются формулой (3.3).

Забегая вперед укажем, что таковыми являются полупруппы Γ_0, у которых полугруппа идемпотентов $\mathrm{Ihom}\,\Gamma_0$ состоит из одного нетривиального идемпотента ρ_0 (в частности, все квазимаксимальные полугруппы Γ_0 с $\nu(\Gamma_0)=1$, см. предложение 1.2.).

Хорошо известно, что все автоморфизмы диск-алгебры $A(Z_+)$ порождаются конформными отображениями τ единичного круга на себя (см., например, [10], стр. 203), где $\tau(z)=e^{i\theta}\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$ — функция Мёбиуса, переводящая z_0 в 0. В работе Аренса ([2]) приведен пример полугруппы Γ_0, отличной от Z_+, для которой автоморфизмы $A(\Gamma_0)$ также не исчерпываются вращениями $\mathrm{Hom}\,\Gamma_0$. В качестве такой полугруппы берется полугруппа $\Gamma_0=\{(m, n)\in Z_+\times Z$ для $m=0,\ n\geqslant 0\}$.

Пусть теперь V — произвольный автоморфизм алгебры $A(\Gamma_0)$ и τ_V — порожденный им гомеоморфизм компакта $A(\Gamma_0)$ на себя:

$$\tau_V(\zeta)(x)=(V\chi_x)(\zeta),\quad x\in\Gamma_0,\ \zeta\in \mathrm{Hom}\,\Gamma_0. \tag{3.4}$$

Необходимое условие того, чтобы все автоморфизмы V алгебры $A(\Gamma_0)$ индуцировались автоморфизмами полугруппы Γ_0, т. е. задавались формулой (3.3), очевидно, состоит в том, чтобы соответствующие им гомеоморфизмы τ_V были инвариантными на полугруппе $\mathrm{Ihom}\,\Gamma_0$,

$$\tau_V(\mathrm{Ihom}\,\Gamma_0)\subset \mathrm{Ihom}\,\Gamma_0. \tag{3.5}$$

Как показано Аренсом ([2]) для полугрупп Γ_0, задающих так называемый слабый архимедов порядок на группе Γ, условие (3.5) является также и достаточным. Напомним, что полугруппа Γ_0 задает слабый архимедов порядок на Γ, если для каждого $x\in\Gamma$ существует гомоморфизм h группы Γ в вещественную ось R такой, что $h(x)\neq 0$ и $h(y)\geqslant 0$ для всех $y\in\Gamma_0$. Примером может служить любая полугруппа в R_+, и в частности, любая квазимаксимальная полугруппа Γ_0 с $\nu(\Gamma_0)=1$.

Отметим следующее свойство отображения τ_V, которым мы неоднократно будем пользоваться:

$$\tau_V(\hat{\Gamma})=\hat{\Gamma}, \tag{3.6}$$

справедливость которого непосредственно следует из того, что группа $\hat{\Gamma}$ служит границей Шилова алгебры $A(\Gamma_0)$ (см. [1]).

Теорема 3.1. *Пусть полугруппа* Γ_0 *не изоморфна* Z_+ *и* $\mathrm{Ihom}\,\Gamma_0=\{1, \rho_0\}$. *Тогда для любого автоморфизма* V *алгебры* $A(\Gamma_0)$ *существует характер* α *группы* Γ *и автоморфизм* φ *полугруппы* Γ_0 *такие, что* $V\chi_x=\alpha(x)\chi_{\varphi(x)}$, $x\in\Gamma_0$.

Доказательство. Напомним, что $\rho_0(0)=1$ и $\rho_0(x)=0$, $x\neq 0$. Из условия теоремы следует, что для всех положительных характеров $p\neq\rho_0$, 1, $0<p(x)<1$ при всех $x\in\Gamma_0$. Действительно, допустим, что множество $J_0=\{x\in\Gamma_0: p(x)=0\}$ не пусто. Определим характер ρ_1 следующим образом: $\rho_1\equiv 0$ на J_0 и $\rho_1\equiv 1$ на $\Gamma_0\setminus J_0$. Поскольку J_0 есть собственный идеал в Γ_0, а $\Gamma_0\setminus J_0$ — подполугруппа Γ_0, то ρ_1 является идемпотентом $\operatorname{Hom}\Gamma_0$, отличным от 1 и ρ_0, что противоречит условию теоремы. Точно так же устанавливается, что $p(x)<1$ для всех $x\in\Gamma_0$.

Зафиксируем произвольный характер $p\in\operatorname{Phom}\Gamma_0$, $p\neq 1, \rho_0$, и определим непрерывное отображение Φ правой полуплоскости $\Pi=\{u+iv\in\mathbf{C}: u\geqslant 0\}$ в компакт $\operatorname{Hom}\Gamma_0$:

$$\Phi(u+iv)=p^{u+iv},\ u\geqslant 0,\ v\in R,$$

где $p^{u+iv}(x)=\exp[(u+iv)\ln p(x)]$, $x\in\Gamma_0$. Ниже мы неоднократно будем пользоваться следующими свойствами этого отображения:

1) образ $\Phi(iR)=\{p^{iv}: v\in R\}$ есть подгруппа группы $\widehat{\Gamma}$;

2) для любого $f\in A(\Gamma_0)$ композиция $f\circ\Phi$ представляет собой ограниченную почти периодическую аналитическую функцию в правой полуплоскости (см. [1] или [2]).

Предположим, что задан автоморфизм U. Так как $U\neq 0$, то $U(1)=1$ (здесь $1=\chi_0$, где $\chi_0(\zeta)=\zeta(0)=1$, $\zeta\in\operatorname{Hom}\Gamma_0$).

Пусть $x\in\Gamma_0\setminus\{0\}$, $f=U\chi_x$, $\sum c_n\chi_{x_n}$ — ряд Фурье функции f. Положим $F=f\circ\Phi$. Покажем, что задача сводится к доказательству неравенства $F(\omega)\neq 0$, верного для всех $\omega=u+iv\in\Pi$. В самом деле, так как $\tau_U(\widehat{\Gamma})=\widehat{\Gamma}$ ((3.6)), то $|F(iv)|=1$ для всех $v\in R$. Если теперь $F\neq 0$ в правой полуплоскости, то по теореме Безиковича (см. [11]), $F(\omega)=ce^{\lambda\omega}$, где $|c|=1$, $\lambda<0$. Для членов соответствующих рядов имеем $\sum c_n p^u(x_n)e^{iv\ln p(x_n)}=ce^{\lambda u}e^{i\lambda v}$, $u+iv\in\Pi$. Так как $p(x_n)>0$, то, полагая в ней $u=0$, получим $\sum c_n e^{iv\ln p(x_n)}=ce^{i\lambda v}$, при всех $v\in R$. Отсюда необходимо следует, что все $c_n=0$, за исключением одного $c_{n_0}\neq 0$, и тогда $U\chi_x=c\chi_{x_{n_0}}$. Полагая затем $c=\alpha(x)$ и $x_{n_0}=\varphi(x)$, непосредственно убеждаемся, что α — характер группы Γ, а φ — автоморфизм Γ_0.

Допустим теперь, что $F(\omega_0)=0$ в некоторой точке $\omega_0=u_0+iv_0$. Докажем, что в этом случае множество $\Phi(iR)=\{p^{iv}: v\in R\}$ гомеоморфно окружности.

Ограниченная аналитическая почти периодическая в некоторой области функция, имеющая нуль, имеет их бесконечно много; пусть ω_n, $n=0, 1, 2, \cdots$ — нуль функции F, $\omega_n=u_n+iv_n$. Как было показано в начале доказательства, $\zeta(x)\neq 0$ для всех $\zeta\neq\rho_0$ и $x\in\Gamma_0$, поэтому из равенств $F(\omega_n)=0$ следует, что $\tau_U(p^{\omega_n})=\rho_0$ при всех n. Учитывая теперь биективность τ_U, получаем, что $p^{\omega_n}=p^{\omega_0}$, откуда $p^{u_n}=p^{u_0}$, и, так как $p(x)<1$ для всех $x\in\Gamma_0$, то $u_n=u_0$. Окончательно, $p^{iv_n}=p^{iv_0}$ для всех n, т. е. $i(v_n-v_0)$ принадлежат ядру $\operatorname{Ker}\Phi=\{iv\in iR: \Phi(iv)=1\}$ вложения $\Phi: iR\to\widehat{\Gamma}$.

Хорошо известно, что любая замкнутая подгруппа группы R есть либо $\{0\}$, либо R, либо изоморфна Z. Поэтому, из того, что $\operatorname{Ker}\Phi$ есть собственная замкнутая подгруппа мнимой оси и $i(v_n-v_0)\in\operatorname{Ker}\Phi$, заключаем, что $\operatorname{Ker}\Phi = itZ$, $t>0$. Итак, $\Phi(iR)$ гомеоморфно R/Z и, следовательно, гомеоморфна окружности. Для удобства положим $t=2\pi$, тогда $p^{2\pi l}=1$, откуда $-\ln p(x)\in Z_+$, т. е. $p(x)=e^{-n_x}$, где $n_x\in Z_+$.

Полагая теперь $p(x_n)=e^{-k_n}$, $k_n\in Z_+$, получаем $F(\omega)\sim\sum c_n e^{-k_n\omega}= =\sum c_n z^{k_n}\sim\tilde F(z)$, где $\omega\in\Pi$, $z=e^{-\omega}$. Функция $\tilde F$ обладает следующими свойствами:

1) $\tilde F$ аналитична внутри единичного круга;

2) $|\tilde F(z)|=1$ для z, $|z|=1$;

3) $\tilde F(e^{-\omega_0})=0$

(отметим, что для всех ω_n, $e^{-\omega_n}=e^{-\omega_0}$, поскольку $\omega_n=u_0+iv_n$, а $v_n - v_0\in 2\pi Z$).

Пусть $\alpha\in\hat\Gamma$ и $\alpha\neq 1$. Рассмотрим функцию $\tilde F_\alpha(z)\sim\sum c_n\alpha(x_n)z^{k_n}$. Легко видеть, что она удовлетворяет условиям 1) и 2) и не является постоянной, поэтому существует z', $|z'|<1$, такая, что $\tilde F_\alpha(z')=0$. Это означает, что $\tau_U(\alpha p^{\omega'})(x)=0$, где $e^{-\omega'}=z'$. Кроме того $\tau_U(p^{\omega_0}(x))=0$, поэтому $\alpha p^{\omega'}=p^{\omega_0}$, откуда следует, что $\alpha p^{iv'}=p^{iv_0}(v'=\operatorname{Im}\omega')$, т. е. $\alpha=p^{i(v_0-v')}\in\Phi(iR)$. Итак, $\Phi(iR)=\hat\Gamma$. Поскольку $\Phi(iR)$ гомеоморфно окружности, группа Γ изоморфна Z. Учитывая условия теоремы, заключаем, что Γ_0 является подполугруппой Z_+, не изоморфная Z_+. Поскольку в случае $\Gamma_0\subset Z_+$ автоморфизмы $A(\Gamma_0)$ представляют собой вращения единичного круга, то теорема доказана.

В частности, в случае, когда Γ_0— квазимаксимальная полугруппа с $\nu(\Gamma_0)=1$, автоморфизмы $A(\Gamma_0)$ исчерпываются вращениями „обобщенного диска“ $\operatorname{Hom}\Gamma_0$. Автоморфизмы φ таких полугрупп Γ_0 имеют вид $\varphi(x)=ux$, $x\in\Gamma_0$, $u>0$, (причем $u=1$, когда в Γ_0 есть минимальный элемент); поэтому для всех автоморфизмов U алгебры $A(\Gamma_0)$, $U\chi_x=\alpha(x)\chi_{ux}$, $x\in\Gamma_0$, $\alpha\in\hat\Gamma$.

Замечание 1. Пусть U—автоморфизм алгебры $l^1(\Gamma_0)$ и $\tau(\zeta)(x)= =(U\chi_x)(\zeta)$, $x\in\Gamma_0$. Определим линейный оператор $\tilde U$ на $A(\Gamma_0)$, полагая $(\tilde U\chi_x)(\zeta)=\tau(\zeta)(x)$, $x\in\Gamma_0$. Поскольку $M_{A(\Gamma_0)}=M_{l^1(\Gamma_0)}=\operatorname{Hom}\Gamma_0$ и алгебра $l^1(\Gamma_0)$ всюду плотна в $A(\Gamma_0)$, то $\tilde U$ представляет собой непрерывный автоморфизм алгебры $A(\Gamma_0)$. Тогда теорема 3.1 утверждает, что в случае, когда в $\operatorname{Hom}\Gamma_0$ всего лишь один нетривиальный идемпотент ρ_0, автоморфизмы алгебры $l^1(\Gamma_0)$ также исчерпываются вращениями „обобщенного диска“ $\operatorname{Hom}\Gamma_0$.

Заметим, что в отличие от алгебры $A(Z_+)$, автоморфизмы алгебры $l^1(Z_+)$ также представляют собой вращения диска (поскольку гомеоморфизм τ имеет вид $\tau(\zeta)=e^{i\theta}\dfrac{\zeta-\zeta_0}{1-\bar\zeta_0\zeta}$, $|\zeta_0|<1$, $|\zeta|\leqslant 1$, и $\|\tau(\zeta)\|_{l^1(Z_+)}=1+2|\zeta_0|$, а U— ограниченный оператор, то $\zeta_0=0$, т. е. $\tau(\zeta)=e^{i\theta}\zeta$, см. также, [12], стр. 175).

Замечание 2. Применяя свойство (3.6) нетрудно показать, что все изометрические автоморфизмы $l^1(\Gamma_0)$ для произвольной полугруппы Γ_0 индуцируются автоморфизмами полугруппы Γ_0.

Действительно, пусть автоморфизм U алгебры $l^1(\Gamma_0)$ такой, что $\|U\chi_x\| \leqslant 1$ для всех $x \in \Gamma_0$. Пусть $U\chi_x = \sum c_n \chi_{x_n}$, тогда $\sum |c_n| \leqslant 1$. С другой стороны, поскольку $\tau_U(\hat{\Gamma}) = \hat{\Gamma}$ ((3.6)), то для любого $\alpha \in \hat{\Gamma}$, $|\sum c_n \alpha(x_n)| = 1$, в частности $|\sum c_n| = 1$ $(\alpha \equiv 1)$. Тогда $|\sum c_n| = \sum |c_n|$, откуда $\arg c_n \equiv \text{const} = \theta$, т. е. $c_n = r_n e^{i\theta}$ при всех n. Из тех же соображений $\arg \alpha(x_n) \equiv \text{const}$. так как $|\sum r_n \alpha(x_n)| = 1 = \sum r_n = \sum |r_n \alpha(x_n)|$, т. е. $\alpha(x_n) = \alpha(x_1)$ при всех n. Поскольку последнее тождество верно для всех $\alpha \in \hat{\Gamma}$, $x_n = x_1$ при всех n и, следовательно, $U\chi_x = e^{i\theta} \chi_{x_1}$.

Ереванский государственный
университет

Поступила 12. IX. 1985

Լ. Մ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ. Ընդհանրացված անալիտիկ ֆունկցիաների հանրահաշիվների վրա կետային դիֆերենցումների և ավտոմորֆիզմների որոշ հատկություններ *(ամփոփում)*

Γ խմբի մեջ ներդրված Γ_0, միավորով ադիտիվ աբելյան կիսախմբերի համար հետազոտվում են այդ կիսախմբերով ծնված ընդհանրացված անալիտիկ ֆունկցիաների հանրահաշիվների որոշ հատկությունները։

Ներմուծվում է կիսախմբերի հատուկ տիպ (քվազիմաքսիմալ) և այդ տիպի կիսախմբերի համար տրվում է $l^1(\Gamma_0)$ բանախյան հանրահաշվի մաքսիմալ իդեալների տարածության նկարագրությունը։

Կամայական Γ_0 մաքսիմալ կիսախմբերի համար նկարագրվում են $l^1(\Gamma_0)$ հանրահաշվի կետային դիֆերենցումները։ $l^1(\Gamma_0)$ հանրահաշվի կետային դիֆերենցումները Hom Γ_0 *կիսախմբի իդեմպոտենտներում նկարագրվում են կամայական Γ_0 կիսախմբերի համար։*

Կիսախմբերի լայն դասի համար (որը ընդգրկում է նաև քվազիմաքսիմալները) նկարագրվում են Γ խմբի բնութագրերի կոմպակտ $\hat{\Gamma}$ խմբի վրա Γ խմբի χ_x $(x \in \Gamma_0)$ բնութագրերով ծնված $A(\Gamma_0)$ հանրահաշվի բոլոր ավտոմորֆիզմները։ Ապացուցվում է, որ $A(\Gamma_0)$ հանրահաշվի U ավտոմորֆիզմները ծնվում են Γ_0 կիսախմբի φ ավտոմորֆիզմներով՝

$$U\chi_x = \alpha(x)\chi_{\varphi(x)}, \quad x \in \Gamma_0,$$

որտեղ α-ն Γ խմբի ցանկացած բնութագիր է։

L. M. HAKOPIAN. *Some properties of point differentiations and automorphisms on algebras of generalized analytic functions* (summary)

Some properties of algebras of generalized analytic functions generated by additive abelian semigroups Γ_0 which can be included in some group Γ are investigated. We introduce the special type of so called quasimaximal semigroups and for them we describe maximal ideal's space of Banach algebra $l^1(\Gamma_0)$. For every maximal semigroup Γ_0 we describe point differentiations on algebra $l^1(\Gamma_0)$. Point differentiations on $l^1(\Gamma_0)$ in idempotents of semigroups Hom Γ_0 we describe for arbitrary samigroups Γ_0. For a large class of semigroups (which includes quasimaximals) we describe automorphisms of the uniform algebra $A(\Gamma_0)$ on the dual compact group $\hat{\Gamma}$ generated by characters χ_x of Γ, for $x \in \Gamma_0$. We prove that the automorphism U of $A(\Gamma_0)$ is induced by the automorphism φ of the semigroup Γ_0

$$U\chi_x = \alpha(x)\chi_{\varphi}(x),$$

where α is an arbitrary character of Γ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Arens and I. M. Singer*. Generalized analytic functions, Trans. Amer. Math. Soc., v. 81, 1956, 379--393.
2. *R. Arens*. A Banach algebra generalization of conformal mappings of the disc Trans. Amer, Math. Soc., 81, № 2, 1956, 501—513.
3. *R. Arens*. The boundary integral of log |Ф| for generalized analytic functions Trans. Amer. Math. Soc., v. 86, 1957, 57—69.
4. *K. Hoffman*. Boundary behavior of generalized analytic functions, Trans, Amer Math. Soc., 87, № 2, 1958, 447—466.
5. *H. Helson and D. Lawdenslager*. Prediction theory and Fourier series in several vaviables, Acta Math., 99, 1959, 165—202.
6. *H. Helson and D. Lawdenslager*. Prediction theory and Fourier series in several, variables, II Acta Math., 106, 1961, 175—213.
7. *H. Helson and D. Lawdenslager*. Invariant subspaces, Proc. Infernat. Symp. Linear Spaces, Ierusalem, 1960, Macmillan (Pergamon), N. Y., 1961, 251—262.
8. *H. Helson*. Compact groups with ordered duals, Proc. Lond. Math. Soc., (3). 14 (A), 1965, 144—156.
9. *Т. Гамелин*. Равномерные алгебры, М., «Мир», 1973.
10. *К. Гофман*. Банаховы пространства аналитических функций, М., ИЛ. 1963.
11. *A. S. Besicovitch*. Almost periodic functions, Cambridge, 1932.
12. *Ж.-П. Кахан*. Абсолютно сходящиеся тригонометрические ряды, М., «Мир». 1976.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXII, № 2, 1987 Математика

УДК 517.53:517.5

А. А. СААРЯН

ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА АБЕЛЯ-ПЛАНА. ПРИЛОЖЕНИЯ К ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

В последние годы в теории квантованных полей появились интересные применения формулы суммирования Абеля-Плана [1]. В работе [2] с помощью этой формулы проведена регуляризация тензора энергии-импульса скалярного поля в различных фридмановских моделях Вселенной. Позднее формула Абеля-Плана применялась также к вычислению вакуумного среднего тензора энергии-импульса квантованных полей в различных полных и неполных многообразиях (эффект Казимира). С сс помощью легко доказывается независимость результатов расчета от известного произвола, существующего в процедуре перенормировки наблюдаемых величин. Сравнительно подробное изложение этих вопросов можно найти в [3].

В ряде граничных задач математической физики приходится рассматривать суммы по нулям заданной функции. Еще Фурье в своих исследованиях по теории теплопроводности пришел к необходимости рассматривать ряды вида $\sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(j_k x)$, где j_k — положительные корни функции $J_0(z)$ [4]. Аналогичные выражения, но содержащие квадраты функций Бесселя, возникают в связи с эффектом Казимира для идеально проводящей сферы в квантовой теории поля. Обычная формула Абеля-Плана относится к рядам по нулям функции $\sin \pi z$ и в указанных случаях неприменима. Ниже приводится обобщение этой формулы для сумм по нулям заданной функции.

§ 1. Обобщенная формула Абеля—Плана

Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ мероморфны в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Через $z_{f,k}$ и $z_{g,k}$ обозначим полюсы, соответственно $f(z)$ и $g(z)$ в этой области, расположенные в порядке $|z_{i,k}| \leqslant |z_{i,k+1}|$, $i=f, g$. Предположим сначала, что $\operatorname{Im} z_{f,k} \neq 0$ (см. замечание к теореме 1.1).

Теорема 1.1. *Если функции $f(z)$ и $g(z)$ удовлетворяют условиям*

$$\lim_{b \to \infty} \int_{C_b^a} [g(z) + af(z)]\, dz = 0, \quad a = -1, 1, \tag{1.1}$$

где C_b^1 (C_b^{-1}) — верхняя (нижняя) половина правой полуокружности радиуса b с центром в точке $z=0$, то имеет место формула

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \pi i \left[\sum_k \operatorname*{Res}_{z=z_{g,k}} g(z) + \sum_{a,k} a \operatorname*{Res}_{a \operatorname{Im} z_{f,k}>0} f(z) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_a a \int_0^{ia\infty} [g(z) + af(z)]\,dz. \qquad (1.2)$$

Здесь предполагается, что интеграл в левой части существует, а возможные особенности на мнимой оси должны обходиться малыми полуокружностями в правой полуплоскости.

Доказательство. Рассмотрим контур C, состоящий из C_b^1, C_b^{-1} и прямолинейного отрезка $[-ib, ib]$ (возможные особенности на мнимой оси обходятся справа). Согласно теореме о вычетах

$$\int_C g(z)\,dz = 2\pi i \sum_k \operatorname*{Res}_{z=z_{g,k}} g(z), \qquad (1.3)$$

где в правой части суммирование проводится по полюсам, находящимся внутри контура C. Пусть C^1 и C^{-1} — верхняя и нижняя половины этого контура. Тогда имеем

$$\int_C g(z)\,dz = \sum_a \int_{C^a} g(z)\,dz = \sum_a \left\{ \int_{C^a} [g(z) + af(z)]\,dz - a \int_{C^a} f(z)\,dz \right\},$$

$$a = -1,\ 1.$$

По той же теореме о вычетах

$$\sum_a a \int_C f(z)\,dz + 2 \int_0^b f(x)\,dx = 2\pi i \sum_a a \operatorname*{Res}_{a \operatorname{Im} z_{f,k}>0} f(z).$$

Далее

$$\int_C [g(z) + af(z)]\,dz = \int_{C_b^a} [g(z) + af(z)]\,dz - a \int_0^{iab} [g(z) + af(z)]\,dz.$$

Учитывая эти соотношения и перейдя в (1.3) к пределу при $b \to \infty$, с учетом (1.1) приходим к формуле (1.2).

Замечание. Нетрудно показать, что формула (1.2) остается в силе и при наличии у функции $f(z)$ полюсов на вещественной оси в области $\operatorname{Re} z > 0$, если главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности этих полюсов не содержит четных степеней. В этом случае в левой части формулы (1.2) под $\int_0^\infty f(x)\,dx$ понимается главное значение этого интеграла, которое существует в силу вышесказанного. Далее всюду в (1.2) будем записывать интеграл $p.\,v. \int_0^\infty f(x)\,dx$, полагая, что он существует в смысле главного значения.

Формулу (1.2) мы будем называть обобщенной формулой Абеля-Плана, поскольку когда $g(z)=-if(z)\operatorname{ctg}\pi z$ и $f(z)$— аналитическая функция, из неё получается обычная формула Абеля—Плана [1, 3]. Подставив в (1.2) $g(z)=-if(z)\operatorname{ctg}\pi s(z)$, получаем формулу суммирования по целочисленным значениям аналитической функции $s(z)$.

§ 2. Суммирование по нулям функции $AJ_\nu(z)+BzJ'_\nu(z)$

Рассмотрим приложения общих формул к цилиндрическим функциям. Для упрощения записи последующих формул удобно ввести обозначение

$$\bar{F}(z)=AF(z)+BzF'(z), \tag{2.1}$$

где $F(z)$—произвольная функция, штрих означает производную по аргументу функции и, наконец, A и B—наперед заданные произвольные вещественные числа. Функцию $g(z)$ в обобщенной формуле Абеля-Плана (1.2) выберем в виде

$$g(z)=if(z)\frac{\bar{Y}_\nu(z)}{\bar{J}_\nu(z)}, \tag{2.2}$$

где $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя и Неймана. Для суммы и разности имеем

$$g(z)+af(z)=af(z)\frac{\bar{H}_\nu^{(a)}(z)}{\bar{J}_\nu(z)},\quad a=-1,\ 1.$$

Здесь $H_\nu^{(1)}$, $H_\nu^{(-1)}\equiv H_\nu^{(2)}$ (такое обозначение оказывается удобным) — функции Бесселя третьего рода (функции Ханкеля). Используя асимптотические формулы для бесселевых функций при фиксированном ν и $|z|\to\infty$ (см., например, [5]), можно убедиться, что условия (1.1) выполняются. если $f(z)$ удовлетворяет одному из неравенств

$$|f(z)|<\varepsilon(x)e^{c|y|}\ \text{или}\ |f(z)|<\frac{Me^{2|y|}}{|z|^\alpha}\ \text{при}\ |z|\to\infty,\ z=x+iy, \tag{2.3}$$

где $c<2$, $\alpha>1$, $\varepsilon(x)\to0$ при $x\to+\infty$.

Обозначим через $\lambda_{\nu,k}\neq0$ ($k=1,2,3,\cdots$, $|\lambda_{\nu,k}|\leqslant|\lambda_{\nu,k+1}|$) корни функции $\bar{J}_\nu(z)$ в правой полуплоскости (если существуют нули на мнимой оси, то будем брать только с положительной мнимой частью). Все они простые. Отметим, что при действительных $\nu>-1$ функция $\bar{J}_\nu(z)$ имеет лишь вещественные нули, за исключением случая $A/B+\nu<0$, когда имеются два чисто мнимых нуля [4, 6]. Отсюда с помошью вронскиана $W[J_\nu, Y_\nu]=2/\pi z$ находим

$$\operatorname*{Res}_{z=\lambda_{\nu,k}}\frac{\bar{Y}_\nu(z)}{\bar{J}_\nu(z)}f(z)=-\frac{2\lambda_{\nu,k}f(\lambda_{\nu,k})}{\pi[(\lambda_{\nu,k}^2-\nu^2)J_\nu^2(\lambda_{\nu,k})+\lambda_{\nu,k}^2J_\nu'^2(\lambda_{\nu,k})]}\equiv-$$

$$\equiv-\frac{2}{\pi}T_{\nu,k}f(\lambda_{\nu,k}). \tag{2.4}$$

Интеграл в правой части формулы (1.2) можно записать в виде

$$\sum_{a=-1,1}\int_0^{ia\infty} f(z)\,\frac{\overline{H}_\nu^{(a)}(z)}{\overline{J}_\nu(z)}\,dz, \tag{2.5}$$

где особенности на мнимой оси (включая точку $z=0$) обходятся справа. Рассмотрим два случая.

а). Допустим, что $f(z)$ не имеет особенностей на мнимой оси (кроме, быть может, $z=0$) и

$$f(ze^{\pi i}) = -e^{2\nu\pi i} f(z) + o(z^\beta), \quad \text{при} \quad z\to 0 \tag{2.6}$$

(в частности это условие выполняется если $f(z)=o(z^\beta)$). Здесь

$$\beta = \begin{cases} 2\,|\mathrm{Re}\,\nu| - 1, & \text{если } \nu \text{ — целое} \\ \mathrm{Re}\,\nu + |\mathrm{Re}\,\nu| - 1, & \text{если } \nu \text{ — нецелое.} \end{cases}$$

В этом случае для значений ν, при которых $\overline{J}_\nu(z)$ не имеет чисто мнимых корней, интеграл (2.5) можно представить в виде

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\overline{K}_\nu(x)}{\overline{I}_\nu(x)}\left[e^{-\nu\pi i} f(xe^{\pi i/2}) + e^{\nu\pi i} f(xe^{-\pi i/2})\right]dx +$$

$$+\sum_a a\int_{\gamma_\rho^a} f(z)\,\frac{\overline{H}_\nu^{(a)}(z)}{\overline{J}_\nu(z)}\,dz, \tag{2.7}$$

где γ_ρ^1 и γ_ρ^{-1} — верхняя и нижняя половины полуокружности радиуса ρ, лежащей в правой полуплоскости с центром в $z=0$, которые обходятся в положительном направлении относительно этой точки. В первом интеграле вместо обычных функций Бесселя введены модифицированные функции Бесселя I_ν, K_ν [5]. Из условия (2.6) следует, что

$$f(z)\,\frac{\overline{H}_\nu^{(1)}(z)}{\overline{J}_\nu(z)} = f(z_1)\,\frac{\overline{H}_\nu^{(2)}(z_1)}{\overline{J}_\nu(z_1)} + o(z^{-1}), \quad z_1 = ze^{-\pi i}.$$

Исходя из этого нетрудно показать, что при $\rho\to 0$

$$\sum_a a\int_{\gamma_\rho^a} f(z)\,\frac{\overline{H}_\nu^{(a)}(z)}{\overline{J}_\nu(z)}\,dz = -\pi\,\mathrm{Res}_{z=0}\left[f(z)\,\frac{\overline{Y}_\nu(z)}{\overline{J}_\nu(z)}\right]. \tag{2.8}$$

С помощью (1.2), (2.7), (2.8) получаем

Следствие 2.1. *Если $f(z)$—однозначная аналитическая функция в полуплоскости $\mathrm{Re}\,z\geqslant 0$ (с возможной точкой ветвления $z=0$) кроме полюсов $z_k\,(\neq\lambda_{\nu,k})$, $\mathrm{Re}\,z_k>0$ и удовлетворяет условиям (2.3) и (2.6), то для таких ν, когда $\overline{J}_\nu(z)$ не имеет чисто мнимых корней, справедлива формула*

$$2\sum_{k=1}^\infty T_{\nu,k} f(\lambda_{\nu,k}) - \text{p.v.}\int_0^\infty f(x)\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\overline{K}_\nu(x)}{\overline{I}_\nu(x)}\left[e^{-\nu\pi i} f(xe^{\pi i/2}) + \right.$$

$$+ e^{\nu\pi i} f(xe^{-\pi i/2})] dx - r_{1,\nu}[f(z)] + \frac{\pi}{2} \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\overline{Y}_\nu(z)}{\overline{J}_\nu(z)} f(z), \tag{2.9}$$

где введено обозначение

$$r_{1\nu}[f(z)] \equiv \pi i \sum_{a,k} a \operatorname*{Res}_{a \operatorname{Im} z_k > 0} f(z) \frac{\overline{H}_\nu^{(a)}(z)}{\overline{J}_\nu(z)} -$$

$$- \pi \sum_k \operatorname*{Res}_{\operatorname{Im} z_k = 0} f(z) \frac{\overline{Y}_\nu(z)}{\overline{J}_\nu(z)}, \quad a = -1, 1. \tag{2.10}$$

б). Пусть теперь функция $f(z)$ удовлетворяет условию

$$f(xe^{\pi i/2}) = - e^{2\nu\pi i} f(xe^{-\pi i/2}). \tag{2.11}$$

В частности, если $f(z)$ имеет чисто мнимые полюсы, то они комплексно сопряженные: $\pm iy_k$, $y_k > 0$. С помощью (2.11) интеграл в правой части формулы (1.2) можно записать в виде

$$\sum_{a,k} \int_{C_\rho(a\sigma_k)} f(z) \frac{\overline{H}_\nu^{(a)}(z)}{\overline{J}_\nu(z)} dz, \quad \sigma_k = 0, iy_k, \lambda_{\nu,k}; \quad \arg \lambda_{\nu,k} = \pi/2,$$

где $C_\rho(+0) = \gamma_\rho^1$, $C_\rho(-0) = \gamma_\rho^{-1}$ (см. (2.7)), а контур $C_\rho(it)$ $(t \neq 0)$ есть полуокружность радиуса ρ в правой полуплоскости с центром в точке it и с направлением обхода против часовой стрелки. Здесь учтено также, что чисто мнимые корни функции $\overline{J}_\nu(z)$ являются комплексно сопряженными, поскольку $\overline{J}_\nu(ze^{\pi i}) = e^{\nu\pi i} \overline{J}_\nu(z)$ и что согласно (2.11)

$$f(z) \cdot \frac{\overline{H}_\nu^{(1)}(z)}{\overline{J}_\nu(z)} = f(z_1) \frac{\overline{H}_\nu^{(2)}(z_1)}{\overline{J}_\nu(z_1)}, \quad z_1 = ze^{-\pi i}, \quad \arg z = \frac{\pi}{2}, \tag{2.12}$$

поэтому интегралы в правой части (1.2) по прямолинейным отрезкам вдоль верхней и нижней частей мнимой оси попарно сократятся. Из (2.12) следует равенство

$$\sum_a \int_{C_\rho(a\sigma_k)} f(z) \frac{\overline{H}_\nu^{(a)}(z)}{\overline{J}_\nu(z)} dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\sigma_k} f(z) \frac{\overline{H}_\nu^{(1)}(z)}{\overline{J}_\nu(z)}, \tag{2.13}$$

где $\sigma_k = iy_k$, $\lambda_{\nu,k}$, $\arg \lambda_{\nu,k} = \pi/2$. Если теперь учесть (2.8) то получим

Следствие 2.2. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в правой полуплоскости (кроме возможной точки ветвления $z = 0$) с полюсами z_k, $\operatorname{Re} z_k > 0$ и $\pm iy_k$, $y_k > 0$, $k = 1, 2, 3, \cdots (\neq \lambda_{\nu,p})$. Если эта функция удовлетворяет* (2.3) *и* (2.11), *то*

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} T_{\nu,k} f(\lambda_{\nu,k}) - p.v. \int_0^\infty f(x)\, dx = -\frac{\pi i}{2} \times$$

$$\times \sum_{\eta_k = 0, iy_k} (2 - \delta_{0\eta_k}) \operatorname*{Res}_{z=\eta_k} f(z) \frac{\overline{H}_\nu^{(1)}(z)}{\overline{J}_\nu(z)} - r_{1\nu}[f(z)]. \tag{2.14}$$

Напомним, что согласно предположению интегралы в левых частях (2.9) и (2.14) должны существовать.

Из (2.14) при $B = 0$, например, получаем [7]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{\mu+\nu+1}(j_{\nu,k})\, J_\nu(j_{\nu,k} t)}{j_{\nu,k}^{\mu+1} J_{\nu+1}^2(j_{\nu,k})} = \frac{1}{2} \int_0^\infty J_{\mu+\nu+1}(z)\, J_\nu(zt) \frac{dz}{z^\mu} =$$

$$= \frac{(1-t^2)^\mu t^\nu}{2^{\mu+1}\Gamma(\mu+1)}, \quad 0 < t \leqslant 1, \ \operatorname{Re}\mu, \ \operatorname{Re}\nu > -1.$$

Если в формуле (2.14) функцию $f(z)$ выбрать в виде

$$f(z) = F(z)\, \bar{J}_\nu(z), \tag{2.15}$$

так чтобы сумма по нулям $\bar{J}_\nu(z)$ обратилась в нуль, то можно получить полезную формулу для вычисления интегралов, содержащих функцию $\bar{J}_\nu(z)$. Условия (2.3) и (2.11) для функции $F(z)$ запишутся в виде

$$|F(z)| < \varepsilon_1(x)\, e^{c_1|y|} \ \text{или} \ |F(z)| < \frac{Me^{|y|}}{|z|^{\alpha_1}} \ \text{при} \ |z| \to \infty, \tag{2.16}$$

$$c_1 < 1, \ \varepsilon_1(x) = o(x^{1/2-\delta_{B0}}) \ \text{при} \ x \to \infty, \ \alpha_1 > 3/2 - \delta_{B0},$$

$$F(xe^{\pi i/2}) = -e^{\nu\pi i} F(xe^{-\pi i/2}). \tag{2.17}$$

Здесь и далее $\delta_{BB'} = 1$ при $B = B'$ и $\delta_{BB'} = 0$ при $B \neq B'$. Таким образом, для функций, удовлетворяющих (2.16) и (2.17), верна формула

$$p.\,v. \int_0^\infty F(x)\, \bar{J}_\nu(x)\, dx = r_{1\nu}[F(z)\, \bar{J}_\nu(z)] +$$

$$+ \frac{\pi i}{2} \sum_{\eta_k = z_k,\, iy_k} (2 - \delta_{0\eta_k}) \operatorname*{Res}_{z=\eta_k} \bar{H}_\nu^{(1)}(z)\, F(z), \tag{2.18}$$

где z_k, $\operatorname{Re} z_k > 0$ и $\pm iy_k$, $y_k > 0$ — полюсы функции $F(z)$, а $r_{1\nu}$ определяется формулой (2.10). Когда $F(z) = z^{\nu+1}\tilde{F}(z)$, $\tilde{F}(ix) = \tilde{F}(-ix)$, а $\tilde{F}(z)$ — аналитическая в правой полуплоскости функция, получаем

$$\int_0^\infty x^{\nu+1} \tilde{F}(x)\, \bar{J}_\nu(x)\, dx = 0.$$

Этот результат при $B = 0$ был получен в [8].

Введем функционал

$$A_{\nu m}[G(z)] \equiv p.\,v. \int_0^\infty z^{\nu-2m-1} G(z)\, \bar{J}_\nu(z)\, dz, \tag{2.19}$$

где m-целое число. С помощью (2.18) легко убедиться в справедливости следующих результатов:

$$A_{\nu m}[F_1(z)] = A^{(0)}_{\nu m}[F_1(z)] \equiv$$

$$\equiv \begin{cases} -\pi(d/dz)^{2m}[z^{\nu}\,\overline{Y}_{\nu}(z)\,F_1(z)]_{z=0}/2(2m)!, & \text{при} \quad m \geqslant 0 \\ 0 \quad , & \text{при} \quad m < 0, \end{cases}$$

$$A_{\nu m}\left[\frac{F_1(z)}{z^2-a^2}\right] = \pi a^{\nu-2m-2}\,\overline{Y}_{\nu}(a)\,F_1(a)/2 + A^{(0)}_{\nu m}\left[\frac{F_1(z)}{z^2-a^2}\right], \quad a>0,$$

$$A_{\nu m}\left[\frac{F_1(z)}{z^4-a^4}\right] = -\frac{\pi}{4}\,a^{\nu-2m-4}\,[\overline{Y}_{\nu}(a)\,F_1(a) -$$

$$-(-1)^m\cdot\frac{2}{\pi}\overline{K}_{\nu}(a)\,F_1(ia)] + A^{(0)}_{\nu m}\left[\frac{F_1(z)}{z^4-a^4}\right], \tag{2.20}$$

и т. д. Здесь $F_1(z)$ — аналитическая в правой полуплоскости функция, $F_1(xe^{\pi i/2}) = F_1(xe^{-\pi i/2})$ и $F(0) \neq 0$. Для обеспечения сходимости интеграла (2.19) в начале координат необходимо потребовать, чтобы в (2.20) $\operatorname{Re}\nu > m$. В качестве $F_1(z)$, например, можно выбрать следующие функции:

$$\prod_{l=1}^{n}(z^2+z_l^2)^{-\mu_l/2}J_{\mu_l}(b_l\sqrt{z^2+z_l^2}), \quad \operatorname{Re}\nu < \sum_{l=1}^{n}\operatorname{Re}\mu_l + 2m + (n+1)/2 - \delta_{b1} + \delta_{B0},$$

$$z^{-2n}\prod_{l=1}^{n}[1-J_0(b_l z)], \quad \operatorname{Re}\nu < 2(m+n)+1/2+\delta_{B0}-\delta_{b1},$$

$$\prod_{l=1}^{n}(z^2+z_l^2)^{\mu_l/2}Y_{\mu_l}(b_l\sqrt{z^2+z_l^2}), \quad \operatorname{Re}\nu < 2m -$$

$$-\sum_{l=1}^{n}\mu_l + (n+1)/2 - \delta_{b1} + \delta_{B0}, \quad \mu_l > 0 \text{ — полуцелые числа,} \tag{2.21}$$

$$\prod_{l=1}^{n} z^{|k_l|}\,[J_{\mu_l+k_l}(a_l z)\,Y_{\mu_l}(b_l z) - Y_{\mu_l+k_l}(a_l z)\,J_{\mu_l}(b_l z)],$$

$$c \equiv \sum_{l=1}^{n}|a_l - b_l| \leqslant 1, \quad k_l \text{ — целые числа,}$$

$$\operatorname{Re}\nu < 2m + n - \sum_{l=1}^{n}|k_l| + 1/2 + \delta_{B0} - \delta_{c1}, \quad a_l,\ \operatorname{Re}\mu_l \geqslant 0$$

$$(\text{при } \operatorname{Re}\mu_l < 0\ \ k_l > |\operatorname{Re}\mu_l|),$$

а также любые их произведения (при соответствующих условиях на постоянные). Здесь $b \equiv \sum_{l=1}^{n} b_l$, $b_l > 0$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, $\operatorname{Re}\nu > m$. В (2.21) рядом с функциями выписаны условия, при которых справедлива первая из формул в (2.20). Условия применимости II и III формул (2.20) к функциям (2.21) получаются из неравенств для $\operatorname{Re}\nu$, приведенных в (2.21), если к их правым частям прибавить 2 и 4, соответственно.

Рассмотрим приложения полученных формул к рядам вида $\sum_{k=1}^{\infty} G(\lambda_{\nu,k})\,J_{\mu}(\lambda_{\nu,k}t)$. Следующая теорема позволяет просуммировать довольно широкий класс таких рядов.

Теорема 2.1. *Если функция $F(z)$ мероморфна в полуплоскости $\mathrm{Re}(z)>0$ (кроме, быть может, точки $z=0$) с полюсами z_k, $\mathrm{Re}\, z_k>0$ и $\pm iy_k$, $y_k>0$ $(\neq\lambda_{\nu,l})$ удовлетворяет условию*

$$F(xe^{\pi i/2})=(-1)^{m+1}e^{\nu\pi i}F(xe^{-\pi i/2}) \qquad (2.22)$$

(m—целое число) и одному из неравенств

$$|F(z)|<\varepsilon_1(x)e^{a|y|} \text{ или } |F(z)|<\frac{Me^{a_0|y|}}{|z|^{\alpha_1}} \text{ при } |z|\to\infty, \qquad (2.23)$$

где $a<\min(t,\ 2-t)=a_0$, *то верна формула*

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_{\nu,k}F(\lambda_{\nu,k})J_{\nu+m}(\lambda_{\nu,k}t)=$$

$$=\frac{\pi}{4}\sum_{\eta_k=0,\ iy_k,\ z_k}(2-\delta_{0\eta_k})\operatorname*{Res}_{z=\eta_k}[J_{\nu+m}(zt)\bar{Y}_\nu(z)-Y_{\nu+m}(zt)\bar{J}_\nu(z)]\frac{F(z)}{\bar{J}_\nu(z)}. \qquad (2.24)$$

Она непосредственно вытекает из (2.14), если положить $f(z)=F(z)J_{\nu+m}(zt)$, а для вычисления интеграла в левой части воспользоваться (2.18). Из выражений, выведенных в этом параграфе, можно получить формулы суммирования по нулям функции $J_\nu(z)$ (в частности для рядов Фурье-Бесселя), положив $B=0$.

Замечание. Равенство (2.24) можно получить также, если рассмотреть интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C[\bar{Y}_\nu(z)J_{\nu+m}(zt)-\bar{J}_\nu(z)Y_{\nu+m}(zt)]\frac{F(z)}{\bar{J}_\nu(z)}dz,$$

где C тот же контур, что и в (1.3), а чисто мнимые полюсы функций $F(z)$, $1/\bar{J}_\nu(z)$ и начало координат обходятся по малым полуокружностям в правой полуплоскости, и воспользоваться при этом теоремой Коши о вычетах.

Из (2.24) при $m=0$, $F(z)=zJ_\nu(zx)/(z^2-a^2)$, $B=0$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_\nu(\lambda_{\nu,k}x)J_\nu(\lambda_{\nu,k}t)}{(\lambda_{\nu,k}^2-a^2)J_{\nu+1}^2(\lambda_{\nu,k})}=\frac{\pi}{4}\frac{J_\nu(ax)}{J_\nu(a)}[J_\nu(at)Y_\nu(a)-$$

$$-Y_\nu(at)J_\nu(a)],\ 0\leqslant x\leqslant t\leqslant 1. \qquad (2.25)$$

Отметим, что приведенное в [7] выражение для суммы этого ряда при $t=a$ не совпадает с (2.25).

Если выполнено условие (2.23), то в (2.24) в качестве $F(z)$ можно выбрать функции (2.21), умноженные на z^γ, $\gamma=\nu+m-2p-1$ (p—целое число), а также любые произведения этих функций между собой и с $\prod_{l=1}^{n}(z^2-c_l^2)^{-k_l}$. Например, имеют место следующие формулы суммирования, которые в литературе, по-видимому, не рассматривались (ниже $B=0$, т. е. $J_\nu(\lambda_{\nu,k})=0$)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{\nu,k}^{\nu-2}\frac{J_\nu(\lambda_{\nu,k}t)}{J_{\nu+1}^2(\lambda_{\nu,k})}\prod_{l=1}^{n}[J_{\mu_l}(a_l\lambda_{\nu,k})Y_{\mu_l}(b_l\lambda_{\nu,k})-Y_{\mu_l}(a_l\lambda_{\nu,k})J_{\mu_l}(b_l\lambda_{\nu,k})]=$$

$$=\frac{2^{\nu-2}\Gamma(\nu)}{\pi^n t^\nu}(1-t^{2\nu})\prod_{l}^{n}\frac{b_l^{\mu_l}}{\mu_l a_l^{\mu_l}}\left[1-\left(\frac{a_l}{b_l}\right)^{2\mu_l}\right],$$

$$0<t\leqslant 1,\ c\equiv\sum_{l=1}^{n}|a_l-b_l|\leqslant t\leqslant 1,\ a_l,\ b_l>0,\ \operatorname{Re}\mu_l\geqslant 0,$$

$$\operatorname{Re}\nu<n+3/2-\delta_{ct},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{\nu+1}(\sigma\lambda_{\nu,k})J_\nu(t\lambda_{\nu,k})}{\lambda_{\nu,k}^{2n+3}J_{\nu+1}^2(\lambda_{\nu,k})}\prod_{l=1}^{n}[1-J_0(b_l\lambda_{\nu,k})]=$$

$$=\frac{\sigma^{\nu+1}(1-t^{2\nu})}{4^{n+1}\nu(\nu+1)t^\nu}\prod_{l=1}^{n}b_l^2,\ \sigma+\sum_{l=1}^{n}b_l\leqslant t\leqslant 1,\ \sigma_l,\ b_l>0,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{\nu+1}(\sigma\lambda_{\nu,k})J_\mu(b\lambda_{\nu,k})}{(\lambda_{\nu,k}^2-a^2)\lambda_{\nu,k}^{\mu+1}J_{\nu+1}^2(\lambda_{\nu,k})}J_\nu(t\lambda_{\nu,k})=$$

$$=\frac{\pi}{4a^{\mu+1}}\frac{J_\mu(ba)}{J_\nu(a)}J_{\nu+1}(a\sigma)[Y_\nu(a)J_\nu(at)-J_\nu(a)Y_\nu(at)],$$

$$\sigma+b\leqslant t\leqslant 1,\ \sigma,\ b>0,\ \operatorname{Re}\mu>-7/2+\delta_{\sigma+b,t},$$

и т. д. Все известные нам ряды по нулям функции $\bar{J}_\nu(z)$ (см., например, [4, 6, 7]) являются частными случаями полученных формул.

§ 3. Интегралы, содержащие цилиндрические функции

Ниже с помощью обобщенной формулы Абеля-Плана мы вычислим ряд интегралов, содержащих цилиндрические функции. Пусть функция $F(z)$ при $\arg z=\pi/2$ удовлетворяет условию

$$F(ze^{-\pi i})=-e^{-i\lambda\pi}F(z),\tag{3.1}$$

где λ—некоторое число. В формуле (1.2) в качестве функций $f(z)$ и $g(z)$ выберем

$$f(z)=F(z)[J_\nu(z)\cos\delta+Y_\nu(z)\sin\delta],$$

$$g(z)=-iF(z)[J_\nu(z)\sin\delta-Y_\nu(z)\cos\delta],\ \delta=(\lambda-\nu)\pi/2.\tag{3.2}$$

Их сумма и разность равны

$$g(z)+af(z)=aH_\nu^{(a)}(z)F(z)e^{-i\delta a},\quad a=-1,\ 1.$$

При таком выборе исходных функций интеграл в правой части (1.2) равен

$$\pi i\sum_{\eta_k=0,\ iy_k}(1-\delta_{0\eta_k}/2)\operatorname*{Res}_{z=\eta_k}H_\nu^{(1)}(z)F(z)e^{-i\delta},$$

где $\pm iy_k$, $y_k>0$, как и прежде, чисто мнимые полюсы функции $F(z)$. Теперь из (1.2) получаем

Следствие 3.1. *Если функция $F(z)$ мероморфна в* $\operatorname{Re}z\geqslant 0$ *(кроме, быть может, $z=0$) с полюсами z_k,* $\operatorname{Re}z_k>0$, $\pm iy_k$, $y_k>0$ *и удовлетворяет условиям* (2.16) ($B=0$), (3.1), *то верна формула*

$$B_\nu[F(z)]\equiv p.\,v.\int_0^\infty F(x)[J_\nu(x)\cos\delta+Y_\nu(x)\sin\delta]\,dx=$$

$$=\pi i\Big\{\sum_{a,\ k}a\operatorname*{Res}_{a\operatorname{Im}z_k>0}H_\nu^{(a)}(z)F(z)e^{-ia\delta}-i\sum_k\operatorname*{Res}_{\operatorname{Im}z_k=0}[J_\nu(z)\sin\delta-$$

$$- Y_\nu(z)\cos\delta] F(z) + \sum_{\eta_k=0,\, iy_k} (1-\delta_{0\eta_k}/2) H_\nu^{(1)}(z) F(z) e^{-i\delta} \Big\}, \tag{3.3}$$

где предполагается, что интеграл в левой части существует, а $\delta = (\lambda - \nu)\pi/2$.

В частности, отсюда при $\delta = \pi n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, вытекает формула (2.18) при $B = 0$. Из (3.3) следует, что [4, 7]

$$\int_0^\infty \frac{x^{\rho-1}}{x^2+z^2} \prod_{l=1}^n J_{\mu_l}(b_l x)[J_\nu(x)\cos\delta + Y_\nu(x)\sin\delta]\, dx =$$

$$= -z^{\rho-2} K_\nu(z) \prod_{l=1}^n I_{\mu_l}(b_l z),$$

$$\delta = \left(\rho + \sum_1^n \mu_l - \nu\right)\pi/2,\ 2\operatorname{Re}\rho < n + 7 - \delta_{b1},\ b \equiv \sum b_l \leqslant 1,\ b_l > 0,$$

$$|\operatorname{Re}\nu| < \operatorname{Re}\rho + \sum \operatorname{Re}\mu_l.$$

Если $\delta \neq \pi n$, то для аналитической в $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ функции $F(z)$ с помощью формулы (3.3) получаем

$$B_\nu[F(z)] = 0,$$

$$B_\nu[F(z)/z^2 - a^2)] = \pi F(a)[J_\nu(a)\sin\delta - Y_\nu(a)\cos\delta]/2,\ a > 0, \tag{3.4}$$

$$B_\nu\left[\frac{F(z)}{(z^2-c^2)^{p+1}}\right] = \frac{\pi}{2^{p+1}p!}\left(\frac{d}{zdz}\right)^p \left[F(z)\frac{H_\nu^{(1)}(z)}{z}\right]_{z=c} e^{-i\delta},$$

$$0 < \arg c < \frac{\pi}{2},\ p - \text{целое число.}$$

Из первой формулы, в частности, при $\delta = \pi(n+1/2)$, $F(z) = z^\nu F_1(z)$, $F_1(ix) = F_1(-ix)$ имеем [8]

$$\int_0^\infty x^\nu F_1(x)\, Y_\nu(x)\, dx = 0.$$

В качестве $F(z)$ в (3.4) можно выбрать функции

$$z^{\rho-1} \prod_{l=1}^n (z^2+z_l^2)^{-\mu_l/2} J_{\mu_l}(b_l\sqrt{z^2+z_l^2}),\ \lambda=\rho,\ |\operatorname{Re}\nu| < \operatorname{Re}\rho < \sum \operatorname{Re}\mu_l +$$

$$+ (n+3)/2 - \delta_{b1}, \tag{3.5}$$

$$z^{\rho-1} \prod_{l=1}^n [1 - J_0(b_l z)],\ \lambda = \rho,\ |\operatorname{Re}\nu| - 2n < \operatorname{Re}\rho < 3/2 - \delta_{b1},$$

$$z^{\rho-1} \prod_{l=1}^n [J_{\mu_l+k_l}(a_l z)\, Y_{\mu_l}(b_l z) - Y_{\mu_l+k_l}(a_l z)\, J_{\mu_l}(b_l z)],$$

$$\lambda = \rho + \sum_{l=1}^n k_l,\ c \equiv \sum_{l=1}^n |a_l - b_l| \leqslant 1,$$

$a_l > 0$, $|\operatorname{Re}\nu| + \sum |k_l| < \operatorname{Re}\rho < n + 3/2 - \delta_{c1}$, $\operatorname{Re}\mu_l \geqslant 0$ (при $\operatorname{Re}\mu_l < 0\ k_l \geqslant |\operatorname{Re}\mu_l|$)

и любые их произведения (k_l — целые числа). Здесь $b_l > 0$, $b = \sum b_l \leqslant 1$. В (3.5) выписаны достаточные условия, при выполнении которых имеет место первая из формул (3.4). Аналогичные условия для II и III формул (3.4) отличаются от приведенных в (3.5) наличием в правых частях неравенств для $\mathrm{Re}\,\rho$ дополнительных слагаемых 2, $2(p+1)$, соответственно.

Рассмотрим теперь интегралы, содержащие функцию $J_\nu(z)Y_\mu(\lambda z) - J_\mu(\lambda z)Y_\nu(z)$. В обобщенной формуле Абеля—Плана положим

$$f(z) = \frac{1}{2i}\sum_a a\frac{H_\mu^{(a)}(\lambda z)}{H_\nu^{(a)}(z)}F(z),\quad g(z) = \frac{1}{2i}\sum_a \frac{H_\mu^{(a)}(\lambda z)}{H_\nu^{(a)}(z)}F(z),\ a = -1, 1, \quad (3.6)$$

$H_\nu^{(-1)} \equiv H_\nu^{(2)}$. Для определенности рассмотрим случай $\lambda > 1$ (при $\lambda < 1$ выражение для $g(z)$ нужно выбрать с обратным знаком). Для выполнения условий (1.1) достаточно потребовать, чтобы функция $F(z)$ удовлетворяла одному из неравенств

$$|F(z)| < \varepsilon(x)e^{c|y|},\ c < \lambda - 1 \text{ или } |F(z)| < \frac{Me^{(\lambda-1)|y|}}{|z|^a},\ |z| \to \infty \quad (3.7)$$

($\varepsilon(x)$ и a те же, что и в (2.3)). Тогда из (1.2) следует, что для мероморфной в $\mathrm{Re}\,z > 0$ функции $F(z)$ с полюсами z_k, $\mathrm{Re}\,z_k > 0$ имеет место формула

$$C_{\mu\nu}[F(z)] \equiv p.v.\int_0^\infty \frac{J_\nu(x)Y_\mu(\lambda x) - J_\mu(\lambda x)Y_\nu(x)}{J_\nu^2(x) + Y_\nu^2(x)}F(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_a a\int_0^{ia\infty} F(z)\frac{H_\mu^{(a)}(\lambda z)}{H_\nu^{(a)}(z)}dz + r_2[F(z)], \quad (3.8)$$

где введено обозначение

$$r_2[F(z)] = \pi\sum_{a,k}\operatorname*{Res}_{a\,\mathrm{Im}\,z_k>0} F(z)\frac{H_\mu^{(a)}(\lambda z)}{H_\nu^{(a)}(z)} + \frac{\pi}{2}\sum_k\operatorname*{Res}_{\mathrm{Im}\,z_k=0}\left[\frac{H_\mu^{(1)}(\lambda z)}{H_\nu^{(1)}(z)} + \right.$$

$$\left. + \frac{H_\mu^{(2)}(\lambda z)}{H_\nu^{(2)}(z)}\right]F(z), \quad (3.9)$$

а в интеграле правой части особенности на мнимой оси (включая точку $z = 0$) обходятся в правой полуплоскости. Таким образом, можно сформулировать следующие утверждения.

Следствие 3.2. *Если функция $F(z)$ мероморфна при $\mathrm{Re}\,z \geqslant 0$ (кроме, быть может, $z=0$) с полюсами z_k, $\mathrm{Re}\,z_k > 0$ и $\pm iy_k$, $y_k > 0$, удовлетворяет одному из неравенств* (3.7) *и условию*

$$F(xe^{\pi i/2}) = -e^{(\mu-\nu)\pi i}F(xe^{-\pi i/2}), \quad (3.10)$$

что для значений ν, при которых $H_\nu^{(1)}(z)$ ($H_\nu^{(2)}(z)$) не имеет нулей в квадранте $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2$ ($-\pi/2 \leqslant \arg z \leqslant 0$), имеет место формула

$$C_{\mu\nu}[F(z)] = r_2[F(z)] + \frac{\pi}{2}\sum_{\eta_k = -, iy_k}(2 - \delta_{0\eta_k})\operatorname*{Res}_{z=\eta_k}\frac{H_\mu^{(1)}(\lambda z)}{H_\nu^{(1)}(z)}F(z), \quad (3.11)$$

(предполагается, что в левой части интеграл существует).

Действительно, из условия (3.10) находим

$$\frac{H_\mu^{(1)}(\lambda z)}{H_\nu^{(1)}(z)}F(z)=\frac{H_\mu^{(2)}(\lambda z_1)}{H_\nu^{(2)}(z_1)}F(z_1),\quad z_1=ze^{-\pi i}\tag{3.12}$$

и что если $F(z)$ имеет чисто мнимые полюсы, то они комплексно сопряженные: $\pm iy_k$, $y_k>0$. Следовательно, интеграл в правой части (3.8) можно представить в виде

$$\sum_{a,\,\sigma_k}\int\limits_{C_\rho(a\sigma_k)} F(z)\frac{H_\mu^{(a)}(\lambda z)}{H_\nu^{(a)}(z)}dz,\quad \sigma_k=0,\ iy_k$$

(о контурах $C_\rho(a\sigma_k)$ см. выше). Воспользовавшись (3.12) и тем, что в (3.11) интеграл сходится в нуле, получаем

$$\sum_a\int\limits_{C_\rho(a\sigma_k)} F(z)\frac{H_\mu^{(a)}(\lambda z)}{H_\nu^{(a)}(z)}dz=(2-\delta_{0\sigma_k})\pi i\operatorname*{Res}_{z=\sigma_k}\frac{H_\mu^{(1)}(\lambda z)}{H_\nu^{(1)}(z)}F(z),\tag{3.13}$$

откуда с помощью (3.8) приходим к формуле (3.11). Отметим, что вычет в точке $z=0$ можно записать также в виде

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{H_\mu^{(1)}(\lambda z)}{H_\nu^{(1)}(z)}F(z)=\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{J_\mu(\lambda z)J_\nu(z)+Y_\mu(\lambda z)Y_\nu(z)}{J_\nu^2(z)+Y_\nu^2(z)}F(z).$$

Все известные нам интегралы вида (3.11) (см. [7, 9]) являются частными случаями этой формулы. Например, из нее при соответствующем выборе $F(z)$ находим [9]

$$\int\limits_0^\infty\frac{J_\nu(x)Y_\nu(\lambda x)-J_\nu(\lambda x)Y_\nu(x)}{J_\nu^2(x)+Y_\nu^2(x)}[J_\nu(x)Y_{\nu+1}(\lambda' x)-J_{\nu+1}(\lambda' x)Y_\nu(x)]\,dx=$$

$$=\begin{cases}-1/(\lambda^\nu\lambda'^{\nu+1}), & \lambda'<\lambda\\ (\lambda^\nu-\lambda^{-\nu})/\lambda'^{\nu+1}, & \lambda'>\lambda,\end{cases}$$

где $\operatorname{Re}\nu>-1$. Если в качестве функции $F(z)$ выбрать $z^{2m+1}/(z^2+a^2)$, $z^{2m+1}/(z^2-c^2)$, то при $\mu=\nu$ и целых значениях $m\geqslant 0$ получаем

$$\int\limits_0^\infty\frac{J_\nu(x)Y_\nu(\lambda x)-J_\nu(\lambda x)Y_\nu(x)}{J_\nu^2(x)+Y_\nu^2(x)}\frac{x^{2m+1}dx}{x^2+a^2}=$$

$$=(-1)^m a^m\frac{\pi}{2}\frac{K_\nu(\lambda a)}{K_\nu(a)},\quad \operatorname{Re}a>0,\ \lambda>1,$$

$$\int\limits_0^\infty\frac{J_\nu(x)Y_\nu(\lambda x)-J_\nu(\lambda x)Y_\nu(x)}{J_\nu^2(x)+Y_\nu^2(x)}\frac{x^{m+1}dx}{x^2-c^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}c^{2m}\frac{J_\nu(c)J_\nu(\lambda c)+Y_\nu(c)Y_\nu(\lambda c)}{J_\nu^2(c)+Y_\nu^2(c)},\quad c>0,\ \lambda>1.$$

Частные случаи этих формул при $\nu=m=0$ приведены в [9]. В (3.11) вместо $F(z)$ можно выбрать функции (3.5) (при соответствующих условиях на постоянные, см. неравенства (3.7)), где $\rho = \mu - \nu - 2m$ (m—целое число), а также произведения этих функций между собой и с $\prod_{l=1}^{n}(z^2 - c^2)^{-k_l}$. Например

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(x)\, Y_\nu(\lambda x) - J_\nu(\lambda x)\, Y_\nu(x)}{J_\nu^2(x) + Y_\nu^2(x)} \prod_{l=1}^{n} (x^2 + z_l^2)^{-\mu_l/2}\, J_{\mu_l}(b_l \sqrt{x^2 + z_l^2}) \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{\pi}{2\lambda^\nu} \prod_{l=1}^{n} z_l^{-\mu_l} J_{\mu_l}(b_l z_l),$$

$$\mathrm{Re}\,\nu > 0,\ b \equiv \sum b_l \leqslant \lambda - 1,\ b_l > 0,\ \mathrm{Re}\, z_l \geqslant 0,\ \sum_1^n \mathrm{Re}\,\mu_l + n/2 + 1 > \delta_{b,\lambda-1}.$$

Следствие 3.3. *Пусть функция $F(z)$ мероморфна в правой полуплоскости (кроме, быть может, $z=0$) с полюсами z_k, $\mathrm{Re}\, z_k > 0$, удовлетворяет условию*

$$F(ze^{\pi i}) = -e^{(\mu-\nu)\pi i} F(z) + o(z^{|\mathrm{Re}\,\mu| - |\mathrm{Re}\,\nu| - 1}),\ z \to 0$$

и одному из неравенств (3.7). *Тогда для значений ν, при которых $H_\nu^{(1)}(z)$ ($H_\nu^{(2)}(z)$, не имеет корней в $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2$ ($-\pi/2 \leqslant \arg z \leqslant 0$),) верна формула*

$$C_{\mu\nu}[F(z)] = r_2[F(z)] + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{K_\mu(\lambda x)}{K_\nu(x)} [e^{(\nu-\mu)\pi i/2} F(xe^{\pi i/2}) +$$

$$+ e^{(\mu-\nu)\pi i/2} F(xe^{-\pi i/2})]\, dx + \frac{\pi}{2} \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{H_\mu^{(1)}(\lambda x)}{H_\nu^{(1)}(z)} F(z),\quad \lambda > 1, \tag{3.14}$$

если интеграл в левой части существует (определение $C_{\mu\nu}[F(z)]$ *см.* (3.8)).

Оно непосредственно вытекает из (3.8) и (3.13) с $\sigma_k = 0$. С помощью (3.14), например, получаем

$$C_{\mu\nu}\left[\prod_{l=1}^{n} J_{\mu_l}(b_l z)\right] = \cos\left(\nu - \mu + \sum_1^n \mu_l\right)\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{K_\mu(\lambda x)}{K_\nu(x)} \prod_{l=1}^{n} I_{\mu_l}(b_l x)\, dx,$$

$$\sum_1^n \mathrm{Re}\,\mu_l + |\mathrm{Re}\,\nu| > |\mathrm{Re}\,\mu| - 1,\ b \equiv \sum_1^n b_l < \lambda - 1,\ b_l > 0,\ n > 2\delta_{b,\lambda-1}.$$

Подобные формулы особенно удобны для численного расчета интегралов в их левых частях, так как подынтегральная функция в правой части на бесконечности не осциллирует и экспоненциально мала.

Я признателен Г. С. Саакяну и Л. Ш. Григоряну за интерес к работе и ценные обсуждения, а также участникам семинара кафедры высшей математики и математической физики Ереванского государственного университета за обсуждения конечных результатов работы.

Ереванский государственный
университет

Поступила 8. V. 1986

Ա. Ա. ՍԱՀԱՐՅԱՆ. Աբել–Պլանայի ընդհանրացված բանաձևը: Կիրառություններ գլանային ֆունկցիաների նկատմամբ *(ամփոփում)*

Ապացուցվում է թեորեմ, որը ընդհանրացնում է Աբել-Պլանայի հայտնի գումարման բանաձևը։ Բերված են նրա կիրառությունները գլանային ֆունկցիաների նկատմամբ։ Ստացված են գումարման բանաձևեր Բեսսելի ֆունկցիաների զրոներով շարքերի համար և բանաձևեր գլանային ֆունկցիաներ պարունակող որոշ ինտեգրալներ հաշվելու համար։ Դրանց օգնությամբ հաշվված է ինտեգրալների ու շարքերի լայն դաս։

A. A. SAHARIAN. *Abel—Plana's generalized formula. Applicattions to cylindrical functions* (summary)

A theorem generalizing the well known Abel— Plana's summation formula is proved and applied to cylindrical functions. Summation formulas for series by zeros of the Bessel functions are derived. By these formulas a broad class of sums and integrals is calculated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. А. Евграфов.* Аналитические функции, М., «Наука», 1968, 471 с.
2. *С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, А. А. Старобинский.* Рождение частиц из вакуума вблизи однородной изотропной сингулярности, ЖЭТФ, № 5, 1976.
3. *А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко.* Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях, М., Атомиздат, 1980, 295 с.
4. *Г. Н. Ватсон.* Теория бесселевых функций. Часть 1, М., ИИЛ, 1949, 798 с.
5. *М. А. Абрамовиц, И. Стиган.* Ред-ры. Справочник по специальным функциям, М., «Наука», 830 с.
6. *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции, т. 2, М., «Наука», 1984, 296 с.
7. *А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев.* Интегралы и ряды. Специальные функции, М., «Наука», 1983, 752 с.
8. *Ch. Schwartz.* A class of discontinuous integrals involving Bessel functions, J. Math. Phys., 23, № 12, 1982, 2266—2267.
9. *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Таблицы интегральных преобразований, т. 2, Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций, М., «Наука», 1970, 328 с.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 2, 1987 Математика

УДК 517.97

В. В. АРУТЮНЯН

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОЗНАЧНЫХ ВЕТВЕЙ ФУНКЦИЙ МИНИМАЛЕЙ В ГЛАДКИХ ПАРАМЕТРИЗОВАННЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

Введение

Параметризованным задачам оптимизации было посвящено большое количество работ. Были изучены как функции минимума [2], [4], так и функции минималей [5]. Дифференциальные свойства функций минимума изучаются в основном для определения таких свойств фиксированной задачи, как стабильность, стойкость (calmness, [4]). В [4] Ф. Кларком с помощью этих понятий доказывается, что почти все задачи одного класса задач математического программирования нормальные. В [2] В. В. Бересневым и Б. Н. Пшеничным изучение дифференциальных свойств функции минимума ведется более явно, выводятся условия дифференцируемости этих функций. В [5] К. Малановским ведется изучение параметризованных задач оптимального управления с помощью квадратичных аппроксимаций — такие же аппроксимации для более общего класса задач используются в § 2 настоящей работы.

§ 3 работы посвящен изучению многозначных отображений — вводятся понятия функций однозначных ветвей и производных многозначных отображений, с помощью которых «фиксируются» эти отображения и общая задача параметризованной оптимизации приводится к задаче с фиксированными ограничениями. Ранее принципы изучения этих отображений были другие — в частности, Б. Н. Пшеничным [2], [3] был построен эффективный аппарат для изучения выпуклых многозначных отображений, а С. М. Асеев [6] с помощью ослабления требований линейности распространил на многозначные отображения обычные понятия производной и дифференциала. В настоящей работе многозначные отображения характеризуются с помощью некоторого множества — основания и некоторой функции, отображающей это основание на все элементы (множества) данного отображения. Вопрос существования такой функции остается открытым, однако примеры § 3 и § 4 показывают, что в некоторых случаях можно найти такие функции.

§ 1. Основные определения и обозначения

Пусть X, Y — банаховы пространства, X^*, Y^* — им сопряженные, $B(X, Y)$ — банахово пространство всех линейных непрерывных операторов из X в Y. При $L \in B(X, Y)$, $x \in X$ через Lx обозначим образ точки x при отображении L. Пространство $B(X, X^*)$ изометрически изоморфно пространству $(X^*)^2$ [1] и поэтому при $L \in B(X, X^*)$ и $x_1, x_2 \in X$ вместо $\langle Lx_1, x_2 \rangle$ будем писать $L[x_1, x_2]$. Через $B_r(x)$ обозначим замкнутый шар радиуса r с центром x.

В дальнейшем без ссылки на это будем пользоваться следующей теоремой о смешанных производных [1].

Если $U \subset X$—открытое множество, $f: U \to X$ имеет вторую производную в точке $\hat{x} \in U$, то для всех $\xi, \eta \in X$

$$f''(\hat{x})[\xi, \eta] = f''(\hat{x})[\eta, \xi].$$

Всюду в дальнейшем производные понимаются в смысле Фреше.

Пусть X — банахово пространство, $A \subset X$. Совокупность непрерывных функций $f: A \to R$, $\Lambda_1: A \to X^*, \cdots, \Lambda_n: A \to (X^*)^n$ назовем функцией из класса $K^n(A)$, если существует функция $\bar{f} \in \bigcup_{\Omega} C^n(\Omega)$, где объединение берется по всем открытым множествам Ω, содержащим A, такая, что при $x \in A$ $f(x) = \tilde{f}(x)$, $\Lambda_1(x) = \tilde{f}'(x), \cdots, \Lambda_n(x) = \tilde{f}^{(n)}(x)$. Вне A функцию $f(x)$ будем считать равной $+\infty$, функции $\Lambda_i(x)$, $i = 1, \cdots, n$ будем считать неопределенными. Функции из класса $K^n(A)$ обозначим через $[f] = (f, \Lambda_1, \Lambda_2, \cdots, \Lambda_n)$. Вместо Λ_i будем писать также $f^{(i)}$, их назовем производными порядка i функции f. Таким образом, из $[f] \in K^n(A)$, $[g] \in K^n(A)$, $[f] \neq [g]$ не следует $f \neq g$.

Определение 1. Функция $f: X \to R$ называется слабо полунепрерывной снизу, если для произвольной точки $x_0 \in X$ и произвольной последовательности x_n, слабо сходящейся к x_0, $\liminf_{n \to \infty} f(x_n) \geqslant f(x_0)$.

Следующие утверждения очевидны.

Предложение 1. а) *Если функция $f: X \to R$ выпукла и* dom f — *замкнутое множество, то f слабо полунепрерывна снизу.*

б) *Если* dom f — *компакт, а f — полунепрерывная снизу функция, то она слабо полунепрерывна снизу.*

Имеет место и усиление утверждения „б" предложения 1.

Предложение 2. *Если f — полунепрерывная снизу функция, а* dom f — *локально компактное множество, то есть для произвольного шара B множество* dom $f \cap B$ — *компакт, то f слабо полунепрерывна снизу.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$, x_n слабо сходится к x_0, но

$$\liminf_{n \to \infty} f(x_n) < f(x_0). \qquad (1)$$

Тогда $\liminf_{n \to \infty} f(x_n) < +\infty$, и можно выбрать подпоследовательность x_{n_k} такую, что $f(x_{n_k})$ сходится к конечному числу или к $-\infty$, поэтому при достаточно больших k $x_{n_k} \in \operatorname{dom} f$. Из слабой сходимости x_{n_k} следует её ограниченность, т. е. для некоторого шара B $x_{n_k} \in B$.

По условию предложения можно выбрать сходящуюся подпоследовательность последовательности x_{n_k}. Пусть сама x_{n_k} сходится, тогда она сходится к x_0. Получим

$$\liminf_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) \geqslant f(x_0). \qquad (2)$$

Последнее неравенство следует из условия полунепрерывности снизу функции f. (2) очевидно противоречит (1).

Если A — компакт, то для произвольного $n \in N$ функции из класса $K^n(A)$ слабо полунепрерывны снизу.

Определение 2. Функцию $f: X \to R$ назовем минимизируемой, если для произвольного замкнутого шара B существует $x_0 \in B$ так, что

$$f(x_0) = \min_{x \in B} f(x).$$

Пусть $A \subset X$. f называется минимизируемой на A, если ее сужение на A минимизируемо.

Следующее утверждение доказывается элементарно.

Предложение 3. *Произвольная слабо полунепрерывная снизу функция минимизируема на произвольном замкнутом множестве.*

Определение 3. Пусть $f: X \to R$, $A \subset X$, $x_0 \in A$. Функцию f назовем гомеоморфичной на A в точке x_0, если существуют $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ такие, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\|x - x_0\|^2} \geqslant \varepsilon, \quad \text{при } \|x - x_0\| \leqslant \delta,\ x \in A,\ x \neq x_0. \tag{3}$$

Класс функций $f_\alpha(x)$, $\alpha \in \Lambda$ называется равномерно гомеоморфичным в x_α, $x_\alpha \in A$, если существуют $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ такие, что для произвольного α

$$\frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(x_\alpha)}{\|x - x_\alpha\|^2} \geqslant \varepsilon, \quad \text{при } \|x - x_\alpha\| < \delta,\ x \in A,\ x \neq x_\alpha. \tag{3'}$$

§ 2. Параметризации экстремальных задач при фиксированных ограничениях

Пусть X, Y—банаховы пространства, $f: X \times Y \to R$, $\Omega \subset Y$.

Определение 4. Функцию $x(y): \Omega \to X$ назовем функцией минималей для f, если при каждом фиксированном $y \in \Omega$ $x(y)$ — точка локального минимума функции $f(x, y)$.

Теорема 1. *Пусть $f_1(x, y): X \times Y \to R$, $f_2(x, y): X \times Y \to R$ — минимизируемая функция, $x_1(y)$—дифференцируемая в точке $y \in Y$ функция минималей для $f_1(x, y)$, $x_1(y_0) = x_0$ и*

$$f_2(x, y) = f_1(x, y) + r(x, y), \tag{4}$$

где

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{r(x, y)}{\|x - x_0\|^2 + \|y - y_0\|^2} = 0.$$

Пусть, далее, функция $f_1(x, y)$ равномерно по y гомеоморфична в $x_1(y)$ на X, тогда существует функция минималей $x_2(y)$ функции $f_2(x, y)$, удовлетворяющая условию

$$x_2(y) = x_1(y) + \tau(y), \tag{5}$$

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\tau(y)}{\|y - y_0\|} = 0.$$

Доказательство. Обозначим

$$g(\varepsilon, y) = \inf \{f_2(x, y) : x \in x_1(y) + B_\varepsilon(0)\} \tag{6}$$

и

$$\varepsilon(y) = \inf \{\varepsilon > 0 : \exists \lambda > 0, \ g(\varepsilon, y) = g(\varepsilon + \lambda, y)\}. \tag{7}$$

Докажем, что
$$\varepsilon(y) = o(\|y - y_0\|). \tag{8}$$

Пусть это не так, тогда существуют число $\alpha > 0$ и последовательность $y_n \to y_0$ такие, что $\varepsilon(y_n) \geqslant \alpha \|y_n - y_0\|$. Это значит, что для произвольных положительных чисел ε_n, меньших $\alpha\|y_n - y_0\|$, и произвольных $\lambda_n > 0$

$$g(\varepsilon_n, y_n) > g(\varepsilon_n + \lambda_n, y_n) \tag{9}$$

(монотонность функции $g(\varepsilon, y)$ следует из (6)).

Из (9) получим

$$\inf \{f_2(x, y_n) : x \in x_1(y_n) + B_{\varepsilon_n}(0)\} > \inf \{f_2(x, y_n) : x \in x_1(y_n) + B_{\varepsilon_n + \lambda_n}(0)\}, \tag{10}$$

то есть существует $x_n \in x_1(y_n) + B_{\varepsilon_n + \lambda_n}(0)$ так, что

$$f_2(x_n, y_n) < \inf \{f_2(x, y_n) : x \in x_1(y_n) + B_{\varepsilon_n}(0)\}. \tag{11}$$

Оценка (11) означает, что для произвольного $x \in x_1(y_n) + B_{\varepsilon_n}(0)$ имеет место $f_2(x_n, y_n) < f_2(x, y_n)$.

Таким образом получим следующее утверждение: существует последовательность $y_n \to y_0$, такая что для произвольных $\varepsilon_n < \alpha \|y_n - y_0\|$ и $\lambda_n > 0$ существует x_n, $\|x_n - x_1(y_n)\| \leqslant \varepsilon_n + \lambda_n$ и для произвольного x, $\|x - x_1(y_n)\| < \varepsilon$ имеет место

$$f_1(x_n, y_n) + r(x_n, y_n) < f_1(x, y_n) + r(x, y_n), \tag{12}$$

откуда $f_1(x, y_n) - f_1(x_n, y_x) > r(x_n, y_n) - r(x, y_n)$,

$$f_1(x_n, y_n) - f_1(x_1(y_n), y_n) \leqslant \sup_{\|x - x_1(y_n)\| < \varepsilon_n} r(x, y_n) - r(x_n, y_n). \tag{13}$$

Выберем $\varepsilon_n = \lambda_n = \frac{1}{2} \alpha \|y_n - y_0\|$, тогда при $n \to \infty$ имеем

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x(y_n)\| = 0 \tag{14}$$

и

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sup \frac{\|\bar{x}_n - x_1(y_n)\|}{\|y_n - y_0\|} \leqslant \alpha \tag{15}$$

для произвольных $\bar{x}_n \in x_1(y_n) + B_{\varepsilon_n + \lambda_n}(0)$.

Из (14), (15) получим, учитывая существование $x_1'(y_0)$,

$$\sup_{\|x - x_1(y_n)\| < \varepsilon_n} r(x, y_n) - r(x_n, y_n) = o(\|x_n - x_1(y_n)\|^2 + \|x_1(y_n) - x_0\|^2 +$$

$$+ \|y_n - y_0\|^2) = o(\|y_n - y_0\|^2),$$

и из (13) получим оценку

$$f_1(x_n, y_n) - f_1(x_1(y_n), y_n) \leqslant o(\|y_n - y_0\|^2). \tag{16}$$

Так как последовательность x_n выбрана таким образом, что

$$f_2(x_n, y_n) < \inf_{\|x - x_1(y_n)\| < \varepsilon_n} f_2(x, y_n) \text{ и } \|x_n - x_1(y_n)\| < \varepsilon_n + \lambda_n,$$

то в силу выбора ε_n и λ_n, получаем

$$\frac{1}{2}\alpha\|y_n - y_0\| \leqslant \|x_n - x_1(y_n)\| < \alpha\|y_n - y_0\|,$$

поэтому

$$\frac{1}{\alpha} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{\|y_n - y_0\|}{\|x_n - x_1(y_n)\|} \leqslant \frac{2}{\alpha}$$

и из (16) следует

$$f_1(x_n, y_n) - f_1(x_1(y_n), y_n) \leqslant o(\|x_n - x_1(y_n)\|^2),$$

что противоречит условию равномерной по y гомеоморфичности функции $f_1(x, y)$ в $x_1(y)$. Оценка (8) доказана.

Эта оценка означает, что для произвольного y из некоторой окрестности y_0 существуют $\varepsilon(y)$ и $\lambda(y)$, для которых $\varepsilon(y) = o(\|y - y_0\|)$, $\lambda(y) > 0$, так что

$$\inf\{f_2(x, y) : \|x - x_1(y)\| \leqslant \varepsilon(y)\} =$$
$$= \inf\{f_2(x, y) : \|x - x_1(y)\| \leqslant \varepsilon(y) + \lambda(y)\}. \tag{17}$$

Так как $f_2(x, y)$—минимизируемая по x функция, то при каждом y она достигает минимума на шаре $\|x - x_1(y)\| \leqslant \varepsilon(y)$ в некоторой точке $x_2(y)$, а из (17) следует, что $x_2(y)$—точка локального минимума для функции $f_2(x, y)$. Обозначая $x_2(y) - x_1(y) = \tau(y)$, из (8) получим (5), чем и завершится доказательство теоремы.

Применим теорему 1 в гладком случае. В дальнейшем запись $f_1(x, y) \overset{m}{\underset{x}{=}} f_2(x, y)$ будет означать, что при каждом фиксированном y точки локального минимума функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ совпадают.

Пусть $A \subset X$, $\Omega \subset Y$, $[f(x, y)] \in K^2(A \times \Omega)$, $(x_0, y_0) \in A \times \Omega$, $(x, y) \in A \times \Omega$. Тогда

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \langle f'_x(x_0, y_0), x - x_0\rangle + \langle f'_y(x_0, y_0), y - y_0\rangle +$$
$$+ \frac{1}{2} f''_{xx}(x_0, y_0)[x - x_0, x - x_0] + \frac{1}{2} f''_{yy}(x_0, y_0)[y - y_0, y - y_0] +$$
$$+ f''_{xy}(x_0, y_0)[y - y_0, x - x_0] + o(\|x - x_0\|^2 + \|y - y_0\|^2) \overset{m}{\underset{x}{=}}$$
$$\overset{m}{\underset{x}{=}} \frac{1}{2} f''_{xx}(x_0, y_0)[x - x_0, x - x_0] + \langle f'_x(x_0, y_0), x - x_0\rangle +$$
$$+ f''_{xy}(x_0, y_0)[y - y_0, x - x_0] + o(\|x - x_0\|^2 + \|y - y_0\|^2) =$$
$$= \frac{1}{2} f''_{xx}(x_0, y_0)[x - x_0, x - x_0] +$$

$$+\langle f'_x(x_0, y_0)+f''_{xy}(x_0, y_0)(y-y_0),\ x-x_0\rangle+o(\|x-x_0\|^2+\|y-y_0\|^2). \quad (18)$$

Пусть $b\in X^*$, обозначим при $x\in A$

$$K(x,\ b)=\frac{1}{2}f''_{xx}(x_0,\ y_0)[x-x_0,\ x-x_0]+\langle b,\ x-x_0\rangle,$$

тогда

$$f(x,\ y)\overset{m}{\underset{x}{=}}K(x,\ f'_x(x_0,\ y_0)+f''_{xy}(x_0,\ y_0)(y-y_0))+$$
$$+o(\|x-x_0\|^2+\|y-y_0\|^2), \quad (19)$$

где функция $o(\|x-x_0\|^2+\|y-y_0\|^2)$ та же, что и в (18).

Пусть $M(b)$ — функция минималей для $K(x,\ b)$, а $m(y)=$ $=M(f'_x(x_0,\ y_0)+f''_{xy}(x_0,\ y_0)(y-y_0))$. Тогда из дифференцируемости $M(b)$ в точке $f'_x(x_0,\ y_0)$ будет следовать дифференцируемость $m(y)$ в точке y_0 и

$$m'(y_0)=M'(f'_x(x_0,\ y_0))\circ f''_{xy}(x_0,\ y_0). \quad (20)$$

Для применения теоремы 1 остается исследовать условие равномерной по y гомеоморфичности в $m(y)$ функции $K(x,\ f'_x(x_0,\ y_0)+$ $+f''_{xy}(x_0,\ y_0)(y-y_0))$. Запишем это условие.

Существуют $\varepsilon>0$, $\delta>0$ такие, что для произвольного $y\in Y$ из некоторой окрестности y_0,

$$\frac{K(x,\ f'_x(x_0,\ y_0)+f''_{xy}(x_0,y_0)(y-y_0))-}{\|x-m(y)\|^2}$$
$$\frac{-K(m(y),f'_x(x_0,\ y_0)+f''_{xy}(x_0,\ y_0)(y-y_0))}{\|x-m(y)\|^2}\geqslant\varepsilon$$

как только $\|x-m(y)\|\leqslant\delta$.

Очевидно, для этого достаточно следующее условие.

Существуют $\varepsilon>0$, $\delta>0$ такие, что для произвольного $b\in X^*$ из некоторой окрестности $f'_x(x_0,\ y_0)$

$$\frac{K(x,\ b)-K(M(b),\ b)}{\|x-M(b)\|^2}\geqslant\varepsilon,\ \text{при}\ \|x-M(b)\|\leqslant\delta, \quad (21)$$

а это есть условие равномерной по b гомеоморфичности в $M(b)$ функции $K(x,\ b)$ в некоторой окрестности $f'_x(x_0,\ y_0)$.

Из теоремы 1 и оценок (19), (20), (21) получим следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $A\subset X$, $\Omega\subset Y$, $[f]\in K^2(A\times\Omega)$ — минимизируемая функция, $x_0\in A$, $y_0\in\Omega$, $K(x,b)=f''_{xx}(x_0,\ y_0)[x-x_0,\ x-x_0]+$ $+\langle b,\ x-x_0\rangle$ — равномерно по b гомеоморфична в некоторой окрестности точки $f'_x(x_0,\ y_0)$ в $M(b)$, где $M(b)$ — функция минималей для $K(x,\ b)$ на A, дифференцируемая в точке $f'_x(x_0,\ y_0)$, $M(f'_x(x_0,y_0))=x_0$. Тогда существует дифференцируемая в y_0 функция $x(y)$ для $f(x,\ y)$ и имеет место*

$$x'(y_0)=M'(f'_x(x_0,\ y_0))\circ f''_{xy}(x_0,\ y_0). \quad (22)$$

Замечание. Как видно из доказательства, условия равномерной гомеоморфичности функции $K(x,\ b)$ и дифференцируемости $M(b)$ можно заменить менее жесткими, но более труднопроверяемыми условиями равномерной по y гомеоморфичности функции $K(x, f'_x(x_0, y_0) + f'_{xy}(x_0, y_0)\cdot$ $\cdot (y - y_0))$ и дифференцируемости $m(y) = M(f'_x(x_0, y_0) + f'_{xy}(x_0, y_0)\cdot$ $\cdot (y - y_0))$. В этом случае уравнение (22) примет вид

$$x'(y_0) = m'(y_0). \tag{23}$$

Свойство гомеоморфичности функции $K(x, b)$ в случае, когда A—выпуклое множество, оказывается связанным лишь с аналогичным свойством оператора $f''_{xx}(x_0, y_0)$. Именно, имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть* $L \in B(X, X^*)$, $b(y): Y \to X^*$, $A \subset X$—*выпуклое множество,* $x(y): Y \to A$ *и*

$$g(x, y) = \frac{1}{2} L[x - x(y), x - x(y)] + \langle b(y), x - x(y) \rangle \geqslant 0 \text{ при } x \in A. \tag{24}$$

Если существует $\alpha > 0$ *такое, что при всех* $x \in X$

$$L[x, x] \geqslant \alpha \|x\|^2, \tag{25}$$

то функция $g(x, y)$ *равномерно по* y *гомеоморфична в* $x(y)$.

Замечание. Условие (24) нельзя считать дополнительным к условиям теоремы 2, так как оно лишь означает, что функция $g(x, y)$ принимает локальный минимум в $x(y)$.

Доказательство теоремы 3. Для фиксированного $y \in Y$ производная по x функции $g(x, y)$ в точке $x(y)$ равна $g'_x(x(y), y) =$ $= b(y)$, поэтому для всех $x \in A$

$$\langle b(y), x - x(y) \rangle = \langle g'_x(x(y), y), x - x(y) \rangle \geqslant 0$$

(необходимое условие минимума). Оценим выражение

$$\frac{g(x, y) - g(x(y), y)}{\|x - x(y)\|^2} = \frac{1}{2} L\left[\frac{x - x(y)}{\|x - x(y)\|}, \frac{x - x(y)}{\|x - x(y)\|}\right] +$$

$$+ \frac{\langle b(y), x - x(y) \rangle}{\|x - x(y)\|^2} \geqslant \frac{1}{2} L\left[\frac{x - x(y)}{\|x - x(y)\|}, \frac{x - x(y)}{\|x - x(y)\|}\right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \alpha \left\| \frac{x - x(y)}{\|x - x(y)\|} \right\|^2 = \frac{1}{2} \alpha, \tag{26}$$

откуда и следует равномерная гомеоморфичность функции $g(x, y)$. Последнее неравенство в (26) следует из условия (25).

В случае, когда удается аналитически вычислить точки минимума на A функции $K(x, b)$, уравнение (22) принимает явный вид. Проиллюстрируем это в случае, когда A—гиперплоскость.

Пусть X, Y — гильбертовы пространства, $f: X \times Y \to R$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем существует число $\alpha > 0$ такое, что для произвольной $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$

$$f''_{xx}(\bar{x}, \bar{y})[x, x] \geqslant \alpha \|x\|^2 \text{ при } x \in X.$$

Пусть $l \in X$, $A = \{x : \langle l, x \rangle = 0\}$, и $x_0 \in A$.
Вычислим точку минимума на A функции

$$u(x)=\frac{1}{2}L[x-x_0,\ x-x_0]+<b,\ x-x_0>,$$

где $L\in B(X,\ X)$, $b\in X^*$ и существует левый обратный оператор L^{-1}.

Имеем $u'(x)=L(x-x_0)+b$. Необходимое условие экстремума в точке M имеет вид: существует число λ такое, что $L(M-x_0)+$ $+b=\lambda l$, откуда $M=L^{-1}(\lambda l-b)+x_0$.

Из условия принадлежности M к A получим

$$<l,\ M>=0,\ <l,\ L^{-1}(\lambda l-b)>+<l,\ x_0>=0,$$

$$<l,\ L^{-1}\lambda l>=<l,\ b>,\ \lambda=\frac{<l,\ b>}{<l,L^{-1}l>},$$

$$M=L^{-1}\left(\frac{<l,\ b>}{<l,L^{-1}l>}l-b\right)+x_0.$$

Рассматривая M как функцию от b (для фиксированного L) вычислим производную:

$$M'(b)=L^{-1}\left(\frac{<l,\ \cdot\ >}{<l,L^{-1}l>}l-I_x\right), \tag{27}$$

где I_x—единичный оператор. Обозначим правую часть в (27) через $U_{L,\,l}$—это есть линейный непрерывный оператор из X в X при каждом L и l. Из теоремы 2 получим, что существует функция минималей $x(y)$ для $f(x,\ y)$, для которой

$$x'(y_0)=U_{f''_{xx}(x_0,\ y_0),\ l}\circ f''_{xy}(x_0,\ y_0) \tag{28}$$

и $x(y_0)=x_0$, если x_0—некоторая точка локального минимума функции $f(x,\ y_0)$ на A.

§ 3. Гладкие многозначные отображения и их проектирование на фиксированные множества

Пусть X, Y—банаховы пространства, $A: Y\to 2^X$, то есть при каждом фиксированном $y\in Y$ $A(y)$—некоторое подмножество пространства X.

Определение 5. а) Функция $f: Y\to X$ называется селектором отображения $A(y)$, если $f(y)\in A(y)$ при всех $y\in Y$.

б) Функция $h(x,\ y): X\times Y\to X$ называется функцией однозначных ветвей отображения A, если для некоторого множества $A_0\subset X$

1) $x\in A_0$ в том и только в том случае, если $h(x,\ y)\in A(y)$ при всех $y\in Y$;

2) для всех $y\in Y$ $A(y)=\bigcup\limits_{x\in A_0}h(x,\ y)$.

Множество A_0 называется основанием функции $h(x,\ y)$.

Если для некоторого $y_0\in Y$ $A_0=A(y_0)$ и $h(x,\ y)=x$ для всех $x\in A_0$, то h называется регулярной в y_0.

в) Элемент $b\in B(Y,\ X)$ называется производным направлением отображения A в точке $(x_0,\ y_0)\in X\times Y$, если из $x_0\in\overline{A(y_0)}$ следует, что существует функция $r: Y \to X$ такая, что $x_0 + b(y - y_0) + r(y) \in A(y)$ при всех $y \in Y$ и

$$\lim_{y \to y_0} \frac{r(y)}{\|y - y_0\|} = 0.$$

Функция $dA_{y_0}(x): X \to B(Y, X)$ называется производной функцией отображения A в точке y_0, если для всех $x \in X$ $dA_{y_0}(x)$— производное направление в точке (x, y_0).

Функция $dA(x, y): X \times Y \to B(Y, X)$ называется производной отображения A, если для всех $(x, y) \in X \times Y$ $dA(x, y)$—производное направление в точке (x, y).

Селекторы, функции однозначных ветвей и производные многозначных отображений будем изучать параллельно. Следующие утверждения, некоторым образом связывающие эти понятия, очевидны.

Предложение 4. а) *Пусть $h: X \times Y \to X$—функция однозначных ветвей многозначного отображения A с основанием A_0. Тогда для каждого фиксированного $x_0 \in A_0$ функция $f(y) = h(x_0, y)$ есть селектор отображения A.*

б) *Пусть $f(y): Y \to X$—селектор отображения A, дифференцируемый в некоторой точке y_0. Тогда $f'(y_0)$—производное направление отображения A в точке $(f(y_0), y_0)$.*

Изучим конкретный тип многозначных отображений, часто встречающийся в параметризованных задачах оптимизации — параметризованные ограничения типа равенств.

Пусть $A(y) = \{x \in X: f(x, y) = 0\}$, где $f: X \times Y \to Z$, X, Y, Z— банаховы пространства.

Теорема 4. *Пусть $(x_0, y_0) \in X \times Y$, $f(x_0, y_0) = 0$, f—непрерывно дифференцируемая в (x_0, y_0) функция. Если $b \in B(Y, X)$—производное направление отображения A в точке (x_0, y_0), то*

$$f'_x(x_0, y_0) \circ b = -f'_y(x_0, y_0). \tag{29}$$

Доказательство. По определению производного направления существует функция $r: Y \to X$ такая, что

$$\lim_{y \to y_0} \frac{r(y)}{\|y - y_0\|} = 0 \text{ и } x + b(y - y_0) + r(y) \in A(y). \tag{30}$$

Последнее включение означает, что

$$f(x_0 + b(y - y_0) + r(y), y) = 0. \tag{31}$$

Из (30) следует, что $r(y)$ — дифференцируемая в y_0 функция и $r'(y_0) = 0$. Дифференцируя по y равенство (31) в точке y_0 и учитывая непрерывную дифференцируемость функции $f(x, y)$ в y_0, получим

$$f'_x(x_0, y_0) \circ b + f'_y(x_0, y_0) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Пусть $f(x, y)$—непрерывно дифференцируемая в $X \times Y$ функция, $h(x, y)$—дифференцируемая по y во всех точках $(x, y) \in A_0 \times Y$ функция однозначных ветвей отображения A с основанием A_0. Тогда по предложению 4 функция $f(y)=h(x, y)$ есть селектор при всех фиксированных $x\in A_0$, и поэтому $h'_y(x, y)$—производное направление в точке $(h(x, y), y)$. Значит, по теореме 4

$$f'_x(h(x, y), y)\circ h'_y(x, y)=-f'_y(h(x, y), y). \qquad (32)$$

Обратно, пусть $h(x, y)$—некоторая функция, удовлетворяющая уравнению (32) при всех x из некоторого множества $A_0\subset X$, и пусть для некоторого $y_0\in Y$ справедливо следующее утверждение: $h(x, y_0)\in$ $\in A(y_0)$ в том и только том случае, когда $x\in A_0$. Обозначим $g(x, y)=f(h(x, y), y)$. Из (32) получим $g'_y(x, y)=0$ при $x\in A_0$, то есть при каждом фиксированном $x\in A_0$

$$g(x, y)=\text{const},\ f(h(x, y), y)=\text{const},$$

$$f(h(x, y), y)=f(h(x, y_0), y_0).$$

Для того, чтобы $h(x, y)\in A(y)$ необходимым и достатосчным условием будет $f(h(x, y_0), y_0)=0$ что, как было предположено, равносильно условию $x\in A_0$. Поэтому $h(x, y)$—функция однозначных ветвей отображения A с основанием A_0. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть X, Y, Z—банаховы пространства, $f: X\times Y\to Z$ непрерывно дифференцируемая в $X\times Y$ функция, $A(y)=\{x\in X: f(x, y)=0\}$. Для того, чтобы дифференцируемая по y во всех точках $X\times Y$ функция $h: X\times Y\to X$ была функцией однозначных ветвей отображения A с основанием $A_0\subset X$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

а) *$h(x, y)$ удовлетворяет уравнению (32) при $x\in X_0$;*

б) *для некоторого $y_0\in Y$ $h(x, y_0)\in A(y_0)$ в том и только том случае, когда $x\in A_0$.*

Пример. $X=R^2$, $Y=R$, $Z=R$, $f(x_1, x_2, y)=x_1^2+(x_2-y)^2-1$. При каждом $y\in R$, $A(y)$ будет единичной окружностью с центром в точке $(0, y)$. Ищем регулярные в точке 0 функции однозначных ветвей и производные отображения A. Имеем

$$f'_{(x_1, x_2)}(x_1, x_2, y)=(2x_1, 2(x_2-y)),$$

$$f'_y(x_1, x_2, y)=-2(x_2-y).$$

Функции однозначных ветвей и производные будут соответственно векторами $(h_1(x_1, x_2, y), h_2(x_1, x_2, y))$ и $(d_1A(x_1, x_2, y), d_2A(x_1, x_2, y))$. Из (29) получим

$$2x_1 d_1A(x_1, x_2, y)+2(x_2-y)\,d_2A(x_1, x_2, y))=2(x_2-y), \qquad (33)$$

а (32) нам даст

$$2h_1(x_1, x_2, y)\,h'_{1y}(x_1, x_2, y)+2(h_2(x_1, x_2, y)-y)\,h'_{2y}(x_1, x_2, y)=$$
$$=2(h_2(x_1, x_2, y)-y). \qquad (34)$$

Уравнения (33) и (34) имеют бесконечное множество решений, что лишь означает, что как функции однозначных ветвей, так и производные отображения A определяются неоднозначно. Выпишем лишь по два согласованных друг с другом решения уравнений (33)и (34).

$$1)\ h_1(x_1, x_2, y)=x_1,\ h_2(x_1, x_2, y)=x_2+y,\ d_1A(x_1, x_2, y)=0,$$
$$d_2A(x_1, x_2, y)=1;$$

$$2)\ h_1(x_1, x_2, y)=x_1\cos y+x_2\sin y,\ h_2(x_1, x_2, y)=x_2\cos y-x_1\sin y+y,$$
$$d_1A(x_1, x_2, y)=x_2-y,\ d_2A(x_1, x_2, y)=1-x_1.$$

Первым решениям соответствует параллельный перенос окружности $A(0)$ вдоль прямой $x_1=0$, а вторая группа решений характеризует случай, когда окружность $A(0)$ «катится» по прямой $x_1=-1$ без скольжения.

В случае параметризованных ограничений типа неравенств результат, аналогичный теореме 5, получается лишь односторонний.

Теорема 6. *Пусть $f: X\times Y\to R$—непрерывно дифференцируемая в $X\times Y$ функция, $A(y)=\{x\in X: f(x, y)\leqslant 0\}$.*

Пусть $H(f)$—множество всех дифференцирудемых по y и регулярных в нуле функций однозначных ветвей отображения $A(y)$.

Тогда

$$H(f)\subset\{h(x, y): h(x, 0)=x, f'_x(h(x, y), y)\,h'_y(x, y)=-f'_y(h(x, y), y)$$
$$\text{при } f(h(x, y), y)=0\}.$$

Доказательство. Если $h(x, y)\in H(f)$, то $f(h(x, y), y)\leqslant 0$, значит, если $f(h(x_0, y_0), y_0)=0$, то функция $g(x, y)=f(h(x, y), y)$ принимает максимум в точке (x_0, y_0), значит $g'_y(x_0, y_0)=0$, что и требовалось доказать.

§ 4. Случай, когда $A(y)$—гиперплоскость при всех y

Завершим изучение задачи, начатое в § 2. Сначала сформулируем задачу: требуется охарактеризовать функции минималей для дважды непрерывно дифференцируемой в $X\times Y$ функции $f(x, y)$ на множестве $A(y)$, где $A(y)=\{x: \langle l(y), x\rangle=0\}$, причем $l(y): Y\to X^*$—дважды непрерывно дифференцируемая в Y функция. Предполагается также, что X и Y—гильбертовы пространства, и пусть существует $\bar{x}\in X$ такое, что $\langle l(y), \bar{x}\rangle\neq 0$ при всех $y\in Y$. Найдем функции однозначных ветвей отображения A, регулярные в нуле. Из теоремы 5 получим, что если $h(x, y)$—функция однозначных ветвей, то для произвольного $\bar{y}\in Y$

$$\langle l(y), h'_y(x, y)\bar{y}\rangle=-\langle l'(y)\bar{y}, h(x, y)\rangle. \tag{35}$$

Нетрудно увидеть, что уравнению (35) удовлетворяет функция

$$h(x, y)=x-\frac{\langle l(y), x\rangle}{\langle l(y), \bar{x}\rangle}\cdot\bar{x}+\frac{\langle l(0), x\rangle}{\langle l(0), \bar{x}\rangle}\cdot\bar{x}. \tag{36}$$

Действительно, в этом случае для всех $\bar{y}\in Y$, $x\in A(0)$

$$h'_y(x, y)\bar{y}=-\frac{\langle l'(y)\bar{y}, x\rangle\cdot\langle l(y), \bar{x}\rangle-\langle l'(y)\bar{y}, \bar{x}\rangle\cdot\langle l(y), x\rangle}{\langle l(y), \bar{x}\rangle^2}\,\bar{x}$$

и

$$< l(y),\ h'_y(x,\ y)\ \bar{y} > = - < l(y),$$

$$\frac{< l'(y)\,\bar{y},\ x >< l(y),\ \bar{x} > - < l'(y)\,\bar{y},\ \bar{x} >< l(y),\ x >}{< l(y),\ \bar{x} >^2}\,\bar{x} > =$$

$$= - < l(y),\ \frac{< l'(y)\,\bar{y},\ x >}{< l(y),\ \bar{x} >}\,\bar{x} > + < l(y),\ \frac{< l'(y)\,\bar{y},\ \bar{x} >< l(y),\ x >}{< l(y),\ \bar{x} >^2}\,\bar{x} > =$$

$$= - \frac{< l'(y)\,\bar{y},\ x >}{< l(y),\ \bar{x} >} < l(y),\ \bar{x} > +$$

$$+ \frac{< l'(y)\,\bar{y},\ \bar{x} > \cdot < l(y), x >}{< l(y),\ \bar{x} >^2} \cdot < l(y),\ \bar{x} > = - < l'(y)\,\bar{y},\ x > +$$

$$+ < l'(y)\,\bar{y},\ \frac{< l(y),\ x >}{< l(y),\ \bar{x} >}\,\bar{x} > = - < l'(y)\,\bar{y},\ h(x,\ y) >.$$

Функция $h\,(x,\ y)$, определенная по формуле (36), регулярна в нуле, так как если $x \in A\,(0)$, то $< l(0),\ x > = 0$ и

$$h\,(x,\ 0) = x - \frac{< l(0),\ x >}{< l(0),\ \bar{x} >}\,\bar{x} = x.$$

Теперь для того, чтобы минимизировать $f(x,\ y)$ на $A\,(y)$ достаточно минимизировать $f(h\,(x,\ y),\ y)$ на $A\,(0)$, так как при каждом фиксированном y $h\,(x,\ y)$—гомеоморфизм из X в X. Это значит, что для того, чтобы точка x_0 была точкой локального минимума для $f(h\,(x,\ y),\ y)$ на $A\,(0)$, необходимо и достаточно, чтобы точка $h\,(x_0,\ y)$ была точкой локального минимума для $f\,(x,\ y)$ на $A\,(y)$.

При каждом y $h\,(x,\ y)$—линейный непрерывный оператор из X в X, обозначим его через $P(y)$. Если $x_0\,(y)$—функция минималей для $f(h\,(x,\ y),\ y)$ на $A\,(0)$, то из (28)

$$x'_0(y) = U_{\dot{f}_{xx}(P(y)\,x,\ y)\,P^*(y),\ l(0)} \cdot [\dot{f}_{xy}\,P(y)\,x,\ y)\ P(y) + \dot{f}_{xx}(P(y)\,x,\ y)\,P'(y)],$$

значит если $x(y) = P(y)\,x_0(y)$, то

$$x'(y) = P'(y)\ x(y) + P(y)\ U_{\dot{f}_{xx}(P(y)\,x,\ y)\,P^*(y),\ l(0)} \cdot$$

$$\cdot [\dot{f}_{xy}\,(P(y)\ x,\ y)\ P(y) + \dot{f}_{xx}\,(P(y)\ x,\ y)\ P'(y)\,],$$

где $P(y): Y \to B(X,\ X)$, $P(y)\,x = h\,(x,\ y)$ и $U_{L,\,l}: X \to X$,

$$U_{L,\,l}\,x = L^{-1}\left(\frac{< l(0),\ x >}{< l(0),\ L^{-1}l(0) >}\ l\,(0) - I_x\right)\cdot$$

Очевидно, вместо $P\,(y)\,x$ можно брать любое другое решение уравнения (35), дважды непрерывно дифференцируемое в $X \times Y$ и взаимно однозначное при каждом фиксированном y.

Ереванский государственный
университет

Поступила 13. III. 1986

Վ. Վ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ. Ողորկ պարամետրիզացված էքստրեմալ խնդիրներում մինիմալների ֆունկցիաների միարժեք ճյուղերի դիֆերենցիալ հատկությունների մասին *(ամփոփում)*

Հետազոտվում են ֆիքսված սահմանափակումներով պարամետրիզացված օպտիմիզացիայի խնդիրների լուծումների դիֆերենցիալ հատկությունները։ Ֆիքսված սահմանափակումներով ողորկ պարամետրիզացված ֆունկցիայի մինիմիզացիայի խնդրի լուծումների դիֆերենցելիության հարցը բերվում է քառակուսային նպատակային ֆունկցիայով անալոգ խնդրին։ Սահմանվում են բազմարժեք արտապատկերումների ածանցյալների և միարժեք ճյուղերի ֆունկցիաների հասկացությունները և պարամետրիզացված սահմանափակումներով պարամետրիզացված օպտիմիզացիայի խնդիրը բերվում է ֆիքսված սահմանափակումներով խնդրին։ Արդյունքները ցուցադրվում են օրինակներում։

V. V. HARUTYUNIAN. *On differential properties of singlevalued branches of functions of minimals in smooth parametrized extremal problems* (summary).

Differential properties of solutions of parametrized optimization problems subject to fixed constraints are established. The problem of differentiability of solutions of smooth parametrized function minimization problem subject to fixed constraints is reduced to analogous problem with quadratic aim function. The notions of derivatives and single valued branches of multifunctions are defined and the problem of parametrized optimization subjest to parametrized constraints is reduced to the problem with fixed constraints. The results are illustrated on examples.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин.* Оптимальное уравнение, М., «Наука», 1979.
2. *В. В. Береснев, Б. Н. Пшеничный.* О дифференциальных свойствах функции минимума, ЖВМ и МФ, 14, № 3, 1974, 639—651.
3. *Б. Н. Пшеничный.* Выпуклые многозначные отображения и им сопряженные, Кибернетика, № 3, 1972, 94—102.
4. *F. H. Glarke.* A new approach to Lagrange multipliers, Math. Oper. Res., 1, № 2, 1976, 165—174.
5. *K. Malanowski.* On differentiability with respect to parameter of solutions to convex optimal control problems subject to state space constraints, Appl. Math. and Optim., 12, № 3, 1984, 231—245.
6. *С. В. Асеев.* Квазилинейные операторы и их применение в теории многозначных отображений, Тр. МИ АН СССР им. В. А. Стеклова, 167, 1985, 25—52.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXII, № 2, 1987 Математика

УДК 517.53

А. Г. БАЛАКЯН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В БЕСКОНЕЧНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ ТИПА L

1°. Граничные вопросы единственности аналитических функций хорошо изучены для случая односвязных областей (теоремы Ф. и М. Риссов, Лузина-Привалова и др.). Основные результаты сохраняются и для случая конечносвязных областей, однако в бесконечносвязных областях соответствующие вопросы сравнительно мало исследованы. Это обусловлено причинами как технического, так и принципиального характера. В самом деле, если для конечносвязных областей свойство единственности так или иначе обеспечивается за счет положительности гармонической меры граничного множества, на котором аналитическая функция исчезает, то при переходе к областям бесконечной связности возможно принципиально новое явление: свойство единственности может совмещаться с тем, что соответствующее граничное множество имеет нулевую гармоническую меру.

Пример такой области впервые был построен А. А. Гончаром (см. [1], стр. 425).

Далее, этот эффект бесконечносвязных областей более подробно был изучен в работе автора [2], где был приведен метрический критерий единственности (теорема 2, 1 [2]) для бесконечносвязных областей типа L, для которых граничное подмножество—единичная окружность является гармоническим нуль-множеством.

Настоящая работа также посвящена этой цели. Ниже устанавливаются другие, нежели в работе [2], достаточные условия единственности, также охватывающие случаи, когда соответствующее граничное подмножество может иметь нулевую гармоническую меру. Метод доказательства этой теоремы, как и примера А. А. Гончара [1], основан на использовании известных условий квазианалитичности Данжуа-Карлемана.

2°. Обозначения и определения. Пусть

$$K(a, r)=\{z;\ |z-a|<r\},$$

$$\Delta_\alpha^\theta=\{z;\ |\arg z-\theta|\leq\alpha,\ |z|<1\},\ 0<\alpha<\pi,\ 0<\theta<2\pi,$$

$H(D)$ — класс голоморфных в области D функций, $H_B(D)$ — класс голоморфных и ограниченных в D функций.

Определение 1 [3]. Пусть $\{K_j\}_1^\infty$—система кругов $K_j=K(z_j, r_j)$ такая, что $K_j\subset K(0, 1)$, $\overline{K}_j\cap\overline{K}_i=\varnothing$ при $i\neq j$, $\{z_j\}'=\partial K(0, 1)$. Тогда бесконечносвязную область

$$D=D(\{z_j, r_j\}_1^\infty)=K(0, 1)\setminus\bigcup_{j=1}^\infty\overline{K}_j$$

назовем областью типа L.

Кружки K_j называются исключительными кругами области D.

Определение 2. Пусть D—область типа L. Скажем, что D обладает свойством единственности (соответственно, B-единственности) если из условий: $f \in H(D)$ (соответственно, $f \in H_B(D)$) и

$$f(z) \to 0 \text{ при } |z| \to 1, \ z \in D \tag{1}$$

следует, что $f \equiv 0$.

Замечание. Свойством единственности и B-единственности область D обладает (не обладает) одновременно (см. [2], в доказательстве теоремы 1.1).

Определение 3. Точку $e^{i\theta} \in \partial K(0, 1)$ назовем радиально достижимой из области $D \subset K(0, 1)$, если D содержит некоторый полуинтервал $[r_0 e^{i\theta}, e^{i\theta})$, $r_0 \in [0, 1)$.

Отметим, что если область $D = D(\{z_j, r_j\}_1^\infty)$ типа L такая, что $\sum_{j=1}^{\infty} r_j < \infty$, то тогда почти все точки $e^{i\theta} \in \partial K(0, 1)$ радиально достижимы из D.

3°. При помощи известных условий квазианалитичности бесконечно дифференцируемых функций устанавливается следующий признак единственности для областей типа L.

Теорема. *Пусть D — область типа L и точка $e^{i\theta}$ радиально достижима из D. Пусть последовательность $\{\alpha_n\}_0^\infty$ такова, что $\alpha_0 = \pi$, $\alpha_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$ и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{\exp(\alpha_n^{-1})} < +\infty. \tag{2}$$

Если

$$\sup_{n \geq 1} \alpha_n^{-2\exp\alpha_n^{-1}} \text{ дл. } \partial D \cap (\Delta^{\theta}_{\alpha_{n-1}} \setminus \Delta^{\theta}_{\alpha_n}) < +\infty, \tag{3}$$

то область D обладает свойством единственности.

Доказательство. Без ущерба общности можно положить $\theta = 0$ и с учетом леммы 1 работы [2], считать, что $[0, 1) \subset D$.

Пусть функция $f \in H(D)$ удовлетворяет условию (1), т. е. исчезает на $\partial K(0, 1)$. Ввиду замечания к определению 2, не ограничивая общности можно считать, что $f \in H_B(D)$, т. е. положить $|f(z)| \leq 1$, $z \in D$. Надо доказать, что $f \equiv 0$. С этой целью воспользуемся теоремой Данжуа—Карлемана о квазианалитичности [4], [5].

Рассмотрим класс $C_{\{m_p\}}$ бесконечно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций, для каждой из которых существует постоянная $K = K_f$ такая, что

$$|f^{(p)}(x)| \leq K^p m_p, \ x \in [a, b], \ p = 0, 1, 2, \cdots.$$

Говорят, что класс $C_{\{m_p\}}$ является квазианалитическим, если для каждой функции $f \in C_{\{m_p\}}$ из условий $f^{(p)}(x_0) = 0$, $x_0 \in [a, b]$, $p = 0, 1, 2, \cdots$ следует, что $f(x) \equiv 0$, $x \in [a, b]$.

Теорема Данжуа-Карлемана утверждает, что условие

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{m_p}} = +\infty$$

достаточно для квазианалитичности класса $C_{\{m_p\}}$.

Заметим, что теорема, в частности, справедлива в случае последовательности

$$m_p = c^{p+1}\, p!\, (\log(p+1))^{p+1}, \quad p = 1, 2, \cdots, \quad c = \text{const},$$

и именно этот случай мы хотим применить к функции f на отрезке $[0, 2]$, считая $f(z) \equiv 0$ при $z \in \mathbf{C} \setminus K(0, 1)$.

Условие (3) означает, что

$$\text{дл. } \partial D \cap (\Delta_{\alpha_{n-1}} \setminus \Delta_{\alpha_n}) < c_1 \alpha_n^{2\exp(\alpha_n^{-1})}, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{4}$$

где $c_1 > 0$ — некоторая константа, $\Delta_\alpha = \Delta_\alpha^0$.

Полагая

$$\gamma_n = \partial D \cap (\Delta_{\alpha_{n-1}} \setminus \Delta_{\alpha_n}), \quad n \geqslant 1$$

заметим сначала, что согласно (4) и (2)

$$\text{дл. } \partial D \cap K(0, 1) = \sum_{j=1}^{\infty} \text{дл. } \partial K_j = \sum_{n=1}^{\infty} \text{дл. } \gamma_n \leqslant c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{2\exp(\alpha_n^{-1})} < +\infty,$$

где K_j — исключительные круги области D.

Из классической формулы Коши с учетом конечности длины границы ∂D и условия, что f исчезает на $\partial K(0, 1)$, предельным переходом получим формулу

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{p!}{2\pi i} \int_{\partial K_j} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{p+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p!}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{p+1}} = \begin{cases} f^{(p)}(z), & z \in D \\ 0, & z \in \mathbf{C} \setminus D, \end{cases} \tag{5}$$

где $p = 0, 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим непрерывную на отрезке $[0, 2]$ функцию

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in [0, 1) \\ 0, & z \in [1, 2]. \end{cases}$$

Функция F бесконечно дифференцируема на отрезке $[0, 2]$, что следует из классической теоремы о почленном дифференцировании функциональных рядов и доказываемого ниже факта равномерной сходимости рядов из (5) на отрезке $[0, 2]$, при этом имеем соотношение

$$F^{(p)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p!}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{p+1}}, \quad z \in [0, 2], \quad p = 0, 1, 2, \cdots. \tag{6}$$

Отсюда, ввиду (5) следует, что

$$F^{(p)}(1) = 0, \quad p = 0, 1, 2, \cdots. \tag{7}$$

Теперь оценим $|F^{(p)}(z)|$ для $z \in [0, 2]$, в результате чего заодно будет доказана и равномерная сходимость рядов из (5) на отрезке $[0, 2]$.

С этой целью заметим, что из условия $0\in[0,1)\subset D$ следует существование некоторого круга $K(0,r)\subset D$, так, что для любой точки $\zeta\in\partial D\cap(\Delta_{\alpha_{n-1}}\setminus\Delta_{\alpha_n})$ имеем оценку

$$|\zeta-z|\geqslant\frac{r\alpha_n}{\pi},\quad z\in[0,2].\qquad(8)$$

Из (6), ввиду (4) и (8) имеем

$$|F^{(p)}(z)|\leqslant c_1\frac{p!}{2\pi}\left(\frac{\pi}{r}\right)^{p+1}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{2\exp\left(\alpha_n^{-1}\right)-(p+1)},\quad z\in[0,2].\qquad(9)$$

Для оценки последнего ряда зафиксируем значение p и пусть N_p—такое натуральное число, что

$$\alpha_1^{-1}<\alpha_2^{-1}<\cdots<\alpha_{N_p}^{-1}\leqslant\log(p+1)<\alpha_{N_p+1}^{-1}<\cdots$$

(существование такого N_p следует из условия $\alpha_n^{-1}\uparrow+\infty$ при $n\to+\infty$).

Отсюда имеем соотношения

$$\alpha_n^{-(p+1)}<(\log(p+1))^{p+1}\quad\text{для } n=1,2,\cdots,N_p,\qquad(10)$$

$$\exp(\alpha_n^{-1})\geqslant p+1\quad\text{для } n>N_p+1.\qquad(11)$$

Учитывая (10) и вытекающий из (2) факт сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{2\exp\left(\alpha_n^{-1}\right)}$, получаем

$$\sum_{n=1}^{N_p}\alpha_n^{2\exp\left(\alpha_n^{-1}\right)-(p+1)}\leqslant(\log(p+1))^{p+1}\sum_{n=1}^{N_p}\alpha_n^{2\exp\left(\alpha_n^{-1}\right)}\leqslant c_2(\log(p+1))^{p+1},\qquad(12)$$

где $c_2=\mathrm{const}$.

Далее, ввиду (11) имеем

$$\sum_{n=N_p+1}^{\infty}\alpha_n^{2\exp\left(\alpha_n^{-1}\right)-(p+1)}\leqslant\sum_{n=N_p+1}^{\infty}\alpha_n^{\exp\left(\alpha_n^{-1}\right)}<c_3,\quad c_3=\mathrm{const}.\qquad(13)$$

Из (9), (12) и (13) получаем

$$|F^{(p)}(z)|\leqslant c\left(\frac{\pi}{r}\right)^{p+1}p!\,(\log(p+1))^{p+1},\quad z\in[0,2],\qquad(14)$$

где $c=\mathrm{const}$, $r=\mathrm{const}$.

В силу соотношений (7) и (14), из теоремы Данжуа-Карлемана вытекает, что $F(z)=0$, $z\in[0,2]$, т. е. $f(z)=0$, $z\in[0,1)$, откуда следует, что $f\equiv0$ (так как $[0,1)\subset D$). Теорема доказана.

Замечание 1. Условие (2) налагает ограничения на скорость убывания последовательности $\{\alpha_n\}_0^{\infty}$ при $n\to\infty$ и показывает, что эта последовательность не может произвольно медленно стремиться к нулю. Так, например, при $\alpha_n=\dfrac{1}{\log\log n}$ условие (2) выполняется, но уже при скорости $\alpha_n=\dfrac{1}{\log\log\log n}$ условие (2) не удовлетворяется. Наш критерий во втором случае не позволяет определить обладает или не обладает областъ D свойством единственности при выполнении условия (3).

Замечание 2. Обстоятельство принадлежности области D классу L в теореме не существенно. Теорема справедлива для более общего класса областей, получающихся из единичного круга удалением некоторой счетной системы областей $\{G_j\}_1^\infty$. Надо только условие (3) заменить условием

$$\sup_{n\geq 1} \alpha_n^{-2\exp\left(\alpha_n^{-1}\right)} \sum_{(j)} \operatorname{diam}\left(G_j \cap (\Delta^0_{\alpha_{n-1}} \setminus \Delta^0_{\alpha_n})\right) < +\infty,$$

где $\operatorname{diam} A = \sup\limits_{z_1, z_2 \in A} |z_1 - z_2|$.

Замечание. 3. Доказанная теорема характеризует свойство единственности как для областей типа L с условием, что гармоническая мера $\omega(z, \partial K(0, 1), D)$ положительна, так и для некоторых областей типа L, для которых $\omega(z, \partial K(0, 1), D) = 0$.

Чтобы убедиться в этом достаточно доказать следующее

Утверждение. *Пусть Δ — произвольный угол с вершиной* 0, $l = \Delta \cap \partial K(0, 1)$, *$V$ — окрестность дуги l, $\varepsilon > 0$. Существует лежащая в $\Delta \cap U \cap K(0, 1)$ система $\{K_i\}_1^\infty$ кругов $K_i = K(z_i, r_i)$ такая, что* $\overline{K}_i \cap \overline{K}_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\{z_i\}' = l$

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i < \varepsilon, \tag{15}$$

причем $\omega(z, l, D) = 0$, где $D = K(0, 1) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \overline{K}_i$.

Действительно, предположим это утверждение справедливо.

Пусть $\{\alpha_n\}_0^\infty$ — последовательность, удовлетворяющая условиям теоремы, и пусть $\{l_n\}_1^\infty$, $l_n = \partial K(0, 1) \cap (\Delta^0_{\alpha_{n-1}} \setminus \Delta^0_{\alpha_n})$, последовательность пар дуг единичной окружности, образующихся последовательностью $\{\alpha_n\}_0^\infty$. Согласно вышеуказанному утверждению (с учетом условия (15)), для l_n и числа $\varepsilon_n = \frac{1}{2\pi} \alpha_n^{2\exp\left(\alpha_n^{-1}\right)}$ существует система σ_n непересекающихся кругов, накапливающихся к l_n

$$\sigma_n \subset (\Delta^0_{\alpha_{n-1}} \setminus \Delta^0_{\alpha_n}) \cap \left\{z;\ |z| > \frac{1}{n+1}\right\},$$

такая, что

$$\omega(z, l_n, D_n) = 0, \quad D_n = K(0, 1) \setminus \overline{\sigma}_n,$$

дл. $\partial D_n \cap K(0, 1) < \alpha_n^{2\exp\left(\alpha_n^{-1}\right)}$, $n = 1, 2, \cdots$.

Рассмотрим область

$$D = K(0, 1) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\sigma}_n.$$

Очевидно, что D — область типа L и точка $e^{i\theta}$ радиально достижима из D. Итак, построенная область D удовлетворяет всем условиям теоремы, следовательно, обладает свойством единственности.

С другой стороны имеем

$$\omega(z, \partial K(0, 1), D) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \omega(z, l_n, D_n) = 0.$$

Итак, остается только убедиться в справедливости вышеуказанного утверждения.

С этой целью рассмотрим область G и функцию f, которые фигурируют в теореме неединственности А. А.Гончара [3]. Эта теорема, в частности, утверждает, что для любых $\beta > 2$ и $\varepsilon > 0$ существуют: область $G = D(\{\zeta_j, \rho_j\}_1^{\infty})$ типа L такая, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\log \frac{1}{\rho_j}\right)^{\beta}} < \varepsilon \tag{16}$$

и нетривиальная мероморфная в $K(0,1)$ функция, удовлетворяющая условию (1).

Итак точки $\{\zeta_j\}_1^{\infty}$ — простые полюсы функции f и пусть точки $\{\eta_k\}_1^{\infty}$ — нули функции f. Далее, пусть W_1 и W_2 — произведения Вейерштрасса для круга $K(0, 1)$ с простыми нулями, соответственно, в точках $\{\zeta_j\}_1^{\infty}$ и $\{\eta_k\}_1^{\infty}$ (см. [6]). Тогда функция

$$F = f \cdot W_1 / W_2$$

голоморфна в $K(0, 1)$ и там не имеет нулей. Применяя к голоморфной в $K(0, 1)$ функции $\log F$ теорему Пуанкаре о разделении особенностей [6], можно написать $\log F = \varphi_1 + \varphi_2$, где $\varphi_1 \in H(\mathbf{C} \setminus l)$, $\varphi_2 \in H(\mathbf{C} \setminus \gamma)$, γ — дополнительная к l дуга.

Отсюда имеем

$$f(z) = e^{\varphi_1} e^{\varphi_2} W_2 / W_1, \quad z \in K(0, 1). \tag{17}$$

Далее, произведение Вейерштрасса W_1 разобьем на два множителя W_1' и W_1'' без общих нулей так, чтобы W_1' имел нули лишь в тех точках ζ_j, для которых $K(\zeta_j, \rho_j) \subset \Delta \cap V$. Перепишем соответствующие круги $K(\zeta_j, \rho_j)$ в виде последовательности $\{K(z_i, r_i)\}_1^{\infty}$. Для них будет выполнено условие (16).

Аналогично, W_2 разбиваем на множители W_2' и W_2'' без общих нулей так, чтобы W_2' имел нули лишь в тех точках η_k, которые попадают в $\Delta \cap V$.

Без ограничения общности можем считать, что произведения W_1' и W_2' сходятся в области $\overline{\mathbf{C}} \setminus l$, а произведения W_1'' и W_2'' — в $\mathbf{C} \setminus \gamma$. В действительности, мы можем сначала построить произведения W_1', W_2', W_1'', W_2'', а затем положить $W_1 = W_1' W_1''$, $W_2 = W_2' W_2''$. Полагая

$$f_1 = e^{\varphi_1} \frac{W_2'}{W_1'}, \quad z \in K(0, 1),$$

$$f_2 = e^{\varphi_2} \frac{W_2''}{W_1''}, \quad z \in K(0, 1),$$

из (17) имеем

$$f(z)=f_1(z)f_2(z),\ \ z\in K(0,\ 1). \tag{18}$$

Из перечисленных выше свойств функций, участвующих в определении f_1 и f_2, следует, что исключая концы дуг l и γ, мы можем утверждать, что функция f_1 непрерывна и не исчезает на γ, а f_2 непрерывна и не исчезает на l. Кроме того, имеем, что $f(z)\to 0$ при $z\to l$, $z\in G$. Тогда из (18) следует, что $f_1(z)\to 0$ при $z\to l$, $z\in D$ (исключая, быть может, концы дуги l).

Таким образом, мероморфная в D функция f_1 исчезает на l и если удалить из D сколь угодно малые ε-окрестности концов дуги l, то f_1 будет ограничена в полученной области D_ε. Тогда мы имеем, что $\omega(z,\ l_\varepsilon,\ D)\equiv\equiv 0$, где $l_\varepsilon=l\cap D_\varepsilon$. Отсюда при $\varepsilon\to 0$ получим, что $\omega(z,\ l,\ D)=0$.

Для завершения доказательства утверждения, остается только заметить, что выполняемое условие (16) можно заменить условием

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i^{\alpha}<\varepsilon,\ \ \alpha>0,$$

и, в частности, условием (15), ввиду соотношения

$$x^{\alpha}\leqslant\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\beta}\frac{1}{\left(\log\dfrac{1}{x}\right)^{\beta}}\ \ \text{при}\ 0<x<1,\ \alpha>0,\ \beta>0.$$

В заключение выражаю свою искреннюю признательность Н. У. Аракеляну за ценные советы и обсуждения.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 23. V. 1986

Հ. Գ. ԲԱԼԱՔՅԱՆ. *L տիպի անվերջ-կապանի տիրույթներում անալիտիկ ֆունկցիաների միակության մասին (ամփոփում)*

Աշխատանքում ստացված են L տիպի տիրույթներում անալիտիկ ֆունկցիաների միակության բավարար պայմաններ, որոնք ընդգրկում են դեպքեր, երբ միավոր շրջանագծի հարմոնիկ չափը զրո է։ Ապացուցման մեթոդը հիմնվում է Դանժուա-Կառլեմանի քվազիանալիտիկության հայտնի պայմանների օգտագործման վրա։

H. G. BALAKIAN. *On the uniqueness of analitical functions in infinitely connected domains of* L *type* (summary)

This paper obtains sufficient conditions for uniqueness of analitical functions in L-type domains, which include cases, where the harmonic measure of unit circle is zero. The proof is based on the Denjoy—Carleman conditions of quasianalyticity.

ЛИТЕРАТУРА

1. *N. U. Arakelian and P. M. Gauthier.* On tangential approximation by holomorphic functions, Изв. АН Арм. ССР, „Математика", XVII, № 6, 1982, 421—440.
2. *А. Г. Балакян.* Метрические критерии единственности голоморфных функций в бесконечносвязных областях типа L, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XX, № 2, 1985, 131—145.
3. *А. А. Гончар.* О примерах неединственности аналитических функций, Вестник МГУ, «Математика, Механика», 1964, № 1, 37—44.
4. *С. Мандельбройт.* Квазианалитические классы функций, М.—Л., ОНТИ, 1937.
5. *W. Rudin.* Real and complex analysis, Second ed., McGrow—Hill, N. Y., 1974.
6. *Ж. Валирон.* Аналитические функции, М., Гостехиздат, 1957.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXII, № 2, 1987 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.24

Р. Э. ДАЯН

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА ИНТЕНСИВНОСТИ НЕОДНОРОДНОГО ПРОЦЕССА ПУАССОНА В ПОЧТИ ГЛАДКОМ СЛУЧАЕ

Пусть $X(t): t\geqslant 0$ — неоднородный процесс Пуассона] интенсивности $S(t+\theta)$, $t\geqslant 0$, где $S(t)$ — положительная периодическая функция с периодом τ и $\theta\in(\alpha, \beta)$, $0<\alpha<\beta<\tau$. Нас будет интерессвать задача оценивания параметра t по наблюдениям $X_T=\{X(t), 0\leqslant t\leqslant T\}$ при $T\to\infty$. Свойства оценок очевидно определяются гладкостью функции $S(t)$, $t\geqslant 0$. В случае, когда существует информационное количество

$$I=\int\limits_0^T S'(t)^2 S(t)^{-1}\,dt=\frac{T}{\tau}\int\limits_0^\tau S'(t)^2 S(t)^{-1}\,dt\,(1+o(1))=$$

$$=\frac{T}{\tau}I_f(1+o(1)).$$

В [1] доказана состоятельность и асимптотическая нормальность оценки максимального правдоподобия

$$L\{(\hat{\theta}_T-\theta)\sqrt{T}\}\Rightarrow N(0,\ rI_f).$$

Эта же оценка, но в случае, когда $S(t)$ имеет разрывы первого рода при $T\to\infty$ в пределе имеет негауссовское распределение и с другой нормировкой [2]

$$L\{(\hat{\theta}_T-\theta)\ T\}\Rightarrow L\{\xi\}.$$

Вопрос о свойствах оценок в случае, когда $S(t)$ — непрерывная функция, но $I=\infty$ оставался открытым, поэтому в этой работе свойства оценки максимального правдоподобия изучаются для $S(t)$, допускающих представление

$$S(t)=A\,|t-\tau_0|^\alpha+r(t-\tau_0),$$

$$|r(t+h)-r(t)|\leqslant k_1h,$$

где $\alpha\in\left(0, \frac{1}{2}\right)$ $A,\ k_1>0$.

Показано, что ОМП при $T\to\infty$ имеет невырожденное распределение со следующей нормировкой:

$$L\{(\hat{\theta}_T-\theta)\,T^{\frac{1}{1+2\alpha}}\}\Rightarrow L\{\xi_1\},$$

где ξ_1 определено ниже.

Считаем, что функция $S(\cdot)$ непрерывна, положительна, периодическая с периодом τ, дифференцируема всюду за исключением точек $\tau_0+k\tau$, где $\tau_0\in(0,\tau)$, $k=0, 1, 2,\cdots$. Предполагаем, что существует некоторая окрестность U точки τ_0, где функция $S(t)$ представлена в виде

$$S(t)=A\,|t-\tau_0|^{\alpha}+r(t-\tau_0),\ |r(t+h)-r(t)|\leqslant k_1\,h$$

$$\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\ A,\ k_1>0.$$

Введем обозначения: $\xi(u)$ — гауссовский процесс с $E\xi(u)=0$ и корреляционной функцией

$$R(u_1, u_2)=\frac{1}{2}\{|u_1|^{\gamma}+|u_2|^{\gamma}-|u_2-u_1|^{\gamma}\},$$

случайный процесс

$$Z_1(u)=\exp\left\{\xi(u)-\frac{1}{2}|u|^{\gamma}\right\},$$

случайную величину ξ_1 по формуле

$$Z_1(\xi_1)=\max_u Z_1(u),$$

$$\varphi_T=\left(\frac{\tau}{A^2L_1T}\right)^{1/\gamma}\quad\gamma=1+2\alpha,$$

где

$$L_1=r(0)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}(|y+1|^{\alpha}-|y|^{\alpha})^2\,dy.$$

Интеграл L_1 может быть представлен в виде комбинации специальных функций (см. [3], с. 408—409). Ввиду громоздкости выражения оно здесь не приводится.

Теорема. *Для оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}_T$ равномерно по $\theta\in K$ выполнены соотношения*

$$P_\theta \lim\hat{\theta}_T=\theta,\ \ L_\theta\{(\hat{\theta}_T-\theta)\,\varphi_T(\theta)^{-1}\}\Rightarrow L\{\xi_1\},$$

$$\lim_{T\to\infty}E_\theta\,|(\hat{\theta}_T-\theta)\,\varphi_T^{-1}|^p=E\,|\xi_1|^p,$$

где p—произвольное положительное число, K—компакт, $K\in(\alpha,\beta)$.

Доказательство теоремы опирается на некоторые свойства функции $S(t)$, которые будут установлены в леммах 1, 2. Затем в леммах 3—5 будут установлены некоторые свойства отношения правдоподобия и, наконец, будет использована теорема 10.1 из [3].

Прежде всего заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $K_2(\varepsilon)$ такое, что $|S'(t)| < K_2(\varepsilon)$, если $t \in [\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon]$. Кроме того, существуют $M > 0$ и $g > 0$ такие, что $g < S(t) < M$.

Лемма 1. *Для любого h, $|h| < \tau_1$, $\tau_1 < \tau$ существуют $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что*

$$C_2 |h|^{\gamma} \leqslant \int_0^{\tau} [\sqrt{S(t+h)} - \sqrt{S(t)}]^2 \, dt \leqslant C_1 |h|^{\gamma}.$$

Доказательство.

$$\int_0^{\tau} [\sqrt{S(t+h)} - \sqrt{S(t)}]^2 \, dt \leqslant \int_0^{\tau} \frac{[S(t+h) - S(t)]^2}{4g} \, dt$$

и правое неравенство леммы следует из [4], лемма 1.

С другой стороны

$$\int_0^{\tau} [\sqrt{S(t+h)} - \sqrt{S(t)}]^2 \, dt > \int_0^{\tau} \frac{[S(t+h) - S(t)]^2}{4M}$$

и левое неравенство следует из [4], лемма 2.

Лемма 2. *В сделанных предположениях*

$$\lim_{h \to 0} |h|^{-\gamma} \int_0^{\tau} \left[S(t+h) - S(t) - S(t) \ln \frac{S(t+h)}{S(t)} \right] dt = \frac{1}{2} A^2 L_1.$$

Доказательство. Для определенности считаем $A = 1$, $h > 0$. Имеем

$$\lim_{h \to 0} \int_0^{\tau} \left[S(t+h) - S(t) - S(t) \ln \frac{S(t+h)}{S(t)} \right] dt =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{2} h^{-\gamma} \int_0^{\tau} \left[\frac{[S(t+h) - S(t)]^2}{S(t)} + R_n \right] dt,$$

где

$$|R_n| \leqslant \frac{|S(t+h) - S(t)|^3}{S(t)^2}.$$

Согласно лемме 1 из [4] и факта, что $S(t) > g$, имеем

$$\lim_{h \to 0} h^{-\gamma} \left| \int_0^{\tau} R_n \, dt \right| = 0.$$

Далее пусть $0 < \delta < 1$ такое, что $[\tau_0 - 2\delta, r_0 + 2\delta] \subset U$. Тогда при $h < \delta/2$

$$\lim_{h \to 0} \int_{\tau_0 - \rho}^{\tau_0 + \rho} \frac{|S(t+h) - S(t)|^2}{S(t)} \, dt = \lim_{h \to 0} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{[|t+h|^{\alpha} - |t|^{\alpha}]^2}{|t|^{\alpha} + r(t)} \, dt.$$

Имеем

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{[|t+h|^\alpha - |t|^\alpha]^2}{|t|^\alpha + r(t)}\, dt = h^\gamma \int_{-\delta/h}^{\delta/h} \frac{[|y+1|^\alpha - |y|^\alpha]^2}{|yh| + r\,|yh|}\, dy.$$

Покажем, что

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\delta/h}^{\delta/h} \frac{[|y+1|^\alpha - |y|^\alpha]^2}{|yh|^\alpha + r(yh)}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[|y+1|^\alpha - |y|^\alpha]^2}{r(0)}\, dy.$$

Пусть имеем $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $g - \varepsilon_1 > g_1 > 0$. Тогда существует A такое, что при $A_1 > A_0$

$$\left| \int_{-A_1}^{A_1} \frac{[|y+1|^\alpha - |y|^\alpha]^2}{r(0)}\, dy - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[|y+1|^\alpha - |y|^\alpha]^2}{r(0)}\, dy \right| < \frac{\varepsilon_1}{3}. \tag{1}$$

Далее существует $A_2 \geqslant A_1$ такое, что при $h < \delta/A_2$ имеем

$$\left| \int_{-\delta/h}^{\delta/h} \frac{[|y+1|^\alpha - |y|^\alpha]^2}{|yh|^\alpha + r(yh)}\, dy - \int_{-A_1}^{A_1} \frac{[|y+1|^\alpha - |y|^\alpha]^2}{|yh|^\alpha + r(yh)}\, dy \right| < \frac{\varepsilon_1}{3}.$$

Ясно, что при этом значении A_2 неравенство (1) также будет выполняться.

И, наконец, поскольку $|r(0) - r(yh)| \leqslant k_1 |yh| \leqslant k_1 A_2 h$ при $|y| < A_2$, то

$$\left| \int_{-A_2}^{A_2} \frac{[|y+1|^\alpha - |y|^\alpha]^2}{|yh|^\alpha + r(yh)}\, dy - \int_{-A_2}^{A_2} \frac{[|y+1|^\alpha - |y|^\alpha]^2}{r(0)}\, dy \right| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{3}$$

$$\text{при } h < \frac{\varepsilon_1}{G k_1 A_2 L_2}, \quad \text{где } L_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[|y+1|^\alpha - |y|^\alpha]^2}{g_1^2}\, dy.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon_1 < |g - g_1|$ существует δ_1 такое, что при $h < \delta_1$

$$\left| \int_{-\delta/h}^{\delta/h} \frac{[|t+h|^\alpha - |t|^\alpha]^2}{|t|^\alpha + r(t)}\, dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[|y+1|^\alpha - |y|^\alpha]^2}{r(0)}\, dy \right| < \varepsilon_1.$$

Следовательно

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\delta/h}^{\delta/h} \frac{[|t+h|^\alpha - |t|^\alpha]^2}{|t|^\alpha + r(t)}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[|y+1|^\alpha - |y|^\alpha]^2}{r(0)}\, dy.$$

И, наконец,

$$\lim_{h\to 0} h^{-\gamma} \int_0^\tau \frac{[S(t+h) - S(t)]^2}{S(t)}\, dt = \lim_{h\to 0} h^{-\gamma} \int_0^{\tau_0 - \rho} \frac{[S(t+h) - S(t)]^2}{S(t)}\, dt +$$

$$+ \lim_{h\to 0} h^{-\gamma} \int_{\tau_0-\rho}^{\tau_0+\rho} \frac{[S(t+h) - S(t)]^2}{S(t)}\, dt + \lim_{h\to 0} h^{-\gamma} \int_{\tau_0+\rho}^{\tau} \frac{[S(t+h) - S(t)]^2}{S(t)}\, dt = L_1.$$

Случай $h < 0$ $A \neq 1$ аналогичен.

Рассмотрим отношение правдоподобия [2]

$$Z_T(u) = \frac{dP^T_{\theta+\varphi_T u}}{dP^T_\theta}(X_T) = \exp\left\{\int_0^T \ln\frac{S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)}\,dM(t) - \right.$$

$$\left. - \int_0^T \left[S(t+\theta+u\varphi_T) - S(t+\theta) - S(t+\theta)\ln\frac{S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)}\right]dt\right\},$$

где

$$M(t) = X(t) - \int_0^t S(y+\theta)\,dy.$$

Лемма 3. *Конечномерные распределения процесса $Z_T(u)$ при $T \to \infty$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $Z_1(u)$ и сходимость эта равномерна по $\theta \in K$, K—компакт.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[S(t+\theta+u\varphi_T) - S(t+\theta) - S(t+\theta)\ln\frac{S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)}\right]dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{T}{\tau}\int_0^\tau \left[S(t+\theta+u\varphi_T) - S(t+\theta) - S(t+\theta)\ln\frac{S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)}\right]dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} |u|^\gamma \frac{T\varphi_T^\gamma}{\tau(|u|\varphi_T)^\gamma}\int_0^\tau S(t+\theta+u\varphi_T) - S(t+\theta) + S(t+\theta)\times$$

$$\times \ln\frac{S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)}\,dt = \frac{1}{2}|u|^\gamma.$$

Аналогично вычислениям, проведенным в лемме 3, получаем

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\ln\frac{S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)}\right]^2 S(t+\theta)\,dt = |u|^\gamma,$$

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\ln\frac{S(t+\theta+u_1\varphi_T)}{S(t+\theta)}\right]\left[\ln\frac{S(t+\theta+u_2\varphi_T)}{S(t+\theta)}\right] S(t+\theta)\,dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{S(t+\theta+u_1\varphi_T) - S(t+\theta)}{S(t+\theta)}\right]\left[\frac{S(t+\theta+u_2\varphi_T) - S(t+\theta)}{S(t+\theta)}\right]\times$$

$$\times S(t+\theta)\,dt.$$

Далее

$$\lim_{T\to\infty} 2\int_0^T \left[\frac{S(t+\theta+u_1\varphi_T) - S(t+\theta)}{S(t+\theta)}\right]\left[\frac{S(t+\theta+u_2\varphi_T) - S(t+\theta)}{S(t+\theta)}\right]\times$$

$$\times S(t+\theta)\,dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\frac{S(t+\theta+u_1\varphi_T)-S(t+\theta)}{S(t+\theta)}\right]^2\times$$

$$\times S(t+\theta)\,dt+\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\frac{S(t+\theta+u_2\varphi_T)-S(t+\theta)}{S(t+\theta)}\right]^2S(t+\theta)\,dt-$$

$$-\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left|\frac{S(t+\theta+u_2\varphi_T)-S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)}\right|^2S(t+\theta)\,dt=$$

$$=|u_1|^\gamma+|u_2|^\gamma-|u_2-u_1|^\gamma.$$

Причем, ввиду периодичности функции $S(t)$, эта сходимость равномерна по θ.

Далее пусть

$$Y_T(u)=\int_0^T\ln\frac{S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)}\,dM(t).$$

Положим $\Phi_T(\lambda_1,\lambda_2)=E_\theta\exp\{i\lambda_1 Y_T(u_1)+i\lambda_2 Y_T(u_2)\}$.

Из доказательства леммы 4.2.1 из [2] имеем

$$\left|l_n\Phi_T(\lambda_1,\lambda_2)+\frac{1}{2}\Delta_T^2\right|=\left|\int_0^T[\exp\{iR(t,\lambda_1,\lambda_2)\}-1-iR(t,\lambda_1,\lambda_2)]S(t+\theta)\,dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_0^T[R(t,\lambda_1,\lambda_2)]^2S(t+\theta)\,dt\right|\leqslant\int_0^T|R(t,\lambda_1,\lambda_2)|^3S(t+\theta)\,dt,$$

где

$$\Delta_T^2=\int_0^T[R(t,\lambda,\lambda_2)]^2S(t+\theta)\,dt,$$

$$R(t,\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_1\ln\frac{S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)}+\lambda_2\ln\frac{S(t+\theta+u_2\varphi_T)}{S(t+\theta)}.$$

Производя вычисления, аналогичные проведенным в лемме 3, получаем

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T|R(t,\lambda_1,\lambda_2)|^3S(t+\theta)\,dt=0.$$

Далее

$$\lim_{T\to\infty}\Delta_T^2=\lim_{T\to\infty}\int_0^T[R(t,\lambda_1,\lambda_2)]^2S(t+\theta)\,dt=$$

$$=\lambda_1^2\int_0^T\left[\ln\frac{S(t+\theta+u_1\varphi_T)}{S(t+\theta)}\right]^2S(t+\theta)dt+\lambda_2^2\int_0^T\left[\ln\frac{S(t+\theta+u_2\varphi_T)}{S(t+\theta)}\right]^2S(t+\theta)\,dt+$$

$$+2\lambda_1\lambda_2\int\limits_0^T\left[\ln\frac{S(t+\theta+u_1\varphi_T)}{S(t+\theta)}\right]\left[\ln\frac{S(t+\theta+u_2\varphi_T)}{S(t+\theta)}\right]S(t+\theta)\,dt=$$

$$=\lambda_1|u_1|^\gamma+\lambda_2|u_2|^\gamma+\lambda_1\lambda_2(|u_1|^\gamma+|u_2|^\gamma-|u_2-u_1|^\gamma).$$

Следовательно, двумерные распределения случайного процесса $Y_T(u)$ сходятся к двумерным распределениям процесса $\xi(u)$.

Отсюда получаем сходимость двумерных распределений $Z_T(u)$ к двумерным распределениям $Z_1(u)$.

Аналогично устанавливается сходимость любых конечномерных распределений.

Лемма 4. *В сделанных предположениях*

$$E_\theta|Z_T^{1/2}(u_2)-Z_T^{1/2}(u_1)|^2\leqslant C_3|u_2-u_1|^\gamma.$$

Доказательство. Из [2] (с. 61 и с. 185, формула (2.13)) получаем

$$E_\theta\;|Z_T^{1/2}(u_2)-Z_T^{1/2}(u_1)|^2\leqslant\int\limits_0^T(\sqrt{S(t+\theta+u_2\varphi_T)}-\sqrt{(S(t+\theta+u_1\varphi_T)})^2\,dt$$

и по лемме 1, ввиду периодичности $S(t)$, имеем

$$\int\limits_0^T[\sqrt{S(t+\theta+u_2\varphi_T)}-\sqrt{S(t+\theta+u_1\varphi_T)}]^2\,dt<C_3|u_2-u_1|^\gamma.$$

Лемма 5. *В сделанных предположениях*

$$P_\theta\{Z_T(u)>e^{-c_4|u|^\gamma}\}\leqslant e^{-c_4|u|^\gamma}.$$

Доказательство. По неравенству Чебышева

$$P_\theta\{Z_T(u)>e^{-c|u|^\gamma}\}\leqslant e^{\frac{c|u|^\gamma}{2}}\;E_\theta\,Z_T^{1/2}(u).$$

Из [2], с. 185 имеем

$$e^{\frac{c|u|^\gamma}{2}}\;E_\theta\,Z_T^{1/2}(u)=e^{\frac{c}{2}|u|^\gamma-\frac{1}{2}\int\limits_0^T[\sqrt{S(t+\theta+u\varphi_T)}-\sqrt{S(t+\theta)}]^2\,dt}.$$

Согласно лемме 1

$$\int\limits_0^T[\sqrt{S(t+\theta+u\varphi_T)}-\sqrt{S(t+\theta)}]^2\,dt\geqslant C_5|u|^\gamma.$$

Поэтому

$$P_\theta\{Z_T(u)>e^{-c|u|^\gamma}\}\leqslant e^{\frac{c|u|^\gamma}{2}-\frac{c_5}{2}|u|^\gamma},$$

положим $c=c_4=\dfrac{c_5}{3}$.

Свойства отношения правдоподобия, установленные в леммах 3—5 позволяют воспользоваться теоремой 10.1 [3], чем завершается доказательство теоремы.

Ереванский государственный университет

Поступила 10. X. 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. А. Кутоянц.* Оценка параметра интенсивности неоднородного процесса Пуассона. Problems of Control and Information Theory, 8, 2. 1979, 137—149.
2. *Ю. А. Кутоянц.* Оценивание параметров случайных процессов, Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1980.
3. *И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский.* Асимптотическая теория оценивания, М., «Наука», 1979.
4. *Р. Э. Даян.* Об одной задаче оценки параметра сигнала на фоне белого шума, Уч. записки ЕГУ, 162, № 2, 1986, 13—21.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՀԱՄԱՌՈՏ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

СОДЕРЖАНИЕ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

CONTENTS

SHORT COMMUNICATIONS