

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ԶԻՐԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ

գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Ն. Հ. ԱՌԱՔՆԷՅԱՆ

Ի. Դ. ԶԱՍԻԱՆՍԿԻ

Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ

Ա. Ր. ՆԻՐՈՍՅԱՆ

Ռ. Լ. ՇԱՀՐԱՂՅԱՆ

գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու բաժնետեր Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀՆԳԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հասույթ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրատարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մասիտով երկու զծեքով ներքեում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու զծեքով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև զծով։

4. Գծադրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համար և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղափոխվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառուսյակի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Երրագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թվով շատ զգալի փոփոխությունները (օրինակալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերմաման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չգրադվել մերմաման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ-Բաղրամյանի պող., 24 ր. Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН

зам. главного редактора

Р. В. АМБАРЦУМЯН

Н. У. АРАКЕЛЯН

И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ

С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН

А. А. ТАЛАЛЯН

Р. А. ШАХБАГЯН

зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редакколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. A. ALEXANDRIAN
associate editor
R. V. AMBARTZUMIAN
N. U. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN

A. B. NERSESIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKI

executive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate [with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

УДК 517.53

Н. У. АРАКЕЛЯН, В. А. МАРТИРОСЯН

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ НА ГРАНИЦЕ КРУГА СХОДИМОСТИ

Знаменитая общая теорема Фабри (см. [1] и [2], § 2, теорема 2.1.1) об особых точках степенных рядов, лежащих на фиксированной дуге границы их круга сходимости, а также ее наиболее важные следствия — теоремы Фабри о лакунах и об отношении — привлекли внимание многих исследователей (подробно см. обзор [2], § 2). Некоторая громоздкость формулировки и, что более существенно, трудности и неясности в доказательстве этой теоремы, были встречены критическими замечаниями (Фабер, Ло, Принсгейм и др.). Ряд авторов предприняли усилия к устранению указанных недостатков (Фабер, Полна, Мандельбройт и др.), модернизовав метод доказательства Фабри, либо предложив новое доказательство. Г. Полна удалось, используя введенное им понятие максимальной плотности, существенно упростить формулировку теоремы Фабри и превратить ее в вполне строго доказанное утверждение. Он также исследовал точность этой теоремы в случае частной теоремы Фабри о лакунах. В дальнейшем, говоря об общей теореме Фабри, мы будем подразумевать данную Полна формулировку этой теоремы (см. [2], § 2, теорема 2.1.3). В последующих работах (Мандельбройт, Леш, Клаус и др.) предположения теоремы Фабри заменялись другими, чаще всего более строгими и громоздкими, для усиления утверждений теоремы Фабри.

В настоящей работе для исследования особенностей степенных рядов применяется подход, в основе которого лежит хорошо известный метод «функции коэффициентов». Этот метод систематически применялся (Ло, Ле Руа, Вигерт, Линделёф, Карлсон и др.) в исследованиях об аналитическом продолжении и лишь эпизодически — при изучении особенностей (Дюфрениуа и др.). Основным препятствием для такого применения являлось, на наш взгляд, отсутствие подходящего критерия регулярности граничной дуги в терминах «функции коэффициентов».

Такой критерий представляет лемма 1 настоящей работы. Она оказывается весьма полезной не только для получения утверждений типа общей теоремы Фабри, но и при исследовании точности их условий.

Указанный подход позволяет свести вопрос об особых точках степенных рядов к вопросам об условиях равновесия между ростом аналитической функции и ростом количества ее нулей.

Конкретно, в настоящей работе получены следующие основные результаты. Теорема 1 усиливает общую теорему Фабри (в варианте Полна) и, на наш взгляд, имеет несколько более простую формулировку. Теорема 1 доказывается по единой схеме с теоремой 2, которая, в отличие от известных аналогов общей теоремы Фабри, уже не содержит неизвестных и под-

лежащих выбору параметров. Нам представляется, что она дает удовлетворительный ответ на задачу, к решению которой была нацелена общая теорема Фабри: найти явные условия на коэффициенты степенных рядов (на их модули и аргументы), гарантирующие наличие особой точки на заданной граничной дуге.

Работа состоит из двух параграфов. § 1 посвящен формулировке основных результатов и комментариям, а § 2 — их доказательству вместе с необходимыми вспомогательными утверждениями.

§ 1. Формулировка результатов

1°. Здесь и далее, в § 2, мы придерживаемся следующих стандартных обозначений. Через N , Z , R и C мы обозначаем соответственно множества натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел. Для $a, b \in R$ ($a \equiv b$) обозначим через $[a, b]$ и (a, b) соответственно замкнутый и открытый промежутки с концами a и b (при $a = b$ полагаем, $(a, b) = \emptyset$). Другие необходимые обозначения будут введены по мере надобности.

Ниже и в дальнейшем мы используем применяемое в различных вопросах анализа понятие *перемены знака* (конечной) последовательности из R (см. [3], стр. 48).

Сформулируем теперь две основные теоремы настоящей работы. Рассмотрим произвольный степенной ряд с единичным кругом сходимости:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n|^{1/n} = 1. \quad (1)$$

Теорема 1. Пусть для ряда (1) последовательности натуральных чисел $n_k \uparrow +\infty$ и вещественных чисел $\{\beta_k\}_1^\infty$ выбраны так, что

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |\operatorname{Re}(f_{n_k} e^{i\beta_k})|^{1/n_k} = 1. \quad (2)$$

Для $\tau \geq 0$ обозначим через $W_k(\tau)$ число перемен знака последовательности $|\operatorname{Re}(f_n e^{i\beta_k})|$ при $n \in [\tau n_k, n_k]$ и положим

$$W^* = \min |W^-, W^+|, \quad W^\pm = \overline{\lim}_{\tau \rightarrow 1 \pm 0} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{W_k(\tau)}{|1 - \tau| n_k}. \quad (3)$$

Тогда ряд (1) имеет особую точку вида $e^{i\omega}$, где $|\omega| \leq \pi W^*$.

Теорема 2 (об аргументах). Пусть для ряда (1) подпоследовательность $\{n_k\}_1^\infty \subset N$ выбрана так, что

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |f_{n_k}|^{1/n_k} = 1. \quad (4)$$

Положим

$$f_n = |f_n| e^{i\omega_n} \text{ для } n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $|\omega_{n+1} - \omega_n| \leq \pi$, и обозначим

$$V^* = \min |V^-, V^+|, \quad V^\pm = \overline{\lim}_{\tau \rightarrow 1 \pm 0} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{V(\tau, n_k)}{|1 - \tau| n_k}, \quad (5)$$

$$V(\tau, q) = \sum_{n \in [\tau q, q]} |\omega_{n+1} - \omega_n|, \quad \tau > 0. \quad (6)$$

(Тогда ряд (1) имеет особую точку вида $e^{i\omega}$, где $|\omega| \leq V^*$).

Из теоремы 2 видно, что аргументы ω_n целесообразно выбрать таким образом, чтобы суммы вида (6) имели по возможности минимальное значение. Следующий индуктивный выбор последовательности $\{\omega_n\}_0^\infty$ обеспечивает такую минимальность.

Положим $\omega_{-1} = 0$. Если $f_{n+1} = 0$, то полагаем $\omega_{n+1} = \omega_n$; если же $f_{n+1} \neq 0$, то ω_{n+1} — значение $\arg f_{n+1}$ из полуинтервала $[-\pi + \omega_n, \pi + \omega_n)$. Для фиксированных таким образом аргументов ω_n сумма (6) зависит лишь от тех ω_n , для которых $f_n \neq 0$. Запишем ряд (1) в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{m_k} z^{m_k}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |f_{m_k}|^{1/m_k} = 1, \quad (1')$$

где все $f_{m_k} \neq 0$. Тогда вместо (6) величину $V(\tau, q)$ можно определить формулой

$$V(\tau, q) = \sum_{m_k \in [\tau q, q]} |\omega_{m_{k+1}} - \omega_{m_k}| = \sum_{m_k \in [\tau q, q]} \left| \arg \left(\frac{f_{m_k}}{f_{m_{k+1}}} \right) \right|, \quad (6')$$

где значение аргумента $\arg$ выбирается из промежутка $[-\pi, \pi)$.

2°. Приведем теперь ряд наглядных следствий из сформулированных теорем, усиливающих теоремы Фабри об отношении n о лакунах. Здесь и далее нам понадобится следующее

Определение. Пусть $P, Q \subset \mathbb{N}$, Q бесконечно. Для $\tau \in [0, 1)$ и $x > 0$ обозначим через $\mathfrak{M}(\tau, x) = \mathfrak{M}(P, \tau, x)$ число точек множества $P \cap [\tau x, x]$ и положим

$$\Delta^*(P, Q) = \overline{\lim}_{\tau \rightarrow 1} \overline{\lim}_{\substack{q \rightarrow \infty \\ q \in Q}} \frac{\mathfrak{M}(\tau, q)}{|1 - \tau| q}, \quad (7)$$

$$\Delta_*(P, Q) = \lim_{\tau \rightarrow 1} \lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ q \in Q}} \frac{\mathfrak{M}(\tau, q)}{|1 - \tau| q}. \quad (8)$$

Если $\Delta_*(P, Q) = \Delta^*(P, Q) (= \Delta(P, Q))$, то $\Delta(P, Q)$ назовем левой Q -плотностью P и скажем, что P измеримо Q (слева).

Отметим, что при $Q = \mathbb{N}$ величины (7)–(8), соответственно, совпадают с введенными Г. Поля (см. [2], стр. 25–26 и [4]) понятиями максимальной и минимальной плотности множества P . Некоторые свойства введенных понятий перечислены ниже в пункте 3°.7.

Возвращаясь к ряду (1), введем в рассмотрение «существенное» для него множество индексов (см. (1'))

$$P^* = \{p \in \mathbb{N} : f_p \neq 0\} = \{m_k\}_1^\infty,$$

в терминах подмножеств которого удобнее сформулировать наши следствия. Из этих же соображений, полагая $Q = \{n_k\}_1^\infty$, запишем условие (4) в виде

$$\overline{\lim}_{\substack{q \rightarrow \infty \\ q \in Q}} |f_q|^{1/q} = 1, \quad (4')$$

причем можем считать, что $Q \subset P^*$.

Следствие 1 (об аргументах). Пусть коэффициенты ряда (1) для некоторых $P, Q \subset P^*$ удовлетворяют условию (4') и условию

$$\lim_{m_k \in P} \left| \arg \left(\frac{f_{m_k}}{f_{m_k+1}} \right) \right| = \alpha \leq \pi.$$

Тогда ряд (1) имеет особую точку вида $e^{i\omega}$, где

$$|\omega| \leq \alpha \Delta^*(P^*, Q) + (\pi - \alpha) \Delta^*(P^* \setminus P, Q). \quad (9)$$

В самом деле, положим

$$\alpha_x = \sup \left\{ \left| \arg \left(\frac{f_{m_k}}{f_{m_k+1}} \right) \right| : m_k \in P, m_k > x \right\}$$

и заметим, что $\alpha_x \rightarrow \alpha$ при $x \rightarrow +\infty$. Для величины (6') имеем оценку

$$V(\tau, q) \leq \alpha_{\tau, q} \mathfrak{M}(P^*, \tau, q) + (\pi - \alpha_{\tau, q}) \mathfrak{M}(P^* \setminus P, \tau, q),$$

откуда с учетом (7) следует, что величина V из (5) не превосходит правой части оценки (9). Таким образом, доказательство легко сводится к теореме 2.

Применяя следствие 1 при $\alpha = 0$ к ряду вида (1) с коэффициентами $\{f_n s^n\}_0^\infty$, получим

Следствие 2 (об отношении). Пусть коэффициенты ряда (1) для некоторых бесконечных $P, Q \subset P^*$ удовлетворяют условию (4') и при $|s| = 1$ существует конечный предел

$$\lim_{m_k \in P} \frac{f_{m_k} s^{m_k}}{f_{m_k+1} s^{m_k+1}} > 0. \quad (10)$$

Тогда ряд (1) имеет особую точку вида $e^{i\omega}$, где

$$|\omega - \arg s| \leq \pi \Delta^*(P^* \setminus P, Q).$$

Отсюда с учетом определений (7)–(8) (см. также пункт 3°7) легко следует оценка

$$|\omega - \arg s| \leq \pi [\Delta^*(P^*, Q) - \Delta_*(P, Q)]. \quad (11)$$

Условие (10) принимает особенно простой вид при $s = 1$. Отметим также, что если в следствии 2 множества P и P^* таковы, что из условия $p \in P$ следует, что $p+1 \in P^*$, то тогда условие (10) означает существование предела

$$\lim_{p \in P} \frac{f_p}{f_{p+1}} = z \neq 0, \infty, \quad (12)$$

где s и z связаны условием $s = \frac{z}{|z|}$, так что $\arg s = \arg z$.

Полученные в следствиях 1 и 2 оценки иногда определяют положение особой точки $e^{i\omega}$ однозначным образом. Например, в следствии 2 достаточно потребовать, чтобы $\Delta(P^* \setminus P, Q) = 0$. Последнее, согласно (11), будет гарантировано, если P и P^* измеримы Q (слева) и $\Delta(P, Q) = \Delta(P^*, Q)$. Особенно нагляден следующий частный случай.

Следствие 3 (об отношении). Пусть ряд (1) для $P \subset P^*$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ p \in P}} |f_p|^{1/p} = 1 \quad (13)$$

и условию (10). Если верхние плотности множеств $P = \{p_k\}_1^\infty$ и $P^* = \{m_k\}_1^\infty$ совпадают, т. е.

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{p_k} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{m_k}, \quad (14)$$

то тогда точка s — особая для ряда (1).

Для доказательства заметим, что существует бесконечное множество $Q \subset P$ такое, что с учетом (14)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{M}(P^* \setminus P, 0, x)}{x} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{M}(P^*, 0, x)}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{M}(P, 0, x)}{x} = 0.$$

Следовательно, $\Delta^*(P^* \setminus P, Q) = 0$ и с учетом (13) доказательство завершается ссылкой на следствие 2.

Следствие 4 (о лакунах). Если ряд (1) для некоторого $Q \subset P^*$ удовлетворяет условию (4'), то тогда он имеет особую точку на любой замкнутой дуге единичной окружности длины $2\pi \Delta^*(P^*, Q)$. В частности, при $\Delta(P^*, Q) = 0$ единичная окружность является естественной границей ряда (1).

Для доказательства достаточно к ряду вида (1) с коэффициентами $|f_n s^n|_0^\infty$, где $|s| = 1$, применить следствие 1 при $P = P^*$ и $\alpha = \pi$. Следствие 4 можно вывести также из теоремы 1, примененной к тому же ряду, выбрав

$$\{\alpha_k\}_1^\infty = Q, \beta_k = -\arg f_{n_k} - \pi_k \arg s, k \in N.$$

Требуемое утверждение следует из оценки $W^- \leq \Delta^*(P^*, Q)$.

Заметим в заключение, что условие $\Delta(P^*, Q) = 0$, вообще говоря, слабее условия, что P^* имеет нулевую плотность в обычном смысле.

3°. *Комментарии и замечания.* 1. Первая из основных теорем — теорема 1 усиливает заключение общей теоремы Фабри. В отличие от последней оказывается достаточным использование «односторонней» информации о числе перемен знака относительно последовательности $\{n_k\}_1^\infty$ (см. (3)). Кроме того, вместо понятия максимальной плотности, используется более тонкое мероопределение (см. 2° и 3°.7), теснее связанное с последовательностью $\{n_k\}_1^\infty$. Это отчетливо проявляется, например, при сравнении соответствующих следствий этих теорем о лакунах (ср. приведенное выше следствие 4 с теоремой 2.2.2 из [2], стр. 81). Из теоремы 1 можно также получить усиление теорем Фабри об отношении (см. [2], теоремы 2.3.1, 2.3.2, стр. 49). Мы воздержались от этого, поскольку в этом отношении теорема 2 предоставляет гораздо большие возможности.

2. Теорему 2 можно рассматривать как обобщение и усиление результатов об аргументах и об отношении (Фабри, Деланж и др.).

Здесь следует отметить, что в общей теореме Фабри связь коэффициентов ряда (1) с размерами содержащей его особенности дуги, имеет опосредственный, неявный характер (выбор параметров $\{\beta_k\}_1^\infty$, подсчет числа соответствующих перемен знаков и т. д.). Эффективно эта связь обнаружена лишь в частном случае — в теореме Фабри об отношении, когда дуга вырождается в точку. Вывести из общей теоремы Фабри аналогичную закономерность для случаев невырожденных дуг до сих пор никому не удавалось — по всей видимости, это невозможно по существу. Использованием других средств, некоторые результаты в этом направлении получены Деланжем (см. [2], стр. 96, теорема 2.3.3).

Нам представляется, что теорема 2 свободна от указанных недостатков: в ней отсутствуют подлежащие выбору параметры, все фигурирующие в ней величины выражены через модули и аргументы коэффициентов ряда (1). Из теоремы 2 легко выводятся (см. следствия 1—4) утверждения типа теорем Фабри об отношении и о лакунах, некоторые из которых, при казалось бы недостаточной информации о ряде (1), дают новые любопытные сведения об особых точках.

3. Следствие 1 выявляет совместное влияние аргументов и лагун коэффициентов ряда (1) на локализацию его особенностей. Очевидным частным случаем этого следствия является указанный выше результат Деланжа.

Следует отметить, что метод доказательства следствия 1 легко позволяет получить вместо (9) также оценки

$$|\omega| \leq \beta \Delta^*(P^*, Q) + (\pi - \beta) \Delta^*(P^* \setminus P, Q) + (\alpha - \beta) \delta,$$

где

$$\delta = \begin{cases} \Delta^*(P, Q) & \text{при } 0 \leq \beta \leq \alpha, \\ \Delta_*(P, Q) & \text{при } \alpha \leq \beta \leq \pi. \end{cases}$$

4. Теорема 2 позволяет привести в следствие 2 новую, более общую формулировку результатов типа теоремы Фабри об отношении. Удастся, во-первых, охватить ряды с любым бесконечным множеством нулевых коэффициентов. Во-вторых, при выполнении условий (10) или (12), когда теорема Фабри об отношении, вообще говоря, теряет силу, следствие 2 позволяет, тем не менее, указать определенную дугу, содержащую особую точку ряда (1). Простые примеры показывают, что указанные в следствии 2 размеры дуги, вообще говоря, минимальны.

5. Следует отметить, что теорема Фабри об отношении указывает не более одной особой точки ряда (1). Следствие 3 (ослабляющее условие этой теоремы) в принципе не исключает возможности указания нескольких или даже бесконечного числа особых точек для фиксированного ряда (1). В частности, следствие 3 позволяет строить примеры рядов вида (1) с $|f_n| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, для которых единичная окружность является куклой.

6. Следствие 4, использующее информацию о лакунах ряда (1), лежащих «левее» последовательности Q , является усилением результатов Фабри и Фабри—Полиа о лакунах (см. [2], § 2.2). Здесь, как впрочем и в случае следствий 1—3, мы не приводим формулировок соответствующих следствий из теорем 1 и 2, использующих информацию «правее» от Q . В связи со следствием 4, см. также ниже пункты 3°.8 и 3°.9.

7. Перечислим некоторые из основных свойств введенных в (7)–(8) величин, используемых в следствиях 1–4. Ниже предполагается, что P, P_1, Q, Q_1 — произвольные подмножества из N , причем Q и Q_1 бесконечны. Очевидно, имеем:

$$0 \leq \Delta_*(P, Q) \leq \Delta^*(P, Q) \leq 1;$$

$$\Delta^*(P, Q) + \Delta_*(N \setminus P, Q) = 1;$$

$$\Delta_*(P, Q) \leq \Delta_*(P_1, Q), \Delta^*(P, Q) \leq \Delta^*(P_1, Q) \text{ при } P \subset P_1;$$

$$\Delta_*(P, Q) \leq \Delta_*(P, Q_1), \Delta^*(P, Q) \leq \Delta^*(P, Q_1) \text{ при } Q \subset Q_1;$$

$$\Delta^*(P_1 \setminus P, Q) \leq \Delta^*(P_1, Q) - \Delta_*(P, Q).$$

Кроме того, выполняются следующие свойства полуаддитивности:

$$\Delta^*(P \cup P_1, Q) \leq \Delta^*(P, Q) + \Delta^*(P_1, Q) - \Delta_*(P \cap P_1, Q),$$

$$\Delta_*(P \cup P_1, Q) \geq \Delta_*(P, Q) + \Delta_*(P_1, Q) - \Delta^*(P \cap P_1, Q).$$

8. Приведенное выше свойство монотонности величины $\Delta^*(P, Q)$ по Q показывает, как уже отмечалось нами, что использование в наших результатах этой величины вместо максимальной плотности ($= \Delta^*(P, N)$) в смысле Г. Поляна, приводит к более тонким результатам. Для иллюстрации рассмотрим следующий пример.

Пусть последовательность $Q = \{n_k\}_1^\infty \subset N$ удовлетворяет условию $n_k < (1 - \theta_0) n_{k+1}$, $\theta_0 \in (0, 1)$. Для множества $P \subset N$ и числа $\theta \in [\theta_0, 1)$ обозначим

$$P_\theta = P \cap \bigcup_{k=1}^\infty [(1 - \theta) n_k, n_k].$$

Выбирая произвольное $\Delta \in [0, 1)$, докажем, что существует такое множество $P \subset N$, что $\Delta^*(P, Q) = \Delta$, однако $\Delta^*(P_\theta, N) = 1$ для всех $\theta \in [\theta_0, 1)$.

В самом деле, рассмотрим бесконечную систему $I \subset [1 - \theta_0, 1)$ отрезков попарно без общих точек. Выберем эти отрезки так, чтобы линейная мера $d(\tau)$ множества $[\tau, 1) \cap I$, $\tau \in (0, 1)$, удовлетворяла условию

$$\lim_{\tau \rightarrow 1} \frac{d(\tau)}{1 - \tau} = \Delta. \quad (15)$$

Возьмем в качестве P множество

$$P = Q \cup (N \cap \bigcup_{k=1}^\infty I_k), \quad I_k = \{n_k x : x \in I\}.$$

Далее, рассмотрим множество $I \cap [\tau, 1 - (1 - \tau)^2]$, состоящее из конечного числа ($= m_\tau$) отрезков суммарной длины $d_1(\tau)$. Число точек M множества P на конечной системе отрезков $I_k \cap [\tau n_k, n_k - n_k(1 - \tau)^2]$ удовлетворяет оценке

$$|M - n_k d_1(\tau)| \leq 2 m_\tau.$$

Отсюда следует

$$\left| \frac{\mathfrak{M}(P, \tau, n_k)}{n_k} - d_1(\tau) \right| \leq \frac{2 m_\tau + 2}{n_k} + (1 - \tau)^2.$$

Замечая еще, что $d_1(\tau) = d(\tau) + o(1 - \tau)$ при $\tau \rightarrow 1$, с учетом (15) и определения (7) получим, что $\Delta^*(P, Q) = \Delta$. Утверждение $\Delta^*(P_0, N) = 1$ для всех $\theta \in [0, 1)$ следует из замечания, что для любого $\tau \in [1 - \theta, 1)$ существует отрезок $[z, \beta] \subset I \cap [\tau, 1)$, так что множество P_0 содержит все целые точки отрезков $[\alpha n_k, \beta n_k]$, $k \in N$.

С помощью построенного множества P легко привести примеры рядов вида (1), для которых утверждение нашей теоремы 1 сильнее общей теоремы Фабри. Для простоты ограничимся случаем лакунарных рядов. Рассмотрим ряд вида (1), где $f_n = 1$ для $n \in P$ и $f_n = 0$ для $n \notin P$. Для этого ряда из следствия 4 вытекает, что он имеет особую точку на любой дуге единичной окружности длины $2\pi\Delta$. Между тем, поскольку $\Delta^*(P, N) = 1$, то из теоремы Фабри—Полиа о лакунах следует лишь, что ряд (1) имеет одну особую точку на единичной окружности.

9. Вопрос о точности условий общей теоремы Фабри и даже ее частных случаев (о лакунах и об отношении) мало исследован. Г. Полиа доказал (см. [2], стр. 93) точность теоремы Фабри о лакунах в случае лакун нулевой плотности. В общем случае вопрос остается открытым даже для лакун с положительной плотностью. Здесь мы покажем, что опираясь на лемму 1 (см. ниже § 2, пункт 1°), можно дать утвердительный ответ на последний вопрос.

С этой целью, для последовательности $P \subset N$ плотности $\Delta \in [0, 1)$ рассмотрим, следуя Г. Полиа, ряд вида (1) с коэффициентами $f_n = \varphi(n)$, где

$$\varphi(z) = \prod_{n \in N \setminus P} \left(1 - \frac{z^n}{n^2}\right).$$

Тогда, очевидно, $f_n = 0$ для $n \notin P$ и $f_n \neq 0$ для $n \in P$. Поскольку (см. [2], стр. 25) индикаторная диаграмма функции φ совпадает с отрезком с концами $\pm i\pi(1 - \Delta)$, то достаточная часть леммы 1 применима к ряду (1) для любого $\sigma > \pi(1 - \Delta)$. Мы получим, что все точки замкнутой дуги единичной окружности с центром -1 длины $2\pi(1 - \sigma)$ являются точками регулярности ряда (1). Объединение указанных дуг (по σ) определяет открытую дугу регулярности ряда (1) длины $2\pi\Delta$. Таким образом, указанное в теореме Фабри—Полиа число $2\pi\Delta$ нельзя, вообще говоря, заменить меньшим.

§ 2. Доказательства

1°. Вспомогательные леммы. Ниже мы используем общепринятые теоретико-множественные обозначения. В частности, для множества $e \subset S$ его граница, замыкание, внутренность и дополнение, соответственно, будут обозначаться через ∂e , $\bar{e}$, e° и $S \setminus e$.

Обозначим далее через $D[\lambda, \mu]$ открытый круг с диаметром $[\lambda, \mu] \subset \mathbb{R}$ и положим для краткости $D_r = D[-r, r]$.

Рассмотрим угол

$$\Delta_\beta = \left\{ z : |\arg z| \leq \frac{\beta}{2} \right\} \quad \text{для } \beta \in [0, 2\pi),$$

и через $H(\Delta_p)$ будем обозначать множество функций, каждая из которых голоморфна в некоторой окрестности Δ_p . Для $\varphi \in H(\Delta_p)$ величину

$$\sigma_\varphi = \overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \Delta_p}} |z|^{-1} \log^+ |\varphi(z)|$$

принято называть экспоненциальным типом функции φ . Говорят, что φ (конечного) экспоненциального типа на Δ_p , если $\sigma_\varphi < +\infty$. В этом случае функцию

$$h_\varphi(\theta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \log |\varphi(r e^{i\theta})|, \quad |\theta| \leq \beta$$

называют (экспоненциальной) индикатриссой φ .

Лемма 1. Для того, чтобы степенной ряд (1) допускал аналитическое продолжение на замкнутую дугу $\partial D_1 \setminus \Delta_{2\delta}^0$, $\sigma \in (0, \pi)$, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ существовала функция $\varphi \in H(\Delta_{2\alpha})$ экспоненциального типа $\sigma_\varphi < \sigma$, такая, что

$$\varphi(n) = f_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (16)$$

Замечание. Если существует функция φ , удовлетворяющая условиям леммы 1, то тогда легко видеть (ср. [5], стр. 28), что ее индикатрисса h удовлетворяет неравенству

$$h_\varphi(\theta) \leq \sigma' |\sin \theta|, \quad |\theta| \leq \alpha, \quad (17)$$

где $\sigma' (= \sigma_\varphi) < \sigma$. Обратно, если $\sigma_\varphi < +\infty$ и выполнено (17) для $\sigma' < \sigma$, то тогда $\sigma_\varphi \leq \sigma' < \sigma$.

Необходимость. Пусть ряд (1) представляет голоморфную функцию f в некоторой односвязной области $\Omega \supset D_1 \cup (\partial D_1 \setminus \Delta_{2\delta}^0)$.

Пусть $\log \zeta = \log |\zeta| + i \arg \zeta$ — главное значение логарифма в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, так что $\log 1 = 0$. Полагая

$$\zeta^w = \exp(w \log \zeta) \quad \text{для } w \in \mathbb{C},$$

определим искомую функцию φ формулой

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \zeta^{-z-1} f(\zeta) d\zeta. \quad (18)$$

Здесь γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая в Ω , $\text{Ind}_\gamma(0) = 1$, пересекающая полуось $(-\infty, 0]$ только в одной точке вида $-e^{\delta}$, $\delta > 0$. Если эту точку на γ фиксировать, то ввиду голоморфности подынтегральной функции по ζ в $\Omega \setminus (-\infty, 0]$, интеграл (18) не будет зависеть от выбора кривой γ . Определяемая им функция φ является целой функцией экспоненциального типа. Далее, для значений $z = 0, 1, \dots$ интеграл (18) превращается в формулу для коэффициентов степенного ряда функции f , так что условия (16) выполняются. Что касается условия (17), то оно усматривается из последующих оценок интеграла (18) при подходящем выборе γ .

Числа $\delta > 0$, $\sigma' \in (0, \sigma)$ будем фиксировать так, чтобы

$$\gamma_1 = \partial D_{e^\delta} \setminus \Delta_{2\delta}^0 \subset \Omega.$$

Возьмем теперь произвольное число $\varepsilon \in (0, 1)$ и положим $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, где

$$\gamma_1 = \partial D_{e^{-1}} \cap \Delta_{\varepsilon'},$$

$$\gamma_2 = \{\zeta : e^{-1} \leq |\zeta| \leq e^1, |\arg \zeta| = \sigma'\}.$$

Выбирая в (18) $\gamma = \gamma_1$, представим интеграл (18) в виде суммы интегралов I_1, I_2, I_3 , соответственно, по $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Пусть

$$|f(\zeta)| \leq M, \text{ для } \zeta \in \gamma_1.$$

Тогда, полагая $z = x + iy = re^{i\theta}$ и учитывая (18), для $x \geq 0$ имеем оценки:

$$|I_1| \leq M \exp(-\delta x + \pi |y|),$$

$$|I_2| + |I_3| \leq (1 + \delta + \varepsilon) M \exp(\varepsilon x + \sigma' |y|).$$

Из этих оценок при $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$ следует

$$h_\varphi(\theta) \leq \max(\varepsilon \cos \theta + \sigma' |\sin \theta|, -\delta \cos \theta + \pi |\sin \theta|).$$

Отсюда при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим оценку

$$h_\varphi(\theta) \leq \max(\sigma' |\sin \theta|, -\delta \cos \theta + \pi |\sin \theta|), \quad |\theta| \leq \frac{\pi}{2},$$

очевидно гарантирующую выполнение условия (17) для достаточно малого $\alpha > 0$.

Достаточность. Пусть теперь для некоторых $\sigma \in (0, \pi]$ и $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\varphi \in H(\Delta_{2\alpha})$ экспоненциального типа удовлетворяет оценке (17) при $\sigma' < \sigma$.

Доказательство утверждения, что ряд (1), (16) допускает аналитическое продолжение на замкнутую дугу $\partial D_1 \setminus \Delta_{2\alpha}^0$ основано на известном интегральном представлении Линделефа [6] рядов вида (1), (16), приспособленном к нашим условиям.

Положим

$$G = \Delta_{2\alpha}^0 \setminus \overline{D}_{0,5}, \quad \Gamma = \partial G, \quad \gamma_m = G \cap \partial D_{m+0,5},$$

ориентировав Γ положительно относительно G и считая $m = 1, 2, \dots$. Рассмотрим компакт $K = \overline{D}_{r_1} \setminus \Delta_{2\sigma}^0(\sigma - \tau)$, где $r_1 = 1 + \tau \operatorname{tg} \alpha$, $\tau = \frac{\sigma - \sigma'}{3}$. Очевидно, что $\partial D_1 \setminus \Delta_{2\sigma}^0 \subset K^0$.

Пусть

$$z^\zeta = \exp(\zeta \log z) \text{ для } \zeta \in \Delta_{2\alpha},$$

где $\log z$ — непрерывная на K ветвь логарифма такая, что $\log(-1) = i\pi$.

Докажем, что формула Линделефа

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) z^n = \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) z^\zeta}{e^{2\pi i \zeta} - 1} d\zeta = J(z) \quad (19)$$

имеет место для всех $z \in D_1 \cap K$ и, что не менее важно, интеграл $J(z)$ сходится равномерно для $z \in K$.

Для достаточно малого $\rho \in (0, 2^{-1})$ с учетом (17) приходим (см. [5], стр. 34) к следующей предварительной оценке подынтегральной функции $g(z, \zeta)$ в (19):

$$\text{для } z \in K, \zeta = \xi + i\eta \in \Delta_{2\tau} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} D[n-\rho, n+\rho]$$

$$|g(z, \zeta)| \leq c \exp \{ \xi \log |z| - d(z) |\eta| + \varepsilon(|\zeta|) |\zeta| \}, \quad (20)$$

где $d(z) = \pi - \sigma' - |\pi - \arg z| > 0$, $\varepsilon(|\zeta|) \rightarrow 0$ при $|\zeta| \rightarrow \infty$, $c > 0$ — некоторая константа.

Поскольку $\xi = |\zeta| \cos \alpha$, $\eta = |\zeta| \sin \alpha$ для $\zeta \in \partial \Delta_{2\tau}$ и $d(z) > 2\tau$, $\log |z| \leq \tau \operatorname{tg} \alpha$ для $z \in K$, то из (20) получим оценку

$$|g(z, \zeta)| \leq c \exp \{ -[\tau \sin \alpha - \varepsilon(|\zeta|)] |\zeta| \} \text{ для } \zeta \in \Gamma \setminus \partial D_{0.5}, z \in K.$$

Полученная оценка доказывает равномерную сходимость на K интеграла $J(z)$ и, тем самым, голоморфность $J(z)$ для $z \in K^0$ с учетом голоморфности по z функции $g(z, \zeta)$.

Чтобы доказать формулу (19), зафиксируем $z \in D_1 \cap K$. Учитывая, что $\xi = |\zeta| \cos \alpha$ для $\zeta \in \partial \Delta_{2\tau}$, из (20) получим оценку

$$|g(z, \zeta)| \leq c \exp \left\{ - \left[\cos \alpha \log \frac{1}{|z|} - \varepsilon(|\zeta|) \right] |\zeta| \right\},$$

верную, в частности, при $\zeta \in \Gamma_m$.

Указанная оценка, очевидно, влечет условие

$$\int_{\Gamma_m} |g(z, \zeta)| d\zeta \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty,$$

гарантирующее применимость к области $G \cap D_{m+0.5}$ теоремы о вычетах для вычисления $J(z)$, что сразу приводит к (19).

Теперь утверждение достаточности следует с учетом (16) из формулы (19) и голоморфности $J(z)$ на K^0 .

Лемма 2. Пусть G — функция Грина круга $D = D[\lambda, \mu]$, n — внутренняя нормаль к ∂D . Имеет место равенство

$$\int_{\partial D} |\operatorname{Im} \zeta| \frac{\partial G(\zeta, z)}{\partial n} |d\zeta| = 2 \int_{\lambda}^{\mu} G(z, t) dt \text{ для } z \in (\lambda, \mu). \quad (21)$$

Доказательство. Пусть $D^{\pm} = D \cap \Pi^{\pm}$, где $\Pi^{+} = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$, $\Pi^{-} = \{z: \operatorname{Im} z < 0\}$. Применяя к полукругам $D^{\pm}$ и к функции $v = |\operatorname{Im} z|$ известную формулу Грина (см. [7], стр. 13, 16) и складывая полученные равенства, имеем: для $z \in D^{+} \cup D^{-}$

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left(v \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{|\zeta - z|} - \log \frac{1}{|\zeta - z|} \frac{\partial v}{\partial n} \right) |d\zeta| - \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\mu} \log \frac{1}{|z - t|} dt. \quad (22)$$

Из гармоничности в D первого интеграла в (22) и непрерывности v следует гармоничность в D функции

$$v(z) + \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\mu} \log \frac{1}{|z-t|} dt,$$

так что функция

$$H_v^D(z) = v(z) + \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\mu} G(z, t) dt, \quad (23)$$

очевидно, также гармонична в D . Далее, поскольку $G=0$ на ∂D , то H_v^D на ∂D совпадает с v . Следовательно, H_v^D является решением задачи Дирихле для круга D с непрерывной граничной функцией и, как известно, представляется формулой Пуассона

$$H_v^D(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} v \frac{\partial G(\zeta, z)}{\partial n} |d\zeta|, \quad z \in D.$$

Отсюда, полагая $z \in (\lambda, \mu)$ и учитывая (23), получим (21). Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть ψ — вещественная аналитическая функция на промежутке $I = [p, q]$, где $p, q \in \mathbb{Z}$, $p < q$, W — число перемен знака конечной последовательности $(-1)^j \psi(j)$, $j \in I \cap \mathbb{Z}$. Тогда число нулей функции ψ на I , с учетом их кратности, не меньше $(q-p) - W$.

Доказательство. Утверждение леммы очевидно в случае, когда функция ψ равна нулю во всех точках $j \in I \cap \mathbb{Z}$, поскольку тогда $W=0$ и число нулей ψ на I не меньше $q-p+1$.

Итак, пусть среди чисел $\psi(j)$, $j \in I \cap \mathbb{Z}$, имеются ненулевые. Без ограничения общности можем считать, что $\psi(p) \neq 0$, поскольку в общем случае доказательство легко сводится к случаю промежутка $[p', q] \subset I$, где p' — наименьшее из тех $j \in I \cap \mathbb{Z}$, для которых $\psi(j) \neq 0$.

Построим интерполяционный многочлен Лагранжа P , определяемый данными:

- 1) $P(j) = 0$, когда $j \in I \cap \mathbb{Z}$ и $\psi(j) \neq 0$;
- 2) $P(j) = \pm 1$, когда $j \in I \cap \mathbb{Z}$ и $\psi(j) = 0$, причем знак $P(j)$ совпадает со знаком числа $(-1)^{j'} \psi(j')$, где j' — наибольшее из тех $k \in I \cap \mathbb{Z}$, для которых $k < j$ и $\psi(k) \neq 0$.

Образуем далее функции $\psi_{\delta} = \psi + \delta P$, $\delta > 0$. Обозначая через Ω_r r -окрестность промежутка I , будем иметь, что для достаточно малого $\rho_0 > 0$ все эти функции голоморфны в области Ω_r и вещественны на $\Omega_r \cap \mathbb{R}$, $r \in (0, \rho_0)$. Очевидно также, что для каждого $\delta > 0$ число перемен знака последовательности $(-1)^j \psi_{\delta}(j)$, $j \in I \cap \mathbb{Z}$, совпадает с числом перемен знака последовательности $(-1)^j \psi(j)$, $j \in I \cap \mathbb{Z}$. Поскольку при этом все числа $\psi_{\delta}(j)$, $j \in I \cap \mathbb{Z}$, ненулевые, число перемен знака этой последовательности не меньше $(q-p) - W$. Тогда по тео-

реме Больдано-Коши каждая функция ψ_δ , $\delta > 0$, имеет не менее, чем $q - p - W$ нулей на промежутке I , и значит, в окрестности $\Omega_\delta \supset I$, $\rho \in (0, \rho_0)$.

Очевидно, что при $\delta \rightarrow 0$ функции ψ_δ сходятся к ψ равномерно на Ω_ρ , $\rho \in (0, \rho_0)$. Следовательно, по теореме Руше получим, что число нулей функции ψ в Ω_ρ , $\rho \in (0, \rho_0)$, с учетом их кратности, не меньше $q - p - W$. Отсюда, ввиду произвольности $\rho \in (0, \rho_0)$, получим требуемое утверждение. Лемма доказана.

2.° Доказательство теорем 1 и 2. Предположим, что все точки замкнутой дуги $\partial D_1 \cap \Delta_{2\pi x}$, где $x \in [0, \pi)$, являются точками регулярности для ряда (1). Тогда дуга $\partial D_1 \setminus \Delta_{2\pi}^0$, где $\sigma = \pi(1 - x)$, является дугой регулярности для ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n z^n.$$

Применяя к этому ряду лемму 1, мы найдем функцию φ , удовлетворяющую вместо (16) условию

$$(-1)^j \varphi(j) = f_j, \quad j = 0, 1, \dots \quad (24)$$

и всем остальным условиям этой леммы.

Образует далее функцию

$$\psi(z, \beta) = \frac{1}{2} [\varphi(z) e^{i\beta} + \overline{\varphi(z)} e^{-i\beta}], \quad z \in \Delta_{2\pi}, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

голоморфную по z , вещественную при $z \in [0, +\infty)$ и удовлетворяющую, с учетом (24), интерполяционным условиям

$$(-1)^j \psi(j, \beta) = \operatorname{Re}(f_j e^{i\beta}), \quad j = 0, 1, \dots \quad (25)$$

Поскольку $|\psi(z, \beta)| \leq \max(|\varphi(z)|, |\overline{\varphi(z)}|)$, $z \in \Delta_{2\pi}$, то с учетом известного свойства индикатриссы (см. [8], стр. 97, теорема 28) применительно к функции φ и оценки (17) получим:

$$\log |\psi(z, \beta)| \leq \sigma' |\operatorname{Im} z| + \varepsilon(|z|) |z|, \quad z \in \Delta_{2\pi}, \quad (26)$$

где $\sigma' < \pi(1 - x)$, а ε не зависит от β и $\varepsilon(|z|) \downarrow 0$ при $|z| \uparrow +\infty$.

Далее, мы хотим применить к функции $\psi(z, \beta)$ известную формулу Пуассона—Иенсена (см. [9], стр. 165). С этой целью зафиксируем некоторые параметры λ и μ так, чтобы

$$0 < \lambda < 1 < \mu, \quad \frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda} \leq \sin \alpha.$$

Тогда ясно, что круг $D[\lambda, \mu] \subset \Delta_{2\pi}$.

Пусть G и G_0 —функции Грина кругов $D[\lambda, \mu]$ и D_1 , соответственно. Полагая, далее

$$\zeta = L(w) = \frac{\mu - \lambda}{2} w + \frac{\mu + \lambda}{2}, \quad \alpha = L^{-1}(1) = \frac{2 - (\mu + \lambda)}{\mu - \lambda}, \quad (27)$$

имеем очевидно

$$g(\zeta) = G(\zeta, 1) = G_0(w, a) = \log \left| \frac{1 - aw}{w - a} \right|. \quad (28)$$

Из этой формулы следует, в частности, что $g(\tau)$ возрастает на $(\lambda, 1)$ и убывает на $(1, \mu)$, поскольку аналогичным образом ведет себя $G_0(x, a)$ на $(-1, a)$ и на $(a, 1)$, соответственно.

Далее, пусть $\Gamma = \partial D[\lambda, \mu]$ и n —внутренняя нормаль к Γ . Применяя к функции $\psi(n_k z, \beta)$ и кругу $D[\lambda, \mu]$ в точке $z=1$ формулу Пуассона-Иенсена (с учетом (25)), умножая затем обе ее части на n_k^{-1} , получим оценку

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_k} \log |\operatorname{Re} (f_{n_k} e^{i\beta})| &\leq -\frac{1}{n_k} \sum g(\tau_k, \beta) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int \frac{\log |\psi(n_k \zeta, \beta)|}{n_k} \frac{\partial G(\zeta, 1)}{\partial n} |d\zeta| = \\ &= -\sum_{k, \beta} J_{k, \beta}, \end{aligned} \quad (29)$$

где сумма берется по всем нулям $\tau = \tau_k, \beta \in (\lambda, \mu)$, $\tau \neq 1$, функции $\psi(n_k \tau, \beta)$, с учетом кратности.

Интеграл $J_{k, \beta}$ в (29) имеет достаточно простую оценку сверху. Заметив, что $n_k \zeta \in \Delta_{2\pi}$ при $\zeta \in \Gamma$, и полагая в (26) $z = n_k \zeta$, будем иметь

$$J_{k, \beta} \leq \frac{\sigma'}{2\pi} \int_{\Gamma} |\operatorname{Im} z| \frac{\partial G(\zeta, 1)}{\partial n} |d\zeta| + \mu \varepsilon(\lambda, n_k),$$

откуда с учетом леммы 2, полагая $\sigma' = \pi(1 - x')$, получим следующую (не зависящую от β) оценку:

$$J_{k, \beta} \leq (1 - x') \int_{\lambda}^{\mu} g(\tau) d\tau + \mu \varepsilon(\lambda, n_k), \text{ где } x' > x. \quad (30)$$

Далее, несколько преобразуем сумму $\sum_{k, \beta}$. С этой целью для $\tau \geq 0$ обозначим через $W_k(\tau, \beta)$ число перемен знака конечной последовательности $\{\operatorname{Re}(f_j e^{i\beta})\}$ при $j \in [\tau n_k, n_k]$, а через $m_k(\tau, \beta)$ —число нулей функции $\psi(z, \beta)$ в этом же промежутке (с учетом кратности). Применяя лемму 3 к функции $\psi(z, \beta)$ и к максимальному отрезку I с целыми концами, содержащемуся в открытом промежутке $(\tau n_k, n_k)$, получим оценку

$$m_k(\tau, \beta) - m_k(1, \beta) \geq n_k |1 - \tau| - W_k(\tau, \beta) - 2. \quad (31)$$

Теперь мы можем записать $\sum_{k, \beta}$ интегралом Стильтьеса:

$$\sum_{k, \beta} = \frac{1}{n_k} \int_{\lambda}^{\mu} g(\tau) |dm_k(\tau, \beta)|.$$

Интегрируя по частям и учитывая свойство монотонности $g(\tau)$, будем иметь

$$\sum_{k, \beta} = \frac{1}{n_k} \int_{\lambda}^{\mu} [m_k(\tau, \beta) - m_k(1, \beta)] |dg(\tau)|.$$

Отсюда, для достаточно больших $k (\geq k_0)$, применяя оценку (31) при $|\tau-1| \geq n_k^{-1}$ и учитывая неотрицательность подынтегральной функции, получим

$$\sum_{k, \beta} \geq \int_{\lambda}^{\mu} \left[|1-\tau| - \frac{W_k(\tau, \beta)}{n_k} \right] |dg(\tau)| - \delta_k, \quad (32)$$

где

$$\delta_k = \int_{1-n_k^{-1}}^{1+n_k^{-1}} |1-\tau| |dg(\tau)| + \frac{2}{n_k} \left[g\left(1 - \frac{1}{n_k}\right) + g\left(1 + \frac{1}{n_k}\right) \right].$$

Очевидно, что δ_k не зависит от β и $\delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$.

Из (29), (30) и (32) следует (для $k \geq k_0$) оценка

$$\frac{1}{n_k} \log |\operatorname{Re}(f_{n_k} e^{i\beta})| \leq \int_{\lambda}^{\mu} \left[\frac{W_k(\tau, \beta)}{n_k} - x' |1-\tau| \right] |dg(\tau)| + \rho_k, \quad (33)$$

где ρ_k не зависит от β и $\rho_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$.

Далее, доказательства теорем 1 и 2 временно разветвляются.

1) В условиях теоремы 1 имеем, что $W_k(\tau, \beta_k) = W_k(\tau)$. Обозначим

$$c_{\tau} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{W_k(\tau)}{|1-\tau| n_k}. \quad (34)$$

Полагая в (33) $\beta = \beta_k$, перейдем в обеих ее частях к верхнему пределу при $k \rightarrow +\infty$. Учитывая (2) и (34) и применяя лемму Фату (см., например, [10], стр. 292), получим

$$0 \leq \int_{\lambda}^{\mu} (c_{\tau} - x') |1-\tau| |dg(\tau)|, \quad x' > x. \quad (35)$$

2) В условиях теоремы 2 докажем, что оценка (35) сохраняется, если в (34) положить $W_k(\tau) = \frac{1}{\pi} V(\tau, n_k)$, где $V(\tau, n_k)$ определяется по (6).

С этой целью разделим обе части неравенства (33) на π и проинтегрируем по β от нуля до π . Мы получим

$$\frac{1}{n_k} \log \frac{|f_{n_k}|}{2} \leq \int_{\lambda}^{\mu} \left[\frac{I_k(\tau)}{\pi n_k} - x' |1-\tau| \right] |dg(\tau)| + \rho_k, \quad (36)$$

где

$$I_k(\tau) = \int_0^{\pi} W_k(\tau, \beta) d\beta.$$



Очевидно имеем: $W_k(\tau, \beta) \leq \sum_j W_{kj}(\tau, \beta)$, где j пробегает промежуток $[\tau n_k, n_k - 1]$ при $\tau < 1$ и $[n_k + 1, \tau n_k]$ при $\tau > 1$, а $W_{kj}(\tau, \beta)$ равно числу перемен знака в паре $\cos(\omega_j + \beta)$, $\cos(\omega_{j+1} + \beta)$ при $|\omega_{j+1} - \omega_j| < \pi$ и $W_{kj} = 1$ при $|\omega_{j+1} - \omega_j| = \pi$. Поэтому

$$I_k(\tau) \leq \sum_j I_{kj}, \quad \text{где } I_{kj} = \int_0^\pi W_{kj}(\tau, \beta) d\beta. \quad (37)$$

Легко показать, что $I_{kj} = |\omega_{j+1} - \omega_j|$. В случае $|\omega_{j+1} - \omega_j| = \pi$ это очевидно. Если же $|\omega_{j+1} - \omega_j| < \pi$, то заметим, что $W_{kj}(\tau, \beta)$ равно числу корней уравнения $\cos(\omega + \beta) = 0$ для $\omega \in (\omega_j, \omega_{j+1})$.

Рассмотрим теперь множество e_{kj} всевозможных значений $\beta \in \mathbb{R}$, для каждого из которых существует $\omega = \omega_\beta \in (\omega_j, \omega_{j+1})$ так, что $\cos(\omega + \beta) = 0$. Легко видеть, что

$$e_{kj} = \bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} + \pi m - \omega_{j+1}, \frac{\pi}{2} + \pi m - \omega_j \right),$$

так что множество $e_{kj} \cap [0, \pi]$ состоит из одного или двух промежутков суммарной длины $|\omega_{j+1} - \omega_j|$. Требуемое утверждение следует из того, что

$$W_{kj}(\tau, \beta) = \begin{cases} 1 & \text{при } \beta \in e_{kj} \cap [0, \pi], \\ 0 & \text{при } \beta \in [0, \pi] \setminus e_{kj}. \end{cases}$$

Таким образом, с учетом (37), получим оценку

$$I_k(\tau) \leq \sum_j |\omega_{j+1} - \omega_j| = V(\tau, n_k) = \pi W_k(\tau).$$

Отсюда и из (36) имеем

$$\frac{1}{n_k} \log \frac{|f_{n_k}|}{2} \leq \int_A \left[\frac{W_k(\tau)}{|1 - \tau| n_k} - x' |1 - \tau| \right] |dg(\tau)| + \rho_k.$$

Перейдем в этом неравенстве к верхнему пределу при $k \rightarrow +\infty$. С учетом (34) и (4) и применяя лемму Фату, опять приходим к оценке (35).

Дальнейшее доказательство теорем 1 и 2 одинаково и основано на неравенстве (35).

Заметим сперва, что из (35) следует оценка

$$0 < (c_\lambda^- - x') \int_A (1 - \tau) dg(\tau) + (c_\lambda^+ - x') \int_1^B (1 - \tau) dg(\tau), \quad x' > x, \quad (38)$$

где положено

$$c_\lambda^- = \sup_{\lambda < \tau < 1} c_\tau, \quad c_\lambda^+ = \sup_{1 < \tau < \mu} c_\tau.$$

Сделав в интегралах из (38) замену переменной $\tau = L(t)$ (см. (27) и (28)) и разделив полученное неравенство на $\frac{\mu - \lambda}{2}$, приходим к оценке

$$0 \leq (c_{\lambda}^{-} - x') J_1(a) + (c_{\mu}^{+} - x') J_2(a), \quad x' > x, \quad (39)$$

где

$$J_1(a) = \int_{-1}^a (a-t) dG_0(t, a), \quad J_2(a) = \int_a^1 (a-t) dG_0(t, a),$$

Эти интегралы легко вычисляются прямой подстановкой значения функции G_0 по формуле (28):

$$J_1(a) = J_2(-a) = \frac{1-a^2}{a} \log \frac{1}{1-a}, \quad -1 < a < 1.$$

Отсюда, учитывая, что $a \rightarrow -1$ при $\lambda \rightarrow 1-0$ (при фиксированном μ) и $a \rightarrow +1$ при $\mu \rightarrow 1+0$ (при фиксированном λ), получим

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1-0} \frac{J_1(a)}{J_2(a)} = \lim_{\mu \rightarrow 1+0} \frac{J_2(a)}{J_1(a)} = 0.$$

Отсюда и из (39) следует

$$0 \leq c_{\lambda}^{-} - x', \quad 0 \leq c_{\mu}^{+} - x', \quad x' > x. \quad (40)$$

Замечая, что существуют пределы

$$c^{-} = \lim_{\lambda \rightarrow 1-0} c_{\lambda}^{-}, \quad c^{+} = \lim_{\mu \rightarrow 1+0} c_{\mu}^{+}, \quad c = \min(c^{-}, c^{+}), \quad (41)$$

из (40) получим, что $x' \leq c^{-}$ и $x' \leq c^{+}$, т. е. $x' \leq c$ и одновременно $x' > x$. Таким образом, выполняется строгое неравенство $x < c$.

Вспомнив наше предположение в начале доказательства теорем 1 и 2, из неравенства $x < c$ мы заключаем, что дуга $\partial D_1 \cap \Delta_{2,c}$ не является дугой регулярности ряда (1). Это означает, что ряд (1) имеет особую точку вида $e^{i\omega}$, где $|\omega| \leq \pi c$. Нам остается отметить, что $c = W^*$ в условиях теоремы 1 и $c = \pi^{-1} V^*$ в условиях теоремы 2. Это легко следует из сравнения формулы (41) с учетом (34) с формулами (3) и (5) соответственно (во втором случае в (34) надо полагать $W_k(\tau) = \pi^{-1} V(\tau, n_k)$). Доказательство теорем 1 и 2 завершено.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 18.VII.1986

Ե. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ, Վ. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Աստիճանային շարքերի եզակիությունների տեղայնացումը զուգամիտության շրջանի հզորին (ամփոփում)

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում են

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n|^{1/n} = 1 \quad (1)$$

տեսքի աստիճանային շարքերի եզակիությունների տեղայնացման հարցերը:

Աշխատանքում ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները:

Քեորեմ 1-ը ուժեղացնում է Ֆարրիի հայտնի ընդհանուր թեորեմը և մեծի ավելի պարզ ձևակերպում: Քեորեմ 2-ում գտնված են բացահայտ պայմաններ (1) շարքի զործակիցների (նրանց բացարձակ արժեքների և արգումենտների) վրա, որոնք ապահովում են ապագա եզրային աղեղի վրա եզակի կետի առկայությունը:

Թ Ե Ռ Ե Մ 1. Դիցուք (1) շարքի համար բնական թվերի $n_k \uparrow + \infty$ և իրական թվերի $(\beta_k)_1^\infty$ հաջորդականություններն այնպես են ընտրվում, որ

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |\operatorname{Re}(f_{n_k} e^{i\beta_k})|^{1/n_k} = 1.$$

Նշանակենք $W_k(\tau)$ -ով $|\operatorname{Re}(f_n e^{i\beta_k})|$ հաջորդականության նշանափոխությունների բանակ երբ $n \in [\tau n_k, n_k]$, $\tau > 0$, և բոլ

$$W^* = \min \{W^-, W^+\}, \quad W^\pm = \overline{\lim}_{\tau \rightarrow 1 \pm 0} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{W_k(\tau)}{|1 - \tau| n_k} :$$

Այնժամ (1) շարքն ունի $e^{i\omega}$ տեսքի եզակի կետ, որտեղ $|\omega| \leq \pi W^*$.

Թ Ե Ռ Ե Մ 2. (արգումենտների մասին). Դիցուք (1) շարքի համար $(n_k)_1^\infty \subset \mathbb{N}$ հաջորդականությունն այնպես է ընտրված, որ

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |f_{n_k}|^{1/n_k} = 1.$$

Դիցուք

$$f_n = |f_n| e^{i\omega_n}, \quad \text{երբ } n = 0, 1, 2, \dots,$$

որտեղ $|\omega_{n+1} - \omega_n| \leq \pi$ և նշանակենք

$$V^* = \min \{V^-, V^+\}, \quad V^\pm = \overline{\lim}_{\tau \rightarrow 1 \pm 0} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{V(\tau, n_k)}{|1 - \tau| n_k},$$

$$V(\tau, q) = \sum_{n \in [\tau q, q]} |\omega_{n+1} - \omega_n|, \quad \tau \geq 0.$$

Այնժամ (1) շարքն ունի $e^{i\omega}$ տեսքի եզակի կետ, որտեղ $|\omega| \leq V^*$.

Նշված ընդհանուր թեորեմներից առանձնացված են մի շարք հետևանքներ, որոնք ընդ հանրացնում և ուժեղացնում են աստիճանային շարքերի համար Յարրիի բացթողումների և հարաբերության մասին թեորեմները:

N. U. ARAKELYAN. V. A. MARTIROSYAN. *The location of singularities of power series on the circle of convergence* (summary)

In this paper the authors investigate questions concerning location of singularities of power series of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n n^n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n|^{1/n} = 1. \quad (1)$$

The following main results are established. Theorem 1 strengthens the famous general theorem of Fabry and has simpler formulation. In theorem 2 explicit conditions on coefficients (on their moduli and arguments) are found, which guarantee existence of a singular point on a given boundary arc.

Theorem 1. Let for the series (1) sequences of positive integers $n_k \uparrow + \infty$ and of real numbers $(\beta_k)_1^\infty$ be chosen in such a way, that

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |\operatorname{Re}(f_{n_k} e^{i\beta_k})|^{1/n_k} = 1.$$

Denote by $W_k(\tau)$ the number of sign changes of the sequence $|\operatorname{Re}(f_n e^{i\beta_k})|$ for $n \in [\tau n_k, n_k]$, $\tau > 0$, and let

$$W^* = \min \{W^-, W^+\}, \quad W^\pm = \overline{\lim}_{\tau \rightarrow 1 \pm 0} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{W_k(\tau)}{|1 - \tau| n_k}.$$

Then the series (1) has a singular point of the form $e^{i\omega}$, where $|\omega| \leq \pi W^*$.

Theorem 2 (on arguments). Let for the series (1) the sequence $\{n_k\}_1^\infty \subset \mathbb{N}$ are chosen in such a way, that

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |f_{n_k}|^{1/n_k} = 1.$$

Let

$$f_n = |f_n| e^{i\omega_n} \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots,$$

where $|\omega_{n+1} - \omega_n| \leq \pi$, and denote

$$V^* = \min |V^-, V^+|, \quad V^\pm = \overline{\lim}_{\tau \rightarrow 1 \pm 0} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{V(\tau, n_k)}{|1 - \tau|^{n_k}},$$

$$V(\tau, q) = \sum_{n \in [\tau q, q]} |\omega_{n+1} - \omega_n|, \quad \tau \geq 0.$$

Then the series (1) has a singular point of the form $e^{i\omega}$, where $|\omega| \leq V^*$.

From those theorems the authors conclude some corollaries, which generalize, and strengthen Fabry's gap and ratio theorems for power series.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Fabry, Sur les series de Taylor qui une infinite points singuliers, Acta math 22, 1898, 65—87.
2. Л. Биберах. Аналитическое продолжение, М., «Наука», 1967.
3. Г. Полиа и Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа, часть 2, М., ГИТТЛ, 1956.
4. G. Polya. Untersuchungen uber Lucken und Singularitaten von Potenzreihen. Math. Zeit., 29, 1929, 549—640.
5. Н. У. Аракелян. Об аффективном аналитическом продолжении степенных рядов, Матем. сб., 124 (166), № 5, 1984, 24—44.
6. E. Lindelof. Le calcul des re'sidus et ses applications a'la theore des fonctions Paris, Gauthier-Villars, 1905.
7. С. Стоилов. Теория функций комплексного переменного, том 2, М., Иностран. лит., 1962.
8. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат, 1956.
9. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, М.—Л., Гостехиздат, 1941.
10. У. Рудин. Основы математического анализа, М., «Мир», 1976.

УДК 517.53

М. М. ДЖРБАШЯН, С. Г. РАФАЕЛЯН

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В КЛАССАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ И ПОРОЖДАЕМЫЕ ИМИ БАЗИСЫ РИССА

§ 0. Введение

0.1. В давних исследованиях первым из авторов была развита теория гармонического анализа для системы лучей в комплексной области. Указанная теория, изложенная в монографии [1], опиралась на замечательные асимптотические свойства целых функций типа Миттаг-Леффлера

$$E_{\rho}(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)} \left(\rho \geq \frac{1}{2}, \mu > 0\right). \quad (0.1)$$

В работах авторов ([2], [3], [4]) были установлены дискретные аналогии лишь некоторых специальных результатов указанной теории. В них были открыты нового рода базисы Рисса в пространствах $L_2(0, \sigma)$ вектор-функций, с числом компонент $n=2$ и $n=4$.

К этому циклу исследований непосредственно примыкает недавняя работа авторов [5, 6], где были построены базисы Рисса — обобщения $\sin$ и $\cos$ -рядов Фурье функций из $L_2(0, \sigma)$.

Во всех отмеченных исследованиях в построенных базисах Рисса участвует та же функция типа Миттаг-Леффлера $E_{\rho}(z; \mu)$, но лишь для значений $\rho = \frac{1}{2}, 1, 2$.

0.2. Отмеченные исследования авторов в общих чертах и по существу проводились единым методом, состоящим из четырех этапов.

Этап 1. Введение банаховых пространств $W_{\rho, \omega}^{p, \infty}$ целых функций порядков $\rho = \frac{1}{2}, 1, 2$ и типа $\leq \sigma$ с нормами

$$\|f\|_{\rho, \omega} = \left(\int_{L_{\rho}} |f(z)|^{\rho} |z|^{\omega} |dz| \right)^{1/\rho} < +\infty \quad (0.2)$$

$$(1 < \rho < +\infty, -1 < \omega < \rho - 1),$$

где L_{ρ} — зависящая от значения ρ система лучей, исходящих из точки $z = 0$.

Затем установление весьма существенных для дальнейших этапов тонких оценок между нормами вида

$$\|\{f(\lambda_k)\}\|_{\rho, \omega} = \left(\sum_k (1 + |k|)^{\omega} |f(\lambda_k)|^{\rho} \right)^{1/\rho} \quad (0.3)$$

и нормой $\| \cdot \|_{p, \sigma}$.

Этап II. Установление базисных и интерполяционных разложений для классов $W_{p, \sigma}^{p, \infty}$ целых функций $f(z)$ порядков $\rho = \frac{1}{2}, 1, 2$ с узлами на последовательности $\{\lambda_k\}$.

Этап III. Построение ортогональных на $(0, \sigma)$ систем вектор-функций с числом компонент $n = 1, 2, 4$.

Доказательство теорем о том, что построенные биортогональные системы являются базисами Рисса в надлежащих пространствах вектор-функций из $L_2(0, \sigma)$. Оно, как правило, достигается лишь методом перехода от интерполяционных теорем для классов $W_{p, \sigma}^{p, \infty}$ ($\rho = \frac{1}{2}, 1, 2$) при $\rho = 2$ к их параметрическим представлениям — далеко идущим и существенно новым обобщениям классической теоремы Винера-Пэли о целых функциях экспоненциального типа. Эти и другие гораздо более общие результаты такого же рода были установлены в свое время первым из авторов данной статьи. Они наряду с отмеченной выше теорией гармонического анализа в комплексной области изложены в монографии [1].

Этап IV. Построение модельных интегро-дифференциальных операторов $A_{p, \mu}$ и $a_{p, \mu}$ для значений $\rho = \frac{1}{2}, 1, 2$ и надлежащих значений параметра $\mu = \mu(\rho) > 0$.

Рассмотрение нового рода задач типа Коши

$$\begin{aligned} A_{p, \mu} y(z) &= \lambda y(z), \quad z \in G_-, \\ a_{p, \mu} y(z)|_{z=0} &= 1, \end{aligned} \quad (0.4)$$

где G_- — риманова поверхность функции $\text{Ln } z$. Это приводит к утверждению, что в надлежащих классах функций $y(z)$, определенных на G_∞ задача (0.4) имеет единственное решение

$$y(z) = E_p(\lambda z^{1/\rho}; \mu) z^{\mu-1}. \quad (0.5)$$

Наконец, в зависимости от значений $\rho = \frac{1}{2}, 1, 2$ для задачи (0.4) в комплексной области ставятся особого рода краевые условия.

Эти условия в каждом из случаев $\rho = \frac{1}{2}, 1, 2$ порождают счетное множество собственных чисел $\{\lambda_k\}$ и собственных функций

$$y_k(z) = E_p(\lambda_k z^{1/\rho}; \mu) z^{\mu-1}, \quad (0.6)$$

которые после простой модификации сводятся к системам функций, базисность которых была установлена на этапе II.

0.3. Цель настоящей статьи — построение базисов Рисса в пространствах вектор-функций из $L_2(0, \sigma)$ с числом компонент $n = 3$.

В этом случае приходится установить интерполяционные разложения особой природы для классов $W_{3/2, \sigma}^{p, \infty}$ целых функций $f(z)$ порядка $\rho = \frac{3}{2}$ и типа σ , подчиненных условию

$$\|f\|_{p, \omega} = \left(\sum_{k=-1}^1 \int_0^{\infty} |f(re^{i\frac{\pi k}{3}})|^p r^{\omega} dr \right)^{1/p} < +\infty. \quad (0.7)$$

Эти разложения получаются нами в §§ 1—3 статьи на основе интерполяционных разложений для классов

$$W_{1/2, \sigma}^{p, \omega} : \|f\|_{p, \omega} = \left(\int_0^{\infty} |f(r)|^p r^{\omega} dr \right)^{1/p} \quad (1 < p < +\infty, -1 < \omega < p-1) \quad (0.8)$$

целых функций порядка $\rho = 1/2$ и типа $\leq \sigma$, установленных в нашей работе [5, 6].

Дальше уже в §§ 4, 5 статьи осуществляется этап III исследования. А именно: а) Построение биортогональных систем вектор-функций с числом компонент $n = 3$ и их базисность в пространстве вектор-функций из $L_2(0, \sigma)$ с тем же числом компонент.

б) Здесь также базисность систем устанавливается путем перехода от интерполяционных разложений для классов $W_{3/2, \sigma}^{p, \omega}$ при $p = 2$ к их параметрическим представлениям, содержащихся, как частный случай, в общих результатах монографии [1].

Базисы, построенные в данной статье, также могут порождаться наложением краевых условий в комплексной области на решения (0.5) задачи типа Коши (0.4) при $\rho = \frac{3}{2}$. Но этому следует посвятить отдельную работу.

§ 1. Предварительные сведения

1.1 (а) Напомним необходимое нам простейшее предложение теории целых функций конечного роста.

Если разложение

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (1.1)$$

определяет целую функцию конечного роста, то ее порядок ρ и тип σ (при $\rho > 0$) определяются из соотношений

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{\ln 1/|c_n|} \quad \text{и} \quad e^{\rho\sigma} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n |c_n|^{1/n}. \quad (1.2)$$

Предположим теперь, что $\Phi(z)$ — целая функция порядка $3/2$ и типа σ ($0 < \sigma < +\infty$). Тогда соотношения (1.2) примут вид

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{\ln 1/|c_n|} = \frac{3}{2}, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n |c_n|^{3/2n} = \frac{3}{2} e^{\sigma}. \quad (1.2')$$

С функцией $\Phi(z)$ (порядка $\frac{3}{2}$ и типа σ) ассоциируем три целые функции $\varphi_j(\omega)$ ($j = -1, 0, 1$) посредством следующих разложений:

$$\begin{aligned}\varphi_{-1}(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{3n} w^n, \quad \varphi_0(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{3n+1} w^n, \\ \varphi_1(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{3n+2} w^n.\end{aligned}\quad (1.3)$$

Если обозначить через ρ_j и σ_j ($j = -1, 0, 1$) порядок и тип функции $\varphi_j(w)$, то из соотношений (1.2) и (1.3) легко заключаем, что

$$0 \leq \rho_j \leq \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad 0 \leq \sigma_j \leq \sigma/2 \rho_j \quad (j = -1, 0, 1). \quad (1.4)$$

(6) Впредь, обозначая

$$\alpha = \exp \left\{ i \frac{2\pi}{3} \right\}, \quad (1.5)$$

заметим, что справедливы формулы

$$1 + \alpha^k + \alpha^{-k} = \begin{cases} 3, & \text{при } k = 3n \\ 0, & \text{при } k = 3n + 1, 3n + 2 \quad (n \geq 0). \end{cases} \quad (1.6)$$

Тогда простая связь между введенными выше функциями дается в следующей лемме:

Лемма 1.1. 1°. Справедливы представления

$$\begin{aligned}\varphi_{-1}(z^3) &= \frac{1}{3} \sum_{k=-1}^1 \Phi(\alpha^k z), \quad z \varphi_0(z^3) = \frac{1}{3} \sum_{k=-1}^1 \alpha^{-k} \Phi(\alpha^{-k} z), \\ z^2 \varphi_1(z^3) &= \frac{1}{3} \sum_{k=-1}^1 \alpha^k \Phi(\alpha^k z)\end{aligned}\quad (1.7)$$

и их обращение

$$\Phi(z) = \varphi_{-1}(z^3) + z \varphi_0(z^3) + z^2 \varphi_1(z^3). \quad (1.8)$$

2°. Хотя бы одна из целых функций $|\varphi_j(w)|_{-1}^1$ имеет порядок, равный $\frac{1}{2}$ и тип, равный σ .

Доказательство. 1°. Все представления (1.7) и (1.8) непосредственно следуют из определений (1.1) и (1.3) наших функций $\Phi(z)$ и $|\varphi_j(w)|_{-1}^1$, если воспользоваться формулами (1.6).

2°. Если вопреки утверждению предполагать, что $\rho_j < \frac{1}{2}$ или $\sigma_j < \sigma$ ($j = -1, 0, 1$), то из тождества (1.8) следовало бы противоречие—что порядок или тип функции $\Phi(z)$ будут соответственно меньше чисел $\frac{3}{2}$ или σ .

Отметим особо приложение представлений леммы 1.1 к целой функции типа Миттаг-Леффлера

$$\Phi(z) \equiv E_{3/2}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + 2k/3)}. \quad (1.9)$$

Легко видеть, что в этом случае будем иметь

$$\varphi_{-1}(w) \equiv E_{1/2}(w; \mu), \quad \varphi_0(w) \equiv E_{1/2}\left(w; \mu + \frac{2}{3}\right),$$

$$\varphi_1(w) \equiv E_{1/2}(w; \mu + 4/3). \quad (1.10)$$

Поэтому из леммы 1.1 следует

Л е м м а 1.2. Справедливы следующие формулы представления:

$$E_{1/2}(z^3; \mu) \equiv \frac{1}{3} \sum_{k=-1}^1 E_{3/2}(\alpha^k z; \mu),$$

$$z E_{1/2}(z^3; \mu + 2/3) \equiv \frac{1}{3} \sum_{k=-1}^1 \alpha^{-k} E_{3/2}(\alpha^k z; \mu), \quad (1.11)$$

$$z^2 E_{1/2}\left(z^3; \mu + \frac{4}{3}\right) \equiv \frac{1}{3} \sum_{k=-1}^1 \alpha^k E_{3/2}(\alpha^k z; \mu)$$

и их обращение

$$E_{3/2}(z; \mu) \equiv E_{1/2}(z^3; \mu) + z E_{1/2}\left(z^3; \mu + \frac{2}{3}\right) + z^2 E_{1/2}\left(z^3; \mu + \frac{4}{3}\right). \quad (1.12)$$

1.2. (а) Введем в рассмотрение два банаховых пространства целых функций. Во-первых, определим класс $W_{1/2, \sigma}^p (p > 1, -1 < \sigma < p-1)$ — как множество целых функций $\varphi(z)$ порядка $1/2$ и типа $\leq \sigma$, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_{p, \sigma} \equiv \left(\int_0^\infty |\varphi(r)|^p r^\sigma dr \right)^{1/p}. \quad (1.13)$$

Во-вторых, обозначив через

$$L = \bigcup_{k=-1}^1 l_k \quad (1.14)$$

совокупность трех полупрямых

$$l_k = \{z; z = r e^{i \frac{2\pi}{3} k}, 0 \leq r < +\infty\} \quad (k = -1, 0, 1), \quad (1.15)$$

определим класс $W_{3/2, \sigma}^p (1 < p < +\infty, -1 < \sigma < p-1)$ как множество целых функций $\Phi(z)$ порядка $3/2$ и типа $\leq \sigma$, для которых конечна норма

$$\|\Phi; L\|_{p, \sigma} \equiv \left(\int_L |\Phi(z)|^p |z|^\sigma |dz| \right)^{1/p} =$$

$$= \left(\sum_{k=-1}^1 \int_0^\infty |\Phi(\alpha^k r)|^p r^\sigma dr \right)^{1/p}. \quad (1.16)$$

(в) Связь между введенными пространствами дается следующей леммой.

Лемма 1.3. 1°. Класс $W_{3/2,0}^{p,\infty}$ совпадает с множеством целых функций $\Phi(z)$, представимых в виде

$$\Phi(z) = \varphi_{-1}(z^3) + z \varphi_0(z^3) + z^2 \varphi_1(z^3), \quad (1.17)$$

где функции

$$\varphi_j(\omega) \in W_{1/2,0}^{p,\infty} \quad (j = -1, 0, 1), \quad (1.18)$$

причем

$$x_j = \tilde{\omega} + \frac{(1+j)p}{3} \quad (j = -1, 0, 1); \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega - 2}{3}. \quad (1.19)$$

2°. Справедливы двусторонние оценки

$$\|\Phi; L_{p,\omega} \asymp \sum_{j=-1}^1 \|\varphi_j\|_{p,x_j}; \quad \|\Phi; L_{p,\omega}^p \asymp \sum_{j=-1}^1 \|\varphi_j\|_{p,x_j}^p. \quad (1.20)$$

Доказательство. Во-первых, отметим, что заменой переменного интегрирования $r = u^{1/3}$, в силу обозначений (1.19), будем иметь

$$\int_0^\infty |\varphi_{-1}(r^3)|^p r^\omega dr = 3^{-1} \int_0^\infty |\varphi_{-1}(u)|^p u^{x_1} du = 3^{-1} \|\varphi_{-1}\|_{p,x_1}^p$$

и аналогично

$$\int_0^\infty |r \varphi_0(r^3)|^p r^\omega dr = 3^{-1} \|\varphi_0\|_{p,x_1}^p, \quad \int_0^\infty |r^2 \varphi_1(r^3)|^p r^\omega dr = 3^{-1} \|\varphi_1\|_{p,x_{-1}}^p.$$

Во-вторых, поскольку при $z \in L$, т. е. при $z = r e^{i \frac{2\pi k}{3}}$ ($k = -1, 0, 1$) $z^3 = r^3$, то из приведенных формул следует равенство

$$\int_L |\varphi_{-1}(z^3)|^p |z|^\omega |dz| = 3 \int_0^\infty |\varphi_{-1}(r^3)|^p r^\omega dr = \|\varphi_{-1}\|_{p,x_{-1}}^p,$$

и аналогично, равенства

$$\int_L |z \varphi_0(z^3)|^p |z|^\omega |dz| = \|\varphi_0\|_{p,x_0}^p, \quad \int_L |z^2 \varphi_1(z^3)|^p |z|^\omega |dz| = \|\varphi_1\|_{p,x_1}^p.$$

Предполагая теперь, что функция $\Phi(z)$ представима в виде суммы (1.17), при условии (1.18)—(1.19) из последних трех неравенств на основе неравенства Минковского, а также в силу простого неравенства

$$(a + b + c)^p \leq 3^{p-1} (a^p + b^p + c^p) \quad (0 < a, b, c < +\infty, p \geq 1),$$

* Символ $\asymp$ принято употреблять во всех случаях, когда отношение величин, между которыми он ставится, лежит между двумя положительными и конечными постоянными $0 < c_1 < c_2 < +\infty$, не зависящими от этих величин.

мы приходим к оценкам вида

$$\|\Phi; L\|_{p, \omega} \leq \sum_{j=-1}^1 \|\varphi_j\|_{p, \kappa_j} \|\Phi; L\|_{p, \omega}^p \leq c_p \sum_{j=-1}^1 \|\varphi_j\|_{p, \kappa_j}^p. \quad (1.20')$$

Это значит, что не только $\Phi(z) \in W_{3/2, \omega}^{p, \infty}$, но и справедлива также правая из двусторонних оценок (1.20) леммы.

Обратно, если $\Phi(z) \in W_{3/2, \omega}^{p, \infty}$, то определив три функции $\{\varphi_j(u)\}^1$ согласно формулам (1.7) леммы 1.1, будем иметь

$$\begin{aligned} \|\varphi_{-1}\|_{p, \kappa_1} &= \left(\int_L |\varphi_{-1}(z^3)|^p |z|^\omega |dz| \right)^{1/p} = \\ &= 3^{-1} \left(\int_L \left| \sum_{j=-1}^1 \Phi(\alpha^j z) \right|^p |z|^\omega |dz| \right)^{1/p} \leq 3^{-1} \sum_{j=-1}^1 \left(\int_L |\Phi(\alpha^j z)|^p |z|^\omega |dz| \right)^{1/p} = \\ &= \|\Phi; L\|_{p, \omega}, \end{aligned}$$

поскольку преобразование $\zeta = \alpha z$ или $\zeta = \alpha^{-1} z$ переводит совокупность полупрямых L в себя.

Вполне аналогично приходим также к неравенствам

$$\|\varphi_j\|_{p, \kappa_j} \leq \|\Phi; L\|_{p, \omega} \quad (j=0, \pm 1),$$

следовательно, к неравенствам

$$\|\Phi; L\|_{p, \omega} \geq 3^{-1} \sum_{j=-1}^1 \|\varphi_j\|_{p, \kappa_j} \|\Phi; L\|_{p, \omega}^p > 3^{-p} \sum_{j=-1}^1 \|\varphi_j\|_{p, \kappa_j}^p. \quad (1.20'')$$

Поскольку, по лемме 1.1, функция $\Phi(z)$ представима в виде (1.17), то неравенство (1.20'') означает, что функции

$$\varphi_j(\omega) \in W_{1/2, \kappa_j}^{p, \infty} \quad (j=-1, 0, 1).$$

Лемма полностью доказана, так как из (1.20') и (1.20'') вытекают двусторонние оценки (1.20) леммы.

(г) В заключение приведем два замечания.

Замечание 1. Если в представлении (1.17) $\Phi(z) \in W_{3/2, \omega}^{p, \infty}$, для данного j ($j=-1, 0, 1$) функция $\varphi_j(\omega)$ имеет порядок $\rho_j < \frac{1}{2}$, то можно доказать, что $\varphi_j(\omega) \equiv 0$.

Замечание 2. Относительно ассоциированных с $\Phi(z) \in W_{3/2, \omega}^{p, \infty}$ ($p > 1$, $-1 < \omega < p-1$) функций $\varphi_j(\omega) \in W_{1/2, \kappa_j}^{p, \infty}$ ($j=-1, 0, 1$), отметим также, что, как следует из (1.19)

$$-1 < \kappa_{-1} < \frac{p}{3} - 1, \frac{p}{3} - 1 < \kappa_0 < \frac{2p}{3} - 1, \frac{2p}{3} - 1 < \kappa_1 < p - 1. \quad (1.19')$$

Таким образом, интервалы изменения параметров κ_j ($-1 \leq j \leq 1$) не имеют точек пересечения, и за исключением двух точек $\frac{p}{3} - 1$ и $\frac{2p}{3} - 1$ заполняют весь интервал $(-1, p-1)$ изменения параметра ω .

1.3. В этом заключительном пункте параграфа приведем формулировки некоторых известных уже результатов, необходимых нам в последующем изложении статьи.

(а) Вновь рассмотрим целую функцию типа Миттаг-Леффлера вида

$$G_{\sigma}(w; \nu) = E_{1/2}(-\sigma^2 w; 1 + \nu) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sigma^{2k} w^k}{\Gamma(1 + \nu + 2k)} \quad (1.21)$$

порядка $1/2$ и типа σ ($0 < \sigma < +\infty$), при любом значении параметра $\nu \in (-1, +\infty)$.

Прежде всего отметим, что для частных значений параметра $\nu = 0$ и $\nu = 1$ будем иметь

$$G_{\sigma}(w; 1) = \cos \sigma \sqrt{w}, \quad G_{\sigma}(w; 2) = \frac{\sin \sigma \sqrt{w}}{\sigma \sqrt{w}}. \quad (1.21')$$

Кроме того, нам известно (см. [1], лемму 3.5), что имеет место асимптотическая формула

$$G_{\sigma}(u; \nu) = (\sigma \sqrt{u})^{-\nu} \cos \left(\sigma \sqrt{u} - \frac{\pi}{2} \nu \right) + O\left(\frac{1}{u}\right), \quad u \in (0, +\infty) \quad (1.22)$$

для значений $0 \leq \nu < 2$.

Теорема 1*. 1°. Для значений параметра $0 \leq \nu < 2$ функция $G_{\sigma}(w; \nu)$ имеет только вещественные, простые и положительные корни.

2°. Если

$$0 < r_1 < r_2 < \dots < r_k < \dots, \quad r_k = r_k(\sigma, \nu) \quad (1.23)$$

эти корни, то они расположены таким образом:

При $\nu = 0$ и $0 < \nu < 1$, соответственно, будем иметь

$$r_k = \left(\frac{\pi}{\sigma} k - \frac{\pi}{2\sigma} \right)^2, \quad r_k \in \left(\left(\frac{\pi}{\sigma} k - \frac{\pi}{2\sigma} \right)^2, \left(\frac{\pi}{\sigma} k + \frac{\pi}{2\sigma} \right)^2 \right). \quad (1.24)$$

При $\nu = 1$ и $1 < \nu < 2$, соответственно

$$r_k = \left(\frac{\pi}{\sigma} k \right)^2, \quad r_k \in \left(\left(\frac{\pi}{\sigma} k \right)^2, \left(\frac{\pi}{\sigma} k + \frac{\pi}{2\sigma} \right)^2 \right) \quad (1 \leq k < \infty). \quad (1.25)$$

Отсюда, в частности, вытекает, что корни функции $G_{\sigma}(w; \nu)$ в обоих случаях (1.24) и (1.25) расположены по одному, только в указанных в них интервалах, а также, что

$$r_k \sim (1+k)^2, \quad (1 \leq k < +\infty). \quad (1.26)$$

(б) Пусть $l^{p, \alpha}$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$) банахово пространство последовательностей $\{a_k\}_0^{\infty} \in C$ с конечной нормой

$$\| \{a_k\}_0^{\infty} \|_{l^{p, \alpha}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p (1+k)^{\alpha} \right)^{1/p} < +\infty. \quad (1.27)$$

В работе авторов [5, 6] была установлена следующая основная теорема об интерполяционных разложениях для целых функций класса $W_{1/2, \sigma}^{p, \alpha}$ ($-1 < \alpha < p-1$).

* См. [3], лемму 1.1.

Теорема II. Пусть $\{r_k\}_1^\infty$ — корни функции $G_\sigma(w; \nu)$ ($0 \leq \nu < 2$).

Тогда

1°. В случае, когда параметр ν удовлетворяет условию

$$\frac{2(1+\kappa)}{p} - 1 < \nu < \frac{2(1+\kappa)}{p}, \quad (1.28)$$

то ряды вида

$$\varphi(w) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{G_\sigma(w; \nu)}{G'_\sigma(r_k; \nu)(w - r_k)} \quad (1.29)$$

осуществляется взаимно-однозначное и непрерывное отображение всего пространства последовательностей

$$\{c_k\}_1^\infty \in l^{p, 1+2\kappa} \quad (1 < p < +\infty, -1 < \kappa < p-1) \quad (1.30)$$

на все пространство целых функций $\varphi(w) \in W_{1/2, \sigma}^{p, \kappa}$.

Этот ряд сходится к своей сумме $\varphi(w)$ в метрике пространства $W_{1/2, \sigma}^{p, \kappa}$, и равномерно в любом круге $|w| \leq R < +\infty$, при этом будем иметь

$$\varphi(r_k) = c_k \quad (1 \leq k < +\infty); \quad \|\varphi\|_{p, \kappa} \asymp \|c_k\|_{1, 1+2\kappa}. \quad (1.31)$$

2°. В случае же, когда параметр ν удовлетворяет условию

$$\frac{2(1+\kappa)}{p} < \nu < 1 + \frac{2(1+\kappa)}{p}, \quad (1.32)$$

то ряды вида

$$\begin{aligned} \varphi(w) &= d_0 \Gamma(1+\nu) G_\sigma(w; \nu) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} d_k \frac{w G_\sigma(w; \nu)}{r_k G'_\sigma(r_k; \nu)(w - r_k)} \end{aligned} \quad (1.33)$$

осуществляется взаимно-однозначное и непрерывное отображение всего пространства последовательностей

$$\{d_k\}_1^\infty \in l^{p, 1+2\kappa} \quad (1 < p < +\infty, -1 < \kappa < p-1) \quad (1.34)$$

на все пространство целых функций $\varphi(w) \in W_{1/2, \sigma}^{p, \kappa}$.

Кроме того, природа сходимости этих рядов такая же, что и в 1°, при этом, положив $r_0 = 0$, будем иметь

$$\varphi(r_k) = d_k \quad (0 \leq k < +\infty), \quad \|\varphi\|_{p, \kappa} \asymp \|d_k\|_{0, 1+2\kappa}. \quad (1.35)$$

Замечание к теореме II. В упомянутой выше работе [5, 6], разложениях (1.29) и (1.33) вместо чисел $G'_\sigma(r_k; \nu)$ записаны их значения

$$\frac{\sigma}{r_k} G_\sigma(r_k; \nu - 1) \quad (k \geq 1).$$

Основные леммы

2.1 (а) Введем в рассмотрение целую функцию

$$e_\sigma(z; \nu) = G_\sigma(z^3; \nu) = E_{1/2}(-z^3 z^3; 1 + \nu) \quad (2.1)$$

порядка $3/2$ и типа σ .

Поскольку по теореме I при $0 < \nu < 2$ все корни функции $G_\sigma(w; \nu)$ положительны и просты, то, очевидно, что все корни функции $e_\sigma(z; \nu)$ ($0 \leq \nu < 2$) также просты и лежат только на трех полупрямых (1.15)

$$l_k = \{z; z = r e^{i \frac{2\pi}{3} k}, 0 \leq r < +\infty\} \quad (k = -1, 0, 1).$$

На каждой из указанных полупрямых

$$l_{-1} = (0, \alpha^{-1}(\infty)), l_0 = (0, +\infty), l_1 = (0, \alpha(\infty)), \quad (2.2)$$

где $\alpha = \exp\left\{i \frac{2\pi}{3}\right\}$, корнями функции $e_\sigma(z; \nu)$ будут, соответственно, следующие три последовательности чисел:

$$\{\mu_k^-\}_1^\infty = \{\alpha^{-1} \sqrt[3]{r_k}\}_1^\infty \subset l_{-1}, \{\mu_k^0\}_1^\infty = \{\sqrt[3]{r_k}\}_1^\infty \subset l_0, \quad (2.3)$$

$$\{\mu_k^+\}_1^\infty = \{\alpha \sqrt[3]{r_k}\}_1^\infty \subset l_1$$

при этом, очевидно, что

$$(\mu_k^-)^3 = (\mu_k^0)^3 = (\mu_k^+)^3 = r_k \quad (1 \leq k < +\infty). \quad (2.4)$$

Введем теперь единую нумерацию для всех корней функции $e_\sigma(z; \nu)$, определив последовательность чисел $\{\mu_k\}_1^\infty$ таким образом:

$$\mu_{3k-2} = \mu_k^-, \mu_{3k-1} = \mu_k^0, \mu_{3k} = \mu_k^+ \quad (1 \leq k < +\infty). \quad (2.5)$$

При этом, как следует из (1.24) и (1.25), справедливы двойные неравенства

$$|\mu_k^-| = |\mu_k^0| = |\mu_k^+| \asymp |\mu_k| \asymp (1+k)^{2/3} \quad (1 \leq k < +\infty). \quad (2.6)$$

Наконец, всюду дальше условимся добавить к нашей последовательности $\{\mu_k\}_1^\infty$ корней функции $e_\sigma(z; \nu)$ еще один начальный член — $\mu_0^+ = \mu_0 = r_0 = 0$.

(6) В теореме II имеются два утверждения — 1° и 2°, где при двух различных условиях (1.28) и (1.32), накладываемых на параметр ν , устанавливается изоморфизм пространства целых функций $W_{1/2, \sigma}^{p, x}$ с пространствами последовательностей $\{c_k\}_1^\infty \in l^{p, 1+2x}$ или $\{d_k\}_0^\infty \in l^{p, 1+2x}$ в обычном предположении, что $1 < p < +\infty$ и $-1 < x < p-1$.

Рассмотрим теперь введенные нами в лемме 1.3 пространства

$$W_{1/2, \sigma}^{p, x_j} \quad (j = -1, 0, 1), \text{ где по (1.19), } x_j = \frac{\omega - 2 + (1+j)p}{3} \quad (j = -1, 0, 1).$$

Как уже отмечалось в заключительном замечании 2 к пункту 1.2, если $-1 < \omega < p-1$, то интервалы изменения параметров x_j ($j = -1, 0, 1$) не имеют общих точек. Следовательно, вопрос об одновременной примени-

мости для всех этих трех пространств утверждений 1° или 2° теоремы II нуждается в выяснении. К этому мы и приступим ниже.

С этой целью, во-первых, отметим, что если ввести параметр

$$\tau = \frac{2(1+\omega)}{3p}, \quad (2.7)$$

то будем иметь

$$\frac{2(1+\omega)}{p} = \frac{2(1+j)}{3} + \tau \quad (j = -1, 0, 1), \quad (2.8)$$

причем, поскольку $-1 < \omega < p-1$, то

$$0 < \tau < \frac{2}{3}. \quad (2.7')$$

Во-вторых, отметим, что утверждение 1° теоремы II применимо для каждого из наших классов $W_{1/2, j}^{p, \tau}$ ($j = -1, 0, 1$), если параметр удовлетворяет соответствующему условию вида (1.28). Эти условия в случае 1° соответственно запишутся таким образом:

$$\nu \in \Delta_j(1^\circ) = \left(\tau + \frac{2j-1}{3}, \tau + \frac{2j+2}{3} \right), \quad (j = -1, 0, 1). \quad (2.9)$$

Но кроме этих требований мы, разумеется, должны потребовать, чтобы параметр ν не вышел из $[0, 2)$.

В-третьих, наконец, мы аналогично легко приходим к заключению, что условие (1.32) на допустимые значения параметра $\nu \in [0, 2)$, обеспечивающие справедливость утверждения 2° теоремы II, для каждого из наших классов целых функций $W_{1/2, j}^{p, \tau}$ ($j = -1, 0, 1$), соответственно, пишется в виде

$$\nu \in \Delta_j(2^\circ) = \left(\tau + \frac{2j+2}{3}, \tau + \frac{2j+5}{3} \right), \quad (j = -1, 0, 1). \quad (2.10)$$

Считаем не лишним особо отметить хотя и ясный смысл введенных обозначений. Например, если при данном j ($j = -1, 0, 1$) параметр $\nu \in \Delta_j(1^\circ)$, то для класса $W_{1/2, j}^{p, \tau}$ имеет место утверждение 1° теоремы II. Аналогичный смысл имеет и условие $\nu \in \Delta_j(2^\circ)$.

(в) Легко видеть, что взятые в отдельности обе тройки интервалов (2.9) и (2.10) имеют лишь пустое пересечение. Это значит, что отдельно взятые утверждение 1° или утверждение 2° теоремы II не могут быть применимы для всех трех классов $W_{1/2, j}^{p, \tau}$ ($j = -1, 0, 1$) одновременно.

Однако, как мы убедимся ниже, можно двумя вариантами подобрать три разных интервала из указанных выше шести, которые все же имеют не пустое пересечение.

Вариант I: пересечение интервалов

$$\Delta_{-1}(2^\circ) \cap \Delta_0(1^\circ) \cap \Delta_1(1^\circ) = \Delta_1 = \left(\tau + \frac{1}{3}, \tau + \frac{2}{3} \right). \quad (2.11)$$

В а р и а н т II: пересечение интервалов

$$\Delta_{-1}(2^\circ) \cap \Delta_0(2^\circ) \cap \Delta_1(1^\circ) = \Delta_2 = \left(\gamma + \frac{2}{3}, \gamma + 1\right). \quad (2.12)$$

Отметим при этом, что ввиду (2.7')

$$\Delta_1 \subset (1/3, 4/3) \subset [0, 2) \text{ и } \Delta_2 \subset \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) \subset [0, 2).$$

и, таким образом, в обоих случаях при $\gamma \in \Delta_1$ или $\gamma \in \Delta_2$ утверждения 1° или 2° теоремы II применимы одновременно к нашим трем классам

$$W_{1/2, \sigma}^{p, \kappa-1}, W_{1/2, \sigma}^{p, \kappa}, W_{1/2, \sigma}^{p, \kappa_1}. \quad (2.13)$$

При этом их следует применить в той же последовательности, в которой наши интервалы $\Delta_j(1^\circ)$ или $\Delta_j(2^\circ)$ ($j = -1, 0, 1$) появляются в определенных (2.11) или (2.12) интервалах Δ_1 или Δ_2 .

(г) В качестве непосредственного применения теоремы II к классам (2.13) мы приходим к следующим леммам.

Лемма 2.1. Пусть параметр γ удовлетворяет условию

$$\gamma \in \Delta_1 = (\gamma + 1/3, \gamma + 2/3), \quad \gamma = \frac{2(1 + \omega)}{3\rho}. \quad (2.14)$$

Тогда посредством рядов вида

$$\varphi_{-1}(\omega) = \varphi_{-1,0} \Gamma(1 + \gamma) G_\sigma(\omega; \gamma) + \left| \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{-1,k} \frac{\omega G_\sigma(\omega; \gamma)}{r_k G_\sigma(r_k; \gamma)(\omega - r_k)} \right|, \quad (2.15)$$

$$\varphi_j(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{j,k} \frac{G_\sigma(\omega; \gamma)}{G_\sigma(r_k; \gamma)(\omega - r_k)} \quad (j = 0, 1) \quad (2.16)$$

одновременно осуществляется взаимно-однозначное и непрерывное отображение пространств функций $W_{1/2, \sigma}^{p, \kappa_j}$ ($j = 1, 0, 1$), соответственно, на пространства последовательностей

$$\{\varphi_{-1,k}\}_0^\infty \in l^{p, \omega-1}, \quad \{\varphi_{0,k}\}_1^\infty \in l^{p, \omega}, \quad \{\varphi_{1,k}\}_1^\infty \in l^{p, \omega_1}, \quad (2.17)$$

где ввиду (1.19)

$$\omega_j = 1 + 2\kappa_j = \frac{2\omega - 1 + 2(1 + j)\rho}{3} \quad (j = -1, 0, 1). \quad (2.18)$$

Ряды эти сходятся к своим суммам $\varphi_j(\omega)$ ($j = -1, 0, 1$), соответственно, в метриках пространств $W_{1/2, \sigma}^{p, \kappa_j}$ ($j = -1, 0, 1$) и равномерно в любом круге $|\omega| < R < +\infty$.

При этом выполняются интерполяционные условия

$$\varphi_{-1,k} = \varphi_{-1}(r_k), \quad (0 \leq k < +\infty); \quad \varphi_{j,k} = \varphi_j(r_k), \quad (j = 0, 1, k \geq 1) \quad (2.19)$$

и двусторонние оценки

$$\|\varphi_{-1}\|_{p, \kappa-1} \asymp \|\varphi_{-1}\|_0^\infty \| \cdot \|_{p, \omega-1}, \quad \|\varphi_j\|_{p, \kappa_j} \asymp \|\varphi_j\|_1^\infty \| \cdot \|_{p, \omega_j} \quad (j = 0, 1). \quad (2.20)$$

Лемма 2.2. Пусть параметр ν удовлетворяет условию

$$\nu \in \Delta_2 = (\gamma + 2/3, \gamma + 1), \quad \gamma = \frac{2(1 + \omega)}{3p}. \quad (2.21)$$

Тогда посредством рядов вида

$$\varphi_j(w) = \varphi_{j,0} \Gamma(1 + \nu) G_2(w; \nu) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{j,k} \frac{w G_2(w; \nu)}{r_k G_2(r_k; \nu) (w - r_k)} \quad (j = -1, 0), \quad (2.22)$$

$$\varphi_1(w) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{1,k} \frac{G_2(w; \nu)}{G_2(r_k; \nu) (w - r_k)} \quad (2.23)$$

одновременно осуществляется взаимно-однозначное и непрерывное отображение пространств функций $W_{1/2, \nu}^{p, \omega_j} (j = -1, 0, 1)$, соответственно, на пространства последовательностей

$$\{\varphi_{j,k}\}_0^{\infty} \in l^{p, \omega_j} (j = -1, 0); \quad \{\varphi_{1,k}\}_1^{\infty} \in l^{p, \omega_1}, \quad (2.24)$$

где значения $\omega_j (j = -1, 0, 1)$ вновь определяются из (2.18).

Природа сходимости этих рядов такая же, что и в лемме 2.1, при этом выполняются интерполяционные условия

$$\varphi_{j,k} = \varphi_j(r_k) \quad (j = -1, 0; 0 \leq k < +\infty); \quad \varphi_{1,k} = \varphi_1(r_k) \quad (k \geq 1). \quad (2.25)$$

и двусторонние оценки

$$\|\varphi_j\|_{p, \omega_j} \asymp \|\{\varphi_{j,k}\}_0^{\infty}\|_{p, \omega_j} \quad (j = -1, 0); \quad \|\varphi_1\|_{p, \omega_1} \asymp \|\{\varphi_{1,k}\}_1^{\infty}\|_{p, \omega_1}. \quad (2.26)$$

2.2 (а) Как было установлено в леммах 1.1 и 1.3, посредством формулы

$$\Phi(z) = \sum_{j=-1}^1 z^{1+j} \varphi_j(z^3), \quad (2.27)$$

где

$$\varphi_j(w) \in W_{1/2, \nu}^{p, \omega_j}, \quad \omega_j = \frac{\omega - 2 + (1+j)p}{3} \quad (j = -1, 0, 1) \quad (2.28)$$

исчерпывается весь класс функций $\Phi(z) \in W_{3/2, \nu}^{p, \omega} (1 < p < +\infty, -1 < \omega < p-1)$. При этом имеют место также соотношения обращения

$$\varphi_{-1}(z^3) = 3^{-1} \sum_{k=-1}^1 \Phi(\alpha^k z), \quad z \varphi_0(z^3) = 3^{-1} \sum_{k=-1}^1 \alpha^k \Phi(\alpha^{-k} z), \quad (2.29)$$

$$z^2 \varphi_1(z^3) = 3^{-1} \sum_{k=-1}^1 \alpha^k \Phi(\alpha^k z).$$

Теперь, опираясь на соотношения (2.27)—(2.29) и на леммы 2.1—2.2, установим двусторонние оценки между нормами числовых последовательностей $\{\Phi(\mu_k)\}$, $\{\varphi_j(r_k)\}_{-1}^1$ и функций $\Phi(z)$, $\{\varphi_j(w)\}_{-1}^1$.

При этом, в соответствии с указанными леммами, мы должны различать два случая—когда последовательности корней $\{r_k\}_1^{\infty}$ функции

$G_\nu(w; \nu)$, или корней $\{\mu_k\}_1^\infty$ функции $e_\nu(z; \nu) = G_\nu(z^3; \nu)$ порождаются для значений параметра ν , соответственно, принадлежащих интервалом Δ_1 и Δ_2 .

(6) Напомним, написав их вместе, введенные нами выше обозначения

$$\mu_0^- = r_0 = 0, \mu_k^- = \alpha^{-1} \sqrt[3]{r_k}, \mu_k^0 = \sqrt[3]{r_k}, \mu_k^+ = \alpha \sqrt[3]{r_k} \quad (1 \leq k < +\infty),$$

$$\alpha = \exp \left\{ \frac{2\pi}{3} i \right\}, \quad (2.30)$$

$$\mu_{3k-2}^+ = \mu_k^-, \mu_{3k-1}^+ = \mu_k^0, \mu_{3k}^+ = \mu_k^+ \quad (1 \leq k < +\infty)$$

и таким образом

$$\{\mu_k\}_1^\infty = \{\mu_k^-\}_1^\infty \cup \{\mu_k^0\}_1^\infty \cup \{\mu_k^+\}_1^\infty, \mu_0 = 0.$$

Докажем лемму.

Лемма 2.3. Пусть параметр

$$\nu \in \Delta_1 = \left(\gamma + \frac{1}{3}, \gamma + \frac{2}{3} \right), \quad \gamma = \frac{2(1+\omega)}{3\rho}.$$

Тогда справедливы следующие двусторонние оценки:

$$1^\circ. \quad \|\Phi, L_{p, \omega}^r\| \asymp \sum_{j=-1}^1 \|\varphi_j\|_{p, \omega_j}^r \asymp$$

$$\asymp \|\varphi_{-1}(r_k)\|_0^\infty \|_{p, \omega_{-1}} + \|\varphi_0(r_k)\|_1^\infty \|_{p, \omega_0} + \|\varphi_1(r_k)\|_1^\infty \|_{p, \omega_1}, \quad (2.31)$$

для значений $s = 1$ и $s = p$.

$$2^\circ. \quad \|\Phi, L_{p, \omega}\| \asymp \|\{\Phi(\mu_k)\}_0^\infty\|_{p, \omega_{-1}}. \quad (2.32)$$

Доказательство. 1°. Утверждения (2.31) непосредственно следуют из лемм 1.3 и 2.1.

2°. Отметим сначала, что ввиду (2.27), (2.30) и обозначений (2.30) будем иметь

$$|\Phi(\mu_0^-)| = |\Phi(0)| = |\varphi_{-1}(r_0)|,$$

$$\left. \begin{aligned} |\Phi(\mu_k^-)| &= |\Phi(\mu_{3k-2}^+)| \\ |\Phi(\mu_k^0)| &= |\Phi(\mu_{3k-1}^+)| \\ |\Phi(\mu_k^+)| &= |\Phi(\mu_{3k}^+)| \end{aligned} \right\} \leq |\varphi_{-1}(r_k)| + r^{1/3} |\varphi_0(r_k)| + r^{2/3} |\varphi_1(r_k)|.$$

Из этих оценок, учитывая, что по (1.26) и (2.18) для $1 \leq k < +\infty$

$$r_k \asymp (1+k)^2; \quad \omega_{-1} + \frac{2}{\rho} = \omega_0, \quad \omega_{-1} + \frac{4}{\rho} = \omega_1, \quad (2.33)$$

получим неравенства вида

$$|\Phi(\mu_0)| = |\varphi_{-1}(r_0)|,$$

$$\begin{aligned}
& |\Phi(\mu_{3k-2})|(-1+3k)^{\omega-1/p} + |\Phi(\mu_{3k-1})|(3k)^{\omega-1/p} + \\
& + |\Phi(\mu_{3k})|(1+3k)^{\omega-1/p} \leq c_p |\varphi_{-1}(r_k)|(1+k)^{\omega-1/p} + \\
& + |\varphi_0(r_k)|(1+k)^{\omega_0/p} + |\varphi_1(r_k)|(1+k)^{\omega_1/p}, \quad 1 \leq k < +\infty,
\end{aligned}$$

где $c_p > 0$ — постоянные, не зависящие от наших функций и от k .

Возведем все эти неравенства в степень p и пользуясь тем, что вообще $(a+b+c)^p \leq 3^{p-1}(a^p+b^p+c^p)$, $(0 < a, b, c < +\infty)$, суммируем их по индексу $0 \leq k < +\infty$. В результате приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} |\Phi(\mu_k)|^p (1+k)^{\omega-1} = \|\{\Phi(\mu_k)\}_0^\infty\|_{p, \omega-1}^p \leq \\
& \leq c_p^{(2)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_{-1}(r_k)|^p (1+k)^{\omega-1} + \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_0(r_k)|^p (1+k)^{\omega_0} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_1(r_k)|^p (1+k)^{\omega_1} \right\} = c_p^{(2)} \left\{ \|\varphi_{-1}(r_k)\|_0^\infty{}^p_{p, \omega-1} + \right. \\
& \quad \left. + \|\varphi_0(r_k)\|_1^\infty{}^p_{p, \omega_0} + \|\varphi_1(r_k)\|_1^\infty{}^p_{p, \omega_1} \right\},
\end{aligned}$$

откуда, в силу оценки (2.31), при $s = p$ получаем

$$\|\{\Phi(\mu_k)\}_0^\infty\|_{p, \omega-1} \leq c_p^{(3)} \|\Phi\|_{p, \omega}. \quad (2.32')$$

Для завершения доказательства обратимся теперь к представлениям (2.29) функций $\{\varphi_j(\omega)\}_{-1}^1$, положив в них последовательно $z = \mu_k^-$, $z = \mu_k^0$, $z = \mu_k^+$. Тогда, ввиду (2.30), получим

$$|\varphi_{-1}(r_0)| = |\Phi(0)| = |\Phi(\mu_0)|$$

и для $1 \leq k < +\infty$

$$\left. \begin{aligned}
& |\varphi_{-1}(\mu_k^-)| \\
& r_k^{1/3} |\varphi_0(\mu_k^0)| \\
& r_k^{2/3} |\varphi_1(\mu_k^+)|
\end{aligned} \right\} \leq \frac{1}{3} (|\Phi(\mu_{3k-2})| + |\Phi(\mu_{3k-1})| + |\Phi(\mu_{3k})|).$$

Как и выше, ввиду (2.33), отсюда следуют неравенства

$$\begin{aligned}
& |\varphi_{-1}(r_0)|^p = |\Phi(\mu_0)|^p, \\
& \left| \begin{aligned}
& |\varphi_{-1}(r_k)|^p (1+k)^{\omega-1} \\
& |\varphi_0(r_k)|^p (1+k)^{\omega_0} \\
& |\varphi_1(r_k)|^p (1+k)^{\omega_1}
\end{aligned} \right\} \leq c_p^{(4)} \sum_{j=0}^2 |\Phi(\mu_{3k-j})|^p (1+3k-j)^{\omega-j}
\end{aligned}$$

($1 \leq k < +\infty$),

суммированием которых по индексу k ($0 \leq k < +\infty$) получаем

$$\begin{aligned}
& \|\{\varphi_{-1}(r_k)\}_0^\infty\|_{p, \omega-1}^p + \|\{\varphi_0(r_k)\}_1^\infty\|_{p, \omega_0}^p + \|\{\varphi_1(r_k)\}_1^\infty\|_{p, \omega_1}^p \leq \\
& \leq c_p^{(4)} \|\{\Phi(\mu_k)\}_0^\infty\|_{p, \omega-1}^p.
\end{aligned}$$

Отсюда, в силу (2.31), для $s = p$ приходим к неравенству, обратному к (2.32')

$$\|\Phi\|; L_{p, \infty-1} < c_p^{(4)} \|\{\Phi(\mu_k)\}_0^\infty\|_{p, \infty-1}. \quad (2.32')$$

Из (2.32') и (2.32'') следует наше утверждение.

Теперь, наряду с нормой $\|\{\Phi(\mu_k)\}_0^\infty\|_{p, \infty-1}$, несколько увеличив ее, определим также норму вида

$$\|\{\Phi(\mu_k)\}_0^\infty\|_{p, \infty-1} = \left(|\Phi'(\mu_0)|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |\Phi(\mu_k)|^p (1+k)^{p-1} \right)^{1/p}. \quad (2.34)$$

Тогда справедлива

Лемма 2.4. Пусть параметр

$$\nu \in \Delta(\Pi) = (\gamma + 2/3, \gamma + 1), \quad \gamma = \frac{2(1+\omega)}{3p}.$$

Тогда справедливы следующие двусторонние оценки:

$$\begin{aligned} 1^\circ. \quad \|\Phi\|; L_{p, \infty} &\asymp \sum_{j=-1}^1 \|\varphi_j\|_{p, \infty}^s \asymp \\ &\asymp \|\varphi_{-1}(r_k)\|_{p, \infty-1}^s + \|\varphi_0(r_k)\|_{p, \infty}^s + \|\varphi_1(r_k)\|_{p, \infty}^s, \end{aligned} \quad (2.35)$$

для значений $s = 1$ и $s = p$.

$$2^\circ. \quad \|\Phi\|; L_{p, \infty} \asymp \|\{\Phi(\mu_k)\}_0^\infty\|_{p, \infty-1}. \quad (2.36)$$

Доказательство. 1°. Утверждения (2.35) вытекают из лемм 1.3 и 2.1.

2°. В этом случае в (2.35) в записанных справа нормах последовательностей чисел наряду с числом $\varphi_{-1}(r_0) = \Phi(\mu_0) = \Phi(0)$, что имелось уже в лемме 2.3, появилось также число $\varphi_0(r_0) = \Phi'(\mu_0) = \Phi'(0)$. Поэтому повторять выкладки и оценки, проведенные нами в процессе доказательства леммы 2.3, разумеется, нет надобности.

§ 3. Теоремы интерполяции

Перейдем теперь к формулировке и доказательству основных теорем об интерполяционных разложениях целых функций класса $W_{3/2, \sigma}^{p, \infty}$ с узлами в корнях $\{\mu_k\}_1^\infty$ целой функции

$$e_\sigma(z; \nu) = G_\sigma(z^3; \nu) = E_{1/2}(-\sigma^2 z^3; 1 + \nu) \quad (3.1)$$

порядка $3/2$ и типа σ .

3.1 (а) Сначала приведем теорему единственности, непосредственно следующую из двойных оценок (2.31) и (2.36) лемм 2.3 и 2.4.

Теорема 3.1. Пусть $\{\mu_k\}_1^\infty$ — последовательность корней функции $\Phi(z) \in W_{3/2, \sigma}^{p, \infty}$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$).

1°. Если

$$\nu \in \Delta_1 = \left(\gamma + \frac{1}{3}, \gamma + \frac{2}{3} \right),$$

то из равенств

$$\Phi(0) = \Phi(\mu_0) = \Phi(\mu_k) = 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

следует тождество $\Phi(z) \equiv 0$.

$$2^\circ. \text{ Если } \nu \in \Delta_2 = \left(\gamma + \frac{2}{3}, \gamma + 1\right),$$

и кроме равенств (2.37) имеем также $\Phi'(0) = 0$, то вновь будем иметь $\Phi(z) \equiv 0$.

(6) Теорема 3.2. Пусть $\nu \in \Delta_1 = \left(\gamma + \frac{1}{3}, \gamma + \frac{2}{3}\right)$ и, как всегда

$$\gamma = \frac{2(1+\omega)}{3p} \quad (1 < p < +\infty, -1 < \omega < p-1).$$

1°. Рядами вида

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \Phi_0 \Gamma(1+\nu) e_\sigma(z; \nu) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \frac{z e_\sigma(z; \nu)}{\mu_k e'_\sigma(\mu_k; \nu) (z - \mu_k)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

осуществляется взаимно-однозначное и непрерывное отображение всего пространства $l^{p, \omega-1}$ последовательностей $\{\Phi_k\}_0^\infty$ с нормой

$$\|\{\Phi_k\}_0^\infty\|_{p, \omega-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\Phi_k|^p (1+k)^{\omega-1} \right)^{1/p} < +\infty, \quad \omega-1 = \frac{2\omega-1}{3}$$

на все пространство функций $\Phi(z) \in W_{3/2, \sigma}^{p, \omega}$.

2°. При условии $\|\{\Phi_k\}_0^\infty\|_{p, \omega-1} < +\infty$ ряд вида (3.2) сходится к своей сумме $\Phi(z)$ в метрике пространства $W_{3/2, \sigma}^{p, \omega}$ и равномерно в любом круге $|z| \leq R < +\infty$. При этом выполняются интерполяционные условия

$$\Phi(\mu_k) = \Phi_k \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

и двусторонние неравенства

$$\|\Phi\|_{L_{p, \omega}} \asymp \|\{\Phi_k\}_0^\infty\|_{p, \omega-1}. \quad (3.4)$$

Доказательство. Для любого элемента $\{\Phi_k\}_0^\infty \in l^{p, \omega-1}$ определим три последовательности чисел $\{\varphi_{-1, k}\}_0^\infty$, $\{\varphi_{0, k}\}_1^\infty$ и $\{\varphi_{1, k}\}_1^\infty$, положив $\varphi_{-1, 0} = \Phi_0$,

$$\varphi_{-1, k} = \frac{1}{3} [\Phi_{3k-2} + \Phi_{3k-1} + \Phi_{3k}],$$

$$r_k^{1/3} \varphi_{0, k} = \frac{1}{3} [\alpha \Phi_{3k-2} + \Phi_{3k-1} + \alpha^{-1} \Phi_{3k}] \quad (1 \leq k < +\infty), \quad (3.5)$$

$$r_k^{2/3} \varphi_{1, k} = \frac{1}{3} [\alpha^{-1} \Phi_{3k-2} + \Phi_{3k-1} + \alpha \Phi_{3k}].$$

Заметив, что $1 + k \asymp 1 + 3k \asymp 3k \asymp 3k - 1$ ($1 \leq k < +\infty$) и пользуясь неравенством Минковского, получим

$$\begin{aligned} \| \{\varphi_{-1, k}\}_0^\infty \|_{p, \omega_{-1}} &\leq c_p \{ \| \{\Phi_{3k-2}\}_1^\infty \|_{p, \omega_{-1}} + \| \{\Phi_{3k-1}\}_1^\infty \|_{p, \omega_{-1}} + \\ &+ \| \{\Phi_{3k}\}_0^\infty \|_{p, \omega_{-1}} \} \leq 3 c_p \| \{\Phi_k\} \|_{p, \omega_{-1}}, \end{aligned}$$

и, значит, $\{\varphi_{-1, k}\}_0^\infty \in l^{p, \omega_{-1}}$. Вполне аналогично убедимся также в том, что $\{\varphi_{0, k}\}_1^\infty \in l^{p, \omega_0}$ и $\{\varphi_{1, k}\}_1^\infty \in l^{p, \omega_1}$, если еще раз вспомним, что $r_k \asymp (1+k)^2$ и $\omega_{-1} + \frac{2p}{3} = \omega_0$, $\omega_{-1} + \frac{4p}{3} = \omega_1$.

С помощью введенных нами трех последовательностей, посредством трех рядов (2.15) и (2.16) леммы 2.1 образуем три функции $\varphi_j(\omega) \in W_{1/2, 0}^{p, \omega_j}$ ($j = -1, 0, 1$), которые по той же лемме удовлетворяют интерполяционным условиям (2.19). Наконец, с помощью введенных трех функций мы можем определить уже функцию

$$\Phi(z) = \varphi_{-1}(z^3) + z \varphi_0(z^3) + z^2 \varphi_1(z^3),$$

входящую в класс $W_{3/2, 0}^{p, \omega}$ согласно лемме 1.3.

Если теперь воспользоваться разложениями (2.14)–(2.16) леммы 2.1, то функцию $\Phi(z)$ сможем представить в виде суммы ряда

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \varphi_{-1, 0} \Gamma(1 + \nu) e_\nu(z; \nu) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z e_\nu(z; \nu)}{r_k G'_\nu(r_k; \nu)} [\varphi_{-1, k} z^3 + \varphi_{0, k} r_k + \varphi_{1, k} r_k^2]. \end{aligned}$$

Однако, пользуясь формулами (3.5) и тем, что $\alpha^3 = 1$, мы получим

$$\begin{aligned} &\varphi_{-1, k} z^3 + \varphi_{0, k} r_k + \varphi_{1, k} r_k^2 = \\ &= \frac{1}{3} \{ [z^3 + (\alpha^{-1} r_k^{1/3})^3 + (\alpha^{-1} r_k^{1/3}) z] \Phi_{3k-2} + \\ &+ [z^3 + r_k^{2/3} + r_k^{1/3} z] \Phi_{3k-1} + [z^2 + (\alpha r_k^{1/3})^3 + (\alpha r_k^{1/3}) z] \Phi_{3k} \} = \\ &= \frac{1}{3} (z^3 - r_k) \left\{ \frac{\Phi_{3k-2}}{z - \mu_k^-} + \frac{\Phi_{3k-1}}{z - \mu_k^0} + \frac{\Phi_{3k}}{z - \mu_k^+} \right\}, \end{aligned}$$

так как $\mu_k^0 = r_k^{1/3}$, $\mu_k^- = \alpha^{-1} \mu_k^0$, $\mu_k^+ = \alpha \mu_k^0$.

Следовательно, поскольку $\varphi_{-1, 0} = \Phi_0$, то разложение функции $\Phi(z)$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_0 \Gamma(1 + \nu) e_\nu(z; \nu) + \\ &+ \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z e_\nu(z; \nu)}{r_k G'_\nu(r_k; \nu)} \left\{ \frac{\Phi_{3k-2}}{z - \mu_k^-} + \frac{\Phi_{3k-1}}{z - \mu_k^0} + \frac{\Phi_{3k}}{z - \mu_k^+} \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, наконец, что по (2.30)

$$(\mu_{3k-2})^3 = (\mu_{3k-1})^3 = (\mu_{3k})^3 = r_k, \quad (3.7)$$

а также, что в силу (3.1) $z e'_\nu(z; \nu) = 3 z^3 G'_\nu(z^3; \nu)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mu_{3k-2} e'_\sigma(\mu_{3k-2}; \nu) &= \mu_{3k-1} e'_\sigma(\mu_{3k-1}; \nu) = \\ &= \mu_{3k} e'_\sigma(\mu_{3k}; \nu) = 3 r_k G'_\sigma(r_k; \nu), \end{aligned}$$

вследствие чего наше разложение запишется в виде

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_0 \Gamma(1 + \nu) e_\sigma(z; \nu) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \frac{z e_\sigma(z; \nu)}{\mu_k e'_\sigma(\mu_k; \nu)(z - \mu_k)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Что касается природы сходимости этого разложения, то оно непосредственно следует из того, что подставляемые нами в формулу (3.6) ряды всех трех функций $\{z^{1+\nu/\varphi_j}(z^3)\}_{j=1}^{\infty}$, согласно лемме 2.1, сходятся уже в одной и той же метрике $W_{3/2, \sigma}^{p, \infty}$, а также равномерно в любом круге $|z| \leq R < +\infty$. Легко убедиться, что построенная таким образом функция $\Phi(z)$ удовлетворяет интерполяционным данным: $\Phi(\mu_k) = \Phi_k (k=0, 1, 2, \dots)$.

Итак, любому элементу $\{\Phi_k\}_0^\infty \in l^{p, \infty-1}$ посредством ряда (3.8), обладающим требуемыми теоремой свойствами сходимости, нами был поставлен в соответствие некоторый элемент $\Phi(z) \in W_{3/2, \sigma}^{p, \infty}$ со свойством (3.3). Поэтому, согласно лемме 2.3, верны и двойные оценки (3.4) теоремы.

Теперь проведем обратное рассуждение. Если $\Phi(z) \in W_{3/2, \sigma}^{p, \infty}$, то по лемме 2.3 $\{\Phi(\mu_k)\}_0^\infty \in l^{p, \infty-1}$. Поэтому сумма ряда

$$\begin{aligned} \Phi_*(z) &= \Phi(\mu_0) \Gamma(1 + \nu) e_\sigma(z; \nu) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(\mu_k) \frac{z e_\sigma(z; \nu)}{\mu_k e'_\sigma(\mu_k; \nu)(z - \mu_k)}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

как уже было установлено выше, определяет функцию $\Phi_*(z) \in W_{3/2, \sigma}^{p, \infty}$ с интерполяционными данными

$$\Phi_*(\mu_k) = \Phi(\mu_k) \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Но очевидно, что имеем также

$$\psi(z) \equiv \Phi_*(z) - \Phi(z) \in W_{3/2, \sigma}^{p, \infty}$$

причем $\psi(\mu_k) = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots)$.

Отсюда по теореме единственности 3.1 следует, что $\psi(z) \equiv 0$. А это значит, что $\Phi_*(z) \equiv \Phi(z)$ и, как нетрудно проследить, теорема полностью доказана.

(в) Теперь обозначим через $l^{p, \infty-1}$ пространство последовательностей комплексных чисел $\{\Phi_k\}_0^\infty$, для которых конечна норма

$$\|\{\Phi_k\}_0^\infty\|_{p, \infty-1} = \{|\Phi_0|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |\Phi_k|^p (1+k)^{\infty-1}\}^{1/p} < +\infty. \quad (3.10)$$

Теорема 3.3. Пусть $\nu \in \Delta_2 = \left(\gamma + \frac{2}{3}, \gamma + 1\right)$, где, по-прежнему

$$\gamma = \frac{2(1+\omega)}{3p} \quad (1 < p < +\infty, -1 < \omega < p-1).$$

1°. Рядами вида

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \Phi_0 \Gamma(1+\nu) e_\nu(z; \nu) + \Phi_0^* \Gamma(1+\nu) z e_\nu(z; \nu) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \frac{z^2 e_\nu(z; \nu)}{\mu_k^2 e_\nu(\mu_k; \nu) (z - \mu_k)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

реализуется взаимно-однозначное и непрерывное отображение всего пространства $l_{\sigma}^{p, \infty-1}$ последовательностей $\{\Phi_0, [\Phi_k]_0^{\infty}\}$ на все пространство целых функций $W_{3/2, \sigma}^{p, \infty}$.

2°. При условии $\{\Phi_0, [\Phi_k]_0^{\infty}\} \in l_{\sigma}^{p, \infty-1}$ ряд вида (3.11) сходится к своей сумме $\Phi(z)$ в метрике пространства $W_{3/2, \sigma}^{p, \infty}$ и равномерно в любом круге $|z| \leq R < +\infty$. Кроме того, функция $\Phi(z)$ удовлетворяет интерполяционным данным

$$\Phi'(\mu_0) = \Phi'(0) = \Phi_0', \quad \Phi(\mu_k) = \Phi_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.12)$$

и двусторонним неравенствам

$$\|\Phi; L_{p, \omega} \asymp \|(\Phi_k)_0^{\infty}\|_{l_{p, \omega-1}}. \quad (3.13)$$

Доказательство. В основном оно аналогично способу доказательства теоремы 3.2, и поэтому мы отметим лишь его главные элементы.

Для данного элемента $\{\Phi_k\}_0^{\infty} \in l_{\sigma}^{p, \infty-1}$ определим три последовательности чисел $\{\varphi_{-1, k}\}_0^{\infty}$, $\{\varphi_{0, k}\}_0^{\infty}$ и $\{\varphi_{1, k}\}_1^{\infty}$, обозначив

$$\varphi_{-1, 0} = \Phi_0,$$

$$\varphi_{-1, k} = \frac{1}{3} [\Phi_{3k-2} + \Phi_{3k-1} + \Phi_{3k}], \quad (3.14)$$

$$\varphi_{0, 0} = \Phi_0^*,$$

$$r_k^{1/3} \varphi_{0, k} = \frac{1}{3} [\alpha \Phi_{3k-2} + \Phi_{3k-1} + \alpha^{-1} \Phi_{3k}],$$

$$r_k^{2/3} \varphi_{1, k} = \frac{1}{3} [\alpha^{-1} \Phi_{3k-2} + \Phi_{3k-1} + \alpha \Phi_{3k}].$$

Далее, как и в теореме 3.2, убеждаемся, что эти последовательности имеют конечные нормы, соответственно, в пространствах $l_{\sigma}^{p, \infty j}$ ($j = -1, 0, 1$). Но тогда с помощью введенных нами трех последовательностей, мы, пользуясь формулами (2.22) и (2.23) леммы 2.2, сможем образовать три функции $\varphi_j(\omega) \in W_{1/2, \sigma}^{p, \infty j}$ ($j = -1, 0, 1$), которые удовлетворяют интерполяционным условиям (2.25).

Посредством этих трех функций определяем, далее функцию

$$\Phi(z) = \varphi_{-1}(z^3) + z \varphi_0(z^3) + z^2 \varphi_1(z^3) \in W_{3/2, \sigma}^{p, \infty},$$

которая, в силу разложений (2.22) и (2.23) леммы 2.2, может быть представлена в виде суммы ряда

$$\Phi(z) = \varphi_{-1,0} \Gamma(1+\nu) e_\sigma(z; \nu) + \varphi_{0,0} \Gamma(1+\nu) z e_\sigma(z; \nu) + \\ + \sum \frac{z^3 e_\sigma(z; \nu)}{r_k e'_\sigma(r_k; \nu) (z^3 - r_k)} [r_k \varphi_{1,k} + z^2 \varphi_{0,k} + z \varphi_{-1,k}]. \quad (3.15)$$

Но пользуясь значениями из (3.14) и тем, что $\mu_k^- = \alpha^{-1} r_k^{1/3}$, $\mu_k^0 = r_k^{1/3}$, $\mu_k^+ = \alpha r_k^{1/3}$, мы получим тождество

$$\frac{z \varphi_{-1,k} + z^2 \varphi_{0,k} + r_k \varphi_{1,k}}{z^3 - r_k} = \\ = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\Phi_{3k-2}}{\mu_k^- (z - \mu_k^-)} + \frac{\Phi_{3k-1}}{\mu_k^0 (z - \mu_k^0)} + \frac{\Phi_{3k}}{\mu_k^+ (z - \mu_k^+)} \right\}.$$

Отсюда следует, что разложение (3.15) можно записывать в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0 \Gamma(1+\nu) e_\sigma(z; \nu) + \Phi_0^* \Gamma(1+\nu) z e_\sigma(z; \nu) + \\ + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^3 e_\sigma(z; \nu)}{r_k G_\sigma(r_k; \nu)} \left\{ \frac{\Phi_{3k-2}}{\mu_k^- (z - \mu_k^-)} + \right. \\ \left. + \frac{\Phi_{3k-1}}{\mu_k^0 (z - \mu_k^0)} + \frac{\Phi_{3k}}{\mu_k^+ (z - \mu_k^+)} \right\}. \quad (3.15')$$

Но вновь пользуясь свойствами (3.7) нашей последовательности $\{\mu_k\}$, заключаем, что (3.15') эквивалентна разложению (3.11) теоремы.

Все остальные утверждения теоремы устанавливаются рассуждениями, вполне аналогичными схеме доказательства теоремы 3.2, и поэтому мы их опускаем.

§ 4. Построение биортогональных систем трехкомпонентных вектор-функций

4.1 (а) Приведем, во-первых, формулировки двух основных теорем — специальные случаи ранних, значительно более общих результатов развитой первым из авторов теории гармонического анализа в комплексной области.

Отметим сначала же, что согласно определению (1.16), в случае, когда $p=2$, класс $W_{3/2, \sigma}^{2, \omega} (-1 < \omega < 1)$ — это множество целых функций $\Phi(z)$ порядка $\rho = 3/2$ и типа $\leq \tau$ с нормой

$$\|\Phi; L\|_{2, \omega} = \left(\int_L |\Phi(z)|^2 |z|^\omega |dz| \right)^{1/2} = \\ = \left(\sum_{j=-1}^1 \int_0^\infty |\Phi(z^j r)|^2 r^\omega dr \right)^{1/2} < +\infty, \quad (4.1)$$

где $\alpha = \exp\left\{\frac{2\pi}{3}i\right\}$.

Первая из этих теорем следующая (см. [1], гл. IV, теорему 4.1 в частном случае, когда $\rho = 3/2$).

Теорема III. Пусть $1/2 < \mu < 7/6$ и $\varphi(\tau) \in L_2(0, \sigma)$. Тогда
1°. Интеграл

$$F(z) = \int_0^{\sigma} E_{3/2}(z\tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} \varphi(\tau) d\tau \quad (4.2)$$

определяет целую функцию порядка $\leq 3/2$ и типа $\leq \sigma$.

2°. Справедливо неравенство вида

$$\sup_{\pi/3 < |\varphi| < \pi} \left\{ \int_0^{\infty} |F(re^{-i\varphi})|^2 r^{\omega} dr \right\} \leq M_{\mu} \int_0^{\sigma} |\varphi(\tau)|^2 d\tau, \quad (4.3)$$

где $\omega = 3\mu - 5/2$ и M_{μ} — постоянная, зависящая только от μ .

Второй необходимый нам результат — это теорема о параметрическом представлении класса $W_{3/2, \sigma}^{2, \omega}$. Она является частным случаем другой общей теоремы автора.

Для ее формулировки сначала введем обозначения

$$-\pi < \vartheta_{-1} = -\frac{2\pi}{3} < \vartheta_0 = 0 < \vartheta_1 = \frac{2\pi}{3} < \pi < \vartheta_2 = \vartheta_{-1} + 2\pi = \frac{4\pi}{3} \quad (4.4)$$

и заметим, что условие $\Phi(z) \in W_{3/2, \sigma}^{2, \omega}$ ($-1 < \omega < 1$) эквивалентно требованию о конечности интегралов

$$\int_0^{\infty} |\Phi(re^{-i\vartheta_j})|^2 r^{\omega} dr < +\infty \quad (j = -1, 0, 1). \quad (4.1')$$

Отметим еще, что в данном случае угловые области $(\vartheta_j, \vartheta_{j+1})$ ($j = -1, 0, 1$) имеют одинаковые растворы, равные $2\pi/3$, т. к. $\vartheta_0 - \vartheta_{-1} = \vartheta_1 - \vartheta_0 = \vartheta_2 - \vartheta_1 = \frac{2\pi}{3}$, а их биссектрисы направлены по лучам

$$\arg z = \vartheta_j = \frac{1}{2}(\vartheta_j + \vartheta_{j+1}) \quad (j = -1, 0, 1).$$

Заметив еще, что таким образом

$$\vartheta_{-1} = -\pi/3, \quad \vartheta_0 = \pi/3, \quad \vartheta_1 = \pi, \quad (4.5)$$

мы будем иметь (см. [1], теорему 6.13, при $\rho = 3/2$).

Теорема IV. 1°. Класс $W_{3/2, \sigma}^{2, \omega}$ ($-1 < \omega < 1$) совпадает с множеством функций $\Phi(z)$, допускающих представление

$$\Phi(z) = \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} E_{3/2}(e^{i\vartheta_j} z \tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} \varphi_j(\tau) d\tau, \quad (4.6)$$

где $\mu = 5/6 + \omega/3$, $\varphi_j(\tau) \in L_2(0, \sigma)$ ($j = -1, 0, 1$).

2°. Функции $\varphi_j(\tau)$ ($j = -1, 0, 1$) единственным образом определяются из формул

$$\frac{2i}{3\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}\mu} \psi_{j+1}(-\tau) - e^{i\frac{\pi}{2}\mu} \psi_j(\tau) \right\} =$$

$$= \begin{cases} \varphi_j(\tau), \tau \in (0, \sigma) \\ 0, \tau \in (\sigma, +\infty) \end{cases} \quad (j = -1, 0, 1), \quad (4.7)$$

где почти всюду на $(-\infty, \infty)$

$$\psi_j(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\tau} \int_0^\sigma \frac{e^{-i\tau v} - 1}{-iv} \Phi(e^{-i\theta_j} v^{2/3}) v^{\mu-1} dv. \quad (4.8)$$

Иначе говоря, посредством формул (4.6), (4.7), (4.8) реализуется линейное, взаимно-однозначное соответствие между элементами пространства $W_{3/2, \sigma}^{2, \mu}$ ($-1 < \omega < 1$) целых функций $\Phi(z)$ с нормой $\|\Phi; L_{2, \omega}\|$ и элементами пространства $L_2(0, \sigma)$ трехкомпонентных вектор-функций $\varphi(\tau) = \{\varphi_j(\tau)\}_{j=-1}^1$, $\varphi_j(\tau) \in L_2(0, \sigma)$ с нормой

$$\|\varphi\| = \left(\sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma |\varphi_j(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2}. \quad (4.9)$$

Упомянутое соответствие, кроме того, непрерывное, поскольку справедлива

Лемма 4.1. В дополнение к утверждениям теоремы IV, имеет место также двойная оценка

$$\|\Phi, L_{2, \omega}\| \asymp \|\varphi\|. \quad (4.10)$$

Доказательство. Во-первых, из (4.8) по равенству Парсеваля вытекает

$$\int_{-\sigma}^\sigma |\psi_j(\tau)|^2 d\tau \leq \int_{-\infty}^\infty |\psi_j(\tau)|^2 d\tau =$$

$$= \int_0^\sigma |\Phi(e^{-i\theta_j} v^{2/3})|^2 v^{2(\mu-1)} dv = \frac{3}{2} \int_0^\sigma |\Phi(e^{-i\theta_j} r)|^2 r^\omega dr \quad (j = -1, 0, 1),$$

$$\text{так как } \mu = \frac{5+2\omega}{6}.$$

Отсюда и из (4.7), во-вторых, вытекает неравенство

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma |\varphi_j(\tau)|^2 d\tau < \sum_{j=-1}^1 \int_{-\sigma}^\sigma |\psi_j(\tau)|^2 d\tau \leq$$

$$< \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma |\Phi(e^{-i\theta_j} r)|^2 r^\omega dr \leq \|\Phi; L_{2, \omega}\|$$

т. е. одна из двусторонних оценок (4.10) леммы.

С целью установления второй из указанных оценок, введем в рассмотрение целые функции

$$\Phi_j(z) = \int_0^{\sigma} E_{3/2}(e^{i\theta_j} z \tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} \varphi_j(\tau) d\tau, \quad (4.11)$$

полагая $\varphi_j(\tau) \in L_2(0, \sigma)$ ($j = -1, 0, 1$).

Заметим, что если ввести в рассмотрение интервалы изменения переменной $\varphi \in (-\infty, \infty)$

$$\Delta_j = \left\{ \varphi; |\theta_j - \varphi| > \frac{\pi}{3} \right\} \quad (j = -1, 0, 1),$$

то согласно теореме III

$$\sup_{\varphi \in \Delta_j} \left\{ \int_0^{\sigma} |\Phi_j(r e^{-i\varphi})|^2 r^{\mu} dr \right\} \leq M_{\mu} \int_0^{\sigma} |\varphi_j(\tau)|^2 d\tau \quad (j = -1, 0, 1);$$

Легко убедиться в том, что последние оценки одновременно могут выполняться для всех наших функций $\Phi_j(r e^{-i\varphi})$ ($j = -1, 0, 1$), если только $\varphi = \theta_k$ ($k = 1, 0, 1$).

Следовательно, справедливы неравенства

$$\int_0^{\sigma} |\Phi_j(r e^{-i\theta_k})|^2 r^{\mu} dr \leq M_{\mu} \int_0^{\sigma} |\varphi_j(\tau)|^2 d\tau \quad (k, j = -1, 0, 1),$$

и так как по (4.6) и (4.11)

$$\Phi(z) = \sum_{j=-1}^1 \Phi_j(z),$$

то мы будем иметь

$$\left(\int_0^{\sigma} |\Phi(r e^{-i\theta_k})|^2 r^{\mu} dr \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} |\Phi_j(r e^{-i\theta_k})|^2 r^{\mu} dr \right)^{1/2}.$$

Итак, оба неравенства (4.10) леммы доказаны.

(б) Установим теперь две простые, но важные леммы о функциях типа Миттаг-Леффлера $E_{3/2}(z; \mu)$.

Лемма 4.2.* Для любых z и $\lambda \in \mathbb{C}$, $0 < \mu_1, \mu_2 < \infty$ справедлива формула

$$\begin{aligned} J_{\sigma}(z; \lambda; \mu_1; \mu_2) &\equiv \int_0^{\sigma} E_{3/2}(z \tau^{2/3}; \mu_1) \tau^{\mu_1-1} E_{3/2}(\lambda (\sigma - \tau)^{2/3}; \mu_2) (\sigma - \tau)^{\mu_2-1} d\tau = \\ &= \sigma^{\mu_1 + \mu_2 - 5/3} \frac{E_{3/2}(\sigma^{2/3} z; \mu_1 + \mu_2 - 2/3) - E_{3/2}(\sigma^{2/3} \lambda; \mu_1 + \mu_2 - 2/3)}{z - \lambda}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Доказательство. Пользуясь разложениями функций, стоящих под интегралом J_{σ} и полагая, что $\lambda \neq 0$, последовательно мы получим

* Частный случай известной леммы (см. [1], стр. 121).

$$\begin{aligned}
J_0(z, \lambda; \mu_1; \mu_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n \cdot \lambda^n}{\Gamma(\mu_1 + 2n/3) \Gamma(\mu_2 + 2m/3)} \int_0^{\sigma} \tau^{\frac{2n}{3} + \mu_1 - 1} \times \\
&\times (\sigma - \tau)^{2n/3 + \mu_2 - 1} d\tau = \sigma^{\mu_1 + \mu_2 - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n \lambda^{k-n} \sigma^{2k/3}}{\Gamma\left(\mu_1 + \mu_2 + \frac{2k}{3}\right)} = \\
&= \sigma^{\mu_1 + \mu_2 - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \sigma^{2k/3}}{\Gamma\left(\mu_1 + \mu_2 + \frac{2k}{3}\right)} \sum_{n=0}^k \left(\frac{z}{\lambda}\right)^n = \\
&= \frac{\sigma^{\mu_1 + \mu_2 - 1}}{z - \lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z^{k+1} - \lambda^{k+1}) \sigma^{2k/3}}{\Gamma\left(\mu_1 + \mu_2 + \frac{2k}{3}\right)}.
\end{aligned}$$

Отсюда, ввиду очевидного тождества

$$z E_{3/2}(z; \mu + 2/3) = E_{3/2}(z; \mu) - \frac{1}{\Gamma(\mu)}$$

приходим к требуемой интегральной формуле (4.12), очевидно, справедливой и при $\lambda = 0$.

Комбинируя три тождества леммы 1.2 с интегральной формулой (4.12), мы последовательно приходим к трем тождествам следующей леммы.

Лемма 4.3. Для любых $z; \lambda \in \mathbb{C}$ и $\alpha = \exp\left\{\frac{2\pi}{3}i\right\}$, при соответствующих условиях, налагаемых на параметры μ и ν , будем иметь

1°. При $\mu > 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-1}^1 \alpha^k \int_0^{\sigma} E_{3/2}\left(\alpha^{k+\frac{1}{2}} z \tau^{2/3}; \mu\right) \tau^{\mu-1} E_{3/2}\left(\alpha^{k+\frac{1}{2}} \lambda (\sigma - \tau)^{2/3}; \mu\right) (\sigma - \tau)^{\mu-1} d\tau = \\
= \frac{3\alpha^{-\frac{1}{2}} \sigma^{\mu-1}}{z - \lambda} \left\{ e_{\sigma}(z; \mu - 1) - e_{\sigma}(\lambda; \mu - 1) \right\}. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

2°. При $0 < \mu < 1 + \nu, \nu \geq 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-1}^1 \int_0^{\sigma} E_{3/2}\left(\alpha^{k+\frac{1}{2}} z \tau^{2/3}; \mu\right) \tau^{\mu-1} E_{3/2}\left(\alpha^{k+\frac{1}{2}} \lambda (\sigma - \tau)^{2/3}; 1 + \nu - \mu\right) (\sigma - \tau)^{\nu} d\tau = \\
= \frac{3\sigma^{\nu}}{z - \lambda} \left\{ z e_{\sigma}(z; \nu) - \lambda e_{\sigma}(\lambda; \nu) \right\}. \quad (4.14)
\end{aligned}$$

3°. При $0 < \mu < \frac{1}{3} + \nu, \nu \geq 0$

$$\sum_{k=-1}^1 \alpha^{-k} \int_0^{\sigma} E_{3/2}\left(\alpha^{k+\frac{1}{2}} z \tau^{2/3}; \mu\right) \tau^{\mu-1} E_{3/2}\left(\alpha^{k+\frac{1}{2}} (\sigma - \tau)^{2/3}; \right.$$

$$\left(\nu + \frac{1}{3} - \mu\right)(\sigma - \tau)^{\nu - \frac{2}{3} - \mu} d\tau = \frac{3\alpha^{\frac{1}{2}} \sigma^{\nu}}{z - \lambda} \left\{ z^2 e_{\sigma}(z; \nu) - \lambda^2 e_{\sigma}(\lambda; \nu) \right\}. \quad (4.15)$$

При этом здесь, как и в § 3

$$e_{\sigma}(z; \nu) = E_{1/2}(-\sigma^2 z^3; 1 + \nu). \quad (4.16)$$

Доказательство. 1°. Если в формуле (4.12) леммы 4.2 положить

$$\mu_1 = \mu > 0, \mu_2 = 2/3; z \rightarrow \alpha^{k + \frac{1}{2}} z, \lambda \rightarrow \alpha^{k + \frac{1}{2}} \lambda,$$

то в результате получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sigma} E_{3/2}(\alpha^{k + \frac{1}{2}} z \tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} E_{3/2}\left(\alpha^{k + \frac{1}{2}} \lambda (\sigma - \tau)^{\frac{2}{3}}; \frac{2}{3}\right) (\sigma - \tau)^{\frac{2}{3}-1} d\tau = \\ & = \sigma^{\mu-1} \alpha^{-k - \frac{1}{2}} \frac{E_{3/2}(\alpha^{k + \frac{1}{2}} \sigma^{2/3} z; \mu) - E_{3/2}(\alpha^{k + \frac{1}{2}} \lambda (\sigma - \tau)^{2/3}; \mu)}{z - \lambda} \quad (k = -1, 0, 1). \end{aligned}$$

Умножим теперь обе части этого тождества на α^k и просуммируем по k ($k = -1, 0, 1$). Тогда, в силу первой из формул (1.11) леммы 1.2, мы приходим к формуле (4.13).

2°. Произведем в формуле (4.12) замены переменных $z \rightarrow \alpha^{k + \frac{1}{2}} z$, $\lambda \rightarrow \alpha^{k + \frac{1}{2}} \lambda$, а параметры заменим таким образом: $\mu_1 = \mu > 0$, $\mu_2 = 1 + \nu - \mu > 0$.

Тогда, во-первых, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sigma} E_{3/2}(\alpha^{k + \frac{1}{2}} z \tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} E_{3/2}(\alpha^{k + \frac{1}{2}} \lambda (\sigma - \tau)^{2/3}; 1 + \nu - \mu) (\sigma - \tau)^{\nu - \mu} d\tau = \\ & = \sigma^{\nu - \frac{2}{3} - \mu} \alpha^{-k - \frac{1}{2}} \frac{E_{3/2}(\alpha^{k + \frac{1}{2}} z \tau^{2/3}; \frac{1}{3} + \nu) - E_{3/2}(\alpha^{k + \frac{1}{2}} \lambda \tau^{2/3}; \frac{1}{3} + \nu)}{z - \lambda}. \end{aligned}$$

Как и выше, просуммируем эти формулы по индексу k ($k = -1, 0, 1$). Тогда, пользуясь второй из формул (1.11) леммы 1.2, получим тождество (4.14).

3°. Наконец, в тождестве (4.12) леммы 4.2 вновь произведем замену

$z \rightarrow \alpha^{k + \frac{1}{2}} z$, $\lambda \rightarrow \alpha^{k + \frac{1}{2}} \lambda$, но параметры заменим таким образом: $\mu_1 = \mu > 0$, $\mu_2 = \frac{1}{3} + \nu - \mu$. Тогда формула (4.12) леммы 4.1 принимает вид

$$\int_0^{\sigma} E_{3/2}(\alpha^{k + \frac{1}{2}} z \tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} E_{3/2}(\alpha^{k + \frac{1}{2}} \lambda (\sigma - \tau)^{2/3}; \frac{1}{3} + \nu - \mu) (\sigma - \tau)^{\nu - \mu - \frac{2}{3}} d\tau =$$

$$= \sigma \frac{-\frac{4}{3} - \frac{1}{2} E_{3/2} \left(\alpha^{k+\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{2}{3}} z; \nu - \frac{1}{3} \right) - E_{3/2} \left(\alpha^{k+\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{2}{3}} \lambda; \nu - \frac{1}{3} \right)}{z - \lambda}.$$

Умножим эти формулы на z^k ($k = -1, 0, 1$), заметив, что в результате справа вместо $\alpha^{-k-\frac{1}{2}}$ появится множитель $\alpha^{-\frac{1}{2}}$. Тогда, суммируя их по индексу $k = -1, 0, 1$, получим требуемое тождество (1.15), в силу третьего из тождеств (1.11) леммы 1.2.

В заключение отметим, что в дальнейшем изложении мы будем пользоваться лишь тождеством (4.14) доказанной леммы.

4.2 (а) В начале § 2 мы определили последовательность чисел $\{\mu_k\}_1^\infty$ — множество всех корней функции

$$e_\nu(z; \nu) = E_{1/2}(-\sigma^2 z^3; 1 + \nu) \quad (0 \leq \nu < 2).$$

Вспомним, что все эти корни простые и записываются формулами (2.3)—(2.5) или (3.7) и лежат на трех лучах

$$l_j = \left\{ z; \arg z = \frac{2\pi}{3} j \right\} (j = -1, 0, 1)$$

комплексной плоскости Z .

Для значения $\nu = 1$ имеем целую функцию $e_\nu(z; 1) = \frac{\sin \sigma z^{3/2}}{\sigma z^{3/2}}$ порядка $\frac{3}{2}$ и типа σ . Повтому легко видеть, что в этом случае множество корней $\{\mu_k\}_1^\infty$ функции $e_\nu(z; \nu)$ запишется в явном виде

$$\mu_{3k-2} = \alpha^{-1} \sqrt[3]{r_k}, \quad \mu_{3k-1} = \sqrt[3]{r_k}, \quad \mu_{3k} = \alpha \sqrt[3]{r_k} \quad (1 \leq k < +\infty), \quad (4.17)$$

где

$$\alpha = \exp \left\{ i \frac{2\pi}{3} \right\}, \quad r_k = \left(\frac{\pi}{\sigma} k \right)^2 \quad (1 \leq k < +\infty). \quad (4.17')$$

Отметим далее, что при $p = 2$ в интерполяционных теоремах 3.2 и 3.3 на параметр ν нам уже следует, соответственно, накладывать такие ограничения

$$\nu \in \delta_1 = \left(\frac{2+\omega}{3}, \frac{3+\omega}{3} \right) \text{ и } \nu \in \delta_2 = \left(\frac{3+\omega}{3}, \frac{4+\omega}{3} \right), \quad (4.18)$$

где $-1 < \omega < 1$.

Отсюда легко вытекает, что при $p = 2$ в теоремах 3.2 и 3.3 узлами $\{\mu_k\}_1^\infty$ интерполяционных разложений можно брать одну и ту же явную последовательность (4.17)—(4.17'), если только будем предполагать, что в определении весового пространства $W_{3/2, \sigma}^2$ параметр ω на степень весовой функции $|z|^\omega$, соответственно, принадлежит интервалу $(0, 1)$ или $(-1, 0)$.

(б) В соответствии с двумя интервалами (4.18) изменения параметра ν , мы, во-первых, введем в рассмотрение две системы целых функций порядка $3/2$ типа σ :

$$P_n(z; \nu) = z e_n(z; \nu), \quad \nu \in \delta_1, \quad (4.19)$$

$$Q_n(z; \nu) = z^2 e_n(z; \nu), \quad \nu \in \delta_2.$$

Кроме корня $\mu_0 = 0$ все корни функций (4.19) наряду с корнями функции $e_n(z; \nu)$ простые и совпадают с последовательностью $\{\mu_k\}_1^\infty$.

Корень же $\mu_0 = 0$ простой для $P_n(z; \nu)$ и двукратный для $Q_n(z; \nu)$.

После введения указанных двух функций (4.19), мы, во-вторых, можем перейти к определению ассоциированных с ними двух счетных систем целых функций

$$\{R_n(z; \nu)\}_0^\infty \text{ и } \{S_n^*(z; \nu), \{S_n(z; \nu)\}_0^\infty\}. \quad (4.20)$$

Эти системы мы определим таким образом:

$$\text{при } \nu \in \delta_1 = \left(\frac{2+\omega}{3}, \frac{3+\omega}{3} \right),$$

$$R_k(z; \nu) = \frac{P_n(z; \nu)}{P_n'(\mu_k; \nu)(z - \mu_k)}, \quad (0 \leq k < +\infty), \quad (4.21)$$

$$\text{при } \nu \in \delta_2 = \left(\frac{3+\omega}{3}, \frac{4+\omega}{3} \right),$$

$$S_n^*(z; \nu) = \Gamma(1+\nu) \frac{Q_n(z; \nu)}{z}, \quad S_0(z; \nu) = \Gamma(1+\nu) \frac{Q_n(z; \nu)}{z^2}, \quad (4.22)$$

$$S_k(z; \nu) = \frac{Q_n(z; \nu)}{Q_n'(\mu_k; \nu)(z - \mu_k)} \quad (1 \leq k < +\infty).$$

Из наших определений непосредственно следует, что введенные системы (4.20) обладают следующими интерполяционными свойствами:

$$R_k(\mu_n; \nu) = \delta_{k,n} \quad (0 \leq k, n < +\infty), \quad (4.23)$$

$$S_k(\mu_n; \nu) = \delta_{k,n} \quad (0 \leq k, n < +\infty),$$

$$S_0^*(\mu_n; \nu) = 0 \quad (0 \leq n < +\infty), \quad \frac{d}{dz} [S_0^*(z; \nu)]_{z=\mu_n=0} = 1. \quad (4.23')$$

Далее, принимая во внимание обозначения (4.19), (4.21) и (4.22), отметим также, что из общих теорем 3.2 и 3.3, в частности, вытекают также

Следствие 1. При $\nu \in \delta_1$

$$\left\{ \frac{z e_n(z; \nu)}{z - \mu_k} \right\}_0^\infty \equiv \left\{ \frac{P_n(z; \nu)}{z - \mu_k} \right\}_0^\infty \subset W_{3/2, \nu}^{2, \infty}, \quad (4.24)$$

Следствие 2. При $\nu \in \delta_1$

$$\begin{aligned} & \left\{ e_n(z; \nu), \left\{ \frac{z^2 e_n(z; \nu)}{z - \mu_k} \right\} \right\} \equiv \\ & \equiv \left\{ \frac{Q_n(z; \nu)}{z^2}, \left\{ \frac{Q_n(z; \nu)}{z - \mu_k} \right\}_0^\infty \right\} \subset W_{3/2, \nu}^{2, \infty}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

В соответствии с этими системами, полагая всегда, что

$$-1 < \omega < 1, \mu = \frac{5}{6} + \frac{\omega}{3}, \quad (4.26)$$

мы рассмотрим два случая для значений параметра ν и соответствующих интегральных представлений для наших систем (4.24) и (4.25).

1°. При

$$\nu \in \tilde{\delta}_1 \equiv \left(\mu, \frac{3+\omega}{3} \right) \subset \delta_1 \quad (4.27)$$

или

2°. При $\nu \in \delta_2$, когда параметр $\mu < \frac{3+\omega}{3}$, т. е. лежит слева интервала изменения параметра ν .

В обоих случаях, согласно теореме IV, положив

$$\theta_j = \frac{2\pi}{3} \left(j + \frac{1}{2} \right) \quad (j = -1, 0, 1) \quad (4.28)$$

будем иметь:

1°.

$$R_n(z; \nu) =$$

$$= \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} E_{3/2} \{ e^{i\theta_j} z \tau^{\frac{2}{3}}; \mu \} \tau^{\mu-1} r_{n,j}(\tau) d\tau, \quad \nu \in \tilde{\delta}_1 \quad (n=0, 1, \dots), \quad (4.29)$$

где трехкомпонентные вектор-функции $r_k(\tau) = \{r_{k,j}\}_{j=-1}^1$ единственны и из класса $L_2(0, \sigma)$.

2°.

$$S_0^*(z; \nu) = \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} E_{3/2} (e^{i\theta_j} z \tau^{\frac{2}{3}}; \mu) \tau^{\mu-1} S_{0,j}^*(\tau) d\tau, \quad \nu \in \delta_2, \quad (4.30)$$

$$S_n(z; \nu) = \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} E_{3/2} (e^{i\theta_j} z \tau^{\frac{2}{3}}; \mu) \tau^{\mu-1} S_{n,j}(\tau) d\tau \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

где трехкомпонентные вектор-функции $S_0^*(\tau) = \{S_{0,j}^*\}_{j=-1}^1$ и $S_n(\tau) = \{S_{n,j}(\tau)\}_{j=-1}^1$ также единственны и из класса $L_2(0, \sigma)$.

В представлениях (4.29) и (4.30) искомые последовательности вектор-функций $\{r_n(\tau)\}$ и $\{S_0^*(\tau), \{S_n(\tau)\}_0^\infty\}$ могут быть определены посредством формул обращения теоремы IV (2°). Однако ниже мы найдем их в виде явных формул, пользуясь леммой 4.3, притом при меньших ограничениях на параметры μ и ν .

Теорема 4.1. 1°. Для значений параметров $0 < \mu < 1 + \nu$, $\nu \in \tilde{\delta}_1$ функции системы (4.21) представимы в виде (4.29), где для $j = -1, 0, 1$

$$r_{0,j}(\tau) = \sigma^{-\nu} \frac{\Gamma(1+\nu)}{3\Gamma(1+\nu-\mu)} (\sigma-\tau)^{\nu-\mu}, \quad (4.31)$$

$$r_{n,j}(\tau) = \frac{\sigma^{-\nu}}{3\mu_n e'_\sigma(\mu_n; \nu)} \times \\ \times E_{3/2} \left(\alpha^{j+\frac{1}{2}} \mu_n (\sigma-\tau)^{2/3}; 1+\nu-\mu \right) (\sigma-\tau)^{\nu-\mu} \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (4.31'')$$

2°. Для значений параметров $0 < \mu < \frac{1}{3} + \nu$, $\nu \in \delta_2$ функции системы (4.22) представимы в виде (2.30), где для $j = -1, 0, 1$

$$S_{0,j}(\tau) = \alpha^{-j-\frac{1}{2}} \sigma^{-\nu} \frac{\Gamma(1+\nu)}{2\Gamma\left(\frac{1}{3} + \nu - \mu\right)} (\sigma-\tau)^{\nu-\mu-2/3}, \quad (4.32)$$

$$S_{0,j}(\tau) = \sigma^{-\nu} \frac{\Gamma(1+\nu)}{3\Gamma(1+\nu-\mu)} (\sigma-\tau)^{\nu-\mu}, \quad (4.33')$$

$$S_{n,j}(\tau) = \frac{\alpha^{-j-\frac{1}{2}} \sigma^{-\nu}}{3\mu_n^2 e'_\sigma(\mu_n; \nu)} \times \\ \times E_{3/2} \left(\alpha^{j+\frac{1}{2}} \mu_n (\sigma-\tau)^{2/3}; \nu + \frac{1}{3} - \mu \right) (\sigma-\tau)^{\nu-\frac{2}{3}-\mu} \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (4.33'')$$

Доказательство. 1°. Заметив, что согласно (4.19)

$$P'_\sigma(z; \nu) = e_\sigma(z; \nu) + z e'_\sigma(z; \nu),$$

подставляя сюда $z = \mu_0 = 0$, а затем $z = \mu_n$ ($n \geq 1$), мы получим

$$P'_\sigma(\mu_0; \nu) = e_\sigma(0; \nu) = \Gamma^{-1}(1+\nu),$$

$$P'_\sigma(\mu_n; \nu) = \mu_n e'_\sigma(\mu_n; \nu) \quad (1 \leq n < +\infty).$$

Повтому из определения (4.21) следует

$$R_0(z; \nu) = \Gamma(1+\nu) e_\sigma(z; \nu),$$

$$R_n(z; \nu) = \frac{z e_\sigma(z; \nu)}{\mu_n e'_\sigma(\mu_n; \nu) (z - \mu_n)} \quad (1 \leq n < +\infty).$$

Теперь в тождестве (4.14) леммы 4.3, положив $\lambda = \mu_n$ ($0 \leq n < +\infty$), будем иметь

$$\sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma E_{3/2} \left(\alpha^{j+\frac{1}{2}} z \tau^{2/3}; \mu \right) \tau^{\mu-1} E_{3/2} \left(\alpha^{j+\frac{1}{2}} \mu_n (\sigma-\tau)^{2/3}; 1+\nu-\mu \right) (\sigma-\tau)^{\nu-\mu} d\tau = \\ = \frac{3\sigma^\nu}{z - \mu_n} z e_\sigma(z; \nu) = 3\sigma^\nu \times \begin{cases} \Gamma^{-1}(1+\nu) R_0(z; \nu), & \text{при } n=0 \\ \mu_n e'_\sigma(\mu_n; \nu) R_n(z; \nu), & \text{при } 1 \leq n < +\infty. \end{cases}$$

Наконец, сравнивая эту формулу с интегральным представлением (4.29)

функции $R_n(z; \nu)$, заметив еще, что по (4.29) $e^{i\theta} = z^{j+\frac{1}{2}}$, ввиду единственности искомых вектор-функций, получим формулы (4.31')—(4.31'') теоремы

2°. Здесь мы будем опираться на третье тождество (4.15) леммы 4.3. Отметим сначала, что в разложении функции

$$z^{-j} E_{3/2} \left(a^{j+\frac{1}{2}} z^{\lambda} (\sigma - \tau)^{2/3}; \nu + \frac{1}{3} - \mu \right)$$

по степеням λ коэффициенты при λ^0 и λ^1 , соответственно, равны

$$a^{-j} \Gamma^{-1} \left(\frac{1}{3} + \nu - \mu \right) \text{ и } a^{1/2} \Gamma^{-1} (1 + \nu - \mu) (\sigma - \tau)^{2/3}.$$

Отметим также, что из (4.19) и (4.22) следуют формулы

$$S_0^*(z; \nu) = \Gamma(1 + \nu) z e_\sigma(z; \nu), \quad S_0(z; \nu) = \Gamma(1 + \nu) e_\sigma(z; \nu).$$

Теперь, обращаясь к тождеству (4.15), сначала положив в нем $\lambda = 0$, мы получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma E_{3/2} \left(a^{j+\frac{1}{2}} z \tau^{2/3}; \mu \right) \tau^{\mu-1} \frac{z^{-j} (\sigma - \tau)^{\nu-\mu-2/3}}{\Gamma \left(\frac{1}{3} + \nu - \mu \right)} d\tau = \\ = 3 a^{1/2} \sigma^\nu z e_\sigma(z; \nu) = \frac{3 a^{1/2} \sigma^\nu}{\Gamma(1 + \nu)} S_0^*(z; \nu). \end{aligned}$$

Отсюда и из представления (4.30) функции $S_0^*(z; \nu)$ следует формула

(4.32) леммы, поскольку, как уже отмечалось, $e^{i\theta} = a^{j+\frac{1}{2}}$ ($j = -1, 0, 1$).

Если далее продифференцировать тождество (4.15) по λ , а затем вновь положить $\lambda = 0$, то приходим к формуле

$$\begin{aligned} \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma E_{3/2} \left(a^{j+\frac{1}{2}} z \tau^{2/3}; \mu \right) \tau^{\mu-1} \frac{a^{1/2} (\sigma - \tau)^{\nu-\mu}}{\Gamma(1 + \nu - \mu)} d\tau = \\ = 3 a^{1/2} \sigma^\nu e_\sigma(z; \nu) = \frac{3 a^{1/2} \sigma^\nu}{\Gamma(1 + \nu)} S_0(z; \nu). \end{aligned}$$

Сравнивая это тождество с представлением (4.30) функции $S_n(z; \nu)$ для $n = 0$, приходим к формуле (4.33').

Наконец, чтобы установить последнюю формулу (4.33'') леммы сначала отметим, что по (4.19)

$$Q_\sigma(z; \nu) = z^2 e_\sigma(z; \nu)$$

и поэтому

$$Q'_\sigma(\mu; \nu) \mu^n = \epsilon'_\sigma(\mu; \nu) \neq 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Отсюда, ввиду определения (4.22) функции $S_n(z; \nu)$ ($n \geq 1$) получим

$$S_n(z; \nu) = \frac{z^2 e_z(z; \nu)}{\mu_n^2 e'_\sigma(\mu_n; \nu)(z - \mu_n)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Вновь обратимся теперь к тождеству (4.15), положив в нем $\lambda = \mu_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Тогда приходим к тождествам

$$\begin{aligned} & \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma E_{3/2}(\alpha^{j+\frac{1}{2}} z \tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} \times \\ & \times \left\{ \alpha^{-j} E_{3/2} \left(\alpha^{j+\frac{1}{2}} \mu_n (\sigma - \tau)^{2/3}; \nu + \frac{1}{3} - \mu \right) (\sigma - \tau)^{\nu-\mu-2/3} \right\} d\tau = \\ & = \frac{3 \alpha^{1/2} \sigma^\nu}{z - \mu_n} z^2 e_z(z; \nu) = 3 \alpha^{1/2} \sigma^\nu \mu_n^2 e'_\sigma(\mu_n; \nu) S_n(z; \nu) \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

Нам остается лишь сравнить эти тождества с представлением (4.30) функций $S_n(z; \nu)$ ($n \geq 1$), чтобы получить формулы (4.33'') теоремы.

З а м е ч а н и е. В доказанной теореме 4.1 представления (4.31)–(4.33) были получены прямым путем, без привлечения теоремы IV. Однако, напомним, что лишь для значения параметра $\mu = \frac{5}{6} + \frac{\omega}{3}$ ($-1 < \omega < 1$) согласно теореме IV, можно утверждать, что найденные выше функции систем $\{r_{n,j}(\tau)\}_0^\infty$, $\{S_{0,j}^*(\tau)\}$, $\{S_{n,j}(\tau)\}_0^\infty$ ($j = -1, 0, 1$) единственны и из класса $L_2(0, \sigma)$.

Впрочем, в последнем можно убедиться непосредственно.

В самом деле, если

$$\mu = \frac{5}{6} + \frac{\omega}{3}, \quad (-1 < \omega < 1),$$

то

1°. При $\nu \in \tilde{\delta}_1 = \left(\mu, 1 + \frac{\omega}{3}\right)$, $0 < \nu - \mu < \frac{1}{6}$ и из выражений функций $r_{n,j}(\tau)$ следует, что $r_{n,j}(\tau) \in L_{1,2}(0, \sigma)$ ($j = -1, 0, 1$; $n \geq 0$).

2°. При $\nu \in \delta_2 = (1 + \omega/3, 4/3 + \omega/3)$, $\nu - \mu - \frac{2}{3} > -\frac{1}{3}$ и из выражений функций $S_{0,j}^*(\tau)$ и $S_{n,j}(\tau)$ вновь следует, что все они из классов $L_{1,2}(0, \sigma)$.

(б) Пусть

$$y(\tau) = \{y_k(\tau)\}_{-1}^1 \text{ и } z(\tau) = \{z_k(\tau)\}_{-1}^1 \quad (4.34)$$

— две произвольные трехкомпонентные вектор-функции из $L_2(0, \sigma)$.

Определим их скалярное произведение таким образом:

$$\{y(\tau), z(\tau)\} \equiv \{y, z\} = \sum_{k=-1}^1 \int_0^\sigma y_k(\tau) \overline{z_k(\tau)} d\tau. \quad (4.35)$$

Заметим, что для любой вектор-функции $y(\tau) \in L_2(0, \sigma)$ ее норма

$$\|y\| = \|y, y\|^{1/2} = \left(\sum_{k=-1}^1 \int_0^\sigma |y_k(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \geq 0,$$

при этом $\|y\| = 0$ лишь если почти везде на $(0, \sigma)$ $y_k(\tau) = 0$ ($k = -1, 0, 1$).

(в) Теперь, в соответствии с отмеченными выше двумя случаями 1° и 2° изменения параметра ν , введем в рассмотрение две пары систем трехкомпонентных вектор-функций.

1°. При $\nu \in \bar{\delta}_1 \subset \delta_1$ — пару систем

$$\{x_{n,j}(\tau)\}_0^\infty \text{ и } \{\omega_{n,j}(\tau)\}_0^\infty \quad (j = -1, 0, 1), \quad (4.36)$$

где

$$x_{n,j}(\tau) = E_{3/2}(e^{\theta_j} |\mu_n| \tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.37)$$

$$\theta_j = \frac{2\pi}{3} \left(j + \frac{1}{2} \right)$$

и

$$\omega_{n,j}(\tau) = \overline{r_{n,j}(\tau)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.38)$$

при этом функции $r_{n,j}(\tau)$ были определены нами посредством формул (4.31')—(4.31'') леммы 4.4 (1°).

2°. При $\nu \in \bar{\delta}_2$ — пару систем

$$\{\tilde{x}_{0,j}(\tau), \{\tilde{x}_{n,j}(\tau)\}_0^\infty\} \text{ и } \{\tilde{\omega}_{0,j}(\tau), \{\tilde{\omega}_{n,j}(\tau)\}_0^\infty\} \quad (j = -1, 0, 1), \quad (4.39)$$

где

$$\tilde{x}_{0,j}(\tau) = \frac{e^{\theta_j} \tau^{\mu-1/3}}{\Gamma(\mu+2/3)}, \quad \tilde{x}_{n,j} = x_{n,j}(\tau) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.40)$$

и

$$\tilde{\omega}_{0,j}(\tau) = \overline{\tilde{S}_{0,j}(\tau)}, \quad \tilde{\omega}_{n,j}(\tau) = \overline{S_{n,j}(\tau)}, \quad (4.41)$$

при этом функции $S_{n,j}(\tau)$ также были определены нами посредством формул (4.32), (4.33') и (4.33'') леммы 4.4 (2°).

Замечание. В обоих случаях 1° и 2° мы имеем $\mu = \frac{5}{6} + \frac{\omega}{3}$ ($-1 < \omega < 1$) и поэтому $2(\mu - 1/3) > -1$ и $2(\mu - 1) > -1$.

Следовательно, функции введенных выше систем

$$\{x_{n,j}(\tau)\}_0^\infty \text{ и } \{\tilde{x}_{n,j}(\tau), \{\tilde{x}_{0,j}(\tau)\}_0^\infty\} \quad (j = -1, 0, 1) \quad (4.42)$$

в обоих случаях 1° и 2° будут из класса $L_2(0, \sigma)$.

Наконец, отметим, что функции систем (4.42) имеют особенность лишь в точке $\tau = 0$, в то время как функции систем

$$\{\omega_{n,j}(\tau)\}_0^\infty \text{ и } \{\tilde{\omega}_{n,j}(\tau), \{\tilde{\omega}_{0,j}(\tau)\}_0^\infty\} \quad (j = -1, 0, 1) \quad (4.43)$$

имеют особенность лишь в точке $\tau = \sigma$. Отсюда следует, что как сами функции наших систем (4.42) и (4.43), так и произведения любых двух функций, взятых в отдельности по каждой из них, будут из класса $L_1(0, \sigma) \subset L_2(0, \sigma)$, разумеется, в надлежащих случаях 1° или 2°.

Докажем теперь теорему.

Теорема 4.2. 1°. Системы вектор-функций (4.36) биортогональны в метрике (4.35). Иными словами, положив для $n = 0, 1, 2, \dots$

$$x_n(\tau) = \{x_{n,j}(\tau)\}_{j=1}^1 \text{ и } \omega_n(\tau) = \{\omega_{n,j}(\tau)\}_{j=1}^1, \quad (4.44)$$

будем иметь

$$\{x_m, \omega_n\} = \delta_{m,n} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.45)$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронеккера.

2°. Системы вектор-функций (4.39) биортогональны в той же метрике (4.36). Иначе говоря, положив

$$\bar{x}_0(\tau) = \{\bar{x}_{0,j}(\tau)\}_{j=1}^1, \quad \bar{x}_n(\tau) = \{\bar{x}_{n,j}(\tau)\}_{j=1}^1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.46)$$

а также

$$\bar{\omega}_0(\tau) = \{\bar{\omega}_{0,j}(\tau)\}_{j=1}^1, \quad \bar{\omega}_n(\tau) = \{\bar{\omega}_{n,j}(\tau)\}_{j=1}^1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.47)$$

будем иметь

$$\{\bar{x}_0, \bar{\omega}_0\} = 1; \quad \{\bar{x}_0, \bar{\omega}_n\} = 0; \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.48)$$

$$\{\bar{\omega}_0, \bar{x}_0\} = 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\{\bar{x}_n, \bar{\omega}_m\} = \delta_{n,m}; \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.49)$$

Доказательство. 1°. Пользуясь представлением (4.29) функции $R_n(z; \nu)$ и ее свойством (4.23), получим утверждения (4.45)

$$\begin{aligned} R_n(\mu_m; \nu) &= \delta_{n,m} = \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma E_{3/2} \{e^{i\theta_j} \mu_m \tau^{2/3}; \mu\} \tau^{\mu-1} r_{n,j}(\tau) d\tau = \\ &= \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma x_{m,j}(\tau) \overline{\omega_{n,j}(\tau)} d\tau = \{x_m, \omega_n\} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

в силу обозначения (4.38).

2°. Ввиду обозначения (4.41) представление (4.30) функции $S_0^*(z; \nu)$ запишется в виде

$$S_0^*(z; \nu) = \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma E_{3/2} \{e^{i\theta_j} z \tau^{2/3}; \mu\} \tau^{\mu-1} \bar{\omega}_{0,j}(\tau) d\tau. \quad (4.30')$$

Положив здесь $z = \mu_n$ ($n \geq 0$), в силу первой из формул (4.23'), с учетом определения (4.37) функций $\bar{x}_{n,j}(\tau)$, получим вторую из формул (4.48)

$$\{\bar{x}_n, \bar{\omega}_0\} = \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma E_{3/2} \{e^{i\theta_j} \mu_n \tau^{2/3}; \mu\} \tau^{\mu-1} \bar{\omega}_{0,j}(\tau) d\tau = S_0^*(\mu_n; \nu) = 0 \quad (n \geq 0).$$

Первая из формул (4.48) следует из второго утверждения (4.23'), так как по (4.40)

$$\{\tilde{z}_0, \tilde{w}_0\} = \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\pi} \frac{e^{i\theta_j} \tau^{\mu-1/3}}{\Gamma(\mu + 2/3)} \overline{\tilde{w}_{0,j}(\tau)} d\tau = \frac{d S_0(z; \nu)}{dz} \Big|_{|z|=\nu} = 1.$$

Чтобы установить совокупность формул (4.49) обратимся к представлению (4.40) функции $S_n(z; \nu)$, которую ввиду обозначения (4.41) запишем в виде

$$S_n(z; \nu) = \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\pi} E_{3/2}(e^{i\theta_j} z \tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} \overline{\tilde{w}_{n,j}(\tau)} d\tau. \quad (4.40')$$

Отсюда, ввиду свойств (4.23) функции $S_n(z; \nu)$, получим

$$\begin{aligned} \{\tilde{z}_m; \tilde{w}_m\} &= \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\pi} E_{3/2}(e^{i\theta_j} \mu \tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} \overline{\tilde{w}_{m,j}(\tau)} d\tau = \\ &= S_n(\mu; \nu) = \delta_{n,m} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Итак, теорема 4.1 полностью доказана.

В заключение подчеркнем, что в утверждениях 1° и 2° этой теоремы, разумеется, предполагается, что значения параметра ν , соответственно, взяты из интервалов

$$\tilde{\delta}_1 = \left(\frac{5}{6} + \frac{\omega}{3}, 1 + \frac{\omega}{3} \right) \text{ и } \delta_2 = \left(1 + \frac{\omega}{3}, \frac{4}{3} + \frac{\omega}{3} \right).$$

§ 5. Теоремы полноты и базисности

5.1 (а) Установим сначала полноту в $L_2(0, \sigma)$ систем вектор-функций, построенных в предыдущем § 4.

Докажем следующую основную теорему.

Теорема 5.1. 1°. Если $\nu \in \tilde{\delta}_1$, то система вектор-функций

$$\{\tilde{z}_{n,j}(\tau)\}_0^{\infty} = \{E_{3/2}(e^{i\theta_j} \mu \tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1}\}_0^{\infty} \quad (j = -1, 0, 1) \quad (5.1)$$

полна в $L_2(0, \sigma)$.

2°. Если же $\nu \in \delta_2$, то в $L_2(0, \sigma)$ полна система вектор-функций

$$\{\tilde{z}_{0,j}(\tau), \tilde{z}_{n,j}(\tau)\}_0^{\infty} = \left\{ \frac{e^{i\theta_j} \tau^{\mu-1/3}}{\Gamma\left(\mu + \frac{2}{3}\right)}, E_{3/2}(e^{i\theta_j} \mu \tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} \right\}_0^{\infty}. \quad (5.2)$$

(j = -1, 0, 1)

Доказательство. 1°. Для любой вектор-функции $\varphi(\tau) = \{\varphi_j(\tau)\}_{j=-1}^1 \in L_2(0, \sigma)$ введем в рассмотрение целую функцию

$$\Phi_{\varphi}(z) = \sum_{j=-1}^1 E_{3/2}(e^{i\theta_j} z \tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} \overline{\varphi_j(\tau)} d\tau, \quad (5.3)$$

которая, согласно теореме IV, принадлежит $W_{3/2, \sigma}^{2, \infty}$ ($-1 < \omega < 1$) при $\mu = \frac{5}{6} + \frac{\omega}{3}$. Ввиду определения (4.37) система вектор-функций $\{\tilde{w}_{n,j}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$ и скалярного произведения (4.35), будем иметь

$$\begin{aligned}\Phi_{\varphi}(\mu_n) &= \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} E_{3/2}(e^{i\theta_j} \mu_n \tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} \overline{\varphi_j(\tau)} d\tau = \\ &= \{x_n, \varphi\}; \quad n = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (5.4)$$

Повтому, если для некоторой вектор-функции $\varphi(\tau) \in L_2(0, \sigma)$

$$\{x_n, \varphi\} = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

то из (5.4) будет следовать, что для ассоциированной с нею функции $\Phi_{\varphi}(z) \in W_{3/2, \sigma}^{2, \infty}$ имеем $\Phi_{\varphi}(\mu_n) = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Заметив, что при $p=2$, $\delta_1 \subset \delta_2$, в силу теоремы единственности 3.1 (1°), получим тождество $\Phi_{\varphi}(z) \equiv 0$. Отсюда по теореме IV (2°) вытекает также, что $\varphi_j(\tau) = 0$ ($j = -1, 0, 1$), т. е. вектор-функция $\varphi(\tau) = 0$ почти всюду на $(0, \sigma)$. Тем самым, утверждение 1° теоремы доказано.

2°. Вновь для любой вектор-функции $\varphi(\tau) = \{\varphi_j(\tau)\}_{-1}^1 \in L_2(0, \sigma)$, образуя интеграл (5.3), мы наряду с формулами (5.4)

$$\Phi_{\varphi}(\mu_n) = \{x_n, \varphi\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

будем иметь также

$$\Phi'_{\varphi}(\mu_0) = \Phi'_{\varphi}(0) = \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} \frac{e^{i\theta_j} \tau^{\mu-1/3}}{\Gamma\left(\mu + \frac{2}{3}\right)} \overline{\varphi_j(\tau)} d\tau = \{\tilde{x}_0, \varphi\}.$$

Повтому, если для некоторой функции $\varphi(\tau) \in L_2(0, \sigma)$ имеют место равенство

$$\{\tilde{x}_0, \varphi\} = \{x_n, \varphi\} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

то это означает, что для функции $\Phi_{\varphi}(z)$

$$\Phi'_{\varphi}(\mu_0) = \Phi_{\varphi}(\mu_n) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Наконец, поскольку при $p=2$, $\Delta_2 = \delta_2$, то согласно теореме единственности 3.1 (2°) заключаем, что $\Phi_{\varphi}(z) \equiv 0$. Отсюда, вновь обращаясь к теореме IV (2°), будем иметь $\varphi(\tau) = \{\varphi_j(\tau)\}_{-1}^1 = 0$ почти всюду на $(0, \sigma)$. Этим и завершается доказательство теоремы.

(6) Перейдем сначала к установлению базисности введенных в § 4 биортогональных систем трехмерных вектор-функций

$$\omega_n(\tau) = \{\omega_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad \text{при } \tau \in \tilde{\delta}_1 \quad (5.5)$$

и

$$\tilde{\omega}_n(\tau) = \{\tilde{\omega}_{0,j}, \tilde{\omega}_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad \text{при } \tau \in \delta_1. \quad (5.6)$$

С этой целью напомним, что в § 3 были определены два банаховых пространства последовательностей $l^{p, \infty-1}$ и $l^{p, \infty-1}_*$ для значений параметров $-1 < p < +\infty$, $-1 < \psi < p-1$, $\omega_{-1} = \frac{2\psi-1}{3}$. Для значения

параметра $p=2$ указанные пространства, соответственно, переходят в следующие весовые гильбертовы пространства с нормами

$$\|\varphi_k\|_0 \in l^{2, \omega-1}; \|\dot{\varphi}_k\|_{L_2, \omega-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k|^2 (1+k)^{\omega-1} \right)^{1/2}, \quad (5.7)$$

$$\{\varphi_0^*, [\varphi_k]_0^{\infty}\} \in l^{2, \omega-1}; \|\dot{\varphi}_k\|_{L_2, \omega-1} = \left(|\varphi_0^*|^2 + \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k|^2 (1+k)^{\omega-1} \right)^{1/2}. \quad (5.8)$$

Докажем теперь теорему о базисности обеих систем (5.5) и (5.6) в пространстве $L_2(0, \sigma)$ трехкомпонентных вектор-функций $\varphi(\tau) = \{\varphi_j(\tau)\}_{j=1}^3$.

Теорема 5.2. 1°. Если $\varphi \in \bar{\mathcal{D}}_1$, то вектор-рядами вида

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \omega_n(\tau) \quad (5.9)$$

осуществляется взаимно-однозначное и непрерывное отображение всего пространства $l^{2, \omega-1}$ последовательностей $\{\varphi_n\}_0^{\infty}$ на все пространство $L_2(0, \sigma)$ трехкомпонентных вектор-функций $\varphi(\tau)$. При этом, коэффициенты ряда (5.8) и его суммы $\varphi(\tau)$ связаны формулами

$$\varphi_n = \{\varphi, \omega_n\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.10)$$

и двойным неравенством

$$\|\varphi\| = \{\varphi, \varphi\}^{1/2} \asymp \|\{\varphi_n\}_0^{\infty}\|_{l^{2, \omega-1}}. \quad (5.11)$$

2° Если $\varphi \in \bar{\mathcal{D}}_2$, то вектор-рядами вида

$$\varphi(\tau) = \varphi_0^* \tilde{\omega}_0(\tau) + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \tilde{\omega}_k(\tau) \quad (5.12)$$

осуществляется взаимно-однозначное и непрерывное отображение всего пространства $l^{2, \omega-1}$ на пространство $L_2(0, \sigma)$ трехкомпонентных вектор-функций $\varphi(\tau)$.

При этом коэффициенты ряда (5.12) и его сумма $\varphi(\tau)$ связаны формулами

$$\varphi_0^* = \{\varphi, \tilde{\omega}_0\}, \quad \varphi_k = \{\varphi, \tilde{\omega}_k\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.13)$$

и двойным неравенством

$$\|\varphi\| = \{\varphi, \varphi\}^{1/2} \asymp \|\{\varphi_n\}_0^{\infty}\|_{l^{2, \omega-1}}. \quad (5.14)$$

Доказательство. 1°. Согласно теореме 3.2 (1°) рядами вида

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\varphi}_n R_n(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

реализуется линейное взаимно-однозначное отображение всего пространства последовательностей $\{\varphi_n\}_0^{\infty} \in l^{2, \omega-1}$ на все пространство целых функций $\Phi(z) \in W_{1/2, \sigma}^{\infty}$. При этом справедливо двойное неравенство

$$\|\Phi\|_{W_{1/2, \sigma}^{\infty}} \asymp \|\{\varphi_n\}_0^{\infty}\|_{l^{2, \omega-1}}, \quad (5.15)$$

а в силу интерполяционных свойств (4.23) функций системы $\{R_n(z)\}_0^\infty$ будем иметь

$$\Phi(\mu_k) = \bar{\varphi}_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.16)$$

С другой стороны, согласно теореме IV из § 4, посредством формулы представления всего класса $W_{3/2, \sigma}^{2, \infty}$

$$\Phi(z) = \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma E_{3/2}(e^{i\theta_j} z \tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} \overline{\varphi_j(\tau)} d\tau, \quad (5.17)$$

где $\mu = \frac{5}{6} + \frac{\omega}{3}$ ($-1 < \omega < 1$) реализуется линейное взаимно-однозначное отображение всего пространства целых функций $\Phi(z) \in W_{3/2, \sigma}^{2, \infty}$ на все пространство трехкомпонентных вектор-функций $\varphi(\tau) = \{\varphi_j(\tau)\}_{-1}^1 \in L_2(0, \sigma)$.

При этом, согласно лемме 4.1, справедливо двустороннее неравенство

$$\|\Phi, L_{2, \infty} \asymp \|\varphi\|. \quad (5.18)$$

Из неравенств (5.15) и (5.18) следует непрерывность обоих наших отображений, а также справедливость двойного неравенства (5.11) теоремы. Итак, пространство $L_2^{\infty-1}$ гомеоморфно пространству вектор-функций $L_2(0, \sigma)$. Повтому для завершения доказательства утверждения 1° теоремы нам остается лишь установить справедливость формул (5.10). С этой целью, согласно формуле (5.17)

$$\Phi(\mu_n) = \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma E_{3/2}(e^{i\theta_j} \mu_n \tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} \overline{\varphi_j(\tau)} d\tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Отсюда, ввиду определения (5.1) системы $\{x_{n,j}(\tau)\}$, получим

$$\Phi(\mu_n) = \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma x_{n,j}(\tau) \overline{\varphi_j(\tau)} d\tau = \{x_n, \varphi\} = \overline{\{\varphi, x_n\}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Тогда, в силу интерполяционных соотношений (5.16), имеем также формулы (5.10), и доказательство завершается.

2°. В рассматриваемом случае доказательство проводится вполне аналогичным рассуждением, если воспользоваться теоремой 3.2 и определением 5.2 системы $\{x_{0,j}(\tau), x_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1$.

(в) Убедимся, наконец, что теорема 5.2 может быть сформулирована и таким образом.

Теорема 5.3. 1°. Для надлежащих значений параметра ν обе системы (5.5) и (5.6) полны в пространстве $L_2(0, \sigma)$ трехкомпонентных вектор-функций.

2°. После соответствующей нормировки обе эти системы становятся базисами Рисса в пространстве вектор-функций $L_2(0, \sigma)$.

Доказательство будем вести только для системы (5.5)

$$\omega_n(\tau) = \{\omega_{n,j}(\tau)\}_{j=1}^1 \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad \tau \in \bar{\delta}_1,$$

поскольку для системы (5.6)

$$\tilde{\omega}_n(\tau) = \{\tilde{\omega}_{0,j}, \tilde{\omega}_{n,j}(\tau)\}_{j=1}^1 \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad \tau \in \bar{\delta}_2$$

оно вполне аналогично.

1°. Пусть $\varphi_j(\tau) = \{\varphi_j(\tau)\}_{j=1}^1$ — любая вектор-функция из $L_2(0, \sigma)$. Согласно теореме 5.2 (1°), вектор-разложение

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi, x_n\} \omega_n(\tau) \quad (5.18),$$

сходится в метрике $L_2(0, \sigma)$ к вектор-функции $\varphi(\tau)$.

В самом деле, применив оценку (5.11) к разности

$$\rho_m(\tau) = \varphi(\tau) - \sum_{n=0}^m \{\varphi, x_n\} \omega_n(\tau),$$

будем иметь

$$\|\rho_m\| \leq \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \|\varphi, x_n\|^2 (1+n)^{w-1} \right)^{1/2}.$$

Поскольку, очевидно, что $\|\rho_m\| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, то отсюда следует не только полнота, но и базисность системы (5.5) в $L_2(0, \sigma)$.

2°. От введенных ранее биортогональных в $L_2(0, \sigma)$ вектор-систем (4.44)

$$x_n(\tau) = \{x_{n,j}(\tau)\}_{j=1}^1 \quad \text{и} \quad \omega_n(\tau) = \{\omega_{n,j}(\tau)\}_{j=1}^1 \quad (5.19)$$

перейдем к вектор-системам

$$\mathfrak{X}_n(\tau) = \{\mathfrak{X}_{n,j}(\tau)\}_{j=1}^1, \quad \Omega_n(\tau) = \{\Omega_{n,j}(\tau)\}_{j=1}^1, \quad (5.20)$$

положив для $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathfrak{X}_{n,j}(\tau) = (1+n)^{\frac{w-1}{2}} x_{n,j}, \quad \Omega_{n,j}(\tau) = (1+n)^{-\frac{w-1}{2}} \omega_{n,j}(\tau). \quad (5.20')$$

Легко видеть, что наряду с системами (5.13), вектор-системы (5.19) также биортогональны в метрике $L_2(0, \sigma)$, поскольку из (5.20') следуют равенства

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{X}_n, \Omega_m\} &= \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma \mathfrak{X}_{n,j}(\tau) \overline{\Omega_{m,j}(\tau)} d\tau = \\ &= \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma x_{n,j}(\tau) \overline{\omega_{m,j}(\tau)} d\tau = \{x_n, \omega_m\} = \delta_{n,m} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Далее, ряды типа (5.9) примут такой вид

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi, \mathfrak{X}_n\} \Omega_n(\tau). \quad (5.21),$$

оценки же (5.11) переходят в оценки

$$\|\varphi\| \asymp \|\varphi, \mathfrak{M}_n\|_{L_2, 0} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi, \mathfrak{M}_n\|^2 \right)^{1/2}. \quad (5.22)$$

Действительно, в силу обозначений (5.20')

$$\{\varphi, \mathfrak{M}_n\} \mathfrak{Q}_n(\tau) = \{\varphi, x_n\} \omega_n(\tau),$$

$$\|\{\varphi, \mathfrak{M}_n\}\|^2 = \|\{\varphi, x_n\}\|^2 (1+n)^{n-1} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Но справедливость биортогонального разложения вида (5.21) для любой функции $\varphi(\tau) \in L_2(0, \sigma)$ с оценкой типа (5.22), по известному определению, означает, что система $\{\mathfrak{Q}_n(\tau)\}_0^\infty$ является базисом Рисса* в $L_2(0, \sigma)$.

(г) В заключение параграфа приведем общую теорему о базисности построенных нами систем биортогональных в $L_2(0, \sigma)$ вектор-функций.

Теорема 5.4. 1°. Если $\nu \in \tilde{\mathfrak{d}}_1$ то системы вектор-функций

$$\{\mathfrak{M}_{n,j}(\tau)\}_0^\infty = \{(1+n)^{\frac{n-1}{2}} x_{n,j}(\tau)\}_0^\infty, \quad (5.23)$$

$$\{\mathfrak{Q}_{n,j}(\tau)\}_0^\infty = \{(1+n)^{-\frac{n-1}{2}} \omega_{n,j}(\tau)\}_0^\infty \quad (j=-1, 0, 1) \quad (5.24)$$

биортогональны и образуют базис Рисса в $L_2(0, \sigma)$.

2°. Если $\nu \in \mathfrak{d}_2$ то системы-вектор-функций

$$\{\mathfrak{M}_{0,j}^\bullet(\tau), \{\tilde{\mathfrak{M}}_{n,j}(\tau)\}_0^\infty\} = \{\tilde{x}_{0,j}^\bullet(\tau), \{(1+n)^{\frac{n-1}{2}} \tilde{x}_{n,j}(\tau)\}_0^\infty\}, \quad (5.25)$$

$$\{\tilde{\mathfrak{Q}}_0^\bullet(\tau), \{\tilde{\mathfrak{Q}}_n(\tau)\}_0^\infty\} = \{\tilde{\omega}_{0,j}^\bullet(\tau), \{(1+n)^{-\frac{n-1}{2}} \tilde{\omega}_{n,j}(\tau)\}_0^\infty\} \quad (5.26)$$

также биортогональны и образуют базис Рисса в $L_2(0, \sigma)$.

Доказательство. 1°. Согласно теореме 5.3 системы (5.23) и (5.24) биортогональны в $L_2(0, \sigma)$, причем система (5.24) является базисом Рисса. Вместе с тем, система (5.23) по теореме 5.1 полна в $L_2(0, \sigma)$. Отсюда, на основании известной теоремы о базисности Рисса биортогональных систем (см. [7], гл. VI), система (5.23) также будет базисом Рисса.

2°. Наши утверждения о системах (5.25) и (5.26) вытекают из соответствующих утверждений теорем 5.3 и 5.1 аналогичным образом.

Институт математики АН Армянской ССР,
Ереванский государственный университет

Поступила 15. XII. 1986

* Различные эквивалентные определения и важнейшие свойства базисов Рисса изложены, например, в книге [7].

Ե. Մ. ԶԻՐԱՇԻԱՆ, Ս. Դ. ՌԱՖԱԵԼԻԱՆ. Ամբողջ ֆունկցիաների դասերում ինտերպոլյացիոն մեթոդները և երանց հետ առնչված Ռիսի բազիսներ (ամփոփում)

$\mathcal{W}_{p, \sigma}^{p, \infty}$ -ով ($p > 1$, $-1 < \sigma < p-1$, $\sigma > 0$) նշանակենք $p = 3/2$ կարգ և σ -ին չգերազանցող տիպ ունեցող այն $\Phi(z)$ ֆունկցիաների դասը, որոնց համար

$$\sum_{k=-1}^1 \int_0^{\infty} |\Phi(re^{i\frac{2\pi}{3}k})|^p r^{\sigma} dr < +\infty$$

$\{\mu_k\}_1^{\infty}$ -ով նշանակենք $E_{1/2}(-z^2 z^3; 1 + \nu)$ ֆունկցիայի զրոների հաջորդականությունը: Ներկա հետազոտությունում նախ լուծվում է հետևյալ խնդիրը. գտնել $\{c_k\}_1^{\infty} \subset \mathbb{C}$ համարժեքայինների այն դասը, որոնց համար $\Phi(\mu_k) = c_k$ ($k \geq 1$) խնդիրը $\mathcal{W}_{3/2, \sigma}^{p, \infty}$ տարածությունում ունի լուծում և բացահայտ տեսքով կառուցել այդ լուծումը:

Հենվելով ստացված արդյունքների և հեգիսակներից առաջինի վաղ շրջանի որոշ աշխատանքների վրա. Յ-բաղադրիչներով վեկտոր ֆունկցիաների $L_2(0, \sigma)$ դասում կառուցվում են Ռիսի բազիսներ: Բազիսային ֆունկցիաները արտահայտվում են Միտագ-Լեֆլերի տիպի $3/2$ կարգի ֆունկցիաների միջոցով:

Բացահայտ տեսքով կառուցվում են նաև դրանց բիօրթոգոնալ համակարգերը:

M. M. DJRBASHIAN, S. G. RAPHAELIAN. *Interpolation expansions in the classes of entire functions and the Riesz bases generated by them (summary)*

Let $\mathcal{W}_{p, \sigma}^{p, \infty}$ be the class of entire functions $\Phi(z)$ of order $p = 3/2$ and type $\leq \sigma$, for which

$$\sum_{k=-1}^1 \int_0^{\infty} |\Phi(re^{i\frac{2\pi}{3}k})|^p r^{\sigma} dr < +\infty.$$

Let $\{\mu_k\}_1^{\infty}$ be the zeros of the function $E_{1/2}(-z^2 z^3; 1 + \nu)$. In the paper solves the following problem: describe the class of sequences $\{c_k\}_1^{\infty} \subset \mathbb{C}$ such that the problem $\Phi(\mu_k) = c_k$ ($k \geq 1$) has a solution in the space $\mathcal{W}_{p, \sigma}^{p, \infty}$ and construct the solutions. The basic functions of the Riesz basis are expressed through the Mittag-Leffler type functions of the order $3/2$ and the corresponding biorthogonal systems are constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
2. С. Г. Рафаелян. Интерполяция и базисность в весовых классах целых функций экспоненциального типа, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVIII, № 3, 1983, 167—186.
3. М. М. Джрбашян. Интерполяционные и спектральные разложения, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIX, № 2, 1984, 81—181.
4. С. Г. Рафаелян. Базисность некоторых биортогональных систем в $L^2(-\sigma, \sigma)$ с весом, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIX, № 3, 1984, 207—218.
5. М. М. Джрбашян, С. Г. Рафаелян. Интерполяционные теоремы и разложения по системам типа Фурье, ДАН СССР, 285, № 4, 1985, 782—787.
6. M. M. Djrbashian and S. G. Raphaelian. Interpolation theorems and expansions with respect to Fourier type systems, Journal of approximation theory, USA, № 5, 1987.
7. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., «Наука», 1965.

УДК 517.53

А. А. НЕРСЕСЯН

О ФУНКЦИЯХ, АППРОКСИМИРУЕМЫХ НА ЗАМКНУТЫХ
ПОДМНОЖЕСТВАХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

1°. Введение. Пусть E — замкнутое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $A(E)$ — класс всех функций $f: E \rightarrow \mathbb{C}$, непрерывных на E и аналитических на E° (E° — множество внутренних точек E ; если $E^\circ = \emptyset$, то $A(E) = C(E)$); $I(E)$ — подкласс $A(E)$, состоящий из функций f , допускающих равномерную аппроксимацию на E посредством целых функций (другими словами, $f \in I(E)$, если существует последовательность целых функций, равномерно сходящаяся на E к f).

Хорошо известна следующая

Теорема А. (Н. У. Аракелян [1], [2]). Для того, чтобы любая функция $f \in A(E)$ допускала равномерную аппроксимацию на E целыми функциями (т. е. чтобы имело место соотношение $I(E) = A(E)$), необходимо и достаточно, чтобы множество $E^c = \mathbb{C} \setminus E$ было связано и локально связано.

Условие на множество E , фигурирующее в этой теореме, принято называть условием K (а множество — K -множеством). Это условие восходит к работам А. Рот [3] и М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева [4], посвященным задачам аппроксимации целыми функциями на неограниченных замкнутых множествах; по этому поводу см. также обзор С. Н. Мергеляна [5]. Отметим, что требование локальной связности относится, по существу, только к точке $z = \infty$ ($\in E^c$).

В обзоре [2] Н. У. Аракелян поставил задачу о характеристизации функций $f \in I(E)$ в том случае, когда E не является K -множеством. Там же он отметил, что аппроксимируемые функции аналитически продолжаются на те компоненты множества $\mathbb{C} \setminus E$, для которых бесконечно удаленная точка не является линейно достижимой. Этой задаче посвящены, в частности, интересные работы А. Страла [6], [7].

В этой работе мы выделим достаточно широкий класс множеств E (не удовлетворяющих условию K), для которых функции $f \in I(E)$ могут быть охарактеризованы в терминах, связанных с полиномиальной аппроксимацией на компактах. Соответствующая теорема (теорема 2 ниже) несколько проясняет характер рассматриваемой задачи.

2°. Обозначения. Формулировки теорем. Всюду в дальнейшем мы рассматриваем множества E , удовлетворяющие следующим условиям: (i) $E^\circ = \emptyset$; (ii) E^c является линейно связным множеством (последнее условие связано с упомянутым замечанием Н. У. Аракеяна).

Примем обозначения: $B_r = \{z: |z| \leq r\}$, $E_r = E \cup B_r$, F_r — замыкание объединения компонент множества $\mathbb{C} \setminus E_r$, для которых бесконеч-

но удаленная точка не является линейно достижимой. Отметим, что для рассматриваемых множеств E условие K эквивалентно требованию ограниченности множеств F_r при всех $r > 0$.

Пусть E_1 обозначает класс множеств E , удовлетворяющих кроме (i), (ii) еще и следующему условию (iii): При любом $r > 0$ все компоненты дополнения к E_r , для которых бесконечно удаленная точка не является линейно достижимой, ограничены.

Теорема 1. Пусть $E \in E_1$ и $f \in C(E)$. Если при любом $r > 0$ функция f аппроксимируема на $F_r \cap E$ с любой точностью функциями из $A(F_r)$, то $f \in I(E)$.

Эта теорема существенно упрощает анализ рассматриваемой задачи.

Для формулировки следующего утверждения нам понадобится еще ряд обозначений.

Обозначим через E_2 класс множеств E , удовлетворяющих условиям (i), (ii), а также следующему условию (iv): При любом $r > 0$ каждая компонента множества F_r^0 ограничена.

Пусть $G_r(n)$, $n = 1, 2, \dots$ — компоненты F_r^0 (перенумерованные произвольным образом) и для любого $\rho > r$,

$$E_{r,\rho}(n) = E_r \cap \overline{G_r(n)}.$$

Для компакта $K \subset C$ и функции $f \in C(K)$ положим

$$\alpha(f; K) = \inf \|f - p\|_K; \quad p \in P,$$

где P — множество всех полиномов от z , $\|\cdot\|_K$ — sup-норма на K . По теореме Мергеляна, величина $\alpha(f; K)$ не изменяется, если $\inf$ в ее определении взять по всем функциям $p \in A(\hat{K})$, где $\hat{K}$ — полиномиальная оболочка компакта K .

Ниже нам будет удобно считать, что функция $f \in C(E)$ определена и непрерывна на всей плоскости C ; это относится, в частности, к формулировке теоремы 2.

Теорема 2. Пусть $E \in E_2$ и $f \in C(E)$. Для того, чтобы $f \in I(E)$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $r > 0$ и $\rho \geq r$ (таких, что $E_{r,\rho}(n)$ — бесконечная последовательность) имело место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(f; E_{r,\rho}(n)) = 0. \quad (1)$$

Доказательство теоремы 2 и построение приводимого ниже примера получены совместно с А. А. Гончаром.

3°. Пример. Характерный пример множества, не являющегося K -множеством — это график функции $y = s(x) = (1/x) \sin(\pi/x)$; $x \neq 0$, вместе с предельной прямой $iR: \{x = 0\}$ ($z = x + iy$). Другой пример — часть этого множества, лежащая в первом квадранте $x \geq 0$; $y > 0$ (последнее множество обозначим через E^+).

А. Страй [6] построил пример множества E и функции $f \in C(E)$ таких, что f и $1/f$ ограничены на E , $f \in I(E)$, но $1/f \notin I(E)$. Чтобы проиллюстрировать применение теоремы 2 в простейшей ситуации, построим функцию $f \in C(E^+)$ такую, что $|f| = 1$ на E^+ , $f \in I(E^+)$, но $1/f \notin I(E^+)$.

Пусть D_n — область, ограниченная графиком функции $y = s(x)$; $x \in \Delta_n = [1/(2n+1); 1/2n]$, и отрезком Δ_n ; a_n — середина Δ_n , z_n — середина отрезка $D_n \cap \{y = n\}$; $f_n: \bar{D}_n \rightarrow B_1$ — гомеоморфизм, конформный в D_n , $f_n(z_n) = 0$, $f_n(a_n) = 1$. Нетрудно убедиться в том, что функция $\tilde{f}$, равная f_n на $\bar{D}_n$, $n = 1, 2, \dots$, и единице на $i\mathbb{R}^+$, принадлежит $A(\tilde{E})$, где $\tilde{E}$ — объединение всех $\bar{D}_n$ и $i\mathbb{R}^+$. Множество $\tilde{E}$ удовлетворяет условию K; по теореме А $\tilde{f} \in I(\tilde{E})$ и, тем самым, $f = \tilde{f}|_{E^+} \in I(E^+)$ (в этом случае $\alpha(f; E_{r,p}^+(n)) = 0$). Для доказательства $1/f \in I(E^+)$, нам понадобится следующая простая

Лемма 1. Пусть D — ограниченная односвязная жорданова область и $z_0 \in D$. Тогда

$$\frac{1}{4d_0} \leq \alpha\left(\frac{1}{z-z_0}; \partial D\right) \leq \frac{1}{d_0},$$

где $d_0 = \text{dist}(z_0; \partial D)$.

Доказательство. Верхняя оценка очевидна; перейдем к доказательству нижней.

Пусть φ — конформное отображение круга B_1^0 на область D , $\varphi(0) = z_0$. Имеем

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{\varphi(\zeta) - \varphi(0)} = \frac{1}{\varphi'(\zeta)\zeta} + \psi(\zeta); \quad \psi \in A(B_1).$$

Тем самым

$$\alpha\left(\frac{1}{z-z_0}; \partial D\right) = \alpha\left(\frac{1}{\varphi'(\zeta)\zeta}; \partial B_1\right) = \frac{1}{|\varphi'(\zeta)|}.$$

Неравенство $|\varphi'(\zeta)| \leq 4d_0$ следует из теоремы Кебе об $1/4^*$.

Вернемся к примеру. Полагая $\gamma_n = E_{1,1}^+(n)$, с помощью леммы 1 получаем

$$\alpha\left(\frac{1}{f}; \gamma_n\right) = \alpha\left(\frac{1}{f'(z_n)(z-z_n)}; \gamma_n\right) > \frac{1}{4d_n|f'(z_n)|} \geq \frac{1}{4}$$

($d_n = \text{dist}(z_n; \gamma_n)$). По теореме 2 $1/f \in I(E^+)$.

Можно построить пример, показывающий, что в условии (1) теоремы 2 нельзя ограничиться каким-либо фиксированным $p \geq r$. Существенно также и условие (iv) теоремы 2.

4°. Замечания. 1. В силу свойства (ii) множеств класса E_1 дополнение в $\mathbb{C}$ к множеству $E_r \cup F$ линейно связно при любом $r > 0$.

2. $E_2 \subset E_1$.

3. При данном $r > 0$ замыкания не более чем трех компонент $G_r(n)$ могут иметь общую точку. В самом деле, пусть α_i, β_i , $i = 1, 2, 3, 4$, $\beta_i = \alpha_{i+1}$, $i = 1, 2, 3$ — основания на $\{|z| = r\}$ четырех компонент $G_r(n)$. Согласно замечанию 1 в произвольной окрестности каждой из точек α_i, β_i существуют точки дополнения $E_r \cup F_r$, линейно соединя

мые вне $E \cup F$, с бесконечно удаленной точкой. Если допустить, что замыкания компонент с основаниями $\alpha_1\beta_1$ и $\alpha_4\beta_4$ имеют общую точку, то точка $\beta_2 = z_1$ принадлежит замыканиям упомянутых компонент, что приводит к существованию окрестностей точек $\beta_1 = z_2$ и $\beta_3 = \alpha_4$, сплошь состоящих из точек, линейно несоединимых с бесконечностью.

В доказательстве теоремы 2 мы воспользуемся следующим утверждением работы [8].

Лемма 2. Пусть компакт $F \subset \mathbb{C}$ имеет связное дополнение $G \subset F$, $\partial G \subset \partial F$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует полином π , удовлетворяющий условиям:

- а) $|1 - \pi|_{F \setminus (e)_\delta} < \delta$;
 б) $|\pi|_{G \setminus (F \setminus (e)_\delta)} < \delta$; в) $|\pi|_F < c$,

где $(e)_\delta$ — δ -окрестность множества e и $c \geq 1$ — абсолютная константа.

5°. Доказательство теоремы 1. Считаем, что множества F_n неограничены при всех $n \geq 1$. Существуют функции $q_n \in A(F_n)$ такие, что

$$\|f - q_n\|_{F_n \cap E} < \frac{\varepsilon}{2^n}; \quad n = 1, 2, \dots$$

Для любого $n \geq 1$, непрерывно продолжая функцию q_n с множества F_n на $(B_n \cap E) \cup F_n$ надлежащим образом, построим функцию класса $A((B_n \cap E) \cup F_n)$ (также обозначаемую через q_n) такую, что

$$\|f - q_n\|_{(B_n \cap E) \cup F_n} < \frac{\varepsilon}{2^n}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Легко установить, что множество $(B_n \cap E) \cup F_n$ удовлетворяет условиям теоремы автора о мероморфной аппроксимации [9]. Согласно этой теореме существуют мероморфные функции $\tilde{q}_n$ такие, что

$$\|\tilde{q}_n - q_n\|_{(B_n \cap E) \cup F_n} < \frac{\varepsilon}{2^n}; \quad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда, с учетом (2) получаем

$$\|f - \tilde{q}_n\|_{(B_n \cap E) \cup F_n} < \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

При этом, сдвинув конечное число полюсов функций $\tilde{q}_n$, можем считать, что они не имеют полюсов на $B_n \cup F_n$.

Существует лишь конечное число компонент множества $F_n \setminus E$, на пересечении которых с окружностью $\{|z| = n+1\}$ колебание $\tilde{q}_n$ или $\tilde{q}_{n+1}$ не меньше $\varepsilon/2^{n-1}$. Согласно свойству (iii) множеств класса E_1 , эти компоненты в совокупности ограничены. Поэтому, с учетом (3) и принципа максимума модуля, можно найти последовательность чисел $\{R_n\}_{n=1}^\infty$ таких, что $R_1 \geq 2$, $R_{n+1} > 2R_n$ и

$$\|q_n - q_{n+1}\|_{F_n \cap A_{R_n R_{n+1}}} < \frac{\varepsilon}{2^{n-3}}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

$$(A_{R_n R_{n+1}} = B_{R_{n+1}} \setminus B_{R_n}^0).$$

Изменив (при необходимости) значения функций q_n на $(E \cap A_{R_n R_{n+1}}) \setminus F_n$, надлежащим образом и аппроксимируя на множестве $B_{R_{n+1}} \cap (E_n \cup F_n)$ (имеющем связное дополнение согласно замечанию 1), получим полиномы λ_n , удовлетворяющие условиям

$$i) \|f - \lambda_n\|_{B_{R_{n+1}} \cap E} < \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad (5)$$

$$ii) \|\lambda_n - \lambda_{n+1}\|_{(F_n \cup E) \cap A_{R_n R_{n+1}}} < \frac{\varepsilon}{2^{n-3}}; \quad n = 1, 2, \dots.$$

Из известной леммы слияния А. Рот [10], с учетом неравенства $2R_n < R_{n+1}$, легко следует существование абсолютной константы $\alpha \geq 1$ и рациональных функций μ_n , удовлетворяющих следующим оценкам:

$$i) \|\lambda_n - \mu_n\|_{B_{R_{n+1}} \cap (E_n \cup F_n)} < \frac{\alpha \varepsilon}{2^{n-3}}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad (6)$$

$$ii) \|\lambda_{n+1} - \mu_n\|_{(F_n \cup E \cup B_{R_{n+1}}) \setminus B_{R_n}^0} < \frac{\alpha \varepsilon}{2^{n-3}}; \quad n = 1, 2, \dots;$$

Рассмотрим теперь функцию

$$h = \lambda_1 + \sum_{m=1}^{\infty} (\mu_m - \lambda_m). \quad (7)$$

Согласно (6i), h является мероморфной функцией, причем n -ое слагаемое ряда (7) имеет конечное число полюсов, лежащих в $A_{R_n R_{n+1}} \setminus (E \cup F_n)$. По построению F_n каждый из этих полюсов может быть соединен с бесконечно удаленной точкой жордановым путем, лежащим вне $E_n \cup F_n$. Удалив из плоскости $\mathbb{C}$ указанные пути вместе с надлежащими открытыми окрестностями, не пересекающими множества $E_n \cup F_n$, для всех $n \geq 1$, в результате получим множество $\tilde{E}$, $E \subset \tilde{E}$, удовлетворяющее условию К, причем $h \in A(\tilde{E})$. С помощью теоремы А, примененной к $\tilde{E}$ и h , получим целую функцию H такую, что

$$\|h - H\|_{\tilde{E}} < \varepsilon. \quad (8)$$

Для произвольной точки $z \in E$ найдем число $n \geq 0$ такое, что $z \in A_{R_n R_{n+1}} \cap E$ (считаем, что $R_0 = 0$ и $A_{0R_1} = B_{R_1}$).

При $n = 0, 1$ имеем согласно (5i), (6i) и (8):

$$|f(z) - H(z)| \leq |f(z) - h(z)| + \varepsilon \leq |f(z) - \lambda_1(z)| +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\mu_m(z) - \lambda_m(z)| + \varepsilon \leq 3\varepsilon + \alpha \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m-3}} \leq 11\alpha \varepsilon.$$

Если же $n > 1$, то

$$|f(z) - H(z)| \leq |f(z) - h(z)| + \varepsilon \leq \sum_{m=1}^{k-1} |\mu_m(z) - \lambda_{m+1}(z)| + \\ + |f(z) - \lambda_n(z)| + \sum_{m=n}^{\infty} |\mu_m(z) - \lambda_m(z)| + \varepsilon \leq 10a\varepsilon,$$

согласно (5i), (6) и (8). Теорема 1 доказана.

6°. Доказательство теоремы 2. Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$, $r > 0$ и $\rho \geq r$ фиксированы, и целая функция g удовлетворяет неравенству

$$|f - g|_E < \varepsilon. \quad (9)$$

Обозначим через E_∞ подмножество точек E , являющихся предельными для последовательностей, содержащих не более одной точки в каждой компоненте $G_r(n)$, $n = 1, 2, \dots$. Множество E_∞ замкнуто, и, так как функция $f - g$ непрерывна на S , то существует окрестность V множества E_∞ , на которой выполняется неравенство

$$|f - g| < 2\varepsilon.$$

По определению E_∞ существует такое число N , что $n > N$, $B_r \cap \overline{G_r(n)} \subset V$. Поэтому будем иметь из (9), (10) и определения $E_{r,\rho}(n)$,

$$|f - g|_{E_{r,\rho}(n)} < 2\varepsilon \quad (10)$$

при $n > N$, что эквивалентно $\alpha(f; E_{r,\rho}(n)) < 2\varepsilon$ при $n > N$.

Достаточность. Согласно теореме 1 и замечанию 2, достаточно проверить, что при произвольном фиксированном $r > 0$ функция f аппроксимируема на $F_r \cap E$ с любой точностью функциями класса $A(F_r)$.

Введем обозначение $E_{n,k} = E_{r,r+k}(n)$; $n, k = 1, 2, \dots$.

Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$, и пусть N_1 — наименьшее число, для которого $\alpha(f; E_{n,1}) < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n \geq N_1$.

Рассмотрим все компоненты $G_n = G_r(n)$, $n \geq N_1$, для которых либо

а) $\alpha(f; E_{n,2}) \geq \frac{\varepsilon}{3}$, либо

б) $\overline{G_n} \cap \overline{G_m} \neq \emptyset$ при каком-нибудь m , удовлетворяющем а).

Согласно (1) и замечанию 3, число компонент G_n , удовлетворяющих а) или б) конечно. Если таких компонент нет, то примем $N_2 = N_1$. В противном случае, при необходимости перенумеровав $\{G_n\}_{N_1}^\infty$, будем считать, что а) или б) выполняются тогда и только тогда, когда $N_1 \leq n < N_2$.

Пусть при $k \geq 2$ уже выбраны числа $N_1 < N_2 \leq \dots \leq N_k$.

Рассмотрим все G_n , $n \geq N_k$, для которых либо

б) $\alpha(f; E_{n,k+1}) < \frac{\varepsilon}{k+2}$, либо

б) $\overline{G_n} \cap \overline{G_m} \neq \emptyset$, где либо $N_{k-1} \leq m < N_k$, либо m удовлетворяет а).

Число N_{k+1} выберем аналогично N_2 так, чтобы а) или б) выполнялись тогда и только тогда, когда $N_k \leq j < N_{k+1}$ (или же примем $N_{k+1} = N_k$, если нет компонент, удовлетворяющих а) или б)).

Продолжая этот процесс, построим последовательность $\{N_k\}$, $N_k \nearrow \infty$.

Обозначим $H_k = \cup_{j=N_k}^{N_{k+1}-1} E_{j,k}$; $k=1, 2, \dots$.

Согласно выбору чисел N_k , имеют место оценки

$$\alpha(f; E_{j,k}) < \frac{\varepsilon}{k+1}$$

при $N_k \leq j < N_{k+1}$, $k=1, 2, \dots$.

Лемма 3. Имеет место оценка

$$\alpha(f; H_k) < \frac{b\varepsilon}{k+1}; \quad k=1, 2, \dots, \quad (11)$$

где b — абсолютная константа.

Доказательство. Пусть $\eta > 0$ — произвольное число. Полиномы p_j выберем из условий

$$\|f - p_j\|_{E_{j,k}} < \frac{\varepsilon}{k+1} + \frac{\eta}{N_{k+1}}; \quad N_k \leq j < N_{k+1}.$$

Обозначим $M = \max \{ \|p_j\|_{H_k}; N_k \leq j < N_{k+1} \}$. Согласно замечанию 3 существует $\delta > 0$ такое, что δ -окрестности произвольной пары множеств $\bar{G}_i$ и $\bar{G}_j$; $N_k \leq i, j < N_{k+1}$, имеют непустое пересечение тогда и только тогда, когда $\bar{G}_i \cap \bar{G}_j \neq \emptyset$. Тогда δ -окрестность каждой точки $z \in \partial G_j$ пересекается с не более чем двумя другими множествами G_j . При необходимости уменьшив δ , можем считать, что выполняются также следующие условия

$$(1 + \delta)^{N_{k+1}} < 1 + 2N_{k+1}\delta; \quad 2\delta(1 + c)^2 N_{k+1} M < \frac{\eta}{N_{k+1}},$$

где c — константа леммы 2, а также

$$\|p_i\|_{H_k} < 2M; \|f - p_j\|_{E_{j,k}} < \frac{\varepsilon}{k+1} + \frac{\eta}{N_{k+1}}; \quad N_k \leq j < N_{k+1}.$$

При $z_0 \in \bar{G}_i \cap \bar{G}_j$, из последнего условия вытекает, что

$$\|p_i - p_j\|_{D_{z_0}} < 2 \left(\frac{\varepsilon}{k+1} + \frac{\eta}{N_{k+1}} \right), \quad (a)$$

где $D_{z_0} = \{z : |z - z_0| < \delta\}$.

С учетом замечания 1 и свойства (ii) множества E , легко видеть, что компакты $\tilde{G}_s = \cup_{j=N_k}^s \bar{G}_j$ и $F = \hat{H}_k$ удовлетворяют условиям леммы 2 при любом $s = N_k, \dots, N_{k+1} - 2$. Поэтому существует полиномы π_s такие, что

$$\|1 - \pi_s\|_{\tilde{G}_s \setminus (F \setminus \tilde{G}_s)} < \delta; \quad \|\pi_s\|_{F \setminus (\tilde{G}_s)} < \delta; \quad \|\pi_s\|_F < c; \quad N_k \leq s \leq N_{k+1} - 2. \quad (6)$$

Рассмотрим полином

$$\begin{aligned} p &= (\dots (\pi_{N_k} p_{N_k} + (1 - \pi_{N_k}) p_{N_{k+1}}) \pi_{N_{k+1}} + \dots + \\ &+ (1 - \pi_{N_{k+1}-3}) p_{N_{k+1}-2}) \pi_{N_{k+1}-2} + (1 - \pi_{N_{k+1}-1}) p_{N_{k+1}-1} = \\ &= \sum_{s=N_k}^{N_{k+1}-1} p_s (1 - \pi_{s-1}) \prod_{t=s}^{N_{k+1}-1} \pi_t \end{aligned}$$

(здесь принято $\pi_{N_k-1} = 0$ и $\pi_{N_{k+1}-1} = 1$).

Пусть j — любое целое, $N_k \leq j < N_{k+1}$ и $z_0 \in \bar{G}_j$ — произвольная точка. Заметим, что

$$p - p_j = \sum_{s=N_k}^{N_{k+1}-1} (p_s - p_j) (1 - \pi_{s-1}) \prod_{t=s}^{N_{k+1}-1} \pi_t$$

и оценим $\|q_s\|_{D_{z_0} \cap F}$, где q_s — s -ое слагаемое суммы.

С учетом (а), (б) и выбора числа δ находим, что кроме, возможно, двух значений s ; $s \neq s_1, s_2$, имеет место оценка

$$\|q_s\|_{D_{z_0} \cap F} < \frac{\eta}{N_{k+1}}.$$

а при $s = s_1, s_2$ —

$$\|q_s\|_{D_{z_0} \cap F} < 2(c+1)^3 \left(\frac{\varepsilon}{k+1} + \eta \right).$$

Складывая эти оценки, получаем

$$\|p - p_j\|_{D_{z_0} \cap F} < 4(c+1)^3 \left(\frac{\varepsilon}{k+1} + \eta \right) + \eta.$$

В силу произвольности числа η и точки z_0 , откуда получаем

$$\|f - p\|_{E_{j,k}} < 5(c+1)^3 \frac{\varepsilon}{k+1},$$

что влечет (11) с константной $b = 5(c+1)^3$.

Из построения следует, что $H_n \cap H_m = \emptyset$ при $1 \leq n < m-1$. Поэтому существуют такие открытые множества V_n , что $H_n \cap H_{n+1} \subset V_n$ и $\bar{V}_n \cap \bar{V}_m = \emptyset$, $n \neq m$. Легко видеть также, что множества $F = \bigcup_{i=1}^n \hat{H}_i$ и $G = \hat{H}_n$ удовлетворяют условиям леммы 2 при любом $n > 2$.

Согласно (11) существует полином p_1 такой, что

$$\|f - p_1\|_{H_1} < \frac{b\varepsilon}{2}. \quad (12)$$

Существует также полином q_2 такой, что

$$\|f - p_1 - q_2\|_{H_1} < \frac{b\varepsilon}{3}. \quad (13)$$

По непрерывности, соотношения (12) и (13) выполняются также и на некоторой окрестности V'_1 множества $H_1 \cap H_2$, причем $\bar{V}_1 \subset V_1$. Поэтому

$$\|q_1\|_{\overline{V_1}} < b\varepsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right). \quad (14)$$

Выбирая число $\delta > 0$ достаточно малым, с помощью леммы 2, примененной к $\hat{H}_1 \cup \hat{H}_2$ и $\hat{H}_2$, построим такой полином π_1 , чтобы для полинома $p_2 = \pi_1 q_2$ имели место соотношения:

$$\begin{aligned} \|f - p_1 - p_2\|_{H_1 \setminus V_1'} &< \frac{b\varepsilon}{2}; \\ \|f - p_1 - p_2\|_{H_1 \setminus V_1'} &< \frac{b\varepsilon}{3}; \quad \|p_2\|_{H_1 \setminus V_1'} < \frac{1}{2^2}. \end{aligned}$$

Имеем из (14) и пункта с) леммы 2:

$$\|p_2\|_{\overline{V_1}} < b\varepsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right),$$

и, так как оценка (12) выполняется и на V_1' , то отсюда получаем

$$\|f - p_1 - p_2\|_{H_1 \cup \overline{V_1}} < b\varepsilon \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{3} \right).$$

Пусть теперь, для $m \geq 2$ уже выбраны полиномы $p_1, p_2, \dots, p_m$, удовлетворяющие неравенствам ($V_0 = \emptyset$):

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \|f - P_m\|_{(H_j \setminus V_{j-1}') \cup \overline{V_j}} < b\varepsilon \left(\frac{2}{j} + \frac{1}{j+1} \right); \quad j=1, 2, \dots, m-1; \\ \text{ii)} \quad & \|f - P_m\|_{H_m \setminus V_{m-1}'} < \frac{b\varepsilon}{m+1}; \\ \text{iii)} \quad & \|p_j\|_{\bigcup_{i=1}^{j-1} H_i \setminus V_j'} < \frac{1}{2^j}; \quad j=2, 3, \dots, m, \end{aligned} \quad (15)$$

где $P_m = \sum_{j=1}^m p_j$.

Согласно (11) существует полином q_{m+1} такой, что

$$\|f - P_m - q_{m+1}\|_{H_{m+1}} < \frac{b\varepsilon}{m+2}. \quad (16)$$

По непрерывности, соотношения (15) и (16) выполнены также и на некоторой окрестности V_m множества $H_m \cap H_{m+1}$, причем $\overline{V_m} \subset V_m$. Поэтому

$$\|q_{m+1}\|_{\overline{V_m}} < b\varepsilon \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} \right). \quad (17)$$

Выбирая число $\delta > 0$ достаточно малым, с помощью леммы 2, примененной к $\bigcup_{i=1}^{m+1} \hat{H}_i$ и $\hat{H}_{m+1}$, построим такой полином π_m , чтобы для полинома $p_{m+1} = \pi_m q_m$ выполнялись соотношения

$$\|f - P_m - p_{m+1}\|_{(H_j \setminus V_j') \cup \overline{V_j}} < b\varepsilon \left(\frac{2}{j} + \frac{1}{j+1} \right); \quad j=1, 2, \dots, m,$$

$$\|f - P_m - p_{m+1}\|_{(H_m \setminus V'_{m-1})} V_m < \frac{b\varepsilon}{m+1}; \quad (18)$$

$$\|f - P_m - p_{m+1}\|_{H_{m+1} \setminus V'_m} < \frac{b\varepsilon}{m+2}; \quad \|p_{m+1}\|_{(U_{l=1}^m H_l \setminus V'_m)} < \frac{1}{2^{m+1}}.$$

Будем иметь из (17) и оценки пункта с) леммы 2:

$$\|p_{m+1}\|_{V'_m} < b\varepsilon \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} \right).$$

Учитывая также, что (15 ii) выполнено и на $\bar{V}_m$, получаем

$$\begin{aligned} \|f - P_m - p_{m+1}\|_{V'_m} &< \frac{b\varepsilon}{m+1} + b\varepsilon \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} \right) < \\ &< b\varepsilon \left(\frac{2}{m+1} + \frac{1}{m+2} \right). \end{aligned}$$

Совместно с (18), это неравенство показывает, что соотношения (15) имеют место с заменой m на $m+1$. По принципу индукции отсюда получаем существование последовательности полиномов $\{p_m\}$, удовлетворяющих соотношениям (15) при всех $m \geq 2$.

Из (15 iii) вытекает, что ряд $\sum_{m=1}^{\infty} p_m$ сходится равномерно на множестве $U_{l=1}^N \hat{H}_l$ при любом $N \geq 1$. Следовательно, его сумма g непрерывна на $U_{l=1}^{\infty} \bar{G}_l = U_{l=1}^{\infty} \hat{H}_l$ (см. свойство (i) множества класса E_1) и аналитична на $U_{l=1}^{\infty} G_l$.

Для произвольной точки $z \in U_{l=1}^{\infty} H_l$ найдем такие числа j_0 и N , что $z_0 \in (H_{j_0} \setminus V'_{j_0-1}) \cap \bar{V}'_j$; $N > j_0 + 1$ и $\sum_{j=N+1}^{\infty} (1/2^j) < \varepsilon/(j_0 + 1)$. Тогда будем иметь: согласно [(15 i) при $m=N$, $j=j_0$ и (15 iii) при $j \geq N+1$:

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| &\leq |f(z) - P_N(z)| + \left| \sum_{j=N+1}^{\infty} p_j(z) \right| < \\ &< b\varepsilon \left(\frac{2}{j_0} + \frac{1}{j_0+1} \right) + \frac{\varepsilon}{j_0+1} < \frac{A\varepsilon}{j_0}, \end{aligned}$$

где A — абсолютная константа.

Последняя оценка показывает, что g аппроксимирует функцию $\hat{f}$ на $U_{l=1}^{\infty} H_l$ с касанием на E_{∞} . Повтому, доопределив g на E_{∞} равной $\hat{f}$, будем иметь $g \in A(\bar{U} G_l)$ и

$$\|f - g\|_{\bar{U} H_l} < A\varepsilon. \quad (19)$$

Теперь продолжим функцию g непрерывно на множество $F \cap E \setminus \bar{U} H_l$ (которое содержится в $U_{l=1}^{N-1} \bar{G}_l$ и поэтому ограничено, в силу свойства (iv) класса E_2), с сохранением оценки (19). Аппроксимируя полученную функцию на множестве $U H_l \cup (F \cap E)$ с помощью мероморфной функции (согласно упомянутой теореме работы [9]) с точностью ε и удаляя, если возможно, конечное число полюсов полученной

функции с множества $\bigcup_{i=1}^{N-1} G_i$, можем построить функцию класса $A(F_r)$, аппроксимирующую функцию f на $F_r \cap E$ с точностью $(A+1)\varepsilon$.

Теорема 2 доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступила 24. IX. 1986

Ա. Հ. ՆԵՐՏԻՍՅԱՆ. Կոմպակտ հատրության փակ ենթաբազմությունների վրա մոտարկվող ֆունկցիաների մասին (ամփոփում)

Ն. Հ. Առաքելյանը 1970 թ. խնդիր էր դրել նկարագրել այն ֆունկցիաները, որոնք կամայական ճշտությամբ հավասարաչափ մոտարկվում են ամբողջ ֆունկցիաներով կոմպակտ հարթության փակ անսահմանափակ ենթաբազմությունների վրա այն դեպքում, երբ բազմության լրացումը ընդլայնված հարթությունում կապակցված է լուրջ կապակցված չէ (այս պայմանն անհրաժեշտ է բավարար է բազմության վրա անընդհատ ներսում անալիտիկ ֆունկցիաների մոտարկելիության համար)։ Այն աշխատանքում, բազմությունների բաժանանաչափ լայն դասի համար, մոտարկվող ֆունկցիաները նկարագրված են կոմպակտների վրա բազմանդամային լավագույն մոտավորության լայն տերմիններով։

A. H. NERSESIAN. On functions which are approximable on closed subsets of the complex plane (summary)

In 1970 N. H. Arakelian posed the problem of description of the class of functions, uniformly approximable by entire functions on closed unbounded subsets of the complex plane, whose complement is not connected and locally connected in the extended plane (this condition is necessary and sufficient for approximability of any function continuous on a set and analytical in its interior). For a large enough class of sets we give such a description in terms of the best polynomial approximation on compacts.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. У. Аракелян. О равномерном приближении целыми функциями на замкнутых множествах, Изв. АН СССР, сер. матем., 25, 5, 1964, 1187—1206.
2. N. U. Arakeljan Approximation complexe et propriétés des fonctions analytiques, Actes, Cong Math. intern., 1970, t. 2, 595—600.
3. A. Roth. Approximationseigenschaften und Strahlengrenzwerte meromorpher und, ganzer Funktionen, Comment. Math. Helv., 11, 1, 1938, 77—125.
4. М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев. Sur un problème de M. Carleman, ДАН СССР 23, 8, 1939, 746—748.
5. С. Н. Мергелян. Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, 7, 2 (48), 1952, 31—122.
6. A. Stray. Approximation by analytic functions which are uniformly continuous on a subset of their domain of definition, Amer. Journ. Math., 99, 4, 1977, 787—800.
7. A. Stray. Decomposition of approximable functions, Annals of Math., 120, 2, 1984, 225—235.
8. А. А. Нерсисян. О множествах Карлемана, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 6, 6, 1971, 465—471.
9. А. А. Нерсисян. О равномерной и касательной аппроксимации мероморфными функциями, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 7, 6, 1972, 403—412.
10. A. Roth. Uniform and tangential approximation by meromorphic functions on closed sets, Canad. Journ. Math., 28, 1, 1976, 104—111.

УДК 517.9

В. А. ЯВРЯН

К СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОДНОПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Введение. В пространстве $L^2(0, \infty)$ рассмотрим оператор L , задаваемый формулой

$$Ly = -y'' + q(x)y$$

и определенный на финитных функциях $y(x)$, удовлетворяющих в нуле условию $y'(0) - hy(0) = 0$, $\text{Im} h = 0$. Предполагается, что $q(x)$ — вещественная функция, интегрируемая в любом интервале $(0, b)$, $b < +\infty$.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — решения уравнения $-y'' + q(x)y = 0$ и $\varphi'(0) - h\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0)\psi(0) - \varphi(0)\psi'(0) = 1$. Тогда обратный оператор $L^{-1} = A$ будет интегральным оператором с ядром

$$K(x, s) = \begin{cases} \varphi(x)\psi(s), & x \leq s \\ \psi(s)\varphi(x), & x \geq s, \end{cases} \quad (1)$$

который определен на тех финитных функциях $f \in L^2(0, \infty)$, которые удовлетворяют условию

$$\int_0^\infty f(x)\varphi(x) dx = 0. \quad (2)$$

Мы будем изучать оператор A в пространстве $L^2(0, \infty)$ без его связи с оператором Штурма-Лиувилля, а только в предположении, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — произвольные локально квадратично интегрируемые вещественные функции и

$$\int_0^\infty (\varphi^2(x) + \psi^2(x)) dx = \infty. \quad (3)$$

Для простоты предположим также, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на множестве положительной меры не обращаются одновременно в нуль. В противном случае надо было бы рассматривать оператор A в пространстве $L^2(E)$, где E получается из $(0, \infty)$ отбрасыванием этого множества.

Можно сказать, что A^{-1} , если он существует, есть обобщенный оператор Штурма-Лиувилля. Условие (3) означает, что мы рассматриваем аналог случая точки Вейля. Отметим, что если (3) не выполняется, то A будет вполне непрерывным оператором (более того, оператором Гильберта-Шмидта) и, следовательно, для него применима теория Гильберта-Шмидта.

В настоящей работе для оператора A строится теория, аналогичная

спектральной теории операторов Штурма-Лиувилля. В случае конечного интервала интегральные операторы с ядрами (1) рассматривались в монографии Гантмахера и Крейна [1] и назывались однопарными интегральными операторами.

§ 1. Спектральное разложение однопарного интегрального оператора

Оператор A симметричен. Если $\varphi \in L^2(0, \infty)$, то его область определения будет неплотной и, между прочим, возможен случай, когда оператор A не имеет замыкания.

Для получения спектрального разложения оператора A мы применим метод направляющего функционала М. Г. Крейна к оператору, обратному к A . Поэтому мы сначала выделим множество нулей оператора A .

Следуя [2], интервал (α, β) мы будем называть исключительным, если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ линейно зависимы в этом интервале. Мы скажем, что (α, β) есть максимальный исключительный интервал, если он не содержится ни в одном другом исключительном интервале. Пусть $\{(\alpha_k, \beta_k)\}$ — множество максимальных исключительных интервалов. Будем считать, что $\varphi(x) \not\equiv 0$ в интервале вида $(0, \beta)$ и что интервал вида $(\alpha, +\infty)$ не есть исключительный (в противном случае надо рассматривать пространства $L^2(\beta, \infty)$ и $L^2(0, \alpha)$).

Теорема 1. Ортогональное дополнение $K(A)$ области значений оператора A состоит из всех функций $g \in L^2(0, \infty)$, удовлетворяющих условиям:

$$1) \quad g(x) = 0 \quad \text{почти всюду на } F = (0, \infty) \setminus \bigcup_k (\alpha_k, \beta_k),$$

$$2) \quad \int_{\alpha_k}^{\beta_k} g(s) \varphi(s) ds = \int_{\alpha_k}^{\beta_k} g(s) \psi(s) ds = 0.$$

Доказательство. Пусть $g \in K(A)$, т. е.

$$(Af, g) = 0 \quad \text{для любого } f \in D(A),$$

где $D(A)$ область определения оператора A .

Так как f удовлетворяет условию (2), то

$$(Af)(x) = \psi(x) \int_0^x f(s) \varphi(s) ds + \varphi(x) \int_x^\infty f(s) \psi(s) ds = \int_x^\infty V(x, s) f(s) ds,$$

где

$$V(x, s) = \varphi(x) \psi(s) - \varphi(s) \psi(x).$$

Имеем

$$(Af, g) = \int_0^\infty \overline{g(x)} dx \int_x^\infty V(x, s) f(s) ds = \int_0^\infty \overline{f(x)} dx \int_0^x V(s, x) \overline{g(s)} ds = 0$$

для любой функции f , удовлетворяющей условию (2).

Отсюда следует, что существует такая постоянная $c = c(g)$, что

$$\int_0^x V(s, x) \overline{g(s)} ds = -\bar{c} \varphi(x).$$

Подставляя значение $V(x, s)$, получаем

$$\left(c - \int_0^x g(s) \psi(s) ds \right) \varphi(x) + \psi(x) \int_0^x g(s) \varphi(s) ds = 0. \quad (4)$$

а) Пусть x_0 такая точка, что

$$\Phi_1(x_0) \neq 0, \quad \Phi_1(x) = \int_0^x g(s) \varphi(s) ds.$$

Тогда существует такая окрестность (α, β) этой точки, что $\Phi_1(x) \neq 0$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$. На этом интервале рассмотрим функцию

$$F(x) = \left(c - \int_0^x g(s) \psi(s) ds \right) / \Phi_1(x).$$

Из (4) следует, что $F'(x) = 0$ для любого $x \in (\alpha, \beta)$. Следовательно, $F(x) = a = \text{const}$ при $x \in (\alpha, \beta)$. Это соотношение вместе с (4) показывает, что

$$\psi(x) + a\varphi(x) = 0 \text{ при } x \in (\alpha, \beta),$$

т. е. интервал (α, β) есть исключительный.

б) Пусть x_0 такая точка, что

$$\Phi_2(x_0) \neq 0, \quad \Phi_2(x) = c - \int_0^x g(s) \psi(s) ds.$$

Тогда по аналогии с а) можно показать, что производная функции $\Phi_1(x) / \Phi_2(x)$ тождественно равна нулю в интервале (α, β) . Отсюда следует, что $\varphi(x) + b\psi(x) = 0$ при $x \in (\alpha, \beta)$, где b некоторая постоянная.

Таким образом, снова получаем, что (α, β) — исключительный интервал.

Пусть (α, β) — максимальный исключительный интервал. Покажем, что

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(s) \varphi(s) ds = \int_{\alpha}^{\beta} g(s) \psi(s) ds = 0.$$

Если один из интегралов $\int_{\alpha}^{\beta} g(s) \varphi(s) ds$ и $\int_{\alpha}^{\beta} g(s) \psi(s) ds$, скажем второй, не равен нулю, то согласно а) найдется такой интервал, со-

держаний точку β , где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ будут линейно зависимыми. Так как функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не обращаются в нуль одновременно, то последнее означает, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ линейно зависимы в более широком интервале, чем (α, β) , что противоречит максимальнойности (α, β) . Отсюда следует, что первое из условий 2) выполняется.

Точно таким же образом получаем, что при $\alpha > 0$

$$c - \int_0^{\alpha} g(s) \psi(s) ds = c - \int_0^{\beta} g(s) \psi(s) ds = 0,$$

т. е. выполняется второе из условий 2).

Если же $\alpha = 0$, т. е. интервал вида $(0, \beta)$ есть исключительный, то учитывая, что $\varphi(x) \neq 0$, получаем, что $\psi(x) = c\varphi(x)$ для $x \in (0, \beta)$. Это означает, что второе из условий 2) следует из уже доказанного первого.

Из а) и б) следует, что если $x \in F$, то

$$\int_0^x g(s) \varphi(s) ds = c - \int_0^x g(s) \psi(s) ds = 0.$$

Отсюда вытекает, что $g(x) \varphi(x) = g(x) \psi(x) = 0$ для $x \in F$ и, учитывая, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ одновременно не обращаются в нуль, получаем, что $g(x) = 0$ для любого $x \in F$.

Теперь покажем, что если g удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 1, то $g \in K(A)$, т. е. g удовлетворяет соотношению (4).

Пусть x принадлежит некоторому исключительному интервалу (α, β) . Тогда

$$(0, x) = \bigcup_k (\alpha_k, \beta_k) \cup (\alpha, x) \cup (F \cap (0, x)),$$

где суммирование берется по всем k , для которых $\beta_k < x$.

Следовательно

$$\begin{aligned} & -\varphi(x) \int_0^x g(s) \psi(s) ds + \psi(x) \int_0^x g(s) \varphi(s) ds = \\ & = \sum_k \left(-\varphi(x) \int_{\alpha_k}^{\beta_k} g(s) \psi(s) ds + \psi(x) \int_{\alpha_k}^{\beta_k} g(s) \varphi(s) ds \right) - \\ & - \varphi(x) \int_{\alpha}^x g(s) \psi(s) ds + \psi(x) \int_{\alpha}^x g(s) \varphi(s) ds = 0. \end{aligned}$$

Если же $x \in F$, то

$$(0, x) = \bigcup_k (\alpha_k, \beta_k) \cup ((0, x) \cap F)$$

и, как и выше, (4) легко проверяется.

Теорема 1 доказана.

Замечание. Из этой теоремы следует, что если g — финитная

функция и $g \in K(A)$, то g принадлежит области определения $D(A)$ оператора A и $Ag=0$. Таким образом, ядро оператора A плотно в $K(A)$.

Следствие 1. Для того, чтобы существовал обратный оператор A^{-1} , необходимо и достаточно, чтобы отсутствовали исключительные интервалы.

Следствие 2. Замыкание H_0 области значений оператора A состоит из функций g , произвольных на F и

$$g(x) = \begin{cases} c_k \varphi(x), & x \in (\alpha_k, \beta_k), \text{ если } \varphi(x) \neq 0 \text{ на } (\alpha_k, \beta_k), \\ c_k \psi(x), & x \in (\alpha_k, \beta_k), \text{ если } \varphi(x) \equiv 0 \text{ на } (\alpha_k, \beta_k). \end{cases}$$

Легко проверить, что подпространство H_0 приводит оператор A . Обозначим через A_0 часть оператора A в пространстве H_0 : $A_0 f = A f$, $f \in D(A) \cap H_0$. Очевидно, что обратный оператор A_0^{-1} существует, определен на плотном в H_0 множестве и, следовательно, имеет замыкание. Это замыкание $\overline{A_0^{-1}}$ естественно назвать обобщенным оператором Штурма—Лиувилля.

Обозначим через L множество финитных функций, принадлежащих $L^2(0, \infty)$. Оператор A переводит $D(A)$ в L .

Рассмотрим уравнение

$$f - Af = g, \quad \text{где } g \in L. \quad (5)$$

Уравнение (5) равносильно уравнению

$$f(x) - \lambda \int_x^\infty V(x, s) f(s) ds = g(x), \quad f \in D(A). \quad (6)$$

Решением (6) будет $f = (I - \lambda V_1)^{-1} g$, где

$$V_1 f(x) = \int_x^\infty V(x, s) f(s) ds.$$

Для того, чтобы $f \in D(A)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$(f, \varphi) = (g, (I - \lambda V_1)^{-1} \varphi) = 0.$$

Учитывая, что

$$V(x, s) = -V(s, x),$$

получаем следующее условие разрешимости (5):

$$\Phi(g, \lambda) = \int_0^\infty g(x) \varphi_\lambda(x) dx = 0, \quad (7)$$

где

$$\varphi_\lambda = (I + \lambda V)^{-1} \varphi, \quad V f(x) = \int_0^x V(x, s) f(s) ds.$$

Таким образом, $\varphi_\lambda(x)$ есть решение интегрального уравнения Вольтерра

$$\varphi_\lambda(x) - \lambda \int_0^x V(x, s) \varphi_\lambda(s) ds = \varphi(x). \quad (8)$$

Легко видеть, что если $g \in H_0$, то решение f уравнения (5) тоже будет принадлежать H_0 . Для этого надо обе части (5) скалярно умножить на произвольную финитную функцию $f \in K(A) = L^2(0, \infty) \ominus H_0$ и учесть, что $f_0 \in D(A)$ и $(Af, f_0) = (f, Af_0) = 0$. Отсюда, имея в виду, что такие функции f_0 плотны в $K(A)$, получаем, что $f \in H_0$. Отсюда следует, что уравнение

$$A_0^{-1}f - \lambda f = g, \text{ где } g \in H_0 \cap L = L_0,$$

имеет решение в том и только том случае, когда выполняется (7).

Таким образом, функционал $\Phi(g, \lambda)$ является направляющим функционалом для оператора A_0^{-1} . Теперь применяя метод направляющих функционалов М. Г. Крейна (см. [3], [4]) и учитывая теорему 3 (в части единственности спектральной функции), получаем спектральное разложение оператора A_0 .

Теорема 2. Существует единственная неубывающая функция $\sigma(\lambda)$ ($-\infty < \lambda < \infty$) такая, что отображение

$$U': g \rightarrow \Phi(g, \lambda), \quad g \in L_0$$

есть изометрия из L_0 в L^2_σ . Более того, продолжение U по непрерывности отображает H_0 на все пространство $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$. При этом оператор A_0 переходит в оператор умножения $1/\lambda$ в пространстве $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$.

Эта теорема в случае отсутствия исключительных интервалов и без указания единственности спектральной функции $\sigma(\lambda)$ другим путем установлена де Бранжем (см. [2], стр. 49).

Обозначим через P оператор ортогонального проектирования пространства $L^2(0, \infty)$ на подпространство $K(A)$. Легко видеть, что если $f(x)$ — финитная функция, то $Pf(x)$ тоже будет финитной. С другой стороны, $Pf \in D(A)$, $APf = 0$ и $\Phi(Pf, \lambda) = \lambda^{-1}\Phi(APf, \lambda) = 0$. Отсюда следует, что $\Phi(f - Pf, \lambda) = \varphi(f, \lambda)$ и так как $f - Pf \in L_0$, то для любой финитной $f(x)$ получаем

$$\int_0^\infty |f(x) - Pf(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^\infty |\Phi(f, \lambda)|^2 d\sigma(\lambda).$$

Это соотношение показывает, что H_0 — максимальное подпространство в $L^2(0, \infty)$, где U есть изометрический оператор из $L^2(0, \infty)$ в $(L^2_\sigma - \infty, \infty)$ при некотором $\sigma(\lambda)$.

§ 2. Резольвента обобщенного оператора Штурма—Лиувилля

1. Резольвента однопарного оператора в конечном интервале. Круги Вейля. В пространстве $L^2(0, b)$ рассмотрим интегральный оператор с однопарным ядром (1):

$$(A(b)f)(x) = \psi(x) \int_0^x f(s) \varphi(s) ds + \varphi(x) \int_x^b f(s) \psi(s) ds \quad (0 \leq x \leq b).$$

Найдем фредгольмову резольвенту $A_\lambda(b) = A(b) (I - \lambda A(b))^{-1}$ оператора $A(b)$. Из $(I - \lambda A(b))f = g$ следует, что

$$(I + \lambda V)f = g + \lambda(f, \psi)\varphi$$

или

$$f = (I + \lambda V)^{-1}g + \lambda(f, \psi)\varphi. \quad (9)$$

Здесь и дальше обозначено

$$(u, v) = \int_0^b u(x)v(x)dx.$$

Умножим обе части равенства (9) скалярно на ψ и определим (f, ψ) . Получаем

$$(f, \psi) = \frac{((I + \lambda V)^{-1}g, \psi)}{1 - \lambda(\varphi_\lambda, \psi)}.$$

Пусть $\chi_\lambda = (I + \lambda V^*)^{-1}\psi$, т. е. $\chi_\lambda(x)$ есть решение интегрального уравнения

$$\chi_\lambda(x) - \lambda \int_x^b V(x, s)\chi_\lambda(s)ds = \psi(x). \quad (10)$$

Тогда из (9) имеем

$$f = (I + \lambda V)^{-1}g + \frac{\lambda(g, \chi_\lambda)}{1 - \lambda(\varphi_\lambda, \psi)}\varphi. \quad (11)$$

Обозначим через $A_\lambda(x, s)$ и $V_\lambda(x, s)$, соответственно, фредгольмовы резольвенты операторов A и V . Так как оператор $A(b)$ симметричен, то $A_\lambda(x, s) = A_\lambda(s, x)$. Учитывая это, из (11) получим, что

$$V_\lambda(x, s) = \frac{1}{1 - \lambda(\varphi_\lambda, \psi)}(\varphi_\lambda(x)\chi_\lambda(s) - \varphi_\lambda(s)\chi_\lambda(x)), \quad (12)$$

где $V_\lambda(x, s)$ — ядро фредгольмовой резольвенты V_λ оператора V :

$$(I + \lambda V)^{-1} = I - \lambda V_\lambda.$$

Подставляя это значение $(I + \lambda V)^{-1}$ в (11), получаем

$$A_\lambda(x, s) = \frac{1}{1 - \lambda(\varphi_\lambda, \psi)}\varphi_\lambda(x)\chi_\lambda(s) \quad (x \leq s). \quad (13)$$

Ядро фредгольмовой резольвенты оператора $A(b)$ в такой форме приведено в монографии Ф. Р. Гантмахера и М. Г. Крейна [1]. Мы хотим переписать (13) в такой форме, которая аналогична случаю операторов Штурма-Лиувилля. Из (10) следует, что

$$(I + \lambda V) \chi_\lambda = (1 - \lambda(\varphi, \chi_\lambda)) \psi + \lambda(\psi, \chi_\lambda) \varphi.$$

Отсюда получаем, что

$$\chi_\lambda = \lambda(\psi, \chi_\lambda) \varphi_\lambda + (1 - \lambda(\varphi, \chi_\lambda)) \psi_\lambda,$$

где, по аналогии с φ_λ , обозначено

$$\psi_\lambda = (I + \lambda V)^{-1} \psi.$$

Имеем

$$(\varphi, \chi_\lambda) = ((I + \lambda V^*)^{-1} \psi, \varphi) = (\psi, (I + \lambda V)^{-1} \varphi) = (\psi, \varphi_\lambda),$$

$$(\psi, \chi_\lambda) = (\psi, \psi_\lambda).$$

Таким образом

$$\chi_\lambda = \lambda(\psi_\lambda, \psi) \varphi_\lambda + (1 - \lambda(\varphi_\lambda, \psi)) \psi_\lambda. \quad (14)$$

Подставим это значение в (13). Получаем

$$A_\lambda(x, s) = \varphi_\lambda(x) (\psi_\lambda(s) + m_b(\lambda) \varphi_\lambda(s)) \quad (x \leq s), \quad (15)$$

где

$$m_b(\lambda) = \frac{\lambda(\psi_\lambda, \psi)}{1 - \lambda(\varphi_\lambda, \psi)}. \quad (16)$$

Замечание. Из (12) и (14) имеем следующее выражение для $V_\lambda(x, s)$, которое будет полезным в дальнейшем:

$$V_\lambda(x, s) = \varphi_\lambda(x) \psi_\lambda(s) - \varphi_\lambda(s) \psi_\lambda(x). \quad (17)$$

Теперь построим аналог кругов Вейля для однопарного интегрального оператора. С этой целью рассмотрим интегральный оператор $A_0(b)$ с ядром (1) в интервале $(0, b)$ при дополнительном условии

$$\int_0^b f(x) \varphi(x) dx = 0.$$

Его самосопряженные расширения $A(b, \tau)$ в $L^2(0, b)$ будут интегральными операторами с ядрами

$$A(x, s, \tau) = \begin{cases} \varphi(x) (\psi(s) + \tau \varphi(s)), & (x \leq s) \\ \varphi(s) (\psi(x) + \tau \varphi(x)), & (x > s), \end{cases}$$

где τ — произвольное вещественное число.

Из (15) и (16) легко видеть, что ядро $A_\lambda(x, s, \tau)$ фредгольмовой резольвенты этого оператора имеет вид

$$A_\lambda(x, s, \tau) = \begin{cases} \varphi_\lambda(x) (\psi_\lambda(s) + m_b(\lambda, \tau) \varphi_\lambda(s)), & (x \leq s) \\ \varphi_\lambda(s) (\psi_\lambda(x) + m_b(\lambda, \tau) \varphi_\lambda(x)), & (x > s), \end{cases} \quad (18)$$

где

$$m_b(\lambda, \tau) = \frac{(1 + \lambda(\psi_\lambda, \varphi))\tau + \lambda(\psi_\lambda, \psi)}{-\lambda(\varphi_\lambda, \varphi)\tau + 1 - \lambda(\varphi_\lambda, \psi)} \quad (-\infty < \tau < \infty). \quad (19)$$

Это есть дробно-линейное преобразование от τ и, следовательно, переводит вещественную ось $\text{Im } \tau = 0$ на некоторую окружность $C(b)$. Эту окружность мы назовем окружностью Вейля. В случае оператора Штурма-Лиувилля окружность Вейля в виде (19) приведена в [5] М. Г. Крейном.

Теперь напомним уравнение (19) в другой форме, которая необходима для получения выражения резольвенты оператора A . Из (19) выразим τ через m и учтем, что если $m \in C(b)$, то τ будет вещественным, $\tau = \bar{\tau}$. Отсюда следует, что при $m \in C(b)$

$$D|m|^2 + Bm - \bar{B}\bar{m} + C = 0, \quad (20)$$

где

$$D = \bar{\lambda}(1 - \lambda(\varphi_\lambda, \psi))(\overline{\varphi_\lambda, \varphi}) - \lambda(\varphi_\lambda, \varphi)(1 - \bar{\lambda}(\overline{\varphi_\lambda, \psi})),$$

$$B = (1 - \lambda(\varphi_\lambda, \psi))(1 + \bar{\lambda}(\overline{\psi_\lambda, \varphi})) + |\lambda|^2(\overline{\psi_\lambda, \psi})(\varphi_\lambda, \varphi),$$

$$C = \bar{\lambda}(\overline{\psi_\lambda, \varphi})(1 + \lambda(\psi_\lambda, \varphi)) - \lambda(\psi_\lambda, \psi)(1 + \bar{\lambda}(\overline{\psi_\lambda, \varphi})).$$

Мы должны вычислить выражения интегралов $(\varphi_\lambda, \bar{\varphi}_\lambda)$, $(\psi_\lambda, \bar{\psi}_\lambda)$ и $(\varphi_\lambda, \bar{\psi}_\lambda)$ через коэффициенты D , B и C . Имеем

$$\mu\varphi_\lambda(x) = \mu\varphi(x) - \int_0^x (\varphi(x)\psi(s) - \varphi(s)\psi(x))\varphi_\lambda(s)ds,$$

$$\bar{\mu}\bar{\varphi}_\lambda(x) = \bar{\mu}\bar{\varphi}(x) = \int_0^x (\varphi(x)\psi(s) - \varphi(s)\psi(x))\overline{\varphi_\lambda(s)}ds, \quad \mu = \lambda^{-1}.$$

Умножим первое уравнение на $\overline{\varphi_\lambda(x)}$, второе — на $-\varphi_\lambda(x)$ и сложим. Теперь проинтегрируем обе части полученного равенства от 0 до b и в одном из двух интегралов в правой части изменим порядок интегрирования. После простых преобразований получим

$$\int_0^b |\varphi_\lambda(x)|^2 dx = \frac{1}{\bar{\lambda} - \lambda} D. \quad (21)$$

Аналогичными преобразованиями получаем

$$\int_0^b |\psi_\lambda(x)|^2 dx = \frac{1}{\bar{\lambda} - \lambda} C,$$

$$\int_0^b \varphi_\lambda(x)\overline{\psi_\lambda(x)}dx = \frac{1}{\bar{\lambda} - \lambda} (B - 1).$$

Из этих соотношений следует, что

$$\int_0^b |\psi_\lambda(x) + m\varphi_\lambda(x)|^2 dx = -\frac{1}{2i \operatorname{Im} \lambda} (|m|^2 + Bm - \bar{B}\bar{m} + C - m + \bar{m}).$$

Так как m удовлетворяет уравнению (20), то отсюда придем к обычному уравнению окружности $C(b)$:

$$\int_0^b |\psi_\lambda(x) + m\varphi_\lambda(x)|^2 dx = \frac{\operatorname{Im} m}{\operatorname{Im} \lambda}. \quad (22)$$

Отсюда следует, что окружность $C(b)$ при любом b и $\operatorname{Im} \lambda > 0$ лежит в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} m \geq 0$.

Так как коэффициенты дробно-линейного отображения (19) зависят непрерывно от b и $m_0(\lambda, 0) = \tau$, то оно при любом $b > 0$, $\operatorname{Im} \lambda > 0$ переводит верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \tau > 0$ во внутренность круга $K(b)$, ограниченного окружностью $C(b)$. Круг $K(b)$ задается неравенством

$$\int_0^b |\psi_\lambda(x) + m\varphi_\lambda(x)|^2 dx \leq \frac{\operatorname{Im} m}{\operatorname{Im} \lambda}. \quad (23)$$

Отсюда следует, что если $b < b'$, то $K(b) \supset K(b')$, т. е. круги $K(b)$ вложены друг в друга.

Найдем радиус круга $K(b)$. Сначала заметим, что если дробно-линейное преобразование $m = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ отображает верхнюю полуплоскость на некоторый круг, то, как легко проверить, радиус этого круга вычисляется по формуле: $r = \frac{|\alpha\delta - \beta\gamma|}{|\bar{\gamma}\delta - \gamma\bar{\delta}|}$.

В нашем случае (19), с учетом (20) и (21), будем иметь

$$\bar{\gamma}\delta - \gamma\bar{\delta} = 2 \operatorname{Im} \lambda \int_0^b |\varphi_\lambda(x)|^2 dx.$$

Вычислим теперь

$$\bar{\gamma}\delta - \gamma\bar{\delta} = \lambda^2 ((\psi_\lambda, \psi)(\varphi_\lambda, \varphi) - (\psi_\lambda, \varphi)(\varphi_\lambda, \psi)) + \lambda((\psi_\lambda, \varphi) - (\varphi_\lambda, \psi)) + 1. \quad (24)$$

Из интегрального уравнения $(I + \lambda V) \psi_\lambda = \psi$ следует, что

$$\psi_\lambda(x) - \lambda \int_x^b V(x, s) \psi_\lambda(s) ds + \lambda(\psi_\lambda, \psi)\varphi(x) - \lambda(\psi_\lambda, \varphi)\psi(x) = \psi(x)$$

или

$$\psi_\lambda = (I - \lambda V^*)^{-1} (\psi - \lambda(\psi_\lambda, \psi)\varphi + \lambda(\psi_\lambda, \varphi)\psi).$$

Умножим скалярно обе части на φ . Учитывая, что $V(x, s) = -V(s, x)$, получаем

$$(\psi_\lambda, \varphi) = (\varphi_\lambda, \psi) - \lambda(\psi_\lambda, \psi)(\varphi_\lambda, \varphi) + \lambda(\psi_\lambda, \varphi)(\varphi_\lambda, \psi).$$

Подставим это значение во второе слагаемое (24). Получаем $|\bar{\gamma}\delta - \gamma\bar{\delta}| = 1$. Таким образом, радиус круга $K(b)$ вычисляется по формуле

$$r_b = 1/2 \operatorname{Im} \lambda \int_0^b |\varphi_\lambda(x)|^2 dx \quad (\operatorname{Im} \lambda > 0). \quad (25)$$

Формулы (22) и (25) обобщают известные формулы из теории операторов Штурма-Лиувилля.

Теорема 3. Обобщенный оператор Штурма-Лиувилля $\overline{A_0^{-1}}$ есть самосопряженный оператор.

Доказательство. Найдем $(A_0^{-1})^*$. Пусть функция $g \in H_0$ такая, что существует $g^* \in H_0$ и $(A_0^{-1}f, g) = (f, g^*)$ для любой функции $f \in D(A_0^{-1})$. Это равносильно тому, что

$$(f_1, g) = (Af_1, g^*)$$

для любой функции $f_1 \in H_0$.

Из последнего равенства после изменения порядка интегрирования следует, что существует такая постоянная c и функция f_2 , ортогональная H_0 , что

$$g(x) = c\varphi(x) - \int_0^x V(x, s) g^*(s) ds + f_2(x).$$

Умножим обе части на произвольную функцию $\bar{f}(x)$, $\bar{A}\bar{f} = 0$ и проинтегрируем от 0 до $+\infty$. Тогда легко видеть, что $(f_2, \bar{f}) = 0$. Так как функции $\bar{f}(x)$ плотны в ортогональном дополнении к H_0 , то отсюда следует, что $\bar{f}_2 = 0$.

Таким образом, $g \in D((A_0^{-1})^*)$ означает, что существует такая постоянная c и такая функция $g^*(x) \in H_0$, что

$$g(x) = c\varphi(x) - \int_0^x V(x, s) g^*(s) ds.$$

При этом

$$(A_0^{-1})^* g = g^*.$$

Для доказательства самосопряженности A_0^{-1} достаточно убедиться, что уравнение

$$(A_0^{-1})^* g - \lambda g = 0$$

имеет только нулевое решение при любом λ , $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. Последнее означает, что уравнение

$$g^*(x) - \lambda (c\varphi(x) - \int_0^x V(x, s) g^*(s) ds) = 0 \quad (26)$$

ни при каком постоянном c не имеет решения $g^*(x) \in L^2(0, \infty)$. Если $g^*(x)$ удовлетворяет (9), то $g^*(x) = \lambda c \varphi_\lambda(x)$.

Покажем, что $\varphi_\lambda(x) \in L^2(0, \infty)$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$.

Так как функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ вещественны, то $\overline{\varphi_\lambda(x)} = \varphi_{\bar{\lambda}}(x)$ и, следовательно, дефектные числа оператора A_0^{-1} равны. Отсюда следует, что уравнение $(A_0^{-1})^* f - \lambda f = g$, т. е.

$$f^*(x) - \lambda (c \varphi(x) - \int_0^x V(x, s) f^*(s) ds) = g(x),$$

для любой функции $g(x) \in L^2(0, \infty)$ при некотором $c = c(g)$ имеет решение $f^*(x) \in L^2(0, \infty)$. Теперь, с учетом (7), получаем

$$f^*(x) = g(x) - \lambda \int_0^x (\varphi_\lambda(x) \psi_\lambda(s) - \varphi_\lambda(s) \psi_\lambda(x)) g(s) ds + \lambda c \varphi_\lambda(x).$$

Пусть $g(x)$ — финитная функция. Тогда, начиная с некоторого места, будем иметь

$$f^*(x) = \lambda (c - \int_0^x g(x) \psi_\lambda(x) dx) \varphi_\lambda(x) + \lambda \psi_\lambda(x) \int_0^x g(x) \varphi_\lambda(x) dx. \quad (27)$$

Предположим, что $\varphi_\lambda \in L^2(0, \infty)$. Выберем $g(x)$ так, чтобы

$$\int_0^x g(x) \varphi(x) dx \neq 0.$$

Тогда из (27) следует, что также $\psi_\lambda \in L^2(0, \infty)$. Нетрудно показать, что если $\varphi_\lambda, \psi_\lambda \in L^2(0, \infty)$, то вольтерров оператор V_λ , порожденный ядром $V_\lambda(x, s)$ в $L^2(0, \infty)$, будет вполне непрерывным оператором (даже класса Гильберта—Шмидта). Так как очевидно, что оператор $I - \lambda V_\lambda$ не обращается в нуль ни на какой функции, то

$$(I - \lambda V_\lambda)^{-1} = I + \lambda V$$

будет ограниченным оператором в $L^2(0, \infty)$. Следовательно

$$\varphi = (I - \lambda V_\lambda)^{-1} \varphi_\lambda \in L^2(0, \infty), \quad \psi = (I - \lambda V_\lambda)^{-1} \psi_\lambda \in L^2(0, \infty),$$

что противоречит условию (3). Теорема 3 доказана.

Лемма 1. Для любого λ , $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ существует число $m(\lambda)$, притом единственное, такое, что

$$\varphi_\lambda(x) + m(\lambda) \varphi_\lambda(x) \in L^2(0, \infty) \quad (\operatorname{Im} \lambda \neq 0). \quad (28)$$

Доказательство. Как мы уже видели, $\varphi_\lambda \in L^2(0, \infty)$ при $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. Следовательно, из (25) следует, что $r_b(\lambda) \rightarrow 0$ при $b \rightarrow \infty$. Тогда из (23) заключаем, что последовательность функций $m_b(\lambda, \tau)$ фундаментальна при $b \rightarrow \infty$. Таким образом, существует предел

$$\lim_{b \rightarrow \infty} m_b(\lambda, \tau) = m(\lambda). \quad (29)$$

Так как $m_b(\lambda, \tau) \in K_{b_1}(\lambda)$ при $b > b_1$, то $m(\lambda) \in K_{b_1}$ при любом b_1 . Если учесть также, что $r_b(i) \rightarrow 0$ при $b \rightarrow \infty$, то получим

$$\int_0^{\infty} |\dot{\varphi}_\lambda(x) + m \varphi_\lambda(x)|^2 dx = \frac{\operatorname{Im} m}{\operatorname{Im} \lambda} \quad (\operatorname{Im} \lambda > 0).$$

Теорема 4. Ядро $R(x, s, \lambda)$ резольвенты обобщенного оператора Штурма—Лиувилля A_0^{-1} при $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ задается формулой

$$R(x, s, \lambda) = \begin{cases} \varphi(x, \lambda)(\psi(s, \lambda) + m(\lambda)\varphi(s, \lambda)), & x \leq s \\ \varphi(s, \lambda)(\psi(x, \lambda) + m(\lambda)\varphi(x, \lambda)), & x > s. \end{cases} \quad (30)$$

При этом спектральная функция $\sigma(\lambda)$ оператора A (или A_0^{-1}) связана с функцией $m(\lambda)$ формулой

$$m(\lambda) = \alpha + \beta \lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t - \lambda} - \frac{t}{1 + t^2} \right) d\sigma(t), \quad (31)$$

где $\beta \geq 0$, α вещественно.

Доказательство. Мы должны доказать, что

$$(A_0^{-1} - \lambda I)^{-1} g = R_\lambda g, \quad (R_\lambda g)(x) = \int_0^{\infty} R_\lambda(x, s) g(s) ds \quad (32)$$

для любой финитной функции $g(x) \in H_0$.

Сначала предположим, что $g(x) \in H_0$ — финитная функция с носителем $(0, b)$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^{\infty} g(s) \varphi_\lambda(s) ds = 0. \quad (33)$$

Тогда, как мы уже видели в § 1, для таких g определен $(I - \lambda A_0)_0^{-1}$ и

$$(I - \lambda A_0)^{-1} g = (I - \lambda V_1)^{-1} g.$$

Отсюда нетрудно получить, что (32) справедливо для g , удовлетворяющих (33). Пусть теперь $g(x)$ — любая финитная функция. Так как $\varphi_\lambda \in L^2(0, \infty)$ при $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, то множество финитных функций, удовлетворяющих (33), плотно в $L^2(0, \infty)$. Следовательно, найдется последовательность таких функций $g_n(x)$, стремящаяся в $L^2(0, \infty)$ к $g(x)$. Имеем

$$(A_0^{-1} - \lambda I)^{-1} g_n = R_\lambda g_n.$$

Так как $(A_0^{-1} - \lambda I)^{-1}$ — ограниченный оператор, то

$$(A_0^{-1} - \lambda I)^{-1} g_n \rightarrow \overline{(A_0^{-1} - \lambda I)^{-1} g}.$$

С другой стороны, поскольку $\psi_\lambda(x) + m(\lambda)\varphi_\lambda(x) \in L^2(0, \infty)$, то $R_\lambda g_n(x) \rightarrow R_\lambda g(x)$ поточечно. Отсюда следует, что (32) имеет место для любой финитной функции. Формула (30) доказана.

Соотношение (31), а следовательно, и теорему 2 можно получить из (30) обычным путем (см. [6], Дополнение II).

§ 3. Критерий неотрицательности и оценка спектральной функции

Лемма 2. Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны, $\varphi(0) \neq 0$ и оператор $A(b)$, $b \leq \infty$ неотрицателен, то его спектральная функция $\sigma_b(\lambda)$ удовлетворяет оценке

$$\int_1^{\infty} \frac{d\sigma_b(\lambda)}{\lambda} < \infty.$$

Доказательство. Из неотрицательности $A(b)$ следует, что его фредгольмова резольвента $A(b)(I - \lambda A(b))^{-1}$ неотрицательна при $\lambda < 0$. Его ядро выражается формулой (18) при некоторой $m(\lambda)$. Следовательно

$$\varphi_\lambda(0)(\psi_\lambda(0) + m(\lambda)\varphi_\lambda(0)) \geq 0 \text{ при } \lambda < 0.$$

Отсюда следует, что

$$m(\lambda) > -\frac{\psi_\lambda(0)}{\varphi_\lambda(0)} = -\frac{\psi(0)}{\varphi(0)}.$$

Таким образом, $m(\lambda) + \psi(0)/\varphi(0)$ есть S -функция (см. [6], Дополнение I) и, следовательно, существует такое $\alpha > 0$, что

$$m(\lambda) = \alpha + \int_0^{\infty} \frac{d\sigma_b(t)}{t - \lambda}, \quad \lambda \in (0, \infty).$$

Приведем следующий критерий неотрицательности однопарного оператора в конечном интервале.

Теорема. Для того, чтобы однопарный оператор $A(b)$ с непрерывными функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ был неотрицательным, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

- 1) $\varphi(x)\psi(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq b$;
- 2) на множестве $\{x: \varphi(x)\psi(x) \neq 0\}$ отношение $\varphi(x)/\psi(x)$ не убывает.

Эта теорема в случае $\varphi(x)\psi(x) \neq 0$ (как признак осцилляционности однопарного ядра) установлена в монографии [1], стр. 260. Доказательство общего случая отличается лишь некоторыми несущественными подробностями и поэтому мы его опускаем. Заметим, что из условий 1) и 2) следует, что либо нули функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ совпадают, либо из $\varphi(x_0) = 0$, $\psi(x_0) \neq 0$ или $\varphi(x_0) \neq 0$, $\psi(x_0) = 0$ следует, что $\varphi(x_0) = 0$ при $x \in [0, x_0]$ или, соответственно, $\psi(x) = 0$ при $x \in [x_0, b]$.

Теперь установим признак неотрицательности более узкого оператора $A_0(b)$, а именно однопарного оператора $A(b)$, определенного только на тех функциях $f \in L^2(0, b)$, которые ортогональны $\varphi(x)$:

$$\int_0^b f(x) \varphi(x) dx = 0.$$

Теорема 5. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — непрерывные функции на $[0, b]$ и интервал вида $[\alpha, \beta]$ не является исключительным. Для того, чтобы оператор $A_0(b)$ был неотрицательным, необходимо и достаточно, чтобы отношение $\psi(x)/\varphi(x)$ не возрастало на множестве $\{x: \varphi(x) \neq 0\}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A_0(b) \geq 0$. Оператор $A(b)|_{H_0(b)}$, где $H_0(b)$, по аналогии с H_0 , есть замыкание области значений $A_0(b)$, имеет обратный и $B = (A_0(b)|_{H_0(b)})^{-1} > 0$. Этот оператор определен на плотном в $H_0(b)$ множестве и, следовательно, по теореме Фридрихса, имеет неотрицательное расширение (возможно, только одно) $\bar{B}$. Резольвенты всех самосопряженных расширений оператора B описываются формулой (18). Эта формула, очевидно, сохраняется и при $\lambda < 0$. Следовательно, существует такая функция $m(\lambda)$, что ядро $B_\lambda(x, s)$ резольвенты $(B - \lambda I)^{-1}$ будет иметь вид

$$B_\lambda(x, s) = \begin{cases} \varphi_\lambda(x)(\psi_\lambda(s) + m(\lambda)\varphi_\lambda(s)), & (x \leq s \leq b) \\ \varphi_\lambda(s)(\psi_\lambda(x) + m(\lambda)\varphi_\lambda(x)), & (s \leq x \leq b) \end{cases} \quad \lambda < 0.$$

Этот оператор определен в $H_0(b)$. Расширим его на все пространство $L^2(0, b)$ по формуле

$$B_\lambda f(x) = \int_0^b B_\lambda(x, s) f(s) ds.$$

Легко видеть, что если (α, β) — исключительный интервал для $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, то он будет таким и для $\varphi_\lambda(x)$ и $\psi_\lambda(x)$. Более того, как легко видеть, $\varphi_\lambda(x)$ и $\psi_\lambda(x)$ будут линейными комбинациями на (α, β) функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Следовательно, из теоремы 1 вытекает, что $K(A) = L^2(0, b) \ominus H_0(b)$ будет ядром оператора B_λ , т. е. $B_\lambda K(A) = 0$. Отсюда следует, что однопарный оператор B_λ неотрицателен и согласно предыдущей теореме отношение $(\psi_\lambda(x) + m(\lambda)\varphi_\lambda(x))/\varphi_\lambda(x)$ неотрицательно и не возрастает на множестве $\{x: \varphi_\lambda(x)(\psi_\lambda(x) + m(\lambda)\varphi_\lambda(x)) \neq 0\} = \{x: \varphi_\lambda(x)\psi_\lambda(x) \neq 0\}$. Значит, будет невозрастающим и отношение $\psi_\lambda(x)/\varphi_\lambda(x)$. После предельного перехода при $\lambda \rightarrow 0$ получаем, что на множестве $\{x: \varphi(x) \neq 0\}$ отношение $\varphi(x)/\psi(x)$ не возрастает.

Достаточность. Для любого β , $\beta < b$ существует такое число t , что

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \geq t \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq \beta, \quad \varphi(x) \neq 0.$$

Отсюда, с учетом предыдущей теоремы, следует, что оператор $A(\beta)$ с функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x) + t\varphi(x)$ неотрицателен и, следовательно, неотрицателен также более узкий оператор $A_0(\beta)$. Так как β любое, то будет неотрицательным и $A_0(b)$.

Отметим, что если

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = -\infty,$$

то в этом и только этом случае ограниченный неотрицательный оператор $A_0(b)$ не имеет неотрицательного расширения в $L^2(0, b)$. Это как раз тот случай, когда оператор B не имеет обратного. Заметим также, что достаточность теоремы справедлива и в том случае, когда интервал вида (β, b) есть исключительный. В этом случае $A(b)f(x) = 0$ при $\beta < x < b$ и надо рассматривать $L^2(0, \beta)$.

Теорема 6. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны в некотором интервале $[0, \delta]$, $\delta > 0$, $\varphi(0) \neq 0$ и отношение $\psi(x)/\varphi(x)$ на этом интервале монотонно. Тогда спектральная функция $s(\lambda)$ оператора A удовлетворяет неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{1 + |\lambda|} < \infty.$$

Доказательству теоремы предположим лемму.

Лемма 3. Если $\varphi(b)$ и $\psi(b)$ одновременно не равны 0, то нули целой функции $\varphi_\lambda(b)$ вещественны.

Доказательство. Покажем, что множество корней $\varphi_\lambda(b) = 0$ совпадает со спектром некоторого самосопряженного оператора. Имеем

$$\varphi_\lambda(b) = (1 - \lambda \int_0^b \varphi(x) \varphi_\lambda(x) dx) \varphi(b) + \lambda \psi(b) \int_0^b \varphi(x) \varphi_\lambda(x) dx.$$

Пусть $\varphi(b) \neq 0$. Возьмем то самосопряженное расширение оператора $A_0(b)$, ядро резольвенты которого получается при $\tau = -\psi(b)/\varphi(b)$ в формулах (18) и (19). Тогда знаменатель в (19) будет равняться $\varphi_\lambda(b)/\psi_\lambda(b)$. Отсюда следует, что нули $\varphi_\lambda(b)$ совпадают с полюсами мероморфной функции $m_b(\lambda, \tau)$. Последние, очевидно, совпадают со спектром этого расширения и поэтому вещественны.

Если же $\varphi(b) = 0$, $\psi(b) \neq 0$, то в (19) возьмем $\tau = \infty$, т. е. в (18) положим

$$m_b(\lambda) = - (1 + \lambda \int_0^b \varphi(x) \varphi_\lambda(x) dx) / (\lambda \int_0^b \varphi(x) \varphi_\lambda(x) dx).$$

Тогда (18) дает резольвенту того самосопряженного расширения оператора $A_0^{-1}|_{H_0}$, спектр которого совпадает с нулями

$$\lambda \int_0^b \varphi_\lambda(x) \varphi(x) dx = \frac{\varphi_\lambda(b)}{\psi(b)}.$$

Заметим, что в обоих случаях $m_b(\lambda) = -\psi_\lambda(b)/\varphi_\lambda(b)$.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 6.

Для определенности предположим, что $\psi(x)/\varphi(x)$ не возрастает. Возьмем t таким, чтобы

$$\varphi(x)(\psi(x) + t\varphi(x)) > 0 \text{ при } x \in [0, \delta].$$

Отсюда, учитывая, что при замене $\psi(x)$ на $\psi(x) + t\varphi(x)$, где t любое вещественное число, оператор A не меняется, без ограничения общности, можно считать, что $\varphi(x)\psi(x) > 0$ при $x \in [0, \delta]$. Так как по условию $\psi(x)/\varphi(x)$ не возрастает, то, согласно теореме 5, оператор $A(\delta)$ будет неотрицательным. Следовательно, из леммы 2 следует, что

$$m_+(\lambda) = \alpha + \int_0^\delta \frac{d\alpha_\delta(t)}{t - \lambda}, \quad \lambda \in [0, \infty). \quad (34)$$

Так как $m(\lambda) \in K_\delta(\lambda)$, где $m(\lambda)$ определяется по формулам (30) и (31), то из (25) имеем, что

$$|m_\pm(\lambda) - m(\lambda)| \leq 1/(\operatorname{Im} \lambda \int_0^\delta \varphi(x, \lambda)^2 dx), \quad \operatorname{Im} \lambda > 0. \quad (35)$$

Оценим правую часть (35). Покажем, что $\varphi_\lambda(x)$ при каждом фиксированном x есть целая функция не более половинного порядка. Из (8) имеем

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(x) = & \varphi(x) - \lambda \int_0^x V(x, s) \varphi(s) ds + \dots + \\ & + (-1)^n \lambda^n \int_0^x V_n(x, s) \varphi(s) ds + \dots, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$V_n(x, s) = \int_{s < s_{n-1} < \dots < s_1 < x} V(x, s_1) V(s_1, s_2) \dots V(s_{n-1}, s) ds_1 \dots ds_{n-1}. \quad (37)$$

Подынтегральное выражение перепишем в виде

$$\varphi(x) \psi(s_1) \left(\frac{\psi(s_1)}{\varphi(s_1)} - \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \right) \dots \varphi(s_{n-1}) \varphi(s) \left(\frac{\psi(s)}{\varphi(s)} - \frac{\psi(s_{n-1})}{\varphi(s_{n-1})} \right).$$

По условию все скобки неотрицательны. Пусть $|\varphi(x)| \leq M$, $|\psi(x)| \leq M$ при $x \in [0, \delta]$. Тогда учитывая, что среднее геометрическое не больше среднего арифметического, получаем, что подынтегральное выражение в (37) не превосходит

$$\left(\frac{M^2}{n} \right)^n \left(\frac{\psi(s)}{\varphi(s)} - \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \right) < \left(\frac{M^2}{n} \right)^n \frac{\psi(0)}{\varphi(0)}.$$

Из этого неравенства и из (36) после несложных выкладок получаем, что

$$|\varphi_\lambda(x)| \leq \operatorname{ch} \sqrt{2|\lambda| M^2 x \frac{\psi(0)}{\varphi(0)}},$$

т. е. порядок $\varphi_\lambda(x)$ не превосходит $1/2$.

Отсюда, с учетом того, что $\varphi_0(x) = \varphi(x) \neq 0$, получаем

$$\varphi_\lambda(x) = \varphi(x) \prod_j (1 - \lambda/\lambda_j(x)) \quad (0 < x < \delta). \quad (38)$$

Согласно лемме, нули $\lambda_j(x)$ функции $\varphi_\lambda(x)$ вещественны. Следовательно, из (38) следует, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$|\varphi_{i\eta}(x)| \geq |\varphi(x)| > \varepsilon, \quad \eta > 0, \quad x \in [0, \delta].$$

Тогда из (35) следует, что

$$m_\delta(i\eta) - m(i\eta) = O\left(\frac{1}{\eta}\right) \text{ при } \eta \rightarrow \infty$$

и, тем более

$$\operatorname{Im} m_\delta(i\eta) - \operatorname{Im} m(i\eta) = O\left(\frac{1}{\eta}\right) \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \quad (39)$$

Как известно (см. [6], теорема Д. 1.3.1), если $f(z)$, отображающая верхнюю полуплоскость в себя, — аналитическая функция, то для того, чтобы она имела представление

$$f(z) = \gamma + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{\lambda - z} \quad (\operatorname{Im} z \neq 0)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(i\eta)}{\eta} d\eta < \infty. \quad (40)$$

Так как $m_\delta(\lambda)$ имеет представление (34), то $m_\delta(i\eta)$ удовлетворяет (40). Тогда из (39) следует, что $m(i\eta)$ также удовлетворяет (40) и, следовательно, $m(\lambda)$ имеет представление

$$m(\lambda) = \gamma + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - \lambda} \quad (\operatorname{Im} \lambda \neq 0),$$

что и требовалось доказать.

Автор выражает благодарность М. Г. Крейну за обсуждения и советы.

Армянский сельскохозяйственный
институт

Поступила 3.III.1986

Վ. Ա. ՅԱՎՐՅԱՆ. Միագույն կոտորվ ինտեգրալ օպերատորների սպեկտրալ տեսության մասին (ամփոփում)

Աշխատանքում դիտարկվում է ինտեգրալ օպերատորների մի դաս $L^2(0, \infty)$ տարածության մեջ, որոնց հակադարձ օպերատորները կարելի է գիտել որպես Շտուրմ-Լիովիլի օպերատորների ընդհանրացում։ Այդպիսի օպերատորների համար կառուցվում է Շտուրմ-Լիովիլի օպերատորների համար գոյություն ունեցող սպեկտրալ տեսությանը անալոգ տեսություն։

V. A. YAVRIAN. *On spectral theory of one-paired integral operators (summary)*

In the paper the classical spectral theory of the Sturm—Liouville operators is extended to some integral operators.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
2. L. de Branges. Some Hilbert spaces of entire functions IV, Trans. Amer. Math. Soc., 105, 1962, 43—83.
3. М. Г. Крейн. Про ермітові оператори з напрямними функціоналами, Сб. трудов Ін-та математики АН УССР, т. 10, 1948, 83—106.
4. М. Г. Крейн. Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения, ДАН СССР, 53, № 1, 1946, 3—6.
5. М. Г. Крейн. О неопределенном случае краевой задачи Штурма-Лиувилля в интервале $(0, \infty)$, Изв. АН СССР, сер. матем., 16, 1952, 293—324.
6. Ф. Атkinson. Дискретные и непрерывные граничные задачи, Изд. «Мир», М., 1968.

УДК 517.538.5

Р. Ш. СААКЯН

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

Пусть $\bar{C}$ — расширенная комплексная плоскость, D — область в $\bar{C}$, $\partial D \neq \emptyset$ граница D . Рассмотрим множество $E \subset D$, замкнутое относительно D , и пусть E^0 — множество внутренних точек E . Мы будем рассматривать следующие классы функций:

$A(E)$ — класс функций непрерывных на E и аналитических в E^0 ,

$H(D)$ — класс функций, аналитических в D ,

$A_D(E)$ — равномерное замыкание множества сужений функций из $H(D)$ на E .

Пусть D^* — одноточечное компактное расширение области D . В работе [1] Н. У. Арахеляном была решена задача о возможности равномерного приближения на E аналитическими в D функциями. Точнее доказана

Теорема А. $A_D(E) = A(E)$ тогда и только тогда, когда $E \in K_D$, т. е. $D^* \setminus E$ связано и локально связано.

Далее, в работе [2] ставится вопрос об описании класса $A_D(E)$ в случае $E \notin K_D$. В [2] сформулировано, в частности, следующее предположение: при $D = C$ некоторым обобщением принципа максимума удастся установить, что функции из $A_D(E)$ аналитически продолжаются на те компоненты множества $D \setminus E$, для которых бесконечность не является достижимой граничной точкой.

Отметим также, что А. Страем предложено [3] некоторое описание класса $A_D(E)$, $E \notin K_D$, которое не будучи „внутренним“, тем не менее содержит указанное утверждение об аналитическом продолжении функций из $A_D(E)$.

Основной целью данной работы является формулировка и доказательство некоторого общего варианта принципа максимума, возможно представляющего самостоятельный интерес. Из него непосредственно следует утверждение об аналитическом продолжении функций из $A_D(E)$ в случае произвольных областей D , а также описание оболочки множества E относительно области D , данное в [4].

Так как функции из $A_D(E)$, вообще говоря, не ограничены, то интерес представляет вопрос о том, является ли этот класс алгеброй. В связи с этим, будет доказано, что в общем случае класс $A_D(E)$ не является алгеброй.

Работа состоит из четырех пунктов. Первый из них содержит формулировки полученных результатов и следствия. Второй посвящен доказательству вспомогательных лемм, а третий и четвертый — доказательству сформулированных результатов.

1°. Необходимые понятия и формулировка результатов. Для произвольных множеств $A, B \subset \bar{C}$ обозначим через $\rho(A, B)$ их сферическое расстояние

$$\rho(A, B) = \inf_{\substack{z \in A \\ \xi \in B}} \frac{|z - \xi|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |\xi|^2)}}.$$

Обозначим через $\delta(A)$ диаметр множества A в метрике R^2 :

$$\delta(A) = \sup_{z_1, z_2 \in A} |z_1 - z_2|,$$

и через $d(z_0, A)$ обозначим расстояние от точки z_0 до множества A в метрике R^2 :

$$d(z_0, A) = \inf_{z \in A} |z - z_0|.$$

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ через $V_\varepsilon(\partial D)$ обозначим ε -окрестность границы ∂D области D

$$V_\varepsilon = \{z \in \bar{C} : \rho(z, \partial D) < \varepsilon\}.$$

Определение 1: Пусть F — компакт в $\bar{C}$, $z \in \bar{C} \setminus F$, γ — непрерывное отображение полуинтервала $[0, 1)$ в $\bar{C}$ такое, что

$$\gamma(0) = z, \lim_{t \rightarrow 1} \rho(\gamma(t), F) = 0.$$

Тогда мы скажем, что γ соединяет z с F .

В соответствии с этим, для открытого множества $\Omega \subset \bar{C}$ множество $e \subset \bar{C} \setminus \Omega$ назовем *достижимым* из Ω , если существует точка $z \in \Omega$ и непрерывное отображение $\gamma_z : [0, 1) \rightarrow \Omega$, соединяющее z с e . Естественно полагать, что пустое подмножество $e = \emptyset$ недостижимо из Ω .

Сформулируем, придерживаясь выше изложенного, наши результаты.

Теорема 1. (обобщение принципа максимума). Пусть B — область в $\bar{C}$, $e \subset \partial B$, e — замкнуто. Пусть, кроме того, h — непрерывная субгармоническая функция в B . Тогда

1. Если множество e недостижимо из B , то из того, что

$$\sup_{\xi \in \partial B \setminus e} h(\xi) \leq M < \infty \quad (1.1)$$

следует, что $h(z) \leq M$ для всех $z \in B$.

2. Если множество e достижимо из B , то существует субгармоническая в B функция $h = |f|$, где $f \in H(\bar{C} \setminus e)$ такая, что для всех $z \in \partial B \setminus e$ имеем $h(z) < 1$, однако h не ограничена сверху в B .

Пункт 1 этой теоремы в случае $e = \emptyset$ совпадает с классическим принципом максимума. Отметим также, что в пункте 1 этой теоремы ограниченность сверху функции h формально не постулируется. Отметим, что для функции h значение $-\infty$ вполне допустимо.

Для множества $E \subset D$, замкнутого относительно D , и функции $f \in H(D)$ через $\widehat{E}_D$ обозначим оболочку множества E относительно области D

$$\widehat{E}_D = \text{Hull}(E, D) = \{z \in D : |f(z)| \leq \|f\|_E\},$$

где $\|f\|_E = \sup_E |f(z)|$.

Пользуясь понятием оболочки множества, укажем на некоторые следствия из теоремы 1.

Следствие 1. Пусть $E \subset D$ и E замкнуто относительно D . Оболочка $\widehat{E}_D$ множества E состоит из E и всех компонент множества $D \setminus E$, для которых ∂D недостижимо, и только из них.

Действительно, очевидно, что $E \subset \widehat{E}_D$. Далее, из первого пункта теоремы 1 следует, что если Ω — некоторая компонента $D \setminus E$, для которого ∂D недостижимо, то $\Omega \subset \widehat{E}_D$. А если для компоненты Ω , ∂D достижимо, то из второго пункта теоремы 1 следует, что $\Omega \not\subset \widehat{E}_D$.

Следствие 2. $A_D(E) \subset A(\widehat{E}_D)$.

В самом деле, пусть $f \in A_D(E)$, тогда существует последовательность $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ функций из $H(D)$, которая равномерно на E сходится к f . Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует не зависящий от z номер N такой, что для всех $n > N$ и $m = 1, 2, 3, \dots$ при $z \in E$

$$|g_{n+m}(z) - g_n(z)| < \varepsilon. \quad (1.2)$$

Тогда в силу следствия 1 неравенство (1.2) верно для всех $z \in \widehat{E}_D$. Следовательно, последовательность $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ равномерно на $\widehat{E}_D$ сходится, определяя там аналитическую функцию f_1 такую, что для всех $z \in E$, $f_1(z) = f(z)$. Следовательно $f \in A(\widehat{E}_D)$.

Обозначим далее через $h(E)$ — класс функций, непрерывных на E и гармонических в E° , а через $h_D(E)$ — равномерное замыкание множества сужений на E функций, гармонических в D , можно точно так же доказать

Следствие 2'. $h_D(E) \subset h(\widehat{E}_D)$.

Пользуясь следствием 2 легко показать, что если $\widehat{E}_D \in K_D$, то класс $A_D(E)$ является алгеброй. Однако следующий пример показывает, что в общем случае $A_D(E)$ не является алгеброй.

Теорема 2. Пусть E — относительно замкнутое подмножество области D и $\widehat{E}_D \notin K_D$. Тогда существуют функции $f, g \in A_D(E)$, причем f ограничена, однако $fg \notin A_D(E)$. Более того, можно считать, что f мероморфна, а g голоморфна в D .

2°. Вспомогательные леммы. Для доказательства первой леммы нам понадобится следующее

Предложение. Пусть D — область в $\bar{C}$, ∂D — граница D . Пусть также γ — непрерывное отображение полуинтервала $[0, 1)$ в D , соединяющее точку z_0 области D с ∂D . Тогда $\bar{\gamma}([0, 1)) \setminus \gamma$ связано.

Действительно, рассмотрим систему непрерывных отображений $\gamma_t: [t, 1) \rightarrow D$. Тогда $\{\gamma_t\}$ — монотонно убывающее по t семейство связанных компактных множеств и множество $\Gamma = \bigcap_t \gamma_t$ связано (см. [5], стр. 179) и $\Gamma = \bar{\gamma} \setminus \gamma$.

Прежде, чем приступить к доказательству лемм, дадим два необходимых нам определения.

Определение 2. Функция $f \in H(B)$, которая может быть представлена в виде $f = f_1/f_2$, где f_1, f_2 — ограниченные функции из $H(B)$, называется функцией ограниченного вида в B .

Пусть B — область в $\bar{C}$ и B^∞ — универсальная поверхность наложения для области B . Тогда существует (см. [6], стр. 255) функция $x = x(z)$, которая отображает поверхность B^∞ взаимно однозначно и конформно на единичный круг $|x| < 1$. Пусть $z = z(x)$ — функция, обратная к $x = x(z)$.

Определение 3. Область B из $\bar{C}$ называется ограниченного или неограниченного вида в зависимости от того, будет ли функция $z = z(x)$ ограниченного вида или нет.

Лемма 1. Пусть B — область в $\bar{C}$, $e \in \partial B$, e — замкнуто и недостижимо из B . Тогда гармоническая мера множества e относительно области B равна нулю.

Доказательство. Пусть B^∞ — универсальная поверхность наложения для области B . Тогда существует [6] взаимно однозначное и конформное отображение $x = x(z)$ поверхности B^∞ на единичный круг $|x| < 1$.

Покажем сначала, что B — область ограниченного вида. Пусть для этого, ξ_0 — некоторая точка на e , и $\{\xi_n\}$ — последовательность точек области B , сходящаяся к ξ_0 . Построим непрерывную кривую Γ , проходящую через точки ξ_n , и соединяющую некоторую точку области B с ∂B .

Рассмотрим множество $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma$. В силу выше доказанного предложения возможны два случая:

- а) $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma$ состоит из единственной точки ξ' ,
- б) $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma$ — континуум.

В первом случае $\xi' = \xi_0$ и следовательно e достижимо из B . Следовательно, $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma$ — континуум и по теореме Р. Неваанлины (см. [7], стр. 214), B есть область ограниченного вида. Отсюда имеем, что функция $z = z(x)$, обратная к функции $x = x(z)$, ограниченного вида т. е. $z = z_1/z_2$, где z_1, z_2 — ограниченные аналитические функции в круге $|x| < 1$. Важно заметить, что функции z_1 и z_2 , в силу теоремы Рисса (см. [7], стр. 210), обращаются в нуль лишь на множестве гар-

монической меры нуль. Для функций ограниченного вида имеет место теорема Фату (см. [7], стр. 208), согласно которой функция $z = z(x)$ на подмножестве F_x окружности $|x| = 1$, которое имеет меру 2π , имеет радиальные граничные значения. Обозначим через F_x множество радиальных граничных значений, которое принимает функция $z = z(x)$ на множестве F_x . Заметим, что точки множества F_x достижимы из B . Обозначим, далее, через E_x множество иррегулярных точек границы области B . Не ограничивая общности, можно считать, что $\infty \notin \partial B$. Тогда по теореме Келлога (см. [8], стр. 80), емкость множества E_x равна нулю. Отсюда имеем, что прообраз E_x множества E_x гармонически нульмерен, так как, в противном случае, в силу теоремы Р. Неванлинны (см. [7], стр. 211) имели бы, что E_x положительной гармонической меры.

Рассмотрим теперь разность

$$u(x) = \omega(x, F_x \setminus E_x, |x| < 1) - \omega(z(x), F_x \setminus E_x, B).$$

Это — ограниченная и гармоническая в единичном круге функция. Для любого $x \in F_x \setminus E_x$ имеем, что $u(x) = 0$. Таким образом, ограниченная гармоническая в единичном круге функции u равна нулю всюду на $|x| = 1$ за исключением множества гармонической меры нуль. Поэтому в силу обобщенного принципа максимума (см. [7], стр. 143), имеем $u(x) = 0$ для всех точек круга $|x| < 1$. И, наконец, так как $\omega(x, F_x \setminus E_x, |x| < 1) = 1$ получаем, что $\omega(z(x), F_x \setminus E_x, B) = 1$, следовательно, $\omega(z, e, B) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть E — относительно замкнутое подмножество D и $D \setminus E$ связно. Тогда, фиксируя $a \in D \setminus E$ и полагая $f(z) = 1/(z - a)$ для всех $z \in E$ имеем, что $f \in \Lambda_0(E)$.

Доказательство. Пусть γ — непрерывная кривая, соединяющая точку $a = a_1$ с ∂D и $\gamma \subset D \setminus E$. Возьмем последовательность точек $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \gamma$ такую, что $\rho(a_n, \partial D) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и последовательность $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ жордановых областей таких, что $\Omega_n \subset D \setminus E$ и дуга $\widehat{a_n a_{n+1}}$ лежит в Ω_n . Пусть, кроме того

$$\delta(\Omega_n) \rightarrow 0 \text{ и } \rho(\Omega_n, \partial D) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

и $f(z) = Q_1(z)$. Так как $Q_1(z) \in H(D \setminus \Omega_1)$, то по теореме Рунге, существует рациональная функция Q_2 , с единственным полюсом в a_1 такая, что для любого $\varepsilon > 0$, при $z \in D \setminus \Omega_1$ имеем

$$|Q_1(z) - Q_2(z)| < \frac{\varepsilon}{2^{\frac{1}{2}}}$$

Если рациональная функция Q_1 с единственным полюсом в a_n построена для $n = 1, 2, 3, \dots, k$, то функцию Q_{k+1} с единственным полюсом в a_{k+1} строим так, чтобы при $z \in D \setminus \Omega_k$ имели

$$|Q_{k+1}(z) - Q_k(z)| < \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k+1}{2}}}$$

Докажем, что последовательность $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно, на любом компакте в D , сходится к функции $f \in H(D)$. В самом деле, пусть F — компакт в D . Возьмем число N так, чтобы $F \subset D \setminus \Omega_n$ при $n > N$. Тогда при $n > N$ и $m = 1, 2, 3, \dots$, для $z \in F$ имеем

$$|Q_{n+m}(z) - Q_n(z)| \leq \sum_{k=n}^{n+m-1} |Q_{k+1}(z) - Q_k(z)| < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Это означает, что последовательность $\{Q_n\}$ равномерно на компакте F сходится к аналитической в D функции

$$\varphi(z) = Q_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (Q_{n+1}(z) - Q_n(z)).$$

Далее, так как $E \subset D \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, то при $z \in E$ имеем

$$|\varphi(z) - f(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |Q_{n+1}(z) - Q_n(z)| < \varepsilon,$$

т. е. $f \in A_D(E)$. Лемма доказана.

3°. Доказательство теоремы 1. Отметим, что доказательство пункта 1 этой теоремы основано на лемме 1 и некоторой модификации рассуждений (см. [9], стр. 205) доказательства известной теоремы Иверсена.

1. Для $\alpha \geq M$ рассмотрим открытое множество

$$\tilde{B}_\alpha = h^{-1}((\alpha, +\infty)).$$

Если утверждение пункта 1 не выполнено, то $B_M \neq \emptyset$. Докажем, что если $B_\alpha \neq \emptyset$, при $\alpha_0 > M$ и Ω_{α_0} — какая-либо компонента связности B_{α_0} , то $e_{\alpha_0} = \partial\Omega_{\alpha_0} \cap e \neq \emptyset$ и функция h не ограничена сверху в Ω_{α_0} . Это означает, что для любого $\alpha > \alpha_0$ множество Ω_{α_0} содержит некоторую компоненту Ω_α множества B_α такую, что $e_\alpha = \partial\Omega_\alpha \cap e \neq \emptyset$.

В самом деле, если $e_{\alpha_0} = \emptyset$, то тогда $\partial\Omega_{\alpha_0} \subset B \cup (\partial B \setminus e)$, и применяя к Ω_{α_0} , с учетом (1.1), классический принцип максимума, мы получили бы, что $h(z) \leq \alpha_0$ для $z \in \Omega_{\alpha_0}$, а это противоречит определению Ω_{α_0} . Таким образом, $e_{\alpha_0} \neq \emptyset$. Заметим, далее, что из условия, что e недостижимо из B следует, что e_{α_0} недостижимо из Ω_{α_0} . Из леммы 1 имеем, что гармоническая мера множества e_{α_0} относительно области Ω_{α_0} равна нулю. Тогда, если бы функция h была ограничена сверху в Ω_{α_0} , то по обобщенному принципу максимума (см. [10], стр. 70) мы опять имели бы, что $h(z) \leq \alpha_0$ в Ω_{α_0} .

Итак, поскольку $B_M \neq \emptyset$, мы можем фиксировать некоторую последовательность $\{\Omega_n\}_{n=m}^{\infty}$ ($m > M$) компонент множеств B_n , так, чтобы $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$ и последовательность точек $\{z_n\}_{n=m}^{\infty}$, $z_n \in \Omega_n$.

Пусть V — произвольная окрестность множества e . Тогда существует такой номер N , что для всех $n \geq N$ имеем $\Omega_n \subset V$. Так как $z_n, z_{n+1} \in \Omega_n$, то пусть γ_n — жорданова дуга, соединяющая z_n с z_{n+1} в Ω_n . Полагая $\Gamma = \bigcup_{n=N}^{\infty} \gamma_n$, имеем, что $\Gamma \subset V$. Следовательно, Γ соединяет z_N с e . Полученное противоречие доказывает пункт 1 теоремы 1.

2. Пусть непрерывная кривая Γ соединяет некоторую точку области B с множеством e . Пусть, далее, $\{K_\xi\}_{\xi \in \Gamma}$ — система кругов с центрами в точках ξ и радиусами r_ξ , где $r_\xi \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow e$ вдоль Γ такая, что $\Gamma \subset \bigcup_{\xi \in \Gamma} K_\xi \subset B$. Тогда, полагая $D = \mathbb{C} \setminus e$ и $E = \Gamma \cup (D \setminus \bigcup_{\xi \in \Gamma} K_\xi)$, легко проверить, что $E \in K_D$.

Пусть g — непрерывная на E функция, равная нулю на $D \setminus \bigcup_{\xi \in \Gamma} K_\xi$ и такая, что $g(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow e$ вдоль Γ . Тогда по теореме А существует функция $f \in H(D)$ такая, что для всех $z \in E$

$$|f(z) - g(z)| < 1.$$

Отсюда для функции $h = |f|$ имеем, что $h(z) < 1$ при $z \in \partial B \setminus e$, в то время как функция h не ограничена сверху на Γ .

4°. Доказательство теоремы 2. Пусть $E_D \in K_D$. Тогда существует число $\lambda > 0$ и последовательность попарно непересекающихся областей $\{\Omega_n\}_{n=1}^\infty$ таких, что

$$\Omega_n \subset D \setminus E, \partial \Omega_n \in \bigcup [D \setminus V_\lambda(\partial D)], 0 < \rho(\Omega_n, \partial D) \rightarrow 0.$$

Так как ∂D — компакт в $\bar{\mathbb{C}}$, то существует точка $\xi \in \partial D$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\Omega_n, \xi) = 0.$$

Не ограничивая общности можно считать, что $\xi = \infty$ и что области Ω_n ограничены, пересекаются с кругом

$$V = \left\{ z \in \bar{\mathbb{C}} : |z| < \frac{1}{\lambda} \right\} \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\Omega_n, \infty) = 0.$$

Пусть $z_n \in \Omega_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и $\rho(z_n, \partial D) \rightarrow 0$. Рассмотрим последовательность чисел $\{b_n/d_n\}_{n=1}^\infty$, где $d_n = d(z_n, E)$, такую, что $\sum_{n=1}^\infty b_n/d_n < \infty$.

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{b_n}{z - z_n} \quad (4.1)$$

определяет мероморфную в $\bar{\mathbb{C}}$ функцию f , и при этом равномерно на E сходится. В силу леммы 2 каждый член этого ряда принадлежит $A_D(E)$, следовательно $f \in A_D(E)$.

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность чисел, таких, что

$$\frac{a_n}{\delta_n} \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty, \text{ где } \delta_n = \delta(\Omega_n). \quad (4.2)$$

Построим (см. [11], стр. 298) функцию g , голоморфную в D такую, что $g(z_n) = a_n/b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), и рассмотрим функцию $F = fg$. Это — мероморфная в D функция, имеющая простые полюсы в точках z_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) и главные части

$$\frac{a_n}{z - z_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Из приведенного в [12] доказательства необходимой части теоремы 1 следует, что такая функция с условием (4.2) на последовательность $\{a_n\}$ не принадлежит классу $A_D(E)$. Теорема 2 доказана.

В заключение выражаю благодарность члену-корреспонденту АН Арм.ССР Н. У. Аракелян за постановку задач и руководство.

Ереванский государственный
университет

Поступила 3. VII. 1985

Ռ. Շ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ. Մախիմումի սկզբունքի մի ընդհանրացման մասին (ամփոփում)

Տվյալ աշխատանքի հիմնական արդյունքը հետևյալ թեորեմն է:
Թեորեմ. Դիցուք B -ն տիրույթ է ընդլայնված կոմպլեքս հարթությունից, $e \subset \partial B$, e -ն փակ է, B -ից դրանից, դիցուք h -ը B տիրույթում անընդհատ և սուբհարմոնիկ ֆունկցիա է, Այդ դեպքում.

1. Եթե e -ն անհասանելի է B տիրույթից և

$$\sup_{z \in \partial B \setminus e} h(z) \leq M < \infty,$$

ապա $h(z) \leq M$, B տիրույթում.

2. Եթե e -ն հասանելի է B տիրույթից, ապա գոյություն ունի B տիրույթում սուբհարմոնիկ ֆունկցիա $h = |f|$, որտեղ $f \in H(C \setminus e)$ այնպիսի, որ $h(z) < 1$ եթե $z \in \partial B \setminus e$, սակայն h -ը անսահմանափակ է վերից B տիրույթում:

R. Sh. SAHAKIAN. On a generalization of the maximum principle (summary)

The main result of this paper is the following:

Theorem. Let B be a domain in the extended complex plane $\bar{C}$, $e \subset \partial B$, e is closed. Let h be a continuous subharmonic function in B . Then

(1) If the set e is inaccessible from B and

$$\sup_{z \in \partial B \setminus e} h(z) \leq M < \infty,$$

then $h(z) \leq M$ for all $z \in B$.

(2) If the set e is accessible from B there exists a function $h = |f|$, subharmonic in B , with $f \in H(C \setminus e)$ such that $h(z) < 1$ for all $z \in \partial B \setminus e$, but h is unbounded in B from above.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. У. Аракелян. Равномерные и касательные приближения аналитическими функциями, Изв. АН Арм.ССР, серия матем., 3, №№ 4—5, 1968, 273—286.
2. N. U. Arakellian, Approximation complexe et proprietes des fonctions analytiques Actes, Congres intern. Math., 1970, tome 2, 595—600
3. A. Straw, Decomposition of approximable functions, Lect. Notes in Math., 1943 Linear and Complex Analysis, Problem Book, tome 2, 1984, 225—238.
4. L. Brown. A. L. Shields, Approximation by analytic functions uniformly continuous on a set, Duke Math. Journal, 1975, 42, 71—81.
5. К. Куратовский. Топология, том 2, «Мир», М., 1966.
6. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», М., 1966.
7. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М.—Л., 1941.
8. M. Tsuji. Potential Theory in Modern Function Theory, Maruzen Co., Tokyo, 1959
9. У. Хейман, П. Кеннеди. Субгармонические функции, «Мир», М., 1980.
10. W. T. J. Fuchs. Topics in the Theory of function one complexe variable. F. Vav Hostand Company, INC, Princeton N. J., t. 2.
11. W. Rudin. Real and Complex Analysis, Mc Graw—Hill Company, New York, 1966
12. W. H. J. Fuchs. Theorie der Approximation des fonctions d'une variable complexe, Universitet de Montreal, 1968.

Ն. Հ. Առաքելյան, Վ. Հ. Մարտիրոսյան. Աստիճանային շարքերի եզրակիությունների տեղանկացումը զուգամիտության շրջանի եզրին	3
Մ. Մ. Զրբաշյան, Ս. Գ. Թաֆալիյան. Ամբողջ ֆունկցիաների դասերում ինտերպոլացիոն վերլուծություններ և նրանց հետ առնչված Ռիսի բազիսներ	23
Ֆունկցիաների մասին	64
Ա. Հ. Նևսիսյան. Կոմպլեքս հարթության իրական ենթարազմությունների վրա մոտարկվող	
Վ. Ա. Զավրյան. Միազույգ կորիզով ինտեգրալ օպերատորների սպեկտրային տեսության մասին	75
Թ. Շ. Սահակյան. Մաթեմատիկական հարցերի մի ընդհանրացման մասին	94

СОДЕРЖАНИЕ

Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян. Локализация особенностей степенных рядов на границе круга сходимости	3
М. М. Дзрбашян, С. Г. Рафаэлян. Интерполяционные разложения в классах целых функций и порождаемые ими базисы Рисса	23
А. А. Нерсисян. О функциях, аппроксимируемых на замкнутых подмножествах комплексной плоскости	64
В. А. Яврян. К спектральной теории однопарных интегральных операторов	75
Р. Ш. Саакян. Об одном обобщении принципа максимума	94

CONTENTS

N. U. Arakeltan, V. A. Martirosian. The location of singularities of power series on the circle of convergence	3
M. M. Dzrbashian, S. G. Raphaelian. Interpolation expansions in the classes of entire functions and the Riesz bases generated by them	23
A. A. Hovseyan. On functions which are approximable on closed subsets of the complex plane	64
V. A. Yavrian. On spectral theory of one-paired integral operators	75
R. Sh. Sahakian. On a generalization of the maximum principle	94

ԱՊԱՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ ԵՎ ԵԿԱԿԻՐ, ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

В журнале публикуются оригинальные исследования в следующих основных направлениях: комплексный и вещественный анализ, теория операторов, теория дифференциальных уравнений в частных производных, теория вероятностей.



Технический редактор Л. А. Азизбекян

Сдано в набор 8.01.1987. Подписано к печати 19.03.1987. ВФ 07495.

Учет.-изд. 7,99. Тираж 630. Заказ 4. Издаѣ. 6976.

Бумага № 1, 70×108¹/₁₆. Высокая печать. Печ. лист. 6,5+1 вкл. Усл. печ. лист. 9,1.

Адрес редакции: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 26-б, т. 27-97-318.

Издательство АН АрмССР, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24.



*Член-корреспондент Академии
наук Армянской ССР
НОРАЙР УНАНОВИЧ АРАКЕЛЯН*

Дорогой НОРАЙР УНАНОВИЧ!

*Редакция журнала „Математика“ сердечно поздрав-
ляет Вас с пятидесятилетием и искренне желает Вам
крепкого здоровья, дальнейших творческих успехов.*