

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ  
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ  
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ  
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ  
ИЗВЕСТИЯ  
АКАДЕМИИ НАУК  
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ  
МАТЕМАТИКА

## ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր՝ Մ. Մ. ԶՐՐԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ

գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Ն. Հ. ԱՌԱՔԵՆՅԱՆ

Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ

Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵՆՅԱՆ

Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱՂՅԱՆ

գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու ֆաբրիկատ՝ Մ. Ա. Հովհաննիսյան

## Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀՆԴԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ:

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ Խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով:

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում:

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոնեզերյան շրջանցված սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով:

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում:

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագրից համարը, տարեթիվը և էջերը:

Օգտագործված գրականությունը ծշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում:

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չգրադվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը:

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր:

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ: Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»:

Статьи публикуются преимущественно в русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН

зам. главного редактора

Р. В. АМБАРЦУМЯН

Н. У. АРАКЕЛЯН

И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ

С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН

А. А. ТАЛАЛЯН

Р. Л. ШАХБАГЯН

зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

### К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статью в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке), а кратких сообщений — не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссии по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

# EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. A. ALEXANDRIAN  
 associate editor  
 R. V. AMBARTZUMIAN  
 N. U. ARAKELIAN  
 S. N. MERGELIAN

A. B. NERSESIAN  
 A. A. TALALIAN  
 R. L. SHAKHBAGIAN  
 associate editor  
 I. D. ZASLAVSKI

executive secretary M. A. Hovhannesian

## TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Drafts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series "Matematika"  
 Academy of Sciences of Armenian SSR  
 24-b, Marshal Bagramian Ave.  
 Yerevan, Armenian SSR, USSR

УДК 517.518.4

А. А. СААКЯН

# О СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИИ

Пусть  $f(x)$ ,  $x \in (-\infty, \infty)$  —  $2\pi$ -периодическая, интегрируемая на  $[-\pi, \pi]$  функция и

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx \quad (1)$$

-ряд Фурье функции  $f(x)$ . Хорошо известна (см., напр., [1], стр 121)

Теорема А. Если  $f(x)$  имеет ограниченную вариацию на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , то

а) в каждой точке  $x \in [-\pi, \pi]$  ряд (1) сходится к значению  $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ ;

б) если, кроме того,  $f(x)$  непрерывна в каждой точке отрезка  $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ , то ряд (1) сходится к  $f(x)$  равномерно на  $[a, b]$ .

Эта теорема обобщалась многими авторами (см. [2] — [6]), которые вместо обычной вариации рассматривали различные классы  $V_\Phi$  функций ограниченной  $\Phi$ -вариации (см. [1], стр. 287):

$$V_\Phi = \{f(x) : V_\Phi(f) \equiv \sup_{\{x_k\}} \sum_k \Phi(|f(x_{k+1}) - f(x_k)|) < \infty\}, \quad (2)$$

где  $\Phi(t)$  ( $t \geq 0$ ) — непрерывная, строго возрастающая функция с  $\Phi(0) = 0$ . Окончательный результат для классов  $V_\Phi$  получили Салем (в случае  $f \in C(-\pi, \pi)$ , [5]) и Гюфман (см. [6]):

Теорема Б. Если функция  $\Phi(f)$  выпукла и  $\psi(x)$  — дополнительная к ней в смысле Юнга (см. [1], стр 32), то при условии

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi\left(\frac{1}{n}\right) < \infty \quad (3)$$

для любой функции  $f \in V_\Phi$  имеют место утверждения а) и б) из теоремы А.

Необходимость условия (3) в теореме Б была доказана независимо К. И. Осколковым [7] и А. Бернштейном [8].

В статье [9] Д. Ватерман рассмотрел новый класс функций ограниченной обобщенной вариации — класс функций ограниченной гармонической вариации HBV:

$$HBV \equiv HBV([-\pi, \pi]) = \{f(x) : V_H(f) \equiv V_H(f; [-\pi, \pi]) =$$

$$= \sup_n \sum_n \frac{|f(I_n)|}{n} < \infty\},$$

где  $f(I) = f(b) - f(a)$ , если  $I = (a, b)$ , а  $\sup$  берется по всем системам  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$  попарно непересекающихся интервалов из  $[-\pi, \pi]$ . Справедлива (см. [9])

**Теорема В.** Для произвольной функции  $f \in \text{HBV}$  имеют место утверждения а) и б) теоремы А.

Эта теорема является обобщением теорем А и Б, так как, в силу неравенства Юнга (см. [1], стр. 32)  $ab \leq \Phi(a) + \Psi(b)$ , ( $a, b > 0$ ) при условии (3) класс  $V_\Phi \subset \text{HBV}$ .

Для двойных рядов Фурье в случае, когда их сходимость определяется по Прингсхейму, т. е. через прямоугольные суммы, аналог теоремы А был доказан Г. Харди (см. [10]). Для этой цели им был определен класс  $H$  функций двух переменных ограниченной вариации на прямоугольнике. Б. И. Голубовым были введены классы  $H_{\Phi, \Psi}$ , обобщающие класс  $H$  Харди и доказан аналог теоремы Б для функций двух переменных; им найдены достаточные условия на функции  $\Phi_j(x)$ ,  $j=1, 2, 3$ , обеспечивающие сходимость по Прингсхейму двойных рядов Фурье функций из классов  $H_{\Phi, \Psi}$  (см. подробнее [II]).

В данной работе определяется класс  $\text{HBV}$  функций ограниченной гармонической вариации для функций двух переменных и доказывается аналог теоремы В для двойных рядов Фурье, обобщающий результат Б. И. Голубова.

### § 1. Определение и вспомогательные результаты

Всюду ниже функция  $f(x, y)$  считается измеримой и  $2\pi$ -периодической по переменным  $x$  и  $y$ . Пусть  $I$  — интервал или отрезок на  $(-\infty, \infty)$  с концами  $a$  и  $b$ . Через  $\Omega(I)$  обозначим множество всех (конечных) систем попарно непересекающихся интервалов  $I_n = (a_n, b_n)$  с условием  $[a_n, b_n] \subset I$ . При фиксированном  $y_0$  положим  $f(I, y_0) = f(b, y_0) - f(a, y_0)$ , через  $V_x(f(x, y_0); I)$  обозначим гармоническую вариацию функции  $f(x, y_0)$  на  $I$  относительно переменной  $x$ :

$$V_x(f(x, y_0); I) = \sup_{\{I_n\} \in \Omega(I)} \sum_n \frac{|f(I_n, y_0)|}{n}.$$

Аналогично, при фиксированном  $x_0$  определяются  $f(x_0, I)$  и  $V_y(f(x_0, y); I)$ . Положим также ( $\Delta$  — отрезок или интервал с концами  $\alpha$  и  $\beta$ )

$$f(I, \Delta) = f(a, \alpha) - f(a, \beta) - f(b, \alpha) + f(b, \beta),$$

$$V_{x,y}(f; I \times \Delta) = \sup_{\substack{\{I_n\} \in \Omega(I) \\ \{\Delta_k\} \in \Omega(\Delta)}} \sum_{n,k} \frac{|f(I_n, \Delta_k)|}{n \cdot k}.$$

**Определение.** Скажем, что функция  $f(x, y)$  имеет ограниченную гармоническую вариацию на прямоугольнике  $*D = I \times \Delta$  ( $f \in \text{HBV}(D)$ ), если

\* Здесь и ниже мы рассматриваем прямоугольники со сторонами, параллельными осям координат.

$$V_H(f; D) \equiv V_{x,y}(f; D) + V_x(f(x, y); I) + V_y(f(x, y); \Delta) < \infty.$$

Через  $HBV$  и  $V_H(f)$  обозначим, соответственно,  $HBV([-\pi, \pi]^2)$  и  $V_H(f; [-\pi, \pi]^2)$ .

Лемма 1.1. Если  $f(x, y) \in HBV(D)$ ,  $D = I \times \Delta = [a, b] \times [\alpha, \beta]$ , то для произвольных  $(x, y), (x', y') \in D$

$$a) V_y(f(x, y); \Delta) \leq V_H(f; D), \quad V_x(f(x, y); I) \leq V_H(f; D),$$

$$б) |f(x, y) - f(x', y')| \leq 2 V_H(f; D).$$

Доказательство. Пусть  $x \in I$  и  $\{\Delta_k\} \in \Omega(\Delta)$ , тогда

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{1}{k} |f(x, \Delta_k)| &\leq \sum_k \frac{1}{k} |f([a, x] \times \Delta_k)| + \sum_k \frac{1}{k} |f(a, \Delta_k)| \leq \\ &\leq V_{x,y}(f; D) + V_y(f(a, y); \Delta) \leq V_H(f; D). \end{aligned}$$

Следовательно  $V_y(f(x, y); \Delta) \leq V_H(f; D)$ . Аналогично доказывается и второе неравенство а), а б) непосредственно вытекает из а):

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x', y')| &\leq |f(x, y) - f(x', y)| + |f(x', y) - f(x', y')| \leq \\ &\leq V_x(f(x, y); I) + V_y(f(x, y); \Delta) \leq 2 V_H(f; D). \end{aligned}$$

Лемма 1.2 Если  $f(x, y) \in HBV(D)$ ,  $D = I \times \Delta$  и  $g(x) \in HBV(I)$ , то функция  $F(x, y) = f(x, y) g(x) \in HBV(D)$  и

$$V_H(F; D) \leq \|g\|_{C(I)} V_H(f; D) + \|f\|_{C(D)} V_H(g; I) + V_H(f; D) V_H(g; I) \quad (\text{здесь } \|h\|_{C(E)} = \sup_{z \in E} |h(z)|).$$

Доказательство леммы 1.2 сразу вытекает из следующих равенств (см. также а) из леммы 1.1)

$$F([a, b], [\alpha, \beta]) = g(b) f([a, b], [\alpha, \beta]) + f(a, [\alpha, \beta]) g([a, b]);$$

$$F([a, b], \alpha) = g(b) f([a, b], \alpha) + f(a, \alpha) g([a, b]);$$

$$F(a, [\alpha, \beta]) = g(a) f(a, [\alpha, \beta]).$$

Замечание. Легко видеть, что если функция  $F(x, y)$  принадлежит классу  $HBV$  на прямоугольниках  $D_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, i_0$  и  $D = \bigcup_i D_i$  — прямоугольник, то  $F(x, y) \in HBV(D)$  и

$$V_H(F; D) \leq C \sum_{i=1}^{i_0} V_H(F; D_i). \quad (4)$$

Отсюда и из леммы 1.2 вытекает, что если  $F(x, y) = f(x, y) g(x, y)$ , где  $f, g \in HBV(D)$ ,  $D = \bigcup_i D_i$  и на каждом прямоугольнике  $D_i$  функция  $g(x, y)$  зависит только от  $x$  (или от  $y$ ), то  $F(x, y) \in HBV(D)$  и

$$V_H(F; D) \leq C(f, g), \quad (5)$$

где  $C(f, g)$  зависит только от  $\|f\|_{C(D)}$ ,  $\|g\|_{C(D)}$ ,  $V_H(f; D)$ ,  $V_H(g; D)$ .

Лемма 1.3 Пусть  $f(x, y) \in HBV(D)$ ,  $D = I \times \Delta$ . Если в точке  $(x, y) \in D$  существует предел  $f(x+0, y+0) = \lim_{\substack{t \rightarrow +0 \\ s \rightarrow +0}} f(x+t, y+s)$ ,

то для любого  $p = 1, 2, \dots$

$$f_p^{(\varepsilon)}(\varepsilon) = \sup \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{nk} |f(I_n, \Delta_k)| \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (q=1, 2),$$

где  $\sup$  берется по системам  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Omega((x, x+\varepsilon))$ ,  $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Omega((y, y+\varepsilon))$  с условием  $n_k \leq p$ .

Замечание. Как показывает пример функции

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 < y < x < \pi \\ 0, & \text{в остальных точках квадрата } [-\pi, \pi]^2 \end{cases} \quad (6)$$

для функции  $f(x, y) \in \text{HBV}$  предел  $f(x+0, y+0)$  может не существовать.

Доказательство леммы. Достаточно рассмотреть случай  $p=q=1$ . Допустим противное, а именно

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} f_1^{(1)}(\varepsilon) = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\{I_n\} \in \Omega((x, x+\varepsilon))} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} |f(I_n, \Delta_k)| = \delta > 0. \quad (7)$$

Построим по индукции последовательность интервалов

$$I_n = (a_n, b_n), \quad \Delta_k^{(n)} = (a_k^{(n)}, \beta_k^{(n)}); \quad k=1, 2, \dots, k_n, \quad n=1, 2, \dots \quad (8)$$

Положим  $I_1 = (x, x+1)$ ,  $\Delta_1^{(1)} = (y, y+1)$ ,  $k_1=1$ . Допустим, что построены интервалы

$$\{I_m\}_{m=1}^{n-1} \in \Omega(x, x+1), \quad \{\{\Delta_k^{(m)}\}_{k=1}^{k_m}\}_{m=1}^{n-1} \in \Omega(y, y+1) \quad (9)$$

и построим интервалы  $I_n$ ,  $\{\Delta_k^{(n)}\}_{k=1}^{k_n}$  (при  $n=2$  выполнение условий (9) очевидно). Положим

$$\varepsilon_0 = \min_{\substack{1 \leq k \leq k_m \\ 1 \leq m \leq n}} \{\rho(I_m, x), \rho(\Delta_k^{(m)}, y)\}, \quad (10)$$

где  $\rho(I, x) = \inf_{t \in I} |t - x|$  и учитывая, что существует предел  $f(x+0, y+0)$ , найдем число  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  такое, что

$$|f(t, s) - f(t', s')| < \delta \left( 6 \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \frac{1}{k} \right)^{-1} \text{ при } t, t' \in (x, x+\varepsilon); s, s' \in (y, y+\varepsilon). \quad (11)$$

В силу (7) существуют интервалы

$$I_n \subset (x, x+\varepsilon), \quad \{\Delta_k^{(n)}\}_{k=1}^{k_n} \in \Omega(y, y+\varepsilon) \quad (12)$$

такие, что

$$\sum_{k=1}^{k_n} \frac{1}{k} |f(I_n, \Delta_k^{(n)})| > \frac{2}{3} \delta. \quad (13)$$

Интервалы (8) построены. Выполнение условия (9) для любого  $n=2, 3, \dots$  вытекает из (10) и (12). Отметим также, что в силу (11)

$$\sum_{k=1}^{k_{n-1}} \frac{1}{k} |f(I_n, \Delta_k^{(n)})| \leq 2 \delta \left( 6 \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \frac{1}{k} \right)^{-1} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \frac{1}{k} = \frac{\delta}{3}$$

и поэтому

$$\sum_{k=k_{n-1}+1}^{k_n} \frac{1}{k} |f(I_n, \Delta_k^{(n)})| > \frac{\delta}{3}. \quad (14)$$

Положим

$$\Delta_k = \Delta_k^{(n)}, \text{ при } k_{n-1} < k \leq k_n, \quad n = 2, 3, \dots \quad (15)$$

Согласно (9) для любого  $N = 1, 2, \dots$

$$\{I_n\}_{n=1}^N \in \mathfrak{Q}(x, x+1), \quad \{\Delta_k\}_{k=1}^{k_N} \in \mathfrak{Q}(y, y+1),$$

а в силу (14) и (15) при  $N = 2, 3, \dots$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{k_N} \frac{1}{kn} |f(I_n, \Delta_k)| \geq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} \sum_{k=k_{n-1}+1}^{k_n} \frac{1}{k} |f(I_n, \Delta_k^{(n)})| \geq \frac{\delta}{3} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n},$$

что противоречит условию  $f \in \text{HBV}(D)$ . Лемма 1.3 доказана.

**Лемма 1.4.** Пусть  $f(x, y) \in \text{HBV}(D)$ ,  $D = I \times \Delta$ . Тогда

а) если в точке  $(x, y) \in D$  существует предел  $f(x+0, y+0)$ ,

то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_H(f; (x, x+\varepsilon) \times (y, y+\varepsilon)) = 0; \quad (16)$$

б) если  $f(x, y)$  непрерывна в каждой точке открытого множества  $E \subset D$ , то для любого компакта  $K \subset E$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_H(f; (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon)) = 0 \quad (17)$$

равномерно по  $(x, y) \in K$ .

**Доказательство.** а) Так как (см. [12], теорема 3) для  $(x, y) \in D$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_t(f(t, y); (x, x+\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_s(f(x, s); (y, y+\varepsilon)) = 0,$$

то достаточно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_{t,s}(f(t, s); (x, x+\varepsilon) \times (y, y+\varepsilon)) = 0. \quad (17')$$

Допустим противное:

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} V_{t,s}(f(t, s); (x, x+\varepsilon) \times (y, y+\varepsilon)) = \delta, \quad 0 < \delta < \infty. \quad (18)$$

Пусть  $\varepsilon > 0$  — произвольное фиксированное число. Согласно (18) существуют системы интервалов

$$\begin{aligned} \{I_n\} &\equiv \{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{n_0} \in \mathfrak{Q}(x, x+\varepsilon), \\ \{\Delta_k\} &\equiv \{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^{k_0} \in \mathfrak{Q}(y, y+\varepsilon) \end{aligned} \quad (19)$$

такие, что

$$\sum_{n=1}^{n_0} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{nk} |f(I_n, \Delta_k)| \geq \frac{3}{4} \delta. \quad (20)$$

Используя лемму 1.3, найдем число  $\varepsilon_0$ ,

$$0 < \varepsilon_0 < \min_{\substack{1 \leq n \leq n_0 \\ 1 \leq k \leq k_0}} \{a_n - x, \alpha_k - y\} \quad (21)$$

такое, что

$$I_{n_0}^{(1)}(\varepsilon_0) + I_{k_0}^{(2)}(\varepsilon_0) \leq \frac{\delta}{4} \quad (22)$$

Теперь, учитывая (18), найдем системы интервалов

$$\{I_n^{(1)}\}_{n=1}^{n_1} \in \Omega(x, x + \varepsilon_0), \quad \{\Delta_k^{(1)}\}_{k=1}^{k_1} \in \Omega(y, y + \varepsilon_0) \quad (23)$$

такие, что

$$\sum_{n=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{k_1} \frac{1}{nk} |f(I_n^{(1)}, \Delta_k^{(1)})| \geq \frac{3}{4} \delta. \quad (24)$$

Из (22) и (24) следует, что  $n_1 > n_0$ ,  $k_1 > k_0$  и

$$\begin{aligned} & \sum_{n=n_0+1}^{n_1} \sum_{k=k_0+1}^{k_1} \frac{1}{nk} |f(I_n^{(1)}, \Delta_k^{(1)})| \geq \frac{3}{4} \delta - \\ & - \sum_{n=1}^{n_0} \sum_{k=1}^{k_1} \frac{1}{nk} |f(I_n^{(1)}, \Delta_k^{(1)})| - \sum_{n=n_0+1}^{n_1} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{nk} |f(I_n^{(1)}, \Delta_k^{(1)})| \geq \\ & \geq \frac{3}{4} \delta - I_{n_0}^{(1)}(\varepsilon) - I_{k_0}^{(2)}(\varepsilon) \geq \frac{1}{2} \delta. \end{aligned} \quad (25)$$

Положим

$$I_n^{(2)} = \begin{cases} I_n & \text{при } 1 \leq n \leq n_0 \\ I_n^{(1)} & \text{при } n_0 + 1 \leq n \leq n_1 \end{cases}, \quad \Delta_k^{(2)} = \begin{cases} \Delta_k & \text{при } 1 \leq k \leq k_0 \\ \Delta_k^{(1)} & \text{при } k_0 + 1 \leq k \leq k_1 \end{cases}. \quad (26)$$

Тогда, согласно (19), (21) и (23)  $\{I_n^{(2)}\} \in \Omega(x, x + \varepsilon)$ ,  $\{\Delta_k^{(2)}\} \in \Omega(y, y + \varepsilon)$  и в силу (20), (25) и (26)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{k_1} \frac{1}{nk} |f(I_n^{(2)}, \Delta_k^{(2)})| \geq \sum_{n=1}^{n_0} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{nk} |f(I_n, \Delta_k)| + \\ & + \sum_{n=n_0+1}^{n_1} \sum_{k=k_0+1}^{k_1} \frac{1}{nk} |f(I_n^{(1)}, \Delta_k^{(1)})| \geq \frac{3}{4} \delta + \frac{\delta}{2} = \frac{5}{4} \delta. \end{aligned}$$

Следовательно,  $V_{I, \varepsilon}(f; (x, x + \varepsilon) \times (y, y + \varepsilon)) \geq \frac{5}{4} \delta$ , что, в силу произвольности числа  $\varepsilon > 0$ , противоречит условию (18).

б) Аналогично п. а) можно доказать, что для  $(x, y) \in D$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_H(f; (x, x \pm \varepsilon) \times (y, y \pm \varepsilon)) = 0.$$

Отсюда и из (4), учитывая, что для непрерывных функций

$$V_H(f; [x, x + \varepsilon] \times [y, y + \varepsilon]) = V_H(f; (x, x + \varepsilon) \times (y, y + \varepsilon)),$$

вытекает равенство (16) для  $(x, y) \in E$ . Докажем, что (16) имеет место равномерно по  $(x, y) \in K$ . Допустим противное: существует число  $\delta_0 > 0$  и последовательности  $(x_i, y_i) \in K$ ,  $i = 1, 2, \dots$  и  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  такие, что

$$V_H(f; (x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i) \times (y_i - \varepsilon_i, y_i + \varepsilon_i)) > \delta_0.$$

В силу компактности  $K$ , можем считать, что  $(x_i, y_i) \rightarrow (x_0, y_0) \in K$  при  $i \rightarrow \infty$ . Но тогда для произвольного  $\varepsilon > 0$  при достаточно боль-

ших  $i$  будем иметь, что  $(x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i) \times (y_i - \varepsilon_i, y_i + \varepsilon_i) \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$  и следовательно

$$V_H(f; (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)) > \\ > V_H(f; (x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i) \times (y_i - \varepsilon_i, y_i + \varepsilon_i)) > \delta_0,$$

что противоречит (16). Лемма 1.4 доказана.

Нам потребуется также следующая лемма, которая фактически доказана в работе [13] (см. стр. 45—47).

Лемма 1.5. Если  $g(x) \in \text{HBV}$ , то для произвольных  $a$  и  $b$ ,  $-\pi \leq a < b \leq \pi$

$$\left| \int_a^b g(t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \leq C [V_H(g; (a, b)) + \|g\|_C(a, b)].$$

## § 2. Основная теорема

Обозначим через  $S_{N,M}(f, x, y)$  прямоугольную частичную сумму ряда Фурье функции  $f(x, y) \in L^1([-\pi, \pi]^2)$ :

$$S_{N,M}(f, x, y) = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M c_{n,m} e^{i(nx+my)}, \quad N, M = 0, 1, \dots,$$

где

$$c_{n,m} = c_{n,m}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) e^{-i(nx+my)} dx dy$$

— коэффициенты Фурье функции  $f(x, y)$ . Положим также

$$\sum f(x \pm 0, y \pm 0) = f(x+0, y+0) + f(x+0, y-0) + \\ + f(x-0, y+0) + f(x-0, y-0), \quad (27)$$

если все пределы в (27) существуют.

Теорема. Если  $f(x, y) \in \text{HBV}$ , то

1) в каждой точке, где существуют пределы (27) имеет место равенство

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} S_{N,M}(f, x, y) = \frac{1}{4} \sum f(x \pm 0, y \pm 0); \quad (28)$$

2) если, кроме того,  $f(x, y)$  непрерывна в точках открытого множества  $E \subset [-\pi, \pi]^2$ , то (28) имеет место равномерно на каждом компакте  $K \subset E$ .

Замечание. Пример функции (6) показывает, что если в некоторой точке  $(x, y)$  не существует один из пределов (27), то ряд Фурье функции  $f(x, y) \in \text{HBV}$  может не сходиться по Прингсхейму в этой точке (см. [14]).

Лемма 2.1. Пусть  $f(x, y), g(x, y) \in \text{HBV}$ , при этом на прямоугольниках  $D_i, i = 1, 2, \dots, i_0, \cup D_i = [-\pi, \pi]^2$  функция  $g(x, y)$

зависит только от  $x$  или только от  $y$ . Тогда для произвольных  $x, y \in [-\pi, \pi]$ ,  $N, M=2, 3, \dots$

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t, y+s) g(t, s) \frac{\sin Nt}{t} e^{iMs} dt ds \right| \leq C \frac{C(f, g)}{\ln M}, \quad (29)$$

где  $C$ —абсолютная постоянная, а  $C(f, g)$ —постоянная из неравенства (5).

Пусть  $x, y, N, M$  фиксированы и  $F(t, s) = f(x+t, y+s) g(t, s)$ ,  $t, s \in [-\pi, \pi]$ . Положим

$$\varphi(s) = \int_{-\pi}^{\pi} F(t, s) \frac{\sin Nt}{t} dt.$$

В силу неравенства (см. [15])

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(s) e^{iMs} ds \right| \leq C \frac{V_H(\varphi; [-\pi, \pi])}{\ln M}, \quad M=2, 3, \dots,$$

нам достаточно доказать, что

$$V_H(\varphi; [-\pi, \pi]) \leq C \cdot C(f, g). \quad (30)$$

Пусть  $\{\Delta_k\} \equiv \{(\alpha_k, \beta_k) \mid k=1, \dots, k_0 \in \Omega([-\pi, \pi])\}$ . Тогда, обозначив  $\varepsilon_k = \text{sign } \varphi(\Delta_k)$ , мы будем иметь

$$\begin{aligned} I &\equiv \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{k} |\varphi(\Delta_k)| = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\varepsilon_k}{k} \int_{-\pi}^{\pi} [F(t, \beta_k) - F(t, \alpha_k)] \frac{\sin Nt}{t} dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \psi(t) \frac{\sin Nt}{t} dt, \end{aligned}$$

где

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\varepsilon_k}{k} [F(t, \beta_k) - F(t, \alpha_k)].$$

Следовательно (см. лемму 1.5)

$$I \leq C [V_H(\psi; [-\pi, \pi]) + \|\psi\|_{C(-\pi, \pi)}]. \quad (31)$$

В силу леммы 1.1, п. а)

$$\|\psi\|_{C(-\pi, \pi)} \leq \sup_{t \in [-\pi, \pi]} V_s(F(t, s); [-\pi, \pi]) \leq V_H(F; [-\pi, \pi]^2). \quad (32)$$

Оценим  $V_H(\psi; [-\pi, \pi])$ . Пусть  $\{J_n\}_{n=1}^{n_0} \in \Omega([-\pi, \pi])$ , тогда

$$\sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n} |\psi(J_n)| \leq \sum_{n=1}^{n_0} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{nk} |F(J_n, \Delta_k)| \leq V_H(F; [-\pi, \pi]^2).$$

Остается, из (31) и (32), в силу замечания после леммы 1.2, (см. (5)) получим, что

$$I \leq C V_H(F; [-\pi, \pi]^2) \leq C \cdot C(f, g).$$

Оценка (30), а следовательно и лемма 2.1 доказаны.

**Лемма 2.2** Если  $f(x, y) \in \text{HBV}$ , то для любого  $\varepsilon > 0$

$$S_{N, M}(f, x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t, y+s) \frac{\sin Nt}{t} \frac{\sin Ms}{s} dt ds + o(1), \quad (33)$$

где  $o(1)$  стремится к нулю при  $N, M \rightarrow \infty$  равномерно по  $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ .

**Замечание.** Из леммы 2.2, в частности вытекает, что для функций из класса HBV имеет место принцип локализации: если  $f(x, y) = 0$  на открытом множестве  $E \subset [-\pi, \pi]^2$ , то  $S_{N, M}(f, x, y) \rightarrow 0$  при  $N, M \rightarrow \infty$  равномерно на каждом компакте  $K \subset E$ . Этот факт для функций  $f(x, y)$  с условием  $V_x(f(x, y)) \in L^1(-\pi, \pi)$ ,  $V_y(f(x, y)) \in L^1(-\pi, \pi)$  был доказан Г. Говманом и Д. Ватерманом, однако доказательство равномерной сходимости в этой работе неполное.

**Доказательство леммы.** Имеем равенство

$$S_{N, M}(f, x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t, y+s) D_N(t) D_M(s) dt ds, \quad (34)$$

где  $D_N(t) = \left[ \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t \right] / 2 \sin \frac{t}{2}$  — ядро Дирихле. Обозначив

$$g(t) = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} - \frac{1}{t}, \quad 0 < |t| \leq \pi, \quad g(0) = 0,$$

мы находим, что

$$D_N(t) = \frac{\sin Nt}{t} + g(t) \sin Nt + \frac{1}{2} \cos Nt, \quad t \in [-\pi, \pi]$$

и, согласно (34)

$$\begin{aligned} \pi^2 S_{N, M}(f, x, y) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t, y+s) \frac{\sin Nt}{t} \frac{\sin Ms}{s} dt ds + \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\varepsilon < |t| < \pi} f(x+t, y+s) \frac{\sin Nt}{t} \frac{\sin Ms}{s} dt ds + \\ &+ \int_{\varepsilon < |s| < \pi} \int_{|t| < \varepsilon} f(x+t, y+s) \frac{\sin Nt}{t} \frac{\sin Ms}{s} dt ds + \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t, y+s) \frac{\sin Nt}{t} \left[ g(s) \sin Ms + \frac{1}{2} \cos Ms \right] dt ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t, y+s) \frac{\sin Ms}{s} \left[ g(t) \sin Nt + \frac{1}{2} \cos Nt \right] dt ds + \\
& + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t, y+s) \left[ g(t) \sin Nt + \frac{1}{2} \cos Nt \right] \left[ g(s) \sin Ms + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \cos Ms \right] dt ds \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t, y+s) \frac{\sin Nt}{t} \frac{\sin Ms}{s} dt ds + \\
& + \sum_{p=1}^5 J_{N,M}^{(p)}(x, y).
\end{aligned}$$

Остается доказать, что при  $p=1, 2, \dots, 5$

$$\lim_{N, M \rightarrow \infty} J_{N,M}^{(p)}(x, y) = 0$$

равномерно по  $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ . При  $p=1, 2, 3, 4$  это вытекает из леммы 2.1 (при соответствующем выборе функции  $g(t, s)$ ), а при  $p=5$  — из того, что коэффициенты Фурье  $c_{n,m}(F)$  функции  $F(s, t) = f(x+t, y+s) g(t, s)$ , где  $f(x, y) \in L^1([-\pi, \pi]^2)$ , а  $g(t, s)$  ограничена, стремятся к нулю при  $|n| + |m| \rightarrow \infty$  равномерно по  $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$  (см., например, [16]).

Доказательство теоремы. Согласно леммам 1.4 и 2.2 теорема будет доказана, если мы покажем, что для произвольных  $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ ,  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t, y+s) \frac{\sin Nt}{t} \frac{\sin Ms}{s} dt ds - \right. \\
& \left. - \frac{1}{4} \sum f(x \pm 0, y \pm 0) \right| \leq C \sum V_H(f; (x, x \pm \varepsilon) \times (y, y \pm \varepsilon)) + o(1), \quad (35)
\end{aligned}$$

где  $C$  — абсолютная постоянная,  $o(1) \rightarrow 0$  при  $N, M \rightarrow \infty$  равномерно при  $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ . Неравенство (35) достаточно доказать в случае  $(+, +)$ , т. е. доказать, что

$$\begin{aligned}
& |J| \equiv \left| \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x+t, y+s) \frac{\sin Nt}{t} \frac{\sin Ms}{s} dt ds - \right. \\
& \left. - \frac{1}{4} f(x+0, y+0) \right| \leq C V_H(f; (x, x+\varepsilon) \times (y, y+\varepsilon)).
\end{aligned}$$

Выберем натуральные числа  $n_0, k_0$  так, что

$$\frac{2n_0-1}{N} \pi \leq \varepsilon < \frac{2n_0+1}{N} \pi, \quad \frac{2k_0-1}{M} \pi \leq \varepsilon < \frac{2k_0+1}{M} \pi.$$

Имеем (см. (33) при  $f \equiv 1$ )

$$\begin{aligned}
 \pi^2 I &= \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t, y+s) - f(x+0, y+0)] \frac{\sin Nt \sin Ms}{t s} dt ds + o(1) = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{M}} \int_0^{\frac{\pi}{N}} + \int_0^{\frac{\pi}{M}} \int_{\frac{\pi}{N}}^{\pi} + \int_{\frac{\pi}{M}}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{N}} + \int_{\frac{\pi}{M}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{N}}^{\pi} + \int_{\frac{\pi}{M}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{N}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{M}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{N}}^{\pi} + \\
 &\quad + o(1) \equiv \sum_{p=1}^6 I_p + o(1).
 \end{aligned}$$

Нужно доказать, что

$$|I_p| \leq C V_H(f; (x, x+\varepsilon) \times (y, y+\varepsilon)), \quad p=1, 2, \dots, 6. \quad (36)$$

При  $p=1$  (36) непосредственно вытекает из леммы 1.1, п. 6). Согласно леммам 1.1 и 1.5 для любого  $s \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned}
 &\left| \int_0^{\frac{\pi}{N}} \left[ f(x+t, y+s) - f(x+0, y+0) \right] \frac{\sin Nt}{t} dt \right| \leq \\
 &\leq C \left[ V_1(f(x+t, y+s); (0, \varepsilon)) + \sup_{t \in (0, \varepsilon)} |f(x+t, y+s) - f(x+0, y+0)| \right] \leq \\
 &\leq C V_H(f; (x, x+\varepsilon) \times (y, y+\varepsilon)),
 \end{aligned}$$

откуда вытекает (36) при  $p=2$ . Аналогично доказывается (36) при  $p=3, 4, 5$ . Остается рассмотреть случай  $p=6$ . Обозначим  $\varphi(t, s) = f(x+t, y+s) - f(x+0, y+0)$ , тогда

$$\begin{aligned}
 I_6 &= \sum_{n=1}^{2n_0-2} \sum_{k=1}^{2k_0-2} \int_{\frac{k}{M}\pi}^{\frac{k+1}{M}\pi} \int_{\frac{n}{N}\pi}^{\frac{n+1}{N}\pi} \varphi(t, s) \frac{\sin Nt \sin Ms}{t s} dt ds = \\
 &= \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{2n_0-1} \sum_{k=1}^{2k_0-1} Q_{nk}(t, s) \sin t \sin s dt ds, \quad (37)
 \end{aligned}$$

где  $\sum'$  означает суммирование только по нечетным значениям индекса, а

$$\begin{aligned}
 Q_{nk}(t, s) &= \frac{\varphi\left(\frac{t+n\pi}{N}, \frac{s+k\pi}{M}\right)}{(t+n\pi)(s+k\pi)} - \frac{\varphi\left(\frac{t+(n+1)\pi}{N}, \frac{s+k\pi}{M}\right)}{(t+(n+1)\pi)(s+k\pi)} - \\
 &\quad - \frac{\varphi\left(\frac{t+n\pi}{N}, \frac{s+(k+1)\pi}{M}\right)}{(t+n\pi)(s+(k+1)\pi)} + \frac{\varphi\left(\frac{t+(n+1)\pi}{N}, \frac{s+(k+1)\pi}{M}\right)}{(t+(n+1)\pi)(s+(k+1)\pi)}.
 \end{aligned}$$

Обозначим

$$\Delta_h^{(1)} f(u, v) = f(u+h, v) - f(u, v), \quad \Delta_h^{(2)} f(u, v) = f(u, v+h) - f(u, v),$$

Тогда  $Q_{nk}(t, s)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} Q_{nk}(t, s) = & \frac{1}{(t+n\pi)(s+k\pi)} \frac{\Delta_{\frac{\pi}{N}}^{(1)} \Delta_{\frac{\pi}{M}}^{(2)}}{\varphi\left(\frac{t+n\pi}{N}, \frac{s+k\pi}{M}\right)} + \\ & + \pi \frac{1}{(t+n\pi)(s+k\pi)(s+(k+1)\pi)} \frac{\Delta_{\frac{\pi}{N}}^{(1)}}{\varphi\left(\frac{t+n\pi}{N}, \frac{s+(k+1)\pi}{M}\right)} + \\ & + \frac{\pi}{(t+n\pi)(t+(n+1)\pi)(s+(k+1)\pi)} \frac{\Delta_{\frac{\pi}{M}}^{(2)}}{\varphi\left(\frac{t+(n+1)\pi}{N}, \frac{s+k\pi}{M}\right)} + \\ & + \frac{\pi^2}{(t+n\pi)(t+(n+1)\pi)(s+k\pi)(s+(k+1)\pi)} \frac{1}{\varphi\left(\frac{t+(n+1)\pi}{N}, \frac{s+k\pi}{M}\right)}. \end{aligned}$$

Следовательно, при  $(t, s) \in [0, \pi]^2$  (см. лемму 1.1)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2n_0-1} \sum_{k=1}^{2k_0-1} |Q_{n,k}(t, s)| & \leq \sum_n \sum_k \left| \frac{\Delta_{\frac{\pi}{N}}^{(1)} \Delta_{\frac{\pi}{M}}^{(2)}}{\varphi\left(\frac{t+n\pi}{N}, \frac{s+k\pi}{M}\right)} \right| \cdot \frac{1}{nk} + \\ & + \sum_n \sum_k \frac{1}{nk^2} \left| \frac{\Delta_{\frac{\pi}{N}}^{(1)}}{\varphi\left(\frac{t+n\pi}{N}, \frac{s+(k+1)\pi}{M}\right)} \right| + \\ & + \sum_n \sum_k \frac{1}{n^2k} \left| \frac{\Delta_{\frac{\pi}{M}}^{(2)}}{\varphi\left(\frac{t+(n+1)\pi}{N}, \frac{s+k\pi}{M}\right)} \right| + \\ & + \sum_n \sum_k \frac{1}{n^2k^2} \left| \frac{1}{\varphi\left(\frac{t+(n+1)\pi}{N}, \frac{s+k\pi}{M}\right)} \right| \leq \\ & \leq V_{t,s}(\varphi(t, s); (0, \varepsilon)^2) + \sum_k \frac{1}{k^2} V_t\left(\varphi\left(t, \frac{s+(k+1)\pi}{M}\right); (0, \varepsilon)\right) + \\ & + \sum_n \frac{1}{n^2} V_s\left(\varphi\left(\frac{t+(n+1)\pi}{N}, s\right); (0, \varepsilon)\right) + \\ & + \sum_{n,k} \frac{1}{n^2k^2} \|\varphi\|_{C((0, \varepsilon)^2)} \leq C V_H(f; (x, x+\varepsilon) \times (y, y+\varepsilon)). \end{aligned}$$

Отсюда и из (37) получаем (36) при  $p=6$ . Неравенство (35), а следовательно и теорема, доказаны.

Институт математики

АН Армянской ССР

Поступила 27. V. 1985

Ա. Ա. ՍԱՀԱԿՅԱՆ. Սահմանափակ վարիացիայի ֆունկցիաների ֆուրյեի կրկնակի շարքերի գումարավորման մասին (ամփոփում)

Հոդվածում սահմանվում է սահմանափակ հարմոնիկ վարիացիայի ֆունկցիաների դասը երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար և ապացուցվում է, որ այդ դասի ֆունկցիայի ֆուրյեի շարքը զուգամիտում է Պրինգսեյմի մեթոդով ամեն մի կետում, որտեղ գոյություն ունեն  $f(x \pm 0, y \pm 0)$  սահմանները, ընդ որում, զուգամիտությունը հավասարաչափ է, եթե ֆունկցիան անընդհատ է:

A. A. SAHAKIAN, *On convergence of double Fourier series of functions of bounded harmonic variation (summary)*

Convergence of double Fourier series of functions of bounded harmonic variation in any point where  $f(x \pm 0, y \pm 0)$  exists is proved. The convergence is uniform, when  $f(x, y)$  is continuous.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды, Физматгиз, 1961.
2. N. Wiener. The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients Massachusetts J. Math., 3, 1924, 72—94.
3. J. Marcinkiewicz. On a class of functions and their Fourier series. Compt. Rend. Soc. Sci. Varsovie, 26, 1934, 71—77.
4. L. C. Young. General inequalities for Stieltjes integrals and the convergence of Fourier series, Mat. Ann., 115, 1938, 581—612.
5. R. Salem. Essais sur les series trigonometriques, Actualite Sci. et industr., 862, 1940, Paris.
6. C. Goffman. Everywhere convergence of Fourier series, Indiana Univ. Math. J. 20, № 2, 1970, 107—112.
7. К. И. Осолоков. Обобщенная вариация, индикатриса Банаха и равномерная сходимость рядов Фурье, Мат. заметки, 12, № 3, 1972, 313—324.
8. A. Baernstein. On the Fourier series of functions of bounded  $\Phi$ -variation. Studia Math., 42, № 3, 1972, 243—248.
9. D. Waterman. On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation, Studia Math., 44, № 1, 1966, 107—117.
10. G. H. Hardy. On double Fourier series and especially those which represent the double zeta-function with real and incommensurable parameters, Quart. J. Math., 37, № 1, 1906, 53—79.
11. В. И. Голубов. О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной обобщенной вариации, Сиб. мат. ж., 15, № 2, 1974, 262—292.
12. D. Waterman. On  $\Lambda$ -bounded variation, Studia Math., 57, № 1, 1976, 33—45.
13. C. Goffman. D. Waterman. The localization principle for Fourier series, Studia Math., 99, № 1, 1980, 41—57.
14. F. Ustina. Convergence of double Fourier series, Ann. Mat., pure et appl., 85, 1970, 21—47.
15. M. Schramm, D. Waterman. On the magnitude of Fourier coefficients, Proc. Amer. Math. Soc., 85, № 3, 1982, 408—410.
16. И. Е. Жак. О сопряженных двойных тригонометрических рядах, Мат. сб., 31, № 3, 1952, 469—484.

УДК 517.53

В. Х. МУСОЯН

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, АППРОКСИМИРУЕМЫХ НЕПОЛНОЙ СИСТЕМОЙ ЭКСПОНЕНТ

## Введение

Работа посвящена изучению экстремальных свойств функций, аппроксимируемых конечными линейными комбинациями функций из неполной в пространстве  $L^2(0, \infty)$  системы экспонент

$$\{e^{-\lambda_k x}\}_{k=1}^{\infty}, \operatorname{Re} \lambda_k > 0, \quad (1)$$

или, более общо, системы функций

$$\{e^{-\lambda_k x}, x e^{-\lambda_k x}, \dots, x^{m_k-1} e^{-\lambda_k x}\}, \operatorname{Re} \lambda_k > 0, \quad (2)$$

где  $\{\lambda_k\}$  — последовательность различных комплексных чисел.

Известная теорема Мюнца, переформулированная для системы экспоненциальных функций (1), гласит:

Пусть  $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$ . Тогда

а) Условия

$$\lambda_1 = 0, \sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k^{-1} = +\infty$$

необходимы и достаточны для полноты системы (1) в пространстве  $C[0, \infty]$  непрерывных на  $[0, \infty]$  функций,

б) Условия

$$\lambda_1 > 0, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} = \infty$$

необходимы и достаточны для полноты той же системы в любом из пространств  $L^p(0, \infty)$ ,  $p \geq 1$ .

Изучению класса функций, аппроксимируемых конечными линейными комбинациями функций из неполной (в пространствах  $L^p(0, \infty)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , или  $C[0, \infty]$ ) системы (2), посвящено много работ (см., например, [1] — [7]).

Л. Шварц [2] рассмотрел неполную (в пространствах  $L^p(0, \infty)$  или  $C[0, \infty]$ ) систему (1), при условии  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  и установил, что функции, аппроксимируемые конечными линейными комбинациями функций из неполной системы (1), аналитически продолжаются в от-

крытую правую полуплоскость  $\operatorname{Re} z > 0$ . Более того, если последовательность конечных линейных комбинаций  $P_n(x) = \sum_{k=1}^{p_n} a_{nk} e^{-\lambda_k x}$  сходится к функции  $F(x)$  в промежутке  $[0, \infty]$ , то последовательность  $P_n(z)$  сходится к функции  $F(z)$  ( $F(z)$  — аналитическое продолжение функции  $F(x)$ ) равномерно на компактных множествах открытой правой полуплоскости.

В случае, когда  $\lambda_k$  — целые, тот же самый результат, независимо и почти одновременно, был получен Кларксоном и Эрдёшем. [1].

Изучению неполных в пространстве  $C[0, 1]$  систем Мюнца  $\{x^{\lambda_k}\}$ ,  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ ;  $\sum \lambda_k^{-1} < \infty$  новым, отличным от метода Шварца, методом, посвящена работа А. Ф. Леонтьева [3]. В этой работе установлено, что если последовательность  $P_n(x) = \sum_{k=1}^{p_n} a_{nk} x^{\lambda_k}$  равномерно сходится на отрезке  $[0, 1]$ , то на любом ограниченном замкнутом подмножестве римановой поверхности  $0 < |x| < 1$ ,  $-\infty < \arg x < \infty$  она сходится равномерно.

М. М. Джрбашян в работах [4] и [7] предложил новый метод, позволивший исследовать вопросы аналитического продолжения функций, принадлежащих замыканию неполной системы (2) и разложения этих функций в ряды по этой системе. Он доказал, что условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} < \infty \quad (3)$$

необходимо и достаточно для ее неполноты в пространстве  $L^2(0, \infty)$

В указанных работах М. М. Джрбашян рассмотрел также неполную систему (2) при условии  $|\arg \lambda_k| \leq \varphi_0$ ;  $|\lambda_k| > \delta > 0$  и установил, что аппроксимируемая функция аналитически продолжается во внутренность угла  $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0$ . Более того, если последовательность

конечных линейных комбинаций функций из неполной системы (2)  $P_n(x)$  сходится по норме пространства  $L^2(0, \infty)$  к функции  $f(x)$ , то последовательность  $P_n(z)$  на компактных подмножествах указанного угла равномерно сходится к функции  $f(z)$  ( $f(z)$  — аналитическое продолжение функции  $f(x)$ ).

Таким образом, вопрос об аналитическом продолжении аппроксимируемой функции в случае, когда последовательность  $\{\lambda_k\}$  имеет предельные точки на мнимой оси, оставался открытым.

Настоящая работа посвящена также изучению этого вопроса. В предположении, что последовательность показателей  $\{\lambda_k\}$ , кроме условия неполноты (3), удовлетворяет одному из двух условий:

- 1) последовательность  $\{\lambda_k\}$  ограничена,
- 2) последовательность  $\{\lambda_k\}$  неограничена и удовлетворяет условию

$$\lim_{|\lambda_k| \rightarrow \infty} |\arg \lambda_k| = \varphi_0 < \frac{\pi}{2}, \quad (4)$$

получено интегральное представление ортогоектора в пространстве  $L^2(0, \infty)$  на подпространство  $E \subset L^2(0, \infty)$ , порождённое неполной системой (2).

Исходя из этого представления ортогоектора доказано, что функции, аппроксимируемые конечными линейными комбинациями функций из неполной системы (2), при условии 1) аналитически продолжаются на всю комплексную плоскость, а при условии 2) — во внутренность угла  $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0$ . Оказывается, что в первом случае аналитическое продолжение аппроксимируемой функции представляет собой целую функцию экспоненциального типа.

Изучен также вопрос сходимости в областях комплексной плоскости последовательностей конечных линейных комбинаций функций из неполной системы (2), сходящихся по норме пространства  $L^2(0, \infty)$ .

Получены экстремальные оценки для аналитических продолжений аппроксимируемых функций.

В наших рассуждениях мы пользуемся полученным в работе [8] интегральным представлением формулой

$$(P_n f)(x) = \int_0^{\infty} K_n(x, t) f(t) dt \quad (5)$$

ортогоектора  $P_n$  в  $L^2(0, \infty)$  на подпространство, порождённое конечной системой

$$\{e^{-\lambda_k x}, x e^{-\lambda_k x}, \dots, x^{m_k-1} e^{-\lambda_k x} |_{k=1}^n\}. \quad (2')$$

Здесь

$$K_n(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\lambda x} d\lambda}{W_n(\lambda)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\xi t} d\xi}{W_n(\xi)(\xi + \bar{\lambda})} \right\}, \quad (6)$$

$W_n$  — конечное произведение Бляшке

$$W_n(\lambda) = \prod_{k=1}^n \left( \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda + \bar{\lambda}_k} \cdot \frac{|1 - \lambda_k^2|}{1 - \lambda_k^2} \right)^{m_k}, \quad (7)$$

а  $\Gamma$  — замкнутый контур, лежащий в правой полуплоскости и охватывающий все корни функции  $W_n(\lambda)$ .

### § 1. Неполная система экспонент с ограниченной последовательностью показателей

В этом параграфе изучается неполная система (2) при условии ограниченности последовательности  $\{\lambda_k\}$ . Иными словами, предполагается, что последовательность  $\{\lambda_k\}$  ограничена и удовлетворяет условию (3).

Как известно, условие (3) необходимо и достаточно для равномерной сходимости произведения Бляшке

$$W(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda + \bar{\lambda}_k} \cdot \frac{|1 - \lambda_k^2|}{1 - \lambda_k^2} \right)^{m_k}$$

на компактных подмножествах множества  $C \setminus \{-\bar{i}_k\}$  ( $C$  — комплексная плоскость, а  $\{-\bar{i}_k\}$  — замыкание множества точек последовательности  $\{-\bar{i}_k\}$ ) к аналитической на указанном множестве функции, обращающейся в нуль в точках  $\{i_k\}$ . Кроме того, почти для всех  $i$  на мнимой оси  $i \in (-i\infty, i\infty)$  существуют ее угловые граничные значения  $W(i\tau) = \lim_{\lambda \rightarrow i\tau} W(\lambda)$  и почти везде  $|W(i\tau)| = 1$ ,  $\tau \in (-\infty, \infty)$ .

Более того (см. [9], стр. 152)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |W_n(i\tau) - W(i\tau)|^2 \frac{d\tau}{1 + \tau^2} \rightarrow 0,$$

где  $W_n$  — частичное произведение Бляшке (7), следовательно, для произвольной функции  $f \in L^2(-\infty, \infty)$  имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |W_n(i\tau) - W(i\tau)|^2 |f(\tau)|^2 d\tau \rightarrow 0. \quad (1.1)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$G(\lambda, t, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{q(\xi) e^{-i t \xi}}{W(\xi)(\xi + \bar{\lambda})} d\xi, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0, \quad (1.2)$$

где  $t$  — произвольное комплексное число,  $q(\xi)$  — произвольный алгебраический полином,  $\Gamma$  — прямоугольник, состоящий из отрезков  $-i\sigma, a - i\sigma, [a - i\sigma, a + i\sigma], [a + i\sigma, i\sigma]$  и  $[i\sigma, -i\sigma]$ ,  $\sigma > 0, a > 0$ , с положительным направлением обхода. Числа  $a$  и  $\sigma$  выбраны так, чтобы контур  $\Gamma$  охватывал внутри себя все точки последовательности  $\{i_k\}$ , а отрезки  $[-i\sigma, a - i\sigma]$  и  $[a + i\sigma, i\sigma]$  находились на положительном расстоянии от множества точек последовательности  $\{i_k\}$ .

**Лемма 1.** Функция  $G(\lambda, t, q)$  обладает свойствами

а) При любом комплексном значении параметра  $t$  функция  $G(\lambda, t, q)$ , как функция от  $\lambda$ , входит в класс  $H^2$  в правой полуплоскости, следовательно, почти везде на мнимой оси существуют её угловые граничные значения

$$G(i\tau, t, q) = \lim_{\lambda \rightarrow i\tau} G(\lambda, t, q), \quad -\infty < \tau < \infty,$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(i\tau, t, q)|^2 d\tau < \infty.$$

б) Имеет место предельное соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_n(i\tau, t, q) - G(i\tau, t, q)|^2 d\tau \rightarrow 0, \quad (1.3)$$

где

$$G_n(\lambda, t, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{q(\xi) e^{-\xi t} d\xi}{W_n(\xi) (\xi + \lambda)}, \operatorname{Re} \lambda > 0,$$

причем на ограниченных множествах соотношение (1.3) имеет место равномерно относительно  $t$ .

с) Равномерно относительно  $\lambda$  и  $t$ , когда  $\lambda$  изменяется в некоторой окрестности ломаной  $\Gamma \setminus (i\sigma, -i\sigma)$  а  $t$  — на произвольном ограниченном множестве комплексной плоскости, имеет место

$$G_n(\lambda, t, q) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(\lambda, t, q).$$

Доказательство утверждения а). Так как функции  $F(\lambda)$  и  $\overline{F(\lambda)}$  входят в класс  $H^2$  одновременно, то достаточно доказать, что функция  $G(\lambda, t, q)$  входит в класс  $H^2$ . Для этого представим ее в виде

$$\begin{aligned} G(\lambda, t, q) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{[-i\sigma, a-i\sigma]} \frac{q(\xi) e^{-\xi t} d\xi}{W(\xi) (\xi + \lambda)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{[a-i\sigma, a+i\sigma]} \frac{q(\xi) e^{-\xi t} d\xi}{W(\xi) (\xi + \lambda)} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{[a+i\sigma, i\sigma]} \frac{q(\xi) e^{-\xi t} d\xi}{W(\xi) (\xi + \lambda)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{[i\sigma, -i\sigma]} \frac{q(\xi) e^{-\xi t} d\xi}{W(\xi) (\xi + \lambda)} = \\ &= G^{(1)}(\lambda, t, q) + G^{(2)}(\lambda, t, q) + G^{(3)}(\lambda, t, q) + G^{(4)}(\lambda, t, q) \end{aligned}$$

и докажем, что слагаемые  $G^{(i)}(\lambda, t, q)$ ,  $i=1, 2, 3, 4$ , входят в класс  $H^2$  в правой полуплоскости. Принадлежность функций  $G^{(2)}(\lambda, t, q)$  и  $G^{(4)}(\lambda, t, q)$  пространству  $H^2$  вытекает из следующего утверждения (см., например, [9], стр. 192).

Если  $f \in L^1(-\infty, \infty)$ , то функции

$$f_+(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{x - w}, \operatorname{Im} w > 0$$

и

$$f_-(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{x - w}, \operatorname{Im} w < 0$$

входят, соответственно, в классы  $H^2$  в верхней и нижней полуплоскостях, причем

$$\|f_{\pm}\|_{H^2} \leq \|f\|_{L^1}. \quad (1.4)$$

Принадлежность остальных слагаемых пространству  $H^2$  вытекает из легко проверяемого утверждения:

Если функция  $\varphi(\xi)$  непрерывна на отрезке  $[0, a]$ ,  $a > 0$  и в точке  $\xi = 0$  удовлетворяет условию Липшица с показателем  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ,

$$|\varphi(\xi) - \varphi(0)| \leq L \xi^{\alpha}, \quad (1.5)$$

то функция

$$J(z) = \int_0^a \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi + z}$$

входит в класс  $H^2$  в правой полуплоскости.

Перейдем к доказательству утверждения в). Для этого составим разность

$$G_n(\lambda, t, q) - G(\lambda, t, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{W_n(\xi)} - \frac{1}{W(\xi)} \right] \frac{q(\xi) e^{-\xi t} d\xi}{\xi + \lambda} \quad (1.8)$$

и интеграл по контуру  $\Gamma$  представим как сумму интегралов, распространенных по отдельным сторонам прямоугольника  $\Gamma$

$$\begin{aligned} G_n(\lambda, t, q) - G(\lambda, t, q) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{[-i\sigma, a-i\sigma]} \left[ \frac{1}{W_n(\xi)} - \frac{1}{W(\xi)} \right] \frac{q(\xi) e^{-\xi t} d\xi}{\xi + \lambda} + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{[a-i\sigma, a+i\sigma]} + \frac{1}{2\pi i} \int_{[a+i\sigma, i\sigma]} + \frac{1}{2\pi i} \int_{[i\sigma, -i\sigma]} = \sum_{k=1}^4 J_n^{(k)}(\lambda, t). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь слагаемые  $J_n^{(k)}(\lambda, t)$ ,  $k=1, 2, 3, 4$ , как функции от  $\lambda$ , принадлежат пространству  $H^2$  в правой полуплоскости (см. утверждение а)). Докажем, что они стремятся к нулю по норме этого пространства равномерно относительно  $t$  при  $|t| \leq M$ . Имеем

$$|J_n^{(1)}(\lambda, t)| \leq \varepsilon_n \int_0^a \frac{dx}{|x - i\sigma + \bar{\lambda}|}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0, \quad (1.10)$$

где

$$\varepsilon_n = \max_{\substack{\xi \in [-i\sigma, a-i\sigma] \\ |\lambda| \leq M}} \left| \left[ \frac{1}{W_n(\xi)} - \frac{1}{W(\xi)} \right] q(\xi) e^{-\xi t} \right|.$$

Так как отрезок  $[-i\sigma, a-i\sigma]$  находится на положительном расстоянии от множества точек последовательности  $\{\lambda_k\}$ , то последовательность  $1/W_n(\xi)$  равномерно на этом отрезке сходится к функции  $1/W(\xi)$ , а функция  $q(\xi) e^{-\xi t}$  на этом отрезке ограничена, следовательно  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ .

Чтобы доказать соотношение  $J_n^{(1)}(\lambda, t) \rightarrow 0$  по норме пространства  $H^2$  равномерно относительно  $t$ , в силу оценки (1.10), достаточно доказать, что функция

$$h_{\xi}(\eta) = \int_0^a \frac{dx}{|x - i\sigma + \xi - i\eta|} \quad (\lambda = \xi + i\eta, \xi > 0)$$

при любом фиксированном  $\xi > 0$  входит в класс  $L^2(-\infty, \infty)$  и ее норма, как функция от  $\xi$ , ограничена. Имеем

$$h_{\varepsilon}(\eta) \leq 2 \int_0^{\sigma} \frac{dx}{x + |\eta + \sigma|},$$

Отсюда получаем оценку

$$h_{\varepsilon}(\eta) \leq \begin{cases} 2 \ln \frac{a + |\eta + \sigma|}{|\eta + \sigma|}, & |\eta| \leq 2\sigma \\ \frac{4a}{|\eta|}, & |\eta| > 2\sigma. \end{cases}$$

Из этой оценки следует требуемый результат.

Стремление к нулю слагаемого  $J_n^{(3)}(\lambda, t)$  в (1.9) доказывается аналогичным образом.

Для слагаемого  $J_n^{(2)}(\lambda, t)$  имеем

$$J_n^{(2)}(\lambda, t) < \max_{\substack{\xi \in [a - i\sigma, a + i\sigma] \\ |\eta| < M}} \left| \left[ \frac{1}{W_n(\xi)} - \frac{1}{W(\xi)} \right] q(\xi) e^{-\xi t} \right| \int_{|a - i\sigma, a + i\sigma|} \frac{|d\xi|}{|\xi + \bar{\lambda}|}. \quad (1.10')$$

Здесь подынтегральная функция удовлетворяет условию

$$\frac{1}{|\xi + \bar{\lambda}|} \leq \frac{M}{1 + |\lambda|}, \quad \xi \in [a - i\sigma, a + i\sigma], \quad \operatorname{Re} \lambda > 0,$$

где  $M$  — постоянная.

Подставляя эту оценку в (1.10'), получим

$$|J_n^{(2)}(\lambda, t)| \leq \frac{2\sigma M}{1 + |\lambda|} \max_{\substack{\xi \in [a - i\sigma, a + i\sigma] \\ |\eta| < M}} \left| \left[ \frac{1}{W_n(\xi)} - \frac{1}{W(\xi)} \right] q(\xi) e^{-\xi t} \right|.$$

Из этой оценки следует наше утверждение для слагаемого  $J_n^{(2)}(\lambda, t)$ .

Чтобы доказать стремление к нулю слагаемого  $J_n^{(4)}(\lambda, t)$  в (1.9), воспользуемся следующим замечанием.

Если функция  $F(\lambda)$  входит в класс  $H^2$  в правой полуплоскости, то функция  $\overline{F(\bar{\lambda})}$  тоже входит в этот класс, причем  $\|F(\lambda)\| = \|\overline{F(\bar{\lambda})}\|$ . Поэтому, согласно (1.4), имеем

$$\|J_n^{(4)}(\lambda, t)\| \leq \left\{ \int_{-\sigma}^{\sigma} \left| \frac{1}{W_n(i\tau)} - \frac{1}{W(i\tau)} \right|^2 |q(i\tau) e^{-i\tau t}|^2 d\tau \right\}^{1/2}.$$

Учитывая (1.1) и то, что  $|W_n(i\tau)| = |W(i\tau)| = 1$  почти везде, из этой оценки получим требуемый результат.

Перейдем к доказательству утверждения с). Так как указанная в утверждении с) ломаная находится на положительном расстоянии от множества точек последовательности  $\{\lambda_k\}$ , то в интегральном представлении (1.8) разности  $G_n(\lambda, t, q) - G(\lambda, t, q)$  контур  $\Gamma$  можем заменить контуром  $\Gamma_1$ , состоящем из отрезков  $[-i\sigma_1, a - i\sigma_1]$ ,  $[a - i\sigma_1, a + i\sigma_1]$ ,  $[a + i\sigma_1, i\sigma_1]$  и  $[i\sigma_1, -i\sigma_1]$ . При этом число  $\sigma_1 < \sigma$  выбираем так, чтобы контур  $\Gamma_1$  также охватывал внутри себя все точки последовательности

$\{\lambda_k\}$ , а стороны  $[-i\alpha_1, \alpha - i\alpha_1]$  и  $[\alpha + i\alpha_1, i\alpha_1]$  находились на положительном расстоянии от множества точек последовательности  $\{\lambda_k\}$ . Таким образом, получаем

$$G_n(\lambda, t, q) - G(\lambda, t, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \left[ \frac{1}{W_n(\xi)} - \frac{1}{W(\xi)} \right] \frac{q(\xi) e^{-\xi t} d\xi}{\xi + \bar{\lambda}}. \quad (1.11)$$

Когда  $\lambda$  изменяется в достаточно малой окрестности ломаной  $\Gamma \setminus (i\alpha, -i\alpha)$ , а  $\xi$  — на контуре  $\Gamma_1$ , функция  $\xi + \bar{\lambda}$  по модулю остается большей некоторого положительного числа. Поэтому из интегрального представления (1.11) усматриваем, что на указанном в утверждении с) множестве разность  $G_n(\lambda, t, q) - G(\lambda, t, q)$  равномерно стремится к нулю. Лемма доказана.

Теперь введём в рассмотрение функцию

$$K(z, t, p, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{p(\lambda) e^{-\lambda z}}{W(\lambda)} G(\lambda, t, q) d\lambda,$$

где переменные  $z$  и  $t$  принимают произвольные комплексные значения, а  $p(\lambda)$  — произвольный алгебраический полином.

Лемма 2. Функция  $K(z, t, p, q)$  обладает свойствами:

а) Последовательность  $K_n(z, t, p, q)$  на любом ограниченном множестве пространства  $C^2$  равномерно сходится к функции  $K(z, t, p, q)$ :

$$K_n(z, t, p, q) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K(z, t, p, q); |z| \leq M, |t| \leq M, \quad (1.12)$$

где

$$K_n(z, t, p, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{p(\lambda) e^{-\lambda z} d\lambda}{W_n(\lambda)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{q(\xi) e^{-\xi t} d\xi}{W_n(\xi) (\xi + \bar{\lambda})} \right\}.$$

Поэтому функция  $K(z, t, p, q)$  непрерывна на всем пространстве  $C^2$  и при любом фиксированном  $t \in C$  функция  $K(z, t, p, q)$ , как функция от  $z$ , целая. Кроме того, имеет место равенство

$$K'_z(z, t, p, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{-\lambda p(\lambda) e^{-\lambda z} d\lambda}{W(\lambda)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{q(\xi) e^{-\xi t} d\xi}{W(\xi) (\xi + \bar{\lambda})} \right\}. \quad (1.13)$$

б) Для всех значений переменных  $z$  и  $t$  выполняется равенство

$$\overline{K(z, t, p, q)} = K(t, z, q, p).$$

с) При любом фиксированном  $z \in C$  сужение функции  $K(z, t, p, q)$ , как функции от  $t$ , на положительную полуось  $t > 0$  входит в класс  $L^2(0, \infty)$ . Более того

$$\int_0^\infty |K_n(z, t, p, q) - K(z, t, p, q)|^2 dt \rightarrow 0, \quad (1.14)$$

причем стремление к нулю на ограниченных множествах имеет место равномерно относительно  $z$ .

д) При любом фиксированном  $z \in C$  сужение функции  $K_z^{(k)}$  ( $z, t, p, q$ ), как функции от  $t$ , на положительную полуось  $t > 0$ , входит в класс  $L^2(0, \infty)$ . Имеет место

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{d^k}{dz^k} K_n(z, t, p, q) - K_z^{(k)}(z, t, p, q) \right|^2 dt \rightarrow 0, \quad (1.15)$$

причем стремление к нулю имеет место равномерно относительно  $z$  на ограниченных множествах.

е) При любом фиксированном  $z \in C$  функция  $\frac{d^n}{dz^n} K(z, t, 1, 1)$ , как функция от  $t$ , целая и имеет место равенство

$$\frac{d^k}{dt^k} \left[ \frac{d^m}{dz^m} K(z, t, 1, 1) \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(-\lambda)^k e^{-\lambda t} d\lambda}{W(\lambda)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(-\xi)^m e^{-\xi t} d\xi}{W(\xi) (\xi + \lambda)} \right\}. \quad (1.16)$$

Доказательство. Чтобы доказать а) составим разность

$$K_n(z, t, p, q) - K(z, t, p, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} p(\lambda) e^{-\lambda t} \left\{ \frac{G_n(\lambda, t, q)}{W_n(\lambda)} - \frac{G(\lambda, t, q)}{W(\lambda)} \right\} d\lambda.$$

Мы должны доказать, что эта разность равномерно на ограниченных множествах сходится к нулю. Для этого достаточно показать, что равномерно относительно  $t$  на ограниченных множествах

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{G_n(i\tau, t, q)}{W_n(i\tau)} - \frac{G(i\tau, t, q)}{W(i\tau)} \right|^2 d\tau \rightarrow 0, \quad |t| \leq M \quad (1.17)$$

и

$$\frac{G_n(\lambda, t, q)}{W_n(\lambda)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{G(\lambda, t, q)}{W(\lambda)}; \quad \lambda \in \Gamma \setminus (i\tau, -i\tau), |t| \leq M. \quad (1.18)$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{G_n(i\tau, t, q)}{W_n(i\tau)} - \frac{G(i\tau, t, q)}{W(i\tau)} \right| &< \left| \frac{G_n(i\tau, t, q)}{W_n(i\tau)} - \frac{G(i\tau, t, q)}{W_n(i\tau)} \right| + \\ &+ \left| \frac{G(i\tau, t, q)}{W_n(i\tau)} - \frac{G(i\tau, t, q)}{W(i\tau)} \right|. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Так как почти везде выполняется равенство  $|W_n(i\tau)| = |W(i\tau)| = 1$ , то из (1.19) следует, что почти везде справедлива оценка

$$\begin{aligned} \left| \frac{G_n(i\tau, t, q)}{W_n(i\tau)} - \frac{G(i\tau, t, q)}{W(i\tau)} \right| &\leq |G_n(i\tau, t, q) - G(i\tau, t, q)| + \\ &+ |G(i\tau, t, q)| |W(i\tau) - W_n(i\tau)|. \end{aligned}$$

Учитывая (1.1) и лемму 1, из этой оценки получим (1.17).

Чтобы установить (1. 18), заметим, что на множестве  $\Gamma \setminus (iz, -iz)$  последовательность  $1/W_n(i)$  равномерно сходится к ограниченной функции  $1/W(i)$ . С другой стороны, согласно лемме 1 последовательность  $G_n(\lambda, t, q)$  на множестве  $\lambda \in \Gamma \setminus (iz, -iz); |t| \leq M$  равномерно сходится к ограниченной функции  $G(\lambda, t, q)$ . Поэтому последовательность произведений  $G_n(\lambda, t, q)/W_n(i)$  на указанном множестве будет равномерно сходиться к произведению предельных функций. Тем самым, (1. 18) установлено.

Докажем равенство (1.13). Так как при любом фиксированном  $t \in \mathbb{C}$  имеем

$$\frac{d}{dz} K_n(z, t, p, q) \rightarrow K'_z(z, t, p, q), \quad z \in \mathbb{C},$$

то для доказательства (1.13) мы должны показать

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{-\lambda p(\lambda) e^{-\lambda z} d\lambda}{W_n(i)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{q(\xi) e^{-\xi t} d\xi}{W_n(\xi)(\xi + \bar{\lambda})} \right\} \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{-\lambda p(\lambda) e^{-\lambda z} d\lambda}{W(\lambda)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{q(\xi) e^{-\xi t} d\xi}{W(\xi)(\xi + \bar{\lambda})} \right\} \end{aligned}$$

или, что то же самое

$$K_n(z, t, p_1, q) \rightarrow K(z, t, p_1, q),$$

где  $p_1(\lambda) = -\lambda p(\lambda)$ . Последнее соотношение следует из (1.12).

Докажем б). Проверим это равенство сначала для функции  $K_n(z, t, p, q)$ . В случае простых корней произведения Бляшке, применяя теорему о вычетах, получим

$$K_n(z, t, p, q) = \sum_{k=-1}^n \frac{p(\lambda_k) e^{-\lambda_k z} q(\bar{\lambda}_m) e^{-\bar{\lambda}_m t}}{W'_n(\lambda_k) W'_n(\bar{\lambda}_m)(\lambda_k + \bar{\lambda}_m)}.$$

Отсюда следует

$$\overline{K_n(z, t, p, q)} = K_n(t, z, q, p). \quad (1.20)$$

Случай кратных корней произведения Бляшке сводится к предыдущему случаю, поскольку функция  $K_n(z, t, p, q)$  непрерывно зависит от корней функции  $W_n(\lambda)$ .

Переходя к пределу в (1.20) при  $n \rightarrow \infty$  и учитывая (1.12), получим требуемый результат.

Докажем с). В силу б) утверждение с) равносильно соотношению

$$\int_0^{\infty} |K_n(t, z, q, p) - K(t, z, q, p)|^2 dt \rightarrow 0. \quad (1.21)$$

Для доказательства этого соотношения представим разность  $K_n - K$  в виде

$$K_n(t, z, q, p) - K(t, z, q, p) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{[i\sigma, -i\sigma]} e^{-\lambda t} \left[ \frac{G_n(\lambda, z, p)}{W_n(\lambda)} - \frac{G(\lambda, z, p)}{W(\lambda)} \right] q(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \setminus (i\sigma, -i\sigma)} = \\ = J_n^{(1)}(t, z) + J_n^{(2)}(t, z). \quad (1.22)$$

Чтобы доказать (1.21) достаточно показать, что слагаемые  $J_n^{(1)}(t, z)$  и  $J_n^{(2)}(t, z)$  в (1.22) входят в класс  $L^2(0, \infty)$  и при  $n \rightarrow \infty$  стремятся к нулю по норме этого пространства равномерно относительно  $z$  на ограниченных множествах.

Слагаемое  $J_n^{(1)}(t, z)$  представляет собой преобразование Фурье функции

$$\varphi_n(\tau, z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{G(i\tau, z, p)}{W(i\tau)} - \frac{G_n(i\tau, z, p)}{W_n(i\tau)} \right] q(i\tau), & \tau \in [-\sigma, \sigma] \\ 0, & \tau \notin [-\sigma, \sigma]. \end{cases}$$

Так как на отрезке  $[-\sigma, \sigma]$  функция  $q(i\tau)$  ограничена, то из (1.17) следует, что при  $n \rightarrow \infty$  последовательность  $\varphi_n(\tau, z)$  стремится к нулю по норме пространства  $L^2(-\infty, \infty)$  равномерно относительно  $z$  на ограниченных множествах. В силу того, что преобразование Фурье сохраняет норму, последовательность  $J_n^{(1)}(t, z)$  будет стремиться к нулю по норме пространства  $L^2(0, \infty)$  равномерно относительно  $z$  на ограниченных множествах.

Обращаясь к слагаемому  $J_n^{(2)}(t, z)$  заметим, что согласно утверждению с) леммы 1 функция

$$\psi_n(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i} \left[ \frac{G_n(\lambda, z, p)}{W_n(\lambda)} - \frac{G(\lambda, z, p)}{W(\lambda)} \right] q(\lambda),$$

как функция от  $\lambda$ , регулярна в некоторой окрестности ломаной  $\Gamma \setminus (i\sigma, -i\sigma)$ , поэтому интегрированием по частям можно представить  $J_n^{(2)}(t, z)$  в виде

$$J_n^{(2)}(t, z) = -\frac{1}{t} \left\{ e^{-\lambda t} \psi_n(\lambda, z) \Big|_{i\sigma}^{i\tau} - \int_{\Gamma \setminus (i\sigma, -i\sigma)} e^{-\lambda t} \frac{d}{d\lambda} \psi_n(\lambda, z) \right\}.$$

Отсюда получаем оценку

$$|J_n^{(2)}(t, z)| \leq \frac{1}{t} (2 + 2a + 2\sigma) \varepsilon_n(z), \quad t > 1, \quad (1.23)$$

где

$$\varepsilon_n(z) = \max_{\lambda \in \Gamma \setminus (i\sigma, -i\sigma)} |\psi_n(\lambda, z)| + \max_{\lambda \in \Gamma \setminus (i\sigma, -i\sigma)} \left| \frac{d}{d\lambda} \psi_n(\lambda, z) \right|. \quad (1.24)$$

Убедимся, что  $\varepsilon_n(z) \rightarrow 0$  равномерно по  $z$  на ограниченных множествах. Действительно, из утверждения с) леммы 1 следует, что при  $n \rightarrow \infty$  последовательность  $\psi_n(\lambda, z)$  стремится к нулю равномерно относительно  $\lambda$  и  $z$ , когда  $\lambda$  изменяется в некоторой окрестности ломаной  $\Gamma \setminus (i\sigma, -i\sigma)$ , а  $z$  — на произвольном ограниченном множестве комплексной плоскости. Поэтому первое слагаемое в (1.24) стремится к

нулю равномерно относительно  $z$  на ограниченных множествах. Функцию  $\frac{d}{d\lambda} \psi_n(\lambda, z)$  можно представить с помощью интегральной формулы Коши

$$\frac{d}{d\lambda} \psi_n(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\psi_n(\xi, z)}{(\xi - \lambda)^2} d\xi, \quad (1.25)$$

где контур  $\gamma$  содержит внутри себя ломаную  $\Gamma \setminus (i\sigma, -i\sigma)$  и целиком лежит в ее указанной окрестности, следовательно, второе слагаемое в (1.24) тоже стремится к нулю равномерно относительно  $z$  на ограниченных множествах.

На отрезке  $[0, 1]$  имеем оценку

$$|j_n^{(2)}(t, z)| \leq (2\alpha + 2\sigma) \varepsilon_n(z), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (1.26)$$

Из (1.23) и (1.26) следует наше утверждение для последовательности  $j_n^{(2)}(t, z)$ .

Утверждения d) и e) следуют из предыдущего.

**Теорема 1.1.** В пространстве  $L^2(0, \infty)$  ортопроектор  $P$  на подпространство  $E$ , порожденное неполной системой (2), представляется в виде

$$(Pf)(x) = \int_0^1 K(x, t) f(t) dt, \quad (1.27)$$

где  $K(x, t) = K(x, t, 1, 1)$ .

**Доказательство.** Равенство (1.27) мы докажем, совершая предельный переход в равенстве (5). Воспользуемся следующим фактом.

Пусть  $\{e_k\}_1^\infty$  — линейно независимая система в гильбертовом пространстве  $H$ .  $E_k$  — линейная оболочка первых  $k$  векторов этой системы  $e_1, e_2, \dots, e_k$ ; а  $E$  — замкнутая линейная оболочка всей системы  $\{e_k\}_1^\infty$ . Тогда для любого элемента  $x \in H$  имеет место равенство

$$P_E x = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{E_k} x, \quad (1.28)$$

где  $P_E x$  — проекция элемента  $x$  на подпространство  $E$ , а  $P_{E_k} x$  — проекция элемента  $x$  на конечномерное подпространство  $E_k$ .

Действительно, обозначим через  $\{\varphi_k\}_1^\infty$  ортогонализацию системы  $\{e_k\}$  методом Шмидта. Тогда  $E_k$  есть линейная оболочка первых  $k$  векторов  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ , а  $E$  — замкнутая линейная оболочка всей системы  $\{\varphi_k\}_1^\infty$ . Имеем

$$P_E x = \sum_{m=1}^{\infty} (x, \varphi_m) \varphi_m = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^k (x, \varphi_m) \varphi_m = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{E_k} x.$$

Отсюда получаем (1.28). Согласно приведённому утверждению для любой функции  $f \in L^2(0, \infty)$  в равенстве (5)  $P_n f$  сходится к  $Pf$  по норме пространства  $L^2(0, \infty)$ . С другой стороны, имеем

$$\left| \int_0^{\infty} K_n(x, t) f(t) dt - \int_0^{\infty} K(x, t) f(t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} |K_n(x, t) - K(x, t)| |f(t)| dt.$$

Применяя неравенство Буняковского, получим

$$\left| \int_0^{\infty} K_n(x, t) f(t) dt - \int_0^{\infty} K(x, t) f(t) dt \right| < \\ < \left\{ \int_0^{\infty} |K_n(x, t) - K(x, t)|^2 dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2}.$$

Согласно утверждению с) леммы 2) отсюда получаем, что для любого  $x \in (0, \infty)$

$$\int_0^{\infty} K(x, t) f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} K_n(x, t) f(t) dt.$$

Таким образом доказано, что, с одной стороны,  $P_n f$  сходится к  $Pf$  по норме пространства  $L^2(0, \infty)$ , а с другой —  $(P_n f)(x)$  поточечно сходится к функции

$$\int_0^{\infty} K(x, t) f(t) dt.$$

Следовательно, предельные функции почти везде совпадают. Тем самым равенство (1.27) доказано.

**Теорема 1.2.** Если последовательность конечных линейных комбинаций функций из неполной системы (2)

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{p_n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}^{(n)} x^s e^{-kx}$$

сходится к функции  $f(x)$  по норме пространства  $L^2(0, \infty)$ , то на ограниченных множествах комплексной плоскости она равномерно сходится к функции

$$f(z) = \int_0^{\infty} K(z, t) f(t) dt, \quad z \in C, \quad (1.29)$$

которая представляет собой целую функцию экспоненциального типа.

**Доказательство.** Согласно (5) имеем

$$P_n(x) = \int_0^{\infty} K_m(x, t) P_n(t) dt, \quad m \geq p_n.$$

В этом равенстве слева и справа фигурируют целые функции, которые почти всюду на  $(0, \infty)$  совпадают, следовательно, они совпадают на всей комплексной плоскости:

$$P_n(z) = \int_0^{\infty} K_n(z, t) P_n(t) dt, \quad z \in C, \quad m \geq p_n.$$

При фиксированном  $n$ , устремив  $m$  в бесконечность, согласно утверждению с) леммы 2 получим

$$P_n(z) = \int_0^{\infty} K(z, t) P_n(t) dt.$$

Составим разность

$$P_n(z) - f(z) = \int_0^{\infty} |K(z, t) [P_n(t) - f(t)]| dt.$$

Применяя неравенство Буняковского, получим

$$|P_n(z) - f(z)| \leq \left\{ \int_0^{\infty} |K(z, t)|^2 dt \right\}^{1/2} \|P_n - f\|. \quad (1.30)$$

Заметим, что из утверждения с) леммы 2 следует, что первый множитель справа в (1.30) ограничен на ограниченных множествах комплексной плоскости. Поэтому из (1.30) следует, что последовательность  $P_n(z)$  на ограниченных множествах плоскости равномерно сходится к функции (1.29).

Для доказательства теоремы нам остается показать, что функция (1.29) представляет собой целую функцию экспоненциального типа.

В интегральном представлении (6) ядра  $K_n(x, t)$  в качестве контура  $\Gamma$  выбираем контур  $\Gamma'$ , целиком лежащий в открытой правой полуплоскости. Тогда применяя теорему Фубини, получим

$$\int_0^{\infty} K_n(z, t) f(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{e^{-\lambda z} d\lambda}{W_n(\lambda)} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\widehat{f}(\xi) d\xi}{W_n(\xi)(\xi + \bar{\lambda})} \right], \quad (1.31)$$

где

$$\widehat{f}(\xi) = \int_0^{\infty} \overline{f(t)} e^{-i\xi t} dt, \quad \operatorname{Re} \xi > 0. \quad (1.32)$$

Согласно теореме Пэли-Винера функция  $\widehat{f}(\xi)$  принадлежит классу  $H^2$  в правой полуплоскости, поэтому почти везде на мнимой оси имеет угловые граничные значения  $\widehat{f}(i\tau) \in L^2(-\infty, \infty)$ . Кроме того, функция

$$F(\lambda) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\widehat{f}(\xi) d\xi}{W(\xi)(\xi + \bar{\lambda})}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0 \quad (1.33)$$

тоже принадлежит классу  $H^2$  в правой полуплоскости (см. [9], стр. 192) и, следовательно, почти везде на мнимой оси имеет угловые граничные зна-

чения  $F(i\tau) \in L^2(-\infty, \infty)$ .

Докажем тождество

$$\int_0^{\infty} K(z, t) f(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\lambda z}}{W(\lambda)} F(\lambda) d\lambda, \quad z \in C, \quad (1.34)$$

где контур  $\Gamma$  тот же самый, что и в интегральном представлении ядра  $K(z, t)$ . (Ниже мы убедимся, что функция  $F(\lambda)$  в точках  $\pm i\sigma$  регулярна). Утверждение теоремы следует из (1.34). Функция

$$F_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\widehat{f}(\xi) d\xi}{W_n(\xi)(\xi + \bar{\lambda})} \quad (1.34')$$

регулярна в замкнутой правой полуплоскости, поэтому тождество (1.31) можно переписать в виде

$$\int_0^{\infty} K_n(z, t) f(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\lambda z}}{W_n(\lambda)} F_n(\lambda) d\lambda, \quad z \in C. \quad (1.35)$$

Согласно лемме 2 при  $n \rightarrow \infty$  интеграл слева в (1.35) стремится к интегралу слева в (1.34), поэтому для доказательства тождества (1.34) мы должны показать, что интеграл справа в (1.35) стремится к интегралу справа в (1.34), а для этого достаточно установить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{F_n(i\tau)}{W_n(i\tau)} - \frac{F(i\tau)}{W(i\tau)} \right|^2 d\tau \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1.36)$$

и равномерно

$$\frac{F_n(\lambda)}{W_n(\lambda)} \rightarrow \frac{F(\lambda)}{W(\lambda)}, \quad \lambda \in \Gamma \setminus (i\sigma, -i\sigma). \quad (1.37)$$

Чтобы доказать (1.36), функцию  $F_n(\lambda)$  представим в виде

$$F_n(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\widehat{f}(\xi) d\xi}{W_n(\xi)(\xi + \bar{\lambda})}. \quad (1.38)$$

Для этого мы воспользуемся следующими свойствами функций класса  $H^2$  в правой полуплоскости (см. [9], стр. 176—178):

I) При всех  $x > 0$  функция  $\widehat{f}_x(y) = \widehat{f}(x + iy)$  лежит в  $L^2(-\infty, \infty)$ .

II) Функция  $\widehat{f}_x(y)$  сходится к функции  $\widehat{f}(iy)$  в  $L^2(-\infty, \infty)$  при  $x \rightarrow 0$ .

III) Функция  $\widehat{f}(\xi)$  стремится равномерно к нулю, когда  $\xi$  стремится к бесконечности внутри любой фиксированной полуплоскости  $\operatorname{Re} \xi > \delta > 0$ .

В интегральном представлении (1.34') функции  $F_n(\lambda)$  в качестве контура  $\Gamma'$  выберем контур, состоящий из отрезка  $[x + ir, x - ir]$  и полуокружности  $\xi = x + re^{i\varphi}$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . При этом  $x$  берем настолько малым и  $r$  настолько большим, чтобы контур  $\Gamma'$  охватывал внутри себя все корни функции  $W_n(\xi)$ . Устремив  $r$  в бесконечность, согласно свойству III) функции  $\hat{f}(\xi)$  в представлении (1.34'), интеграл по полуокружности  $\xi = x + re^{i\varphi}$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , будет стремиться к нулю. В результате получим

$$F_n(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{f(\xi) d\xi}{W_n(\xi)(\xi + \lambda)}.$$

Устремив теперь  $x$  к нулю, учитывая свойство II) функции  $\hat{f}(\xi)$ , получим (1.38).

Приступим к доказательству соотношения (1.36). Для этого заметим, что почти везде выполняется неравенство

$$\left| \frac{F_n(i\tau)}{W_n(i\tau)} - \frac{F(i\tau)}{W(i\tau)} \right| \leq |F_n(i\tau) - F(i\tau)| + |F(i\tau)| |W(i\tau) - W_n(i\tau)|.$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{F_n(i\tau)}{W_n(i\tau)} - \frac{F(i\tau)}{W(i\tau)} \right|^2 d\tau \right\}^{1/2} &\leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |F_n(i\tau) - F(i\tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2} + \\ &+ \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |F(i\tau)|^2 |W(i\tau) - W_n(i\tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Согласно (1.1) второе слагаемое справа стремится к нулю. Учитывая (1.38), разность  $F_n(\lambda) - F(\lambda)$  можно представить в виде

$$F_n(\lambda) - F(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left[ \frac{1}{W(\xi)} - \frac{1}{W_n(\xi)} \right] \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi + \lambda} d\xi.$$

Согласно (1.4) отсюда получим оценку

$$\|F_n - F\|_{L^2} \leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{W(i\tau)} - \frac{1}{W_n(i\tau)} \right|^2 |\hat{f}(i\tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2}. \quad (1.40)$$

Здесь интеграл справа, опять согласно (1.1), стремится к нулю, и, следовательно, первое слагаемое справа в (1.39) тоже стремится к нулю. Тем самым соотношение (1.36) доказано.

Чтобы доказать (1.37), функцию  $F(\lambda)$  представим в виде

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\widehat{f}(\xi) d\xi}{W(\xi)(\xi + \bar{\lambda})}. \quad (1.41)$$

Для этого в интегральном представлении (1.34') функции  $F_n(\lambda)$  в качестве контура  $\Gamma^1$  выберем контур, состоящий из отрезков  $[x - i\varepsilon, a - i\varepsilon]$ ,  $[a - i\varepsilon, a + i\varepsilon]$ ,  $[a + i\varepsilon, x + i\varepsilon]$  и  $[x + i\varepsilon, x - i\varepsilon]$ ,  $x < a$ . При этом числа  $x$  и  $\varepsilon$  выбираем так, чтобы контур  $\Gamma'$  охватывал внутри себя все корни функции  $W_n(\lambda)$  и функция  $\widehat{f}(\xi)$  была непрерывной на отрезках  $[i\varepsilon, a + i\varepsilon]$  и  $[-i\varepsilon, a - i\varepsilon]$ . Устремив  $x$  к нулю, учитывая свойство II) функции  $\widehat{f}(\xi)$ , получим

$$F_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\widehat{f}(\xi) d\xi}{W_n(\xi)(\xi + \bar{\lambda})}. \quad (1.42)$$

В этом равенстве переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , учитывая (1.40) и (1.1), получим (1.41), ибо из  $\|F_n - F\|_{H^1} \rightarrow 0$  следует  $F_n(\lambda) \rightarrow F(\lambda)$ ,  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ .

Так как  $1/W_n(\lambda) \rightarrow 1/W(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Gamma' \setminus (i\varepsilon, -i\varepsilon)$  равномерно, то для доказательства (1.37) достаточно показать,  $F_n(\lambda) \rightarrow F(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Gamma' \setminus (i\varepsilon, -i\varepsilon)$  равномерно. А для этого нужно повторить рассуждения, проведенные при доказательстве утверждения с) леммы 1. Теорема доказана.

Перейдем к экстремальным оценкам для функций, принадлежащих замкнутой линейной оболочке  $E$  неполной системы (2).

Согласно теореме 1.2 функции класса  $E$  аналитически продолжаются на всю комплексную плоскость. Ниже функцию  $f$  и ее аналитическое продолжение будем обозначать одной и той же буквой.

**Теорема 1.3.** *Имеют место равенства:*

$$a) \max_{f \in E} \frac{|f(z)|}{\|f\|} = \sqrt{K(z, z)},$$

где  $z$  — произвольное комплексное число, причем равенство в точке  $z$  достигается для функции  $f_z(t) = \overline{K(z, t)}$ ;

$$b) \max_{f \in E} \frac{\sup_{x < t < \infty} |f(t)|}{\|f\|} = \sqrt{K(x, x)}, \quad -\infty < x < \infty,$$

где равенство достигается для функции  $f_x(t) = \overline{K(x, t)}$ ;

$$c) \max_{f \in E} \frac{|f^{(k)}(z)|}{\|f\|} = \sqrt{\Phi_k(z)}, \quad k=1, 2, \dots; z \in C,$$

где

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda^k e^{-\lambda z}}{W(\lambda)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\xi^k e^{-\bar{\xi} z}}{W(\xi)(\xi + \bar{\lambda})} d\xi \right\}$$

(причем равенство в точке  $z$  достигается для функции  $f_z(t) = \overline{\frac{d^k}{dz^k} K(z, t)}$ );

$$d) \max_{f \in E} \frac{\sup_{x < t < \infty} |f^{(k)}(t)|}{\|f\|} = \sqrt{\Phi_k(x)}, \quad k=1, 2, \dots; \quad -\infty < x < \infty,$$

где максимум достигается для функции  $f_x(t) = \overline{\frac{d^k}{dx^k} K(x, t)}$ .

Доказательство. Согласно теореме 1.2 имеем

$$f(z) = \int_0^{\infty} K(z, t) f(t) dt, \quad z \in C, \quad (1.43)$$

причем, в силу утверждения с) леммы 2, при любом фиксированном  $z$  функция  $\overline{K(z, t)}$ , как функция от  $t$ , принадлежит подпространству  $E$ . Применяя неравенство Буняковского, получим

$$|f(z)| \leq \|K(z, t)\| \cdot \|f\|, \quad (1.44)$$

где при фиксированном  $z$  равенство достигается для функции  $f_z(t) = \overline{K(z, t)}$ . Подставляя эту функцию в (1.43), получим

$$K(\overline{z}, z) = \|K(z, t)\|^2$$

или, что то же самое,  $\|K(z, t)\| = \sqrt{K(\overline{z}, z)}$ .

Вводя полученное значение нормы ядра  $K(z, t)$  в неравенство (1.44), получим утверждение а).

Для доказательства утверждения б) достаточно показать, что функция  $K(x, x)$  монотонно убывает на вещественной оси. В интегральном представлении (6) ядра  $K_n(x, t)$ , подставляя  $t = x$  и дифференцируя по параметру  $x$ , получим

$$\left( K_n(x, x) \right)' = - \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\lambda x}}{W_n(\lambda)} d\lambda \right|^2.$$

Следовательно, при фиксированном  $n$  функция  $K_n(x, x)$  на вещественной оси монотонно убывает. Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , имея в виду лемму 2, получим требуемый результат.

Для доказательства утверждения с) установим равенство

$$f^{(k)}(z) = \int_0^{\infty} \frac{d^k}{dz^k} K(z, t) f(t) dt, \quad (1.45)$$

где  $f$  — произвольная функция из класса  $E$ .

В равенстве (5) слева и справа фигурируют целые функции, которые почти всюду на  $(0, \infty)$  совпадают, следовательно, они совпадают на всей комплексной плоскости:

$$(P_n f)(z) = \int_0^{\bar{z}} K_n(z, t) f(t) dt, \quad z \in C. \quad (1.46)$$

Отсюда получим

$$\frac{d^k}{dz^k} (P_n f)(z) = \int_0^{\bar{z}} \frac{d^k}{dz^k} K_n(z, t) f(t) dt, \quad k=1, 2, \dots \quad (1.47)$$

Докажем, что в этом равенстве можно перейти к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . Согласно (1.28) последовательность  $P_n f$  сходится к функции  $\bar{f}$  по норме пространства  $L^2(0, \infty)$ , в силу теоремы 1.2 она сходится равномерно на ограниченных множествах к целой функции  $\bar{f}(z)$ . Следовательно, в любой точке комплексной плоскости  $z \in C$  производная порядка  $k$  функции  $(P_n f)(z)$  будет сходиться к  $f^{(k)}(z)$ :

$$\frac{d^k}{dz^k} (P_n f)(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^{(k)}(z), \quad z \in C.$$

С другой стороны, согласно утверждению d) леммы 2, при  $n \rightarrow \infty$  функция справа в (1.47) в каждой точке комплексной плоскости будет сходиться к функции справа в (1.45). Поэтому, переходя к пределу в (1.47) при  $n \rightarrow \infty$ , получим (1.45).

Применяя неравенство Буняковского, из (1.45) получим

$$|f^{(k)}(z)| < \left\| \frac{d^k}{dz^k} K(z, t) \right\| \cdot \|f\|. \quad (1.48)$$

С другой стороны, функция  $\frac{d^k}{dz^k} K(z, t)$ , как функция от  $t$ , принадлежит подпространству  $E$ . Действительно, согласно (1.20) имеем

$$\frac{d^k}{dz^k} K_n(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\xi t} d\xi}{W_n(\xi)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(-\lambda)^k e^{-\lambda z} d\lambda}{W_n(\lambda)(\lambda + \xi)} \right\}. \quad (1.49)$$

Так как при фиксированном  $z$  функция

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(-\lambda)^k e^{-\lambda z} d\lambda}{W_n(\lambda)(\lambda + \xi)},$$

как функция от  $\xi$  регулярна в правой полуплоскости, то применяя теорему о вычетах на внешний интеграл в (1.49), мы убедимся что функция

$\frac{d^k}{dz^k} K_n(z, t)$  принадлежит подпространству  $E_n$ . Тогда наше утверждение следует из утверждения с) леммы 2.

Подставляя в (1.45) вместо функции  $f$  функцию  $\frac{d^k}{dz^k} K(z, t)$ , получим

$$\frac{d^k}{dt^k} \left[ \frac{d^k}{dz^k} K(z, t) \right] = \left\| \frac{d^k}{dz^k} K(z, t) \right\|^2.$$

Согласно утверждению е) леммы 2 отсюда получим

$$\left| \frac{d^k}{dz^k} K(z, t) \right| = \sqrt{\Phi_k(z)}.$$

Вводя полученное значение нормы в (1.48), приходим к утверждению с).

Для доказательства утверждения d) достаточно показать, что функция  $\Phi_k(x)$  монотонно убывает на вещественной оси. Для этого рассмотрим функцию

$$\Phi_{kn}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda^k e^{-\lambda x} d\lambda}{W_n(\lambda)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\xi^k e^{-\xi x} d\xi}{W_n(\xi)(\xi + \bar{\lambda})} \right\}. \quad (1.50)$$

Имеем

$$\Phi'_{kn}(x) = - \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda^k e^{-\lambda x} d\lambda}{W_n(\lambda)} \right|^2.$$

Следовательно, функция  $\Phi_{kn}(x)$  монотонно убывает. Согласно утверждению а) леммы 2  $\Phi_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{kn}(x)$ . Следовательно, функция  $\Phi_k(x)$  тоже монотонно убывает. Теорема доказана.

## § 2. Неполная система экспонент с неограниченной последовательностью показателей

В этом параграфе изучается неполная система (2) при дополнительном условии

$$\lim_{|\lambda_k| \rightarrow \infty} |\arg \lambda_k| = \varphi_0 < \frac{\pi}{2}. \quad (2.1)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$G(\lambda, t, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{q(\xi) e^{-\xi t} d\xi}{W(\xi)(\xi + \bar{\lambda})}, \quad (2.2)$$

где  $q(\xi)$  — алгебраический полином. Контур  $\Gamma$  идет из бесконечности по лучу  $\arg \xi = \varphi$ ;  $\varphi_0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$  до точки  $a + i\sigma$ , затем по прямой  $\operatorname{Im} \xi = \sigma$ ;  $\sigma > 0$  до точки  $i\sigma$ , затем по мнимой оси до точки  $-i\sigma$ , затем по прямой  $\operatorname{Im} \xi = -i\sigma$  до точки  $a - i\sigma$  и наконец по лучу  $\arg \xi = -\varphi$  (опять в бесконечность). Числа  $a$  и  $\sigma$  выбраны так, чтобы контур  $\Gamma$  охватывал внутри себя все точки последовательности  $\{\lambda_k\}$ , отрезки контура  $\gamma$ , лежащие на прямых  $\operatorname{Im} \xi = \pm i\sigma$ , находились на положительном расстоянии от множества точек последовательности  $\{\lambda_k\}$  и на прямой  $\operatorname{Re} \xi = a$  не было точек из последовательности  $\{\lambda_k\}$ .

Для изучения функции  $G(\lambda, t, q)$  нам понадобится следующая

**Лемма 2.1.** Для любого компактного множества  $K$ , лежащего в угле  $|\arg \xi| < \frac{\pi}{2} - \varphi$  и для любого полинома  $q(\xi)$  существует  $\delta > 0$  такое, что для больших по модулю  $\xi$  на контуре  $\gamma$  выполняется неравенство

$$\left| \frac{q(\xi) e^{-i\xi}}{W(\xi)} \right| \leq e^{-\delta r}; \quad \xi \in \gamma, \quad t \in K, \quad \xi = re^{i\varphi}, \quad r > r_0. \quad (2.3)$$

Доказательство легко следует из леммы 6 работы [10].

**Лемма 2.2.** Функция  $G(\lambda, t, q)$  обладает свойствами

- а) При любом значении параметра  $t$ , удовлетворяющего условию  $|\arg t| < \frac{\pi}{2} - \varphi$ , функция  $G(\lambda, t, q)$  входит в класс  $H^2$  в правой полуплоскости.
- б) Имеют место предельные соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_n(i\tau, t, q) - G(i\tau, t, q)|^2 d\tau \rightarrow 0, \quad (2.7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{G_n(i\tau, t, q)}{W_n(i\tau)} - \frac{G(i\tau, t, q)}{W(i\tau)} \right|^2 d\tau \rightarrow 0, \quad (2.7')$$

где

$$G_n(\lambda, t, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{q(\xi) e^{-\xi t}}{W_n(\xi)(\xi + \lambda)} d\xi, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0, \quad (2.8)$$

$\Gamma_n$  — замкнутый контур, лежащий в правой полуплоскости и охватывающий все корни функции  $W_n(\xi)$ . При этом на компактных множествах угла  $|\arg t| < \frac{\pi}{2} - \varphi$  соотношения (2.7) и (2.7') имеют место равномерно относительно  $t$ .

с) Равномерно относительно  $\lambda$  и  $t$ , когда  $\lambda$  изменяется в некоторой окрестности множества  $\gamma \setminus (i\sigma, -i\sigma)$ , а  $t$  — на произвольном компактном множестве  $K$ , лежащем в угле  $|\arg t| < \frac{\pi}{2} - \varphi$ , имеет место

$$G_n(\lambda, t, q) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(\lambda, t, q), \quad \lambda \in \gamma \setminus (i\sigma, -i\sigma), \quad t \in K.$$

**Доказательство.** Для доказательства утверждения а) разобьем интеграл, распространенный по всему контуру  $\gamma$ , на сумму интегралов, распространенных по отдельным частям контура  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5$ , где  $\gamma_1 = [a + i\sigma, i\sigma]$ ,  $\gamma_2 = [i\sigma, -i\sigma]$ ,  $\gamma_3 = [-i\sigma, a - i\sigma]$ ,  $\gamma_4 = [a - i\sigma, \infty e^{-i\varphi}]$  и  $\gamma_5 = (\infty e^{i\varphi}, a + i\sigma]$ .

Принадлежность интегралов, распространенных по частям  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$  контура  $\gamma$ , пространству  $H^2$  в правой полуплоскости было доказано в лемме 1. Докажем, что интегралы, распространенные по частям  $\gamma_4$  и  $\gamma_5$  контура  $\gamma$ , тоже принадлежат пространству  $H^2$  в правой полуплоскости. Так как принадлежность обоих интегралов пространству  $H^2$  доказывается одинаково, то мы проведем рассуждения только для второго из них; функция

$$G^*(\lambda, t, q) = \int_{\gamma_1} \frac{q(\xi) e^{-\xi t} d\xi}{W(\xi)(\xi + \lambda)} \quad (2.9)$$

принадлежит пространству  $H^2$  в правой полуплоскости. Согласно лемме 2.1 интеграл (2.9) сходится равномерно относительно  $\lambda$  в правой полуплоскости, следовательно, функция  $G^*(\lambda, t, q)$  регулярна в правой полуплоскости. Докажем, что она входит в класс  $H^2$ . Имеем

$$|G^*(\lambda, t, q)| \leq \sup_{\xi \in \gamma_1} \frac{1}{|\lambda + \xi|} \int_{\gamma_1} \left| \frac{q(\xi) e^{-\xi t}}{W(\xi)} \right| |d\xi|. \quad (2.10)$$

Воспользуемся оценкой

$$\frac{|\eta|}{|\lambda + \xi|} \leq M, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0, \quad \xi \in \gamma_1, \quad (2.11)$$

где  $M$  — постоянная. Оценка (2.11) доказывается от противного. Пусть  $\lambda_n / |\lambda_n + \xi_n| \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$ ,  $\xi_n \in \gamma_1$ , или, что то же самое,  $1 / \left| 1 + \frac{\xi_n}{\lambda_n} \right| \rightarrow \infty$ . Это равносильно условию

$$\xi_n / \lambda_n \rightarrow -1, \quad (2.12)$$

где  $\xi_n = r_n e^{i\varphi}$ ,  $\lambda_n = \rho_n e^{i\psi_n}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \psi_n < \frac{\pi}{2}$ . Соотношение (2.12) перепишем в виде

$$\frac{r_n}{\rho_n} e^{i(\varphi - \psi_n)} \rightarrow -1. \quad (2.13)$$

Так как  $-\frac{\pi}{2} < \varphi - \psi_n < \varphi + \frac{\pi}{2}$ , то (2.13) невозможно. Складывая неравенство (2.11) с очевидным неравенством

$$\frac{1}{|\lambda + \xi|} \leq M_1, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0, \quad \xi \in \gamma_1,$$

получим

$$\frac{1}{|\lambda + \xi|} < \frac{M_0}{1 + |\lambda|}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0, \quad \xi \in \gamma_1, \quad (2.14)$$

где  $M_0$  и  $M$  постоянные.

Принадлежность функции  $G^*(\lambda, t, q)$  пространству  $H^2$  следует из (2.10), (2.14) и (2.3).

Для доказательства утверждения б) функцию  $G_n(\lambda, t, q)$  представим в виде

$$G_n(\lambda, t, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{q(\xi) e^{-\xi t} d\xi}{W_n(\xi)(\xi + \lambda)}. \quad (2.15)$$

Для этого в интегральном представлении (2.8) в качестве контура

$\Gamma_n$  берем контур  $\gamma_r$ ,  $r > \sqrt{a^2 + \sigma^2}$ , состоящий из части контура  $\gamma$ , лежащей в круге  $|\xi| < r$ , и из дуги окружности  $c_r: |\xi| = r$ ,  $-\varphi \leq \arg \xi \leq \varphi$  (числа  $a$ ,  $\sigma$  и  $\varphi$  фигурируют в описании контура  $\gamma$ ). Затем устремим  $r$  к бесконечности. Тогда интеграл, распространенный по дуге  $c_r$ , будет стремиться к нулю и мы получим (2.15).

Теперь составим разность

$$G_n(\lambda, t, q) - G(\lambda, t, q) = \sum_{k=1}^5 \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \left[ \frac{1}{W_n(\xi)} - \frac{1}{W(\xi)} \right] \frac{q(\xi) e^{-\xi t} d\xi}{\xi + \bar{\lambda}} = \\ = \sum_{k=1}^5 J_n^{(k)}(\lambda, t).$$

Со слагаемыми  $J_n^{(1)}(\lambda, t)$ ,  $J_n^{(2)}(\lambda, t)$  и  $J_n^{(3)}(\lambda, t)$  поступаем так, как при доказательстве леммы 1. Нам остается доказать, что последние слагаемые стремятся к нулю по норме пространства  $H^2$ . Так как доказательство для обоих слагаемых одинаково, то мы проведем рассуждения только для последнего из них. Имеем

$$|J_n^{(5)}(\lambda, t)| \leq \sup_{\xi \in \gamma_5} \frac{1}{|\xi + \bar{\lambda}|} \int_{\gamma_5} \left| \frac{1}{W_n(\xi)} - \frac{1}{W(\xi)} \right| |q(\xi) e^{-\xi t}| |d\xi|. \quad (2.16)$$

Так как на ограниченных частях луча  $\gamma_5$ , функции  $1/W_n(\xi)$  равномерно сходятся к  $1/W(\xi)$  и

$$|1/W_n(\xi)| \leq |1/W(\xi)|, \quad \xi \in \gamma_5,$$

то требуемый результат следует из (2.16), (2.14) и (2.3).

Для доказательства утверждения с) представим разность  $G_n(\lambda, t, q) - G(\lambda, t, q)$  в виде суммы

$$G_n(\lambda, t, q) - G(\lambda, t, q) = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \left[ \frac{1}{W_n(\xi)} - \frac{1}{W(\xi)} \right] \frac{q(\xi) e^{-\xi t} d\xi}{\xi + \bar{\lambda}}, \quad (2.17)$$

где  $\Gamma_1$  — контур, фигурирующий в (1.11), а  $\Gamma_2$  — контур, идущий из бесконечности по лучу  $\arg \xi = \varphi$  до точки  $a + i\sigma$ , затем по прямой  $\operatorname{Re} \xi = a$  до точки  $a - i\sigma$ , и затем по лучу  $\arg \xi = -\varphi$  опять в бесконечность.

С первым интегралом в (2.17) поступаем как с (1.11), а для второго слагаемого имеем

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \left[ \frac{1}{W_n(\xi)} - \frac{1}{W(\xi)} \right] \frac{q(\xi) e^{-\xi t} d\xi}{\xi + \bar{\lambda}} \right| \leq \\ \leq \sup_{\xi \in \Gamma_2} \frac{1}{|\xi + \bar{\lambda}|} \int_{\Gamma_2} \left| \frac{1}{W_n(\xi)} - \frac{1}{W(\xi)} \right| |q(\xi) e^{-\xi t}| |d\xi|. \quad (2.18)$$

Так как при  $\xi \in \Gamma_2$ ,  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ , функция  $1/|\xi + \bar{\lambda}|$  ограничена, и на ограниченных частях контура  $\Gamma_2$  последовательность  $1/W_n(\xi)$  равномерно сходится к функции  $1/W(\xi)$ , то из (2.18) и (2.3) следует, что второе слагаемое в (2.17) равномерно на указанном в утверждении с) мно-

жестве стремится к нулю. Лемма доказана.

Теперь введем в рассмотрение функцию

$$K(z, t, p, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{p(\lambda) e^{-\lambda z}}{W(\lambda)} G(\lambda, t, q) d\lambda, \quad (2.19)$$

где  $\gamma$  — тот же контур, что и в (2.2);  $p(\lambda)$  — произвольный алгебраический полином.

**Лемма 2.3.** Функция  $K(z, t, p, q)$  обладает свойствами, приведенными в лемме 2.

а) Последовательность функций

$$K_n(z, t, p, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{p(\lambda) e^{-\lambda z}}{W_n(\lambda)} d\lambda \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{q(\xi) e^{-\xi t}}{W_n(\xi) (\xi + \bar{\lambda})} d\xi \right\} \quad (2.20)$$

(контур  $\Gamma_n$  лежит в правой полуплоскости и охватывает все корни функции  $W_n(\lambda)$ ), на декартовом произведении  $K \times K$  равномерно сходится к функции  $K(z, t, p, q)$ , где  $K$  — произвольное компактное множество из угла  $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varphi$  ( $\varphi$  участвует в описании контура  $\gamma$ ). Кроме того, в указанном угле имеет место равенство

$$K'_z(z, t, p, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{-\lambda p(\lambda) e^{-\lambda z}}{W(\lambda)} d\lambda \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{q(\xi) e^{-\xi t}}{W(\xi) (\xi + \bar{\lambda})} d\xi \right\}. \quad (2.21)$$

Утверждения б), с), d), e) формулируются аналогичным образом.

**Доказательство.** Для доказательства утверждения а) функцию  $K_n(z, t, p, q)$  представим в виде

$$K_n(z, t, p, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{p(\lambda) e^{-\lambda z}}{W_n(\lambda)} G_n(\lambda, t, q) d\lambda, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varphi. \quad (2.22)$$

Для этого в интегральном представлении (2.20) в качестве контура интегрирования  $\Gamma_n$  во внешнем интеграле берем контур  $\gamma_r$ ,  $r > \sqrt{a^2 + \varepsilon^2}$ , состоящий из части контура  $\gamma$ , лежащей в круге  $|\lambda| < r$ , и из дуги окружности  $c_r: |\lambda| = r$ ,  $-\varphi \leq \arg \lambda \leq \varphi$  (числа  $a$ ,  $\varepsilon$  и  $\varphi$  фигурируют в описании контура  $\gamma$ ). Затем устремим  $r$  к бесконечности.

Так как при фиксированном  $t$  функция  $G_n(\lambda, t, q)$  представляет собой рациональную функцию с полюсами в точках  $(-\bar{\lambda}_k)_{k=1}^n$  (см. (2.8)), то на дуге  $c_r$  будем иметь оценку

$$\left| \frac{p(\lambda) e^{-\lambda z}}{W_n(\lambda)} G_n(\lambda, t, q) \right| < e^{-\delta r}; \quad r = |\lambda| > r_0, \quad \delta > 0, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Поэтому при  $r \rightarrow \infty$  интеграл по дуге  $c_r$  будет стремиться к нулю, и в пределе получим (2.22).

Теперь составим разность

$$K_n(z, t, p, q) - K(z, t, p, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} p(\lambda) e^{-\lambda z} \left[ \frac{G_n(\lambda, t, q)}{W_n(\lambda)} - \frac{G(\lambda, t, q)}{W(\lambda)} \right] d\lambda. \quad (2.23)$$

Мы должны доказать, что эта разность стремится к нулю. Для этого контур  $\gamma$  разобьем на две части  $\gamma = \gamma_r^{(1)} + \gamma_r^{(2)}$ , где  $\gamma_r^{(1)}$  — часть контура  $\gamma$ , лежащая внутри круга  $|\lambda| < r$ , а  $\gamma_r^{(2)}$  — часть контура  $\gamma$ , лежащая вне круга  $|\lambda| < r$ ,  $r > \sqrt{a^2 + \sigma^2}$ , и интеграл (2.23) представим в виде суммы

$$K_n(z, t, p, q) - K(z, t, p, q) = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r^{(k)}} p(\lambda) e^{-\lambda z} \left[ \frac{G_n(\lambda, t, q)}{W_n(\lambda)} - \frac{G(\lambda, t, q)}{W(\lambda)} \right] d\lambda. \quad (2.24)$$

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве утверждения (1.12), убедимся, что при  $n \rightarrow \infty$  интеграл в (2.24) по контуру  $\gamma_r^{(1)}$  стремится к нулю равномерно на декартовом произведении  $K \times K$ . Нам остается доказать, что при  $r \rightarrow \infty$  интеграл в (2.24) по контуру  $\gamma_r^{(2)}$  стремится к нулю равномерно на декартовом произведении  $K \times K$ . Для этого заметим, что из утверждения с) леммы 2.2 следуют оценки

$$|G_n(\lambda, t, q)| \leq M; |G(\lambda, t, q)| \leq M; \lambda \in \gamma_r^{(2)}, t \in K; n = 1, 2, \dots,$$

где постоянная  $M$  не зависит от  $r$ . Поэтому имеем

$$\left| \int_{\gamma_r^{(2)}} p(\lambda) e^{-\lambda z} \left[ \frac{G_n(\lambda, t, q)}{W_n(\lambda)} - \frac{G(\lambda, t, q)}{W(\lambda)} \right] d\lambda \right| \leq 2M \int_{\gamma_r^{(2)}} \left| \frac{p(\lambda) e^{-\lambda z}}{W(\lambda)} \right| |d\lambda|.$$

Применяя лемму 2.1, из этой оценки получим требуемый результат.

Доказательства равенства (2.21) и утверждения б) идентичны доказательствам соответствующих утверждений леммы 2. Докажем утверждение с).

В силу б), утверждение с) равносильно соотношению

$$\int_0^\infty |K_n(t, z, 1, p) - K(t, z, 1, p)|^2 dt \rightarrow 0. \quad (2.25)$$

Для доказательства (2.25) представим функцию  $K_n(t, z, 1, p)$  в виде

$$K_n(t, z, 1, p) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \frac{G_n(i\tau, z, p)}{W_n(i\tau)} e^{-t\tau} d\tau, t > 0, \quad (2.26)$$

где  $\lim$  означает предел в пространстве  $L^2(-\infty, \infty)$ .

Для этого заметим, что при фиксированном  $z$  функция  $G_n(\lambda, z, p)$ , как функция от  $\lambda$ , представляет собой рациональную функцию с полюсами в точках  $\{-\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^n$  (см. (2.8)), причем  $G_n(\lambda, z, p) \rightarrow 0$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Поэтому в интегральном представлении (2.20) функции  $K_n(t, z, 1, p)$  во внешнем интеграле в качестве контура интегрирования  $\Gamma_n$  мы можем взять контур  $\gamma_r$ , состоящий из отрезка мнимой оси  $[-ir, ir]$  и полуокружности  $c_r$ :  $|\xi| = r$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \arg \xi \leq \frac{\pi}{2}$ , обходящийся в положительном направлении, и затем применить лемму Жордана при  $r \rightarrow \infty$ . Тогда интеграл по полуокружности  $c_r$  будет стремиться к нулю и в результате получим

$$K_n(t, z, 1, p) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{G_n(i\tau, z, p)}{W_n(i\tau)} e^{-i\tau t} d\tau, \quad t > 0. \quad (2.27)$$

С другой стороны, функция

$$G_n(i\tau, z, p) / W_n(i\tau)$$

как функция от  $\tau$  входит в класс  $L^2(-\infty, \infty)$ , поэтому существует предел в (2.26) и совпадает с пределом в (2.27).

Для завершения доказательства (2.25) мы воспользуемся тем, что преобразование Фурье сохраняет норму в пространстве  $L^2(-\infty, \infty)$ . Поэтому из (2.7') и (2.26) следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left| K_n(t, z, 1, p) - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \frac{G(i\tau, z, p)}{W(i\tau)} e^{-i\tau t} d\tau \right| dt = 0, \quad (2.28)$$

причем соотношение (2.28) имеет место равномерно относительно  $z$  на компактных множествах из угла  $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varphi$ .

С другой стороны, согласно а) последовательность  $K_n(t, z, 1, p)$  поточечно сходится к функции  $K(t, z, 1, p)$ . Поэтому (2.28) и (2.25) равносильны.

Доказательства остальных утверждений леммы идентичны доказательствам соответствующих утверждений леммы 1.2.

Опираясь на доказанные леммы, как и в первом параграфе получаем аналогичные теоремы. Например, аналог теоремы 1.2 формулируется так.

**Теорема 2.2.** Если последовательность конечных линейных комбинаций функций из неполной системы (2)

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{p_n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}^{(n)} x^s e^{-\lambda_k x}$$

сходится к функции  $f$  по норме пространства  $L^2(0, \infty)$ , то на компактных множествах угла  $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0$  она сходится равномерно к функции

$$f(z) = \int_0^{\infty} K(z, t) f(t) dt, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0.$$

Ереванский государственный  
университет

Поступила 26. XII. 1984

Վ. Խ. ՄՈՒՍՈՅԱՆ. Էֆսպանենների ու լրիվ սխառնով մատակցվող ֆունկցիաների անալիտիկ շարունակությունը և էֆսպանով համակարգումները (ամփոփում)

Դիտարկվում է  $L^2(0, \infty)$ -ում ու լրիվ էքսպոնենտների սխառնը՝

$$\{e^{-\lambda_k x}, x e^{-\lambda_k x}, \dots, x^{m_k-1} e^{-\lambda_k x}\}, \quad \operatorname{Re} \lambda_k > 0.$$

Ենթադրելով, որ ցուցիչների  $\{\lambda_k\}$  հաջորդականությունը, բացի ու լրիվության պայմանից, բավարարում է հետևյալ երկու պայմաններից մեկին

1)  $\{\lambda_k\}$  հաջորդականությունը սահմանափակ է,

2)  $\{\lambda_k\}$  հաջորդականությունը անսահմանափակ է և բավարարում է

$$\overline{\lim}_{|\lambda_k| \rightarrow \infty} |\arg \lambda_k| = \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$$

սլայմանին, ապացուցվում է, որ նշված ոչ լրիվ սխառմի ֆունկցիաների վերջավոր գծային կոմբինացիաներով մոտարկվող ֆունկցիան 1) սլայմանի դեպքում անալիտիկ շարունակվում է ամբողջ կոմպլեքս հարթության վրա, իսկ 2) սլայմանի դեպքում՝  $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0$  անկյան մեջ:

Մոտարկվող ֆունկցիաների անալիտիկ շարունակությունների համար ապացուցվում են լրստրեմալ գնահատականներ:

V. KCH. MUSOYAN. *Analytic continuation and extremal properties of functions approximable by a non-complete system of exponential functions (summary)*

We consider the non-complete system of functions

$$\{e^{-i\lambda_k x}, x e^{-i\lambda_k x}, \dots, x^{m_k-1} e^{-i\lambda_k x}\}, \operatorname{Re} \lambda_k > 0,$$

in the space  $L^2(0, \infty)$ .

Supposing that the sequence of exponents  $\{\lambda_k\}$  satisfy one of the following conditions

- 1) the sequence  $\{\lambda_k\}$  is bounded,
- 2) the sequence  $\{\lambda_k\}$  is unbounded and satisfy as the condition

$$\overline{\lim}_{|\lambda_k| \rightarrow \infty} |\arg \lambda_k| = \varphi_0 < \frac{\pi}{2},$$

We prove that the functions approximable by finite linear combinations of functions of the mentioned non-complete system are analytic continuable in case (1) on

the whole complex plane and in case (2) in the angle  $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0$ .

Extremal estimates for the analytic continuations of the approximable functions is given.

# ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Clarkson and P. Erdos, Approximation by polynomials, Duke Math. J., 10, 1943, 5—11
2. L. Schwartz, Etude des sommes d'exponentielles, 1-ere ed., Paris, Hermann, 1943, 2—eme ed., Strasbourg, 1959.
3. А. Ф. Леонтьев, Об одной последовательности полиномов, ДАН СССР, 72, № 4, 1950, 621—624.
4. М. М. Джрбашян, О пополнении и замыкании неполной системы функций  $\{e^{-i\lambda_k x} x^{s_k-1}\}_1^\infty$ , ДАН СССР, 141, № 3, 1961, 539—542.
5. В. Х. Мусоян, Об аналитическом продолжении функций, аппроксимируемых полиномами Дирихле, ДАН Арм.ССР, XLII, № 2, 1966, 73—76.
6. W. A. J. Luxemburg and J. Korevaar, Entire functions and Muntz—Szász type approximations, Transactions, ..., June, 1971, 1, 23—37.
7. М. М. Джрбашян, Характеристика замкнутых линейных оболочек двух семейств неполных систем аналитических функций, Мат. сб., 114 (156), № 1, 1981, 3—84.
8. В. Х. Мусоян, Экстремальные свойства полиномов Дирихле, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVIII, № 4, 1983, 253—270.
9. К. Гофман, Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963.
10. В. Х. Мусоян, О системах Дирихле на произвольных множествах, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», IX, № 2, 1974, 121—134.

УДК 517.53

И. О. ХАЧАТРЯН

# КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ, СВЯЗАННЫЕ С ВЕСОВЫМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Для произвольного  $p$  ( $1 \leq p < +\infty$ ) обозначим через  $\Delta(p)$  и  $\Delta^*(p)$  взаимно дополнительные угловые области

$$\Delta(p) = \left\{ z: |\arg z| < \frac{\pi}{2p}, 0 < |z| < +\infty \right\},$$

$$\Delta^*(p) = \left\{ z: \frac{\pi}{2p} < |\arg z| \leq \pi, 0 < |z| < +\infty \right\},$$

а через  $L_p$  — общую границу этих областей.

Пусть на  $L_p$  определена вещественная измеримая функция  $w(t)$ , удовлетворяющая условиям

$$w(t) \geq 1, \lim_{|t| \rightarrow +\infty} |t|^n w^{-1}(t) = 0, t \in L_p, n = 0, 1, \dots \quad (1)$$

Обозначим через  $C_w(L_p)$  множество непрерывных на  $L_p$  функций  $f(t)$ , для которых

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{w(t)} = 0.$$

Если норму элемента  $f \in C_w(L_p)$  определить равенством

$$\|f\| = \sup_{t \in L_p} \frac{|f(t)|}{w(t)},$$

то  $C_w(L_p)$  будет нормированным пространством. Из (1) следует что полиномы входят в  $C_w(L_p)$ . Аналогично классической проблеме С. Н. Бернштейна [1, 2] для случая вещественной оси, в ряде работ [3, 4, 5] ставился вопрос о нахождении необходимого и достаточного условия, накладываемого на функцию  $w(t)$ , при котором полиномы составляют всюду плотное множество в  $C_w(L_p)$ . Приведем некоторые результаты, полученные в этом направлении.

**Теорема** (А. Л. Шагинян, М. М. Джрбашян) [3, 4]. Если  $w(t) = w(|t|)$  — нормально возрастающая функция, то для замкнутости полиномов в  $C_w(L_p)$  необходимо и достаточно, чтобы расходился интеграл

$$\int_{L_p} \frac{\ln w(t)}{1 + |t|^{1+p}} |dt| = +\infty.$$

Обозначим через  $\mathfrak{M}_w$  множество полиномов  $p(z)$ , удовлетворяющих условию

$$\left\| \frac{p(t)}{t+1} \right\| \leq 1,$$

а через  $\tilde{w}(z) = \sup_{p \in \mathfrak{M}} |p(z)|$ .

**Теорема** (С. Н. Мергелян) [5]. Для замкнутости системы полиномов в  $C_{\infty}(L_p)$  необходимо и достаточно, чтобы

$$\tilde{w}(z) \equiv +\infty, \quad z \in L_p. \quad (2)$$

Автором [6] указан интегральный критерий замкнутости полиномов в  $C_{\infty}(L_0)$ .

**Теорема А.** Для замкнутости системы полиномов в  $C_{\infty}(L_p)$  необходимо и достаточно, чтобы расходилась интеграл

$$\int_{L_p} \frac{\ln \tilde{w}(t)}{1 + |t|^{1+p}} |dt|.$$

В этой же работе дано полное описание замыкания системы  $\{t^n\}$  в случае, когда она не замкнута во всем  $C_{\infty}(L_p)$ . В частности доказана

**Теорема В.** Пусть система  $\{t^n\}$  не замкнута в  $C_{\infty}(L_p)$ . Тогда любая функция  $f(t)$ , принадлежащая замыканию этой системы, обладает свойствами

- Она голоморфна (голоморфно продолжается) в области  $\Delta(\rho)$  и  $\ln |f(z)|$  имеет положительную гармоническую мажоранту в  $\Delta(\rho)$ ;
- $\ln |f(x)| = o(x^p)$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

Б. Я. Левиным была установлена связь между замкнутостью системы полиномов и целых функций в весовых пространствах непрерывных на вещественной оси функций и различного рода квазианалитичностью некоторых классов бесконечно дифференцируемых функций. Цель настоящей работы — установить аналогичную связь в рассматриваемом случае.

Рассмотрим множество функций

$$f(u) = F[E_p(-ut; \mu)], \quad (3)$$

где  $F$  — произвольный линейный функционал в  $C_{\infty}(L_p)$ , а  $E_p(z; \mu)$  — функция типа Миттаг—Лефлера, которая определяется разложением

$$E_p(z; \mu) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma\left(\mu + \frac{n}{p}\right)}, \quad (4)$$

Из асимптотики функции типа Миттаг—Лефлера [7] (стр. 133):

$$E_p(z; \mu) = p z^{p(\mu-1)} e^{zp} + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad |\arg z| \leq \alpha,$$

$$E_p(z; \mu) = O\left(\frac{1}{z}\right), \quad \alpha \leq |\arg z| \leq \pi,$$

где  $\alpha$  — любое вещественное число, удовлетворяющее условию

$$\frac{\pi}{2\rho} < \alpha < \min\left(\pi, \frac{\pi}{\rho}\right),$$

следует, что при  $\rho > 1$  (этим случаем мы и ограничимся, т. к. случай  $\rho = 1$  детально исследован Б. Я. Левиным)  $f(u)$  определена на объединении полуоси  $]-\infty, 0]$ , где она бесконечно дифференцируема, и угловой области  $|\arg u| < \pi(1 - 1/\rho)$ , где она голоморфна.

Если  $F$  будет пробегать сопряженное пространство, то по формуле (3) определится некоторое множество функций.

Обозначим через  $K_1(w)$  класс функций

$$f(u) = F[E_\rho(-ut; \mu)], \quad u \in ]-\infty, 0], \quad (3')$$

определенных и бесконечно дифференцируемых на полуоси  $]-\infty, 0]$ , а через  $K_2(w)$  — класс функций

$$f(u) = F[E_\rho(-ut; \mu)], \quad |\arg u| < \pi(1 - 1/\rho), \quad (3'')$$

голоморфных в области  $\Delta(\alpha)$ ,  $\alpha = \frac{\rho}{2(\rho - 1)}$ .

Класс  $K_i(w)$  назовем квазианалитическим, если из  $f \in K_i(w)$ ,  $g \in K_i(w)$ ,  $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , следует, что  $f(u) \equiv g(u)$  в соответствующей области.

**Теорема 1.** Для того, чтобы система степеней  $\{t^n\}$  была замкнута в  $C_w(L_\rho)$ , необходимо и достаточно, чтобы класс  $K_1(w)$  был квазианалитическим.

**Доказательство. Необходимость.** Предположим, что система  $\{t^n\}$  замкнута в  $C_w(L_\rho)$ , и пусть  $f_1(u)$  и  $f_2(u)$  — две функции из  $K_1(w)$ , для которых  $f_1^{(n)}(0) = f_2^{(n)}(0)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Рассмотрим функцию  $f_0(u) = f_1(u) - f_2(u)$ . Из линейности класса  $K_1(w)$  следует, что  $f_0(u) \in K_1(w)$ , т. е.

$$f_0(u) = F_0[E_\rho(-ut; \mu)].$$

С одной стороны имеем  $f_0^{(n)}(0) = 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . С другой стороны, легко видеть, что

$$f_0^{(n)}(0) = c_n F_0[t^n],$$

причем  $c_n \neq 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , т. к. все коэффициенты Тейлора функции типа Миттаг—Лефлера отличны от нуля. Следовательно  $F_0[t^n] = 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Но по предположению система  $\{t^n\}$  замкнута в  $C_w(L_\rho)$ . Отсюда следует, что  $F_0 = 0$ , т. е.  $f_0(u) \equiv 0$  или  $f_1(u) \equiv f_2(u)$ .

**Достаточность.** Пусть класс  $K_1(w)$  квазианалитичен и пусть  $F$  — произвольный линейный функционал, исчезающий на всех степенях  $\{t^n\}$ ,  $n = 0, 1, \dots$

$$F[t^n] = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Рассмотрим ту функцию  $f(u)$ , которая порождается этим функционалом по равенству (3'). Имеем  $f^{(n)}(0) = c_n F[t^n] = 0$  и т. к. класс  $K_1(w)$  квазианалитичен по предположению, то  $f(u) \equiv 0$ ,  $u \in ]-\infty, 0]$ , т. е.

$$F[E_\rho(-ut; \mu)] \equiv 0, \quad u \in ]-\infty, 0].$$

Это означает, что функция  $E_p(-u_0 t; \mu)$ ,  $u_0 < 0$  принадлежит замыканию системы  $\{t^n\}$ . Но из асимптотики функции типа Миттаг-Лефлера следует, что для функции  $E_p(-u_0 t; \mu)$ ,  $u_0 < 0$  заключение б) теоремы В не имеет места. Значит условие теоремы В не выполняется, т. е. система  $\{t^n\}$  замкнута в  $C_\infty(L_p)$ . Теорема доказана.

Перейдем теперь к вопросу о квазианалитичности класса  $K_2(w)$  в предположении, что класс  $K_1(w)$  не квазианалитичен, т. е. при предположении, что система  $\{t^n\}$  не замкнута в  $C_\infty(L_p)$ . Тогда нарушается равенство (2). В [5] доказано, что при  $\rho > 1$  возможны только два случая:

$$1) \tilde{w}(z) < +\infty, z \in \Delta(\rho); \tilde{w}(z) = +\infty, z \in \Delta^*(\rho),$$

$$2) \tilde{w}(z) < +\infty, z \in \mathbb{C}.$$

В настоящей статье мы ограничимся рассмотрением первого случая, что эквивалентно [6] условиям

$$\int_{L_p} \frac{\ln \tilde{w}(t)}{1+|t|^{1+\rho}} |dt| < +\infty, \quad \int_{L_p} \frac{\ln \tilde{w}(t)}{1+|t|^{1+\rho_1}} |dt| = +\infty, \quad (5)$$

$$\rho^{-1} + \rho_1^{-1} = 2.$$

Покажем, что класс (3'') квазианалитичен, т. е. из условий  $f_0(u) \in K_2(w)$  и  $f_0^{(n)}(0) = 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$  (6)

следует, что  $f_0(z) \equiv 0$ ,  $z \in \Delta(\alpha)$ ,  $\alpha = 2^{-1}(\rho - 1) \cdot \rho$ .

В самом деле, пусть  $f_0(z)$  порождается функционалом  $F_0$ . Тогда условия (6) эквивалентны условиям

$$F_0[t^n] = 0. \quad (7)$$

Но тогда из  $\tilde{w}(z) \equiv +\infty$ ,  $z \in \Delta^*(\rho)$  будет следовать, что

$$F_0 \left[ \frac{1}{t-z} \right] = 0, \quad z \in \Delta^*(\rho).$$

Теперь мы воспользуемся представлением ядра Коши с помощью функции типа Миттаг-Лефлера, установленном М. М. Джрбашьяном [7], стр. 149:

$$\rho \int_0^{+\infty} e^{-(|z|t)^\rho} E_p(-t\tau; \mu) \tau^{\mu\rho-1} d\tau = e^{t\mu\rho} \frac{\zeta^{1-\mu\rho}}{\zeta-t}, \quad (8)$$

откуда будет следовать, что

$$e^{i\mu\rho} \zeta^{1-\mu\rho} F_0 \left[ \frac{1}{\zeta-t} \right] = \int_0^{+\infty} e^{-(|z|t)^\rho} F_0[E_p(-t\tau; \mu)] \tau^{\mu\rho-1} d\tau.$$

Но

$$F_0 \left[ \frac{1}{\zeta-t} \right] = 0, \quad \zeta < 0, \quad |\zeta| > \nu^{1/\rho},$$

следовательно

$$\int_0^{+\infty} e^{-(1+t)^2} F_0[E_p(-t; \mu)] t^{\mu-1} dt = 0,$$

откуда по теореме единственности преобразования Лапласа заключаем, что

$$F_0[E_p(-t; \mu)] = 0, \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

Но функция

$$F_0[E_p(-tz; \mu)] = f_0(z)$$

голоморфна в области  $|\arg z| < \pi(1 - 1/\rho)$ , следовательно

$$f_0(z) \equiv 0, \quad |\arg z| < \pi(1 - 1/\rho).$$

Таким образом, квазианалитичность класса (3'') доказана.

Но верно и обратное. В самом деле, предположим, что класс  $K_2(w)$  квазианалитичен и пусть  $F_0$  — произвольный линейный функционал, аннулирующий систему  $\{t^n\}$ :  $F_0[t^n] = 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Функцию, порожденную функционалом  $F_0$  обозначим через  $f_0$ :

$$f_0(u) = F_0[E_p(-ut; \mu)], \quad |\arg u| < \pi(1 - 1/\rho).$$

Имеем  $f_0^{(n)}(0) = c_n F_0[t^n] = 0$  и так как класс (3'') квазианалитичен, то  $f_0(z) \equiv 0$ ,  $|\arg z| < \pi(1 - 1/\rho)$ , т. е.

$$F_0[E_p(-zt; \mu)] \equiv 0, \quad |\arg z| < \pi(1 - 1/\rho).$$

Но тогда из представления (8) ядра Коши будет следовать, что

$$F_0 \left[ \frac{1}{t-z} \right] = 0, \quad z \in \Delta^*(\rho).$$

Таким образом, получили, что произвольный линейный функционал, аннулирующий систему  $\{t^n\}$ , аннулирует также все функции вида

$(t-z)^{-1}$ ,  $z \in \Delta^*(\rho)$ , что, в свою очередь, означает, что  $\tilde{w}(z) \equiv +\infty$ ,  $z \in \Delta^*(\rho)$  или расходимость интеграла

$$\int_{L_p} \frac{\ln \tilde{w}(t)}{1 + |t|^{1+\rho_1}} |dt| = +\infty, \quad \rho^{-1} + \rho_1^{-1} = 2. \quad (9)$$

Таким образом, доказана

**Теорема 2.** *Необходимым и достаточным условием квазианалитичности класса  $K_2(w)$  является расходимость интеграла (9).*

Эту теорему можно сформулировать в другой, эквивалентной форме. С этой целью обозначим через  $C_\infty^*(L_p)$  класс тех функций  $h \in C_\infty(L_p)$ , которые голоморфны в  $\Delta(\rho)$  и удовлетворяют условиям:

I.  $|h(z)| \leq \text{const} \cdot \tilde{w}(z),$

II.  $\ln |h(z)|$  имеет положительную гармоническую мажоранту в  $\Delta(\rho),$

III.  $\ln |h(x)| = o(x^\rho)$  при  $x \rightarrow +\infty.$

Тогда, как доказано в [6] (теорема 3 и замечание 2), расходимость интеграла (9) является необходимым и достаточным условием замкнутости системы  $\{t^n\}$  в  $C_+^*(L_p)$ . Имея в виду этот результат, теорему 2 можно сформулировать в следующем виде.

**Теорема 3.** *Для того, чтобы система степеней  $\{t^n\}$ ,  $n=0, 1, \dots$  была замкнута в  $C_+^*(L_p)$ , необходимо и достаточно, чтобы класс  $K_1(w)$  был квазианалитическим.*

Вернемся к классу  $K_1(w)$  при выполнении условий (5). Как мы уже знаем, этот класс не является квазианалитическим в выше определенном смысле. Мы хотим выяснить, при каких условиях этот класс будет квазианалитическим по отношению к данному порядку [8]. При этом мы будем следовать схеме доказательства соответствующих теорем Б. Я. Левина.

Для упрощения записи и некоторых выкладок будем предполагать, что  $\mu=1$ .

Пусть  $\varphi(\alpha)$  — определенная в правосторонней окрестности нуля функция, такая, что  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^{-n} \varphi(\alpha) = 0$ ,  $n=0, 1, \dots$ . Класс  $K_1(w)$  назовем квазианалитическим по отношению к порядку  $\varphi(\alpha)$ , если из условий  $f_0(u) \in K_1(w)$  и

$$\int_0^{\alpha^{1/p}} |f_0(-u)| u^{p-1} du \leq \varphi(\alpha) \quad (10)$$

следует, что  $f_0(u) \equiv 0$ ,  $u \leq 0$ .

Предположим, что

$$\beta = -\frac{1}{\alpha} \ln \varphi(\alpha) \uparrow + \infty \text{ при } \alpha \downarrow 0.$$

Обратную функцию обозначим через  $\eta(\beta)$ :

$$\beta = -\frac{1}{\alpha} \ln \varphi(\alpha) \iff \alpha = \eta(\beta).$$

Итак, рассмотрим класс функций

$$f(u) = F[E_p(-ut; 1)],$$

и пусть некоторая функция  $f_0(u)$  из этого класса удовлетворяет условию (10).

Обозначим через  $F_0$  функционал, которым порождается функция  $f_0$ :

$$f_0(u) = F_0[E_p(-ut; 1)].$$

Так как  $f_0^{(n)}(0) = 0$ ,  $n=0, 1, \dots$ , то  $F_0[t^n] = 0$ ,  $n=0, 1, \dots$ , следовательно

$$F_0\left[\frac{1}{t-z}\right] = 0, \quad z \in \Delta^*(p). \quad (11)$$

Из представления

$$\frac{1}{z-t} = p z^{\mu p-1} \int_0^{+\infty} e^{-s^p \tau^p} E_p(\tau t; \mu) \tau^{\mu p-1} d\tau, \quad z \in \Delta(p).$$

получим (беря  $\mu=1$ )

$$F_0 \left[ \frac{1}{z-t} \right] = \rho z^{\rho-1} \int_0^{+\infty} e^{-x^{\rho} \tau^{\rho}} f_0(-\tau) \tau^{\rho-1} d\tau, \quad z \in \Delta(\rho).$$

Обозначим

$$F_0 \left[ \frac{1}{z-t} \right] = F_0(z)$$

и в последнем равенстве, полагая  $z$  вещественным и положительным, получим

$$F_0(x) = \rho x^{\rho-1} \left\{ \int_0^{a^{1/\rho}} e^{-x^{\rho} \tau^{\rho}} f_0(-\tau) \tau^{\rho-1} d\tau + \int_{a^{1/\rho}}^{+\infty} e^{-x^{\rho} \tau^{\rho}} f_0(-\tau) \tau^{\rho-1} d\tau \right\} \quad (12)$$

Для первого слагаемого в (12) имеем оценку

$$\left| \int_0^{a^{1/\rho}} e^{-x^{\rho} \tau^{\rho}} f_0(-\tau) \tau^{\rho-1} d\tau \right| \leq \int_0^{a^{1/\rho}} |f_0(-\tau)| \tau^{\rho-1} d\tau \leq \varphi(a).$$

Оценим второе слагаемое

$$\left| \int_{a^{1/\rho}}^{+\infty} e^{-x^{\rho} \tau^{\rho}} f_0(-\tau) \tau^{\rho-1} d\tau \right| \leq \text{const} \cdot \int_{a^{1/\rho}}^{+\infty} e^{-x^{\rho} \tau^{\rho}} \tau^{\rho-1} d\tau \leq \frac{c}{x^{\rho}} e^{-ax^{\rho}}.$$

Таким образом, получаем оценку

$$|F_0(x)| \leq cx^{\rho-1} [\varphi(a) + x^{-\rho} e^{-ax^{\rho}}] \quad (13)$$

или

$$|F_0(x)| \leq \text{const} \cdot x^{\rho-1} [\varphi(a) + e^{-ax^{\rho}}], \quad x \geq 1.$$

Беря  $a = \eta(x^{\rho})$ , получим  $x^{\rho} = -1/\eta \ln \varphi(\tau)$ ,  $e^{-ax^{\rho}} = \varphi(\tau)$  и, следовательно

$$|F_0(x)| \leq \text{const} \cdot x^{\rho-1} e^{-x^{\rho} \eta(x^{\rho})}. \quad (14)$$

Обозначим через  $E$  множество целых функций  $\Phi(z)$  порядка  $2\rho$  и минимального типа, удовлетворяющих условию

$$|\Phi(x)| \leq cx^{1-\rho} e^{x^{\rho} \eta(x^{\rho})}. \quad (15)$$

Обозначим через  $\mathfrak{M}_{\Phi}$  множество тех функций из  $E$ , для которых выполняется условие

$$\left\| \frac{\Phi(t)}{t-1} \right\| \leq 1.$$

Наконец введем обозначение

$$F_0 \left[ \frac{\Phi(t) - \Phi(z)}{t-z} \right] = q_{\Phi}(z).$$

Нетрудно доказывается, что  $q_\Phi(z)$  — целая функция порядка  $2\rho$  и минимального типа. Имеем

$$q_\Phi(z) = F_0 \left[ \frac{\Phi(t)}{t-z} \right] - \Phi(z) F_0 \left[ \frac{1}{t-z} \right]. \quad (16)$$

Из (11) следует, что

$$q_\Phi(z) = F_0 \left[ \frac{\Phi(t)}{t-z} \right], \quad z \in \Delta^*(\rho). \quad (17)$$

Предположим, что  $\Phi \in \mathfrak{M}$ . Тогда из (17) получаем

$$\begin{aligned} |q_\Phi(z)| &\leq \|F_0\| \cdot \left\| \frac{\Phi(t)}{t-z} \right\| = \|F_0\| \cdot \left\| \frac{\Phi(t)}{t-1} \frac{t-1}{t-z} \right\| < \\ &\leq \|F_0\| \cdot \left\| \frac{\Phi(t)}{t-1} \right\| \cdot \max_{t \in L_\rho} \left| \frac{t-1}{t-z} \right| \leq \frac{c}{\delta(z)}, \quad z \in \Delta^*(\rho), \end{aligned}$$

где  $\delta(z)$  — расстояние точки  $z$  до  $L_\rho$ .

Полученное неравенство означает, что  $q_\Phi(z)$  ограничена в области  $|\arg(z+1)| > \frac{\pi}{2\rho}$ :

$$|q_\Phi(z)| \leq c, \quad \pi > |\arg(z+1)| > \frac{\pi}{2\rho}. \quad (18)$$

Пусть теперь  $z \in \Delta(\rho)$ . Тогда из (16), предполагая опять, что  $\Phi \in \mathfrak{M}$ , получим

$$|q_\Phi(z)| \leq \frac{c}{\delta(z)} + |\Phi(z)| \cdot |F_0(z)|,$$

но  $|F_0(x)| \cdot |\Phi(x)| \leq c$ ,  $x \geq 1$ , следовательно,  $|q_\Phi(x)| \leq c$ ,  $x \geq 1$  и понятно, что  $|q_\Phi(x)| \leq \text{const}$ ,  $x \geq -1$ .

Применяя принцип Фрагмена — Линделефа, заключаем, что  $q_\Phi(z)$  ограничена в областях  $0 < \arg(z+1) < \frac{\pi}{2\rho}$ ,  $-\frac{\pi}{2\rho} < \arg(z+1) < 0$ . Но тогда из (18) следует, что  $q_\Phi(z)$  ограничена во всей плоскости и поэтому  $q_\Phi(z) \equiv \text{const}$ . Но  $q_\Phi(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ , значит  $q_\Phi(z) \equiv 0$ , т. е.

$$F_0 \left[ \frac{\Phi(t) - \Phi(z)}{t-z} \right] = 0, \quad \forall \Phi \in E.$$

Пусть теперь  $z_0$  — нуль функции  $\Phi(z)$ :  $\Phi(z_0) = 0$ . Тогда будем иметь  $F_0 \left[ \frac{\Phi(t)}{t-z_0} \right] = 0$ . Отсюда нетрудно заключить, что  $F_0[\Phi(t)] = 0$ .

Если множество  $E$  замкнуто в  $C_\infty(L_\rho)$ , то будем иметь  $F_0 = 0$ .

Таким образом, доказана

**Теорема 4.** Пусть выполняется условие (5). Если множество  $E$  всюду плотно в  $C_\infty(L_\rho)$ , то класс  $K_1(\omega)$  квазианалитичен по отношению к порядку  $\varphi(\alpha)$ .

Автор выражает искреннюю благодарность М. М. Джрбашяну и Б. Я. Левину за обсуждение работы и ценные советы.

Армянский государственный педагогический институт им. Х. Абовяна

Поступила 8. VII. 1985

Լ. Ն. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Կոմպլեքս տիրույթում կշռային մոտավորությունների հետ կապված լվազրանալիտիկ դասեր (ամփոփում)

Դիցուք  $L_\rho: \arg z = \pm \frac{\pi}{2\rho} (1 < \rho < +\infty)$  ճառագայթների վրա որոշված է ափսոսաբան ֆունկցիա

և  $C_\omega(L_\rho)$ -ն  $L_\rho$ -ի վրա անընդհատ ֆունկցիաների կշռային տարածությունն է: Դիտարկվում է  $f(u) = F[E_\rho(-u; \mu)]$  ճառագայթային որոշվող ֆունկցիաների դասերը, որտեղ  $F$ -ը կամայական դժային ֆունկցիոնալ է ճամայում տարածությունից, իսկ  $E_\rho(z; \mu)$ -ն Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիա է: Ապացուցվում են մի քանի թեորեմներ, որոնք կապ են հաստատում այս դասերի լվազրանալիտիկության և բազմանդամների լրիվության միջև  $C_\omega$ -ում կամ նրա որոշակի ենթատարածություններում:

J. H. KHACHATRIAN. Quasianalytic classes, connected with the weighted approximations in the complex domain (summary)

Let on the rays  $L_\rho: \arg z = \pm \frac{\pi}{2\rho} (1 < \rho < +\infty)$  a weight function  $\omega$  be defined and let  $C_\omega(L_\rho)$  be the weighted class of continuous functions on  $L_\rho$ . The classes, determined by the equality  $f(u) = F[E_\rho(-u; \mu)]$ , are considered, where  $F$  is any functional from the conjugate space and  $E_\rho(z; \mu)$  is a Mittag-Leffler type function. We prove some theorems, which indicate a connection between the quasianalyticity and the foolness of polynomials in  $C_\omega$  or in some of its subclasses.

## ЛИТЕРАТУРА

1. S. Bernstein Le probleme de l'approximations des fonctions continues sur tout l'axe reel et l'une de ses applications, Bull. Soc. Math. de France, 52, 1924, 399—410.
2. Н. И. Ахиезер. О взвешенном приближении непрерывных функций многочленами на всей числовой оси, УМН, XI, вып. 4 (70), 1956, 3—43.
3. А. Л. Шагинян. О полноте семейств аналитических функций в комплексной области, Сообщения Ин-та матем. и мех. АН АрмССР, 1, 1947.
4. М. М. Джрбашян. Некоторые вопросы взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области, Мат. сборник, 36, № 3, 1955, 353—440.
5. С. Н. Мерелян. Весовые приближения многочленами, УМН, XI, вып. 5 (71), 1956, 107—152.
6. И. О. Хачатрян. О взвешенно-равномерном приближении непрерывных функций полиномами на двух лучах, Изв. АН АрмССР, «Математика», 3, №№ 4—5, 1968, 301—326.
7. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления в комплексной области, М., «Наука», 1966.
8. Б. Я. Левин, М. Лившиц. Квазианалитические классы функций, представленных рядами Фурье, Мат. сборник, 9 (51), № 3, 1941, 693—711.

УДК 517.53—517.948

В. Б. ДЫБИН

О БАЗИСАХ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ  
ФУНКЦИЙ СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ  
СУЩЕСТВЕННО ОСОБЫХ ТОЧЕК

## Введение

За последнее десятилетие достигнуто определенное продвижение в конструктивной теории сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши с бесконечным индексом в пространстве  $L_p(\Gamma, \rho)$  [1—10]. Одним из наиболее интересных результатов отмеченных работ явилось установление прямых связей между проблемами явного описания всех решений интегрального уравнения при различных типах бесконечного индекса и кругом идей М. М. Джрбашяна—Б. Я. Левина, связанных с построением базисов в некоторых подпространствах целых или мероморфных функций, лежащих в пространствах Харди, Смирнова и Лебега (см., напр., [11—16]). Здесь мы будем касаться только случая так называемых стандартных почти-периодических разрывов (СПП-разрывов) [4]. Такой разрыв в точке  $t_0 \in \Gamma$  определяется функцией  $\omega(t) = \exp[\varepsilon(t - t_0)^{-1}]$ , где комплексный коэффициент  $\varepsilon$  подобран таким образом, что он обеспечивает ограниченность  $\omega(t)$  вдоль кривой  $\Gamma$ .

В простейшей ситуации, когда точка СПП-разрыва  $t_0 = \infty$ , а  $\Gamma = R$ , модельный сингулярный интегральный оператор имеет вид  $A = P^+ + \exp[ix\varepsilon] P^-$ , где  $\sigma > 0$ ,  $P^\pm = \frac{1}{2}[I \pm S]$ ,  $S$  — преобразование Гильберта. Его ядро в пространстве  $L_p(R, \rho)$ ,  $1 < p < \infty$ , бесконечномерно и определяется равенством  $\ker A = (1 - \exp[-ix\varepsilon]) \times \times P^+(L_p^\sigma(R, \rho))$ , где  $L_p^\sigma(R, \rho)$  — класс всех целых функций экспоненциального типа  $\leq \sigma$ , лежащих в пространстве  $L_p(R, \rho)$  [3], [10]. Отсюда следует, что вопрос описания базиса в  $\ker A$  в случае  $\rho \equiv 1$  решается известной теоремой Б. Я. Левина [12] о базисах в  $L_p^\sigma(R)$ , построенных на основе функций типа синуса (ф.т.с.). Следует обратить внимание на определенную популярность этой теоремы как в связи с внутренними проблемами теории функций и проблемами описания решений сингулярных интегральных уравнений, так и в связи с некоторыми аспектами спектральной теории теплицевых операторов. Следствием этого явилась сравнительно недавно выполненная серия работ [8, 14—16], где были предложены как новые ее доказательства, так и обобщение на случай степенного веса.

Основной целью настоящей работы является демонстрация действия этой теоремы (§ 2) при описании базисов в  $\ker A$  в случае бесконечного числа СПП-разрывов, т. е. когда оператор  $A$  имеет вид  $A = P^+ + \omega^+ P^-$ , где

$$\omega^-(x) = \exp \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{iz_k}{x_k - x}, \quad x_k \in R, \quad z_k > 0, \quad \sum_k \frac{z_k}{|x_k|} < \infty. \quad (1)$$

Здесь роль подпространства  $P^+(L_p^z(R, \rho))$  играет бесконечная прямая сумма его изометрических образов, каждый из которых получается, грубо говоря, «выворачиванием» ситуации из  $\infty$  в конечную точку  $x_k$  с помощью подходящего дробно-линейного преобразования таким образом, что соответствующий класс функций остается в пространстве  $P^+(L_p(R, \rho))$ .

В связи с тем, что вес  $\rho$  является ХМВ-весом, т. е. удовлетворяет условию  $(A_\rho)$  Ханта—Макенхоупта—Видена [17], мы вынуждены предварительно в § 1 провести доказательство теоремы Б. Я. Левина (ниже теорема 1.11) в случае ХМВ-весов, повторяя при этом некоторые узловые моменты работы [12].

Символами  $\blacktriangleleft$  и  $\blacktriangleright$  ниже обозначаются, соответственно, начало и конец доказательства.

### § 1. Пространства целых функций

Пусть  $\rho$  — ХМВ-вес, что эквивалентно выполнению условия

$$\left( \frac{1}{|I|} \int_I \rho \right) \left( \frac{1}{|I|} \int_I \rho^{\frac{1}{1-p}} \right)^{p-1} \leq c_p < \infty, \quad 1 < p < \infty, \quad (A_p^R)$$

где  $I$  — произвольный интервал на  $R$ , а  $c_p$  не зависит от  $I$ . Через  $L_p(R, \rho)$  обозначаем, как обычно, банахово пространство всех измеримых на  $R$  функций, суммируемых в степени  $p$  с весом  $\rho$ . Если  $z > 0$ , то через  $L_p^z(R, \rho)$  обозначаем линейал всех целых функций экспоненциального типа  $\leq z$ , принадлежащих пространству  $L_p(R, \rho)$ .

Вначале приведем сводку результатов относительно пространств  $L_p^z(R, \rho)$ , доказательства которых в случае степенных весов содержатся в работах автора [3], [10]. Минимальный комментарий призван пояснить несущественные различия, появляющиеся при переходе от степенных весов к общим ХМВ-весам.

**Предложение 1.1.** Пусть  $S$  — преобразование Гильберта. Тогда линейал  $L_p^z(R, \rho)$  инвариантен относительно оператора  $S$ .

$\blacktriangleleft$  Прежде всего, оператор  $L$  ограничен в  $L_p(R, \rho)$  [17]. Если  $\rho \equiv 1$ , то линейал  $L_p^z(R)$  лежит в бернштейновском классе  $B_z$  всех целых функций экспоненциального типа  $\leq z$ , ограниченных на  $R$ . Поэтому функции  $f \in L_p^z(R)$  допускают интегральное представление, аналогичное представлению Винера—Пэли со степенным коэффициентом ([18], с. 182), что позволяет применять технику преобразований Фурье.

Переход к случаю  $\rho \in (A_p^R)$  связан с импликацией  $f \in L_p^z(R, \rho) \Rightarrow h(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \in L_p^z(R)$ . Доказательство последней сводится к исполь-

зованию неравенства Гельдера и простейших свойств ХМВ-веса [19], в частности, удовлетворяющего условию

$$\int_R |x + i_1^{-p} \rho| < \infty. \blacktriangleright$$

Проекторы  $P^\pm = \frac{1}{2} [I \pm S]$  определяют в  $L_p^\sigma(R, \rho)$  линейалы  $L_p^{\sigma\pm}(R, \rho) = P^\pm(L_p^\sigma(R, \rho))$ . Очевидно, что  $L_p^\sigma(R, \rho) = L_p^{\sigma+}(R, \rho) \oplus \oplus L_p^{\sigma-}(R, \rho)$ . Введем также оператор  $E_\sigma$  умножения на функцию  $\exp[ix\sigma]$ .

Предложение 1.2.  $E_\sigma(L_p^{\sigma-}(R, \rho)) = L_p^{\sigma+}(R, \rho)$ .

В пространстве  $L_p(R, \rho)$  рассмотрим два оператора:

$$A_\sigma = P^+ + \exp[ix\sigma]P^- \text{ и} \\ K_\sigma f = \frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{\exp[it\sigma] - \exp[ix\sigma]}{t - x} f(t) dt. \quad (1.1)$$

Теорема 1.3. Если  $\sigma > 0$ , то оператор  $A_\sigma$  обратим справа и  $\ker A_\sigma = (I - E_\sigma^{-1})(\operatorname{im} K_\sigma) = (I - E_\sigma^{-1})(L_p^{\sigma+}(R, \rho))$ .

Если  $\sigma < 0$ , то оператор  $A_\sigma$  обратим слева и  $\operatorname{im} A_\sigma = \ker K_{|\sigma|} = L_p^+(R, \rho) \oplus E_\sigma(L_p^-(R, \rho))$ ,  $\operatorname{coker} A_\sigma = \operatorname{im} K_\sigma = L_p^{|\sigma|+}(R, \rho)$ .

В обоих случаях  $A_\sigma^{-1} = A_{-\sigma}$ .

◀ Наиболее существенной частью доказательства является установление равенства  $\operatorname{im} K_\sigma = L_p^{\sigma+}(R, \rho)$ , опирающееся на исследование интегрального представления (1.1). Вначале доказывается аналитическая продолжимость функций вида (1.1) через вещественную прямую  $R$ . Тут возможны различные рассуждения, в том числе и аналогичные «принципу устранения особенностей». Второй шаг состоит в получении оценки в окрестности бесконечно удаленной точки. Стандартным путем он сводится к неравенству

$$\sup_{\substack{x \in R \\ \varphi \in [0, 2\pi)}} \left| (x + re^{i\varphi} + i) \frac{\exp[ix\sigma] - \exp[i\sigma re^{i\varphi}]}{x - re^{i\varphi}} \right| \leq ce^{\sigma r},$$

которое доказывается вполне элементарными средствами. ▶

Всюду ниже в этом параграфе  $\sigma > 0$ . Следующие утверждения являются прямым следствием теоремы 1.3.

Предложение 1.4. Линейал  $L_p^\sigma(R, \rho)$  замкнут в метрике пространства  $L_p(R, \rho)$ .

Предложение 1.5.  $L_p^{\pm}(R, \rho) = P^\pm(L_p(R, \rho)) = L_p^{\sigma\pm}(R, \rho) \oplus \oplus E_\sigma^{\pm 1}(L_p^\pm(R, \rho))$ .

Предложение 1.6.  $(L_p^{\sigma\pm}(R, \rho))^* \simeq L_q^{\sigma\pm}(R, \rho^{1-q})$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Определение. Целая функция  $s(z)$  экспоненциального типа  $\sigma$  называется ф.т.с., если она удовлетворяет условиям:

1) все ее нули лежат в горизонтальной полосе

$$|y| < H(z = x + iy);$$

II) неравенство

$$0 < m \leq |s(x + iy)| \leq M < \infty$$

выполняется для некоторого фиксированного значения  $y = y_1$ ;

III) тип  $s(z)$  в верхней и нижней полуплоскостях одинаков.

Относительно множества  $\{z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  корней функции  $s(z)$  в дальнейшем будем требовать, чтобы выполнялось условие

$$0 < d_1 \leq |z_k - z_n|, \quad k \neq n.$$

Теореме 1.11 предшествует ряд вспомогательных утверждений.

**Предложение 1.7.** Пусть  $\rho \in (A_p^R)$ . Тогда существует такая функция  $\rho_+(x + iy)$ , аналитическая в полуплоскости  $\Pi_+ = \{z | y > 0\}$ , не обращающаяся там в нуль, и при надлежащем выборе ветви функции  $(x + iy + i)^{-\rho}$  удовлетворяющая условию  $(x + iy + i)^{-\rho} \rho_+(x + iy) \in H_1^+(R)$ , что  $|\rho_+| = \rho$  почти всюду на  $R$ .

◀ По лемме Рохберга—Дынькина [22—23] для любого  $\omega \in (A_p^\Gamma)$ , где  $\Gamma = \{z | |z| = 1\}$ , найдется функция  $\omega^+ \in H_1(\Gamma)$ , отличная от нуля всюду внутри  $\Gamma$  и такая, что  $|\omega^+| = \omega$  почти всюду на  $\Gamma$ . Пусть теперь  $\omega_+(z)$  — соответствующая функция класса  $H_1(\Gamma)$ , определяемая леммой Рохберга—Дынькина для веса  $\omega = |1 - t|^{p-2} \rho \left( i \frac{1+t}{1-t} \right) \in (A_p^R)$ . Тогда искомая функция  $\rho_+(x + iy)$  имеет вид

$$\rho_+(x + iy) = \left( \frac{2i}{x + iy + i} \right)^{2-\rho} \omega_+ \left( \frac{x + iy - i}{x + iy + i} \right).$$

Проверка выполнения всех утверждений леммы для указанной функции вполне элементарна ввиду того, что вес  $\rho$  локально интегрируем и для него выполняется [19] так называемое условие  $(B_p^R)$

$$\int_R \left( 1 + \frac{|x - x_0|}{|I|} \right)^{-p} \rho \leq c_p S_I \rho,$$

где  $x_0$  — центр интервала  $I$ . ▶

Через  $H_{p, \rho}^+$ ,  $1 < p < \infty$ , обозначим банахово пространство функций  $f(z)$ , аналитических в полуплоскости  $\Pi_+$  и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H_{p, \rho}^+} = \sup_{y > 0} \left( \int_R |f(x + iy)|^p |\rho_+(x + iy)| dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Аналогично определяется класс  $H_{p, \rho}^-$ . Отождествляя пространства  $H_{p, \rho}^\pm$  с подпространствами  $L_p^\pm(R, \rho)$ , получаем [24], что

$$(H_{p, \rho}^\pm)^* \simeq H_{q, \rho}^\pm, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Предложение 1.8. Пусть  $f \in L_p^\sigma(R, \rho)$ . Тогда для любого  $T \in R$

$$e^{-\sigma|T|^p} \int_R |f(x+iT)|^p |\rho_+(x+i|T|)| \leq \|f\|_{L_p^\sigma(R, \rho)}^p \leq \\ \leq e^{\sigma|T|^p} \int_R |f(x+iT)|^p |\rho_+(x+i|T|)|.$$

◀ Если  $f \in L_p^\sigma(R, \rho)$ , то  $\exp[\pm iz\sigma] f(z) \in H_{p, \rho}^\pm$ . Поэтому для любых  $y \in R$

$$\int_R |f(x+iy)|^p e^{-\sigma|y|^p} |\rho_+(x+i|y|)| dx < \|f\|_p^p.$$

Для доказательства справедливости первого неравенства остается положить  $y=T$ .

Для доказательства второго неравенства введем функцию  $g(z) = f(z+iT) \in L_p^\sigma(R, |\rho_+(x+iT)|)$ ,  $T > 0$ . Тогда  $e^{-iz\sigma} g \in H_{p, \rho}^{\sim-}$ , где  $\tilde{\rho} = |\rho_+(x+iT)|$  и поэтому при  $-T \leq y < 0$

$$\int_R |g(x+iy)|^p e^{\sigma y^p} |\rho_+(x+i(y+T))| dx \leq \|g\|_p^p.$$

Полагая  $y = -T$ , получаем

$$\|f\|_p^p \leq e^{\sigma T^p} \int_R |f(x+iT)|^p |\rho_+(x+iT)| dx.$$

Если же  $T < 0$ , то  $g(z) = f(z+iT) \in L_p^\sigma(R, |\rho_+(x-iT)|)$ , и аналогичные рассуждения подтверждают справедливость второго неравенства и в этом случае. ▶

Предложение 1.9. Пусть  $f \in H_{p, \rho}^+$  и  $\{z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  — последовательность точек, удовлетворяющих условиям:

1)  $0 < h < \operatorname{im} z_k < H < \infty$ ; 2)  $|z_k - z_n| > 2h$ ,  $k \neq n$ . Тогда

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(z_k)|^p |\rho_+(z_k)| \leq c \|f\|_p^p.$$

Предложение 1.10. Пусть  $f \in L_p^\sigma(R, \rho)$  и  $\{z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  — последовательность точек, удовлетворяющих условиям:

1)  $|\operatorname{im} z_k| < H$ ; 2)  $|z_k - z_n| \geq 2h > 0$ ,  $k \neq n$ . Тогда

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(z_k)|^p |\rho_+(z_k + iT)| \leq c \|f\|_p^p,$$

где  $T = 2 \max\{H + h, 2h\}$ .

Предложения 1.9 и 1.10 являются прямыми следствиями предложения 1.8 и леммы 3 из [12].

Пусть  $s(z)$  — ф. т. с. типа  $\sigma$ ,  $d_1 = 2h$ ,  $T = 2 \max |H + h, 2h|$ . Через  $l_{p, \sigma}(z)$  обозначим банахово пространство последовательностей  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , суммируемых в степени  $p$  с весом  $\delta = \{\delta_k\} = \{|\rho_+(z_k + iT)|\}$ ,  $\|f\| = (\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f_k|^p \delta_k)^{1/p} < \infty$ ,

**Теорема 1.11.** Пусть  $\{f_k\} \in l_{p, \sigma}(z)$ . Тогда ряд

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k s(z) [s^{(1)}(z_k) (z - z_k)]^{-1} \quad (1.2)$$

- 1) сходится на  $R$  в норме пространства  $L_p(R, \rho)$ ;
- 2) представляет собой функцию класса  $L_p^\sigma(R, \rho)$ ;
- 3) дает изоморфное отображение пространства  $l_{p, \sigma}(z)$  на пространство  $L_p^\sigma(R, \rho)$ ;
- 4) решает интерполяционную задачу  $f(z_k) = f_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

◀ Так же как и при доказательстве теоремы 2 из [12] получаем, что отрезок ряда (1.2)

$$F_{l, m}(z) = \sum_{k=-l}^m f_k s(z) [s^{(1)}(z_k) (z - z_k)]^{-1}$$

оценивается следующим образом:

$$\|F_{l, m}\| \leq c \|\varphi\|_{H^+, \rho},$$

где функция  $\varphi(z) = \sum_{k=-l}^m f_k [z + iH - z_k]^{-1} \in H_{\rho, \rho}^+$  при достаточно больших значениях  $H > 0$ . Далее

$$\begin{aligned} \|\varphi\| &= \sup_{\psi} \left| \int_R \varphi \bar{\psi} \right| \leq 2\pi \sup_{\psi} \left| \sum_{k=-l}^m \bar{f}_k \psi(\bar{z}_k + iH) \right| \leq \\ &\leq 2\pi \left( \sum_{k=-l}^m |f_k|^p |\rho_+(z_k + iT)| \right)^{1/p} \cdot \\ &\cdot \sup_{\psi} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\psi(\bar{z}_k + iH)|^q |\rho_+(z_k + iT)|^{1-q} \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

где  $\sup$  берется по всем функциям  $\psi \in H_{q, \rho_1}^{1-q}(\Pi_+)$  таким, что  $\|\psi\| = 1$ ,

$\rho_1 = |\rho_+(x + iT)|$ . Покажем, что

$$\sup_{\psi} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\psi(\bar{z}_k + iH)|^q |\rho_+(z_k + iT)|^{1-q} \right)^{1/q} \leq c < \infty.$$

Для этого положим  $H = \frac{T}{2}$ . Очевидно, что множество точек  $\{z_k\}$  и

$\{\bar{z}_k\}$  лежит в полосе  $|\operatorname{Im} z| < \frac{T}{2}$ . Функция  $|\rho_+(x - iy + iT)|^{1-q}$  субгар-

монична в этой полосе так же как и функция  $\left| \psi \left( x + iy + i \frac{T}{2} \right) \right|^q$

([25], с. 43). Отсюда как и выше получаем, что

$$\sum_{k \in Z} \left| \psi \left( \frac{z_k + iT}{2} \right) \right|^q |p_+(z_k + iT)|^{1-q} \leq c \int_R |\psi(x)|^q \left| p_+ \left( x + i \frac{T}{2} \right) \right|^{1-q} dx \leq c \|\psi\|^q < \infty.$$

Таким образом,  $\|\varphi\| \leq c \left( \sum_{k=1}^m |f_k|^p |p_+(z_k + iT)| \right)^{1/p}$ , откуда следует сходимость ряда (1.2) в пространстве  $L_p(R, \rho)$ .

Второе утверждение теоремы является следствием предложения 1.4.

Таким образом, ряд (1.2) осуществляет линейное непрерывное отображение пространства  $l_{p, \delta}(Z)$  в пространство  $L_p^{\sigma}(R, \rho)$ . Нам осталось доказать обратимость этого отображения. Для этого покажем, что любая функция  $f \in L_p^{\sigma}(R, \rho)$  разлагается в ряд (1.2), где  $f_k = f(z_k)$ . Обозначим функцию, определяемую этим рядом, через  $g$ . В силу предложения 1.10  $\{f(z_k)\} \in l_{p, \delta}(Z)$ . Поэтому  $g \in L_p^{\sigma}(R, \rho)$ . Так как  $z^{-1}(g(z) - g(0)) \in B_{\sigma}$ , то ([18], с. 184)  $|g(z)| \leq \lambda_1 |z| e^{\sigma|y|} + |g(0)|$ . Аналогично  $|f(z)| \leq \lambda_2 |z| e^{\sigma|y|} + |f(0)|$ . Для доказательства равенства  $f = g$  рассмотрим целую функцию  $\psi = s^{-1}(f - g)$ . Повторяя с соответствующими изменениями рассуждения, использованные в теореме 3 из [12], получаем, что в силу обобщенного принципа Лиувилля  $\psi$  является линейной функцией. Но  $\psi s \in L_p(R, \rho)$ , где  $s \in B_{\sigma}$ , поэтому  $\psi \equiv 0$ . ►

Теорема 1.11 дает описание целого класса базисов в пространстве  $L_p^{\sigma}(R, \rho)$ , не зависящих от  $1 < p < \infty$  и  $\rho \in (A_p^R)$ . При описании аналогичных базисов в подпространствах  $L_p^{\sigma \pm}(R, \rho)$  оказывается полезным следующее элементарное предложение 1.12, дающее способ их построения на основе ф. т. с., имеющих как тот же самый тип  $\sigma$ , так и тип  $\sigma_1 < \sigma$ .

**Предложение 1.12.** Пусть положительные числа  $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$  и  $a$  удовлетворяют соотношению  $\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{a} = \frac{\sigma}{2}$ . Тогда операторы  $E_{\pm}^{\pm 1}$ ,

действующие по формуле  $(E_{\pm}^{\pm 1} f)(x) = e^{\pm i x \sigma_2} f\left(\frac{x}{a}\right)$ , осуществляют

изоморфизм пространства  $L_p^{\sigma_1}(R, \rho)$  на пространство  $L_p^{\sigma \pm}(R, \rho_1)$ , где  $\rho_1 = \rho(ax)$ .

В качестве следствия этого предложения получаем следующее утверждение о базисах в  $L_p^{\sigma \pm}(R, \rho)$ .

**Предложение 1.13.** Пусть числа  $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$  и  $a$  удовлетворяют условиям предложения 1.12, а ф. т. с.  $s(z)$  имеет тип  $\sigma$  и подчинена условиям теоремы 1.11. Тогда следующая система функций:

$$e_k^{\pm}(z) = \frac{a \exp[\pm i(z - az_k) \sigma_2] s\left(\frac{z}{a}\right)}{s^{(1)}(z_k)(z - az_k)}, \quad k \in Z, \quad (1.3)$$

образует базис, соответственно, в пространстве  $L_p^{\sigma \pm}(R, \rho)$ . Коэффициенты  $f_k$  разложения функции  $f \in L_p^{\sigma \pm}(R, \rho)$  по этому базису принадлежат пространству  $l_{p, \delta}(Z)$ , где  $\delta = \{\delta_k\} = \{|p_+(az_k + iT)|\}$ , и

решают интерполяционную задачу  $f^{\pm}(\zeta_k) = f_k$  на множестве  $\{\zeta_k\} = \{a z_k\}_{k \in Z}$ .

◀ Пусть  $g \in L_p^{\pm}(R, \rho_1)$ . По теореме 1.11

$$g = \sum_k g(z_k) = \frac{s(z)}{s^{(1)}(z_k)(z - z_k)}.$$

Действуя на обе части этого равенства оператором  $E_{\sigma}^{\pm 1}$ , переходим в пространство  $L_p^{\pm}(R, \rho)$  и получаем, что

$$\begin{aligned} f^{\pm} = E_{\sigma}^{\pm 1} g &= \sum_k g(z_k) \frac{a \exp[\pm i z \sigma_2] s\left(\frac{z}{a}\right)}{s^{(1)}(z_k)(z - a z_k)} = \\ &= \sum_k f^{\pm}(\zeta_k) \frac{s_1^{\pm}(z)}{s_1^{\pm(1)}(\zeta_k)(z - \zeta_k)} = \sum_k f^{\pm}(\zeta_k) e_k^{\pm}(z), \end{aligned}$$

где  $s_1^{\pm}(z) = \exp[\pm i z \sigma_2] s\left(\frac{z}{a}\right)$ ,  $s_1^{\pm(1)}(\zeta_k) = a^{-1} \exp[\pm i \zeta_k \sigma_2] s^{(1)}(z_k)$ . Остается показать, что  $|f^{\pm}(\zeta_k)| \in l_{p, \delta}(Z)$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_k |f_k|^p \delta_k &= \sum_k |g(z_k) \exp[\pm i \zeta_k \sigma_2]|^p \delta_k = \\ &= \sum_k |g(z_k)|^p \exp[\pm a \rho \sigma_2 \operatorname{Im} z_k] \delta_k \leq \|g\|_{l_{p, \delta}}, \end{aligned}$$

поскольку множество  $\{z_k\}$  лежит в полосе  $|y| \leq H$ . ▶

Отметим, наконец, что формулы (1.3) содержат в себе специальный биортогональный базис, являющийся изометрическим образом тригонометрической системы. Полагая в (1.3)  $s(z) = \exp\left[\pm \frac{iz\sigma}{2}\right] - \exp\left[\mp \frac{iz\sigma}{2}\right]$ ,

$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\sigma}{2}$ ,  $a = 1$ , и нормируя получившуюся систему функций, имеем следующий базис в  $L_p^{\pm}(R, \rho)$ :

$$e_k^{\pm} = (2\pi\sigma)^{-\frac{1}{2}} \frac{\exp[\pm i x \sigma] - 1}{x - 2\pi k \sigma^{-1}}, \quad k \in Z. \quad (1.4)$$

Поскольку  $e_k^{\pm} \in L_2(R)$ , то биортогональность системы (1.4) доказывается применением преобразования Фурье.

## § 2. Счетное множество разрывов

Пусть  $Z = Z \cup \{\infty\}$ ,  $X = \{x_n, n \in Z\}$  — произвольная возрастающая последовательность вещественных чисел при стремлении  $n$  от  $-\infty$  к  $+\infty$ . Пусть далее  $\{\sigma_n, n \in Z\}$  — произвольная последовательность неотрицательных вещественных чисел, удовлетворяющих условию

$$\sum_{x_n \neq 0} \frac{\sigma_n}{|x_n|} < \infty. \quad (2.1)$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$\omega^+(x) = \exp \left[ i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sigma_n}{x_n - x} \right], \quad (2.2)$$

которая определена всюду на множестве  $R \setminus X$ . Действительно, пусть для простоты  $x_n \neq 0$  и  $x_k < \tilde{x} < x_{k+1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{\sigma_n}{x_n - \tilde{x}} &= \sum_n \frac{\sigma_n}{x_n} + \sum_n \frac{\sigma_n \tilde{x}}{x_n (x_n - \tilde{x})} = \sum_n \frac{\sigma_n}{x_n} + \\ &+ \tilde{x} \left( \sum_{n \leq k} + \sum_{n \geq k+1} \right) \frac{\sigma_n}{x_n (x_n - \tilde{x})} \leq \left[ 1 + |\tilde{x}| \left( \frac{1}{x - x_k} + \frac{1}{x_{k+1} - \tilde{x}} \right) \right] \times \\ &\times \sum_n \frac{|\sigma_n|}{|x_n|} < \infty. \end{aligned}$$

Кроме того,  $\omega^+ \in H_-^+(R)$ , т. к.  $\operatorname{Re} \exp \left[ \frac{i\sigma_n}{x_n - x - iy} \right] = \exp \left[ \frac{-\sigma_n y}{(x_n - x)^2 + y^2} \right]$ ,  $|\omega^+(x + iy)| \leq 1$  при  $y > 0$ .

Введем обозначение  $\omega_n(x) = \exp \lambda_n(x)$ ,  $\lambda_n(x) = i\sigma_n(x_n - x)^{-1}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , и рассмотрим операторы  $A = P^+ + \omega^- P^-$ ,

$$\begin{aligned} (Kf)(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{\omega^+(t) - \omega^+(x)}{t - x} f(t) dt, \quad (K_n f)(x) = \frac{1}{2\pi i} \times \\ &\times \int_R \frac{\omega_n(t) - \omega_n(x)}{t - x} f(t) dt. \end{aligned}$$

**Теорема 2.1.** В пространстве  $L_p(R, \rho)$  справедливо следующее операторное равенство:

$$K = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \sum_{k < n} \lambda_k \cdot K_n \cdot \exp \sum_{k > n} \lambda_k \cdot I, \quad (2.3)$$

где ряд, стоящий справа, сходится сильно.

◀ Поскольку операторы  $A$  и  $K$  связаны равенством  $K = P^+ A - P^-$ , то оператор  $K$  ограничен в пространстве  $L_p(R, \rho)$  а  $\operatorname{im} K \subset L_p^+(R, \rho)$ . Аналогичными свойствами обладают операторы  $K_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Введем также оператор

$$T_{j, m} = \sum_{n=-j}^m \exp \sum_{k < n} \lambda_k \cdot K_n \cdot \exp \sum_{k > n} \lambda_k \cdot I$$

и покажем, что  $\|T_{j, m}\| \leq c$ , где  $c$  не зависит от  $j, m$ . Кроме того, для любой функции  $f \in L_p(R, \rho)$  последовательность  $Kf \rightarrow T_{j, m} f$  при  $j, m \rightarrow \infty$  почти всюду на  $R$ . Поскольку  $Kf - T_{j, m} f \in L_p^+(R, \rho)$ , то по теореме Г. Ц. Тумаркина ([26], с. 268) ряд (2.3) будет сходиться сильно.

В самом деле

$$\begin{aligned}
 (T_{j,m}f)(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_R \sum_{n=-j}^m \left( \exp \left[ \sum_{k < n} \lambda_k(x) + \sum_{k > n} \lambda_k(t) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \exp \left[ \sum_{k < n} \lambda_k(x) + \sum_{k > n} \lambda_k(t) \right] \frac{f(t)}{t-x} dt = \right. \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_R \left( \exp \left[ \sum_{k < -j} \lambda_k(x) + \sum_{k > -j} \lambda_k(t) \right] - \exp \left[ \sum_{k < m} \lambda_k(x) + \sum_{k > m} \lambda_k(t) \right] \right) \frac{f(t)}{t-x} dt = \\
 &= \frac{1}{2} \exp \sum_{k < -j} \lambda_k \cdot S \cdot \exp \sum_{k > -j} \lambda_k \cdot f - \frac{1}{2} \exp \sum_{k < m} \lambda_k \cdot S \cdot \exp \sum_{k > m} \lambda_k \cdot f.
 \end{aligned}$$

Поэтому  $|T_{j,m}f| \leq |Sf| \leq c\|f\|$ , где  $c$  не зависит от  $j, m$ . Далее

$$\begin{aligned}
 2\pi i (K - T_{j,m})f &= \int_R \frac{\exp \sum_{k < -j} \lambda_k(t) - \exp \sum_{k < -j} \lambda_k(x)}{t-x} \exp \sum_{k > -j} \lambda_k(t) \cdot f(t) dt - \\
 &\quad - \exp \sum_{k < m} \lambda_k(x) \int_R \frac{\exp \sum_{k > m} \lambda_k(t) - \exp \sum_{k > m} \lambda_k(x)}{t-x} f(t) dt.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Пусть  $x \in X$ . Рассмотрим функцию

$$F_m(x) = \int_R \frac{\exp \sum_{k > m} \lambda_k(t) - \exp \sum_{k > m} \lambda_k(x)}{t-x} f(t) dt$$

и покажем, что  $|F_m(x)| \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Для этого, прежде всего, определим такое  $N$ , что

$$|F_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_{-N}^N \frac{\exp \sum_{k > m} \lambda_k(t) - \exp \sum_{k > m} \lambda_k(x)}{t-x} f(t) dt \right|$$

равномерно по  $m$ . Для этого введем характеристическую функцию  $1_M$  множества  $M = (-\infty, -N) \cup (N, \infty)$  и проведем следующие оценки:

$$\begin{aligned}
 &\left| \int_M \frac{\exp \sum_{k > m} \lambda_k(t) - \exp \sum_{k > m} \lambda_k(x)}{t-x} f(t) dt \right| \leq \\
 &\leq \|1_M f\| \left( \int_M \left| \frac{\exp \sum_{k > m} \lambda_k(t) - \exp \sum_{k > m} \lambda_k(x)}{t-x} \right|^q \rho^{1-q}(t) dt \right)^{1/q} \leq \\
 &\leq \|1_M f\| \left( \sup_M \left| \frac{\exp \sum_{k > m} \lambda_k(t) - \exp \sum_{k > m} \lambda_k(x)}{t-x} (t+i) \right|^q \right)^{1/q} \left( \int_M \frac{\rho^{1-q}(t)}{|t+i|^q} dt \right)^{1/q} \leq \\
 &\leq 2 \|1_M f\| \left( \int_M \rho^{1-q}(t) |t+i|^{-q} dt \right)^{1/q} \quad \text{для } N > 2|x| + 1.
 \end{aligned}$$

Увеличив, если это нужно,  $N$  и зафиксировав его, получаем далее, что

$$\begin{aligned}
 |F(x)| &\leq \left| \sum_{k>m} \exp \sum_{j=m+1}^{k-1} \lambda_j(x) \int_{-N}^N \frac{\exp \lambda_k(t) - \exp \lambda_k(x)}{t-x} \times \right. \\
 &\times \exp \sum_{j>k} \lambda_j(t) \cdot f(t) dt \left. + \frac{\varepsilon}{2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k>m} \int_{-N}^N \left| \frac{\exp [\lambda_k(t) - \lambda_k(x)] - 1}{t-x} \right| |f(t)| dt \leq \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} + W \left( \int_R |t^{1-q}(t)| |t+i|^{-q} dt \right)^{1/q} \sum_{k>m} \left( \sup_{|t|<N} \left| \frac{t+i}{t-x} \right| \times \right. \\
 &\times \sin \left. \frac{\sigma_k(t-x)}{2(x_k-t)(x_k-x)} \right|^q \Big)^{1/q} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \\
 &+ c \sum_{k>m} \left( \sup_{|t|<N} \left| \frac{\sigma_k(t+i)}{2(x_k-t)(x_k-x)} \right|^q \right)^{1/q} \leq \frac{\varepsilon}{2} + c \sum_{k>m} \frac{\sigma_k}{|x_k|} < \varepsilon
 \end{aligned}$$

для достаточно больших значений  $m$ .

Аналогично доказывается, что при  $j \rightarrow \infty$  первое слагаемое в равенстве (2.4) стремится к нулю. ►

Перейдем к описанию базисов в подпространстве  $K(L_p(R, \rho))$ . Следующее предложение устанавливает связь между этим вопросом и результатами предыдущего параграфа. Пусть  $\varepsilon_n \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Предложение 2.2.** *Оператор  $K_n$  в пространстве  $L_p(R, \rho)$  подобен оператору  $K_{\varepsilon_n}$  вида (1.1) (с заменой там  $\varepsilon$  на  $\varepsilon_n$ ) в пространстве  $L_p(R, \rho_n)$ , где  $\rho_n(t) = |t|^{\sigma-2} \rho(x_n - t^{-1})$ , т. е.  $K_n = T_n K_{\varepsilon_n} T_n^{-1}$ , где*

$$(T_n f)(x) = (x_n - x)^{-1} f((x_n - x)^{-1}), \quad (T_n^{-1} g)(t) = t^{-1} g(x_n - t^{-1}).$$

◀ Поскольку оператор  $T_n^{-1}$  осуществляет изоморфизм пространства  $L_p(R, \rho)$  на пространство  $L_p(R, \rho_n)$  и  $T_n S = S T_n$  [10], то утверждение предложения является следствием формулы  $K_n = P^+ (\omega_n - 1) P^-$ . ►

Теперь мы можем описать базисы в подпространстве  $K_n(L_p(R, \rho))$ .

Пусть  $s_n(z)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , ф. т. с. типа  $\frac{\sigma_n}{2}$ , все корни которой  $z_{nj}$  лежат в полосе ширины  $H_n$ , и расстояние между которыми превышает  $2h_n$ ,  $T_n = 2 \max \{H_n + h_n, 2h_n\}$ . Пусть далее  $l_{p, \varepsilon_n}(Z)$  — пространство последовательностей, суммируемых в степени  $p$  с весом  $\delta_n = \{\delta_{nj}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , где  $\delta_{nj} = |\rho_n + (z_{nj} + iT_n)|$ , а функция  $\rho_n(z)$  определена предложением 1.7 с заменой  $\rho$  на  $\rho_n$ . Полагая в предложении 1.12  $\alpha = 1$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\sigma}{2}$ ,  $\sigma = \sigma_n$ , получаем, что система функций

$$e_{nj}^+(z) = \frac{\exp \left[ \frac{i}{2} (z - z_{nj}) \varepsilon_n \right] s_n(z)}{\frac{1}{n} (z_{nj}) (z - z_{nj})}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (2.5)$$

образует базис в пространстве  $L_p^{z_n+}(R, \rho_n)$ , а коэффициенты разложения по этому базису принадлежат пространству  $L_{p, z_n}(Z)$ . Применяя к системе функций  $\{e_{nj}^+\}$  оператор  $T_n$ , в силу предложения 2.2 получаем такое утверждение.

**Предложение 2.3.** Следующая система функций образует базис в пространстве  $K_n(L_p(R, \rho))$

$$e_{nj}^+(x) = \frac{\exp \left[ \frac{i}{2} (x_n - x)^{-1} - z_{nj} \right] s_n((x_n - x)^{-1})}{s_n^{(i)}(z_{nj}) (1 - z_{nj}(x_n - x))}, \quad j \in Z. \quad (2.6)$$

Коэффициенты разложения по этому базису принадлежат пространству  $L_{p, z_n}(Z)$ , где

$$\delta_n = \{\delta_{nj}\}_{j \in Z} = \{|\rho_n(z_{nj} + iT_n)|\}_{j \in Z}. \quad (2.7)$$

**Замечание.** Используя представление внешних в смысле Бьелинга функций в виде экспоненты от интеграла Шварца ([24], с. 92), для функций  $\rho_{n+}(z)$  можно получить явное выражение.

Пусть  $M = Z \times Z$ ,  $s = (n, j) \in M$ . Рассмотрим систему функций:  $\{e_s^+\}_{s \in M} \subset L_p^+(R, \rho)$  следующего вида:

$$e_s^+ = \begin{cases} e_{-j}^+, s = (\infty, j), j \in Z, \\ \exp[i\sigma_- x] \cdot \prod_{k < n} \exp \lambda_k \cdot e_{nj}^+, s = (n, j), n, j \in Z, \end{cases} \quad (2.8)$$

где  $e_{nj}^+$  имеет вид (2.6) для  $n \in Z$  и вид (2.5) для  $n = \infty$ .

**Теорема 2.4.** Оператор  $A = P^+ + \omega^+ P^-$ , где  $\omega^+ = \exp(i\sigma_- x) \omega^+$ , а  $\omega^+$  имеет вид (2.2), непрерывно обратим справа в пространстве  $L_p(R, \rho)$ . Один из его правых обратных операторов имеет вид  $A^{-1} = P^+ + (\omega^+)^{-1} P^-$ . Кроме того,  $\dim \ker A = \infty$ , а система функций  $\{(1 - (\omega^+)^{-1}) e_s^+\}_{s \in M}$ , где  $e_s^+$  имеет вид (2.8), образует в  $\ker A$  базис.

В доказательстве нуждается лишь утверждение о подпространстве  $\ker A$ . Вначале покажем, что  $\ker(P^+ + \omega^+ P^-) = (1 - (\omega^+)^{-1}) \operatorname{im} K$ . Заметив, что  $\omega^- = (\omega^+)^{-1} \in H_-^-(R)$ , положим  $\varphi = Kf$ . Очевидно,  $\varphi \in L_p^+(R, \rho)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \omega^- \varphi &= -\frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{\omega^-(t) - \omega^-(x)}{t - x} \omega^+(t) f(t) dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{\omega^-(t) - \omega^-(x)}{t - x} g^+(t) dt = -\frac{1}{2} S \omega^- g^+ + \\ &\quad + \frac{1}{2} \omega^- g^+ = P^- \omega^- g^+, \end{aligned}$$

где  $g^+ = P^+[\omega^+ f]$ , т. е.  $\omega^- \operatorname{im} K \subset L_p^-(R, \rho)$ . Отсюда следует вложение  $(1 - \omega^-) \operatorname{im} K \subset \ker(P^+ + \omega^+ P^-)$ . Пусть теперь  $\varphi \in \ker(P^+ + \omega^+ P^-)$ . Тогда

$$\begin{aligned}\varphi^+ &= P^+ \varphi = -\omega^+ \varphi^- = -\frac{1}{2} \omega^+ \varphi^- - \frac{1}{2} S \omega^+ \varphi^- = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{\omega^+(t) - \omega^+(x)}{t - x} \varphi^-(t) dt,\end{aligned}$$

т. е.  $\varphi^+ \in \text{im } K$ . В силу предыдущего  $\varphi^- = -(\omega^+)^{-1} \varphi^+ \in L_p^-(R, \rho)$ , т. е.  $\varphi \in (1 - (\omega^+)^{-1}) \text{im } K$  и  $\ker (P^+ + \omega^+ P^-) \subset (1 - \omega^-) \text{im } K$ .

Теперь покажем, что

$$\ker A = (1 - (\omega^+)^{-1}) (L_p^{\sigma+}(R, \rho) \oplus E_{\sigma_{\infty}}(\text{im } K)). \quad (2.9)$$

Здесь  $\oplus$  — знак прямой суммы. Действительно, оператор  $A$  допускает разложение в композицию

$$A = (P^+ + E_{\sigma_{\infty}} P^-) (P^+ + \omega^+ P^-) (I - (I - E_{\sigma_{\infty}}) P^+ \omega^+ P^-), \quad (2.10)$$

где оператор, стоящий справа, непрерывно обратим и  $(I - (I - E_{\sigma_{\infty}}) P^+ \omega^+ P^-)^{-1} = I + (I - E_{\sigma_{\infty}}) P^+ \omega^+ P^-$ . Элементарными рассуждениями из равенства (2.10) получаем с учетом теоремы 1.3, что  $P^-(\ker A) = -(\omega^+)^{-1} \text{im } K - (\omega^+)^{-1} L_p^{\sigma+}(R, \rho)$ . Поэтому  $P^+(\ker A) = -\omega^+$ .

$P^-(\ker A) = L_p^{\sigma+}(R, \rho) + E_{\sigma_{\infty}}(\text{im } K)$  и  $\ker A = (1 - (\omega^+)^{-1}) (L_p^{\sigma+} \times \times (R, \rho) + E_{\sigma_{\infty}}(\text{im } K))$ . Осталось показать, что сумма в последнем равенстве прямая. Поскольку  $\text{im } K = P^+(\ker (P^+ + \omega^+ P^-))$ , то линейал  $E_{\sigma_{\infty}}(\text{im } K)$  замкнут. Если предположить, что  $f \in L_p^{\sigma+}(R, \rho) \cap E_{\sigma_{\infty}}(\text{im } K)$ , то  $f = 0$ , так как из  $f \in L_p^{\sigma+}(R, \rho)$  следует, что  $E_{\sigma_{\infty}}^{-1} f \in L_p^-(R, \rho)$ , в то время как  $\text{im } K \subset L_p^+(R, \rho)$ . Таким образом, формула (2.9) доказана.

Из теоремы 2.1 следует, что

$$\begin{aligned}M^+(X) &= L_p^{\sigma+}(R, \rho) \oplus E_{\sigma_{\infty}}(\text{im } K) = \\ &= L_p^{\sigma+}(R, \rho) \oplus E_{\sigma_{\infty}} \left( \sum_{j \in Z} \left( \prod_{k < j} \exp \lambda_k \right) \cdot \text{im } K_j \right).\end{aligned}$$

Покажем, что в этом равенстве знак  $\Sigma$  можно заменить на  $\oplus$ . Нам достаточно проверить, что для всех  $j \in Z$

$$\left( \prod_{k < j} \exp \lambda_k \right) \cdot \text{im } K_j \cap \overline{M_j^+(X)} = \{0\},$$

где  $M_j^+(X) = \sum_{\substack{n \in Z \\ n > j}} \prod_{k < n} \exp \lambda_k \cdot \text{im } K_n$ . Пусть  $f \in \left( \prod_{k < j} \exp \lambda_k \right) \cdot \text{im } K_j \cap \overline{M_j^+(X)}$ .

Тогда существует последовательность  $[f_s] \subset M_j^+(X)$ , сходящаяся к  $f$ . Функция  $f_j^+ = \exp \left( - \sum_{k < j} \lambda_k \right) \cdot f \in \text{im } K_j \subset L_p^+(R, \rho)$ . Поэтому  $g_j^+ = P^+$ .

$\exp \left[ - \sum_{k < j} \lambda_k \right] f_s \rightarrow f_j^+$ . Поскольку

$$\begin{aligned}g_s^+ &\in \text{im } \sum_{n > j} \exp \sum_{k < n} \lambda_k \cdot K_n = \\ &= \exp \left[ \sum_{k < j} \lambda_k \right] \cdot P^+(\ker (P^+ + \prod_{k < j} \omega_k \cdot P^-)),\end{aligned}$$

а последнее множество замкнуто, то вопрос сведен к равенству  $\text{im } K_l \cap \text{im } \sum_{n \geq j} \exp \sum_{k < n} \lambda_k \cdot K_n = \{0\}$ , которое доказывается аналогично формуле (2.9).

Учитывая предложение 2.2 и теорему 1.3, получаем, что

$$M^+(X) = L_p^{x+}(R, \rho) \oplus E_{\infty} \left( \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \left( \prod_{k < n} \exp \lambda_k \right) T_n (L_p^{x+}(R, \rho_n)) \right),$$

откуда в силу предложения 2.3 получаем справедливость утверждения теоремы относительно базиса в  $\ker A$ . ►

Как обычно (см., напр., [28], с. 406), проблема коэффициентов разложения функции  $\varphi \in M^+(X)$  по базису (2.8) сложнее вопроса описания самого базиса. Здесь мы остановимся лишь на двух частных случаях.

Пусть вначале  $p = 2$ ,  $\rho \equiv 1$ . Тогда стандартная техника гильбертова пространства приводит к такому результату.

**Предложение 2.5.** Если  $L_p(R, \rho) = L_2(R)$ , то система функций (2.8), где

$$e_{nj}^+ = (2\pi\sigma_n)^{-\frac{1}{2}} \frac{\exp[i\sigma_n x] - 1}{x - 2\pi j\sigma_n^{-1}}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$e_{nj}^+ = (2\pi\sigma_n)^{-\frac{1}{2}} \frac{\exp[i\sigma_n(x_n - x)^{-1}] - 1}{1 - 2\pi j\sigma_n^{-1}(x_n - x)}, \quad n, j \in \mathbb{Z},$$

образует ортогональный базис в пространстве  $M^+(X)$ .

Для того, чтобы  $\varphi \in M^+(X)$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi = \sum_{s \in M} c_s e_s^+, \quad \text{где} \quad \sum_{s \in M} |c_s|^2 < \infty.$$

► Коснемся лишь ортогональности базиса. Пусть вначале  $s_1 = (n, j)$ ,  $s_2 = (m, k)$ , где  $n \neq \infty$ ,  $m \neq \infty$ ,  $n \neq m$ . Тогда по теореме Коши

$$\begin{aligned} & \langle e_{s_1}^+, e_{s_2}^+ \rangle = \\ &= c \int_R \exp[i\sigma_n x] \prod_{r < n} \exp \lambda_r \cdot e_{nj}^+ \cdot \overline{\exp[i\sigma_m x] \prod_{r < m} \exp \lambda_r \cdot e_{mk}^+} = \\ &= c \left\{ \begin{aligned} & \int_R \prod_{m < r < n} \exp \lambda_r \cdot e_{nj}^+ \cdot \overline{\exp \lambda_m \cdot e_{mk}^+}, \quad n > m, \\ & \int_R \exp[-\lambda_n] e_{nj}^+ \cdot \overline{\prod_{n < r < m} \exp \lambda_r \cdot e_{mk}^+}, \quad n < m \end{aligned} \right\} = 0, \end{aligned}$$

так как  $\exp \lambda_m \cdot e_{mk}^+ \in L_2^+(R)$ ,  $\exp[-\lambda_m] e_{nj}^+ \in L_2^-(R)$ . Для  $n = \infty$  или  $m = \infty$  доказательство аналогично. Если же  $m = n$ , то

$$\langle e_{s_1}^+, e_{s_2}^+ \rangle = \int_R e_{nj}^+ \overline{e_{nk}^+} = \delta_{kj}, \quad k, j \in \mathbb{Z},$$

поскольку операторы  $T_n$  сохраняют в  $L_2(R)$  скалярное произведение. ►

Пусть теперь  $\alpha_n = 0$  для  $n \notin [n_1, n_2]$ ,  $n_1 < n_2$ , т. е. мы имеем дело лишь с конечным числом СПП-разрывов. Результаты этого паракрафа сохраняют силу. При этом  $M = [n_1, n_2] \times Z$ ,  $X = \{x_n, n_1 \leq n \leq n_2\}$ ,

$$M^+(X) = \bigoplus_{n=n_1}^{n_2} \left( \prod_{n_1 \leq k \leq n_2} \exp \lambda_k \right) T_n(L_p^{s_n+}(R, \rho_n)). \quad (2.11)$$

Введем пространство  $l_{p, \delta}(M)$  всех последовательностей  $\{c_s\}_{s \in M}$ , суммируемых на  $M$  в степени  $p$  с весом  $\delta = \{\delta_n\}_{n=n_1}^{n_2}$  вида (2.7)

$$\| \{c_s\} \| = \left( \sum_{n=n_1}^{n_2} \sum_{j \in Z} |c_{nj}|^p \delta_{nj} \right)^{1/p} < \infty.$$

Пусть  $\varphi \in M^+(X)$ . Тогда ([29], с. 46)  $\|\varphi\| \asymp \sum_{n=n_1}^{n_2} \|\varphi_n\|$ , где  $\varphi_n$  — проекция  $\varphi$  на  $n$ -ое подпространство прямой суммы (2.11). В силу предложений 1.13 и 2.3  $\|\varphi_n\| \asymp (\sum_{j \in Z} |c_{nj}|^p \delta_{nj})^{1/p}$ , где  $c_{nj}$  — коэффициенты разложения функции  $\varphi_n$  по базису (2.6). Поэтому  $\|\varphi\| \asymp \| \{c_s\} \|$ , и мы получаем, что справедливо следующее утверждение.

**Предложение 2.6.** В условиях теоремы 2.4, где  $\omega^+ = \prod_{n_1}^{n_2} \exp \lambda_n$ , система функций

$$e_s^+ = \prod_{n_1 \leq k \leq n_2} \exp \lambda_k \cdot e_{nj}^+, \quad s = (n, j), \quad n \in [n_1, n_2], \quad j \in Z,$$

образует в  $\ker A$  базис. Для того, чтобы  $\varphi \in \ker A$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\varphi = \sum_{s \in M} c_s e_s^+$ , где  $\{c_s\} \in l_{p, \delta}(M)$ .

Ростовский-на-Дону государственный  
университет

Поступила 20. VII. 1984

Վ. Բ. ԴԻԲԻՆ. Հաշվելի բովո՞ւ Լգակիւթյուններ ունեցող անալիթիկ ֆունկցիաների տարածութիւններու բազիսների վերաբերյալ (ամփոփում)

Հաշվելի է  $\rho$ . Ցա. Լիւնի թեորեմը էքսպոնենցիալ տիպի  $f(x)$ ,  $x \in C^1$ ,  $f(x) \in L_p(R)$ ,  $1 < p < \infty$  ամբողջ ֆունկցիաների բազիսների մասին: Այդ թեորեմը տարածվում է  $f(x) \in L_p \times \times (R, \rho)$ ,  $\rho \in A_p$  դեպքի վրա: Արդյունքը կիրառվում է  $A$  օպերատորի կորիզի բնութագրման խնդրում, որտեղ  $A$ -ն սինգուլյար օպերատոր է  $R$ -ի վրա, որի գործակիցներն ունեն հաշվելի բովո՞ւ համարյա պարբերական թռիչքներ:

#### V. B. DYBIN. Bases in analytic function spaces with a countable number of singular points (summary)

There is a well known B. Ya. Levin theorem concerning bases in the space of exponential type entire functions  $f(x)$ ,  $x \in C^1$ ,  $f(x) \in L_p(R)$ ,  $1 < p < \infty$ . This theorem is extended to the case  $f(x) \in L_p(R, \rho)$  with  $\rho \in A_p$ . An application is given to the characterization of  $\ker A$ ,  $A$  being a singular integral operator on  $R$  with the coefficients admitting a countable set of almost-periodic jumps.

## ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ц. Гохберг, А. А. Семенчул. Теплицевы матрицы, составленные из коэффициентов Фурье функций с разрывами почти-периодического типа, Матем. исследования, Кишинев, 1970, т. 4, 63—83.
2. А. А. Семенчул. О сингулярных интегральных уравнениях с коэффициентами, имеющими разрывы почти-периодического типа, Матем. исследования, Кишинев, 1971, т. 6, в. 3 (21), 92—114.
3. В. Б. Дыбин. О сингулярном интегральном операторе на вещественной оси с почти-периодическими коэффициентами, Сб. «Теория функций, диф. ур-ия и их прилож.», Элжста, 1976, 98—108.
4. С. М. Грудский, В. Б. Дыбин. Красная задача Римана с разрывами почти-периодического типа у ее коэффициента, ДАН СССР, 1977, т. 237, № 1, 21—24.
5. С. М. Грудский, В. Б. Дыбин. Красная задача Римана в пространстве  $L_p(\Gamma, \rho)$  с почти-периодическими разрывами у ее коэффициента, Математ. исследования, Кишинев, 1980, в. 54, 36—49.
6. С. М. Грудский. Класс особых случаев красной задачи Римана, порождающих одно-сторонние обратимые сингулярные интегральные операторы, Ростов н/Д, 1980, деп. в ВИНТИ, № 2339-80 и № 2340-80.
7. С. М. Грудский. Красная задача Римана с бесконечным индексом в классах суммируемых функций, Автореферат диссертации, Ростов н/Д, РГУ, 1981.
8. В. Б. Дыбин, Г. В. Додохова. Корректная постановка красной задачи Римана на прямой с почти-периодическим разрывом коэффициента, Сб. «Мат. анализ и его прилож.», изд. РГУ, Ростов н/Д, 1982, 12—22.
9. В. Б. Дыбин, Г. В. Додохова. Корректная постановка красной задачи Римана на замкнутом контуре в случае почти-периодических разрывов у ее коэффициента, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1983, XVIII, № 5, 380—393.
10. В. Б. Дыбин. Корректные постановки красной задачи Римана при стандартных почти-периодических разрывах у ее коэффициента, Math. Nachr., т. 120, 1985.
11. М. М. Джрбашян. Разложение по системе рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1967, т. 2, № 1, 3—51.
12. Б. Я. Левин. Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа, Сб. «Матем. физика, функц. анализ», ФТИНТ АН УССР, Харьков, 1969, 1, 136—146.
13. М. М. Джрбашян, С. Г. Рафаэлян. О целых функциях экспоненциального типа из весовых классов  $L_p$ , ДАН Арм.ССР, 73, 1, 29—36.
14. Г. М. Айрапетян. О базисе рациональных функций в подпространствах классов Харди  $H_p$  ( $1 < p < \infty$ ), Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1973, т. 8, № 6, 429—450.
15. Н. К. Никольский, П. С. Павлов, С. В. Хрущев. Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер, I—IV, препринты ЛОМИ, P-8-80-P-11-80, Ленинград, 1980.
16. С. Г. Рафаэлян. Интерполяция и базисность в весовых классах целых функций экспоненциального типа, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1983, 18, 3, 167—186.
17. R. A. Hunt, B. Muckenhoupt, R. L. Wheeden. Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform, Trans. Amer. Soc., 1973, 176, 227—251.
18. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации, М., «Наука», 1965.
19. Е. М. Дынкин, Б. П. Осиленкер. Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения, Итоги науки и техники. Математический анализ, 1983, т. 21, 42—129.
20. Б. Я. Левин. Целые функции, Изд. МГУ, Москва, 1971.
21. Б. Я. Левин, Ю. И. Любарский. Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения и ряды экспонент, Изв. АН СССР, сер. матем., 1975, 39, № 3, 657—702.
22. R. Rocheberg. Toeplitz operators on weighted  $H_p$  spaces, Indiana Univ. Math. J., 1977, 21, № 2, 291—298.

23. Е. М. Дынькин. Оценки аналитических функций в жордановых областях, Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1977, 73, 70—80.
24. К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций, М., ИЛ, 1963.
25. Л. И. Ронкин. Введение в теорию целых функций многих переменных, М., «Наука», 1971.
26. И. И. Привалов. Граничные свойства однозначных аналитических функций, М., «Наука», 1950.
27. Р. С. Гутер, П. Л. Ульянов. О новых результатах в теории ортогональных рядов, в кн.: С. Качмаж, Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов, М., Физматгиз, 1958.
28. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник. Введение в теорию одномерных интегральных сингулярных операторов, Кишинев, «Штиинца», 1973.

УДК 517.946

С. А. АЙРАПЕТЯН

# О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В КЛАССЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА

1°. Пусть  $S$ —пространство Шварца бесконечно дифференцируемых и быстроубывающих функций в  $R^n$ ,  $S'$ —пространство линейных непрерывных функционалов над  $S$ .

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t) + f(t), \quad t > 0, x \in R^n. \quad (1)$$

где  $P(\tau)$ —квадратная матрица порядка  $m$ , элементы которой полиномы по переменным  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ ,  $i$ —мнимая единица. Компоненты свободного члена  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$  и искомого решения  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ , при фиксированном  $t > 0$  являются функциями из  $S'$ . Производные по  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) понимаются в обобщенном смысле, а производная по  $t$  в слабом смысле, т. е.  $\left(\frac{du(t)}{dt}, \varphi\right)$ —обычная производная  $(u(t), \varphi)$  по  $t$  при фиксированной  $\varphi$ .

Будем говорить, что  $l$  раз непрерывно дифференцируемый по  $t$  вектор  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) : [0, +\infty) \rightarrow S^m$  принадлежит классу  $E_l'(S^m)$ , если существуют положительные постоянные  $C, c_1, c_2$  и натуральное число  $j$  такие, что имеют место следующие оценки:

$$\left| \left( \frac{\partial^l u(t)}{\partial t^l}, \varphi \right) \right| \leq C(1+t)^{c_1} \sup_{x \in R^n} \left\{ (1+|x|^2)^{c_2} \sum_{|k| \leq j} |D^k \varphi(x)| \right\}, \quad i = 0, 1, \dots, l \quad (2)$$

$$\text{при } t \geq 0, \varphi \in S, \text{ где } \left| \left( \frac{\partial^l u(t)}{\partial t^l}, \varphi \right) \right| = \left| \left( \frac{\partial^l u(t)}{\partial t^l}, \varphi \right) \right| + \dots + \\ + \left| \left( \frac{\partial^l u_m(t)}{\partial t^l}, \varphi \right) \right|, \quad k \in Z_+^n.$$

Считаем, что заданная в полупространстве  $t \geq 0, x \in R^n$  бесконечно дифференцируемая по  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и  $l$  раз непрерывно дифференцируемая по  $t$  вектор-функция  $u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_m(t, x))$  принадлежит  $M'$ , если его компоненты удовлетворяют оценкам

$$|D_i^l D_x^k u_j(t, x)| \leq C_k (1+t^{c_1}) (1+|x|^2)^{c_2}, \quad i = 0, 1, \dots, l, j = 1, \dots, m, k \in Z_+^n, \quad (3)$$

где  $C_k, \alpha_1, \alpha_2$  — постоянные, зависящие от  $u(t, x)$ , причем  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  не зависят от  $k$ .

Пусть  $I$  — единичная  $m$ -мерная матрица,  $\lambda_1(\sigma), \dots, \lambda_m(\sigma)$  — корни характеристического уравнения

$$\det(\lambda I - P(\sigma)) = 0, \quad \sigma \in R^n, \quad (4)$$

расположенные в порядке возрастания их действительных частей, т. е.

$$\operatorname{Re} \lambda_1(\sigma) \leq \operatorname{Re} \lambda_2(\sigma) \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_m(\sigma), \quad \sigma \in R^n. \quad (5)$$

Предположим, что

$$\operatorname{Re} \lambda_r(\sigma) \leq 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_{r+1}(\sigma) \geq 0, \quad \sigma \in R^n, \quad (6)$$

причем  $\operatorname{Re} \lambda_{r+1}(\sigma) = 0$  в конечном числе точек  $\sigma$ , где  $r$  — постоянное целое число, не зависящее от  $\sigma$ .

Задача типа Коши для системы (1) в классе  $H$ , состоящем при фиксированном  $t$  из функций класса  $L_2^m(R^n)$  и их обобщенных производных любого порядка, растущих при  $t \rightarrow +\infty$  не быстрее полинома, исследована в работах [1—3]. Вопросы существования и единственности решения такой задачи для системы (1) и для одного уравнения высокого порядка с нулевыми свободными членами в классах  $E_t^l(S'^m)$  рассмотрены в работах [4—7, 11]. Отметим, что класс  $E_t^l(S'_m)$  шире чем класс  $H$ . В класс  $H$  не входят полиномы, в том числе и константы, а в  $E_t^l(S'^m)$  входят все полиномы.

Основной результат настоящей работы сформулируем в виде двух теорем.

**Теорема 1.** Пусть корни характеристического уравнения (4) удовлетворяют условиям (5) и (6), причем  $\operatorname{Re} \lambda_{r+1}(\sigma) = 0$  в конечном числе точек  $\sigma$ , тогда система дифференциальных уравнений (1) имеет решение из класса  $E_t^1(S'^m)$ , если свободный член  $f$  — функционал из класса  $E_t^0(S'^m)$ .

**Теорема 2.** При условиях теоремы 1, если  $f = f(t, x)$  — обычная функция из  $M^0$ , то система (1) имеет решение из класса  $M^1$ .

2°. Для простоты изложения будем предполагать, что равенство  $\operatorname{Re} \lambda_{r+1}(\sigma) = 0$  в (6) достигается в единственной точке  $\sigma = 0$ . Тогда верны следующие оценки [8]:

$$|\lambda_j(\sigma)| \leq C_0(1 + |\sigma|^2)^{N_0}, \quad \sigma \in R^n, \quad j = 1, \dots, m, \quad (7)$$

$$|\operatorname{Re} \lambda_{r+1}(\sigma)| \geq c_1 |\sigma|^\alpha (1 + |\sigma|^2)^{-N_1}, \quad \sigma \in R^n, \quad (8)$$

где  $C_0, N_0, c_1, N_1$  и  $\alpha$  — некоторые положительные константы.

Обозначим

$$P^\pm(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^\pm(\sigma)} (\lambda I - P(\sigma))^{-1} d\lambda, \quad \sigma \in R^n, \quad (9)$$

где  $\gamma^+(\sigma)$  — замкнутый контур в полуплоскости  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ , охватывающий все корни характеристического уравнения с  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ ,  $\gamma^-(\sigma)$  — контур, охватывающий корни только с  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ . Матрицы  $P^\pm(\sigma)$  бесконечно дифференцируемы всюду, кроме, быть может, точки нуль. Из оценок (7) и

(8) следует, что контуры  $\gamma^{\pm}(\sigma)$  можно выбрать так, что для элементов матриц  $P^{\pm}(\sigma)$  имеют место неравенства

$$|D^k P_{ij}^{\pm}(\sigma)| \leq C_k |\sigma|^{-\alpha_k} (1 + |\sigma|^2)^{N_k}, \quad \sigma \neq 0, \quad k \in Z_+^n, \quad (10)$$

где  $C_k, \alpha_k, N_k$  — вполне определенные положительные константы.

В дальнейшем используются следующие формулы, доказанные в [9]:

$$e^{tP(\sigma)} P^{-}(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^{-}(\sigma)} e^{\lambda t} (\lambda I - P(\sigma))^{-1} d\lambda, \quad (11)$$

$$e^{-tP(\sigma)} P^{+}(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^{+}(\sigma)} e^{-\lambda t} (\lambda I - P(\sigma))^{-1} d\lambda, \quad (12)$$

$$P^{+}(\sigma) + P^{-}(\sigma) = I. \quad (13)$$

Используя оценки (7), (8) и (10) в работе [11] доказывается, что элементы  $e_{ij}^{\pm}(t, \sigma)$  матрицы  $e^{tP(\sigma)} P^{\pm}(\sigma)$  бесконечно дифференцируемы при  $t > 0$ ,  $\sigma \neq 0$  и вместе с производными по  $\sigma$  удовлетворяют оценкам

$$|D_s^k e_{ij}^{\pm}(t, \sigma)| \leq C_k (1 + t^{\alpha_k}) |\sigma|^{-\alpha_k} (1 + |\sigma|^2)^{m_k}, \quad \sigma \neq 0, \quad t \geq 0. \quad (14)$$

Аналогично доказывается следующая

**Лемма 1.** Элементы  $e_{ij}^{\pm}(t, \sigma)$  матрицы  $e^{-tP(\sigma)}$  бесконечно дифференцируемы при  $\sigma \neq 0$ ,  $t \geq 0$  и вместе с производными по  $\sigma$  удовлетворяют оценкам

$$|D_s^k e_{ij}^{\pm}(t, \sigma)| \leq C_k (1 + t^{\alpha_k} |\sigma|^{-\alpha_k} (1 + |\sigma|^2)^{m_k} e^{-c_1 t |\sigma|^{\alpha} (1 + |\sigma|^2)^{-N_1}}). \quad (15)$$

3°. Переходим к нахождению частного решения системы (1). Преобразование Фурье по  $x$  приводит эту систему к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра  $\sigma$ :

$$\frac{dV(t)}{dt} = P(\sigma) \dot{V}(t) + g(t), \quad t > 0, \quad \sigma \in R^n, \quad (16)$$

где  $V(t)$  и  $g(t)$  — преобразования Фурье решения  $u(t)$  и свободного члена  $\dot{f}(t)$  системы (1), соответственно. Так как функционал  $\dot{f}(t)$  принадлежит  $E_t^0(S^m)$ , то  $g(t) \in E_t^0(S^m)$ ,  $V(t)$  ищется в  $E_t^1(S^m)$ .

Пусть  $h(\sigma)$  — бесконечно дифференцируемая в  $R^n$  функция, удовлетворяющая условию:  $h(\sigma) = 0$  при  $|\sigma| \leq 1$  и  $h(\sigma) = 1$  при  $|\sigma| \geq 2$ . Обозначим

$$g^{\pm}(t) = P^{\pm}(\sigma) g(t), \quad \sigma \neq 0, \quad t \geq 0. \quad (17)$$

(Корректность таких обозначений следует из (10)).

Из равенства (9) вытекает, что

$$g^{+}(t) + g^{-}(t) = g(t), \quad \text{при } \sigma \neq 0. \quad (18)$$

Определим последовательности  $V_{\nu}^{\pm}(t)$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$  на функциях  $\varphi \in S$  следующим образом:

$$(V_{\nu}^{-}(t), \varphi) = \int_0^t (e^{(t-\tau)P(\sigma)} g^{-}(\tau), h(\nu\sigma) \varphi(\sigma)) d\tau, \quad (19)$$

$$(V_{\nu}^{+}(t), \varphi) = - \int_0^{\infty} (e^{-\tau P(\sigma)} g^{+}(t+\tau), h(\nu\sigma) \varphi(\sigma)) d\tau. \quad (20)$$

**Лемма 2.** Если  $g(t)$  — функционал из  $E_t^0(S^m)$ , то функционалы  $V_{\nu}^{\pm}(t)$ ,  $\nu=1, 2, \dots$ , определяемые равенствами (19), (20), принадлежат  $E_t^1(S^m)$ .

**Доказательство.** Используя обозначения (17) для оценки подынтегрального выражения (20), получим

$$\begin{aligned} & |(e^{-\tau P(\sigma)} g^{+}(t+\tau), h(\nu\sigma) \varphi(\sigma))| \leq \\ & \leq \sum_{i,j=1}^m (g_j(t \bullet \tau) e_{ij}^{+}(\tau, \sigma) h(\nu\sigma) \varphi(\sigma)), \end{aligned}$$

где  $g_j(t)$ ,  $j=1, 2, \dots, m$  — компоненты функционала  $g(t)$ , а  $e_{ij}^{+}(\tau, \sigma)$  — элементы матрицы  $e^{-\tau P(\sigma)} P^{+}(\sigma)$ . Но так  $g(t) \in E_t^0(S^m)$ , то существуют положительные постоянные  $C$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  и натуральное число  $j_0$  такие, что имеет место

$$\begin{aligned} & |(g_j(t+\tau), e_{ij}^{+}(\tau, \sigma) h(\nu\sigma) \varphi(\sigma))| \leq C(1+(t+\tau)^{c_1}) \cdot \\ & \cdot \sup_{|\sigma| \geq 1/\nu} [(1+|\sigma|^2)^{c_2} \sum_{|k| < j_0} |D_{\sigma}^k [e_{ij}^{+}(\tau, \sigma) h(\nu\sigma) \varphi(\sigma)]|]. \end{aligned} \quad (21)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} J_1(t, \tau) &= C(1+(t+\tau)^{c_1}) \sup_{1/\nu < |\sigma| \leq 2} \{ (1+|\sigma|^2)^{c_2} \times \\ & \times \sum_{|k| < j_0} |D_{\sigma}^k [e_{ij}^{+}(\tau, \sigma) h(\nu\sigma) \varphi(\sigma)]| \}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} J_2(t, \tau) &= C(1+(t+\tau)^{c_1}) \sup_{|\sigma| \geq 2} \{ (1+|\sigma|^2)^{c_2} \times \\ & \times \sum_{|k| < j_0} |D_{\sigma}^k [e_{ij}^{+}(\tau, \sigma) h(\nu\sigma) \varphi(\sigma)]| \}. \end{aligned} \quad (23)$$

Из оценок (15) имеем

$$\begin{aligned} & |D_{\sigma}^k [e_{ij}^{+}(\tau, \sigma) h(\nu\sigma) \varphi(\sigma)]| \leq C_k (1+\tau^{n_k}) (1+|\sigma|^2)^{m_k} \cdot \\ & \cdot e^{-c_1 \tau} |\sigma|^{n_k} (1+|\sigma|^2)^{-N_1} \sum_{p \leq k} |\sigma|^{-2p} |D_{\sigma}^{k-p} [h(\nu\sigma) \varphi(\sigma)]|. \end{aligned} \quad (24)$$

Пусть  $K$  — постоянная, превосходящая все значения  $|D^k h(\sigma)|$ ,  $|k| \leq j_0$ , тогда  $|D^k h(\nu\sigma)| \leq K \nu^{|k|}$ , причем  $D^k h(\nu\sigma) = 0$ , если  $|k| \neq 0$  и  $|\sigma| \geq 2/\nu$ . Из этих оценок и из (24) получаем

$$J_2(t, \tau) \leq C, (1+(t+\tau)^{c_1}) (1+\tau^{n_{j_0}}) e^{-c_1 \tau} \nu^{-2} \sup_{1/\nu < |\sigma| < 2} \sum_{|k| < j_0} |D^k \varphi(\sigma)|, \quad (25)$$

$$J_{\nu}^{\cdot}(t, \tau) \leq C' 1 + (t + \tau)^{c_1} (1 + \tau^{n_{j_0}}) \times \\ \times \sup_{|\sigma| \geq 2} |e^{-c' \cdot (1 + |\sigma|^n)} - N_1| (1 + |\sigma|^n)^{m_{j_0}} \sum_{|k| \leq j_0} |D^k \varphi(\sigma)|, \quad (26)$$

Отметим, что постоянные, входящие в (26), не зависят от  $\nu$ .

Рассмотрим функцию

$$G_N(\rho, \tau) = \rho^{-N} e^{-c' \cdot \tau} \tau^{-N_1}, \quad \rho \geq 5, \quad \tau \geq 0,$$

где  $N$  — натуральное число, а  $c'$  и  $N_1$  — положительные постоянные, входящие в (26). Исследуя на экстремум, можно убедиться, что функция  $G_N(\rho, \tau)$  при  $\tau \rightarrow +\infty$  имеет асимптотику  $G_N(\rho, \tau) = O(\tau^{-N/N_1})$ . Следовательно  $J_{\nu}^{\cdot}(t, \tau)$  имеет оценку

$$J_{\nu}^{\cdot}(t, \tau) \leq C'' (1 + (t + \tau)^{c_1}) (1 + \tau^{n_{j_0}}) (1 + \tau)^{-N/N_1} \cdot \\ \cdot \sup_{\sigma \in R^n} [(1 + |\sigma|^2)^{m_{j_0} + N} \sum_{|k| \leq j_0} |D^k \varphi(\sigma)|]. \quad (27)$$

Если взять в (27)  $N$  достаточно большим, то из (25) и (27) следует сходимости интеграла (20), а также следующая оценка:

$$|(V_{\nu}^{\pm}(t), \varphi)| \leq C'_{\nu} (1 + t^{c_1}) \sup_{\sigma \in R^n} [(1 + |\sigma|^2)^{m_{j_0} + N} \sum_{|k| \leq j_0} |D^k \varphi(\sigma)|], \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (28)$$

Оценка (28) для  $(V_{\nu}^{\pm}(t), \varphi)$  получается аналогичным образом. Существование производных  $(\frac{d}{dt} V_{\nu}^{\pm}(t), \varphi)$  и оценки вида (28) для них следует

из определения функционалов  $V_{\nu}^{\pm}(t)$ . Лемма 2 доказана.

Пусть  $S_j[0]$  — класс функций из  $S$ , равных нулю вместе с производными до порядка  $j$  в точке 0.

**Лемма 3.** Если  $g(t) \in E_t^0(S'^m)$  и  $\varphi \in S_j[0]$  при достаточно большом  $j$ , то последовательности вектор-функций (19), (20), а также их производные первого порядка, имеют пределы при  $\nu \rightarrow \infty$  для каждого  $t \geq 0$ , причем предельные функции удовлетворяют оценке (2) при  $i=0, 1$ .

**Доказательство.** Пусть  $g(t) \in E_t^0(S'^m)$  и удовлетворяет оценке (2) при  $j=j_0$ . Пусть далее  $\varphi \in S_j[0]$ , где  $j \geq j_0$ . Тогда если  $|k| \leq j$ , то

$$|D^k \varphi(\sigma)| \leq |\sigma|^{j-|k|} \sup_{|\sigma'| < |\sigma|} \sum_{|p|=j} |D^p \varphi(\sigma')|. \quad (29)$$

Так как  $|D^p h(\nu \sigma)| \leq K \nu^{|p|}$ , то при  $1/\nu \leq |\sigma| \leq 2/\nu$  имеем

$$|D^k h(\nu \sigma) \varphi(\sigma)| \leq K \left( \sum_{p \leq k} C_p^0 2^p \right) \cdot |\sigma|^{j-|k|} \sup_{|\sigma'| < |\sigma|} \sum_{|p|=j} |D^p \varphi(\sigma')|. \quad (30)$$

Если  $|\sigma| \geq 2/\nu$ , то  $h(\nu \sigma) = 1$  и тогда  $h(\nu \sigma) \varphi(\sigma) = \varphi(\sigma)$  удовлетворяет оценке (29). Из оценок (24), (25), (30), используя обозначения (22), получаем

$$j_*(t, \tau) \leq C_1 (1 + (t + \tau)^{c_1}) (1 + \tau^{n_{j_0}}) \cdot \sup_{1/\tau < |\sigma| < 2} [e^{-c' \tau |\sigma|^a} |\tau|^{j-a'} \sum_{|k|=j} D^k \varphi(\tau) |], \quad (31)$$

где  $C_1$  — постоянная, не зависящая от  $\nu$ , а  $a' = \max \{j_0, \alpha_k; |k| \leq j_0\}$ .

Рассмотрим функцию

$$G_j(\rho, \tau) = \rho^{j-a'} e^{-c' \tau \rho^a}; \quad \rho \in [0, 2], \quad \tau \geq 0,$$

где  $j \geq a'$  — натуральное число,  $\alpha$  и  $c'$  — константы, входящие в (31). Как и выше доказывалось, что при  $\tau \rightarrow +\infty$  функция  $G_j(\rho, \tau)$  имеет асимптотику  $O(\tau^{-\frac{j-a'}{a}})$ .

Отсюда и из оценки (31) следует, что

$$j_*(t, \tau) \leq C_2 (1 + (t + \tau)^{c_1}) (1 + \tau^{n_{j_0}}) (1 + \tau)^{-\frac{j-a'}{a}} \sup_{|\sigma| < 2} \sum_{|k|=j} |D^k \varphi(\sigma)|. \quad (32)$$

Если взять в (32)  $j$  достаточно большим, а именно,  $j > a' + \alpha(c_1 + n_{j_0}) + 1$ , то из оценок (26), (32) получаем равномерную по  $\nu$  оценку

$$|(V_\nu^+(t), \varphi)| \leq C_3 (1 + t^{c_1}) \sup_{\sigma \in R^n} [(1 + |\sigma|^2)^{c'} \sum_{|k|=j} |D^k \varphi(\sigma)|], \quad \varphi \in S_j \setminus \{0\}. \quad (33)$$

Оценки вида (33) для  $(V_\nu^-(t), \varphi)$ , а также для производных  $(\frac{d}{dt} V_\nu^\pm(t), \varphi)$  доказываются аналогично.

Из неравенства (33) и определения функции  $h(\sigma)$  следует, что последовательности  $(\frac{d^i}{dt^i} V_\nu^\pm(t), \varphi)$ ,  $i=0, 1$  фундаментальны при каждом  $t \geq 0$ , если  $\varphi \in S_j \setminus \{0\}$ , причём предельные функции

$$(V_0^\pm(t), \varphi) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (V_\nu^\pm(t), \varphi), \quad \varphi \in S_j \setminus \{0\} \quad (34)$$

удовлетворяют оценке (2) при  $i=0, 1$  и лемма 3 доказана.

Пусть

$$(V_\nu(t), \varphi) = (V_\nu^+(t), \varphi) + (V_\nu^-(t), \varphi), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (35)$$

Из равенств (11)–(13), (19) и (20) следует, что

$$\left( \left[ \frac{d}{dt} - P(\sigma) \right] V_\nu(t), \varphi \right) = (g(t), h(\nu \sigma) \varphi(\sigma)), \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (36)$$

Если  $\varphi \in S_j \setminus \{0\}$  при  $j > j_0$ , то из определения функции  $h(\sigma)$  и оценки (30) вытекает, что последовательность функции  $\varphi_\nu(\sigma) = (1 - h(\nu \sigma)) \varphi(\sigma)$  сходится к нулю равномерно вместе с производными до порядка  $j_0$ . Но так как  $g(t)$  удовлетворяет оценке (2) при  $j=j_0$  и  $i=0$ , то

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (g(t), h(\nu \sigma) \varphi(\sigma)) = (g(t), \varphi(\sigma)), \quad \varphi \in S_j \setminus \{0\}. \quad (37)$$

Переходя в (36) к пределу при  $\nu \rightarrow \infty$  и используя соотношения (34), (35) и (37), получаем

$$\left( \left[ \frac{d}{dt} - P(\sigma) \right] V_0(t), \varphi \right) = (g(t), \varphi), \quad \varphi \in S_j \setminus \{0\} \quad (38)$$

при достаточно большом  $j$ .

Для доказательства теоремы 1 нам остается продолжить функционал  $V_0(t)$  из  $S_j \setminus \{0\}$  на все  $S$ , не нарушая оценки (2) так, чтобы он удовлетворял уравнению (38) при всех  $\varphi \in S$ .

Пусть  $\varphi$  — произвольная функция из  $S$ . Представим ее в виде

$$\varphi(\sigma) = \beta(\sigma) \sum_{|k| \leq j} D^k \varphi(0) \frac{\sigma^k}{k!} + \varphi_j(\sigma), \quad (39)$$

где  $\beta(\sigma)$  — функция из  $S$ , равная 1 при  $|\sigma| \leq \frac{1}{2}$  и 0 — при  $|\sigma| > 1$ , а  $\varphi_j \in S_j \setminus \{0\}$ .

Продолжение будем искать в виде

$$(V(t), \varphi) = \sum_{|k| \leq j} c_k(t) D^k \varphi(0) + (V_0(t), \varphi_j), \quad (40)$$

где вектор-функции  $c_k(t)$  непрерывно дифференцируемы и при  $t \rightarrow +\infty$  растут не быстрее полинома, вместе с производными первого порядка.

Подставляя  $(V(t), \varphi)$  из (40) в уравнение (16) и учитывая уравнение (38), для определения  $c_k(t)$ , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешимость которой в классе функций, стремящихся к бесконечности не быстрее полинома, доказана в [1], стр. 291.

4°. Пусть теперь  $f(t, x)$  — обычная вектор-функция из класса  $M^0$ . Вначале докажем, что система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = P \left( i \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x) + \Delta_x^\mu f(t, x) \quad (1')$$

имеет решение в классе  $M^1$ , где  $\mu$  — достаточно большое натуральное число, а  $\Delta_x$  — оператор Лапласа в  $R^n$  по  $x$ .

Пронизводя преобразование Фурье по  $x$  в (1'), получим систему

$$\frac{dV(t)}{dt} = P(\sigma) V(t) + |\sigma|^{2\mu} g(t), \quad (16')$$

где  $g(t) = F_x[f(t, x)]$ . Так как  $f(t, x)$  удовлетворяет оценке (3), то  $g(t) \in E_i^0(S'^m)$  и удовлетворяет оценке (2) при  $j \geq 2\alpha_2 + n + 1$ ,  $i = 0$ . Отсюда следует, что последовательности функционалов  $V_\pm^\pm(t)$ , заданных на  $S$  равенствами

$$(V_\tau^-(t), \varphi) = \int_0^t e^{(t-\tau)P(\sigma)} g^-(\tau), |\sigma|^{2\mu} h(\nu\sigma) \varphi(\sigma) d\tau, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (19')$$

$$(V_\tau^+(t), \varphi) = \int_0^\infty e^{-\tau P(\sigma)} g^+(t+\tau), |\sigma|^{2\mu} h(\nu\sigma) \varphi(\sigma) d\tau, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (20')$$

определены корректно и принадлежат  $E_i^1(S'^m)$ .

За счет выбора  $\mu$  можно достичь того, чтобы функция  $|\sigma|^{2\mu} \varphi(\sigma)$

принадлежала классу  $S_j | 0 |$  при достаточно большом  $j$  для всех  $\varphi \in S$ , так что предельный функционал

$$V_0(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} |V_j^+(t) + V_j^-(t)|, \quad t > 0 \quad (41)$$

задан на всех функциях  $\varphi \in S$ , принадлежит  $E_i(S^m)$  и является решением системы (16'). Имеет место следующая

**Лемма 4.** Если  $f(t, x) \in M^n$  и  $\mu$  — достаточно большое натуральное число, то обратное преобразование Фурье функционала  $V_0(t)$ , определяемого равенством (41), является обычной вектор-функцией из класса  $M^1$ .

**Доказательство.**  $i$ -я компонента вектор-функций  $(V_j^+(t), \varphi)$

$$(V_j^+(t), \varphi)_i = - \sum_{j=1}^m \int_0^{\infty} (g_j(t+\tau), |z|^{2\mu} e_{ij}^+(\tau, \sigma) h(\nu \sigma) \varphi(\sigma)) d\tau, \quad i=1, \dots, m,$$

где  $g_j(t)$  —  $j$ -тая компонента функционала  $g(t) = F_x[f(t, x)]$ , а  $e_{ij}^+(\tau, \sigma)$  — элемент матрицы  $e^{-\tau P(\sigma)} P^+(\sigma)$ .

Обозначим через  $z^{ij}(\tau, x)$  преобразование Фурье функции

$$\frac{|z|^{2\mu} e_{ij}^+(\tau, \sigma) h(\nu \sigma)}{(1 + |z|^2)^\mu}$$

по переменным  $z = (z_1, \dots, z_n)$ . Повторением рассуждений, примененных в леммах 2, 3 доказывается, что если  $\mu$  и  $s-\mu$  — достаточно большие натуральные числа, то  $z^{ij}(\tau, x)$  непрерывна при  $\tau \geq 0$ ,  $x \in R^n$  и удовлетворяет оценке

$$|z^{ij}(\tau, x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|^2)^{\frac{s-\mu}{2}} (1 + \tau)^{\mu+2}}, \quad (42)$$

где  $C$  — некоторое постоянное число, не зависящее от  $\nu$ , а  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — константы, входящие в оценку (3) для  $f(t, x)$  при  $i=0$ . Из определения функции  $z^{ij}$  и оценки (42) следует, что последовательность функций  $z_0^{ij}(\tau, x)$  сходится равномерно по  $x \in R^n$  и по  $\tau \geq 0$ , причем предельная функция  $z_0^{ij}(\tau, x)$  также удовлетворяет оценке (42).

Функционал  $V_0^+(t)$ , компоненты которого определяются формулами

$$(V_0^+(t), \varphi)_i = - \sum_{j=1}^m \left( \int_0^{\infty} f_j^{(s)}(t+\tau, x) * z_0^{ij}(\tau, x) d\tau, \varphi(x) \right), \quad i=1, \dots, m, \quad (43)$$

является обратным преобразованием Фурье функционала  $V_0^+(t)$ .

Здесь  $f_j^{(s)}(t, x) = (1 + \Delta_x^s) f_j(t, x)$ , где  $f_j(t, x)$  —  $j$ -тая компонента вектор-функции  $f(t, x)$ . (Чтобы убедиться в этом достаточно в (43) применить преобразование Фурье). Переходя в (43) к пределу при  $\nu \rightarrow \infty$ , получаем

$$(\widehat{V}_0^+(t), \varphi)_i = - \sum_{j=1}^m \left( \int_0^{\bar{t}} f_j^{(i)}(t + \tau) * z_0^{ij}(\tau, x) d\tau, \varphi(x) \right), i=1, \dots, m, \varphi \in S,$$

где  $\widehat{V}_0^+(t)$  — обратное преобразование Фурье функционала  $V_0^+(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} V_+^+(t)$ . А это означает, что функционал  $V_0^+(t)$  эквивалентен обычной вектор-функции, компоненты которой определяются формулами

$$\widehat{V}_{0,i}(t, x) = - \sum_{j=1}^m \int_0^{\bar{t}} f_j^{(i)}(t + \tau, x) * z_0^{ij}(\tau, x) d\tau, i=1, \dots, m. \quad (44)$$

Из оценок (3) и (42) следует также, что производные по  $x_i$  любого порядка от функций  $\widehat{V}_+^+$  непрерывны и удовлетворяют оценке (3) при  $i=0, t \geq 0, x \in R^n$ . Формула вида (44) для  $\widehat{V}_{0,i}^-(t, x)$  получается аналогично.

Для завершения доказательства леммы 4 отметим, что если производные по  $x_i$  решения и  $(t, x)$  системы (1) удовлетворяют оценке (3) при  $i=0$ , то  $u(t, x) \in M^1$ , так как  $D_i D_x^k u(t, x)$  при  $k \in Z_+^1$  выражаются через производные  $D_x^k u(t, x)$  и через производные  $D_x^k f(t, x)$ .

Лемма 5. Если  $f(t, x)$  — одномерная функция из класса  $M^1$ , то уравнение

$$\Delta_x u(t, x) = f(t, x), t \geq 0, x \in R^n \quad (45)$$

имеет решение из  $M^1$ .

Доказательство. Пусть  $g(t) = F_x[f(t, x)]$ . Тогда из определения преобразования Фурье получаем цепь следующих равенств:

$$\begin{aligned} (g(t), \varphi) &= (f(t, x), F[\varphi](x)) = \int_{R^n} f(t, x) F[\varphi](x) dx = \\ &= \int_{R^n} \frac{f(t, x)}{[1 + |x|^2]^{\frac{n}{2}}} \left\{ \int_{R^n} e^{-i(x, \sigma)} (1 + \Delta_\sigma)^{\frac{n}{2}} \varphi(\sigma) d\sigma \right\} dx, \end{aligned}$$

где  $\frac{n}{2} = \left[ x_2 + \frac{n}{2} \right] + 1$ ,  $x_2$  — постоянная, входящая в (3) для функции  $f(t, x)$ . Из оценки (3) следует, что в последнем интеграле можно изменить порядок интегрирования, поэтому

$$(g(t), \varphi) = \int_{R^n} f_\sigma(t, \sigma) (1 + \Delta_\sigma)^{\frac{n}{2}} \varphi(\sigma) d\sigma, t \geq 0, \quad (46)$$

где

$$f_\sigma(t, \sigma) = \int_{R^n} \frac{f(t, x) e^{-i(x, \sigma)}}{(1 + |x|^2)^{\frac{n}{2}}} dx, t \geq 0, \sigma \in R^n \quad (47)$$

причем ясно, что

$$|D_i^l f_{\alpha}(t, \sigma)| \leq C' (1 + t^{\alpha}), \quad t \geq 0, \quad \sigma \in R^n, \quad i=0,1,\dots,l \quad (47)$$

Производя преобразование Фурье в уравнении (45) по переменным  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , получим

$$|\sigma|^2 v(t) = g(t), \quad t > 0, \quad \sigma \in R^n.$$

Представим функционал  $g(t)$  в следующей форме:

$$g(t) = \beta(\sigma) g(t) + (1 - \beta(\sigma)) g(t),$$

где  $\beta(\sigma)$  — функция из  $S$ , равная 1 при  $|\sigma| \leq \frac{1}{2}$  и 0 — при  $|\sigma| \geq 1$ . Обозначим

$$(v_0(t), \varphi) = \int_{R^n} f_{\alpha}(t, \sigma) (1 + \Delta)_{\alpha}^{\sim} \left\{ \frac{\beta(\sigma)}{|\sigma|^2} \left[ \varphi(\sigma) - \sum_{|k| < 2\alpha+2} D^k \varphi(0) \frac{\sigma^k}{k!} \right] \right\} d\sigma.$$

Из оценок (47) и равенства (46) следует, что  $v_0(t)$  — линейный непрерывный функционал на  $S$  и удовлетворяет уравнению

$$(|\sigma|^2 v_0(t), \varphi) = (g(t), \beta(\sigma) \varphi(\sigma)), \quad \varphi \in S_{2\alpha+2}^{-}[0].$$

Легко установить, что существуют  $l$  раз непрерывно дифференцируемые функции  $c_k(t)$  ( $|k| \leq 2\alpha + 4$ ), удовлетворяющие оценкам

$$|D_i^l C_k(t)| \leq C'' (1 + t^{\alpha}), \quad t \geq 0, \quad |k| \leq 2\alpha + 4, \quad i=0,1,\dots,l, \quad (48)$$

такие, что функционал  $v_1(t)$ , определяемый формулой

$$(v_1(t), \varphi) = (v_0(t), \varphi) + \sum_{|k| < 2\alpha+4} C_k(t) D^k \varphi(0),$$

является решением уравнения

$$|\sigma|^2 v_1(t) = \beta(\sigma) g(t).$$

Так как функционал  $v_1(t)$  имеет компактный носитель, то его обратное преобразование Фурье представляется в форме [10, стр. 117]

$$u_1(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} (v_1(t, \sigma), e^{i(x, \sigma)})$$

или

$$\begin{aligned} u_1(t, x) = & \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|\sigma| < 1} f_{\alpha}(t, \sigma) (1 + \Delta_{\sigma})_{\alpha}^{\sim} \left\{ \frac{\beta(\sigma)}{|\sigma|^2} \left[ e^{i(x, \sigma)} - \sum_{|k| < 2\alpha+2} \frac{(i\sigma x)^k}{k!} \right] \right\} d\sigma + \\ & + \sum_{|k| < 2\alpha+4} c_k(t) (tx)^k. \end{aligned}$$

Из оценок (47) и (48) следует, что  $u_1(t, x) \in M$ .

Методом доказательства леммы 4 устанавливается, что функции

$$u_2(t, x) = F_{\sigma}^{-1} \left\{ \frac{1 - \beta(\sigma)}{|\sigma|^2} g(t) \right\} (x)$$

также принадлежит классу  $M^1$  и лемма доказана.

Теперь докажем утверждение теоремы 2 в общем случае. Пусть  $f(t, x)$  — произвольная вектор-функция из класса  $M^0$ ,  $W_0(t, x)$  — вектор-функция из  $M^1$ , удовлетворяющая системе

$$\Delta_x^k W_0(t, x) = u_0(t, x), \quad (49)$$

где  $u_0(t, x)$  — решение системы (1') в  $M^1$ . Подставляя  $u_0(t, x)$  из (49) в систему (1'), получаем

$$\Delta_x^k \left\{ \frac{\partial W_0(t, x)}{\partial t} - P \left( i \frac{\partial}{\partial x} \right) W_0(t, x) - f(t, x) \right\} = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial W_0(t, x)}{\partial t} - P \left( i \frac{\partial}{\partial x} \right) W_0(t, x) - f(t, x) = \sum_{|k| < j} d_k(t) x^k, \quad (50)$$

где  $j$  — некоторое натуральное число, а  $d_k(t)$  — некоторая вектор-функция. Из (50) имеем

$$d_k(t) = \frac{1}{k!} D_x^k \left\{ \frac{\partial W_0(t, x)}{\partial t} - P \left( i \frac{\partial}{\partial x} \right) W_0(t, x) - f(t, x) \right\}_{x=0}.$$

Так как  $W_0 \in M^1$  и  $f \in M^0$ , то  $d_k(t) \in M^0$ , поэтому, как и в конце п. 3° доказывается, что система

$$\frac{\partial W(t, x)}{\partial t} - P \left( i \frac{\partial}{\partial x} \right) W(t, x) = \sum_{|k| < j} d_k(t) x^k$$

имеет решение вида

$$W(t, x) = \sum_{|k| < j} c_k(t) x^k,$$

где  $c_k(t) \in M^1$ . Из вышесказанного следует, что  $u(t, x) = W_0(t, x) + W(t, x)$  принадлежит классу  $M^1$  и является решением системы (1).

5°. Пусть корни характеристического уравнения (4) удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Re} \lambda_{r_1}(\sigma) \leq 0, \operatorname{Re} \lambda_{r_1+1}(\sigma) = \dots = \operatorname{Re} \lambda_{r_2}(\sigma) = 0, \operatorname{Re} \lambda_{r_2+1}(\sigma) \geq 0, \sigma \in R^n,$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — натуральные числа, не зависящие от  $\sigma$ , причем строгие неравенства  $\operatorname{Re} \lambda_{r_1}(\sigma) < 0$  и  $\operatorname{Re} \lambda_{r_2+1}(\sigma) > 0$  нарушаются только в конечном числе точек  $\sigma$ .

В таких предположениях систему (1) можно рассматривать во всем пространстве  $-\infty < t < +\infty$ ,  $x \in R^n$  и доказать теоремы, аналогичные теоремам 1, 2.

Для доказательства таких утверждений, вместо проекторов  $P^\pm(\sigma)$  из (9) рассматриваются следующие проекторы:

$$P^j(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j(\sigma)} (\lambda I - P(\sigma))^{-1} d\lambda, \quad \sigma \in R^n, j=1, 2, 3,$$

где  $\gamma_j(\sigma)$ ,  $j=1, 2, 3$  — контуры в комплексной плоскости, охватывающие только корни характеристического уравнения с  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ ,  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  и

$\operatorname{Re} \lambda > 0$ , соответственно, а вместо функционалов  $V_{\nu}^{\pm}(t)$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$  из (19), (20)—следующие функционалы:

$$\begin{aligned} (V_1^1(t), \varphi) &= \int_0^{\infty} (e^{-\tau P(\sigma)} g_1(t-\tau), h(\nu \sigma) \varphi(\sigma)) d\tau, \\ (V_2^2(t), \varphi) &= \int_0^t (e^{(t-\tau)P(\sigma)} g_2(\tau), h(\nu \sigma) \varphi(\sigma)) d\tau, \\ (V_3^3(t), \varphi) &= - \int_0^{\infty} (e^{-\tau P(\sigma)} g_3(t+\tau), h(\nu \sigma) \varphi(\sigma)) d\tau, \end{aligned}$$

где  $t \in (-\infty, +\infty)$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$ ,  $g_j(t) = P^j(\sigma) g(t)$ ,  $j = 1, 2, 3$  и  $g(t) = F_x[f(t, x)]$ .

Ереванский политехнический  
институт им. К. Маркса

Поступила 25. III. 1985

Ս. Ա. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. Հաստատուն գործակիցներով անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի լուծման գոյությունը բազմանդամային անով ֆունկցիոնալների դասում (ամփոփում)

Աշխատանքում դիտարկվում է հաստատուն գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարումների (1) համակարգը  $t \geq 0$ ,  $x \in R^n$  կիսատարածությունում:  $E_l^1(S^m)$ —ով ( $l=0, 1, 2, \dots$ ) նշանակենք մեկ անգամ անընդհատ դիֆերենցելի և (2) զնահատականին բավարարող  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m): [0, +\infty) \rightarrow S^m$  արտապատկերումների դասը, իսկ  $M^1$ —ով  $t \geq 0$ ,  $x \in R^n$  կիսատարածությունում ըստ  $x$ -ի անվերջ դիֆերենցելի, ըստ  $t$ -ի մեկ անգամ անընդհատ դիֆերենցելի և (3) զնահատականին բավարարող  $u(t, x)$  վեկտոր-ֆունկցիաների դասը:

Ներադրենք, որ (4) բնութագրիչ հավասարման արմատները բավարարում են (5) և (6) պայմաններին, ընդ որում  $\operatorname{Re} \lambda_{r+1}(\sigma) = 0$  միայն վերջավոր թվով  $\sigma \in R^n$  կետերում:

Այս պայմանի դեպքում ապացուցվում է, որ եթե  $f(t) \in E_l^1(S^m)$  ( $f(t, x) \in M^0$ ), ապա (1) համակարգը ունի լուծում  $E_l^1(S^m)$  դասից ( $M^1$  դասից):

S. A. HAIRAPETIAN. On existence of solutions for systems of nonhomogeneous differential equations with constant coefficients in a class of functionals with polynomial growth (summary)

A system of differential equations with constant coefficients (1) is investigated Under conditions that the roots of characteristic equation (4) satisfy (5), (6) and the equation  $\operatorname{Re} \lambda_{r+1}(\sigma) = 0$  has only finite number of roots  $\sigma \in R^n$  we prove that system (1) has a solution in  $E_l^1(S^m)$ ,  $f(t) \in E_l^0(S^m)$  and  $M^1$  if  $f(t, x) \in M^0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Е. Шилов. Математический анализ. Второй специальный курс, М., «Наука», 1965.
2. Г. В. Дикополов, Г. Е. Шилов. О корректных краевых задачах для уравнения в частных производных в полупространстве, Изв. АН СССР, «Математика», 24, 1960, 369—380.
3. В. П. Паламолов. О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве, Изв. АН СССР, «Математика», 24, 1960, 381—386.

4. Н. Е. Товмасын. Задача Коши для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве в классе обобщенных функций, Дифф. уравнения, 18, № 1, 1982, 132—138.
5. Н. Е. Товмасын. Общая граничная задача для системы дифференциальных уравнений в полуплоскости с нарушением условия Я. Б. Лопатинского, Дифф. уравнения, 20, № 1, 1984, 132—141.
6. Г. В. Дикополов. О краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве, Мат. сб., 59 (101), 1962, 215—228.
7. А. Л. Павлов. Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве, Мат. сб., 103 (145), № 3 (7), 1977, 367—391.
8. Е. А. Горин. Об асимптотических свойствах многочленов и алгебраических функций от нескольких переменных, УМН, 16, № 1, 1961, 91—117.
9. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. Устойчивость решения дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., «Наука», 1970.
10. С. Милохата. Теория уравнений с частными производными, М., «Мир», 1977.
11. Н. Е. Товмасын. Общие краевые задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными в полупространстве в классе обобщенных функций, Дифф. уравнения, 20, № 12, 1984, 2138—2147.

УДК 517.987.5+517.986.33

В. А. АРЗУМАНЯН

# ОПЕРАТОРНЫЕ АЛГЕБРЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С НЕСИНГУЛЯРНЫМИ ЭНДОМОРФИЗМАМИ ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА

**0°. Введение.** Настоящая работа посвящена конструкции  $*$ -алгебр, отвечающих преобразованиям с квазинвариантной мерой, изучению их структуры и основных свойств.

Алгебраический подход к теории метрических динамических систем наметился и получил первоначальное развитие в известном цикле работ Ф. Мюррея и Дж. фон Неймана, [1]—[3]. Он приводит к изучению слабозамкнутых инволютивных алгебр операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве, называемых в настоящее время алгебрами фон Неймана: каждой динамической системе  $(X, \mu, G)$ , где  $G$  — счетная группа, действующая свободно и эргодически, сопоставляется фактор (алгебра фон Неймана с тривиальным центром)  $\mathcal{W}(X, \mu, G)$ , порожденный операторами скрещенного сдвига и мультипликаторами. Классификация факторов на типы I, II,  $II_\infty$ , III и первые примеры, реализующие каждый из этих типов, были также даны Дж. фон Нейманом и Ф. Мюрреем, [1], [2]. Заметим (см., напр., [4]), что тип фактора  $\mathcal{W}(X, \mu, G)$  определяется свойствами исходной динамической системы: если  $\mu$  дискретна, то это фактор типа I; если  $\mu$  непрерывна и эквивалентна  $G$ -инвариантной конечной мере, то тип его II; если  $\mu$  непрерывна и эквивалентна  $\sigma$ -конечной бесконечной  $G$ -инвариантной мере, то получается тип  $II_\infty$ ; если же для непрерывной меры  $\mu$  не существует эквивалентной ей инвариантной меры, то  $\mathcal{W}(X, \mu, G)$  — фактор типа III.

Алгебру  $\mathcal{W}(X, \mu, G)$  можно описать также как слабое замыкание регулярного представления некоторой равномерно замкнутой подалгебры операторов  $\mathcal{C}(X, \mu, G)$  в  $L^2(X, \mu)$ , порожденной операторами сдвига и мультипликаторами. С алгебраической точки зрения эта  $C^*$ -алгебра допускает аксиоматическое описание, представляя собой скрещенное произведение коммутативной  $C^*$ -алгебры и группы ее автоморфизмов. Такой подход возник не сразу и в настоящее время является частью общей теории скрещенных произведений (см. [5], [6]). В связи с проблемой метрического изоморфизма алгебру  $\mathcal{C}(X, \mu, Z)$  детально изучал В. Арвесон, [7].

Структура факторов, построенных по динамической системе, тесно связана с траекторной теорией, начало которой положил Г. Дай, [9], [10]. Каждой группе автоморфизмов пространства Лебега сопоставляется разбиение на траектории действия этой группы, а две группы называются траекторно изоморфными (слабо эквивалентными, в терминологии Г. Дая), если их траекторные разбиения изоморфны. При этом эргодичность, суще-

ствование (или не существование) конечной (или бесконечной) инвариантной меры, а тем самым свойство соответствующей алгебры быть фактором и иметь определенный тип, являются инвариантами траекторного изоморфизма. Г. Дай доказал одну из первых теорем, дающих критерий траекторного изоморфизма динамических систем, установив слабую эквивалентность двух любых эргодических автоморфизмов с инвариантной мерой, [9]. Сейчас известно, что две любые счетные аппроксимативно конечные свободно действующие группы автоморфизмов траекторно изоморфны, [8]<sup>1</sup>. В большом цикле работ ([11]—[14]) В. Кригер изучал, в русле траекторной теории, алгебры, построенные по динамической системе с квазинвариантной мерой, оперируя, однако, не траекторными разбиениями, а порождающими их автоморфизмами. Один из его основных результатов в траекторной теории утверждает, что траекторный изоморфизм двух эргодических автоморфизмов (с квазинвариантной мерой) эквивалентен изоморфизму соответствующих факторов, [14]. В работах А. М. Вершика ([8], [15], [16]) изучены неизмеримые разбиения (таковы, вообще говоря траекторные разбиения) с помощью выделения из них класса *ручных* разбиений, а также введено для факторов понятие *картановской* подалгебры, наличие которой характеризует факторы, ассоциированные с динамическими системами. Заметим, что свободно действующая группа автоморфизмов с инвариантной мерой аппроксимативно конечна ([9], [11]) тогда и только тогда, когда ее траекторное разбиение *ручное*. В свою очередь, это эквивалентно тому, что разбиение является траекторным для одного автоморфизма (с квазинвариантной мерой). Дж. Фелдман и К. К. Мур, [17], дали инвариантную конструкцию алгебр, ассоциированных с динамическими системами, сопоставив их непосредственно разбиениям.

Важнейшим классом факторов являются *гиперфинитные* (порожденные возрастающей последовательностью полных матричных алгебр), открытые Ф. Мюрреем и Дж. фон Нейманом, [3], сформулировавшими теорему (впоследствии доказанную Г. Даем, [10]): для счетной коммутативной свободно действующей эргодической группы автоморфизмов, сохраняющих меру, соответствующий фактор — гиперфинитный. Они доказали, что все гиперфинитные факторы типа II, изоморфны, положив тем самым начало классификации гиперфинитных (или, как их принято называть в случае бесконечных факторов, *инъективных*, [18]) факторов. Р. Пауэрс, используя  $C^*$ -технику РГФ-алгебр, [19], построил континуум попарно неизоморфных факторов типа III. Новые алгебраические инварианты были предложены Х. Араки и Э. Вудсом, [20], В. Кригером, [12]. В известной работе [21], А. Конн, используя теорию Томита—Такесаки, [22], классифицировал III-факторы на типы  $III_\lambda$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ , доказав затем, [18], что при  $\lambda \in ]0, 1[$  все инъективные факторы типа  $III_\lambda$  изоморфны. Аналогичный результат для фактора типа III, недавно установил У. Хаагеруп, [23]. Классификация факторов типа III<sub>0</sub> сводится, как показал В. Кригер, [14], к проблеме классификации эргодических поттоксов.

<sup>1</sup> См. также [37], [38].

Наша цель — изучение алгебр, построенных по динамическим системам, отвечающих *полугруппам* преобразований пространства с мерой. В настоящей работе на этот случай обобщаются многие из упомянутых выше результатов. Как уже было отмечено, при рассмотрении групповых динамических систем оказывается полезной связь теории факторов с траекторной теорией. В «полугрупповом» случае использование траекторной теории становится необходимым орудием.

Пусть  $T$  — несингулярный эндоморфизм пространства Лебега  $(X, \mu)$ . В п. 1 строится алгебра  $C(X, \mu, T)$ , порожденная мультипликаторами и сдвигами. Доказывается существование условного ожидания на подалгебру мультипликаторов, что позволяет определить регулярное представление и алгебру фон Неймана  $\mathcal{W}(X, \mu, T)$ . Основные результаты работы собраны в п. 2 и среди них утверждение, что  $\mathcal{W}(X, \mu, T)$  — инъективный фактор, если  $T$  эргодичен. В последнем разделе обсуждаются вопросы, связанные с типом полученных факторов, являющегося, очевидно, траекторным инвариантом исходного преобразования.

Статья является подробным и дополненным изложением в более общем случае результатов, анонсированных в заметках [24]—[26] (см. также работу [27]) для случая эндоморфизмов с инвариантной мерой.

Все не определяемые в тексте понятия, относящиеся к эргодической теории см. в статьях В. А. Рохлина [28], [29], книге П. Халмоша [30], к теории операторных алгебр — в монографиях Ж. Диксмье [31], [32], и С. Сакаи [33].

Выражаю искреннюю признательность А. М. Вершику, поставившего исходную задачу и уделявшего постоянное внимание к работе над ней.

**1°. Конструкция регулярного представления.** Пусть  $(X, \mu)$  — пространство Лебега ([28]) с непрерывной нормированной мерой,  $T$  — несингулярное преобразование  $X$  (называемое также эндоморфизмом с квазиинвариантной мерой, или просто, эндоморфизмом), т. е. отображение  $X$  на себя, сохраняющее тип меры.

Обозначим через  $\hat{\mu}_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  меру  $\hat{\mu}_n(E) = \mu(T^{-n}E)$ , эквивалентную, таким образом, мере  $\mu$  и пусть  $s_n = \frac{d\hat{\mu}_n}{d\mu}$  — соответствующая плотность Радона—Никодима. Отметим, что для сохраняющего меру эндоморфизма  $s_n \equiv 1 \pmod{\mu}$ .

Пусть  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(X, \mu)$  — алгебра ограниченных мультипликаторов в  $H$ , изоморфная  $L^\infty(X, \mu)$ . Элементы  $\mathfrak{M}$  суть операторы вида  $(M_\varphi f)(x) = \varphi(x)f(x)$  с  $\varphi \in L^\infty$ . Операторы „сдвига“, отвечающие  $T^n$ , определяются формулой  $(U_n f)(x) = s_n(T^n x)^{-\frac{1}{2}} f(T^n x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Предметом наших рассмотрений служит алгебра  $A = C(X, \mu, T)$  — минимальная  $C^*$ -подалгебра  $\tilde{B}(H)$ , порожденная  $\mathfrak{M}$  вместе с операторами  $U_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и ее регулярное представление. Всюду в дальнейшем  $C^*$ -подалгебра, порожденная семейством операторов  $L$  в гильбертовом пространстве обозначается  $[L]$ , алгебра фон Неймана —  $\{L\}$ . Таким образом,  $A = [\mathfrak{M}, U_n, n = 1, 2, \dots]$ .

Пусть  $\xi_n$  — разбиение на прообразы  $T^n$ , т. е.  $\xi_n = T^{-n} \varepsilon$  ( $\varepsilon = \{X\}$ ) — разбиение на точки  $\text{mod } \mu$ ). Очевидно, что  $\{\xi_n\}$  — убывающая последовательность разбиений,  $\varepsilon \geq \xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots$ . Соответствующий проектор  $P_{\xi_n} = P_n$  на подпространство функций в  $H = L^2(X, \mu)$ , постоянных на элементах разбиения  $\xi_n$  задается формулой

$$(P_n f)(x) = \int_{\xi_n(x)} f(y) d\mu_{\xi_n(x)}(y), \quad (1.1)$$

где  $\xi_n(x)$  — элемент  $\xi_n$ , которому принадлежит точка  $x$ ,  $\{\mu_{\xi_n}\}_{\xi_n \in \xi_n}$  — каноническая система условных мер ([28]). Положим  $(Q_n f)(x) = (P_n f)(T^{-n} x)$ .

Следующие две технические леммы получаются простым счетом с переходом к фактор-пространству  $X/\xi_n$  с фактор-мерой  $\mu_{\xi_n}$  и использованием транзитивности канонической системы условных мер.

**Лемма 1.1.** Для любых  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n > m$ , верны соотношения

$$(i) \int f(x) g(T^m x) d\mu(x) = \int (Q_n f)(x) g(x) d\mu_n(x), \quad \forall f, g \in H;$$

$$(ii) Q_n = Q_m Q_{n-m};$$

$$(iii) s_n(T^m x) = s_m(T^m x) s_{n-m}(T^n x), \quad \forall x \text{ mod } \mu.$$

**Лемма 1.2.** Пусть  $U = U_n$ ,  $V = U^*$ ,  $I$  — единичный оператор в  $H$ ,  $W$  — оператор на  $L^2(X, \mu)$ , определяемый формулой  $(W\varphi)(x) = \varphi(Tx)$ , тогда для любого  $n \in \mathbb{N}$

(i)  $U_n$  — изометрический (полуунитарный) оператор, унитарный, если  $T$  обратим.

$$(ii) \text{ Для любого } f \in H, (U_n f)(x) = s_n(x)^{1/2} (Q_n f)(x).$$

$$(iii) U_n = U^n, U_n^* = V^n.$$

$$(iv) V^n U^n = I, U^n V^n = P_n.$$

$$(v) U^n M_\varphi = M_{W^n \varphi} U^n, V^n M_\varphi U^n = M_{Q_n \varphi}.$$

Таким образом, алгебра  $A$  есть равномерное замыкание множества линейных комбинаций операторов вида  $M_\varphi U^n V^m M_\psi$ ,  $\varphi, \psi \in L^\infty$ .

**Лемма 1.3.** Алгебра  $A$  неприводима в  $B(H)$  тогда и только тогда, когда  $T$  — эргодическое преобразование.

**Доказательство.** Пусть  $B \in A'$  (коммутант  $A$ ), тогда, в силу максимальной  $\mathfrak{M}$  в  $B(H)$ , существует  $\psi \in L^\infty(X, \mu)$ , для которого  $B = M_\psi$ . Из соотношения  $BV = VB$ , примененного к функции, тождественно равной, 1, учитывая (v) леммы 1.2, получаем  $W\psi = \psi$ . Таким образом,  $A'$  состоит из мультипликаторов, отвечающих функциям, инвариантным относительно  $T$ . Такие операторы кратны  $I$  тогда и только тогда, когда  $T$  эргодично.

Введем алгебры  $A_n = C_n(X, \mu, T) = [\mathfrak{M}, P_k, k = 1, 2, \dots, n]$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и  $A_\infty = C_\infty(X, \mu, T) = [\mathfrak{M}, P_k, k \in \mathbb{N}]$ . Ясно, что  $A_\infty$  — минимальная  $C^*$ -подалгебра  $B(H)$ , порожденная  $\mathfrak{M}$  и всеми  $P_k, k \in \mathbb{N}$ , при этом

$$\mathfrak{X} \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A, \quad A_n = [\cup_n A_n]. \quad (1.2)$$

Рассмотрим множества  $J_n = \{a \in A_n, aP_n = 0\}$ ,  $n > 0$ ,  $J_n = \{a \in A_n, P_{-n}a = 0\}$ ,  $n < 0$ ,  $I_n = \{a \in A_n, aP_n = a\}$ ,  $n > 0$ ,  $I_n = \{a \in A_n, aP_{-n} = a\}$ ,  $n < 0$ . Очевидно, что  $J_n$ ,  $I_n$  суть левые (правые) идеалы при  $n > 0$  (соотв.  $n < 0$ ), при этом  $J_n^* = J_{-n}$ ,  $I_n^* = I_{-n}$  и банахово пространство  $I_n$  изоморфно  $A_n/J_n$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots$ .

Наша ближайшая цель — построение условного ожидания с алгебры  $A$  на коммутативную подалгебру  $\mathfrak{X}$ .

**Лемма 1.3'.** Пусть  $(X, \mu)$  — пространство Лебега,  $P$  — проектор в  $H = L^2(X, \mu)$  на подпространство скаляров. Тогда  $[\mathfrak{X}, P] = [\mathfrak{X}, K(H)]$ , где  $K(H)$  подалгебра компактных операторов. Пусть  $\mu$  — дискретная мера, тогда канонически определено условное ожидание на подалгебру  $\mathfrak{X}$ , совпадающее с проектированием на диагональ в естественном представлении операторов из  $B(H)$  в виде бесконечных матриц.

**Доказательство.** Достаточно проверить, что  $K(H) \subset [\mathfrak{X}, P]$ . Пусть  $\varphi, \psi \in L^\infty$ , тогда проектор  $P_{\varphi, \psi} = (\cdot, \varphi)\psi \in [\mathfrak{X}, P]$ , так как  $P_{\varphi, \psi} = M_\psi P M_\varphi$ . Предельным переходом легко убедиться, что то же самое верно для любых  $\varphi, \psi \in H$ . Таким образом, в  $[\mathfrak{X}, P]$  содержатся все одномерные проекторы, а следовательно и все компактные операторы.

Если  $\mu$  — дискретная мера, то можно считать, что  $X$  — счетное множество атомов,  $H = l_\mu^2(X)$ . Любой оператор  $B \in B(H)$  представляется в виде бесконечной матрицы  $B_{xy} = \mu(x)^{\frac{1}{2}} \mu(y)^{-\frac{1}{2}} (Bf_x)(y)$ , где  $f_x$  — координатные функции,  $f_x(y) = \delta_{xy} \mu(x)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $x, y \in X$ . Очевидно, что проектирование на диагональ  $p_0$ ,  $(p_0 B)_{xy} = \delta_{xy} B_{xx}$  обладает всеми свойствами точного условного ожидания.

**Лемма 1.4.** Пусть  $\xi$  — измеримое разбиение пространства Лебега  $(X, \mu)$ ,  $\mathfrak{X}_\xi$  — подалгебра  $\mathfrak{X}$ , отвечающая функциям, постоянным на элементах разбиения  $\xi$ ,  $P_\xi$  — соответствующий проектор. Тогда  $\mathfrak{X}_\xi = [\mathfrak{X}, P_\xi]'$ .

**Доказательство.** Ясно, что любой мультипликатор из  $\mathfrak{X}_\xi$  перестановочен с  $P_\xi$ , т. е.  $\mathfrak{X}_\xi \subset [\mathfrak{X}, P_\xi]'$ . Обратно, пусть  $B \in [\mathfrak{X}, P_\xi]'$  тогда  $B = M_\psi$ ,  $\psi \in L^\infty$ . Применив условие  $BP_\xi = P_\xi B$  к функции, тождественно равной 1, получаем  $P_\xi \psi = \psi$ .

**Предложение 1.5.** Пусть  $(X, \mu)$  — пространство Лебега,  $\{\xi_k\}_1^n$  — убывающая последовательность измеримых разбиений,  $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(X, \mu)$ ,  $P_k = P_{\xi_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Тогда имеет место следующее разложение в прямой интеграл:

$$[\mathfrak{X}, P_1, P_2, \dots, P_n] = \int_{X/\xi_n}^{\oplus} [\mathfrak{X}_\tau, P_1(\tau), \dots, P_n(\tau)] d\mu_{\xi_n}(\tau), \quad (1.3)$$

где  $\mathfrak{X}_\tau = \mathfrak{X}(\tau, \mu_\tau)$  для канонической системы условных мер  $\{\mu_\tau\}$  по разбиению  $\xi_n$ ,  $P_n(\tau)$  — проектор на подпространство функций

из  $L^2(\tau, \mu_\tau)$ , постоянных на элементах разбиения, индуцированно-го в  $\tau$  разбиением  $\xi_k$ .

Доказательство. Для простоты предположим  $n = 1$  (доказательство общего случая отличается незначительными деталями). Итак  $\xi$  — измеримое разбиение  $X$ , докажем, что

$$[\mathfrak{M}, P_\xi] = \int_{X/\xi}^{\oplus} [\mathfrak{M}_\tau, P_\tau] d\mu_\xi(\tau), \quad (1.4)$$

где  $P_\tau$  — проектор в  $L^2(\tau, \mu_\tau)$  на подпространство скаляров. Коммутативная алгебра фон Неймана  $\mathfrak{M}_\tau$  определяет разложение  $H$  в пря-

мой интеграл  $H = \int_{X/\xi}^{\oplus} H_\tau d\mu_\xi(\tau)$ , причем  $\mathfrak{M}_\tau \cong L^\infty(X/\xi, \mu_\tau)$ . Лемма 1.4

утверждает, в частности, что  $[\mathfrak{M}, P_\xi] \subset \mathfrak{M}_\xi$ , откуда следует, что каж-

дый элемент  $[\mathfrak{M}, P_\xi]$  разложим. Легко проверить, что  $P_\xi = \int_{X/\xi}^{\oplus} P_\tau d\mu_\xi(\tau)$

и для любого  $\varphi \in L^\infty(X, \mu)$ ,  $M_\tau = \int_{X/\xi}^{\oplus} M_{\tau_\tau} d\mu_\xi(\tau)$ , где  $\varphi_\tau$  — сужение  $\varphi$  на  $\tau$ .

Следовательно,  $*$ -алгебра, порожденная  $\mathfrak{M}$  и  $P_\xi$ , содержится в правой части равенства (1.4), откуда предельным переходом получаем

$$[\mathfrak{M}, P_\xi] \subset \int_{X/\xi}^{\oplus} [\mathfrak{M}_\tau, P_\tau] d\mu_\xi(\tau). \quad (1.5)$$

Покажем, что имеет место и обратное включение. Достаточно предположить, что для почти всех  $\tau$  пространства  $(X_\tau, \mu_\tau)$  изоморфны (в противном случае необходимо разбить  $X$  на множества, в которые попадают те и только те точки, для которых соответствующим элементам  $\tau$  разбиения  $\xi$  отвечают изоморфные  $(X_\tau, \mu_\tau)$ ). Тогда существует гильбертово пространство  $H_0 = L^2(X_0, \mu_0)$  такое, что для каждого  $\tau \in \xi$  имеется изоморфизм  $W_\tau: H_\tau \rightarrow H_0$ , при этом, если  $B \in [\mathfrak{M}_\tau, P_\tau]$ , то  $B = W_\tau^{-1} B_0 W_\tau$  для некоторого  $B_0 \in [\mathfrak{M}_0, P_0]$ . По лемме 1.3',  $K(H_0) \subset [\mathfrak{M}_0, P_0]$ , следовательно  $[\mathfrak{M}_0, P_0] = B(H_0)$ . В таком случае  $H \cong L^2(X/\xi, \mu_\xi) \otimes H_0$ , причем, для любого разложимого  $B$ ,  $B \cong I \otimes B_0$ . Поэтому

$$\int_{X/\xi}^{\oplus} [\mathfrak{M}_\tau, P_\tau] d\mu_\xi(\tau) \cong \int_{X/\xi}^{\oplus} [\mathfrak{M}_0(\tau), P_0(\tau)] d\mu_\xi(\tau),$$

где при почти всех  $\tau \in \xi$ ,  $\mathfrak{M}_0(\tau) = \mathfrak{M}_0$ ,  $P_0(\tau) = P_0$ . Из (1.5) следует

$$P_{\xi} \cong \int_{X/\xi}^{\oplus} P_0(\tau) d\mu_{\xi}(\tau), \quad M_{\xi} \cong \int_{X/\xi}^{\oplus} M_{\tau_0}(\tau) d\mu_{\xi}(\tau)$$

с  $\varphi_0 \in L^{\infty}(X_0, \mu_0)$  при почти всех  $\tau$ , откуда и следует (1.4).

**Замечание.** Если  $\xi$  — разбиение с конечными элементами, то

$$[\mathfrak{M}, P_{\xi}] \cong \int_{X/\xi}^{\oplus} M_{n \times n}(\mathbb{C}) d\mu_{\xi}(\tau), \quad \text{где } M_n(\mathbb{C}) \text{ — алгебра } n \times n \text{ матриц над по-}$$

лем  $\mathbb{C}$ . Это следует из очевидного факта: подалгебра, натянутая на все диагональные матрицы и матрицу, отвечающую проектору на подпространство скаляров, совпадает с полной матричной алгеброй.

**Теорема 1.6.** Пусть  $(X, \mu)$  — пространство Лебега,  $T$  — эндоморфизм на  $X$ , причем почти каждая точка имеет не более счетного числа прообразов. Тогда на алгебре  $A_{\infty}$  канонически определено условное ожидание на подалгебру  $\mathfrak{M}$  (индуктивный предел условных ожиданий на алгебрах  $A_n$ , которые в свою очередь, являются прямым интегралом проекторов на диагональ в соответствующих матричных алгебрах слоя).

**Доказательство.** Ясно, что для алгебр  $A_n$  выполнены условия предложения 1.5. В силу леммы 1.3' для любого  $\tau \in \xi_n \bmod \mu_{\xi_n}$  существует условное ожидание  $p_{\tau}$  (определенное по существу на  $B(L^2(\tau, \mu_{\tau}))$ )

$$\text{Пусть } a \in A_n, a = \int_{X/\xi}^{\oplus} a_{\tau} d\mu_{\xi}(\tau), \text{ положим } p_n(a) = \int_{X/\xi}^{\oplus} p_{\tau}(a_{\tau}) d\mu_{\xi}(\tau). \text{ Этот опе-}$$

ратор корректно определен, причем  $\operatorname{esssup} \|p_{\tau}(a_{\tau})\| \leq \|a\|$ , откуда, заодно

$\|p_n(a)\| \leq \|a\|$ . Ясно, что  $p_n$  — точное условное ожидание. Из транзитивности канонической системы условных мер следует, что операторы  $p_n$  согласованы между собой (в том смысле, что  $p_{n+1}|_{A_n} = p_n$ ). Зададим оператор условного ожидания  $p_{\infty}$  на  $\bigcup_n A_n$  следующим образом:

если  $a \in \bigcup A_n$ ,  $a \in A_n$ , при некотором  $n_0$ , положим  $p_{\infty}(a) = p_{n_0}(a)$ . Ввиду того, что при всех  $n$ ,  $\|p_n(a)\| \leq \|a\|$ , можно считать, что  $p_{\infty}$  определен на всей алгебре  $A_{\infty}$ .

**Определение 1.7.** Состоянием типа меры на алгебре  $A_{\infty}$  называется состояние, определяемое формулой  $\omega_{\infty}(a) = \int \hat{a}(x) d\mu(x)$ ,

где  $a \in A_{\infty}$ ,  $\hat{a}$  — функция из  $L^{\infty}(X, \mu)$ , отвечающая мультипликатору  $p_{\infty}(a)$ . Представление  $\pi_{\infty} = \pi_{\omega_{\infty}}$ , построенное в силу конструкции ГНС по состоянию  $\omega_{\infty}$ , называется *регулярным*.

Положим  $W_{\infty}(X, \mu, T) = \{\pi_{\infty}(A_{\infty})\}$ . Эта алгебра изучена в п. п 2, 3.

**Замечание.** Точно так же можно определить состояние типа меры  $\omega_{\xi}$  и  $\omega_n$  на алгебрах  $[\mathfrak{M}, P_{\xi}]$  и  $A_n$  (см. доказательства предл. 1.5 и теор. 1.6), а также отвечающие им регулярное представление и алгебры фон Неймана  $\mathcal{W}(X, \mu, \xi)$  и  $\mathcal{W}_n(X, \mu, T)$ .

Теперь наша цель — определить условное ожидание с алгебры  $A$  на подалгебру  $\mathfrak{X}$ , а следовательно и регулярное представление.

**Лемма 1.8.** Пусть  $\hat{A}$  — множество конечных линейных комбинаций вида

$$V_n a_{-n} + \dots + V a_{-1} + a_0 + a_1 U + \dots + a_m U^m, \quad (1.6)$$

где  $a_k \in A$ ,  $k = -n, -n+1, \dots, 0, \dots, m$ . Тогда

- (i) алгебра  $A$  есть равномерное замыкание  $*$ -алгебры  $\hat{A}$ .
- (ii) при  $n = 1, 2, \dots$ ,  $a U^n = b U^n$  (соотв.  $V^{-n} a = V^{-n} b$ ) тогда и только тогда, когда  $a - b \in J_n$  (соотв.  $a - b \in J_{-n}$ ),  $a, b \in A$ .
- (iii) Равенство  $a U^n = b U^n$  (соотв.  $V^{-n} a = V^{-n} b$ ) при  $a, b \in I_n$  (соотв.  $I_{-n}$ ) эквивалентно  $a = b$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

**Доказательство.** Учитывая соотношения коммутации (v) леммы 1.2 и замечание после леммы, проверка (i) тривиальна. Следующие два утверждения вытекают из свойств  $J_n, I_n$  и того, что  $I_n \cap J_n = \{0\}$ .

**Определение 1.9.** Полугруппа  $G$  несингулярных преобразований пространства Лебега  $(X, \mu)$  действует свободно, если для любого  $g \in G$ , отличного от тождественного эндоморфизма и любого измеримого  $E \subset X$ ,  $\mu(E) > 0$ , существует  $F \subset E$ ,  $\mu(F) > 0$ , для которого  $\mu(F \cap g^{-1}(F)) = 0$ . Будем говорить, что преобразование  $T$  действует свободно, если свободно действует полугруппа  $\{T^n\}_{n=1}^\infty$ .

Заметим, что эргодический эндоморфизм действует свободно.

Следующее утверждение играет решающую роль в дальнейших рассуждениях.

**Теорема 1.10.** Пусть несингулярное преобразование  $T$  пространства Лебега  $(X, \mu)$  действует свободно, причем почти каждая точка  $X$  имеет не более счетного числа прообразов. Тогда, если  $a \in \hat{A}$ ,  $a = V^n a_{-n} + \dots + a_0 + \dots + a_m U^m$ , где  $a_k \in I_k$ ,  $k = -n, -n+1, \dots, m$ , то

$$\sup_k \|p_-(a_k)\| \leq \|a\|, \quad (1.7)$$

где  $p_-$  — оператор, определенный теоремой 1.6. Формула  $p_-(a) = p_-(a_0)$  определяет отображение алгебры  $\hat{A}$  на подалгебру  $\mathfrak{X}$ , допускающее продолжение до условного ожидания на алгебре  $A$ .

**Доказательство.** (i) Достаточно показать, что  $\|p_-(a_0)\| \leq \|a\|$ . В самом деле, пусть  $k < 0$ , тогда из этого неравенства получаем

$$\|a\| > \|U^{-k} a\| > \|p_-(U^{-k} a)_0\| = p_-(P_{-k} a_k) = p_-(a_k).$$

При  $k > 0$  имеем  $\|a\| = \|a^*\| \geq \|p_-(a_k^*)\| = \|p_-(a_k)\|$ .

(ii) Можно предположить, что все  $a_k \in A_l$  при достаточно большом  $l$ . В самом деле, пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда, для любого  $k = -n, \dots, m$  существуют  $p_k$  и  $\hat{a}_k \in A_{n_k}$ , для которого  $\|\hat{a}_k - a_k\| < \frac{\varepsilon}{2(n+m)}$ . Если  $\hat{a} = V^n \hat{a}_{-n} + \dots + \hat{a}_0 + \dots + \hat{a}_m U^m$ , то  $\|a\| \geq \|\hat{a}\| - \frac{\varepsilon}{2} \geq \|p_-(\hat{a}_k)\| - \frac{\varepsilon}{2} \geq$

$\geq \|p_-(a_0)\| - \varepsilon$ . Осталось заметить, что нужно взять  $l = \max \{n_k, k = -n, \dots, m\}$ .

Итак, пусть  $a \in \hat{A}$  имеет вид (1.6), причем  $a_k \in A_l \cap I_l$  при всех  $k$ . Наша цель — установить неравенство  $\|a\| \geq \|p_-(a_0)\| = p_l(a_0)$ .

(iii) Покажем, вначале, что существует семейство взаимно ортогональных проекторов  $M_E = M_{\chi_E}$ , где  $\chi_E$  — характеристическая функция множества  $E \subset X$ ,  $\mu(E) > 0$ ,  $E \cap E' = \emptyset$  при  $E \neq E'$ ,  $\cup E = X$ , для которого

$$M_E a M_E = M_F a_0 M_E. \quad (1.8)$$

Действительно, из свободного действия преобразования  $T$  следует, что для любого  $F \subset X$ ,  $\mu(F) > 0$  существует  $E \subset F$ ,  $\mu(E) > 0$ , такое, что  $\mu(E \cap T^{-k}E) = 0$  и, кроме того,  $E$  и  $T^{-k}E$  не пересекают одновременно один и тот же элемент разбиения  $\xi_r$ , где  $r = \max \{m, n, l\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$ . Выделим из  $X$  подмножество  $E$ , обладающее указанным свойством. Элементы  $a_k$  (при  $k > 0$ ) являются равномерными пределами конечных сумм операторов вида  $M_\varphi P_{k+l} M_\psi$ ,  $i = 0, 1, \dots, l - k$ , поэтому

$$\begin{aligned} (M_E M_\varphi P_{k+l} M_\psi M_{T^{-k}E} f)(x) &= \\ &= \chi_E(x) \varphi(x) \int_{\xi_{k+l}(x)} \chi_{T^{-k}E}(y) \psi(y) f(y) d\mu_{\xi_{k+l}(x)}(y) = \\ &= \chi_E(x) \varphi(x) \int_{\xi_{k+l}(x) \cap T^{-k}E} \psi(y) f(y) d\mu_{\xi_{k+l}(x)}(y) = 0, \end{aligned}$$

т. к. либо  $x \notin E$ , либо  $\mu_{\xi_{k+l}(x)}(\xi_{k+l}(x) \cap T^{-k}E) = 0$ . Отсюда, учитывая соотношения (v) леммы 1.2, следует, что  $M_F a_k U^k M_E = 0$ . Точно так же  $M_E V^{-k} a_k M_E = 0$  и, следовательно, получаем (1.8). Теперь, если на чать с множества  $X \setminus E$  придем к множеству  $E'$ ,  $E \cap E' = \emptyset$ , обладающему тем же свойством. Воспользовавшись леммой Цорна, можно доказать существование указанного в (iii) семейства, обладающего в силу максимальной свойством  $\cup E = X$ .

(iv) Заметим, что для семейства, рассмотренного в (iii) можно предполагать, что все  $E$  пересекают почти каждый элемент разбиения только в одной точке. Чтобы понять это, достаточно рассмотреть дополнительное к  $\xi_r$  разбиение  $\xi_1$  и взять в качестве  $E$  пересечение его с каким-нибудь элементом  $\xi_r^\perp$ , для которого мера такого пересечения отлична от нуля (такой обязательно существует, т. к.  $\xi_r^\perp$  состоит из счетного числа элементов). Пусть  $E$  взято из этого семейства, тогда, в силу предложения 1.5 и леммы 1.3',

$$M_E(a_0 - p_r(a_0)) M_E = \int_{X \setminus E} M_E(\tau)(a_0 - p_r(a_0)) M_E(\tau) d\mu_r(\tau) = 0,$$

т. к.  $M_E(\tau)$  — диагональная матрица с одной, отличной от нуля компонентой, а  $(a_0 - p_r(a_0))$  имеет нулевую диагональ. Таким образом

$$M_E a M_E = M_E a_0 M_E = M_E p_-(a_0) M_E + M_E (a_0 - p_-(a_0)) M_E = M_E p_-(a_0) M_E.$$

(v) В силу того, что  $p_-(a_0)$  — мультипликатор, имеем окончательно

$$|a| \geq \sup_E |M_E a M_E| = \sup_E |M_E p_-(a_0) M_E| = |p_-(a_0)|.$$

(vi) Корректность определения  $p$  и возможность продолжения есть непосредственное следствие установленного неравенства.

Определение 1.11. Состоянием типа меры на алгебре  $A$  называется состояние  $\omega$ , определяемое формулой  $\omega(a) = \int \hat{a}(x) d\mu(x)$ , где

$a \in A$ ,  $\hat{a}$  — функция из  $L^{\infty}(X, \eta)$ , соответствующая мультипликатору  $p(a)$ . Представление  $\pi = \pi_{\omega}$ , отвечающее состоянию  $\omega$  в силу ГНС-конструкции, называется регулярным (или фон Неймана).

Положим  $\mathcal{W}(X, \mu, T) = \{\pi(A)\}$ . Эта алгебра подробно изучена в последующих разделах.

2°. Структура и свойства регулярного представления. Результаты этого раздела формулируются в терминах теории Фелдмана-Мура, [17], элементы которой изложены в начале.

Пусть  $(X, \mu)$  — пространство Лебега,  $R$  — отношение эквивалентности на  $X$ , рассматриваемое как подмножество  $X \times X$ . Пусть  $R$  измеримо и в каждом слое содержит не более счетного числа точек. На  $R$  можно ввести две эквивалентные  $\sigma$ -конечные меры  $\mu_l$  и  $\mu_r$ , определяемые следующим образом: фактор-мера  $\mu_l$  по разбиению  $\{(x_0, y) \in R, x_0 \in X\}$  (соотв. фактор-мера  $\mu_r$  по разбиению  $\{(x, y_0) \in R, y_0 \in X\}$ ) совпадает с  $\mu$  а мера в слоях — считающая. Пусть  $D = \frac{d\mu_l}{d\mu_r}$  — соответствующая плотность

Радона-Никодима. Функция  $a$  на  $R$  называется левой конечной, если она ограничена и существует  $n$  такое, что при всех  $x, y, \{z; a(x, z) \neq 0\} \cup \{z; a(z, y) \neq 0\} \subset n$ . Функция  $b$  на  $R$  называется правой ко-

нечной, если функция  $D(x, y) b(x, y)$  — левая конечная. Пусть  $\psi \in L^2(R, \mu_r)$ ,  $a$  — левая,  $b$  — правая конечные функции, тогда формулы  $(L_a \psi)(x, y) = \sum_{z: (x, z) \in R} a(x, z) \psi(z, y)$ ,  $(R_b \psi)(x, y) = \sum_{z: (x, z) \in R} \psi(x, z) b(z, y)$

определяют ограниченные операторы на  $L^2(R, \mu_r)$ . Для произвольных двух левых конечных функций  $a, b$  положим  $(a \cdot b)(x, y) = \sum_{z: (x, z) \in R} a(x, z) b(z, y)$ ,  $a^*(x, y) = a(y, x)$ . Тогда  $L_a L_b = L_{a \cdot b}$ ,  $L_{a^*} = L_a^*$

и, следовательно, множество  $\{L_a, a \text{ — левая конечная}\}$  образует  $*$ -алгебру с единицей. Ее слабое замыкание обозначим  $\mathcal{W}_l(X, \mu, R)$  и будем называть левой алгеброй фон Неймана, отвечающей, в силу конструкции Фелдмана-Мура, отношению  $R$ . Аналогично определяются правая алгебра  $\mathcal{W}(X, \mu, R)$ . Эти алгебры являются коммутантами одна другой, а вектор  $\gamma_z$  (характеристическая функция диагонали  $\delta = \{(x, x), x \in X\} \subset R$ ) — циклический и отделяющий. Модулярный оператор  $\Delta$  (в смысле теории Томита-Такесаки, [22]) задается формулой  $(\Delta \psi)(x, y) = D(x, y) \psi(x, y)$ , модулярная группа автоморфизмов — соотношением

$$\psi_i(a)(x, y) = D(x, y)'' a(x, y). \quad (2.1)$$

Диагональная подалгебра (отвечающая функциям с носителем на диагонали)  $\mathfrak{M}$  является максимальной коммутативной в каждой из рассматриваемых алгебр, а любой элемент ее нормализатора  $N(\mathfrak{M})$ , например, в алгебре  $W(X, \mu, R)$  определяется функцией

$$\alpha_{f, \Phi}(x, y) = \delta_y^{(x)} f(x) D(x, \Phi(z))^{1/2}, \quad (2.2)$$

где  $|f(x)| = 1$ , а  $\Phi$  — автоморфизм  $X$  с квазиинвариантной мерой, причем  $(\Phi(x), x) \in R$  почти везде.

Вернемся к рассмотрению и обозначениям п. 1. Если  $\xi$  — разбиение  $X$ , то  $R(\xi)$  будет обозначать соответствующее отношение эквивалентности.

Определение 2.1, ([29]). *Остаточным (или хвостовым) разбиением эндоморфизма  $T$  называется разбиение  $t(T)$ , каждый элемент которого вместе с точкой  $x$  содержит любую точку  $y$ , удовлетворяющую соотношению  $T^n x = T^n y$  при некотором  $n > 0$ , т. е.  $t(T) = \bigcap_n \xi_n$ .*

*Траекторным разбиением эндоморфизма  $T$  называется разбиение  $\tau(T)$ , каждый элемент которого вместе с точкой  $x$  содержит любую точку  $y$ , удовлетворяющую соотношению  $T^n x = T^m y$  при некоторых  $n, m > 0$ .*

Разбиения  $t(T)$  и  $\tau(T)$  вообще говоря не являются измеримыми, однако отношения, определяемые ими, измеримы. Введем обозначения:  $R(\varepsilon) = \xi$ ,  $R(\xi_n) = R_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $R_\infty = R(t(T))$ ,  $R = R(\tau(T))$ , тогда (см. п. 1)  $\xi \subset R_1 \subset R_2 \subset \dots \subset R_\infty \subset R$ , причем  $R_\infty = \bigcup R_n$ . Заметим, что даже для сохраняющих меру преобразований,  $R$  может не быть инвариантным отношением (т. е.  $I(x, y) \neq 1$ ). Будем писать в дальнейшем  $x \sim y$ , если  $(x, y) \in R$ ,  $x \approx y$  при  $(x, y) \in R_\infty$ , и  $x \stackrel{n}{\approx} y$ , если  $(x, y) \in R_n$ . Кроме того, введем обозначение  $\mu_n(x) = \mu_{\xi_n(x)}(x)$  (см. п. 1).

Предложение 2.2. В условиях теоремы 1.10, если  $(x, y) \in R$ ,  $T^n x = T^m y$ , то  $D(x, y) = s_n(T^n x) s_m(T^m y)^{-1} \mu_n(x) \mu_m(y)^{-1}$  почти везде.

Доказательство. Корректность. Пусть  $T^k x = T^l y$  и пусть для определенности  $k > n$ , тогда  $T^l y = T^k x = T^{k-1} T x = T^{k-n+m} y$ , откуда для почти всех  $y$ ,  $k - l = n - m$ , т. к.  $T$  действует свободно и, следовательно, аperiodично. Из условия транзитивности канонической системы условных мер и соотношений (iii) леммы 1.1 следует

$$s_k(T^k x) s_l(T^l y)^{-1} \mu_k(x) \mu_l(y)^{-1} = s_n(T^n x) s_m(T^m y)^{-1} \mu_n(x) \mu_m(y)^{-1}.$$

Пусть теперь  $R_{n,m} = \{(x, y) \in R, T^n x = T^m y\}$ ,  $E_n^m(y) = \{x; T^n x = T^m y\}$ . Для всякого  $f \in L^1(R, \mu)$ , принимая во внимание указанные соотношения и опуская некоторые детали рутинных вычислений, имеем (при  $n > m$ )

$$\begin{aligned}
& \int_{R_n^m} f(x, y) s_n(T^n x) s_m(T^m y)^{-1} \mu_n(x) \mu_m(y)^{-1} d\mu_r(x, y) = \\
& = \int s_m(T^m y)^{-1} \mu_m(y)^{-1} \left[ \sum_{t \in E_m^m(y)} s_{n-m}(t) s_m(T^m t) \mu_m(t) \times \right. \\
& \times \sum_{x \in E_{n-m}^0(t)} f(x, y) \mu_{n-m}(x) \left. \right] d\mu(y) = \int_{X/\xi_m} d\mu_{\xi_m}(\tau) \int \mu_m(y)^{-1} \times \\
& \times \left[ \sum_{t \in E_m^m(y)} s_{n-m}(t) \mu_m(t) \sum_{x \in E_{n-m}^0(t)} f(x, y) \mu_{n-m}(x) \right] d\mu_r(y) = \\
& = \int s_{n-m}(t) \sum_{x \in E_{n-m}^0(t)} g(x) \mu_{n-m}(x) d\mu(t) = \int (Q_{n-m} g)(t) s_{n-m}(t) d\mu(t) = \\
& = \int g(t) d\mu(t) = \int_{R_n^m} f(t, y) d\mu_t(t, y),
\end{aligned}$$

где  $g(t) = \sum_{y \in E_m^m(t)} f(t, y)$ . Осталось заметить, что  $R = \bigcup_{n, m} R_{n, m}$ .

Напомним, что преобразование называется *точным*, если не существуют нетривиальные множества  $E \subset X$ , удовлетворяющие условию  $T^{-n} T^n E = E$  при всех  $n > 0$ , [29].

**Теорема 2.3.** Пусть  $T$  — несингулярный точный эндоморфизм,  $s$  не более чем счетным числом прообразов почти каждой точки. Тогда  $W_-(X, \mu, T)$  — фактор.

**Доказательство.** Покажем вначале, что алгебры  $W_-(X, \eta, T)$  и  $W_r(X, \mu, R_-)$  пространственно изоморфны.

(i) В самом деле, пусть  $\xi$  — измеримое разбиение со счетными элементами,  $P_\xi, W(X, \mu, \xi)$  — соответствующие проектор и алгебра фон Неймана (см. замечание после опр. 1.7). Покажем, что алгебры  $W(X, \eta, \xi)$  и  $W(X, \mu, R(\xi))$  пространственно изоморфны. Рассмотрим на  $R(\xi)$  следующие функции  $p_\xi(x, y) = \mu_{\xi(x)}(x)$ ,  $m_\varphi(x, y) = \delta_x^y \varphi(x)$  (отвечающие  $P_\xi$  и  $M_\varphi$ ). Легко проверить, что  $R_{p_\xi} B = B R_{p_\xi}$  для любого  $B \in W_\ell(X, \mu, R(\xi))$  и, следовательно,  $\{R_{p_\xi}, R_{m_\varphi}; \varphi \in L^-\} \subset W(X, \mu, R(\xi))$ . Чтобы доказать обратное включение, заметим, что центр алгебры  $W(X, \mu, R(\xi))$  есть подалгебра диагональной подалгебры  $\{R_{m_\varphi}\}$ , отвечающей функциям, постоянным на элементах разбиения  $\xi$ . Поэтому  $W(X, \mu, R(\xi))$  допускает разложение в прямой интеграл факторов

①  $\int_{X/\xi} W(\tau, \mu_\tau, \varepsilon(\tau)) d\mu_\xi(\tau)$ , что сводит задачу к проверке вложения

$W(\tau, \mu_\tau, \varepsilon(\tau)) \subset \{\mathfrak{M}_\tau, R_{p_\tau}\}$  в слоях. Для этого необходимо убедиться, что для любого автоморфизма  $\Phi$  пространства с мерой  $\tau$ , оператор из  $W(\tau, \mu_\tau, \varepsilon(\tau))$ , отвечающий функции  $u_\Phi(x, y) = \delta_{\Phi(x)}^y \mu_\tau(\Phi(x))^{-\frac{1}{2}} \mu_\tau(x)^{-\frac{1}{2}}$

принадлежит  $\{\mathfrak{M}_\tau, R_{p_\tau}\}$ . Итак,  $\{R_{p_\tau}, R_{m_\tau}\} = \mathcal{W}(X, \mu, R(\xi))$ . Пусть  $\chi_i$  — характеристическая функция диагонали  $\delta$ . Для любого оператора  $B \in \mathcal{W}(X, \mu, R(\xi))$  положим  $\gamma(B) = (B\chi_i, \chi_i)$ . Элементарным подсчетом можно получить, что состояния  $\gamma$  и  $\omega_\xi$  совпадают на образующих,  $\gamma(R_{m_\psi}, R_{p_\xi}, R_{m_\psi}) = \omega_\xi(M_\gamma, P_\xi, M_\psi)$  для любых  $\varphi, \psi \in L^\infty(X, \mu)$ , откуда и следует  $\mathcal{W}(X, \mu, \xi) \cong \mathcal{W}(X, \mu, R(\xi))$ .

(ii) Покажем теперь, что если  $\xi, \eta$  — измеримые разбиения со счетными элементами,  $\eta \leq \xi$ , то  $\mathcal{W}(X, \mu, \xi) \subset \mathcal{W}(X, \mu, \eta)$  (с точностью до пространственного изоморфизма). В силу (i) для этого достаточно проверить, что  $\mathcal{W}(X, \mu, R(\xi)) \subset \mathcal{W}(X, \mu, R(\eta))$ , а это, в свою очередь, следует из того, что нормализатор диагональной подалгебры алгебры  $\mathcal{W}(X, \mu, R(\xi))$  содержится в нормализаторе соответствующей подалгебры  $\mathcal{W}(X, \mu, R(\eta))$ , поскольку автоморфизмы  $X$ , переставляющие точки в элементах разбиения  $\xi$  содержатся среди автоморфизмов, переставляющих точки в элементах разбиения  $\eta$ .

(iii) Пусть, наконец,  $T$  — преобразование, удовлетворяющие условиям теоремы. Тогда из (i) (ii), а также определения алгебр  $A_n$  (см. п. 1.), следует, что  $\mathcal{W}_n(X, \mu, T)$  и  $\mathcal{W}(X, \mu, R_n)$  пространственно изоморфны. Для завершения доказательства осталось заметить, что обе алгебры  $\mathcal{W}_\infty(X, \mu, T)$  и  $\mathcal{W}(X, \mu, R_\infty)$  являются индуктивными пределами изоморфных алгебр, следовательно они сами изоморфны.

Далее, эргодичность отношения  $B$  по определению ([17]) означает, что каждое  $E \subset X$ , совпадающее с  $B(E) = \{x, (x, y) \in B \text{ для некоторого } y \in E\}$  имеет либо нулевую, либо полную меру. Пусть  $E = R_\infty(E)$ , если  $x \in T^{-n} T^n E$ , то  $T^n x \in T^n E$ , т. е. найдется  $y \in E$  такой, что  $T^n x = T^n y$ . Поэтому  $x \in R_\infty(E)$ , т. е.  $x \in E$ . Ввиду точности эндоморфизма,  $E$  тривиально. Отсюда следует, что отношение  $R_\infty$  эргодично, а простые аргументы (см., напр., [17]) позволяют заключить, что  $\mathcal{W}_r(X, \mu, R_\infty)$ , а следовательно и  $\mathcal{W}_\infty(X, \mu, T)$  — фактор.

Замечание. В этой и следующей теоремах пространственный изоморфизм алгебр доказывается без предположения о точности или эргодичности эндоморфизма — достаточно, чтобы эндоморфизм удовлетворял условиям теоремы 1.10.

**Теорема 2.4.** Пусть  $T$  — несингулярный эргодический эндоморфизм с не более чем счетным числом прообразов почти каждой точки. Тогда алгебра  $\mathcal{W}(X, \mu, T)$  — фактор.

**Доказательство.** Легко проверить, что эргодичность эндоморфизма эквивалентна эргодичности отношения  $R = R_\infty(T)$ . Поэтому, как и в предыдущей теореме, достаточно проверить пространственный изоморфизм алгебр  $\mathcal{W}(X, \mu, T)$  и  $\mathcal{W}_r(X, \mu, R)$ .

Пусть  $R^n = \{(x, y) \in R, x \approx T^n y\}$ ,  $n > 0$ ;  $R^1 = \{(x, y) \in R, T^{-n} x \approx y\}$ ,  $n < 0$ ,  $R^0 = R_\infty$ ; очевидно, что  $\mu_l(R^k \cap R^l) = 0$  при  $k \neq l$  и  $\bigcup_n R^n = R$ .

Рассмотрим на  $R$  функции  $u(x, y) = \delta_x^{T y} s_1(T y)^{-1}$  и  $m_\tau(x, y) = \delta_x^y \varphi(x)$ . Как легко проверить  $R_u B = B R_u$  для любого  $B \in \mathcal{W}_l(X, \mu, R)$ ,

откуда  $R_n \in \mathcal{W}(X, \mu, R)$  и, следовательно,  $\{R_a, R_{m_\varphi}, \varphi \in L^-\} \subset \mathcal{W}(X, \mu, R)$ . Покажем, что верно обратное включение. Пусть  $R_a \in \mathcal{W}(X, \mu, R)$ , тогда  $R_a = \sum_n R_{a_n}$ , где  $a_n(x, y) = a(x, y)$  при  $(x, y) \in R^n$  и  $a_n(x, y) = 0$  в противном случае, а ряд сходится в сильной операторной топологии. Достаточно проверить, что  $R_{a_n} \in \{R_u, R_{m_\varphi}\}$  при всех  $n$ . В силу того, что  $R_u^n R_u^n = R_{p_n}$ , где  $p_n = p_{i_n}$  (см. часть (i) доказательства теор. 2.3), учитывая теорему 2.3,  $\mathcal{W}(X, \mu, R_\infty) \subset \{R_u, R_{m_\varphi}\}$ . Кроме того,  $(R^n)^* = R^{-n}$ , поэтому необходимо лишь убедиться, что  $R_{a_n} \in \{R_u, R_{m_\varphi}\}$  при  $n < 0$ . В этом случае легко установить, что  $R_{u^{-n} \cdot a_n} \in \mathcal{W}(X, \mu, R_-)$ , откуда, в силу того, что  $R_{a_n} = R_{u^{-n} \cdot a_n} R_{u^{-n} \cdot a_n}^*$ , получаем  $R_{a_n} \in \{R_u, R_{m_\varphi}\}$ . Итак,  $\mathcal{W}(X, \mu, R) = \{R_u, R_{m_\varphi}\}$ . Для  $B \in \mathcal{W}(X, \mu, R)$

положим  $\gamma(B) = (B\chi_i, \chi_i)$ . Пусть  $a \in \hat{A}$  (см. лемму 1.8), тогда  $a$  есть линейная комбинация операторов вида  $bU^k$  или  $V^k b$  с  $b \in A_-$ . Пусть  $B$  — соответствующий оператор из  $\mathcal{W}(X, \mu, R_-)$  (в силу теоремы 2.3). Легко убедиться, что, например,  $\gamma(BR_{u^k}) = \omega(bU^k)$  и из совпадения  $\gamma$  и  $\omega$  на образующих следует изоморфизм алгебр  $\mathcal{W}(X, \mu, T)$  и  $\mathcal{W}(X, \mu, R)$ .

**Замечание.** Поскольку условие точности сильнее эргодичности, в случае точного эндоморфизма, обе алгебры  $\mathcal{W}(X, \mu, T)$  и  $\mathcal{W}_-(X, \mu, T)$  являются факторами.

Напомним, что коммутативная подалгебра  $M$  алгебры фон Неймана  $\mathcal{W}$  называется *картановской*, если она максимальна, регулярна (нормализатор порождает всю алгебру  $\mathcal{W}$ ) и существует состояние  $\Omega$  на  $\mathcal{W}$ , такое, что  $\Omega(ma) = \Omega(am)$  для  $a \in \mathcal{W}, m \in M$ , [8]. Последнее условие (см. [17]) можно заменить на эквивалентное условие существования точного нормального условного ожидания с алгебры  $\mathcal{W}$  на подалгебру  $M$ .

**Предложение 2.5.** В условиях теоремы 1.10 образ  $\mathfrak{M}$  в регулярном представлении является *картановской подалгеброй*.  $\mathcal{W}_-(X, \mu, T)$  и  $\mathcal{W}(X, \mu, T)$ .

**Доказательство.** В силу изоморфизма (см. замечание теоремы 2.3) достаточно проверить, что  $\mathfrak{M}$  — *картановская подалгебра* в  $\mathcal{W}(X, \mu, R)$  и  $\mathcal{W}(X, \mu, R_-)$ , учитывая, конечно, что  $\mathfrak{M} = \pi(\mathfrak{M})$  (по существу используются те же аргументы, что в [17]). Регулярность максимальной подалгебры  $\mathfrak{M}$  сразу следует из описания ее нормализатора (см. начало п. 2). Пусть  $\gamma$  — состояние на  $\mathcal{W}(X, \mu, R)$ , задаваемое формулой  $\gamma(R_a) = \int a(x, x) d\mu(x)$ . Если  $m \in \mathfrak{M}, R_a \in \mathcal{W}(X, \mu, R)$ , то  $\gamma(R_a \cdot m) = \int (a \cdot m)(x, x) d\mu(x) = \int a(x, x) m(x) d\mu(x) = \int (m \cdot a)(x, x) d\mu(x) = \gamma(m \cdot R_a)$ , что завершает доказательство.

Как уже отмечалось во введении, эта теорема означает, что  $\mathcal{W}(X, \mu, T)$  (соотв.  $\mathcal{W}_-(X, \mu, T)$ ) есть скрещенное произведение коммутативной алгебры  $L^-(X, \mu)$  и некоторой группы ее автоморфизмов, которую легко описать: это множество автоморфизмов  $X$ , переставляющих точки в элементах разбиения  $\tau(T)$  (соотв.  $t(T)$ ). Разумеется, действие этой группы, вообще говоря, не свободное. Следующая теорема показывает, что на деле  $G = Z$ .

**Теорема 2.6.** Пусть эндоморфизм  $T$  удовлетворяет условиям теоремы 2.4 тогда фактор  $\mathcal{W}(X, \mu, T)$  инъективный; если  $T$  — точный эндоморфизм, то фактор  $\mathcal{W}_-(X, \mu, T)$  также инъективен.

**Доказательство.** В силу замечания после теоремы 2.3, достаточно установить инъективность факторов  $\mathcal{W}_+(X, \mu, R)$  и  $\mathcal{W}_-(X, \mu, R_-)$ .

Напомним, (см. [15]), что разбиение пространства Лебега называется *ручным*, если оно представляется в виде (неизмеримого или теоретико-множественного) пересечения убывающей последовательности измеримых разбиений. Заметим, что ручное разбиение со счетными элементами представимо в виде убывающей последовательности измеримых разбиений с конечными элементами. По теореме Вершика, [16], траекторное разбиение эндоморфизма — ручное, разбиение  $t(T)$  — ручное по определению. Поэтому оба они представимы в виде пересечения убывающей последовательности измеримых разбиений с конечными элементами. Соответственно, отношения  $R$  и  $R_-$  представляются в виде объединения возрастающей последовательности отношений с конечными слоями. Это означает, что каждая из алгебр  $\mathcal{W}(X, \mu, R)$  и  $\mathcal{W}(X, \mu, R_-)$  является слабым замыканием объединения возрастающей последовательности алгебр фон Неймана типа  $I_n$ , что и доказывает их инъективность.

**Теорема 2.7.** Пусть  $T_i$  — преобразование пространства Лебега  $(X_i, \mu_i)$ , удовлетворяющее условиям теоремы 1.10,  $i = 1, 2$ . Тогда следующие два утверждения эквивалентны:

(i) разбиение  $\tau(T_1)$  изоморфно некоторому измельчению разбиения  $\tau(T_2)$

(ii) алгебра  $\mathcal{W}(X_1, \mu_1, T_1)$  изоморфна некоторой подалгебре алгебры  $\mathcal{W}(X_2, \mu_2, T_2)$ , при этом соответствующие картановские подалгебры изоморфны.

**Доказательство.** Пусть  $R_1 = R(\tau(T_1))$  и  $R_2 = R(\tau(T_2))$  — соответствующие отношения эквивалентности. В силу теорем об изоморфизме (2.3, 2.4), достаточно доказать утверждение для алгебр  $\mathcal{W}(X_1, \mu_1, R_1)$  и  $\mathcal{W}(X_2, \mu_2, R_2)$ .

(i) Условие (i) гарантирует существование отношения  $\hat{R}_1 \subset R_2$  и изоморфного  $R_1$ , откуда немедленно следует (i).

(ii) Из условия (ii) следует существование подалгебры  $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}(X_2, \mu_2, R_2)$ , изоморфной  $\mathcal{W}(X_1, \mu_1, R_1)$ . При этом картановская подалгебра алгебры  $\mathcal{W}_1$  совпадает с  $\hat{\mathcal{M}}_2$ . Следовательно, нормализатор  $N^1(\hat{\mathcal{M}}_2)$  алгебры  $\hat{\mathcal{M}}_2$  относительно  $\mathcal{W}_1$  вложен в нормализатор  $N(\hat{\mathcal{M}}_2)$  алгебры  $\hat{\mathcal{M}}_2$  относительно  $\mathcal{W}(X_2, \mu_2, R_2)$ .

Введем следующее отношение эквивалентности:  $(x, y) \in \bar{R}_1$  тогда и только тогда, когда существует автоморфизм  $\Phi: X_2 \rightarrow X_2$ , переставляющий точки в элементах разбиения  $\tau(T_2)$  и такой, что отвечающий ему унитарный оператор в алгебре  $\mathcal{W}(X_2, \mu_2, K_2)$  содержится в  $\mathcal{W}_1$ , причем  $x = \Phi(y)$ .

Тогда, очевидно,  $\bar{R}_1 \subset R_2$  и  $\mathcal{W}_1 \cong (X_2, \mu_2, \bar{R}_1)$ . Осталось заметить, что условие совпадения картановских подалгебр гарантирует изоморфизм пространств  $(X_1, \mu_1)$  и  $(X_2, \mu_2)$ . Следовательно, отношения  $R_1$  и  $\bar{R}_1$  изоморфны, т. е. верно (i).

В частности  $\mathcal{W}(X_1, \mu_1, T_1)$  изоморфно  $\mathcal{W}(X_2, \mu_2, T_1)$  тогда и только тогда, когда изоморфны разбиения  $\tau(T_1)$  и  $\tau(T_2)$ .

**3°. Алгебраический тип преобразования.** В этом разделе мы рассматриваем вопросы, связанные с типом факторов, ассоциированных с эргодическими эндоморфизмами с инвариантной мерой. По теореме 2.7 изоморфизм факторов эквивалентен изоморфизму траекторий исходных преобразований, поэтому инварианты фактора (в частности его тип) автоматически являются траекторными инвариантами преобразований. Таким образом, под алгебраическим типом (или просто типом) эргодического преобразования мы понимаем тип соответствующего фактора (совпадающий с типом его траекторного отношения, [17]). Будучи траекторным инвариантом, тип преобразования является грубым инвариантом (относительно метрического изоморфизма), однако как показывают примеры (см. замечание), он независим от энтропии. По поводу других инвариантов для эндоморфизмов см., напр., [34]—[36]).

Вернемся к рассмотрениям и обозначениям п. 2.

**Предложение 3.1.** Пусть  $\mathcal{W}(X, \mu, R)$  — алгебра, построенная по измеримому отношению  $R$  с помощью конструкции Фелдмана-Мура,  $\hat{R} = \{(x, y) \in R, D(x, y) = 1\}$ . Если измеримое отношение  $\hat{R}$  эргодично, то тип фактора  $\mathcal{W}(X, \mu, R)$  определяется множеством  $\sigma(D)$  существенных значений модулярной функции  $D$ , при этом фактор  $\mathcal{W}(X, \mu, \hat{R})$  имеет тип  $II_1$ .

**Доказательство.** Ввиду того, что  $D$  есть 1-коцикл,  $D(x, y) = D(x, z) D(z, y)$ ,  $\hat{R}$  — измеримое отношение. Если  $\hat{R}$  эргодично, то эргодично и  $R$ , откуда следует, что обе алгебры  $\mathcal{W}(X, \mu, R)$  и  $\mathcal{W}(X, \mu, \hat{R})$  являются факторами. По определению, централизатор  $\zeta$  состояния  $\tau(\cdot \chi_i, \chi_i)$  (ср. доказательство теоремы 2.4) состоит из неподвижных точек группы модулярных автоморфизмов  $\psi_i$ , откуда, из (2.1) получаем  $\zeta = \mathcal{W}(X, \mu, \hat{R})$ . Известно ([21], следствие 3.2.7), что тип фактора, для которого централизатор  $\zeta$  также является фактором, определяется спектром соответствующего модулярного оператора, точнее, в этом случае, инвариант  $S$  Конна совпадает с  $\text{Sp } \Delta$ . Осталось заметить, что в рассматриваемой ситуации этот оператор является мультипликатором (неограниченным) и, следовательно, его спектр совпадает с множеством существенных значений  $D$ . Легко понять, что централизатор  $\zeta$  в факторе

$W(X, \mu, R)$  совпадает с ним самим, а сужение  $\Delta$  на эту алгебру есть единственный оператор, откуда и следует последняя часть утверждения.

Пусть теперь  $R$  — отношение эквивалентности, отвечающее траекторному разбиению сохраняющего меру эргодического эндоморфизма  $T$ , т. е.  $R = R(\tau(T))$ . Воспользовавшись предложениями 3.1 и 2.2, можно заклю-

чить, что  $(x, y) \in \bar{R}$  тогда и только тогда, когда для соответствующих условных мер  $\mu_n(x) = \mu_n(y)$ .

Пусть  $X_0 = \{1, 2, \dots, n\}$  — конечное множество, рассматриваемое как дискретное топологическое пространство,  $X = \prod_1 X_0$  — тихоновское произведение счетного числа экземпляров  $X_0$ , представляющее собой вполне несвязный компакт. Элементы  $X$  суть последовательности вида  $x = (x_1, x_2, \dots)$ , где  $x_k \in X_0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , а преобразование  $T$  одностороннего сдвига  $(Tx)_k = x_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , является непрерывным отображением  $X$  на себя. В случае двустороннего преобразования  $T$  является обратимым преобразованием и по любой инвариантной мере имеет тип II<sub>1</sub>.

Марковская  $T$ -инвариантная мера  $\mu$  на  $X$  задается первоначальным распределением  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  на  $X_0$  и стохастической матрицей перехода  $s = [s_{ij}]_n^n$ . Для простоты мы предполагаем всюду, что компоненты матрицы  $s$  и вектора  $p$  положительны — это гарантирует эргодичность рассматриваемых эндоморфизмов. Сдвиг Бернулли (частный случай эндоморфизма Маркова) характеризуется матрицей перехода, где  $s_{ij} = p_j$ .

Пусть  $R^n$  — множества, определенные в доказательстве теоремы 2.4. Каждое из них состоит из однослойных множеств, что позволяет ввести на них структуру локально компактного топологического пространства. Поэтому  $\bar{R} = \sqcup R^n$  (дизъюнктное объединение) также является локальным компактом, причем однозначно определена проекция  $\pi: \bar{R} \rightarrow R$ . В топологической ситуации  $\bar{R}$  отлично от  $R$  (эти два объекта совпадают почти всюду по любой невырожденной мере, ср. доказательство теоремы 2.4), причем на  $\bar{R}$  существует структура  $\Gamma$ -дискретного группоида (см. [6]).

**Теорема 3.2.** Пусть  $T$  — сдвиг Маркова с матрицей перехода  $s = [s_{ij}]$  с положительными компонентами,  $L(s)$  — множество всевозможных произведений вида  $a = s_{k_1, k_2} s_{k_2, k_3} \dots s_{k_n, k_1}$ . Тогда, если существует  $\lambda \in ]0, 1[$ , такое, что для любого  $a \in L(s)$ ,  $a = i^{\cdot m} \lambda$ , с взаимно простыми  $m, \lambda \in \mathbb{N}$ , то тип эндоморфизма  $T$  есть III <sub>$\lambda$</sub> , в противном случае  $T$  имеет тип III<sub>1</sub>.

**Доказательство.** Пусть  $D$  — модулярная функция (см. п. 2). Покажем, что  $D$  продолжается до непрерывной функции  $\bar{D}$  (1-коцикл) на  $\bar{R}$ , в том смысле, что для почти всех  $z \in R$ ,  $D(z) = \bar{D}(x^{-1}(z))$ . Действительно, как легко проверить, функция  $\bar{D}(x, y) = \mu_n(x) \mu_m(y)^{-1}$ , где  $T^n x = T^m y$  непрерывна на  $R^{n-m}$ ,  $n > m$ , (здесь как обычно  $\mu_n(x)$

—условная мера точки  $x$  в разбиении  $\xi_n$ ), поэтому она непрерывна и на  $\bar{R}$ . Осталось заметить, что почти везде  $R^{m_1}$  и  $R^{m_2}$  не пересекаются и привлечь предложение 2.2.

Пусть  $\Sigma_0$  — полуалгебра цилиндрических множеств  $F$  вида  $F(y_1, \dots, y_n) = \{x \in X, x_i = y_i, i=1, \dots, n\}$ . Тогда инвариант Конна  $S$  можно вычислить по формуле  $S(T) = \bigcap \sigma(D|F \times F)$ , где пересечение берется по всем  $F \in \Sigma_0$  (вместо  $\sigma$ -алгебры всех измеримых подмножеств, ср. [17]). Это вытекает из предыдущего замечания и является следствием замкнутости множества существенных значений. Легко проверить, что условная мера  $\mu_n(x)$  точки  $x = (x_1, x_2, \dots)$  в элементе разбиения  $\xi_n(x) \in \xi_n$  равна  $p(x_1) p(x_{n+1})^{-1} c_{x_1, x_1} \dots c_{x_n, x_{n+1}}$ , откуда следует, что  $S(T)$  состоит из множества всевозможных отношений  $\alpha\beta^{-1}$ , где  $\alpha, \beta \in L(c)$ . При этом несложные построения показывают, что  $L(c) \subset S(T)$ , откуда и следует заключение теоремы.

**Следствие 3.3.** Пусть  $T$  — эндоморфизм Бернулли с  $n$  состояниями и мерами  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Тогда его тип есть  $III_\lambda$ , если среди  $p_1, p_2, \dots, p_n$  есть мультипликативно несоизмеримые числа и тип  $III_\lambda$ , если существуют  $\lambda \in ]0, 1[$  и взаимно простые  $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ , такие, что  $p_i = \lambda^{k_i}$ .

**Доказательство.** Очевидно, что  $L(c)$  содержит диагональ  $\{c_{ii}, i=1, \dots, n\}$  (см. предыдущую теорему), совпадающую с распределением  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ , откуда и вытекает утверждение.

Заметим, что в этом случае  $S(T) = \sigma(D)$ . Действительно, на пространстве  $X$  естественным образом действует группа  $\Sigma$  финитных подстановок. Это действие эргодическое, поэтому траекторному разбиению этой группы отвечает эргодическое отношение  $R_\Sigma$ . Легко проверить, что  $R_\Sigma \subset \hat{R}$ , следовательно и  $\hat{R}$  эргодично, откуда по предложению 3.1,  $\mathcal{W}_\mu(X, \mu, \hat{R})$  — фактор, а  $S(T) = \sigma(D)$ .

**Следствие 3.4.** Пусть  $T$  — эндоморфизм Бернулли с  $n$  состояниями равной меры. Тогда тип фактора  $\mathcal{W}_\mu(X, \mu, T)$  есть  $II_1$ , а тип фактора  $\mathcal{W}(X, \mu, T)$  есть  $III_{\frac{1}{n}}$ .

**Доказательство.** Утверждение о типе фактора  $\mathcal{W}(X, \mu, T)$  вытекает из следствия 3.3, а тип фактора  $\mathcal{W}_\mu(X, \mu, T)$  вычисляется на основании предложения 3.1 (в этом случае  $\hat{R} = R_-$ ).

Заметим, что конечность образующей в следствии 3.3 предположена для простоты. Тот же результат (с очевидными изменениями в формулировке) верен и для эндоморфизма Бернулли со счетной образующей.

**Теорема 3.5.** Пусть  $\lambda \in ]0, 1[$ , тогда существует сдвиг Бернулли с конечной или счетной образующей, имеющий тип  $III_\lambda$ .

**Доказательство.** Если  $\lambda = 1$ , то утверждение очевидно. Пусть  $\lambda \in ]0, 1[$ . Покажем, что существует последовательность натуральных чисел  $k_1, k_2, \dots$  без общих делителей и таких, что  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{k_i} = 1$ . Пусть  $m_1 \in \mathbb{N}$ ,  $m_1 \lambda \leq 1$ , но  $(1 + m_1) \lambda > 1$ . Положим  $k_1 = k_2 = \dots = k_{m_1} = 1$ .

Далее, пусть  $m_2 \in \mathbb{N}$ ,  $m_1 \lambda + m_2 \lambda^2 \leq 1$ , но  $m_1 \lambda + (m_2 + 1) \lambda^2 > 1$  при некотором  $t_2 > 2$ . Положим  $k_{m_1+1} = \dots = k_{m_1+m_2} = t_2$ . Продолжим этот процесс дальше, выбирая каждый раз  $t_n$  взаимно простым с  $t_2, t_3, \dots, t_{n-1}$ . Построенная таким способом последовательность  $k_1, k_2, \dots$  очевидно обладает требуемым свойством. Наконец, пусть  $(X, \mu, T)$  — схема Бернулли со счетной образующей и мерами  $p_i = \lambda^{k_i}$ . Тогда, очевидно  $\{\prod p_i^{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \{\lambda^k\}$ , но, поскольку существуют  $m'_1, \dots, m'_l$  с  $\sum m'_i k_i = 1$ , то  $\lambda = \prod p_i^{m'_i}$ , т. е.  $\{\prod p_i^{k_i}\} = \{\lambda^k\}$ . Это и означает, что  $W(X, \mu, T)$  — фактор типа III $_{\lambda}$ .

**Замечание.** Приведем несколько примеров, показывающих, что тип независим от энтропии. Пусть  $T_1, T_2$  — два сдвига Бернулли с 13 состояниями  $\frac{1}{4}, \frac{1}{16} (\times 12)$  и  $\frac{1}{8} (\times 5), \frac{1}{16} (\times 4), \frac{1}{32} (\times 4)$ , соответственно. Тогда, как легко подсчитать, энтропии этих эндоморфизмов совпадают, при этом тип  $T_1$  есть III $_{\frac{1}{4}}$ , а  $T_2$  имеет тип III $_{\frac{1}{2}}$ . Заметим, что тип произвольного двустороннего сдвига (как и вообще, любого автоморфизма с инвариантной мерой) есть III $_{\lambda}$ .

Пусть  $\lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ ,  $T_3$  — сдвиг Бернулли с состояниями  $(\lambda, \lambda^3)$ ,

$T_4, T_5$  — сдвиги Маркова с матрицами перехода  $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$ , соответственно. Тогда энтропии всех трех эндоморфизмов одинаковы, при этом тип  $T_3$  совпадает с типом  $T_4$  и равен III $_{\lambda}$ , а тип  $T_5$  есть III $_{\lambda^2}$ . Таким образом, эндоморфизмы  $T_4$  и  $T_5$  неизоморфны, однако убывающие последовательности разбиений (или  $\sigma$ -алгебр), определяемые ими, финишно изоморфны, ср. [34], [35].

Институт математики  
АН Армянской ССР

Поступила 12. III. 1985

Վ. Ա. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ. Լեբեգի տարածության ոչսինգուլյար էնդոմորֆիզմների հետ զուգորդված պայթատության հանրահաշիվներ (ամփոփում):

Դիցուք  $T$ -ն  $(X, \mu)$  Լեբեգի տարածության քվադր-ինվարիանտ չափով ձևափոխությունն է, այսինքն, որ համարյա ամեն մի կետ ունի ոչ ազիլ քան հաշվելի նախապատկեր: Ամեն մի այդպիսի ազատ գործող ձևափոխությանը համապատասխանեցվում է  $W(X, \mu, T)$  ֆունկցիոնալ հանրահաշիվ: Այս հանրահաշիվը իզոմորֆ է Ֆելդման-Մուրի կառուցվածքով ստացված հանրահաշիվին (հենկով համապատասխան հետազոտային տրոհումից): Եթե  $T$ -ն էրգոդիկ է, ապա  $W(X, \mu, T)$ -ն ինյեկտիվ ֆակտոր է (կրիգերի ֆակտորի ընդհանրացում): Բնականաբար, իզոմորֆ հետազոտային տրոհումներով ձևափոխությունները ծնում են իզոմորֆ ֆակտորներ:

Հետազոտված է այս ֆակտորների տիպը (որը հանդիսանում է  $T$ -ի հետազոտային ինվարիանտ): Անգամ ինվարիանտ չափով ձևափոխությունների համար տիպը կարող է լինել III $_{\lambda}$ ,  $\lambda \in ]0, 1[$  և ամեն մի այդպիսինը ստացվում է հենկով Բերնուլլի կամ Մարկովի միակողմանի տեղաշարժից:

Այնպիսի մանրամասն շարադրանք է ընդհանուր դեպքում [24] — [26] (տես նաև [27]) — ում հայտնաբերված արդյունքների (ինվարիանտ չափով էնդոմորֆիզմների դեպքում):

V. A. ARZUMANIAN. *Operator algebras associated with non-singular transformations of a Lebesgue space (summary)*

Let  $T$  be a finitely or countably many to one endomorphism of a Lebesgue space  $(X, m)$  with quasi-invariant measure. With every such freely acting transformation on the von Neumann algebra  $\mathcal{W}(X, m, T)$  construction is associated. The latter is isomorphic to the von Neumann algebra obtained by Feldman-Moore construction starting from the corresponding full trajectory partition. If the initial endomorphism is ergodic,  $\mathcal{W}(X, m, T)$  is injective factor (which generalize the so called Krieger factor). Naturally, transformations with isomorphic trajectory partitions (weakly equivalent) generate isomorphic factors.

The type (a trajectory algebraic invariant of  $T$ ) of these factors is investigated. We show that transformations with invariant measure have the type  $\text{III}_\lambda, \lambda \in ]0, 1[$ , and every such a type can be realized by Bernoulli or Markov one-sided shift.

The paper is a detailed presentation of the results announced in [24]—[26] (see also [27]) for measure preserving transformations.

# ЛИТЕРАТУРА

1. F. Murray, J. von Neumann. On rings of operators, Ann. Math., 37, 1936, 116—229.
2. J. von Neumann. On rings of operators, III, Ann. Math., 41, 1940, 94—161.
3. F. Murray, J. von Neumann. On rings of operators, IV, Ann. Math., 44, 1943, 716—808.
4. C. C. Moore. Invariant measure on product spaces, Proc. of the Fifth Berkeley symp., II, p. 2, 1967, 447—459.
5. G. Zeller-Meyer. Produits croisés d'une  $C^*$ -algèbre par une groupe d'automorphismes, J. Math. pure et appl., 47, 1968, 101—239.
6. J. N. Renault. A groupoid approach to  $C^*$ -algebras, Lecture Notes in Math., Springer, 793, 1980.
7. W. Arveson. Operator algebras and measure preserving automorphisms, Acta Math., 118, n. 1—2, 1967, 95—105.
8. А. М. Вершик. Неизмеримые разбиения, траекторная теория, алгебры операторов, ДАН СССР, 119, № 5, 1971, 1004—1007.
9. H. Dye. On group of measure preserving transformations, I, Amer. J. of Math., 81, n. 1, 1959, 119—159.
10. H. Dye. On group of measure preserving transformations, II, Amer. J. of Math., 85, n. 4, 1963, 551—576.
11. W. Krieger. On non-singular transformations of a measure space, I, II, Z. Wahr. verw. Geb., 11, 1969, 83—119.
12. W. Krieger. On the Araki-Woods asymptotic ratio set and non-singular transformations of measure space, Lect. Notes Math., 160, 1970, 156—177.
13. W. Krieger. On constructing non  $*$ -isomorphic hyperfinite factors of type III, J. of Funct. Anal., 6, 1970, 97—109.
14. W. Krieger. On ergodic flows and the isomorphism of factors, Math. Ann., 223, 1976, 19—70.
15. А. М. Вершик. Устройство ручных разбиений, УМН, 27, № 3, 1972, 195—196.
16. А. М. Вершик. Действие  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  в  $\mathbb{R}^1$  аппроксимируемо, УМН, 33, № 1, 1978, 209—210.
17. J. Feldman, C. C. Moore. Ergodic equivalence relations, cohomology and von Neumann algebras, I, II, Trans. of A. M. S., 234, n. 2, 1977, 289—339.
18. A. Connes. Classification of injective factors, Ann. Math., 104, 1975, 73—115.
19. R. T. Powers. Representations of uniformly hyperfinite algebras and the associated von Neumann rings, Ann. Math., 86, 1967, 113—171.
20. H. Araki, E. Woods. A classification of factors, Publ. RIMS, Kyoto Univ., ser. A, 4, 1968, 51—130.

21. A. Connes. Une classification des facteurs de type III, Ann. [Ec. Norm. Sup., 6, 1973, 133—252.
22. M. Takesaki Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, Lect. Notes in Math., Springer, 128, 1970.
23. U. Haagerup. Connes' bicentraliser problem and uniqueness of the injective factor of type III<sub>1</sub>, Odense Univ. Prepr., n. 10, Dec. 1984.
24. В. А. Арзуманян, А. М. Вершик. Фактор-представления скрещенного произведения коммутативной  $C^*$ -алгебры и полугруппы ее эндоморфизмов, ДАН СССР, 238, № 3, 1978, 513—516.
25. В. А. Арзуманян. Факторы, ассоциированные с эндоморфизмами пространства Лебега, ДАН Арм.ССР, 68, № 5, 1979, 262—266.
26. В. А. Арзуманян. Алгебраический тип эргодического сдвига Маркова, ДАН Арм.ССР, 80, № 2, 1985, 59—63.
27. V. A. Arzumanian, A. M. Vershik. Star algebras associated with endomorphisms, in Operator algebras and group repr. (Proc. of 1980—OAGR Conf.), v. 1, Pitman, 1984, 17—27.
28. В. А. Рохлин. Об основных понятиях теории меры, Матем. сб., 67, № 1, 1949, 107—150.
29. В. А. Рохлин. Точные эндоморфизмы пространства Лебега, Изв. АН СССР, сер. матем., 25, № 4, 1961, 499—530.
30. П. Халмош. Лекции по эргодической теории, М., ИЛ, 1959.
31. J. Dixmier. Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars 1969.
32. J. Dixmier. Les  $C^*$ -algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, 1964.
33. S. Sakai.  $C^*$ -algebras and  $W^*$ -algebras, Springer, 1971.
34. А. М. Вершик. Убывающие последовательности измеримых разбиений и их применения, ДАН СССР, 193, № 4, 1970, 748—751.
35. W. Parry, P. Walters. Endomorphisms of a Lebesgue space, Bull. of A. M. S., 78, n. 2, 1972, 272—276.
36. Т. Кубо, Н. Мурата, Н. Тотокит. On the isomorphism problem for endomorphisms of Lebesgue space, I, II, III, Publ. RIMS. Kyoto Univ., 9, n. 2, 1974, 235—317.
37. Р. М. Белинская. Разбиения пространства Лебега автоморфизмами, Функ. анализ и прил., 2, № 3, 1968, 4—16.
38. А. М. Вершик. О лакунарном изоморфизме последовательностей диадических разбиений, Функ. анализ и прил., 2, № 3, 1968, 17—21.

УДК 517.547

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А. О. КАРАПЕТЯН

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ДЕКАРТОВОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ УГЛОВЫХ ОБЛАСТЕЙ

1 (а) В данной статье приводятся интегральные представления определенных классов аналитических функций, заданных в декартовом произведении угловых областей. Они аналогичны тем представлениям, которые впервые были установлены в работе [1], а затем дополнены и изложены с новыми доказательствами в главе VII монографии [2]. Речь идет о введенных в [1] и [2] классах функций  $f(z)$ , аналитических в области угла

$$\Delta_1 = \left\{ z \in \mathbb{C}, |\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha} \right\} \left( \frac{1}{2} < \alpha < +\infty \right) \quad (1.1)$$

и подчиненных условию вида

$$\sup_{|z| \leq \frac{\pi}{2\alpha}} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^2 \cdot r^\omega dr < +\infty \quad (-1 < \omega < 1). \quad (1.2)$$

Ради упрощения записи изложение в настоящей статье проводится для аналитических функций лишь двух комплексных переменных.

(б) Введем необходимые для дальнейшего обозначения. Через  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{C}^2$  будем обозначать обычные координатные пространства двух действительных и двух комплексных переменных, соответственно. Пусть

$$\mathbb{R}_+^2 = \{ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, y_j > 0 \ (j = 1, 2) \} \quad (1.3)$$

обозначает декартово произведение положительных полуосей в  $\mathbb{R}^2$ . Далее, если  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ , то мы часто будем использовать следующее краткое обозначение:

$$z = r \cdot e^{i\varphi}, \quad (1.4)$$

где  $r = (r_1, r_2)$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ ,  $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$  ( $j = 1, 2$ ). Условимся также, что если  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  или  $r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2$ , то

$$dx = dx_1 dx_2, \ dr = dr_1 dr_2. \quad (1.5)$$

Для любых  $\frac{1}{2} < \rho < +\infty$ ,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  обозначим через  $\Delta(\theta; \rho)$  следующую угловую область:

$$\Delta(\theta; \rho) = \left\{ z \in \mathbb{C}, z \neq 0, |\operatorname{Arg} z - \theta| < \frac{\pi}{2\rho} \right\}. \quad (1.6)$$

Через  $\Delta^*(0; \rho)$  обозначим дополнительную к  $\Delta(0; \rho)$  угловую область

$$\Delta^*(\theta; \rho) = C \overline{\Delta(\theta; \rho)}. \quad (1.7)$$

Если  $\frac{1}{2} < \rho < +\infty$ ,  $\theta = 0$ , то будем предпочитать более краткое обозначение

$$\Delta(0; \rho) = \Delta_\rho. \quad (1.8)$$

Далее, для  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$  и  $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$  будем полагать

$$x^\omega = x_1^{\omega_1} \cdot x_2^{\omega_2}. \quad (1.9)$$

Тогда для  $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$  обозначим через  $L_\omega^2(\mathbb{R}_+^2)$  пространство измеримых по Лебегу, вообще говоря, комплекснозначных функций  $g(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}_+^2$ , для которых

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |g(x)|^2 \cdot x^\omega dx < +\infty. \quad (1.10)$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что  $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$  подчинено условиям

$$-1 < \omega_j < 1 \quad (j=1, 2). \quad (1.11)$$

Пусть  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$  и для  $j=1, 2$   $\Delta_j$  суть произвольные угловые области:

$$\Delta_j = \{z_j \in \mathbb{C}, z_j \neq 0, \theta_{j1} < \operatorname{Arg} z_j < \theta_{j2}\}, \quad (1.12)$$

где  $0 < \theta_{j2} - \theta_{j1} < 2\pi$  ( $j=1, 2$ ).

Обозначим через  $G_\omega^2(\Delta_1 \times \Delta_2)$  пространство голоморфных в области  $\Delta_1 \times \Delta_2 \subset \mathbb{C}^2$  функций  $F(z) \equiv F(z_1, z_2)$ , подчиненных условию вида

$$\sup_{\theta_{j1} < \varphi_j < \theta_{j2}} \int_{\mathbb{R}_+^2} |F(re^{i\varphi})|^2 \cdot r^\omega dr < +\infty, \quad (1.13)$$

где  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ . Для  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$  и  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  ( $\frac{1}{2} < \alpha_j < +\infty$ ,  $j=1, 2$ )

введем следующее сокращенное обозначение:

$$G_\omega^2(\Delta_{\alpha_1} \times \Delta_{\alpha_2}) = G_\omega^2(\alpha). \quad (1.14)$$

Если  $\omega = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ , то вместо  $G_\omega^2(\alpha)$  обычно будем писать  $G^2(\alpha)$ . Всюду дальше предполагается, что  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  подчинено условиям

$$\frac{1}{2} < \alpha_j < +\infty \quad (j=1, 2). \quad (1.15)$$

2. В дальнейшем мы часто будем пользоваться следующим очевидным утверждением.

Лемма 1. Пусть функция  $F(z) \equiv F(z_1, z_2)$  голоморфна в области  $\Delta_{z_1}, \Delta_{z_2} \subset \mathbb{C}^2$ ,  $z = (z_1, z_2)$ ,  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ . Тогда  $F(z_1, z_2) \in G_m^2(z)$  если и только если

$$F(z_1, z_2) \cdot z_1^{m_1-2} \cdot z_2^{m_2-2} \in G^2(z).$$

Следующие два предложения мы приводим без доказательств, так как они сходны с доказательством теоремы 7.5 монографии [2].

Теорема 1. Пусть  $F \in G_m^2(z)$  и значения  $\varphi_j^0, |\varphi_j^0| < \pi/2z_j$  ( $j = 1, 2$ ), фиксированы. Тогда существует функция  $\psi \in L_m^2(\mathbb{R}_+^2)$ , зависящая от выбора  $\varphi_j^0$  ( $j = 1, 2$ ) и такая, что при  $|\varphi_j| < \pi/2z_j$ ,  $\varphi_j \rightarrow \varphi_j^0$  ( $j = 1, 2$ ):

$$F(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2}) \xrightarrow{L_m^2(\mathbb{R}_+^2)} \psi(r_1, r_2). \quad (2.1)$$

Если к тому же  $|\varphi_j^0| < \pi/2z_j$  ( $j = 1, 2$ ), то  $\psi(r_1, r_2) = F(r_1 e^{i\varphi_1^0}, r_2 e^{i\varphi_2^0})$ .

Лемма 2. Пусть  $F \in G_m^2(z)$  и при  $j = 1, 2$

$$-\frac{\pi}{2z_j} < \varepsilon_{j1} < \varepsilon_{j2} < \frac{\pi}{2z_j}. \quad (2.2)$$

Тогда существует положительное число  $M < +\infty$ , зависящее от функции  $F$  и выбора  $\varepsilon_{j1}, \varepsilon_{j2}$  ( $j = 1, 2$ ) и такое, что

$$r_1^{\frac{1+m_1}{2}} \cdot r_2^{\frac{1+m_2}{2}} \cdot |F(r_1 e^{i\varepsilon_{j1}}, r_2 e^{i\varepsilon_{j2}})| \leq M \quad (2.3)$$

при всех  $0 < r_j < +\infty$ ,  $\varepsilon_{j1} \leq \varepsilon_{j2} \leq \varepsilon_{j2}$  ( $j = 1, 2$ ).

На этих фактах основано доказательство следующего аналога интегральной формулы Коши.

Теорема 2. Пусть  $F \in G_m^2(z)$  и  $F_{\pm\pm} \in L_m^2(\mathbb{R}_+^2)$  суть остовные граничные значения функции  $F$  в смысле теоремы 1, то есть

$$F_{\pm\pm}(r_1, r_2) = F(r_1 e^{\pm i\frac{\pi}{2z_1}}, r_2 e^{\pm i\frac{\pi}{2z_2}}). \quad (2.4)$$

Тогда справедлива формула

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi i)^2} \cdot \sum_{\mathbb{R}_+^2} \int \frac{e^{-i(\frac{\pi}{2z_1} - \frac{\pi}{2})} \cdot e^{i(\frac{\pi}{2z_2} + \frac{\pi}{2})} \cdot F_{\pm\pm}(r_1, r_2) dr}{(r_1 e^{\pm i\frac{\pi}{2z_1}} - z_1) \cdot (r_2 e^{\pm i\frac{\pi}{2z_2}} - z_2)} = \\ = |F(z_1, z_2), (z_1, z_2) \in \Delta_{z_1} \times \Delta_{z_2} \\ |0, (z_1, z_2) \in \Delta_{z_1} \times \Delta_{z_2}^* \cup \Delta_{z_1}^* \times \Delta_{z_2} \cup \Delta_{z_1}^* \times \Delta_{z_2}^* \end{aligned} \quad (2.5)$$

Примечание. В формулировке теоремы 2 мы применили сокращенную запись, основанную на следующей регулировке знаков. Знаки  $\pm$  (или  $\mp$ ) при параметрах с одинаковым индексом берутся одновременно либо верхние, либо нижние, но чередуются независимо от выбора знаков при параметрах с другим индексом. Кроме того, в выражении  $F_{\pm\pm}$  на первом месте (на втором месте) стоит верхний или нижний знак в зависимости от того, верхний или нижний знак выбран при параметрах с индексом 1 (с индексом 2). Всюду в дальнейшем, не оговаривая специально, будем придерживаться этого правила регулировки знаков.

Доказательство теоремы 2. Пусть, например,  $z^0 = (z_1^0, z_2^0) \in \Delta_{z_1} \times \Delta_{z_2}$  (остальные случаи рассматриваются аналогично). При  $j = 1, 2$  окружим точки  $z_j^0$  специально подобранными контурами  $\Gamma_j$  и запишем обычную интегральную формулу Коши

$$F(z_1^0, z_2^0) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \frac{F(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 \wedge d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1^0) \cdot (\zeta_2 - z_2^0)}. \quad (2.6)$$

Специальным образом расширяя контуры  $\Gamma_j$  в правой части (2.6) совершим предельный переход. Если при этом воспользуемся теоремой 1, леммой 2 и тем, что  $F \in G_\omega^2(\alpha)$ , то получим формулу (2.5).

3 (а) Перечислим теперь ряд предположений, при которых будут сформулированы некоторые из дальнейших утверждений. Пусть для  $j = 1, 2$ ,  $1/2 < \alpha_j < +\infty$ ,  $-1 < \omega_j < 1$ , а числа  $\rho_j$  выбраны так, что  $\frac{1}{\alpha_j} + \frac{1}{\rho_j} < 2$ . Положим, далее,  $\mu_j = \frac{1 + \rho_j + \omega_j}{2\rho_j}$  и числа  $\gamma_j$  выберем так:  $\frac{1}{\alpha_j} + \frac{1}{\rho_j} = \frac{1}{\gamma_j}$ . Кроме того,  $z = (z_1, z_2)$ ,  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ .

(б) Нижеследующее утверждение легко вытекает из соответствующей леммы, приведенной в монографии [2].

Лемма 3. Пусть выполнены все предположения п. 3 (а). Тогда для любого  $z = (z_1, z_2) \in \Delta_{z_1} \times \Delta_{z_2} \subset \mathbb{C}^2$  справедливы следующие предельные формулы:

$$\frac{r_1^{-\frac{\omega_1}{2}} \cdot r_2^{-\frac{\omega_2}{2}} \cdot e^{\pm i \frac{\pi}{2\alpha_1}} \cdot e^{\pm i \frac{\pi}{2\alpha_2}}}{(r_1 e^{\pm i \frac{\pi}{2\alpha_1}} - z_1) \cdot (r_2 e^{\pm i \frac{\pi}{2\alpha_2}} - z_2)} = \text{l. l. m.} \prod_{j=1}^2 r_j^{-\frac{\omega_j}{2}} \cdot e^{\mp i \frac{\pi}{2} \mu_j} \cdot r_j^{\mu_j \rho_j - 1} \cdot \int_0^{\sigma_j} e^{\pm i r^{\rho_j}} \cdot \tau_j \cdot E_{\rho_j} (e^{\mp i \frac{\pi}{2\gamma_j}} \cdot z_j \tau_j^{1/\rho_j}, \mu_j) \tau_j^{j-1} d\tau_j, \quad (3.1)$$

где предел понимается в пространстве  $L^2(\mathbb{R}_+^2)$ .

Теперь мы сформулируем наиболее существенные теоремы, отметим, что доказательства их близки к доказательствам теорем 4.1, 7.7, 7.7' монографии [2].

Теорема 3. Пусть выполнены предположения п. 3 (а),  $F \in G_\omega^2(\alpha)$ , а  $F_{\pm\pm} \in L_\omega^2(\mathbb{R}_+^2)$  суть основные граничные значения функции  $F$ . Тогда для любого  $z = (z_1, z_2)$  из  $\Delta_{z_1} \times \Delta_{z_2} \subset \mathbb{C}^2$ :

$$F(z_1, z_2) = \sum_{\mathbb{R}_+^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} E_{\rho_1} (e^{\pm i \frac{\pi}{2\alpha_1}} \cdot z_1 \tau_1^{1/\rho_1}, \mu_1) \tau_1^{\mu_1-1} \cdot E_{\rho_2} (e^{\pm i \frac{\pi}{2\alpha_2}} \cdot z_2 \tau_2^{1/\rho_2}, \mu_2) \times \\ \times \tau_2^{\mu_2-1} \cdot v_{\mp\mp} (F, \tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (3.2)$$

где функции  $v_{\pm\pm}(F, \tau) \in L^2(\mathbb{R}_+^2)$  определяются из соотношений

$$\int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} v_{\pm\pm}(F, t) dt = \frac{e^{\pm i \frac{\pi}{2} (1-\mu_1)} \cdot e^{\pm i \frac{\pi}{2} (1-\mu_2)}}{2\pi\rho_1 \cdot 2\pi\rho_2} \times$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} F_{\tau_1, \tau_2}(x_1^{1/\rho_1}, x_2^{1/\rho_2}) x_1^{\mu_1-1} \cdot x_2^{\mu_2-1} \cdot \frac{e^{\pm i x_1 \tau_1} - 1}{\pm i x_1} \cdot \frac{e^{\pm i x_2 \tau_2} - 1}{\pm i x_2} dx \quad (3.3)$$

при всех  $0 < \tau_1, \tau_2 < +\infty$ .

**Доказательство.** Для произвольной точки  $z = (z_1, z_2) \in \Delta_{\tau_1} \times \Delta_{\tau_2} \subset \mathbb{C}^2$  справедлива формула (2.8). Затем воспользуемся леммой 3, заменив ядра Коши в (2.8) их предельными формулами (3.1). После несложной замены переменных в соответствующих интегралах получим:

$$F(z) = \lim_{\tau_1, \tau_2 \rightarrow +\infty} F_{\tau_1, \tau_2}(z). \quad (3.4)$$

Мы опускаем явный вид выражений  $F_{\tau_1, \tau_2}(z)$  ввиду их громоздкости. Используя технику преобразования Фурье  $L^2$ -функций и теорему Фубини, поменяем порядок интегрирования в выражениях  $F_{\tau_1, \tau_2}(z)$  и устремим  $\tau_1, \tau_2 \rightarrow +\infty$ . С учетом (3.4) получим (3.2).

**Теорема 4.** Пусть для  $j=1, 2$ ,  $\frac{1}{2} < \rho_j < +\infty$ ,  $-1 < \omega_j < 1$ ,  $\mu_j = \frac{1 + \rho_j + \omega_j}{2\rho_j}$ ,  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ . Для произвольной  $f \in L^2(\mathbb{R}_+^2)$  определим функцию:

$$F(z_1, z_2) = \int_{\mathbb{R}_+^2} E_{\rho_1}(z_1 x_1^{1/\rho_1}, \mu_1) x_1^{\mu_1-1} \cdot E_{\rho_2}(z_2 x_2^{1/\rho_2}, \mu_2) x_2^{\mu_2-1} \cdot f(x_1, x_2) dx \quad (3.5)$$

$$z = (z_1, z_2) \in \Delta_{\rho_1}^* \times \Delta_{\rho_2}^* \subset \mathbb{C}^2.$$

Тогда  $F \in G_0^2(\Delta_{\rho_1}^* \times \Delta_{\rho_2}^*)$  и для любых фиксированных  $\varphi_j \in \left[\frac{\pi}{2\rho_j}; 2\pi - \frac{\pi}{2\rho_j}\right]$ ,  $0 < u_j < +\infty$  ( $j=1, 2$ ) справедлива формула

$$\begin{aligned} & \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} F(e^{i\varphi_1} \cdot t_1^{1/\rho_1}, e^{i\varphi_2} \cdot t_2^{1/\rho_2}) t_1^{\mu_1-1} \cdot t_2^{\mu_2-1} dt_1 dt_2 = \\ & = u_1^{\mu_1} \cdot u_2^{\mu_2} \cdot \int_{\mathbb{R}_+^2} E_{\rho_1}(e^{i\varphi_1} \cdot x_1^{1/\rho_1} \cdot u_1^{1/\rho_1}, \mu_1 + 1) \cdot x_1^{\mu_1-1} \cdot E_{\rho_2}(e^{i\varphi_2} \cdot x_2^{1/\rho_2} \cdot u_2^{1/\rho_2}, \mu_2 + 1) \times \\ & \quad \times x_2^{\mu_2-1} \cdot f(x_1, x_2) dx \end{aligned} \quad (3.6)$$

**Доказательство.** Пусть  $\varphi_j \in \left[\frac{\pi}{2\rho_j}; 2\pi - \frac{\pi}{2\rho_j}\right]$  ( $j=1, 2$ ) и  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ .

Рассмотрим следующую функцию от  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$ :

$$k_{\varphi}(x_1, x_2) = E_{\rho_1}(e^{i\varphi_1} \cdot x_1^{1/\rho_1}, \mu_1 + 1) x_1^{\mu_1-1} \cdot E_{\rho_2}(e^{i\varphi_2} \cdot x_2^{1/\rho_2}, \mu_2 + 1) x_2^{\mu_2-1}. \quad (3.7)$$

Пусть  $g_{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}_+)$  есть преобразование Ватсона функции  $f$  с ядром  $k_{\varphi}(x_1, x_2)$ . Тогда существует положительное число  $M < +\infty$ , не зависящее от  $\varphi$  и такое, что

$$\|g_{\varphi}\|_{L^2} \leq M \|f\|_{L^2}. \quad (3.8)$$

Пользуясь свойствами преобразования Ватсона, можно показать, что почти всюду в  $\mathbb{R}_+^2$

$$g_{\varphi}(u_1, u_2) = u_1^{p_1-1} \cdot u_2^{p_2-1} \cdot F(e^{i\varphi_1} \cdot u_1^{1/p_1}, e^{i\varphi_2} \cdot u_2^{1/p_2}). \quad (3.9)$$

Из (3.8) и (3.9) следует, что  $F \in G_{\infty}^2(\Delta_{\varphi_1}^* \times \Delta_{\varphi_2}^*)$ , а формула (3.6) вытекает из (3.7), (3.9) и того, что  $g_{\varphi}$  есть преобразование Ватсона функции  $f$  с ядром  $k_{\varphi}$ .

Из теоремы 4 легко вытекает следующая

**Теорема 5.** Пусть выполнены предположения п. 3 (а). Для любых четырех функций  $v_{\pm}(\tau) \in L^2(\mathbb{R}_+)$  определим функцию от  $z = (z_1, z_2) \in \Delta_{\varphi_1} \times \Delta_{\varphi_2} \subset \mathbb{C}^2$ :

$$F(z_1, z_2) = \sum_{\mathbb{R}_+^2} \int E_{\varphi_1}(e^{-i\frac{\pi}{2\varphi_1}} \cdot z_1 \cdot \tau_1^{1/p_1}, \mu_1) \tau_1^{p_1-1} \cdot E_{\varphi_2}(e^{-i\frac{\pi}{2\varphi_2}} \cdot z_2 \cdot \tau_2^{1/p_2}, \mu_2) \times \\ \times \tau_2^{p_2-1} \cdot v_{\mp\mp}(\tau_1, \tau_2) d\tau. \quad (3.10)$$

Тогда  $F \in G_{\infty}^2(z)$ . Кроме того, для любых фиксированных  $|\varphi_j| \leq \frac{\pi}{2x_j}$

$0 < r_j < +\infty$  ( $j=1, 2$ ) справедлива формула

$$\int_0^{r_1} \int_0^{r_2} F(e^{i\varphi_1} \cdot t_1^{1/p_1}, e^{i\varphi_2} \cdot t_2^{1/p_2}) t_1^{p_1-1} \cdot t_2^{p_2-1} dt_1 dt_2 = r_1^{p_1} \cdot r_2^{p_2} \times \\ \times \sum_{\mathbb{R}_+^2} \int E_{\varphi_1}(e^{-i\frac{\pi}{2\varphi_1}} \cdot e^{i\varphi_1} \cdot r_1^{1/p_1} \cdot \tau_1^{1/p_1}, \mu_1 + 1) \tau_1^{p_1-1} \cdot E_{\varphi_2}(e^{-i\frac{\pi}{2\varphi_2}} \cdot e^{i\varphi_2} \cdot r_2^{1/p_2} \cdot \tau_2^{1/p_2}, \\ \mu_2 + 1) \cdot \tau_2^{p_2-1} \cdot v_{\mp\mp}(\tau_1, \tau_2) d\tau. \quad (3.11)$$

(в) В приведенных выше теоремах предполагалось, что  $\frac{1}{x_j} + \frac{1}{p_j} \leq 2$  ( $j=1, 2$ ). Но в частном случае, когда  $\frac{1}{x_j} + \frac{1}{p_j} = 2$  ( $j=1, 2$ ), то есть параметры  $p_j$  ( $j=1, 2$ ) принимают свои минимальные значения, многие утверждения сформулированных теорем заметно упрощаются. Таким образом, справедлива

**Теорема 6.** Пусть для  $j=1, 2$ ,  $\frac{1}{2} < x_j < +\infty$ ,  $-1 < \omega_j < 1$ ,

$$\frac{1}{x_j} + \frac{1}{p_j} = 2, \mu_j = \frac{1}{2} + (1 + \omega_j) \cdot \left(1 - \frac{1}{2x_j}\right), z = (z_1, z_2), \omega = (\omega_1, \omega_2).$$

$\mathcal{I}^0$ . Класс  $G_{\infty}^2(z)$  совпадает с множеством функций, допускающих представление вида

$$f(z_1, z_2) = \int_{\mathbb{R}^2} E_{\rho_1}(-z_1 \tau_1^{1/\rho_1}, \rho_1) \tau_1^{n_1-1} \cdot E_{\rho_2}(-z_2 \tau_2^{1/\rho_2}, \rho_2) \tau_2^{n_2-1} \cdot v(\tau_1, \tau_2) d\tau, \quad (3.12)$$

$$z = (z_1, z_2) \in \Delta_{z_1} \times \Delta_{z_2} \subset \mathbb{C}^2,$$

где  $V(\tau_1, \tau_2)$  — произвольная функция из  $L^2(\mathbb{R}_+^2)$ .

2°. Если  $f \in G_{\alpha}^2(z)$ , то справедлива формула

$$F(z_1, z_2) = \int_{\mathbb{R}^2} E_{\rho_1}(-z_1 \tau_1^{1/\rho_1}, \rho_1) \tau_1^{n_1-1} \cdot E_{\rho_2}(-z_2 \tau_2^{1/\rho_2}, \rho_2) \tau_2^{n_2-1} \cdot v(F, \tau_1, \tau_2) d\tau, \quad (3.13)$$

$$z = (z_1, z_2) \in \Delta_{z_1} \times \Delta_{z_2} \subset \mathbb{C}^2,$$

где функция  $v(F, \tau) \in L^2(\mathbb{R}^2)$  определяется из соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 V(F, t_1, t_2) dt_1 dt_2 &= \frac{1}{2\pi\rho_1} \cdot \frac{1}{2\pi\rho_2} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2} F(e^{-i\frac{\pi}{2\rho_1} \operatorname{sign} x_1} \cdot |x_1|^{1/\rho_1}, e^{-i\frac{\pi}{2\rho_2} \operatorname{sign} x_2} \cdot |x_2|^{1/\rho_2}) \times \\ &\times \prod_{j=1}^2 (e^{i\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x_j} \cdot |x_j|)^{n_j-1} \cdot \frac{e^{-ix_j} - 1}{-ix_j} dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

при всех  $0 < \tau_1, \tau_2 < +\infty$ .

3°. Если  $f \in G_{\alpha}^2(z)$ , то для любых фиксированных значений

$|r_j| < \frac{\pi}{2\alpha_j}$ ,  $0 < r_j < +\infty$  ( $j=1, 2$ ) справедлива формула

$$\begin{aligned} \int_0^{r_1} \int_0^{r_2} F(e^{i\tau_1} \cdot t_1^{1/\rho_1}, e^{i\tau_2} \cdot t_2^{1/\rho_2}) t_1^{n_1-1} \cdot t_2^{n_2-1} dt_1 dt_2 &= r_1^{n_1} \cdot r_2^{n_2} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2} E_{\rho_1}(-e^{i\tau_1} \cdot r_1^{1/\rho_1} \cdot \tau_1^{1/\rho_1}, \rho_1 + 1) \tau_1^{n_1-1} \cdot E_{\rho_2}(-e^{i\tau_2} \cdot r_2^{1/\rho_2} \cdot \tau_2^{1/\rho_2}, \rho_2 + 1) \times \\ &\times \tau_2^{n_2-1} \cdot v(F, \tau_1, \tau_2) d\tau. \end{aligned} \quad (3.15)$$

В заключение выражаю благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задач и руководство.

Ереванский государственный  
университет

Поступила 26.V. 1986

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян. Интегральное представление некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460.
2. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
3. И. Стейн, Г. Вейс. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, М., «Мир», 1974.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

Հայկական ՍՍՀ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր «Մաթեմատիկա»  
ամսագրի 1986 թ. XXI, № 1—6

|                                                                                                                                                       |        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Վ. Ա. Արզումանյան Հերթի տարածության ոչ սինգուլյար էնդոմորֆիզմների հետ զուգորդված օպերատորային հանրահաշիվներ                                           | 6, 596 |
| Վ. Ա. Արզումանյան, Ս. Ա. Դրիզդույան. Օպերատորային դաշտերի հավասարաչափ հանրահաշիվների սպեկտրը                                                          | 1, 63  |
| Ա. Հ. Բաբայան. Վիներ-Հոփերի վերսահմանող սիմվոլով ոչ համասեռ ինտեգրալ հավասարում                                                                       | 5, 421 |
| Ս. Լ. Բերքեռյան. Մ <sub>α</sub> դասերի սուբարմոնիկ ֆունկցիաների եզրային վարքի մասին                                                                   | 2, 187 |
| Ա. Ա. Դանիելյան. Կոմպլեքս հարթության կոմպակտ բազմությունների վրա հավասարաչափ սահմանափակ բազմանդամների հաշորդականության ֆունկցիաների ներկայացման մասին | 4, 345 |
| Վ. Բ. Դիրին. Հաշվելի թվով եզակիություններ ունեցող անալիտիկ ֆունկցիաների տարածություններում բազիսների մասին                                            | 6, 566 |
| Ի. Գ. Խաչատրյան. Բարձր կարգի դիֆերենցիալ օպերատորների զույգին համապատասխանող ջրման օպերատորների մասին                                                 | 1, 5   |
| Ի. Հ. Խաչատրյան. Կոմպլեքս տիրույթում կշռային մոտավորությունների հետ կապված թվադիանալիտիկ դասեր                                                        | 6, 557 |
| Ս. Հ. Խաչատրյան. Խզվող եզրային տվյալներով եզրային խնդիրներ երկրորդ կարգի էլիպտիկ հավասարումների համար հարթության վրա                                  | 4, 375 |
| Գ. Ա. Կաբազյան. Օրթոգոնալ կրկնակի շարքերի ըստ Պրինգսհայմի մեթոդի զուգամիտություն մասին                                                                | 1, 80  |
| Գ. Ա. Կարապետյան. Վերսահմանող ուղղանկյուն հավասարումների որոշ դասեր կիսատարածություններում                                                            | 5, 471 |
| Մ. Գ. Կրեյն, Ֆ. Է. Մեյլի-Ադամյան. Շուտի և Կարատեոդորի-Տեպլիցի խնդիրների մատրիցային կոնտինուալ անալոգները                                              | 2, 107 |
| Գ. Հ. Հակոբյան. Որոշ դասի հիպոէլիպտիկ հավասարումների լուծումների ածանցյալների գնահատականների մասին                                                    | 4, 353 |
| Ս. Ա. Հայրապետյան. Հաստատուն գործակիցներով անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի լուծման գոյությունը                                         | 6, 583 |
| Ռ. Գ. Հայրապետյան. Հիպերբոլական հավասարման համար Կոշու խնդրի բերումը սիմետրիկ համակարգերին                                                            | 1, 51  |
| Ա. Գ. Հաբոբյանյան, Ն. Հ. Սինանյան. Տրված գործակիցներով ըստ լրիվ օրթոնորմալորված սիստեմների չափելի ֆունկցիաների ներկայացման մասին                      | 5, 443 |
| Ա. Հ. Հովսեփյան. Երկրորդ կարգի անսահմանափակ գործակիցներով հիպերբոլական տիպի հավասարումների համար կշռով Կոշու խնդրի պարամետրիքսի կառուցումը            | 1, 33  |
| Հ. Գ. Ղազարյան, Վ. Ն. Մաբադյան. Գծային դիֆերենցիալ օպերատորների հիպոէլիպտիկության կրողը                                                               | 5, 453 |
| Ս. Ն. Մանուկյան. Կոնստրուկտիվ անալիտիկ ֆունկցիաների համար միակության հատկությունների մասին                                                            | 2, 198 |
| Վ. Հ. Մառտիրոսյան. Լակուանար աստիճանային շարքերով ներկայացվող և ժողովանյան անկյան վրա սահմանափակ ամբողջ ֆունկցիաների մասին                            | 3, 280 |
| Վ. Մ. Մառտիրոսյան, Կ. Ռ. Օվսյան. Անկյունային տիրույթներում Մ. Մ. Զրբաշյանի α-թվադիանալիտիկ դասերի տեսության շուրջը                                    | 4, 392 |
| Վ. Խ. Մուսայան. Ըստ էքսպոնենտների և ըստ ռացիոնալ ֆունկցիաների ոչ լրիվ համակարգերի երկօրթոգոնալ վերլուծությունների զամբարումը                          | 2, 163 |

|                                                                                                                                                              |        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Վ. Խ. Մուսոյան. Էքսպոնենտների լրիվ սիստեմով մոտարկվող ֆունկցիաների անալիտիկ շարունակությունը և էքստրեմալ հատկությունները . . . . .                           | 6, 530 |
| Կ. Հ. Յաղչյան. Բազմապատիկ բնութագրիչներով օպերատորների համար Կոշու խնդրի ֆունկցիաների լուծումը և նրա հետ կապված պսևդոդիֆերենցիալ օպերատորների դասը . . . . . | 4, 317 |
| Ա. Մ. Զրբաշյան. Հալմասարակչության առնչություններ և ֆակտորիզացիոն թեորեմներ Կիսահարթության մերոմորֆ ֆունկցիաների համար . . . . .                              | 3, 213 |
| Ա. Մ. Զրբաշյան, Գ. Վ. Միլայիյան. Կիսահարթության համար Բլյաշկինի տիպի արտադրության մի ընտանիքի ասիմպտոտիկ վարքը . . . . .                                     | 2, 112 |
| Ռ. Ս. Ռուբին. Կոտորակային ինտեգրալներ և աստիճանային կշռով տարածություններում շառավղային խտությամբ Ռիսի պոտենցիալներ . . . . .                                | 5, 468 |
| Ա. Ա. Սաճակյան. Սահմանափակ հարմոնիկ վարիացիայի ֆունկցիաների ֆուրյեի կրկնակի շարքերի զուգամիտության մասին . . . . .                                           | 6, 517 |
| Ա. Ա. Վաղարշակյան. Վերասերվող սիմվոլով Վիներ-Շոպֆի դիսկրետ. համասեռ հավասարումների մասին . . . . .                                                           | 1, 18  |

Համառոտ ճաղերդումներ

|                                                                                                                                                                                 |        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Գ. Մ. Գուրևև. Զրբաշյանի ընդհանրացված ձևափոխությունները և նրանց կիրառությունները . . . . .                                                                                       | 3, 305 |
| Ա. Հ. Կաբազեոյան. Կիսահարթությունների դեկարտյան արտադրյալում անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ դասերի բնութագրումը . . . . .                                                           | 5, 504 |
| Ա. Հ. Կաբազեոյան. Անկյունային տիրույթների դեկարտյան արտադրյալում անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ դասերի ինտեգրալ ներկայացումներ . . . . .                                            | 6, 617 |
| Մ. Գ. Կրեյն, Յու. Լ. Շմուլյան. «Վիներ-Շոպֆի հալմասարումները, որոնց կորիզները թույլ են տալիս ինտեգրալ ներկայացում էքսպոնենտների միջոցով» հոդվածի մի լրացման վերաբերյալ . . . . . | 3, 301 |

## СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армянской ССР, серия «Математика»,  
за 1986 г., XXI, №№ 1—6

|                                                                                                                                                                            |        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Г. О. Акопян. Об оценках производных решений одного класса гипоеллиптических уравнений . . . . .                                                                           | 4, 358 |
| Р. Г. Айрапетян. О сведения задачи Коши для гиперболического уравнения к симметрическим системам . . . . .                                                                 | 1, 51  |
| С. А. Айрапетян. О существовании решения неоднородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в классе функционалов полиномиального роста . . . . . | 6, 583 |
| В. А. Арзуманян. Операторные алгебры, ассоциированные с несингулярными эндоморфизмами пространства Лебега . . . . .                                                        | 6, 596 |
| В. А. Арзуманян, С. А. Григорян. Спектр равномерных алгебр операторных полей . . . . .                                                                                     | 1, 63  |
| А. Г. Арутюнян, Н. О. Синянян. О представлении измеримых функций рядами по полным ортонормированным системам с заданными коэффициентами . . . . .                          | 5, 442 |
| А. О. Бабаян. Неоднородное уравнение Винера—Хопфа с вырождающимся символом . . . . .                                                                                       | 5, 421 |
| С. Л. Берберян. О граничном поведении субгармонических функций класса $U_\alpha$ . . . . .                                                                                 | 2, 187 |
| А. А. Вазаршакян. О дискретных однородных уравнениях Винера—Хопфа с вырождающимися символами . . . . .                                                                     | 1, 18  |
| А. А. Даниелян. О представлении функций последовательностями равномерно ограниченных полиномов на компактных множествах комплексной плоскости . . . . .                    | 4, 345 |
| А. М. Джрбашян. Соотношения равновесия и факторизационные теоремы для мероморфных в полуплоскости функций . . . . .                                                        | 3, 213 |
| А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян. Асимптотическое поведение произведений типа Бляшке для полуплоскости . . . . .                                                             | 2, 142 |
| В. Б. Дыбин. О базисах в пространствах аналитических функций со счетным множеством существенно особых точек . . . . .                                                      | 6, 566 |
| Г. Г. Казарян, В. Н. Маркарян. Носитель гипоеллиптичности линейных дифференциальных операторов . . . . .                                                                   | 5, 453 |
| Г. А. Карагулян. О сходимости по Прингштейму двойных ортогональных рядов . . . . .                                                                                         | 1, 80  |
| Г. А. Карапетян. Об одном классе вырождающихся регулярных уравнений в полупространстве . . . . .                                                                           | 5, 471 |
| М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян. Матрично континуальные аналоги задач Шура и Каратесдори-Теплица . . . . .                                                                 | 2, 107 |
| С. Н. Манукян. О свойствах единственности для конструктивных аналитических функций . . . . .                                                                               | 2, 198 |
| В. А. Мартиросян. О целых функциях, представимых лакунарными степенными рядами и ограниченных на угле Жордана . . . . .                                                    | 3, 230 |
| В. М. Мартиросян, К. Р. Овесян. К теории $\alpha$ -квазианалитических классов М. М. Джрбашяна в угловых областях . . . . .                                                 | 4, 392 |
| В. Х. Мусоян. Суммирование биортогональных разложений по неполным системам экспонент и рациональных функций . . . . .                                                      | 2, 163 |
| В. Х. Мусоян. Аналитическое продолжение и экстремальные свойства функций, аппроксимируемых неполной системой экспонент . . . . .                                           | 6, 530 |
| А. О. Оганесян. Построение параметрикса задачи Коши с весом для гиперболических уравнений второго порядка с неограниченными коэффициентами . . . . .                       | 1, 33  |

|                                                                                                                                                               |        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| <i>Б. С. Рубин.</i> Дробные интегралы и риссовы потенциалы с радиальной плотностью в пространствах со степенным весом . . . . .                               | 5, 488 |
| <i>А. А. Саакян.</i> О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации . . . . .                                                   | 6, 517 |
| <i>И. Г. Хачатрян.</i> Об операторах рассеяния для пары дифференциальных операторов высших порядков . . . . .                                                 | 1, 3   |
| <i>И. О. Хачатрян.</i> Квазианалитические классы, связанные с весовыми приближениями в комплексной области . . . . .                                          | 6, 557 |
| <i>С. Г. Хачатрян.</i> Граничные задачи с разрывными граничными данными для эллиптических уравнений второго порядка на плоскости . . . . .                    | 4, 375 |
| <i>К. А. Ягдзян.</i> Псевдодифференциальные операторы с параметром и фундаментальное решение задачи Коши для операторов с кратными характеристиками . . . . . | 4, 317 |

# КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

|                                                                                                                                                                       |        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| <i>Г. М. Губреев.</i> Обобщенные преобразования Джрбашяна и их применения . . . . .                                                                                   | 3, 306 |
| <i>А. О. Карапетян.</i> Характеристика некоторых классов функций, аналитических в декартовом произведении полуплоскостей . . . . .                                    | 5, 504 |
| <i>А. О. Карапетян.</i> Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в декартовом произведении угловых областей . . . . .                      | 6, 617 |
| <i>М. Г. Крейн, Ю. А. Шмulyн.</i> Об одном дополнении к статье «Уравнения Винера—Холфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты» . . . . . | 3, 301 |

# CONTENTS

of the Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian SSR  
 seria "Matematika", 1986, vol. XXI, №№ 1—6

|                                                                                                                                                                                                 |        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| <i>R. G. Atrapettian.</i> Reduction of the Cauchy problem for a hyperbolic equation to symmetric systems . . . . .                                                                              | 1, 51  |
| <i>V. A. Arzumantian.</i> Operator algebras associated with non-singular transformations of Lebesgue space . . . . .                                                                            | 6, 455 |
| <i>V. A. Arzumantian, S. A. Grigorian.</i> The spectrum of uniform of algebras of operator fields . . . . .                                                                                     | 1, 63  |
| <i>A. O. Babayan.</i> Non-homogeneous Wiener—Hopf equation with degenerate symbol . . . . .                                                                                                     | 5, 421 |
| <i>S. L. Berberian.</i> On the boundary behaviour of subharmonic functions of $U_\alpha$ class . . . . .                                                                                        | 2, 187 |
| <i>A. A. Danieltian.</i> On representation of functions by uniformly bounded sequences of polynomials on the complex plane compact sets . . . . .                                               | 4, 345 |
| <i>V. B. Dybin.</i> Bases in analytic function spaces with a countable number of singular points . . . . .                                                                                      | 6, 528 |
| <i>S. A. Hatrapettian.</i> On existence of solutions for systems of nonhomogeneous differential equations with constant coefficients in a class of functionals with polynomial growth . . . . . | 6, 574 |
| <i>G. H. Hakopian.</i> Some estimates for derivatives of the solutions of a class of hypoelliptic equations . . . . .                                                                           | 4, 358 |
| <i>A. G. Harutunian, N. O. Sinanian.</i> On measurable functions representation by complete orthonormal systems with prescribed coefficients . . . . .                                          | 5, 442 |
| <i>A. H. Hovhannesian.</i> Construction of a parametrix for the Cauchy problem with weight for second order hyperbolic equations with unbounded coefficients . . . . .                          | 1, 33  |
| <i>A. M. Jerbashian.</i> Equilibrium relations and factorization theorems for functions meromorphic in the half-plane . . . . .                                                                 | 3, 213 |
| <i>A. M. Jerbashian (Dzrbasjan), G. V. Mikaeltian.</i> The asymptotic behaviour of a family of Blaschke-type products for the half-plane . . . . .                                              | 2, 142 |
| <i>G. A. Karagultian.</i> On the convergence of the double orthogonal series by Prongsheim method . . . . .                                                                                     | 1, 80  |
| <i>G. A. Karapettian.</i> On a class of degenerate regular equations in half-space . . . . .                                                                                                    | 5, 471 |
| <i>G. G. Kasarian, V. N. Markarian.</i> The hypoellipticity carrier for linear differential operators . . . . .                                                                                 | 5, 453 |
| <i>I. G. Khachatrtian.</i> On scattering operators for a pair of differential operators of higher order . . . . .                                                                               | 1, 3   |
| <i>J. H. Khachatrtian.</i> Quasianalytic classes, connected with the weighted approximations in the complex domain . . . . .                                                                    | 6, 575 |
| <i>S. H. Khachatrtian.</i> Boundary value problems with discontinuous boundary conditions for the second order elliptic equations on the plane . . . . .                                        | 4, 375 |
| <i>M. G. Krein, F. E. Melik—Adamian.</i> Matrix continuous analogues of Schur's and Caratheodory—Toeplitz problems . . . . .                                                                    | 2, 107 |
| <i>S. N. Manukian.</i> On uniqueness properties for constructive analytic functions . . . . .                                                                                                   | 2, 198 |
| <i>V. A. Martirosian.</i> On entire functions, represented by lacunary power series and bounded on the Jordan angle . . . . .                                                                   | 3, 280 |
| <i>V. M. Martirosian, K. R. Hovhessian.</i> On the theory of M. M. Djrbashian $\alpha$ -quasianalytic classes in angular domains . . . . .                                                      | 4, 392 |

|                                                                                                                                                             |                    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| <i>V. Kch. Musoyan.</i> Analytic continuation and extremal properties of functions approximable by a non-complete system of exponential functions . . . . . | 6, 530             |
| <i>V. Kch. Musoyan.</i> The summation of decompositions with respect to non-complete biorthogonal systems of exponents and rational functions . . . . .     | 2, 163             |
| <i>B. S. Rubin.</i> Fractional integrals and Riesz potentials of radial functions in power weighted spaces . . . . .                                        | 5, 48 <sup>B</sup> |
| <i>A. A. Sahakian.</i> On convergence of double Fourier series of functions of bounded harmonic variations . . . . .                                        | 6, 582             |
| <i>A. A. Vagarshakian.</i> On discrete homogeneous Wiener-Hopf equations with degenerate symbols . . . . .                                                  | 1, 18              |
| <i>K. H. Yagdjian.</i> Fundamental solutions for a degenerate hyperbolic operators and related pseudo-differential operators . . . . .                      | 4, 317             |

#### Short communications

|                                                                                                                                                                   |        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| <i>G. M. Gubryev.</i> Generalized Dirbashian transformations and their applications                                                                               | 3, 306 |
| <i>A. H. Karapettian.</i> Characterization of some classes of analytic functions on a cartesian product of semiplanes . . . . .                                   | 5, 504 |
| <i>A. H. Karapettian.</i> Integral representations of some classes of analytic functions on Cartesian product of the angular regions . . . . .                    | 6, 617 |
| <i>M. G. Krein and Ju. L. Smultan.</i> A supplement to the article "Wiener-Hopf equations, whose kernels admit an integral representation by exponents" . . . . . | 3, 301 |

## Ի Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

|                                                                                                                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Ա. Ա. Սահակյան. Սահմանափակ վարիացիայի ֆունկցիաների ֆուրյեի կրկնակի շարքերի զուգամիտության մասին . . . . .                                                          | 517 |
| Վ. Խ. Մուսոյան. Էքսպոնենտների լրիվ սխտեմով մոտարկվող ֆունկցիաների անալիտիկ շարունակությունը և էքստրեմալ հատկությունները . . . . .                                  | 528 |
| Ի. Հ. Խաչատրյան. Կոմպլեքս տիրույթում կշռային մոտավորությունների հետ կապված քվադրանայտիկ դասեր . . . . .                                                            | 557 |
| Վ. Ռ. Դիրֆե. Հաշվելի թվով եզակիություններ ունեցող անալիտիկ ֆունկցիաների տարածություններում բազիսների մասին . . . . .                                               | 566 |
| Ա. Ա. Հայրապետյան. Հաստատուն գործակիցներով անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի լուծման զուլությունը բազմանդամային աճով ֆունկցիոնալների դասում . . . . . | 583 |
| Վ. Ա. Արզումանյան. Լերեզի տարածության ոչ սինգուլյար էնդոմորֆիզմների հետ զուգորդված օպերատորային հանրահաշիվներ . . . . .                                            | 596 |

### Համառոտ նաղորդումներ

|                                                                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Ա. Հ. Կուրապետյան. Անկյունային տիրույթների դեկարտյան արտադրյալում անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ դասերի ինտեգրալ ներկայացումներ . . . . . | 617 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| А. А. Саакян. О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариаций . . . . .                                                                       | 517 |
| В. Х. Мусоян. Аналитическое продолжение и экстремальные свойства функций, аппроксимируемых неполной системой экспонент . . . . .                                           | 528 |
| И. О. Хачатрян. Квазианалитические классы, связанные с весовыми приближениями в комплексной области . . . . .                                                              | 557 |
| В. Б. Дыбин. О базисах в пространствах аналитических функций со счетным множеством существенно особых точек . . . . .                                                      | 566 |
| С. А. Айрапетян. О существовании решения неоднородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в классе функционалов полиномиального роста . . . . . | 583 |
| В. А. Арзуманян. Операторные алгебры, ассоциированные с несингулярными эндоморфизмами пространства Лебега . . . . .                                                        | 596 |

### КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

|                                                                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| А. О. Карапетян. Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в декартовом произведении угловых областей . . . . . | 617 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

## C O N T E N T S

|                                                                                                                                                                                                 |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>A. A. Sahakian.</i> On convergence of double Fourier series of functions of bounded harmonic variations . . . . .                                                                            | 517 |
| <i>V. Kch. Musogan.</i> Analytic continuation and extremal properties of functions approximable by a non-complete system of exponential functions . . . .                                       | 528 |
| <i>J. H. Khachatryan.</i> Quasianalytic classes, connected with the weighted approximations in the complex domain . . . . .                                                                     | 557 |
| <i>V. B. Dybin.</i> Bases in analytic function spaces with a countable number of singular points . . . . .                                                                                      | 566 |
| <i>S. A. Hatrapettian.</i> On existence of solutions for systems of nonhomogeneous differential equations with constant coefficients in a class of functionals with polynomial growth . . . . . | 583 |
| <i>V. A. Arzumnnian.</i> Operator algebras associated with non-singular endomorphisms of a Lebesgue space . . . . .                                                                             | 596 |

### SHORT COMMUNICATIONS

|                                                                                                                                                |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>A. H. Karapettian.</i> Integral representations of some classes of analytic functions on Cartesian product of the angular regions . . . . . | 617 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|



### К СВЕДЕНИЮ ПОДПИСЧИКОВ!

В связи с увеличением объема журнала с 1 января 1986 года  
цена одного номера — 1 р. 20 к.

### ԱԿԱԴԵՄԻԱԿԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ ԴԻՄԻՏԻՍԻՆԻ, ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

В журнале публикуются оригинальные исследования в следующих основных направлениях: комплексный и вещественный анализ, теория операторов, теория дифференциальных уравнений в частных производных, теория вероятностей.

Технический редактор *Л. А. Азизбекян*

---

Сдано в набор 1. 12. 1986. Подписано к печати 4. 02. 1987. ВФ 05930.

Учет.-изд. 9,0 Тираж 450. Заказ 1124. Издат. 6939.

Бумага № 1, 70×108<sup>1/16</sup>. Высокая печать. Печ. лист. 7,5. Усл. печ. лист. 10,5.  
Адрес редакции: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 26-б, т. 27-97-318.

---

Издательство АН АрмССР, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.  
Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24.